



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Diseño Y Aplicación De Observadores No Lineales Para
Sistemas Con Retardo

presentada por
Ing. Felipe Ramírez Rasgado

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis
Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Codirector de tesis
Dr. Omar Hernández González

Cuernavaca, Morelos, México. Julio de 2021.



Cuernavaca, Mor.,

25/junio/2021

No. de Oficio:

DIE/441/20

Asunto:

Aceptación de documentos de tesis

DR. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Ing. Felipe Ramírez Rasgado**, con número de control **M19CE042** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“Diseño Y Aplicación De Observadores No Lineales Para Sistemas Con Retardo”** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Doctor en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 5505019

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Omar Hernández González
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 11088848

REVISOR 1

Dr. Juan Reyes Reyes
Doctor en Ciencias en la Especialidad de Control Automático
Cédula profesional 4214833

REVISOR 2

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 9968714

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera- Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Estudiante
Expediente

HEE/mrsr



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Subdirección Académica

Cuernavaca, Mor.,

30/junio/2021

No. de Oficio:

SAC/85/2021

Asunto:

Autorización de
impresión de tesis

FELIPE RAMÍREZ RASGADO
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E

Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Diseño y Aplicación De Observadores No Lineales Para Sistemas Con Retardo", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

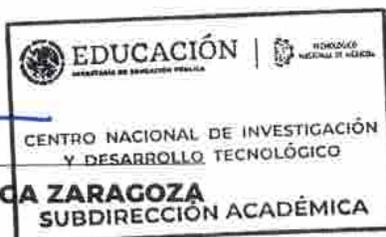
Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

"Excelencia en Educación Tecnológica"

"Educación Tecnológica al Servicio de México"

DR. CARLOS MANUEL ASTORCA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



C.c.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera, Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Expediente
CMAZ/CHG



Dedicatoria

A Dios

Por ser camino, luz y guía en mi vida.

A mi madre

Dedico este trabajo a mi madre Elvira Rasgado Corsi, por su amor incondicional durante todos estos años, por su cariño, por llenarse de felicidad cuando le platico un logro, por darme un hombro en donde llorar, por creer en mí y apoyarme en todo momento. Mis logros son tus logros. ¡Te amo!

A mi hermana

Por ser una inspiración, una consejera, mi mejor amiga y un ejemplo de lucha en la vida.

Agradecimientos

A mi familia, por todo su amor y su apoyo durante toda mi vida, especialmente a mi tío Alberto Enrique Torres por todo siempre apoyarme a superarme y sus consejos.

A mi director el Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza, por su ayuda, su paciencia, sus conocimientos para aclarar las dudas que surgieron, sus sabios consejos y sobre todo su amistad. ¡Muchas gracias!

A mi codirector el Dr. Omar Hernández González, por brindarme su conocimiento, su infinita paciencia, sus consejos, su amistad, su apoyo incondicional y sobretodo por animarme a superarme día tras día. Por creer en mí como investigador. Le estoy infinitamente agradecido.

A mi comité de revisores, el Dr. Juan Reyes Reyes y la Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo, por sus comentarios que enriquecieron este trabajo y me han forjado como investigador, por el interés en cada una de las revisiones y su amistad brindada.

A mis profesores: Dr. Astorga, Dr. Reyes, Dra. Gloria, Dr. Carlos Daniel, Dr. Guerrero, Dr. Fabricio, Dr. Adam, Dr. Quintero y Dr. Francisco, por el apoyo y sus enseñanzas durante mi formación académica en CENIDET. De igual forma, al Dr. Rodolfo y Dr. Madrigal por sus consejos y su amistad.

A mis compañeros: Max, Toñito, Mujica, Irbin y Gerardo, por todas esas risas y vivencias que compartimos durante nuestra formación, espero volver a coincidir con ustedes. También a aquellos buenos amigos que conocí durante este proceso: Eusebio, Henry, Lucho, Citlaly, Oyuki, Diana, Sabido y Benjamin, por esas platicas tan amenas, sus consejos y por hacerme sentir como en casa.

A unos ángeles que Dios ha puesto en mi vida: Plácido y doña Soco, por sus consejos, por escucharme cada vez lo que necesito y ser ese jalón de oreja que he necesitado.

A mi Hércules champurrado, por morderme para que no me durmiera mientras redactaba este trabajo.

A mi promesa, por apoyarme, darme ánimos cuando siento no poder, echarme porras, celebrar mis triunfos, escuchar mis quejas, aguantar mi mal humor y mis malos chistes, estar en los días buenos y en especial los malos, pero sobre todo gracias por ser esa promesa que espero cumplir con ansias y con todo mi corazón.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para poder realizar y culminar mis estudios de maestría.

Finalmente, quiero agradecer al Centro de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), por abrirme las puertas y brindarme todos los medios para realizar este trabajo, así como, a todo el personal administrativo por sus atenciones tan amables que recibí durante mi estancia.

Resumen

En esta tesis se presenta el análisis y diseño de observadores no lineales para sistemas con tres problemáticas principales: incertidumbres paramétricas y estructurales presentes en el vector de estado del sistema, muestreo y retardo, el retardo es constante y conocido en el tiempo, ambos presentes en la señal de salida del sistema. Se eligen como caso principal de estudio los sistemas MIMO no lineales no uniformemente observables. Esta clase de sistemas es más general y menos restrictiva que otras, ya que se pueden considerar funciones dentro de la matriz A que determina la dinámica del sistema. Con esto, en algunos casos, el cambio de coordenadas para el diseño de observadores es inexistente y con esto se reduce el costo computacional.

Primeramente, se aborda el análisis y diseño de observadores considerando las dos primeras problemáticas: las incertidumbres y el muestreo en la señal de salida. Para solucionar esto se propone un observador con el cual es posible la estimación del vector de estado de forma continua y se demuestra formalmente que en presencia de incertidumbres converge a una región acotada. También se presenta el caso con salidas continuas. Es importante resaltar que este análisis y diseño se extendió para el caso lineal.

La parte fundamental de este trabajo radica en el análisis y diseño de observadores considerando las tres problemáticas: incertidumbres paramétricas o estructurales en los estados del sistema, muestreo y retardo presentes en la salida del sistema. Para dar solución a esto, se presenta un observador en cascada, con el cual se logra la estimación del vector de estado de forma continua y libre de retardo.

Aprovechando la estructura de la clase de sistemas de esta tesis se logra la estimación de parámetros desconocidos para diferentes sistemas de distintas naturalezas. La validación de los observadores presentados se realizó por medio de simulaciones ante diferentes escenarios.

Abstract

This work presents the analysis and design of nonlinear observers for systems with three technical issues in the design: parametric and structural uncertainties present in the state, sampled and time delay which is constant and known in time, both are present in the output. Non-uniformly observable nonlinear MIMO systems are chosen as the main case of study. This class of systems is more general and less restrictive than others since functions can be considered within the matrix A that determines the system dynamics. Therefore, there is no need to change of coordinates for the design of observers in some cases which reduces the computational expense.

Firstly, the analysis and design of observers is addressed considering the first two problems: uncertainties and sampled output. An observer is proposed which allows the estimation of the state vector in a continuous way and it is formally shown that in the presence of uncertainties it converges to a bounded region. The continuous case is also presented. It is important to notice that this analysis and design is extended to the linear case.

The main purpose of this work is the analysis and design of observers considering the three problems: parametric or structural uncertainties in the system states, sampling and delay present in the system output. To provide a solution to this a cascade observer is presented which allows the estimation of the state vector in a continuous and free time-delay way.

Using the structure of the class of systems of this thesis the estimation of unknown parameters for different systems of distinct natures is achieved. The validation of the presented observers was performed through simulations in different scenarios.

Índice general

Índice general	VII
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XV
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	3
1.2 Hipótesis	3
1.3 Objetivos	4
1.3.1 Objetivo general	4
1.3.2 Objetivos específicos	4
1.4 Estudio del estado del arte	4
1.4.1 Observadores para sistemas con salidas muestreadas	4
1.4.2 Observadores para sistemas con retardo	6
1.5 Aportación	9
1.6 Alcances y limitaciones	9
1.7 Originalidad	10
1.8 Organización del documento	10
2 Teoría de sistemas no lineales y observadores	11
2.1 Sistemas no lineales	12
2.1.1 Saturación	12
2.1.2 Zona muerta (dead-zone)	13
2.1.3 Histéresis	14

2.2	Sistemas inciertos	17
2.3	Sistemas con retardo	18
2.4	Sistemas muestreados	20
2.5	Observadores	21
2.5.1	Observadores para sistemas lineales	22
2.5.2	Observadores no lineales	23
2.5.3	Observador para un sistema no lineal	24
2.5.4	Observabilidad para sistemas no lineales	26
2.6	Observabilidad para sistemas no uniformemente observables	28
2.6.1	Entradas persistentes	28
2.6.2	Entradas regulares persistentes	29
2.7	Observador en cascada	30
2.8	Conclusiones del capítulo	31
3	Análisis y diseño de observadores para sistemas inciertos	32
3.1	Observador para sistemas no lineales inciertos con salidas continuas	33
3.1.1	Diseño de un observador para salidas continuas	35
3.1.2	Demostración del Teorema 3.1.1	37
3.2	Simulación 1. Aplicación al sistema caótico de Bloch con salida continua	41
3.2.1	Comparativa entre diferentes valores del parámetro de ajuste	46
3.3	Observador para sistemas no lineales inciertos con salidas muestreadas	47
3.3.1	Diseño del observador para salidas muestreadas	48
3.3.2	Demostración del Teorema 3.3.1	49
3.3.3	Análisis de la función $\chi_{\theta}(\Delta_{\text{máx}})$	53
3.3.4	Comparación con el observador para salidas continuas	54
3.4	Simulación 2. Aplicación a la estimación del coeficiente de fricción	55
3.4.1	Comparación con diferentes periodos de muestreo	59
3.5	Simulación 3. Estimación del coeficiente de fricción utilizando un observador continuo considerando un escenario real	62
3.6	Observador para sistemas lineales inciertos con salidas muestreadas	66
3.6.1	Diseño del observador para sistemas lineales con salidas muestreadas	66

3.6.2	Demostración del Teorema 3.6.1	67
3.7	Simulación 4. Aplicación a un modelo estructural tipo edificio	71
3.7.1	Caso 1. Señal sísmica como entrada conocida	73
3.7.2	Caso 2. Señal sísmica como incertidumbre	78
3.8	Conclusiones del capítulo	84
4	Análisis y diseño de observadores para sistemas inciertos con retardo	85
4.1	Observador para sistemas no lineales inciertos con salidas continuas con retardo	86
4.1.1	Diseño del observador en cascada para salidas continuas	87
4.1.2	Demostración del Teorema 4.1.1	90
4.2	Simulación 5. Aplicación al sistema caótico de Lorenz con retardo	97
4.2.1	Comparación con diferentes valores de λ	103
4.3	Observador para sistemas no lineales inciertos con salidas muestreadas con retardo	105
4.3.1	Diseño del observador en cascada para salidas muestreadas	106
4.3.2	Demostración del Teorema 4.3.1	108
4.4	Simulación 6. Aplicación al modelo de Lorenz con salida muestreada y con retardo	116
4.4.1	Sistema con señal incierta	116
4.4.2	Sistema con parámetro desconocido	123
4.5	Simulación 7. Aplicación a la estimación del coeficiente de fricción en presencia de muestreo y retardo	129
4.6	Conclusiones del capítulo	135
5	Conclusiones generales	136
5.1	Trabajos futuros	139
	Bibliografía	140
	Anexos	148
A	Tubería	149
A.1	Modelo y problemática	149
B	Estructura tipo edificio	152

B.1	Modelado	152
B.1.1	Representación en espacio de estados	155
C	Función DDE23/MATLAB	156
C.1	Simulación	157
C.1.1	Aplicación a la estimación del coeficiente de fricción	161
D	Artículos publicados	167
D.1	IET Control Theory & Applications	167
D.2	Memorias del congreso nacional de control automático 2019	168
D.3	Memorias del congreso nacional de control automático 2020	169
D.4	6ta Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada	170
D.5	5ta Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada	171

Índice de figuras

1.1	Usos de los observadores	2
2.1	Fenómeno de saturación	13
2.2	Fenómeno de Dead-zone	13
2.3	Fenómeno de histéresis magnética	14
2.4	Sistema en lazo cerrado con señales con retardo.	19
2.5	Sistema muestreado en lazo cerrado.	21
2.6	Sistema original y su observador	23
2.7	Sistema original no lineal y su observador	25
2.8	Sistema con un observador en cascada	30
2.9	Secuencia de los subsistemas en la cascada $j = 0, 1, \dots, m$	30
3.1	Trayectoria original y estimada del sistema caótico de Bloch	43
3.2	Estado $x_1(t)$ del sistema original y su estimación	44
3.3	Estado $x_2(t)$ del sistema original y su estimación	44
3.4	Estado $x_3(t)$ del sistema original y su estimación	45
3.5	Norma del error de observación $\ \tilde{x}(t)\ $ con $\theta = 5$	45
3.6	Comparativa de la norma del error de observación $\ \tilde{x}(t)\ $ con diferentes valores de θ	46
3.7	Flujo de salida $Q(t_k)$ muestreado $\Delta_{\text{máx}} = 1\text{s}$ y flujo estimado continuamente $\hat{Q}(t)$	57
3.8	Estimación del parámetro α con $\Delta_{\text{máx}} = 1\text{s}$	58
3.9	Estimación del parámetro γ con $\Delta_{\text{máx}} = 1\text{s}$	58
3.10	Norma del error de observación $\ \tilde{x}(t)\ $ con $\Delta_{\text{máx}} = 1\text{s}$	59
3.11	Estimación del parámetro α ante diferentes periodos de muestreo	60
3.12	Estimación del parámetro γ ante diferentes periodos de muestreo	60
3.13	Norma del error de observación $\ \tilde{x}(t)\ $ ante diferentes periodos de muestreo	61

3.14 Señal muestreada vista por el observador para salidas continuas 63

3.15 Estimación del parámetro α con ambos observadores (salidas continuas y muestreadas) 64

3.16 Estimación del parámetro γ con ambos observadores (salidas continuas y muestreadas) 64

3.17 Norma del error de observación con ambos observadores (salidas continuas y muestreadas) 65

3.18 Señal sísmica 72

3.19 Desplazamiento del primer piso de forma continua y muestreada con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$. . 74

3.20 Desplazamiento del segundo piso de forma continua y muestreada con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$. . 75

3.21 Estimación del desplazamiento del primer piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$. . 76

3.22 Estimación del desplazamiento del segundo piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$. 76

3.23 Estimación de la velocidad del primer piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$ 77

3.24 Estimación de la velocidad del segundo piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$. . . 77

3.25 Norma del error de observación $\|\tilde{z}(t)\|$ con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$ 78

3.26 Estimación del desplazamiento del primer piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.01 s$. 80

3.27 Estimación del desplazamiento del segundo piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.01s$ 80

3.28 Estimación de la velocidad del primer piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.01 s$. . . 81

3.29 Estimación de la velocidad del segundo piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.01 s$. . 81

3.30 Norma del error de observación $\|\tilde{z}(t)\|$ con $\Delta_{\bar{M}} = 0.01 s$ 82

3.31 Norma del error de observación $\|\tilde{z}(t)\|$ con diferentes periodos de muestreo 83

4.1 Trayectoria del sistema libre de retardo y la estimada. 99

4.2 Estimación de la salida libre de retardo 100

4.3 Estimación del estado $x_2(t)$ libre de retardo 100

4.4 Estimación del estado $x_3(t)$ libre de retardo 101

4.5 Estimación de la salida con la base de la cascada 102

4.6 Comparativa de la norma del error de observación considerando la base y el último predictor de la cascada 103

4.7 Comparativa de la norma del error ($\log_{10}(\|\tilde{x}_m(t)\|)$) considerando diferentes valores de λ 104

4.8 Perfil del muestreo variante Δ 118

4.9 Trayectoria del sistema libre de retardo y la estimada con muestreo variable. 118

4.10 Estimación de la salida libre de retardo con muestreo variable. 119

4.11 Estimación del estado $x_2(t)$ libre de retardo con muestreo variable. 119

4.12 Estimación del estado $x_2(t)$ libre de retardo con muestreo variable. 120

4.13 Estimación de la salida continua con retardo en presencia de muestreo variable. . . . 120

4.14 Norma del error de estimación de forma logarítmica 121

4.15 Comparativa de la norma del error de forma logarítmica ante diferentes valores de m . 122

4.16 Perfil de muestreo variante Δ para la estimación del parámetro desconocido. 125

4.17 Estimación de la salida libre de retardo con Δ 126

4.18 Estimación del estado $x_2(t)$ libre de retardo con Δ 126

4.19 Estimación del estado $x_3(t)$ libre de retardo con Δ 127

4.20 Estimación del parámetro κ_3 con Δ 127

4.21 Norma del error de observación $\|\tilde{\psi}_m(t)\| = \|\hat{\psi}_m(t) - \psi(t)\|$ 128

4.22 Perfil del muestreo variable Δ 131

4.23 Estimación del flujo de salida $Q(t)$ en presencia de muestreo variable y retardo. . . . 131

4.24 Estimación del parámetro α en presencia de muestreo variable y retardo. 132

4.25 Estimación del parámetro γ en presencia de muestreo variable y retardo. 132

4.26 Norma del error de observación $\|\tilde{x}_m(t)\|$ en presencia de muestreo variable y retardo. 133

4.27 Comparativa de la norma del error de observación en presencia de muestreo cons-
tante y variable 134

A.1.1 Bomba con tubería y tanque 149

B.1.1 Edificio de dos pisos 152

C.1.1 Preámbulo 157

C.1.2 Uso de la función 158

C.1.3 Historial 158

C.1.4 Sistema con retardo 159

C.1.5 Salida del sistema con historia constante 159

C.1.6 Uso de la función con historial variable 160

C.1.7 Historial variable 160

C.1.8 Sistema con historial variable 160

C.1.9 Salida del sistema con historial variable	161
C.1.10 Preámbulo y sistema original	162
C.1.11 Retraso en la señal y observador en cascada	163
C.1.12 Programación del observador en cascada (Parte 1)	164
C.1.13 Programación del observador en cascada (Parte 2)	164
C.1.14 Programación del historial para el observador en cascada	165
C.1.15 Señales de salida obtenidas	166

Índice de tablas

Tabla 2.1	Observadores para sistemas no lineales	24
Tabla 3.1	Parámetros del sistema de Bloch	41
Tabla 3.2	Parámetros de la tubería	55
Tabla 3.3	Parámetros del edificio	72
Tabla 4.1	Parámetros del sistema de Lorenz	97
Tabla C.1.1	Observador en cascada para $m = 1$	163

Nomenclatura

\mathbb{R}	Conjunto de números reales.
\mathbb{R}^+	Conjunto de números reales positivos.
\mathbb{R}^n	Vector de espacio de dimensión n sobre los números reales.
I_n	Matriz identidad de dimensión $n \times n$.
$\lambda_{\max}(S)$	El valor propio más grande de la matriz S .
$\lambda_{\min}(S)$	El valor propio más pequeño de la matriz S .
$\lambda_{\max}(P)$	El valor propio más grande de la matriz P .
$\lambda_{\min}(P)$	El valor propio más pequeño de la matriz P .
$[a, b)$	El intervalo semiabierto de los números reales \mathbb{R} entre a y b .
x^T	La transpuesta del vector x .
$\ x\ $	La norma euclidiana del vector x .
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	Derivada con respecto al tiempo del vector de estado x .
A^T	La transpuesta de la matriz A .
$\ A\ $	Norma euclidiana de la matriz A .
$\ B\ $	Norma euclidiana de la matriz B .
$\ C\ $	Norma euclidiana de la matriz C .
$\ D\ $	Norma euclidiana de la matriz D .
$\ L\ $	Norma euclidiana de la matriz L .
$\sup x(t)$	Supremo de la señal x .
τ	Retardo de tiempo.
MIMO	Múltiples entradas - múltiples salidas
SDP	Simétrica definida positiva
LMI	Desigualdad matricial lineal

Capítulo 1

Introducción

Un problema aún latente que se presenta en los sistemas es la incapacidad de medir todas las variables de estado, esto puede deberse a diversos factores como lo son: la inexistencia de sensores, los altos costos que representan la adquisición de estos o bien que su instalación representa una técnica invasiva en el sistema. El conocer las variables de estado es de gran importancia ya sea para cuestiones de control, monitoreo de variables críticas en los sistemas, supervisión de parámetros intrínsecos e incluso para estimar dinámicas propias de los sistemas como: las entradas desconocidas, incertidumbres paramétricas o dinámicas no modeladas.

Es por esto que el diseño, desarrollo y aplicación de observadores para sistemas lineales o no lineales sigue siendo un tema de gran interés en el ámbito del control automático debido a que buscan darle solución a la problemática del conocimiento de las variables de estado. A grandes rasgos, un observador es un dispositivo o algoritmo capaz de estimar las variables de estado de un sistema, a través del conocimiento de las entradas y salidas disponibles. En la Figura 1.1, se muestra un esquema general de un sistema con observador y de cómo este se puede usar para diferentes fines.

Los observadores no lineales se pueden dividir en dos clases (Besançon, 2007). La primera clase se basa en la aproximación del sistema no lineal en la cual no se necesita del modelo matemático que represente al sistema, algunos de tipos son: observadores basados en redes neuronales (Wang et al., 2018), lógica difusa (Ma et al., 2018), algoritmos genéticos (Ben-Messaoud and Hajji, 2018), etc. La segunda clase se basa en el diseño a partir del modelo del sistema, en esta clase se encuentran: los filtros de Kalman extendidos (Madhukar and Prasad, 2020), los observadores de

alta ganancia (Gauthier et al., 1992), los observadores por modos deslizantes (Shirkadehi et al., 2018), observadores algebraicos (Zakaria et al., 2018), etc.

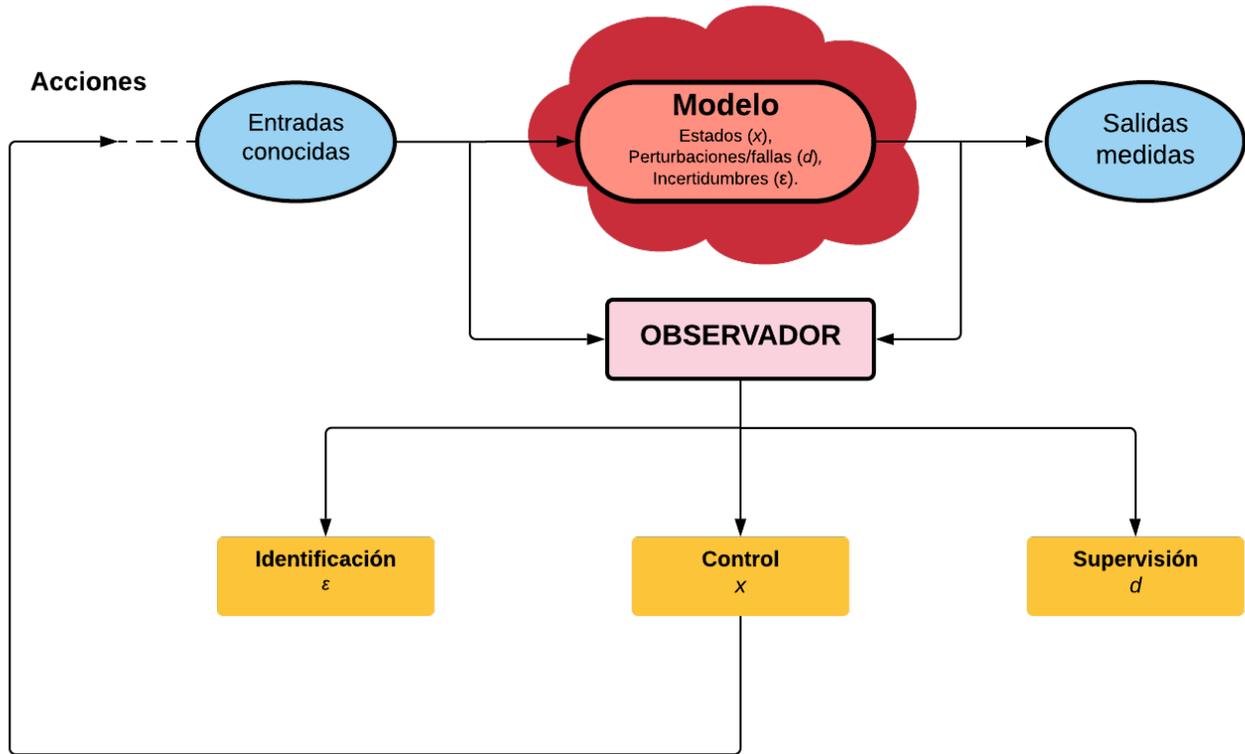


Fig. 1.1. Usos de los observadores

En los sistemas se pueden presentar diferentes problemas que hacen que el diseño y aplicación de los observadores sea más complicado. Este trabajo de investigación se enfoca en tres de ellos. En primer lugar, las señales adquiridas en instantes de tiempo discreto, las cuales son provocadas por la instrumentación, hardware de bajo recurso que no permite un tráfico de datos alto, etc. En segundo lugar, los retardos en las mediciones de salida, los cuales son debidos al envío de datos, la calidad de los sensores, etc. Por último, las incertidumbres en los sistemas, las cuales son debido al desgaste de los parámetros en los sistemas, dinámicas no modeladas, errores de datos, señales exógenas, por decir algunas causas, lo que puede representar errores entre el observador y el sistema original.

1.1. Planteamiento del problema

La medición de las variables de estado presentes en los sistemas es importante, ya sea para su supervisión, el cumplimiento de diferentes objetivos de control, la identificación de parámetros, entre otros. Dentro de la teoría de control muchas veces se ha considerado para el diseño de controladores y observadores que la medición de las variables de estado es de forma continua (analógica). Sin embargo, al ser obtenidas por medio de un instrumento de medición digital, se deben de considerar como mediciones adquiridas en instantes de tiempo discreto. También, dichas mediciones debido a la transmisión presentan retardos en ellas, que pueden ocasionar en muchos casos la inestabilidad de los sistemas.

De igual forma, el decir que el modelo matemático de un sistema lo representa al cien por ciento puede ser arriesgado, ya que con el paso del tiempo se van presentando incertidumbres en los sistemas debido a diferentes causas como lo son: desgaste en los sistemas, inercias o dinámicas no modeladas, errores de datos, ruido ambiental, etc. Esto ocasiona errores al momento de calcular la ley de control en el caso de que se esté controlando el sistema o bien en la estimación del vector de estado en el caso del uso de observadores debido a las discrepancias entre el sistema y el modelo.

Es por todo lo anterior que surge la motivación de este trabajo de investigación, en donde se busca el diseño y aplicación de un observador para una clase de sistemas no lineales en los que se presenten: incertidumbres, muestreo y retardo en la señal de salida del sistema. Con este observador se busca obtener una estimación del vector de estado de forma continua, libre de retardo y que sea capaz de converger incluso en presencia de incertidumbres.

1.2. Hipótesis

Con el diseño de un observador en cascada es posible estimar el vector de estado de manera continua y libre de retardo, para una clase sistemas no lineales en presencia de incertidumbres cuya salida es afectada por retardos de tiempo constantes largos y además es adquirida en instantes de tiempo constantes o variables.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Plantear una estrategia de estimación para una clase de sistemas no lineales inciertos en los cuales la salida presenta retardos de tiempo y es adquirida en instantes de tiempo constantes o variables. Dicha estrategia logrará la estimación del vector de estado de forma continua y libre de retardo incluso en presencia de incertidumbres.

1.3.2. Objetivos específicos

- Analizar y diseñar un observador no lineal para sistemas con salidas muestreadas considerando incertidumbres.
- Analizar y diseñar un observador no lineal en cascada considerando sistemas con incertidumbres y salidas con retardo: continuas y muestreadas.
- Estimar parámetros para sistemas con salidas con retardo mediante un observador en cascada y aplicarlo a distintos casos de estudio: sistema caótico y fricción en tuberías.

1.4. Estudio del estado del arte

Dentro de la búsqueda del estado del arte, se encontraron diferentes trabajos en los que se abordan las principales de este trabajo: las incertidumbres en los sistemas, las mediciones adquiridas en instantes de tiempo y los retardos en las salidas aunque se generalizó la búsqueda y se incluyó la presencia de retardos en otras partes del sistema, como lo son las entradas y los estados.

1.4.1. Observadores para sistemas con salidas muestreadas

En (Etienne et al., 2017), se presenta una versión modificada del observador de Luenberger para un sistema no lineal Lipschitz, en el cual la salida del sistema solo esta disponible en instantes de tiempo. Este observador propone un integrador el cual cambia conforme el error debido al muestreo. Para sistemas Lipschitz se propone un observador híbrido en (Mazenc et al., 2015), este observador consta de dos modelos para describir la dinámica del sistema en cada caso, cuando está presente la muestra y cuando no lo está. Posteriormente en (Mazenc et al., 2018), se hace un

rediseño y se logra asegurar la convergencia en tiempo finito de este observador. La ganancia de los observadores es calculada a partir de la solución de una LMI (Linear Matrix Inequality por sus siglas en inglés). Un observador con una estructura exponencial se presenta en (Ahmed-Ali et al., 2016), es aplicado a sistemas con salidas muestreadas. La ganancia de este observador es obtenida a partir de la solución de LMIs, estas se obtienen a partir de considerar el valor mínimo y máximo de muestreo que puede tener el sistema.

Para un sistema no uniformemente observable en (Hernández et al., 2015) se aplica un observador de alta ganancia. En este sistema la observabilidad depende del estado y la entrada, por lo que es necesario calcular una matriz S definida positiva dinámica (SDP) la cual busca evitar la pérdida de la observabilidad del sistema. Utilizando su versión continua-discreta, se logra la estimación del vector de un motor Stirling de pistón libre de forma continua. De igual forma se utiliza este observador para estimar la tasa de crecimiento en un biorreactor en (Bouraoui et al., 2015), logrando la estimación del vector de estado incluso en presencia de incertidumbres en el sistema y ruido en la medición. El error de observación convergerá a una región acotada que estará dada por la magnitud de la cota de la incertidumbre y del ruido. La implementación de este observador, se muestra en (Besbes et al., 2020), donde el observador se implementa en una FPGA para un motor de inducción. Tomando en cuenta el ruido y la incertidumbre en el sistema, se diseña un observador de alta ganancia para una clase de sistemas uniformemente observables con incertidumbres en (Robles-Magdaleno et al., 2020), en este observador se presenta un filtro para atenuar el ruido en la medición. El observador es validado en un modelo de un biorreactor, donde la biomasa es fitoplancton, en el cual se estiman los estados del sistema en presencia de ruido de medición. La principal ventaja de este enfoque de observador es que funciona para ambos instantes, cuando está presente la muestra y cuando no, a diferencia con otros enfoques.

Utilizando un observador adaptable se obtiene la estimación de los estados y los disturbios presentados en un actuador electro-hidráulico en (Ali et al., 2016). Otra aplicación del observador adaptable se presenta en (Ahmed-Ali et al., 2019), donde se logra la estimación del vector de estado y el parámetro en un sistema no lineal en el cual el parámetro desconocido está presente en la salida.

Una de las ventajas de utilizar observadores en su forma continua-discreta es que logran proveer la estimación continua del sistema a pesar de que este es alimentado con señales solo disponibles en

instantes de tiempo. De igual forma estos observadores se pueden implementar en hardware con características más limitadas y lograr buenos resultados. Este problema se aborda en (Hernández-González et~al., 2019), donde por medio de un observador continuo-discreto se logra de estimación de los estados de un quadrotor en presencia de tiempos de muestreo largos, para su posible implementación en tarjetas con bajos recursos.

1.4.2. Observadores para sistemas con retardo

Como preámbulo se encontraron algunos trabajos de observadores para sistemas lineales con retardo. En (Langueh et~al., 2018), se propone un observador impulsivo para estimar los estados sin retardo de un sistema lineal con retardos fijos. La convergencia del observador no es asintótica. De igual forma, se encontraron diversos trabajos que abordan los sistemas LTV (Linear Time Varying por sus siglas en inglés). En (Sanz et~al., 2019; Weston et~al., 2017; Mazenc and Malisoff, 2019), son abordados estos sistemas, utilizando el mismo esquema de observadores con predictores. Se consigue la estimación de las variables sin el retardo. De igual forma, algunos trabajos enfocados en sistemas singulares con retardo han sido abordados en (Zheng and Bejarano, 2017; Zheng et~al., 2017), en los cuales por medio de un observador tipo Luenberger se consigue la estimación de los estados libre de retardos.

En (Sayyaddelshad and Gustafsson, 2015), se propone un observador tipo Luenberger de orden completo robusto para un sistema no lineal discreto con disturbios y retardos en los estados y la salida. Al utilizar este observador se obtiene la estimación de los estados con y sin retardo al igual que el disturbio. En (Yang et~al., 2018), se muestra un observador de orden reducido robusto, en el cual las ganancias del observador se obtienen por medio de la solución de LMIs, de igual forma se obtiene la estimación de los estados. En (Targui et~al., 2019), se propone un observador proporcional-integral para sistemas lineales y sistemas no lineales Lipschitz en los cuales el retardo de medición son variables en el tiempo; por medio de LMIs se calculan las ganancias del observador. En (Cacace et~al., 2020) se propone un observador para un sistema Lipschitz en donde el retardo es variable y conocido. Este retardo es debido a la medición por parte del instrumento. Para el diseño de este observador es necesario conocer el valor de la derivada del retardo, con esto se asegura la convergencia exponencial a cero del error de estimación. Estos enfoques de observadores logran su objetivo el cual es la estimación del vector de estado libre de retardo del sistema, sin embargo consideran un retardo relativamente pequeño.

Para lidiar con retardos largos en la salida de los sistemas se propone una estructura en cascada o en cadena, la cual fue propuesta en (Germani et~al., 2002). Esta estructura consta de un observador de base que estima el vector de estado con retardo y un número de predictores que logran compensar el retardo del vector. En (Cacace et~al., 2014) se aborda la problemática del retardo ocasionado por los sensores. Por medio de un observador en cascada, se logra la estimación de los estados sin el retardo, esto para un sistema lineal.

En (Vafaei and Yazdanpanah, 2016), se propone un observador en cascada para un sistema con retardos presentes en la salida y en la entrada, la base de la cascada es un observador con una matriz de ganancias obtenidas por la solución de las LMIs, los observadores de la cadena tienen la misma estructura y cada uno se encarga de estimar el vector de estado en un instante de la partición del retardo, logrando que el último observador lo estime sin retardo. En este trabajo para el diseño del observador de la base se utiliza un enfoque LPV (Linear Parameter-Varying por sus siglas en ingles) en donde por medio de este enfoque se obtiene un conjunto de submodelos que representen al modelo no lineal, para posteriormente calcular la ganancia del observador.

Para sistemas con no linealidades en una estructura de tipo triangular, se proponen observadores igualmente en cascada, pero en los cuales se cambia la base del observador. En (Farza et~al., 2015b; Kahelras et~al., 2016), se propone un observador en cascada, en el cual el observador de la base es diseñado con el enfoque de alta ganancia, el cual estima el estado con el retardo. Los demás elementos son predictores, que constituyen el resto de la cadena. Estos estiman una parte proporcional del retardo, por lo que el último elemento de la cascada provee la salida estimada sin el retardo. Una modificación a los predictores antes propuestos, se muestra en (Tréangle et~al., 2018), en la cual agrega una función α al observador de la base, este termino logra compensar un pequeño valor de retardo. En (Hamoudi et~al., 2020), se logra la sincronización de sistemas caóticos en presencia de retardos de medición. Se propone un observador basado en el enfoque modos deslizantes para la base de la cascada que logra estimar el vector de estado con retardo y por medio de un predictor logra compensar el retardo.

En (Farza et~al., 2016), se aborda el diseño del observador en cascada considerando retardos en la salida y con incertidumbres en los estados y en la salida; este observador es aplicado a un biorreactor logrando la estimación de los estados cuando no consideran la incertidumbre. Cuando

se considera la incertidumbre, el error se mantiene acotado en un margen proporcional al límite de las incertidumbres.

En (Kahelras et al., 2018), se propone como base un observador que asegura su convergencia al obtener una matriz de ganancia que hace que sus eigenvalores en lazo cerrado sean negativos. El principal aporte de este trabajo es la presencia de estados con y sin retardo en la matriz A . Se lleva a cabo el muestreo de la salida del sistema. Con esta estructura se estiman de manera correcta los estados. Una extensión de este trabajo se muestra en (Ahmed-Ali et al., 2019), donde se propone un observador adaptable.

En (Hernández-González et al., 2016) se propone un observador de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales no uniformemente observable MIMO (Multiple Inputs Multiple Outputs), es decir, su observabilidad depende del estado y de la entrada, por lo cual es necesario calcular de manera dinámica una matriz S , la cual es SDP (Simétrica Definida Positiva). La estimación de los estados sin retardo es lograda satisfactoriamente. En (Farza et al., 2018), se utiliza la estructura para estimar el vector de estado de un sistema no lineal uniformemente observable en el cual existen incertidumbres; este observador es aplicado a un biorreactor logrando la estimación de los estados cuando el sistema no presenta incertidumbre. Por otra parte, cuando se presenta la incertidumbre existe un error en la estimación, el cual se mantiene en un margen proporcional al límite de las incertidumbres.

En (Chakrabarty et al., 2018), se estima el comportamiento de la cinética de las enzimas y la entrada desconocida del sistema. En el artículo (Cacace et al., 2016), se presenta un observador para el sistema Rössler, el cual presenta retardo en los estados. Los retardos en los estados se mantienen constantes a lo largo de la simulación pero se propone un método para estimar el valor del retardo. En (Targui et al., 2018), se presenta un observador en cascada para solucionar el problema de retardos variables en los sistemas. La ganancia del factor de corrección es calculada por medio de LMIs.

1.5. Aportación

La aportación principal de este trabajo de investigación es el análisis, diseño y validación de un observador en cascada para una clase de sistema no lineal en presencia de incertidumbres, en el cual la medición de la salida es adquirida en instantes de tiempo, continuos o variables, y es afectada por retardos de tiempo constantes en la medición, con el fin de proveer señales libres de retardo para diferentes aplicaciones. De igual forma, se busca utilizar las propiedades de esta clase de sistemas para lograr la estimación de incertidumbres en diferentes casos de estudios. A continuación, se presentan otras aportaciones obtenidas a través del desarrollo de este trabajo:

- Análisis y validación de la convergencia observador para sistemas no lineales MIMO inciertos no uniformemente observables considerando la salida continua.
- Análisis y validación de la convergencia de un observador para sistemas no lineales MIMO inciertos no uniformemente observables considerando la salida muestreada.
- Diseño, análisis y validación de un observador para un sistema MIMO incierto lineal considerando salidas muestreadas.
- Análisis y validación de la convergencia de un observador en cascada para un sistema no lineal MIMO incierto no uniformemente observable considerando la salida continua con retardo.

1.6. Alcances y limitaciones

A continuación se presentan los alcances y limitaciones de este trabajo de investigación:

- Se analizaron los sistemas no lineales no uniformemente observables con retardo en la medición de salida.
- Se consideraron únicamente retardos en la salida.
- Se consideraron retardos constantes.
- La validación del observador propuesto se realizó mediante simulaciones.

1.7. Originalidad

La originalidad radica en el análisis de los observadores en cascada para sistemas no lineales inciertos, en los cuales su observabilidad depende de los estados y/o entradas. Esta clase de sistemas es conocida como: no uniformemente observable, el cual es un sistema de amplio interés, dado que muchas aplicaciones pueden ser representadas dentro de esta clase, y con ello evitar cambios de coordenadas complejos, los cuales requieren un amplio costo computacional y de diseño. De igual forma, el uso de estos observadores para la estimación de algunos parámetros en sistemas inciertos aprovechando la estructura de la matriz A . Por último, la validación del funcionamiento de los observadores para salidas muestreadas considerando tiempos de muestreo variables.

1.8. Organización del documento

Los siguientes capítulos se encuentran organizados de la siguiente manera:

En el **Capítulo 2** se muestran algunos conceptos relacionados con los sistemas no lineales, sus fenómenos y sus modos de comportamiento. También se abarcan conceptos relacionados con los sistemas inciertos y los sistemas con retardo. De igual forma, se presentan algunas bases teóricas para el diseño de observadores. Con este capítulo se busca proporcionar una base teórica para la comprensión de los temas desarrollados en este trabajo de investigación.

En el **Capítulo 3** se presentan las primeras tres aportaciones de este trabajo de tesis. En este capítulo se presenta el análisis y diseño de observadores para sistemas inciertos. Primeramente, se considera el caso cuando la salida está disponible de forma continua. Posteriormente, se presenta el caso cuando la salida solo está disponible en instantes de tiempo discreto. Por último, se presenta una extensión a un sistema MIMO lineal incierto.

En el **Capítulo 4** se presentan las dos últimas aportaciones de este trabajo de tesis, donde se incluye la aportación principal considerando las tres principales problemáticas. En este capítulo se presenta el análisis y diseño de observadores con estructura en cascada para sistemas inciertos con retardo en la medición de salida. De igual forma, se consideran ambas naturalezas en la señal de salida: continua y muestreada.

En el **Capítulo 5** se presentan las conclusiones generales de este trabajo y los trabajos futuros.

Capítulo 2

Teoría de sistemas no lineales y observadores

En este capítulo se presentan las bases teóricas de los sistemas no lineales, sistemas inciertos, sistemas con retardo y sistemas muestreados. De igual forma, se presentan los conceptos y definiciones correspondientes a los observadores para sistemas no lineales.

En la sección 2.1 se presenta la definición de un sistema no lineal, así como algunos fenómenos físicos que los originan. De igual forma, se presentan los fenómenos propios que estos sistemas presentan. Por último, se presentan algunas estructuras generales de los sistemas no lineales.

En la sección 2.2 se aborda la primera problemática de los sistemas abordados en esta tesis, ya que se estudian las causas que provocan incertidumbres en los sistemas haciéndolos sistemas inciertos. Las bases de la segunda problemática se abordan en la sección 2.3, donde se muestran los diferentes tipos de sistemas con retardo y se mencionan algunos ejemplos de estos. Las bases teóricas de la última problemática se abordan en la sección 2.4, donde se habla del fenómeno de muestreo en la señal debido al uso de sensores digitales.

En la sección 2.5 se presenta la definición y los tipos de observadores para los sistemas no lineales, aunque también se aborda un caso lineal como caso particular. En la sección 2.6 se muestra la condición necesaria para el diseño de observadores para los sistemas no uniformemente observables, los cuales son los abordados en este tema de tesis. En la sección 2.7 se presenta la teoría acerca del observador en cascada para los sistemas con retardo. Finalmente en la sección 2.8 se presentan las conclusiones del capítulo.

2.1. Sistemas no lineales

A través del tiempo se han ido generando diversos métodos para el control o estimación de los sistemas lineales, sin embargo, estos sistemas están limitados para representar una gama más compleja de las dinámicas de los sistemas. Por lo tanto, la comunidad científica ha enfocado sus esfuerzos en el diseñar métodos para los sistemas no lineales, ya que estos pueden representar más sistemas complejos como los que se encuentran en algunas áreas como lo son: industria aeroespacial, robótica, control de procesos, ingeniería biomédica, etc. Un sistema no lineal es aquel que no cumple con el principio de superposición (Khalil, 2002), a diferencia de los sistemas lineales. Otra característica de estos sistemas es que presentan uno o más tipos de no linealidades, las cuales se pueden clasificar en dos tipos de acuerdo con (Slotine et~al., 1991):

- **Naturales:** Son aquellas que vienen naturalmente con el sistema debido a su estructura y el movimiento, por ejemplo; fuerzas centrípetas en movimientos rotaciones, fricción de Coulomb dada por el contacto de superficies, etc.
- **Artificiales:** Son aquellas que son introducidas por el diseñador, como lo son; leyes de control no lineales, leyes adaptables de control, restricciones para el control óptimo, etc.

De igual forma, se pueden clasificar dadas sus propiedades matemáticas como *continuas* y *discontinuas*. Debido a que las no linealidades discontinuas no se pueden aproximar por funciones continuas se conocen de igual forma como *no linealidades duras*. Algunos ejemplos son:

2.1.1. Saturación

La saturación es una no linealidad usualmente causada por los límites del tamaño de los componentes en los sistemas, las propiedades físicas y químicas de los materiales que los componen y las fuentes de alimentación. Un ejemplo se muestra a continuación: cuando se le aplica una entrada pequeña a un sistema físico, su incremento da como resultado un incremento (en algunos casos proporcional) en la salida. Pero cuando la entrada alcanza un cierto nivel, un incremento en esta puede o no provocar un incremento en la salida ya que esta se mantiene en un valor máximo. Un ejemplo de este fenómeno se muestra de forma ideal y de forma real en la Figura 2.1. Todos los actuadores que se utilizan en los sistemas de control presentan este comportamiento.

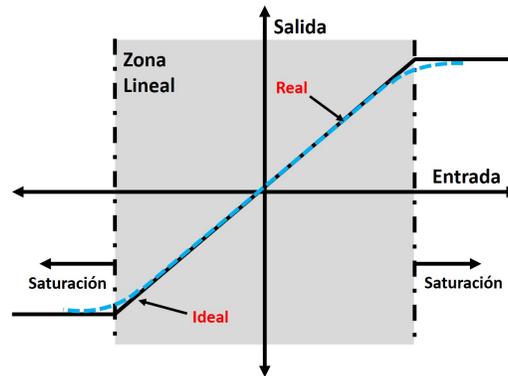


Fig. 2.1. Fenómeno de saturación

2.1.2. Zona muerta (dead-zone)

En algunos sistemas físicos, la salida es cero hasta que la magnitud de la entrada excede un cierto valor, a esta relación de valores en la entrada y salida se le conoce como *dead-zone* o zona muerta. En un sistema ideal se asume que al aplicar una entrada provocará un cambio en la salida, sin embargo, físicamente debido a diferentes causas como lo son: fricción estática en los motores, la holgura de piezas mecánicas, etc., el sistema no reacciona ante entradas de baja magnitud. Este fenómeno se muestra en la Figura 2.2, en donde se muestra que la salida no sufre cambios hasta que se rebasa cierto valor en la entrada. Algunos sistemas físicos en donde se presentan este fenómeno son: Motores de CD, válvulas hidráulicas, válvulas neumáticas, por decir algunos.

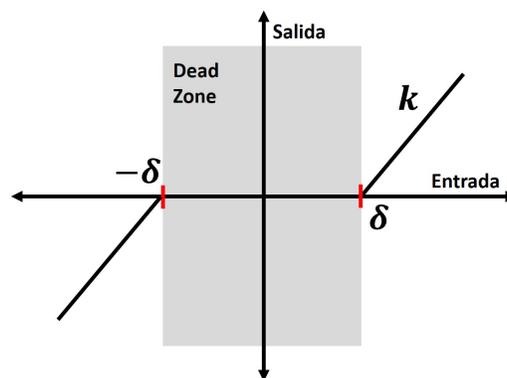


Fig. 2.2. Fenómeno de Dead-zone

2.1.3. Histéresis

Este fenómeno se presenta cuando un material tiende a conservar una de sus propiedades, en ausencia del estímulo que la ha generado. Se relacionan con el almacenamiento de la energía, algunos ejemplos son: comparadores de voltaje, relevadores, sistemas de engranajes, transformadores, por decir algunos. En la Figura 2.3, se muestra la histéresis típica que se presenta en un material magnético. Es importante el resaltar que esta no linealidad está relacionada con el almacenamiento de energía en el sistema.

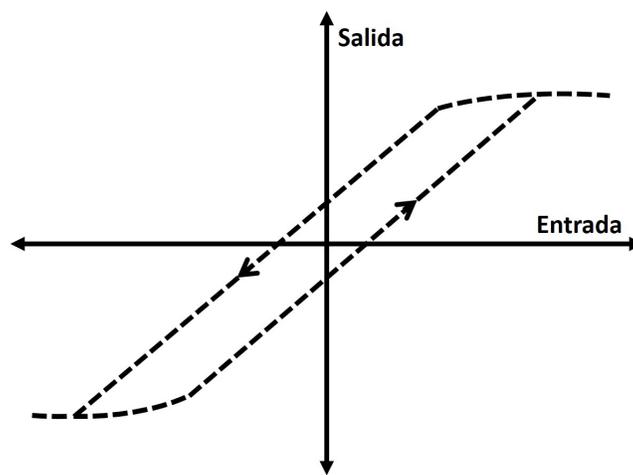


Fig. 2.3. Fenómeno de histéresis magnética

Las diferentes no linealidades en los sistemas pueden hacer que estos presenten fenómenos no lineales, como son los siguientes (Khalil, 2002):

- **Tiempo de escape finito:** Un estado del sistema no lineal puede irse a infinito en un tiempo finito.
- **Múltiples puntos de equilibrio aislados:** Un sistema no lineal puede tener más de un punto de equilibrio, el estado puede converger a diferentes puntos de equilibrio dependiendo de su condición inicial.
- **Ciclos límite:** Un sistema no lineal puede presentar y mantener oscilaciones sostenidas de amplitud y frecuencia constantes, sin importar el estado inicial.

- **Oscilaciones subarmónicas, armónicas o casi periódicas:** Un sistema no lineal ante una excitación periódica puede oscilar con frecuencias que son submúltiplos o múltiplos de la frecuencia de la señal de entrada.
- **Caos:** Un sistema no lineal puede tener como estado estable el caos, a pesar de la naturaleza del sistema.
- **Múltiples modos de comportamiento:** Los sistemas no lineales pueden presentar diferentes comportamientos dependiendo si el sistema es excitado o no. De igual forma, presenta cambios ante la amplitud o frecuencia de la señal de excitación.

Las ecuaciones que representen el modelo de un sistema no lineal se pueden escribir de una forma general como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x, u) \\ y(t) &= h(t, x, u)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ representa el vector de entradas conocidas al sistema, $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema. Partiendo del sistema no lineal mostrado en (2.1), algunas representaciones de los sistemas no lineales son las mostradas a continuación:

- Sistema afín al control, (Besançon, 2007):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}\tag{2.2}$$

en esta clase de representación es posible obtener funciones $g(x(t))$ que multipliquen a las entradas. El término afín se refiere a que las entradas son lineales.

- Sistema afín al estado, (Besançon, 2007):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(u(t))x(t) + B(u(t)) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde $A(u(t))$ y $B(u(t))$ son matrices que dependen de la entrada. El término afín se refiere a que los términos en los que intervienen los estados del sistema son lineales.

- Sistema afín al estado con no linealidades triangulares, (Besançon, 2007):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \varphi(x(t), u(t)), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \varphi(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1(t)) \\ \varphi_2(x_1(t), x_2(t)) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)) \\ \varphi_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0].$$

en esta clase de sistemas existe un vector de funciones no lineales $\varphi(u(t), x(t))$ la cual respeta la estructura triangular con respecto al vector de estado y es uniforme con respecto a las entradas, esta función se compone de las derivadas sucesivas de los estados y de las entradas. Es importante resaltar que cada función no lineal que compone este vector solo puede depender de los estados anteriores y del actual, pero no es posible que la función dependa de un estado posterior ya que no se respetaría su estructura triangular (Gauthier and Bornard, 1981).

Existen otras variantes de estos sistemas en donde se permiten la presencia de los estados ($x(t)$), entradas ($u(t)$) o salidas ($y(t)$). Estas son mostradas a continuación:

- Sistema afín al estado con no linealidades triangulares dependiente de las entradas y salidas, (Torres et al., 2012):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(u(t), y(t))x(t) + \varphi(x(t), u(t)), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

con:

$$A(u(t), y(t)) = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2}(u(t), y(t)) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}(u(t), y(t)) \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

- Sistema afín al estado con no linealidades triangulares dependiente de las entradas y los estados (Farza et-al., 2015a):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(u(t), x(t))x(t) + \varphi(u(t), x(t)), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

con:

$$A(u(t), x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u(t), x_1(t)) & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{n-1}(u(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)) & \\ 0 & \dots & \dots & & 0 \end{bmatrix}.$$

en ambos sistemas el vector de funciones $\varphi(u(t), x(t))$ respeta la estructura triangular. El considerar en la matriz afín al estado ($A(u, x)$) estados, entradas y/o salidas dificulta el diseño de observadores como se verá en las próximas secciones.

2.2. Sistemas inciertos

En el análisis y diseño de los controles y observadores basados en modelo, es común describir el modelo de estos sistemas de una forma general como la mostrada en Ec. (2.1). En estos modelos se asumen que los parámetros físicos presentan su valor nominal, sin embargo, en los casos prácticos estos valores pueden ser diferentes. La presencia inevitable de estos errores en el modelo utilizado para el diseño es lo que finalmente limita el rendimiento alcanzable de los diseños de sistemas de control y los algoritmos de observación producidos por la teoría de control clásica o moderna. La principal limitación de los métodos de diseño de control y de los observadores actuales es su dependencia de la fidelidad absoluta del modelo utilizado para el diseño de control.

Los errores de modelado (perturbaciones o incertidumbres) asociados con los modelos matemáticos de los sistemas físicos pueden clasificarse a grandes rasgos como (Yedavalli, 2016):

- **Variaciones de los parámetros físicos:** Al modelar un sistema, se supone que ciertos parámetros físicos, como la masa, tienen un valor determinado. Sin embargo, en estos parámetros pueden existir diferencias con los valores reales debido a la inexactitud en la determinación o al cambio en un período de tiempo debido a diferentes fenómenos. Esta variación de los parámetros reales puede considerarse como una incertidumbre o perturbación en un sistema dinámico.

- **No linealidades no consideradas:** Cuando los sistemas dinámicos se linealizan utilizando la expansión de la serie de Taylor, los efectos no lineales que se producen en forma de términos de orden superior se desprecian para obtener el modelo lineal. Esto conduce a una discrepancia entre el sistema físico real y el modelo matemático, y esta discrepancia se trata como una perturbación del sistema dinámico nominal. Otra forma en que surgen los errores de modelado en esta categoría es que podemos simplemente despreciar los términos no lineales en los modelos matemáticos de los sistemas dinámicos, especialmente en la fase de diseño, para reducir la complejidad del sistema que repercuten en diversas razones prácticas.
- **Dinámica no modelada:** Las discrepancias que se producen cuando ciertos estados no se consideran o no se incluyen en el modelo dinámico se consideran incertidumbres y se clasifican como dinámica no modelada. También en algunos casos, es posible que sea complejo el modelar un fenómeno de forma matemática y así es como surgen errores por la dinámica no modelada.
- **Perturbaciones externas o incorrectamente modeladas:** Todos los sistemas dinámicos del mundo real están constantemente sometidos a perturbaciones que no siempre pueden modelarse. Estas incertidumbres son clasificadas como perturbación externa.

2.3. Sistemas con retardo

Los retardos en los sistemas aparecen en muchos casos, ya sea que aparezcan en los estados, las señales de control o las mediciones (Fridman, 2014). En algunos casos, éstos pueden ocasionar inestabilidad en los sistemas. Algunos ejemplos de sistemas en los que se presentan retardos son: sistemas de telecomunicación (Natori et al., 2009; Abd et al., 2017), mecánicos (Qi et al., 2018), sistemas biológicos (Li and Ma, 2007; Gałach, 2003; Guo et al., 2019; Borri et al., 2017). Los retardos se pueden presentar en diferentes partes del sistema, por lo que se tienen los diferentes sistemas con retardo:

- Sistema con retardo en la entrada:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + u(t - \tau), \quad \tau > 0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

- Sistema con retardo en el estado:

$$\dot{x}(t) = x(t - \tau) + u(t), \quad \tau > 0$$

$$y(t) = Cx(t)$$

- Sistema con retardo en el estado y en la entrada:

$$\dot{x}(t) = x(t - \tau_1) + u(t - \tau_2), \quad \tau_1, \tau_2 > 0$$

$$y(t) = Cx(t)$$

- Sistema con retardo en la salida:

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t),$$

$$y(t) = Cx(t - \tau), \quad \tau > 0$$

es importante resaltar que el retardo de tiempo τ es finito. En la Figura 2.4 se muestra un sistema en lazo cerrado, el cual presenta un retardo en la señal adquirida por el sensor debido a que es enviada a través de una red de comunicación al controlador. De igual forma, la señal de control ejercida por el controlador es enviada a través de la red y el actuador la recibe con un retardo. Estos retardos pueden causar que los sistemas se inestabilicen.

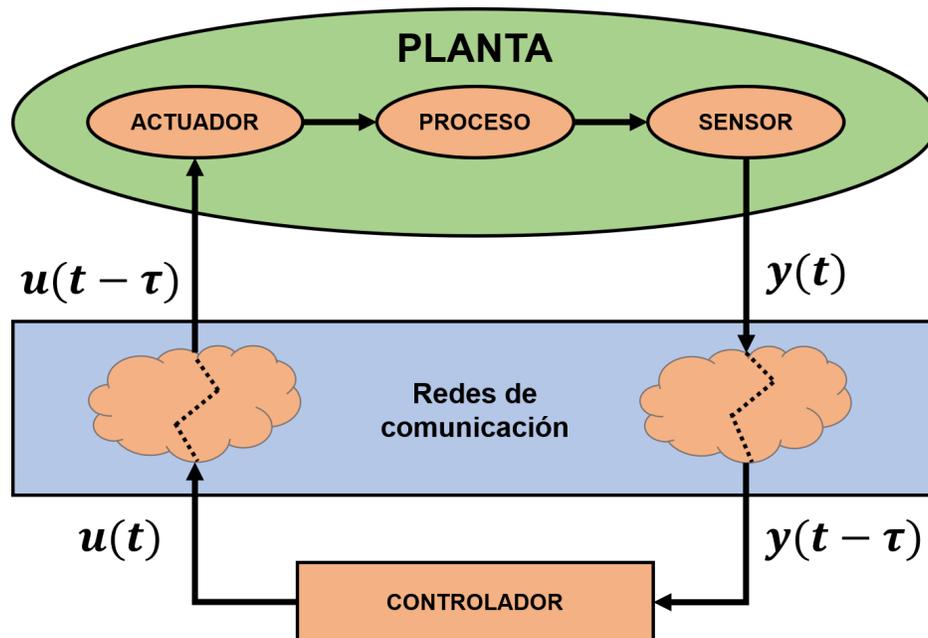


Fig. 2.4. Sistema en lazo cerrado con señales con retardo.

2.4. Sistemas muestreados

Las señales de importancia, presentes en cada elemento de los sistemas, dentro de la teoría de control se asumen o consideran como continuas, algunos ejemplos son las siguientes: entradas y salidas del proceso, entradas y salidas en los actuadores, señales de referencias, etc. Sin embargo, con la implementación de controladores, el uso de sensores digitales, la implementación de estrategias de detección de fallas, por decir algunos, las cuales son implementadas en computadoras hacen que estas señales se deban de tratar como señales muestreadas o adquiridas en instantes de tiempo.

Los sistemas muestreados operan en tiempo continuo, pero algunas señales continuas que se presentan en estos sistemas son muestreadas o adquiridos en instantes de tiempo (Chen and Francis, 2012). Generalmente los instantes de tiempo en los que se adquieren las muestras se asumen como constantes, sin embargo, pueden existir casos en donde sean variables, debido al desgaste en los componentes de los sensores digitales, la capacidad de software y hardware.

Un ejemplo de como se obtienen las señales muestreadas en los sistemas se muestra en la Figura 2.5. En esta figura se muestra un sistema en lazo cerrado, en donde la salida del sistema es adquirida por un sensor, posteriormente, antes de entrar al controlador esta salida pasa por un convertidor analógico a digital, igual llamado muestreador. Esto es para poder obtener la ley de control, sin embargo, esta saldrá en forma discreta. Posteriormente, para entrar al actuador debe de pasar por un convertidor análogo a digital, por ejemplo un retenedor de orden cero, para obtener una señal que se podría considerar como continua. Es importante el resaltar que estos controladores deben de considerar la naturaleza de esta señal o bien el considerar un tiempo de muestreo muy pequeño, ya que si no se considera esto se puede llevar a la inestabilidad al sistema.

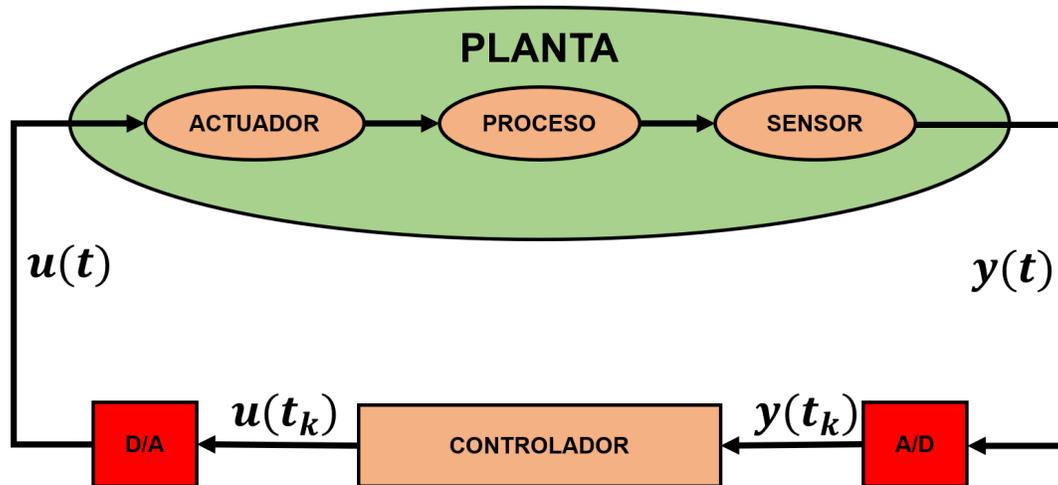


Fig. 2.5. Sistema muestreado en lazo cerrado.

2.5. Observadores

Un observador es un dispositivo u algoritmo computacional que estima u observa las variables de un sistema, basado en el conocimiento del modelo, a partir de las entradas y las salidas disponibles (Besançon, 2007). Los observadores son útiles para diferentes fines, como lo son la estimación de variables no medibles, detección de fallas, estimación de parámetros, etc. Los observadores pueden clasificarse según su orden, como se muestra a continuación (Ogata and Yang, 2010):

- **Orden completo:** El observador estima todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas están disponibles por medición directa.
- **Orden reducido:** El observador estima menos de n variables de estado, donde n es la dimensión del vector de estado.
- **Orden mínimo:** El observador estima las mínimas variables de estado posibles, es decir, $n - m$ variables de estados, donde n es la dimensión del vector de estado y m es la dimensión del vector de salida.

2.5.1. Observadores para sistemas lineales

En esta sección se presenta el diseño de un observador de orden completo para un sistema lineal. Sea el sistema definido como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema, $u \in \mathbb{R}^s$ es la entrada del sistema, $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema. El observador para el sistema anterior es el mismo modelo, salvo que se incluye un término de corrección para compensar las imprecisiones en las matrices A y B y el error inicial. El observador de Luenberger tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado estimado, $C\hat{x}$ es la salida estimada del observador. Las entradas al observador son la salida del sistema original y y la entrada de control u . Considerando lo anterior se define el error de observación como $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, por lo tanto su dinámica es:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)\tag{2.9}$$

entonces considerando lo mostrado en (2.7) y (2.8), se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - [A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))] \\ &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= (A - LC)\tilde{x}(t)\end{aligned}\tag{2.10}$$

Partiendo de lo anterior se ve que el comportamiento dinámico del error es determinado por los valores propios de la matriz $A - LC$. Si se asegura que la matriz $A - LC$ es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial $\tilde{x}(0)$.

Es necesario verificar si el sistema es observable, para esto se obtiene la matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\tag{2.11}$$

en este caso, dado a que se diseña un observador de orden completo se requiere que:

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = n. \quad (2.12)$$

En la Figura 2.6 se muestra un diagrama a bloques de las conexiones de entre un sistema y su observador, donde se muestra que las entradas al observador son la entrada del sistema y la salida del sistema original.

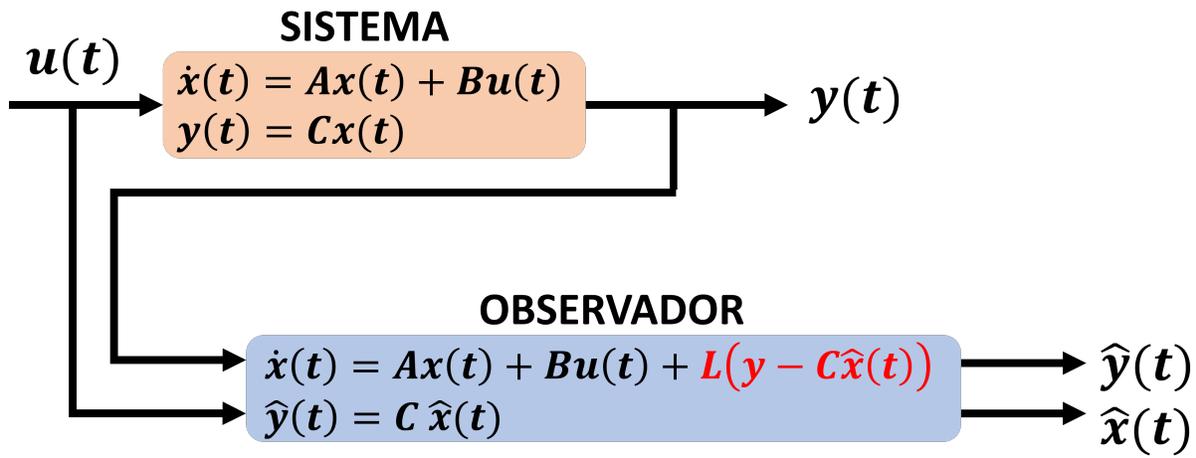


Fig. 2.6. Sistema original y su observador

2.5.2. Observadores no lineales

A continuación se presentan los conceptos y generalidades de los observadores no lineales. Es importante resaltar que se deben de asegurar más condiciones debido a la naturaleza de estos sistemas. En el diseño de observadores para sistemas no lineales se abordan tres principales tipos de sistemas:

- Sistemas uniformemente observables (U.O): En estos sistemas la observabilidad del sistema no depende de su entrada.
- Sistemas no uniformemente observables (N.U.O): En estos sistemas la observabilidad del sistema depende de su entrada, de las salidas o estados, por lo tanto, puede llegar el caso en el que el sistema pierda su observabilidad.
- Sistemas Lipschitz: Estos sistemas cumplen con la condición de Lipschitz, $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$.

En la Tabla 2.1 se muestran las estructuras de algunos observadores para sistemas no lineales (Besançon, 2007).

Observador	Estructura	Tipo de sistema	Estructura del observador	Referencia
Luenberguer	No linealidad en la salida	U.O	$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(y, u) - K(C\hat{x} - y)$	Naifar et-al. (2016)
Alta ganancia	No linealidad triangular	U.O	$\dot{\hat{x}} = A_0\hat{x} + \varphi(\hat{x}, u) - \Delta K_0(C_0\hat{x} - y)$	Farza et-al. (2015b); Shen et-al. (2017)
Filtro de Kalman extendido	General	U.O	$\dot{z} = f(z, u) + Ph^*(\hat{x}, u)^T R^{-1}(y - h(z, u))$ $\dot{P} = f^*(z, u)P + Pf^*(z, u)^T + Q - Ph^*(\hat{x}, u)^T R^{-1}h^*(z, u)P$	Besançon (2007)
Filtro de Kalman extendido de alta ganancia	Afín al estado	U.O	$\dot{z} = A(u)z + b(z, u) + PC^T R^{-1}(y - Cz)$ $\dot{P} = (A(u) + b^*(z, u))P + P(A(u) + b^*(z, u))^T + Q_\theta - PC^T R^{-1}CP$	Besançon (2007)
Tipo Kalman	Afín al estado	N.U.O	$\dot{\hat{x}} = A(u)\hat{x} + Bu - K(C\hat{x} - y)$	Besançon (2007)
Tipo Kalman	Afín al estado con estados no medibles	N.U.O	$\dot{\hat{x}} = A(u, y)\hat{x} + B(u, y) - K(C\hat{x} - y)$	Besançon (2007)
Alta ganancia	No linealidad triangular	N.U.O	$\dot{\hat{x}} = A_0(u, y)\hat{x} + \varphi(\hat{x}, u) - \Delta K_0(C_0\hat{x} - y)$	Torres et-al. (2012)
Tipo Luenberguer	General	Lipschitz	$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(\hat{x}) + L(y - C\hat{x})$	Zemouche and Boutayeb (2012)

Tabla 2.1. Observadores para sistemas no lineales

2.5.3. Observador para un sistema no lineal

Considerando un sistema no lineal general como el mostrado en (2.1), un observador es dado por un sistema auxiliar (Besançon, 2007):

$$\dot{X}(t) = F(X, u, y, t) \quad (2.13)$$

$$\hat{x}(t) = H(X, u, y, t) \quad (2.14)$$

Tal que:

- $\hat{x}(0) = x(0) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq 0$
- $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$

Es importante considerar que la norma del error de observación ($\|\hat{x}(t) - x(t)\|$) dice mucho del observador, ya que:

- Si $\|\hat{x}(t) - x(t)\|$ se mantiene para cualquier $x(0), \hat{x}(0)$, el observador es global.
- Si $\|\hat{x}(t) - x(t)\|$ se mantiene con convergencia exponencial, el observador es exponencial.
- Si $\|\hat{x}(t) - x(t)\|$ se mantiene con un radio de convergencia que pueda ser ajustada, el observador es ajustable.

Para este caso el diagrama a bloques de la conexión del sistema no lineal y su observador se muestra en la Figura 2.7. En donde a diferencia del caso lineal se muestra que el observador no es una copia explícitamente del sistema, ya que en muchos casos es necesario un cambio de coordenadas para cumplir con algunas propiedades para el diseño de este. Por ejemplo, el partir de un sistema no lineal y llevarlo a una representación uniformemente observable para poder diseñar un observador de alta ganancia, ya que es necesario tener en la matriz A constante una diagonal superior de unos.

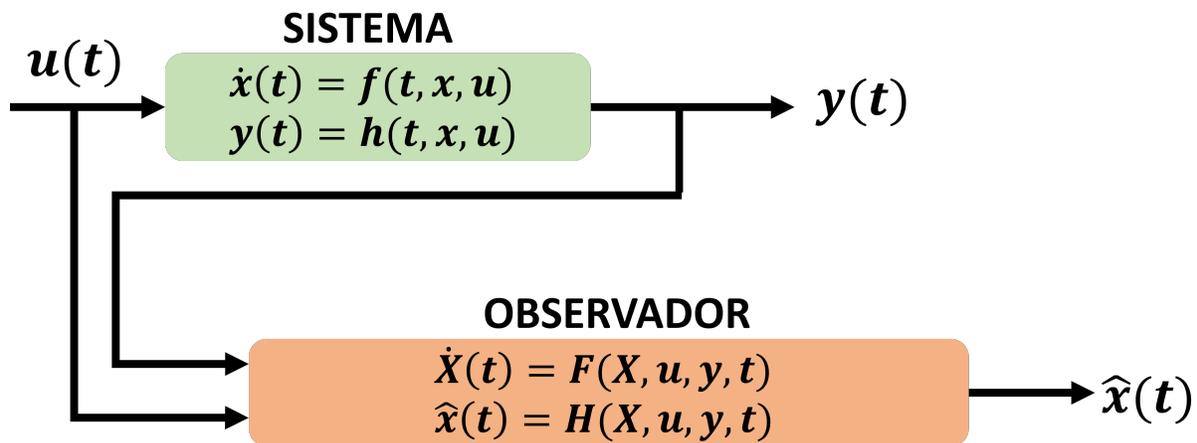


Fig. 2.7. Sistema original no lineal y su observador

2.5.4. Observabilidad para sistemas no lineales

A grandes rasgos la observabilidad en un sistema es la capacidad con la que puede ser reconstruido su vector de estados $(x(t))$ a partir de un observador, solo con el conocimiento de su entrada $(u(t))$ y de la salida $(y(t))$ hasta un tiempo t . Esto es posible solo si la salida $y(t)$ posee la información de todo el vector de estados. Para que un sistema sea observable en este debe ser posible distinguir entre varios estados iniciales a partir de la salida, los sistemas no deben ser **indistinguibles**, esto se define a continuación (Besançon, 2007; Bernard, 2019).

Indistinguibilidad

Un par de condiciones iniciales $(x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es indistinguible para un sistema (2.1) si:

$$\forall u \in \mathcal{U}, \forall t \geq 0, h(\mathcal{X}_u(t, x_0)) = h(\mathcal{X}_u(t, x'_0)) \quad (2.15)$$

Un estado x es indistinguible de x_0 si el par (x, x_0) es indistinguible.

De igual forma es necesario definir el concepto de **detectabilidad** ya que existen algunos sistemas que no cumplen con la propiedad de indistinguibilidad pero sí son detectables.

Detectabilidad

El sistema (2.1) es detectable para cualquier $u \in \mathcal{U}$; es decir, para cualquier u en \mathcal{U} y para cualquier (x_a, x_b) en $\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0$ tal que $\sigma^+(x_a, u) = \sigma^+(x_b, u) = +\infty$ y

$$y_{x_a, u}(t) = y_{x_b, u}(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.16)$$

entonces, se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(x_a; t; u) - X(x_b; t; u)| = 0. \quad (2.17)$$

Esta propiedad dice que incluso si dos condiciones iniciales son indistinguibles con la salida, las soluciones correspondientes del sistema se acercan asintóticamente, por lo tanto, se logra obtener una buena estimación sin importar la condición que se elija. Considerando lo anterior es posible definir el concepto de observabilidad.

Definición de observabilidad (respecto a x_0)

Un sistema 2.1 es observable (respecto a x_0) si no admite cualquier par indistinguible (respecto a cualquier estado indistinguible de x_0).

Ejemplo.

Considerando el siguiente sistema:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ y(t) = \sin(x(t)) \end{cases} \quad (2.18)$$

y tomando en cuenta los siguientes estados iniciales: $x_0 = 0, x'_0 = x_0 + 2\pi$, se evalúa la salida con cada condición inicial:

$$\begin{aligned} \sin(x_0) &= \sin(x'_0) \\ \sin(0) &= \sin(2\pi) \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Con esto es evidente que la función de salida y no ayuda a distinguir entre ambos estados x_0 y x'_0 , por lo tanto el sistema no es observable. Sin embargo es claro que sí es posible el distinguir los estados cuando $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Esto da parte a la siguiente definición.

Observabilidad débil

Un sistema (2.1) es débilmente observable (respecto a x_0) si existe un vecindario U para cualquier x (respecto de x_0) tal que ahí no existe ningún estado indistinguible de x (respecto a x_0) en U .

Para prevenir que se pierda la observabilidad en ciertos casos, se define lo siguiente.

Observabilidad local débil

Un sistema (2.1) es localmente observable (respecto a x_0) si existe un vecindario U para cualquier x (respecto de x_0) tal que para cualquier vecindario V de x (respecto x_0) contenido en U , no existe ningún estado indistinguible de x (respecto x_0) en V cuando se consideran intervalos de tiempo para las cuales las trayectorias permanecen en V .

Considerando todo lo anterior es posible definir el **espacio de observación** correspondiente al espacio de todos los estados observables.

Espacio de observación

El espacio de observación para el sistema (2.1) es definido como el espacio vectorial más pequeño (denotado por \mathcal{O}) de funciones \mathcal{C}^∞ conteniendo los componentes de h y están cercanas bajo las

derivadas de Lie a lo largo de $f_u := f(\cdot, u)$ para cualquier constante $u \in \mathbb{R}^m$ (tal que para cualquier $\varphi \in \mathcal{O}(h)$, $L_{f_u}\varphi \in \mathcal{O}(h)$, donde $L_{f_u}\varphi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x, u)$).

Una vez definido esto es posible definir el rango de la matriz de observabilidad, que es análogo a lo propuesto para el sistema lineal.

Condición del rango de observabilidad (respecto a x_0)

El sistema (2.1) se dice que satisface la condición de rango de observabilidad (respecto a x_0) si:

$$\forall x, \quad \dim \mathcal{O}(h)|_x = n \quad [\text{respecto } \dim \mathcal{O}(h)|_{x_0} = n] \quad (2.19)$$

donde $d\mathcal{O}(h)|_x$ es el conjunto de $d\varphi(x)$ con $\varphi \in \mathcal{O}(h)$.

Si esta condición se satisface para todo $x_0 \in \mathcal{V}$, se dice que el sistema es observable en el sentido de la condición de rango.

2.6. Observabilidad para sistemas no uniformemente observables

Para los sistemas no uniformemente observables, como los mostrados en (2.5) y (2.6), los cuales son los que se desarrollan en este trabajo de investigación, la observabilidad dependerá de la entrada, por lo que no todas las entradas serán aceptables. El restringirlas a entradas universales no es suficiente, esto hace que aparezca el concepto de entradas persistentes (Besançon, 2007).

Proposición 1. Una entrada u es una entrada universal en $[0, t]$ para un sistema (2.1) si y solo si $\int_0^t \|h(\mathcal{X}_u(\tau, x_0)) - h(\mathcal{X}_u(\tau, x'_0))\|^2 d\tau > 0$ para todo $x_0 \neq x'_0$.

2.6.1. Entradas persistentes

Una entrada u es una entrada persistente para el sistema (2.1) si

$$\int_{t-T}^t \|h(\mathcal{X}_u(\tau, x_{t-T})) - h(\mathcal{X}_u(\tau, x'_{t-T}))\|^2 d\tau > 0, \forall x_{t-T} \neq x'_{t-T} \quad (2.20)$$

Para evitar que el factor de corrección del observador crezca, es necesario definir el concepto de entrada regular persistente.

2.6.2. Entradas regulares persistentes

Una entrada u es una entrada regular persistente para el sistema (2.1) si

$$\exists t_0, T : \forall x_{t-T}, x'_{t-T}, \forall t \geq t_0, \int_{t-T}^t \|h(\mathcal{X}_u(\tau, x_{t-T})) - h(\mathcal{X}_u(\tau, x'_{t-T}))\|^2 d\tau > \beta(\|x_{t-T}, x'_{t-T}\|) \quad (2.21)$$

Para los sistemas afines al estado se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2. Para los sistemas afín al estado, las entradas regulares persistentes son entradas u tal que:

$$\exists t_0, T, \alpha : \int_{t-T}^T \Phi_u^T(s, t-T) C^T C \Phi_u(s, t-T) ds \geq \alpha I, \forall t \geq t_0, \quad (2.22)$$

con $\Phi_u(s, t)$ como la matriz de transición clásicamente definida por:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_u(s, t)}{ds} &= A(u(s))\Phi_u(s, t), \\ \Phi_u(t, t) &= I \end{aligned}$$

La cantidad de la parte izquierda de (2.22) corresponde a lo que se conoce como *gramiano de observabilidad*, definido clásicamente para los sistemas LTV (Linear Time-Variant por sus siglas en ingles), para cualquier $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}$, como:

$$\Gamma(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi^T(s, t_1) C^T(s) C(s) \Phi(s, t_1) ds. \quad (2.23)$$

Es importante resaltar que es necesario el cumplimiento de esta condición para poder reconstruir el vector de estado de los sistemas. En caso de que no se cumpla, se corre el riesgo de que se pierda la observabilidad del sistema. De igual forma, la entrada debe de lograr excitar al sistema lo suficiente para lograr la estimación correcta del vector de estado. En caso de que un sistema no cumpla con esta propiedad *a priori*, se puede llevar a su cumplimiento por medio de las entradas del sistema *a posteriori*.

2.7. Observador en cascada

Un observador en cascada es una estructura de observadores utilizada para sistemas que presentan retardos en la salida. La cual está constituida por un conjunto de $m+1$ subsistemas, donde cada uno de ellos predice el estado del subsistema anterior en una fracción del tiempo del retardo original, logrando predecir el estado libre de retardo con el último subsistema Germani et-al. (2002). En la Figura 2.8, se muestra un sistema abordando la problemática de este trabajo de investigación (muestreo y retardo en la señal) y la estructura de este observador es:

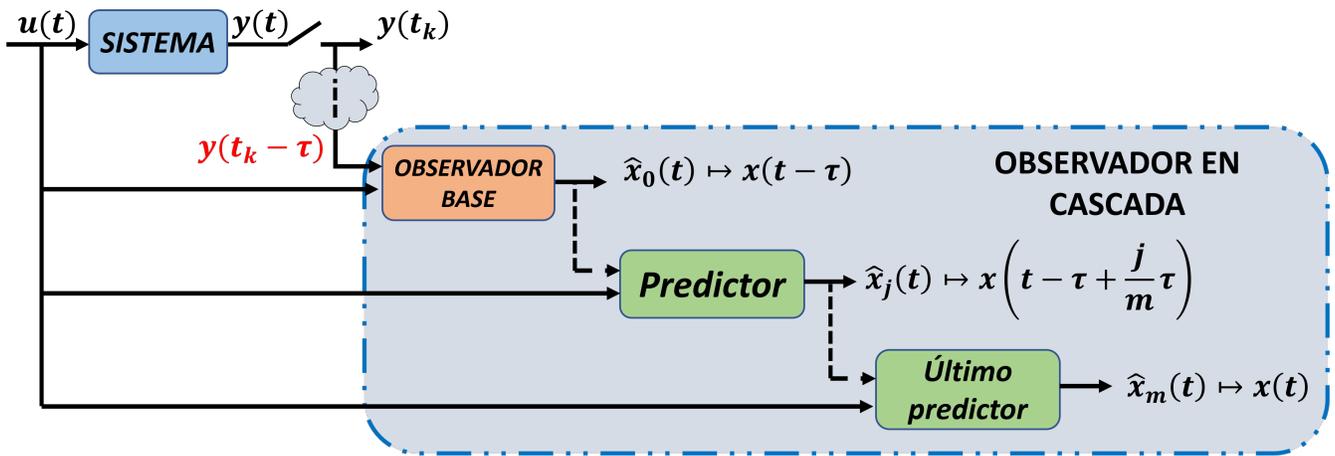


Fig. 2.8. Sistema con un observador en cascada

El primer subsistema de la cascada es un observador que estima el vector de estado del sistema con retardo. Los subsistemas restantes son conocidos como predictores, los cuales predicen el estado del subsistema anterior en un horizonte igual a $\frac{\tau}{m}$, en donde el último predictor dará la estimación del vector libre de retardo. En la Figura 2.9 se muestra la secuencia de los subsistemas en el observador en cascada y la estimación de cada vector de estado hasta llegar a la estimación libre de retardo.

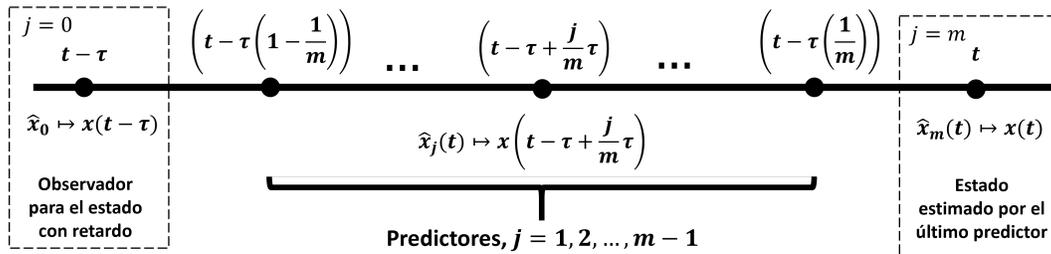


Fig. 2.9. Secuencia de los subsistemas en la cascada $j = 0, 1, \dots, m$

2.8. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó la teoría en la que esta tesis se basa para su desarrollo. Primeramente se abordaron los temas generales de los sistemas no lineales: definición, tipos de sistemas y los fenómenos que presentan. Posteriormente, se presentó teoría acerca de los sistemas inciertos y los sistemas con retardos, donde se presentaron las causas de los retardos y diferentes estructuras en los que se pueden presentar. Por último, se presentaron fundamentos teóricos de observabilidad y observadores de estado, en donde se presentó el observador en cascada, el cual es parte fundamental en este trabajo de tesis.

Capítulo 3

Análisis y diseño de observadores para sistemas inciertos

En este capítulo se presentan las primeras tres aportaciones de este trabajo de tesis. En este capítulo se presenta el análisis y diseño de observadores para sistemas lineales y no lineales en presencia de incertidumbres. Para ambos casos se consideran que los sistemas son MIMO lo que no limita el diseño de los observadores a una cantidad de salidas y/o entradas. En los sistemas no lineales se considera una clase particular y más general de estos, la cual es llamada clase de sistemas no uniformemente observables. La principal ventaja de esta clase de sistemas es que no restringe la matriz de estados A a que sea constante, ya que permite que pueda depender de funciones.

En la sección 3.1 se presenta el diseño de un observador para un sistema no lineal incierto considerando que la salida del sistema está disponible de forma continua. La aplicación de este observador se muestra en la sección 3.2. Posteriormente en la sección 3.3 se presenta el diseño de un observador considerando que la salida del sistema solo está disponible en ciertos instantes de tiempo, lo que representa un caso práctico, ya que al instrumentar un sistema, las salidas son adquiridas de esta forma. La aplicación de este observador se muestra en las secciones 3.4 y 3.5, en donde se aprovechan las propiedades de la clase de sistemas no lineales en cuestión y se logra estimar los parámetros desconocidos de una tubería. Como una extensión de este trabajo, en la sección 3.6 se presenta el diseño de un observador para sistemas inciertos lineales con salidas adquiridas en instantes de tiempo y su aplicación al modelo de una estructura tipo edificio se muestra en la sección 3.7. Por último las conclusiones del capítulo se presentan en la sección 3.8.

3.1. Observador para sistemas no lineales inciertos con salidas continuas

En esta sección se considera un sistema MIMO no lineal incierto afín al estado de la siguiente forma:

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), x(t))x(t) + \varphi(x(t), u(t)) + B\varepsilon(t) \\ y(t) = Cx(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

con:

$$A(u(t), x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u(t), x^{(1)}(t)) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & A_{q-1}(u, x^{(1)}(t), \dots, x^{(q-1)}(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde el estado $x(t) = (x^1, x^2 \dots x^q)^T \in \mathbb{R}^n$, $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, q$ con $n_1 = p$ y $\sum_{i=1}^q n_i = n$ y cada $A_k(u, x)$ es una $n_i \times n_{i+1}$ matriz triangular con respecto x , es decir, $A_i(u, x) = A(u, x^1, \dots, x^i)$, $i = 1, \dots, q - 1$. La entrada del sistema se representa como $u \in \mathbb{R}^s$. La función $\varphi(x(t), u(t))$ tiene una estructura triangular con respecto a $x(t)$ y es uniforme con respecto $u(t)$:

$$\varphi(u(t), x(t)) = \begin{bmatrix} \varphi(u(t), x^{(1)}(t)) \\ \varphi(u(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)) \\ \vdots \\ \varphi_n(u(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(q-1)}(t)) \\ \varphi(u(t), x(t)) \end{bmatrix}$$

La función $\varepsilon(t)$ describe las incertidumbres del sistema y puede depender del tiempo, los estados y los parámetros, $\varepsilon(t) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^p$. Esta incertidumbre se considera que aparece en el último estado del sistema por lo tanto la matriz B queda de la siguiente forma:

$$B = \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n_q} \\ \vdots \\ 0_{n_{q-1} \times n_q} \\ I_{n_q} \end{bmatrix}$$

Por último, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema, se mide de forma continua y se obtiene matemáticamente al multiplicar el vector de estados $x(t)$ por la matriz C definida como:

$$C = \begin{bmatrix} I_{n_1 \times n_1} & 0_{n_1 \times n_2} & \dots & 0_{n_1 \times n_q} \end{bmatrix}.$$

Para diseñar un observador para el sistema (3.1) es necesario tomar en cuenta las siguientes suposiciones obtenidas de (Besançon et al., 1996) y (Farza et al., 2015a):

A 3.1.1. *El estado $x(t)$ y el control $u(t)$ son acotados, es decir, $x(t) \in X$ y $u(t) \in U$, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ y $U \subset \mathbb{R}^s$ son conjuntos compactos. Con esto se pueden definir las cotas máximas para el estado y $A(u(t), x(t))$ se definen como:*

$$x_M = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\| \quad (3.2)$$

$$\tilde{a} = \sup_{(u,x) \in U \times X} \|A(u, x)\| \quad (3.3)$$

A 3.1.2. *Las funciones $A(u(t), x(t))$ y $\varphi(x(t), u(t))$ son Lipschitz con respecto a $x(t)$, uniformes con respecto a $u(t)$, donde $(u, x) \in U \times X$. Sus constantes de Lipschitz son descritas como L_A y L_φ respectivamente.*

A 3.1.3. *La función desconocida $\varepsilon(t)$ está esencialmente acotada, es decir,*

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \sup_{t \geq 0} \|\varepsilon(t)\| \leq \delta_\varepsilon \quad (3.4)$$

Dado que el estado x está confinado al conjunto acotado X , se pueden asumir las extensiones Lipschitz de las no linealidades, usando funciones de saturación suaves. Por consiguiente, se asume que las extensiones se realizaron y que las funciones $A(u, x)$ y $\varphi(u, x)$ provienen de estas extensiones. Esto permite concluir que para cualquier entrada acotada $u \in U$, las funciones $A(u, x)$ y $\varphi(u, x)$ son globalmente Lipschitz con respecto a $x(t)$ y están acotadas para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

A continuación se presenta un ejemplo en el cual se muestra la ventaja de la estructura del sistema (3.1). Se puede considerar como estado una dimensión diferente a 1 como comúnmente lo muestran algunos autores (Cacace et al., 2014; Besançon et al., 1996) por decir algunos. Considerando el siguiente sistema académico:

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1 x_1 x_2 + u_2 x_1^2 x_3 + x_1 u_3 \\ \dot{x}_2(t) = x_3 - 10x_2 + u_3 - x_2^3 + \varepsilon_1 \\ \dot{x}_3(t) = -x_3 - 2x_1 x_2 - 10u_1 x_2 + \varepsilon_2 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ y $u_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, 3$. Este sistema se puede llevar a una representación como el sistema (3.1) considerando $q = 2$ y:

$$x = [x^{(1)} \ x^{(2)}]^T, \quad x^{(1)} = x_1, \quad x^{(2)} = [x_2 \ x_3]^T, \quad \varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2]^T$$

el sistema (3.5) se reescribe de la siguiente forma:

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u, x^{(1)}) \\ 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \varphi^{(1)}(u, x^{(1)}) \\ \varphi^{(2)}(u, x^{(1)}, x^{(2)}) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{1 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix} \varepsilon(t) \\ y(t) = x^{(1)}(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_1(u, x^{(1)}) &= [u_1 x_1 \quad u_2 x_1^2], \\ \varphi^{(1)}(u, x^{(1)}) &= x_1 u_3, \\ \varphi^{(2)}(u, x^{(1)}, x^{(2)}) &= \begin{bmatrix} x_3 - 10x_2 + u_3 - x_2^3 \\ -x_3 - 2x_1 x_2 - 10u_1 x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con ésto, es evidente que el sistema (3.6) tiene la forma del sistema (3.1) y cumple con todas las suposiciones previamente definidas.

Es importante resaltar que la estructura de cada subsistema $A_k(u, x)$ es más general, ya que la dinámica depende de las salidas (y también de todos los demás componentes del estado). Por lo tanto, esta estructura triangular es menos restrictiva en comparación que en el caso de una sola salida, donde se considera que la dimensión de cada estado es igual a uno, es decir, $x_i \in \mathbb{R}^{n_k}$, $n_k = 1$.

Antes de empezar con el diseño del observador, considerando el enfoque de alta ganancia, se define la matriz Δ_θ , como se muestra a continuación:

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[I_{n_1} \quad \frac{I_{n_2}}{\theta} \quad \dots \quad \frac{I_{n_q}}{\theta^{q-1}} \right] \quad (3.7)$$

y se consideran las siguientes propiedades debido a la estructura de A y C :

$$\Delta_\theta A(u, x) \Delta_\theta^{-1} = \theta A(u, x), \quad C \Delta_\theta^{-1} = C \quad (3.8)$$

3.1.1. Diseño de un observador para salidas continuas

A continuación se presenta el diseño del observador para estimar el vector de estados del sistema (3.1), este observador se diseña utilizando el enfoque de alta ganancia. El observador propuesto es

el siguiente:

$$\mathcal{OBS} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(u(t), \hat{x}(t))\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T (C\hat{x}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

en donde $\hat{x} = (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^a)^T \in \mathbb{R}^n$; $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ representa el estado estimado; u y y son respectivamente la señal de entrada y la señal de salida del sistema (3.1); $S(t)$ es una matriz simétrica positiva definida (SPD) regida por la siguiente ecuación diferencial de Lyapunov:

$$\dot{S}(t) = \theta \left(-S(t) - A(u(t), \hat{x}(t))^T S(t) - S(t) A(u(t), \hat{x}(t)) + C^T C \right) \quad (3.10)$$

donde $S(0) = S^T(0) > 0$ y $\theta > 0$ es un parámetro escalar de ajuste.

La principal problemática del diseño de un observador para el sistema (3.1) es que no es uniformemente observable, ya que su observabilidad depende de la entrada y del estado del sistema. Es por esto, que la observabilidad se debe de garantizar. Para esto se debe de considerar que el sistema es excitado persistentemente. Para definir la condición de excitación persistente, se define $\Phi(t, s)$, como la matriz de transición del sistema afín al estado:

$$\dot{\xi}(t) = A(u(t), \hat{x}(t))\xi(t) \quad (3.11)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, u es la entrada del sistema (3.1) y \hat{x} es el estado estimado del sistema (3.9). Es importante resaltar que la matriz $\Phi_{u, \hat{x}}(t, s)$ se define como:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_{u, \hat{x}}(t, s)}{dt} = A(u(t), \hat{x}(t))\Phi_{u, \hat{x}}(t, s), \quad \forall t \geq s \geq 0, \\ \Phi_{u, \hat{x}}(t, t) = I_n, \end{cases} \quad (3.12)$$

donde I_n denota una matriz identidad de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Debido a que matriz $A(u(t), x(t))$ del sistema (3.1) está formada por funciones, se dice que el sistema es no uniformemente observable, por lo tanto, se debe asumir lo siguiente:

A 3.1.4. *La entrada u es tal que para cualquier trayectoria de \hat{x} del sistema (3.9) empezando de $\hat{x}(0) \in X$, $\exists T^* > 0$, $\exists \theta^* > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, $\forall \theta \geq \theta^*$ y $\forall t \geq T^*/\theta$, se satisface la siguiente condición de excitación persistente*

$$\int_{t-T^*/\theta}^t \Phi_{u, \hat{x}}(t, s)^T C^T C \Phi_{u, \hat{x}}(t, s) ds \geq \frac{\delta_0}{\theta \alpha(\theta)} \Delta_\theta^2 \quad (3.13)$$

donde $\alpha(\theta) \geq 1$ es una función que satisface lo siguiente:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0 \quad (3.14)$$

Considerando esto se define el valor mínimo de la solución de (3.10), de acuerdo con (Hernández-González et al., 2016):

$$\lambda_{\min}(S) \geq \frac{e^{T^*} \delta_0}{\alpha(\theta)}, \quad (3.15)$$

Con todo lo anteriormente considerado, se propone el siguiente teorema, el cual es la primera aportación de este trabajo de tesis.

Teorema 3.1.1. *Considerando el sistema (3.1), el cual satisface las suposiciones (A3.1.1-A3.1.3). Entonces, para cada entrada que satisface la suposición A3.1.4, existe una constante $\theta \geq \theta^* > 0$, tal que un observador de la forma (3.9) logrará estimar los estados del sistema (3.1) con una convergencia exponencial a una región acotada lo suficientemente cerca del origen para valores suficientemente altos de θ , lo que significa que, para cada condición inicial $(x(0), \hat{x}(0)) \in X$, el error de observación $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ tenderá exponencialmente a un valor finito cuando $t \mapsto \infty$ en presencia de incertidumbres.*

3.1.2. Demostración del Teorema 3.1.1

En esta sección se demuestra que el error de observación convergerá a una región acotada cerca del origen. Primeramente se define $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$ en donde $\tilde{x} = \hat{x} - x$ es el error de observación, considerando (3.1), (3.8) y (3.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) = & \theta[A(u(t), \hat{x}(t)) - S^{-1}(t)C^T C]\bar{x}(t) \\ & + \Delta_\theta[\tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x(t) + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B\varepsilon(t)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) &= A(u(t), \hat{x}(t)) - A(u(t), x(t)) \\ \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) &= \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \varphi(u(t), x(t)) \end{aligned}$$

Considerando la siguiente función candidata de Lyapunov $V(\bar{x}(t), t) = \bar{x}^T(t)S(t)\bar{x}(t)$ y la ecuación dinámica de la función $S(t)$ mostrada en (3.10), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}(t), t) &= 2\bar{x}^T(t)S(t)\dot{\tilde{x}}(t) + \bar{x}^T(t)\dot{S}(t)\bar{x}(t) \\ &= -\theta V(\bar{x}(t), t) - \theta\bar{x}^T(t)C^T C\bar{x}(t) \\ &\quad + 2\bar{x}^T(t)S(t)\Delta_\theta[\tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x(t) + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B\varepsilon(t)] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Posteriormente se considera lo propuesto en (Farza et~al., 2009), para $\theta > 0$:

$$\begin{aligned}
 \|2\bar{x}^T(t)S(t)\Delta_\theta\tilde{A}(u(t), x(t), \hat{x}(t))x(t)\| &\leq \|2\|\|\bar{x}^T(t)\|\|S(t)\|\|\Delta_\theta\|\|\tilde{A}(u(t), x(t), \hat{x}(t))\|\|x(t)\| \\
 &\leq 2\sqrt{n}\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}}V(\bar{x}(t), t)L_Ax_M \\
 &\leq 2\sqrt{\alpha(\theta)}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}V(\bar{x}(t), t)L_Ax_M \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|2\bar{x}^T(t)S(t)\Delta_\theta\tilde{\varphi}(u(t), x(t), \hat{x}(t))\| &\leq \|2\|\|\bar{x}^T(t)\|\|S(t)\|\|\Delta_\theta\|\|\tilde{\varphi}(u(t), x(t), \hat{x}(t))\| \\
 &\leq 2\sqrt{n}\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}}V(\bar{x}(t), t)L_\varphi \\
 &\leq 2\sqrt{\alpha(\theta)}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}V(\bar{x}(t), t)L_\varphi \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

donde L_A y L_φ son las mostradas en la suposición **A3.1.2** y $\lambda_{\min}(S)$ en (3.10).

Basado en que la función $\varepsilon(t) > 0$ cumple la suposición **A3.1.3**, se procede como en (Bouraoui et~al., 2015), para $\theta > 0$:

$$\begin{aligned}
 \|2\bar{x}^T(t)S(t)\Delta_\theta B\varepsilon(t)\| &\leq \|2\|\|\bar{x}^T(t)\|\|S(t)\|\|\Delta_\theta B\|\|\varepsilon(t)\| \\
 &\leq \frac{2}{\theta^{q-1}}\sqrt{\lambda_{\max}(S)}\sqrt{V(\bar{x}(t), t)}\delta_\varepsilon \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.18), (3.19), (3.20) en (3.17) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\bar{x}(t), t) &\leq -\theta V(\bar{x}(t), t) + 2\sqrt{\alpha(\theta)}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}(L_Ax_M + L_\varphi)V(\bar{x}(t), t) \\
 &\quad + \frac{2}{\theta^{q-1}}\sqrt{\lambda_{\max}(S)}\sqrt{V(\bar{x}(t), t)}\delta_\varepsilon \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Dividiendo ambas partes de (3.21) entre $\sqrt{V(\bar{x}(t), t)}$ y reescribiendo se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\sqrt{V(\bar{x}(t), t)} &\leq -\theta \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}(L_Ax_M + L_\varphi) \right) \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \\
 &\quad + 2 \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\theta^{q-1}}\sqrt{\lambda_{\max}(S)} \right)
 \end{aligned}$$

considerando $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0$. Usando el Lema de comparación mostrado en (Khalil, 2002), se obtiene:

$$\sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \leq e^{-\theta\nu_\theta t} \sqrt{V(\bar{x}(0))} + \frac{2}{\theta\nu_\theta} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \right) \quad (3.22)$$

con:

$$\nu_\theta = \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} (L_A x_M + L_\varphi) \right). \quad (3.23)$$

Para obtener el error de observación es necesario regresar a $\bar{x}(t)$, por lo tanto:

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}} e^{-\theta\nu_\theta t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{2}{\theta\nu_\theta \sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \right) \quad (3.24)$$

Sustituyendo $\lambda_{\min}(S)$ dada por (3.15) en (3.24):

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\frac{e^{-T^*}\delta_0}{\alpha(\theta)}}} e^{-\theta\nu_\theta t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{2}{\theta\nu_\theta \sqrt{\frac{e^{-T^*}\delta_0}{\alpha(\theta)}}} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \right) \\ &\leq \sqrt{\frac{e^{T^*}\lambda_{\max}(S)\alpha(\theta)}{\delta_0}} e^{-\theta\nu_\theta t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{2}{\theta\nu_\theta} \sqrt{\frac{e^{T^*}\lambda_{\max}(S)\alpha(\theta)}{\delta_0}} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\theta^{q-1}} \right) \\ &\leq \zeta \sqrt{\alpha(\theta)} e^{-\theta\nu_\theta t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{2\zeta}{\theta^{q-1}\nu_\theta} \frac{\sqrt{\alpha(\theta)}}{\theta} \delta_\varepsilon \\ \|\bar{x}(t)\| &\leq \zeta \sqrt{\alpha(\theta)} e^{-\theta\nu_\theta t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{2\zeta}{\theta^{q-1}\nu_\theta} \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \delta_\varepsilon \end{aligned}$$

donde:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}$$

Se busca regresar a términos del error, para esto se tiene $\|\tilde{x}(t)\| \leq \|\bar{x}(t)\| \leq \theta^{q-1} \|\tilde{x}(t)\|$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq \theta^{q-1} \left(\zeta \sqrt{\alpha(\theta)} e^{-\theta\nu_\theta t} \right) \|\tilde{x}(0)\| + \theta^{q-1} \left(\frac{2\zeta}{\theta^{q-1}\nu_\theta} \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \right) \delta_\varepsilon \\ &\leq \theta^q \zeta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} e^{-\theta\nu_\theta t} \|\tilde{x}(0)\| + \frac{2\zeta}{\nu_\theta} \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \delta_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.25)$$

Se puede concluir que el error de observación ($\tilde{x}(t)$) converge exponencialmente a un valor finito que está sujeto a la cota máxima de la incertidumbre. Con esto se concluye la demostración del Teorema 3.1.1. ■

Es importante resaltar que en este caso, si se desea reducir el error de observación, se pueden incrementar los valores del parámetro de ajuste θ , sin embargo, un incremento de θ amplificaría el ruido de medición en presencia de éste.

3.2. Simulación 1. Aplicación al sistema caótico de Bloch con salida continua

Objetivo. Demostrar que el observador convergerá a una región acotada cerca del origen en presencia de incertidumbres aplicado al sistema caótico de Bloch. De igual forma, que ante valores grandes en el parámetro de ajuste, la norma del error se acerca más al origen.

En esta simulación se considera el diseño de un observador para estimar el vector de estado del sistema caótico de Bloch mostrado en la Ec. (3.26) propuesto en (Zhao et al., 2018). Este sistema es perturbado en el ultimo estado por una señal externa $\varepsilon(t)$ que será considerada como incertidumbre. La simulación se realiza en el software de MATLAB 2018b, mediante el uso de la función ODE23 considerando un tiempo de simulación total de 50s y un paso de integración de $h = 0.001s$.

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \delta x_2(t) + \lambda x_3(t)(x_1(t) \sin(\psi) - x_2(t) \cos(\psi)) - \frac{x_1(t)}{\kappa_2} \\ \dot{x}_2(t) = -\delta x_1(t) - x_3(t) + \lambda x_3(t)(x_1(t) \cos(\psi) + x_2(t) \sin(\psi)) - \frac{x_2(t)}{\kappa_2} \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - \lambda(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \sin(\psi) - \frac{x_3(t)-1}{\kappa_1} + \varepsilon(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.26)$$

El vector de estado es $x = [x_1, x_2, x_3]^T$. Este sistema se considera autónomo por lo tanto no tiene entrada y el sistema presenta dos salidas $y = [y_1, y_2]^T$. Los parámetros del sistema se muestran en la siguiente tabla:

Parámetros	Valor
δ	-0.4π
λ	30
ψ	0.173
κ_1	5
κ_2	2.5

Tabla 3.1. Parámetros del sistema de Bloch

La incertidumbre del sistema es $\varepsilon(t) = 0.2 \cos(t) + 0.1$. Si se desea diseñar un observador de la forma (3.9) para el sistema (3.26) considerando las coordenadas originales, no es posible debido a que no respetaría la forma triangular mostrada en (3.1). Sin embargo, aprovechando la propiedad de los sistemas descritos en la sección anterior, en donde los estados del observador pueden ser

de dimensiones diferentes, sí es posible. Se considera que el sistema (3.26) puede ser reescrito considerando $q = 2$ y:

$$x = [x^{(1)}, x^{(2)}]^T, \quad x^{(1)} = [x_1, x_2]^T, \quad x^{(2)} = [x_3]$$

Entonces el sistema (3.26) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & A_1(x^{(1)}) \\ 0_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \varphi^{(1)}(x^{(1)}) \\ \varphi^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}) \end{pmatrix} + B\varepsilon(t) \\ y(t) = Cx(t) = x^{(1)}(t) \end{cases} \quad (3.27)$$

con:

$$C = [I_{2 \times 2}, \quad 0_{2 \times 1}], \quad B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ I_1 \end{bmatrix}$$

y donde:

$$A_1(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} \lambda(x_1^{(1)} \sin(\psi) - x_2^{(1)} \cos(\psi)) \\ -1 + \lambda(x_1 \cos(\psi) + x_2^{(1)} \sin(\psi)) \end{bmatrix},$$

$$\varphi^{(1)}(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} \delta x_2^{(1)} - \frac{x_1^{(1)}}{\kappa_2^{(1)}} \\ -\delta x_1^{(1)} - \frac{x_2^{(1)}}{\kappa_2} \end{bmatrix},$$

$$\varphi^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}) = x_2^{(1)} - \lambda((x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(1)})^2) \sin(\psi) - \frac{x_1^{(2)} - 1}{\kappa_1}$$

Con esto, es evidente que el sistema (3.26) tiene la forma del sistema (3.1). Por lo tanto, ahora es posible diseñar un observador de la forma (3.9). Las condiciones iniciales para el sistema son:

$$x(0) = [x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)} \quad x_1^{(2)}]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

El parámetro de ajuste del observador se elige a un valor de $\theta = 5$. La matriz Δ_θ queda de la siguiente forma:

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales del observador son:

$$\hat{x}(0) = [\hat{x}_1^{(1)} \quad \hat{x}_2^{(1)} \quad \hat{x}_1^{(2)}]^T = [2 \quad 2 \quad 2]^T$$

$$S(0) = I_{3 \times 3}$$

En la Figura 3.1 se muestra el comportamiento caótico del sistema original y la trayectoria estimada por medio del observador. Se muestra que ambos sistemas parten de puntos diferentes debido a las condiciones iniciales, con el paso del tiempo la trayectoria dada por el vector de estado del observador imita la trayectoria del sistema original.

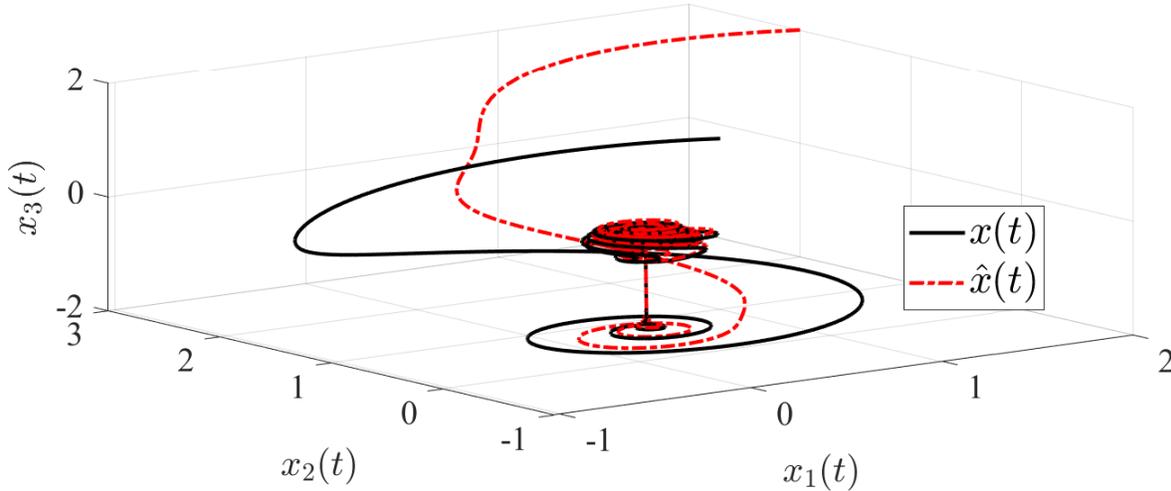


Fig. 3.1. Trayectoria original y estimada del sistema caótico de Bloch

La estimación de los estados del sistema (3.26) por medio del observador de alta ganancia se muestra en las Figuras 3.2, 3.3 y 3.4. Se muestra que el observador converge en menos de un segundo a una región cercana del valor original de los estados debido a que el sistema original presenta una incertidumbre en el último estado (x_3). A simple vista la diferencia entre la señal estimada por parte del observador y los estados x_1 y x_2 del sistema original parece mínima, sin embargo, en el estado x_3 la diferencia es clara debido a que en este estado es donde está presente la incertidumbre.

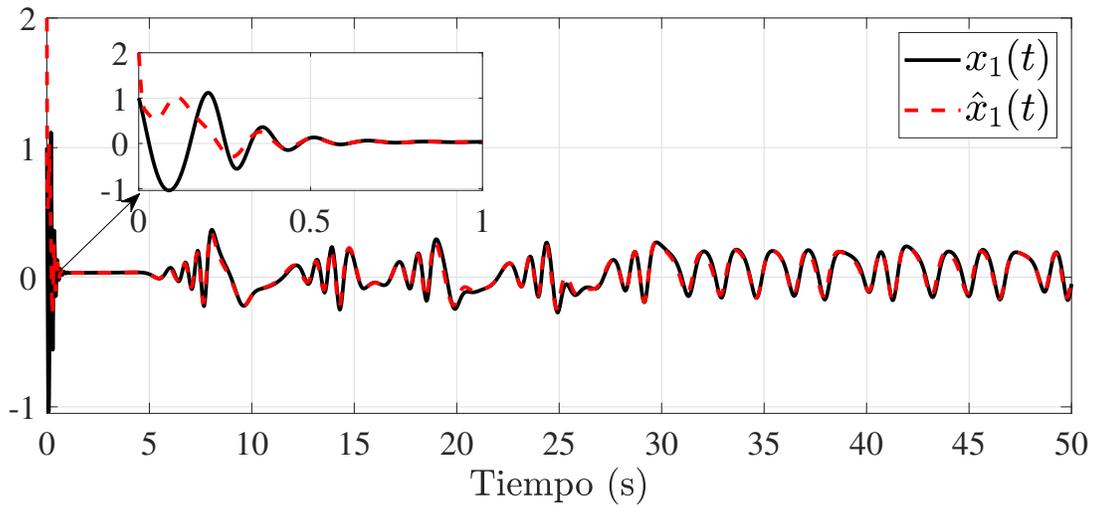


Fig. 3.2. Estado $x_1(t)$ del sistema original y su estimación

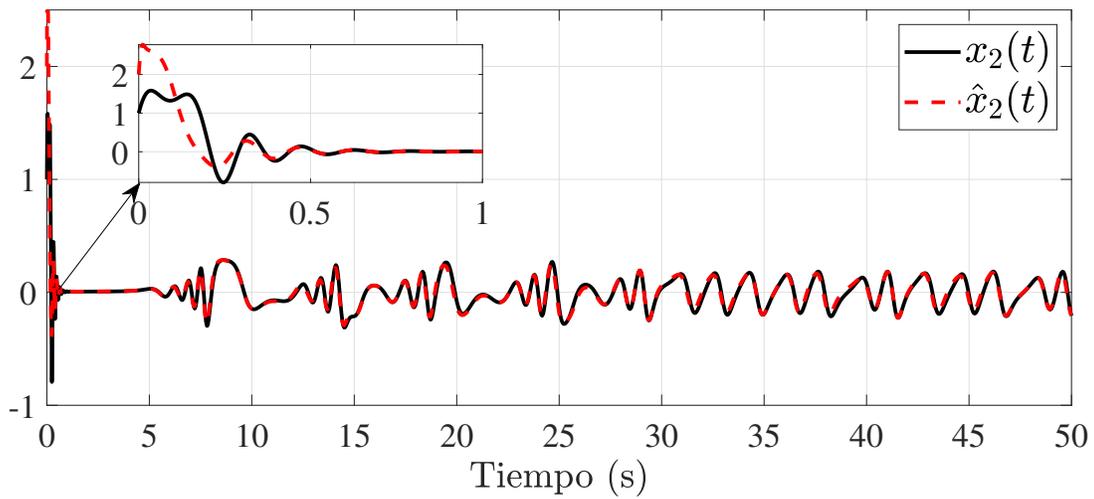


Fig. 3.3. Estado $x_2(t)$ del sistema original y su estimación

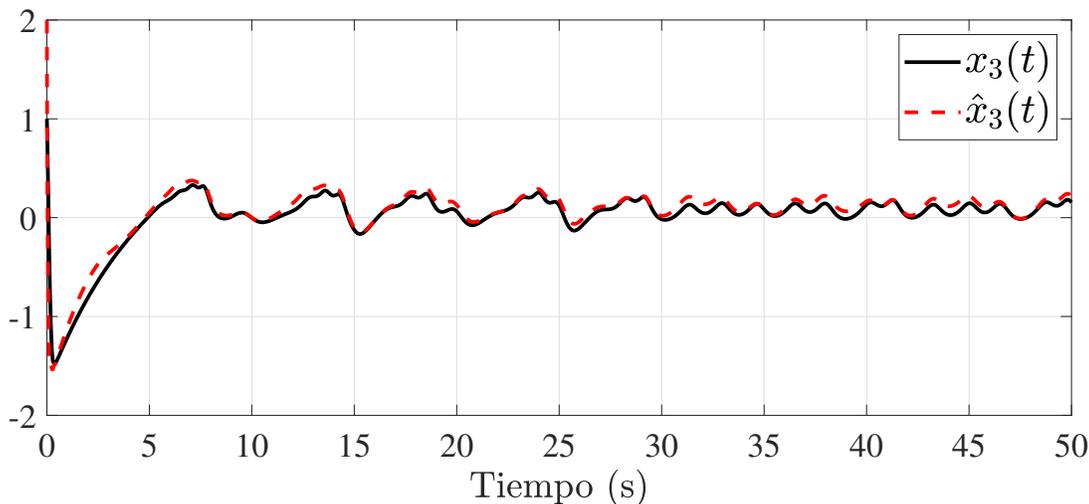


Fig. 3.4. Estado $x_3(t)$ del sistema original y su estimación

En la Figura 3.5 se muestra la norma del error de observación, la cual se define como $\|\tilde{x}(t)\| = \|\hat{x}(t) - x(t)\|$ donde $x(t)$ es el vector de estado del observador y $x(t)$ el vector de estado del sistema original. Se muestra que la norma del error no converge a cero sino que se mantiene en una región acotada, tal como se planteó previamente en el Teorema (3.1.1).

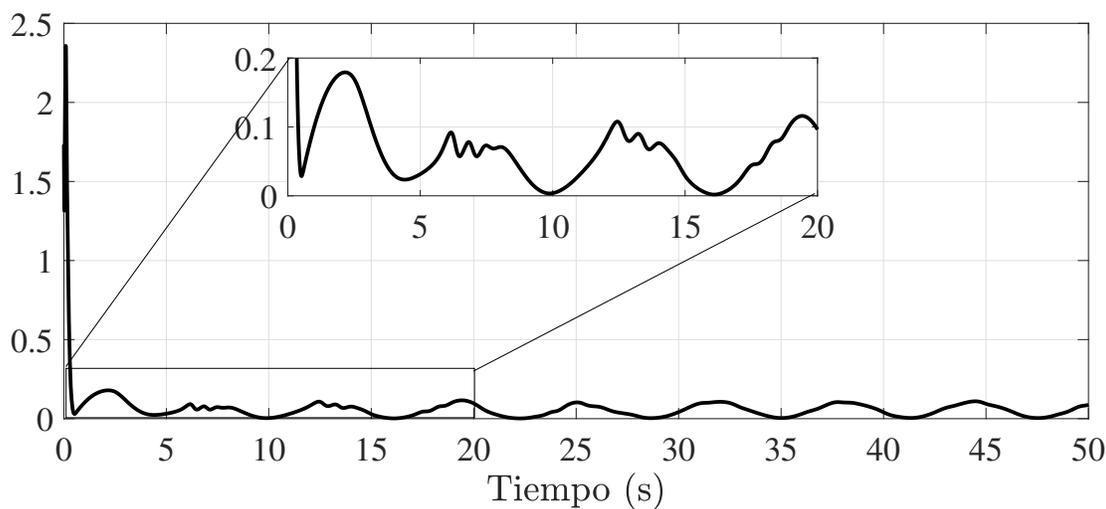


Fig. 3.5. Norma del error de observación $\|\tilde{x}(t)\|$ con $\theta = 5$

3.2.1. Comparativa entre diferentes valores del parámetro de ajuste

En esta sección se evaluará el comportamiento del error de observación ante diferentes valores en el parámetro de ajuste del observador. Para demostrar que ante valores grandes en el parámetro de ajuste θ , la norma del error de observación se reduce y se acerca más al origen. Se procede a comparar el observador considerando diferentes valores en el parámetro de ajuste ($\theta = 5, \theta = 10$ y $\theta = 20$). Las condiciones iniciales son las siguientes:

$$\hat{x}(0) = [\hat{x}_1^{(1)} \quad \hat{x}_2^{(1)} \quad \hat{x}_1^{(2)}]^T = [2 \quad 2 \quad 2]^T$$

$$S(0) = I_{3 \times 3}.$$

En la Figura 3.6 se muestra la comparativa de la norma del error de observación $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ donde $\hat{x}(t)$ es el vector de estado obtenido con cada parámetro de ajuste y $x(t)$ el vector de estado del sistema original. Se muestra que ante valores de $\theta = 10$ y $\theta = 20$, la norma del error se acerca más al origen, a diferencia que con valores de $\theta = 5$.

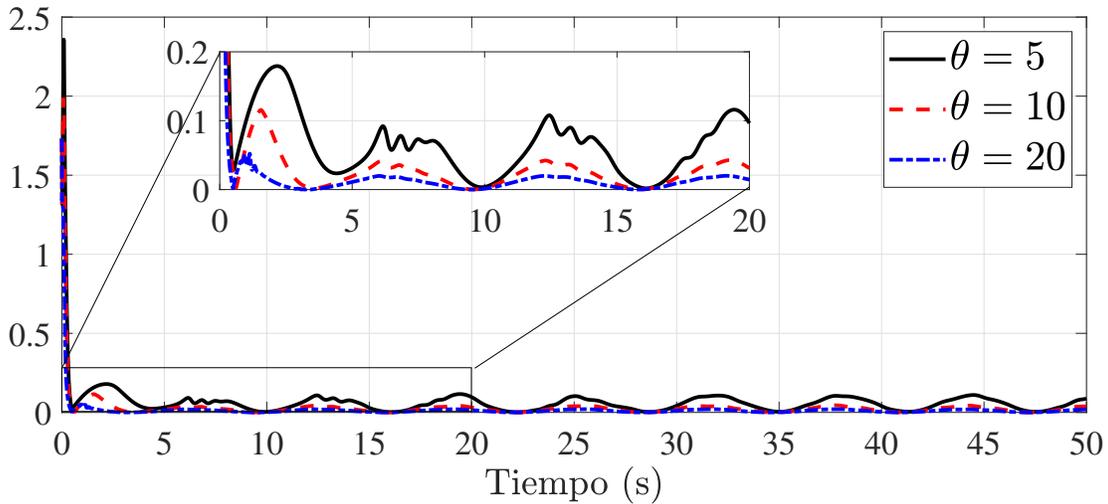


Fig. 3.6. Comparativa de la norma del error de observación $\|\tilde{x}(t)\|$ con diferentes valores de θ

Conclusión. Primeramente, se demostró una ventaja de la estructura de esta clase de sistemas MIMO, ya que se pudo diseñar un observador para un sistema el cual en sus coordenadas originales no se podía. De igual forma, se demostró que el observador converge a una región acotada en presencia de incertidumbres en el sistema. También que ante valores altos en el parámetro de ajuste (θ) el error de observación se irá acercando al origen.

3.3. Observador para sistemas no lineales inciertos con salidas muestreadas

Se considera un sistema no lineal MIMO, con una incertidumbre $\varepsilon(t)$. La salida del sistema es muestreada en instantes de tiempo:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), x(t))x(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y(t_k) = Cx(t_k) = x^1(t_k) \end{cases} \quad (3.28)$$

con:

$$A(u(t), x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u(t), x^{(1)}(t)) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & A_{q-1}(u, x^{(1)}(t), \dots, x^{(q-1)}(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n_q} \\ \vdots \\ 0_{n_{q-1} \times n_q} \\ I_{n_q} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(u(t), x(t)) = \begin{bmatrix} \varphi(u(t), x^{(1)}(t)) \\ \varphi(u(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)) \\ \vdots \\ \varphi_n(u(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(q-1)}(t)) \\ \varphi(u(t), x(t)) \end{bmatrix}, C = [I_{n_1 \times n_1} \quad 0_{n_1 \times n_2} \quad \dots \quad 0_{n_1 \times n_q}]$$

donde el estado $x(t) = (x^1, x^2, \dots, x^q)^T \in \mathbb{R}^n$, $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, q$ con $n_1 = p$ y $\sum_{i=1}^q n_i = n$ y cada $A_i(u, x)$ es una $n_i \times n_{i+1}$ matriz triangular con respecto a $x(t)$, es decir $A_i(u, x) = A(u, x^1, \dots, x^i)$, $i = 1, \dots, q-1$; $\varphi(x(t), u(t))$ es una función que tiene una estructura triangular con respecto a $x(t)$; $u(t) \in \mathbb{R}^s$ es la entrada del sistema; $\varepsilon(t) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^p$ es una función que describe las incertidumbres del sistema y puede depender del tiempo, los estados y los parámetros. Finalmente, $y(t_k) \in \mathbb{R}^p$ es la salida adquirida en instantes de tiempo.

Además, la secuencia de muestreo se considera como $0 \leq t_0 < \dots < t_k < \dots$, $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$ y $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$, por lo tanto, existe $0 < \Delta_m \leq \Delta_{\text{máx}} < +\infty$ lo que corresponde a

$$0 < \Delta_m \leq \Delta_k = t_{k+1} - t_k \leq \Delta_{\text{máx}}, \quad \forall k \geq 0.$$

Para diseñar un observador para el sistema (3.28), es necesario tomar en cuenta las suposiciones **A3.1.1-A3.1.3**, propuestas en (Besançon et al., 1996; Farza et al., 2015a), así como la suposición **A3.1.4** de acuerdo a (Hernández-González et al., 2016) para asegurar la observabilidad del sistema.

3.3.1. Diseño del observador para salidas muestreadas

En esta sección se presenta el desarrollo del observador para la estimación del vector de estados para el sistema (3.28). Este observador se diseña utilizando el enfoque de alta ganancia. Sus ecuaciones son las siguientes:

$$\text{OBS} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(u(t), \hat{x}(t))\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T \eta(t) \\ \dot{S}(t) = \theta(-S(t) - A(u(t), \hat{x}(t))^T S(t) - S(t)A(u(t), \hat{x}(t)) + C^T C), \\ \dot{\eta}(t) = -\theta C S^{-1}(t) C^T \eta(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), k \in N \\ \eta(t_k) = C \hat{x}(t_k) - y(t_k), \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

donde $\hat{x} = [\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q]^T$ es el vector de estado estimado, Δ_θ está dada por la Ec. (3.7), $S(0) = S^T(0)$ es una matriz simétrica definida positiva (SDP) y el parámetro de ajuste es $\theta > 0$.

Es importante resaltar que la función $\eta(t)$ es continua en el intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1})$ y se actualiza en cada instante de muestreo t_k utilizando sólo la medición de salida muestreada $y(t_k)$. En otras palabras, solo se ajusta la condición inicial de la función η para cuando $t = t_k$. La principal ventaja de este observador es que se logra la estimación con un solo modelo de observador, a diferencia de otros enfoques en donde se utiliza un modelo para cuando no está presente la muestra y otro modelo para cuando sí lo está.

Tomando esto en consideración, se propone el siguiente teorema, el cual es la segunda aportación de este trabajo de tesis.

Teorema 3.3.1. *Considere el sistema no lineal incierto (3.28) que satisface las suposiciones A3.1.1-A3.1.4, con una entrada $u(t)$ haciendo $A(u(t), x(t))$ una función acotada. Entonces existe un $\theta_0 > 0$ tal que para todo $\theta \geq \theta_0$, si el máximo valor del diámetro de partición de la muestra $\Delta_{\text{máx}}$ satisface:*

$$\Delta_{\text{máx}} < \frac{a_\theta}{b_\theta}, \quad (3.30)$$

entonces el error de estimación del observador para salidas muestreadas (3.29) convergerá a una región acotada cercana al origen. Esta región dependerá de la cota de las incertidumbres δ_ε y de las funciones $\Pi(\Delta_m, \Delta_{\text{máx}})$ y $\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})$, definidas como:

$$\Pi(\Delta_m, \Delta_{\text{máx}}) = 2\theta\zeta \Delta_{\text{máx}} \frac{2 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}, \quad (3.31)$$

$$\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}}) = (a_\theta - b_\theta \Delta_{\text{máx}}) e^{-a_\theta \Delta_{\text{máx}}}. \quad (3.32)$$

El término diámetro de partición ($\Delta_{\text{máx}}$) se utiliza para referirse a la mayor distancia que existe entre los términos a_θ y b_θ que pertenecen al mismo conjunto, ya que $(u, x) \in U \times X$.

3.3.2. Demostración del Teorema 3.3.1

En esta sección se demuestra que el error de observación convergerá a una región acotada cercana al origen, que dependerá de las incertidumbres y del tiempo de muestreo. Se define $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$ en donde $\tilde{x} = \hat{x} - x$. Considerando las propiedades descritas en (3.8), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) = & \theta A(u(t), \hat{x}(t)) \bar{x}(t) - \theta S^{-1}(t) C^T \eta(t) \\ & + \Delta_\theta [\tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) x(t) + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B\varepsilon(t)] \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) &= A(u(t), \hat{x}(t)) - A(u(t), x(t)) \\ \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) &= \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \varphi(u(t), x(t)) \end{aligned}$$

Agregando a cada parte de (3.33) el término $\theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T C \tilde{x}(t)$ y definiendo $z(t) = C \tilde{x}(t) - \eta(t)$ como una variable auxiliar, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) = & \theta [A(u(t), \hat{x}(t)) - S^{-1}(t) C^T C] \bar{x}(t) + \theta S^{-1}(t) C^T z(t) \\ & + \Delta_\theta [\tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) x(t) + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B\varepsilon(t)] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Es importante hacer notar que de acuerdo con (3.29), $\eta(t_k) = C \bar{x}(t_k) = \bar{x}^1(t_k)$, por lo tanto $z(t_k) = 0$.

Considerando la dinámica de $\eta(t)$ dada por (3.29), se obtiene:

$$\dot{z}(t) = C \left[\theta A(u(t), \hat{x}(t), x(t)) + \Delta_\theta \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) x(t) + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \right] - C \Delta_\theta B \varepsilon(t) \quad (3.35)$$

Debido a las propiedades de las matrices, se tiene que $C \Delta_\theta B = 0$, por lo tanto, lo expresado en (3.35) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= C \dot{\tilde{x}}(t) - \dot{\eta}(t) \\ &= C \left[\theta A(u(t), \hat{x}(t), x(t)) + \Delta_\theta \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) x(t) + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

A continuación, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov $V(\bar{x}(t), t) = \bar{x}^T(t)S(t)\bar{x}(t)$ para demostrar la estabilidad del observador. Derivando esta función con respecto al tiempo t y considerando (3.10) y (3.34), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\bar{x}(t), t) &= 2\bar{x}^T(t)S(t)\dot{\bar{x}}(t) + \bar{x}^T(t)\dot{S}(t)\bar{x}(t) \\
 &= -\theta V(\bar{x}(t), t) - \theta\bar{x}^T(t)C^T C\bar{x}(t) + 2\theta\bar{x}^T C^T z(t) - 2\bar{x}^T(t)S(t)\Delta_\theta B\varepsilon(t) \\
 &\quad + 2\bar{x}^T S(t)\Delta_\theta \left[\tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x(t) + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \right] \\
 \dot{V}(\bar{x}(t), t) &\leq -\theta V(\bar{x}(t), t) + 2\theta\bar{x}^T(t)C^T z(t) + 2\bar{x}^T(t)S(t)\Delta_\theta B\varepsilon(t) \\
 &\quad + 2\bar{x}^T(t)S(t)\Delta_\theta \left[\tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x(t) + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \right]. \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Posteriormente, se procede a obtener la norma de la variable auxiliar $z(t)$. Para esto es necesario obtener la integral de (3.36), quedando:

$$z(t) = \int_{t_k}^t C \left[\theta A(u(s), \hat{x}(s))\bar{x}(s) + \Delta_\theta \left(\tilde{A}(u(s), \hat{x}(s), x(s))x(s) + \tilde{\varphi}(u(s), \hat{x}(s), x(s)) \right) \right] ds. \tag{3.38}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \|z(t)\| &\leq \frac{\theta\tilde{a}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds + \frac{\sqrt{n}L_A x_M}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds + \frac{\sqrt{n}L_\varphi}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds \\
 &\leq \frac{\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(t), s)} ds
 \end{aligned}$$

Con esto, se procede a obtener la norma del término $\|2\theta\bar{x}(t)C^T z(t)\|$:

$$\begin{aligned}
 \|2\theta\bar{x}(t)C^T z(t)\| &\leq 2\theta \frac{\sqrt{V(\bar{x}(t), t)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \left[\frac{\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(t), s)} ds \right] \\
 &\leq 2\theta \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \left[\frac{\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)}{\lambda_{\min}(S)} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(t), s)} ds \right] \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

Considerando que $\lambda_{\min}(S)$ se define como (3.15), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \|2\theta\bar{x}(t)C^T z(t)\| &\leq 2\theta \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \left[\frac{\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)}{\frac{e^{-T^* \delta_0}}{\alpha(\theta)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(t), s)} ds \right] \\
 &\leq 2\theta \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \left[\frac{(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)) e^{T^* \alpha(\theta)}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(t), s)} ds \right]
 \end{aligned}$$

quedando:

$$\|2\theta\bar{x}(t)C^T z(t)\| \leq 2\theta \left[\frac{\alpha(\theta) (\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)) e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(t), s)} ds \right] \sqrt{V(\bar{x}(t), t)}. \quad (3.40)$$

Considerando lo propuesto en (Farza et~al., 2009), para $\theta > 0$:

$$\|2\bar{x}^T(t)S(t)\Delta_\theta\tilde{A}(u(t), x(t), \hat{x}(t))x(t)\| \leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} V(\bar{x}(t), t) L_A x_M \quad (3.41)$$

$$\|2\bar{x}^T(t)S(t)\Delta_\theta\tilde{\varphi}(u(t), x(t), \hat{x}(t))\| \leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} V(\bar{x}(t), t) L_\varphi \quad (3.42)$$

Basado en que la función $\varepsilon(t) > 0$ cumple la suposición **A3.1.3**, se procede como en (Bouraoui et~al., 2015), para $\theta > 0$:

$$\|2\bar{x}^T(t)S(t)\Delta_\theta B\varepsilon(t)\| \leq \frac{2}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \delta_\varepsilon \quad (3.43)$$

Sustituyendo (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) en (3.37) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}(t), t) &\leq -\theta V(\bar{x}(t), t) + 2\theta \left[\frac{\alpha(\theta) (\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)) e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(t), s)} ds \right] \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \\ &\quad + 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] V(\bar{x}(t), t) + \frac{2}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \delta_\varepsilon \end{aligned}$$

Reescribiendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} &\leq -\theta \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} + 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} + \frac{2}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \delta_\varepsilon \\ &\quad + 2\theta \left[\frac{\alpha(\theta) (\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)) e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(t), s)} ds \right] \end{aligned}$$

Debido a que $\alpha(\theta) \geq 1$, $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} &= -\theta \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\min}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \right) \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \\ &\quad + \frac{2\theta\alpha(\theta) (\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)) e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(t), s)} ds + \frac{2}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \delta_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.44)$$

Agrupando:

$$a_\theta = \theta \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\min}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} (L_A x_M + L_\varphi) \right) \quad (3.45)$$

$$b_\theta = \frac{2\theta\alpha(\theta) (\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)) e^{T^*}}{\delta_0} \quad (3.46)$$

$$c_\theta = \frac{2}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \delta_\varepsilon \quad (3.47)$$

Sustituyendo (3.45), (3.46) y (3.47) en (3.44), se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \leq -a_\theta\sqrt{V(\bar{x}(t), t)} + b_\theta \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(t), s)} ds + c_\theta \quad (3.48)$$

De acuerdo al Teorema 3.3.1, el valor máximo del diámetro de muestreo $\Delta_{\text{máx}}$ satisface la siguiente condición:

$$\Delta_{\text{máx}} < \frac{\lambda_{\text{máx}}(S) \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\text{mín}}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \right)}{2(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A + L_\varphi))} \quad (3.49)$$

Aplicando el Lema 2.1 propuesto en (Bouraoui et al., 2015), con $a_\mu = a_\theta$, $b_\mu = b_\theta$, $c_\mu = c_\theta$, resulta:

$$\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}}) = (a_\theta - b_\theta\Delta_{\text{máx}})e^{-a_\theta\Delta_{\text{máx}}} \quad (3.50)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \leq e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})t} \sqrt{V(\bar{x}(0))} + c_\theta\Delta_{\text{máx}} \frac{2 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}$$

Se procede a regresar a términos del error de observación $\tilde{x}(t)$, primeramente se obtiene $\bar{x}(t)$:

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\text{máx}}(S)}{\lambda_{\text{mín}}(S)}} e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{\theta^{q-1}c_\theta\Delta_{\text{máx}}}{\sqrt{\lambda_{\text{mín}}(S)}} \frac{2 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}} \quad (3.51)$$

Sustituyendo $\lambda_{\text{mín}}(S)$ y c_θ dadas por (3.15) y (3.47) respectivamente en (3.51), se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq \sqrt{\frac{\lambda_{\text{máx}}(S)e^{T^*}\alpha(\theta)}{\delta_0}} e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{c_\theta\Delta_{\text{máx}}}{\sqrt{\frac{e^{-T^*}\delta_0}{\alpha(\theta)}}} \frac{2 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}} \\ &\leq \zeta\sqrt{\alpha(\theta)}e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{\left(\frac{2}{\theta^{q-1}}\sqrt{\lambda_{\text{máx}}(S)}\right)\Delta_{\text{máx}}}{\sqrt{\frac{e^{-T^*}\delta_0}{\alpha(\theta)}}} \frac{2 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}} \delta_\epsilon \\ &\leq \zeta\sqrt{\alpha(\theta)}e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{2}{\theta^{q-1}}\zeta\sqrt{\alpha(\theta)}\Delta_{\text{máx}} \frac{2 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}} \delta_\epsilon \end{aligned}$$

donde:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{máx}}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}$$

Se sabe que $\|\tilde{x}(t)\| \leq \|\bar{x}(t)\| \leq \theta^{q-1}\|\tilde{x}(t)\|$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{x}(t)\| &\leq \theta^{q-1}\zeta\sqrt{\alpha(\theta)}e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})t}\|\tilde{x}(0)\| + \theta^{q-1}\frac{2}{\theta^{q-1}}\zeta\sqrt{\alpha(\theta)}\Delta_{\text{máx}}\frac{2 - e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}\delta_\varepsilon \\
 &\leq \theta^q\zeta\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})t}\|\tilde{x}(0)\| + 2\zeta\sqrt{\alpha(\theta)}\Delta_{\text{máx}}\frac{2 - e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}\delta_\varepsilon \\
 &\leq \theta^q\zeta\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})t}\|\tilde{x}(0)\| + 2\theta\zeta\Delta_{\text{máx}}\frac{2 - e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\delta_\varepsilon \\
 \|\tilde{x}(t)\| &\leq \theta^q\zeta\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})t}\|\tilde{x}(0)\| + \Pi(\Delta_m, \Delta_{\text{máx}})\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\delta_\varepsilon
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

donde:

$$\Pi(\Delta_m, \Delta_{\text{máx}}) = 2\theta\zeta\Delta_{\text{máx}}\frac{2 - e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}. \tag{3.53}$$

De este análisis, es claro que el observador convergerá a un valor acotado que depende de las incertidumbres δ_ε y de la cota del tiempo de muestreo $\Delta_{\text{máx}}$ dado que este se encuentra en (3.50) y (3.53). Con esto se concluye la demostración del Teorema 3.3.1. ■

3.3.3. Análisis de la función $\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})$

Es importante recalcar que la tasa de decaimiento exponencial del error de observación está dada por (3.50). Para valores $\Delta_{\text{máx}} \geq 0$, se satisface $\eta_\theta = a_\theta/b_\theta$, y la derivada de $\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})$ con respecto a $\Delta_{\text{máx}}$ es:

$$\begin{aligned}
 \dot{\chi}_\theta(\Delta_{\text{máx}}) &= -a_\theta [a_\theta e^{-a_\theta\Delta_{\text{máx}}}] - b_\theta [\Delta_{\text{máx}} (-a_\theta e^{a_\theta\Delta_{\text{máx}}}) + e^{-a_\theta\Delta_{\text{máx}}}] \\
 &= -a_\theta^2 e^{-a_\theta\Delta_{\text{máx}}} + b_\theta a_\theta \Delta_{\text{máx}} - b_\theta e^{-a_\theta\Delta_{\text{máx}}}
 \end{aligned}$$

Reescribiendo se obtiene:

$$\dot{\chi}_\theta(\Delta_{\text{máx}}) = -b_\theta e^{-a_\theta\Delta_{\text{máx}}} - a_\theta e^{-a_\theta\Delta_{\text{máx}}} [a_\theta - b_\theta\Delta_{\text{máx}}] \tag{3.54}$$

Con esto se demuestra que la función $\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})$ es una función decreciente negativa, recordando que $\Delta_{\text{máx}}b_\theta < a_\theta$.

3.3.4. Comparación con el observador para salidas continuas

El error de observación para el caso del sistema con salidas muestreadas está dado por (3.52), el cual es una función acotada. Este error es equivalente al error (3.25) obtenido en el caso de salidas continuas. Esto se puede verificar considerando $\Delta_m = \Delta_{\text{máx}} = \Delta_s$, donde Δ_s implica un muestreo constante. Primero se analiza $\chi_\theta(\Delta_s)$, la cual es una función decreciente con respecto a Δ_s . Cuando $\Delta_s \rightarrow 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta_s \rightarrow 0} \chi_\theta(\Delta_s) &= (a_\theta - b_\theta \Delta_{\text{máx}}) e^{-a_\theta \Delta_{\text{máx}}} \\ &= a_\theta e^{-a_\theta(0)} - b_\theta(0) e^{-a_\theta(0)} \\ \lim_{\Delta_{\text{máx}} \rightarrow 0} \chi_\theta(\Delta_s) &= a_\theta = \theta \nu_\theta \end{aligned} \quad (3.55)$$

Por otro lado, la función $\Pi(\Delta_s)$ no es decreciente con respecto a Δ_s , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta_s \rightarrow 0} \Pi(\Delta_s) &= \lim_{\Delta_s \rightarrow 0} 2\theta\zeta\Delta_s \frac{2 - e^{-\chi_\theta(\Delta_s)\Delta_s}}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_s)\Delta_s}} \\ &= \lim_{\Delta_s \rightarrow 0} 2\theta\zeta\Delta_s \left[\frac{1}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_s)\Delta_s}} \right] \\ &= \lim_{\Delta_s \rightarrow 0} \left[\frac{2\theta\zeta\Delta_s}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_s)\Delta_s}} \right] \\ &= \lim_{\Delta_s \rightarrow 0} \frac{2\theta\zeta}{\chi_\theta(\Delta_s) e^{-\chi_\theta(\Delta_s)(0)}} \\ \lim_{\Delta_s \rightarrow 0} \Pi(\Delta_s) &= \frac{2\theta\zeta}{\chi_\theta(\Delta_s)} = \frac{2\theta\zeta}{\theta\nu_\theta} = \frac{2\zeta}{\nu_\theta} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Entonces los límites para ambas partes de (3.34), quedan:

$$\lim_{\Delta_s \rightarrow 0} \theta^q \zeta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} e^{-\chi_\theta(\Delta_s)t} \|\tilde{x}(0)\| = \theta^q \zeta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} e^{-\theta\nu_\theta t} \|\tilde{x}(0)\| \quad (3.57)$$

$$\lim_{\Delta_s \rightarrow 0} \Pi(\Delta_s) \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \delta_\varepsilon = \frac{2\zeta}{\nu_\theta} \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \delta_\varepsilon \quad (3.58)$$

Por lo tanto, considerando cuando $\Delta_s \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\|\tilde{x}(t)\| = \theta^q \zeta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} e^{-\theta\nu_\theta t} \|\tilde{x}(0)\| + \frac{2\zeta}{\nu_\theta} \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \delta_\varepsilon \quad (3.59)$$

lo cual es el error para el observador continuo mostrado en la Ec.(3.25). Se concluye que la tasa de convergencia del error está relacionado al tiempo de muestreo. Ante instantes de tiempos Δ_m pequeños en cada intervalo $[t_k, t_{k+1})$, la tasa de decaimiento y la cota máxima serán lo más parecido al caso continuo.

3.4. Simulación 2. Aplicación a la estimación del coeficiente de fricción

Objetivo. Demostrar que es posible estimar parámetros desconocidos (incertidumbre) de un sistema aprovechando la estructura de los sistemas no uniformemente observables. De igual forma, demostrar que es posible obtener la estimación de forma continua del vector de estado incluso cuando la señal de salida es muestreada a instantes de tiempo.

En esta simulación se considera el diseño de un observador para estimar parámetros desconocidos de un sistema, en este caso, el factor de fricción de una tubería. Se considera el sistema mostrado en (3.60) propuesto en (Torres and Verde, 2018), ver Anexo A. Este sistema aproxima por medio de una ley de potencia, dada por los valores α y γ , el comportamiento del coeficiente de fricción en una tubería. La simulación se realiza en el software de MATLAB 2018b, mediante el uso de la función ODE23 considerando un tiempo de simulación total de 100s y un paso de integración $h = 0.001$ s.

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{Q}(t) = -\alpha Q^\gamma(t) |Q(t)| + \underbrace{\frac{g A_r}{L}}_i (H_{in}(t) - H_{out}(t)) \\ y(t_k) = Q(t_k) \end{cases} \quad (3.60)$$

Los parámetros del sistema son los mostrados a continuación:

Parámetros	Valor	[Unidades]
L	2000	[m]
g	9.81	[m/s ²]
D	0.3	[m]
b	1400	[m/s]
A_r	0.0707	[m ²]

Tabla 3.2. Parámetros de la tubería

La presión de entrada es $H_{in} = 30 + \sin(0.08t)$ [mWc] y la presión de salida es $H_{out} = 10$ [mWc]. Para diseñar un observador de la forma (3.29) para el sistema (3.60) en las coordenadas originales no es posible, debido a que no tiene la estructura triangular del sistema (3.28). Aprovechando la propiedad de los sistemas no uniformemente observables presentados en este trabajo, en donde la matriz de estados puede depender de estados y/o entradas, es posible estimar los parámetros α y

3.4. SIMULACIÓN 2. APLICACIÓN A LA ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN

γ que son las incertidumbres en el sistema. Para esto se define el nuevo vector de estados:

$$x(t) = [Q(t) \quad \alpha Q^\gamma(t) \quad \gamma]^T, \quad (3.61)$$

Considerando este vector de estados, el sistema mostrado en la Ecuación (3.60) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), x(t)) x(t) + \varphi(x(t), u(t)) \\ y(t_k) = Cx(t_k) = x^1(t_k) = Q(t_k) \end{cases}, \quad (3.62)$$

donde:

$$A(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} 0 & -|x_1(t)| & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_2(t)}{x_1(t)} g(x(t), u(t)) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} \iota u(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

La diferencia de presiones representa la entrada del sistema $u(t) = H_{in}(t) - H_{out}(t)$. La función no lineal $g(\psi(t), u(t))$ se muestra a continuación:

$$g(x(t), u(t)) = -|x_1(t)|x_2(t) + \iota u_1(t).$$

Los estados originales se derivan de las nuevas coordenadas (3.61) como se muestra a continuación:

$$Q(t) = x_1(t) \quad \gamma = x_3(t) \quad y \quad \alpha = x_2(t)/x_1(t)^{x_3(t)}.$$

Con lo anteriormente planteado, es evidente que el sistema (3.62) tiene la forma del sistema (3.28), en donde, las incertidumbres del sistema α y γ han sido absorbidas por las coordenadas mostradas en (3.61). Con esto es posible diseñar un observador de la forma (3.29). Para esta simulación, las condiciones iniciales para el sistema son:

$$x(0) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [0.12 \quad 0.0566 \quad 0.9917]^T.$$

El parámetro de ajuste del observador se considera como $\theta = 1.25$. La matriz Δ_θ queda de la siguiente forma:

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta^2} \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales del observador son:

$$\hat{x}(0) = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3]^T = [0.12 \quad 0.01 \quad 0.08]^T$$

$$S(0) = I_{3 \times 3}, \quad \eta(0) = 0.$$

Se considera que la señal de salida es adquirida cada segundo, lo que quiere decir $\Delta_{\text{máx}_1} = 1\text{s}$. Este intervalo de muestreo representa un tiempo relativamente grande. Con esto se puede llevar a una posterior implementación con tarjetas de adquisición de datos con prestaciones bajas, que no permitan tiempos de muestreo altos.

En la Figura 3.7 se muestra la comparación entre la señal de salida del sistema (3.60) la cual es adquirida en instantes de tiempo $\Delta_{\text{máx}}$ y la estimación por parte del observador. Se muestra que el observador logra estimar la señal de forma continua a pesar del muestreo.

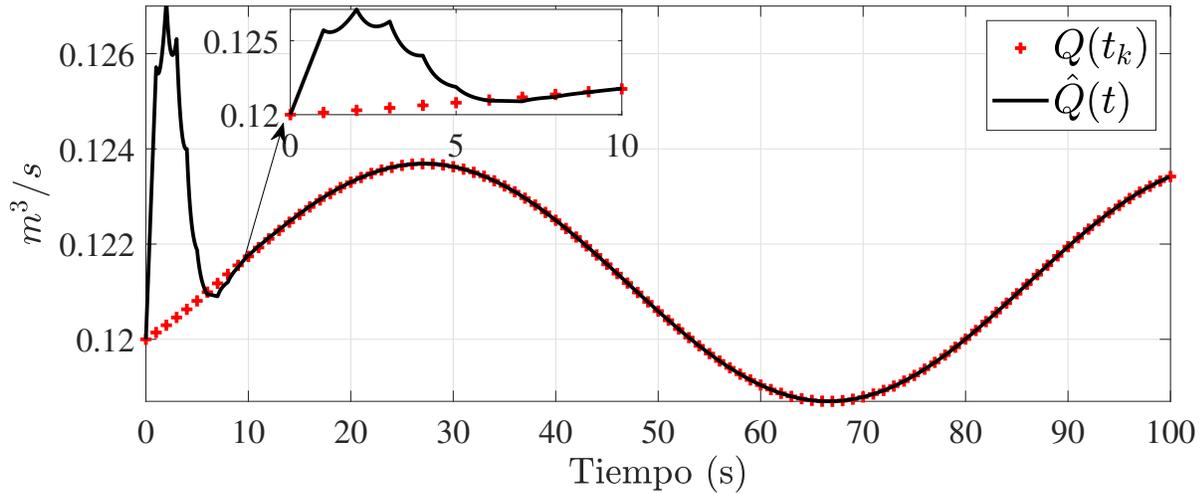


Fig. 3.7. Flujo de salida $Q(t_k)$ muestreado $\Delta_{\text{máx}} = 1\text{s}$ y flujo estimado continuamente $\hat{Q}(t)$.

En las Figuras 3.8 y 3.9 se muestran los parámetros inciertos estimados α y γ respectivamente. Se observa que convergen a los valores del modelo real que en este caso son $\alpha = 0.4638$ y $\gamma = 0.9917$. Con estos valores es posible estimar el factor de fricción en cada parte de la tubería con la siguiente ley de potencia:

$$\check{J}_s(Q(z, t)) = 0.4638Q^{0.9917}(z, t)|Q(z, t)|. \quad (3.63)$$

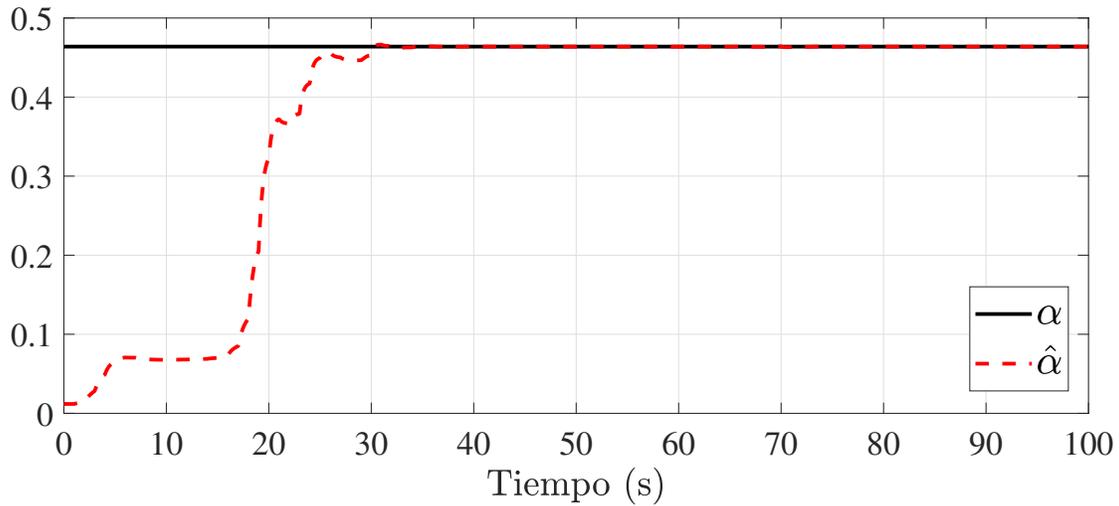


Fig. 3.8. Estimación del parámetro α con $\Delta_{\text{máx}} = 1\text{s}$

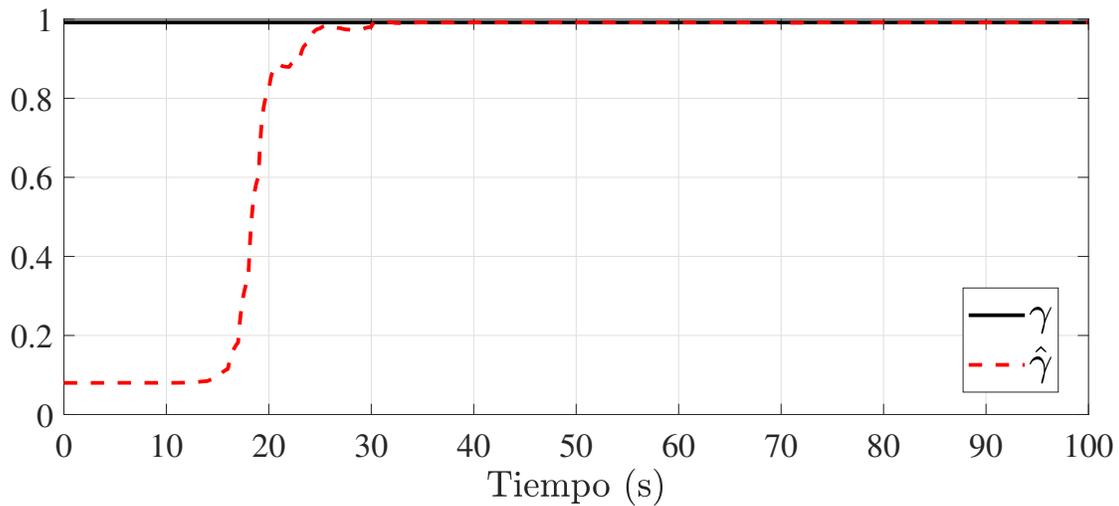


Fig. 3.9. Estimación del parámetro γ con $\Delta_{\text{máx}} = 1\text{s}$

En la Figura 3.10 se muestra la norma del error de observación $\|\tilde{x}(t)\| = \hat{x}(t) - x(t)$, donde $\hat{x}(t)$ es el vector de estados del observador y $x(t)$ es el vector de estados continuo del sistema original. Se muestra que el observador converge exponencialmente a cero debido a que en este caso el sistema no presenta incertidumbres, ya que estas son estimadas por medio del observador debido a que son consideradas como estados del sistema (3.62).

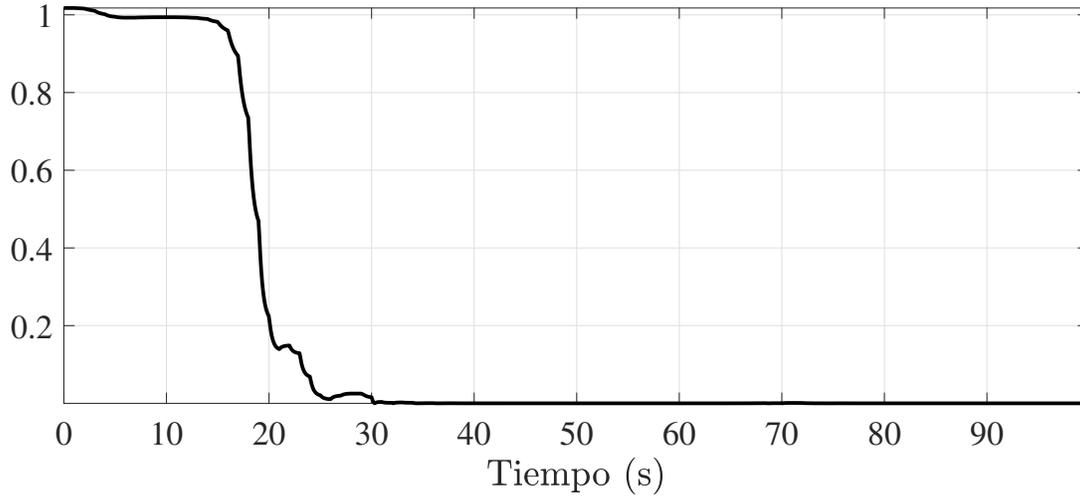


Fig. 3.10. Norma del error de observación $\|\tilde{x}(t)\|$ con $\Delta_{\text{máx}} = 1\text{s}$

3.4.1. Comparación con diferentes periodos de muestreo

En esta sección se evaluará el comportamiento del error de observación ante diferentes valores en el periodo de muestreo. Se procede a comparar el observador previamente diseñado pero considerando diferentes periodos de muestreo en la señal de salida del sistema $\Delta_{\text{máx}_1} = 0.01\text{s}$, $\Delta_{\text{máx}_2} = 0.5\text{s}$ y $\Delta_{\text{máx}_3} = 1.5\text{s}$. En todos los casos, el observador tiene el parámetro de ajuste $\theta = 1.25$ y las siguientes condiciones iniciales:

$$\hat{x}(0) = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3]^T = [0.12 \quad 0.0566 \quad 0.9917]^T$$

$$S(0) = I_{3 \times 3}.$$

En las Figuras 3.11 y 3.12 se muestra la estimación de los parámetros inciertos α y γ , respectivamente, ante diferentes periodos de muestreo. Se observa que ante los periodos de muestreo ($\Delta_{\text{máx}_1}, \Delta_{\text{máx}_2}$) la convergencia a los valores reales es rápida a diferencia del muestreo ($\Delta_{\text{máx}_3}$), sin embargo, en todos los casos se logra la convergencia.

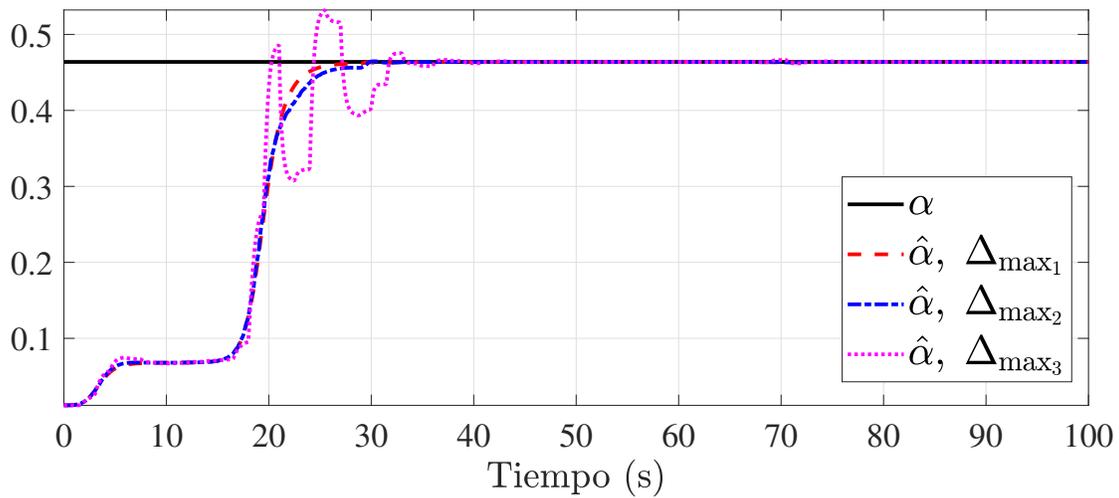


Fig. 3.11. Estimación del parámetro α ante diferentes periodos de muestreo

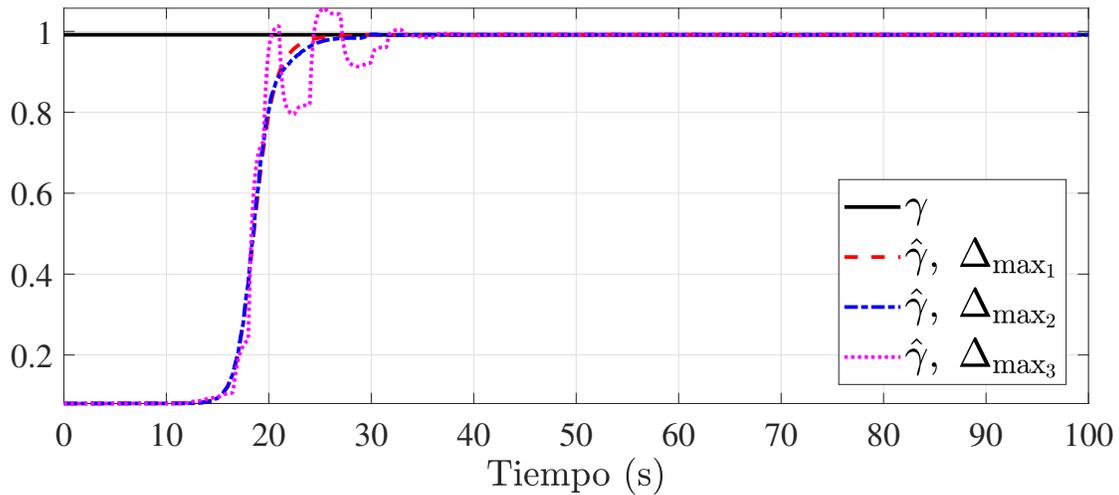


Fig. 3.12. Estimación del parámetro γ ante diferentes periodos de muestreo

En la Figura 3.13 se muestra la norma del error $\|\tilde{x}(t)\|$ para cada observador. Se observa que el observador que es alimentado con la señal adquirida en un periodo de muestreo (Δ_{\max_1}) converge a cero en un tiempo menor, aproximadamente a los 25 segundos, a diferencia del observador con el periodo de muestreo (Δ_{\max_3}) el cual le toma aproximadamente 40 segundos en converger.

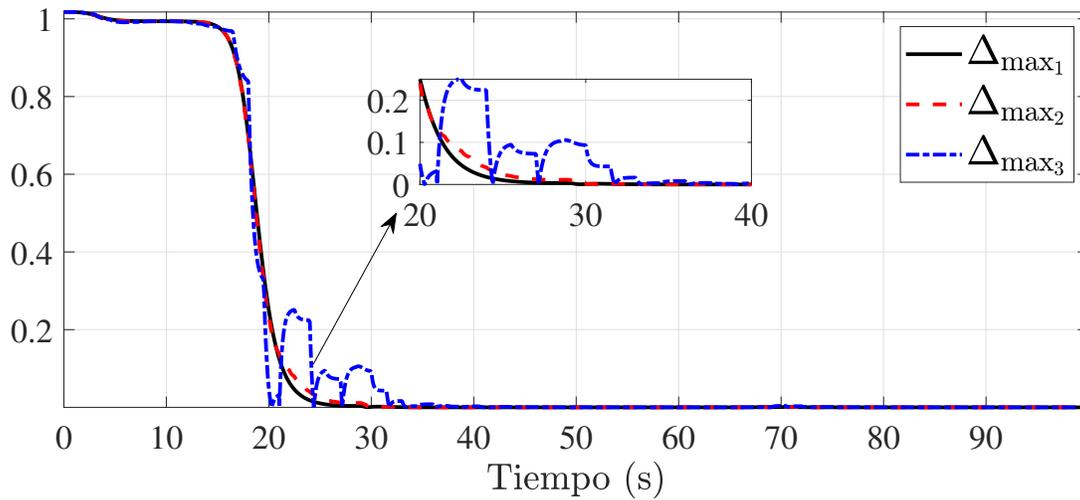


Fig. 3.13. Norma del error de observación $\|\tilde{x}(t)\|$ ante diferentes periodos de muestreo

Conclusión. Se demostró que utilizando el cambio de coordenadas pertinente y aprovechando la propiedad de los sistemas no uniformemente observables, es posible estimar el vector de estado de forma continua para un sistema, en el cual la salida sólo está disponible en instantes de tiempo. Esto se logra por medio de un observador para salidas muestreadas. En dicho vector de estado existen parámetros desconocidos que aproximan el coeficiente de fricción en una tubería. De igual forma, se demostró que el periodo de muestreo va asociado a la velocidad de convergencia del observador como lo plantea el Teorema 3.3.1. Para periodos de muestreo cercanos a cero, se obtiene una convergencia rápida del error de estimación a cero, a diferencia que con periodos de muestreo alejados de cero. Sin embargo, en todos los casos se logra la convergencia del error de estimación a cero.

3.5. Simulación 3. Estimación del coeficiente de fricción utilizando un observador continuo considerando un escenario real

Objetivo. Demostrar que el observador continuo no es capaz de estimar el vector de estado en presencia de señales muestreadas, lo que representa un escenario real, a diferencia del observador para salidas muestreadas.

En esta simulación se considera la comparativa de dos observadores, uno para salidas continua y otro para salidas muestreadas. Se considera el sistema mostrado en (3.62) con los parámetros mostrados en la Tabla 3.2, el cual se describe detalladamente en la simulación pasada. La simulación se realiza en el software de MATLAB 2018b, usando la función ODE23 considerando un tiempo de simulación de 100s y un paso de integración $h = 0.001s$.

En un escenario real las salidas son adquiridas en instantes de tiempo debido a la instrumentación, lo que debería considerarse en el diseño de los algoritmos de estimación, ya que de no ser así se presentan problemas en la estimación como se muestra a continuación. En esta simulación se considera el diseño de dos observadores a partir del sistema mostrado en (3.62): (i) uno en donde se omite la naturaleza de la salida, por lo tanto se toma como continua, por lo que el observador queda de la forma (3.9) y (ii) otro en donde se considera la naturaleza de la señal de salida (muestreada) de la forma (3.29). La notación para diferenciar las señales de cada observador serán las siguientes, para el observador que considera la salida continua será $(\cdot)_C$ y para el que considera la salida muestreada será $(\cdot)_{CD}$. Se considera que la señal de salida del sistema (3.62) es adquirida en instantes de tiempo $\Delta_{\text{máx}} = 0.5s$ y sus condiciones iniciales son:

$$x(0) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [0.12 \quad 0.0566 \quad 0.9917]^T.$$

Ambos observadores tienen el mismo valor de $\theta = 1.25$, la matriz Δ_θ queda de la siguiente forma:

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta^2} \end{bmatrix}$$

3.5. SIMULACIÓN 3. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN UTILIZANDO UN OBSERVADOR CONTINUO CONSIDERANDO UN ESCENARIO REAL

y las condiciones iniciales para ambos observadores $((\cdot)_C$ y $(\cdot)_{CD}$) son:

$$\hat{x}(0) = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3]^T = [0.12 \quad 0.0566 \quad 0.9917]^T$$

$$S(0) = I_{3 \times 3}.$$

En la Figura 3.14 se muestra como es vista la señal muestreada por el observador continuo. Esta forma es debido a que el observador considera que la muestra está presente durante todo el periodo de muestreo hasta el siguiente muestreo. Esto se puede hacer considerando que el valor de la muestra se mantiene por medio de un retenedor el cual va incluido en muchos transmisores, el considerar esto provoca que el observador no logre la convergencia.

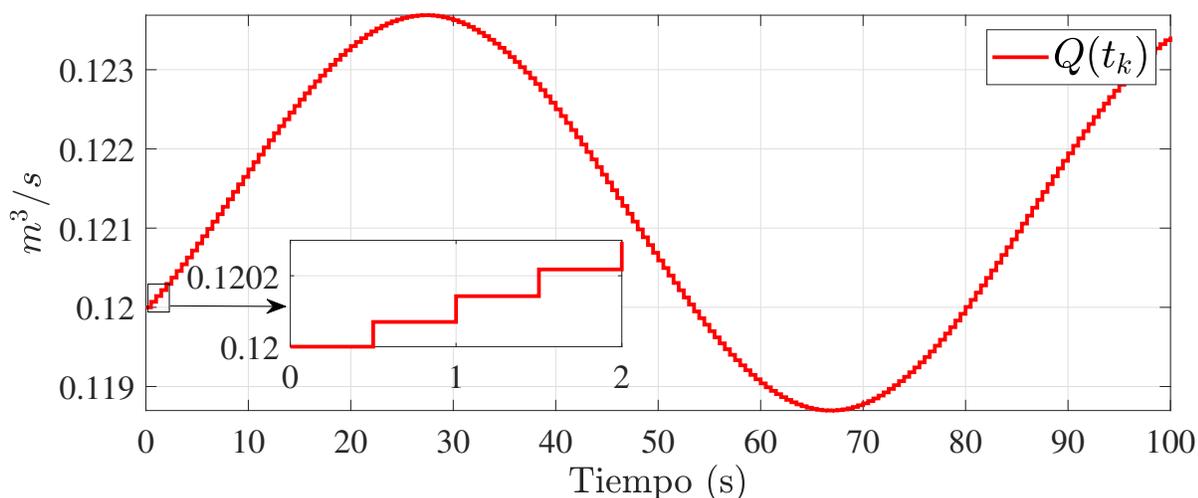


Fig. 3.14. Señal muestreada vista por el observador para salidas continuas

En las Figuras 3.15 y 3.16 se muestra la estimación de los parámetros inciertos α y γ respectivamente con ambos observadores. Es evidente el efecto que tiene el no considerar la naturaleza de la señal en la estimación por parte del observador para salidas continuas, ya que no se logra la convergencia a los valores reales de estos parámetros, a diferencia del observador para salidas muestreadas, el cual sí logra su convergencia. En la Figura 3.17 se muestra la comparación entre la norma del error de observación, considerando el observador para salidas continuas y para salidas muestreadas denotadas por $\|\tilde{x}(t)\|_C$ y $\|\tilde{x}(t)\|_{CD}$, respectivamente. En esta figura se muestra claramente que el observador para salidas continuas no es capaz de estimar el vector de estados o bien no es capaz de converger a una región, ya que siempre se mantiene oscilando. En cuanto

3.5. SIMULACIÓN 3. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN UTILIZANDO UN OBSERVADOR CONTINUO CONSIDERANDO UN ESCENARIO REAL

al observador para salidas muestreadas este sí logra que la norma del error de observación tienda a cero, lo que nos dice que el vector de estados es estimado correctamente. Esto se debe, a que en el diseño de este observador se considera que la señal de salida del sistema solo está disponible en instantes de tiempo. Para poder implementar el observador para salidas continuas es necesario contar con tarjetas de adquisición de datos con altas prestaciones, que permitan que la adquisición de la señal de salida sea en intervalos de tiempos cortos, lo que asemejaría una señal continua. Sin embargo, esto implica que se eleven los costos para la instrumentación y que el gasto computacional sea mayor.

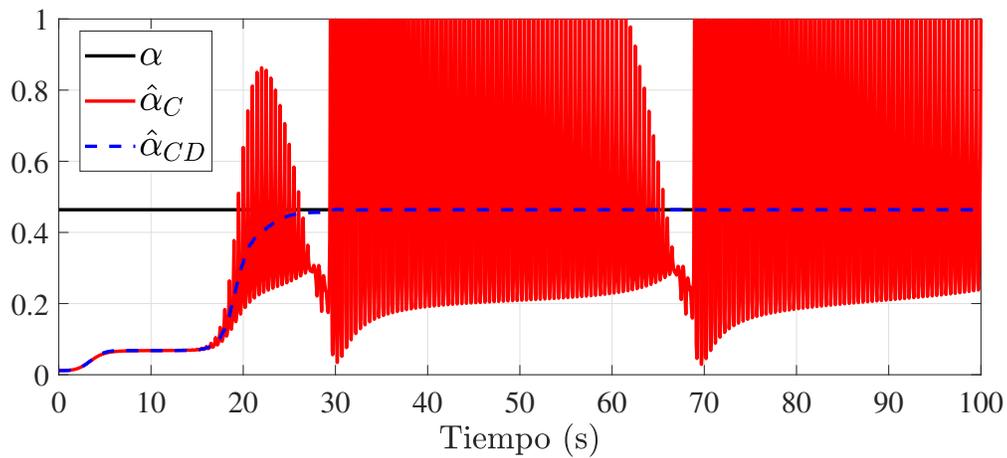


Fig. 3.15. Estimación del parámetro α con ambos observadores (salidas continuas y muestreadas)

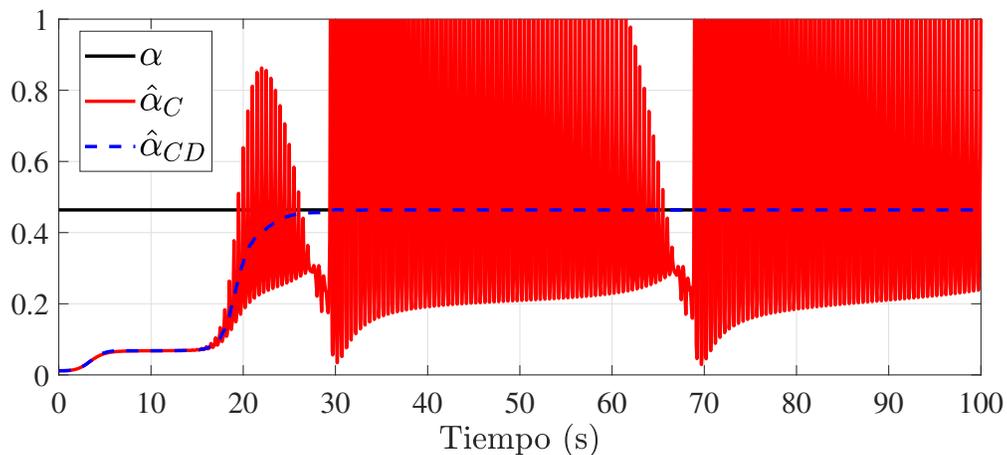


Fig. 3.16. Estimación del parámetro γ con ambos observadores (salidas continuas y muestreadas)

3.5. SIMULACIÓN 3. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN UTILIZANDO UN OBSERVADOR CONTINUO CONSIDERANDO UN ESCENARIO REAL

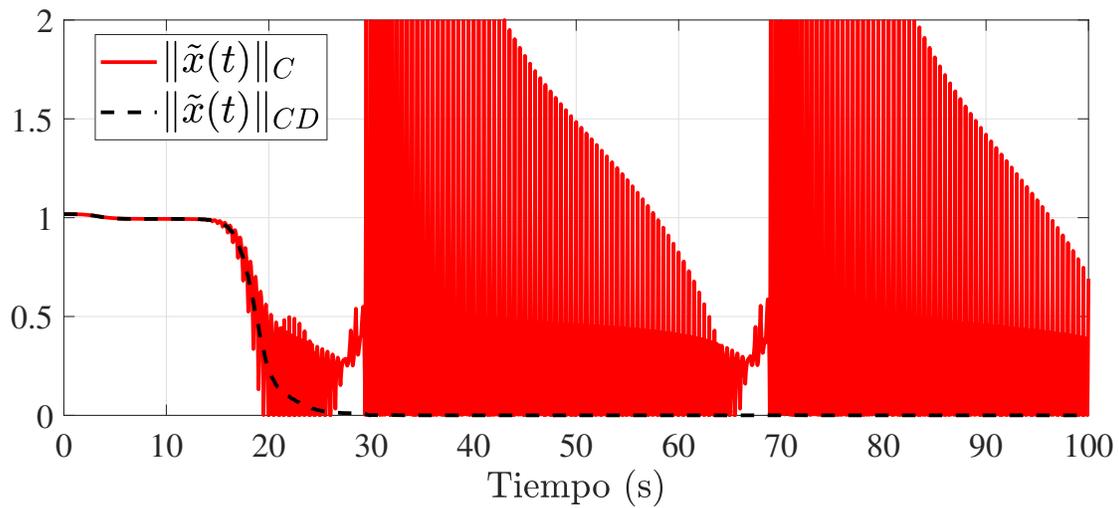


Fig. 3.17. Norma del error de observación con ambos observadores (salidas continuas y muestreadas)

Conclusión. Se demostró que en presencia de salidas adquiridas en instantes de tiempo, el observador para salidas medidas continuas no logra converger. Por lo tanto, no es una alternativa para su implementación física, a menos, que se tenga un hardware con prestaciones altas que permitan tiempos de adquisición de datos lo suficientemente cortos, para asemejarse lo más posible a una señal continua. Con esto, se muestra una ventaja del observador para salidas muestreadas, ya que este tipo de observador logra converger y permite la implementación física con prestaciones de hardware menos exigentes.

3.6. Observador para sistemas lineales inciertos con salidas muestreadas

Considere el siguiente sistema MIMO lineal incierto:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t), \\ y(t_k) = Cx(t_k) = x^1(t_k). \end{cases} \quad (3.64)$$

con:

$$D = \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n_q} \\ \vdots \\ 0_{n_{q-1} \times n_q} \\ I_{n_q} \end{bmatrix} \quad C = [I_{n_1 \times n_1} \quad 0_{n_1 \times n_2} \quad \dots \quad 0_{n_1 \times n_q}]$$

donde el estado $x(t) = (x^1, x^2, \dots, x^q)^T \in \mathbb{R}^n$, $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $k = 1, \dots, q$ con $n_1 = p$ y $\sum_{i=1}^q n_k = n$; $u \in \mathbb{R}^s$ es la entrada del sistema; $d(t)$ es una función que describe las incertidumbres del sistema y puede depender del tiempo, los estados y los parámetros, $d(t) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^p$. Las matrices A y B son matrices constantes de dimensiones apropiadas y el par (A, C) se asume como observable. La salida del sistema $y(t_k) \in \mathbb{R}^p$ es adquirida en instantes de tiempo. Además, $0 \leq t_0 < \dots < t_k < \dots$, $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$ y $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ y existe $0 < \Delta_m \leq \Delta_{\bar{M}} < +\infty$ lo que corresponde a

$$0 < \Delta_m \leq \Delta_k = t_{k+1} - t_k \leq \Delta_{\bar{M}}, \quad \forall k \geq 0.$$

Para diseñar un observador para el sistema (3.64) es necesario considerar la siguiente suposición:

A 3.6.1. *La función desconocida $d(t)$ está esencialmente acotada, es decir,*

$$\exists \delta_d > 0 \quad \sup_{t \geq 0} \|d(t)\| \leq \delta_d \quad (3.65)$$

3.6.1. Diseño del observador para sistemas lineales con salidas muestreadas

A continuación se presenta el desarrollo del observador para la estimación del vector de estado para el sistema (3.64). Sus ecuaciones son las siguientes:

$$\mathcal{OBS} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\eta(t) \\ \dot{\eta}(t) = -CL\eta(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), k \in N \\ \eta(t_k) = Cx(t_k) - C\hat{x}(t_k), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.66)$$

donde $\hat{x} = [\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q]^T$ es el vector de estados estimado y L es la ganancia del observador. Considerando esto se propone el siguiente teorema, el cual es la tercera aportación de este trabajo de tesis.

Teorema 3.6.1. *Considerando el sistema (3.64), en el cual la función desconocida satisface la suposición A3.6.1. Entonces, existe una matriz positiva definida P , una matriz R de dimensiones apropiadas y una matriz Q positiva tal que la siguiente LMI se satisfaga:*

$$A^T P + PA - C^T R - R^T C \leq -2Q \quad (3.67)$$

donde la ganancia del observador es:

$$L = P^{-1} R^T \quad (3.68)$$

y si la cota máxima del diámetro de partición de la muestra $\Delta_{\bar{M}}$ es tal que:

$$\Delta_{\bar{M}} < \chi_{\theta_L} \quad (3.69)$$

entonces, el estado del observador (3.66) convergerá exponencialmente a una región acotada, la cual estará dada por la cota de la incertidumbre en el sistema δ_d , y de la funciones $N_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})$ y $\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})$, definidas como:

$$N_{\theta_L}(\Delta_m, \Delta_{\bar{M}}) = 2\sigma\Delta_{\bar{M}} \frac{2 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}} \quad (3.70)$$

$$\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}}) = (a_{\theta_L} - b_{\theta_L}\Delta_{\bar{M}})e^{-a_{\theta_L}\Delta_{\bar{M}}} \quad (3.71)$$

3.6.2. Demostración del Teorema 3.6.1

En esta sección se demuestra que el error de observación convergerá a una región cerca del origen. Se define el error de observación como $\tilde{x} = x - \hat{x}$, considerando (3.64) y (3.66), se tiene:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Dd(t) - L\eta(t) \quad (3.72)$$

Ahora bien, partiendo de $\dot{\eta}(t)$ en (3.66), se obtiene:

$$\eta(t) = C\tilde{x}(t_k)e^{-CL(t-t_k)} \quad (3.73)$$

Definiendo la variable auxiliar $z(t)$:

$$z(t) = C\tilde{x}(t) - \eta(t) = C\tilde{x}(t) - C\tilde{x}(t_k)e^{-CL(t-t_k)} \quad (3.74)$$

Sustituyendo (3.74) en (3.72) se obtiene:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) + Dd(t) + Lz(t) \quad (3.75)$$

Para demostrar la estabilidad del observador se propone la siguiente función candidata de Lyapunov $V(\tilde{x}, t) = \tilde{x}^T(t)P\tilde{x}(t)$. Derivando esta función con respecto al tiempo (t), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}(t), t) &= 2\tilde{x}^T(t)P\dot{\tilde{x}}(t) \\ &= 2\tilde{x}^T(t)P[(A - LC)\tilde{x}(t) + Dd(t) + Lz(t)] \\ &= 2\tilde{x}^T(t)P(A - LC)\tilde{x}(t) + 2\tilde{x}^T(t)PDd(t) + 2\tilde{x}^T(t)PLz(t). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Es importante resaltar que $A - LC$ es Hurwitz tal que existe una matriz P de $n \times n$ simétrica definida positiva (SDP) y $\mu = \|Q\|$, tal que:

$$A^T P + PA - C^T R - R^T C \leq -2\mu \quad (3.77)$$

donde la ganancia del observador L es:

$$L = P^{-1}R^T \quad (3.78)$$

Posteriormente se analiza la función auxiliar $z(t)$ dada por (3.74) y derivando con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= C\dot{\tilde{x}}(t) + CLC\tilde{x}(t)e^{-CL(t-t_k)} \\ &= C[(A - LC)\tilde{x}(t) + Dd(t) + Lz(t)] + CLC\tilde{x}(t_k)e^{CL(t-t_k)} \\ &= CA_o\tilde{x}(t) + CDd(t) \\ &= CA_o\tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (3.79)$$

donde $A_o = A - LC$. La integral de t_k a t y del hecho que $z(t_k) = 0$, quedaría de la siguiente forma:

$$z(t) = \int_{t_k}^t CA_o\tilde{x}(s)ds. \quad (3.80)$$

Obteniendo la norma de $z(t)$ y considerando que la función incierta $d(t)$ satisface la suposición

A3.6.1:

$$\begin{aligned}
 \|z(t)\| &\leq \|C\| \int_{t_k}^t \|A_o\| \tilde{x}(s) ds \\
 &\leq \frac{\|A_o\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \\
 \|z(t)\| &\leq \frac{\|A_o\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \tag{3.81}
 \end{aligned}$$

Procediendo como en (Bouraoui et~al., 2015), ahora se obtiene la norma de cada término que está presente en (3.76). Considerando (3.77) y (3.81), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \|2\tilde{x}^T(t)PLz(t)\| &\leq 2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\sqrt{V(\tilde{x}(t), t)}\|L\| \left(\frac{\|A_o\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \right) \\
 &\leq 2\|L\| \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|A_o\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \right) \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)}, \tag{3.82}
 \end{aligned}$$

$$\|2\tilde{x}^T(t)PA_o\tilde{x}(t)\| \leq -2\mu V(\tilde{x}(t), t), \tag{3.83}$$

$$\|2\tilde{x}^T(t)PDd(t)\| \leq 2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\delta_d\sqrt{V(\tilde{x}(t), t)}. \tag{3.84}$$

donde $\|D\| = 1$ debido a la estructura de la matriz D . Sustituyendo (3.82), (3.83) y (3.84) en (3.76) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\tilde{x}(t), t) &\leq -2\mu V(\tilde{x}(t), t) + 2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\delta_d\sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} \\
 &\quad + 2\|L\| \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|A_o\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \right) \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} \tag{3.85}
 \end{aligned}$$

Reescribiendo lo anterior y dividiendo ambas partes entre $\sqrt{V(\tilde{x}(t), t)}$, queda como a continuación:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} &\leq -2\mu\sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} + 2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\delta_d + 2\|L\|\|A_o\|\sigma \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \\
 &\leq -2\mu\sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} + 2\sigma\|L\|\|A_o\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds + 2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\delta_d \tag{3.86}
 \end{aligned}$$

con:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}.$$

Agrupando:

$$a_{\theta_L} = 2\mu, \quad (3.87)$$

$$b_{\theta_L} = 2\sigma\|L\|\|A_o\|, \quad (3.88)$$

$$c_{\theta_L} = 2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\delta_d \quad (3.89)$$

Sustituyendo (3.87), (3.88) y (3.89) en (3.86) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} \leq -a_{\theta_L}\sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} + b_{\theta_L}\int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)}ds + c_{\theta_L} \quad (3.90)$$

Es importante resaltar que de acuerdo al Teorema 3.6.1, el valor máximo del diámetro de muestreo $\Delta_{\bar{M}}$ satisface la siguiente condición:

$$\Delta_{\bar{M}} < \frac{a_{\theta_L}}{b_{\theta_L}} = \frac{\mu}{\sigma\|L\|\|A_o\|} \triangleq \chi_{\theta_L} \quad (3.91)$$

Aplicando el Lema 2.1 propuesto en (Bouraoui et al., 2015), con $a_\mu = a_{\theta_L}$, $b_\mu = b_{\theta_L}$, $c_\mu = c_{\theta_L}$, resulta:

$$\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}}) = (a_{\theta_L} - b_{\theta_L}\Delta_{\bar{M}})e^{a_{\theta_L}\Delta_{\bar{M}}} \quad (3.92)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} \leq e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})t}\sqrt{V(\tilde{x}(0))} + c_{\theta_L}\Delta_{\bar{M}}\frac{2 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}} \quad (3.93)$$

Regresando a términos del error de observación $\tilde{x}(t)$:

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \sigma e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})t}\|\tilde{x}(0)\| + \frac{c_{\theta_L}\Delta_{\bar{M}}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\frac{2 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}} \quad (3.94)$$

Sustituyendo (3.89), lo anterior queda:

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \sigma e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})t}\|\tilde{x}(0)\| + 2\Delta_{\bar{M}}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\delta_d\frac{2 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}} \quad (3.95)$$

$$\leq \sigma e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})t}\|\tilde{x}(0)\| + N_{\theta_L}(\Delta_m, \Delta_{\bar{M}})\delta_d \quad (3.96)$$

con:

$$N_{\theta_L}(\Delta_m, \Delta_{\bar{M}}) = 2\sigma\Delta_{\bar{M}}\frac{2 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}} \quad (3.97)$$

De este análisis, es claro que el observador convergerá a un valor acotado que depende de las incertidumbres δ_d y de la cota del tiempo de muestreo $\Delta_{\bar{M}}$ dado que este se encuentra en (3.92) y en (3.97). Con esto se concluye la demostración del Teorema 3.6.1. ■

3.7. Simulación 4. Aplicación a un modelo estructural tipo edificio

Objetivo. Demostrar que es posible estimar el vector de estado de forma continua con una medición muestreada de la salida del sistema. De igual forma, demostrar que el error convergerá a una región acotada en presencia de incertidumbres y a cero en ausencia de ellas y que la tasa de convergencia está dada por el periodo de muestreo de la señal de salida.

En esta simulación se considera el diseño de un observador para estimar el vector de estados de un sistema lineal en el cual la salida solo está disponible en instantes de tiempo. Se considera el modelo que describe un modelo estructural de dos pisos mostrado en (3.98) propuesto en (Rodríguez-Torres et al., 2020), ver Anexo B. La simulación se realiza en el software de MATLAB 2018b, utilizando el método de numérico de Euler para la solución de las ecuaciones diferenciales y considerando un tiempo de simulación total de 100s y un paso de integración $h = 0.0005s$.

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_s \end{bmatrix} z(t) - \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ l_{2 \times 1} \end{bmatrix} \ddot{x}_g(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.98)$$

donde $z \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, con $n = 4$. Los primeros dos estados representan los desplazamientos y los últimos dos estados las velocidades con respecto a las posiciones iniciales. La señal sísmica se representa como \ddot{x}_g . Las matrices M , C_s y K son respectivamente la masa, la constante de amortiguamiento y la constante de resorte, las cuales están definidas como:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Los parámetros del sistema se muestran a continuación:

3.7. SIMULACIÓN 4. APLICACIÓN A UN MODELO ESTRUCTURAL TIPO EDIFICIO

Constante	Valor	Unidades
m_1	3.17	[kg]
k_1	9199.834	[N/m]
c_1	7.388	[Ns/m]
m_2	4.609	[kg]
k_2	7531.628	[N/m]
c_2	6.834	[Ns/m]

Tabla 3.3. Parámetros del edificio

Considerando lo anterior, se consideran dos casos: en el primer caso la señal sísmica se considera como una entrada conocida y en el segundo caso se considera como un disturbio. La señal sísmica se muestra en la Figura 3.18 y es el componente norte-sur del sismo ocurrido en la ciudad de México en 1985. Estos datos fueron tomados de los datos históricos de la Secretaria de Comunicaciones y Transportes (SCT) y fueron reescalados para los parámetros del sistema mostrado en (3.102). Se observa que durante los primeros segundos la aceleración provocada por el sismo es cero, lo que indica un nulo movimiento. Posteriormente, se incrementan las oscilaciones durante un periodo de tiempo y al final vuelven a valores cercanos a cero, lo que significa que el sismo terminó.

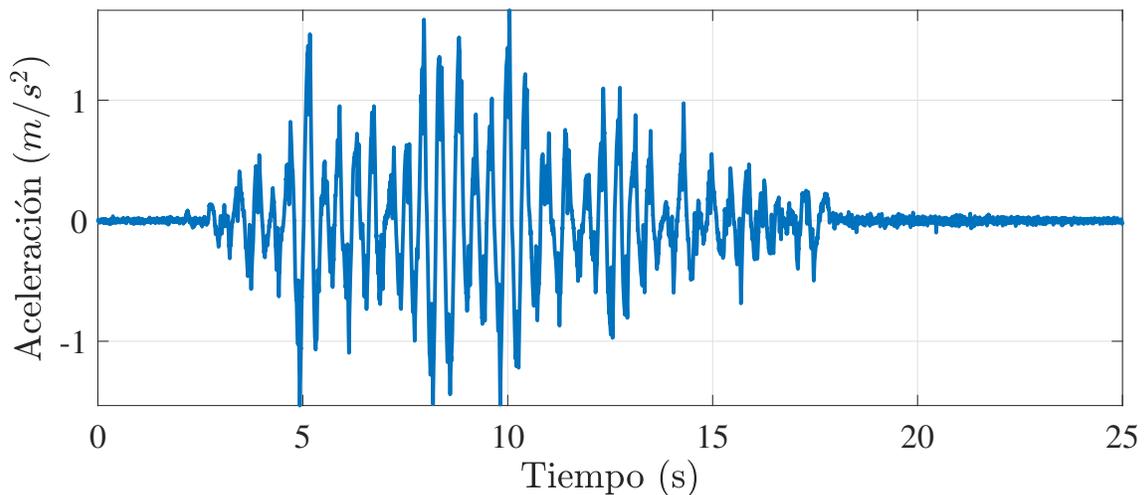


Fig. 3.18. Señal sísmica

3.7.1. Caso 1. Señal sísmica como entrada conocida

Para esta simulación se considera el siguiente modelo, en donde se considera que la señal sísmica es conocida por el sistema.

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & I_{p \times p} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_s \end{bmatrix} x(t) + Bu(t) \\ y(t_k) = Cx(t_k) = x^1(t_k) \end{cases} \quad (3.102)$$

donde el vector de estado es $x = [x^{(1)} \quad x^{(2)}]^T \in \mathbb{R}^n$ con $n = 4$, donde el primer estado representa los desplazamientos de los pisos $x^{(1)} = [z_1 \quad z_2] \in \mathbb{R}^p$, con $p = 2$ y el segundo estado está conformado por las velocidades respecto a la posición inicial $x^{(2)} = [z_3 \quad z_4] \in \mathbb{R}^p$. Se considera que las salidas del sistema son las posiciones de cada piso, $y(t_k) \in \mathbb{R}^p$. Estas salidas son adquiridas en instantes de tiempo. La matrices B y C son:

$$B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ I_{2 \times 1} \end{bmatrix}, \quad C = [I_{2 \times 2} \quad 0_{2 \times 2}]$$

Las matrices M, K y C_s fueron previamente definidas.

Se desea diseñar un observador de la forma (3.66) para el sistema mostrado en (3.102). En esta simulación, las condiciones iniciales del sistema son:

$$x(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Se considera que la salida del sistema es adquirida en un periodo de muestreo $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$. Las condiciones iniciales del observador son:

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= [0.001 \quad 0.001 \quad 0.05 \quad 0.05]^T, \\ \eta(0) &= [0 \quad 0]^T \end{aligned}$$

La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en el Teorema 3.6.1. Con el Toolbox YALMIP de MATLAB, se obtiene:

$$\begin{aligned} P &= 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} 4.1635 & -0.1381 & -0.1141 & -0.1619 \\ -0.1381 & 2.8026 & 0.0115 & 0.0521 \\ -0.1141 & 0.0115 & 0.3112 & 0.1380 \\ -0.1619 & 0.0521 & 0.1380 & 0.4524 \end{bmatrix} \\ R &= 1 \times 10^6 \begin{bmatrix} 0.3392 & 0.0000 & -1.4123 & 0.0105 \\ 0.0181 & -0.0566 & 0.5136 & -0.4085 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.7. SIMULACIÓN 4. APLICACIÓN A UN MODELO ESTRUCTURAL TIPO EDIFICIO

Despejando la ganancia del observador L se obtiene:

$$L = P^{-1}R^T = 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} 0.0003 & 0.0062 \\ -0.0088 & 0.0006 \\ -5.2615 & 2.3739 \\ 1.6299 & -1.6252 \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

En las Figuras 3.19 y 3.20 se muestra una comparación entre las señales de los desplazamientos del primer y segundo piso de forma ideal (continua) y de forma real (muestreada), las cuales son recibidas por el observador. Se muestra que los desplazamientos en ambos pisos ($x^{(1)}$) es nulo cuando no se presenta una aceleración por el sismo (Fig. 3.18), en los primeros 3 segundos aproximadamente. Una vez que el sismo inicia se observa un desplazamiento en ambos pisos y conforme el sismo va parando, después de los 18 segundos aproximadamente, las oscilaciones van cesando.

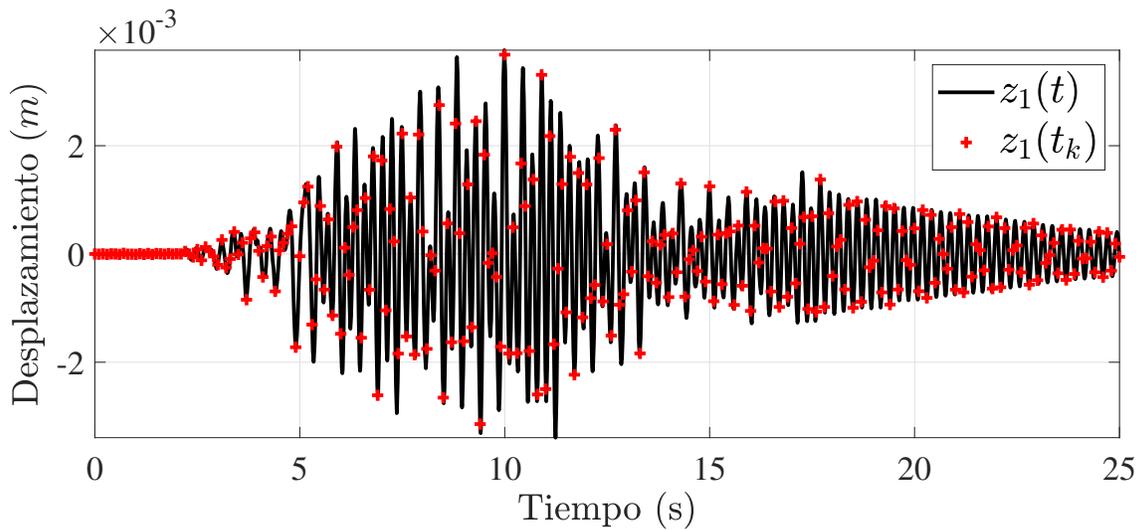


Fig. 3.19. Desplazamiento del primer piso de forma continua y muestreada con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$

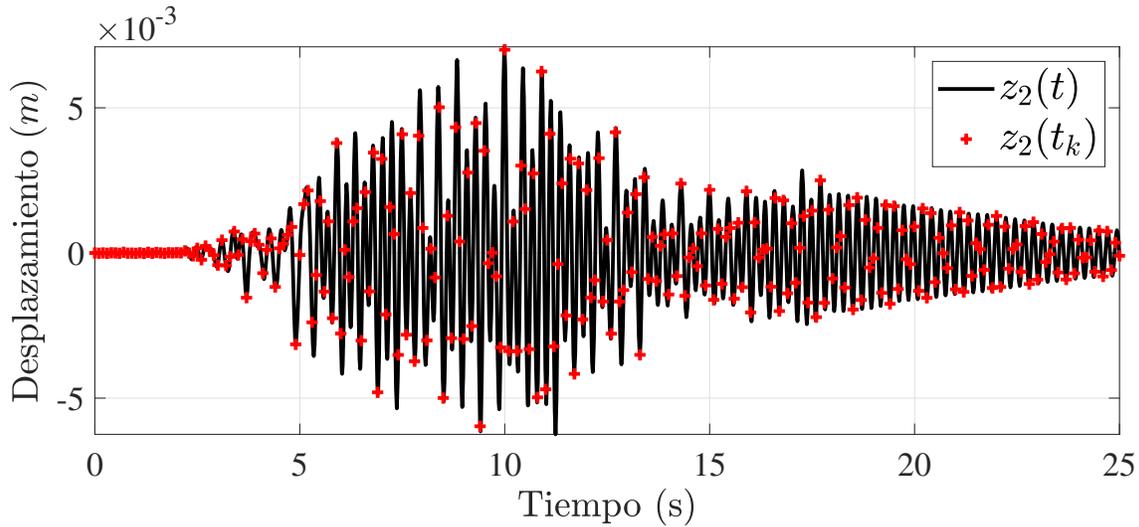


Fig. 3.20. Desplazamiento del segundo piso de forma continua y muestreada con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$

En las Figuras 3.21-3.24 se muestra la estimación de cada estado del sistema por medio del observador. En las Figuras 3.21 y 3.22 se muestra la estimación de forma continua de los desplazamientos del primer y segundo piso que son las salidas del sistema. Por otro lado, en las Figuras 3.23 y 3.24 se muestra la estimación de forma continua de las velocidades del desplazamiento en cada piso. Se muestra que en todos los casos el observador tarda unos segundos en converger debido al valor de muestreo de las señales de salida, sin embargo, logra converger al valor de los estados. De igual forma, se muestra que a pesar de que las salidas son muestreadas, el observador es capaz de estimar las señales de forma continua. En la Figura 3.25 se muestra la norma del error de observación definida como $\|\tilde{z}(t)\|$ con $\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$, donde $z(t)$ representa los estados del sistema original y \hat{z} los estados del observador. Se muestra que el error $\tilde{z}(t)$ converge a cero debido a que, en este caso, el sistema no presenta incertidumbre. De igual forma, se observa que debido al muestreo, el observador tarda aproximadamente 5s en estimar correctamente el vector de estado.

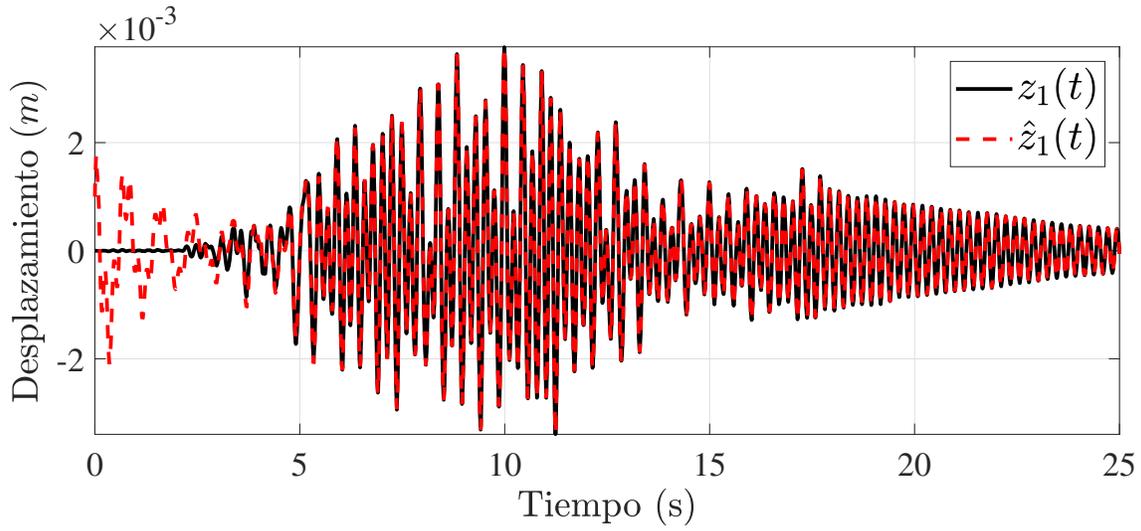


Fig. 3.21. Estimación del desplazamiento del primer piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$

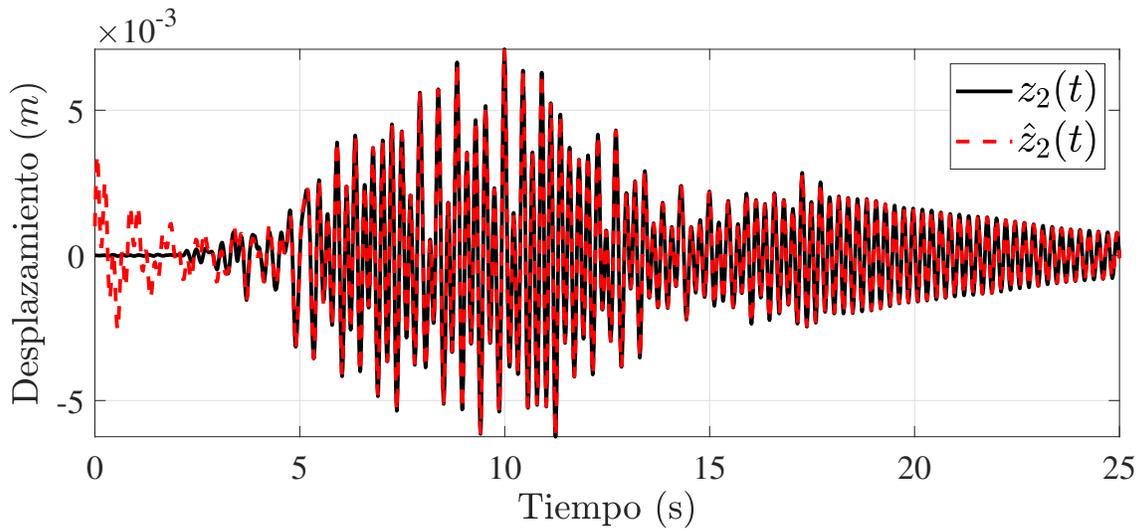


Fig. 3.22. Estimación del desplazamiento del segundo piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$

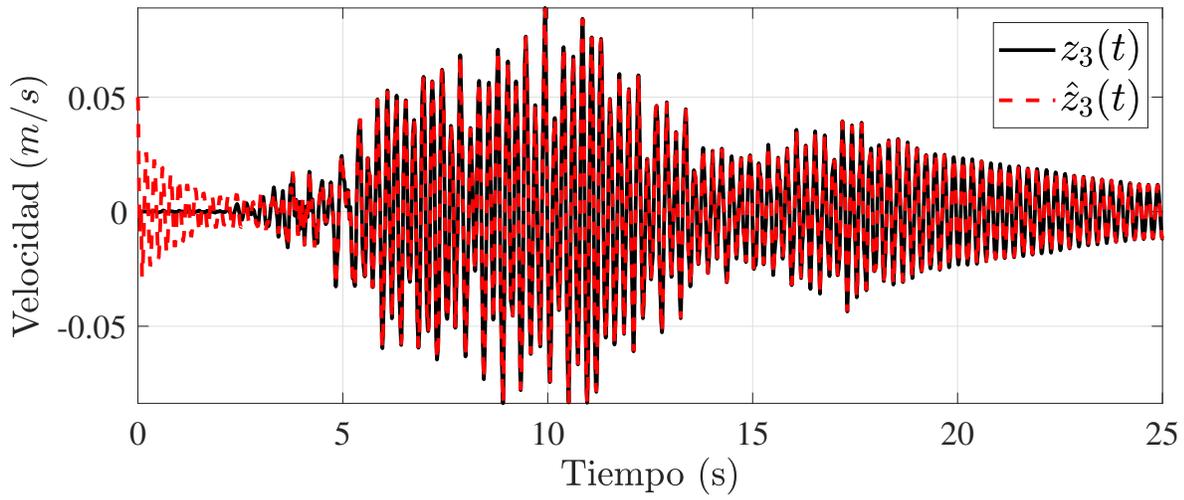


Fig. 3.23. Estimación de la velocidad del primer piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$

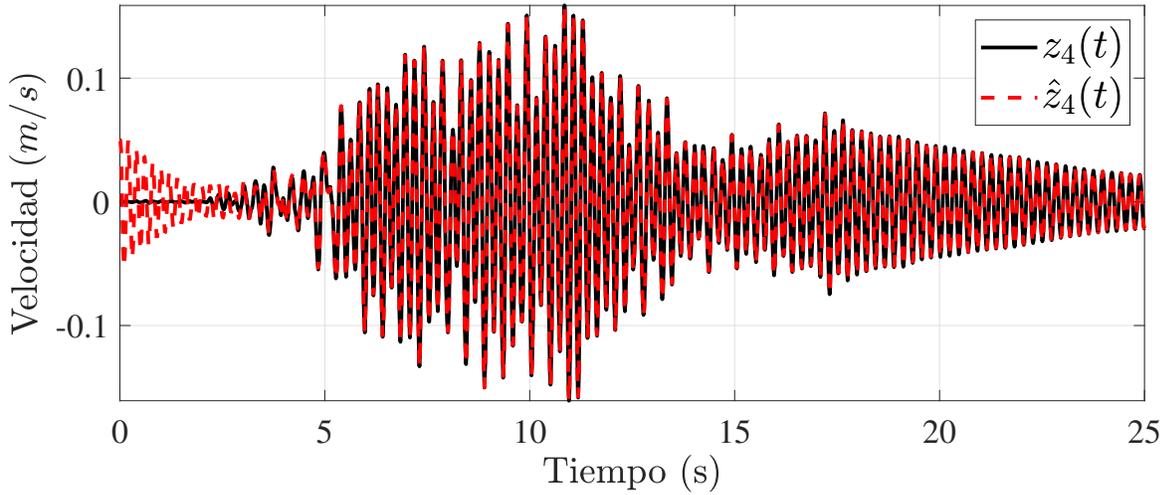
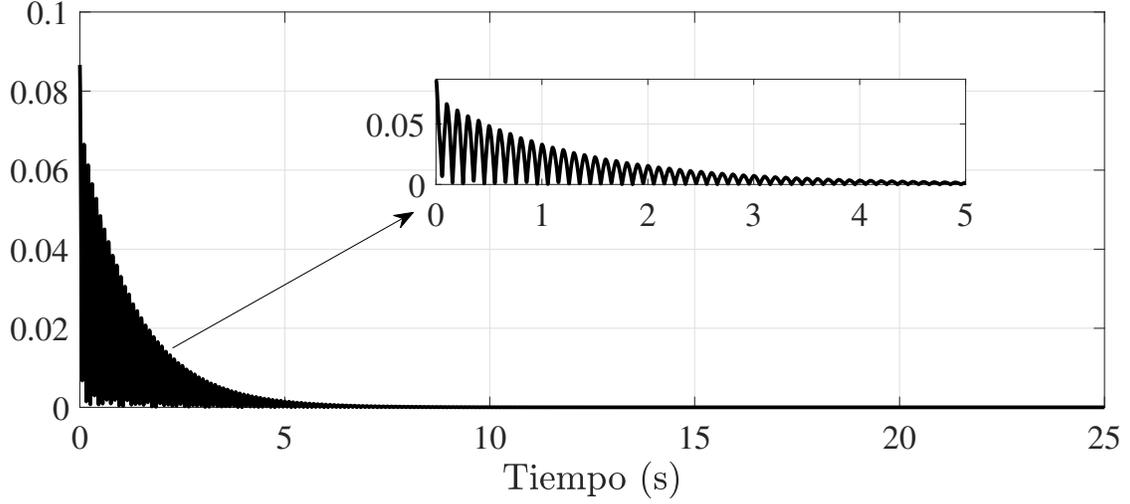


Fig. 3.24. Estimación de la velocidad del segundo piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$


 Fig. 3.25. Norma del error de observación $\|\tilde{z}(t)\|$ con $\Delta_{\bar{M}} = 0.1s$

3.7.2. Caso 2. Señal sísmica como incertidumbre

Para esta simulación se considera el siguiente modelo, en donde se considera que la señal sísmica es considerada como una incertidumbre para el sistema.

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & I_{p \times p} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_s \end{bmatrix} x(t) + Dd(t) \\ y(t_k) = Cx(t_k) = x^1(t_k) \end{cases} \quad (3.104)$$

donde el vector de estado es $x = [x^{(1)} \quad x^{(2)}]^T \in \mathbb{R}^n$ con $n = 4$. El primer estado representa los desplazamientos de los pisos $x^{(1)} = [z_1 \quad z_2] \in \mathbb{R}^p$, con $p = 2$, y el segundo estado está conformado por las velocidades respecto a la posición inicial $x^{(2)} = [z_3 \quad z_4] \in \mathbb{R}^p$. Se considera que como salidas del sistema son las posiciones de cada piso, estas salidas están solo disponibles en instantes de tiempo, $y(t_k) = x^1(t_k) \in \mathbb{R}^p$. En esta simulación, se considera que la incertidumbre es $d = [d \quad d]^T$, para respetar las dimensiones de las matrices. La incertidumbre es una señal acotada respetando la suposición **A 3.6.1**. En este caso, el sistema será autónomo debido a que no se tiene una entrada u . Las matrices C y D se definen como:

$$C = [I_{2 \times 2} \quad 0_{2 \times 2}], D = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

Las matrices M , K y C_s están previamente definidas.

3.7. SIMULACIÓN 4. APLICACIÓN A UN MODELO ESTRUCTURAL TIPO EDIFICIO

Se desea diseñar un observador de la forma (3.66) para el sistema mostrado en (3.102). En esta simulación, las condiciones iniciales del sistema son:

$$x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

y se considera que la salida del sistema es adquirida en un periodo de tiempo $\Delta_{\bar{M}} = 0.01$ s. Las condiciones iniciales del observador son:

$$\begin{aligned}\hat{x}(0) &= [0.001 \ 0.001 \ 0.05 \ 0.05]^T, \\ \eta(0) &= [0 \ 0]^T.\end{aligned}$$

La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en el Teorema 3.6.1 con el Toolbox YALMIP para MATLAB, con la cual se obtienen las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}P &= 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.3290 & 0.0054 & -0.0009 & 0.0000 \\ 0.0054 & 0.3381 & 0.0000 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0009 & -0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \\ R &= \begin{bmatrix} 0.0869 & -0.0010 & -0.0003 & 0.0001 \\ -0.0000 & 0.0858 & 0.0001 & -0.0001 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

Despejando la ganancia del observador L se obtiene:

$$L = P^{-1}R^T = 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} 0.2656 & 0.0076 \\ 0.0021 & 0.2731 \\ 0.5287 & 4.2597 \\ 3.3555 & 7.0439 \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

En las Figuras 3.26 - 3.29 se muestra la estimación de cada uno de los estados del sistema por medio del observador. Es importante observar que debido a la naturaleza de la señal sísmica (Fig. 3.18) se presentan dos tipos de convergencias: una a cero cuando la señal no está presente y una convergencia a una región acotada cuando la señal está presente. Se aprecia que debido a la incertidumbre en el sistema, no se logra una convergencia de los estados, a diferencia de lo mostrado en la simulación anterior .

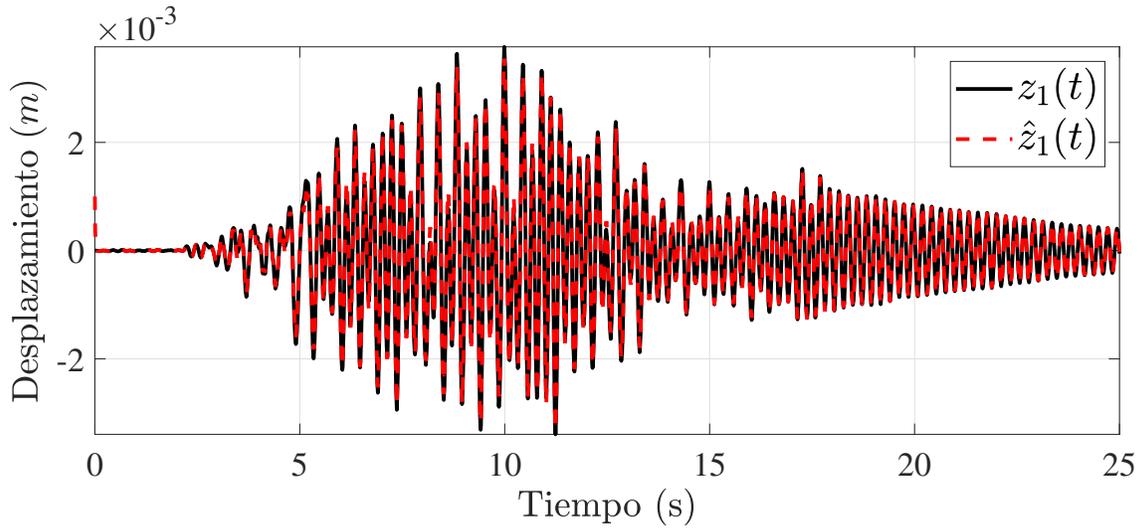


Fig. 3.26. Estimación del desplazamiento del primer piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.01$ s

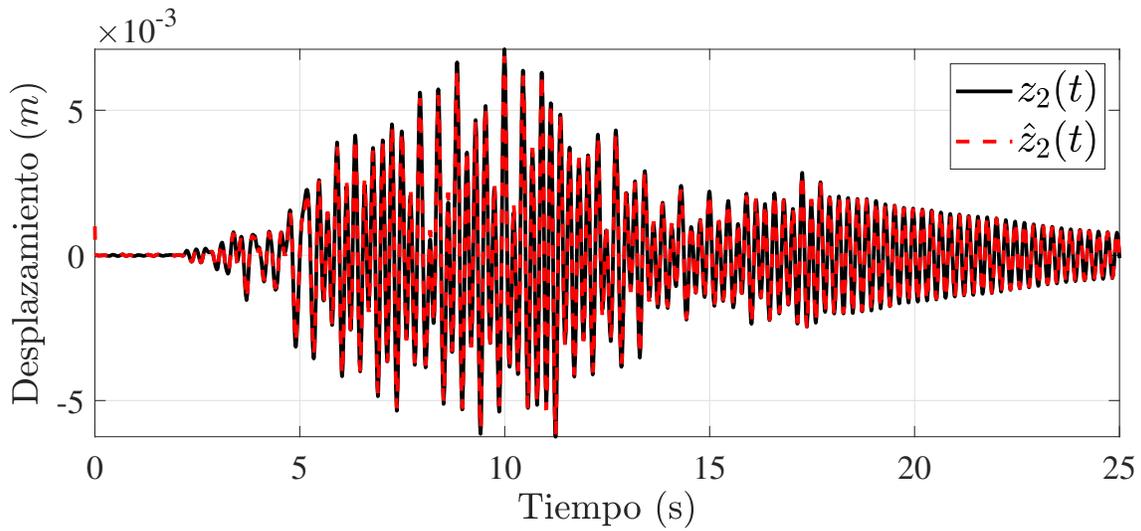


Fig. 3.27. Estimación del desplazamiento del segundo piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.01$ s

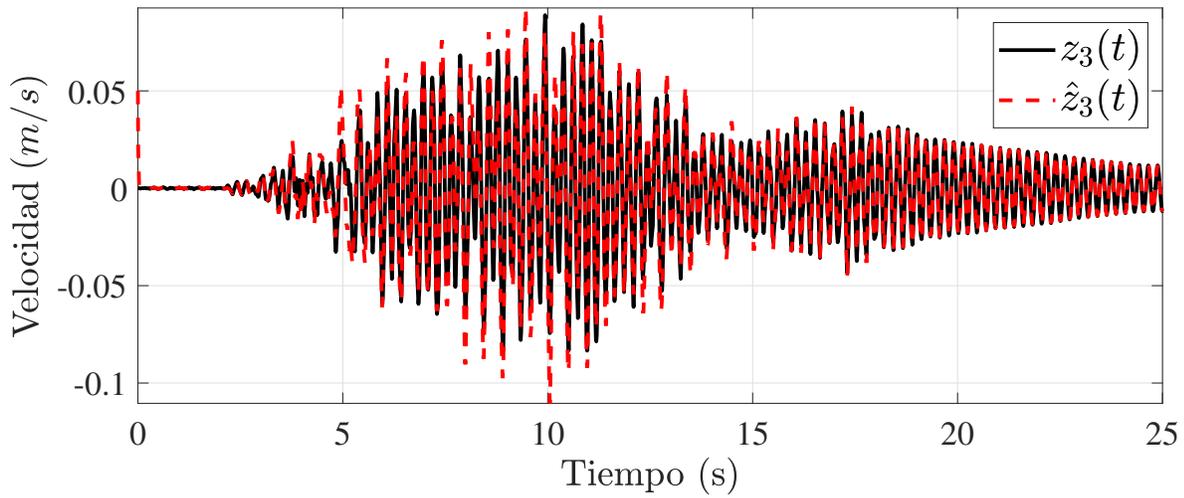


Fig. 3.28. Estimación de la velocidad del primer piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.01$ s

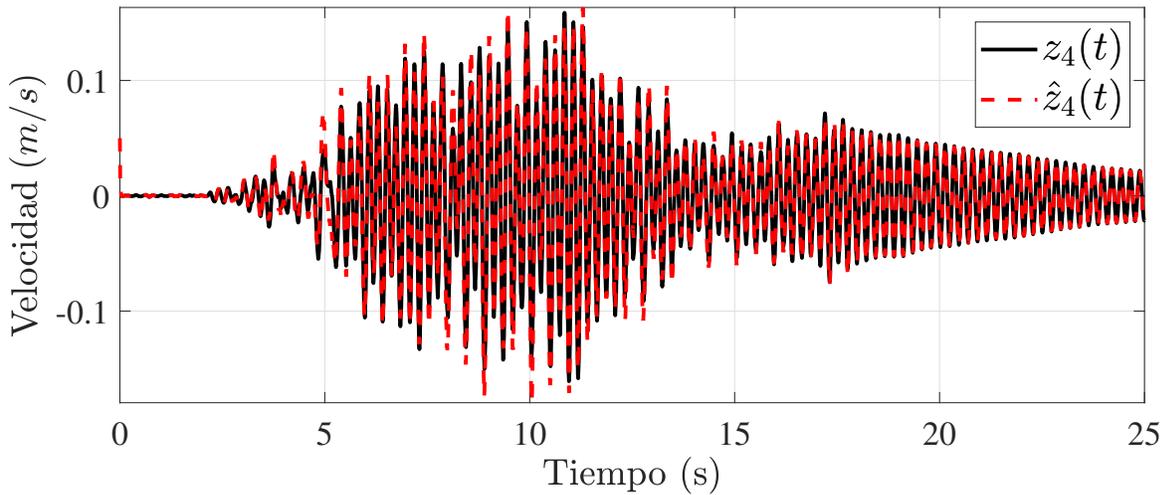


Fig. 3.29. Estimación de la velocidad del segundo piso de forma continua con $\Delta_{\bar{M}} = 0.01$ s

En la Figura 3.30 se muestra la norma del error de observación. En esta figura se muestran claramente los dos tipos de convergencia. Durante los primeros segundos, en donde el sismo no provoca ningún movimiento en la estructura, se considera que el sistema no presenta ninguna incertidumbre, por lo tanto se espera una convergencia a cero. Por otro lado, cuando esta señal provoca un desplazamiento en la estructura, se considera que el sistema tiene incertidumbre, por lo que el observador converge a una región acotada.

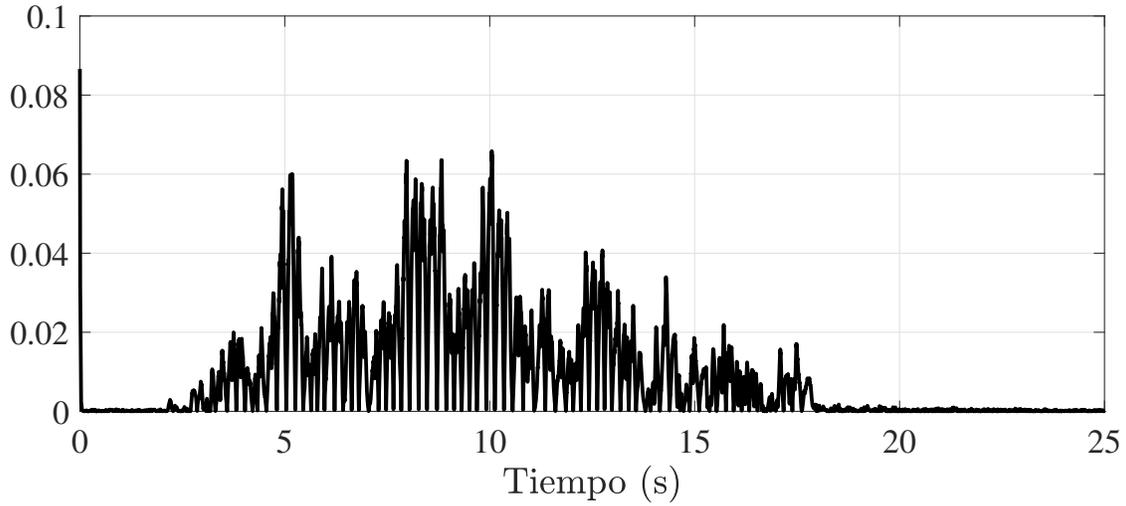


Fig. 3.30. Norma del error de observación $\|\tilde{z}(t)\|$ con $\Delta_{\bar{M}} = 0.01$ s

Comparación ante diferentes periodos de muestreo

En esta sección se evalúa el comportamiento del error de observación ante diferentes valores en el periodo de muestreo. Para demostrar la convergencia del observador ante diferentes periodos de muestreo, se procede a comparar el observador previamente diseñado, considerando que es alimentado con la señal de salida muestreada del sistema en los siguientes periodos: $\Delta_{\bar{M}_1} = 0.01$ s y $\Delta_{\bar{M}_2} = 0.05$ s. El observador tiene el mismo valor de ganancia L mostrada en (3.105) y las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\hat{x}(0) &= [0.001 \quad 0.001 \quad 0.05 \quad 0.05]^T, \\ \eta(0) &= [0 \quad 0]^T\end{aligned}$$

En la Figura 3.31 se muestra la norma del error de observación para ambos casos ($\Delta_{\bar{M}_1}$ y $\Delta_{\bar{M}_2}$). Es evidente que los periodos de muestreo influyen en la convergencia del observador. Se muestra que con el periodo $\Delta_{\bar{M}_1}$ se obtiene una convergencia mas rápida y suave a diferencia que con el periodo $\Delta_{\bar{M}_2}$.

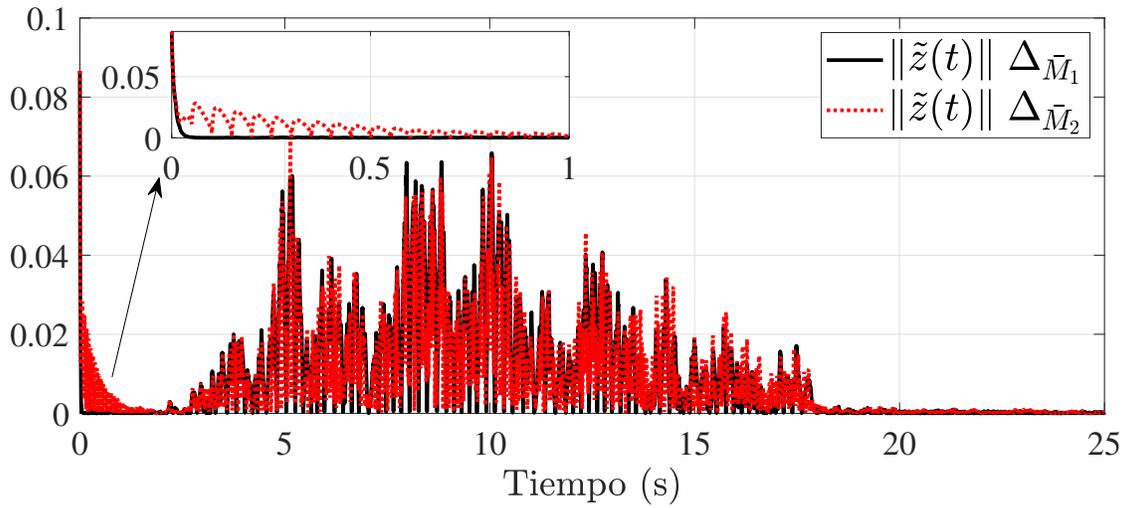


Fig. 3.31. Norma del error de observación $\|\tilde{z}(t)\|$ con diferentes periodos de muestreo

Conclusión. Se demostró que es posible la estimación continua del vector de estado de un sistema lineal en donde la señal de salida es adquirida en instantes de tiempo. De igual forma, se demuestra que el error de convergencia tiende a cero cuando el sistema no presenta incertidumbres, a diferencia de que cuando el sistema presenta incertidumbres. Además, se demostró que el periodo de muestreo influye en la convergencia del observador.

3.8. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó el análisis y diseño de observadores para sistemas lineales y no lineales MIMO inciertos. Para el caso lineal se presenta un nuevo observador para sistemas con salidas disponibles en instantes de tiempo discreto. La ventaja de este observador es que permite que la matriz A no tenga la estructura triangular como se muestra en la literatura (Astolfi and Marconi, 2015).

Para sistemas no lineales, primeramente se abordó el diseño de observadores considerando que la señal de salida del sistema es medida en forma continua. Se demostró que el error de observación converge exponencialmente a cero si el sistema no presenta incertidumbres, sin embargo, en el caso que existan, el error converge a una región cercana al origen. Esta región se puede reducir al incrementar los valores en el parámetro de ajuste del observador θ .

Posteriormente, se consideró el diseño de observadores tomando en cuenta que la señal de salida solo está disponible en instantes de tiempo. Esto con el fin de considerar un escenario real en donde la instrumentación en el sistema provee la medición de las señales en instantes de tiempo. En este caso se demostró que el observador logra la estimación de forma continua del vector de estados a pesar de que la salida se mide en instantes de tiempo. La convergencia de este observador depende de la magnitud de las incertidumbres y de las funciones que dependen del tiempo de muestreo del sistema.

Se presentó de igual forma, la ventaja de utilizar los sistemas no uniformemente observables presentados en (Hernández-González et al., 2016; Farza et al., 2015a), en donde la matriz de estados A puede depender de estados y/o entradas. Se consideró que los estados del sistema pueden ser de dimensiones diferentes, en comparación a otros presentados en la literatura por ejemplo (Besançon, 2000). El considerar esto puede permitir la estimación de incertidumbres en una amplia variedad de sistemas como se demostró en el caso de la tubería.

Los observadores para sistemas no lineales anteriormente mostrados serán tomados como base del observador en cascada para los sistemas que presentan retardos como se muestra en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Análisis y diseño de observadores para sistemas inciertos con retardo

En este capítulo se presentan las dos últimas aportaciones de este trabajo, incluyendo la principal. Se presenta el análisis y diseño de observadores para sistemas no lineales inciertos en los cuales la salida presenta retardos de tiempo. Los sistemas presentados son de una clase particular de sistemas no lineales conocida como no uniformemente observables, esta clase de sistemas tienen la principal característica de que en la matriz A se permite la presencia de funciones que pueden depender de los estados y/o entradas del sistema. Además, se considera que los sistemas son MIMO, con el fin de generalizar los resultados. Estos sistemas son presentados considerando dos naturalezas en su señal de salida: continua o muestreada. En ambos casos la señal presenta un retardo de tiempo que puede deberse a diferentes fenómenos, siendo la causa más común: las redes de comunicación en el envío y transmisión de datos. Para lidiar con el retardo en la señal adquirida, se utiliza un observador en cascada, el cual consta de $m + 1$ subsistemas. El primer subsistema se considera como el observador de la base, el cual se diseña considerando la naturaleza de la señal de salida del sistema. Los subsistemas restantes son una copia del sistema evaluados en diferentes instantes de tiempo, los cuales son llamados predictores, estos cancelan el retardo de la señal en una porción de tiempo. En la sección 4.1 se muestra el diseño del observador en cascada considerando salidas medidas continuas. En la sección 4.2 se muestra su aplicación a un sistema caótico. Posteriormente, en la sección 4.3 se considera el caso práctico, donde la señal solo está disponible en ciertos instantes de tiempo. Su aplicación a un sistema caótico se muestra en la sección 4.4. En la sección 4.5 se muestra una aplicación para la estimación de parámetros desconocidos en una tubería. Por último, las conclusiones del capítulo se muestran en la sección 4.6.

4.1. Observador para sistemas no lineales inciertos con salidas continuas con retardo

Considere el sistema no lineal MIMO incierto con retardo en la medición de la salida del sistema, mostrado en la siguiente ecuación:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), x(t))x(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y_\tau(t) = Cx(t - \tau) = x^1(t - \tau) \end{cases} \quad (4.1)$$

con:

$$A(u(t), x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u(t), x^{(1)}(t)) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & A_{q-1}(u, x^{(1)}(t), \dots, x^{(q-1)}(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n_q} \\ \vdots \\ 0_{n_{q-1} \times n_q} \\ I_{n_q} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(u(t), x(t)) = \begin{bmatrix} \varphi(u(t), x^{(1)}(t)) \\ \varphi(u(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)) \\ \vdots \\ \varphi_n(u(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(q-1)}(t)) \\ \varphi(u(t), x(t)) \end{bmatrix}, C = [1_{n_1 \times n_1} \quad 0_{n_1 \times n_2} \quad \dots \quad 0_{n_1 \times n_q}]$$

donde el estado $x(t) = (x^1, x^2, \dots, x^q)^T \in \mathbb{R}^n$, $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, q$ con $n_1 = p$ y $\sum_{i=1}^q n_i = n$ y cada $A_i(u, x)$ es una $n_i \times n_{i+1}$ matriz triangular con respecto x , es decir, $A_i(u, x) = A(u, x^1, \dots, x^i)$, $i = 1, \dots, q - 1$; $\varphi(x(t), u(t))$ es una función que tiene una estructura triangular con respecto a x ; $u \in \mathbb{R}^s$ es la entrada del sistema; $y_\tau \in \mathbb{R}^p$ es la salida con retardo; $\tau > 0$ es el retardo de medición; $\varepsilon(t) : [-\tau, +\infty[\mapsto \mathbb{R}^p$ es una función desconocida que describe las incertidumbres del sistema que puede depender del estado y de los parámetros. Esta señal se tratará como una función desconocida que depende explícitamente del tiempo t para $t \geq -\tau$.

Para diseñar un observador para el sistema (4.1) es necesario tomar en cuenta las siguientes suposiciones presentadas en (Besançon et al., 1996) y (Farza et al., 2015a).

A 4.1.1. *El estado $x(t)$ y el control $u(t)$ son acotados, es decir, $x(t) \in X$ y $u(t) \in U$, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ y $U \subset \mathbb{R}^s$ son conjuntos compactos. Con esto se pueden definir las cotas máximas para el estado y $A(u(t), x(t))$. Estas cotas se definen como:*

$$x_M = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\| \quad (4.2)$$

$$\tilde{a} = \sup_{(u, x) \in U \times X} \|A(u, x)\| \quad (4.3)$$

A 4.1.2. *Las funciones $A(u(t), x(t))$ y $\varphi(x(t), u(t))$ son Lipschitz con respecto a $x(t)$, uniformemente con respecto a $u(t)$, donde $(u, x) \in U \times X$. Sus constantes de Lipschitz son denotadas como L_A y L_φ respectivamente.*

A 4.1.3. *La función desconocida $\varepsilon(t)$ está esencialmente acotada, es decir,*

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \sup_{t \geq 0} \|\varepsilon(t)\| \leq \delta_\varepsilon. \quad (4.4)$$

Debido a que se presenta un retardo en la señal, se propone como solución un observador en cascada. Este observador está constituido por $m + 1$ subsistemas. El primer subsistema es conocido como la base del observador, que en este caso será un observador de alta ganancia, el cual estimará la señal con retardo. Los subsistemas restantes son conocidos como predictores, los cuales predicen el estado del subsistema anterior con un horizonte de predicción igual a $\frac{\tau}{m}$. Por lo tanto, el último predictor proveerá la estimación del estado libre de retardo.

4.1.1. Diseño del observador en cascada para salidas continuas

En este análisis se usará la notación presentada en (Farza et al., 2018; Hernández-González et al., 2016; Germani et al., 2002):

$$\begin{aligned} x_j(t) &= x\left(t - \tau + \frac{j}{m}\tau\right), & u_j(t) &= u\left(t - \tau + \frac{j}{m}\tau\right), \\ \varepsilon_j(t) &= \varepsilon\left(t - \tau + \frac{j}{m}\tau\right), & j &= 0, \dots, m, \quad t \geq -\frac{j}{m}\tau. \end{aligned} \quad (4.5)$$

De igual forma se describen las variables de cambio en el observador en cascada, como se muestran a continuación:

$$x_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) = x_{j-1}(t) \quad \text{y} \quad u_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) = u_{j-1}(t) \quad (4.6)$$

La estructura de los observadores para el sistema (4.1) está dada por:

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = A(u_j(t), \hat{x}_j(t))\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - G_j, \quad j = 0, \dots, m \quad (4.7)$$

donde $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^n$ es el estado estimado de x_j y G_j es la ganancia del observador. Para $j = 0$, G_0 es la ganancia del observador para el sistema con retardo y para $j = 1, \dots, m$, G_j es la ganancia del j -ésimo predictor.

A continuación se expresarán las ganancias para cada j . Como se mencionó antes, la base del observador en cascada es un observador continuo de alta ganancia, el cual proveerá la estimación del estado con retardo, por lo tanto para $j = 0$, se define la ganancia G_0 como:

$$G_0(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T (C \hat{x}_0(t) - y_\tau(t)) \quad (4.8)$$

donde:

$$\dot{S}(t) = \theta \left(-S(t) - A(u_0(t), \hat{x}_0(t))^T S(t) - S(t) A(u_0(t), \hat{x}_0(t))^T + C^T C \right) \quad (4.9)$$

La matriz Δ_θ está definida como:

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[I_{n_1} \quad \frac{I_{n_2}}{\theta} \quad \dots \quad \frac{I_{n_q}}{\theta^{q-1}} \right] \quad (4.10)$$

Las ganancias G_j de los predictores se definen para $j = 1, \dots, m$, como:

$$G_j(t) = e^{\left(\bar{A} \frac{\tau}{m}\right)} \left[G_{j-1}(t) + A \left(u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - A \left(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t) \right) \hat{x}_{j-1}(t) \right. \\ \left. + \varphi \left(u_{j-1}(t), \hat{x} \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi \left(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t) \right) - \bar{A} \left(\hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) \right] \quad (4.11)$$

donde \bar{A} es una matriz de diseño de dimensión $n \times n$. Las ecuaciones del observador (4.6) se inicializan como se muestra a continuación:

$$\hat{x}_0(0) = \hat{x}(-\tau), \text{ y } \hat{x}_j(s) = \hat{x} \left(s - \tau + \frac{j}{m} \tau \right), \text{ } s \in \left[-\frac{\tau}{m}, 0 \right], j = 1, \dots, m \quad (4.12)$$

donde $\hat{x}(s)$, $s \in [-\tau, 0]$ es cualquier estado estimado seleccionado *a priori*. La matriz de diseño \bar{A} permite ajustar la dinámica del proceso de predicción, para esto se deben de considerar las siguientes propiedades:

1. Debido a que las matrices $A(u_j(t), \hat{x}_j(t))$ se asumen como acotadas, esta propiedad es cierta para las matrices $\bar{A} - A(u_j(t), \hat{x}_j(t))$. Se define:

$$\Gamma = \max_{j=1, \dots, m} \sup_{t \geq 0} \|\bar{A} - A(u_j(t), \hat{x}_j(t))\| \quad (4.13)$$

2. Considerando que la matriz \bar{A} es Hurwitz, entonces existen números positivos $\beta \geq 1$ y \bar{a} tal que:

$$\forall t \geq 0 : \|e^{\bar{A}t}\| \leq \beta e^{\bar{a}t} \quad (4.14)$$

donde $\bar{a} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\Re(\lambda_i(\bar{A}))|$, $i = 1, \dots, n$, son los n valores propios de la matriz \bar{A} con valores negativos.

Para definir la condición de excitación persistente de este sistema, se define $\Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, s)$, como la matriz de transición del sistema afín al estado:

$$\dot{\xi}(t) = A(u_0(t), \hat{x}_0(t))\xi(t) \quad (4.15)$$

donde $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t)$ y $\hat{x}(t)$ son la entrada y el estado del sistema (4.7), respectivamente. Es importante resaltar que la matriz $\Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, s)$ se define como:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, s)}{dt} = A(u(t), \hat{x}(t))\Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, s), \quad \forall t \geq s \geq 0, \\ \Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, t) = I_n, \quad \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

donde I_n denota una matriz identidad de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Con lo anterior es posible asumir lo siguiente:

A 4.1.4. *La entrada $u(t)$ es tal que para cualquier trayectoria de $\hat{x}(t)$ del sistema (4.7) empezando de $\hat{x}(0) \in X$, $\exists T^* > 0, \exists \theta^* > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall \theta \geq \theta^*$ y $\forall t \geq T^*/\theta$, se satisface la siguiente condición de excitación persistente*

$$\int_{t-T^*/\theta}^t \Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, s)^T C^T C \Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, s) ds \geq \frac{\delta_0}{\theta \alpha(\theta)} \Delta_\theta^2 \quad (4.17)$$

donde $\alpha(\theta) \geq 1$ es una función que satisface lo siguiente:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0 \quad (4.18)$$

Considerando esto se define el valor mínimo de la solución de (4.9), de acuerdo con (Hernández-González et~al., 2016):

$$\lambda_{\min}(S) \geq \frac{e^{T^*} \delta_0}{\alpha(\theta)}, \quad (4.19)$$

Con todo lo anterior se propone el siguiente teorema, el cual es la cuarta aportación de este trabajo de tesis.

Teorema 4.1.1. *Considerando el sistema (4.1), sujeto a las suposiciones **A4.1.1-A4.1.3**. Entonces para todas las entradas acotadas que satisfacen la suposición **A4.1.4**, entonces existe una constante θ_0 es tal que para toda $\theta > \theta_0$ y el número de predictores m es elegido tal que:*

$$\varrho \frac{\tau}{m} < 1, \quad (4.20)$$

con:

$$\varrho = \beta(\sqrt{n}(L_A + L_\varphi x_M) + \Gamma) \quad (4.21)$$

donde L_A y L_φ son constantes que satisfacen la suposición **A4.1.2**, Γ y β están definidas en (4.13) y (4.14) respectivamente, x_M es la cota del estado (4.1) definida por (4.2). Entonces, para $j = 1, \dots, m$, se tiene el siguiente error de observación:

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \triangleq \|\hat{x}_j(t) - x_j(t)\| \leq \mu_j e^{-\bar{\alpha}_j t} + M_j \delta_\varepsilon, \quad (4.22)$$

con:

$$\mu_j = \frac{1}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(\beta \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) + \varrho \int_{-\tau/m}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) \quad (4.23)$$

$$M_j = \frac{\beta}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(M_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \quad (4.24)$$

$$\bar{\alpha}_j = \min\{\bar{\alpha}_{j-1}, \bar{a}\}. \quad (4.25)$$

4.1.2. Demostración del Teorema 4.1.1

En esta sección se analizará el error de convergencia de cada subsistema j del observador en cascada. Se define el error de observación para cada subsistema como $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$ para $j = 0, \dots, m$. Primeramente se probará que el error de observación para \tilde{x}_0 convergerá a una región acotada, posteriormente se demostrara que si \tilde{x}_{j-1} converge de igual manera a una región acotada, entonces el error de observación \tilde{x}_j también convergerá a una región acotada.

Análisis para $j = 0$:

A continuación se presenta el análisis del error de observación para el observador de la base de la cascada. Este observador dará la estimación del vector de estado con retardo. Se define $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}_0$, por lo tanto, considerando (4.1), (4.7), (4.8) y (4.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_0(t) = & \theta \left[A(u_0(t), \hat{x}_0(t)) - S^{-1}(t)C^T C \right] \bar{x}_0(t) + \Delta_\theta \left[\tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t))x_0(t) \right. \\ & \left. + \tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) - B\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

con:

$$\tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) = A(u_0(t), \hat{x}_0(t)) - A(u_0(t), x_0(t))$$

$$\tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) = \varphi(u_0(t), \hat{x}_0(t)) - \varphi(u_0(t), x_0(t))$$

Para comprobar la estabilidad del observador se propone la siguiente función de Lyapunov $V(\bar{x}_0(t), t) = \bar{x}_0(t)S(t)\bar{x}_0(t)$, donde $S(t)$ está gobernada por (4.9). Obteniendo la derivada de la función candidata de Lyapunov:

$$\dot{V}(\bar{x}_0(t), t) = 2\bar{x}_0^T(t)S(t)\dot{\bar{x}}_0(t) + \bar{x}_0^T(t)\dot{S}(t)\bar{x}_0(t). \quad (4.27)$$

Sustituyendo (4.9) y (4.26) en (4.27), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}_0(t), t) &\leq -\theta V(\bar{x}_0, t) + 2\bar{x}_0^T(t)S(t)\Delta_\theta A(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t))x_0(t) \\ &\quad + 2\bar{x}_0^T(t)S(t)\Delta_\theta \varphi(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) + 2\bar{x}_0^T(t)S(t)\Delta_\theta B\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

De igual forma se considera lo propuesto en (Farza et~al., 2009), para $\theta > 0$:

$$\begin{aligned} \|2\bar{x}_0^T(t)S(t)\Delta_\theta \tilde{A}(u_0(t), x_0(t), \hat{x}_0(t))x_0(t)\| &\leq 2\sqrt{n} \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} V(\bar{x}_0(t), t) L_A x_M \\ &\leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} V(\bar{x}_0(t), t) L_A x_M \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \|2\bar{x}_0^T(t)S(t)\Delta_\theta \tilde{\varphi}(u_0(t), x_0(t), \hat{x}_0(t))\| &\leq 2\sqrt{n} \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} V(\bar{x}_0(t), t) L_\varphi \\ &\leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} V(\bar{x}_0(t), t) L_\varphi \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dado que la función $\varepsilon(t) > 0$ cumple la suposición **A4.1.3**, se procede como en (Bouraoui et~al., 2015), para $\theta > 0$:

$$\|2\bar{x}_0^T(t)S(t)\Delta_\theta B\varepsilon(t)\| \leq \frac{2}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \delta_\varepsilon \quad (4.31)$$

Sustituyendo las Ecs.(4.29), (4.30), (4.31) en (4.28) y dividiendo ambas partes de la ecuación entre $\sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} &\leq -\theta \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} (L_A x_M + L_\varphi) \right) \sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \\ &\quad + 2 \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

considerando $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0$ de acuerdo a **A4.1.4**. Reescribiendo se tiene:

$$\frac{d}{dt}\sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \leq -\theta\nu_\theta\sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} + 2\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\theta^{q-1}}\sqrt{\lambda_{\max}(S)}\right) \quad (4.33)$$

donde:

$$\nu_\theta = \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}(L_A x_M + L_\varphi)\right)$$

Usando el Lema de comparación mostrado en (Khalil, 2002), se obtiene:

$$\sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \leq e^{-\theta\nu_\theta t}\sqrt{V(\bar{x}_0(0))} + \frac{2}{\theta\nu_\theta}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\theta^{q-1}}\sqrt{\lambda_{\max}(S)}\right) \quad (4.34)$$

Se busca regresar a términos del error, para esto se tiene $\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \|\bar{x}_0(t)\| \leq \theta^{q-1}\|\tilde{x}_0(t)\|$, por lo tanto:

$$\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \theta^q\zeta\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}e^{-\theta\nu_\theta t}\|\tilde{x}(0)\| + \frac{2\zeta}{\nu_\theta}\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\delta_\varepsilon \quad (4.35)$$

donde:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}$$

Se puede concluir que el error de observación $\tilde{x}_0(t)$ converge exponencialmente a un valor finito que está sujeto a la cota máxima de la incertidumbre (δ_ε). Se reescribe el error de observación de la siguiente forma:

$$\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \mu_0 e^{-\bar{\alpha}_0 t} + M_0 \delta_\varepsilon \quad (4.36)$$

con:

$$\mu_0 = \theta^q\zeta\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\|\tilde{x}_0(0)\| \quad (4.37)$$

$$M_0 = \frac{2\zeta}{\nu_\theta}\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \quad (4.38)$$

$$\bar{\alpha}_0 = \theta\nu_\theta \quad (4.39)$$

Con esto se demuestra la convergencia del error para $\tilde{x}_0(t)$. en el capítulo 3.1 se muestra una versión extendida y explícita de este análisis, ya que el observador de la base es el mostrado ahí para el

caso libre de retardo. Ahora se probará que el error de observación $\tilde{x}_j(t)$ también convergerá a una región acotada para $j = 1, \dots, m$.

Análisis para $j = 1, \dots, m$:

Se procede a probar por inducción para el caso de $j > 0$. Se asumirá que para $1 \leq j \leq m-1$ el error \tilde{x}_{j-1} convergerá exponencialmente a una región acotada. Si es así, entonces \hat{x}_j también convergerá exponencialmente a una región acotada. De igual forma, se probará el término de corrección de cada subsistema para $G_j, j = 1, \dots, m$ mostrada en (4.11). El propósito es diseñar un predictor que estime el estado x_j el cual se presenta a continuación:

$$\dot{x}_j(t) = A(u_j(t), x_j(t))x_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) + B\varepsilon_j(t). \quad (4.40)$$

El sistema anterior se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{x}_j(t) = \bar{A}x_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) + \left(A(u_j(t), x_j(t)) - \bar{A} \right) x_j(t) + B\varepsilon_j(t) \quad (4.41)$$

donde $\bar{A} = -\lambda I_n$ es una matriz Hurwitz de dimensión $n \times n$, I_n es una matriz identidad y $\lambda > 0$ es un valor positivo. Tomando esto en consideración, el estado $x_j(t)$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned} x_j(t) &= e^{\left(\bar{A}\frac{\tau}{m}\right)} x_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) \\ &\quad + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A(u_j(s), x_j(s)) - \bar{A})x_j(s) + B\varepsilon_j(s) \right) ds \\ &= e^{\left(\bar{A}\frac{\tau}{m}\right)} x_{j-1}(t) \\ &\quad + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A(u_j(s), x_j(s)) - \bar{A})x_j(s) + B\varepsilon_j(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Se escribe el observador imitando la estructura del predictor (4.41), obteniendo:

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = \bar{A}\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) - G_j(t) + \left(A(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - \bar{A} \right) \hat{x}_j(t) \quad (4.43)$$

en donde la solución queda como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{x}_j(t) &= e^{\left(\bar{A}\frac{\tau}{m}\right)} \hat{x}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) \\ &\quad + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - G_j(s) + (A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A})\hat{x}_j(s) \right) ds \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.1. OBSERVADOR PARA SISTEMAS NO LINEALES INCIERTOS CON SALIDAS
CONTINUAS CON RETARDO

Ahora, imitando la estructura para dos predictores \hat{x}_j y \hat{x}_{j-1} para todo $j = 1 \dots, m$, se obtiene:

$$\hat{x}_j(t) = e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \hat{x}_{j-1} + r_j(t) + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) + (A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A})\hat{x}_j(s) \right) ds \quad (4.45)$$

se consideran las $r_j, j = 1 \dots, m$ como funciones, las cuales son diferenciables con respecto al tiempo y las cuales deben ser determinadas simultáneamente con las ganancias G'_j s. Es importante resaltar que estas funciones solo son usadas en el análisis de convergencia y no aparecen en la estructura de los predictores.

Se busca obtener las ecuaciones de las ganancias de los predictores G_j . Se resta la ecuación (4.44) de (4.45), obteniendo:

$$e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left(\hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) - r_j(t) = e^{\bar{A}t} \int_{t-\tau/m}^t e^{-\bar{A}s} G_j(s) ds \quad (4.46)$$

Diferenciando la ecuación anterior con respecto al tiempo se tiene:

$$e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left(\dot{\hat{x}}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - \dot{\hat{x}}_{j-1} \right) - \dot{r}_j(t) = \bar{A} e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left(\hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1} \right) - \bar{A} r_j(t) + G_j(t) - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} G_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right). \quad (4.47)$$

Despejando el término de corrección de los predictores (4.47), se obtiene:

$$G_j(t) = e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left(\dot{\hat{x}}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - \dot{\hat{x}}_{j-1} \right) - \dot{r}_j - \bar{A} e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left(\hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1} \right) + \bar{A} r_j(t) + e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} G_{j-1} \quad (4.48)$$

Si se elige r_j tal que:

$$\dot{r}_j(t) = \bar{A} r_j(t) \quad (4.49)$$

y se sustituyen los términos de $\dot{\hat{x}}_{j-1}(t)$ y $\dot{\hat{x}}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right)$ en (4.48), en donde estos están dados por (4.7) y considerando la igualdad mostrada de $u_{j-1} = u_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right)$ en (4.6), se obtiene:

$$G_j(t) = e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left[G_{j-1}(t) + A \left(u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - A(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \hat{x}_{j-1}(t) + \varphi \left(u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) - \bar{A} \left(\hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) \right]. \quad (4.50)$$

Por lo tanto las ecuaciones del observador para el sistema (4.1) son:

$$OBS : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_j(t) &= A(u_j(t), \hat{x}_j(t)) \hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) - G_j(t), \quad j = 0, \dots, m \\ G_0 &= \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T (C \hat{x}_0(t) - y_\tau(t)), \quad \text{para } j = 1, \dots, m, \\ G_j &= e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left(G_{j-1}(t) + A \left(u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right. \\ &\quad \left. - A(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \hat{x}_{j-1}(t) + \varphi \left(u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) - \bar{A} \left(\hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) \right). \end{cases} \quad (4.51)$$

Definiendo el error de estimación como $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$ y sustituyendo (4.42) y (4.45) se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j = & e^{\left(\bar{A}\frac{\tau}{m}\right)}\tilde{x}_{j-1}(t) + r_j(t) + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) + \tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))x_j(s) \right. \\ & \left. + \left(A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A} \right) \tilde{x}_j(s) - B\varepsilon_j(s) \right) ds \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) &= \varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \varphi(u_j(s), x_j(s)) \\ \tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) &= A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - A(u_j(s), x_j(s)). \end{aligned}$$

Partiendo del hecho de que se elige r_j , $j = 1, \dots, m$, la cual esta dada en (4.49), se tiene:

$$\|r_j(t)\| \leq \beta e^{-\bar{a}t} \|r_j(0)\|, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.53)$$

De igual forma, la desigualdad mostrada en (4.14) es válida para toda j . Partiendo de (4.52), se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j = & e^{\left(\bar{A}\frac{\tau}{m}\right)}\tilde{x}_{j-1}(t) + r_j(t) + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) + \tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))x_j(s) \right. \\ & \left. + \left(A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A} \right) \tilde{x}_j(s) - B\varepsilon_j(s) \right) ds \end{aligned} \quad (4.54)$$

Ahora, se obtiene la norma del error \tilde{x}_j , para esto se considera (4.36), (4.37), (4.38) y (4.39), obteniendo:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| \leq & \beta e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{\alpha}_{j-1}t} + M_{j-1} \delta_\varepsilon \right) + \beta e^{-\bar{a}t} \|r_j(0)\| \\ & + \int_{t-\tau/m}^t \|e^{\bar{A}(t-s)}\| \left(\|\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| + \|\tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \|x_j(s)\| \right. \\ & \left. + \left\| \left(A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A} \right) \tilde{x}_j(s) \right\| + \|B\| \|\varepsilon_j(s)\| \right) ds \end{aligned} \quad (4.55)$$

Considerando que la matriz $\|B\| = 1$ y considerando:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| &\leq \sqrt{n} L_\varphi \|\tilde{x}_j(s)\| \\ \|\tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \|x_j(s)\| &\leq \sqrt{n} L_A \|\tilde{x}_j(s)\| x_M \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| \leq & \beta \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} e^{-\bar{\alpha}_{j-1}t} + M_0 e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \delta_\varepsilon \right) + \beta e^{-\bar{a}t} \|r_j(0)\| \\ & + \beta [\sqrt{n}(L_\varphi + L_{\bar{A}}x_M) + \Gamma] \int_{t-\tau/m}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_j(s)\| ds + \beta \int_{t-\tau/m}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\varepsilon_j(s)\| ds \\ \|\tilde{x}_j(t)\| \leq & \beta \left(\mu_0 e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) e^{-\bar{\alpha}_j t} + \beta \left(M_0 e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \delta_\varepsilon + \varrho \int_{t-\tau/m}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_j(s)\| ds \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde $\varrho = \beta [\sqrt{n}(L_{\tilde{\varphi}} + L_{\tilde{A}}x_M) + \Gamma]$ y $\bar{\alpha}_j = \min\{\bar{\alpha}_{j-1}, \bar{a}\}$.

Ahora, eligiendo como $z_j(t) = e^{\bar{\alpha}_j t} \|\tilde{x}_j(t)\|$ y

$$K_j(t) = \beta \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) + \beta \left(M_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \delta_\varepsilon e^{\bar{\alpha}_j t}. \quad (4.57)$$

Considerando esto, la ecuación anterior se reescribe como:

$$z_j(t) \leq K_j(t) + \varrho \int_{t-\tau/m}^t z_j(s) ds \quad (4.58)$$

Considerando que se cumple la desigualdad dada por (4.20), las condiciones del Lema A.1 propuesto en (Farza et al., 2018) se cumplen y se puede aplicar, obteniendo:

$$z_j(t) \leq \frac{1}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(K_j(t) + \varrho \int_{-\tau/m}^0 z_j(s) ds \right) \quad (4.59)$$

Regresando a términos del error $\|\tilde{x}_j\|$ la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \frac{1}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(\beta \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) + \varrho \int_{-\tau/m}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) e^{-\bar{\alpha}_j t} \\ &\quad + \frac{\beta}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(M_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \delta_\varepsilon \end{aligned} \quad (4.60)$$

Reescribiendo se obtiene:

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \triangleq \mu_j e^{-\bar{\alpha}_j t} + M_j \delta_\varepsilon \quad (4.61)$$

con:

$$\mu_j = \frac{1}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(\beta \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) + \varrho \int_{-\tau/m}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) \quad (4.62)$$

$$M_j = \frac{\beta}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(M_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \quad (4.63)$$

con esto se comprueba que el error convergerá a una región acotada cerca del origen. Esto finaliza la demostración del Teorema 4.1.1. ■

4.2. Simulación 5. Aplicación al sistema caótico de Lorenz con retardo

Objetivo. Demostrar que con el observador en cascada se logra estimar el vector de estado libre de retardo aun cuando la señal de salida del sistema presente retardos de tiempo. El error de observación de dicho observador convergerá a una región acotada en presencia de incertidumbres en el sistema. De igual forma, se demostrará cómo la elección de los valores de λ afectan la convergencia del observador.

En esta simulación se considera el diseño de un observador para el sistema caótico incierto de Lorenz. Se considera que la salida del modelo es adquirida por el observador de forma continua pero con retardo. El modelo del sistema caótico de Lorenz se muestra en la Ec. (4.64) y fue tomado de (Loría et~al., 2009). La simulación se realiza en el software de MATLAB 2018b. El sistema libre de retardo se simula utilizando la función ODE23 y el observador se simula utilizando la función DDE23, la cual sirve para simular sistemas con retardos. Se considera un tiempo de simulación total de 10s y un paso de integración de $h = 0.002s$.

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \kappa_1(x_2(t) - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \kappa_2 x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - \kappa_3 x_3(t) + \varepsilon(t) \\ y_\tau(t) = x_1(t - \tau) = x_{1_\tau}(t) \end{cases} \quad (4.64)$$

El vector de estado es $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^n$, $n = 3$. Este sistema se considera autónomo, por lo tanto no tiene entrada. La salida con retardo es $y_\tau(t) = x_{1_\tau}(t)$, donde el retardo $\tau = 0.1s$. Los parámetros del sistema se muestran en la siguiente tabla:

Parámetros	Valor
κ_1	16
κ_2	45.6
κ_3	4

Tabla 4.1. Parámetros del sistema de Lorenz

La incertidumbre del sistema es $\varepsilon(t) = 0.2 \sin(t) + |0.2 \cos(t)|$. Es importante resaltar que estos sistemas se usan para el envío de señales encriptadas y muchas veces consideran que el mensaje va en el ultimo estado, por lo que el mensaje sería la incertidumbre en el sistema. El sistema puede

4.2. SIMULACIÓN 5. APLICACIÓN AL SISTEMA CAÓTICO DE LORENZ CON RETARDO

ser reescrito de la siguiente manera:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + \varphi(x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y_\tau(t) = x_1(t - \tau) = x_{1\tau}(t) \end{cases}, \quad (4.65)$$

donde:

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x(t)) = \begin{bmatrix} -\kappa_1 x_1(t) \\ \kappa_2 x_1(t) - x_2(t) \\ x_1(t)x_2(t) - \kappa_3 x_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Es claro que tanto la matriz $A(x(t))$ y el vector de funciones $\varphi(x(t))$ respetan la triangularidad con respecto al vector de estados. De igual forma la incertidumbre cumple con la suposición **A4.1.3**. Considerando lo anterior, es posible diseñar un observador en cascada mostrado en (4.51). Este observador tendrá en la base del observador un observador como el mostrado en la sección 3.1, el cual estimará la señal con retardo y por medio los subsistemas (predictores) se irá compensando el retardo de la señal en un horizonte de τ/m . La señal sin retardo será dada por el último predictor del observador en cascada. Las condiciones iniciales para el sistema son:

$$x(0) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [1 \quad 1 \quad 1]^T.$$

El parámetro de ajuste del observador se ajusta a un valor de $\theta = 5$, la matriz Δ_θ queda de la siguiente forma:

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta^2} \end{bmatrix}$$

Para esta simulación se considera que el observador en cascada tiene 5 predictores, por lo tanto, $m = 5$, de acuerdo con lo presentado en el Teorema 4.1.1. Las condiciones iniciales del observador en cascada son:

$$\hat{x}_j(s) = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3]^T = [-1 \quad -1 \quad -1]^T, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \in [-\tau/m, 0]$$

$$S(0) = 1 \times 10^{-3} I_{3 \times 3}.$$

Las matrices \bar{A}_j presentes en cada predictor son:

$$\bar{A}_j = -\lambda I_{3 \times 3}, \quad \lambda = 1.$$

4.2. SIMULACIÓN 5. APLICACIÓN AL SISTEMA CAÓTICO DE LORENZ CON RETARDO

En la Figura 4.1 se muestra la trayectoria del sistema original libre de retardo y la estimación por medio del ultimo predictor del observador en cascada. Se muestra que el observador converge a la trayectoria del sistema libre de retardo a pesar de que tiene como entrada la señal con retardo.

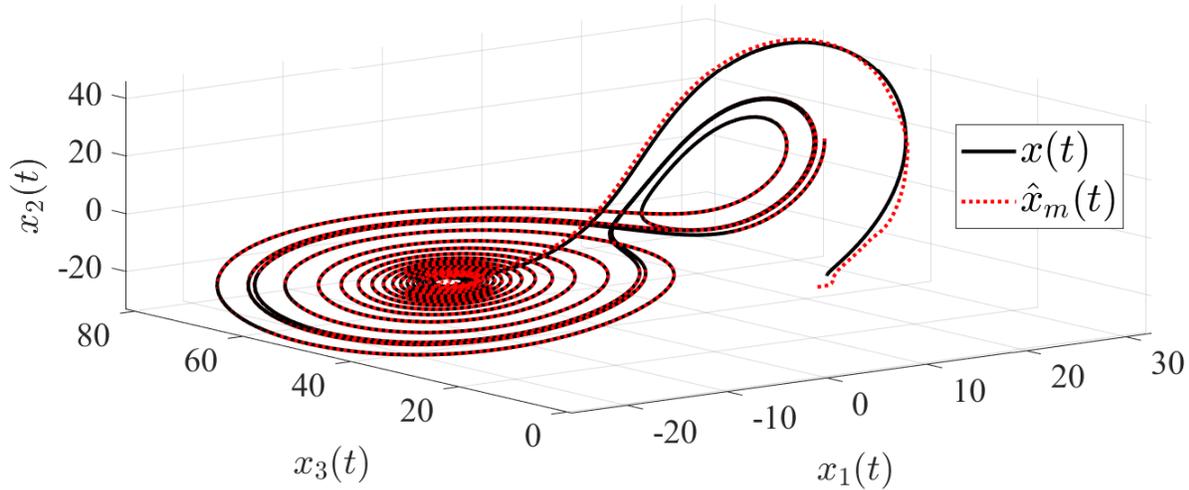


Fig. 4.1. Trayectoria del sistema libre de retardo y la estimada.

En la Figura 4.2 se muestra: la salida no disponible del sistema, continua y sin retardo; la salida disponible del sistema, continua pero con retardo y la salida estimada por el último subsistema \hat{x}_{m1} del observador en cascada. Durante $t < \tau$, el observador en cascada mantiene su condición inicial debido a que aun no recibe la señal de la salida con retardo. Cuando $t \geq \tau$, el observador empieza la estimación ya que la señal de salida está presente en el observador. Se muestra que el último predictor logra converger a la señal no disponible del sistema (la señal libre de retardo), demostrando que se cumple con el objetivo principal de este observador. En las Figuras 4.3 y 4.4 se muestran las estimaciones de los estados x_2 y x_3 , siendo éstas \hat{x}_{m2} y \hat{x}_{m3} por parte del último predictor del observador en cascada. Este último predictor logra la estimación de los estados libres de retardo los cuales no están disponibles.

4.2. SIMULACIÓN 5. APLICACIÓN AL SISTEMA CAÓTICO DE LORENZ CON RETARDO

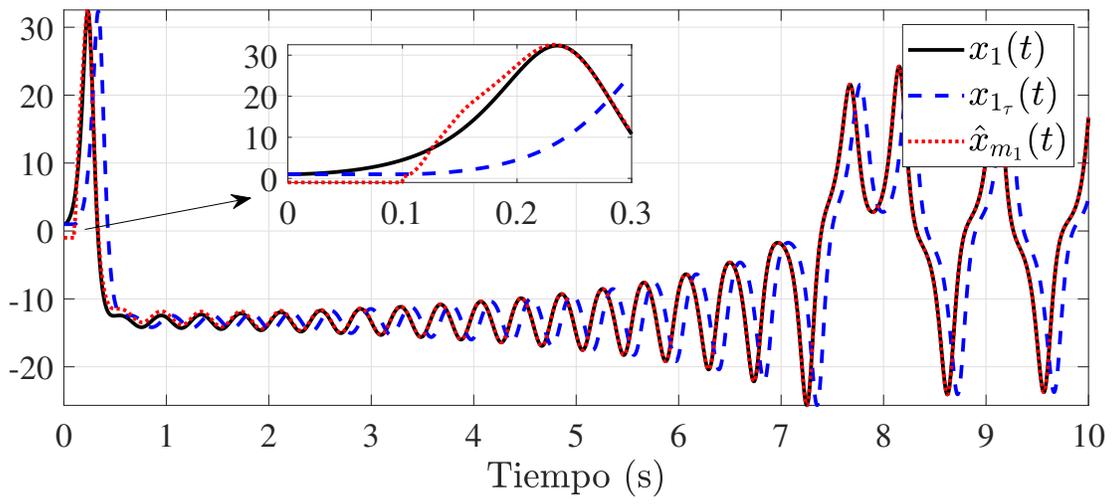


Fig. 4.2. Estimación de la salida libre de retardo

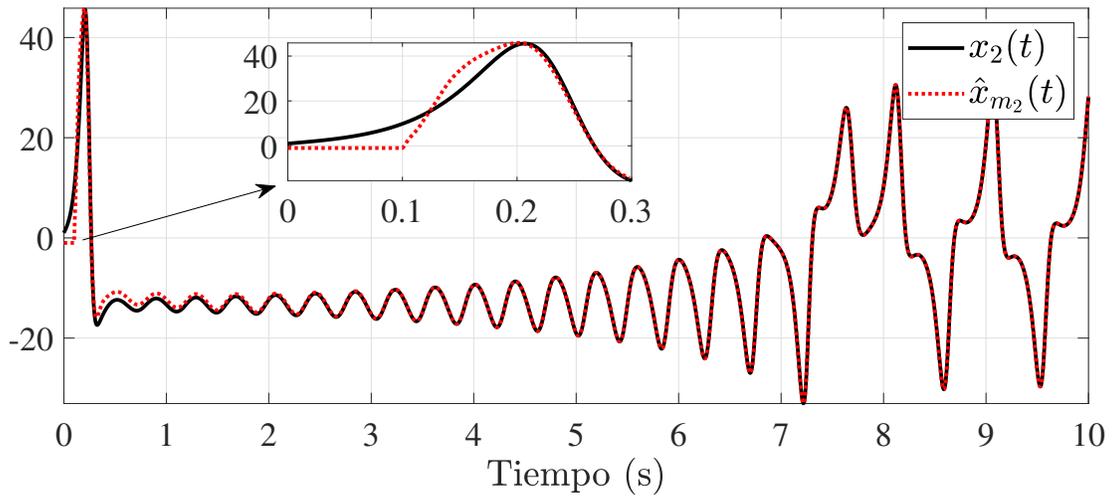


Fig. 4.3. Estimación del estado $x_2(t)$ libre de retardo

4.2. SIMULACIÓN 5. APLICACIÓN AL SISTEMA CAÓTICO DE LORENZ CON RETARDO

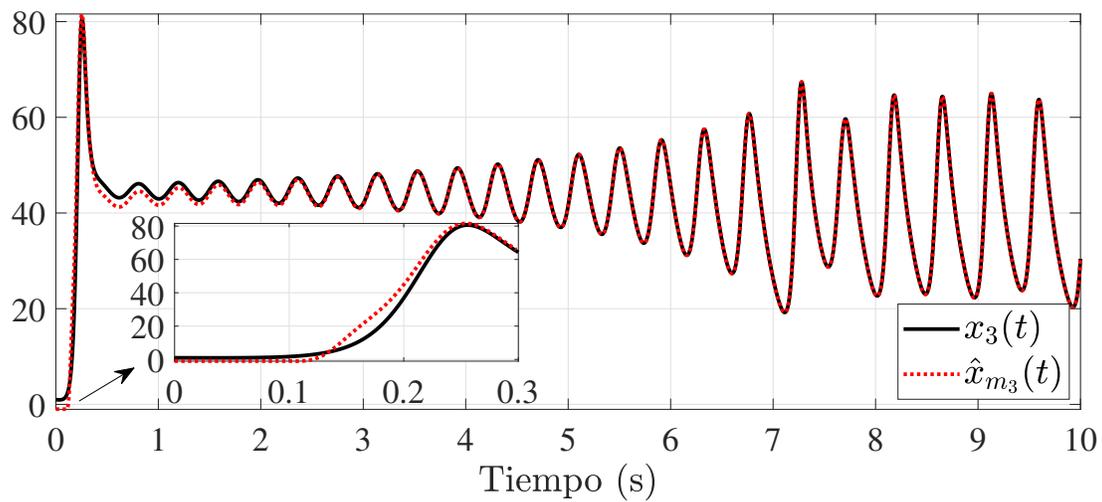


Fig. 4.4. Estimación del estado $x_3(t)$ libre de retardo

En la Figura 4.5 se muestra la estimación por parte de la base de la cascada, el cual es un observador de la forma (3.9) mostrado en la sección 3.1. En este caso se logra la estimación de la señal con retardo, la cual es la que utiliza el observador. En un caso real donde se presenten retardos en la medición se obtendría esto, debido a que en el observador solo se logra estimar el vector de estado con el retardo de la señal de salida. Por lo tanto, no se puede obtener la estimación del vector de estado libre de retardo. La principal ventaja del observador en cascada, es que por medio de los predictores se va cancelando el retardo de la señal, y el último predictor proporciona la estimación del vector de estado libre de retardo como se muestra en las figuras anteriores.

4.2. SIMULACIÓN 5. APLICACIÓN AL SISTEMA CAÓTICO DE LORENZ CON RETARDO

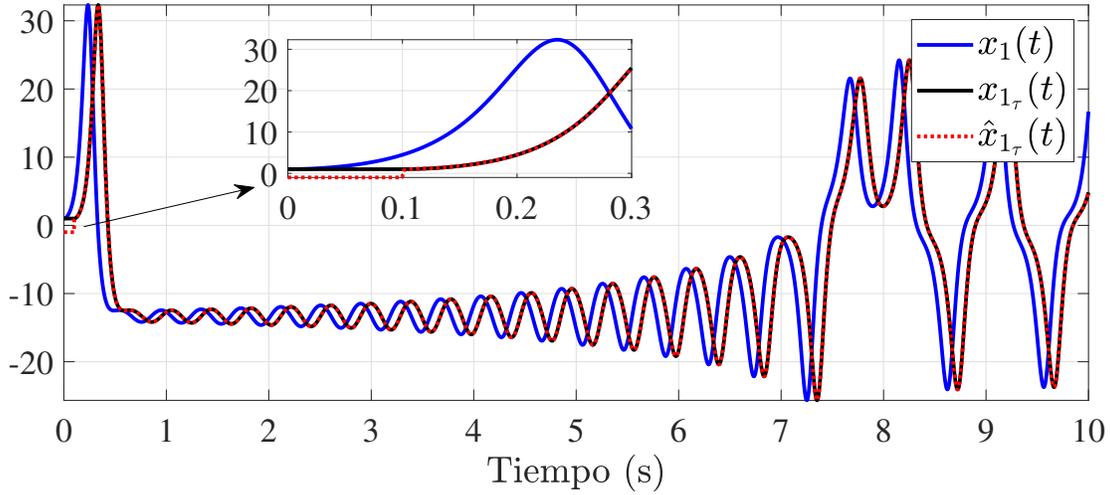


Fig. 4.5. Estimación de la salida con la base de la cascada

A simple vista, da la impresión que los estados convergen completamente a los valores de los estados. Sin embargo, existe un error debido a que el sistema presenta incertidumbre. En la Figura 4.6 se muestra una comparativa entre las norma del error de observación en la base de la cascada $\|\tilde{x}_0(t)\|$ y en el último predictor $\|\tilde{x}_m(t)\|$. El error de observación se define como $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$, donde \hat{x}_0 (siendo $j = 0$) es el vector de estado estimado en la base de la cascada y \hat{x}_m (siendo $j = m$) es el vector de estado estimado en el último predictor. Por otra parte, x_0 es el estado del sistema original con retardo y x_m es el estado no disponible del sistema original libre de retardo. La norma del error se mostrará de forma logarítmica en base 10 (es decir $\log_{10}(\|\tilde{x}_j(t)\|)$) con el fin de observar de una manera más clara su convergencia. En la figura es evidente que ambos observadores convergen a una región acotada, sin embargo, el que presenta un valor cercado al origen es el ultimo predictor $\|\tilde{x}_m(t)\|$, debido a que éste proporciona la estimación del vector libre de retardo. La región de convergencia se puede reducir incrementando los valores en el parámetro de ajuste (θ) como se demostró en la sección 3.1.

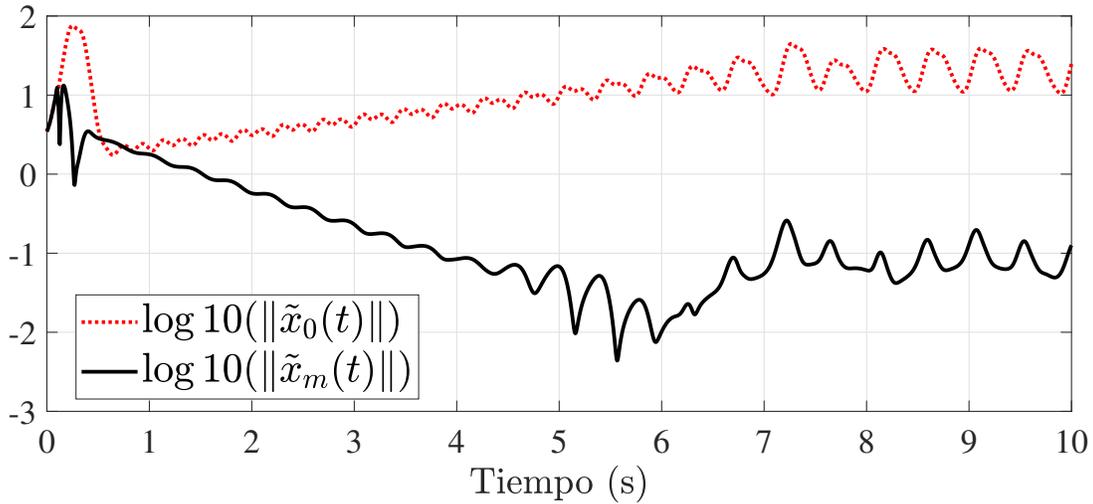


Fig. 4.6. Comparativa de la norma del error de observación considerando la base y el último predictor de la cascada

4.2.1. Comparación con diferentes valores de λ

En esta sección se mostrará el comportamiento del error de observación ante diferentes valores en el parámetro λ , el cual está presente en la matriz \bar{A}_j de cada predictor del observador en cascada. Se busca demostrar que ante valores altos en λ se logra una convergencia rápida. Para esto se considera el observador en cascada de la sección pasada ($\theta = 5$, $m = 5$) pero se consideran tres diferentes valores de λ ($\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 5$). Las condiciones iniciales son las siguientes:

$$\hat{x}_j(s) = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3]^T = [-1 \quad -1 \quad -1]^T, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \in [-\tau/m, 0]$$

$$S(0) = 1 \times 10^{-3} I_{3 \times 3}.$$

En la Figura 4.7 se muestra la comparativa de la norma del error de observación $\tilde{x}_m(t) = \hat{x}_m(t) - x(t)$ donde $\hat{x}_m(t)$ es el vector de estado obtenido con cada parámetro de λ y $x(t)$ el vector de estado del sistema original. Se muestra que ante valores de $\lambda = 1$ y $\lambda = 5$, la norma del error se acerca rápidamente a una región cerca del origen, a diferencia que con valores de $\lambda = 0.5$. Es importante resaltar que en todos los casos el observador converge. El utilizar valores relativamente grandes de λ puede dar lugar a valores altos para el valor de Γ definido por (4.13) lo que pone en riesgo que se cumpla con lo mostrado en (4.20). Esto es indispensable para la convergencia del observador de acuerdo a lo propuesto en el Teorema 4.1.1.

4.2. SIMULACIÓN 5. APLICACIÓN AL SISTEMA CAÓTICO DE LORENZ CON RETARDO

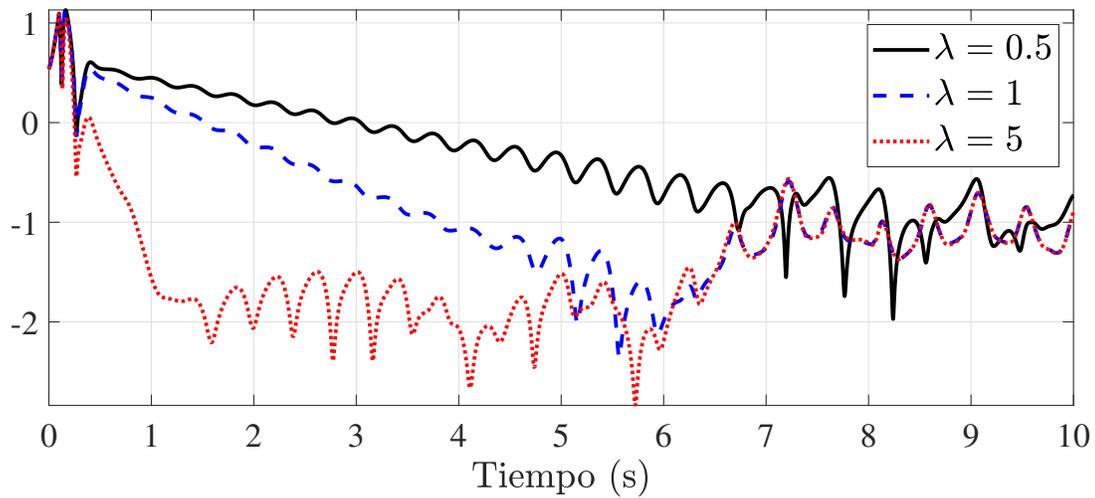


Fig. 4.7. Comparativa de la norma del error ($\log_{10}(\|\tilde{x}_m(t)\|)$) considerando diferentes valores de λ .

Conclusión. Se logró demostrar que con el uso de un observador en cascada se logra obtener la estimación del vector de estado libre de retardo de un sistema que presenta retardo en su señal de salida. Se demuestra que en presencia de incertidumbres el observador converge a una región acotada cerca del origen. De igual forma, se demuestra que λ influye en la rapidez de convergencia del observador. Sin embargo, al incrementar el valor de λ es necesario asegurar que se cumpla lo mostrado en el Teorema 4.1.1.

4.3. Observador para sistemas no lineales inciertos con salidas muestradas con retardo

Se considera un sistema no lineal MIMO incierto con la salida muestrada y con retardo, mostrado a continuación:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), x(t))x(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y_\tau(t_k) = Cx(t_k - \tau) = x^1(t_k - \tau) \end{cases} \quad (4.66)$$

con:

$$A(u(t), x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u(t), x^{(1)}(t)) & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & A_{q-1}(u, x^{(1)}(t), \dots, x^{(q-1)}(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n_q} \\ \vdots \\ 0_{n_{q-1} \times n_q} \\ I_{n_q} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(u(t), x(t)) = \begin{bmatrix} \varphi(u(t), x^{(1)}(t)) \\ \varphi(u(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)) \\ \vdots \\ \varphi_n(u(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(q-1)}(t)) \\ \varphi(u(t), x(t)) \end{bmatrix}, C = [I_{n_1 \times n_1} \quad 0_{n_1 \times n_2} \quad \dots \quad 0_{n_1 \times n_q}]$$

donde el estado es $x(t) = (x^1, x^2, \dots, x^q)^T \in \mathbb{R}^n$, $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, q$ con $n_1 = p$ y $\sum_{i=1}^q n_i = n$ y cada $A_i(u, x)$ es una matriz triangular (de dimensión $n_i \times n_{i+1}$) con respecto a $x(t)$, es decir, $A_i(u, x) = A(u, x^1, \dots, x^k)$, $i = 1, \dots, q - 1$; $\varphi(x(t), u(t))$ es una función que tiene una estructura triangular con respecto a $x(t)$; $u(t) \in \mathbb{R}^s$ es la entrada del sistema; $\varepsilon(t) : [-\tau, +\infty[, \mapsto \mathbb{R}^p$ es una función que describe las incertidumbres del sistema y puede depender de los estados y parámetros, y $y_\tau(t_k) \in \mathbb{R}^p$ es la salida adquirida en instantes de tiempo con retardo de tiempo, donde $\tau > 0$ es el retardo de tiempo. Además, $0 \leq t_0 < \dots < t_k < \dots$, $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$ y $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ y existe $0 < \Delta_m \leq \Delta_{\text{máx}} < +\infty$ lo que corresponde a

$$0 < \Delta_m \leq \Delta_k = t_{k+1} - t_k \leq \Delta_{\text{máx}}, \quad \forall k \geq 0. \quad (4.67)$$

Se considera que este sistema cumple con las suposiciones **A4.1.1-A4.1.3**, propuestas en (Besançon et al., 1996; Farza et al., 2015a) y con la condición de excitación persistente **A4.1.4** presentada en (Hernández-González et al., 2016) con lo que se asegura la observabilidad del sistema.

Dado que el sistema presenta un retardo en la señal de salida, se propone como solución (para obtener el vector de estado libre de retardo) un observador en cascada, conformado por $m + 1$

subsistemas. Debido a que la señal de salida del sistema solo está disponible en instantes de tiempo discretos, el observador como base tiene que ser capaz de considerar esto para proporcionar la salida de forma continua, es decir, será un observador de alta ganancia en su versión continua-discreta. El retardo de la señal será compensado por los subsistemas restantes del observador en cascada, en donde, el ultimo subsistema dará la estimación del vector de estado libre de retardo.

4.3.1. Diseño del observador en cascada para salidas muestreadas

En este análisis se usará la notación utilizada en (Farza et~al., 2018; Hernández-González et~al., 2016; Germani et~al., 2002):

$$\begin{aligned} x_j(t) &= x(t - \tau + \frac{j}{m}\tau), \quad u_j(t) = u(t - \tau + \frac{j}{m}\tau), \\ \varepsilon_j(t) &= \varepsilon(t - \tau + \frac{j}{m}\tau), \quad j = 0, \dots, m, \quad t \geq -\frac{j}{m}\tau. \end{aligned} \quad (4.68)$$

El cambio de variables en el observador en cascada son:

$$x_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) = x_{j-1}(t) \text{ y } u_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) = u_{j-1}(t) \quad (4.69)$$

La estructura general de los observadores para el sistema (4.66) está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = A(u_j(t), \hat{x}_j(t))\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - G_j, \quad j = 0, \dots, m \quad (4.70)$$

donde $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^n$ es el estado estimado de x_j y G_j es la ganancia del observador.

La base del observador en cascada es un observador diseñado utilizando el enfoque de alta ganancia. Es importante resaltar que este observador proveerá la estimación del estado de forma continua con retardo incluso en presencia de muestreo en la señal. Por lo tanto para $j = 0$, se define la ganancia G_0 como:

$$G_0(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T \eta(t) \quad (4.71)$$

donde:

$$\dot{S}(t) = \theta \left(-S(t) - A(u_0(t), \hat{x}_0(t))^T S(t) - S(t) A(u_0(t), \hat{x}_0(t))^T + C^T C \right) \quad (4.72)$$

$$\dot{\eta}(t) = -\theta C S^{-1}(t) C^T \eta(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.73)$$

$$\eta(t_k) = C \hat{x}_0(t_k) - y_\tau(t_k) \quad (4.74)$$

Las ganancias de los predictores G_j se definen para $j = 1, \dots, m$, como:

$$G_j(t) = e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left[G_{j-1}(t) + A \left(u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - A(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \hat{x}_{j-1}(t) \right. \\ \left. + \varphi \left(u_{j-1}(t), \hat{x} \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) - \bar{A} \left(\hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) \right] \quad (4.75)$$

donde \bar{A} es una matriz de diseño de dimensión $n \times n$. Las ecuaciones del observador se inicializan como en el caso continuo mostrado en la sección 4.1. Es importante resaltar que la matriz de diseño \bar{A} ajusta la dinámica del proceso de predicción, para esto se deben de considerar que las constantes (Γ y β) deben ser de acuerdo con lo propuesto en (4.13) y (4.14).

Considerando lo anterior, se propone el siguiente teorema el cual es la quinta y principal aportación de este trabajo de tesis.

Teorema 4.3.1. *Considere el sistema (4.66), sujeto a las suposiciones **A4.1.1-A4.1.3**. Entonces para todas las entradas acotadas $(\hat{x}(t), u(t))$ que satisfacen la suposición **A4.1.4**, entonces $\exists \theta_0 > 0$; $\forall \theta \geq \theta_0$; de igual forma existe una constante $\eta_\theta > 0$ tal que si la cota suprema del diámetro de partición de la muestra $\Delta_{\text{máx}}$ satisface:*

$$\Delta_{\text{máx}} < \eta_\theta \quad (4.76)$$

y si el numero de predictores es elegido tal que:

$$\varrho \frac{\tau}{m} < 1 \quad (4.77)$$

con:

$$\varrho = \beta(\sqrt{n}(L_A + L_\varphi x_M) + \Gamma) \quad (4.78)$$

donde L_A y L_φ son constantes que satisfacen la suposición **A4.1.2**; Γ y β están definidas en (4.13) y (4.14) respectivamente, x_M es la cota del estado (4.66) definida por (4.2), entonces, para cada $j = 1, \dots, m$, se tiene el siguiente error de observación:

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \mu_j e^{-\bar{\alpha}_j t} + M_j \delta_\varepsilon, \quad (4.79)$$

donde:

$$\mu_j = \frac{1}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(\beta \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) + \varrho \int_{-\tau/m}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) \quad (4.80)$$

$$M_j = \frac{\beta}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(M_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \quad (4.81)$$

$$\bar{\alpha}_j = \min\{\bar{\alpha}_{j-1}, \bar{a}\}. \quad (4.82)$$

4.3.2. Demostración del Teorema 4.3.1

En esta sección se analizará el error de convergencia de cada subsistema j . Se define el error de observación para cada subsistema como: $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$, para $j = 0, \dots, m$. Primero se probará que el error de observación para \tilde{x}_0 convergerá a una región acotada, posteriormente se probará que convergerá para todo \tilde{x}_j , considerando que \tilde{x}_{j-1} converge a una región acotada.

Análisis de convergencia para $j = 0$

Se considerará el error de observación cuando $j = 0$, el cual será el error del primer subsistema de la cascada. Definiendo el error de observación como $\tilde{x}_0 = \hat{x}_0 - x_0$, por lo tanto $\dot{\tilde{x}}_0 = \dot{\hat{x}}_0 - \dot{x}_0$. Definiendo $\bar{x}_0(t) = \Delta_\theta \tilde{x}_0(t)$ y considerando $\Delta_\theta A(u_0, x_0) \Delta_\theta^{-1} = \theta A(u_0, x_0)$, $C \Delta_\theta^{-1} = C$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_0(t) = & \theta[A(u_0(t), \hat{x}_0(t)) - S^{-1}(t)C^T C] \bar{x}_0(t) + \theta S^{-1}(t)C^T z(t) \\ & + \Delta_\theta[\tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t))x_0(t) + \tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) - B\varepsilon(t)]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) &= A(u_0(t), \hat{x}_0(t)) - A(u_0(t), x_0(t)) \\ \tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) &= \varphi(u_0(t), \hat{x}_0(t)) - \varphi(u_0(t), x_0(t)) \end{aligned}$$

La variable auxiliar $z(t)$ está definida como:

$$z(t) = C\bar{x}_0(t) - \eta(t) \quad (4.84)$$

y de acuerdo con (4.74) se tiene que $\eta(t_k) = C\tilde{x}_0(t_k) = C\bar{x}(t_k)$, por lo tanto $z(t_k) = 0$.

Para comprobar la estabilidad del observador se propone la siguiente función de Lyapunov $V(\bar{x}_0(t), t) = \bar{x}_0^T(t)S(t)\bar{x}_0(t)$, donde $S(t)$ está gobernada por (4.72). Obteniendo la derivada de la función candidata de Lyapunov:

$$\dot{V}(\bar{x}_0(t), t) = 2\bar{x}_0^T(s)S(t)\dot{\bar{x}}_0(s) + \bar{x}_0^T(s)\dot{S}(t)\bar{x}_0(s) \quad (4.85)$$

Sustituyendo (4.72) y (4.83) en (4.85), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}_0(t), t) \leq & -\theta V(\bar{x}_0, t) + 2\bar{x}_0^T \theta C^T z(t) + 2\bar{x}_0^T S(t) \Delta_\theta A(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) x_0(t) \\ & + 2\bar{x}_0^T S(t) \Delta_\theta \varphi(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) + 2\bar{x}_0^T S(t) \Delta_\theta B \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (4.86)$$

Para continuar con el análisis se debe evaluar la variable auxiliar $z(t)$, para esto se parte de la definición de $\eta(t)$ y $z(t)$ dadas respectivamente por (4.73) y (4.84), de igual forma se considera (4.83), obteniendo:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & C \left[\theta A(u_0(t), \hat{x}_0(t)) \bar{x}_0(t) + \Delta_\theta \tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) x_0 + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) \right] \\ & + C \Delta_\theta B \varepsilon(t). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Considerando las propiedades de las matrices, se obtiene la siguiente igualdad $C \Delta_\theta B = 0$, por lo tanto, lo mostrado en (4.87) queda de la siguiente manera:

$$\dot{z}(t) = C \left[\theta A(u_0(t), \hat{x}_0(t)) \bar{x}_0(t) + \Delta_\theta \tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) x_0(t) + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) \right] \quad (4.88)$$

Integrando (4.88), se obtiene:

$$z(t) = C \int_{t_k}^t \left[\theta A(u_0(s), \hat{x}_0(s)) \bar{x}_0(s) + \Delta_\theta \tilde{A}(u_0(s), \hat{x}_0(s), x_0(s)) x_0(s) + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u_0(s), \hat{x}_0(s), x_0(s)) \right] ds. \quad (4.89)$$

Se procede a obtener la norma de $z(t)$ y se define el valor mínimo de la solución de (4.72):

$$\lambda_{\min}(S) \geq \frac{e^{T^*} \delta_0}{\alpha(\theta)}, \quad (4.90)$$

Con esto se obtiene:

$$\|z(t)\| \leq \frac{\theta \tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}_0(s), s)} ds. \quad (4.91)$$

Se procede a obtener la norma del término $\|2\theta \bar{x}_0^T C^T z(t)\|$, obteniendo:

$$\|2\theta \bar{x}_0^T(t) C^T z(t)\| \leq 2\theta \left[\frac{\alpha(\theta)(\theta \tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)) e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}_0(s), s)} ds \right] \sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \quad (4.92)$$

Procediendo como en (Farza et al., 2009), se puede demostrar que para $\theta > 0$ se tiene:

$$\|2\bar{x}_0^T(t) S(t) \Delta_\theta \tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) x_0(t)\| \leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S) e^{T^*}}{\delta_0}} V(\bar{x}_0(t), t) L_A x_M \quad (4.93)$$

$$\|2\bar{x}_0^T(t) S(t) \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t))\| \leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S) e^{T^*}}{\delta_0}} L_\varphi V(\bar{x}_0(t), t). \quad (4.94)$$

4.3. OBSERVADOR PARA SISTEMAS NO LINEALES INCIERTOS CON SALIDAS MUESTREADAS CON RETARDO

Basado en la suposición **A4.1.3**, en donde se asume que la función desconocida es acotada, se puede demostrar que para $\theta > 0$, como en (Bouraoui et~al., 2015):

$$\|2\bar{x}_0^T(t)S(t)\Delta_\theta B\varepsilon(t)\| \leq \frac{2}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \delta_\varepsilon. \quad (4.95)$$

Sustituyendo (4.92), (4.93), (4.94) y (4.95) en (4.86), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)}}{dt} &\leq -\theta \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \right) \sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \\ &\quad + \frac{2\theta\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}_0(s), s)} ds \\ &\quad + \frac{2}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \delta_\varepsilon \end{aligned} \quad (4.96)$$

Agrupando:

$$a_\theta = \theta \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \right) \quad (4.97)$$

$$b_\theta = \frac{2\theta\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0} \quad (4.98)$$

$$c_\theta = \frac{2}{\theta^{q-1}} \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \delta_\varepsilon \quad (4.99)$$

Sustituyendo (4.97), (4.98) y (4.99) en (4.96), se obtiene:

$$\frac{d\sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)}}{dt} \leq -a_\theta \sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} + b_\theta \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}_0(s), s)} ds + c_\theta \quad (4.100)$$

Se asume que la cota máxima del diámetro de muestreo Δ_{\max} satisface la siguiente condición $\Delta_{\max} < \frac{a_\theta}{b_\theta}$, es decir, $\frac{b_\theta \Delta_{\max}}{a_\theta} < 1$, o bien:

$$\Delta_{\max} \frac{2\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0 \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\min}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \right)} < 1 \quad (4.101)$$

es claro que el término $b_\theta > 0$ y que para valores grandes en θ se tiene $a_\theta > 0$ ya que se cumple $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0$ de acuerdo a **A4.1.4**. Considerando el Lema 2.1 propuesto en (Bouraoui et~al., 2015), se obtiene:

$$\sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \leq e^{-\chi_\theta(\Delta_{\max})t} \sqrt{V(\bar{x}_0(0), 0)} + c_\theta \frac{2 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\max})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\max})\Delta_m}} \quad (4.102)$$

donde:

$$\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}}) = (a_\theta - b_\theta \Delta_{\text{máx}}) e^{-a_\theta \Delta_{\text{máx}}}.$$

La constante η_θ que se presenta en el Teorema 4.3.1 se define como:

$$\eta_\theta = \frac{a_\theta}{b_\theta} = \frac{\delta_0 \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\text{máx}}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \right)}{2\alpha(\theta) (\theta\tilde{a} + \sqrt{n} [L_A x_M + L_\varphi]) e^{T^*}}$$

donde se tiene que respetar que $\Delta_{\text{máx}} < \eta_\theta$. Se busca regresar a términos del error, para esto se tiene $\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \|\bar{x}_0(t)\| \leq \theta^{q-1} \|\tilde{x}_0(t)\|$, por lo tanto:

$$\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \theta^q \zeta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})t} \|\tilde{x}_0(0)\| + \Pi(\Delta_m, \Delta_{\text{máx}}) \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \delta_\varepsilon \quad (4.103)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Pi(\Delta_m, \Delta_{\text{máx}}) &= 2\theta\zeta\Delta_{\text{máx}} \frac{2 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}{1 - e^{-\chi_\theta(\Delta_{\text{máx}})\Delta_m}}, \\ \zeta &= \sqrt{\frac{\lambda_{\text{máx}}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} \end{aligned}$$

De este análisis se comprueba que el error de observación convergerá a una región acotada que depende de las incertidumbres y de la cota del tiempo de muestreo ($\Delta_{\text{máx}}$). Reescribiendo el error de observación de la siguiente forma:

$$\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \mu_0 e^{-\bar{\alpha}_0 t} + M_0 \delta_\varepsilon \quad (4.104)$$

con:

$$\mu_0 = \theta^q \zeta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \|\tilde{x}_0(0)\| \quad (4.105)$$

$$M_0 = \Pi(\Delta_m, \Delta_{\text{máx}}) \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \quad (4.106)$$

$$\bar{\alpha}_0 = \chi_\theta(\Delta_{\text{máx}}) \quad (4.107)$$

Con esto se demuestra el error de convergencia para $\tilde{x}_0(t)$. Una versión extendida y explícita de este análisis se muestra en el capítulo 3.3, ya que el observador de la base es el mostrado ahí para el caso libre de retardo. Ahora se probará el error de observación para $j = 1, \dots, m$.

Análisis de convergencia para $j = 1, \dots, m$

Se procede a probar por inducción la convergencia de los subsistemas j -ésimos. Se asumirá que para $1 \leq j \leq m - 1$, el error \tilde{x}_{j-1} convergerá exponencialmente a una región acotada. Si es así, entonces \hat{x}_j convergerá. De igual forma, se probará el término de corrección de cada subsistema para $G_j, j = 1, \dots, m$ mostrada en (4.75). El propósito es diseñar un predictor que estime el estado x_j el cual se presenta a continuación:

$$\dot{x}_j(t) = A(u_j(t), x_j(t))x_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) + B\varepsilon_j(t). \quad (4.108)$$

El sistema anterior se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{x}_j(t) = \bar{A}x_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) + (A(u_j(t), x_j(t)) - \bar{A})x_j(t) + B\varepsilon_j(t) \quad (4.109)$$

donde $\bar{A} = -\lambda I_n$ es una matriz Hurwitz de dimensiones $n \times n$, I_n es una matriz identidad de dimensión $n \times n$ y $\lambda > 0$ es un valor constante positivo. Tomando esto en consideración, el estado $x_j(t)$ se puede expresar como:

$$x_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}x_{j-1}(t) + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A(u_j(s), x_j(s)) - \bar{A})x_j(s) + B\varepsilon_j(s) \right) ds. \quad (4.110)$$

Se escribe el observador imitando la estructura del predictor (4.109), obteniendo:

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = \bar{A}\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) - G_j(t) + (A(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - \bar{A})\hat{x}_j(t) \quad (4.111)$$

en donde la solución queda como se muestra a continuación:

$$\hat{x}_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\hat{x}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - G_j(s) + (A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A})\hat{x}_j(s) \right) ds \quad (4.112)$$

Ahora imitando la estructura para dos predictores \hat{x}_j y \hat{x}_{j-1} para todo $j = 1 \dots, m$. Se obtiene:

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\hat{x}_{j-1} + r_j(t) + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) + (A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A})\hat{x}_j(s) \right) ds \quad (4.113)$$

Se considera a cada $r_j(t), j = 1 \dots, m$ como funciones, las cuales son diferenciables con respecto al tiempo y las cuales deben ser determinadas simultáneamente con las ganancias G'_j s dadas en (4.11). Es importante resaltar que estas funciones solo son usadas en el análisis de convergencia y no aparecen en la estructura de los predictores.

Las ecuaciones del observador para el sistema (4.66) son:

$$OBS : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_j(t) &= A(u_j(t), \hat{x}_j(t))\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) - G_j(t), \quad j = 0, \dots, m \\ G_0 &= \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T \eta(t), \text{ y para } j = 1, \dots, m, \\ G_j &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left(G_{j-1}(t) + A \left(u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right. \\ &\quad \left. - A(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t))\hat{x}_{j-1}(t) + \varphi \left(u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) - \bar{A} \left(\hat{x}_j \left(t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) \right) \end{cases} \quad (4.114)$$

Definiendo el error de estimación como $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$ y sustituyendo la Ecs. (4.110) y (4.113) se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \tilde{x}_{j-1}(t) + r_j(t) + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) + \tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))x_j(s) \right. \\ &\quad \left. + \left(A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A} \right) \tilde{x}_j(s) - B\varepsilon_j(s) \right) ds \end{aligned} \quad (4.115)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) &= \varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \varphi(u_j(s), x_j(s)) \\ \tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) &= A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - A(u_j(s), x_j(s)). \end{aligned}$$

Partiendo del hecho de que se elige r_j , $j = 1, \dots, m$ tal que $\dot{r}_j(t) = \bar{A}r_j(t)$, se tiene:

$$\|r_j(t)\| \leq \beta e^{-\bar{a}t} \|r_j(0)\|, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.116)$$

De igual forma, la desigualdad mostrada en (4.14) es válida para toda j . Partiendo de (4.115), se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \tilde{x}_{j-1}(t) + r_j(t) + \int_{t-\tau/m}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left(\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) + \tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))x_j(s) \right. \\ &\quad \left. + \left(A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A} \right) \tilde{x}_j(s) - B\varepsilon_j(s) \right) ds \end{aligned} \quad (4.117)$$

Ahora, se obtiene la norma del error \tilde{x}_j , para esto se consideran las Ecs. (4.104), (4.105), (4.106) y (4.107), obteniendo:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \beta e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a}_{j-1}t} + M_{j-1} \delta_\varepsilon \right) + \beta e^{-\bar{a}t} \|r_j(0)\| \\ &\quad + \int_{t-\tau/m}^t \|e^{\bar{A}(t-s)}\| \left(\|\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) + \tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \|x_j(s)\| \right. \\ &\quad \left. + \left\| \left(A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A} \right) \tilde{x}_j(s) + B\varepsilon_j(s) \right\| \right) ds \end{aligned} \quad (4.118)$$

Debido a que la matriz B tiene la propiedad $\|B\| = 1$ y considerando:

$$\|\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \leq \sqrt{n}L_\varphi \|\tilde{x}_j(s)\| \quad (4.119)$$

$$\|\tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \|x_j(s)\| \leq \sqrt{n}L_A \|\tilde{x}_j(s)\| x_M \quad (4.120)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \beta \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} e^{-\bar{\alpha}_{j-1}t} + M_0 e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \delta_\varepsilon \right) + \beta e^{-\bar{a}t} \|r_j(0)\| \\ &\quad + \beta [\sqrt{n}(L_\varphi + L_A x_M) + \Gamma] \int_{t-\tau/m}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_j(s)\| ds + \beta \int_{t-\tau/m}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\varepsilon_j(s)\| ds \\ \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \beta \left(\mu_0 e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) e^{-\bar{\alpha}_j t} + \beta \left(M_0 e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \delta_\varepsilon + \varrho \int_{t-\tau/m}^t e^{-\bar{\alpha}(t-s)} \|\tilde{x}_j(s)\| ds \end{aligned} \quad (4.121)$$

donde $\varrho = \beta [\sqrt{n}(L_\varphi + L_A x_M) + \Gamma]$ y $\bar{\alpha}_j = \min\{\bar{\alpha}_{j-1}, \bar{a}\}$. Ahora eligiendo como $z_j(t) = e^{\bar{\alpha}_j t} \|\tilde{x}_j(t)\|$ y

$$K_j(t) = \beta \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) + \beta \left(M_{j-1} e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \delta_\varepsilon e^{\bar{\alpha}_j t}. \quad (4.122)$$

Considerando esto la ecuación anterior se reescribe como:

$$z_j(t) \leq K_j(t) + \varrho \int_{t-\tau/m}^t z_j(s) ds \quad (4.123)$$

Considerando que se cumple la desigualdad dada por (4.77), se cumple las condiciones del Lema A.1 y se puede aplicar este Lema propuesto en (Farza et al., 2018), se obtiene:

$$z_j(t) \leq \frac{1}{1 - \varrho\frac{\tau}{m}} \left(K_j(t) + \varrho \int_{-\tau/m}^0 z_j(s) ds \right) \quad (4.124)$$

Regresando a términos del error $\|\tilde{x}_j(t)\|$ la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \frac{1}{1 - \varrho\frac{\tau}{m}} \left(\beta \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) + \varrho \int_{-\tau/m}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) e^{-\bar{\alpha}_j t} \\ &\quad + \frac{\beta}{1 - \varrho\frac{\tau}{m}} \left(M_{j-1} e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \delta_\varepsilon \end{aligned} \quad (4.125)$$

Reescribiendo se obtiene:

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \mu_j e^{-\bar{\alpha}_j t} + M_j \delta_\varepsilon \quad (4.126)$$

con:

$$\mu_j = \frac{1}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(\beta \left(\mu_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) + \varrho \int_{-\tau/m}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) \quad (4.127)$$

$$M_j = \frac{\beta}{1 - \varrho \frac{\tau}{m}} \left(M_{j-1} e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \quad (4.128)$$

Con esto se comprueba que el error convergerá a una región acotada cerca del origen. Esto finaliza la demostración del Teorema 4.3.1. ■

4.4. Simulación 6. Aplicación al modelo de Lorenz con salida muestreada y con retardo

Objetivo. Demostrar que el observador en cascada es capaz de estimar el vector de estado de forma continua en presencia de muestreo variable aleatorio y retardo, donde el observador convergerá a una región acotada cerca del origen en presencia de incertidumbres. De igual forma, e desea demostrar que con el cambio de coordenadas adecuado es posible la estimación de un parámetro desconocido del sistema de Lorenz.

En esta simulación se consideran dos casos de diseño de un observador para el sistema caótico incierto de Lorenz: el primer caso considera la forma mostrada en la sección 4.2, en donde se demostrará que el observador converge a una región acotada. En el segundo caso se considera que un parámetro del sistema es desconocido. En ambos casos la señal de salida del sistema sólo esta disponible en instantes de tiempo discreto y presenta un retardo de tiempo constante. Ambas simulaciones se realizan con el software de MATLAB 2018b. El sistema libre de retardo se simula utilizando la función ODE23 y el observador se simula utilizando la función DDE23 (ver Anexo C), la cual sirve para simular sistemas con retardos. Se considera un tiempo de simulación total de 10s y un paso de integración de $h = 0.002s$.

4.4.1. Sistema con señal incierta

Se considera el sistema incierto de Lorenz de la siguiente forma:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + \varphi(x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y_\tau(t_k) = x_1(t_k - \tau) = x_{1\tau}(t_k) \end{cases}, \quad (4.129)$$

donde:

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x(t)) = \begin{bmatrix} -\kappa_1 x_1(t) \\ \kappa_2 x_1(t) - x_2(t) \\ x_1(t)x_2(t) - \kappa_3 x_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

donde el vector de estados es $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^n$, $n = 3$. La salida solo está disponible en instantes de tiempo discreto y presenta un retardo, ésta se representa como $y_\tau(t_k) = x_{1\tau}(t_k)$, donde

4.4. SIMULACIÓN 6. APLICACIÓN AL MODELO DE LORENZ CON SALIDA MUESTREADA Y CON RETARDO

$\tau = 0.2s$ es el retardo. Los parámetros del sistema se muestran en la Tabla 4.1. La incertidumbre del sistema es $\varepsilon(t) = 0.2 \sin(t) + |0.2 \cos(t)|$. La matriz $A(x(t))$ y el vector de funciones $\varphi(x(t))$ muestran la forma triangular con respecto al vector de estados y la incertidumbre tiene la forma presentada en **A4.1.3**. Considerando lo anterior, es posible diseñar un observador en cascada como el mostrado en (4.114). Este observador tendrá en la base del observador en cascada un observador como el mostrado en la sección 3.3, el cual estimará la señal de forma continua con retardo y por medio los subsistemas (predictores) se irá compensando el retardo de la señal en un horizonte de τ/m . El ultimo predictor de la cascada dará la estimación de forma continua libre de retardo. En esta simulación, las condiciones iniciales para el sistema son:

$$x(0) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [1 \quad 1 \quad 1]^T.$$

El parámetro de ajuste del observador se ajusta a un valor de $\theta = 5$, la matriz Δ_θ queda de la siguiente forma:

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta^2} \end{bmatrix}$$

Para esta simulación se considera que el observador en cascada tiene 30 predictores ($m = 30$), tal que se considere lo presentado en el Teorema 4.3.1. Las condiciones iniciales del observador en cascada son:

$$\begin{aligned} \hat{x}_j(s) &= [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3]^T = [-1 \quad -1 \quad -1]^T, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \in [-\tau/m, 0] \\ S(0) &= 1 \times 10^{-3} I_{3 \times 3}. \end{aligned}$$

Las matrices \bar{A}_j presentes en cada predictor se consideran como:

$$\bar{A}_j = -\lambda I_{3 \times 3}, \quad \lambda = 1.$$

Se considera que la salida es muestreada en un intervalo variable $\Delta \in [0.01, 0.02]s$, este intervalo cambia cada 0.5s, su perfil se muestra en la Figura 4.8. En la Figura 4.9 se muestra la trayectoria del sistema simulado y la trayectoria estimada de forma continua por medio del último predictor del observador en cascada. Se muestra que el observador converge sin conocer la señal libre de retardo, ya que se alimenta con la salida muestreada y con retardo, logrando converger a la trayectoria del sistema.

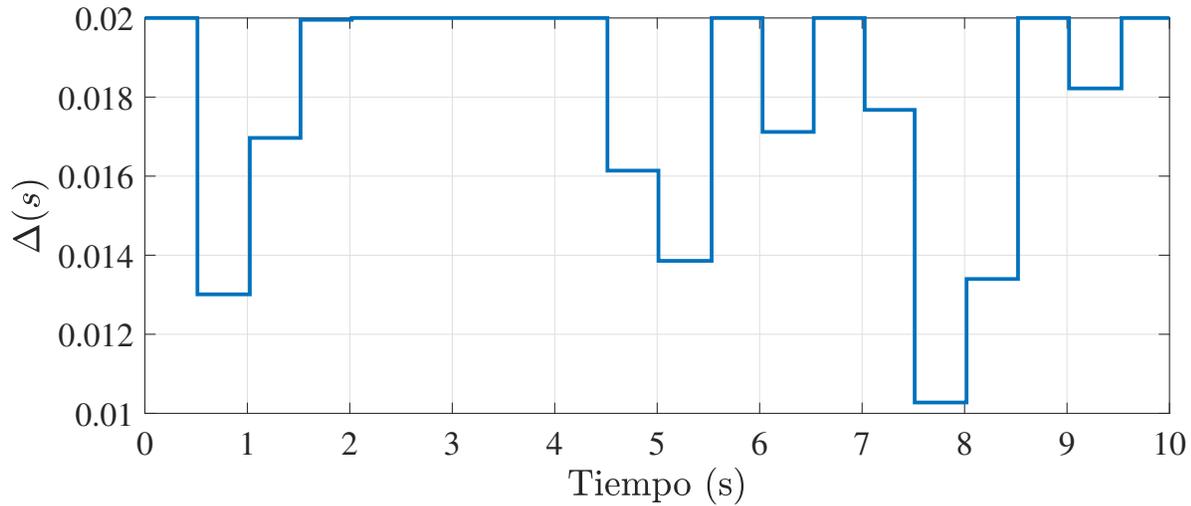


Fig. 4.8. Perfil del muestreo variante Δ

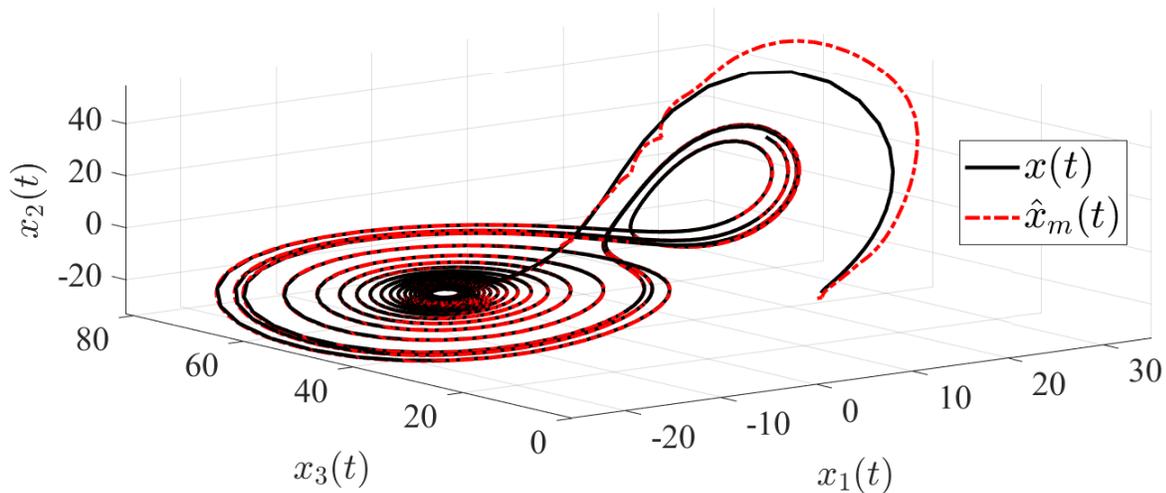


Fig. 4.9. Trayectoria del sistema libre de retardo y la estimada con muestreo variable.

En la Figura 4.10 se muestra: la salida continua y libre de retardo no disponible del sistema $x_1(t)$; la salida del sistema $x_{1_r}(t_k)$ disponible en instantes aleatorios de tiempo y con retardo, al igual que la salida estimada por el ultimo subsistema $\hat{x}_{m_1}(t)$ del observador en cascada. En las Figuras 4.11 y 4.12 se muestra la estimación de los estados x_2 y x_3 por parte del último predictor del observador en cascada, este logra la estimación de los estados libres de retardo de forma continua, los cuales no están disponibles.

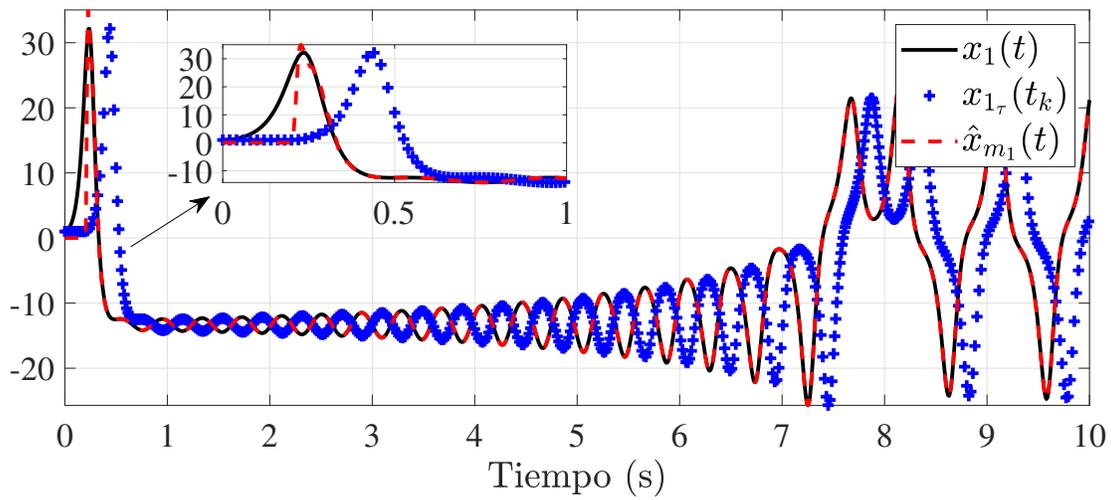


Fig. 4.10. Estimación de la salida libre de retardo con muestreo variable.

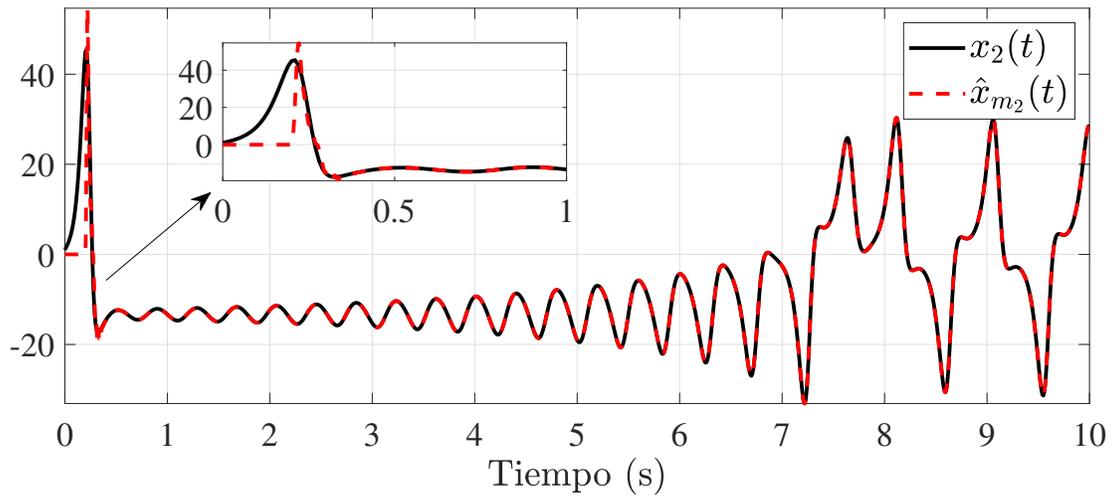


Fig. 4.11. Estimación del estado $x_2(t)$ libre de retardo con muestreo variable.

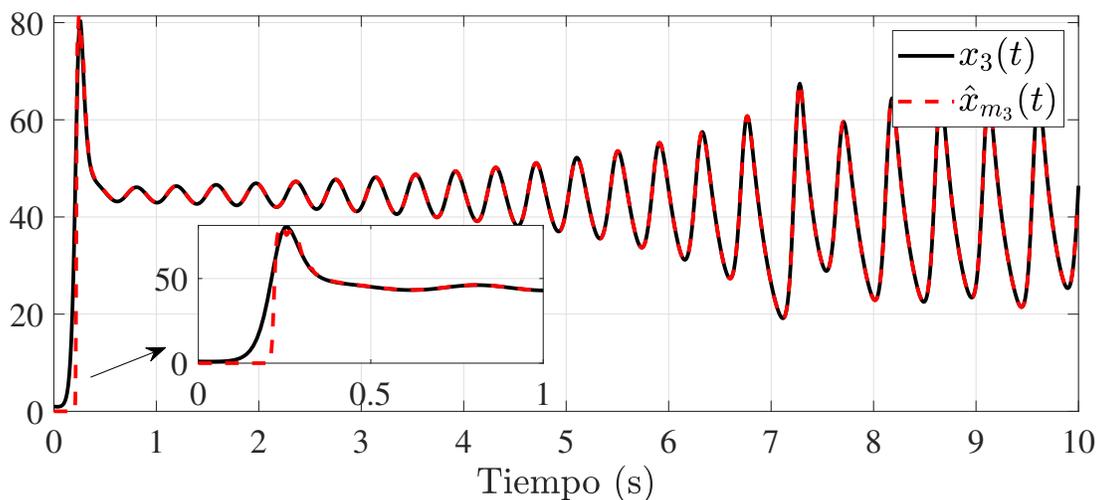


Fig. 4.12. Estimación del estado $x_2(t)$ libre de retardo con muestreo variable.

En la Figura 4.13 se muestra la estimación por parte de la base de la cascada, el cual es un observador de la forma 3.29 mostrado en la sección 3.3. Con esto se busca el obtener de forma continua la estimación de la señal con retardo, ya que la señal con la que se alimenta al observador en cascada solo está disponible en ciertos instantes de tiempo.

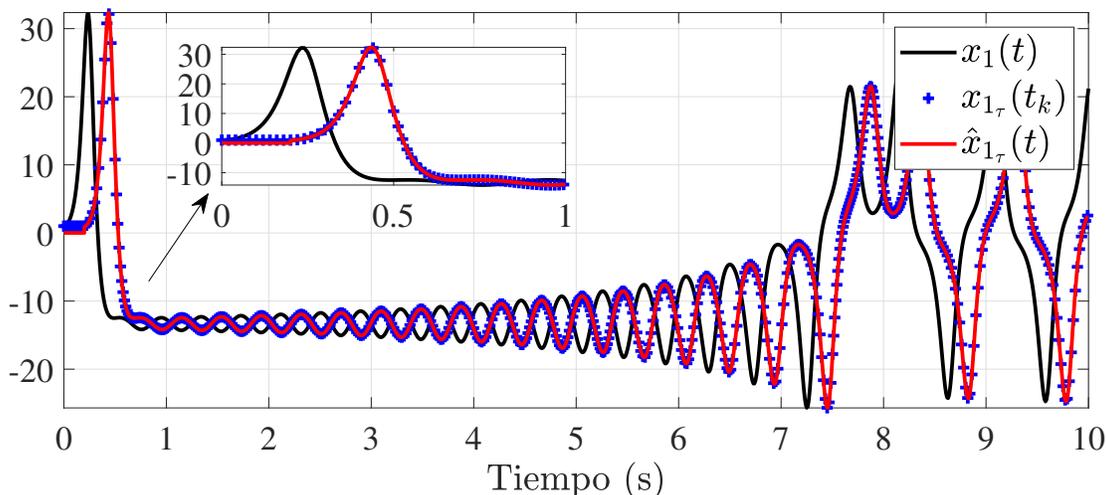


Fig. 4.13. Estimación de la salida continua con retardo en presencia de muestreo variable.

En la Figura 4.14 se muestra la norma del error de observación del último predictor $\|\tilde{x}_m(t)\|$. El error de observación se define como $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x$, donde $j = m$ es el vector de estado estimado

en el último predictor de la cascada y $x(t)$ es el estado del sistema original libre de retardo. Es importante resaltar que la norma del error se mostrará de forma logarítmica en base 10 ($\log 10$) con el fin de observar de una manera más clara su convergencia. En esta figura se muestra que el observador converge a una región acotada debido a la incertidumbre que se presenta en el sistema original. Es importante resaltar que se logra la convergencia a pesar de que la señal es muestreada en instantes de tiempo aleatorios. Con esto se valida el funcionamiento del observador mostrado en la sección 3.3 ante muestreo aleatorio, ya que este observador es el que se encuentra en la base de la cascada.

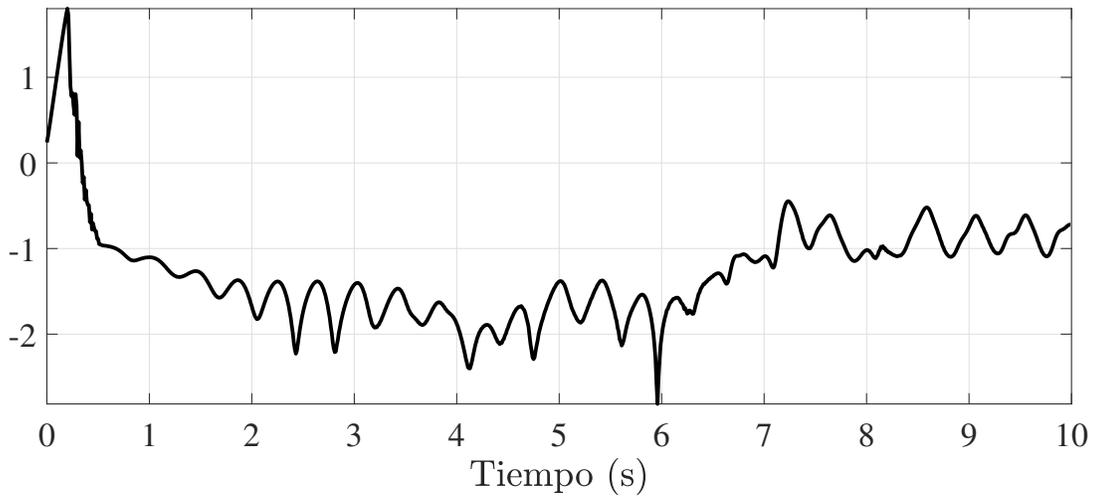


Fig. 4.14. Norma del error de estimación de forma logarítmica

Comparativa ante diferentes valores de m

En esta sección se mostrará el comportamiento del error de observación ante diferentes valores en los subsistemas de la cascada m . Se busca demostrar que ante valores altos de m se logra una convergencia más cercana al origen en presencia de retardos relativamente grandes. Para esto se considera el observador en cascada de la sección pasada ($\theta = 5$, $\lambda = 1$), considerando igualmente un intervalo aleatorio de muestreo Δ , pero se consideran tres diferentes valores de m ($m = 10, m = 15$ y $m = 30$). Las condiciones iniciales son las siguientes:

$$\hat{x}_j(s) = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3]^T = [-1 \quad -1 \quad -1]^T, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \in [-\tau/m, 0]$$

$$S(0) = 1 \times 10^{-3} I_{3 \times 3}.$$

4.4. SIMULACIÓN 6. APLICACIÓN AL MODELO DE LORENZ CON SALIDA MUESTREADA Y CON RETARDO

En la Figura 4.15 se muestra la comparativa de la norma del error de observación $\tilde{x}_j(t) = \hat{x}_j(t) - x(t)$. Con $j = m$ se obtiene el vector de estado en el ultimo predictor de la cascada, siendo $x(t)$ el vector de estado del sistema original. Se muestra que ante valores de $m = 15$ y $m = 30$, la norma del error se acerca rápidamente a una región cerca del origen, a diferencia que con valores de $m = 10$. Es importante resaltar que en todos los casos el observador converge. Se observa que con $m = 15$ y $m = 30$, el observador converge a una región muy cercana, sin embargo, se muestra una diferencia en los primeros 2 segundos, ya que con $m = 30$ se ve una convergencia más suave a diferencia que con $m = 15$. El observador con $m = 10$ converge a una región más alejada debido a que el retardo en el sistema es grande y esta cantidad de subsistemas no logran compensar todo el retardo. El utilizar valores relativamente grandes de m permiten compensar el incremento del retardo en el sistema, ya que al incrementar los subsistemas de la cascada se logra cumplir con lo mostrado en (4.77). Esto es indispensable para la convergencia del observador de acuerdo a lo propuesto en el Teorema 4.3.1.

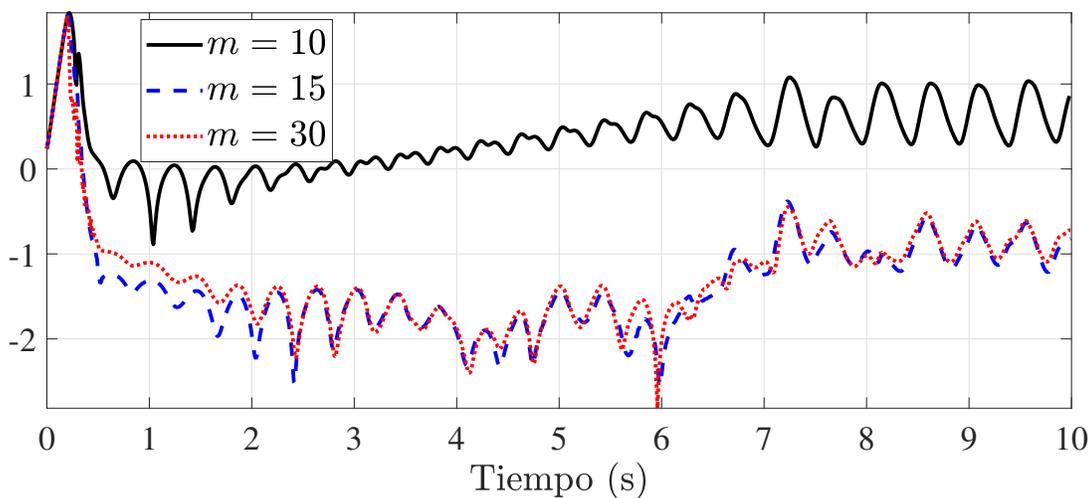


Fig. 4.15. Comparativa de la norma del error de forma logarítmica ante diferentes valores de m .

4.4.2. Sistema con parámetro desconocido

En esta sección se considera el sistema caótico de Lorenz mostrado a continuación:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \kappa_1(x_2(t) - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \kappa_2 x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - \kappa_3 x_3(t) \\ y_\tau(t_k) = x_1(t_k - \tau) = x_{1_\tau}(t_k) \end{cases} \quad (4.130)$$

donde el vector de estado es $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^n$, $n = 3$. Este sistema se considera autónomo, por lo tanto no tiene entrada. La salida del sistema es muestreada y tiene un retardo con un valor de $\tau = 0.2s$. Se considera que el parámetro κ_3 es desconocido, por lo tanto el sistema queda:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \kappa_1(x_2(t) - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \kappa_2 x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) + \varepsilon(t) \\ y_\tau(t_k) = x_{1_\tau}(t_k) \end{cases} \quad (4.131)$$

Considerando lo anterior, el sistema (4.130) se puede ver como un sistema incierto de la forma:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + \varphi(x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y_\tau(t_k) = x_1(t_k - \tau) = x_{1_\tau}(t_k) \end{cases}, \quad (4.132)$$

donde:

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x(t)) = \begin{bmatrix} -\kappa_1 x_1(t) \\ \kappa_2 x_1(t) - x_2(t) \\ x_1(t)x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

En este caso la función de incertidumbre depende de un parámetro y un estado $\varepsilon(t) = -\kappa_3 x_3(t)$. Se podría considerar un valor arbitrario para el valor de κ_3 y diseñar un observador de la forma (4.114), el cual convergerá a una región acotada. Sin embargo, debido al tipo de sistema, esta región sería grande. Es por esto que se pretende aprovechar la estructura de los sistemas no uniformemente observables y estimar este parámetro desconocido. Para esto se propone el siguiente vector de estado:

$$\psi(t) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \kappa_3]. \quad (4.133)$$

4.4. SIMULACIÓN 6. APLICACIÓN AL MODELO DE LORENZ CON SALIDA MUESTREADA Y CON RETARDO

Entonces el sistema (4.132) se puede reescribir considerando el vector de estado mostrado en (4.133), quedando:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{\psi}(t) = A(\psi(t))\psi(t) + \varphi(\psi(t)) \\ y_\tau(t_k) = C\psi(t_k - \tau) = \psi_{1\tau}(t_k) \end{cases}, \quad (4.134)$$

donde:

$$A(\psi(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\psi_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\psi_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \varphi(x(t)) = \begin{bmatrix} -\kappa_1\psi_1(t) \\ \kappa_2\psi_1(t) - \psi_2(t) \\ \psi_1(t)\psi_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Los parámetros de este sistema son los mostrados en la Tabla 4.1. Debido a que κ_3 se considera un parámetro constante, su derivada es $\dot{\kappa}_3 = 0$. Este nuevo sistema sigue siendo no uniformemente observable y respeta la triangularidad con respecto al vector de estado. Por lo tanto, es posible diseñar un observador de la forma (4.114) para obtener la estimación del vector de estado. Los estados originales se derivan de las nuevas coordenadas (4.133) como se muestra a continuación:

$$x_1(t) = \psi_1(t) \quad x_2(t) = \psi_2(t) \quad x_3(t) = \psi_3(t) \quad y \quad \kappa_3 = \psi_4(t).$$

Las condiciones iniciales del sistema son:

$$\psi(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 4]^T. \quad (4.135)$$

El parámetro de ajuste del observador se considera como $\theta = 7$. La matriz Δ_θ es:

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta^3} \end{bmatrix}$$

Para esta simulación, al igual que la sección anterior, se considera una cascada con 30 predictores ($m = 30$), tal como se plantea en el Teorema 4.3.1. Las condiciones iniciales del observador en cascada son:

$$\hat{\psi}_j(s) = [\hat{\psi}_1 \quad \hat{\psi}_2 \quad \hat{\psi}_3 \quad \hat{\psi}_4]^T = [2 \quad 2 \quad 2 \quad 10]^T, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \in [-\tau/m, 0]$$

$$S(0) = I_{4 \times 4}.$$

4.4. SIMULACIÓN 6. APLICACIÓN AL MODELO DE LORENZ CON SALIDA MUESTREADA Y CON RETARDO

Las matrices \bar{A}_j presentes en cada predictor se consideran como:

$$\bar{A}_j = -\lambda I_{4 \times 4}, \lambda = 1.$$

Se considera que la salida es muestreada en un intervalo variante $\Delta \in [0.1, 0.2]s$. Este intervalo cambia cada 0.5s. Su perfil se muestra en la Figura 4.16. En las Figuras 4.17-4.20 se muestra la estimación de los estados por medio del último predictor del observador en cascada. En la Figura 4.17 se muestra la estimación de la señal libre de retardo (x_1) por medio del último predictor de la cascada (\hat{x}_{m_1}). Se muestra que el estado es estimado de forma continua y sin el retardo, a pesar que la salida es una señal muestreada aleatoriamente y con retardo con la que es alimentado el observador en cascada ($\hat{x}_{1\tau}(t_k)$). Es importante resaltar que se logra la convergencia a la señal libre de retardo compensando las problemáticas presentadas por la señal de salida del sistema (muestreo y retardo).

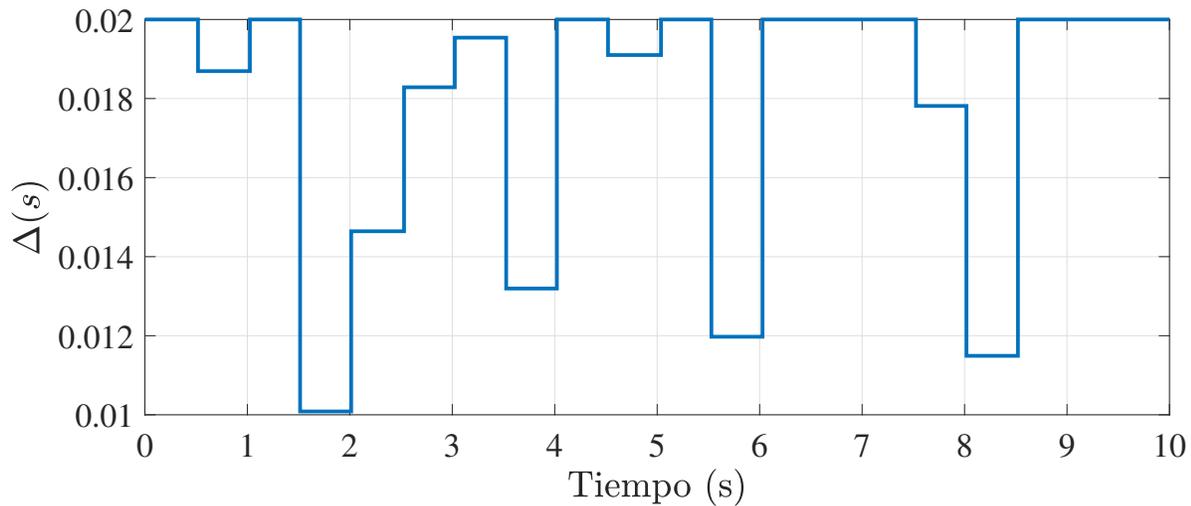


Fig. 4.16. Perfil de muestreo variante Δ para la estimación del parámetro desconocido.

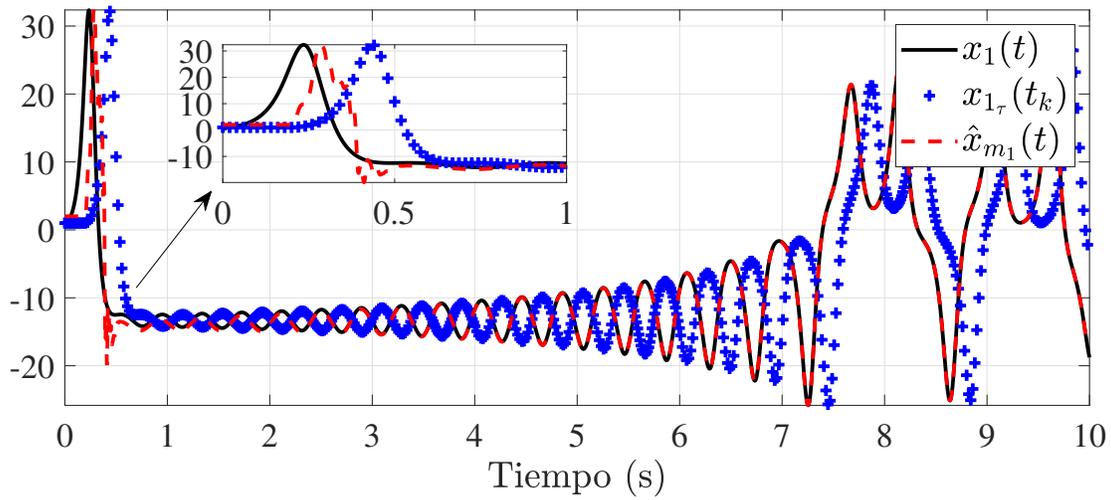


Fig. 4.17. Estimación de la salida libre de retardo con Δ .

Los estados \hat{x}_{m_2} y \hat{x}_{m_3} dados por el último predictor de la cascada, son las estimaciones de los estados x_2 y x_3 respectivamente. Estas estimaciones son mostradas en las Figuras 4.18 y 4.19. De igual forma, se logra la estimación a los estados libres de retardo los cuales no están disponibles.

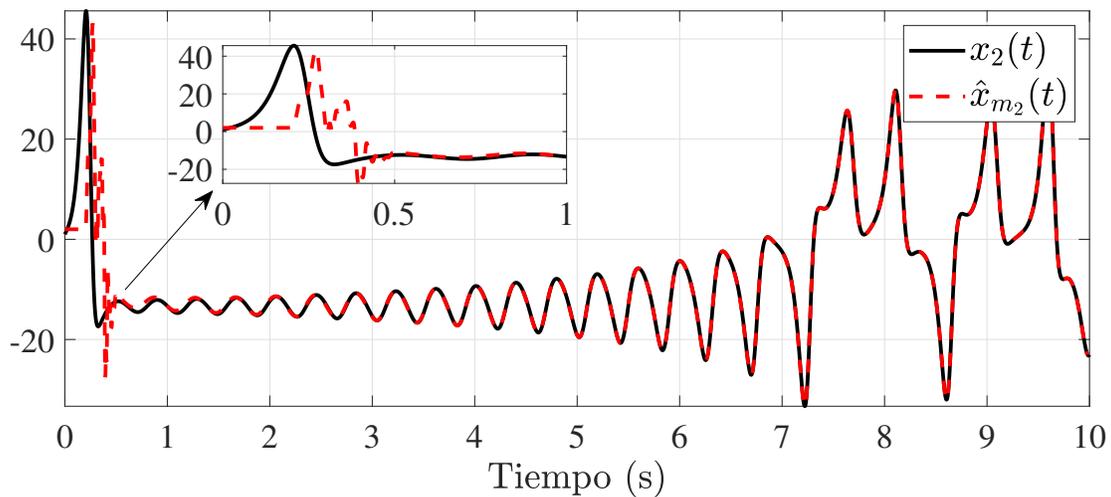


Fig. 4.18. Estimación del estado $x_2(t)$ libre de retardo con Δ .

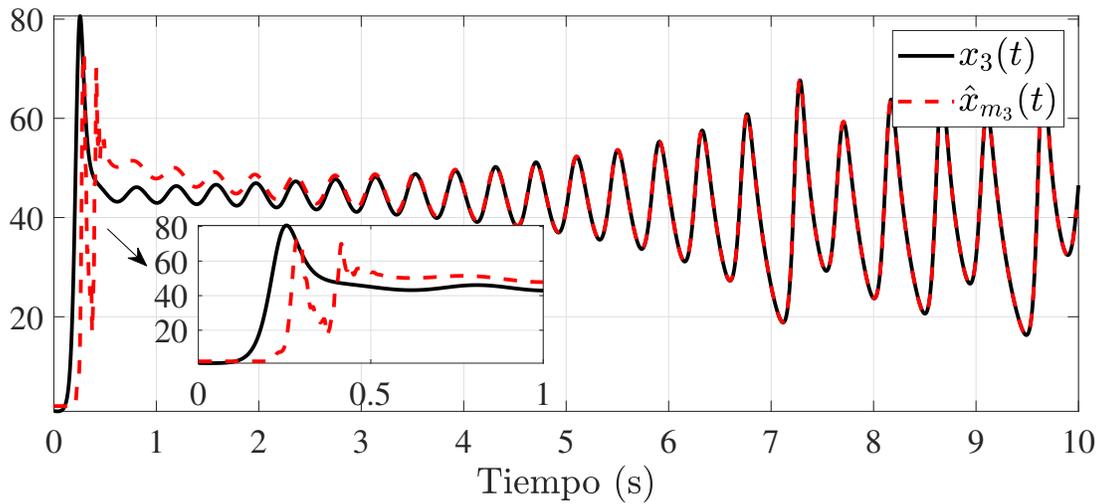


Fig. 4.19. Estimación del estado $x_3(t)$ libre de retardo con Δ .

En la Figura 4.20 se muestra la principal motivación para utilizar este observador: la estimación del parámetro desconocido del sistema. Se muestra que se logra la convergencia al valor original de κ_3 . Es importante resaltar que aprovechando la estructura del sistema no uniformemente observable se logra esto, siendo esta una ventaja especial de esta estructura. Es importante resaltar que se logra la estimación de parámetros constantes o constantes por pedazos. Sin embargo, no se asegura la convergencia ante parámetros con tasas de cambio rápidas en las que no se pueda considerar que su derivada sea cero.

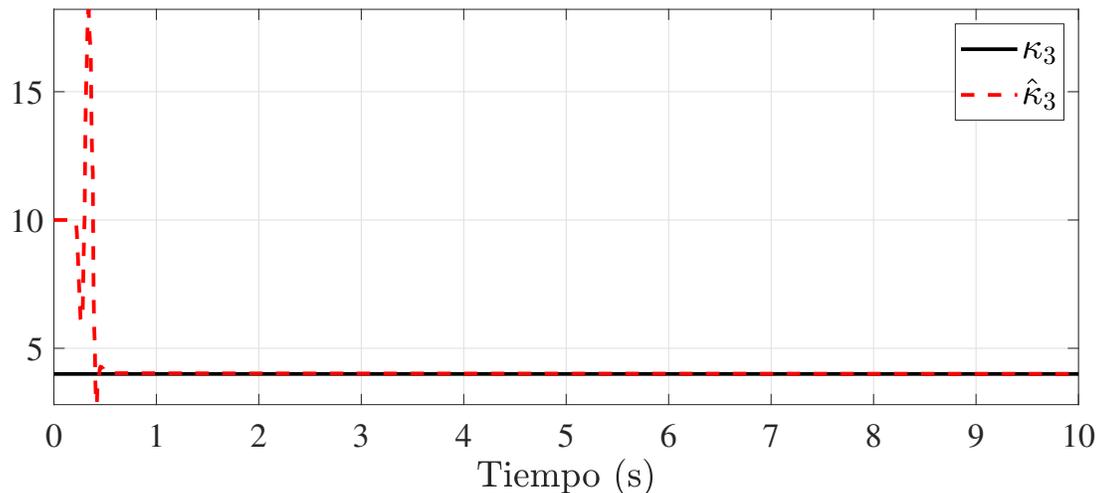


Fig. 4.20. Estimación del parámetro κ_3 con Δ .

4.4. SIMULACIÓN 6. APLICACIÓN AL MODELO DE LORENZ CON SALIDA MUESTREADA Y CON RETARDO

En la Figura 4.21 se muestra la norma del error de observación, la cual se obtiene $\|\tilde{\psi}(t)\| = \|\hat{\psi}_j - \psi\|$ con $j = m$, donde ψ_j es el vector de estado del ultimo predictor de la cascada y ψ es el vector de estado del sistema original libre de retardo. Se muestra que se logra una convergencia al origen.

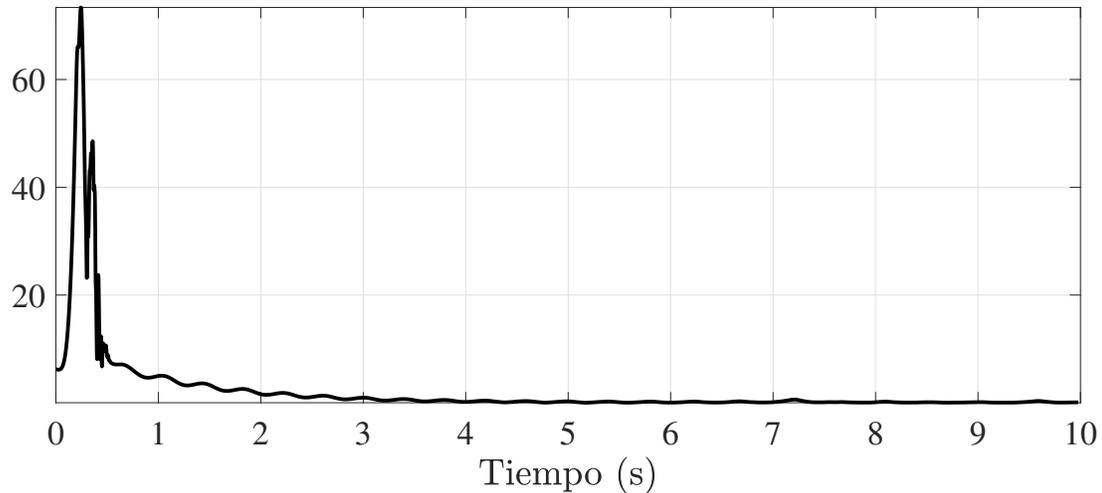


Fig. 4.21. Norma del error de observación $\|\tilde{\psi}_m(t)\| = \|\hat{\psi}_m(t) - \psi(t)\|$

Conclusión. Se demostró que el observador en cascada, considerando en la base un observador para salidas muestreadas, logra la estimación de forma continua del vector de estado libre de retardo, a pesar de tener un muestreo variable aleatorio y retardo en la señal de salida del sistema. En presencia de incertidumbre, el observador converge a una región cerca del origen. De igual forma, se demuestra que el número de predictores influye en la convergencia debido a que, en caso de no tener el número necesario de estos, no se logra compensar todo el retardo en el sistema. También se demuestra que aprovechando la estructura no uniformemente observable, se logra estimar un parámetro desconocido del sistema.

4.5. Simulación 7. Aplicación a la estimación del coeficiente de fricción en presencia de muestreo y retardo

Objetivo. Demostrar que es posible estimar parámetros desconocidos para aproximar una función que describe el coeficiente de fricción en una tubería. De igual forma, demostrar que es posible obtener la estimación de forma continua del vector de estado incluso a pesar de existir un muestreo variable de la salida y retardo.

En esta simulación se considera el diseño de un observador para estimar parámetros desconocidos de un sistema, en este caso el factor de fricción de una tubería. Se considera el sistema propuesto por (Torres and Verde, 2018), considerando las nuevas coordenadas mostradas en la sección 3.3. De este sistema se busca el estimar los parámetros α y γ . La simulación se realiza en el software de MATLAB 2018b, mediante el uso de la función ODE23 (ver Anexo C), considerando un tiempo de simulación total de 100s y un paso de integración $h = 0.001s$.

El modelo se muestra a continuación, en donde se considera que la señal de salida es muestreada en instantes de tiempo aleatorios y presenta retardos:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), x(t)) x(t) + \varphi(x(t), u(t)) \\ y_\tau(t_k) = Cx(t_k - \tau) = x_\tau^1(t_k) = Q_\tau(t_k) \end{cases}, \quad (4.136)$$

donde:

$$A(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} 0 & -|x_1(t)| & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_2(t)}{x_1(t)}g(x(t), u(t)) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} \iota u(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Los parametros se muestran en la Tabla 3.2. La diferencia de presiones representa la entrada del sistema $u(t) = H_{in}(t) - H_{out}(t) = 30 + \sin(0.08t)[\text{mWc}] - 10[\text{mWc}]$. La función no lineal $g(\psi(t), u(t))$ se muestra a continuación:

$$g(x(t), u(t)) = -|x_1(t)|x_2(t) + \iota u_1(t).$$

Los estados originales se obtienen como se muestra a continuación:

$$Q(t) = x_1(t) \quad \gamma = x_3(t) \quad \text{y} \quad \alpha = x_2(t)/x_1(t)^{x_3(t)}.$$

4.5. SIMULACIÓN 7. APLICACIÓN A LA ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN EN PRESENCIA DE MUESTREO Y RETARDO

Se considera que la salida del sistema 4.136 solo está disponible en un intervalo variante $\Delta = [0.15, 0.5]s$, este intervalo cambia cada 1s y presenta un retardo de $\tau = 1s$. Para lograr la estimación del vector de estado libre de retardo se considera el diseño de un observador en cascada de la forma 4.114. En esta simulación las condiciones iniciales para el sistema son:

$$x(0) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [0.12 \quad 0.0566 \quad 0.9917]^T.$$

El parámetro de ajuste del observador se considera $\theta = 1.25$, la matriz Δ_θ es:

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta^2} \end{bmatrix}$$

Para esta simulación se considera que el observador en cascada tiene 2 predictores ($m = 2$), tal que se respete lo presentado en el Teorema 4.3.1. Las condiciones iniciales del observador en cascada son:

$$\begin{aligned} \hat{x}_j(s) &= [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3]^T = [0.12 \quad 0 \quad 0]^T, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \in [-\tau/m, 0] \\ S(0) &= 1 \times 10^{-3} I_{3 \times 3}. \end{aligned}$$

Las matrices \bar{A}_j presentes en cada predictor se consideran como:

$$\bar{A}_j = -\lambda I_{3 \times 3}, \quad \lambda = 1.$$

En la Figura 4.22 se muestra el perfil de los intervalos variantes de muestreo, con los cuales es muestreada la señal de salida del sistema. En la Figura 4.23 se muestra la comparación entre la señal libre de retardo del sistema ($Q(t)$), la salida del sistema muestreada y con retardo ($Q_\tau(t_k)$) la cual es la que está a disposición del observador y la señal estimada por el último predictor del observador en cascada (Q_m). Se muestra que el predictor en cascada logra converger a la señal libre de retardo del sistema, de igual forma, se logra la estimación de forma continua.

4.5. SIMULACIÓN 7. APLICACIÓN A LA ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN EN PRESENCIA DE MUESTREO Y RETARDO

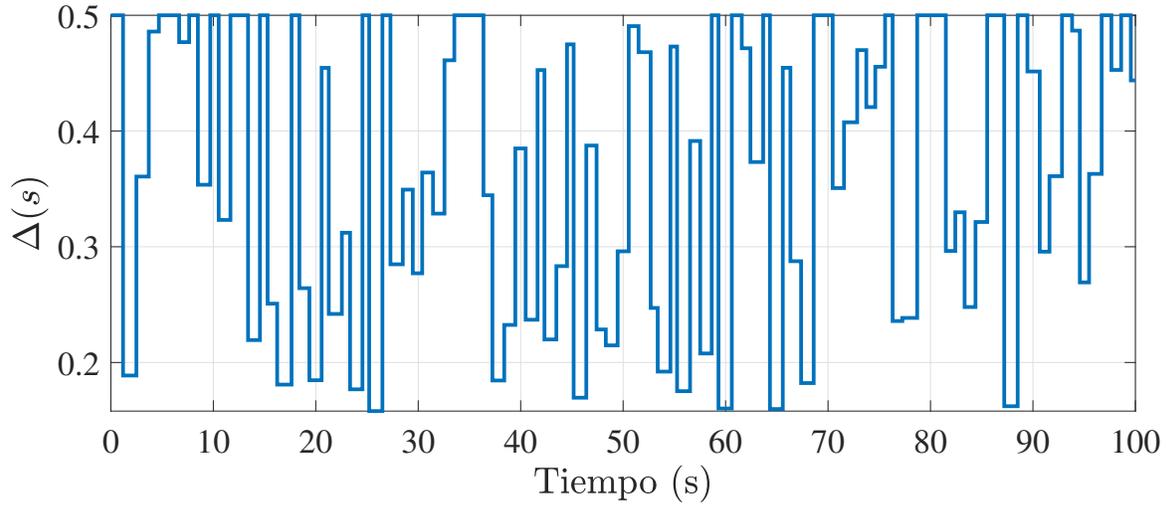


Fig. 4.22. Perfil del muestreo variable Δ .

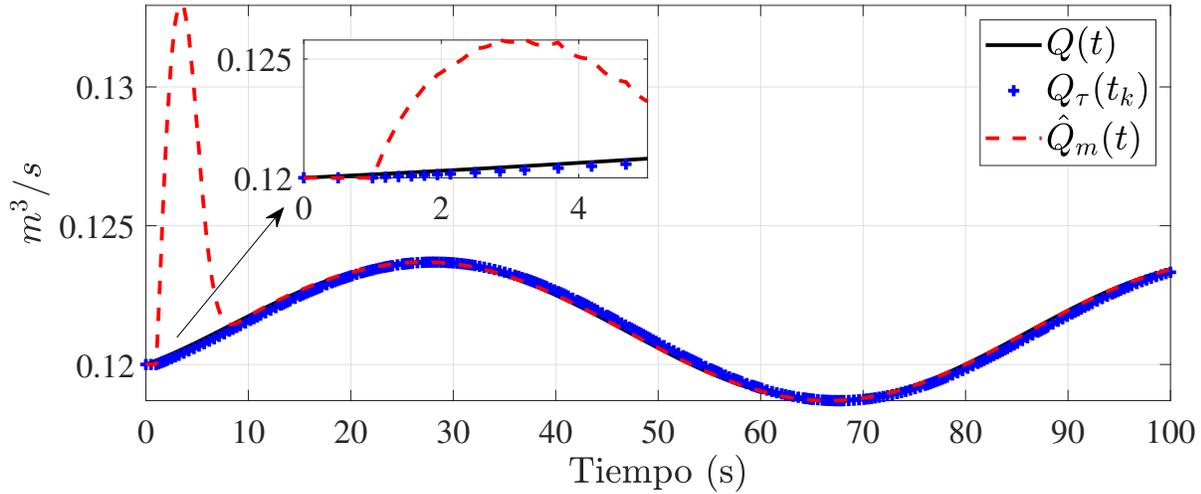


Fig. 4.23. Estimación del flujo de salida $Q(t)$ en presencia de muestreo variable y retardo.

En las Figuras 4.24 y 4.25 se muestran las estimaciones de los parámetros desconocidos α y γ por parte del último predictor del observador en cascada, respectivamente. Se muestra que los parámetros logran converger a los valores reales $\alpha = 0.4638$ y $\gamma = 0.9917$, respectivamente. Con estos valores es posible estimar el factor de fricción en cada parte de la tubería con la siguiente ley de potencia, incluso en presencia de muestreo variable y retardo:

$$\dot{J}_s(Q(z, t)) = 0.4638Q^{0.9917}(z, t)|Q(z, t)|.$$

4.5. SIMULACIÓN 7. APLICACIÓN A LA ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN EN PRESENCIA DE MUESTREO Y RETARDO

En la Figura 4.27 se muestra el error de observación, el cual se define como $\|\tilde{x}_m(t)\| = \hat{x}_m(t) - x(t)$, donde \hat{x}_m es el estado estimado por el último predictor de la cascada y $x(t)$ es el vector de estado libre de retardo. Se muestra que la norma del error converge al origen, ya que las incertidumbres son absorbidas por medio del observador.

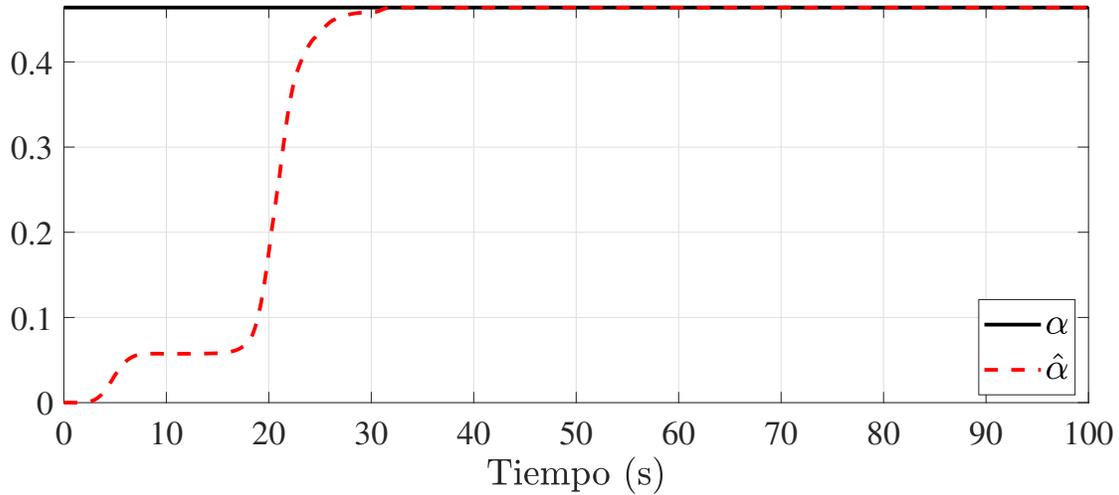


Fig. 4.24. Estimación del parámetro α en presencia de muestreo variable y retardo.

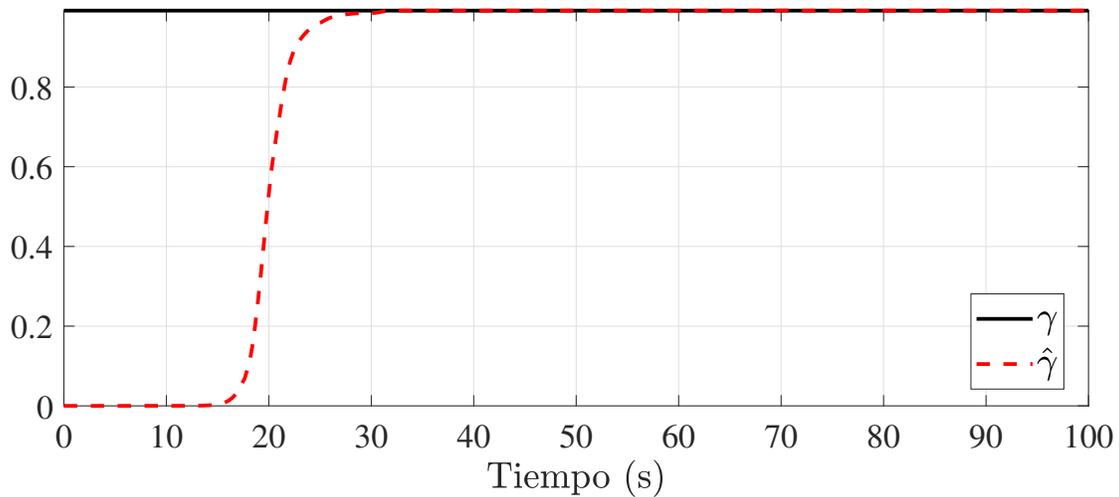


Fig. 4.25. Estimación del parámetro γ en presencia de muestreo variable y retardo.

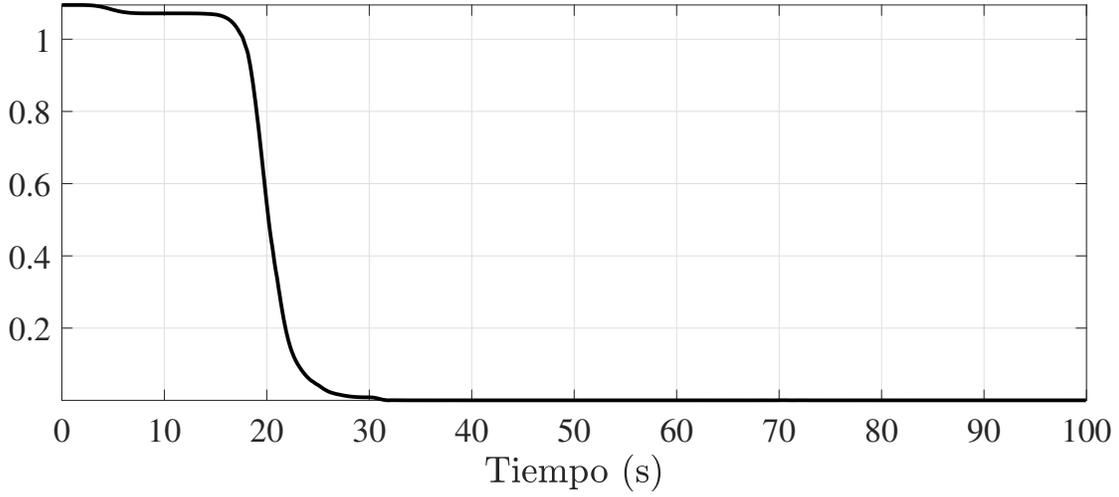


Fig. 4.26. Norma del error de observación $\|\tilde{x}_m(t)\|$ en presencia de muestreo variable y retardo.

Comparativa ante un muestreo variante y otro fijo

En esta sección se evaluará el comportamiento del error de observación ante dos casos de muestreo en la señal de salida, con el fin de mostrar su convergencia. Se procede a comparar el observador previamente diseñado pero considerando un periodo de muestreo constante y un intervalo de muestreo variable para la señal de salida del sistema $\Delta_{\text{máx}} = 0.5s$ y $\Delta = [0.15, 0.5] s$. En todos los casos el observador tiene el parámetro de ajuste $\theta = 1.25$, $m = 2$ y las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\hat{x}_j(s) &= [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3]^T = [0.12 \quad 0 \quad 0]^T, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \in [-\tau/m, 0] \\ S(0) &= 1 \times 10^{-3} I_{3 \times 3}, \\ \bar{A}_j &= -\lambda I_{3 \times 3}, \quad \lambda = 1.\end{aligned}$$

En la Figura 4.27 se muestra la norma del error $\|\tilde{x}_m(t)\|$ para cada observador. Se observa que el observador que es alimentado con la señal adquirida en un intervalo de muestreo (Δ) converge a cero en un tiempo menor, aproximadamente a los 30 segundos, a diferencia del observador con el tiempo de muestreo ($\Delta_{\text{máx}}$) el cual le toma aproximadamente 35 segundos en converger. De igual forma, se muestra que el observador con un intervalo de muestreo variante Δ logra una convergencia sin oscilaciones a diferencia del caso con $\Delta_{\text{máx}}$, sin embargo, en ambos casos de asegura su convergencia.

4.5. SIMULACIÓN 7. APLICACIÓN A LA ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN EN PRESENCIA DE MUESTREO Y RETARDO

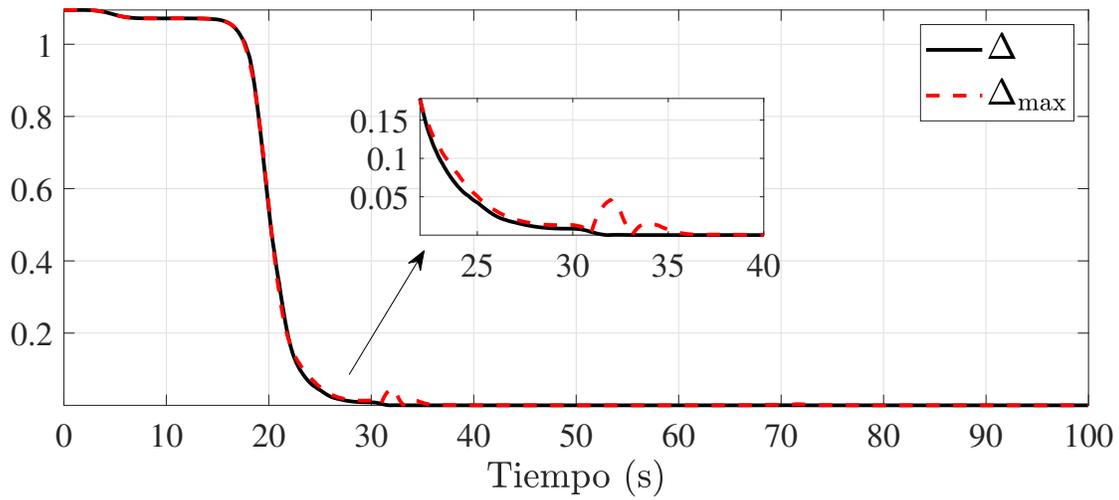


Fig. 4.27. Comparativa de la norma del error de observación en presencia de muestreo constante y variable

Conclusión. Se demostró que con el observador en cascada, considerando en la base un observador para salidas muestreadas, se logra la estimación del flujo de la tubería libre de retardo y de los parámetros desconocidos γ y α incluso en presencia de muestreo aleatorio variable y retardo en la salida de la tubería.

4.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentaron los análisis y diseños de observadores en cascada para sistemas no lineales MIMO inciertos con retardo en la señal de salida. Se abordaron dos naturalezas de la señal de salida, una de forma continua y otra de forma muestreada.

Se demostró que en presencia de salidas con retardo, con el uso de un observador en cascada se logra recuperar la señal libre de retardo. Esta estructura consta de $m + 1$ subsistemas, donde el primer observador en la base se elige dependiendo de la naturaleza de la señal de salida. Si la señal es continua con retardo, se considera un observador de la forma (3.1). En el caso de que la señal solo esté disponible en intervalos de tiempo se utiliza un observador de la forma (3.3), con el cual se logra la estimación de forma continua de la señal con retardo. Es importante el resaltar que las propiedades de estos observadores se mantienen en ambos casos y se muestran en el Capítulo 3. Los subsistemas restantes (predictores) compensan en un horizonte de tiempo τ/m el retardo de tiempo. Con lo que el último predictor dará la señal libre de retardo, logrando el objetivo principal de este observador.

También se mostró que ante retardos grandes de tiempo, agregando más predictores es posible compensar el retardo y obtener la estimación libre de retardo. Es importante resaltar que el incremento de los predictores se hace en concordancia a lo planteado en los Teoremas 4.1.1 y 4.3.1. De igual forma, se presentó cómo la elección de λ influye en la rapidez de convergencia del observador, ya que el aumentar los valores de λ , se modifican los valores propios de la matriz \bar{A} en cada predictor. Sin embargo, se tiene que considerar que al aumenta el valor de Γ definido por (4.13), se pone en riesgo que se cumpla lo mostrado en los Teoremas 4.1.1 y 4.3.1.

Es importante resaltar que el considerar incertidumbres, muestreo y retardos en el sistema hace que el problema de observación se incremente, sin embargo, se demostró que con la estructura en cascada se puede obtener la estimación de la señal libre de retardo. En presencia de incertidumbres, se converge a una región acotada cerca del origen. De igual forma, se mostró que aprovechando la estructura de la matriz A de los sistemas no uniformemente observables, se pueden estimar parámetros desconocidos en diferentes sistemas (como el sistema caótico y la tubería presentados en este capítulo). Es importante resaltar que se consideran parámetros constantes o con cambios lentos, en los que se pueda considerar que su derivada sea cero.

Capítulo 5

Conclusiones generales

En este trabajo de investigación se abordó el diseño de observadores utilizando el enfoque alta ganancia para sistemas inciertos. Dentro del diseño se han considerado tres principales problemáticas: las incertidumbres en los sistemas, el muestreo y los retardos en la salida. El principal enfoque fue con una clase particular de sistemas no lineales, los cuales son llamados no uniformemente observables. Esta clase de sistemas es menos restrictiva que su contraparte, los sistemas uniformemente observables, debido a que se permiten funciones en la matriz de estados. Esto da lugar a poder realizar un cambio de coordenadas menos estricto. Estos sistemas necesitan cumplir con la condición de excitación persistente. Al cumplir con esta condición, se asegura la observabilidad del sistema. En caso de que el sistema no cumpla con dicha condición se pueden variar las entradas con el fin de satisfacerla.

La primera aportación de esta tesis es el diseño de un observador para sistemas inciertos no uniformemente observables, donde la señal de salida del sistema se considera continua. Esta aportación se presenta de manera formal en el Teorema 3.1.1, el cual demuestra que el observador convergerá exponencialmente a una región acotada cerca del origen, esta región es inversamente proporcional al valor de ajuste del observador, este análisis se publicó en (Hernández-González et al., 2021), ver Anexo D.1.

La segunda aportación de este trabajo de tesis es la validación del observador considerando un caso práctico, donde debido a la instrumentación del sistema la salida solo esta disponible en instantes de tiempo, con periodos de muestreo constantes o variables. Esto se presenta formalmente en el Teorema 3.3.1. Se establece que el observador convergerá de igual forma a una región acotada cerca del origen incluso en presencia de muestreo con períodos: constantes o aleatorios. Esta región

acotada no solo dependerá de la incertidumbre del sistema, sino que también del intervalo de muestreo en el sistema. Una versión de este trabajo fue publicada en Hernández-González et al. (2019), misma que se muestra en el Anexo D.2. Posteriormente se presentó una versión más completa en el artículo (Hernández-González et al., 2021).

La tercera aportación de este trabajo de tesis surge como una extensión hacia los sistemas lineales, se diseñó un observador para sistemas lineales considerando la salida solo disponible en instantes de tiempo. Esta aportación se presenta formalmente en el Teorema 3.6.1. Se demostró que es posible obtener la estimación de los estados en presencia de muestreo en la señal de salida del sistema, este muestreo puede ser: continuo o variable. Se asegura la convergencia exponencial a una región acotada dada por la cota de la incertidumbre y por el tiempo de muestreo. Esto se aplicó a un sistema estructural publicado en (Ramírez-Rasgado et al., 2020a), como se muestra en el Anexo D.5. Posteriormente se consideró un sistema libre de incertidumbre, el cual fue el sistema glucosa-insulina y fue publicado un artículo a la 6ta Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada (Ramírez-Rasgado et al., 2021b) (ver el Anexo D.4).

En la cuarta aportación se consideró un observador en cascada cuya salida está afectada por retardos de tiempos largos. En esta aportación se aborda otra problemática presente en los sistemas y que dificulta el diseño de observadores. La aportación se presenta de manera formal en el Teorema 4.1.1. El primer subsistema del observador en cascada es un observador continuo, similar al presentado en (Hernández-González et al., 2021). Posteriormente los subsistemas restantes de la cascada logran cancelar el efecto de todo el retardo de la señal, por lo que el último subsistema proporciona la señal libre de retardo, la cual no está disponible en primera instancia. Se demuestra la convergencia exponencial del error de observación a una región acotada cerca del origen que dependerá de las incertidumbres y de la magnitud del retardo. De igual forma, se presentan las condiciones que se deben de satisfacer para la dimensión del retardo, es decir, considerar la cantidad necesaria de subsistemas en relación al retardo. La propiedad de esta clase de sistemas se logró utilizar para la estimación de los parámetros en una tubería en presencia de retardos, esto fue publicado en (Ramírez-Rasgado et al., 2020b), como se muestra en el Anexo D.2.

La quinta y principal aportación de este trabajo de tesis es el diseño de un observador para un sistema que presenta las tres problemáticas en conjunto: incertidumbres, muestreo y retardo en la señal de salida. Estas problemáticas son comunes en los sistemas e incrementan el desafío al momento de

diseñar un observador. La aportación se presenta formalmente en el Teorema 4.3.1. Para abordar este caso se presentó un observador en cascada, en donde la base del observador (primer subsistema), es un observador para salidas muestreadas, como el presentado en (Hernández-González et al., 2021). Posteriormente el retardo es cancelado por los subsistemas restantes (predictores). De este observador se demuestra que se logra la convergencia exponencial a una región acotada cerca del origen que dependerá de la incertidumbre, el retardo y del intervalo de muestreo. El análisis de este observador se sometió a la revista *IEEE Systems Journal* en el artículo (Ramírez-Rasgado et al., 2021a). Al momento de redactar esta tesis, el artículo se encuentra en proceso de preparación para ser sometido a un segundo proceso de revisión, ya que los revisores consideran que el artículo amerita correcciones mayores para su posible publicación. El observador se aplicó a un sistema caótico incierto. Es importante el resaltar que se asegura la convergencia del observador incluso en presencia de muestreo aleatorio y variable.

Como se mencionó anteriormente una de las principales ventajas de la clase de sistemas no uniformemente observables es el cambio de coordenadas menos estricto, de igual forma, para el diseño del observador utilizando el enfoque de alta ganancia no es necesario el conocimiento numérico de las constantes de Lipschitz del sistema, basta con asumirlas constantes, contrariamente al enfoque por medio de LMIs presentado en (Ekramian et al., 2013; Etienne et al., 2019). La limitación principal de este trabajo podría decirse que recae en que los sistemas no uniformemente observables tienen que cumplir con la condición de excitación persistente, sin embargo, muchos sistemas en la realidad cumplen con ella, o bien, por medio de las entradas se pueden llevar a que la cumplan.

5.1. Trabajos futuros

Considerando lo abordado en este trabajo, surge un amplio panorama de oportunidad para trabajos futuros. Algunos pueden ser:

1. Considerar que la señal de salida es perturbada por una señal externa.
2. Considerar múltiples muestreos diferentes en las señales de salida.
3. Considerar que el retardo es variable y aplicarlo a la clase de sistemas no uniformemente observables.
4. Considerar retardos en alguna otra parte del sistema (estados, entrada).
5. Considerar que el retardo de la salida es desconocido y lograr su estimación.

Bibliografía

- Abd, M. H., Tahir, F. R., Al-Suhail, G. A., and Pham, V.-T. (2017). An adaptive observer synchronization using chaotic time-delay system for secure communication. *Nonlinear Dynamics*, 90(4):2583–2598.
- Ahmed-Ali, T., Fridman, E., Giri, F., Burlion, L., and Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2016). Using exponential time-varying gains for sampled-data stabilization and estimation. *Automatica*, 67:244–251.
- Ahmed-Ali, T., Tiels, K., Schoukens, M., and Giri, F. (2019). Sampled-data adaptive observer for state-affine systems with uncertain output equation. *Automatica*, 103:96–105.
- Ali, S. A., Christen, A., Begg, S., and Langlois, N. (2016). Continuous–discrete time-observer design for state and disturbance estimation of electro-hydraulic actuator systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(7):4314–4324.
- Astolfi, D. and Marconi, L. (2015). A high-gain nonlinear observer with limited gain power. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(11):3059–3064.
- Ben Messaoud, R. and Hajji, S. (2018). Observer for nonlinear systems with unknown input using mean value theorem and genetic algorithm. *Optimal Control Applications and Methods*, 39(6):1904–1915.
- Bernard, P. (2019). *Observer design for nonlinear systems*, volume 479. Springer.
- Besançon, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & Control Letters*, 41(4):271–280.
- Besançon, G. (2007). *Nonlinear Observers and Applications*, volume 363. Springer.

- Besañon, G., Bornard, G., and Hammouri, H. (1996). Observer synthesis for a class of nonlinear control systems. *European Journal of Control*, 2(3):176–192.
- Besbes, M., Hadj Saïd, S., and M’Sahli, F. (2020). HDL coder-based FPGA implementation of a continuous-discrete time observer for sensorless induction machine. *IETE Journal of Research*, pages 1–9.
- Borri, A., Cacace, F., De Gaetano, A., Germani, A., Manes, C., Palumbo, P., Panunzi, S., and Pepe, P. (2017). Luenberger-like observers for nonlinear time-delay systems with application to the artificial pancreas: The attainment of good performance. *IEEE Control Systems Magazine*, 37(4):33–49.
- Bouraoui, I., Farza, M., Ménard, T., Abdennour, R. B., M’Saad, M., and Mosrati, H. (2015). Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs—application to the estimation of kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 55:78–87.
- Brkić, D. (2011). An explicit approximation of Colebrook’s equation for fluid flow friction factor. *Petroleum Science and Technology*, 29(15):1596–1602.
- Cacace, F., Conte, F., Germani, A., and Palombo, G. (2016). Delay identification for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 89(11):2350–2359.
- Cacace, F., Germani, A., and Manes, C. (2014). Predictor-based control of linear systems with large and variable measurement delays. *International Journal of Control*, 87(4):704–714.
- Cacace, F., Germani, A., and Manes, C. (2020). An enhanced observer for nonlinear systems with time-varying measurement delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Chakrabarty, A., Fridman, E., Žak, S. H., and Buzzard, G. T. (2018). State and unknown input observers for nonlinear systems with delayed measurements. *Automatica*, 95:246–253.
- Chaudhry, M.-H. (1979). Applied hydraulic transients. Technical report, Springer.
- Chen, T. and Francis, B. A. (2012). *Optimal sampled-data control systems*. Springer Science & Business Media.

- Ekramian, M., Sheikholeslam, F., Hosseinnia, S., and Yazdanpanah, M. J. (2013). Adaptive state observer for lipschitz nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 62(4):319–323.
- Etienne, L., Hetel, L., and Efimov, D. (2019). Observer analysis and synthesis for perturbed Lipschitz systems under noisy time-varying measurements. *Automatica*, 106:406–410.
- Etienne, L., Hetel, L., Efimov, D., and Petreczky, M. (2017). Observer synthesis under time-varying sampling for Lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 85:433–440.
- Farza, M., Hernández-González, O., Menard, T., M’Saad, M., and Astorga-Zaragoza, C.-M. (2016). Cascade predictors design for a class of nonlinear uncertain systems with delayed state—application to bioreactor. In *2016 17th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, pages 753–760. IEEE.
- Farza, M., Hernández-González, O., Menard, T., Targui, B., M’saad, M., and Astorga-Zaragoza, C.-M. (2018). Cascade observer design for a class of uncertain nonlinear systems with delayed outputs. *Automatica*, 89:125–134.
- Farza, M., Ménard, T., Ltaief, A., Maatoug, T., M’Saad, M., and Koubaa, Y. (2015a). Extended high gain observer design for state and parameter estimation. In *2015 4th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, pages 345–350. IEEE.
- Farza, M., M’Saad, M., Menard, T., Fall, M. L., Gehan, O., and Pigeon, E. (2015b). Simple cascade observer for a class of nonlinear systems with long output delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(12):3338–3343.
- Farza, M., M’Saad, M., Maatoug, T., and Kamoun, M. (2009). Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45(10):2292–2299.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Springer.
- Gałach, M. (2003). Dynamics of the tumor—immune system competition—the effect of time delay. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 13:395–406.
- Gauthier, J. and Bornard, G. (1981). Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):922–926.

- Gauthier, J.-P., Hammouri, H., Othman, S., et al. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):875–880.
- Germani, A., Manes, C., and Pepe, P. (2002). A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(1):96–101.
- Guo, J., Zhao, Z., Shi, F., Wang, R., and Li, S. (2019). Observer-based synchronization control for coronary artery time-delay chaotic system. *IEEE Access*, 7:51222–51235.
- Hamoudi, A., Djeghali, N., and Bettayeb, M. (2020). Predictor-based super-twisting sliding mode observer for synchronisation of nonlinear chaotic systems with delayed measurements. *International Journal of Systems Science*, 51(15):3013–3029.
- Hernández, O., Menard, T., Farza, M., Astorga-Zaragoza, C.-M., and Guerrero-Ramírez, G.-V. (2015). High gain observer for a class of nonlinear systems with sampled measurements: Application to a free-piston stirling engine. In *2015 16th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, pages 805–810. IEEE.
- Hernández-González, O., Farza, M., Menard, T., Targui, B., M'Saad, M., and Astorga-Zaragoza, C.-M. (2016). A cascade observer for a class of MIMO non uniformly observable systems with delayed sampled outputs. *Systems & Control Letters*, 98:86–96.
- Hernández-González, O., Guerrero-Sánchez, M.-E., Farza, M., Ménard, T., M'Saad, M., and Lozano, R. (2019). High gain observer for a class of nonlinear systems with coupled structure and sampled output measurements: application to a quadrotor. *International Journal of Systems Science*, 50(5):1089–1105.
- Hernández-González, O., Ramírez-Rasgado, F., Astorga-Zaragoza, C., Guerrero-Sánchez, M., Valencia-Palomo, G., and Rodríguez-Mata, A. (2021). Observer for non-linear systems with sampled measurements: Application to the friction factor estimation of a pipeline. *IET Control Theory & Applications*, 15(3):432–445.
- Hernández-González, O., Ramírez-Rasgado, F., Guerrero-Sánchez, M.-E., Pérez-Gómez, A., Astorga-Zaragoza, C.-M., and Moreno-Vazquez, J. d. J. (2019). Continuous-discrete observer for nonlinear systems with sampled measurements: Application to a 1-DOF helicopter. In *Congreso Nacional de Control Automático 2019*, pages 507–512. IFAC.

- Kahelras, M., Ahmed-Ali, T., Folin, T., Giri, F., and Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2016). Observer design for triangular nonlinear systems using delayed sampled-output measurements. In *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1447–1451. IEEE.
- Kahelras, M., Ahmed-Ali, T., Giri, F., and Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2018). Sampled-data chain-observer design for a class of delayed nonlinear systems. *International Journal of Control*, 91(5):1076–1090.
- Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems. *Upper Saddle River*.
- Langueh, K., Zheng, G., and Floquet, T. (2018). Impulsive fixed-time observer for linear time-delay systems. *Journal of the Franklin Institute*, 355(7):3354–3366.
- Li, D. and Ma, W. (2007). Asymptotic properties of a HIV-1 infection model with time delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 335(1):683–691.
- Loría, A., Panteley, E., and Zavala-Río, A. (2009). Adaptive observers with persistency of excitation for synchronization of chaotic systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 56(12):2703–2716.
- Ma, H., Zhou, Q., Bai, L., and Liang, H. (2018). Observer-based adaptive fuzzy fault-tolerant control for stochastic nonstrict-feedback nonlinear systems with input quantization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 49(2):287–298.
- Madhukar, P. S. and Prasad, L. (2020). State estimation using extended Kalman filter and unscented Kalman filter. In *2020 International Conference on Emerging Trends in Communication, Control and Computing (ICONC3)*, pages 1–4. IEEE.
- Mazenc, F., Ahmed, S., and Malisoff, M. (2018). Finite time estimation through a continuous-discrete observer. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(16):4831–4849.
- Mazenc, F., Andrieu, V., and Malisoff, M. (2015). Design of continuous–discrete observers for time-varying nonlinear systems. *Automatica*, 57:135–144.
- Mazenc, F. and Malisoff, M. (2019). Continuous-discrete sequential observers for time-varying systems under sampling and input delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*.

- Naifar, O., Makhoulf, A. B., Hammami, M., and Ouali, A. (2016). On observer design for a class of nonlinear systems including unknown time-delay. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(5):2841–2851.
- Natori, K., Tsuji, T., Ohnishi, K., Hace, A., and Jezernik, K. (2009). Time-delay compensation by communication disturbance observer for bilateral teleoperation under time-varying delay. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(3):1050–1062.
- Ogata, K. and Yang, Y. (2010). *Modern Control Engineering*, volume 5. Prentice Hall, NJ.
- Qi, W., Kao, Y., Gao, X., and Wei, Y. (2018). Controller design for time-delay system with stochastic disturbance and actuator saturation via a new criterion. *Applied Mathematics and Computation*, 320:535–546.
- Ramírez-Rasgado, F., Astorga-Zaragoza, C., Hernández-González, O., Osorio-Gordillo, G.-L., and Reyes-Reyes, J. (2021a). Observer synthesis for uncertain nonlinear systems with non-uniformly sampled and delayed output. *IEEE Systems Journal*, pages 1–7.
- Ramírez-Rasgado, F., Castro-Gomez, J.-F., Hernández-González, O., Astorga-Zaragoza, C.-M., and Valencia-Palomo, G. (2021b). Sistema de monitoreo y control para la regulación de glucosa en pacientes con diabetes tipo 1. In *Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada*, volume 4, pages 153–157.
- Ramírez-Rasgado, F., Galaz-Palma, R.-R., Hernández-González, O., Astorga-Zaragoza, C.-M., Guerrero-Sánchez, M.-E., Valencia-Palomo, G., and Targui, B. (2020a). Control basado en observador para el desplazamiento de estructuras con retardo en la señal de control. In *Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada*, volume 3, pages 121–125.
- Ramírez-Rasgado, F., Hernández-González, O., Astorga-Zaragoza, C.-M., Reyes-Reyes, J., Osorio-Gordillo, G.-L., Valencia-Palomo, G., and Galaz-Bustamante, R.-A. (2020b). Cascade observer design for uncertain nonlinear systems under time-delay. In *Congreso Nacional de Control Automático 2020*, pages 1–6. IFAC.
- Robles-Magdaleno, J., Rodríguez-Mata, A., Farza, M., and M’Saad, M. (2020). A filtered high gain observer for a class of non uniformly observable systems—application to a phytoplanktonic growth model. *Journal of Process Control*, 87:68–78.

- Rodríguez Torres, A., Morales-Valdez, J., and Yu, W. (2020). Modeling and proportional-derivative controller design for buildings based on vibration frequencies. In *2020-7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies*.
- Sanz, R., García, P., and Krstic, M. (2019). Observation and stabilization of LTV systems with time-varying measurement delay. *Automatica*, 103:573–579.
- Sayyaddelshad, S. and Gustafsson, T. (2015). H_∞ observer design for uncertain nonlinear discrete-time systems with time-delay: LMI optimization approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(10):1514–1527.
- Shen, Y., Zhang, D., and Xia, X. (2017). Continuous observer design for a class of multi-output nonlinear systems with multi-rate sampled and delayed output measurements. *Automatica*, 75:127–132.
- Shirkadehi, Y. K., Ekramian, M., and Ataei, M. (2018). Sliding mode observer for uncertain nonlinear systems based on generalized Lipschitz condition. In *2018 6th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (IcRoM)*, pages 100–105. IEEE.
- Slotine, J.-J. E., Li, W., et al. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Swamee, P. K. (1993). Design of a submarine oil pipeline. *Journal of Transportation Engineering*, 119(1):159–170.
- Targui, B., Hernández-González, O., Astorga-Zaragoza, C.-M., Guerrero-Ramírez, G.-V., and Guerrero-Sánchez, M.-E. (2019). A new observer design for systems in presence of time-varying delayed output measurements. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17(1):117–125.
- Targui, B., Hernández-González, O., Astorga-Zaragoza, C.-M., and Guerrero-Sánchez, M. E. (2018). Chain observer for Lipschitz non-linear systems with long time-varying delayed measurements. *IET Control Theory & Applications*, 12(10):1431–1439.

- Torres, L., Besançon, G., Georges, D., and Verde, C. (2012). Exponential nonlinear observer for parametric identification and synchronization of chaotic systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(5):836–846.
- Torres, L. and Verde, C. (2018). Nonlinear estimation of a power law for the friction in a pipeline. *IFAC-PapersOnLine*, 51(13):67–72.
- Tréangle, C., Menard, T., Farza, M., and M’saad, M. (2018). A cascade predictor for nonlinear systems with a constant output delay. *IFAC-PapersOnLine*, 51(2):421–426.
- Vafaei, A. and Yazdanpanah, M. J. (2016). A chain observer for nonlinear long constant delay systems: A matrix inequality approach. *Automatica*, 65:164–169.
- Wang, H., Chen, B., Lin, C., and Sun, Y. (2018). Observer-based neural adaptive control for a class of MIMO delayed nonlinear systems with input nonlinearities. *Neurocomputing*, 275:1988–1997.
- Weston, J., Malisoff, M., and Mazenc, F. (2017). Sequential predictors under time-varying delays: Effects of delayed state observations in dynamic controller. In *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4351–4356. IEEE.
- Yang, Y., Lin, C., Chen, B., and Wang, Q.-G. (2018). Reduced-order observer design for a class of generalized Lipschitz nonlinear systems with time-varying delay. *Applied Mathematics and Computation*, 337:267–280.
- Yedavalli, R. K. (2016). *Robust Control of Uncertain Dynamic Systems*. Springer.
- Zakaria, B., Noureddine, G., Atallah, B., and Carlos, O.-M. (2018). Algebraic observer-based output-feedback controller design for a PEM fuel cell air-supply subsystem. *IET Renewable Power Generation*, 12(14):1714–1721.
- Zemouche, A. and Boutayeb, M. (2012). Observers for continuous-time Lipschitz nonlinear systems. analysis and comparisons. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4774–4779. IEEE.
- Zhao, Y., Zhang, W., Su, H., and Yang, J. (2018). Observer-based synchronization of chaotic systems satisfying incremental quadratic constraints and its application in secure communication. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 50(12):5221–5232.

Zheng, G. and Bejarano, F. J. (2017). Observer design for linear singular time-delay systems. *Automatica*, 80:1–9.

Zheng, G., Bejarano, F. J., and Li, S. (2017). Luenberger-like observer for linear singular system with commensurate delay. In *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1725–1730. IEEE.

Anexo A

Tubería

A.1. Modelo y problemática

Una tubería es un conducto que cumple con la principal función de transportar agua u otros fluidos. Se conoce como oleoducto cuando el fluido transportado es petróleo y se conoce como gasoducto cuando lo que se transporta es gas. En la Figura A.1.1 se muestra una bomba alimentando a un tanque por medio de una tubería. Esta figura se presenta con el fin de ilustrar de una manera más gráfica algunos parámetros físicos que se mostrarán en esta sección.

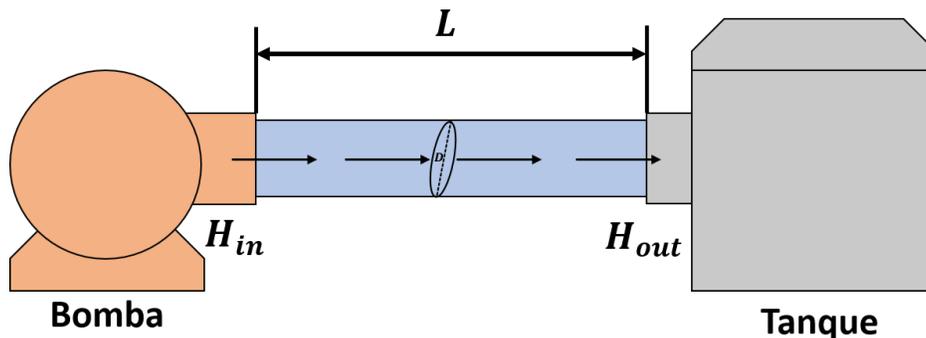


Fig. A.1.1. Bomba con tubería y tanque

En este sistema se presentan diferentes parámetros que pueden cambiar de sus valores de diseño debido a diferentes causas. Es importante definir las siguientes suposiciones:

A A.1.1. *Los cambios convectivos en la velocidad son despreciables.*

A A.1.2. *La densidad del fluido y el área transversal son constantes.*

A A.1.3. *Las pérdidas de energía para una velocidad de flujo dada durante el estado transitorio son las mismas que las de los flujos estables a esa velocidad.*

Considerando lo anterior, las ecuaciones de momentum y continuidad que describen el comportamiento del fluido en una tubería horizontal se pueden expresar como se muestran a continuación (Chaudhry, 1979):

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} \frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + gA_r \frac{\partial H(z, t)}{\partial z} + \check{J}_s(Q(z, t)) = 0, \\ \frac{\partial H(z, t)}{\partial t} + \frac{b^2}{gA_r} \frac{\partial Q(z, t)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

donde $(z, t) \in [0, L] \times [0, \infty]$ engloba el espacio (m) y el tiempo (s); L es el largo de la tubería; $H(z, t)$ es la presión en el cabezal, $Q(z, t)$ es el tasa de flujo; b es la velocidad de onda del fluido; g es la gravedad; A_r es el área transversal; σ es el diámetro interno de la tubería; J_s es el termino de fricción en estado cuasi-estacionario, el cual se expresa por la relación de Darcy-Weisbach como se muestra a continuación:

$$\check{J}_s(Q(z, t)) = \frac{f(Q(z, t))}{2\sigma A_r} Q(z, t) |Q(z, t)| \quad (\text{A.1.2})$$

donde f es el factor de fricción. Este parámetro puede ser calculado usando la ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.71\sigma} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}} \right), \quad (\text{A.1.3})$$

donde $\text{Re} = \frac{Q\sigma}{\nu A_r}$ es el número de Reynolds, ν es la viscosidad cinemática (m^2/s) y ε es la rugosidad efectiva de la tubería (m). El uso de esta ecuación representa un alto costo computacional debido a que es una ecuación implícita que demanda el uso de métodos iterativos. Para solucionar esto han surgido diferentes aproximaciones para la solución implícita de la ecuación de CW como lo presentado en (Brkić, 2011). Otra aproximación común es la propuesta por (Swamee, 1993):

$$f = \left(\left(\frac{64}{\text{Re}} \right)^8 + 9.5 \left(\ln \left(\frac{\varepsilon}{3.7\sigma} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) - \left(\frac{2500}{\text{Re}} \right)^6 \right)^{-16} \right)^{0.125}. \quad (\text{A.1.4})$$

Sin embargo, para usar cualquier función (A.1.3) o (A.1.4) es necesario el conocer los valores de los parámetros ε y σ , los cuales en primera instancia son difíciles de conocer y tras el paso del tiempo

van cambiando debido al uso. Considerando esta problemática en (Torres and Verde, 2018) se propone una función de potencia con la cual se logra aproximar el termino $\check{J}_s(Q(z, t))$. La función se muestra a continuación:

$$\check{J}_s(Q(z, t)) = \alpha Q^\gamma(z, t)|Q(z, t)|, \quad (\text{A.1.5})$$

donde $\alpha > 0$ y $\gamma \in (0, 1)$ son valores empíricos estimados experimentalmente.

El considerar esta función permite el uso del modelo matemático de la tubería en tiempo real, ya que con las funciones (A.1.3) o (A.1.4) no es posible debido al gasto computacional y los cálculos se tienen que hacer fuera de línea y requieren parámetros difíciles de obtener.

Considerando la ley de potencia mostrada en (A.1.5) y partiendo de la ecuación de momentum (A.1.1), se puede definir el siguiente sistema:

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{Q}(t) &= -\alpha Q^\gamma(t)|Q(t)| + \frac{gA_r}{L} (H_{in}(t) - H_{out}(t)) \\ y(t) &= Q(t) \end{cases} \quad (\text{A.1.6})$$

Es importante el resaltar que se obtiene una ecuación diferencial en vez de una parcial al considerar todo el tramo de la tubería. De igual forma, se consideran como medibles ambas presiones (H_{in} y H_{out}). Este sistema es el usado para demostrar el funcionamiento de los observadores en las secciones 3.3 y 4.3.

Anexo B

Estructura tipo edificio

B.1. Modelado

En esta sección se muestra la obtención del modelo del sistema estructural tipo edificio de dos pisos. En la Figura B.1.1 se muestra la estructura en la cual entrará una señal sísmica. Esta estructura se asume que tiene 2 masas (pisos), las cuales están interconectadas por resortes lineales y amortiguadores lineales.

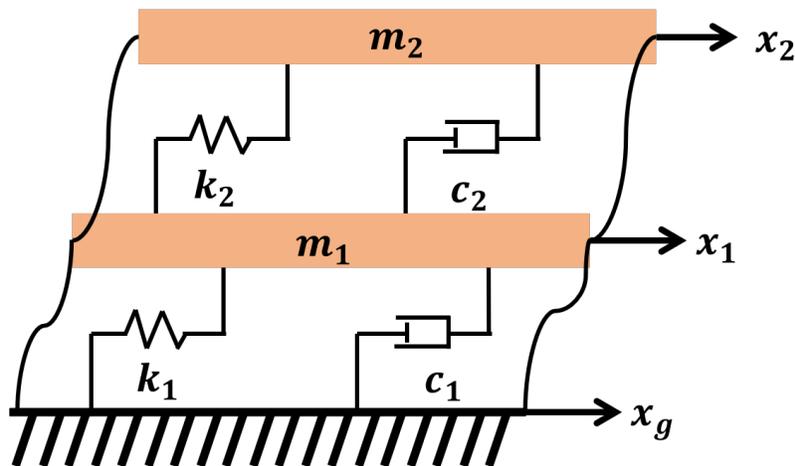


Fig. B.1.1. Edificio de dos pisos

Para obtener el modelo se utiliza el enfoque Euler-Lagrange, para este modelo se define como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = F_{e_i} \quad (\text{B.1.1})$$

donde L es el Lagrangiano del sistema, el cual es la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial U . La posición de cada piso se considera como la coordenada generalizada x_i , $i = 1, 2$;

R es la función de disipación de Rayleigh que representa la fuerza absorbida por el amortiguador y F_{e_i} representa las fuerzas externas ejercidas por un terremoto.

Para el primer piso m_1 , se considera como coordenada generalizada x_1 . Obteniendo T_1 , U_1 y R_1 del primer piso:

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} \quad (\text{B.1.2})$$

$$U_1 = \frac{k_1}{2} x_1^2 \quad (\text{B.1.3})$$

$$R_1 = \frac{c_1}{2} \dot{x}_1^2 \quad (\text{B.1.4})$$

Para el segundo piso m_2 , se considera como coordenada generalizada x_2 . Obteniendo T_2 , U_2 y R_2 del segundo piso:

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} \quad (\text{B.1.5})$$

$$U_2 = \frac{k_1}{2} (x_2 - x_1)^2 \quad (\text{B.1.6})$$

$$R_2 = \frac{c_2}{2} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 \quad (\text{B.1.7})$$

La energía cinética T total del sistema es:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} \quad (\text{B.1.8})$$

La energía potencial U total del sistema es:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{k_1}{2} x_1^2 + \frac{k_1}{2} (x_2 - x_1)^2 \quad (\text{B.1.9})$$

Y la función total de disipación del sistema es:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{c_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{c_2}{2} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 \quad (\text{B.1.10})$$

El Lagrangiano queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} - \left[\frac{k_1}{2} x_1^2 + \frac{k_1}{2} (x_2 - x_1)^2 \right] \\ &= \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} - \frac{k_1}{2} x_1^2 - \frac{k_1}{2} (x_2 - x_1)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.1.11})$$

Ahora se procede a obtener las derivadas parciales del Lagrangiano con respecto a cada una de las coordenadas generalizadas.

Considerando x_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \quad (\text{B.1.12})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \quad (\text{B.1.13})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (\text{B.1.14})$$

Sustituyendo (B.1.12)-(B.1.14) en (B.1.1), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \dot{x}_1) - (-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)) + c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= F_{e_1} \\ m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= F_{e_1} \end{aligned} \quad (\text{B.1.15})$$

Considerando x_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \quad (\text{B.1.16})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2(x_2 - x_1) \quad (\text{B.1.17})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (\text{B.1.18})$$

Sustituyendo (B.1.16)-(B.1.18) en (B.1.1), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_2 \dot{x}_2) - (-k_2(x_2 - x_1)) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= F_{e_2} \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= F_{e_2} \end{aligned} \quad (\text{B.1.19})$$

donde F_{e_i} , $i = 1, 2$ representan la actividad sísmica que afecta cada piso. Por lo tanto:

$$F_{e_i} = -m_i \ddot{x}_g(t) \quad (\text{B.1.20})$$

la señal \ddot{x}_g es la aceleración del piso. Reescribiendo (B.1.15) y (B.1.19) como:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = -Ml\ddot{x}_g(t) \quad (\text{B.1.21})$$

con:

$$\begin{aligned}x(t) &= [x_1(t) \quad x_2(t)]^T \mathbb{R}^{n \times 1} \\ \dot{x}(t) &= [\dot{x}_1(t) \quad \dot{x}_2(t)]^T \mathbb{R}^{n \times 1} \\ \ddot{x}(t) &= [\ddot{x}_1(t) \quad \ddot{x}_2(t)]^T \mathbb{R}^{n \times 1} \\ l &= [1 \quad 1]^T \mathbb{R}^{n \times 1}\end{aligned}$$

el vector l sirve para distribuir la señal \ddot{x}_g en cada piso. Las matrices $M, C, K > 0$ son definidas como:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}.$$

B.1.1. Representación en espacio de estados

En esta sección se busca la representación en espacio de estados de lo mostrado en (B.1.21), para esto se define el siguiente vector de estado:

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.22})$$

Por lo tanto, se obtiene el siguiente espacio de estados, considerando la posición de los pisos como salidas:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1-k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{-c_1-c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & \frac{-c_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{x}_g(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (\text{B.1.23})$$

Este modelo es tomado como ejemplo de aplicación en la sección 3.6.

Anexo C

Función DDE23/MATLAB

En esta sección se muestra un manual para el uso de la función DDE23 en MATLAB. La función DDE23 resuelve ecuaciones diferenciales con retardos constantes. La sintaxis es la siguiente:

```
sol= dde23(ddefun,lags,history,tspan)
sol= dde23(ddefun,lags,history,tspan,options)
```

Los argumentos son lo siguientes:

- **ddefun:** Maneja el lado derecho de la ecuación diferencial

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_k)).$$

La función se debe de escribir de la siguiente forma: $dy/dt=ddefun(t,y,Z)$, donde, t es el vector de tiempo, y es un vector que aproxima a $y(t)$ y $Z(:,j)$ es el vector de funciones con retardo τ_j .

- **lags:** El vector de retardos constantes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$.
- **history:** Se puede definir de tres formas.
 - Como una función $y=history(t)$, donde regresa la solución de $y(t)$ para $t \leq t_0$ como un vector columna.
 - Un vector columna de valores constantes.
 - La solución sol de la integración previa, esto se conoce como integración continua.
- **tspan:** Intervalo de integración de $t0=tspan(1)$ a $tf=tspan(end)$ con $t0<tf$.
- **options:** Opciones de integración.

C.1. Simulación

A continuación se presenta un ejemplo con el cual se busca demostrar el funcionamiento de esta función. Para esto se toma el siguiente sistema presentado en (Fridman, 2014):

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t - \tau) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (\text{C.1.1})$$

con $x(t) \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$. El sistema se inicializa de la siguiente forma:

$$x(s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau, 0].$$

Historial constante

Para esta primera simulación se considera $\phi = 1$ como condición inicial. En la Figura C.1.1 se muestran las primeras líneas de un script de MATLAB para simular este sistema. De las líneas 2–4 se muestran las líneas para limpiar la ventana de comandos, el limpiar todas las variables y cerrar todas las figuras que previamente se hayan abierto. Posteriormente se muestran los parámetros de simulación en las líneas 6–7. El tiempo de retardo en el sistema se define en la línea 6, donde se ajusta a un valor de $\tau = 1$. En la línea 7 se muestra el vector de tiempo, crea un vector iniciando de $t_0 = -1$ s hasta $t_f = 10$ s en incrementos de 0.001s. Este vector de tiempo será utilizado por la función para simular el sistema, la principal diferencia con las funciones ODEs es que estas no pueden soportar valores negativos.

```

1      %% Preambulo %%
2      clc
3      clear all
4      close all
-----
5      %% Parametros de simulacion %%
6      delay=1;
7      tt=-1:0.001:10;
```

Fig. C.1.1. Preámbulo

En la Figura C.1.2 (línea 10) se muestra la sintaxis utilizada para resolver el sistema. En este ejemplo se ponen como funciones locales, escritas en el mismo script, por lo tanto, van acompañadas por “@” para llamarlas. El primer argumento *ddex1de* es la función donde se encuentra el sistema con retardo. El segundo término *delay* es el retardo de tiempo, en este caso fue previamente definido. El tercer término *ddex1hist* es la función con los valores del sistema con retardo antes de $t = 0$. El último argumento *tt* es el vector de tiempo en el cual buscará la solución la función.

```

9      %% Uso de la funcion dde23
10     sol = dde23(@ddex1de,delay,@ddex1hist,tt);

```

Fig. C.1.2. Uso de la función

En la Figura C.1.3 se muestra la función *ddex1hist* la cual contiene el historial del sistema con retardo. En este caso el sistema mantendrá el valor de 1 durante todo el retardo que en este caso es 1s.

```

47     function s = ddex1hist(t)
48     -     s = 1;
49     -     end

```

Fig. C.1.3. Historial

En la Figura C.1.4 se muestra la función en donde se encuentra el sistema, se observan los argumentos que debe de tener la función t, y, Z . Se muestra una condicional *if* el cual mantendrá como salida el valor de 0 durante todo el tiempo de retardo, con el fin de mantener la condición inicial del sistema. Una vez que el tiempo t es mayor que cero el sistema con retardo empieza a funcionar y se empieza a calcular $\dot{x} = -x(t - \tau)$ como se muestra en la línea 56. Es importante el resaltar que estas funciones están al final del programa, ya que son funciones locales.

```
51 function dydt= ddexlde(t,y,Z)
52 -   if t<=0
53 -       dydt=0;
54 -   else
55 -       ylag = Z(:,1);
56 -       dydt = -ylag(1);
57 -   end
58 - end
```

Fig. C.1.4. Sistema con retardo

El vector de tiempo se obtiene con el siguiente comando *sol.x* y el vector de soluciones se obtiene con *sol.y*. En la Figura C.1.5 se muestra la solución obtenida por la función esto se obtiene graficando el tiempo contra la solución con el siguiente comando *plot(sol.x,sol.y)*.

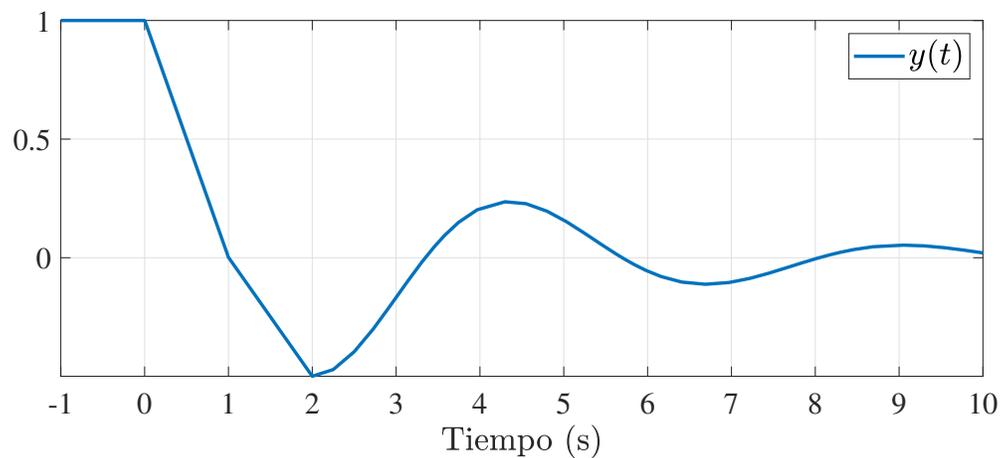


Fig. C.1.5. Salida del sistema con historia constante

Historial variable

En esta sección se considera que $\phi = 0.5$ es la condición inicial, debido a que en este caso el historial del sistema con retardo es $\phi = 0.5t$. A diferencia del ejemplo anterior en donde el historial es constante. El preámbulo es el mismo, en donde se considera un retardo de 1s, esto se muestra en la Figura C.1.1. En la Figura C.1.6 se muestra la sintaxis para el uso de la función DDE23, en este caso, *ddex2de* es el sistema con retardo y *ddex2hist* es la función que contiene el historial. En la Figura C.1.7 se muestra la función que contiene el historial variable ($5t$), se observa que en este caso en vez de ser una constante es una función lo que cambia completamente la dinámica del sistema. En la Figura C.1.8 se muestra el sistema con retardo, en este caso se ve un cambio en la condicional *if* ya que aparece un término constante (0.5) debido a que el historial es variable se debe de poner su derivada como condición inicial, lo demás queda igual que en el caso constante.

```

9      %% Uso de la funcion dde23
10     sol = dde23(@ddex2de,delay,@ddex2hist,tt);

```

Fig. C.1.6. Uso de la función con historial variable

```

47     function s = ddex2hist(t)
48     s =0.5*t;
49     end

```

Fig. C.1.7. Historial variable

```

51     function dydt= ddex2de(t,y,Z)
52     if t<=0
53         dydt=0.5;
54     else
55         ylag = Z(:,1);
56         dydt = -ylag(1);
57     end
58     end

```

Fig. C.1.8. Sistema con historial variable

En la Figura C.1.9 se muestra la solución obtenida por la función. Esto se obtiene graficando el tiempo contra la solución con el siguiente comando `plot(sol.x,sol.y)`. Se muestra una notable diferencia entre lo obtenido con el historial constante mostrado en la Figura C.1.5.

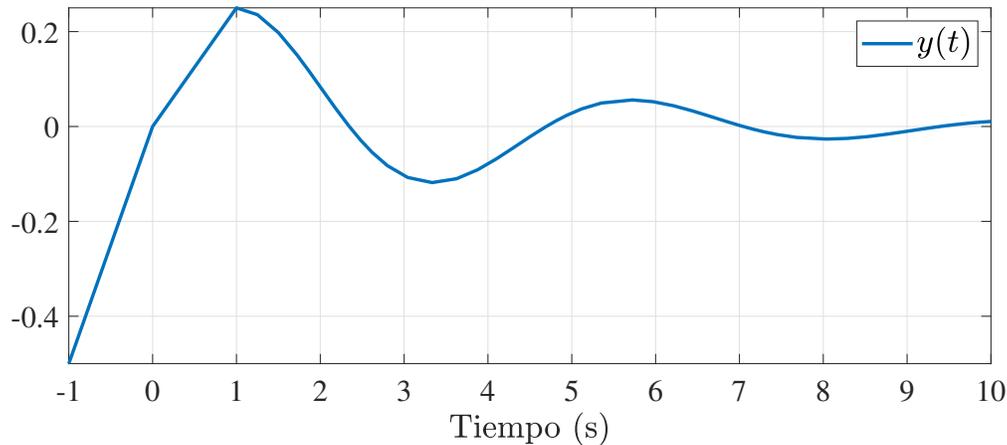


Fig. C.1.9. Salida del sistema con historial variable

C.1.1. Aplicación a la estimación del coeficiente de fricción

En esta sección se presenta el programa para la simulación de un observador en cascada con $m = 1$ para la estimación del coeficiente de fricción. El modelo se muestra a continuación, en donde se considera que la señal de salida está disponible de forma continua y presenta retardos:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), x(t)) x(t) + \varphi(x(t), u(t)) \\ y_\tau(t) = Cx(t - \tau) = x_\tau^1(t) = Q_\tau(t) \end{cases}, \quad (\text{C.1.2})$$

Los parámetros del sistema se muestran en la Tabla 3.2. Se utiliza un paso de integración de $ts = 0.002s$, un tiempo total de simulación de $tf = 100s$. El parámetro de ajuste del observador se considera $\theta = 1.25$ y el valor de $\lambda = 1$. En la Figura C.1.10 se muestran las primeras líneas para empezar la simulación. En la primera parte se muestra el preámbulo, posteriormente en la línea 3 se presentan algunas variables globales que se utilizan. En las líneas 4 – 23 se muestran los parámetros físicos de la tubería, los parámetros del observador, la dimensión de la cascada y los parámetros de simulación. En la línea 25 se muestran las condiciones iniciales del sistema. En la línea 27 se muestra el uso de la función ODE23 para obtener la simulación del sistema. El sistema se encuentra en la función `tuberia`, `t1` representa el tiempo de simulación, `CI` las condiciones iniciales

y *options* son las opciones. Con esto se obtiene la solución del sistema, para poder obtener la señal con retardo.

```

1-   clc
2-   clear all
3-   global ZE Beta yd n tau m epsilon C y0 ml nl Y t1 theta tt
4-   %% Parametros del sistema
5-   %Parametros de tuberia %
6-   L=2000; %Longitud de la tuberia
7-   g=9.81; %Gravedad
8-   D=0.3; %Diametro
9-   b=1400; %Velocidad del fluido
10-  N=30; %Numero de divisiones
11-  Ar=pi*(D/2)^2; %Area transversal
12-  Beta=(g*Ar)/(L); %Beta
13-  %% Parametros de simulacion
14-  ts=0.002;
15-  tf=100;
16-  t1=0:ts:tf; %Vector de tiempo
17-  %%
18-  n=3;%Numero de estados
19-  tau=1; %Retardo
20-  m=1; %Particiones
21-  epsilon=1; %Lambda
22-  C=[1 zeros(1,n-1)]; %Matriz C
23-  theta=1.25; % Parametro de ajuste
24-  %% Se corre el sistema original %%
25-  CI=[0.12 0.46383*((0.12)^0.9917) 0.9917]';
26-  options=odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-8);
27-  [t1,yy]=ode23(@tuberia,t1,CI,options);
28-

```

Fig. C.1.10. Preámbulo y sistema original

En la Figura C.1.11 se muestra la obtención de la señal con retardo, las condiciones iniciales y el uso de la función DDE23 para obtener la simulación del observador en cascada. En las líneas 29–31 se muestra la obtención de la señal con retardo. Posteriormente, en las líneas 32–39 se muestran las condiciones iniciales para el observador, en donde es necesario asignar estas condiciones para cada subsistema, en este caso para $j = 0$ y $j = m = 1$. Después se agrega la condición inicial de la matriz S , es necesario tenerlo en forma de columna. Para esto se usa el comando *reshape*. Se define el retardo de los estados, en este caso nos apoyamos de lo propuesto en el teorema 4.1.1, donde $delay = \tau/m$. Esto se muestra en la línea 44. Con todo lo anterior es posible utilizar la función DDE23 para simular el observador en cascada. En la línea 49 se muestra el uso de la función DDE23, donde el observador en cascada se tiene en la función *ObsTubDelaym1* y su historial en la función *historiaTubm2*.

```

29     %% Se crea un vector con retardo en el cual la salida yy se retrasa
30     yd=[ones((tau)/ts,1)*0.12
31         yy(1:length(yy)-((tau)/ts))'];
32     %% Se crea un vector de condiciones iniciales x(0)%%
33     ZE=[0.12 0 0];
34     II=eye(n);
35     II=reshape(II,1,n^2);
36     y0=[ZE];
37     for i=1:m
38         y0=[y0 ZE];
39     end
40     %% Se le agrega S(0)
41     y0=[y0 II]; %S0
42     [n1,m1]=size(y0);
43     %% Retardo %%
44     delay=[tau/m];
45     %% Uso de la función DDE23 %%
46     options=ddeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-8);
47     tt=[0 tf];
48     Y=y0;
49     sol = dde23('ObsTubDelaym1',delay,'historiaTubm2',tt,options);

```

Fig. C.1.11. Retraso en la señal y observador en cascada

En la Tabla C.1.1 se muestra la estructura de cada subsistema j considerando un $m = 1$, esta será la estructura que será programa en la función *ObsTubDelaym1*. Es importante resaltar que el subíndice del vector de estado x y de la entrada u denota la posición del subsistema. Por ejemplo, $(\hat{x}_1 - \hat{x}_0)$ es la resta entre el vector de estado estimado por el predictor $j = 1$ y el observador en la base $j = 0$. En las Figuras C.1.12 y C.1.13 se muestran la programación del observador en cascada, donde se muestran los estados con retardo x_{lag} , los estados libres de retardo x_e , la obtención de la matriz S , la matriz Δ_θ como DTH . Es importante resaltar que se usaron como funciones la matriz A y ϕ . Por último se muestran la obtención de los términos de corrección de cada subsistema G_j y sus ecuaciones.

Subsistema	Ecuación
$j = 0$	$\hat{x}_0 = A(u_0, \hat{x}_0)\hat{x}_0 + \varphi(u_0, \hat{x}_0) - G_0$ $G_0 = \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C \hat{x}_0 - y_\tau)$
$j = 1 = m$	$\hat{x}_1 = A(u_1, \hat{x}_1)\hat{x}_1 + \varphi(u_1, \hat{x}_1) - G_1$ $G_1 = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} (G_0 + A(u_0, \hat{x}_1)\hat{x}_1 - A(u_0, \hat{x}_1)\hat{x}_0 - \bar{A}(\hat{x}_1 - \hat{x}_0) + (\varphi(u_0, \hat{x}_1) - \varphi(u_0, \hat{x}_0)))$

Tabla C.1.1. Observador en cascada para $m = 1$

```

1  function dv = ObsTubDelaym1(t,y,Z)
2  global C n yd t1 theta m epsilon tau
3  if(t<=tau)
4  dv = zeros(15,1);
5  else
6  dv = zeros(15,1);
7  %% Edos con retardo %%
8  xe0lag = Z(1:3); %%% obs x0
9  xellag = Z(4:6); %%% obs x1
10 %% Estados sin retardo %%
11 xe0=y(1:3);
12 xel=y(4:6);
13 %% Matriz S %%
14 S0=reshape(y(7:15),n,n);
15 %% Matriz Delta theta %%
16 DTH=diag([1 1/theta 1/theta^2]);
17 %% Matriz Bar A_j %%
18 Appp=-epsilon*eye(n);
19 %% j=0 %%
20 j=0;
21 A0=fct_Atub(t-tau+(j/m)*tau,xe0);
22 B0=fct_Btub(t-tau+(j/m)*tau,xe0);
23 %% j=1 %%
24 j=1;
25 A1=fct_Atub(t-tau+(j/m)*tau,xel);
26 B1=fct_Btub(t-tau+(j/m)*tau,xel);
27 Allag=fct_Atub(t-tau+((j-1)/m)*tau,xellag);
28 Bllag=fct_Btub(t-tau+((j-1)/m)*tau,xellag);

```

Fig. C.1.12. Programación del observador en cascada (Parte 1)

```

29 %% Se obtiene la señal con retardo en el tiempo actual %%
30 yd1=interp1(t1,yd(:,1),t);
31 %% Error %%
32 net=C*xe0-yd1;
33 %% Termino de corrección j=0 %%
34 G0=theta*inv(DTH)*inv(S0)*C'*net;
35 %% Observador de la base %%
36 dxxe0=A0*xe0+B0-G0;
37 %% Termino de corrección j=1 %%
38 G1=expm(Appp*(tau/m))*(G0+...
39 +Allag*xellag-A0*xe0+...
40 -Appp*(xellag-xe0)+...
41 + (Bllag-B0));
42 %% Predictor %%
43 dxxe1=A1*xel+B1-G1;
44
45 %% Matriz S %%
46 dS0=theta*(-S0-A0'*S0-S0*A0+C'*C);
47 dv(1:3) = dxxe0;
48 dv(4:6) = dxxe1;
49 dv(7:15) = reshape(dS0,n^2,1);
50 end

```

Fig. C.1.13. Programación del observador en cascada (Parte 2)

En la Figura C.1.14 se muestra la función que contiene el historial para el uso de la función DDE23. En este caso se muestra un historial constante, donde primeramente se mantienen las condiciones iniciales del observador en tiempos menores al retardo. Posteriormente, el historial es la solución del sistema obtenida anteriormente.

```

1  function [out]=historiaTubm2(t)
2
3  global Y y0 n1 m1 n m tau
4
5  if(t<=tau)
6
7      yyy=y0;
8
9  else
10     y00=[y0(n1,1:(n))'];
11     j=n+1; %4
12     for ii=1:m
13         y00=[y00
14             spline(Y(:,m1+1),Y(:,j+0),t)
15             spline(Y(:,m1+1),Y(:,j+1),t)
16             spline(Y(:,m1+1),Y(:,j+2),t)];
17         j=j+n;
18     end
19     yyy=[y00
20         y0(n1,j:j+n^2-1)'
21         net0];
22 end
23
24 out=yyy;

```

Fig. C.1.14. Programación del historial para el observador en cascada

En la Figura C.1.15 se presentan los primeros 25s de la simulación, donde se muestra la comparación entre la salida del sistema libre de retardo ($Q(t)$) obtenida con ODE23, la salida con retardo ($Q_\tau(t)$) obtenida con *yd* y por último la salida obtenida por el observador el último predictor de la cascada ($\hat{Q}_m(t)$) obtenida con la función DDE23. Se muestra que con el programa presentado anteriormente se obtienen correctamente la salida con retardo y la simulación del observador en cascada. En este trabajo de tesis se utilizaron programas como el presentado para la simulación de los observadores mostrados en las secciones 4.1 y 4.3.

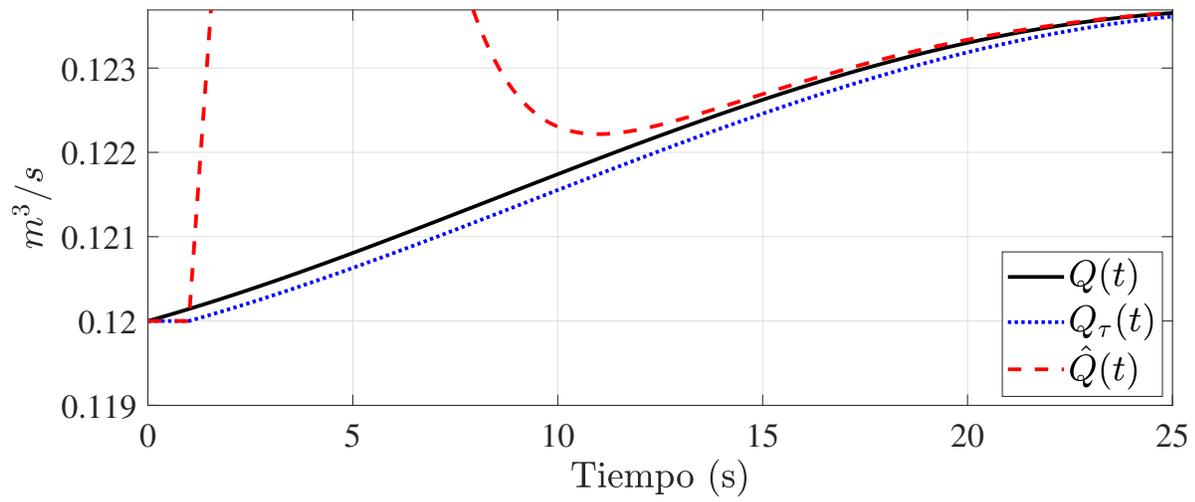


Fig. C.1.15. Señales de salida obtenidas

Anexo D

Artículos publicados

D.1. IET Control Theory & Applications

Received: 2 March 2020 | Revised: 20 August 2020 | Accepted: 9 November 2020 | IET Control Theory & Applications
DOI: 10.1049/cth2.12053

ORIGINAL RESEARCH PAPER

 The Institution of Engineering and Technology 

Observer for non-linear systems with sampled measurements: Application to the friction factor estimation of a pipeline

O. Hernández-González¹ | F. Ramírez-Rasgado² | C. M. Astorga-Zaragoza² |
M. E. Guerrero-Sánchez¹ | G. Valencia-Palomo³ | A. E. Rodríguez-Mata⁴

¹CONACYT, Tecnológico Nacional de México, IT Hermosillo, Hermosillo, Sonora, Mexico
²Tecnológico Nacional de México, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, CENIDET, Cuernavaca, Morelos, Mexico
³Tecnológico Nacional de México, IT Hermosillo, Hermosillo, Sonora, Mexico
⁴CONACYT, Tecnológico Nacional de México, IT Culiacán, Sinaloa, Mexico

Correspondence
C. M. Astorga-Zaragoza, Tecnológico Nacional de México, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, CENIDET, Cuernavaca, Morelos, Mexico.
Email: carlos.a@cenidet.cnm.mx

Funding information
Tecnológico Nacional de México

Abstract
This paper presents a new approach of the continuous-discrete observer design for a class of uncertain state-affine non-linear systems. A high-gain observer redesign is developed and analysed under insightful conditions. The proposed observer estimates the state vector by using system output measurements with long sampling times. This result is achieved by considering a persistent excitation condition that can be validated online. The performance of the proposed algorithm is evaluated under time-varying sampled measurements to estimate the friction factor of a pipeline where the case of noisy sampled output measurements is also considered.

1 | INTRODUCTION

A good fluid administration in pipes is a task that requires a major effort, therefore fluid distribution systems, its monitoring, and automatic fault diagnosis are areas that need continuous improvement. The main objective of automatic pipeline monitoring systems is to estimate pressure losses, distortions, or sensor failures, hence optimising instrumentation and economy [1–3]. Leaks in pipelines have different causes, resulting in financial losses, destruction of the biosphere, and serious risks to human health. The percentage of drinking water volume loss has been calculated at about 21%, although in countries such as Mexico it reaches an average value of 40% [4]. Also in Mexico, the state oil company PEMEX lacks adequate technology to deal with this, leading to losses of around two billion dollars a year due to leaks in oil pipelines provoked by clandestine taps which even cause human losses [5]. Therefore, the use of modern techniques of automatic control theory, such as the so-called observers, helps and improves the processes of

monitoring states and failures to mitigate the problem mentioned above [6].

The observer design problem has been investigated by numerous researchers, but it is still an open problem. Many different classes of systems have been considered, and mainly for continuously available measurements [7, 8]. A strong property of linear systems is the fact that the observability does not depend on the input. This idea has been taken to non-linear systems giving birth to the general high-gain observer design in the seminal paper [9]. Contrarily to the linear case, the observability property of a non-linear system can fail depending on the input. Several different general forms have been proposed for the observer design of non-uniformly observable systems. Such design usually requires additional assumptions on the input, called persistent excitation condition [10–12].

A common situation encountered for observer design is that typically the output of the systems is assumed to be continuous time. However, in many practical cases, the output is only available at discrete-time intervals. Several results are proposed for

This is an open access article under the terms of the [Creative Commons Attribution License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/), which permits use, distribution and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.
© 2020 The Authors. *IET Control Theory & Applications* published by John Wiley & Sons Ltd on behalf of The Institution of Engineering and Technology

IET Control Theory Appl. 2020;1–14.

[wileyonlinelibrary.com/doi/10.1049/cth2.12053](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1049/cth2.12053)

D.2. Memorias del congreso nacional de control automático 2019



Memorias del Congreso Nacional de Control Automático
ISSN: 2594-2492

Continuous-discrete observer for nonlinear systems with sampled measurements: application to a 1-DOF helicopter

O.Hernández-González^{*,**} F.Ramírez-Rasgado^{***}
M.E. Guerrero-Sánchez^{*} A. Perez-Gómez^{*}
C.M. Astorga-Zaragoza^{***} J.J. Moreno-Vázquez^{**}

^{*} *Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico Superior de Coatzacoalcos, Carr. Anti. Mina-Coatza s/n, CP 96370, Coatzacoalcos, Ver., Mexico. (e-mail: oherandezg@itesco.edu.mx)*

^{**} *Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Minatitlán, Blvd. Institutos Tecnológicos S/N Col. Buena Vista Norte, Minatitlán, Ver., Mexico.*

^{***} *Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, CENIDET, Internado Palmira s/n, Col. Palmira, CP 62490, Cuernavaca, Mor., Mexico.*

Abstract: This work presents a new approach for observer design for a general class of state affine nonlinear systems in the presence of uncertainties in the state equations and the sampled output measurements. A new high-gain observer design is developed and analyzed under insightful conditions. This result is achieved by considering a persistent excitation condition that can be validated on-line. The algorithm is applied to a 1-D helicopter and validated with simulations

Keywords: Nonlinear systems, sampled measurement and continuous-discrete observer

1. INTRODUCTION

Over the last decades, the observer design has been investigated by numerous researchers, but is still an open problem. Many different class of systems have been considered, and mainly for continuously available measurements, Alessandri and Rossi [2015], Besançon [1999]. A strong property of linear systems is the fact that the observability does not depend on the input. This idea has been transposed to nonlinear systems giving birth to the general high-gain observer design in the seminal paper. Contrarily to the linear case, the observability of a nonlinear system can be lost depending on the input. Several different general forms have been proposed for the observer design of non-uniformly observable systems. Such design usually requires additional assumptions on the input, called persistent excitation condition.

A typical difficulty encountered for observer design is that the output of the systems is assumed continuous. However, in many practical cases the output is available at discrete time. Several results have already been proposed for this challenging problem, e.g. Folin et al. [2016]. The

^{*} The authors would like to thank the Program for Teacher Professional Development (**PRODEP**) for their support with the project financing.

first observer considering this constraint has been presented in Deza et al. [1992] and it is based on a Kalman filter. In the continuous case, a continuous estimation of the output has been used in Karafyllis and Kravaris [2009] and reconsidered in Ahmed-Ali and Lamnabhi-Lagarrique [2012]. Following the same idea, an observer for a class of multi-output systems has been proposed in Farza et al. [2014b] and the effect of uncertainty on the model has been further studied in Farza et al. [2014a]. A similar design based on the continuous case has been proposed in Raff et al. [2008] but the correction term is kept constant between two measures. The case of systems whose observability depends on the input has been considered in Nadri et al. [2004], it is based on a state estimator which is reinitialized when a new measurement is available. Several publications have appeared in recent years documenting the observer design problem for nonlinear systems with sampled output, Hammouri et al. [2006], Nadri et al. [2013], here, the dynamical systems is used to provide a state prediction over the sampling intervals. The state prediction is updated by the output measurements, which are sampled at instant t_k . It has been proposed a correction term, that is shaped by a gain which is computed through the resolution of LMI (Linear Matrix Inequality). To the authors best knowledge, no observer has been proposed for the class of nonlinear state affine

D.3. Memorias del congreso nacional de control automático 2020



Memorias del Congreso Nacional de Control Automático ISSN: 2594-2492

Cascade observer design for uncertain nonlinear systems under time-delay

F. Ramírez-Rasgado* O. Hernández-González**
 C.-M. Astorga-Zaragoza* J. Reyes-Reyes*
 G.-L. Osorio-Gordillo* G. Valencia-Palomo***
 R.-A. Galaz-Bustamante***

* *Tecnológico Nacional de México: Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Mor., México.*

** *CONACYT: Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.*

*** *Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.*

Abstract: In this work a full-state observer is presented for non-uniform observable nonlinear systems in presence of uncertainties and delayed output. The observer has a cascade structure, which is based on a high-gain observer that estimates the delayed state. Subsequently, the cascade structure has m subsystems, each one estimating a part of the total delay. The last subsystem gives the delay-free state estimation. Then, it is possible to establish that the observation error will converge to a bounded value depending on the magnitude of the time delay and uncertainties. In a delay-free case the error converges to zero. The proposed cascade observer is tested to estimate the friction factor in a pipeline with delayed-output measurement.

Keywords: Nonlinear systems, delayed output, uncertain system and cascade observer.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales problemas del diseño de observadores para sistemas no lineales son las incertidumbres propias de cada sistema y los retardos de medición.

Las incertidumbres en los sistemas están relacionadas a la falta de certeza del valor de ciertos parámetros, de entradas desconocidas y otros agentes externos que repercuten en la dinámica de los sistemas. Tomando en cuenta esto, Farza et al. (2014) proponen un observador de alta ganancia para un sistema con incertidumbres, con el cual se logra la estimación de los estados con un error acotado a la incertidumbre. Tréangle et al. (2019) diseñan un observador de alta ganancia el cual cuenta con un filtro para reducir el efecto del ruido en el sistema. Otra problemática que se puede presentar en el diseño de los observadores es proponer esquemas de estimación para sistemas no uniformemente observables, cuya observabilidad depende de las entradas y los estados (Farza et al., 2019; Hernández González et al., 2019).

Los retardos en los sistemas pueden aparecer en los estados, en las señales de control, en las señales de salida o de forma combinada. Estos retardos pueden deberse a factores como: la medición de los sensores, retardos en la transmisión e inercias no modeladas. Algunos ejemplos

* Los autores agradecen al Tecnológico Nacional de México por el apoyo otorgado a través del proyecto 8017.20-P.

de sistemas en donde se presentan retardos son: control de procesos químicos (Gonzalez et al., 2019), redes de comunicación (Sanz et al., 2016), sistemas biológicos (Borri et al., 2017). Otros ejemplos se muestran en Fridman (2014); Targui et al. (2019). Un diseño de observador para sistemas lineales se propone en Languet et al. (2018), mientras que para sistemas LTV con retardos en Weston et al. (2017), y Sanz et al. (2019).

Como antes se mencionó, uno de los factores que ocasionan retardos en los sistemas son los sensores. Una forma de solucionar esto es por medio de un observador en cascada, el cual a grandes rasgos se conforma de un observador como base y un número de predictores que estiman cierta parte del retardo en el sistema. Un observador para un sistema lineal se propone en Cacace et al. (2014) y para sistemas no lineales en Farza et al. (2015); Tréangle et al. (2018); Farza et al. (2017).

Este artículo se enfoca en el diseño de un observador en cascada para sistemas no lineales no uniformemente observables con incertidumbres donde la salida medida está afectada por retardos de tiempo constantes. Esta clase de sistemas se presenta en la Sección 2. Este sistema debe cumplir con la condición de entrada persistente ya que su observabilidad depende de ella. El diseño del observador en cascada se muestra en la Sección 3. Se muestra su convergencia ante la presencia de incertidumbre en cada predictor de la cascada. Posteriormente, en la Sección

D.4. 6ta Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada

Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada
Vol. 4, Núm. 1, Enero - Junio 2021.

ISSN en trámite

Sistema de Monitoreo y Control para la Regulación de Glucosa en Pacientes con Diabetes Tipo 1

F. Ramírez-Rasgado * J. Castro-Gómez ***
O. Hernández-González ** C.-M. Astorga-Zaragoza *
G. Valencia-Palomo ***

* *Tecnológico Nacional de México: Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Mor., México. (e-mail: felipe.ramirez@cenidet.edu.mx)*

** *CONACYT: Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.*

*** *Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.*

Resumen: En este trabajo se presenta un sistema de monitoreo y control para pacientes con diabetes tipo 1. El esquema de control se basa en un control positivo el cual se logra a partir de los estados estimados por un observador. El observador logra estimar los estados de forma continua, sin importar que la señal que recibe del sistema solo está disponible en instantes de tiempo discreto. La principal ventaja del controlador es que las ganancias son elegidas tal que la ley de control solo dará valores positivos, lo que hace sea implementable. El sistema de monitoreo y control se valida primeramente en un entorno de MATLAB y posteriormente se implementa en LabVIEW con el fin de proveer una herramienta para el personal de salud para la emulación del comportamiento de este padecimiento. En ambos entornos se logra llevar al paciente a valores de normogluceemia.

Keywords: Sistema lineal, Salidas muestreadas, Control positivo, Sistema biológico, Diabetes tipo 1

1. INTRODUCCIÓN

El páncreas es un órgano del sistema endocrino encargado de la producción de insulina y una de las principales enfermedades que lo afectan es la diabetes mellitus tipo uno, la cual es una enfermedad crónica degenerativa y es la segunda causa de muerte en México Magdelaine et al. (2015). El desarrollo tecnológico para el tratamiento de la diabetes se remonta a la década de los 70, época en la que se utilizó la primera bomba de insulina.

Una década después, se desarrolló el primer sistema de monitoreo continuo de glucosa sanguínea, sin embargo, no fue hasta la década pasada en la que ambos dispositivos fueron fusionados en uno solo, creando lo que se conoce como *Sensor-Augmented Pump Therapy* (SAPT) Apablaza et al. (2017). Un páncreas artificial es un SAPT junto con un algoritmo de control que regula automáticamente el nivel de glucosa, emulando el funcionamiento natural de un páncreas Sereno et al. (2018); Kirchstaeiger et al. (2011). Las ventajas de la utilización de este aparato frente a la introducción manual de insulina, se encuentra en la tranquilidad de que el usuario conocerá sus niveles de azúcares constantemente, permitiendo ser controlados sin ver fuertemente afectados ante las distintas variables que vive a diario un paciente con diabetes mellitus tipo 1 González and Cipriano (2016).

Con grandes avances en la instrumentación médica, el desarrollo de los páncreas artificiales ha provocado un gran interés a nivel mundial, con desarrollos de distintos modelos para evitar la hipergluceemia e hipogluceemia Sereno et al. (2018), o la personalidad de los algoritmos para lograr una individualización de los mismos para cada paciente Messori et al. (2016), o el desarrollo de algoritmos predictivos con factores como el ejercicio, el estrés o comidas no planeadas Toledo Enriquez et al. (2015). Todas las investigaciones en el tema tienen algo en común: el uso de simuladores de pacientes.

El diseño de simuladores de páncreas es de gran importancia en las investigaciones sobre la diabetes y los páncreas artificiales, ya que, sin la disponibilidad de éstos, las pruebas se tendrían que realizar directamente sobre los pacientes o en animales. Dichas pruebas podrían resultar no éticas, de un alto costo gracias a su alta dificultad, o incluso peligrosas, poniendo en riesgo la vida del paciente en cuestión. Por lo que, contar con un simulador confiable del páncreas, permitirá conocer el funcionamiento dinámico de este órgano ante distintas condiciones.

Los sistemas de monitoreo se basan en observadores de estado, los cuales a partir del conocimiento de señales de salida logran estimar las variables que no están disponibles. Estos han sido diseñados para sistemas industriales hasta sistemas biológicos, los cuales han sido grandes aliados

D.5. 5ta Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada

Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada
Vol. 3, Núm. 2, Julio - Diciembre 2020.

ISSN en trámite

Control basado en observador para el desplazamiento de estructuras con retardo en la señal de control

F. Ramírez-Rasgado* R-R. Galaz-Palma***
O. Hernández-González** C.-M. Astorga-Zaragoza*
G. Valencia-Palomo*** M.E. Guerrero-Sánchez**
B. Targui****

* Tecnológico Nacional de México: Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Mor., México.(e-mail: felipe.ramirez@cenidet.edu.mx)

** CONACYT: Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.

*** Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.

**** Laboratoire d'Automatique de Caen, 6 Boulevard du Marechal Jun, 14050, Caen Cedex, France.

Resumen: Este trabajo presenta un control proporcional-derivativo (PD) basado en un observador de estados para reducir las oscilaciones en una estructura civil donde la señal de control presenta un retardo desconocido y la salida del sistema solo está disponible en instantes de tiempo. El observador se diseña utilizando el enfoque de alta ganancia, el cual considera la señal con el retardo máximo para su diseño. Posteriormente, ajustando las ganancias de un control PD se logra reducir las oscilaciones presentadas por el sistema. El esquema de control basado en observador se valida para una estructura de dos pisos ante distintos tiempos de muestreo y retardos inciertos.

Keywords: Sistema lineal, Salidas muestreadas, Observador de alta ganancia, Retardo incierto, Retardo variable.

1. INTRODUCCIÓN

Las estructuras civiles enfrentan diversos tipos de daños durante su funcionamiento; como causa principal de estos daños han sido fenómenos naturales eventualmente por terremotos (Morales-Valdez et al., 2019). Por esta razón este tema es emergente de considerar para poder prevenir fallas estructurales pudiendo ser fatales para la población. Muchas aportaciones se han establecido en el análisis de las vibraciones como lo presenta (Das et al., 2016).

Las técnicas utilizadas para desarrollar los diseños de control se basan en el análisis de estabilidad de Lyapunov, donde se asumen los parámetros conocidos de resorte, amortiguador y masa para representar el modelo matemático (Jiménez, 2004). La estabilidad de un sistema de control con retardo en tiempo continuo, la cual se evaluó mediante la inspección de los valores propios (Ariba and Gouaisbaut, 2020).

Para algunas aplicaciones de control es necesario conocer todas las variables de estado del sistema, sin embargo, esto representa un alto costo en la instrumentación. Por lo tanto, se recurre a los observadores de estado, los cuales a partir de las señales disponibles reconstruyen las que no lo están. La estimación simultánea de estados y parámetros con mediciones muestreadas tienen un problema práctico

para los sistemas físicos que están en tiempo continuo y sus parámetros están sujetos a incertidumbres (Ahmed-Ali et al., 2019). También existe un problema para reconstruir variables de estado no medibles, las cuales son necesarias para estabilizar el sistema mediante las mediciones de la salida con retardo (Battilotti, 2020).

Los retardos se pueden presentar en diferentes partes de los sistemas: variables estados, entradas, salidas, etc. Estas son debidas a diferentes causas como lo son: las redes de comunicación, inercias no modeladas, medición de los sensores, etc. Algunos ejemplos se muestran en (Abd et al., 2017; Qi et al., 2018; Guo et al., 2019). Considerando esto, algunos observadores han sido diseñados (Cacace et al., 2014; Ghanes et al., 2013).

En (Jian et al., 2009), analiza la relación entre la vulnerabilidad y la intensidad sísmica, con una respuesta de aceleración como entrada sísmica y en (Xu et al., 2020) otorga una propuesta para estabilizarlas; considerando esto se propone el esquema de solución que se abordará a continuación.

Este artículo presenta una solución para reducir los desplazamientos de una estructura tipo edificio donde la medición de salida solo está disponible en instantes de tiempo (t_k) y la señal de control presenta un retardo desconocido ($\tau(t)$), el cual es variante en el tiempo (Sección

