



**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Maestría

Control y análisis de robustez en presencia de  
incertidumbres de modelado y disturbios externos de  
robots manipuladores usando cálculo fraccionario

presentada por

**Ing. Samuel Chávez Vázquez**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestría en Ciencias en Ingeniería  
Electrónica**

Director de tesis

**Dr. José Francisco Gómez Aguilar**

Codirector de tesis

**Dr. Jorge Enrique Lavín Delgado**

Cuernavaca, Morelos, México. Julio de 2020.



"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Mor., 29/junio/2020  
No. de Oficio: DIE/437/20  
Asunto: Aceptación de documentos de tesis

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Ing. Samuel Chávez Vázquez**, con número de control **M18CE084** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "**Control y análisis de robustez en presencia de incertidumbres de modelado y disturbios externos de robots manipuladores usando cálculo fraccionario**" y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

*José Francisco Gómez*

Dr. José Francisco Gómez Aguilar  
Doctor en Física  
Cédula profesional 9214781

CODIRECTOR DE TESIS

*Jorge Enrique Lavín Deigado*

Dr. Jorge Enrique Lavín Deigado  
Doctor en Ciencias con la Especialidad en  
Control Automático  
Cédula profesional 10161978

REVISOR 1

*Gerardo Vicente Guerrero Ramírez*

Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez  
Doctor en Ingeniería  
Cédula profesional 3431842

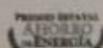
REVISOR 2

*Victor Manuel Alvarado Martínez*

Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 8031070

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera- Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
Estudiante  
Expediente

MPS/rr.





"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Morelos **06/julio/2020**

OFICIO No. SAC/ 207/2020

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**SAMUEL CHÁVEZ VÁZQUEZ**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA**  
**P R E S E N T E**

Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Control y análisis de robustez en presencia de incertidumbres de modelado y disturbios externos de robots manipuladores usando cálculo fraccionario", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica®*  
*"Conocimiento y tecnología al servicio de México"*

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



**CENTRO NACIONAL  
DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA**

C.c.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera. Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
Expediente  
GVGR/CHG

# Agradecimientos

A Dios todopoderoso, en quien siempre confío y siempre confiaré, por darme la vida, bendecirme siempre, protegerme y cuidar a toda mi familia.

A Ivett, mi amada esposa, quien decidió compartir el resto de sus días conmigo, por quererme, amarme y respetarme.

A mis padres Gilberto Chávez y Gabriela Vázquez, por su amor incondicional, por apoyarme siempre y por influir en la persona que soy.

A mis hermanos Luis Donald y Ronaldo, por su apoyo y cariño, por permitirme ser su ejemplo.

A mi director de tesis, Dr. José Francisco Gómez Aguilar, por haber confiado en mi, por dirigir este trabajo y por compartir sus conocimientos.

A mi codirector de tesis, Dr. Jorge Enrique Lavín Delgado, por su apoyo y consejos que me ayudaron a terminar este trabajo.

A mis revisores de tesis, Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez y Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez, por sus valiosos comentarios y correcciones que me ayudaron a mejorar este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACYT) y al Tecnológico Nacional de México (TecNM) por el apoyo económico brindado para poder realizar y culminar mis estudios de maestría.

Y agradezco al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por permitirme continuar con mis estudios, a todo el personal que en él laboran, así como de tener un ambiente agradable de trabajo.

# Resumen

En esta tesis, los modelos dinámicos de los robots manipuladores SCARA, Stanford y PUMA 560 se obtienen a través de la formulación de Euler-Lagrange y se hace uso de los operadores fraccionarios para generalizar el modelo matemático de los manipuladores. Cada articulación de los robots es accionada por un motor de inducción y se formuló el modelo fraccionario de cada motor de inducción, además, se muestra el acoplamiento de los motores de inducción con los robots manipuladores.

Como primera parte de estos sistemas, se diseña un control tipo PD para el seguimiento de trayectoria, el cual, se aplica a los tres casos de estudio, y un control tipo PI para los motores. Para la segunda parte, se diseñan diferentes controladores para el seguimiento de trayectoria de los manipuladores, un control adaptable basado en pasividad se aplica al robot SCARA, para el manipulador Stanford se diseña un control modo deslizante integral y, finalmente, para el robot PUMA 560 se aplica un controlador en red neuronal. El control PI se mantiene para los motores de inducción en todos los casos.

Se hace uso de la cinemática inversa para encontrar los valores que las coordenadas articulares del robot deben tomar para que su extremo se posicione y oriente de acuerdo con una ubicación espacial específica. A los controladores se les realizó un análisis de robustez, el cual consta de, agregar fricciones a cada una de las articulaciones, aplicar una fuerza externa en algún punto del manipulador, y realizar una única sintonización para diferentes trayectorias deseadas.

# Abstract

In this thesis, the dynamic models of the SCARA, Stanford and PUMA 560 manipulator robots are obtained through the Euler-Lagrange formulation and fractional operators are used to generalize the mathematical model of the manipulators. Each joint of the robots is driven by an induction motor and the fractional model of each induction motor was formulated, in addition, the matching of the induction motors with the manipulator robots is shown.

As a first part for these systems, a PD type control is designed for trajectory tracking, which is applied to the three case studies, and a PI type control for the motors. For the second part, different controllers are designed for trajectory tracking of the manipulators, a passivity based adaptive control is applied to the SCARA robot, an integral sliding mode control is designed for the Stanford manipulator and, finally, for the PUMA 560 robot a neural network controller is applied. PI control is maintained for induction motors in all cases.

Inverse kinematics is used to find the values that the robot's joint coordinates must take so that its end is positioned and oriented according to a specific spatial location. The controllers underwent a robustness analysis, which consists of adding friction to each of the joints, applying an external force at some point of the manipulator, and performing a single tuning for different desired trajectories.

# Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	III
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	XVII
Nomenclatura	XIX
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte	1
1.2. Planteamiento del problema	4
1.3. Objetivo general	4
1.4. Objetivos específicos	4
1.5. Metas	4
1.6. Justificación	5
1.7. Método	5
1.8. Hipótesis	5
1.9. Alcance	6
1.10. Aportaciones	6
1.11. Organización del documento	6
<b>2. Cálculo Fraccionario</b>	<b>7</b>
2.1. Funciones especiales	7
2.2. Derivadas e integrales	8
2.3. Métodos numéricos	10
<b>3. Modelado</b>	<b>13</b>
3.1. Introducción	13
3.2. Modelado fraccionario del robot SCARA	13
3.2.1. Simulación en lazo abierto	17
3.3. Modelado fraccionario del robot Stanford	20
3.3.1. Simulación en lazo abierto	21

3.4.	Modelado fraccionario del robot PUMA 560 . . . . .	24
3.4.1.	Simulación en lazo abierto . . . . .	28
3.5.	Motor de inducción . . . . .	31
3.6.	Acoplamiento motor-manipulador . . . . .	31
3.6.1.	Sistema acoplado MI-SCARA . . . . .	32
3.6.2.	Sistema acoplado MI-Stanford . . . . .	32
3.6.3.	Sistema acoplado MI-PUMA 560 . . . . .	33
3.7.	Perturbaciones . . . . .	33
3.8.	Conclusiones . . . . .	34
<b>4.</b>	<b>Controladores</b> . . . . .	<b>35</b>
4.1.	Introducción . . . . .	35
4.2.	Controlador PI . . . . .	36
4.3.	Controlador PD . . . . .	36
4.4.	Controlador adaptable basado en pasividad . . . . .	37
4.5.	Controlador modo deslizante integral . . . . .	39
4.6.	Controlador basado en una red neuronal . . . . .	40
4.7.	Conclusión . . . . .	41
<b>5.</b>	<b>Resultados numéricos (simulaciones)</b> . . . . .	<b>42</b>
5.1.	SCARA . . . . .	43
5.1.1.	$PD^\mu$ . . . . .	43
5.1.2.	Adaptable basado en pasividad . . . . .	69
5.2.	Stanford . . . . .	99
5.2.1.	$PD^\mu$ . . . . .	99
5.2.2.	Modo deslizantes integral . . . . .	137
5.3.	PUMA 560 . . . . .	179
5.3.1.	$PD^\mu$ . . . . .	179
5.3.2.	Red Neuronal . . . . .	217
5.4.	Conclusiones y trabajos futuros . . . . .	259
5.4.1.	Conclusiones . . . . .	259
5.4.2.	Trabajos futuros . . . . .	259
	<b>Anexos</b> . . . . .	<b>260</b>
<b>A.</b>	<b>Cinemática Directa</b> . . . . .	<b>261</b>
A.1.	SCARA . . . . .	261
A.2.	Stanford . . . . .	263
A.3.	PUMA 560 . . . . .	265
<b>B.</b>	<b>Jacobiano</b> . . . . .	<b>268</b>
B.1.	SCARA . . . . .	269
B.2.	Stanford . . . . .	269
B.3.	PUMA 560 . . . . .	270

<b>C. Trayectorias</b>	<b>272</b>
C.1. Tipo senos, cosenos y exponenciales . . . . .	272
C.2. Cinemática Inversa . . . . .	273
C.2.1. SCARA . . . . .	273
C.2.2. Stanford . . . . .	275
C.2.3. PUMA 560 . . . . .	277
<b>D. Algoritmo de Sintonización de Cuckoo (CSA)</b>	<b>278</b>
<b>E. Productos obtenidos</b>	<b>280</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>282</b>

# Índice de figuras

3.1. Robot SCARA . . . . .	14
3.2. Simulación en lazo abierto del modelo de Euler-Lagrange fraccionario con la derivada de Caputo-Fabrizio con diferentes órdenes para el robot SCARA; posición de a) $q_1$ , b) $q_2$ , c) $q_3$ y d) $q_4$ . . . . .	18
3.3. Simulación en lazo abierto del modelo de Euler-Lagrange fraccionario con la derivada de Atangana-Baleanu-Caputo con diferentes órdenes para el robot SCARA; posición de a) $q_1$ , b) $q_2$ , c) $q_3$ y d) $q_4$ . . . . .	19
3.4. Robot Stanford . . . . .	20
3.5. Simulación en lazo abierto del modelo de E-L fraccionario con la derivada de CF con diferentes órdenes para el robot Stanford; posición de a) $q_1$ , b) $q_2$ , c) $q_3$ , d) $q_4$ , e) $q_5$ y f) $q_6$ . . . . .	22
3.6. Simulación en lazo abierto del modelo de E-L fraccionario con la derivada de ABC con diferentes órdenes para el robot Stanford; posición de a) $q_1$ , b) $q_2$ , c) $q_3$ , d) $q_4$ , e) $q_5$ y f) $q_6$ . . . . .	23
3.7. Robot PUMA 560 . . . . .	24
3.8. Simulación en lazo abierto del modelo de E-L fraccionario con la derivada de CF con diferentes órdenes para el robot PUMA 560; posición de a) $q_1$ , b) $q_2$ , c) $q_3$ , d) $q_4$ , e) $q_5$ y f) $q_6$ . . . . .	29
3.9. Simulación en lazo abierto del modelo de E-L fraccionario con la derivada de ABC con diferentes órdenes para el robot PUMA 560; posición de a) $q_1$ , b) $q_2$ , c) $q_3$ , d) $q_4$ , e) $q_5$ y f) $q_6$ . . . . .	30
4.1. Diagrama general de control para seguimiento de trayectoria de los sistemas robóticos actuados por motores de inducción. . . . .	35
5.1. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	45
5.2. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	45
5.3. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	46
5.4. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	46
5.5. Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	47
5.6. Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	47
5.7. Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	48
5.8. Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	48
5.9. Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	49
5.10. Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	49
5.11. Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	50
5.12. Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	50

5.13. Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	51
5.14. Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	51
5.15. Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	52
5.16. Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	52
5.17. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	53
5.18. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	53
5.19. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	54
5.20. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	54
5.21. Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	55
5.22. Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	55
5.23. Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	56
5.24. Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	56
5.25. Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	57
5.26. Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	57
5.27. Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	58
5.28. Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	58
5.29. Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	59
5.30. Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	59
5.31. Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	60
5.32. Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	60
5.33. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	61
5.34. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	61
5.35. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	62
5.36. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	62
5.37. Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	63
5.38. Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	63
5.39. Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	64
5.40. Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	64
5.41. Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	65
5.42. Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	65
5.43. Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	66
5.44. Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	66
5.45. Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	67
5.46. Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	67
5.47. Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	68
5.48. Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	68
5.49. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	72
5.50. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	72
5.51. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	73
5.52. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	73
5.53. Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación . . . . .	74
5.54. Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación . . . . .	74
5.55. Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	75
5.56. Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	75
5.57. Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	76

5.58. Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	76
5.59. Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	77
5.60. Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	77
5.61. Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	78
5.62. Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	78
5.63. Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	79
5.64. Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	79
5.65. Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	80
5.66. Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	80
5.67. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	81
5.68. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	81
5.69. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	82
5.70. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	82
5.71. Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación . . . . .	83
5.72. Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación . . . . .	83
5.73. Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	84
5.74. Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	84
5.75. Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	85
5.76. Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	85
5.77. Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	86
5.78. Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	86
5.79. Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	87
5.80. Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	87
5.81. Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	88
5.82. Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	88
5.83. Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	89
5.84. Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	89
5.85. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	90
5.86. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	90
5.87. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	91
5.88. Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	91
5.89. Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación . . . . .	92
5.90. Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación . . . . .	92
5.91. Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	93
5.92. Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	93
5.93. Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	94
5.94. Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	94
5.95. Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	95
5.96. Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	95
5.97. Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	96
5.98. Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	96
5.99. Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	97
5.100 Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	97
5.101 Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	98
5.102 Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	98

5.103	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	101
5.104	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	101
5.105	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	102
5.106	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	102
5.107	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	103
5.108	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	103
5.109	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	104
5.110	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	104
5.111	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	105
5.112	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	105
5.113	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	106
5.114	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	106
5.115	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	107
5.116	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	107
5.117	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	108
5.118	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	108
5.119	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	109
5.120	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	109
5.121	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	110
5.122	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	110
5.123	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	111
5.124	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	111
5.125	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	112
5.126	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	112
5.127	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	113
5.128	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	113
5.129	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	114
5.130	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	114
5.131	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	115
5.132	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	115
5.133	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	116
5.134	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	116
5.135	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	117
5.136	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	117
5.137	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	118
5.138	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	118
5.139	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	119
5.140	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	119
5.141	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	120
5.142	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	120
5.143	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	121
5.144	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	121
5.145	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	122
5.146	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	122
5.147	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	123

5.148	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	123
5.149	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	124
5.150	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	124
5.151	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	125
5.152	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	125
5.153	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	126
5.154	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	126
5.155	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	127
5.156	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	127
5.157	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	128
5.158	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	128
5.159	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	129
5.160	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	129
5.161	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	130
5.162	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	130
5.163	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	131
5.164	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	131
5.165	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	132
5.166	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	132
5.167	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	133
5.168	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	133
5.169	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	134
5.170	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	134
5.171	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	135
5.172	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	135
5.173	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	136
5.174	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	136
5.175	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	140
5.176	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	140
5.177	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	141
5.178	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	141
5.179	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	142
5.180	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	142
5.181	Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación . . . . .	143
5.182	Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación . . . . .	143
5.183	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	144
5.184	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	144
5.185	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	145
5.186	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	145
5.187	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	146
5.188	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	146
5.189	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	147
5.190	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	147
5.191	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	148
5.192	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	148

5.193	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	149
5.194	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	149
5.195	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	150
5.196	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	150
5.197	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	151
5.198	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	151
5.199	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	152
5.200	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	152
5.201	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	153
5.202	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	153
5.203	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	154
5.204	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	154
5.205	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	155
5.206	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	155
5.207	Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación . . . . .	156
5.208	Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación . . . . .	156
5.209	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	157
5.210	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	157
5.211	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	158
5.212	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	158
5.213	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	159
5.214	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	159
5.215	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	160
5.216	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	160
5.217	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	161
5.218	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	161
5.219	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	162
5.220	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	162
5.221	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	163
5.222	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	163
5.223	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	164
5.224	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	164
5.225	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	165
5.226	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	165
5.227	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	166
5.228	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	166
5.229	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	167
5.230	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	167
5.231	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	168
5.232	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	168
5.233	Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación . . . . .	169
5.234	Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación . . . . .	169
5.235	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	170
5.236	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	170
5.237	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	171

5.238	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	171
5.239	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	172
5.240	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	172
5.241	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	173
5.242	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	173
5.243	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	174
5.244	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	174
5.245	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	175
5.246	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	175
5.247	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	176
5.248	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	176
5.249	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	177
5.250	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	177
5.251	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	178
5.252	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	178
5.253	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	181
5.254	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	181
5.255	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	182
5.256	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	182
5.257	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	183
5.258	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	183
5.259	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	184
5.260	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	184
5.261	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	185
5.262	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	185
5.263	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	186
5.264	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	186
5.265	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	187
5.266	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	187
5.267	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	188
5.268	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	188
5.269	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	189
5.270	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	189
5.271	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	190
5.272	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	190
5.273	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	191
5.274	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	191
5.275	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	192
5.276	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	192
5.277	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	193
5.278	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	193
5.279	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	194
5.280	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	194
5.281	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	195
5.282	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	195

5.283	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	196
5.284	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	196
5.285	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	197
5.286	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	197
5.287	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	198
5.288	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	198
5.289	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	199
5.290	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	199
5.291	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	200
5.292	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	200
5.293	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	201
5.294	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	201
5.295	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	202
5.296	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	202
5.297	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	203
5.298	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	203
5.299	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	204
5.300	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	204
5.301	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	205
5.302	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	205
5.303	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	206
5.304	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	206
5.305	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	207
5.306	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	207
5.307	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	208
5.308	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	208
5.309	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	209
5.310	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	209
5.311	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	210
5.312	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	210
5.313	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	211
5.314	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	211
5.315	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	212
5.316	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	212
5.317	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	213
5.318	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	213
5.319	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	214
5.320	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	214
5.321	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	215
5.322	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	215
5.323	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	216
5.324	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	216
5.325	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	220
5.326	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	220
5.327	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	221

5.328	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	221
5.329	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	222
5.330	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	222
5.331	Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación . . . . .	223
5.332	Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación . . . . .	223
5.333	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	224
5.334	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	224
5.335	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	225
5.336	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	225
5.337	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	226
5.338	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	226
5.339	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	227
5.340	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	227
5.341	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	228
5.342	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	228
5.343	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	229
5.344	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	229
5.345	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	230
5.346	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	230
5.347	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	231
5.348	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	231
5.349	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	232
5.350	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	232
5.351	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	233
5.352	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	233
5.353	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	234
5.354	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	234
5.355	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	235
5.356	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	235
5.357	Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación . . . . .	236
5.358	Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación . . . . .	236
5.359	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	237
5.360	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	237
5.361	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	238
5.362	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	238
5.363	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	239
5.364	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	239
5.365	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	240
5.366	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	240
5.367	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	241
5.368	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	241
5.369	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	242
5.370	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	242
5.371	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	243
5.372	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	243

5.373	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	244
5.374	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	244
5.375	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	245
5.376	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	245
5.377	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_1$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	246
5.378	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_2$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	246
5.379	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_3$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	247
5.380	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_4$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	247
5.381	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_5$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	248
5.382	Seguimiento de trayectoria de la articulación $q_6$ (a) sin perturbación y (b) con perturbación	248
5.383	Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación . . . . .	249
5.384	Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación . . . . .	249
5.385	Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	250
5.386	Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	250
5.387	Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	251
5.388	Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	251
5.389	Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	252
5.390	Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	252
5.391	Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	253
5.392	Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	253
5.393	Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	254
5.394	Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	254
5.395	Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	255
5.396	Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . . . .	255
5.397	Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	256
5.398	Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	256
5.399	Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	257
5.400	Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	257
5.401	Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	258
5.402	Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación . . .	258

# Índice de tablas

3.1. Parámetros del robot SCARA. . . . .	17
4.1. Parámetros del motor de inducción. . . . .	36
5.1. Parámetros de las trayectorias deseadas para los controladores PD y $PD^\mu$ aplicado al robot SCARA. . . . .	43
5.2. Ganancias de los controladores PI y PD del robot SCARA. . . . .	43
5.3. Ganancias y ordenes de los controladores $PI^\zeta$ y $PD^\mu$ del robot SCARA. . . . .	43
5.4. Comparación del desempeño de los controladores PD vs $PD^\mu$ para la trayectoria 1. . . . .	44
5.5. Comparación del desempeño de los controladores PD vs $PD^\mu$ para la trayectoria 2. . . . .	44
5.6. Comparación del desempeño de los controladores PD vs $PD^\mu$ para la trayectoria 3. . . . .	44
5.7. Parámetros de las trayectorias deseadas para los controladores adaptables basados en pasividad clásico y fraccionario aplicado al robot SCARA. . . . .	69
5.8. Ganancias de los controladores PI clásicos. . . . .	69
5.9. Ganancias de los controladores adaptables basados en pasividad de orden entero. . . . .	70
5.10. Ganancias y ordenes de los controladores $PI^\zeta$ de orden $\zeta$ . . . . .	70
5.11. Ganancias y ordenes de los controladores adaptables basados en pasividad de orden $\sigma$ . . . . .	70
5.12. Comparación del desempeño de los controladores adaptables basados en pasividad de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 1. . . . .	71
5.13. Comparación del desempeño de los controladores adaptables basados en pasividad de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 2. . . . .	71
5.14. Comparación del desempeño de los controladores adaptables basados en pasividad de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 3. . . . .	71
5.15. Parámetros de las trayectorias deseadas para los controladores PD y $PD^\mu$ aplicado al robot Stanford. . . . .	99
5.16. Ganancias de los controladores PI y PD del robot Stanford. . . . .	99
5.17. Ganancias y ordenes de los controladores $PI^\zeta$ y $PD^\mu$ del robot Stanford. . . . .	99
5.18. Comparación del desempeño de los controladores PD vs $PD^\mu$ para la trayectoria 1. . . . .	100
5.19. Comparación del desempeño de los controladores PD vs $PD^\mu$ para la trayectoria 2. . . . .	100
5.20. Comparación del desempeño de los controladores PD vs $PD^\mu$ para la trayectoria 3. . . . .	100
5.21. Parámetros de las trayectorias deseadas para los controladores modo deslizante integral clásico y fraccionario aplicado al robot Stanford. . . . .	137
5.22. Ganancias de los controladores PI clásicos. . . . .	137
5.23. Ganancias de los controladores modo deslizante integral de orden entero. . . . .	138
5.24. Ganancias y ordenes de los controladores $PI^\zeta$ de orden $\zeta$ . . . . .	138

5.25. Ganancias y ordenes de los controladores modo deslizante integral fraccionarios. . . . .	138
5.26. Comparación del desempeño de los controladores modo deslizante integral de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 1. . . . .	139
5.27. Comparación del desempeño de los controladores modo deslizante integral de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 2. . . . .	139
5.28. Comparación del desempeño de los controladores modo deslizante integral de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 3. . . . .	139
5.29. Parámetros de las trayectorias deseadas para los controladores PD y $PD^\mu$ aplicado al robot PUMA 560. . . . .	179
5.30. Ganancias de los controladores PI y PD del robot PUMA 560. . . . .	179
5.31. Ganancias y ordenes de los controladores $PI^\zeta$ y $PD^\mu$ del robot PUMA 560. . . . .	179
5.32. Comparación del desempeño de los controladores PD vs $PD^\mu$ para la trayectoria 1. . . . .	180
5.33. Comparación del desempeño de los controladores PD vs $PD^\mu$ para la trayectoria 2. . . . .	180
5.34. Comparación del desempeño de los controladores PD vs $PD^\mu$ para la trayectoria 3. . . . .	180
5.35. Parámetros de las trayectorias deseadas para el controlador red neuronal clásico y fraccionario aplicado al robot PUMA 560. . . . .	217
5.36. Ganancias de los controladores PI clásicos. . . . .	217
5.37. Ganancias del controlador red neuronal de orden entero. . . . .	218
5.38. Ganancias y ordenes de los controladores $PI^\zeta$ de orden $\zeta$ . . . . .	218
5.39. Ganancias y ordenes del controlador red neuronal fraccionario. . . . .	218
5.40. Comparación del desempeño del controlador red neuronal de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 1. . . . .	219
5.41. Comparación del desempeño del controlador red neuronal de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 2. . . . .	219
5.42. Comparación del desempeño del controlador red neuronal de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 3. . . . .	219
A.1. Parámetros Denavit-Hartenberg estándar del robot SCARA. . . . .	261
A.2. Parámetros Denavit-Hartenberg estándar del robot Stanford. . . . .	263
A.3. Parámetros Denavit-Hartenberg modificado del robot PUMA 560. . . . .	265
D.1. Parámetros para la simulación del Algoritmo de Búsqueda de Cuckoo . . . . .	278

# Nomenclatura

${}^AB_0\mathcal{I}_t^\gamma$	<i>Integral fraccionaria en el sentido de Atangana-Baleanu de orden <math>\gamma</math> para el error de posición del control modo deslizante integral</i>
${}^AB_0\mathcal{I}_t^\zeta$	<i>Integral fraccionaria en el sentido de Atangana-Baleanu de orden <math>\zeta</math> para el control <math>PI^\zeta</math></i>
${}^CF_0\mathcal{D}_t^\alpha$	<i>Derivada fraccionaria en el sentido de Caputo-Fabrizio de orden <math>\alpha</math> para el sistema acoplado motor-manipulador</i>
${}^CF_0\mathcal{D}_t^\lambda$	<i>Derivada fraccionaria en el sentido de Caputo-Fabrizio de orden <math>\lambda</math> para el error de posición del control modo deslizante integral</i>
${}^CF_0\mathcal{D}_t^\mu$	<i>Derivada fraccionaria en el sentido de Caputo-Fabrizio de orden <math>\mu</math> para el control <math>PD^\mu</math></i>
${}^CF_0\mathcal{D}_t^\psi$	<i>Derivada fraccionaria en el sentido de Caputo-Fabrizio de orden <math>\psi</math> para la estimación de los pesos sinápticos del control red neuronal</i>
${}^CF_0\mathcal{D}_t^\sigma$	<i>Derivada fraccionaria en el sentido de Caputo-Fabrizio de orden <math>\sigma</math> para la estimación de <math>\hat{\Theta}</math> del control adaptable basado en pasividad</i>
${}^CF_0\mathcal{D}_t^\vartheta$	<i>Derivada fraccionaria en el sentido de Caputo-Fabrizio de orden <math>\vartheta</math> para el error de posición del control red neuronal</i>
<b>ABC</b>	<i>Atangana-Baleanu-Caputo</i>
<b>CF</b>	<i>Caputo-Fabrizio</i>
<b>CSA</b>	<i>Cuckoo Search Algorithm</i>
<b>C</b>	<i>Caputo</i>
<b>E-L</b>	<i>Euler-Lagrange</i>
<b>GL</b>	<i>Grünwald-Letnikov</i>
<b>MI-PUMA 560</b>	<i>Sistema acoplado entre el robot PUMA 560 y los motores de inducción</i>
<b>MI-SCARA</b>	<i>Sistema acoplado entre el robot SCARA y los motores de inducción</i>
<b>MI-Stanford</b>	<i>Sistema acoplado entre el robot Stanford y los motores de inducción</i>

## ÍNDICE DE TABLAS

---

<b>MI</b>	<i>Motor de Inducción</i>
<b>PUMA</b>	<i>Programmable Universal Manipulation Arm</i>
<b>RL</b>	<i>Riemann-Liouville</i>
<b>RMSE</b>	<i>Root Mean Square Error</i>
<b>SCARA</b>	<i>Selective Compliant Assembly Robot Arm</i>

# Capítulo 1

## Introducción

La primera aproximación del cálculo fraccionario se atribuye originalmente a Guillaume de l'Hôpital y Gottfried Wilhelm Leibniz; fue en una de sus cartas donde ellos discuten sobre el significado y la importancia que generaría si el orden de la derivada fuera de orden no entero, en esta carta Leibniz concluyó que, del resultado obtenido, un día consecuencias útiles resultarán [Ross, 1977].

El cálculo fraccionario hace referencia a la derivación e integración de orden arbitrario. Durante sus inicios esta disciplina era estudiada sólo por matemáticos, sin embargo, en la actualidad se ha desarrollado en aplicaciones desde la perspectiva de la ingeniería, lo anterior debido a que las derivadas e integrales de orden no entero son bastante útiles para la descripción de propiedades de varios materiales, por ejemplo en la viscoelasticidad [Podlubny, 1998, Koeller, 1984, Schiessel *et al.*, 1995].

Centrándonos en el comportamiento de los sistemas dinámicos y el modelado de sistemas, el cálculo fraccionario puede ser una herramienta muy útil, ya que como los sistemas dinámicos se pueden expresar por ecuaciones diferenciales, estas ahora pueden ser ecuaciones diferenciales fraccionarias y tener una representación más general del sistema. Lo anterior se dice porque, el cálculo fraccionario es la generalización del cálculo de orden entero, por lo tanto, cuando se toman valores enteros para la derivación e integración se recupera toda la teoría del cálculo de orden entero (clásico).

En el área del control automático el cálculo fraccionario puede emplearse para estudiar los sistemas de control, controladores, modelado, robustez, estabilidad y observadores, ya que es posible tener una representación con ecuaciones diferenciales de orden arbitrario y así tener una representación más general. No obstante, es importante mencionar que el uso de derivadas fraccionarias en los sistemas dinámicos puede complicar el encontrar una solución analítica. Sin embargo, existen métodos numéricos que pueden ser útiles para encontrar una buena aproximación a la solución.

### 1.1. Estado del arte

El cálculo fraccionario se considera un tema tanto antiguo como nuevo, ya que como se menciono anteriormente, inicia con las ideas de Leibniz y l'Hôpital y se ha ido desarrollando progresivamente hasta la actualidad. El cálculo fraccionario permite representar integrales y derivadas de cualquier orden real positivo; por ejemplo, los circuitos eléctricos es uno de los campos al que se le ha aplicado este enfoque para evaluar la efectividad de los modelos alternativos que se obtienen [Gómez-Aguilar *et al.*,

2016, Gómez-Aguilar *et al.*, 2017]. Por otro lado, se han desarrollado trabajos en el área del control automático aplicando el cálculo fraccionario como herramienta principal; en [Tian-Zeng *et al.*, 2014] presentan un nuevo controlador de orden no entero basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov y proponen un método de control que puede controlar sistemas fraccionarios caóticos e hipercaóticos si los sistemas son conmensurables o inconmensurables.

A continuación se presenta el estado del arte que tiene relación con el tema de este trabajo. Para el objetivo principal que es el control de manipuladores, en [Nikdel *et al.*, 2016] integra el enfoque de control backstepping adaptable en el diseño de un control de orden fraccionario para un sistema dinámico de orden entero. Proporcionan una prueba analítica y una implementación experimental en un manipulador de 2 grados de libertad y se llevan a cabo experimentos extensos, en el cual, se tienen en cuenta las incertidumbres del modelo y las perturbaciones externas y el controlador está desarrollado para atenuar estos efectos. En [Coronel-Escamilla *et al.*, 2018], se describe el modelado y control fraccionario de un brazo robótico de ensamblaje selectivo industrial compatible (SCARA por sus siglas en inglés); el modelo fraccionario se obtuvo utilizando los formalismos de Euler-Lagrange y Hamilton. Cada articulación del manipulador fue impulsada por un motor de inducción. En este trabajo, se formuló el modelo fraccionario de cada motor de inducción, y se muestra el acoplamiento de los motores de inducción con el robot SCARA. Para fines de comparación, el control del robot SCARA fue formulado por PI y PD convencionales y por controladores fraccionarios  $PI^\zeta$  y  $PD^\delta$ . Por lo tanto, cada motor de inducción se controló mediante el uso de controladores PI y  $PI^\zeta$ , y para el control de seguimiento de trayectoria, se diseñaron controladores PD y  $PD^\delta$ . Para ajustar los controladores PI,  $PI^\zeta$ , PD y  $PD^\delta$ , se utilizó el algoritmo de Optimización por Enjambres de Partículas (PSO por sus siglas en inglés); se utilizaron las mismas restricciones para todos los controladores, y se utilizó el índice ITAE como una función de costo para minimizar. Para calcular las derivadas fraccionarias y obtener la solución numérica del sistema, se utilizaron los enfoques de Riemann-Liouville y Grünwald-Letnikov. Los autores de [Ghasemi *et al.*, 2018] proponen un nuevo tipo de control de aprendizaje iterativo (ILC) basado en modo deslizante para sistemas no lineales en presencia de incertidumbres. Un controlador de modo deslizante se combina con ILC de orden fraccionario. Este modo deslizante basado en  $D^\alpha$  y  $PD^\alpha$  tipo ILC se aplica en un robot manipulador no lineal. La convergencia del método propuesto se investiga cuando también se prueba la estabilidad. En este método, la señal de control en cualquier iteración se genera en dos partes. La primera sección proviene del controlador de modo deslizante, mientras que la segunda parte sale del ILC de orden fraccionario. En [Mohammed *et al.*, 2016] se propuso un controlador tipo PID difuso de orden fraccionario para el seguimiento de la trayectoria de las tres primeras articulaciones del brazo robótico PUMA 560, el desempeño del sistema se comparó con el control PID difuso convencional, el control PID de orden fraccionario y otro convencional. Los parámetros de ajuste fueron optimizados utilizando algoritmos genéticos. Los autores de [Bendary *et al.*, 2015] diseñan dos controladores de seguimiento de trayectoria para el robot PUMA 560. El primero es un controlador de PID fraccionario y el segundo un PID clásico, ambos sintonizados mediante el algoritmo genético, y son comparados. Se lleva a cabo una simulación para las primeras tres articulaciones del brazo robótico que tiene como objetivo seguir una trayectoria polinómica de quinto orden con errores mínimos y un buen rechazo de perturbaciones. Los resultados de la simulación muestran que el uso del PID fraccionario proporciona un mejor error en estado estable y menos error RMS que el PID clásico.

Dado que se trabajará con la formulación de Euler-Lagrange utilizando el enfoque fraccionario se hizo una revisión del estado del arte de esto. En [Coronel-Escamilla *et al.*, 2016], se muestran representa-

ciones alternativas al cálculo tradicional de las ecuaciones de Euler-Lagrange, en las representaciones alternativas estas ecuaciones contienen operadores fraccionarios. Se considera el lagrangiano de un oscilador Pais-Uhlenbeck donde los operadores fraccionarios tienen un kernel regular. El formalismo de Euler-Lagrange se utilizó para obtener el modelo dinámico basado en el operador Caputo-Fabrizio y el nuevo operador fraccionario basado en la función Mittag-Leffler. Las simulaciones mostraron la efectividad de esta representación para diferentes valores del orden de la derivada. En [Agrawal, 2002], se presenta la generalización de sistemas mediante el uso de cálculo de variaciones, los sistemas son de orden no entero, se concluye que las ecuaciones Euler-Lagrange se pueden presentar para problemas con y sin restricciones fraccionarias. En [Baleanu y Trujillo, 2008], se obtiene la solución exacta para una clase de ecuaciones fraccionarias de Euler-Lagrange, se plantea una solución nueva y general, como una solución en serie del oscilador fraccionario con derivadas de Liouville-Caputo, en este trabajo, al utilizar el enfoque operativo se obtuvo una solución exacta de una ecuación de Euler-Lagrange particular. En [Atanacković *et al.*, 2008], se generaliza el problema de variación fraccionaria al permitir la posibilidad de que el límite inferior en la derivada fraccionaria no coincida con el límite inferior de la integral que se minimiza. Además, para el caso estándar cuando estos dos límites coinciden, se deriva una nueva forma de ecuaciones de Euler-Lagrange. Utilizando aproximaciones para derivadas fraccionarias en el lagrangiano y se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange que se aproximan a las ecuaciones iniciales de Euler-Lagrange.

Ahora para los motores de inducción, en [Saleem *et al.*, 2018] se diseña un controlador PID fraccionario. El accionamiento del motor se modela utilizando un modelo autorregresivo con entrada exógena (ARX) cuyos parámetros se identifican experimentalmente utilizando datos de entrada/salida reales. Luego se usa un algoritmo genético para encontrar los parámetros del controlador fraccionario. Para garantizar la robustez del controlador frente a variaciones de carga, se adopta la optimización minimax. Para validar los resultados, el controlador propuesto se aplica a un motor utilizando un simulador. Los resultados experimentales muestran que el controlador propuesto mejora significativamente la respuesta de tiempo del motor de inducción en comparación con un controlador PID convencional. También muestra que es robusto contra las variaciones de carga del motor. Los autores de [Bendjedja *et al.*, 2014] proporcionan un sistema de control robusto para un motor de inducción utilizado en vehículos eléctricos. Se diseñó un controlador PID fraccionario basado en un algoritmo evolutivo de optimización de objetivos múltiples, los resultados de la simulación mostraron la solidez y efectividad de los enfoques propuestos. En [Hsu, 2019], se utiliza un controlador PID fraccionario para estabilizar el efecto de la corriente en un motor de inducción, este controlador está construido en función de los resultados de las mediciones en los parámetros de diseño del motor. Al usar la regla de margen de fase para diseñar y determinar parámetros adecuados, se evalúan varios órdenes de las derivadas en sus rangos razonables para obtener un controlador óptimo. Esto mejora el rendimiento del motor en términos de corriente armónica, vibración y ruido, más de lo que puede lograr un controlador PID convencional (5-10%). En [Mehmood y Kavasseri, 2015], se propone un control de orden no entero para ser robusto ante las variaciones de parámetros. El rendimiento del controlador propuesto se compara con un controlador PI sintonizado cuando los parámetros críticos del motor están sujetos a variaciones paramétricas sobre sus valores nominales. Se llevan a cabo simulaciones para evaluar el rendimiento del control.

Para la última parte, encontrar una solución numérica a las ecuaciones diferenciales de orden no entero, resulta una tarea complicada. Por tal motivo, se dio a la tarea investigar esquemas numéricos que ayuden a resolver dichas ecuaciones, en [Toufik y Atangana, 2017] se ha desarrollado un nuevo

esquema numérico para derivadas fraccionarias con kernel no local y no singular, el cual, se aplicó para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales y no lineales. La comparación de soluciones aproximadas y exactas deja sin duda la creencia de que el nuevo esquema numérico es muy eficiente y converge hacia una solución exacta muy rápidamente. Los autores de [Baleanu y Fernández, 2018], establecen una nueva fórmula para la derivada fraccionaria con el kernel Mittag-Leffler, en forma de una serie de integrales fraccionarias de Riemann-Liouville, que resalta más claramente la no localidad de las derivadas fraccionarias y es más fácil de manejar para ciertos propósitos computacionales. También se demuestran resultados de existencia y unicidad para ciertas familias de ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionarias lineales y no lineales definidas usando esta derivada fraccionaria. Consideran la posibilidad de una propiedad de semigrupo para estas derivadas, y establecen extensiones de la regla del producto y la regla de la cadena, con una aplicación a la mecánica fraccionaria.

## 1.2. Planteamiento del problema

Atender los problemas en el modelado del robot SCARA, Stanford y PUMA 560 mediante la formulación de Euler-Lagrange (E-L) aplicando derivadas fraccionarias. Se utilizará el cálculo fraccionario para encontrar una descripción alternativa de los sistemas antes mencionados y se demostrará que los modelos obtenidos utilizando este enfoque generalizan a los modelos clásicos. También, se atenderá el problema de seguimiento de trayectoria para los robots manipuladores usando controladores fraccionarios y se atacará el problema de la sintonización de estos controladores así como mejorar el desempeño del sistema usando controladores fraccionarios.

## 1.3. Objetivo general

Obtener el modelo dinámico fraccionario de los robots manipuladores SCARA, Stanford y PUMA 560 mediante la formulación de E-L considerando las derivadas fraccionarias de Caputo-Fabrizio (CF) y Atangana-Baleanu-Caputo (ABC) así como, diseñar y aplicar control de orden fraccionario.

## 1.4. Objetivos específicos

- Obtener el modelo fraccionario del motor de inducción (MI).
- Realizar el acoplamiento entre los MI's y cada manipulador.
- Diseñar controladores de orden no entero.
- Sintonizar los controladores mediante la técnica de optimización del Algoritmo de Búsqueda de Cuckoo (CSA por sus siglas en inglés).
- Efectuar una comparación del desempeño de los controladores de orden fraccionario con su contraparte de orden entero.

## 1.5. Metas

- Realizar un análisis en lazo abierto de los robots manipuladores con las derivadas CF y ABC para determinar cuál de estas aplicar a los modelos acoplados con los motores.

- Aplicar técnicas numéricas y algoritmos de simulación para la implementación de los controladores y de los modelos dinámicos, ambos de orden fraccionario.
- Diseñar trayectorias mediante la cinemática inversa de los robots manipuladores.
- Añadir perturbaciones a los sistemas para determinar la robustez de los controladores fraccionarios.

## 1.6. Justificación

Hoy en día, la mayoría de las empresas del sector industrial (farmacéutica, automotriz, lácteos, etc.), hacen uso de los robots manipuladores para la elaboración de sus productos, su deficiencia principal es el control de dichos manipuladores, ya que, estos podrían causar daños materiales, accidentes y en casos extremos, pérdidas humanas.

En este sentido, en este trabajo se aborda el problema de obtener el modelo dinámico de los robots manipuladores antes mencionados mediante la formulación de E-L con el enfoque fraccionario. Se utilizará el cálculo fraccionario para encontrar una descripción alternativa de los sistemas a estudiar.

Se atenderá el problema de seguimiento de trayectoria para los robots SCARA, Stanford y PUMA 560 usando controladores fraccionarios para que los manipuladores no tengan un déficit en su desempeño y se atacará el problema de la sintonización de estos controladores.

## 1.7. Método

- Obtener el modelo dinámico de cada uno de los robots manipuladores propuestos mediante la formulación de E-L, para poder aplicar la derivada fraccionaria de CF y ABC, y finalmente obtener el modelo dinámico fraccionario de los robots manipuladores.
- Del modelo matemático del MI, aplicar la derivada propuesta para obtener el modelo fraccionario. Ya teniendo ambos modelos (robot manipulador y MI) se acoplarán para tener un único modelo fraccionario.
- Atender el problema de seguimiento de trayectoria de los robots manipuladores desarrollando controladores de orden fraccionario para los sistemas acoplados.
- Efectuar la sintonización de los controladores mediante el uso de CSA.
- Por último, efectuar una comparación del desempeño de los controladores de orden fraccionario con su contraparte de orden entero mediante la raíz del error cuadrático medio (RMSE por sus siglas en inglés).

## 1.8. Hipótesis

Con base a los resultados mostrados en [Nikdel *et al.*, 2016, Coronel-Escamilla *et al.*, 2018, Ghasemi *et al.*, 2018, Mohammed *et al.*, 2016, Bendary *et al.*, 2015], es posible garantizar mediante simulación, que un control del tipo fraccionario tiene mejor desempeño que un controlador clásico, incluso ante perturbaciones externas.

## 1.9. Alcance

Este trabajo sólo se llevará a cabo mediante simulaciones, mismas que serán validadas al compararlas con los resultados reportados en la literatura.

## 1.10. Aportaciones

Como ya se mencionó, el uso de manipuladores en la industria es inevitable y son necesarios para el crecimiento de las empresas. Sin embargo, un mal control de dichos robots pueden causar pérdidas de varias índoles. Por lo tanto, las principales aportaciones son: la obtención de modelos de orden fraccionario y el diseño de controladores, también de orden fraccionario. De los modelos se puede establecer que estos permiten representar o describir la dinámica de mejor manera que su contraparte de orden entero. De los controladores se puede establecer que mejoran el desempeño, por ejemplo, en tareas de seguimiento de trayectorias.

## 1.11. Organización del documento

En los siguientes capítulos se presenta el desarrollo de la tesis y los resultados obtenidos. A continuación se describe la estructura en que se organiza el presente trabajo.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera, en el capítulo 2 se presenta una introducción al cálculo fraccionario, las definiciones de integrales y derivadas fraccionarias, así como las funciones más utilizadas en cálculo fraccionario. Por último, se presentan los métodos numéricos para la solución numérica de las integrales y derivadas de orden no entero.

En el capítulo 3 se presenta el modelado fraccionario de los robot manipuladores propuestos usando el formulismo Euler-Lagrange, se muestran simulaciones en lazo abierto para analizar el comportamiento de las articulaciones de los robots y así determinar que derivada fraccionaria se aplicará al sistema en lazo cerrado. También se presenta el modelo fraccionario de un motor de inducción que sirve como actuador en cada articulación de los robots; se presenta el desarrollo del acoplamiento de los casos de estudio con el motor de inducción, y se muestran el tipo de perturbaciones que serán añadidas a los sistemas.

El capítulo 4 está dedicado al desarrollo de diferentes controladores de orden fraccionario para el seguimiento de trayectoria de los robots SCARA, Stanford y PUMA 560. Los tipos de controladores diseñados para dicha tarea son: un PD, adaptable basado en pasividad, modo deslizante integral y red neuronal. Para el caso del motor de inducción se aplica un controlador PI.

Por último, en el capítulo 5 se presentan las tablas de los parámetros utilizados en las trayectorias deseadas, se muestran las tablas de las ganancias para los controladores clásicos, así como, los ordenes y ganancias de los controladores fraccionarios. También, se presentan las tablas de comparación del desempeño de los controladores antes mencionados. Para el caso de los manipuladores se muestran las gráficas del seguimiento de trayectoria de sus articulaciones para los casos sin perturbación y con perturbación. En el caso del motor de inducción se grafican la velocidad angular, par de carga y flujo magnético, esto con el fin de corroborar que dichos parámetros no sobrepasen su valor nominal y operen sin esfuerzo.

## Capítulo 2

# Cálculo Fraccionario

El cálculo fraccionario implica integrales y derivadas de orden no entero, es la generalización del cálculo ordinario y durante los últimos años se ha convertido en una herramienta ampliamente utilizada para un mejor modelado y control de procesos en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería [Gómez-Aguilar *et al.*, 2014].

### 2.1. Funciones especiales

En la actual sección se presentan un par de funciones especiales que son de importante uso en la teoría de diferenciación de orden fraccionario.

#### *Función Gamma de Euler*

La función Gamma de Euler es la generalización de los factoriales y se define de la siguiente manera

##### **Definición 2.1.1**

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad (2.1)$$

cuando  $n > 0$  la integral converge [Miller y Ross, 1993].

#### *Función de Mittag-Leffler*

La función de Mittag-Leffler es muy importante y de gran utilidad en el cálculo fraccionario, así como, las funciones exponenciales en el cálculo clásico. Esta función está definida como [Haubold *et al.*, 2011]

##### **Definición 2.1.2**

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\beta) > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.2)$$

Dicha función es la generalización de la función exponencial; si se toma el caso particular donde  $\alpha = \beta = 1$ , entonces se obtiene la función exponencial expresada en serie de potencias.

## 2.2. Derivadas e integrales

A continuación se presentan las definiciones de las derivadas e integrales de orden no entero que se utilizaron para este trabajo.

### Derivada Riemann-Liouville

Para  $\alpha > 0$ , la derivada de Riemann-Liouville por izquierda y derecha de orden  $\alpha$ , denotada por  ${}^RL\mathcal{D}_t^\alpha$  y  ${}^RL\mathcal{D}_b^\alpha$  respectivamente, están denotadas por [Podlubny, 1998]

#### Definición 2.2.1

$${}^RL\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\theta)}{(t-\theta)^{\alpha-n+1}} d\theta, \quad (2.3)$$

$${}^RL\mathcal{D}_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d^n}{dt^n} \right) \int_t^b \frac{f(\theta)}{(\theta-t)^{\alpha-n+1}} d\theta, \quad (2.4)$$

donde  $n$  está definido en el intervalo  $n-1 < \alpha \leq n$ .

### Integral Riemann-Liouville

La integral fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville por izquierda y derecha, están dadas por la siguiente definición [Herzallah, 2014]

#### Definición 2.2.2

$${}^RL\mathcal{I}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\theta)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta, \quad (2.5)$$

$${}^RL\mathcal{I}_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\theta-t)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta, \quad (2.6)$$

donde  $\alpha > 0$  es el orden de la derivada y  $\Gamma$  es la función gamma, ecuación(2.1).

### Derivada Grünwald-Letnikov

Para una función  $f(t)$ , su definición es la siguiente [Podlubny, 1998]

#### Definición 2.2.3

$${}^GL\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=a}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh), \quad (2.7)$$

donde  $k$  es el incremento del tiempo, esta definición esta formulada para cuando  $\alpha \in \mathbb{R}$ . El enfoque de Grünwald-Letnikov es comúnmente utilizado para soluciones numéricas de derivadas fraccionarias.

### Integral Grünwald-Letnikov

La integral GL de orden no entero  $\alpha$  es [Rabah y Ladaci, 2016, Garrappa, 2016]

#### Definición 2.2.4

$${}^GL\mathcal{I}_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=a}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^k \binom{-\alpha}{k} f(t-kh). \quad (2.8)$$

## Derivada Caputo

La derivada fraccionaria en el sentido de Caputo es la más utilizada en el campo de la ingeniería, esto debido a que las condiciones iniciales pueden ser enteras, es decir, el valor de la función en sí y sus derivadas de orden entero tienen que ser especificados,  $x(0), x'(0), \dots, x^{m-1}(0)$ . Entonces, teniendo en cuenta lo anterior los datos tienen un significado físico y se pueden medir, por ejemplo, si  $x(t)$  indica desplazamiento, entonces  $x'(t)$  representa velocidad y  $x''(0)$  expresa aceleración [Podlubny, 1998]. El operador  ${}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha$  está definido como

### Definición 2.2.5

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{d^n}{d\theta^n} f(\theta) \frac{1}{(t-\theta)^{\alpha-n+1}} d\theta, \quad (2.9)$$

donde  $f^{(n)}$  es la derivada de  $n$ -ésimo orden entero de  $f(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots \in N$ .

## Derivada Caputo-Fabrizio

La derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio es no local, capaz de describir heterogeneidades de materiales y estructuras con diferentes escalas, que las teorías locales clásicas no pueden describir bien. El operador fraccionario  ${}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha$  con orden ( $\alpha > 0$ ) se define de la siguiente manera [Caputo y Fabrizio, 2015]

### Definición 2.2.6

$${}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} \int_0^t \frac{d^n}{d\theta^n} f(\theta) \exp \left[ -\frac{\alpha(t-\theta)}{n-\alpha} \right] d\theta, \quad n-1 < \alpha < n, \quad (2.10)$$

donde  $M(\alpha)$  es una función de normalización, tal que,  $M(0) = M(1) = 1$ .

## Derivada Atangana-Baleanu-Caputo

La derivada fraccionaria de Atangana-Baleanu-Caputo proporciona una excelente descripción, debido a su memoria Mittag-Leffler, capaz de distinguir entre sistemas dinámicos que tienen lugar a diferentes escalas sin estado estable. La función generalizada de Mittag-Leffler es la extensión de la función exponencial. El kernel Mittag-Leffler es una función de memoria conveniente y esencial para la descripción del comportamiento a largo plazo [Atangana y Gómez-Aguilar, 2018]. La definición de la derivada fraccionaria de Atangana-Baleanu en sentido de Caputo con kernel no local se da como [Baleanu et al., 2012]

### Definición 2.2.7

$${}_0^{ABC} \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} \int_0^t \frac{d}{d\theta} f(\theta) E_\beta \left[ -\frac{\alpha}{1-\alpha} (t-\theta)^\alpha \right] d\theta, \quad (2.11)$$

donde  $E_\beta$  es la función de Mittag-Leffler de un parámetro, cuando  $\beta = 1$ , y esta definida en la ecuación (2.2). Podemos observar fácilmente que cuando  $\alpha = 1$ , obtenemos la derivada clásica de primer orden, mientras que si  $\alpha = 0$ , recuperamos la función original de la ecuación.

## Integral Atangana-Baleanu

La integral fraccionaria de Atangana-Baleanu puede definirse en términos de la integral de Riemann-Liouville de la siguiente forma [Baleanu *et al.*, 2012]

**Definición 2.2.8**

$${}_a^{AB}I_t^\alpha f(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)}{}_a^{RL}\mathcal{I}_t^\alpha f(t). \quad (2.12)$$

## 2.3. Métodos numéricos

En esta sección se presenta los esquemas numéricos para la solución de las ecuaciones diferenciales e integrales que se utilizan en este trabajo.

### *Esquema numérico para la solución de la integral de Riemann-Liouville*

Una aproximación basada en la interpolación lineal por partes para obtener la integral de Riemann-Liouville se ha desarrollado en [Baleanu *et al.*, 2012]. Esta aproximación se calcula de la siguiente manera

$${}_0^{RL}\mathcal{I}_t^\alpha f(t) \approx h^\alpha \sum_{j=0}^k a_{j,k} f(t_j), \quad (2.13)$$

donde,

$$a_{j,k} = \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \times \begin{cases} ((k-1)^{1+\alpha} - (k-\alpha-1)k^\alpha), & \text{si } j=0 \\ ((k-j+1)^{1+\alpha} + (k-j-1)^{1+\alpha} - 2(k-j)^{1+\alpha}), & \text{si } 1 \leq j \leq k-1. \\ 1, & \text{si } j=k \end{cases} \quad (2.14)$$

### *Esquema numérico para la solución de la derivada de Caputo-Fabrizio*

Consideramos la siguiente ecuación diferencial fraccionaria

$${}_0^{CF}\mathcal{D}_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad (2.15)$$

usando el teorema fundamental del cálculo, convertimos lo anterior a

$$y(t) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)}f(t, y(t)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad (2.16)$$

de este modo

$$y(t_{n+1}) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)}f(t_n, y(t_n)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt, \quad (2.17)$$

y

$$y(t_n) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)}f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^{t_n} f(t, y(t))dt. \quad (2.18)$$

Al sustituir la ecuación (2.18) en (2.17) se obtiene

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt, \quad (2.19)$$

donde,

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{f(t_n, y_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} dt \\ &= \frac{3h}{2} f(t_n, y_n) - \frac{h}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por lo tanto,

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})] + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \left[ \frac{3h}{2} f(t_n, y_n) - \frac{h}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \right], \quad (2.21)$$

lo que implica que

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \left( \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3\alpha h}{2M(\alpha)} \right) f(t_n, y_n) - \left( \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} \right) f(t_{n-1}, y_{n-1}), \quad (2.22)$$

de manera que, la solución puede obtenerse por la siguiente expresión [Atangana y Owolabi, 2018]

$$y_{n+1} = y_n + \left( \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3\alpha h}{2M(\alpha)} \right) f(t_n, y_n) - \left( \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} \right) f(t_{n-1}, y_{n-1}). \quad (2.23)$$

### ***Esquema numérico para la solución de la derivada de Atangana-Baleanu-Caputo***

Un nuevo esquema numérico para ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales con kernel no local y no singular, se ha presentado en [Toufik y Atangana, 2017]. Para hacer esto, se considera la siguiente ecuación ordinaria fraccionaria no lineal,

$${}_0^{ABC} \mathcal{D}_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad (2.24)$$

aplicando el teorema fundamental del cálculo fraccionario, la ecuación anterior se convierte a una ecuación integral fraccionaria

$$y(t) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t, y(t)) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)M(\alpha)} \int_0^t f(\tau, y(\tau)) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad (2.25)$$

$M(\alpha)$  es una función de normalización, la cual se asume que,  $M(0) = M(1) = 1$ . En un punto dado  $t = t_{n+1}$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$  la ecuación (2.25) se reformula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(0) &= \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t_n, y(t_n)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau)) (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \\ &= \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t_n, y(t_n)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau)) (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} d\tau. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dentro del intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ , la función  $f(\tau, y(\tau))$ , utilizando la interpolación polinómica de Lagrange de dos pasos, puede aproximarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P_k(\tau) &= \frac{\tau - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} f(t_k, y(t_k)) - \frac{\tau - t_k}{t_k - t_{k-1}} f(t_{k-1}, y(t_{k-1})), \\ &= \frac{f(t_k, y(t_k))}{h} (\tau - t_{k-1}) - \frac{f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))}{h} (\tau - t_k), \\ &\simeq \frac{f(t_k, y_k)}{h} (\tau - t_{k-1}) - \frac{f(t_{k-1}, y_{k-1})}{h} (\tau - t_k). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Es posible desarrollar el siguiente procedimiento utilizando la aproximación previa,

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_0 + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t_n, y(t_n)) \\
 &+ \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^n \left( \frac{f(t_k, y_k)}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\tau - t_{k-1})(t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right. \\
 &\left. - \frac{f(t_{k-1}, y_{k-1})}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\tau - t_k)(t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right). \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

Por simplicidad,

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha,k,1} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\tau - t_{k-1})(t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \\
 &= h^{\alpha+1} \frac{(n+1-k)^\alpha (n-k+2+\alpha) - (n-k)^\alpha (n-k+2+2\alpha)}{\alpha(\alpha+1)}, \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha,k,2} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\tau - t_k)(t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \\
 &= h^{\alpha+1} \frac{(n+1-k)^{\alpha+1} - (n-k)^\alpha (n-k+1+\alpha)}{\alpha(\alpha+1)}, \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

la cual se reescribe como

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_0 + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t_n, y(t_n)) \\
 &+ \frac{\alpha}{M(\alpha)} \sum_{k=0}^n \left( \frac{h^\alpha f(t_k, y_k)}{\Gamma(\alpha+2)} ((n+1-k)^\alpha (n-k+2+\alpha) - (n-k)^\alpha (n-k+2+2\alpha)) \right. \\
 &\left. - \frac{h^\alpha f(t_{k-1}, y_{k-1})}{\Gamma(\alpha+2)} ((n+1-k)^{\alpha+1} - (n-k)^\alpha (n-k+1+\alpha)) \right). \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

### ***Esquema numérico para la solución de la integral de Atangana-Baleanu***

Para la solución de dicha integral, reemplazamos la ecuación (2.13) en (2.12)

$$y_{n+1} = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha h^\alpha}{M(\alpha)} \sum_{j=0}^k a_{j,k} f(t_j), \tag{2.32}$$

donde,

$$a_{j,k} = \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \times \begin{cases} ((k-1)^{1+\alpha} - (k-\alpha-1)k^\alpha), & \text{si } j=0 \\ ((k-j+1)^{1+\alpha} + (k-j-1)^{1+\alpha} - 2(k-j)^{1+\alpha}), & \text{si } 1 \leq j \leq k-1. \\ 1, & \text{si } j=k \end{cases} \tag{2.33}$$

## Capítulo 3

# Modelado

### 3.1. Introducción

En este capítulo se aborda el modelado de los robots manipuladores SCARA, Stanford y PUMA 560 con el formulismo de Euler-Lagrange, el cual, se basa en definir la energía total de sistema, [Kelly y Santibáñez, 2003, Spong y Vidyasagar, 2008, Lewis *et al.*, 2003]. Tales manipuladores son actuados por motores de inducción, cuyas ventajas principales son, tener un bajo costo de fabricación y el generar un par de salida elevado [Guerrero-Ramirez y Tang, 2001]. Por lo tanto, en este trabajo se utilizan los motores de inducción para el accionamiento de cada articulación de los casos de estudio. Se presenta el acoplamiento de cada motor con cada uno de los robots. Por último, se muestran las simulaciones en lazo abierto para determinar, cual de las derivadas fraccionarias propuestas se utilizará en el modelo.

### 3.2. Modelado fraccionario del robot SCARA

En 1978 fue diseñado y creado el primer robot SCARA como un prototipo revolucionario por el profesor Hiroshi Makino en el centro de investigación de la Universidad Yamanashi en Japón. El SCARA de 4 grados de libertad fue diseñado tan elaboradamente como ningún otro brazo robótico en esa época. Su sencillez era asombrosa ya que con pocos movimientos comparado con otros robots, podría lograr más, con mayor velocidad y precisión. Pueden variar en tamaño y forma los robots manipuladores SCARA, pero todos estos robots consisten de 4 ejes. Estos robots sobresalen en la labor de agarrar y colocar con su destreza única para tomar elementos industriales de un lugar y colocarlos en otro con delicadeza, rapidez y precisión exacta [Westerlund, 2000].

Se considera el robot SCARA que se muestra en la Figura 3.1, el modelo se obtiene a partir del formulismo de Euler-Lagrange con enfoque fraccionario. Se consideran cuatro coordenadas generalizadas;  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  que corresponden a las articulaciones rotacionales y  $q_4$  que representa la posición traslacional,  $l_{c_1}$  es la distancia del centro de masas de la primera articulación,  $l_{c_2}$  es la distancia del centro de masas de la segunda articulación y  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$  son las masas de cada eslabón.

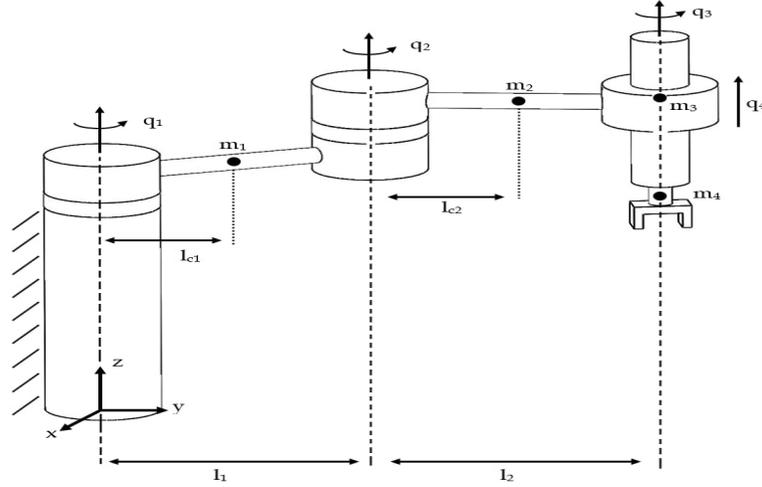


Figura 3.1: Robot SCARA

Para obtener el modelo, se considera que el robot se encuentra en el plano de trabajo  $xy$ . Teniendo en cuenta las coordenadas generalizadas antes mencionadas, se obtiene la energía cinética de todo el sistema  $K$  y la energía potencial  $U$ , a partir de estas energías se obtiene el Lagrangiano del sistema, que es la diferencia de la energía cinética y la energía potencial  $\mathcal{L} = K - U$ . Por último, se desarrolla la ecuación de E-L, la cual está dada por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i, \quad (3.1)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\tau_i$  es el par de entrada, y  $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}$  es la ecuación de disipación de Rayleigh, la cual, no se toma en cuenta debido que el término de disipación se menciona en la sección 3.7. En la ecuación (3.2) se establece la energía cinética para cada uno de los eslabones, el primer término representa la energía cinética traslacional y el segundo a la rotacional,

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} I_i \dot{q}_i^2, \quad (3.2)$$

donde  $m$  es la masa,  $v$  la velocidad e  $I$  la inercia. Para la energía potencial de cada eslabón se obtiene de la siguiente forma

$$U_i = m g_i h_i, \quad (3.3)$$

donde  $g$  es la gravedad y  $h$  es la altura.

Primero se obtiene la energía cinética total como

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4. \quad (3.4)$$

Para  $K_1$  se establece la energía cinética rotacional y traslacional,

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2, \quad (3.5)$$

se requiere la velocidad traslacional definida por

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2, \quad (3.6)$$

donde las posiciones  $x_1$  y  $y_1$  se obtienen como

$$x_1 = l_{c_1} \cos(q_1), \quad (3.7)$$

$$y_1 = l_{c_1} \sin(q_1), \quad (3.8)$$

se derivan cada una y se elevan al cuadrado para obtener  $v_1^2$

$$v_1^2 = l_{c_1}^2 \dot{q}_1^2, \quad (3.9)$$

ahora se sustituye la ecuación (3.9) en la ecuación (3.5) para obtener la energía cinética del eslabón 1

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 l_{c_1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2. \quad (3.10)$$

Para el segundo eslabón se calcula la energía cinética rotacional y traslacional como

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \quad (3.11)$$

donde,

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2, \quad (3.12)$$

las posiciones  $x_2$  y  $y_2$  se obtienen como

$$x_2 = l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2), \quad (3.13)$$

$$y_2 = l_1 \sin(q_1) + l_{c_2} \sin(q_1 + q_2), \quad (3.14)$$

se derivan las ecuaciones (3.13) y (3.14) con respecto al tiempo y se elevan al cuadrado para obtener  $v_2^2$

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c_2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 l_{c_2} \cos(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_1, \quad (3.15)$$

la energía cinética del segundo eslabón está dada por

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c_2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 l_{c_2} \cos(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_1] + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2. \quad (3.16)$$

Para el tercer eslabón la energía cinética está dada por

$$K_3 = \frac{1}{2} (m_3 + m_4) v_3^2 + \frac{1}{2} (I_3 + I_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2, \quad (3.17)$$

donde,

$$v_3^2 = \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2, \quad (3.18)$$

se obtiene la velocidad de traslación del tercer eslabón encontrando los componentes,  $x_3$  y  $y_3$

$$x_3 = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2), \quad (3.19)$$

$$y_3 = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2). \quad (3.20)$$

Se derivan las ecuaciones (3.19) y (3.20) con respecto al tiempo y después se elevan al cuadrado, luego se sustituyen en (3.17). Entonces la energía cinética del tercer eslabón es la siguiente

$$K_3 = \frac{1}{2} (m_3 + m_4) [l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_1] + \frac{1}{2} (I_3 + I_4) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2. \quad (3.21)$$

Por último, la energía cinética para el cuarto eslabón está dada por

$$K_4 = \frac{1}{2}m_4v_4^2 = \frac{1}{2}m_4\dot{q}_4^2. \quad (3.22)$$

Ahora se obtiene la energía potencial del sistema como

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4. \quad (3.23)$$

Debido a que el robot opera en el plano  $xy$ , en las primeras tres coordenadas generalizadas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  no actúa la energía potencial, por lo tanto se considera  $U_1 = U_2 = U_3 = 0$  y la ecuación (3.23) toma la siguiente forma

$$U = U_4 = -m_4gq_4. \quad (3.24)$$

Para obtener el Lagrangiano, utilizamos las ecuaciones (3.4) y (3.24)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}m_1l_{c_1}^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 \\ & + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{q}_1^2 + l_{c_2}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1l_{c_2}\cos(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_1] + \frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ & + \frac{1}{2}(m_3 + m_4)[l_1^2\dot{q}_1^2 + l_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1l_2\cos(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_1] + \frac{1}{2}(I_3 + I_4)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\ & + \frac{1}{2}m_4\dot{q}_4^2 + m_4gq_4. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ahora aplicamos la ecuación (3.1) para cada una de las coordenadas generalizadas para obtener el modelo en espacio de estado, representado de la siguiente forma

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.26)$$

donde  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia y es definida positiva,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Coriolis,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el vector de fuerza de gravedad y  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el vector de pares de entrada.

Ahora aplicando el enfoque fraccionario al modelo obtenido, este queda de la siguiente manera

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})_0 \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.27)$$

donde  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$ , y las matrices  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}$  y el vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ , están dados por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

donde,

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + m_1l_{c_1}^2 + m_2l_1^2 + m_2(l_{c_2}^2 + 2l_1l_{c_2}\cos(q_2)) + (m_3 + m_4)(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos(q_2)), \\ m_{12} &= I_2 + I_3 + I_4 + m_2(l_{c_2}^2 + l_1l_{c_2}\cos(q_2)) + (m_3 + m_4)(l_2^2 + l_1l_2\cos(q_2)), \\ m_{13} &= m_{23} = m_{33} = I_3 + I_4, \\ m_{14} &= m_{24} = m_{34} = 0, \\ m_{22} &= I_2 + I_3 + I_4 + m_2l_{c_2}^2 + (m_3 + m_4)l_2^2, \\ m_{44} &= m_4, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

donde,

$$\begin{aligned} c_{11} &= -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) {}_0\mathcal{D}_t^\alpha q_2 - (m_3 + m_4) l_1 l_2 \sin(q_2) {}_0\mathcal{D}_t^\alpha q_2, \\ c_{12} &= -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) ({}_0\mathcal{D}_t^\alpha q_1 + {}_0\mathcal{D}_t^\alpha q_2) - (m_3 + m_4) l_1 l_2 \sin(q_2) ({}_0\mathcal{D}_t^\alpha q_1 + {}_0\mathcal{D}_t^\alpha q_2), \\ c_{21} &= m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) {}_0\mathcal{D}_t^\alpha q_1 + (m_3 + m_4) l_1 l_2 \sin(q_2) {}_0\mathcal{D}_t^\alpha q_1, \\ c_{13} = c_{14} = c_{22} = c_{23} = c_{24} = c_{31} = c_{32} = c_{33} = c_{34} = c_{41} = c_{42} = c_{43} = c_{44} &= 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_4 g \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

### 3.2.1. Simulación en lazo abierto

A continuación se presentan los resultados de la simulación del modelo fraccionario utilizando las derivadas CF y ABC, este análisis se realiza para determinar que derivada fraccionaria se utilizará para el modelo acoplado a los motores que se presenta en la sección 3.6.

Los parámetros del manipulador utilizados se presentan en la Tabla 3.1 [Coronel-Escamilla *et al.*, 2018]. Los pares aplicados fueron  $\tau_1 = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\tau_2 = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\tau_3 = 8 \text{ N}\cdot\text{m}$  y  $\tau_4 = 29.43 \text{ N}\cdot\text{m}$ , los cuales se eligieron de manera arbitraria. Las Figuras 3.2 y 3.3 muestran las posiciones de las articulaciones del robot con diferentes derivadas y órdenes. Se utilizaron los esquemas numéricos descritos en la sección 2.3, con un paso de integración de  $1 \times 10^3$  y tiempo de computo de 5 minutos para la derivada fraccionaria CF y 45 minutos para la derivada fraccionaria ABC.

Parámetro	Valor	Unidades	Parámetro	Valor	Unidades
$m_1$	15	kg	$I_1$	$(0.02087)m_1$	kg.m <sup>2</sup>
$m_2$	12	kg	$I_2$	$(0.08)m_2$	kg.m <sup>2</sup>
$m_3$	3	kg	$I_3$	$(0.05)m_3$	kg.m <sup>2</sup>
$m_4$	3	kg	$I_4$	$(0.02)m_4$	kg.m <sup>2</sup>
$l_1$	0.50	m	$l_{c_1}$	0.25	m
$l_2$	0.40	m	$l_{c_2}$	0.20	m

Tabla 3.1: Parámetros del robot SCARA.

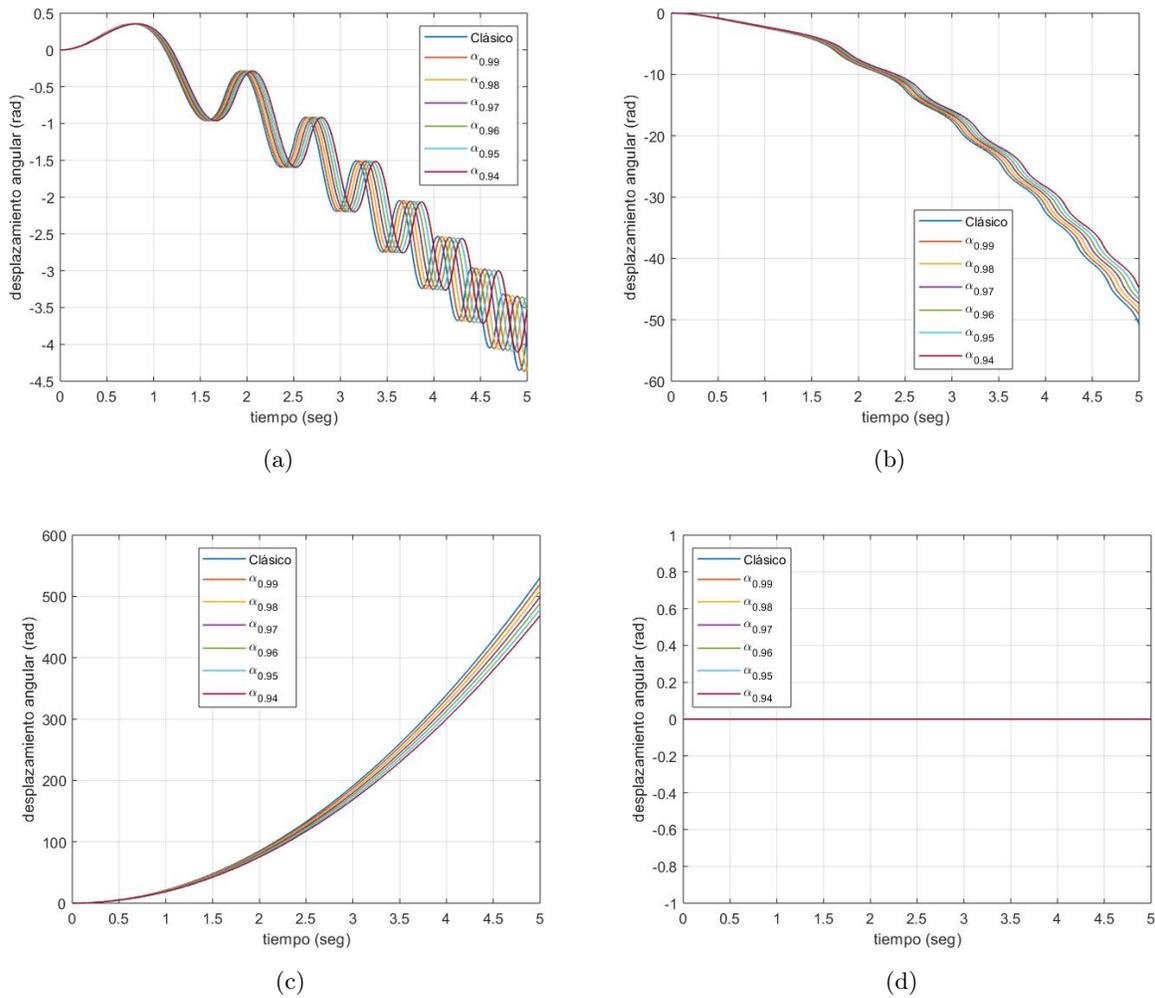
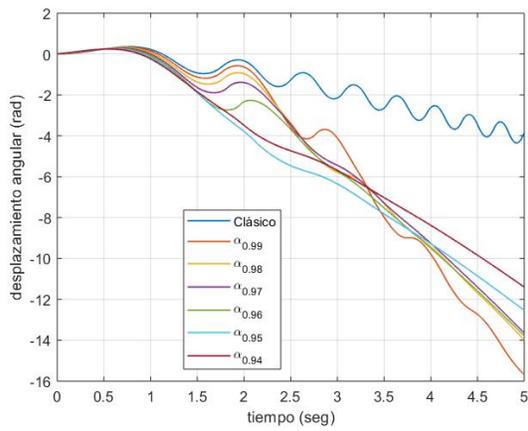
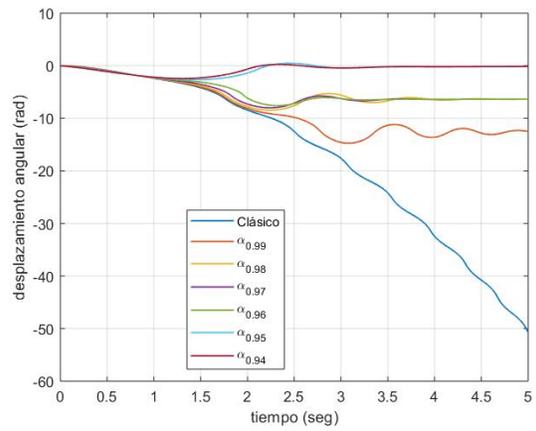


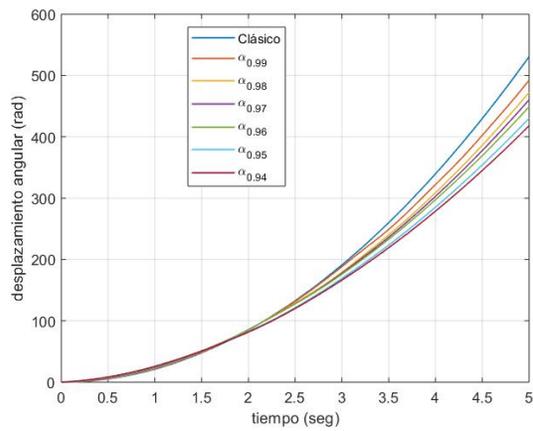
Figura 3.2: Simulación en lazo abierto del modelo de Euler-Lagrange fraccionario con la derivada de Caputo-Fabrizio con diferentes órdenes para el robot SCARA; posición de a)  $q_1$ , b)  $q_2$ , c)  $q_3$  y d)  $q_4$



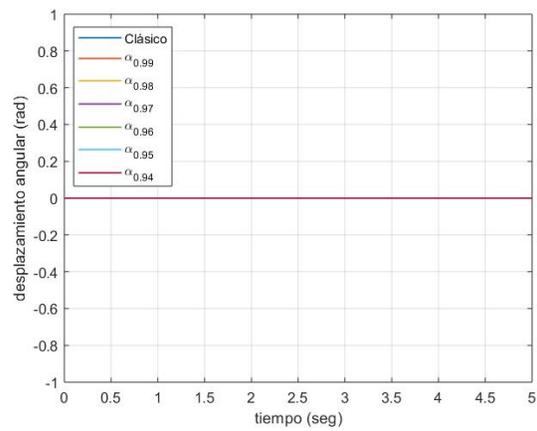
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.3: Simulación en lazo abierto del modelo de Euler-Lagrange fraccionario con la derivada de Atangana-Baleanu-Caputo con diferentes órdenes para el robot SCARA; posición de a)  $q_1$ , b)  $q_2$ , c)  $q_3$  y d)  $q_4$

### 3.3. Modelado fraccionario del robot Stanford

El robot Stanford mostrado en la Figura 3.4 fue diseñado en 1969 por Víctor Scheinman, un estudiante de Ingeniería Mecánica que trabajaba en el laboratorio de inteligencia artificial de la Universidad de Stanford. Este manipulador electro-mecánico de 6 grados de libertad fue uno de los primeros robots diseñado exclusivamente para ser controlado por computadora. El robot Stanford era capaz de alcanzar cualquier posición en el espacio bajo el control de una computadora, ampliando el uso de los robots a aplicaciones más complejas como el ensamblaje y la soldadura de arco.

Después de la experiencia con modelos previos como, con el brazo Stanford-Rancho (una prótesis de brazo modificada) y el brazo hidráulico Stanford (un manipulador de alta velocidad pero difícil y peligroso de manejar), este brazo electro-mecánico fue diseñado para ser fácil de controlar y para ser compatible con los sistemas computacionales existentes en su tiempo. Este robot fue diseñado y construido en su totalidad en el campus de la Universidad de Stanford utilizando material disponible en la misma [Granja Oromas, 2014].

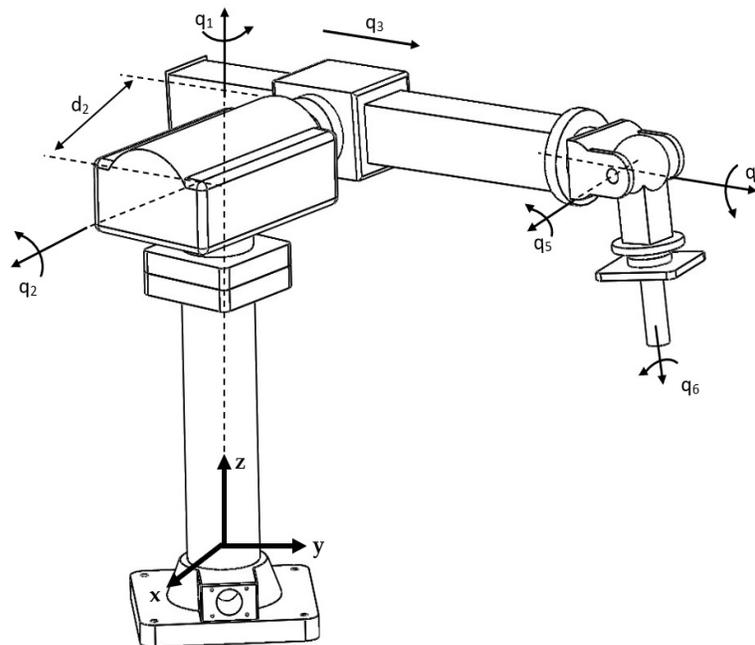


Figura 3.4: Robot Stanford

Siguiendo el formulismo de Euler-Lagrange [Kelly y Santibáñez, 2003, Spong y Vidyasagar, 2008, Lewis et al., 2003] se obtiene el modelo del robot Stanford. Para este manipulador se hacen las operaciones  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$  para obtener un nuevo vector nombrado  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , esto se debe a que en la matriz de Coriolis y el vector de fuerzas gravitacionales tienen pocos términos, en otras palabras, se realiza por simplicidad del modelo [Paul, 1981], quedando representado con el enfoque fraccionario de la siguiente forma

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})_0 \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} & m_{56} \\ m_{16} & m_{26} & m_{36} & m_{46} & m_{56} & m_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

donde,

$$\begin{aligned} m_{11} &= 1.316 - 1.056108d_2 + 11.48d_2^2 + 2.51\sin^2(q_2) - 5.47995\sin^2(q_2)q_3 \\ &\quad + 6.47\sin^2(q_2)q_3^2 + 0.23\sin^2(q_2)q_3\cos(q_5), \\ m_{12} &= -6.47\cos(q_2)d_2q_3, \\ m_{13} &= -6.47\sin(q_2)d_2, \\ m_{22} &= 4.721 - 5.47995q_3 + 6.47q_3^2 + 0.23q_3\cos(q_5), \\ m_{33} &= 7.252, \\ m_{44} &= 0.107 + 0.203\sin^2(q_5), \\ m_{55} &= 0.113, \\ m_{66} &= 0.0203, \\ m_{14} &= m_{15} = m_{16} = m_{23} = m_{24} = m_{25} = m_{26} = m_{34} = m_{35} = m_{36} = m_{45} = m_{46} = m_{56} = 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

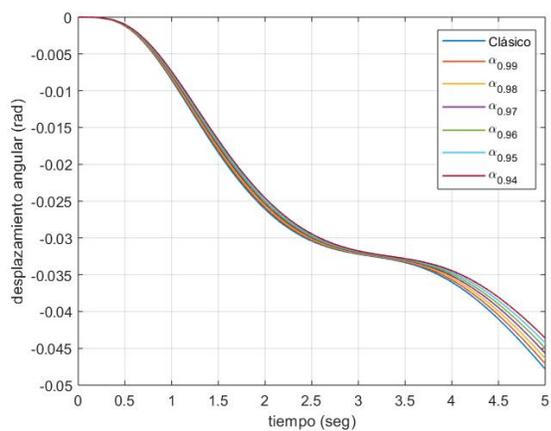
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

donde,

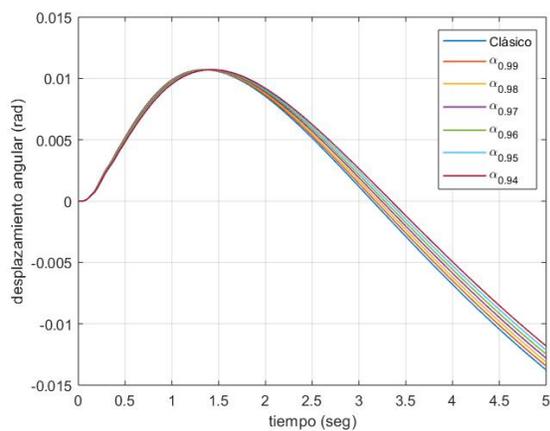
$$\begin{aligned} n_1 &= 0, \\ n_2 &= -[2.734\sin(q_2) + 6.47\sin(q_2)q_3 + 0.115(\sin(q_2)\cos(q_5) + \cos(q_2)\cos(q_4)\sin(q_5))]g, \\ n_3 &= 6.47\cos(q_2)g, \\ n_4 &= 0.115\sin(q_2)\sin(q_4)\sin(q_5)g, \\ n_5 &= 0.115[\sin(q_2)\cos(q_4)\cos(q_5) - \cos(q_2)\sin(q_5)]g, \\ n_6 &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.3.1. Simulación en lazo abierto

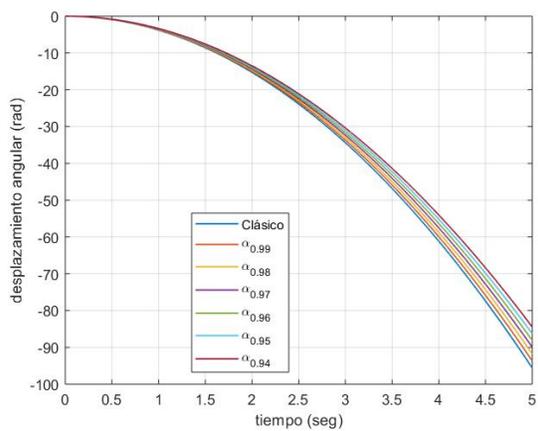
En esta subsección se presentan las simulaciones del modelo fraccionario del robot Stanford utilizando las derivadas de orden no entero de CF y ABC. Se eligieron los pares aplicados de forma arbitraria,  $\tau_1 = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\tau_2 = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\tau_3 = 8 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\tau_4 = 29.43 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\tau_5 = 35 \text{ N}\cdot\text{m}$  y  $\tau_6 = 40 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Las Figuras 3.5 y 3.6 muestran las posiciones de las articulaciones del robot con diferentes derivadas y ordenes.



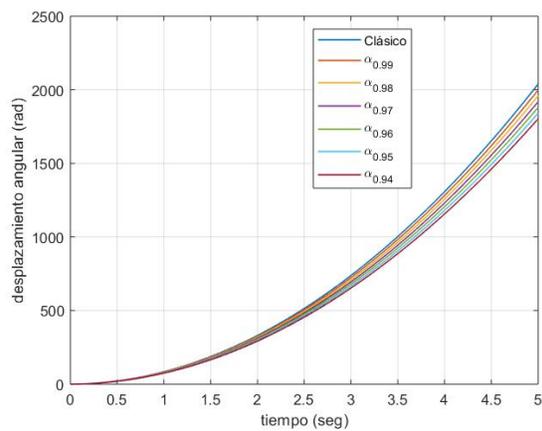
(a)



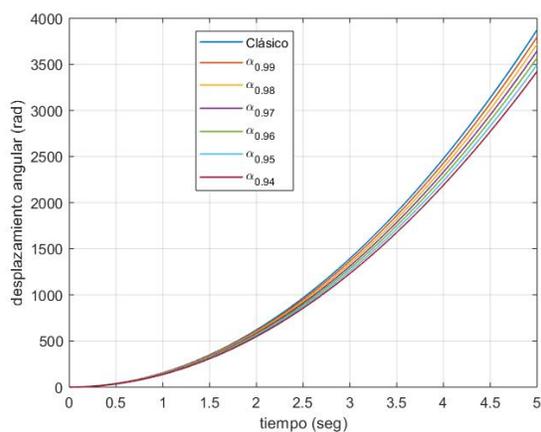
(b)



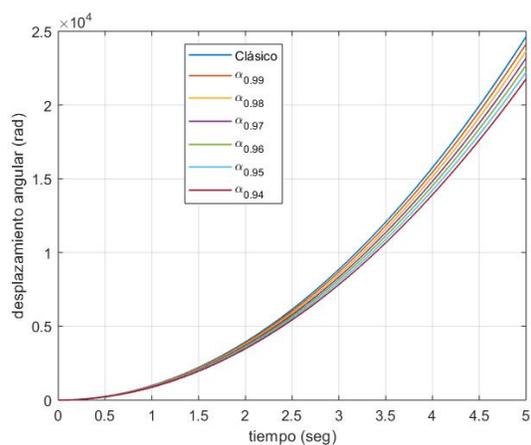
(c)



(d)

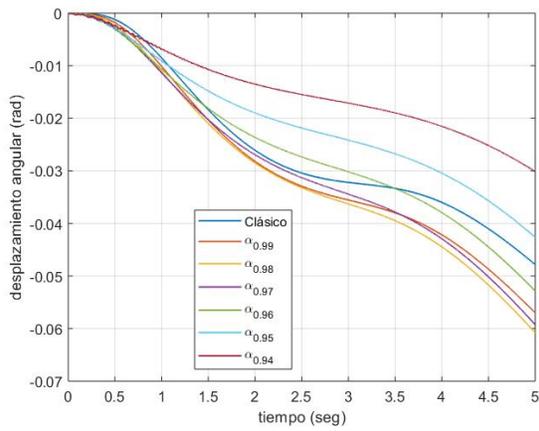


(e)

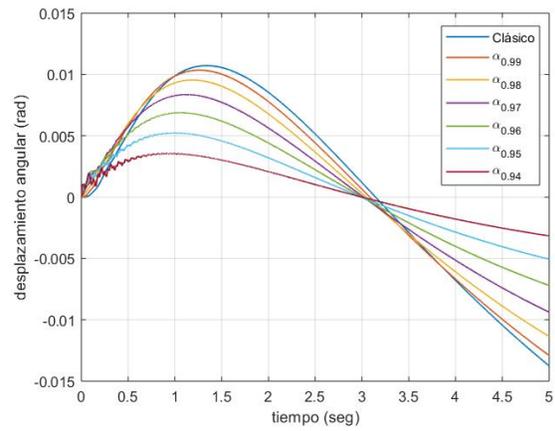


(f)

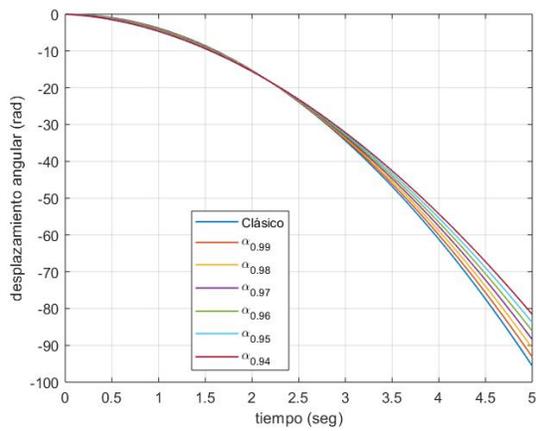
Figura 3.5: Simulación en lazo abierto del modelo de E-L fraccionario con la derivada de CF con diferentes órdenes para el robot Stanford; posición de a)  $q_1$ , b)  $q_2$ , c)  $q_3$ , d)  $q_4$ , e)  $q_5$  y f)  $q_6$



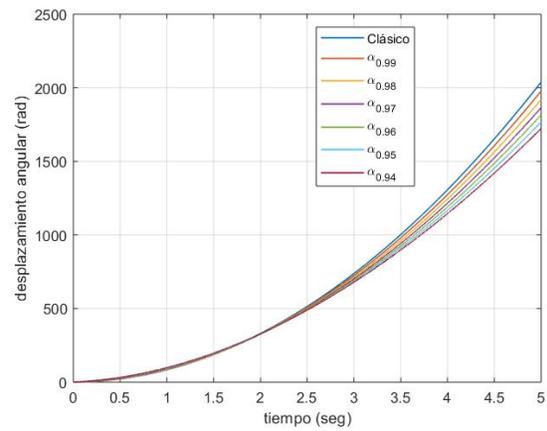
(a)



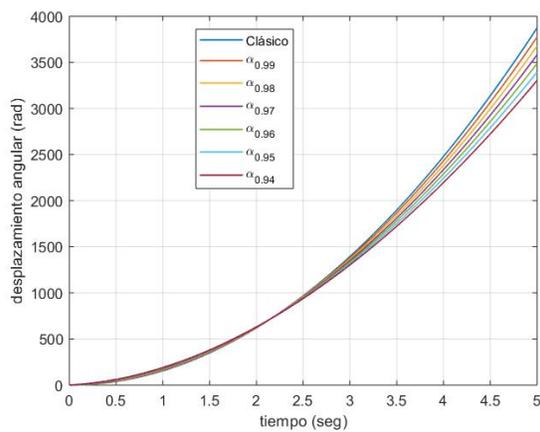
(b)



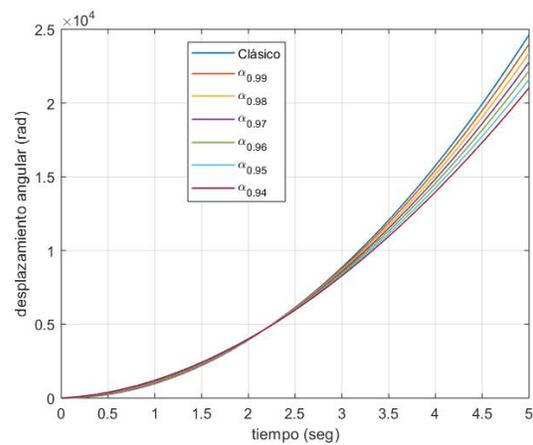
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.6: Simulación en lazo abierto del modelo de E-L fraccionario con la derivada de ABC con diferentes órdenes para el robot Stanford; posición de a)  $q_1$ , b)  $q_2$ , c)  $q_3$ , d)  $q_4$ , e)  $q_5$  y f)  $q_6$

### 3.4. Modelado fraccionario del robot PUMA 560

El robot tipo PUMA 560 mostrado en la Figura 3.7 fue diseñado en 1978, por Unimation, como principal creador fue General Motors. Este manipulador ha sido muy utilizado en la industria por años y su modelo ha sido utilizado como principio para muchos diseños subsecuentes. También ha sido de provecho para diferentes estudios teóricos.

El robot tipo PUMA 560 tiene un total de 6 grados de libertad, los cuales se ven representados en 3 grados de libertad en cuerpo y brazo, más otros 3 en la muñeca, lo cual esto le permite tener una mayor movilidad y exactitud en carga y descarga de materiales de las máquinas CNC (Control Numérico por Computadora) y bandas transportadoras.

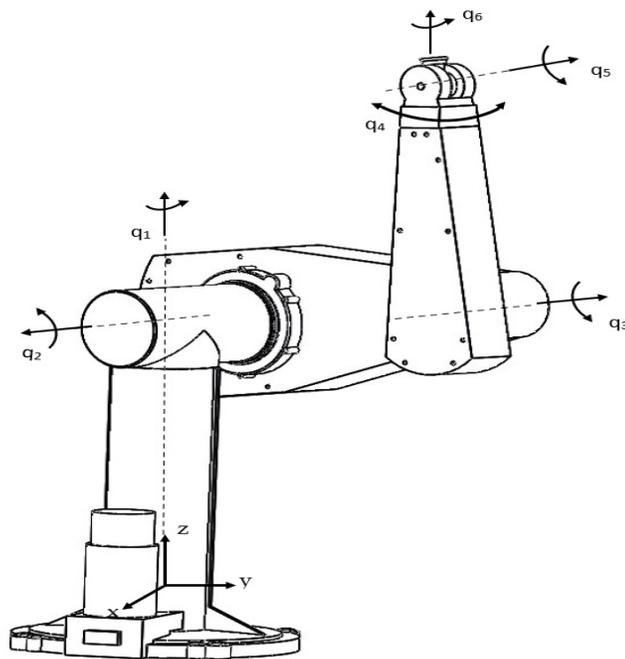


Figura 3.7: Robot PUMA 560

La dinámica del robot PUMA 560 con el enfoque fraccionario se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) {}_0\mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{B}(\mathbf{q}) [{}_0\mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} \cdot {}_0\mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}] + \mathbf{A}(\mathbf{q}) [{}_0\mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}^2] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.38)$$

donde la matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  de la ecuación (3.26) se separa en dos matrices, una que contiene los términos de Coriolis  $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n(n-1)/2}$  y la otra contiene los términos de las fuerzas centrífugas  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  [Armstrong *et al.*, 1986]. Las matrices y vectores del modelo quedan de la siguiente manera,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} & m_{56} \\ m_{16} & m_{26} & m_{36} & m_{46} & m_{56} & m_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

donde,

$$\begin{aligned} m_{11} &= 2.57 + 1.38\cos^2(q_2) + 0.3\sin^2(q_2 + q_3) + 0.744\cos(q_2)\sin(q_2 + q_3), \\ m_{12} &= 0.69\sin(q_2) - 0.134\cos(q_2 + q_3) + 0.0238\cos(q_2), \\ m_{13} &= -0.134\cos(q_2 + q_3) - 0.00397\sin(q_2 + q_3), \\ m_{22} &= 6.79 + 0.744\sin(q_3), \\ m_{23} &= 0.333 + 0.372\sin(q_3) - 0.011\cos(q_3), \\ m_{33} &= 1.16, \\ m_{34} &= -0.00125\sin(q_4)\sin(q_5), \\ m_{35} &= 0.00125\cos(q_4)\cos(q_5), \\ m_{44} &= 0.2, \\ m_{55} &= 0.18, \\ m_{66} &= 0.19, \\ m_{14} &= m_{15} = m_{16} = m_{24} = m_{25} = m_{26} = m_{36} = m_{45} = m_{46} = m_{56} = 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{112} & b_{113} & \cdots & b_{116} & b_{123} & b_{124} & \cdots & b_{146} & b_{156} \\ b_{212} & b_{213} & \cdots & b_{216} & b_{223} & b_{224} & \cdots & b_{246} & b_{256} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{612} & b_{613} & \cdots & b_{616} & b_{623} & b_{624} & \cdots & b_{646} & b_{656} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

donde,

$$\begin{aligned} b_{112} &= -2.76\sin(q_2)\cos(q_2) + 0.744\cos(2q_2 + q_3) + 0.6\sin(q_2 + q_3)\cos(q_2 + q_3) \\ &\quad - 0.0213[1 - 2\sin^2(q_2 + q_3)], \\ b_{113} &= 0.744\cos(q_2)\cos(q_2 + q_3) + 0.6\sin(q_2 + q_3)\cos(q_2 + q_3) + 0.022\cos(q_2)\sin(q_2 + q_3) \\ &\quad - 0.0213[1 - 2\sin^2(q_2 + q_3)], \\ b_{114} &= -0.0025\sin(q_2 + q_3)\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4)\sin(q_5) + 0.00086\cos(q_4)\sin(q_5) \\ &\quad - 0.00248\cos(q_2)\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4)\sin(q_5), \\ b_{115} &= -0.0025[\sin^2(q_2 + q_3)\sin(q_5) - \sin(q_2 + q_3)\cos(q_2 + q_3)\cos(q_4)\cos(q_5)] \\ &\quad - 0.00248\cos(q_2)[\sin(q_2 + q_3)\sin(q_5) - \cos(q_2 + q_3)\cos(q_4)\cos(q_5)] + 0.00086\sin(q_4)\cos(q_5), \\ b_{123} &= 0.267\sin(q_2 + q_3) - 0.00758\cos(q_2 + q_3), \\ b_{116} &= b_{124} = b_{125} = b_{126} = b_{134} = b_{135} = b_{136} = b_{145} = b_{146} = b_{156} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{214} &= 0.00164\sin(q_2 + q_3) - 0.0025\cos(q_2 + q_3)\cos(q_4)\sin(q_5) + 0.00248\sin(q_2)\cos(q_4)\sin(q_5) \\
&\quad + 0.0003\sin(q_2 + q_3)[1 - 2\sin^2(q_4)], \\
b_{215} &= -0.0025\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4)\cos(q_5) + 0.00248\sin(q_2)\sin(q_4)\cos(q_5) - 0.000642\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4), \\
b_{223} &= 0.022\sin(q_3) + 0.744\cos(q_3), \\
b_{224} &= -0.00248\cos(q_3)\sin(q_4)\sin(q_5), \\
b_{225} &= -0.0025\sin(q_5) + 0.00248[\cos(q_3)\cos(q_4)\cos(q_5) - \sin(q_3)\sin(q_5)], \\
b_{234} &= -0.00248\cos(q_3)\sin(q_4)\sin(q_5), \\
b_{235} &= 0.0025\sin(q_5) + 0.00248[\cos(q_3)\cos(q_4)\cos(q_5) - \sin(q_3)\sin(q_5)], \\
b_{212} &= b_{213} = b_{216} = b_{226} = b_{236} = b_{245} = b_{246} = b_{256} = 0, \\
\\
b_{314} &= -0.0025\cos(q_2 + q_3)\cos(q_4)\sin(q_5) + 0.00164\sin(q_2 + q_3) + 0.0003\sin(q_2 + q_3)[1 - 2\sin^2(q_4)], \\
b_{315} &= -0.0025\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4)\cos(q_5) - 0.000642\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4), \\
b_{325} &= -0.0025\sin(q_5), \\
b_{335} &= -0.0025\sin(q_5), \\
b_{345} &= -0.0025\sin(q_4)\cos(q_5), \\
b_{312} &= b_{313} = b_{316} = b_{323} = b_{324} = b_{326} = b_{334} = b_{336} = b_{346} = b_{356} = 0, \\
\\
b_{412} &= -0.00164\sin(q_2 + q_3) + 0.0025\cos(q_2 + q_3)\cos(q_4)\sin(q_5) - 0.00248\sin(q_2)\cos(q_4)\sin(q_5) \\
&\quad - 0.0003\sin(q_2 + q_3)[1 - 2\sin^2(q_4)], \\
b_{413} &= 0.0025\cos(q_2 + q_3)\cos(q_4)\sin(q_5) - 0.00164\sin(q_2 + q_3) - 0.0003\sin(q_2 + q_3)[1 - 2\sin^2(q_4)], \\
b_{415} &= -0.000642\sin(q_2 + q_3)\cos(q_4), \\
b_{425} &= 0.000642\sin(q_4), \\
b_{435} &= 0.000642\sin(q_4), \\
b_{414} &= b_{416} = b_{423} = b_{424} = b_{426} = b_{434} = b_{436} = b_{445} = b_{446} = b_{456} = 0, \\
\\
b_{512} &= 0.0025\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4)\cos(q_5) - 0.00248\sin(q_2)\sin(q_4)\cos(q_5) + 0.000642\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4), \\
b_{513} &= 0.0025\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4)\cos(q_5) + 0.000642\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4), \\
b_{514} &= 0.000642\sin(q_2 + q_3)\cos(q_4), \\
b_{523} &= 0.0025\sin(q_5), \\
b_{524} &= -0.000642\sin(q_4), \\
b_{534} &= -0.000642\sin(q_4), \\
b_{515} &= b_{516} = b_{525} = b_{526} = b_{535} = b_{536} = b_{545} = b_{546} = b_{556} = 0, \\
\\
b_{612} &= b_{613} = b_{614} = b_{615} = b_{616} = b_{623} = b_{624} = b_{625} = b_{626} = b_{634} = b_{635} = b_{636} = b_{645} = b_{646} = b_{656} = 0,
\end{aligned} \tag{3.42}$$


---

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

donde,

$$a_{12} = 0.69\cos(q_2) + 0.134\sin(q_2 + q_3) - 0.0238\sin(q_2),$$

$$a_{13} = 0.5[0.267\sin(q_2 + q_3) - 0.00758\cos(q_2 + q_3)],$$

$$a_{11} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0,$$

$$a_{21} = -0.5[-2.76\sin(q_2)\cos(q_2) + 0.744\cos(2q_2 + q_3) + 0.6\sin(q_2 + q_3)\cos(q_2 + q_3) - 0.0213(1 - 2\sin^2(q_2 + q_3))],$$

$$a_{23} = 0.5[0.022\sin(q_3) + 0.744\cos(q_3)],$$

$$a_{22} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = 0,$$

$$a_{31} = -0.5[0.744\cos(q_2)\cos(q_2 + q_3) + 0.6\sin(q_2 + q_3)\cos(q_2 + q_3) + 0.022\cos(q_2)\sin(q_2 + q_3) - 0.0213(1 - 2\sin^2(q_2 + q_3))],$$

$$a_{32} = -0.5[0.022\sin(q_3) + 0.744\cos(q_3)],$$

$$a_{34} = -0.00125\cos(q_4)\sin(q_5),$$

$$a_{35} = -0.00125\cos(q_4)\sin(q_5),$$

$$a_{33} = a_{36} = 0,$$

$$a_{41} = -0.5[-0.0025\sin(q_2 + q_3)\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4)\sin(q_5) + 0.00086\cos(q_4)\sin(q_5) - 0.00248\cos(q_2)\cos(q_2 + q_3)\sin(q_4)\sin(q_5)],$$

$$a_{42} = 0.5[0.00248\cos(q_3)\sin(q_4)\sin(q_5)],$$

$$a_{43} = a_{44} = a_{45} = a_{46} = 0,$$

$$a_{51} = -0.5[-0.0025(\sin^2(q_2 + q_3)\sin(q_5) - \sin(q_2 + q_3)\cos(q_2 + q_3)\cos(q_4)\cos(q_5)) - 0.00248\cos(q_2)(\sin(q_2 + q_3)\sin(q_5) - \cos(q_2 + q_3)\cos(q_4)\cos(q_5)) + 0.00086\sin(q_4)\cos(q_5)],$$

$$a_{52} = -0.5[-0.0025\sin(q_5) + 0.00248(\cos(q_3)\cos(q_4)\cos(q_5) - \sin(q_3)\sin(q_5))],$$

$$a_{53} = 0.5[0.0025\sin(q_5)],$$

$$a_{54} = a_{55} = a_{56} = 0,$$

$$a_{61} = a_{62} = a_{63} = a_{64} = a_{65} = a_{66} = 0,$$

(3.44)

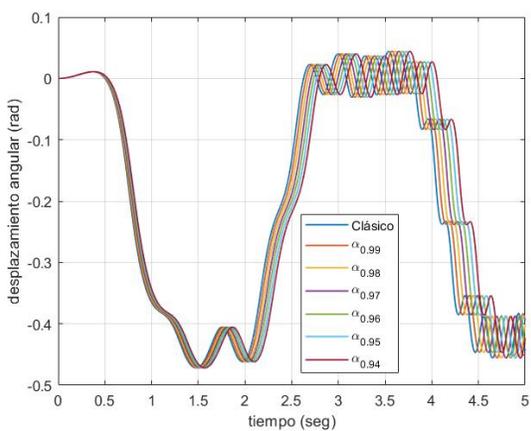
$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

donde,

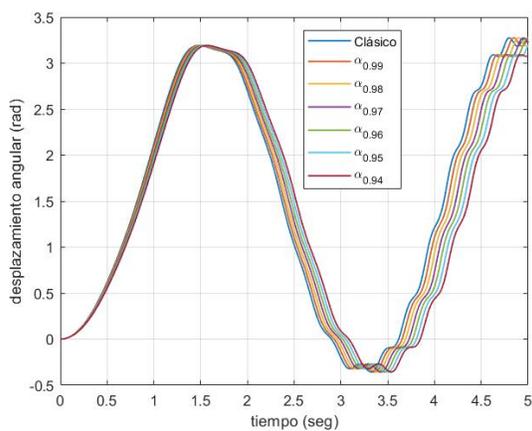
$$\begin{aligned} g_1 &= 0, \\ g_2 &= -37.2\cos(q_2) - 8.4\sin(q_2 + q_3) + 1.02\sin(q_2), \\ g_3 &= -8.4\sin(q_2 + q_3) + 0.25\cos(q_2 + q_3), \\ g_4 &= 0.028\sin(q_2 + q_3)\sin(q_4)\sin(q_5), \\ g_5 &= -0.028[\cos(q_2 + q_3)\sin(q_5) + \sin(q_2 + q_3)\cos(q_4)\cos(q_5)], \\ g_6 &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.4.1. Simulación en lazo abierto

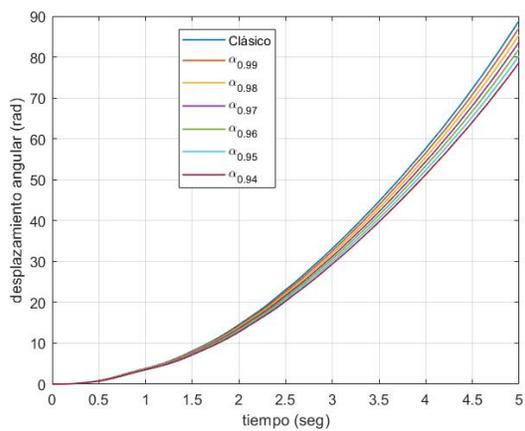
Para el último caso de estudio, se presentan las simulaciones del modelo fraccionario del robot PUMA 560 utilizando las derivadas de orden no entero de CF y ABC. Los pares aplicados de forma arbitraria son  $\tau_1 = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\tau_2 = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\tau_3 = 8 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\tau_4 = 29.43 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\tau_5 = 35 \text{ N}\cdot\text{m}$  y  $\tau_6 = 40 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Las Figuras 3.8 y 3.9 muestran las posiciones de las articulaciones del robot con diferentes derivadas y ordenes.



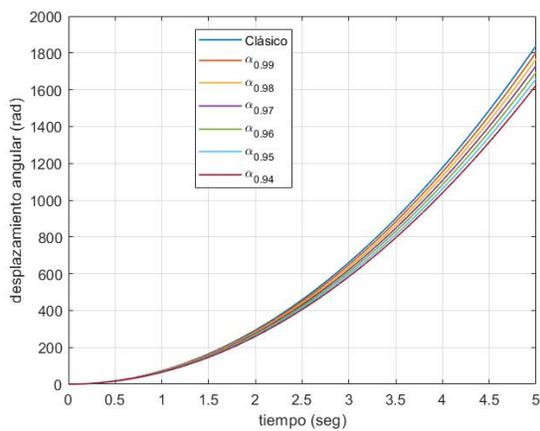
(a)



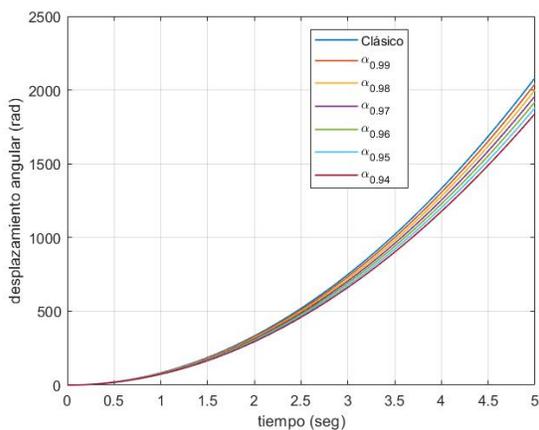
(b)



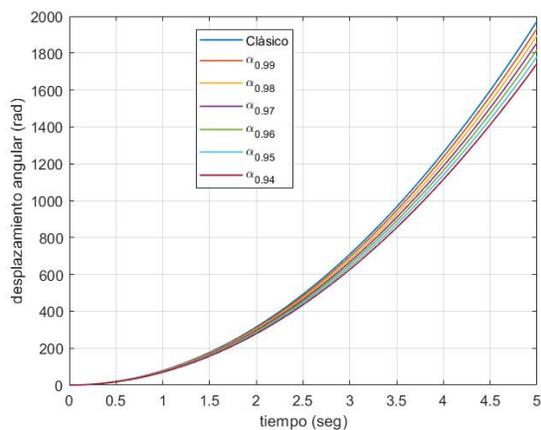
(c)



(d)

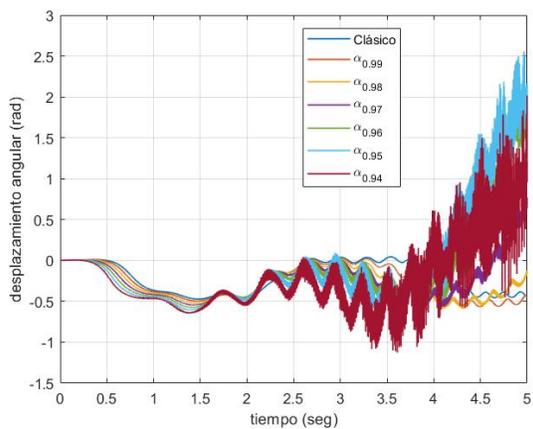


(e)

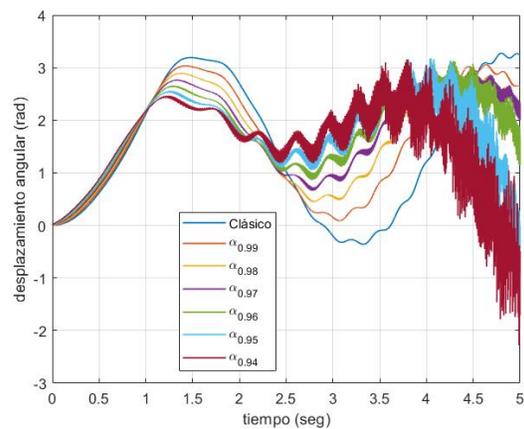


(f)

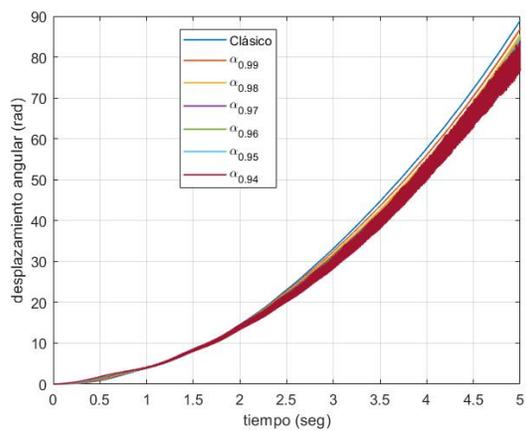
Figura 3.8: Simulación en lazo abierto del modelo de E-L fraccionario con la derivada de CF con diferentes órdenes para el robot PUMA 560; posición de a)  $q_1$ , b)  $q_2$ , c)  $q_3$ , d)  $q_4$ , e)  $q_5$  y f)  $q_6$



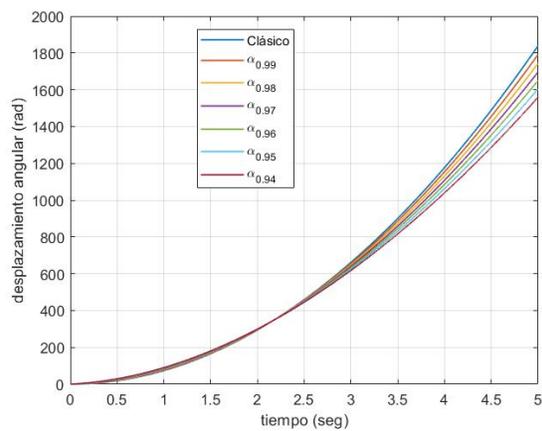
(a)



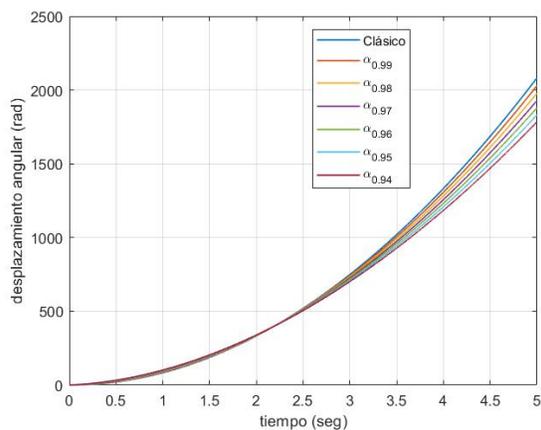
(b)



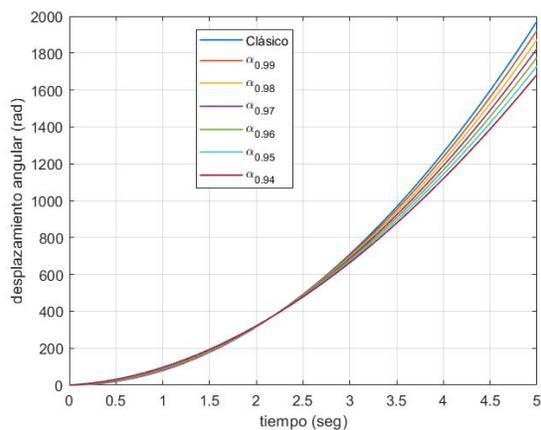
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.9: Simulación en lazo abierto del modelo de E-L fraccionario con la derivada de ABC con diferentes órdenes para el robot PUMA 560; posición de a)  $q_1$ , b)  $q_2$ , c)  $q_3$ , d)  $q_4$ , e)  $q_5$  y f)  $q_6$

### 3.5. Motor de inducción

El modelo dinámico del motor de inducción se tomó de [Marino *et al.*, 1993], en este modelo se considera que los vectores de corriente y flujo  $(I_a, I_b)$ ,  $(\lambda_a, \lambda_b)$  del modelo  $(a, b)$  fijo al estator, se transforma a un modelo  $(d, q)$ . Dicho modelo incluye la dinámica eléctrica y mecánica del motor de inducción y se desprecian los efectos de la fricción viscosa. Entonces, utilizando el operador derivada de orden no entero, el modelo fraccionario del motor de inducción resulta de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 {}_0\mathcal{D}_t^\alpha \omega &= \mu \lambda_d i_q - \frac{\tau_L}{J}, \\
 {}_0\mathcal{D}_t^\alpha i_d &= -\gamma i_d + \alpha \beta \lambda_d + n_p \omega i_q + \alpha M \frac{i_q^2}{\lambda_d} + \frac{1}{\sigma L_s} u_d, \\
 {}_0\mathcal{D}_t^\alpha i_q &= -\gamma i_q - \beta n_p \omega \lambda_d - n_p \omega i_d - \alpha M \frac{i_q i_d}{\lambda_d} + \frac{1}{\sigma L_s} u_q, \\
 {}_0\mathcal{D}_t^\alpha \lambda_d &= -\alpha \lambda_d + \alpha M i_d, \\
 {}_0\mathcal{D}_t^\alpha \rho &= n_p \omega + \alpha M \frac{i_q}{\lambda_d},
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

donde  $\rho = \arctan \frac{\lambda_b}{\lambda_a}$ ,  $\alpha = \frac{R_r}{L_r}$ ,  $\beta = \frac{M}{\sigma L_s L_r}$ ,  $\gamma = \frac{M^2 R_r}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s}$ ,  $\mu = \frac{n_p M}{J L_r}$ ,  $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}$ ;  $\omega$  es la velocidad angular del rotor,  $i_d$  e  $i_q$  son las corrientes en el eje  $d$  y en el eje  $q$ , respectivamente;  $\lambda_d$  los enlaces de flujo del rotor en el eje  $d$ ;  $n_p$ ,  $T_L$  y  $J$  son número de pares de polos, el par de carga y momento de inercia del motor, respectivamente.  $M$ ,  $L_s$  y  $L_r$  representan inductancia mutua y autoinductancia del estator y rotor; finalmente,  $R_s$  y  $R_r$  son las resistencias del estator y del rotor, respectivamente. De la ecuación (3.47), las variables  $u_d$  y  $u_q$  son las entradas de control no lineal de retroalimentación del estado, las cuales se describen como

$$\begin{aligned}
 u_d &= \sigma L_s (-n_p \omega i_q - \alpha M \frac{i_q^2}{\lambda_d} - \alpha \beta \lambda_d + v_d), \\
 u_q &= \sigma L_s (n_p \beta \omega \lambda_d + n_p \omega i_d + \alpha M \frac{i_d i_q}{\lambda_d} + v_q).
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Al sustituir la ecuación (3.48) en (3.47) se obtiene el sistema en lazo cerrado como

$$\begin{aligned}
 {}_0\mathcal{D}_t^\alpha \omega &= \mu \lambda_d i_q - \frac{\tau_L}{J}, \\
 {}_0\mathcal{D}_t^\alpha i_d &= -\gamma i_d + v_d, \\
 {}_0\mathcal{D}_t^\alpha i_q &= -\gamma i_q + v_q, \\
 {}_0\mathcal{D}_t^\alpha \lambda_d &= -\alpha \lambda_d + \alpha M i_d, \\
 {}_0\mathcal{D}_t^\alpha \rho &= n_p \omega + \alpha M \frac{i_q}{\lambda_d},
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

donde  $v_d$  y  $v_q$  son las entradas de voltaje al estator.

### 3.6. Acoplamiento motor-manipulador

Se considera que la  $k$ -ésima articulación del robot manipulador es actuada por un motor de inducción, donde  $k = 1, 2, \dots, n$ . El modelo dinámico fraccionario para todos los  $n$  motores de inducción

correspondientes a las  $n$  articulaciones del robot manipulador se puede expresar en forma de matriz como

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{E} \boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\tau}_L, \\ {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{I}_d &= -\gamma \mathbf{I}_d + \mathbf{v}_d, \\ {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{I}_q &= -\gamma \mathbf{I}_q + \mathbf{v}_q, \\ {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \boldsymbol{\Lambda}_d &= -\alpha \boldsymbol{\Lambda}_d + \alpha M \mathbf{I}_d,\end{aligned}\tag{3.50}$$

donde,

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_n]^T, \quad \boldsymbol{\Omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T, \quad \mathbf{E} = \text{diag}[\mu_1 J_1, \mu_2 J_2, \dots, \mu_n J_n]^T, \\ \boldsymbol{\Delta} &= [\lambda_{d_1} i_{q_1}, \lambda_{d_2} i_{q_2}, \dots, \lambda_{d_n} i_{q_n}]^T, \quad \boldsymbol{\tau}_L = [\tau_{L_1}, \tau_{L_2}, \dots, \tau_{L_n}]^T, \quad \boldsymbol{\Lambda}_d = [\lambda_{d_1}, \lambda_{d_2}, \dots, \lambda_{d_n}]^T, \\ \mathbf{I}_d &= [i_{d_1}, i_{d_2}, \dots, i_{d_n}]^T, \quad \mathbf{v}_d = [v_{d_1}, v_{d_2}, \dots, v_{d_n}]^T, \quad \mathbf{I}_q = [i_{q_1}, i_{q_2}, \dots, i_{q_n}]^T, \quad \mathbf{v}_q = [v_{q_1}, v_{q_2}, \dots, v_{q_n}]^T.\end{aligned}$$

Considerando que existe una conexión mecánica directa entre el  $k$ -ésimo motor de inducción y la  $k$ -ésima articulación del manipulador. Se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \boldsymbol{\theta}, \\ {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} &= \boldsymbol{\Omega}, \\ {}_0 \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} &= {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \boldsymbol{\Omega},\end{aligned}\tag{3.51}$$

donde  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  es el vector de la posición angular de los  $n$  motores de inducción.

### 3.6.1. Sistema acoplado MI-SCARA

Si el par de entrada o el par requerido para cada articulación del robot manipulador se considera como el par de carga aplicado a cada uno de los motores de inducción

$$\boldsymbol{\tau}_L = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) {}_0 \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}) {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}).\tag{3.52}$$

Sustituyendo la ecuación(3.52) en el primer renglón de la ecuación (3.50) resulta como

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{E} \boldsymbol{\Delta} - \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) {}_0 \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}) {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \}, \\ \mathbf{E} \boldsymbol{\Delta} &= \mathbf{J}_0 \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) {}_0 \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}) {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \}, \\ \mathbf{E} \boldsymbol{\Delta} &= \{ \mathbf{J} + \mathbf{M}(\mathbf{q}) \} {}_0 \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}) {}_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}).\end{aligned}\tag{3.53}$$

Finalmente, se obtiene el sistema acoplado entre el robot SCARA y los motores de inducción, en el sentido de CF

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}) {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{E} \boldsymbol{\Delta},\tag{3.54}$$

donde  $\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{J} + \mathbf{M}(\mathbf{q})$ .

### 3.6.2. Sistema acoplado MI-Stanford

Siguiendo el procedimiento anterior, el acoplamiento del robot Stanford y los motores, en el sentido CF queda de la siguiente manera

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}) = \mathbf{E} \boldsymbol{\Delta}.\tag{3.55}$$

### 3.6.3. Sistema acoplado MI-PUMA 560

Para el último caso de estudio, el sistema acoplado está dado por:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})_0^{CF} \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{B}(\mathbf{q})_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} \cdot_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{A}(\mathbf{q})_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}^2 + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{E}\Delta. \quad (3.56)$$

## 3.7. Perturbaciones

Los robots manipuladores son sistemas que están sujetos a diferentes tipos de perturbaciones, como cargas útiles desconocidas, fricciones en las articulaciones, dinámicas no modeladas y fuerzas externas [Wei *et al.*, 2005, Guo *et al.*, 2010, Si *et al.*, 2018, Rahmani y Belkheiri, 2016, Mosquera y Vivas, 2006]. Además, la interacción del robot con el entorno produce fuerzas y momentos en el efector final o herramienta, que a su vez producen pares en las articulaciones del robot [Kufieta, 2014]. Todas estas perturbaciones, cuando no se tienen en cuenta, afectan negativamente el rendimiento del manipulador, por lo tanto, para verificar la robustez de los controladores fraccionarios que se presentan en el capítulo 4, es agregado al modelo dinámico, fricción viscosa y de Coulomb y una fuerza externa. Por ejemplo, para el caso del robot SCARA se tiene:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})_0 \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q},_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q})_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{ext}, \quad (3.57)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_{ext}$  es el par de perturbación debido a que actúan sobre el manipulador, mientras  $\mathbf{F}(_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q})$  representa la disipación causada por las fricciones viscosa y de Coulomb agregadas a cada articulación. El par de perturbación viene dado por la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \mathbf{J}_p^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_{dis}, \quad (3.58)$$

donde  $\mathbf{J}_p(\mathbf{q})$  es la matriz jacobiana, que establece una relación cuantitativa entre los pares/fuerzas del efector final y articulares, en el punto  $\mathbf{p}$  que se localiza en cualquier lugar de la estructura del manipulador.  $\boldsymbol{\tau}_{dis} = [\mathbf{F}_f, \mathbf{F}_m]^T$  es el vector que representa las fuerzas y los momentos externos  $\mathbf{F}_f = [F_{f_x}, F_{f_y}, F_{f_z}]^T$  y  $\mathbf{F}_m = [n_x, n_y, n_z]^T$  que actúan en el punto  $\mathbf{p}$ .

Por otro lado, la fricción viscosa está presente en los contactos lubricados por fluido entre sólidos, y debido a los efectos hidrodinámicos, su modelo tiene en cuenta tanto la magnitud de la velocidad como la dirección [Bona y Indri, 2005]. La fricción de Coulomb es proporcional a la carga, independiente del área de contacto y opuesta al movimiento [Egeland y Gravdahl, 2002]. De este modo, los modelos de fricción viscosa y Coulomb se utilizan para modelar la disipación en las articulaciones [Vuong *et al.*, 2009], tal que

$$\mathbf{F}(_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}) = \mathbf{F}_v _0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{F}_c \text{sign}(_0 \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}), \quad (3.59)$$

donde  $\mathbf{F}_v = \text{diag}[f_{v_1}, f_{v_2}, \dots, f_{v_n}]$  y  $\mathbf{F}_c = \text{diag}[f_{c_1}, f_{c_2}, \dots, f_{c_n}]$  son los coeficientes de fricción viscosa de Coulomb, respectivamente. A continuación se presenta los valores de los parámetros utilizados en las ecuaciones (3.58) y (3.59), para  $\boldsymbol{\tau}_{ext}$ , si la fuerza externa se aplica al efector final la matriz jacobiana de cada manipulador se presenta en el anexo C y  $\boldsymbol{\tau}_{dis} = [A \cos(\frac{\pi}{4}), A \sin(\frac{\pi}{4}), 0, 0, 0, 0]^T$  donde  $A = 100N$ , similar a los límites promedio de la fuerza de empuje/tracción humana  $20N \leq A \leq 100N$  [Woodson *et al.*, 1992], y  $\mathbf{F}_v = \text{diag}[0.8, 0.8, \dots, 0.8]$  y  $\mathbf{F}_c = \text{diag}[0.5, 0.5, \dots, 0.5]$ .

### 3.8. Conclusiones

En este capítulo se desarrolló el modelo de los casos de estudio y se realizó un análisis en lazo abierto con las derivadas de orden no entero CF y ABC para determinar cual de ellas aplicar al modelo en lazo cerrado. Como se observa en las simulaciones antes presentadas, conforme el orden se aleja de 1 de la derivada de ABC, principalmente la dinámica de las posiciones  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  no corresponden en lo absoluto al sistema “real”, esto se debe a que el efecto de memoria es “fuerte” de dicha derivada, y para este sistema no se logra tener una relación física. Por otro lado, cuando el orden de la derivada de CF se aleja de 1 se observa que las dinámicas de las articulaciones mantienen la forma pero tiene un desfase, esta característica la podemos relacionar con el efecto disipativo que existe en el sistema. Teniendo en cuenta lo anterior, se decide hacer uso de la derivada CF para los sistemas acoplados, ya que representa de mejor manera la dinámica de los sistemas mencionados.

También se obtuvieron las ecuaciones diferenciales del motor de inducción con el enfoque fraccionario, así como, el acoplamiento de los motores de inducción con cada manipulador. Y por último, para demostrar la robustez de los controladores fraccionarios se presentan las perturbaciones agregadas a cada modelo motor-manipulador.

## Capítulo 4

# Controladores

### 4.1. Introducción

Una vez acoplado el sistema, se propone un controlador tipo PI de orden fraccionario para el caso de los motores de inducción y diferentes controladores de orden no entero para el seguimiento de trayectoria de cada articulación de los robots manipuladores. En la Figura 4.1 se presenta el diagrama general de control

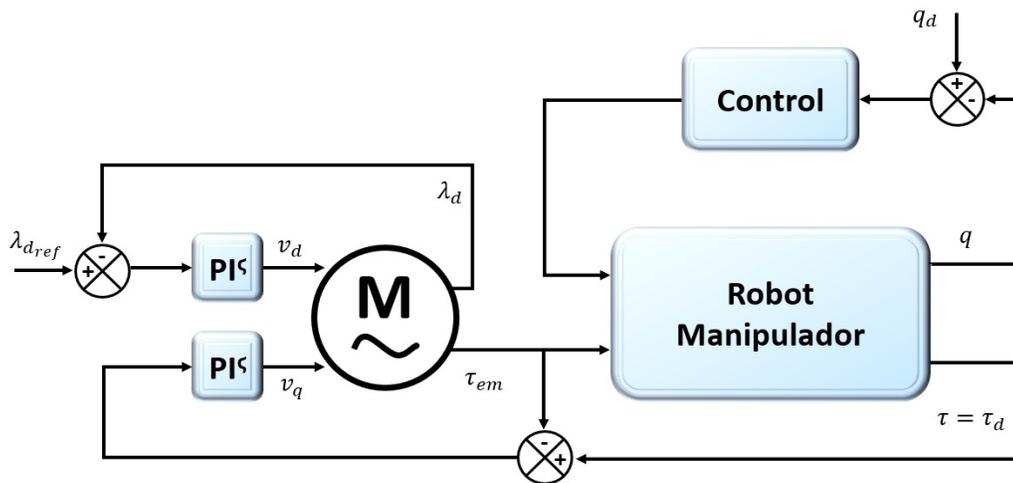


Figura 4.1: Diagrama general de control para seguimiento de trayectoria de los sistemas robóticos actuados por motores de inducción.

## 4.2. Controlador PI

Se propone un controlador tipo  $PI^\zeta$  para el motor de inducción, de su modelo expresado en la ecuación (3.49), las entradas de voltaje al estator están representadas por  $v_d$  y  $v_q$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v_d &= \mathbf{K}_{\mathbf{p}_{\mathbf{v}d}}(\lambda_{d_{ref}} - \lambda_d) + \mathbf{K}_{\mathbf{i}_{\mathbf{v}d}0}{}^{AB}\mathcal{I}_t^\zeta(\lambda_{d_{ref}} - \lambda_d), \\ v_q &= \mathbf{K}_{\mathbf{p}_{\mathbf{v}q}}(\tau_d - \tau_{em}) + \mathbf{K}_{\mathbf{i}_{\mathbf{v}q}0}{}^{AB}\mathcal{I}_t^\zeta(\tau_d - \tau_{em}), \\ \tau_d &= \mathbf{K}_{\mathbf{p}_\tau}(\omega_{ref} - \omega) + \mathbf{K}_{\mathbf{i}_\tau0}{}^{AB}\mathcal{I}_t^\zeta(\omega_{ref} - \omega), \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  ${}^{AB}\mathcal{I}_t^\zeta$  es el operador integral fraccionaria y está definida en el sentido Atangana-Baleanu-Caputo,  $\zeta$  es el orden de la integral,  $\lambda_{d_{ref}}$ ,  $\tau_d$  y  $\omega_{ref}$  son los enlaces de flujo del rotor, par y velocidad deseada o de referencia,  $\mathbf{K}_{\mathbf{p}_{\mathbf{v}d}}$ ,  $\mathbf{K}_{\mathbf{i}_{\mathbf{v}d}}$ ,  $\mathbf{K}_{\mathbf{p}_{\mathbf{v}q}}$ ,  $\mathbf{K}_{\mathbf{i}_{\mathbf{v}q}}$ ,  $\mathbf{K}_{\mathbf{p}_\tau}$  y  $\mathbf{K}_{\mathbf{i}_\tau}$  son ganancias constantes positivas. Los parámetros son los siguientes [Marino *et al.*, 1993]

Datos del motor de inducción		
$J$	Inercia del rotor	0.0586 $kgm^2$
$M$	Inductancia mutua	0.068 $H$
$L_r$	Inductancia del rotor	0.0699 $H$
$L_s$	Inductancia del estator	0.0699 $H$
$R_r$	Resistencia del rotor	0.15 $\Omega$
$R_s$	Resistencia del estator	0.18 $\Omega$
$n_p$	Número de pares de polos	1
$\lambda_d$	Flujo magnético	1.3 $Wb$
$\omega$	Velocidad angular	220 $rad/seg$
$\tau_L$	Par de carga	70 $Nm$
$\tau$	Par del motor eléctrico	15 $Kw$

Tabla 4.1: Parámetros del motor de inducción.

## 4.3. Controlador PD

Uno de los controladores elegidos para el seguimiento de trayectoria será un control tipo  $PD^\mu$  fraccionario para cada articulación de los manipuladores propuestos. Primero se define la señal de seguimiento como

$$\tilde{q} = q_d - q, \quad (4.2)$$

donde  $\tilde{q} = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n]^T$  es el vector de errores,  $q_d = [q_{d1}, q_{d2}, \dots, q_{dn}]^T$  es el vector de posiciones deseadas y  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  son las posiciones reales de las articulaciones del manipulador,  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$  es el vector de pares de accionamiento, ahora se define el controlador tipo  $PD^\mu$  de la siguiente forma

$$\tau = \mathbf{K}_p \tilde{q} + \mathbf{K}_d {}^{CF}\mathcal{D}_t^\mu \tilde{q}, \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d$  son matrices diagonales definidas positivas de ganancias proporcional y derivativa, respectivamente. La derivada del error  $\tilde{q}$  es fraccionaria, es decir, el orden de la acción de control derivativa puede ser no entero. Es importante mencionar que, debido a que  $\tilde{q}$  es el vector de errores, el operador de la derivada fraccionaria se aplica directamente a cada elemento del vector de error y es

posible seleccionar un orden de derivada distinto para cada elemento del vector de error  $\tilde{q}$ . Lo anterior permite ajustar el orden de cada derivada con base en las respuestas obtenidas y ajustar mejor el controlador. Ahora bien, se toma el controlador propuesto en la ecuación (4.3) y el sistema completo para cada uno de los robots resulta de la siguiente manera

### MI-SCARA

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})_0^{CF} \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_p \tilde{q} + \mathbf{K}_d {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\mu \tilde{q}, \quad (4.4)$$

### MI-Stanford

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})_0^{CF} \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} = \mathbf{K}_p \tilde{q} + \mathbf{K}_d {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\mu \tilde{q}, \quad (4.5)$$

### MI-PUMA 560

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})_0^{CF} \mathcal{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q} + \mathbf{B}(\mathbf{q})_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} \cdot {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{A}(\mathbf{q})_0^{CF} \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{q}^2 + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_p \tilde{q} + \mathbf{K}_d {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\mu \tilde{q}. \quad (4.6)$$

## 4.4. Controlador adaptable basado en pasividad

En [Slotine y Li, 1987, Spong, 1992, Spong y Vidyasagar, 2008], se deriva un algoritmo de control adaptable en el que se aprovecha la pasividad y linealidad en los parámetros de la dinámica del manipulador, este algoritmo se puede escribir como

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau, \quad (4.7)$$

las ecuaciones de movimiento del manipulador se definen en términos de los momentos de inercia, masas, etc., que deben determinarse para cada robot en particular. La complejidad de las ecuaciones dinámicas hace que la determinación de estos parámetros sea una tarea difícil. Afortunadamente, las ecuaciones de movimiento son lineales en dichos parámetros, de tal manera que existe una función de dimensión  $n \times l$  llamada **Regresor**,  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ , que contiene los términos que involucran las variables articulares y sus derivadas, y un vector de dimensión  $l$  llamado vector de parámetros  $\Theta$ , el cual contiene los términos de inercias, masas y longitudes, tal que se pueden escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) =: Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\Theta = \tau. \quad (4.8)$$

A partir de lo anterior se define la ley de control y la ley de estimación como

$$\tau = \mathbf{Y}(q, \dot{q}, v, a)\hat{\Theta} - \mathbf{K}r, \quad (4.9)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\mathbf{\Gamma}\mathbf{Y}(q, \dot{q}, v, a)r, \quad (4.10)$$

donde  $v$ ,  $a$  y  $r$  están definidos como

$$\begin{aligned} v &= \dot{q}_d - \mathbf{\Lambda}\tilde{q}, \\ a &= \dot{v} = \ddot{q}_d - \mathbf{\Lambda}\dot{\tilde{q}}, \\ r &= \dot{q} - v = \dot{\tilde{q}} + \mathbf{\Lambda}\tilde{q}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

los cuales nos ayudan a eliminar el error de posición en estado estable;  $\tilde{q} = q - q_d$ ;  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$  y  $\mathbf{\Lambda}$  son matrices diagonales de ganancias positivas. Para calcular la estimación de los parámetros se pueden utilizar métodos estándar como el gradiente o mínimos cuadrados. En [Slotine y Li, 1987, Spong, 1992, Spong y Vidyasagar, 2008] hacen uso del gradiente (4.10).

Aplicando la ecuación (4.8) para la ecuación matricial diferencial del robot SCARA (4.7), el Regresor y el vector de parámetros quedan de la siguiente forma

$$\mathbf{Y}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

donde,

$$\begin{aligned} y_{11} &= \ddot{q}_1, \\ y_{12} &= y_{22} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2, \\ y_{13} &= \cos(q_2)[2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] - \sin(q_2)[\dot{q}_2\dot{q}_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2], \\ y_{14} &= y_{24} = y_{34} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3, \\ y_{15} &= y_{21} = y_{25} = y_{31} = y_{32} = y_{33} = y_{35} = y_{41} = y_{42} = y_{43} = y_{44} = 0, \\ y_{23} &= \cos(q_2)\ddot{q}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_1, \\ y_{45} &= \ddot{q}_4 + g, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\Theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T, \quad (4.14)$$

donde,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= I_1 + m_1 l_{c1}^2 + (m_2 + m_3 + m_4) l_1^2, \\ \theta_2 &= I_2 + m_2 l_{c2}^2 + (m_3 + m_4) l_2^2, \\ \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} + (m_3 + m_4) l_1 l_2, \\ \theta_4 &= I_3 + I_4, \\ \theta_5 &= m_4. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Haciendo uso de la ecuación (4.11) en (4.13), el Regresor queda en términos de  $v$ ,  $a$  y  $r$ , es decir

$$\begin{aligned} y_{11} &= a_1, \\ y_{12} &= y_{22} = a_1 + a_2, \\ y_{13} &= \cos(q_2)[2a_1 + a_2] - \sin(q_2)[\dot{q}_2 v_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) v_2], \\ y_{14} &= y_{24} = y_{34} = a_1 + a_2 + a_3, \\ y_{15} &= y_{21} = y_{25} = y_{31} = y_{32} = y_{33} = y_{35} = y_{41} = y_{42} = y_{43} = y_{44} = 0, \\ y_{23} &= \cos(q_2) a_1 + \sin(q_2) \dot{q}_1 v_1, \\ y_{45} &= a_4 + g. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para este controlador, el enfoque fraccionario se aplica a la ecuación (4.10) debido a que es la que estima los parámetros y una derivada de orden no entero realiza una mejor estimación, por lo tanto, queda expresada de la siguiente forma

$${}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\sigma \hat{\Theta} = -\Gamma \mathbf{Y}(q, \dot{q}, v, a)r. \quad (4.17)$$

## 4.5. Controlador modo deslizante integral

En [Tiwari *et al.*, 2015, Nadda y Swarup, 2018], utilizan un enfoque de control modo deslizante integral no lineal para obtener el control de posición de un manipulador robótico. Este control propuesto es simple, robusto y mejora efectivamente el rendimiento del sistema. Este control será aplicado al robot Stanford, su modelo está representado como

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (4.18)$$

Los autores de [Nadda y Swarup, 2018] desarrollan un algoritmo de control para el control de posición de un manipulador robótico. Teniendo en cuenta la señal de control con dos componentes

$$\boldsymbol{\tau} = U_{eq} + U_{sw}, \quad (4.19)$$

donde  $U_{eq}$  es el control equivalente sin perturbaciones, dado por

$$U_{eq} = M(q)[\ddot{q}_d - \mathbf{K}_d \dot{\tilde{q}} - \mathbf{K}_p \tilde{q}] + N(q, \dot{q}), \quad (4.20)$$

donde  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales de ganancias positivas;  $\tilde{q} = q - q_d$ .  $U_{sw}$  es el control de conmutación, asegura la discontinuidad de la ley de control a través de la superficie deslizante proporcionando un control adicional para manejar las perturbaciones o incertidumbres.

$$U_{sw} = K \text{sat}(s), \quad (4.21)$$

donde  $s$  es la superficie deslizante, se define como

$$s = s_0 + z + z(0), \quad (4.22)$$

donde,

$$s_0 = [\mathbf{K}_d \quad I] \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_d \tilde{q} + \dot{\tilde{q}}, \quad (4.23)$$

$$\dot{z} = -[\mathbf{K}_d \quad I] \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ -M(q)^{-1}N(q, \dot{q}) + M(q)^{-1}U_{eq} - \ddot{q}_d \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

si sustituimos la ecuación (4.20) en (4.24) y después la integramos para obtener  $z$  tenemos:

$$z = \mathbf{K}_p \int \tilde{q}, \quad (4.25)$$

para  $z(0)$  tenemos

$$z(0) = -\mathbf{K}_d \tilde{q}(0) - \dot{\tilde{q}}(0). \quad (4.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.23), (4.25) y (4.26), la superficie deslizante queda de la siguiente manera

$$s = \dot{\tilde{q}} + \mathbf{K}_d \tilde{q} + \mathbf{K}_p \int \tilde{q} - \dot{\tilde{q}}(0) - \mathbf{K}_d \tilde{q}(0). \quad (4.27)$$

La función  $sat(\bullet)$  evita el efecto chattering, el cual afecta el rendimiento general, esta función de saturación está dada por

$$sat(s) = \begin{cases} s, & \text{si } |s| \leq 1 \\ sign(s), & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

Para este controlador el enfoque fraccionario se aplica tanto a la derivada como a la integral del error de seguimiento de trayectoria  $\tilde{q}$ , expresadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\lambda \tilde{q}, \\ & {}_0^{ABC} \mathcal{I}_t^\gamma \tilde{q}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

## 4.6. Controlador basado en una red neuronal

Las redes neuronales multicapa son herramientas poderosas, que se usan generalmente en el diseño de controladores basados en la propiedad de aproximación, estas redes están compuestas de la capa de entrada, la capa de salida y al menos una capa oculta (SHL por sus siglas en inglés) que contiene las funciones de activación.

Numerosos trabajos han utilizado las redes neuronales para el control de manipuladores, [Le *et al.*, 2019, Sun *et al.*, 2011, Jung, 2016, Rahmani y Belkheiri, 2016], conjugados con otros enfoques, por ejemplo, modos deslizante, adaptable, robustos, etc. El control neuronal será aplicado al manipulador PUMA 560, cuya ecuación es:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}] + \mathbf{A}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}}^2] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (4.30)$$

En [Rahmani y Belkheiri, 2016], definen la entrada de control como

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{f}}(x) + \mathbf{K}_d e_f, \quad (4.31)$$

donde  $\mathbf{K}_d$  es una matriz diagonal de ganancias positivas, se define el error de seguimiento  $\tilde{q}$  y error de seguimiento filtrado  $e_f$  como

$$\tilde{q} = q_d - q, \quad (4.32)$$

$$e_f = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}, \quad (4.33)$$

donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal de ganancias positivas,  $\hat{\mathbf{f}}$  es la salida de la red neuronal y es dada por

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{W}^T \phi(x), \quad (4.34)$$

donde  $\phi(\bullet)$  es la función de activación (tangente hiperbólica),  $x \equiv [\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T, q_d^T, \dot{q}_d^T, \ddot{q}_d^T]^T$  y  $\hat{W}$  es la estimación de los pesos sinápticos, la cual se obtiene de la siguiente forma:

$$\dot{\hat{W}} = \eta \phi(x) e_f^T, \quad (4.35)$$

donde  $\eta$  es un parámetro escalar constante. El enfoque fraccionario aplicado a este control es en la derivada del error y en la estimación de  $\hat{W}$ , ambas ecuaciones queden representadas como

$${}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\theta \tilde{q}, \quad (4.36)$$

$${}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\psi \hat{W} = \eta \phi(x) e_f^T. \quad (4.37)$$

## 4.7. Conclusión

En este capítulo se presentó el diagrama general de control para el seguimiento de trayectoria de los robots manipuladores actuados por motores de inducción. Se diseñó un controlador  $PI^{\zeta}$  para el caso de los motores de inducción. Como primera parte se diseñó un control  $PD^{\mu}$  para los tres robots, cuyo enfoque fraccionario es aplicado en la derivada del error de seguimiento. Para la segunda parte, en el caso del robot SCARA se diseña un controlador adaptable basado en pasividad, en el cual, el enfoque fraccionario es aplicado a la estimación del vector de parámetros; para el robot Stanford se diseña un controlador modo deslizante integral, el cálculo fraccionario se aplica en la derivada e integral del error de seguimiento; por último, para el robot PUMA 560 se diseña un controlador basado en una red neuronal, el enfoque fraccionario se aplica en la derivada del error de seguimiento y en la estimación de los pesos sinápticos.

## Capítulo 5

# Resultados numéricos (simulaciones)

Este capítulo se presentan los resultados del desempeño de los controladores fraccionarios comparándolos con su contraparte. Los controladores presentados en el capítulo 4 quedan aplicados al motor y a los robots manipuladores propuestos, de la siguiente manera

Controladores	}	- Motor	{	- $PI^\zeta$
		- SCARA	{	- $PD^\mu$ - Adaptable basado en pasividad
		- Stanford	{	- $PD^\mu$ - Modo deslizante integral
		- PUMA 560	{	- $PD^\mu$ - Red neuronal

Para los sistemas acoplados el modelo clásico se puede recuperar al considerar  $\alpha = 1$ , se tomará este valor por el motivo de que se agregarán fricciones a los sistemas para medir la robustez de los controladores, tales fricciones causan disipación. La sintonización de todos los controladores (fraccionario y clásico) se realizaron sin perturbaciones y para una sola trayectoria, para así, demostrar que los controladores fraccionarios son más robustos ante cambios de trayectoria, fuerzas externas e incertidumbres de modelado, que los controladores de orden entero.

## 5.1. SCARA

### 5.1.1. $PD^\mu$

Para el robot SCARA, el primer control aplicado es el  $PD^\mu$  con las siguientes trayectorias; Trayectoria 1 (C.1), Trayectoria 2 (C.3) y Trayectoria 3 (C.5), cuyos parámetros se muestran en la Tabla 5.1. Los resultados de la sintonización para los controladores clásico y de orden no entero se muestran en las Tablas 5.2 y 5.3, respectivamente. En las Tablas 5.4, 5.5 y 5.6 se muestra la comparación del desempeño de los controladores para cada una de las articulaciones del manipulador respecto a cada trayectoria. Los resultados se muestran de la Figura 5.1 a 5.48.

$q_i$	Parámetros											
	Trayectoria 1		Trayectoria 2					Trayectoria 3				
	$a_0$	$a_1$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
1	$-\frac{\pi}{10}$	0.15	$\frac{\pi}{45}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{\pi}{80}$	2	7	-0.234	-0.25	-0.15	0.011	-0.01
2	$\frac{\pi}{6}$	0.10	$\frac{\pi}{35}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{40}$	2	10	0.276	0.25	0.13	-0.04	0.02
3	$-\frac{\pi}{2}$	0.30	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{20}$	3	10	0.345	0.23	0.15	-0.06	0.03
4	$\frac{\pi}{12}$	0.20	$\frac{\pi}{25}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{40}$	1.5	10	-0.265	0.20	0.10	0.01	0.05

Tabla 5.1: Parámetros de las trayectorias deseadas para los controladores PD y  $PD^\mu$  aplicado al robot SCARA.

$q_i$	PI				PD	
	$K_{pvd}$	$K_{ivd}$	$K_{pvq}$	$K_{ivq}$	$K_p$	$K_d$
$q_1$	691.3855	87.4000	598.4302	27.6726	334.7301	75.6967
$q_2$	740.3201	88.8939	809.8071	946.3714	555.5698	44.8216
$q_3$	508.4860	360.8038	561.2138	553.6556	535.3406	75.9279
$q_4$	365.8497	916.2939	362.3943	327.1402	636.5719	41.4674

Tabla 5.2: Ganancias de los controladores PI y PD del robot SCARA.

$q_i$	$PI^\zeta$						$PD^\mu$		
	$K_{pvd}$	$K_{ivd}$	$\zeta$	$K_{pvq}$	$K_{ivq}$	$\zeta$	$K_p$	$K_d$	$\mu$
$q_1$	787.0431	954.5334	0.7042	900.4950	745.7678	0.8478	637.5443	85.3945	0.8501
$q_2$	396.5262	339.6023	0.7022	100.3929	506.8702	0.9839	657.1389	69.4300	0.8632
$q_3$	859.6182	359.0826	0.8274	460.5346	338.4609	0.9774	604.7270	98.3072	0.9693
$q_4$	611.2646	739.1681	0.8824	707.5183	420.8802	0.7847	588.5921	89.7734	0.8918

Tabla 5.3: Ganancias y ordenes de los controladores  $PI^\zeta$  y  $PD^\mu$  del robot SCARA.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 1			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0240	0.0179	0.1217	0.0722
$q_2$	0.0221	0.0185	0.0342	0.0322
$q_3$	0.0197	0.0182	0.0218	0.0199
$q_4$	0.0391	0.0298	0.0393	0.0299

Tabla 5.4: Comparación del desempeño de los controladores PD vs  $PD^\mu$  para la trayectoria 1.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 2			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0163	0.0160	0.0668	0.0486
$q_2$	0.0149	0.0095	0.0454	0.0389
$q_3$	0.0028	0.0026	0.0035	0.0031
$q_4$	0.0171	0.0111	0.0169	0.0108

Tabla 5.5: Comparación del desempeño de los controladores PD vs  $PD^\mu$  para la trayectoria 2.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 3			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0410	0.0354	0.1715	0.1041
$q_2$	0.0214	0.0207	0.0433	0.0407
$q_3$	0.0094	0.0086	0.0097	0.0088
$q_4$	0.0352	0.0255	0.0357	0.0257

Tabla 5.6: Comparación del desempeño de los controladores PD vs  $PD^\mu$  para la trayectoria 3.

Resultados para la trayectoria 1

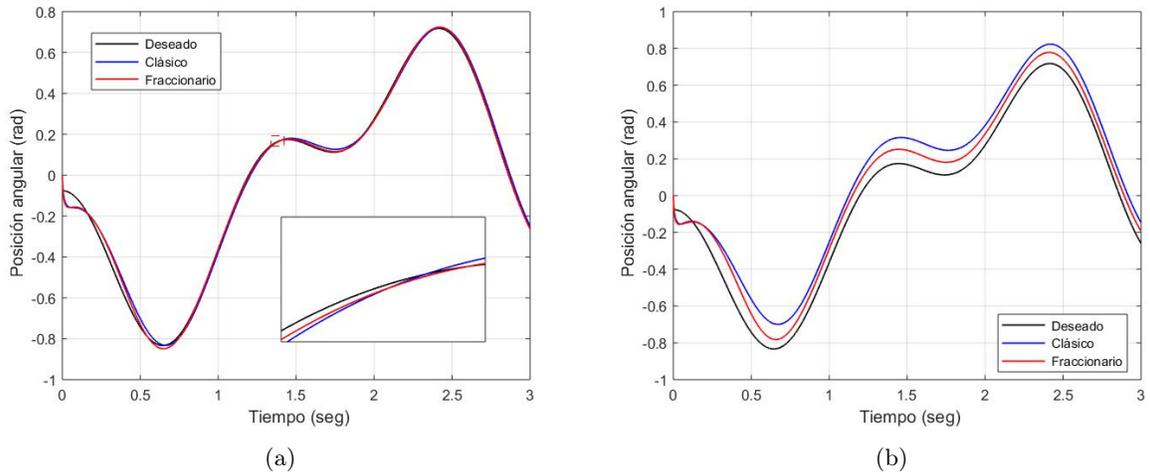


Figura 5.1: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

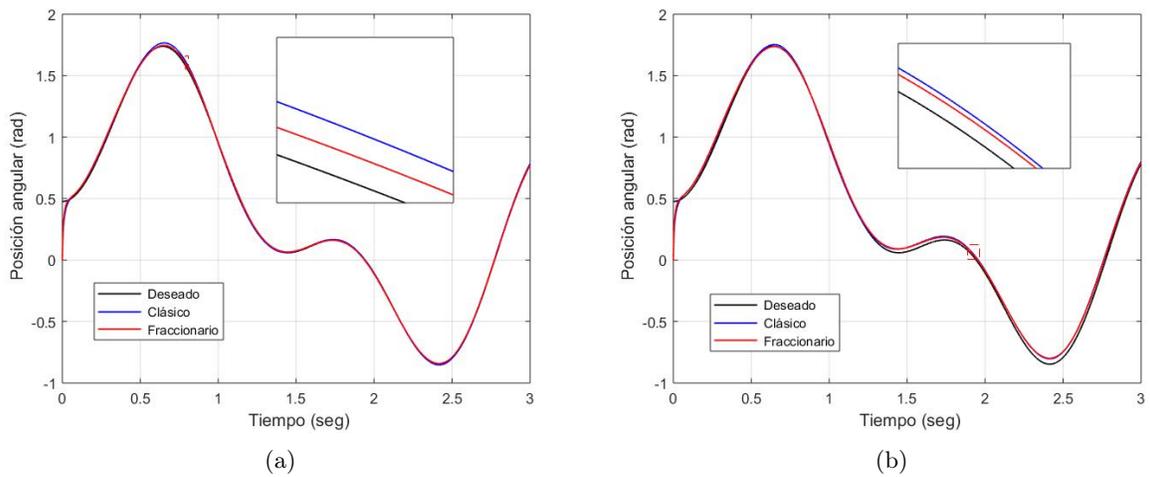


Figura 5.2: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

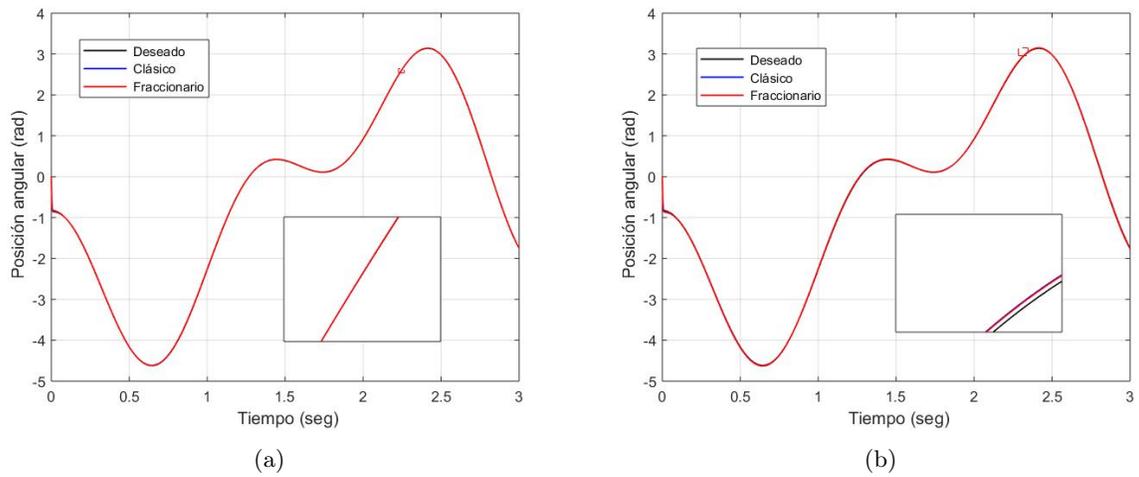


Figura 5.3: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

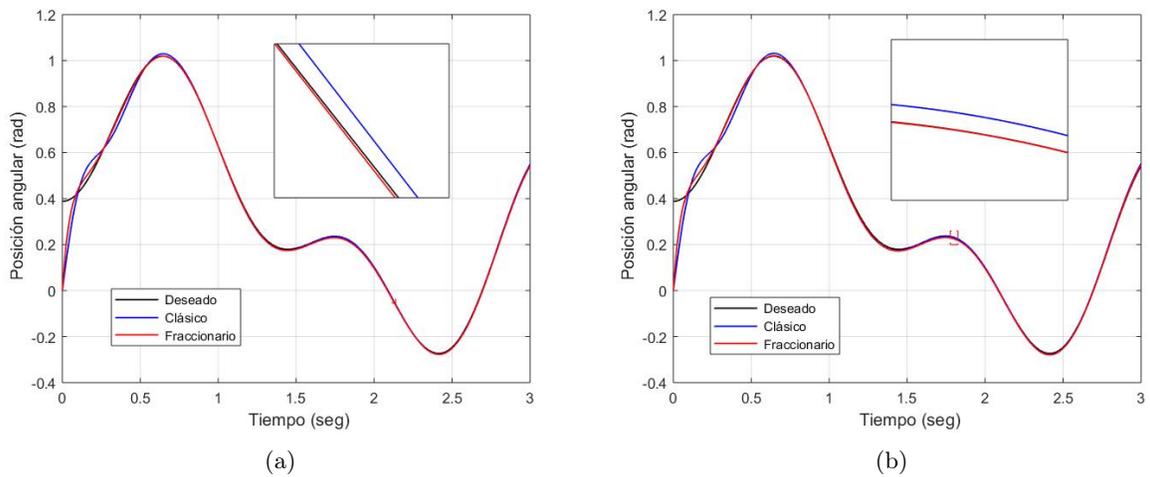
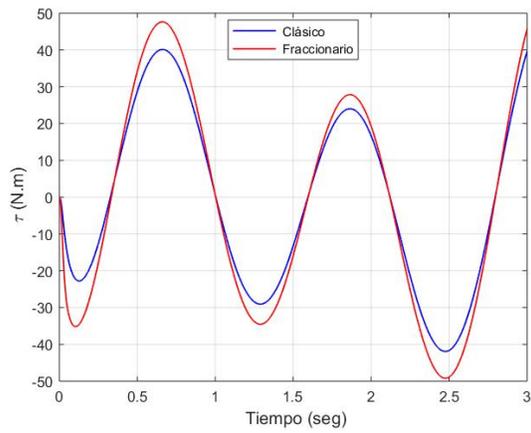
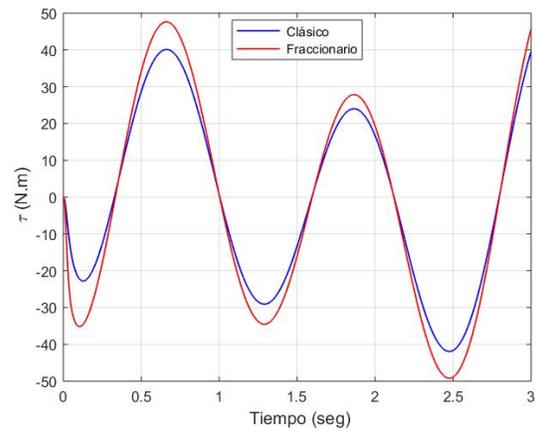


Figura 5.4: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

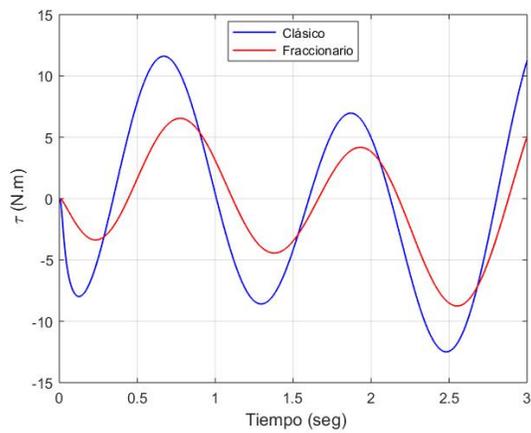


(a)

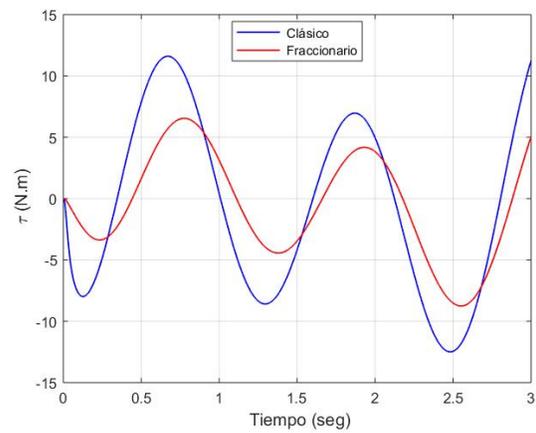


(b)

Figura 5.5: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.6: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

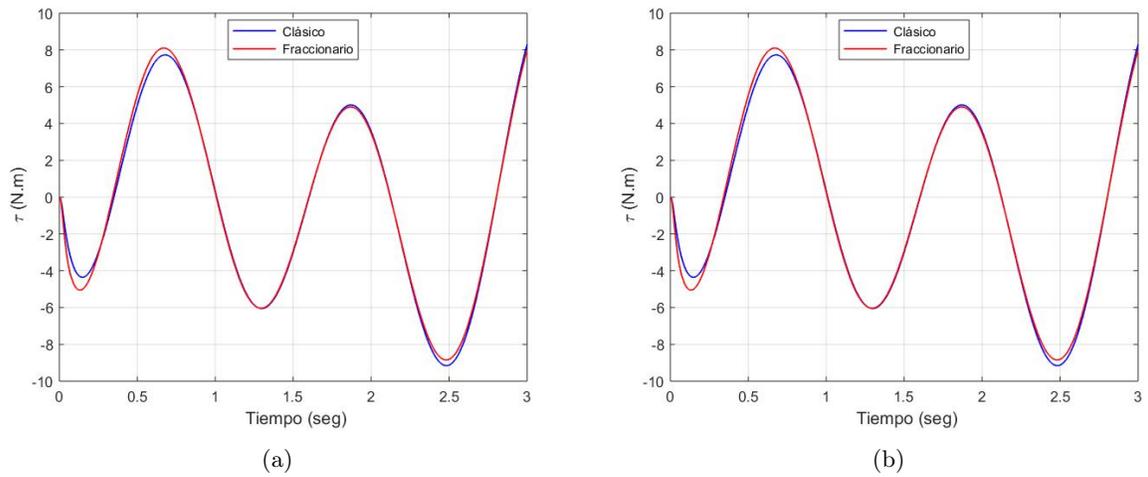


Figura 5.7: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

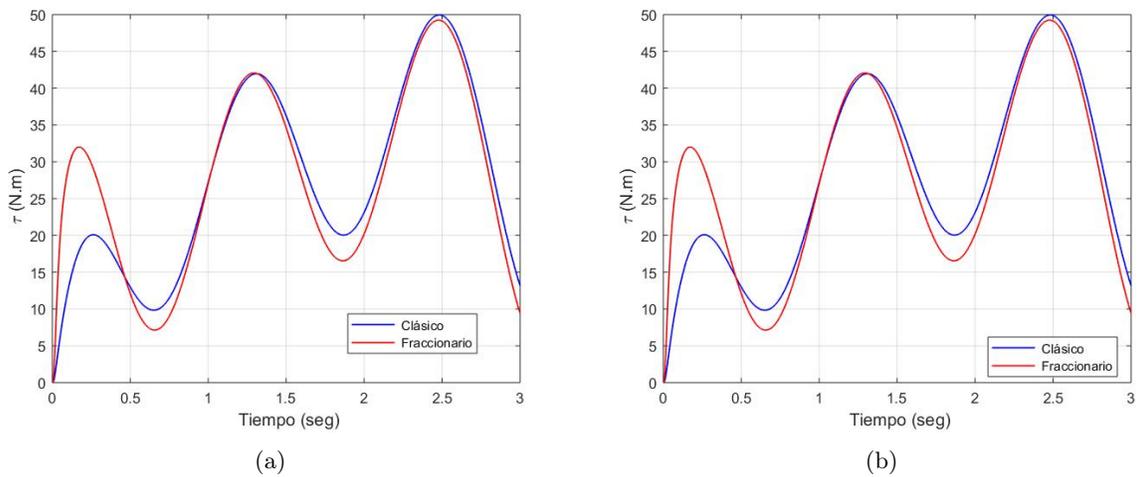


Figura 5.8: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

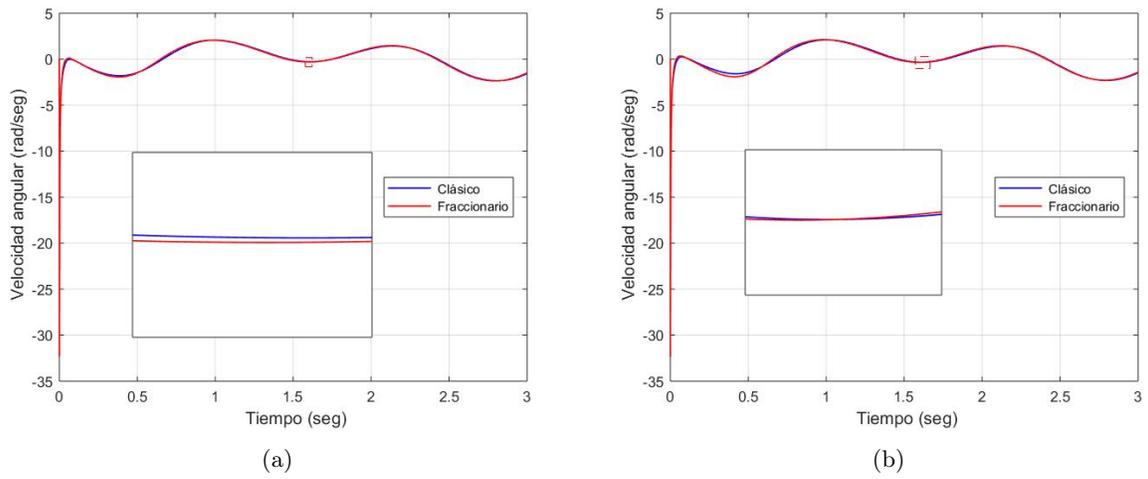


Figura 5.9: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

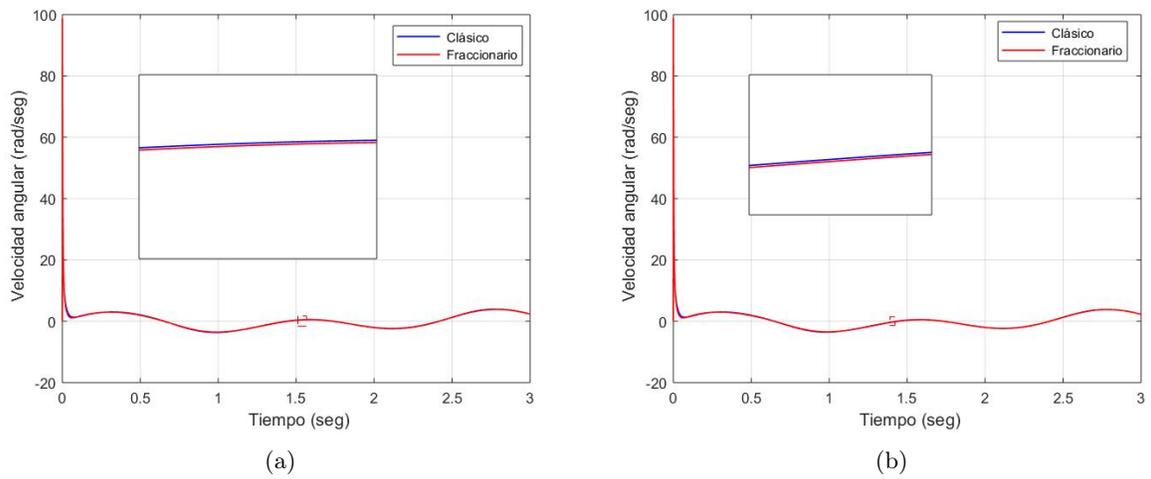


Figura 5.10: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

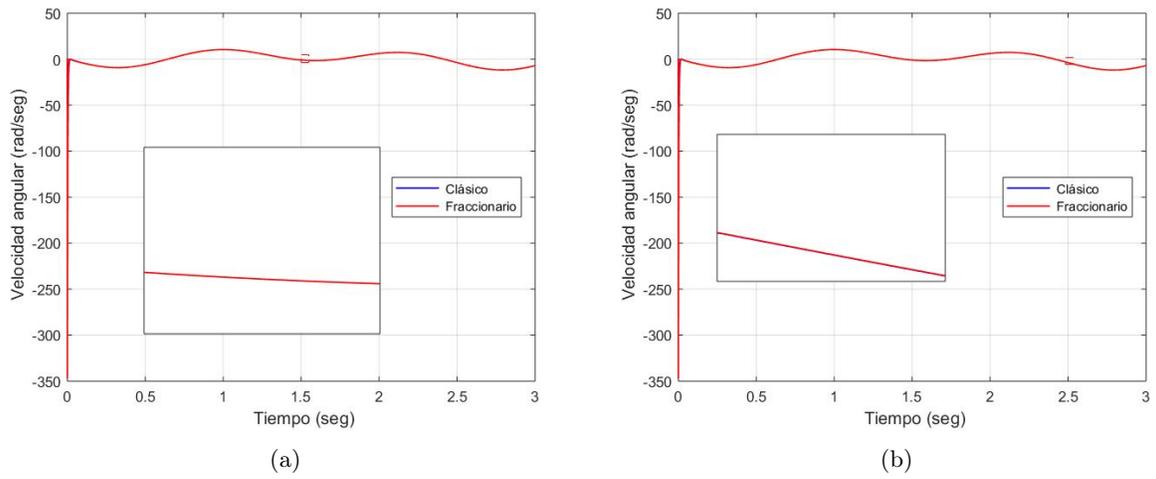


Figura 5.11: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

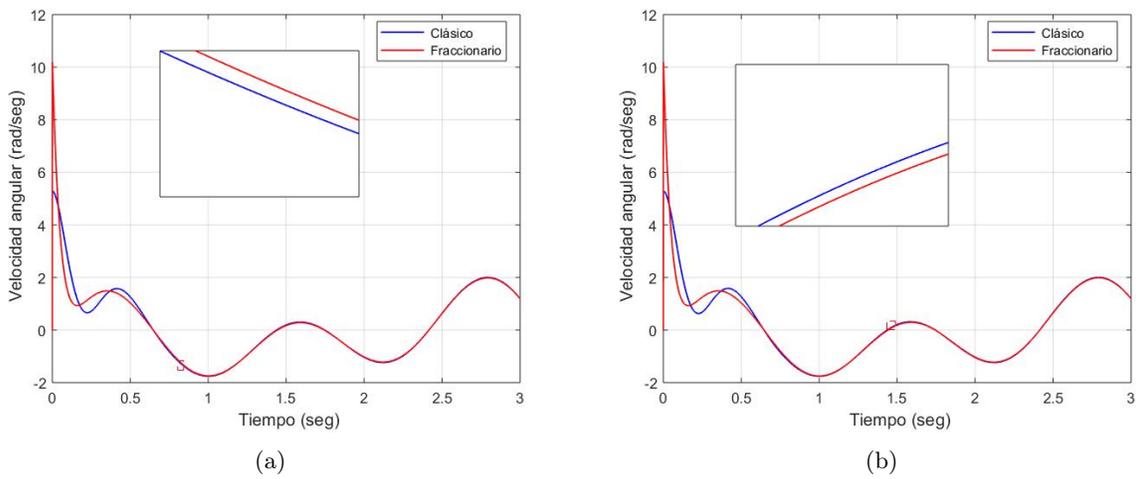
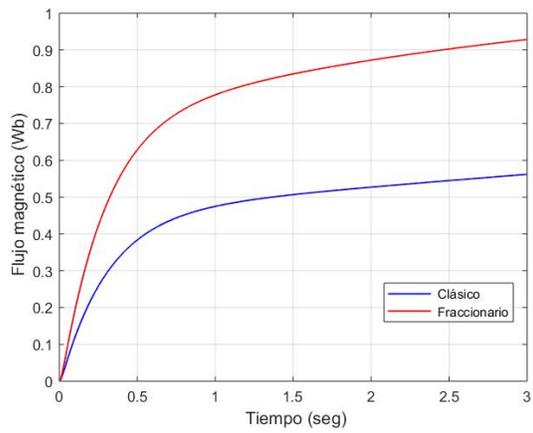
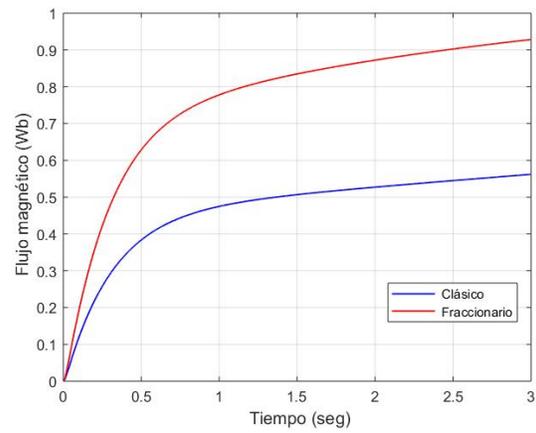


Figura 5.12: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

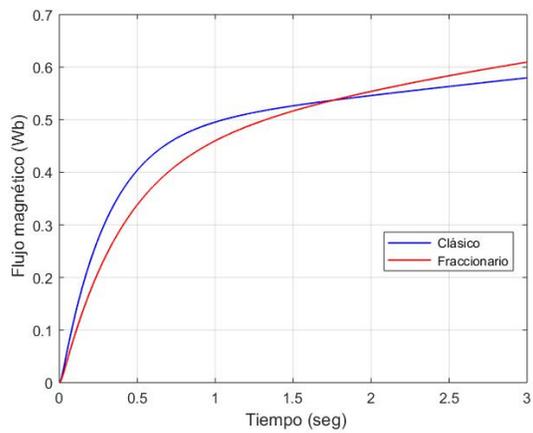


(a)

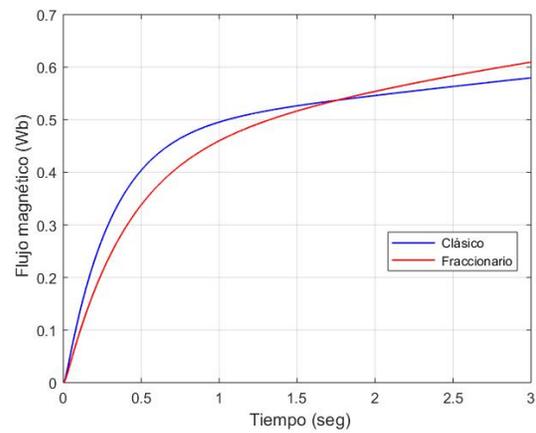


(b)

Figura 5.13: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

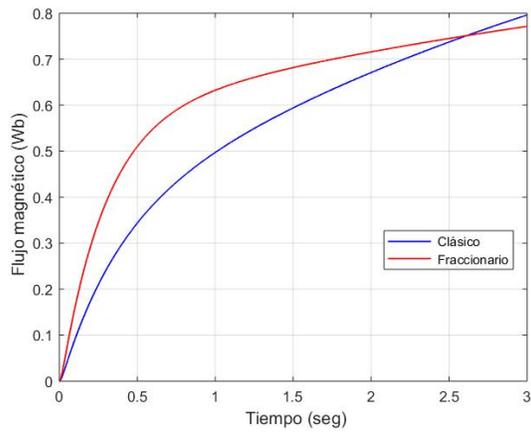


(a)

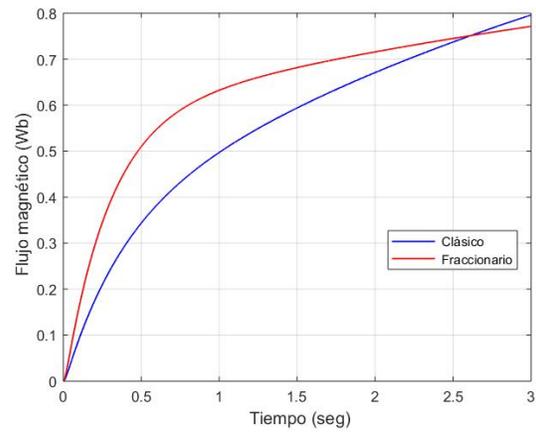


(b)

Figura 5.14: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

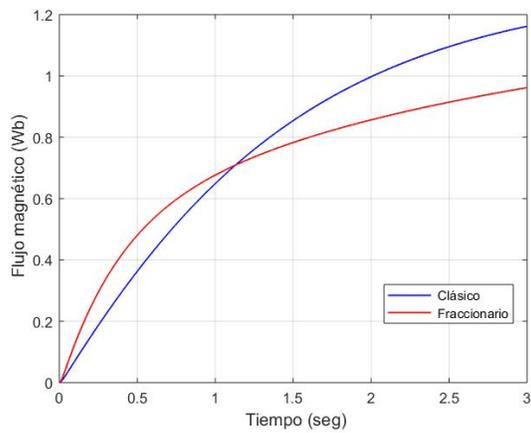


(a)

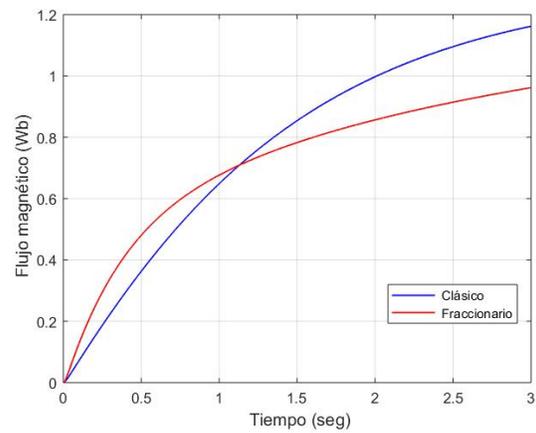


(b)

Figura 5.15: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.16: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

## Resultados para la trayectoria 2

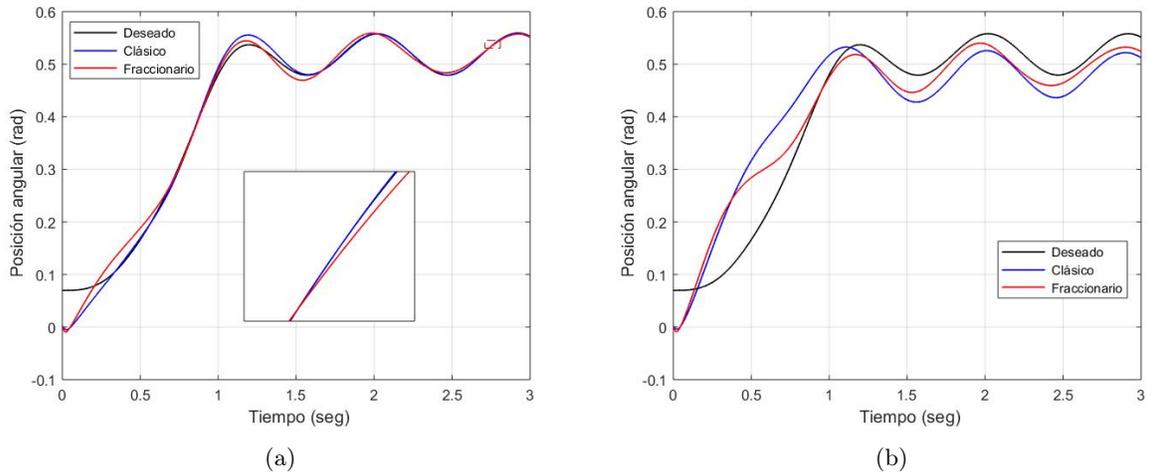


Figura 5.17: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

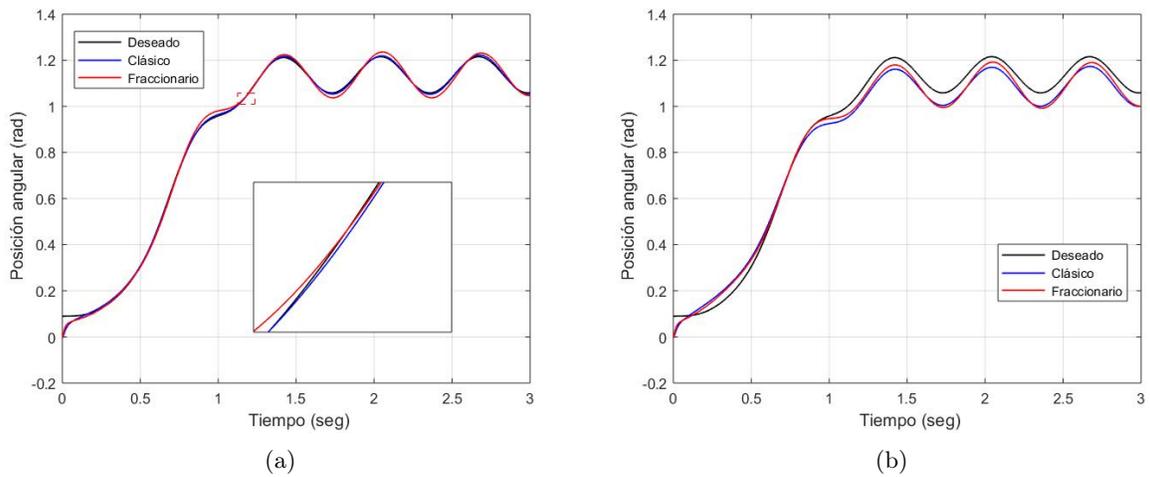


Figura 5.18: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

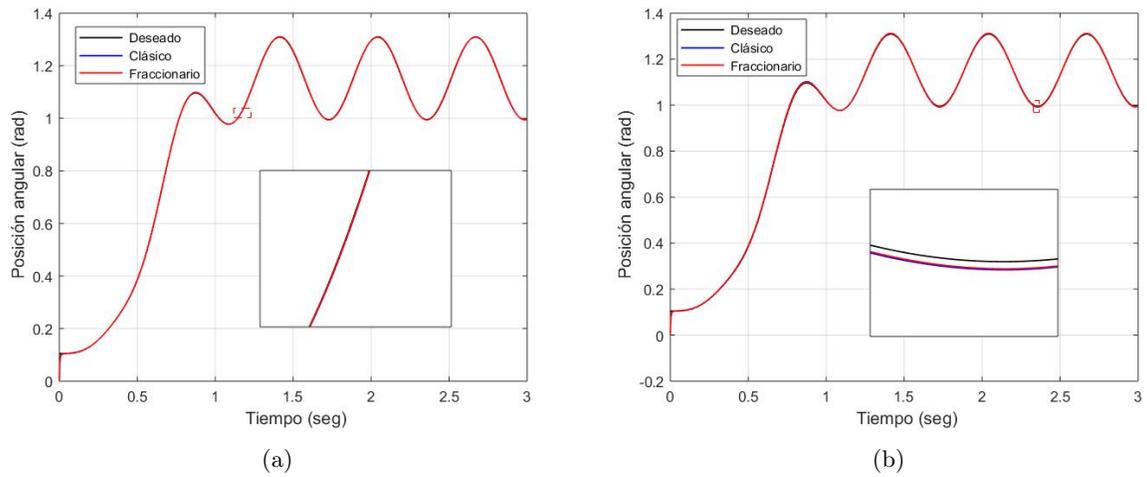


Figura 5.19: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

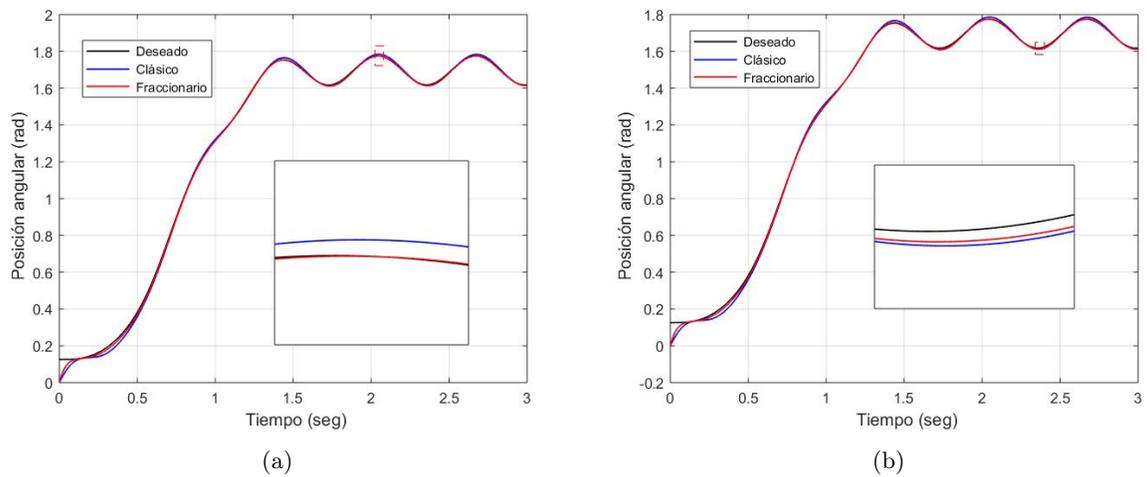


Figura 5.20: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

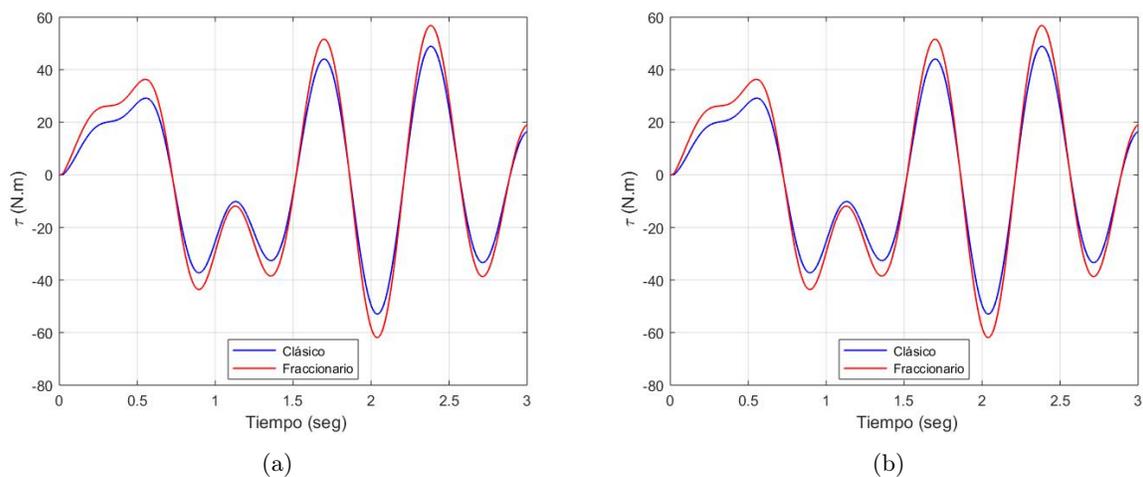


Figura 5.21: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

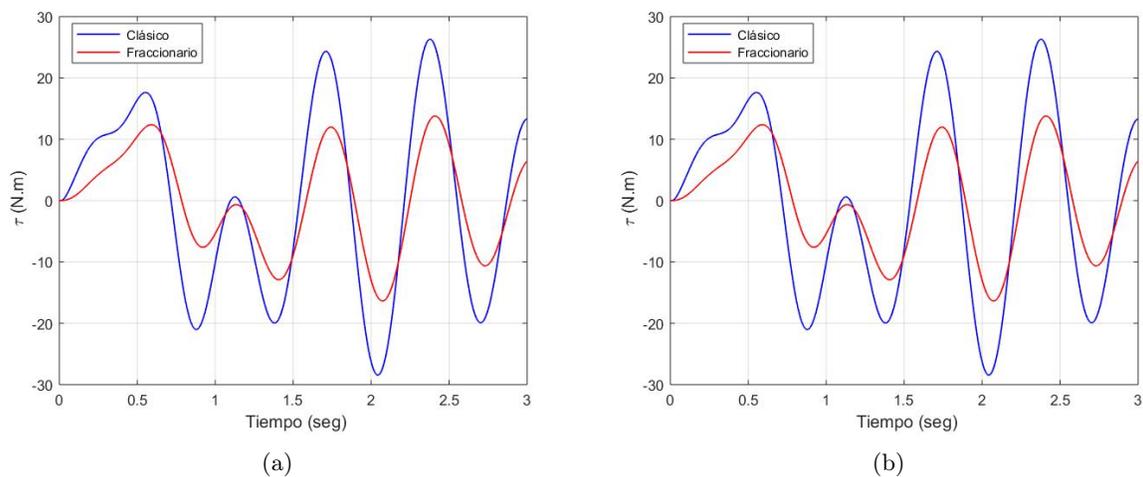


Figura 5.22: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

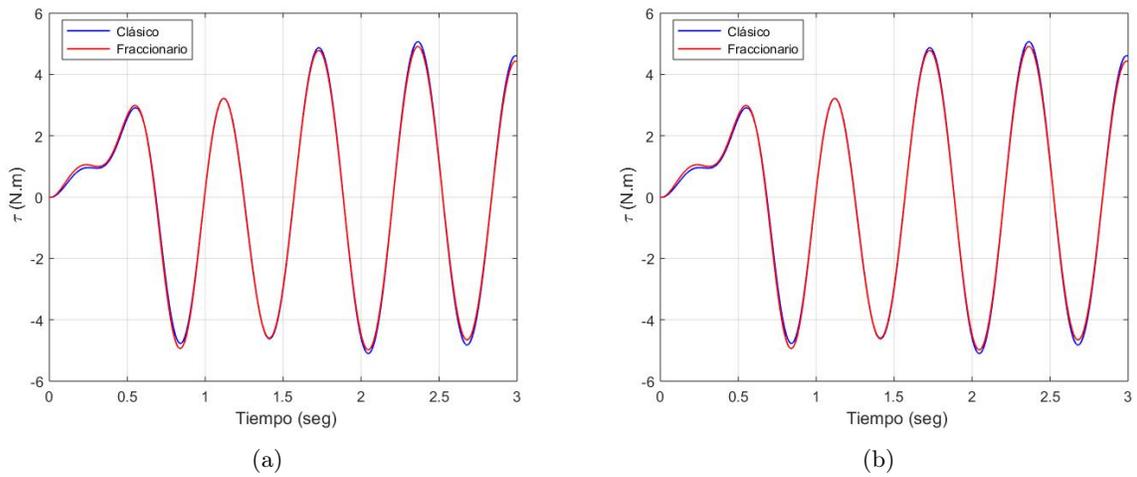


Figura 5.23: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

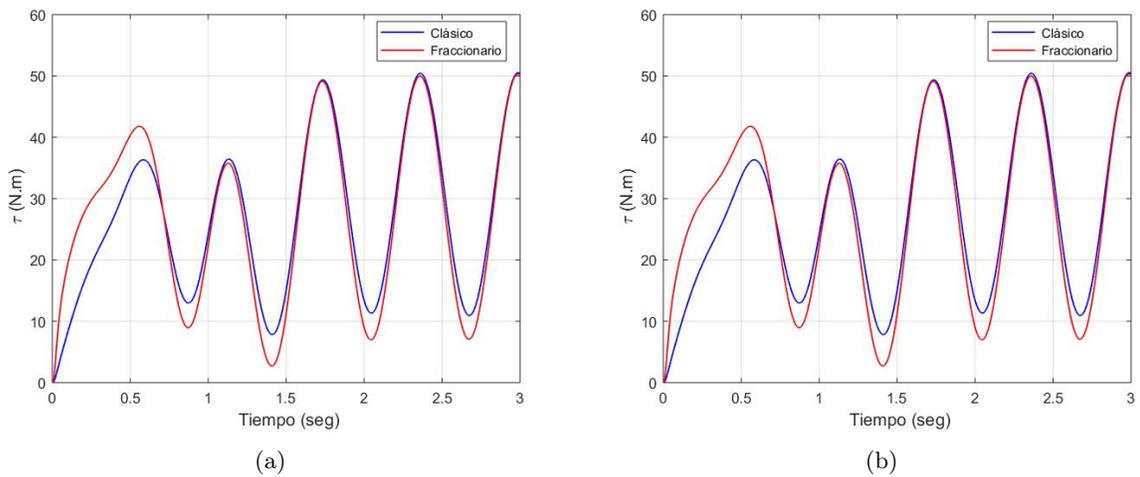


Figura 5.24: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

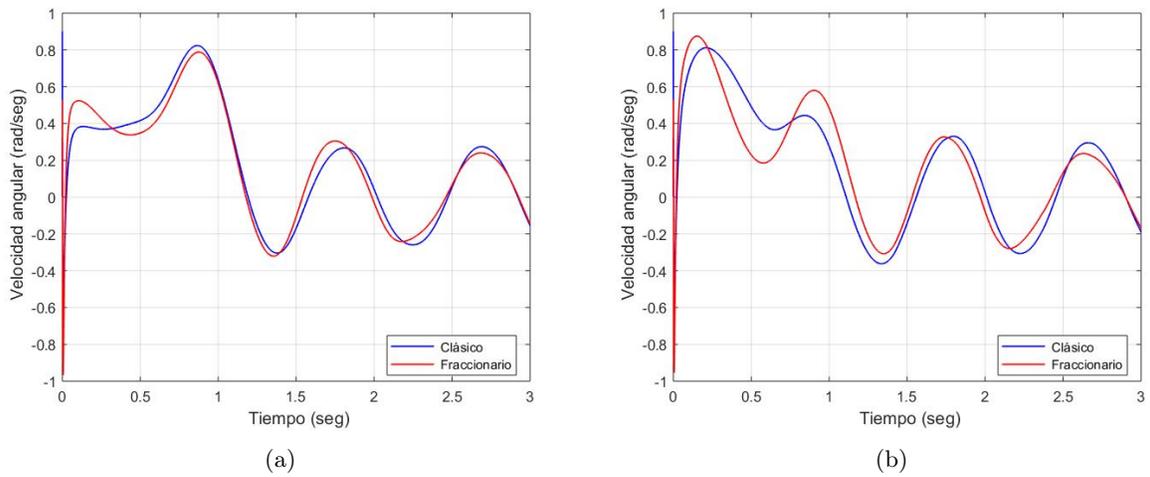


Figura 5.25: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

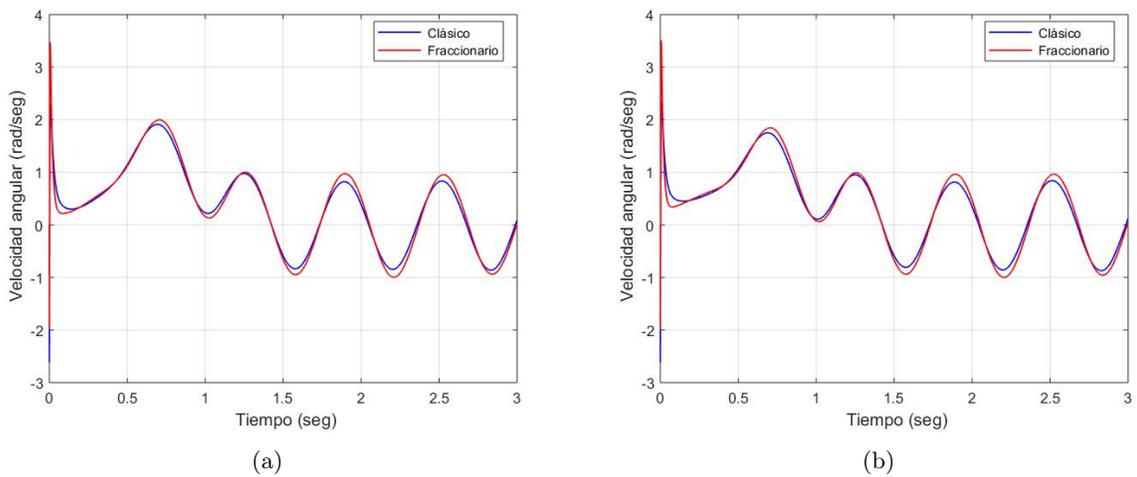


Figura 5.26: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

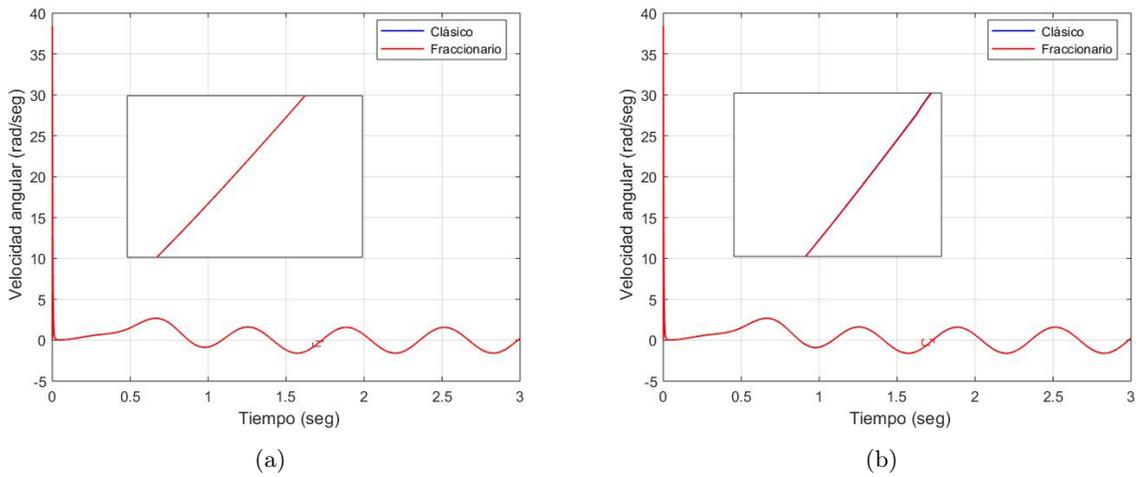


Figura 5.27: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

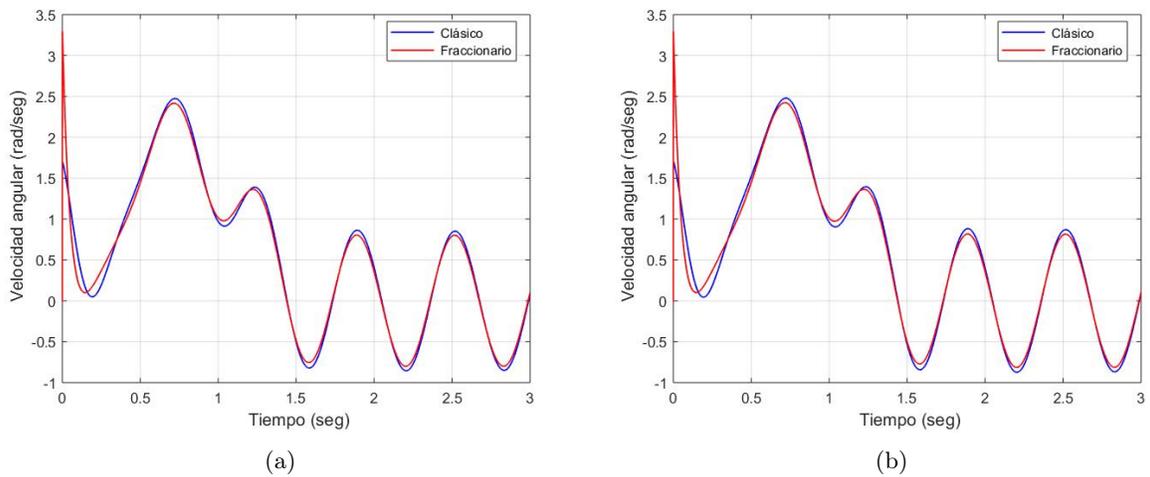
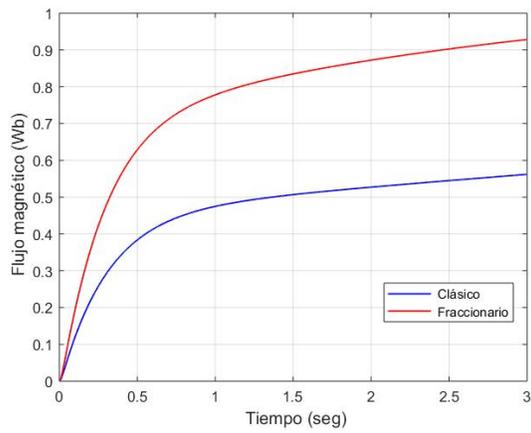
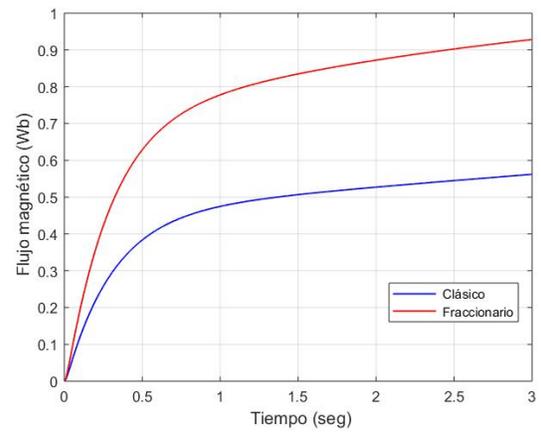


Figura 5.28: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

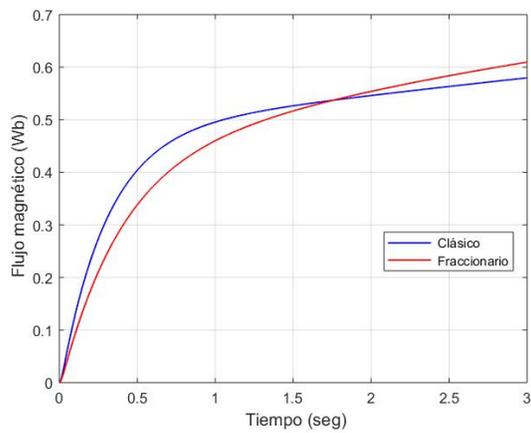


(a)

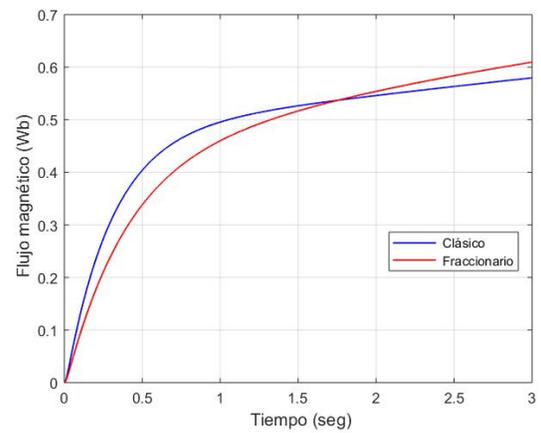


(b)

Figura 5.29: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

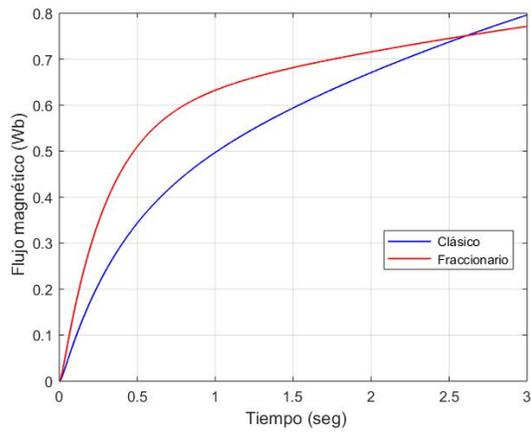


(a)

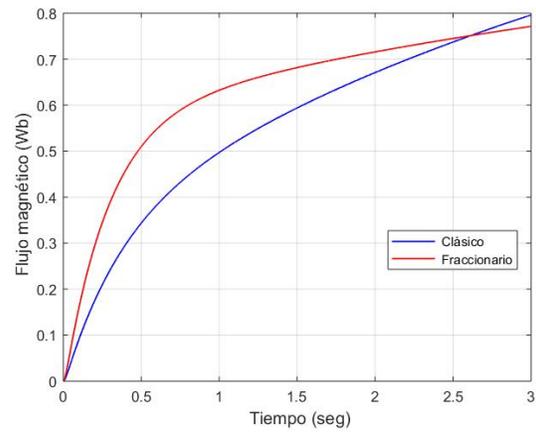


(b)

Figura 5.30: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

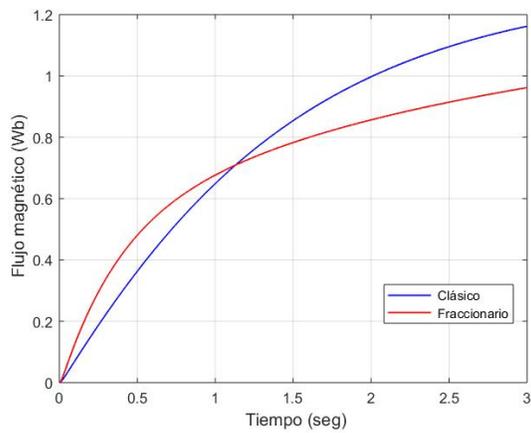


(a)

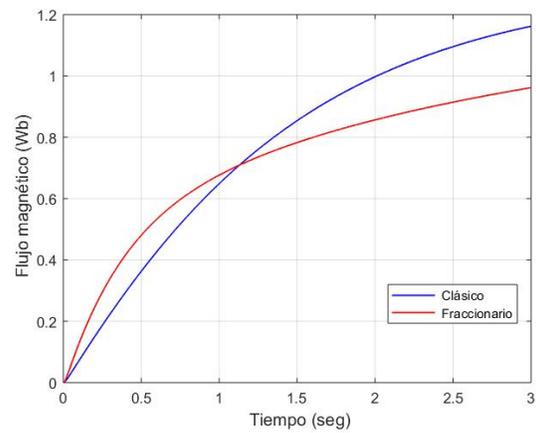


(b)

Figura 5.31: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.32: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

### Resultados para la trayectoria 3

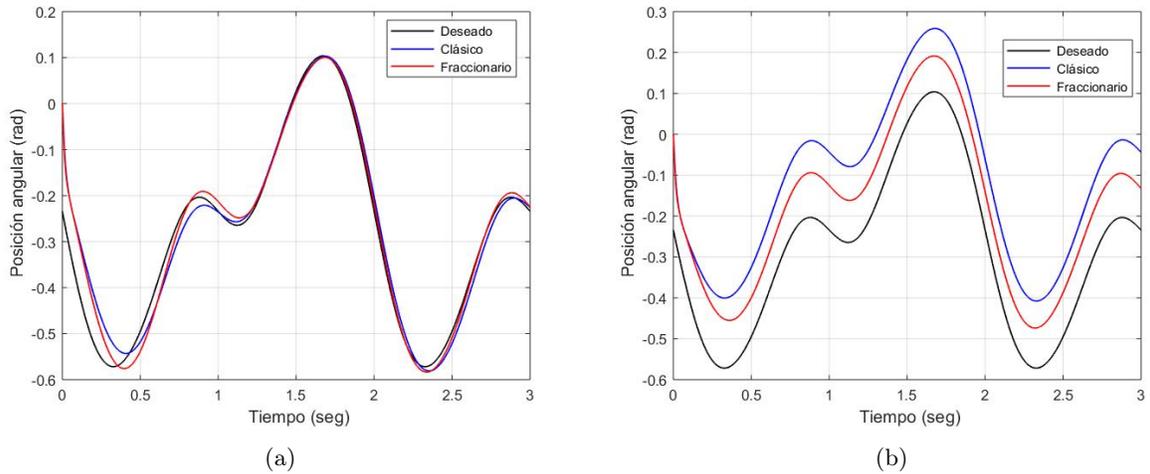


Figura 5.33: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

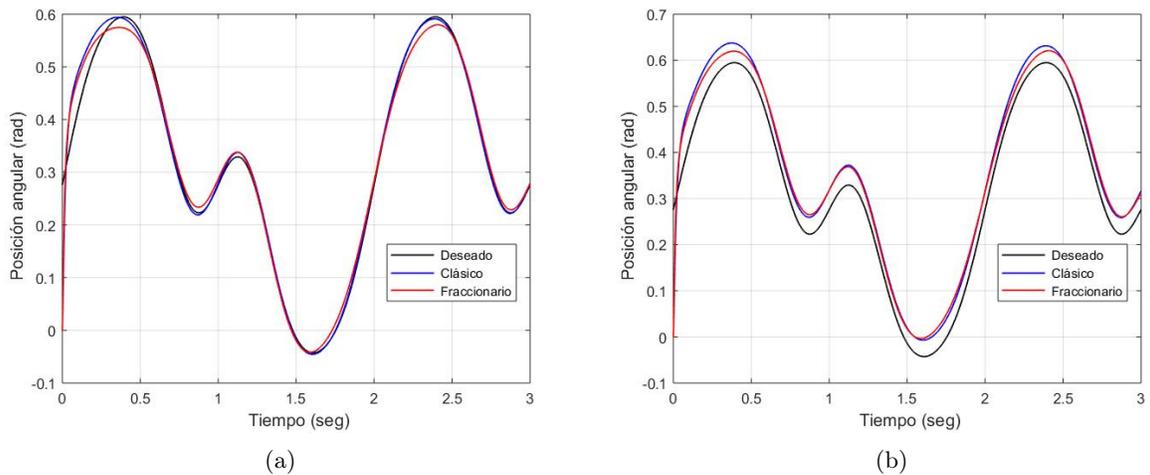


Figura 5.34: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

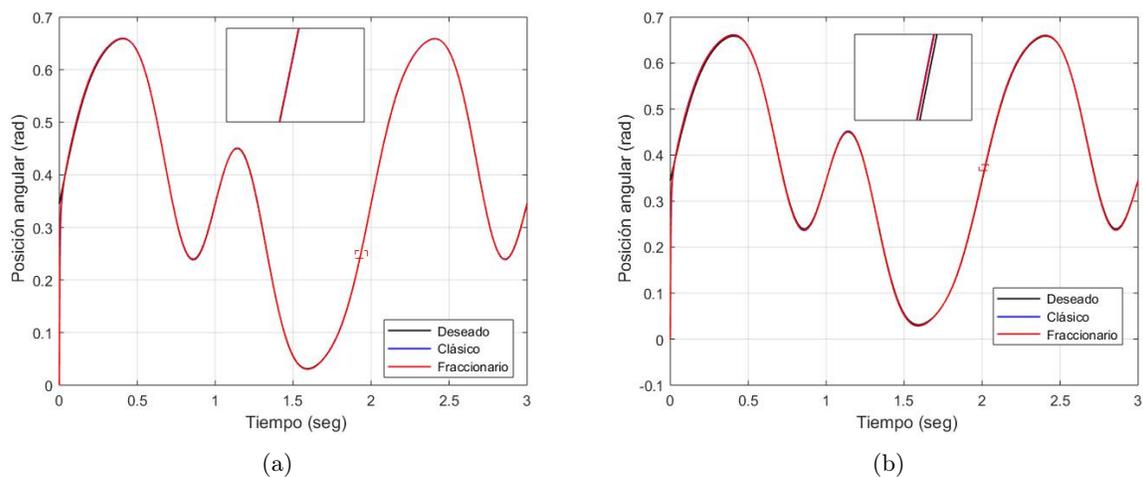


Figura 5.35: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

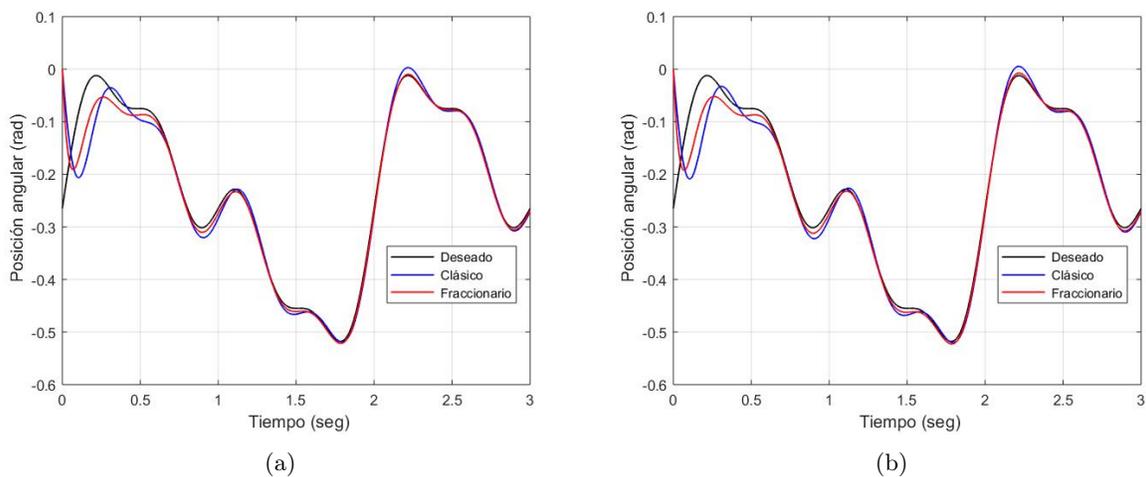


Figura 5.36: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

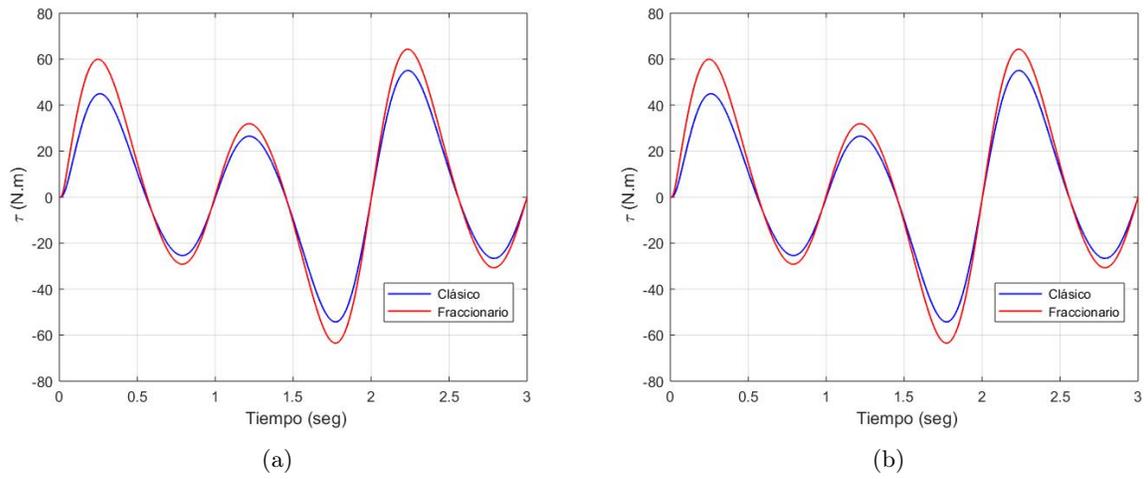


Figura 5.37: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

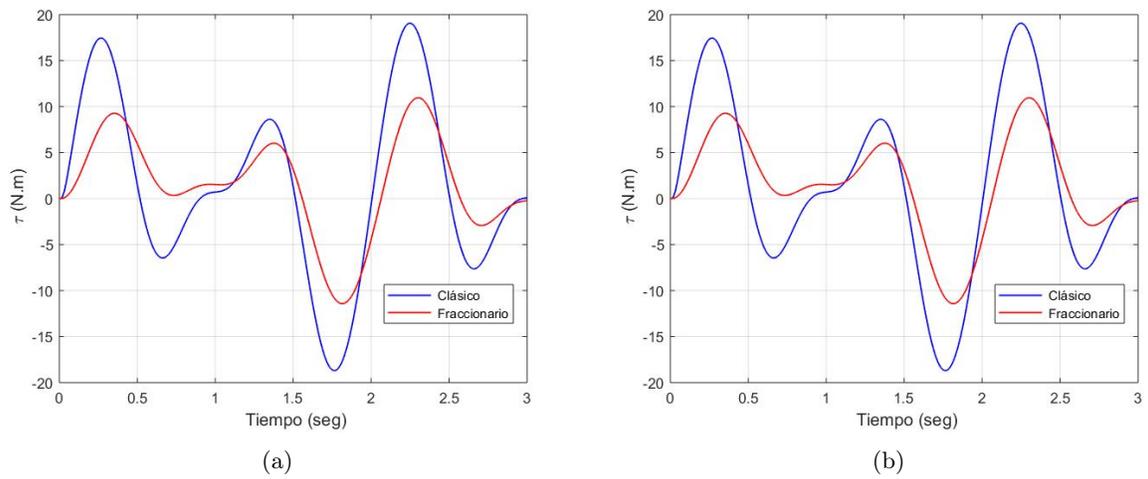


Figura 5.38: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

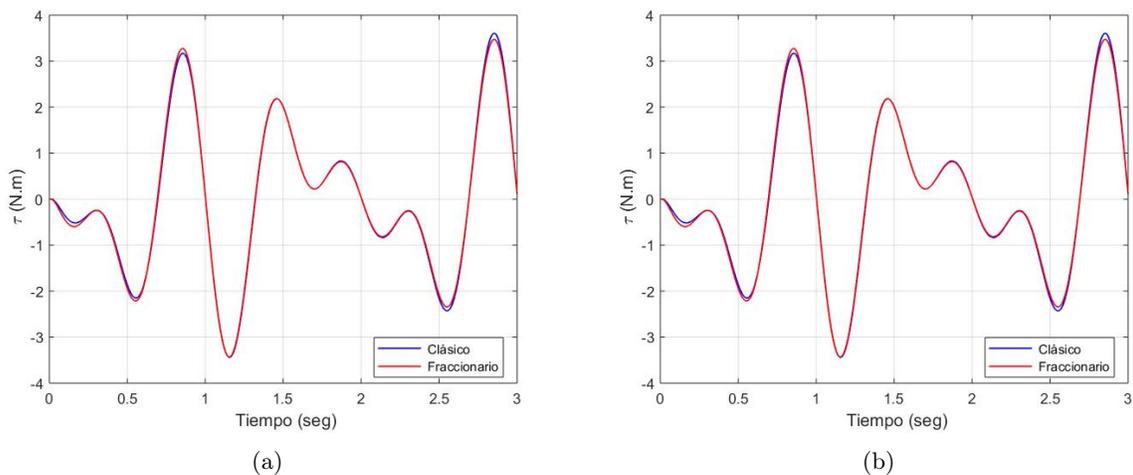


Figura 5.39: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

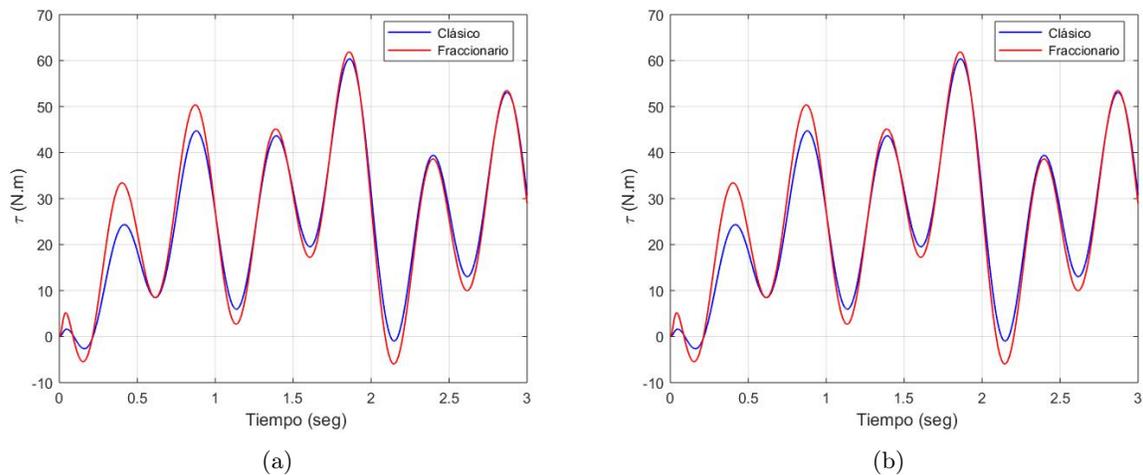


Figura 5.40: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

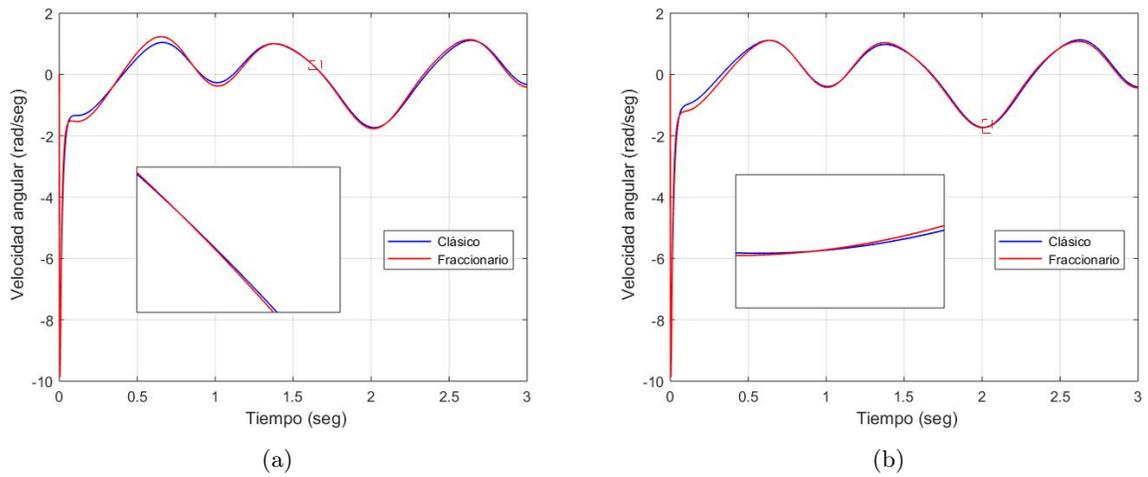


Figura 5.41: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

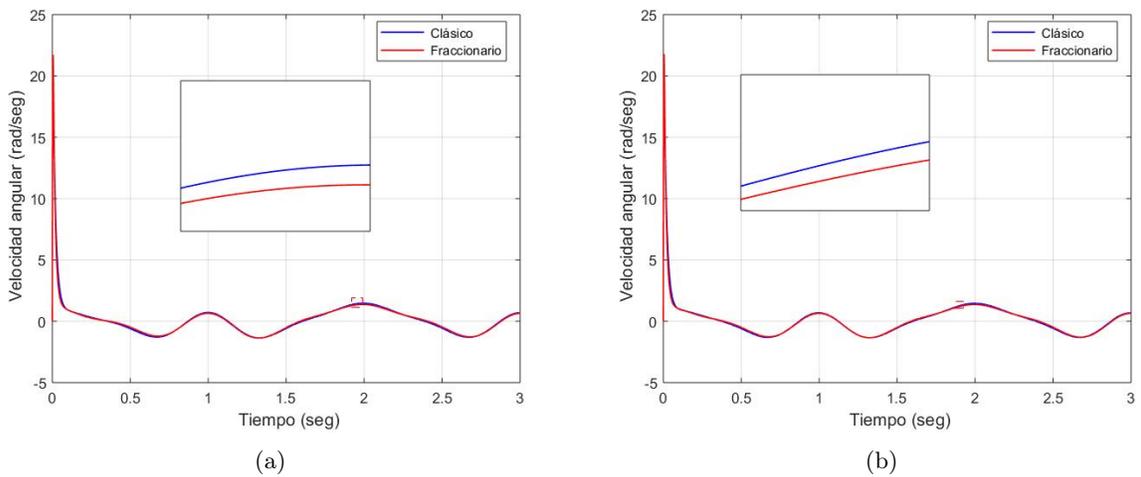


Figura 5.42: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

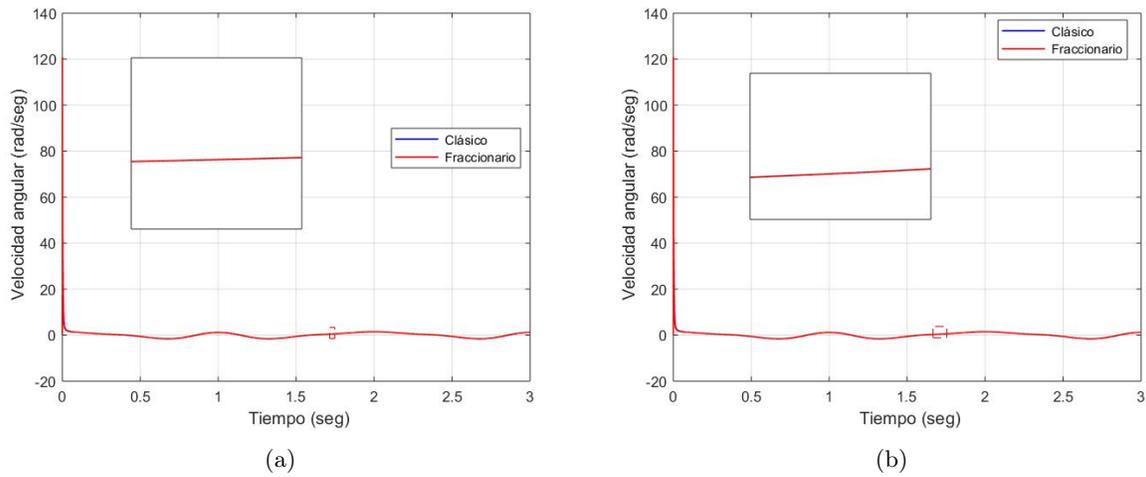


Figura 5.43: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

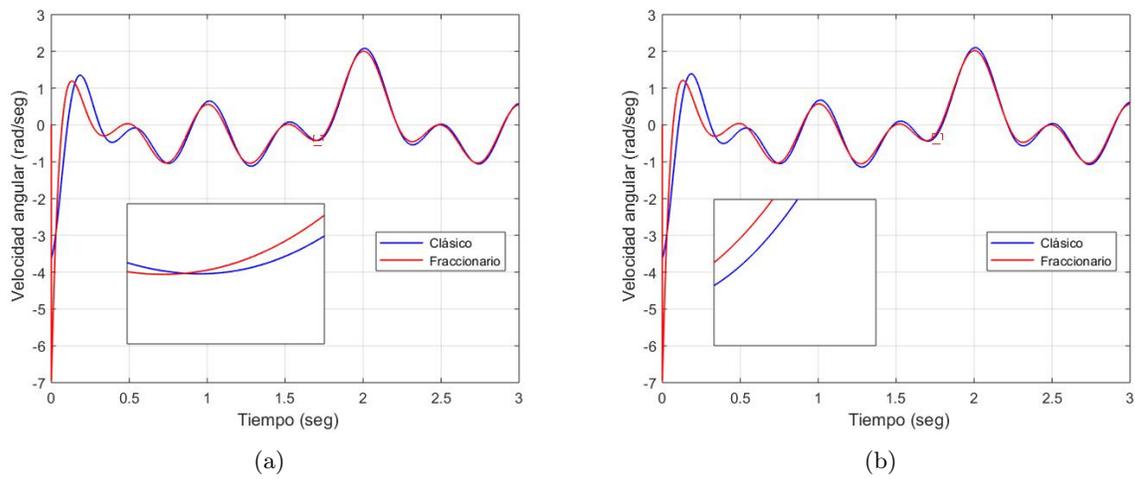
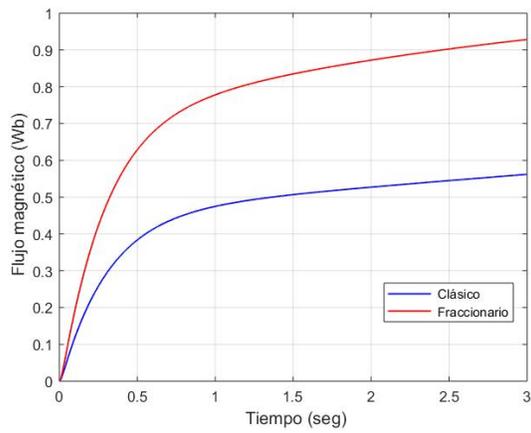
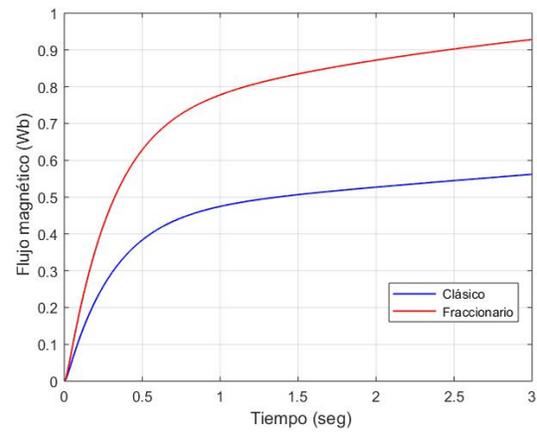


Figura 5.44: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

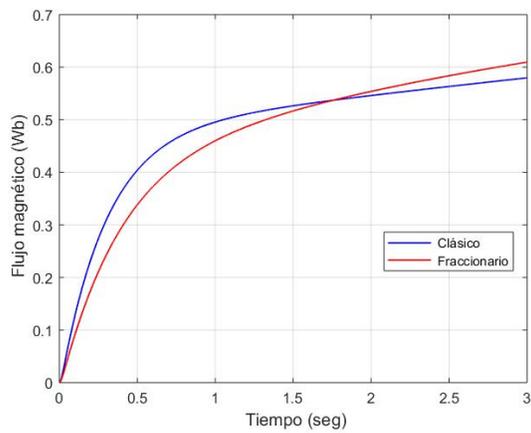


(a)

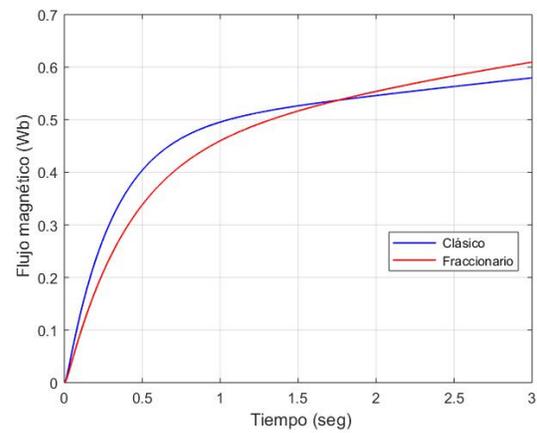


(b)

Figura 5.45: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

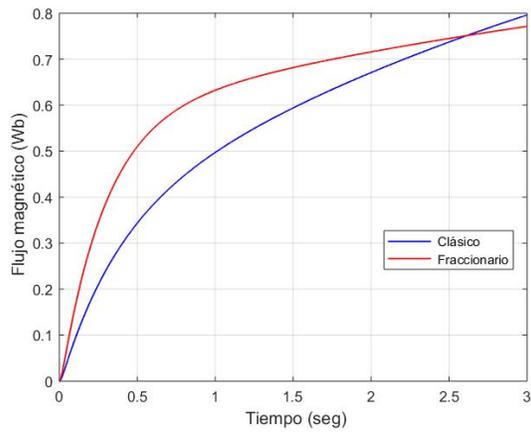


(a)

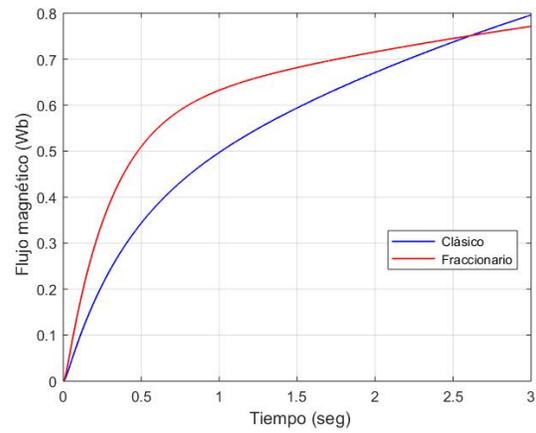


(b)

Figura 5.46: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

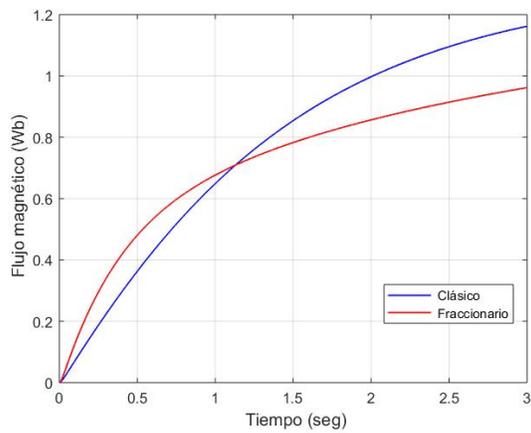


(a)

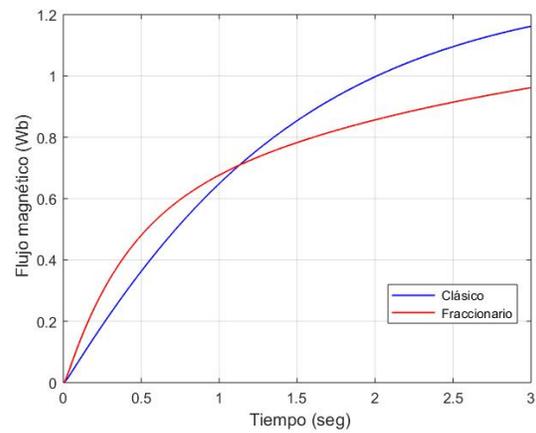


(b)

Figura 5.47: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.48: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

### 5.1.2. Adaptable basado en pasividad

El siguiente control aplicado al robot SCARA es llamado adaptable basado en pasividad; para este control las trayectorias deseadas se obtienen a partir de la cinemática inversa de dicho manipulador cuyos parámetros de la matriz de orientación y posición se muestran en la Tabla 5.7. Los resultados de la sintonización para los controladores clásicos se muestran en las Tablas 5.8 y 5.9; las ganancias y los ordenes para los controladores fraccionarios se muestran en las Tablas 5.10 y 5.11. En las Tablas 5.12, 5.13 y 5.14 se muestra la comparación del desempeño de los controladores para cada una de las articulaciones del manipulador con respecto a cada trayectoria. Los resultados se muestran de la Figura 5.49 a 5.102.

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde  $o_x = a_x = n_y = a_y = n_z = o_z = 0$  y  $n_x = o_y = a_z = 1$  para las tres trayectorias propuestas.

	Trayectoria 1	Trayectoria 2	Trayectoria 3
$\mathbf{P}_x$	$0.10\cos(t) + 0.2$	$0.10\cos(t) + 0.2$	$0.20e^{0.2t}$
$\mathbf{P}_y$	$0.12\sin(t) + 0.1$	$0.12\sin(t) + 0.1$	$0.22e^{0.2t}$
$\mathbf{P}_z$	$0.05t - 0.07$	$-0.15$	$1.2t$

Tabla 5.7: Parámetros de las trayectorias deseadas para los controladores adaptables basados en pasividad clásico y fraccionario aplicado al robot SCARA.

$q_i$	PI			
	$\mathbf{K}_{pvd}$	$\mathbf{K}_{ivd}$	$\mathbf{K}_{pvq}$	$\mathbf{K}_{ivq}$
$q_1$	657.7331	555.1524	551.5535	751.1068
$q_2$	34.2323	290.5724	800.8803	608.5093
$q_3$	749.6514	402.5716	85.6181	835.6627
$q_4$	598.3602	449.7682	181.0538	358.6816

Tabla 5.8: Ganancias de los controladores PI clásicos.

Adaptable basado en pasividad				
$q_i$	$K$	$\Lambda$	$\hat{\Theta}_i$	$\Gamma$
$q_1$	100.6490	15.4231	$\hat{\Theta}_1$	3.3851
$q_2$	14.9047	17.6958	$\hat{\Theta}_2$	1.8259
$q_3$	13.2047	14.7095	$\hat{\Theta}_3$	2.3038
$q_4$	20.1303	19.6735	$\hat{\Theta}_4$	0.3040
			$\hat{\Theta}_5$	1.1760

Tabla 5.9: Ganancias de los controladores adaptables basados en pasividad de orden entero.

$q_i$	$PI^\zeta$					
	$K_{pvd}$	$K_{ivd}$	$\zeta$	$K_{pvq}$	$K_{ivq}$	$\zeta$
$q_1$	12.0555	933.3318	0.8772	926.0192	392.3757	0.8025
$q_2$	975.7136	501.3443	0.8718	48.6034	169.8161	0.9071
$q_3$	975.9650	483.7930	0.8768	127.1075	112.2203	0.8750
$q_4$	887.7456	991.7665	0.9663	614.1536	34.9269	0.8785

Tabla 5.10: Ganancias y ordenes de los controladores  $PI^\zeta$  de orden  $\zeta$ .

Adaptable basado en pasividad					
$q_i$	$K$	$\Lambda$	$\hat{\Theta}_i$	$\Gamma$	$\sigma$
$q_1$	187.3045	14.9520	$\hat{\Theta}_1$	0.4374	
$q_2$	147.5377	19.4682	$\hat{\Theta}_2$	0.1044	
$q_3$	196.0395	20.1233	$\hat{\Theta}_3$	1.2467	0.7255
$q_4$	198.1506	14.4537	$\hat{\Theta}_4$	3.4590	
			$\hat{\Theta}_5$	1.1760	

Tabla 5.11: Ganancias y ordenes de los controladores adaptables basados en pasividad de orden  $\sigma$ .

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 1			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0790	0.0404	0.0782	0.0408
$q_2$	0.2483	0.1553	0.2603	0.1554
$q_3$	0.1435	0.1103	0.1960	0.1105
$q_4$	0.0086	0.0068	0.0104	0.0068
Efactor final	0.1070	0.0581	0.1152	0.0583

Tabla 5.12: Comparación del desempeño de los controladores adaptables basados en pasividad de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 1.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 2			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.1190	0.0616	0.1170	0.0620
$q_2$	0.3784	0.2372	0.3912	0.2372
$q_3$	0.2191	0.1685	0.2555	0.1686
$q_4$	0.0302	0.0195	0.0308	0.0194
Efactor final	0.1723	0.0986	0.1814	0.0988

Tabla 5.13: Comparación del desempeño de los controladores adaptables basados en pasividad de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 2.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 3			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0305	0.0113	0.0325	0.0148
$q_2$	0.5110	0.2433	0.5188	0.2434
$q_3$	0.4171	0.2329	0.4206	0.2331
$q_4$	0.0162	0.0059	0.0169	0.0062
Efactor final	0.1894	0.0844	0.1975	0.0849

Tabla 5.14: Comparación del desempeño de los controladores adaptables basados en pasividad de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 3.

Resultados para la trayectoria 1

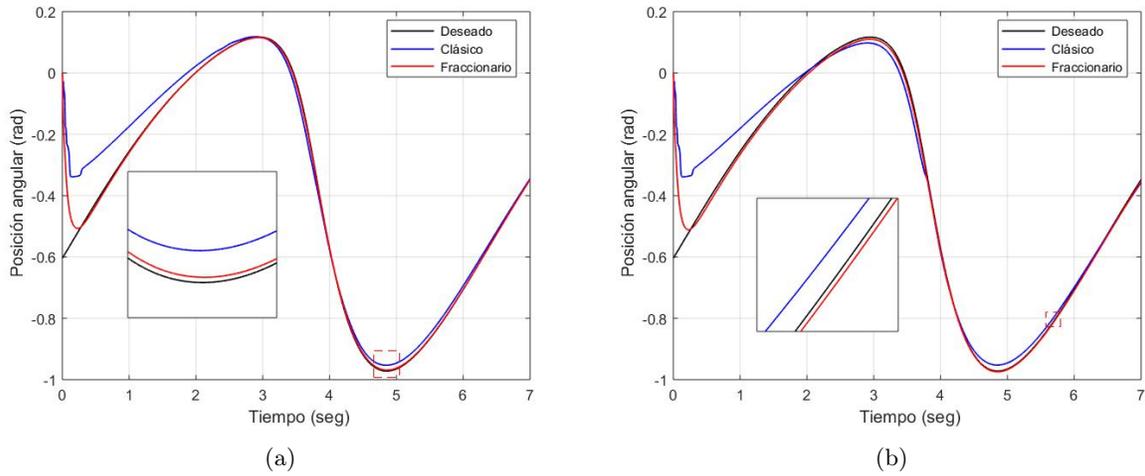


Figura 5.49: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

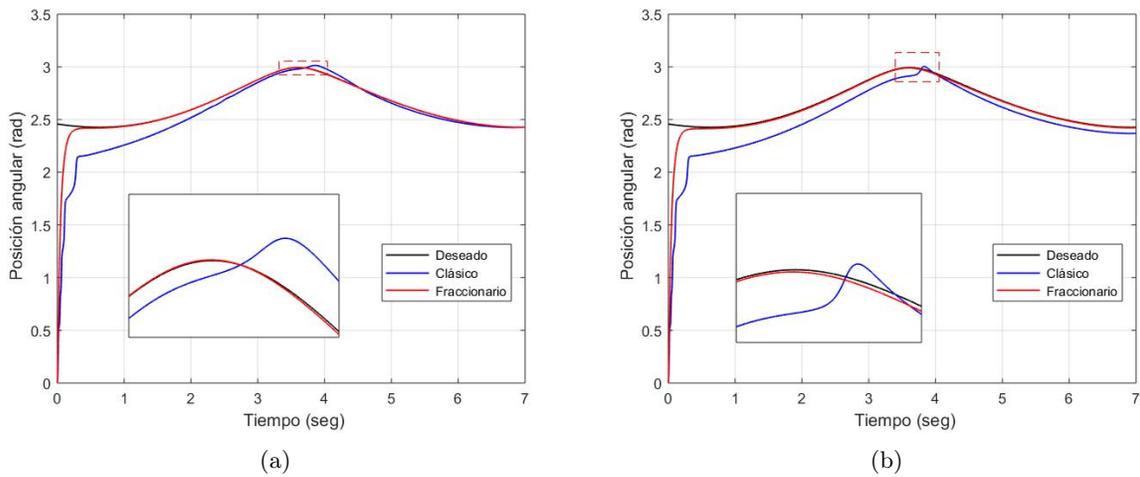


Figura 5.50: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

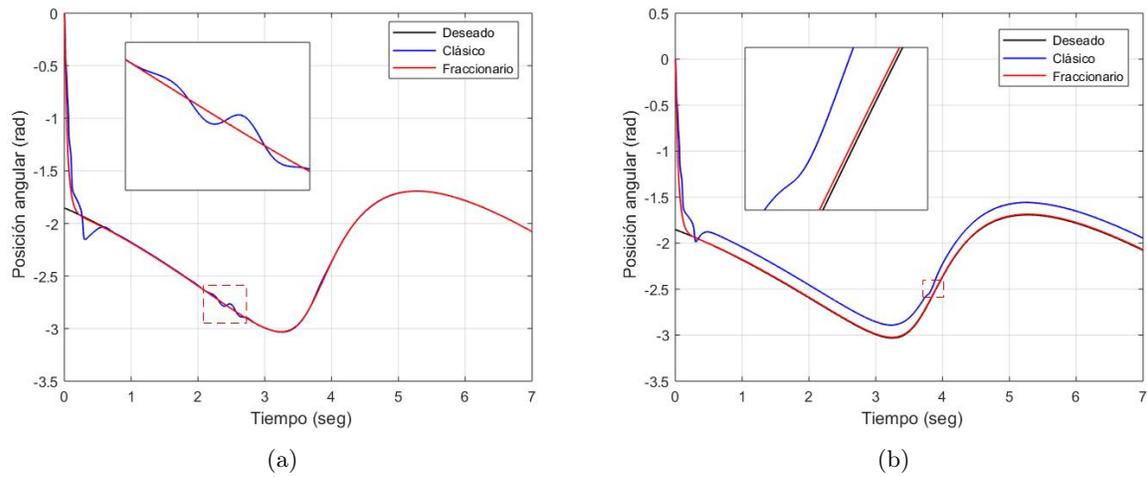


Figura 5.51: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

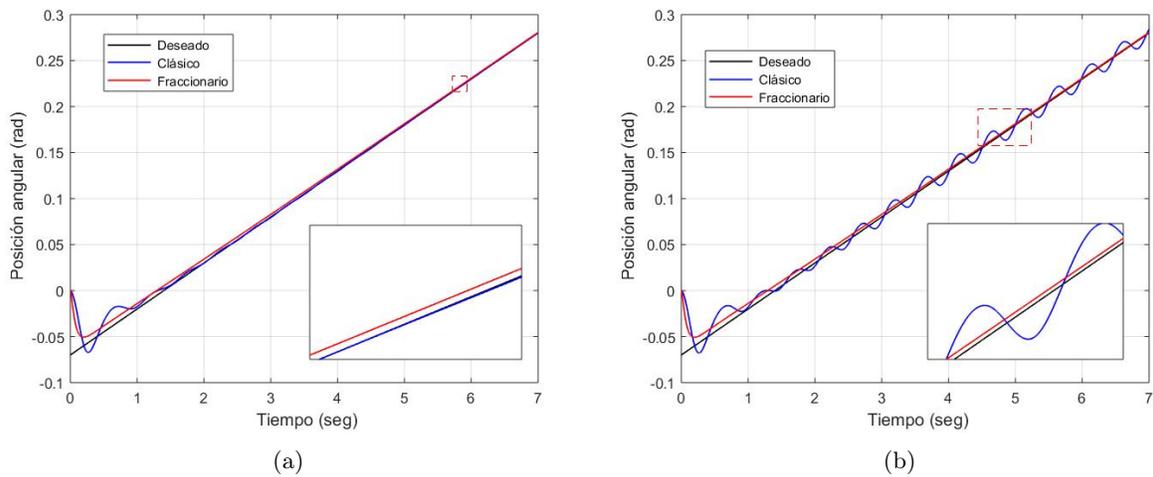


Figura 5.52: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

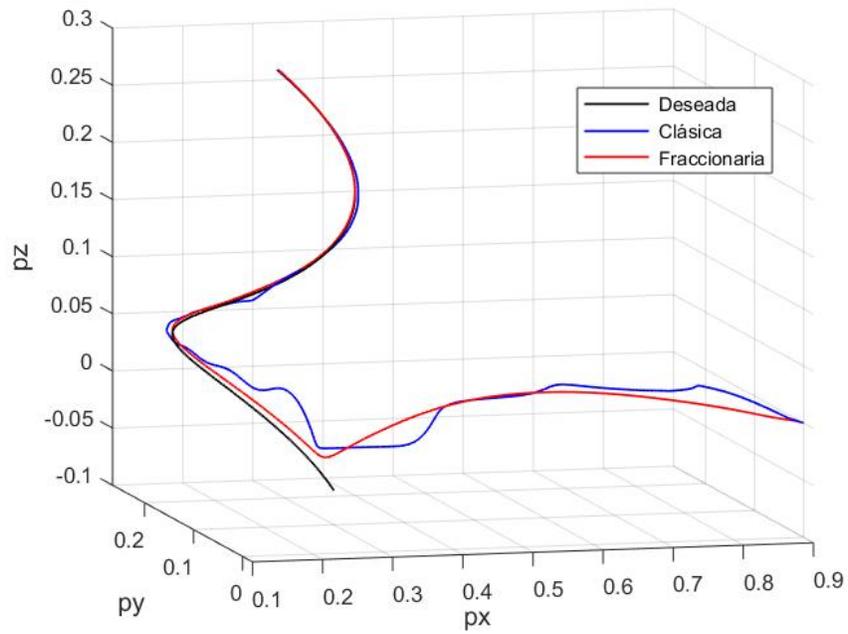


Figura 5.53: Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación

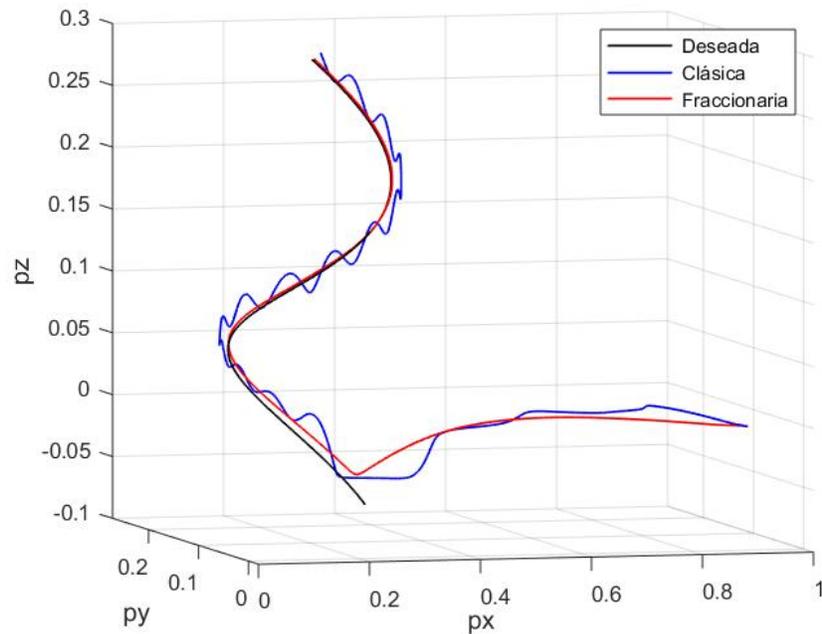


Figura 5.54: Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación

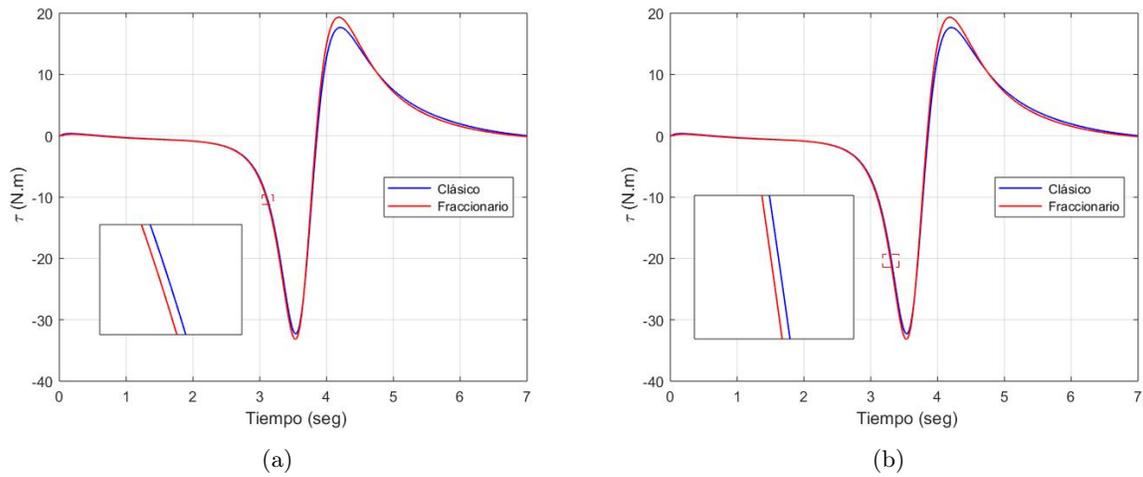


Figura 5.55: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

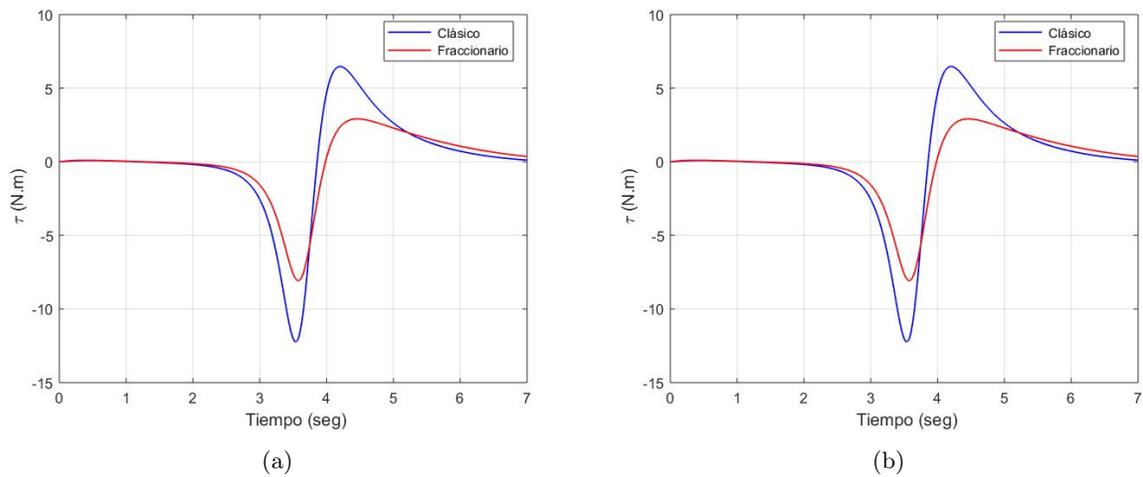


Figura 5.56: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

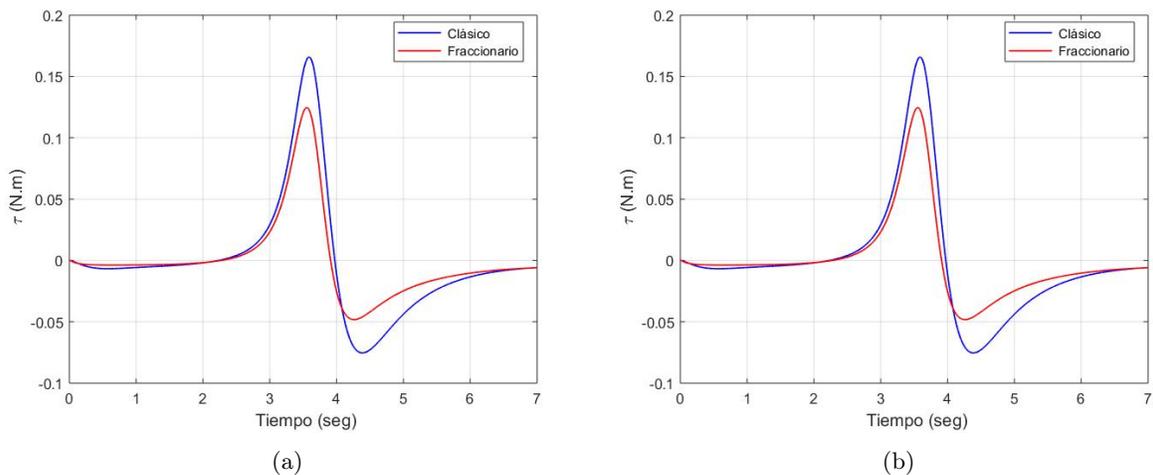


Figura 5.57: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

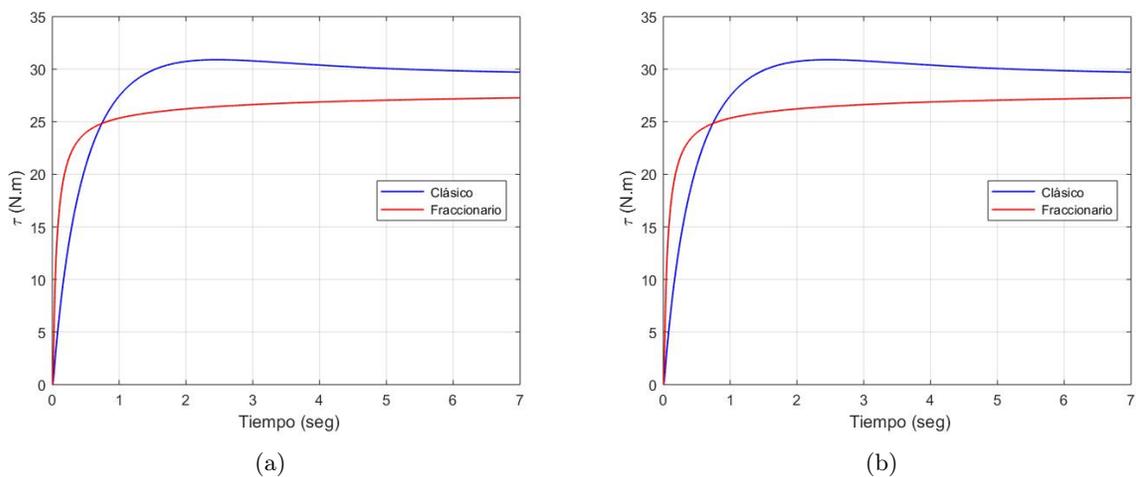


Figura 5.58: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

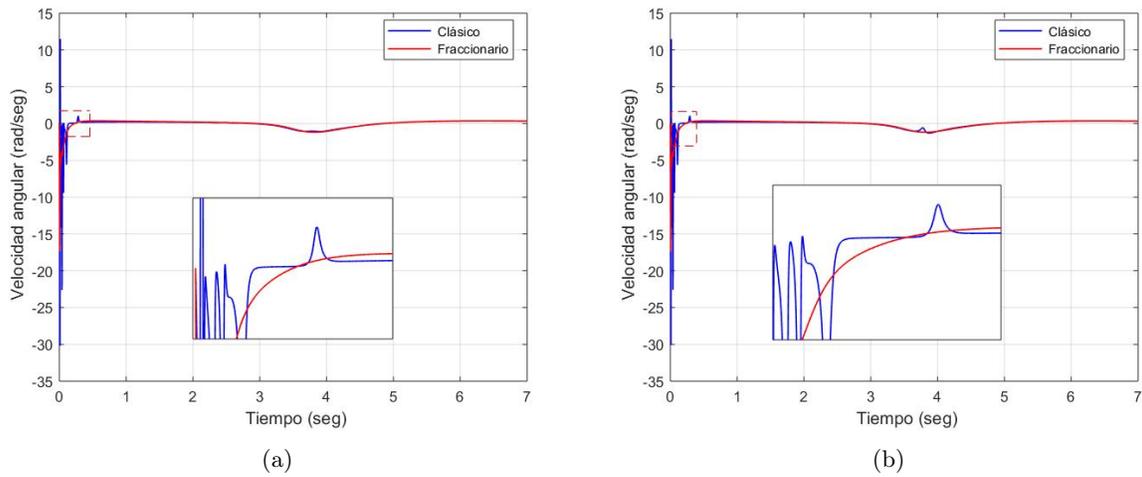


Figura 5.59: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

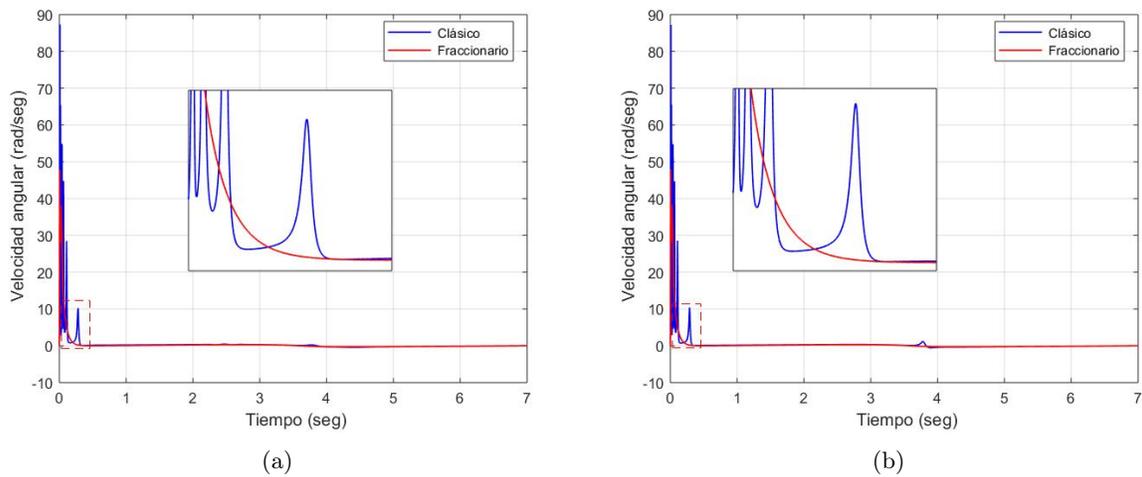


Figura 5.60: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

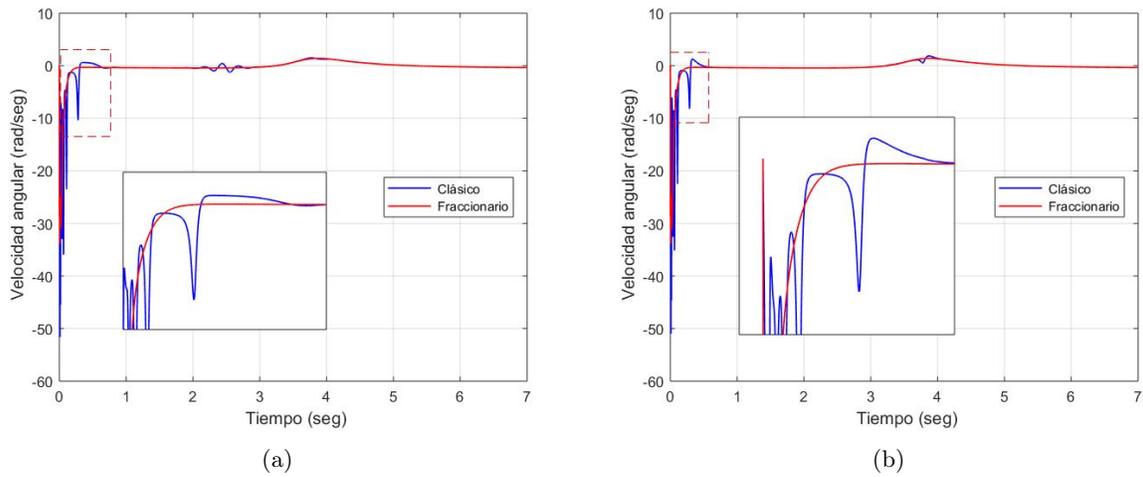


Figura 5.61: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

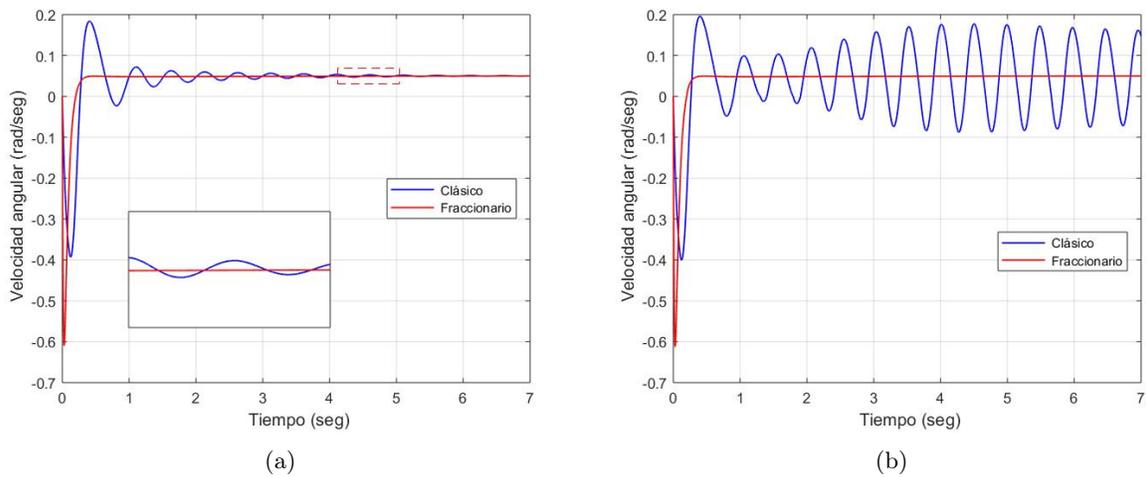
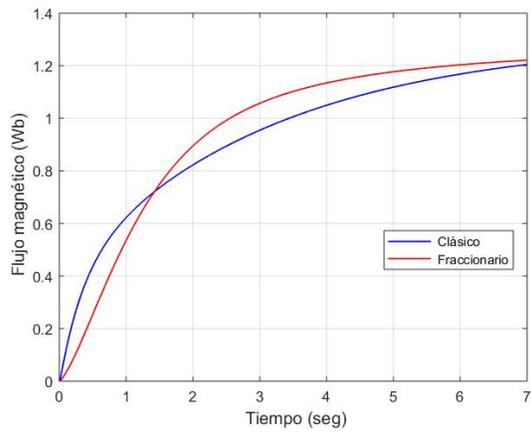
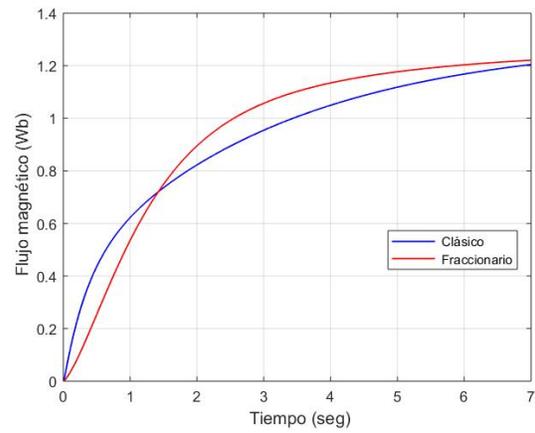


Figura 5.62: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

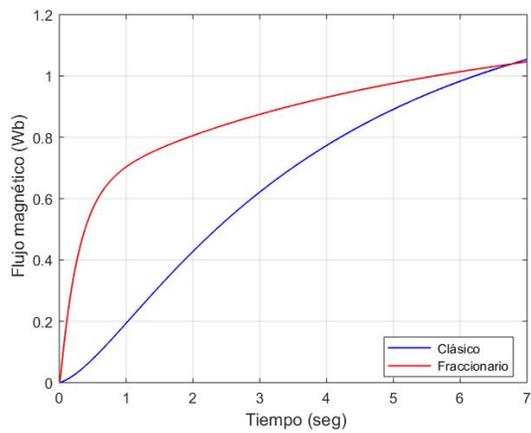


(a)

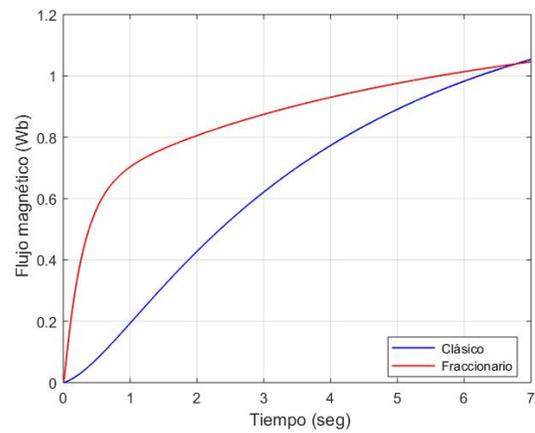


(b)

Figura 5.63: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.64: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

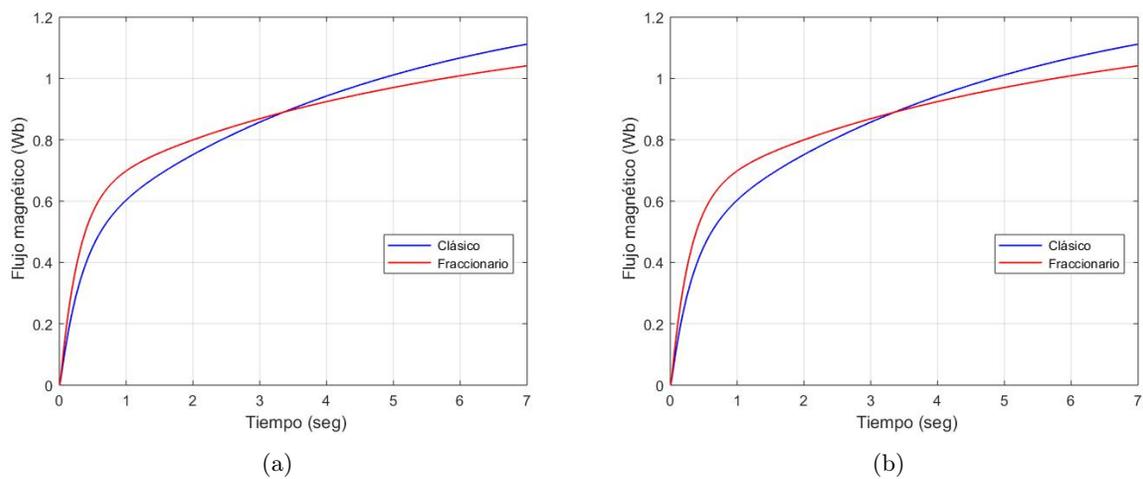


Figura 5.65: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

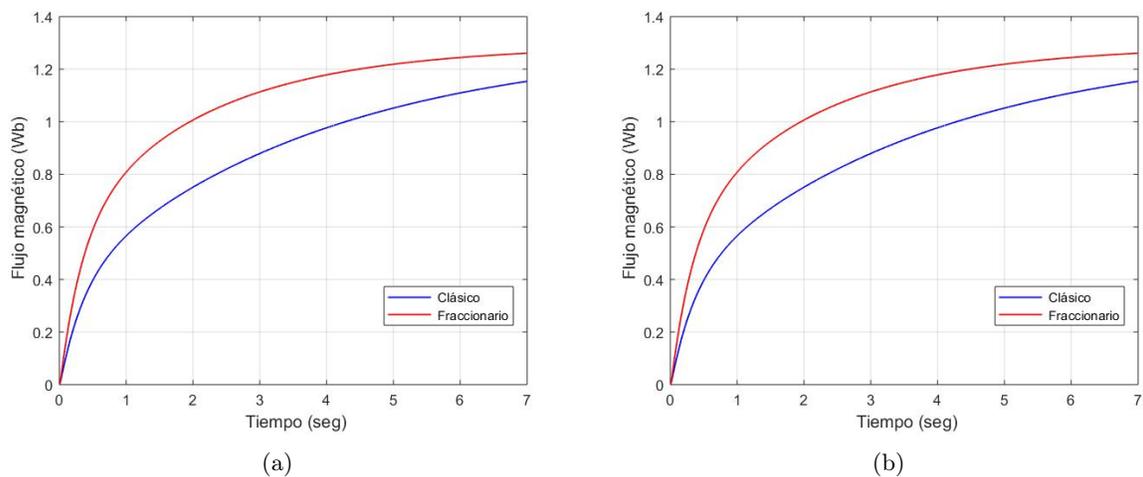


Figura 5.66: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

Resultados para la trayectoria 2

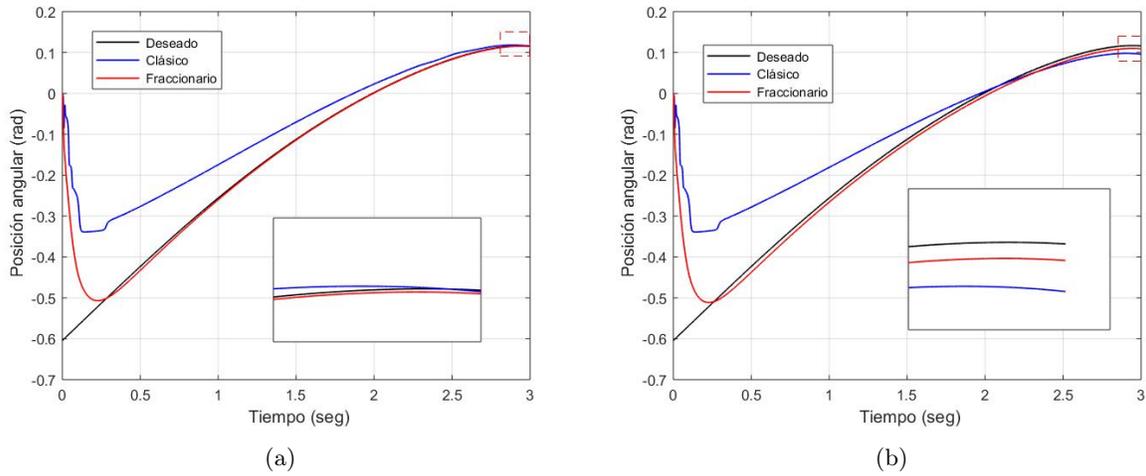


Figura 5.67: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

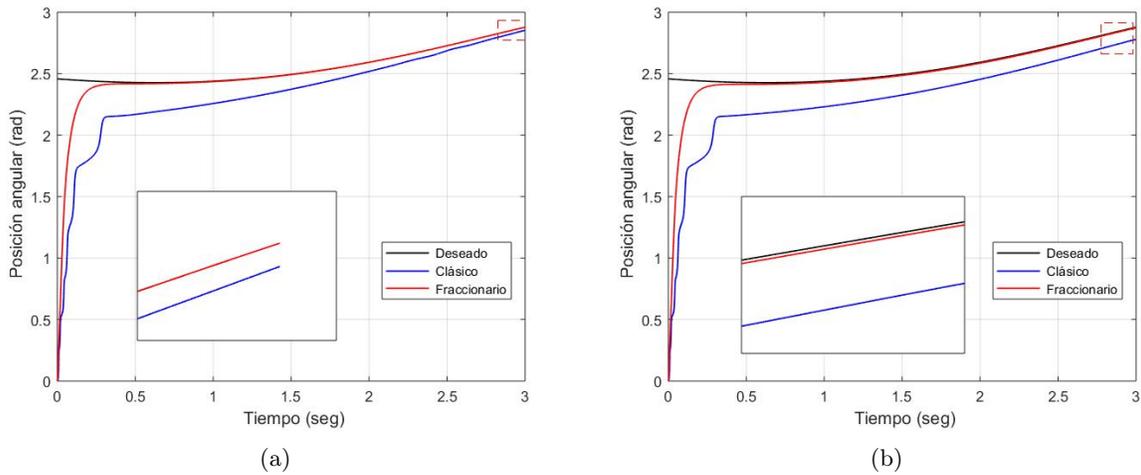


Figura 5.68: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

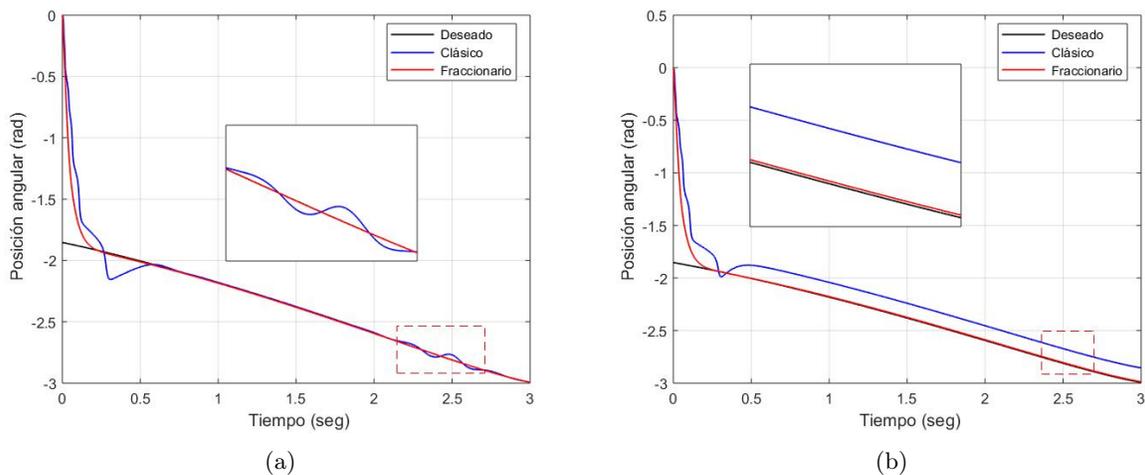


Figura 5.69: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

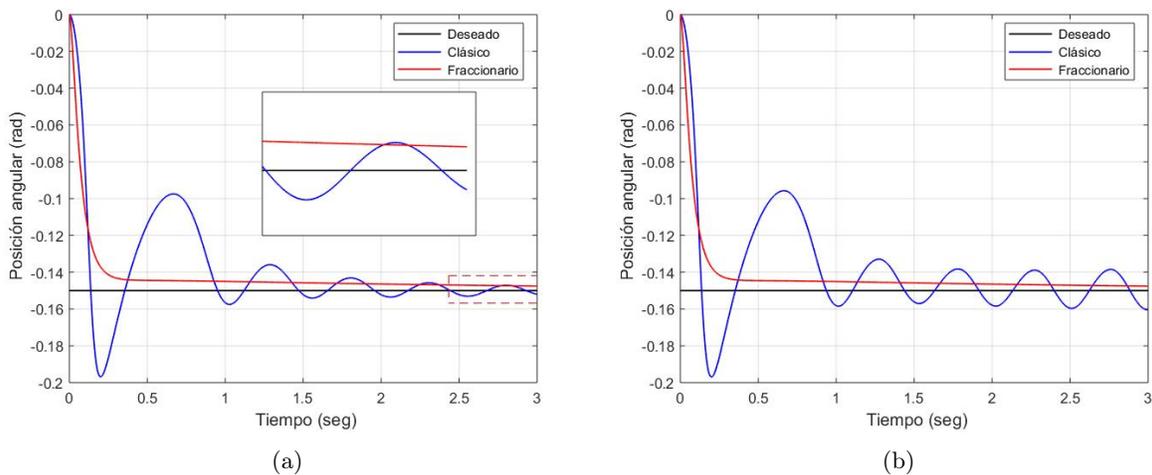


Figura 5.70: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

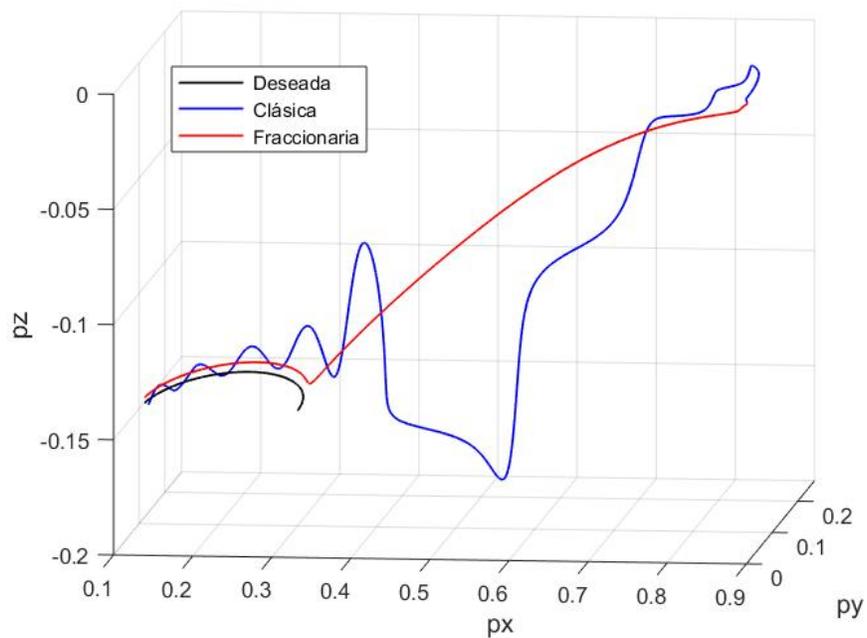


Figura 5.71: Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación

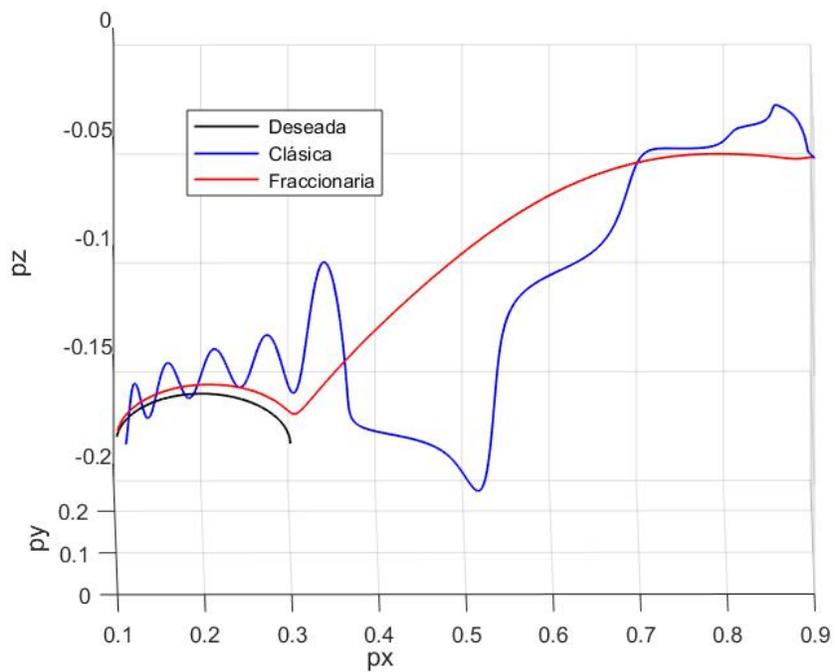


Figura 5.72: Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación

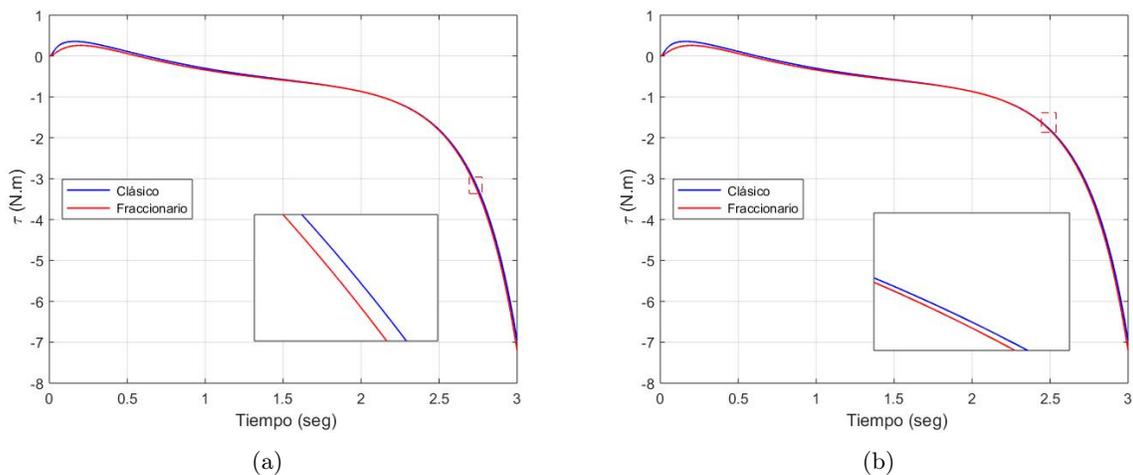


Figura 5.73: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

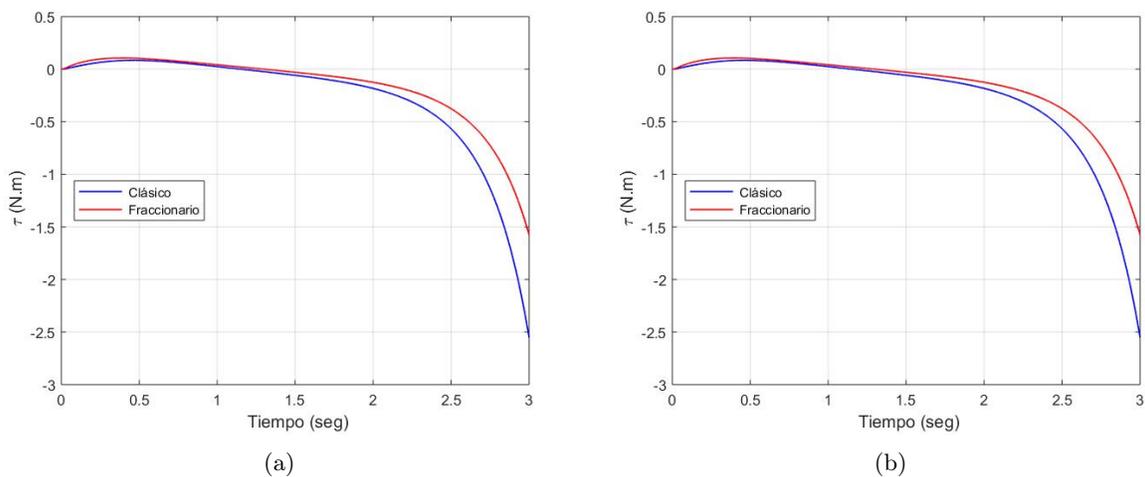


Figura 5.74: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

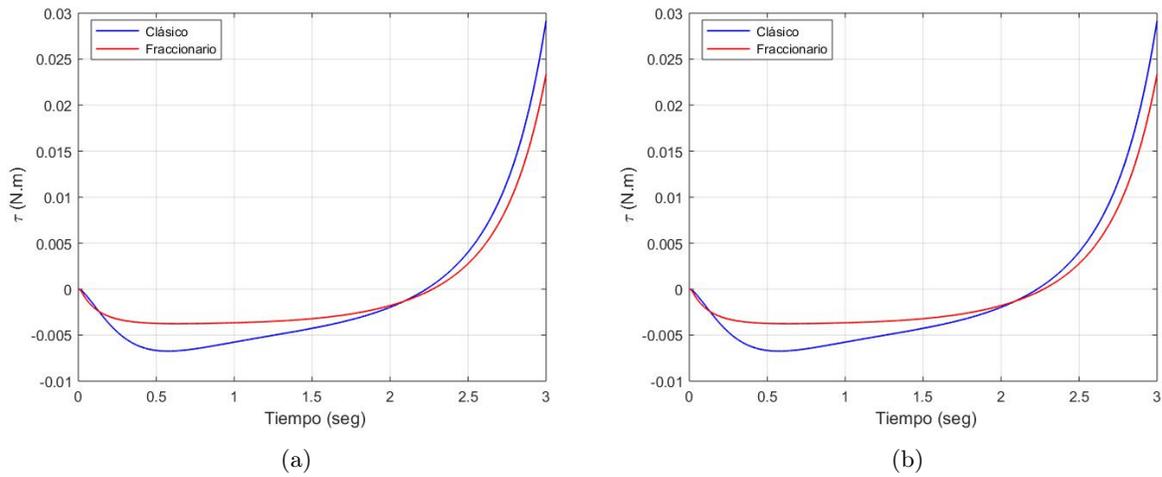


Figura 5.75: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

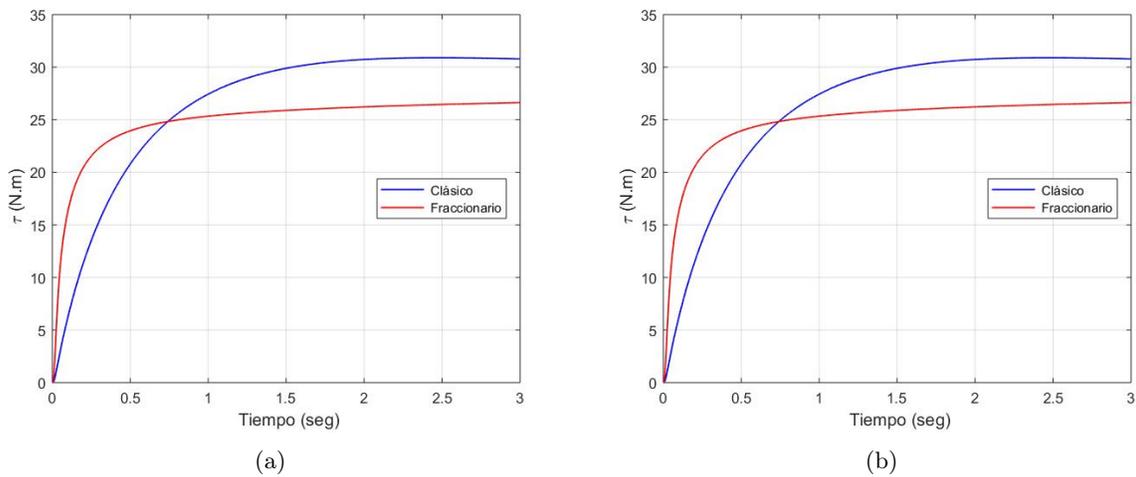


Figura 5.76: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

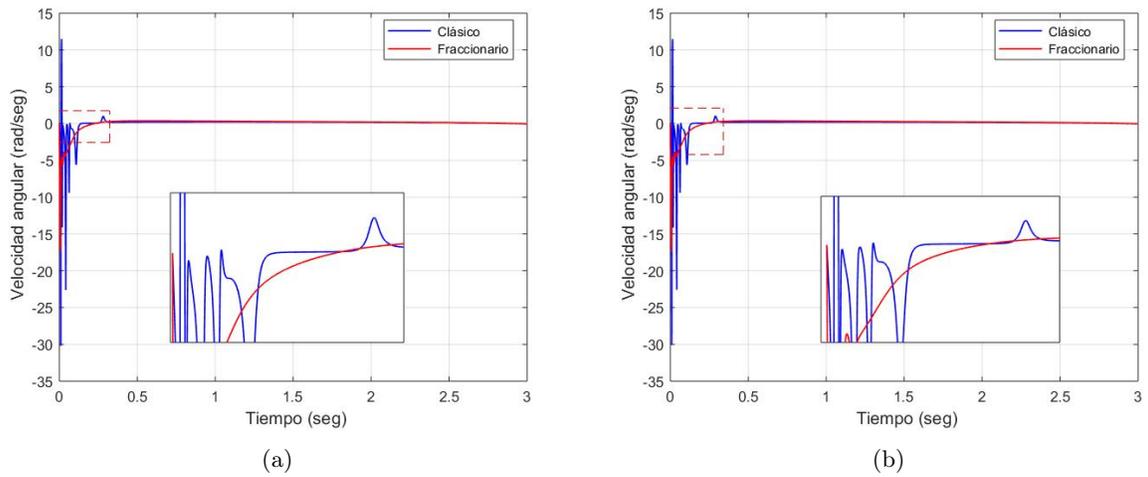


Figura 5.77: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

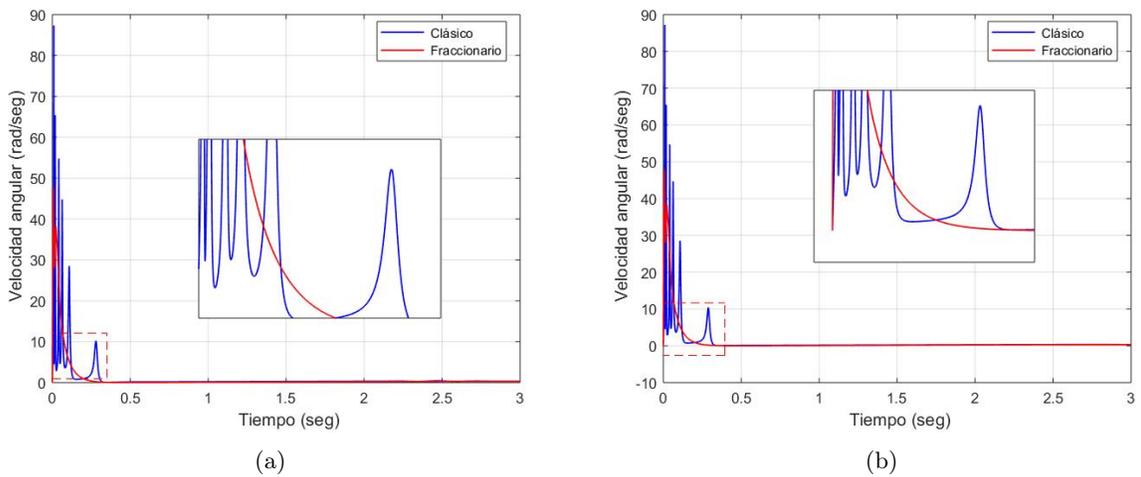


Figura 5.78: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

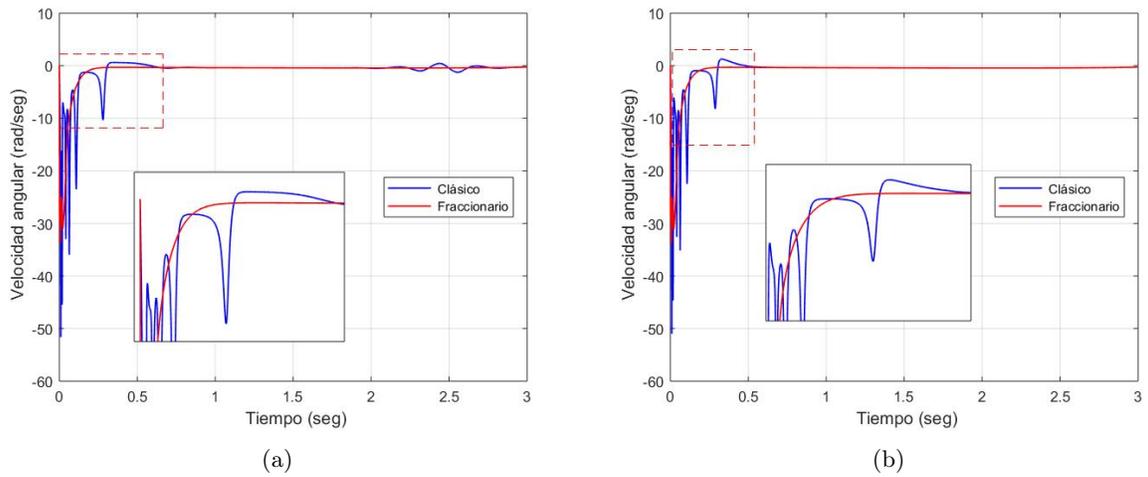


Figura 5.79: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

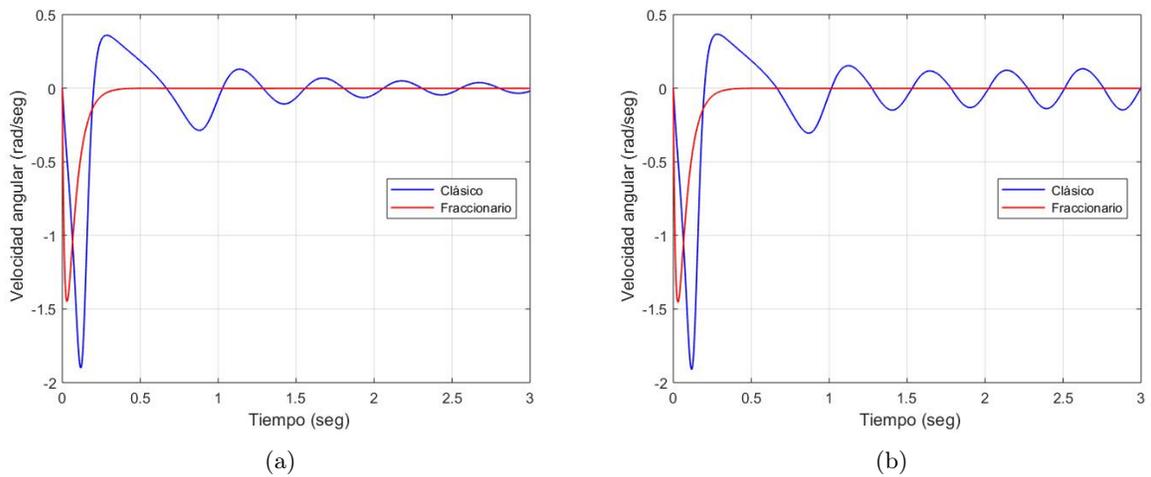


Figura 5.80: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

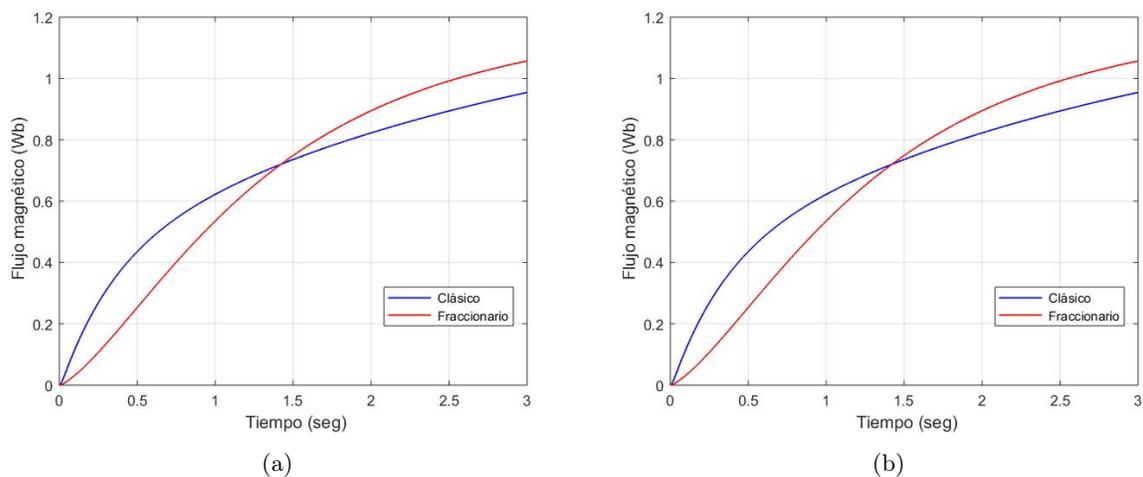


Figura 5.81: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

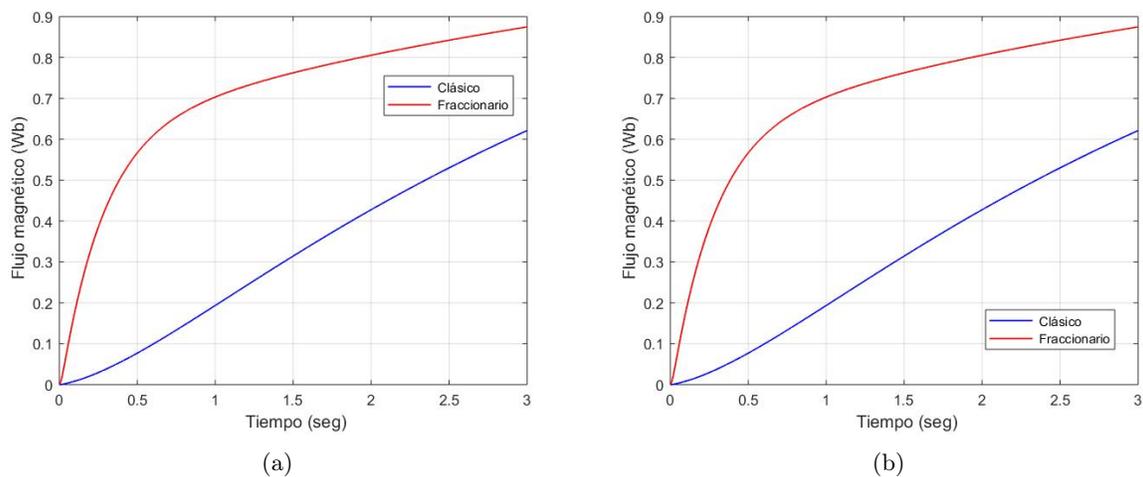
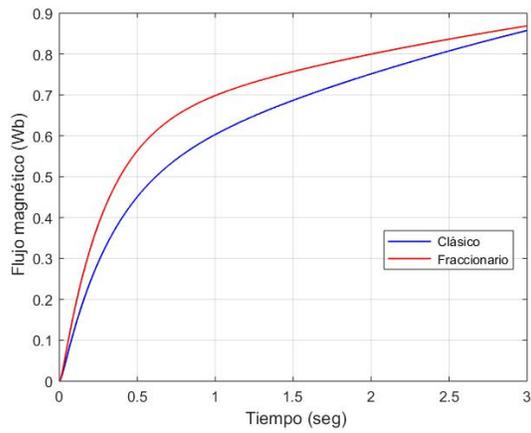
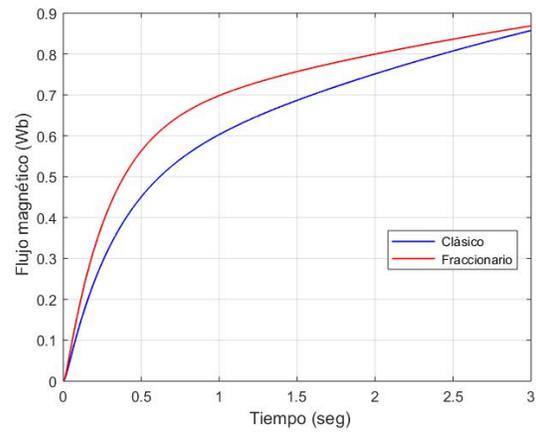


Figura 5.82: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

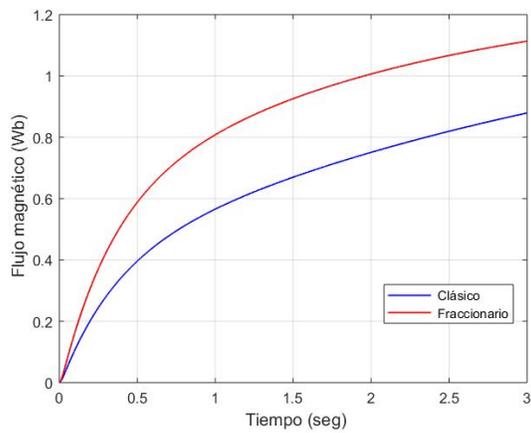


(a)

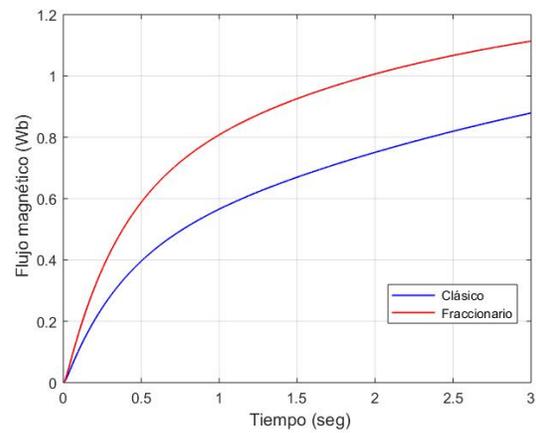


(b)

Figura 5.83: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.84: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

### Resultados para la trayectoria 3

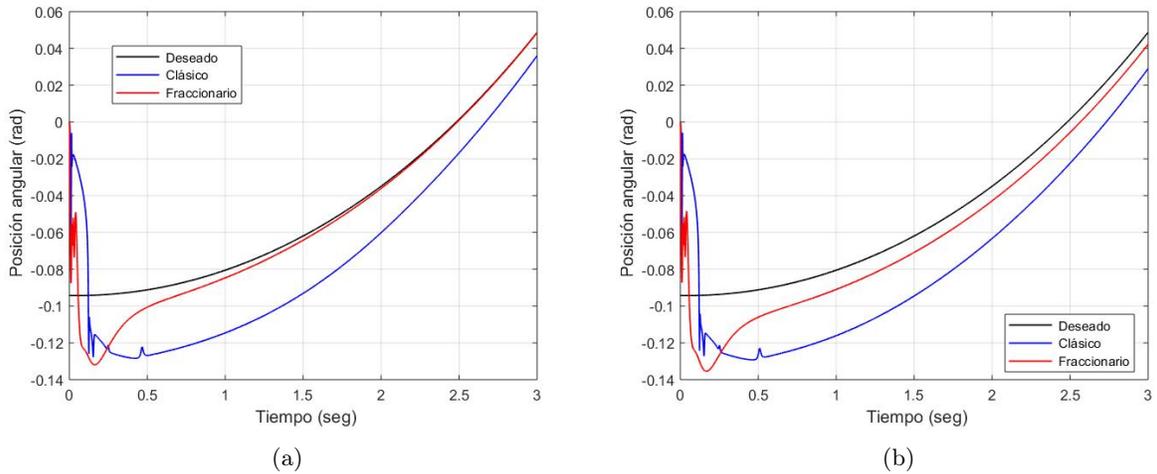


Figura 5.85: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

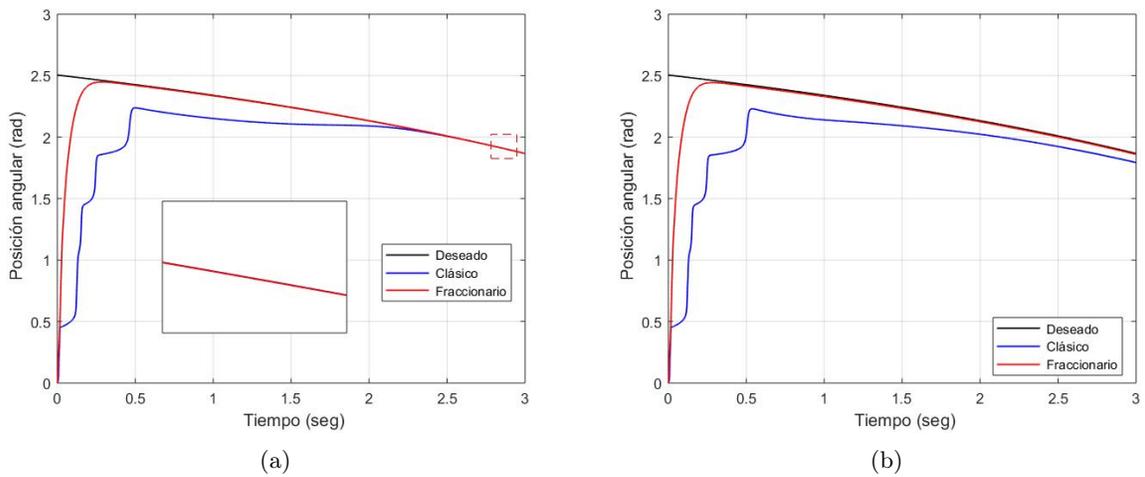


Figura 5.86: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

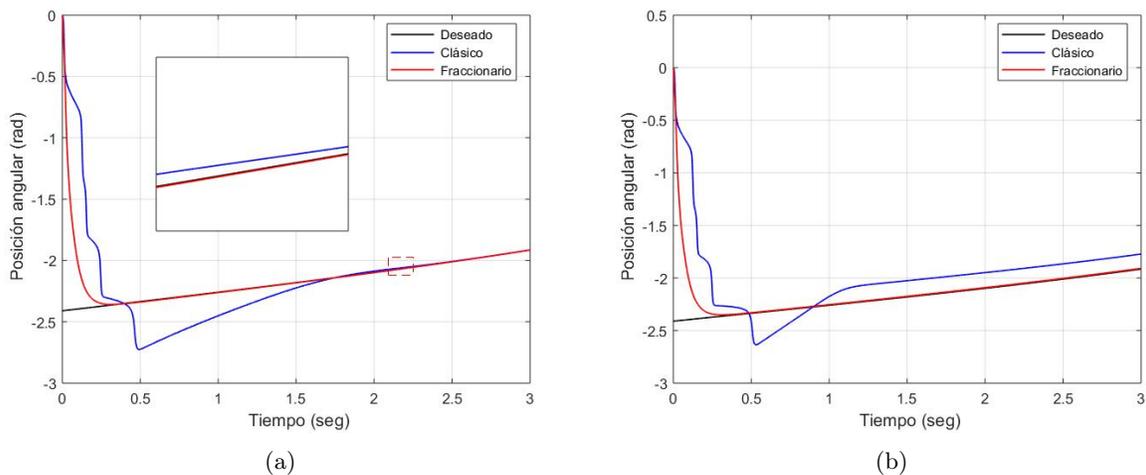


Figura 5.87: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

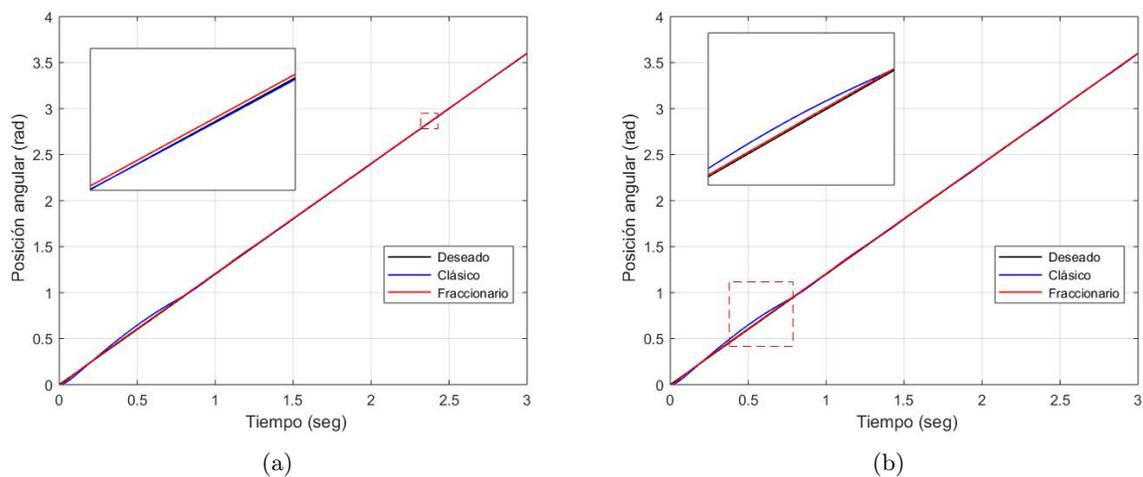


Figura 5.88: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

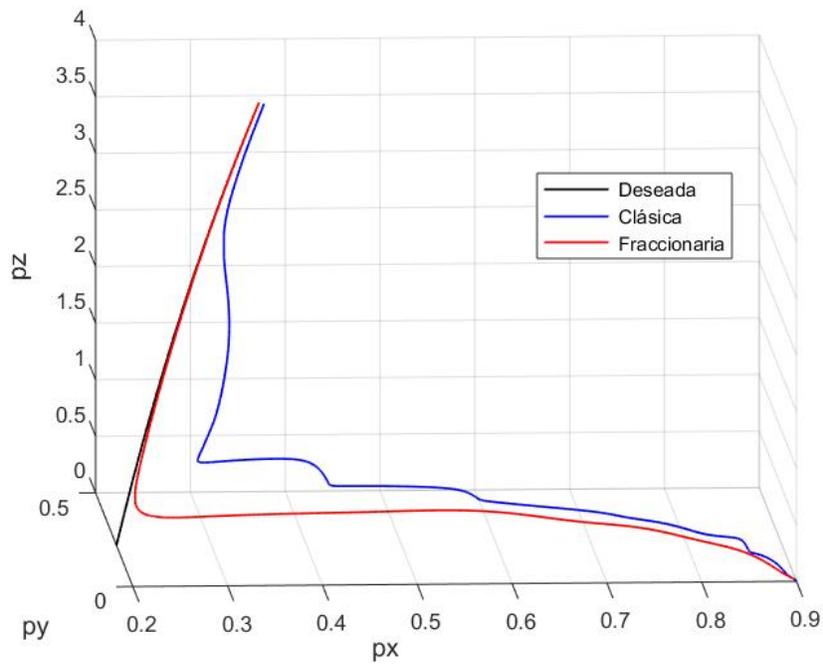


Figura 5.89: Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación

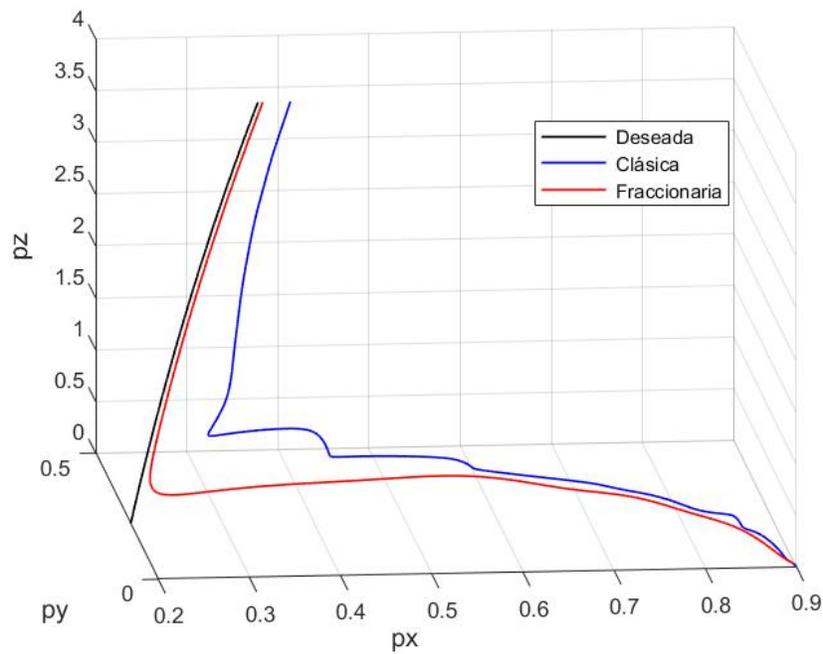


Figura 5.90: Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación

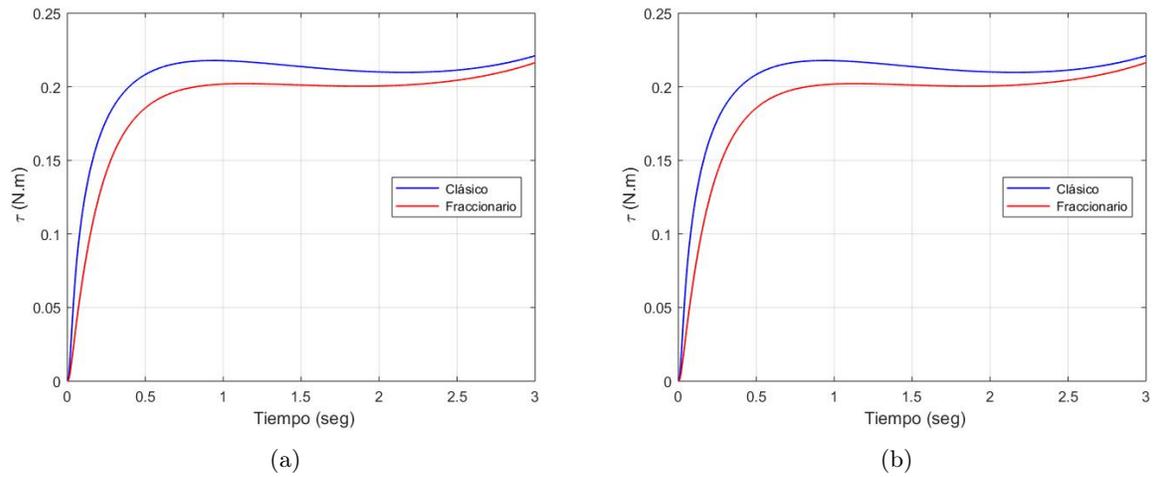


Figura 5.91: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

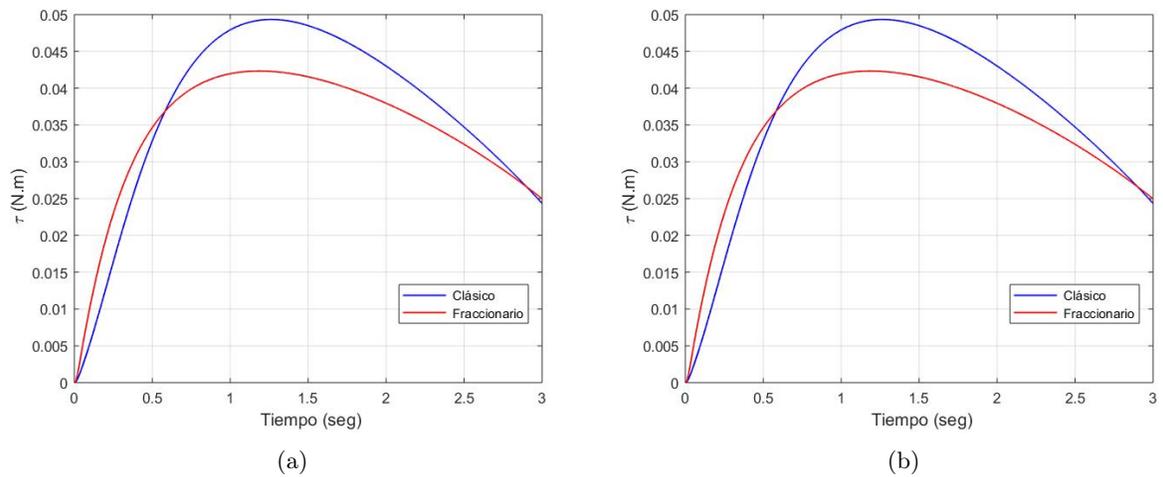
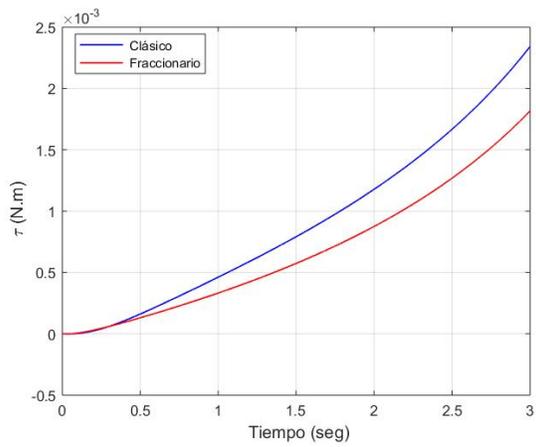
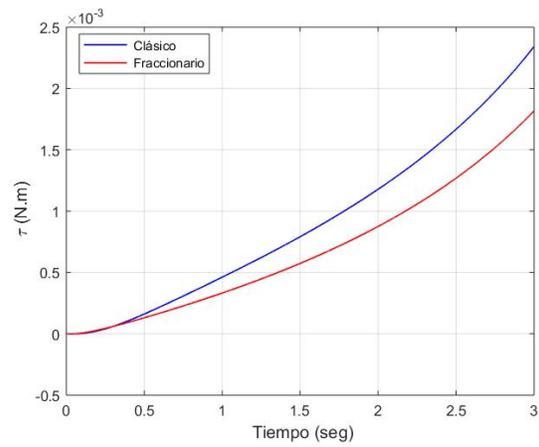


Figura 5.92: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

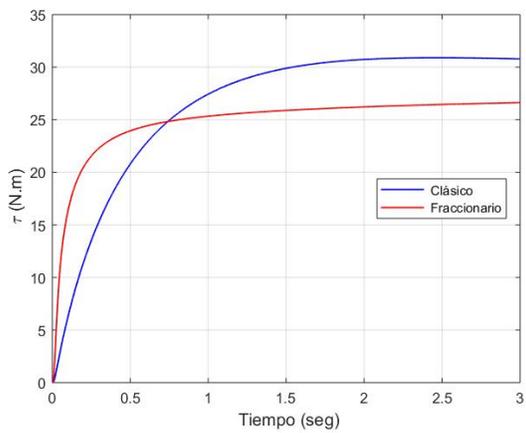


(a)

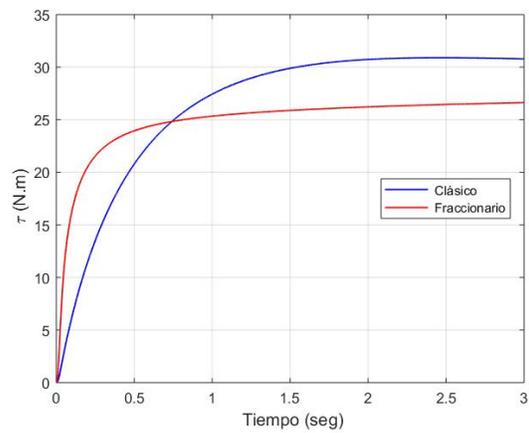


(b)

Figura 5.93: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.94: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

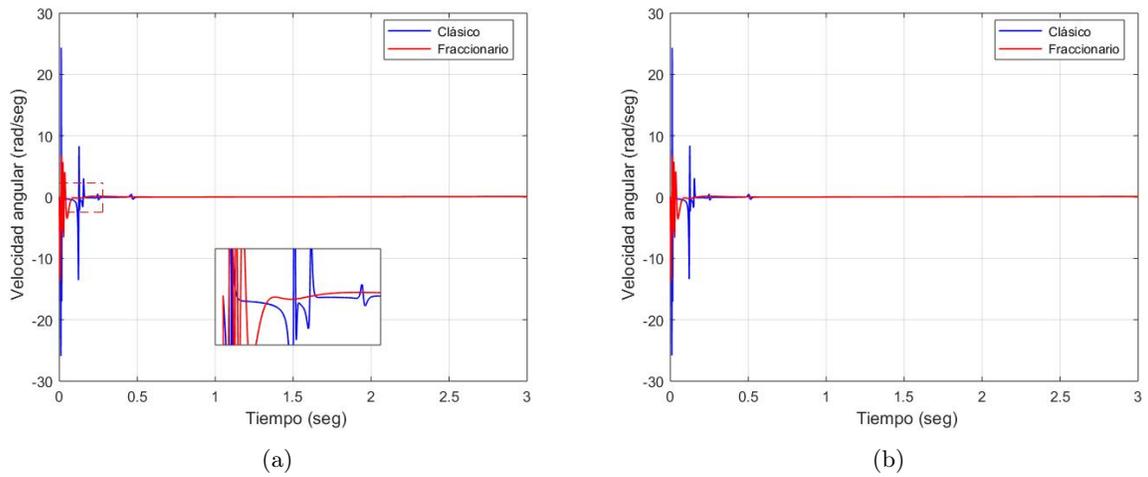


Figura 5.95: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

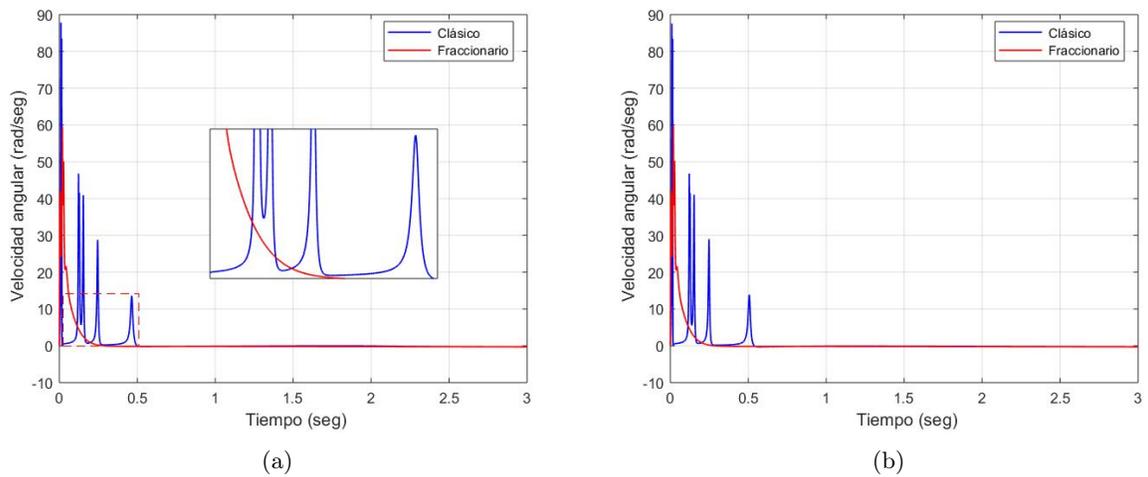


Figura 5.96: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

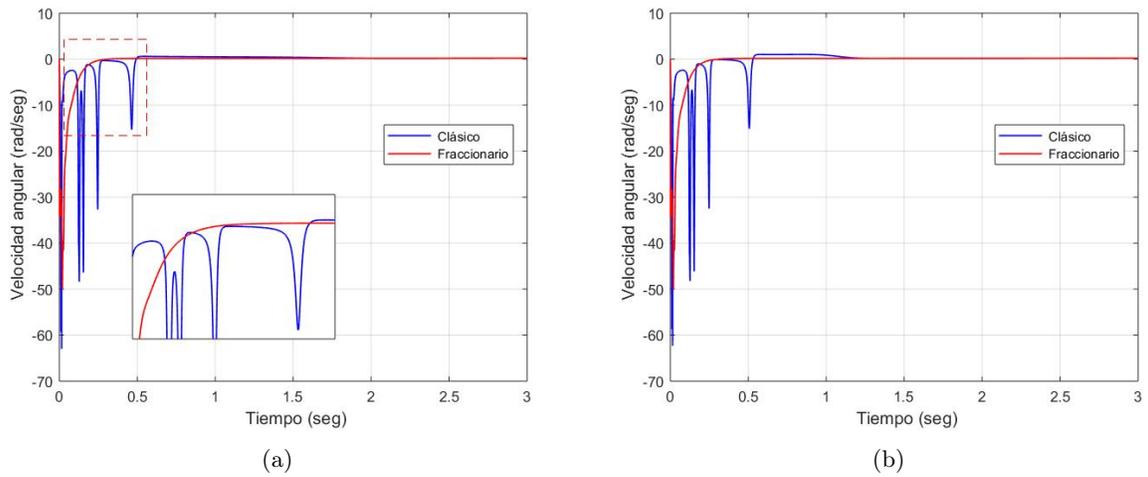


Figura 5.97: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

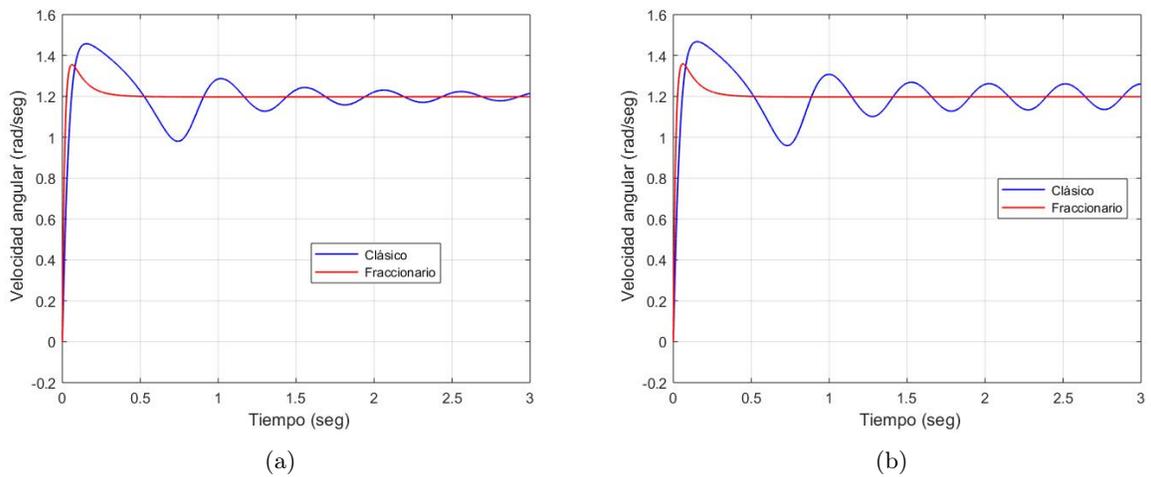


Figura 5.98: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

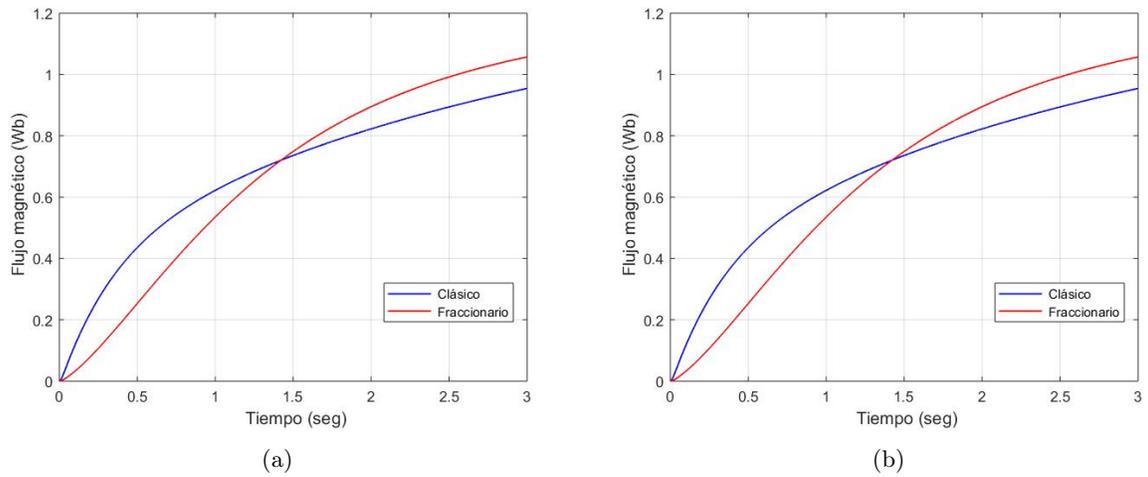


Figura 5.99: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

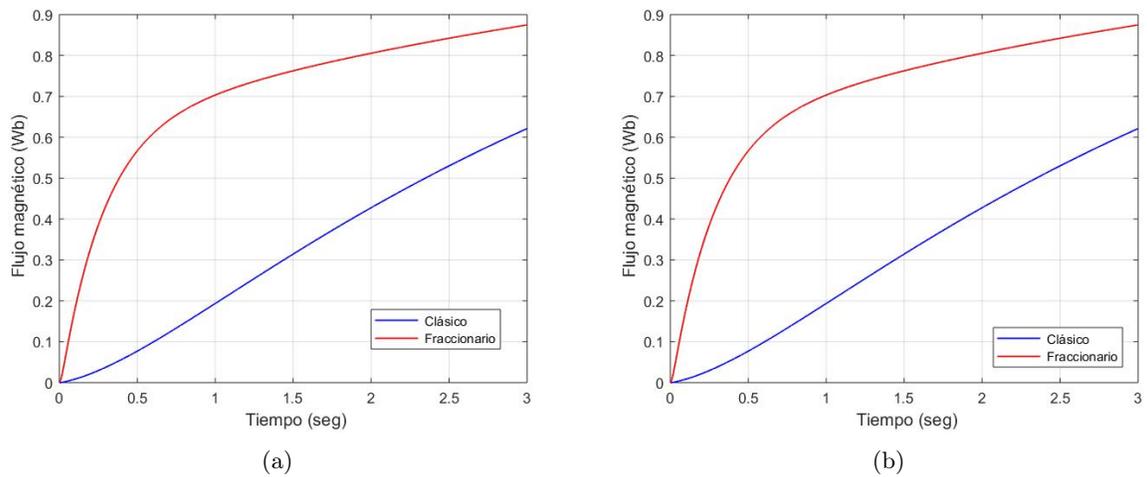
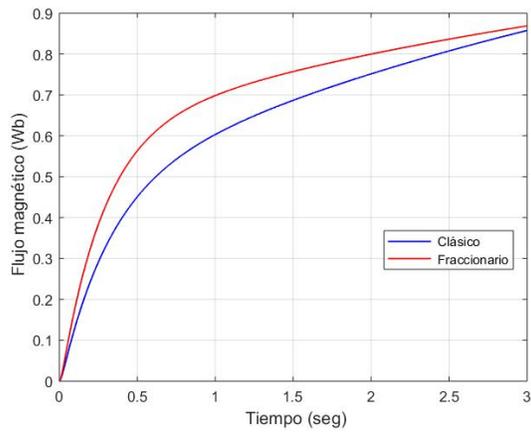
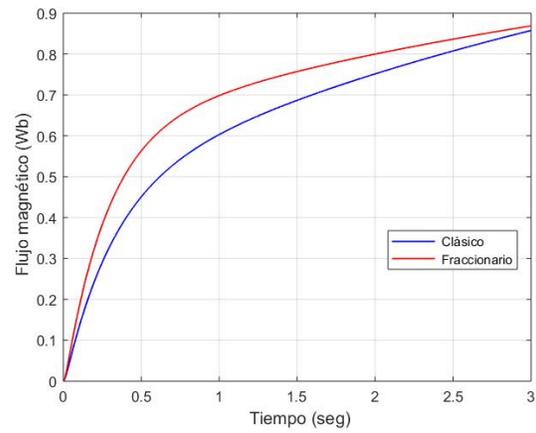


Figura 5.100: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

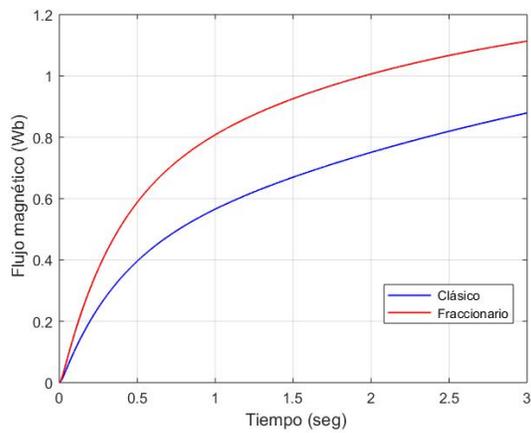


(a)

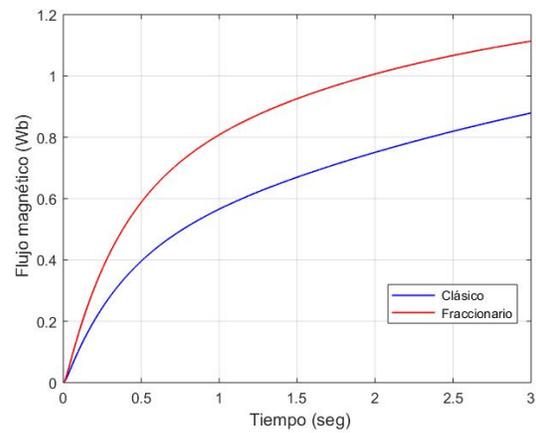


(b)

Figura 5.101: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.102: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

## 5.2. Stanford

### 5.2.1. $PD^\mu$

El primer control aplicado al robot Stanford es un tipo  $PD^\mu$  fraccionario con las siguientes trayectorias; Trayectoria 1 (C.2), Trayectoria 2 (C.4) y Trayectoria 3 (C.6), cuyos parámetros se muestran en la Tabla 5.15. Los resultados de la sintonización para los controladores clásico y de orden no entero se muestran en las Tablas 5.16 y 5.17, respectivamente. En las Tablas 5.18, 5.19 y 5.20 muestran la comparación del desempeño de los controladores para cada una de las articulaciones del manipulador respecto a cada trayectoria. Los resultados se muestran de la Figura 5.103 a 5.174.

$q_i$	Parámetros										
	Trayectoria 1			Trayectoria 2				Trayectoria 3			
	$q_{in}$	$q_f$	$t_f$	$k_0$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$j_0$	$j_1$	$j_2$	$j_3$
1	0.4	$\frac{\pi}{2}$	3	0.1	3	0.5	0.5	1	0.1	1	1
2	-0.03	$-\frac{\pi}{70}$	3	0.1	0.1	0.1	0.6	0.1	0.1	0.1	0.1
3	0.3	$-\frac{\pi}{4}$	3	0.2	0.9	0.5	1	0.8	0.1	1	1.2
4	0.7	$-\frac{\pi}{2}$	3	4	4	0.7	1	1	1	1	3
5	0.5	$-\frac{\pi}{3}$	3	2	2	0.5	3	1	1	2	2
6	0.9	$\frac{\pi}{3}$	3	3	3	0.3	2	1	1	3	1

Tabla 5.15: Parámetros de las trayectorias deseadas para los controladores PD y  $PD^\mu$  aplicado al robot Stanford.

$q_i$	PI				PD	
	$K_{pvd}$	$K_{ivd}$	$K_{pvq}$	$K_{ivq}$	$K_p$	$K_d$
$q_1$	231.1	295.5	600.4	278.3	257.2	721.1
$q_2$	834.9	689.0	300.6	800.7	578.8	5945.6
$q_3$	821.2	205.1	899.5	700.4	408.3	668.3
$q_4$	130.8	312.9	335.0	378.6	376.7	41.6
$q_5$	200.3	198.2	399.1	378.5	497.4	65.4
$q_6$	701.7	325.8	410.9	754.0	721.6	47.6

Tabla 5.16: Ganancias de los controladores PI y PD del robot Stanford.

$q_i$	$PI^\zeta$						$PD^\mu$		
	$K_{pvd}$	$K_{ivd}$	$\zeta$	$K_{pvq}$	$K_{ivq}$	$\zeta$	$K_p$	$K_d$	$\mu$
$q_1$	247.4	246.9	0.8497	700.2	118.9	0.9963	406.1	949.1	0.8955
$q_2$	844.0	637.4	0.9575	339.4	843.3	0.9821	702.8	9945.6	0.8822
$q_3$	846.2	162.0	0.9158	959.1	745.3	0.8136	534.1	978.3	0.8943
$q_4$	135.3	287.9	0.8752	341.0	338.7	0.8923	594.6	91.6	0.9062
$q_5$	205.3	111.9	0.8912	456.9	328.2	0.9578	612.4	95.4	0.8824
$q_6$	730.6	444.4	0.8763	441.2	815.6	0.8754	938.9	67.6	0.8625

Tabla 5.17: Ganancias y ordenes de los controladores  $PI^\zeta$  y  $PD^\mu$  del robot Stanford.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 1			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0086	0.0083	0.0303	0.0233
$q_2$	0.0013	0.0012	0.0038	0.0027
$q_3$	0.0131	0.0116	0.0155	0.0132
$q_4$	0.0255	0.0203	0.0272	0.0213
$q_5$	0.0113	0.0104	0.0116	0.0106
$q_6$	0.0167	0.0161	0.0169	0.0162

Tabla 5.18: Comparación del desempeño de los controladores PD vs  $PD^\mu$  para la trayectoria 1.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 2			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0119	0.0109	0.0351	0.0273
$q_2$	0.0067	0.0058	0.0035	0.0027
$q_3$	0.0337	0.0322	0.0289	0.0280
$q_4$	0.0357	0.0246	0.0457	0.0305
$q_5$	0.0116	0.0106	0.0125	0.0112
$q_6$	0.0058	0.0055	0.0096	0.0080

Tabla 5.19: Comparación del desempeño de los controladores PD vs  $PD^\mu$  para la trayectoria 2.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 3			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0224	0.0209	0.0535	0.0414
$q_2$	0.0127	0.0117	0.0109	0.0068
$q_3$	0.0600	0.0580	0.0548	0.0538
$q_4$	0.0826	0.0750	0.0901	0.0794
$q_5$	0.0226	0.0208	0.0258	0.0230
$q_6$	0.0185	0.0179	0.0205	0.0191

Tabla 5.20: Comparación del desempeño de los controladores PD vs  $PD^\mu$  para la trayectoria 3.

Resultados para la trayectoria 1

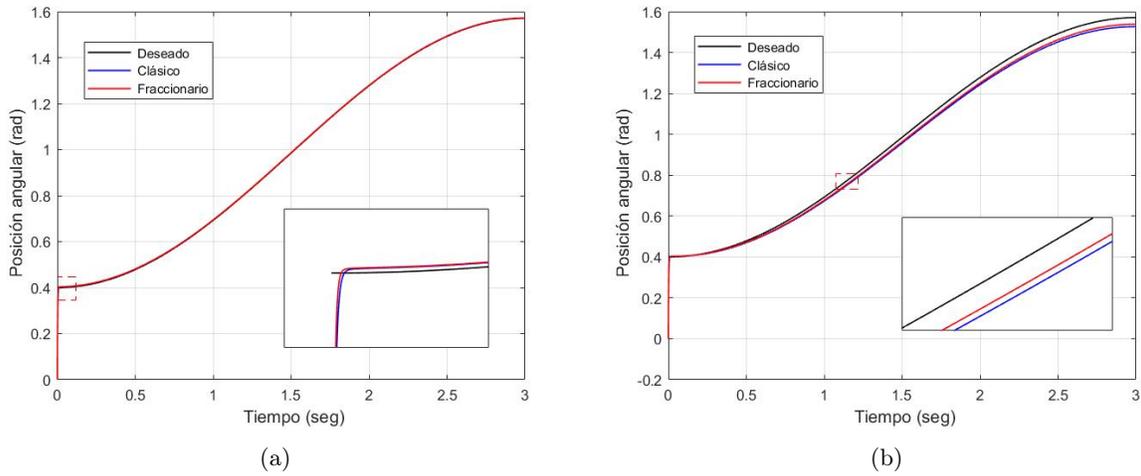


Figura 5.103: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

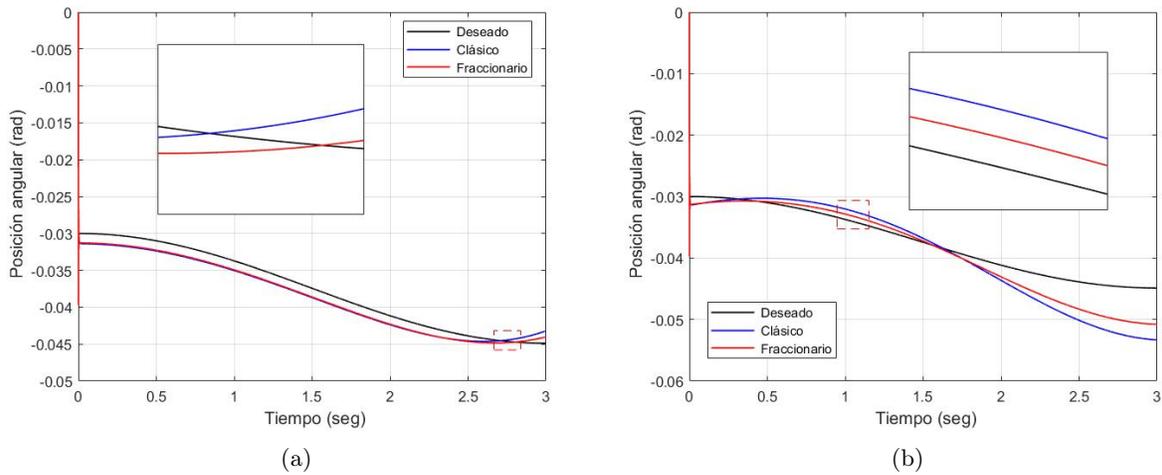


Figura 5.104: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

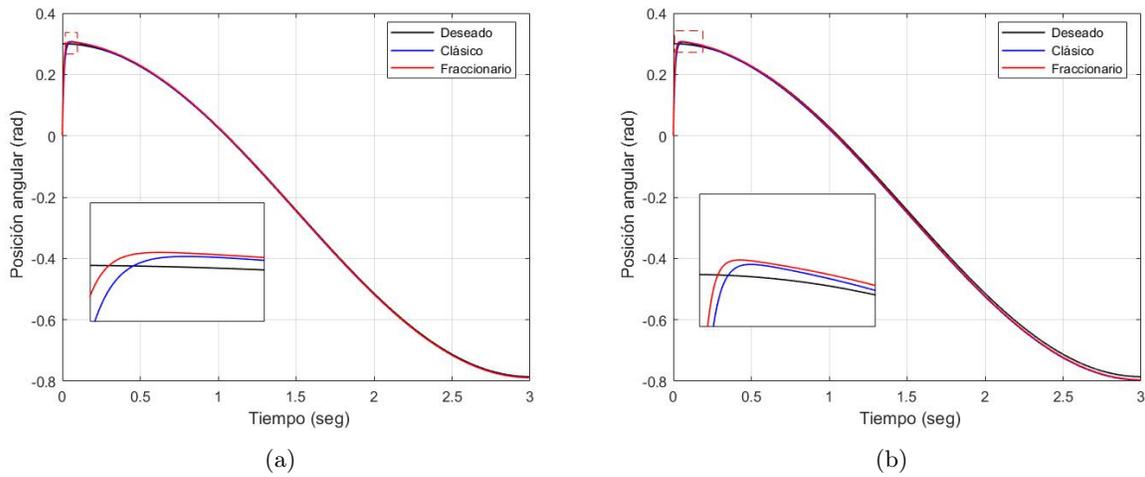


Figura 5.105: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

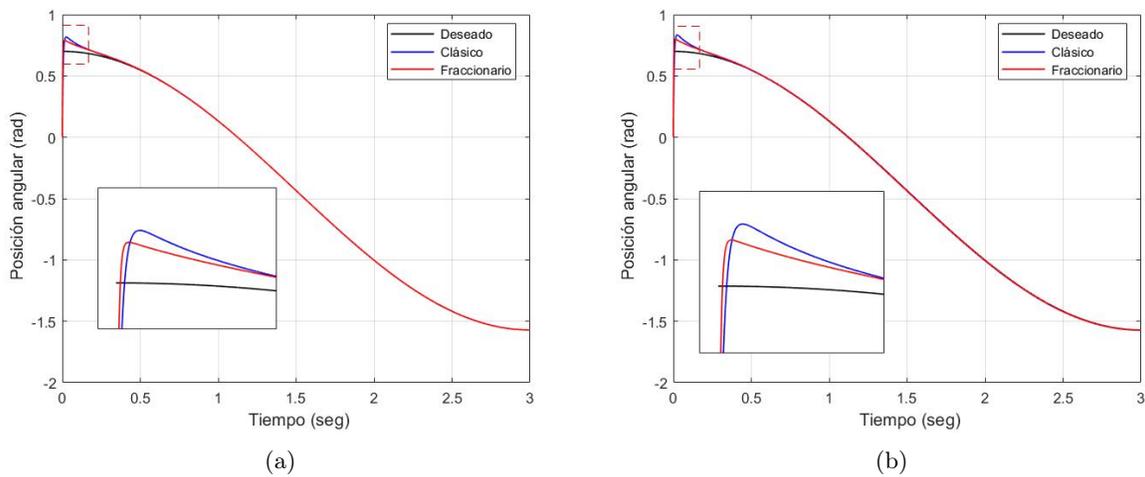


Figura 5.106: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

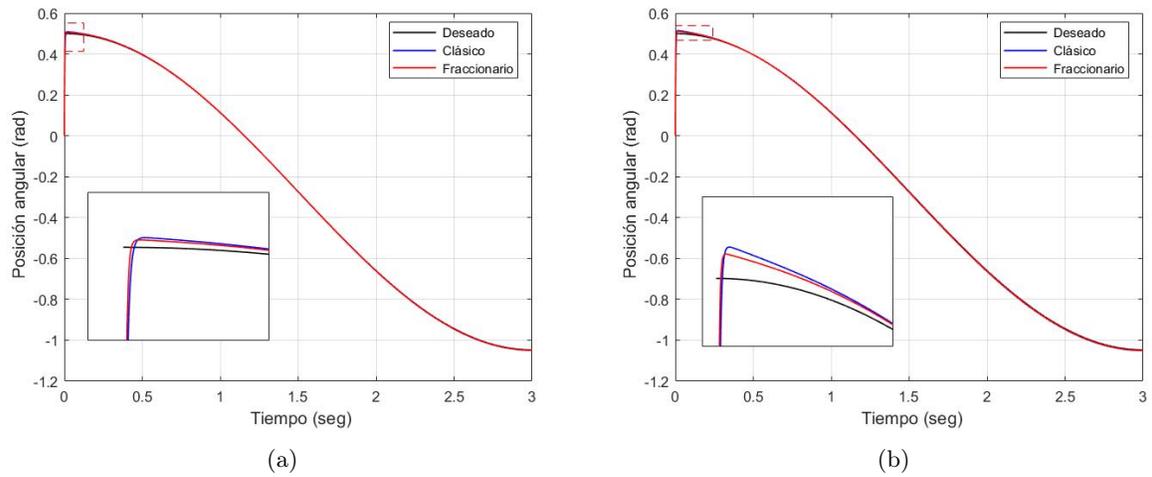


Figura 5.107: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

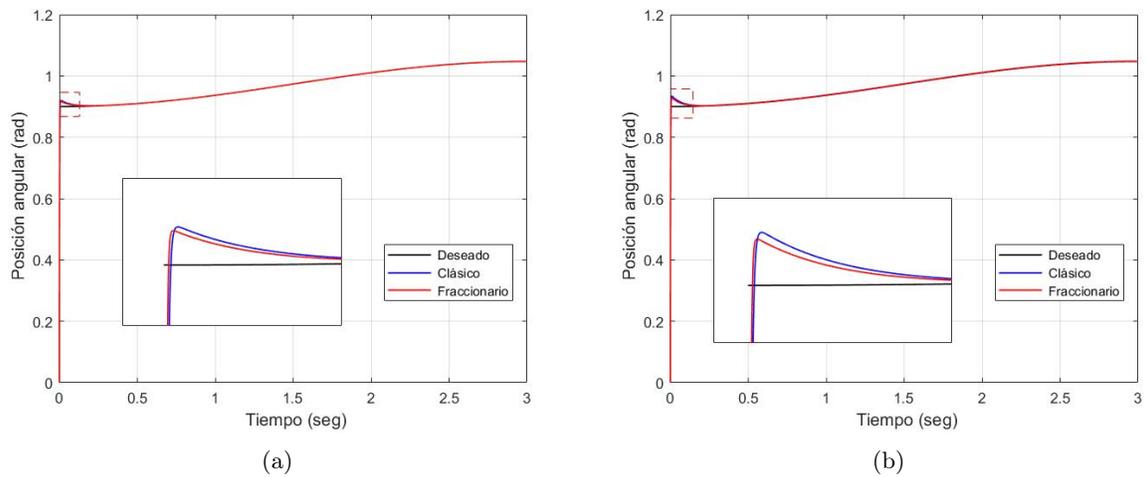


Figura 5.108: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

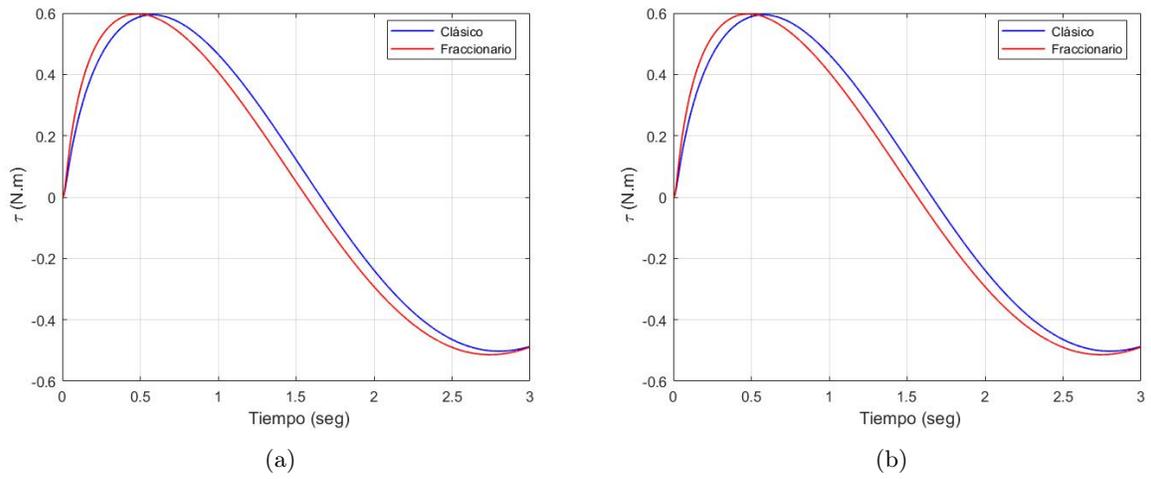


Figura 5.109: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

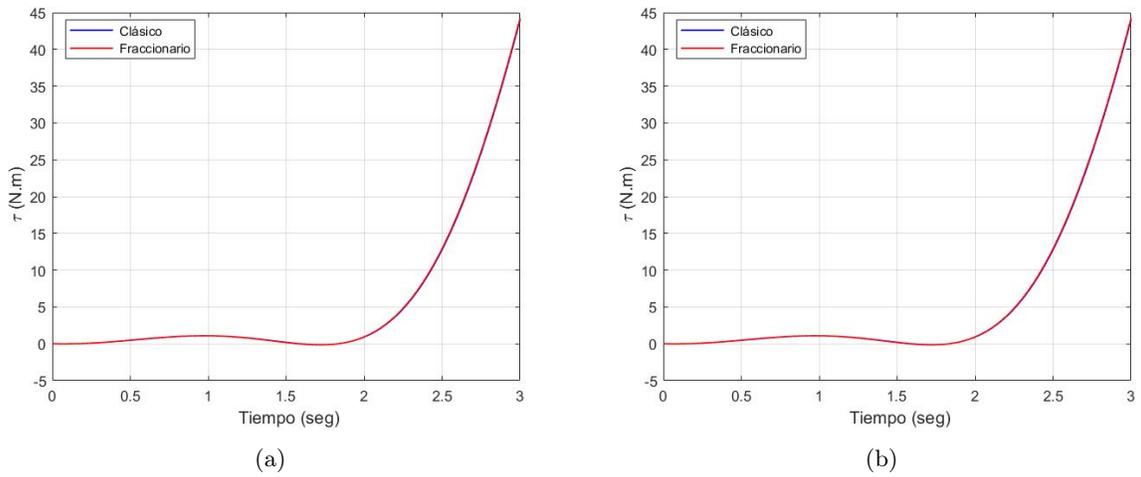


Figura 5.110: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

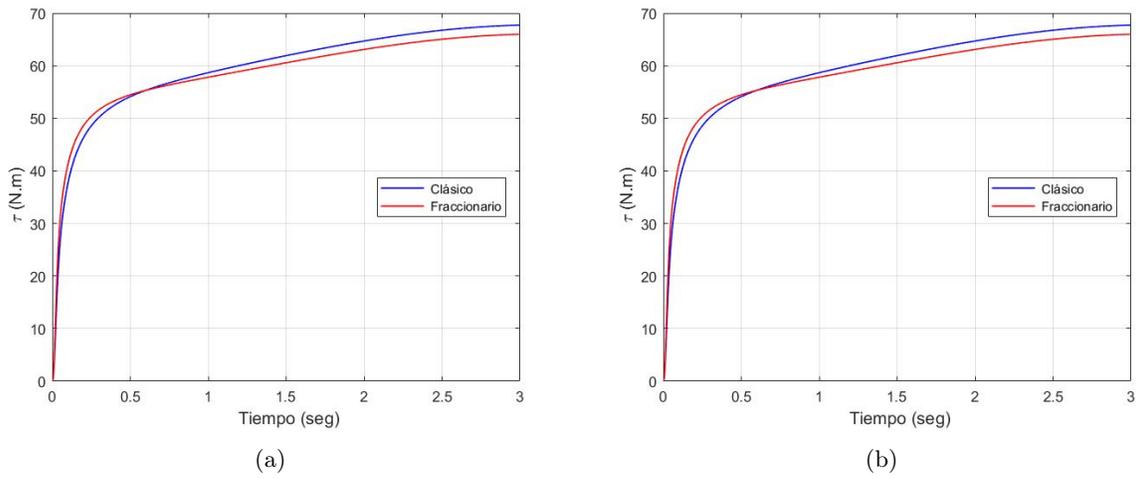


Figura 5.111: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

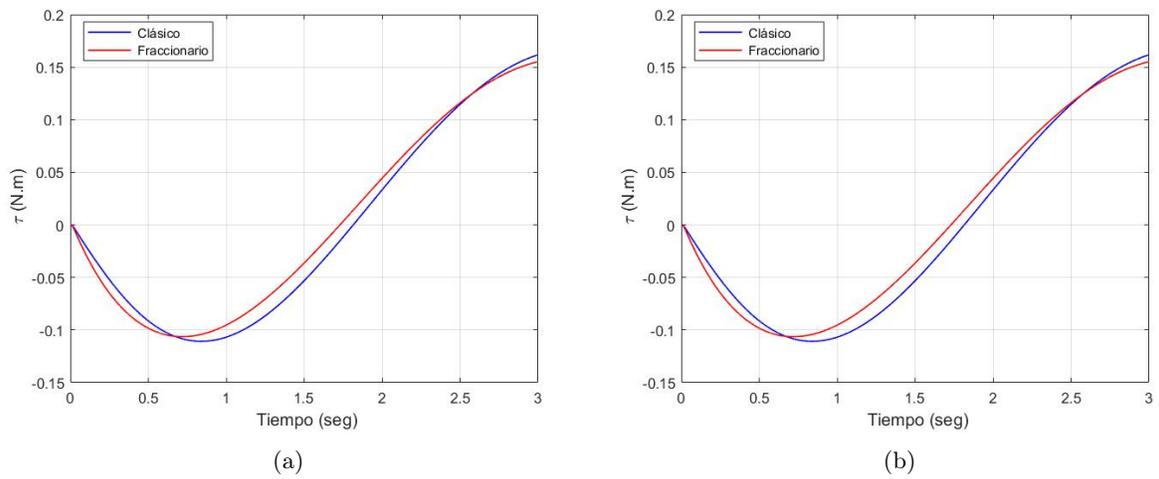


Figura 5.112: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

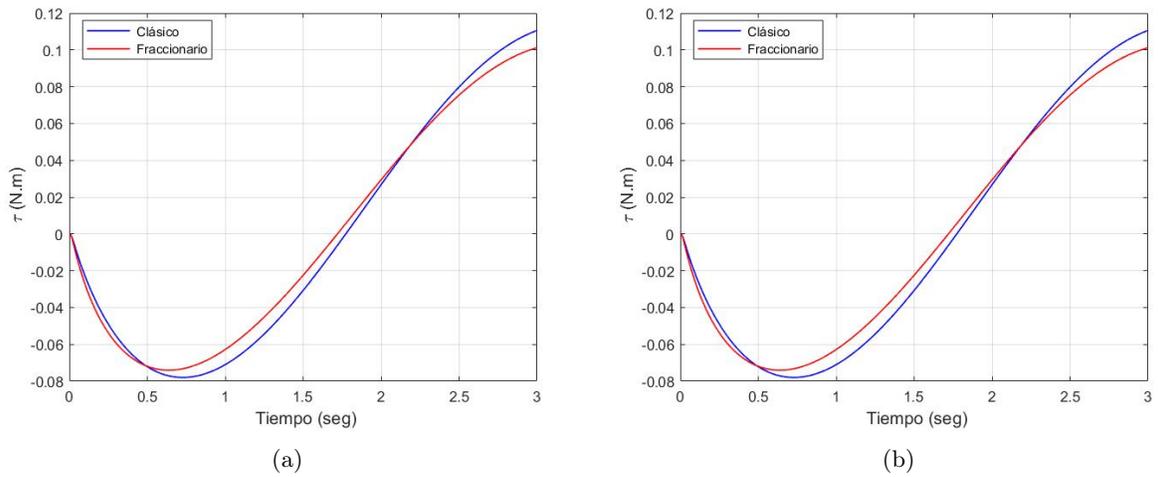


Figura 5.113: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

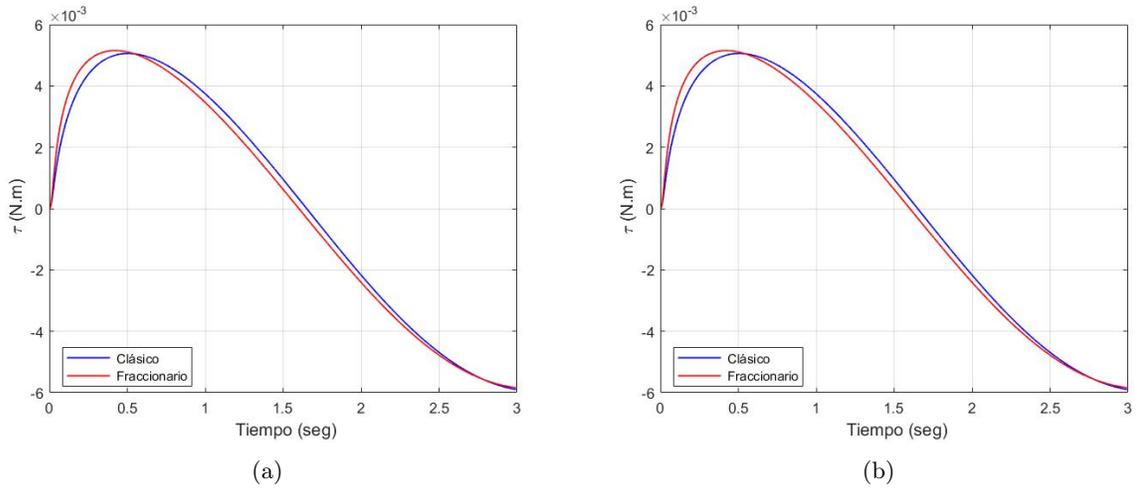
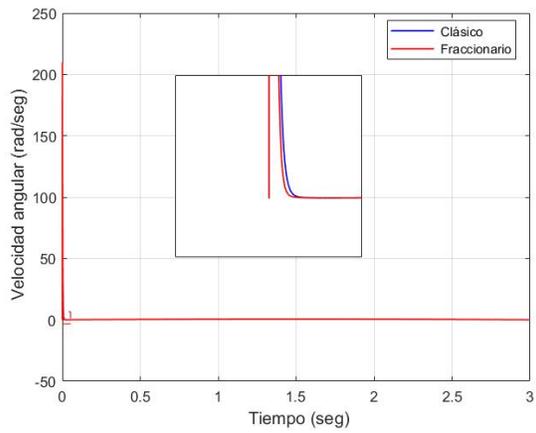
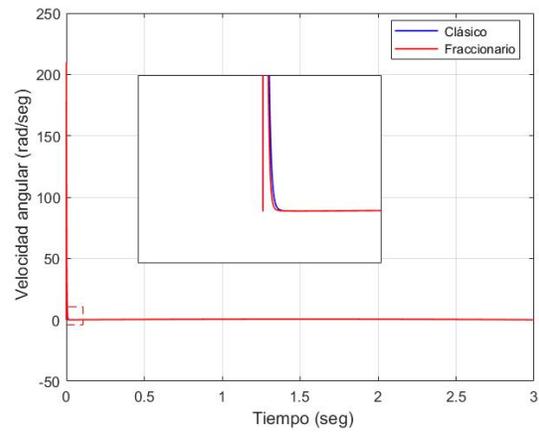


Figura 5.114: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

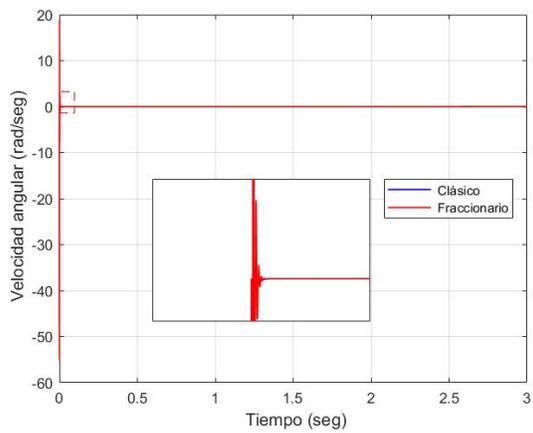


(a)

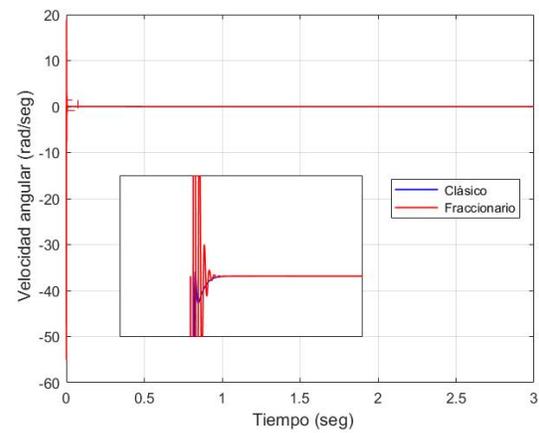


(b)

Figura 5.115: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.116: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

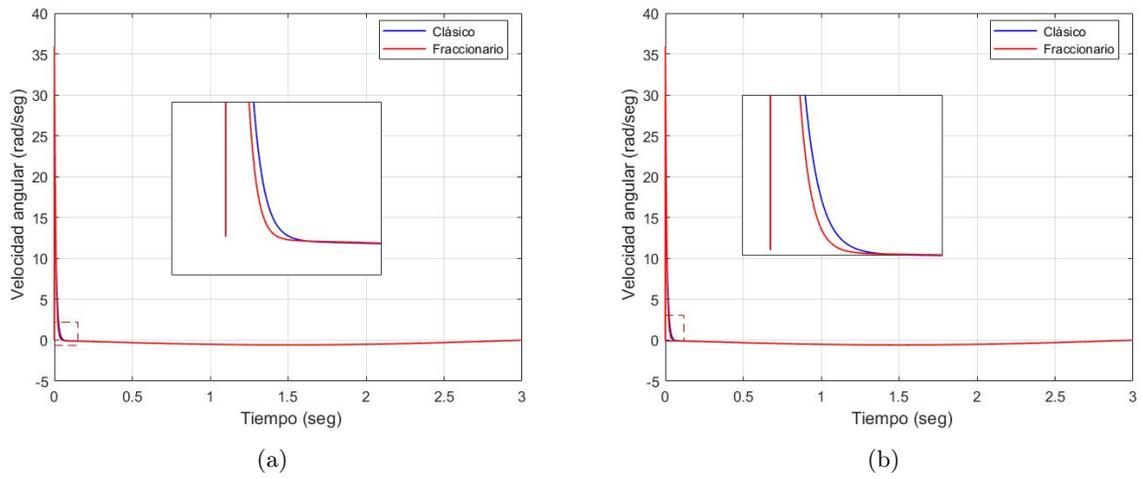


Figura 5.117: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

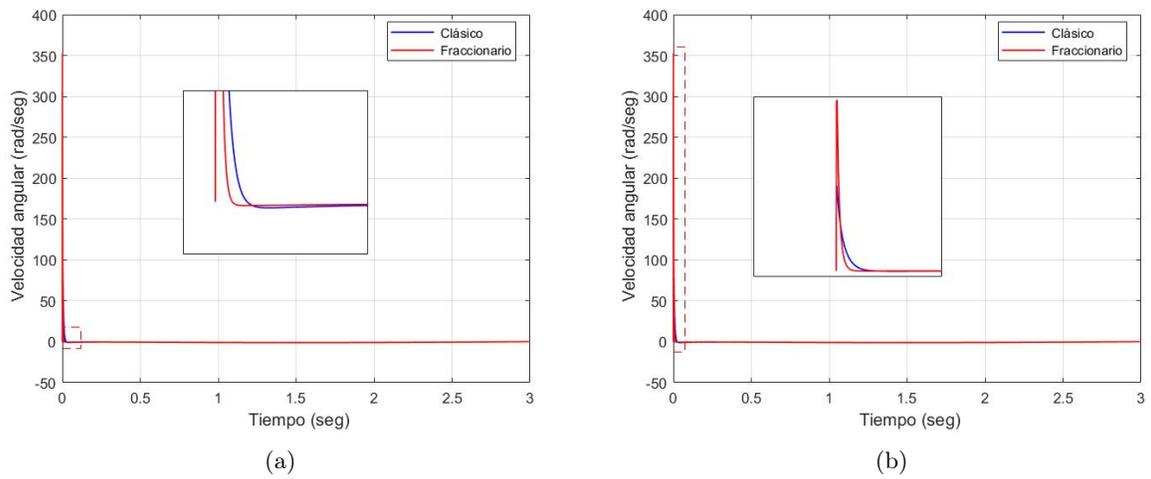
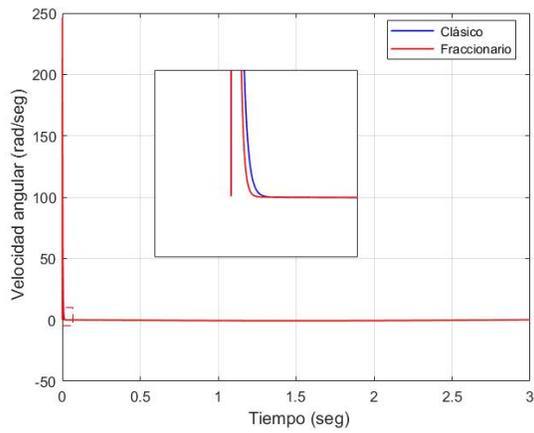
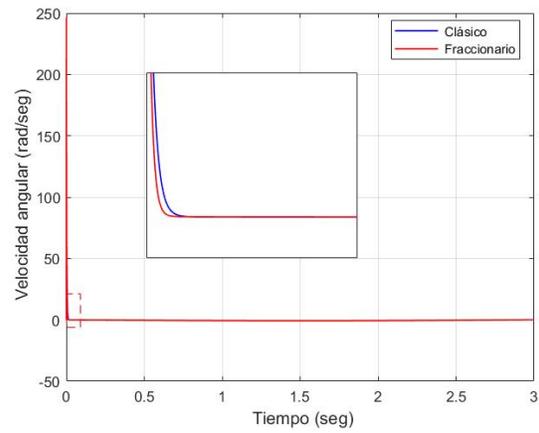


Figura 5.118: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

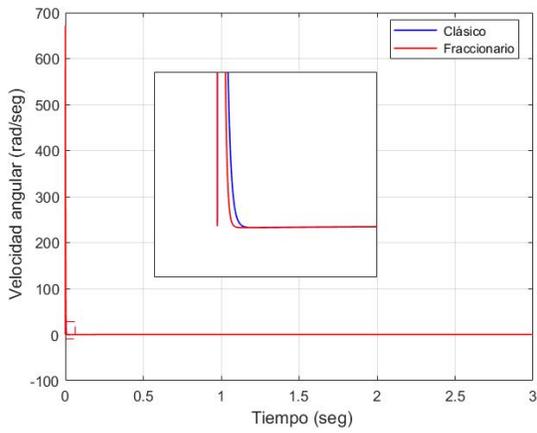


(a)

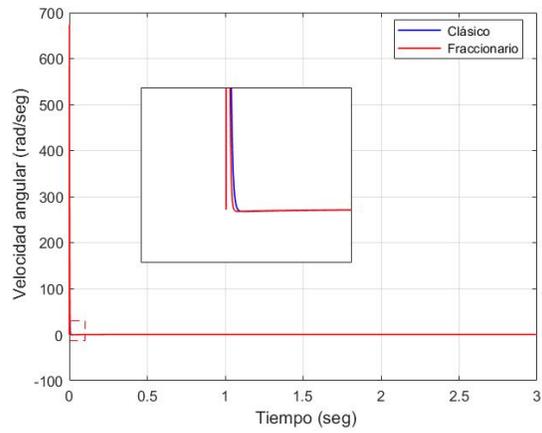


(b)

Figura 5.119: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

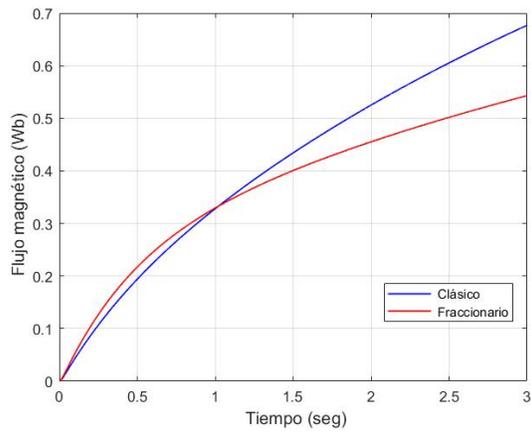


(a)

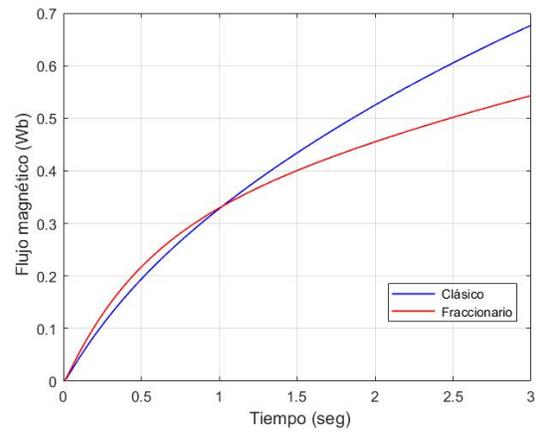


(b)

Figura 5.120: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

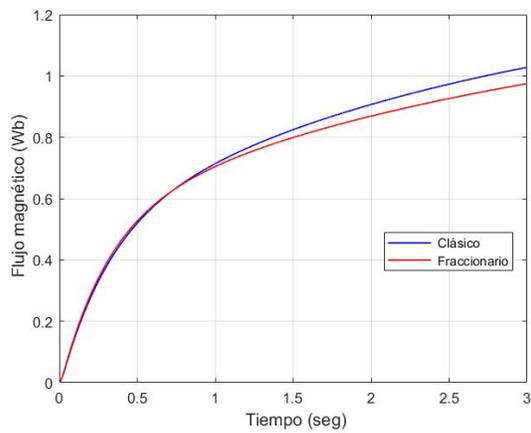


(a)

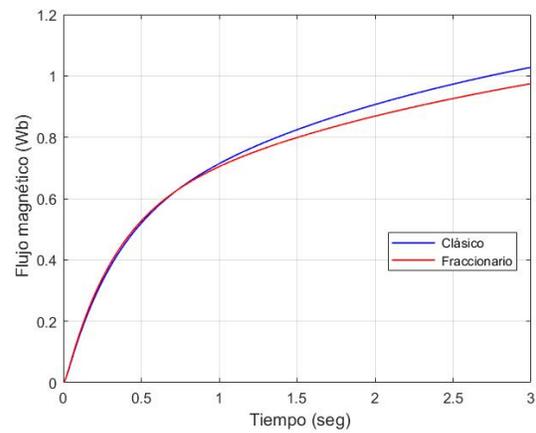


(b)

Figura 5.121: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

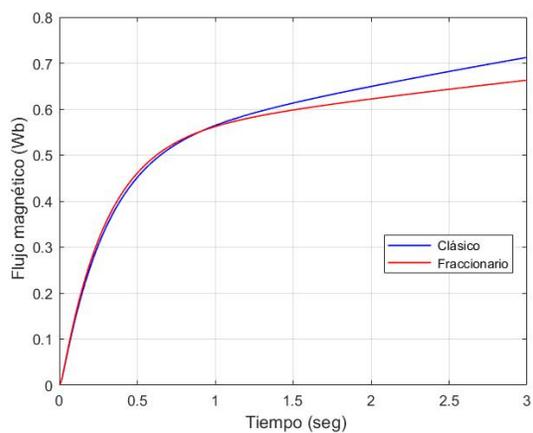


(a)

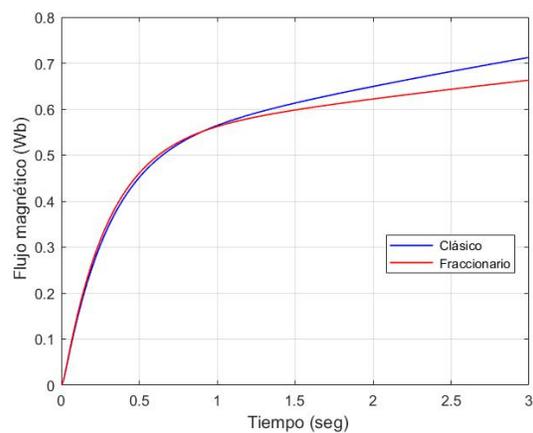


(b)

Figura 5.122: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

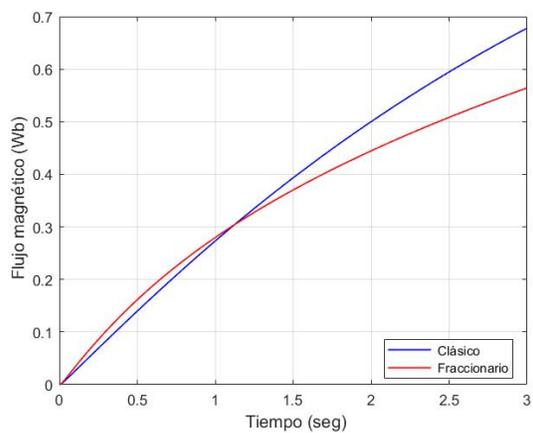


(a)

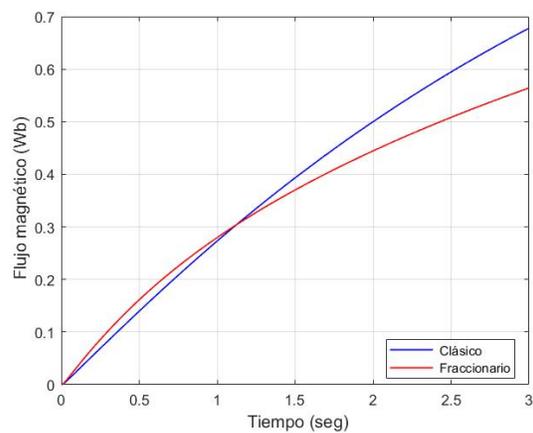


(b)

Figura 5.123: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

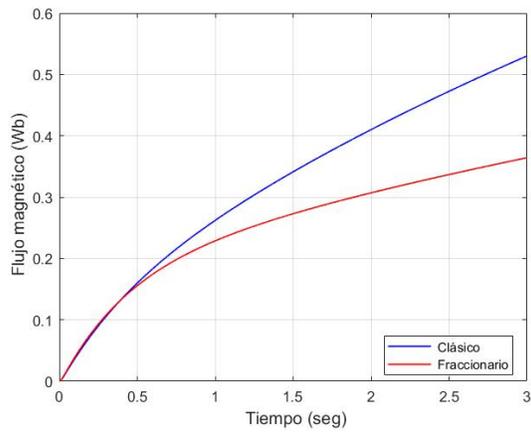


(a)

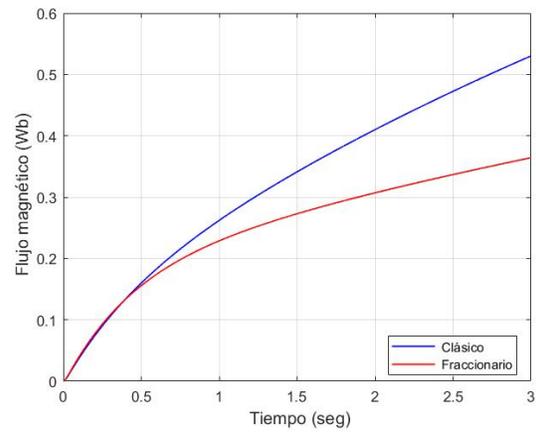


(b)

Figura 5.124: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

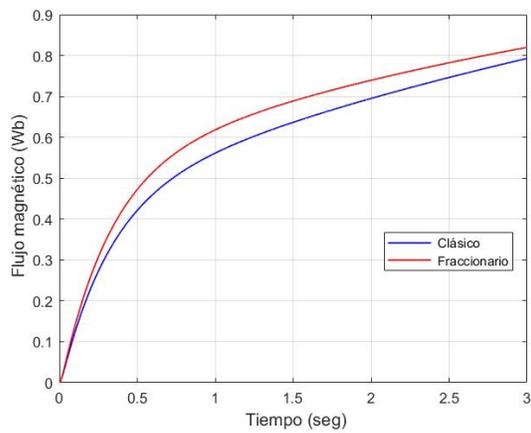


(a)

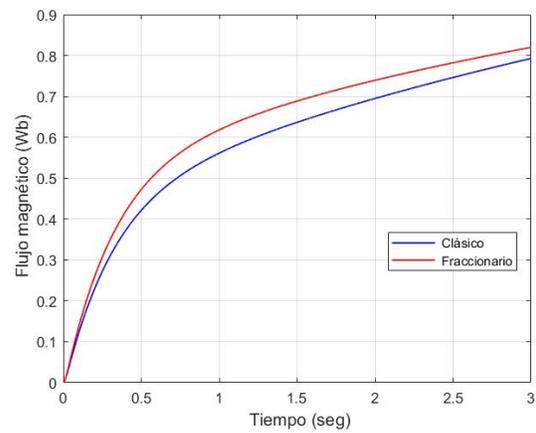


(b)

Figura 5.125: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.126: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

## Resultados para la trayectoria 2

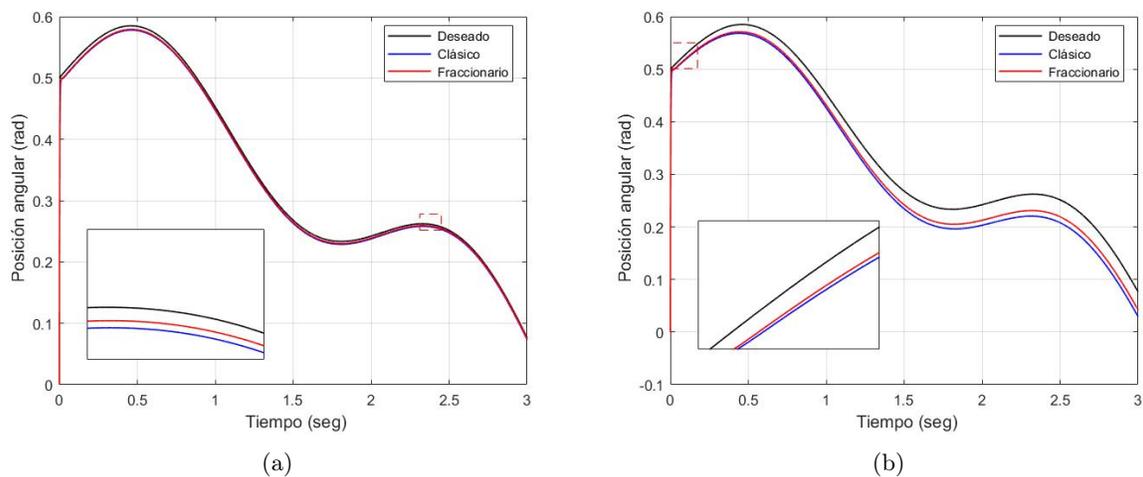


Figura 5.127: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

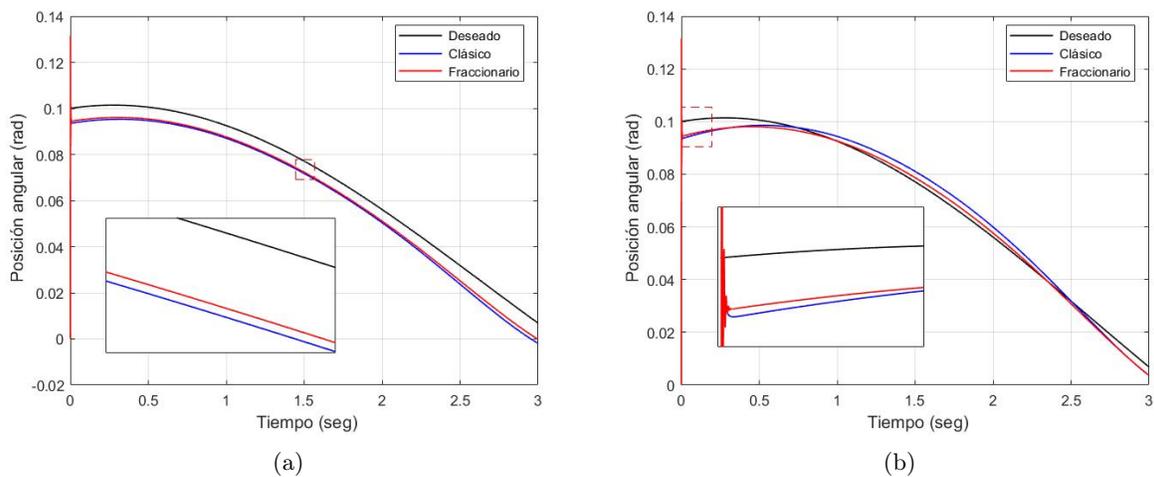


Figura 5.128: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

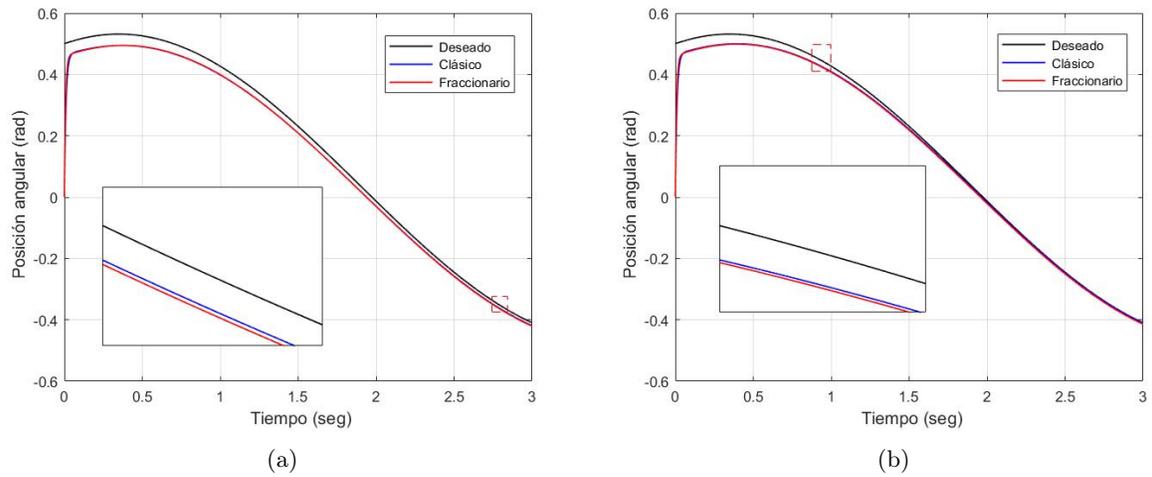


Figura 5.129: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

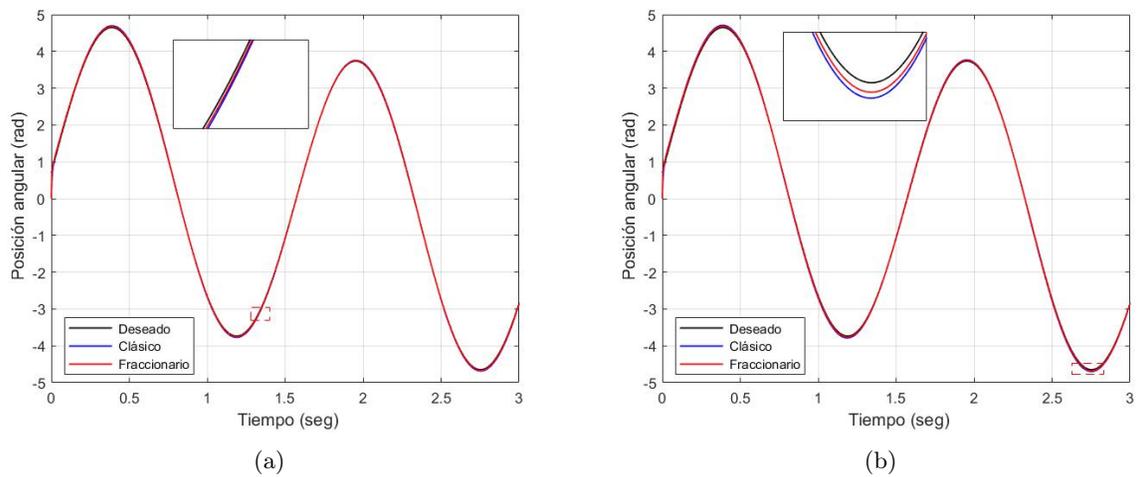


Figura 5.130: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

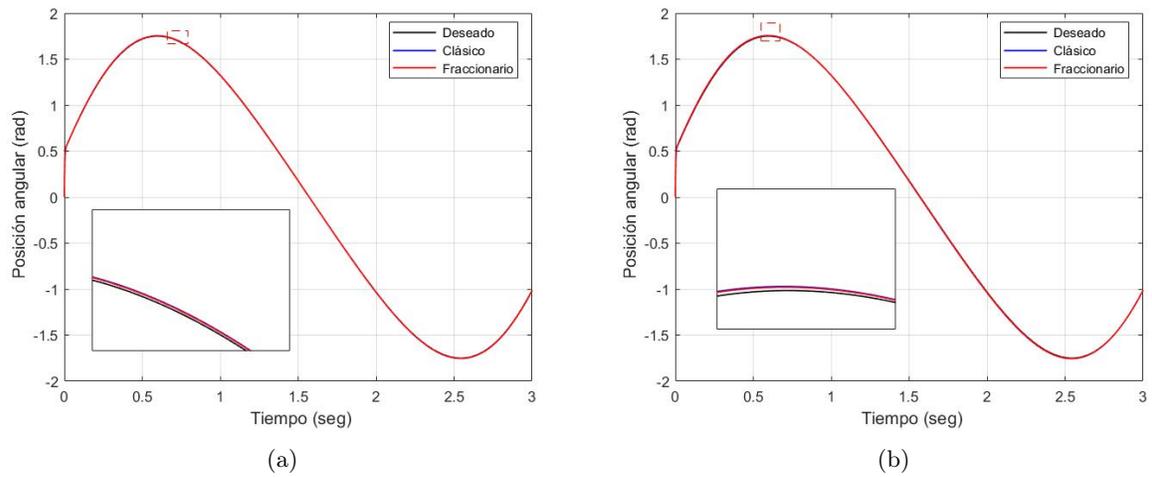


Figura 5.131: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

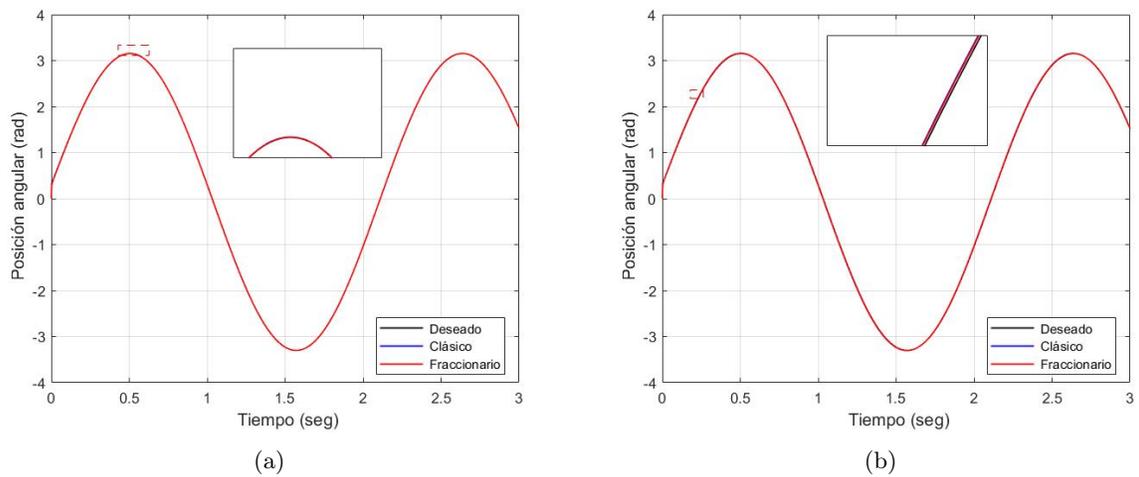


Figura 5.132: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

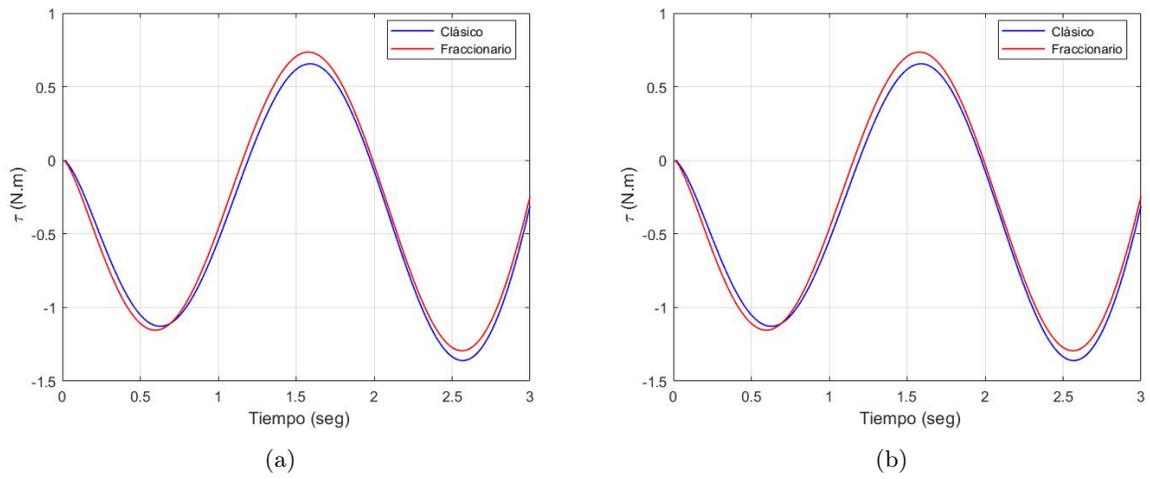


Figura 5.133: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

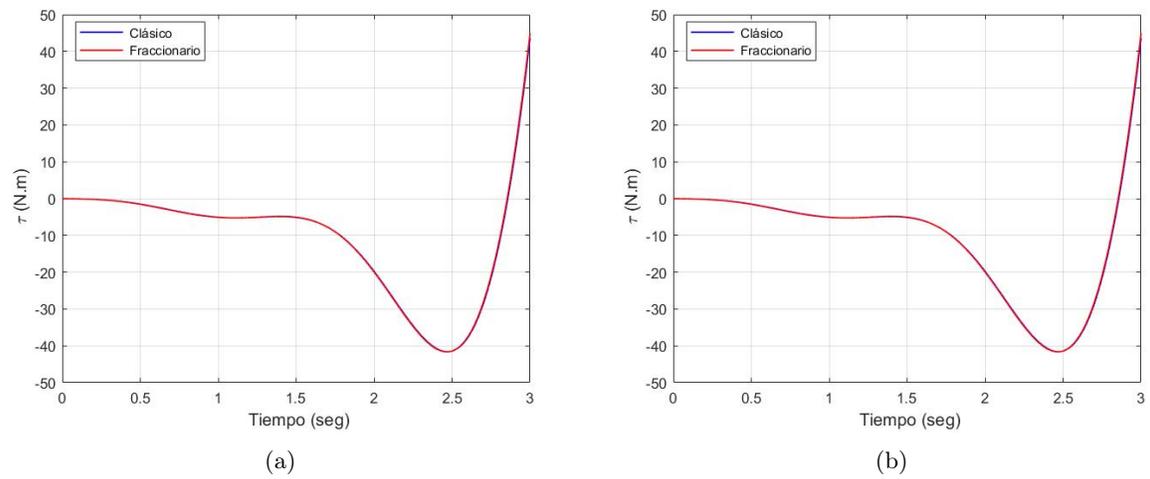
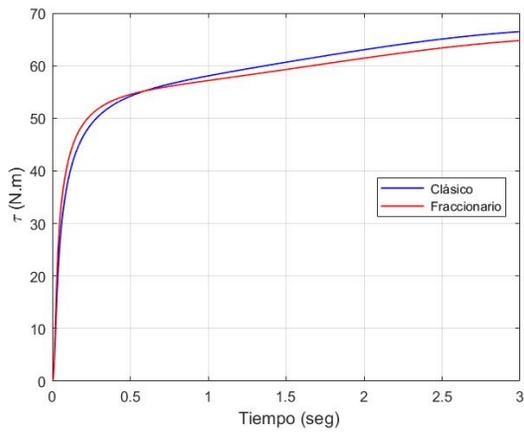
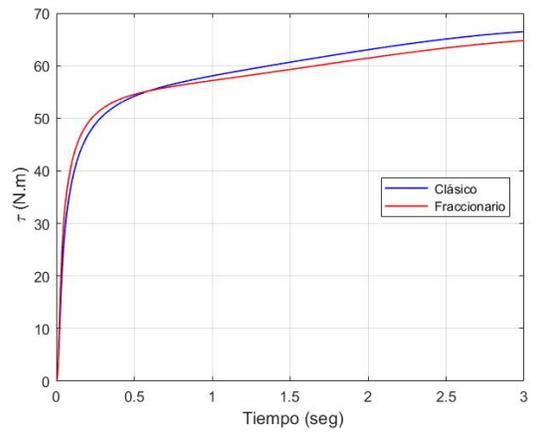


Figura 5.134: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

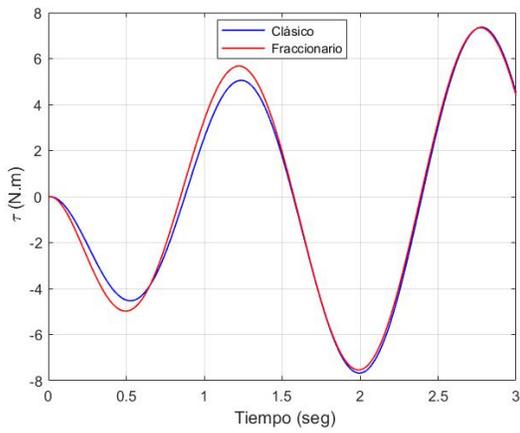


(a)

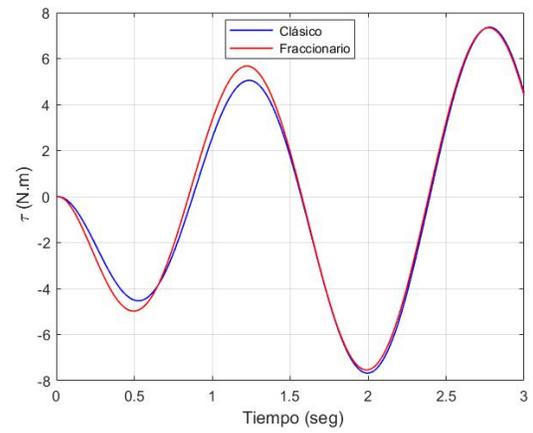


(b)

Figura 5.135: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.136: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

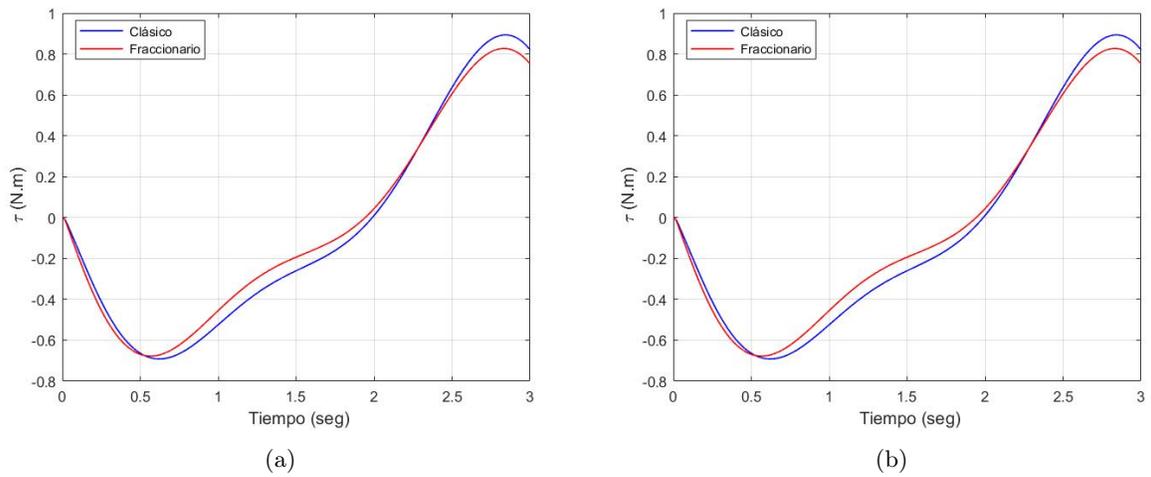


Figura 5.137: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

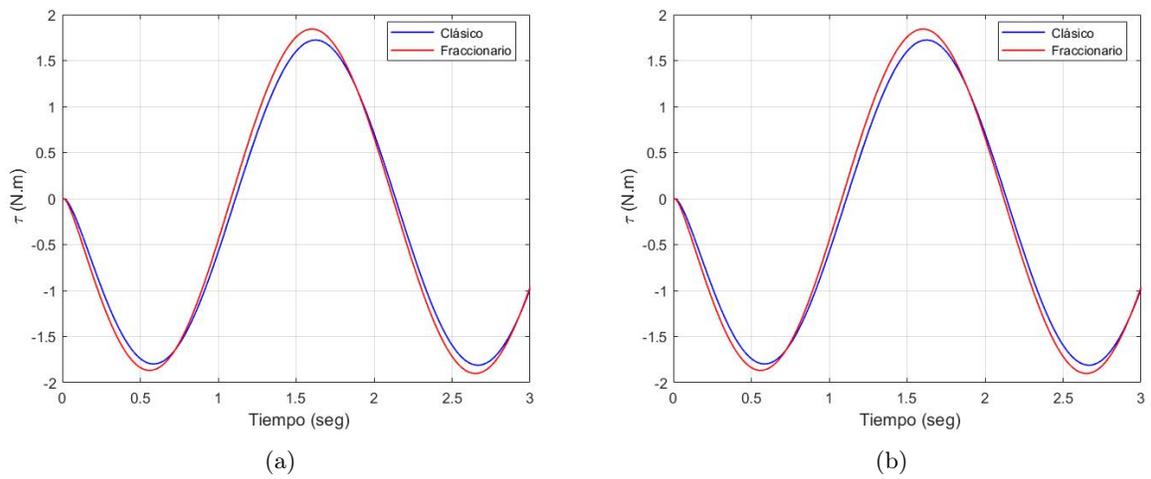


Figura 5.138: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

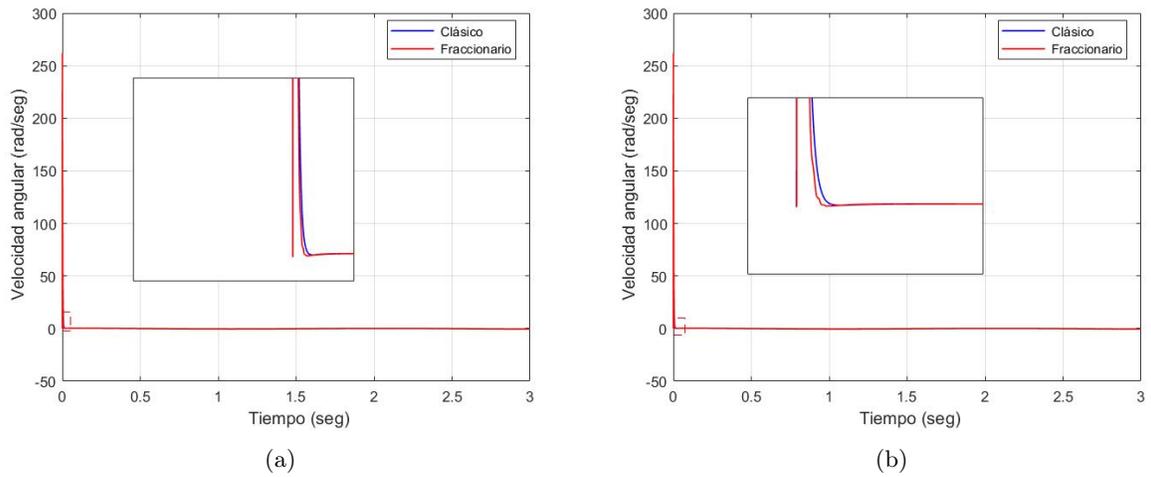


Figura 5.139: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

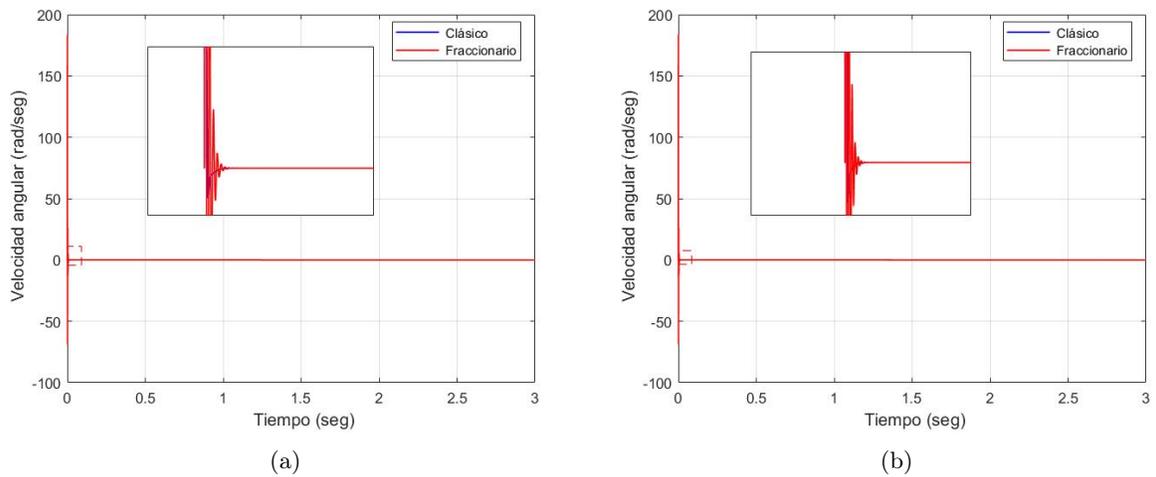


Figura 5.140: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

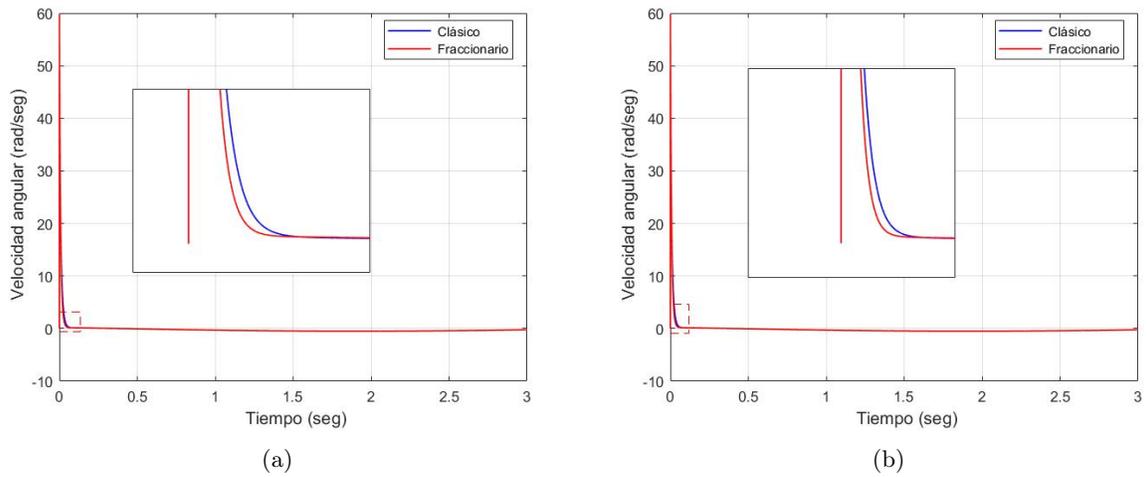


Figura 5.141: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

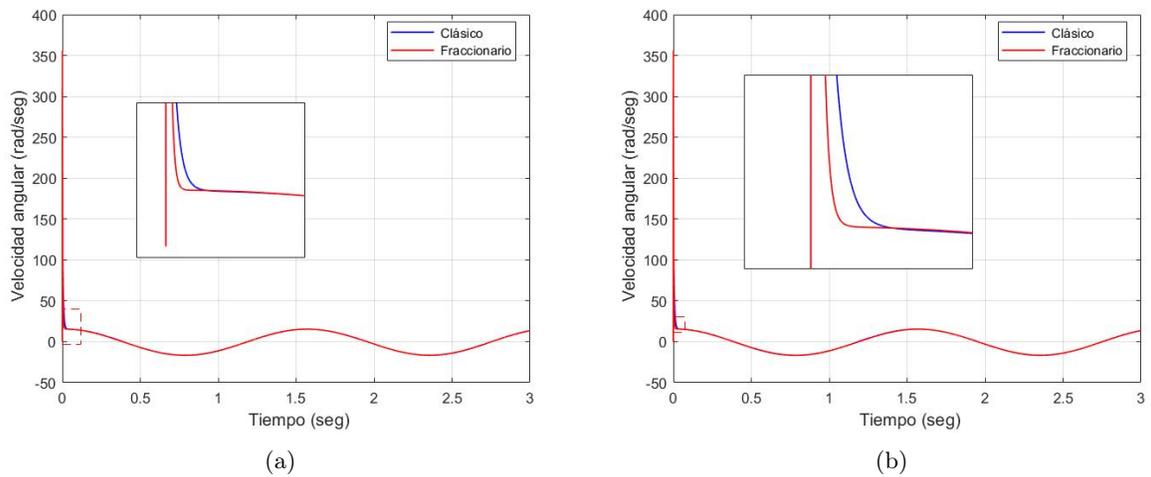
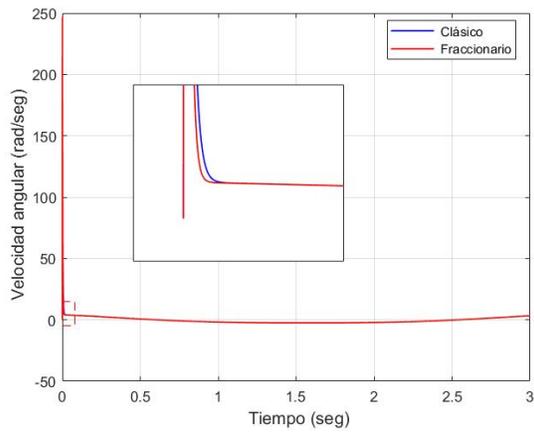
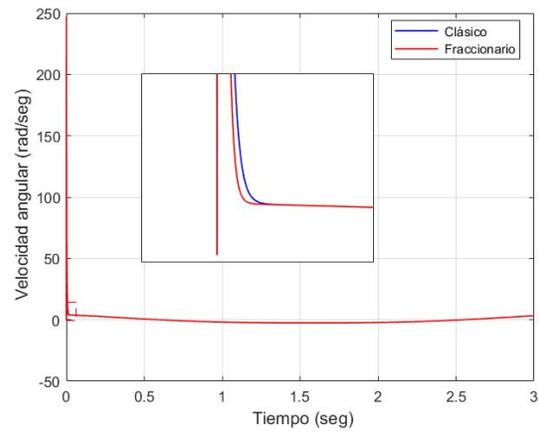


Figura 5.142: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

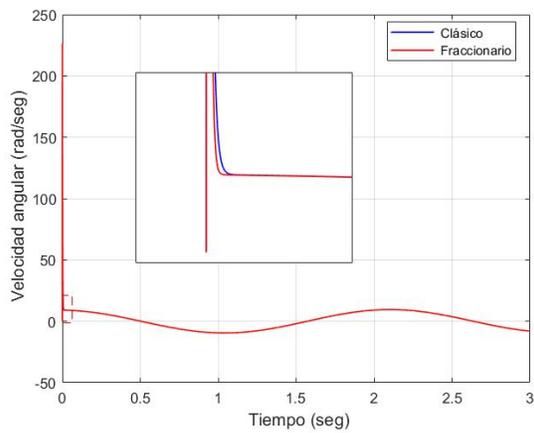


(a)

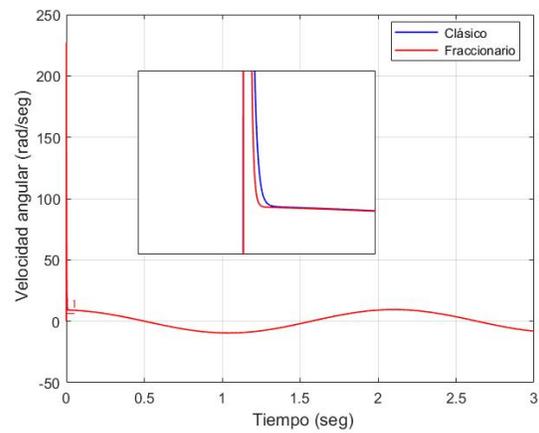


(b)

Figura 5.143: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

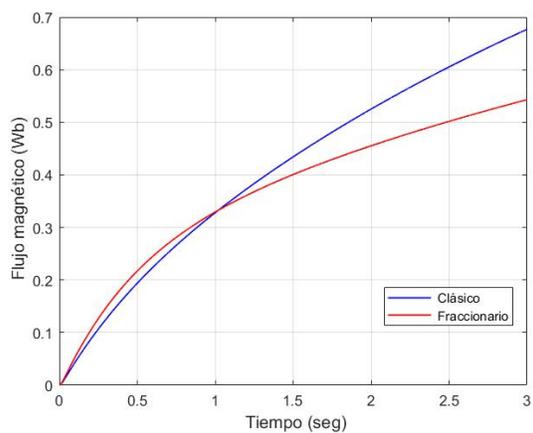


(a)

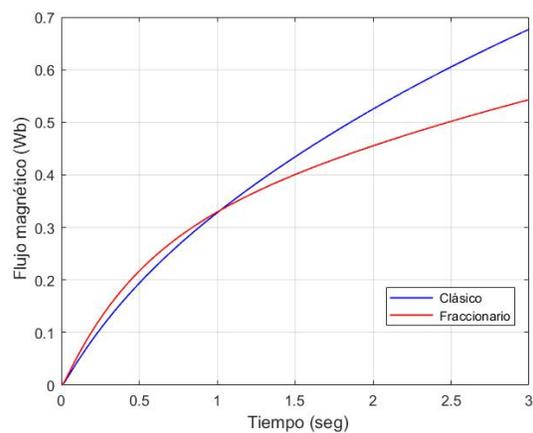


(b)

Figura 5.144: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

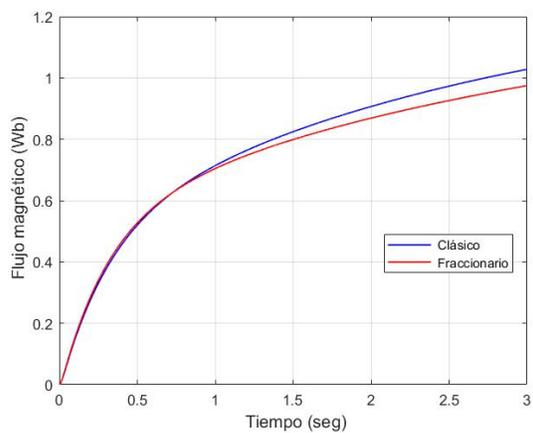


(a)

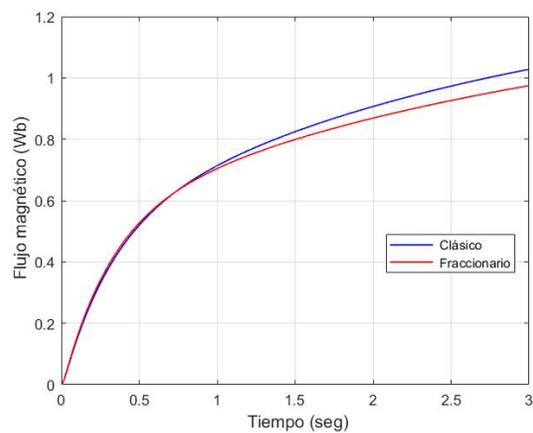


(b)

Figura 5.145: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

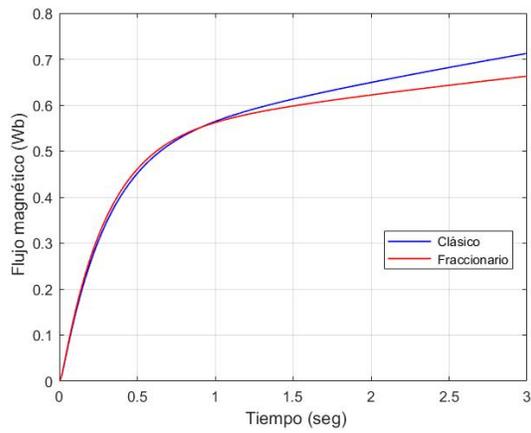


(a)

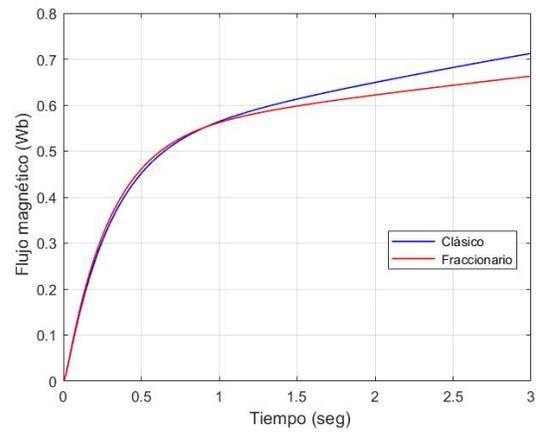


(b)

Figura 5.146: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

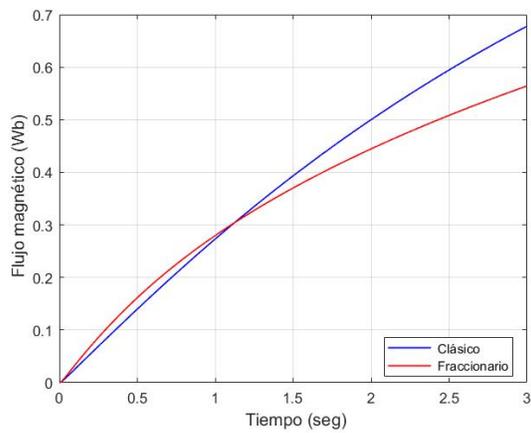


(a)

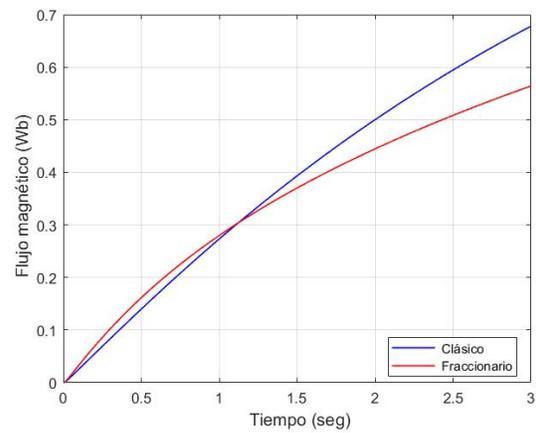


(b)

Figura 5.147: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

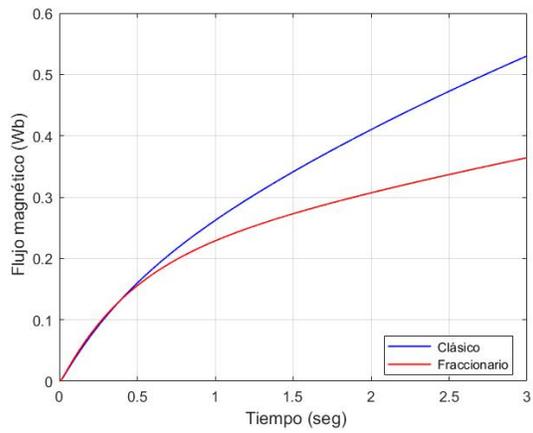


(a)

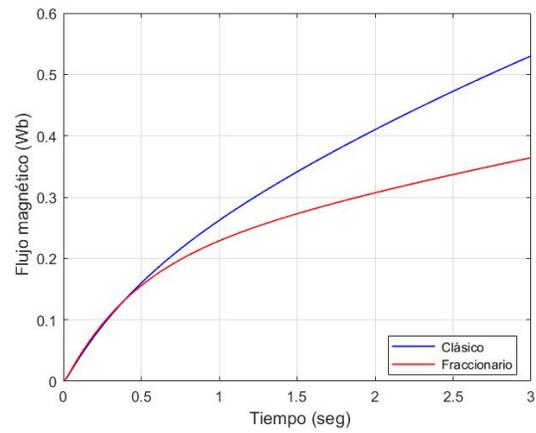


(b)

Figura 5.148: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

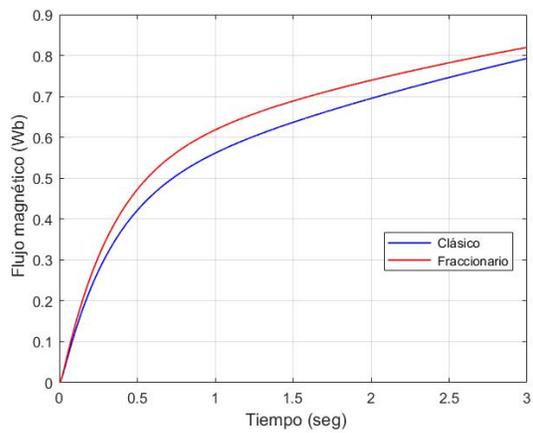


(a)

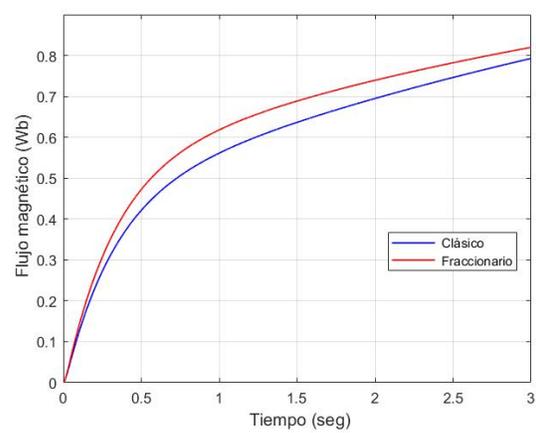


(b)

Figura 5.149: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.150: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

### Resultados para la trayectoria 3

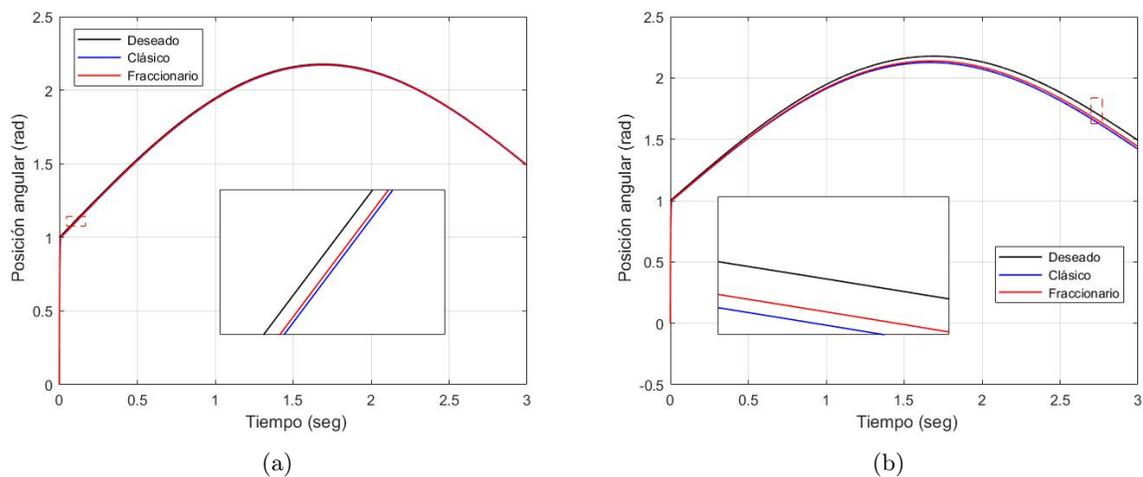


Figura 5.151: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

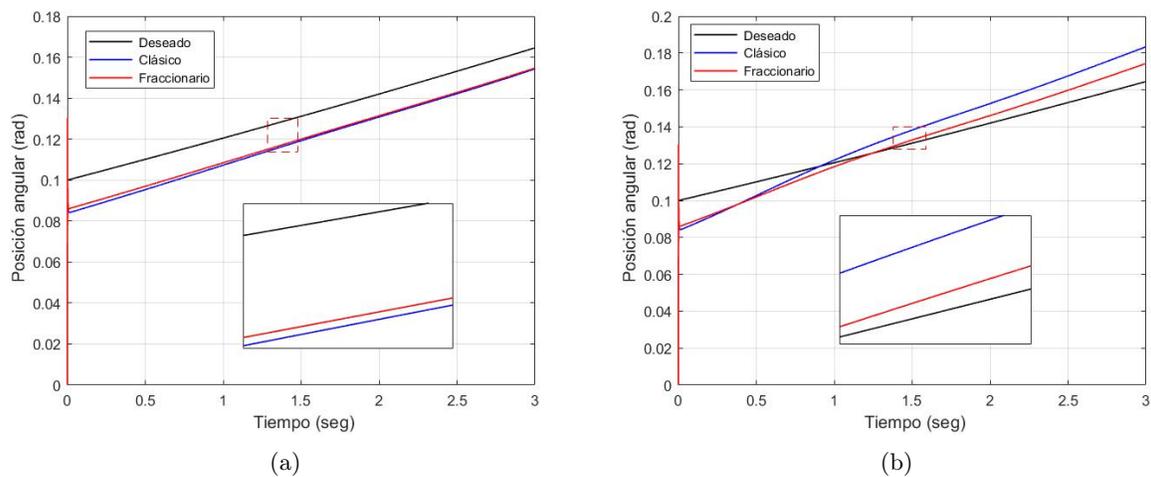


Figura 5.152: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

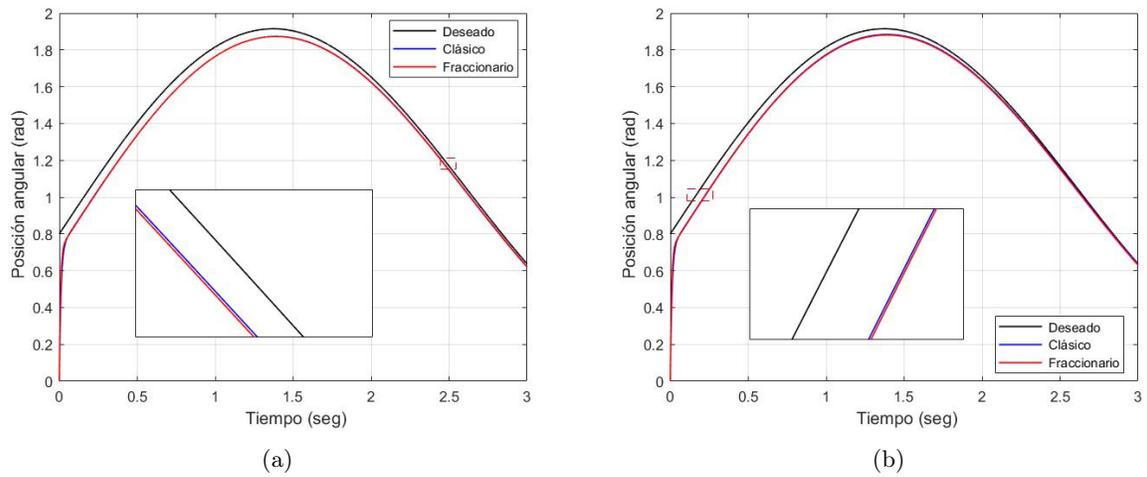


Figura 5.153: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

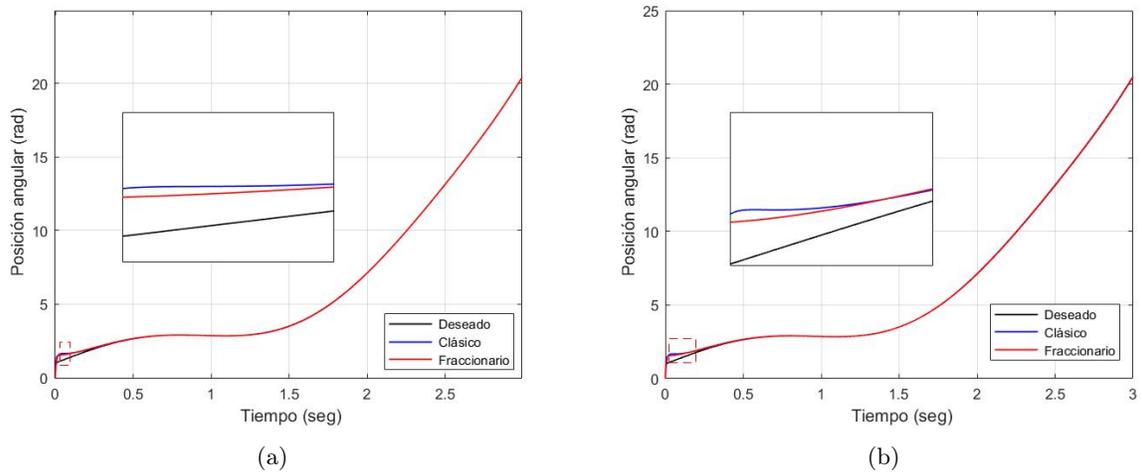


Figura 5.154: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

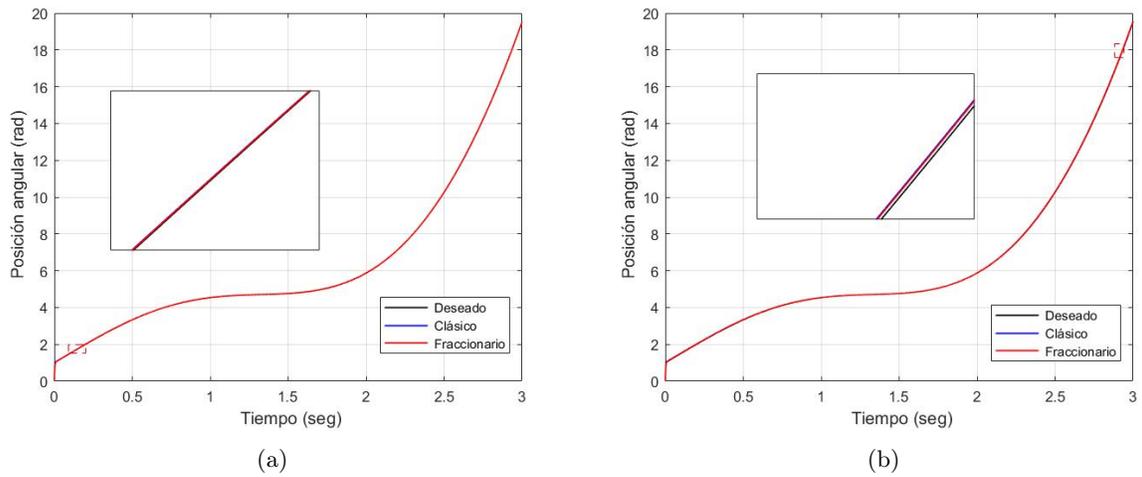


Figura 5.155: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

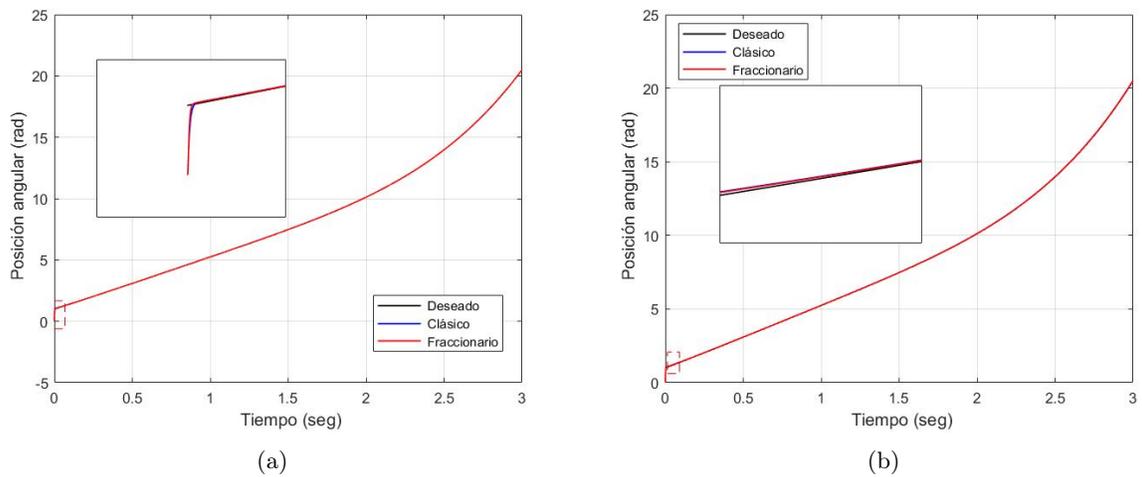
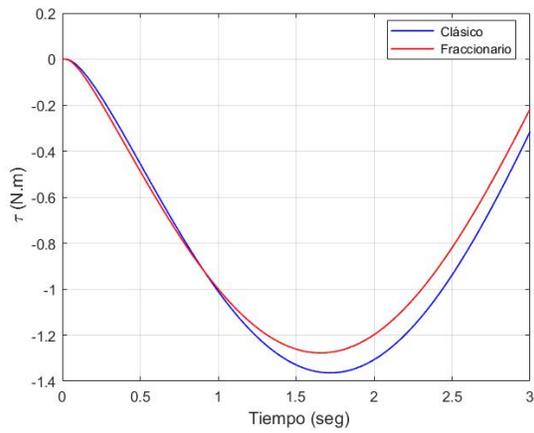
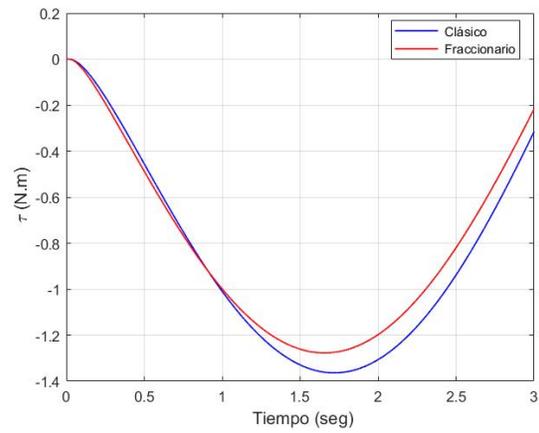


Figura 5.156: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

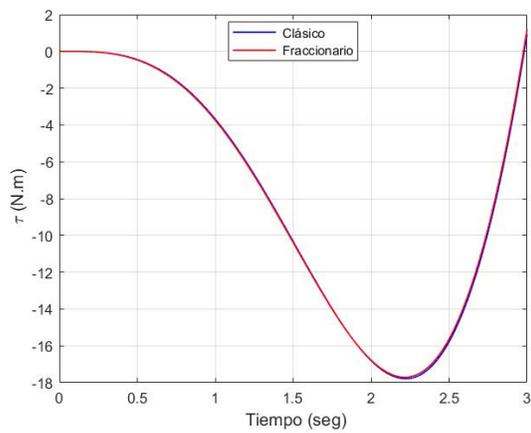


(a)

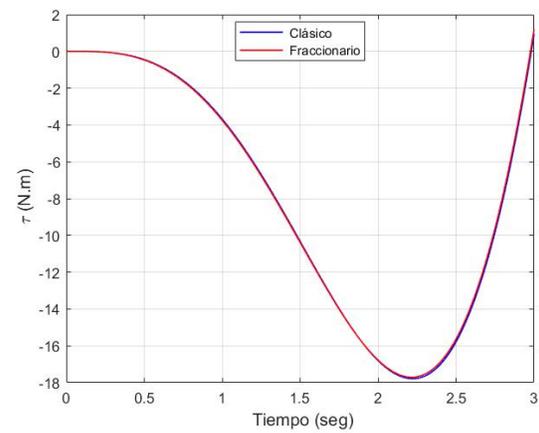


(b)

Figura 5.157: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.158: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

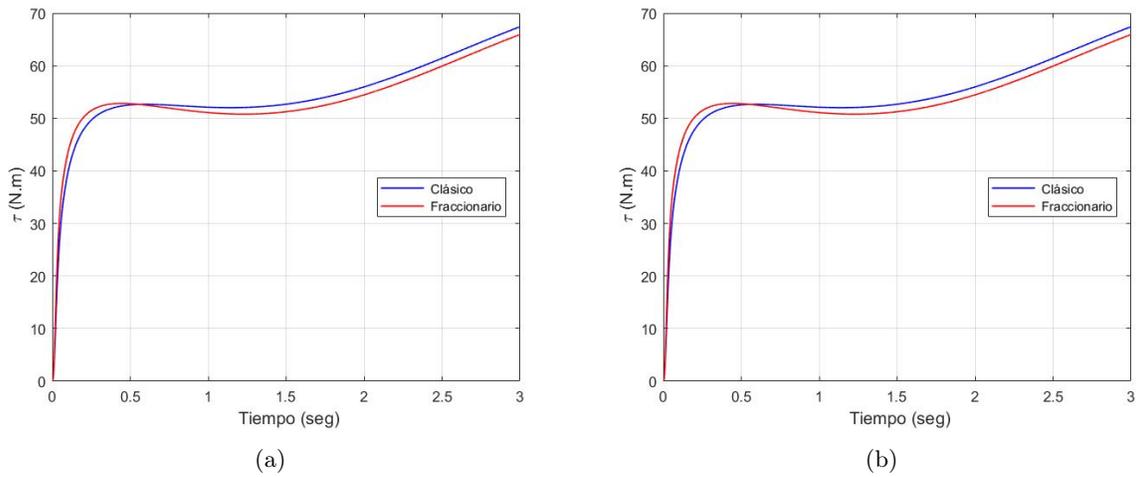


Figura 5.159: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

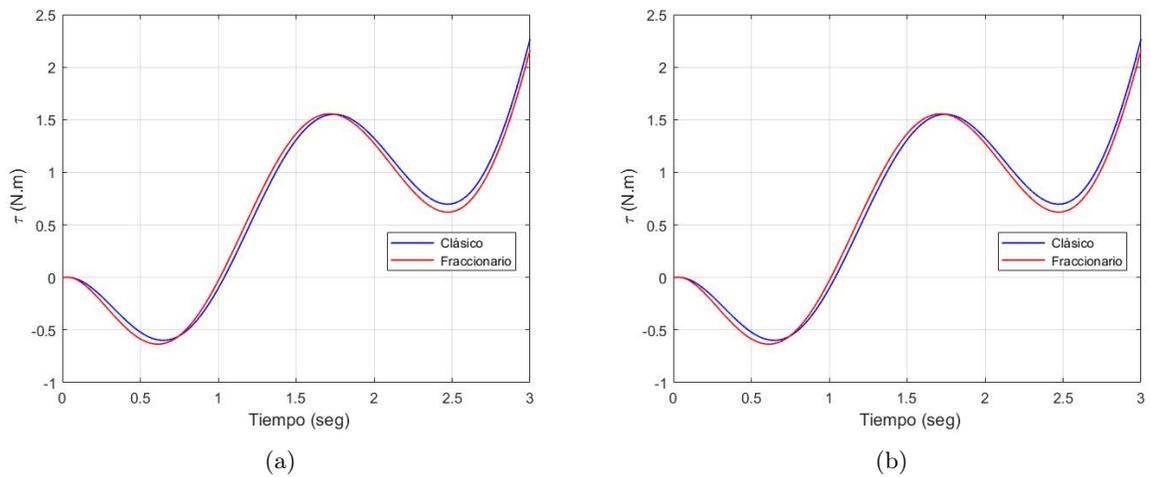


Figura 5.160: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

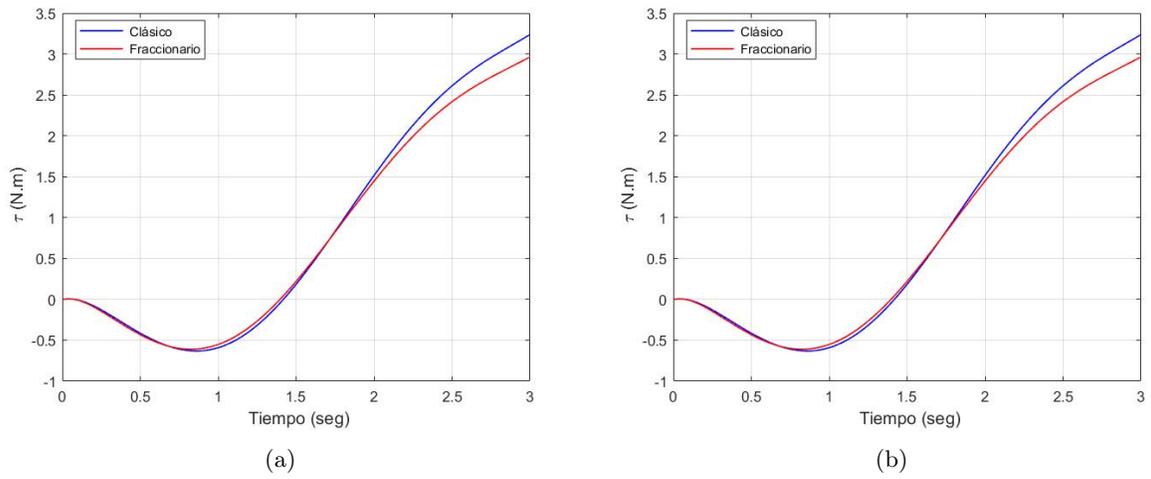


Figura 5.161: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

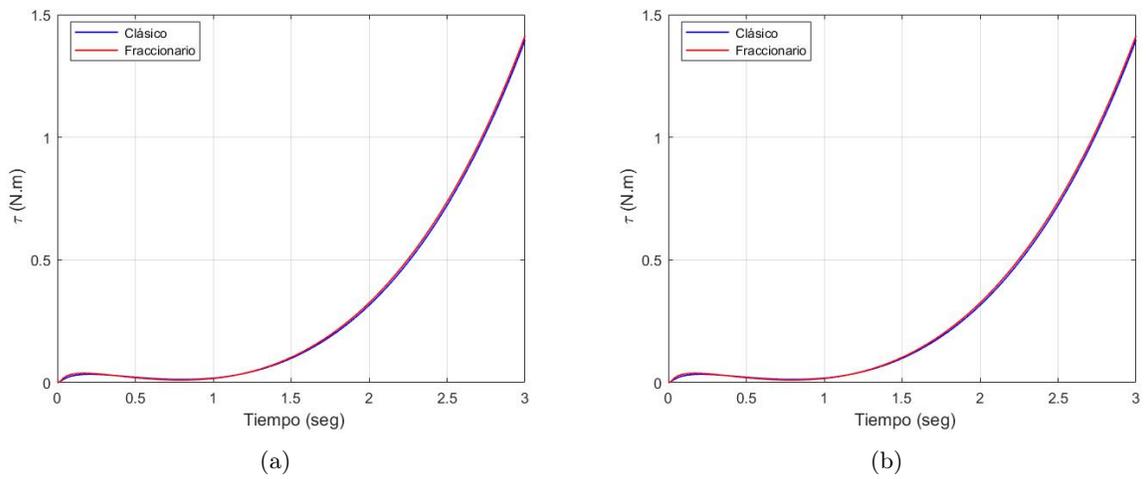


Figura 5.162: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

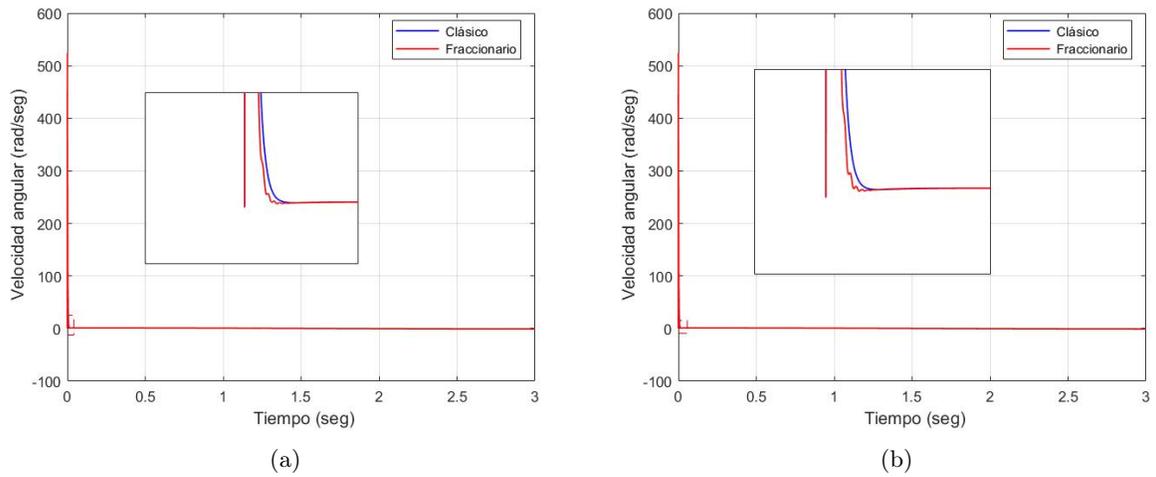


Figura 5.163: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

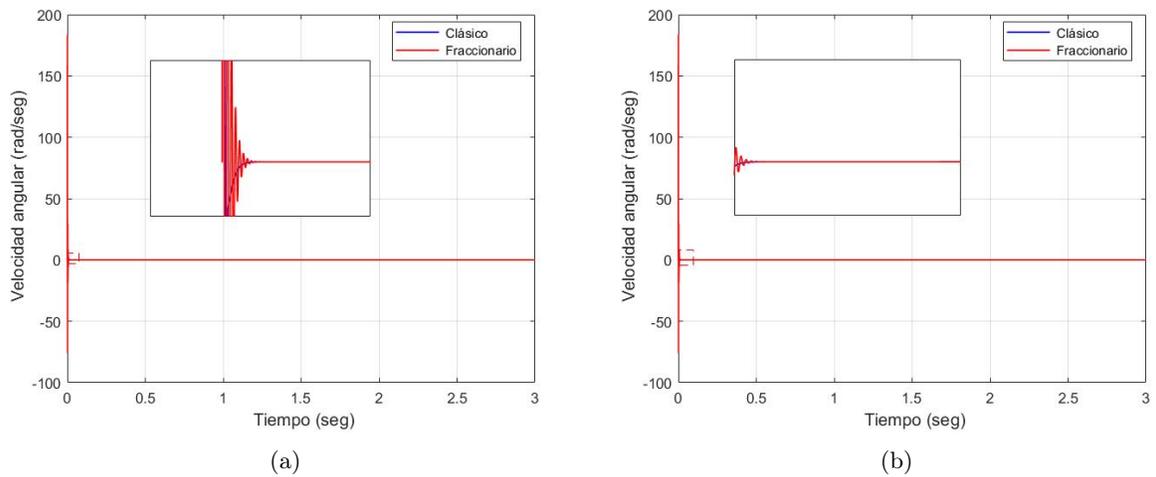


Figura 5.164: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

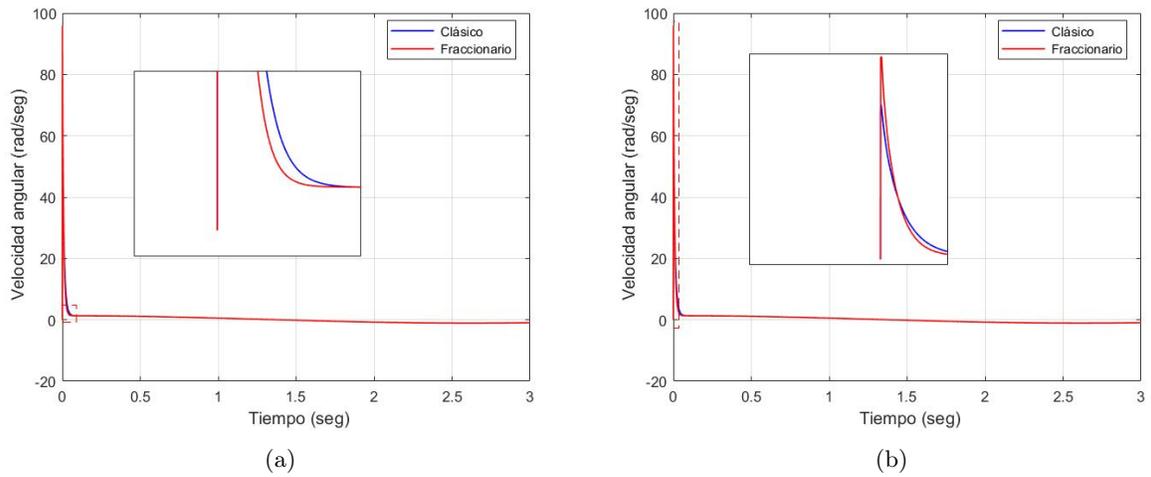


Figura 5.165: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

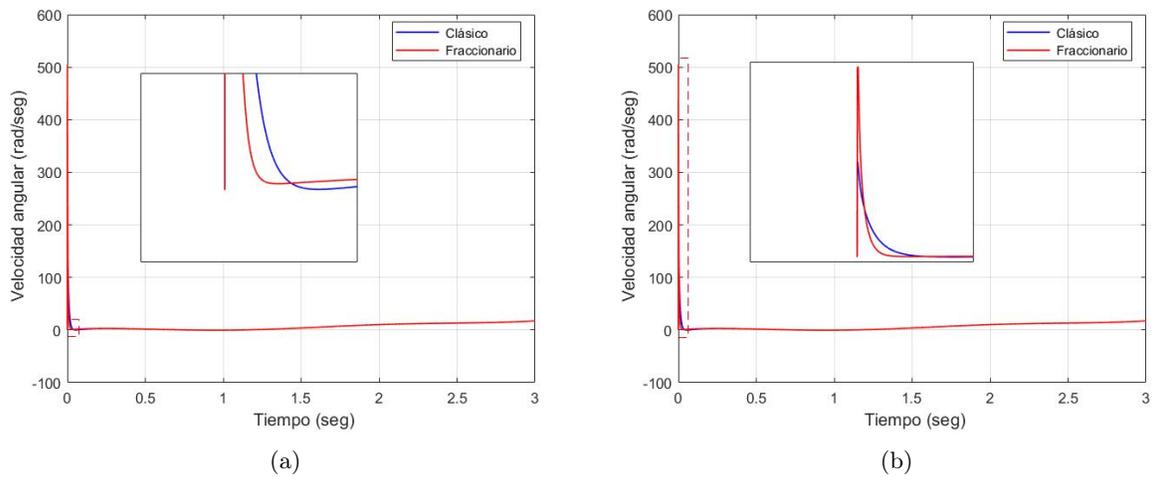
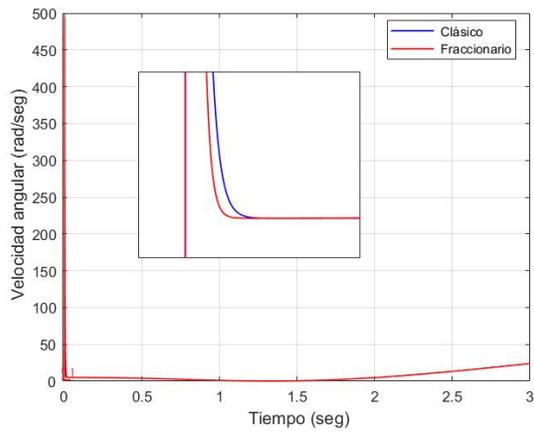
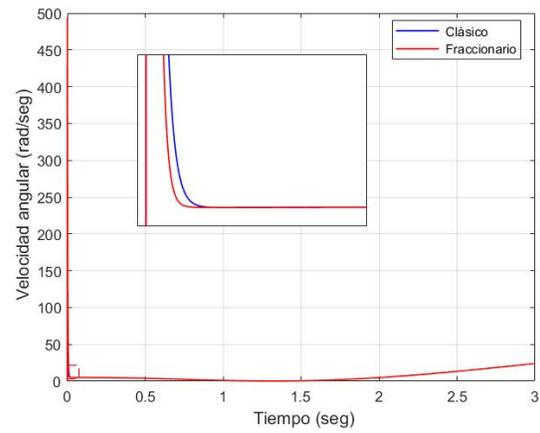


Figura 5.166: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

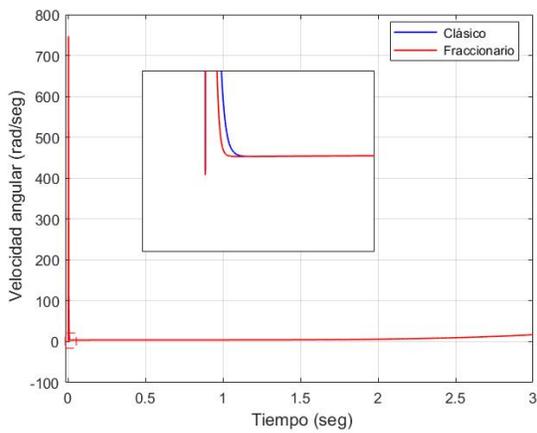


(a)

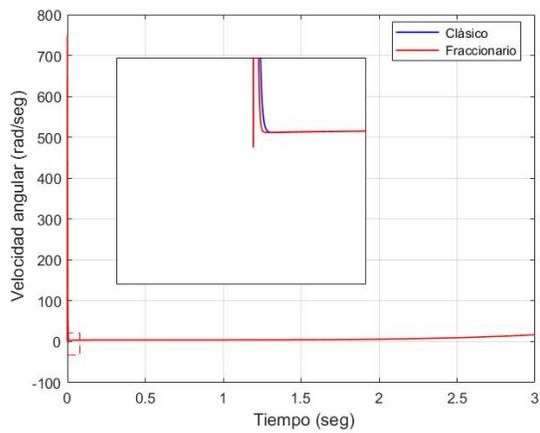


(b)

Figura 5.167: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

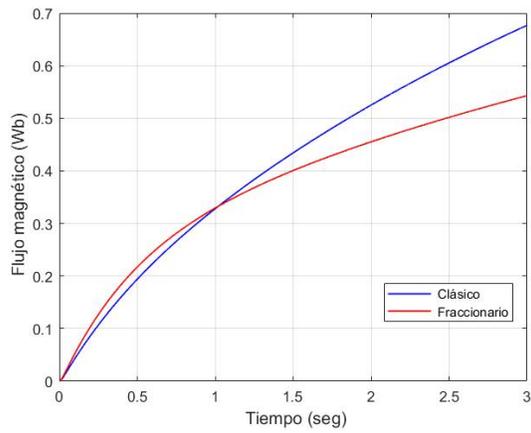


(a)

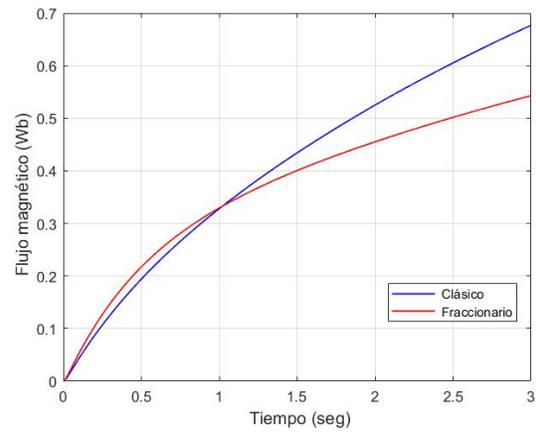


(b)

Figura 5.168: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

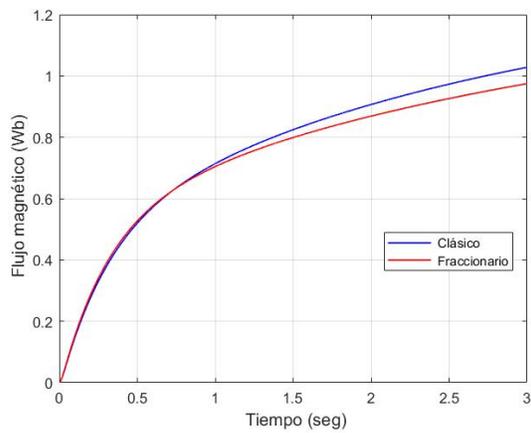


(a)

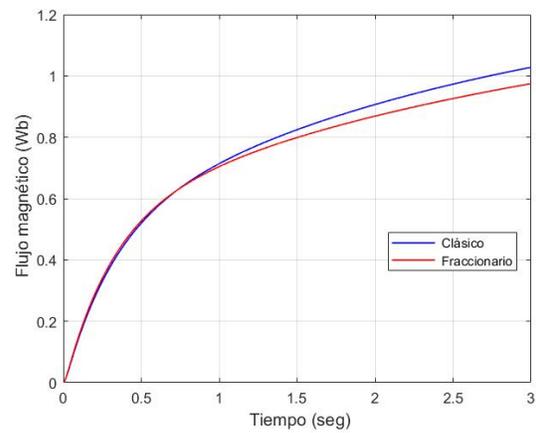


(b)

Figura 5.169: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

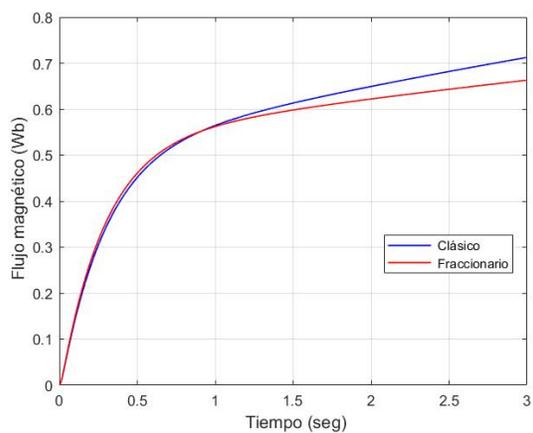


(a)

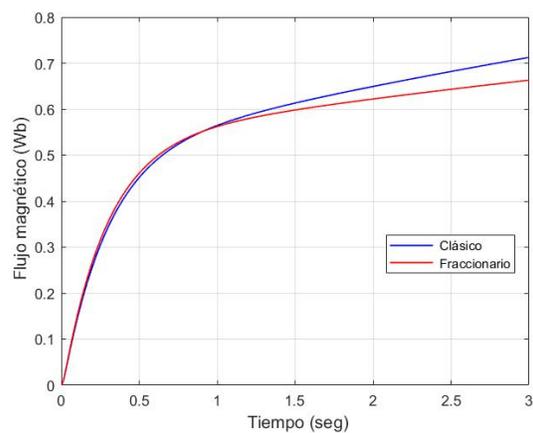


(b)

Figura 5.170: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

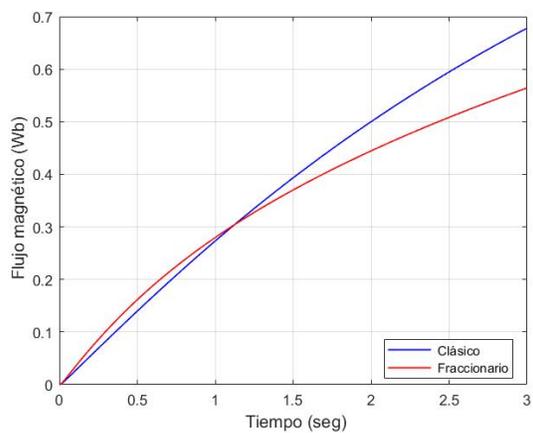


(a)

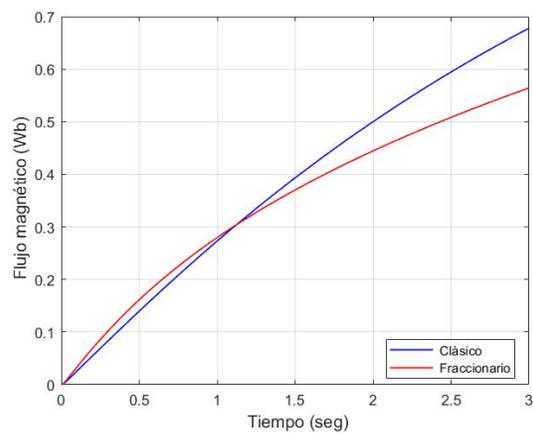


(b)

Figura 5.171: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

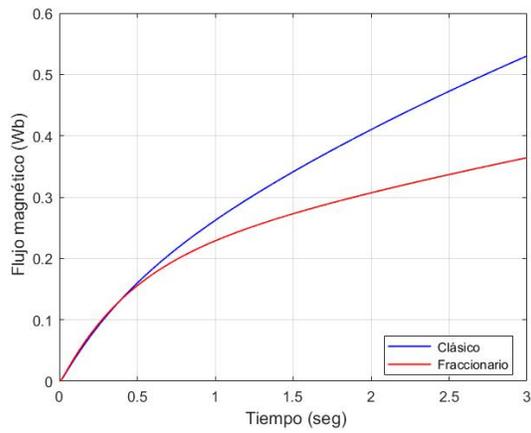


(a)

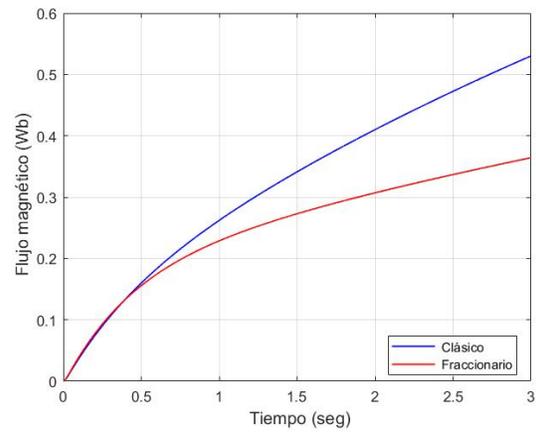


(b)

Figura 5.172: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

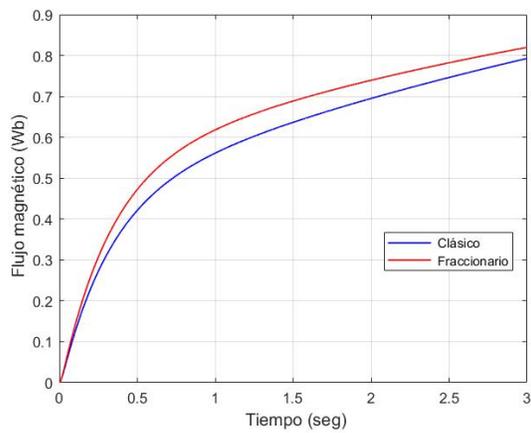


(a)

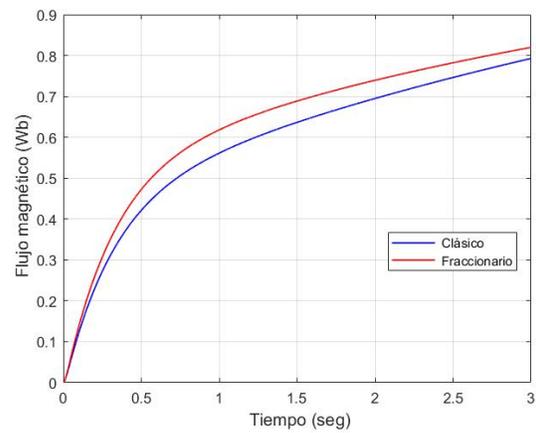


(b)

Figura 5.173: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.174: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

### 5.2.2. Modo deslizantes integral

Un controlador tipo modo deslizante integral es aplicado al robot Stanford para el control de sus articulaciones; para dicho controlador las trayectorias deseadas se obtienen a partir de la cinemática inversa del manipulador, cuyos parámetros de la matriz de orientación y posición se muestran en la Tabla 5.21. Los resultados de la sintonización para los controladores clásicos se muestran en las Tablas 5.22 y 5.23; las ganancias y los ordenes para los controladores fraccionarios se muestran en las Tablas 5.24 y 5.25. Las Tablas 5.26, 5.27 y 5.28 muestran la comparación del desempeño de los controladores para cada una de las articulaciones del manipulador con respecto a cada trayectoria. Los resultados se muestran de la Figura 5.175 a 5.252.

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde  $o_x = a_x = n_y = a_y = n_z = o_z = 0$  y  $n_x = o_y = a_z = 1$  para las tres trayectorias propuestas.

	Trayectoria 1	Trayectoria 2	Trayectoria 3
$\mathbf{P}_x$	$7.50\cos(t)$	$7.50\cos(t)$	$0.20e^{0.2t}$
$\mathbf{P}_y$	$7.52\sin(t)$	$7.52\sin(t)$	$0.22e^{0.2t}$
$\mathbf{P}_z$	$0.1t$	$-0.15$	$0.01t$

Tabla 5.21: Parámetros de las trayectorias deseadas para los controladores modo deslizante integral clásico y fraccionario aplicado al robot Stanford.

$q_i$	PI			
	$\mathbf{K}_{pvd}$	$\mathbf{K}_{ivd}$	$\mathbf{K}_{pvq}$	$\mathbf{K}_{ivq}$
$q_1$	966.2299	157.2703	416.8538	923.3089
$q_2$	412.0334	610.1649	55.5708	757.7075
$q_3$	713.5951	519.9420	981.2427	289.5361
$q_4$	355.0996	450.4817	895.2474	612.1964
$q_5$	412.8055	993.6586	19.8131	946.8145
$q_6$	756.8120	277.3352	313.3580	202.9199

Tabla 5.22: Ganancias de los controladores PI clásicos.

$q_i$	Modo deslizante integral		
	$K_p$	$K_d$	$K$
$q_1$	897.9105	339.2808	0.1843
$q_2$	495.4958	537.0337	
$q_3$	55.9789	585.8173	
$q_4$	101.3476	250.4725	
$q_5$	668.5467	80.0279	
$q_6$	247.6448	479.3901	

Tabla 5.23: Ganancias de los controladores modo deslizante integral de orden entero.

$q_i$	$PI^\zeta$					
	$K_{pvd}$	$K_{ivd}$	$\zeta$	$K_{pvq}$	$K_{ivq}$	$\zeta$
$q_1$	662.1879	725.2837	0.8475	524.0772	295.3995	0.7951
$q_2$	859.9560	806.5905	0.7851	125.5727	422.7866	0.9173
$q_3$	574.5307	89.5136	0.8017	180.9850	304.8358	0.7169
$q_4$	564.9090	351.1141	0.7165	838.7095	533.7098	0.7866
$q_5$	417.6797	636.3910	0.8127	533.8394	406.1029	0.8107
$q_6$	924.0758	292.4280	0.7378	277.0544	164.4589	0.7294

Tabla 5.24: Ganancias y ordenes de los controladores  $PI^\zeta$  de orden  $\zeta$ .

$q_i$	Modo deslizante integral				
	$K_p$	$K_d$	$K$	$\lambda$	$\gamma$
$q_1$	917.3419	369.0974	0.6302	0.9999	0.9999
$q_2$	475.5492	752.4207		0.9998	0.9998
$q_3$	444.4064	880.3755		0.9997	0.9997
$q_4$	142.8416	404.4501		0.9996	0.9996
$q_5$	545.1201	107.3805		0.9995	0.9995
$q_6$	267.6068	905.6380		0.9994	0.9994

Tabla 5.25: Ganancias y ordenes de los controladores modo deslizante integral fraccionarios.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 1			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0968	0.0951	0.0968	0.0951
$q_2$	0.0204	0.0191	0.0204	0.0191
$q_3$	0.1031	0.0841	0.1072	0.0847
$q_4$	0.2037	0.1682	0.1968	0.1625
$q_5$	0.0586	0.0521	0.0630	0.0545
$q_6$	0.2448	0.2310	0.4422	0.3433
Efactor final	0.2897	0.2695	0.2926	0.2718

Tabla 5.26: Comparación del desempeño de los controladores modo deslizante integral de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 1.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 2			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0016	0.0010	0.0023	0.0018
$q_2$	0.0315	0.0296	0.0315	0.0295
$q_3$	0.1424	0.1272	0.1491	0.1286
$q_4$	0.2475	0.2057	0.2356	0.1962
$q_5$	0.0906	0.0796	0.0974	0.0849
$q_6$	0.2606	0.2063	0.3037	0.2237
Efactor final	0.1359	0.1310	0.1438	0.1414

Tabla 5.27: Comparación del desempeño de los controladores modo deslizante integral de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 2.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 3			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0046	0.0041	0.0101	0.0091
$q_2$	0.0309	0.0283	0.0310	0.0283
$q_3$	0.0230	0.0093	0.0575	0.0245
$q_4$	0.1693	0.1421	0.1367	0.1188
$q_5$	0.0894	0.0788	0.0961	0.0833
$q_6$	0.1186	0.1024	0.2346	0.1604
Efactor final	0.0289	0.0103	0.0752	0.0307

Tabla 5.28: Comparación del desempeño de los controladores modo deslizante integral de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 3.

Resultados para la trayectoria 1

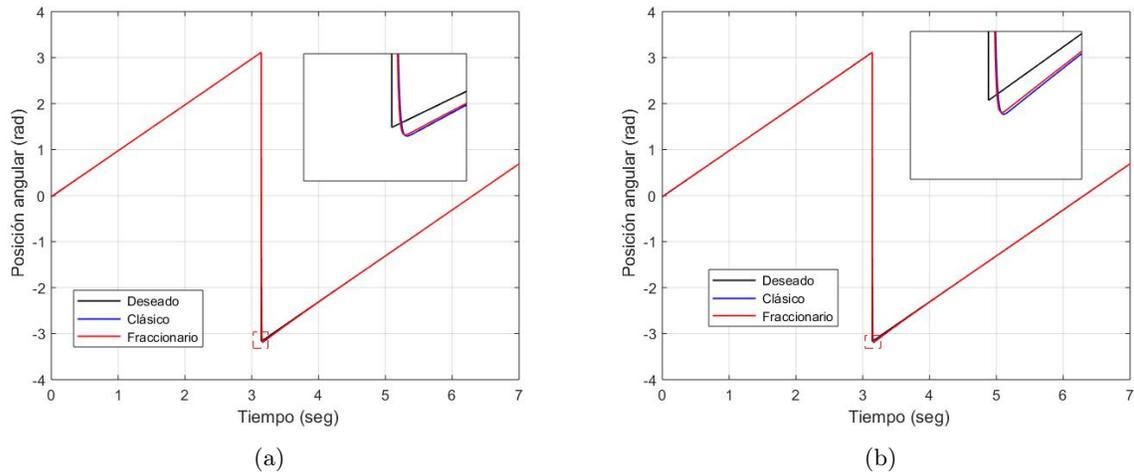


Figura 5.175: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

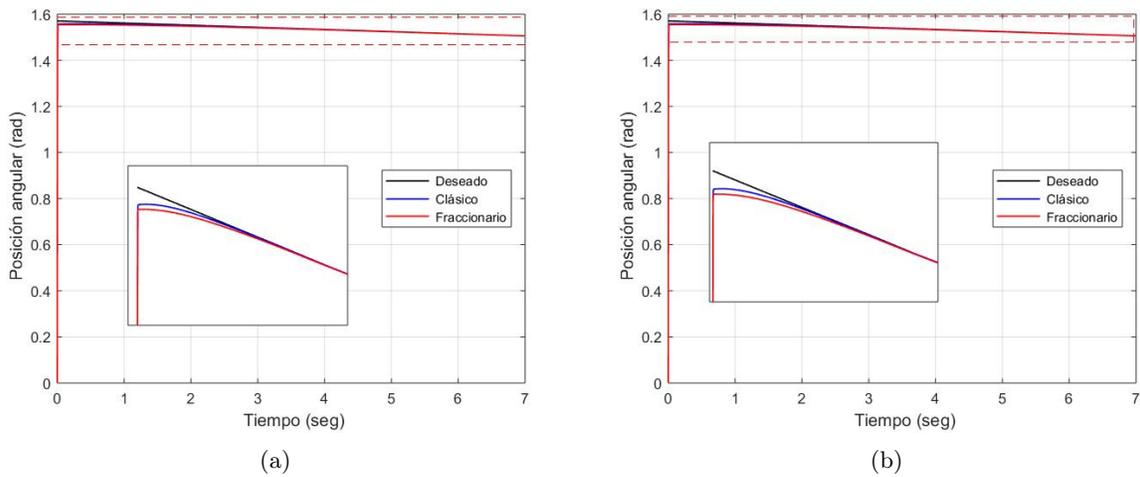


Figura 5.176: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

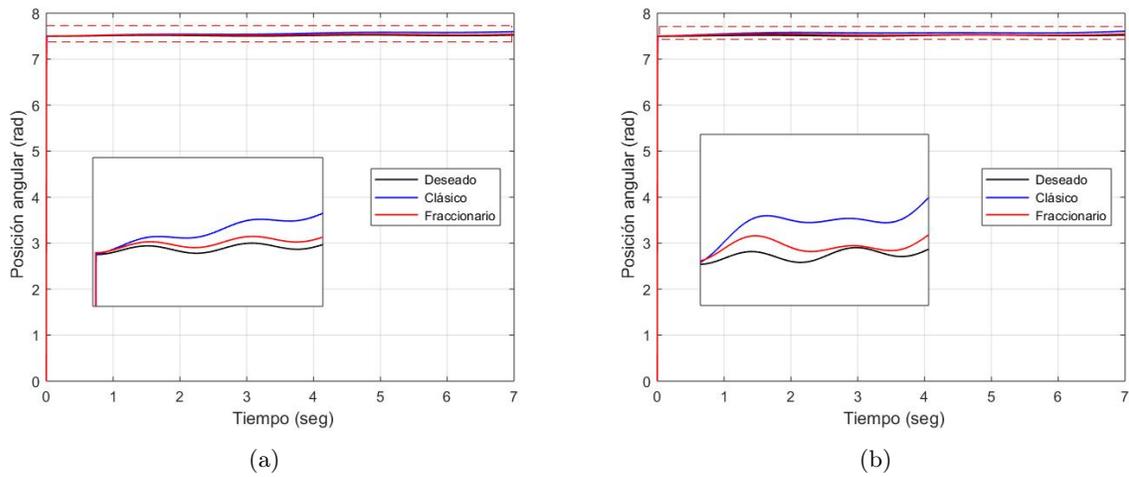


Figura 5.177: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

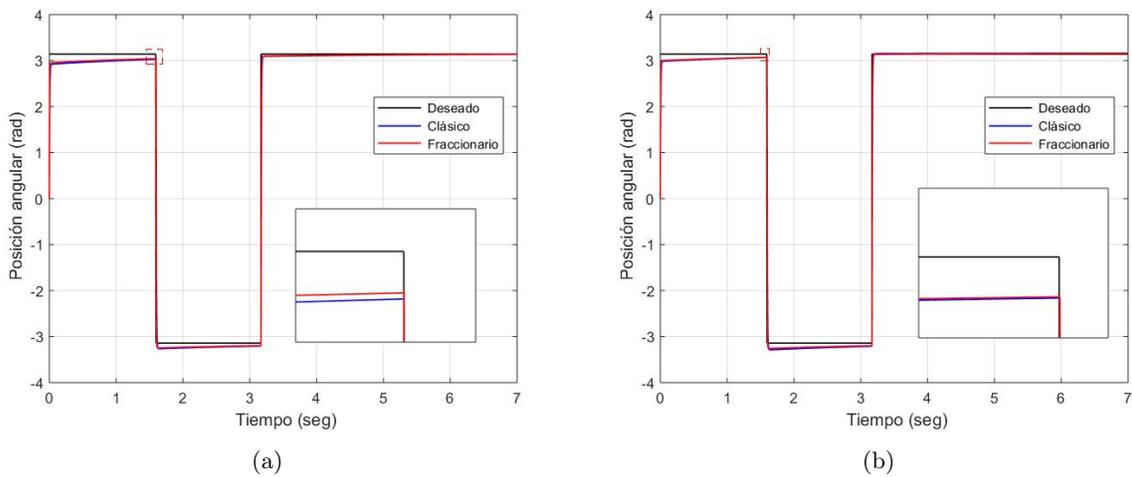


Figura 5.178: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

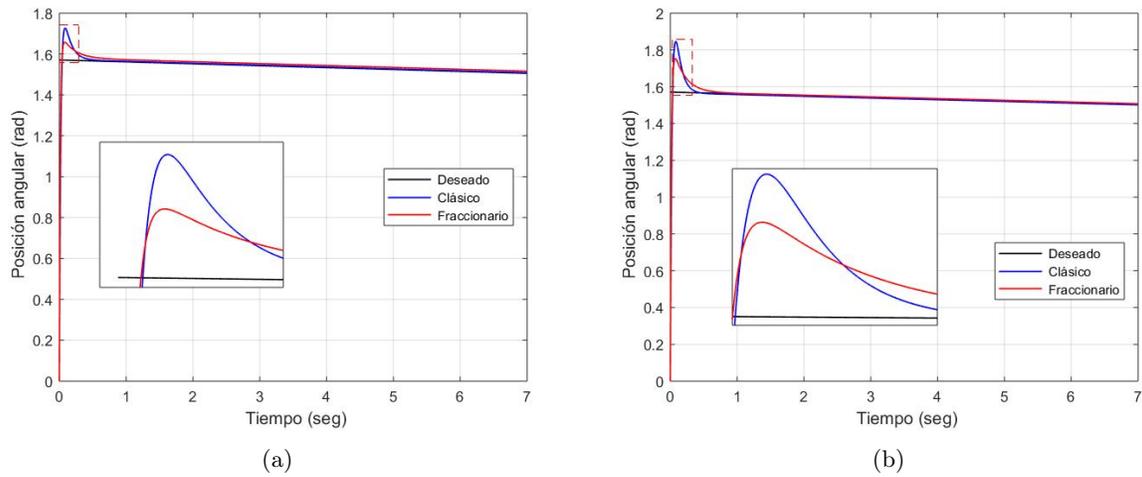


Figura 5.179: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

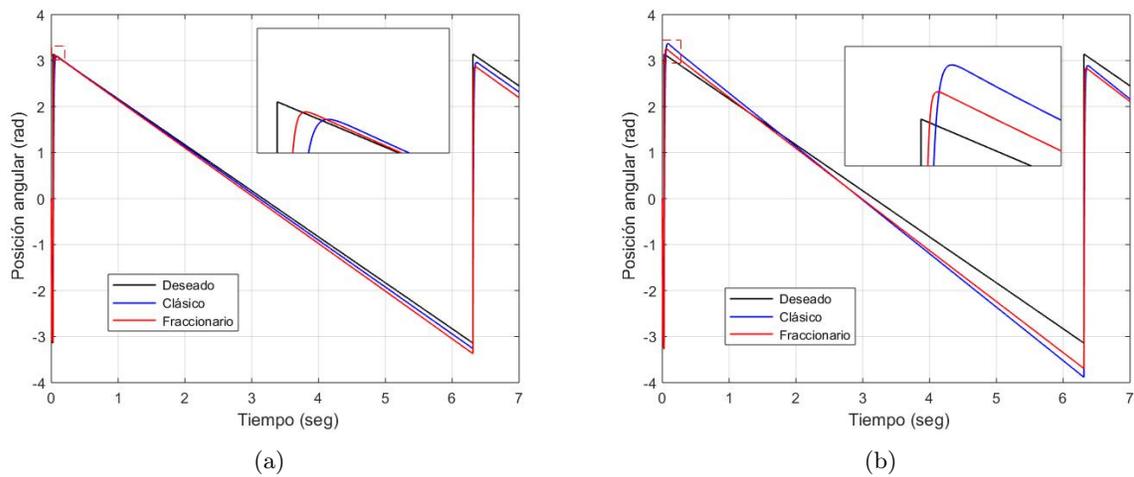


Figura 5.180: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

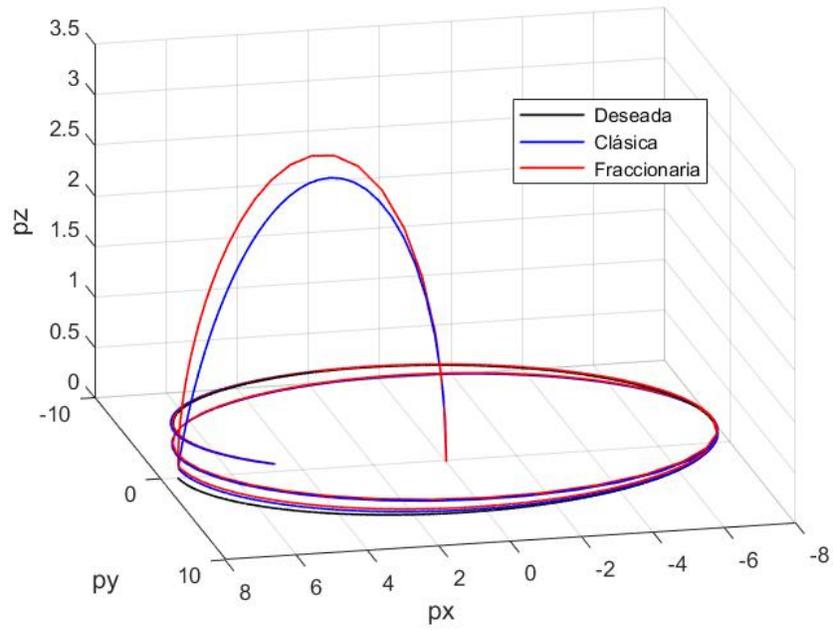


Figura 5.181: Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación

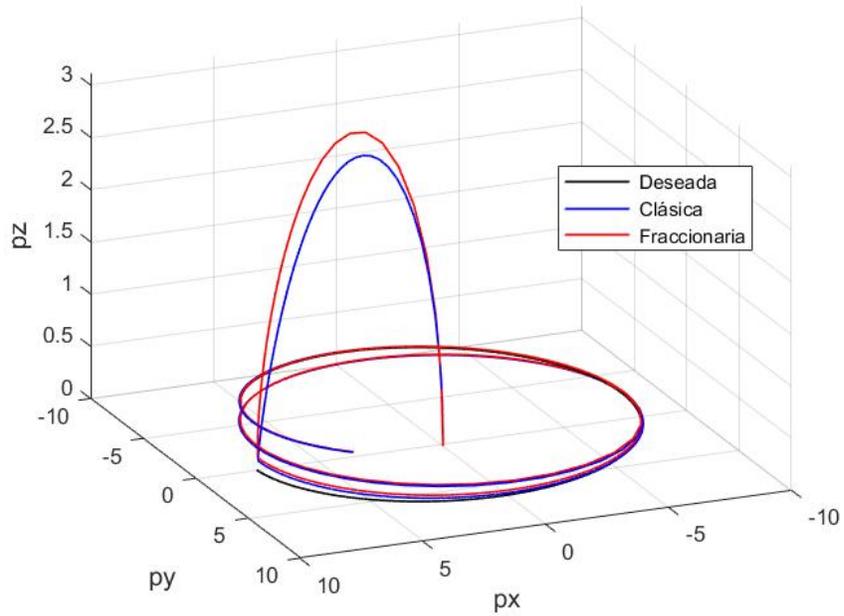


Figura 5.182: Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación

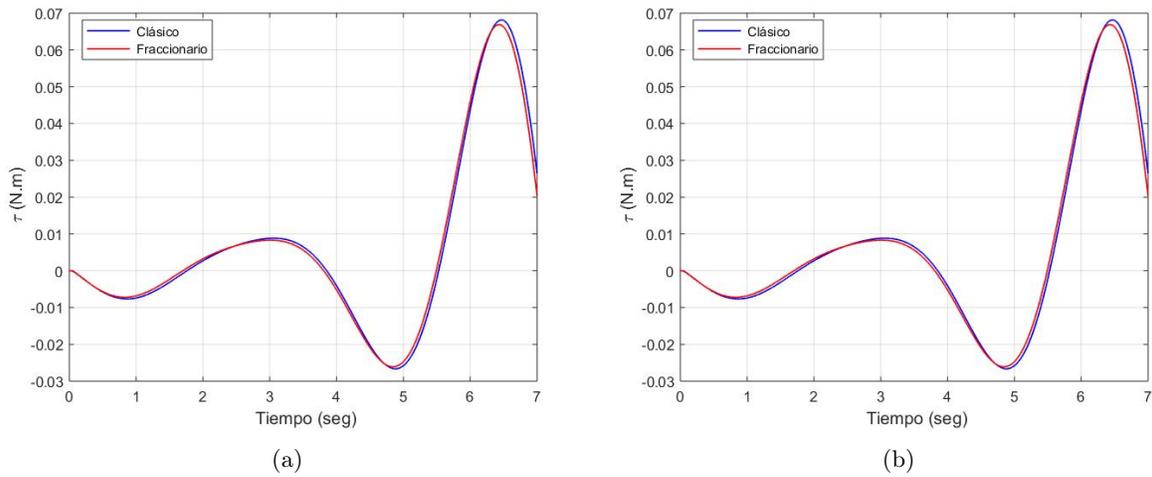


Figura 5.183: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

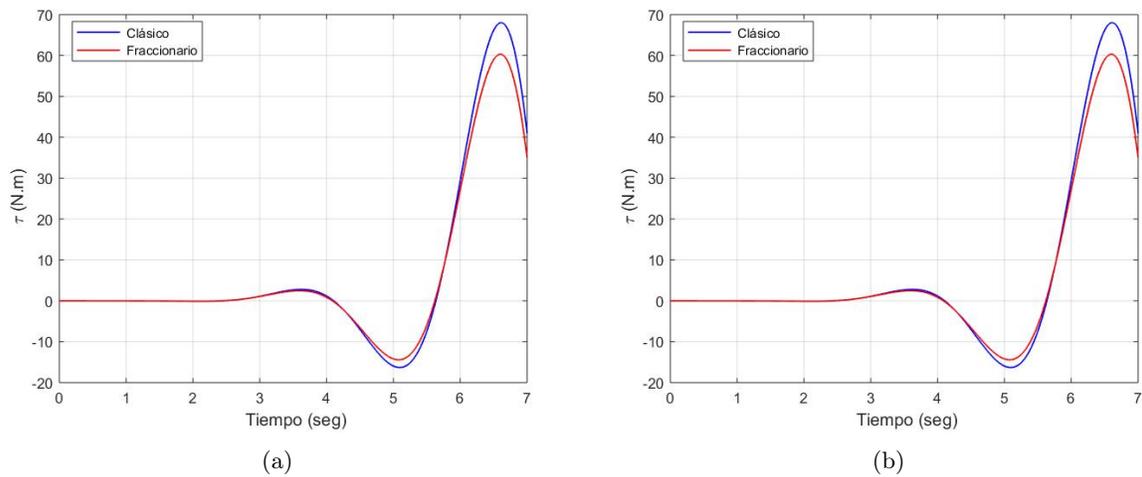
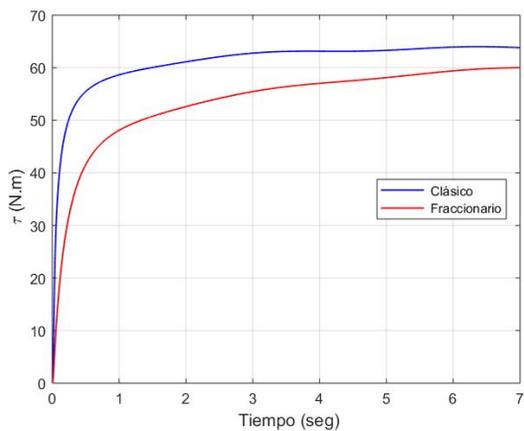
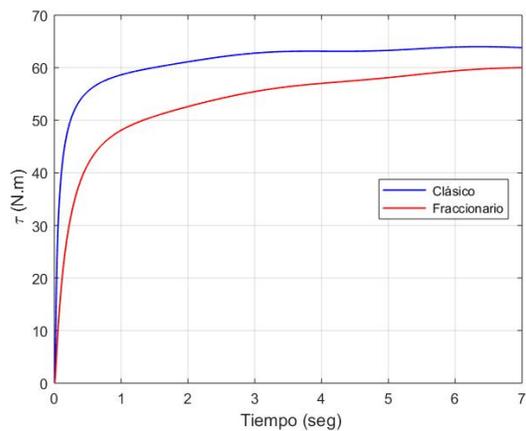


Figura 5.184: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

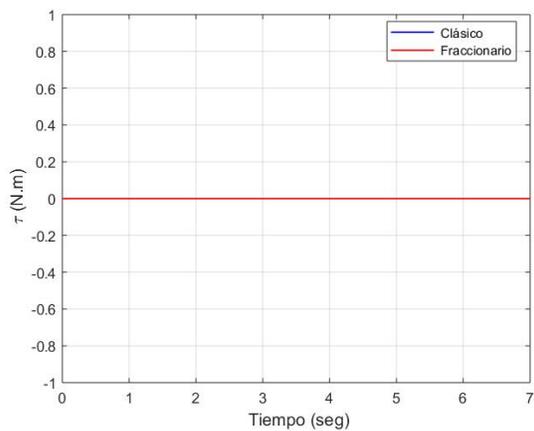


(a)

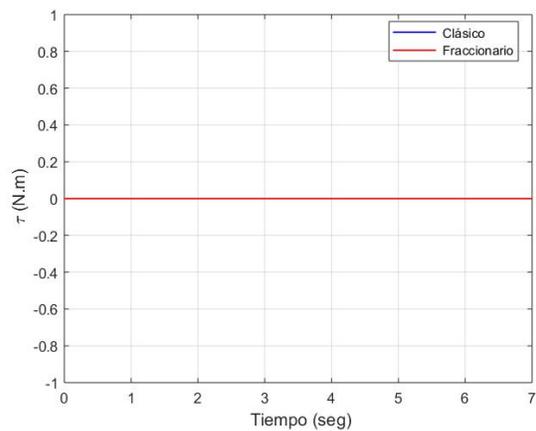


(b)

Figura 5.185: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.186: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

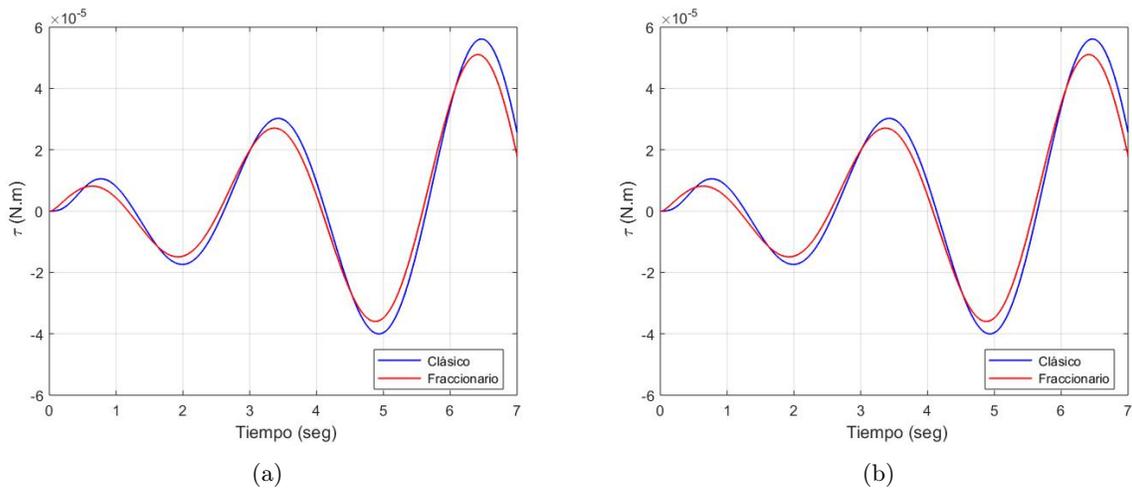


Figura 5.187: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

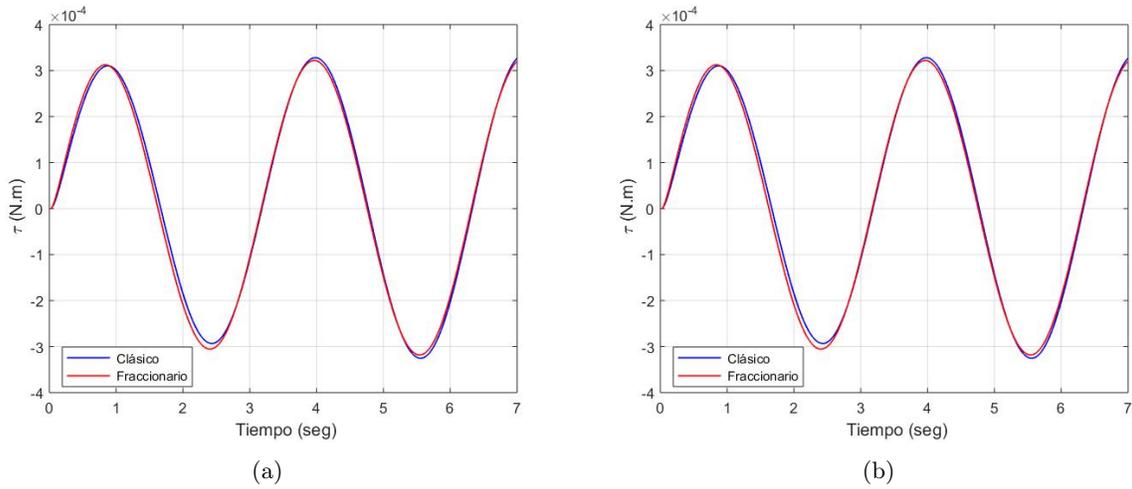


Figura 5.188: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

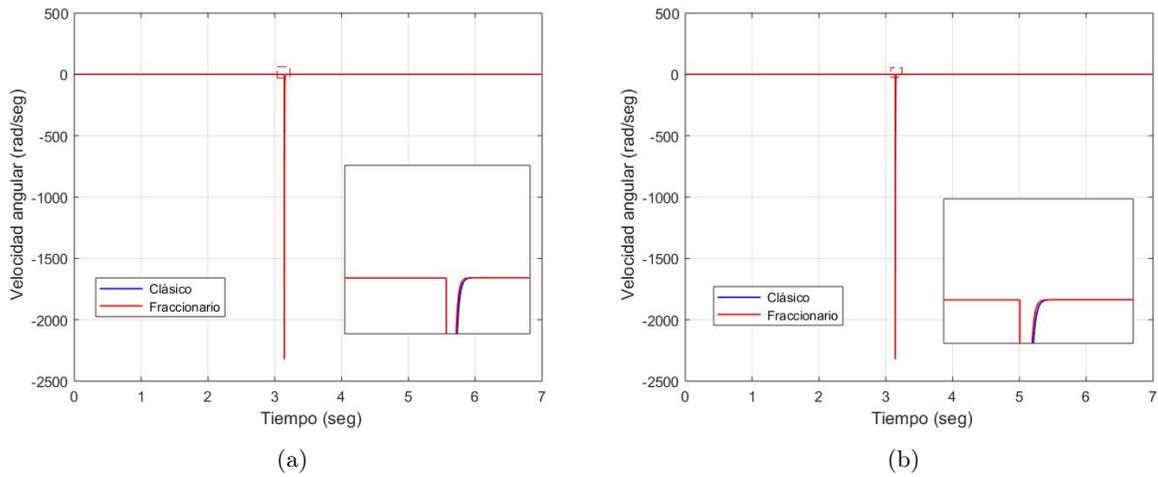


Figura 5.189: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

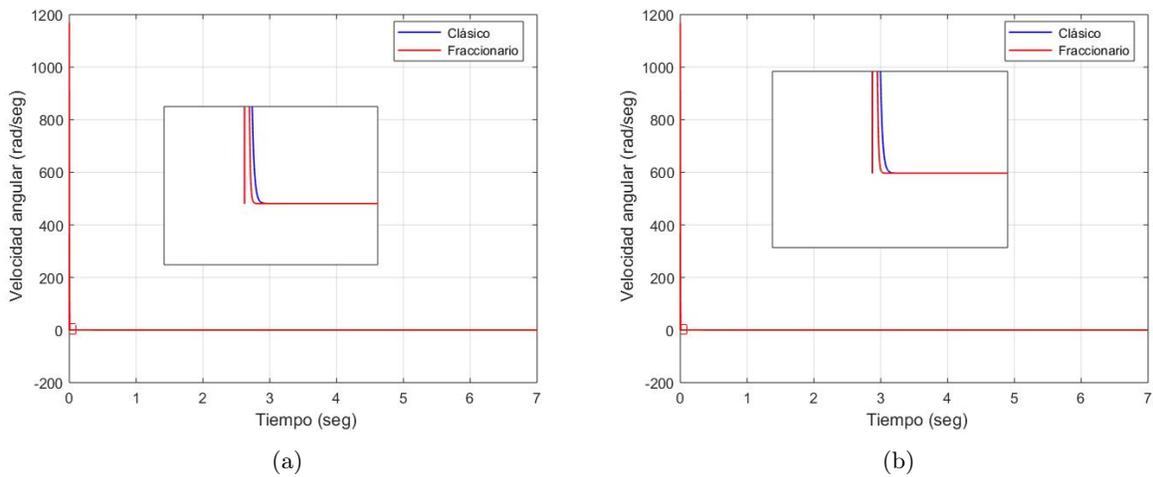


Figura 5.190: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

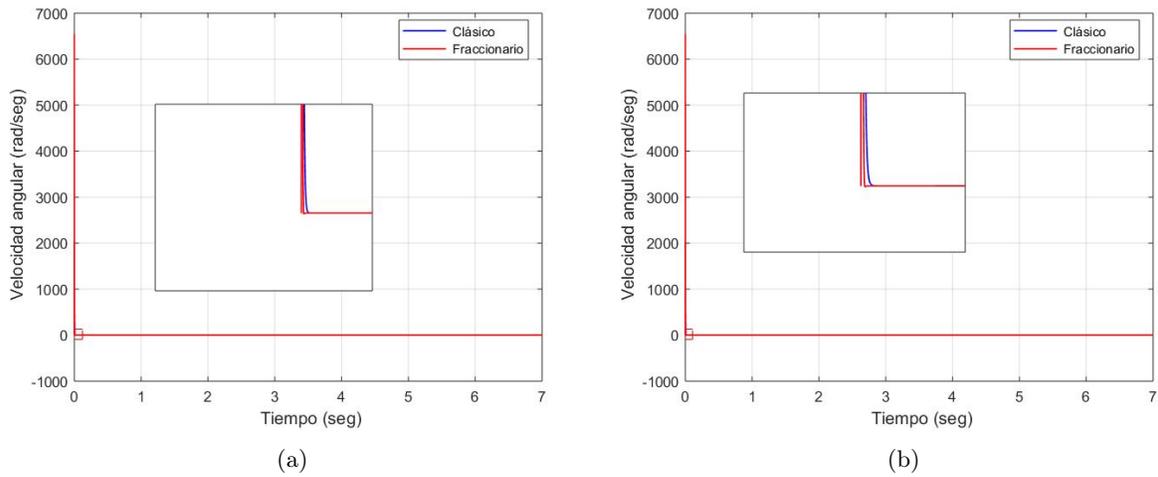


Figura 5.191: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

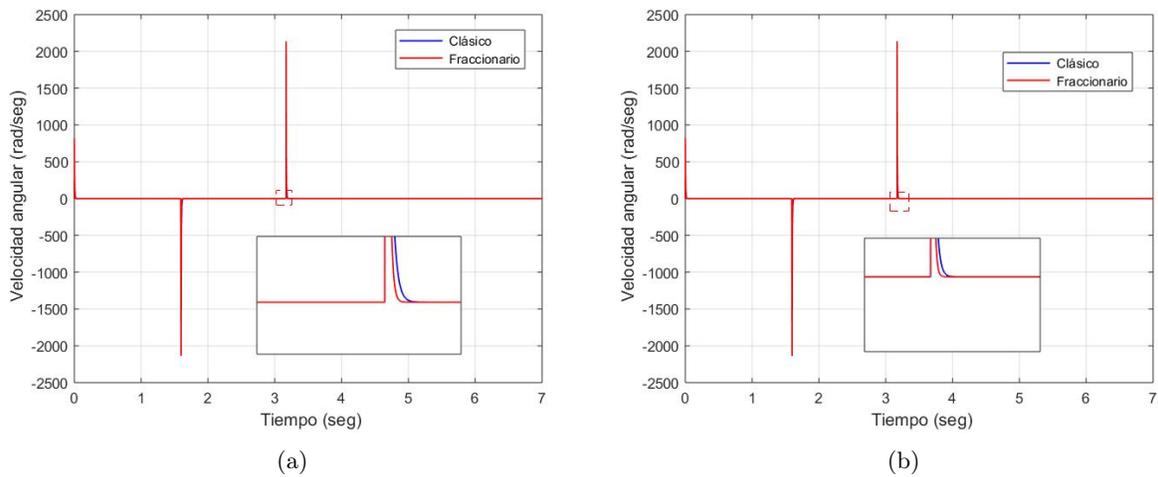


Figura 5.192: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

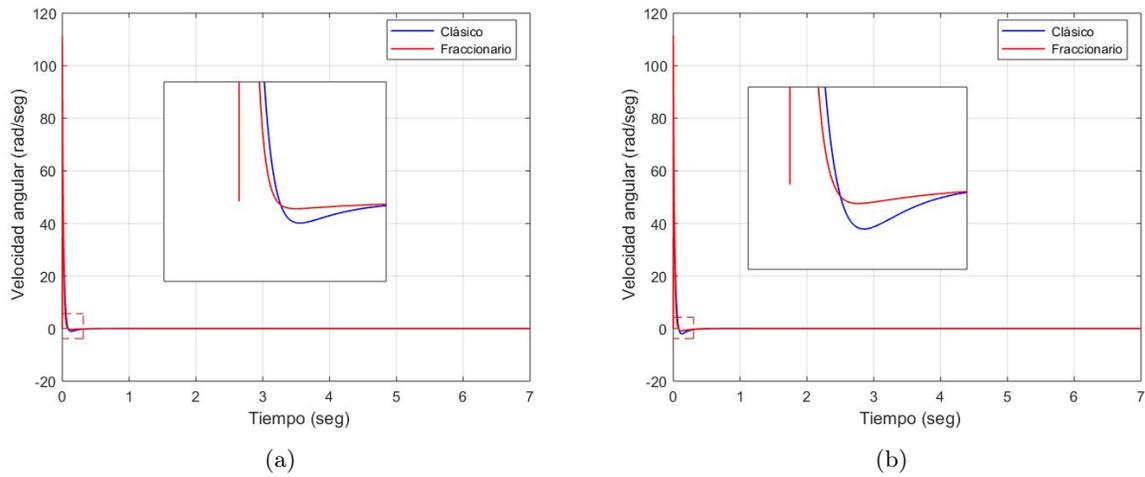


Figura 5.193: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

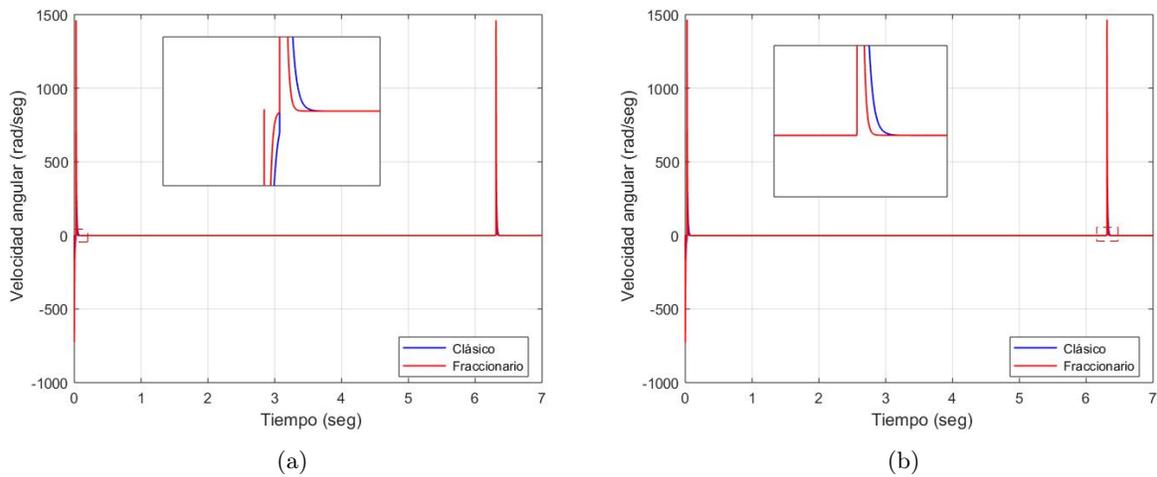
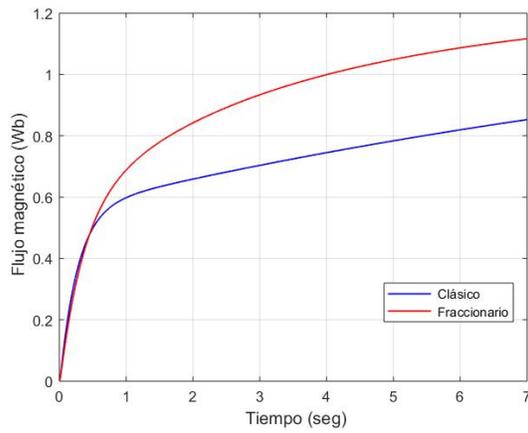
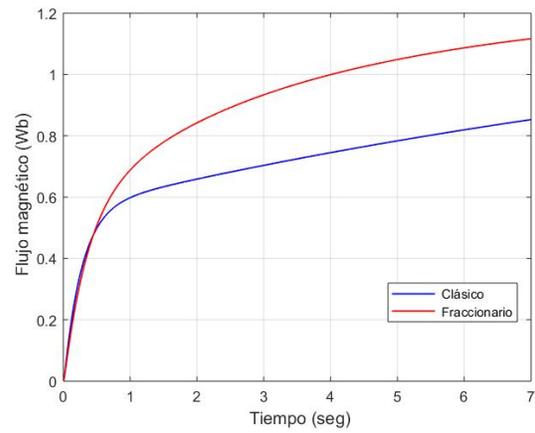


Figura 5.194: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

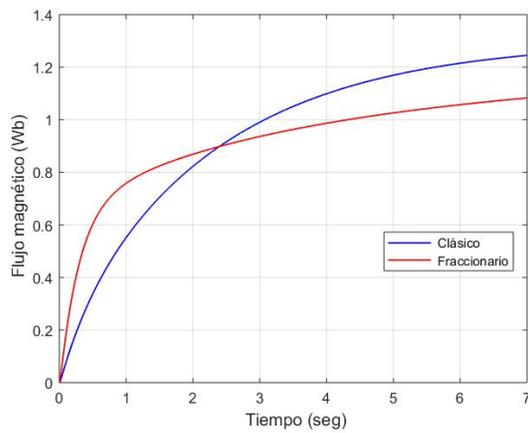


(a)

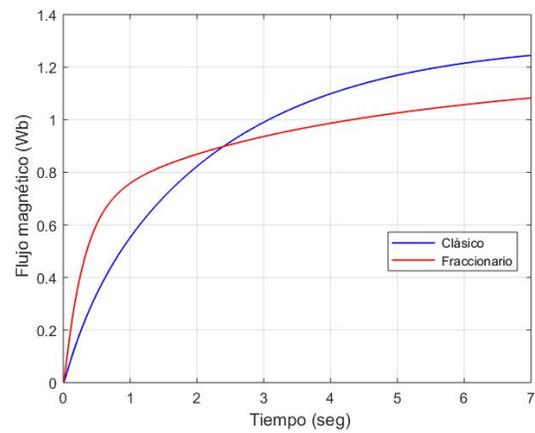


(b)

Figura 5.195: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

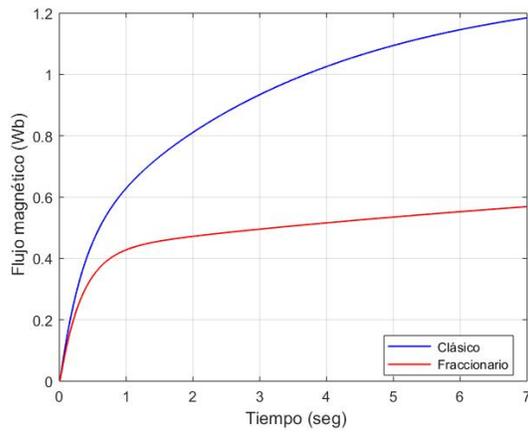


(a)

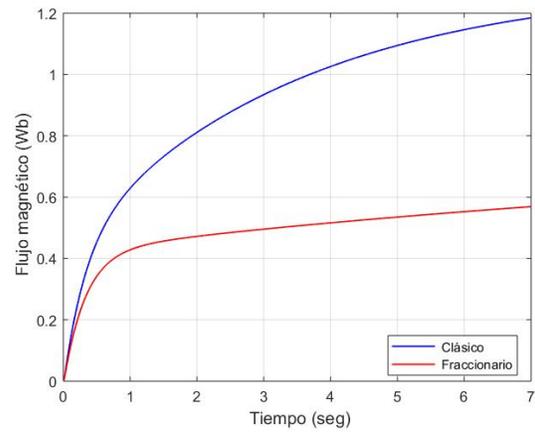


(b)

Figura 5.196: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

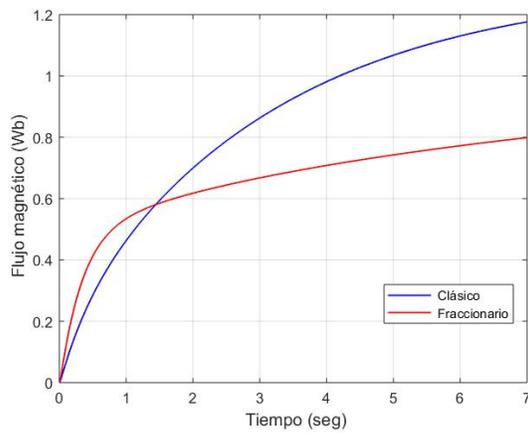


(a)

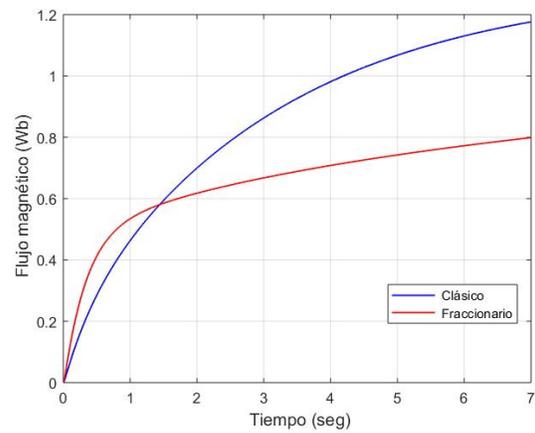


(b)

Figura 5.197: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

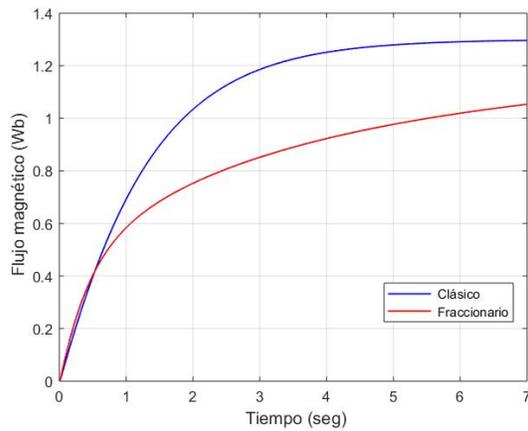


(a)

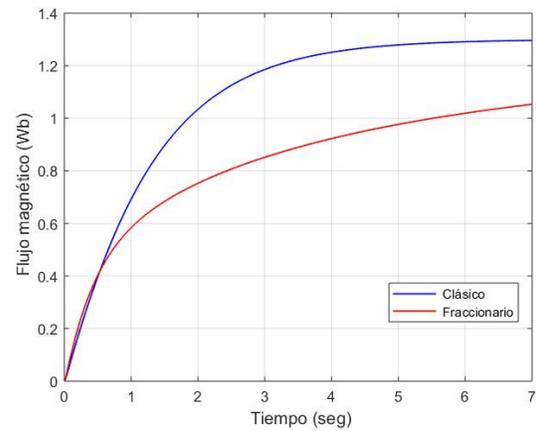


(b)

Figura 5.198: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

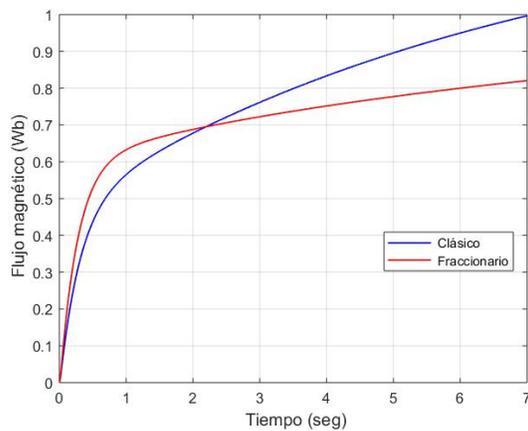


(a)

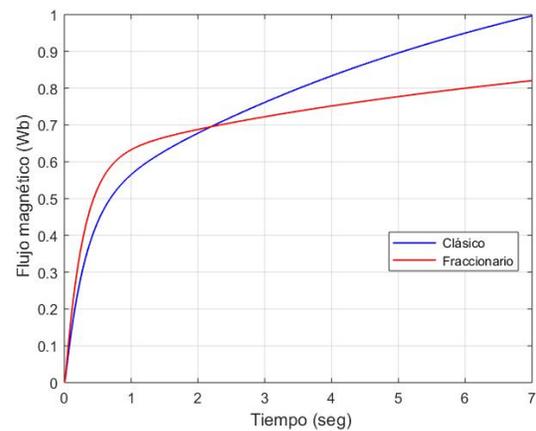


(b)

Figura 5.199: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.200: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

## Resultados para la trayectoria 2

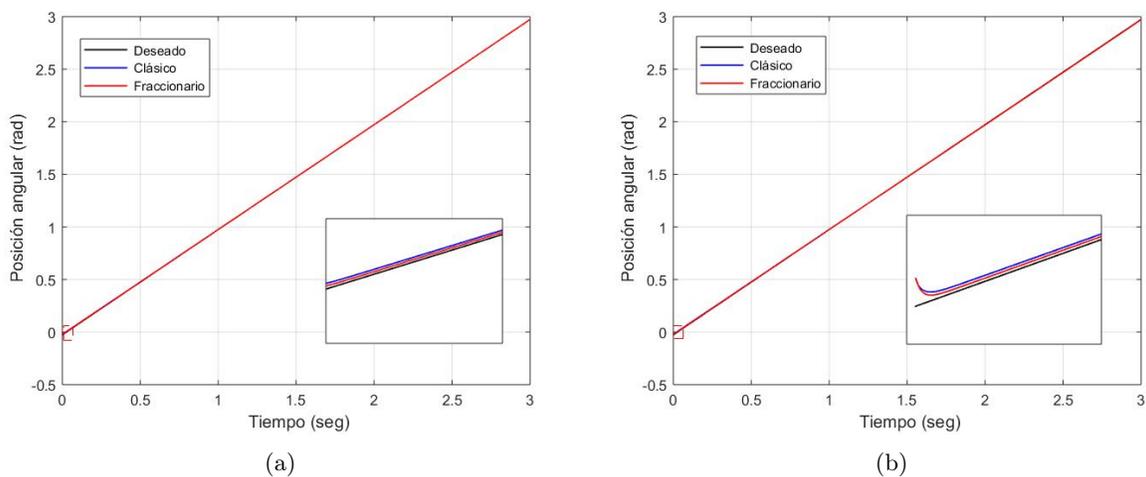


Figura 5.201: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

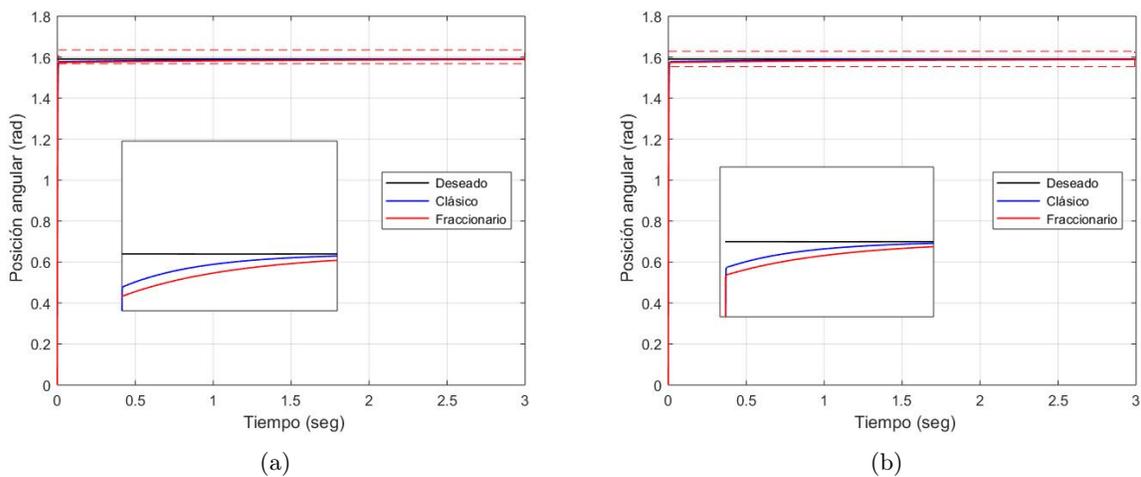


Figura 5.202: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

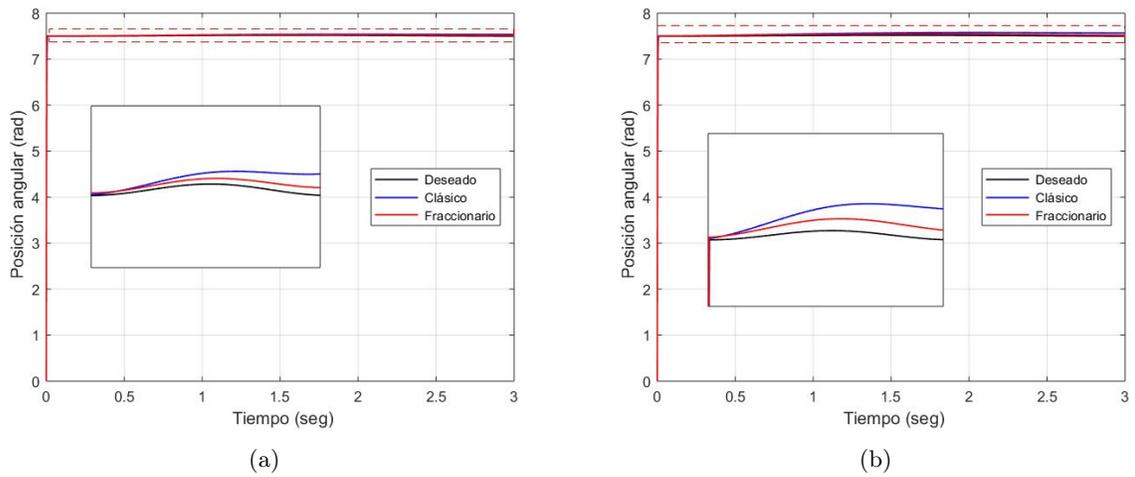


Figura 5.203: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

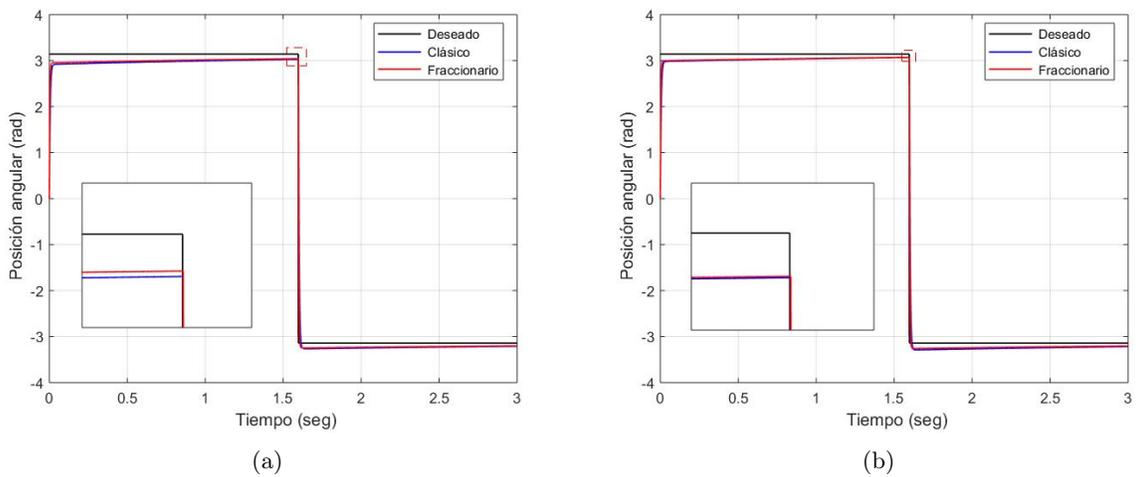


Figura 5.204: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

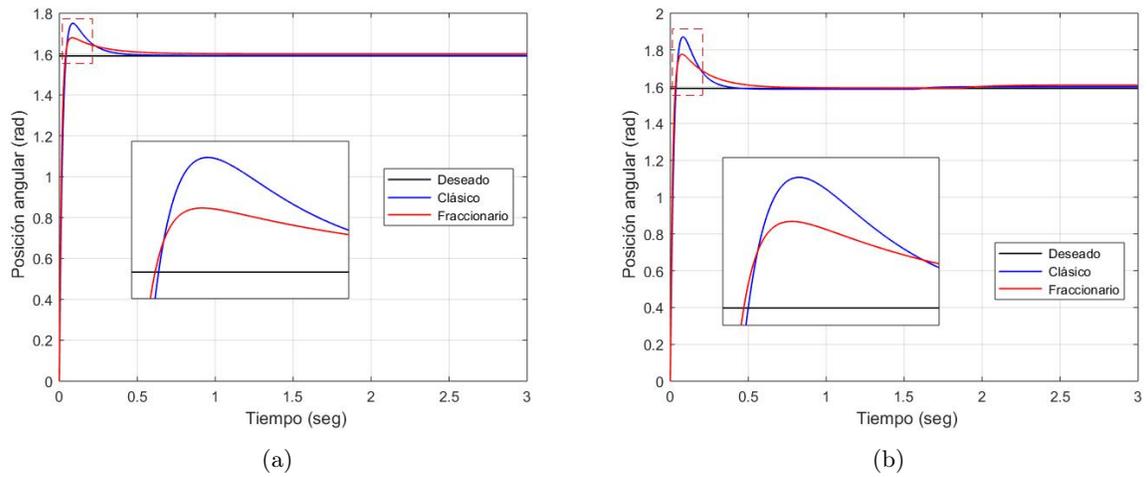


Figura 5.205: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

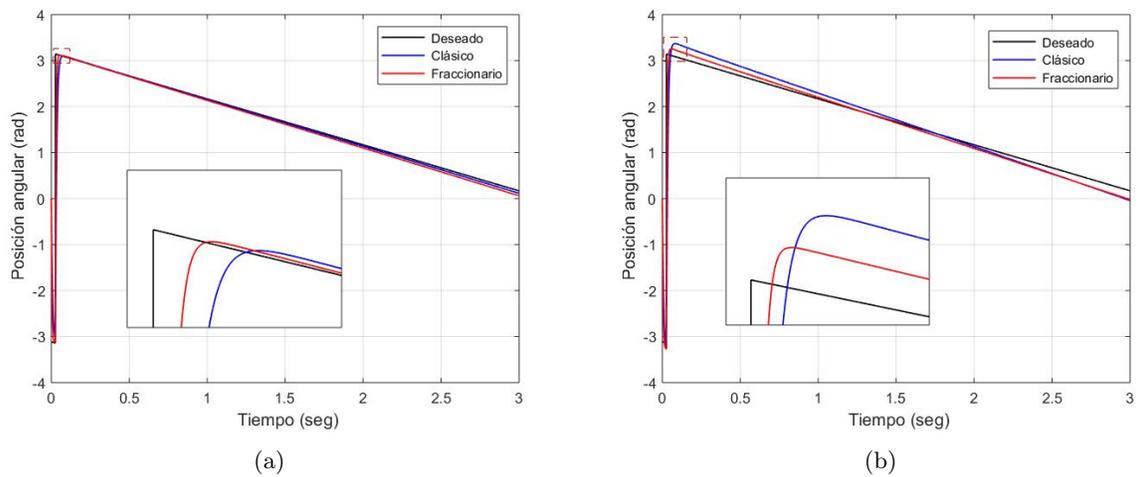


Figura 5.206: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

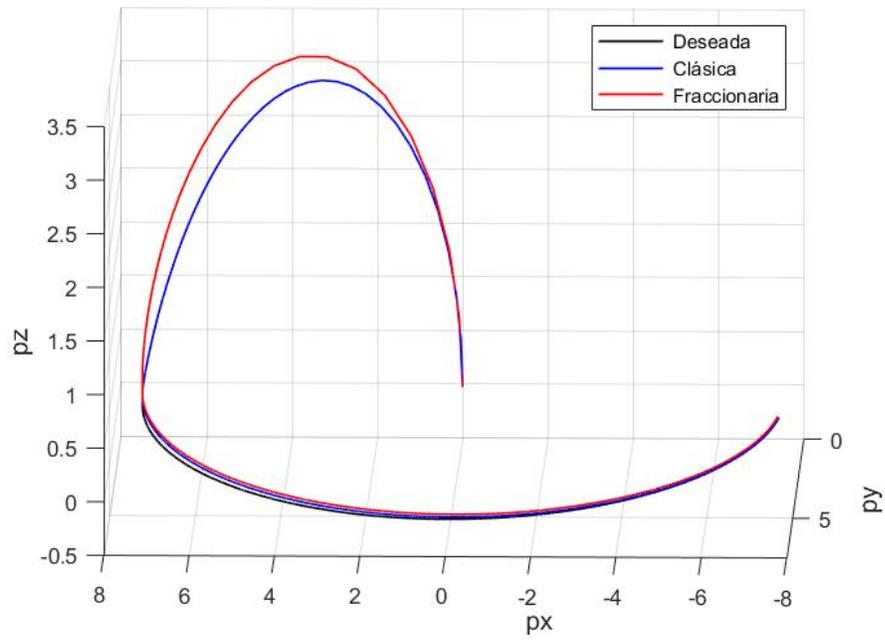


Figura 5.207: Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación

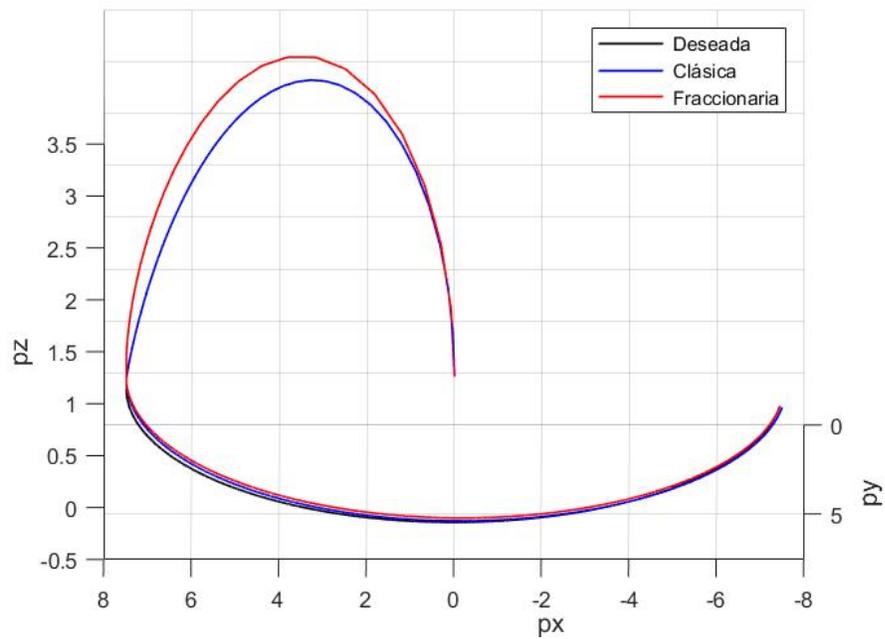
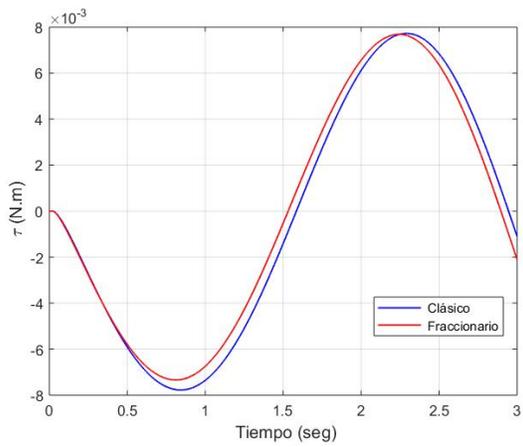
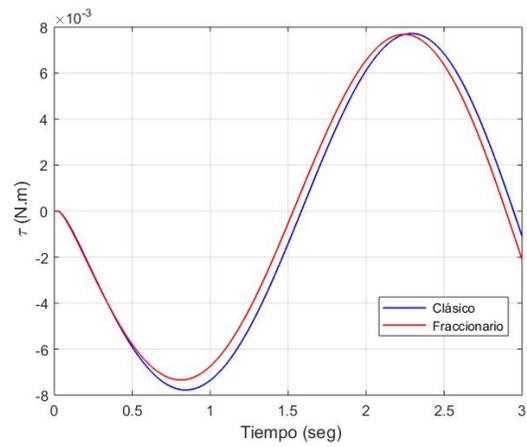


Figura 5.208: Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación

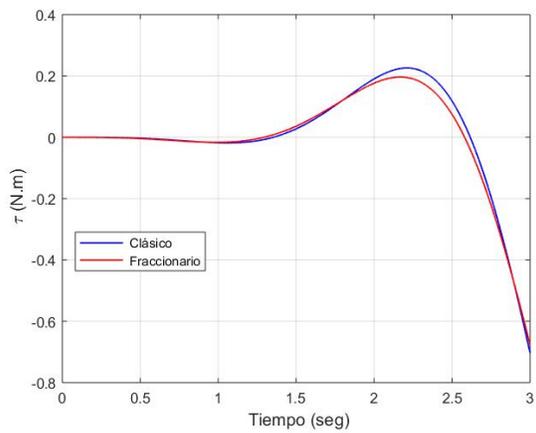


(a)

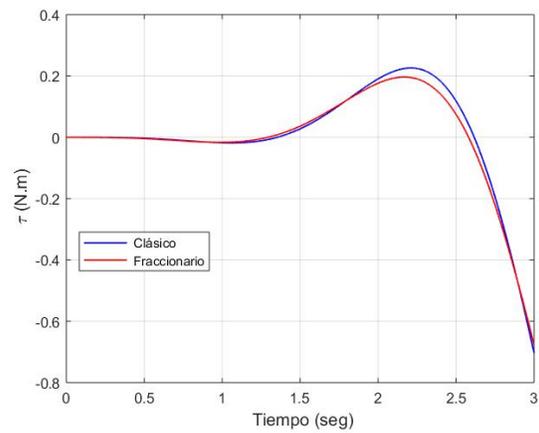


(b)

Figura 5.209: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

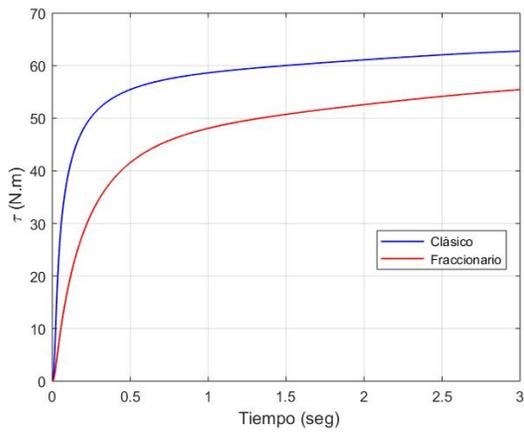


(a)

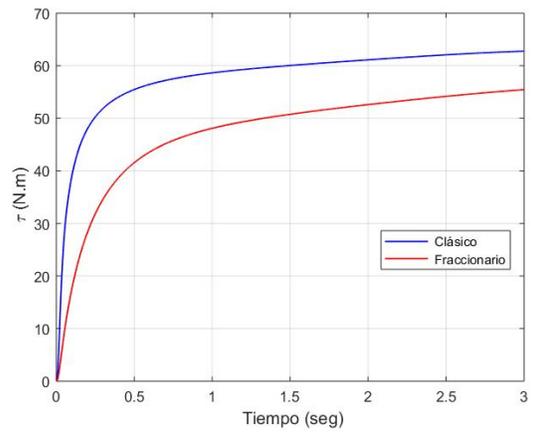


(b)

Figura 5.210: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

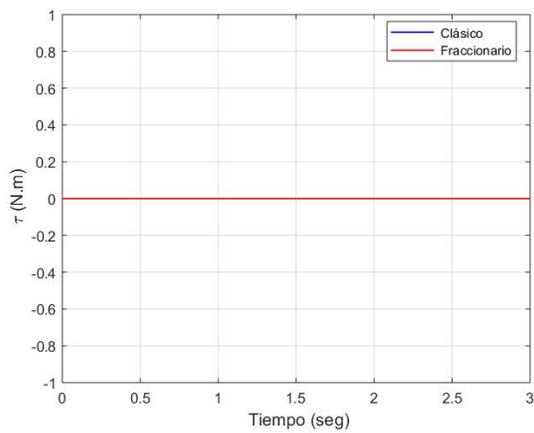


(a)

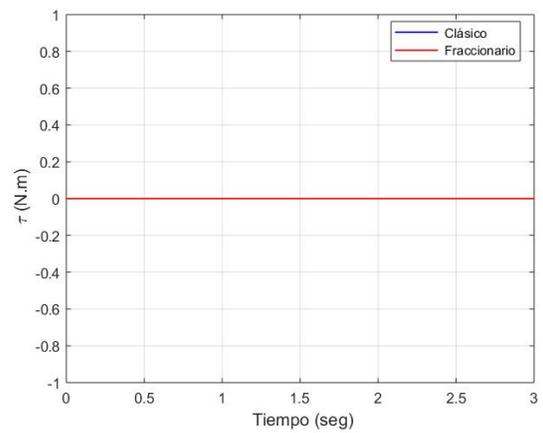


(b)

Figura 5.211: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

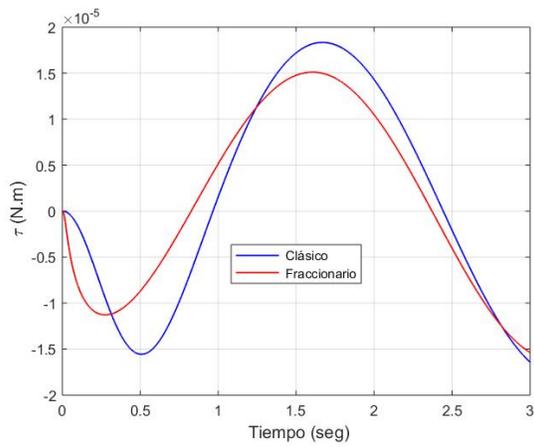


(a)

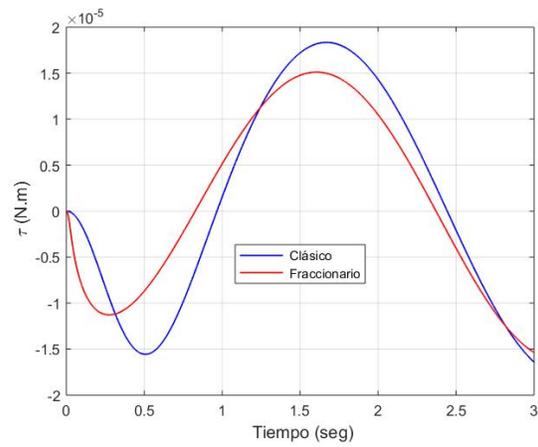


(b)

Figura 5.212: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

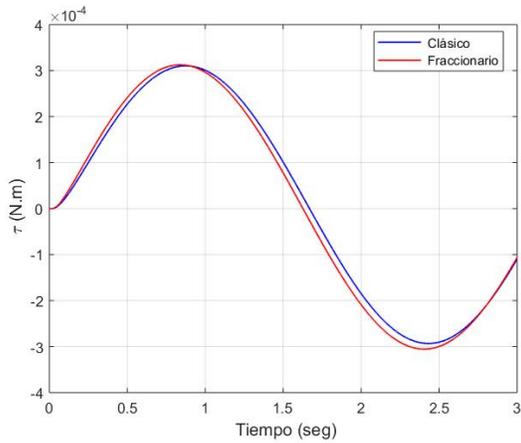


(a)

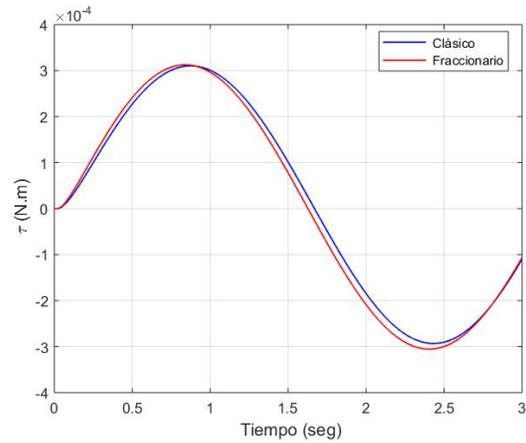


(b)

Figura 5.213: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.214: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

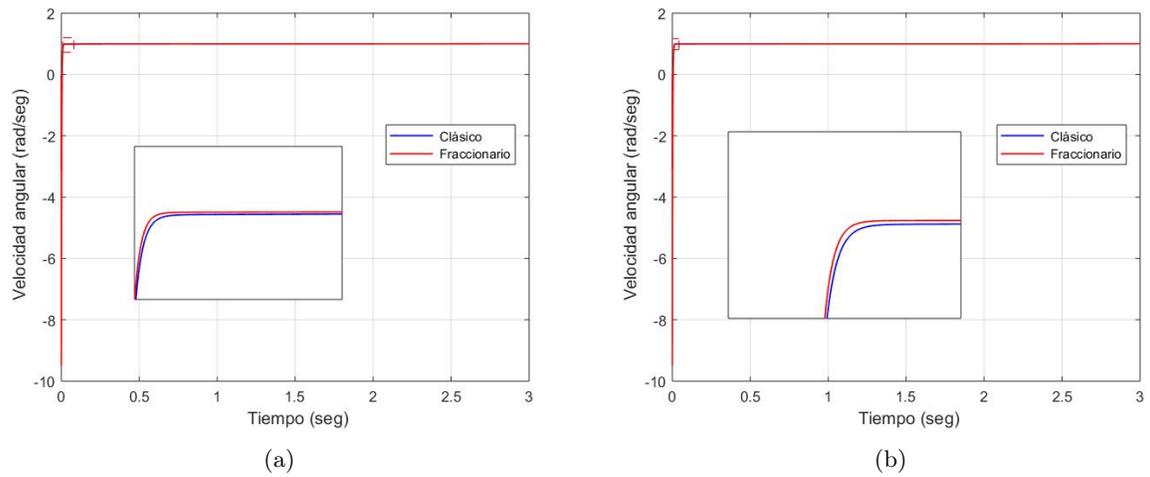


Figura 5.215: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

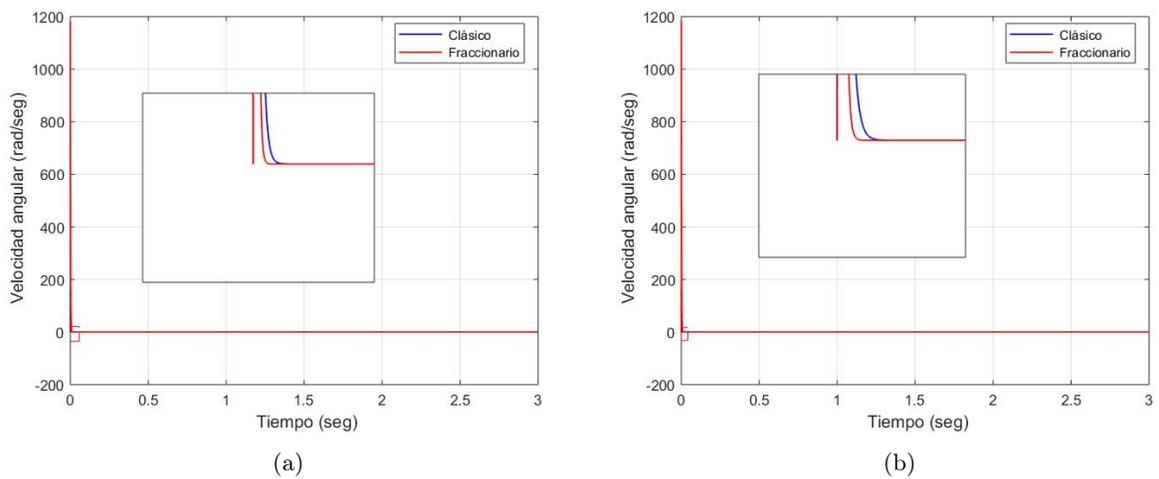


Figura 5.216: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

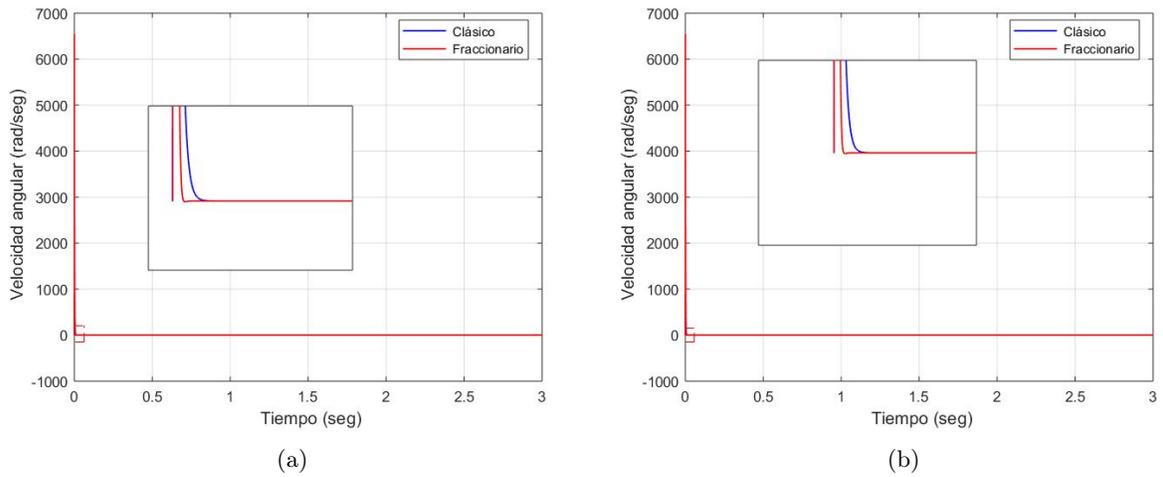


Figura 5.217: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

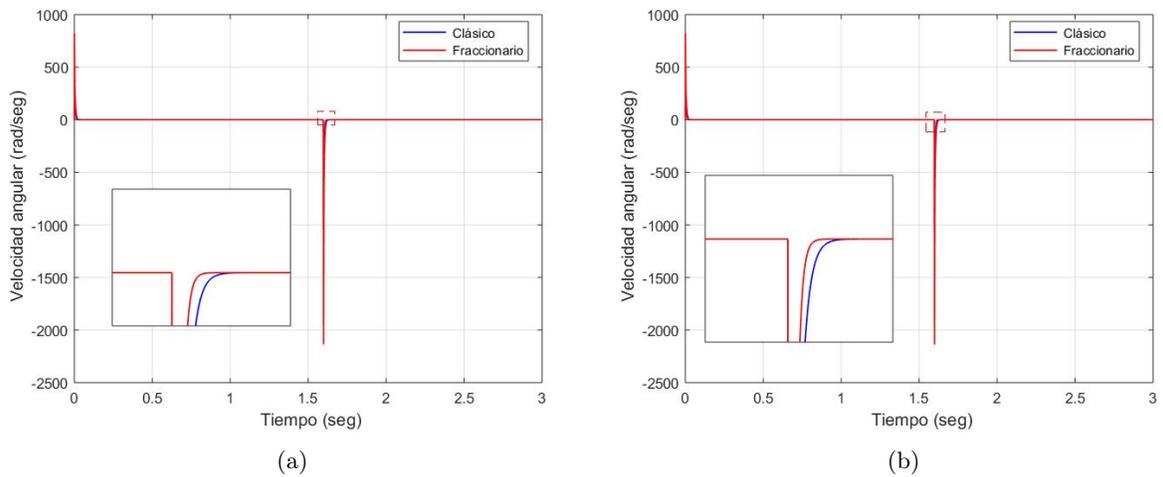


Figura 5.218: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

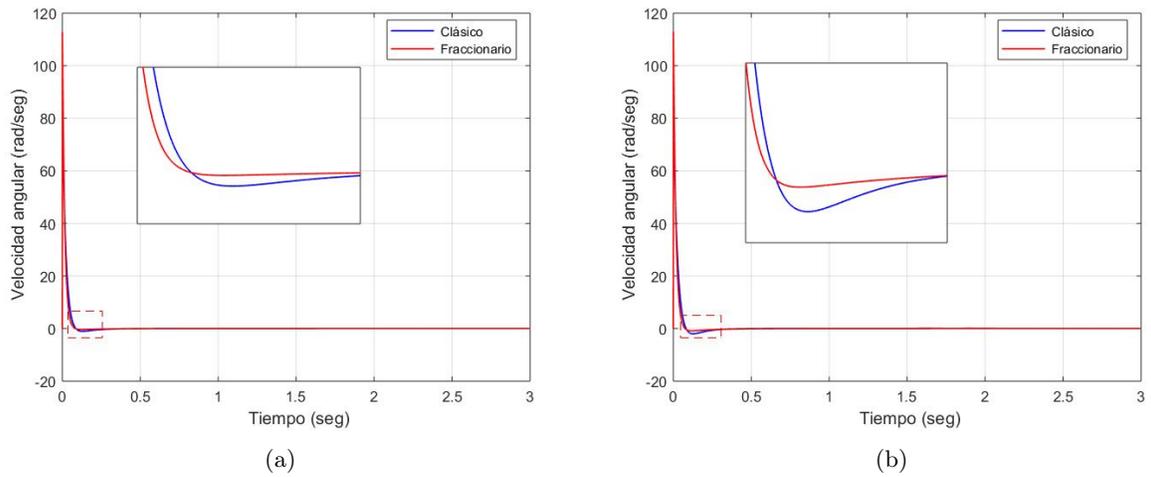


Figura 5.219: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

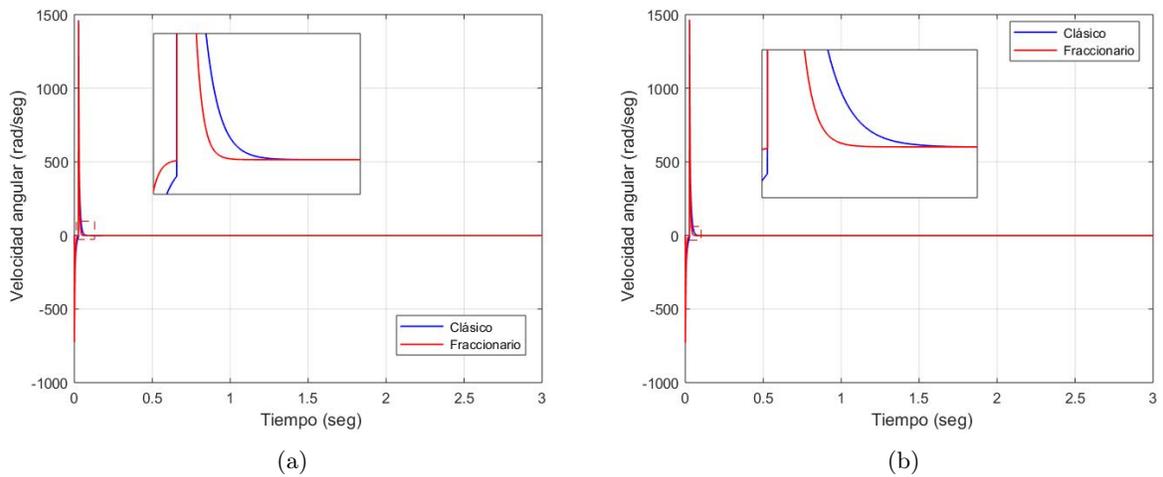
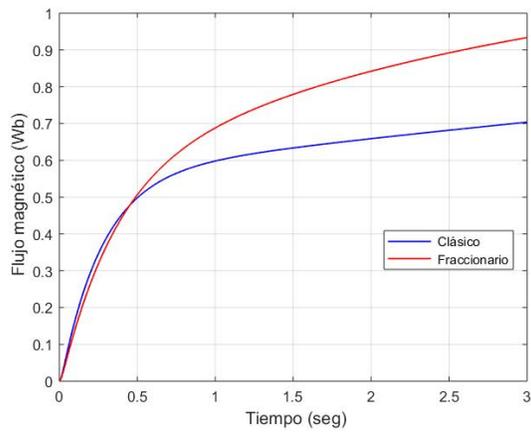
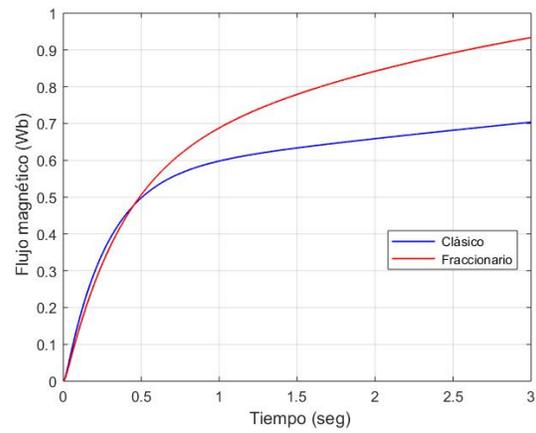


Figura 5.220: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

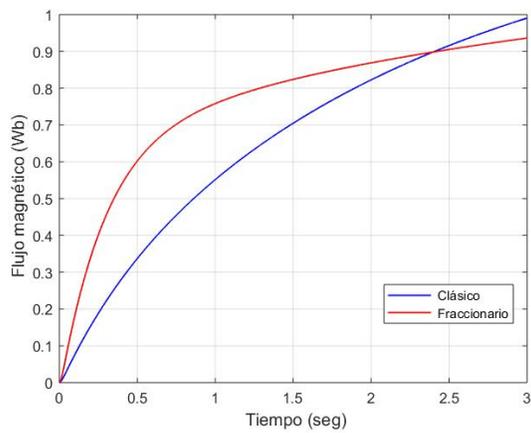


(a)

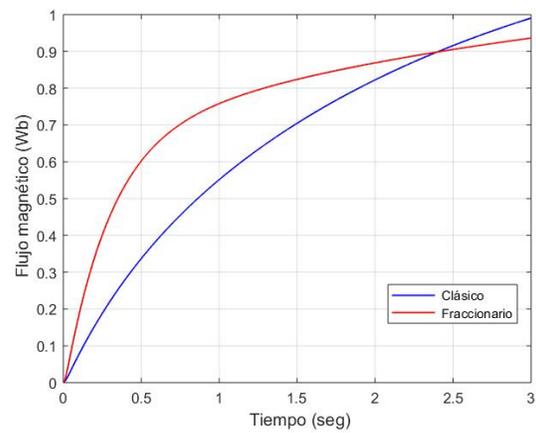


(b)

Figura 5.221: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

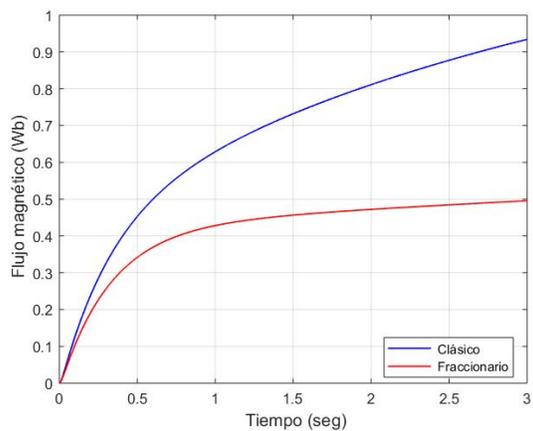


(a)

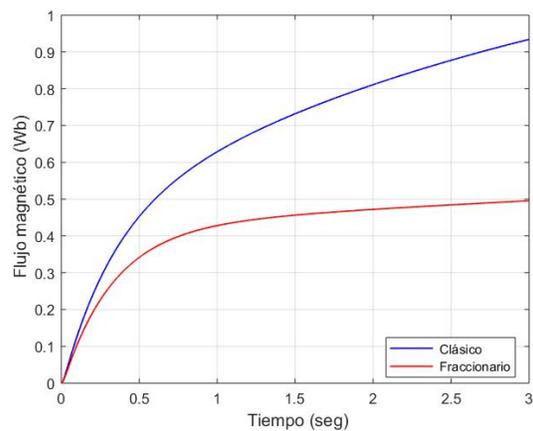


(b)

Figura 5.222: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

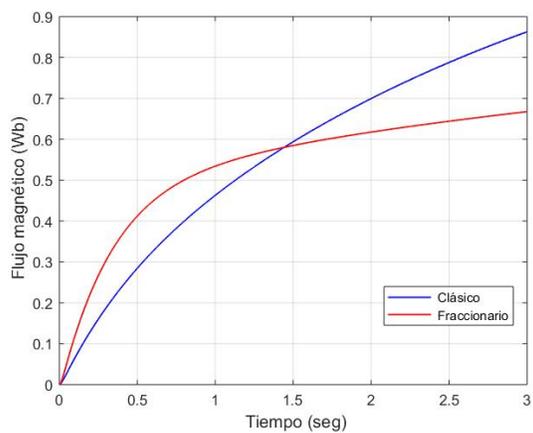


(a)

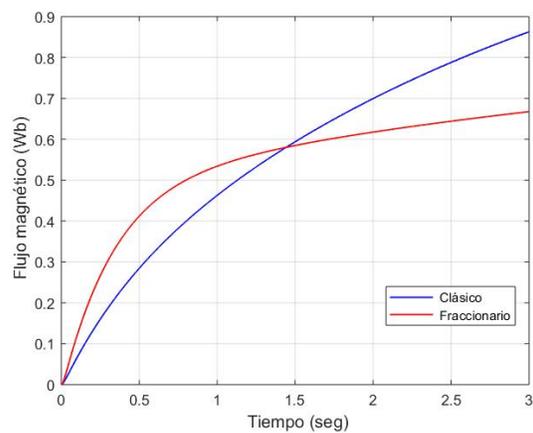


(b)

Figura 5.223: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

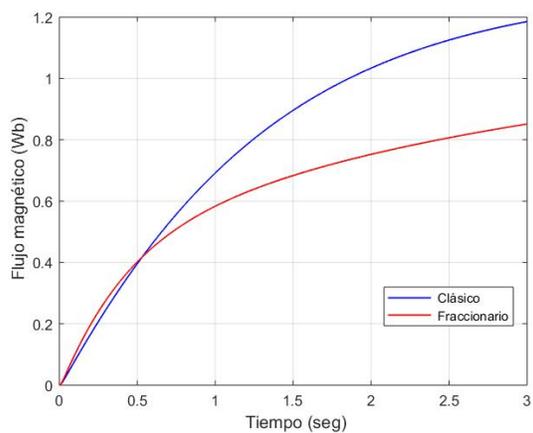


(a)

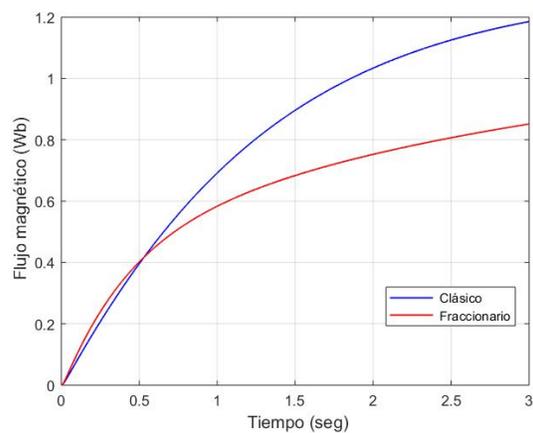


(b)

Figura 5.224: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

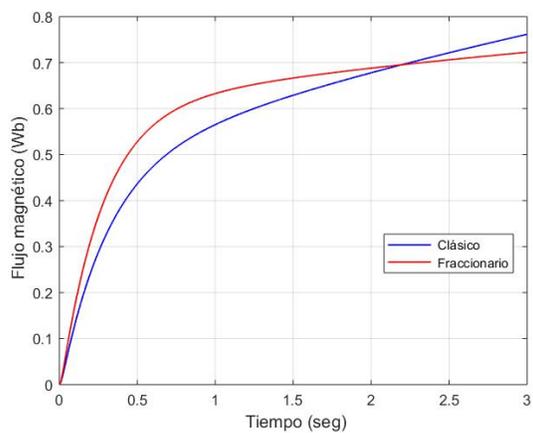


(a)

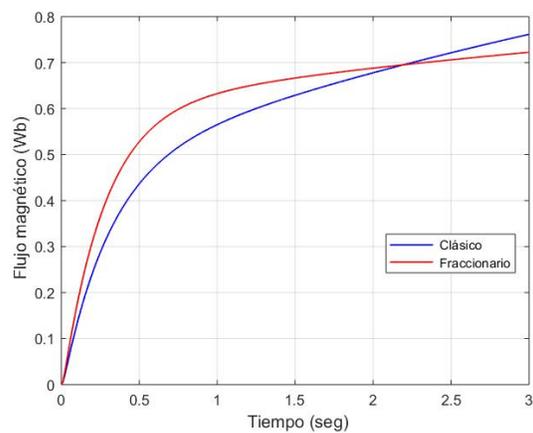


(b)

Figura 5.225: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.226: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

### Resultados para la trayectoria 3

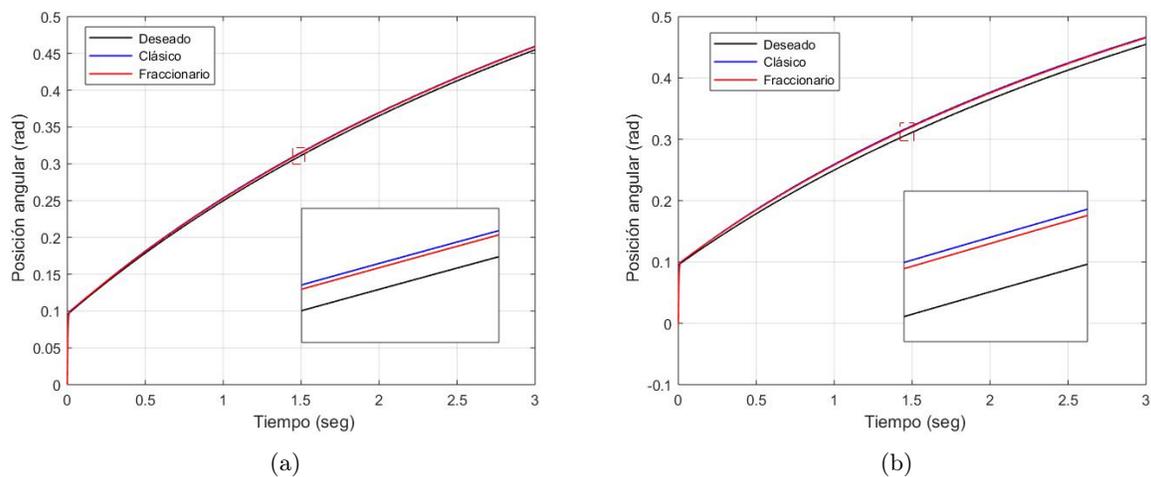


Figura 5.227: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

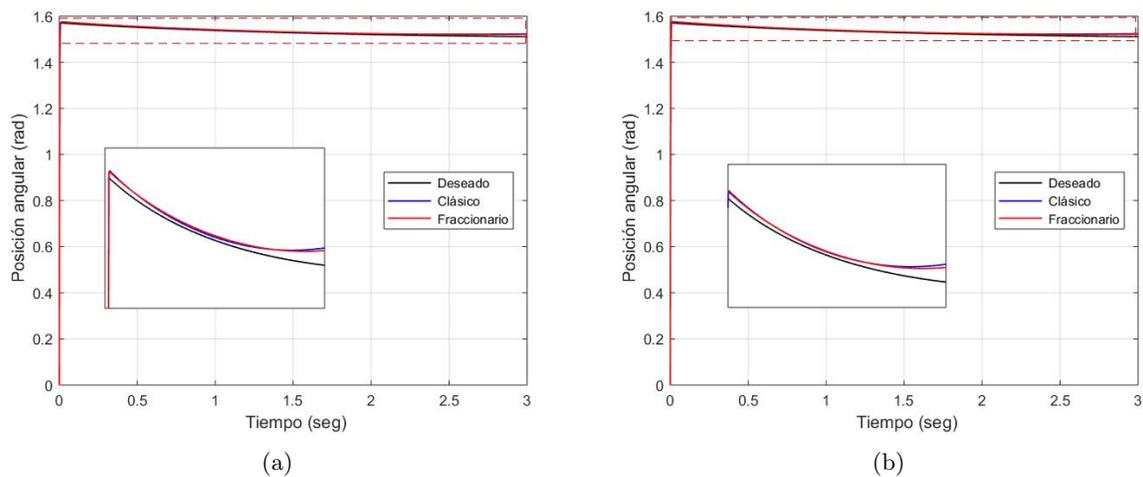


Figura 5.228: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

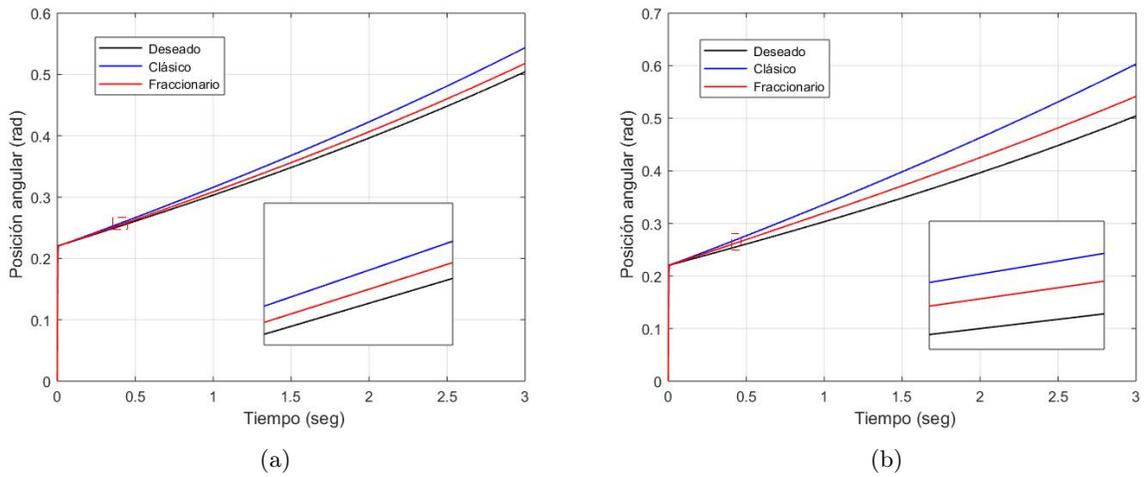


Figura 5.229: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

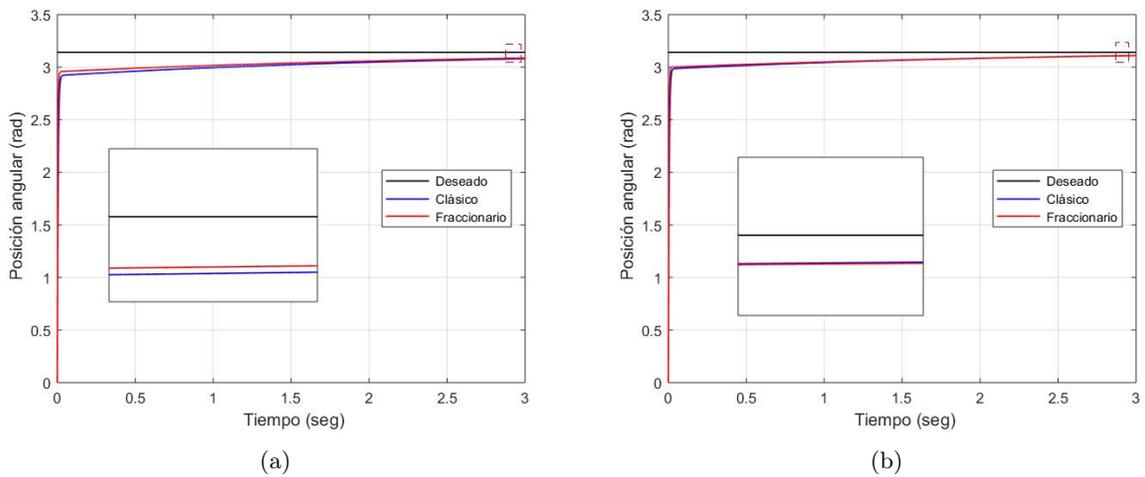


Figura 5.230: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

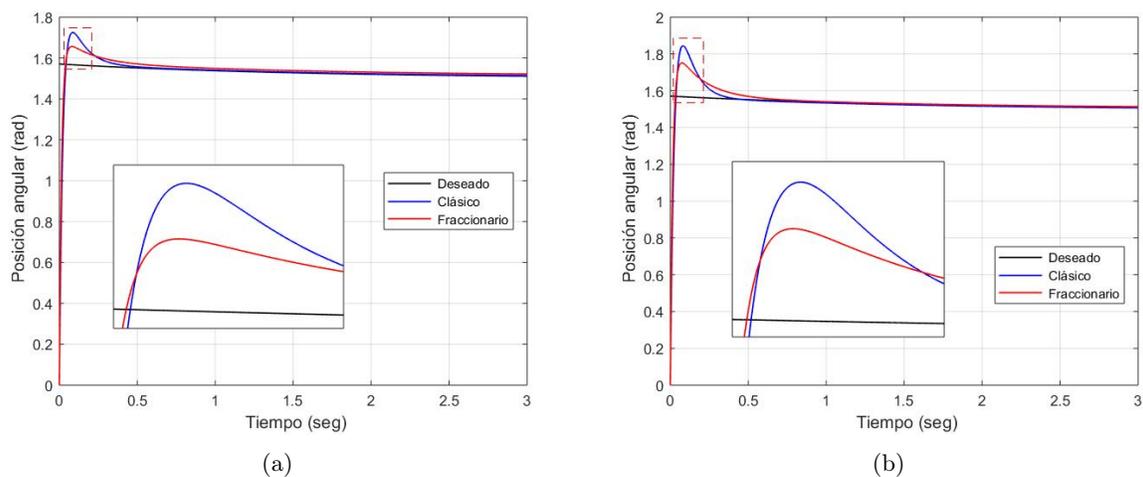


Figura 5.231: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

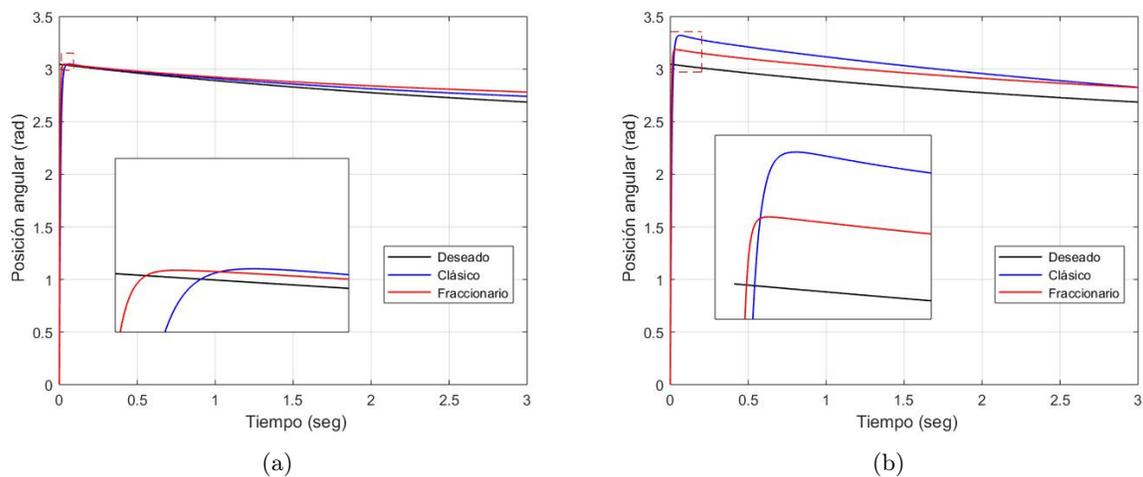


Figura 5.232: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

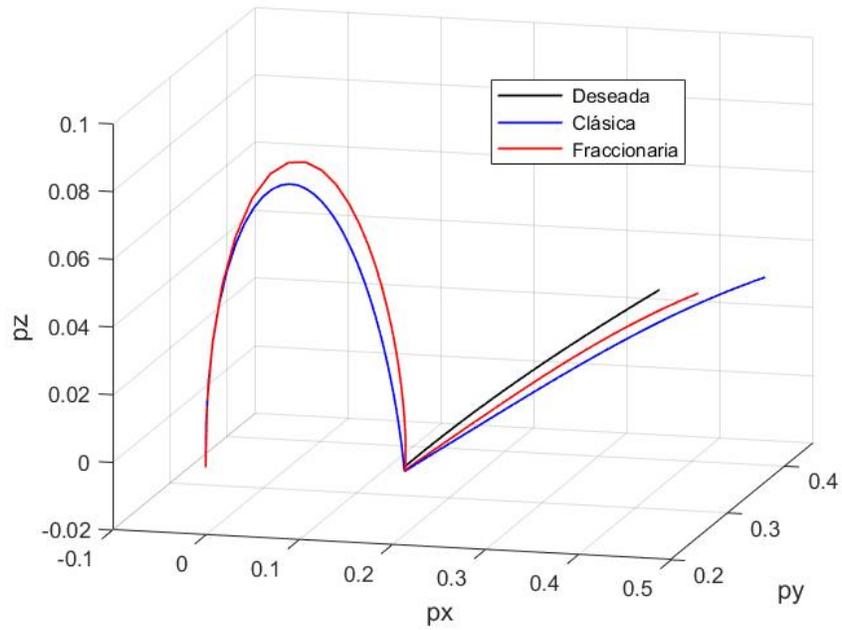


Figura 5.233: Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación

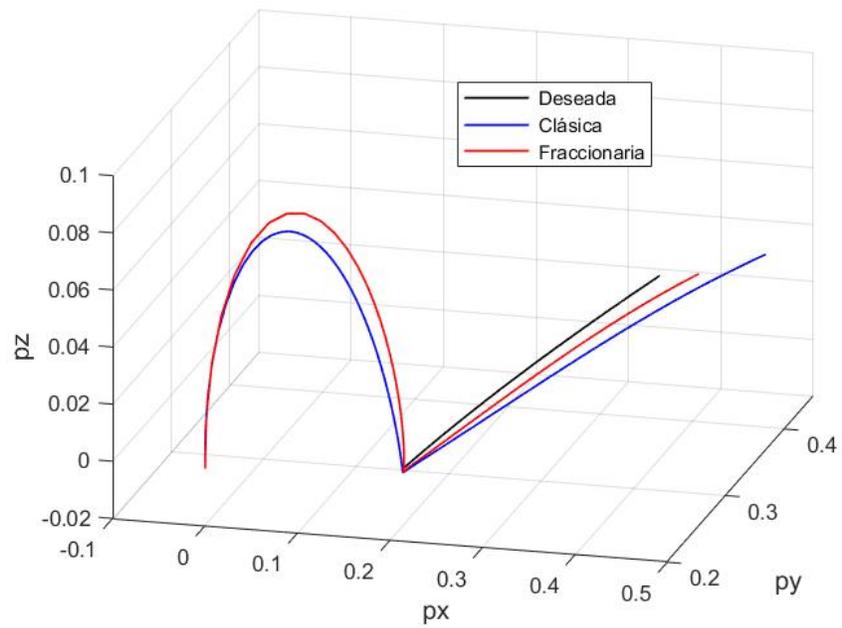


Figura 5.234: Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación

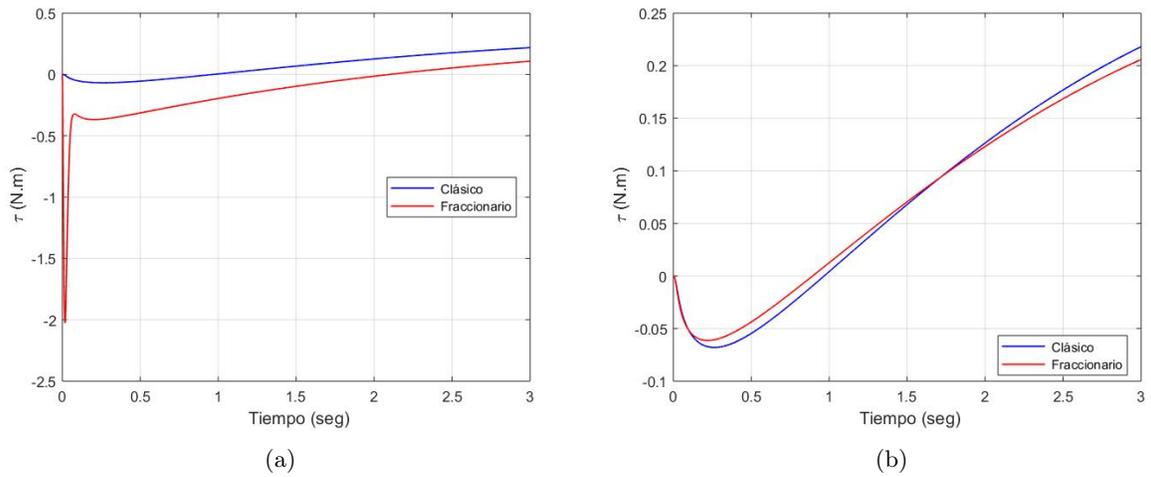


Figura 5.235: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

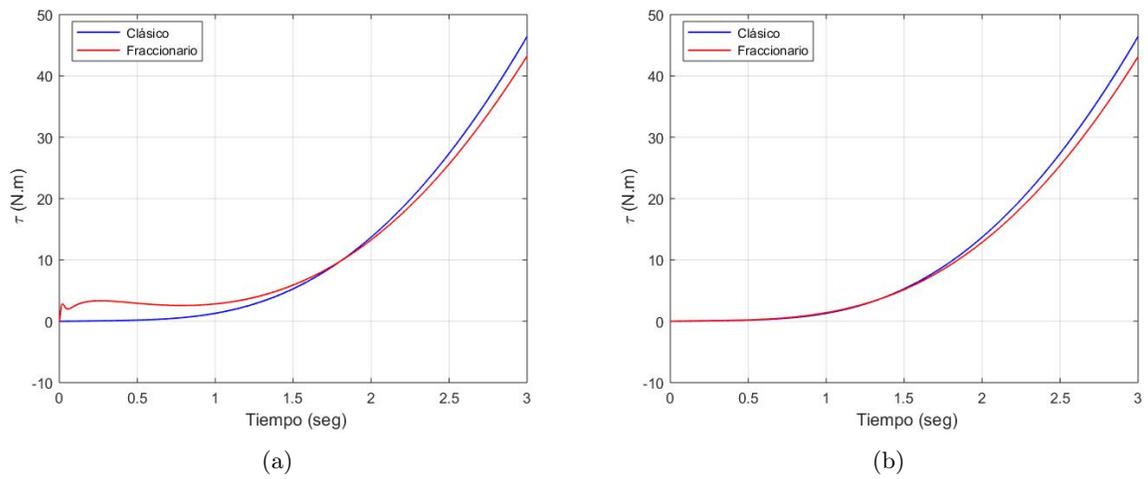
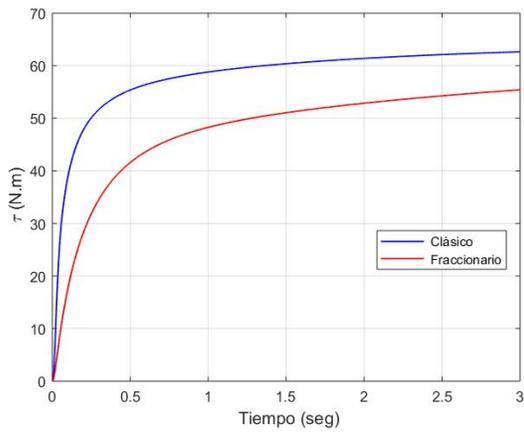
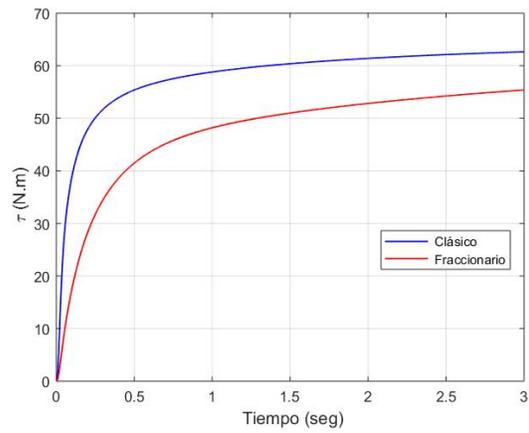


Figura 5.236: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

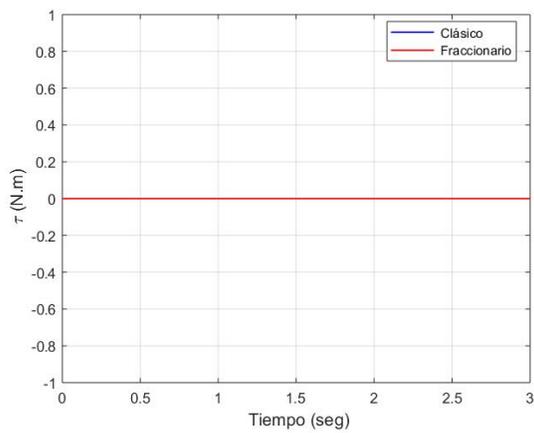


(a)

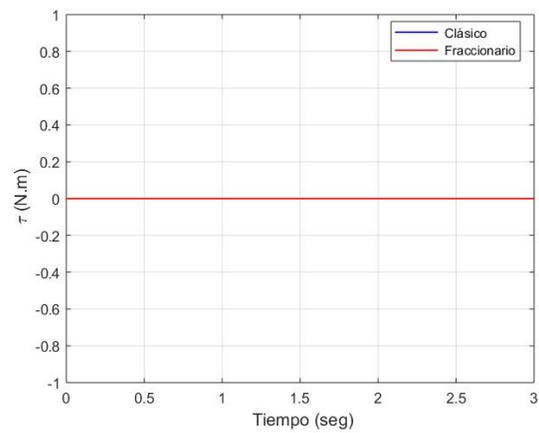


(b)

Figura 5.237: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.238: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

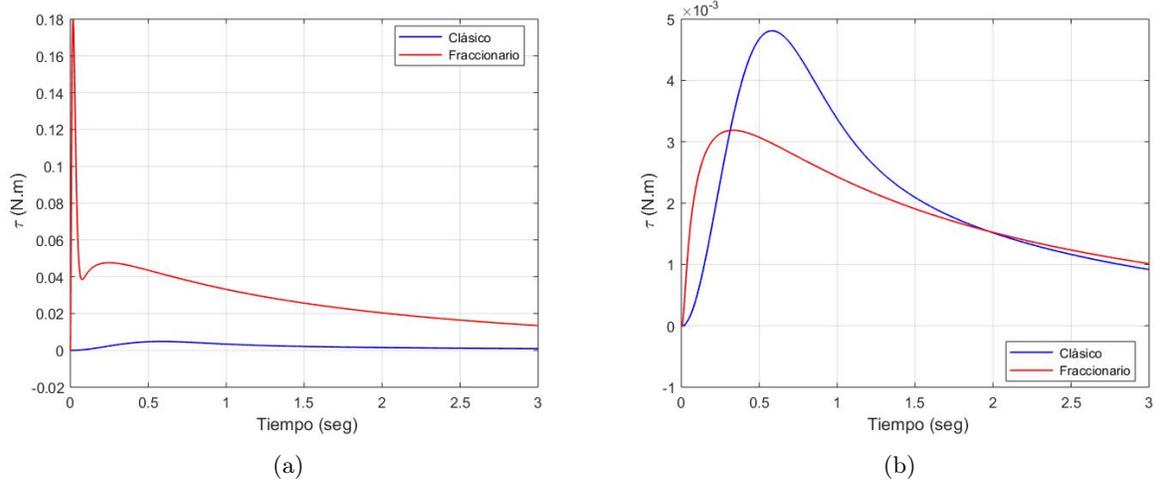


Figura 5.239: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

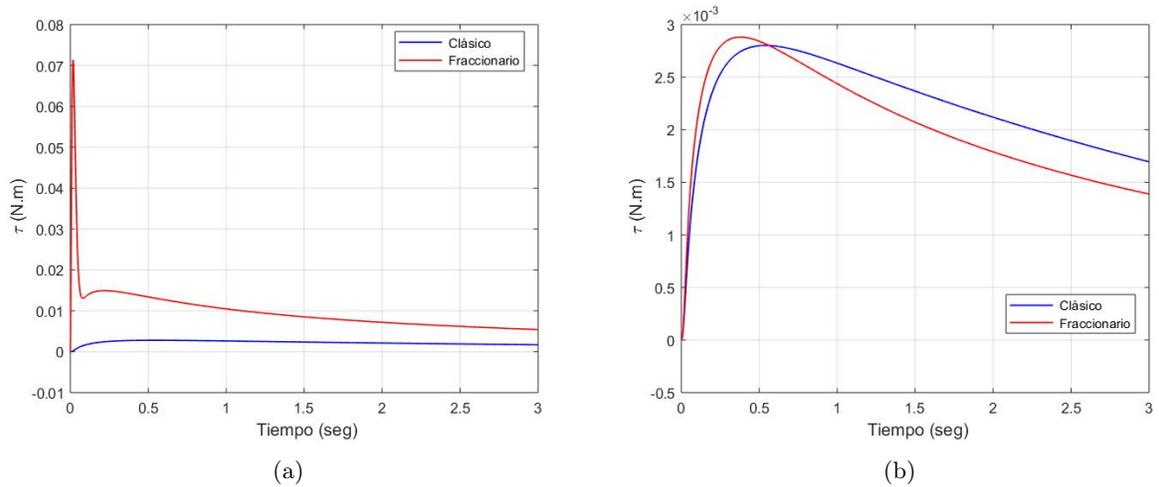


Figura 5.240: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

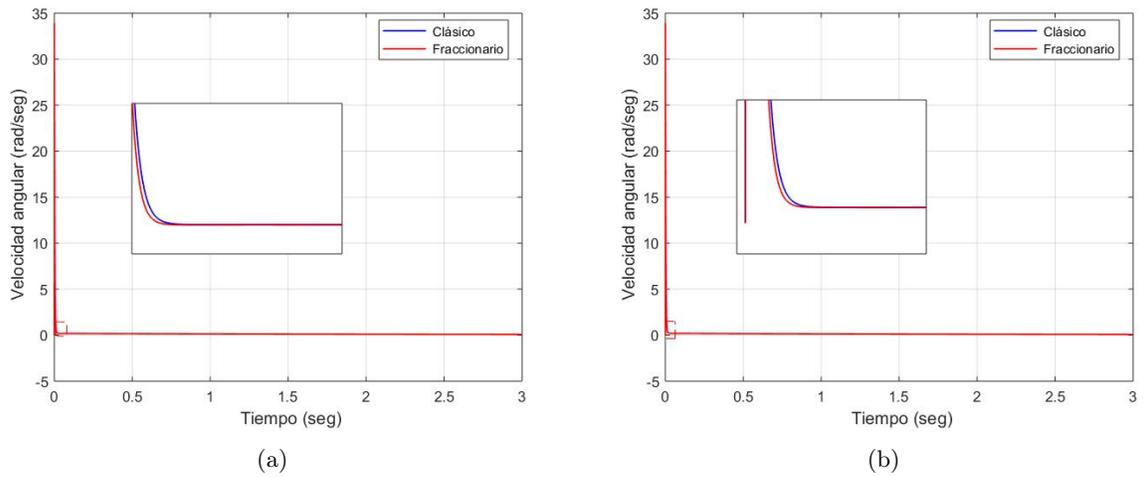


Figura 5.241: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

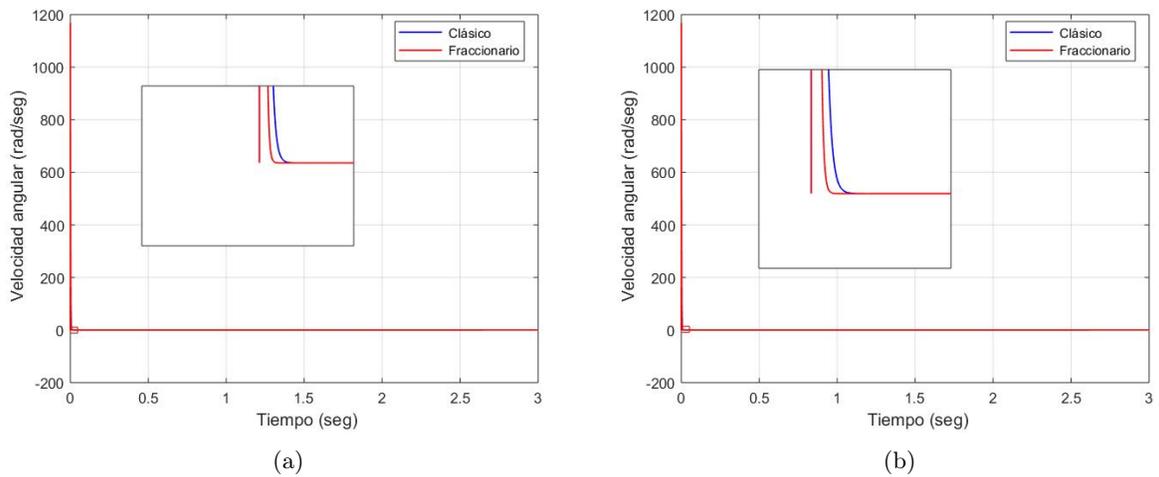
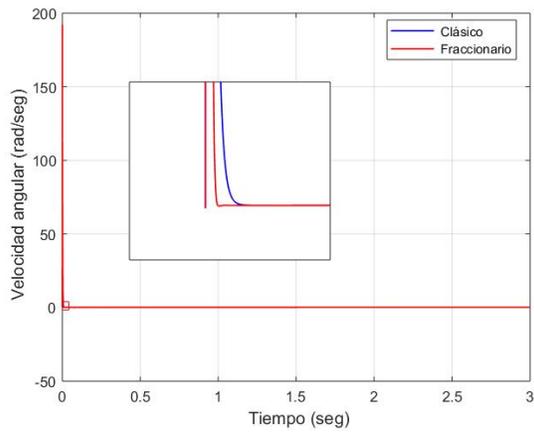
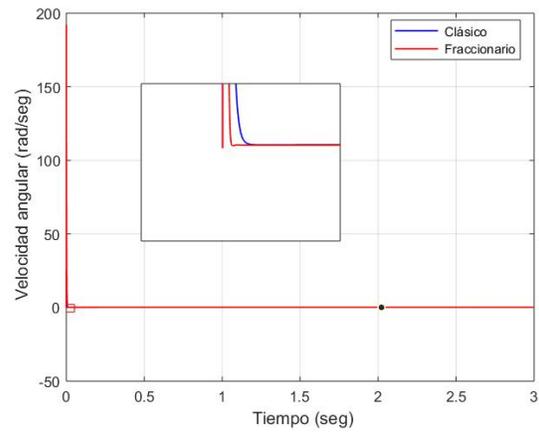


Figura 5.242: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

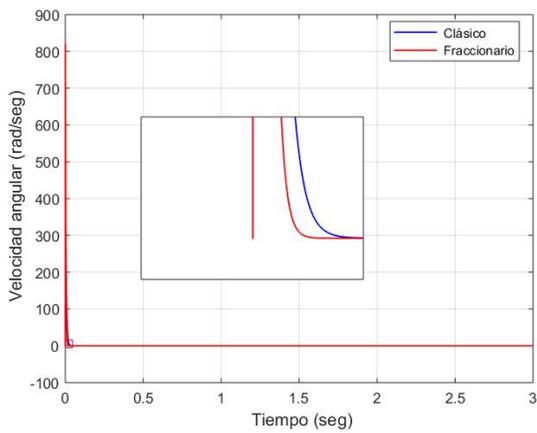


(a)

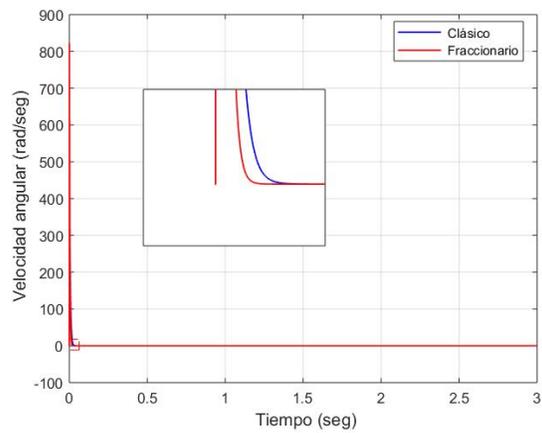


(b)

Figura 5.243: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.244: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

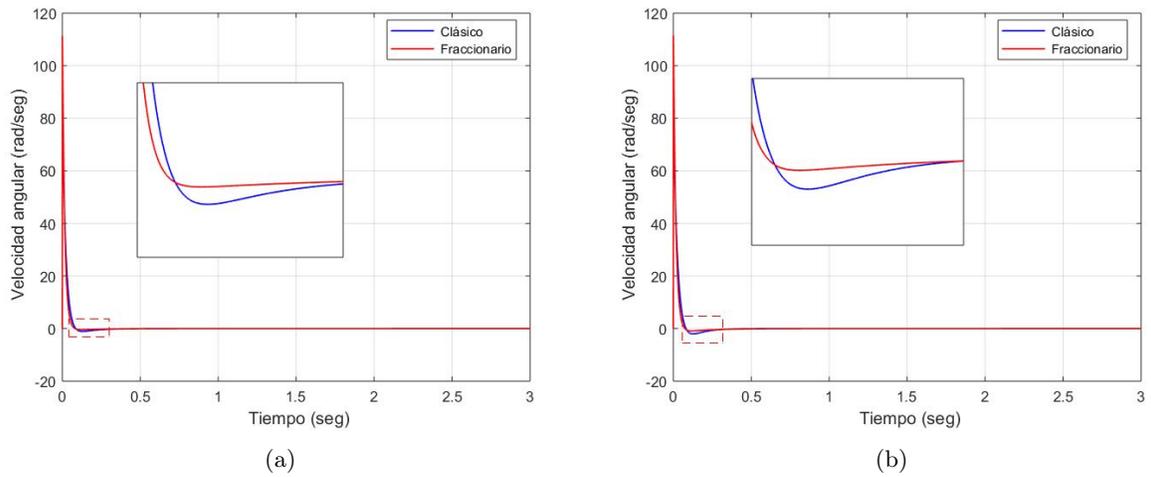


Figura 5.245: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

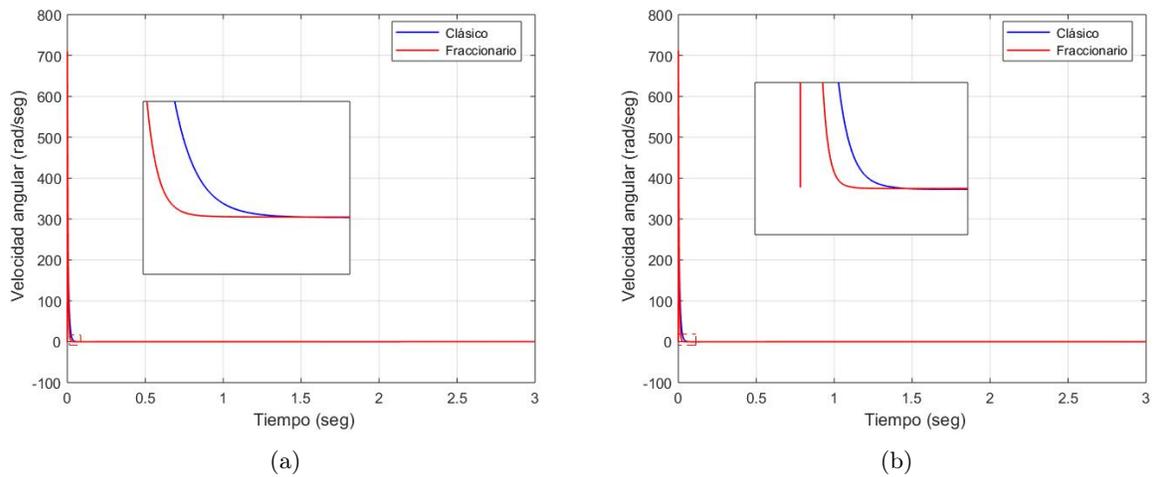
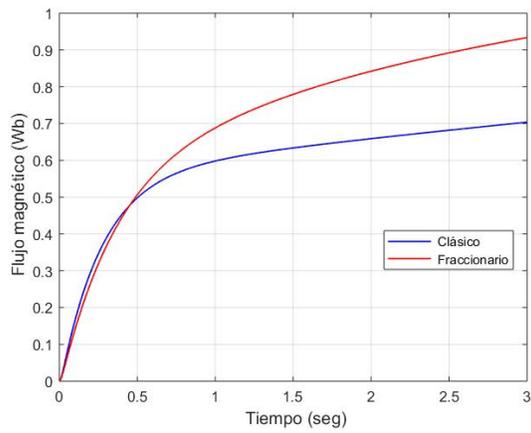
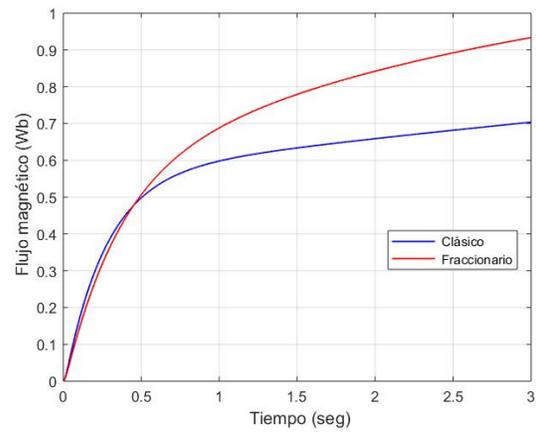


Figura 5.246: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

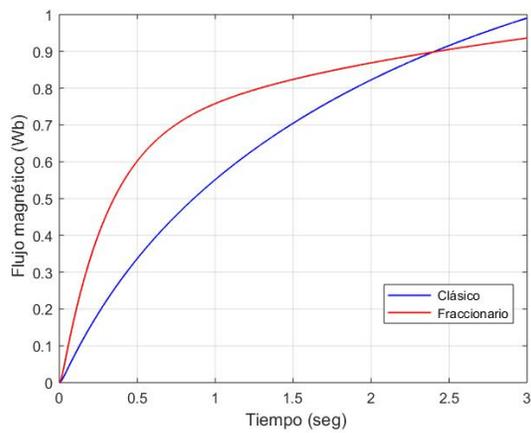


(a)

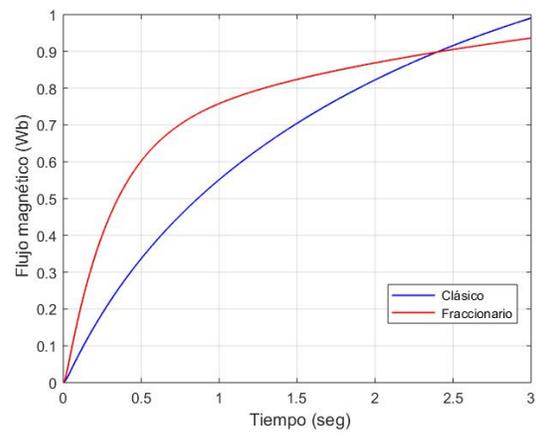


(b)

Figura 5.247: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

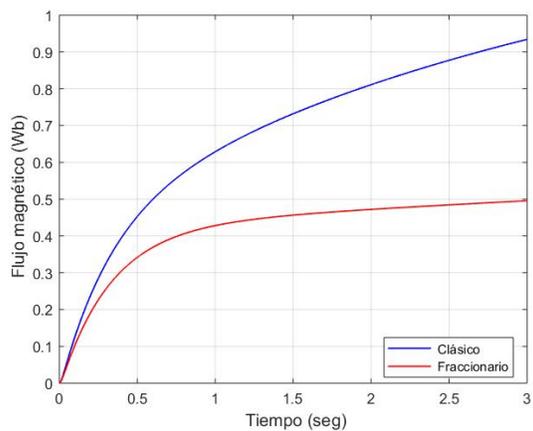


(a)

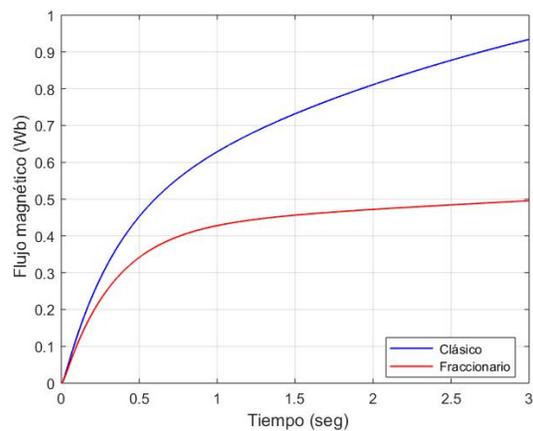


(b)

Figura 5.248: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

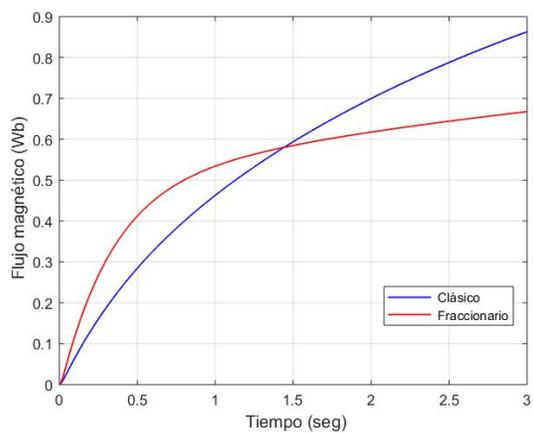


(a)

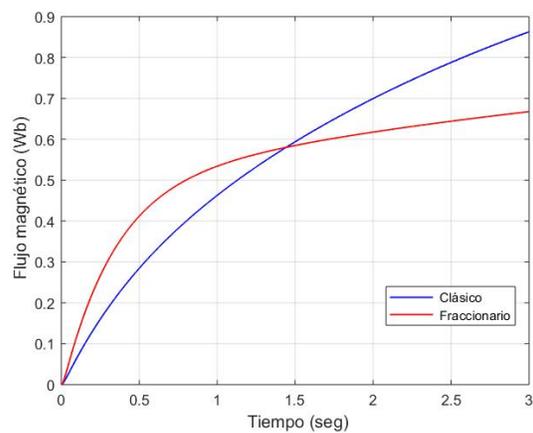


(b)

Figura 5.249: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

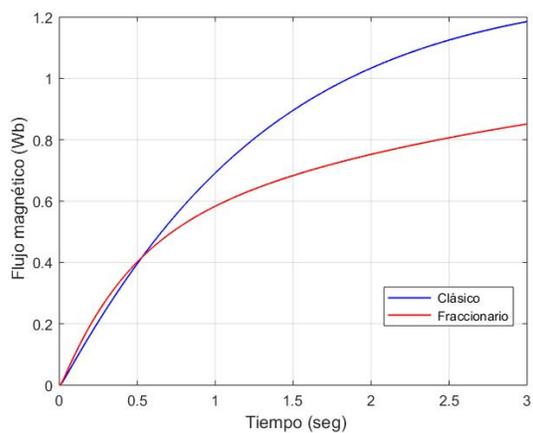


(a)

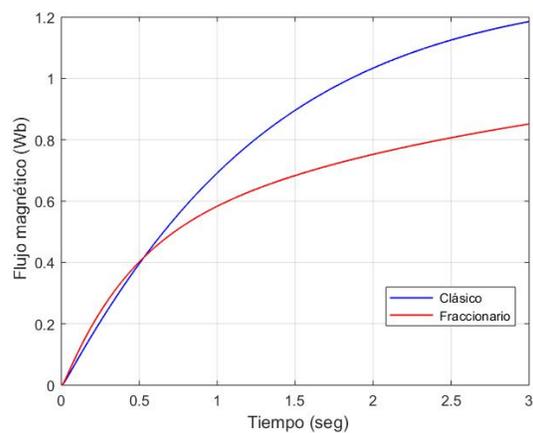


(b)

Figura 5.250: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

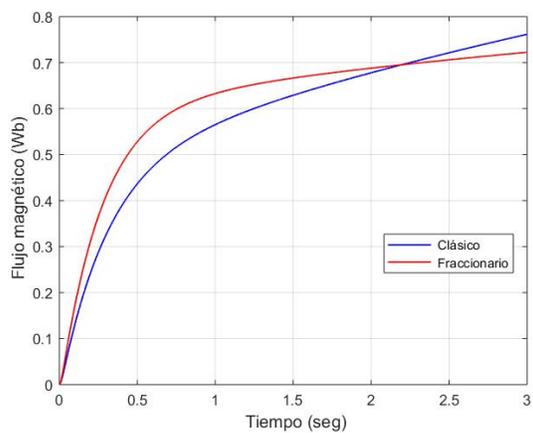


(a)

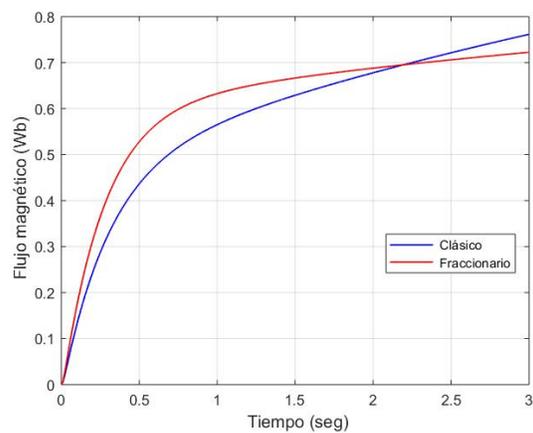


(b)

Figura 5.251: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.252: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

### 5.3. PUMA 560

#### 5.3.1. $PD^\mu$

El primer control aplicado al robot PUMA 560 es un tipo  $PD^\mu$  fraccionario con las siguientes trayectorias; Trayectoria 1 (C.1), Trayectoria 2 (C.3) y Trayectoria 3 (C.5), cuyos parámetros se muestran en la Tabla 5.29. Los resultados de la sintonización para los controladores clásico y de orden no entero se muestran en las Tablas 5.30 y 5.31, respectivamente. Las Tablas 5.32, 5.33 y 5.34 muestran la comparación del desempeño de los controladores para cada una de las articulaciones del manipulador respecto a cada trayectoria. Los resultados se muestran de la Figura 5.253 a 5.324.

$q_i$	Parámetros											
	Trayectoria 1		Trayectoria 2					Trayectoria 3				
	$a_0$	$a_1$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
1	$-\frac{\pi}{8}$	0.15	$\frac{\pi}{45}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{50}$	2	15	-0.234	0.25	-0.15	-0.05	-0.01
2	$\frac{\pi}{17}$	0.10	$\frac{\pi}{35}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{45}$	2	7	0.0234	0.025	0.015	0.005	0.001
3	$-\frac{\pi}{4}$	0.30	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{14}$	3	10	0.345	0.23	0.15	-0.06	0.03
4	$-\frac{\pi}{2}$	0.20	$\frac{\pi}{25}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{20}$	1.5	10	-0.265	0.2	0.1	-0.05	0.05
5	$-\frac{\pi}{2}$	0.20	$\frac{\pi}{25}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{20}$	1.5	10	-0.265	0.2	0.1	-0.05	0.05
6	$-\frac{\pi}{2}$	0.20	$\frac{\pi}{25}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{20}$	1.5	10	-0.265	0.2	0.1	-0.05	0.05

Tabla 5.29: Parámetros de las trayectorias deseadas para los controladores PD y  $PD^\mu$  aplicado al robot PUMA 560.

$q_i$	PI				PD	
	$K_{pvd}$	$K_{ivd}$	$K_{pvq}$	$K_{ivq}$	$K_p$	$K_d$
$q_1$	111.3920	978.0448	164.1360	531.4728	298.1709	50.0712
$q_2$	528.8709	21.4543	88.6013	745.2242	523.4828	70.3266
$q_3$	656.9635	656.0115	700.3944	457.6316	502.9275	49.7858
$q_4$	703.6027	69.2431	665.6986	659.4182	97.2165	59.6659
$q_5$	491.2371	32.7812	765.6638	495.8032	410.0260	30.3269
$q_6$	489.9265	593.5331	780.7892	171.3675	233.4201	29.8476

Tabla 5.30: Ganancias de los controladores PI y PD del robot PUMA 560.

$q_i$	$PI^\zeta$						$PD^\mu$		
	$K_{pvd}$	$K_{ivd}$	$\zeta$	$K_{pvq}$	$K_{ivq}$	$\zeta$	$K_p$	$K_d$	$\mu$
$q_1$	130.6255	606.9423	0.8972	949.3063	403.9872	0.8125	719.7057	82.2853	0.9774
$q_2$	71.1597	40.5999	0.7918	101.1248	16.1197	0.9271	922.7339	96.2609	0.9801
$q_3$	956.0651	366.6652	0.8868	994.0517	468.0422	0.8550	877.7063	88.7259	0.9217
$q_4$	868.6300	963.1468	0.9463	236.5425	896.8015	0.8385	768.3137	98.3415	0.7902
$q_5$	196.4715	755.7517	0.9020	746.2821	285.8047	0.8885	763.0980	97.2378	0.8828
$q_6$	593.5219	327.9362	0.8186	806.3063	695.0808	0.9350	849.7638	98.8857	0.9607

Tabla 5.31: Ganancias y ordenes de los controladores  $PI^\zeta$  y  $PD^\mu$  del robot PUMA 560.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 1			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0459	0.0172	0.0608	0.0231
$q_2$	0.0896	0.0457	0.1154	0.0623
$q_3$	0.0242	0.0160	0.0544	0.0324
$q_4$	0.0266	0.0234	0.0363	0.0246
$q_5$	0.0342	0.0216	0.0373	0.0228
$q_6$	0.0350	0.0211	0.0416	0.0221

Tabla 5.32: Comparación del desempeño de los controladores PD vs  $PD^\mu$  para la trayectoria 1.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 2			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0191	0.0090	0.0508	0.0240
$q_2$	0.0653	0.0371	0.0590	0.0434
$q_3$	0.0134	0.0086	0.0425	0.0253
$q_4$	0.0036	0.0032	0.0092	0.0036
$q_5$	0.0048	0.0029	0.0059	0.0034
$q_6$	0.0049	0.0029	0.0072	0.0033

Tabla 5.33: Comparación del desempeño de los controladores PD vs  $PD^\mu$  para la trayectoria 2.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 3			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0558	0.0287	0.1293	0.0573
$q_2$	0.0914	0.0461	0.1224	0.0664
$q_3$	0.0258	0.0189	0.0573	0.0335
$q_4$	0.0076	0.0067	0.0083	0.0068
$q_5$	0.0099	0.0062	0.0103	0.0063
$q_6$	0.0101	0.0061	0.0108	0.0062

Tabla 5.34: Comparación del desempeño de los controladores PD vs  $PD^\mu$  para la trayectoria 3.

### Resultados para la trayectoria 1

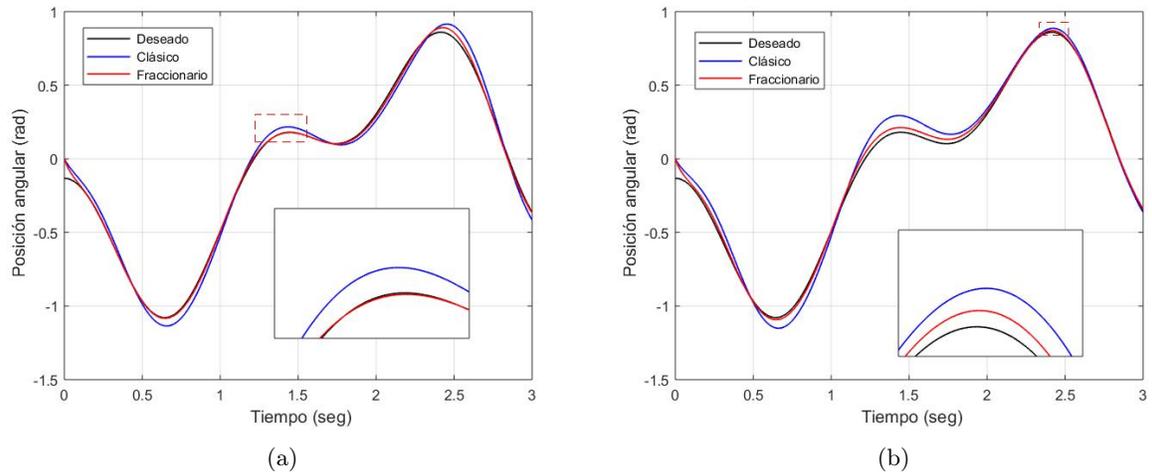


Figura 5.253: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

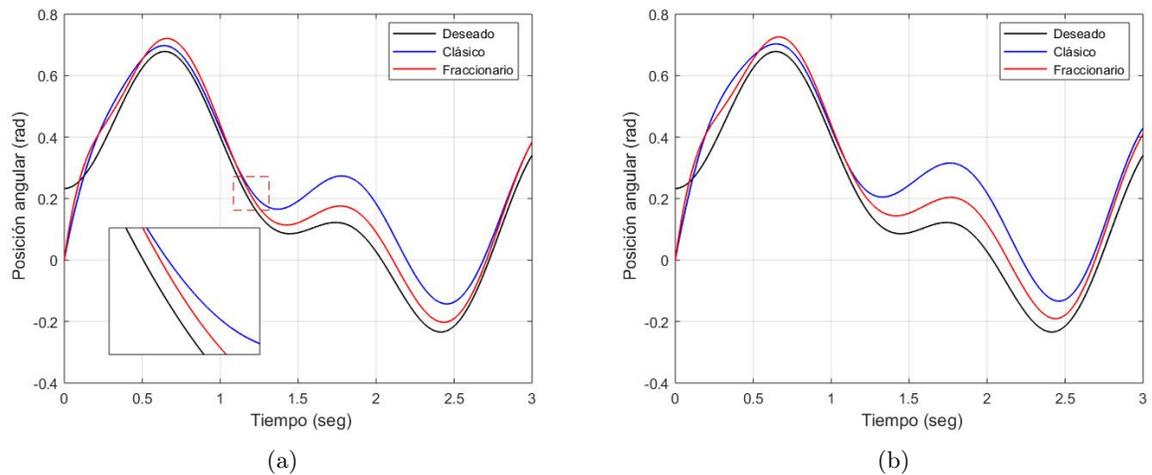


Figura 5.254: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

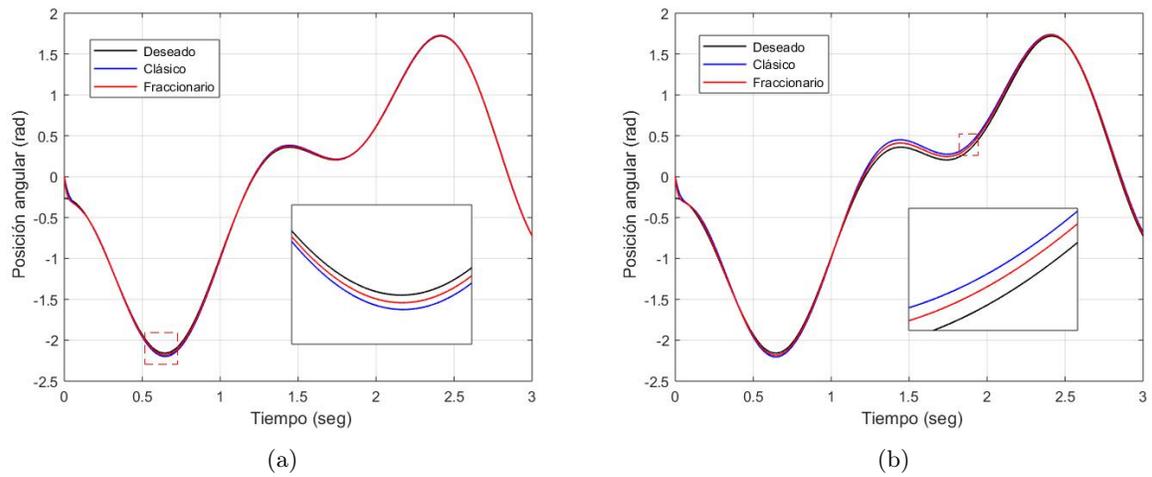


Figura 5.255: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

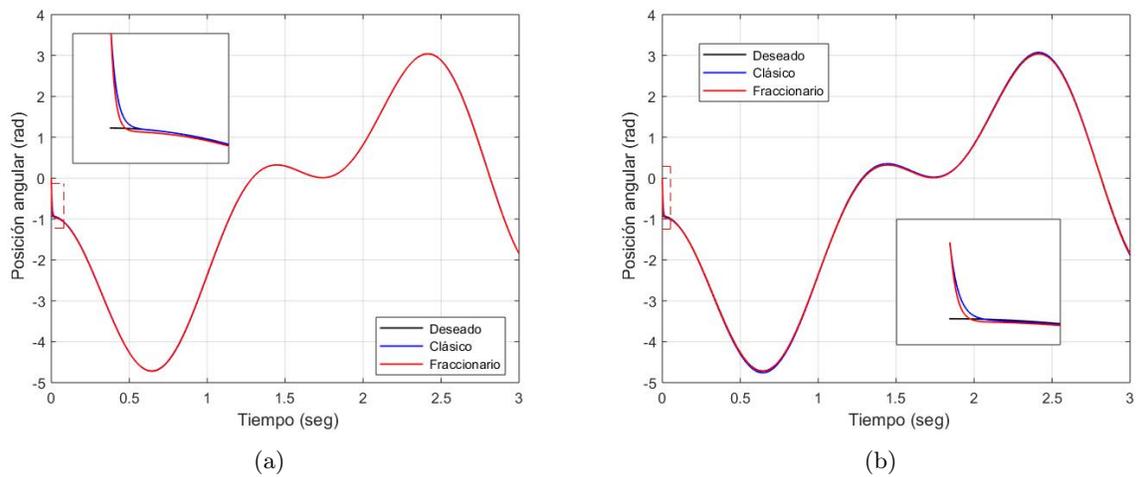


Figura 5.256: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

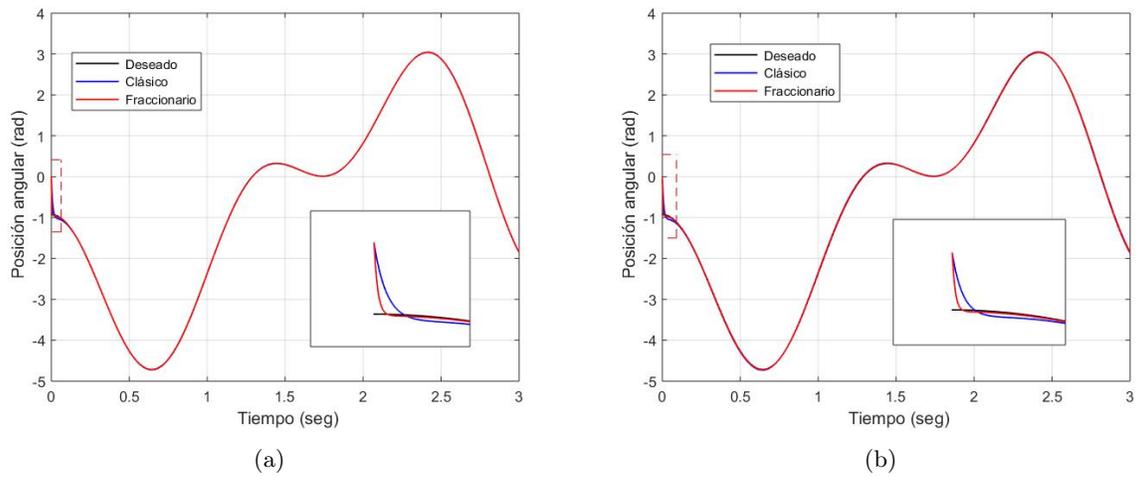


Figura 5.257: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

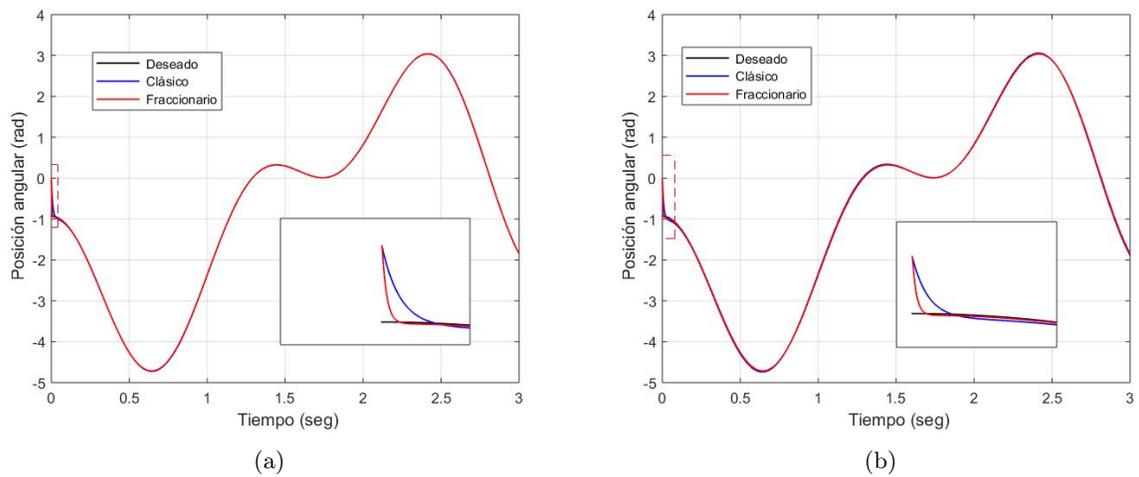


Figura 5.258: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

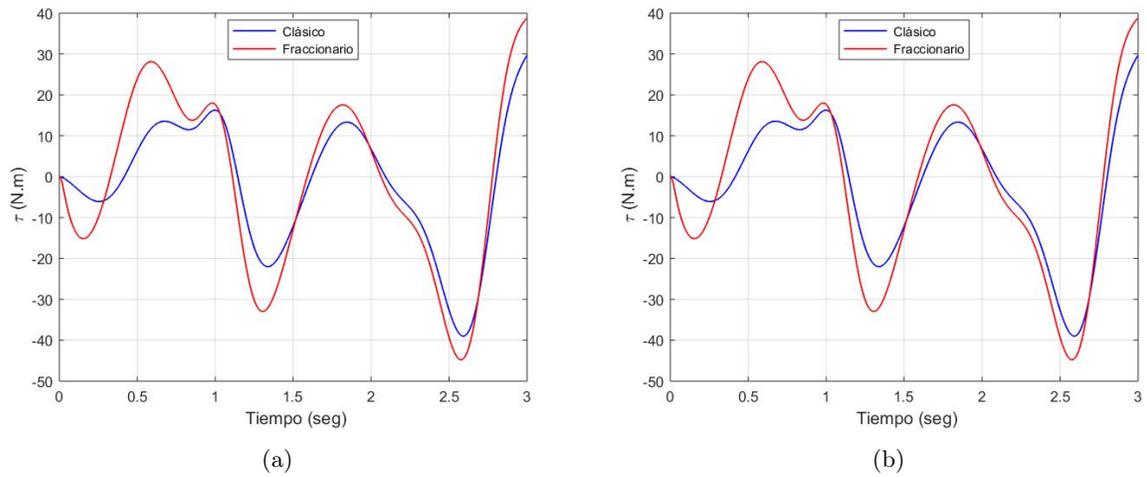


Figura 5.259: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

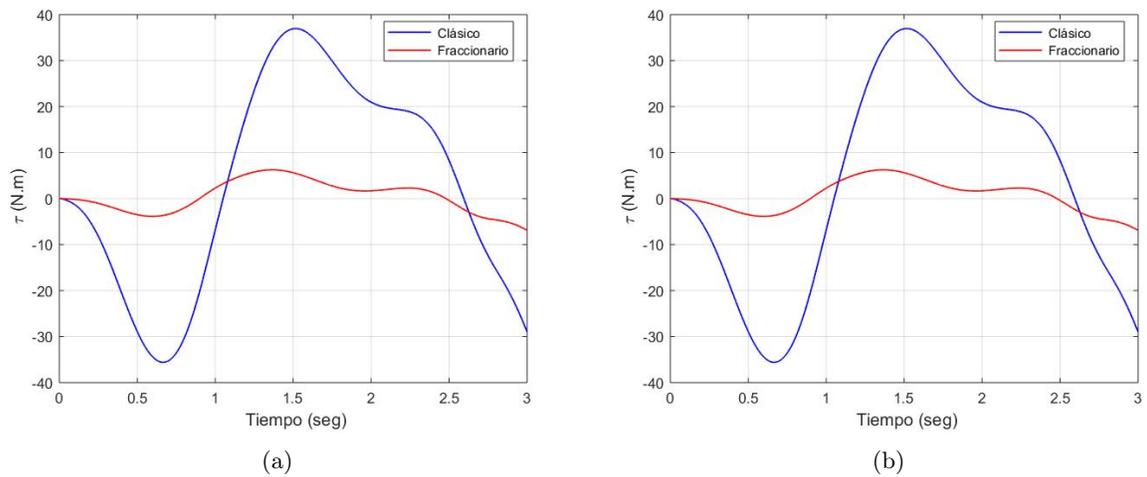
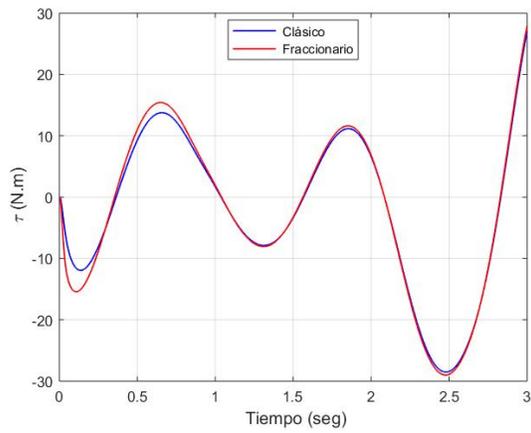
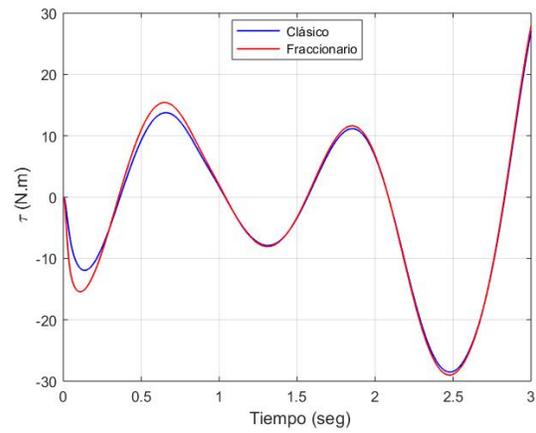


Figura 5.260: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

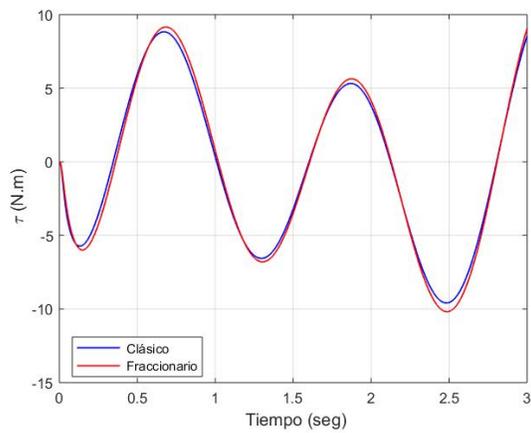


(a)

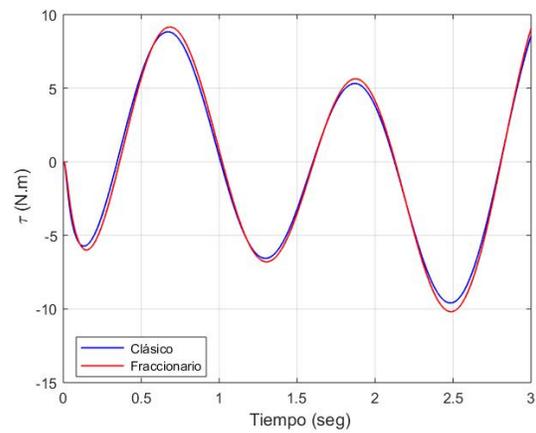


(b)

Figura 5.261: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.262: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

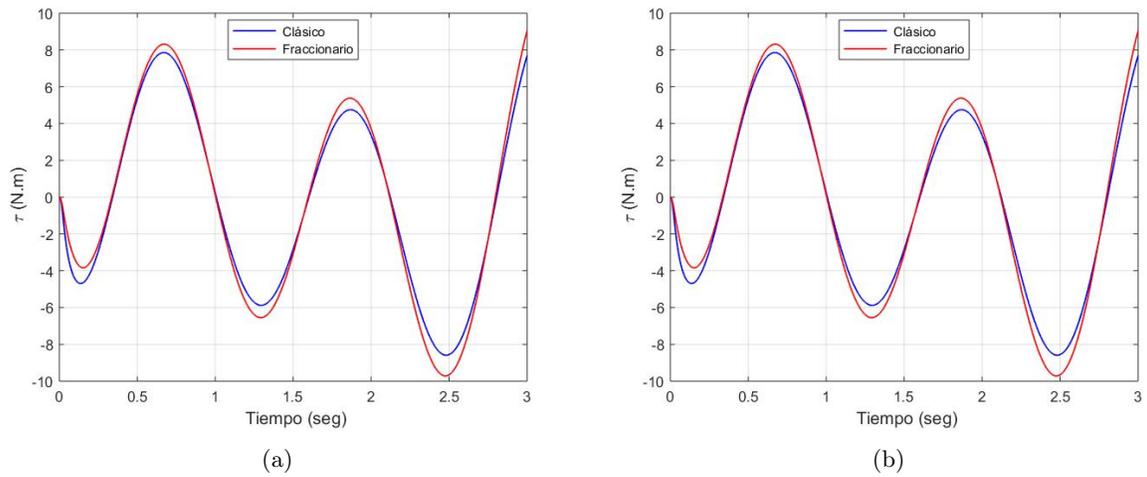


Figura 5.263: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

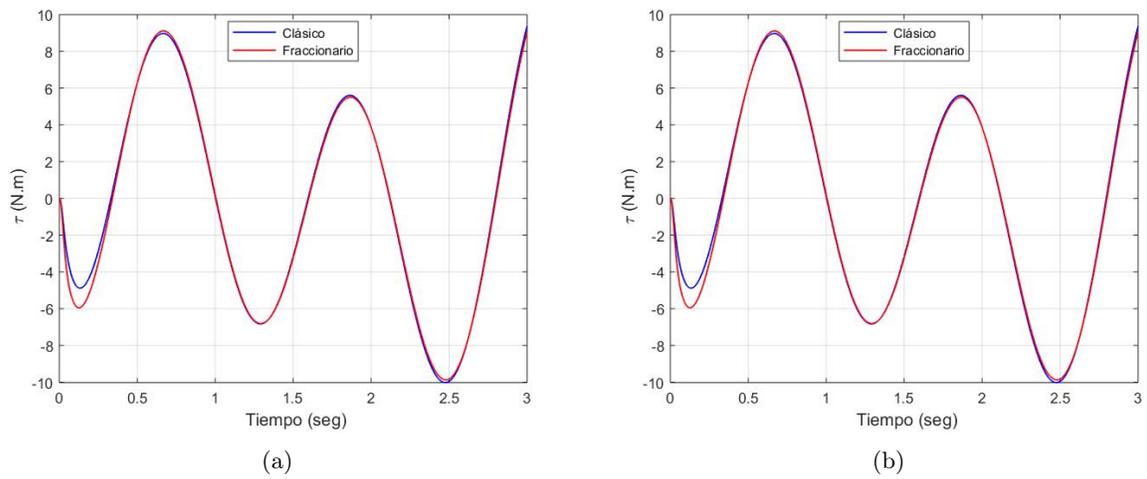


Figura 5.264: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

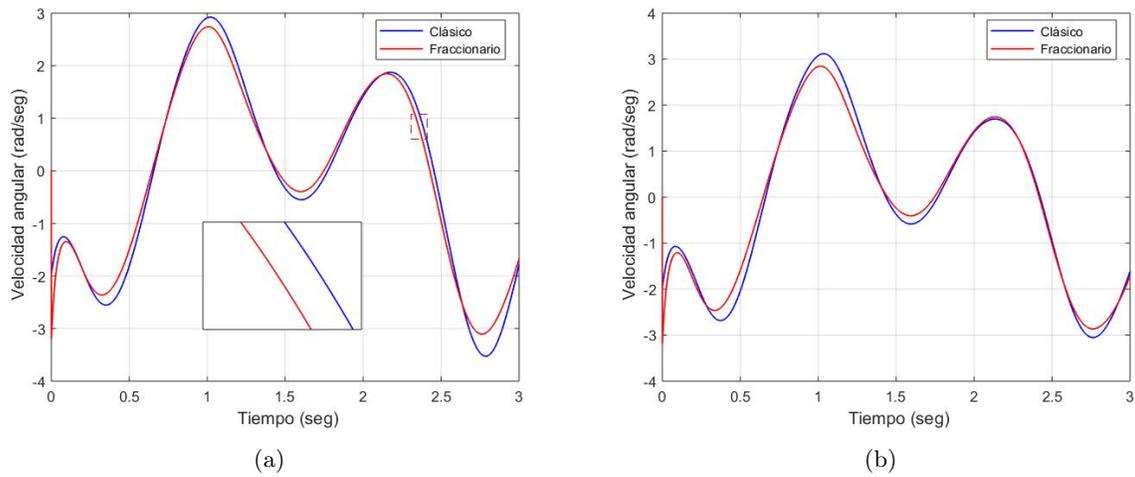


Figura 5.265: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

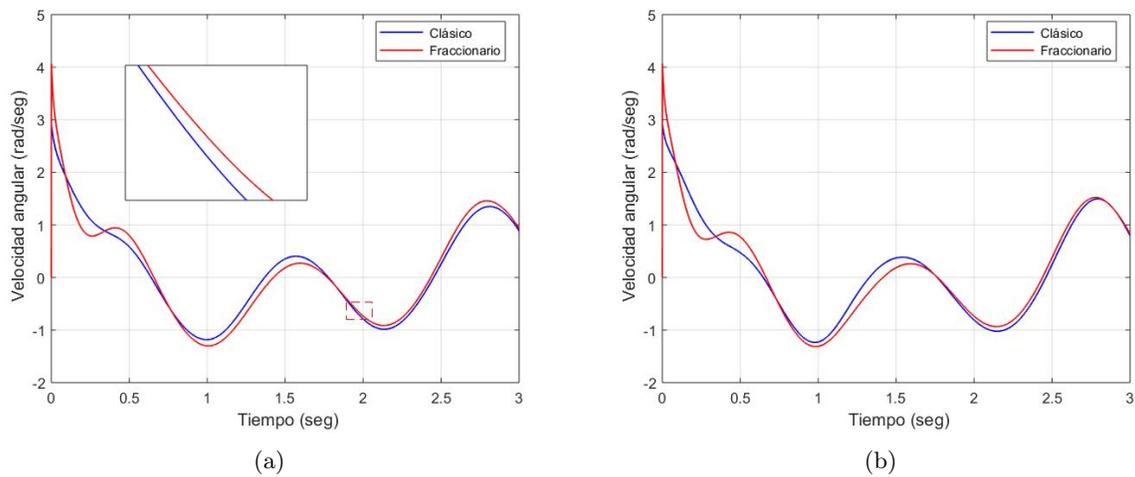


Figura 5.266: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

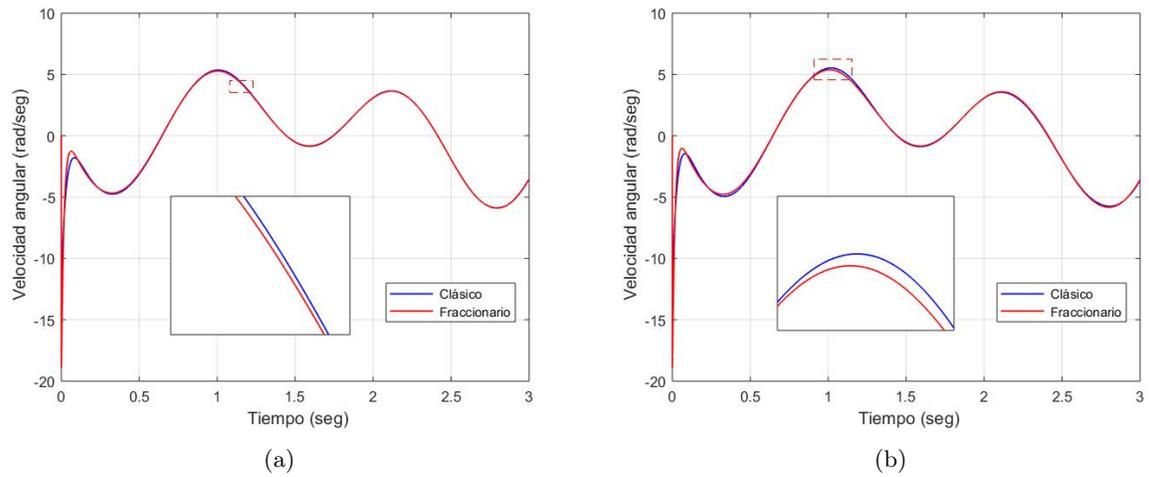


Figura 5.267: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

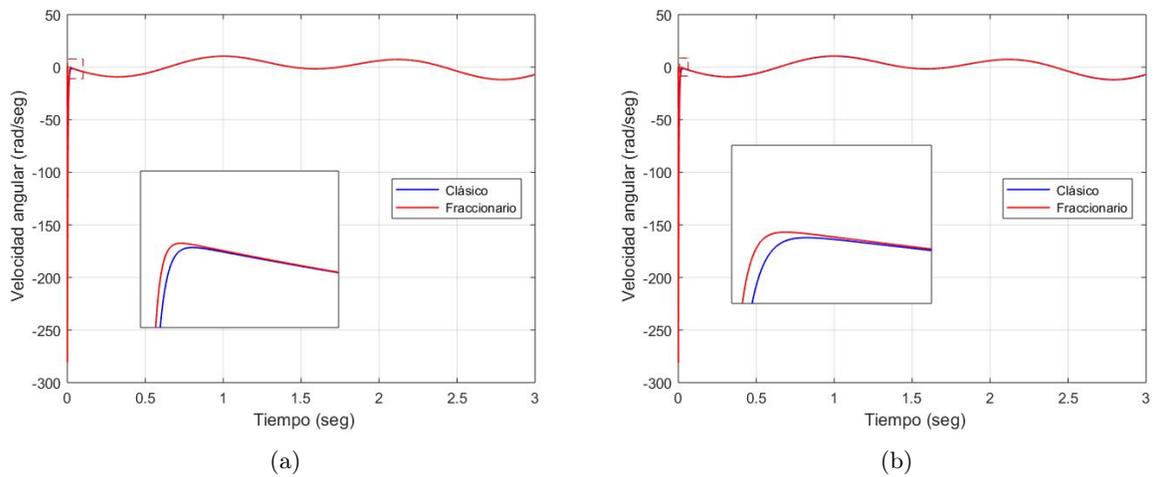


Figura 5.268: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

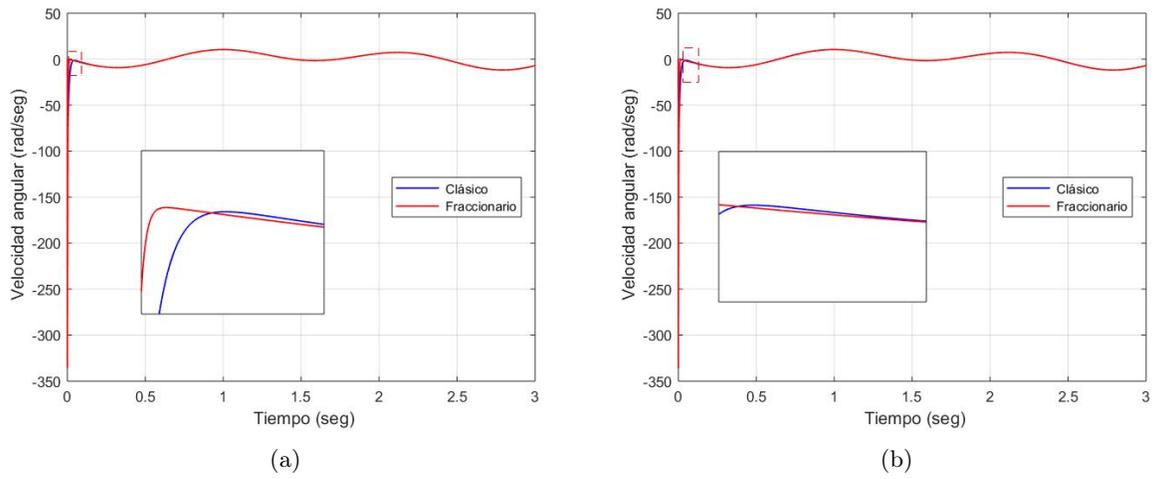


Figura 5.269: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

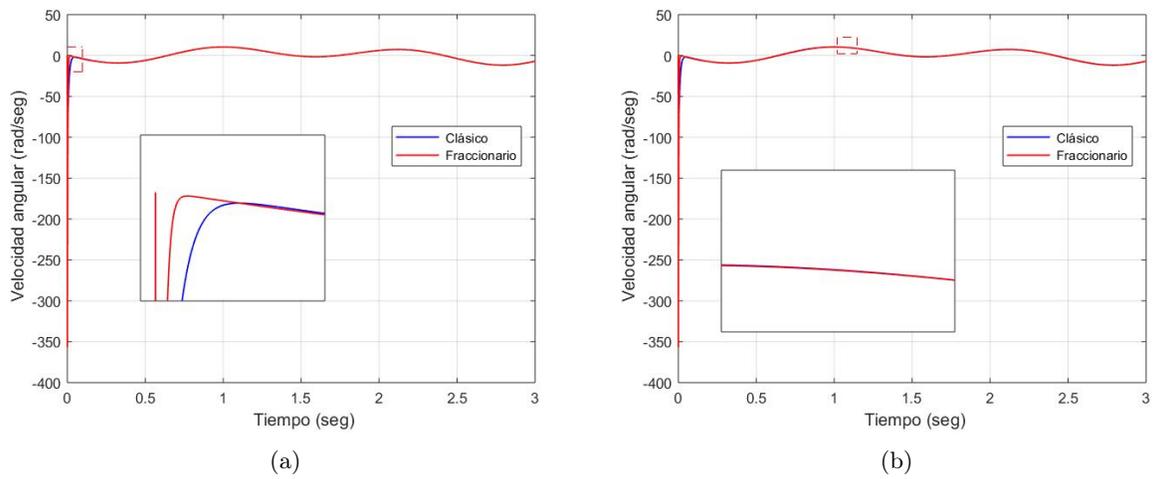
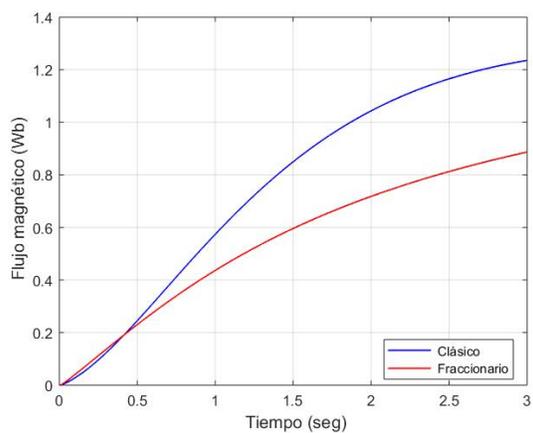
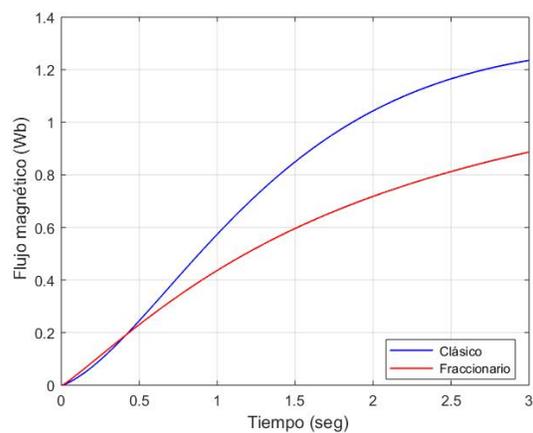


Figura 5.270: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

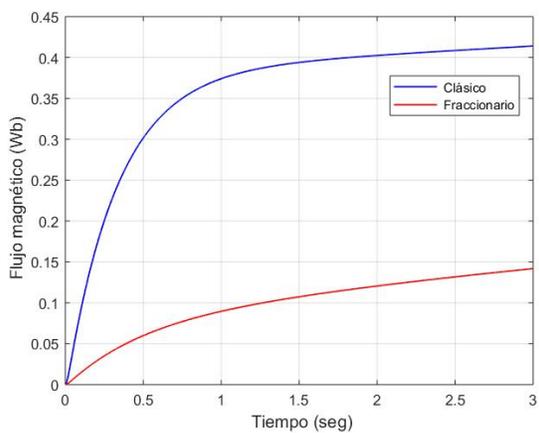


(a)

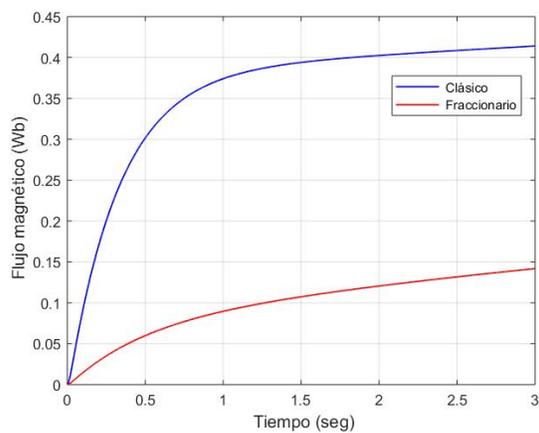


(b)

Figura 5.271: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

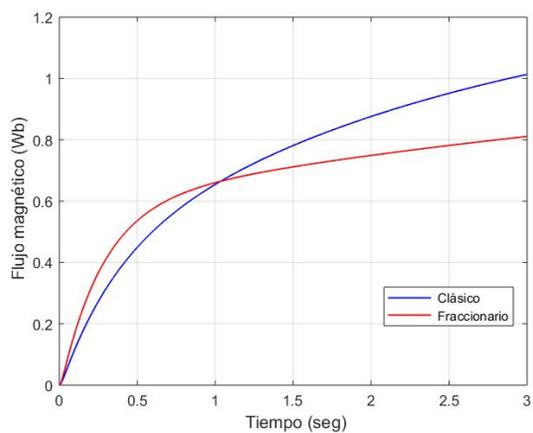


(a)

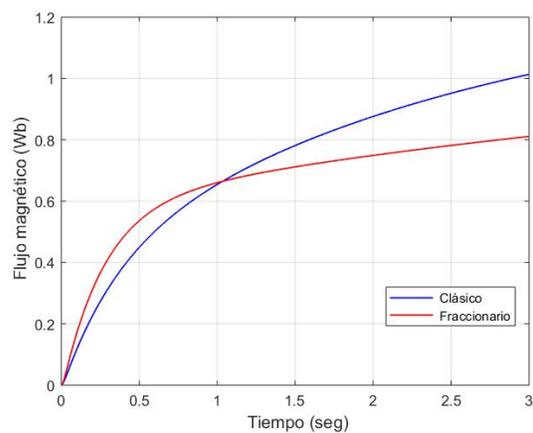


(b)

Figura 5.272: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

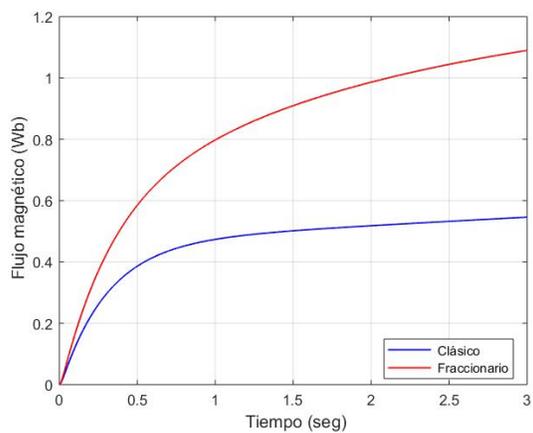


(a)

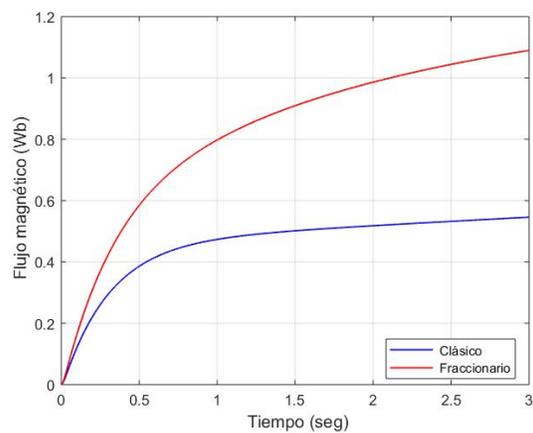


(b)

Figura 5.273: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

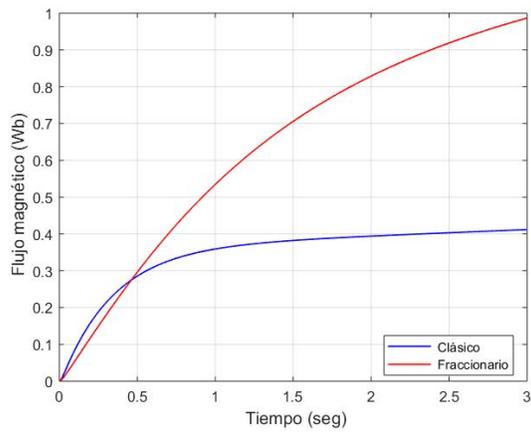


(a)

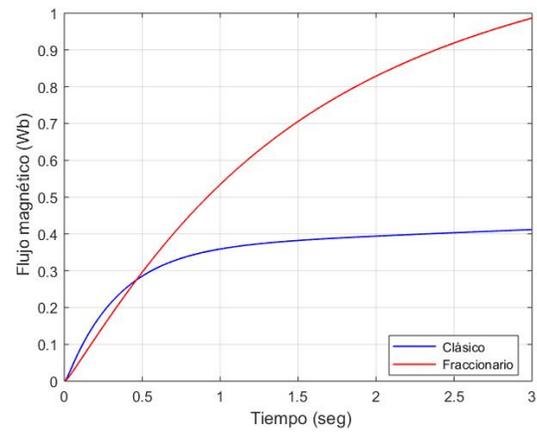


(b)

Figura 5.274: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

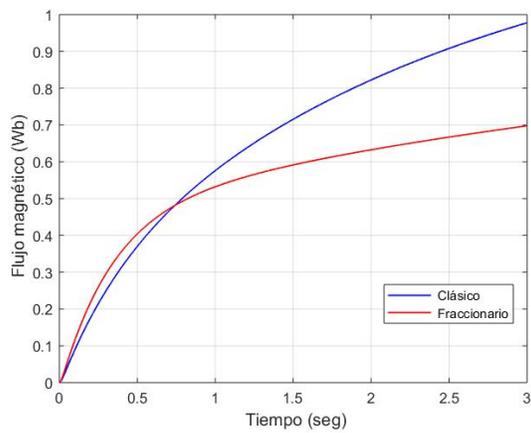


(a)

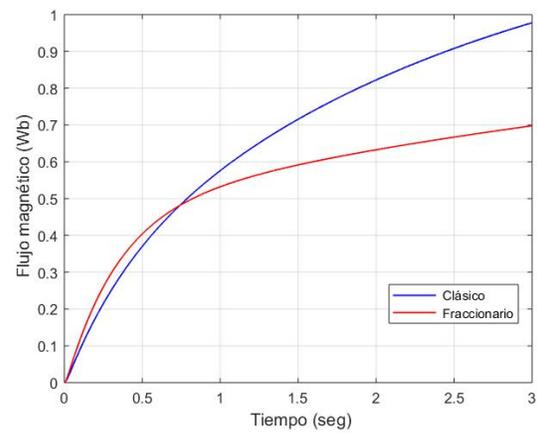


(b)

Figura 5.275: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.276: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

## Resultados para la trayectoria 2

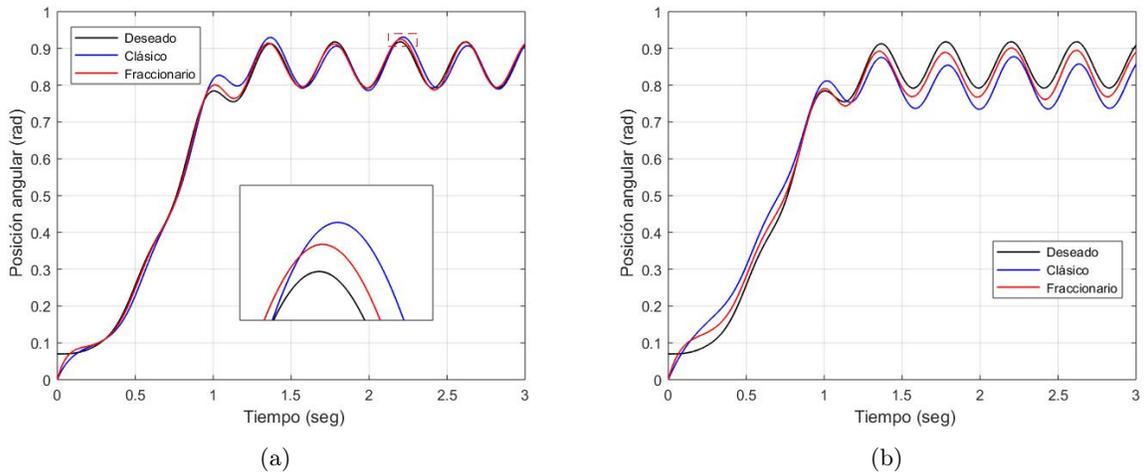


Figura 5.277: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

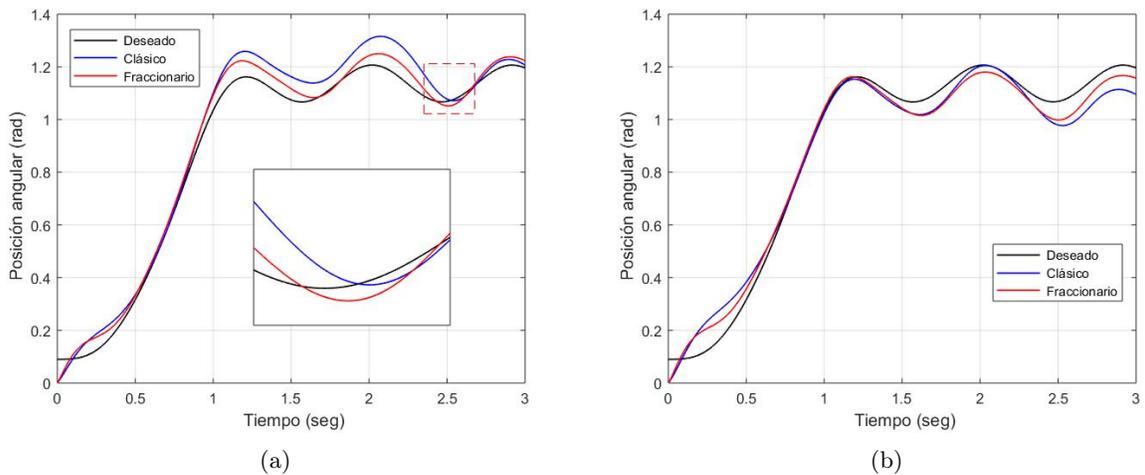
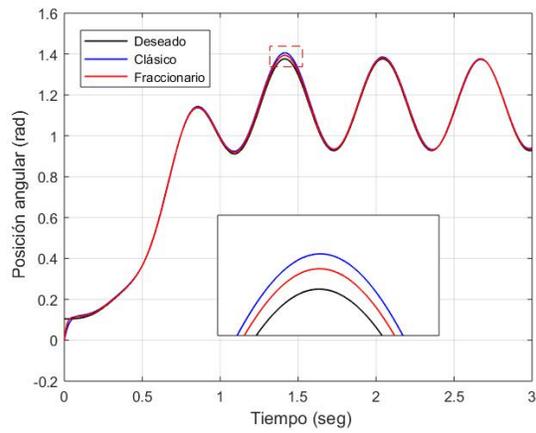
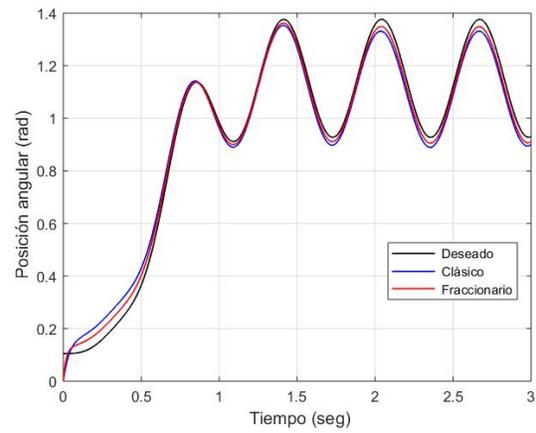


Figura 5.278: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

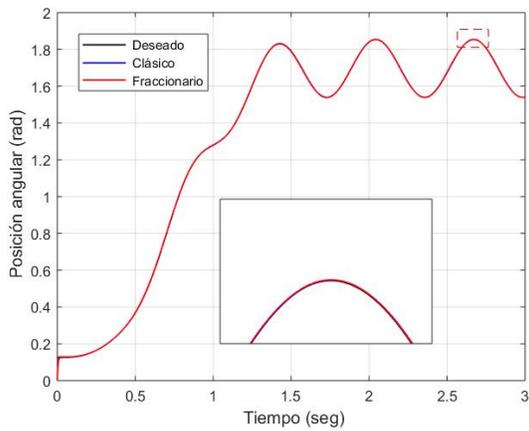


(a)

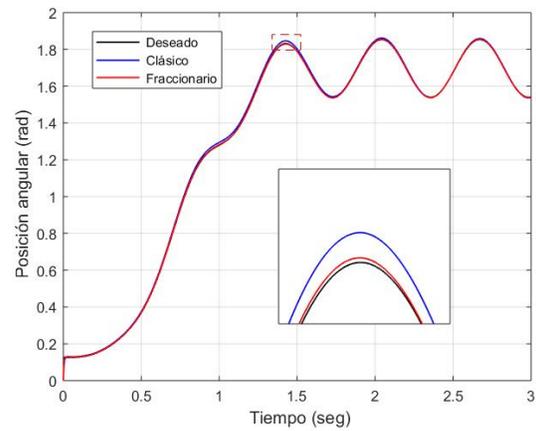


(b)

Figura 5.279: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.280: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

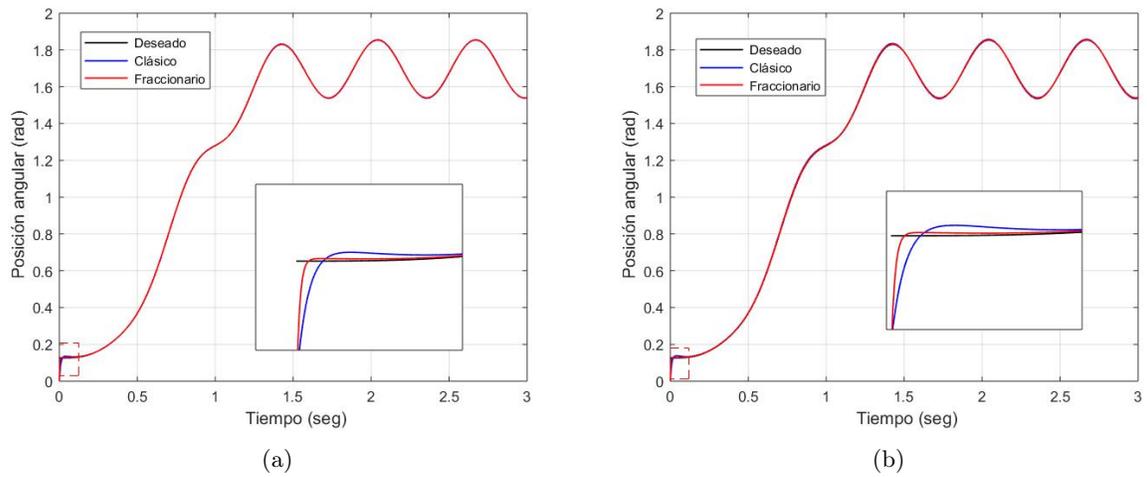


Figura 5.281: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

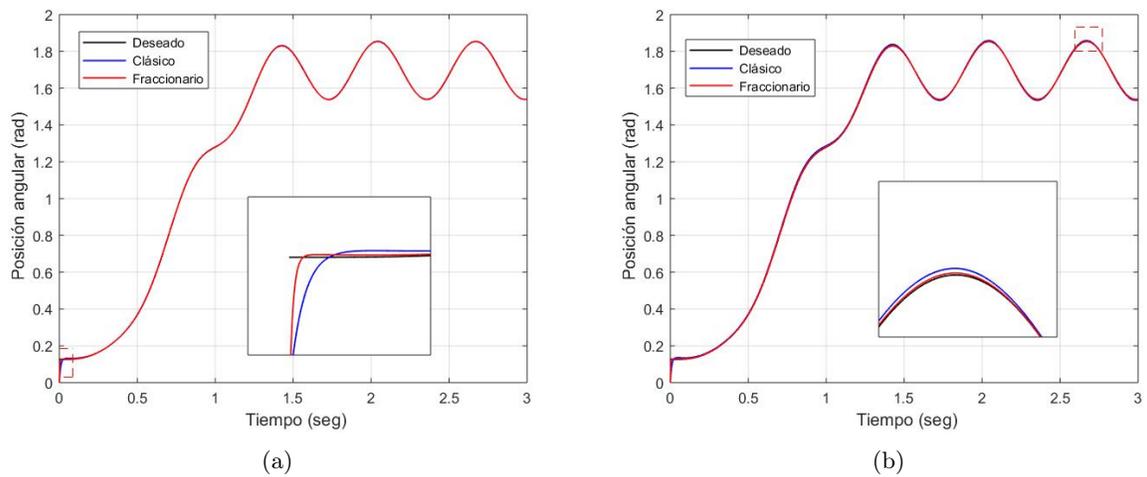


Figura 5.282: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

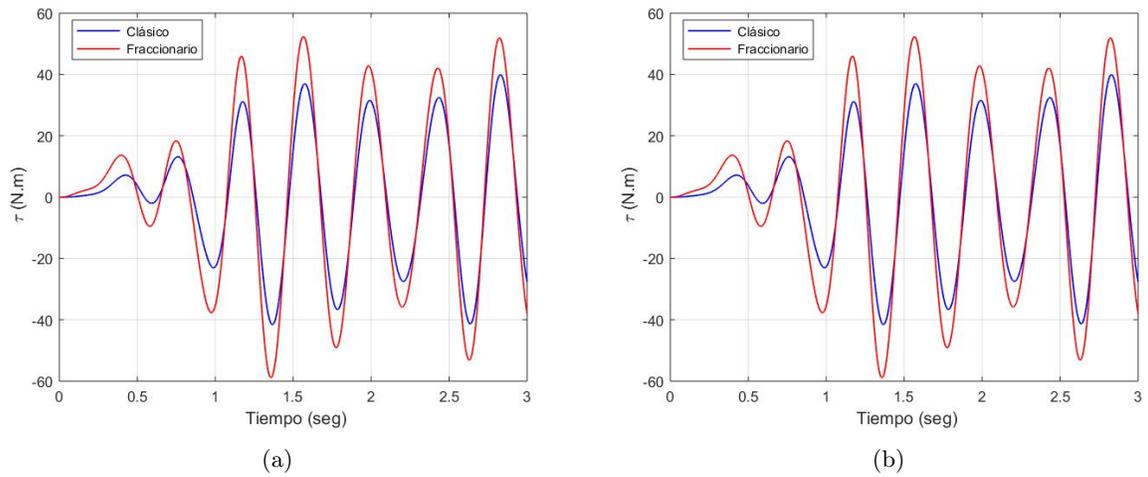


Figura 5.283: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

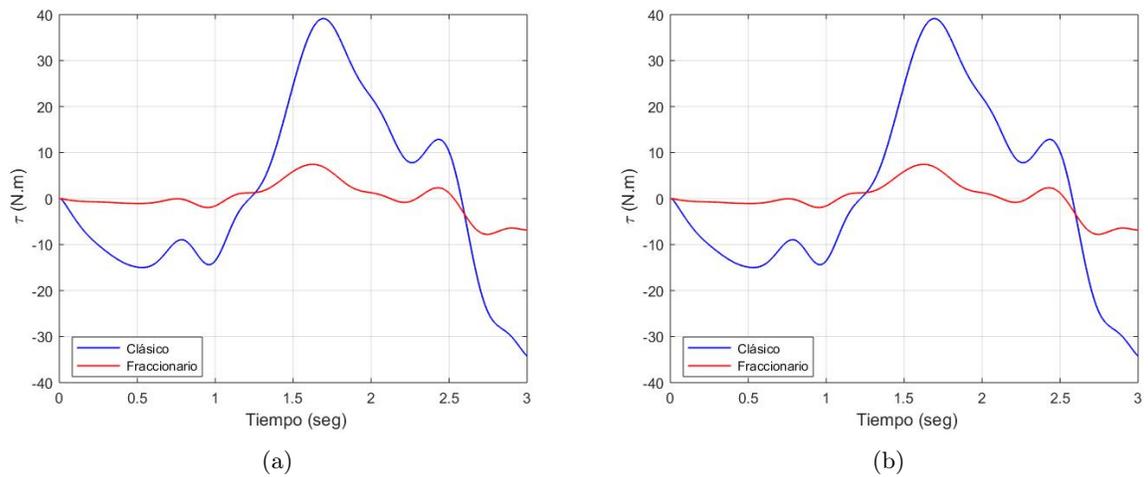
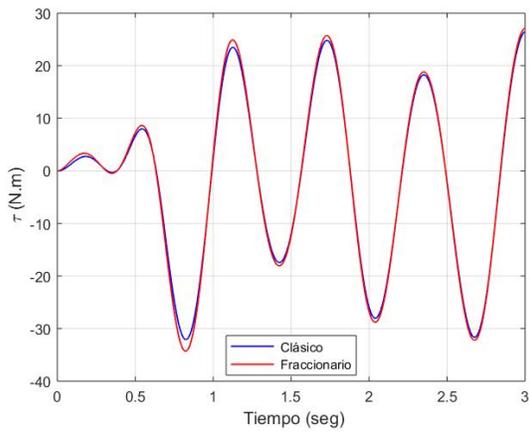
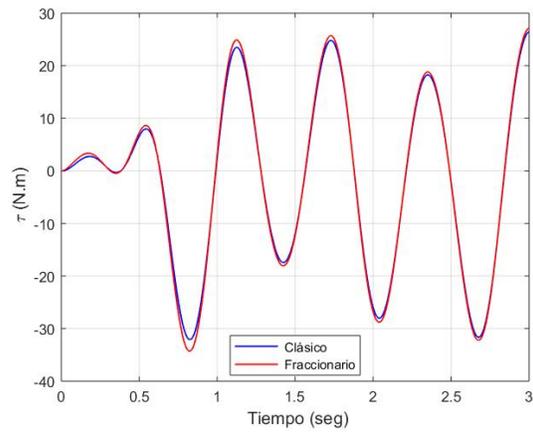


Figura 5.284: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

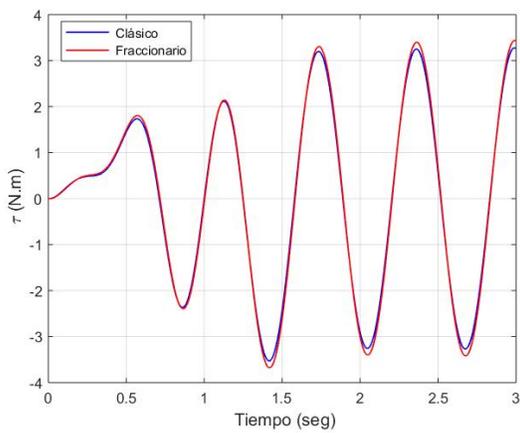


(a)

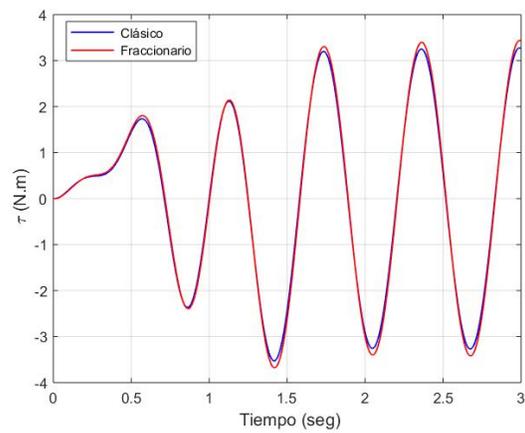


(b)

Figura 5.285: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

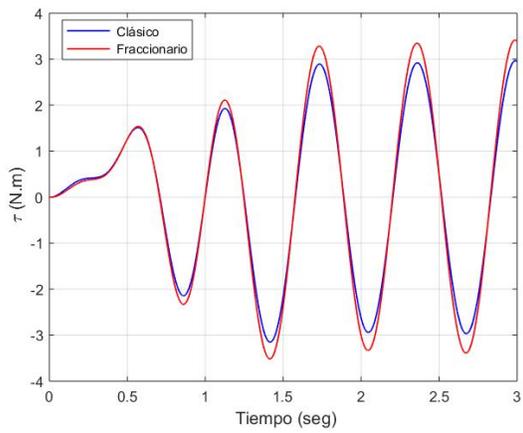


(a)

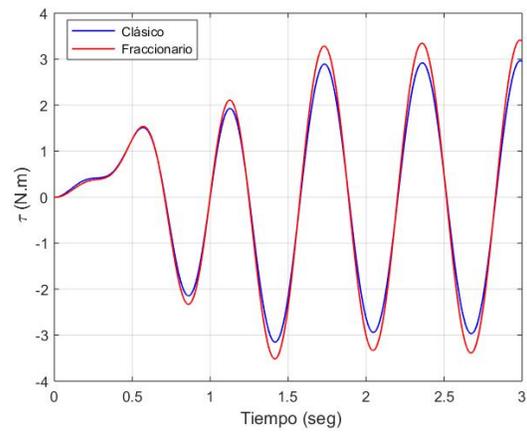


(b)

Figura 5.286: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

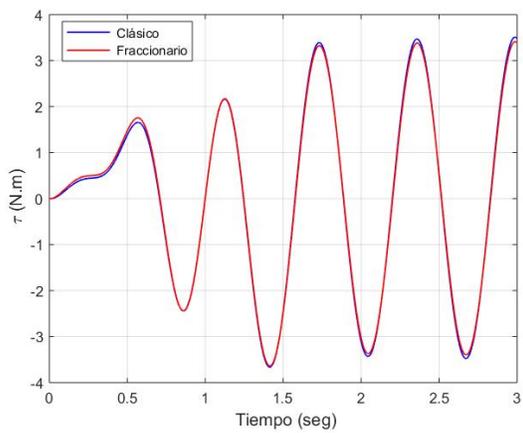


(a)

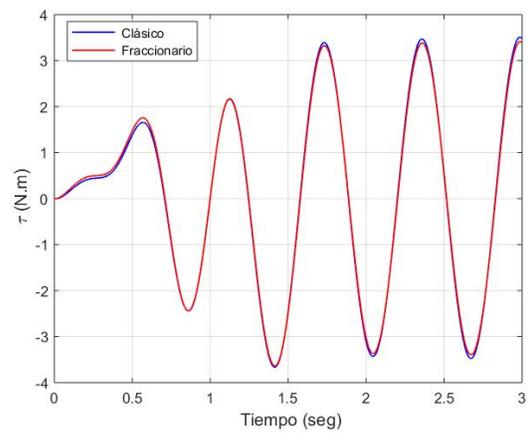


(b)

Figura 5.287: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

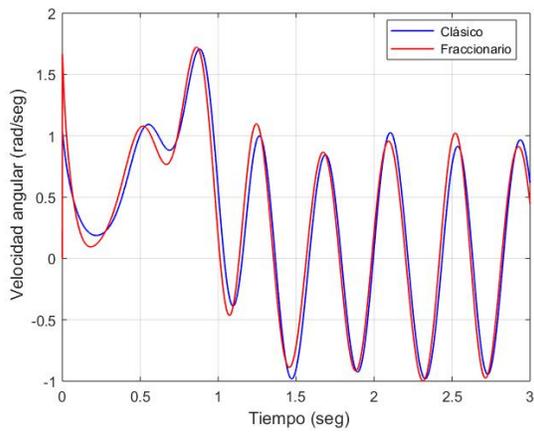


(a)

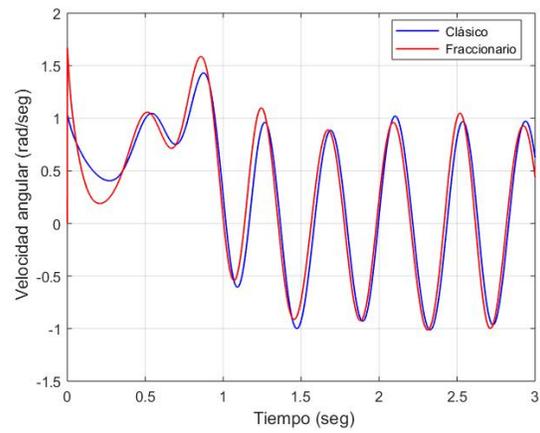


(b)

Figura 5.288: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

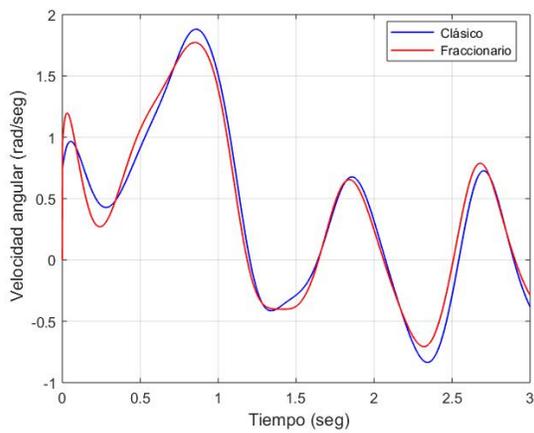


(a)

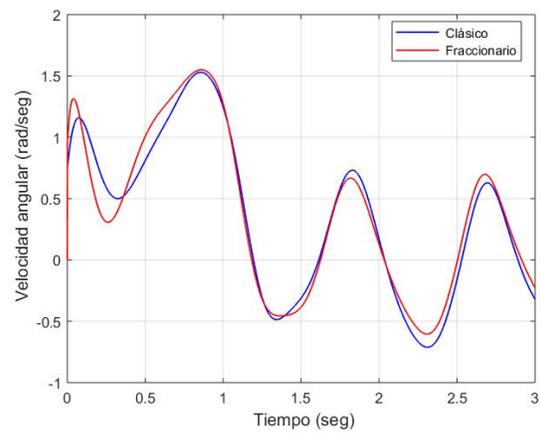


(b)

Figura 5.289: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.290: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

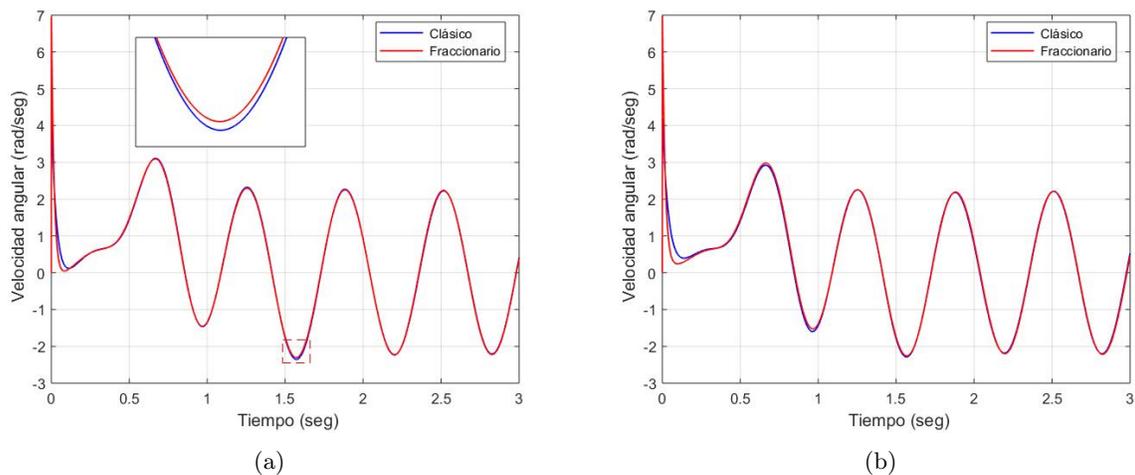


Figura 5.291: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

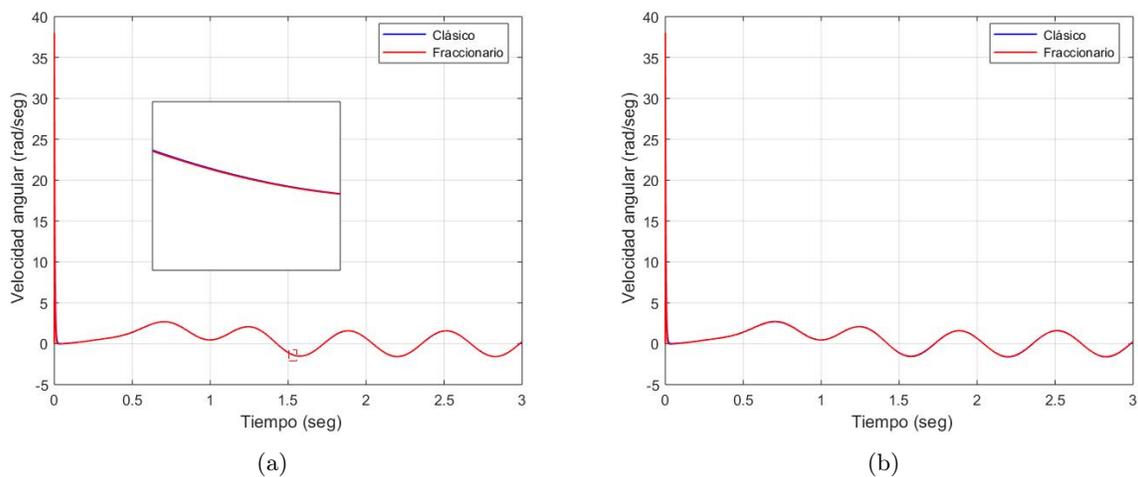
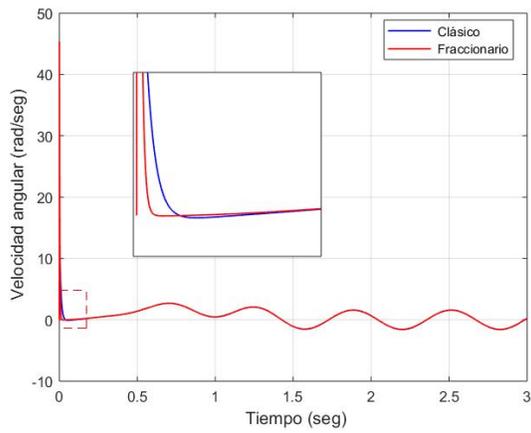
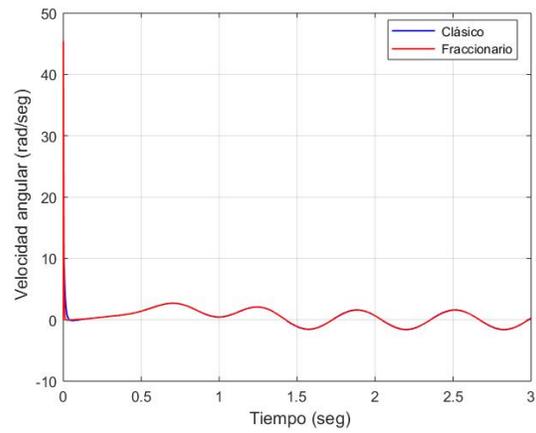


Figura 5.292: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

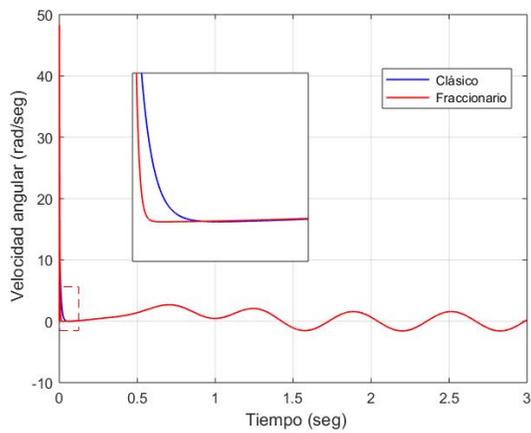


(a)

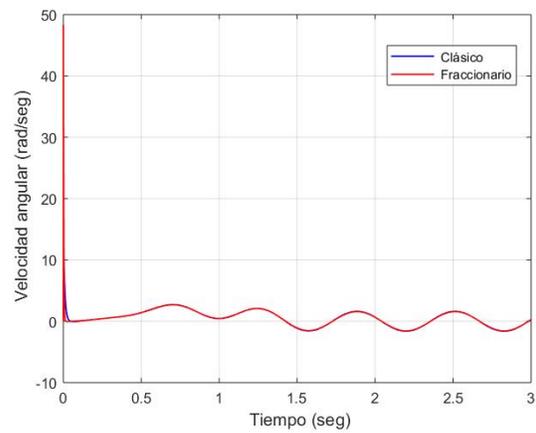


(b)

Figura 5.293: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

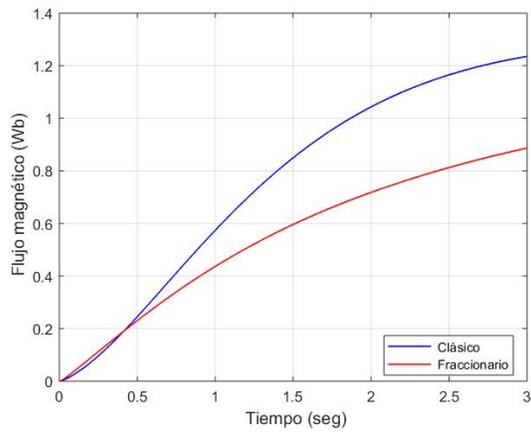


(a)

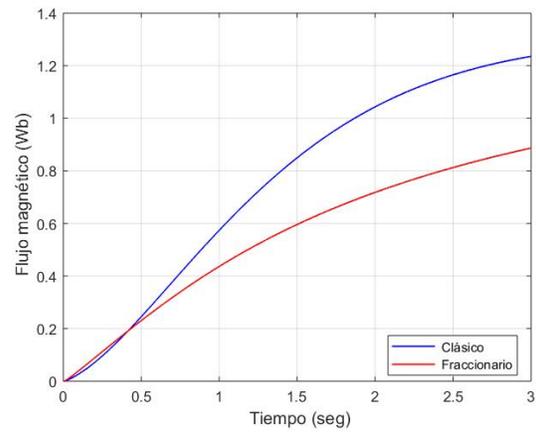


(b)

Figura 5.294: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

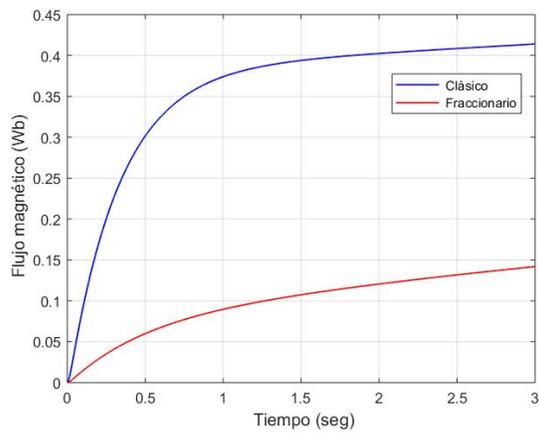


(a)

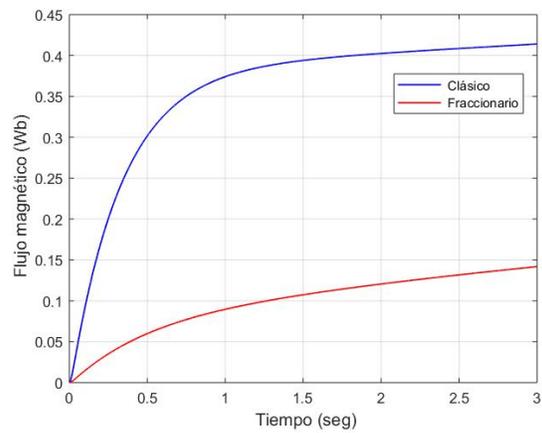


(b)

Figura 5.295: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

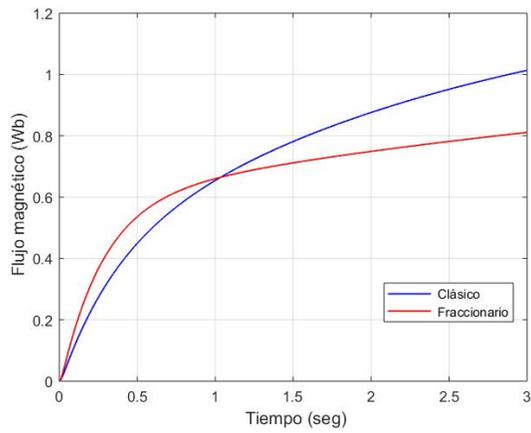


(a)

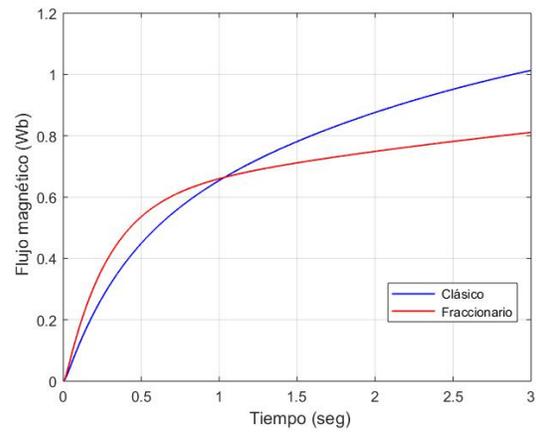


(b)

Figura 5.296: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

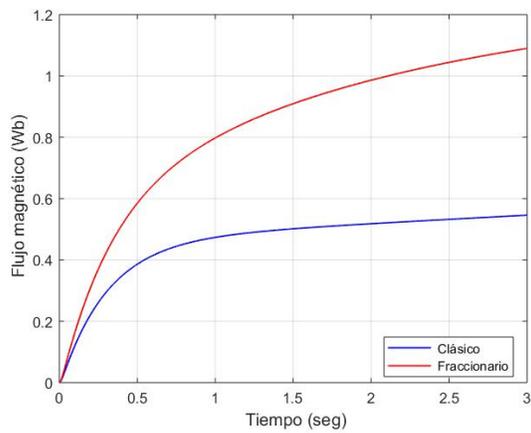


(a)

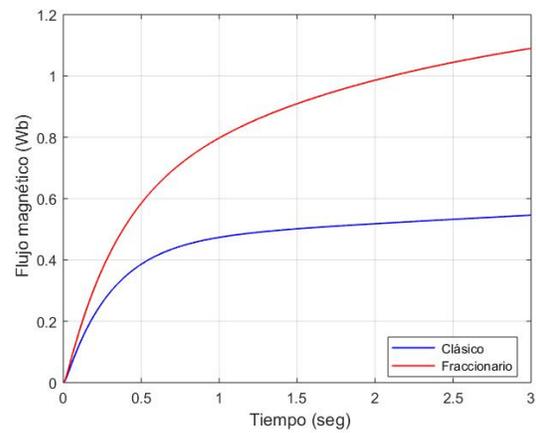


(b)

Figura 5.297: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

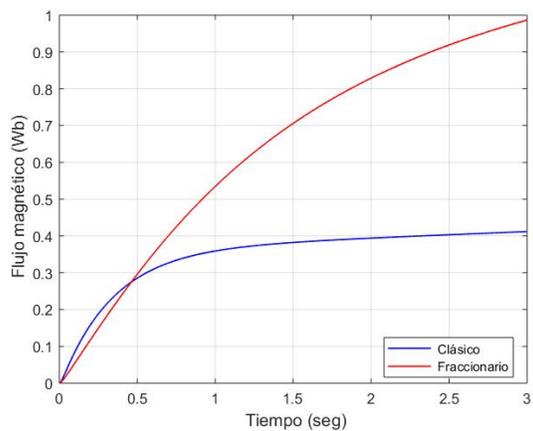


(a)

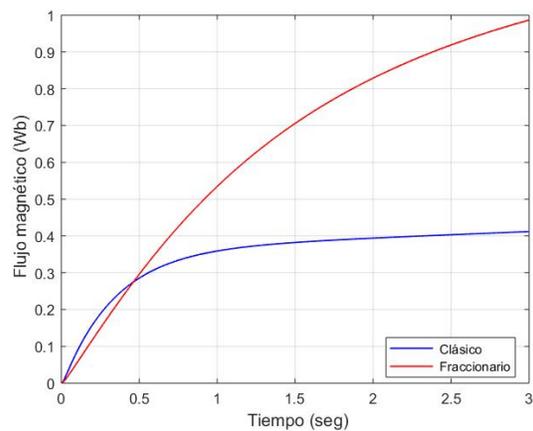


(b)

Figura 5.298: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

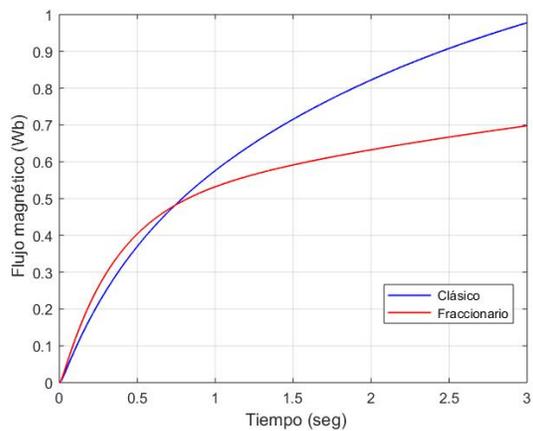


(a)

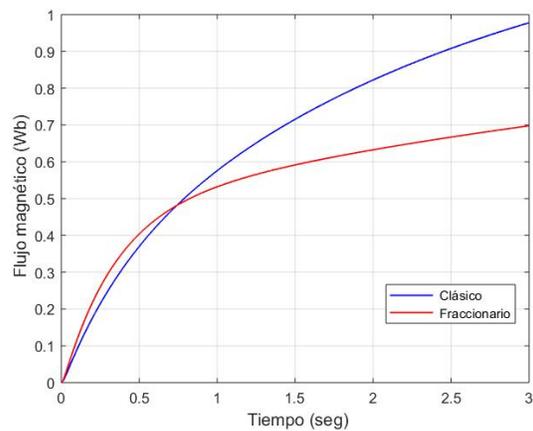


(b)

Figura 5.299: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.300: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

### Resultados para la trayectoria 3

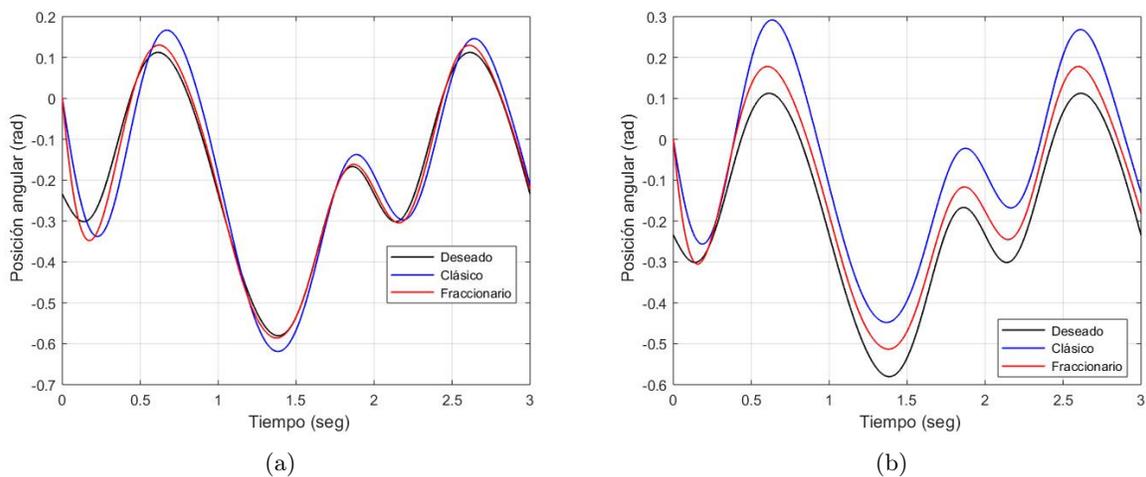


Figura 5.301: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

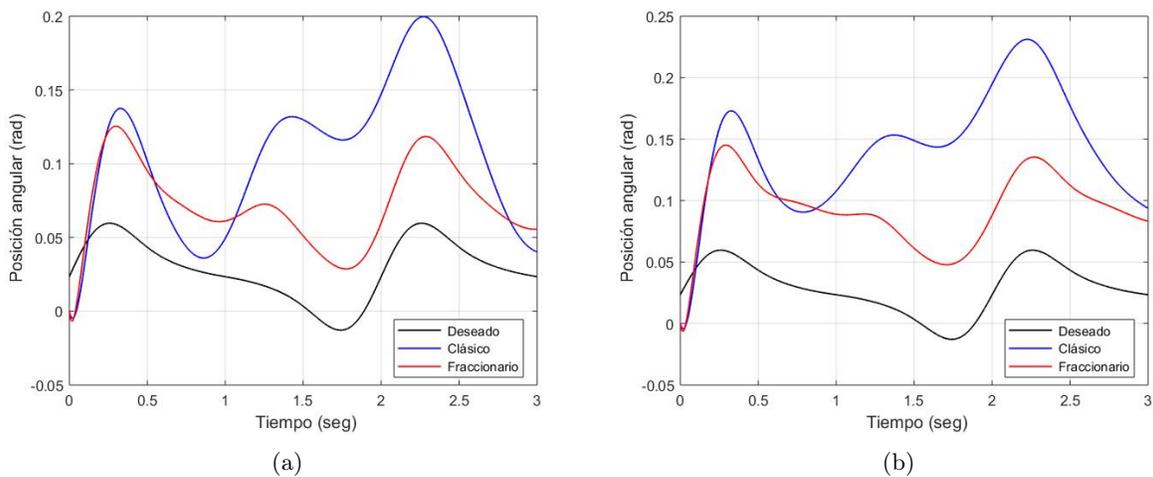


Figura 5.302: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

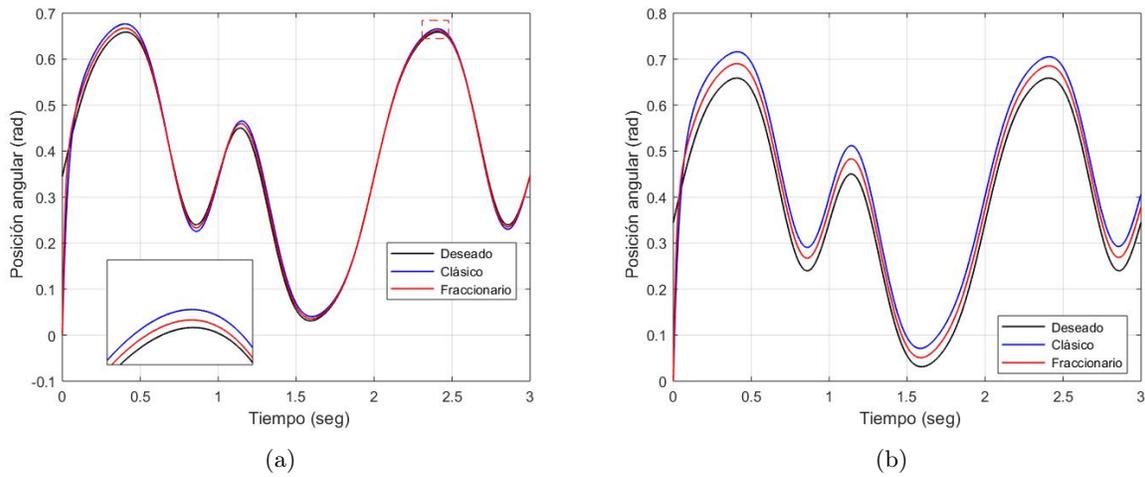


Figura 5.303: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

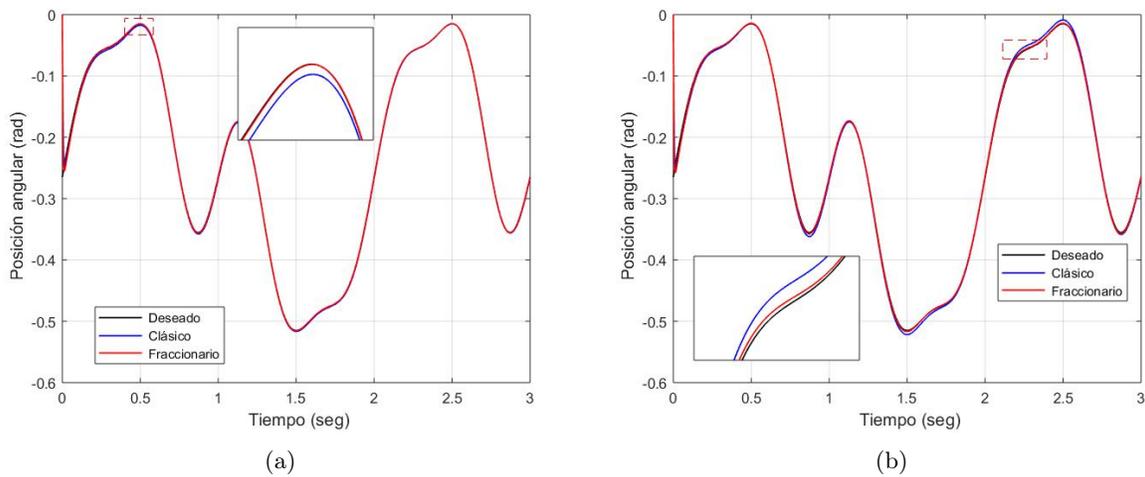


Figura 5.304: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

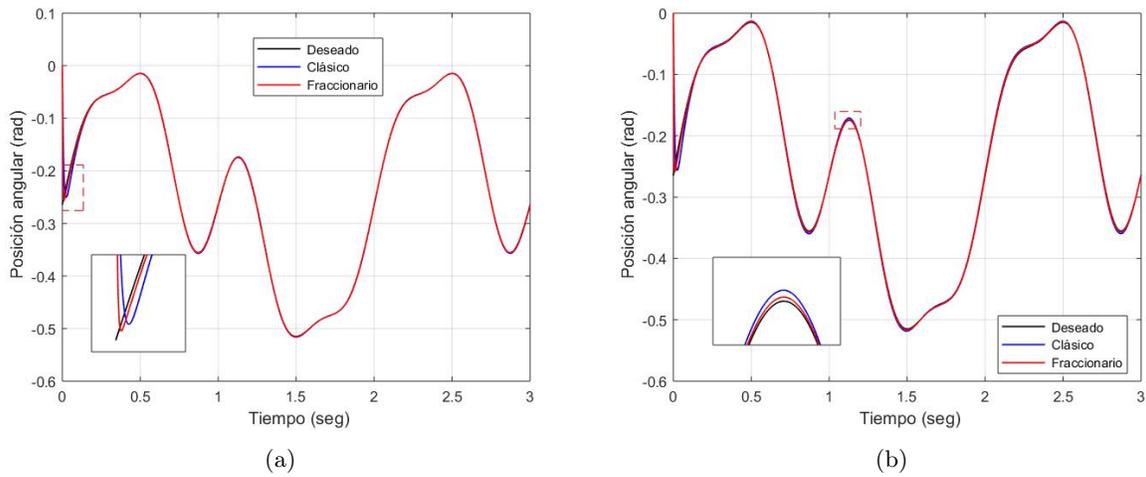


Figura 5.305: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

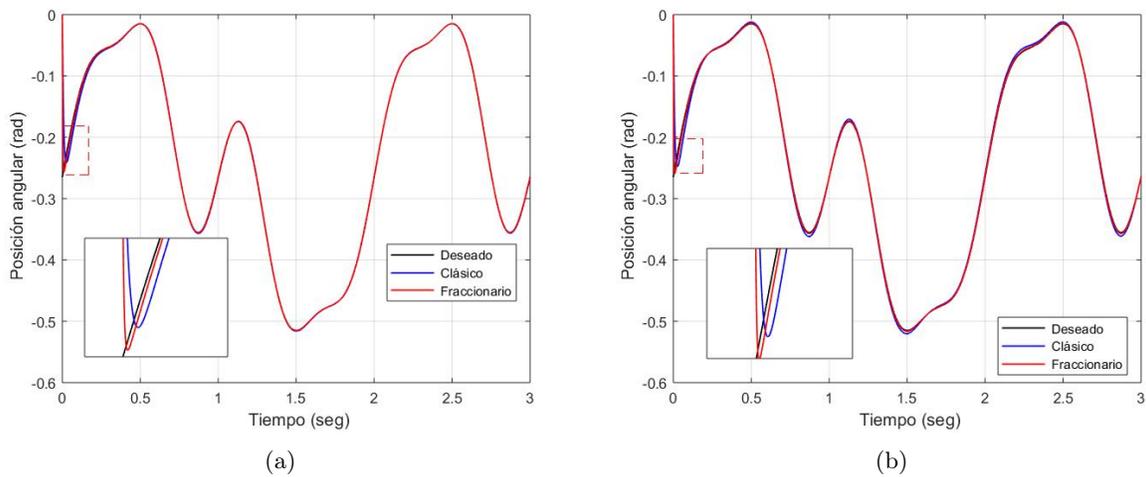


Figura 5.306: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

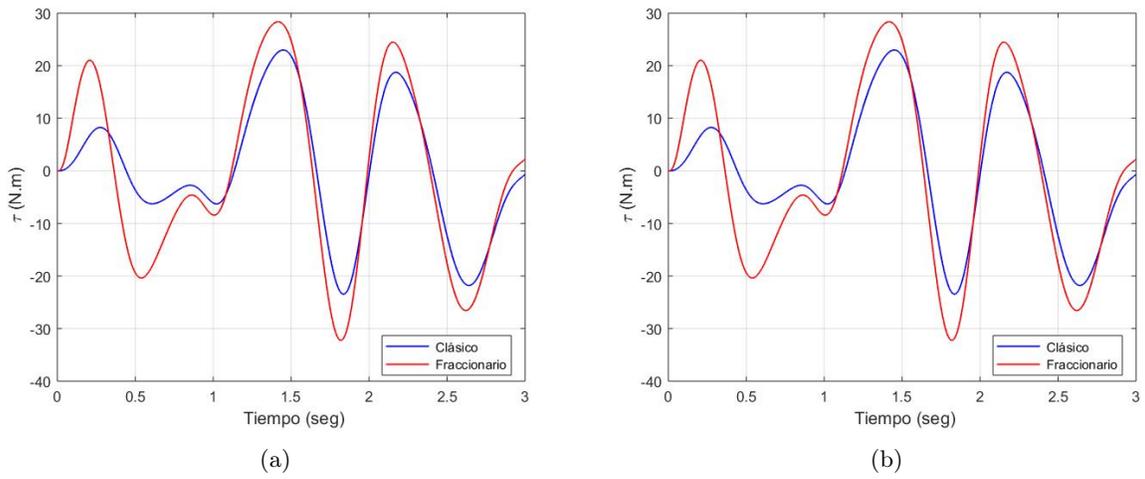


Figura 5.307: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

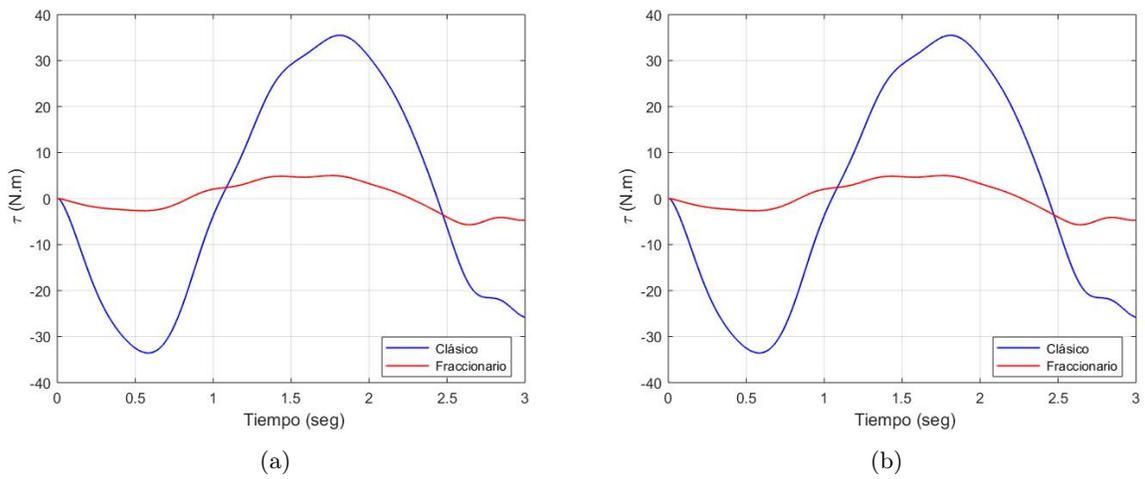
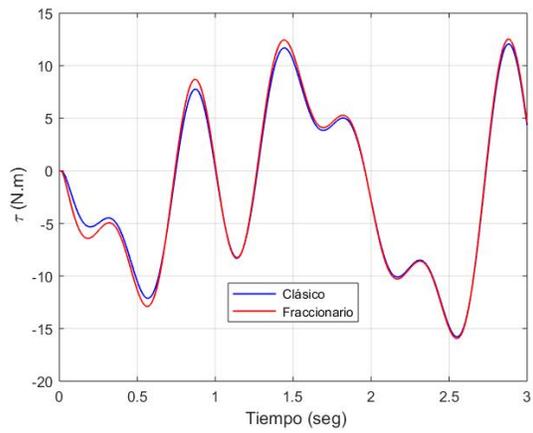
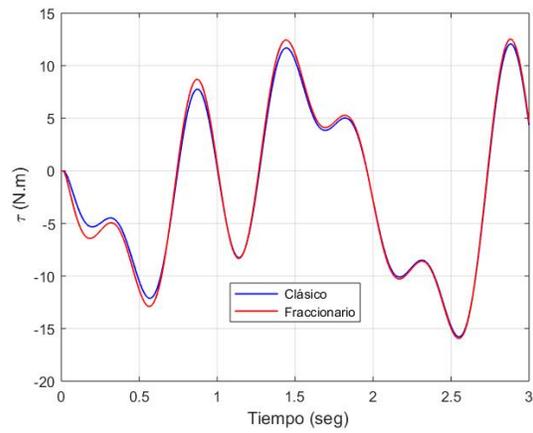


Figura 5.308: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

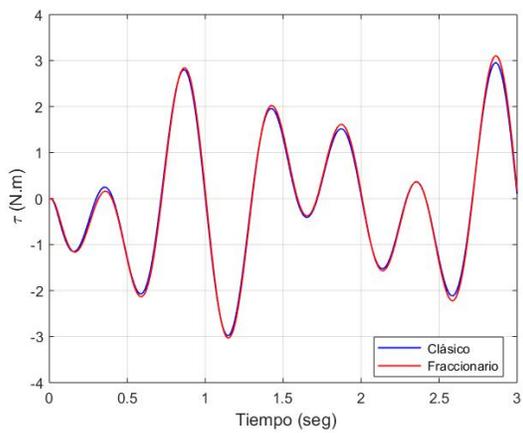


(a)

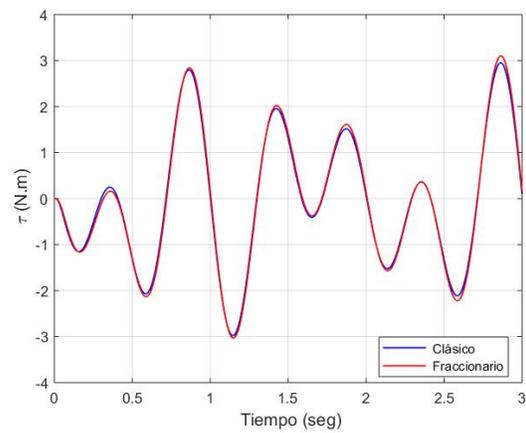


(b)

Figura 5.309: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

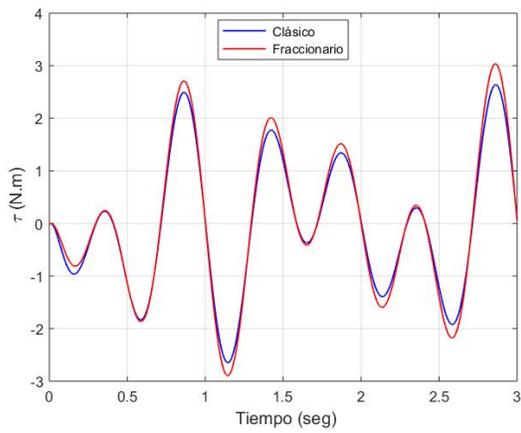


(a)

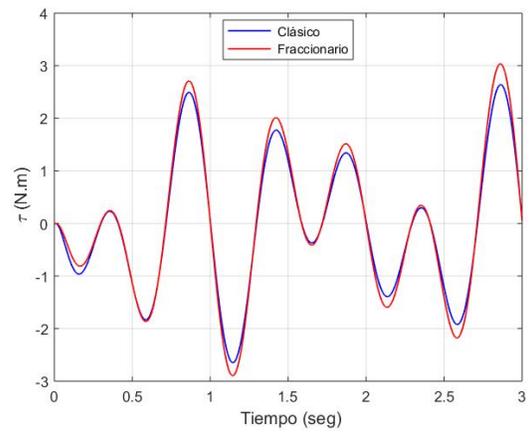


(b)

Figura 5.310: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

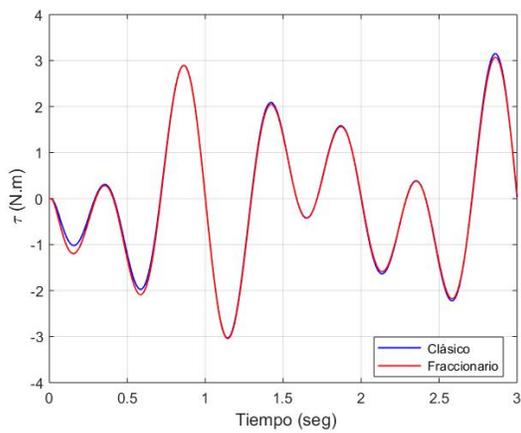


(a)

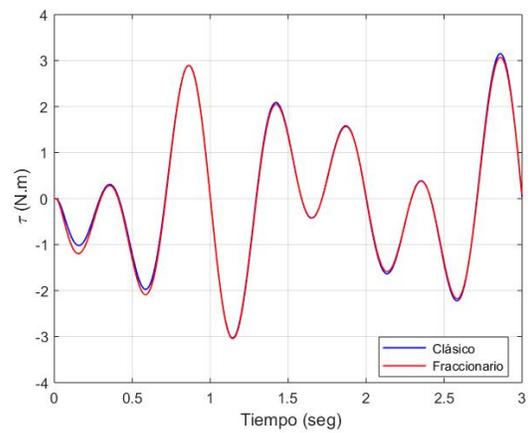


(b)

Figura 5.311: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.312: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

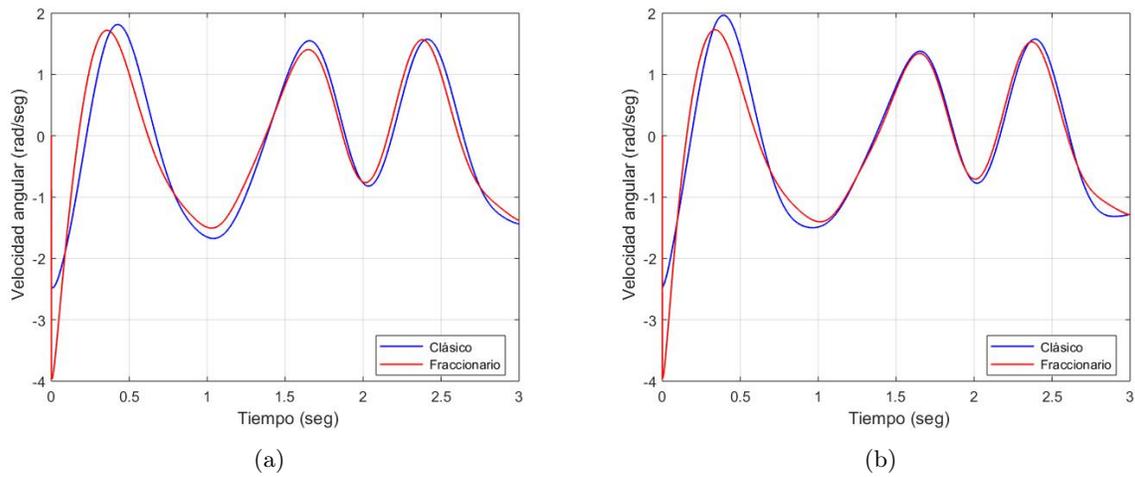


Figura 5.313: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

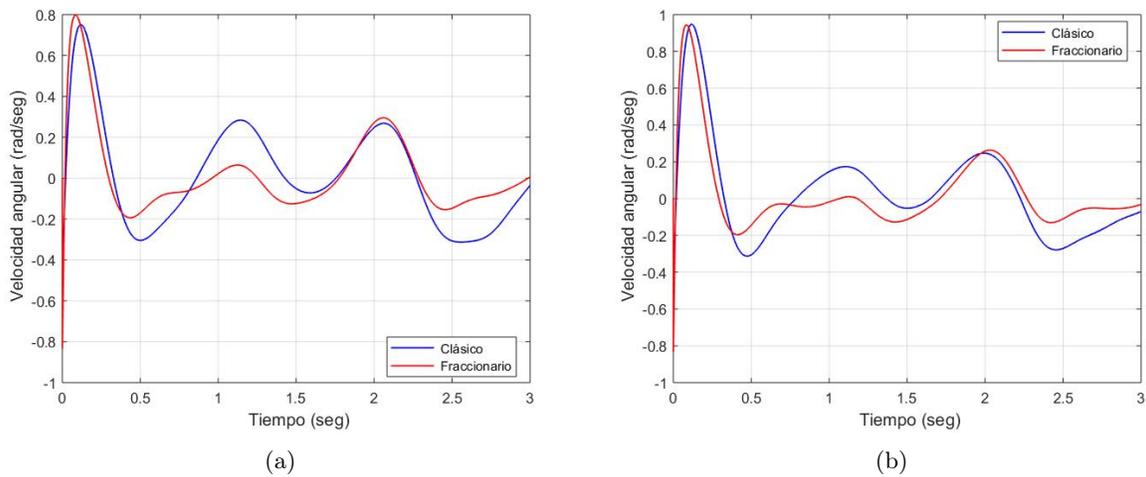


Figura 5.314: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

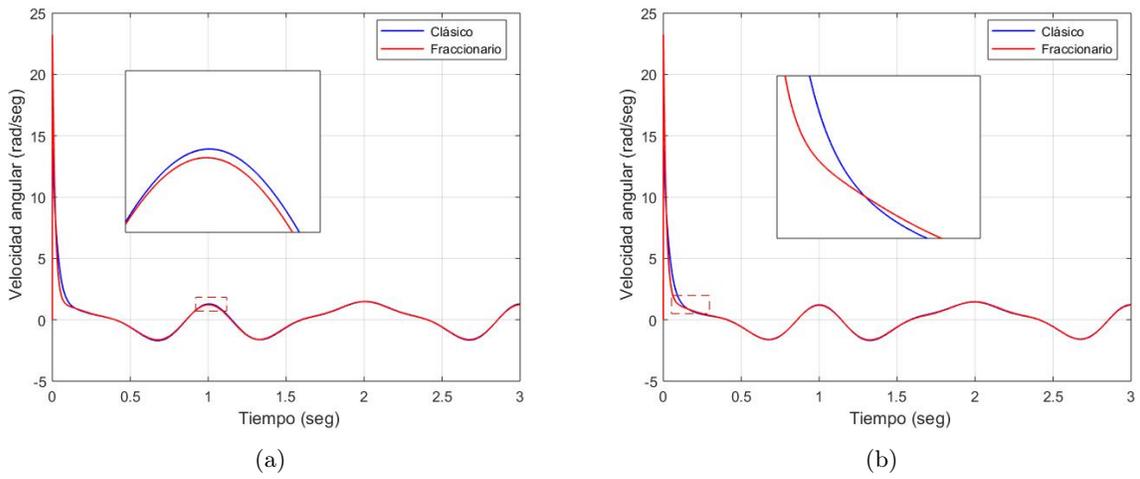


Figura 5.315: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

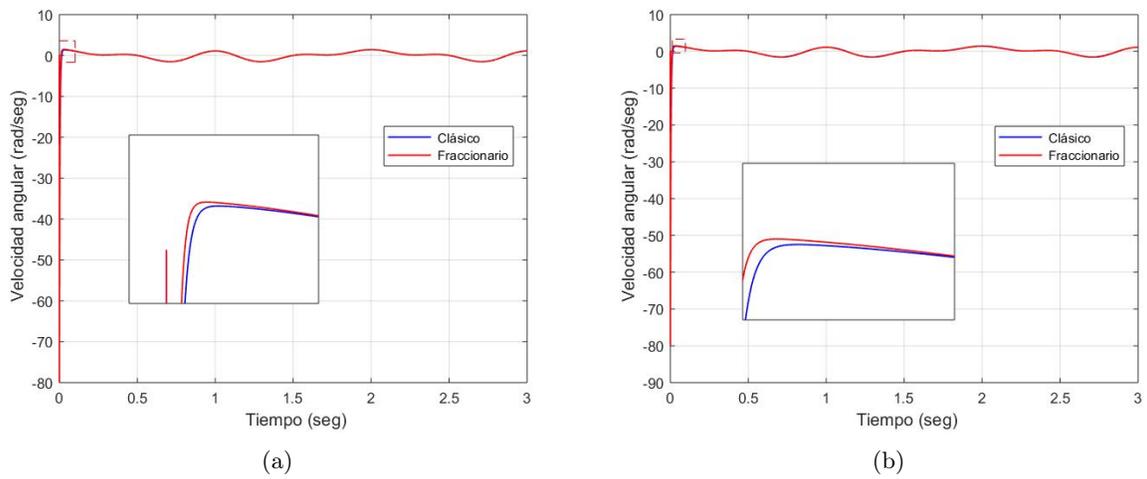


Figura 5.316: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

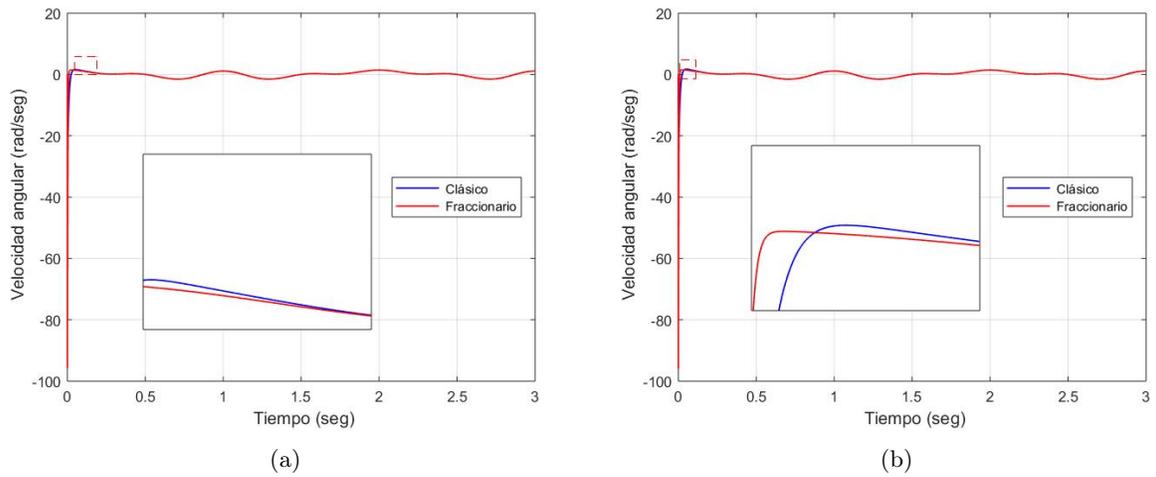


Figura 5.317: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

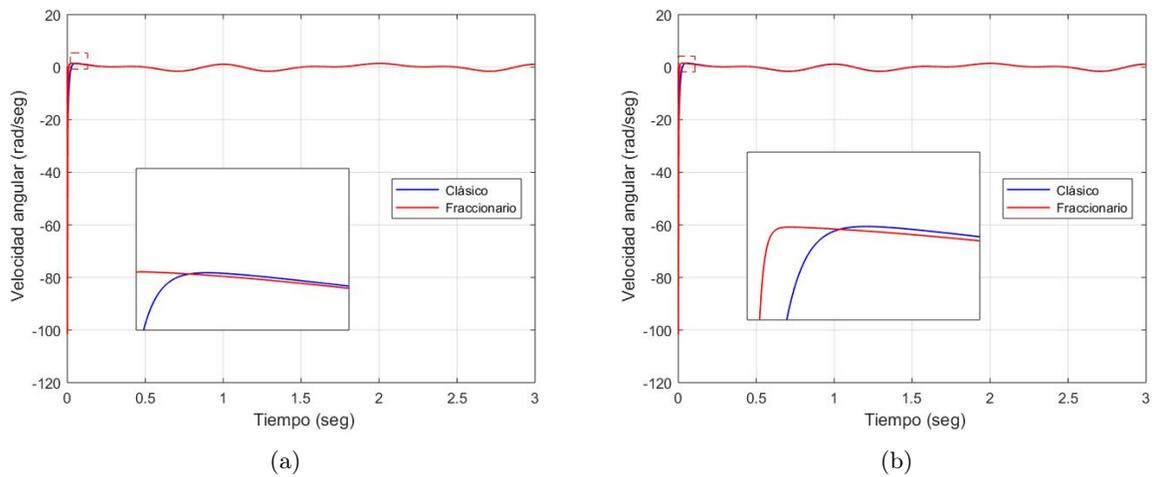
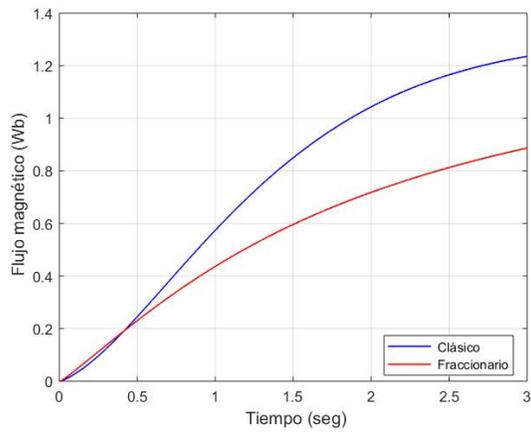
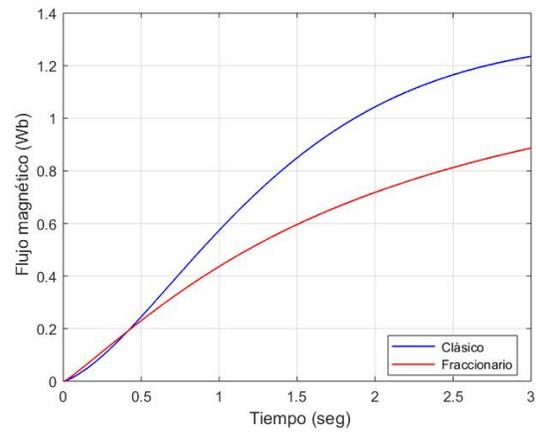


Figura 5.318: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

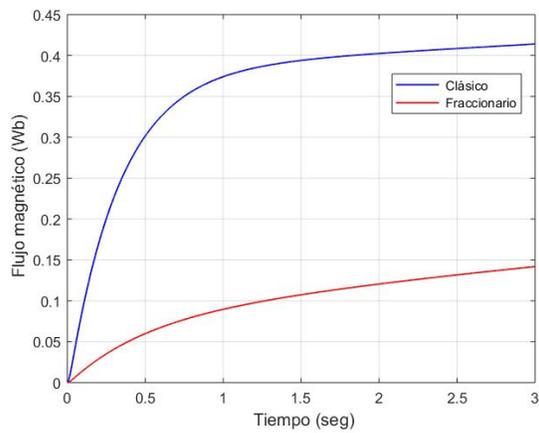


(a)

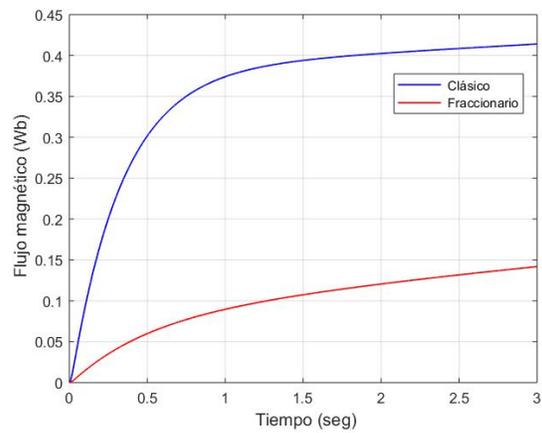


(b)

Figura 5.319: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

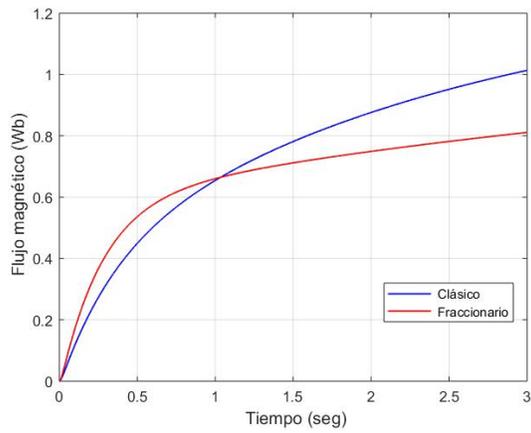


(a)

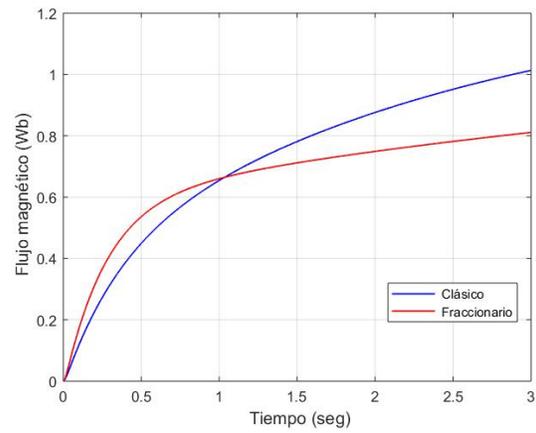


(b)

Figura 5.320: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

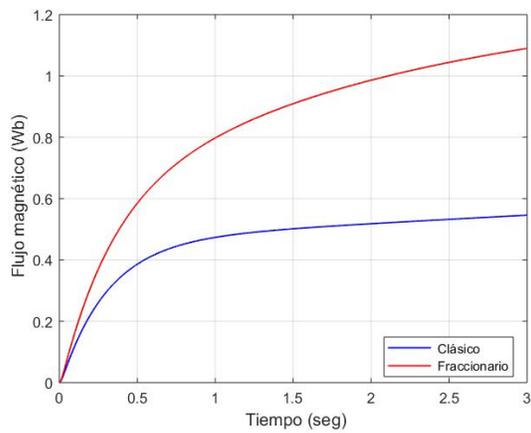


(a)

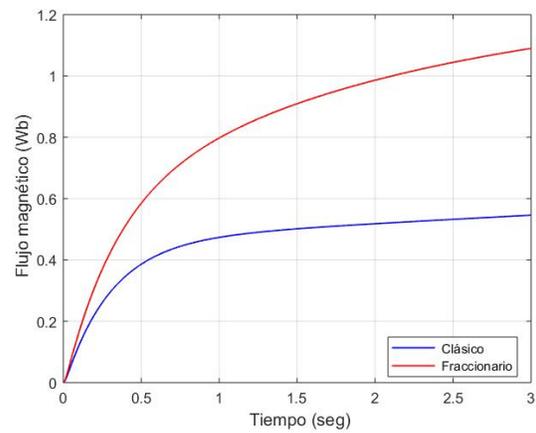


(b)

Figura 5.321: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

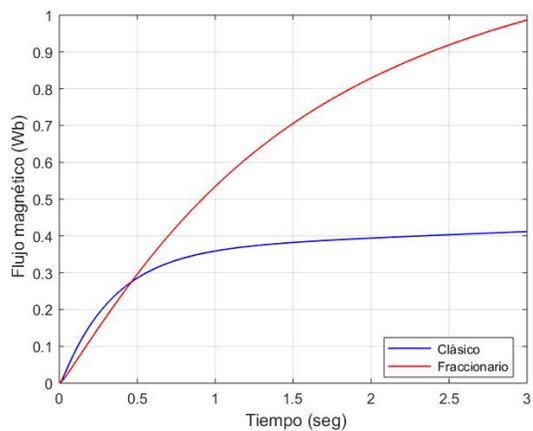


(a)

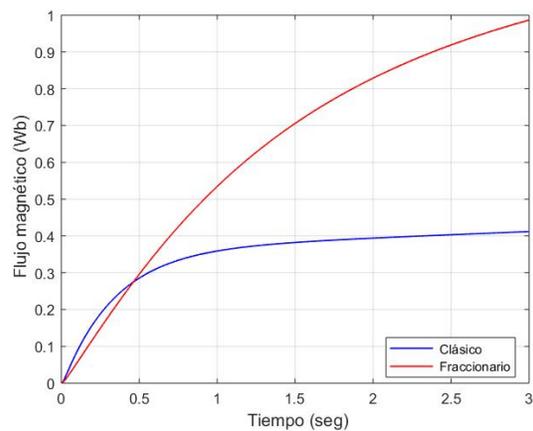


(b)

Figura 5.322: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

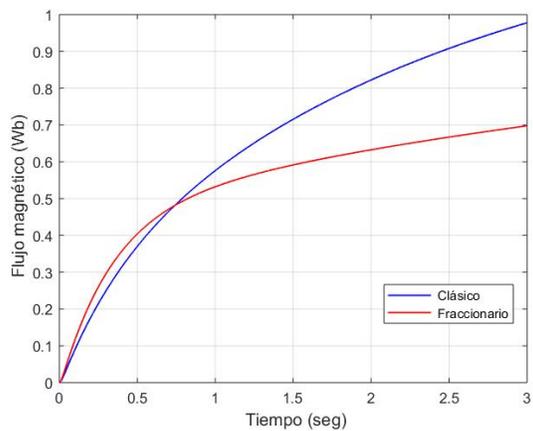


(a)

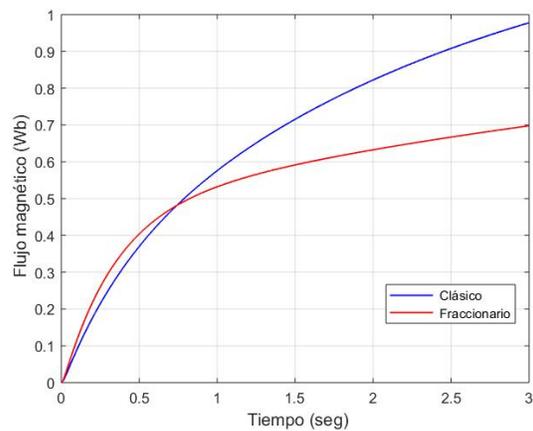


(b)

Figura 5.323: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.324: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

### 5.3.2. Red Neuronal

Un controlador red neuronal es aplicado al robot PUMA 560 para el control de sus articulaciones; para dicho controlador las trayectorias deseadas se obtienen a partir de la cinemática inversa del manipulador, cuyos parámetros de la matriz de orientación y posición se muestran en la Tabla 5.35. Los resultados de la sintonización para los controladores clásicos se muestran en las Tablas 5.36 y 5.37; las ganancias y los ordenes para los controladores fraccionarios se muestran en las Tablas 5.38 y 5.39. En las Tablas 5.40, 5.41 y 5.42 muestran la comparación del desempeño de los controladores para cada una de las articulaciones del manipulador con respecto a cada trayectoria. Los resultados se muestran de la Figura 5.325 a 5.402.

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde  $o_x = a_x = n_y = a_y = n_z = o_z = 0$  y  $n_x = o_y = a_z = 1$  para las tres trayectorias propuestas.

	Trayectoria 1	Trayectoria 2	Trayectoria 3
$\mathbf{P}_x$	$0.50\cos(t) + 0.2$	$0.40\cos(t)$	$0.20e^{0.2t}$
$\mathbf{P}_y$	$0.52\sin(t) + 0.1$	$0.42\sin(t)$	$0.22e^{0.2t}$
$\mathbf{P}_z$	$0.05t - 0.07$	$0.15$	$0.09t$

Tabla 5.35: Parámetros de las trayectorias deseadas para el controlador red neuronal clásico y fraccionario aplicado al robot PUMA 560.

$q_i$	PI			
	$\mathbf{K}_{pvd}$	$\mathbf{K}_{ivd}$	$\mathbf{K}_{pvq}$	$\mathbf{K}_{ivq}$
$q_1$	997.5389	265.5785	109.4499	28.3508
$q_2$	803.8663	92.4307	938.9916	933.3514
$q_3$	858.1842	804.4154	137.9026	741.6875
$q_4$	335.5045	147.3411	960.5476	541.7471
$q_5$	551.9030	649.1551	101.2272	572.1464
$q_6$	905.7292	874.5649	824.4113	237.9147

Tabla 5.36: Ganancias de los controladores PI clásicos.

$q_i$	Red neuronal		
	$K_d$	$\Lambda$	$\eta$
$q_1$	145.0071	30.2727	0.3969
$q_2$	130.5295	44.4760	
$q_3$	141.3043	67.8469	
$q_4$	67.7159	39.0138	
$q_5$	42.5934	34.2521	
$q_6$	32.4477	34.0169	

Tabla 5.37: Ganancias del controlador red neuronal de orden entero.

$q_i$	$PI^\zeta$					
	$K_{Pvd}$	$K_{Ivd}$	$\zeta$	$K_{Pvq}$	$K_{Ivq}$	$\zeta$
$q_1$	62.0203	320.9359	0.9487	635.0445	689.1190	0.8965
$q_2$	660.8565	140.3375	0.9632	882.2822	411.6171	0.8901
$q_3$	883.7585	717.8659	0.9135	380.1528	892.7095	0.9168
$q_4$	616.7167	122.5647	0.9036	621.6331	771.4292	0.9587
$q_5$	424.7218	462.5355	0.9752	335.7216	871.0443	0.9165
$q_6$	158.8805	710.6484	0.9852	673.5035	611.4579	0.9201

Tabla 5.38: Ganancias y ordenes de los controladores  $PI^\zeta$  de orden  $\zeta$ .

$q_i$	Red neuronal				
	$K_d$	$\Lambda$	$\eta$	$\vartheta$	$\psi$
$q_1$	192.9226	18.7206	0.1192	0.9587	0.9492
$q_2$	198.8418	78.3024		0.9784	
$q_3$	188.0789	95.1818		0.9163	
$q_4$	99.1330	1.2361		0.9038	
$q_5$	80.7701	79.0668		0.8967	
$q_6$	71.1434	50.6072		0.9846	

Tabla 5.39: Ganancias y ordenes del controlador red neuronal fraccionario.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 1			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0065	0.0056	0.0096	0.0091
$q_2$	0.0321	0.0268	0.0323	0.0268
$q_3$	0.1132	0.1052	0.1135	0.1054
$q_4$	0.1924	0.1726	0.1937	0.1743
$q_5$	0.0762	0.0624	0.0770	0.0628
$q_6$	0.2620	0.1891	0.2656	0.1904
Efecto final	0.0438	0.0385	0.0442	0.0389

Tabla 5.40: Comparación del desempeño del controlador red neuronal de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 1.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 2			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0279	0.0229	0.0285	0.0240
$q_2$	0.1123	0.0944	0.1126	0.0946
$q_3$	0.1487	0.1384	0.1491	0.1388
$q_4$	0.1924	0.1726	0.1937	0.1745
$q_5$	0.0749	0.0614	0.0756	0.0618
$q_6$	0.2564	0.1855	0.2600	0.1868
Efecto final	0.0468	0.0402	0.0470	0.0405

Tabla 5.41: Comparación del desempeño del controlador red neuronal de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 2.

$q_i$	RMSE			
	Trayectoria 3			
	Sin perturbaciones		Con perturbaciones	
	Clásico	Fraccionario	Clásico	Fraccionario
$q_1$	0.0238	0.0234	0.0237	0.0234
$q_2$	0.0974	0.0809	0.0977	0.0811
$q_3$	0.1637	0.1523	0.1642	0.1527
$q_4$	0.0859	0.0772	0.0865	0.0777
$q_5$	0.0931	0.0764	0.0941	0.0768
$q_6$	0.1060	0.0767	0.1074	0.0772
Efecto final	0.0486	0.0429	0.0487	0.0429

Tabla 5.42: Comparación del desempeño del controlador red neuronal de orden entero vs fraccionario para la trayectoria 3.

Resultados para la trayectoria 1

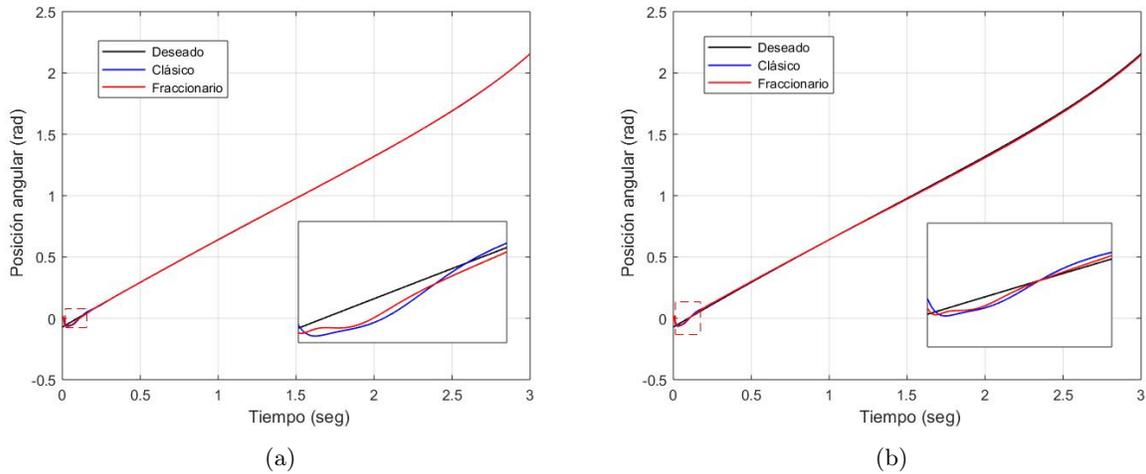


Figura 5.325: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

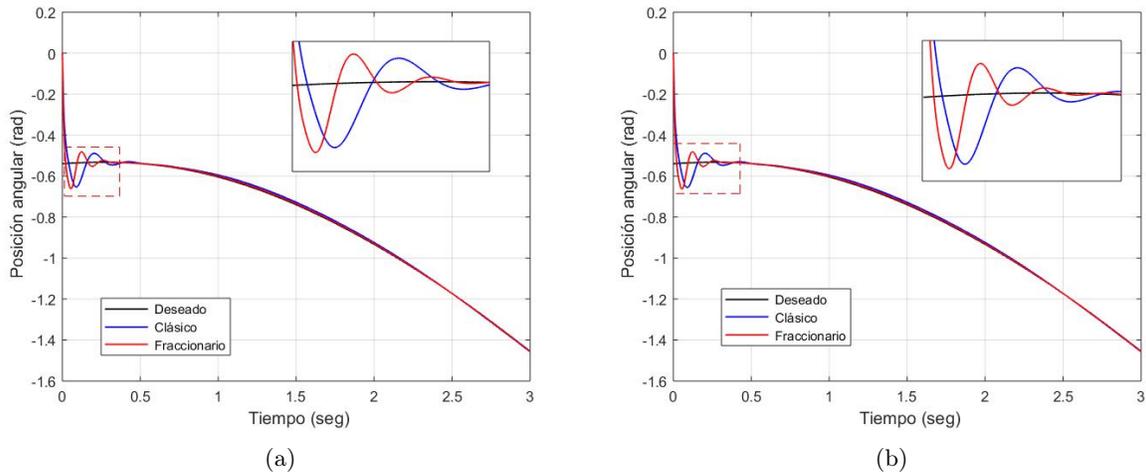


Figura 5.326: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

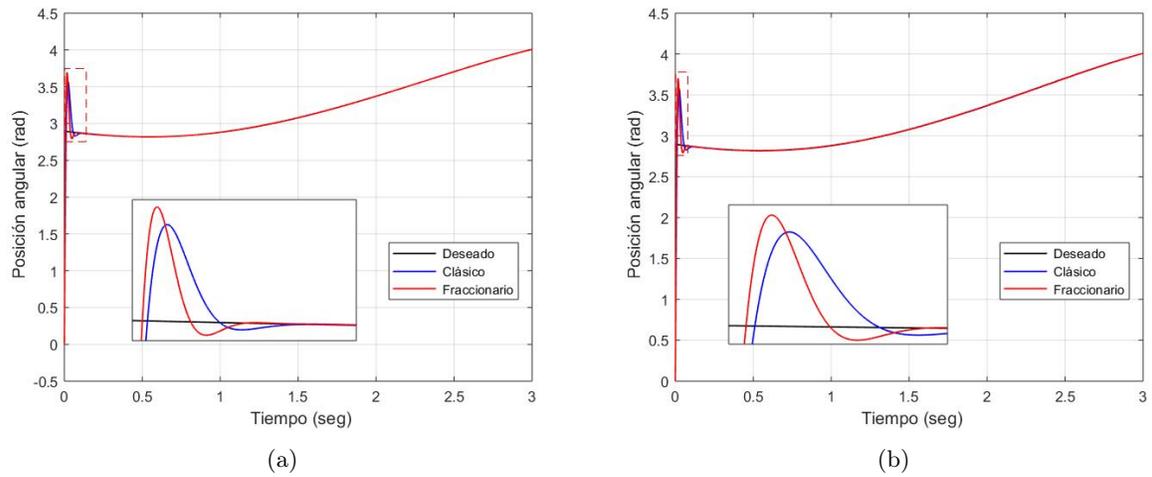


Figura 5.327: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

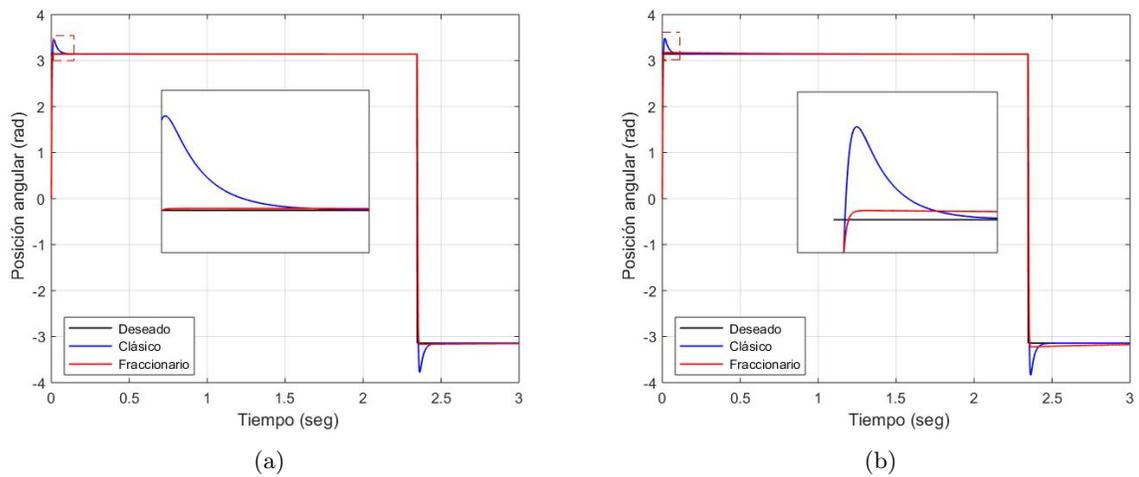


Figura 5.328: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

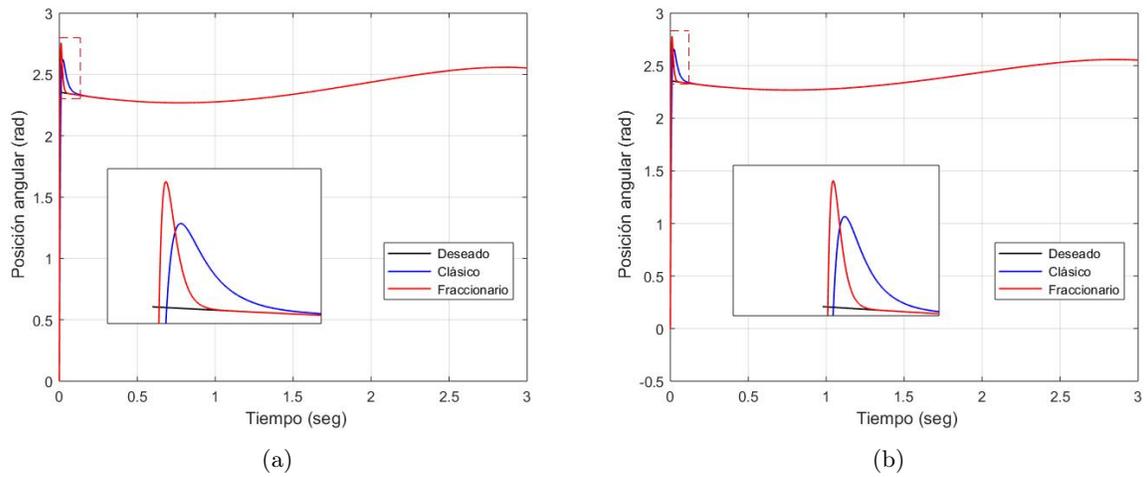


Figura 5.329: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

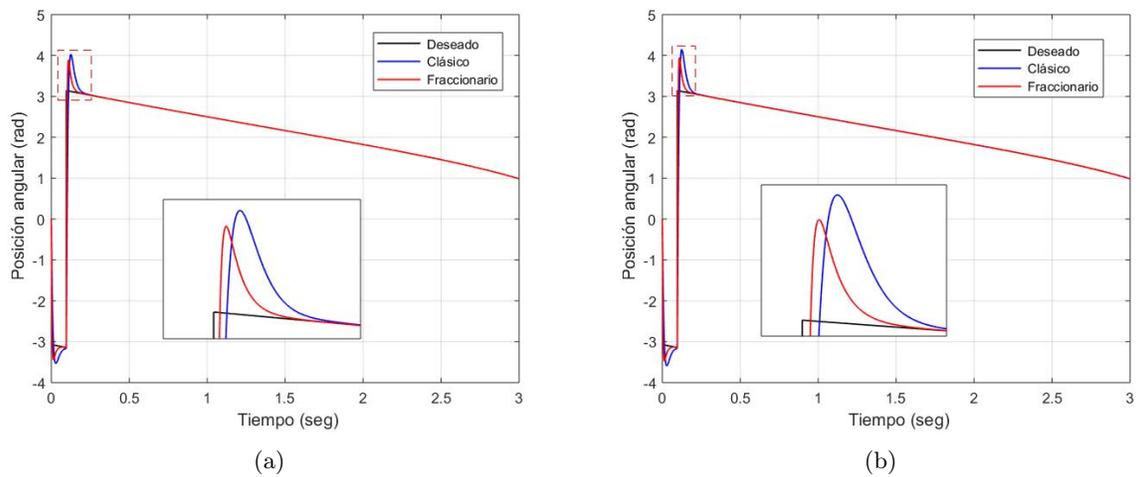


Figura 5.330: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

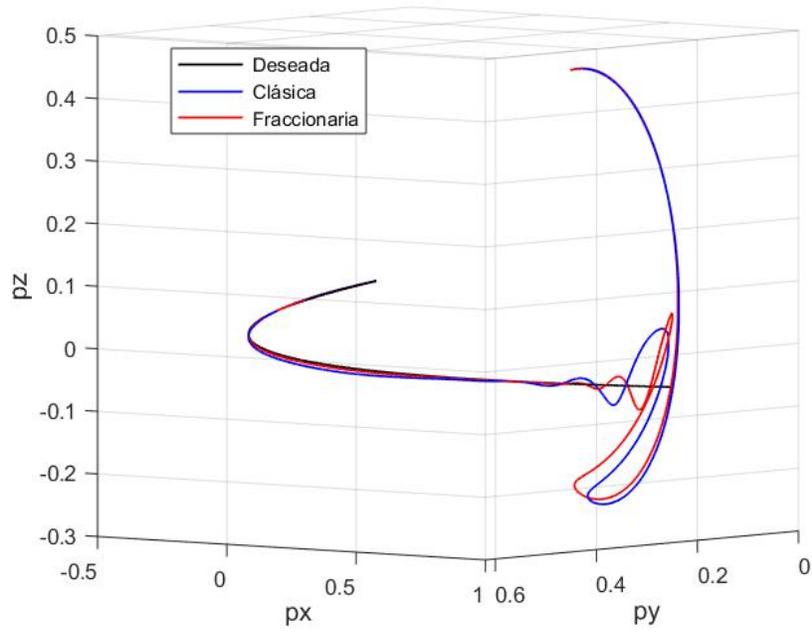


Figura 5.331: Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación

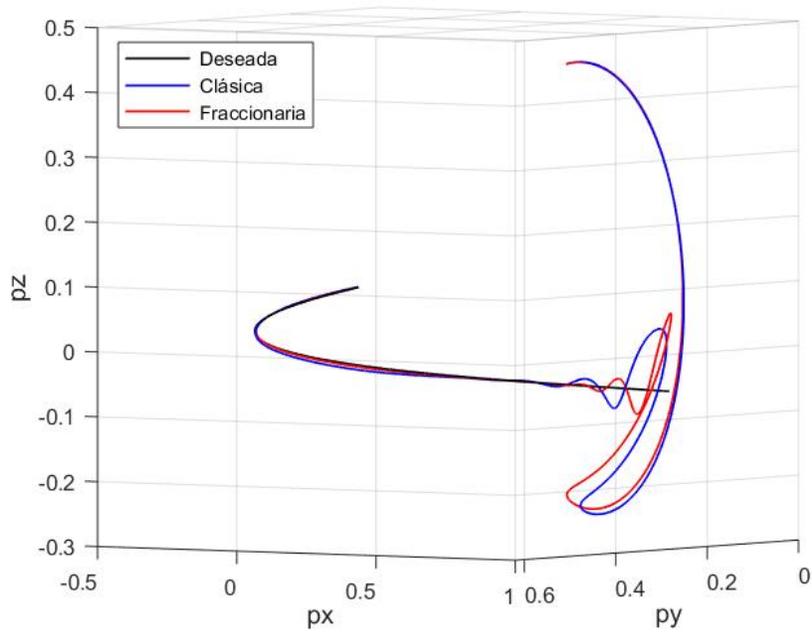


Figura 5.332: Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación

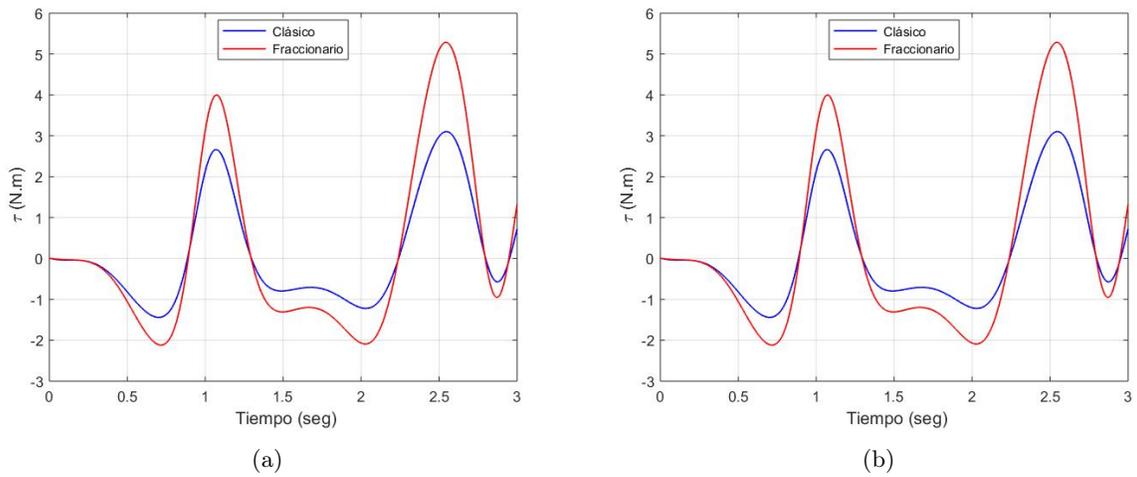


Figura 5.333: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

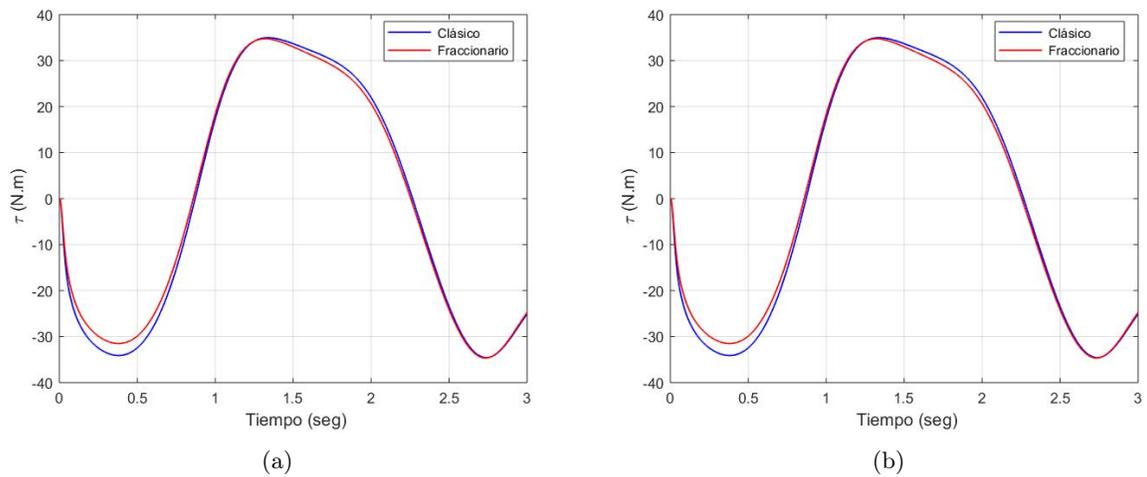


Figura 5.334: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

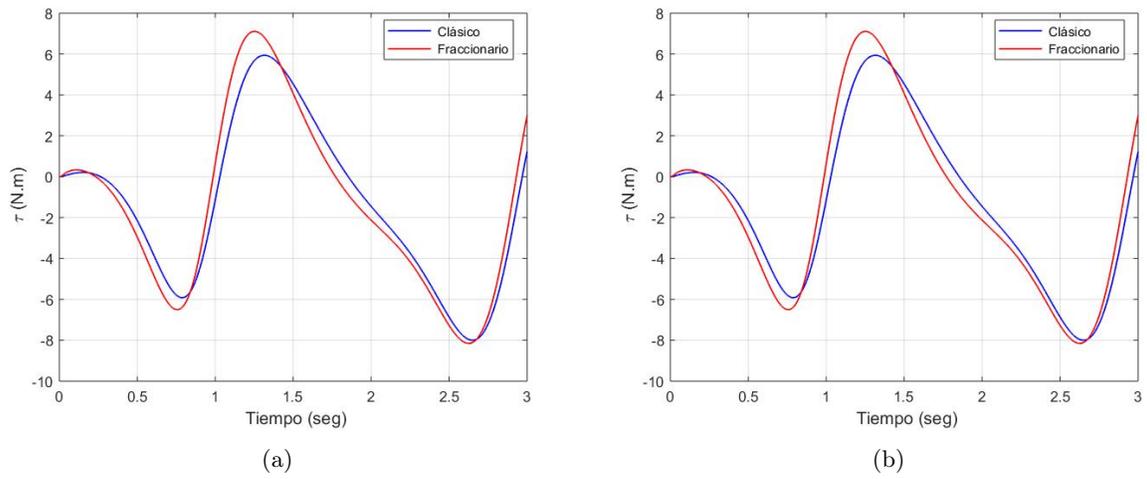


Figura 5.335: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

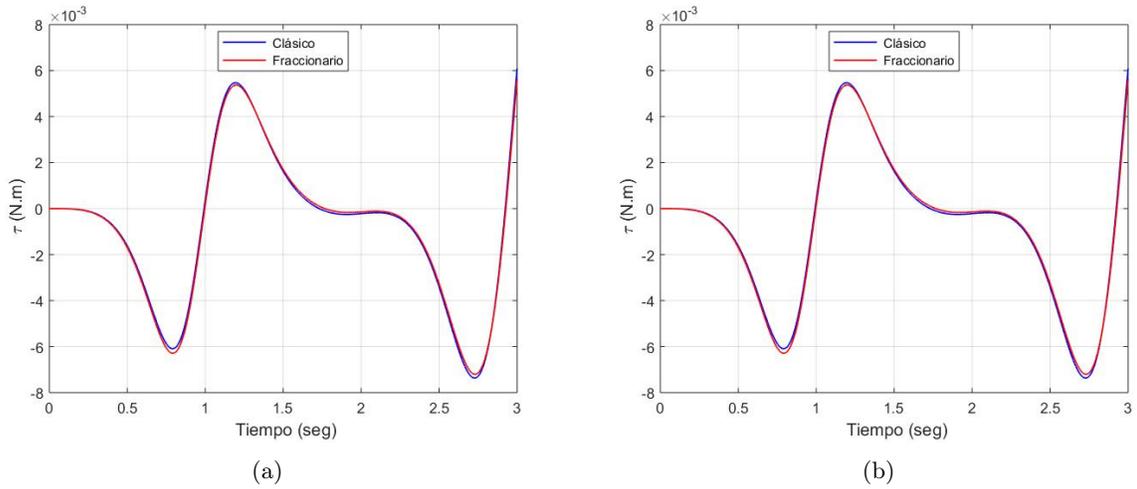


Figura 5.336: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

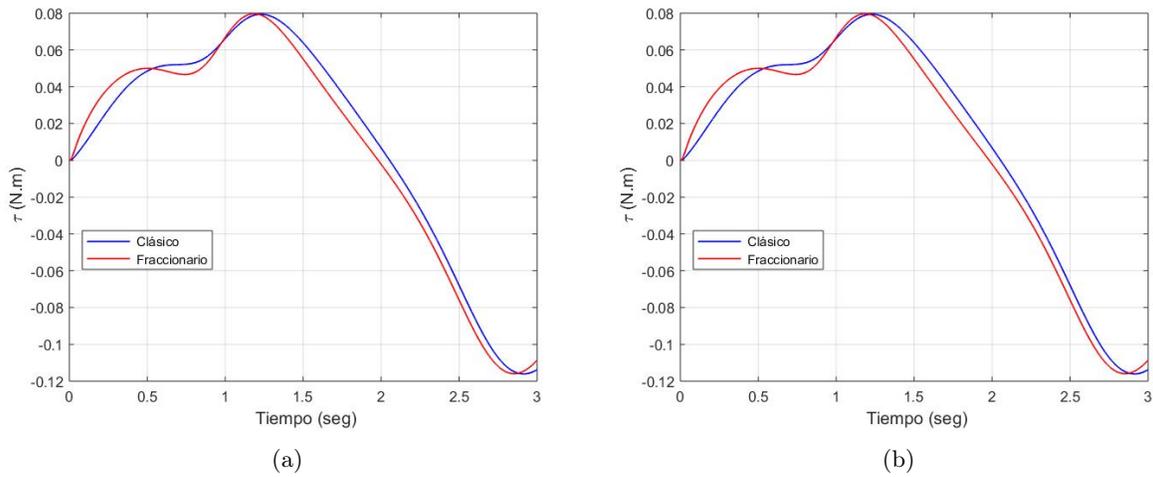


Figura 5.337: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

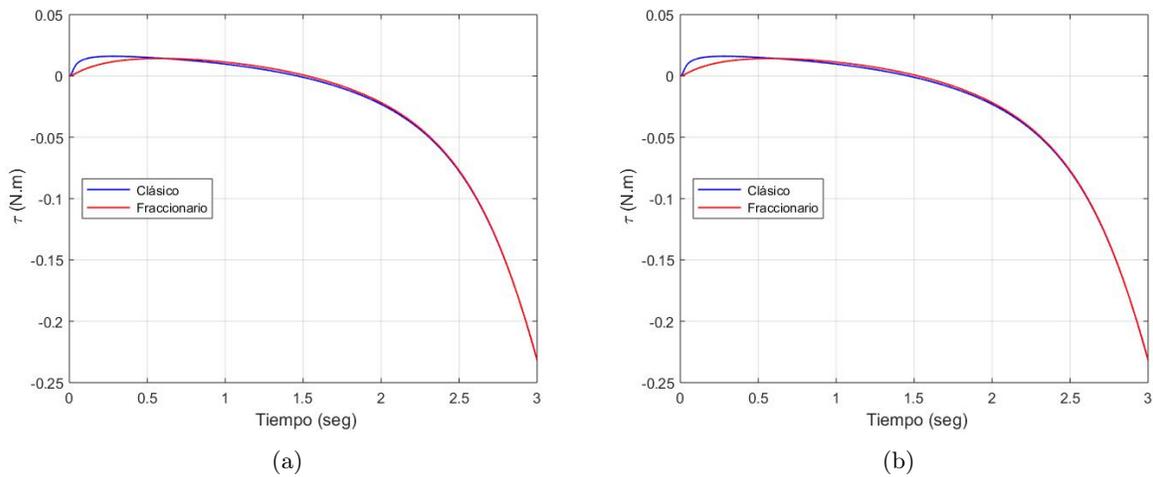


Figura 5.338: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

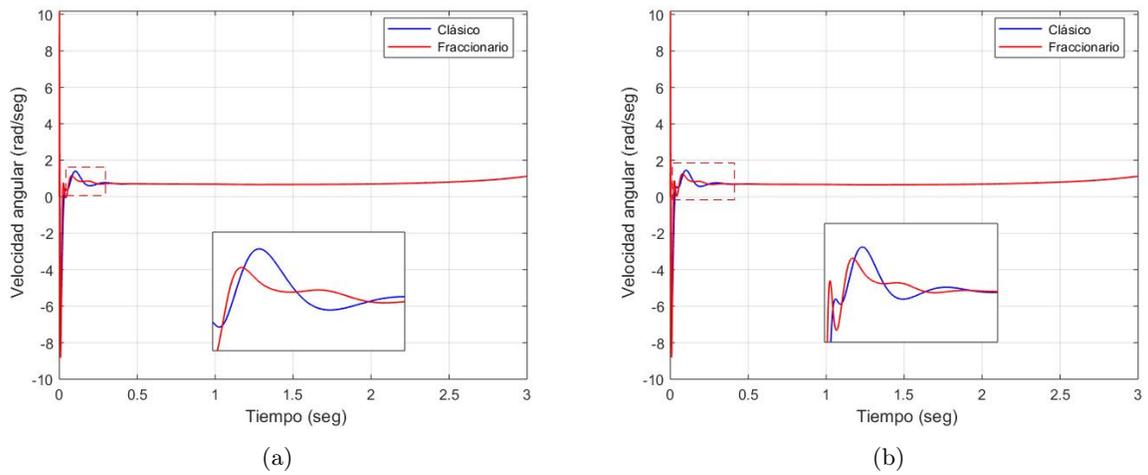


Figura 5.339: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

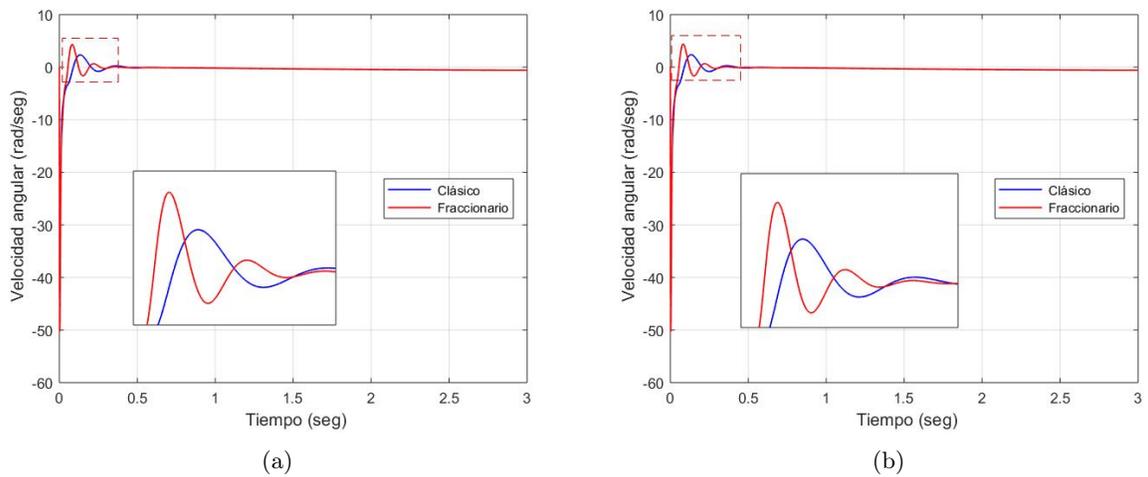


Figura 5.340: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

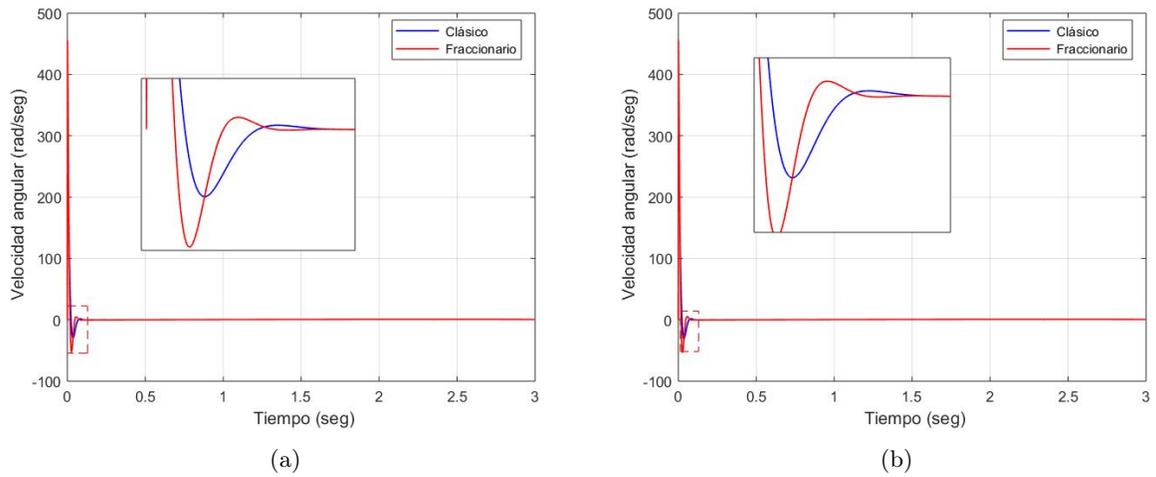


Figura 5.341: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

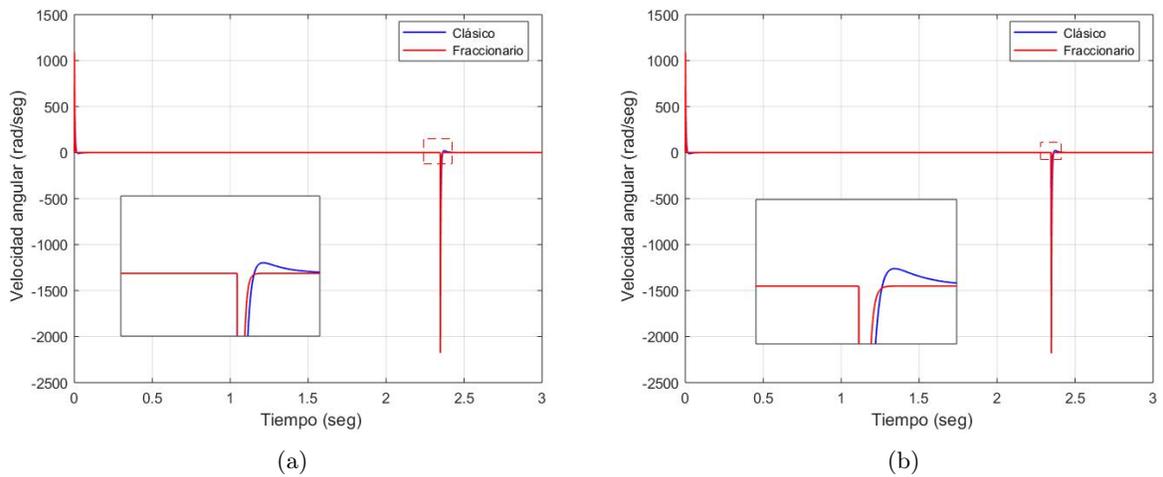


Figura 5.342: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

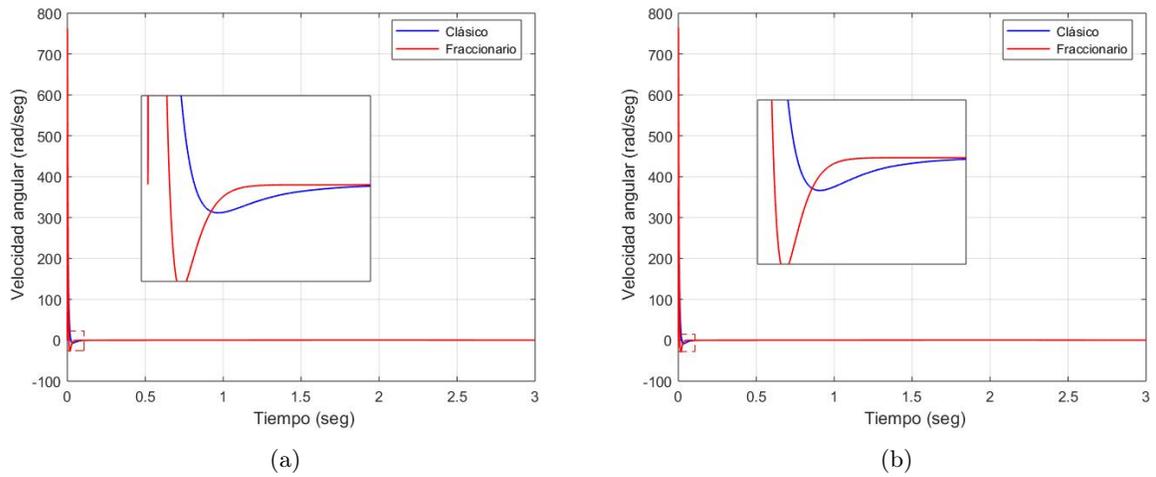


Figura 5.343: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

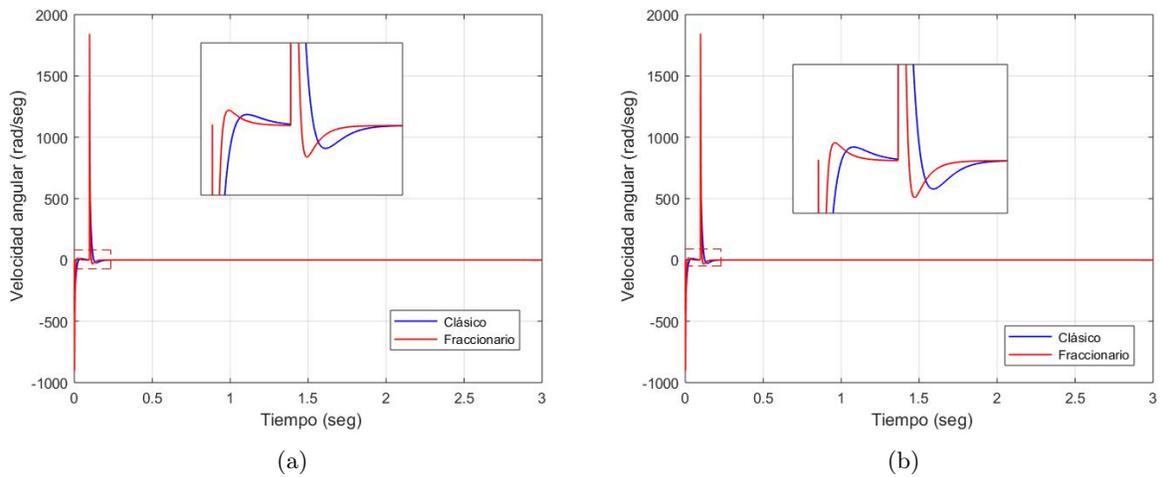
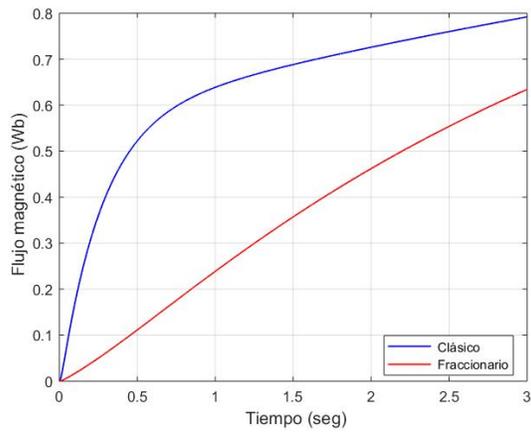
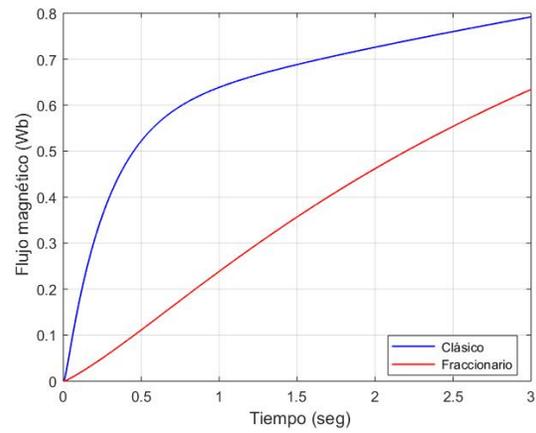


Figura 5.344: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

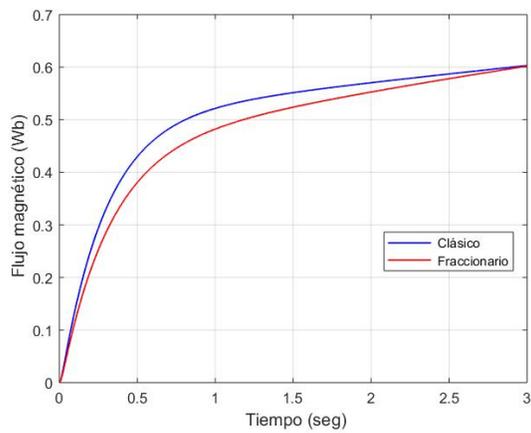


(a)

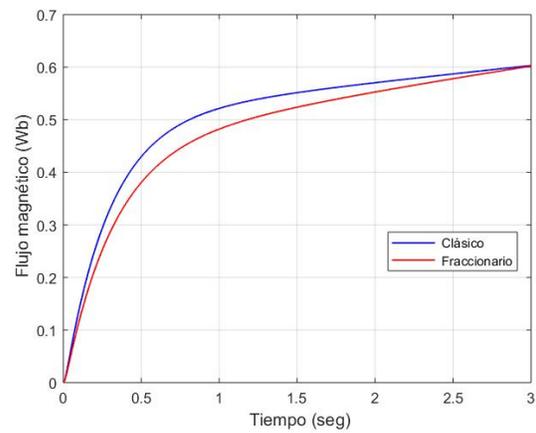


(b)

Figura 5.345: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

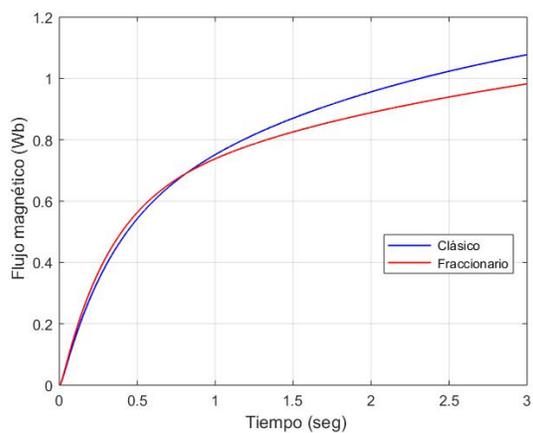


(a)

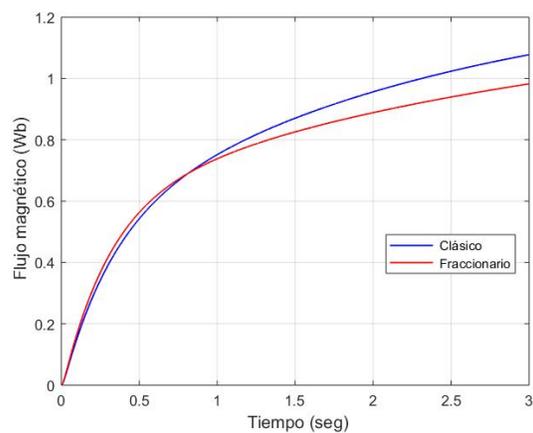


(b)

Figura 5.346: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

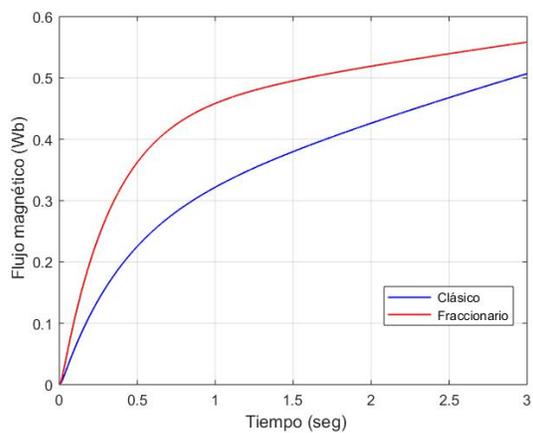


(a)

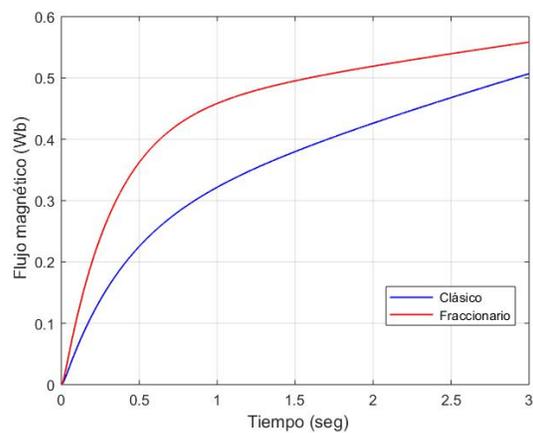


(b)

Figura 5.347: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

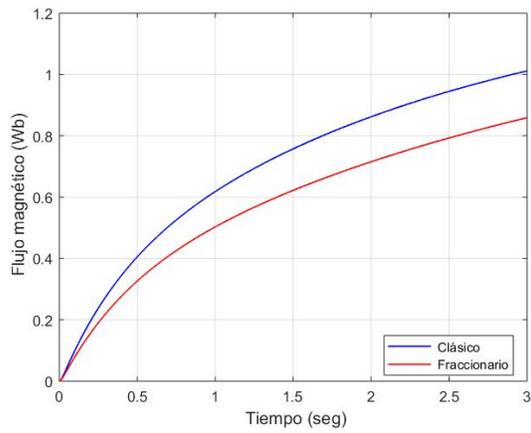


(a)

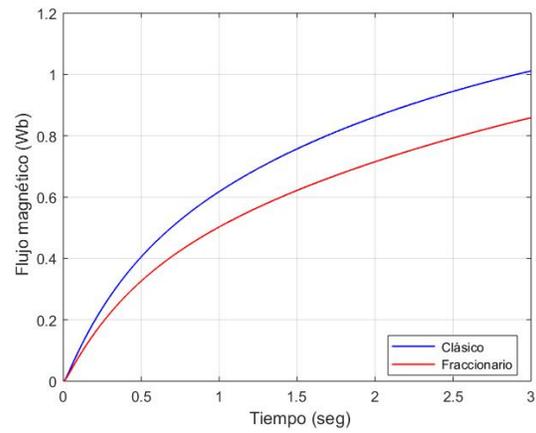


(b)

Figura 5.348: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

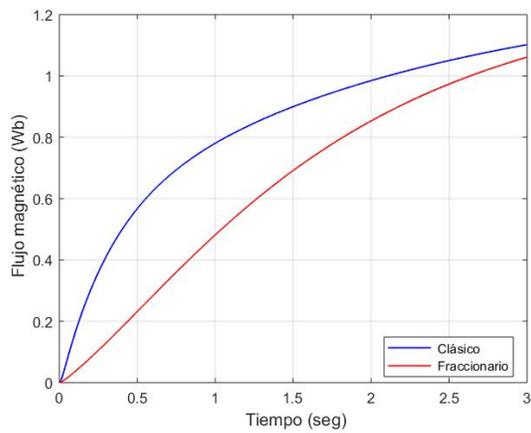


(a)

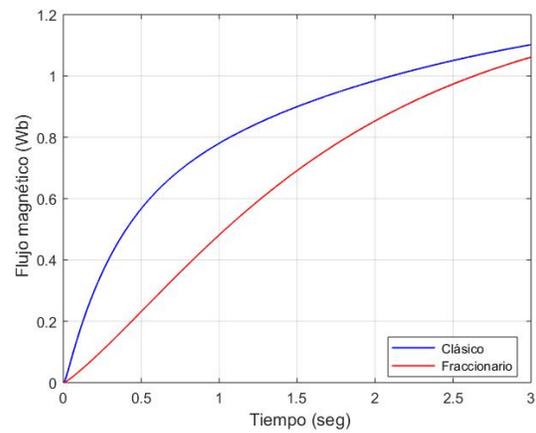


(b)

Figura 5.349: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.350: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

## Resultados para la trayectoria 2

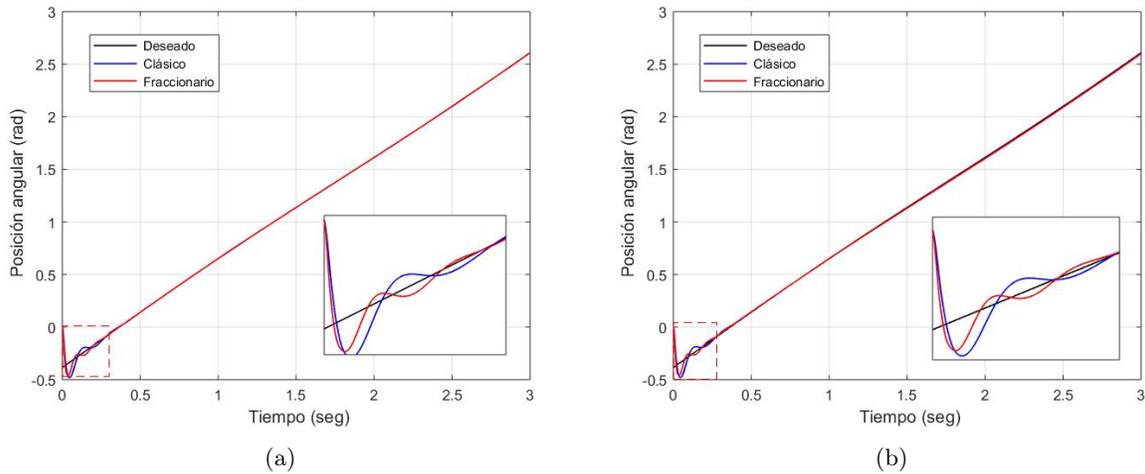


Figura 5.351: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

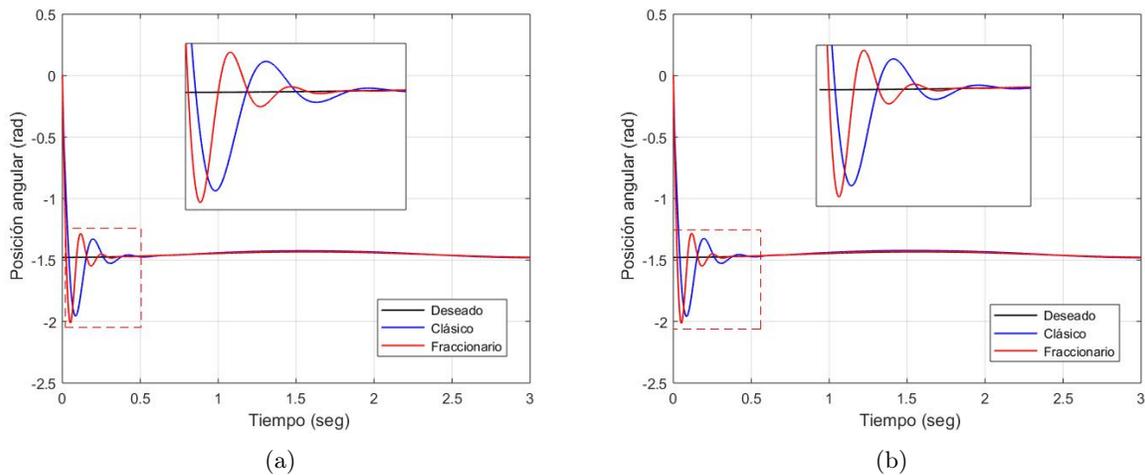


Figura 5.352: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

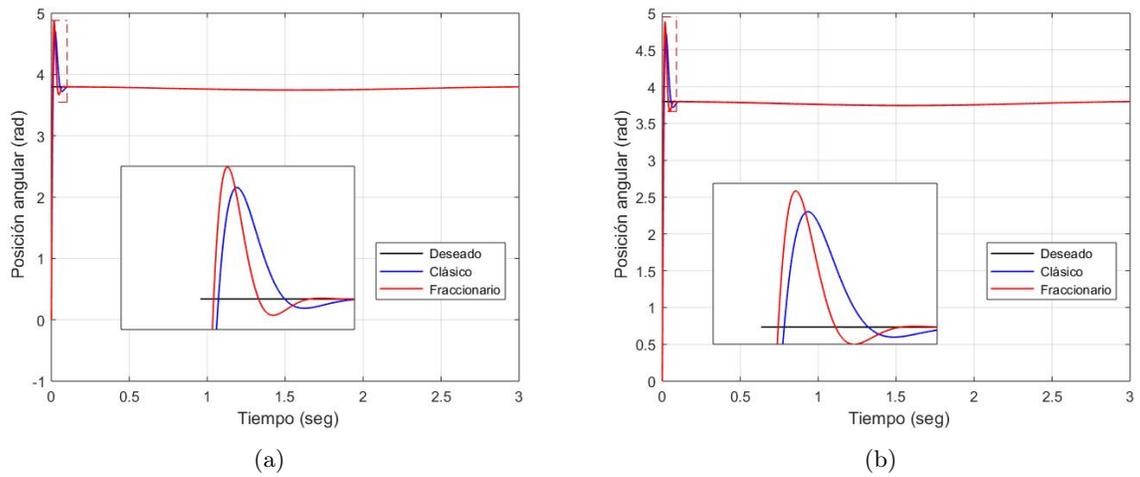


Figura 5.353: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

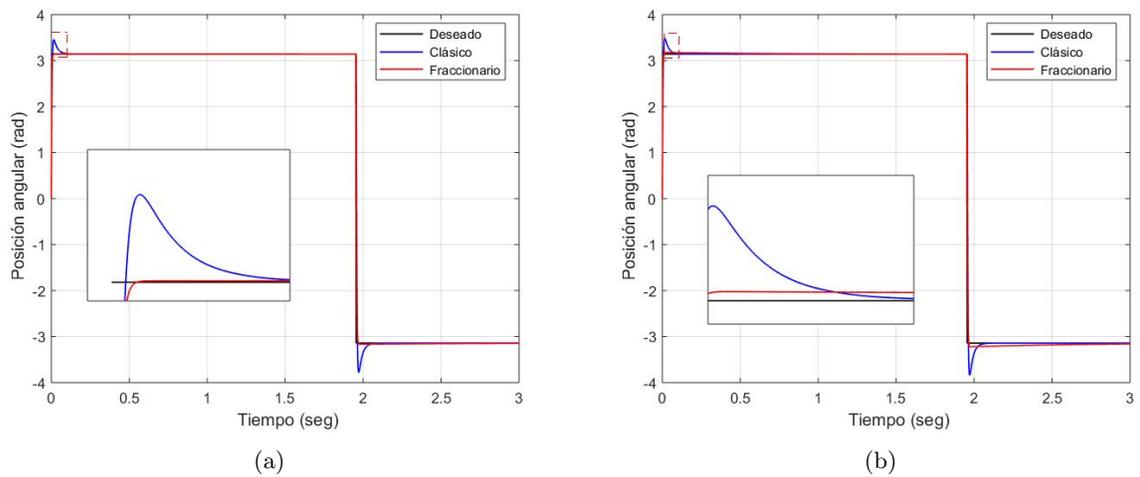


Figura 5.354: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

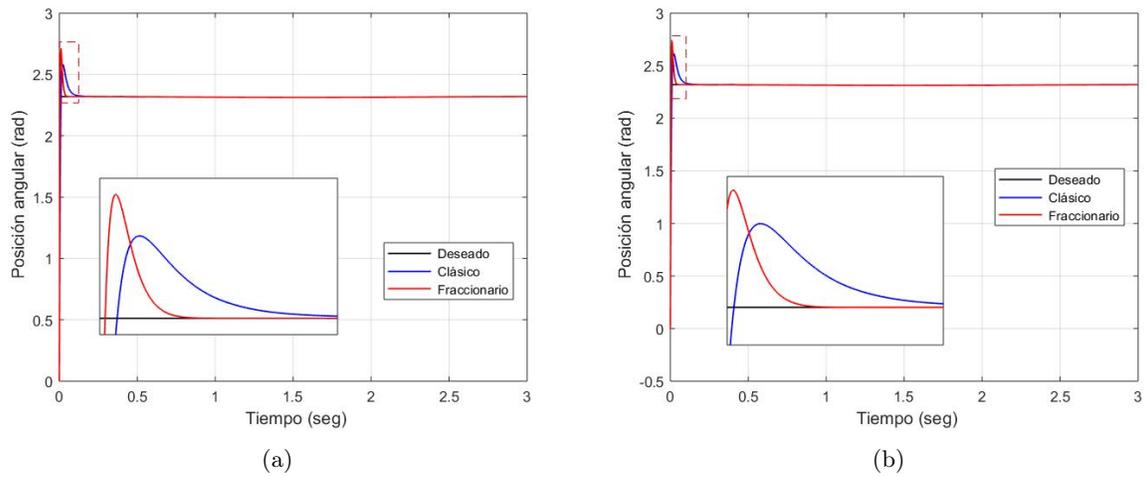


Figura 5.355: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

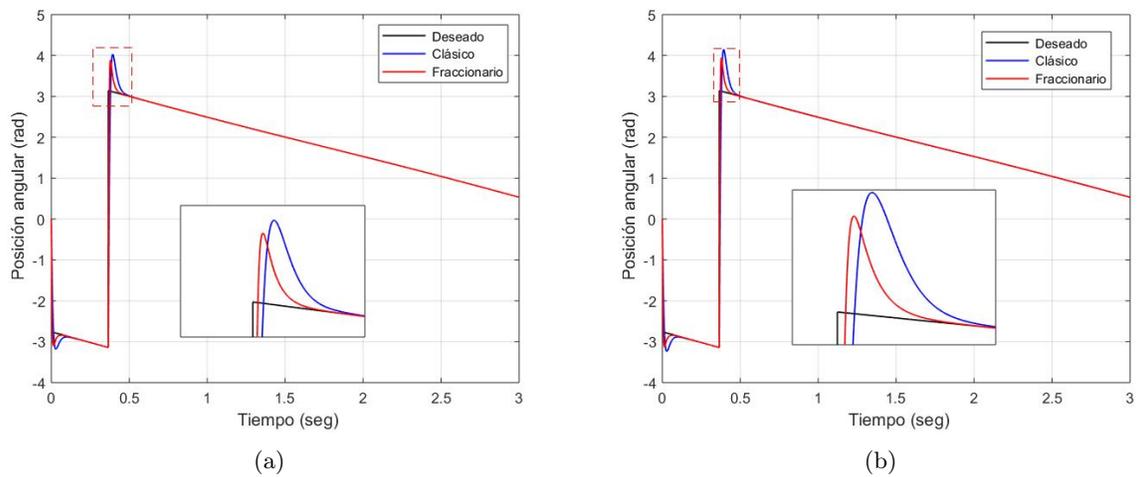


Figura 5.356: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

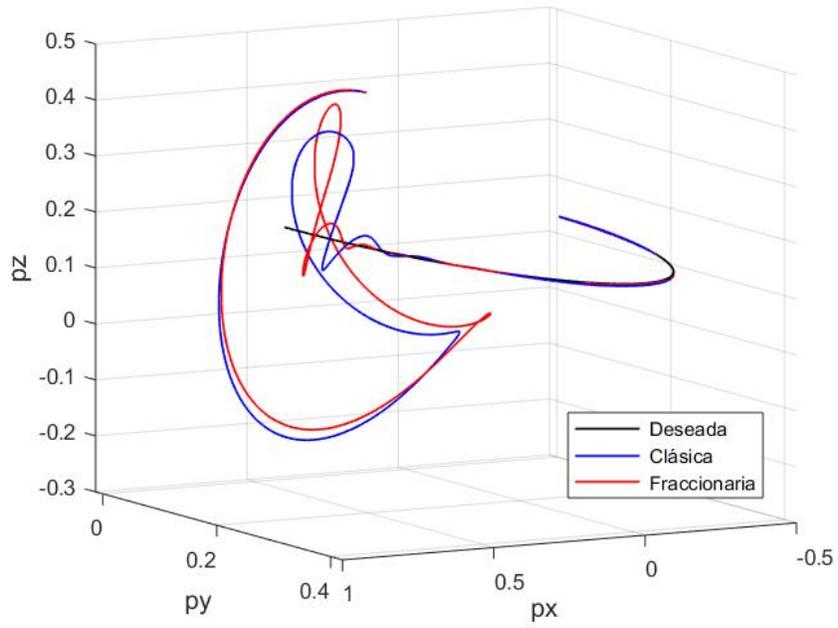


Figura 5.357: Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación

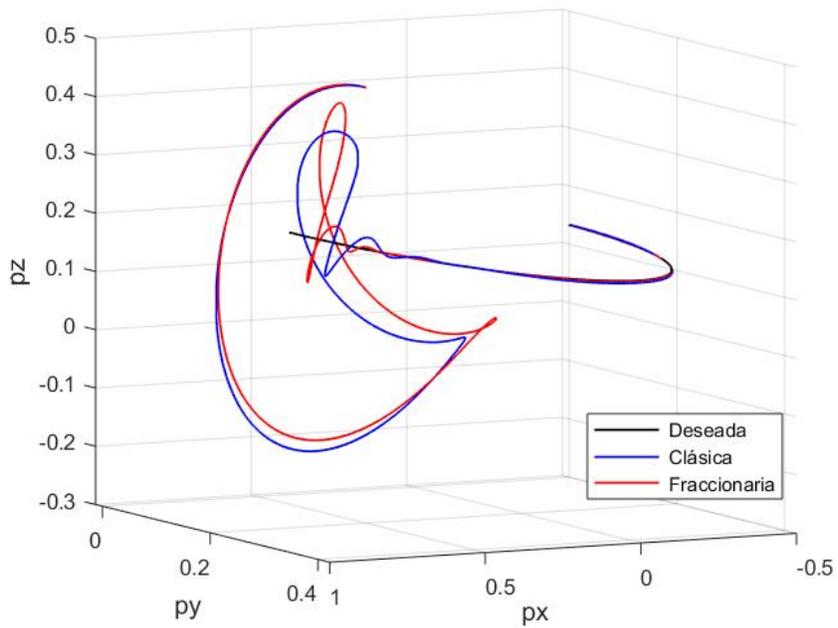


Figura 5.358: Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación

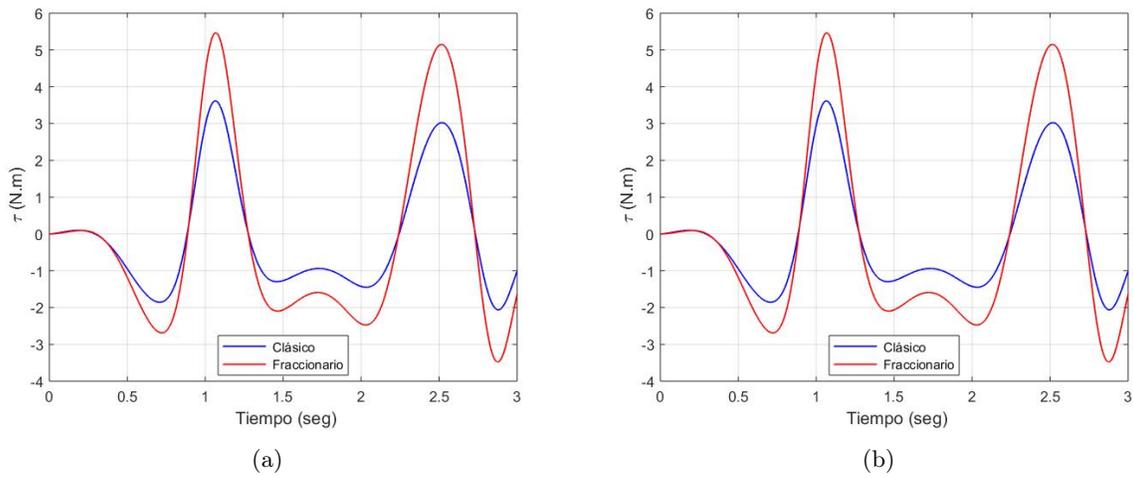


Figura 5.359: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

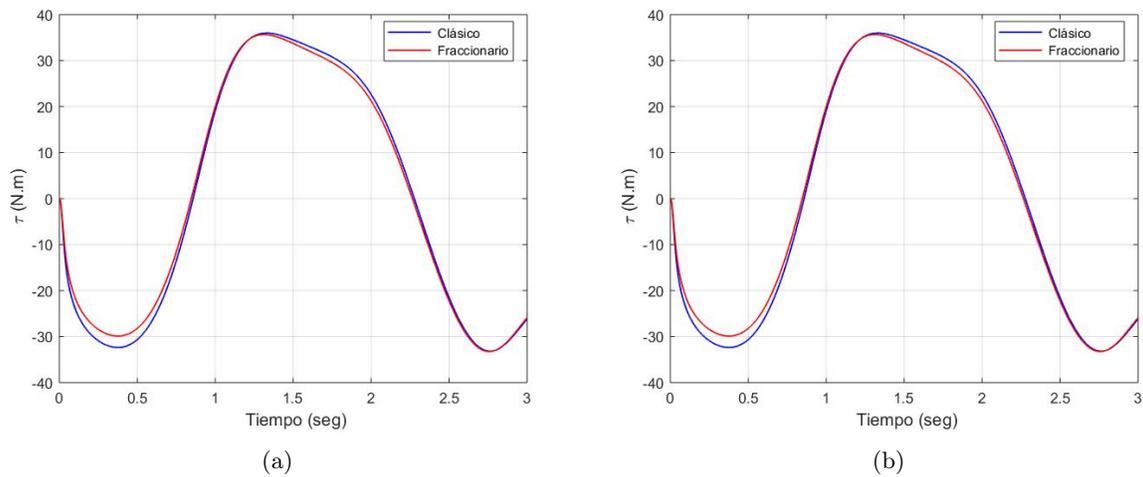


Figura 5.360: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

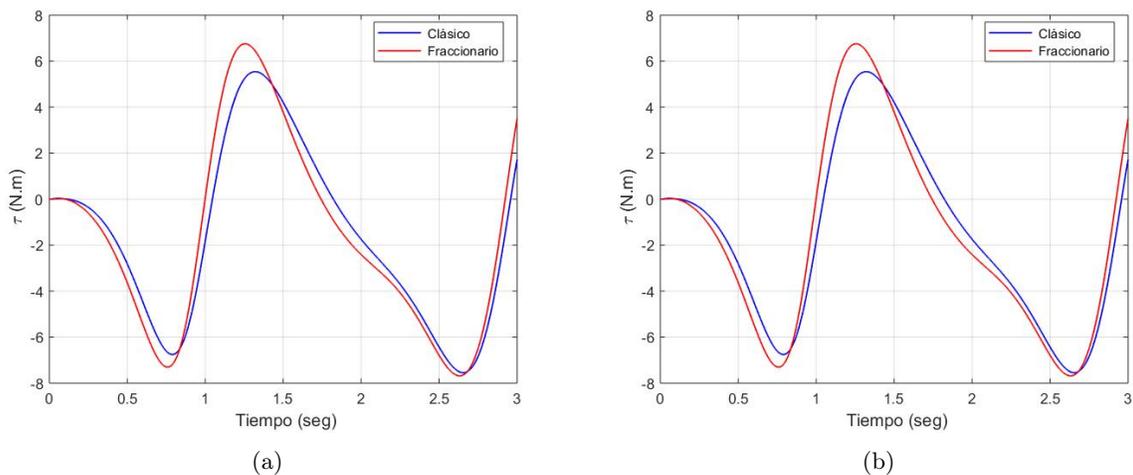


Figura 5.361: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

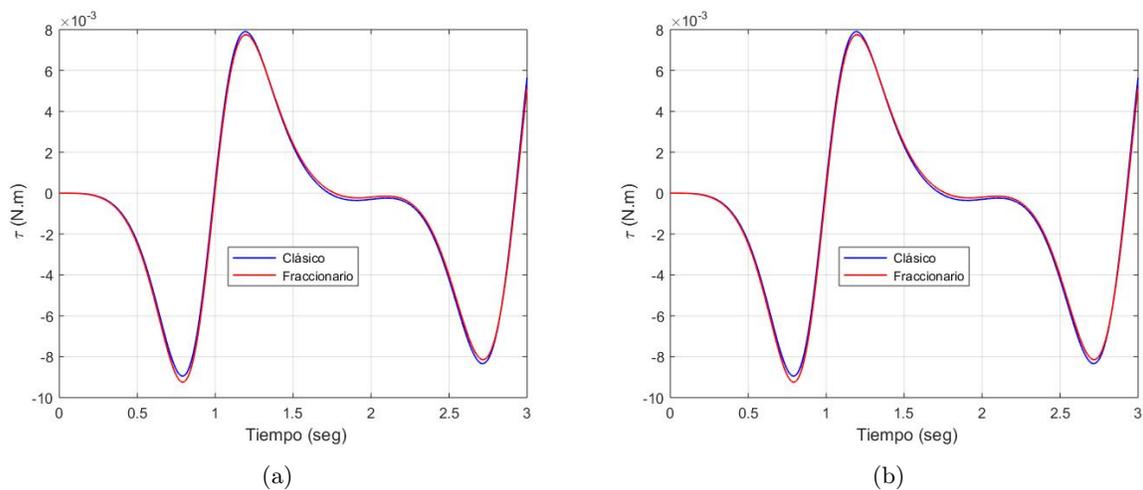


Figura 5.362: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

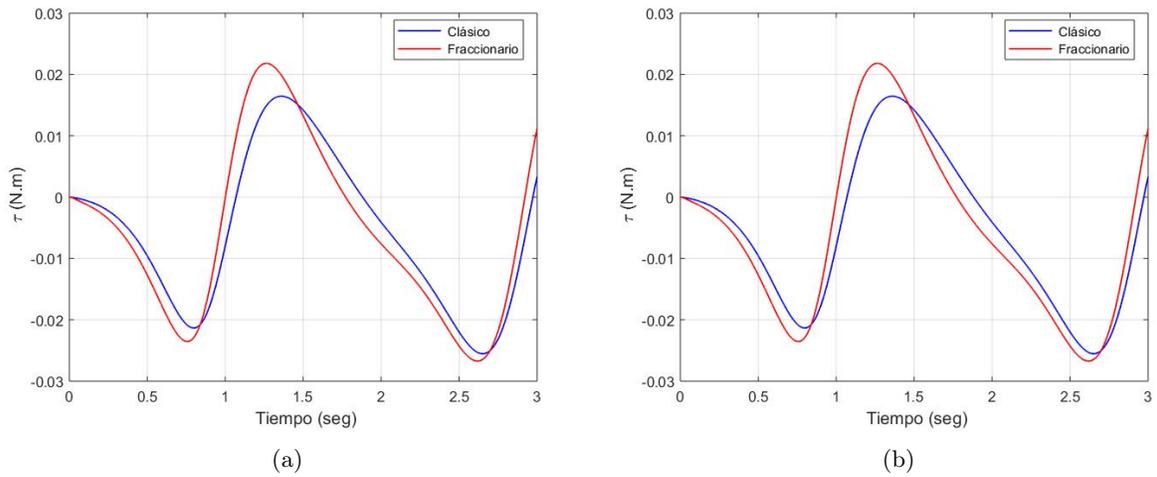


Figura 5.363: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

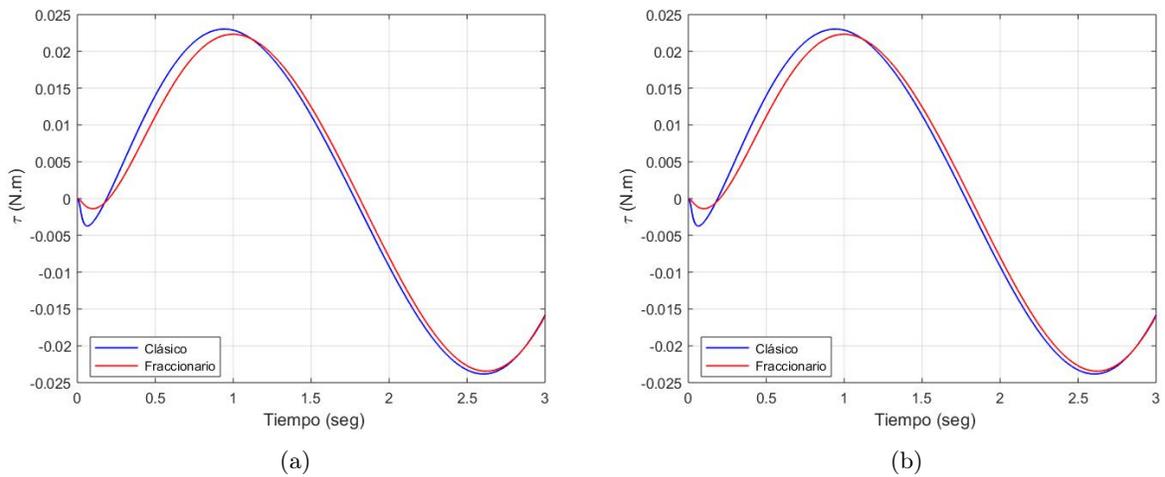


Figura 5.364: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

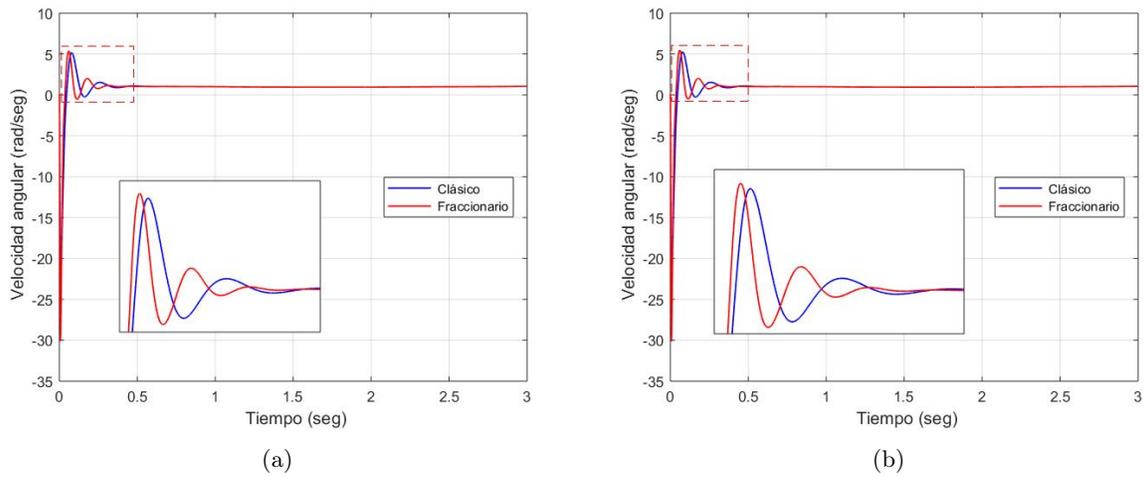


Figura 5.365: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

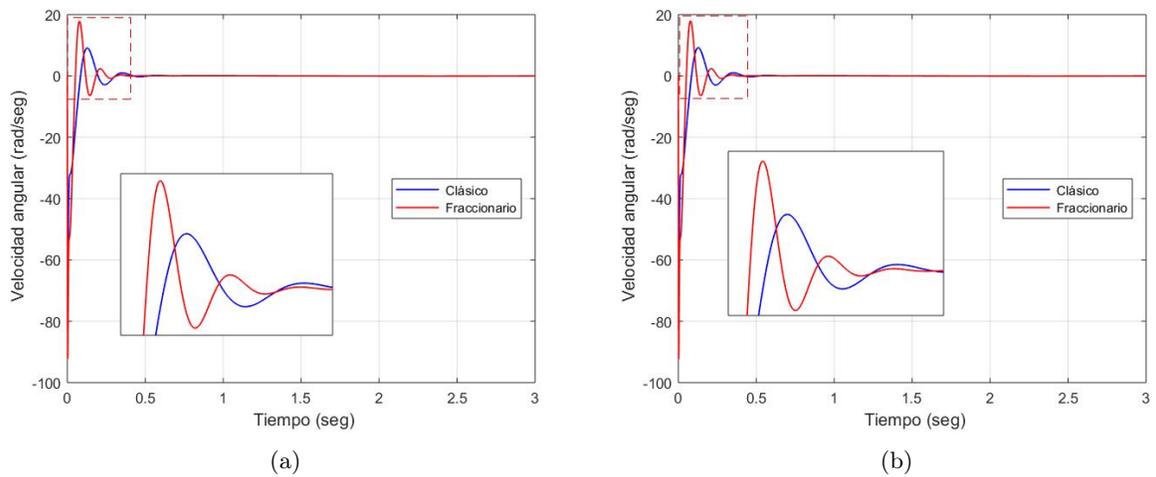


Figura 5.366: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

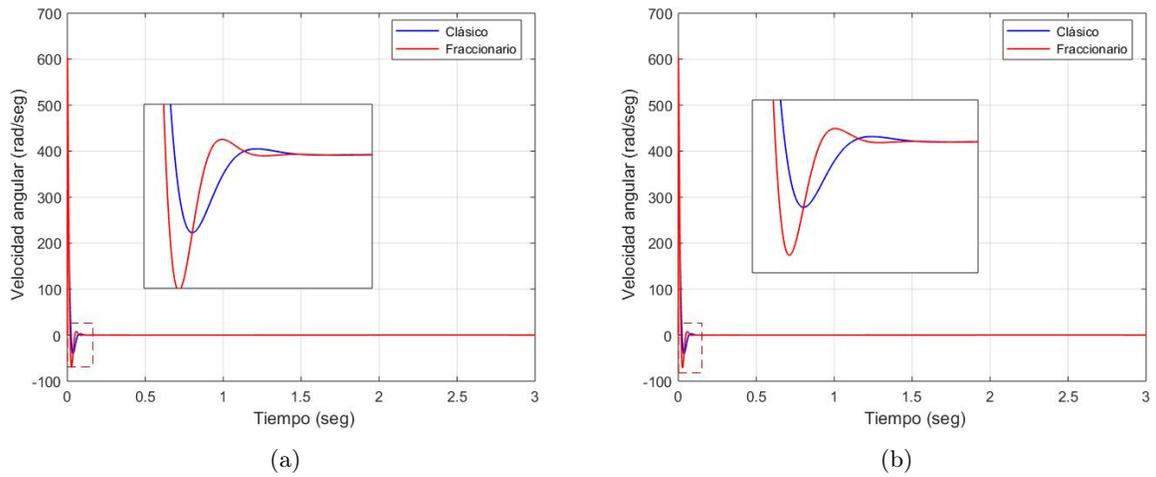


Figura 5.367: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

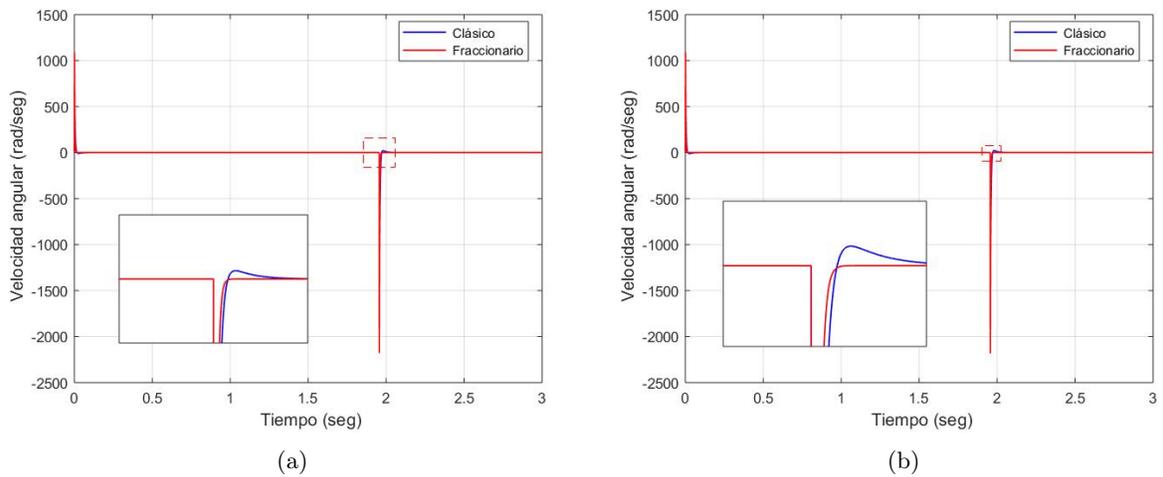


Figura 5.368: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

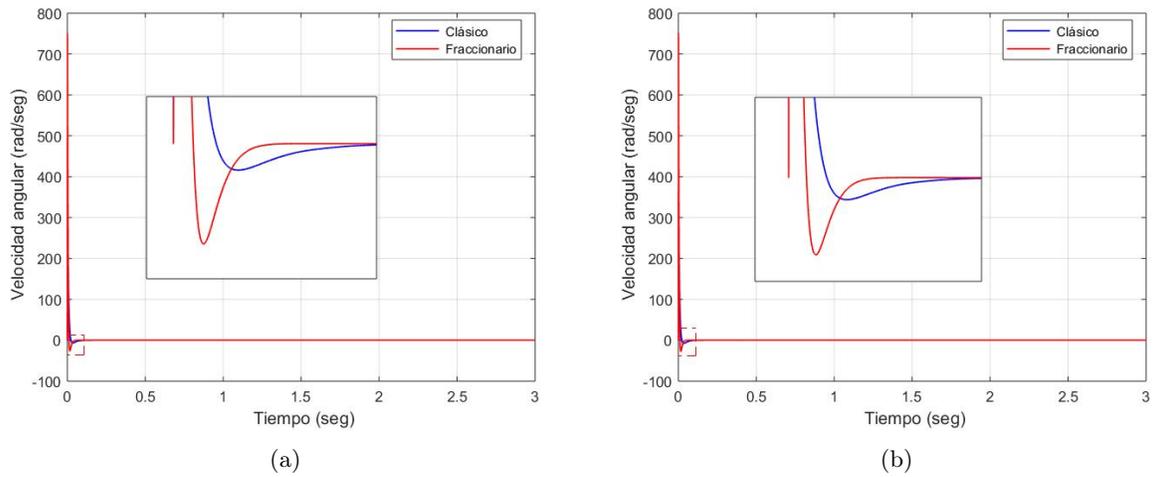


Figura 5.369: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

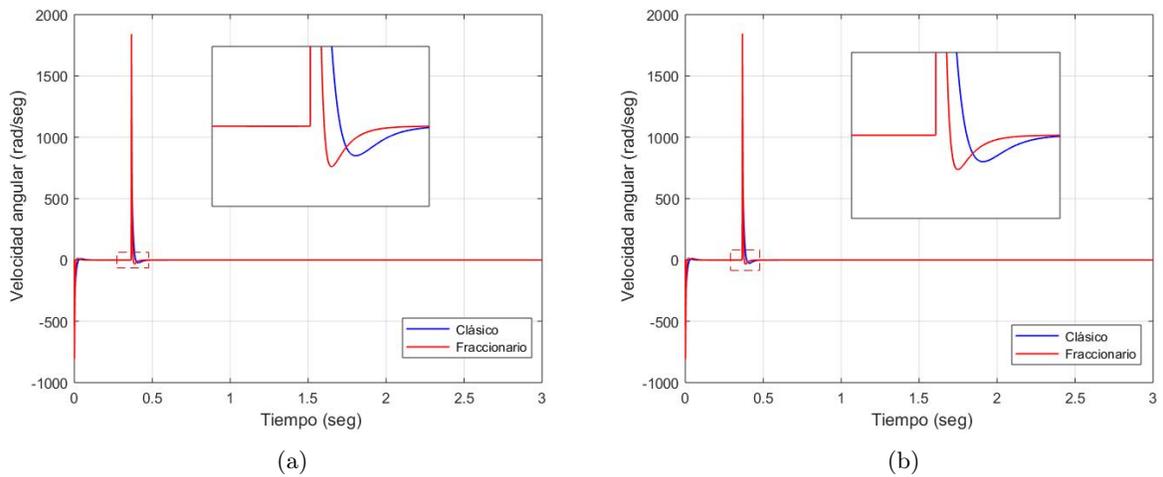
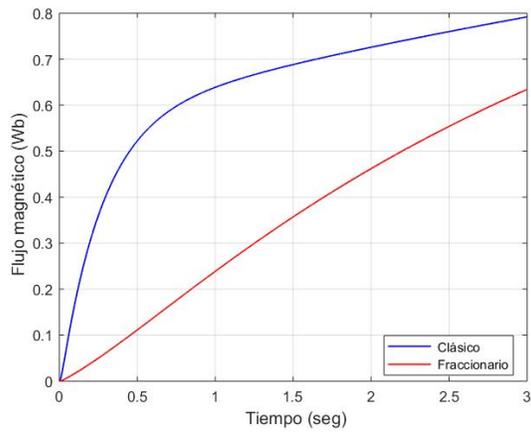
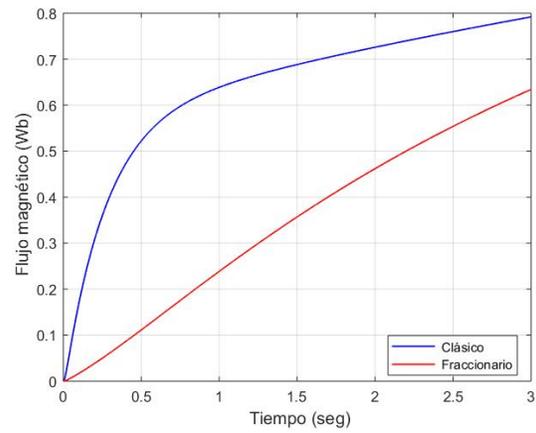


Figura 5.370: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

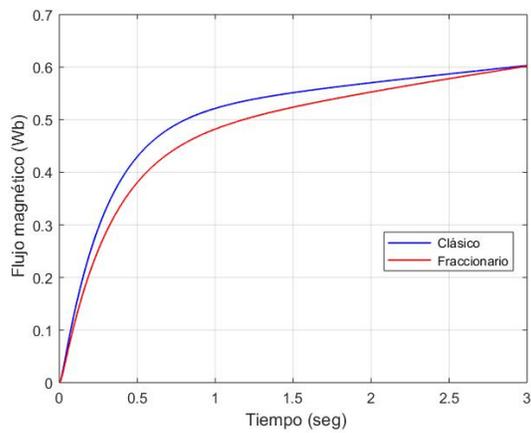


(a)

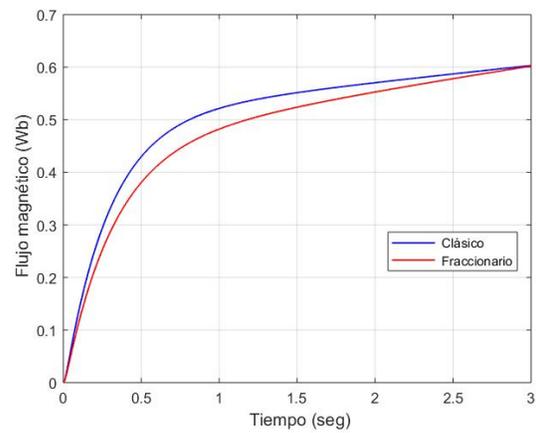


(b)

Figura 5.371: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

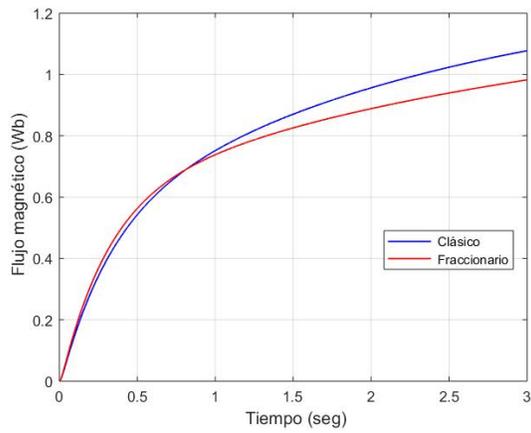


(a)

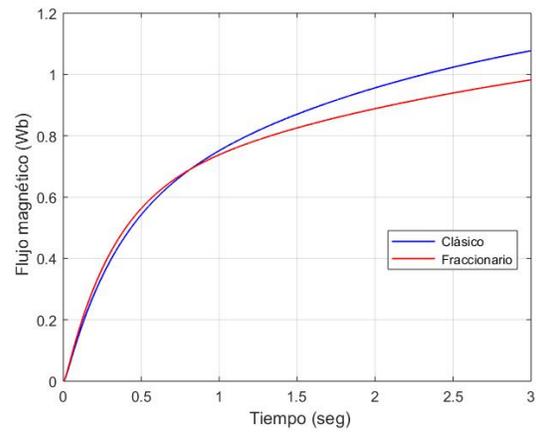


(b)

Figura 5.372: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

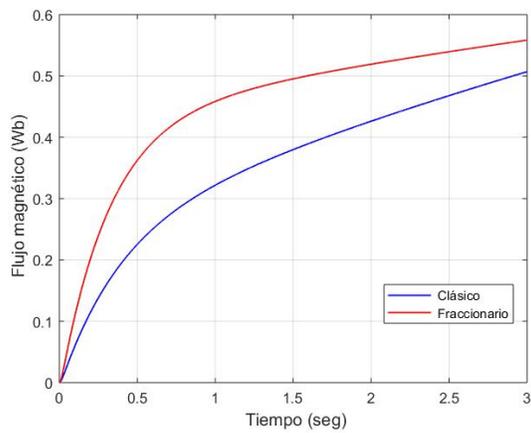


(a)

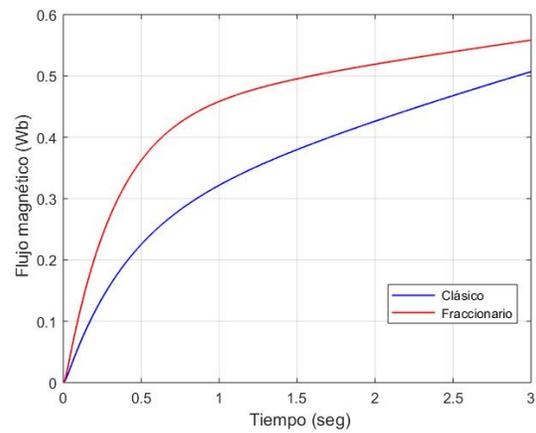


(b)

Figura 5.373: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

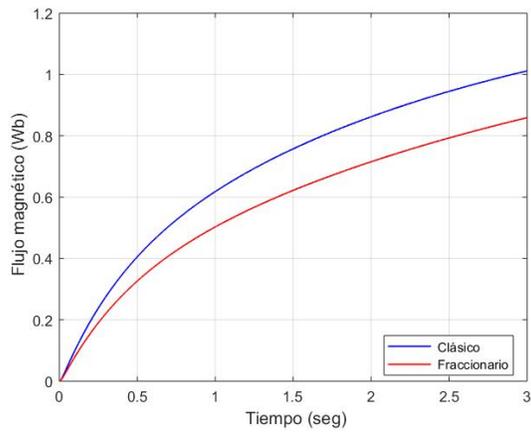


(a)

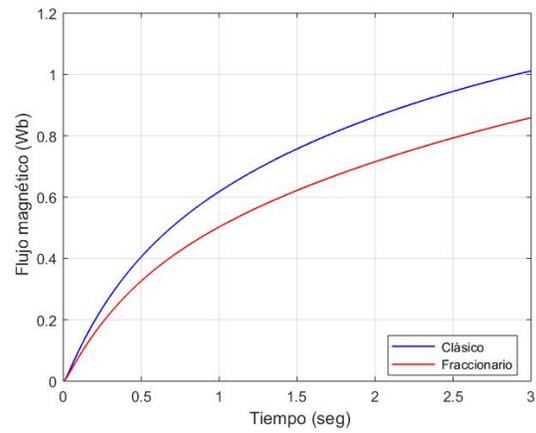


(b)

Figura 5.374: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

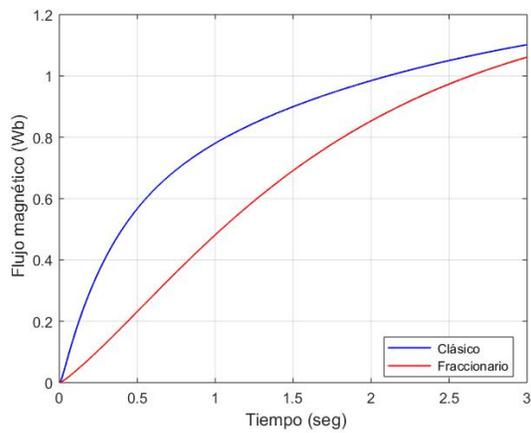


(a)

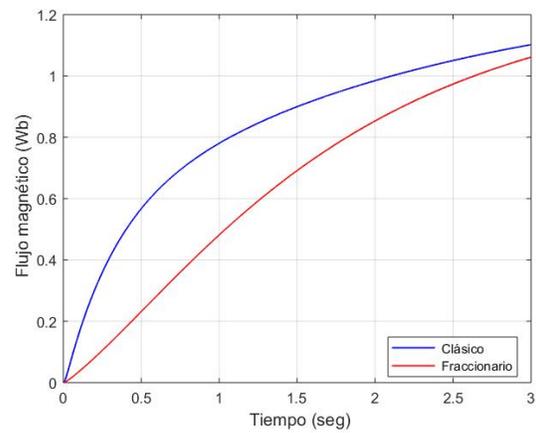


(b)

Figura 5.375: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.376: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

Resultados para la trayectoria 3

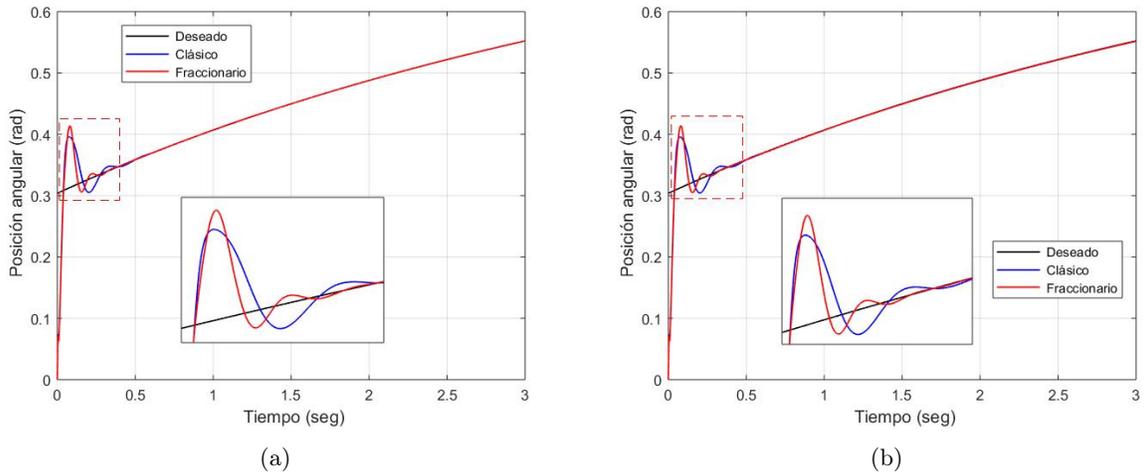


Figura 5.377: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_1$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

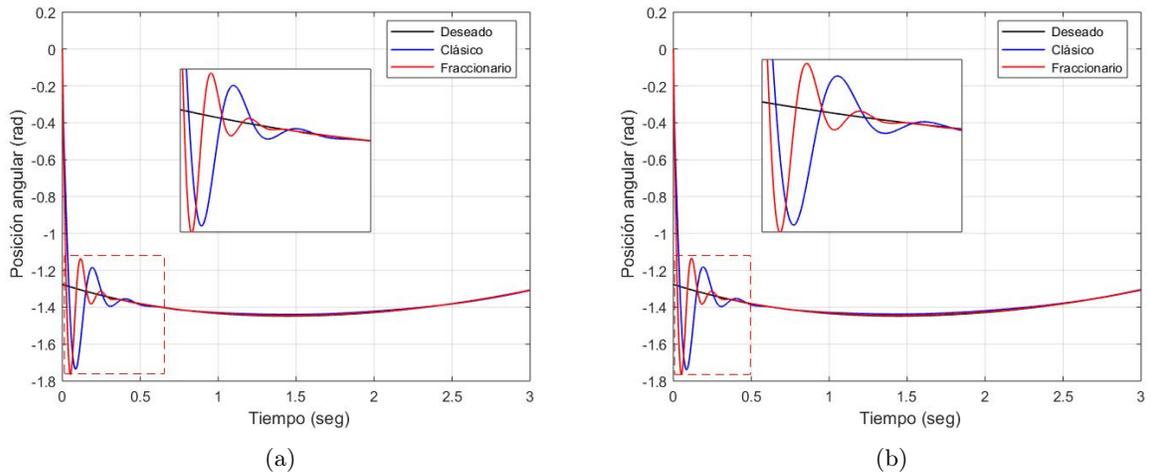


Figura 5.378: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_2$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

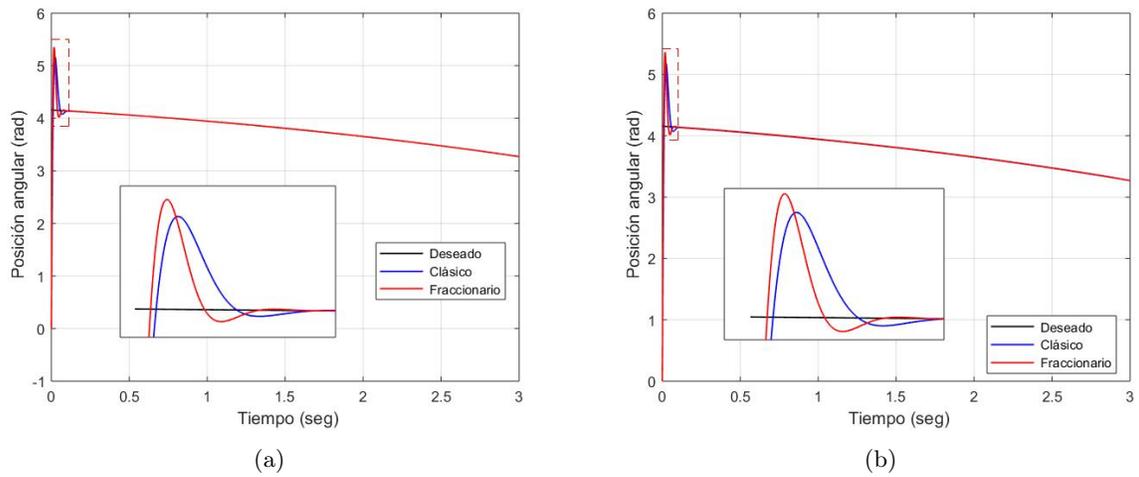


Figura 5.379: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_3$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

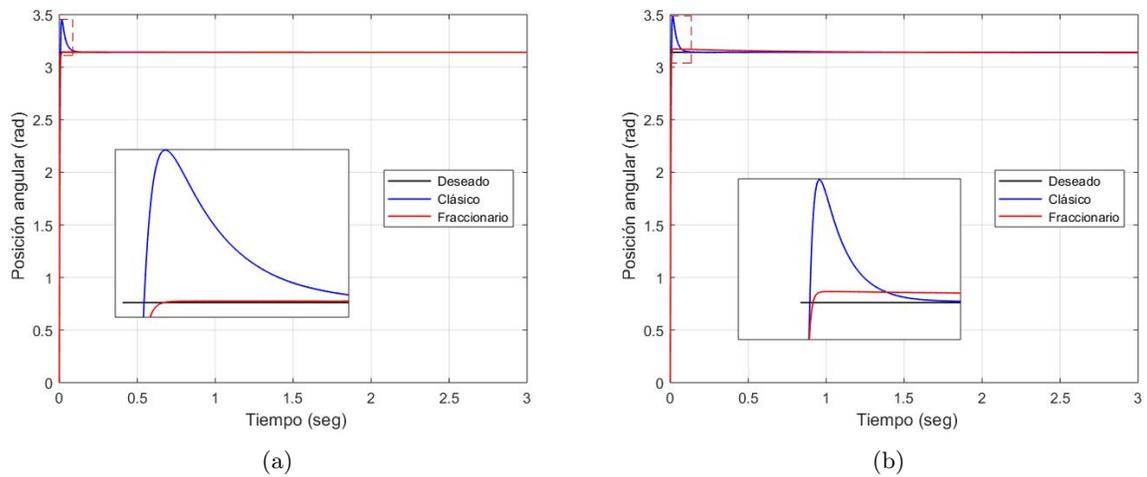


Figura 5.380: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_4$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

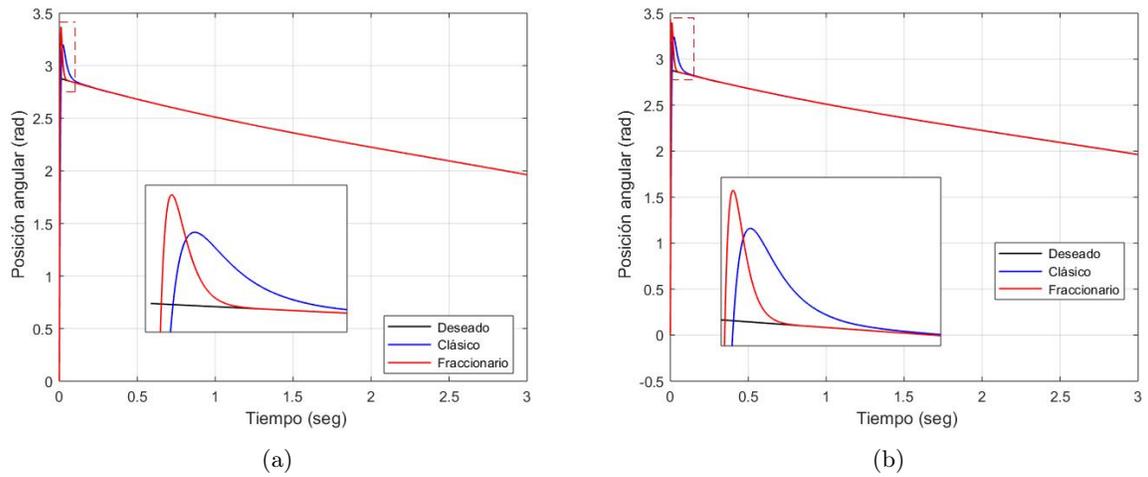


Figura 5.381: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_5$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

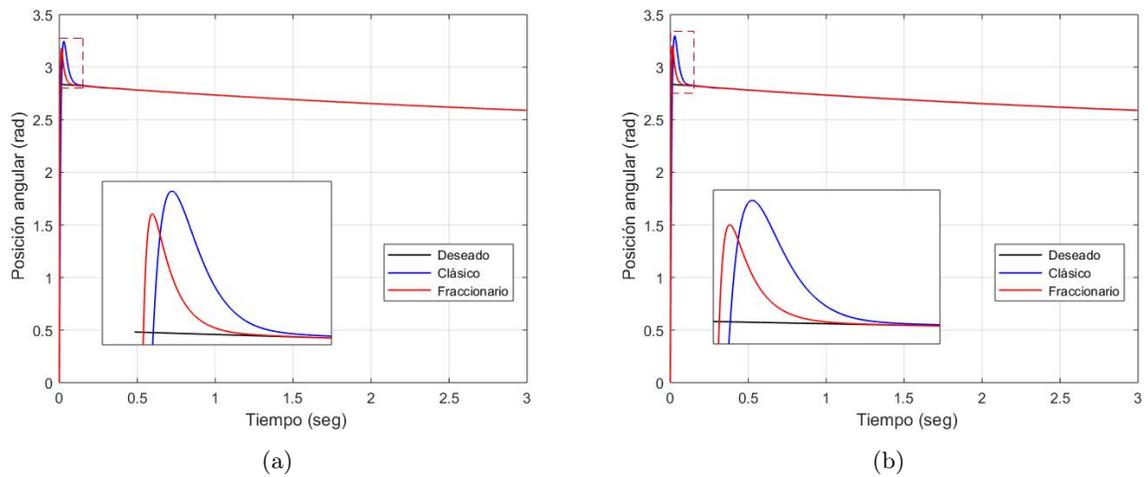


Figura 5.382: Seguimiento de trayectoria de la articulación  $q_6$  (a) sin perturbación y (b) con perturbación

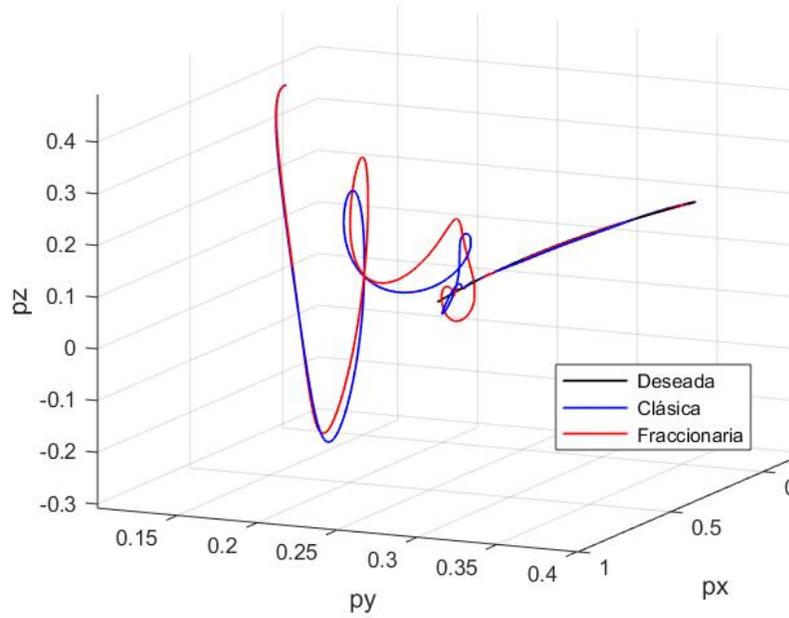


Figura 5.383: Seguimiento de trayectoria del efector final sin perturbación

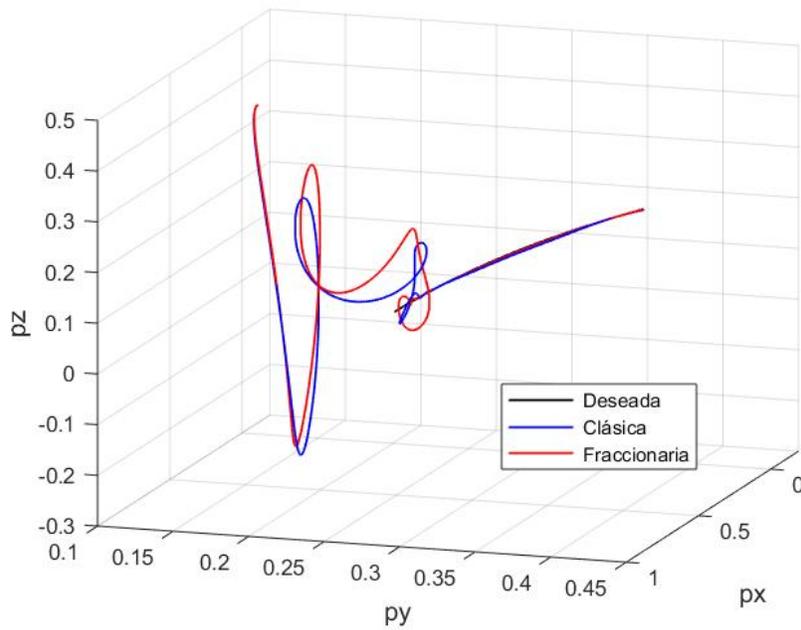


Figura 5.384: Seguimiento de trayectoria del efector final con perturbación

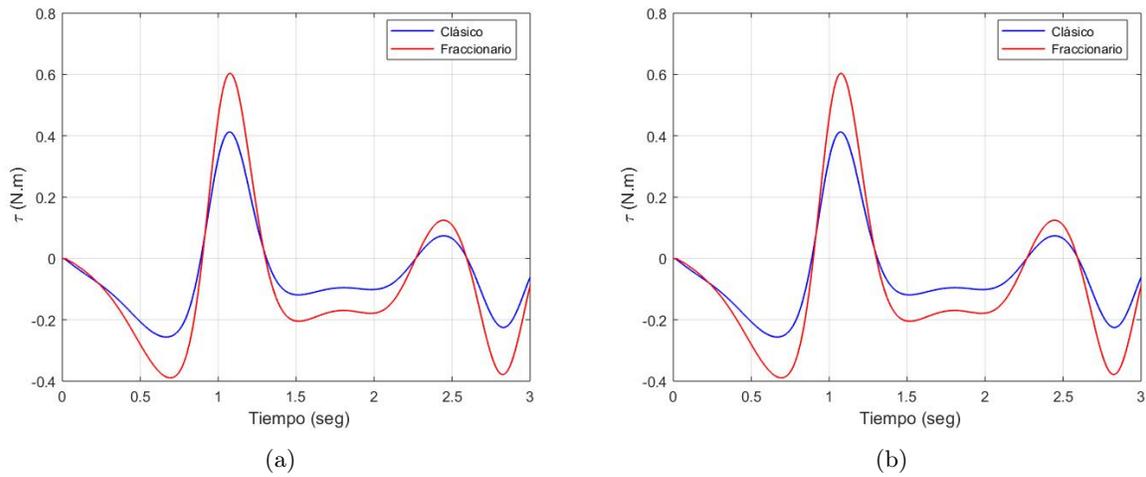


Figura 5.385: Par de carga del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

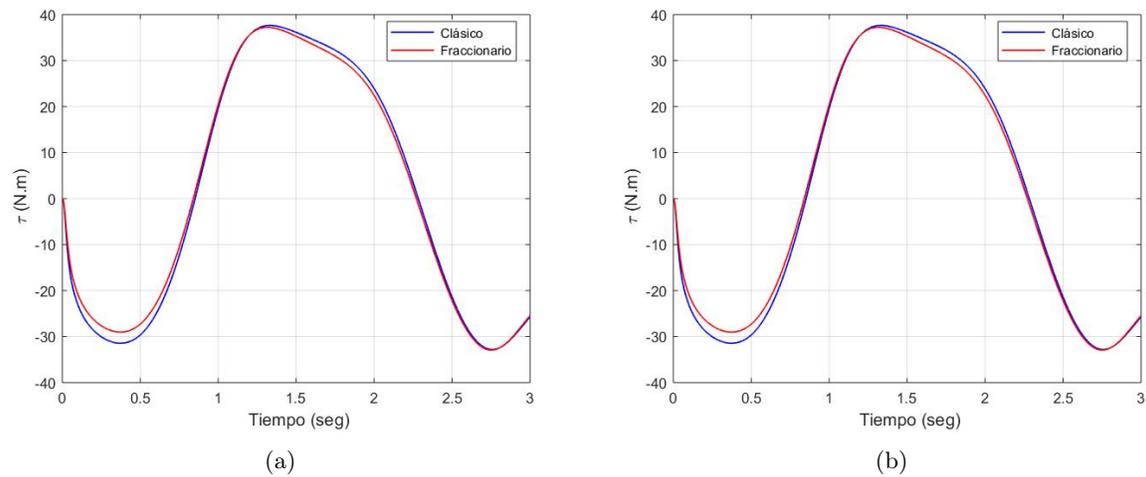


Figura 5.386: Par de carga del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

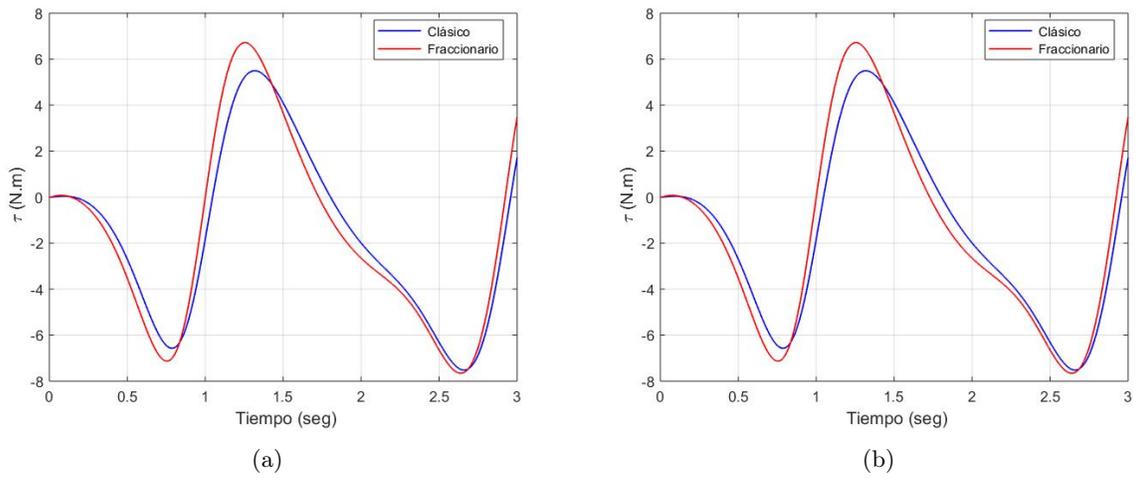


Figura 5.387: Par de carga del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

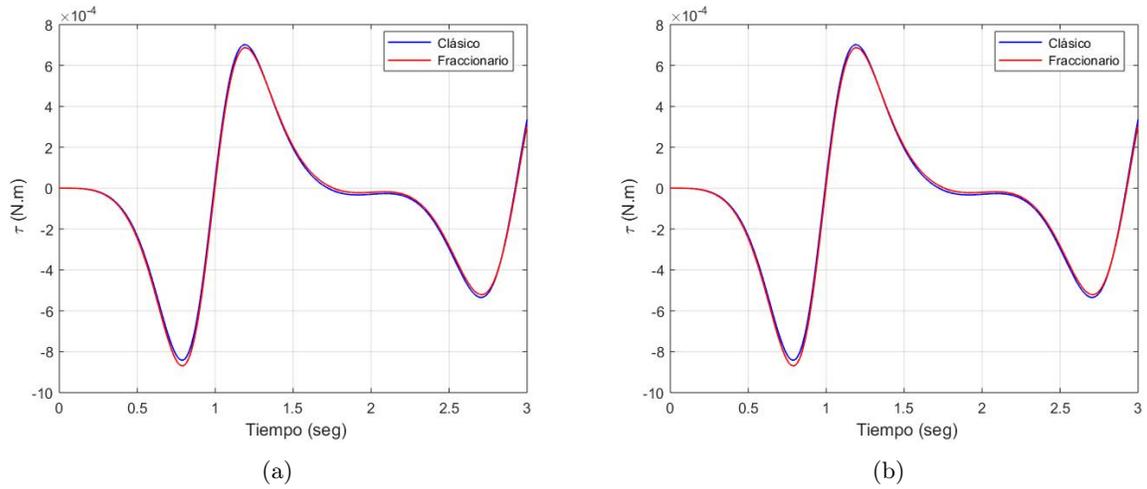


Figura 5.388: Par de carga del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

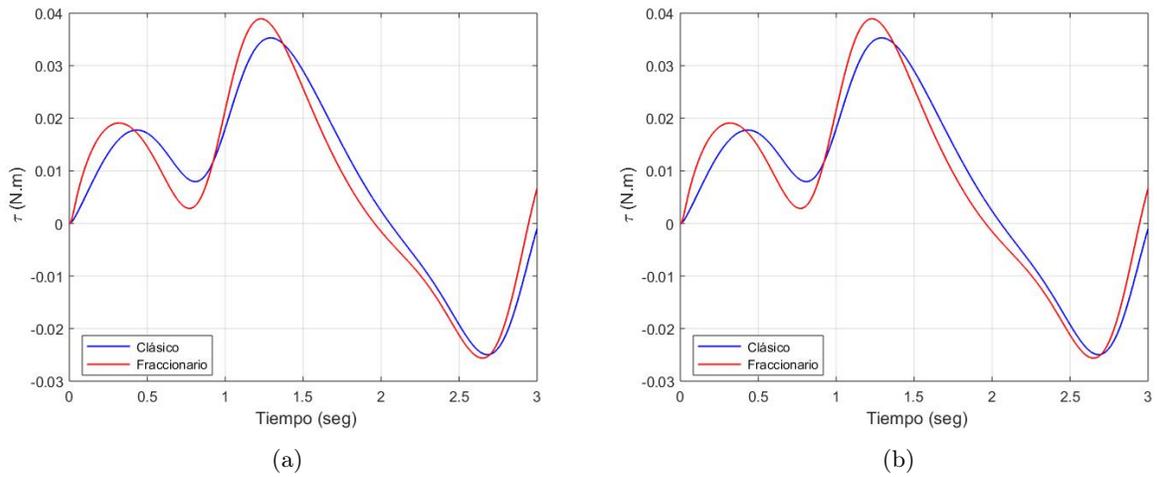


Figura 5.389: Par de carga del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

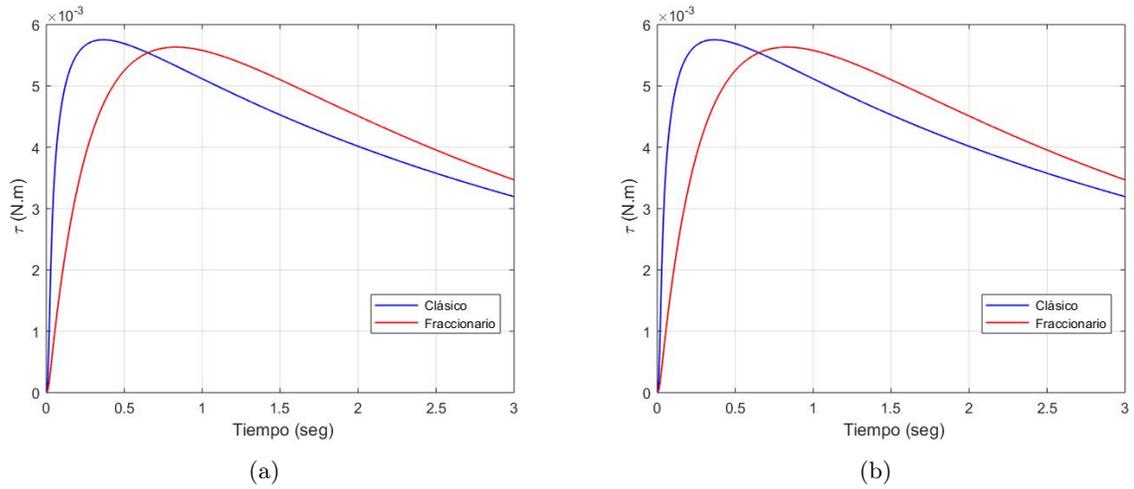


Figura 5.390: Par de carga del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

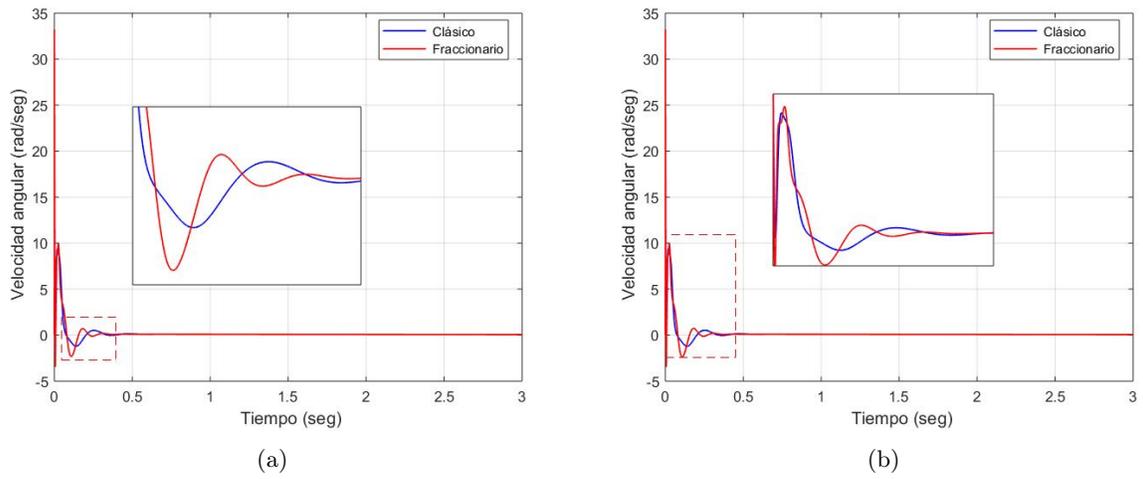


Figura 5.391: Velocidad angular del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

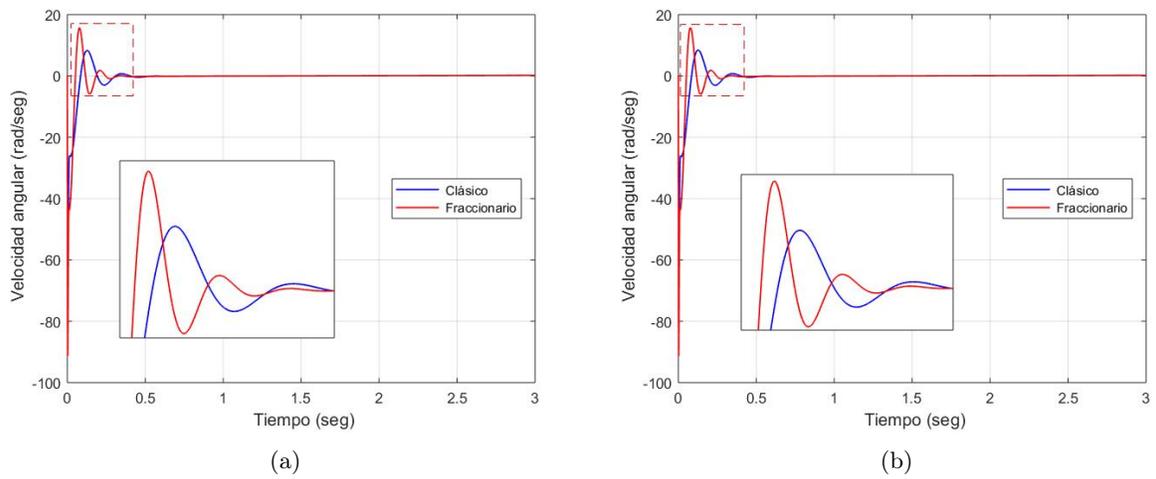


Figura 5.392: Velocidad angular del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

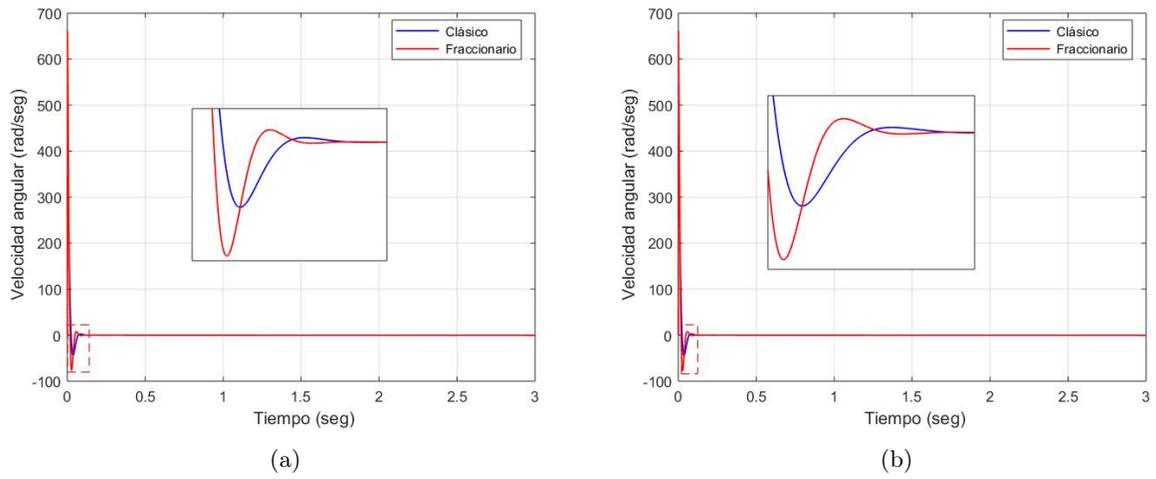


Figura 5.393: Velocidad angular del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

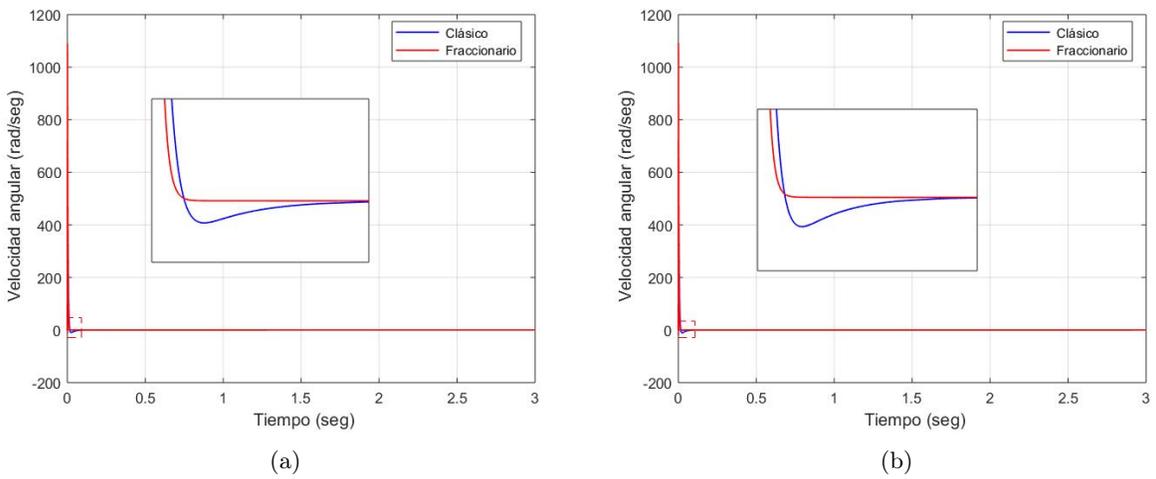


Figura 5.394: Velocidad angular del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

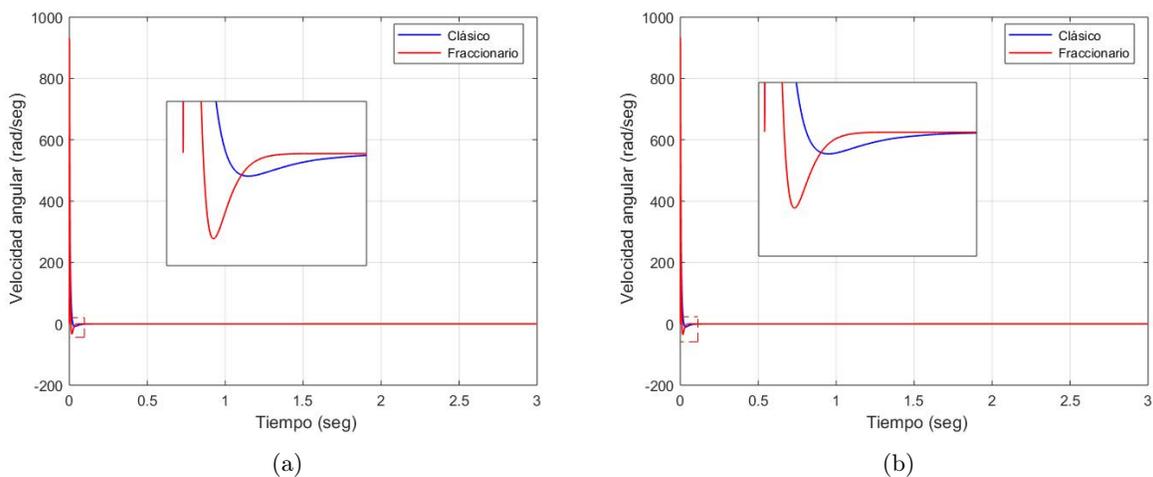


Figura 5.395: Velocidad angular del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

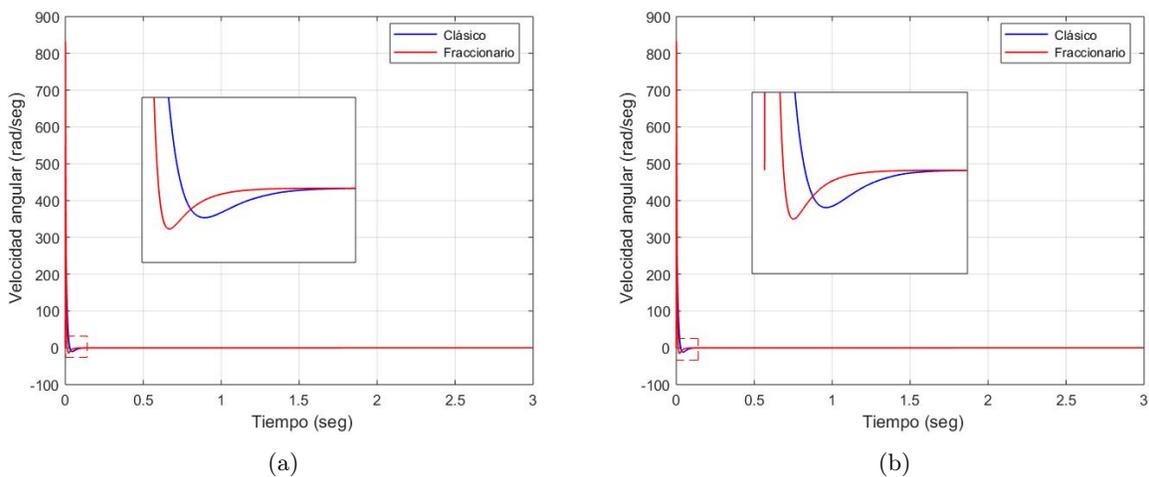
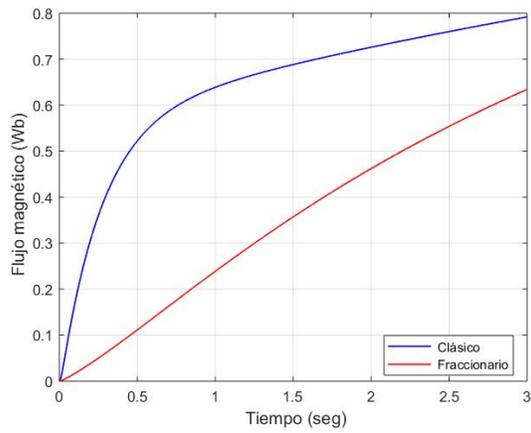
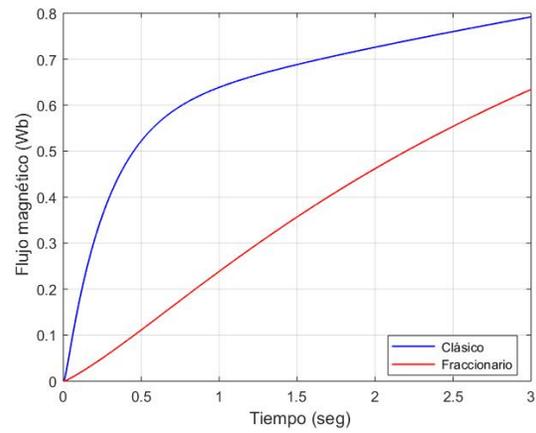


Figura 5.396: Velocidad angular del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

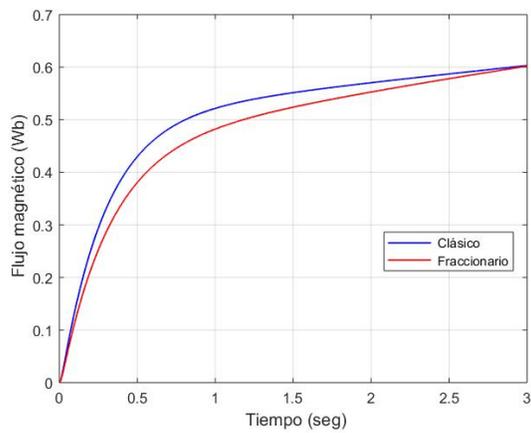


(a)

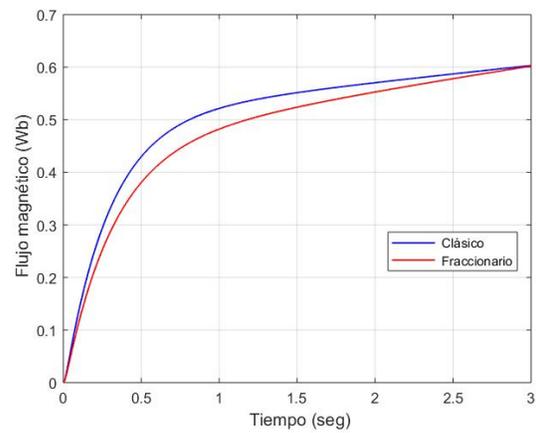


(b)

Figura 5.397: Flujo magnético en el rotor del motor 1 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

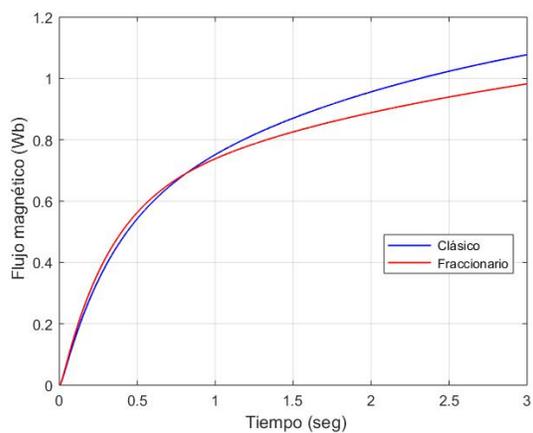


(a)

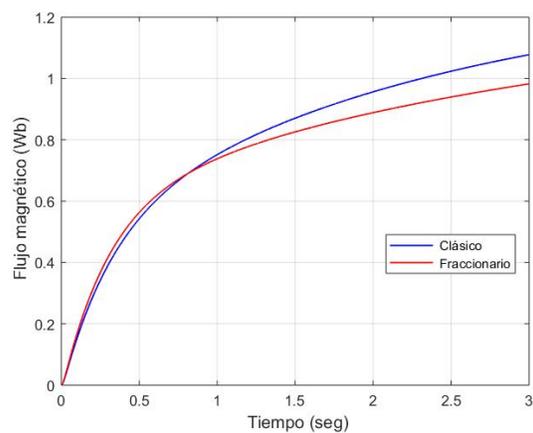


(b)

Figura 5.398: Flujo magnético en el rotor del motor 2 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

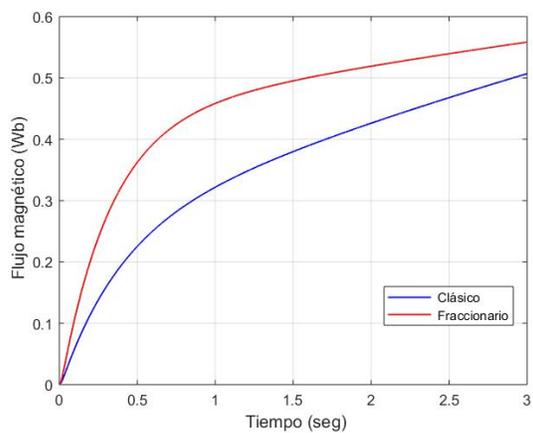


(a)

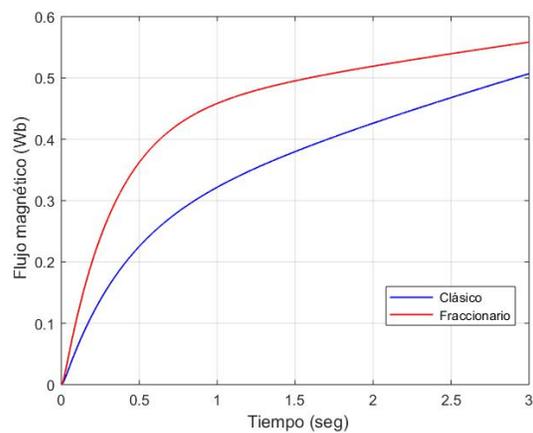


(b)

Figura 5.399: Flujo magnético en el rotor del motor 3 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

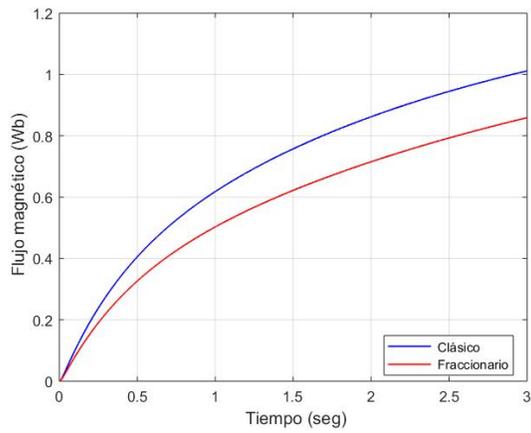


(a)

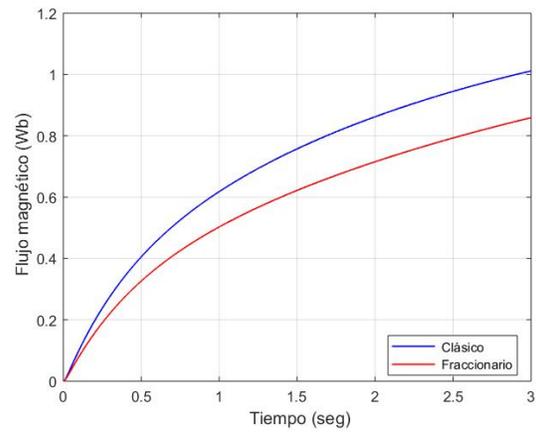


(b)

Figura 5.400: Flujo magnético en el rotor del motor 4 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

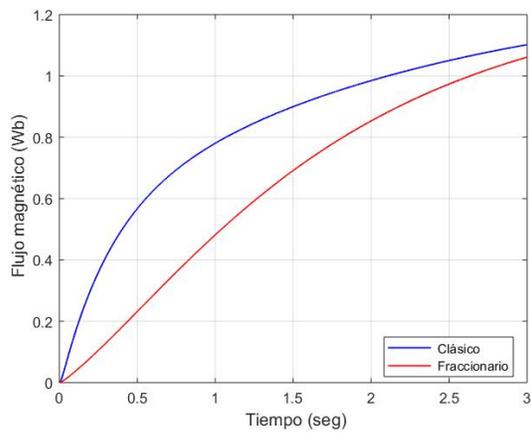


(a)

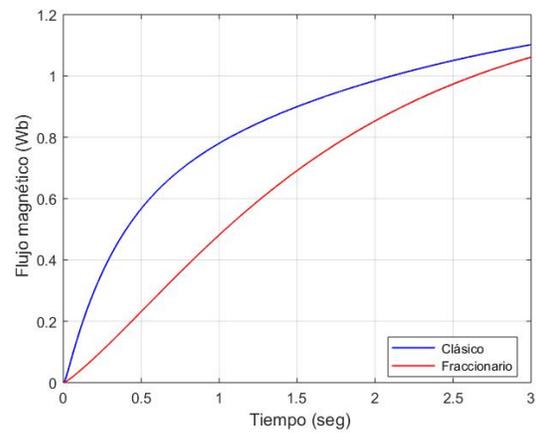


(b)

Figura 5.401: Flujo magnético en el rotor del motor 5 (a) sin perturbación y (b) con perturbación



(a)



(b)

Figura 5.402: Flujo magnético en el rotor del motor 6 (a) sin perturbación y (b) con perturbación

## 5.4. Conclusiones y trabajos futuros

### 5.4.1. Conclusiones

El modelo dinámico de los robots SCARA, Stanford y PUMA 560 se obtuvieron mediante el formulismo de Euler-Lagrange de orden no-entero, las derivadas fraccionarias aplicadas fueron en el sentido de Caputo-Fabrizio y Atangana-Baleanu-Caputo con el propósito de visualizar el comportamiento de los casos de estudio en lazo abierto y, así poder determinar cuál derivada fraccionaria utilizar al aplicar control a los manipuladores. Los modelos dinámicos fraccionarios generalizan a los modelos de orden entero y, cuando el orden de la derivada es igual a uno, se recupera el caso clásico.

Para los sistemas en lazo cerrado, se efectúa una comparación del desempeño de los controladores de orden fraccionario con su contraparte de orden entero mediante la raíz del error cuadrático medio (RMSE por sus siglas en inglés) para visualizar la diferencia que hay entre ambos controladores. Podemos notar que al aplicar las perturbaciones a los sistemas, el control PD clásico aumenta más el error, mientras el control  $PD^\mu$  fraccionario amortigua más las perturbaciones. En el caso de los controladores adaptable basado en pasividad, modo deslizante integral y red neuronal fraccionario las perturbaciones que se agregan a los robots manipuladores casi en su totalidad amortigua dichas perturbaciones.

En general, los controladores fraccionarios para el seguimiento de trayectoria son más robustos ante fuerzas externas, fricciones y cambios de trayectorias que los controladores clásicos, esto debido a que el cálculo fraccionario da ventajas, por ejemplo; el orden de la derivada e integral son fraccionarios, este parámetro ayuda a tener una mejor sintonización; además, se pueden utilizar diferentes definiciones de derivada e integral dependiendo la aplicación y/o uso; las derivadas fraccionarias son no-locales, lo que quiere decir que tiene efectos de memoria que permiten predecir y amortiguar comportamientos no deseados; y debido que son de orden fraccionario generalizan a los controladores clásicos y, cuando el orden es igual a uno se recuperan los casos clásicos. Para los controladores PI fraccionarios aplicados a los motores de inducción permite en algunos casos disminuir el valor de los parámetros, lo cual genera bajo consumo de energía.

### 5.4.2. Trabajos futuros

Entre los trabajos futuros se encuentran:

- La implementación de controladores fraccionarios.
- Utilizar diferentes tipos de actuadores en los manipuladores.
- Incluir una carga en el modelo.
- Aplicar el cálculo de orden no entero a otros robots.
- Utilizar otras derivadas fraccionarias a los manipuladores.
- Diseñar diferentes leyes de control fraccionario y compararlo con el caso clásico.

# Anexos

## Anexo A

# Cinemática Directa

La cinemática directa de robots manipuladores proporciona elementos para analizar y diseñar el desplazamiento de trayectorias del robot, así como la orientación de la herramienta de trabajo. Dependiendo del tipo de articulaciones que se encuentren incluidas en la estructura mecánica del robot, estas pueden ser rotacionales o lineales [Reyes, 2011].

### A.1. SCARA

Para obtener las matrices de paso  $\mathbf{A}_i$ , solo hay que sustituir los parámetros de la Tabla A.1 en (A.1)

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iC_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iS_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$i_i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	0	$l_1$	$0^\circ$
2	$q_2$	0	$l_2$	$0^\circ$
3	$q_3$	0	0	$0^\circ$
4	0	$d_4$	0	$0^\circ$

Tabla A.1: Parámetros Denavit-Hartenberg estándar del robot SCARA.

► Para  $\mathbf{A}_1$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & -S_{q_1} & 0 & l_1C_{q_1} \\ S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & l_1S_{q_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

► Para  $\mathbf{A}_2$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{q_2} & -S_{q_2} & 0 & l_2C_{q_2} \\ S_{q_2} & C_{q_2} & 0 & l_2S_{q_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

► Para  $\mathbf{A}_3$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_{q_3} & -S_{q_3} & 0 & 0 \\ S_{q_3} & C_{q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

► Para  $\mathbf{A}_4$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

La matriz de transformación homogénea que relaciona los referenciales base y del efector final se calcula como

$$\mathbf{T}_0^n = \prod_{i=1}^n \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

donde  $n$  es el número de articulaciones del manipulador.

►  $\mathbf{T}_0^1 = \mathbf{A}_1 =$

$$\mathbf{T}_0^1 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & -S_{q_1} & 0 & l_1 C_{q_1} \\ S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & l_1 S_{q_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

►  $\mathbf{T}_0^2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 =$

$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{bmatrix} C_{q_1+q_2} & -S_{q_1+q_2} & 0 & l_1 C_{q_1} + l_2 C_{q_1+q_2} \\ S_{q_1+q_2} & C_{q_1+q_2} & 0 & l_1 S_{q_1} + l_2 S_{q_1+q_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

►  $\mathbf{T}_0^3 = \mathbf{T}_0^2 \mathbf{A}_3 =$

$$\mathbf{T}_0^3 = \begin{bmatrix} C_{q_1+q_2+q_3} & -S_{q_1+q_2+q_3} & 0 & l_1 C_{q_1} + l_2 C_{q_1+q_2} \\ S_{q_1+q_2+q_3} & C_{q_1+q_2+q_3} & 0 & l_1 S_{q_1} + l_2 S_{q_1+q_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

►  $\mathbf{T}_0^4 = \mathbf{T}_0^3 \mathbf{A}_4 =$

$$\mathbf{T}_0^4 = \begin{bmatrix} C_{q_1+q_2+q_3} & -S_{q_1+q_2+q_3} & 0 & l_1 C_{q_1} + l_2 C_{q_1+q_2} \\ S_{q_1+q_2+q_3} & C_{q_1+q_2+q_3} & 0 & l_1 S_{q_1} + l_2 S_{q_1+q_2} \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

De acuerdo a la ecuación (A.6), la ecuación (A.10) corresponde a la cinemática directa del robot SCARA, necesaria para obtener la posición y orientación del efector final.

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{q_1+q_2+q_3} & -S_{q_1+q_2+q_3} & 0 & l_1 C_{q_1} + l_2 C_{q_1+q_2} \\ S_{q_1+q_2+q_3} & C_{q_1+q_2+q_3} & 0 & l_1 S_{q_1} + l_2 S_{q_1+q_2} \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

## A.2. Stanford

Para obtener las matrices de paso  $\mathbf{A}_i$  sustituimos los parámetros de la Tabla A.2 en (A.1)

$i_i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	0	0	$-90^\circ$
2	$q_2$	$l_2$	0	$90^\circ$
3	0	$d_3$	0	$0^\circ$
4	$q_4$	0	0	$-90^\circ$
5	$q_5$	0	0	$90^\circ$
6	$q_6$	0	0	$0^\circ$

Tabla A.2: Parámetros Denavit-Hartenberg estándar del robot Stanford.

► Para  $\mathbf{A}_1$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & 0 & -S_{q_1} & 0 \\ S_{q_1} & 0 & C_{q_1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

► Para  $\mathbf{A}_2$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{q_2} & 0 & S_{q_2} & 0 \\ S_{q_2} & 0 & -C_{q_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

► Para  $\mathbf{A}_3$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

► Para  $\mathbf{A}_4$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_{q_4} & 0 & -S_{q_4} & 0 \\ S_{q_4} & 0 & C_{q_4} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

► Para  $\mathbf{A}_5$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} C_{q_5} & 0 & S_{q_5} & 0 \\ S_{q_5} & 0 & -C_{q_5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

► Para  $\mathbf{A}_6$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_{q_6} & -S_{q_6} & 0 & 0 \\ S_{q_6} & C_{q_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Las matrices de transformación homogénea son

►  $\mathbf{T}_0^1 = \mathbf{A}_1 =$

$$\mathbf{T}_0^1 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & 0 & -S_{q_1} & 0 \\ S_{q_1} & 0 & C_{q_1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

►  $\mathbf{T}_0^2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 =$

$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{bmatrix} C_{q_1} C_{q_2} & -S_{q_1} & C_{q_1} S_{q_2} & -l_2 S_{q_1} \\ S_{q_1} C_{q_2} & C_{q_1} & S_{q_1} S_{q_2} & l_2 C_{q_1} \\ -S_{q_2} & 0 & C_{q_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

►  $\mathbf{T}_0^3 = \mathbf{T}_0^2 \mathbf{A}_3 =$

$$\mathbf{T}_0^3 = \begin{bmatrix} C_{q_1} C_{q_2} & -S_{q_1} & C_{q_1} S_{q_2} & d_3 C_{q_1} S_{q_2} - l_2 S_{q_1} \\ S_{q_1} C_{q_2} & C_{q_1} & S_{q_1} S_{q_2} & d_3 S_{q_1} S_{q_2} + l_2 C_{q_1} \\ -S_{q_2} & 0 & C_{q_2} & d_3 C_{q_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

►  $\mathbf{T}_0^4 = \mathbf{T}_0^3 \mathbf{A}_4 =$

$$\mathbf{T}_0^4 = \begin{bmatrix} C_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} - S_{q_1} S_{q_4} & -C_{q_1} S_{q_2} & -C_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} - S_{q_1} C_{q_4} & d_3 C_{q_1} S_{q_2} - l_2 S_{q_1} \\ S_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} + C_{q_1} S_{q_4} & -S_{q_1} S_{q_2} & -S_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} + C_{q_1} C_{q_4} & d_3 S_{q_1} S_{q_2} + l_2 C_{q_1} \\ -S_{q_2} C_{q_4} & -C_{q_2} & S_{q_2} S_{q_4} & d_3 C_{q_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

►  $\mathbf{T}_0^5 = \mathbf{T}_0^4 \mathbf{A}_5 =$

$$\mathbf{T}_0^5 = \begin{bmatrix} (C_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} - S_{q_1} S_{q_4}) C_{q_5} - C_{q_1} S_{q_2} S_{q_5} & -C_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} - S_{q_1} C_{q_4} & \cdots \\ (S_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} + C_{q_1} S_{q_4}) C_{q_5} - S_{q_1} S_{q_2} S_{q_5} & -S_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} + C_{q_1} C_{q_4} & \cdots \\ -S_{q_2} C_{q_4} C_{q_5} - C_{q_2} S_{q_5} & S_{q_2} S_{q_4} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & (C_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} - S_{q_1} S_{q_4}) S_{q_5} + C_{q_1} S_{q_2} C_{q_5} & d_3 C_{q_1} S_{q_2} - l_2 S_{q_1} \\ \cdots & (S_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} + C_{q_1} S_{q_4}) S_{q_5} + S_{q_1} S_{q_2} C_{q_5} & d_3 S_{q_1} S_{q_2} + l_2 C_{q_1} \\ \cdots & -S_{q_2} C_{q_4} S_{q_5} + C_{q_2} C_{q_5} & d_3 C_{q_2} \\ \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

►  $\mathbf{T}_0^6 = \mathbf{T}_0^5 \mathbf{A}_6 =$

$$\mathbf{T}_0^6 = \begin{bmatrix} [(C_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} - S_{q_1} S_{q_4}) C_{q_5} - C_{q_1} S_{q_2} S_{q_5}] C_{q_6} - (C_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} + S_{q_1} C_{q_4}) S_{q_6} & \cdots \\ [(S_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} + C_{q_1} S_{q_4}) C_{q_5} - S_{q_1} S_{q_2} S_{q_5}] C_{q_6} - (S_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} - C_{q_1} C_{q_4}) S_{q_6} & \cdots \\ (-S_{q_2} C_{q_4} C_{q_5} - C_{q_2} S_{q_5}) C_{q_6} + S_{q_2} S_{q_4} S_{q_6} & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \cdots & -[(C_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} - S_{q_1} S_{q_4}) C_{q_5} - C_{q_1} S_{q_2} S_{q_5}] S_{q_6} - (C_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} + S_{q_1} C_{q_4}) C_{q_6} & \cdots \\ \cdots & -[(S_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} + C_{q_1} S_{q_4}) C_{q_5} - S_{q_1} S_{q_2} S_{q_5}] S_{q_6} - (S_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} - C_{q_1} C_{q_4}) C_{q_6} & \cdots \\ \cdots & (S_{q_2} C_{q_4} C_{q_5} + C_{q_2} S_{q_5}) S_{q_6} + S_{q_2} S_{q_4} C_{q_6} & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{cc}
 (C_{q_1}C_{q_2}C_{q_4} - S_{q_1}S_{q_4})S_{q_5} + C_{q_1}S_{q_2}C_{q_5} & d_3C_{q_1}S_{q_2} - l_2S_{q_1} \\
 (S_{q_1}C_{q_2}C_{q_4} + C_{q_1}S_{q_4})S_{q_5} + S_{q_1}S_{q_2}C_{q_5} & d_3S_{q_1}S_{q_2} + l_2C_{q_1} \\
 -S_{q_2}C_{q_4}S_{q_5} + C_{q_2}C_{q_5} & d_3C_{q_2} \\
 0 & 1
 \end{array} \right]. \quad (\text{A.23})$$

### A.3. PUMA 560

Para obtener las matrices de paso  $\mathbf{A}_i$ , solo hay que sustituir los parámetros de la Tabla A.3 en (A.24)

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ S_{\theta_i}C_{\alpha_{i-1}} & C_{\theta_i}C_{\alpha_{i-1}} & -S_{\alpha_{i-1}} & -d_iS_{\alpha_{i-1}} \\ S_{\theta_i}S_{\alpha_{i-1}} & C_{\theta_i}S_{\alpha_{i-1}} & C_{\alpha_{i-1}} & d_iC_{\alpha_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

$i_i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$
1	$q_1$	0	0	$0^\circ$
2	$q_2$	$d_2$	0	$-90^\circ$
3	$q_3$	$d_3$	$a_2$	$0^\circ$
4	$q_4$	$d_4$	$a_3$	$90^\circ$
5	$q_5$	0	0	$-90^\circ$
6	$q_6$	0	0	$90^\circ$

Tabla A.3: Parámetros Denavit-Hartenberg modificado del robot PUMA 560.

► Para  $\mathbf{A}_1$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & -S_{q_1} & 0 & 0 \\ S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

► Para  $\mathbf{A}_2$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{q_2} & -S_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -S_{q_2} & -C_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

► Para  $\mathbf{A}_3$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_{q_3} & -S_{q_3} & 0 & a_2 \\ S_{q_3} & C_{q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

► Para  $\mathbf{A}_4$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_{q_4} & -S_{q_4} & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ S_{q_4} & C_{q_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

► Para  $\mathbf{A}_5$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} C_{q_5} & -S_{q_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_{q_5} & -C_{q_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

► Para  $\mathbf{A}_6$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_{q_6} & -S_{q_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_{q_6} & C_{q_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Las matrices de transformación homogénea son

►  $\mathbf{T}_0^1 = \mathbf{A}_1 =$

$$\mathbf{T}_0^1 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & -S_{q_1} & 0 & 0 \\ S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

►  $\mathbf{T}_0^2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 =$

$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{bmatrix} C_{q_1} C_{q_2} & -C_{q_1} S_{q_2} & -S_{q_1} & -d_2 S_{q_1} \\ S_{q_1} C_{q_2} & -S_{q_1} S_{q_2} & C_{q_1} & d_2 C_{q_1} \\ -S_{q_2} & -C_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

►  $\mathbf{T}_0^3 = \mathbf{T}_0^2 \mathbf{A}_3 =$

$$\mathbf{T}_0^3 = \begin{bmatrix} C_{q_1} C_{q_2+q_3} & -C_{q_1} S_{q_2+q_3} & -S_{q_1} & a_2 C_{q_1} C_{q_2} - S_{q_1} (d_2 + d_3) \\ S_{q_1} C_{q_2+q_3} & -S_{q_1} S_{q_2+q_3} & C_{q_1} & a_2 S_{q_1} C_{q_2} + C_{q_1} (d_2 + d_3) \\ -S_{q_2+q_3} & -C_{q_2+q_3} & 0 & -a_2 S_{q_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

►  $\mathbf{T}_0^4 = \mathbf{T}_0^3 \mathbf{A}_4 =$

$$\mathbf{T}_0^4 = \begin{bmatrix} C_{q_1} C_{q_2+q_3} C_{q_4} - S_{q_1} S_{q_4} & -C_{q_1} C_{q_2+q_3} S_{q_4} - S_{q_1} C_{q_4} & C_{q_1} S_{q_2+q_3} & \mathbf{a} \\ S_{q_1} C_{q_2+q_3} C_{q_4} + C_{q_1} S_{q_4} & -S_{q_1} C_{q_2+q_3} S_{q_4} + C_{q_1} C_{q_4} & S_{q_1} S_{q_2+q_3} & \mathbf{b} \\ -S_{q_2+q_3} C_{q_4} & S_{q_2+q_3} S_{q_4} & C_{q_2+q_3} & \mathbf{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

►  $\mathbf{T}_0^5 = \mathbf{T}_0^4 \mathbf{A}_5 =$

$$\mathbf{T}_0^5 = \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{g} & \mathbf{j} & \mathbf{a} \\ \mathbf{e} & \mathbf{h} & \mathbf{k} & \mathbf{b} \\ \mathbf{f} & \mathbf{i} & \mathbf{l} & \mathbf{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

►  $\mathbf{T}_0^6 = \mathbf{T}_0^5 \mathbf{A}_6 =$

$$\mathbf{T}_0^6 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}C_{q_6} + \mathbf{j}S_{q_6} & -\mathbf{d}S_{q_6} + \mathbf{j}C_{q_6} & -\mathbf{g} & \mathbf{a} \\ \mathbf{e}C_{q_6} + \mathbf{k}S_{q_6} & -\mathbf{e}S_{q_6} + \mathbf{k}C_{q_6} & -\mathbf{h} & \mathbf{b} \\ \mathbf{f}C_{q_6} + \mathbf{l}S_{q_6} & -\mathbf{f}S_{q_6} + \mathbf{l}C_{q_6} & -\mathbf{i} & \mathbf{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= C_{q_1}(a_2C_{q_2} + a_3C_{q_2+q_3} + d_4S_{q_2+q_3}) - S_{q_1}(d_2 + d_3), \\
 \mathbf{b} &= S_{q_1}(a_2C_{q_2} + a_3C_{q_2+q_3} + d_4S_{q_2+q_3}) + C_{q_1}(d_2 + d_3), \\
 \mathbf{c} &= -a_2S_{q_2} - a_3S_{q_2+q_3} + d_4C_{q_2+q_3}, \\
 \mathbf{d} &= (C_{q_1}C_{q_2+q_3}C_{q_4} - S_{q_1}S_{q_4})C_{q_5} - C_{q_1}S_{q_2+q_3}S_{q_5}, \\
 \mathbf{e} &= (S_{q_1}C_{q_2+q_3}C_{q_4} + C_{q_1}S_{q_4})C_{q_5} - S_{q_1}S_{q_2+q_3}S_{q_5}, \\
 \mathbf{f} &= -S_{q_2+q_3}C_{q_4}C_{q_5} - C_{q_2+q_3}S_{q_5}, \\
 \mathbf{g} &= -(C_{q_1}C_{q_2+q_3}C_{q_4} - S_{q_1}S_{q_4})S_{q_5} - C_{q_1}S_{q_2+q_3}C_{q_5}, \\
 \mathbf{h} &= -(S_{q_1}C_{q_2+q_3}C_{q_4} + C_{q_1}S_{q_4})S_{q_5} - S_{q_1}S_{q_2+q_3}C_{q_5}, \\
 \mathbf{i} &= S_{q_2+q_3}C_{q_4}S_{q_5} - C_{q_2+q_3}C_{q_5}, \\
 \mathbf{j} &= -C_{q_1}C_{q_2+q_3}S_{q_4} - S_{q_1}C_{q_4}, \\
 \mathbf{k} &= -S_{q_1}C_{q_2+q_3}S_{q_4} + C_{q_1}C_{q_4}, \\
 \mathbf{l} &= S_{q_2+q_3}S_{q_4}.
 \end{aligned}$$

De acuerdo a la ecuación (A.6), la ecuación (A.36) corresponde a la cinemática directa del robot PUMA 560, necesaria para obtener la posición y orientación del efector final.

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}C_{q_6} + \mathbf{j}S_{q_6} & -\mathbf{d}S_{q_6} + \mathbf{j}C_{q_6} & -\mathbf{g} & \mathbf{a} \\ \mathbf{e}C_{q_6} + \mathbf{k}S_{q_6} & -\mathbf{e}S_{q_6} + \mathbf{k}C_{q_6} & -\mathbf{h} & \mathbf{b} \\ \mathbf{f}C_{q_6} + \mathbf{l}S_{q_6} & -\mathbf{f}S_{q_6} + \mathbf{l}C_{q_6} & -\mathbf{i} & \mathbf{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

## Anexo B

# Jacobiano

Considerando un manipulador  $n$ -enlaces con variables articulares  $q_1, \dots, q_n$ , la matriz de transformación del marco del efector final al marco base está denotado como

$$T_0^n(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} R_0^n(\mathbf{q}) & o_0^n(\mathbf{q}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$  es el vector de variables articulares. A medida que el robot se mueve, las variables articulares  $q_i$  y la posición  $o_0^n$  y orientación  $R_0^n$  del efector final son funciones de tiempo. El objetivo es relacionar la velocidad lineal y angular del efector final al vector de velocidad articulares.

$$v_0^n = \dot{o}_0^n, \quad (\text{B.2})$$

donde  $v_0^n$  es el vector de velocidad lineal del efector final.

$$\omega_0^n = \dot{R}_0^n (R_0^n)^T, \quad (\text{B.3})$$

donde  $\omega_0^n$  es el vector de velocidad angular del efector final. Se pueden expresar de la siguiente forma

$$v_0^n = J_v \dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{B.4})$$

$$\omega_0^n = J_\omega \dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{B.5})$$

donde  $J_v$  y  $J_\omega$  son matrices  $3 \times n$ . Las ecuaciones B.4 y B.5 se pueden escribir juntas como

$$\begin{bmatrix} v_0^n \\ \omega_0^n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_0^n(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{B.6})$$

donde  $\mathbf{J}_0^n(\mathbf{q})$  es llamado Jacobiano.

Ahora la matriz jacobiana del robot para un punto  $\mathbf{p}$  se representa como

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

donde,

$$\mathbf{J}_{v_i} = \begin{cases} \mathbf{z}_{i-1} & \text{Prismática} \\ \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{o}_n - \mathbf{o}_{i-1}) & \text{Rotacional} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{J}_{\omega_i} = \begin{cases} \vec{0} & \text{Prismática} \\ \mathbf{z}_{i-1} & \text{Rotacional} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

donde  $n$  es la cantidad de articulaciones y  $\vec{0}$  es un vector fila de  $3 \times 1$  de ceros. El origen  $\mathbf{o}_i$  y el eje  $\mathbf{z}_i$  corresponden a los tres primeros elementos de la tercera y cuarta columna de la matriz  $\mathbf{T}_0^i$  respectivamente.

## B.1. SCARA

Aplicando las ecuaciones (B.8) y (B.9), la matriz jacobiana del robot SCARA para el punto  $\mathbf{p}$  queda expresada de la siguiente forma

$$\mathbf{J}_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{o}_4 - \mathbf{o}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{o}_4 - \mathbf{o}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{o}_4 - \mathbf{o}_2) & \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \vec{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

donde,

$$\mathbf{o}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{o}_1 = \begin{bmatrix} l_1 C_{q_1} \\ l_1 S_{q_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{o}_2 = \begin{bmatrix} l_1 C_{q_1} + l_2 C_{q_1+q_2} \\ l_1 S_{q_1} + l_2 S_{q_1+q_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{o}_3 = \begin{bmatrix} l_1 C_{q_1} + l_2 C_{q_1+q_2} \\ l_1 S_{q_1} + l_2 S_{q_1+q_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{o}_4 = \begin{bmatrix} l_1 C_{q_1} + l_2 C_{q_1+q_2} \\ l_1 S_{q_1} + l_2 S_{q_1+q_2} \\ d_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si se sustituyen los orígenes  $\mathbf{o}_i$  y los ejes  $\mathbf{z}_i$  en la matriz jacobiana y se realizan las operaciones correspondientes, finalmente se obtiene la matriz jacobiana que relaciona la velocidad lineal y angular del efector final.

$$\mathbf{J}_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 S_{q_1} - l_2 S_{q_1+q_2} & -l_2 S_{q_1+q_2} & 0 & 0 \\ l_1 C_{q_1} + l_2 C_{q_1+q_2} & l_2 C_{q_1+q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

## B.2. Stanford

Aplicando las ecuaciones (B.8) y (B.9), la matriz jacobiana del robot Stanford para el punto  $\mathbf{p}$  queda expresada de la siguiente forma

$$\mathbf{J}_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_1) & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_3) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_4) & \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_5) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \vec{0} & \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_5 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

donde,

$$\mathbf{o}_0 = \mathbf{o}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{o}_2 = \begin{bmatrix} -l_2 S_{q_1} \\ l_2 C_{q_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{o}_3 = \mathbf{o}_4 = \mathbf{o}_5 = \mathbf{o}_6 = \begin{bmatrix} d_3 C_{q_1} S_{q_2} - l_2 S_{q_1} \\ d_3 S_{q_1} S_{q_2} + l_2 C_{q_1} \\ d_3 C_{q_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -S_{q_1} \\ C_{q_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} C_{q_1} S_{q_2} \\ S_{q_1} S_{q_2} \\ C_{q_2} \end{bmatrix}, \mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} -C_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} - S_{q_1} C_{q_4} \\ -S_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} + C_{q_1} C_{q_4} \\ S_{q_2} S_{q_4} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_5 = \mathbf{z}_6 = \begin{bmatrix} (C_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} - S_{q_1} S_{q_4}) S_{q_5} + C_{q_1} S_{q_2} C_{q_5} \\ (S_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} + C_{q_1} S_{q_4}) S_{q_5} + S_{q_1} S_{q_2} C_{q_5} \\ -S_{q_2} C_{q_4} S_{q_5} + C_{q_2} C_{q_5} \end{bmatrix}.$$

Si se sustituyen los orígenes  $\mathbf{o}_i$  y los ejes  $\mathbf{z}_i$  en la matriz jacobiana y se realizan las operaciones correspondientes, finalmente se obtiene la matriz jacobiana que relaciona la velocidad lineal y angular del efector final.

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -d_3 S_{q_1} S_{q_2} - l_2 C_{q_1} & d_3 C_{q_1} C_{q_2} & C_{q_1} S_{q_2} & 0 & \cdots & \cdots \\ d_3 C_{q_1} S_{q_2} - l_2 S_{q_1} & d_3 S_{q_1} C_{q_2} & S_{q_1} S_{q_2} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & -d_3 S_{q_2} & C_{q_2} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & -S_{q_1} & 0 & C_{q_1} S_{q_2} & \cdots & \cdots \\ 0 & C_{q_1} & 0 & S_{q_1} S_{q_2} & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & C_{q_2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & -C_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} - S_{q_1} C_{q_4} & (C_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} - S_{q_1} S_{q_4}) S_{q_5} + C_{q_1} S_{q_2} C_{q_5} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & -S_{q_1} C_{q_2} S_{q_4} + C_{q_1} C_{q_4} & (S_{q_1} C_{q_2} C_{q_4} + C_{q_1} S_{q_4}) S_{q_5} + S_{q_1} S_{q_2} C_{q_5} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & S_{q_2} S_{q_4} & -S_{q_2} C_{q_4} S_{q_5} + C_{q_2} C_{q_5} & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

### B.3. PUMA 560

Aplicando las ecuaciones (B.8) y (B.9), la matriz jacobiana del robot PUMA 560 para el punto  $\mathbf{p}$  queda expresada de la siguiente forma

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_2) & \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_3) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_4) & \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_5) & \mathbf{z}_6 \times (\mathbf{o}_6 - \mathbf{o}_6) \\ \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_5 & \mathbf{z}_6 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

donde,

$$\mathbf{o}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{o}_2 = \begin{bmatrix} -d_2 S_{q_1} \\ d_2 C_{q_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{o}_3 = \begin{bmatrix} a_2 C_{q_1} C_{q_2} - S_{q_1} (d_2 + d_3) \\ a_2 S_{q_1} C_{q_2} + C_{q_1} (d_2 + d_3) \\ -a_2 S_{q_2} \end{bmatrix}, \mathbf{o}_4 = \mathbf{o}_5 = \mathbf{o}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} -S_{q_1} \\ C_{q_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} C_{q_1} S_{q_2+q_3} \\ S_{q_1} S_{q_2+q_3} \\ C_{q_2+q_3} \end{bmatrix}, \mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{l} \end{bmatrix}, \mathbf{z}_6 = \begin{bmatrix} -\mathbf{g} \\ -\mathbf{h} \\ -\mathbf{i} \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{l}$ , se encuentran descritas en el Anexo A. Si se sustituyen los orígenes  $\mathbf{o}_i$  y los ejes  $\mathbf{z}_i$  en la matriz jacobiana y se realizan las operaciones correspondientes, finalmente se obtiene

la matriz jacobiana que relaciona la velocidad lineal y angular del efector final.

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{b} & C_{q_1} \mathbf{c} & C_{q_1}(-a_3 S_{q_2+q_3} + d_4 C_{q_2+q_3}) & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{a} & S_{q_1} \mathbf{c} & S_{q_1}(-a_3 S_{q_2+q_3} + d_4 C_{q_2+q_3}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 C_{q_2} - a_3 C_{q_2+q_3} - d_4 S_{q_2+q_3} & -a_3 C_{q_2+q_3} - d_4 S_{q_2+q_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{q_1} & -S_{q_1} & C_{q_1} S_{q_2+q_3} & \mathbf{j} & -\mathbf{g} \\ 0 & C_{q_1} & C_{q_1} & S_{q_1} S_{q_2+q_3} & \mathbf{k} & -\mathbf{h} \\ 1 & 0 & 0 & C_{q_2+q_3} & \mathbf{l} & -\mathbf{i} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

## Anexo C

# Trayectorias

En este anexo se presentan la forma de las trayectorias que se utilizaron para las articulaciones de cada manipulador, dichas trayectorias están expresadas en las siguientes ecuaciones

### C.1. Tipo senos, cosenos y exponenciales

$$q_d(t) = a_0 \cos(t)[e^{\cos(t)} - 2\cos(4t)] + a_1, \quad (\text{C.1})$$

$$q_d(t) = q_{in} + \left(\frac{q_f - q_{in}}{2}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_f}\right)\right], \quad (\text{C.2})$$

$$q_d(t) = b_0 + b_1(1 - e^{-b_3 t^3}) + b_2(1 - e^{-b_3 t^3})\sin(b_4 t), \quad (\text{C.3})$$

$$q_d(t) = k_0 \sin(k_1 t) + k_2 \cos(k_3 t), \quad (\text{C.4})$$

$$q_d(t) = c_0 + c_1 \sin(\pi t) + c_2 \sin(2\pi t) + c_3 \sin(3\pi t) + c_4 \sin(4\pi t), \quad (\text{C.5})$$

$$q_d(t) = j_0 e^{j_1 t} + j_2 \sin(j_3 t). \quad (\text{C.6})$$

Estas trayectorias presentan las siguientes características:

- Incorpora términos que crecen suavemente para mantener al robot en un estado de operación sin saturar los actuadores.
- Presenta términos tipo escalón de pequeña magnitud para que sea posible mostrar la respuesta transitoria de los controladores.
- Incluye términos de tipo senoidal para evaluar la respuesta ante señales periódicas relativamente rápidas, donde las no linealidades de la dinámica del robot son realmente importantes.

La magnitud y frecuencia de la señal periódica debe escogerse con el debido cuidado para evitar, tanto saturaciones de par en los actuadores como saturaciones de velocidad angular en los mismos. La evolución de la dinámica del robot a lo largo de las trayectorias deseadas debe demandar pares y velocidades admisibles en los actuadores de las articulaciones para que sea factible realizar el movimiento deseado.

## C.2. Cinemática Inversa

La solución de la cinemática inversa implica conocer los valores de cada articulación para que el robot alcance una posición y orientación deseada. Se deben de encontrar las ecuaciones que definen la cinemática inversa para la posición final, la cual es donde se colocará el efector final del manipulador. De la cinemática directa dada en el anexo A se observan acoplamientos angulares, esto hace complicado encontrar expresiones explícitas para encontrar los valores articulares a partir de posición y orientación deseadas. Para encontrar expresiones adicionales que permitan resolver acoplamientos entre ángulos, se premultiplica la matriz de transformación homogénea  $\mathbf{T}_0^n$  por matrices inversas para encontrar las ecuaciones de la cinemática inversa. Esto hace que la parte derecha de la ecuación esté libre de ángulos individuales, permitiendo encontrar elementos en términos de funciones trigonométricas, y de ahí la posibilidad de encontrar ángulos.

### C.2.1. SCARA

De la cinemática directa del robot SCARA

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{q_1+q_2+q_3} & -S_{q_1+q_2+q_3} & 0 & l_1C_{q_1} + l_2C_{q_1+q_2} \\ S_{q_1+q_2+q_3} & C_{q_1+q_2+q_3} & 0 & l_1S_{q_1} + l_2S_{q_1+q_2} \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

se obtiene de manera directa la ecuación para  $d_4$

$$d_4 = P_z, \quad (\text{C.8})$$

de la ecuación (C.7), considerando los elementos (1,4) y (2,4), obtenemos

$$\begin{aligned} P_x &= l_1C_{q_1} + l_2C_{q_1+q_2}, \\ P_y &= l_1S_{q_1} + l_2S_{q_1+q_2}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

se elevan al cuadrado, se suman de acuerdo con el Teorema de Pitágoras, se aplican algunas propiedades trigonométricas y despejando para  $C_{q_2}$ , obtenemos

$$C_{q_2} = \frac{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}, \quad (\text{C.10})$$

de la siguiente propiedad despejamos para  $S_{q_2}$

$$C_{q_2}^2 + S_{q_2}^2 = 1 \rightarrow S_{q_2} = \pm\sqrt{1 - C_{q_2}^2}, \quad (\text{C.11})$$

$$\text{Si } \tan\theta = \frac{\text{Sin}\theta}{\text{Cos}\theta} \quad \therefore \quad \tan_{q_2} = \frac{\pm\sqrt{1 - C_{q_2}^2}}{\frac{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}}. \quad (\text{C.12})$$

Finalmente la solución para  $q_2$  es

$$q_2 = \tan^{-1} \frac{\pm\sqrt{1 - C_{q_2}^2} 2l_1l_2}{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}. \quad (\text{C.13})$$

Para obtener  $q_1$  se premultiplica  $[\mathbf{T}_0^1]^{-1}$  a la ecuación (C.7),

$$\begin{bmatrix} n_x C_{q_1} + n_y S_{q_1} & o_x C_{q_1} + o_y S_{q_1} & a_x C_{q_1} + a_y S_{q_1} & P_x C_{q_1} + P_y S_{q_1} - l_1 \\ -n_x S_{q_1} + n_y C_{q_1} & -o_x S_{q_1} + o_y C_{q_1} & -a_x S_{q_1} + a_y C_{q_1} & -P_x S_{q_1} + P_y C_{q_1} \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{q_2+q_3} & -S_{q_2+q_3} & 0 & l_2 C_{q_2} \\ S_{q_2+q_3} & C_{q_2+q_3} & 0 & l_2 S_{q_2} \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

de (C.14) tomamos los elementos (1, 4) y (2, 4) tenemos

$$C_{q_1} P_x + S_{q_1} P_y - l_1 = l_2 C_{q_2}, \quad (\text{C.15})$$

$$-S_{q_1} P_x + C_{q_1} P_y = l_2 S_{q_2}, \quad (\text{C.16})$$

dividimos (C.16) entre (C.15), obteniendo:

$$\frac{-S_{q_1} P_x + C_{q_1} P_y}{C_{q_1} P_x + S_{q_1} P_y} = \frac{l_2 S_{q_2}}{l_1 + l_2 C_{q_2}}. \quad (\text{C.17})$$

Multiplicamos al numerador y denominador de la parte izquierda de la ecuación (C.17) por  $\frac{1}{C_{q_1} P_x}$  obteniendo

$$\frac{\frac{P_y}{P_x} - \frac{S_{q_1}}{C_{q_1}}}{1 - \frac{S_{q_1} P_y}{C_{q_1} P_x}} = \frac{l_2 S_{q_2}}{l_1 + l_2 C_{q_2}}. \quad (\text{C.18})$$

$$\text{Si } \frac{P_y}{P_x} = \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{P_y}{P_x}\right)\right) \quad \text{y} \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta,$$

entonces la ecuación (C.17) queda de la siguiente forma

$$\frac{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{P_y}{P_x}\right)\right) - \tan_{q_1}}{1 + \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{P_y}{P_x}\right)\right) \tan_{q_1}} = \frac{l_2 S_{q_2}}{l_1 + l_2 C_{q_2}}, \quad (\text{C.19})$$

aplicando la siguiente identidad trigonométrica

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)},$$

después de algunas manipulaciones algebraicas, la solución para  $q_1$  es

$$q_1 = \tan^{-1}\left(\frac{P_y}{P_x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{l_2 S_{q_2}}{l_1 + l_2 C_{q_2}}\right), \quad (\text{C.20})$$

de (C.7) igualamos y dividimos los elementos (2, 1) y (1, 1) para obtener  $q_3$

$$q_3 = \tan^{-1}\frac{n_y}{n_x} - q_1 - q_2. \quad (\text{C.21})$$

### C.2.2. Stanford

De la cinemática directa del robot Stanford tenemos

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_0^6, \quad (\text{C.22})$$

se premultiplica por  $[\mathbf{T}_0^1]^{-1}$ , obteniendo el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} n_x C_{q_1} + n_y S_{q_1} & o_x C_{q_1} + o_y S_{q_1} & a_x C_{q_1} + a_y S_{q_1} & P_x C_{q_1} + P_y S_{q_1} \\ -n_z & -o_z & -a_z & -P_z \\ -n_x S_{q_1} + n_y C_{q_1} & -o_x S_{q_1} + o_y C_{q_1} & -a_x S_{q_1} + a_y C_{q_1} & -P_x S_{q_1} + P_y C_{q_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_{q_2} C_{q_4} C_{q_5} - S_{q_2} S_{q_5}) C_{q_6} - C_{q_2} S_{q_4} S_{q_6} & -(C_{q_2} C_{q_4} C_{q_5} - S_{q_2} S_{q_5}) S_{q_6} - C_{q_2} S_{q_4} C_{q_6} & \cdots \\ (S_{q_2} C_{q_4} C_{q_5} + C_{q_2} S_{q_5}) C_{q_6} - S_{q_2} S_{q_4} S_{q_6} & -(S_{q_2} C_{q_4} C_{q_5} + C_{q_2} S_{q_5}) S_{q_6} - S_{q_2} S_{q_4} C_{q_6} & \cdots \\ S_{q_4} C_{q_5} C_{q_6} + C_{q_4} S_{q_6} & -S_{q_4} C_{q_5} S_{q_6} + C_{q_4} C_{q_6} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & C_{q_2} C_{q_4} S_{q_5} + S_{q_2} C_{q_5} & d_3 S_{q_2} \\ \cdots & S_{q_2} C_{q_4} S_{q_5} - C_{q_2} C_{q_5} & -d_3 C_{q_2} \\ \cdots & S_{q_4} S_{q_5} & l_2 \\ \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.23})$$

Igualamos los términos (3,4) tenemos

$$-P_x S_{q_1} + P_y C_{q_1} = l_2, \quad (\text{C.24})$$

$$P_x = r \cos \phi, \quad (\text{C.25})$$

$$P_y = r \sin \phi, \quad (\text{C.26})$$

dividimos  $P_y$  entre  $P_x$ ,

$$\phi = \tan^{-1} \frac{P_y}{P_x}, \quad (\text{C.27})$$

sustituimos (C.25) y (C.26) en (C.24), para obtener:

$$\sin(\phi - q_1) = l_2/r, \quad (\text{C.28})$$

si  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \therefore \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ , aplicando esta propiedad

$$\cos(\phi - q_1) = \sqrt{1 - (l_2/r)^2} \quad (\text{C.29})$$

dividimos las ecuaciones (C.28) entre (C.29) para despejar  $q_1$ , la solución para la primera articulación es

$$q_1 = \tan^{-1} \left( \frac{P_y}{P_x} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{l_2}{\pm \sqrt{r^2 - l_2^2}} \right). \quad (\text{C.30})$$

Ahora, de la ecuación (C.23) igualando los términos (1, 4) y 2, 4 de ambos lados, tenemos:

$$P_x C_{q_1} + P_y S_{q_1} = d_3 S_{q_2}, \quad (\text{C.31})$$

$$-P_z = -d_3 C_{q_2}, \quad (\text{C.32})$$

se multiplica la ecuación (C.32) por  $-1$ , y se dividen las ecuaciones anteriores para obtener la solución para  $q_2$

$$q_2 = \tan^{-1} \left( \frac{P_x C_{q_1} + P_y S_{q_1}}{P_z} \right). \quad (\text{C.33})$$

De la ecuación (C.22) se premultiplica ambos lados por  $\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1}$ , el resultado da

$$\begin{bmatrix} n_x C_{q_1} C_{q_2} + n_y S_{q_1} C_{q_2} - n_z S_{q_2} & o_x C_{q_1} C_{q_2} + o_y S_{q_1} C_{q_2} - o_z S_{q_2} & \cdots \\ -n_x S_{q_1} + n_y C_{q_1} & -o_x S_{q_1} + o_y C_{q_1} & \cdots \\ n_x C_{q_1} S_{q_2} + n_y S_{q_1} S_{q_2} + n_z C_{q_2} & o_x C_{q_1} S_{q_2} + o_y S_{q_1} S_{q_2} + o_z C_{q_2} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & a_x C_{q_1} C_{q_2} + a_y S_{q_1} C_{q_2} - a_z S_{q_2} & P_x C_{q_1} C_{q_2} + P_y S_{q_1} C_{q_2} - P_z S_{q_2} \\ \cdots & -a_x S_{q_1} + a_y C_{q_1} & -P_x S_{q_1} + P_y C_{q_1} + l_2 \\ \cdots & a_x C_{q_1} S_{q_2} + a_y S_{q_1} S_{q_2} + a_z C_{q_2} & P_x C_{q_1} S_{q_2} + P_y S_{q_1} S_{q_2} + P_z C_{q_2} \\ \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{q_4} C_{q_5} C_{q_6} - S_{q_4} S_{q_6} & -C_{q_4} C_{q_5} S_{q_6} - S_{q_4} C_{q_6} & C_{q_4} S_{q_5} & 0 \\ S_{q_4} C_{q_5} C_{q_6} + C_{q_4} S_{q_6} & -S_{q_4} C_{q_5} S_{q_6} + C_{q_4} C_{q_6} & S_{q_4} S_{q_5} & 0 \\ -S_{q_5} C_{q_6} & S_{q_5} S_{q_6} & C_{q_5} & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.34})$$

ahora bien, igualamos los elementos (3, 4) y tenemos directamente la solución para  $d_3$

$$d_3 = P_x C_{q_1} S_{q_2} + P_y S_{q_1} S_{q_2} + P_z C_{q_2}. \quad (\text{C.35})$$

Para obtener  $q_4$  igualamos los términos (1, 3) y 2, 3 de (C.34), obteniendo

$$a_x C_{q_1} C_{q_2} + a_y S_{q_1} C_{q_2} - a_z S_{q_2} = C_{q_4} S_{q_5}, \quad (\text{C.36})$$

$$-a_x S_{q_1} + a_y C_{q_1} = S_{q_4} S_{q_5}. \quad (\text{C.37})$$

Se divide la ecuación (C.37) entre (C.36) para poder despejar a  $q_4$  de la siguiente manera

$$q_4 = \tan^{-1} \left( \frac{a_y C_{q_1} - a_x S_{q_1}}{C_{q_2} (a_x C_{q_1} + a_y S_{q_1}) - a_z S_{q_2}} \right). \quad (\text{C.38})$$

Para obtener la solución de  $q_5$  se premultiplica  $\mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1}$  en la ecuación (C.22) y del resultado igualamos los términos (1, 3) y (2, 3) se obtiene:

$$q_5 = \tan^{-1} \left( \frac{C_{q_4} [C_{q_2} (a_x C_{q_1} + a_y S_{q_1}) - a_z S_{q_2}] - S_{q_4} (a_x S_{q_1} - a_y C_{q_1})}{S_{q_2} (a_x C_{q_1} + a_y S_{q_1}) + a_z C_{q_2}} \right). \quad (\text{C.39})$$

Para obtener la solución de  $q_6$  se premultiplica  $\mathbf{A}_5^{-1} \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1}$  en la ecuación (C.22) y del resultado igualamos los términos (1, 2) y (2, 2) obteniendo:

$$q_6 = \tan^{-1} \left( \frac{S_{q_5} [S_{q_2} (o_y S_{q_1} + o_x C_{q_1}) + o_z C_{q_2}] \cdots}{C_{q_4} (o_y C_{q_1} - o_x S_{q_1})} \cdots \frac{-C_{q_5} \{C_{q_4} [C_{q_2} (o_y S_{q_1} + o_x C_{q_1}) - o_z S_{q_2}] + S_{q_4} (o_y C_{q_1} - o_x S_{q_1})\}}{-S_{q_4} [C_{q_2} (o_y S_{q_1} + o_x C_{q_1}) - o_z S_{q_2}]} \right). \quad (\text{C.40})$$

**C.2.3. PUMA 560**

Usando la técnica de solución de Pieper, la cual consiste en desacoplar el robot y resolver dos problemas por separado, se muestra en [Anand, 1993], las expresiones para cada una de las posiciones articulares son las siguientes:

$$q_1 = \tan^{-1} \left( \frac{P_y}{P_x} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{g_2}{g_1} \right), \quad (\text{C.41})$$

$$q_2 = \tan^{-1} \left( \frac{-k_1}{k_2} \right) \pm \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - P_z^2}}{P_z} \right), \quad (\text{C.42})$$

$$q_3 = \tan^{-1} \left( \frac{d_4}{a_3} \right) \pm \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{a_3^2 + d_4^2 - KC^2}}{KC} \right), \quad (\text{C.43})$$

$$q_4 = \tan^{-1} \left( \frac{r_{33}S_{q_5}}{r_{13}S_{q_5}} \right), \quad (\text{C.44})$$

$$q_5 = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{r_{21}^2 + r_{22}^2}}{-r_{23}} \right), \quad (\text{C.45})$$

$$q_6 = \tan^{-1} \left( \frac{-r_{22}S_{q_5}}{r_{21}S_{q_5}} \right). \quad (\text{C.46})$$

## Anexo D

# Algoritmo de Sintonización de Cuckoo (CSA)

Los autores de [Yang y Deb, 2009] desarrollaron un algoritmo metaheurístico inspirado en la naturaleza llamado Búsqueda de Cuckoo. Se basa en el parasitismo de algunas especies de Cuckoo e involucra vuelos de Lévy en lugar de paseos aleatorios para ofrecer un algoritmo más eficiente en contraste con la Optimización de Enjambre de Partículas (PSO) y Algoritmos genéticos (GA) [Ma *et al.*, 2013]. Las principales reglas que rigen este algoritmo son

- Un Cuckoo dejó un huevo en otros nidos de especies de aves.
- Los mejores éxitos con pase de alta calidad para la próxima generación.
- Si un ave huésped descubre huevos extraños en el nido, el ave huésped puede construir otro nido cercano, abandonarlo e incluso descartar los huevos del nido.

Los parámetros y el pseudocódigo del Algoritmo de Búsqueda de Cuckoo se muestran en la Tabla D.1 y el Algoritmo 1, respectivamente.

<b>Parámetro</b>	<b>Valor</b>
Generaciones ( $n_g$ )	150
Nidos ( $n$ )	100
Tasa de descubrimiento ( $p_a$ )	0.25
Tamaño de paso ( $\alpha$ )	0.01

Tabla D.1: Parámetros para la simulación del Algoritmo de Búsqueda de Cuckoo

**Algorithm 1** Búsqueda de Cuckoo a través de los vuelos de Lévy

---

- 1: Inicialización  $n = 100$  nidos
- 2: **while**  $t < n_g$  **do**
- 3:     Elija un huevo de Cuckoo usando los vuelos de Lévy

$$x_{k+1}^i = x_k^i + \alpha \oplus \text{Lévy}(s, \lambda), \quad \alpha > 0, \quad (\text{D.1})$$

donde

$$\text{Lévy}(s, \lambda) = \frac{\lambda \Gamma(\lambda) \sin(\pi\lambda/2)}{\pi} \frac{1}{s^{1+\lambda}}, \quad s \gg s_0 > 0 \quad (\text{D.2})$$

y se evalúa su desempeño,  $F_i = \left\{ \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^m (\mathbf{q}_{d_n} - \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_{k+1}^i))^2}{m}} \right\}$

- 4:     Elige un huevo al azar y calcula su desempeño,  $F_j = \left\{ \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^m (\mathbf{q}_{d_n} - \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_{\text{rnd}}^i))^2}{m}} \right\}$
  - 5:     **if**  $F_i > F_j$  **then**
  - 6:         Reemplazar el  $j$ -ésimo huevo por el  $i$ -ésimo huevo
  - 7:         Una fracción ( $p_a = 0.25$ ) de los peores nidos son demolidos y reemplazados por nuevos nidos
  - 8:         Se conservan los nidos buenos (mejores soluciones)
  - 9:      $t \leftarrow t + 1$
-

## Anexo E

### Productos obtenidos



# FRACTIONAL-ORDER PASSIVITY-BASED ADAPTIVE CONTROLLER FOR A ROBOT MANIPULATOR TYPE SCARA

J. E. LAVÍN-DELGADO,\* S. CHÁVEZ-VÁZQUEZ,\* J. F. GÓMEZ-AGUILAR,<sup>†,§</sup>

G. DELGADO-REYES\* and M. A. RUÍZ-JAIMES<sup>‡</sup>

*\*Tecnológico Nacional de México/CENIDET  
Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira  
C. P. 62490 Cuernavaca, Morelos, México*

*†CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET  
Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira  
C. P. 62490 Cuernavaca, Morelos, México*

*‡Universidad Politécnica del Estado de Morelos/UPEMOR  
Boulevard Cuauhnáhuac No. 566, Col. Lomas del Texcal  
C. P. 62550 Jiutepec, Morelos, México*

*§jose.ga@cenidet.tecnm.mx*

Received December 19, 2019

Accepted February 3, 2020

Published June 13, 2020

## Abstract

In this paper, a novel fractional-order control strategy for the SCARA robot is developed. The proposed control is composed of  $PI^\nu$  and a fractional-order passivity-based adaptive controller, based on the Caputo–Fabrizio and Atangana–Baleanu derivatives, respectively; both controls are robust to external disturbances and change in the desired trajectory and effectively enhance the performance of robot manipulator. The fractional-order dynamic model of the robot manipulator is obtained by using the Euler–Lagrange formalism, as well as the model of the induction motors which are the actuators that drive their joints. Through simulations

---

<sup>§</sup>Corresponding author.

This is an Open Access article in the “Special Issue on Fractal and Fractional with Applications to Nature” published by World Scientific Publishing Company. It is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) License which permits use, distribution and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

# Bibliografía

- [Agrawal, 2002] Om P Agrawal. Formulation of euler–lagrange equations for fractional variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 272(1):368–379, 2002.
- [Anand, 1993] Sandeep Anand. *Software for control and dynamic simulation of Unimate PUMA 560 robot*. PhD thesis, Ohio University, 1993.
- [Armstrong *et al.*, 1986] Brian Armstrong, Oussama Khatib, y Joel Burdick. The explicit dynamic model and inertial parameters of the puma 560 arm. In *Proceedings. 1986 IEEE international conference on robotics and automation*, volume 3, pages 510–518. IEEE, 1986.
- [Atanacković *et al.*, 2008] TM Atanacković, Sanja Konjik, y S Pilipović. Variational problems with fractional derivatives: Euler–lagrange equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(9):095201, 2008.
- [Atangana y Gómez-Aguilar, 2018] Abdon Atangana y JF Gómez-Aguilar. Decolonisation of fractional calculus rules: breaking commutativity and associativity to capture more natural phenomena. *The European Physical Journal Plus*, 133(4):166, 2018.
- [Atangana y Owolabi, 2018] Abdon Atangana y Kolade M Owolabi. New numerical approach for fractional differential equations. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 13(1):3, 2018.
- [Baleanu *et al.*, 2012] Dumitru Baleanu, Kai Diethelm, y Juan J. Scalas, Enrico anda Trujillo. *Fractional calculus: models and numerical methods*, volume 3. World Scientific, 2012.
- [Baleanu y Fernández, 2018] Dumitru Baleanu y Arran Fernández. On some new properties of fractional derivatives with mittag-leffler kernel. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 59:444–462, 2018.
- [Baleanu y Trujillo, 2008] Dumitru Baleanu y Juan J Trujillo. On exact solutions of a class of fractional euler–lagrange equations. *Nonlinear Dynamics*, 52(4):331–335, 2008.
- [Bendary *et al.*, 2015] Fahmy Bendary, Kamel Elserafi, Reham Hassen, y Mahmoud Soliman. Trajectory tracking control for robot manipulator using fractional-order control. *organization*, 12:14, 2015.
- [Bendjedia *et al.*, 2014] M Bendjedia, KA Tehrani, y Y Azzouz. Design of rst and fractional order pid controllers for an induction motor drive for electric vehicle application. *IET Conference Proceedings. The Institution of Engeneering Technology*, 2014.

- [Bona y Indri, 2005] Basilio Bona y Marina Indri. Friction compensation in robotics: an overview. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4360–4367. IEEE, 2005.
- [Caputo y Fabrizio, 2015] Michele Caputo y Mauro Fabrizio. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13, 2015.
- [Coronel-Escamilla *et al.*, 2016] Antonio Coronel-Escamilla, José Francisco Gómez-Aguilar, Dumitru Baleanu, Ricardo Fabricio Escobar-Jiménez, Victor Hugo Olivares-Peregrino, y Arturo Abundez-Pliego. Formulation of euler-lagrange and hamilton equations involving fractional operators with regular kernel. *Advances in Difference Equations*, 2016(1):283, 2016.
- [Coronel-Escamilla *et al.*, 2018] A Coronel-Escamilla, Felipe Torres, JF Gómez-Aguilar, RF Escobar-Jiménez, y GV Guerrero-Ramírez. On the trajectory tracking control for an scara robot manipulator in a fractional model driven by induction motors with pso tuning. *Multibody System Dynamics*, 43(3):257–277, 2018.
- [Egeland y Gravdahl, 2002] Olav Egeland y Jan Tommy Gravdahl. *Modeling and simulation for automatic control*, volume 76. Marine Cybernetics Trondheim, Norway, 2002.
- [Garrappa, 2016] Roberto Garrappa. Grünwald–letnikov operators for fractional relaxation in havriliak–negami models. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 38:178–191, 2016.
- [Ghasemi *et al.*, 2018] Iman Ghasemi, Abolfazl Ranjbar Noei, y Jalil Sadati. Sliding mode based fractional-order iterative learning control for a nonlinear robot manipulator with bounded disturbance. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 40(1):49–60, 2018.
- [Gómez-Aguilar *et al.*, 2014] JF Gómez-Aguilar, R Razo-Hernández, y D Granados-Lieberman. A physical interpretation of fractional calculus in observables terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response. *Revista mexicana de física*, 60(1):32–38, 2014.
- [Gómez-Aguilar *et al.*, 2016] José Francisco Gómez-Aguilar, Victor Fabian Morales-Delgado, Marco Antonio Taneco-Hernández, Dumitru Baleanu, Ricardo Fabricio Escobar-Jiménez, y May-saa Mohamed Al Qurashi. Analytical solutions of the electrical RLC circuit via liouville–caputo operators with local and non-local kernels. *Entropy*, 18(8):402, 2016.
- [Gómez-Aguilar *et al.*, 2017] José Francisco Gómez-Aguilar, Abdon Atangana, y Victor Fabian Morales-Delgado. Electrical circuits RC, LC, and RL described by atangana–baleanu fractional derivatives. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 45(11):1514–1533, 2017.
- [Granja Oromas, 2014] María Victoria Granja Oromas. Modelación y análisis de la cinemática directa e inversa del manipulador stanford de seis grados de libertad. Technical report, Escuela Politécnica Nacional, 2014.
- [Guerrero-Ramirez y Tang, 2001] Gerardo Guerrero-Ramirez y Yu Tang. Motion control of rigid robots driven by current-fed induction motors. *Mechatronics*, 11(1):13–25, 2001.
- [Guo *et al.*, 2010] Xiwen Guo, Qunjing Wang, Cungang Hu, y Zhe Qian. Adaptive neural network tracking control of robot manipulators including motor dynamics: Dynamic surface backstepping methodology. In *2010 The 2nd International Conference on Industrial Mechatronics and Automation*, volume 1, pages 52–55. IEEE, 2010.

- [Haubold *et al.*, 2011] Hans J Haubold, Arak M Mathai, y Ram K Saxena. Mittag-leffler functions and their applications. *Journal of Applied Mathematics*, 2011, 2011.
- [Herzallah, 2014] Mohamed AE Herzallah. Notes on some fractional calculus operators and their properties. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 5(19):1–10, 2014.
- [Hsu, 2019] Chang-Hung Hsu. Fractional order pid control for reduction of vibration and noise on induction motor. *IEEE Transactions on Magnetics*, 55(11):1–7, 2019.
- [Jung, 2016] Seul Jung. Neuro-sliding mode control for robot manipulators. In *2016 16th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, pages 907–911. IEEE, 2016.
- [Kelly y Santibáñez, 2003] Rafael Kelly y Víctor Santibáñez. *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson educación, 2003.
- [Koeller, 1984] RC Koeller. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1984.
- [Kufieta, 2014] Katharina Kufieta. Force estimation in robotic manipulators: Modeling, simulation and experiments. *Department of Engineering Cybernetics NTNU Norwegian University of Science and Technology*, 2014.
- [Le *et al.*, 2019] Minh-Chi Le, Shun-Feng Su, Van-Truong Nguyen, Lee-Wei Chen, y Van-Yen Nguyen. Adaptive neural network controller-based chattering-free sliding mode for 6-dof industrial manipulators. In *2019 International Conference on System Science and Engineering (ICSSE)*, pages 75–80. IEEE, 2019.
- [Lewis *et al.*, 2003] Frank L Lewis, Darren M Dawson, y Chaouki T Abdallah. *Robot manipulator control: theory and practice*. CRC Press, 2003.
- [Ma *et al.*, 2013] Jieming Ma, TO Ting, Ka Lok Man, Nan Zhang, Sheng-Uei Guan, y Prudence WH Wong. Parameter estimation of photovoltaic models via cuckoo search. *Journal of applied mathematics*, 2013, 2013.
- [Marino *et al.*, 1993] Riccardo Marino, Sergei Peresada, y Paolo Valigi. Adaptive input-output linearizing control of induction motors. *IEEE Transactions on Automatic control*, 38(2):208–221, 1993.
- [Mehmood y Kavasseri, 2015] Chaudhry Arshad Mehmood y Rajesh G Kavasseri. On the use of fractional-order controllers for performance improvements in ac drives. *Electric power components and systems*, 43(5):485–490, 2015.
- [Miller y Ross, 1993] Kenneth S Miller y Bertram Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, 1993.
- [Mohammed *et al.*, 2016] Reham H Mohammed, Fahmy Bendary, y Kamel Elserafi. Trajectory tracking control for robot manipulator using fractional order-fuzzy-pid controller. *International Journal of Computer Applications*, 134(15):8887, 2016.
- [Mosquera y Vivas, 2006] Víctor Mosquera y Andrés Vivas. Robust control for a scara robot with parametric uncertainty. In *Proceedings of the International control conference, Glasgow*, 2006.

- [Nadda y Swarup, 2018] Sudhir Nadda y A. Swarup. Integral sliding mode control for position control of robotic manipulator. In *2018 5th International Conference on Signal Processing and Integrated Networks (SPIN)*, pages 639–642. IEEE, 2018.
- [Nikdel *et al.*, 2016] Nazila Nikdel, Mohammadali Badamchizadeh, Vahid Azimirad, y Mohammad Ali Nazari. Fractional-order adaptive backstepping control of robotic manipulators in the presence of model uncertainties and external disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(10):6249–6256, 2016.
- [Paul, 1981] Richard P Paul. *Robot manipulators: mathematics, programming, and control: the computer control of robot manipulators*. Richard Paul, 1981.
- [Podlubny, 1998] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
- [Rabah y Ladaci, 2016] Karima Rabah y Samir Ladaci. Fractional adaptive sliding mode control laws for fractional order chaotic systems synchronization. In *2016 17th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, pages 293–302. IEEE, 2016.
- [Rahmani y Belkheiri, 2016] Belkacem Rahmani y Mohammed Belkheiri. Robust adaptive control of robotic manipulators using neural networks: Application to a two link planar robot. In *2016 8th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC)*, pages 839–844. IEEE, 2016.
- [Reyes, 2011] Fernando Reyes. *Robótica-Control de robots manipuladores*. Alfaomega grupo editor, 2011.
- [Ross, 1977] Bertram Ross. Fractional calculus. *Mathematics Magazine*, 50(3):115–122, 1977.
- [Saleem *et al.*, 2018] Ashraf Saleem, Hisham Soliman, Serein Al-Ratrout, y Mostefa Mesbah. Design of a fractional order pid controller with application to an induction motor drive. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 26(5):2768–2778, 2018.
- [Schiessel *et al.*, 1995] H Schiessel, R Metzler, A Blumen, y TF Nonnenmacher. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions. *Journal of physics A: Mathematical and General*, 28(23):6567, 1995.
- [Si *et al.*, 2018] Yanna Si, Jiexin Pu, Bingtao Lu, y Lifan Sun. An improved adaptive neural network sliding mode method for tracking control. In *2018 Chinese Automation Congress (CAC)*, pages 3967–3972. IEEE, 2018.
- [Slotine y Li, 1987] Jean-Jacques E Slotine y Weiping Li. On the adaptive control of robot manipulators. *The international journal of robotics research*, 6(3):49–59, 1987.
- [Spong y Vidyasagar, 2008] Mark W Spong y Mathukumalli Vidyasagar. *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2008.
- [Spong, 1992] Mark W Spong. On the robust control of robot manipulators. *IEEE Transactions on automatic control*, 37(11):1782–1786, 1992.

- [Sun *et al.*, 2011] Tairen Sun, Hailong Pei, Yongping Pan, Hongbo Zhou, y Caihong Zhang. Neural network-based sliding mode adaptive control for robot manipulators. *Neurocomputing*, 74(14-15):2377–2384, 2011.
- [Tian-Zeng *et al.*, 2014] Li Tian-Zeng, Wang Yu, y Luo Mao-Kang. Control of fractional chaotic and hyperchaotic systems based on a fractional order controller. *Chinese Physics B*, 23(8):080501, 2014.
- [Tiwari *et al.*, 2015] Pyare Mohan Tiwari, S u Janardhanan, y Mashuq un Nabi. Rigid spacecraft attitude control using adaptive integral second order sliding mode. *Aerospace Science and Technology*, 42:50–57, 2015.
- [Toufik y Atangana, 2017] Mekkaoui Toufik y Abdon Atangana. New numerical approximation of fractional derivative with non-local and non-singular kernel: Application to chaotic models. *The European Physical Journal Plus*, 132(10):444, 2017.
- [Vuong *et al.*, 2009] ND Vuong, Ang H Marcelo Jr, YP Li, y SY Lim. Improved dynamic identification of robotic manipulators in the linear region of dynamic friction. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(16):167–172, 2009.
- [Wei *et al.*, 2005] Li-Xin Wei, Li Yang, y Hong-Rui Wang. Adaptive neural network position/force control of robot manipulators with model uncertainties. In *2005 International Conference on Neural Networks and Brain*, volume 3, pages 1825–1830. IEEE, 2005.
- [Westerlund, 2000] Lars Westerlund. *The extended arm of man: a history of industrial robot*. Informationsförlaget, 2000.
- [Woodson *et al.*, 1992] Wesley E Woodson, Barry Tillman, y Peggy Tillman. *Human factors design handbook: information and guidelines for the design of systems, facilities, equipment, and products for human use*. 1992.
- [Yang y Deb, 2009] Xin-She Yang y Suash Deb. Cuckoo search via lévy flights. In *2009 World congress on nature & biologically inspired computing (NaBIC)*, pages 210–214. IEEE, 2009.



**TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO**

---

***cenidet***<sup>®</sup>  
Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico