



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Diseño de un Control Tolerante a Fallas para Sistemas
Takagi–Sugeno Descriptor

presentada por

Ing. Víctor Emmanuel Mujica Campos

como requisito para la obtención del grado de

**Maestro en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Directora de tesis

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo

Codirector de tesis

Dr. Rodolfo Amalio Vargas Méndez

Cuernavaca, Morelos, México. Julio de 2021.



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Departamento de Ingeniería Electrónica

Cuernavaca,
Mor.,
No. de Oficio:
Asunto:

05/julio/2021

DIE/145/2021

Aceptación de documentos de
tesis

DR. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Ing. Víctor Emmanuel Mujica Campos, con número de control M19CE040 de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Diseño De Un Control Tolerante A Fallas Para Sistemas Takagi-Sugeno Descriptor" y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 9968714

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Rodolfo Amalio Vargas Méndez
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 9526506

REVISOR 1

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Doctor en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 5505019

REVISOR 2

Dr. Carlos Daniel García Beltrán
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 8699605

C.p. M.E. Guadalupe Carrido Rivera - Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Estudiante
Expediente

HEE/mrsr



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Subdirección Académica

Cuernavaca, Mor.,

05/julio/2021

No. de Oficio:

SAC/86/2021

Asunto:

**Autorización de
impresión de tesis**

VÍCTOR EMMANUEL MUJICA CAMPOS
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
PRESENTE

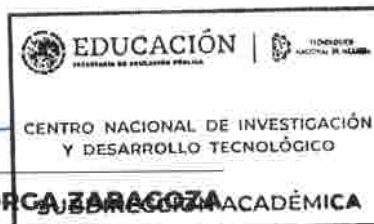
Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Diseño De Un Control Tolerante A Fallas Para Sistemas Takagi-Sugeno Descriptor", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

"Excelencia en Educación Tecnológica"

"Educación Tecnológica al Servicio de México"



DR. CARLOS MANUEL ASTORCA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

C.c.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera, Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Expediente
CMAZ/CHC



Dedicatoria

A mi mamá *Isabel Campos López, a ti que te has dedicado desde niña al bienestar de tú familia, eres un ejemplo de un ser humano maravilloso. Para ti, todo mi amor, admiración y respeto.*

A mi papá *Cruz Mujica Sánchez, a ti que a pesar de tantas adversidades has logrado mucho, eres un gran ejemplo de perseverancia. Estoy seguro de que en tú lugar muchos habrían tirado la toalla.*

A mis abuelos *Cirilo Campos y Vicenta López, que por tantos años fueron muy generosos con la grandiosa familia que juntos construyeron. Siempre los llevaré en mis pensamientos.*

Agradecimientos

A mis padres, por su amor, trabajo y sacrificio. No ha sido sencillo el camino para llegar hasta aquí, pero siempre supe que podría contar con ustedes. Les agradezco porque juntos hemos logrado llegar hasta este momento.

A mis directores de tesis, Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo y Dr. Rodolfo Amalio Vargas Méndez por brindarme su apoyo, experiencia y tiempo para la realización de esta tesis.

A los integrantes del comité revisor, Dr. Carlos Daniel García Beltrán y Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza, por sus valiosas observaciones que han enriquecido este trabajo de investigación.

Agradezco a todos los profesores que fueron parte de mi formación académica. En especial a aquellos que me motivaron a ser autodidacta y desarrollar habilidades fuera del aula.

A mis compañeros de generación por los buenos momentos que compartimos en nuestra corta estancia en Cenidet. Mis mejores deseos para sus planes a futuro.

A todo el personal del Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por su buena gestión antes y durante la pandemia.

Al Tecnológico Nacional de México (TecNM) por facilitar sus instalaciones durante mi estancia presencial en el TecNM campus Cenidet.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por brindarme el apoyo económico durante mis estudios de maestría.

Resumen

En esta tesis se presenta una metodología para compensar fallas en actuadores utilizando un esquema de control tolerante a fallas (CTF), basado en un observador adaptable que brinda simultáneamente la estimación de las variables de estados y fallas de una clase de sistemas Takagi–Sugeno descriptor con variables premisas medibles. Se propone una ley de control de seguimiento de trayectoria empleando un modelo de referencia que proporciona la dinámica deseada del sistema.

Se presentan dos estrategias de estimación utilizando la estructura de un observador dinámico generalizado (GDO). En la primera estrategia se trata el caso de fallas invariantes en el tiempo y la segunda estrategia propuesta aborda la problemática de fallas variantes en el tiempo, esta característica beneficia al CTF porque la convergencia de la falla estimada tiene un mejor desempeño. El observador adaptable proporciona la estimación de un número limitado de fallas en sensores y actuadores.

La aportación principal de este trabajo es la metodología de diseño para la estimación de fallas en actuadores variantes en el tiempo. Esta estrategia permite estimar una amplia gama de señales de fallas en actuadores utilizando una estructura generalizada para el observador. Dentro de este marco, se utiliza la norma \mathcal{H}_∞ para la formulación del problema de optimización. Por otro lado, las ganancias del esquema de CTF se calculan resolviendo un conjunto de desigualdades matriciales lineales (LMIs) obtenidas mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov. La eficiencia y desempeño de la estrategia desarrollada se valida utilizando dos casos de estudios: el modelo de un reactor químico CSTR encaquetado y un ejemplo académico, mediante simulaciones de diversos escenarios de fallas.

Palabras clave: Control Tolerante a Fallas, Estimación de Fallas, Sistemas Takagi–Sugeno Descriptor, Observador Dinámico Generalizado, Reactor CSTR encaquetado.

Abstract

The aim of this thesis is to provide a methodology to compensate actuators faults using a fault-tolerant control scheme (FTC) based on an adaptive observer that simultaneously provides the estimation of state variables and faults of a class of Takagi-Sugeno descriptor systems with measurable premises variables. A trajectory tracking control law is proposed using a model reference that shows the desired dynamics of the system.

Two estimation strategies are presented using the structure of a generalized dynamic observer (GDO). The first strategy deals with the case of time-invariant faults and the second proposed strategy addresses the problem of time-varying faults. This characteristic benefits the FTC because fault estimation convergence has a better performance. The adaptive observer provides the estimation of a limited number of sensor and actuator faults.

The main contribution of this work is the design methodology for time-varying actuator fault estimation. This strategy allows estimating a wide range of actuator fault signals using a generalized observer structure. Within this framework, the \mathcal{H}_∞ norm is used to formulate the optimization problem. On the other hand, the FTC scheme gains are calculated by solving a set of linear matrix inequalities (LMIs) obtained by Lyapunov stability analysis. The efficiency and performance of the developed strategy is validated using two case studies: the jacketed CSTR chemical reactor model and a numerical example, through simulations of various faults scenarios.

Keywords: Fault Tolerant Control, Fault Estimation, Takagi–Sugeno Descriptor Systems, Generalized Dynamic Observer, Jacketed CSTR Reactor.

Índice

Índice general	v
Lista de figuras	VIII
Lista de tablas	X
Nomenclatura	XI
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo general	2
1.2.2. Objetivos específicos	2
1.3. Estado del Arte	2
1.3.1. Sistemas descriptor	2
1.3.2. Sistemas Takagi–Sugeno	3
1.3.3. Observadores	3
1.3.4. Estimación de fallas	4
1.3.5. Técnicas de CTF	5
1.3.6. Conclusiones del estado del arte	5
1.4. Justificación	6
1.5. Originalidad	6
1.6. Hipótesis	6
1.7. Aportaciones	7
1.8. Metodología de desarrollo	7
1.9. Organización del documento	8
1.10. Conclusiones del capítulo	8
2. Marco Teórico	9
2.1. Sistemas descriptor	9
2.1.1. Propiedades de sistemas descriptor	9
2.1.2. Ejemplo: Intercambiador de calor	13

2.2.	Sistemas Takagi–Sugeno	14
2.2.1.	Método por sector no lineal	15
2.2.2.	Ejemplo numérico	17
2.2.3.	Simulación 1. Validación del modelo T–S	18
2.3.	Diagnóstico de fallas	20
2.3.1.	Clasificación de fallas	20
2.3.2.	Módulo de diagnóstico	21
2.3.3.	Redundancia	23
2.4.	Control Tolerante a Fallas	24
2.4.1.	Diseño de sistemas de CTF	25
2.5.	Observadores	26
2.5.1.	Clasificación de observadores	26
2.5.2.	Estructura de observadores	27
2.6.	Conclusiones del capítulo	28
3.	Caso de Estudio	29
3.1.	Fallas en el proceso	30
3.1.1.	Fallas en sensores	30
3.1.2.	Fallas en actuadores	30
3.2.	Modelo descriptor no lineal	32
3.2.1.	Parámetros del Reactor CSTR	33
3.3.	Modelo T–S descriptor	34
3.3.1.	Simulación 2. Validación del modelo T–S descriptor del reactor CSTR . . .	36
3.4.	Conclusiones del capítulo	38
4.	Diseño del Observador Adaptable	39
4.1.	Preliminares	39
4.1.1.	Sistema aumentado	40
4.2.	Fallas invariantes en el tiempo	41
4.2.1.	Formulación del problema	41
4.2.2.	Parametrización del observador	42
4.2.3.	Análisis de estabilidad	45
4.3.	Fallas variantes en el tiempo	47
4.3.1.	Formulación del problema	47
4.3.2.	Parametrización del observador	49
4.3.3.	Análisis de estabilidad	49
4.4.	Simulación 3. Aplicación al reactor CSTR enchaquetado	51
4.4.1.	Cálculo de ganancias	51
4.4.2.	Descripción del escenario de fallas	56
4.5.	Conclusiones del capítulo	60

5. Diseño del Control Tolerante a Fallas	61
5.1. Formulación del problema	61
5.1.1. Modelo de referencia	62
5.2. Análisis de estabilidad	63
5.3. Simulación 4. Aplicación al reactor CSTR enchaquetado	66
5.3.1. Cálculo de ganancias	66
5.3.2. Descripción del escenario de fallas	69
5.4. Simulación 5. Aplicación a un ejemplo numérico	73
5.4.1. Cálculo de ganancias	73
5.4.2. Descripción del escenario de fallas	74
5.5. Simulación 6. Análisis de Robustez	77
5.6. Conclusiones del capítulo	82
6. Conclusiones	83
6.1. Trabajos futuros	84
Apéndices	85
A. Diagrama del Observador Adaptable	85
B. Diagrama del Control Tolerante a Fallas	87
Bibliografía	88

Lista de figuras

2.1. Circuito RLC.	10
2.2. Intercambiador de calor.	13
2.3. Método de representación T-S.	15
2.4. Simulación 1: Perfil de entrada.	18
2.5. Simulación 1: Variables premisas.	19
2.6. Simulación 1: Funciones de pertenencia.	19
2.7. Simulación 1: Variables de estados del sistema T-S.	20
2.8. Clasificación temporal de fallas.	21
2.9. Unidad de diagnóstico de fallas.	22
2.10. Redundancia analítica.	23
2.11. Esquema general de un sistema de CTF.	24
2.12. Adaptación de sistemas de CTF.	25
2.13. Diagrama del observador Luenberger.	26
2.14. Diagrama del observador GDO.	28
3.1. Reactor CSTR con chaqueta.	29
3.2. Fallas en sensores.	30
3.3. Proceso del actuador.	31
3.4. Válvula neumática.	31
3.5. Simulación 2: Entradas.	36
3.6. Simulación 2: Variables premisas.	36
3.7. Simulación 2: Funciones de pertenencia.	37
3.8. Simulación 2: Comparación $x_1(t)$ y $x_2(t)$	37
3.9. Simulación 2: Comparación $x_3(t)$, $x_4(t)$ y $x_5(t)$	38
4.1. Diagrama del observador adaptable.	39
4.2. Simulación 3: Entradas.	57
4.3. Simulación 3: Funciones de pertenencia.	57
4.4. Simulación 3: Estimación de $x_1(t)$ y $x_2(t)$	58
4.5. Simulación 3: Estimación de $x_3(t)$, $x_4(t)$ y $x_5(t)$	58
4.6. Simulación 3: Desacoplamiento de la falla $f_s(t)$	59
4.7. Simulación 3: Estimación de $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_s(t)$	59

5.1. Esquema del CTF.	61
5.2. Simulación 4: Funciones de pertenencia.	70
5.3. Simulación 4: Entradas.	70
5.4. Simulación 4: Variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$	71
5.5. Simulación 4: Variables de estado $x_3(t)$, $x_4(t)$ y $x_5(t)$	71
5.6. Simulación 4: Estimación de $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_s(t)$	72
5.7. Simulación 5: Variable premisa y funciones de pertenencia.	75
5.8. Simulación 5: Entradas.	75
5.9. Simulación 5: Variables de estados $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$	76
5.10. Simulación 5: Estimación de $f(t)$ y $f_s(t)$	76
5.11. Simulación 6: Perturbación y factor de incertidumbre $\delta(t)$	78
5.12. Simulación 6: Ruido de medición.	78
5.13. Simulación 6: Variable premisa y funciones de pertenencia.	79
5.14. Simulación 6: Entradas.	79
5.15. Simulación 6: Variables de estados $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$	80
5.16. Simulación 6: Desacoplamiento de la falla $f_s(t)$	80
5.17. Simulación 6: Estimación de $f(t)$ y $f_s(t)$	81
A.1. Diagrama del observador adaptable $\dot{f}(t) = 0$	85
A.2. Diagrama del observador adaptable $\dot{f}(t) \neq 0$	86
B.1. Diagrama del CTF.	87

Lista de tablas

3.1. Parámetros del reactor CSTR.	33
4.1. Simulación 3: Error de estimación de estados y fallas.	60
4.2. Tiempo de convergencia de la estimación	60
5.1. Simulación 4: Error de seguimiento de trayectoria.	72
5.2. Simulación 5: Error de seguimiento de trayectoria.	77
5.3. Simulación 6: Error de estimación de estados y fallas.	81
5.4. Simulación 6: Error de seguimiento de trayectoria.	82

Nomenclatura

Conjuntos y normas

$\mathbb{C}^-, \mathbb{C}^+$ Conjunto de números del semi-plano izquierdo (derecho)

$\mathbb{R}^{n \times m}$ Conjunto de matrices reales de dimensión $n \times m$

\mathbb{R}^n Conjunto de vectores reales de dimensión n

$\mathcal{L}_2[0, \infty)$ Señal de energía finita durante un intervalo infinito

$\|x\|$ Norma Euclidiana del vector x

Nomenclatura de vectores y matrices

(*) Elemento transpuesto de una matriz en su posición simétrica

$\mathbb{1}_{m \times n}$ Matriz de unos de dimensiones $m \times n$

$\mathbb{A} < 0$ Matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida negativa

$\mathbb{A} > 0, \mathbb{A} \geq 0$ Matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (semi) definida positiva

\mathbb{A}^\perp Espacio nulo de $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $|\mathbb{A}^\perp \mathbb{A} = 0$

\mathbb{A}^T Matriz transpuesta de $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

\mathbb{A}^+ Matriz pseudoinversa de $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $|\mathbb{A} \mathbb{A}^+ \mathbb{A} = \mathbb{A}$

\mathbb{A}^{-1} Matriz inversa de $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\mathcal{H}(\mathbb{A})$ Matriz Hermitiana de $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $|\mathcal{H}(\mathbb{A}) = \mathbb{A} + \mathbb{A}^T$

$\det(\mathbb{A})$ Determinante de una matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\text{diag}(\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p)$ Matriz cuadrada con elementos $\mathbb{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, p$ en su diagonal principal

$\text{eig}(\mathbb{A})$ Eigenvalores de una matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\text{rank}(\mathbb{A})$ Rango de una matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

I_n Matriz identidad de dimensiones $n \times n$

Acrónimos

- CSTR Continuous Stirred Tank Reactor (*Reactor de Tanque Agitado de flujo Continuo*)
- CTF Control Tolerante a Fallas
- DOS Dedicated Observer Scheme (*Esquema de Observadores Dedicados*)
- FAFE Fast Adaptive Fault Estimation (*Estimación Rápida Adaptable de Fallas*)
- FDI Fault Detection and Isolation (*Detección y Aislamiento de Fallas*)
- GDO Generalised Dynamic Observer (*Observador Dinámico Generalizado*)
- IAE Integral Absolute Error (*Integral del Error Absoluto*)
- ITAE Integral of Time-weighted Absolute Error (*Integral del Error Absoluto por el Tiempo*)
- LMI Linear Matrix Inequality (*Desigualdad Matricial Lineal*)
- LPV Linear Parameter-Varying (*Lineal de Parámetros Variantes*)
- P&ID Piping and Instrumentation Diagram (*Diagrama de Tuberías e Instrumentación*)
- PIO Proportional-Integral Observer (*Observador Proporcional-Integral*)
- PO Proportional Observer (*Observador Proporcional*)
- T-S Takagi-Sugeno

CAPÍTULO 1

Introducción

Las fallas en los procesos automatizados a menudo causan eventos no deseados, como detener una planta controlada, deterioro en los componentes del sistema controlado, o graves daño al personal operativo o al medio ambiente. En el área del CTF (por sus siglas: *Control Tolerante a Fallas*) se tiene un conjunto de técnicas que se desarrollaron para garantizar la disponibilidad de la planta y su objetivo es evitar que las fallas simples se conviertan en averías.

Los enfoques de CTF se pueden clasificar en dos categorías principales: CTF pasivos y CTF activos. Los CTF pasivos no requiere conocer información acerca de la falla. Por el contrario, los CTF activos incluyen una unidad de diagnóstico de fallas que evalúa el estado del sistema, permitiendo al controlador tomar acciones correctivas ante la presencia de fallas.

En el presente documento, se propone diseñar una estrategia de CTF activo para una clase de sistemas descriptor no lineales, representados mediante el enfoque Takagi–Sugeno descriptor. Este enfoque se compone a partir de los conceptos sobre sistemas descriptor y sistemas T–S (por sus siglas: *Takagi–Sugeno*). La técnica de CTF propuesta se basa en un observador adaptable que brinda la información necesaria para adaptar una ley de control que compensa fallas en actuadores.

1.1. Planteamiento del problema

Un sistema es una combinación de múltiples componentes que trabajan en conjunto para lograr un objetivo específico. En este sentido, un reactor químico es un recipiente diseñado para llevar a cabo una reacción química en su interior, con la mayor eficiencia posible a menor costo. El reactor CSTR (por sus siglas en inglés: *Continuos Stirred Tank Reactor*) es un tipo de reactor químico ampliamente utilizado, por ejemplo, en: el tratamiento de aguas residuales, la metalurgia para la mezcla de minerales como la caliza y arcilla para la elaboración de cemento, las industrias farmacéuticas y alimenticias para procesos de fermentación.

Las componentes de esta clase de equipos debido a un manejo incorrecto o por su uso ininterrumpido suelen degradarse, afectando considerablemente su operación nominal. Estas anomalías indeseables en los componentes son conocidas como fallas y pueden localizarse en sensores, actuadores u otro tipo de componentes de la planta. Las fallas pueden provocar paros no previstos, pérdidas económicas causadas por afectaciones al producto final e incluso poner en riesgo la integridad física del operador.

Para resolver esta problemática, en el área de control automático se han desarrollado estrategias de CTF que ante la presencia de fallas garantizan la estabilidad, seguridad, autonomía y confiabilidad del sistema controlado, a diferencia de un sistema de control tradicional que ante la presencia de fallas tiene un comportamiento limitado que puede llevar al sistema hacia comportamientos no deseados. No obstante, las técnicas de CTF basadas en el modelo para sistemas no lineales son complejas ya que, demandan un mayor conocimiento matemático en comparación a los sistemas lineales. En estos casos, es posible manejar los términos no lineales mediante el enfoque de sistemas T–S.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Compensar fallas en actuadores para garantizar el funcionamiento general de un sistema con representación T–S descriptor utilizando un CTF basado en un observador adaptable.

1.2.2. Objetivos específicos

- Obtener el modelo descriptor no lineal afín al control del reactor CSTR enchaquetado para llevarlo a su representación T–S descriptor.
- Diseñar un observador adaptable para estimar simultáneamente variables de estado, fallas en sensores y actuadores en sistemas T–S descriptor con variables premisas medibles.
- Diseñar una ley de CTF de seguimiento de trayectoria para la acomodación de fallas en actuadores de sistemas T–S descriptor.

1.3. Estado del Arte

1.3.1. Sistemas descriptor

En la literatura se han reportado diversos trabajos aprovechando esta herramienta de modelado, por ejemplo, en [Fakhr et al. \(2019\)](#) se diseña un control adaptable para un péndulo invertido sobre una masa. En este sistema se desea controlar la aceleración angular del péndulo, pero con un modelo en espacio de estados tradicional es complicado controlarla. Sin embargo, por medio de una representación descriptor es posible controlarla por separado y con su propia referencia, dado a que se involucra una ecuación algebraica relacionada con la aceleración de la masa del péndulo.

Otro ejemplo se presenta en [Li et al. \(2019\)](#) donde utilizan el modelo descriptor LPV (por sus siglas en inglés: *Linear Parameter–Varying*) de un motor de corriente directa para la detección de fallas mediante observadores zonotópicos. Al integrar al modelo una restricción algebraica se logra detectar fallas en el sensor de intensidad de corriente eléctrica. Por otra parte, con esta clase de sistemas también se puede simplificar términos no lineales. Por ejemplo, en [Montiel et al. \(2012\)](#) se menciona que a partir de una representación descriptor cuasi–LPV es posible simplificar el modelo de una columna de destilación binaria. La relación algebraica resulta de la interacción dinámica del proceso y una expansión en series de Taylor del modelo original.

Así mismo los autores en [Zang et al. \(2019\)](#) utilizan un sistema descriptor no lineal de un generador eléctrico síncrono para añadir características del generador asociadas a restricciones algebraicas. Debido a que con un modelo que involucra únicamente ecuaciones diferenciales no lineales es complejo describir estas características de la planta.

1.3.2. Sistemas Takagi–Sugeno

El enfoque T–S es una herramienta de modelado utilizada para obtener la representación exacta de sistemas no lineales mediante una interpolación de múltiples sistemas lineales dentro de un rango de operación acotado, por ejemplo, en [Heras et al. \(2016\)](#) se considera un sistema T–S de 8 modelos locales para representar la dinámica no lineal de convertidores de potencia Buck–Boost. Los resultados muestran que un sistema linealizado por el método de parámetros promediados cambia drásticamente respecto al sistema no lineal ante variaciones en la entrada y carga del convertidor. Mientras que el obtenido por la técnica T–S se comporta idénticamente al no lineal, siempre y cuando las entradas y las funciones no lineales se encuentren en el conjunto compacto establecido. Del mismo modo en [Abderrahim & Allouche \(2019\)](#), se propone un modelo descriptor T–S para un sistema de péndulo invertido rotatorio con la finalidad de aplicar el diseño de técnicas de control de sistemas lineales en 8 modelos locales. La ventaja es que, con estos modelos locales se representa al sistema no lineal en un mayor rango de operación a comparación de un modelo linealizado.

También, es posible extender los sistemas T–S a sistemas descriptor, por ejemplo, en [Aguilera-González et al. \(2014\)](#), se presenta un modelo descriptor T–S para el sistema de admisión de aire del motor de combustión interna. La ecuación algebraica surge de la dinámica instantánea de la potencia de compresor del motor. Por otra parte, es posible reducir el número de modelos locales de sistemas T–S, por ejemplo, en [Nguyen et al. \(2018\)](#) muestran el modelo T–S descriptor de un brazo robótico de dos grados de libertad. Considerando todas las no linealidades se tienen 32 modelos locales. Sin embargo, es posible tratar algunas no linealidades como incertidumbres paramétricas permitiendo reducir el número de modelos locales hasta 4 subsistemas lineales. Finalmente, se muestra la comparación del comportamiento de cada representación T–S ante un control de seguimiento de trayectoria, los resultados demuestran que se tiene un mejor desempeño considerando el sistema T–S de 4 modelos locales.

1.3.3. Observadores

Algunos trabajos referentes a observadores para sistemas descriptor se mencionan a continuación. Los autores [Darouach & Boutayeb \(1995\)](#) presentan el diseño de observadores de orden completo y orden reducido para sistemas descriptor continuos. El método de orden reducido se basa en la ecuación generalizada de Sylvester y el método de orden completo consiste en una transformación restringida equivalente. En [Osorio-Gordillo et al. \(2016\)](#) se presenta la estructura del observador GDO (por sus siglas en inglés: *Generalised Dynamic Observer*) que brinda mayor exactitud de estimación y robustez ante errores de modelado. Además, se muestra una comparación del enfoque desarrollado con sus casos particulares.

Por otro lado, en [Lendek & Nagy \(2017\)](#), se muestra el diseño de un observador de entradas desconocidas para sistemas T–S descriptor, se considera la síntesis \mathcal{H}_∞ con el fin de proveer robustez y minimizar el efecto de perturbaciones en la entrada del sistema. En [Darouach \(2014\)](#) muestran una técnica de control basada en el observador para sistemas descriptor partiendo del enfoque de la ecuación generalizada de Sylvester. Las condiciones de existencia y estabilidad del observador y controlador son dadas en términos de LMIs (por sus siglas en inglés: *Linear Matrix Inequalities*). También, en la literatura se encuentran diseños de observadores para sistemas descriptor no lineales, por ejemplo, en [Osorio-Gordillo et al. \(2019\)](#) se estiman estados en sistemas descriptor no lineales tipo Lipschitz mediante la estructura del observador GDO y sus casos particulares.

1.3.4. Estimación de fallas

Las técnicas de estimación de fallas basadas en el modelo consisten en un observador que estima simultáneamente estados y fallas de sistemas dinámicos. En [Haj Brahim et al. \(2019\)](#) se muestra el diseño de un observador que estima estados y fallas en sensores de sistemas con representación T–S descriptor. El enfoque desarrollado se ilustra en el modelo de un disco rodante sujeto a perturbaciones e incertidumbres paramétricas. En [Gómez-Peñate et al. \(2019\)](#) se propone un observador adaptable para sistemas cuasi-LPV que estima tanto fallas en sensores como en actuadores. Se considera la síntesis \mathcal{H}_∞ con el fin de garantizar robustez ante perturbaciones y funciones de programación inexactas. Como caso de estudio se toma un reactor tipo CSTR expuesto a perturbaciones en la entrada.

Los autores en [Osorio-Gordillo et al. \(2018\)](#) presentan el diseño de un observador adaptable que estima estados y fallas en actuadores de sistemas con representación descriptor. Las condiciones de estabilidad del observador se obtienen a partir del enfoque de estabilidad de Lyapunov. El desempeño del observador adaptable se evalúa en el modelo de un intercambiador de calor propenso a fallas abruptas e incertidumbres paramétricas. En [Guzman et al. \(2021\)](#) muestran el diseño de un observador adaptable utilizando una función no cuadrática de Lyapunov, esta herramienta ofrece resultados menos conservativos para sistemas T–S a comparación de una función cuadrática de Lyapunov. El enfoque desarrollado se prueba en un sistema de tanques acoplados.

Por otro lado, en algunos esquemas de CTF es necesario reducir el tiempo de convergencia de la estimación, por ejemplo, en [Jia et al. \(2015\)](#) se diseña un observador adaptable para sistemas T–S con retardo en los estados. El observador adaptable cuenta con una etapa de aprendizaje que reduce considerablemente el tiempo de convergencia de la estimación de las fallas. Las condiciones de diseño del observador y controlador son en términos de LMIs, por medio del estudio de la estabilidad de Lyapunov–Krasovskii. Otra alternativa se presenta en [Shaker \(2015\)](#) donde diseñan un observador FAFE (por sus siglas en inglés: *Fast Adaptive Fault Estimation*) utilizando la estructura de un observador tipo Luenberger, esta técnica permite estimar una amplia gama de fallas variantes en el tiempo al considerar en el diseño que la derivada de la falla es diferente de cero.

Del mismo modo es posible estimar fallas variantes en el tiempo en sistemas no lineales como se muestra en Ouzaz (2021) donde se diseña un observador no lineal T-S para estimar simultáneamente los estados y fallas en sensores y actuadores de sistemas no lineales tipo Lipschitz.

1.3.5. Técnicas de CTF

Algunos trabajos relevantes respecto a técnicas de CTF basadas en el modelo se mencionan a continuación. En Haj Brahim et al. (2017) los autores presentan una estrategia de CTF basada en un observador adaptable que estima simultáneamente estados y fallas en sensores de sistemas T-S. Las condiciones de existencia del observador y controlador son formuladas en términos de LMIs que se obtienen a partir del enfoque de estabilidad de Lyapunov. Los autores en Li et al. (2018) y Kharrat et al. (2018) proponen una ley de CTF que se adapta a partir de la información brindada por un observador adaptable que estima estados y fallas tanto en sensores, como en actuadores. Se considera un diseño robusto tanto para el observador y el controlador mediante la técnica de optimización \mathcal{H}_∞ para reducir el impacto de perturbaciones en la entrada del sistema. El enfoque desarrollado se prueba mediante el modelo de un sistema tráiler–remolque propenso a fallas y perturbaciones.

En El Youssfi et al. (2019) se propone una ley CTF de seguimiento de trayectoria utilizando un modelo de referencia. La estimación de la falla se obtiene a partir de un observador PIO (por sus siglas en inglés: *Proportional-Integral Observer*). El enfoque es probado para controlar la dinámica lateral de un vehículo. Los autores en Lan & Patton (2015) plantean una estrategia de CTF pasivo basado en un observador funcional. Esta estrategia consta de dos pasos, el primer paso es el cálculo de las ganancias de un controlador robusto por medio de la síntesis \mathcal{H}_∞ , en el segundo paso se calculan las matrices del observador funcional que permiten estimar la ley de control previamente diseñada.

Del mismo modo, es posible realizar el diseño de un CTF para sistemas no lineales sin utilizar el enfoque T-S, por ejemplo, en Gao & Ding (2007) proponen un esquema de CTF para sistemas descriptor no lineales Lipschitz propensos a fallas en actuadores y perturbaciones en la entrada. Se diseña un observador no lineal que estima paralelamente estados y fallas en actuadores. Mientras que en el artículo Zhiqiang et al. (2015) se muestra una estrategia de CTF pasivo para sistemas descriptor no lineales tipo Lipschitz sujetos a saturación en la entrada. En este trabajo se obtiene un diseño robusto mediante la técnica de ganancia- \mathcal{L}_2 .

1.3.6. Conclusiones del estado del arte

En esta revisión bibliográfica se muestran información relevante acerca de esquemas de CTF, técnicas de estimación de fallas, diseño de observadores, sistemas T-S y sistemas descriptor. Se mencionan principalmente las ventajas de estas herramientas de modelado. Las técnicas de CTF para sistemas descriptor presentadas en el estado del arte únicamente cumplen con el objetivo de regulación. Esto demuestra que existe escasa información referente a CTF de seguimiento de trayectoria para sistemas descriptor.

Otro aspecto relevante es sobre la estimación de fallas, la mayor parte de lo reportado en la literatura se limita a considerar en el diseño fallas invariantes en el tiempo. Es por estas razones, que en este trabajo se plantea diseñar una estrategia de CTF de seguimiento de trayectoria basado en un observador adaptable que estima paralelamente fallas en actuadores y sensores con comportamiento variante en el tiempo aplicado a una clase particular de sistemas T–S descriptor.

1.4. Justificación

La técnica de CTF que se presenta en esta investigación consiste en adaptar una ley de control a partir de la información brindada por un observador adaptable. Un aspecto importante para el diseño del observador adaptable es que, al considerar fallas variantes en el tiempo se reduce el tiempo de convergencia de la estimación. Esta característica beneficia al sistema de CTF porque la acomodación de la falla se realiza de mejor manera. Además, para extender la capacidad del esquema propuesto se estiman fallas tanto en sensores como en actuadores.

Por otra parte, los sistemas T–S descriptor surgen a partir de la extensión de los sistemas T–S a sistemas descriptor no lineales. El enfoque T–S permite representar una gran gama de sistemas no lineales mediante una interpolación de múltiples modelos locales lineales. Mientras que los sistemas descriptor son una representación matemática que involucra un conjunto de ecuaciones diferenciales y ecuaciones algebraicas. Esta técnica de modelado permite obtener una representación general del comportamiento de los sistemas a comparación de los modelos representados únicamente por ecuaciones diferenciales.

1.5. Originalidad

En algunas aplicaciones de CTF el tiempo de convergencia de la estimación de la falla puede no ser el adecuado porque se podría obtener una degradación considerable en el objetivo de control. Por este motivo se aborda la problemática de fallas variantes en el tiempo para reducir el tiempo de convergencia del error de estimación. El enfoque desarrollado se basa en la estructura del observador GDO que cuenta con grados de libertad adicionales en comparación con los reportados en la literatura. Esta característica provee una mejor exactitud de estimación y robustez ante errores de modelado. Finalmente, se diseña un CTF de seguimiento de trayectoria basado en el observador adaptable que brinda la estimación de fallas en actuadores y sensores con comportamiento variante en el tiempo para sistemas T–S descriptor.

1.6. Hipótesis

Es posible compensar fallas en actuadores con comportamiento variante en el tiempo mediante un observador adaptable que adapta una ley de CTF para sistemas T–S descriptor que también son susceptibles a fallas en sensores.

1.7. Aportaciones

Las aportaciones más relevantes de este trabajo de investigación se mencionan a continuación:

- El diseño del observador adaptable para la estimación de fallas invariantes en el tiempo está basado en el enfoque mostrado en [Osorio-Gordillo et al. \(2018\)](#) donde se plantea la estimación de fallas abruptas en actuadores para sistemas descriptor lineales.
- Para la estimación de fallas variantes en el tiempo se adaptó la estrategia propuesta por [Pérez-Estrada et al. \(2019\)](#), donde se presenta la estimación de parámetros variantes en el tiempo de sistemas LVP con funciones de programación no medibles.
- La ley de CTF propuesta se basa en el trabajo mostrado en [Orjuela et al. \(2019\)](#), donde se diseña una estrategia de CTF para seguimiento de trayectoria en sistemas T–S. La diferencia principal es que, en este caso, se trató con sistemas no singulares, es decir, la matriz E es igual a la identidad I_n .
- Se desarrolló una estrategia que brinda la estimación simultánea de fallas en sensores y actuadores. Además, se presenta una técnica de CTF basado en un modelo de referencia que hasta ahora ha sido escasamente explorado para sistemas T–S descriptor.
- A pesar de que este trabajo de investigación está dedicado a sistemas descriptor, la metodología se puede extrapolar fácilmente a sistemas no descriptor. Permitiendo aplicar el enfoque desarrollado a una amplia gama de procesos.
- El desempeño del esquema de CTF propuesto se evaluó utilizando el modelo de un reactor químico tipo CSTR, mediante simulaciones en la paquetería de software de Simulink–MATLAB R2019b.

1.8. Metodología de desarrollo

Los pasos de la metodología de desarrollo son detallados a continuación:

1. *Investigación preliminar del estado del arte:* En este punto se recopilan diversos trabajos recientes que estén relacionados directamente con el tema de investigación.
2. *Investigación preliminar del marco teórico:* En esta etapa se pretende conocer conceptos afines para comprender las temáticas principales de la tesis.
3. *Seleccionar el caso de estudio:* Se toma el modelo matemático de un proceso que pueda ser llevado a su formato T–S descriptor.
4. *Simulación y parametrización del modelo:* En esta etapa se realizan simulaciones para conocer el comportamiento dinámico del sistema tomado como caso de estudio.
5. *Diseñar y simular el observador adaptable:* En esta etapa se diseña y simula el observador adaptable que estima paralelamente tanto fallas en sensores como en actuadores.

6. *Diseñar y simular el esquema de CTF*: En este punto se diseña un CTF para compensar fallas en actuadores. Además, se presentan los resultados de simulación con el fin de analizar y evaluar la eficiencia de la técnica propuesta.
7. *Realizar documentación final*: Finalmente, en este punto son capturados los resultados finales y se realiza la redacción del documento de tesis.

1.9. Organización del documento

- A lo largo del **Capítulo 2**, se definen una serie de conceptos básicos y propiedades generales sobre: sistemas descriptor, sistemas T–S, diagnóstico de fallas y CTF. También, se presenta un ejemplo de un sistemas descriptor y los pasos para obtener un sistema T–S utilizando el método por sector no lineal.
- En el **Capítulo 3** se describe el caso de estudio que se utilizó para probar el enfoque desarrollado. Además, se muestran el modelo descriptor no lineal del reactor CSTR enchaquetado, del mismo modo su representación T–S descriptor. Por último, se muestra la validación del modelo obtenido mediante una simulación en MATLAB R2019b.
- En el **Capítulo 4** se detalla la metodología de diseño del observador adaptable. Se presentan dos alternativas, una para estimar fallas invariantes en el tiempo y otra para estimar fallas variantes en el tiempo. Además, para ampliar la capacidad del enfoque propuesto se consideran tanto fallas en sensores como en actuadores.
- En el **Capítulo 5** se presenta el diseño de un CTF basado en un modelo de referencia. Se utiliza la información brindada por el observador adaptable para compensar fallas en actuadores y desacoplar fallas en sensores. El esquema de CTF se evalúa utilizando el modelo del reactor CSTR enchaquetado.
- Finalmente, en el **Capítulo 6** se muestran las conclusiones del trabajo de investigación y se proponen diversos trabajos futuros para extender la capacidad del enfoque presentado.

1.10. Conclusiones del capítulo

En el Capítulo 1 primero se presentó un conjunto de trabajos e investigaciones recientes relacionados con los temas principales de la tesis, estas son la base principal para sustentar el trabajo realizado. También, se concluye cuáles temas del estado del arte son más relevantes para justificar el enfoque desarrollado en esta tesis. Por otra parte, se mostró el panorama general de este trabajo de investigación, donde se expuso el planteamiento del problema, justificación, objetivos, hipótesis, originalidad y aportaciones. Además, se presenta un breve resumen de lo que se muestra en los capítulos restantes de este documento. Este capítulo tuvo como propósito mostrar la información fundamental del contenido de la tesis.

Marco Teórico

2.1. Sistemas descriptor

Los sistemas descriptor (también llamados: sistemas algebro–diferenciales, sistemas singulares, sistemas implícitos y sistemas de semi–estado), fueron propuestos por Luenberger (1978). Este tipo de sistemas pueden describir fenómenos físicos que no pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales utilizando restricciones algebraicas que están asociadas al comportamiento del sistema físico. Es por este motivo que los sistemas descriptor son una herramienta poderosa de modelado. Un sistema descriptor lineal tiene la siguiente representación en espacio de estados:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.1b)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de semi–estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de salidas y la matriz E es una matriz singular con parámetros constantes. Se asume que $\rho = \text{rank}(E)$ de tal forma que $\rho \leq n$.

2.1.1. Propiedades de sistemas descriptor

2.1.1.1. Regularidad

La regularidad garantiza la existencia y unicidad de soluciones en los sistemas descriptor. La mayoría de las técnicas de control y estimación dependen explícitamente de suponer dicha condición.

Definición 2.1. (Scholz, 2015). La matriz pencil $\lambda E - A$ con $A, E \in \mathbb{R}^{l \times n}$, es llamada *regular* si $l = n$ y $\det(\lambda E - A) \neq 0$ para cualquier valor de $\lambda \in \mathbb{C}$. De lo contrario es llamada *singular*.

Ejemplo 2.1. Considere el circuito RCL de la Figura 2.1 que describe el siguiente sistema descriptor:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{i}_2(t) \\ \dot{i}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{C} & -R_2 & 0 \\ \frac{1}{C} & R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} v(t) \quad (2.2a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.2b)$$

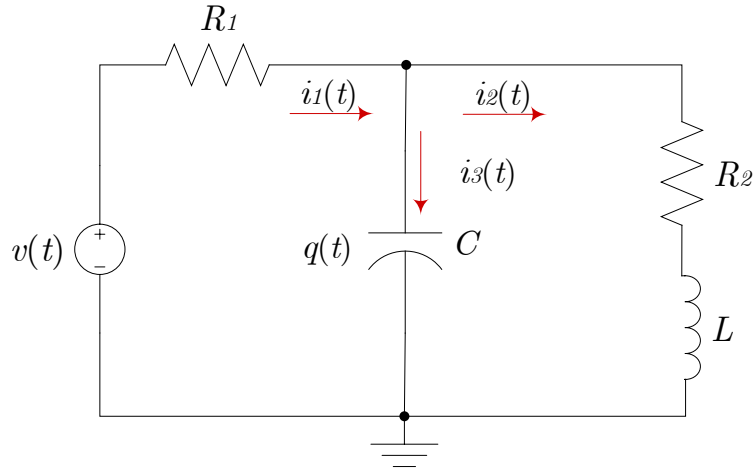


Figura 2.1: Circuito RLC.

donde $C = 4700\mu\text{F}$, $R_1 = 10\Omega$, $L = 3.3\text{ mH}$, $R_2 = 10\Omega$. Considere el par (E, A) , observe que $l = n = 3$, y eligiendo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$, se obtiene:

$$\det(\lambda_1 E - A) = -4.3561 \times 10^3 \neq 0$$

$$\det(\lambda_2 E - A) = -4.054 \times 10^3 \neq 0$$

$$\det(\lambda_3 E - A) = -4.5577 \times 10^3 \neq 0$$

por lo tanto, de acuerdo con lo mostrado arriba el sistema es llamado *regular*.

2.1.1.2. Estabilidad

Definición 2.2. (Duan, 2010). La estabilidad de un sistema descriptor se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\text{eig}(E, A) \subset \mathbb{C}^- = \{s \mid s \in \mathbb{C}, \text{Re}(s) < 0\} \quad (2.3)$$

La expresión anterior es equivalente a que las raíces del polinomio $\det(sE - A)$ pertenezcan al conjunto de números complejos ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo en caso de sistemas de tiempo continuo.

Ejemplo 2.2. Considere el par (E, A) del ejemplo 2.1, la estabilidad del sistema se verifica con:

$$\det(sE - A) = s^2 + 3.0516 \times 10^3 s + 1.2895 \times 10^5$$

dado a que las raíces del polinomio anterior son $s_1 = -42.8582$ y $s_2 = -3.0087 \times 10^3$, estos números complejos están ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo, por lo tanto, el sistema es estable.

2.1.1.3. Comportamiento libre de impulsos

La solución para los sistemas descriptor tiene una respuesta en el tiempo más compleja que incluye no sólo la parte de la respuesta exponencial, sino también el impulso y la parte derivativa de la entrada.

Definición 2.3. (Duan, 2010). El sistema es llamado libre de impulsos si la respuesta de los estados del sistema, a partir de un valor inicial arbitrario no contiene términos impulsivos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- El par (E, A) es libre de impulsos
- $\deg(\det(sE - A)) = \text{rank}(E)$
- $\text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E)$

Ejemplo 2.3. Considere el par (E, A) del ejemplo 2.1, el comportamiento libre de impulsos del sistema se verifica con:

$$\begin{aligned} \deg(\det(sE - A)) &= 2 \\ \text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} &= 5 \end{aligned}$$

Ya que $\text{rank}(E) = 2$ y $n = 3$, se puede decir que el sistema es libre de impulsos.

2.1.1.4. Admisibilidad

Definición 2.4. El par (E, A) es admisible si es regular, libre de impulsos y estable.

Lema 2.1. El par (E, A) es admisible si y solo si existe una matriz no singular Θ tal que se cumplan las desigualdades basadas en la estabilidad de Lyapunov (2.4a) y (2.4b):

$$E^T \Theta = \Theta^T E \geq 0 \tag{2.4a}$$

$$A^T \Theta + \Theta^T A < 0 \tag{2.4b}$$

Ejemplo 2.4. Tomando el par (E, A) del ejemplo 2.1, considere la matriz no singular Θ :

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0052 & 0 \\ 1.5613 & 33.2254 & 0 \\ -1.5593 & 33.2674 & -0.103 \end{bmatrix}$$

Al cumplirse que $E^T \Theta = \Theta^T E \geq 0$ y $A^T \Theta + \Theta^T A < 0$, se puede decir que el sistema es admisible.

2.1.1.5. C–Observabilidad

Definición 2.5. (Duan, 2010). Un sistema descriptor lineal es C–observable (*Completamente observable*), si la condición inicial $x(0-)$ puede determinarse únicamente conociendo la información de la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ para $0 \leq t \leq \infty$.

Lema 2.2. La C–observabilidad puede verificarse con las siguientes ecuaciones:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}, s \text{ finito} \quad (2.5a)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \quad (2.5b)$$

La ecuación (2.5a) corresponde a la observabilidad del subsistema lento (*ecuaciones diferenciales*). Mientras que la ecuación (2.5b) corresponde al subsistema rápido (*ecuaciones algebraicas*).

2.1.1.6. R–Observabilidad

Definición 2.6. (Scholz, 2015). Considere un sistema descriptor regular de la forma (2.1a)–(2.1b), entonces este sistema es R–observable (*Alcanzablemente-observable*), si y solo si el subsistema lento es C–observable.

2.1.1.7. I–Observabilidad

Definición 2.7. (Osorio-Gordillo et al., 2016). Considere un sistema descriptor regular de la forma (2.1a) con $u(t) = 0$, se dice que este sistema es I–observable (*Impulso-observable*) si $y(t)$ es libre de impulsos para $t \geq 0$ y si $x(t)$ es libre de impulsos para $t \geq 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- La tripleta (C, E, A) es I–observable

- $\text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E)$

- $\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = n$

Ejemplo 2.5. Considere la tripleta (E, A, C) del ejemplo 2.1, es sencillo observar que se cumplen los tres criterios de observabilidad previamente mencionados. Esto generalmente sucede cuando el subsistema rápido es C–observable.

2.1.1.8. C–Controlabilidad

Definición 2.8. (Dai et al., 1989). El sistema es controlable si y solo si sus polos pueden ser arbitrariamente reubicados por retroalimentación de estados, es C–controlable (*Completamente-controlable*) si se satisfacen las ecuaciones (2.6a) y (2.6b).

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}, s \text{ finito} \quad (2.6a)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = n \quad (2.6b)$$

La ecuación (2.6a) corresponde a la controlabilidad del subsistema lento. Mientras que la ecuación (2.6b) corresponde al subsistema rápido.

2.1.1.9. R–Controlabilidad

Definición 2.9. (Dai et al., 1989). Considere un sistema descriptor regular de la forma (2.1a), entonces este sistema es R–controlable (*Alcanzablemente-controlable*) si y solo si el subsistema lento es C–controlable.

2.1.1.10. I–Controlabilidad

Definición 2.10. (Dai et al., 1989). La I–controlabilidad (*Impulso-controlabilidad*) es equivalente a la capacidad de cancelar todos los estados impulsivos eligiendo una señal $u(t)$ apropiada. Esto se puede hacer mediante un bucle de estabilización. La condición que se debe satisfacer para saber si un sistema es I–controlable se muestra en la ecuación (2.7).

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & A \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E) \quad (2.7)$$

Ejemplo 2.6. Considere la tripleta (E, A, B) del ejemplo 2.1, es sencillo observar que se cumplen los tres criterios de controlabilidad previamente mencionados. Esto generalmente sucede cuando el subsistema rápido es C–controlable.

2.1.2. Ejemplo: Intercambiador de calor

Un intercambiador de calor tiene como propósito calentar o enfriar un fluido, por medio del equilibrio térmico. El intercambiador de calor de tubos concéntricos consta de dos tubos de diferente diámetro uno dentro del otro, su modo de operación puede ser a contracorriente, es decir el fluido caliente que circula por el tubo interno va en sentido contrario al fluido frío que circula por el tubo externo, como se muestra en la Figura 2.2.

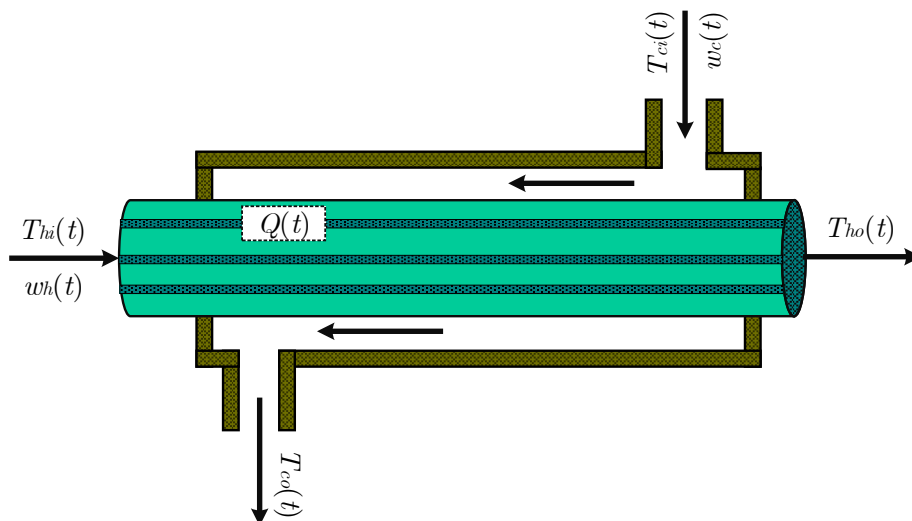


Figura 2.2: Intercambiador de calor.

2.1.2.1. Modelo por parámetros concentrados

El balance de masa y energía del lado frío se representa mediante la ecuación (2.8a). Despejando la derivada de la temperatura fría de salida $T_{co}(t)$ se obtiene la expresión (2.8b) :

$$cp_c\rho_cV_c\frac{dT_{co}(t)}{dt} = cp_c\rho_cw_c(t)(T_{ci}(t) - T_{co}(t)) + UA_r\Delta T \quad (2.8a)$$

$$\frac{dT_{co}(t)}{dt} = \frac{w_c(t)}{V_c}(T_{ci}(t) - T_{co}(t)) + \frac{1}{cp_c\rho_cV_c}UA_r\Delta T \quad (2.8b)$$

Del mismo modo, en la expresión (2.9a) se muestra el balance de masa y energía del lado caliente del intercambiador de calor. La derivada de la temperatura caliente de salida $T_{ho}(t)$ está dada por la ecuación (2.9b):

$$cp_h\rho_hV_h\frac{dT_{ho}(t)}{dt} = cp_h\rho_hw_h(t)(T_{hi}(t) - T_{ho}(t)) - UA_r\Delta T \quad (2.9a)$$

$$\frac{dT_{ho}(t)}{dt} = \frac{w_h(t)}{V_h}(T_{hi}(t) - T_{ho}(t)) - \frac{1}{cp_h\rho_hV_h}UA_r\Delta T \quad (2.9b)$$

El calor transferido $Q(t)$ en el intercambiador se obtiene mediante la siguiente relación algebraica:

$$Q(t) = UA_r\Delta T \quad (2.10)$$

2.1.2.2. Modelo en espacio de estados

El modelo lineal en espacio de estados del intercambiador de calor se obtiene considerando la diferencia de temperaturas a la entrada como $\Delta T = T_{ho}(t) - T_{co}(t)$ y sintetizando las variables manipuladas con la temperatura fría de entrada $T_{ci}(t)$ y la temperatura caliente de entrada $T_{hi}(t)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{w_c}{V_c} & 0 & \frac{1}{cp_c\rho_cV_c} \\ 0 & -\frac{w_h}{V_h} & -\frac{1}{cp_h\rho_hV_h} \\ -UA_r & UA_r & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{w_c}{V_c} & 0 \\ 0 & \frac{w_h}{V_h} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.11)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^3 = \begin{bmatrix} T_{co}(t) \\ T_{ho}(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}$, $u(t) = \begin{bmatrix} T_{ci}(t) \\ T_{hi}(t) \end{bmatrix}$ y $E = \text{diag}(1, 1, 0)$, cuyo valor de rango es $\varrho = 2$.

2.2. Sistemas Takagi–Sugeno

El enfoque T–S introducido por Takagi & Sugeno (1985), es una herramienta para representar o aproximar la dinámica de un sistema no lineal mediante un conjunto de sistemas lineales de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.12a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.12b)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de salidas medibles, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de variables premisas (también llamadas *variables de programación*). Las matrices A_i y B_i representan las matrices del i -ésimo modelo local del sistema T–S. Las funciones de pertenencia $\mu_i(z)$ son un conjunto de funciones no lineales que mantienen las propiedades de la ecuación (2.13) de una sumatoria convexa dentro de un conjunto compacto Ω_x en el espacio de estados.

$$\begin{aligned} \text{I. - } & \sum_{i=1}^r \mu_i(z) = 1, \\ \text{II. - } & 0 \leq \mu_i(z) \leq 1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por otra parte, las variables premisas pueden depender de: variables de estado, entradas y/o parámetros exógenos que sean medibles o no medibles. Generalmente, estas se construyen a partir de las salidas medidas en tiempo real. Sin embargo, cuando la variable premisa no está disponible para su medición existen estrategias para obtenerlas mediante algoritmos de estimación. El enfoque T–S ha tenido un importante auge en la teoría de control porque permite aplicar técnicas de control exclusivamente para sistemas lineales en sistemas no lineales que son matemáticamente complejos. De acuerdo con la literatura existen dos formas de obtener analíticamente una representación T–S, por el método de linealización (Figura 2.3a)) y por sector no lineal (Figura 2.3b)) (Lendek & Nagy, 2017).

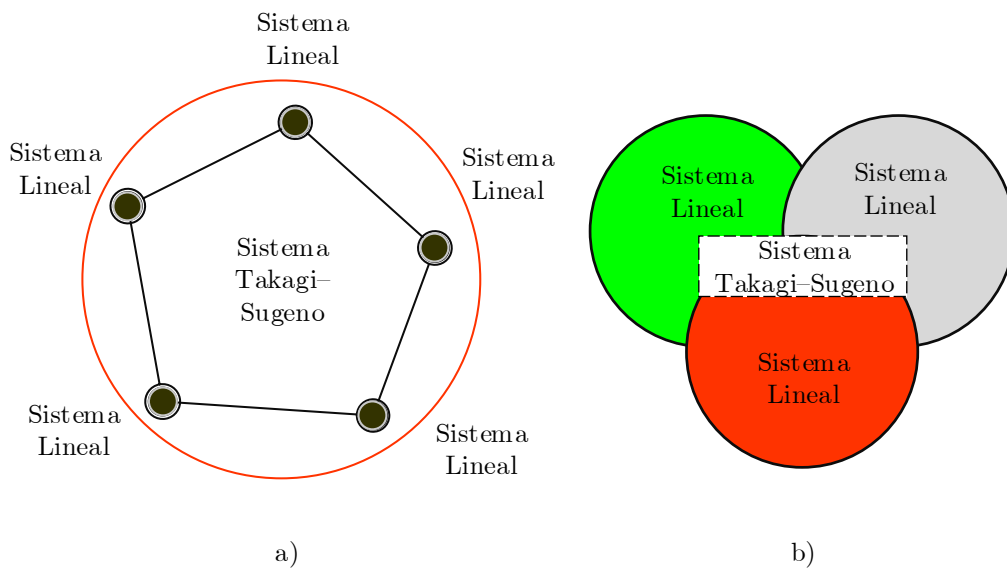


Figura 2.3: Método de representación T–S. a) por linealización, b) por sector no lineal

2.2.1. Método por sector no lineal

El sector no lineal, es el método más utilizado para obtener un sistema T–S. Este enfoque permite obtener una representación exacta de un sistema no lineal porque la idea es reescribir expresiones no lineales como una combinación convexa mediante las funciones de pertenencia. Los pasos para reproducir esta metodología son:

1.- Se asume que el sistema tratado puede expresarse como un sistema no lineal afín al control.

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \quad (2.14)$$

donde $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son matrices cuyos términos no son necesariamente constantes y se suponen que están acotados en el compacto Ω_x . En total aparecen un número p de términos no constantes que constituyen el vector de variables premisas $z(t) \in \mathbb{R}^p$.

2.- Siguiendo con la metodología, es necesario conocer la cota inferior \underline{z}_j y la cota superior \bar{z}_j de cada variable premisa $z_j(t) \in [\underline{z}_j, \bar{z}_j]$. Estos valores se obtienen a partir del conocimiento previo del proceso.

$$z_j(t) \in [\underline{z}_j, \bar{z}_j], \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2.15)$$

3.- Para cada variable premisa $z_j(t)$ se generan dos funciones de ponderación que pueden ser construidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varpi_0^j(z_j) &= \frac{\bar{z}_j - z_j(t)}{\bar{z}_j - \underline{z}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, p \\ \varpi_1^j(z_j) &= 1 - \varpi_0^j(z_j), \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (2.16)$$

4.- Después de definir las funciones de ponderación se genera la función de pertenencia que corresponde a cada modelo local.

$$\mu_i(z_j) = \prod_{j=1}^p \varpi_\delta^j(z_j), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.17)$$

donde δ toma el valor de cero o uno según la función de ponderación que se utiliza para cada modelo local y $r = 2^p$ es el número de modelos locales del sistema T-S.

5.- Finalmente, las matrices A_i y B_i de la ecuación (2.12a) se obtienen sustituyendo en las matrices $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ los valores \underline{z}_j y \bar{z}_j que corresponden según la función de ponderación que se utiliza para cada subsistema lineal.

Observación 2.1. Aunque la metodología no se limita a sistemas no lineales afín al control, es posible que en otros casos, las variables premisas dependan de la entrada de control $u(t)$, por lo tanto, se tendría una no linealidad muy difícil de tratar porque generalmente la leyes de control dependen de las variables premisas $z(t)$.

Observación 2.2. Observe que el número de variables premisas p aumenta exponencialmente el número de modelos locales $r = 2^p$. Esto puede ser un problema al tratar con sistemas altamente no lineales porque se necesita una mayor demanda computacional para el diseño de algoritmos de control o estimación.

Observación 2.3. Observe que existen múltiples formas de seleccionar las variables premisas y en algunas ocasiones las matrices A_i y B_i pueden tener diversas propiedades no deseables como inestabilidad, observabilidad parcial o controlabilidad parcial.

2.2.2. Ejemplo numérico

1.- La representación del sistema no lineal en formato matricial es:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -2.7x_3(t) & 2 & 0.3 \\ -0.2 & -x_3(t) & 0 \\ -1 + x_3(t) & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A(x(t))} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 2x_1^2(t) \\ 1 \end{bmatrix}}_{B(x(t))} u(t) \quad (2.18)$$

En total se pueden identificar 2 términos no constantes diferentes, en las matrices $A(x(t))$ y $B(x(t))$, que corresponden al número de variables premisas $z(t) \in \mathbb{R}^2$.

2.- Se define el perfil de entrada de la ecuación 2.19 para que, mediante una simulación numérica, se obtengan los cotas de las variables premisas.

$$u(t) = \begin{cases} 0.8\cos(1.5t - 15) + 0.8\sen(2.7t) + 5 & \text{si } t \leq 6.2\text{seg} \\ 5 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.19)$$

Entonces tras realizar la simulación numérica, considere la cota inferior \underline{z}_j y la cota superior \bar{z}_j de las variables premisas $z_j(t) \in [\underline{z}_j, \bar{z}_j]$ que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_3(t) \in [7.0965, 5.5844] \\ z_2(t) &= x_1^2(t) \in [0.1002, 0.0501] \end{aligned} \quad (2.20)$$

3.- Posteriormente, se calculan las dos funciones de ponderación correspondientes a cada variable premisa:

$$\begin{aligned} \varpi_0^1(z_1) &= \frac{\bar{z}_1 - z_1(t)}{\bar{z}_1 - \underline{z}_1} = \frac{17 - z_1(t)}{12}, & \varpi_1^1(z_1) &= 1 - \varpi_0^1(z_1) \\ \varpi_0^2(z_2) &= \frac{\bar{z}_2 - z_2(t)}{\bar{z}_2 - \underline{z}_2} = \frac{1.3 - z_2(t)}{1.14}, & \varpi_1^2(z_2) &= 1 - \varpi_0^2(z_2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

4.- Continuando con la metodología, se definen las funciones de pertenencia de cada modelo local:

$$\begin{aligned}\mu_1(t) &= \varpi_0^1 \varpi_0^2 & \mu_2(t) &= \varpi_0^1 \varpi_1^2 \\ \mu_3(t) &= \varpi_1^1 \varpi_0^2 & \mu_4(t) &= \varpi_1^1 \varpi_1^2\end{aligned}\quad (2.22)$$

5.- Finalmente, se construye el sistema T-S de la ecuación (2.12a). Las matrices A_i y B_i de los 4 subsistemas lineales son:

$$\begin{aligned}A_{\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} -2.7\bar{z}_1 & 2 & 0.3 \\ -0.2 & -\bar{z}_1 & 0 \\ -1 + \bar{z}_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.078 & 2 & 0.3 \\ -0.2 & -5.584 & 0 \\ 4.584 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & B_{\{1,3\}} &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2\bar{z}_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A_{\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} -2.7\bar{z}_1 & 2 & 0.3 \\ -0.2 & -\bar{z}_1 & 0 \\ -1 + \bar{z}_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19.161 & 2 & 0.3 \\ -0.2 & -7.097 & 0 \\ 6.097 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & B_{\{2,4\}} &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2\bar{z}_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2.2.3. Simulación 1. Validación del modelo T-S

Objetivo: Ilustrar detalladamente los pasos para obtener el sistema T-S del ejemplo numérico mostrado en el apartado anterior.

La simulación se realizó en MATLAB R2019b por el método de integración de Euler, se consideró un tiempo de simulación de 10 seg con un paso de integración de 0.01 seg. Las condiciones iniciales son $x(t) = [0.28 \ 0.15 \ 6]$. Suponga el perfil de entrada mostrado en la Figura 2.4. Generalmente para obtener información dinámica de la planta, el perfil de entrada se selecciona dependiendo del conocimiento previo del sistema o arbitrariamente.

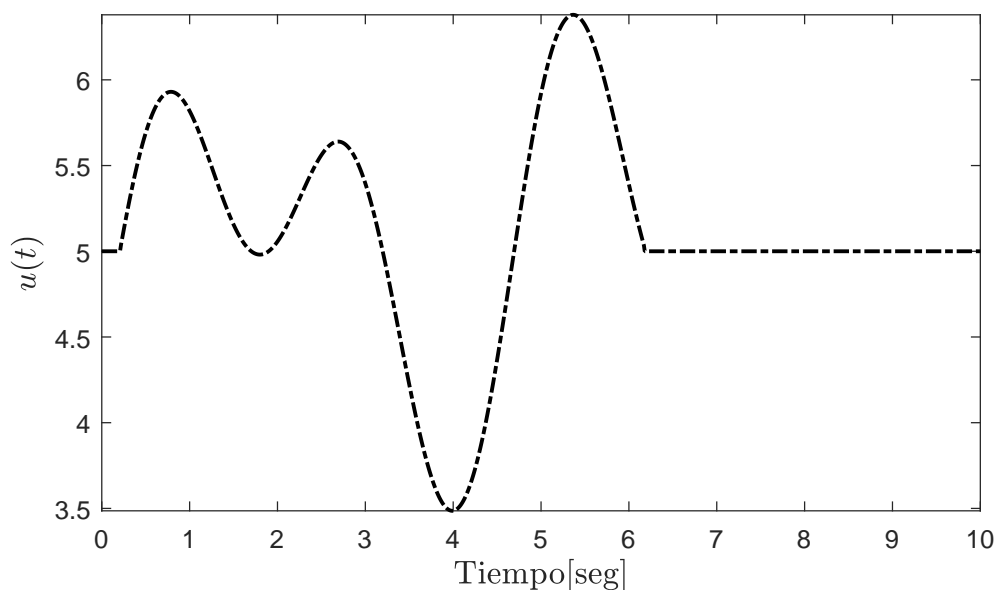


Figura 2.4: Simulación 1: Perfil de entrada.

Al excitar a la planta con la entrada seleccionada se obtienen la cota superior e inferior de las variables premisas que se muestran en la Figura 2.5. Es importante mencionar que fuera de este escenario planteado las propiedades de la ecuación 2.13 no se cumplen y no se garantiza que el sistema T-S funcione. Sin embargo, puede que aún se pueda obtener una buena representación del sistema no lineal.

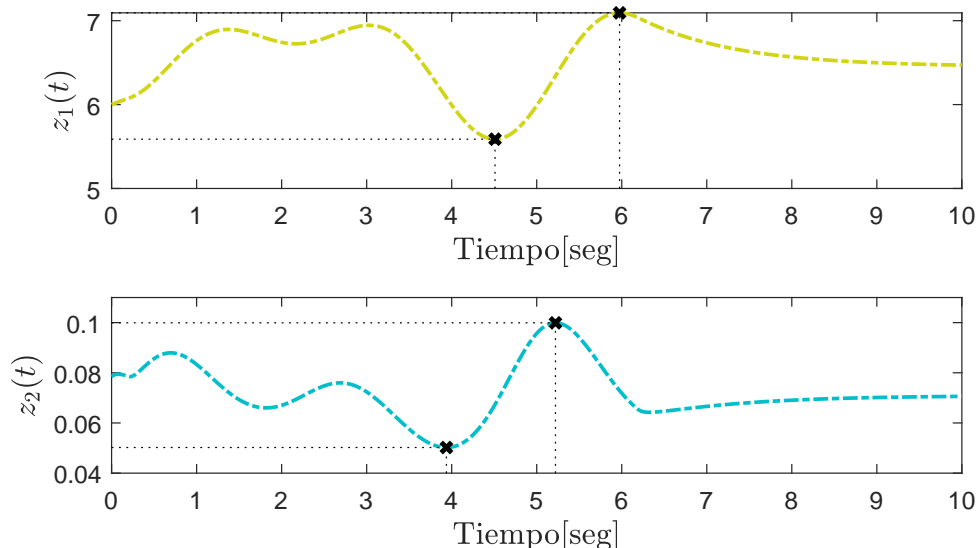


Figura 2.5: Simulación 1: Variables premisas.

Posteriormente, al obtener las cotas de las variables premisas se calculan las funciones de ponderación y las funciones de pertenencia. La Figura 2.6 muestra las 4 funciones de pertenencia que se definieron para construir el sistema T-S. Observe que las propiedades de la sumatoria convexa se cumplen.

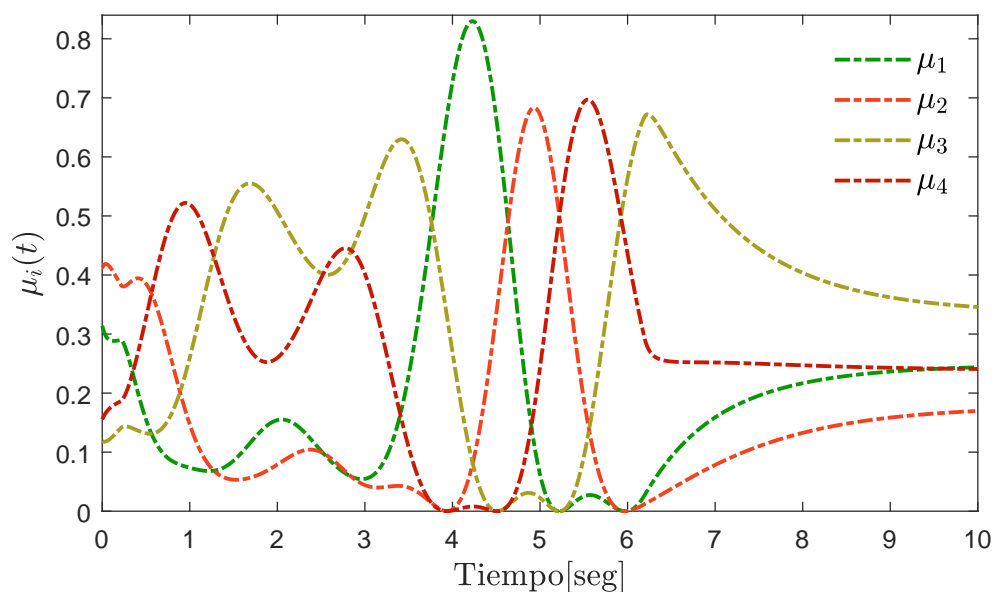


Figura 2.6: Simulación 1: Funciones de pertenencia.

Finalmente, se construye el sistema T-S y se compara con el modelo no lineal afín al control de la ecuación (2.18). Los resultados muestran que fue posible recuperar la dinámica exacta del sistema no lineal con la interpolación de los cuatro modelos locales previamente definidos.

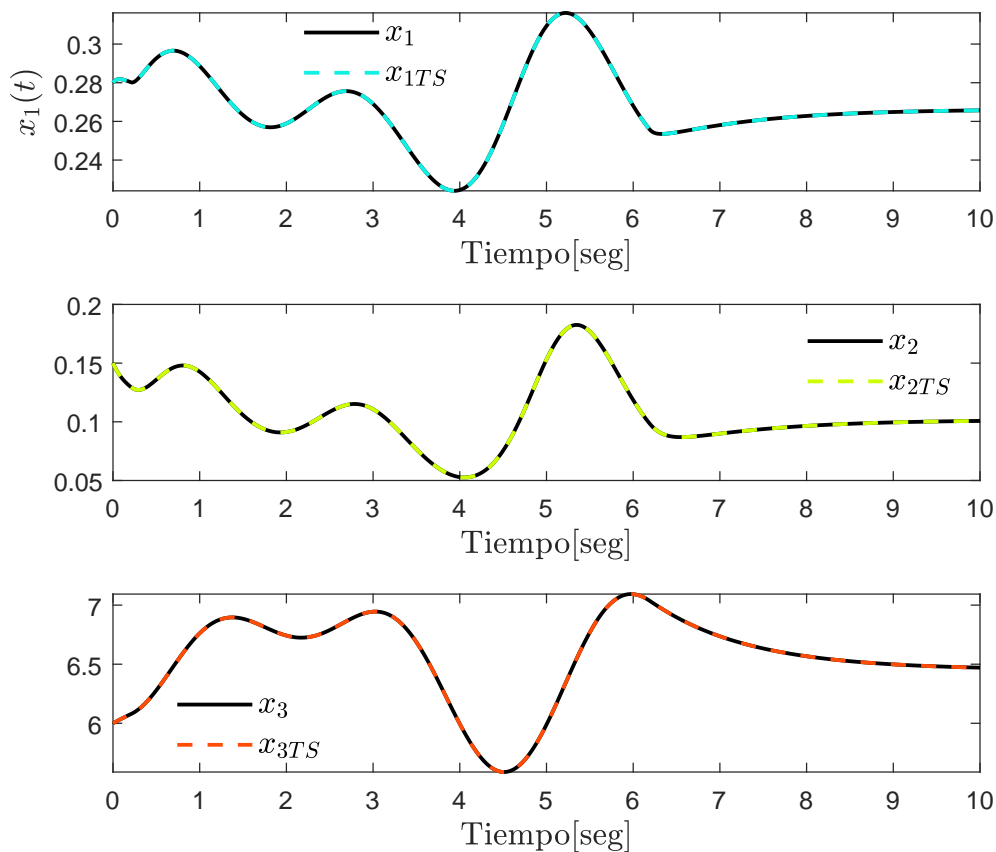


Figura 2.7: Simulación 1: Variables de estados del sistema T-S.

2.3. Diagnóstico de fallas

En Verde et al. (2013) se definen conceptos básicos sobre sistemas de diagnóstico de fallas en sistemas dinámicos. A continuación, se mencionan brevemente estos conceptos:

- Una **falla** consiste en una desviación de una propiedad característica de un sistema respecto a las condiciones de su operación nominal.
- Una **avería** es una interrupción permanente de la función del sistema para cumplir una tarea requerida bajo condiciones nominales.
- Una **disfunción** sucede cuando un sistema es incapaz de cumplir con alguna de las funciones para las que fue diseñado, de manera intermitente.

2.3.1. Clasificación de fallas

2.3.1.1. Por dependencia temporal

La Figura 2.8 muestra las tres formas de fallas según su dependencia temporal. Estas se enlistan a continuación:

- **Falla abrupta:** Se presentan con un cambio repentino donde se desconoce el tiempo de ocurrencia. Su duración puede ser permanente o transitoria y puede modelarse como una función escalón.

- **Falla incipiente:** Esta falla se manifiesta como un cambio de magnitud de las variables del sistema, esta magnitud va aumentando paulatinamente respecto al tiempo y puede modelarse como una función rampa.
- **Falla intermitente:** Este tipo de falla no tiene evolución determinada en el tiempo y se presenta de manera aleatoria y desaparece también de la misma forma (Verde et al., 2013).

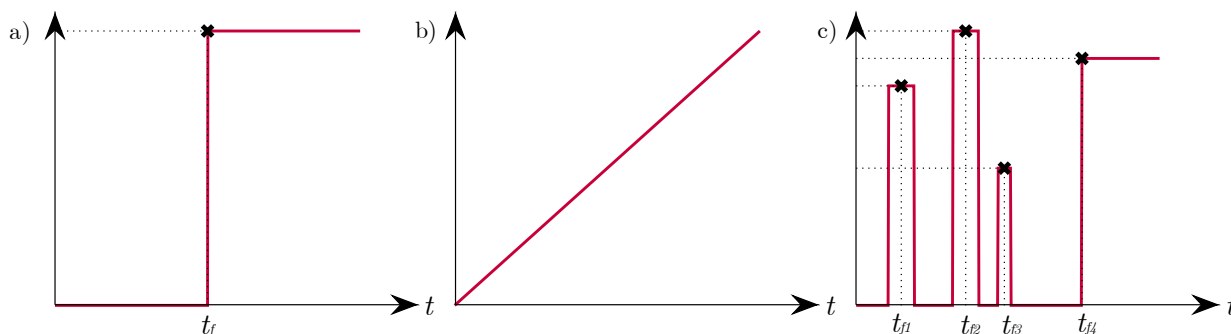


Figura 2.8: Clasificación temporal de fallas.
a) Abrupta, b) Incipiente, c) Intermitente

2.3.1.2. Por localización

Físicamente las fallas se localizan en sensores, actuadores u otros componentes del sistema. El nivel de gravedad de las fallas puede ser parcial o total. Las fallas a menudo se clasifican según su localización en el sistema como se menciona a continuación:

- **Fallas en actuadores:** representan la pérdida del control parcial o total sobre un actuador. Puede perturbar la operación de la planta, volviéndola parcialmente controlable. Un atascamiento en un actuador es uno de los ejemplos de un mal funcionamiento en actuadores.
- **Fallas en sensores:** representan la lectura incorrecta de los sensores. Puede que el lazo entre la planta y el controlador se rompa, esto hace a la planta parcialmente observable. Como ejemplo están los cables rotos, pérdidas de contacto con la superficie, etc.
- **Fallas en componentes:** representan todas las demás fallas que no se pueden caracterizar en las fallas de sensores o de actuadores. Estas fallas pueden causar un cambio en los parámetros físicos del sistema debido a un daño estructural. Si estos cambios en los parámetros afectan la tolerancia a fallas de la cualquier ley de control, es necesario reconfigurar el controlador (Blanke et al., 2006).

2.3.2. Módulo de diagnóstico

En un esquema de CTF activo existe un subsistema indispensable conocido como unidad de diagnóstico de fallas. Esta unidad de diagnóstico es crucial porque permite realizar un mantenimiento predictivo, reducir el tiempo de paro de líneas de producción, posibilita la reconfiguración y permite garantizar los objetivos de seguridad, continuidad y desempeño del proceso controlado. Este módulo de monitoreo realiza las siguientes tareas:

- **Detección:** Indica si ha ocurrido o no una falla en el sistema mediante señales comúnmente conocidas como residuos, estos residuos se generan usando las mediciones en tiempo real de las entradas y salidas del proceso con ecuaciones deducidas del modelo. Los residuos se convierten en síntomas, estos últimos son eventos que resultan de la interpretación del diseñador.
- **Localización:** Determina la ubicación donde ha ocurrido la falla utilizando los síntomas para determinar con precisión el componente físico de operación anormal. La localización se realiza comparando el síntoma con escenarios de fallas previamente considerados en una tabla de firmas de referencia, si existe una firma de coherencia igual al síntoma entonces la falla se localiza en el componente que corresponda a la firma de coherencia.
- **Estimación:** Estima con exactitud la magnitud y naturaleza de la falla. La falla al ser desconocida es necesario que los métodos de estimación converjan asintóticamente al valor de la falla real en el menor tiempo posible.

La Figura 2.9 muestra las dos formas de estructurar la unidad de diagnóstico. El método basado en el modelo debe tener una representación matemática del sistema. Posteriormente se analiza la existencia de alguna falla a partir de la generación de residuos que se obtienen comparando las mediciones del sistema con estimaciones deducidas del modelo. Finalmente, el resultado son los síntomas que dictaminan el componente con falla.

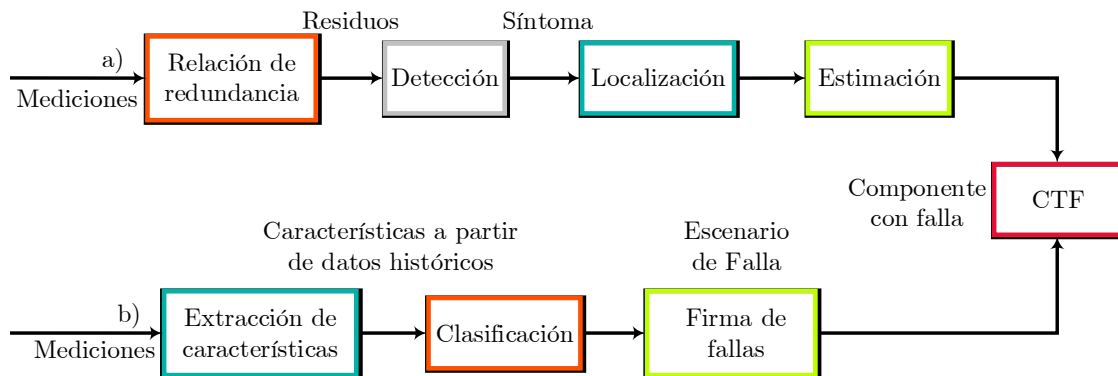


Figura 2.9: Unidad de diagnóstico de fallas.
a) por Modelo, b) por Procesamiento Digital de Señales

Por otro lado, el método basado en procesamiento de señales trabaja con un historial de datos experimentales para conseguir características propias, tales como, promedios, correlaciones, combinaciones, etc. Este conjunto de datos incluye el comportamiento del sistema desde su operación óptima hasta en situaciones de falla. A partir, de lo anterior se genera una clasificación que permite determinar el modo de falla correspondiente al escenario analizado. Generalmente, si el sistema matemáticamente es complejo de modelar, se opta por el método basado en procesamiento digital de señales. Actualmente, existen diversas herramientas para obtener una unidad diagnóstico de fallas basado en señales tales como: machine learning, minería de datos o redes neuronales artificiales (Verde et al., 2013).

2.3.3. Redundancia

2.3.3.1. Redundancia física

La redundancia física es el empleo de dos o más componentes que son innecesarios, pero en el área de FDI (por sus siglas en inglés: *Fault Detection and Isolation*) sirven para comparar dos o más resultados con el fin de detectar una inconsistencia. Tradicionalmente en los mecanismo de FDI se utilizaba la redundancia física que permitía por medio de comparaciones del funcionamiento entre cada componente, tomar decisiones respecto a la presencia de fallas (Isermann, 2005).

2.3.3.2. Redundancia analítica

Posteriormente, surge un tipo de redundancia analítica que permite por medio de modelos matemáticos o procesamiento de señales llevar a cabo la detección de fallas. La ventaja de este enfoque es que, no requiere hardware adicional para realizar la detección de fallas y puede implementarse vía software. La Figura 2.10 muestra el principio de las técnicas de redundancia analítica. La metodología para evaluar la consistencia del sistema mediante modelos matemáticos puede dividirse en los siguientes pasos:

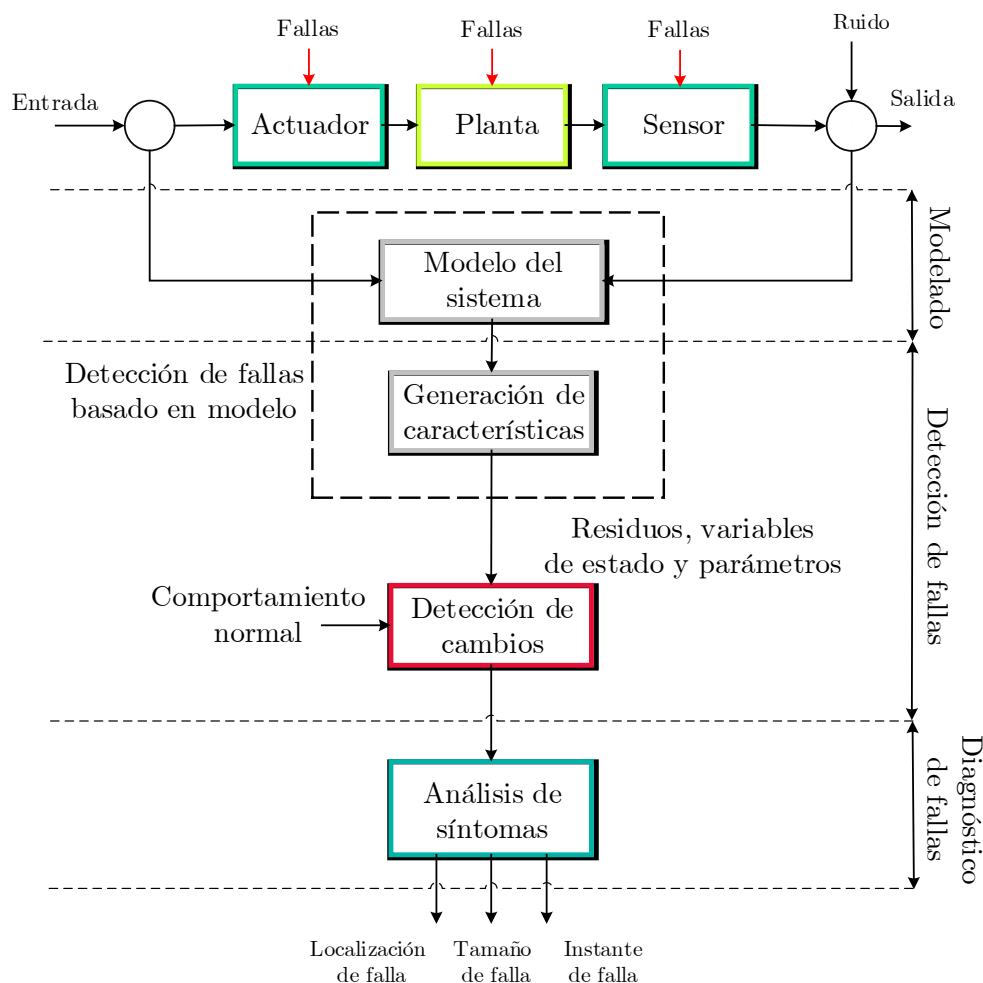


Figura 2.10: Redundancia analítica.

- **Generación de residuos:** Los residuos son señales que describen el grado de consistencia entre el comportamiento real y el modelo. Este apartado consiste en obtener señales que contienen información únicamente de las fallas. En el caso ideal los residuos son cero, esto significa que no hay fallas.
- **Evaluación de residuos:** Consiste en extraer la información contenida en los residuos para obtener los síntomas. La evaluación de los síntomas proporciona información específica de la falla como el elemento afectado y tiempo de ocurrencia.
- **Decisión:** Basándose en los síntomas obtenidos y la firma de coherencia se realiza una comparación para detectar un patrón en una tabla de firmas de referencia para determinar si la falla existe o no y cuáles son sus características (Isermann, 2005).

2.4. Control Tolerante a Fallas

Un esquema de control convencional asegura la estabilidad y el rendimiento deseado del sistema, pero en presencia de fallas resulta ser muy limitado y puede llevar al sistema hacia comportamientos no deseados como la inestabilidad. Para superar tales deficiencias, se han desarrollado técnicas de Control Tolerante a Fallas (CTF) que tienen la capacidad de garantizar la estabilidad y un desempeño aceptable del sistema, a pesar de la ocurrencia de la falla. La Figura 2.11 muestra la arquitectura general de un sistema de CTF que consta de cuatro componentes principales:

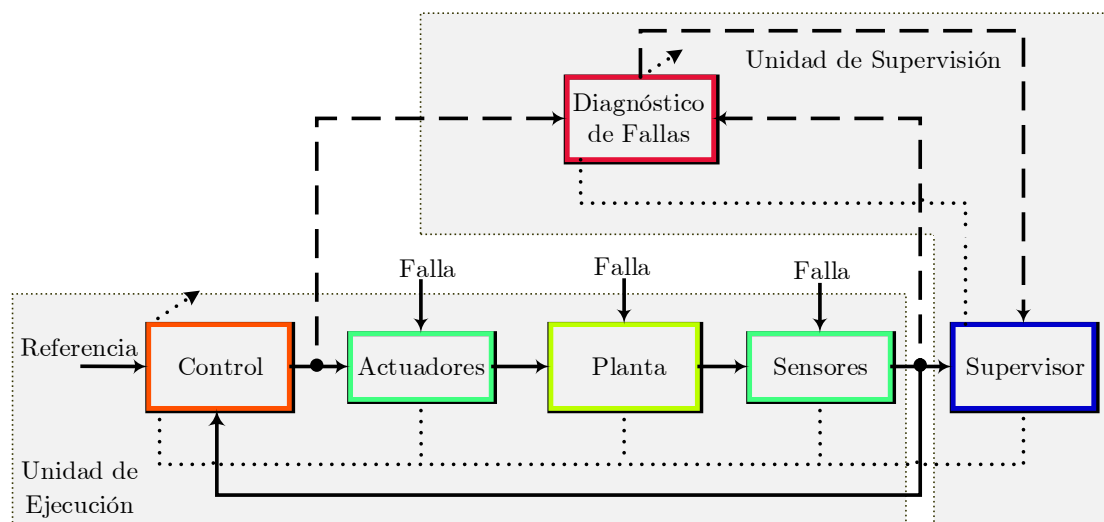


Figura 2.11: Esquema general de un sistema de CTF.

- **Sistema:** Incluye los elementos propensos a fallas: la planta, actuadores y sensores.
- **Controlador:** (línea continua) tiene la tarea de atenuar perturbaciones y garantizar la estabilidad y el cumplimiento del objetivo de control.
- **Unidad de diagnóstico:** (línea discontinua) debe proporcionar la información acerca de la duración, ubicación y magnitud de las fallas.

- **Supervisor:** (línea punteada) se encarga de acumular toda la información que recibe del bloque de diagnóstico y debe brindarla al controlador para su reconfiguración o sintonización ante la presencia de fallas. En la literatura este bloque también es llamado mecanismo de reconfiguración o módulo de acomodación de fallas (Jain et al., 2018).

2.4.1. Diseño de sistemas de CTF

Los sistemas de CTF se clasifican en dos categorías, CTF pasivo y CTF activo. En los sistemas CTF pasivos se diseña un control robusto que tiene la capacidad de tolerar cambios en la dinámica de la planta y satisfacer los objetivos de control bajo un repertorio restringido de escenario de fallas. Este enfoque no requiere de un esquema de diagnóstico de fallas ni de una estrategia de reconfiguración del controlador. A diferencia de los sistemas de CTF pasivos, los sistemas de CTF activos son naturalmente adaptables debido a que los parámetros del controlador pueden cambiar de acuerdo con los cambios en la dinámica de la planta. En el CTF activo se tienen dos métodos de adaptación del controlador por *acomodación de la falla* y *reconfiguración del controlador*. Ambos algoritmos dependen en gran medida de una unidad de diagnóstico que en tiempo real proporcione la información más actualizada sobre el estado de trabajo de la planta (Blanke et al., 2006).

2.4.1.1. Acomodación de la falla

En este método de adaptación los parámetros del controlador se auto-sintonizan en función a las propiedades dinámicas de la planta con fallas. Las entradas y salidas de la planta utilizadas en el lazo cerrado permanecen sin cambios tal como si no existieran fallas en el sistema. La Figura 2.12a) muestra un esquema general de la técnica de acomodación de fallas.

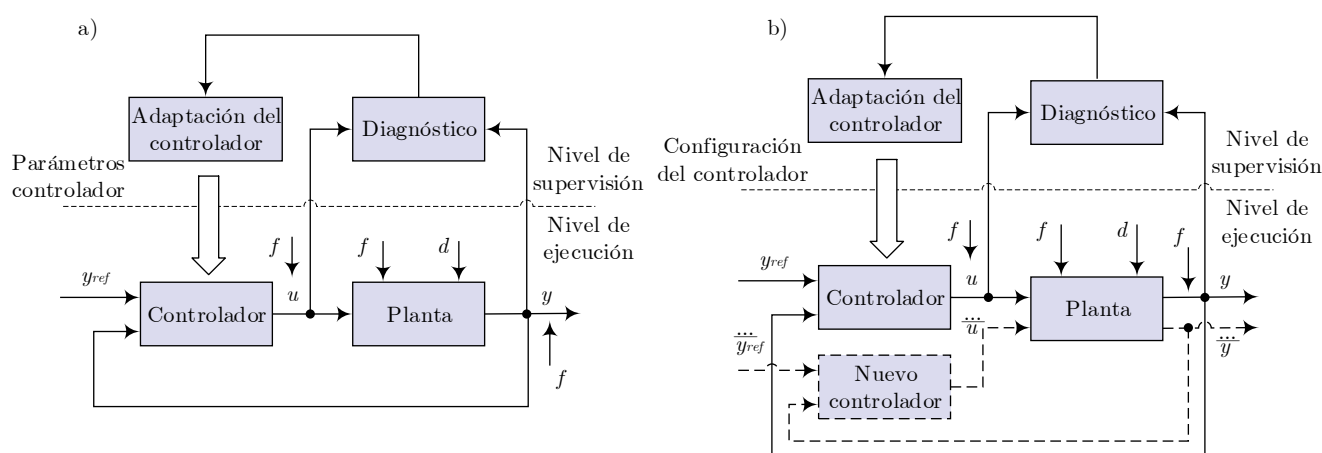


Figura 2.12: Adaptación de sistemas de CTF.

a) Acomodación de la falla, b) Reconfiguración del controlador

Un método simple se basa en la selección de un controlador partiendo de un conjunto de controladores diseñados fuera de línea. Por lo general, cada controlador pre-calculado está diseñado para una clase particular de situación de falla (Blanke et al., 2006).

2.4.1.2. Reconfiguración del controlador

Si la acomodación de la falla no es posible, es necesario reconfigurar el lazo de control por completo. Esto conduce a reconfigurar en línea un nuevo controlador donde las señales alternativas de entradas y salidas pueden ser modificadas. La Figura 2.12b) muestra un esquema general de la técnica de reconfiguración. Este método implica la determinación de nuevos parámetros del controlador en respuesta al deterioro del control nominal. Generalmente, es necesario desconectar los componentes con falla y tratar de alcanzar los objetivos de control usando solo los componentes sin falla. (Blanke et al., 2006).

2.5. Observadores

En un proceso no todas las variables de estado están disponibles para su medición, ya sea porque el sensor para medirla es muy caro o aún no sea creado uno para medirla, también porque la variable medible es de difícil acceso. En estos casos, existen dispositivos computacionales que permiten estimar el valor de las variables de estado no medibles, por medio de algoritmos basados en el procesamiento digital de señales o en el modelo matemático del sistema. Estos dispositivos son llamados observadores de estado. El observador de estados más conocido en el área de control fue propuesto por Luenberger (1964) para sistemas lineales, este se muestra en la Figura 2.13. Un observador de estados estima las variables de estado basándose solo en las mediciones de entrada y salida del sistema.

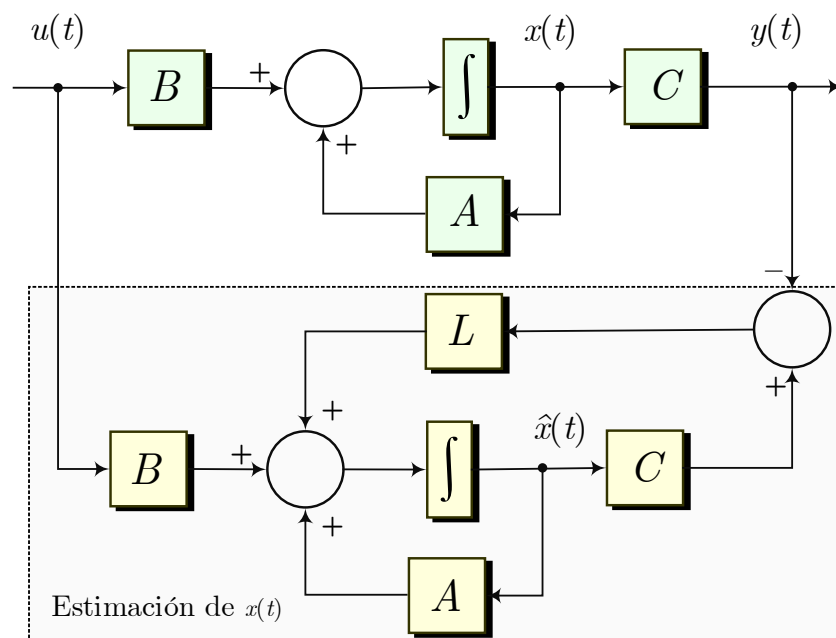


Figura 2.13: Diagrama del observador Luenberger.

2.5.1. Clasificación de observadores

Existe una clasificación de observadores de acuerdo con el orden de variables que estima:

- **Orden completo:** Este observador mide las n variables de estado donde n es la dimensión del vector de estados.
- **Orden reducido:** Este es un observador que estima menos de n variables de estado.
- **Orden mínimo:** Si el observador estima $n - m$ variables de estado donde m es el número de estados disponibles en la salida, entonces es un observador de orden mínimo.

2.5.2. Estructura de observadores

- **Observador Proporcional (PO)** El observador proporcional se muestra en la ecuación (2.23), La estructura se presenta en Darouach (2009).

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= N\zeta(t) + Fy(t) + Ju(t) \\ \hat{x}(t) &= P\zeta(t) + Qy(t)\end{aligned}\tag{2.23}$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ representa el vector de estados del observador y $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de los estados $x(t)$. Las matrices N, F, J, P y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas, que deben asegurar la convergencia asintótica de la estimación de los estados a los estados reales.

- **Observador Proporcional-Integral (PIO)** El observador proporcional–integral se muestra en la ecuación (2.24). La estructura del observador se presenta en el trabajo Hwan Seong et al. (1997). Es importante mencionar que si la matriz $H = 0$ se recupera la estructura del observador PO (por sus siglas en inglés: *Proportional Observer*).

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \\ \dot{v}(t) &= y(t) - C\hat{x}(t) \\ \hat{x}(t) &= P\zeta(t) + Qy(t)\end{aligned}\tag{2.24}$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ representa el vector de estados del observador, $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$ es un vector auxiliar que se integra al error de estimación del observador y $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de los estados $x(t)$. Las matrices N, H, F, J, P y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas, que deben asegurar la convergencia asintótica de la estimación de los estados a los estados reales.

- **Observador Dinámico Generalizado (GDO)** El observador dinámico generalizado se muestra en la ecuación (2.25), la estructura se presenta en el trabajo (Gao, 2015) y su diagrama a bloques se muestra en la Figura 2.14. Es importante mencionar que si la matriz H, S, M y L son 0 se recupera la estructura del observador PO y que si $S = -CP, M = -CQ + I$ y $L = 0$ se obtiene la estructura del observador PIO.

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \\ \dot{v}(t) &= S\zeta(t) + Lv(t) + My(t) \\ \hat{x}(t) &= P\zeta(t) + Qy(t)\end{aligned}\tag{2.25}$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ representa el vector de estados del observador, $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$ es un vector auxiliar que y $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de los estados $x(t)$. Las matrices N, H, F, J, S, L, M, P y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas que deben determinarse para que $\hat{x}(t)$ converja asintóticamente a $x(t)$.

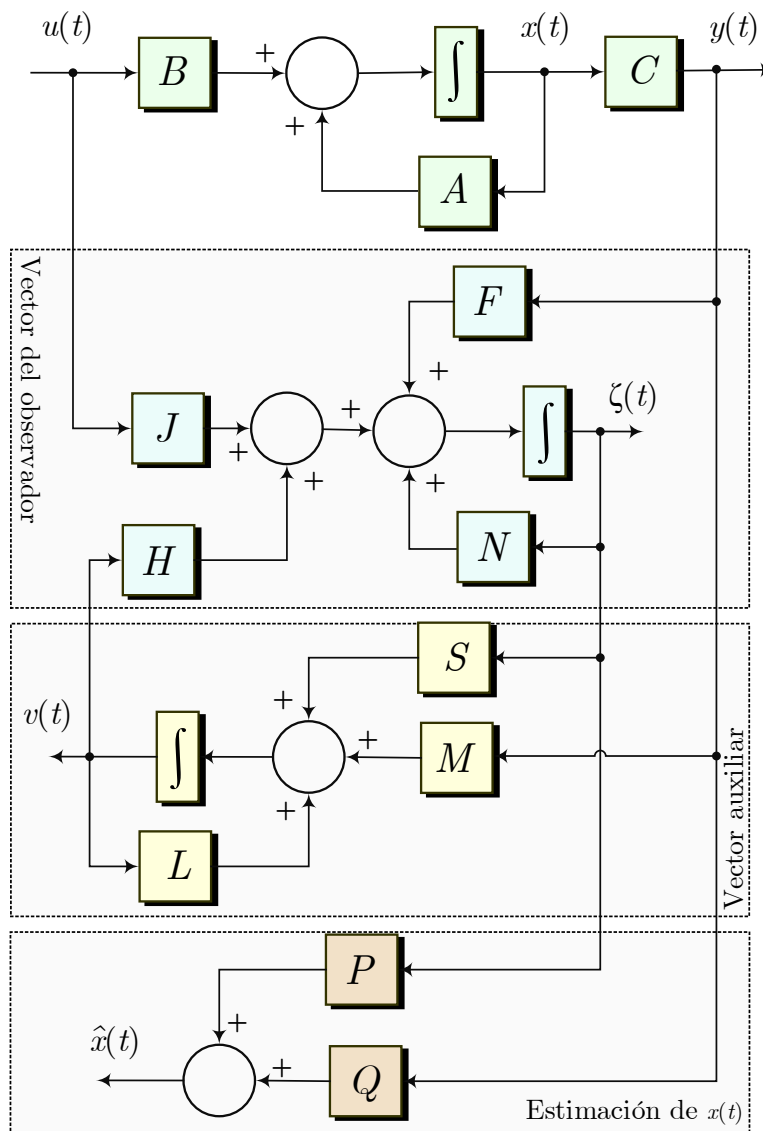


Figura 2.14: Diagrama del observador GDO.

2.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se muestran algunos conceptos básicos referentes a los sistemas descriptor y sistemas T-S, así como sus propiedades generales y algunos ejemplos que sirven para demostrar la gran capacidad de estas herramientas de modelado. Igualmente, se presentan definiciones fundamentales sobre observadores, diagnóstico de fallas y CTF. Así mismo, se muestra detalladamente algunos diagramas de diversas estrategias desarrolladas para estas líneas de investigación de la ingeniería de control.

CAPÍTULO 3

Caso de Estudio

El caso de estudio que se utilizará para probar el enfoque desarrollado es un reactor CSTR con chaqueta. La aplicación de los reactores CSTR se encuentra en diversos campos y áreas de procesos, por ejemplo, en la elaboración de papel, en la refinación de vidrio para eliminar impurezas y minerales, en la metalurgia para la mezcla de minerales como la caliza y arcilla para la elaboración de cemento; también son utilizados en las industrias alimenticias y farmacéuticas para la producción de biodiésel a partir de la recuperación de lactosuero. El reactor CSTR con chaqueta está rodeado de una cámara donde fluye un líquido refrigerante o de calefacción, el propósito de la chaqueta es mantener la temperatura del reactor en su punto de operación (puede ser para calefacción o enfriamiento). La Figura 3.1 muestra un diagrama simplificado del reactor químico.

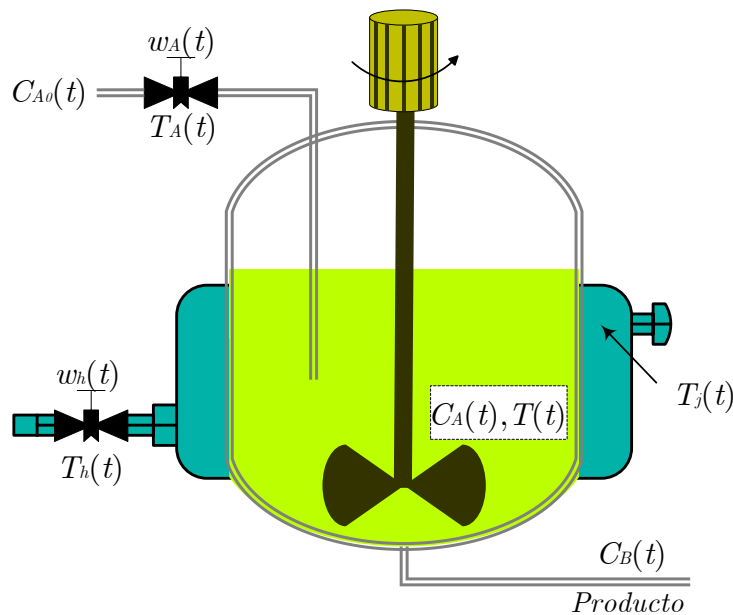


Figura 3.1: Reactor CSTR con chaqueta.

Algunos trabajos de CTF en esta clase de procesos se mencionan a continuación. Los autores en [Boudjellal & Illoul \(2019\)](#) presentan una estrategia para estimar simultáneamente la concentración molar de un reactor tipo CSTR y sus fallas en actuadores empleando un observador Super-Twisting. Los resultados muestran una correcta estimación ante la presencia de ruido de medición. En [Ortiz-Torres et al. \(2020\)](#) se diseña un esquema de CTF de seguimiento de trayectoria para el modelo T-S de un reactor CSTR enchaquetado donde utilizan un observador PIO

para estimar fallas en actuadores. Otra estrategia interesante se presenta en Pico & Adam (2017), donde diseñan un CTF activo basado en un banco de observadores tipo DOS (por sus sigla en inglés: *Dedicated Observer Scheme*) para el modelo linealizado de un reactor CSTR. El esquema trata paralelamente con fallas en actuadores y sensores. En resumen los trabajos mencionados permiten dar un preámbulo sobre técnicas de estimación de fallas y sobre CTF activo aplicados a reactores químicos tipo CSTR.

3.1. Fallas en el proceso

3.1.1. Fallas en sensores

Es importante mencionar que el sensor de molaridad del proceso tomado como caso de estudio, es una clase de sensores químicos que generalmente no se considera para un esquema de diagnóstico de fallas. Sin embargo, será tomado para el enfoque desarrollado únicamente para fines académicos.

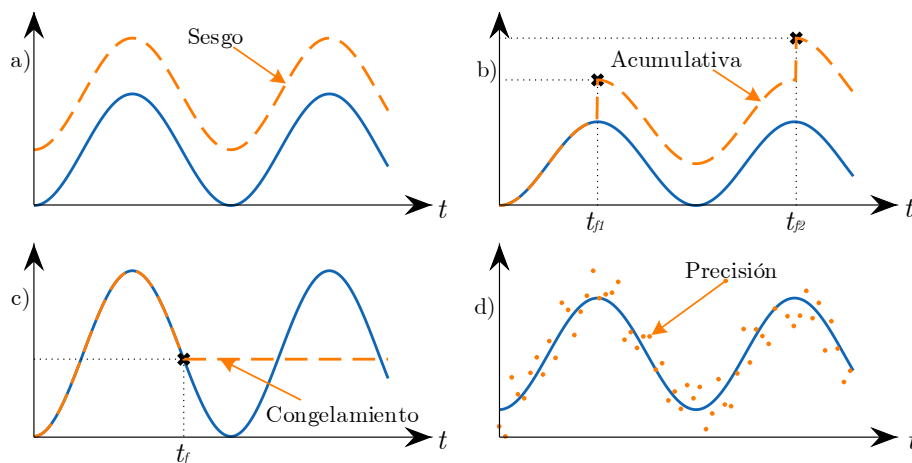


Figura 3.2: Fallas en sensores.

La Figura 3.2 muestra las fallas eléctricas más comunes que pueden presentarse en los sensores, su descripción se menciona a continuación:

- **Sesgo:** El sesgo o bias es una falla que puede interpretarse como un offset de la señal nominal medida. Este offset es constante, es decir su valor no cambia en el tiempo.
- **Acumulativa:** La acumulativa o drift se presenta debido a la acumulación de errores sistemáticos tipo bias.
- **Por precisión:** La pérdida de precisión surge por una incorrecta calibración del sensor.
- **Congelamiento:** Se tiene una lectura incorrecta en la medición debido a que la medición del sensor se queda congelada arrojando el mismo valor sin actualizar (Bošković et al., 2003).

3.1.2. Fallas en actuadores

La Figura 3.3 muestra el esquema P&ID (por sus siglas en inglés: *Piping and Instrumentation Diagram*) del proceso del actuador. En esta se indica a detalle cada elemento de la instrumentación asociada a la válvula neumática. Las fallas más comunes que pueden presentarse en este tipo de actuadores son:

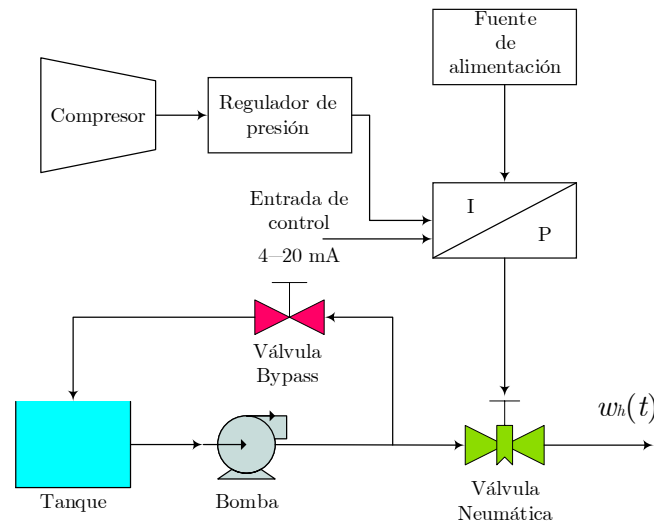


Figura 3.3: Proceso del actuador.

- **Obstrucción de la válvula:** Esta falla se produce debido a la acumulación paulatina de residuos en la entrada de la válvula.
- **Caída de presión de suministro del aire:** Esta falla se produce debido a un bloqueo o una fuga en la línea de suministro de aire y provoca una presión insuficiente en el diafragma.
- **Válvula bypass abierta total o parcialmente:** Esto causa un flujo de entrada incorrecto, lo que da como resultado un flujo de salida erróneo.
- **Fuga interna:** Se produce debido a una fuga alrededor del asiento de la válvula y puede provocar la salida del líquido incluso cuando la válvula está cerrada.
- **Fallo de desplazamiento del vástago:** Se produce debido a una desalineación física en el vástago, por un resorte desgastado y puede dar lugar a un flujo de salida erróneo.

La Figura 3.4 muestra a detalle las partes de la válvula neumática que se mencionaron en la descripción de las fallas (Venkata & Rao, 2019).

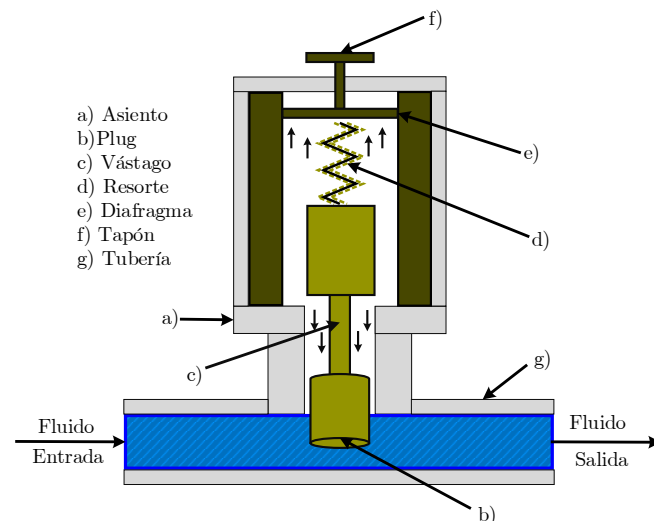


Figura 3.4: Válvula neumática.

3.2. Modelo descriptor no lineal

Considere un reactivo A que reacciona a una sustancia B . La reacción se considera endotérmica e irreversible y se puede escribir como $A \rightarrow B$. Además, la velocidad de reacción con respecto a la sustancia A está dada por:

$$k_o e^{\left(-E_a/R_a T(t)\right)} C_A(t) \quad (3.1)$$

donde k_o es el factor de frecuencia, E_a es la energía de activación de Arrhenius, y R_a es la constante universal de los gases. La expresión (3.1) se basa en consideraciones teóricas, pero los parámetros del modelo generalmente son determinados al ajustar datos experimentales y mediante relaciones semi-empíricas. En la Figura 3.1 se muestra una chaqueta de calefacción que sirve para mantener al reactor en su temperatura de operación nominal. La tasa de transferencia de calor entre el reactor y la chaqueta está dada por:

$$Q(t) = U A_r (T_j(t) - T(t)) \quad (3.2)$$

donde U es el coeficiente de transferencia de calor y A_r es el área de transferencia de calor. La ecuación (3.3) muestra el modelo matemático del reactor CSTR. El modelo se obtuvo en Kumar & Daoutidis (1999). Las no linealidades del sistema se remarcan de color rojo, las variables manipuladas de color verde y las fallas de color azul.

$$\begin{aligned} \frac{dC_A(t)}{dt} &= \frac{w_A}{V} (C_{A_0} - C_A(t)) - k_o e^{\left(-E_a/R_a T(t)\right)} C_A(t) \\ \frac{dC_B(t)}{dt} &= -\frac{w_A}{V} C_B(t) + k_o e^{\left(-E_a/R_a T(t)\right)} C_A(t) \\ \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{w_A}{V} (T_A(t) - T(t)) - \frac{\Delta H_r}{\rho c_p} k_o e^{\left(-E_a/R_a T(t)\right)} C_A(t) + \frac{Q(t)}{\rho V c_p} + f_1(t) \\ \frac{dT_j(t)}{dt} &= \frac{w_h(t)}{V_h} (T_h - T_j(t)) - \frac{Q(t)}{\rho_h V_h c_{ph}} + f_2(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $C_A(t) \left[\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right]$ es la concentración de A , $C_B(t) \left[\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right]$ es la concentración del producto B , $T(t) [\text{K}]$ es la temperatura dentro del reactor, $T_j(t) [\text{K}]$ es la temperatura de la chaqueta de calefacción y $Q(t) [\text{W}]$ es la tasa de transferencia de calor, siendo esta la restricción algebraica del modelo. Las entradas de control se sintetizan teniendo en cuenta la temperatura del reactivo de alimentación $T_A(t) [\text{K}]$ y el flujo de calefacción $w_h(t) \left[\frac{\text{L}}{\text{min}}\right]$, tal y como se propone en Ortiz-Torres et al. (2020). Para el modelo matemático se consideran las siguientes suposiciones:

- El reactor CSTR se considera como un tanque perfectamente agitado, y en consecuencia la temperatura se mantiene uniforme.
- Es un proceso adiabático es decir no hay transferencia de calor entre su entorno.
- La transferencia de calor entre la chaqueta y el reactor es mucho más rápida que la reacción química, por lo tanto, el reactor y la chaqueta calefactora se encuentran en equilibrio térmico.
- Las propiedades físicas y químicas de los fluidos se mantienen constantes.

3.2.1. Parámetros del Reactor CSTR

La Tabla 3.1 muestra los parámetros restantes del sistema de ecuaciones algebro-diferenciales mostrados en la ecuación (3.3). Estos se obtuvieron de Kumar & Daoutidis (1999) a excepción del parámetro UA_r que se manipuló para fines de simplificación. Observe que en este caso los parámetros del fluido en el reactor y la chaqueta de calentamiento se supone que son iguales $c_p = c_{ph}$ y $\rho = \rho_h$.

Tabla 3.1: Parámetros del reactor CSTR.

Parámetro	Descripción	Parámetro	Descripción
$c_p = c_{ph} = 8 \frac{\text{J}}{\text{gK}}$	Calor específico	$\rho = \rho_h = 800 \frac{\text{g}}{\text{L}}$	Densidad molar del líquido
$V = 1\text{L}$	Volumen de retención del reactor	$V_h = 0.2\text{L}$	Volumen de la chaqueta
$R_a = 8.314472 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$	Constante universal de los gases	$\Delta H_r = 2 \times 10^4 \frac{\text{J}}{\text{mol}}$	Reacción del calor
$UA_r = 10^4 \frac{\text{W}}{\text{K}}$	Coefficiente de transferencia de calor por área	$k_o = 5 \times 10^{10} \frac{\text{Lmin}^{-1}}{\text{mol}}$	Factor pre-exponencial de Arrhenius
$E_a = 6 \times 10^4 \frac{\text{Jmol}}{\text{K}}$	Energía de activación de Arrhenius	$w_A = 2 \frac{\text{L}}{\text{min}}$	Flujo de salida del reactor
$C_{A_0} = 2.5 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$	Concentración de alimentación	$T_h = 330\text{K}$	Temperatura del flujo de calefacción

El modelo descriptor no lineal en formato de espacio de estados (3.4a)–(3.4b) se obtiene tomando el sistema de ecuaciones algebro-diferenciales de la expresión (3.3).

$$E\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) + Gf(t) + \Delta \quad (3.4a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Df_s(t) \quad (3.4b)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_A(t) \\ C_B(t) \\ T(t) \\ T_j(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}$, es el vector de variables de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$,

es el vector de salidas medibles, $u(t) \in \mathbb{R}^m = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_A(t) \\ w_h(t) \end{bmatrix}$, es el vector de variables

manipuladas, $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$, es el vector de fallas en actuadores y $f_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$, es el vector de fallas en sensores.

Las matrices del sistema son:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A(x(t)) = \begin{bmatrix} -\frac{w_A}{V} - k_o e^{\left(\frac{-E_a}{R_a x_3(t)}\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_o e^{\left(\frac{-E_a}{R_a x_3(t)}\right)} & -\frac{w_A}{V} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta H_r}{\rho c_p} k_o e^{\left(\frac{-E_a}{R_a x_3(t)}\right)} & 0 & -\frac{w_A}{V} & 0 & \frac{1}{\rho V c_p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_h V_h c_{ph}} \\ 0 & 0 & 0 & -UA_r & UA_r \\ & & & & -1 \end{bmatrix},$$

$$B(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{w_A}{V} & 0 \\ 0 & \frac{T_h - x_A(t)}{V_h} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} \frac{w_A C_{A_0}}{V} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe que se tienen en total dos términos no constantes en las matrices $A(x(t))$ y $B(x(t))$ y Δ es una matriz conocida con términos constantes.

3.3. Modelo T–S descriptor

En la Sección 3.2 se reescribió el modelo del reactor CSTR como un sistema no lineal afín al control y se identificaron dos no linealidades. Entonces siguiendo la metodología por el sector no lineal, se define el número de variables premisas $p = 2$ y el número de modelos locales $r = 2^p = 4$. Ahora es necesario conocer la cota inferior \underline{z}_j y la cota superior \bar{z}_j de las variables premisas $z_j(t) \in [\underline{z}_j, \bar{z}_j]$. Estos valores se obtienen a partir del conocimiento previo del proceso.

De acuerdo con (Kumar & Daoutidis, 1999) los rangos de operación nominal de las variables manipuladas son $290\text{K} \leq u_1(t) \leq 310\text{K}$ y $0.05 \frac{\text{L}}{\text{min}} \leq u_2(t) \leq 0.2 \frac{\text{L}}{\text{min}}$. Sin embargo, en el diseño estos datos pueden ser modificados de acuerdo con el objetivo de control y los resultados experimentales. Considerando los valores máximo y mínimo de las entradas, se realiza una simulación numérica del sistema (3.3) para obtener las siguientes cotas de las variables premisas:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= k_o e^{\left(\frac{-E_a}{R_a x_3(t)}\right)} \in [0.71, 3.154] \\ z_2(t) &= x_4(t) \in [291.39, 308.619] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Conociendo los valores máximos y mínimos de las variables premisas se calculan las dos funciones de ponderación correspondientes de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varpi_0^1(z_1) &= \frac{\bar{z}_1 - z_1(t)}{\bar{z}_1 - \underline{z}_1} = \frac{3.154 - z_1(t)}{3.154 - 0.71}, & \varpi_1^1(z_1) &= 1 - \varpi_0^1(z_1) \\ \varpi_0^2(z_2) &= \frac{\bar{z}_2 - z_2(t)}{\bar{z}_2 - \underline{z}_2} = \frac{308.619 - z_2(t)}{308.619 - 291.39}, & \varpi_1^2(z_2) &= 1 - \varpi_0^2(z_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Continuando con la metodología por sector no lineal, se definen las cuatro funciones de pertenencia de la ecuación (3.7) que corresponden a cada subsistema lineal:

$$\begin{aligned}\mu_1(t) &= \varpi_0^1 \varpi_0^2 & \mu_2(t) &= \varpi_0^1 \varpi_1^2 \\ \mu_3(t) &= \varpi_1^1 \varpi_0^2 & \mu_4(t) &= \varpi_1^1 \varpi_1^2\end{aligned}\quad (3.7)$$

Tomando en cuenta cada modelo local se puede obtener un modelo global que reproduce la dinámica exacta del sistema descriptor no lineal original (3.4a)–(3.4b) mediante el siguiente sistema T–S descriptor:

$$E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z) \left(A_i x(t) + B_i u(t) \right) + Gf(t) + \Delta \quad (3.8a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Df_s(t) \quad (3.8b)$$

donde E , G , Δ , C y D son matrices con elementos constantes y las matrices A_i y B_i de los cuatro modelos locales son:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -\frac{w_A}{V} - \underline{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{z}_1 & -\frac{w_A}{V} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta H_r}{\rho c_p} \underline{z}_1 & 0 & -\frac{w_A}{V} & 0 & \frac{1}{\rho V c_p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_h V_h c_{ph}} \\ 0 & 0 & -UA_r & UA_r & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.71 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.71 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2.22 & 0 & -2 & 0 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0008 \\ 0 & 0 & -10^3 & 10^3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -\frac{w_A}{V} - \bar{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{z}_1 & -\frac{w_A}{V} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta H_r}{\rho c_p} \bar{z}_1 & 0 & -\frac{w_A}{V} & 0 & \frac{1}{\rho V c_p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_h V_h c_{ph}} \\ 0 & 0 & -UA_r & UA_r & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.154 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.154 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -9.855 & 0 & -2 & 0 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0008 \\ 0 & 0 & -10^3 & 10^3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{\{1,3\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{w_A}{V} & 0 \\ 0 & \frac{T_h - \underline{z}_2}{V_h} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 193.051 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{\{2,4\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{w_A}{V} & 0 \\ 0 & \frac{T_h - \bar{z}_2}{V_h} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 106.908 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3.1. Simulación 2. Validación del modelo T–S descriptor del reactor CSTR

Objetivo: El objetivo de esta simulación es validar el sistema T–S descriptor previamente construido al compararlo con el modelo descriptor no lineal del reactor químico CSTR. Es importante mencionar que en estas simulaciones el sistema se consideró libre de fallas.

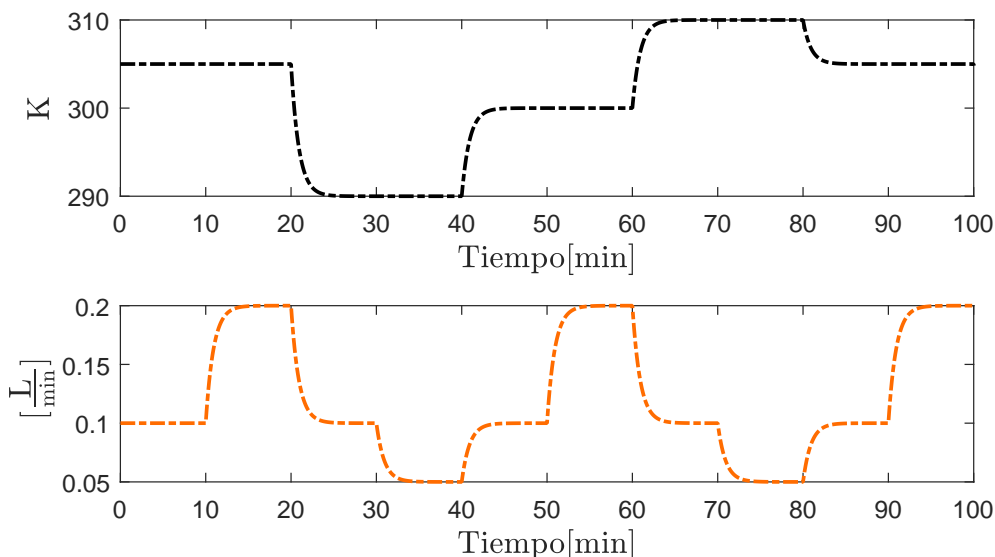


Figura 3.5: Simulación 2: Entradas.

Las simulación se realizó en Simulink–MATLAB R2019b, el tiempo de simulación es de 100 min, el método de integración es ODE15s y las condiciones iniciales para las ecuaciones diferenciales del sistema fueron $x(0) = [1.205 \ 1.295 \ 302.3 \ 302.6]^T$, tanto para el modelo descriptor no lineal como para el modelo T–S descriptor. La Figura 3.5 muestra el comportamiento de las entradas del sistema. El perfil de las entradas se eligió de manera arbitraria respetando el rango de operación propuesto por Kumar & Daoutidis (1999).

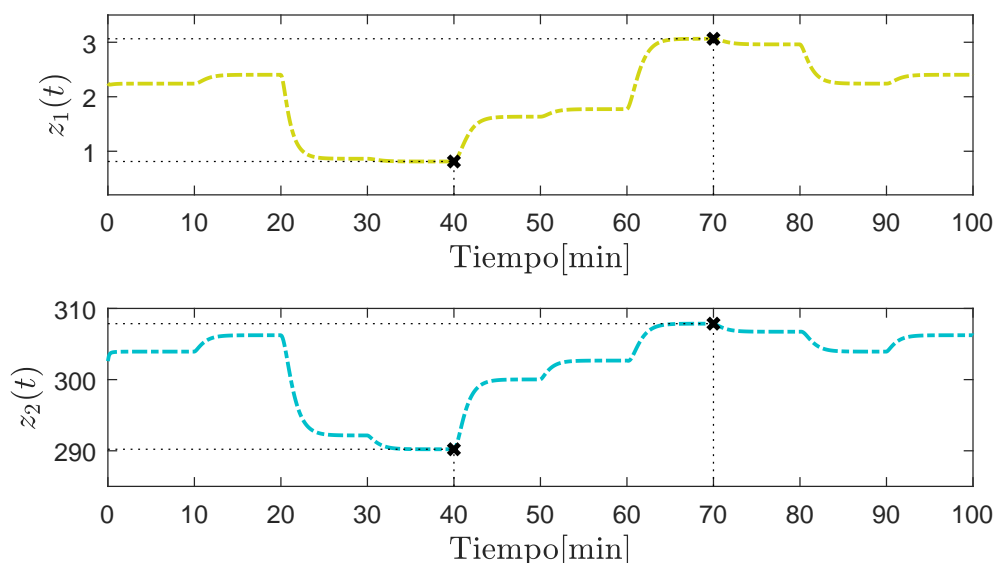


Figura 3.6: Simulación 2: Variables premisas.

En la Figura 3.6 se presentan las dos variables premisas, se observa que su valor máximo y mínimo corresponde al valor previamente mencionado. Del mismo modo, la Figura 3.7 muestra las aportaciones de cada modelo local. De acuerdo con las propiedades mostradas en el Capítulo 2, la sumatoria total del valor de cada función de pertenencia es igual a 1. El primer y cuarto modelo local tienen una mayor influencia sobre el modelo global del sistema, mientras que la aportación del segundo y tercer modelo local es menor. Sin embargo, cada uno aporta un porcentaje considerable al sistema T-S.

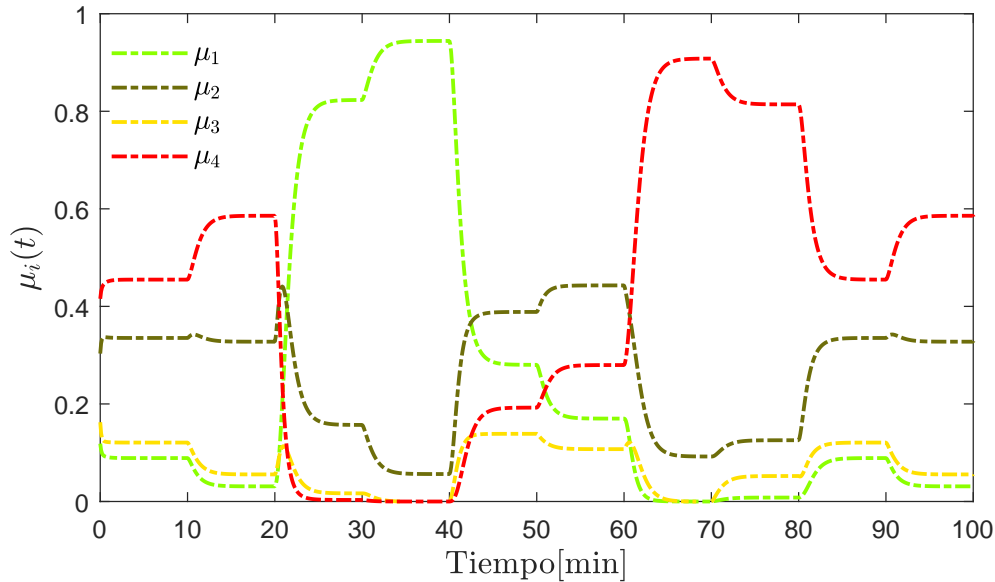


Figura 3.7: Simulación 2: Funciones de pertenencia.

En las Figuras 3.8 y 3.9 se muestra el comportamiento de las variables de estados del sistema descriptor no lineal y descriptor T-S. En este punto es importante mencionar que la ecuación algebraica no tiene condición inicial y su valor inicial se calcula tomando en cuenta las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales.

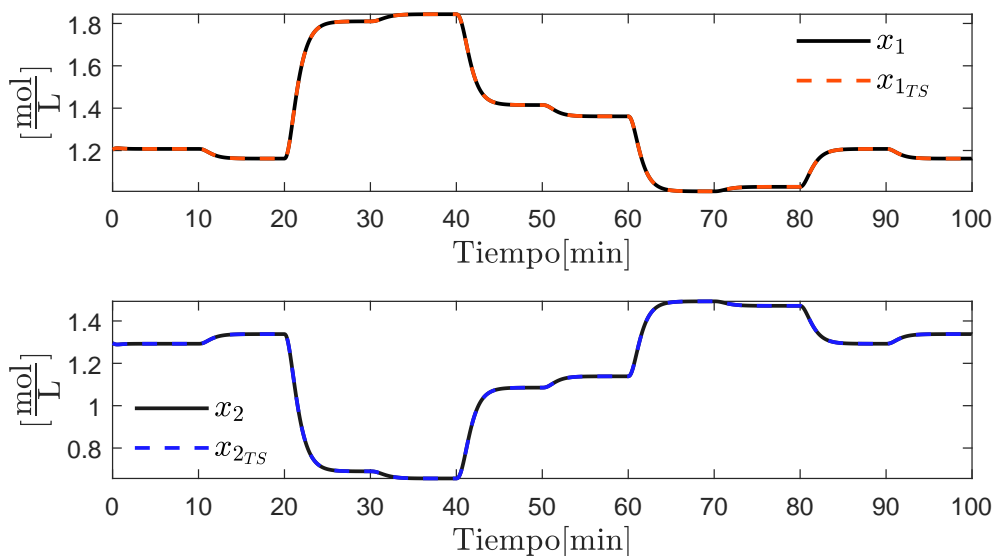


Figura 3.8: Simulación 2: Comparación $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

Los resultados de esta simulación demuestran que es posible recuperar la dinámica de un sistema descriptor no lineal mediante el enfoque de sistema T-S. Es importante mencionar que fuera del escenario de simulación planteado no se cumplen las restricciones de los sistemas T-S. Sin embargo, aún se puede recuperar correctamente el comportamiento del sistema no lineal, pero no respeta las propiedades de sistemas convexos.

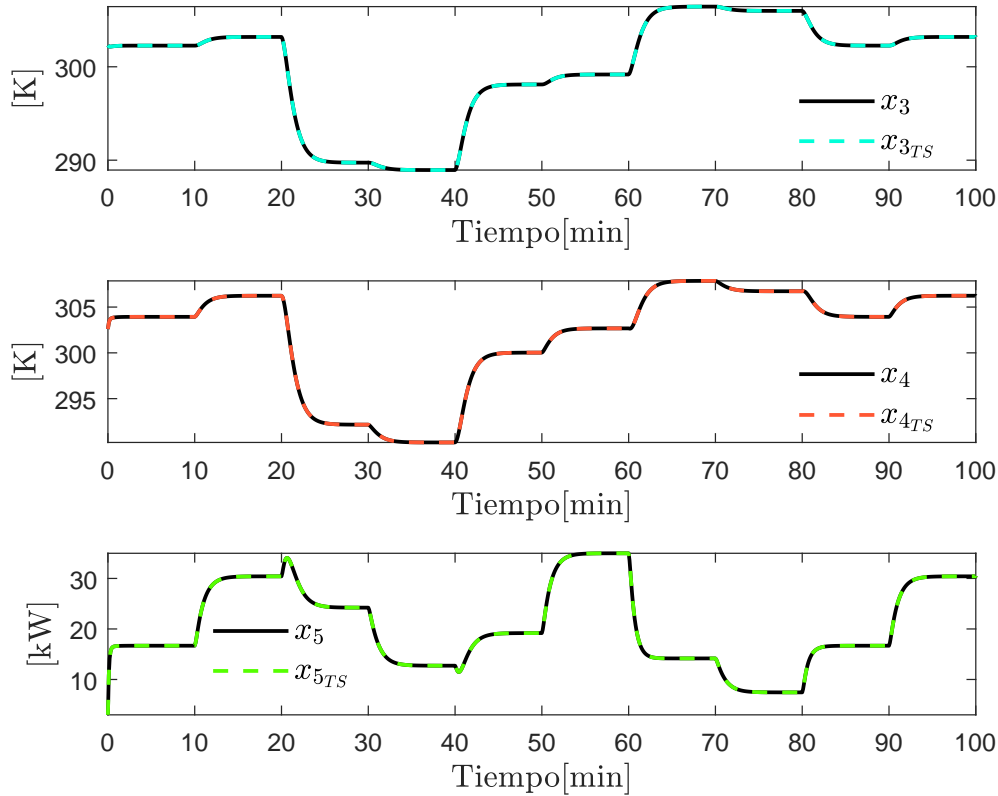


Figura 3.9: Simulación 2: Comparación $x_3(t)$, $x_4(t)$ y $x_5(t)$.

3.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se describió a detalle el caso de estudio, se mostraron los parámetros y en qué condiciones se tomó el modelo matemático. Además, se presenta el procedimiento para obtener su representación T-S descriptor. Por último, el modelo se valida mediante una simulación numérica en MATLAB R2019b. Los resultados muestran que bajo las condiciones de operación planteadas el sistemas T-S descriptor reproduce idénticamente la dinámica del modelo descriptor no lineal.

Diseño del Observador Adaptable

En la Figura 4.1 se presenta un diagrama simplificado de la operación del observador adaptable. Este se alimenta de las variables premisas, entradas y salidas del sistema. Como resultado proporciona la estimación de los estados del sistema, fallas en sensores y fallas en actuadores.

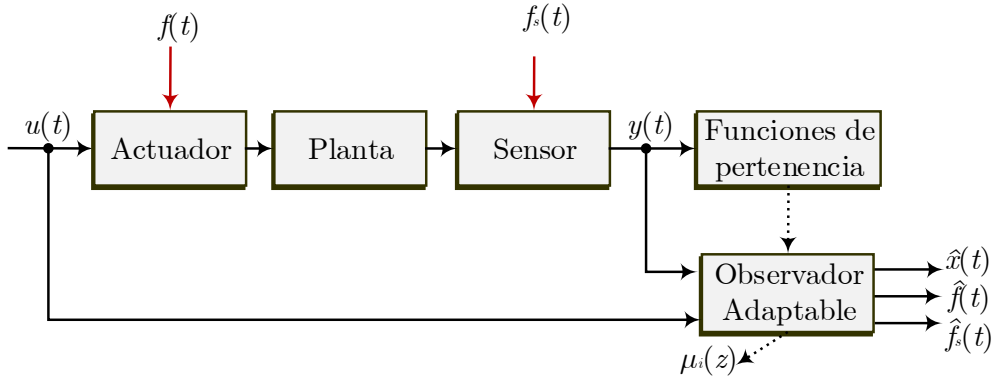


Figura 4.1: Diagrama del observador adaptable.

4.1. Preliminares

Considere el siguiente sistemas T–S descriptor sujeto a fallas en sensores y actuadores.

$$E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(A_i x(t) + B_i u(t) \right) + Gf(t) + \Delta \quad (4.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Df_s(t) \quad (4.1b)$$

donde Δ es una matriz de términos constantes, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de salidas, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de variables premisas, $f(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de fallas en actuadores y $f_s(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de fallas en sensores.

Suposición 4.1. La metodología desarrollada supone tener variables premisas medibles. Para cumplir con esta condición es necesario que las fallas en sensores no afecten a las salidas medibles que forman parte de una variable premisa.

Suposición 4.2. La metodología permite que en las ecuaciones algebraicas del modelo se tengan términos no lineales, únicamente si estas variables de estado son medibles. En otras palabras, se requiere que el subsistema rápido sea C–observable.

4.1.1. Sistema aumentado

Con el fin de desacoplar las variables de estados medidas y las fallas en sensores. Se propone el sistema aumentado descrito por (4.2a)–(4.2b).

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + B_i u(t) \right) + Gf(t) + \Delta \quad (4.2a)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (4.2b)$$

donde $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ f_s(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times \mathfrak{n}}$, $\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times \mathfrak{n}}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y \times \mathfrak{n}}$ y $\mathfrak{n} = n + n_s$.

Observación 4.1. Observe que $\text{rank}(\mathbf{E}) = \text{rank}(E)$ para la metodología de diseño es necesario que se mantenga esta propiedad.

Suposición 4.3. Las matrices de distribución de fallas en actuadores G y en sensores D se deben satisfacer las siguientes condiciones:

- Se debe asumir que $\text{rank}(B_i) = \text{rank} \begin{bmatrix} B_i & G \end{bmatrix}$ y $\text{rank}(C) = \text{rank} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$
- Existe una matriz B_i^+ tal que: $(I - B_i B_i^+)G = 0$
- En este caso, es necesario que $E^\perp G = 0$
- Se debe satisfacer la siguiente desigualdad $n_y \leq n_f + n_s$

La última condición significa que con un solo observador es imposible estimar más fallas que el número de salidas medidas.

Lema 4.1. El producto de $-E^\perp$ y B_i , da como resultado una matriz constante Γ . Del mismo modo, el producto de E^\perp y \mathbf{A}_i , da como resultado una matriz constante Λ .

Demostración. Se pre-multiplica el espacio nulo de E a la ecuación (4.2a), quedando como resultado la siguiente expresión:

$$E^\perp \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(E^\perp \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + E^\perp B_i u(t) \right) + E^\perp Gf(t) + E^\perp \Delta \quad (4.3)$$

Observación 4.2. Observe que el espacio nulo de E , también es un espacio nulo para \mathbf{E} . Entonces resulta que $E^\perp \mathbf{E} = 0$. Es necesario que se cumpla esta propiedad para la metodología desarrollada.

Suposición 4.4. Se asume en este punto que $E^\perp G = 0$ y $E^\perp \Delta = 0$, es sumamente indispensable que estas condiciones se satisfagan.

Tomando en cuenta los enunciados anteriores, de la expresión (4.3) se puede obtener que:

$$\Gamma \triangleq -E^\perp B_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (4.4)$$

$$\Lambda \triangleq E^\perp \mathbf{A}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (4.5)$$



Teorema 4.1. Considere el sistema de ecuaciones de la expresión (4.6):

$$\chi \mathcal{A} = \mathcal{B} \quad (4.6)$$

Si se cumple que $\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix}$. La solución general del sistema de ecuaciones es:

$$\chi = \mathcal{B}\mathcal{A}^+ - \mathcal{Z}(I - \mathcal{A}\mathcal{A}^+) \quad (4.7)$$

donde \mathcal{Z} es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas y \mathcal{A}^+ es la pseudo inversa generalizada de la matriz \mathcal{A} .

4.2. Fallas invariantes en el tiempo

4.2.1. Formulación del problema

Existe un observador adaptable que estima simultáneamente los estados y las fallas en los actuadores del sistema descrito por las ecuaciones (4.2a) y (4.2b):

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(N_i(\zeta(t) + TG\hat{f}(t)) + H_i v(t) + F_i \begin{bmatrix} \Gamma u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + J_i u(t) \right) + TG\hat{f}(t) + T\Delta \quad (4.8a)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(S_i(\zeta(t) + TG\hat{f}(t)) + L_i v(t) + M_i \begin{bmatrix} \Gamma u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.8b)$$

$$\dot{\hat{f}}(t) = \Phi(\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) - y(t)) \quad (4.8c)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = P(\zeta(t) + TG\hat{f}(t)) + Q \begin{bmatrix} \Gamma u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (4.8d)$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ es el vector del observador, $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$ es un vector auxiliar, $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estimación de $\mathbf{x}(t)$ y $\hat{f}(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ es el vector de estimación de $f(t)$. Las matrices N_i , H_i , F_i , J_i , S_i , L_i , M_i , P , Q , Φ y T son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas.

4.2.1.1. Estudio de la dinámica del error

Partiendo de una matriz $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$, se define el vector del error de estimación transformado $\varepsilon(t) = \zeta(t) - T\mathbf{E}\mathbf{x}(t) + TGf(t)$, cuya derivada en el tiempo está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) & \left(N_i \varepsilon(t) + H_i v(t) + (N_i T\mathbf{E} + F_i \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} - T\mathbf{A}_i) \mathbf{x}(t) + \dots \right. \\ & \left. \dots + (N_i TG + TG) \tilde{f}(t) + (J_i - TB_i) u(t) \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\tilde{f}(t) = \hat{f}(t) - f(t)$, es el error de estimación de fallas en actuadores. Utilizando la definición de $\varepsilon(t)$, las expresiones (4.8b) y (4.8d) pueden ser reescritas como:

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(S_i \varepsilon(t) + L_i v(t) + S_i T G \tilde{f}(t) + \left(S_i T \mathbf{E} + M_i \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) \mathbf{x}(t) \right) \quad (4.10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = P \varepsilon(t) + P T G \tilde{f}(t) + \left(P T \mathbf{E} + Q \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) \mathbf{x}(t) \quad (4.11)$$

Ya que se consideran fallas invariantes en el tiempo, entonces $\dot{f}(t) = 0$, por lo tanto, la derivada de $\tilde{f}(t)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{f}}(t) &= \Phi \mathbf{C} P \varepsilon(t) + \Phi \mathbf{C} P T G \tilde{f}(t) + \Phi \mathbf{C} x(t) - \Phi \mathbf{C} x(t) \\ &= \Phi \mathbf{C} P \varepsilon(t) + \Phi \mathbf{C} P T G \tilde{f}(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$. Por simplificación, considere las siguientes cuatro suposiciones:

$$\begin{aligned} \text{a) } N_i T \mathbf{E} + F_i \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} - T \mathbf{A}_i &= 0 & \text{c) } S_i T \mathbf{E} + M_i \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} &= 0 \\ \text{b) } J_i &= T B_i & \text{d) } P T \mathbf{E} + Q \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} &= I_n \end{aligned}$$

Si las suposiciones a)-b) se satisfacen, la ecuación (4.9) queda como se muestra en (4.13). De igual manera, si la suposición c) se cumple, la expresión (4.10) se puede reescribir como en la ecuación (4.14).

$$\dot{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(N_i \varepsilon(t) + H_i v(t) + (N_i T G + T G) \tilde{f}(t) \right) \quad (4.13)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(S_i \varepsilon(t) + L_i v(t) + S_i T G \tilde{f}(t) \right) \quad (4.14)$$

Finalmente, la dinámica del error puede reescribirse partiendo de los términos (4.13) y (4.14):

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & L_i \end{bmatrix} \varphi(t) + \begin{bmatrix} N_i T G_i + T G \\ S_i T G \end{bmatrix} \tilde{f}(t) \right) \quad (4.15)$$

Observación 4.3. Observe que se debe asegurar que la matriz $\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & L_i \end{bmatrix}$ sea Hurwitz, cuando $f(t) = 0$. Sustituyendo la suposición d) en la ecuación (4.11) se tiene que el error de estimación de los estados del sistema aumentado $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ es:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} P & 0 \end{bmatrix} \varphi(t) + P T G \tilde{f}(t) \quad (4.16)$$

4.2.2. Parametrización del observador

A lo largo de este documento considere $\psi = n_y + n - \varrho$ donde $\varrho = \text{rank}(\mathbf{E})$. En este punto se definen algunas matrices desconocidas de la estructura del observador adaptable, tal que se satisfagan las suposiciones de los incisos a)-d).

Dado a que $\text{rank} \begin{bmatrix} T\mathbf{E} \\ \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n$, deben existir dos matrices $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$ y $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{q_0 \times \psi}$ tal que:

$$T\mathbf{E} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \mathbf{K} \end{bmatrix} \Omega = R \quad (4.17)$$

donde $\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$ y $R \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$ es una matriz de rango-fila completo. Ya que $\text{rank}(\Omega) = \text{rank} \begin{bmatrix} \Omega \\ R \end{bmatrix}$,

entonces la solución particular de (4.17) es:

$$\begin{bmatrix} T & \mathbf{K} \end{bmatrix} = R\Omega^+ - Z_1 (I_{n+\psi} - \Omega\Omega^+) \quad (4.18)$$

Se puede deducir que la ecuación (4.18) es equivalente a (4.19) y (4.20):

$$T = T_1 - Z_1 T_2 \quad (4.19)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 - Z_1 \mathbf{K}_2 \quad (4.20)$$

considere que $T_1 = R\Omega \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$, $T_2 = (I_{n+\psi} - \Omega\Omega^+) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_1 = R\Omega \begin{bmatrix} 0 \\ I_\psi \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = (I_{n+\psi} - \Omega\Omega^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_\psi \end{bmatrix}$ y Z_1 es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas.

Reemplazando el término $T\mathbf{E}$ que se tiene en la ecuación (4.17) en la suposición del inciso a) se obtiene:

$$N_i R - N_i \mathbf{K} \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} + F_i \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & \tilde{\mathbf{K}}_i \end{bmatrix} \Sigma = T\mathbf{A}_i \quad (4.21)$$

donde $\tilde{\mathbf{K}}_i = F_i - N_i \mathbf{K}$ y $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$ es una matriz de rango-columna completo. La solución general

de la ecuación (4.21) es:

$$\begin{bmatrix} N_i & \tilde{\mathbf{K}}_i \end{bmatrix} = T\mathbf{A}_i \Sigma^+ - Y_{1i} (I_{q_0+\psi} - \Sigma\Sigma^+) \quad (4.22)$$

Sustituyendo la matriz T de la expresión (4.20) en la ecuación (4.22) se tiene que:

$$N_i = N_{1i} - Z_1 N_{2i} - Y_{1i} N_3 \quad (4.23)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_i = \tilde{\mathbf{K}}_{1i} - Z_1 \tilde{\mathbf{K}}_{2i} - Y_{1i} \tilde{\mathbf{K}}_3 \quad (4.24)$$

considere que $N_{1i} = T_1 \mathbf{A}_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix}$, $N_{2i} = T_2 \mathbf{A}_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix}$, $N_3 = (I_{q_0+\psi} - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{K}}_{1i} = T_1 \mathbf{A}_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_\psi \end{bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{K}}_{2i} = T_2 \mathbf{A}_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_\psi \end{bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{K}}_3 = (I_{q_0+\psi} - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_\psi \end{bmatrix}$ y Y_{1i} es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas.

En este punto N_i, T, \mathbf{K} y $\tilde{\mathbf{K}}_i$ son matrices ya definidas, por lo tanto, utilizando el término $F_i = \tilde{\mathbf{K}}_i + N_i \mathbf{K}$ se puede deducir que:

$$F_i = F_{1i} - Z_1 F_{2i} - Y_{1i} F_3 \quad (4.25)$$

donde $F_{1i} = T_1 \mathbf{A}_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ I_\psi \end{bmatrix}$, $F_{2i} = T_2 \mathbf{A}_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ I_\psi \end{bmatrix}$ y $F_3 = (I_{q_0+\psi} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ I_\psi \end{bmatrix}$. Continuando con la parametrización, considere que $\begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_\psi \end{bmatrix} \Sigma$. Entonces al despejar el término $T\mathbf{E}$ de la ecuación (4.17) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} T\mathbf{E} \\ \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q_0} & -\mathbf{K} \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} \Sigma \quad (4.26)$$

Las suposiciones c) y d) se pueden reescribir como un sistema aumentado. Además, si se reemplaza el término de la ecuación (4.26), el sistema aumentado queda como:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T\mathbf{E} \\ \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{q_0} & -\mathbf{K} \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Considerando que Σ es una matriz de rango-columna completo y que $\begin{bmatrix} I_{q_0} & -\mathbf{K} \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{q_0} & \mathbf{K} \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix}$, la solución general de la ecuación (4.27) es:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \Sigma^+ - \begin{bmatrix} Y_{2i} \\ Y_3 \end{bmatrix} (I_{q_0+\psi} - \Sigma \Sigma^+) \right) \begin{bmatrix} I_{q_0} & \mathbf{K} \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

donde Y_{2i} y Y_3 son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas. Las matrices S_i, M_i, P y Q pueden determinarse como:

$$S_i = -Y_{2i} N_3 \quad (4.29)$$

$$M_i = -Y_{2i} F_3 \quad (4.30)$$

$$P = \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix} - Y_3 N_3 \quad (4.31)$$

$$Q = \Sigma^+ \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ I_\psi \end{bmatrix} - Y_3 F_3 \quad (4.32)$$

A partir de este punto considere que $Y_3 = 0$, por lo tanto, $P = \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix}$ y $Q = \Sigma^+ \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ I_\psi \end{bmatrix}$.

4.2.2.1. Tratamiento de la bilinealidad

Al sustituir la parametrización mostrada anteriormente en la ecuación (4.15), aparece una bilinealidad en el término N_iTG . Para evitar esta bilinealidad se lleva a cabo una adaptación en la parametrización. Sea $\bar{T}_2 = TG$ y $Z_1 = Z(I_{n+\psi} + \bar{T}_2\bar{T}_2^+)$, donde Z es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas, por lo tanto, el término N_iTG finalmente es:

$$N_iTG = N_{1i}T_1G - Z\mathcal{N}_{2i} - Y_{1i}N_3T_1G \quad (4.33)$$

donde se cumple que $\bar{T}_2\bar{T}_2^+\bar{T}_2 = \bar{T}_2$. Considerando la nueva definición de Z_1 , se obtienen las siguientes expresiones para las matrices T , \mathbf{K} , N_i y F_i .

$$T = T_1 - Z\mathcal{T}_2 \quad (4.34)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 - Z\mathcal{K}_2 \quad (4.35)$$

$$N_i = N_{1i} - Z\mathcal{N}_{2i} - Y_{1i}N_3 \quad (4.36)$$

$$F_i = F_{1i} - Z\mathcal{F}_{2i} - Y_{1i}F_3 \quad (4.37)$$

donde $\mathcal{T}_2 = (I_{n+\psi} - \bar{T}_2\bar{T}_2^+)T_2$, $\mathcal{K}_2 = (I_{n+\psi} - \bar{T}_2\bar{T}_2^+)\mathbf{K}_2$, $\mathcal{N}_{2i} = (I_{n+\psi} - \bar{T}_2\bar{T}_2^+)N_{2i}$ y $\mathcal{F}_{2i} = (I_{n+\psi} - \bar{T}_2\bar{T}_2^+)F_{2i}$. Finalmente, la dinámica del error de la ecuación (4.15) está dada por:

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left((\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i\mathbb{A}_2)\varphi(t) + (\mathbb{F}_{1i} - \mathbb{Y}_i\mathbb{F}_2)\tilde{f}(t) \right) \quad (4.38)$$

considere que $\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{1i} - Z\mathcal{N}_{2i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & -I_{q_0} \end{bmatrix}$, $\mathbb{F}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{1i}T_1G + T_1G - Z\mathcal{N}_{2i}T_1G \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{F}_2 = \begin{bmatrix} N_3T_1G \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} Y_{1i} & H_i \\ Y_{2i} & L_i \end{bmatrix}$. Uniendo las dinámicas del error de estimación del observador definidas en (4.12) y (4.15) se obtiene:

$$\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z)\mathcal{A}_i\beta(t) \quad (4.39)$$

donde $\beta(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \tilde{f}(t) \end{bmatrix}$, $\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i\mathbb{A}_2 & \mathbb{F}_{1i} - \mathbb{Y}_i\mathbb{F}_2 \\ \mathbb{C}_1 & \mathbb{D}_1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{C}_1 = [\Phi\mathbf{C}P_1 \ 0]$ y $\mathbb{D}_1 = \Phi\mathbf{C}P_1T_1G$. El problema se reduce a hallar las matrices \mathbb{Y}_i , Φ y Z tal que (4.39) sea estable.

4.2.3. Análisis de estabilidad

Suposición 4.5. Si la tripleta $(C, E, A_i) \ \forall i = 1, 2, \dots, r$ del sistema descrito por (4.1a)–(4.1b), cumple con la propiedad de I–observabilidad, es posible diseñar el observador adaptable de las ecuaciones (4.8a)–(4.8c).

Lema 4.2. Si la suposición 4.5 se satisface, entonces existen las matrices \mathbb{Y} , Φ y Z tal que el sistema (4.39) sea asintóticamente estable, si y solo si existe una matriz $X_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{11} \\ X_{11} & X_{12} \end{bmatrix} > 0$ con $X_{11} = X_{11}^T$ y una matriz $X_2 > 0$ tal que las siguientes LMIs se satisfagan:

$$\mathcal{C}^{T\perp} \begin{bmatrix} \Pi_{1i} & N_{1i}^T X_{11} - \mathcal{N}_{2i}^T W_1^T & \Pi_{2i} \\ (*) & 0 & X_{11}(N_{1i} T_1 G + T_1 G) - W_1 \mathcal{N}_{2i} T_1 G \\ (*) & (*) & X_2 \Phi \mathbf{C} P_1 T_1 G + G^T T_1^T P_1^T \mathbf{C}^T \Phi^T X_2 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad (4.40)$$

$$X_2 \Phi \mathbf{C} P_1 T_1 G + G^T T_1^T P_1^T \mathbf{C}^T \Phi^T X_2 < 0 \quad (4.41)$$

donde $W_1 = X_{11} Z$, $\Pi_{1i} = X_{11} N_{1i} - W_1 \mathcal{N}_{2i} + N_{1i}^T X_{11} - \mathcal{N}_{2i}^T W_1^T$ y $\Pi_{2i} = X_{11}(N_{1i} T_1 G + T_1 G) - W_1 \mathcal{N}_{2i} T_1 G + P_1^T \mathbf{C}^T \Phi^T X_2$. La matriz \mathbb{Y}_i es determinada por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\mathbb{Y}_i = X_1^{-1} (\mathcal{B}_r^+ \mathcal{K}_i \mathcal{C}_l^+ + \mathcal{Z} - \mathcal{B}_r^+ \mathcal{B}_r \mathcal{Z} \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^+) \quad (4.42)$$

$$\mathcal{K}_i = -\mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T \phi_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \phi_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} + \mathcal{S}_i^{\frac{1}{2}} \mathcal{L} (\mathcal{C}_r \phi_i \mathcal{C}_r^T)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.43)$$

$$\phi_i = (\mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T - \mathcal{D}_i)^{-1} > 0 \quad (4.44)$$

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T \left[\phi_i - \phi_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \phi_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} \mathcal{C}_r \phi_i \right] \mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \quad (4.45)$$

considere que $\mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} X_1 \mathbb{A}_{1i} + \mathbb{A}_{1i}^T X_1 & X_1 \mathbb{F}_{1i} + \mathbb{C}_1^T X_2 \\ (*) & X_2 \mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_1^T X_2 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I_{q_1+q_1} \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{a2} & \mathbb{F}_2 \end{bmatrix}$. Las matrices \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{Z} son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas tal que $\mathcal{R} > 0$ y $\|\mathcal{L}\| < 1$. Las matrices \mathcal{C}_l , \mathcal{C}_r , \mathcal{B}_l y \mathcal{B}_r son parte de una descomposición matricial tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \mathcal{C}_r$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_l \mathcal{B}_r$.

Demostración. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\beta(t)) = \beta(t)^T X \beta(t) > 0 \quad (4.46)$$

donde $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$. Su derivada a lo largo de la trayectoria de (4.39) está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\beta(t)) &= \dot{\beta}(t)^T X \beta(t) + \beta(t)^T X \dot{\beta}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \beta(t)^T (\mathcal{A}_i^T X + X \mathcal{A}_i) \beta(t) \end{aligned} \quad (4.47)$$

La estabilidad asintótica de (4.39) es garantizada si $\dot{V}(\beta(t)) < 0$, esto conlleva a la siguiente desigualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{A}_{1i}^T - \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T) X_1 + X_1 (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) & (*) \\ (\mathbb{F}_{1i}^T - \mathbb{F}_2^T \mathbb{Y}_i^T) X_1 + X_2 \mathbb{C}_1 & \mathbb{D}_1^T X_2 + X_2 \mathbb{D}_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.48)$$

Con la finalidad de disolver la bilinealidad $X_1 \mathbb{Y}_i$, la ecuación (4.48) puede reescribirse como se muestra en la expresión (4.49):

$$\mathcal{B} \mathcal{X}_i \mathcal{C} + (\mathcal{B} \mathcal{X}_i \mathcal{C})^T + \mathcal{D}_i < 0 \quad (4.49)$$

donde $\mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} X_1 \mathbb{A}_{1i} + \mathbb{A}_{1i}^T X_1 & X_1 \mathbb{F}_{1i} + \mathbb{C}_1^T X_2 \\ (*) & X_2 \mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_1^T X_2 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I_{q_0+q_1} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_2 & \mathbb{F}_2 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{X}_i = X_1 \mathbb{Y}_i$.

De acuerdo con Skelton et al. (2001), las condiciones de solución de la desigualdad (4.49) están dadas por:

$$\mathcal{C}^{T\perp} \mathcal{D}_i \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad (4.50)$$

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{D}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad (4.51)$$

donde $\mathcal{C}^{T\perp} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_2^T \\ \mathbb{F}_2^T \end{bmatrix}^\perp$ y $\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$. Observe que las desigualdades (4.50)–(4.51) son equivalente a (4.40)–(4.41), por lo tanto, en este punto se termina la demostración del Lema 4.2. ◀

4.3. Fallas variantes en el tiempo

4.3.1. Formulación del problema

Existe un observador adaptable de la forma (4.52a)–(4.52d) que estima simultáneamente los estados y las fallas en actuadores del sistema extendido descrito por las ecuaciones (4.2a) y (4.2b):

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i \begin{bmatrix} \Gamma u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + J_i u(t) + T G_i \hat{f}(t) \right) + T \Delta \quad (4.52a)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(S_i \zeta(t) + L_i v(t) + M_i \begin{bmatrix} \Gamma u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.52b)$$

$$\dot{\hat{f}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(\Phi_i (\mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t) - y(t)) + \Psi_i \hat{f}(t) \right) \quad (4.52c)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = P \zeta(t) + Q \begin{bmatrix} \Gamma u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (4.52d)$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ es el vector del observador, $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$ es un vector auxiliar, $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estimación de $\mathbf{x}(t)$ y $\hat{f}(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ es el vector de estimación de $f(t)$. Las matrices N_i , H_i , F_i , J_i , S_i , L_i , M_i , P , Q , Φ_i , Ψ_i y T son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas.

4.3.1.1. Estudio de la dinámica del error

Partiendo de una matriz $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$, se define el vector del error de estimación transformado $\varepsilon(t) = \zeta(t) - T \mathbf{E} \mathbf{x}(t)$, cuya derivada está dada por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(N_i \varepsilon(t) + H_i v(t) + (N_i T \mathbf{E} + F_i \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} - T \mathbf{A}_i) \mathbf{x}(t) + T G_i \tilde{f}(t) + (J_i - T B_i) u(t) \right) \quad (4.53)$$

donde $\tilde{f}(t) = \hat{f}(t) - f(t)$, es el error de estimación de fallas en actuadores. Retomando la definición de $\varepsilon(t)$, las expresiones (4.52b) y (4.52d) pueden ser reescritas como:

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(S_i \varepsilon(t) + L_i v(t) + \left(S_i T \mathbf{E} + M_i \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) \mathbf{x}(t) \right) \quad (4.54)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = P \varepsilon(t) + \left(P T \mathbf{E} + Q \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) \mathbf{x}(t) \quad (4.55)$$

Suponga que $\dot{f}(t) \neq 0$, lo que implica que se asume un escenario de falla variante en el tiempo, por lo tanto, la derivada de $\tilde{f}(t)$ es:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{f}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(\Phi_i \mathbf{C} P \varepsilon(t) + \Psi_i \hat{f}_a(t) - \Psi_i f_a(t) + \Psi_i f_a(t) - \dot{f}_a(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(\underbrace{\Phi_i \begin{bmatrix} \mathbf{C} P & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_c} \varphi(t) + \Psi_i \tilde{f}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_i & -I_{n_f} \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}_{bi}} \eta(t) \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ y $\eta(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{bmatrix}$. Por simplificación, considere las siguientes cuatro suposiciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } N_i T \mathbf{E} + F_i \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} - T \mathbf{A}_i = 0 & \text{c) } S_i T \mathbf{E} + M_i \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = 0 \\ \text{b) } J_i = T B_i & \text{d) } P T \mathbf{E} + Q \begin{bmatrix} \Lambda \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = I_n \end{array}$$

Si las suposiciones a)-b) se satisfacen, la ecuación (4.53) queda como se muestra en la expresión (4.57). De igual manera, si la suposición c) se cumple, el término (4.54) se puede reescribir como en se muestra en la ecuación (4.58).

$$\dot{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) (N_i \varepsilon(t) + H_i v(t) + T G_i \tilde{f}(t)) \quad (4.57)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) (S_i \varepsilon(t) + L_i v(t)) \quad (4.58)$$

Finalmente, partiendo de las expresiones (4.57) y (4.58), la dinámica del error puede reescribirse como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\varphi}(t)} = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & L_i \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_{ai}} \varphi(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} T G_i \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}_{bi}} \tilde{f}(t) \quad (4.59)$$

Observación 4.4. Observe que se debe asegurar que la matriz \mathbb{A}_{ai} sea Hurwitz, cuando $f(t) = 0$. Sustituyendo la suposición d) en la ecuación (4.55) se tiene que el error de estimación de los estados $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ del sistema aumentado es:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} P & 0 \end{bmatrix} \varphi(t) \quad (4.60)$$

4.3.2. Parametrización del observador

Para la parametrización de este observador adaptable se considera el desarrollo mostrado en la subsección 4.2.2, pero excluyendo el apartado para tratar la bilinealidad dado a que en este caso no es necesario. Entonces se toman los términos (4.20), (4.23), (4.29) y se replantea la ecuación (4.59) con el propósito de separar las matrices conocidas y desconocidas obteniendo:

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left((\mathbb{A}_{a1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_{a2}) \varphi(t) + \mathbb{A}_{bi} \tilde{f}(t) \right) \quad (4.61)$$

$$\text{donde } \mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} Y_{1i} & H_i \\ Y_{2i} & L_i \end{bmatrix}, \mathbb{A}_{a1i} = \begin{bmatrix} N_{1i} - Z_1 N_{2i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A}_{a2} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & -I_{q_1} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbb{A}_{bi} = \begin{bmatrix} T_1 G_i - Z_1 T_2 G_i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con la finalidad de estimar simultáneamente los estados y las fallas en actuadores se propone el sistema aumentado (4.62), donde se considera la dinámica del error de estimación de la falla (4.56) y la dinámica del error de estimación del observador (4.61).

$$\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) (\mathbb{A}_i \beta(t) + \mathbb{B}_i \eta(t)) \quad (4.62)$$

$$e(t) = \mathbb{C} \beta(t) \quad (4.63)$$

considere que $\beta(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \tilde{f}(t) \end{bmatrix}$, $\mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{a1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_{a2} & \mathbb{A}_{bi} \\ \Phi_i \mathbb{A}_c & \Psi_i \end{bmatrix}$, $\mathbb{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{B}_{bi} \end{bmatrix}$ y $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Theta \end{bmatrix}$, las matrices \mathbb{Y}_i , \mathbb{A}_{a1i} , \mathbb{A}_{a2} y \mathbb{A}_{bi} se definieron en (4.61), las matrices \mathbb{A}_c y \mathbb{B}_{bi} en (4.56), por último, $\Theta = \sigma I_{n_f}$ es una matriz escalar tal que $\sigma > 0$. El problema se reduce a encontrar los valores de \mathbb{Y}_i , Φ_i , Ψ_i y Z_1 tal que el sistema (4.62)–(4.63) se asintóticamente estable.

4.3.3. Análisis de estabilidad

Tomando la parametrización y el análisis de estabilidad del sistema (4.62)–(4.63) se puede determinar todas las matrices del observador adaptable. El Lema 4.3 proporciona las condiciones necesarias para asegurar la estabilidad de las dinámicas del error de estimación del observador.

Suposición 4.6. Si la tripleta $(C, E, A_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, r$ del sistema descrito por (4.1a)–(4.1b), cumple con la propiedad de I-observabilidad, es posible diseñar el observador adaptable de las ecuaciones (4.52a)–(4.52c).

Lema 4.3. Considerando la suposición 4.6. Existe un observador de la forma (4.52a)–(4.52c), tal que el sistema (4.62)–(4.63) sea asintóticamente estable y se cumpla que $\frac{\|e(t)\|^2}{\|\eta(t)\|^2} < \gamma^2$, solamente

si existen las matrices \mathbb{Y}_i , Φ_i , Ψ_i , Z_1 , un escalar $\gamma > 0$ y una matriz simétrica $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$,

con $X_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{11} \\ X_{11} & X_{12} \end{bmatrix} > 0$, $X_{11} = X_{11}^T$ y $X_2 > 0$ tal que la siguientes LMIs se satisfagan.

$$\mathcal{C}^{T\perp} \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathbb{A}_{a1i}^T X_1) & (*) & (*) \\ X_2 \Phi_i \mathbb{A}_c + \mathbb{A}_{bi}^T X_1 & \mathcal{H}(\Psi_i^T X_2) + \Theta^T \Theta & (*) \\ 0 & \mathbb{B}_{bi}^T X_2 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad (4.64)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(\Psi_i^T X_2) + \Theta^T \Theta & (*) \\ \mathbb{B}_{bi}^T X_2 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.65)$$

donde $\bar{\gamma} = \gamma^2$, $W_1 = X_{11} Z_1$, $X_1 \mathbb{A}_{a1i} = \begin{bmatrix} X_{11} N_{1i} - W_1 N_{2i} & 0 \\ X_{11} N_{1i} - W_1 N_{2i} & 0 \end{bmatrix}$, $X_1 \mathbb{A}_{bi} = \begin{bmatrix} X_{11} T_1 G_i - W_1 T_2 G_i \\ X_{11} T_1 G_i - W_1 T_2 G_i \end{bmatrix}$ y $X_2 \mathbb{B}_{bi} = \begin{bmatrix} X_2 \Psi_i & -X_2 \end{bmatrix}$.

La matriz \mathbb{Y}_i se determina mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mathbb{Y}_i = X_1^{-1} (\mathcal{B}_r^+ \mathcal{K}_i \mathcal{C}_l^+ + \mathcal{Z} - \mathcal{B}_r^+ \mathcal{B}_r \mathcal{Z} \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^+) \quad (4.66)$$

$$\mathcal{K}_i = -\mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T \phi_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \phi_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} + \mathcal{S}_i^{\frac{1}{2}} \mathcal{L} (\mathcal{C}_r \phi_i \mathcal{C}_r^T)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.67)$$

$$\phi_i = (\mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T - \mathcal{D}_i)^{-1} > 0 \quad (4.68)$$

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T [\phi_i - \phi_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \phi_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} \mathcal{C}_r \phi_i] \mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \quad (4.69)$$

donde $\mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathbb{A}_{a1i}^T X_1) & (*) & (*) \\ X_2 \Phi_i \mathbb{A}_c + \mathbb{A}_{bi}^T X_1 & \mathcal{H}(\Psi_i^T X_2) + \Theta^T \Theta & (*) \\ 0 & \mathbb{B}_{bi}^T X_2 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{a2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Las matrices \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{Z} son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas tal que $\mathcal{R} > 0$ y $\|\mathcal{L}\| < 1$. Las matrices \mathcal{C}_l , \mathcal{C}_r , \mathcal{B}_l y \mathcal{B}_r son parte de una descomposición matricial tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \mathcal{C}_r$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_l \mathcal{B}_r$.

Demostración. Considere la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$V(\beta(t)) = \beta(t)^T X \beta(t) > 0 \quad (4.70)$$

considere que $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$, $X_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{11} \\ X_{11} & X_{12} \end{bmatrix} > 0$, $X_{11} = X_{11}^T$ y $X_2 > 0$. La derivada de la expresión (4.70) está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\beta(t)) &= \dot{\beta}(t)^T X \beta(t) + \beta(t)^T X \dot{\beta}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z) (\beta(t)^T \mathcal{H}(\mathbb{A}_i^T X) \beta(t) + \beta(t)^T X \mathbb{B}_i \eta(t) + \eta(t)^T \mathbb{B}_i^T X \beta(t)) \end{aligned} \quad (4.71)$$

En este punto es necesario garantizar que para $\eta(t) = 0$ y $\eta(t) \neq 0$ el sistema (4.62) sea asintóticamente estable por ello se define el siguiente índice de desempeño:

$$\mathbb{J} := \int_0^\infty \|e(t)\|^2 dt - \gamma^2 \int_0^\infty \|\eta(t)\|^2 dt < 0 \quad (4.72)$$

donde $\gamma > 0$ es un escalar positivo, $\eta(t)$ es una función en \mathcal{L}_2 tal que $\forall \eta(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ y $e(t)$ es una función objetivo. A partir de la ecuación (4.72) y tomando en cuenta que $\dot{V}(t) < 0$ se tiene que:

$$\mathbb{J} < \int_0^\infty e(t)^T e(t) dt - \gamma^2 \int_0^\infty \eta(t)^T \eta(t) dt + \int_0^\infty \dot{V}(t) dt < 0 \quad (4.73)$$

Derivando la expresión anterior y sustituyendo los términos (4.63) y (4.71), está queda como:

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(z) \begin{bmatrix} \beta(t)^T & \eta(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathbb{A}_i^T X) + \mathbb{C}^T \mathbb{C} & X \mathbb{B}_i \\ \mathbb{B}_i^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.74)$$

Eliminando el término cuadrático y sustituyendo las matrices correspondientes se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathbb{A}_{a1i}^T X_1 - \mathbb{A}_{a2}^T \mathbb{Y}_i^T X_1) & (*) & (*) \\ X_2 \Phi_i \mathbb{A}_c + \mathbb{A}_{bi}^T X_1 & \mathcal{H}(\Psi_i^T X_2) + \Theta^T \Theta & (*) \\ 0 & \mathbb{B}_{bi}^T X_2 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

considere que $\bar{\gamma} = \gamma^2$. La ecuación (4.75) puede reescribirse como se muestra en la ecuación (4.76), este paso se realiza para disolver la bilinealidad $X_1 \mathbb{Y}_i$.

$$\mathcal{B} \mathcal{X}_i \mathcal{C} + (\mathcal{B} \mathcal{X}_i \mathcal{C})^T + \mathcal{D}_i < 0 \quad (4.76)$$

donde $\mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathbb{A}_{a1i}^T X_1) & (*) & (*) \\ X_2 \Phi_i \mathbb{A}_c + \mathbb{A}_{bi}^T X_1 & \mathcal{H}(\Psi_i^T X_2) + \Theta^T \Theta & (*) \\ 0 & \mathbb{B}_{bi}^T X_2 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{C} = [\mathbb{A}_{a2} \ 0 \ 0]$. y $\mathcal{X}_i = X_1 \mathbb{Y}_i$.

De acuerdo con Skelton et al. (2001), las condiciones de la solución del término (4.76) son:

$$\mathcal{C}^{T\perp} \mathcal{D}_i \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad (4.77)$$

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{D}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad (4.78)$$

donde $\mathcal{C}^{T\perp} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{a2}^T \\ 0 \end{bmatrix}^\perp$ y $\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$. Las condiciones (4.77)–(4.78) son equivalentes a las mostradas en (4.64)–(4.65), por lo tanto, en este punto se termina por demostrar el Lema 4.3. ◀

4.4. Simulación 3. Aplicación al reactor CSTR encaquetado

Objetivo: Comparar las estrategias de estimación para fallas variantes e invariantes en el tiempo utilizando el modelo del reactor CSTR encaquetado que se presentó en el Capítulo 3. Además, demostrar analíticamente que al considerar en el diseño $\dot{f}(t) \neq 0$, se obtiene un mejor desempeño al estimar fallas en actuadores.

4.4.1. Cálculo de ganancias

4.4.1.1. Fallas invariantes en el tiempo

1.- Al seleccionar $q_0 = 4$ se propone una matriz $R = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tal que $\text{rank}(\Sigma) = m$.

2.- Entonces se procede a calcular las matrices $T_1, T_2, \mathbf{K}_1, \mathcal{K}_2, N_{1i}, \mathcal{N}_{2i}, N_3$ y P :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{T}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, & \mathcal{K}_2 &= 0 \\
N_{1\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} -2.71 & 0 & 0 & 0 \\ 0.71 & -2 & 0 & 0 \\ -1.11 & 0 & -1.764 & 0.774 \\ 0 & 0 & 3.868 & -3.868 \end{bmatrix}, \\
N_{1\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} -5.154 & 0 & 0 & 0 \\ 3.154 & -2 & 0 & 0 \\ -4.927 & 0 & -1.764 & 0.774 \\ 0 & 0 & 3.868 & -3.868 \end{bmatrix}, \\
N_{2\{i\}} = 0, N_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.099 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.099 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.099 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.099 \\ 0 & 0 & -990.099 & 990.099 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

3.- Mediante el solucionar YALMIP se resuelven las LMIs definidas en (4.40) y (4.41) para obtener:

$$\begin{aligned}
X_{11} &= \begin{bmatrix} 0.176 & 0.085 & -0.013 & 0 \\ 0.085 & 0.242 & 0.002 & 0 \\ -0.013 & 0.002 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}, & X_{12} &= \begin{bmatrix} 1.004 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.004 \end{bmatrix}, \\
Z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -409.111 & 0 & 0 & 0 & 940.708 & -39.904 & 0 \\ 0 & 0 & 460.323 & 0 & 0 & 0 & -795.348 & 137.416 & 0 \\ 0 & 0 & -548.168 & 0 & 0 & 0 & 1140 & -95.837 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & X_2 &= \begin{bmatrix} 0.05 & -0.001 \\ -0.001 & 0.05 \end{bmatrix} \text{ y} \\
\Phi &= \begin{bmatrix} -0.273 & -20.283 & -0.338 \\ 0.005 & -0.473 & -20.28 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.- Se selecciona la matriz $\mathcal{R} = 0.01 \times I_8$, tal que la matriz $\phi_i > 0$.

5.- Se seleccionan las matrices $\mathcal{L} = 0.01 \times \mathbf{1}_{8 \times 6}$ y \mathcal{Z} para hallar la solución de \mathbb{Y}_i y obtener las matrices \mathbb{Y}_{1i} y \mathbb{Y}_{2i} :

$$\begin{aligned}
\mathbb{Y}_{1\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} 40.157 & 7.519 & 10.014 & -12.461 & 22.628 & 67.4 & 1.237 & 0.307 \\ 4.016 & 16.526 & 31.103 & 41.749 & 30.628 & -1.614 & 5.608 & 6.332 \\ 70.059 & 155.394 & 119.952 & 68.115 & 213.475 & 295.277 & 8.357 & -1.587 \\ 196.404 & 301.216 & 408.783 & 367.907 & 451.316 & 95.66 & 0.999 & 56.136 \end{bmatrix} \\
\mathbb{Y}_{1\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} 40.157 & 7.519 & 10.03 & -12.443 & 22.628 & 67.4 & 1.076 & 0.128 \\ 4.016 & 16.526 & 31.077 & 41.721 & 30.628 & -1.614 & 5.864 & 6.611 \\ 70.059 & 155.394 & 119.999 & 68.166 & 213.475 & 295.277 & 7.887 & -2.097 \\ 196.404 & 301.216 & 408.783 & 367.907 & 451.316 & 95.66 & 0.999 & 56.136 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{Y}_{2\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -4.512 & 6.221 & 2.443 & 7.997 & -1.876 & 0.016 & -2 & -1.83 \\ 3.439 & 2.015 & 0.759 & -0.167 & -6.78 & -0.001 & -2.483 & -2.717 \\ 2.099 & 1.957 & -0.748 & -0.015 & -2.024 & -1.017 & -1.95 & -1.887 \\ 1.017 & -5.085 & -4.015 & -3.079 & -7.118 & 3.051 & -1.541 & -2.766 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Y}_{2\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -4.512 & 6.221 & 2.443 & 7.997 & -1.876 & 0.016 & -2 & -1.829 \\ 3.439 & 2.015 & 0.764 & -0.162 & -6.78 & -0.001 & -2.53 & -2.768 \\ 2.099 & 1.957 & -0.748 & -0.016 & -2.024 & -1.017 & -1.943 & -1.88 \\ 1.017 & -5.085 & -4.015 & -3.079 & -7.118 & 3.051 & -1.541 & -2.766 \end{bmatrix}$$

6.- Finalmente, se obtienen las ganancias del observador adaptable:

$$N_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -2.71 & 0 & 0.023 & 0.154 \\ 0.71 & -2 & 0.247 & 0.214 \\ -1.11 & 0 & -2.124 & -0.058 \\ 0 & 0 & -0.081 & -1.952 \end{bmatrix}, \quad S_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.222 & -0.26 \\ 0 & 0 & -0.253 & -0.267 \\ 0 & 0 & -0.186 & -0.187 \\ 0 & 0 & -0.113 & -0.243 \end{bmatrix},$$

$$N_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -5.154 & 0 & 0.007 & 0.136 \\ 3.154 & -2 & 0.273 & 0.241 \\ -4.927 & 0 & -2.171 & -0.109 \\ 0 & 0 & -0.081 & -1.952 \end{bmatrix}, \quad S_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.222 & -0.26 \\ 0 & 0 & -0.258 & -0.272 \\ 0 & 0 & -0.185 & -0.186 \\ 0 & 0 & -0.113 & -0.243 \end{bmatrix},$$

$$H_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 132.135 & 19.931 & 5.33 & 6.911 \\ 24.238 & 146.164 & 10.577 & 10.439 \\ -2.882 & -2.771 & 100.449 & -2.236 \\ 0.031 & 0.031 & 0.031 & 102.742 \end{bmatrix}, \quad L_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -134.903 & -25.916 & -10.525 & -12.091 \\ -27.024 & -146.516 & -13.185 & -13.06 \\ -8.284 & -9.974 & -111.551 & -9.853 \\ -9.964 & -9.964 & -9.964 & -111.674 \end{bmatrix},$$

$$H_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} 132.734 & 15.939 & 4.811 & 6.058 \\ 25.169 & 148.419 & 11.823 & 11.782 \\ -4.513 & -7.048 & 98.181 & -4.697 \\ 0.031 & 0.031 & 0.031 & 102.742 \end{bmatrix}, \quad L_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -135.108 & -25.46 & -10.568 & -12.086 \\ -27.295 & -146.711 & -13.436 & -13.306 \\ -8.246 & -9.945 & -111.515 & -9.817 \\ -9.964 & -9.964 & -9.964 & -111.674 \end{bmatrix},$$

$$F_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -0.029 & 0 & -0.116 & -0.769 \\ 0.016 & 0 & -1.236 & -1.068 \\ -0.214 & 0 & -7.194 & 8.103 \\ 0.004 & 0 & 39.467 & -29.302 \end{bmatrix}, \quad M_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.111 & 1.302 \\ 0 & 0 & 1.267 & 1.337 \\ 0 & 0 & 0.928 & 0.933 \\ 0 & 0 & 0.564 & 1.217 \end{bmatrix}, \quad J_{\{1,3\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 965.255 \end{bmatrix},$$

$$F_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -0.029 & 0 & -0.036 & -0.679 \\ 0.016 & 0 & -1.364 & -1.207 \\ -0.214 & 0 & -6.958 & 8.358 \\ 0.004 & 0 & 39.467 & -29.302 \end{bmatrix}, \quad M_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.111 & 1.301 \\ 0 & 0 & 1.29 & 1.362 \\ 0 & 0 & 0.925 & 0.93 \\ 0 & 0 & 0.564 & 1.217 \end{bmatrix}, \quad J_{\{2,4\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 534.54 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.505 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.505 \\ -1 & 0 & -5049.5 & 5049.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y } T = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & -0.029 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0.016 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -0.214 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4.1.2. Fallas variantes en el tiempo

1.- Al seleccionar $q_0 = 4$ se propone una matriz $R = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tal que $\text{rank}(\Sigma) = m$.

2.- Entonces se procede a calcular las matrices $T_1, T_2, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, N_{1i}, N_{2i}, N_3$ y P :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, N_{1\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -2.71 & 0 & 0 & 0 \\ 0.71 & -2 & 0 & 0 \\ -1.11 & 0 & -1.764 & 0.774 \\ 0 & 0 & 3.868 & -3.868 \end{bmatrix}, \\
N_{1\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} -5.154 & 0 & 0 & 0 \\ 3.154 & -2 & 0 & 0 \\ -4.927 & 0 & -1.764 & 0.774 \\ 0 & 0 & 3.868 & -3.868 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, N_{2\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.111 & 0 & -0.176 & 0.077 \\ 0 & 0 & 0.387 & -0.387 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.111 & 0 & 0.176 & -0.077 \\ 0 & 0 & -0.387 & 0.387 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.099 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.099 \end{bmatrix}, \\
N_{2\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.493 & 0 & -0.176 & 0.077 \\ 0 & 0 & 0.387 & -0.387 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.493 & 0 & 0.176 & -0.077 \\ 0 & 0 & -0.387 & 0.387 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.099 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.099 \\ 0 & 0 & -990.099 & 990.099 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3.- Sintonizando la constante $\sigma = 0.9839$, se resuelven las LMIs definidas en (4.64) y (4.65) mediante el solucionador YALMIP para obtener:

$$\begin{aligned}
\gamma &= 11.7289 \\
X_{11} &= \begin{bmatrix} 24.372 & 10.847 & 0 & 0 \\ 10.847 & 34.092 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 59.438 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 59.438 \end{bmatrix}, X_{22} = \begin{bmatrix} 140.94 & 12.374 & 0 & 0 \\ 12.374 & 151.772 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 178.313 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 178.313 \end{bmatrix}, \\
X_2 &= \begin{bmatrix} 17.597 & 0 \\ 0 & 17.612 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10.209 & 0 & -0.004 & 0 & -0.91 & 9.338 & 0 \\ 0 & 0 & -16.182 & 0 & 0.003 & 0 & 2.127 & -15.689 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -2.848 & 0 \\ 0 & -2.833 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -2.835 & 0 \\ 0 & -2.833 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } \Phi_i = \begin{bmatrix} 970.24 & -2795.6 & -2.565 \\ -1.03 & -3.38 & -2795.6 \end{bmatrix}$$

4.- Se selecciona la matriz $\mathcal{R} = 0.01 \times I_8$, tal que la matriz $\phi_i > 0$.

5.- Se seleccionan las matrices $\mathcal{L} = 0.1 \times \mathbb{1}_{8 \times 6}$ y \mathcal{Z} para hallar la solución de \mathbb{Y}_i y obtener las matrices \mathbb{Y}_{1i} y \mathbb{Y}_{2i} :

$$\mathbb{Y}_{1\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0.341 & 0.28 & 13.51 & 0.174 & -0.046 & 0.327 & -131.87 & 0.108 \\ 0.111 & -0.012 & -7.793 & 0.233 & 0.181 & 0.168 & 80.125 & -0.225 \\ -0.017 & 0.076 & 2.611 & 0.032 & 0 & 0.025 & -25.316 & -0.121 \\ 0.16 & 0.177 & 0.078 & 2.605 & 0 & 0.042 & -0.08 & -25.353 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Y}_{1\{3,4\}} = \begin{bmatrix} 0.341 & 0.28 & 4.808 & 0.183 & -0.046 & 0.327 & -44.847 & 0.016 \\ 0.111 & -0.012 & -4.289 & 0.227 & 0.181 & 0.168 & 45.08 & -0.159 \\ -0.017 & 0.076 & 2.601 & 0.033 & 0 & 0.025 & -25.214 & -0.127 \\ 0.16 & 0.177 & 0.068 & 2.606 & 0 & 0.042 & 0.021 & -25.359 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Y}_{2\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -0.017 & 0.008 & -1.758 & -0.023 & 0.017 & -0.051 & 17.487 & -0.052 \\ -0.008 & 0.008 & 0.962 & -0.038 & -0.026 & -0.05 & -10.03 & 0.001 \\ 0.034 & -0.008 & -0.814 & 0.017 & 0.05 & 0.008 & 8.415 & 0.002 \\ -0.042 & -0.025 & -0.014 & -0.835 & 0.05 & 0.025 & -0.001 & 8.413 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Y}_{2\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -0.017 & 0.008 & -0.503 & -0.024 & 0.017 & -0.051 & 4.94 & -0.042 \\ -0.008 & 0.008 & 0.691 & -0.037 & -0.026 & -0.05 & -7.315 & -0.011 \\ 0.034 & -0.008 & -0.814 & 0.017 & 0.05 & 0.008 & 8.415 & 0.002 \\ -0.042 & -0.025 & -0.014 & -0.835 & 0.05 & 0.025 & -0.001 & 8.413 \end{bmatrix}$$

6.- Finalmente, se obtienen las ganancias del observador adaptable:

$$N_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -2.614 & 0 & -13.037 & -0.058 \\ 0.656 & -2 & 7.923 & 0.014 \\ -1.11 & 0 & -4.296 & 0.761 \\ 0 & 0 & 3.859 & -6.404 \end{bmatrix}, \quad S_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.749 & -0.005 \\ 0 & 0 & -1.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0.841 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.841 \end{bmatrix},$$

$$N_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -4.725 & 0 & -4.334 & -0.068 \\ 2.911 & -2 & 4.419 & 0.02 \\ -4.927 & 0 & -4.286 & 0.761 \\ 0 & 0 & 3.869 & -6.404 \end{bmatrix}, \quad S_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.494 & -0.004 \\ 0 & 0 & -0.731 & -0.001 \\ 0 & 0 & 0.841 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.841 \end{bmatrix},$$

$$H_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 2.024 & -0.692 & 2.627 & -0.247 \\ -0.237 & 1.976 & -1.315 & -0.154 \\ -0.13 & -0.146 & 0.705 & -0.187 \\ -0.13 & -0.146 & -0.136 & 0.654 \end{bmatrix}, \quad H_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} 2.332 & -1.519 & 6.786 & -0.271 \\ -0.028 & 2.13 & -1.539 & -0.129 \\ -0.109 & -0.169 & 0.858 & -0.196 \\ -0.109 & -0.169 & 0.017 & 0.645 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
L_{\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} -1.091 & 0.004 & -0.418 & -0.023 \\ -0.053 & -1.111 & 0.088 & -0.019 \\ 0 & 0 & -0.841 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.841 \end{bmatrix}, L_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -1.147 & 0.125 & -1.044 & -0.024 \\ -0.11 & -1.105 & -0.048 & -0.027 \\ 0 & 0 & -0.841 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.841 \end{bmatrix}, \\
F_{\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} 0.004 & 0 & 65.596 & -0.388 \\ -0.003 & 0 & -39.717 & 0.318 \\ -0.001 & 0 & 3.184 & 4.006 \\ 0.004 & 0 & 19.768 & -7.045 \end{bmatrix}, M_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8.744 & 0.024 \\ 0 & 0 & 5.013 & -0.002 \\ 0 & 0 & -4.206 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.206 \end{bmatrix}, J_{\{1,3\}} = \begin{bmatrix} -0.871 & 0 \\ 0.493 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 965.255 \end{bmatrix}, \\
F_{\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} 0.004 & 0 & 21.166 & -0.342 \\ -0.003 & 0 & -21.212 & 0.284 \\ -0.001 & 0 & 1.472 & 4.01 \\ 0.004 & 0 & 19.718 & -7.042 \end{bmatrix}, M_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.47 & 0.02 \\ 0 & 0 & 3.656 & 0.003 \\ 0 & 0 & -4.206 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.206 \end{bmatrix}, J_{\{2,4\}} = \begin{bmatrix} -0.871 & 0 \\ 0.493 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 534.54 \end{bmatrix}, \\
Q &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.044 & 0 \\ 0 & 0 & -0.025 & 0 \\ 0 & 0 & 0.505 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.505 \\ -1 & 0 & -5049.5 & 5049.5 \\ 0 & 1 & 0.025 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } T = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -0.435 & 0 & 0.004 \\ 0 & 10 & 0.247 & 0 & -0.003 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.4.2. Descripción del escenario de fallas

Para evaluar el desempeño de las técnicas de estimación de fallas desarrolladas, se define el escenario de fallas descrito por la ecuación (4.79). En el actuador 1 ocurre una falla abrupta que aumenta la temperatura de entrada esta ocurre debido a un problema eléctrico en la fuente de alimentación de la resistencia de calefacción.

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \begin{cases} 4 & \text{si } 30 \text{ min} \leq t \leq 50 \text{ min} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
f_2(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2}t - 4 & \text{si } 8 \text{ min} \leq t \leq 28 \text{ min} \\ 10 & \text{si } 90 \text{ min} \leq t \leq 100 \text{ min} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
f_s(t) &= \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } 45 \text{ min} \leq t \leq 65 \text{ min} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Del mismo modo, en el actuador 2 aparecen dos fallas, una tipo rampa y otra abrupta. La primera es provocada debido a la acumulación paulatina de residuos en la tubería y la segunda ocurre por una fuga en el asiento de la válvula neumática. Las fallas en cada actuador equivalen en promedio a un +13% y +80% de su valor nominal. Por último, en el sensor ocurre otra falla abrupta causada por una lectura incorrecta del sensor que equivale en promedio a un +10% de su valor nominal.

Las simulaciones se realizaron en MATLAB R2019b mediante la paquetería de Simulink, el tiempo de simulación es de 120min, el método de integración es ODE15s y las condiciones iniciales del sistema son $x(0) = [1.21 \ 1.29 \ 302.238 \ 303.901]^T$, $f_s(0) = 0$ y $f(0) = 0$, mientras que las condiciones iniciales del observador adaptable son $v(0) = 0$, $\hat{f}(0) = 0$ y $\zeta(0) = [10.282 \ 10.968 \ 1511.2 \ 1519.5]^T$.

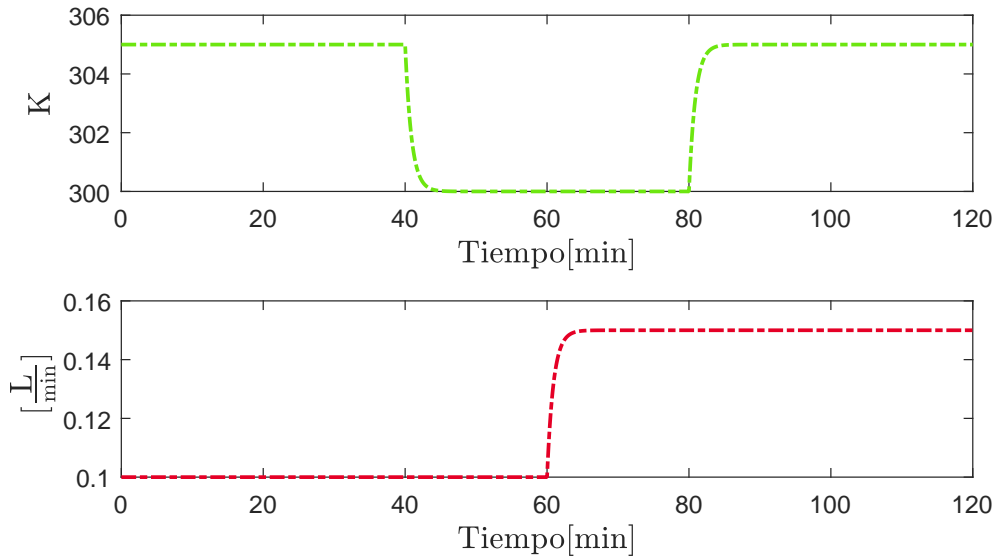


Figura 4.2: Simulación 3: Entradas.

En la Figura 4.2, se muestra el perfil de entrada que se consideró para esta simulación, estos valores se encuentran dentro del rango de operación definido en el Capítulo 3. Por otro lado, la evolución en el tiempo de las funciones de pertenencia se muestra en la Figura 4.3, observe que se tiene una participación equivalente de los cuatro modelos locales, siendo el cuarto modelo el que aporta más información al sistema T-S.

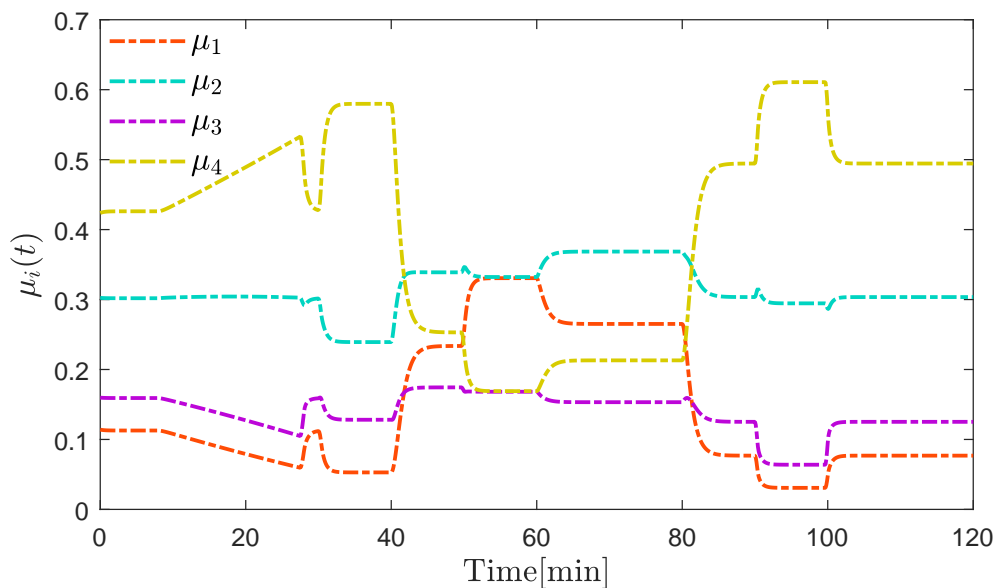


Figura 4.3: Simulación 3: Funciones de pertenencia.

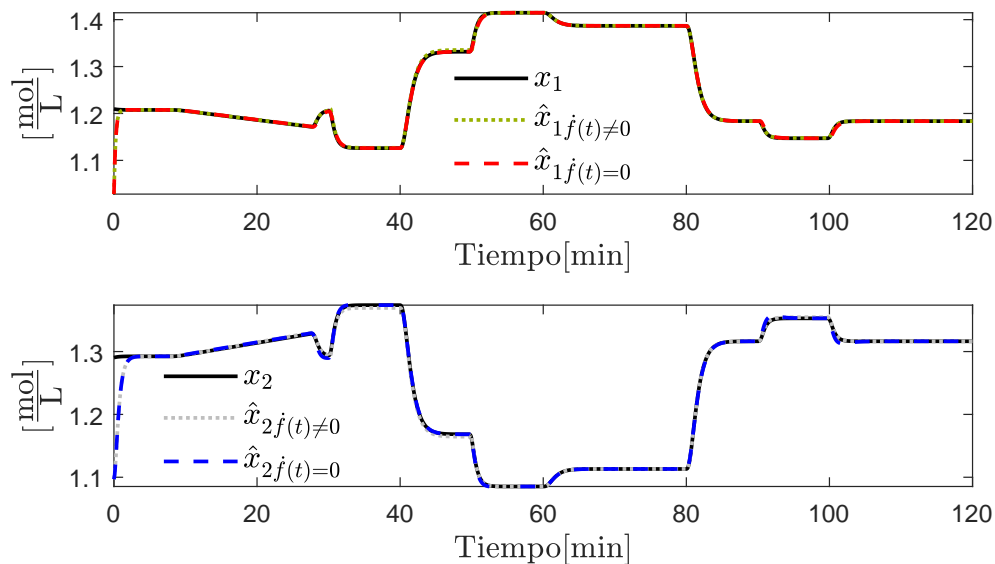


Figura 4.4: Simulación 3: Estimación de $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

Las Figuras 4.4–4.5 muestra el comportamiento del reactor químico y la estimación de sus variables de estado. Se puede notar que en la variable de estado $x_5(t)$, se tiene un pequeño error de estimación para el diseño de fallas invariantes en el tiempo. En las variables de estado restantes el error de estimación es un valor despreciable. También, se puede decir que la falla en el primer actuador tiene un impacto mayor en el comportamiento del sistema a comparación de la falla en el segundo actuador.

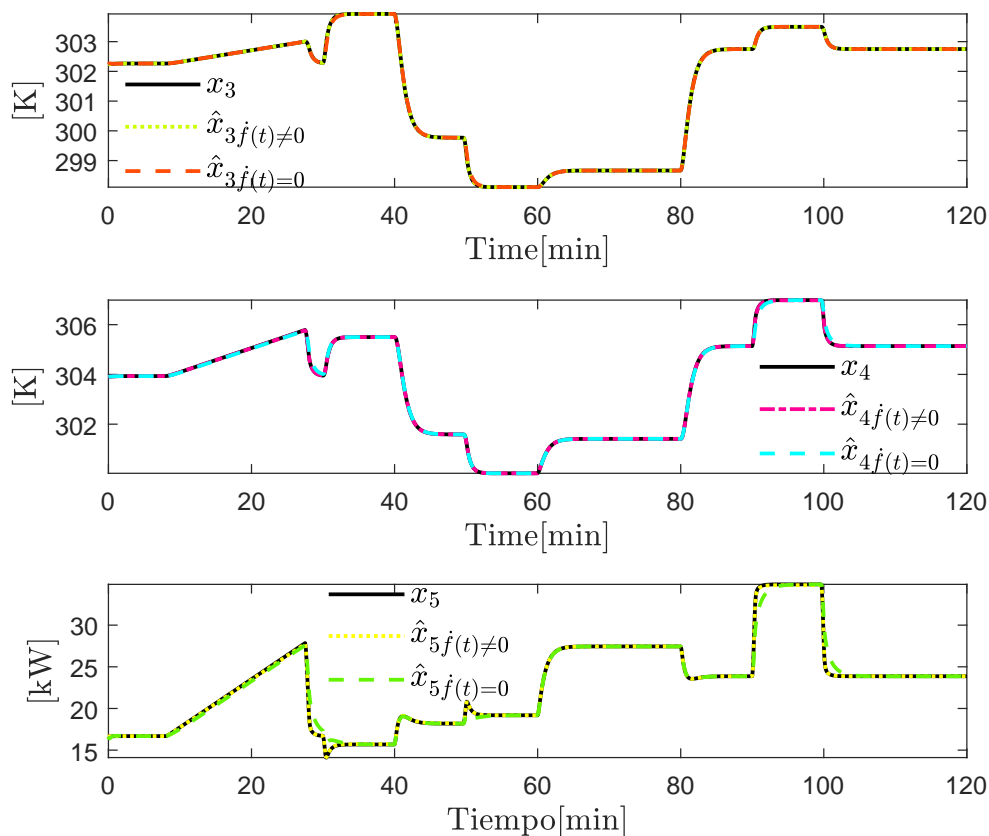


Figura 4.5: Simulación 3: Estimación de $x_3(t)$, $x_4(t)$ y $x_5(t)$.

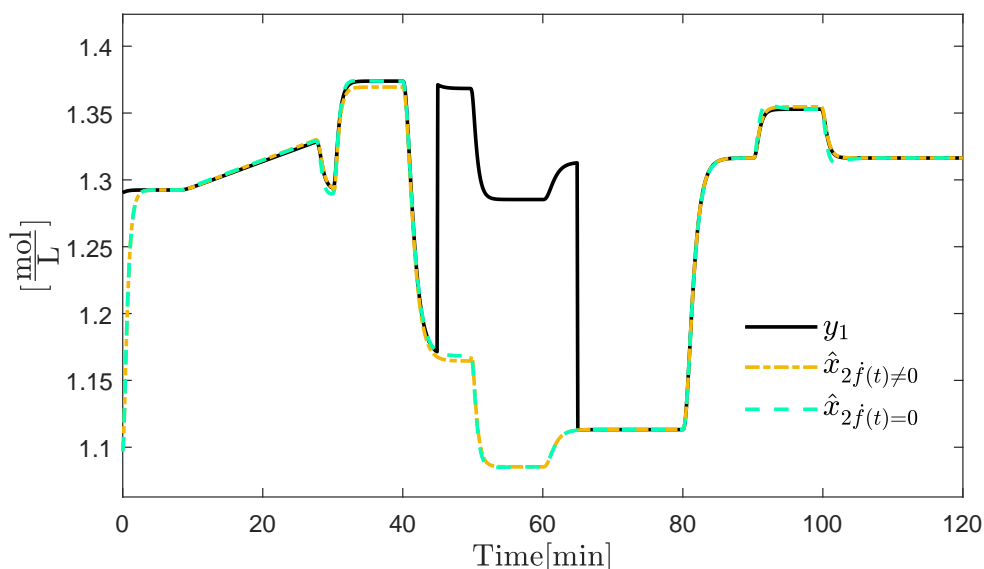


Figura 4.6: Simulación 3: Desacoplamiento de la falla $f_s(t)$.

En la Figura 4.6 se muestra el desacoplamiento de la falla del sensor, que se tiene en la estimación de la variable de estado medible $\hat{x}_1(t)$ esta no se ve afectada por la señal $f_s(t)$. Finalmente, en la Figura 4.7 se muestra la estimación de fallas en los actuadores y el sensor. El tiempo de convergencia de la estimación para las fallas en actuadores es aproximadamente de 3min a 5min cuando en el diseño se considera que $\dot{f}(t) = 0$. Por otro lado, en la estimación de falla en el sensor no se percibe un gran cambio entre las metodologías de estimación presentadas.

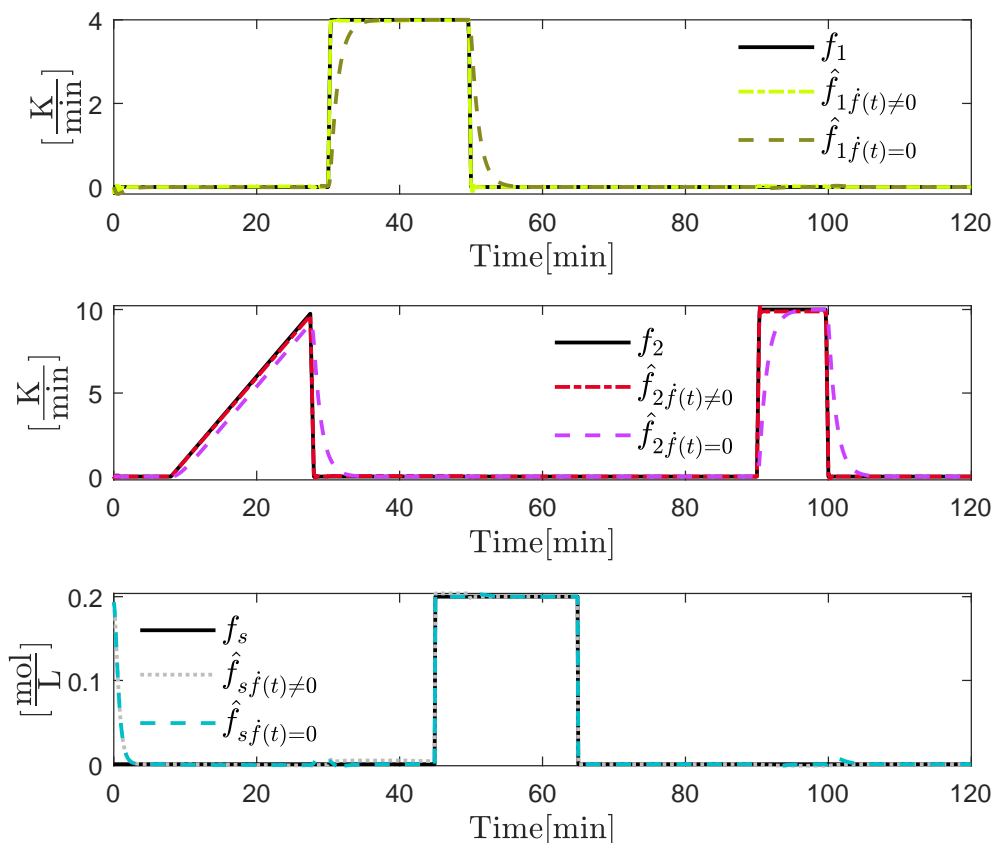


Figura 4.7: Simulación 3: Estimación de $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_s(t)$.

La Tabla 4.1 muestra los índices de desempeño ITAE (por sus siglas en inglés: *Integral of Time-weighted Absolute Error*) para el error de estimación de los estados y el error de estimación de las fallas. Se observa que con la estrategia de estimación de fallas variantes en el tiempo la acumulación del error es menor al estimar las fallas en actuadores. Sin embargo, para las fallas en sensores la acumulación del error es un poco mayor. En términos generales, el tiempo de convergencia de la estimación es menor al considerar en el diseño del observador adaptable fallas variantes en el tiempo.

Tabla 4.1: Simulación 3: Error de estimación de estados y fallas.

Estado/Falla	$\dot{f}(t) = 0$	$\dot{f}(t) \neq 0$
$\hat{x}_1(t) - x_1(t)$	29.8037	30.5068
$\hat{x}_2(t) - x_2(t)$	49.6534	54.2833
$\hat{x}_3(t) - x_3(t)$	182.9154	33.1514
$\hat{x}_4(t) - x_4(t)$	1116.4	118.8
$\hat{x}_5(t) - x_5(t)$	1.35×10^7	1.5×10^6
$\hat{f}_1(t) - f_1(t)$	4189.4	400.3
$\hat{f}_2(t) - f_1(t)$	28,593	1901.1
$\hat{f}_s(t) - f_s(t)$	49.6534	54.2833

La tabla 4.2 se muestran los tiempos de convergencia de la estimación de fallas en actuadores. El valor del tiempo de convergencia es al menos 10 veces menor cuando se considera en el diseño fallas variantes en el tiempo.

Tabla 4.2: Tiempo de convergencia de la estimación

Fallas	$\dot{f}(t) = 0$	$\dot{f}(t) \neq 0$
$f_1(t)$	3.671 min	0.315 min
$f_2(t)$	3.901 min	0.325 min

4.5. Conclusiones del capítulo

Lo más relevante de los resultados mostrados es que, el tiempo de convergencia del observador adaptable se reduce bastante al considerar en el diseño fallas variantes en el tiempo. Esta característica beneficia al esquema de CTF porque la acomodación de la falla se realiza de mejor manera. En las dos estrategias diseñadas se tiene un buen desempeño al estimar la falla en el sensor. Por otra parte, al estimar las fallas abruptas en los actuadores, en el observador para fallas variantes en el tiempo se presenta un pequeño transitorio en el instante en que aparece la falla. Esto puede ocurrir debido a que el observador está diseñado para estimar fallas cuya derivada es diferente de cero.

Diseño del Control Tolerante a Fallas

5.1. Formulación del problema

La Figura 5.1 muestra el esquema de CTF que se propone para el sistema descrito por las ecuaciones (4.1a)–(4.1b). Este esquema consta de un modelo de referencia que proporciona la trayectoria deseada que deben seguir las variables de estado del sistema real. El observador adaptable funciona como una unidad de diagnóstico que brinda la estimación de la magnitud de la falla para contrarrestar el efecto de la falla real, es por esta razón que, al reducir el tiempo de convergencia de la estimación, la acomodación de la falla se realiza de mejor manera.

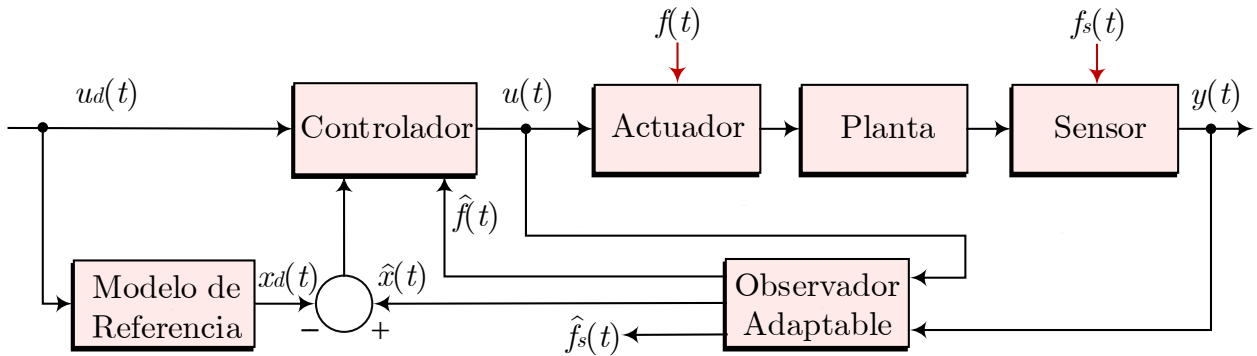


Figura 5.1: Esquema del CTF.

La ley de CTF se muestra en la ecuación (5.1), su objetivo principal es que, las variables de estado del proceso real propenso a fallas $x(t)$ converjan a las variables de estado libres de fallas $x_d(t)$ mediante la información brindada por el observador adaptable.

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \mu_i(z) K_i (\hat{x}(t) - x_d(t)) - \hat{f}(t) + u_d(t) \quad (5.1)$$

donde $x_d(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del modelo de referencia, $u_d(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control nominal, $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estimación de los estados y $\hat{f}(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ es el vector de estimación de fallas en actuadores. Esta técnica de CTF activo entra dentro de la categoría de acomodación de fallas porque el objetivo de control aún es alcanzable.

Observación 5.1. En esta sección se consideran fallas aditivas, es decir la matriz de entradas B_i es igual a la matriz de distribución de fallas en actuadores G_i .

5.1.1. Modelo de referencia

Considerando el sistema descrito por la ecuación (4.1a) libre de falla, se tiene que $f(t) = 0$. Entonces bajo esta condición se propone el siguiente modelo de referencia.

$$E\dot{x}_d(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(A_i x_d(t) + B_i u_d(t) \right) + \Delta \quad (5.2)$$

Se define el error de seguimiento de trayectoria $\tilde{x}(t) = x(t) - x_d(t)$. Así mismo, la derivada de $E\tilde{x}(t)$ está dada por la ecuación (5.3).

$$\begin{aligned} E\dot{\tilde{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + G_i f(t) + \mathcal{A} - A_i x_d(t) - B_i u_d(t) - \mathcal{A} \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z) \mu_j(z) \left(A_i \tilde{x}(t) - B_i K_j (\hat{x}(t) - x_d(t)) + B_i u_d(t) - G_i \tilde{f}(t) - B_i u_d(t) \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Al sustituir la ley de CTF en la ecuación (5.3) aparece una doble sumatoria convexa debido a un problema de copositividad. Considerando el desarrollo mostrado en la Sección 4.3, se retoma la ecuación (4.60) para obtener el término $\hat{x}(t)$.

$$\hat{x}(t) = \mathbb{P}\varphi(t) + x(t) \quad (5.4)$$

donde $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$. Continuando con el procedimiento, al sustituir la expresión (5.4) en la ecuación (5.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} E\dot{\tilde{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z) \mu_j(z) \left(A_i \tilde{x}(t) - B_i K_j (\mathbb{P}\varphi(t) + x(t) - x_d(t)) - G_i \tilde{f}(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z) \mu_j(z) \left((A_i - B_i K_j) \tilde{x}(t) - B_i K_j \mathbb{P}\varphi(t) - G_i \tilde{f}(t) \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Uniendo las dinámicas del error de estimación (4.56)–(4.61) del observador adaptable desarrollado en la Sección 4.3 y la dinámica del error de seguimiento de trayectoria (5.5) se obtiene el siguiente sistema extendido:

$$\mathbb{E}\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z) \mu_j(z) \left(\mathbb{A}_{ij} \beta(t) + \mathbb{B}_i \eta(t) \right) \quad (5.6)$$

$$e(t) = \mathbb{C} \beta(t) \quad (5.7)$$

$$\text{donde } \beta(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \varphi(t) \\ \tilde{f}(t) \end{bmatrix}, \mathbb{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \mathbb{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & -B_i K_j \mathbb{P} & -G_i \\ 0 & \mathbb{A}_{a1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_{a2} & \mathbb{A}_{bi} \\ 0 & \Phi_i \mathbb{A}_c & \Psi_i \end{bmatrix}, \mathbb{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbb{B}_{bi} \end{bmatrix},$$

$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Theta \end{bmatrix}$, por último, $\Theta = \sigma I_{n_f}$ es una matriz escalar tal que $\sigma > 0$. El problema se reduce a hallar los valores de $K_i, \mathbb{Y}_i, \Phi_i, \Psi_i$ y Z_1 tal que el sistema (5.6)–(5.7) sea estable.

5.2. Análisis de estabilidad

En esta sección, se presenta el análisis de estabilidad de la estrategia de CTF. A partir de este se obtienen las matrices desconocidas $K_i, \mathbb{Y}_i, \Phi_i, \Psi_i$ y Z_1 .

Suposición 5.1. Si la tripleta $(C, E, A_i) \forall i = 1, 2, \dots, r$, cumple con la propiedad de I–observabilidad y el par $(B_i, A_i) \forall i = 1, 2, \dots, r$, satisface la propiedad de I–controlabilidad, es posible diseñar la ley de CTF mostrada en la ecuación (5.1).

Teorema 5.1. (Xu & Lam, 2006) Todas las soluciones de $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que satisfacen la restricción de igualdad $Z^T E^T = EZ \geq 0$ se pueden parametrizar como:

$$\mathcal{Z} = ZE^T + E^\perp Q \quad (5.8)$$

considere que $\mathcal{Z} > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{(n-\varrho) \times n}$ es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas y $E^\perp \in \mathbb{R}^{n \times (n-\varrho)}$ es el espacio nulo de E el cual satisface que $EE^\perp = 0$.

Lema 5.1. Considerando la suposición 5.1. Es posible obtener las ganancias $K_i, \mathbb{Y}_i, \Phi_i, \Psi_i$ y Z_1 , tal que el sistema (5.6)–(5.7) sea estable y se cumpla que $\frac{\|e(t)\|^2}{\|\eta(t)\|^2} < \gamma^2$ mediante las siguientes LMIs:

$$\mathcal{C}^{T\perp} \begin{bmatrix} \mathcal{H}(A_i \mathcal{P} - B_i \mathbb{M}_j) & (*) & (*) & (*) \\ -\mathbb{P}^T K_i^T B_j^T & \mathcal{H}(\mathbb{A}_{ai}^T X_2) & (*) & (*) \\ -G_i & X_3 \Phi_i \mathbb{A}_c + \mathbb{A}_{bi}^T X_2 & \mathcal{H}(\Psi_i^T X_3) + \Theta^T \Theta & (*) \\ 0 & 0 & \mathbb{B}_{bi}^T X_3 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad (5.9)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(A_i \mathcal{P} - B_i \mathbb{M}_j) & (*) & (*) \\ -G_i & \mathcal{H}(\Psi_i^T X_3) + \Theta^T \Theta & (*) \\ 0 & \mathbb{B}_{bi}^T X_3 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.10)$$

donde $\bar{\gamma} = \gamma^2$, $W_1 = X_{21} Z_1$, $X_2 \mathbb{A}_{ai} = \begin{bmatrix} X_{21} N_{1i} - W_1 N_{2i} & 0 \\ X_{21} N_{1i} - W_1 N_{2i} & 0 \end{bmatrix}$, $X_2 \mathbb{A}_{bi} = \begin{bmatrix} X_{21} T_1 G_i - W_1 T_2 G_i \\ X_{21} T_1 G - W_1 T_2 G \end{bmatrix}$ y

$$X_3 \mathbb{B}_{bi} = \begin{bmatrix} X_3 \Psi_i & -X_3 \end{bmatrix}.$$

En este caso la matriz \mathbb{Y}_i se determina mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mathbb{Y}_i = X_2^{-1} (\mathcal{B}_r^+ \mathcal{K}_i \mathcal{C}_l^+ + \mathcal{Z} - \mathcal{B}_r^+ \mathcal{B}_r \mathcal{Z} \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^+) \quad (5.11)$$

$$\mathcal{K}_i = -\mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T \phi_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \phi_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} + \mathcal{S}_i^{\frac{1}{2}} \mathcal{L} (\mathcal{C}_r \phi_i \mathcal{C}_r^T)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

$$\phi_i = (\mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T - \mathcal{D}_i)^{-1} > 0 \quad (5.13)$$

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T \left[\phi_i - \phi_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \phi_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} \mathcal{C}_r \phi_i \right] \mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \quad (5.14)$$

donde \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{Z} son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas tal que $\mathcal{R} > 0$ y $\|\mathcal{L}\| < 1$, \mathcal{C}_l , \mathcal{C}_r , \mathcal{B}_l y \mathcal{B}_r son parte de una descomposición matricial tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \mathcal{C}_r$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_l \mathcal{B}_r$.

Demostración. Suponga la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V(\beta(t)) = \beta(t)^T \mathbb{E}^T X \beta(t) \quad (5.15)$$

donde $X = \text{diag}(X_1, X_2, X_3)$, $E^T X_1 = X_1^T E \geq 0$, $X_2 = \begin{bmatrix} X_{21} & X_{21} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} > 0$, con $X_{21} = X_{21}^T$ y $X_3 > 0$. La derivada de la expresión (5.15) a lo largo de la trayectoria de (5.6) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\beta(t)) &= \beta(t)^T \mathbb{E}^T X \dot{\beta}(t) + \dot{\beta}(t)^T \mathbb{E}^T X \beta(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z) \mu_j(z) (\beta(t)^T \mathcal{H}(X^T \mathbb{A}_{ij}) \beta(t) + \beta(t)^T X^T \mathbb{B}_i \eta(t) + \eta(t)^T \mathbb{B}_i^T X \beta(t)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde $\mathbb{E}^T X = X^T \mathbb{E} \geq 0$, lo cual implica que $E^T X_1 = X_1^T E \geq 0$. Con esta restricción de igualdad no se asegura que el sistema (5.6) sea asintóticamente estable, pero aún se puede asegurar que sea críticamente estable. En este punto es necesario garantizar que para $\eta(t) = 0$ y $\eta(t) \neq 0$ el sistema de la ecuación (5.6) sea estable por ello se define el siguiente índice de desempeño:

$$\mathbb{J} := \int_0^\infty \|e(t)\|^2 dt - \gamma^2 \int_0^\infty \|\eta(t)\|^2 dt < 0 \quad (5.17)$$

considere que $\gamma > 0$ es el nivel de atenuación, $\eta(t)$ es una función en \mathcal{L}_2 tal que $\forall \eta(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ y $e(t)$ es una función objetivo. Partiendo de la ecuación (5.17) y considerando que $\dot{V}(t) < 0$ se tiene que:

$$\mathbb{J} < \int_0^\infty e(t)^T e(t) dt - \gamma^2 \int_0^\infty \eta(t)^T \eta(t) dt + \int_0^\infty \dot{V}(t) dt < 0 \quad (5.18)$$

Derivando la expresión anterior y sustituyendo los términos (5.6) y (5.7), está queda como:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z) \mu_j(z) \begin{bmatrix} \beta(t)^T & \eta(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H}(X^T \mathbb{A}_{ij}) + \mathbb{C}^T \mathbb{C} & (*) \\ \mathbb{B}_i^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.19)$$

Eliminando el término cuadrático y sustituyendo las matrices correspondientes se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(X_1^T (A_i - B_i K_j)) & (*) & (*) & (*) \\ -\mathbb{P}^T K_i^T B_j^T X_1 & \mathcal{H}(\mathbb{A}_{a1i}^T X_2 - \mathbb{A}_{a2}^T Y_i^T X_2) & (*) & (*) \\ -G_i X_1 & X_3 \Phi_i \mathbb{A}_c + \mathbb{A}_{bi}^T X_2 & \mathcal{H}(\Psi_i^T X_3) + \Theta^T \Theta & (*) \\ 0 & 0 & \mathbb{B}_{bi}^T X_3 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.20)$$

Al sustituir el término $X_1^T (A_i - B_i K_j)$ aparece la bilinealidad $X_1^T B_i K_j$. Para resolver este problema se pre-multiplica por $\begin{bmatrix} X_1^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ y post-multiplica por $\begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ a la desigualdad (5.20) quedando de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(A_i \mathcal{X} - B_i \mathbb{M}_j) & (*) & (*) & (*) \\ -\mathbb{P}^T K_i^T B_j^T & \mathcal{H}(\mathbb{A}_{a1i}^T X_2 - \mathbb{A}_{a2}^T Y_i^T X_2) & (*) & (*) \\ -G_i & X_3 \Phi_i \mathbb{A}_c + \mathbb{A}_{bi}^T X_2 & \mathcal{H}(\Psi_i^T X_3) + \Theta^T \Theta & (*) \\ 0 & 0 & \mathbb{B}_{bi}^T X_3 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.21)$$

donde $\bar{\gamma} = \gamma^2$, $\mathcal{X} = X_1^{-1}$ y $\mathbb{M}_i = K_i \mathcal{X}$. Debido al cambio de variable la restricción de igualdad queda como:

$$\mathcal{X}^T E^T = E \mathcal{X} \geq 0 \quad (5.22)$$

Tomando el Teorema 5.1 se tiene que todas las soluciones de $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para resolver la restricción de igualdad se pueden parametrizar como:

$$\mathcal{P} = \mathcal{X} E^T + E^\perp \mathcal{Q} \quad (5.23)$$

donde $\mathcal{X} > 0$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{(n-\varrho) \times n}$ es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas y $E^\perp \in \mathbb{R}^{n \times (n-\varrho)}$ es el espacio nulo de E que satisface $EE^\perp = 0$. Entonces, sustituyendo las matrices correspondientes, la ecuación (5.21) se resuelve como:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(A_i \mathcal{P} - B_i \mathbb{M}_j) & (*) & (*) & (*) \\ -\mathbb{P}^T K_i^T B_j^T & \mathcal{H}(\mathbb{A}_{a1i}^T X_2 - \mathbb{A}_{a2}^T \mathbb{Y}_i^T X_2) & (*) & (*) \\ -G_i & X_3 \Phi_i \mathbb{A}_c + \mathbb{A}_{bi}^T X_2 & \mathcal{H}(\Psi_i^T X_3) + \Theta^T \Theta & (*) \\ 0 & 0 & \mathbb{B}_{bi}^T X_3 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.24)$$

Es importante verificar que se cumpla la restricción de igualdad mostrada en la ecuación (5.22) y que la matriz \mathcal{P} sea de rango completo, esta última condición no se puede satisfacer únicamente con la solución de las LMIs. Por último, la ganancia K_i se obtiene mediante la expresión:

$$K_i = \mathbb{M}_i \mathcal{P}^{-1} \quad (5.25)$$

Finalmente, la desigualdad (5.24) puede reescribirse como se muestra en la ecuación (5.26), este paso se realiza para disolver la bilinealidad $X_2 \mathbb{Y}_i$.

$$\mathcal{B} \mathcal{X}_i \mathcal{C} + (\mathcal{B} \mathcal{X}_i \mathcal{C})^T + \mathcal{D}_{ij} < 0 \quad (5.26)$$

$$\text{considere } \mathcal{D}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(A_i \mathcal{P} - B_i \mathbb{M}_j) & (*) & (*) & (*) \\ -\mathbb{P}^T K_i^T B_j^T & \mathcal{H}(\mathbb{A}_{a1i}^T X_2) & (*) & (*) \\ -G_i & X_3 \Phi_i \mathbb{A}_c + \mathbb{A}_{bi}^T X_2 & \mathcal{H}(\Psi_i^T X_3) + \Theta^T \Theta & (*) \\ 0 & 0 & \mathbb{B}_{bi}^T X_3 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{A}_{a2} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ y } \mathcal{X}_i = X_2 \mathbb{Y}_i.$$

Observación 5.2. Debido a que, en la ecuación (5.26) la matriz K_i no se encuentra en términos de la matriz \mathbb{M}_i , se propone un paso previo para obtener las matrices \mathcal{P} y \mathbb{M}_i , mediante la siguiente desigualdad:

$$A_i \mathcal{P} - B_i \mathbb{M}_j + \mathcal{P}^T A_i^T - \mathbb{M}_i^T B_j^T < 0 \quad (5.27)$$

donde la ecuación (5.27) corresponde al primer elemento de la diagonal principal de la matriz \mathcal{D}_{ij} . Finalmente, la ganancia K_i se obtiene mediante la expresión (5.25).

Observación 5.3. Observe que en la desigualdad (5.27) se tiene un doble índice. Este surge porque a lo largo del diseño se tiene una doble sumatoria convexa que no es estrictamente positiva. Para tratar con esta problemática se han propuesto técnicas de relajación de suma que se utilizan para tener un conjunto de mayor solución. En las ecuaciones (5.28)–(5.29) se muestra el enfoque Tanaka para relajación de suma.

$$\Upsilon_{ii} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r \quad (5.28)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r, i \neq j \quad (5.29)$$

En este caso $\Upsilon_{ij} = \mathcal{H}(A_i \mathcal{P} - B_i \mathbb{M}_j)$. Esta técnica permite obtener una solución factible cuando se tiene un gran número de modelos locales que componen el sistema T–S.

Finalmente, de acuerdo con el lema de eliminación detallado en Skelton et al. (2001), las condiciones de la solución de la desigualdad (5.26) están dadas por:

$$\mathcal{C}^{T\perp} \mathcal{D}_{ij} \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad (5.30)$$

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{D}_{ij} \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad (5.31)$$

donde $\mathcal{C}^{T\perp} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \left[\begin{array}{c} \mathbb{A}_{a2}^T \\ 0 \end{array} \right]^\perp \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$. Observe que las desigualdades (5.30)–(5.31) son equivalentes a (5.9)–(5.10), por lo tanto, en este punto se termina por demostrar el Lema 5.1. ◀

5.3. Simulación 4. Aplicación al reactor CSTR encaquetado

Objetivo: Mostrar el desempeño de la estrategia de CTF previamente planteada aplicándolo al modelo del reactor químico tipo CSTR mostrado en el Capítulo 3 de este documento.

5.3.1. Cálculo de ganancias

1.- Al seleccionar $q_0 = 4$ se propone una matriz $R = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tal que $\text{rank}(\Sigma) = m$.

2.- Entonces se procede a calcular las matrices $T_1, T_2, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, N_{1i}, N_{2i}, N_3$ y P :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}, N_{1\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -2.71 & 0 & 0 & 0 \\ 0.71 & -2 & 0 & 0 \\ -1.11 & 0 & -1.764 & 0.774 \\ 0 & 0 & 3.868 & -3.868 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, N_{1\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -5.154 & 0 & 0 & 0 \\ 3.154 & -2 & 0 & 0 \\ -4.927 & 0 & -1.764 & 0.774 \\ 0 & 0 & 3.868 & -3.868 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, N_{2\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.111 & 0 & -0.176 & 0.077 \\ 0 & 0 & 0.387 & -0.387 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.111 & 0 & 0.176 & -0.077 \\ 0 & 0 & -0.387 & 0.387 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.099 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.099 \end{bmatrix},$$

$$N_{2\{3,4\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.493 & 0 & -0.176 & 0.077 \\ 0 & 0 & 0.387 & -0.387 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.493 & 0 & 0.176 & -0.077 \\ 0 & 0 & -0.387 & 0.387 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.099 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.099 \\ 0 & 0 & -990.099 & 990.099 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.- Sintonizando la constante $\sigma = 0.9839$, se resuelven las LMIs definidas en (5.9) y (5.10) mediante el solucionador YALMIP para obtener:

$$\gamma = 56.2671$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 0.058 & 0.018 & 0 & 0 & 0 \\ 0.018 & 0.133 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.335 & 0.386 & 0 \\ 0 & 0 & 0.386 & 0.514 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.981 \end{bmatrix}, X_{21} = \begin{bmatrix} 57,301 & 22,811 & 0 & 0 \\ 22,811 & 80,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 134,460 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 134,460 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} -2 & -0.2 & -9490 & 1280.2 & 0.2 \end{bmatrix}, X_{22} = \begin{bmatrix} 332,260 & 20,235 & 0 & 0 \\ 20,235 & 352,350 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 403,380 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 403,380 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 49,808 & 0 \\ 0 & 49,808 \end{bmatrix}, \Phi_{\{1,3\}} = \begin{bmatrix} -0.526 & -877.15 & -0.05 \\ 0.002 & 1.262 & -9.088 \end{bmatrix}, \Phi_{\{2,4\}} = \begin{bmatrix} 0.114 & -918.278 & -0.044 \\ 0 & -1.286 & -17.178 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.185 & 0 & 0 & 0 & -0.185 & 0 \\ 0 & 0 & -0.096 & 0 & 0 & 0 & 0.096 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Psi_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -2.25 & 0 \\ 0 & -2.246 \end{bmatrix},$$

$$\text{y } \Psi_{\{3,4\}} = \begin{bmatrix} -2.247 & 0 \\ 0 & -2.244 \end{bmatrix}$$

4.- Se selecciona la matriz $\mathcal{R} = 0.000001 \times I_8$, tal que la matriz $\phi_i > 0$.

5.- Se seleccionan las matrices $\mathcal{L} = 0.01 \times \mathbf{1}_{8 \times 6}$ y \mathcal{Z} para hallar la solución de \mathbb{Y}_i y obtener las matrices \mathbb{Y}_{1i} y \mathbb{Y}_{2i} :

$$\mathbb{Y}_{1\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.477 & -0.069 & 0 & 0 & -34.771 & 0.691 \\ 0 & 0 & -2.149 & 0.008 & 0 & 0 & 21.492 & -0.081 \\ 0 & 0 & 11.606 & -0.032 & 0 & 0 & -116.057 & 0.324 \\ 0 & 0 & 0.45 & 11.123 & 0 & 0 & -4.5 & -111.233 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Y}_{1\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5.073 & -0.051 & 0 & 0 & 50.727 & 0.513 \\ 0 & 0 & -0.531 & 0.005 & 0 & 0 & 5.306 & -0.049 \\ 0 & 0 & 11.467 & -0.037 & 0 & 0 & -114.668 & 0.366 \\ 0 & 0 & 0.311 & 11.119 & 0 & 0 & -3.111 & -111.19 \end{bmatrix} \\
 \mathbb{Y}_{2\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.297 & -0.001 & 0 & 0 & 2.975 & 0.012 \\ 0 & 0 & 0.452 & -0.01 & 0 & 0 & -4.517 & 0.097 \\ 0 & 0 & -3.719 & 0 & 0 & 0 & 37.186 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.719 & 0 & 0 & 0 & 37.186 \end{bmatrix} \\
 \mathbb{Y}_{2\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.006 & -0.006 & 0 & 0 & -10.061 & 0.056 \\ 0 & 0 & 0.51 & -0.011 & 0 & 0 & -5.098 & 0.114 \\ 0 & 0 & -3.719 & 0 & 0 & 0 & 37.186 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.719 & 0 & 0 & 0 & 37.186 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

6.- Finalmente, se obtienen las ganancias del esquema de CTF:

$$\begin{aligned}
 \begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} -1.116 & 0.002 & 0.918 & -6.254 & 0 \\ 0 & 0 & 0.115 & -0.106 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} -1.119 & 0.001 & -1.445 & 0.977 & 0 \\ 0 & 0 & 0.098 & -0.095 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} -4.941 & 0.007 & 0.001 & -5.337 & 0 \\ 0 & 0 & 0.102 & -0.094 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_4 &= \begin{bmatrix} -4.945 & 0.006 & -1.883 & 1.415 & 0 \\ 0 & 0 & 0.103 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \quad , \quad
 \begin{aligned}
 N_{\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} -2.669 & 0 & -3.412 & 0.04 \\ 0.689 & -2 & 2.115 & 0.007 \\ -1.11 & 0 & -13.369 & 0.806 \\ 0 & 0 & 3.418 & -14.991 \end{bmatrix} \\
 N_{\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} -4.971 & 0 & 5.138 & 0.023 \\ 3.059 & -2 & 0.497 & 0.01 \\ -4.928 & 0 & -13.23 & 0.81 \\ 0 & 0 & 3.556 & -14.987 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{aligned}
 S_{\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.297 & 0.001 \\ 0 & 0 & -0.452 & 0.01 \\ 0 & 0 & 3.719 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.719 \end{bmatrix} \\
 S_{\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.006 & 0.006 \\ 0 & 0 & -0.51 & 0.011 \\ 0 & 0 & 3.719 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.719 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \quad , \quad
 \begin{aligned}
 H_{\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} 5.443 & -1.124 & 4.767 & 0 \\ -0.278 & 5.543 & -2.478 & -0.019 \\ -0.723 & -0.736 & 2.732 & -0.032 \\ -0.723 & -0.736 & -0.987 & 3.686 \end{bmatrix} \\
 H_{\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} 6.445 & -3.159 & 12.404 & -0.025 \\ -0.14 & 6.053 & -3.31 & -0.008 \\ -0.66 & -0.779 & 2.987 & -0.037 \\ -0.66 & -0.779 & -0.732 & 3.682 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} -4.202 & -0.223 & -1.047 & -0.011 \\ -0.324 & -4.292 & -0.062 & -0.007 \\ 0 & 0 & -3.719 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.719 \end{bmatrix}
 \quad , \quad
 L_{\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} -4.355 & 0.077 & -2.196 & -0.009 \\ -0.387 & -4.309 & -0.205 & -0.01 \\ 0 & 0 & -3.719 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.719 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{aligned}
 F_{\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 17.224 & -0.492 \\ 0 & 0 & -10.599 & 0.117 \\ -0.001 & 0 & 48.829 & 3.783 \\ 0.004 & 0 & 21.975 & 35.892 \end{bmatrix} \\
 F_{\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -25.951 & -0.402 \\ 0 & 0 & -2.067 & 0.1 \\ -0.001 & 0 & 47.427 & 3.762 \\ 0.004 & 0 & 21.28 & 35.87 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \quad , \quad
 \begin{aligned}
 M_{\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.487 & -0.006 \\ 0 & 0 & 2.258 & -0.048 \\ 0 & 0 & -18.593 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18.593 \end{bmatrix} \\
 M_{\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5.031 & -0.028 \\ 0 & 0 & 2.549 & -0.057 \\ 0 & 0 & -18.593 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18.593 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\{1,3\}} &= \begin{bmatrix} -0.37 & 0 \\ 0.193 & 0 \\ 10 & -0.004 \\ 0 & 965.25 \end{bmatrix} \\
J_{\{2,4\}} &= \begin{bmatrix} -0.37 & 0 \\ 0.193 & 0 \\ 10 & -0.002 \\ 0 & 534.537 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.019 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.505 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.505 \\ -1 & 0 & -5049.5 & 5049.5 \\ 0 & 1 & -0.019 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y } T = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -0.185 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0.096 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5.3.2. Descripción del escenario de fallas

Para evaluar el desempeño de la técnica de CTF se define el escenario de fallas descrito por la ecuación (5.32). En el actuador 1 ocurre una falla abrupta debido a un problema eléctrico en la fuente de alimentación de la resistencia de calefacción que provoca un aumento en la temperatura del reactivo de alimentación $T_A(t)$.

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \begin{cases} 2 & \text{si } 30 \text{ min} \leq t \leq 50 \text{ min} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
f_2(t) &= \begin{cases} \frac{1}{240}t - \frac{1}{30} & \text{si } 8 \leq t \leq 28 \\ \frac{2}{25} & \text{si } 90 \text{ min} \leq t \leq 100 \text{ min} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
f_s(t) &= \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } 45 \text{ min} \leq t \leq 65 \text{ min} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

De igual manera, en el actuador 2 aparecen dos fallas, una tipo rampa y otra abrupta. La primera es provocada por la acumulación paulatina de residuos en la tubería de la válvula y la segunda ocurre por una apertura incorrecta de la válvula bypass causando un flujo de calefacción $w_h(t)$ erróneo que equivale a un +50 % de su valor nominal. Por otra parte, en el sensor ocurre otra falla abrupta debido a un problema eléctrico en la instrumentación del sensor de molaridad $C_B(t)$. La falla equivale en promedio aún +10 % de su valor nominal.

Las simulaciones se realizaron en MATLAB R2019b mediante la paquetería de Simulink, el tiempo de simulación es de 120min, el método de integración es ODE45 y las condiciones iniciales del sistema son $x(0) = [1.208 \ 1.292 \ 302.26 \ 303.93]^T$, $f_s(0) = 0$ y $f(0) = 0$. Mientras que las condiciones iniciales del observador son $v(0) = 0$, $\hat{f}(0) = 0$ y $\zeta(0) = [-45.721 \ 40.082 \ 1511.3 \ 1519.7]^T$. Por último, las condiciones iniciales del modelo de referencia son $x_d(0) = [1.026 \ 1.099 \ 302.26 \ 303.93]^T$. En la Figura 5.2, se presenta la evolución temporal de las funciones de pertenencia. Observe que se tiene una participación equivalente de los modelos locales, siendo el primer subsistema lineal el que compone en mayor parte al sistema T-S.

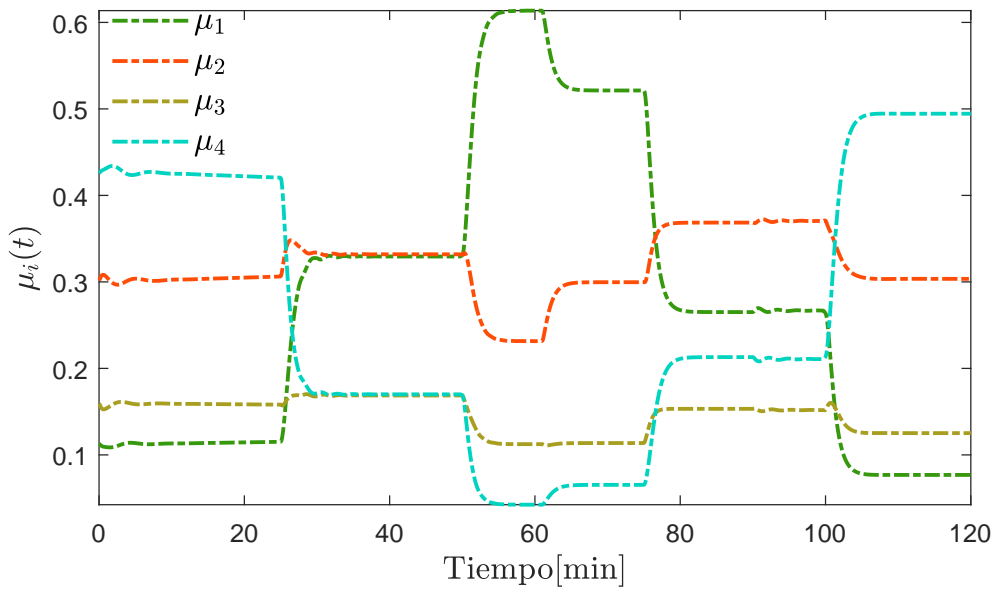


Figura 5.2: Simulación 4: Funciones de pertenencia.

La Figura 5.3 muestra el perfil de la entrada deseada $u_d(t)$, el esfuerzo del CTF $u(t)$, la señal de control sin tolerancia a fallas $u_f(t)$ y la acomodación de la falla $u_c(t)$. Es importante notar el efecto de la acomodación de la falla, observe que las señales $u(t)$ son un tipo de espejo de las señales sin tolerancia a fallas $u_f(t)$. Lo que logra esta estrategia de CTF es contrarrestar el efecto de la falla para recuperar el perfil de la entrada deseada $u_d(t)$.

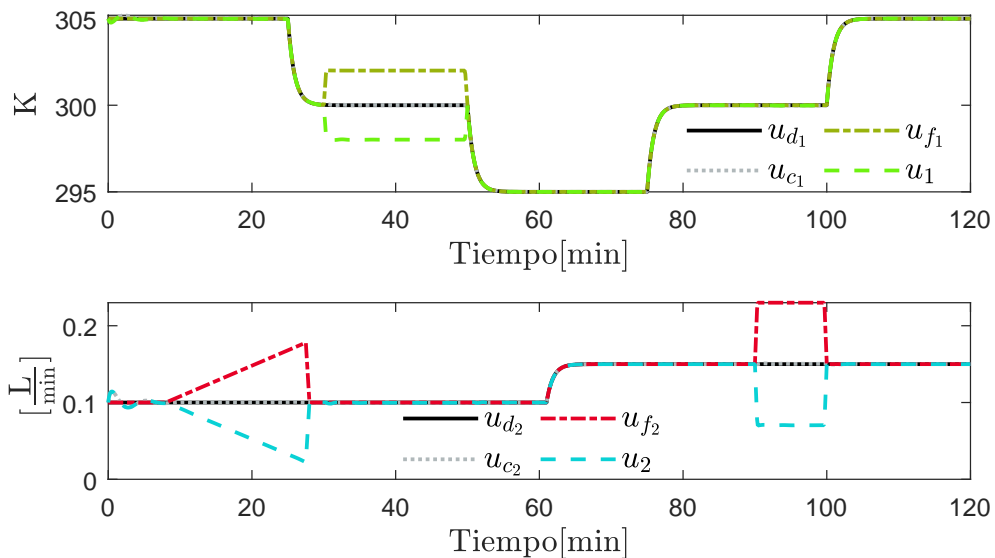


Figura 5.3: Simulación 4: Entradas.

La acomodación de la falla se muestra en las señales $u_c(t)$ esta es la sumatoria de la ley de CTF $u(t)$ y la falla en el actuador $f(t)$. En resumen, sin la información brindada por el observador adaptable no se garantiza un rendimiento favorable ante la presencia de las fallas. Mientras que con la información brindada por el observador adaptable se rechaza el impacto adverso de las fallas en actuadores.

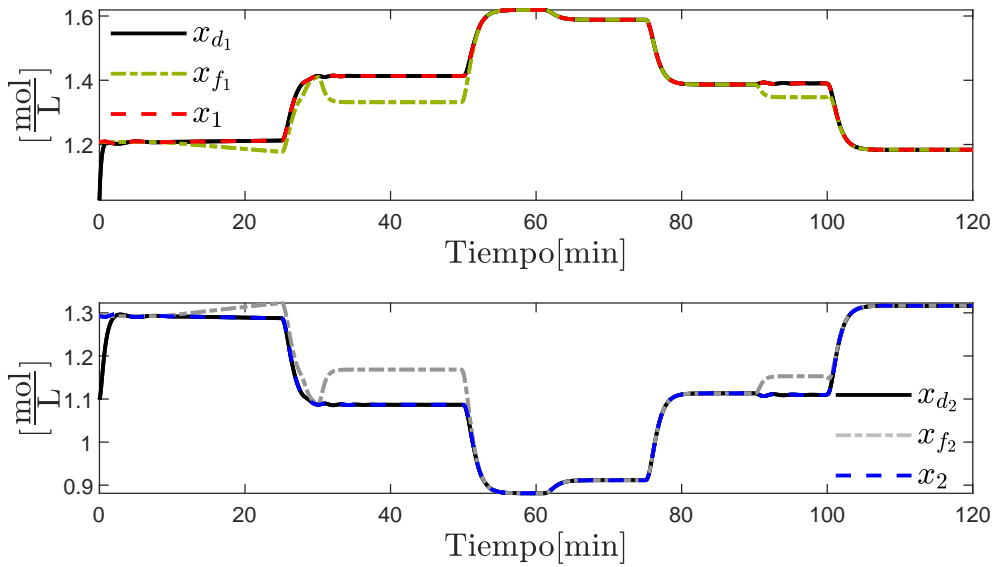


Figura 5.4: Simulación 4: Variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

Por otro lado, en las Figuras 5.4 y 5.5 se muestra el comportamiento de los estados del reactor químico CSTR, las líneas solidas de color negro corresponden a la dinámica deseada $x_d(t)$, las líneas punteadas muestran el efecto de las fallas sobre las variables de estado $x_f(t)$ y las líneas discontinuas presentan el comportamiento de las variables de estado del proceso real $x(t)$. Las variables de estado $x_d(t)$ se obtienen a través del modelo de referencia del esquema de control.

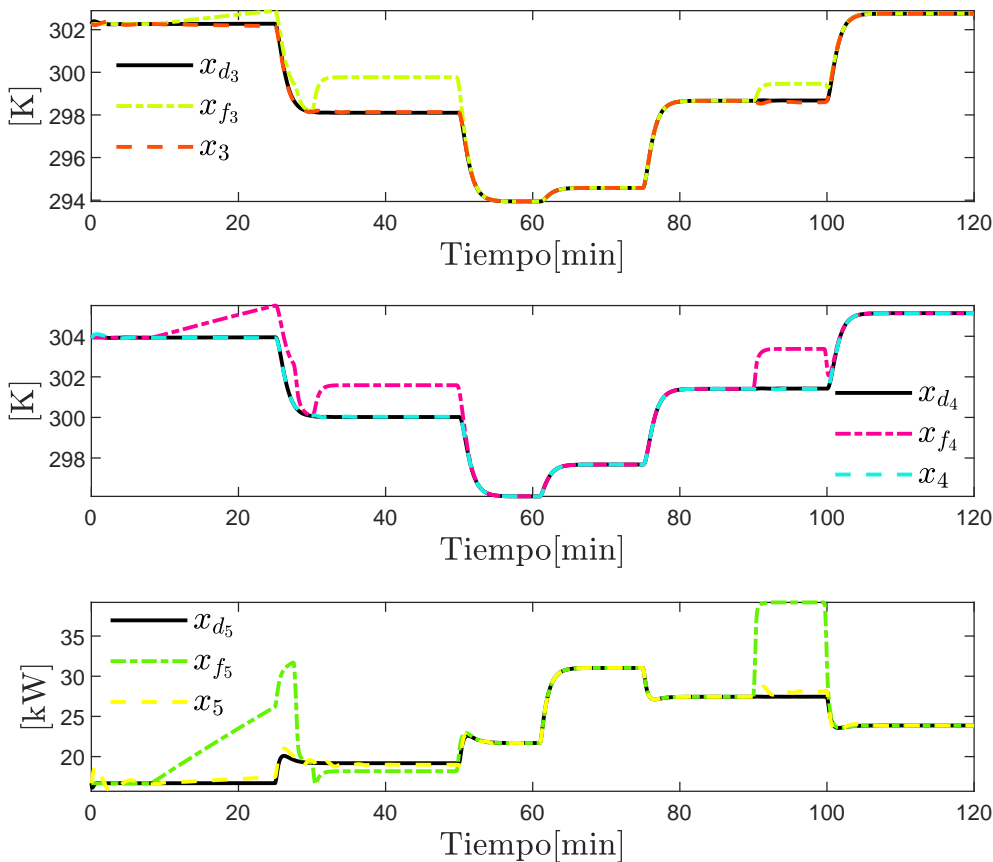


Figura 5.5: Simulación 4: Variables de estado $x_3(t)$, $x_4(t)$ y $x_5(t)$.

En las variables $x_f(t)$ se observa que ante la presencia de fallas el sistema no sigue la trayectoria deseada, a diferencia de las variables $x(t)$ que, al contar con la ley de CTF, logran recuperar el desempeño deseado. Observe que la falla en el primer actuador tiene un impacto mayor sobre el sistema, a comparación de la falla en el segundo actuador.

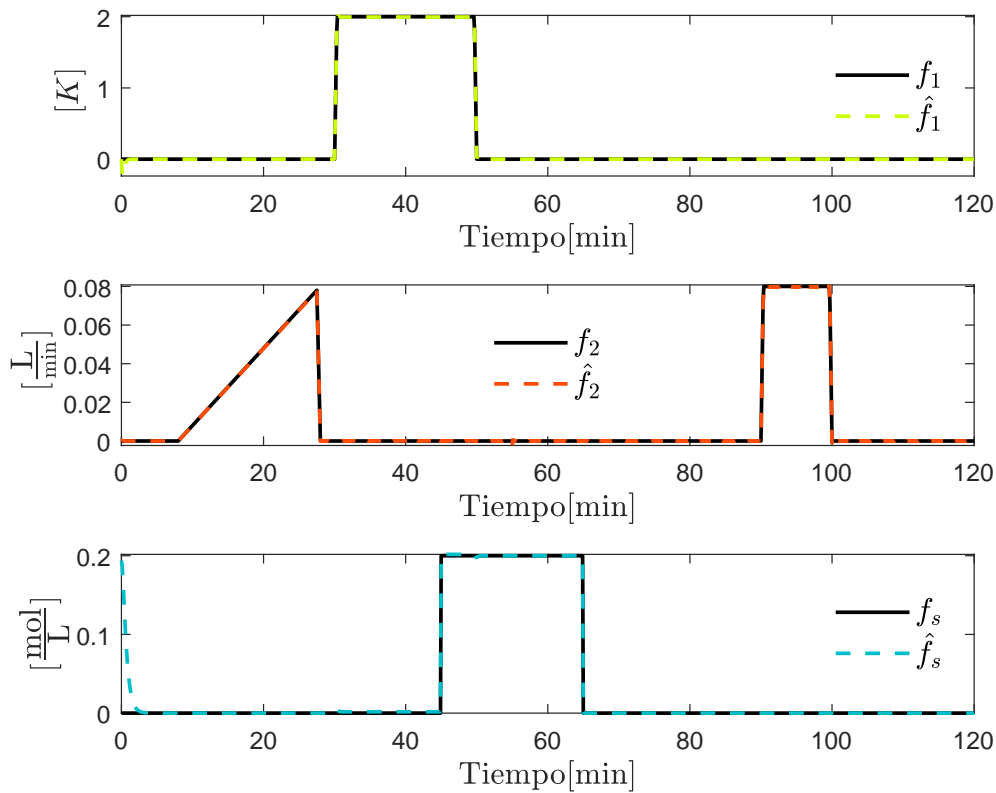


Figura 5.6: Simulación 4: Estimación de $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_s(t)$.

Finalmente, en la Figura 5.6 se presenta la estimación de las fallas. Se percibe que al estimar $f_1(t)$, esta se manifiesta en la señal $f_s(t)$ provocando un pequeño error de estimación en la falla del sensor. Por el contrario, el error de estimación de las fallas en actuadores es despreciable. La Tabla 5.1 muestra los índices de desempeño IAE (por sus siglas en inglés: *Integral of Absolute Error*) para el error de seguimiento de trayectoria.

Tabla 5.1: Simulación 4: Error de seguimiento de trayectoria.

Estado/Entrada	sin CTF	con CTF	Libre de Falla
$x_1(t) - x_{d_1}(t)$	25.2304	0.5346	0.5347
$x_2(t) - x_{d_2}(t)$	26.1579	1.5341	1.5341
$x_3(t) - x_{d_3}(t)$	480.9859	35.658	4.6471
$x_4(t) - x_{d_4}(t)$	689.086	14.167	2.6604
$x_5(t) - x_{d_5}(t)$	2.5×10^6	2.5×10^5	4.94×10^4
$u_1(t) - u_{d_1}(t)$	393.2	15.528	6.577
$u_2(t) - u_{d_2}(t)$	53.1501	1.5205	0.3195

5.4. Simulación 5. Aplicación a un ejemplo numérico

Objetivo: Inducir fallas en actuadores con comportamiento variante en el tiempo a un sistema con representación T–S descriptor para analizar el comportamiento de la estrategia de CTF bajo estas condiciones. Los resultados se obtienen tomando el siguiente ejemplo numérico.

$$E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) (A_i x(t) + B_i u(t) + G_i f(t)) \quad (5.33)$$

$$y(t) = Cx(t) + Df_s(t) \quad (5.34)$$

donde las matrices son $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3.12 - \underline{z} & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3.2 - \bar{z} & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$,

$$B_{\{1,2\}} = G_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5.4.1. Cálculo de ganancias

1.- Al seleccionar $q_0 = 2$ se propone una matriz $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tal que $\text{rank}(\Sigma) = m$.

2.- Entonces se procede a calcular las matrices $T_1, T_2, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, N_{1i}, N_{2i}, N_3$ y P :

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0.143 & 0.286 \\ -0.048 & 0.905 \\ 0.833 & -0.333 \\ 0.048 & -0.905 \end{bmatrix} \\ N_{11} &= \begin{bmatrix} -2.251 & 5.777 \\ 1.197 & -4.246 \\ -2.29 & 6.501 \\ 1.216 & -4.608 \end{bmatrix}, N_{2\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0.024 & -0.452 \\ 0 & 0 \\ -0.024 & -0.048 \\ 0 & 0 \\ -0.024 & 0.452 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 0.024 & 0.048 \\ 0.048 & 0.095 \\ 0.024 & 0.048 \\ -0.143 & -0.286 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.- Sintonizando la constante $\sigma = 0.7839$, se resuelven las LMIs definidas en (5.9) y (5.10) mediante el solucionador YALMIP para obtener:

$$\begin{aligned} \gamma &= 12.9994 \\ \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} 5.819 & 1.091 & 0.203 \end{bmatrix}, \mathcal{X} = \begin{bmatrix} 1.288 & 0.31 & 0 \\ 0.31 & 0.334 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X_{21} = \begin{bmatrix} 29.665 & 21.711 \\ 21.711 & 62.179 \end{bmatrix}, X_3 = 36.8910 \\ X_{22} &= \begin{bmatrix} 175.587 & 21.715 \\ 21.715 & 208.131 \end{bmatrix} \\ Z_1 &= \begin{bmatrix} 2.475 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.864 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Phi_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} -820 & 24 \end{bmatrix}, \Psi_1 = -1.7168 \text{ y} \\ & \Psi_2 = -1.7172 \end{aligned}$$

4.- Se selecciona la matriz $\mathcal{R} = 0.01 \times I_4$, tal que la matriz $\phi_i > 0$.

5.- Se seleccionan las matrices $\mathcal{L} = 0.1 \times \mathbf{1}_{4 \times 3}$ y $\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 & 9 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 8 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 7 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ para hallar la solución

de \mathbb{Y}_i :

$$\mathbb{Y}_1 = \begin{bmatrix} -4.685 & -9.914 & -5.109 & 30.753 & 0.107 & 1.998 & -2.046 \\ 2.526 & 5.232 & 2.799 & -15.944 & 0.046 & -0.967 & 1.09 \\ 0.538 & 1.137 & 0.579 & -3.445 & -0.021 & -0.289 & 0.233 \\ -0.304 & -0.635 & -0.331 & 1.927 & 0.021 & 0.11 & -0.185 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Y}_2 = \begin{bmatrix} -2.146 & -4.837 & -2.57 & 15.52 & 0.107 & 1.065 & -1.026 \\ 1.256 & 2.691 & 1.529 & -8.323 & 0.046 & -0.5 & 0.579 \\ 0.248 & 0.558 & 0.289 & -1.707 & -0.021 & -0.183 & 0.117 \\ -0.159 & -0.346 & -0.187 & 1.058 & 0.021 & 0.057 & -0.127 \end{bmatrix}$$

6.- Finalmente, se obtienen las ganancias del esquema de CTF:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -5.059 & 20.663 & 0 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -4.944 & 20.185 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 2.788 & 17.094 \\ -1.436 & -9.944 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0.211 & 12.74 \\ -0.147 & -7.765 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} -0.573 & -1.146 \\ 0.321 & 0.641 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} -0.283 & -0.566 \\ 0.176 & 0.352 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1.998 & -2.046 \\ -0.967 & 1.09 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1.065 & -1.026 \\ -0.5 & 0.579 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} -0.289 & 0.233 \\ 0.11 & -0.185 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -0.183 & 0.117 \\ 0.057 & -0.127 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & -24.3 & 0 \\ -1 & 12.827 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 2 & -17.877 & 0 \\ -1 & 9.614 & 0 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1.505 & 0 \\ 0 & -0.842 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.744 & 0 \\ 0 & -0.462 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 1.763 \\ 0.432 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.625 & 0 \\ 0 & -0.307 & 0 \\ -1 & 3.675 & 0 \\ 0 & 0.307 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } T = \begin{bmatrix} 1.763 & -2 & 0 \\ 0.432 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4.2. Descripción del escenario de fallas

Para evaluar el desempeño del esquema de CTF aplicado al ejemplo numérico, se define el escenario de fallas descrito por la ecuación (5.35).

$$f(t) = \begin{cases} 0.05\text{sen}(t) + 0.15\text{sen}(2t) + 0.3 & \text{si } t \geq 7\pi\text{seg} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.35)$$

$$f_s(t) = \begin{cases} 0.05\text{sen}(t) + 0.15\text{sen}(2t) & \text{si } 5\pi\text{seg} \leq t \leq 12\pi\text{seg} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las fallas sinusoidales se seleccionaron para verificar la capacidad del observador adaptable al estimar fallas altamente dinámicas. Además, para observar el efecto de la acomodación de la falla bajo este escenario.

Las simulaciones se realizaron en MATLAB R2019b mediante la paquetería de Simulink, el tiempo de simulación es de 60 seg, el método de integración se seleccionó automáticamente por el software. Las condiciones iniciales del sistema son $x(0) = [1.8 \ 1.9]^T$, $f_s(0) = 0$ y $f(0) = 0$. Mientras que las condiciones iniciales del observador son $v(0) = 0$, $\hat{f}(0) = 0$ y $\zeta(0) = [-0.0273 \ 2.3777]^T$. Por último, las condiciones iniciales del modelo de referencia son $x_d(0) = [1.7 \ 1.6]^T$.

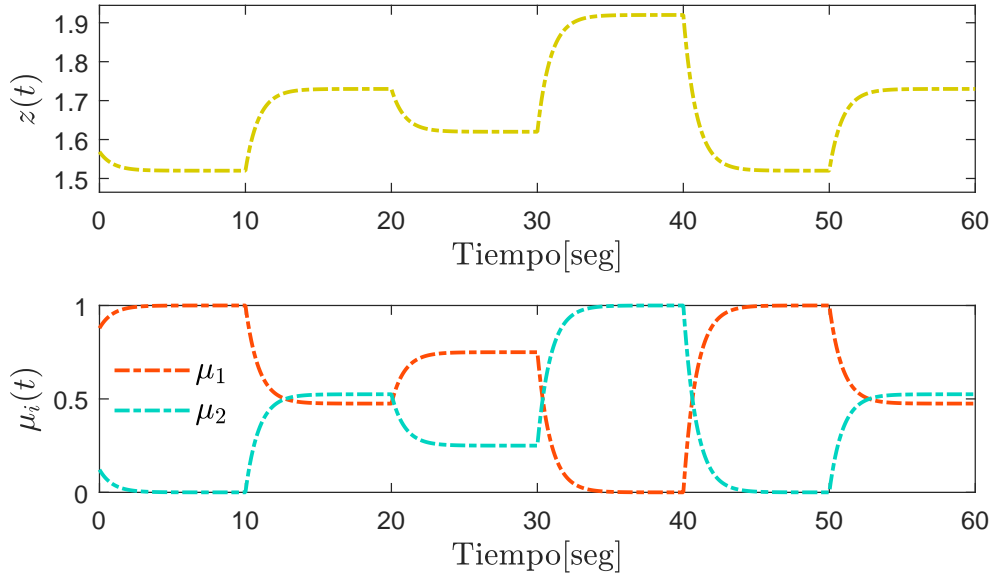


Figura 5.7: Simulación 5: Variable premisa y funciones de pertenencia.

En la Figura 5.7 se muestra la evolución en el tiempo de las funciones de pertenencia y la variable premisa. Observe que la variable premisa se encuentra acotada en $z(t) \in [0.71, 3.154]$. Por otra parte, en la Figura 5.8 se muestra el perfil de la entrada nominal $u_d(t)$, el esfuerzo del CTF $u(t)$, la señal sin CTF $u_f(t)$ y la acomodación de la falla $u_c(t)$. La señal $u_c(t)$ representa la sumatoria de la ley de CTF $u(t)$ y la falla $f(t)$. Con esta sumatoria se contrarresta el impacto adverso de las fallas sobre el sistema. Observe el transitorio en la señal $u(t)$ que se aplica al sistema.

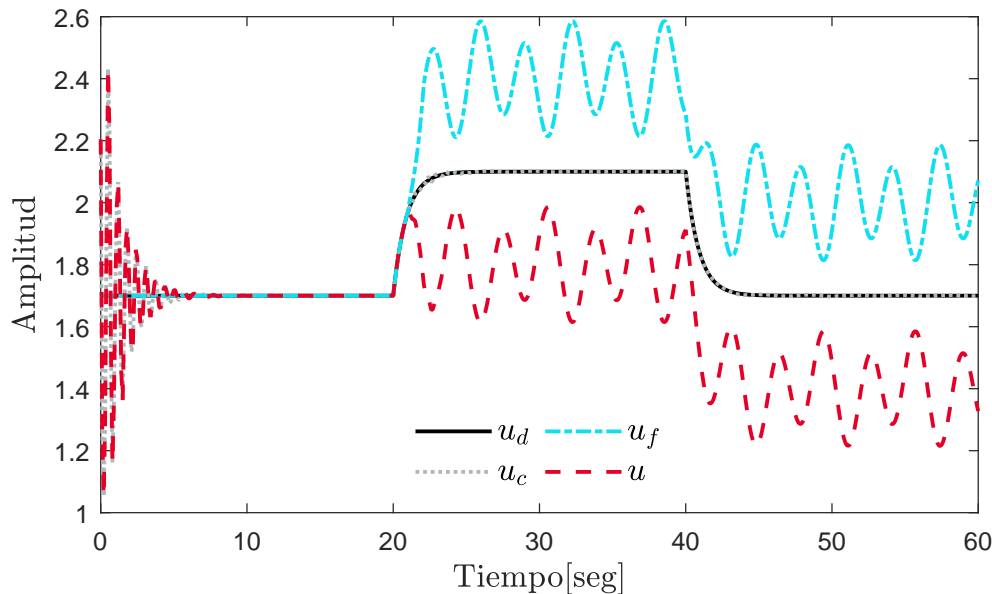


Figura 5.8: Simulación 5: Entradas.

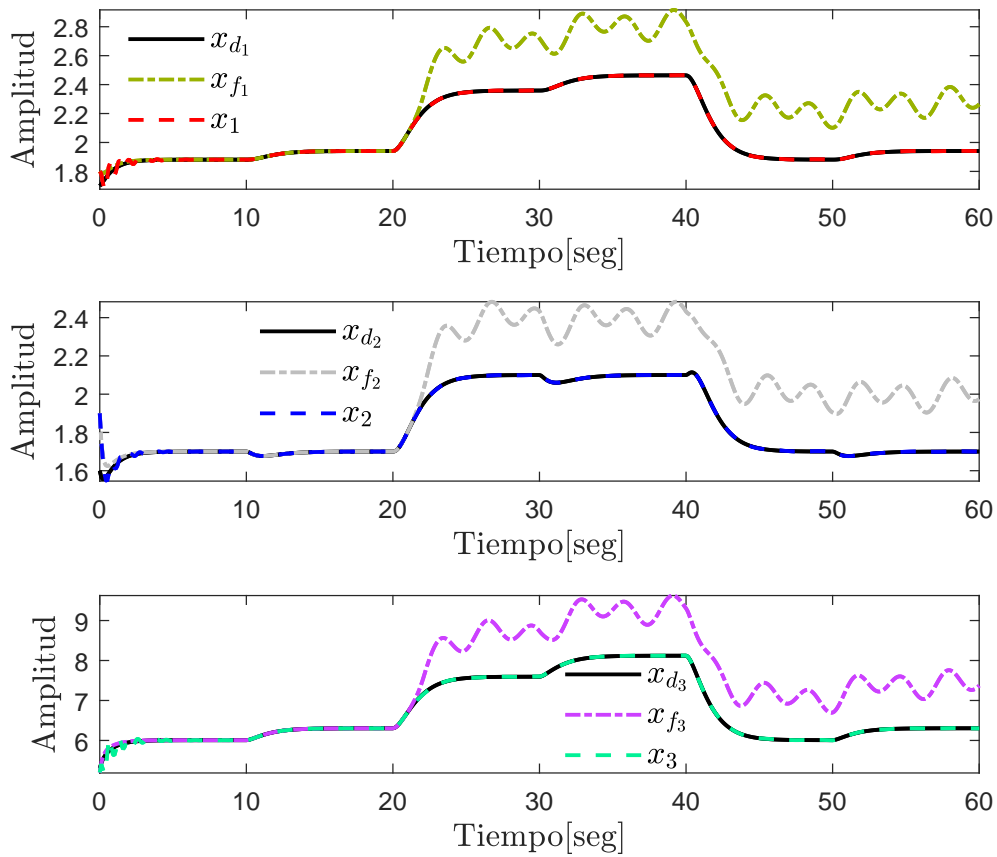


Figura 5.9: Simulación 5: Variables de estados $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.

En la Figura 5.9 se muestra el comportamiento de las variables de estado del modelo de referencia $x_d(t)$, de las variables de estados de los sistemas sin CTF $x_f(t)$ y con CTF $x(t)$. En las variables $x_f(t)$ se observa que, ante la presencia de fallas, el sistema no sigue la trayectoria deseada. Mientras que en las variables $x(t)$ al contar con la capacidad de tolerar fallas es posible recuperar el desempeño deseado definido por la señal $x_d(t)$.

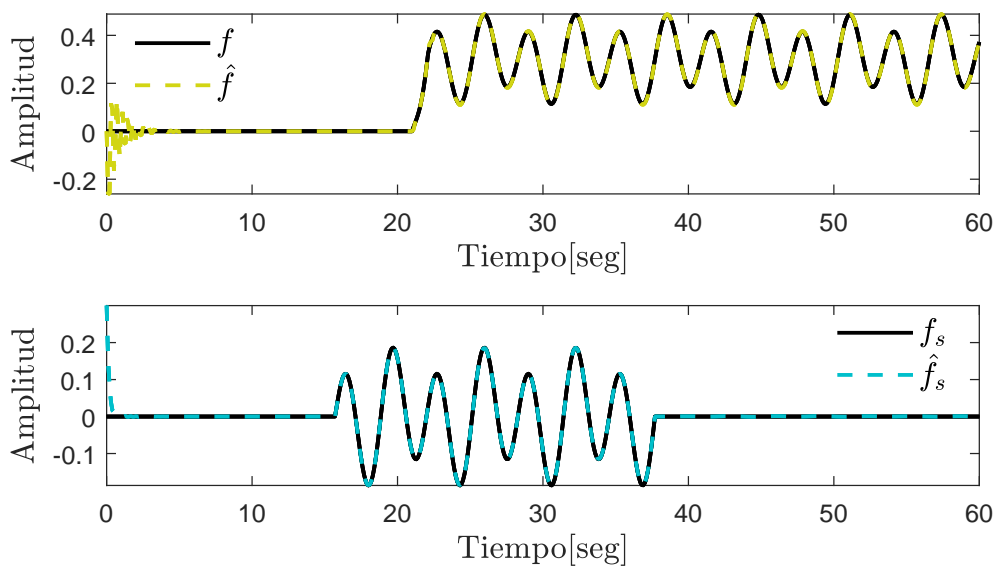


Figura 5.10: Simulación 5: Estimación de $f(t)$ y $f_s(t)$.

Finalmente, en la Figura 5.10 se presenta la estimación de las fallas. Observe que al estimar $f(t)$, no se percibe algún desfase respecto a la falla real, esto no sucede con el observador para fallas invariantes en el tiempo. Además, el error de estimación tanto para la falla en el sensor como el actuador es despreciable. En esta simulación se presentan condiciones iniciales diferentes de cero para las fallas, por esta razón, se observan señales similares a falsas alarmas, pero al presentarse en el transitorio no pueden considerarse como tales. La Tabla 5.2 muestra los índices de desempeño IAE para el error de seguimiento de trayectoria. Es bastante notorio que sin el esquema de CTF se tiene un desempeño degradado. Además, se puede observar que el esquema de CTF logra que el sistema con fallas opere aproximadamente igual al escenario libre de fallas.

Tabla 5.2: Simulación 5: Error de seguimiento de trayectoria.

Estado/Entrada	sin CTF	con CTF	Sin Falla
$x_1(t) - x_{d_1}(t)$	128.529	1.2078	0.9274
$x_2(t) - x_{d_2}(t)$	113.227	1.2268	0.987
$x_3(t) - x_{d_3}(t)$	416.3965	4.8109	3.8598
$u(t) - u_d(t)$	115.3451	8.8488	8.2738

5.5. Simulación 6. Análisis de Robustez

Objetivo: El propósito de esta simulación es demostrar la robustez de la estrategia de CTF desarrollada ante la presencia de perturbaciones, ruido de medición e incertidumbres paramétricas. Tomando el ejemplo numérico mostrado en la simulación anterior, se propone el sistemas descriptor T–S de las ecuaciones (5.36)–(5.37):

$$E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left((A_i + \Delta A(t))x(t) + B_i u(t) + G_i f(t) + H_i d(t) \right) \quad (5.36)$$

$$y(t) = Cx(t) + Df_s(t) + Fw(t) \quad (5.37)$$

donde las matrices son $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3.12 - \underline{z} & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3.2 - \bar{z} & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$,

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \delta(t), \quad B_{\{1,2\}} = G_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$F = I_2.$$

En la Figura 5.11, se muestra la señal de perturbación $d(t)$ y el factor de incertidumbre $\delta(t)$ de la matriz de incertidumbre paramétrica $\Delta A(t)$. Observe que el factor de incertidumbre es una señal periódica variante en el tiempo que aparece en el instante de 30 seg. Mientras que la perturbación es un señal intermitente que aparece y desaparece aleatoriamente.

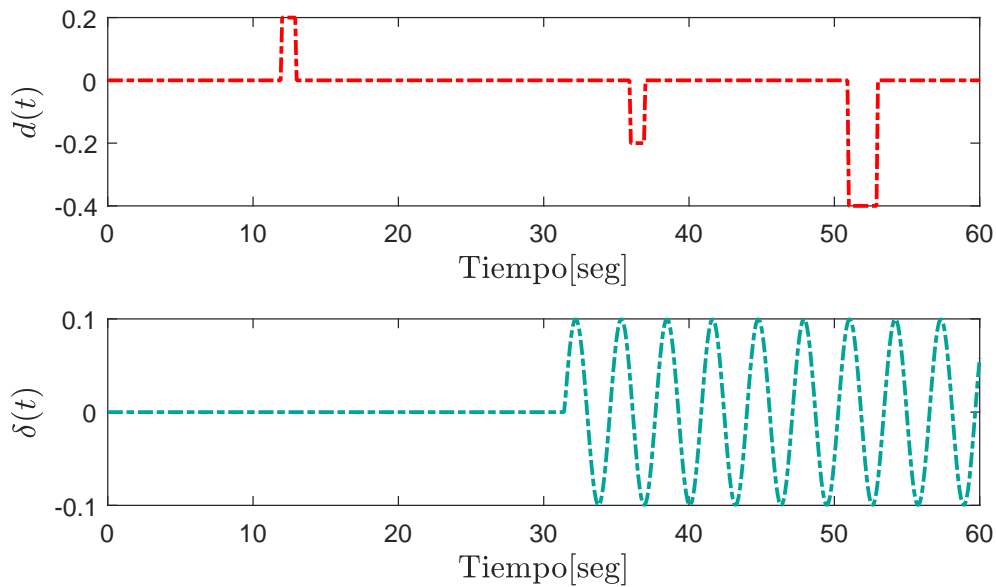


Figura 5.11: Simulación 6: Perturbación y factor de incertidumbre $\delta(t)$.

La señal de ruido de medición $w(t)$ se muestra en la Figura 5.12. El ruido de medición $w_1(t)$ para el primer sensor es de menor amplitud a comparación la señal $w_2(t)$ del segundo sensor. Estas señales se escogieron de tal forma que permitiera observar el efecto del ruido de medición sobre el esquema de CTF.

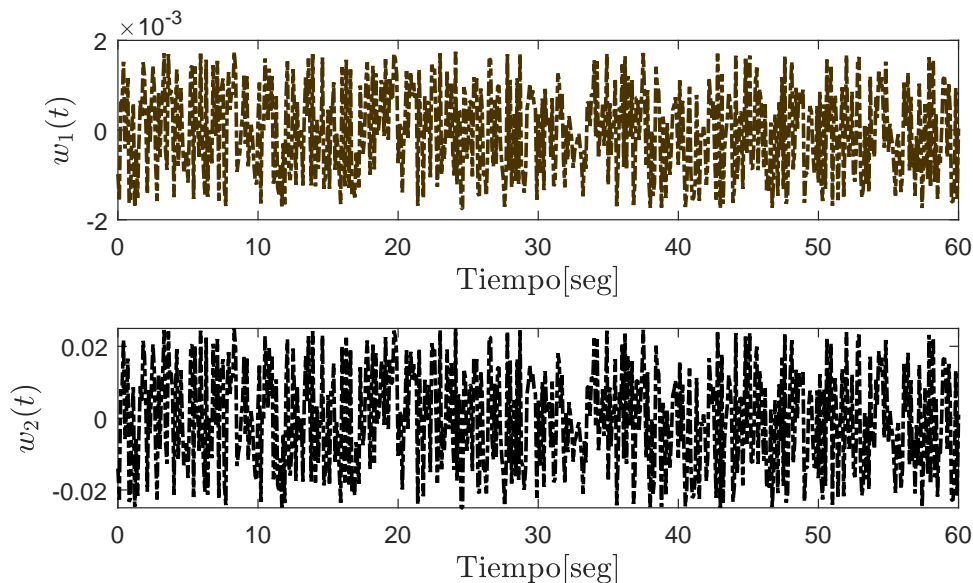


Figura 5.12: Simulación 6: Ruido de medición.

La variable premisa y las funciones de pertenencias se presentan en la Figura 5.13. Observe que la variable premisa se encuentra acotada en $z(t) \in [0.71, 3.154]$ y al ser medible se ve afectada por el ruido de medición. Del mismo modo en las funciones de pertenencia se refleja el ruido de medición, esto puede ocasionar que las dos propiedades principales de la sumatoria convexa mostradas en la expresión (2.13) no se satisfagan.

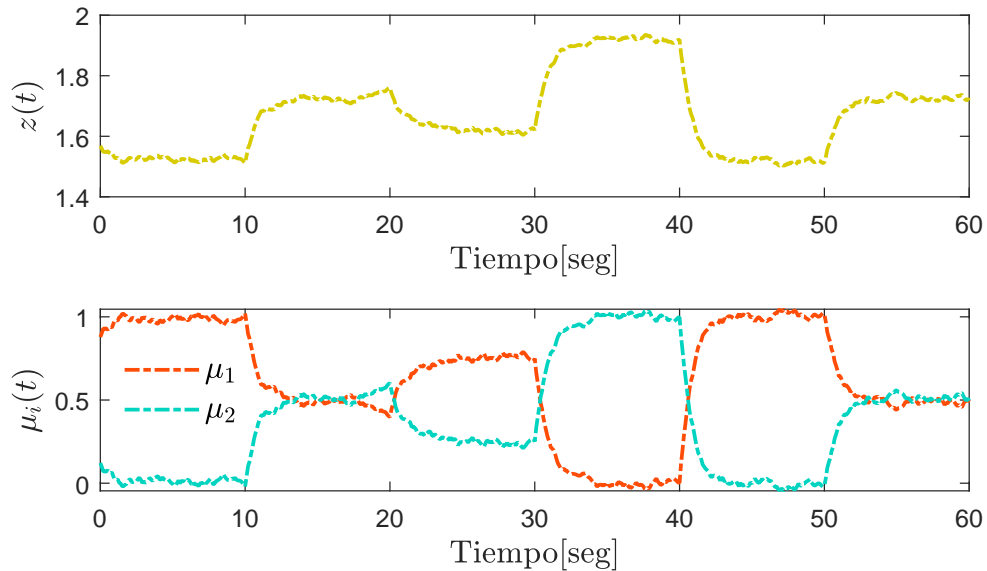


Figura 5.13: Simulación 6: Variable premisa y funciones de pertenencia.

Por otra parte, en la Figura 5.14 se muestra el perfil de la entrada nominal $u_d(t)$, el esfuerzo del CTF $u(t)$ y la acomodación de la falla $u_c(t)$. Observe que a partir del instante en que el factor de incertidumbre comienza a tomar valores, la de acomodación de la falla $u_c(t)$ comienza a oscilar sobre la señal $u_d(t)$. Otro aspecto importante es que, se percibe que el ruido de medición se está amplificando por la estimación de la falla en el actuador.

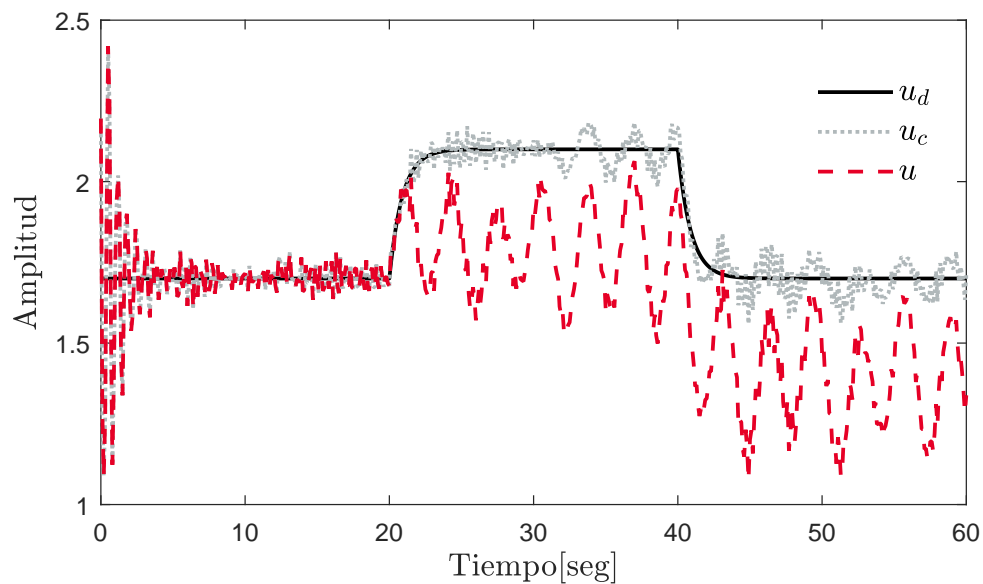


Figura 5.14: Simulación 6: Entradas.

En la Figura 5.15, se muestra los estados del modelo de referencia $x_d(t)$ y los estados del proceso real. Observe en la segunda variable $x_2(t)$ de estado el efecto de las perturbaciones y el efecto del factor de incertidumbre en las variables $x_2(t)$ y $x_3(t)$. A pesar de esto no se observa una gran degradación del desempeño del esquema de CTF ante estas condiciones. Además, el efecto del ruido de medición se filtra por el observador adaptable al estimar las variables de estado, siendo esta señal la que influye mayormente en la ley de CTF.

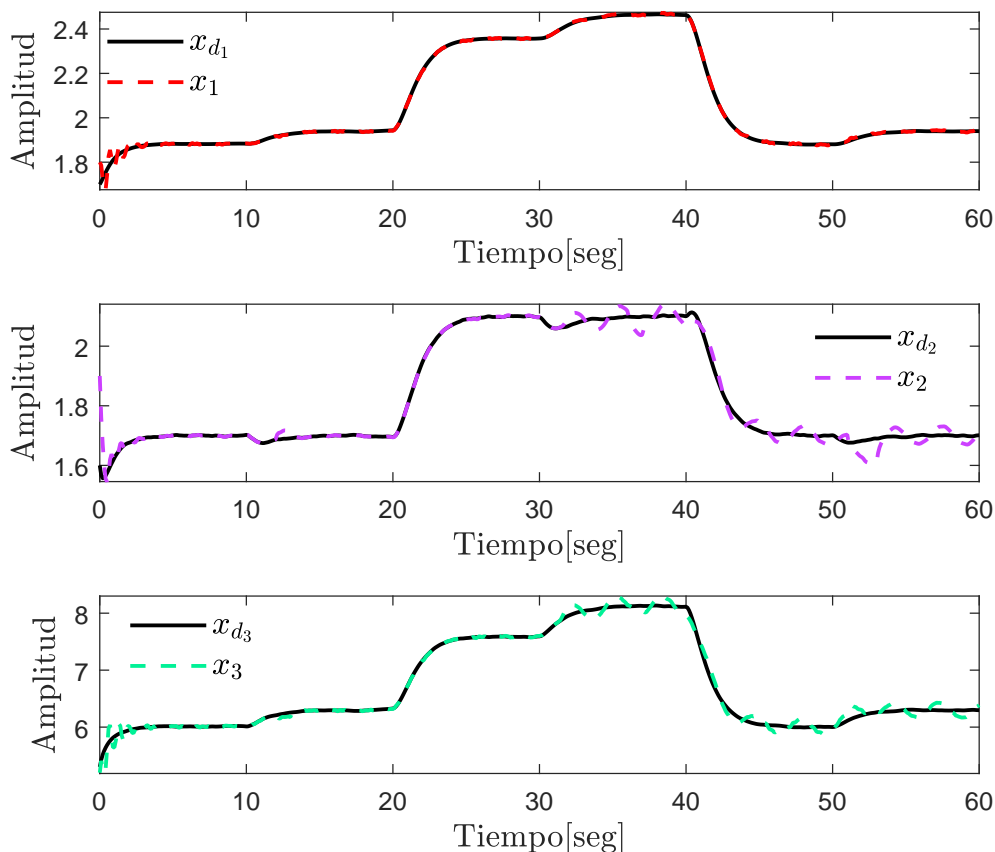


Figura 5.15: Simulación 6: Variables de estados $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.

En la Figura 4.6 se muestra el desacoplamiento de la falla del sensor que se tiene en la estimación de la variable de estado medible $x_2(t)$. La señal $\hat{x}_2(t)$ no se ve afectada por la señal $f_s(t)$ ni por el ruido de medición, debido a que es filtrado por el observador adaptable. También, se observa que el ruido de medición se traslapa a la estimación de la falla en el sensor. Generalmente, este efecto sucedería en una implementación en tiempo real y se debe definir un umbral para cuantificar cuál es el valor mínimo de amplitud de la falla en el sensor que puede considerarse como falla.

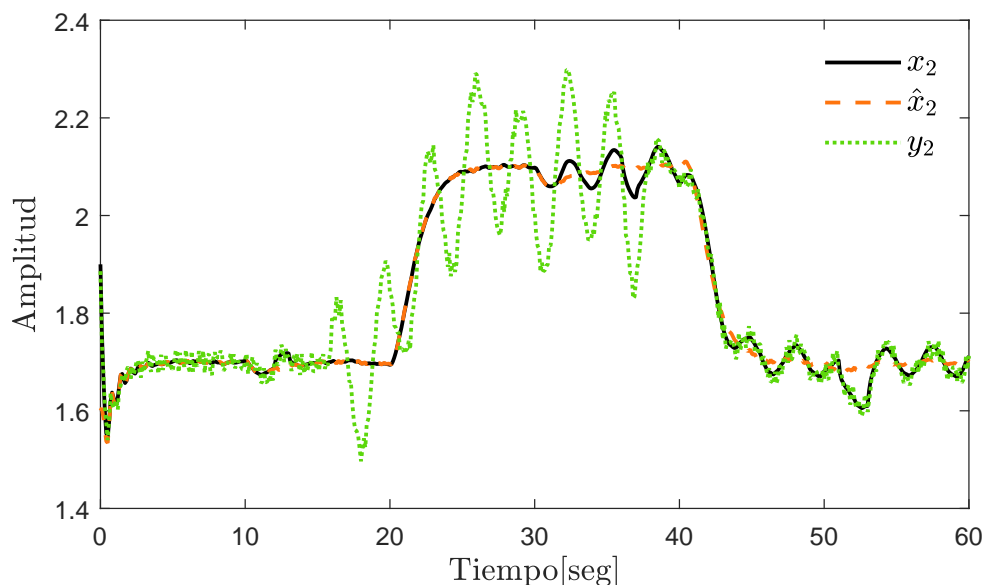


Figura 5.16: Simulación 6: Desacoplamiento de la falla $f_s(t)$.

Finalmente, en la Figura 5.17, se presenta la estimación de la falla en el actuador y el sensor. Para la estimación de $f(t)$, se observa que el ruido de medición se amplifica drásticamente debido al valor de la ganancia Φ_i que se encuentra en el vector de estimación $\hat{f}(t)$. Además, se puede notar que el factor de incertidumbre $\delta(t)$ genera un error de estimación en la estimación de las fallas tanto del sensor como del actuador. Del mismo modo, en una implementación en tiempo real se debe definir un umbral para el valor mínimo de amplitud de la falla en el actuador.

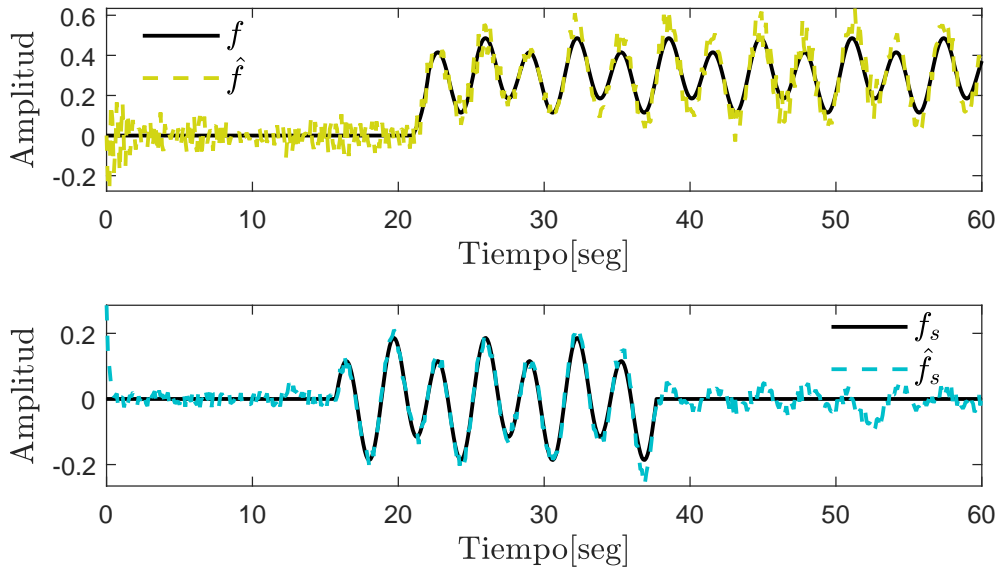


Figura 5.17: Simulación 6: Estimación de $f(t)$ y $f_s(t)$.

La Tabla 5.3, muestra los índices de desempeño de la estimación simultánea de variables de estados y fallas del sistema libre de perturbaciones, ruido de medición e incertidumbres paramétricas y del sistema bajo estas condiciones. En este caso, para definir los tiempo de detección es necesario analizar el escenario de falla y definir un umbral que permita determinar si lo estimado es ruido de medición o una falla en el sistema.

Tabla 5.3: Simulación 6: Error de estimación de estados y fallas.

Estado/ Entrada	$d(t) = 0, w(t) = 0$ y $\Delta A(t) = 0$	$d(t) \neq 0, w(t) \neq 0$ y $\Delta A(t) \neq 0$
$\hat{x}_1(t) - x_1(t)$	0.2825	0.6541
$\hat{x}_2(t) - x_2(t)$	0.8051	7.4622
$\hat{x}_3(t) - x_3(t)$	2.5136	27.1248
$\hat{f}(t) - f_1(t)$	2.7054	28.1087
$\hat{f}_s(t) - f_s(t)$	0.8051	11.7393

Los resultados muestran que se tiene un desempeño degradado. No obstante, esto no quiere decir que sea inviable utilizar este esquema bajo las condiciones previamente planteadas. Además, es posible partir del desarrollo mostrado en los capítulos anteriores para considerar en el diseño perturbaciones, incertidumbres paramétricas y ruido de medición en las estrategias de control y estimación propuestas.

En la Tabla 5.4, se muestra los índices de desempeño del seguimiento de trayectoria del sistema libre de perturbaciones, de ruido de medición y de incertidumbres paramétricas y del sistema bajo estas condiciones. Otro aspecto importante es que se tiene una menor degradación del sistema a comparación del escenario sin el esquema de CTF.

Tabla 5.4: Simulación 6: Error de seguimiento de trayectoria.

Estado/ Entrada	$d(t) = 0, w(t) = 0$ y $\Delta A(t) = 0$	$d(t) \neq 0, w(t) \neq 0$ y $\Delta A(t) \neq 0$
$x_1(t) - x_{d_1}(t)$	1.2078	2.1083
$x_2(t) - x_{d_2}(t)$	1.2268	8.2145
$x_3(t) - x_{d_3}(t)$	4.8109	31.6781
$u(t) - u_d(t)$	8.8488	27.7988

5.6. Conclusiones del capítulo

Las características del observador adaptable para fallas variantes en el tiempo mostradas en el Capítulo 4 se reflejan en esta sección. Se comprueba que la acomodación de la falla se realiza de mejor manera y, por lo tanto, se tiene un buen comportamiento en la estrategia de CTF. El diseño se aplicó al reactor químico CSTR y a un ejemplo numérico. En los escenarios de simulación planteados se obtuvieron los resultados esperados, por ejemplo, si el sistema carece de tolerancia a fallas se obtiene un desempeño degradado. Además, se presentó a detalle cómo la ley de CTF diseñada contrarresta el efecto adverso de las fallas en actuadores. Por otra parte, se sometió al sistema a condiciones no planteadas en el diseño tales como perturbaciones, incertidumbres paramétricas y ruido de medición. Dando como resultado un buen rendimiento que permitió observar un escenario de simulación más realista.

CAPÍTULO 6

Conclusiones

A lo largo de este documento se muestra que los objetivos de la tesis se han cumplido. La aportación principal de este trabajo es el uso del esquema de un observador dinámico para estimar simultáneamente estados y fallas con comportamiento variante en el tiempo. Los grados de libertad del observador GDO brindan una mejor exactitud de estimación y robustez ante errores de modelado. En las estrategias de estimación de fallas en actuadores, se presentan dos enfoques, uno para fallas invariantes en el tiempo y otro para fallas variantes en el tiempo. Los resultados muestran que al considerar en el diseño fallas variantes en el tiempo se reduce el tiempo de convergencia considerablemente, esta característica beneficia al esquema de CTF porque la acomodación de la falla se realiza de mejor manera.

Por otra parte, para validar la eficacia de la estrategia de CTF propuesta se utiliza el modelo de un reactor químico tipo CSTR encaquetado y un ejemplo numérico. Los resultados del primer caso de estudio demuestran que el esquema de control podría aplicarse a un proceso real. Mientras que en el segundo caso de estudio se sometió al sistema a fallas en actuadores con comportamiento sinusoidal, con la finalidad de verificar que esta estrategia de CTF permite tratar con esta clase de fallas. Además, se logró expandir la capacidad del esquema de CTF al estimar tanto fallas en actuadores como fallas en sensores mediante un sistema aumentado. También, se propuso una ley CTF de seguimiento de trayectoria basado en un modelo de referencia que proporciona la trayectoria deseada que deben seguir las variables de estado del sistema real.

Otro punto por destacar es que, al exponer al sistema a perturbaciones, ruido de medición e incertidumbres paramétricas, no es posible garantizar el comportamiento deseado ya que, bajo estas condiciones no fue diseñado el esquema de CTF, pero a pesar de esto, los resultados muestran que bajo este escenario se tiene cierto grado de robustez el cual podría considerarse aceptable. Finalmente, a nivel académico se puede decir que cada uno de los objetivos de la investigación se cumplieron.

6.1. Trabajos futuros

Como trabajos futuros se proponen las siguientes actividades:

- En algunos sistemas T–S no se tienen disponibles las variables premisas para su medición, por esta razón es importante desarrollar un algoritmo para estimarlas. El enfoque presentado aún está limitado a considerar las variables premisas como medibles.
- Cuando se tiene un gran número de modelos locales para el sistema T–S, suele aparecer un problema de conservadurismo en el diseño de estrategias de control o estimación. Una solución a esta problemática son las funciones no cuadráticas de Lyapunov, que a comparación de las funciones cuadráticas de Lyapunov ofrecen un mayor rango de operación y una solución factible menos conservativa.
- El enfoque desarrollado está limitado a una clase particular de sistemas descriptor, sería interesante desarrollar una estrategia basada en la estructura del observador GDO que trate al sistema descriptor mediante los subsistemas lento y rápido.
- Puede haber un gran número de configuraciones de fallas que no se puedan identificar con el enfoque desarrollado. En la teoría la propiedad de identificabilidad permite verificar cual configuración de falla es capaz de estimar el observador adaptable. Esta propiedad no se presenta en este trabajo de tesis. Un vector de estados aumentado podría permitir identificar una mayor gama de configuraciones de fallas. Sería interesante probar este enfoque utilizando la estructura del observador GDO.
- Implementar en un sistema académico los algoritmos de control y estimación desarrollados, para analizar y resolver los inconvenientes físicos y computacionales al aplicarlo a un proceso en tiempo real.

Diagrama del Observador Adaptable

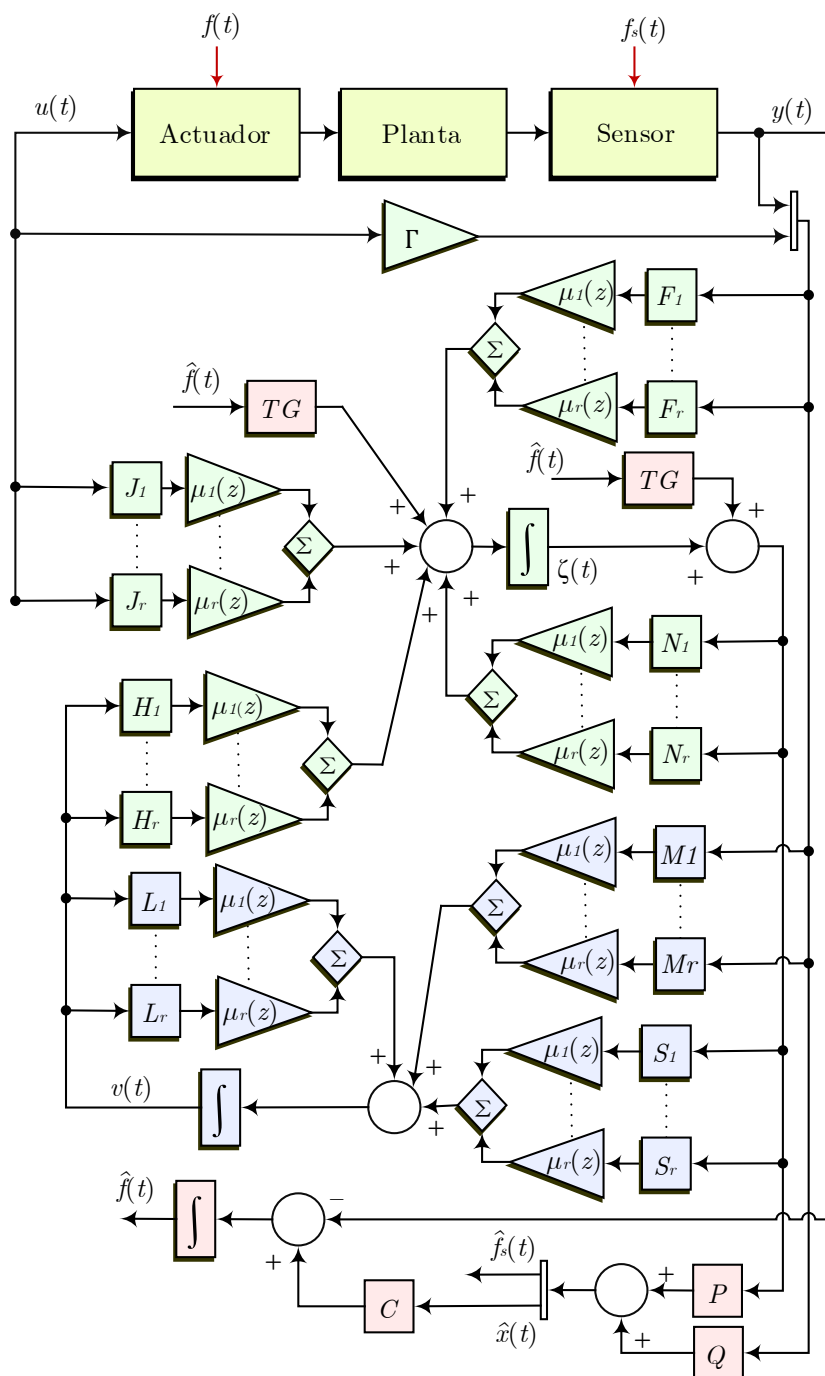


Figura A.1: Diagrama del observador adaptable $\dot{f}(t) = 0$.

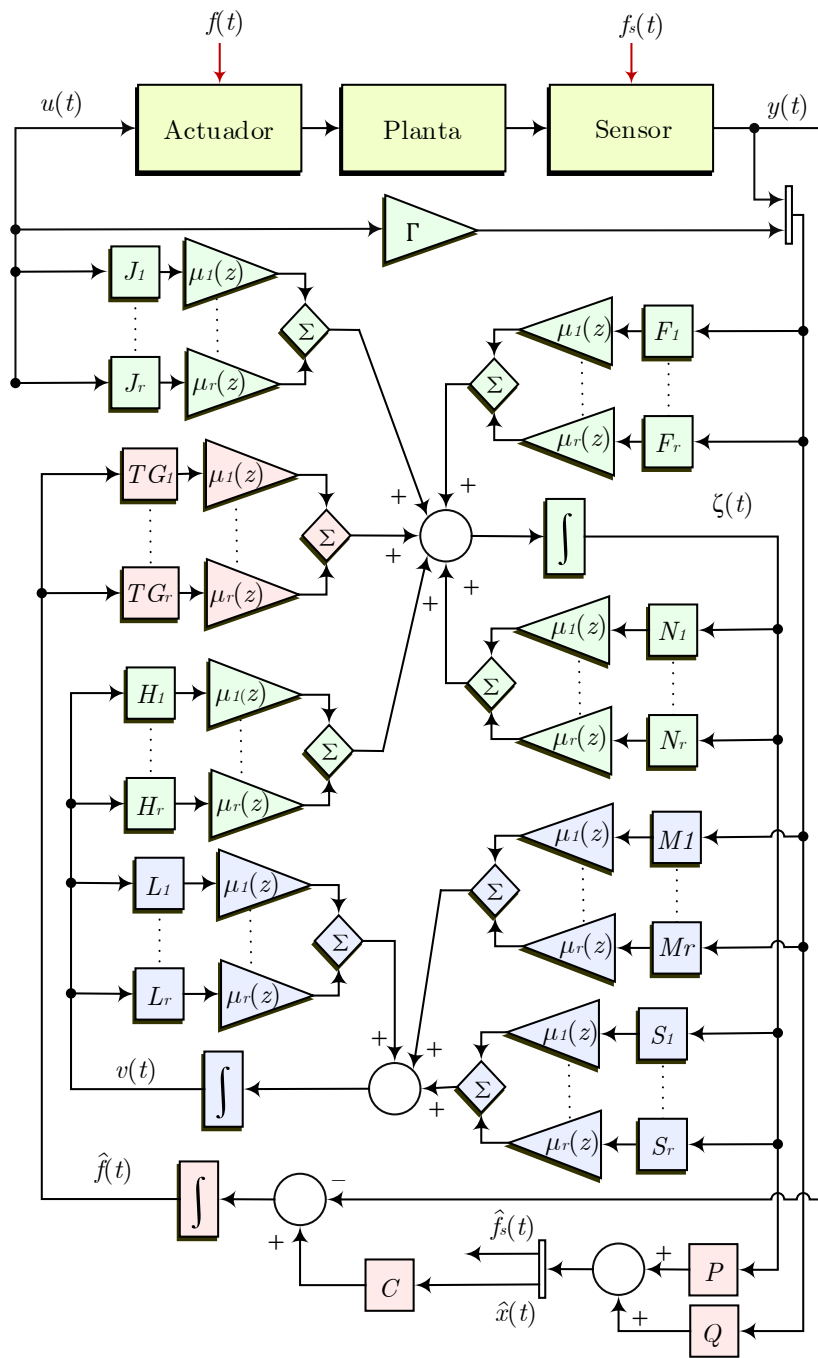


Figura A.2: Diagrama del observador adaptable $\dot{f}(t) \neq 0$.

Diagrama del Control Tolerante a Fallas

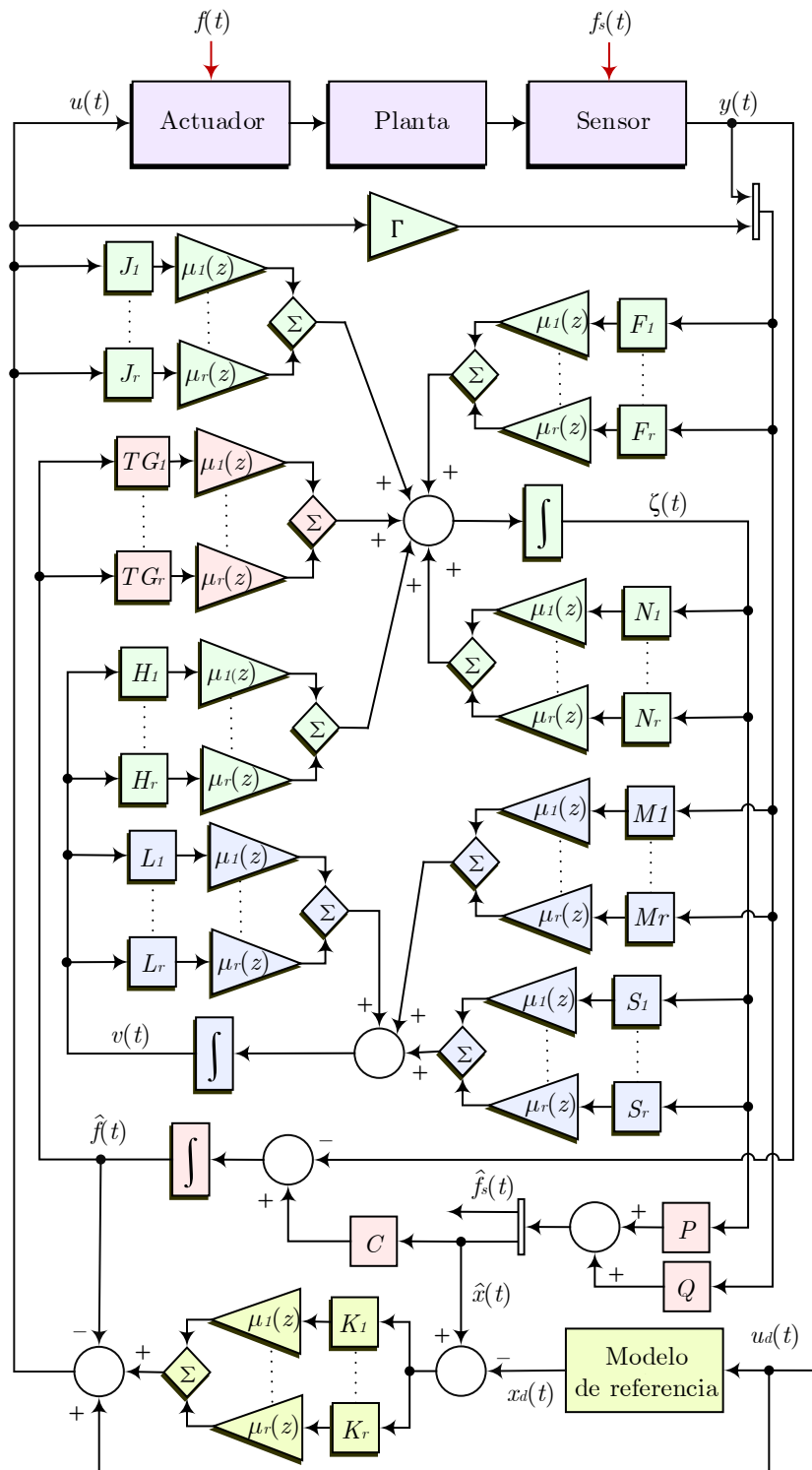


Figura B.1: Diagrama del CTF.

Bibliografía

- Abderrahim, S. & Allouche (2019). Design and Implementation of a Robust Fuzzy Controller for a Rotary Inverted Pendulum using the Takagi-Sugeno Descriptor Representation. *19th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering, STA 2019*, 1(978):255–262. 3
- Aguilera-González, A., Bosche, J., & El Hajjaji, A. (2014). Unknown input estimation for diesel engine based on Takagi-Sugeno Fuzzy Descriptor systems. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3159–3164. 3
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., Staroswiecki, M., & Schröder, J. (2006). *Diagnosis and fault-tolerant control*, volume 2. Springer. 21, 25, 26
- Bošković, J. D., Mehra, R. K., Caccavale, F., & Villani, L. (2003). *Failure Detection, Identification and Reconfiguration in Flight Control*, pages 129–167. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 30
- Boudjellal, M. & Illoul, R. (2019). Design of a robust observer with super-twisting algorithm for simultaneous concentration estimation and faults reconstruction in a cstr. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 17(8). 29
- Dai, L. et al. (1989). *Singular control systems*, volume 118. Springer. 12, 13
- Darouach, M. (2009). Complements to full order observer design for linear systems with unknown inputs. *Applied Mathematics Letters*, 22(7):1107–1111. 27
- Darouach, M. (2014). Observers and observer-based control for descriptor systems revisited. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(5):1367–1373. 4
- Darouach, M. & Boutayeb, M. (1995). Design for Observers for Descriptor Systems. *Online Review*, 40(7):20. 3
- Duan, G. (2010). *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. Springer. 10, 11
- El Youssfi, N., Oudghiri, M., & El Bachtiri, R. (2019). Actuator fault estimation and fault tolerant control for vehicle lateral dynamics. *AIP Conference Proceedings*, 2074(February). 5
- Fakhr, S., Naeimeh, A., Akbarzadeh, K., & Chisci, L. (2019). Indirect adaptive fuzzy control of nonlinear descriptor systems. *European Journal of Control*. 2
- Gao, N. (2015). *Observateurs dynamiques et commande des systèmes , application aux systèmes de grande dimension par*. PhD thesis, Université de Lorraine. 27
- Gao, Z. & Ding, S. X. (2007). Actuator fault robust estimation and fault-tolerant control for a class of nonlinear descriptor systems. *Automatica*, 43(5):912–920. 5
- Gómez-Peñate, S., López-Estrada, F. R., Valencia-Palomo, G., Rotondo, D., & Enríquez-Zárate, J. (2019). Actuator and sensor fault estimation based on a proportional-integral quasi-LPV observer with inexact scheduling parameters. *IFAC-PapersOnLine*, 52(28):100–105. 4

- Guzman, J., López-Estrada, F.-R., Estrada-Manzo, V., & Valencia-Palomo, G. (2021). Actuator fault estimation based on a proportional-integral observer with nonquadratic lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 0(0):1–14. 4
- Haj Brahim, I., Chaabane, M., & Mehdi, D. (2017). Fault-Tolerant Control for T–S Fuzzy Descriptor Systems with Sensor Faults: An LMI Approach. *International Journal of Fuzzy Systems*, 19(2):516–527. 5
- Haj Brahim, I., Mehdi, D., & Chaabane, M. (2019). Sensor fault and state estimation for uncertain fuzzy descriptor systems: An LMI approach. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 41(1):135–144. 4
- Heras, M., Montiel, M. F., & Marin (2016). Takagi-Sugeno fuzzy model for DC-DC converters. *2015 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing, ROPEC 2015*. 3
- Hwan Seong, K., Sang Bong, K., & Shingeyasu, K. (1997). Design of PI observer for descriptor system.pdf. *Control Automation and Systems Engineering*, 3(4):332–337. 27
- Isermann, R. (2005). *Fault-diagnosis systems: an introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer Science & Business Media. 23, 24
- Jain, T., Yamé, J. J., & Sauter, D. (2018). *Active Fault- Tolerant Control Systems A Behavioral System Theoretic Perspective*. Springer. 25
- Jia, Q., Chen, W., Zhang, Y., & Li, H. (2015). Fault reconstruction and fault-tolerant control via learning observers in Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems with time delays. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(6):3885–3895. 4
- Kharrat, D., Gassara, H., El Hajjaji, A., & Chaabane, M. (2018). Adaptive Observer and Fault Tolerant Control for Takagi-Sugeno Descriptor Nonlinear Systems with Sensor and Actuator Faults. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 16(3):972–982. 5
- Kumar, A. & Daoutidis, P. (1999). *Control of nonlinear differential algebraic equation systems with applications to chemical processes*, volume 397. CRC Press. 32, 33, 34, 36
- Lan, J. & Patton, R. J. (2015). Robust fault-tolerant control based on a functional observer for linear descriptor systems. *IFAC-PapersOnLine*, 28(14):138–143. 5
- Lendek, Z. & Nagy, Z. (2017). Unknown input observer for a robot arm using TS fuzzy descriptor models. *1st Annual IEEE Conference on Control Technology and Applications, CCTA 2017*, 2017-Janua(1):939–944. 4, 15
- Li, J., Wang, Z., Shen, Y., & Rodrigues, M. (2019). Zonotopic fault detection observer for linear parameter-varying descriptor systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(11):3426–3445. 2
- Li, X., Lu, D., Karimi, H. R., Wang, Y., Wang, N., Wang, Y., Wang, N., Wang, Y., & Wang, N. (2018). Fault-tolerant control and observer design for uncertain fuzzy descriptor systems. *2017 International Conference on Fuzzy Theory and Its Applications, iFUZZY 2017*, 2017-Novem(2):1–6. 5
- Luenberger, D. G. (1964). Observing the State of a Linear System. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2):74–80. 26
- Luenberger, D. G. (1978). Time-invariant descriptor systems. *Automatica*, 14(5):473–480. 9
- Montiel, M., Astorga-Zaragoza, C.-M., Quintero, E., & Medina (2012). Modelo singular LPV de una columna de destilación binaria. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pages 124–129. 2

- Nguyen, V. A., Vermeiren, L., Dequidt, A., Nguyen, A. T., Dambrine, M., & Cung, L. (2018). Takagi-Sugeno fuzzy descriptor approach for trajectory control of a 2-DOF serial manipulator. *Proceedings of the 13th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, ICIEA 2018*, pages 1284–1289. 3
- Orjuela, R., Ichalal, D., Marx, B., Maquin, D., & Ragot, J. (2019). Polytopic models for observer and fault-tolerant control designs. *New Trends in Observer-Based Control: An Introduction to Design Approaches and Engineering Applications*, pages 295–335. 7
- Ortiz-Torres, G., Rumbo-Morales, J., Sorcia-Vázquez, F., Pérez-Vidal, A., Cruz-Rojas, A., Brizuela-Mendoza, J., & Ocegüera-Contreras, E. (2020). Concentration estimation and fault tolerant control in a cstr modelled as a quasi linear parameter varying system. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 20(1):51–66. 29, 32
- Osorio-Gordillo, G., Astorga-Zaragoza, C., Pérez Estrada, A., Vargas-Méndez, R., Darouach, M., & Boutat-Baddas, L. (2018). Fault estimation for descriptor linear systems based on the generalised dynamic observer. *International Journal of Systems Science*, 49(11):2398–2409. 4, 7
- Osorio-Gordillo, G. L., Darouach, M., Astorga-Zaragoza, C. M., & Boutat-Baddas, L. (2016). New dynamical observers design for linear descriptor systems. *IET Control Theory & Applications*, 10(17):2223–2232. 3, 12
- Osorio-Gordillo, G.-L., Darouach, M., Boutat-Baddas, L., & Astorga-Zaragoza, C.-M. (2019). *On Dynamic Observers Design for Descriptor Systems*. Elsevier Inc. 4
- Ouzaz, M. (2021). Simultaneous state and fault estimation for Takagi-Sugeno implicit models with Lipschitz constraints. *International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications*, 11(1):100–108. 5
- Pérez-Estrada, A. J., Osorio-Gordillo, G. L., Darouach, M., & Alma, M. (2019). Adaptive observer design for LPV systems. *IFAC-PapersOnLine*, 52(28):140–145. 7
- Pico, M. F. & Adam, E. J. (2017). Fault diagnosis and tolerant control using observer banks applied to continuous stirred tank reactor. *Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal*, 2(3):171–181. 30
- Scholz, L. (2015). Control Theory of Descriptor Systems Lecture Notes. Technical report, Technische Universität Berlin. 9, 12
- Shaker, M. S. (2015). A Robust Adaptive Observer-Based Time Varying Fault Estimation. *Amirkabir International Journal of Modeling, Identification, Simulation and Control (AIJ-MISC)*, 47(2):11–19. 4
- Skelton, R. E., Iwasaki, T., & Grigoriadis, K. M. (2001). A unified algebraic approach to linear control design. *Unified Algebraic Approach to Control Design*, pages 1–285. 47, 51, 66
- Takagi, T. & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetic*, 30(18):116–132. 14
- Venkata, S. K. & Rao, S. (2019). Fault detection of a flow control valve using vibration analysis and support vector machine. *Electronics*, 8:1062. 31
- Verde, C., Sylviane, G., Morales, R., & Montiel, M. (2013). *Monitoreo y Diagnóstico Automático de Fallas en Sistemas Dinámicos*. Trilas, Ciudad de México. México. 20, 21, 22
- Xu, S. & Lam, J. (2006). *Robust control and filtering of singular systems*, volume 332. Springer US. 63
- Zang, Q., Yue, H., & Pan (2019). Robust Control of Synchronous Generator Based on MIMO Nonlinear DAE System Model. *2019 Chinese Control Conference (CCC)*, pages 1209–1213. 3
- Zhiqiang, Z., Yijing, W., & Wenlong, Y. (2015). L2-gain fault tolerant control of singular Lipschitz systems in the presence of actuator saturation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, page 23. 5



**TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®**

cenidet[®]
*Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico*