

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Doctorado

Estimación de Fallas para Sistemas Takagi-Sugeno

presentada por

M.C. Citlaly Martínez García

como requisito para la obtención del grado de

**Doctora en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Codirector de tesis

Dr. Vicenç Puig Cayuela

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2019.



"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

ESC\FORDOC010

Cuernavaca, Morelos a 08 de agosto de 2019.

M.C. CITLALY MARTÍNEZ GARCÍA
Candidata al grado de Doctora
en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Presente

Después de haber sometido a revisión su trabajo final de tesis titulado **"ESTIMACIÓN DE FALLAS PARA SISTEMAS TAKAGI-SUGENO"**, y habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis le hizo, le comunico que se le concede autorización para que proceda a la impresión de la misma, como requisito para la obtención del grado.

Reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE
Excelencia en Educación Tecnológica®
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"

Dr. Mario Ponce Silva
Jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica

c.c.p.: M.E. Guadalupe Garrido Rivera /Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
c.c.p.: Expediente.



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Departamento de Ingeniería Electrónica

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

ACEPTACIÓN DEL TRABAJO DE TESIS DOCTORAL

Cuernavaca, Morelos a 5 de agosto de 2019.

Dr. Mario Ponce Silva
Jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica
Presente

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial de la Tesis Doctoral de la alumna Citlaly Martínez García, manifiestan que después de haber revisado su trabajo de tesis doctoral titulado "ESTIMACIÓN DE FALLAS PARA SISTEMAS TAKAGI-SUGENO" realizado bajo la dirección del Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza y codirección del Dr. Vicenç Puig Cayuela, el trabajo se ACEPTA para proceder a su impresión.

ATENTAMENTE

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
CENIDET

Dr. Vicenç Puig Cayuela
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Dr. Juan Reyes Reyes
CENIDET

Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez
CENIDET

Dr. José Francisco Gómez Aguilar
CENIDET

Dr. Jorge Aurelio Brizuela Mendoza
Centro Universitario del Sur
Universidad de Guadalajara

Reciba un cordial saludo.

c.c.p: M.E. Guadalupe Garrido Rivera / Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
c.c.p: Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez / Subdirector Académico.
c.c.p: Expediente.

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 2225, e-mail: die@cenidet.edu.mx



www.tecnm.mx | www.cenidet.edu.mx



Dedicatoria

A mis padres y hermana Vlady Delfina

Baila como si nadie te estuviera viendo, ama como si nunca te hubieran herido,
canta como si nadie te oyera, trabaja como si no necesitaras el dinero, vive como
si hoy fuera tu último día.

Alfredo D'Souza

Agradecimientos

Agradezco a cada uno de los contribuyentes que hacen posible que programas como el CONACYT puedan proporcionar becas al Tecnológico Nacional de México para que personas como yo, interesadas en continuar con el desarrollo de nuestro perfil profesional se nos brinde el apoyo económico.

A los doctores Carlos Manuel Astorga quién comencé bajo su dirección el trabajo de investigación y Vicenç Puig Cayuela bajo su dirección durante la estancia realizada en Barcelona, una de las experiencias inolvidables.

Agradezco al Dr. Vicenç Puig Cayuela por aceptarme en su laboratorio GAIA y en el grupo SAC (Sistemas Avanzados de Control) de la Universitat Politècnica de Catalunya y brindarme la oportunidad de tener una nueva visión de lo profesional y personal como investigador.

A mis revisores de tesis: Dr. José Francisco Gomez Aguilar, Dr. Juan Reyes Reyes, Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jimenez y el Dr. Jorge Aurelio Brizuela por los comentarios y observaciones acertados que han realizado durante cada revisión del trabajo, y con la finalidad de mejorar la calidad de la investigación. Y a la Dra. Gloria por la colaboración en los trabajos de mi tesis

A Eusebio, Diana, Erick Michell, Zetina, José Juan, el profe, Cavita y Saaam!, John, Oyuki, Miguel Sabido y Henry (¡las violentas!) porque me acogieron como una más de su grupo, y la estimación es mutúa, los extrañaré chic@s. A mis compañeros y colegas que han contribuido en mi persona y en el trabajo realizado (Tury, Geraldinho, Jesús, Jorge Iván, Estelita, Isaura, A. Jashiel, Emmanuel, Carbot, sr. Gil, sr. Negrón, Oscar, Monserrat, Felipe, el maestro Mota, Alan Vidal, Alfonso de Jesús, Juan Pablo, Mauricio y Yesenia, Miguel, Alejandro, Marisol,

Antonio, Donaciano y Alan Cruz) gracias por hacer la estadía entretenida.

Agradezco también que me hayan dado la oportunidad de conocer otro continente, otro país y otra cultura. Es una de las experiencias que espero que los compañeros que vienen atrás de mí tengan la oportunidad de vivirlo, y que encuentren a personas como: Andreú, Josep, Jean Carlo y Sofia, Julen y Marta, Guillermo, Daniela, Mariana, Adrià, Adrià, Juli, Héctor Eloy, Tejaswinee Darure (Tejus), Sameh Zribi, Tomeu y Kimberly, Helem y Damiano, y las personas del grupo de TR-Esmorzar que hicieron de mi estancia en Terrassa, una de las experiencias inolvidables. ¡Visca Catalunya!

A todo el personal del Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) y en particular al departamento de electrónica DIE... Lore, por siempre traernos a prisa con los documentos y las fiestas. Los señores de la biblioteca por prestarme y perdonarme algunos pagos debido a mi mente olvidadiza y despistada, Alfredo del Laboratorio, por dar un buen servicio cuando requerí algún equipo de medición.

Resumen

En el presente trabajo se desarrolla una serie de síntesis de observadores para sistemas Takagi-Sugeno (TS). Los observadores permiten obtener el tamaño y comportamiento dinámico de los estados, parámetros, fallas en sensor y actuador de forma simultánea.

Para obtener la síntesis de observadores se emplearon diferentes metodologías como el observador proporcional integral, observador proporcional integral generalizado, observador Luenberger, observador de entrada desconocida y observador intervalar, todos los anteriores basados en modelos T-S. La solución de los observadores diseñados está dado en desigualdades lineales matriciales (LMIs).

Finalmente, con el propósito de verificar el desempeño de los observadores sintetizados propuestos, se realizan y presentan resultados en simulación y con datos experimentales obtenidos de un banco de pruebas (un motor de CD de imanes permanentes acoplado a un tren de rodamientos) realizado también durante el trabajo de investigación.

Este trabajo de investigación consiste en las siguientes etapas:

- Diseño y desarrollo de observadores para la estimación de estados, parámetros y fallas usando la representación Takagi-Sugeno.
- Resultados en simulación y experimentales con diferentes casos de estudio.

Abstract

In this work a synthesis of observers for Takagi-Sugeno systems is developed. The observers allow to obtain the size and dynamic behavior of the states, parameters and sensor and actuator faults, simultaneously.

To obtain the synthesis of observers, different methodologies were used as an integral proportional observer, generalized proportional integral observer, Luenberger observer, unknown input observer and interval observer, based on TS models. The observers design is taken to account for the gains solution through matrix linear inequalities (LMIs).

Finally, in order to demonstrate the practical applicability of the proposed approach, simulation and experimental results are presented, using a permanent magnet DC motor.

This research work is divided into the following:

- Design and development of observers for state, parameters and faults estimations, using the Takagi-Sugeno representation.
- Simulation and experimental analysis are carried out with different study cases.

Notaciones y Acrónimos

En este trabajo la palabra *fallos* usada por la comunidad internacional de seguridad de control y publicada en español por Puig *et al.* (2010), se ha reemplazado por la palabra *falla* con la finalidad de adecuar al léxico lationamericano que fue presentado en Verde *et al.* (2013).

Notaciones

t	Tiempo.
k	Tiempo discreto.
\emptyset	Espacio nulo.
I	Matriz identidad.
x	Vector de estado
\hat{x}	Vector de estado estimado
f	Vector de falla
f_s	Vector de falla en sensor
f_a	Vector de falla en actuador
$A > (\geq)0$	Matriz (semi-) definida positiva
$A < (\leq)0$	Matriz (semi-) definida negativa

Acrónimos

a+s	actuador+sensor
CD	Corriente directa
FDI	Fault detection isolation

LMI	Linear matrix inequalities
LPV	Linear parameter variant
NL	Nonlinear (No lineal)
PI	Proporcional integral
p+a	proceso+actuador
T-S	Takagi-Sugeno
s+p	sensor+proceso
UIO	Unknown input observer

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Resumen	IV
Abstract	V
Notaciones y Acrónimos	VI
1. Introducción	1
1.1. Estimación de fallas	8
1.2. Planteamiento del problema	12
1.3. Justificación	13
1.4. Objetivo General	14
1.4.1. Objetivos específicos	14
1.5. Hipótesis	14
1.6. Estado del arte	14
1.7. Contexto de la tesis	18
2. Sistemas Takagi-Sugeno	20
2.1. Sistemas Takagi-Sugeno	20
2.2. Modelado de sistemas Takagi-Sugeno	22
2.2.1. Obtención de modelos T-S por linealización	23

2.2.2. Obtención de modelos T-S por el sector no lineal	24
2.3. Estabilidad de los sistemas Takagi-Sugeno	33
2.4. Detección de fallas en sistemas Takagi-Sugeno	37
2.5. Observabilidad de sistemas Takagi-Sugeno	40
3. Síntesis de observadores para la estimación de fallas	42
3.1. Observador PI generalizado Takagi-Sugeno	43
3.2. Observador intervalar Takagi-Sugeno de entrada desconocida	55
3.3. Observador intervalar Takagi-Sugeno de entrada desconocida con incertidumbre	62
3.4. Observador no lineal para la estimación de fallas y de entrada des- conocida	74
3.5. Observadores intervalares para la estimación de fallas	77
4. Estimación de fallas. Aplicaciones	88
4.1. Estimación simultánea de estados y falla en el sistema	89
4.2. Estimación simultánea de estados y fallas en actuador	97
4.3. Estimación simultánea de fallas en actuador y en el sistema	104
4.4. Estimación simultánea de estados y entradas desconocidas	113
4.5. Estimación de fallas en sensores y actuadores.	126
5. Conclusiones	134
Publicaciones	140
Anexo A	146
Anexo B	149
Bibliografía	151

Lista de figuras

1.1.	Sistema de detección de fallas.	2
1.2.	Esquema del tipo de sistemas a considerar.	4
1.3.	Tipo de fallas a considerar.	7
1.4.	Falla abrupta y falla incipiente.	7
1.5.	Falla intermitente.	7
1.6.	Transductores de presión, sensores de posición, sensor de presión inalámbrico y termostatos.	9
1.7.	Válvulas automáticas, motores e interruptores.	9
1.8.	Fuga en una tubería de agua, suciedad en un intercambiador de calor, fisura en una tubería de agua y ejemplo de un atasco de hojas en una impresora.	10
1.9.	Estructura de trabajo de un observador.	10
2.1.	Métodos para obtener un sistema Takagi-Sugeno.	23
2.2.	Sistema y observador de estado	39
3.1.	Integración esquema FDI con banco de observadores.	82
4.1.	Estimación de T_0	94
4.2.	Estimación de x_1	94
4.3.	Estimación de x_2	95
4.4.	Funciones de membresía	95
4.5.	Estimación de x_1	96

4.6. Estimación de x_2	96
4.7. Estimación de T_0	97
4.8. Funciones de membresía	97
4.9. Estimación de $x_1(k)$	102
4.10. Estimación de $x_2(k)$	102
4.11. Estimación de $f(k)$ (la línea en azul es la falla original, la línea en negro y en rojo son la estimación superior e inferior, respectivamente)	102
4.12. Estimación de $x_1(k)$	103
4.13. Estimación de $x_2(k)$	103
4.14. Estimación de $f(k)$ (la línea en azul es la falla original, la línea en negro y en rojo son la estimación superior e inferior, respectivamente)	104
4.15. Estimación de la velocidad rotacional $x_2(k)$	108
4.16. Estimación de la corriente de armadura $x_1(k)$	109
4.17. Estimación de la falla $f(k)$	109
4.18. Estimación de $T_0(k)$	110
4.19. Estimación de $T_2(k)$	110
4.20. Funciones de membresía.	110
4.21. Estimación de la corriente de armadura $x_1(k)$	111
4.22. Estimación de la velocidad rotacional $x_2(k)$	111
4.23. Estimación de la corriente de armadura $f(k)$	112
4.24. Estimación de $T_0(k)$	112
4.25. Estimación de $T_2(k)$	112
4.26. Funciones de membresía	113
4.27. Estimación del estado φ_p , w_p y I_a	118
4.28. Estimación de la entrada desconocida $\theta = \Delta u$	119
4.29. Error de estimación.	119
4.30. Diagrama de la localización de polos.	120
4.31. Estimación de $x_1 = i_a$	123

4.32. Estimación de $x_2 = v_m$.	123
4.33. Estimación de $\theta = T_0$.	123
4.34. Prototipo de laboratorio. Motor de DC conectado a un tren de rodamientos.	124
4.35. Velocidad rotacional medida y estimada del motor.	125
4.36. Estimación de la corriente de armadura.	125
4.37. Estimación de T_0 .	126
4.38. Estimación de ω_{cp} .	129
4.39. Estimación de f_a .	129
4.40. Estimación de ω_{cp} .	130
4.41. Estimación de f_a .	130
4.42. Estimación de ω_{cp} .	131
4.43. Estimación de f_s .	131
4.44. Estimación de ω_{cp} .	132
4.45. Estimación de f_s .	132
4.46. Esquema de banco de pruebas del laboratorio.	132
5.1. Metodología desarrollada en esta tesis.	135
5.2. Banco de pruebas	139
3. Esquema intervalar.	146
4. Banco de pruebas del laboratorio.	149
5. Visualización de la interfaz de Labview	150
6. Programación gráfica en el entorno Labview para la conversión a rpm	150
7. Interconexión del encoder con la MyRio para la adquisición de datos.	150

Lista de tablas

4.1. Parámetros del motor de CD	91
4.2. Parámetros del motor de CD	98
4.3. Parámetros del motor de CD.	105
4.4. Parámetros del modelo del compresor	127
4.5. Variables del compresor	127

Capítulo 1

Introducción

Las fallas son eventos que afectan al buen funcionamiento del sistema, provocando desde un pequeño cambio en el desempeño nominal del sistema, hasta ocasionar un accidente. Una falla en un sistema puede ocurrir en los actuadores (válvulas, bombas, relevadores), los sensores (transmisores, elementos primarios de medición) o en algún componente de la planta (fugas en tuberías, rodamientos de un motor). En la Fig. 1.1 se muestra un diagrama de bloques en el cual se muestran los principales elementos susceptibles a fallas en un lazo de control.

La supervisión de fallas es una disciplina de la ingeniería del control automático en la cual el interés principal es detectar el momento en que ocurre una falla. El sistema de detección de fallas puede en ocasiones localizar el subsistema en el cual ha ocurrido la falla. En otras ocasiones es necesario estimar la magnitud de la falla e incluso compensarla a través de algún mecanismo de reconfiguración. Es así que existen distintos enfoques para el tratamiento de las fallas, estos son Staroswiecki & Comtet-Varga (2001):

- La detección de fallas,
- La localización de fallas,
- La estimación de las fallas,

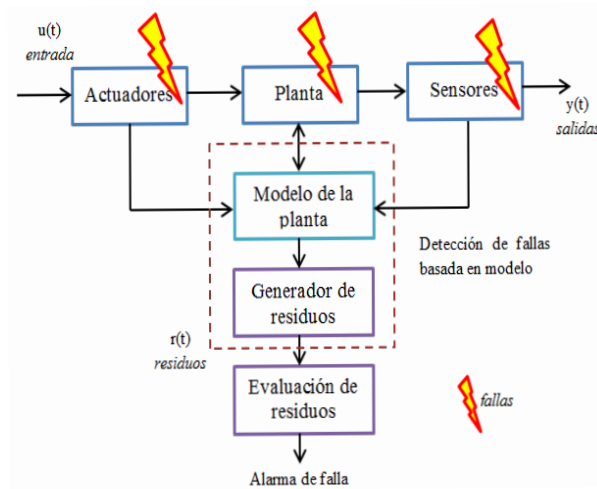


Figura 1.1: Sistema de detección de fallas.

- El pronóstico de fallas,
- El control tolerante a fallas.

A continuación se describe brevemente cada una de estos enfoques de tratamiento de las fallas.

La *detección de fallas* consiste en revelar que ha ocurrido una falla. El comportamiento dinámico normal de operación de un proceso puesto en marcha es conocido. Un enfoque de detección de fallas es importante implementarse, ya que nos brindaría una alerta de que ha ocurrido un evento anormal en el proceso y necesita atención. Por ejemplo, un motor de corriente directa alimentado por una fuente de voltaje constante, la velocidad y la corriente, en consecuencia, se mantendrían con un valor constante, cuando exista una variación de voltaje o algún otro evento que haga que el proceso pare de forma eventual, la detección de falla alertaría debido a la comparación que existe entre el modelo del proceso en condiciones normales de discrepancia y las señales de salida que demanda el motor, cuando ha ocurrido una falla y que necesita ser verificado.

La *localización de fallas* consiste en determinar el componente en el cual ha ocurrido una falla. En ocasiones, si no es posible determinar el componente exacto en el cual ha ocurrido la falla, entonces, podría determinarse el subsistema en el cual ésta ha ocurrido. Por ejemplo, el testigo de alta temperatura de un auto en circulación, indica que existe una falla en el subsistema de enfriamiento. A pesar de que la falla puede ser ocasionada por varias causas (sensor de temperatura, bomba de líquido refrigerante, falta de líquido por fuga en radiador), el problema se acota a revisar solamente el sistema de enfriamiento.

La *estimación de fallas* consiste en determinar la magnitud de una falla. En ocasiones, es importante conocer la dimensión de una falla. Por ejemplo cuando existen fugas en un ducto de combustible, una extracción clandestina de combustible para el llenado de pipas podría verse como una falla intermitente, mientras que una tubería rota podría verse como una falla permanente. La estimación de la magnitud de la falla permitiría cuantificar las pérdidas ocasionadas por ésta.

El *pronóstico de fallas* consiste en predecir en qué momento podría ocurrir una falla. Los sistemas de pronóstico de fallas se enfocan en supervisar componentes o subsistemas específicos en los cuales de antemano se sabe que podría existir una falla que representa un alto riesgo para la seguridad del proceso o sus usuarios. Por ejemplo, una tasa anormal de descarga de una batería en una aeronave no tripulada podría indicar que la aeronave se quedará sin energía en un tiempo menor que el previsto originalmente. El conocer de antemano la próxima falta de energía permitiría redefinir la misión de la aeronave con la finalidad de evitar una caída en caso de continuar con la misión original.

El *control tolerante a fallas (CTF)* es un sistema de control que es robusto ante las fallas para las que fue diseñado. Existen distintos enfoques, desde aquellos en los cuales el controlador se diseña de tal manera que a pesar de la existencia de ciertas fallas, el controlador continúe funcionando adecuadamente sin necesidad

de reconfigurar la estructura del sistema de control (CTF pasivo), hasta aquellos en que la estructura del sistema de control deba ser reconfigurada ante la presencia de fallas (CTF activo).

Modelado de sistemas físicos susceptibles a fallas

La descripción de un sistema físico puede darse por medio de ecuaciones matemáticas que representan el comportamiento dinámico del proceso. También en algunas representaciones se toma en cuenta los sensores y actuadores, además de los componentes del sistema. Para modelar un sistema, normalmente uno parte de un sistema libre de fallas, posteriormente es posible modelar comportamientos inusuales del sistema, considerando el modelado del sistema ante algunas fallas eventuales (Fig. 1.2).

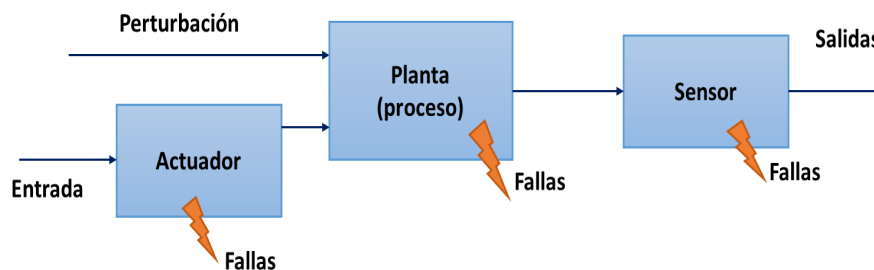


Figura 1.2: Esquema del tipo de sistemas a considerar.

Existen diferentes formas de modelos para sistemas dinámicos lineales (Ding-Steven, 2008):

- Descripción entrada-salida.
- Representación espacio de estado.
- Modelos con perturbación y con incertidumbre.
- Modelos que describen la influencia de las fallas.

El presente trabajo está enfocado a los sistemas dinámicos con representación en espacio de estado.

Una forma estandar de esta representación de sistemas continuos y discretos son dados por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ el vector de entrada, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ corresponde al vector de salida. $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ y $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ son las matrices asociadas. k denota el k -ésimo instante de tiempo discreto.

Modelado de perturbaciones y ruido

Las señales como perturbaciones y ruido son variaciones inesperadas consideradas dentro y fuera del proceso, estas pueden ser medibles como el ruido, mientras que en ocasiones se puede considerar como un vector de entrada desconocida. Estas señales pueden ser denotadas como: $w \in \mathbb{R}^p$ y $v \in \mathbb{R}^{n_y}$ si se integran al modelo (1.1) o (1.2), entonces la representación matemática resulta como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + E_w w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + E_w w(t) + v(t)\end{aligned}\tag{1.3}$$

o

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + E_w w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + E_w w(k) + v(k)\end{aligned}\tag{1.4}$$

donde $E_w \in \mathbb{R}^{n_x \times n_p}$.

Modelado de incertidumbres

La incertidumbre se refiere a la diferencia que hay entre el modelo del sistema y la realidad, es decir, al proceso. Las incertidumbres de modelado pueden ser representadas por un término aditivo (Δ) como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + (E_w + \Delta E_w)w(t) \\ y(t) &= (C + \Delta C)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + (E_w + \Delta E_w)w(t)\end{aligned}\quad (1.5)$$

Modelado de fallas

Las fallas pueden presentarse en diferentes formas en un sistema. Una forma particular de representar una falla, es que se asume como una función determinística y que puede ser representada como f_a si se trata de una falla en un actuador o f_s si se trata de una falla en sensor:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + E_w w(t) + F_f f_a(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + E_w w(t) + G_f f_s(t)\end{aligned}\quad (1.6)$$

En la Fig. 1.3 se muestran los tipos de fallas que pueden ser consideradas en un modelo matemático. Además de presentarse las fallas en diferentes componentes, se pueden clasificar en el efecto de la falla, es decir:

- **Falla abrupta.**- Esta falla ocurre repentinamente, por ejemplo, una señal que puede ser modelada como un escalón (ver Fig.1.4).
- **Falla incipiente.**- Falla cuyo efecto ocurre de manera progresiva, por ejemplo se presenta como una señal rampa (ver Fig.1.4).
- **Falla intermitente.**- Falla cuyo efecto es parcial, se presenta bajo determinadas condiciones de trabajo, esta falla varía con el tiempo (ver Fig.1.5).

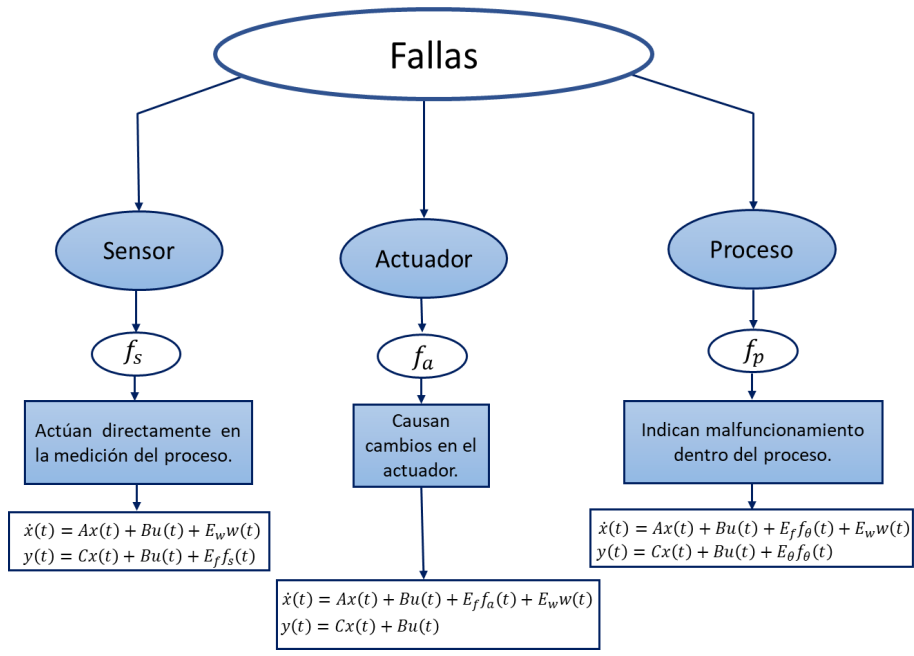


Figura 1.3: Tipo de fallas a considerar.

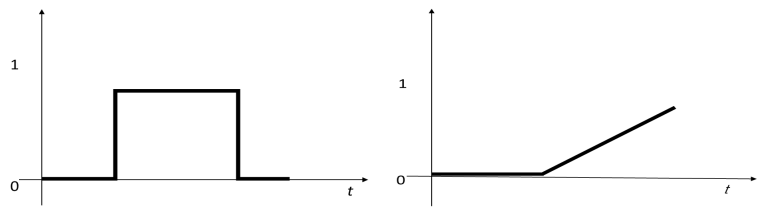


Figura 1.4: Falta abrupta y falla incipiente.

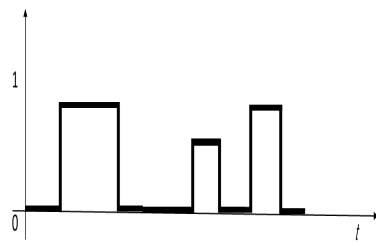


Figura 1.5: Falta intermitente.

Sistemas Takagi-Sugeno

Los sistemas Takagi-Sugeno constituyen una representación interesante de modelos matemáticos de sistemas dinámicos porque pueden representar una gran cantidad de sistemas no lineales (dependiendo del tipo de no linealidad existente en el modelo original). Los sistemas Takagi-Sugeno son una representación que los hace fácilmente explotables desde el punto de vista matemático, permitiendo la extensión de algunos resultados desde el campo lineal al no lineal.

En la vida real, no todas las variables están disponibles para ser medibles, ya sea por razones económicas o técnicas. Por lo tanto, la estimación de estados o parámetros en sistemas dinámicos, es importante para la seguridad y eficiencia del sistema. La estimación es indispensable en aplicaciones como el monitoreo, detección de fallas, y procesos de optimización.

1.1. Estimación de fallas

La estimación de fallas, es un procedimiento que permite proveer una estimación directa del tamaño o severidad de la falla, que es importante en aplicaciones como el diagnóstico y acomodación de fallas, toma de decisiones (decision making) y control tolerante a fallas (Edwards *et al.*, 2000). La falla o el fallo, es una desviación de la estructura del sistema o de los parámetros del sistema. En general, la falla se clasifica de acuerdo al lugar donde esta ocurre (Verde *et al.*, 2013; Zhang *et al.*, 2012):

- **Falla en sensores.**- Se ve reflejada en la medición de las variables de un proceso, por lo regular los fallos se presentan como ruido y/o perturbación. Los sensores son dedicados a detectar o medir las variables del sistema (ver la Fig.(1.6)). Ejemplos: sensores de flujo, presión, temperatura, nivel, velocidad, peso, concentración, posición, entre otros.
- **Falla en actuadores.**- Estos provocan un cambio en la entrada de control,



Figura 1.6: Transductores de presión, sensores de posición, sensor de presión inalámbrico y termostatos.

por lo tanto, afectan el comportamiento dinámico del proceso. Los actuadores son capaces de transformar un tipo de energía a otra con la finalidad de activar un proceso (ver la Fig.(1.7)). Ejemplos: válvulas, interruptores, motores, relevadores, pistones, entre otros.



Figura 1.7: Válvulas automáticas, motores e interruptores.

- **Falla en los componentes del sistema.**- Estos se reflejan en el comportamiento del sistema, afectan en su mayoría al funcionamiento normal del proceso (ver la Fig.(1.8)), provocando desde una reducción del desempeño hasta llegar a un accidente más grave. Ejemplos: fugas en tubería, suciedad,

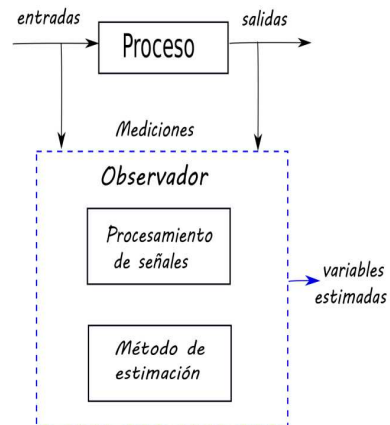
hojas atascadas en una impresora, fisuras, entre otras.



Figura 1.8: Fuga en una tubería de agua, suciedad en un intercambiador de calor, fisura en una tubería de agua y ejemplo de un atasco de hojas en una impresora.

Comúnmente la estimación de variables se realiza a través de métodos basados en observadores (Fig.(1.9)). La observabilidad de un sistema, es una propiedad o característica que indica si las variables de estado del proceso pueden estimarse a partir de la medición de sus entradas y sus salidas.

Figura 1.9: Estructura de trabajo de un observador.



Una manera de clasificar a los observadores, es de acuerdo al número de variables estimadas en función del número total de variables de estado de un sistema:

- Los observadores de **orden completo**: Son utilizados para estimar todas las variables de estado de un sistema, incluyendo a aquellas que pueden ser medibles físicamente.
- Los observadores de **orden reducido**: Son utilizados para estimar un subconjunto del total de las variables del estado del sistema.

Para verificar si un sistema de la estructura (1.1) o (1.2) es observable, debe analizarse la dimensión de la matriz de observabilidad dada por:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

El sistema es observable si la matriz de observabilidad tiene un rango igual a n_x (n_x = número de estados), es decir, si su determinante es diferente de cero ($\det O \neq 0$). En Ali *et al.* (2015) se presenta una revisión bibliográfica de observadores aplicados a procesos químicos, a continuación se mencionan algunos de ellos:

- **Observadores tipo Luenberger.**- Son una extensión de la metodología propuesta por Luenberger (Luenberger, 1971b), tales como: observador Luenberger extendido, observador de modo deslizante, observador de estado adaptable y observadores genéricos. Este tipo de observador es utilizado para sistemas menos complejos con métodos computacionales simples.
- **Observadores para la detección y/o estimación de perturbaciones y fallas.**- Se aplican para detectar y/o estimar la magnitud de una perturbación o falla en el sistema. Estos observadores son conocidos como: observador de perturbación, observador de perturbación modificada, observador de entrada

desconocida y observador no lineal de entrada desconocida. Estos observadores pueden proporcionar alertas a los operadores que pueden evitar un posible paro de planta o destrucción total del proceso en función de la información proporcionada por un sistema denominado *sistema de ayuda al operador*.

- **Observadores híbridos.-** Son observadores con la combinación de más de un tipo de observador. Ejemplo: Observador Luenberger extendido combinado con un observador asintótico. El observador extendido proporciona una buena calidad de la convergencia, mientras que el observador asintótico permite estimar parámetros sin cualquier dato cinético. Este tipo de observadores, tienen la característica de poseer particularidades de ambos observadores, eligiendo una apropiada combinación, pueden resultar en observadores con un buen rendimiento. Normalmente esta clase de observadores son factibles para condiciones donde un sólo observador no es exacto para sistemas de procesos, por ejemplo, para compensar los desplazamientos resultantes de la estimación de un sólo observador.

1.2. Planteamiento del problema

La estimación de falla proporciona la dimensión de la falla, ya sea que se presente de una forma intermitente, abrupta o permanente, esta información permite cuantificar el daño y el efecto que puede generar la falla sino se presta atención. Por lo tanto, conocer la dimensión de la falla es importante para la toma de decisiones, tal como: implementación de técnicas para rectificar el comportamiento del proceso a pesar de la ocurrencia de la falla, paro de emergencia, mantenimiento correctivo y/o preactivo según sea el caso.

En ocasiones, hacer uso de la herramienta de estimación en un proceso resulta ser importante, ya que el observador (u observadores según el diseño) estaría simultáneamente estimando las variables de estado que no se pueden medir, ya

sea porque resulta difícil obtener la medición o porque la instrumentación física resulta muy costosa para implementar. Estas estimaciones que se obtienen a partir de señales medidas, pueden ser usadas para controlar el proceso o supervisar.

Debido a que las herramientas de detección, diagnóstico y estimación de fallas para la supervisión de un proceso no están generalizadas para sistemas no lineales por causa de la diversidad de su naturaleza, puede ser que una representación alternativa de algunos sistemas no lineales permita establecer una metodología general para la estimación de fallas. En este trabajo de tesis se propone desarrollar métodos de estimación de fallas para sistemas no lineales que pueden ser representados en la forma de un sistema Takagi-Sugeno.

1.3. Justificación

Este trabajo de investigación hace uso de los sistemas Takagi-Sugeno, debido a la flexibilidad y adaptabilidad de las técnicas conocidas de control y supervisión de sistemas lineales para modelar de forma aproximada o exacta una variedad de sistemas no lineales.

El uso de las técnicas de detección, diagnóstico y estimación de fallas en sistemas dinámicos es útil para la supervisión, toma de decisiones y realizar acciones correctivas que ayudan a disminuir los daños que se puedan suscitar en el proceso.

Sintetizar observadores con diferentes teorías permitirá la estimación de fallas simultáneas ((p+a), (a+s) y (s+p)) de sistemas Takagi-Sugeno, y que estos puedan ser aplicados, por ejemplo, al control tolerante a fallas, detección y/o diagnóstico de fallas.

1.4. Objetivo General

El objetivo general de este trabajo de investigación es la síntesis, el diseño y la aplicación de observadores para la estimación de fallas en procesos, utilizando la teoría de control de los sistemas Takagi-Sugeno.

1.4.1. Objetivos específicos

- Analizar el estado del arte de esquemas de estimación de fallas para sistemas Takagi-Sugeno.
- Sintetizar observadores para la estimación de fallas en actuadores, sensores y parámetros de un sistema.
- Analizar la estabilidad de observadores para la estimación de fallas en actuadores, sensores y parámetros del sistema.
- Diseñar y aplicar observadores para la estimación de fallas en procesos.

1.5. Hipótesis

Es posible establecer una metodología general de diseño de observadores para la estimación de fallas simultáneas ((p+a), (a+s) y (s+p)) para la supervisión de los sistemas no lineales que sean representados en sistemas Takagi-Sugeno.

1.6. Estado del arte

La estimación simultánea de fallas en sensores y en estados ha sido tratada por diversos autores. Por ejemplo, en Gao *et al.* (2008), los autores plantean el caso cuando ocurre un disturbio en un sistema T-S, argumentando que cuando se realiza la estimación de estado del sistema, y se ve involucrado en la salida la

perturbación, entonces, la ganancia del observador está multiplicando la perturbación. Esto en consecuencia no resulta muy favorable, ya que, el observador sólo tiene como función o tarea el estimar el estado más no la perturbación. Es por eso que los autores proponen un observador que permita la estimación simultánea del estado y la perturbación. Por otra parte, en Ichalal *et al.* (2011), los autores consideran los sistemas en tiempo continuo. Consideran además que los parámetros variables son no medibles y por lo tanto reconstruyen un nuevo sistema Takagi-Sugeno con incertidumbre para que esos parámetros estimados sean considerados en el nuevo sistema y hacer el efecto de un sistema Takagi-Sugeno con parámetro medible. Después de estimar los estados del sistema, diseñan un sistema de detección de fallas en sensores. Hacen uso de la técnica \mathcal{L}_2 con fines de optimización. Como caso de estudio utilizan un ejemplo numérico. Los autores en Gao *et al.* (2005) parten de un sistema Takagi-Sugeno con ruido de medición. Para ello proponen un observador proporcional derivativo descriptivo difuso para estimar el estado y el ruido de medición de forma simultánea. El vector de estimación se ve aumentado por el vector de estado estimado, la salida del sistema y el ruido de medición.

Por otra parte, en lo que se refiere a fallas en actuadores, existen diversos trabajos dedicados a estimar este tipo de fallas. Por ejemplo, en Maalej *et al.* (2014), se estudia la estimación simultánea de los estados y las fallas (en actuadores o sensores), en un sistema estocástico llevado a una forma Takagi-Sugeno. Se diseña un observador de tipo Kalman para la estimación simultánea de los estados y las fallas (en actuadores o sensores, considerando que las fallas en actuadores y sensores no ocurren simultáneamente). Los autores consideran el sistema aumentado con el vector de estado y las fallas. La estimación requiere de ciertos pasos a priori (estimación de los estados normales, estimar la matriz de covarianza de los estados y calcular la ganancia del filtro) y a posteriori (cálculo de la estimación de los estados normales, estimar la matriz de covarianza). Lo anterior es posible si se cumple con la propiedad de rango de la matriz de observabilidad.

Lo propuesto es ejemplificado con un sistema de tres tanques. En otro trabajo (Han *et al.* (2014)), presentan una estrategia de estimación y acomodación de falla robusta basado en observador tipo Proporcional-Integral para sistemas T-S en tiempo discreto, la falla es en actuador y es estimada aumentando el vector de estado, donde el estado y la falla son estimados simultáneamente. Basado en el concepto de estabilidad estado-entrada es diseñado el control de acomodación de falla. Los autores en Zhang *et al.* (2015), proponen un observador estimador de fallas robusto H_∞ con especificaciones de frecuencia finita para sistemas difusos Takagi-Sugeno. La estabilidad del observador se basa en el lema generalizado de Popov-Yakubovich-Kalman. El propósito del diseño es disminuir el conservadurismo que se tiene en el dominio de la frecuencia. Además, se considera el cálculo de las ganancias considerando una región LMI para la ubicación de los polos del observador. Para mejorar el desempeño del transitorio de la estimación, se utiliza la teoría de H_∞ . Los autores en Hassanabadi *et al.* (2016), diseñan un observador de entradas desconocidas para sistemas LPV singular con retardo. El observador es usado para la detección y aislamiento de falla en actuadores. Para el aislamiento de fallas, el vector de fallas es particionado en dos grupos: fallas que se pueden aislar y fallas o residuales considerados como entrada desconocida. Finalmente, en Rotondo *et al.* (2016), se presenta un observador de entrada desconocida robusto para la estimación de estado y falla en sistemas Takagi-Sugeno discreto. El observador está bajo el marco H_∞ . Considera las fallas en actuadores $f(k)$ y un vector de perturbación. La estimación es para estimación de fallas en actuadores y de los estados. Las matrices de salida son consideradas no constantes. El diseño es aplicado primero a un ejemplo numérico y a un sistema de tres tanques.

La tarea de estimación de fallas es muy importante para varias aplicaciones, especialmente cuando es implementada a un control tolerante a falla activo (Mahmoud *et al.*, 2003; Noura *et al.*, 2009; Witczak, 2007). Un ejemplo de la aplicación de la estimación de fallas en la vida real, es determinar el tamaño de la fuga de un ducto, con la finalidad de cuantificar la pérdida (Brunone & Ferrante, 2001).

En ocasiones existen incertidumbres de modelado de un sistema que hacen di-

fácil la estimación exacta de una variable de proceso, o entrada desconocida (parámetros desconocidos, perturbación y/o ruido), complicando la estimación usando observadores estándares (no robusto). En estos casos puede ser preferible conocer solamente el intervalo de valores en los cuales se encuentran esas variables de proceso o entradas desconocidas. Este concepto es conocido como estimación intervalar y es tratado en diversos trabajos en la literatura. Por ejemplo, los autores en Meseguer *et al.* (2010) proponen un observador intervalar para la detección de fallas de sistemas lineales con falla en el actuador. El diagnóstico intervalar de la falla es con la finalidad de generar un umbral adaptable con cada sistema con incertidumbre. Además, se analiza la influencia de la ganancia del observador para la detección de la falla. Otro trabajo, es el de Puig (2010) presentando que los observadores intervalares pueden ser usados tomando en cuenta la perturbación usando el enfoque de conjunto de membresías. Otro trabajo, es el que presenta Raïssi *et al.* (2010) construye dos observadores que respectivamente estiman el límite inferior y superior del vector de estado asumiendo que el sistema es cooperativo. Como el sistema no lineal original no es cooperativo, la ganancia del observador está diseñada de tal manera que la dinámica de error de estimación se vuelva cooperativa. La inclusión de la incertidumbre en los parámetros del modelo en el caso de un observador intervalo permite la detección de fallas robusta. Por otra parte, en Efimov *et al.* (2013c), se diseña un observador para la estimación de estado con un observador tipo Luenberger, para sistemas LPV con incertidumbre paramétrica. El estado estimado es usado para estabilizar y asegurar la convergencia de un sistema continuo en un ejemplo numérico. En otro de sus trabajos, los autores en Efimov *et al.* (2013a) presentan un observador tipo Luenberger intervalar para estimar los estados de un sistema LPV discreto con incertidumbre paramétrica, los estados son estimados posteriormente son llamados para ser usados para controlar un sistema de un ejemplo numérico. En Rotondo *et al.* (2016), los autores diseñan un banco de observadores intervalares tipo Luenberger con la finalidad de detectar fallas en sensores de un sistema discreto: celda de combustible. Finalmente, en Zhang & Yang (2017) se presenta el problema

de detección de fallas para sistemas LPV en tiempo discreto sujeto a perturbaciones acotadas. Un observador intervalar es usado para la detección de falla. En el diseño del observador se considera que la función de Lyapunov sea dependiente del parámetro y además considera la condición de atenuación del ruido, con la finalidad de aumentar los grados de libertad del diseño.

Derivado del estudio del arte se puede concluir lo siguiente: primero que el diseño y análisis de los observadores para la estimación de fallas aún suele ser un tema de interés para investigar, debido a los diferentes sistemas con estructuras distintas; segundo, la metodología de los sistemas intervalares pueden ser empleados para el diseño de observadores para sistemas Takagi-sugeno.

1.7. Contexto de la tesis

El trabajo de investigación desarrollado se clasifica en cuatro etapas, las cuales son presentadas en los siguientes capítulos del presente documento. Tales etapas son: i) Representar a los sistemas no lineales a sistemas Takagi-Sugeno. ii) Sintetizar observadores para la estimación simultánea de parámetros, estados y fallas en sensores y actuadores con una representación Takagi-Sugeno. iii) Evaluar en simulación los observadores para verificar el desempeño de cada uno de los observadores sintetizados. iv) Conclusiones generales del trabajo de investigación.

En el Capítulo 2 se presenta la teoría acerca de los sistemas Takagi-Sugeno, particularmente en cómo llegar a representar a los sistemas no lineales con los diferentes enfoques, donde dejamos en claro que en este trabajo la forma de llevar a cabo la representación es usando el enfoque del sector no lineal. También, se presenta las diferentes metodologías que existen para asegurar la estabilidad de los sistemas Takagi-Sugeno. Finalmente, se describe la propiedad de observabilidad usada para los sistemas Takagi-Sugeno.

El Capítulo 3 presenta la síntesis de observadores propuestos como trabajo

de investigación. Cada sección muestra la estructura que deben tener los sistemas Takagi-Sugeno para los cuales se diseñan los observadores sintetizados. Se presenta el desarrollo de cada observador sintetizado para la estimación de parámetros, estados, fallas en sensor y actuador.

En el Capítulo 4 se presenta los resultados en simulación que se obtuvieron al evaluar cada uno de los observadores con diferentes casos de estudio. Algunos resultados son evaluados con datos experimentales obtenidos de un prototipo realizado durante este trabajo de investigación.

Finalmente, en el Capítulo 5 se proporcionan las conclusiones principales, la contribución tecnológica, perspectivas y trabajos futuros, derivados del trabajo de investigación.

Capítulo 2

Sistemas Takagi-Sugeno

Los sistemas Takagi-Sugeno (T-S) constituyen una representación matemática muy interesante de los sistemas no lineales, porque pueden representar a una amplia clase de sistemas no lineales, bajo una estructura simple basada en modelos lineales interpolados por funciones no lineales positivas o nulas, y acotadas.

Los sistemas T-S tienen una estructura simple con propiedades interesantes, que los hace fácil de explotar desde el punto de vista matemático, permitiendo la extensión de algunos resultados originalmente desarrollados para sistemas lineales extendidos a los sistemas no lineales. En este capítulo, se presenta un marco teórico conceptual de este tipo de sistemas: su definición, la manera de transformar un sistema no lineal en un sistema T-S, su estabilidad y observabilidad.

2.1. Sistemas Takagi-Sugeno

Un sistema Takagi-Sugeno está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \xi_i(\rho(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \xi_i(\rho(t)) (C_i x(t)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ el vector de salida, $i = 1, 2, \dots, r$, r el número de reglas asociadas a los diferentes submodelos o subsistemas. $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ son matrices asociadas, $\xi_i(\rho(t))$ son funciones no lineales (denominadas funciones de membresía) dependientes del vector de parámetros $\rho(t)$, estos parámetros pueden ser medibles (incluso pueden ser parte de la entrada o salida del sistema) o no medibles (alguna variable de estado del sistema o algún parámetro no conocido).

El vector de parámetros

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} \rho_1(t) \\ \dots \\ \rho_p(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

con p componentes, es decir, es un vector de p elementos y describen las variables premisas o variables de programación:

$$\rho_j \in [\underline{\rho}_j, \bar{\rho}_j], \quad j = 1, \dots, p \quad (2.3)$$

donde $\underline{\rho}_j$ and $\bar{\rho}_j$ son el mínimo y máximo¹, respectivamente de ρ_j .

El valor individual de cada función de membresía $\xi_i(\rho(t))$ es determinado basado en las funciones de ponderación $\eta_i(\rho)$ y la variable programada ρ_j que pertenecen a un conjunto difuso Z_j^i con un valor real dado por $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ (Los conjuntos Z_j^i , $j = 1, 2, \dots, p$, $i = 1, 2, \dots, r$, donde r es el número de reglas, en consecuencia, Z_j^i son los conjuntos difusos antecedentes). El valor real para una regla es determinado basado en las funciones de ponderación, usando un operador de conjunción, tal como el producto algebraico (Nauck *et al.*, 1997):

$$\eta_i(\rho) = \prod_{j=1}^p Z_{ij}(\rho_j) \quad (2.4)$$

donde Z_{ij} corresponde al conjunto difuso de η_i o η_j , según sea el caso. Las funcio-

¹Una función diferenciable definida en un conjunto compacto alcanza sus valores mínimo y máximo.

nes $\xi_i(\rho)$ están dadas por:

$$\xi_i(\rho(t)) = \frac{\eta_i(\rho(t))}{\sum_{i=1}^r \eta_i(\rho(t))} \quad (2.5)$$

donde $\eta_i(\rho(k))$ (es el producto de las funciones de ponderación que corresponden a los conjuntos difusos de la i -ésima regla) es el grado de membresía de $\rho_i(k)$ en η_{ij} , y $\xi_i(\rho(k))$ es la función de membresía normalizada tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^r \xi_i(\rho(k)) = 1 \\ \xi_i(\rho(k)) \geq 0, i = 1, 2, \dots, r. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

2.2. Modelado de sistemas Takagi-Sugeno

El siguiente diagrama describe las diferentes metodologías para obtener un modelo tipo Takagi-Sugeno, a partir de un sistema no lineal (Tanaka & Ohtake, 2001), (Tanaka & Wang, 2004), (Lendek, Guerra, Babuska & De Schutter, 2011).

Para obtener un modelo Takagi-Sugeno con la estructura de la ecuación (2.1) que represente o aproxime a un sistema no lineal, es necesario primeramente elegir una de las dos metodologías que se encuentran en la literatura: por identificación o por un método analítico (ver la Fig. 2.1).

La metodología basada en *identificación* se basa en datos experimentales. Estos métodos utilizan señales de entrada/salida que se miden en la planta o en el proceso. Posteriormente estos son utilizados para la identificación. La estructura del modelo y las funciones de activación (2.5) se seleccionan a priori (Ballé & Isermann, 1998; D. *et al.*, 1993; Johansen & Babuska, 2003; Kukulj & Levi, 2004;

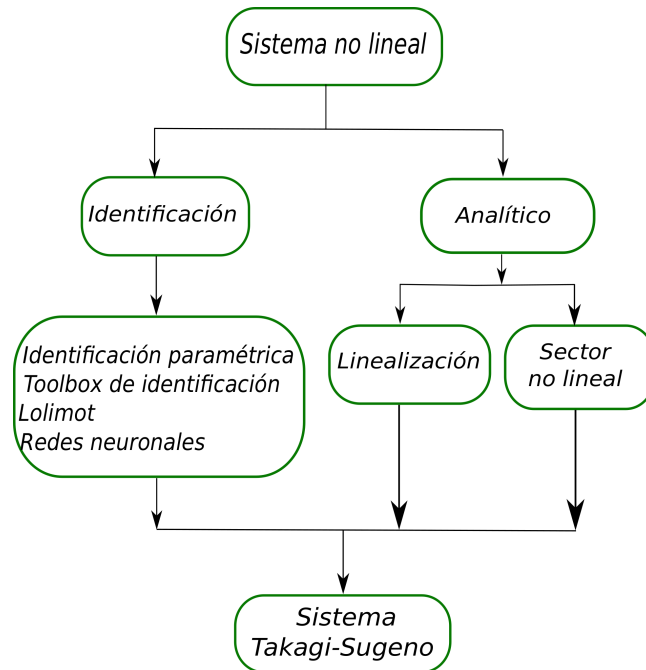


Figura 2.1: Métodos para obtener un sistema Takagi-Sugeno.

Lin *et al.*, 2015; Simani *et al.*, 2015).

La metodología *analítica* se basa en transformar el modelo matemático no lineal original que representa el comportamiento dinámico del proceso a su representación T-S. En esta metodología existen dos técnicas que se pueden usar. Una de ellas es la linealización y la otra técnica es utilizando el método del sector no lineal (Lendek *et al.*, 2010; Ohtake *et al.*, 2003; Wang *et al.*, 1996a). A continuación se describen las dos técnicas mencionadas.

2.2.1. Obtención de modelos T-S por linealización

Con esta técnica se obtiene una aproximación del sistema no lineal dependiendo del número de puntos de linealización que se utilicen (Johansen *et al.*, 2000). Esta técnica usa la expansión de las series de Taylor en diferentes puntos representativos que pueden ser o no puntos de equilibrio. El modo de obtener la

aproximación Takagi-Sugeno del sistema no lineal, es como sigue:

Primero, se eligen las variables que describen las no linealidades, es decir, aquellas que pueden ser variables programadas (z).

Segundo, se tiene que elegir un número m suficiente de puntos de linealización ($z_{0,i}$, donde $i = 1, 2, \dots, m$) y las funciones de membresía correspondientes $\xi_i(z(t))$.

Tercero, las matrices A_i , B_i y C_i son obtenidas como:

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{z_{0,i}0}, \quad B_i = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{z_{0,i}0}, \quad C_i = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{z_{0,i}0} \quad (2.7)$$

donde $|_{z_{0,i}0}$ es la evaluación de la expresión de lado izquierdo, $z_{0,i}$ corresponde a las variables programadas, ya sea la entrada o las variables de estado. El valor 0 corresponde a aquellas entradas y estados que no son z . Las funciones de activación son generadas por técnicas de optimización con la finalidad de minimizar el error cuadrado de la salida.

2.2.2. Obtención de modelos T-S por el sector no lineal

La técnica del sector no lineal, tiene la característica de representar de forma exacta las dinámicas del sistema no lineal, esto debido a la aplicación del concepto no lineal global o semi-global; Lendek *et al.* (2010); Tanaka & Ohtake (2001). Esta técnica parte de un sistema no lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), \theta(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), \varsigma(t)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde f es la función de transición de estado (describe la evolución de los estados en el tiempo), h es la función medible (relacionando las mediciones a los estados), $x(t) \in R_{n_x}$ es el vector de estados, $u(t) \in R_{n_u}$ representa el vector de entrada, $y(t) \in$

R_{n_y} es el vector de salida, $\theta(t)$ y $\zeta(t)$ son parámetros (conocidos, desconocidos o incertidumbres).

Uno de los pasos a seguir para transformar el sistema no lineal, es tratar de llevar a una representación de la forma siguiente (ya que no es única la representación):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t), u(t))x(t) + G(x(t), u(t))u(t) \\ y(t) &= H(x(t), u(t))x(t) + K(x(t), u(t))u(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde F, G, H y K son matrices función (con sus elementos acotados al conjunto de parámetro (os)). Las variables programadas primeramente deben ser elegidas como: $z_j(\rho) \in [\underline{\rho}_j, \bar{\rho}_j]$ tal que, $j = 1, \dots, p$, y z_j , una forma de identificar a las variables programadas es si en el modelo, las matrices contienen parámetros que varían con el tiempo.

$\underline{\rho}_j$ y $\bar{\rho}_j$ son los mínimos y máximos de z_j , tal que j es el número de términos no constantes involucrados como variables programadas (parámetros que varían con el tiempo) .

Por cada variable programada z_j , dos funciones de ponderación pueden ser construidas, tales como:

$$\eta_0^j(\rho) = \frac{\bar{\rho}_j - z_j(\rho)}{\bar{\rho}_j - \underline{\rho}_j} \quad (2.10)$$

$$\eta_1^j(\rho) = 1 - \eta_0^j(\rho) \quad (2.11)$$

$$j = 1, 2, \dots, p.$$

las funciones son llamadas *funciones de ponderación*, y estas son normalizadas de tal forma:

$$\eta_0^j(\rho(t)) \geq 0, \eta_1^j(\rho(t)) \geq 0,$$

y

$$\eta_0^j(\rho(t)) + \eta_1^j(\rho(t)) = 1$$

para cualquier valor de z_j . También z_j puede ser expresada como la suma ponderada de ambos extremos, es decir, $\underline{\rho}_j \eta_0^j(\rho(t)) + \bar{\rho}_j \eta_1^j(\rho(t)) = 1$.

Los conjuntos difusos correspondientes a las funciones de ponderación, son definidos con la combinación del mínimo y máximo de z_j , los conjuntos difusos están dados por: Z_j^0 y Z_j^1 , donde Z_j^0 es el conjunto difuso igual a todas las $\eta_0^j(\rho(t))$, $j = 1, 2, \dots, p$ y Z_j^1 es el conjunto difuso de todas las $\eta_1^j(\rho(t))$, donde $j = 1, 2, \dots, p$. Las reglas del sistema T-S son construidas, tal que todas las variables programadas ($z_j, j = 1, \dots, p$) sean tomadas en cuenta.

Las reglas tienen la siguiente forma:

Si $z_1 \in Z_1^i$ y \dots y $z_p \in Z_p^i$ entonces

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_i x + B_i u \\ y &= C_i x\end{aligned}$$

donde $Z_i^j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, \dots, p$, puede ser en Z_0^j o Z_1^j . El número de reglas de un sistema T-S es dado por el siguiente arreglo $m = 2^p$ reglas, donde p corresponde al número de parámetros que se toman en cuenta para construir el sistema T-S. Ahora, la función de membresía de la regla i se calcula con el producto de las funciones de ponderación dadas por las ecuaciones (2.10) y (2.11) que corresponden a los conjuntos difusos en la regla, es decir:

$$\xi_i(z) = \prod_{j=1}^p \xi_{ij}(z_j) \quad (2.12)$$

donde $\xi_{ij}(z_j)$ corresponde a cualquiera de las dos funciones de ponderación: $\eta_0^j(z_j)$ o $\eta_1^j(z_j)$, dependiendo cuál sea la regla usada.

Con los modelos locales o subsistemas que se obtienen, ahora es posible formar un sistema Takagi-Sugeno de la forma (2.1). Cabe mencionar, que de acuerdo con esta técnica, el modelo de la ecuación (2.1) no es único debido a que depen-

derá de la elección de los parámetros.

Debido a que este es el método que se utilizará en esta tesis, se ilustra con un ejemplo la manera de obtener un sistema T-S a partir de un sistema no lineal.

Se considera el siguiente modelo no lineal que representa a una columna de destilación binaria de tres platos (utilizado en la destilación de mezclas líquidas separadas en fracciones en función de las diferencias de volatilidades):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= \frac{V(y_2 - x_1)}{M_1} && \text{Hervidor} \\
 \dot{x}_2(t) &= \frac{V(y_3 - y_2) + L(x_1 - x_2)}{M_2} && \text{Etapa de alimentacion} \\
 \dot{x}_3(t) &= \frac{V(x_3 - y_3) + L(x_2 - x_3)}{M_3} && \text{Condensador}
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

con:

$$y_i = \frac{\alpha x_i}{1 + (\alpha - 1)x_i} \quad (2.14)$$

$i = 2, 3$. A partir del modelo no lineal (2.13), se lleva a la siguiente representación en espacio de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{V}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{M_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\frac{\alpha x_2}{1+(\alpha-1)x_2}}{M_1} & 0 \\ \frac{\frac{\alpha x_3}{1+(\alpha-1)x_3} - \frac{\alpha x_2}{1+(\alpha-1)x_2}}{M_2} & \frac{x_1 - x_2}{M_2} \\ \frac{\frac{\alpha x_3}{1+(\alpha-1)x_3}}{M_3} & \frac{x_2 - x_3}{M_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ L \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Las variables programadas son elegidas como: $\rho_1 = x_1$, $\rho_2 = x_2$ y $\rho_3 = x_3$ que son los estados del sistema que varían en los siguientes intervalos: $\rho_1 \in [0.6817, 0.7171]$, $\rho_2 \in [0.5171, 0.5589]$ y $\rho_3 \in [0.3487, 0.3879]$, en consecuencia, el cálculo de las funciones de ponderación son como sigue:

Con $\rho_1 = x_1(t) \in [0.6817, 0.7171]$, la primera función de ponderación sería:

$$\eta_0^1(t) = \frac{\bar{\rho}_j - \rho_j}{\bar{\rho}_j - \underline{\rho}_j} = \frac{0.7171 - \rho_1(t)}{0.7171 - 0.6817} \quad (2.16)$$

la segunda función de ponderación se obtendría de la forma:

$$\eta_1^1(t) = 1 - \eta_0^1(t) \quad (2.17)$$

Con $\rho_2 = x_2(t) \in [0.5171, 0.5589]$, la primera función de ponderación se calcula como:

$$\eta_0^2(t) = \frac{0.5589 - \rho_2(t)}{0.5589 - 0.5171} \quad (2.18)$$

y la segunda función sería:

$$\eta_1^2(t) = 1 - \eta_0^2(t) \quad (2.19)$$

Con $\rho_3 = x_3(t) \in [0.5171, 0.5589]$, la primera función de ponderación se calcula como:

$$\eta_0^3(t) = \frac{0.3879 - \rho_3(t)}{0.3879 - 0.3487} \quad (2.20)$$

y el cálculo de la segunda función es como sigue:

$$\eta_1^3(t) = 1 - \eta_0^3(t) \quad (2.21)$$

donde los conjuntos difusos están dados por:

$$\begin{aligned} Z_0^i &= \eta_0^1, \eta_0^2, \eta_0^3 \\ Z_1^i &= \eta_1^1, \eta_1^2, \eta_1^3 \end{aligned} \quad (2.22)$$

En consecuencia, las reglas y/o modelos locales se obtienen de la siguiente manera: $r = 2^3 = 8$, donde el valor 3 corresponde al número de parámetros considerados, en consecuencia, el número de reglas que conforman al sistema serían 8 modelos locales, que son obtenidos de la forma siguiente:

Regla 1.- Si $\rho_1 \in Z_1^1, \rho_2 \in Z_1^2$ y $\rho_3 \in Z_1^3$, entonces:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_1 x + B_1 u \\ y &= C x\end{aligned}$$

con

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{V}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{M_3} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\alpha \bar{\rho}_2}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_2}}{M_1} & 0 \\ \frac{\frac{\alpha \bar{\rho}_3}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_3} - \frac{\alpha \bar{\rho}_2}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_2}}{M_2} & \frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{M_2} \\ \frac{\frac{\alpha \bar{\rho}_3}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_3}}{M_3} & \frac{\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_3}{M_3} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} V \\ L \end{bmatrix}$$

donde la función de membresía para esta regla sería igual a:

$$\xi_1(\rho) = \eta_1^1(t) \eta_1^2(t) \eta_1^3(t) \quad (2.23)$$

Regla 2.- Si $\rho_1 \in Z_1^1, \rho_2 \in Z_1^2$ y $\rho_3 \in Z_0^3$, entonces:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_2 x + B_2 \\ y &= C x\end{aligned}$$

con

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{V}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{M_3} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\alpha \bar{\rho}_2}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_2}}{M_1} & 0 \\ \frac{\frac{\alpha \bar{\rho}_3}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_3} - \frac{\alpha \bar{\rho}_2}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_2}}{M_2} & \frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{M_2} \\ \frac{\frac{\alpha \bar{\rho}_3}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_3}}{M_3} & \frac{\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_3}{M_3} \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} V \\ L \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde la función de membresía para esta regla sería igual a:

$$\xi_2(\rho) = \eta_1^1(t)\eta_1^2(t)\eta_0^3(t) \quad (2.24)$$

Regla 3.- Si $\rho_1 \in Z_1^1$, $\rho_2 \in Z_0^2$ y $\rho_3 \in Z_1^3$, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_3x + B_3u \\ y &= Cx \end{aligned}$$

con

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{V}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{M_3} \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\alpha\rho_2}{1+(\alpha-1)\rho_2}}{M_1} & 0 \\ \frac{\frac{\alpha\rho_3}{1+(\alpha-1)\rho_3} - \frac{\alpha\rho_2}{1+(\alpha-1)\rho_2}}{M_2} & \frac{\bar{\rho}_1 - \rho_2}{M_2} \\ \frac{\frac{\alpha\rho_3}{1+(\alpha-1)\rho_3}}{M_3} & \frac{\rho_2 - \bar{\rho}_3}{M_3} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} V \\ L \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

con la función de ponderación:

$$\xi_3(\rho) = \eta_1^1(t)\eta_0^2(t)\eta_1^3(t) \quad (2.25)$$

Regla 4.- Si $\rho_1 \in Z_1^1$, $\rho_2 \in Z_0^2$ y $\rho_3 \in Z_0^3$, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_4x + B_4u \\ y &= Cx \end{aligned}$$

con

$$A_4 = \begin{bmatrix} -\frac{V}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{M_3} \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\alpha\rho_2}{1+(\alpha-1)\rho_2}}{M_1} & 0 \\ \frac{\frac{\alpha\rho_3}{1+(\alpha-1)\rho_3} - \frac{\alpha\rho_2}{1+(\alpha-1)\rho_2}}{M_2} & \frac{\bar{\rho}_1 - \rho_2}{M_2} \\ \frac{\frac{\alpha\rho_3}{1+(\alpha-1)\rho_3}}{M_3} & \frac{\rho_2 - \bar{\rho}_3}{M_3} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} V \\ L \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con la función de ponderación:

$$\xi_4(\rho) = \eta_1^1(t)\eta_0^2(t)\eta_0^3(t) \quad (2.26)$$

Regla 5.- Si $\rho_1 \in Z_0^1$, $\rho_2 \in Z_1^2$ y $\rho_3 \in Z_1^3$, entonces:

$$\dot{x} = A_5x + B_5u$$

$$y = Cx$$

con

$$A_5 = \begin{bmatrix} -\frac{V}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{M_3} \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\alpha\bar{\rho}_2}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_2}}{M_1} & 0 \\ \frac{\frac{\alpha\bar{\rho}_3}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_3} - \frac{\alpha\bar{\rho}_2}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_2}}{M_2} & \frac{\rho_1 - \bar{\rho}_2}{M_2} \\ \frac{\frac{\alpha\bar{\rho}_3}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_3}}{M_3} & \frac{\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_3}{M_3} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} V \\ L \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con la función de ponderación:

$$\xi_3(\rho) = \eta_0^1(t)\eta_1^2(t)\eta_1^3(t) \quad (2.27)$$

Regla 6.- Si $\rho_1 \in Z_0^1$, $\rho_2 \in Z_1^2$ y $\rho_3 \in Z_0^3$, entonces:

$$\dot{x} = A_6x + B_6u$$

$$y = Cx$$

con

$$A_6 = \begin{bmatrix} -\frac{V}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{M_3} \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\alpha \bar{\rho}_2}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_2}}{M_1} & 0 \\ \frac{\frac{\alpha \rho_3}{1+(\alpha-1)\rho_3} - \frac{\alpha \bar{\rho}_2}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_2}}{M_2} & \frac{\rho_1 - \bar{\rho}_2}{M_2} \\ \frac{\frac{\alpha \rho_3}{1+(\alpha-1)\rho_3}}{M_3} & \frac{\bar{\rho}_2 - \rho_3}{M_3} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} V \\ L \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

con la función de ponderación:

$$\xi_6(\rho) = \eta_0^1(t)\eta_1^2(t)\eta_0^3(t) \quad (2.28)$$

Regla 7.- Si $\rho_1 \in Z_0^1$, $\rho_2 \in Z_0^2$ y $\rho_3 \in Z_1^3$, entonces:

$$\dot{x} = A_7 x + B_7 u$$

$$y = C x$$

con

$$A_7 = \begin{bmatrix} -\frac{V}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{M_3} \end{bmatrix}, B_7 = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\alpha \rho_2}{1+(\alpha-1)\rho_2}}{M_1} & 0 \\ \frac{\frac{\alpha \bar{\rho}_3}{1+(\alpha-1)\bar{\rho}_3} - \frac{\alpha \rho_2}{1+(\alpha-1)\rho_2}}{M_2} & \frac{\rho_1 - \rho_2}{M_2} \\ \frac{\frac{\alpha \rho_3}{1+(\alpha-1)\rho_3}}{M_3} & \frac{\rho_2 - \bar{\rho}_3}{M_3} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} V \\ L \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

con la función de ponderación:

$$\xi_7(\rho) = \eta_0^1(t)\eta_0^2(t)\eta_1^3(t) \quad (2.29)$$

Regla 8.- Si $\rho_1 \in Z_0^1$, $\rho_2 \in Z_0^2$ y $\rho_3 \in Z_0^3$, entonces:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_8 x + B_8 u \\ y &= C x\end{aligned}$$

con

$$A_8 = \begin{bmatrix} -\frac{V}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{M_3} \end{bmatrix}, \quad B_8 = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\alpha \rho_2}{1+(\alpha-1)\rho_2}}{M_1} & 0 \\ \frac{\frac{\alpha \rho_3}{1+(\alpha-1)\rho_3} - \frac{\alpha \rho_2}{1+(\alpha-1)\rho_2}}{M_2} & \frac{\rho_1 - \rho_2}{M_2} \\ \frac{\frac{\alpha \rho_3}{1+(\alpha-1)\rho_3}}{M_3} & \frac{\rho_2 - \rho_3}{M_3} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} V \\ L \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con la función de ponderación:

$$\xi_8(\rho) = \eta_0^1(t) \eta_0^2(t) \eta_0^3(t) \quad (2.30)$$

Ahora el sistema T-S que representa a la columna de destilación binaria de tres platos, presenta la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^8 \xi_i(\rho(t)) A_i x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t)\end{aligned} \quad (2.31)$$

2.3. Estabilidad de los sistemas Takagi-Sugeno

Una de las particularidades de los sistemas Takagi-Sugeno es que estos permiten extender las técnicas de estabilidad originalmente sintetizadas para sistemas lineales a los sistemas no lineales. Es bien conocido que la estabilidad local, es decir de cada modelo lineal, no implica la estabilidad de todo el sistema. Esto se debe a que los modelos locales son interpolados haciendo que se reproduzcan las

dinámicas no lineales. Esto influye en la estabilidad del sistema total.

Tanto en el diseño como en el análisis de estabilidad de los sistemas Takagi-Sugeno, las desigualdades lineales matriciales (LMIs, por sus siglas en inglés *Linear Matrix Inequalities*) juegan un papel muy importante. Las LMIs comenzaron a utilizarse en el ámbito del control automático en la década de los años 90's. A principios de esta década se propusieron distintos métodos capaces de resolver los problemas formulados con LMIs. Después apareció el LMI Control Toolbox para Matlab desarrollado por Gahinet (Gahinet *et al.*, 1994), y posteriormente, otras herramientas para solucionar LMIs, tales como: SeDumi, SDPT3, entre otros, que pueden ser usados por YALMIP, un software que permite la solución de diferentes problemas con LMIs creado por J. Löfberg (Löfberg, 2006).

Una definición formal de una LMI, es como sigue:

$$J(x) = J_0 + x_1 J_1 + \dots + x_n J_n < 0 \quad (2.32)$$

donde $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ es un vector de variables reales, $J_i = J_i^T$ son matrices simétricas reales (J es una función afín a las variables x) y $J(x) < 0$ significa que la matriz $J(x)$ es definida negativa, es decir,

$$\begin{aligned} J(x) < 0 &\Leftrightarrow u^T J(x) u < 0, \text{ para toda } u \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{ todos los valores propios de } J(x) \text{ son negativos} \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\max}(J(x)) < 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Las LMIs tienen características intrínsecas, es decir, una LMI es una restricción convexa en x (un conjunto de viabilidad convexa). Esto quiere decir que el conjunto $S := x : J(x) < 0$ es convexo. Si $x_1, x_2 \in S$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces:

$$J(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha J(x_1) + (1 - \alpha)J(x_2) > 0 \quad (2.34)$$

donde en la igualdad consideramos que J es afín y la desigualdad se deduce del hecho que $\alpha \geq 0$ ($1 - \alpha \geq 0$).

Permite además la solución de múltiples LMIs, por ejemplo, la LMI

$$J_1(x) < 0, \dots, J_k(x) < 0 \quad (2.35)$$

es convexa y se puede representar como una sola LMI

$$J(x) = \begin{bmatrix} J_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_k(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.36)$$

También se pueden incorporar condiciones afines, tales como:

$$J(x) < 0 \text{ y } Ax = b \quad (2.37)$$

$$J(x) < 0 \text{ y } x = Ay + b \text{ para alguna } y \quad (2.38)$$

$$J(x) < 0 \text{ y } x \in S \text{ con } S \text{ un conjunto afín} \quad (2.39)$$

También se pueden convertir condiciones no lineales a lineales. Ejemplo: complemento de Schur.

Sea J una función afín

$$J(x) = \begin{bmatrix} J_{11}(x) & J_{12}(x) \\ J_{21}(x) & J_{22}(x) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

donde J_{11} es no singular. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 J(x) < 0 &\Leftrightarrow J_{11}(x) < 0 \\
 J_{22}(x) - J_{21}J_{11}(x)^{-1}J_{12}(x) &< 0 \\
 J_{22}(x) < 0 & \tag{2.41} \\
 \Leftrightarrow J_{11}(x) - J_{12}J_{22}(x)^{-1}J_{21}(x) &< 0
 \end{aligned}$$

A continuación, se retoman los conceptos de estabilidad usados para los sistemas Takagi-Sugeno:

Estabilidad cuadrática.- Se denomina estabilidad cuadrática al hecho de demostrar la estabilidad de un sistema a partir del uso de una función cuadrática de Lyapunov (para sistemas discretos o continuos). La estabilidad consiste en determinar si existe una matriz P definida positiva tal que la derivada o incremento de la función candidata de Lyapunov sea definida negativa. Si es el caso, entonces el sistema es estable (Blanco *et al.*, 2001; Feng, 2006; Johansson, 1997; Tanaka *et al.*, 1998; Wang *et al.*, 1996b).

Regiones LMI (por sus siglas en inglés, Linear Matrix Inequality).- Son conjuntos de regiones localizadas en el plano complejo. Hacer uso de las regiones LMI asegura una estabilidad específica en una región del plano complejo. (Chilali & Gahinet, 1996a).

Estabilidad robusta.- La estabilidad robusta es dada considerando una retroalimentación de estado compuesta por la función no lineal del sistema y estableciendo un criterio de robustez (por ejemplo rechazo al ruido de medición). (Chadli *et al.*, 2014; Sadeghi *et al.*, 2014; Wang *et al.*, 1996b).

Atenuación con el criterio H_2 o H_∞ .- Normalmente se usa para sistemas con problemas de ruido y/o perturbación, con la finalidad de minimizar el efecto que

estas generan en el sistema. Los criterios se añaden a las LMIs que sean originadas por el análisis de estabilidad (Delmotte *et al.*, 2007; Khiar *et al.*, 2007; Liu & Zhang, 2005; Xiaodong & Qingling, 2003; Yin *et al.*, 2015; Zhang *et al.*, 2014).

Además de los conceptos de estabilidad mencionados anteriormente, también están la *estabilidad estado-entrada* (Sontag, 1995) y *estabilidad por retroalimentación de salida* (Kau *et al.*, 2007), entre otras, que pueden ser consultados en las referencias proporcionadas.

2.4. Detección de fallas en sistemas Takagi-Sugeno

Un proceso de monitoreo está basado en el uso de redundancia física o analítica. La redundancia física hace uso de instrumentos de medición redundantes para medir las mismas variables. Por ejemplo, si un sistema tiene triple redundancia analítica, significa que existen tres elementos midiendo la misma variable (tres instrumentos midiendo la misma temperatura dentro de un reactor, por ejemplo).

Por otra parte, la redundancia analítica generalmente usa un método analítico (típicamente basado en ecuaciones) para reemplazar la falta de sensores físicos redundantes. Es decir, a través de la redundancia analítica, se realiza una reconstrucción (o estimación) de las variables que intervienen en un proceso, con la ayuda de las entradas y salidas disponibles para medición. Un ejemplo del método analítico, es la técnica del diagnóstico basado en modelos. Este tipo de diagnóstico considera un modelo nominal que describe el comportamiento del proceso o una parte del sistema a monitorear. Con la entrada y salida del sistema (variables medibles) se puede reconstruir en línea y en paralelo una aproximación de la variable a monitorear.

Los esquemas de diagnóstico pueden clasificarse según el número de observadores, por ejemplo:

CAPÍTULO 2 DETECCIÓN DE FALLAS EN SISTEMAS TAKAGI-SUGENO

- Observador: Esquema directo (orden completo). Esquema simplificado (orden reducido).
- Banco de observadores: Orden reducido (observadores dedicados). Orden reducido (observadores generalizados)

Cuando se requiere el conocimiento de todas las variables de un sistema dinámico, para el análisis o aplicación de control, monitoreo y toma de decisión, y no se cuenta con un acceso completo de todas las variables (debido a razones técnicas, físicas o económicas), entonces es necesaria la estimación de variables críticas y/o parámetros críticos del sistema para garantizar un funcionamiento normal y seguro del proceso.

Los parámetros, estados, fallas, perturbaciones y salidas estimadas de un sistema dinámico, pueden ser estimados bajo ciertas condiciones, a través del uso de observadores (también llamados sensores virtuales) a partir de señales de entrada y salida, a través del uso de un modelo matemático del sistema Luenberger (1966, 1971a). La idea de Luenberger se basa en generar un modelo matemático del sistema que reproduzca el comportamiento de las variables de estado del sistema real. Si ambos sistemas, el real y el modelo son sometidos a las mismas condiciones, se esperaría que la respuesta de ambos se parecieran o fueran la misma. Para asegurar esta similitud en las respuestas o acelerar la convergencia de la respuesta del modelo con el sistema original, entonces el modelo se compensa con la diferencia que existe entre: la salida del sistema original y el modelo. Esta diferencia se multiplica por una constante, llamada ganancia del observador. Esta ganancia permite en consecuencia que la respuesta del modelo, converja más rápido o más lento a la respuesta del sistema original, Isermann (2006), dependiendo de su magnitud. Por ejemplo, para el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.42}$$

donde $x(t)$ corresponde al vector de estado, $u(t)$ es la entrada de control, $y(t)$ es la salida medible. Un observador de tipo Luenberger tiene la siguiente forma (2.43):

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + He(t) \quad (2.43)$$

$$e(t) = y(t) - C\hat{x}(t) \quad (2.44)$$

donde A es la matriz de estado, B es la matriz de entrada, C es la matriz de salida del sistema, H es la matriz de ganancia del observador. Todas las matrices anteriores son de dimensiones apropiadas. $e(t)$ es un error de la estimación de la salida medida, $\hat{x}(t)$ es el estado estimado. Introduciendo la ecuación del error (2.44) en la ecuación del observador (2.43), la forma del observador de estado, es dada como:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - HC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Hy(t) \quad (2.45)$$

El diagrama de la figura 2.2 muestra la estructura del observador mencionado arriba.

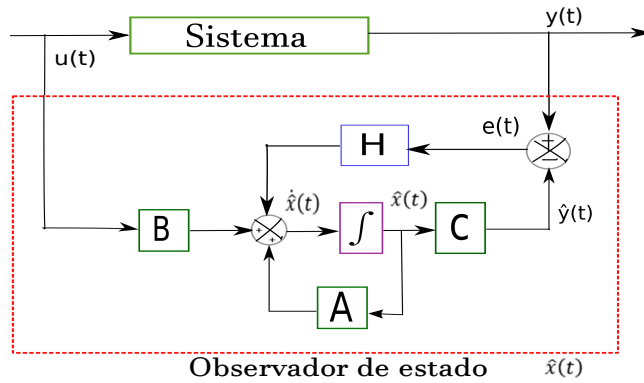


Figura 2.2: Sistema y observador de estado

Análogamente, para un sistema tipo Takagi-Sugeno de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \xi_i(\rho(t)) A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

un observador de tipo Luenberger tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \xi_i(\rho(t)) A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}(t)\end{aligned}\tag{2.47}$$

donde A_i y B_i son matrices que pertenecen a cada modelo local, $u(t)$ es la entrada de control, $\rho(t)$ es el parámetro variable, $i = 1, \dots, m$, donde m es el número de modelos, que provienen de las reglas que se obtienen a partir de las combinaciones posibles de los parámetros variables. $\xi_i(\rho(t))$ son funciones de membresía.

2.5. Observabilidad de sistemas Takagi-Sugeno

La observabilidad es la propiedad de un sistema que indica si el comportamiento dinámico de sus variables de estado puede deducirse a partir de las mediciones de sus entradas y salidas. Un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{2.48}$$

que tiene la forma del sistema (1.3) y (1.4) puede ser verificado si es observable como se hace en el capítulo 1. Si este es el caso, entonces es posible diseñar un observador de la forma

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}\tag{2.49}$$

para el cual se elige una matriz L , tal que la matriz $(A - LC)$ tenga los valores característicos deseables para que el error de estimación $e = x - \hat{x}$ tienda a cero, siendo \hat{x} los estados estimados.

Para los sistemas Lineales de Parámetros Variables (LPV), también se considera que la observabilidad se verifique con las condiciones necesarias y suficientes

de existencia, es decir, que se tenga una matriz de observabilidad: $\mathcal{O}(\rho(t))$. Esta debe cumplir con la condición de rango para todo valor posible del vector de parámetros variables $\rho(t)$.

En el caso de los sistemas Takagi-Sugeno, en Meza *et al.* (2017) se presenta un ejemplo de análisis de observabilidad. Para verificar la observabilidad del sistema Takagi-Sugeno, entonces, es necesario tomar en cuenta las $r - 1$ ($r =$ número de reglas difusas) regiones de interpolación y construir para cada región la correspondiente matriz $\mathcal{O}(x(t))$. Entonces, la observabilidad de los sistemas, dicen que se puede verificar con la condición de rango tomando en cuenta las funciones de activación, tal que $\xi_i(\rho(t)) + \xi_j(\rho(t)) = 1$ para $i, j = 1, \dots, r$ (cumpliéndose con la parte convexa) y para las regiones de interpolación se debe cumplir que la intersección de las funciones de activación: $\xi_i \cap \xi_j \neq \emptyset$. Entonces, considerando que $\xi_i(x(t)) = 1 - \xi_j(x(t))$ y la matriz de observabilidad difusa $\mathcal{O}(x(t))$, para las regiones de interpolación definidas por las reglas i y j , sólo dependerán del valor de la función de membresía $\xi_j(x(t))$. Por lo que, el sistema Takagi-Sugeno es difuso observable si las regiones ($r - 1$) de interpolación, tienen rango completo para $\xi_j(x(t)) \in [0 \ 1]$.

Capítulo 3

Síntesis de observadores para la estimación de fallas

En este capítulo se presenta los resultados principales de este trabajo de tesis, que consiste en el desarrollo y análisis de observadores diseñados y propuestos para la estimación de estados, entrada desconocida y fallas. La sección 3.1 muestra el esquema de estimación simultánea de estados y falla en el sistema. El esquema de estimación de falla propuesto está basado en la síntesis de un observador PI generalizado (aplicados a sistemas descriptivos Nan *et al.* (2014); Osorio-Gordillo *et al.* (2014a,b, 2015); Wang *et al.* (2014)) y los sistemas Takagi-Sugeno.

En la sección 3.2 se presenta el esquema de estimación simultánea de estados y fallas en actuador basado en observadores intervalares y observadores de entrada desconocida, desacoplando el vector de falla. El diseño de los observadores contempla incertidumbre paramétrica, ruido y perturbación acotada en un intervalo. Además, se toma en cuenta en el análisis del error de estimación que el observador sea robusto ante perturbaciones y ruido. Actualmente, los observadores intervalares han sido extendidos a los sistemas LPV (Efimov *et al.*, 2013b,c; Rotondo *et al.*, 2016; Zhang & Yang, 2017) y más recientemente a los sistemas Takagi-Sugeno (Rotondo *et al.*, 2016). La sección 3.3 muestra el diseño del observador de entrada desconocida para sistemas con incertidumbre paramétrica, este

observador estima falla en el actuador y en el sistema, considerando que el vector de falla sea aumentado.

La sección 3.4 presenta un observador no lineal para la estimación de entrada desconocida y estado de un sistema no lineal. El diseño del observador propuesto es un método basado en un observador no lineal simple con una forma fácil para obtener el valor de la ganancia del observador, este observador no requiere de transformar el sistema original si se cumplen ciertas condiciones. En la sección 3.5 se muestra el diseño de un banco de observadores, donde cada observador puede ser sensible a diferentes subconjuntos de fallas. Como se explica en Raïssi *et al.* (2010), la idea general es construir dos observadores, que respectivamente estiman el límite inferior y superior del vector de estado asumiendo que el sistema es cooperativo. Como el sistema no lineal original no es cooperativo, la ganancia del observador está diseñada de tal manera que la dinámica del error de observación se vuelve cooperativa. La inclusión de la incertidumbre en los parámetros del modelo. En caso de un observador intervalar permite la detección robusta de fallas.

3.1. Observador PI generalizado Takagi-Sugeno

Los siguientes resultados fueron publicados en Martínez-García *et al.* (2016). Este estimador propuesto considera el sistema Takagi-Sugeno con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \xi_i(\rho(t)) A_i x(t) + Bu(t) + G\theta(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ y $B \in \mathbb{R}^{n_x}$ son matrices que pertenecen a cada modelo local, $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_s}$ es la matriz de distribución de fallas del parámetro (una matriz conocida), $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ es la entrada de control, $\theta(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de falla en un parámetro aditivo, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida medible, $\rho(t)$

es el parámetro variable, $i = 1, \dots, m$, donde m es el número de modelos, que provienen de las reglas que se obtienen a partir de las combinaciones posibles de los parámetros variables.

$\xi_i(\rho(t))$ son funciones de membresía que se logran a partir de las funciones de ponderación. Las funciones de ponderación son dadas como (Johansen *et al.*, 2000; Lendek *et al.*, 2010; Takagi & Sugeno, 1985):

$$\begin{aligned}\eta_0^i &= \frac{\bar{\rho} - \rho(t)}{\bar{\rho} - \underline{\rho}} \\ \eta_1^i &= 1 - \eta_0^i\end{aligned}\quad (3.2)$$

Para la estimación de la falla en el parámetro $\theta(t)$, así como de los estados que no sean medibles del sistema Takagi-Sugeno, se considera el siguiente observador:

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t)) (N_i(\zeta(t) + TG\hat{\theta}(t)) + H_i v(t) + F_i y(t)) + Ju(t) + TG\hat{\theta}(t) \quad (3.3)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t)) (S_i(\zeta(t) + TG\hat{\theta}(t)) + L_i v(t) + M_i y(t)) \quad (3.4)$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + TG\hat{\theta}(t) + Qy(t) \quad (3.5)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Phi(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (3.6)$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del observador, $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$ es un vector auxiliar del observador, $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estimado del estado $x(t)$ y $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^s$ es el estimado de $\theta(t)$. Las matrices $N_i, H_i, F_i, J, S_i, L_i, M_i, T, Q$ y Φ son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas que son determinadas, tal que $\hat{x}(t)$ y $\hat{\theta}(t)$ convergen asintóticamente a $x(t)$ y $\theta(t)$, respectivamente. Para determinar el valor de cada matriz y asegurar la convergencia del observador, se establece el siguiente Teorema:

Teorema 1 *Existe un observador PI generalizado Takagi-Sugeno de la forma (3.3) -(3.6) que estima los estados y parámetros del sistema Takagi-Sugeno (2.1), tal que la dinámica del error de estimación es asintóticamente estable, si y solo si*

existe una matriz $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$ donde $X_1 > 0$, $X_2 > 0$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n_\theta} > 0$, tal que las siguientes desigualdades se satisfagan:

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix}^{T\perp} \begin{bmatrix} X_1 A_{i_1} + A_{i_1}^T X_1 & X_1 B_{i_1} + C^T X_2 \\ * & X_2 D + D^T X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix}^{T\perp T} < 0 \quad (3.7)$$

$$D^T X_2 + X_2 D < 0 \quad (3.8)$$

donde:

$$A_{i_1} = \begin{bmatrix} T A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad B_{i_1} = \begin{bmatrix} T A_i T G + T G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} C T G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [\Phi C \quad 0], \quad D = \Phi C T G$$

En el Teorema anterior se establecen las condiciones suficientes y necesarias para garantizar la existencia del observador, a continuación se presenta el diseño del observador.

Demostración 1 Se realiza el análisis de estabilidad del error de estimación, considerando que $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz paramétrica que define el error ϵ :

$$\epsilon(t) = \zeta(t) - T x(t) + T G \theta(t) \quad (3.9)$$

donde la derivada del error ϵ queda expresada como:

$$\dot{\epsilon}(t) = \dot{\zeta}(t) - T \dot{x}(t) + T G \dot{\theta}(t) \quad (3.10)$$

Sustituyendo la dinámica del observador $\dot{\zeta}(t)$, la dinámica del estado $\dot{x}(t)$ y del

parámetro $\hat{\theta}(t)$, la ecuación anterior queda como:

$$\dot{\epsilon}(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t)) [((N_i(\zeta(t) + TG\hat{\theta}(t)) + H_i v(t) + F_i y(t)) + Ju(t) + TG\hat{\theta}(t)) - T(A_i x(t) + Bu(t) + G\theta(t))] \quad (3.11)$$

Se requiere que la dinámica del error (3.11) quede en función de $\epsilon(t)$. Por lo tanto, a partir de la ec.(3.9) se sustituye el valor de $\zeta(t)$, obteniendo lo siguiente:

$$\zeta(t) = \epsilon(t) + T x(t) - T G \theta(t) \quad (3.12)$$

Ahora, susituyendo el valor de $\zeta(t)$ en la ecuación (3.11) resulta como:

$$\dot{\epsilon}(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t)) [N_i(\epsilon(t) + T x(t) - T G \theta(t)) + N_i T G \hat{\theta}(t) + H_i v(t) + (F_i C - T A_i) x(t) + (J + T B) u - T G \theta(t) + T G \hat{\theta}(t)]$$

al factorizar las variables, la ecuación anterior queda como:

$$\dot{\epsilon}(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t)) (N_i \epsilon(t) + H_i v(t) + (N_i T G + T G) \tilde{\theta}(t) + (J - T B) u(t) + (N_i T + F_i C - T A_i) x(t)) \quad (3.13)$$

Sabiendo que la derivada de la falla es igual a cero $\dot{\theta}(t) = 0$ (es decir, falla constante o incipiente de dinámica lenta) y que $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta(t)$, con el desacople de $\zeta(t)$, la ecuación del vector auxiliar (3.4) y la de los estados estimados (3.5), las ecuaciones son reescritas de la siguiente forma:

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t)) (S_i \epsilon(t) + L_i v(t) + (S_i T + M_i C) x(t) + S_i T G \tilde{\theta}(t)) \quad (3.14)$$

$$\hat{x}(t) = \epsilon(t) + (T + Q C) x(t) + T G \tilde{\theta}(t) \quad (3.15)$$

Hasta el momento las ecuaciones dinámicas del error de estimación son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) = & \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t))(N_i \epsilon(t) + H_i v(t) + (N_i T G + T G) \tilde{\theta}(t) + (J - T B) u(t) + \\ & (N_i T + F_i C - T A_i) x(t)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t))(S_i \epsilon(t) + L_i v(t) + (S_i T + M_i C) x(t) + S_i T G \tilde{\theta}(t)) \quad (3.17)$$

$$\hat{x}(t) = \epsilon(t) + (T + Q C) x(t) + T G \tilde{\theta}(t) \quad (3.18)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, es posible deducir que:

$$N_i T + F_i C - T A_i = 0 \quad (3.19)$$

$$S_i T + M_i C = 0 \quad (3.20)$$

$$J = T B \quad (3.21)$$

$$T + Q C = I_n \quad (3.22)$$

Las condiciones de arriba son utilizadas para solucionar las matrices del observador, como se muestra a continuación.

Parametrización de las matrices del observador

La parametrización de las matrices se hacen con la finalidad de encontrar soluciones para un conjunto de matrices que son dadas en las ecuaciones de la dinámica del error.

La condición (3.22) puede ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} = I \quad (3.23)$$

donde $\Sigma = \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}$

tal que:

$$[T \quad Q] = \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}^+ \Rightarrow [T \quad Q] = \Sigma^+ \quad (3.24)$$

o equivalentemente:

$$T = \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$Q = \Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

donde Σ^+ es la inversa generalizada de Σ , que se verifica que se cumpla con la siguiente condición de existencia $\Sigma \Sigma^+ \Sigma = \Sigma$.

Las ecuaciones (3.25) y (3.26) son sustituidas en (3.19). En consecuencia:

$$N_i + N_i Q C + F_i C - T A_i = 0 \quad (3.27)$$

donde en la ecuación (3.27) se puede definir a N_i como:

$$N_i = N_i Q C + F_i C - T A_i \quad (3.28)$$

$$N_i = K_i C - T A_i \quad (3.29)$$

donde

$$K_i = N_i Q + F_i \quad (3.30)$$

Para la condición (3.20) se sustituyen de igual forma las ecuaciones (3.25) y (3.26), resultando lo siguiente:

$$S_i - S_i Q C + M_i C = 0 \quad (3.31)$$

$$S_i = \underbrace{(S_i Q - M_i)}_{Z_i} C \quad (3.32)$$

por lo tanto

$$S_i = Z_i C \quad (3.33)$$

A partir de los resultados anteriores, F_i puede ser deducida como

$$F_i = N_i Q - K_i \quad (3.34)$$

La matriz M_i es deducida como:

$$M_i = S_i Q - Z_i \quad (3.35)$$

mientras que la matriz J es

$$J = T B \quad (3.36)$$

Las matrices Q, N_i y S_i son definidas en las ecuaciones (3.26), (3.29) y (3.33), respectivamente. Las matrices parámetro K_i, H_i, Z_i y L_i pueden ser obtenidas a partir del análisis de estabilidad. Entonces, las ecuaciones (3.16) y (3.17) pueden ser reescritas de la forma:

$$\dot{\epsilon}(t) = N_i \epsilon(t) + H_i v(t) + (N_i T G + T G) \tilde{\theta}(t) \quad (3.37)$$

$$\dot{v}(t) = S_i \epsilon(t) + L_i v(t) + S_i T G \tilde{\theta}(t) \quad (3.38)$$

o equivalente a

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_i T G + T G \\ S_i T G \end{bmatrix} \tilde{\theta}(t) \quad (3.39)$$

Del sistema de arriba, se sustituyen las matrices N_i y S_i con la finalidad de identificar las matrices desconocidas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}(t) \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i C - T A_i & H_i \\ Z_i C & L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_i C - T A_i) T G + T G \\ (Z_i C) T G \end{bmatrix} \tilde{\theta}(t) \quad (3.40)$$

Si hacemos una distribución de matrices, se puede identificar rápidamente la ma-

triz desconocida, tal como:

$$\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{i_1} & F_i & \mathbb{A}_{i_2} \end{bmatrix} \varphi + \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{i_1} & F_i & \mathbb{B}_{i_2} \end{bmatrix} \tilde{\theta} \quad (3.41)$$

donde

$$F_i = \begin{bmatrix} K_i & H_i \\ Z_i & L_i \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \epsilon \\ v \end{bmatrix}$$

Las matrices \mathbb{A}_{i_1} , \mathbb{A}_{i_2} , \mathbb{B}_{i_1} y \mathbb{B}_{i_2} se describen en la Ec. (3.7) del Teorema 1.

Tomando de nuevo la ecuación (3.18), que aún está en función de los estados, se introduce la siguiente ecuación $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, resultando lo siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \epsilon(t) + (T + QC)x(t) + TG\tilde{\theta}(t) \\ \hat{x}(t) &= \epsilon(t) + \underbrace{(T + QC)}_I x(t) + TG\tilde{\theta}(t) \\ \hat{x}(t) &= \epsilon(t) + x(t) + TG\tilde{\theta}(t) \\ \underbrace{\hat{x}(t) - x(t)}_{e(t)} &= \epsilon(t) + TG\tilde{\theta}(t) \\ e(t) &= \epsilon(t) + TG\tilde{\theta}(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para obtener el valor de $\dot{\tilde{\theta}}(t)$ en función del vector de $\epsilon(t)$ y $\tilde{\theta}(t)$, se considera la siguiente ecuación

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) - \dot{\theta}(t) \quad (3.43)$$

donde $\dot{\theta}(t) = 0$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}(t) &= \dot{\hat{\theta}}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= \Phi(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ \dot{\tilde{\theta}}(t) &= \Phi(C\hat{x}(t) - Cx(t)) \\ \dot{\tilde{\theta}}(t) &= \Phi C \underbrace{(\hat{x}(t) - x(t))}_{e(t)} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $e(t)$ de (3.42) en la ecuación de $\dot{\tilde{\theta}}(t)$, la ecuación resultante queda como:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \Phi C \epsilon + \Phi C T G \tilde{\theta}(t) \quad (3.44)$$

Para consideraciones posteriores del acoplamiento de falla al sistema de error, se toma en cuenta lo siguiente:

$$\Theta = [\Phi C \quad 0] \quad (3.45)$$

y

$$\mathbb{D} = \Phi C T G \quad (3.46)$$

Por lo tanto, $\dot{\tilde{\theta}}(t)$ se define como:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \Theta \epsilon(t) + \mathbb{D} \tilde{\theta}(t) \quad (3.47)$$

Ahora, es posible el acople de $\dot{\tilde{\theta}}(t)$ al sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \dot{\tilde{f}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{i_1} & F_i & \mathbb{A}_{i_2} & \mathbb{B}_{i_1} & F_i & \mathbb{B}_{i_2} \\ & \Theta & & & \mathbb{D} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \tilde{f} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Por motivos de simplificación, la ecuación anterior se escribe como:

$$\dot{\beta}(t) = \mathcal{A} \beta(t) \quad (3.49)$$

donde:

$$\dot{\beta}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \dot{\tilde{f}}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{i_1} & F_i & \mathbb{A}_{i_2} & \mathbb{B}_{i_1} & F_i & \mathbb{B}_{i_2} \\ & \Theta & & & \mathbb{D} & \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la dinámica del error del observador $\dot{\beta}(t) = \mathcal{A} \beta(t)$ necesita ser asintóticamente estable, tal que el $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Análisis de estabilidad

Para el análisis de estabilidad del observador se toma en cuenta la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$V(\beta(t)) = \beta(t)^T X \beta(t) \quad (3.50)$$

Tal función es definida positiva, es decir:

$$V(\beta(t)) > 0 \quad (3.51)$$

X es una matriz diagonal de matrices desconocidas

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

La derivada de la función de Lyapunov (3.50) a lo largo de la trayectoria de (3.49) está dada por:

$$\dot{V}(\beta(t)) = \beta(t)^T (\mathcal{A}^T X + X \mathcal{A}) \beta(t) \quad (3.53)$$

donde la derivada de la función es definida negativa, $\dot{V}(\beta(t)) < 0$, para toda $\beta(t) \neq 0$ si y sólo si

$$\mathcal{A}^T X + X \mathcal{A} < 0 \quad (3.54)$$

es decir

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{i_1} F_i \mathbb{A}_{i_2} & \mathbb{B}_{i_1} F_i \mathbb{B}_{i_2} \\ \Theta & \mathbb{D} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{a_1} F_i \mathbb{A}_{i_2} & \mathbb{B}_{i_1} F_i \mathbb{B}_{i_2} \\ \Theta & \mathbb{D} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.55)$$

Agrupando términos, la desigualdad resulta

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{A}_{i_1} + F_i \mathbb{A}_{i_2})^T X_1 + X_1 (\mathbb{A}_{i_1} + F_i \mathbb{A}_{i_2}) & X_1 (\mathbb{B}_{i_1} + F_i X_2) + \Theta^T X_2 \\ * & X_2 \mathbb{D} + \mathbb{D}^T X_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.56)$$

La desigualdad anterior se descompone de la siguiente manera de tal manera que pueda identificarse la matriz desconocida a calcular F_i :

$$\mathfrak{D}\mathfrak{M}_i\Xi + (\mathfrak{D}\mathfrak{M}_i\Xi)^T + D_i < 0 \quad (3.57)$$

donde

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{i_2} & \mathbb{B}_{i_2} \end{bmatrix}, \quad D_i = \begin{bmatrix} X_1\mathbb{A}_{i_1} + \mathbb{A}_{i_1}^T X_1 & X_1\mathbb{B}_{i_1} + C^T X_2 \\ * & X_2\mathbb{D} + \mathbb{D}^T X_2 \end{bmatrix}$$

$\mathfrak{M}_i = X_1 F_i$. Para ello se considera el lema de eliminación Skelton *et al.* (1998), tal que la desigualdad cuadrática (3.57) sea equivalente a:

$$\Xi^{T\perp} D_i \Xi^{T\perp T} < 0 \quad (3.58)$$

$$\mathfrak{D}^\perp D_i \mathfrak{D}^{\perp T} < 0 \quad (3.59)$$

con

$$\Xi_i^{T\perp} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_2 & \mathbb{B}_2 \end{bmatrix}^{T\perp}, \quad \mathfrak{D}^\perp = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

Si las condiciones anteriores se cumplen, la matriz F_i se obtiene como:

$$F_i = X^{-1}(\mathfrak{D}_r^+ \Gamma_i \Xi_l^+ + \mathcal{Z}_i - \mathfrak{D}_r^+ \mathfrak{D}_r \mathcal{Z}_i \Xi_l \Xi_l^+) \quad (3.60)$$

donde

$$\Gamma_i = -\mathcal{R}^{-1} \mathfrak{D}_l^T \mathcal{V}_i \Xi_r^T (\Xi_r \mathcal{V}_i \Xi_r^T)^{-1} + S S_i^{1/2} \mathcal{L} (\Xi_r \mathcal{V}_i \Xi_r^T)^{1/2} \quad (3.61)$$

$$\mathcal{V}_i = \mathfrak{D}_l \mathcal{R}^{-1} \mathfrak{D}_l^T - D_i > 0 \quad (3.62)$$

$$S S_i = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \mathfrak{D}_l^T [\mathcal{V}_i - \mathcal{V}_i \Xi_r^+ (\Xi_r \mathcal{V}_i \Xi_r^T)^{-1} \Xi_r \mathcal{V}_i] \mathfrak{D}_l \mathcal{R}^{-1} \quad (3.63)$$

Siendo \mathcal{Z}_i una matriz arbitraria, \mathcal{L} debe satisfacer $\|\mathcal{L}\| < 1$ y la matriz $\mathcal{R} > 0$ que provee la matriz $\mathcal{V}_i > 0$. Las matrices Ξ_r , Ξ_l , \mathfrak{D}_l , \mathfrak{D}_r son matrices de rango

completo que provienen de $\Xi = \Xi_l \Xi_r$ y $\mathcal{D} = \mathcal{D}_l \mathcal{D}_r$.

Usando la definición de las matrices $\Xi^{T\perp}$ y D_i , la desigualdad (3.58) es equivalente a la desigualdad (3.7), y usando las matrices \mathcal{D}^\perp y D_i , la desigualdad (3.59) es equivalente a (3.8). Del lema de eliminación, si las condiciones (3.58) y (3.59) son satisfechas, la matriz parámetro \mathfrak{M}_i es obtenida como (3.60)-(3.63). \square

El observador PI generalizado presenta una alternativa para la estimación de los estados y puede ser considerado más general que los observadores de Luenberger, los observadores PI y los observadores proporcionales. La ventaja de este observador es que solo requiere una programación práctica de las ganancias, resolviendo un conjunto de LMIs. Otra importante característica del observador propuesto, es que puede ser fácilmente extendido a otra clase de sistemas Takagi-Sugeno.

Para abordar la siguiente sección, se recomienda previamente leer el Anexo A.

3.2. Observador intervalar Takagi-Sugeno de entrada desconocida

Los siguientes resultados fueron publicados en Martínez-García *et al.* (2018). Para la síntesis de este observador, se considera un sistema Takagi-Sugeno discreto de la forma siguiente (Lendek *et al.*, 2011):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) [A_i x(k) + B_i u(k)] + E_f f(k) + G\theta(k) + E_w w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + E_v v(k) \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estado, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ es la entrada, $\theta(k) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ es el vector parámetro desacoplado del vector de estado, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ representa al vector de salida del sistema, $w(k)$ y $v(k)$ son las entradas exógenas como perturbación y ruido medible (ruido a la salida), respectivamente. Las matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $E_f \in \mathbb{R}^{n_x \times n_f}$ es una matriz de distribución de fallas, es decir, que se usa para denotar la influencia de las fallas en el sistema. $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_\theta}$, $E_w \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $E_v \in \mathbb{R}^{n_y \times n_v}$ y $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ son matrices constantes de dimensiones apropiadas. k denota el k -ésimo instante de tiempo discreto. Los valores exactos de $w(k)$ y $v(k)$ son desconocidos pero considerados dentro de un intervalo, es decir:

$$\underline{w}(k) \leq w(k) \leq \bar{w}(k) \quad (3.65)$$

$$|v(k)| \leq V(k) \quad (3.66)$$

$f(k) \in \mathbb{R}^{n_f}$ representa el vector de falla en actuador, que es definido como:

$$f(k+1) = f(k) + w_f(k) \quad (3.67)$$

donde $w_f(k) \in \mathbb{R}^{n_f}$ denota la variación que pudiera aparecer junto con la falla en actuador. Tal variación se considera que está dentro de un intervalo, como sigue:

$$\underline{w}_f(k) \leq w_f(k) \leq \bar{w}_f(k) \quad (3.68)$$

Para el sistema Takagi-Sugeno discreto (3.64), se considera el siguiente observador intervalar:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) [(A_i - \underline{L}_i C) \underline{\hat{x}}(k) + B_i u(k) + G\theta(k) + E_w \underline{w}(k) + E_f O \\ &\quad y(k+1) + \underline{L}_i y(k) - |\underline{L}_i| V(k) E_v - E_f O E_v V(k+1)] \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \overline{\hat{x}}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) [(A_i - \overline{L}_i C) \overline{\hat{x}}(k) + B_i u(k) + G\theta(k) + E_w \overline{w}(k) + E_f O \\ &\quad y(k+1) + \overline{L}_i y(k) + |\overline{L}_i| V(k) E_v - E_f O E_v V(k+1)] \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \underline{\hat{f}}(k) &= O[y(k+1) - C \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) (A_i \underline{\hat{x}}(k) + B_i u(k)) - CG\theta(k) - CE_w \\ &\quad \underline{w}(k) - E_v V(k+1) - \underline{w}_f(k)] \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \overline{\hat{f}}(k) &= O[y(k+1) - C \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) (A_i \overline{\hat{x}}(k) + B_i u(k)) - CG\theta(k) - CE_w \\ &\quad \overline{w}(k) + E_v V(k+1) - \overline{w}_f(k)] \end{aligned} \quad (3.72)$$

donde $\underline{\hat{x}}(k)$ and $\overline{\hat{x}}(k) \in \mathbb{R}_x^n$ son las estimaciones intervalares de $x(k)$, mientras que $\underline{\hat{f}}(k)$ y $\overline{\hat{f}}(k) \in \mathbb{R}^s$ son las estimaciones intervalares de $f(k)$. \underline{L}_i y \overline{L}_i son las ganancias del observador usadas para calcular las cotas inferior y superior de los estados estimados y las fallas, respectivamente.

El diseño del observador intervalar Takagi-Sugeno (3.69)-(3.72) para el sistema (3.64) es visto como un problema de estimación robusto H_∞ , con el objetivo de minimizar los efectos que provocan las entradas exógenas (consideradas como incertidumbres). Esto es resumido en el siguiente teorema.

Teorema 2 *Dado el observador intervalar de entrada desconocida Takagi-Sugeno (3.69) para el sistema (3.64), el error de estimación*

$$\underline{e}(k) = x(k) - \underline{\hat{x}}(k) \quad (3.73)$$

$$\overline{e}(k) = \overline{\hat{x}}(k) - x(k) \quad (3.74)$$

es asintóticamente estable y robusto ante entradas desconocidas, si existe una matriz simétrica $P = P^T > 0$, y una matriz $Q > 0$ y un escalar $\beta > 0$ (nivel de atenuación para la perturbación), tal que el siguiente conjunto de LMIs sea satisfecho

$$\phi_{i,j} = \begin{bmatrix} I - P & 0 & 0 & (QD_{i,j} - W_i\Gamma)^T \\ 0 & -\beta^2 I & 0 & (QE_w + W_iH_{i,h} + Q\Phi)^T \\ 0 & 0 & -\beta^2 I & Q^T\Phi \\ (*) & (*) & (*) & P - Q - Q^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.75)$$

$$QD_{i,j} - W_i\Gamma \geq 0 \quad (3.76)$$

$$\text{donde } E_w = \begin{bmatrix} E_w & 0 \\ 0 & E_w \end{bmatrix} \text{ y } H_{i,h} = \begin{bmatrix} -E_v & E_v & 0 \\ 0 & 0 & E_v & E_v \end{bmatrix}.$$

Entonces, las ganancias del observador intervalar Takagi-Sugeno de entrada desconocida (3.69) pueden ser calculadas de la siguiente manera:

$$\underline{L}_i = Q^{-1}\underline{W}_i \text{ y } \bar{L}_i = Q^{-1}\bar{W}_i \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.77)$$

Demostración 2 Se considera que el error de estimación es definido como:

$$\underline{e}(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (3.78)$$

$$\bar{e}(k) = \bar{\hat{x}}(k) - x(k) \quad (3.79)$$

La dinámica del error está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\underline{e}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \underline{e}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) (A_i - \underline{L}_i C) \underline{e}(k) - \underline{L}_i E_v v(k) + E_w (w(k) - \underline{w}(k)) \\ &+ |\underline{L}_i| E_v V(k) + E_f O E_v V(k+1) + E_f O E_v v(k+1) \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\bar{e}(k+1) = \bar{\hat{x}}(k+1) - x(k+1) \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}(k+1) = & \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) (A_i - \bar{L}_i C) \bar{e}(k) + \bar{L}_i E_v v(k) + E_w (\bar{w}(k) - w(k)) \\ & + |\bar{L}_i| E_v V(k) - E_f O E_v V(k+1) + E_f O E_v v(k+1) \end{aligned} \quad (3.83)$$

Ambas ecuaciones son escritas de la forma:

$$\varepsilon(k+1) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) G_i \varepsilon(k) + H_i \delta(k) + \Phi \delta(k+1) \quad (3.84)$$

con:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= \begin{bmatrix} \underline{e}(k) \\ \bar{e}(k) \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} A_i - \underline{L}_i C & 0 \\ 0 & A_i - \bar{L}_i C \end{bmatrix} \\ H_i &= \begin{bmatrix} E_w & -\underline{L}_i E_v & |\underline{L}_i| E_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [E_w \quad \bar{L}_i E_v \quad |\bar{L}_i| E_v] \end{bmatrix} \\ \delta(k) &= \begin{bmatrix} [w(k) - \underline{w}(k)] \\ v(k) \\ V(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{w}(k) - w(k)] \\ v(k) \\ V(k) \end{bmatrix}^T \\ \Phi &= \begin{bmatrix} [0 \quad E_f O E_v \quad E_f O E_v] & 0 \\ 0 & [0 \quad E_f O E_v \quad -E_f O E_v] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para el desempeño de la estimación intervalar, el error debe converger asintóticamente a los estados estimados. Para ello, se considera la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$V_1(\varepsilon(k)) = \varepsilon(k)^T P \varepsilon(k) \quad (3.85)$$

$$V_1(\varepsilon(k)) > 0 \quad (3.86)$$

$$P > 0$$

La función incremento a lo largo de la trayectoria es:

$$\Delta V_1(\varepsilon(k)) = V_1(\varepsilon(k+1)) - V_1(\varepsilon(k)) \quad (3.87)$$

Se requiere que la función incremento $\Delta V_1(\varepsilon(k))$ sea definida negativa, es decir:

$$\begin{aligned} \Delta V_1(\varepsilon(k)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i(\rho(k)) \xi_j(\rho(k)) (G_i \varepsilon(k) + H_i \delta(k) + \Phi \delta(k+1))^T P \\ (G_j \varepsilon(k) + H_j \delta(k) + \Phi \delta(k+1)) - \varepsilon(k)^T P \varepsilon(k) < 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

En consecuencia, la función incremento es:

$$\begin{aligned} \Delta V_1(\varepsilon(k)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i(\rho(k)) \xi_j(\rho(k)) \varepsilon(k)^T (G_i^T P G_j - P) \varepsilon(k) + 2 \varepsilon(k)^T (G_{i,j}^T P H_j \\ \delta(k) + G_{i,j}^T P \Phi \delta(k+1)) + \delta(k)^T H_i^T P H_j \delta(k) + 2 \delta(k+1)^T \\ (\Phi^T P H_{i,j} \delta(k)) + \delta(k+1)^T \Phi^T P \Phi \delta(k+1) < 0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Debido a la presencia de ruido y perturbación, el problema de estimación es formulado a baja frecuencias como un problema de estimación robusto H_∞ . Se considera la siguiente condición para minimizar los efectos del ruido y la perturbación:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0 \quad \text{para} \quad \delta(k) = 0 \quad (3.90)$$

$$\| \varepsilon(k) \|_2 < \beta \| \delta(k) \|_2 \quad (3.91)$$

$$\text{para} \quad \delta(k) \neq 0, \quad \varepsilon(0) = 0$$

donde β es un escalar para minimizar la perturbación.

Con la finalidad de satisfacer la condición (3.90) y (3.91), así como de determinar el valor de las ganancias $L_i, \forall i, j = 1, 2, \dots, m$, se define el siguiente criterio:

$$J_\infty^k = \varepsilon(k)^T \varepsilon(k) - \beta^2 \delta(k)^T \delta(k) + \Delta V_1(\varepsilon(k)) < 0 \quad (3.92)$$

Note que $\delta(k+1)$ es definido en (3.84) y es considerado en (3.92). En consecuencia, la desigualdad (3.92) es reescrita como:

$$\varepsilon(k)^T \varepsilon(k) - \beta^2 \delta(k)^T \delta(k) - \beta^2 \delta(k+1)^T \delta(k+1) + V_1(\varepsilon(k+1)) - V_1(\varepsilon(k)) < 0 \quad (3.93)$$

donde la condición es suficiente para encontrar una función Lyapunov que satisfaga las condiciones (3.136) y (3.137), tal que implique a (3.92). Ahora, el criterio (3.138) puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i(\rho(k)) \xi_j(\rho(k)) \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \delta(k) \\ \delta(k+1) \end{bmatrix}^T \phi_{i,j} \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \delta(k) \\ \delta(k+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.94)$$

$$\phi_{i,j} = \begin{bmatrix} G_i^T P G_j - P & G_i^T P H_j & G_i^T P \Phi \\ H_i^T P G_j & H_i^T P H_i - \beta^2 I & H_i^T P \Phi \\ \Phi^T P G_j & \Phi^T P H_i & \Phi^T P \Phi - \beta^2 I \end{bmatrix} < 0$$

Considerando el problema $G_i^T P G_j - P$ en la desigualdad (3.151), se usa el siguiente lema.

Lema 1 (de Oliveira et al., 1999) Existe una matriz simétrica $P = P^T > 0$, tal que

$$A^T P A - P < 0 \quad (3.95)$$

y una matriz $G > 0$, tal que la siguiente desigualdad implica a (3.95)

$$\begin{bmatrix} -P & A^T G^T \\ G A & P - G - G^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.96)$$

En consecuencia, este lema es usado para obtener una nueva desigualdad equiva-

lente a (3.94):

$$\begin{bmatrix} I - P & 0 & 0 & G_{i,j}^T Q^T \\ 0 & -\beta^2 I & 0 & H_{i,j}^T Q^T + \Phi^T Q^T \\ 0 & 0 & -\beta^2 I & Q^T \Phi \\ QG_{i,j} & QH_{i,j} + Q\Phi & Q\Phi & P - Q - Q^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.97)$$

donde $Q > 0$ y $P = P^T > 0$. Debido a la bilinealidad que existe entre $\underline{L}_i, \bar{L}_i$ y Q en $G_{i,j}$:

$$G_{i,j} = \begin{bmatrix} A_{i,j} - \underline{L}_i C & 0 \\ 0 & A_{i,j} - \bar{L}_i C \end{bmatrix} \text{ y } Q = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

las matrices se formulan de la siguiente forma:

$$D_{i,j} = \begin{bmatrix} A_{i,j} & 0 \\ 0 & A_{i,j} \end{bmatrix}, W_i = \begin{bmatrix} \underline{W}_i & 0 \\ 0 & \bar{W}_i \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

donde la bilinealidad es transformada en una linealidad considerando el siguiente cambio de variable $\underline{W}_i = Q\underline{L}_i$ y $\bar{W}_i = Q\bar{L}_i$. En consecuencia, el producto de matrices $QG_{i,j}$ puede darse ahora como

$$QD_{i,j} - W_i \Gamma < 0 \quad (3.98)$$

Debido a la doble suma que existe en la desigualdad (3.75), se toma en cuenta el siguiente lema, con la finalidad de relajar la solución.

Lema 2 (Tuan et al., 2001) *La desigualdad (3.75) se satisface si las siguientes condiciones se cumplen*

$$\phi_{i,i} < 0 \quad (3.99)$$

$$\frac{2}{m-1} \phi_{i,i} + \phi_{i,j} + \phi_{j,i} < 0 \quad (3.100)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, m, 1 \leq i \neq j \leq m$.

Entonces, resolviendo las desigualdades (3.76), (3.99) y (3.100), las ganancias del

observador (3.69) (que garantizan la positividad de la matriz intervalar) pueden ser calculadas como:

$$\underline{L}_i = Q^{-1} \underline{W}_i \quad (3.101)$$

$$\overline{L}_i = Q^{-1} \overline{W}_i \quad (3.102)$$

Los observadores intervalares son recomendados cuando existen incertidumbres, variables acotadas pero desconocidas e incertidumbres paramétricas (ejemplo ruido, disturbios, ruido e incertidumbre paramétrica). Los observadores de intervalo proporcionan una estimación superior e inferior (intervalo) de las variables que se desean estimar. Las estimaciones intervalares se pueden utilizar para incluir robustez en el sistema de diagnóstico de fallas. La ventaja de estos observadores es que, a pesar del no conocimiento de los valores exactos de incertidumbre, el observador proporciona un rango de estimación garantizado donde se ubica el valor de la variable.

3.3. Observador intervalar Takagi-Sugeno de entrada desconocida con incertidumbre

Para el diseño de este observador, se toma en cuenta el siguiente sistema discreto Takagi-Sugeno con incertidumbre paramétrica:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))(A_i + \Delta A_i)x(k) + B_i u(k) + E_f f(k) + G\theta(k) + E_w w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + E_v v(k) \end{aligned} \quad (3.103)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ corresponde al vector de estado, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ corresponde a la entrada, $f(k) \in \mathbb{R}^{n_f}$ es el vector de falla en actuador, $\theta(k) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ representa al vector de parámetro desconocido, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ representa al vector de perturbación y $v(k) \in \mathbb{R}^{n_v}$ corresponde al vector de ruido a la salida. A_i , B_i , G y C son matrices

de dimensiones apropiadas. E_f, E_w y E_v son matrices de distribución de falla, perturbación y ruido. Para llevar a cabo la estimación simultánea de fallas, el sistema (3.103) es reescrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))(A_i + \Delta A_i)x(k) + B_i u(k) + \begin{bmatrix} E_f & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} + E_w w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + E_v v(k) \end{aligned} \quad (3.104)$$

o bien:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))(A_i + \Delta A_i)x(k) + B_i u(k) + \bar{E} f_{\bar{E}}(k) + E_w w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + E_v v(k) \end{aligned} \quad (3.105)$$

Se toman en cuenta las siguientes restricciones y consideraciones para el sistema Takagi-Sugeno (3.103):

- La estimación del vector $f_{\bar{E}}(k)$ es simultánea, tal que, es igual a estimar $\hat{f}(k)$ y $\hat{\theta}(k)$ (falla en actuador y vector parámetro) donde el vector $f_{\bar{E}}(k)$ es:

$$f_{\bar{E}}(k+1) = f_{\bar{E}}(k) + w_{f_{\bar{E}}}(k) \quad (3.106)$$

donde $w_{f_{\bar{E}}}(k)$ es considerado como una variación en la falla de actuador.

- El vector de perturbación $w(k)$ es considerado como una entrada desconocida pero acotada:

$$\bar{w}(k) \leq w(k) \leq \underline{w}(k) \quad (3.107)$$

- El vector de ruido en la salida $v(k)$ es considerado como un vector de entrada desconocida pero acotado:

$$v(k) \leq |V(k)| \quad (3.108)$$

- La matriz incertidumbre ΔA_i también es considerada acotada:

$$\overline{\Delta A_i} \leq \Delta A_i \leq \underline{\Delta A_i} \quad (3.109)$$

Con las suposiciones anteriores, las estimaciones pueden ser obtenidas de la siguiente manera:

$$\overline{\hat{x}}(k) \leq x(k) \leq \underline{\hat{x}}(k) \quad (3.110)$$

$$\overline{\hat{f}_E}(k) \leq f_E(k) \leq \underline{\hat{f}_E}(k) \quad (3.111)$$

donde la estimación de $f_E(k)$, nos proporcionará la estimación de $\hat{f}(k)$ y $\hat{\theta}(k)$.

Diseño del observador

El vector de salida y en el instante $(k + 1)$ es:

$$y(k + 1) = Cx(k + 1) + E_v v(k + 1) \quad (3.112)$$

Sustituyendo la ecuación de estado del sistema (3.104) en el vector de salida, la siguiente ecuación resulta:

$$y(k + 1) = C \left(\sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))(A_i + \Delta A_i)x(k) + B_i u(k) + \overline{E} f_E(k) + E_w w(k) \right) + E_v v(k + 1). \quad (3.113)$$

A partir de la ecuación (3.113) y haciendo las operaciones pertinentes, ahora es posible obtener el vector de la falla, como sigue:

$$C \overline{E} f_E(k) = y(k + 1) - C \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))(A_i + \Delta A_i)x(k) - C \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))B_i u(k) - C E_w w(k) - E_v v(k + 1) \quad (3.114)$$

tal que, la siguiente condición sea satisfecha Hui & Žak (2005):

$$\text{rank}(C\bar{E}f_{\bar{E}}) = \text{rank}(\bar{E}f_{\bar{E}}) = n_{\theta} + n_f \quad (3.115)$$

Donde el producto de la condición (3.115) puede ser calculado de la forma siguiente

$$O = (C\bar{E}f_{\bar{E}})^+ \quad (3.116)$$

tal que $(C\bar{E}f_{\bar{E}})^+(C\bar{E}f_{\bar{E}}) = I_{n_f}$ sea satisfecha. Donde el valor de O es obtenido como:

$$O = \left[(C\bar{E}f_{\bar{E}})^T C\bar{E}f_{\bar{E}} \right]^{-1} (C\bar{E}f_{\bar{E}})^T \quad (3.117)$$

El vector de falla aumentado $f(k)$ corresponde a:

$$f(k) = O \left(y(k+1) - C \left[\sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))(A_i + \Delta A_i)x(k) - B_i u(k) - E_w w(k) \right] - E_v v(k+1) \right) \quad (3.118)$$

Al reemplazar el vector de falla en el sistema (3.105), el nuevo sistema resulta:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))[(A_i + \Delta A_i)x(k) + B_i u(k)] + E_w w(k) + \bar{E}Oy(k+1) - \bar{E}OE_v v(k+1) \quad (3.119)$$

$$y(k) = Cx(k) + E_v v(k)$$

con

$$\begin{aligned} A_i &= (I - E_f OC)A_i & \Delta A_i &= (I - E_f OC)\Delta A_i \\ B_i &= (I - E_f OC)B_i & E_w &= (I - E_f OC)E_w \end{aligned}$$

Con base al nuevo sistema (3.119), la estructura del observador intervalar está

dada como sigue (Efimov *et al.*, 2013a):

$$\begin{aligned}
 \underline{\hat{x}}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))(I - \overline{E}OC)[(A_i - \underline{L}_i C)\underline{\hat{x}}(k) + B_i u(k) + \underbrace{\Delta A_i x(k)}_{\Delta A_i x(k)} + \underline{L}_i y(k) \\
 &\quad - |\underline{L}_i| E_v V(k) + E_w \underline{w}(k) + \overline{E}O y(k+1) - |\underline{L}_i| E_v V(k+1)] \\
 \overline{\hat{x}}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))[(A_i - \overline{L}_i C)\overline{\hat{x}}(k) + B_i u(k) + \overbrace{\Delta A_i x(k)}^{\Delta A_i x(k)} + \overline{L}_i y(k) \\
 &\quad + |\overline{L}_i| E_v V(k) + E_w \overline{w}(k) + \overline{E}O y(k+1) + |\overline{L}_i| E_v V(k+1)] \\
 \underline{\hat{f}}(k) &= O[y(k+1) - C \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))(A_i \underline{\hat{x}}(k) + B_i u(k) + \underbrace{\Delta A_i x(k)}_{\Delta A_i x(k)}) - C E_w \underline{w}(k) \\
 &\quad - E_v V(k+1) - \underline{w}_f(k)] \\
 \overline{\hat{f}}(k) &= O[y(k+1) - C \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))(A_i \overline{\hat{x}}(k) + B_i u(k) + \underbrace{\Delta A_i x(k)}_{\Delta A_i x(k)}) - C E_w \overline{w}(k) \\
 &\quad + E_v V(k+1) - \overline{w}_f(k)]
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

con

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\Delta A_i x(k)}_{\Delta A_i x(k)} &= \underline{A}_i^+ \underline{x}^+ - \overline{A}_i^+ \underline{x}^- - \underline{A}_i^- \overline{x}^+ + \overline{A}_i^- \overline{x}^- \\
 \overbrace{\Delta A_i x(k)}^{\Delta A_i x(k)} &= \overline{A}_i^+ \overline{x}^+ - \underline{A}_i^+ \overline{x}^- - \overline{A}_i^- \underline{x}^+ + \underline{A}_i^- \underline{x}^-
 \end{aligned}$$

donde $\underline{\hat{x}}(k)$ and $\overline{\hat{x}}(k) \in \mathbb{R}_x^n$ corresponden a las estimaciones intervalares de $x(k)$, mientras que $\underline{\hat{f}}(k)$ and $\overline{\hat{f}}(k) \in \mathbb{R}^s$ son las estimaciones intervalares de $f_E(k)$. Las ganancias del observador para calcular la cota inferior y superior de la estimación simultánea son \underline{L}_i y \overline{L}_i .

Con la finalidad de diseñar el observador intervalar de entrada desconocida (3.120), que asegure la estimación simultánea de los intervalos definidos en (3.110) y (3.111), se presenta el siguiente teorema que considera el análisis de estabilidad y robustez ante la presencia de entradas desconocidas.

Teorema 3 Dado los escalares $\epsilon_1 > 0$, $\gamma > 0$ y $\beta > 0$ el sistema es asintóticamente estable y robusto a los efectos de la entrada desconocida (tal como disturbio o ruido, considerados acotados), si existe una matriz simétrica $P = P^T > 0$ y $Q > 0$ (con la finalidad de que sea capaz de obtener los valores de las ganancias \underline{L}_i y \bar{L}_i), tal que el siguiente conjunto de LMIs sea satisfecho

$$\phi_{i,j} = \begin{bmatrix} I - P + \gamma\eta^2 I & 0 & 0 & 0 & (QD_{i,j} - W_i\Gamma)^T \\ 0 & \gamma I - \epsilon_1 P & PH_i & P\Phi & 0 \\ 0 & H_i P & -\beta^2 I & 0 & H_i^T Q^T + \Phi^T Q^T \\ 0 & \Phi P & 0 & -\beta^2 I & Q^T \Phi \\ (*) & (*) & (*) & (*) & P - Q - Q^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.121)$$

$$QD_{i,j} - W_i\Gamma > 0 \quad (3.122)$$

$$\phi_{i,i} < 0 \quad (3.123)$$

$$\frac{2}{m-1}\phi_{i,i} + \phi_{i,j} + \phi_{j,i} < 0 \quad (3.124)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, m$, $1 \leq i \neq j \leq m$, es decir, para todo los subsistemas.

Resolviendo las desigualdades (3.122), (3.123) y (3.124) las ganancias del observador Takagi-Sugeno intervalar de entrada desconocida son obtenidas como

$$\underline{L}_i = Q^{-1}\underline{W}_i \quad \text{and} \quad \bar{L}_i = Q^{-1}\bar{W}_i \quad (3.125)$$

Demostración 3.- Las ecuaciones del error de estimación son:

$$\begin{aligned} \underline{e}(k) &= x(k) - \underline{\hat{x}}(k) \\ \bar{e}(k) &= \bar{\hat{x}}(k) - x(k) \end{aligned} \quad (3.126)$$

Sustituyendo la ecuación del estado (3.105) y la ecuación del estado estimado

(3.120), se obtienen las siguientes ecuaciones del error:

$$\begin{aligned} \underline{e}(k+1) = & \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) (A_i + \Delta A_i) x(k) + B_i u(k) + E_w w(k) + \bar{E} O y(k+1) \\ & - \bar{E} O E_v v(k+1) - \left(\sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) (I - \bar{E} O C) [(A_i - \underline{L}_i C) \hat{x}(k) + B_i u(k) \right. \\ & \left. + \underbrace{\Delta A_i x(k)} + \underline{L}_i y(k) - |\underline{L}_i| E_v V(k) + E_w \underline{w}(k) + \bar{E} O y(k+1) - |\underline{L}_i| E_v V(k+1)] \right) \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}(k+1) = & \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) (I - \bar{E} O C) [(A_i - \bar{L}_i C) \hat{x}(k) + B_i u(k) + \underbrace{\Delta A_i x(k)} + \bar{L}_i y(k) \\ & + |\bar{L}_i| E_v V(k) + E_w \bar{w}(k) + \bar{E} O y(k+1) + |\bar{L}_i| E_v V(k+1)] - \left(\sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) (A_i \right. \\ & \left. + \Delta A_i) x(k) + B_i u(k) + E_w w(k) + \bar{E} O y(k+1) - \bar{E} O E_v v(k+1) \right) \end{aligned} \quad (3.128)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \underline{e}(k+1) = & \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) (A_i - \underline{L}_i C) \underline{e}(k) + \Delta A_i x(k) - \underbrace{\Delta A_i x(k)} + E_w (w(k) - \underline{w}(k)) \\ & + |\underline{L}_i| E_v V(k) - \underline{L}_i E_v v(k) - \bar{E} O E_v v(k+1) + \underline{L}_i E_v V(k+1) \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}(k+1) = & \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) (A_i - \bar{L}_i C) \bar{e}(k) + \underbrace{\Delta A_i x(k)} - \Delta A_i x(k) + E_w (\bar{w}(k) - w(k)) \\ & + \bar{L}_i E_v v(k) + |\bar{L}_i| E_v V(k) - \bar{E} O E_v v(k+1) + \bar{L}_i E_v V(k+1) \end{aligned} \quad (3.130)$$

Por conveniencia, las ecuaciones del error de estimación (3.129) y (3.130) se re-escriben como sigue:

$$\xi(k+1) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) G_i \varepsilon(k) + \Theta_{\Delta A} + H_i \delta(k) + \Phi \delta(k+1) \quad (3.131)$$

$$\varepsilon(k) = \begin{bmatrix} \underline{e}(k) \\ \bar{e}(k) \end{bmatrix}, G_i = \begin{bmatrix} A_i - \underline{L}_i C & 0 \\ 0 & A_i - \bar{L}_i C \end{bmatrix}, \Theta_{\Delta A} = \begin{bmatrix} \Delta A_i x(k) - \underline{\Delta A}_i x(k) \\ \bar{\Delta A}_i x(k) - \Delta A_i x(k) \end{bmatrix}$$

$$H_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_w & -\underline{L}_i E_v & |\underline{L}_i| E_v \\ 0 & & \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} E_w & \bar{L}_i E_v & |\bar{L}_i| E_v \end{bmatrix} & \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\bar{E} O E_v & E_v \\ 0 & & \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & -\bar{E} O E_v & E_v \end{bmatrix} & \end{bmatrix} \delta(k) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k) - \underline{w}(k) \\ v(k) \\ V(k) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{w}(k) - w(k) \\ v(k) \\ V(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T$$

Para el análisis de estabilidad, se propone la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$V_1(\varepsilon(k)) = \varepsilon(k)^T P \varepsilon(k) > 0 \quad \text{with} \quad P = P^T > 0 \quad (3.132)$$

donde la función incremento es:

$$\Delta V_1(\varepsilon(k)) = V_1(\varepsilon(k+1)) - V_1(\varepsilon(k)) \quad (3.133)$$

$$\Delta V_1(\varepsilon(k)) = \varepsilon(k+1)^T P \varepsilon(k+1) - \varepsilon(k)^T P \varepsilon(k)$$

La función incremento $\Delta V_1(\varepsilon(k)) \leq 0$ se define como

$$\Delta V_1(\varepsilon(k)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i(\rho(k)) \xi_j(\rho(k)) (G_i \varepsilon(k) + \Theta_{\Delta A} + H_i \delta(k) + \Phi \delta(k+1))^T P$$

$$(G_i \varepsilon(k) + \Theta_{\Delta A} + H_i \delta(k) + \Phi \delta(k+1)) - \varepsilon(k)^T P \varepsilon(k) \leq 0 \quad (3.134)$$

Sustituyendo las ecuaciones de estado en la función incremento (3.134) y hacien-

do las operaciones pertinentes, la ecuación (3.134) resulta como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i(\rho(k)) \xi_j(\rho(k)) \varepsilon(k)^T (G_i^T P G_j - P) \varepsilon(k) + \Theta_{\Delta A}^T P \Theta_{\Delta A} + \delta(k)^T H_i^T P H_j \delta(k) \\ & + \delta(k+1)^T \Phi^T P \Phi \delta(k+1) + 2\varepsilon(k)^T (G_{i,j}^T P \Theta_{\Delta A} + G_{i,j}^T P H_j \delta(k) + G_{i,j}^T P \Phi \delta(k+1)) \\ & + 2\Theta_{\Delta A}^T (P H_j \delta(k) + P \Phi \delta(k+1)) + 2\delta(k)^T (H_{i,j}^T P \Phi \delta(k+1)) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.135)$$

El observador intervalar de entrada desconocida Takagi-Sugeno toma en cuenta el criterio H_∞ para el problema de estimación robusta en presencia de señales de ruido y perturbación. El criterio considera la siguiente condición para minimizar los efectos de las señales exógenas:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0 \\ & \text{para } \delta(k) = 0 \quad \forall k \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon(k)\|_2 < \beta \|\delta(k)\|_2 \\ & \text{para } \delta(k) \neq 0, \quad \xi(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.137)$$

donde $\beta = \begin{bmatrix} \psi \\ \alpha \end{bmatrix}$ corresponde a un vector que ayuda a minimizar la perturbación y el ruido. La función incremento es aumentada con la condición (3.137) del criterio H_∞ , en consecuencia, la función incremento queda de la forma siguiente:

$$V_1(\varepsilon(k+1)) - V_1(\varepsilon(k)) + \varepsilon(k)^T \varepsilon(k) - \beta^2 \delta(k)^T \delta(k) - \beta^2 \delta(k+1)^T \delta(k+1) \leq 0 \quad (3.138)$$

Además de considerar la condición del criterio (3.137) la siguiente condición se toma en cuenta $\Delta V(\varepsilon(k)) \leq (\epsilon_1 P - \gamma) \Delta A_i(k)$ para la convergencia del observador,

en consecuencia, la función incremento (3.138) resulta como:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i(\rho(k)) \xi_j(\rho(k)) \varepsilon(k)^T (G_i^T P G_j - P + I) \varepsilon(k) + \Theta_{\Delta A}^T P \Theta_{\Delta A} + \delta(k)^T H_i^T P H_j \delta(k) \\
 & + \delta(k+1)^T \Phi^T P \Phi \delta(k+1) + 2\varepsilon(k)^T (G_{i,j}^T P \Theta_{\Delta A} + G_{i,j}^T P H_j \delta(k) + G_{i,j}^T P \Phi \delta(k+1)) \\
 & + 2\Theta_{\Delta A}^T (P H_j \delta(k) + P \Phi \delta(k+1)) + 2\delta(k)^T (H_{i,j}^T P \Phi \delta(k+1)) - \beta^2 \delta(k)^T \delta(k) \\
 & - \beta^2 \delta(k+1)^T \delta(k+1) + \gamma \Theta_{\Delta A}^T \Theta_{\Delta A} - \epsilon_1 \Theta_{\Delta A}^T P \Theta_{\Delta A} \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.139}$$

En la ecuación (3.139) se puede ver que $\Theta_{\Delta A}^T P \Theta_{\Delta A}$ es una función global Lipschitz, tal que:

$$f(\underline{x}, \bar{x}) = (\underline{A}_i^+ - \bar{A}_i^+) \underline{x}^+ - \underline{A}_i^- \bar{x}^+ + \bar{A}_i^- \bar{x}^- \tag{3.140}$$

$$\bar{f}(\underline{x}, \bar{x}) = (\bar{A}_i^+ - \underline{A}_i^+) \bar{x}^- - \bar{A}_i^- \underline{x}^+ + \underline{A}_i^- \underline{x}^- \tag{3.141}$$

$$|f(\underline{x}, \bar{x})| \leq \|\underline{\Delta A}_i^+ - \bar{\Delta A}_i^+\|_2 |\underline{x}| + (\|\underline{\Delta A}_i^-\|_2 + \|\bar{\Delta A}_i^-\|_2) |\bar{x}| \tag{3.142}$$

$$|\bar{f}(\underline{x}, \bar{x})| \leq \|\bar{\Delta A}_i^+ - \underline{\Delta A}_i^+\|_2 |\bar{x}| + (\|\bar{\Delta A}_i^-\|_2 + \|\underline{\Delta A}_i^-\|_2) |\underline{x}| \tag{3.143}$$

donde las funciones resultantes son dadas por:

$$\eta = 2(\|\underline{\Delta A}_i^+ - \bar{\Delta A}_i^+\|_2 + \|\underline{\Delta A}_i^-\|_2 + \|\bar{\Delta A}_i^-\|_2) \tag{3.144}$$

Ahora con η definida, la función incremento (3.139) resulta como:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i(\rho(k)) \xi_j(\rho(k)) \varepsilon(k)^T (G_i^T P G_j - P + I + \gamma \eta^2 I) \varepsilon(k) + \delta(k)^T H_i^T P H_j \delta(k) \\
 & + \delta(k+1)^T \Phi^T P \Phi \delta(k+1) + 2\varepsilon(k)^T (G_{i,j}^T P \Theta_{\Delta A} + G_{i,j}^T P H_j \delta(k) + G_{i,j}^T P \Phi \delta(k+1)) \\
 & + 2\Theta_{\Delta A}^T (P H_j \delta(k) + P \Phi \delta(k+1)) + 2\delta(k)^T (H_{i,j}^T P \Phi \delta(k+1)) - \beta^2 \delta(k)^T \delta(k) \\
 & + \gamma \Theta_{\Delta A}^T \Theta_{\Delta A} - \epsilon_1 \Theta_{\Delta A}^T P \Theta_{\Delta A} - \beta^2 \delta(k+1)^T \delta(k+1) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.145}$$

La ecuación anterior (3.145) se lleva a una forma LMI, como se muestra a conti-

nuación:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \Theta_{\Delta A} \\ \delta(k) \\ \delta(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_i^T P G_j - P + \eta^2 I + I & G_{i,j}^T P & G_i^T P H_i & G_i^T P \Phi \\ & P G_{i,j} & \gamma I - \epsilon_1 P & P H_i \\ & H_i P G_i & H_i P & H_i^T P H_i - \beta^2 I \\ & \Phi P G_i & \Phi P & \Phi P H_i \\ & & & \Phi P \Phi - \beta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \Theta_{\Delta A} \\ \delta(k) \\ \delta(k+1) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.146)$$

Debido al problema que existe $(G_i^T P G_j)$ en la desigualdad (3.146), se realiza una distribución de matrices:

$$\begin{bmatrix} I - P + \eta^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I - \epsilon_1 P & P H_i & P \Phi \\ 0 & H_i^T P & -\beta^2 I & 0 \\ 0 & \Phi^T P & 0 & -\beta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i^T P G_j & G_{i,j}^T P & G_i^T P H_i & G_i^T P \Phi \\ P G_{i,j} & 0 & 0 & 0 \\ H_i^T P G_i & 0 & H_i^T P H_i & H_i^T P \Phi \\ \Phi^T P G_i & 0 & \Phi^T P H_i & \Phi^T P \Phi \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.147)$$

con la finalidad de identificar las matrices conocidas y desconocidas. Posteriormente, se trabaja con la matriz de matrices desconocidas, considerando el siguiente lema para relajar el problema de la desigualdad (3.146)

Lema 3 de Oliveira et al. (1999) Existe una matriz simétrica $P > 0$ tal que

$$A^T P A - P < 0 \quad (3.148)$$

y una matriz G , tal que la siguiente desigualdad implica a (3.148)

$$\begin{bmatrix} -P & A^T G^T \\ G A & P - G - G^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.149)$$

En consecuencia, la desigualdad (3.146) es equivalente a

$$\begin{bmatrix} I - P + \eta^2 I & 0 & 0 & 0 & G_{i,j}^T Q^T \\ 0 & \gamma I - \epsilon_1 P & P H_i & P \Phi & 0 \\ 0 & H_i^T P & -\beta^2 I & 0 & H_i^T Q^T + \Phi^T Q^T \\ 0 & \Phi^T P & 0 & -\beta^2 I & \Phi^T Q^T \\ Q G_{i,j} & 0 & Q H_i + Q \Phi & Q \Phi & P - Q - Q^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.150)$$

donde la desigualdad (3.150) es igual a $\phi_{i,j}$, por lo tanto la desigualdad, puede ser escrita como

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i(\rho(k)) \xi_j(\rho(k)) \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \Theta_{\Delta A} \\ \delta(k) \\ \delta(k+1) \end{bmatrix}^T \phi_{i,j} \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \Theta_{\Delta A} \\ \delta(k) \\ \delta(k+1) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.151)$$

En la desigualdad (3.151) existe una bilinealidad entre las matrices $G_{i,j}Q$, donde cada una de las matrices contienen lo siguiente:

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} A_{i,j} + \overline{\Delta A}_{i,j}^+ & 0 \\ 0 & A_{i,j} + \overline{\Delta A}_{i,j}^+ \end{bmatrix}}_{G_{i,j}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{L}_i & 0 \\ 0 & \overline{L}_i \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}}_{\Gamma} \right) \overbrace{\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}}^Q \leq 0 \quad (3.152)$$

Debido a la bilinealidad con las matrices $\underline{L}_i, \overline{L}_i$ y Q , es posible transformar a una linealidad, con el siguiente cambio de variable $\underline{W}_i = Q\underline{L}_i$ y $\overline{W}_i = Q\overline{L}_i$. En consecuencia, la desigualdad de lazo cerrado puede ser descrita como:

$$QG_{i,j} - W_i\Gamma < 0 \quad (3.153)$$

donde

$$W_i = \begin{bmatrix} \underline{W}_i & 0 \\ 0 & \overline{W}_i \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

Resolviendo la desigualdad (3.121), (3.123) y (3.124) (estas dos últimas desigualdades son el resultado de usar el lema de Tuan *et al.* (2001), que ayudan a relajar el problema de doble suma) es posible determinar el valor de cada una de las ganancias del observador para estimar ambas franjas que definen los intervalos.

□

3.4. Observador no lineal para la estimación de fallas y de entrada desconocida

Los siguientes resultados fueron publicados en Martínez-García *et al.* (2019). Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + g(y(t), u(t)) + F\theta \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3.155}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $g(y(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n$ es una función que depende de la entrada del sistema $u(t)$ y la salida $y(t)$. A , F y C son matrices constantes de dimensiones apropiadas y el vector $\theta \in \mathbb{R}^d$ contiene señales desconocidas constantes o con ligera variación (por ejemplo fallas incipientes o parámetros del sistema), es decir $\dot{\theta} \approx 0$. Para el diseño del observador, se considera la siguiente suposición:

Suposición 1 *Para la existencia del observador, las siguientes condiciones de rango deben cumplirse*

- $\text{rango}(F) = d$.
 - $\text{rango}(O) = n$,
- donde $O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

La primera condición de rango $\text{rank}(F) = d$ implica que el vector $\theta \in \mathbb{R}^d$ puede ser estimado. La siguiente condición $\text{rank}(O) = n$ define si el sistema (3.155) es observable.

En consecuencia, el siguiente observador puede ser considerado para la esti-

mación simultánea de estados $x(t)$ y parámetros contenidos en el vector $\theta(t)$.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + g(y, u) + F\hat{\theta} + K_1(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{\theta}} &= K_2(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}\tag{3.156}$$

donde $\hat{x}(t)$ corresponde a la estimación de $x(t)$, $\hat{y}(t)$ es la estimación de la salida del sistema $y(t)$, $\hat{\theta}$ corresponde a la estimación de $\theta(t)$. K_1 y K_2 son las ganancias del observador.

Teorema 4 *Si la suposición (1) se satisface, es posible diseñar un observador no lineal tipo Luenberger (3.156) para la estimación del vector de estados y las entradas desconocidas contenidas en el vector θ para el sistema no lineal de la forma (3.155) si existen dos matrices K_1 y K_2 tal que:*

$$A_s = \begin{pmatrix} A - K_1C & F \\ -K_2C & 0 \end{pmatrix}$$

y A_s sea una matriz estable.

Demostración 4 Se define el error de estimación:

$$e_x = x - \hat{x}\tag{3.157}$$

$$e_\theta = \theta - \hat{\theta}\tag{3.158}$$

donde la dinámica del error de estimación está dada por:

$$\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}}\tag{3.159}$$

$$\dot{e}_\theta = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}}\tag{3.160}$$

Al sustituir cada una de las derivadas, la dinámica del error de estimación resulta

como:

$$\dot{e}_x = (A - K_1 C)e_x + F e_\theta \quad (3.161)$$

$$\dot{e}_\theta = -K_2 C e_x \quad (3.162)$$

Las ecuaciones (3.159) y (3.160) pueden ser escritas de una forma compacta de la siguiente manera:

$$\dot{e} = A_s e \quad (3.163)$$

donde

$$A_s = \begin{pmatrix} A - K_1 C & F \\ -K_2 C & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_x \\ e_\theta \end{bmatrix}$$

Si K_1 y K_2 se eligen tal que A_s sea una matriz estable, entonces el sistema (3.163) es estable, es decir, el observador converge.

La matriz (3.157) puede ser reescrita como:

$$A_s = (\mathbb{A} - \mathbb{K}\mathbb{C}) \quad (3.164)$$

donde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{C} = (C \quad 0)$$

La ecuación (3.164) puede fácilmente resolverse calculando el vector de las ganancias del observador \mathbb{K} por cualquier algoritmo para la localización de polos. La convergencia asintótica del observador, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ se garantiza si los eigenvalores de la matriz A_s tienen parte real positiva, donde e es el error de estimación definido en la Ec. (3.163).

Este observador propuesto está basado en un método no lineal simple y práctico, con la finalidad de obtener las ganancias del observador mediante el procedimiento de la localización de polos. Además, el modelo matemático no requiere transformación, preservando las dinámicas no lineales del modelo matemático original. Una limitación de este observador es que puede solo aplicarse a sistemas

con la estructura tratada en esta sección. Todas las variables en el vector no lineal deben ser medibles.

3.5. Observadores intervalares para la estimación de fallas

Los siguientes resultados fueron publicados en Martínez-García *et al.* (2017). Se considera el siguiente sistema discreto Takagi-Sugeno con incertidumbre paramétrica:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) [(A_i + \Delta A_i)x(k) + B_i u(k)] + E_a f_a(k) + E_w w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + E_s f_s(k) + E_v v(k) \end{aligned} \quad (3.165)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estado, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de la entrada, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de salida medida, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ representa al vector de entradas exógenas, $v(k) \in \mathbb{R}^{n_v}$ es el ruido a la salida, E_a es la matriz de distribución de la fallas en actuador $f_a(k) \in \mathbb{R}^{n_f}$, análogicamente hablando, consideramos a la E_s como una matriz de distribución de fallas en sensor $f_s(k)$. A_i , B_i y C son matrices de dimensiones apropiadas con parámetros nominales, E_w y E_v son matrices asociadas a las entradas exógenas y ruido. ΔA_i representa a la incertidumbre paramétrica que se asume desconocida. A continuación, se toma en cuenta la siguiente suposición:

- La incertidumbre paramétrica se considera desconocida pero acotada, es decir:

$$\underline{\Delta A}_i \leq \Delta A_i \leq \overline{\Delta A}_i \quad (3.166)$$

- Las entradas exógenas como $w(k)$, también se consideran acotada:

$$\underline{w}(k) \leq w(k) \leq \overline{w}(k) \quad (3.167)$$

- El ruido a la salida $v(k)$ se asume que es acotado de la siguiente manera:

$$|v(k)| \leq V(k) \quad (3.168)$$

Para el esquema de estimación de fallas, se propone el siguiente diseño.

Formulación del problema

El esquema propuesto de estimación de falla se basa en diseñar un observador intervalar Takagi-Sugeno para el sistema con incertidumbre (3.165) considerando un vector de estado aumentado, es decir, se considera el vector de fallas en sensor f_s y actuador f_a , como sigue:

$$\check{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ f_a(k) \\ f_s(k) \end{bmatrix} \quad (3.169)$$

El observador intervalar Takagi-Sugeno proporcionará la estimación intervalar del estado aumentado $\check{x}(k)$:

$$\hat{\underline{x}} \leq \check{x}(k) \leq \hat{\overline{x}}(k) \quad (3.170)$$

es decir, de los estados y de las fallas:

$$\hat{\underline{x}}(k) \leq \check{x}(k) \leq \hat{\overline{x}}(k) \quad (3.171)$$

$$\hat{\underline{f}}_a(k) \leq \check{f}_a(k) \leq \hat{\overline{f}}_a(k) \quad (3.172)$$

$$\hat{\underline{f}}_s(k) \leq \check{f}_s(k) \leq \hat{\overline{f}}_s(k) \quad (3.173)$$

Se considera que la falla en actuador es modelada como:

$$f_a(k+1) = f_a(k) + w_a(k) \quad (3.174)$$

donde $w_a(k) \in \mathbb{R}^f$ se considera como una variación acotada de la falla en los actuadores:

$$\underline{w}_a(k) \leq w_a(k) \leq \bar{w}_a(k) \quad (3.175)$$

Algo similar pasa con el vector de falla en sensores. Se considera que el modelo de la falla sea:

$$f_s(k+1) = f_s(k) + w_s(k) \quad (3.176)$$

La variación $w_s(k)$ también se considera acotada:

$$\underline{w}_s(k) \leq w_s(k) \leq \bar{w}_s(k) \quad (3.177)$$

Las variaciones de las fallas (w_a y w_s) son tomadas en cuenta junto con la entrada exógena $w(k)$. En consecuencia se crea un nuevo vector de entrada exógena:

$$d(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ w_a(k) \\ w_s(k) \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

Tomando en cuenta los modelos de las fallas (3.174) y (3.176), el sistema Takagi-Sugeno ahora es expresado de la siguiente forma:

$$\check{x}(k+1) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) \left[(\check{A}_i + \Delta\check{A}_i)\check{x}(k) + \check{B}_i u(k) \right] + \check{D}d(k) \quad (3.179)$$

$$\check{y}(k) = \check{C}\check{x}(k) + E_v v(k) \quad (3.180)$$

donde:

$$\check{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & E_a & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Delta\check{A}_i = \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ f_a(k) \\ f_s(k) \end{bmatrix}$$

$$\check{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & E_s \end{bmatrix}, \check{D} = \begin{bmatrix} E_w \\ I \\ I \end{bmatrix}$$

$\check{A}_i \in \mathbb{R}^{n_x+n_f \times n_x+n_f}$ son las matrices que contienen a las matrices de distribución de fallas.

Observador

El observador intervalar Takagi-Sugeno tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) [(\check{A}_i - \check{L}_i \check{C}) \hat{\underline{x}}(k) + \check{B}_i u(k) + \underbrace{\Delta \check{A}_i \check{x}(k)} + \check{L}_i y(k) \\ &\quad - |\check{L}_i| E_{ny} V(k) + \check{D} \check{d}(k)] \\ \bar{\hat{\underline{x}}}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) [(\check{A}_i - \bar{\check{L}}_i \check{C}) \bar{\hat{\underline{x}}}(k) + \check{B}_i u(k) + \underbrace{\Delta \check{A}_i \check{x}(k)} + \bar{\check{L}}_i y(k) \\ &\quad + |\bar{\check{L}}_i| E_{ny} V(k) + \check{D} \bar{\check{d}}(k)] \end{aligned} \quad (3.181)$$

con

$$\begin{aligned} \underbrace{\Delta \check{A}_i x(k)} &= \underline{\check{A}}_i^+ \underline{\check{x}}^+ - \bar{\check{A}}_i^+ \bar{\check{x}}^- - \underline{\check{A}}_i^- \bar{\check{x}}^+ + \bar{\check{A}}_i^- \underline{\check{x}}^- \\ \underbrace{\Delta \check{A}_i x(k)} &= \bar{\check{A}}_i^+ \bar{\check{x}}^+ - \underline{\check{A}}_i^+ \underline{\check{x}}^- - \bar{\check{A}}_i^- \underline{\check{x}}^+ + \underline{\check{A}}_i^- \bar{\check{x}}^- \\ \check{L}_i &= \begin{bmatrix} \underline{L}_{i,x} \\ \underline{L}_{i,fa} \\ \underline{L}_{i,fs} \end{bmatrix}, \bar{\check{L}}_i = \begin{bmatrix} \bar{L}_{i,x} \\ \bar{L}_{i,fa} \\ \bar{L}_{i,fs} \end{bmatrix}, \hat{\underline{x}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_i(k) \\ \hat{f}_{i,fa}(k) \\ \hat{f}_{i,fs}(k) \end{bmatrix}, \bar{\hat{\underline{x}}}(k) = \begin{bmatrix} \bar{\hat{x}}_i(k) \\ \bar{f}_{i,fa}(k) \\ \bar{f}_{i,fs}(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $\check{L}_i \in \mathbb{R}^{n_x+n_f \times n_y}$ y $\bar{\check{L}}_i \in \mathbb{R}^{n_x+n_f \times n_y}$ son las ganancias del observador que deben ser calculadas. Las matrices de incertidumbre, pueden ser calculadas de la forma: $\bar{\Delta \check{A}}_i^+ = \max\{0, \Delta \check{A}_i\}$, $\bar{\check{A}}_i^- = \bar{\Delta \check{A}}_i^+ - \Delta \check{A}_i$, $\underline{\Delta \check{A}}_i^+ = \max\{0, \Delta \check{A}_i\}$, $\underline{\Delta \check{A}}_i^- = \underline{\Delta \check{A}}_i^+ - \Delta \check{A}_i$, $\bar{\hat{\underline{x}}}^+ = \max\{0, \hat{\underline{x}}\}$, $\bar{\hat{\underline{x}}}^- = \bar{\hat{\underline{x}}}^+ - \hat{\underline{x}}$, $\underline{\hat{\underline{x}}}^+ = \max\{0, \hat{\underline{x}}\}$, $\underline{\hat{\underline{x}}}^- = \underline{\hat{\underline{x}}}^+ - \hat{\underline{x}}$.

Además, $E_{n_y} \in \mathbb{R}^{n_y \times 1}$ es el vector columna con elementos igual a 1. $\bar{d}(k)$ y $\underline{d}(k)$ son las cotas de (3.178). La estimación intervalar de la salida puede calcularse de la forma:

$$\underline{\hat{y}}(k) = C \underline{\hat{x}}$$

y

$$\bar{\hat{y}} = C \bar{\hat{x}}$$

Cabe mencionar que el diseño de este observador con el vector de estado aumentado, sólo es posible si el sistema es observable. La observabilidad del sistema con incertidumbre, puede ser evaluada con el enfoque usado en (Ho *et al.*, 2013). Si lo anterior es satisfecho, el sistema aumentado cumple la condición de observabilidad.

El esquema de estimación de falla puede ser integrado con un esquema FDI (por las siglas en inglés de Fault Detection and Isolation) como lo proponen en Rotondo *et al.* (2016), y solo activarse cuando la falla haya sido detectada y aislada. La integración consiste en un banco de n_f observadores dedicados, donde cada observador sea diseñado a estimar solo una falla. Entonces, el observador Takagi-Sugeno que se considera como vector de estado aumentado por la falla puede ser usado para estimar la falla. Sucesivamente, el esquema de estimación de fallas puede integrarse a un banco de observadores dedicados, donde cada observador sea diseñado para ser sensible a una sola falla (por ejemplo, usando un enfoque de observador de entrada desconocida Blanke *et al.* (2006)), como se muestra en la Fig.(3.1).

Para este caso, la siguiente lógica es usada para la detección y aislamiento de fallas:

Mientras las estimaciones intervalares proporcionadas por todos los bancos observadores, satisfacen lo siguiente:

$$f \in [\underline{\hat{f}}_i, \bar{\hat{f}}_i], \quad i = 1, \dots, n_f \quad (3.182)$$

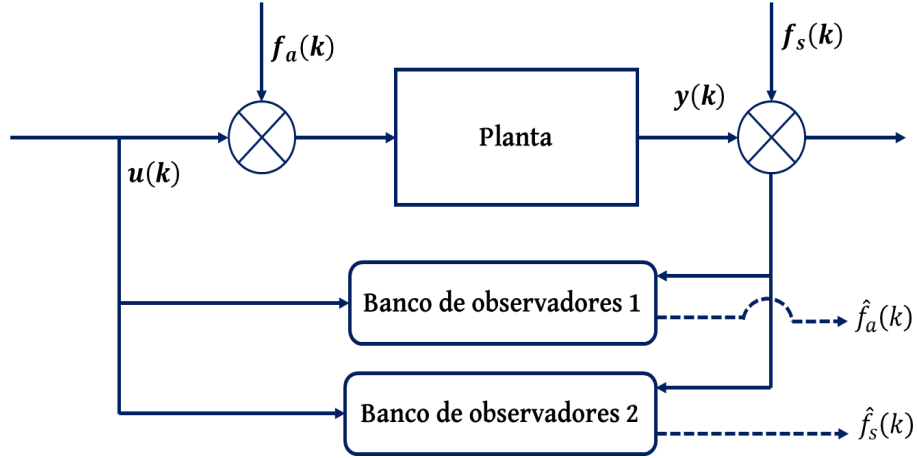


Figura 3.1: Integración esquema FDI con banco de observadores.

entonces, se dice que no hay falla detectada.

En caso contrario, cuando algunos de los observadores proporcionan una estimación de intervalo que satisface:

$$f \notin [\hat{f}_i, \bar{\hat{f}}_i] \quad (3.183)$$

entonces significa que se ha producido una falla, siendo la magnitud de la falla limitada por $[\hat{f}_i, \bar{\hat{f}}_i]$.

Diseño del observador intervalar Takagi-Sugeno

Para diseñar el observador Takagi-Sugeno intervalar de la forma (3.181) que asegure (3.165) (por lo tanto, (3.171), (3.172) y (3.173)) con un desempeño aceptable, se presenta el siguiente teorema basado en una región LMI.

Teorema 5 *Dado dos escalares positivos $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$, se puede obtener un observador Takagi-Sugeno intervalar de la forma dada en la Ec. (3.181) con un desempeño definido por regiones LMI, tal como dos franjas verticales (h_1 y h_2) y un disco (con radio r y centro q), si existe una matriz simétrica $P = P^T > 0$*

y $Q > 0$ que se satisfagan las siguientes desigualdades para todos los modelos $i = 1, \dots, m$

$$\begin{bmatrix} \frac{P}{1+\epsilon_1} & P\check{D}_i - W_i\Upsilon & \frac{P}{1+\epsilon_1} \\ (P\check{D}_i - W_i\Upsilon)^T & P - Q - \lambda\tau^2 I_{2n_x} & 0 \\ \frac{P}{1+\epsilon_1} & 0 & \lambda I_{2n_x} - \tau P \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.184)$$

$$P \begin{bmatrix} \check{A}_i & 0 \\ 0 & \check{A}_i \end{bmatrix} - W_i\Upsilon \geq 0 \quad (3.185)$$

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ qP + P \begin{bmatrix} \check{A}_i & 0 \\ 0 & \check{A}_i \end{bmatrix} - W_i\Upsilon & -rP \end{bmatrix} < 0 \quad (3.186)$$

$$\begin{bmatrix} \check{A}_i & 0 \\ 0 & \check{A}_i \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} \check{A}_i & 0 \\ 0 & \check{A}_i \end{bmatrix}^T + 2h_2 P < 0 \quad (3.187)$$

$$\begin{bmatrix} \check{A}_i & 0 \\ 0 & \check{A}_i \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} \check{A}_i & 0 \\ 0 & \check{A}_i \end{bmatrix}^T + 2h_1 P > 0 \quad (3.188)$$

donde

$$W_i = \begin{bmatrix} \check{W}_i & 0 \\ 0 & \check{W}_i \end{bmatrix}, \check{D}_i = \begin{bmatrix} \check{A}_i + \frac{\Delta\check{A}_i^+}{\check{A}_i} & 0 \\ 0 & \check{A}_i + \frac{\Delta\check{A}_i^+}{\check{A}_i} \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} \check{C} & 0 \\ 0 & \check{C} \end{bmatrix}$$

$$\lambda > 0, \tau = 1 + \epsilon_2 + (1 + \epsilon_1)^{-1}.$$

Demostración 5 Para el análisis de estabilidad del error de estimación, se consideran las siguientes ecuaciones:

$$\underline{e}(k) = x(k) - \underline{\hat{x}}(k) \quad (3.189)$$

$$\bar{e}(k) = \bar{\hat{x}}(k) - x(k) \quad (3.190)$$

donde las dinámicas de $\underline{e}(k)$ y $\bar{e}(k)$ son:

$$\underline{e}(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ f_a(k+1) - \hat{f}_a(k+1) \\ f_s(k+1) - \hat{f}_s(k+1) \end{bmatrix} \quad (3.191)$$

$$\underline{e}(k+1) = (\check{A}_i - \underline{L}_i \check{C}) \underline{e}(k) - \check{A}_i^+ \check{x}^+ - \check{A}_i^- \check{x}^- - \check{A}_i^- \check{x}^+ + \check{A}_i^+ \check{x}^- + |\underline{L}_i| E_{ny} V(k) + (d(k) - \underline{d}(k)) \quad (3.192)$$

$$\bar{e}(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) - x(k+1) \\ \bar{f}_a(k+1) - f_a(k+1) \\ \bar{f}_s(k+1) - f_s(k+1) \end{bmatrix} \quad (3.193)$$

$$\bar{e}(k+1) = (\check{A}_i - \bar{L}_i \check{C}) \bar{e}(k) - \check{A}_i^+ \check{x}^+ - \check{A}_i^- \check{x}^- - \check{A}_i^- \check{x}^+ + \check{A}_i^+ \check{x}^- + |\bar{L}_i| E_{ny} V(k) + (\bar{d}(k) - d(k)) \quad (3.194)$$

Con la finalidad de demostrar que las estimaciones se satisfacen para $k \geq 0$, las ecuaciones dinámicas de error se escriben de la forma:

$$\underline{x}(k+1) = (\check{A}_i - \underline{L}_i \check{C} + \underline{\Delta A}_i^+) \underline{x}(k) + \underline{S}_i(\underline{x}(k), \bar{x}(k)) + \underline{\delta}_i(k) \quad (3.195)$$

$$\bar{x}(k+1) = (\check{A}_i - \bar{L}_i \check{C} + \bar{\Delta A}_i^+) \bar{x}(k) + \bar{S}_i(\underline{x}(k), \bar{x}(k)) + \bar{\delta}_i(k) \quad (3.196)$$

donde:

$$\begin{aligned} \underline{S}_i(\underline{x}(k), \bar{x}(k)) &= (\check{A}_i^+ - \bar{A}_i^+) \check{x}^- - \check{A}_i^- \check{x}^+ + \bar{A}_i^- \bar{x}^- \\ \bar{S}_i(\underline{x}(k), \bar{x}(k)) &= (\bar{A}_i^+ - \check{A}_i^+) \bar{x}^- - \bar{A}_i^- \check{x}^+ + \check{A}_i^- \check{x}^- \\ \underline{\delta}_i(k) &= \underline{L}_i y(k) - |\underline{L}_i| E_{ny} V(k) + (d(k) - \underline{d}(k)) \\ \bar{\delta}_i(k) &= \bar{L}_i y(k) - |\bar{L}_i| E_{ny} V(k) + (\bar{d}(k) - d(k)) \end{aligned}$$

Las incertidumbres paramétricas dadas por las funciones \bar{S}_i y \underline{S}_i son funciones Lipschitz de acuerdo a Efimov *et al.* (2013b), donde se presenta el siguiente sistema:

$$\zeta(k+1) = G_i \zeta(k) + \phi(\zeta(k)) + \delta_i(k) \quad (3.197)$$

con

$$\zeta(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \bar{x}(k) \end{bmatrix}, \phi(\zeta(k)) = \begin{bmatrix} \underline{S}_i(\zeta(k)) \\ \bar{S}_i(\zeta(k)) \end{bmatrix}, \delta_i(k) = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_i(k) \\ \bar{\delta}_i(k) \end{bmatrix}, |\phi(\zeta(k))| \leq \eta |\zeta(k)|$$

$$G_i = \check{D}_i - \begin{bmatrix} \underline{L}_i & 0 \\ 0 & \bar{L}_i \end{bmatrix} \Upsilon$$

Para el análisis de estabilidad se propone la siguiente función de Lyapunov $V(k) = \zeta^T(k)P\zeta(k)$, y haciendo uso del complemento de Schur, la función incremento resulta como:

$$\Delta V(k) = -\zeta(k)^T Q \zeta(k) + (1 + e_1^{-1} + e_2^{-1}) \delta^T P \delta(k) \quad (3.198)$$

donde e_1 y e_2 ayudan a obtener una anchura considerable de las cotas estimadas. Posteriormente, se considera una región \mathcal{D} en la cual localizar los polos en lazo cerrado. Tomando en cuenta el siguiente lema.

Lema 4 Considere una región LMI definida en Chilali & Gahinet (1996b) como:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{D}}(z) < 0\} \quad (3.199)$$

donde la función característica $f_{\mathcal{D}}(z)$ es definida como:

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \alpha + z\beta + z^*\beta^T = \{\alpha_{kl} + \beta_{klz} + \beta_{klz^*}\}_{k,l \in [1,m]} \quad (3.200)$$

con $\alpha = \alpha^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $\beta \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Las regiones tomadas en cuenta, son dos franjas verticales, donde su función característica es la siguiente: $\mathcal{D} = \{-h_1 < z < -h_2 < 0\}$, considerando que h_1 y h_2 son escalares. Otra región tomada en cuenta es la del disco, donde su función

característica es la siguiente:

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -r & q + z \\ q + \bar{z} & -r \end{bmatrix} \quad (3.201)$$

q representa el centro del círculo y r el radio del círculo. Entonces, las ganancias del observador (3.181) pueden ser calculadas de la forma siguiente:

$$\check{L}_i = P^{-1}\check{W}_i \text{ y } \bar{L}_i = P^{-1}\bar{W}_i \quad i = \{1, \dots, m\} \quad (3.202)$$

resolviendo las desigualdades (3.184)-(3.188). □. La estructura de los observadores dedicados, ya sea para falla en actuadores y/o sensores, sería como:

Observador dedicado para la estimación de falla en actuador

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) [(\check{A}_i - \check{L}_i [C \ 0])\hat{\underline{x}}(k) + \check{B}_i u(k) + \underbrace{\Delta \check{A}_i \check{x}(k)} + \check{L}_i y(k) \\ &\quad - |\check{L}_i| E_{ny} V(k) + \check{D} \check{d}(k)] \\ \hat{\bar{x}}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) [(\check{A}_i - \bar{L}_i [C \ 0])\hat{\underline{x}}(k) + \check{B}_i u(k) + \underbrace{\Delta \check{A}_i \check{x}(k)} + \bar{L}_i y(k) \\ &\quad + |\bar{L}_i| E_{ny} V(k) + \check{D} \check{d}(k)] \end{aligned} \quad (3.203)$$

donde:

$$\check{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & E_a \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Delta \check{A}_i = \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ f_a(k) \end{bmatrix}$$

$$\check{D} = \begin{bmatrix} D \\ I \end{bmatrix}, \quad \check{L}_i = \begin{bmatrix} \underline{L}_{i,x} \\ \underline{L}_{i,f_a} \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_i = \begin{bmatrix} \bar{L}_{i,x} \\ \bar{L}_{i,f_a} \end{bmatrix}$$

Observador dedicado para la estimación de falla en sensor

$$\begin{aligned}
 \hat{\underline{x}}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) [(\check{A}_i - \check{L}_i [C \ E_s]) \hat{\underline{x}}(k) + \check{B}_i u(k) + \underbrace{\Delta \check{A}_i \check{x}(k)} + \check{L}_i y(k) \\
 &\quad - |\check{L}_i| E_{ny} V(k) + \check{D} \check{d}(k)] \\
 \hat{\bar{x}}(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k)) [(\check{A}_i - \bar{L}_i [C \ E_s]) \hat{\underline{x}}(k) + \check{B}_i u(k) + \underbrace{\Delta \check{A}_i \check{x}(k)} + \bar{L}_i y(k) \\
 &\quad + |\bar{L}_i| E_{ny} V(k) + \check{D} \bar{d}(k)]
 \end{aligned} \tag{3.204}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \check{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Delta \check{A}_i = \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ f_s(k) \end{bmatrix} \\
 \check{D} &= \begin{bmatrix} D \\ I \end{bmatrix}, \quad \check{L}_i = \begin{bmatrix} \underline{L}_{i,x} \\ \underline{L}_{i,f_s} \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_i = \begin{bmatrix} \bar{L}_{i,x} \\ \bar{L}_{i,f_s} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Estos observadores son diseñados en la forma que se ha presentado arriba.

El diseño del observador de intervalo TS- se utiliza para la estimación del estado de los sistemas de incertidumbre T-S. El diagnóstico de fallas se aborda mediante un banco de observadores donde cada observador puede ser sensible a diferentes subconjuntos de fallas.

La novedad de este trabajo es presentar una estimación de las fallas. El esquema está basado en un observador de intervalo T-S. El observador obtiene una estimación simultánea del estado y de las fallas, sin hacer uso de un esquema de detección de falla y módulos de aislamiento. El diseño del observador de intervalo T-S se aborda con el enfoque Lyapunov que conduce a un conjunto de LMIs, que puede ser resuelto eficientemente usando solucionadores disponibles como YALMIP Löfberg (2006).

Capítulo 4

Estimación de fallas. Aplicaciones

En este capítulo se muestran las aplicaciones de los observadores diseñados y presentados en el Capítulo 3. Cada observador se aplica a uno o dos casos de estudio (motor CD de imanes permanentes, compresor de un celda de combustible y un motor controlando a un péndulo invertido). Los resultados son presentados en simulación y se desarrolla un experimento en un sistema real. La idea es verificar el desempeño de cada uno de los observadores para estimar simultáneamente al menos dos tipos de señales: variables de estado, parámetros, fallas en sensor y fallas en actuador.

El capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera. En la sección 4.1 se presentan los resultados en simulación de un observador PI generalizado Takagi-Sugeno aplicado a un motor de corriente directa acoplado a un tren de rodamientos. El observador se usa para la estimación simultánea de i_a que es la corriente de armadura (variable de estado) y T_0 que es la no carga del torque. Se considera que T_0 sea un valor constante y si existe una variación, implicaría que una posible falla en los rodamientos haya ocurrido. En la sección 4.2 se presentan los resultados obtenidos de la simulación del observador intervalar de entrada desconocida Takagi-Sugeno aplicado a un motor de CD. El observador es usado para la estimación simultánea de los estados y de la falla en actuador. El obser-

vador UIO intervalar Takagi-Sugeno considerando incertidumbre paramétrica es evaluado con datos experimentales obtenidos de un motor de CD. Los resultados se muestran en la sección 4.3. El observador se usa para la estimación simultánea de los estados, falla en el sistema y falla en actuador. Los resultados obtenidos en simulación y con datos experimentales de la aplicación del observador no lineal se presentan en la sección 4.4, donde el observador se usa para la estimación simultánea de los estados y falla en el sistema. En la sección 4.5 se muestran los resultados obtenidos de la aplicación de los observadores dedicados intervalares para la estimación de fallas en sensores y actuadores en un sistema de compresor de una celda de combustible.

4.1. Estimación simultánea de estados y falla en el sistema

En esta sección, se ilustra el diseño del observador propuesto en la sección 3.1, aplicado a un sistema de motor de corriente directa de imanes permanentes, el modelo que representa al sistema se presenta a continuación (Liu *et al.*, 2000):

$$\begin{aligned} \dot{i}_a(t) &= -\frac{R_a}{L}i_a(t) - \frac{K_e}{L}v_m(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \dot{v}_m(t) &= \frac{K_T}{J_1}i_a(t) - \left(\frac{f_r - f_p v_m(t)}{J_1}\right)v_m(t) - \frac{T_0 - T_2}{J_1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Los estados de este modelo son la corriente de armadura $i_a(t)$ y la velocidad rotacional normalizada $v_m(t)$. $u(t)$ representa el voltaje de entrada. R_a es la resistencia de armadura, L es la inductancia, K_e es el coeficiente de la fuerza contraelectromotriz, K_T es el coeficiente de la corriente del torque, J_1 es el momento de inercia normalizada del rotor, f_r es el coeficiente de fricción (debido a la lubricación de los rodamientos), f_p es el coeficiente de fricción (debido a las aerodinámicas), T_0 y T_2 son el par con carga y sin carga del motor, respectivamente.

El sistema no lineal (4.1) se lleva a una representación Takagi-Sugeno usando el enfoque del sector no lineal Lendek *et al.* (2011); Ohtake *et al.* (2003). Inicialmente, el modelo puede ser expresado de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_T}{J_1} & -\left(\frac{f_r + f_p x_2(t)}{J_1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_1} & -\frac{1}{J_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0(t) \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Considerando a $x_2(t) = \rho(t)$ como una variable programada acotada, el sistema (4.2) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + Bu(t) + G\theta(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Usando el enfoque del sector no lineal, donde $\rho(t)$ varía en una región acotada, es decir, $\rho(t) = [\underline{\rho} \ \bar{\rho}]$, donde $\underline{\rho}$ y $\bar{\rho}$ son las cotas mínimas y máximas de $\rho(t)$, entonces, es posible que el sistema (4.2) pueda ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t))A_i x(t) + Bu(t) + G\theta(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_T}{J_1} & -\left(\frac{f_r + f_p \bar{\rho}}{J_1}\right) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_T}{J_1} & -\left(\frac{f_r + f_p \underline{\rho}}{J_1}\right) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1], \quad \theta(t) = \begin{bmatrix} T_0(t) \\ T_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_1} & -\frac{1}{J_1} \end{bmatrix}$$

donde m es el número de modelos locales (en este caso $m = 2$), $\rho(t)$ es la variable programada, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ es la entrada, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

representa a la salida medible, $\theta(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de entrada desconocida, que en este caso contiene a $T_0(t)$, que en condiciones normales de operación debe de ser constante. Un cambio en ese valor, implicaría un cambio en el coeficiente de fricción y en consecuencia, indicaría que posiblemente ha ocurrido una falla en los rodamientos. Por lo tanto, el objetivo es diseñar un observador que estime la variable desconocida $T_0(t)$ con la finalidad de supervisar sus variaciones, que podrían implicar una falla en los rodamientos del sistema.

Las funciones de membresía $\xi_i(\rho(t))$ son dadas como

$$\begin{aligned}\xi_1(\rho(t)) &= \eta_0^1 = \frac{\bar{\rho} - \rho(t)}{\bar{\rho} - \underline{\rho}} \\ \xi_2(\rho(t)) &= \eta_1^1 = 1 - \eta_0^1\end{aligned}\tag{4.5}$$

Los valores de los parámetros del motor, se proporcionan en la tabla 4.1.

Tabla 4.1: Parámetros del motor de CD

Parámetro	Valor
R_a	1.02 Ω
L	$850 \times 10^{-3} H$
K_e	0.0134 V/rpm
K_T	0.1 $N \cdot m/A$
J_1	0.00668 $N \cdot m \cdot s$
f_r	$13.5 \times 10^{-5} N/rpm$
f_p	$7.5 \times 10^{-8} N/rpm^2$
u	18 V

Se considera a $V_m(t) = \rho(t)$ varia entre 30 rpm a 1600 rpm . Con estos valores, se obtienen las siguientes matrices para el sistema Takagi-Sugeno (4.9):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.2000 & -0.0158 \\ 14.9491 & -0.0205 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.2000 & -0.0158 \\ 14.9491 & -0.0381 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.1764 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1] \text{ y } G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.4949 & -1.4949 \end{bmatrix}$$

Para fines de estimación de $T_0(t)$, se utiliza el observador dado en las Ecs. (3.3)-(3.6) de la sección 3.1. Para evitar una bilinealidad en la desigualdad (3.8) se considera que $X_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ en la función de Lyapunov (3.50).

Se resuelven las desigualdades (3.7) y (3.8) con el toolbox de YALMIP (Löfberg, 2004), usando como solucionador *Sedumi*, tomando en cuenta las siguientes matrices:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^6 \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

y

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0.490 & 0.460 & 0.376 \\ 0.400 & 0.187 & 0.009 \\ 0.231 & 0.870 & 0.478 \\ 0.229 & 0.165 & 0.587 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Al resolver (3.60)-(3.63), se obtienen las siguientes matrices del observador:

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1.2000 & -0.0158 \\ 7.4745 & -0.0128 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -1.2000 & -0.0158 \\ 7.4745 & -0.0336 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.00001 & 0.0001 \\ 0.0350 & -0.2945 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, H_2 = \begin{bmatrix} -0.00001 & -0.00003 \\ 0.04115 & 0.10828 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0.0079 \\ -0.0038 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -0.0079 \\ -0.0022 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 83.333 & 0 \\ 83.333 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -0.4644 \\ -0.0163 \end{bmatrix} \times 10^{-9}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -0.2593 \\ -0.0090 \end{bmatrix} \times 10^{-8}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.9288 \\ 0 & 0.0327 \end{bmatrix} \times 10^{-9}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5186 \\ 0 & 0.0181 \end{bmatrix} \times 10^{-8}$$

$$L_1 = L_2 = \begin{bmatrix} -0.9922 & 0.00011 \\ 0.000009 & -0.99202 \end{bmatrix} \times 10^{-6}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ y } \Phi = \begin{bmatrix} 0.00334 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para evaluar el enfoque propuesto se consideran dos escenarios de fallas, descritos en las siguientes dos simulaciones.

Simulación 4.1.1 Escenario 1. Falla abrupta. En principio se considera un valor de T_0 sin falla constante de $0.0229 \text{ N} \cdot \text{m}$. Si una desviación de ese valor es detectado, entonces, es posible que una falla haya ocurrido. Si lo vemos en una situación real (considerando que las condiciones de operación no hayan sido cambiadas), si la desviación de T_0 es permanente, entonces se puede concluir que el valor del par ha variado debido posiblemente a una falla en rodamientos, que en caso de verificarse, debe ser sujeto a mantenimiento o a un reemplazo. Con la finalidad de mostrar el desempeño del observador, se realiza una prueba haciendo variar el valor de T_0 , como se muestra a continuación (ver la Fig. 4.1):

$$T_0(t) = \begin{cases} 0.0229 & 0 < t \leq 600 \\ 0.5 & 600 < t \leq 1000 \\ 0.0229 & 1000 < t \leq 1600 \end{cases} \quad (4.6)$$

Las estimaciones de los estados se presentan en las Figs. 4.2 y 4.3 donde se puede

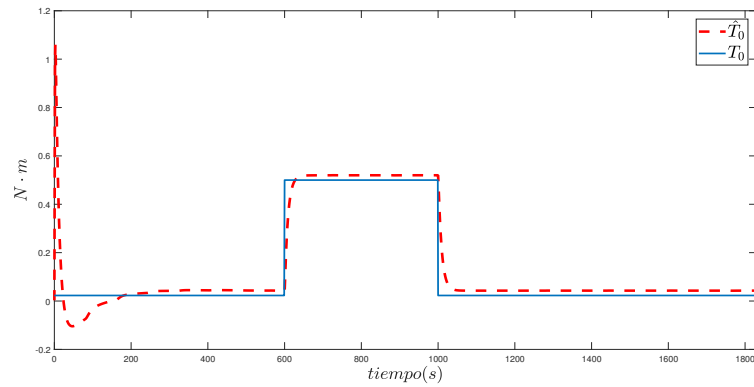


Figura 4.1: Estimación de T_0

apreciar la correcta estimación del observador, a pesar que exista un cambio de $T_0 = 0.0229 \text{ N} \cdot \text{m}$ a $0.5 \text{ N} \cdot \text{m}$ (ver fig.4.1). T_2 es considerado constante con un valor de $0.0229 \text{ N} \cdot \text{m}$. Después, el valor de T_0 regresa al valor nominal, con la finalidad de verificar que el observador siga adecuadamente el perfil de T_0 .

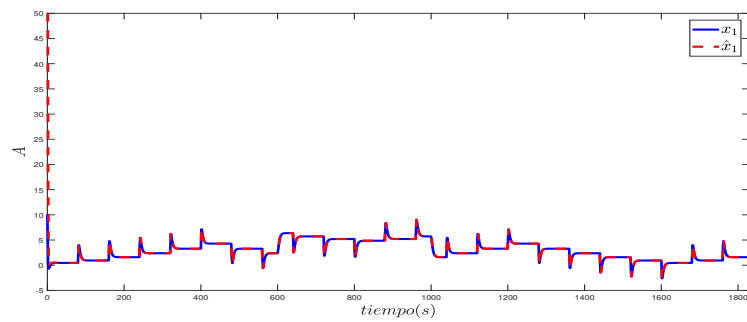


Figura 4.2: Estimación de x_1

Simulación 4.1.2. Escenario 2. Falla incipiente. Este escenario considera las mismas condiciones de operación para el escenario anterior, donde la variación de

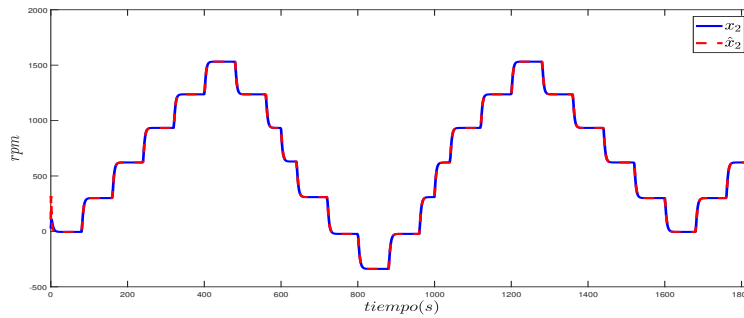


Figura 4.3: Estimación de x_2

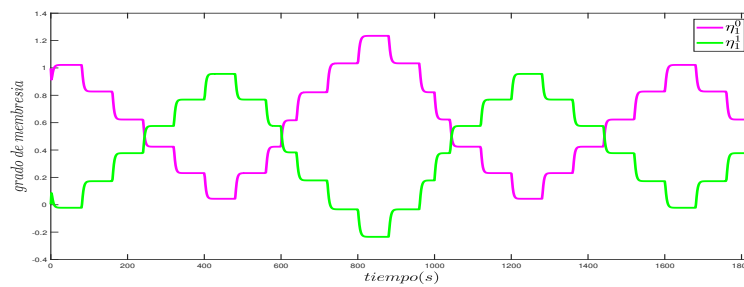


Figura 4.4: Funciones de membresía

T_0 tiene el siguiente comportamiento (ver Fig.4.7):

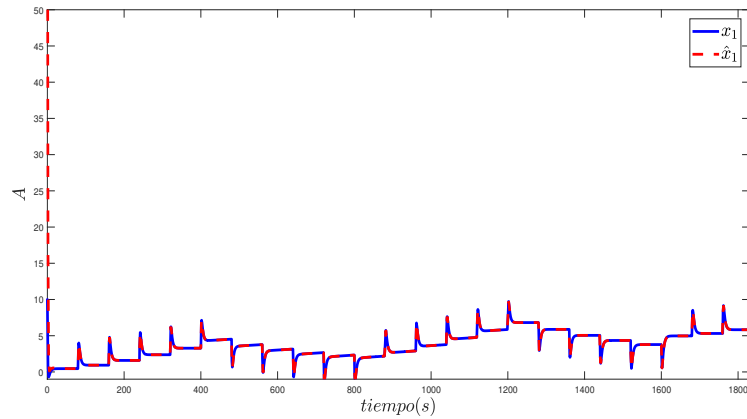
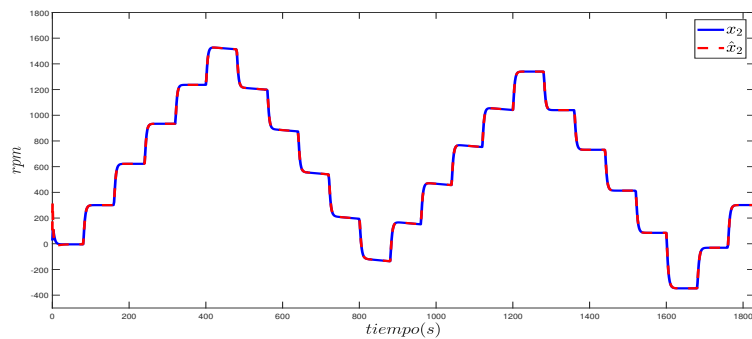
$$T_0(t) = \begin{cases} 0.0229 & 0 < t \leq 400 \\ T_0 + 0.0000002 & 400 \leq t \leq 1200 \\ 0.3429 & 1200 < t \leq 1600 \\ 0.5123 & 1600 < t \leq 1830 \end{cases} \quad (4.7)$$

Las condiciones iniciales de la simulación son:

$$x(0) = [10 \ 25]^T \text{ y } \hat{x}(0) = [170 \ 105]^T \quad \zeta(0) = [150 \ 130], \nu(0) = [150 \ 140] \text{ y } \hat{\theta}(0) = [0.0029; 0.0029].$$

La estimación de los estados son mostrados en las figuras 4.5 y 4.6, en ambas

imágenes se puede ver que el observador es capaz de estimar ambos estados a pesar de la falla ocurrida y detectada a través de T_0 . La estimación de T_0 se muestra

Figura 4.5: Estimación de x_1 Figura 4.6: Estimación de x_2

en la Fig.4.7 donde se puede apreciar que el observador converge adecuadamente al valor simulado de T_0 a pesar de los cambios que se realizan a lo largo del tiempo. En consecuencia, se podría emitir una alerta de falla en los rodamientos del sistema.

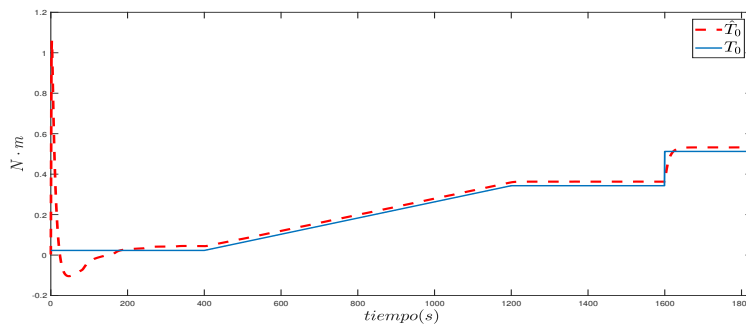


Figura 4.7: Estimación de T_0

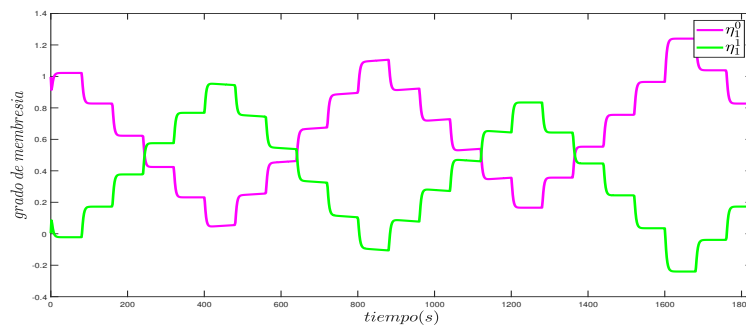


Figura 4.8: Funciones de membresía

4.2. Estimación simultánea de estados y fallas en actuador

En esta sección se utiliza el mismo sistema de la sección anterior (motor de CD), con la finalidad de ilustrar el diseño del observador presentado en la sección 3.2 para la estimación de fallas en actuador. Se considera que la falla a detectar es una falla en la fuente de alimentación del motor. Por conveniencia, se presenta nuevamente el modelo matemático del motor, dado por las siguientes ecuaciones

(Liu *et al.*, 2000):

$$\begin{aligned} \dot{i}_a(t) &= -\frac{R_a}{L}i_a(t) - \frac{K_e}{L}v_m(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \dot{v}_m(t) &= \frac{K_T}{J_1}i_a(t) - \left(\frac{f_r - f_p v_m(t)}{J_1}\right)v_m(t) - \frac{T_0 - T_2}{J_1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde los estados son la corriente de armadura $i_a(t)$ y la velocidad rotacional $v_m(t)$, $u(t)$ representa al voltaje de entrada. R_a es la resistencia de armadura, L es la inductancia, K_e es el coeficiente de la fuerza contraelectromotriz, K_T es el coeficiente de la corriente del torque, J_1 es el momento de inercia normalizada del rotor, f_r el coeficiente de fricción (debido a la condición de la lubricación de los rodamientos), f_p es el coeficiente de fricción (debido a las aerodinámicas), T_0 y T_2 son carga y no carga del torque, respectivamente.

Los parámetros del motor de CD utilizados en este ejemplo, son descritos en la tabla 4.2.

Parámetro	Valor
R_a	1.02 Ω
L	$550 \times 10^{-3} H$
K_e	0.0134 V/rpm
K_T	0.1 N · m/A
J_1	0.00668 N · m · s
f_r	$3.5 \times 10^{-6} N/rpm$
f_p	$7.5 \times 10^{-8} N/rpm^2$
u	35 V
T_0	0.2294 N · m
T_2	0.2294 N · m

Tabla 4.2: Parámetros del motor de CD

El modelo no lineal (4.8) es transformado a la forma Takagi-Sugeno (3.64) utilizando el enfoque del sector no lineal. El parámetro programado para este sistema es la velocidad rotacional $\rho(k) = v_m = x_2(k)$ que varía en el intervalo

$\rho(k) = [\underline{\rho}(k) \quad \bar{\rho}(k)]$. Esto lleva a la siguiente representación T-S:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t)) A_i x(t) + Bu(t) + G\theta \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_T}{J_1} & -\left(\frac{f_r + f_p \bar{\rho}}{J_1}\right) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_T}{J_1} & -\left(\frac{f_r + f_p \underline{\rho}}{J_1}\right) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_2 \end{bmatrix} \text{ y } G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_1} & -\frac{1}{J_1} \end{bmatrix}$$

Las funciones de ponderación $\xi_i(\rho(t))$ son calculadas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \xi_1(\rho(t)) &= \eta_0^1 = \frac{\bar{\rho} - \rho(t)}{\bar{\rho} - \underline{\rho}} \\ \xi_2(\rho(t)) &= \eta_1^1 = 1 - \eta_0^1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se considera que las condiciones nominales del sistema (4.9) se dan con una entrada constante. Un cambio en la entrada implica (variación de voltaje) una condición anormal, debida posiblemente a una falla en la fuente de alimentación (considerada el actuador). Una falla de este tipo puede ser modelada como una variación en la señal $u(t)$, denominada $\delta u(t)$, es decir, en el sistema (4.9) se reemplaza $u(t) = u(t) + \delta u(t)$. Además, si se consideran señales éxogenas como perturbaciones $w(t)$ y ruido de medición a la salida $v(t)$, ambas asumidas acotadas, es decir: $-0.02 \leq w(k) \leq 0.02$ y $|v(k)| \leq 0.01$, entonces el sistema (4.9) se modifica como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(t))A_i x(t) + Bu(t) + E_f f(t) + G\theta + E_w w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + E_v v(t)\end{aligned}\quad (4.11)$$

donde $f(t) = \delta u(t)$ y

$$E_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_w = B, \quad E_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las simulaciones presentadas a continuación se realizaron en MATLAB. Las condiciones iniciales del sistema no lineal y del observador son: $x(0) = [42 \quad 40]^T$, $\underline{x}(0) = [18 \quad 25]^T$, $\bar{x}(0) = [25 \quad 18]^T$, y $u = 35$ V. El sistema (4.9) ha sido discretizado con un tiempo de muestreo 0.85 s y considerando los parámetros dados en la tabla 4.2 se obtienen las siguientes matrices para cada modelo local:

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} 0.0999 & -0.0104 \\ 6.4083 & -0.0001 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.1008 & -0.0101 \\ 6.2486 & 0.8591 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B = E_w &= \begin{bmatrix} 0.7802 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G = 10^2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.4949 & -1.4949 \end{bmatrix}, \quad E_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ E_v &= \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Para verificar la condición de observabilidad de este sistema, de acuerdo con el diseño del observador (sección 3.2), se puede ver que $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $E_f \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, es decir, que $n_f = 1$, en consecuencia:

$$\text{rank}(CE_f) = 1 = \text{rank}(E_f) = 1 = n_f = 1 \quad (4.12)$$

Lo anterior implica que se cumple con la condición de observabilidad, por lo

tanto, es posible aplicar el observador dado por (3.69) presentado en la sección 3.2 a este sistema. Para ello, se resuelven las desigualdades (3.123), (3.124) y (3.76) del Teorema 1, tomando en cuenta que $\beta = 0.85$ para minimizar el efecto del disturbio. Las ganancias del observador (3.69) son las siguientes:

$$P = \begin{bmatrix} 31.0570 & 0.8825 \\ 0.8825 & 1.0576 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 32.6472 & 1.9466 \\ 1.9466 & 1.0022 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_1 = \begin{bmatrix} -0.0909 & -0.0149 \\ 1.0386 & 0.6946 \end{bmatrix}, \quad \underline{L}_2 = \begin{bmatrix} -0.0199 & -0.0560 \\ 0.0232 & 0.4076 \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}_1 = \begin{bmatrix} -0.0854 & -0.0075 \\ 1.3010 & 0.7115 \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_2 = \begin{bmatrix} -0.1330 & -0.0043 \\ 1.5378 & 0.7311 \end{bmatrix}$$

A continuación, se presentan dos escenarios de fallas que se han hecho, que consiste en:

- **Escenario 1.-** Las condiciones iniciales mencionadas arriba se mantienen, solo es considerado que la falla sea abrupta (vista como una señal escalón).
- **Escenario 2.-** Es realizado bajo las mismas condiciones que el escenario anterior, sólo que la falla es incipiente (vista como una señal rampa).

Simulación 4.2.1. Escenario 1. Falla abrupta. En este caso, la falla $f(t)$ aparece en el período de tiempo de $t = 350s$ a $t = 580s$ (ver Fig. 4.11). Esta actúa como una entrada desconocida para el sistema (4.9). Se puede apreciar en los resultados, que el observador es capaz de estimar la falla, así como los estados.

En las figuras 4.9 y 4.10 podemos ver las estimaciones de ambos estados. Además, se puede notar que el observador es capaz de estimar los intervalos para ambos estados a pesar de que ocurre la falla, y esto es gracias a la consideración del desacople del vector de la falla. La figura 4.11 muestra el comportamiento de la falla, así como se puede apreciar, la falla se encuentra dentro de los intervalos estimados, proporcionados por el observador diseñado.

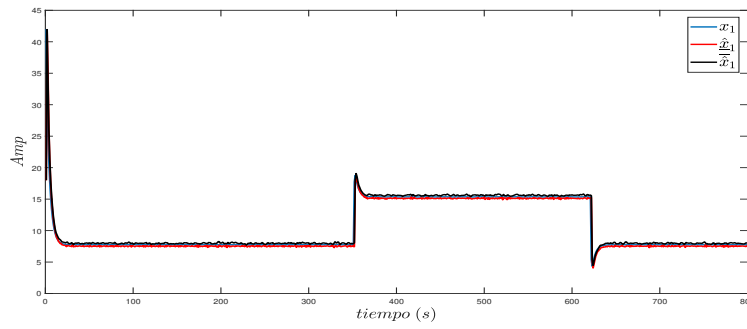


Figura 4.9: Estimación de $x_1(k)$

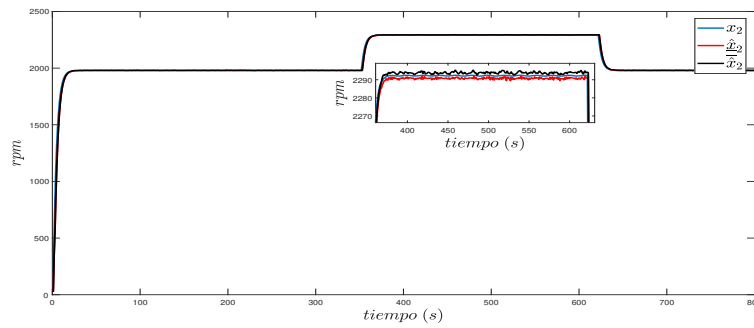


Figura 4.10: Estimación de $x_2(k)$

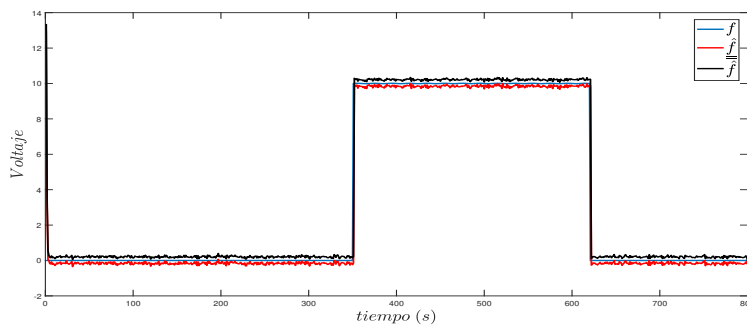


Figura 4.11: Estimación de $f(k)$ (la línea en azul es la falla original, la línea en negro y en rojo son la estimación superior e inferior, respectivamente)

Simulación 4.2.2. Escenario 2. Falla incipiente. Para este escenario, se consideran las mismas condiciones iniciales de la simulación anterior, pero ahora la falla inicia en $t = 200s$ como se puede apreciar en la Fig.4.14.

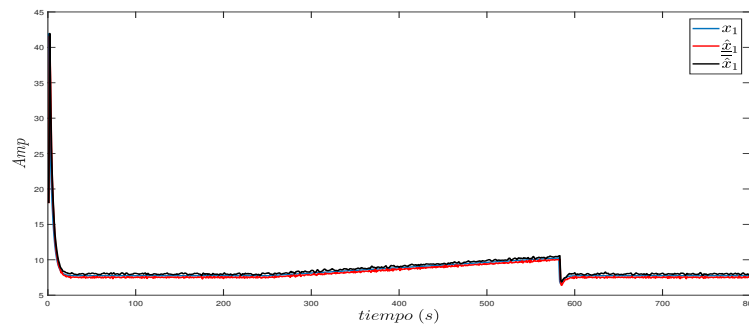


Figura 4.12: Estimación de $x_1(k)$

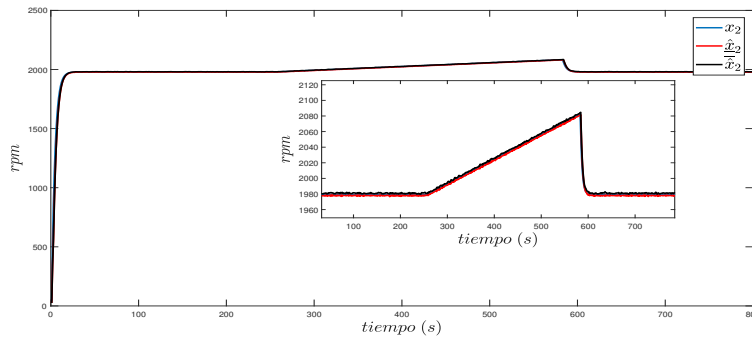


Figura 4.13: Estimación de $x_2(k)$

Las figuras 4.12 y 4.13 muestran una correcta estimación de los estados, además de la estimación intervalar de la falla, presentada en la figura 4.14. Se concluye que el observador provee una estimación intervalar apropiada tanto para la falla como para los estados.

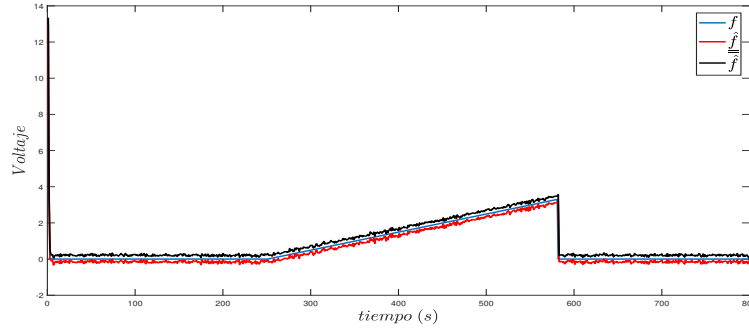


Figura 4.14: Estimación de $f(k)$ (la línea en azul es la falla original, la línea en negro y en rojo son la estimación superior e inferior, respectivamente)

4.3. Estimación simultánea de fallas en actuador y en el sistema

En esta sección, se presentan los resultados que se han obtenido con la evaluación en simulación del observador intervalar de entrada desconocida con incertidumbre paramétrica Takagi-Sugeno de la sección 3.3, para la estimación simultánea de una falla en el actuador y en el sistema. El ejemplo que se considera es un motor de corriente directa acoplado a un tren de rodamientos para el cual se considera la estimación intervalar simultánea de una falla en la fuente de alimentación (actuador) y en los rodamientos (sistema). El observador se valida utilizando datos experimentales. Los parámetros del motor tienen el valor que se presenta en la siguiente tabla.

L corresponde a la inductancia del motor, R_a es la resistencia de armadura, K_T es el coeficiente de corriente del torque, f_p es el coeficiente de fricción (debido a las aerodinámicas), K_e es el coeficiente de la corriente contra electromotriz, f_r es el coeficiente de fricción (debido a la condición de lubricación de los rodamientos) y J_1 es el momento de inercia normalizado del rotor. Con estos parámetros y sus valores, se toma en cuenta el siguiente modelo matemático no lineal de un motor

Parámetro	Valor
R_a	1.02Ω
L	$850 \times 10^{-3} H$
K_e	$0.0134 V/rpm$
K_T	$0.1 N \cdot m/A$
J_1	$0.00668933 N \cdot m \cdot s$
f_r	$0.0000035 N/rpm$
f_p	$0.000000075 N/rpm^2$

Tabla 4.3: Parámetros del motor de CD.

de CD de imanes permanentes Liu *et al.* (2000):

$$\begin{aligned} \dot{i}_a(t) &= -\frac{R_a}{L}i_a(t) - \frac{K_e}{L}v_m(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \dot{v}_m(t) &= \frac{K_T}{J_1}i_a(t) - \left(\frac{f_r - f_p v_m(t)}{J_1}\right)v_m(t) - \frac{T_0 - T_2}{J_1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $i_a(t)$ y $v_m(t)$ son la corriente de armadura y la velocidad rotacional, $u(t)$ representa al voltaje de entrada, T_2 y T_0 corresponden al par de carga y sin carga.

Antes de continuar, se consideran las siguientes suposiciones:

Suposición 2 Los valores de T_0 y T_2 son considerados desconocidos, por lo tanto, es necesaria su estimación.

Suposición 3 La velocidad rotacional $v_m(t)$ es medible, y es considerada a la vez como el parámetro variable (variable de programación del sistema T-S).

Suposición 4 La corriente de armadura $i_a(t)$ es medible.

Suposición 5 Existe una falla a la entrada del sistema denominada f . Esta falla representa una variación anormal de voltaje a la entrada.

Con las suposiciones anteriores podemos definir al sistema con falla, de acuerdo a la forma (3.103), misma que reescribimos en esta sección:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^m \xi_i(\rho(k))(A_i + \Delta A_i)x(k) + B_i u(k) + \begin{bmatrix} E_f & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} + E_w w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + E_v v(k) \end{aligned} \quad (4.14)$$

De acuerdo a la suposición 3, la salida v_m se considera como parámetro variable, es decir $\rho(t) = v_m(t) = x_2(t)$, y varía en el intervalo $\rho(t) = [\underline{\rho}(t) \quad \bar{\rho}(t)]$. El sistema (4.14) utiliza un tiempo de muestreo de 1s. Las matrices de este sistema son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_T}{J_1} & -\left(\frac{f_r + f_p \bar{\rho}}{J_1}\right) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_T}{J_1} & -\left(\frac{f_r + f_p \underline{\rho}}{J_1}\right) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{L}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{E} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_1} & -\frac{1}{J_1} \end{bmatrix}, \quad E_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_v = 0.98, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Delta A_i &= A_i * \pm 1 \%, \quad \text{and } f_{\bar{E}} = \begin{bmatrix} f(k) & T_0(k) & T_2(k) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de cada parámetro del motor, las matrices son las siguientes:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.2471 & -0.0088 \\ 8.3671 & 0.9178 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.2480 & -0.0086 \\ 8.1747 & 0.8820 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.6593 \\ 5.9246 \end{bmatrix} \\ \Delta A_1^+ &= \begin{bmatrix} 0.0024 & -0.00008 \\ 0.0836 & 0.0091 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_2^+ = \begin{bmatrix} 0.0024 & -0.00008 \\ 0.0817 & 0.0088 \end{bmatrix} \\ \Delta A_1^- &= \begin{bmatrix} -0.0024 & -0.00008 \\ -0.0836 & -0.0091 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_2^- = \begin{bmatrix} -0.0024 & 0.00008 \\ -0.0817 & -0.0088 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{A}_1^- &= \begin{bmatrix} -0.0024 & 0 \\ -0.0836 & -0.0091 \end{bmatrix}, \Delta \underline{A}_2^- = \begin{bmatrix} -0.0024 & 0 \\ -0.0817 & -0.0088 \end{bmatrix} \\ \Delta \underline{A}_1^+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.8823 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-4}, \Delta \underline{A}_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.8620 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-4}, \Delta \bar{A}_1^- = \begin{bmatrix} 0 & -0.8823 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\ \Delta \bar{A}_2^- &= \begin{bmatrix} 0 & -0.8620 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-4}, \Delta \bar{A}_1^+ = \begin{bmatrix} 0.0024 & 0 \\ 0.0836 & 0.0091 \end{bmatrix} \times 10^{-4}, E_v = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix} \\ \bar{E} &= \begin{bmatrix} 0.0117 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4949 & -1.4949 \end{bmatrix} \times 10^2, E_w = \begin{bmatrix} 1.1764 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta \bar{A}_2^+ = \begin{bmatrix} 0.0024 & 0 \\ 0.0817 & 0.0088 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Para verificar la condición de observabilidad, se puede apreciar que $C \in \mathbb{R}^2$, $G \in \mathbb{R}^1$, $E_f \in \mathbb{R}^1$ y $\bar{E}_{f\bar{E}} \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto, $n_x = 2$, $n_\theta = 1$ y $n_f = 1$, entonces:

$$\text{rank}(C\bar{E}_{f\bar{E}}) = \text{rank}(\bar{E}_{f\bar{E}}) = n_\theta + n_f \quad (4.15)$$

donde

$$\text{rank}(C\bar{E}_{f\bar{E}}) = 2 = \text{rank}(\bar{E}_{f\bar{E}}) = 2 = n_\theta + n_f = 1 + 1 \quad (4.16)$$

Por lo tanto el sistema es observable y es posible diseñar el observador (3.120) de la sección (3.3). Resolviendo las desigualdades (3.121), (3.123)-(3.124) del Teorema 3, con $\gamma = 0.8$, $\epsilon_1 = 25.96$, $\eta = 0.3372$, $\beta = \begin{bmatrix} \psi \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.88 \end{bmatrix}$, se obtienen las siguientes matrices:

$$P = \begin{bmatrix} 1.5603 & 0.0482 \\ 0.0482 & 1.5593 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 7.1833 & 2.5020 \\ 2.5020 & 5.9293 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_1 = \begin{bmatrix} 0.1571 & -0.1658 \\ -0.3619 & -0.2245 \end{bmatrix}, \underline{L}_2 = \begin{bmatrix} 0.0146 & -0.0038 \\ -0.0039 & 0.0163 \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}_1 = \begin{bmatrix} 0.0166 & -0.2177 \\ -0.3707 & -0.2367 \end{bmatrix}, \bar{L}_2 = \begin{bmatrix} -0.0197 & -0.0306 \\ -0.0347 & -0.0140 \end{bmatrix}$$

En las siguientes simulaciones se utilizan las siguientes condiciones iniciales: $\hat{x}(0) = [8 \ 25]^T$, $\hat{\bar{x}}(0) = [5 \ 15]^T$, $\hat{f}(0) = [0 \ 0 \ 0]$, $\hat{\bar{f}}(0) = [0 \ 0 \ 0]$. Además, se considera una perturbación acotada $-0.98 \leq w(k) \leq 0.98$, y un ruido acotado $|v(k)| \leq 0.8$. Las señales medidas del motor son la corriente de armadura, la velocidad rotacional y el voltaje de alimentación; estas tres señales son entradas las entradas del observador. A continuación se presentan las simulaciones realizadas para la verificar el desempeño del observador, considerando los siguientes escenarios:

Simulación 4.3.1. Escenario 1. Falla abrupta. El motor se alimenta con 14 volts durante 700s. A los 390s existe una caída de tensión de forma abrupta, provocando el decaimiento de la velocidad como se puede notar en la Fig.4.15. Con esta falla que ocurre, la tensión vuelve a su estado estable, es decir, la velocidad se estabiliza. Aunque esta señal se mide, podemos ver que se encuentra dentro de los intervalos estimados, tanto en estado estable como cuando ocurre la falla.

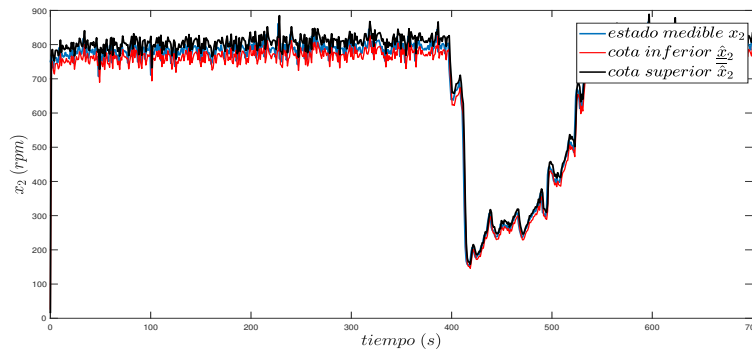


Figura 4.15: Estimación de la velocidad rotacional $x_2(k)$.

En la Fig.4.16 se puede notar que al momento de la caída de tensión, la corriente aumenta ligeramente; para este caso también la señal medida se encuentra dentro de los intervalos estimados. Si creemos que la variación de voltaje se deba a que el actuador (en este caso la fuente de alimentación) haya tenido una falla, entonces, podemos seguir la siguiente lógica de detección y estimación de fallas.

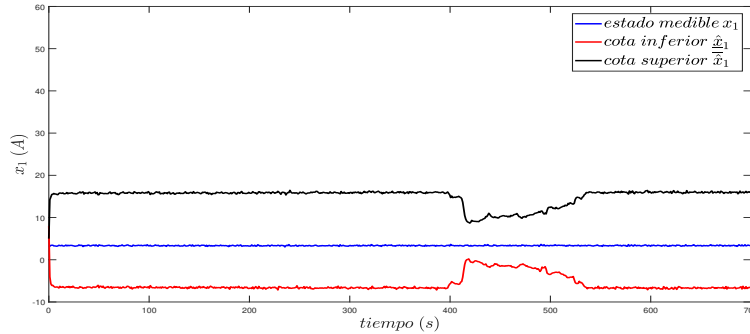


Figura 4.16: Estimación de la corriente de armadura $x_1(k)$.

El vector intervalo $[\hat{f}_-, \hat{f}_+] \in 0$ indica que no existe falla. En caso contrario, la señal estaría fuera del intervalo y diremos que ha ocurrido una falla, como se puede apreciar en la Fig.4.17. Donde al principio de la gráfica se mantiene constante y dentro del intervalo cero, pero al momento del fallo, se ve el decaimiento de 6 volts y posteriormente retoma el intervalo al momento del arranque.

De acuerdo a la suposición 2 ambos parámetros T_0 y T_2 deben ser estimados (ver

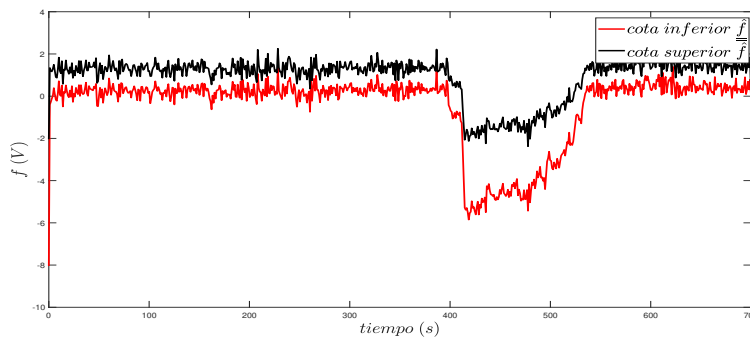


Figura 4.17: Estimación de la falla $f(k)$.

las figuras (4.18)-(4.19)). En ambas figuras se observa que la estimación intervalar al inicio de la simulación se encuentra entre los valores 0 y 0.5 (cuando no hay falla). Posteriormente, cuando se presenta la variación de tensión, es posible ver que el estimador también calcula la variación que ambos parámetros tienen. El

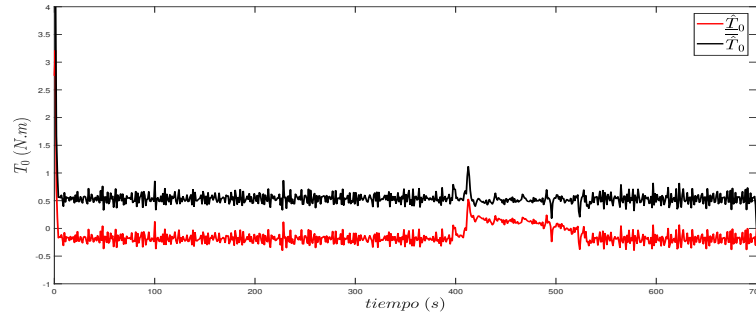


Figura 4.18: Estimación de $T_0(k)$.

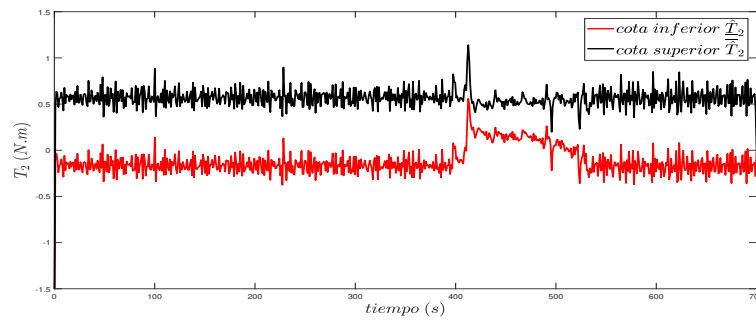


Figura 4.19: Estimación de $T_2(k)$.

comportamiento de las funciones de membresía se muestran en la Fig.(4.20).

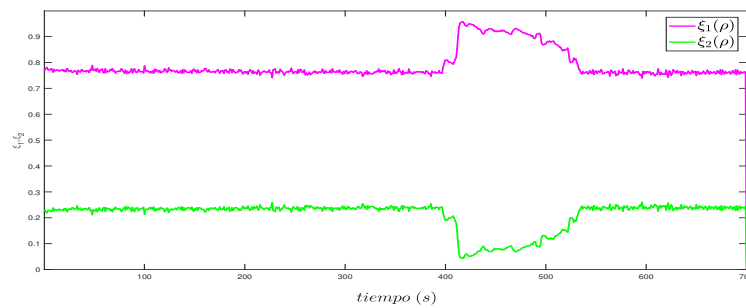


Figura 4.20: Funciones de membresía.

Simulación 4.3.2. Escenario 2. Falla intermitente. El motor de CD es alimen-

tado con 15volts a los 420s se hace una caída de tensión intermitente debido a las interrupciones de conexión de la fuente, provocando que exista una variación intermitente de la corriente. Como se aprecia en la Fig.4.21, la corriente medida se mantiene dentro de los intervalos mínimos y máximos que proporciona el observador antes y después de la ocurrencia de la falla. También podemos apreciar

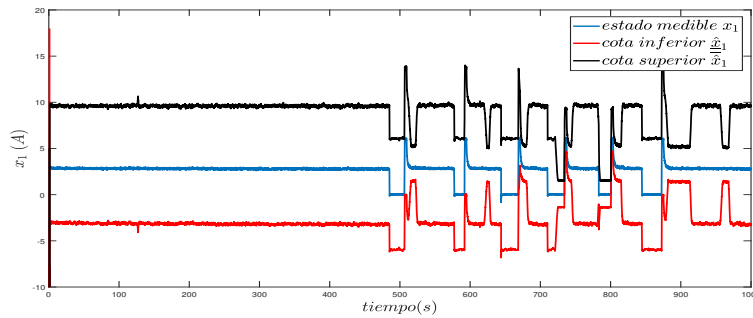


Figura 4.21: Estimación de la corriente de armadura $x_1(k)$.

que la velocidad medida se encuentra dentro de los intervalos (ver Fig.(4.22)). En

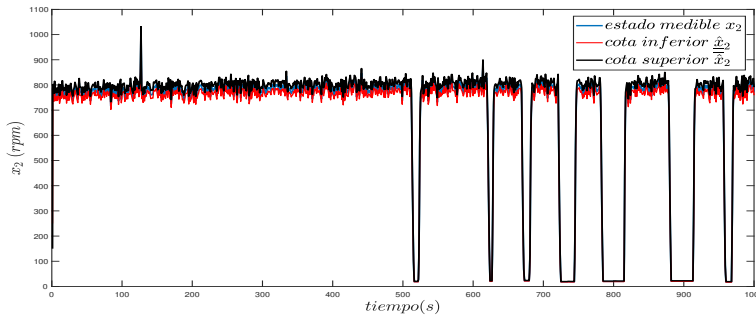


Figura 4.22: Estimación de la velocidad rotacional $x_2(k)$.

la Fig.(4.23) se muestra la estimación intervalar de la falla, antes y después de que esta ocurre.

El parámetro θ es un vector que contiene a T_0 y T_2 , que son considerados desconocidos. Su estimación intervalar se presenta en las figuras (4.24) y (4.25) donde se puede ver la estimación sin fallas y al momento que ocurre la falla intermitente.

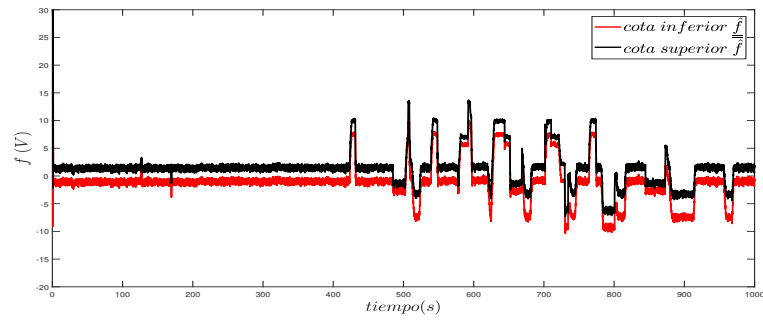


Figura 4.23: Estimación de la corriente de armadura $f(k)$.

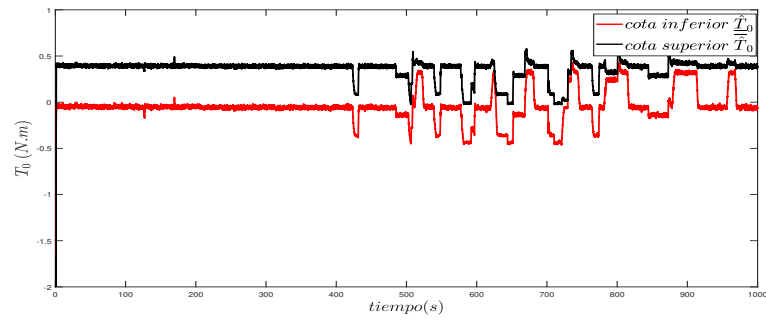


Figura 4.24: Estimación de $T_0(k)$.

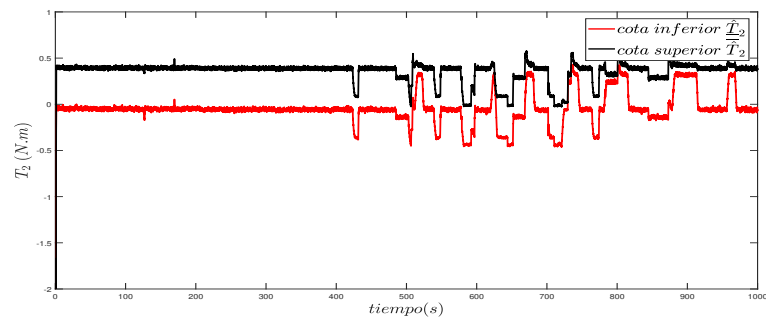


Figura 4.25: Estimación de $T_2(k)$.

Las funciones de membresía del sistema son presentadas en la Fig.4.26, donde podemos apreciar el grado de membresía que tiene cada uno de los sistemas locales

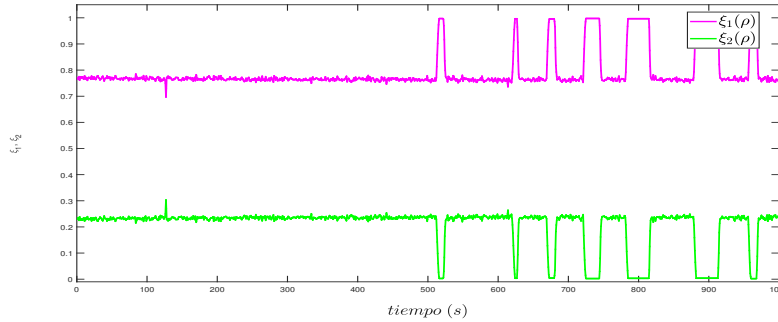


Figura 4.26: Funciones de membresía

a lo largo del experimento.

4.4. Estimación simultánea de estados y entradas desconocidas

En esta sección, se presentan los resultados que se han obtenido con la evaluación en simulación del observador no lineal, presentado en la sección 3.4, para la estimación de entradas desconocidas. A continuación se presentan dos casos:

- **Caso 1.-** Un sistema que consiste en un motor de corriente directa controlando un péndulo invertido.
- **Caso 2.-** Un motor de corriente directa acoplado a un tren de rodamientos.

Caso 1

Se considera el siguiente modelo de un motor de CD controlando un péndulo invertido, presentado en Vu & Do (2019):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{NK_m}{m l^2} x_3(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= -\frac{K_b N}{L_a} x_2(t) - \frac{R_a}{L_a} x_3(t) + \frac{1}{L_a} u
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

En este modelo $x_1 = \varphi_p$ es la posición del eje, $x_2 = w_p$ es la velocidad del eje del motor, $x_3 = I_a$ es la corriente de armadura, u representa al voltaje de entrada. K_m es la constante de torque, K_b es la fuerza contra electromotriz, g es la gravedad, N es la relación de transmisión, l es la longitud del eje, m es la masa, R_a es la resistencia de armadura y L_a es la inductancia de armadura.

Los valores para cada uno de los parámetros son los siguientes: $K_m = 0.1Nm/A$, $K_b = 0.1Vs/rad$, $g = 9.8m/s^2$, $N = 10$, $l = 1m$, $m = 1kg$, $R_a = 1\Omega$ y para $L_a = 0.1H$. Antes de continuar, se toman en cuenta las siguientes suposiciones:

Suposición 6 *Existe una Δu considerada como entrada desconocida aditiva a la entrada del sistema, es decir, $u + \Delta u$. Donde Δu puede ser considerada como una variación de voltaje a la entrada (inesperada). Debido a las consecuencias que esta pueda generar, se necesita estimarla con la finalidad de compensar las variaciones.*

Suposición 7 *La posición del eje $x_1 = \varphi_p$ es medible.*

Con las suposiciones anteriores se modifica el sistema original, debido a que u se considera conocida y Δu es una variación desconocida, siendo esta última, una señal que proviene de la variación provocada por los actuadores. Entonces, el sistema (4.17) puede ser representado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + g(y(t), u(t)) + F\theta \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Debido a la suposición 7, la salida $y(t)$ del sistema es $x_1(t)$, es decir, $y(t) = x_1(t) = \varphi_p$.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_p \\ w_p \\ I_a \end{bmatrix}, \theta = \Delta u, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{NK_m}{ml^2} \\ 0 & -\frac{K_b N}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{pmatrix}, g(y(t), u(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{l} \sin x_1(t) \\ \frac{1}{L_a} u \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_a} \end{pmatrix}^T. \quad (4.19)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Dado el sistema (4.18), se procede primero a analizar su observabilidad. Podemos notar que el vector $\theta \in \mathbb{R}^1$ y $x \in \mathbb{R}^3$, entonces $d = 1$ y $n = 3$. En consecuencia, se procede a verificar las condiciones de rango $\text{rango}(F) = d$ y $\text{rango}(O) = n$.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \\ [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{NK_m}{mL_a^2} \\ 0 & -\frac{K_b N}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \\ [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{NK_m}{mL_a^2} \\ 0 & -\frac{K_b N}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}^2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Dado que las condiciones de rango se cumplen, es decir $\text{rank}(O) = 3$ y $\text{rango}(F) = 1$, entonces, es posible diseñar un observador no lineal de la forma (3.156) para el

sistema (4.17). Este observador es:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{NK_m}{m l^2} \\ 0 & -\frac{K_b N}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \hat{\theta} + K_1(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (4.21)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = K_2(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (4.22)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) = \hat{\varphi}_p \quad (4.23)$$

Para verificar el desempeño del observador, se lleva a cabo una simulación en MATLAB[®]. Las ecuaciones del modelo (4.17) y del observador (3.156) son integradas usando el método de Euler (Runge-Kutta de primer orden) con un paso de integración de $T_s = 0.05$ s. Las ganancias del observador son calculadas por medio de la localización de polos de la matriz de estabilidad del observador:

$$A_s = \begin{bmatrix} A - K_1 C & F \\ -K_2 C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Los eigenvalores de la matriz A_s son ubicados en $\lambda_1 = 2.2$, $\lambda_2 = 2.8$, $\lambda_3 = 2.9$ y $\lambda_4 = 4$ (ver Fig.4.30), en consecuencia, las ganancias resultan ser $K_1 = [1.90 \ 23.26 \ -151.09]$, $K_2 = 7.14$.

Para llevar a cabo las simulaciones, se utilizaron las siguientes condiciones iniciales del modelo (4.17) y del observador (3.156): $x^0 = (\varphi_p^0 \ w_p^0 \ I_a^0)^T = (0.01 \ 0 \ 0)^T$, $\hat{x}^0 = (\hat{\varphi}_p^0 \ \hat{w}_p^0 \ \hat{I}_a^0)^T = (0.065 \ 0.215 \ 0.12)^T$ y $\hat{\theta}^0 = 0$.

Simulación 4.4.1. Escenario 1. Falla abrupta. En esta prueba se considera un voltaje de entrada de $u = 1.5$ V. Por su parte, la variación del voltaje de

alimentación Δu es simulada como sigue:

$$\theta = \Delta u = \begin{cases} 0 \text{ V,} & 0 \text{ s} \leq t < 35 \text{ s} \\ 0.5 \text{ V,} & 35 \text{ s} \leq t < 75 \text{ s} \\ 0.8 \text{ V,} & 75 \text{ s} \leq t \end{cases} \quad (4.25)$$

En la Fig. (4.27) se presenta la estimación del estado $\hat{x}_1 = \hat{w}_p$. Aunque esta es una señal que se considera medible, se grafica con la finalidad de verificar el desempeño de la estimación. También se presenta la estimación de $\hat{x}_2 = \hat{w}_p$ donde se puede apreciar la rápida respuesta que tiene el observador para estimar los estados. En lo que respecta a la estimación de $\hat{x}_3 = \hat{I}_a$ (señales con líneas punteadas), después de que la variación de voltaje se produce, se puede notar que el observador converge asintóticamente al sistema simulado (líneas solidas). Se pueden apreciar los efectos de los incrementos o variaciones que tiene Δu a los $t = 35\text{s}$ y $t = 75\text{s}$. Al ocurrir estas variaciones al observador le toma cerca de 5s en converger. También podemos notar el desempeño del observador para estimar Δu , la entrada desconocida simulada.

El tiempo de convergencia del observador puede ser modificado seleccionando diferentes eigenvalores de la matriz A_s . En las figuras siguientes (4.29), se presenta la trayectoria del error de estimación, donde podemos apreciar la convergencia asintótica del observador.

Caso 2 Se consideran dos escenarios, el primero con resultados en simulación y el segundo con resultados experimentales.

Simulación 4.4.2. Escenario 1. Falla abrupta. Se considera el siguiente modelo matemático del motor de CD de imanes permanentes acoplado a rodamientos Menini *et al.* (2015).

$$\begin{aligned} \dot{i}_a(t) &= -\frac{R_a}{L}i_a(t) - \frac{K_e}{L}v_m(t) + \frac{1}{L}u \\ \dot{v}_m(t) &= \frac{K_T}{J_1}i_a(t) - \left(\frac{f_r - f_p v_m(t)}{J_1}\right)v_m(t) - \frac{T_0 - T_2}{J_1} \end{aligned} \quad (4.26)$$

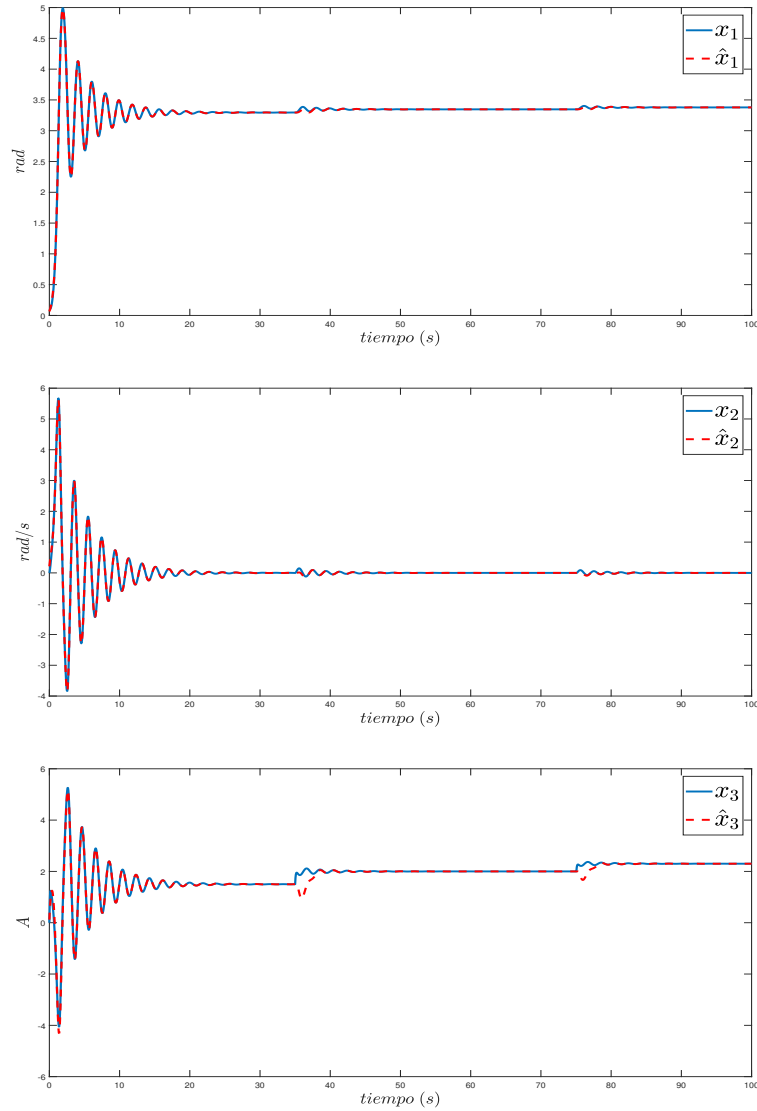


Figura 4.27: Estimación del estado φ_p , w_p y I_a .

donde i_a corresponde a la corriente de armadura, v_m es la velocidad rotacional (rpm), $u(t)$ es el voltaje de armadura (entrada al sistema), T_0 y T_2 son el par sin carga con carga, respectivamente. R_a es la resistencia de armadura, L es la inductancia, K_e es el coeficiente de la fuerza contra electromotriz, K_T es el coeficiente

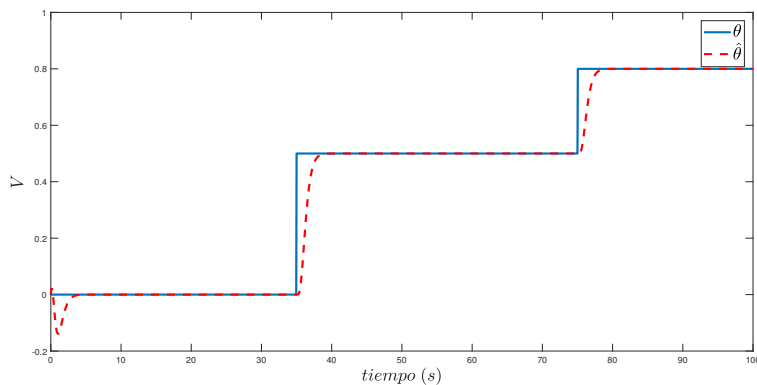


Figura 4.28: Estimación de la entrada desconocida $\theta = \Delta u$.

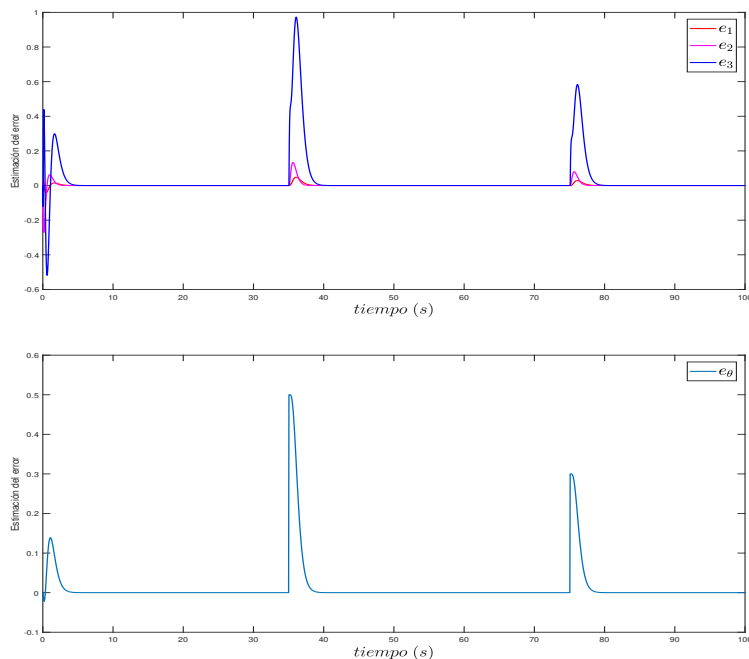


Figura 4.29: Error de estimación.

de la corriente del torque, J_1 es el momento de inercia normalizado, f_r es el coeficiente de fricción debido a la condición de lubricación y f_p es el coeficiente de fricción producido por las aerodinámicas, tal como la resistencia del ventilador.

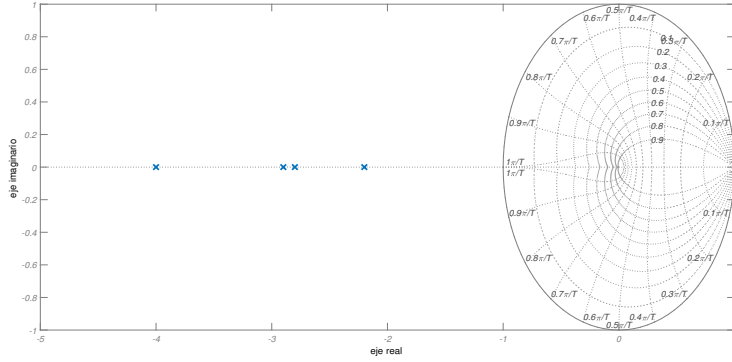


Figura 4.30: Diagrama de la localización de polos.

El valor de cada parámetro es: $R_a = 1\Omega$, $L = 0.9H$, $K_e = 13.5 \times 10^{-3}V/rpm$, $K_T = 0.1Nm/A$, $J_1 = 66.9 \times 10^{-4}Nms$, $f_r = 1.4 \times 10^{-4}Nm/rpm$, $f_p = 7.5 \times 10^{-8}Nm/rpm^2$ y $T_2 = 22.9 \times 10^{-2}Nm$. Se considera la siguiente suposición.

Suposición 8 La velocidad rotacional v_m y el voltaje de armadura u son medibles.

La suposición 8 implica que v_m y u son señales conocidas, es decir, que no necesitan ser estimadas. Entonces, la velocidad v_m es la salida del sistema, es decir, $y(t) = v_m(t)$. Consideramos que la corriente de armadura i_a y el par sin carga T_0 son desconocidos y por lo tanto, necesitan ser estimados. En consecuencia, el sistema (4.26) tiene la forma del sistema (4.18), como se presenta a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{v}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L} & 0 \\ \frac{K_T}{J_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ v_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{K_e}{L}v_m(t) + \frac{1}{L}u \\ -\left(\frac{f_r - f_p v_m(t)}{J_1}\right)v_m(t) + \frac{T_2}{J_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_1} \end{bmatrix} T_0 \quad (4.27)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ v_m(t) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

donde $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t))^T = (i_a(t) \ v_m(t))^T$, $y(t) = x_2(t) = v_m(t)$, $\theta = T_0$ y

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R_a}{L} & 0 \\ \frac{K_T}{J_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 1), \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_1} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$g(y, u) = \begin{pmatrix} -\frac{K_e}{L}v_m + \frac{1}{L}u \\ -\left(\frac{f_r - f_p v_m}{J_1}\right)v_m + \frac{T_2}{J_1} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

El sistema (4.26), tiene la forma del sistema (4.18) con las matrices descritas en (4.29)-(4.30).

Observación 1 *En este sistema podemos notar que $\theta \in \mathbb{R}^1$ y $x \in \mathbb{R}^2$, entonces $d = 1$ y $n = 2$. En consecuencia, la suposición 1 es verificada, es decir, $\text{rank}(F) = 1$, $\text{rank}(O) = 2$, donde $O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$.*

Considerando la observación 1, el observador puede tener la forma dada en la Ec. (3.156) y puede ser diseñado para estimar el estado no medible i_a y la entrada desconocida T_0 como sigue:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L} & 0 \\ \frac{K_T}{J_1} & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} -\frac{K_e}{L}y(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ -\left(\frac{f_r - f_p y(t)}{J_1}\right)y(t) + \frac{T_2}{J_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_1} \end{bmatrix} \hat{\theta}(t) + K_1(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (4.31)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = K_2(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (4.32)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (4.33)$$

donde las ganancias del observador K_1 y K_2 son matrices constantes de dimensiones apropiadas. Estas matrices son calculadas por medio de la localización de polos de la matriz de estabilidad A_s , dada en la ecuación (3.157). La simulación del modelo (4.26) y el observador (4.31) son programados en el software MATLAB[®]

para mostrar el desempeño de la estimación simultánea de estados y la entrada desconocida, en este caso, para la estimación de la corriente i_a el par sin carga T_0 .

Los valores propios de la matriz A_s son localizados en $\lambda_1 = 0.41$, $\lambda_2 = 0.42$ y $\lambda_3 = 0.40$, en consecuencia, las ganancias del observador son: $K_1 = (0.027 \ 0.030)$, $K_2 = -3.84 \times 10^{-4}$.

En la siguiente simulación, las condiciones iniciales para del observador y del sistema son las siguientes: $x(0) = (i_a(0) \ v_m(0))^T = (4 \ 0.02)^T$, $\hat{x}(0) = (\hat{i}_a(0) \ \hat{v}_m(0))^T = (2 \ 0.10)^T$ y $\hat{\theta}(0) = 0.04$.

El voltaje de entrada es evaluado con $u = 10 \text{ V}$. Las ecuaciones diferenciales del motor y del observador son resueltas usando el método de primer orden de Rugen-Kutta (Euler) con un paso de integración de 0.01 s .

En la simulación se realizan dos cambios abruptos en T_0 como sigue:

$$T_0 = \begin{cases} 0.023 \text{ Nm}, & 0 \text{ s} \leq t < 50 \text{ s} \\ 0.040 \text{ Nm}, & 50 \text{ s} \leq t < 100 \text{ s} \\ 0.050 \text{ Nm}, & 100 \text{ s} \leq t \end{cases}$$

Los resultados en simulación se muestran en las figuras 4.31-4.33. En la figura 4.31 y 4.32, se puede apreciar que la corriente estimada \hat{i}_a (línea punteada) converge asintóticamente a la variable simulada del sistema i_a (línea sólida). Igualmente se muestra la señal $x_2 = v_m$ y su valor estimado, que como es de esperarse, es estimada sin problema al ser la salida medida.

En la Fig.4.33 se muestra estimación de $\hat{\theta} = \hat{T}_0$ (línea punteada). Se aprecia que converge adecuadamente a la señal simulada $\theta = T_0$ y reproduce las variaciones que ocurren a los instantes de tiempo $t = 50 \text{ s}$ y $t = 100 \text{ s}$.

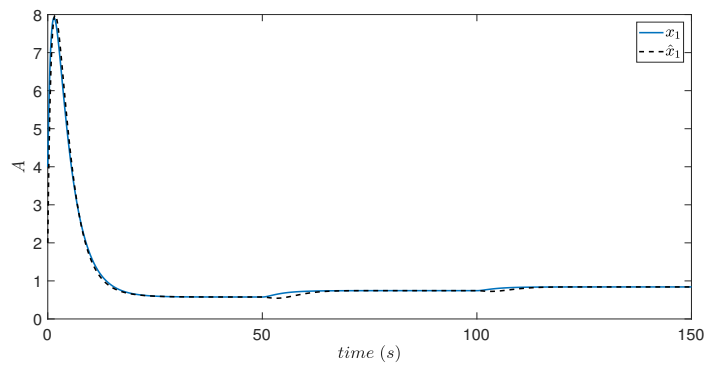


Figura 4.31: Estimación de $x_1 = i_a$.

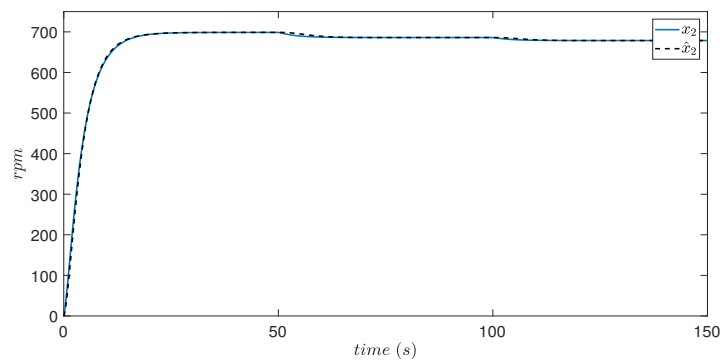


Figura 4.32: Estimación de $x_2 = v_m$.

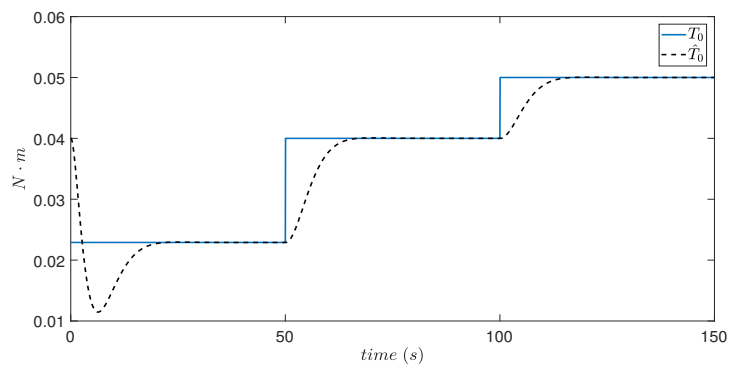


Figura 4.33: Estimación de $\theta = T_0$.

Escenario 2

Para este escenario, consideramos el prototipo que se encuentra en el laboratorio que consiste en un motor de CD (1) acoplado a un tren de rodamientos (2) (ver figura 4.34). Igualmente para la estimación de i_a y T_0 .

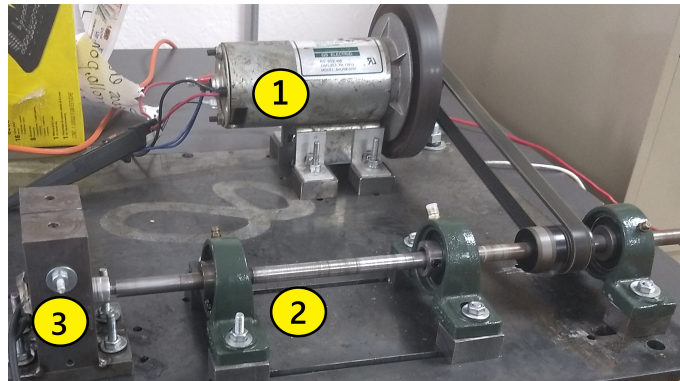


Figura 4.34: Prototipo de laboratorio. Motor de DC conectado a un tren de rodamientos.

Una prueba de operación se toma en cuenta para mostrar el desempeño del observador, con una alimentación al motor de $u = 15V$, como en el escenario 1, se considera que la velocidad rotacional del motor es medida, la corriente de armadura i_a es no medible y el valor de $\theta = T_0$ es desconocido. Por lo tanto, el observador (4.31) es implementado con las ganancias K_1 y K_2 con los siguientes valores

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.02747 \\ 0.33446 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad K_2 = -3.83967 \times 10^{-4}$$

Al usar estas ganancias, la matriz de observabilidad del observador A_s , definida en la ec.(3.157), tiene los valores propios $\lambda_1 = -0.63$ y $\lambda_{2,3} = -0.28 \pm 0.17i$, asegurando una adecuada convergencia. Las condiciones iniciales del observador son las siguientes $\hat{x}(0) = [1.4 \quad 700]^T$, $\theta(0) = \hat{T}_0(0) = 0.23$. Con un paso de integración de $1\mu s$. El experimento se realizó de la siguiente manera, la señal

de frecuencia que proporciona el encoder fué adquirido y tratado con la tarjeta myRIO-1900 con un tiempo de muestreo $t = 1\eta s$ para entregar una señal proporcional a la velocidad del motor en *r.p.m.* El voltaje de entrada es dado por una fuente programable DC Magna-Power. Una vez que la velocidad del motor alcanza el valor de estado estable (alrededor de 800 *r.p.m.* como se ilustra en la Fig.4.35), se genera una fuerza de fricción inducida mecánicamente a partir de los $t = 390s$ a $t = 600s$. Esta acción emula un escenario de falla, probablemente debido a algún daño en los rodamientos. De esta manera, se espera una variación en el valor de T_0 .

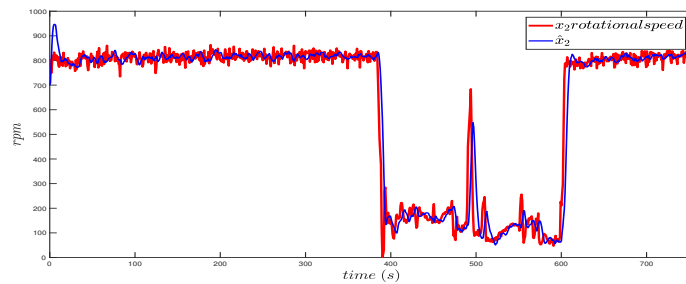


Figura 4.35: Velocidad rotacional medida y estimada del motor.

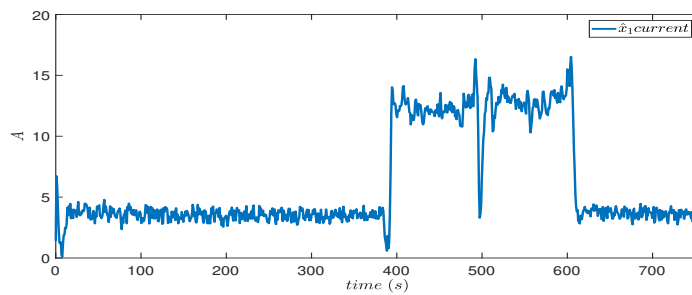
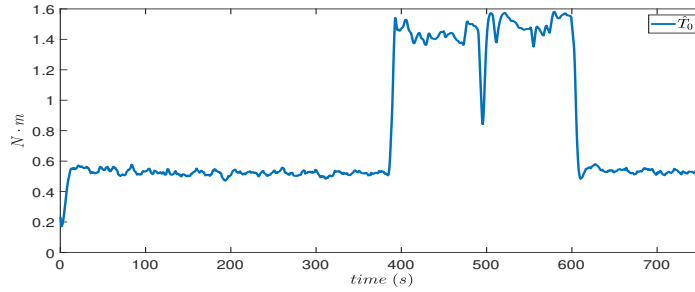


Figura 4.36: Estimación de la corriente de armadura.

Los resultados experimentales obtenidos se presentan en las Figs.4.35-4.37. Donde en la Fig.4.35 se puede apreciar que la velocidad de rotación estimada $\hat{x}_2(t) = \hat{v}_m(t)$ (línea azul) converge asintóticamente al valor medido (línea roja) a

Figura 4.37: Estimación de T_0 .

pesar de la falla y el ruido de medición.

Como se esperaba, la corriente de armadura i_a aumenta cuando se induce la fuerza de fricción. La corriente de armadura estimada correspondiente $\hat{x}_1(t) = \hat{i}_a(t)$ se representa en la Fig.4.36. Finalmente, la aparición de la entrada desconocida se refleja como una variación creciente en $T_0(t)$, cuyo valor estimado de $\hat{T}_0(t)$ se representa en la Fig.4.37.

4.5. Estimación de fallas en sensores y actuadores.

En esta sección, se ilustra el diseño del observador propuesto en la sección 3.5, aplicado a un sistema de compresor que forma parte de una celda de combustible. Los escenarios de falla que se presentan son abrupta e incipiente.

El modelo del compresor es descrito como sigue (Pukrushpan *et al.*, 2004):

$$\dot{\omega}_{cp} = \left(-\frac{\tilde{Z}_3 V_{cp}}{J_{cp} R_{cm}} K_v\right) \omega_{cp} + \frac{\tilde{Z}_3}{J_{cp}} \left(\frac{V_{cp}}{R_{cm}} - \frac{C_p T_{amb}}{\eta_{cm} \tilde{\eta}_{cp}} \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2\right) \quad (4.34)$$

donde ω_{cp} es la velocidad del compresor, K_v es la constante eléctrica del motor, J_{cp} es la inercia del motor y compresor, R_{cm} es la resistencia del circuito motor compresor, C_p es la capacidad de calor del aire a presión constante, T_{amb} es la temperatura ambiente y η_{cm} es la eficiencia del compresor, V_{cp} es el voltaje, $\tilde{Z}_{1,2,3}$

son funciones de la corriente pila I_{st} . Los parámetros y sus valores del sistema son dados en la tabla 4.4-4.5.

Tabla 4.4: Parámetros del modelo del compresor

Simbolo	Valor
k_v	0.0153 V/(rad/s)
J_{cp}	$5 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
R_{cm}	0.816 Ω
C_p	1004 J/(kg·K)
T_{amb}	298 K
η_{cm}	0.9

Tabla 4.5: Variables del compresor

Variables aproximadas
$\tilde{\eta}_{cp} \approx 0.777217$
$\tilde{Z}_1 \approx 0.275641 \cdot 10^{-3} I_{st} - 0.340993 \cdot 10^{-3}$
$\tilde{Z}_2 \approx 0.001375 I_{st} - 0.023710$
$\tilde{Z}_3 \approx -0.000426 \cdot 10^{-3} I_{st} + 0.213459 \cdot 10^{-3}$

El modelo de la ec. (4.34) puede ser llevado a la forma Takagi-Sugeno considerando que $\rho(k) = I_{st}(k)$ y las matrices en espacio de estado sean:

$$A_i = \left(-\frac{\tilde{Z}_3 V_{cp}}{J_{cp} R_{cm}} K_v \right)$$

$$B_i = \frac{\tilde{Z}_3}{J_{cp}} \left(\frac{V_{cp}}{R_{cm}} - \frac{C_p T_{amb}}{\eta_{cm} \tilde{\eta}_{cp}} \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2 \right)$$

donde ω_{cp} es el estado, V_{cp} es la entrada e I_{st} es el parámetro variable. Las dimensiones de las matrices $A_i \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ y $B_i \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$.

Los vértices de cada modelo son programados bajo el siguiente criterio:

$$\bar{\rho}(k) = \frac{I_{st}(k) - I_{stmin}}{I_{stmax} - I_{stmin}} \quad \text{y} \quad \underline{\rho}(k) = \frac{I_{stmax} - I_{st}(k)}{I_{stmax} - I_{stmin}} \quad (4.35)$$

Con la finalidad de obtener resultados de la estimación, se considera que la corriente de pila esté en un rango de $I_{st} \in [100, 300] \text{ mA}$, usando una secuencia de pasos de 10 mA un conjunto de 21 submodelos son obtenidos. El sistema es discretizado con un tiempo de muestreo $t = 0.01 \text{ s}$.

Así que para hacer el banco de observadores dedicados, se verifica la prueba de observabilidad como sigue:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA_i \end{bmatrix} = 1 \quad (4.36)$$

Entonces, el observador dedicado para la estimación de falla en actuador (3.203) de la sección 3.5, está conformado por las siguientes matrices:

$$\check{A}_i = \begin{bmatrix} 0.9487 & 5.2901 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad B_i = \begin{bmatrix} 5.2901 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Delta\check{A}}_i^+ = \overline{\Delta\check{A}}_i^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\Delta\check{A}}_i^- = \overline{\Delta\check{A}}_i^+ = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.1897 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo las desigualdades (3.184)-(3.188), asignando la región del círculo con un radio de $r = 1$ y centro $q = 0$, y dos franjas verticales: $h_1 = -0.11$ y $h_2 = -0.9$. Se obtienen las siguientes ganancias:

$$\underline{\check{L}}_i = \begin{bmatrix} 0.97321 \\ 0.01429 \end{bmatrix}, \quad \overline{\check{L}}_i = \begin{bmatrix} 0.97326 \\ 0.01430 \end{bmatrix}$$

Simulación 4.5.1. Escenario 1. Falla abrupta. Para este escenario, el cambio abrupto es visto como una señal pulso que se lleva a cabo a los $t = 8 \text{ s}$ a 22 s . En la figura 4.38 podemos apreciar la estimación de ω_{cp} a pesar de la ocurrencia

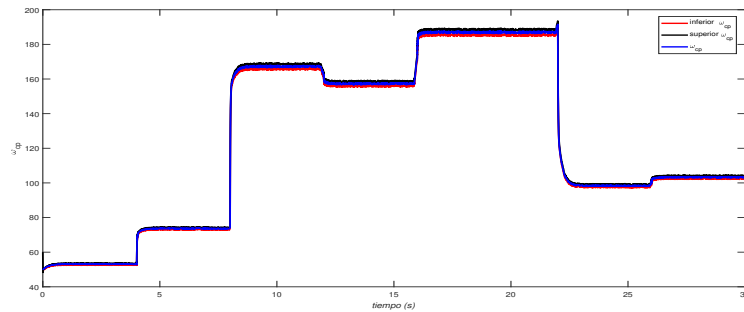


Figura 4.38: Estimación de ω_{cp}

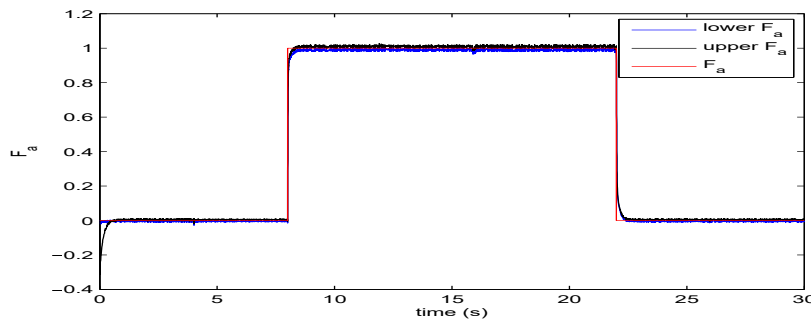


Figura 4.39: Estimación de f_a

del fallo f_a , esta falla se presenta en la figura 4.39 donde se ve que el observador al principio va suavemente estimando la ocurrencia de la falla, y estas estimaciones poco a poco van rodeando a la señal original.

Simulación 4.5.1. Escenario 2. Falla incipiente. Para este escenario se considera las mismas condiciones del escenario anterior, donde en las figuras 4.40 y 4.41 se puede ver que el observador también es capaz de estimar este tipo de falla incipiente.

Para el caso del observador dedicado para la estimación de falla en sensor, como se muestra en la ecuación (3.204) de la sección 3.5, las siguientes matrices le corresponden:

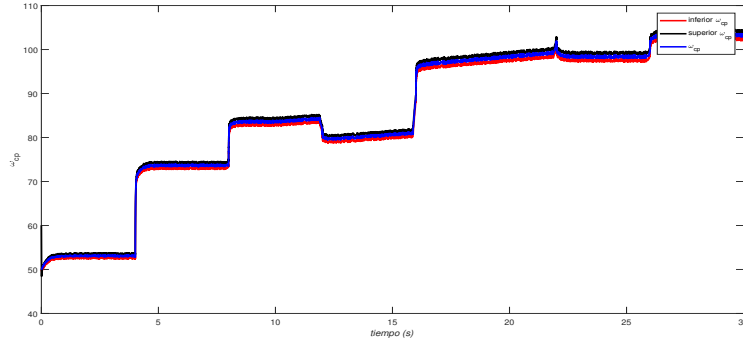


Figura 4.40: Estimación de ω_{cp}

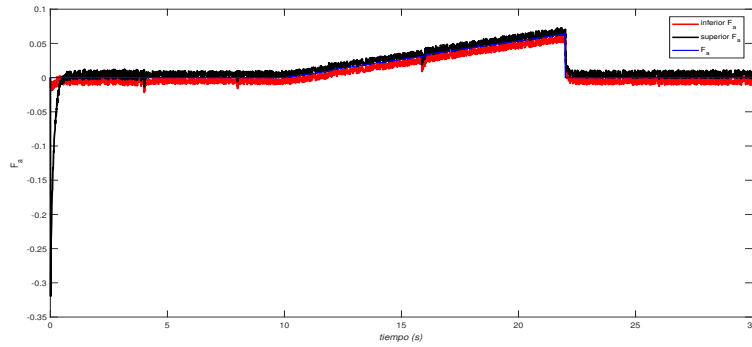


Figura 4.41: Estimación de f_a

$$\check{A}_i = \begin{bmatrix} 0.9487 & 5.2901 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 1], B_i = \begin{bmatrix} 5.2901 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\check{\Delta A}}_i^+ = \overline{\check{\Delta A}}_i^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{\check{\Delta A}}_i^- = \overline{\check{\Delta A}}_i^+ = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.1897 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Simulación 4.5.2. Escenario 1. Falla abrupta. Para este caso la señal considerada como un cambio en la salida es de $t = 18s$ a $t = 25s$, considerando que la región sea definida para un sector disco $r = 1$, $q = 0$, $h_1 = -0.11$ y $h_2 = -0.94$ para las franjas verticales. Los resultados de las estimaciones son presentadas a

continuación:

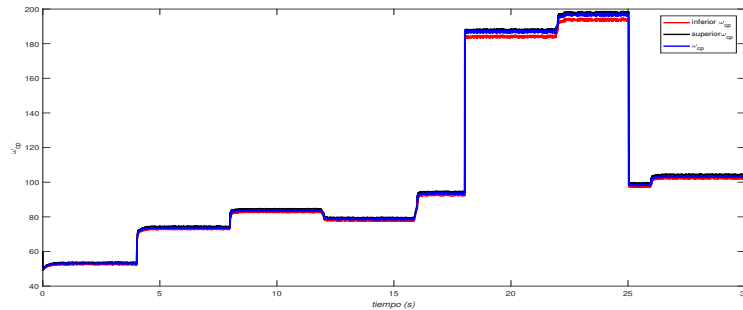


Figura 4.42: Estimación de ω_{cp}

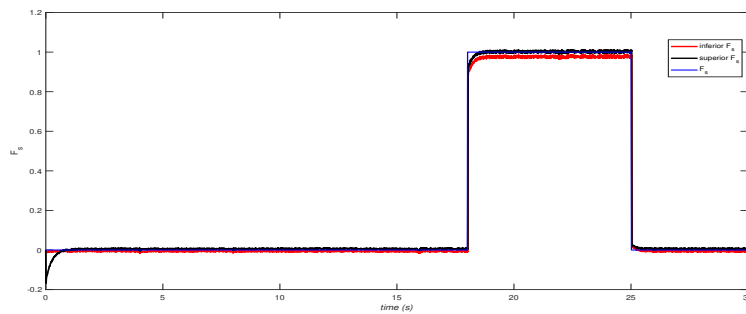


Figura 4.43: Estimación de f_s

Simulación 4.5.2. Escenario 2. Falla incipiente. Los resultados de este escenario de falla (figura 4.45), también nos indica que el observador es capaz de estimar la salida a pesar de la falla.

Para los resultados experimentales se diseñó e implementó un banco de pruebas (ver Anexo A) como se muestra en la siguiente figura. Que consiste en los siguientes elementos (ver Fig.4.46): un motor de corriente directa de imanes permanentes de baja potencia (2), el motor es conectado con una banda de transmisión (3) a un tren de rodamientos (4) como la carga, un encoder de cuadratura

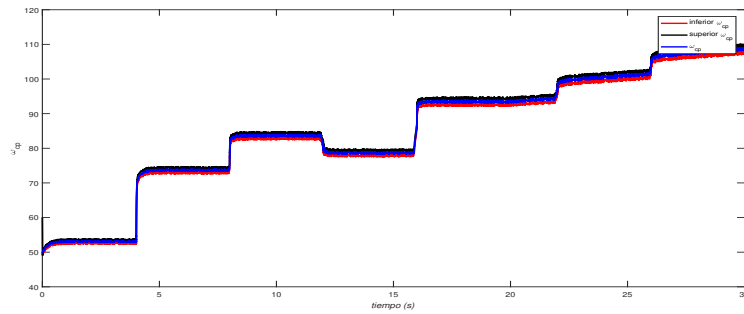


Figura 4.44: Estimación de ω_{cp}

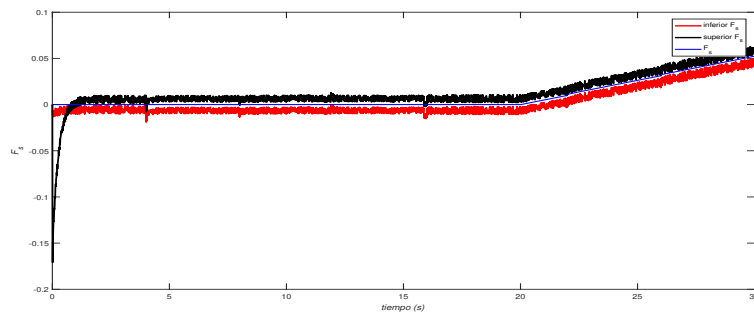


Figura 4.45: Estimación de f_s

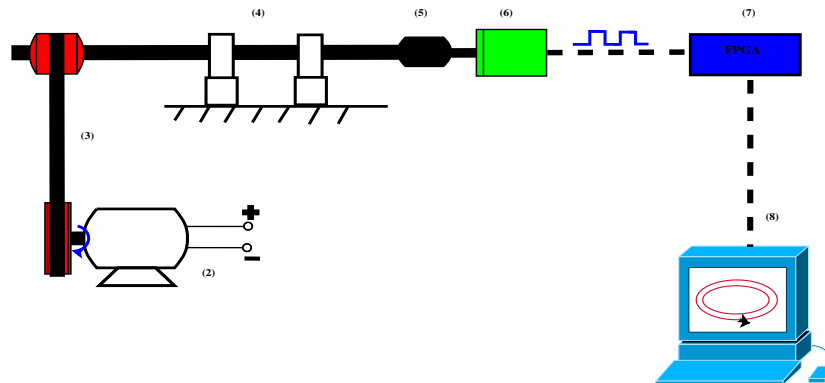


Figura 4.46: Esquema de banco de pruebas del laboratorio.

(6) es acoplado (5) con el tren de rodamientos para medir la velocidad rotacional del motor $v_m(t)$. El período del pulso es convertido a revoluciones por minuto

(rpm) a través del FPGA (7) que proviene de una tarjeta myRIO-1900 National Instruments®, la conversión es generada en el software Labview (8).

Capítulo 5

Conclusiones

La metodología general implementada en este trabajo de investigación como estrategia para la detección y estimación de fallas en actuadores y sensores, y la estimación de estados de forma simultánea para sistemas Takagi-Sugeno, se presenta en el diagrama flujo 5.1.

Como resumen del trabajo de tesis, se describen a continuación los observadores propuestos y actividades realizadas.

En este trabajo de tesis se presenta el diseño de un observador PI generalizado T-S para la estimación del parámetro y estados. Por otra parte, en la sección 4.3 se presenta un observador intervalar para la estimación simultánea de los estados, parámetros y falla en actuador. Este observador es una síntesis del observador de entrada desconocida desacoplando el vector de falla y el observador intervalar. Además, se toma en cuenta que la incertidumbre paramétrica, el ruido y la perturbación sean desconocidos pero acotados. El observador es robusto ante perturbaciones y ruido. Se presenta un caso de aplicación para evaluar el desempeño del observador. Se presentan dos escenarios de fallas una abrupta e intermitente, ambos con datos experimentales. La estimación proporciona una estimación intervalar, es decir, brinda una anchura de la señal medida y/o a estimar (por ejemplo, estado, falla, ruido y/o parámetro). En este caso, los parámetros como T_0 y T_2 son estimados en un intervalo. Lo mismo pasa con la estimación de la falla en actua-

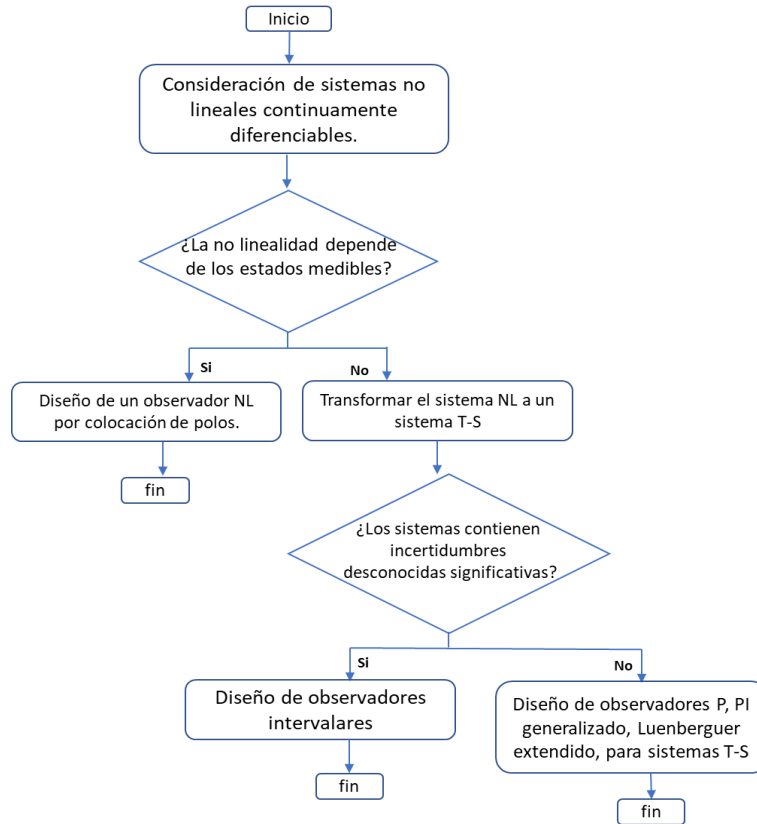


Figura 5.1: Metodología desarrollada en esta tesis.

dor, nos proporciona un intervalo donde probablemente se encuentra el valor real de la falla; el resto de las variables, tales como la velocidad y la corriente de armadura, también se encuentran dentro del intervalo de las franjas estimadas. Además de brindarnos el tamaño de la falla, permite detectar una falla bajo la lógica de que cuando la señal sobrepasa el umbral sin falla, entonces se dice que existe una falla. Estas estimaciones intervalares se pueden obtener fácilmente con la solución de algunas LMIs.

Otro trabajo realizado consiste en el diseño de un observador intervalar de entrada desconocida intervalar T-S, para la estimación de la falla en actuador y

estados. Por otra parte, se realiza el diseño de un observador intervalar de entrada desconocida intervalar T-S, para sistemas con incertidumbre paramétrica, para la estimación de falla en actuador y parámetro.

Otra actividad desarrollada en esta tesis fue el diseño de un observador no lineal para la estimación de entradas desconocidas y estados. Se desarrolló también un banco de observadores para la estimación de fallas en sensores y actuadores. Las estrategias de observadores para la estimación de fallas propuestas, son evaluadas con la finalidad de verificar el desempeño de los observadores. Estas evaluaciones son realizadas en simulación y con datos experimentales. Los datos experimentales fueron obtenidos de un banco de pruebas que consiste en un motor de cd de imanes permanentes acoplado a un tren de rodamientos que se realizó en el laboratorio del centro de investigación.

Principales contribuciones al estado del arte

El observador PI generalizado presenta una alternativa en la estimación de estados y fallas. Este observador se denomina generalizado, ya que abarca como caso particular al observador Luenberger, los observadores proporcional (P) y los proporcional integral (PI). En este trabajo de tesis este tipo de observador, originalmente aplicado a sistemas descriptivos Nan *et al.* (2014); Osorio-Gordillo *et al.* (2014a,b, 2015); Wang *et al.* (2014), se extiende a los sistemas Takagi-Sugeno. La principal ventaja de este observador es que solo se requiere una solución práctica en el cálculo de las ganancias a través de la resolución de un conjunto de LMIs. Otra importante característica de este observador es que puede ser extendido a diferentes procesos o sistemas no lineales que pueden llevarse a la representación Takagi-Sugeno. En este trabajo por ejemplo, en la sección 2 y 4 se desarrollan representaciones de sistemas numéricos y casos de estudios, con la finalidad de demostrar la practicidad de esta representación, que posteriormente se usa para el diseño o aplicación de los observadores Takagi-Sugeno. Este trabajo es publicado

en (Martínez-García *et al.*, 2016).

Otra contribución al estado del arte es el diseño de un observador no lineal para la estimación simultánea de estados y entradas desconocidas (sección 4.4). Para verificar el desempeño del observador, se presenta un caso de estudio aplicado a un motor de CD. Los resultados obtenidos en simulación demuestran la convergencia asintótica del observador ante los diferentes escenarios de fallas en el sistema (fallas abruptas en incipientes en rodamientos). Estos resultados motivaron a evaluar este observador en el laboratorio utilizando un prototipo experimental desarrollado en el marco de este mismo trabajo doctoral. El prototipo consiste en un motor de corriente directa de imanes permanentes acoplado a un eje con rodamientos, donde las fallas son inducidas (cuando aparecen estas fallas decimos que es porque los rodamientos están averiados). La detección y estimación de fallas de este prototipo se realizan utilizando observadores.

Las dos principales ventajas de este observador, en una comparación con respecto al trabajo desarrollado en Vu & Do (2019) (en el cual se desarrolla un observador más complejo para uno de los sistemas no lineales abordados en esta tesis), y trabajos similares relacionados con los sistemas Takagi-Sugeno son:

- * La simplicidad para calcular las ganancias del observador, debido a que para calcular las ganancias del observador, solo se requiere de colocar los polos de la matriz de estabilidad del observador.
- * El modelo matemático de los procesos no requiere ser transformado a un sistema T-S, conservando la dinámica no lineal original del proceso.
- * El observador puede ser fácilmente extendido al caso de poder estimar estados no medibles, entradas y fallas desconocidas.

Una limitación de este observador es que solo se puede aplicar para sistemas no lineales que tienen la forma del sistema (3.155), es decir, un sistema con parte lineal en la retroalimentación y en la entrada desconocida, pero con una estructura

no lineal que esté en función de la entrada y salida del sistema $g(y, u)$; y con salida lineal. Afortunadamente en la práctica, una gran cantidad de sistemas no lineales se pueden modelar de la forma dada en (3.155).

Con respecto a los observadores intervalares presentados en las secciones 3.2, 3.3 y 3.5, la originalidad reside en que se utilizan para estimar variables de estado y fallas en sistemas con modelos inciertos tipo Takagi-Sugeno. Estos observadores proporcionan una estimación intervalar de los estados, fallas o parámetros, es decir, proporcionan un intervalo de valores dentro del cual se encuentra el valor de la variable desconocida. Este tipo de observadores se recomiendan cuando no se tiene el valor exacto de algunos parámetros del sistema y no es posible en consecuencia tener el valor exacto de las variables a ser estimadas. En cambio, nos brinda una aproximación de estas estimaciones al brindar un intervalo en el que se encuentra la variable original o desconocida o las fallas. En el caso de la detección de fallas, se puede utilizar la lógica de que cuando una falla estimada sobrepasa la anchura del intervalo que se establece como el rango "sano", entonces se dirá que ha ocurrido una falla.

Contribución tecnológica

Se realizó en el transcurso del trabajo de investigación un prototipo que se encuentra en el laboratorio, como banco de pruebas para la detección y estimación de fallas en rodamientos. El banco de pruebas consiste en un motor de corriente directa de imanes permanentes acoplado a un tren de rodamientos. Este prototipo puede usarse para efectuar diferentes escenarios de fallas como los que se han presentado en este trabajo, así como realizar fallas en sensores o fallas múltiples en los rodamientos, entre otros.

Perspectivas y trabajos futuros

Las perspectivas del presente trabajo son las siguientes: En el aspecto práctico, implementar en línea los observadores propuestos al banco de pruebas desarrollado, con la finalidad de comparar distintos esquemas de detección de fallas. En el

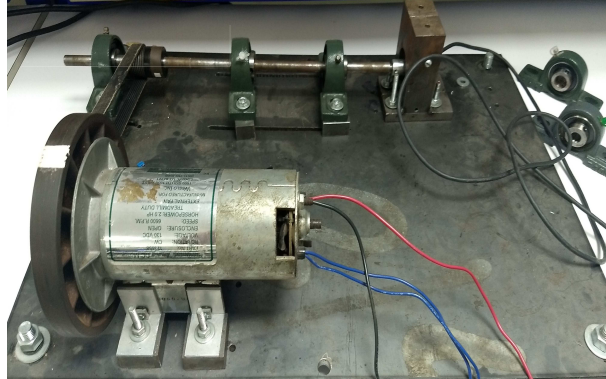


Figura 5.2: Banco de pruebas

aspecto teórico, una opción interesante es retomar la teoría de los observadores intervalares para la detección de fallas mediante observadores no lineales. También una opción interesante es la síntesis de los observadores intervalares, para el aislamiento de fallas. Por otra parte, la síntesis de observadores de orden reducido y/o funcionales con la teoría de los observadores intervalares, es un tema abierto a la investigación, así como la síntesis de observadores intervalares en cascada.

Publicaciones

Congresos internacionales

C. Martínez-García, V. Puig, C.M. Astorga-Zaragoza, G.L. Osorio-Gordillo. *Robust Fault Estimation based on Interval Takagi-Sugeno Unknown Input Observer*. 2018, International Federation of Automatic Control (IFAC). Warsaw, Poland, Agosto, 2018.

C. Martínez-García, V. Puig and C. Astorga-Zaragoza. *Fault Estimation using a Takagi-Sugeno Interval Observer: Application to a PEM Fuel Cell*. 2017 In Proceedings of the 14th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2017), Madrid, España, Julio, 2017.

C. Martínez-García, G.L. Osorio-Gordillo, C.M. Astorga-Zaragoza and V. Puig. *Fault detection on bearings coupled to permanent magnet DC motors by using a generalized Takagi-Sugeno PI observer*. 2016 3rd Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol). Barcelona, España, Septiembre, 2016.

Revistas indizadas en el Journal Citation Reports

C. Martínez-García, C. Astorga-Zaragoza, V. Puig, J. Reyes-Reyes, FR.López-Estrada, *A Simple Nonlinear Observer for State and Unknown Input Estimation: DC Motor Applications*. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2019. DOI: 10.1109/TCSII.2019.2920609.

C. Martínez-García, V. Puig and C. Astorga-Zaragoza. *Estimation simultaneous of Actuator Fault and Parameter based on Unknown Input Interval Observer for Takagi-Sugeno systems* (Trabajo en preparación).

Robust Fault Estimation based on Interval Takagi-Sugeno Unknown Input Observer

C. Martínez García*, V. Puig**, C.M. Astorga-Zaragoza*, G.L. Osorio-Gordillo*

* *Tecnológico Nacional de México/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Interior Internado Palmira s/n, Col. Palmira Cuernavaca, Morelos, México. (e-mail: mgci@cenidet.edu.mx).*

** *Universitat Politècnica de Catalunya. Rambla de Sant Nebridi 10, Terrassa, Spain. (e-mail: vicenc.puig@upc.edu)*

Abstract: This paper proposes a discrete-time robust fault estimation scheme based on an interval Takagi-Sugeno Unknown Input Observer (UIO). The designed observer allows the interval estimation of states and faults by considering that the uncertainty is modelled in a deterministic bounded context. Furthermore, in the observer design, the effect of uncertainty is minimized using the H_∞ criterion using a LMI formulation. The proposed estimation scheme allows not only to provide the nominal value for states and faults but also an uncertainty interval where they should lie. A permanent magnet DC motor is used as a case study to assess the proposed approach.

© 2018, IFAC (International Federation of Automatic Control) Hosting by Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: fault estimation, Takagi-Sugeno systems, interval observer, unknown input observer, DC motor.

1. INTRODUCTION

Fault diagnosis involves fault detection, isolation and estimation. In the literature there are numerous methods dealing with fault detection and isolation tasks (Blanke et al., 2006). However, less effort has been devoted to the fault estimation task. The goal of fault estimation is to provide the size of the fault and its evolution time (Blanke et al., 2006). This task is very important for several applications, especially when an active fault-tolerant control (FTC) strategy is implemented (Noura et al., 2009) (Witczak, 2014). An example of the application of the fault estimation is to determine the size of the leaks in a pipe system with the aim of quantifying the losses. It is difficult to develop a general fault diagnosis methodology (applicable to the supervision), due to the different dynamical behavior of the systems. There are several approaches for addressing the problem of diagnosis of non-linear systems (Witczak, 2007). These approaches appear because of the complexity to obtain a general methodology for all types of non-linear systems. However, it is possible, for a mathematical representation from the dynamic system, to address the problem of diagnosis with some approach depending of the system nature.

In this work, it is considered that the nonlinear model of the system to be monitored can be represented by a Takagi-Sugeno (TS) model. TS models were introduced by Takagi and Sugeno (1985) and since then this representation has proven to be a suitable representation for dealing with nonlinear systems. This modelling approach is based on the interpolation of local linear models through membership functions that come from a set of fuzzy rules. Takagi-Sugeno models are used for the design of different applications such as process control, fault tolerant control

(Noura et al., 2009)(Witczak, 2014), fault detection and isolation (Blanke et al., 2006), fault estimation (Blanke et al., 2006) (Guerra et al., 2015) (Aouaouda et al., 2014) (Ichalal et al., 2010) (Zhang et al., 2009)(K. Zhang and shi., 2012)(M. Rodrigues and N., 2015) and state estimation.

A current topic of research in the theory of TS systems is the use of interval observers. Interval observers are recommended when there exists uncertainties, unknown but bounded variables and parametric uncertainties in a system (e.g., noise, disturbances and parametric uncertainties). Interval observers produce an upper and lower estimation (interval). The interval estimations can be used for including robustness in the the fault diagnosis system. The advantage of these observers is that despite the no knowledge of the exact values of uncertainty, the observer provides an guaranteed estimation range where the variable value is located. Currently, interval observers have been extended to LPV systems (Efimov et al., 2013b) (Zhang and Yang, 2017) (Rotondo et al., 2016a)(Efimov et al., 2013a) and more recently to TS systems (Rotondo et al., 2016b).

The main contribution of this work is to propose an interval Takagi-Sugeno observer in discrete-time with the objective to provide a simultaneous bounded robust estimation of states and faults despite uncertainties. The observer is designed minimizing the effect of uncertainty by using the H_∞ criteria using the LMI framework. The proposed approach is presented in Section 2. Section 3 introduces the observer design using LMIs. In Section 4, a permanent-magnet DC motor modelled with the Takagi-Sugeno modelling paradigm is used to assess the performance of the proposed approach.

Fault Estimation using a Takagi-Sugeno Interval Observer: Application to a PEM Fuel Cell

C. Martínez García¹, V. Puig² and C. Astorga Zaragoza¹

¹*Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, Mexico*

²*Universitat Politècnica de Catalunya, Departament of Automatic Control, Rambla de Sant Nebridi 10, Terrassa, Spain*

Keywords: Takagi-Sugeno System, Interval Observer, Fault Estimation, PEM Fuel Cell.

Abstract: Fault estimation plays an important role in the fault diagnosis system since provides information about the fault magnitude and temporal evolution. In this paper, we present an approach that allows to obtain a simultaneous estimation of the fault, state and associated uncertainty intervals of a uncertain Takagi-Sugeno (TS) system. The fault estimation is obtained using a TS interval observer augmenting the system state with the fault and considering the system uncertainty in a bounded context. A set of Linear Matrix Inequalities (LMIs) have been derived to design the TS interval observer. With the purpose of illustrating the performance of TS interval observer for fault and state estimation, a case study based on a Proton Exchange Membrane (PEM) fuel cell is used.

1 INTRODUCTION

Fault diagnosis involves the fault detection and isolation but also the fault estimation. The fault detection and isolation tasks determine the fault presence in the system (Zhang and Jiang, 2008) (Hwang et al., 2010) (Samy et al., 2011), but not the magnitude. The goal of fault estimation is to provide the size of the fault and its time evolution (Blanke et al., 2006). The fault estimation task is very important for several applications, especially when an active fault-tolerant control (FTC) strategy is implemented (Mahmoud et al., 2003) (Noura et al., 2009) (Witczak, 2014). An example of the application of the fault estimation is to determine the size of the leaks in a pipe system with the aim of quantifying the losses (Brune and F, 2001). There are several approaches for addressing the problem of diagnosis of non-linear systems (Witczak, 2007). In this paper, we can consider that the non-linear model of the system to be monitored can be represented by Takagi-Sugeno (TS) model. TS models were introduced by (Takagi and Sugeno, 1985), and allow describing a nonlinear system as the interpolation of linear models by means of membership functions, that come from a set of fuzzy rules. Different observer design techniques have been developed for TS systems (Guerra et al., 2015) (Aouaouda et al., 2014) (Ichalal et al., 2010) (Zhang et al., 2009).

The presence of uncertainties (unknown parameters, disturbances and/or noise) in the system, complicates the estimation using standard (non-robust) observers. Interval observers can be used to take into account the uncertainty using the set-membership approach (Puig, 2010). The interval observer considers the disturbances, noise and model parameters in a bounded way, evaluating the set of admissible values (interval) for the state vector of each time instant (Efimov et al., 2013b). So far, interval observers have been proposed for the state estimation (Efimov et al., 2013b) and fault detection of nonlinear and LPV systems (Efimov et al., 2013a). As explained in (Rassi et al., 2010), the general idea is to build two observers, which respectively estimate the lower and upper bound of the state vector assuming the system is cooperative. As the original nonlinear system is not cooperative, the observer gain is designed such that the observation error dynamics becomes cooperative. The inclusion of uncertainty in the model parameters in case of an interval observer allows robust fault detection. In (Rotondo et al., 2016), this idea has been used for the fault diagnosis of proton exchange membrane (PEM) fuel cells using a TS interval observer approach. The TS interval observer design is used for the state estimation of TS uncertain systems. Fault diagnosis is addressed using a bank observers where each observer can be made sensitive to different subset of faults.

Fault detection on bearings coupled to permanent magnet DC motors by using a generalized Takagi-Sugeno PI observer

C. Martínez-García¹, G.-L. Osorio-Gordillo¹, C.-M. Astorga-Zaragoza¹ and V. Puig²

Abstract—This paper presents a fault detection system for rotative machinery. A permanent-magnet DC motor is used as case of study. The main idea is to estimate on-line the non-load torque (T_0) in order to monitor the bearing health condition. The fault detection system is based on the design of a generalized Takagi-Sugeno PI (proportional-integral) observer. The main advantage of this approach is that it can be easily implemented because the observer gains are obtained by solving a set of LMIs (linear matrix inequalities). Moreover, the method can be extended to more complicated nonlinear systems by using the Takagi-Sugeno approach. A simulation is performed to show that this fault detection scheme can be applied to detect abrupt faults on rotative machinery which can lead the system to undesirable performance caused by vibrations or breakdown.

Index Terms—Proportional-integral observer, Takagi-Sugeno system, fault detection, LMIs (linear matrix inequalities).

I. INTRODUCTION

Rotative machines are used in almost all manufacturing processes performing a wide diversity of tasks. Examples of rotative machines frequently found in industries are pumps, motors, compressors and generators.

A common source of faults in this kind of machinery are the bearings whose main function is to prevent vibrations along the shaft or along the mechanical components coupled with the rotatory system of the machine.

When bearings are used as support, it is crucial to prevent overheating and fatigue of the manufacturing materials caused mainly by friction. Friction causes wear which in turn causes vibration on the whole rotatory system.

Friction effects on bearings can be minimized by selecting carefully the quality of the manufacturing materials, the quality of lubricants or by selecting adequately the design of the bearings (ball bearings, roller bearings, thrust bearing) depending on the application to be used.

Bearing breakdown can cause serious damage on the equipment and in consequence important economic losses. This is the main reason because bearings are the object of permanent maintenance programs in most industries and several works are devoted to propose methods to monitor the bearing health condition.

For instance in [1], the authors compute a mathematical model of the DC motor based on the block-pulse function series method [2] and then a multilayer neural network

¹C. Martínez-García, G.-L. Osorio-Gordillo and C.-M. Astorga-Zaragoza are with the Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico. Interior Internado Palmira s/n, Col. Palmira Cuernavaca, Morelos, México. mgci@cenidet.edu.mx

²V. Puig is with the Universitat Politècnica de Catalunya. C. Jordi Girona, 31, 08034 Barcelona, Spain.

configuration to detect changes on the model parameters. Neural networks combined with other techniques such as fuzzy logic have also been used for fault diagnosis of DC motors [3]. Another recent work [4] uses a fault detection method based on a high-gain observer [5] to detect changes on the nominal parameters of a DC motor. However, the use of complex Algebraic Geometric techniques represent a limitation to extend this method to other rotative machines having more complex mathematical nonlinear models.

Because a variation on the value of the load torque (T_0) under unchanged operating conditions can be associated with a problem on the bearings, in this work we propose a method to supervise the friction coefficient through the on-line estimation of T_0 . The fault detection system is based on a generalized PI (proportional-integral) observer (a more general case of this observer was developed for descriptor systems in [6]) which is designed by using a Takagi-Sugeno model of the DC motor presented in Section II. The structure of this generalized PI observer has been widely studied in recent works ([6], [7], [8], [9], [10]). It is based on the dynamic observers presented in [11] and [12]. The generalized PI observer structure presents an alternative state estimation which can be considered as more general than the Luenberger proportional-integral and proportional observers.

The main advantage of this observer is that it only requires a practical computation of the gains by solving a set of LMIs (linear matrix inequalities). Another important feature of the observer is that it can be extended to other processes having the general Takagi-Sugeno representation given in Section III. In Section IV, a simulation is performed in order to evaluate the fault detection capabilities of the proposed scheme. Finally, in Section V some general conclusions are given.

II. MODEL DESCRIPTION

A. System under study

Consider a typical mathematical model of a permanent-magnet DC motor [1]:

$$\begin{aligned} \dot{i}_a(t) &= -\frac{R_a}{L} i_a(t) - \frac{K_e}{L} V_m(t) + \frac{1}{L} u(t) \\ \dot{V}_m(t) &= \frac{K_T}{J_1} i_a(t) - \left(\frac{f_r + f_p}{J_1} V_m(t) \right) V_m(t) - \frac{T_0(t) - T_2}{J_1} \end{aligned} \quad (1)$$

where the states are the armature current $i_a(t)$ and the normalized rotational speed $V_m(t)$, $u(t)$ is the input voltage.

A Simple Nonlinear Observer for State and Unknown Input Estimation: DC Motor Applications

Citlaly Martínez-García, Carlos Astorga-Zaragoza, Vicenç Puig, Juan Reyes-Reyes and Francisco López-Estrada

Abstract—The contribution of this work is to propose a method based on a simple nonlinear observer with an easy-to-compute observer gain, in order to achieve both state and unknown input estimation. Since the structure of the original model of the process does not require any transformation, the nonlinear dynamics are preserved. This allows an accurate estimation of the states and the unknown inputs or faults. Two particular cases involving DC motors are illustrated in simulation and an experiment using a permanent magnet DC motor is presented.

Index Terms—Nonlinear observer, unknown input, fault, DC motor.

I. INTRODUCTION

From the point of view of automatic control, many problems involving DC motors must be solved in the design stage before prototyping (i.e. modeling [1], control design [2], state/parameter estimation [3]) or at the operation stage (i.e. fault diagnosis [4], fault tolerant control [5], prognosis [6]). When a DC motor operates, it is subject to different operating conditions (predictable or not) caused by exogenous variables, disturbances, noise or faults, which can be induced by many causes such as vibrations, friction, overload, and voltage variations. Most of these conditions or phenomena unrelated to the ideal behavior are collectively known as unknown inputs (UI) [7]–[9].

Typically an unknown input is an unmeasured signal affecting a dynamical system. Many times, the knowledge of these signals is crucial to predict, compensate or to monitor the consequences of them over the system dynamics. Several authors have shown that the observer-based approaches are the most successful methods used to estimate unknown inputs, e.g., [10]–[12]. For instance, the authors in [10] use a high-order sliding mode observers for leak estimation in pipelines where pressure and input-output flow rate measures are available. The case of UI observers for linear parameter variant (LPV) systems is recently treated in [11], where the computation of the observer gains via linear matrix inequalities (LMI's) is not a trivial task. The authors in [12] propose a disturbance observer-based controller for a direct-drive servo control system. In [5] and [13] UI observers are proposed for fault and state estimation for Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems. In these cases, the observer design

requires to transform the original nonlinear representation of the system into a T-S representation.

The contribution of this work is focused on proposing a method based on a simple nonlinear observer for state and unknown input estimation in DC motor applications (Section III). Two particular cases (Section II) for state and UI estimation involving DC motors are illustrated in simulation (Section IV). In order to demonstrate the practical applicability of the proposed approach, an experiment using a permanent magnet DC motor is presented in Section V.

II. PROBLEM STATEMENT

Two problems associated with unknown input estimation in DC motors are presented. For this end, two different mathematical models are selected from literature and used in this study: (1) a DC motor controlling an inverted pendulum [13] and (2) a permanent magnet DC motor [14].

1) *Case 1. DC motor controlling an inverted pendulum:* Consider the model of a DC motor controlling an inverted pendulum via gear train [13].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{NK_m}{ml^2} x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{K_b N}{L_a} x_2 - \frac{R_a}{L_a} x_3 + \frac{1}{L_a} u \end{aligned} \quad (1)$$

where $x_1 = \varphi_p$ is the motor shaft position, $x_2 = w_p$ is the motor shaft velocity, $x_3 = I_a$ is the armature current, u is the voltage input. $K_m = 0.1 Nm/A$ is the motor torque constant, $K_b = 0.1 Vs/rad$ is the back emf, $g = 9.8 m/s^2$ is the gravity, $N = 10$ is the gear ratio, $l = 1m$ is the shaft length, $m = 1kg$ is the mass, $R_a = 1\Omega$ is the armature resistance and $L_a = 0.1H$ is the armature inductance.

Assume that there is an unknown additive fault Δu in the input of system (1). In such a case, the input u is replaced by $u + \Delta u$, where Δu can be an undesired variation of the voltage input which needs to be estimated in order to compensate it. Besides, assume that the motor shaft velocity w_p and the armature current I_a are not measured.

Assumption 1. *The voltage input variation Δu is unknown.*

Assumption 2. *The shaft position $x_1 = \varphi_p$ is measurable.*

Assumption 1 implies that although the process input u is assumed to be known, actuators that provide this signal can be affected by faults Δu , i.e. non measurable signals. Assumption

Corresponding author: Carlos Astorga-Zaragoza. Department of Electronic Engineering, Tecnológico Nacional de México / CENIDET, Cuernavaca, Mor., 62490 Mexico, e-mail: astorga@cenidet.edu.mx

C. Martínez-García, J. Reyes-Reyes and F. López-Estrada are with Tecnológico Nacional de México / CENIDET / I.T. de Tuxtla Gutiérrez.

Vicenç Puig is with Advanced Control Systems (SAC) Research Group at Institut de Robòtica i Informàtica Industrial (IRI), Universitat Politècnica de Catalunya-BarcelonaTech (UPC), Barcelona, Spain.

Anexo A

Sistemas Intervalares

Los intervalos representan un conjunto de números reales en la forma $x = [a, b] \in \mathbb{R}$, donde x es un intervalo cerrado formado por el conjunto infinito de números reales comprendido entre a y b .

Un vector intervalar n -dimensional $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un vector compuesto por intervalos x_1, \dots, x_n . Por ejemplo, el intervalo de dos dimensiones $X = (x_1, x_2)$ es tal que:

$$x_1 = [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \quad \text{y} \quad x_2 = [\underline{x}_2, \bar{x}_2] \quad (1)$$

Un vector intervalar de dos dimensiones representa a un rectángulo de dos dimensiones de puntos (x_1, x_2) , tal que $\underline{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1$ y $\underline{x}_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2$.

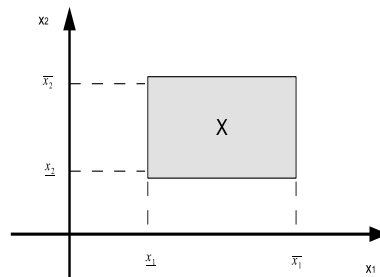


Figura 3: Esquema intervalar.

Si x es un vector intervalar, entonces $x = [\underline{x}, \bar{x}]$ es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^n , tal que \underline{x} y \bar{x} corresponden a las cotas o puntos finales inferior y superior del vector x , respectivamente. Para dos vectores $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ o matrices $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, las relaciones $x_1 \leq x_2$, $x_1 \geq x_2$ y $A_1 \leq A_2$, $A_1 \geq A_2$ se entiende elemento por elemento (una colección de desigualdades que se satisfacen para todos los elementos).

Lema 5 Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un vector variable $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ para alguna $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Considere una matriz constante $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y dos matrices A^+ y A^- , tal que $A = A^+ - A^-$ donde $A^+ = \max\{0, A\}$. Entonces, la siguiente desigualdad se debe satisfacer:

$$A^+ \underline{x} - A^- \bar{x} \leq Ax \leq A^+ \bar{x} - A^- \underline{x} \quad (2)$$

Demostración 1 El producto Ax es equivalente a:

$$Ax = (A^+ - A^-)x = A^+x - A^-x \quad (3)$$

Considerando que $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$, entonces, es evidente que:

$$A^+ \underline{x} - A^- \bar{x} \leq \underbrace{A^+x - A^-x}_{Ax} \leq A^+ \bar{x} - A^- \underline{x} \quad (4)$$

□

Para las matrices A^+ y A^- las relaciones intervalares son como sigue:

$$\underline{A}^+ \leq A^+ \leq \bar{A}^+ \quad \text{y} \quad \underline{A}^- \geq A^- \geq \bar{A}^- \quad (5)$$

Lema 6 Considerando que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz variable, tal que $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$ para alguna $\underline{A}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces:

$$\underline{A}^+ \underline{x}^+ - \bar{A}^+ \underline{x}^- - \underline{A}^- \bar{x}^+ + \bar{A}^- \bar{x}^- \leq Ax \leq \bar{A}^+ \bar{x}^+ - \underline{A}^+ \bar{x}^- - \bar{A}^- \underline{x}^+ + \underline{A}^- \underline{x}^- \quad (6)$$

Demostración 2 Basado en (3) ahora el producto variable Ax , es dado por:

$$A^+ (\underline{x}^+ - \underline{x}^-) - A^- (\bar{x}^+ - \bar{x}^-) \leq Ax \leq A^+ (\bar{x}^+ - \bar{x}^-) - A^- (\underline{x}^+ - \underline{x}^-) \quad (7)$$

Considerando a (5), se tiene:

$$\underline{A}^+ \underline{x}^+ - \bar{A}^+ \underline{x}^- - \underline{A}^- \bar{x}^+ + \bar{A}^- \bar{x}^- \leq Ax \leq \bar{A}^+ \bar{x}^+ - \underline{A}^+ \bar{x}^- - \bar{A}^- \underline{x}^+ + \underline{A}^- \underline{x}^- \quad (8)$$

donde todos los términos son positivos elemento por elemento. \square

Anexo B

El banco de pruebas que se encuentra en el laboratorio de potencia para la detección de fallas en rodamientos, consiste en un motor de corriente directa de imanes permanentes (6600 rpm, 130VDC), el motor es conectado a un tren de rodamientos como carga con una banda de transmisión, para medir la velocidad rotacional $v_m(t)$ es calculada usando la salida de pulsos de un encoder incremental de 1000 pulsos por revolución (Koyo TRD-S1000-VD) acoplado al tren de rodamientos. La conversión se genera en el software Labview, donde está la interfaz para leer la señal de cuadratura del codificador incremental a través del FPGA que proviene de la tarjeta myRIO-1900 National Instruments ®. La señal de subida y bajada para obtener el período de tiempo de la forma de onda (duración del pulso) y convertir la medida del período a revoluciones por minuto, se obtienen invirtiendo el período, para obtener la frecuencia y multiplicando por 1×10^6 que depende del reloj de la tarjeta. El período se expresa en microsegundos, el período se convierte a segundos antes de que se calcule la frecuencia, la frecuencia se divide por el número de pulsos por revolución del codificador para obtener el número de rotación por segundo multiplicando esto por 60, proporciona las *rpm* en línea.



Figura 4: Banco de pruebas del laboratorio.

BIBLIOGRAFÍA

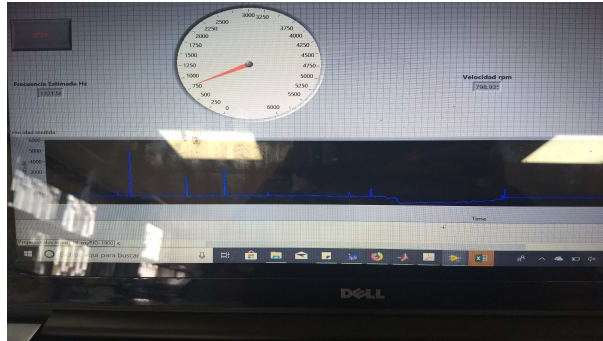


Figura 5: Visualización de la interfaz de Labview

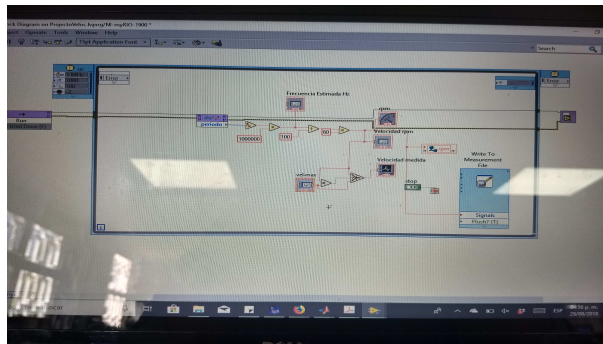


Figura 6: Programación gráfica en el entorno Labview para la conversión a rpm

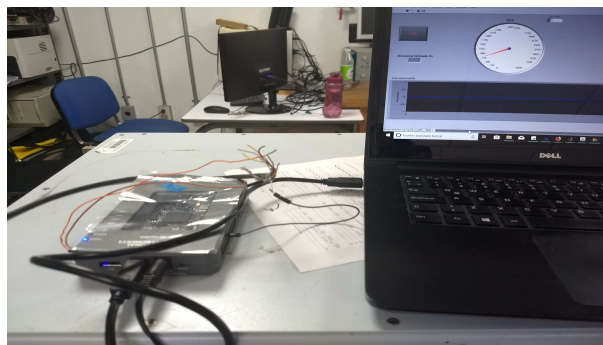


Figura 7: Interconexión del encoder con la MyRio para la adquisición de datos.

Bibliografía

- ALI, J. M., HOANG, N. H., HUSSAIN, M. A. & DOCHAIN, D. (2015). Review and classification of recent observers applied in chemical process systems. *Computers & Chemical Engineering* **76**, 27–41.
- BALLÉ, P. & ISERMANN, R. (1998). Fault detection and isolation for nonlinear processes based on local linear fuzzy models and parameter estimation. In: *Proceedings of the American Control Conference (1998), Philadelphia, Pennsylvania*.
- BLANCO, Y., PERRUQUETTI, W. & BORNE, P. (2001). Stability and stabilization of nonlinear systems and takagi-sugeno's fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering* **7**, 221–240.
- BLANKE, M., KINNAERT, M., LUNZE, J., STAROSWIECKI, M. & SCHRÖDER, J. (2006). *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer.
- BRUNONE, B. & FERRANTE, M. (2001). Detecting leaks in pressurised pipes by means of transients. *Journal of hydraulic research* **39**(5), 539–547.
- CHADLI, M., KARIMI, H. R. & SHI, P. (2014). On stability and stabilization of singular uncertain takagi-sugeno fuzzy systems. *Journal of the Franklin Institute* **351**(3), 1453–1463.
- CHILALI, M. & GAHINET, P. (1996a). h_∞ design with pole placement constraints: an lmi approach. *IEEE Transactions on automatic control* **41**, 358–367.

BIBLIOGRAFÍA

- CHILALI, M. & GAHINET, P. (1996b). H/sub/spl infin//design with pole placement constraints: an lmi approach. *IEEE Transactions on automatic control* **41**(3), 358–367.
- D., D., H., H. & M., R. (1993). *An Introduction to Fuzzy Control*. Springer.
- DE OLIVEIRA, M. C., BERNUSSOU, J. & GEROMEL, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition. *Systems & control letters* **37**(4), 261–265.
- DELMOTTE, F., GUERRA, T. M. & KSANTINI, M. (2007). Continuous takagi–sugeno models: reduction of the number of lmi conditions in various fuzzy control design technics. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **15**, 426–438.
- DING-STEVEN, X. (2008). *Model-based fault diagnosis techniques: design schemes, Algorithms, and tools*. Springer Science & Business Media.
- EDWARDS, C., SPURGEON, S. K. & PATTON, R. J. (2000). Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica* **36**(4), 541–553.
- EFIMOV, D., RAISSI, T., PERRUQUETI, W. & ZOLGHADRI, A. (2013a). Estimation and control of discrete-time lpv systems using interval observers. *Proceedings of the IEEE 52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC)* , 5036–5041.
- EFIMOV, D., RAÏSSI, T., PERRUQUETTI, W. & ZOLGHADRI, A. (2013b). Estimation and control of discrete-time lpv systems using interval observers. In: *52nd IEEE Conference on Decision and Control*.
- EFIMOV, D., RAISSI, T. & ZOLGHADRI, A. (2013c). Control of nonlinear and lpv systems: interval observer-based framework. *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**(3), 773–778.
- FENG, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy systems* **14**, 676–697.

- GAHINET, P., NEMIROVSKII, A., LAUB, A. J. & CHILALI, M. (1994). The lmi control toolbox. In: *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3.
- GAO, Z., SHI, X. & DING, S. X. (2005). Observer design for ts fuzzy systems with measurement output noises. *IFAC Proceedings Volumes* **38**(1), 1–6.
- GAO, Z., SHI, X. & DING, S. X. (2008). Fuzzy state/disturbance observer design for t–s fuzzy systems with application to sensor fault estimation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)* **38**(3), 875–880.
- HAN, W., ZHANG, Y., WANG, Z. & SHEN, Y. (2014). Robust fault estimation and accommodation for discrete-time takagi-sugeno fuzzy systems. In: *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*. IEEE.
- HASSANABADI, A. H., SHAFIEE, M. & PUIG, V. (2016). Uio design for singular delayed lpv systems with application to actuator fault detection and isolation. *International Journal of Systems Science* **47**(1), 107–121.
- HO, W.-H., CHEN, S.-H., CHOU, J.-H. *et al.* (2013). Observability robustness of uncertain fuzzy-model-based control systems. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control* **9**(2), 805–819.
- HUI, S. & ŽAK, S. (2005). Observer design for systems with unknown inputs. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **15**, 431–446.
- ICHALAL, D., MARX, B., MAQUIN, D. & RAGOT, J. (2011). On observer design for nonlinear takagi-sugeno systems with unmeasurable premise variable. In: *Advanced Control of Industrial Processes (ADCONIP), 2011 International Symposium on*.
- ISERMANN, R. (2006). *Fault-diagnosis systems: an introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer Science & Business Media.

BIBLIOGRAFÍA

- JOHANSEN, T. & BABUSKA, R. (2003). Multiobjective identification of takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**, 847–860.
- JOHANSEN, T. A., SHORTEN, R. & MURRAY-SMITH, R. (2000). On the interpretation and identification of dynamic takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy systems* **8**, 297–313.
- JOHANSSON, . R. A., M. (1997). Computation of piecewise quadratic lyapunov functions for hybrid systems. In: *In 1997 European Control Conference (ECC)*.
- KAU, S.-W., LEE, H.-J., YANG, C.-M., LEE, C.-H., HONG, L. & FANG, C.-H. (2007). Robust h_∞ fuzzy static output feedback control of ts fuzzy systems with parametric uncertainties. *Fuzzy sets and systems* **158**(2), 135–146.
- KHIAR, D., LAUBER, J., FLOQUET, T., COLIN, G., GUERRA, T. M. & CHAMAILLARD, Y. (2007). Robust takagi–sugeno fuzzy control of a spark ignition engine. *Control Engineering Practice* **15**(12), 1446–1456.
- KUKOLJ, D. & LEVI, E. (2004). Identification of complex systems based on neural and takagi-sugeno fuzzy model. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)* **34**(1), 272–282.
- LENDEK, Z., GUERRA, T. M., BABUSKA, R. & BART, D. S. (2010). *Stability analysis and nonlinear observer design usign Takagi-Sugeno fuzzy models*. Springer.
- LENDEK, Z., GUERRA, T. M., BABUSKA, R. & DE SCHUTTER, B. (2011). *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*. Springer.
- LIN, F.-J., LU, K.-C., KE, T.-H., YANG, B.-H. & CHANG, Y.-R. (2015). Reactive power control of three-phase grid-connected pv system during grid faults using takagi–sugeno–kang probabilistic fuzzy neural network control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **62**(9), 5516–5528.

- LIU, X. & ZHANG, H. (2005). Stability analysis of uncertain fuzzy large-scale system. *Chaos, Solitons & Fractals* **25**, 1107–1122.
- LIU, X.-Q., ZHANG, H.-Y., LIU, J. & YANG, J. (2000). Fault detection and diagnosis of permanent-magnet dc motor based on parameter estimation and neural network. *IEEE transactions on industrial electronics* **47**(5), 1021–1030.
- LÖFBERG, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: *Proceedings of the CACSD Conference*, vol. 3.
- LÖFBERG, J. (2006). Yalmip: Software for solving convex (and nonconvex) optimization problems. In: *Proceedings of American Control Conference*.
- LUENBERGER, D. (1966). Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **11**(2), 190–197.
- LUENBERGER, D. (1971a). An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control* **16**(6), 596–602.
- LUENBERGER, D. G. (1971b). An introduction to observers. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL* **16**(6), 596–602.
- MAALEJ, I., ABID, D. B. H., REKIK, C. & DERBEL, N. (2014). Fuzzy augmented state kalman observer for fault and state estimation. In: *Systems, Signals & Devices (SSD), 2014 11th International Multi-Conference on*. IEEE.
- MAHMOUD, M., JIANG, J. & ZHANG, Y. (2003). *Active fault tolerant control systems: stochastic analysis and synthesis*, vol. 287. Springer Science & Business Media.
- MARTÍNEZ-GARCÍA, C., ASTORGA-ZARAGOZA, C., PUIG, V., REYES-REYES, J. & LÓPEZ-ESTRADA, F. (2019). A simple nonlinear observer for state and unknown input estimation: Dc motor applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* .

BIBLIOGRAFÍA

- MARTÍNEZ-GARCÍA, C., OSORIO-GORDILLO, G.-L., ASTORGA-ZARAGOZA, C.-M. & PUIG, V. (2016). Fault detection on bearings coupled to permanent magnet dc motors by using a generalized takagi-sugeno pi observer. In: *2016 3rd Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*.
- MARTÍNEZ-GARCÍA, C., PUIG, V., ASTORGA-ZARAGOZA, C. & OSORIO-GORDILLO, G. (2018). Robust fault estimation based on interval takagi-sugeno unknown input observer. *IFAC-PapersOnLine* **51**(24), 508–514.
- MARTÍNEZ-GARCÍA, C., PUIG CAYUELA, V. & ASTORGA, C. (2017). Fault estimation using a takagi-sugeno interval observer: Application to a pem fuel cell. In: *ICINCO 2017: 14th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics; Madrid-Spain July 26-28, 2017; Proceedins book*.
- MENINI, L., POSSIERI, C. & TORNAMBÈ, A. (2015). Application of algebraic geometry techniques in permanent-magnet dc motor fault detection and identification. *European Journal of Control* **25**, 39–50.
- MESEGUER, J., PUIG, V., ESCOBET, T. & SALUDES, J. (2010). Observer gain effect in linear interval observer-based fault detection. *Journal of process control* **20**(8), 944–956.
- MEZA, A. G., CORTES, T. H., LOPEZ, A. V. C., CARRANZA, L. A. P., HERRERA, R. T., RAMIREZ, I. O. C. & CAMPANA, J. A. M. (2017). Analysis of fuzzy observability property for a class of ts fuzzy models. *IEEE Latin America Transactions* **15**(4), 595–602.
- NAN, G., DAROUACH, M., MAROUANE, A. & HOLGER, V. (2014). h_∞ decentralized dynamic-observer-based control design for large-scale nonlinear interconnected systems. *Transaction on IoT and Cloud Computing* **2**(2), 47–67.
- NAUCK, D., KLAWONN, F. & KRUSE, R. (1997). *Foundations of neuro-fuzzy systems*. John Wiley & Sons, Inc.

- NOURA, H., THEILLIOL, D., PONSART, J.-C. & CHAMSEDDINE, A. (2009). *Fault-tolerant control systems: Design and practical applications*. Springer Science & Business Media.
- OHTAKE, H., TANAKA, K. & WANG, H. O. (2003). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integrated Computer-Aided Engineering* **10**(4), 333–341.
- OSORIO-GORDILLO, G.-L., DAROUACH, M. & ASTORGA-ZARAGOZA, C.-M. (2014a). h_∞ dynamical observer design for linear descriptor systems. In: *2014 American Control Conference*.
- OSORIO-GORDILLO, G.-L., DAROUACH, M., BOUTAT-BADDAS, L. & ASTORGA-ZARAGOZA, C.-M. (2014b). h_∞ dynamical observer-based control for descriptor systems. In: *2014 European Control Conference (ECC)*.
- OSORIO-GORDILLO, G.-L., DAROUACH, M., BOUTAT-BADDAS, L. & ASTORGA-ZARAGOZA, C.-M. (2015). Generalized dynamic observers for lpv singular systems. *IFAC-PapersOnLine* **48**(26), 152–157.
- PUIG, V. (2010). Fault diagnosis and fault tolerant control using set-membership approaches: Application to real case studies. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **20**(4), 619–635.
- PUIG, V., QUEVEDO, J., ESCOBET, T., MORCEGO, B. & OCAMPO, C. (2010). Control tolerante a fallos (parte i): Fundamentos y diagnóstico de fallos. *Revista Iberoamericana de automática e informática industrial* **1**(1), 15–31.
- PUKRUSHPAN, J. T., PENG, H. & STEFANOPOULOU, A. G. (2004). Control-oriented modeling and analysis for automotive fuel cell systems. *Journal of dynamic systems, measurement, and control* **126**(1), 14–25.
- RAÏSSI, T., VIDEAU, G. & ZOLGHADRI, A. (2010). Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. *Automatica* **46**(3), 518–527.

BIBLIOGRAFÍA

- ROTONDO, D., FERNANDEZ-CANTI, R. M., TORNIL-SIN, S., BLESA, J. & PUIG, V. (2016). Robust fault diagnosis of proton exchange membrane fuel cells using a takagi-sugeno interval observer approach. *International Journal of Hydrogen Energy* **41**(4), 2875–2886.
- SADEGHI, M. S., SAFARINEJADIAN, B. & FARUGHIAN, A. (2014). Parallel distributed compensator design of tank level control based on fuzzy takagi–sugeno model. *Applied soft computing* **21**, 280–285.
- SIMANI, S., FARSONI, S. & CASTALDI, P. (2015). Wind turbine simulator fault diagnosis via fuzzy modelling and identification techniques. *Sustainable Energy, Grids and Networks* **1**, 45–52.
- SKELTON, R., IWASAKI, T. & GRIGORIADIS, K. (1998). A unified algebraic approach to linear control design, 1998. *Google Scholar* , 121–199.
- SONTAG, E. D. (1995). On the input-to-state stability property. *Eur. J. Control* **1**, 24–36.
- STAROSWIECKI, M. & COMTET-VARGA, G. (2001). Analytical redundancy relations for fault detection and isolation in algebraic dynamic systems. *Automatica* **37**(5), 687–699.
- TAKAGI, T. & SUGENO, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **15**, 116–132.
- TANAKA, K., IKEDA, T. & WANG, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and lmi-based designs. *IEEE Transactions on fuzzy systems* **6**(2), 250–265.
- TANAKA, K. & OHTAKE, H. (2001). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers* **37**(4), 372–378.

- TANAKA, K. & WANG, H. O. (2004). *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.
- TUAN, H. D., APKARIAN, P., NARIKIYO, T. & YAMAMOTO, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on fuzzy systems* **9**(2), 324–332.
- VERDE, C., GENTIL, S. & MORALES-MENÉNDEZ, R. (2013). *Monitoreo y diagnóstico automático de fallas en sistemas dinámicos*. Trillas.
- VU, V.-P. & DO, T.-D. (2019). Fault/state estimation observer synthesis for uncertain T-S fuzzy systems. *IEEE Access* **7**, 358–369.
- WANG, H. O., TANAKA, K. & GRIFFIN, M. F. (1996a). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE transactions on fuzzy systems* **4**, 14–23.
- WANG, H. O., TANAKA, K. & GRIFFIN, M. F. (1996b). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy systems* **4**, 14–23.
- WANG, Z., LI, L., ZHANG, Y. & SHEN, Y. (2014). Systems observer design for linear descriptor systems. In: *2014 Chinese Control Conference*.
- WITCZAK, M. (2007). *Modelling and estimation strategies for fault diagnosis of non-linear systems: from analytical to soft computing approaches*, vol. 354. Springer Science & Business Media.
- XIAODONG, L. & QINGLING, Z. (2003). New approaches to h_∞ controller designs based on fuzzy observers for ts fuzzy systems via lmi. *Automatica* **39**(9), 1571–1582.
- YIN, X., ZHANG, X., ZHANG, L., WANG, C., AL-YAMI, M. & HAYAT, T. (2015). h_∞ model approximation for discrete-time takagi–sugeno fuzzy systems with markovian jumping parameters. *Neurocomputing* **157**, 306–314.

BIBLIOGRAFÍA

- ZHANG, K., JIANG, B. & SHI, P. (2012). *Observer-based fault estimation and accommodation for dynamic systems*. Springer.
- ZHANG, K., JIANG, B., SHI, P. & XU, J. (2015). Analysis and design of robust h_∞ fault estimation observer with finite-frequency specifications for discrete-time fuzzy systems. *IEEE transactions on cybernetics* **45**(7), 1225–1235.
- ZHANG, Y., SHI, P., NGUANG, S. K. & KARIMI, H. R. (2014). Observer-based finite-time fuzzy h_∞ control for discrete-time systems with stochastic jumps and time-delays. *Signal Processing* **97**, 252–261.
- ZHANG, Z.-H. & YANG, G.-H. (2017). Fault detection for discrete-time lpv systems using interval observers. *International Journal of Systems Science* **48**(14), 2921–2935.