



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Doctorado

Cálculo Fraccionario Aplicado en Procesamiento de
Imágenes y Señales

presentada por

MC. Jesús Emmanuel Solís Pérez

como requisito para la obtención del grado de
**Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**


Director de tesis

Dr. José Francisco Gómez Aguilar

Codirector de tesis

Dr. Juan Reyes Reyes

Cuernavaca, Morelos, México. Febrero de 2020.

 <small>Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico</small>	ACEPTACIÓN DE IMPRESIÓN DEL DOCUMENTO DE TESIS DOCTORAL	Código: CENIDET-AC-006-D20
		Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2008 7.1, 7.2.1, 7.5.1, 7.6, 8.1, 8.2.4	Página 1 de 1


Cuernavaca, Mor., a 7 de febrero de 2020

Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez
 Subdirector Académico
 PRESENTE


At'n: **Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez**
 Presidente del Claustro Doctoral
 del Departamento de Ingeniería Electrónica

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial del estudiante **M.C. Jesús Emmanuel Solís Pérez** manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado **Cálculo Fraccionario Aplicado en Procesamiento de Imágenes y Señales**, realizado bajo la dirección del **Dr. José Francisco Gómez Aguilar** y codirección del **Dr. Juan Reyes Reyes**, el trabajo se **ACEPTA** para proceder a su impresión.


ATENTAMENTE



Dr. José Francisco Gómez Aguilar
 CENIDET



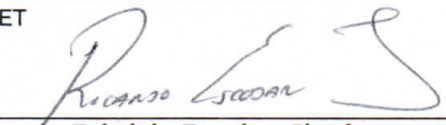
Dr. Juan Reyes Reyes
 CENIDET



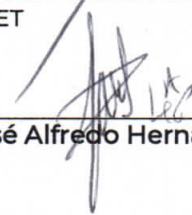
Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
 CENIDET



Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
 CENIDET



Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez
 CENIDET



Dr. José Alfredo Hernández Pérez
 UAEM

c.c.p: M.E. Guadalupe Garrido Rivera / Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
 c.c.p: Dr. Mario Ponce Silva / Jefe del Departamento de DIE.
 c.c.p: Expediente



“2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria”

Cuernavaca, Morelos, **13/febrero /2020**

OFICIO No. SAC/109/2020
Asunto: Autorización de impresión de tesis

JESÚS EMMANUEL SOLÍS PÉREZ
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado *“Cálculo Fraccionario Aplicado en Procesamiento de Imágenes y Señales”*, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE
Excelencia en Educación Tecnológica®
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



SEP TecNM
CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera. Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente.

GVGR/CHG

Dedicatoria

*A las dos estelas de luz que iluminan mi camino,
mi razón de ser y mi razón de existir,
mi amada esposa y mi adorada hija ♡.*

Agradecimientos

Al universo por las enseñanzas, dichas y alegrías en cada momento de mi vida.

A mi sagrado templo llamado cuerpo por soportar desvelos, presiones y enfermedades a causa del estrés.

A mi esposa por enseñarme a vivir cada minuto de nuestras vidas; por su amor, compañía, apoyo, comprensión y sobre todo, por creer en mi.

A mi hija, mi precioso regalo de vida, por enseñarme lo que es la felicidad, la humildad, la ilusión y la fe.

A mis padres, hermanos y mi suegra, por todo su apoyo y cariño.

A mi querido amigo Julio Betancourt por su amistad sincera; por cada momento escuchado, por cada consejo dado, por cada minuto obsequiado.

A mi Nova, por acompañarme en esas largas noches de trabajo.

Al Dr. José Francisco Gómez Aguilar por sus consejos, amistad, tiempo y apoyo; por impulsarme a crecer, a nunca olvidar de dónde vengo, pero sobre todo a tener siempre presente que el trabajo habla por uno mismo.

Al Dr. Juan Reyes Reyes por su tiempo, consejos y amistad brindada a lo largo de estos años.

A mis revisores, Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo, Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza, Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez y Dr. José Alfredo Hernández Pérez por la dedicación, comentarios y sugerencias para enriquecer mi trabajo.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico y al Departamento de Ingeniería Electrónica.

A la fundación Telmex-Telcel por el apoyo otorgado para contribuir a la educación de mi hija.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo otorgado a través de la beca de doctorado. Ya que sin éste, no hubiese sido posible llevar a cabo tal trabajo de investigación.



Resumen

Este documento presenta el diseño y desarrollo de algoritmos fraccionarios para el procesamiento de señales e imágenes.

En el área de procesamiento de señales, tres observadores fraccionarios de tipo Riemann-Liouville así como tres de tipo Khalil y Atangana conformable son propuestos para la reconstrucción de señales no estacionarias. Dichos observadores son representados en espacio-estado y sus ganancias se obtienen a partir de la solución de la ecuación diferencial modificada de Riccati de orden fraccionario. Las condiciones iniciales de esta ecuación, los órdenes fraccionarios del observador así como sus parámetros de ajuste son obtenidos por algoritmos de optimización tipo metaheurísticos.

A fin de demostrar el desempeño de los enfoques propuestos, los observadores diseñados son evaluados de acuerdo con la media del error al cuadrado y el porcentaje de ajuste entre la señal estimada y la señal real. Con base en los resultados de simulación, se demuestra que el observador fraccionario en el sentido de Riemann-Liouville es capaz de reconstruir una señal experimental en un 95 % aún con la presencia de ruido. Por otro lado, se demuestra que los observadores espectrales de tipo Khalil y Atangana conformable se desempeñan mejor en la tarea de reconstrucción en contraste con los observadores clásicos al tener un porcentaje de reconstrucción del 90 %. En esta área se concluye que los métodos de reconstrucción propuestos no sólo son capaces de describir la naturaleza de la señal en mayor porcentaje sino que lo hacen con el menor número de coeficientes de la serie de Fourier.

En el área de procesamiento de imágenes, el gradiente de una imagen es generalizado para proponer métodos de detección de bordes así como técnicas de segmentación fraccionarias. Dado que los operadores de Sobel y Prewitt son de los operadores más utilizados en la literatura, se propone generalizarlos con el operador de Caputo-Fabrizio. De acuerdo con los resultados de simulación obtenidos, se demuestra que este gradiente es robusto ante la presencia de ruido Gaussiano y sal-pimienta.

Así mismo, un gradiente basado en el filtro de kernel Gaussiano fraccionario en el sentido de Atangana-Baleanu es propuesto para desarrollar un método no supervisado para la segmentación de vasos sanguíneos en imágenes de retinas. Dicho método consiste en una etapa de preprocesamiento que involucra un kernel Gaussiano fraccionario con kernel no local y una etapa de segmentación basada en el análisis de la curvatura principal de la matriz Hessiana generalizada. Esta metodología es validada utilizando diferentes bases de datos de imágenes de retinopatías. También es comparado su desempeño con otros trabajos reportados en la literatura.

Finalmente, se concluye que la técnica de segmentación propuesta no solo es precisa y robusta ante la presencia de ruido sino que la falsa detección de vasos sanguíneos es menor. Lo anterior con base en las métricas de precisión (ACC), precisión balanceada (bACC) y sensibilidad (SEN).

Abstract

This document presents the development and design of fractional-order algorithms for signal and image processing.

In signal processing area, observers based on Fourier series involving the Riemann-Liouville, conformable of Khalil's type and conformable of Atangana's type are developed for non-stationary signal reconstruction. These observers are represented in space-state and their gains are obtained from fractional-order Riccati modified differential equation. The initial conditions of this equation, the observer's fractional orders and their setting parameters are obtained by metaheuristic optimization algorithms. In order to show the proposed approach performance, the observers are evaluated according to the mean squared error and the percentage of fit between the estimated signal and real signal. Based on the simulation results, it is demonstrated that the fractional observer in Riemann-Liouville sense is able to reconstruct an experimental signal in 95 % even with noise presence. On the other hand, it is shown that the spectral observers of Khalil's and conformable Atangana's type perform better in reconstruction task in contrast to the classical observers obtaining a reconstruction percentage of 90 %. In this area, it is concluded that the proposed fractional reconstruction methods are not only capable of describing signal nature in a higher percentage but that they do so with the least Fourier series coefficient number.

In image processing area, the gradient of an image is generalized to propose edge detection methods as well as fractional segmentation techniques.

Since the Sobel and Prewitt operators are among the most used operators in the literature, it is proposed to generalize them with Caputo-Fabrizio fractional-order operator. According to the simulation results, it is shown that this gradient is robust against Gaussian and salt-pepper noise.

Likewise, a gradient based on the fractional Gaussian kernel filter involving the Atangana-Baleanu fractional-order derivative is proposed to develop an unsupervised method for blood vessel segmentation in retinal images. This method consists of a preprocessing stage that involves a fractional Gaussian kernel with non-local kernel and a segmentation stage based on the generalized Hessian matrix main curvature analysis. This methodology is validated by using several retinopathy image databases. Its performance is also compared with other works reported in the literature obtaining better results.

Finally, it is concluded that the proposed segmentation technique is not only accurate but also robust in noise presence but that the false blood vessel detection is lower. The above based on the metrics accuracy (ACC), balanced accuracy (bACC) and sensitivity (SEN).

Índice general

Dedicatoria	i
Agradecimientos	ii
Resumen	iii
Abstract	iv
Índice de figuras	viii
Índice de tablas	ix
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Planteamiento del problema	6
1.3. Hipótesis	6
1.4. Objetivos	6
1.4.1. General	6
1.4.2. Específicos	7
1.5. Estructura de la tesis	7
2. Introducción al cálculo fraccionario	8
2.1. Conclusiones parciales	15
3. Cálculo fraccionario aplicado al procesamiento de señales	16
3.1. Introducción	16
3.2. Observador espectral tipo Kalman para reconstrucción de señales	17
3.3. Observador espectral tipo Kalman fraccionario	19
3.3.1. Esquema numérico del observador fraccionario	19
3.3.2. Análisis de estabilidad del observador fraccionario	21
3.3.3. Optimización del observador espectral fraccionario	24
3.3.4. Resultados de simulación	25
3.4. Observador espectral tipo Kalman conformable	40
3.4.1. Optimización del observador espectral conformable	41
3.4.2. Resultados de simulación	43
3.5. Conclusiones parciales	50
4. Cálculo fraccionario aplicado al procesamiento de imágenes	51
4.1. Introducción	51
4.2. Operadores basados en derivadas	52
4.3. Índices de desempeño para el procesamiento de imágenes	53
4.4. Gradiente fraccionario para la detección de bordes	55

4.4.1. Solución numérica del gradiente en el sentido de Caputo-Fabrizio	57
4.4.2. Resultados de simulación	58
4.5. Matriz Gaussiana fraccionaria en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo para la segmentación de vasos sanguíneos	68
4.5.1. Solución numérica del kernel Gaussiano fraccionario en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo	68
4.5.2. Gradiente Gaussiano fraccionario	69
4.5.3. Algoritmo de segmentación de vasos sanguíneos	70
4.5.4. Resultados de simulación	73
4.6. Conclusiones parciales	79
5. Conclusiones y trabajos futuros	80
5.1. Conclusiones generales	80
5.2. Trabajos futuros	82
A. Producción científica	94

Índice de figuras

1.1. Estado del arte del procesamiento de señales en la reconstrucción y modelado de señales.	3
1.2. Estado del arte en la segmentación o detección de bordes en imágenes digitales.	5
1.3. Estado del arte en la segmentación de imágenes digitales para propósitos médicos.	5
3.1. Análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales de la matriz P (3.21) con $\lambda = 7.393$, $\omega = 1.1661$, $\sigma_1 = 55.2441$, $P_1(0) = \sigma_1 I$, $\sigma_2 = 54.9$, $P_2(0) = \sigma_2 I$ y $\gamma_1 = 1.1046$.	22
3.2. Análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales de la matriz P (3.21) con $\lambda = 7.393$, $\omega = 1.1661$, $\sigma_1 = 55.2441$, $P_1(0) = \sigma_1 I$, $\sigma_2 = 54.9$, $P_2(0) = \sigma_2 I$ y $\gamma_1 = 1.1046$.	23
3.3. Ejemplo 3.3.4 Estimación de la actividad eléctrica cerebral y coeficientes estimados para diferentes ordenes: (b) $n = 3$ y (d) $n = 2$ ambos con enfoque clásico.	27
3.4. Ejemplo 3.3.4 Estimación de la actividad eléctrica cerebral y coeficientes estimados para los diferentes enfoques: (b) $n = 1$ y (d) $n = 1$; caso clásico y fraccionario, respectivamente.	28
3.5. Ejemplo 3.3.4 Comparación entre dos observadores de diferente orden y sus dinámicas del error. (a) Observador clásico de seis estados y (c) observador clásico de cuatro estados.	29
3.6. Ejemplo 3.3.4 Comparación entre un observador clásico de orden $n = 1$ y un observador clásico de orden $n = 1$	30
3.7. Ejemplo 3.3.4 Estimación de la aceleración de la componente Norte-Sur y coeficientes estimados para diferentes enfoques: (b) $n = 3$ caso clásico y (d) $n = 1$ caso fraccionario.	32
3.8. Ejemplo 3.3.4 comparación entre (a) un observador clásico de orden $n = 3$ y (c) un observador fraccionario de orden $n = 1$ y las dinámicas de sus errores.	33
3.9. Esquemático del circuito de Chua basado en amplificadores operacionales [1].	34
3.10. Ejemplo 3.3.4 reconstrucción de los voltajes V_{c_1} en el caso clásico y fraccionario.	35
3.11. Ejemplo 3.3.4 Reconstrucción de los voltajes V_{c_2} en el caso clásico y fraccionario.	36
3.12. Ejemplo 3.3.4 Voltajes estimados (a) V_{c_1} y (c) V_{c_2} por dos observadores clásicos de orden $n = 3$	37
3.13. Ejemplo 3.3.4 Voltaje estimado (a) V_{c_1} y (c) V_{c_2} por dos observadores fraccionario de orden $n = 1$	38
3.14. Retrato fase de las señales reconstruidas por el observador clásico (3.44) y fraccionario (3.43) respectivamente.	39
3.15. Ejemplo 3.4.2 estimación de ECG y coeficientes estimados para $n = 3$, $n = 2$, caso clásico y conformable.	45
3.16. Ejemplo 3.4.2 estimación de EMG y coeficientes estimados para $n = 3$, $n = 2$, caso clásico y conformable.	47
3.17. Ejemplo 3.4.2 estimación del PCG y coeficientes estimados para los observadores de orden $n = 3$ y $n = 2$ caso clásico y conformable.	49

4.1. Filtros derivativos clásicos	54
4.2. Filtros derivativos fraccionarios en el sentido de Caputo-Fabrizio con $\gamma = 0.6$	57
4.3. Barrido del orden fraccionario para el gradiente fraccionario en el sentido de Caputo-Fabrizio.	59
4.4. Calcificaciones de seno.	64
4.5. Calcificaciones de seno.	65
4.6. Cáncer de seno.	66
4.7. Cáncer de seno.	67
4.8. Resultados numéricos para el kernel Gaussiano de dimensión 1-D en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo (4.41) , a) $\sigma = 1$, b) $\sigma = 1.5$, c) $\sigma = 2$, d) $\sigma = 2.5$	70
4.9. Resultados numéricos para el kernel Gaussiano de dimensión 2-D en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo.	71
4.10. Esquema propuesto para la segmentación de vasos sanguíneos basado en la matriz Hessiana fraccionaria.	71
4.11. Elección del valor para eliminar pequeños objetos conectados.	74
4.12. Detección de vasos sanguíneos utilizando el filtro de kernel Gaussiano fraccionario para atenuar ruido en el canal verde y para generalizar la matriz Hessiana, imagen obtenida de HRF [2], α , β y σ optimizados por CS (ver Algoritmo 1)	75
4.13. Comparación entre la detección de vasos sanguíneos obtenida por el enfoque propuesta y el ground truth proporcionado por la segmentación manual. Imagen de entrada: paciente con glaucoma de HRF.	76
4.14. Detección de vasos sanguíneos utilizando el filtro de kernel Gaussiano fraccionario para atenuar ruido en el canal verde y para generalizar la matriz Hessiana, imagen obtenida de HRF [2], α , β y σ optimizados por CS (ver Algoritmo 1).	77
4.15. Comparación entre la detección de vasos sanguíneos obtenida por el enfoque propuesta y el ground truth proporcionado por la segmentación manual. Imagen de entrada: paciente con retinopatía diabética de HRF.	78

Índice de tablas

3.1. Resultados de optimización de los observadores espectrales para el ejemplo 3.3.4 Actividad eléctrica cerebral	27
3.2. Resultados de optimización de los observadores espectrales para el ejemplo 3.3.4 Señal de terremoto	31
3.3. Resultados de optimización del observador espectral para el ejemplo 3.3.4 circuito de Chua	34
3.4. Parámetros de los observadores para el ejemplo 3.4.2	44
3.5. Parámetros de los observadores para el ejemplo 3.4.2	46
3.6. Parámetros de los observadores, Ejemplo 3.4.2	48
4.1. Comparación entre los operadores clásicos y fraccionario aplicados a imágenes con ruido sal y pimienta.	60
4.2. Comparación entre los operadores clásicos y fraccionario aplicados a imágenes con ruido Gaussiano.	61
4.3. Comparación entre los operadores clásicos y fraccionario con la detección de bordes manual.	62
4.4. Pruebas de desempeño de los detectores de bordes clásicos y el detector fraccionario propuesto.	63
4.5. Pruebas de desempeño de los detectores de bordes clásicos y el detector fraccionario propuesto.	63
4.6. Comparación entre el método propuesto con otros trabajos reportados en la literatura utilizando la base de datos completa de DRIVE [3].	76

Introducción

It is a good morning exercise for a research scientist to discard a pet hypothesis every day before breakfast. It keeps him young.
— Konrad Lorenz.

Este capítulo presenta una revisión del estado del arte, comenzando con el procesamiento de señales y posteriormente con el procesamiento de imágenes. Además, el planteamiento del problema que deriva de la revisión bibliográfica, la hipótesis planteada en este tema de investigación así como los objetivos general y específicos que permitirán resolver dicha problemática. Finalmente, se muestra la estructura de la tesis.

1.1. Estado del arte

El procesamiento de señales tiene como objetivo extraer información útil a partir de representaciones matemáticas y operaciones algorítmicas. Cuando una señal es representada por una regla, expresión matemática o bien una tabla de búsqueda ésta es llamada señal determinística; si ésta se genera de manera aleatoria y no se puede predecir con anticipación entonces se le conoce como señal aleatoria.

Existen dos tipos de señales: analógica y digital. En el caso de la primera, la mayoría de operaciones son llevadas a cabo en el dominio del tiempo mientras que para la segunda se utilizan tanto el dominio del tiempo como el de la frecuencia.

Algunos autores como Sejdic *et al.* [4] consideran que el procesamiento de señales consta de cuatro etapas principales. Sin embargo, otros trabajos como el de Boashash [5] mencionan que pueden llevar más etapas involucradas, por ejemplo:

1. Adquisición de la señal.
2. Definición del problema.
3. Relación matemática entre la señal y el sistema.
4. Análisis de la señal.

5. Extracción de características.
6. Toma de decisiones.

Una etapa interesante dentro del procesamiento de señales es el análisis de señales cuyo objetivo es desarrollar técnicas cuantitativas para entender las propiedades de las señales, procesos que las generan o bien extraer características que puedan ser utilizadas para propósitos de clasificación. Aquí, la mayoría de métodos reportados en la literatura son desarrollados bajo estimación espectral [6–8] y modelado de señales.

La tarea principal de la estimación espectral es proporcionar herramientas para tratar de estimar la distribución de energía o potencia de una señal a partir de un conjunto de observaciones mientras que el modelado de señales involucra el desarrollo de modelos paramétricos y no paramétricos para representar señales del mundo real. Los primeros consideran que la formulación desarrollada está especificada por un número finito de parámetros mientras que para los segundos no existe una restricción de éstos.

El modelado de señales involucra las siguientes etapas:

- Desarrollo de un modelo.
- Selección adecuada del número de parámetros a utilizar.
- Ajuste del modelo a los datos reales.
- Aplicación del modelo

Algunos de los modelos paramétricos reportados en la literatura para el ajuste de datos experimentales son los observadores. Por ejemplo: modos deslizantes [9–15], Luenberger [16, 17], observadores de orden completo y reducido [18], proporcional integral [19], observadores basados en los coeficientes de la serie de Fourier [20–22], por mencionar algunos.

Dado que algunas señales del mundo real siguen distribuciones Gaussianas así como no Gaussianas [23] y son además invariantes bajo operaciones de procesamiento de señales lineales, se han propuesto métodos estadísticos de orden superior. Los momentos de orden superior no poseen la propiedad de correlación y densidad de energía espectral pero tienen la ventaja de eliminar ruido Gaussiano aditivo, identificar la respuesta de fase de un sistema utilizando sólo los datos de salida y caracterizar procesos no gaussianos o sistemas no lineales. No obstante, el cálculo de estos momentos requiere de una gran cantidad de datos y además, su evaluación e interpretación necesitan de la intervención de un experto con bases sólidas en estadística.

Coronel *y col.* [24] propusieron un observador basado en el trabajo de Torres *y col.* [25] utilizando la derivada de Riemann-Liouville de orden variable para reconstruir señales artificiales y reales. Sin embargo, en los resultados presentados, el orden mínimo de los observadores diseñados fue de $n = 3$. Es decir, el orden de los sistemas dinámicos fue de $N = 2n$. Además requería del remuestreo de las señales experimentales y su carga computacional se elevaba al considerar órdenes variables en la derivada fraccionaria.

El interés de seguir proponiendo modelos paramétricos fraccionarios va encaminado en la necesidad de diseñar representaciones matemáticas precisas que permitan entender mejor la naturaleza de la señal; extraer características para aplicaciones de reconocimiento de patrones; pronóstico del comportamiento futuro de la señal, considerando modelos dinámicos fraccionarios de orden reducido. Ante esto, se necesitan modelos cuya autocorrelación decaiga más lentamente, es decir, modelos con memoria larga [23] y por otro lado, representaciones matemáticas invariantes con respecto a la escala conocidas

como representaciones fractales. La Figura 1.1 muestra en resumen el estado del arte con respecto al uso de observadores para el modelado de señales.

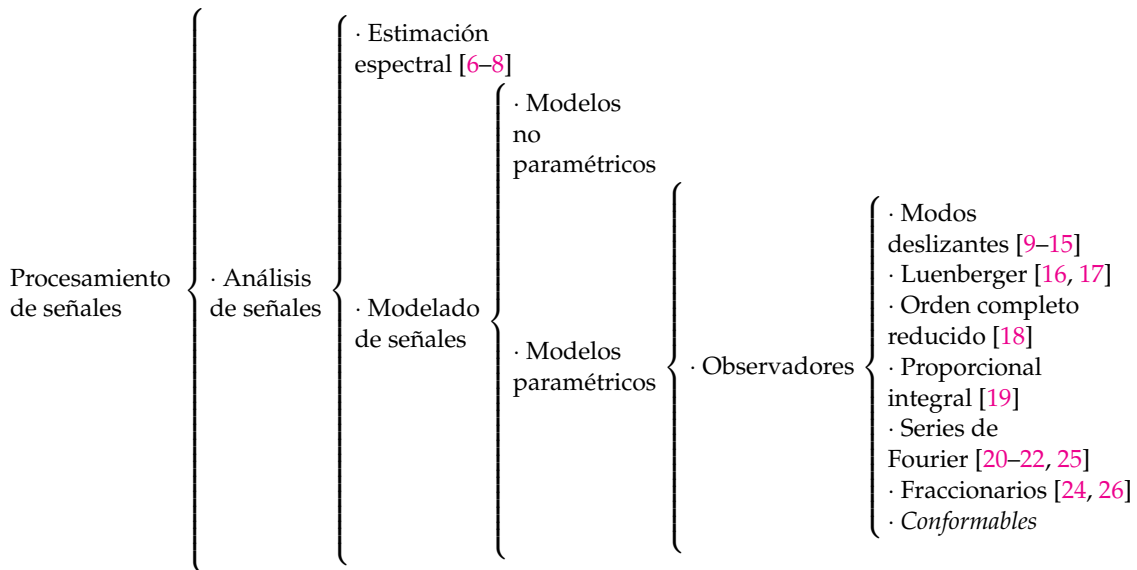


Figura 1.1: Estado del arte del procesamiento de señales en la reconstrucción y modelado de señales.

La visión por computadora es el conjunto de herramientas matemáticas basadas en modelos probabilísticos y físicos que intentan recuperar la apariencia de los objetos así como su forma tridimensional [27]. Estas herramientas, robustas ante el ruido y eficientes en términos de tiempo de ejecución de recursos como también de espacio, han sido utilizadas en tareas específicas como la detección de bordes y la segmentación.

Los dos principales métodos en la detección de bordes son: los operadores de coincidencia (TM) y los enfoques de gradiente diferencial (DG). Entre los primeros podemos encontrar el operador de Prewitt [28], Kirsch [29] así como Robinson mientras que en los segundos se tienen los operadores de Roberts [30], Sobel [31] y Frei-Chen [32].

Otros métodos reportados son: el algoritmo de detección de Canny [33] y el de Marr-Hildreth [34] que hacen uso de los operadores de Sobel y Laplaciano del Gaussiano, respectivamente.

La detección de bordes ha sido presentada en la literatura como una alternativa a la segmentación; cuya ventaja es la reducción del espacio necesario para almacenar la información, la cantidad de uso de recursos para procesarla y posteriormente analizarla. La característica principal de los operadores DG es que sólo requieren dos máscaras, una para la dirección en x y la otra para y mientras que los TM pueden llegar a utilizar hasta 12 máscaras de convolución.

Por ejemplo, Gao *y col.* [35] propusieron un cuaternión diferencial fraccionario mientras que Tian *y col.* [36] introdujeron un operador de gradiente de orden fraccionario. Ambos autores utilizaron la derivada de Grünwald-Letnikov y compararon sus resultados con los obtenidos por el operador de Sobel teniendo resultados visuales aceptables.

Nandal *y col.* [37] implementaron la mejora de características y contraste de imágenes utilizando el operador de Riemann-Liouville. Evaluaron los componentes de los bordes obtenidos y analizaron el desempeño de su operador con diferentes métricas. De acuerdo con sus resultados, lograron mejorar el contraste de los píxeles en el primer plano y el nivel de gris del fondo de la imagen.

Godbole y Phadke [38] desarrollaron un algoritmo para la detección de bordes en imágenes satelitales. De acuerdo con las métricas: relación pico de señal a ruido (PSNR), la media del error al cuadrado (MSE), comprensión visual humana y tiempo transcurrido pudieron determinar el desempeño de los tres métodos utilizados. Método de orden fraccionario, operador de Canny así como el Laplaciano del Gaussiano.

Mekideche y Ferdi [39] propusieron un algoritmo de detección de bordes corto sin operaciones de suavizado. Este algoritmo se basa en una máscara de orden diferencial utilizada como kernel de convolución para resaltar los bordes. En los resultados obtenidos, concluyeron que no era necesario agregar una etapa de preprocesamiento ya que su algoritmo era eficiente, inmune en términos de ruido y capaz de detectar bordes con precisión.

Por otro lado, la segmentación de imágenes tiene como finalidad encontrar grupos de píxeles continuos. Las técnicas actuales se basan en la optimización de criterios como la consistencia intraregional y las longitudes o diferencias interregionales mientras que otras incluyen algoritmos basados en contornos activos [40], conjuntos de niveles [41], división y fusión de regiones [42, 43], desplazamiento de medio [44] y cortes normalizados [45].

La segmentación se ha llevado al área de procesamiento de imágenes médicas para realizar la detección de vasos en imágenes de: rayos X de angiografías, angiografías de arterias coronarias, angiografías de resonancia magnética y retinas por mencionar algunas. Aquí, la extracción de vasos sanguíneos se realiza a partir de la convolución de varios filtros con la imagen de entrada debido a que las venas tienen diferentes tamaños y orientaciones. Sin embargo, este enfoque presenta una desventaja: requieren demasiadas máscaras de convolución y la imagen, al ser de alta resolución, es escalada para reducir el esfuerzo computacional lo que trae como consecuencia pérdida de información.

Almotiri *y col.* [46] mencionan que los operadores basados en gradientes y los operadores de coincidencia son ineficientes e imprecisos. Por esta razón, diferentes enfoques se han propuesto: técnicas basadas en kernel, seguimiento de vasos, operaciones morfológicas, multiescala, basadas en modelo, umbral local adaptable y máquinas de aprendizaje.

Los algoritmos basados en seguimiento de vasos rastrean las crestas de los vasos sanguíneos a partir del cruce por cero del gradiente y la curvatura principal. Sin embargo, este método requiere de una etapa de preprocesamiento que implica pasos complicados para mejorar los vasos de diferentes tamaños y orientaciones.

Un ejemplo de este algoritmo es el propuesto por Wu *y col.* [47] cuya segmentación de vasos se desarrolló a partir de una técnica combinada de la matriz Hessiana y filtros de coincidencia con el objetivo de extraer la mayor cantidad de información de los bordes de las venas.

Martínez-Jiménez *y col.* [48] desarrollaron un algoritmo de variación para mejorar la detección de arterias en angiogramas coronarios basados en la matriz Hessiana. Para ello utilizaron la derivada de Grünwald-Letnikov con órdenes mayores a 2 y validaron el desempeño de su propuesta con el área bajo la curva de características operativas del receptor (ROC).

Thanh *y col.* [49] propusieron una curvatura principal adaptativa y tres métodos para la segmentación de vasos sanguíneos basados en: diferencias centrales, el operador de Sobel y Prewitt. Estos autores consideran que su metodología puede ser utilizada para la segmentación de vasos en otros órganos u otras partes del cuerpo. Para validar su propuesta, utilizaron la base de datos de DRIVE así como algunas métricas de segmentación tales como: el índice de Jaccard (JC), la similitud de Sorensen-Dice (SD), la coincidencia de contorno entre la imagen segmentada y la segmentación manual.

Santosh Kumar y Radhika [50] diseñaron un enfoque llamado segmentación basada en curvaturas principales máximas optimizadas para la extracción de vasos sanguíneos. Este algoritmo consiste de dos etapas: la primera considera el algoritmo de enjambre de

partículas (PSO) para encontrar el píxel óptimo global y así atenuar el ruido presente con un filtro Gaussiano. La segunda con cuatro subetapas: las curvaturas máximas principales para la extracción de vasos sanguíneos, la mejora de contraste utilizando la ecualización de histograma adaptable, el cálculo del umbral basado en la técnica de análisis de datos autoorganizado iterativo (ISODATA) y operaciones morfológicas para precisar la segmentación. La técnica propuesta por estos autores fue validada con la base de datos de STARE y DRIVE.

Trabajos con operadores de coincidencia se pueden encontrar en las siguientes referencias [51–54] mientras que las Figuras 1.2 y 1.3 muestran el estado del arte correspondiente al procesamiento de imágenes.

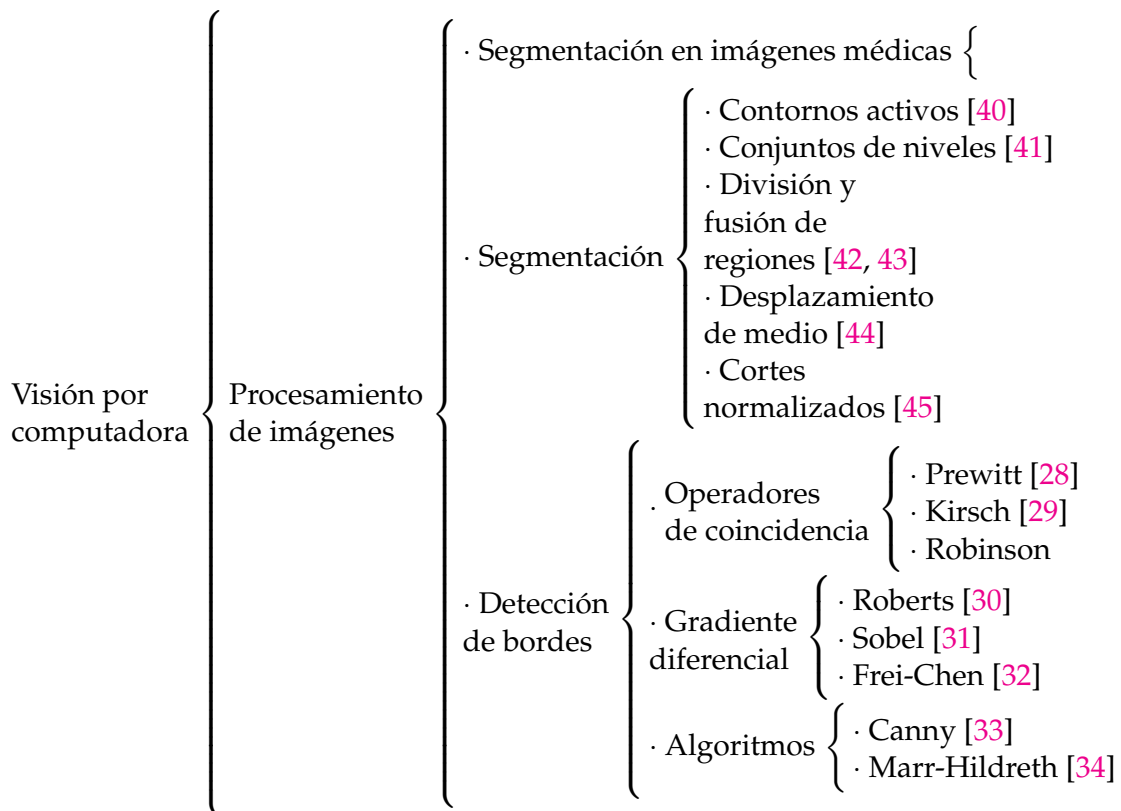


Figura 1.2: Estado del arte en la segmentación o detección de bordes en imágenes digitales.

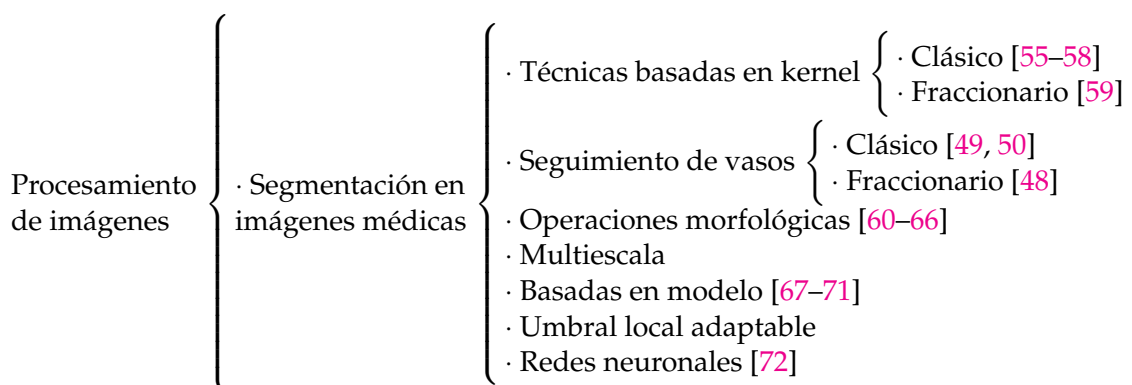


Figura 1.3: Estado del arte en la segmentación de imágenes digitales para propósitos médicos.

1.2. Planteamiento del problema

El modelado de señales requiere de modelos paramétricos o no paramétricos capaces de representar la dinámica real de los fenómenos que ocurren en la naturaleza. Dichos modelos son utilizados principalmente para la extracción, reconocimiento o clasificación de características. Sin embargo, algunas señales siguen distribuciones Gaussianas y no Gaussianas. Otras tales como: electrocardiogramas (ECG); electromiogramas (EMG); fonogramas (PCG); electroencefalogramas (EEG) son afectadas por ruido Gaussiano, impulso y Poisson [73, p. 309]. Frecuentemente se ha hecho uso de operadores clásicos para llevar a cabo esta tarea. Sin embargo, estas herramientas no han sido capaces de describir la naturaleza en su totalidad debido a que ésta es asociativa y no asociativa [74].

Métodos estadísticos de orden superior y técnicas basadas en operadores fraccionarios de orden variable con kernel de potencia han sido propuestos para caracterizar procesos no gaussianos o sistemas no lineales. Sin embargo, los métodos estadísticos propuestos requieren de la intervención de un experto en el área así como las técnicas fraccionarias demandan un alto consumo de recursos computacionales.

Motivado por estas necesidades, se propone diseñar modelos paramétricos con memoria así como modelos con representaciones matemáticas invariantes cuyo esfuerzo computacional sea menor y su precisión sea mayor en contraste con las técnicas propuestas en la revisión bibliográfica.

En otro contexto, la detección de bordes y la segmentación son afectadas por diversos factores. Por ejemplo: desenfoque en las imágenes, ruido de fotones, irregularidades en las superficies de los objetos, efectos electrónicos, semánticos, de discretización, ruido Gaussiano, impulso y Poisson lo que conlleva a pérdida de información o desplazamiento de las estructuras en las imágenes. Los esquemas de detección de bordes propuestos están constituidos de tres etapas principalmente: la diferenciación, el suavizado o atenuación de ruido y el etiquetado. Sin embargo, la diferenciación es un problema ya que los operadores clásicos propuestos son sensibles al ruido y los filtros utilizados para atenuarlo son estáticos y no se pueden adaptar a una imagen determinada. Por esta razón, algunas propuestas fraccionarias se han desarrollado para satisfacer estas necesidades. No obstante, estos operadores poseen una singularidad artificial lo que se traduce en una descripción incompleta de la naturaleza de la imagen a estudiar. En un contexto más específico, un operador fraccionario con kernel local puede llegar a detectar bordes falsos en imágenes médicas lo que se traduce en un diagnóstico médico erróneo.

Por ello, el objetivo es proponer operadores así como técnicas con kernel no local para describir de manera eficiente y precisa el efecto de memoria, la naturaleza asociativa y no asociativa en las imágenes con la finalidad de proporcionar una solución adaptable a los diferentes niveles de ruido.

1.3. Hipótesis

Mediante el diseño de algoritmos y técnicas con base en cálculo fraccionario, se logrará reducir la presencia de ruido y extraer características en imágenes y señales obtenidas de fenómenos con dinámicas complejas.

1.4. Objetivos

1.4.1. General

Diseñar algoritmos y técnicas de filtrado fraccionario para procesar imágenes y señales con dinámicas complejas.

1.4.2. Específicos

- Emplear el enfoque fraccionario en técnicas de procesamiento de señales e imágenes con dinámicas complejas.
- Definir algoritmos y técnicas de filtrado basados en cálculo fraccionario.
- Aplicar los algoritmos y técnicas diseñadas al procesamiento de señales e imágenes.
- Comparar el desempeño entre el enfoque fraccionario y el enfoque clásico en el procesamiento de señales e imágenes.

1.5. Estructura de la tesis

El presente documento está organizado como sigue. En el Capítulo 2 se presenta una introducción al cálculo fraccionario así como las derivadas fraccionarias, conformables y conformables fraccionarias utilizadas en los métodos propuestos.

En el Capítulo 3 se muestra el diseño y desarrollo de observadores espectrales tipo Kalman para la reconstrucción de señales no estacionarias utilizando derivadas fraccionarias y conformables. Así mismo, se presentan los algoritmos de optimización empleados para la sintonización de los observadores propuestos y la evaluación de su desempeño de acuerdo con la Raíz de la Media del Error al Cuadrado (RMSE) y el porcentaje de la variación de la señal estimada con respecto a la señal real (FIT).

El Capítulo 4 está dedicado al diseño de gradientes fraccionarios para la detección de bordes y segmentación de vasos sanguíneos utilizando derivadas fraccionarias de kernel no singular. El algoritmo de detección de bordes diseñado generaliza al operador de Sobel y Prewitt por medio de la derivada de Caputo-Fabrizio mientras que el método de segmentación propuesto se basa en la generalización de la matriz Hessiana con el gradiente Gaussiano fraccionario en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones a partir de los resultados obtenidos en el desarrollo de este tema de investigación además de los trabajos futuros.

Introducción al cálculo fraccionario

Individuals differ from one another in their ability to understand complex ideas, to adapt effectively to the environment, to learn from experience, to engage in various forms of reasoning, to overcome obstacles by taking thought.
— Human intelligence, Neisser y col., 1996

En 1965, Leibniz atrajo la atención de L'Hôpital al haber propuesto la notación $d^n y/dx^n$. En una de las correspondencias, L'Hôpital le preguntó: “¿Qué si n es $1/2$?”. Leibniz en su respuesta concluyó: “Esta es una aparente paradoja de la cual, un día, se extraerán consecuencias útiles” [75].

Lagrange [76] contribuyó indirectamente al cálculo fraccionario debido a que desarrolló la ley de exponentes (índices) para operadores diferenciales de orden entero. Dicha ley fue expresada como

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y. \quad (2.1)$$

Después, Laplace [77, p. 85 y 186] en 1812 definió una derivada fraccionaria por medio de una integral para que en 1819 Lacroix [78, p. 409-410] desarrollara la n -ésima derivada

$$\frac{d^n}{dx^n} y = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad (2.2)$$

comenzando con $y = x^m$ con $m > 0 \in \mathbb{R}$. Él obtuvo

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad (2.3)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma propuesta por Adrian Marie Legendre (1752-1833) a partir de la ecuación del factorial

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (2.4)$$

La integral en la ecuación (2.4) muestra que

$$\Gamma(1) = 1, \quad (2.5)$$

y por lo tanto

$$\Gamma(n) = (n - 1)!, \quad \text{Re}(n) > 0, \quad (2.6)$$

además, $\Gamma(x)$ es continua y diferenciable [79].

Fourier [80] obtuvo una definición de derivada fraccionaria a partir de la representación integral de $f(x)$, *i.e.*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma) d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(p(x - \gamma) + \frac{n\pi}{2}\right) dp. \quad (2.7)$$

Aún cuando Leibniz, Euler, Laplace, Lacroix y Fourier mencionaron las derivadas de orden arbitrario en sus trabajos, el primero en utilizar el operador fraccionario fue Niels Henrik Abel [81] en 1823. El operador fue aplicado para la solución de una ecuación integral en la formulación del problema de tautócrona.

Liouville [82] fue el primero en estudiar y aplicar el cálculo fraccionario a problemas en teoría potencial. En 1832 publicó tres memorias y varias publicaciones mas. En sus estudios él asumía que la derivada arbitraria de una función $f(x)$ podía ser expandida en series como sigue

$$\mathcal{D}^\gamma f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\gamma e^{a_n x}. \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) es conocida como la primer ecuación de Liouville para una derivada fraccionaria. Sin embargo, esta definición estaba restringida para ciertos valores de γ .

Posteriormente, obtuvo una segunda definición partiendo de una integral definida relacionada a la integral gamma de Euler

$$\mathcal{D}^\gamma x^{-\gamma} = \frac{(-1)^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty u^{a+\gamma+1} e^{-xu} du, \quad (2.9)$$

donde, después de una transformación $xu = t$, desarrolló la segunda definición para una derivada fraccionaria

$$\mathcal{D}^\gamma x^{-a} = \frac{(-1)^\gamma \Gamma(a + \gamma)}{\Gamma(a)} x^{-a-\gamma}. \quad (2.10)$$

No obstante, esta definición era útil solamente para funciones de tipo x^{-a} y no aplicable para una amplia clase de funciones.

Riemann [83], en sus días de estudiante, desarrolló y publicó en 1876 su teoría de integración fraccionaria. Buscó una generalización de la serie de Taylor y la derivó para obtener

$$\mathcal{D}^{-\gamma} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_c^x (x - t)^{\gamma-1} f(t) d(t) + \psi(x), \quad (2.11)$$

donde $\psi(x)$ es una función complementaria debido a la ambigüedad que presenta el límite inferior de integración c .

Hargreave [84] en 1848, escribió por primera vez la generalización de la n -ésima derivada de Leibniz de un producto expresada como

$$\mathcal{D}^\gamma f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma}{n} D^n f(x) \mathcal{D}^{\gamma-n} g(x), \quad (2.12)$$

donde D^n es la diferenciación ordinaria, $\mathcal{D}^{\gamma-n}$ el operador fraccionario y $\binom{\gamma}{n}$ la generalización de los coeficientes binomiales

$$\binom{\gamma}{n} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{n!\Gamma(\gamma-n+1)}. \quad (2.13)$$

La definición de Riemann-Liouville apareció por primera vez en el trabajo de Sonin [85] en 1869. Para ello, el punto de partida fue la fórmula integral de Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt. \quad (2.14)$$

No obstante, el operador (2.14) no tiene un polo sino un punto de ramificación cuando $n \in \mathbb{Q}$.

Integral y derivada de Riemann-Liouville

La integral fraccionaria de Riemann-Liouville fue obtenida por Lauren [86] en 1884 a partir de un contorno dado como un circuito abierto. Esta integral está expresada en la siguiente definición

Definición 1. Sea $\gamma \in \mathbb{R}_+$. El operador ${}_a\mathcal{D}_t^{-\gamma}$ está definido sobre $L_1[a, t]$ por

$${}_a\mathcal{D}_t^{-\gamma} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t (t-\tau)^{\gamma-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.15)$$

para $a \leq x \leq t$. Además, $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma de Euler (2.4).

Este operador satisface las siguientes propiedades

- Si $f(z)$ es una función analítica de variable compleja, entonces la derivada $\mathcal{D}^\gamma f(z)$ es una función de γ y z .
- Si $\gamma > 0, \gamma \in \mathbb{N}$, entonces la operación $\mathcal{D}^\gamma f$ debe producir el mismo resultado.
- Si $\gamma < 0, \gamma \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^\gamma f(z)$ debe producir el mismo resultado que la integración n -fold.
- Si $\gamma = 0$, entonces la función permanece sin cambios, es decir $\mathcal{D}^0 f = f$.
- Los operadores fraccionarios deben ser lineales.
- La ley de exponentes es válida para la integración de orden arbitrario, esto es $\mathcal{D}^{-\mu} \mathcal{D}^{-\gamma} f = \mathcal{D}^{-\mu-\gamma} f(z)$.

De este modo, cuando $a = 0$ se tiene la definición de Riemann (2.8) pero sin función complementaria y si $a = -\infty$ entonces se obtiene una equivalencia a la primera definición de Liouville (2.8).

El siguiente operador fue obtenido por continuación analítica al tratar de demostrar que no se puede reemplazar el orden $-\gamma$ por γ debido a que la ecuación (2.15) es divergente. Al resultado de esta operación se le conoce como derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y está dada por la siguiente expresión.

Definición 2. Sea $\gamma \in \mathbb{R}_+$ y $n = [\gamma]$. El operador ${}^{RL}_a\mathcal{D}_t^\gamma$ está definido por

$${}^{RL}_a\mathcal{D}_t^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma-n+1}} d\tau, \quad n-1 < \gamma < n, \quad (2.16)$$

donde a y t son los límites de operación ${}^{RL}_0\mathcal{D}_t^\gamma f(t)$ y $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma de Euler.

Derivada de Grünwald-Letnikov

Los trabajos de Grünwald [87] y Letnikov [88] sentaron las bases para una nueva definición de derivada fraccionaria. Partieron de la idea de Liouville utilizando el límite de un cociente considerando diferencias de orden fraccionario. El resultado fue la siguiente expresión

Definición 3. Sea $\gamma \in \mathbb{R}_+$. El operador ${}^{GL}\mathcal{D}_x^\gamma$ está definido por

$${}^{GL}\mathcal{D}_x^\gamma f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\gamma f)(x)}{h^\alpha}, \quad (2.17)$$

donde,

$$(\Delta_h^\gamma f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\gamma}{k} f(x - kh), \quad \gamma > 0, \quad (2.18)$$

y $\binom{\gamma}{k}$ es el coeficiente binomial generalizado.

En esta definición el término $(\Delta_h^\gamma f)(x)$ es una formulación fraccionaria de una diferencia hacia atrás. Además, es válida para funciones arbitrarias $f(x)$ pero la convergencia de la sumatoria infinita no es garantizada para todas estas.

Derivada de Caputo

Michele Caputo [89] en 1967, publicó una definición de derivada fraccionaria la cual está definida como sigue:

Definición 4. Sea $\gamma \in \mathbb{R}_+$ y $n = \lceil \gamma \rceil$. El operador ${}^C_a\mathcal{D}_t^\gamma f(t)$ está definido por

$${}^C_a\mathcal{D}_t^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_a^t \frac{d^n}{dt^n} f(\tau) (t-\tau)^{n-\gamma-1} d\tau, \quad n-1 < \gamma < n, \quad (2.19)$$

para $a \leq x \leq t$, es llamado operador diferencial de Caputo de orden γ .

El operador diferencial de Caputo también utiliza el operador integral de Riemann-Liouville pero la diferencia entre ellos es que el operador diferencial está intercambiado. Aquí la derivada de Caputo de una función f está únicamente definida si la derivada de Riemann-Liouville de f existe y además f es $(n-1)$ veces diferenciable en el sentido clásico tal que la existencia del polinomio de Taylor sea asegurada.

Derivada de Caputo-Fabrizio

Michele Caputo y Mauro Fabrizio [90] en 2015, propusieron una derivada fraccionaria con kernel no singular. Para ello, reemplazaron el kernel $(t-\tau)^{-\gamma}$ por la función $\exp\left(-\frac{\gamma}{1-\gamma}t\right)$ y $\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}$ por $\frac{M(\gamma)}{1-\gamma}$ en la definición (2.19), entonces

Definición 5. Sea $f \in L^1(a, t) \forall \gamma \in [0, 1]$, la derivada de Caputo-Fabrizio está definida como

$${}^{CF}_a\mathcal{D}_t^\gamma f(t) = \frac{M(\gamma)}{n-\gamma} \int_a^t \frac{d^n}{dt^n} f(\tau) \exp\left[-\frac{\gamma(t-\tau)}{n-\gamma}\right] d\tau, \quad n-1 < \gamma < n, \quad (2.20)$$

donde $M(\gamma)$ es una función de normalización tal que $M(0) = M(1) = 1$.

Además, la derivada de $f(t)$ es cero cuando $f(t)$ es constante como en el caso de la derivada de Caputo pero contrario a la derivada de Riemann-Liouville. En adición, el kernel no tiene singularidad para $t = \tau$. No obstante, este operador no recupera la función original cuando $\gamma = 0$.

Después, Jorge Losada y Juan J. Nieto [91] introdujeron la integral fraccionaria asociada a la derivada (2.20). Este operador está definido como sigue:

Definición 6. Sea $0 < \gamma < 1$. La integral fraccionaria de orden γ de una función f está definida por

$${}^C I_t^\gamma f(t) = \frac{2(1-\gamma)}{(2-\gamma)M(\gamma)}u(t) + \frac{2\gamma}{(2-\gamma)M(\gamma)} \int_a^t u(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2.21)$$

Considerando que la integral fraccionaria de Caputo-Fabrizio de una función de orden $0 < \gamma < 1$ es un promedio entre la función f y su integral de orden 1, entonces se tiene que

$$\frac{2(1-\gamma)}{(2-\gamma)M(\gamma)} + \frac{2\gamma}{(2-\gamma)M(\gamma)} = 1, \quad (2.22)$$

y en consecuencia, una forma explícita para $M(\gamma)$

$$M(\gamma) = \frac{2}{(2-\gamma)}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (2.23)$$

Derivada e integral de Atangana-Baleanu

Abdon Atangana y Dumitru Baleanu [92] en 2016 propusieron una derivada con kernel no local y no singular. Para ello consideraron la función $E_\gamma(z)$ definida por Gösta Magnus Mittag-Leffler (1846–1927) como una serie de potencias

$$E_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma k + 1)}{z^k}, \quad \gamma \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\gamma) > 0. \quad (2.24)$$

Esta función proporciona una generalización de la función exponencial [93]. Entonces, escogieron $a = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ y la reemplazaron en la derivada de Caputo-Fabrizio (2.20) para llegar a la siguiente expresión

$$\mathcal{D}_t^\gamma f(t) = \frac{M(\gamma)}{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k}{k!} \int_a^t \frac{d}{dt} f(\tau) (t-\tau)^k d\tau. \quad (2.25)$$

Para eliminar el problema de no localidad, generalizaron el término $k!$ por $\Gamma(\gamma k + 1)$ y $(t-\tau)^k$ por $(t-\tau)^{\gamma k}$ tal que la siguiente definición fue obtenida.

Definición 7. Sea $f \in H^1(a, t)$ $t > a$ entonces, la definición de derivada fraccionaria de Atangana-Baleanu está dada como

$${}^{ABC} \mathcal{D}_t^\gamma f(t) = \frac{B(\gamma)}{n-\gamma} \int_a^t \frac{d^n}{dt^n} f(\tau) E_\gamma \left[-\gamma \frac{(t-\tau)^\gamma}{n-\gamma} \right] d\tau, \quad n-1 < \gamma < n, \quad (2.26)$$

donde $E_\gamma(\cdot)$ denota la función de Mittag-Leffler (2.24), y $B(\gamma)$ una función de normalización tal que $B(0) = B(1) = 1$.

Además, $B(\gamma)$ tiene las mismas propiedades que en el caso de Caputo-Fabrizio [94] y cuando $\gamma = 0$ la función original no puede ser recuperada. Para evitar este problema, los autores propusieron la siguiente definición.

Definición 8. Sea $f \in H^1(a, t)$ $t > a$, la definición de la nueva derivada fraccionaria está dada como

$${}^{ABR}_a \mathcal{D}_t^\gamma f(t) = \frac{B(\gamma)}{n - \gamma} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t f(\tau) E_\gamma \left[-\gamma \frac{(t - \tau)^\gamma}{1 - \gamma} \right] d\tau, \quad n - 1 < \gamma < n. \quad (2.27)$$

Aquí se puede observar que las ecuaciones (2.26) y (2.27) tienen kernel no local y cuando la función $f(t)$ es constante, se obtiene cero en la ecuación (2.26).

Definición 9. La integral asociada a esta derivada fraccionaria con kernel no singular está definida como

$${}^{ABC}_a I_t^\gamma f(t) = \frac{1 - \gamma}{B(\gamma)} f(t) + \frac{\gamma}{B(\gamma)\Gamma(\gamma)} \int_a^t f(\tau) (t - \tau)^{\gamma-1} d\tau. \quad (2.28)$$

La función inicial es recuperada cuando $\gamma = 0$, por otro lado, si $\gamma = 1$ entonces la integral clásica es obtenida.

Derivadas locales de orden no entero

Por otro lado, Khalil y col. [95] en 2014 presentaron una nueva definición que cumplía de manera natural algunas de las propiedades del cálculo clásico. Por consiguiente:

Definición 10. Sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, la derivada conformable de $f(t)$ de orden ($\gamma > 0$) está dada por

$${}^K \mathcal{D}^\gamma f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\gamma}) - f(t)}{\epsilon}, \quad (2.29)$$

para todo $t > 0$, $\gamma \in (0, 1)$.

Aquí, si $f(t)$ es γ -diferenciable en algún intervalo $(0, a)$, $a > 0$, y $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^\gamma(t)$ existen, entonces se puede definir $f^\gamma(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f^\gamma(t)$.

Si f y g son γ -diferenciables en un punto $t > 0$, con $\gamma \in (0, 1]$ entonces, las siguientes propiedades son obtenidas:

1. $\mathcal{D}_\gamma(af + bg) = a\mathcal{D}_\gamma(f) + b\mathcal{D}_\gamma(g)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}_\gamma(t^p) = pt^{p-\gamma}$, para todo $p \in \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{D}_\gamma(\Xi) = 0$, si Ξ es una constante.
4. $\mathcal{D}_\gamma(fg) = f\mathcal{D}_\gamma(g) + g\mathcal{D}_\gamma(f)$.
5. $\mathcal{D}_\gamma\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathcal{D}_\gamma(f) - f\mathcal{D}_\gamma(g)}{g^2}$.

No obstante esta derivada no satisface ningún problema físico, es decir, no tiene una interpretación física. En consecuencia, este operador no permite modelar problemas del mundo real.

Por esta razón, Atangana y col. [96, 97] en el mismo año propusieron una nueva definición.

Definición 11. Sea f una función tal que $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, la derivada de Atangana conformable de una función f está definida como

$${}^A\mathcal{D}_t^\gamma f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(t + \epsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\right)^{1-\gamma}\right) - f(t)}{\epsilon}, \quad \forall x \geq a, \gamma \in [0, 1), \quad (2.30)$$

donde $\left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\right)^{1-\gamma}$ describe la escala de tiempo no homogénea.

A diferencia de la derivada (2.29), este operador en un punto cero es diferente de cero si la función es diferenciable. Los autores también propusieron el operador inverso de la derivada fraccionaria (2.30) el cual está dado como sigue

Definición 12. Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada, entonces la integral de Atangana conformable es

$${}^A I_t^\gamma f(t) = \int_a^t \left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\right)^{\gamma-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.31)$$

Derivadas fraccionarias conformables

Jarad y col. [98] en 2017, introdujeron dos nuevos operadores al iterar n veces la integral conformable e intercambiar el orden de las integrales de tal manera que al reemplazar n por cualquier número $\beta \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\beta) > 0$ obtuvieron lo siguiente

Definición 13. Sea $\text{Re}(\beta) \geq 0$, $n = \lceil \text{Re}(\beta) \rceil + 1$, $f \in C_{\gamma,a}^n([a, t])$, ($f \in C_{\gamma,b}^n$). Entonces, la derivada fraccionaria conformable en el sentido de Riemann-Liouville está dada por

$$\begin{aligned} {}^{RL} {}_a^\beta \mathcal{D}_t^\gamma f(t) &= \frac{{}_a^n \mathcal{D}_t^\gamma}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^t \left(\frac{(t-a)^\gamma - (\tau-a)^\gamma}{\gamma}\right)^{n-\beta-1} \frac{f(\tau)}{(\tau-a)^{1-\gamma}} d\tau, \\ &= {}^{RL} {}_a^n \mathcal{D}_t^\gamma \left({}^{RL} {}_a^{n-\beta} I_t f(t)\right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Definición 14. Sea $\text{Re}(\beta) \geq 0$, $n = \lceil \text{Re}(\beta) \rceil + 1$, $f \in C_{\gamma,a}^n([a, t])$, ($f \in C_{\gamma,b}^n$). Entonces, la derivada fraccionaria conformable en el sentido de Liouville-Caputo está dada por

$$\begin{aligned} {}^c {}_a^\beta \mathcal{D}_t^\gamma f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^t \left(\frac{(t-a)^\gamma - (\tau-a)^\gamma}{\gamma}\right)^{n-\beta-1} \frac{{}_a^n \mathcal{D}_\tau^\gamma f(\tau)}{(\tau-a)^{1-\gamma}} d\tau, \\ &= {}^c {}_a^{n-\beta} I_t^\gamma \left({}^c {}_a^n \mathcal{D}_t^\gamma f(t)\right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Estas derivadas tienen propiedades similares a las derivadas fraccionarias estándar para tratar de describir sistemas complejos. Además, estos operadores dependen de dos órdenes de forma natural. Uno de los cuáles, el operador conformable, desempeñará un rol importante para mejorar la detección de la memoria.

Del mismo modo, Morales-Delgado y col. [99] en 2018 obtuvieron los siguientes operadores fraccionarios conformables.

Definición 15. Sea $\text{Re}(\beta) \geq 0$, $n = \lceil \text{Re}(\beta) \rceil + 1$, $f \in C_{\gamma,a}^n([a, t])$, ($f \in C_{\gamma,b}^n$). Entonces, la derivada fraccionaria conformable de tipo Atangana conformable en el sentido de Riemann-Liouville (AR) está dada por

$$\begin{aligned}
 {}^{AR}_a{}^\beta \mathcal{D}_t^\gamma f(t) &= \frac{{}^A n_a \mathcal{D}_t^\gamma}{\Gamma(n-\beta)} \int_{-\frac{a}{\Gamma(\gamma)}}^t \left(\frac{(t + \frac{a}{\Gamma(\gamma)})^\gamma - (\tau + \frac{a}{\Gamma(\gamma)})^\gamma}{\gamma} \right)^{n-\beta-1} \frac{f(\tau)}{\left(\tau + \frac{a}{\Gamma(\gamma)}\right)^{1-\gamma}} d\tau, \\
 &= {}^A n_a \mathcal{D}_t^\gamma \left({}^A n_a{}^{-\beta} I_t f(t) \right).
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Definición 16. Sea $\text{Re}(\beta) \geq 0$, $n = \lceil \text{Re}(\beta) \rceil + 1$, $f \in C_{\gamma,a}^n([a, t])$, ($f \in C_{\gamma,b}^n$). Entonces, la derivada fraccionaria conformable de tipo Atangana conformable en el sentido de Liouville-Caputo (AC) está dada por [99]

$$\begin{aligned}
 {}^{AC}_a{}^\beta \mathcal{D}_t^\gamma f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_{-\frac{a}{\Gamma(\gamma)}}^t \left(\frac{(t + \frac{a}{\Gamma(\gamma)})^\gamma - (\tau + \frac{a}{\Gamma(\gamma)})^\gamma}{\gamma} \right)^{n-\beta-1} \frac{{}^A n_a \mathcal{D}_t^\gamma f(\tau)}{\left(\tau + \frac{a}{\Gamma(\gamma)}\right)^{1-\gamma}} d\tau, \\
 &= {}^A n_a{}^{-\beta} I_t^\gamma \left({}^A n_a{}^{-\beta} \mathcal{D}_t f(t) \right).
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Estas derivadas fraccionarias tienen propiedades similares a la derivada de Newton y al depender de dos parámetros es posible obtener una mejor detección de la memoria.

2.1. Conclusiones parciales

En este capítulo se introdujeron los operadores que dieron origen a la derivada e integral de Riemann-Liouville así como a la derivada de Liouville-Caputo. Se pudo analizar que los operadores fraccionarios actuales derivan de dos definiciones principalmente: Riemann-Liouville y Liouville-Caputo. Estas derivadas, a pesar de cumplir con las propiedades de semigrupo, no son capaces de describir procesos Markovianos debido a su kernel de potencia. En consecuencia, estos operadores presentan una débil caracterización de los problemas del mundo real.

Por otro lado, la derivada de Atangana-Baleanu no sólo describe procesos Markovianos y no Markovianos sino también describe los problemas del mundo real de forma precisa debido a que este operador no cumple con la ley de índices.

También se mostraron derivadas de orden no entero llamadas conformables. Estas derivadas son locales; cumplen con las propiedades del cálculo ordinario pero no poseen kernel asociado a su definición. Por lo tanto, no son formalmente derivadas fraccionarias.

Por otro lado, se presentaron nuevas definiciones que establecen un vínculo entre las derivadas conformables y las fraccionarias; las llamadas derivadas conformables fraccionarias poseen un kernel asociado y cumplen con algunas propiedades del cálculo ordinario. Además, cuentan con dos órdenes de derivación lo que permite describir mejor la naturaleza de los sistemas.

Finalmente, la propuesta de nuevas derivadas lleva como fin ofrecer herramientas que describan mejor a los sistemas físicos.

Cálculo fraccionario aplicado al procesamiento de señales

Measure what is measurable, and make measurable what is not so.
— Galileo Galilei

3.1. Introducción

En las últimas décadas, los observadores de estados han sido utilizados en áreas de control como: sistemas de diagnóstico de fallas, control tolerante a fallas y procesamiento de señales, por mencionar algunos. La propuesta de observadores con enfoque fraccionario ha incrementado debido a que éstos permiten estimar variables de estados con mayor precisión [100]. Por ejemplo, Dadras y Momeni [101] propusieron un observador fraccionario para la estimación de variables de estado de sistemas fraccionarios lineales.

Kong *y col.* [102] diseñaron un observador de orden no entero para sistemas no lineales de tiempo continuo tipo Lipschitz con entradas desconocidas. Donde, por medio de simulaciones numéricas, se mostró la efectividad del enfoque propuesto.

Senejohnny y Delavari [103] desarrollaron un esquema de sincronización de sistemas caóticos basado en observadores con modo deslizante y activo.

Otros trabajos enfocados en el modelado de sistemas de orden fraccionario así como en el diseño de observadores se han presentado en [104–108].

Algunos de los trabajos anteriormente mencionados utilizan definiciones de derivada fraccionaria tales como: Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov y Liouville-Caputo. Sin embargo, estas definiciones no satisfacen algunas propiedades del cálculo ordinario tales como: regla de la cadena, teorema de Rolle, regla del producto, teorema del valor medio, entre otros. Por esta razón, Khalil *y col.* [95] propuso una derivada llamada “derivada conformable” la cuál cumple con las propiedades de la derivada clásica. Debido a esta característica, diferentes trabajos se pueden encontrar en la literatura enfocados a la solución de problemas reales [109–112]. No obstante, esta derivada presenta una debilidad: la derivada de cualquier función diferenciable en un punto cero es igual a cero. Por ello,

Atangana [97] propuso una versión modificada de la derivada conformable llamada Atangana conformable. Algunas aplicaciones de esta derivada se pueden encontrar en los siguientes trabajos [96, 113–115].

Motivado por las ventajas así como las características de estas derivadas, en este capítulo se estudiará el desempeño de observadores espectrales tipo Kalman con enfoque fraccionario y conformable para la reconstrucción de señales no estacionarias.

3.2. Observador espectral tipo Kalman para reconstrucción de señales

El observador propuesto parte de la serie de Fourier sin elemento constante, en la cual $y(t)$ es la salida de un sistema dinámico de orden N que genera señales, de tal forma que se considera como sigue

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t), \quad (3.1)$$

y que esta salida sea el primer estado de dicho sistema en representación espacio-estado. Se propone que sistema esté definido por las derivadas sucesivas del primer estado *i.e.*

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1(t) &= \nu_2(t), \\ \dot{\nu}_2(t) &= \nu_3(t), \\ &\vdots \\ \dot{\nu}_N(t) &= (-1)^{n(\bmod 2)} \omega^{2n} [1 \quad 2^{2n} \quad \dots \quad n^{2n}] A_k^{-1} A_\omega^{-1} \nu(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde n es el orden de la serie de Fourier, $N = 2n$ el orden del sistema dinámico (3.2), ω representa la frecuencia fundamental. Además, las matrices A_ω y A_k están dadas por las ecuaciones (3.3) y (3.4), respectivamente.

$$A_\omega \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega^3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{(m(\bmod 4) - m(\bmod 2))/2} \omega^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (-1)^{(2n(\bmod 4) - 2)/2} \omega^{2n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$A_k \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \dots & 0 & n \\ 1 & 0 & 4 & 0 & \dots & n^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & \dots & 0 & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 2^{2n-2} & 0 & \dots & n^{2n-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2^{2n-1} & \dots & 0 & n^{2n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

El sistema dinámico expresado en la ecuación (3.2) puede ser representado en forma general como sigue

$$\dot{\nu}(t) = A\nu(t) + Gw_r(t), \quad (3.5a)$$

$$y(t) = C\nu(t) + v_r(t), \quad (3.5b)$$

donde $w_r(t)$ y $v_r(t)$ son procesos de ruido blanco no relacionados. Dado que el sistema (3.2) es observable, se puede diseñar un observador tipo Kalman como sigue

$$\dot{\hat{v}}(t) = A\hat{v}(t) + Gw_r(t) + K(y(t) - C\hat{v}(t)), \quad (3.6a)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{v}(t), \quad (3.6b)$$

donde $C = [1, 0, \dots, 0]$, $(\hat{\cdot})$ es la estimación instantánea de $v(t)$ y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ \xi_1(\omega) & \dots & & & \xi_m(\omega) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Además, de la ecuación (3.7) es posible observar que los coeficientes $\xi_i(\omega)$ dependen de la frecuencia fundamental ω y $K(t)$ es la ganancia del observador que asegura la convergencia de los estados estimados

$$K(t) = P(t)C^T R^{-1}, \quad (3.8)$$

donde $P(t)$ es solución de la ecuación diferencial de Riccati

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R^{-1}CP(t) + GQG, \quad (3.9)$$

además $P(t)$ está definida como la matriz de covarianza del error, Q como la matriz de covarianza del modelo con ruido y R la matriz de covarianza del error de medición.

Reif y col. [116] propusieron una ecuación diferencial de Riccati modificada expresada como sigue

$$\dot{P}(t) = (A + \lambda I)P(t) + P(t)(A^T + \lambda I) - P(t)C^T R^{-1}CP(t) + Q, \quad (3.10)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^+$ como el coeficiente de convergencia del observador e I como la matriz identidad. En este caso, se asume que la condición inicial para la ecuación (3.10) es $P(0) = \delta I$, donde δ es un parámetro a determinar.

El error de estimación está limitado y se puede ajustar a través del parámetro λ . La prueba de esta afirmación se puede encontrar en el trabajo de Reif y col. [116].

Una vez que la señal estimada por el observador (3.6) converge, los coeficientes de la serie de Fourier son recuperados a partir de un cambio de coordenadas, *i.e.*

$$\hat{c}_i(t) = O(t)^{-1}\hat{v}(t), \quad (3.11)$$

con

$$\hat{c}_i(t) = [a_1(t) \ b_1(t) \ \dots \ a_n(t) \ b_n(t)]^T, \quad (3.12)$$

y $O(t)$ la matriz de observabilidad expresada en el trabajo de Besançon [117]

$$O(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & \dots & \cos(n\omega t) & \sin(n\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) & -2\omega \sin(2\omega t) & 2\omega \cos(2\omega t) & \dots & -n\omega \sin(n\omega t) & n\omega \cos(n\omega t) \\ -\omega^2 \cos(\omega t) & -\omega^2 \sin(\omega t) & -4\omega^2 \cos(2\omega t) & -4\omega^2 \sin(2\omega t) & \dots & -n^2\omega \cos(n\omega t) & -n^2\omega \sin(n\omega t) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \omega^\Gamma \sin(\omega t) & -\omega^\Gamma \cos(\omega t) & 2^\Gamma \omega^\Gamma \sin(2\omega t) & -2^\Gamma \omega^\Gamma \cos(2\omega t) & \dots & n^\Gamma \omega^\Gamma \sin(n\omega t) & -n^\Gamma \omega^\Gamma \cos(n\omega t) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

además $\Gamma \triangleq n - 1$.

Finalmente, la señal estimada $\hat{y}(t) = \hat{v}(t)$ es obtenida por la siguiente expresión

$$\hat{y}(t) = \hat{a}_1(t) \cos(\omega t) + \hat{b}_1(t) \sin(\omega t) + \dots + \hat{a}_n(t) \cos(n\omega t) + \hat{b}_n(t) \sin(n\omega t), \quad (3.14)$$

donde \hat{a}_i, \hat{b}_i con $i = 1, 2, \dots, n$ son los coeficientes estimados.

3.3. Observador espectral tipo Kalman fraccionario

Los operadores de derivada temporal d/dt del observador (3.6) y la ecuación diferencial modificada de Riccati (3.10) son generalizados por el operador de derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville para obtener las siguientes expresiones

$${}^{RL}_0 \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}(t) = A\hat{v}(t) + Gw(t) + K(y(t) - C\hat{v}(t)), \quad (3.15a)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{v}(t), \quad (3.15b)$$

y

$${}^{RL}_0 \mathcal{D}_t^{\gamma_1} P(t) = (A + \lambda I)P(t) + P(t)(A^T + \lambda I) - P(t)C^T R^{-1} C P(t) + Q, \quad (3.16)$$

respectivamente, donde γ_1 y γ_2 representan los órdenes no enteros de la derivada.

3.3.1. Esquema numérico del observador fraccionario

Para un rango de sistemas, la derivada de Riemann-Liouville y Liouville-Caputo son equivalentes a la derivada de Grünwald-Letnikov [100, 118]. Por esa razón, una ecuación diferencial fraccionaria de la forma

$${}^{GL}_0 \mathcal{D}_t^\gamma x(t) = f(x(t), t), \quad (3.17)$$

se puede resolver numéricamente mediante la siguiente aproximación [118]

$$x(t_k) = f(x(t_k), t_k) h^\gamma - \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma)} x(t_{k-j}), \quad (3.18)$$

donde h es el paso de integración, ${}^{GL}_0 \mathcal{D}_t^\gamma$ el operador de derivada en el sentido de Grünwald-Letnikov y además, $c_j^{(\gamma)}$ ($j = 0, 1, \dots$) denota los coeficientes binomiales

$$c_0^{(\gamma)} = 1, \quad c_j^{(\gamma)} = \left(1 - \frac{1 + \gamma}{j}\right) c_{j-1}^{(\gamma)}. \quad (3.19)$$

Considerando las ecuaciones (3.18) y (3.19), la solución numérica para el observador espectral fraccionario tipo Kalman (3.15) y la ecuación diferencial de Riccati modificada fraccionaria (3.16) son

$$\hat{v}(t_k) = \left[\tilde{A}\hat{v}(t_{k-1}) + K(y(t_{k-1}) - C\hat{v}(t_{k-1})) \right] h^{\gamma_2} - \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma_2)} \hat{v}(t_{k-j}), \quad 0 < \gamma_2 < 1, \quad (3.20)$$

y

$$\begin{aligned}
 P(t_k) = & \left[(A + \alpha I) P(t_{k-1}) + P(t_{k-1}) (A^T + \alpha I) - \right. \\
 & \left. - P(t_{k-1}) C^T R^{-1} C P(t_{k-1}) + Q \right] h^{\gamma_1} - \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma_1)} P(t_{k-j}), \quad 1 < \gamma_1 < 2.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Si el orden de la serie es $n = 1$, entonces el observador (3.15) es representado como sigue

$${}^RL_0 \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_1(t) = \hat{v}_2(t) + k_1(t) [y(t) - C \hat{v}_1(t)], \tag{3.22a}$$

$${}^RL_0 \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_2(t) = -\omega^2 \hat{v}_1(t) + k_2(t) [y(t) - C \hat{v}_1(t)], \tag{3.22b}$$

donde los términos $k_1(t)$ y $k_2(t)$ constituyen los elementos de la matriz de ganancias $K(t)$ obtenida por las ecuaciones (3.8) y (3.21).

Por otro lado, si el orden de la serie es $n = 2$ entonces el observador es expresado como

$${}^RL_0 \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_1(t) = \hat{v}_2(t) + k_1(t) [y(t) - C \hat{v}_1(t)], \tag{3.23a}$$

$${}^RL_0 \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_2(t) = \hat{v}_3(t) + k_2(t) [y(t) - C \hat{v}_1(t)], \tag{3.23b}$$

$${}^RL_0 \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_3(t) = \hat{v}_4(t) + k_3(t) [y(t) - C \hat{v}_1(t)], \tag{3.23c}$$

$${}^RL_0 \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_4(t) = -4\omega^4 \hat{v}_1 - 5\omega^2 \hat{v}_3(t) + k_4(t) [y(t) - C \hat{v}_1(t)]. \tag{3.23d}$$

Las soluciones numéricas de los observadores espectrales fraccionarios (3.22) y (3.23) están dadas por las siguientes aproximaciones

$$\hat{v}_1(t_k) = \left[\hat{v}_2(t_{k-1}) + k_1(t_{k-1}) (y(t_{k-1}) - C \hat{v}_1(t_{k-1})) \right] h^{\gamma_2} - \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma_2)} \hat{v}_1(t_{k-j}), \tag{3.24a}$$

$$\hat{v}_2(t_k) = \left[-\omega^2 \hat{v}_1(t_{k-1}) + k_2(t_{k-1}) (y(t_{k-1}) - C \hat{v}_1(t_{k-1})) \right] h^{\gamma_2} - \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma_2)} \hat{v}_2(t_{k-j}), \tag{3.24b}$$

y

$$\hat{v}_1(t_k) = [\hat{v}_2(t_{k-1}) + K_1(t_{k-1}) (y(t_{k-1}) - C \hat{v}_1(t_{k-1}))] h^{\gamma_2} - \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma_2)} \hat{v}_1(t_{k-j}), \tag{3.25a}$$

$$\hat{v}_2(t_k) = [\hat{v}_3(t_{k-1}) + K_2(t_{k-1}) (y(t_{k-1}) - C \hat{v}_1(t_{k-1}))] h^{\gamma_2} - \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma_2)} \hat{v}_2(t_{k-j}), \tag{3.25b}$$

$$\hat{v}_3(t_k) = [\hat{v}_4(t_{k-1}) + K_3(t_{k-1}) (y(t_{k-1}) - C \hat{v}_1(t_{k-1}))] h^{\gamma_2} - \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma_2)} \hat{v}_3(t_{k-j}), \tag{3.25c}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_4(t_k) = & [-4\omega^4 \hat{v}_1(t_{k-1}) - 5\omega^2 \hat{v}_3(t_{k-1}) + K_4(t_{k-1}) (y(t_{k-1}) - C \hat{v}_1(t_{k-1}))] h^{\gamma_2} - \\
 & - \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma_2)} \hat{v}_4(t_{k-j}).
 \end{aligned} \tag{3.25d}$$

3.3.2. Análisis de estabilidad del observador fraccionario

Teorema 1. *Un sistema incommensurado es estable si satisface las siguientes condiciones [119]*

$$|\arg(\text{eig}([A - KC]))| > \gamma_2 \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma_2 < 2, \quad (3.26)$$

para todos los eigenvalores de $A - KC$.

El diseño del observador (3.15) requiere que el error converja a cero conforme $t \rightarrow \infty$, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (3.27)$$

si esto sucede, entonces el observador será estable y convergerá asintóticamente.

Haciendo uso del teorema 1, se tiene que el observador (3.22) es estable si

$$\left| \arg \left(\text{eig} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} - PC^T R^{-1} C \right) \right) \right| > \gamma_2 \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma_2 < 2. \quad (3.28)$$

Por medio de la solución numérica expresada en la ecuación (3.21) y considerando $\lambda = 7.393$, $\sigma = 55.2441$, $P(0) = \sigma I$, $\omega = 1.1661$, $\gamma_1 = 1.1046$, $\gamma_2 = 0.6551$ se tiene que

$$P = \begin{bmatrix} 53.5192 & -0.0668 \\ -0.0668 & 63.7695 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

y a partir de la ecuación (3.8)

$$K = \begin{bmatrix} 53.5192 \\ -0.0668 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

entonces la ecuación (3.28) queda expresada de la siguiente manera

$$\left| \arg \left(\text{eig} \left(\begin{bmatrix} -53.5192 & 1 \\ -1.29298921 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) \right| > \gamma_2 \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma_2 < 2, \quad (3.31)$$

con los siguientes valores propios: $\lambda_1 = -53.4950$ y $\lambda_2 = -0.0242$.

Dado que $|\arg(\lambda_{1,2})| = \pi \text{ rad}$ es mayor a $(0.6551) \frac{\pi}{2} = 1.0290 \text{ rad}$, entonces el sistema (3.15) es estable debido a que se satisface el teorema 1.

Ahora bien, si se consideran los siguientes órdenes $\gamma_1 = 1.6453$ y $\gamma_2 = 0.8251$, entonces

$$P = \begin{bmatrix} 90.4315 & -0.0041 \\ -0.0041 & 91.0621 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

y

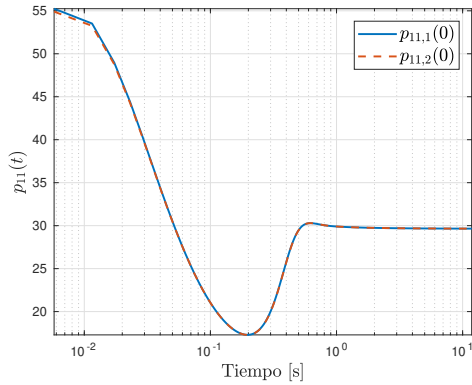
$$K = \begin{bmatrix} 90.4315 \\ -0.0041 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Los valores propios del sistema (3.15) considerando (3.32) y (3.33) son: $\lambda_1 = -90.4165$ y $\lambda_2 = -0.0150$. En consecuencia, el sistema es estable ya que $|\arg(\lambda_{1,2})| = \pi \text{ rad}$ es mayor a $(0.8251) \frac{\pi}{2} = 1.2961 \text{ rad}$.

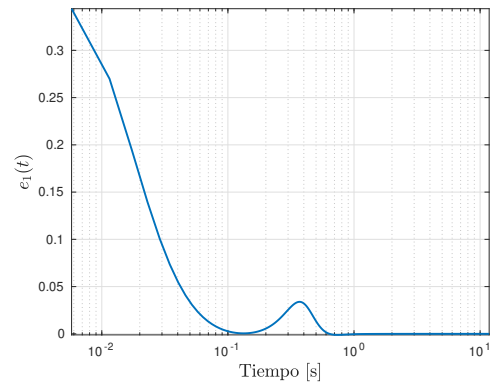
Análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales

Con la finalidad de analizar numéricamente el comportamiento de la solución a la ecuación diferencial de Riccati fraccionaria (3.16), se llevó a cabo un análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales. Para ello se consideraron los siguientes parámetros $\lambda = 7.393$, $\omega = 1.1661$, $\sigma_1 = 55.2441$, $P_1(0) = \sigma_1 I$, $\sigma_2 = 54.9$, $P_2(0) = \sigma_2 I$ y $\gamma_1 = 1.1046$. Las

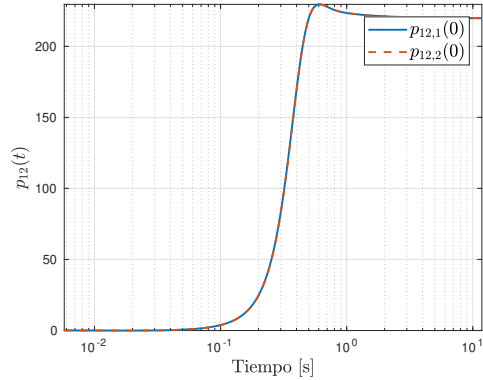
Figuras 3.1a, 3.1c, 3.2a y 3.2c presentan las trayectorias de los elementos que conforman la matriz P mientras que las Figuras 3.1b, 3.1d, 3.2b y 3.2d muestran las diferencias entre las trayectorias obtenidas con las condiciones iniciales ligeramente cercanas entre sí. En estas figuras se puede observar que ante la falta de divergencia del error, la ecuación diferencial no es sensible a las condiciones iniciales y por lo tanto, se asegura que su comportamiento será estable. Dicho de otra manera, no se verá afectada la estabilidad del observador (3.15). Por esta razón, y al existir diversos parámetros a considerar para la sintonización del observador, la búsqueda de parámetros se hará por medio de un algoritmo de optimización.



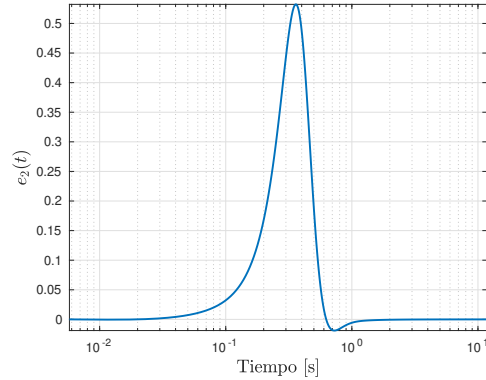
(a) Trayectoria del elemento p_{11} de la matriz P (3.21).



(b) Diferencia entre las trayectorias de los elementos $p_{11,1}$ y $p_{11,2}$.

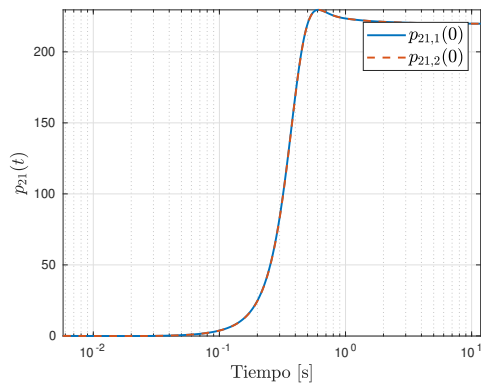


(c) Trayectoria del elemento p_{12} de la matriz P (3.21).

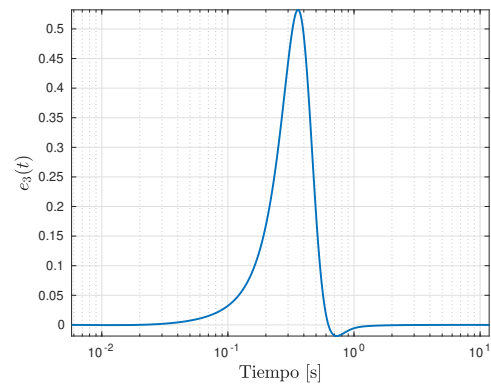


(d) Diferencia entre las trayectorias de los elementos $p_{12,1}$ y $p_{12,2}$.

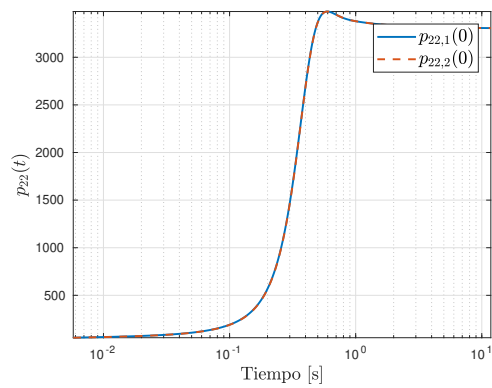
Figura 3.1: Análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales de la matriz P (3.21) con $\lambda = 7.393$, $\omega = 1.1661$, $\sigma_1 = 55.2441$, $P_1(0) = \sigma_1 I$, $\sigma_2 = 54.9$, $P_2(0) = \sigma_2 I$ y $\gamma_1 = 1.1046$.



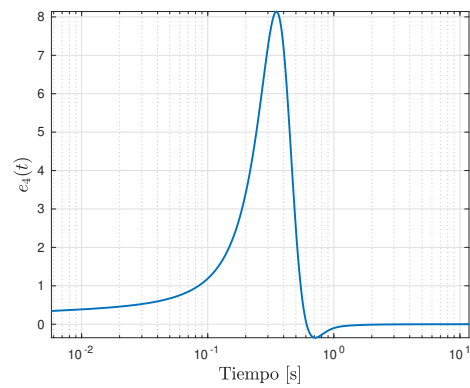
(a) Trayectoria del elemento p_{21} de la matriz P (3.21).



(b) Diferencia entre las trayectorias de los elementos $p_{21,1}$ y $p_{21,2}$.



(c) Trayectoria del elemento p_{22} de la matriz P (3.21).



(d) Diferencia entre las trayectorias de los elementos $p_{22,1}$ y $p_{22,2}$.

Figura 3.2: Análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales de la matriz P (3.21) con $\lambda = 7.393$, $\omega = 1.1661$, $\sigma_1 = 55.2441$, $P_1(0) = \sigma_1 I$, $\sigma_2 = 54.9$, $P_2(0) = \sigma_2 I$ y $\gamma_1 = 1.1046$.

3.3.3. Optimización del observador espectral fraccionario

Búsqueda de Cuco (CS) es un algoritmo de optimización meta heurístico desarrollado por Yang y Deb [120]. El objetivo es ofrecer un algoritmo más eficiente con respecto a Optimización de Enjambre de Partículas (PSO) y Algoritmos Genéticos (GA), [121]. CS emula el parasitismo de algunas especies de cucos e involucra los vuelos de Lévy en lugar de pasos aleatorios. Las reglas principales que rigen este algoritmo son:

- Un huevo es depositado aleatoriamente en nidos de otras especies de aves.
- Los nidos que contienen los huevos con mayor calidad pasan a la siguiente generación.
- El número de nidos es fijo. Por lo tanto, si un ave huésped descubre que los huevos en el nido no son suyos puede descartar el nido o hacer uno nuevo cerca del anterior.

El algoritmo de CS es caracterizado por la siguiente ecuación general

$$X_{g+1;i} = X_{g;i} + \theta \otimes \text{Lévy}(\beta), \quad (3.34)$$

donde g e i denotan el número de la generación ($g = 1, 2, 3, \dots, \text{MaxGen}$) y el número de patrón ($i = 1, 2, \dots, \eta$) respectivamente.

Además, $\theta > 0$ es el tamaño del paso que está relacionado al problema de interés y \otimes representa las múltiples entradas.

Los j -ésimos atributos del i -ésimo patrón son inicializados por

$$X_{g=0;j,i} = \text{rand} \cdot (Ub_i - Lb_i) + Lb_i, \quad (3.35)$$

donde Ub_i y Lb_i son los límites superior e inferior de los j -ésimos atributos respectivamente.

El paso ϕ utilizado para los vuelos de Lévy está dado por la siguiente expresión

$$\phi = \left(\frac{\Gamma(1 + \beta) \cdot \sin(\pi \cdot \beta/2)}{\Gamma((1 + \beta)/2) \cdot \beta \cdot 2^{(\beta-1)/2}} \right)^{1/\beta}, \quad (3.36)$$

del mismo modo, el tamaño del paso requerido por los j -ésimos atributos puede ser calculado por

$$s_j = 0.01 \cdot \left(\frac{u_j}{v_j} \right)^{1/\beta} \cdot (v - x_{best}), \quad (3.37)$$

donde $u = \phi \cdot \text{rand}[D]$ y $v = \text{rand}[D]$. El patrón donante v es aleatoriamente ajustado por

$$v = v + s_j \cdot \text{rand}[D]. \quad (3.38)$$

Las soluciones no viables son evaluadas por el operador de cruza

$$v_i = \begin{cases} x_i + \text{rand} \cdot (x_{r1} - x_{r2}), & \text{rand}_i > p_0, \\ x_i, & \text{otro,} \end{cases} \quad (3.39)$$

donde p_0 es la probabilidad de mutación ($p_0 = 0.25$).

Cálculo estadístico

El observador espectral fraccionario tipo Kalman (3.15) y la ecuación diferencial fraccionaria de Riccati modificada (3.16) son optimizados de acuerdo con el siguiente criterio.

La Raíz de la Media del Error al Cuadrado (RMSE) está dada por la siguiente expresión

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^m (y_k - \hat{v}_k)^2}{m}}, \quad (3.40)$$

donde y_k es el k -ésimo valor del conjunto de datos, \hat{v}_k es el valor estimado de y_k y m la cantidad de datos en el conjunto.

En este punto, el problema de optimización consiste en minimizar el RMSE representado por la siguiente ecuación

$$\underset{\lambda, \omega, \delta, \gamma_1, \gamma_2}{\text{minimize}} \quad \{RMSE\},$$

sujeto a las siguientes restricciones

$$\gamma_2 \in (1, 2), \quad (3.41a)$$

$$\gamma_1 \in (0, 1), \quad (3.41b)$$

$$\omega \in (0, 2.5). \quad (3.41c)$$

Además, el porcentaje de la variación de la señal estimada con respecto a la señal real definido como FIT es obtenido por la siguiente ecuación

$$FIT = 100 \times \left(1 - \frac{\|y(t) - \hat{v}(t)\|}{\|y(t) - \bar{y}(t)\|} \right). \quad (3.42)$$

El algoritmo empleado para resolver el problema de optimización se muestra en el Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Búsqueda de Cuco vía vuelos de Lévy

- 1: Inicialización de los nidos anfitriones n
 - 2: **while** Criterio de paro **do**
 - 3: Escoger un huevo de cuco utilizando los vuelos de Lévy para evaluar su fitness ($F_i = \text{mín} \{RMSE\}$)
 - 4: Escoger un huevo aleatoriamente para calcular su fitness ($F_j = \text{mín} \{RMSE\}$)
 - 5: **if** $F_i > F_j$ **then**
 - 6: Reemplazar el j -ésimo huevo por el i -ésimo huevo
 - 7: Una fracción (p_a) de los peores nidos son demolidos y reemplazados por nuevos
 - 8: Los mejores nidos son conservados (mejores soluciones)
 - 9: **end if**
 - 10: **end while**
-

3.3.4. Resultados de simulación

A continuación se presentan los resultados de simulación de los observadores clásico y fraccionario para analizar su desempeño ante la reconstrucción de señales no estacionarias como: actividad eléctrica cerebral, aceleración de la componente Norte-Sur del terremoto "1940 El Centro" y voltajes del circuito de Chua adquiridos experimentalmente.

Simulación 1: Actividad eléctrica cerebral

El objetivo de esta simulación es formular un observador capaz de reconstruir una señal de electroencefalograma (EEG). Para ello se hizo uso de la base de datos presentada

por Andrzejak *y col.* [122]. Dicha base de datos está conformada de 5 conjuntos denotados como A-E con 100 segmentos de 23.6 segundos de duración.

Para llevar a cabo la simulación se utilizó el primer conjunto de datos denotado como A. Se diseñaron los siguientes observadores: un observador espectral fraccionario de $n = 1$ orden y tres observadores espectrales clásicos de $n = 3$, $n = 2$ y $n = 1$ orden respectivamente.

Los resultados de optimización obtenidos por el Algoritmo 1 se muestran en la Tabla 3.1 mientras que el observador fraccionario propuesto en la ecuación (3.43)

$${}^RLD_t^{0.6551}\hat{v}_1(t) = \hat{v}_2(t) + k_1 [y(t) - C\hat{v}_1(t)], \quad (3.43a)$$

$${}^RLD_t^{0.6551}\hat{v}_2(t) = -\omega^2\hat{v}_1(t) + k_2 [y(t) - C\hat{v}_1(t)]. \quad (3.43b)$$

Para probar el desempeño del observador, se realizó una simulación con los siguientes parámetros: tiempo de duración $t = 23.6$ [s], paso de integración $h = 1/173.61$ [s] y condiciones iniciales: $P(0) = \delta I$, $Q = I$, $R = I$, $\hat{v}(0) = 0$.

Los observadores de orden entero utilizados en esta simulación son expresados por las siguientes ecuaciones

Para $n = 3$:

$$\dot{\hat{v}}_1(t) = \hat{v}_2(t) + k_1(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)], \quad (3.44a)$$

$$\dot{\hat{v}}_2(t) = \hat{v}_3(t) + k_2(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)], \quad (3.44b)$$

$$\dot{\hat{v}}_3(t) = \hat{v}_4(t) + k_3(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)], \quad (3.44c)$$

$$\dot{\hat{v}}_4(t) = \hat{v}_5(t) + k_4(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)], \quad (3.44d)$$

$$\dot{\hat{v}}_5(t) = \hat{v}_6(t) + k_5(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)], \quad (3.44e)$$

$$\dot{\hat{v}}_6(t) = -36\omega^6\hat{v}_1(t) - 49\omega^4\hat{v}_3(t) - 14\omega^2\hat{v}_6(t) + k_6(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)]. \quad (3.44f)$$

Para $n = 2$:

$$\dot{\hat{v}}_1(t) = \hat{v}_2(t) + k_1(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)], \quad (3.45a)$$

$$\dot{\hat{v}}_2(t) = \hat{v}_3(t) + k_2(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)], \quad (3.45b)$$

$$\dot{\hat{v}}_3(t) = \hat{v}_4(t) + k_3(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)], \quad (3.45c)$$

$$\dot{\hat{v}}_4(t) = -4\omega^4\hat{v}_1(t) - 5\omega^2\hat{v}_3(t) + k_4(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)]. \quad (3.45d)$$

Para $n = 1$:

$$\dot{\hat{v}}_1(t) = \hat{v}_2(t) + K_1(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)], \quad (3.46a)$$

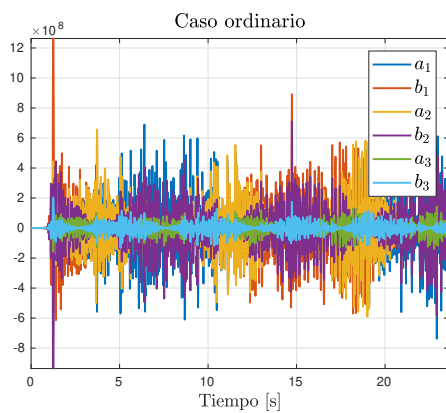
$$\dot{\hat{v}}_2(t) = -\omega^2\hat{v}_1(t) + K_2(t) [y(t) - C\hat{v}_1(t)]. \quad (3.46b)$$

Las Figuras 3.3a, 3.3c y 3.4a muestran los coeficientes estimados para los observadores clásicos de $n = 3$, $n = 2$ y $n = 1$ orden respectivamente. Las Figuras 3.3b, 3.3d y 3.4b presentan la señal real $y(t)$ y la señal estimada $\hat{y}(t)$ en escala logarítmica. Del mismo modo, la Figura 3.4c muestra los coeficientes estimados y la señal estimada $\hat{y}(t)$ (ver Figura 3.4d) obtenidos por el observador fraccionario de orden $n = 1$. Además, para evaluar el desempeño de los observadores propuestos, se utilizaron los siguientes criterios: RMSE (3.40) y el FIT (3.42) (ver Tabla 3.1).

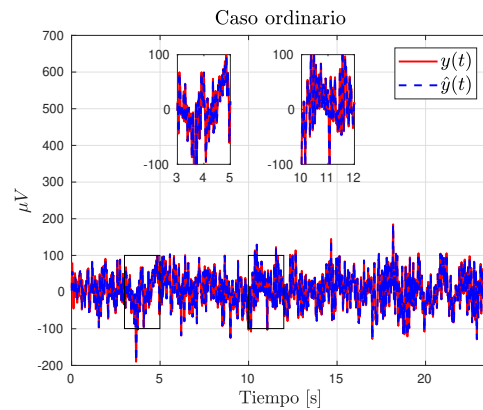
De acuerdo con los resultados, se puede apreciar que el mejor desempeño se tuvo con el observador clásico de orden $n = 3$ y el observador fraccionario de orden $n = 1$. Las dinámicas de los errores, la señal real $y(t)$ así como la señal estimada $\hat{y}(t)$ obtenidas por los observadores clásicos y fraccionarios se muestran en las Figuras 3.5 y 3.6a a 3.6d respectivamente. Por esta razón, la comparación se hará entre los observadores con el mejor desempeño obtenido: el observador clásico (3.44) y el fraccionario (3.43).

Tabla 3.1: Resultados de optimización de los observadores espectrales para el ejemplo 3.3.4 Actividad eléctrica cerebral

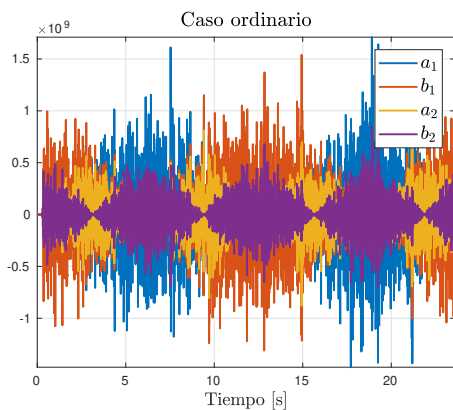
Parámetro	Orden			
	$n = 3$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 1$
Enfoque	Clásico	Clásico	Clásico	Fraccionario
γ_1	1	1	1	1.1046
γ_2	1	1	1	0.6551
λ	14.6975	63.883	63.6422	7.393
ω	0.2111	0.2515	0.4074	1.1661
δ	99.4995	39.5767	130.4439	55.2441
<i>RMSE</i>	2.5837	14.5383	14.5287	2.4637
<i>FIT</i>	93.9336	65.8652	68.7565	94.2157



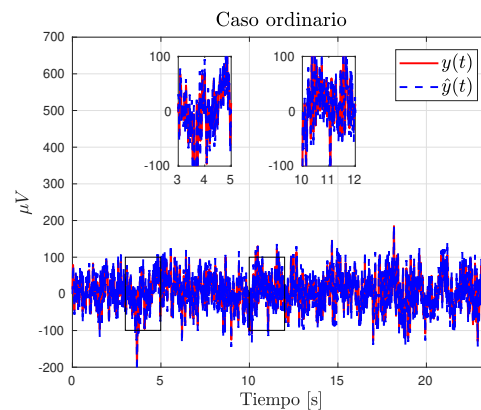
(a) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 3$.



(b) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y real $y(t)$ caso clásico.

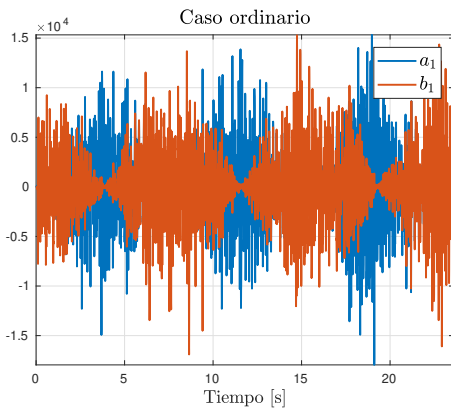


(c) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 2$.

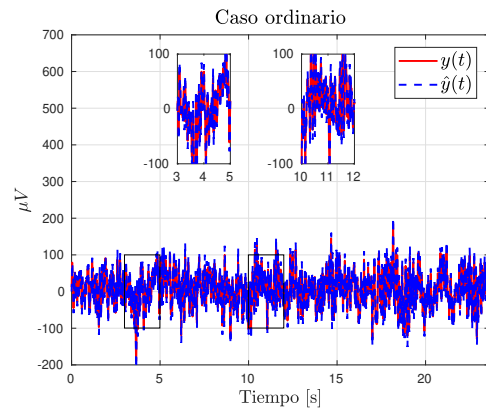


(d) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y señal real $y(t)$ caso clásico.

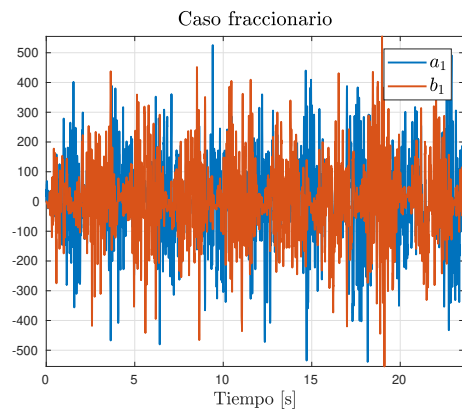
Figura 3.3: Ejemplo 3.3.4 Estimación de la actividad eléctrica cerebral y coeficientes estimados para diferentes ordenes: (b) $n = 3$ y (d) $n = 2$ ambos con enfoque clásico.



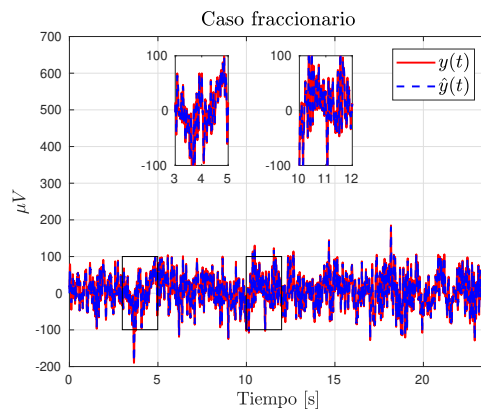
(a) Estimación de los coeficientes a_1 y b_1 , orden $n = 1$.



(b) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y real $y(t)$ para el caso clásico.

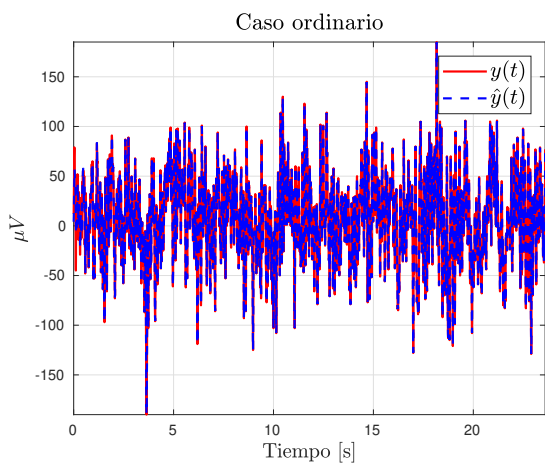


(c) Coeficientes estimados a_1 y b_1 , orden $n = 1$.

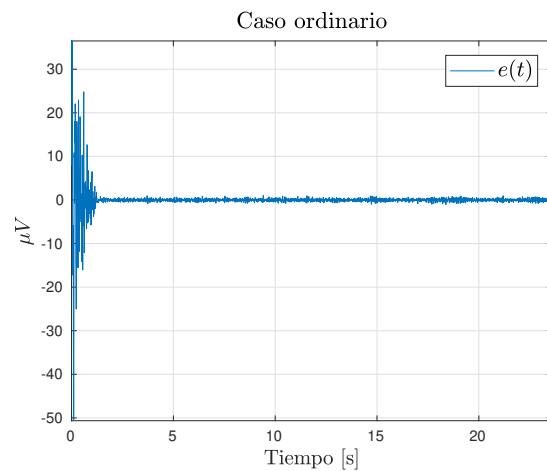


(d) Señal real $\hat{y}(t)$ y señal estimada $y(t)$ caso fraccionario.

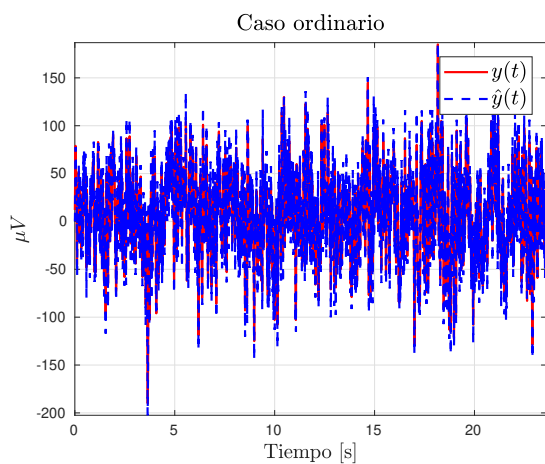
Figura 3.4: Ejemplo 3.3.4 Estimación de la actividad eléctrica cerebral y coeficientes estimados para los diferentes enfoques: (b) $n = 1$ y (d) $n = 1$; caso clásico y fraccionario, respectivamente.



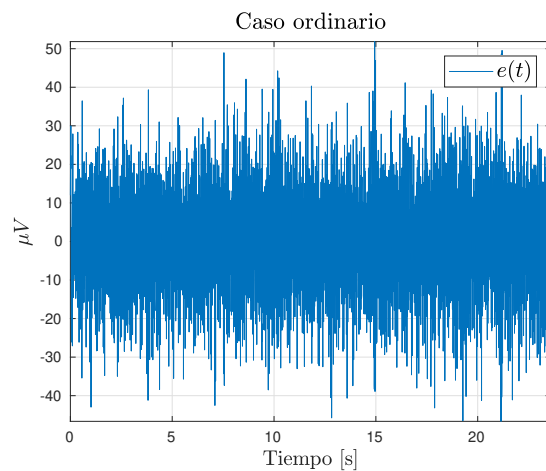
(a) Señal real $y(t)$ y señal estimada $\hat{y}(t)$ para un observador clásico de orden $n = 3$.



(b) Dinámica del error en un observador clásico de orden $n = 3$.

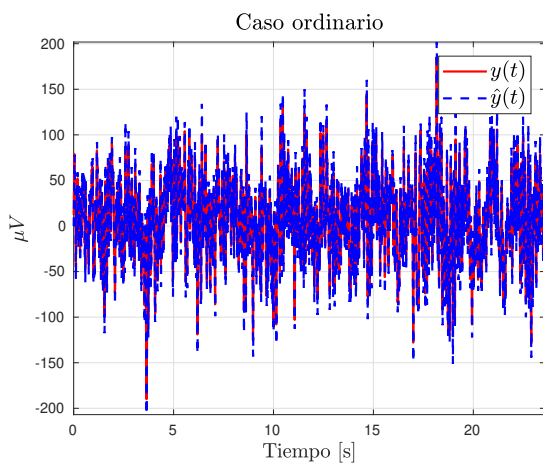


(c) Señal real $y(t)$ y señal estimada $\hat{y}(t)$ para un observador clásico de orden $n = 2$.

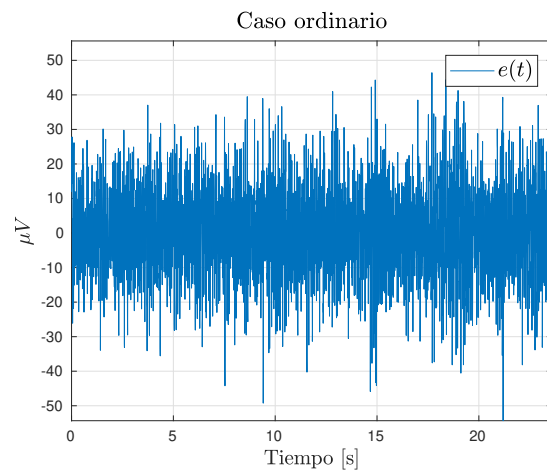


(d) Dinámica del error en un observador clásico de orden $n = 2$.

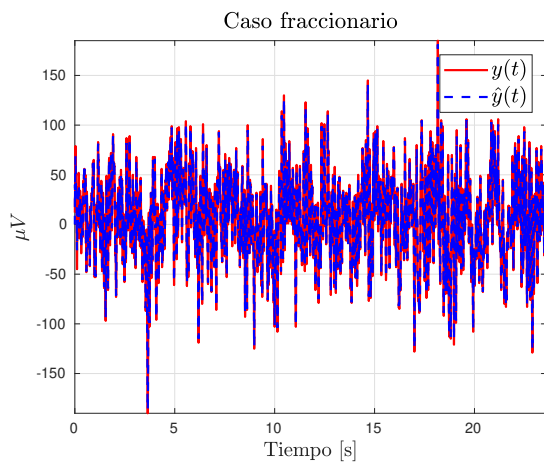
Figura 3.5: Ejemplo 3.3.4 Comparación entre dos observadores de diferente orden y sus dinámicas del error. (a) Observador clásico de seis estados y (c) observador clásico de cuatro estados.



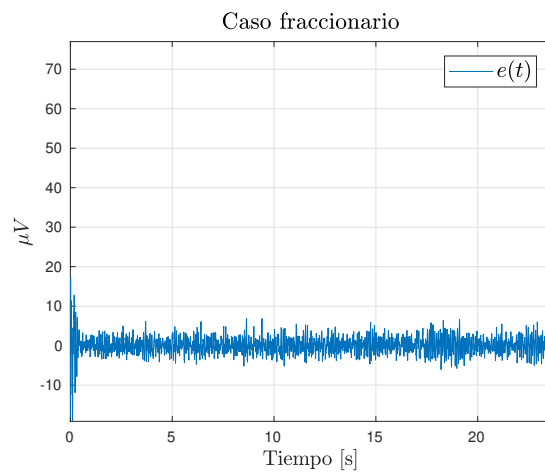
(a) Señal real $y(t)$ y señal estimada $\hat{y}(t)$ para un observador clásico de orden $n = 1$.



(b) Dinámica del error en un observador clásico de orden $n = 1$.



(c) Señal real $y(t)$ y señal estimada $\hat{y}(t)$ para un observador fraccionario de orden $n = 1$.



(d) Dinámica del error en un observador fraccionario de orden $n = 1$.

Figura 3.6: Ejemplo 3.3.4 Comparación entre un observador clásico de orden $n = 1$ y un observador fraccionario de orden $n = 1$.

Simulación 2: Aceleración de la componente Norte-Sur del terremoto “1940 El Centro”

El objetivo de esta simulación es realizar la reconstrucción de la aceleración de la componente Norte-Sur del terremoto “1940 El Centro”. El conjunto de datos se obtuvo de <http://www.vibrationdata.com/elcentro.htm> adquiridos a 50 Hz.

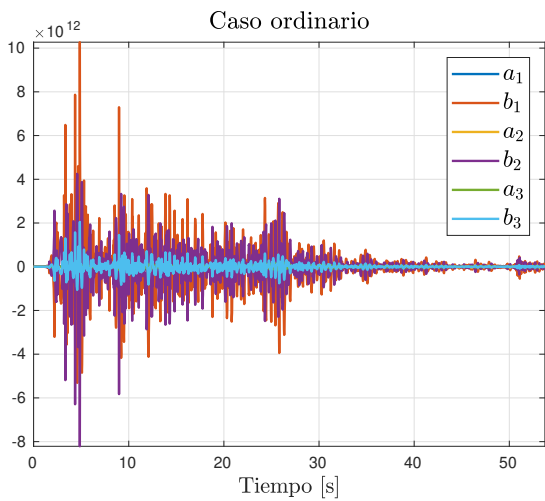
Los observadores clásico y fraccionario, dados por las ecuaciones (3.43) y (3.44) respectivamente, fueron optimizados por el algoritmo de CS bajo las siguientes configuraciones: $P(0) = \delta I$, $Q = I$, $R = I$. Los parámetros de simulación utilizados se presentan en la Tabla 3.2.

Las Figuras 3.7a, 3.7b y 3.8a muestran los coeficientes y la señal estimada respectivamente utilizando el observador espectral de orden entero. Del mismo modo, las Figuras 3.7c, 3.7d y 3.8c presentan los resultados obtenidos por el observador fraccionario de orden $n = 1$. Las Figuras 3.8b y 3.8d presentan las dinámicas de los errores.

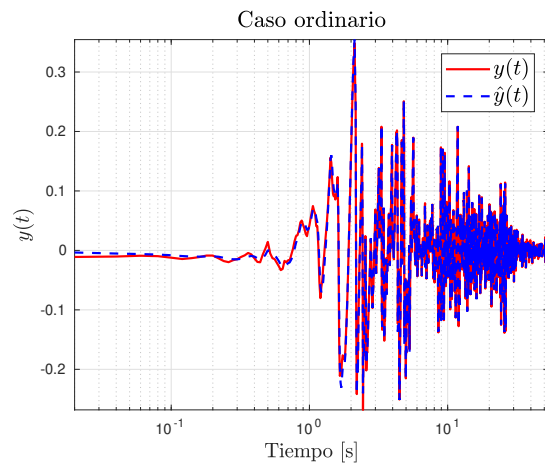
En este caso de estudio, el desempeño de ambos observadores fue similar de acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla 3.2. No obstante, el observador fraccionario con sólo dos estados fue capaz de reconstruir la señal en $\sim 93\%$.

Tabla 3.2: Resultados de optimización de los observadores espectrales para el ejemplo 3.3.4 Señal de terremoto

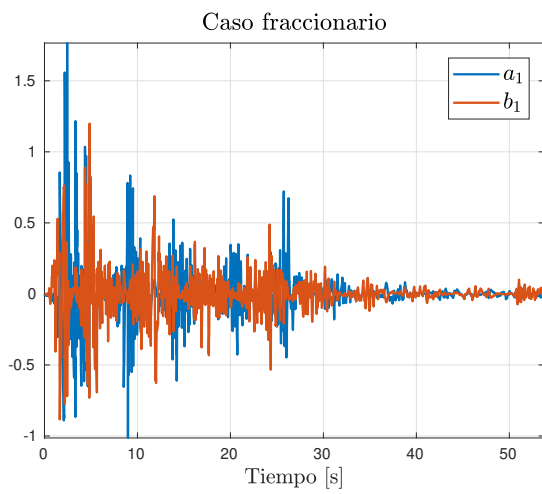
Parámetro	Orden	
	$n = 3$	$n = 1$
Enfoque	Clásico	Fraccionario
γ_1	1	1.0499
γ_2	1	0.6355
λ	4.4051	3.112
ω	0.004	0.545
δ	29.6454	6.1988
<i>RMSE</i>	0.0032	0.0033
<i>FIT</i>	93.1830	92.9930



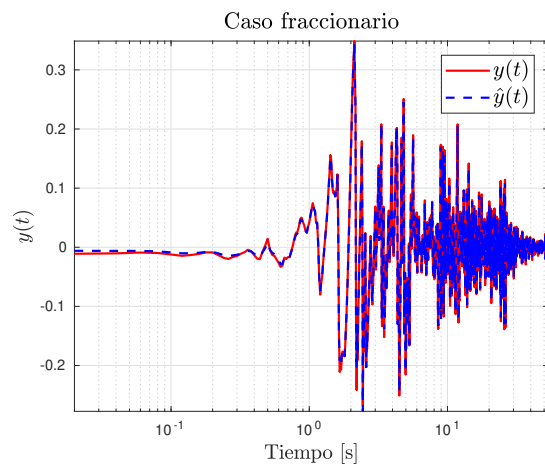
(a) Coeficientes estimados a_i y b_i , orden $n = 3$.



(b) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y señal real $y(t)$ caso clásico.



(c) Coeficientes estimados a_i y b_i , orden $n = 1$.



(d) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y señal real $y(t)$ caso fraccionario.

Figura 3.7: Ejemplo 3.3.4 Estimación de la aceleración de la componente Norte-Sur y coeficientes estimados para diferentes enfoques: (b) $n = 3$ caso clásico y (d) $n = 1$ caso fraccionario.

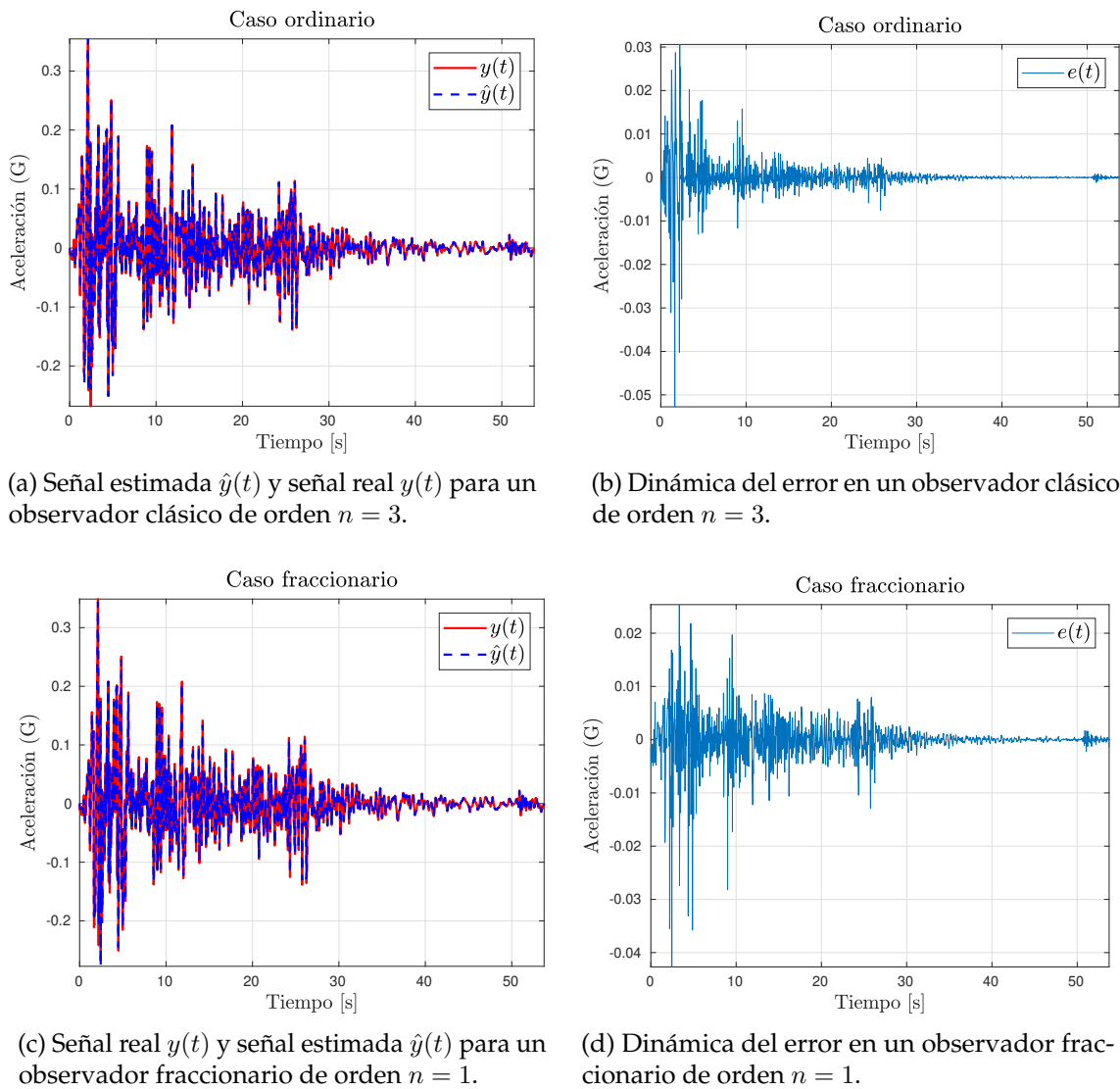


Figura 3.8: Ejemplo 3.3.4 comparación entre (a) un observador clásico de orden $n = 3$ y (c) un observador fraccionario de orden $n = 1$ y las dinámicas de sus errores.

Simulación 3: Circuito de Chua

El objetivo de esta simulación es reconstruir las señales de los voltajes en los capacitores C_1 y C_2 definidos como V_{c_1} y V_{c_2} respectivamente. Para ello se construyó un circuito equivalente del circuito de Chua *y col.* [123] cuyo diagrama se muestra en la Figura 3.9. La frecuencia de muestreo y el paso de integración fueron de 1 MHz y 1×10^{-6} [s] respectivamente. Para fines experimentales y de simulación.

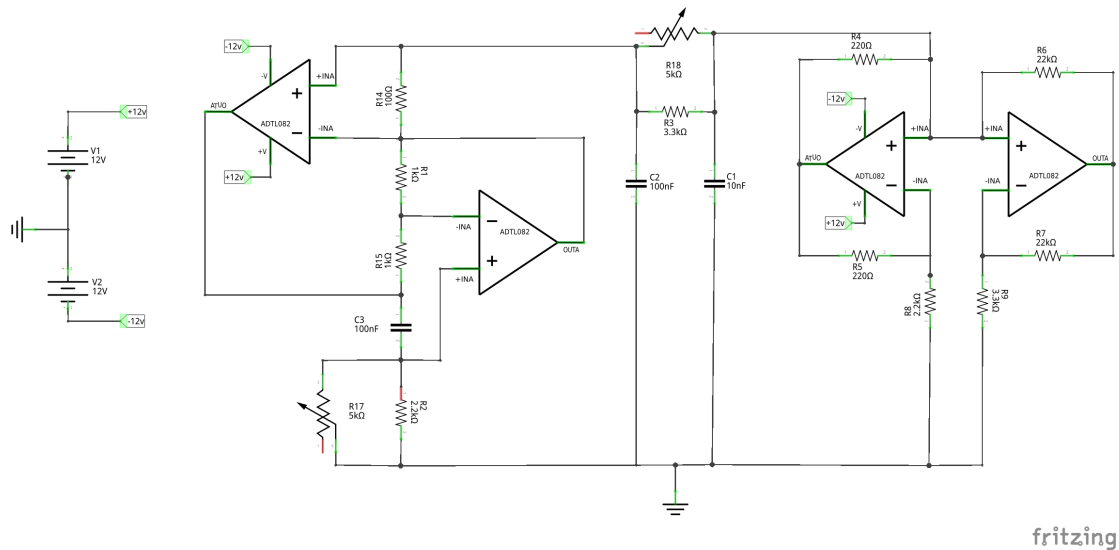


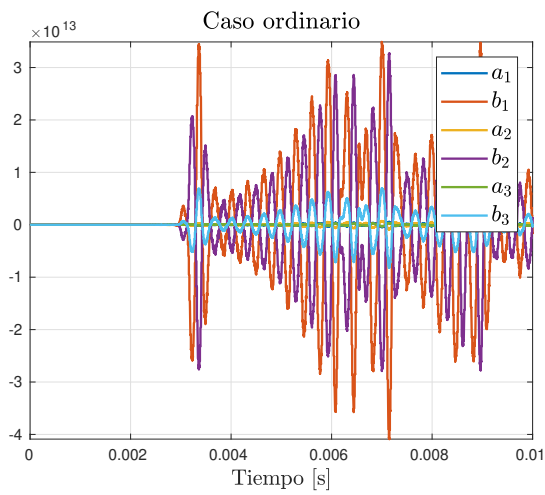
Figura 3.9: Esquemático del circuito de Chua basado en amplificadores operacionales [1].

La Tabla 3.3 muestra los parámetros obtenidos por el algoritmo de optimización de CS. Las Figuras 3.10b, 3.11b, 3.12a y 3.12c muestran la reconstrucción de los voltajes V_{c_1} y V_{c_2} en el caso clásico. Las Figuras 3.10d, 3.11d, 3.13a y 3.13c con orden fraccionario así como la estimación de los coeficientes de la serie de Fourier en las Figuras 3.10a, 3.10c, 3.11a y 3.11c utilizando el observador clásico (3.44) y fraccionario (3.43), respectivamente. Finalmente, las dinámicas de los errores en las Figuras 3.12b, 3.12d, 3.13b y 3.13d.

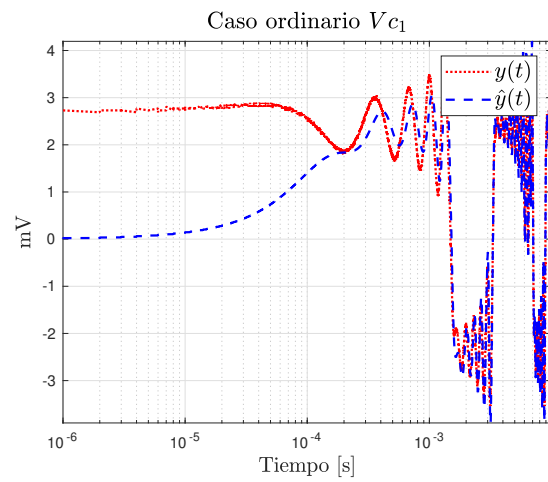
El retrato fase obtenido de las señales reconstruidas a partir de los los observadores diseñados es presentado en la Figura 3.14. En esta figura se aprecia que el observador fraccionario es capaz de reconstruir la señal aún con presencia de ruido.

Tabla 3.3: Resultados de optimización del observador espectral para el ejemplo 3.3.4 circuito de Chua

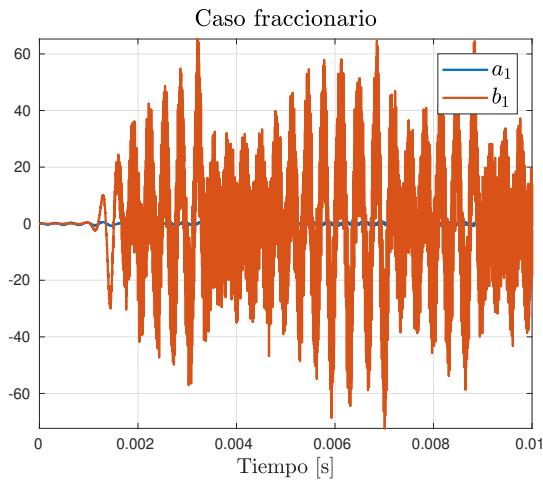
Parámetro	V_{c_1}		V_{c_2}		
	Orden $n = 3$	Orden $n = 1$	Orden $n = 3$	Orden $n = 1$	
Enfoque	Clásico	Fraccionario	Enfoque	Clásico	Fraccionario
γ_1	1	1.0304	γ_1	1	1.0404
γ_2	1	0.6022	γ_2	1	0.6122
α	1.08×10^3	998.6075	α	2.16×10^3	987.5075
ω	0.6172	2.0512	ω	2.3002	2.0512
δ	789.3024	967.9838	δ	4.60×10^3	997.9838
<i>RMSE</i>	0.3713	0.0358	<i>RMSE</i>	0.0507	0.0099
<i>FIT</i>	83.5142	98.4089	<i>FIT</i>	83.4206	96.7742



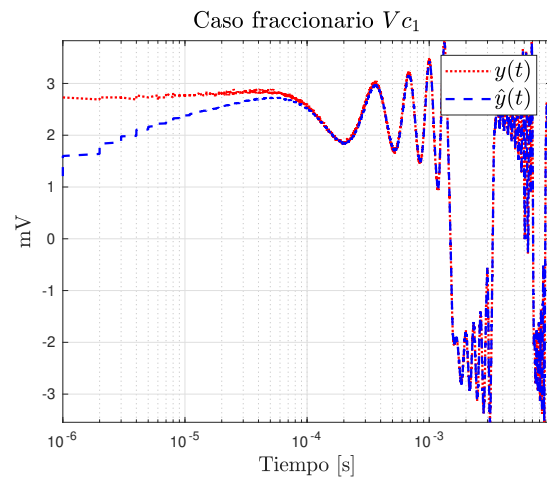
(a) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 3$.



(b) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y real $y(t)$ caso clásico.

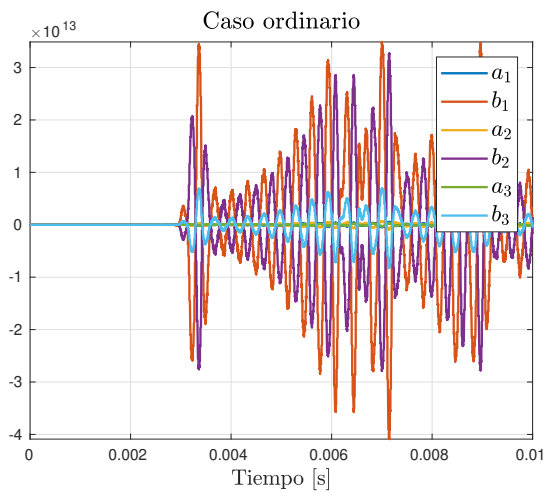


(c) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 1$.

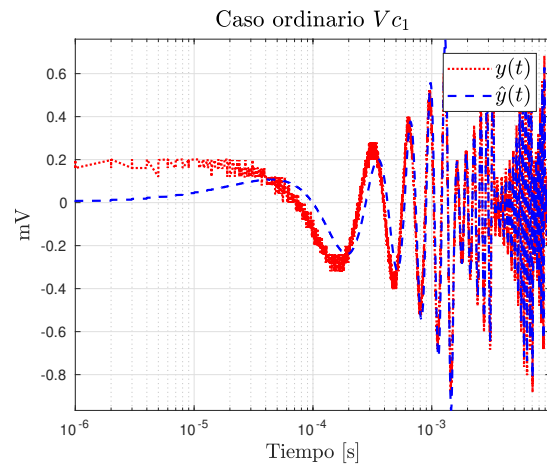


(d) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y real $y(t)$ caso fraccionario.

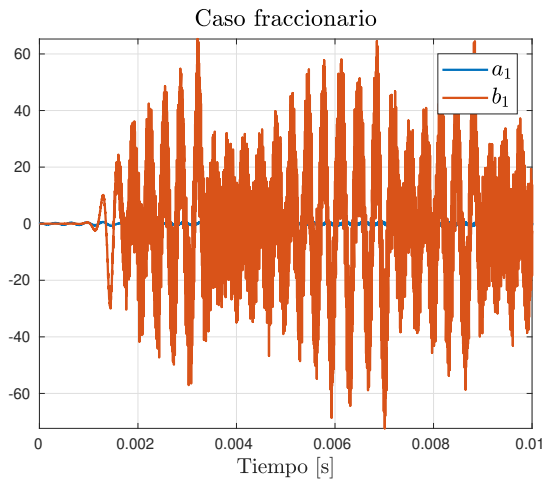
Figura 3.10: Ejemplo 3.3.4 reconstrucción de los voltajes V_{c1} en el caso clásico y fraccionario.



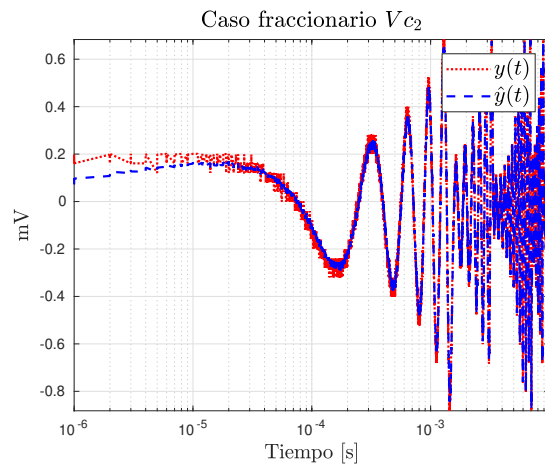
(a) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 3$.



(b) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y real $y(t)$ caso clásico.

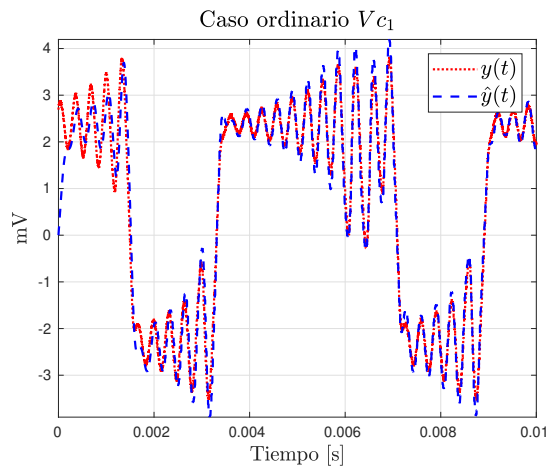


(c) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 1$.

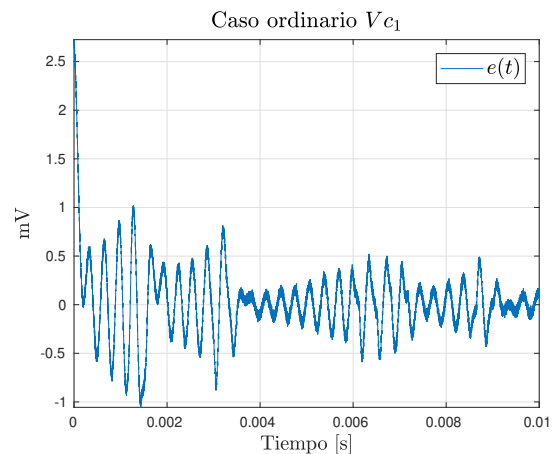


(d) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y real $y(t)$ caso fraccionario.

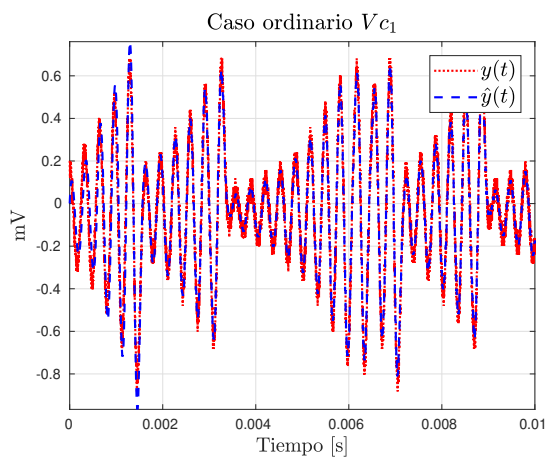
Figura 3.11: Ejemplo 3.3.4 Reconstrucción de los voltajes V_{c2} en el caso clásico y fraccionario.



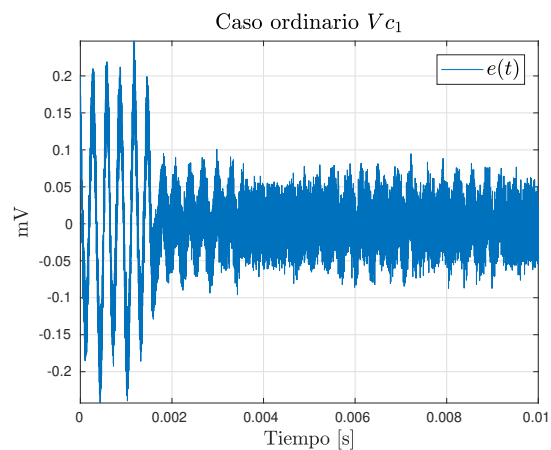
(a) Voltaje en el capacitor uno V_{c1} denotado como $y(t)$ y voltaje estimado $\hat{y}(t)$ utilizando un observador clásico de orden $n = 3$.



(b) Dinámicas del error en el observador clásico de orden $n = 3$ para V_{c1} .

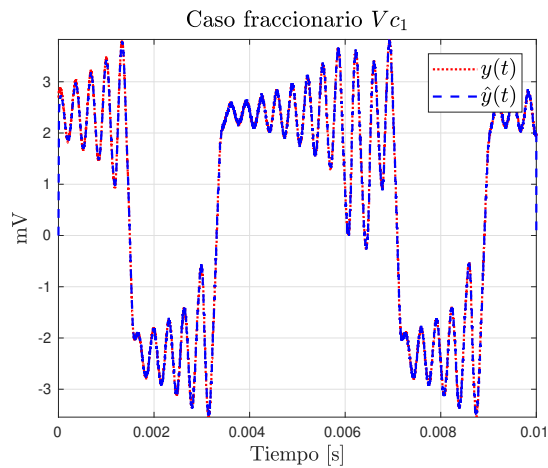


(c) Voltaje en el capacitor dos V_{c2} denotado como $y(t)$ y voltaje estimado $\hat{y}(t)$ utilizando un observador clásico de orden $n = 3$.

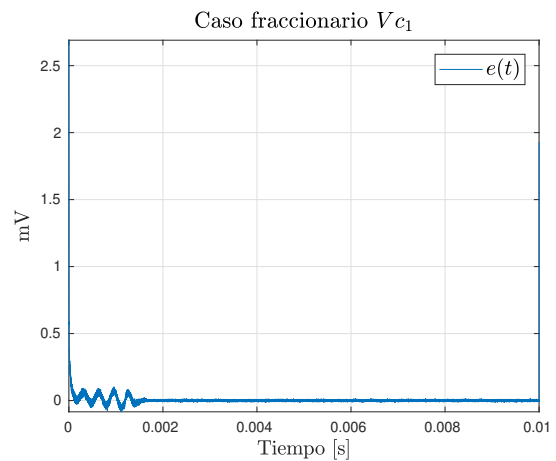


(d) Dinámicas del error en el observador clásico de orden $n = 3$ para V_{c2} .

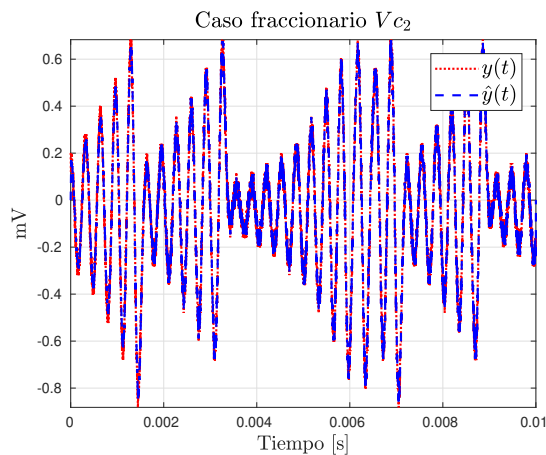
Figura 3.12: Ejemplo 3.3.4 Voltajes estimados (a) V_{c1} y (c) V_{c2} por dos observadores clásicos de orden $n = 3$.



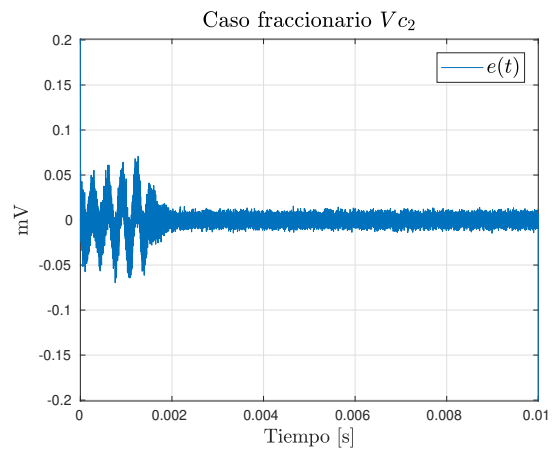
(a) Voltaje en el capacitor uno V_{c1} denotado como $y(t)$ y voltaje estimado $\hat{y}(t)$ utilizando un observador fraccionario de orden $n = 1$.



(b) Dinámicas del error en el observador fraccionario de orden $n = 1$ para V_{c1} .

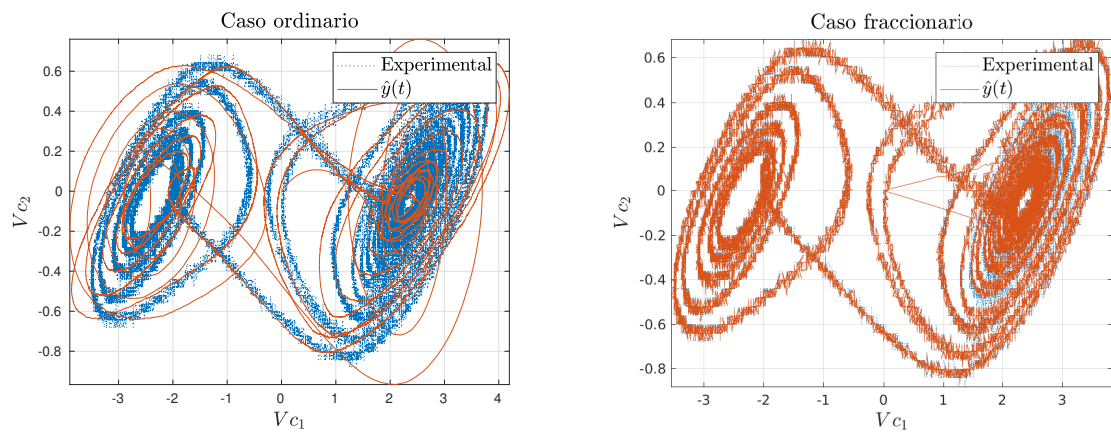


(c) Voltaje en el capacitor dos V_{c2} denotado como $y(t)$ y voltaje estimado $\hat{y}(t)$ utilizando un observador fraccionario de orden $n = 1$.



(d) Dinámicas del error en el observador fraccionario de orden $n = 1$ para V_{c2} .

Figura 3.13: Ejemplo 3.3.4 Voltaje estimado (a) V_{c1} y (c) V_{c2} por dos observadores fraccionario de orden $n = 1$.



(a) Voltajes V_{c1} y V_{c2} de los observadores diseñados para el ejemplo 3.3.4 circuito de Chua, orden $n = 3$.

(b) Voltajes V_{c1} y V_{c2} de los observadores diseñados para el ejemplo 3.3.4 circuito de Chua, orden $n = 1$.

Figura 3.14: Retrato fase de las señales reconstruidas por el observador clásico (3.44) y fraccionario (3.43) respectivamente.

3.4. Observador espectral tipo Kalman conformable

Del mismo modo, el operador de derivada temporal d/dt es generalizado por los operadores de derivada conformable de tipo Khalil (2.29) y Atangana conformable (2.30), *i.e*

$$\frac{d}{dt} \rightarrow t^{1-\gamma} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \rightarrow t^{1-\gamma K} \mathcal{D}_t^\gamma, \quad (3.47)$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\right)^{1-\gamma} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \rightarrow \left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\right)^{1-\gamma} {}^A \mathcal{D}_t^\gamma. \quad (3.48)$$

Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales modificadas de Riccati y los observadores espectrales quedan expresados por las siguientes ecuaciones

- Sentido de Khalil

$${}^K \mathcal{D}_t^{\gamma_1} P(t) = \frac{1}{t^{1-\gamma_1}} [(A + \lambda I) P(t) + P(t) (A^T + \lambda I) - P(t) C^T R^{-1} C P(t) + Q], \quad (3.49)$$

$${}^K \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}(t) = \frac{1}{t^{1-\gamma_2}} [\dot{A} \hat{v}(t) + K(t) [y(t) - C \hat{v}(t)]]. \quad (3.50)$$

- Sentido Atangana conformable

$${}^A \mathcal{D}_t^{\gamma_1} P(t) = \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma_1)}\right)^{1-\gamma_1}} [(A + \lambda I) P(t) + P(t) (A^T + \lambda I) - P(t) C^T R^{-1} C P(t) + Q], \quad (3.51)$$

$${}^A \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}(t) = \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma_2)}\right)^{1-\gamma_2}} [\dot{A} \hat{v}(t) + K(t) [y(t) - C \hat{v}(t)]]. \quad (3.52)$$

Si el orden de la serie es $n = 1$, entonces los observadores dados por las ecuaciones (3.50–3.52) son expresados como sigue

$${}^K \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_1(t) = \frac{1}{t^{1-\gamma_2}} [\dot{v}_2(t) + k_1(t) [y(t) - C \hat{v}(t)]], \quad (3.53a)$$

$${}^K \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_2(t) = \frac{1}{t^{1-\gamma_2}} [-\omega^2 \hat{v}_1(t) + k_2(t) [y(t) - C \hat{v}(t)]]. \quad (3.53b)$$

$${}^A \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_1(t) = \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma_2)}\right)^{1-\gamma_2}} [\dot{v}_2(t) + k_1(t) [y(t) - C \hat{v}(t)]], \quad (3.54a)$$

$${}^A \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_2(t) = \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma_2)}\right)^{1-\gamma_2}} [-\omega^2 \hat{v}_1(t) + k_2(t) [y(t) - C \hat{v}(t)]], \quad (3.54b)$$

donde los términos $k_1(t)$ y $k_2(t)$ son elementos de la matriz de ganancias $K(t)$ calculada a partir de la ecuación (3.8). Si el orden de la serie es $n = 2$, los observadores conformable y Atangana conformable son descritos como sigue

$${}^K \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_1(t) = \frac{1}{t^{1-\gamma_2}} [\dot{v}_2(t) + k_1(t) [y(t) - C \hat{v}(t)]], \quad (3.55a)$$

$${}^K \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_2(t) = \frac{1}{t^{1-\gamma_2}} [\hat{v}_3(t) + k_2(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \quad (3.55b)$$

$${}^K \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_3(t) = \frac{1}{t^{1-\gamma_2}} [\hat{v}_4(t) + k_3(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \quad (3.55c)$$

$${}^K \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_4(t) = \frac{1}{t^{1-\gamma_2}} [-4\omega^4 \hat{v}_1 - 5\omega^2 \hat{v}_3(t) + k_4(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]]. \quad (3.55d)$$

$${}^A \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_1(t) = \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma_2)}\right)^{1-\gamma_2}} [\hat{v}_2(t) + k_1(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \quad (3.56a)$$

$${}^A \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_2(t) = \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma_2)}\right)^{1-\gamma_2}} [\hat{v}_3(t) + k_2(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \quad (3.56b)$$

$${}^A \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_3(t) = \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma_2)}\right)^{1-\gamma_2}} [\hat{v}_4(t) + k_3(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \quad (3.56c)$$

$${}^A \mathcal{D}_t^{\gamma_2} \hat{v}_4(t) = \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\gamma_2)}\right)^{1-\gamma_2}} [-4\omega^4 \hat{v}_1 - 5\omega^2 \hat{v}_3(t) + k_4(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]]. \quad (3.56d)$$

Para encontrar los valores óptimos que aseguren la convergencia de los observadores, los parámetros γ_1 , γ_2 , λ y ω serán optimizados por el algoritmo de murciélago (BA).

3.4.1. Optimización del observador espectral conformable

El algoritmo de murciélago (BA) fue propuesto por Yang [124] y está basado en el comportamiento de ecolocación de los murciélagos. Las reglas principales que caracterizan a este algoritmo se describen a continuación:

- Todos los murciélagos utilizan ecolocación para: conocer la distancia, distinguir entre comida y presa, así como otras barreras presentes en el entorno.
- Los murciélagos vuelan aleatoriamente con una velocidad v_i y posición x_i a una frecuencia fija f_{min} , longitud de onda λ variable y volumen A_0 para buscar a sus presas. Los murciélagos pueden ajustar automáticamente la longitud de onda de los pulsos emitidos así como el intervalo de emisión del pulso $r \in [0, 1]$ dependiendo de la proximidad de sus objetivos.
- Debido a que el volumen puede variar, en este algoritmo se asume que el intervalo está definido entre un valor A_0 (positivo) y un valor mínimo constante A_{min} .

Cabe mencionar que este algoritmo omite el seguimiento de rayos para estimar el tiempo con retardo y topografía tridimensional. Por lo tanto, el siguiente enfoque es propuesto: Una frecuencia $f \in [f_{min}, f_{max}]$ corresponde a una longitud de onda en un intervalo $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, esto es, si se encuentra entre $[20kHz, 500kHz]$ el intervalo que corresponde a esa longitud de onda será $[0.7mm, 17mm]$.

Dado que λ y f están relacionados por λf , la frecuencia puede variar mientras que la longitud de onda permanece fija, por lo tanto se asume que $f \in [0, f_{max}]$.

Para los murciélagos, los intervalos de longitud de onda son a unos pocos metros en los cuales el pulso podría estar entre $[0, 1]$. Donde 0 significa ausencia de pulso y 1 el intervalo máximo del pulso emitido.

Los pasos que resumen al algoritmo BA se muestran en el Algoritmo 2.

Algoritmo 2 Algoritmo de murciélago (BA)

-
- 1: Se define la función objetivo $f(x) = RMSE$, $x = (x_1, \dots, x_d)^T$.
 - 2: La población de murciélagos es inicializada x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y v_i .
 - 3: La frecuencia del pulso f_i es definida en x_i .
 - 4: Los intervalos r_i y volumen A_i son inicializados.
 - 5: **while** $t < \text{Máximo número de iteraciones}$ **do**
 - 6: Se generan nuevas soluciones ajustando la frecuencia
 - 7: Las posiciones son actualizadas a partir de las ecuaciones (3.57–3.59)
 - 8: **if** $\text{rand} > r_i$ **then**
 - 9: Se escoge una solución de entre las mejores soluciones
 - 10: Se genera una solución local alrededor de la mejor solución seleccionada
 - 11: **end if**
 - 12: Se genera una nueva solución por medio de un vuelo aleatorio
 - 13: **if** $\text{rand} < A_i \ \& \ f(x_i) < f(x_*)$ **then**
 - 14: Las nuevas soluciones son aceptadas
 - 15: Se incrementa r_i y se reduce A_i
 - 16: **end if**
 - 17: Se clasifican los murciélagos y se busca la mejor solución actual x_*
 - 18: **end while**
-

Movimiento de los murciélagos

Es necesario definir las reglas con las cuales se actualizarán las posiciones x_i y las velocidades v_i en un espacio de búsqueda de dimensión d . Entonces, las nuevas soluciones x_i^t y velocidades v_i^t en un tiempo t están dados por

$$f_i = f_{min} + (f_{max} - f_{min}) \beta, \quad (3.57)$$

$$v_i^t = v_i^{t-1} + (x_i^t - x_*) f_i, \quad (3.58)$$

$$x_i^t = x_i^{t-1} + v_i^t, \quad (3.59)$$

donde $\beta \in [0, 1]$ es un vector de números aleatorios distribuidos uniformemente, x_* es la posición global actual (solución) la cuál es comparada con todas las posibles soluciones. Yang [124] sugiere utilizar los valores de $f_{min} = 0$ y $f_{max} = 100$ dependiendo del tamaño del problema a resolver. Por lo tanto, al inicio de la primera corrida en el algoritmo, a cada murciélago le es asignado una frecuencia aleatoria uniformemente distribuida $[f_{min}, f_{max}]$.

Una nueva solución es generada para cada murciélago a partir de un vuelo aleatorio una vez que la solución es escogida de entre las mejores soluciones generadas

$$x_{new} = x_{old} + \epsilon A^t, \quad (3.60)$$

donde $\epsilon \in [-1, 1]$ es un número aleatorio, mientras que $A^t = \langle A_i^t \rangle$ es el volumen promedio de todos los murciélagos en un instante de tiempo.

Volumen y emisión de pulsos

El intervalo de emisión de pulso r_i y el volumen A_i se actualizan de acuerdo con el proceso de iteración. Si la sonoridad decrementa a causa de que un murciélago encuentra a su presa, entonces la sonoridad se puede escoger a conveniencia mientras el intervalo

del pulso de emisión incrementa. Considerando que $A_{min} = 0$ entonces el murciélago ha encontrado su presa y temporalmente deja de emitir cualquier sonido. La nueva solución está representada como sigue:

$$A_i^{t+1} = \alpha A_i^t, \quad r_i^{t+1} = r_i^0 [1 - \exp(-\gamma t)], \quad (3.61)$$

donde α y γ son constantes. Por simplicidad se tiene que $\alpha = \gamma$ por lo tanto $\alpha = \gamma = 0.9$. Los parámetros restantes tales como volumen inicial $A_i^0 \in [1, 2]$; mientras que el intervalo de emisión r_i^0 podría estar cercano a cero o a cualquier valor entre $r_i^0 \in [0, 1]$ si la ecuación (3.61) es utilizada.

3.4.2. Resultados de simulación

A continuación se presentan los resultados de simulación de los observadores clásico y conformables para analizar su desempeño ante la reconstrucción de señales no estacionarias como: electrocardiograma, electromiograma y fonocardiograma.

Simulación 1: Electrocardiograma (ECG)

El conjunto de datos del ECG se obtuvo de los trabajos de Goldberger *y col.* [125] así como de Penzel *y col.* [126], cuyo objetivo era detectar apnea. Dicho conjunto contiene 70 grabaciones divididas en dos conjuntos de datos; un conjunto de entrenamiento y un conjunto de prueba cada uno de ellos con 35 grabaciones. Cada grabación tiene entre 7 y 10 horas de duración.

Para el desarrollo de este ejemplo, se tomaron las primeras 1000 muestras del primer conjunto de entrenamiento adquiridas a 100Hz. La estructura de los observadores están dadas como sigue:

Observador clásico para $n = 3$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_1(t) &= \hat{v}_2(t) + K_1(t) [y(t) - C\hat{v}(t)], \\ \dot{\hat{v}}_2(t) &= \hat{v}_3(t) + K_2(t) [y(t) - C\hat{v}(t)], \\ \dot{\hat{v}}_3(t) &= \hat{v}_4(t) + K_3(t) [y(t) - C\hat{v}(t)], \\ \dot{\hat{v}}_4(t) &= \hat{v}_5(t) + K_4(t) [y(t) - C\hat{v}(t)], \\ \dot{\hat{v}}_5(t) &= \hat{v}_6(t) + K_5(t) [y(t) - C\hat{v}(t)], \\ \dot{\hat{v}}_6(t) &= -36\omega^6 \hat{v}_1(t) - 49\omega^4 \hat{v}_3(t) - 14\omega^2 \hat{v}_6(t) + K_6(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Observador conformable con $n = 2$, en el sentido de Khalil:

$$\begin{aligned} {}_0^K \mathcal{D}_t^{0.7924} \hat{v}_1(t) &= \frac{1}{t^{0.2076}} [\hat{v}_2(t) + K_1(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \\ {}_0^K \mathcal{D}_t^{0.7924} \hat{v}_2(t) &= \frac{1}{t^{0.2076}} [\hat{v}_3(t) + K_2(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \\ {}_0^K \mathcal{D}_t^{0.7924} \hat{v}_3(t) &= \frac{1}{t^{0.2076}} [\hat{v}_4(t) + K_3(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \\ {}_0^K \mathcal{D}_t^{0.7924} \hat{v}_4(t) &= \frac{1}{t^{0.2076}} [-4\omega^4 \hat{v}_1 - 5\omega^2 \hat{v}_3(t) + K_4(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \end{aligned} \quad (3.63)$$

y sentido Atangana conformable:

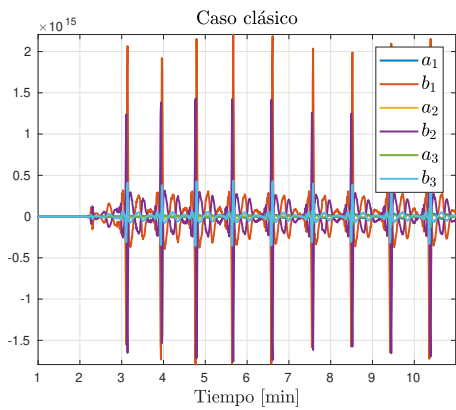
$$\begin{aligned}
 {}_0^A \mathcal{D}_t^{0.7637} \hat{v}_1(t) &= \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(0.7637)}\right)^{0.2363}} [\hat{v}_2(t) + K_1(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \\
 {}_0^A \mathcal{D}_t^{0.7637} \hat{v}_2(t) &= \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(0.7637)}\right)^{0.2363}} [\hat{v}_3(t) + K_2(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \\
 {}_0^A \mathcal{D}_t^{0.7637} \hat{v}_3(t) &= \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(0.7637)}\right)^{0.2363}} [\hat{v}_4(t) + K_3(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]], \\
 {}_0^A \mathcal{D}_t^{0.7637} \hat{v}_4(t) &= \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\Gamma(0.7637)}\right)^{0.2363}} [-4\omega^4 \hat{v}_1 - 5\omega^2 \hat{v}_3(t) + K_4(t) [y(t) - C\hat{v}(t)]].
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Las Figuras 3.15a, 3.15c y 3.15e muestran las dinámicas de los coeficientes de la serie de Fourier, donde se utilizaron los siguientes valores: $P(0) = \delta I$, $Q = I$, $R = I$. El tiempo de simulación fue de 10 minutos y el paso de integración fue de $h = 0.01[s]$. Los parámetros $\lambda, \omega, \sigma, \gamma_1$ y γ_2 de los observadores dados por las ecuaciones (3.62–3.64) se obtuvieron por BA y se muestran en la Tabla 3.4. Por otro lado, las Figuras 3.15b, 3.15d y 3.15f presentan la estimación de la señal del EGC $\hat{y}(t)$ así como la señal real $y(t)$ para cada uno de los enfoques propuestos: clásico, Khalil y Atangana conformable respectivamente.

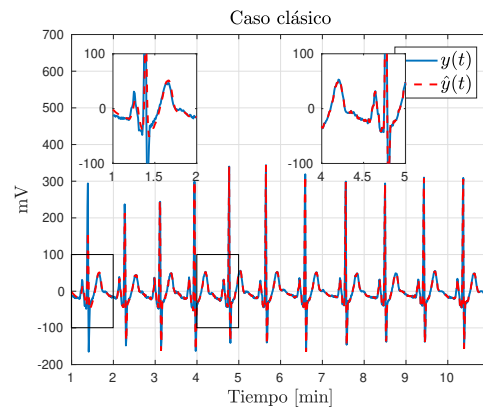
Tabla 3.4: Parámetros de los observadores para el ejemplo 3.4.2

Parámetro	Orden		
	$n = 3$	$n = 2$	$n = 2$
Enfoque	Clásico	Khalil	β
γ_1	1	1	1
γ_2	1	0.7924	0.7637
α	8.8048	18.5352	20.1274
ω	0.01	0.01	0.01
δ	103.664	130.1005	132.4037
<i>RMSE</i>	11.0250	5.0201	4.7944
<i>FIT</i>	78.3937	90.1619	90.6042

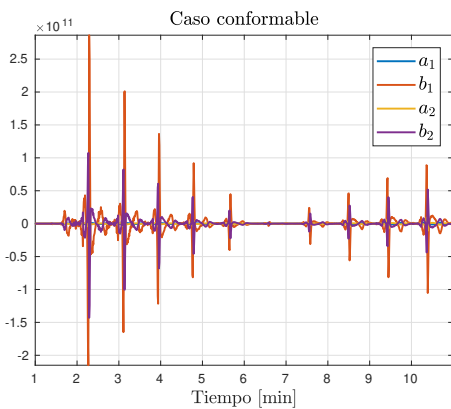
De acuerdo con el valor de RMSE obtenido de cada uno de los enfoques propuestos, el observador de Atangana conformable fue el mejor evaluado debido a que la media del error fue de 4.794 mientras que para el observador clásico fue de 11.02; considerándose a éste último como el peor.



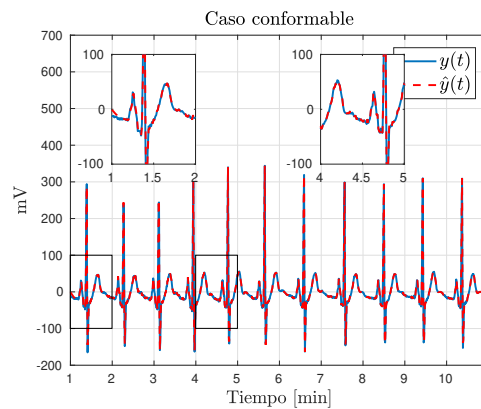
(a) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 3$.



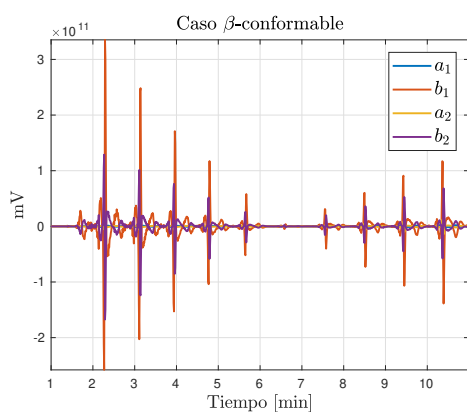
(b) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y señal real $y(t)$ caso clásico.



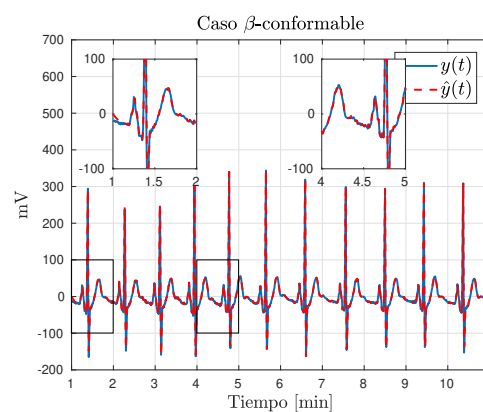
(c) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 2$.



(d) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y señal real $y(t)$, derivada de Khalil.



(e) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 2$.



(f) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y señal real $y(t)$, derivada de Atangana conformable.

Figura 3.15: Ejemplo 3.4.2 estimación de ECG y coeficientes estimados para $n = 3$, $n = 2$, caso clásico y conformable.

Simulación 2: Electromiograma (EMG)

El conjunto de datos utilizados en este ejemplo fueron obtenidos de Asuncion [127]. Dicho conjunto tiene 11 grabaciones de una persona con alguna anomalía en la rodilla previamente diagnosticada y 11 grabaciones de una persona sin ningún daño en la rodilla. Los datos se adquirieron utilizando un dispositivo biométrico DataLOG MWX8 para electromiografía y goniómetro. Este conjunto de datos corresponde al músculo recto femoral. Cada base de datos contiene 15300 muestras adquiridas a 1000Hz.

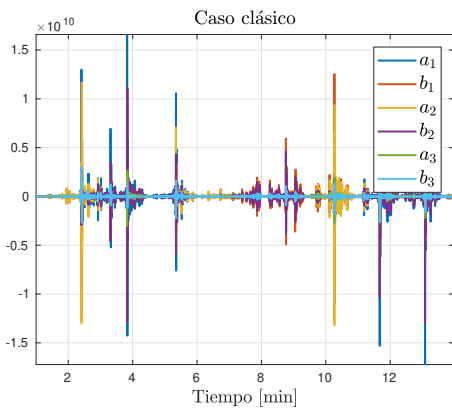
En esta simulación se consideró el conjunto de datos del canal uno para la reconstrucción de la señal así como los observadores dados por las ecuaciones (3.63) y (3.64) con las siguientes condiciones: $P(0) = \delta I$, $Q = I$, $R = I$, $\hat{v}(0) = 0$; paso de integración de $h = 0.001[s]$.

La Figura 3.16 muestra el desempeño del método de reconstrucción propuesto. Las Figuras 3.16a, 3.16c y 3.16e presentan los coeficientes para los observadores propuestos mientras que en la Figuras 3.16b, 3.16d y 3.16f las señales reconstruidas.

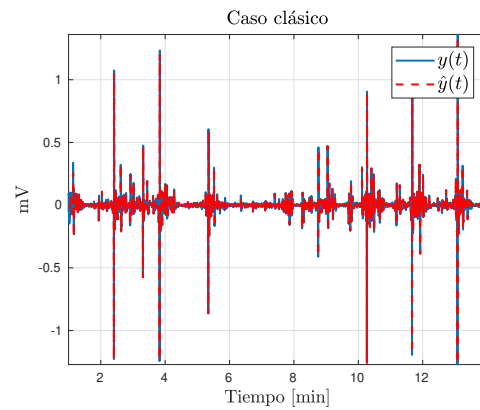
La Tabla 3.5 muestra: los parámetros de los observadores, los órdenes de las derivadas y los errores de cada uno de los enfoques propuestos. De acuerdo con el RMSE, el observador diseñado con la derivada Atangana conformable tuvo mejor desempeño dado que el valor del RMSE fue de 0.0026. El observador clásico tuvo 0.0061, y el observador conformable 0.0038. Los valores de FIT para el observador clásico, conformable y Atangana conformable fueron 92.74, 95.41, y 96.86 respectivamente. De modo que el observador Atangana conformable es una opción para la reconstrucción de la señal.

Tabla 3.5: Parámetros de los observadores para el ejemplo 3.4.2

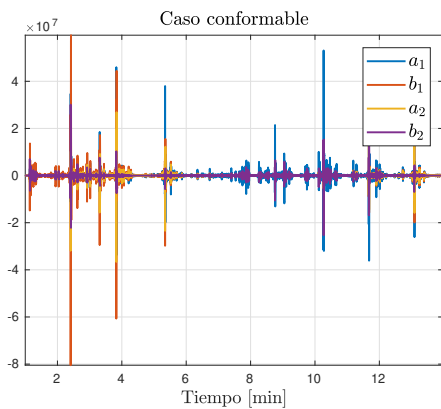
Parámetro	Orden		
	$n = 3$	$n = 2$	$n = 2$
Enfoque	Clásico	Khalil	β
γ_1	1	0.4278	0.8261
γ_2	1	0.9641	0.9776
α	89.2228	148.4955	138.1374
ω	0.3771	0.1699	1.3051
δ	0.05	1000	1000
<i>RMSE</i>	0.0061	0.0038	0.0026
<i>FIT</i>	92.7493	95.4186	96.863



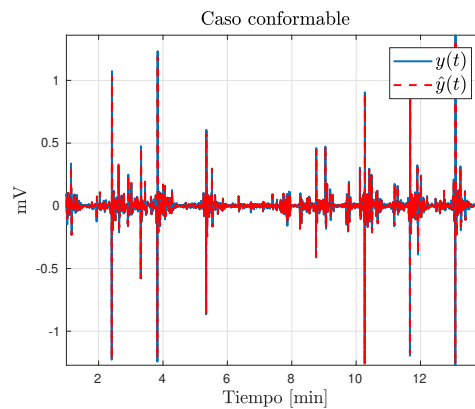
(a) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 3$.



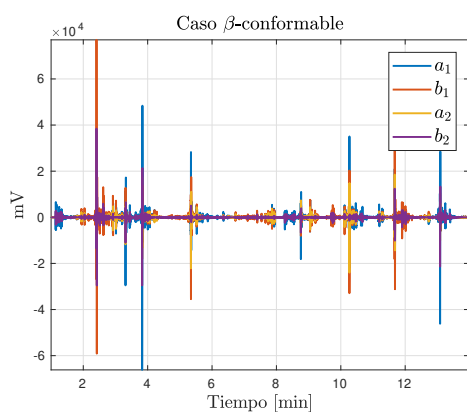
(b) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y señal real $y(t)$ caso clásico.



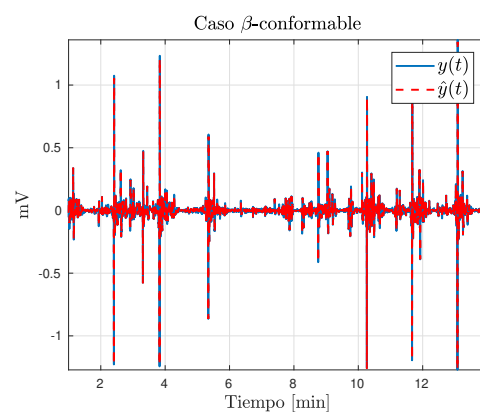
(c) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 2$.



(d) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y señal real $y(t)$, derivada de Khalil.



(e) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 2$.



(f) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y señal real $y(t)$, derivada de β .

Figura 3.16: Ejemplo 3.4.2 estimación de EMG y coeficientes estimados para $n = 3$, $n = 2$, caso clásico y conformable.

Simulación 3: Fonocardiograma (PCG)

El objetivo de esta simulación es reconstruir los datos experimentales de un fonocardiograma fetal en una mujer embarazada sana. Estos datos se obtuvieron de Goldberger *y col.* [125] y Ruffo *y col.* [128], y consiste en un conjunto de 26 señales de PCG de diferentes mujeres embarazadas sanas durante los últimos meses de gestación.

Los archivos fueron grabados en una clínica privada en el año 2010 utilizando un sistema de monitoreo Fetaphon con sesiones de 20 minutos en promedio. Los datos se adquirieron a una frecuencia de muestreo de 333 Hz con un convertidor AD de 8 bits de resolución. Para esta simulación, se utilizaron las primeras 2000 muestras. Los observadores (3.63) y (3.64) fueron configurados con las siguientes condiciones iniciales: $P(0) = \delta I, Q = I, R = I, \hat{v}(0) = 0$; y el siguiente paso de integración $h = 0.003[s]$.

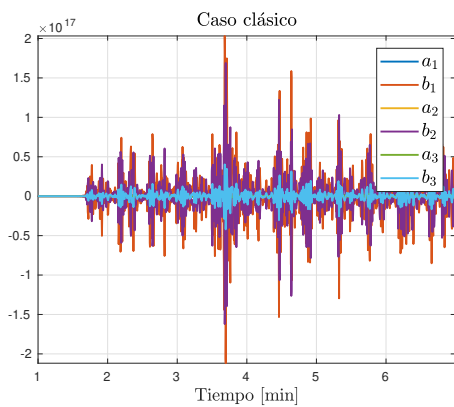
Se diseñaron los siguientes observadores para evaluar su efectividad: Khalil (3.50) y Atangana conformable (3.52) de orden $n = 2$; clásico (3.44) de orden $n = 3$. Los parámetros utilizados se muestran en la Tabla 3.6.

Las Figuras 3.17c, 3.17e y 3.17g muestran la señal real y la señal reconstruida utilizando el observador clásico, conformable y Atangana conformable respectivamente. Mientras que las Figuras 3.17a, 3.17d y 3.17f muestran los coeficientes de los observadores optimizados por BA (2).

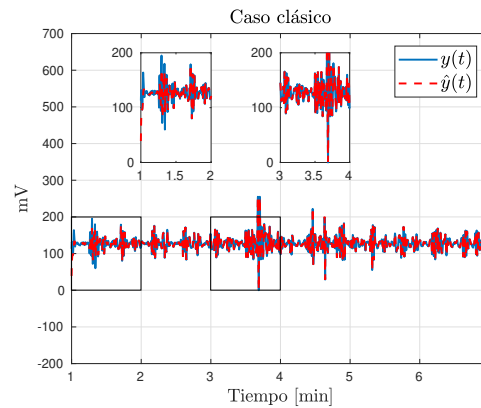
De acuerdo con los RMSE mostrados en la Tabla 3.6, se puede observar que de los observadores diseñados, el observador Atangana conformable fue el mejor evaluado dado que su RMSE fue de 2.379 mientras que para el observador clásico fue de 4.04, y el conformable de tipo Khalil de 2.44. Los valores de FIT para los observadores clásico, conformable y Atangana conformable fueron de 76.82, 85.99, y 86.38 respectivamente. Tal que, los resultados muestran que el observador Atangana conformable es ligeramente mejor que el observador conformable en el sentido de Khalil.

Tabla 3.6: Parámetros de los observadores, Ejemplo 3.4.2

Parámetro	Orden		
	$n = 3$	$n = 2$	$n = 2$
Enfoque	Clásico	Khalil	β
γ_1	1	0.01	0.4564
γ_2	1	0.8513	0.8077
α	29.5446	51.936	57.8284
ω	0.0118	0.01	0.01
δ	202.5551	217.4461	267.2682
<i>RMSE</i>	4.0494	2.4472	2.3794
<i>FIT</i>	76.8222	85.9931	86.381

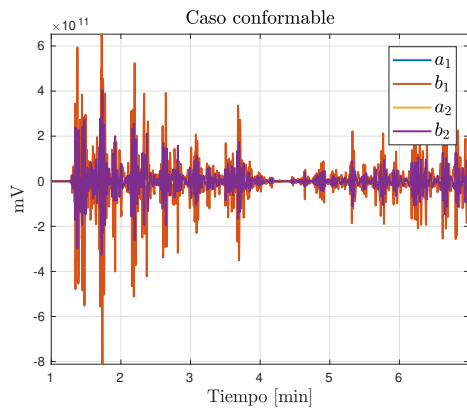


(a) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 3$.

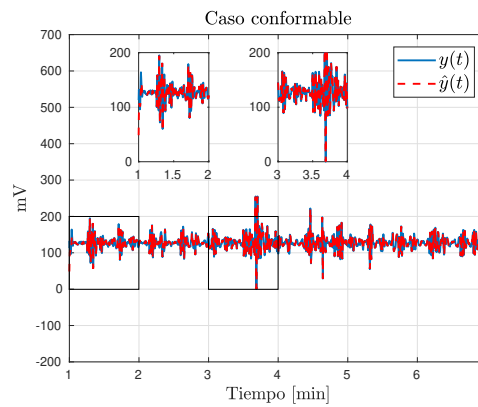


(b)

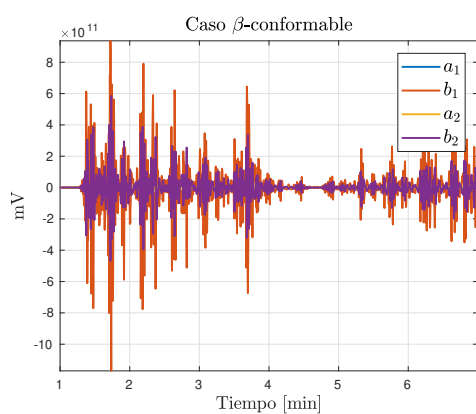
(c) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y real $y(t)$, caso clásico.



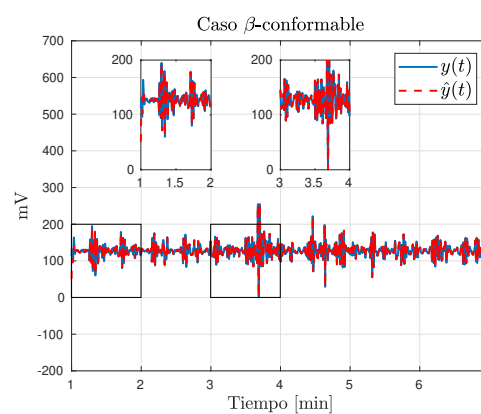
(d) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 2$.



(e) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y real $y(t)$, sentido de Khalil.



(f) Estimación de los coeficientes a_i y b_i , orden $n = 2$.



(g) Señal estimada $\hat{y}(t)$ y real $y(t)$, sentido Atangana conformable.

Figura 3.17: Ejemplo 3.4.2 estimación del PCG y coeficientes estimados para los observadores de orden $n = 3$ y $n = 2$ caso clásico y conformable.

3.5. Conclusiones parciales

El diseño de los observadores propuestos incluyó tres etapas importantes: la búsqueda de parámetros, la sintonización por medio de algoritmos metaheurísticos de los observadores fraccionarios así como los conformables. Además, realizó la evaluación de su desempeño por medio del RMSE y el FIT.

De acuerdo con los resultados de simulación obtenidos, se pudo analizar que el observador fraccionario de orden $n = 1$ y los conformables en el sentido de Khalil y Atangana conformable respectivamente tuvieron mejor desempeño en el proceso de reconstrucción de señales no estacionarias en contraste con los observadores clásicos de orden $n = 3$. Esto fue a causa de dos razones: las ganancias de los observadores espectrales tipo Kalman con enfoque fraccionario y conformable estaban en función de la solución a la ecuación diferencial modificada de Riccati fraccionaria así como con enfoque conformable. Los observadores propuestos estaban diseñados de tal manera que la derivada fraccionaria y conformable proporcionara un grado de libertad adicional para poder caracterizar con mayor precisión la naturaleza de las señales experimentales.

Además, se pudo observar que no sólo se redujo el número de coeficientes de la serie de Fourier para reconstruir una señal experimental sino también se atenuó la amplitud de los coeficientes durante la reconstrucción. Esta atenuación se puede interpretar como un efecto de filtrado debido a los operadores de orden no entero utilizados. No obstante, si se analiza con detalle las dinámicas de los coeficientes de los enfoques propuestos se puede llegar a la conclusión de que el operador fraccionario, al poseer un kernel asociado en su definición, es capaz de reducir en mayor medida la amplitud de los coeficientes.

Por último, se observó que los observadores fraccionarios propuestos describen mejor la naturaleza de la señal con el menor número de coeficientes de la serie de Fourier en contraste con los observadores conformables y clásicos.

Cálculo fraccionario aplicado al procesamiento de imágenes

We are continually faced with a series of great opportunities brilliantly disguised as insoluble problems.
— John W. Gardner

4.1. Introducción

En el área de procesamiento de imágenes, la detección de bordes es una de las técnicas más utilizadas para la extracción de características en imágenes digitales. El propósito es identificar discontinuidades en la intensidad de los píxeles caracterizando los límites de los objetos en las escenas. Para ello, operadores clásicos de primer y segundo orden llamados gradientes [33, 129] y Laplacianos [34, 130] respectivamente han sido utilizados para llevar a cabo esta tarea.

Del mismo modo, técnicas basadas en cálculo fraccionario han sido propuestas. Por ejemplo, Yang *y col.* [131] desarrollaron un operador para la detección de bordes basado en derivadas e integrales fraccionarias. De acuerdo con los resultados, el operador mostró ser robusto ante la presencia de ruido en contraste con los operadores clásicos.

Después, Tian *y col.* [36] propusieron la generalización del operador de Sobel para la extracción de características en imágenes de resonancia magnética y ultrasonido cardíaco. Con base en los resultados obtenidos, se mostró que el operador fraccionario propuesto es robusto ante ruido.

Más tarde, Amoako *y col.* [132] diseñaron una máscara diferencial basada en la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. De igual manera Tian *y col.* [133] en el 2016, propusieron un operador basado en la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov.

Otra tarea realizada en el procesamiento de imágenes es la segmentación de vasos sanguíneos. Aquí, dos métodos han sido propuestos: supervisado y no supervisado. Los métodos supervisados utilizan muestras presegmentadas conocidas como ground truth para entrenar clasificadores mientras que los no supervisados hacen uso de técnicas con

base en: umbrales, operaciones morfológicas, métodos de fusión y activos. Por ejemplo, Aguirre-Ramos [59] propuso un esquema de segmentación basado en un banco de filtros de Gabor y la derivada de Riemann-Liouville. Además, consideró un Filtro Radial Pasa-Bajas (LPRF) para atenuar el ruido presente en imágenes tomadas de retinas.

No obstante, los trabajos con enfoque fraccionario reportados en la literatura utilizan derivadas con kernel de potencia. Por lo tanto, existe una singularidad artificial y además, los efectos de memoria no son descritos con precisión. Por esta razón, en este apartado se mostrará el desarrollo de algoritmos con kernel no singulares para las tareas de detección de bordes y segmentación de vasos sanguíneos.

4.2. Operadores basados en derivadas

Una imagen puede ser representada como una función de imagen $I(x, y)$, donde (x, y) es la coordenada espacial con $x = 1, 2, \dots, n_{cols}$; donde n_{cols} es el número de columnas de píxels que tiene la imagen, $y = 1, 2, \dots, n_{fils}$ es el número de filas de píxels que tiene la imagen e I es la intensidad del píxel en (x, y) . En este contexto, los filtros derivativos a lo largo de x (h_x) y a lo largo de y (h_y) pueden ser obtenidos a partir de diferencias centrales considerando $h = 1$, es decir

$$h_x := \frac{d I(x, y)}{dx} = I(x + 1, y) - I(x - 1, y), \quad (4.1)$$

$$h_y := \frac{d I(x, y)}{dy} = I(x, y + 1) - I(x, y - 1). \quad (4.2)$$

Además, un filtro de derivada de dirección arbitraria h_θ es expresado como una combinación de las anteriores de la siguiente forma

$$h_\theta = \cos(\theta) \cdot h_x + \sin(\theta) \cdot h_y. \quad (4.3)$$

A partir de un vector descriptivo, es posible obtener el gradiente de una imagen ∇I , esto es

$$\nabla I = \frac{\partial I}{\partial x} \hat{i}_x + \frac{\partial I}{\partial y} \hat{i}_y = (h_x \otimes I) \hat{i}_x + (h_y \otimes I) \hat{i}_y, \quad (4.4)$$

donde I es la imagen de entrada en escala de grises, \hat{i}_x y \hat{i}_y son los vectores unitarios en la dirección horizontal y vertical, respectivamente.

Utilizando las ecuaciones (4.1) y (4.2), los filtros de derivada h_x y h_y son expresados como una combinación lineal de una máscara vectorial y la imagen de entrada, es decir

$$h_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(x - 1, y) \\ I(x, y) \\ I(x + 1, y) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

y

$$h_y = h_x^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [I(x - 1, y) \quad I(x, y) \quad I(x + 1, y)]. \quad (4.6)$$

Por simplicidad, se expresan las ecuaciones (4.5) y (4.6) como máscaras de convolución como sigue

$$h_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

y

$$h_y = h_x^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Considerando un arreglo de píxeles vecinos de 3×3 alrededor del píxel $[i, j]$ se puede obtener la siguiente representación

a_0	a_1	a_2
a_7	$[i, j]$	a_3
a_6	a_5	a_4

de tal manera que los filtros derivativos quedan expresados como sigue

$$h_x = (a_2 + ca_3 + a_4) - (a_0 + ca_7 + a_6), \quad (4.9)$$

$$h_y = (a_0 + ca_1 + a_2) - (a_6 + ca_5 + a_4), \quad (4.10)$$

o bien, expresados como máscaras de convolución

$$h_x = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ c \cdot a_7 & [i, j] & c \cdot a_3 \\ a_6 & a_5 & a_4 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$h_y = \begin{bmatrix} a_0 & c \cdot a_1 & a_2 \\ a_7 & [i, j] & a_3 \\ a_6 & c \cdot a_5 & a_4 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Por consiguiente

- Si $c = 1$, entonces los operadores de Prewitt son representados como

$$h_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

- Si $c = 2$, entonces se obtienen los operadores de Sobel dados por

$$h_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

La Figura 4.1a muestra la imagen utilizada obtenida de la base de datos de segmentación de Berkeley [134]. Las Figuras 4.1b y 4.1c se muestran los operadores de Prewitt mientras que las Figuras 4.1d y 4.1e presentan los operadores de Sobel.

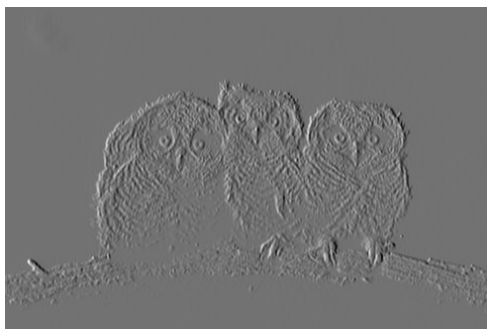
4.3. Índices de desempeño para el procesamiento de imágenes

Métricas utilizadas en el área de detección de bordes

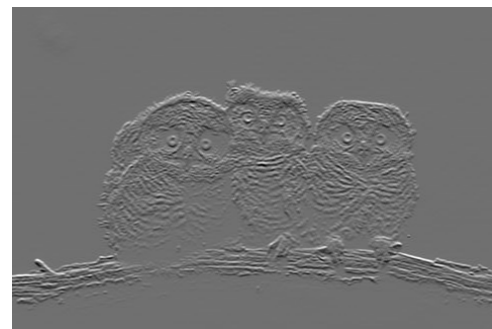
Wu y Rao [135, p. 159] mencionan que en el área de procesamiento de imágenes, la Media del Error al Cuadrado (MSE) y la Proporción Máxima de Señal a Ruido (PSNR)



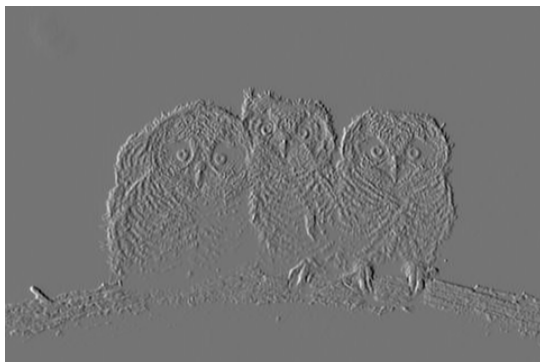
(a) Imagen original



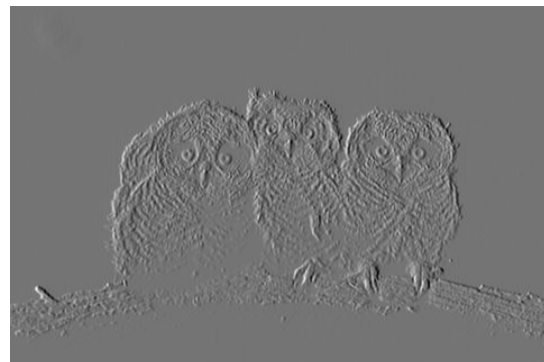
(b) Operador de Prewitt a lo largo de x .



(c) Operador de Prewitt a lo largo de y .



(d) Operador de Sobel a lo largo de x .



(e) Operador de Sobel a lo largo de y .

Figura 4.1: Filtros derivativos clásicos

son las métricas más utilizadas. La MSE es la media de las diferencias cuadradas entre los valores en escala de grises de los píxeles en dos imágenes o secuencias de tamaño $m \times n$

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n \left[I_1(x, y) - I_2(x, y) \right]^2, \quad (4.15)$$

donde I_1 es la imagen real e I_2 la imagen procesada. La diferencia promedio por píxel está dada por la raíz de la media del error al cuadrado $RMSE = \sqrt{MSE}$.

El PSNR está definido en píxeles como

$$PSNR = 10 \log \left[\frac{I_{max}^2}{MSE} \right], \quad (4.16)$$

donde I_{max} es el máximo valor que el píxel puede tomar (*i.e.* 255 para imágenes de 8-bits).

Deng *y col.* [129] mencionan que un valor elevado de PSNR indica que la calidad en la imagen generada es aceptable y en consecuencia, se tiene un valor menor de MSE.

Khaire y Thakur [136] utilizan el Coeficiente de Rendimiento (PR) como índice de medición adicional. La siguiente métrica es empleada en los detectores de bordes

$$PR = \frac{te}{fe} \times 100, \quad (4.17)$$

donde "te" es el número de píxeles identificados como bordes verdaderos, y "fe" denota la suma de los píxeles identificados como píxeles sin borde.

Métricas utilizadas en el área de segmentación

Aguirre-Ramos *y col.* [59] utilizaron seis métricas para evaluar técnicas de segmentación de vasos sanguíneos: Coeficiente de Datos (D), Precisión (ACC), Sensibilidad (SEN), Especificidad (SPE), Tasa de Falsos Positivos (FPR), y Precisión Equilibrada (bACC). Estas métricas están dadas por las ecuaciones (4.18–4.23)

$$D(GT, ASG) = 2 \frac{|GT \cap ASG|}{(|GT| + |ASG|)}, \quad (4.18)$$

$$ACC(GT, ASG) = \frac{|GT \cap ASG| + |\overline{GT} \cap \overline{ASG}|}{|GT| + |\overline{GT}|}, \quad (4.19)$$

$$SEN(GT, ASG) = \frac{|GT \cap ASG|}{|GT \cap ASG| + |\overline{GT} \cap \overline{ASG}|}, \quad (4.20)$$

$$SPE(GT, ASG) = \frac{|\overline{GT} \cap \overline{ASG}|}{|\overline{GT} \cap \overline{ASG}| + |\overline{GT} \cap ASG|}, \quad (4.21)$$

$$FPR(GT, ASG) = \frac{|\overline{GT} \cap ASG|}{|\overline{GT} \cap ASG| + |\overline{GT} \cap \overline{ASG}|}, \quad (4.22)$$

$$bACC(GT, ASG) = \frac{|GT \cap ASG|}{|GT|} + \frac{|\overline{GT} \cap \overline{ASG}|}{|\overline{GT}|}, \quad (4.23)$$

donde GT representa la segmentación manual, ASG los resultados obtenidos por la técnica de segmentación propuesta, \overline{GT} y \overline{ASG} la negada de GT y ASG respectivamente. Además, las métricas: $D, ACC, SEN, SPE, bACC \in [0, 1]$ siendo 1 el mejor valor.

4.4. Gradiente fraccionario para la detección de bordes

Para obtener el gradiente fraccionario en el sentido de Caputo-Fabrizio definido como ∇I^γ con I como la imagen de entrada, el filtro derivativo clásico (4.4) es generalizado por el operador dado en la ecuación (2.20)

$$\nabla I^\gamma = \frac{\partial^\gamma I}{\partial \gamma x} \hat{i}_x + \frac{\partial^\gamma I}{\partial \gamma y} \hat{i}_y = (h_x^\gamma \otimes I) \hat{i}_x + (h_y^\gamma \otimes I) \hat{i}_y, \quad (4.24)$$

donde los operadores h_x^γ y h_y^γ están dados por las siguientes ecuaciones

$$h_x^\gamma \otimes I := {}^{CF} \mathcal{D}_x^\gamma I(x, y) = I(x + 1, y) - I(x - 1, y), \quad (4.25)$$

$$h_y^\gamma \otimes I := {}^{CF} \mathcal{D}_y^\gamma I(x, y) = I(x, y + 1) - I(x, y - 1), \quad (4.26)$$

cuya representación vectorial esta dada como sigue

$$h_x^\gamma := \begin{bmatrix} {}^{CF}\mathcal{D}_x^\gamma I(x+1, y) & 0 & -{}^{CF}\mathcal{D}_x^\gamma I(x-1, y) \end{bmatrix}, \quad h_y^\gamma := \begin{bmatrix} {}^{CF}\mathcal{D}_y^\gamma I(x, y+1) \\ 0 \\ -{}^{CF}\mathcal{D}_y^\gamma I(x, y-1) \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Del mismo modo, los filtros derivativos (4.9) y (4.10) quedan generalizados como sigue

$$h_x^\gamma = {}^{CF}\mathcal{D}_x^\gamma \left[(a_2 + ca_3 + a_4) - (a_0 + ca_7 + a_6) \right], \quad (4.28)$$

$$h_y^\gamma = {}^{CF}\mathcal{D}_y^\gamma \left[(a_0 + ca_1 + a_2) - (a_6 + ca_5 + a_4) \right], \quad (4.29)$$

o bien

$$h_x^\gamma = \begin{bmatrix} -{}^{CF}\mathcal{D}_x^\alpha a_0 & 0 & {}^{CF}\mathcal{D}_x^\alpha a_2 \\ -{}^{CF}\mathcal{D}_x^\alpha c \cdot a_7 & 0 & {}^{CF}\mathcal{D}_x^\alpha c \cdot a_3 \\ -{}^{CF}\mathcal{D}_x^\alpha a_6 & 0 & {}^{CF}\mathcal{D}_x^\alpha a_4 \end{bmatrix}, \quad h_y^\gamma = \begin{bmatrix} {}^{CF}\mathcal{D}_y^\alpha a_0 & {}^{CF}\mathcal{D}_y^\alpha c \cdot a_1 & {}^{CF}\mathcal{D}_y^\alpha a_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^{CF}\mathcal{D}_y^\alpha a_6 & {}^{CF}\mathcal{D}_y^\alpha c \cdot a_5 & {}^{CF}\mathcal{D}_y^\alpha a_4 \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

donde,

$$a_0 = I(x-1, y-1), \quad (4.31a)$$

$$a_1 = I(x, y-1), \quad (4.31b)$$

$$a_2 = I(x+1, y-1), \quad (4.31c)$$

$$a_3 = I(x+1, y), \quad (4.31d)$$

$$a_4 = I(x+1, y+1), \quad (4.31e)$$

$$a_5 = I(x, y+1), \quad (4.31f)$$

$$a_6 = I(x-1, y+1), \quad (4.31g)$$

$$a_7 = I(x-1, y). \quad (4.31h)$$

Utilizando los filtros derivativos fraccionarios expresados en las ecuaciones (4.28) y (4.29), se muestra la generalización del operador de Prewitt en las Figuras 4.2a y 4.2b mientras que en las Figuras 4.2c y 4.2d se puede observar el operador de Sobel con $\gamma = 0.6$.

En este punto, el detector de bordes basado en los filtros derivativos generalizados (4.28) y (4.29) está resumido en el siguiente algoritmo:

Algoritmo 3 Detector de bordes basado en el gradiente fraccionario de tipo Caputo-Fabrizio

- 1: La imagen de entrada debe ser convertida a escala de grises (I)
- 2: Se escoge un valor de $\alpha \in (0, 1]$ generar los filtros derivativos
- 3: Los bordes son obtenidos por la siguiente expresión

$${}^{CF}\mathcal{E}_x^\gamma = \text{abs}(h_x^\gamma \otimes I) + \text{abs}(h_y^\gamma \otimes I). \quad (4.32)$$

Nota: La solución numérica a las ecuaciones (4.28) y (4.29) involucradas en la ecuación (4.32) están expresadas en las ecuaciones (4.37) y (4.38). Además, este esquema numérico fue presentado en Lavín-Delgado *y col.* [137].

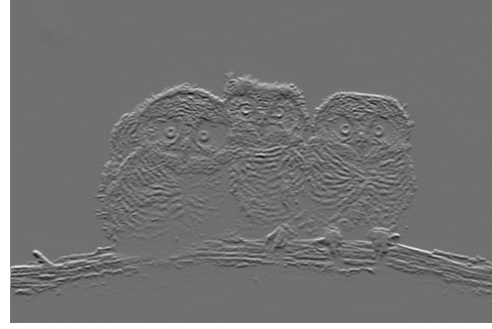
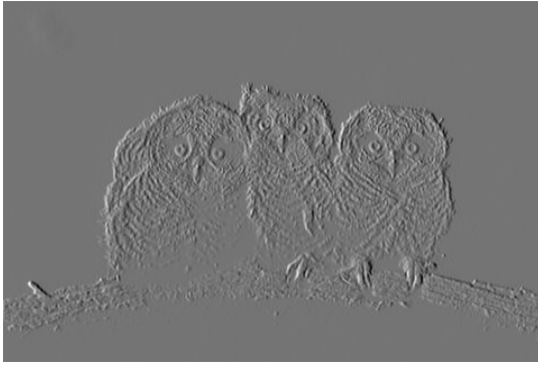
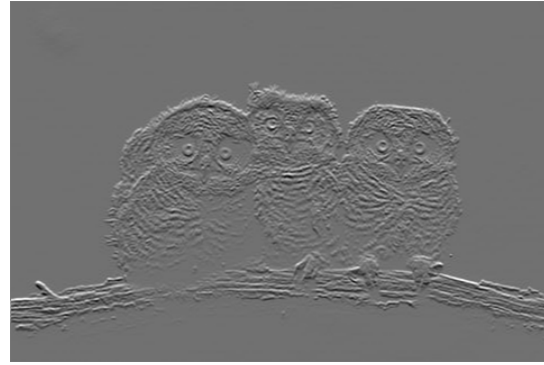

 (a) Operador de Prewitt fraccionario a lo largo de x .

 (b) Operador de Prewitt fraccionario a lo largo de y .

 (c) Operador de Sobel fraccionario a lo largo de x .

 (d) Operador de Sobel fraccionario a lo largo de y .

 Figura 4.2: Filtros derivativos fraccionarios en el sentido de Caputo-Fabrizio con $\gamma = 0.6$.

4.4.1. Solución numérica del gradiente en el sentido de Caputo-Fabrizio

Una ecuación diferencial fraccionaria sin kernel singular de la forma

$${}^{CF}\mathcal{D}_x^\gamma I(x, y) = I(x + 1, y) - I(x - 1, y), \quad (4.33)$$

puede ser expresada como una ecuación integral fraccionaria si el teorema fundamental del cálculo es aplicado, *i.e.*

$$\begin{aligned} \underbrace{\{I(x + 1, y) - I(x - 1, y)\}}_{i(x)} &= \underbrace{\{I(0, y) - I(0, y)\}}_{i(0)} + \frac{1 - \gamma}{M(\gamma)} \{I(x + 1, y) - I(x - 1, y)\} + \\ &+ \frac{\gamma}{M(\gamma)} \int_0^x \underbrace{I(\tau + 1, y) - I(\tau - 1, y)}_{i(\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (4.34a)$$

$$i(x_{n+1}) = i(0) + \frac{1 - \gamma}{M(\gamma)} i(x_n) + \frac{\gamma}{M(\gamma)} \int_0^{x_{n+1}} i(\tau) d\tau, \quad (4.34b)$$

$$i(x_n) = i(0) + \frac{1 - \gamma}{M(\gamma)} i(x_{n-1}) + \frac{\gamma}{M(\gamma)} \int_0^{x_n} i(\tau) d\tau. \quad (4.34c)$$

Reemplazando la ecuación (4.34c) en la ecuación (4.34b), la siguiente expresión es obtenida

$$i(x_{n+1}) = i(x_n) + \frac{1-\gamma}{M(\gamma)} \left\{ i(x_n) - i(x_{n-1}) \right\} + \frac{\gamma}{M(\gamma)} \int_{x_n}^{x_{n+1}} i(\tau) d\tau, \quad (4.35)$$

donde,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} i(\tau) d\tau = \frac{3h}{2} i(x_n) - \frac{h}{2} i(x_{n-1}). \quad (4.36)$$

Finalmente, las aproximaciones numéricas a los filtros derivativos (4.28) y (4.29) están dadas como siguen

$$i_{x_{n+1}} = i_{x_n} + \left(\frac{1-\gamma}{M(\gamma)} + \frac{3\gamma}{2M(\gamma)} \right) i_{x_n} + \left(\frac{1-\gamma}{M(\gamma)} + \frac{\gamma}{2M(\gamma)} \right) i_{x_{n-1}}, \quad (4.37)$$

$$i_{y_{n+1}} = i_{y_n} + \left(\frac{1-\gamma}{M(\gamma)} + \frac{3\gamma}{2M(\gamma)} \right) i_{y_n} + \left(\frac{1-\gamma}{M(\gamma)} + \frac{\gamma}{2M(\gamma)} \right) i_{y_{n-1}}. \quad (4.38)$$

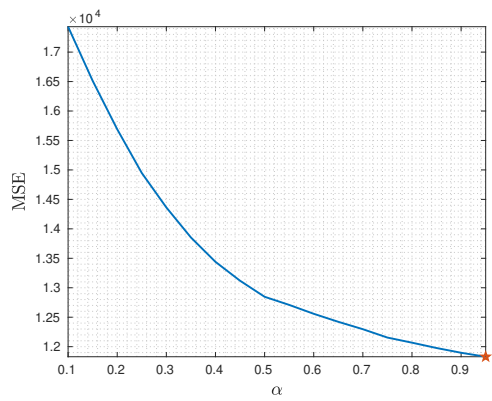
4.4.2. Resultados de simulación

En los siguientes resultados se presenta el análisis de robustez del gradiente fraccionario ante la presencia de ruido tipo sal-pimienta y Gaussiano en imágenes médicas tales como: calcificaciones y cáncer en seno.

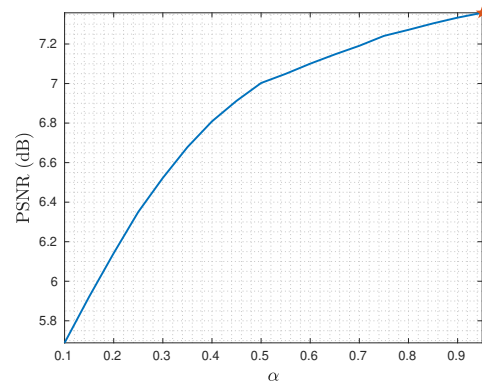
Simulación 1: Análisis de robustez ante la presencia de ruido del gradiente fraccionario

El objetivo de esta simulación es analizar la robustez de la metodología propuesta (4.32) en contraste con los operadores y técnicas clásicas reportadas en la literatura. Para ello se agregó ruido sal y pimienta con densidad $d = 0.1$ así como ruido Gaussiano con $\mu = 0$ y $\sigma = 0.01$ a una imagen elegida arbitrariamente de la base de datos de segmentación de Berkeley [134]; del mismo modo que se hizo en el trabajo de Padmavathi y col. [138]. Las Figuras 4.3a–4.3d muestran las respuestas del gradiente ante la presencia de ruido tipo sal-pimienta y Gaussiano. Jayaraman y col. [139, p. 272] mencionan el ruido sal-pimienta puede ser eliminado efectivamente con un filtro de mediana sin embargo, en las Figuras 4.3a y 4.3b se observa que el gradiente no necesita de una etapa de suavizado pues éste funciona como un filtro artificial.

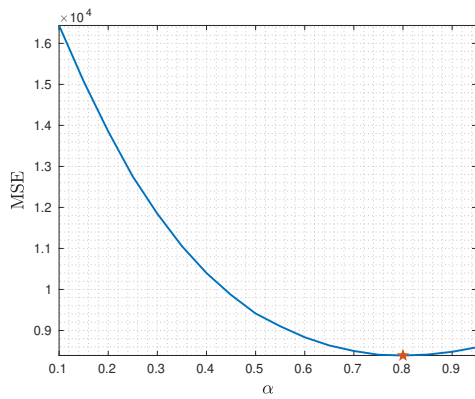
De acuerdo con los resultados de las métricas (4.15)-(4.17), presentados en las Tablas 4.1 a 4.5, se observa que el detector de bordes fraccionario (4.32) es robusto ante la presencia de ruido y por consiguiente, el enfoque propuesto tiene mejor desempeño.



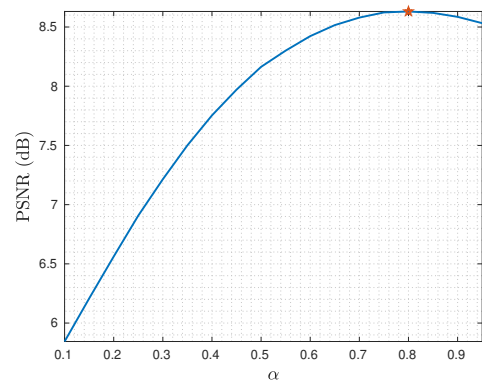
(a) MSE para la imagen con ruido sal-pimienta.



(b) PSNR para la imagen con ruido sal-pimienta.



(c) MSE para la imagen con ruido Gaussiano.



(d) PSNR para la imagen con ruido Gaussiano.

Figura 4.3: Barrido del orden fraccionario para el gradiente fraccionario en el sentido de Caputo-Fabrizio.

Tabla 4.1: Comparación entre los operadores clásicos y fraccionario aplicados a imágenes con ruido sal y pimienta.
















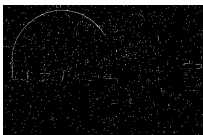



















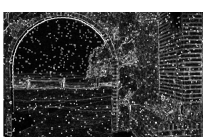

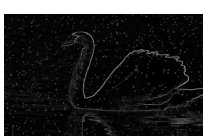





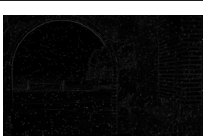
Imagen	Mariposa	Cisne	Avión	Naturaleza
Original				
Imagen con ruido				
Sobel				
Roberts				
LoG				
Prewitt				
Canny				
Fraccionario $\alpha = 0.9$				
Fraccionario $\alpha = 0.8$				
Fraccionario $\alpha = 0.2$				
Fraccionario $\alpha = 0.1$				

Tabla 4.2: Comparación entre los operadores clásicos y fraccionario aplicados a imágenes con ruido Gaussiano.



























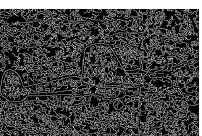

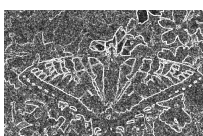



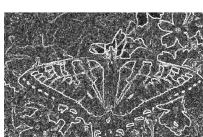



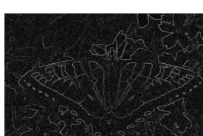


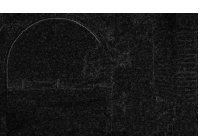
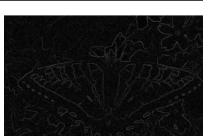


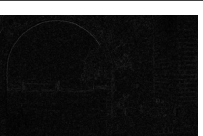
Imagen	Mariposa	Cisne	Avión	Naturaleza
Original				
Imagen con ruido				
Sobel				
Roberts				
LoG				
Prewitt				
Canny				
Fraccionario $\alpha = 0.9$				
Fraccionario $\alpha = 0.8$				
Fraccionario $\alpha = 0.2$				
Fraccionario $\alpha = 0.1$				

Tabla 4.3: Comparación entre los operadores clásicos y fraccionario con la detección de bordes manual.







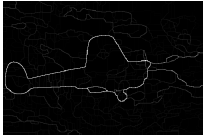






























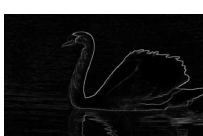


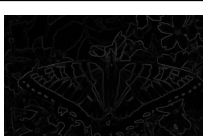
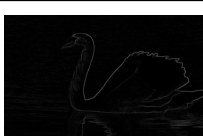
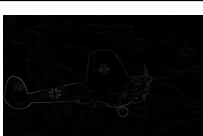
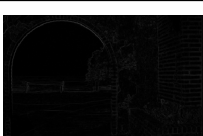
Imagen	Mariposa	Cisne	Avión	Naturaleza
Original				
Ground truth				
Sobel				
Roberts				
LoG				
Prewitt				
Canny				
Fraccionario $\alpha = 0.9$				
Fraccionario $\alpha = 0.8$				
Fraccionario $\alpha = 0.2$				
Fraccionario $\alpha = 0.1$				

Tabla 4.4: Pruebas de desempeño de los detectores de bordes clásicos y el detector fraccionario propuesto.

	Operador	Ruido sal y pimienta		Ruido Gaussiano		PR
		MSE	PSNR(dB)	MSE	PSNR(dB)	
Mariposa	Sobel	19699.11	5.18	19703.63	5.18	9.62
	Roberts	19704.58	5.18	19710.08	5.18	9.88
	LoG	19691.76	5.18	19690.32	5.18	11.69
	Prewitt	19698.86	5.18	19703.55	5.18	9.55
	Canny	19684.23	5.18	19681.82	5.19	16.35
	Fraccionario con $\alpha = 0.9$	11980.63	7.34	8452.59	8.86	46.41
	Fraccionario con $\alpha = 0.8$	12132.08	7.29	8375.42	8.90	46.41
	Fraccionario con $\alpha = 0.2$	15718.62	6.16	13848.97	6.71	46.41
	Fraccionario con $\alpha = 0.1$	17443.90	5.71	16439.79	5.97	46.41

Tabla 4.5: Pruebas de desempeño de los detectores de bordes clásicos y el detector fraccionario propuesto.

	Operador	Ruido sal y pimienta		Ruido Gaussiano		PR
		MSE	PSNR(dB)	MSE	PSNR(dB)	
Cisne	Sobel	14021.66	6.66	14024.57	6.66	5.08
	Roberts	14024.56	6.66	14026.99	6.66	5.80
	LoG	14013.46	6.66	14011.64	6.66	8.54
	Prewitt	14019.43	6.66	14024.54	6.66	5.09
	Canny	14009.42	6.66	13997.91	6.67	13.73
	Fraccionario con $\alpha = 0.9$	11093.41	7.68	9748.24	8.24	21.14
	Fraccionario con $\alpha = 0.8$	11155.46	7.65	9224.99	8.48	21.14
	Fraccionario con $\alpha = 0.2$	12240.22	7.25	10911.94	7.75	21.14
	Fraccionario con $\alpha = 0.1$	12987.51	6.99	12289.85	7.23	21.14

Las Tablas 4.4 y 4.5 muestran los valores obtenidos por las métricas MSE y PSNR para imágenes con ruido tipo sal-pimienta y Gaussiano respectivamente. Aquí se puede observar que si el valor de MSE es cercano a cero el detector de bordes propuesto es capaz de detectar la mayor cantidad de bordes reales. Por otro lado, entre menor sea el MSE mayor es el PSNR lo que se traduce en una imagen de calidad ante la presencia de ruido con la mayor cantidad de bordes detectados.

Simulación 2: Imágenes de cáncer en seno

El objetivo de esta simulación es extraer la mayor cantidad de características en imágenes médicas. Para ello, se consideraron imágenes de cáncer de seno. Este tipo de cáncer es el segundo más común a nivel mundial y su tratamiento depende del progreso de la enfermedad así como de los síntomas de los pacientes [140]. Las imágenes de mamografías fueron tomadas de la Sociedad Americana para la Detección y Diagnóstico de Enfermedades de Seno [141, 142].

Las Figuras 4.4–4.7 muestran los resultados de las imágenes analizadas. En éstos se puede observar que la metodología propuesta mejora las imágenes de mamografías, haciendo posible la detección de masas anormales o posibles lesiones. Además, mejora la textura y el contraste mejorando así la detección de calcificaciones, quistes benignos y cáncer.

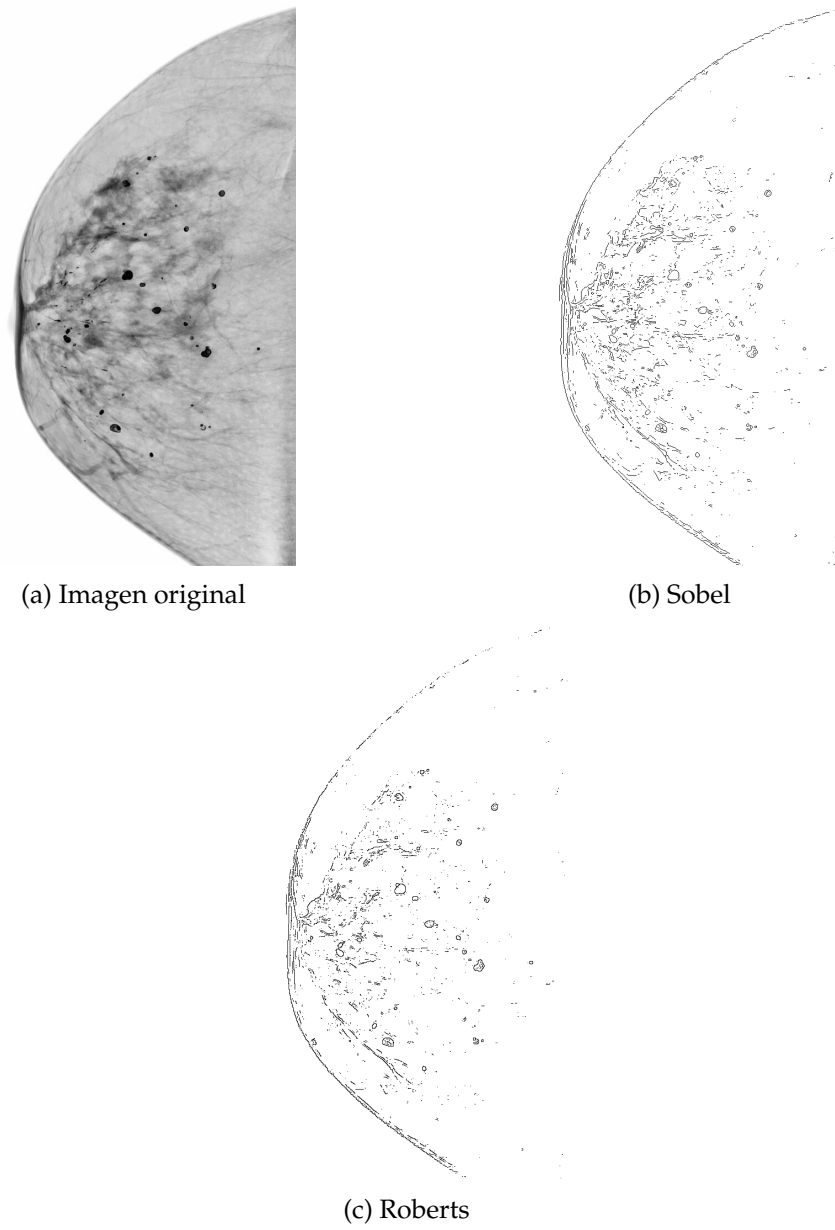
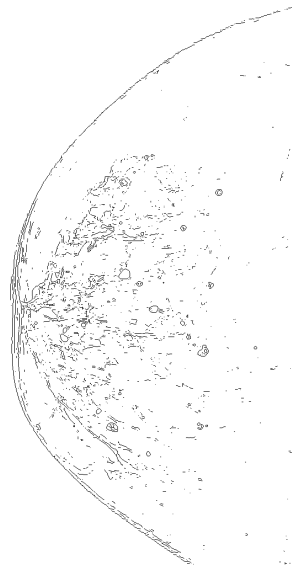
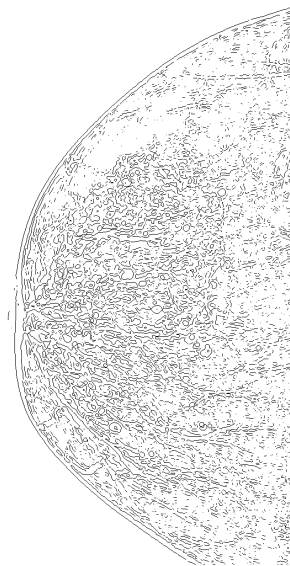


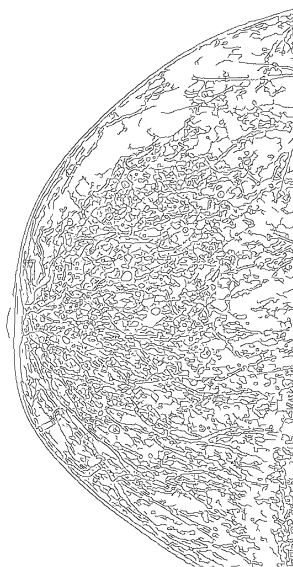
Figura 4.4: Calcificaciones de seno.



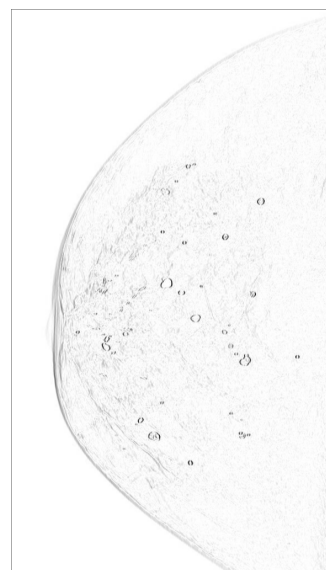
(a) Prewitt



(b) LoG



(c) Canny



(d) Máscara de orden fraccionario de kernel no singular con $\alpha = 0.8$

Figura 4.5: Calcificaciones de seno.

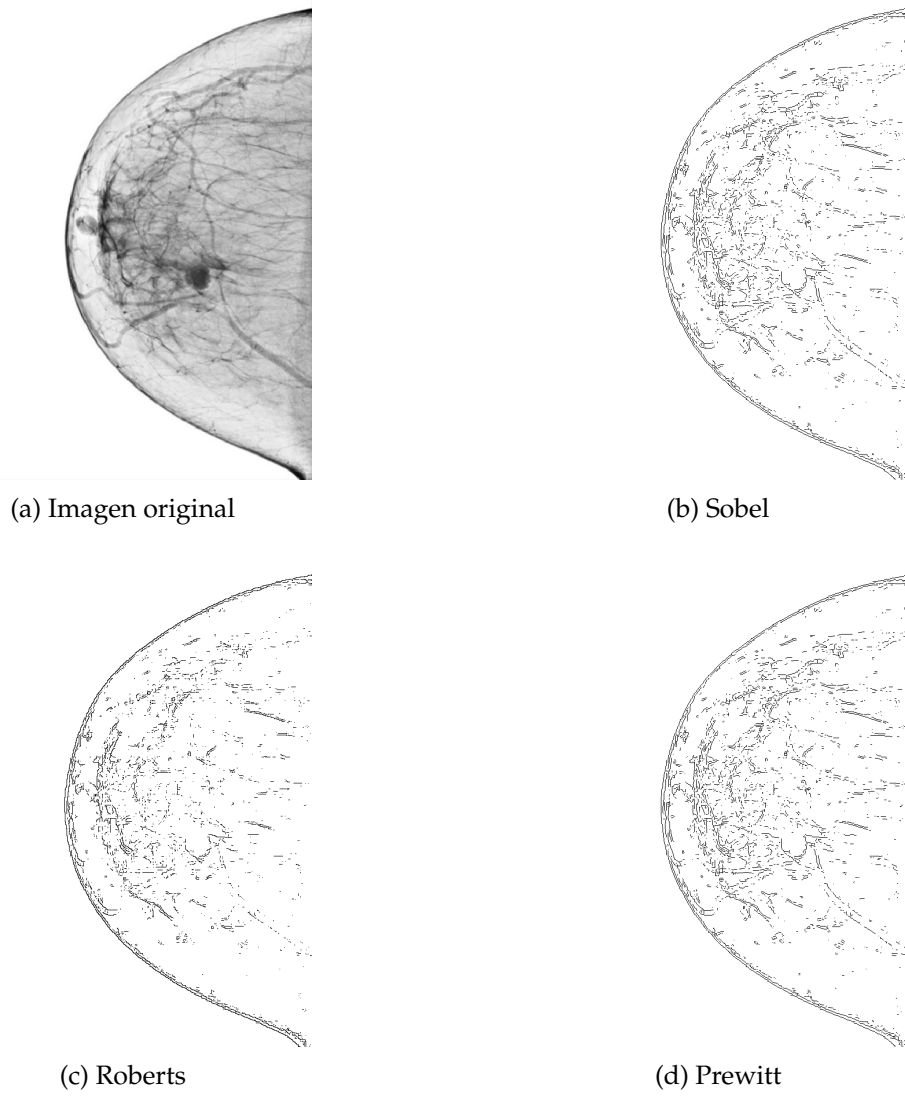
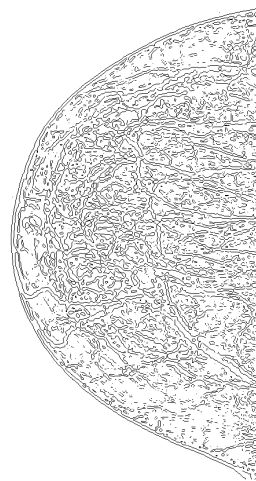
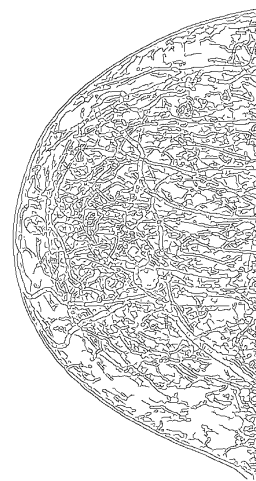


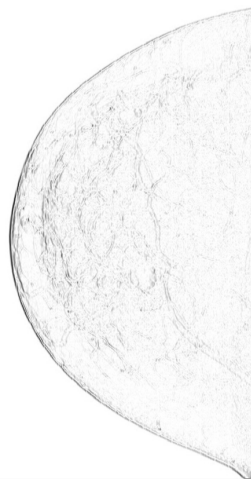
Figura 4.6: Cáncer de seno.



(a) LoG



(b) Canny



(c) Máscara de orden fraccionario de kernel no singular con $\alpha = 0.8$

Figura 4.7: Cáncer de seno.

4.5. Matriz Gaussiana fraccionaria en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo para la segmentación de vasos sanguíneos

La generalización de la matriz Hessiana parte de la generalización del gradiente Gaussiano. Para ello, se considera el siguiente kernel Gaussiano clásico

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.39)$$

donde μ es la media, $\sigma > 0$ la desviación estándar y x la entrada de la función de distribución Gaussiana tal que $x \in [-\lfloor N/2 \rfloor, \lfloor N/2 \rfloor]$ con N definido como el tamaño del kernel. Para propósitos generales, se asume que μ está centrado en $x = 0$, *i.e.* tiene media cero.

Derivando la ecuación (4.39) se tiene

$$\frac{d g(x)}{dx} = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.40)$$

Si el operador clásico d/dx es generalizado por el operador de derivada fraccionaria en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo (2.26) entonces se obtiene lo siguiente

$${}_{0}^{ABC} \mathcal{D}_t^\alpha g(x) = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (4.41)$$

Nota: Conforme $\alpha \rightarrow 1$, entonces la ecuación (4.41) tiende a la ecuación (4.39).

4.5.1. Solución numérica del kernel Gaussiano fraccionario en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo

La solución numérica que aproxima a la derivada de Atangana-Baleanu fue obtenida a partir del esquema predictor-corrector descrito por Alkahtani [143]. Este esquema utiliza la integral fraccionaria de Atangana-Baleanu (2.28) para su formulación así como la cuadratura trapezoidal para hacer la interpolación con el kernel asociado a esta definición.

Entonces, el operador (2.28) es aplicado en ambos lados de la ecuación (4.41)

$$g(x) = g(0) + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} g(x) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t g(x)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad (4.42)$$

de modo que la aproximación a la integral fraccionaria de Atangana-Baleanu es obtenida únicamente utilizando el esquema corrector.

Entonces, considerando $h = \frac{T}{N}$, $t_l = hl$ ($l = 0, 1, 2, 3, \dots, N$), donde T es el intervalo superior de integración. La regla de Adams-Bashforth para la derivada de Atangana-Baleanu está dada como sigue

$$x_n(t) = x(0) + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t_{n+1}, x_{n+1}^p) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \left[\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, x_{n+1}^p) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \times \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, x_j) \right], \quad (4.43)$$

donde el coeficiente $a_{j,n+1}$ es calculado como

$\begin{bmatrix} 0.1340 & -0.0120 & -0.1340 \\ 0.2150 & -0.0193 & -0.2150 \\ 0.1147 & -0.0103 & -0.1147 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1428 & -0.0231 & -0.1428 \\ 0.2236 & -0.0362 & -0.2236 \\ 0.1065 & -0.0173 & -0.1065 \end{bmatrix}$
Desviación estándar $\sigma = 1$, orden $\alpha = 0.9321$	Desviación estándar $\sigma = 1.5$, orden $\alpha = 0.8768$
$\begin{bmatrix} 0.1350 & -0.0133 & -0.1350 \\ 0.2160 & -0.0213 & -0.2160 \\ 0.1138 & -0.0112 & -0.1138 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1548 & -0.0396 & -0.1548 \\ 0.2342 & -0.0599 & -0.2342 \\ 0.0949 & -0.0243 & -0.0949 \end{bmatrix}$
Desviación estándar $\sigma = 2$, orden $\alpha = 0.9255$	Desviación estándar $\sigma = 2.5$, orden $\alpha = 0.8043$

Máscara 4.1: Máscara Gaussiana fraccionaria a lo largo de la dirección x dada por la ecuación (4.41), tamaño de la máscara 3×3 .

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n - \alpha)(n + 1)^\alpha, & j = 0, \\ (n - j + 2)^{\alpha+1} + (n - j)^{\alpha+1} - 2(n - j + 1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (4.44)$$

Finalmente, reescribiendo la solución de la ecuación (4.43) se tiene

$$\begin{aligned} g_n(t) = & g(0) + \frac{1 - \alpha}{B(\alpha)} \left[-\frac{(x_{n+1}^p - \mu)}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_{n+1}^p - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right] + \\ & + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \left\{ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \left[-\frac{(x_{n+1}^p - \mu)}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_{n+1}^p - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} \left[-\frac{(x_n - \mu)}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

La solución numérica expresada en la ecuación (4.45), es utilizada para obtener una aproximación a la generalización del kernel Gaussiano en 1 y 2 dimensiones.

En este punto, la Figura 4.8 muestra los resultados numéricos para diferentes valores de σ y órdenes α . Del mismo modo, la Figura 4.9 muestra diferentes kernel Gaussiano fraccionario en 2-D, mientras que en la Máscara 4.1 diferentes máscaras Gaussianas son mostradas. En estos resultados se puede ver que si $\alpha = 1$ entonces el kernel Gaussiano clásico (4.39) es recuperado, en otro caso, diferentes comportamientos del kernel Gaussiano fraccionario son mostrados.

4.5.2. Gradiente Gaussiano fraccionario

Del mismo modo que en (4.4) el gradiente fraccionario ∇I^γ , basado en el filtro de kernel Gaussiano fraccionario (4.41), es representado como un vector de derivada descriptivo

$$\begin{aligned} \nabla I^\gamma = & \frac{\partial^\gamma I}{\partial^\gamma x} \hat{i}_x + \frac{\partial^\gamma I}{\partial^\gamma y} \hat{i}_y = \left(\left({}_0^{ABC} \mathcal{D}_t^\gamma g(x) \otimes [1 \ 0 \ -1] \right) \otimes I \right) \hat{i}_x + \\ & + \left(\left({}_0^{ABC} \mathcal{D}_t^\gamma g(y) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \otimes I \right) \hat{i}_y, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde las aproximaciones numéricas de los operadores ${}_0^{ABC} \mathcal{D}_t^\gamma g(x)$ y ${}_0^{ABC} \mathcal{D}_t^\gamma g(y)$ están dados por la ecuación (4.45).

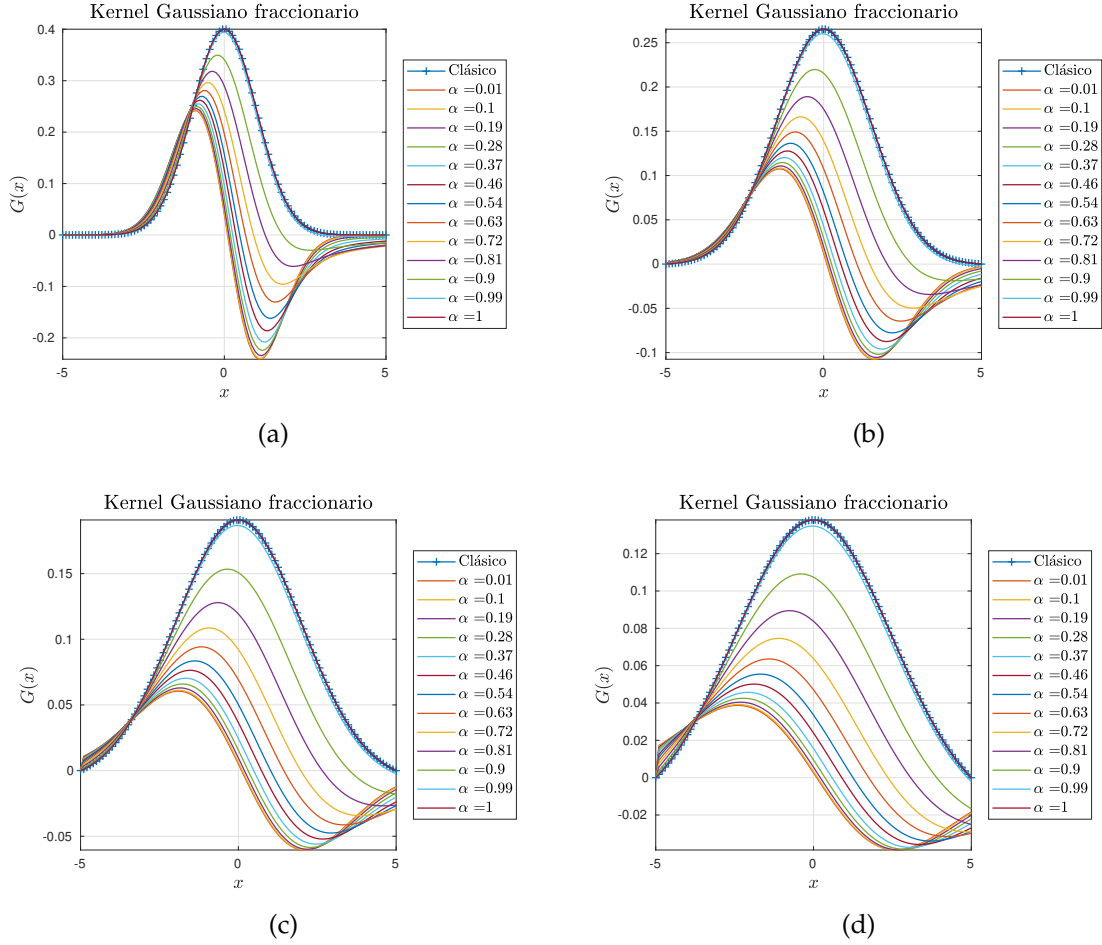


Figura 4.8: Resultados numéricos para el kernel Gaussiano de dimensión 1-D en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo (4.41), a) $\sigma = 1$, b) $\sigma = 1.5$, c) $\sigma = 2$, d) $\sigma = 2.5$.

4.5.3. Algoritmo de segmentación de vasos sanguíneos

El algoritmo de segmentación de vasos sanguíneos, mostrado en la Figura 4.10, consta de tres etapas principales.

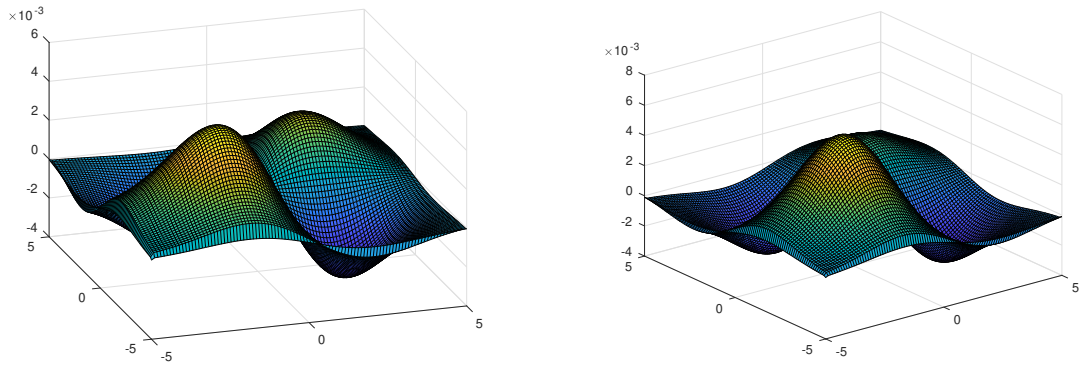
1. Etapa de preprocesamiento

Hoover *et al.* [54], Miri y Mahloojifar [144] mencionan en sus trabajos que el canal verde tiene el contraste más alto entre los vasos y el fondo. Además, éste contiene mayor información acerca de las estructuras de interés. Los resultados mostrados por Sánchez *et al.* [145] presentaron que el canal verde tiene menor ruido y artefactos en regiones homogéneas. Por lo tanto, este canal es escogido para ser filtrado con el filtro de kernel Gaussiano fraccionario (4.41), *i.e*

$$I^* = \left(I_{GC} \otimes^{ABC}_0 \mathcal{D}_t^\beta g(x) \right) \otimes^{ABC}_0 \mathcal{D}_t^\beta g(y), \quad (4.47)$$

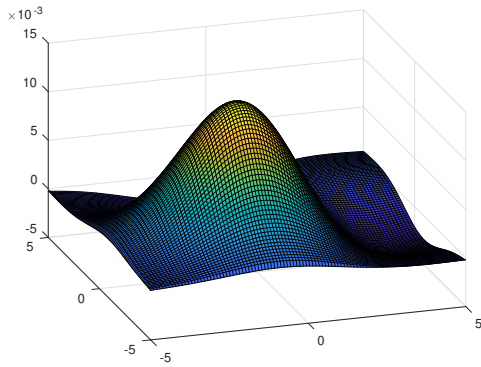
donde I_{GC} es el canal verde de la imagen de entrada. En esta etapa, una máscara de la imagen de entrada es obtenida como sigue

$$I_{\text{mask}} = \text{mask} \odot S_{SE}^{15}, \quad (4.48)$$

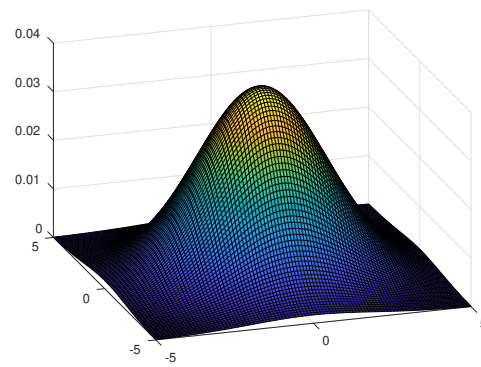


(a) Desviación estándar $\sigma = 2$, orden $\alpha = 0.0100$

(b) Desviación estándar $\sigma = 2$, orden $\alpha = 0.3700$



(c) Desviación estándar $\sigma = 2$, orden $\alpha = 0.7200$



(d) Desviación estándar $\sigma = 2$, orden $\alpha = 0.9900$

Figura 4.9: Resultados numéricos para el kernel Gaussiano de dimensión 2-D en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo.

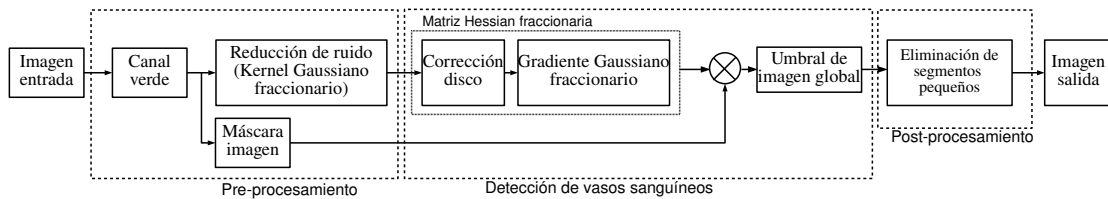


Figura 4.10: Esquema propuesto para la segmentación de vasos sanguíneos basado en la matriz Hessiana fraccionaria.

$$\text{mask} = I_{BW} < 20/255, \tag{4.49}$$

donde I_{BW} es una imagen binaria de ecuación (4.47) por umbral y \ominus representa el operador de erosión con una estructura cuadrada de tamaño 15, S_{SE}^{15} .

2. Etapa de segmentación de vasos sanguíneos

En esta etapa, una metodología basada en la extracción de características en la curvatura principal es utilizada. En este contexto, la matriz Hessiana Gaussiana fraccionaria es utilizada para describir las características locales. Si una imagen puede ser vista como una superficie de intensidad, entonces el umbral global es empleado para convertir una imagen de intensidad a una imagen binaria. Esta técnica iterativa [146] normaliza el nivel de intensidad a un valor en un intervalo de $[0, 1]$.

Remoción de disco óptico

La proximidad del disco óptico a la vena central de la retina afecta la detección de vasos sanguíneos. Para eliminar esta estructura y otras como los exudados, el siguiente proceso, descrito matemáticamente, es implementado

$$I_{WOD} = \overline{\left(\overline{g^\beta I^*} - \overline{g^\beta I^*} \circ B_{SE}^{8,8} \right)}, \quad (4.50)$$

donde $\overline{g^\beta I^*}$ es el negado de la imagen de entrada atenuada con el filtro de kernel Gaussiano fraccionario (4.41), \circ representa la abertura morfológica con una estructura en forma de bola de tamaño 8, $B_{SE}^{8,8}$.

Matriz Hessiana fraccionaria

La matriz Hessiana

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

es una matriz simétrica con eigenvalores reales que proporciona variaciones de intensidad en la imagen local. Depende de la imagen de entrada y las derivadas parciales de segundo orden de la imagen.

En este sentido, las derivadas parciales se obtienen a partir del gradiente Gaussiano fraccionario con kernel no singular (4.46) *i.e.*

$$\frac{\partial^{2\beta} I}{\partial x^{2\beta}} \approx \left(\begin{matrix} ABC \\ 0 \end{matrix} \mathcal{D}_t^\beta g(x) \otimes [1 \ 0 \ -1] \right) \otimes \frac{\partial^\beta I}{\partial x^\beta}, \quad (4.52a)$$

$$\frac{\partial^\beta I}{\partial x^\beta} \approx \left(\begin{matrix} ABC \\ 0 \end{matrix} \mathcal{D}_t^\beta g(x) \otimes [1 \ 0 \ -1] \right) \otimes I_{WOD}, \quad (4.52b)$$

$$\frac{\partial^{2\beta} I}{\partial x^\beta \partial y^\beta} \approx \left(\begin{matrix} ABC \\ 0 \end{matrix} \mathcal{D}_t^\beta g(x) \otimes [1 \ 0 \ -1] \right) \otimes \frac{\partial^\beta I}{\partial y^\beta}, \quad (4.53a)$$

$$\frac{\partial^\beta I}{\partial y^\beta} \approx \left(\begin{matrix} ABC \\ 0 \end{matrix} \mathcal{D}_t^\beta g(y) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \otimes I_{WOD}, \quad (4.53b)$$

$$\frac{\partial^{2\beta} I}{\partial x^\beta \partial y^\beta} \approx \frac{\partial^{2\beta} I}{\partial y^\beta \partial x^\beta}, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial^{2\beta} I}{\partial y^{2\beta}} \approx \left(\begin{matrix} ABC \\ 0 \end{matrix} \mathcal{D}_t^\beta g(y) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \otimes \frac{\partial^\beta I}{\partial y^\beta}, \quad (4.55a)$$

$$\frac{\partial^\beta I}{\partial y^\beta} \approx \left({}^{ABC}_0 \mathcal{D}_t^\beta g(y) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \otimes I_{WOD}, \quad (4.55b)$$

donde I es el canal verde de la imagen de entrada sin disco óptico; los operadores ${}^{ABC}_0 \mathcal{D}_t^\beta g(x)$ y ${}^{ABC}_0 \mathcal{D}_t^\beta g(y)$ representan el kernel Gaussiano fraccionario (4.41) a lo largo de x y y respectivamente, cuya solución numérica fue formulada en la ecuación (4.45).

Entonces, reescribiendo la ecuación (4.51) se tiene que la matriz Hessiana fraccionaria está definida como

$${}^{ABC} H^\beta := \begin{bmatrix} \frac{\partial^{2\beta} I}{\partial x^{2\beta}} & \frac{\partial^{2\beta} I}{\partial x^\beta \partial y^\beta} \\ \frac{\partial^{2\beta} I}{\partial y^\beta \partial x^\beta} & \frac{\partial^{2\beta} I}{\partial y^{2\beta}} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Las características curvilineales así como bordes son dos tipos de estructuras que tienen alta y baja curvatura en una dirección y dirección ortogonal respectivamente. Si I es vista como una superficie de intensidad, entonces las características locales de un punto particular pueden ser descritas de forma generalizada por la matriz Hessiana Gaussiana fraccionaria (4.56). Las curvaturas principales son los eigenvalores máximos y mínimos de la curvatura en un punto de una superficie de intensidad en diferentes direcciones. Por lo tanto, las direcciones principales están dadas por los eigenvectores de la matriz Hessiana Gaussiana fraccionaria. La curvatura principal de una imagen está dada por

$$P(x^\beta) = \text{máx}(\lambda_1, 0), \quad \forall \beta \in (0, 1], \quad (4.57)$$

y

$$P(x^\beta) = \text{mín}(\lambda_2, 0), \quad \forall \beta \in (0, 1], \quad (4.58)$$

donde λ_1 y λ_2 son los eigenvalores máximo y mínimo de ${}^{ABC} H^\beta$ (4.56) en x^β . Además, una respuesta a las líneas oscuras sobre un fondo iluminado es proporcionada por la ecuación (4.57), mientras que las líneas iluminadas sobre un fondo oscuro son detectadas por la ecuación (4.58). La curvatura principal de una imagen es calculada para cada imagen suave de la matriz Hessiana Gaussiana fraccionaria (4.56) en cada píxel.

3. Etapa de posprocesamiento

Finalmente, en esta etapa todos los objetos conectados que tienen menos de 50 píxeles son eliminados de la imagen binaria obtenida en la etapa previa. Este valor fue elegido considerando la intersección entre el mejor valor de SEN y ACC, ver Figura 4.11.

4.5.4. Resultados de simulación

En los siguientes resultados se presenta la aplicación del algoritmo de segmentación de vasos sanguíneos a diferentes bases de datos de imágenes de retinas de pacientes sanos, con glaucoma y retinopatía diabética.

Simulación 1: Paciente con glaucoma y retinopatía diabética

El objetivo de esta simulación es mostrar los resultados de cada una de las etapas del método propuesto. Para ello, las imágenes utilizadas (ver Figuras 4.12a, 4.13c, 4.14a y 4.15c) fueron obtenidas de la base de datos High-Resolution Fundus (HRF) [2].

El canal verde extraído de las imágenes de entrada, se presentan en las Figuras 4.12b y 4.14b. Ésto debido a que Ayerdi *y col.* [147] mencionan que este canal contiene la mayor parte de la información de contraste.

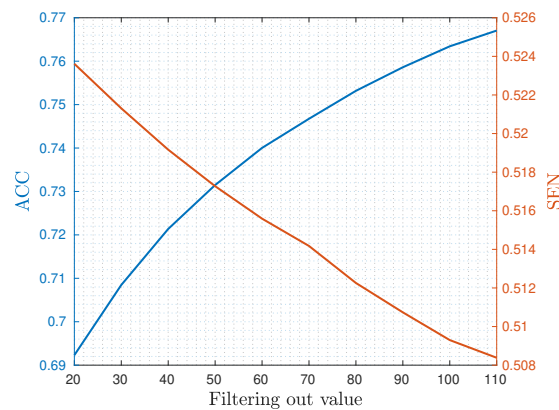


Figura 4.11: Elección del valor para eliminar pequeños objetos conectados.

Las Figuras 4.12c y 4.14c muestran los canales verdes filtrados por el kernel Gaussiano fraccionario (4.41). En estos resultados se pueden apreciar que no sólo los vasos sanguíneos sino también el disco óptico son resaltados como resultado de la etapa de procesamiento.

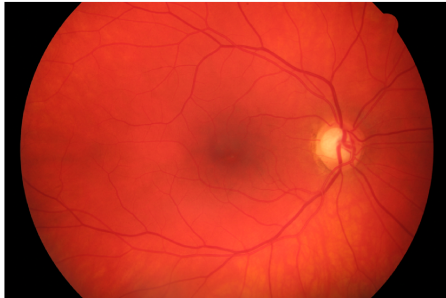
El disco óptico fue removido satisfactoriamente de las imágenes anteriores. Esto se aprecia en el análisis de la curvatura principal de la matriz Hessiana fraccionaria (4.56) que se lleva a cabo en la etapa intermedia del método propuesto en la Figura 4.10, ver Figuras 4.12d y 4.14d.

Las Figuras 4.12e, 4.13a, 4.14e y 4.15a muestran los vasos sanguíneos segmentados sin eliminar los elementos que no están conectados mientras que las Figuras 4.12f y 4.14f presentan los resultados de la etapa de posprocesamiento donde se eliminan los segmentos sin conexión.

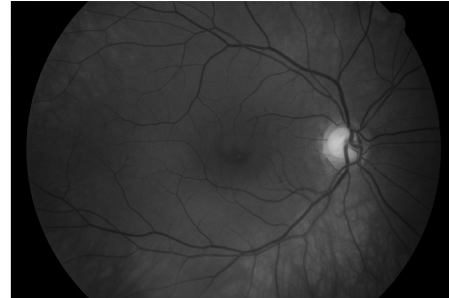
La base de datos de HRF cuenta con las segmentaciones manuales de cada una de las imágenes que la componen. Estas detecciones, mostradas en las Figuras 4.13b y 4.15b, son utilizadas para evaluar el desempeño del método propuesto de acuerdo con las métricas dadas en las ecuaciones (4.18–4.23).

Los vasos sanguíneos detectados por la metodología propuesta, son superpuestos en las imágenes originales utilizadas. Esto se puede ver en las Figura 4.13c.

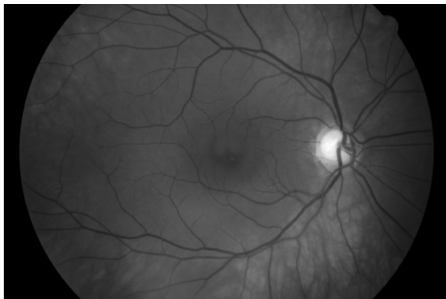
El método de segmentación basado en el análisis de la matriz Gaussiana fraccionaria (4.41) fue comparado con técnicas de segmentación clásicas reportadas en la literatura. En estos resultados se puede apreciar que el enfoque propuesto es preciso en la detección de bordes y robusto ante la presencia de ruido, ver Tabla 4.6.



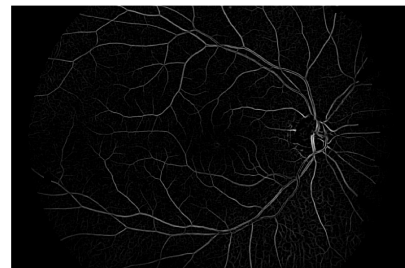
(a) Imagen de entrada de HRF, paciente con glaucoma.



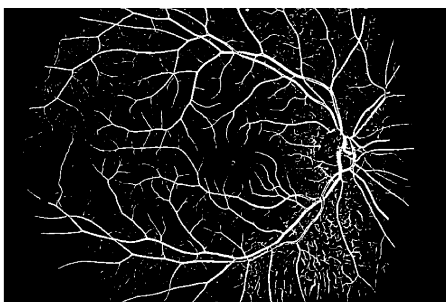
(b) Canal verde extraído de la imagen de entrada.



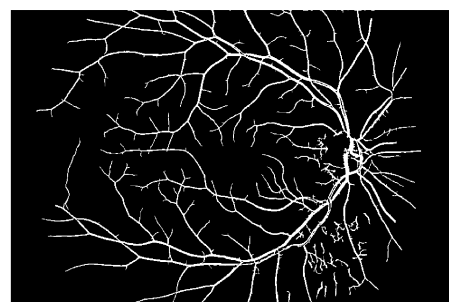
(c) Atenuación de ruido del canal verde con el filtro de kernel Gaussiano fraccionario de orden $\alpha = 0.9666$ y $\sigma = 2.1184$.



(d) Curvatura principal generada de la matriz Hessiana fraccionaria de orden $\beta = 0.3445$ y $\sigma = 2.1184$.

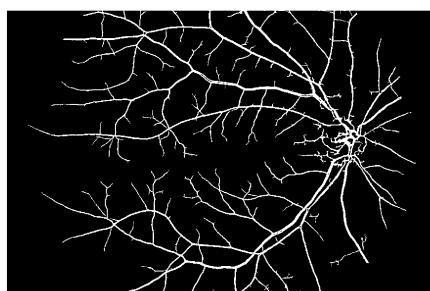


(e) Extracción de los vasos sanguíneos sin eliminar los objetos pequeños con $\alpha = 0.9666$, $\beta = 0.3445$ y $\sigma = 2.1184$.

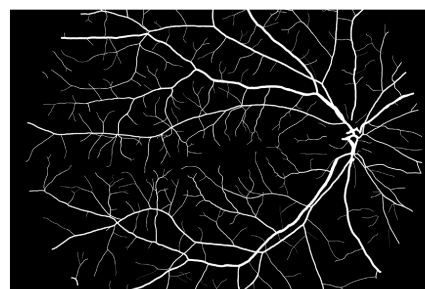


(f) Detección de vasos sanguíneos con $\alpha = 0.9666$, $\beta = 0.3445$ y $\sigma = 2.1184$.

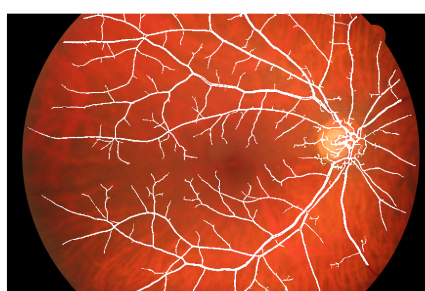
Figura 4.12: Detección de vasos sanguíneos utilizando el filtro de kernel Gaussiano fraccionario para atenuar ruido en el canal verde y para generalizar la matriz Hessiana, imagen obtenida de HRF [2], α , β y σ optimizados por CS (ver Algoritmo 1).



(a) Detección de vasos sanguíneos en pacientes con glaucoma obtenidos por la metodología propuesta, imagen de entrada de HRF [2].



(b) Segmentación manual en paciente con glaucoma, imagen de entrada de HRF [2].

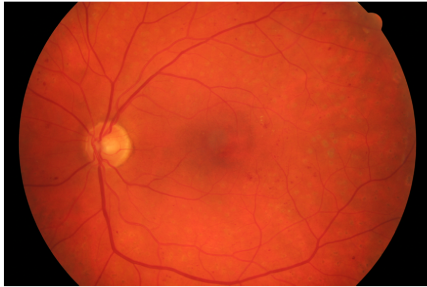


(c) Imagen superpuesta de los vasos sanguíneos detectados y la imagen de entrada.

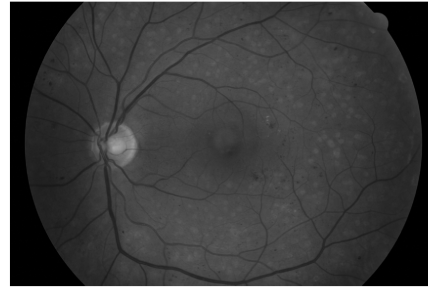
Figura 4.13: Comparación entre la detección de vasos sanguíneos obtenida por el enfoque propuesta y el ground truth proporcionado por la segmentación manual. Imagen de entrada: paciente con glaucoma de HRF.

Tabla 4.6: Comparación entre el método propuesto con otros trabajos reportados en la literatura utilizando la base de datos completa de DRIVE [3].

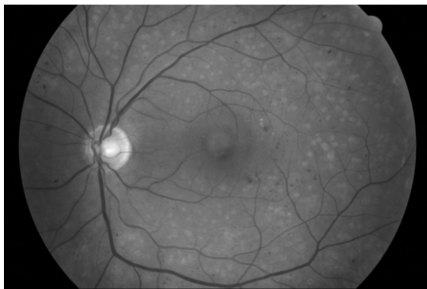
Método	Año	SEN	FPR	ACC	bACC
Aslani y Sardel [148]	2016	0.7545	0.0199	0.9464	–
Singh y Srivastava [149]	2016	0.7594	0.0292	0.9522	–
Li y col. [150]	2016	0.7569	–	0.9527	–
Ayerdi & Graña y col. [147]	2016	0.6499	–	0.9501	–
Barkana y col. (SVM) [151]	2017	0.7409	0.0165	0.9510	–
Cámara y col. [152]	2017	0.7806	0.0371	–	0.8718
Barkana y col. (Fuzzy) [151]	2017	0.7228	0.0296	0.9382	–
Rezaee y col. [153]	2017	0.7189	0.0207	0.9463	–
Barkana y col. (ANN) [151]	2017	0.6770	0.0190	0.9420	–
Zhu y col. [154]	2017	0.7140	–	0.9607	–
Feng y col. [155]	2017	0.7811	–	0.9560	–
Orlando y col. [156]	2017	0.7897	–	–	–
Wang y col. [157]	2018	0.7236	–	0.9449	–
Aguirre-Ramos y col. (Lxx) [59]	2018	0.7854	0.0338	0.9503	0.8758
Solís-Pérez y col. [158] ($FRG^{\alpha,\beta}$)	–	0.8270	0.0347	0.9558	0.8961



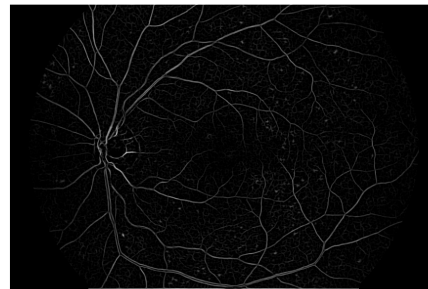
(a) Imagen de entrada de HRF, paciente con retinopatía diabética.



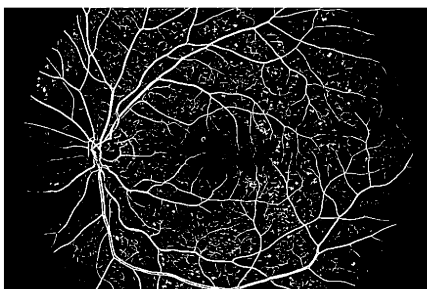
(b) Canal verde extraído de la imagen de entrada.



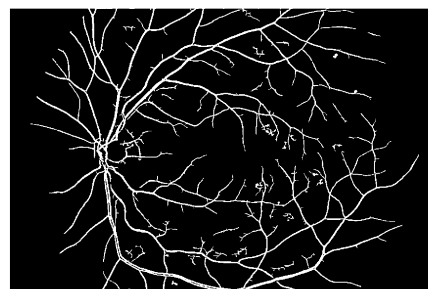
(c) Atenuación de ruido del canal verde con el filtro de kernel Gaussiano fraccionario de orden $\alpha = 0.9999$ y $\sigma = 3$.



(d) Curvatura principal generada de la matriz Hessiana fraccionaria de orden $\beta = 0.7105$ y $\sigma = 3$.

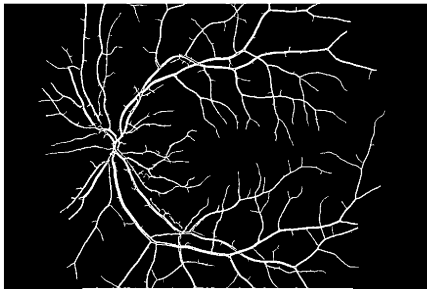


(e) Extracción de los vasos sanguíneos sin eliminar los objetos pequeños con $\alpha = 0.9999$, $\beta = 0.7105$ y $\sigma = 3$.

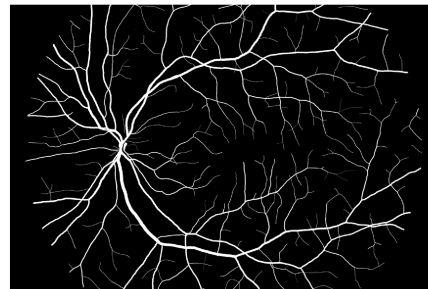


(f) Detección de vasos sanguíneos con $\alpha = 0.9999$, $\beta = 0.7105$ y $\sigma = 3$.

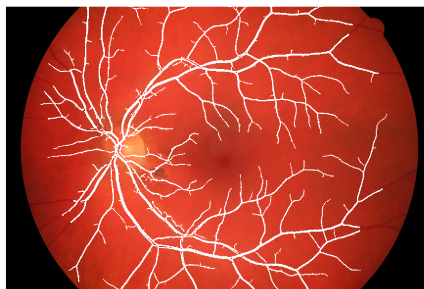
Figura 4.14: Detección de vasos sanguíneos utilizando el filtro de kernel Gaussiano fraccionario para atenuar ruido en el canal verde y para generalizar la matriz Hessiana, imagen obtenida de HRF [2], α , β y σ optimizados por CS (ver Algoritmo 1).



(a) Detección de vasos sanguíneos in retinopatía diabética obtenidos por la metodología propuesta, imagen de entrada de HRF [2].



(b) Segmentación manual en retinopatía diabética, imagen de entrada de HRF [2].



(c) Imagen superpuesta de los vasos sanguíneos detectados y la imagen de entrada.

Figura 4.15: Comparación entre la detección de vasos sanguíneos obtenida por el enfoque propuesto y el ground truth proporcionado por la segmentación manual. Imagen de entrada: paciente con retinopatía diabética de HRF.

4.6. Conclusiones parciales

En este capítulo, se propuso la generalización del gradiente de una imagen y la generalización de la matriz Hessiana a partir del gradiente Gaussiano fraccionario. Dichos enfoques se desarrollaron con la derivada de Caputo-Fabrizio-Caputo y Atangana-Baleanu-Caputo respectivamente.

A partir del gradiente generalizado se diseñó un algoritmo para la detección de bordes y texturas en imágenes médicas. Por otro lado, la matriz Hessiana fraccionaria se utilizó para proponer un esquema de detección de vasos sanguíneos en imágenes de retinopatía.

De acuerdo con los resultados obtenidos, se observó que los gradientes propuestos son robustos ante ruido tipo Gaussiano y sal-pimienta. Esto ofrece una ventaja en el procesamiento de imágenes debido a que, las derivadas al comportarse como filtros, no fue necesario agregar una etapa de preprocesamiento para atenuar el ruido presente en las imágenes.

Además, el operador propuesto mostró efectividad al detectar bordes fuertes -límites de los objetos- y bordes débiles -textura- debido a que el operador fraccionario utilizado permite extraer mayor información en píxeles vecinos en contraste con los operadores clásicos. Por consiguiente, los resultados permiten determinar que los bordes detectados no sólo son útiles sino también precisos.

Por otro lado, el esquema de detección de vasos sanguíneos se validó utilizando tres bases de datos: DRIVE, STARE y HRF. En los resultados de simulación obtenidos, se pudo observar que de acuerdo con las métricas utilizadas (ecuaciones (4.18–4.23)) la propuesta de la generalización de la matriz Hessiana resultó ser mejor en contraste con algunas propuestas reportadas en la literatura. Además, la combinación del kernel Gaussiano no singular y la matriz Hessiana de orden no entero permitió ofrecer una propuesta flexible así como precisa debido a los dos grados de libertad adicionales proporcionados por los órdenes de las derivadas fraccionarias.

Conclusiones y trabajos futuros

In theory, there is no difference between theory and practice. But in practice, there is a difference!
— Author unknown

5.1. Conclusiones generales

En esta tesis se diseñaron dos observadores espectrales tipo Kalman. Uno con enfoque fraccionario y el segundo con enfoque conformable. Estos observadores fueron aplicados para la reconstrucción de señales no estacionarias tales como: actividad eléctrica cerebral, aceleración de la componente Norte-Sur de “1940 El Centro”, voltajes en los capacitores del circuito de Chua; electrocardiograma, electromiograma y fonocardiograma respectivamente.

En la formulación de los observadores se utilizó la derivada de Riemann-Liouville así como las derivadas conformables de tipo Khalil y β -conformable. Estos operadores permitieron la generalización de los observadores y la ecuación diferencial modificada de Riccati proporcionando así dos grados de libertad adicionales en el diseño de los observadores espectrales.

En los resultados de simulación se pudo observar que los enfoques propuestos se desempeñaron mejor en contraste con el enfoque clásico. Además, los observadores fraccionarios permitieron una mejor descripción de la naturaleza de las señales en comparación con los observadores conformables. Esto se debe a que los operadores fraccionarios describen de forma natural la memoria de los sistemas mientras que los operadores conformables, al no poseer un kernel asociado a su definición, no lo pueden hacer. No obstante, en algunos trabajos se ha reportado que los operadores conformables son ideales para describir naturalezas fractales.

Las soluciones numéricas para los observadores fraccionarios se obtuvieron a partir de la derivada de Grünwald-Letnikov. Además, se tuvo que hacer una modificación al método numérico ya que éste no está diseñado para realizar la derivación e integración de ecuaciones diferenciales en forma matricial.

También, se pudo reducir el número de coeficientes para representar señales no estacionarias. Para el caso fraccionario se llegaron a formular observadores de dos estados con eficiencias de 98 % de similitud con respecto a las señales de referencias mientras que con los conformables se llegó a un 90 % con sólo cuatro estados. En la dinámica de los coeficientes de los observadores fraccionarios se pudo observar que su amplitud se veía reducida drásticamente mientras que con los observadores clásicos no sucedió. Esto se debe a el efecto del operador fraccionario sobre los observadores espectrales.

De acuerdo con el análisis de estabilidad de los observadores fraccionarios, se concluyó que para los casos diseñados fue estable. Sin embargo, cabe mencionar que debido a que las ganancias del observador dependen de la solución de la ecuación diferencial de Riccati fraccionaria modificada se obtienen regiones de estabilidad en función del orden de la derivada y de los demás parámetros de sintonización. Un análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales de la ecuación de Riccati permitió observar que ésta era estable y en consecuencia la estabilidad del observador no se veía afectada.

Para garantizar una adecuada sintonización de los observadores diseñados se utilizaron algoritmos de optimización metaheurísticos. Se determinaron los órdenes del observador y la ecuación diferencial modificada de Riccati así como los parámetros del mismo minimizando la raíz de la media del error al cuadrado.

Por otro lado, se propusieron dos gradientes fraccionarios para el procesamiento de imágenes. El primero en el sentido de Caputo-Fabrizio (CF) como una generalización de los operadores de Sobel y Prewitt para la detección de bordes; el segundo en el sentido de Atangana-Baleanu-Caputo (ABC) a partir del kernel Gaussiano fraccionario para la segmentación de vasos sanguíneos en imágenes de retinas.

Se realizó un análisis de robustez del gradiente fraccionario en el sentido de CF ante la presencia de ruido sal-pimienta y Gaussiano. Para ello se utilizaron diferentes imágenes de la base de datos de segmentación de Berkley y, de acuerdo con los resultados de simulación se pudo observar que para $\alpha = 0.8$ es robusto ante ruido de tipo Gaussiano mientras que para $\alpha > 0.9$ es robusto ante ruido sal-pimienta. Estos resultados son favorables ya que de acuerdo con la literatura, se agrega una etapa de pre procesamiento o bien, se hace uso de filtros de mediana para la atenuación de ruido sal-pimienta.

También se observó que el detector de bordes fraccionario no sólo fue capaz de detectar bordes sino también texturas. Para valores de α relativamente bajos, es decir $\alpha = 0.2$, el detector se comportó como un filtro pasa bajas ya que el resultado fue un gradiente suave mientras que para $\alpha = 0.9$ su comportamiento fue el de un filtro pasa altas; teniendo como resultado bordes con contraste fuerte.

La generalización del kernel Gaussiano con ABC permitió la representación de máscaras diferenciales en 1D y 2D con comportamientos sub Gaussianos. Del mismo modo que el gradiente en el sentido de CF, se validó su robustez ante la presencia de ruido sal-pimienta y Gaussiano. De acuerdo con los resultados de simulación se observó que este gradiente no sólo detecta bordes sino que también es capaz de suavizar la imagen de entrada.

La generalización de la matriz Hessiana se hizo a partir del gradiente Gaussiano fraccionario para poder involucrarla en la tarea de segmentación de vasos sanguíneos en imágenes de retinas. En contraste con la última propuesta fraccionaria reportada en la literatura, se demostró que con el análisis de la curvatura principal de la matriz Hessiana fraccionaria se pudo extraer mayor información del conjunto de imágenes utilizadas. Además, su desempeño fue mejor en contraste con algunos trabajos reportados.

Finalmente, para validar la eficiencia y precisión de la metodología propuesta, se utilizaron tres bases de datos de imágenes de retinopatías. Con base en los resultados y el análisis realizado se concluyó que el enfoque desarrollado no sólo es robusto y preciso sino que también existe un balance entre la detección de bordes verdaderos. Para garantizar

esto, se hizo uso de un algoritmo de optimización cuya función a minimizar fue la métrica de precisión (ACC) en suma con la sensibilidad (SEN) y precisión balanceada (bACC).

5.2. Trabajos futuros

La aplicación del cálculo fraccionario en las áreas de procesamiento de señales e imágenes ha incrementado en los últimos años debido a la robustez que presentan las propuestas con este enfoque. Por esta razón, se considera que aplicado a los siguientes trabajos se pueden obtener resultados interesantes:

- Implementación de los observadores espectrales fraccionarios y conformables para la reconstrucción de señales no estacionarias en línea.
- Estimación de los órdenes de las derivadas así como los parámetros de los observadores en tiempo de ejecución.
- Generalización del operador Laplaciano para la mejora de nitidez en una imagen.
- Generalización del algoritmo de Harris para la detección de esquinas.
- Generalización de la transformada de Hough para la detección de figuras en imágenes digitales.
- Generalización de algoritmos de optimización metaheurísticos para la búsqueda de píxeles globales óptimos en imágenes digitales.

Bibliografía

- [1] V. Siderskiy, M. A. A. Mohammed, and V. Kapila, "Chua's circuit for experimenters using readily available parts from a hobby electronics store," in *122nd ASEE Annual Conf. & Exposition.—Seattle: American Society for Engineering Education*, 2015, pp. 26–384.
- [2] A. Budai, R. Bock, A. Maier, J. Hornegger, and G. Michelson, "Robust vessel segmentation in fundus images," *International journal of biomedical imaging*, vol. 2013, 2013.
- [3] J. Staal, M. D. Abràmoff, M. Niemeijer, M. A. Viergever, and B. Van Ginneken, "Ridge-based vessel segmentation in color images of the retina," *IEEE transactions on medical imaging*, vol. 23, no. 4, pp. 501–509, 2004.
- [4] E. Sejdić, I. Djurović, and J. Jiang, "Time–frequency feature representation using energy concentration: An overview of recent advances," *Digital signal processing*, vol. 19, no. 1, pp. 153–183, 2009.
- [5] B. Boashash, *Time-frequency signal analysis and processing: a comprehensive reference*. Academic Press, 2015.
- [6] V. F. Pisarenko, "The retrieval of harmonics from a covariance function," *Geophysical Journal International*, vol. 33, no. 3, pp. 347–366, 1973.
- [7] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, 1986.
- [8] R. Roy and T. Kailath, "Esprit-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Transactions on acoustics, speech, and signal processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984–995, 1989.
- [9] C. Edwards, S. K. Spurgeon, and R. J. Patton, "Sliding mode observers for fault detection and isolation," *Automatica*, vol. 36, no. 4, pp. 541–553, 2000.
- [10] C. P. Tan and C. Edwards, "Sliding mode observers for detection and reconstruction of sensor faults," *Automatica*, vol. 38, no. 10, pp. 1815–1821, 2002.
- [11] C. Edwards and C. P. Tan, "Sensor fault tolerant control using sliding mode observers," *Control Engineering Practice*, vol. 14, no. 8, pp. 897–908, 2006.
- [12] X.-G. Yan and C. Edwards, "Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding mode observer," *Automatica*, vol. 43, no. 9, pp. 1605–1614, 2007.
- [13] S. Laghrouche, J. Liu, F. S. Ahmed, M. Harmouche, and M. Wack, "Adaptive second-order sliding mode observer-based fault reconstruction for pem fuel cell air-feed system," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, no. 3, pp. 1098–1109, 2014.

- [14] H. Alwi and C. Edwards, "Robust fault reconstruction for linear parameter varying systems using sliding mode observers," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, no. 14, pp. 1947–1968, 2014.
- [15] H. A. Fernández-Bobadilla, C. Verde, and J. A. Moreno, "High-order sliding mode observer for outflow reconstruction in a branched pipeline," in *2018 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*. IEEE, 2018, pp. 595–600.
- [16] E. Shapiro, F. Schenk, and H. Decarli, "Reconstructed flight control sensor signals via luenberger observers," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, no. 2, pp. 245–252, 1979.
- [17] W. Chen and F. N. Chowdhury, "A synthesized design of sliding-mode and luenberger observers for early detection of incipient faults," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 24, no. 12, pp. 1021–1035, 2010.
- [18] F. Zhu and F. Cen, "Full-order observer-based actuator fault detection and reduced-order observer-based fault reconstruction for a class of uncertain nonlinear systems," *Journal of Process Control*, vol. 20, no. 10, pp. 1141–1149, 2010.
- [19] A. Khedher, K. Benothman, D. Maquin, and M. Benrejeb, "State and sensor faults estimation via a proportional integral observer," in *2009 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*. IEEE, 2009, pp. 1–6.
- [20] G. Hostetter, "Recursive discrete fourier transformation," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 28, no. 2, pp. 184–190, 1980.
- [21] R. Bitmead, "On recursive discrete fourier transformation," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 30, no. 2, pp. 319–322, 1982.
- [22] F. Nagy, "Measurement of signal parameters using nonlinear observers," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 41, no. 1, pp. 152–155, 1992.
- [23] D. Manolakis, V. Ingle, and S. Kogon, *Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering, and Array Processing*, ser. Artech House signal processing library. Artech House, 2005. [Online]. Available: <https://books.google.com.mx/books?id=3RQfAQAAIAAJ>
- [24] A. Coronel-Escamilla, J. F. Gómez-Aguilar, L. Torres, M. Valtierra-Rodriguez, and R. F. Escobar-Jiménez, "Design of a state observer to approximate signals by using the concept of fractional variable-order derivative," *Digital Signal Processing*, vol. 69, pp. 127–139, 2017.
- [25] L. Torres, J. Jiménez-Cabas, J. Gómez-Aguilar, and P. Pérez-Alcazar, "A simple spectral observer," *Mathematical and Computational Applications*, vol. 23, no. 2, p. 23, 2018.
- [26] A. Coronel-Escamilla, J. Gómez-Aguilar, L. Torres, R. Escobar-Jimenez, and V. Olivares-Peregrino, "Fractional observer to estimate periodical forces," *ISA transactions*, 2017.
- [27] R. Szeliski, *Computer vision: algorithms and applications*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [28] J. M. Prewitt, "Object enhancement and extraction," *Picture processing and Psychopictorics*, vol. 10, no. 1, pp. 15–19, 1970.

- [29] R. A. Kirsch, "Computer determination of the constituent structure of biological images," *Computers and biomedical research*, vol. 4, no. 3, pp. 315–328, 1971.
- [30] L. S. Davis, "A survey of edge detection techniques," *Computer graphics and image processing*, vol. 4, no. 3, pp. 248–270, 1975.
- [31] I. Sobel, "History and definition of the sobel operator," *Retrieved from the World Wide Web*, vol. 1505, 2014.
- [32] R.-H. Park, "A fourier interpretation of the frei-chen edge masks," *Pattern Recognition Letters*, vol. 11, no. 9, pp. 631–636, 1990.
- [33] J. Canny, "A computational approach to edge detection," *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, no. 6, pp. 679–698, 1986.
- [34] D. Marr and E. Hildreth, "Theory of edge detection," *Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences*, vol. 207, no. 1167, pp. 187–217, 1980.
- [35] C. Gao, J. Zhou, J. Hu, and F. Lang, "Edge detection of colour image based on quaternion fractional differential," *IET Image Processing*, vol. 5, no. 3, pp. 261–272, 2011.
- [36] D. Tian, J. F. Wu, and Y. J. Yang, "A fractional-order sobel operator for medical image structure feature extraction," in *Advanced Materials Research*, vol. 860. Trans Tech Publ, 2014, pp. 2910–2913.
- [37] A. Nandal, H. Gamboa-Rosales, A. Dhaka, J. M. Celaya-Padilla, J. I. Galvan-Tejada, C. E. Galvan-Tejada, F. J. Martinez-Ruiz, and C. Guzman-Valdivia, "Image edge detection using fractional calculus with feature and contrast enhancement," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 37, no. 9, pp. 3946–3972, 2018.
- [38] S. Godbole and G. Phadke, "Satellite image edge detection using fractional order method," in *2018 IEEE 13th International Conference on Industrial and Information Systems (ICIIS)*. IEEE, 2018, pp. 130–135.
- [39] M. Mekideche and Y. Ferdi, "Edge detection optimization using fractional order calculus," *INTERNATIONAL ARAB JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGY*, vol. 16, no. 5, pp. 827–832, 2019.
- [40] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models," *International journal of computer vision*, vol. 1, no. 4, pp. 321–331, 1988.
- [41] T. McInerney and D. Terzopoulos, "T-snakes: Topology adaptive snakes," *Medical image analysis*, vol. 4, no. 2, pp. 73–91, 2000.
- [42] S. L. Horowitz and T. Pavlidis, "Picture segmentation by a tree traversal algorithm," *Journal of the ACM (JACM)*, vol. 23, no. 2, pp. 368–388, 1976.
- [43] T. Pavlidis and Y.-T. Liow, "Integrating region growing and edge detection," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no. 3, pp. 225–233, 1990.
- [44] Y. Cheng, "Mean shift, mode seeking, and clustering," *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 17, no. 8, pp. 790–799, 1995.
- [45] J. Shi and J. Malik, "Normalized cuts and image segmentation," *Departmental Papers (CIS)*, p. 107, 2000.

- [46] J. Almotiri, K. Elleithy, and A. Elleithy, "Retinal vessels segmentation techniques and algorithms: a survey," *Applied Sciences*, vol. 8, no. 2, p. 155, 2018.
- [47] C.-H. Wu, G. Agam, and P. Stanchev, "A general framework for vessel segmentation in retinal images," in *2007 International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*. IEEE, 2007, pp. 37–42.
- [48] L. Martínez-Jiménez, J. Cruz-Duarte, J. Rosales, and I. Cruz-Aceves, "Enhancement of vessels in coronary angiograms using a hessian matrix based on grunwald-letnikov fractional derivative," in *Proceedings of the 2018 8th International Conference on Biomedical Engineering and Technology*. ACM, 2018, pp. 51–54.
- [49] D. N. Thanh, S. Dvoenko, V. S. Prasath, and N. H. Hai, "Blood vessels segmentation method for retinal fundus images based on adaptive principal curvature and image derivative operators," in *ISPRS International Workshop-Photogrammetric and computer vision techniques for video Surveillance, Biometrics and Biomedicine-PSBB19 (ISPRS Archives, In press)*, 2019.
- [50] N. Santosh Kumar and Y. Radhika, "Optimized maximum principal curvatures based segmentation of blood vessels from retinal images," 2019.
- [51] J. Chen, Y. Sato, and S. Tamura, "Orientation space filtering for multiple orientation line segmentation," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 22, no. 5, pp. 417–429, 2000.
- [52] H. H. Khaleel, R. O. Rahmat, D. Zamrin, R. Mahmud, and N. Mustapha, "Extraction of coronary artery trees in angiocardiology images," *Scientific Research and Essays*, vol. 7, no. 47, pp. 4014–4036, 2012.
- [53] P. Eichel, E. Delp, K. Koral, and A. Buda, "A method for a fully automatic definition of coronary arterial edges from cineangiograms," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 7, no. 4, pp. 313–320, 1988.
- [54] A. Hoover, V. Kouznetsova, and M. Goldbaum, "Locating blood vessels in retinal images by piecewise threshold probing of a matched filter response," *IEEE Transactions on Medical imaging*, vol. 19, no. 3, pp. 203–210, 2000.
- [55] D.-Q. Zhang and S.-C. Chen, "A novel kernelized fuzzy c-means algorithm with application in medical image segmentation," *Artificial intelligence in medicine*, vol. 32, no. 1, pp. 37–50, 2004.
- [56] M. Al-Rawi, M. Qutaishat, and M. Arrar, "An improved matched filter for blood vessel detection of digital retinal images," *Computers in Biology and Medicine*, vol. 37, no. 2, pp. 262–267, 2007.
- [57] G. Li, H. Li, and L. Zhang, "Novel model using kernel function and local intensity information for noise image segmentation," *Tsinghua Science and Technology*, vol. 23, no. 3, pp. 303–314, 2018.
- [58] L. Panigrahi, K. Verma, and B. K. Singh, "Ultrasound image segmentation using a novel multi-scale gaussian kernel fuzzy clustering and multi-scale vector field convolution," *Expert Systems with Applications*, vol. 115, pp. 486–498, 2019.
- [59] H. Aguirre-Ramos, J. G. Avina-Cervantes, I. Cruz-Aceves, J. Ruiz-Pinales, and S. Ledesma, "Blood vessel segmentation in retinal fundus images using gabor filters, fractional derivatives, and expectation maximization," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 339, pp. 568–587, 2018.

- [60] A. Nedzved, S. Ablameyko, and I. Pitas, "Morphological segmentation of histology cell images," in *Proceedings 15th International Conference on Pattern Recognition. ICPR-2000*, vol. 1. IEEE, 2000, pp. 500–503.
- [61] M. Irshad, N. Muhammad, M. Sharif, and M. Yasmeen, "Automatic segmentation of the left ventricle in a cardiac mr short axis image using blind morphological operation," *The European Physical Journal Plus*, vol. 133, no. 4, p. 148, 2018.
- [62] N. Singh and S. Goyal, "Determination and segmentation of brain tumor using threshold segmentation with morphological operations," in *Soft Computing: Theories and Applications*. Springer, 2018, pp. 715–726.
- [63] U. Ozkava, S. Ozturk, B. Akdemir, and L. Sevfi, "An efficient retinal blood vessel segmentation using morphological operations," in *2018 2nd International Symposium on Multidisciplinary Studies and Innovative Technologies (ISMSIT)*. IEEE, 2018, pp. 1–7.
- [64] C. Zhang, X. Shen, H. Cheng, and Q. Qian, "Brain tumor segmentation based on hybrid clustering and morphological operations," *International Journal of Biomedical Imaging*, vol. 2019, 2019.
- [65] S. Pal, S. Chatterjee, D. Dey, and S. Munshi, "Morphological operations with iterative rotation of structuring elements for segmentation of retinal vessel structures," *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 30, no. 1, pp. 373–389, 2019.
- [66] K. R. Jain and N. Chauhan, "Enhancement and segmentation of dental radiographs using morphological operations," in *Dental Image Analysis for Disease Diagnosis*. Springer, 2019, pp. 39–58.
- [67] Z. Ren, "Adaptive active contour model driven by fractional order fitting energy," *Signal Processing*, vol. 117, pp. 138–150, 2015.
- [68] Y. Zhang, B. J. Matuszewski, L.-K. Shark, and C. J. Moore, "Medical image segmentation using new hybrid level-set method," in *2008 fifth international conference biomedical visualization: information visualization in medical and biomedical informatics*. IEEE, 2008, pp. 71–76.
- [69] R. Kashyap and V. Tiwari, "Active contours using global models for medical image segmentation," *International Journal of Computational Systems Engineering*, vol. 4, no. 2-3, pp. 195–201, 2018.
- [70] C. Liu, M. K.-P. Ng, and T. Zeng, "Weighted variational model for selective image segmentation with application to medical images," *Pattern Recognition*, vol. 76, pp. 367–379, 2018.
- [71] H. Yu, F. He, and Y. Pan, "A novel segmentation model for medical images with intensity inhomogeneity based on adaptive perturbation," *Multimedia Tools and Applications*, vol. 78, no. 9, pp. 11 779–11 798, 2019.
- [72] F. Milletari, N. Navab, and S.-A. Ahmadi, "V-net: Fully convolutional neural networks for volumetric medical image segmentation," in *2016 Fourth International Conference on 3D Vision (3DV)*. IEEE, 2016, pp. 565–571.
- [73] B. B. Gupta, *Computer and cyber security: principles, algorithm, applications, and perspectives*. CRC Press, 2018.

- [74] A. Atangana and J. Gómez-Aguilar, "Decolonisation of fractional calculus rules: Breaking commutativity and associativity to capture more natural phenomena," *The European Physical Journal Plus*, vol. 133, pp. 1–22, 2018.
- [75] B. Ross, "The development of fractional calculus 1695–1900," *Historia Mathematica*, vol. 4, no. 1, pp. 75–89, 1977.
- [76] J. L. Lagrange, *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation & à l'intégration des quantités variables*. Académie royale des sciences et belles lettres, 1775.
- [77] P. S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*. Courcier, 1820.
- [78] S. F. Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. JBM Duprat, 1797, vol. 1.
- [79] E. Artin, *The gamma function*. Courier Dover Publications, 2015.
- [80] J. Fourier, "Theorie analytique de la chaleur. oeuvres de fourier," 1878.
- [81] N. Abel, "Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies," *Oeuvres*, vol. 1, pp. 11–27, 1881.
- [82] J. Liouville, "Mémoire sur l'intégration de l'équation $(mx^2 + nx + p) d^2 y / dx^2 + (qx + r) dy / dx + sy = 0$ à l'aide des différentielles à indices quelconques," *Journal d'École Polytechnique*, vol. 13, pp. 163–186, 1832.
- [83] B. Riemann, "Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation," *Gesammelte Werke*, vol. 62, no. 1876, 1876.
- [84] C. J. Hargreave, "Ii. on the solution of linear differential equations," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, no. 138, pp. 31–54, 1848.
- [85] N. Y. Sonin, "On differentiation with arbitrary index," *Moscow Matem. Sbornik*, vol. 6, no. 1, pp. 1–38, 1869.
- [86] H. Laurent, "Sur le calcul des dérivées à indices quelconques," *Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, vol. 3, pp. 240–252, 1884.
- [87] A. Grünwald, "Über" begrenzte" derivation und deren anwendung, z. angew," *Math. und Phys*, vol. 12, pp. 441–480, 1867.
- [88] L. A. V., "Theory of differentiation with an arbitrary index (russian)," *Moscow Matem. Sbornik*, vol. 3, pp. 1–66, 1868.
- [89] M. Caputo, "Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii," *Geophysical Journal International*, vol. 13, no. 5, pp. 529–539, 1967.
- [90] M. Caputo and M. Fabrizio, "A new definition of fractional derivative without singular kernel," *Progr. Fract. Differ. Appl*, vol. 1, no. 2, pp. 1–13, 2015.
- [91] J. Losada and J. J. Nieto, "Properties of a new fractional derivative without singular kernel," *Progr. Fract. Differ. Appl*, vol. 1, no. 2, pp. 87–92, 2015.
- [92] A. Atangana and D. Baleanu, "New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model," *arXiv preprint arXiv:1602.03408*, 2016.

- [93] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin *et al.*, *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer, 2014, vol. 2.
- [94] A. Atangana and I. Koca, "Chaos in a simple nonlinear system with atangana-baleanu derivatives with fractional order," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 89, pp. 447–454, 2016.
- [95] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh, "A new definition of fractional derivative," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 264, pp. 65–70, 2014.
- [96] A. Atangana, D. Goufo, and E. Franc, "Extension of matched asymptotic method to fractional boundary layers problems," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, 2014.
- [97] A. Atangana, "A novel model for the lassa hemorrhagic fever: deathly disease for pregnant women," *Neural Computing and Applications*, vol. 26, no. 8, pp. 1895–1903, 2015.
- [98] F. Jarad, E. Uğurlu, T. Abdeljawad, and D. Baleanu, "On a new class of fractional operators," *Advances in Difference Equations*, vol. 2017, no. 1, p. 247, 2017.
- [99] V. Morales-Delgado, J. Gómez-Aguilar, and M. Taneco-Hernández, "Analytical solutions of electrical circuits described by fractional conformable derivatives in liouville-caputo sense," *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, vol. 85, pp. 108–117, 2018.
- [100] I. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998, vol. 198.
- [101] S. Dadras and H. R. Momeni, "A new fractional order observer design for fractional order nonlinear systems," in *ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2011, pp. 403–408.
- [102] S. Kong, M. Saif, and B. Liu, "Observer design for a class of nonlinear fractional-order systems with unknown input," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 354, no. 13, pp. 5503–5518, 2017.
- [103] D. M. Senejohnny and H. Delavari, "Active sliding observer scheme based fractional chaos synchronization," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 11, pp. 4373–4383, 2012.
- [104] Y. Chen, B. M. Vinagre, and I. Podlubny, "Fractional order disturbance observer for robust vibration suppression," *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, no. 1-4, pp. 355–367, 2004.
- [105] J. G. Lu, "Nonlinear observer design to synchronize fractional-order chaotic systems via a scalar transmitted signal," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 359, pp. 107–118, 2006.
- [106] D. Cafagna and G. Grassi, "Observer-based projective synchronization of fractional systems via a scalar signal: application to hyperchaotic rössler systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 68, no. 1-2, pp. 117–128, 2012.

- [107] I. N'doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.-E. Radhy, "Observer-based control for fractional-order continuous-time systems," in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*. IEEE, 2009, pp. 1932–1937.
- [108] E. A. Boroujeni and H. R. Momeni, "Non-fragile nonlinear fractional order observer design for a class of nonlinear fractional order systems," *Signal Processing*, vol. 92, no. 10, pp. 2365–2370, 2012.
- [109] Y. Çenesiz and A. Kurt, "The solution of time fractional heat equation with new fractional derivative definition," in *8th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling (ASM 2014)*, 2014, pp. 195–198.
- [110] Y. Çenesiz, D. Baleanu, A. Kurt, and O. Tasbozan, "New exact solutions of burgers' type equations with conformable derivative," *Waves in Random and complex Media*, vol. 27, no. 1, pp. 103–116, 2017.
- [111] S. He, K. Sun, X. Mei, B. Yan, and S. Xu, "Numerical analysis of a fractional-order chaotic system based on conformable fractional-order derivative," *The European Physical Journal Plus*, vol. 132, no. 1, p. 36, 2017.
- [112] K. Hosseini, P. Mayeli, and R. Ansari, "Modified kudryashov method for solving the conformable time-fractional klein–gordon equations with quadratic and cubic nonlinearities," *Optik*, vol. 130, pp. 737–742, 2017.
- [113] H. Yépez-Martínez, J. Gómez-Aguilar, and D. Baleanu, "Beta-derivative and sub-equation method applied to the optical solitons in medium with parabolic law nonlinearity and higher order dispersion," *Optik*, vol. 155, pp. 357–365, 2018.
- [114] E. Bonyah, A. Atangana, and M. A. Khan, "Modeling the spread of computer virus via caputo fractional derivative and the beta-derivative," *Asia Pacific Journal on Computational Engineering*, vol. 4, no. 1, p. 1, 2017.
- [115] A. Atangana and S. C. Oukouomi Noutchie, "Model of break-bone fever via beta-derivatives," *BioMed research international*, vol. 2014, 2014.
- [116] K. Reif, F. Sonnemann, and R. Unbehauen, "An ekf-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability," *Automatica*, vol. 34, no. 9, pp. 1119–1123, 1998.
- [117] G. Besançon, *Nonlinear observers and applications*. Springer, 2007, vol. 363.
- [118] I. Petras, *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [119] M. Rivero, S. V. Rogosin, J. A. Tenreiro Machado, and J. J. Trujillo, "Stability of fractional order systems," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, 2013.
- [120] X.-S. Yang and S. Deb, "Cuckoo search via lévy flights," in *2009 World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing (NaBIC)*. IEEE, 2009, pp. 210–214.
- [121] J. Ma, T. Ting, K. L. Man, N. Zhang, S.-U. Guan, and P. W. Wong, "Parameter estimation of photovoltaic models via cuckoo search," *Journal of applied mathematics*, vol. 2013, 2013.

- [122] R. G. Andrzejak, K. Lehnertz, F. Mormann, C. Rieke, P. David, and C. E. Elger, "Indications of nonlinear deterministic and finite-dimensional structures in time series of brain electrical activity: Dependence on recording region and brain state," *Physical Review E*, vol. 64, no. 6, p. 061907, 2001.
- [123] L. O. Chua, M. Itoh, L. Kocarev, and K. Eckert, "Chaos synchronization in chua's circuit," *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, vol. 3, no. 01, pp. 93–108, 1993.
- [124] X.-S. Yang, "A new metaheuristic bat-inspired algorithm," in *Nature inspired cooperative strategies for optimization (NICSO 2010)*. Springer, 2010, pp. 65–74.
- [125] A. L. Goldberger, L. A. Amaral, L. Glass, J. M. Hausdorff, P. C. Ivanov, R. G. Mark, J. E. Mietus, G. B. Moody, C.-K. Peng, and H. E. Stanley, "Physiobank, physiotoolkit, and physionet: components of a new research resource for complex physiologic signals," *Circulation*, vol. 101, no. 23, pp. e215–e220, 2000.
- [126] T. Penzel, G. B. Moody, R. G. Mark, A. L. Goldberger, and J. H. Peter, "The apnea-ecg database," in *Computers in Cardiology 2000. Vol. 27 (Cat. 00CH37163)*. IEEE, 2000, pp. 255–258.
- [127] A. Asuncion and D. Newman, "Uci machine learning repository," 2007.
- [128] M. Ruffo, M. Cesarelli, M. Romano, P. Bifulco, and A. Fratini, "An algorithm for fhr estimation from foetal phonocardiographic signals," *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 5, no. 2, pp. 131–141, 2010.
- [129] C.-X. Deng, G.-B. Wang, and X.-R. Yang, "Image edge detection algorithm based on improved canny operator," in *Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR), 2013 International Conference on*. IEEE, 2013, pp. 168–172.
- [130] E. Davies, "Design of optimal gaussian operators in small neighbourhoods," *Image and Vision Computing*, vol. 5, no. 3, pp. 199–205, 1987.
- [131] H. Yang, Y. Ye, D. Wang, and B. Jiang, "A novel fractional-order signal processing based edge detection method," in *2010 11th International Conference on Control Automation Robotics & Vision*. IEEE, 2010, pp. 1122–1127.
- [132] P. Amoako-Yirenkyi, J. K. Appati, and I. K. Dontwi, "A new construction of a fractional derivative mask for image edge analysis based on riemann-liouville fractional derivative," *Advances in Difference Equations*, vol. 2016, no. 1, p. 238, 2016.
- [133] D. Tian, J. F. Wu, and Y. J. Yang, "A fractional-order laplacian operator for image edge detection," in *Applied Mechanics and Materials*, vol. 536. Trans Tech Publ, 2014, pp. 55–58.
- [134] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik, "A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics," in *Proc. 8th Int'l Conf. Computer Vision*, vol. 2, July 2001, pp. 416–423.
- [135] H. R. Wu and K. R. Rao, *Digital video image quality and perceptual coding*. CRC press, 2017.
- [136] P. A. Khaire and N. V. Thakur, "A fuzzy set approach for edge detection," *International Journal of Image Processing (IJIP)*, vol. 6, no. 6, pp. 403–412, 2012.

- [137] J. Lavín-Delgado, J. Solís-Pérez, J. Gómez-Aguilar, and R. Escobar-Jiménez, "A new fractional-order mask for image edge detection based on caputo–fabrizio fractional-order derivative without singular kernel," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, pp. 1–30, 2019.
- [138] G. Padmavathi, P. Subashini, and P. Lavanya, "Performance evaluation of the various edge detectors and filters for the noisy ir images," *Sensors, Signals, Visualization, Imaging, Simulation And Materials*, pp. 199–203, 2009.
- [139] *Digital Image Processing*. Tata McGraw Hill Education, 2009. [Online]. Available: <https://books.google.com.mx/books?id=JeDGn6Wmf1kC>
- [140] R. L. Egan and R. C. Mosteller, "Breast cancer mammography patterns," *Cancer*, vol. 40, no. 5, pp. 2087–2090, 1977.
- [141] G. Kruger, "Benign breast calcifications," <https://radiopaedia.org/cases/benign-breast-calcifications>, 2012.
- [142] K. Chong, "Clinical review: Benign breast disease," <https://www.gponline.com/clinical-review-benign-breast-disease/womens-health/breast-disorders/article/1336658>, 2012.
- [143] B. S. T. Alkahtani, "Chua's circuit model with atangana–baleanu derivative with fractional order," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 89, pp. 547–551, 2016.
- [144] M. S. Miri and A. Mahloojifar, "Retinal image analysis using curvelet transform and multistrustructure elements morphology by reconstruction," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 58, no. 5, pp. 1183–1192, 2011.
- [145] C. I. Sánchez, M. García, A. Mayo, M. I. López, and R. Hornero, "Retinal image analysis based on mixture models to detect hard exudates," *Medical Image Analysis*, vol. 13, no. 4, pp. 650–658, 2009.
- [146] T. Ridler, S. Calvard *et al.*, "Picture thresholding using an iterative selection method," *IEEE trans syst Man Cybern*, vol. 8, no. 8, pp. 630–632, 1978.
- [147] B. Ayerdi and M. Graña, "Random forest active learning for retinal image segmentation," in *Proceedings of the 9th International Conference on Computer Recognition Systems CORES 2015*. Springer, 2016, pp. 213–221.
- [148] S. Aslani and H. Sarnel, "A new supervised retinal vessel segmentation method based on robust hybrid features," *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 30, pp. 1–12, 2016.
- [149] N. P. Singh and R. Srivastava, "Retinal blood vessels segmentation by using gumbel probability distribution function based matched filter," *Computer methods and programs in biomedicine*, vol. 129, pp. 40–50, 2016.
- [150] Q. Li, B. Feng, L. Xie, P. Liang, H. Zhang, and T. Wang, "A cross-modality learning approach for vessel segmentation in retinal images," *IEEE transactions on medical imaging*, vol. 35, no. 1, pp. 109–118, 2016.
- [151] B. D. Barkana, I. Saricicek, and B. Yildirim, "Performance analysis of descriptive statistical features in retinal vessel segmentation via fuzzy logic, ann, svm, and classifier fusion," *Knowledge-Based Systems*, vol. 118, pp. 165–176, 2017.

- [152] L. C. Neto, G. L. Ramalho, J. F. R. Neto, R. M. Veras, and F. N. Medeiros, "An unsupervised coarse-to-fine algorithm for blood vessel segmentation in fundus images," *Expert Systems with Applications*, vol. 78, pp. 182–192, 2017.
- [153] K. Rezaee, J. Haddadnia, and A. Tashk, "Optimized clinical segmentation of retinal blood vessels by using combination of adaptive filtering, fuzzy entropy and skeletonization," *Applied Soft Computing*, vol. 52, pp. 937–951, 2017.
- [154] C. Zhu, B. Zou, R. Zhao, J. Cui, X. Duan, Z. Chen, and Y. Liang, "Retinal vessel segmentation in colour fundus images using extreme learning machine," *Computerized Medical Imaging and Graphics*, vol. 55, pp. 68–77, 2017.
- [155] Z. Feng, J. Yang, and L. Yao, "Patch-based fully convolutional neural network with skip connections for retinal blood vessel segmentation," in *2017 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. IEEE, 2017, pp. 1742–1746.
- [156] J. I. Orlando, E. Prokofyeva, and M. B. Blaschko, "A discriminatively trained fully connected conditional random field model for blood vessel segmentation in fundus images," *IEEE transactions on Biomedical Engineering*, vol. 64, no. 1, pp. 16–27, 2017.
- [157] W. Wang, J. Zhang, W. Wu, and S. Zhou, "An automatic approach for retinal vessel segmentation by multi-scale morphology and seed point tracking," *Journal of Medical Imaging and Health Informatics*, vol. 8, no. 2, pp. 262–274, 2018.
- [158] J. Solís-Pérez, J. Gómez-Aguilar, R. Escobar-Jiménez, and J. Reyes-Reyes, "Blood vessel detection based on fractional hessian matrix with non-singular mittag-leffler gaussian kernel," *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 54, p. 101584, 2019.



Producción científica

En este apartado se muestran los trabajos derivados de este tema de investigación. Donde se incluyen los observadores fraccionario y conformable para la reconstrucción de señales no estacionarias; métodos numéricos para derivadas fraccionarias y fraccionarias conformables; estimación paramétrica con algoritmos de optimización meta heurísticos; y operadores fraccionarios para la detección de bordes y segmentación de vasos sanguíneos.

Article

Chaotic Attractors with Fractional Conformable Derivatives in the Liouville–Caputo Sense and Its Dynamical Behaviors

Jesús Emmanuel Solís Pérez ¹, José Francisco Gómez-Aguilar ^{2,*}  and Dumitru Baleanu ^{3,4} and Fairouz Tchier ⁵ 

¹ Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490 Cuernavaca, Mexico; jtolwu@gmail.com

² CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490 Cuernavaca, Mexico

³ Department of Mathematics, Faculty of Art and Sciences, Cankaya University, 06530 Ankara, Turkey; dumitru@cankaya.edu.tr

⁴ Institute of Space Sciences, P.O. Box, MG-23, R 76900 Magurele-Bucharest, Romania

⁵ Department of Mathematics, King Saud University, P.O. BOX 2454, Riyadh 11451, Saudi Arabia; ftchier@ksu.edu.sa

* Correspondence: jgomez@cenidet.edu.mx; Tel.: +52-(777)-362-7770

Received: 28 February 2018; Accepted: 8 May 2018; Published: 20 May 2018



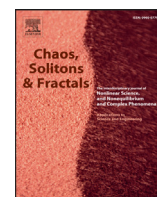
Abstract: This paper deals with a numerical simulation of fractional conformable attractors of type Rabinovich–Fabrikant, Thomas’ cyclically symmetric attractor and Newton–Leipnik. Fractional conformable and β -conformable derivatives of Liouville–Caputo type are considered to solve the proposed systems. A numerical method based on the Adams–Moulton algorithm is employed to approximate the numerical simulations of the fractional-order conformable attractors. The results of the new type of fractional conformable and β -conformable attractors are provided to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: fractional calculus; fractional conformable derivative; fractional β -conformable derivative; chaos; Adams–Moulton scheme

1. Introduction

Fractional derivatives, which are a generalization of classical derivatives have been extensively used in describing and solving integral equations, ordinary and partial differential equations in applied sciences such as fluid mechanics, diffusive transport, electrical networks, electrodynamics, nonlinear control theory, signal processing, nonlinear biological systems, astrophysics, among others [1–19].

Several definitions exist regarding the fractional derivatives, and some fundamental definitions are Coimbra, Riesz, Riemann–Liouville, Hadamard, Weyl, Grünwald–Letnikov, Marchaud, Liouville–Caputo, Caputo–Fabrizio, Atangana–Baleanu [20–22]. Based on the concept of local derivative with fractional components, Khalil presented the “conformable derivative” in [23]. This derivative allows for many extensions of some classical theorems in calculus (i.e., the product rule, quotient rule, Rolle’s theorem, chain rule, mean value theorem and composition rule). Atangana in [24] proposed a modified version of the conformable derivative proposed by Khalil, and this conformable derivative is called the β -derivative. This derivative depends on the interval on which the function is being differentiated. The conformable derivatives may not be seen as fractional derivative but can be considered to be a natural extension of the conventional derivative. Some interesting works involving these conformable derivatives have been reported in [25–35].



Novel numerical method for solving variable-order fractional differential equations with power, exponential and Mittag-Leffler laws



J.E. Solís-Pérez^a, J.F. Gómez-Aguilar^{b,*}, A. Atangana^c

^a Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, Cuernavaca Morelos C.P. 62490, México

^b CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, Cuernavaca Morelos C.P. 62490, México

^c Institute for Groundwater Studies, Faculty of Natural and Agricultural Sciences, University of the Free State, Bloemfontein 9300, South Africa

ARTICLE INFO

Article history:

Received 4 June 2018

Accepted 20 June 2018

Keywords:

Variable-order fractional derivatives

Atangana–Toufik numerical scheme

Financial system

Memcapacitor-based circuit

ABSTRACT

Variable-order differential operators can be employed as a powerful tool to modeling nonlinear fractional differential equations and chaotic systems. In this paper, we propose a new generalize numerical schemes for simulating variable-order fractional differential operators with power-law, exponential-law and Mittag-Leffler kernel. The numerical schemes are based on the fundamental theorem of fractional calculus and the Lagrange polynomial interpolation. These schemes were applied to simulate the chaotic financial system and memcapacitor-based circuit chaotic oscillator. Numerical examples are presented to show the applicability and efficiency of this novel method.

© 2018 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Fractional calculus (FC) allows the operators of integration and differentiation to have fractional order. The study of FC is considered as hot research topic and has been extensively studied in the recent decades [1–16]. An interesting extension of the constant-order FC was proposed by Samko in [17]. In this paper, the author introduced fractional operators that consider the order as a function of time, space or some other variables. Interesting applications of these fractional variable-order operators can be found in [18–26].

Since it is not possible to find exact solutions of variable-order fractional differential equations, the developing numerical schemes for solving these equations is an important area of inquiry. Traditionally, Adams–Bashforth method has been recognized as a great and powerful numerical method able to provide a numerical solution of fractional differential equations [27–34]. Recently in [35,36], the authors development a constant-order numerical scheme that combines the fundamental theorem of fractional calculus and the two-step Lagrange polynomial. Based in this method, we generalize the numerical schemes presented in [35,36] for simulating variable-order fractional differential operators with power-law, exponential-law and Mittag-Leffler kernel.

The paper is organized as follows. Notations and basic definitions of variable-order fractional derivatives are given in Section 2.

In Section 3 classical financial system and memcapacitor-based circuit chaotic oscillator are presented. In Section 4 the novel variable-order numerical method with power, exponential and Mittag-Leffler laws is presented, furthermore, some illustrative examples are given. Finally, conclusions are summarized in Section 5.

2. Preliminaries

In this section, we provide basic definitions of Liouville–Caputo, Caputo–Fabrizio and Atangana–Baleanu variable-order fractional derivatives which are used in the subsequent sections.

The Liouville–Caputo fractional derivative with variable-order $\alpha(t)$ is defined as [37]

$${}^C_0D_t^{\alpha(t)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha(t)} \dot{f}(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha(t) \leq 1. \quad (2.1)$$

The Caputo–Fabrizio derivative with variable-order $\alpha(t)$ in Liouville–Caputo sense (CFC) is defined as follows

$${}^{CFC}_0D_t^{\alpha(t)} f(t) = \frac{(2-\alpha(t))M(\alpha(t))}{2(1-\alpha(t))} \int_0^t \exp\left[-\alpha(t)\frac{(t-\tau)}{1-\alpha(t)}\right] \dot{f}(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha(t) < 1, \quad (2.2)$$

where $M(\alpha(t)) = \frac{2}{2-\alpha(t)}$ is a normalization function.

The Atangana–Baleanu fractional derivative with variable-order $\alpha(t)$ in Liouville–Caputo sense (ABC) is defined as follows [38]

* Corresponding author.

E-mail address: jgomez@cenidet.edu.mx (J.F. Gómez-Aguilar).

Parameter Estimation of Fractional Gompertz Model Using Cuckoo Search Algorithm



J. E. Solís-Pérez, J. F. Gómez-Aguilar, R. F. Escobar-Jiménez,
L. Torres and V. H. Olivares-Peregrino

Abstract In this chapter, a meta-heuristic optimization algorithm, called cuckoo search algorithm is applied to determine the optimal parameters of the fractional Gompertz model via Liouville–Caputo and Atangana–Baleanu–Caputo fractional derivatives. The numerical solutions of the proposed models were obtained using the Adams method. The proposed methodology is tested on epidemiological examples. In the interval considered, the fractional models had the best fit for the epidemiological data considered. The effectiveness of the methodology is shown by a comparison with the classical models. A comparison between the fractional models and the classical models was carried out to show the effectiveness of our methodology.

Keywords Fractional calculus · Liouville–Caputo fractional derivative · Atangana–Baleanu fractional derivative · Cuckoo search algorithm · Gompertz model

1 Introduction

Benjamin Gompertz introduced in 1825 the Gompertz model [1], the model is based on a sigmoid function and it can be applicable to the growth of animals and plants, as well as to model the number or volume of bacteria and cancer cells [2–6]. Horiuchi in [7], developed mathematical expressions to model the human mortality. In this

J. E. Solís-Pérez · R. F. Escobar-Jiménez · V. H. Olivares-Peregrino
Tecnológico Nacional de México, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico,
Interna del Internado, Palmira, 62490 Cuernavaca, Morelos, México

J. F. Gómez-Aguilar (✉)
CONACYT-Tecnológico Nacional de México, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo
Tecnológico, Interna del Internado, Palmira, 62490 Cuernavaca, Morelos, México
e-mail: jgomez@cenidet.edu.mx

L. Torres
CONACYT-Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,
México City, México

© Springer Nature Switzerland AG 2019
J. F. Gómez et al. (eds.), *Fractional Derivatives with Mittag-Leffler Kernel*,
Studies in Systems, Decision and Control 194,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-11662-0_6



A New Fractional-Order Mask for Image Edge Detection Based on Caputo–Fabrizio Fractional-Order Derivative Without Singular Kernel

J. E. Lavín-Delgado¹ · J. E. Solís-Pérez¹ · J. F. Gómez-Aguilar²  · R. F. Escobar-Jiménez¹

Received: 4 October 2018 / Revised: 3 July 2019 / Accepted: 4 July 2019
© Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2019

Abstract

In this work, we consider the Caputo–Fabrizio fractional-order derivative to generalize the first-order Sobel operator. The resulting fractional mask is used to carry out edge analysis of medical images. The implementation of this method will allow enhancing the study, and the monitoring of diseases such as breast cancer, benign cyst, and breast calcifications, among others, to properly treat these diseases. The experimental results showed that the proposed operator gives superior performance over conventional integer-order operators because it can detect more edge details feature of the medical images, as well as it is more robust to noise.

Keywords Fractional calculus · Edge detector · Fractional-order gradient · Breast cancer · Diabetic retinopathy · Aneurysm

J. F. Gómez-Aguilar
jgomez@cenidet.edu.mx

J. E. Lavín-Delgado
jorge.lavin@cenidet.edu.mx

J. E. Solís-Pérez
jesolis@cenidet.edu.mx

R. F. Escobar-Jiménez
esjiri@cenidet.edu.mx

¹ Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490 Cuernavaca, Morelos, Mexico

² CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490 Cuernavaca, Morelos, Mexico



Practice article

Fitting of experimental data using a fractional Kalman-like observer

J.E. Solís-Pérez^a, J.F. Gómez-Aguilar^{b,*}, L. Torres^c, R.F. Escobar-Jiménez^a, J. Reyes-Reyes^a^a Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira. C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico^b CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira. C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico^c CONACyT-Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, Ciudad Universitaria, Coyoacán, Mexico City 04510, Mexico

HIGHLIGHTS

- A fractional Kalman-like observer was design for fitting measured data.
- The Riemann–Liouville fractional derivative is considered.
- Parameters involved were optimized by using the Cuckoo Search algorithm.
- Numerical evaluation of the fractional state observer, using experimental data.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 12 March 2017

Received in revised form 14 September 2018

Accepted 27 November 2018

Available online 5 December 2018

Keywords:

Fractional order Kalman filter

Riemann–Liouville derivative

Grünwald–Letnikov approximation

Cuckoo search optimization algorithm

Fourier series

ABSTRACT

In this paper, a fractional order Kalman filter (FOKF) is presented, this is based on a system expressed by fractional differential equations according to the Riemann–Liouville definition. In order to get the best fitting of the FOKF, the cuckoo search optimization algorithm (CS) was used. The purpose of using the CS algorithm is to optimize the order of the observer, the fractional Riccati equation and the FOKF tuning parameters. The Grünwald–Letnikov approximation was used to compute the numerical solution of the FOKF. To show the effectiveness of the proposed FOKF, four examples are presented, the brain activity, the cutaneous potential recordings of a pregnant woman, the earthquake acceleration, and the Chua's circuit response.

© 2018 ISA. Published by Elsevier Ltd. All rights reserved.

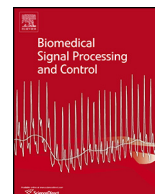
1. Introduction

For the design of control or diagnosis systems, the systems modeling is a crucial task. In many cases, the parameters estimations of these systems are not well done, so the models are not well represented. In these cases, the use of state variable observers is an alternative to help us to reach a better state variables estimation. However, the state observer depends on one or several tuning parameters which allow fitting the equation results to the experimental data. In literature, it is possible to find different works focused on the fractional order modeling, as well as in the fractional order observers design. Some of them are dedicated to estimate unknown state variables [1], periodical forces exerted, disturbance; synchronization of fractional chaotic system and fault estimation [2–11]. Therefore, it is important to propose new methods to improve the fitting data process. Such methods are part of a signal processing known as system identification, which also includes the optimal design of experiments for efficiently generating informative data for fitting such models,

as well as, model reduction. System identification techniques use both input and output data or can include only the output data. Typically, an input–output technique would be more accurate, but the input data is not always available. The main goal of system identification is to find the parameters of a mathematical model that describes a set of data in a way that minimizes the difference between the model estimation and the experimental data. The motivation of this work is proposing an approach for fitting experimental data by using fractional differential equations. In this context, fractional calculus offers the potential use of its theoretical framework for system identification, this was demonstrated in [12–18], where very effective algorithms were designed by using fractional calculus theory. In [19], the authors proposed a fractional order disturbance observer for vibration suppression applications. Lu in [20] proposed a novel scheme to synchronize fractional-order chaotic systems involving a scalar transmitted signal. The simulation results illustrated the effectiveness of the proposed synchronization method. In [21], a novel observer scheme based on a classical sliding observer and an active observer was proposed for synchronization of fractional order chaotic systems in Brunovsky canonical form. Kong in [22], designed a fractional-order observer for a class of Lipschitz continuous-time nonlinear systems with

* Corresponding author.

E-mail address: jgomez@cenidet.edu.mx (J.F. Gómez-Aguilar).



Blood vessel detection based on fractional Hessian matrix with non-singular Mittag–Leffler Gaussian kernel



J.E. Solís-Pérez^a, J.F. Gómez-Aguilar^{b,*}, R.F. Escobar-Jiménez^a, J. Reyes-Reyes^a

^a Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico

^b CONACYT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico

ARTICLE INFO

Article history:

Received 3 November 2018

Received in revised form 27 March 2019

Accepted 7 June 2019

Keywords:

Fractional Gaussian kernel

Blood vessel

Hessian matrix

Non-singular kernel

Atangana–Baleanu fractional derivative

Adams–Bashforth–Moulton scheme

ABSTRACT

In this work, we proposed a novel method based on fractional Gaussian kernel involving the Atangana–Baleanu fractional derivative to detect blood vessels in retinal images. This method is based on the fractional Gaussian matrix eigenvalues analysis to obtain the principal curvature. The non-integer orders of the fractional Gaussian mask for retinal image denoising and the fractional Gaussian matrix were optimized by Cuckoo Search algorithm to get more accurate results. To evaluate the effectiveness and the robustness of the method it was compared with manual segmentation and other works reported in the literature.

© 2019 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Fractional calculus (FC) is an extension of classical calculus, considered for some authors as a generalization of integrals and arbitrary order derivatives. In the literature, different definitions of fractional operators have been proposed. For example: Riemann–Liouville (RL), Grünwald–Letnikov (GL), Liouville–Caputo (LC) [1], Caputo–Fabrizio (CF) [2,3], Atangana–Baleanu (AB) [4], among others. In recent years, the use of these operators have increased in image processing area, for example: the authors in [5] employed an edge detection using Riemann–Liouville to enhance features and contrast in an image obtaining good results in comparison with other methods. In [6], the authors presented a modified Grünwald–Letnikov derivative to enhance the images' edges. Based on the fact that Grünwald–Letnikov is sensitive to the intensity of the pixels, rather than the intensity difference. In [7], the authors presented a medical image enhancement method based on fractional order derivative and directional derivative in Grünwald–Letnikov sense. This method uses edge image, clarity, texture information and structural features of different pixels to get masks. In [8], the authors proposed a method for denoising of echocardiographic images using rough set theory, as well as, an adaptive fractional order integral filter. This method proved to be better than non-adaptive filters to remove noise from an image due to the fractional filter in Grünwald–Letnikov sense preserves image structure. The authors in [9] employed the Liouville–Caputo's definition to propose a hybrid method for time-fractional diffusion model with a cubic nonlinear source term in one and two dimensions. In the temporal and spatial domain, a Laplace transformation and Chebyshev collocation were used to reduce the noise in an image, to illuminate the background and to reduce the diffusivity from an uniformly diffuse image.

In [10], a supervised method for vessel segmentation was presented. The authors proposed a wide and deep neural network to model the relations between the vessel map and the retinal image. Also, they considered the task of vessel segmentation as a cross-modality data transformation problem and Accuracy (ACC) to achieved the performance of their proposed method they used DRIVE, STARE and CHASE.DB1.

The authors in [11], computed simple local spatial features over the green channel due to it contains most of the contrast information. Their proposal consists of a local window to detect scale into the features and later a classifier to obtain image segmentation. This classifier follows an active learning approach where uncertain unlabeled pixels are presented to a human operator.

* Corresponding author.

E-mail address: jgomez@cenidet.edu.mx (J.F. Gómez-Aguilar).

RESEARCH ARTICLE

A new class of conformable spectral observers for signal reconstruction

Jesús Emmanuel Solís-Pérez¹ | José Francisco Gómez-Aguilar²  | Lizeth Torres³ | Ricardo Fabricio Escobar-Jiménez¹ | Juan Reyes-Reyes¹

¹Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P., Cuernavaca, Mexico

²CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P., Cuernavaca, Mexico

³CONACyT-Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, Ciudad Universitaria, Coyoacán, Mexico City, Mexico

Correspondence

José Francisco Gómez-Aguilar, CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P., 62490 Cuernavaca, Mexico.
Email: jgomez@cenidet.edu.mx

Communicated by: F. Colombo

In this work, the design of spectral observers for signal reconstruction based on Kalman filters is performed and evaluated. The conformable derivative and the beta-derivative were used to design the Kalman filters. Both derivatives satisfy the same formulas of the classical derivation, eg, the chain rule. The derivative order, the Riccati equation parameters, and the observers tuning parameters were optimized using an optimization algorithm based on the bat's echolocation behavior (Bat algorithm). The simulation results showed the advantages of using the proposed observers for the signal reconstruction.

KEYWORDS

biomedical imaging and signal processing, computer graphics, image analysis, and computational geometry, numerical methods in fourier analysis

MSC CLASSIFICATION

92C55; 65D18; 65Txx

1 | INTRODUCTION

In the last decades, the state observers have been widely used in control, eg, fault diagnosis systems, fault-tolerant systems, and signal processing. These observers depend on one or several tuning parameters for fitting the estimated results to experimental data. Recently, the observers design based on fractional calculus theory have increased since they allow estimating state variables for a class of systems with accuracy.¹ In literature, different works focused on the fractional order modeling, as well as in the fractional order observers design have been presented.²⁻⁶ Dadrás and Momeni⁷ proposed a fractional order observer to estimate the variables of a class of fractional linear order system. Kong et al⁸ designed a fractional order observer for a class of Lipschitz continuous-time nonlinear systems with unknown input. In this work, conditions of existence for the designed observer and stability of the state estimation error system were developed using the general quadratic Lyapunov function. Numerical simulations were obtained to show the effectiveness of the observer. Senejohnny and Delavari⁹ proposed a novel observer scheme based on a classical sliding observer and an active observer for synchronization of fractional order chaotic systems in the Brunovsky canonical form.^{10,11}

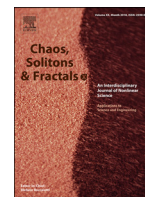
In the previously mentioned works, the Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, and Liouville-Caputo fractional order derivatives definitions have been applied to compute the derivatives. These fractional order derivatives definitions satisfy the property of linearity. However, there are some problems with the fractional order derivatives definitions. For



Contents lists available at ScienceDirect

Chaos, Solitons and Fractals

Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena

journal homepage: www.elsevier.com/locate/chaos

A fractional mathematical model of breast cancer competition model

J.E. Solís-Pérez^a, J.F. Gómez-Aguilar^{b,*}, A. Atangana^c^a Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, México^b CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, México^c Institute for Groundwater Studies, Faculty of Natural and Agricultural Sciences, University of the Free State, Bloemfontein 9300, South Africa

ARTICLE INFO

Article history:

Received 5 April 2019

Revised 17 June 2019

Accepted 19 June 2019

Keywords:

Fractional derivatives and integrals

Integral transforms

Laplace transform

Breast cancer competition model

ABSTRACT

In this paper, a mathematical model which considers population dynamics among cancer stem cells, tumor cells, healthy cells, the effects of excess estrogen and the body's natural immune response on the cell populations was considered. Fractional derivatives with power law and exponential decay law in Liouville–Caputo sense were considered. Special solutions using an iterative scheme via Laplace transform were obtained. Furthermore, numerical simulations of the model considering both derivatives were obtained using the Atangana–Toufik numerical method. Also, random model described by a system of random differential equations was presented. The use of fractional derivatives provides more useful information about the complexity of the dynamics of the breast cancer competition model.

© 2019 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Cancer is a leading cause of death in many countries around the world. Cancer development is a stepwise process through which normal somatic cells acquire mutations which enable them to escape their normal function in the tissue and become self-sufficient in survival. Breast cancer is the most common cancer among women in worldwide. Rates of breast cancer are increasing worldwide, with a particular increase in postmenopausal and estrogen receptor-positive cases [1]. The natural history of breast cancer has been difficult to study. However, mathematical models and computation simulations can help offering the ability to monitor tumor growth, cellular distribution and to observe the genetic mutations that lead to aggressive growth and metastasis. Mufudza in [2], examined the effects of excess estrogen on breast cancer dynamics with the inclusion of an immune cell population to model the body's natural response to tumor growth. In [3], developed a mathematical model for cancer cells in a post-pubertal breast from healthy or pre-cancerous cells. The model consider four differential equations describing the stepwise mutations from a normal breast stem cell to a tumour cell. In [4], the authors studied the role of excess estrogen in the development of breast cancer and its impact on the body's natural immune response, the interactions among cancer stem cells, non-proliferative tumor cells, and healthy epithelial cells in the breast tissue were considered. Another interesting works can be found in [5–11].

Fractional-order derivatives provide a novel approach to modeling the dynamics of complex systems, multi-scale phenomena and viscoelastic materials [12–22]. Actually, several investigators studied the qualitative properties and numerical solutions of biological models considering fractional order derivatives. These models carries information about its different previous states and can be a useful way to include memory in a dynamical process [23]. In [24], the authors developed a mathematical model of a tumour, taking into account invasive morphology, progressive phenotypical heterogeneity and also memory. In [25] a new model of population growth is proposed. The model is based on the concept of fractional differentiation with Mittag-Leffler kernel and includes the choice of sexuality. The existence of unique solution and numerical solutions were provided. Sardar in [26] have developed a mosquito-transmitted disease model with fractional differential equations. Owolabi in [27] consider a multi-components nonlinear fractional-in-space reaction-diffusion equations which describe the spread of hepatitis B virus disease in areas of high endemic communities. Koca in [28] studied the Rubella spread model using a new fractional derivative with non-singular and non-local kernel. The existence and uniqueness of exact solution was presented using the Banach fixed point theorem.

In this work, we formulate a fractional order model for breast cancer competition model via Liouville–Caputo and Caputo–Fabrizio–Caputo fractional derivatives. We consider the integer order model studied and analysed by Abernathy and collaborators in [4]. Considering fractional order derivatives, our model permits the incorporation of the memory effect involved in the fractional order α ; this property is important in the description of real world problems.

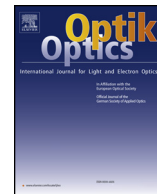
* Corresponding author.

E-mail address: jgomez@cenidet.edu.mx (J.F. Gómez-Aguilar).



Contents lists available at ScienceDirect

Optik

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijleo

Original research article

Robust optical flow estimation involving exponential fractional-order derivatives

J.E. Lavín-Delgado^a, J.E. Solís-Pérez^a, J.F. Gómez-Aguilar^{b,*}, R.F. Escobar-Jiménez^a^a Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico^b CONACYT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico

ARTICLE INFO

Keywords:

Fractional calculus
Fractional gradient
Optical flow
Classic + NL
Caputo-Fabrizio derivative
AAE
EPE

ABSTRACT

This work presents a fractional-order method for optical flow estimation. The proposed method is based on the Classic+NL algorithm and the Caputo-Fabrizio fractional-order derivative. Therefore, the proposed operator can be seen as a generalization of this integer-order model. The performance of the algorithm is analyzed by using the Average End Point Error (EPE) and the Average Angular Error (AAE) considering the MPI Sintel and Middlebury Datasets. Experimental results on these dataset show that the proposed algorithm performs better than other existing techniques through the analysis of the two error metrics mentioned above. The firefly optimization algorithm was applied to obtain the fractional-order, which minimizes the EPE, for each of images sequence used.

1. Introduction

Optical flow can be defined as the distribution of apparent velocities of movement of brightness patterns on an image, which is generally caused by relative motion between objects and the viewer [12]. The optical flow has been widely applied in multiple areas, to develop tasks such as robot navigation, visual control, object tracking, medical diagnosis, 3D reconstruction, intelligent monitoring, image segmentation and many more. In [15] a global method for the optical flow estimation was presented which assumes that the apparent velocity of the brightness pattern varies smoothly almost everywhere on the image. The flow is formulated as a global energy functional which is then sought to be minimized. This method yields a high density of flow vectors, but it is more sensitive to noise than local methods. The technique developed in [17] considers that the flow is constant in a local neighborhood of each pixel and the basic optical flow equations are solved for all the pixels in that neighborhood by the least squares criterion. Since it is a purely local method, it cannot provide flow information in the interior of uniform regions of the image. The method described in [18] was one of the first to use second-order derivatives for optical flow estimation. The Hessian matrix is used for obtain the second-order derivatives. The local algorithm developed in [28] is another method that uses second order derivatives of the image brightness pattern. For robustness, the approach divides the image into 8×8 pixel regions. The first matching technique was described in [1], which is based on the Laplacian pyramid and a coarse-to-fine SSD-based matching strategy. In [23], was developed an approach that divides the information into conservation and neighborhood categories, in this sense, each of this categories was recovered using a covariance matrix, then these estimations were used to calculate the optical flow. In [14] was described an approach that combines the outputs of a set of spatio-temporal motion-energy filters to estimate image velocity. Ever since the first approaches of Horn Schunck [15] and Lucas-Kanade [17] were proposed, several improved methods for the optical flow estimation have been developed,

* Corresponding author.

E-mail address: jgomez@cenidet.edu.mx (R.F. Escobar-Jiménez).

<https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.163642>

Received 4 August 2019; Accepted 14 October 2019

0030-4026/ © 2019 Elsevier GmbH. All rights reserved.



Global optimization algorithms applied to solve a multi-variable inverse artificial neural network to improve the performance of an absorption heat transformer with energy recycling

J.E. Solís-Pérez^a, J.F. Gómez-Aguilar^{b,*}, J.A. Hernández^{c,*}, R.F. Escobar-Jiménez^a,
E. Viera-Martin^a, R.A. Conde-Gutiérrez^c, U. Cruz-Jacobo^d

^a Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico

^b CONACYT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico

^c Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIICAp-IICBA), Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM), Av. Universidad 1001 Col. Chamilpa, 62209, Cuernavaca, Morelos, Mexico

^d Posgrado en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIICAp), Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM), Av. Universidad 1001 Col. Chamilpa, 62209, Cuernavaca, Morelos, Mexico

ARTICLE INFO

Article history:

Received 31 March 2019

Received in revised form 2 August 2019

Accepted 22 September 2019

Available online 25 September 2019

Keywords:

Optimization

Absorption heat transformer

Genetic algorithms

Cuckoo search

Particle Swarm Optimization

Simulated Annealing

ABSTRACT

In this research, global optimization algorithms were applied to solve the inverse artificial neural network (ANNi) for obtaining the best inputs values of an absorption heat transformer with energy recycling (AHTER) and improving its performance. The ANNi was obtained by inverting an artificial neural network (ANN) which architecture was 16 input variables, 3 neurons in the hidden layer and 1 output variable. The ANNi's aim was optimizing 1, 2, 3, and up to 4 manipulated input variables, as well as calculating the other 12 input variables not manipulated in the system (AHTER) considering a coefficient of performance (COP) desired. The Cuckoo Search (CS), Particle Swarm Optimization (PSO), Genetic Algorithm (GA) and Simulated Annealing (SA) algorithms were used to find the optimal inputs. The results showed that the four algorithms used (ANNi-CS, ANNi-PSO, ANNi-GA, and ANNi-SA) satisfactorily optimize of 1 up to 16 inputs of the ANNi. However, the algorithms of ANNi-CS and ANNi-SA were slightly faster with acceptable accuracy. Additionally, they were carried out two analyses using different COPs values. These analyses showed that both algorithms optimize the AHTER's inputs for different COP, as well as $R > 0.988$ were obtained with the COP experimental data against COP obtained data by both ANNi models.

© 2019 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

In general, optimization is highlighted as the estimation of a value or a set of them to obtain the minimum or maximum potential in the performance of a process, searching within an objective function the optimal point that complies with certain established restrictions so that the solution is valid [1–4]. Under this criterion, the optimization contributes to improving the operation of processes, reducing production costs and maximizing efficiency [5]. In the other hand, the inverse artificial neural network (ANNi) is a method that has been distinguished by the capability to optimize processes based on experimental data and computational methods of artificial intelligence. The development of the ANNi methodology has evolved to the extent of

optimizing multiple input variables to improve the performance of a process [6]. However, the methodology has focused on using only some optimization algorithms to solve the objective function, for example: Nelder–Mead simplex method has been used to solve problems with 1 input variable; genetic algorithms and ant colony have also been used to solve problems with 1, 2 and up to 3 input variables [7–10]. The latest above mentioned algorithms come from an optimization method known as meta-heuristic algorithms, which are suitable for global search due to its ability to explore and find regions in the search space [11]. The meta-heuristic algorithms are iterative and search optimal values in the shortest possible time. They are ideal for solving multivariable functions raised through the ANNi model. Among the various meta-heuristic algorithms used to solve optimization problems are Genetic algorithm (GA), Particle Swarm Optimization (PSO), Cuckoo Search (CS) and Simulated Annealing (SA).

Regarding the optimization algorithms GA, PSO, CS, and SA, the following references have found in the literature, Cachón and Vazquez [12] proposed a genetic algorithm for improving

* Corresponding authors.

E-mail addresses: jgomez@cenidet.edu.mx (J.F. Gómez-Aguilar), alfredo@uaem.mx (J.A. Hernández).

Anti-synchronization of chaotic systems using a fractional conformable derivative with power law

Jesús Emmanuel Solís-Pérez¹ | José Francisco Gómez-Aguilar²  |
Dumitru Baleanu^{3,4} | Fairouz Tchier⁵ | Lakhdar Ragoub⁶

¹Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, México

²CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, México

³Faculty of Art Sciences. Department of Mathematics, Cankaya University, Balgat 0630, Ankara, Turkey

⁴Institute of Space Sciences, PO BOX, MG-23, R 76900, Magurele-Bucharest, Romania.

⁵Department of Mathematics, King Saud University, PO Box 22452, Riyadh 11495, Saudi Arabia

⁶Department of Mathematics, University of Prince Mugrin, PO Box 41040, Riyadh 42241, Saudi Arabia

Correspondence

J.F. Gómez-Aguilar,
CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET. Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca Morelos, Mexico.
Email: jgomez@cenidet.edu.mx

Communicated by: Z. DIA

In this paper, we propose a new numerical method based on two-step Lagrange polynomial interpolation to get numerical simulations and adaptive anti-synchronization schemes for two fractional conformable attractors of variable order. It was considered the fractional conformable derivative in Liouville-Caputo sense. The novel numerical method was applied to derive new results from the anti-synchronization of the identical uncertain Wang-Sun attractors and three-dimensional chaotic system using fractional conformable sliding mode control. Numerical examples show the effectiveness of the adaptive fractional conformable anti-synchronization schemes for the uncertain chaotic systems considered in this paper.

KEYWORDS

anti-synchronization, chaotic systems, fractional conformable derivative, fractional derivatives and integrals, sliding mode control

MSC CLASSIFICATION

44Axx; 34H10; 65Pxx; 34D06

1 | INTRODUCTION

Fractional calculus is a generalization of classical calculus involving integrals and derivatives of arbitrary order. Because of its properties, applications of fractional calculus have increased in areas such as signal processing, control theory, non-linear systems, chaos theory, among others.^{1,2} Khalil in previous work³ presented the conformable derivative based on the concept of nonlocality. This derivative fulfills some theorems in classical calculus such as chain rule, the product rule, mean value theorem, quotient rule, and composition rule. Some recent works under this approach can be found in previous studies^{4,5}. Nevertheless, some authors have proposed other derivatives under the same approach: β -derivate,⁶ Katugampola derivative,^{7,8} M-derivative,⁹ Kolwankar, and Gangal derivatives.^{10,11} Recently, in Pan et al,¹² new fractional integration and differentiation operators in Riemann–Liouville–Caputo and Hadamard sense were obtained iterating