



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

**Diseño de filtros fraccionarios y su aplicación en la detección de
características y reconstrucción de imágenes**

presentada por

Ing. Jonathan Diego Pereyra Guzmán

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis

Dr. José Francisco Gómez Aguilar

Cuernavaca, Morelos, México. Octubre de 2019.



"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor., 07/octubre/2019
No. de Oficio: DIE/132/2019
Asunto: Aceptación de documentos de tesis

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Jonathan Diego Pereyra Guzmán**, con número de control **M17CE064** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"Diseño de filtros fraccionarios y su aplicación en la detección de características y reconstrucción de imágenes"** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

CODIRECTOR DE TESIS

José Francisco Gómez

Dr. José Francisco Gómez Aguilar
Doctor en Física
Cédula profesional 09124781

REVISOR 1

[Signature]

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Doctora en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 9968714

REVISOR 2

[Signature]

Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 7534115

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera- Jefa del Departamento de Servicios Escolares

Estudiante
Expediente
MPS/Irr.



"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor.,

No. de Oficio:

Asunto:

8/octubre/2019

SAC/274/2019

Autorización de
impresión de tesis

ING. JONATHAN DIEGO PEREYRA GUZMÁN
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Diseño de filtros fraccionarios y su aplicación en la detección de características y reconstrucción de imágenes", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO


SEP TecNM
CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. Mtra. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr



Agradecimientos

A mis padres y hermano, que siempre estuvieron ahí para apoyarme, quienes me motivaron a seguir adelante, a quienes respeto y amo.

A mi asesor, Dr. José Francisco Gómez Aguilar quien me apoyo académicamente y me oriento en las dudas que surgieron durante el desarrollo de este trabajo de investigación.

A los integrantes del comité revisor: Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo y el Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez cuyos comentarios y observaciones fueron valiosos para el desarrollo de este trabajo de tesis.

De manera especial agradezco a Emmanuel quien me ayudo aportando tiempo, esfuerzo y conocimientos para el desarrollo de este trabajo.

A todos mis profesores de la maestría quienes compartieron sus conocimientos, así como su paciencia y comprensión para entrar en el mundo del control automático.

A mis amigos de la maestría con quienes compartí valiosos momentos. Pero sobre todo a mis amigos de generación, Erick, Zetina, Elizabeth, Diana, Christian, Juan, Eusebio y Henry quienes compartieron conmigo momentos difíciles y agradables.

Agradezco a la Lic. Lorena porque sin su ayuda y motivación, no podría graduarme, es una excelente amiga y gran persona.

A mis amigos, Armando y Bruno en quien encontré no solo una amistad si no una familia. A mi compañera de vida Andrea por su amor incondicional y de quien me siento muy orgullo y agradecido por su apoyo.

Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACYT) y al Tecnológico Nacional de México (TecNM) por el apoyo económico brindado para poder realizar y culminar mis estudios de maestría.

Finalmente, agradezco al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por darme la oportunidad de estudiar y prepararme, así como de tener un ambiente agradable de trabajo y una atención excelente en todo momento.

Resumen

En esta tesis se presentan dos algoritmos generalizados para la detección de bordes basados en el uso de operadores diferenciales fraccionarios y conformables aplicado a imágenes de naturaleza biomédica.

Los algoritmos propuestos son comparados con los operadores basados en gradiente como el de Roberts, Prewitt y Sobel, que son los más utilizados en la literatura. Además se generaliza el filtro de kernel Gaussiano, que es utilizado para obtener el gradiente Gaussiano conformable.

Para la generalización del detector de bordes fraccionario, se consideró la derivada de Caputo-Fabrizio con kernel no-singular, mientras que para el enfoque local se considera el uso de la derivada conformable de tipo Khalil.

Para la validación de los algoritmos, se utilizaron las siguientes métricas: el error cuadrático medio (MSE) y la relación señal-ruido (PSNR), estas nos permiten conocer el desempeño y robustez de los algoritmos de detección de bordes generalizados.

Finalmente, considerando los algoritmos de detección de bordes generalizados y el algoritmo de conteo de cajas, se obtiene la dimensión fractal, la cual es utilizada para calcular el área en centímetros cuadrados de una región de interés, en particular para nuestras imágenes, se calcula el área de diferentes tumores mostrados en las tomografías consideradas.

Los resultados obtenidos muestran que la generalización de los detectores de bordes fraccionarios y conformables permiten una mejor detección de regiones de interés en comparación con los detectores de bordes clásicos.

Abstract

In this thesis, two generalized algorithms for the detection of edges based on fractional and conformable differential operators are presented.

The generalization of the fractional edge detector is carried out by the Caputo-Fabrizio derivative with non-singular kernel. Meanwhile, the local approach formulation is carried out by the conformable derivative of the Khalil type.

The following metrics are used to validate the algorithms: the mean square error (MSE) and the signal-to-noise ratio (PSNR). These metrics allow us to know the performance and robustness of the generalized edge detection algorithms.

Finally, considering the algorithms of detection of generalized edges and the algorithm of box-counting, the fractal dimension is obtained. It is used to calculate the area in square centimeters of a region of interest. In particular, for our images, it is computed the area of different tumors.

The results show that the generalization of the fractional and conformable edge detectors allows better detection of regions of interest compared to the classic edge detectors.

Índice

Índice	IV
Índice de figuras	VI
Índice de tablas	X
1. Introducción	1
1.1. Estudio del estado del arte	2
1.2. Planteamiento del problema	6
1.3. Objetivo general	6
1.4. Objetivos específicos	7
1.5. Metas	7
1.6. Justificación	7
1.7. Hipótesis	7
1.8. Alcance	7
1.9. Organización del documento	8
2. Marco Teórico	9
2.1. Gradiente de una imagen.	9
2.2. Operadores diferenciales	11
2.2.1. Operador de Roberts	11
2.2.2. Operador de Prewitt	11
2.2.3. Operador de Sobel	12
2.3. Filtro de Kernel Gaussiano	12
2.4. Cálculo fraccionario y conformable	12
2.4.1. Cálculo Fraccionario	12
2.4.2. Cálculo Conformable	14
3. Resultados	15
3.1. Algoritmos de detección de bordes clásicos	15
3.2. Operadores diferenciales aplicados a imágenes médicas	18
3.3. Métricas	22
3.4. Detector de bordes utilizando la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio	23

3.5. Algoritmos de detección de bordes fraccionario a imágenes con ruido tipo Gaussiano y tipo sal y pimienta	29
3.5.1. Ruido tipo Gaussiano	29
3.5.2. Ruido tipo sal y pimienta	34
3.6. Matriz Hessiana con derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio	39
3.7. Gradiente Gaussiano Conformable	49
3.8. Matriz Hessiana conformable de tipo Khalil	54
3.9. Dimensión fractal	62
3.9.1. Caso 1	64
3.9.2. Caso 2	71
3.9.3. Caso 3	76
3.9.4. Caso 4	81
4. Conclusiones	87
4.1. Trabajos Futuros	87
Bibliografía	89
Anexos	95
A. Pseudocódigos	96

Índice de figuras

1.1. Estado del arte	2
2.1. Representación bidimensional de una imagen en escala de grises.	9
3.1. Imagen obtenida de la base de segmentación de Berkeley [68].	15
3.2. Operador diferencial de Roberts.	16
3.3. Operador diferencial de Prewitt.	16
3.4. Operador de diferencial de Sobel.	17
3.5. Algoritmo de detección de bordes de Canny.	17
3.6. Operador Laplaciano del Gaussiano	18
3.7. Imagen médica correspondiente a una estenosis.	19
3.8. Operador diferencial de Roberts.	19
3.9. Operador diferencial de Prewitt.	20
3.10. Operador diferencial de Sobel.	20
3.11. Algoritmo de detección de Canny.	21
3.12. Operador Laplaciano del Gaussiano	21
3.13. Representación digital de una imagen en 2D obtenida de [81]	23
3.14. Detector de bordes utilizando la derivada de Caputo-Fabrizio	25
3.15. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.6$	26
3.16. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.8$	26
3.17. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.9$	26
3.18. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.6$	27
3.19. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.8$	27
3.20. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.9$	28
3.21. Imagen original, Mariposa	29
3.22. Imagen original con ruido tipo gaussiano	30
3.23. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el operador de Roberts	30
3.24. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el operador de Prewitt	31
3.25. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el operador de Sobel	31
3.26. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el algoritmo de Canny	32
3.27. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el algoritmo Laplaciano del Gaussiano	32
3.28. Imagen original con ruido tipo gaussiano y detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$	33
3.29. Imagen original con ruido tipo gaussiano y detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$	33
3.30. Imagen original con ruido tipo gaussiano y detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$	34

3.31. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta	35
3.32. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el operador de Roberts	35
3.33. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el operador de Prewitt	36
3.34. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el operador de Sobel	36
3.35. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el algoritmo de Canny	37
3.36. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el algoritmo Laplaciano del Gaussiano	37
3.37. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$	38
3.38. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$	38
3.39. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$	39
3.40. Matriz Hessiana utilizando la derivada de Caputo-Fabrizio	41
3.41. Lambda 1 (λ_1)	42
3.42. Lambda 2 (λ_2)	42
3.43. Lambda 1 (λ_1)	43
3.44. Lambda 2 (λ_2)	43
3.45. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_1 con $\alpha = 0.5$	44
3.46. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_2 con $\alpha = 0.5$	44
3.47. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_1 con $\alpha = 0.6$	45
3.48. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_2 con $\alpha = 0.6$	45
3.49. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_1 con $\alpha = 0.7$	46
3.50. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_2 con $\alpha = 0.7$	46
3.51. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_1 con $\alpha = 0.8$	47
3.52. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_2 con $\alpha = 0.8$	47
3.53. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_1 con $\alpha = 1$	48
3.54. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_2 con $\alpha = 1$	48
3.55. Gradiente Gaussiano conformable	50
3.56. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 0.5$	51
3.57. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 0.6$	51
3.58. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 0.7$	52
3.59. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 0.8$	52
3.60. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 0.9$	53
3.61. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 1$	53
3.62. Matriz Hessiana conformable	56
3.63. Hessiana λ_1 con $\alpha = 0.5$	57
3.64. Hessiana λ_2 con $\alpha = 0.5$	57
3.65. Hessiana λ_1 con $\alpha = 0.6$	58
3.66. Hessiana λ_2 con $\alpha = 0.6$	58
3.67. Hessiana λ_1 con $\alpha = 0.7$	59
3.68. Hessiana λ_2 con $\alpha = 0.7$	59
3.69. Hessiana λ_1 con $\alpha = 0.8$	60

3.70. Hessiana λ_2 con $\alpha = 0.8$	60
3.71. Hessiana λ_1 con $\alpha = 1$	61
3.72. Hessiana λ_2 con $\alpha = 1$	61
3.73. Matriz Hessiana conformable	63
3.74. Imagen original de la tomografía computarizada del caso 1	64
3.75. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.5$	65
3.76. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$	65
3.77. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.7$	66
3.78. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$	66
3.79. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$	67
3.80. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.5$	68
3.81. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.6$	68
3.82. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.7$	69
3.83. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.8$	69
3.84. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.9$	70
3.85. Imagen original de la tomografía computarizada del caso 2	71
3.86. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.5$	71
3.87. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$	72
3.88. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.7$	72
3.89. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$	73
3.90. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$	73
3.91. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.5$	74
3.92. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.6$	74
3.93. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.7$	75
3.94. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.8$	75
3.95. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.9$	76
3.96. Imagen original de la tomografía computarizada del caso 3	77
3.97. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.5$	77
3.98. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$	77
3.99. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.7$	78
3.100 Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$	78
3.101 Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$	78
3.102 Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.5$	79
3.103 Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.6$	79
3.104 Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.7$	80
3.105 Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.8$	80
3.106 Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.9$	80
3.107 Imagen original de la tomografía computarizada correspondiente al caso 4	81
3.108 Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.5$	82
3.109 Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$	82
3.110 Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.7$	82
3.111 Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$	83
3.112 Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$	83

3.113	Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.5$	84
3.114	Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.6$	84
3.115	Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.7$	84
3.116	Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.8$	85
3.117	Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.9$	85

Índice de tablas

3.1. Métricas para la imagen correspondiente a la estenosis.	22
3.2. Métricas para la imagen correspondiente a la estenosis considerando el detector de bordes fraccionario.	28
3.3. Métricas correspondientes a la imagen de la mariposa considerando ruido tipo Gaussiano.	34
3.4. Métricas correspondientes a la imagen de la mariposa considerando ruido tipo sal y pimienta.	39
3.5. Métricas obtenidas para la Matriz Hessiana utilizando la derivada de Caputo-Fabrizio. .	49
3.6. Métricas obtenidas para la Matriz Hessiana utilizando la derivada conformable.	62
3.7. Métricas obtenidas para el caso de estudio 1.	70
3.8. Métricas obtenidas para el caso de estudio 2.	76
3.9. Métricas obtenidas para el caso de estudio 3.	81
3.10. Métricas obtenidas para el caso de estudio 4.	86
3.11. Comparación de medidas.	86

Capítulo 1

Introducción

Una imagen digital está compuesta por puntos o elementos llamados píxeles cuyo valor depende de la resolución. Es decir, en una imagen en escala de grises se considera que su resolución es de 8 bits, por lo tanto, el valor de cada pixel está representado con cualquier número entre 0 y 255 [1].

Actualmente, existen diversas aplicaciones del área de procesamiento de imágenes: visión artificial, robótica móvil, procesamiento de imágenes, reconocimiento de patrones, restauración de imágenes, procesamiento de imágenes médicas, interpretación de datos de imágenes, detección remota, por mencionar algunas [2–5].

El procesamiento de imágenes, tiene como finalidad mejorar la calidad de las características en las imágenes para adecuada interpretación. Para ello, una de las técnicas utilizadas es la detección de bordes. Esta técnica permite identificar puntos en una imagen digital donde el brillo de la imagen cambia bruscamente. Los bordes son aquellas zonas en las que se produce un fuerte cambio de intensidad luminosa. Por otro lado, en el cambio de intensidad se pueden identificar píxeles con alta variación en escala de grises en la imagen a procesar. Esto permite realizar la detección de bordes, contornos o esquinas utilizando diferentes algoritmos [2, 6].

Los métodos de detección de bordes existentes se basan en operadores diferenciales de orden entero, entre los cuales se encuentran: Prewitt, Sobel, Roberts, Laplaciano del Gaussiano (LoG) así como el algoritmo de Canny [7–9].

Los modelos de orden fraccionario pueden describir algunos fenómenos físicos con mayor precisión a diferencia de los descritos por derivadas de orden entero [10, 11]. Para imágenes en escala de grises, los valores de nivel de grises entre píxeles vecinos tienen una alta correlación. Debido a esto, podemos aplicar una derivada fraccionaria para mejorar los detalles de textura para los valores de nivel de gris adyacentes, esto permite preservar las características de las imágenes cuando existen cambios en los niveles de grises [12].

1.1. Estudio del estado del arte

El estado del arte que se presenta en éste trabajo de tesis se clasificó de la siguiente manera, ver Figura 1.1.

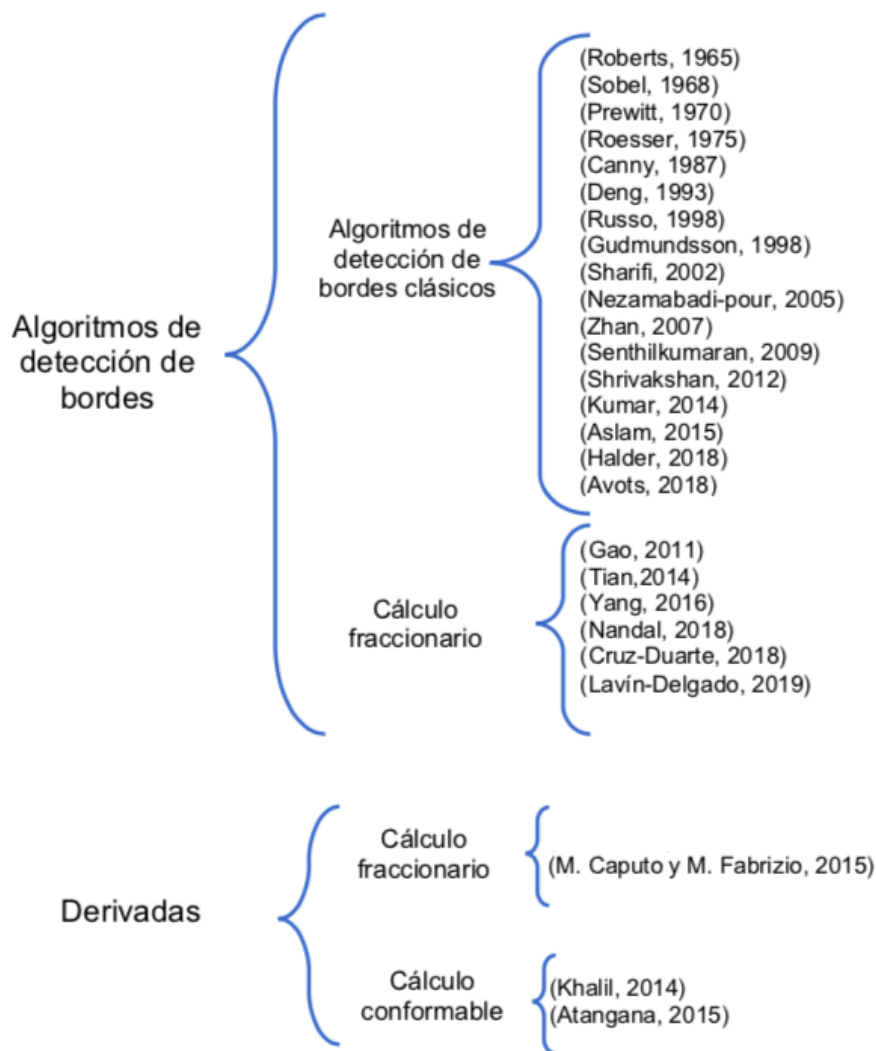


Fig. 1.1. Estado del arte

En el año 1965, Roberts presentó una aproximación del gradiente de una imagen a través de una diferenciación discreta. Esta se logra calculando la suma de los cuadrados de las diferencias entre los píxeles adyacentes en diagonal. En su propuesta utilizó una máscara de 2×2 y de acuerdo a los resultados de esta operación, fueron resaltados los cambios de intensidad luminosa. Sin embargo, esta máscara diferencial carece de robustez ante la presencia de ruido [13].

Sobel en el año 1968, presentó un operador para realizar una medición de gradiente espacial 2D en una imagen. Fue utilizado para encontrar la magnitud absoluta del gradiente. Este detector utiliza un

par de máscaras de convolución de 3×3 , un gradiente de estimación en la dirección x y un gradiente de estimación en la dirección y , cuya ventaja es su facilidad de implementación con respecto a otros detectores de bordes [14].

Prewitt en el año 1970, presentó un operador de gradiente que utiliza una máscara de 3×3 , este gradiente se utiliza para medir la diferencia entre el nivel de gris de los píxeles adyacentes en dirección horizontal y vertical, una de las ventajas de este método es que el tiempo de procesamiento es menor que el que utiliza el operador de Sobel [15].

Roesser en el año 1975, realizó un intento de establecer un modelo lineal de espacio de estado en tiempo discreto para el procesamiento lineal de imágenes, el modelo es generalizado partiendo de un modelo sencillo dimensional a un modelo en el espacio de estados de dos dimensiones. La generalización incluye la extensión de conceptos básicos como la matriz de transición de estados, el teorema de Cayley-Hamilton, observabilidad y controlabilidad [16].

Canny en el año 1987, describió un enfoque computacional para la detección de bordes donde calcula la magnitud y orientación del gradiente utilizando aproximaciones de diferencias finitas para las derivadas parciales. El autor generalizó y validó este detector considerando imágenes de distinta naturaleza y determinando su eficiencia calculando la relación señal-ruido de las imágenes [8].

Deng en el año 1993, propuso un algoritmo utilizando un filtro Gaussiano adaptativo; los resultados obtenidos demostraron una mejor detección de bordes especialmente en ubicaciones donde existe cruce entre ellos [17].

Russo en el año 1998, desarrolló un nuevo enfoque para la detección de bordes en imágenes ruidosas. El operador que propuso adopta un razonamiento difuso; los resultados experimentales demostraron que el método propuesto fue efectivo y capaz de superar a otras técnicas desde el punto de vista de la sensibilidad al ruido y la detección de detalles o texturas en las imágenes [18].

Gudmundsson en el mismo año, propuso utilizar algoritmos genéticos para la detección de bordes en imágenes médicas. El costo computacional requerido fue mínimo para localizar con precisión bordes delgados y continuos. Los resultados experimentales dieron como resultado la extracción de la mayoría de las características básicas así como bordes delgados [19].

Sharifi en el año 2002, presentó una clasificación de los algoritmos más utilizados para la detección de bordes. Dicha clasificación está establecida en cinco categorías: Detectores de borde gradiente (primera derivada o clásica), Cruce cero (segunda derivada), Laplaciano del Gaussiano, detectores de bordes Gaussianos y detectores de borde de color. Los resultados obtenidos mostraron que en condiciones ruidosas, el algoritmo de Canny, Laplaciano del Gaussiano, y Sobel son los que exhiben mejores rendimientos [20].

Nezamabadi-pour en el año 2005, diseñó un nuevo método de detección de bordes utilizando un algoritmo basado en el comportamiento de hormigas reales. Los valores adecuados de los parámetros

del algoritmo se determinaron empíricamente. Los resultados experimentales mostraron un excelente desempeño aún considerando imágenes donde la variación de niveles de grises fue muy alta [21].

Zhan en el año 2007, presentó un algoritmo mejorado para la detección de objetos en movimiento basado en la diferencia de fotogramas y la detección de bordes. Este método mejoró la detección aún considerando restricciones de ruido. Este algoritmo divide la imagen en pequeños bloques lo que acelera significativamente la detección. Los resultados experimentales muestran que el algoritmo tiene una gran tasa de reconocimiento y alta velocidad [22].

Senthilkumaran en el año 2009, llevó a cabo una revisión acerca de la teoría de la detección de bordes para la segmentación de imágenes utilizando un enfoque computacional basado en lógica difusa, algoritmos genéticos y redes neuronales. El autor aplicó estos enfoques considerando imágenes con diferentes tonos de grises y mostró la eficiencia de cada enfoque computacional [9].

Shrivakshan en el año 2012, propuso una comparación de varias técnicas de detección de bordes basada en gradiente: Roberts, Prewitt y Sobel; mostrando un buen desempeño en imágenes contaminadas con ruido [23].

Kumar en el año 2014, presentó un algoritmo de filtrado cuyo objetivo es eliminar el ruido Gaussiano presente en imágenes; de tal manera que la imagen “original” sea visible; mediante el uso de filtros lineales y no lineales. Estas técnicas se validaron utilizando la desviación estándar y el error cuadrático medio [24].

Aslam en el año 2015, propuso una versión mejorada del operador de Sobel para la segmentación de tumores cerebrales en imágenes de resonancia magnética. Los resultados experimentales dieron como resultado una mejora en la extracción de bordes en tumores cerebrales en comparación con el de Sobel [25].

Halder en el año 2018, propuso un enfoque novedoso para la detección de bordes basado en la técnica de extrapolación de Richardson. Esta aproximación permite calcular la derivada de segundo orden mediante el uso de series de Taylor, la metodología propuesta, fue aplicada a diferentes imágenes en escalas de grises obteniendo mejores resultados al ser comparados con las técnicas clásicas de detección de bordes [26].

Avots en el año 2018, propuso nuevos conjuntos de núcleos utilizando relaciones de valores singulares de una imagen para la detección de bordes. Los resultados experimentales mostraron que el método propuesto fue capaz de detectar bordes con mayor eficiencia en comparación con las metodologías convencionales [27].

En años recientes el cálculo fraccionario ha recibido la atención de muchos investigadores debido a la descripción exacta de muchos fenómenos físicos. El cálculo fraccionario generaliza derivadas e integrales de orden entero a ordenes no-enteros, variantes en el tiempo o incluso complejos. Es considerada una rama del análisis matemático que permite investigar operadores diferenciales reales y ecuaciones donde las integrales son convoluciones de funciones con kernels singulares y no-singulares.

Blas en el año 2009, presentó una introducción al cálculo fraccionario. En esta breve reseña histórica, el autor menciona los orígenes del cálculo fraccionario y los antecedentes históricos que marcaron el surgimiento de esta rama del análisis matemático. Expuso algunos operadores fraccionarios, entre ellos se encuentra la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov. El autor describe algunas aplicaciones y resultados interesantes que se han obtenido haciendo uso de estos operadores fraccionarios [28].

Gao en el año 2011, propuso una generalización de la derivada de Grünwald-Letnikov aplicado al procesamiento de imágenes digitales. Esta generalización fue aplicada en el desarrollo de un algoritmo de un eficiente detector de bordes. Los experimentos considerados en simulación mostraron que este algoritmo presenta mejores resultados en comparación con el detector de Sobel [29].

Tian en el año 2014, presentó una generalización del operador tradicional de Sobel basado en la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov para la detección de características en imágenes de ultrasonidos y resonancias magnéticas cerebrales. Los experimentos resultantes muestran que el operador propuesto produce buenos efectos visuales [30].

Yang en el año 2016, presentó definiciones de operadores de orden fraccionario y sus distintos métodos de discretización. Además, describió distintos métodos de procesamiento de imágenes basados en derivadas de orden fraccionario; considerando datos experimentales muestra las ventajas de considerar un enfoque fraccionario en el procesamiento de imágenes [31].

Nandal en el año 2018, mostró una implementación de la mejora de las características de una imagen utilizando diferentes máscaras diferenciales basadas en el operador diferencial fraccionario de Riemann-Liouville. Éste algoritmo puede controlar el grado de mejora del contraste en una imagen. Los resultados obtenidos proporcionan una buena localización y detecta bordes más afilados en comparación con otros métodos [12].

Recientemente, Michelle Caputo y Mauro Fabrizio propusieron una derivada fraccionaria basada en la función exponencial. Esta derivada tiene la ventaja de tener un kernel no-singular en su formulación y describe de una forma continua la memoria de un sistema físico [32].

Cruz-Duarte en el año 2018, mostró una fórmula cerrada para la derivada fraccionaria de la función Gaussiana basada en la definición de Caputo-Fabrizio. Las expresiones obtenidas fueron aplicadas al procesamiento de señales, imágenes, filtros y funciones de distribuciones de probabilidad [33].

Lavín-Delgado en el año 2019, generalizó el operador de Sobel considerando la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio. El autor propuso nuevas máscaras de orden fraccionario para la detección de bordes y las aplicó al análisis de imágenes médicas (Cáncer de seno, calcificaciones, entre otras). Los resultados obtenidos muestran que la generalización del operador de Sobel utilizando derivadas fraccionarias sin kernel singular presentaron mejor desempeño comparado con el operador clásico de Sobel [34].

La mayoría de las derivadas fraccionarias satisfacen las propiedades de linealidad, sin embargo, ellas no cumplen con algunas reglas matemáticas por ejemplo: la regla de la cadena, el teorema del valor medio, entre otras. Debido a esto, nuevas definiciones de derivadas con un enfoque local han sido propuestas en la literatura.

Khalil en el año 2014, propuso una nueva definición de derivada la cual es una extensión natural de la derivada ordinaria. Además, esta definición satisface las propiedades básicas de la derivada clásica por ejemplo: la regla de la cadena [35]. Esta derivada es conocida como "derivada conformable". Después, Atangana en el año 2015 presentó varios teoremas asociados a esta definición. Desarrolló el teorema de divergencia conformable y describió algunas propiedades de esta derivada [36].

Algunos autores mencionan que los operadores fraccionarios pueden clasificarse en dos tipos: derivadas fraccionarias con kernel singular y no-singular, y derivadas locales o conformables. Dentro de la primer clasificación se encuentran aquellos operadores capaces de describir el efecto de la memoria de los sistemas físicos mientras que en la segunda se encuentran aquellos que representan los efectos fractales del medio.

De acuerdo a la revisión del estado del arte, la generalización de los algoritmos de detección de bordes considerando derivadas fraccionarias con kernel no-singular y de tipo local no se han abordado en la literatura. Por lo que el objetivo de este tema de tesis es proponer la generalización de dos algoritmos de detección de bordes considerando un enfoque fraccionario y conformable, comparando su desempeño y robustez contra los algoritmos clásicos aplicados al estudio de imágenes de naturaleza biomédica.

1.2. Planteamiento del problema

En una imagen existen factores que degradan la detección de bordes por ejemplo: ruido, desenfoque o irregularidades en las superficies de los objetos. Por esta razón, en la literatura se han reportado diferentes estrategias que funcionan en diversos contextos y que capturan la mayor cantidad de características presentes. Los esquemas propuestos en la literatura se basan en operadores diferenciales cuya desventaja es su sensibilidad ante la presencia de ruido. Debido a esto, se ha incluido una etapa de suavizado como una etapa de preprocesamiento o posprocesamiento. Sin embargo, esta tarea influye en la pérdida de información y desplazamiento de estructuras en la imagen. Las derivadas fraccionarias, al poseer un kernel asociado a su definición, pueden ser utilizadas como filtros. Por lo tanto, la etapa de suavizado puede ser omitida para extraer mayor información de las características presentes en las imágenes.

1.3. Objetivo general

Desarrollar una metodología de detección de bordes con base en operadores fraccionarios y conformables para el diseño de máscaras diferenciales.

1.4. Objetivos específicos

- Generalizar el Kernel Gaussiano utilizando la derivada conformable para procesar y reconstruir imágenes.
- Generalizar el gradiente de una imagen utilizando la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio para la detección de curvas y bordes.
- Desarrollar los algoritmos conformables y fraccionarios que permitan la detección de curvas y bordes.
- Detectar bordes y curvas en imágenes de naturaleza biomédica (angiogramas, retinopatías, trombosis, ultrasonidos a neonatos).
- Comparar la metodología propuesta contra las técnicas convencionales de extracción de características.

1.5. Metas

- Comprobar la robustez de los detectores conformables y fraccionarios en imágenes de naturaleza biomédica.
- Demostrar la eficiencia de los detectores generalizados propuestos ante los detectores clásicos.
- Analizar el desempeño de los detectores generalizados propuestos ante la presencia de ruido.

1.6. Justificación

Hoy en día, el cálculo fraccionario y el cálculo conformable han tomado importancia en áreas de la ingeniería y la tecnología debido a la robustez de estos operadores ante la presencia de ruido. El objetivo de desarrollar filtros con este enfoque es preservar con mayor eficiencia los detalles de las texturas así como las características presentes en las imágenes omitiendo la etapa de suavizado que afecta el desempeño de los esquemas propuestos en la literatura.

1.7. Hipótesis

El diseño de algoritmos y técnicas para la detección de bordes basado en cálculo fraccionario y conformable, mejora la detección de bordes y texturas en comparación con las técnicas clásicas.

1.8. Alcance

- Desarrollar una metodología basada en derivadas conformables y fraccionarias con kernel no-singular que permita desarrollar detectores de bordes y curvas para su aplicación en el estudio de señales biomédicas.
- Realizar la comparación de los resultados obtenidos contra las técnicas tradicionales de detección de características.

1.9. Organización del documento

El presente documento está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presentan los conceptos y definiciones fundamentales relacionadas con imágenes así como las principales definiciones del cálculo fraccionario y conformable.

En el capítulo 3 se obtienen los resultados a partir de las simulaciones con los diferentes algoritmos propuestos para la detección de bordes así como los resultados obtenidos a partir de la generalización de la matriz Hessiana.

Finalmente, en el capítulo 4 se exponen las conclusiones y trabajos futuros generadas a partir de los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo se presentan las definiciones y conceptos que brindan el sustento teórico de este trabajo de investigación.

Una imagen digital en escala de grises es una representación de píxeles en un espacio bidimensional como se muestra en la Figura 2.1 [1].

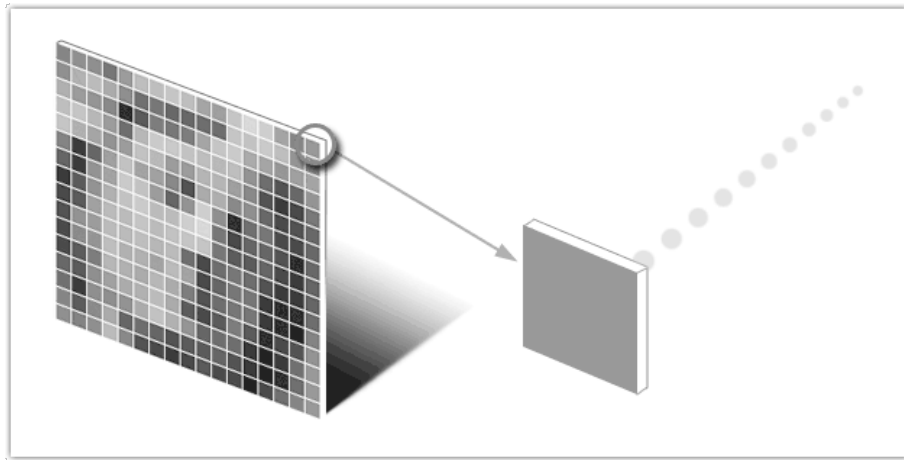


Fig. 2.1. Representación bidimensional de una imagen en escala de grises.

2.1. Gradiente de una imagen.

El gradiente de una imagen en cualquier punto se define como un vector bidimensional dado por la siguiente ecuación (2.1). Siendo un vector perpendicular al borde.

$$G[f(x, y)] = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} f(x, y) \\ \frac{d}{dy} f(x, y) \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde, el vector G apunta en la dirección de variación máxima en el punto por unidad de distancia con la magnitud y dirección dadas por

2.1. GRADIENTE DE UNA IMAGEN.

$$|G| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}, \quad \Phi(x, y) = \tan^{-1} \frac{G_y}{G_x}. \quad (2.2)$$

Habitualmente, se aproxima la magnitud del gradiente considerando valores absolutos:

$$|G| \approx |G_x| + |G_y|. \quad (2.3)$$

Cualquiera de las ecuaciones (2.2) y (2.3) se pueden utilizar para obtener la magnitud del gradiente ya que va en relación a un determinado umbral. Si el valor de la magnitud supera el umbral, este punto se considera como un borde [2].

Las derivadas de la ecuación (2.1) parten de diferencias centrales, esto es

$$G_x = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}, \quad G_y = \frac{f(y + \Delta y) - f(y - \Delta y)}{2\Delta y}, \quad (2.4)$$

donde, al ser una imagen digital, se considera $\Delta x = \Delta y = 1$. Por consiguiente se tiene

$$G_x = f(x + 1, y) - f(x - 1, y), \quad G_y = f(x, y + 1) - f(x, y - 1). \quad (2.5)$$

Esta es la forma más elemental de obtener el gradiente en un punto. Para obtener el gradiente en una imagen, se considera

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } G[f(x, y)] > T, \\ 0 & \text{si } G[f(x, y)] \leq T, \end{cases} \quad (2.6)$$

donde T es un valor de umbral no negativo, sólo los píxeles de borde que excedan el valor de T se consideran importantes.

Considerando una vecindad de píxeles vecinos de 3×3 , la expresión (2.5) se puede representar en forma matricial como

$$G_x = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ CZ_4 & Z_5 & CZ_6 \\ Z_7 & Z_8 & Z_9 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$G_y = \begin{bmatrix} Z_1 & CZ_2 & Z_3 \\ Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ Z_7 & CZ_8 & Z_9 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

donde Z_1 hasta Z_9 son píxeles y C varia dependiendo de la máscara a utilizar o bien, en forma escalar

$$G_x = (f(x + 1, y - 1) - f(x - 1, y - 1)) + C \cdot (f(x + 1, y) - f(x - 1, y)) + (f(x + 1, y + 1) - f(x - 1, y + 1)), \quad (2.9)$$

$$G_y = (f(x - 1, y + 1) - f(x - 1, y - 1)) + C \cdot (f(x, y + 1) - f(x, y - 1)) + (f(x + 1, y + 1) - f(x + 1, y - 1)). \quad (2.10)$$

A continuación se presentan los operadores más utilizados y reportados en la literatura para la detección de bordes, se consideran los operadores de Roberts, Prewitt y Sobel.

2.2. Operadores diferenciales

En la literatura existen diferentes operadores diferenciales de orden entero (operador de Sobel, Prewitt y Roberts). El objetivo principal de estos operadores es la detección de bordes; localizar e identificar cambios en la intensidad luminosa de una imagen.

2.2.1. Operador de Roberts

El operador de Roberts realiza una medición de gradiente espacial en 2 dimensiones. Esto hace resaltar regiones de alta frecuencia espacial que a menudo corresponden a bordes. La entrada al operador es una imagen en escala de grises, al igual que la salida. Los valores de píxel en cada punto de la salida representan la magnitud absoluta estimada del gradiente espacial de la imagen de entrada en ese punto. El operador de Roberts a diferencia de otros, sólo marca dos puntos en cada máscara, es más simple y funciona bien para imágenes binarias [9, 13].

Una máscara es una representación matricial que sobrepone a la imagen para detectar el cambio de luminosidad. Roberts considera la siguiente máscara para su operador

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Máscara utilizada para } G_x & \text{Máscara utilizada para } G_y \end{matrix} \quad (2.11)$$

2.2.2. Operador de Prewitt

Es un operador de diferenciación discreto con el cual se puede estimar la magnitud y la orientación de un borde. Este operador está limitado a 8 orientaciones posibles debido a que su cálculo está estimado en una vecindad de 3×3 . De modo que las 8 máscaras de convolución son calculadas y la de mayor magnitud es escogida [9].

Partiendo de las ecuaciones (2.7) y (2.8) con $C = 1$, se tienen las siguientes máscaras de convolución

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{Máscara utilizada para } G_x & \text{Máscara utilizada para } G_y \end{matrix} \quad (2.12)$$

O en forma escalar

$$G_x = (f(x+1, y-1) - f(x-1, y-1)) + (f(x+1, y) - f(x-1, y)) + (f(x+1, y+1) - f(x-1, y+1)), \quad (2.13)$$

$$G_y = (f(x-1, y+1) - f(x-1, y-1)) + (f(x, y+1) - f(x, y-1)) + (f(x+1, y+1) - f(x+1, y-1)). \quad (2.14)$$

2.2.3. Operador de Sobel

Este operador al igual que otros permite calcular la diferencia de luminosidad entre píxeles. Con la diferencia de que Sobel enfatiza regiones de alta frecuencia que corresponden a bordes. Usualmente es utilizado para aproximar la magnitud del gradiente absoluto en cada punto de una imagen de entrada. Partiendo de (2.7) y (2.8) con $C = 2$ se obtienen las siguientes máscaras de convolución

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

Máscara usada para G_x

Máscara usada para G_y

O en forma escalar

$$G_x = (f(x+1, y-1) - f(x-1, y-1)) + 2 * (f(x+1, y) - f(x-1, y)) + (f(x+1, y+1) - f(x-1, y+1)), \qquad (2.16)$$

$$G_y = (f(x-1, y+1) - f(x-1, y-1)) + 2 * (f(x, y+1) - f(x, y-1)) + (f(x+1, y+1) - f(x+1, y-1)). \qquad (2.17)$$

2.3. Filtro de Kernel Gaussiano

La distribución clásica Gaussiana en una dimensión está dada por

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right], \qquad (2.18)$$

donde μ la media, σ la desviación estándar y x es la entrada.

2.4. Cálculo fraccionario y conformable

El origen del cálculo fraccionario data del año 1695, según antecedentes históricos reportados en la literatura. El cálculo fraccionario es una generalización de la diferenciación y la integración ordinarias a órdenes no-entero. Entre las principales ventajas de utilizar operadores fraccionarios se encuentran que son capaces de incluir efectos de memoria y de filtrado en ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales que describen problemas del mundo real [24, 35, 41].

Basado en el concepto de derivada local con componentes fraccionales, Khalil presentó la "derivada conformable" en [35]. Las derivadas conformables no pueden ser expuestas como derivadas fraccionarias, pero pueden considerarse como una extensión de las derivadas convencionales.

2.4.1. Cálculo Fraccionario

El cálculo fraccionario considera la integración y derivación de cualquier orden no necesariamente entero. En el dominio temporal, los operadores de derivadas e integrales fraccionarias están definidos por convoluciones [28].

Los sistemas dinámicos de orden fraccionario son no conservativos e involucran operadores no locales que producen nueva información sobre su comportamiento dinámico.

De acuerdo a los antecedentes históricos, Leibniz introdujo la notación $D^n f(t)$ para denotar la derivada de orden n , la cual puede tomar cualquier número natural o incluso complejo. La representación es mostrada en la ecuación (2.19)

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}. \quad (2.19)$$

Más tarde Riemann, Liouville, Grünwald, Letnikov, Caputo y Fabrizio adoptaron esta notación para definir sus derivadas fraccionarias.

Las definiciones más conocidas en el estudio del cálculo fraccionario son las de Riemann-Liouville, Liouville-Caputo y Grünwald-Letnikov [38].

La derivada de Riemann-Liouville (RL) se define como

$${}^{\text{RL}}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t -\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.20)$$

donde $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = {}^{\text{RL}}_0 D_t^\alpha$ es la derivada de RL respecto a t , $\alpha \in \mathbb{R}$ es el orden de la derivada fraccionaria y $\Gamma(\bullet)$ representa la función Gamma.

La función Gamma representa la generalización de los factoriales $n!$, lo que permite que n considere cualquier número real. Por lo que la función Gamma es una de las más importantes en el cálculo fraccionario.

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 0$, su expresión es representada a continuación

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{z-1} dt, \quad (2.21)$$

debido a esto la función Gamma es continua para los números reales positivos.

La derivada de Liouville-Caputo (C) se define como

$${}^{\text{LC}}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{f}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.22)$$

donde $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = {}^{\text{C}}_0 D_t^\alpha$ es la derivada de Liouville-Caputo respecto a t , $\alpha \in \mathbb{R}$ es el orden de la derivada fraccionaria y $\Gamma(\bullet)$ representa la función Gamma dada en la ecuación (2.21).

La derivada de Grünwald-Letnikov de una función $f(t)$ está dada por:

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-t_0}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.23)$$

donde, j es el incremento del tiempo, $\alpha \in \mathbb{R}$, α es el orden de la derivada fraccionaria y h es el paso de integración. Esta derivada fraccionaria es la versión discreta de la derivada de Riemann-Liouville [72].

A continuación, en la ecuación (2.24) se presenta la derivada propuesta por Michelle Caputo y Mauro Fabrizio

$${}^{CFC}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t \dot{f}(\tau) \exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right) d\tau, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.24)$$

donde $M(\alpha)$ es una función de normalización, tal que, $M(0) = M(1) = 1$.

2.4.2. Cálculo Conformable

Khalil presenta una nueva definición de derivada e integral de orden arbitrario llamada derivada conformable. Esta definición se puede considerar como una extensión natural de la derivada clásica y por ende satisface todas las propiedades de las derivadas convencionales como son: la regla del producto, la regla del cociente, la regla de la cadena, el teorema del valor medio, la regla de composición, por mencionar algunas [35].

Dada una función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces la derivada conformable de f , de orden α , esta definida por:

$$f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}, \quad (2.25)$$

para todo $t > 0$, $\alpha \in (0, 1]$

A continuación, presentaremos algunas propiedades de esta derivada. Considerando que $\alpha \in (0, 1]$ y f y g son α - diferenciables en un punto $t > 0$, entonces [35]

1. $D_\alpha(af + bg) = aD_\alpha(f) + bD_\alpha(g)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $D_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$, para todo p .
3. $D_\alpha(\Xi) = 0$, si Ξ es constante.
4. $D_\alpha(fg) = fD_\alpha(g) + gD_\alpha(f)$.
5. $D_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_\alpha(f) - fD_\alpha(g)}{g^2}$.

Considerando la propiedad 2, tenemos la siguiente representación para $D_\alpha f(t)$

$$f(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t). \quad (2.26)$$

Capítulo 3

Resultados

3.1. Algoritmos de detección de bordes clásicos

El objetivo de esta simulación es mostrar los operadores diferenciales de Roberts, Prewitt, Sobel, Laplaciano del Gaussiano así como el detector de Canny aplicados a una imagen de una avión obtenida de la base de datos de segmentación de Berkeley [68], ver Figura 3.1.



Fig. 3.1. Imagen obtenida de la base de segmentación de Berkeley [68].

En la Figura 3.2 se muestra el resultado de aplicar el operador de Roberts (2.11) que considera una máscara diferencial de 2×2 . En este resultado se puede apreciar que no sólo los bordes sino también las texturas no están definidos.

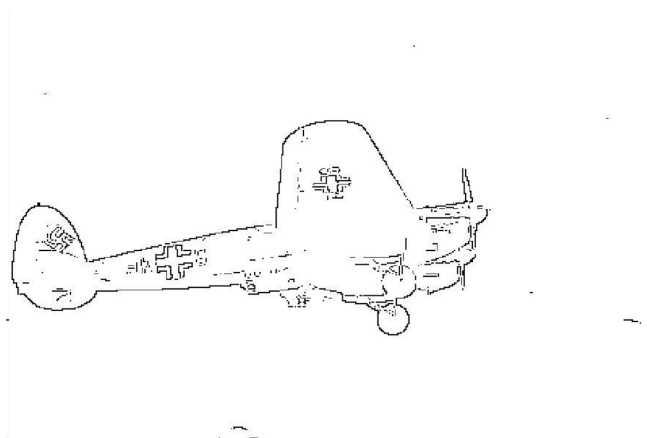


Fig. 3.2. Operador diferencial de Roberts.

En la Figura 3.3 se muestra el resultado de aplicar el operador de Prewitt utilizando la ecuación (2.11) con $C = 1$. Aquí se puede apreciar que los bordes obtenidos tienen una mejora visual comparada con el operador de Roberts.

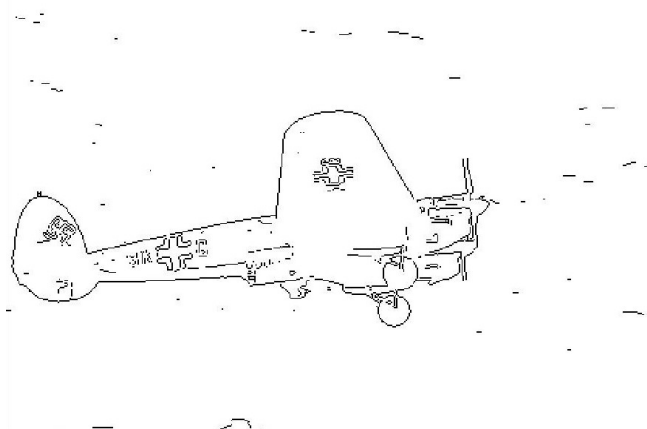


Fig. 3.3. Operador diferencial de Prewitt.

En la Figura 3.4 se muestra el resultado de aplicar el operador de Sobel utilizando la ecuación (2.15) considerando una vecindad de 3×3 píxeles vecinos con $C = 2$. De acuerdo con los resultados, se puede notar un mejor detalle en el símbolo a un costado del avión. Sin embargo, las texturas que aparecen en la imagen original no se pueden apreciar en el resultado al aplicar este operador.

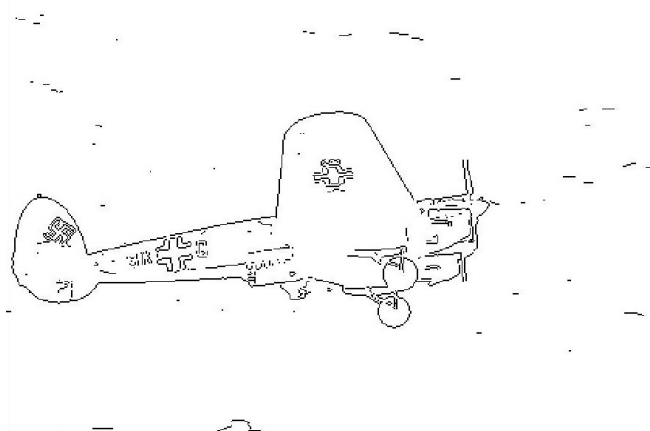


Fig. 3.4. Operador de diferencial de Sobel.

En la Figura 3.5 se muestra el resultado de aplicar el algoritmo de Canny haciendo uso de las ecuaciones descritas en (2.2) para obtener la magnitud y dirección del gradiente. En esta imagen podemos apreciar una mayor definición al detectar los bordes de las nubes, lo cual nos da más información visual en comparación con los detectores de bordes antes mencionados.

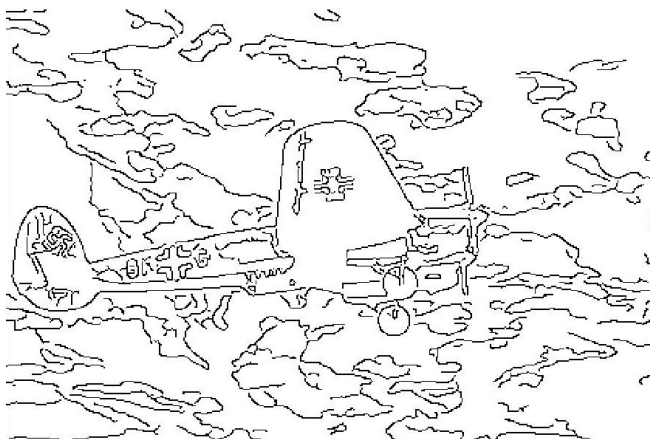


Fig. 3.5. Algoritmo de detección de bordes de Canny.

En la Figura 3.6 se muestra el resultado de aplicar el Laplaciano del Gaussiano. Este operador no depende de la discontinuidad de la imagen y además puede ocupar diferentes máscaras diferenciales pero la más frecuente es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Este operador involucra un filtro tipo Gaussiano en su definición para eliminar ruido presente en la imagen como se muestra en la ecuación (3.1). En esta imagen se puede observar la textura que se presenta en la imagen al detectar las nubes de la imagen original. Así mismo, se pueden observar los bordes definidos del avión y el símbolo a un costado de éste.

$$LoG(x, y) = -\frac{1}{\pi\sigma^2} \left[1 - \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right] \exp^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.1)$$

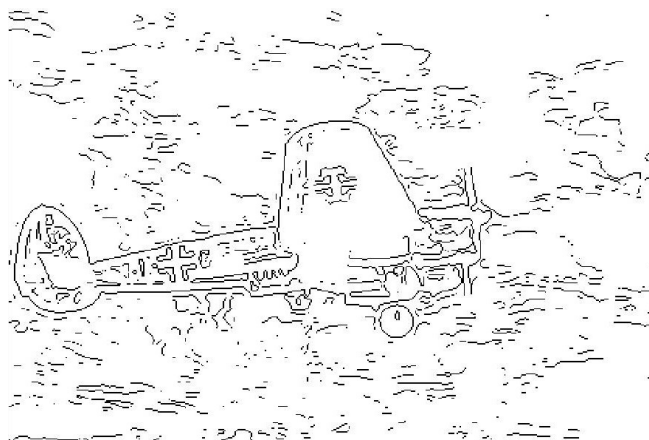


Fig. 3.6. Operador Laplaciano del Gaussiano

3.2. Operadores diferenciales aplicados a imágenes médicas

Una estenosis es un ensanchamiento o estrechamiento de un vaso sanguíneo a la altura del corazón como se puede apreciar en la Figura 3.7. La estenosis aórtica se refiere a los cambios patológicos, fisiopatológicos y clínicos ocasionados por la disminución del área valvular aórtica. Es considerada como la causa más frecuente de la enfermedad calcificante en adultos mayores con una edad promedio de muerte de 63 años. La población en riesgo de estenosis aórtica está creciendo y se estima que 2.5 millones de personas en los Estados Unidos padecen esta enfermedad, aproximadamente el 12.4% de la población [74–76]. De acuerdo a datos reportados por el IMSS, en el año 2017 en México se detectaron 173 mil personas mayores de 65 años afectadas por estenosis aórtica, de las cuales según datos reportados por el INEGI, 141 619 decesos fueron asociados a enfermedades que afectan al corazón y el 11.1% (15 763 casos) son decesos relacionados con enfermedades del corazón (estenosis aórtica, aneurisma de aorta, arritmias, angina de pecho, entre otras) [79, 80].

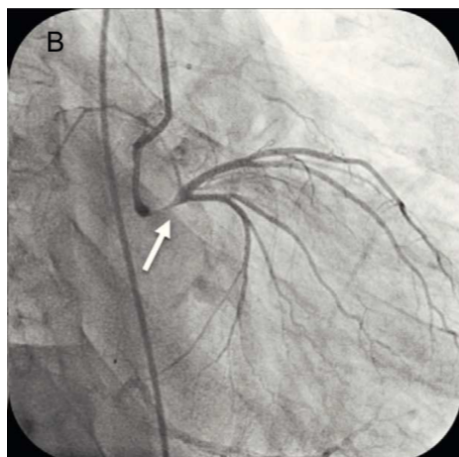


Fig. 3.7. Imagen médica correspondiente a una estenosis.

En la Figura 3.8 se presenta la imagen de la estenosis aplicando el operador de Roberts. En esta figura se puede observar que no se aprecia con detalle el borde de la estenosis, al igual que muchos de los vasos sanguíneos.

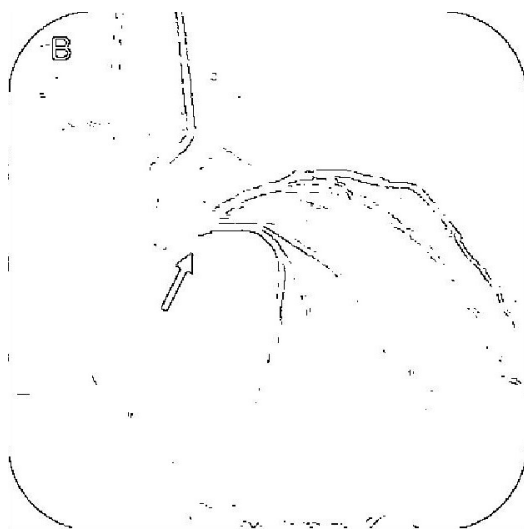


Fig. 3.8. Operador diferencial de Roberts.

Por otro lado, en la Figura 3.9 se presenta la imagen correspondiente a la estenosis aplicando el operador de Prewitt. En este caso se puede observar que en la imagen se definen los bordes de los vasos sanguíneos, no obstante tiene deficiencias al detectar el borde en la estenosis al igual que con el operador de Roberts.

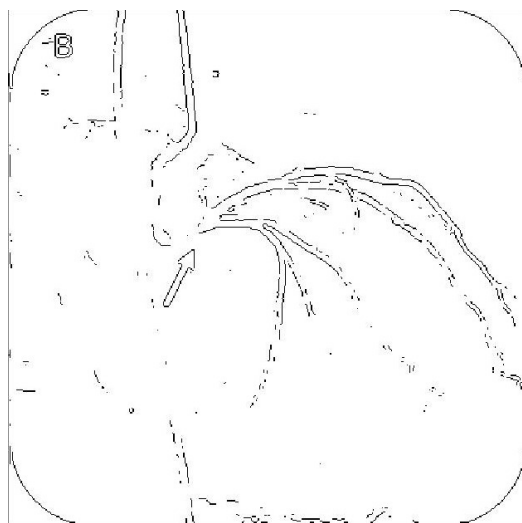


Fig. 3.9. Operador diferencial de Prewitt.

En los resultados mostrados en la Figura 3.10, se aprecia la correcta detección de los bordes en vasos sanguíneos y en la flecha donde indica la ubicación de la estenosis. En la parte de la estenosis no se aprecia con detalle el ensanchamiento al igual que las texturas.

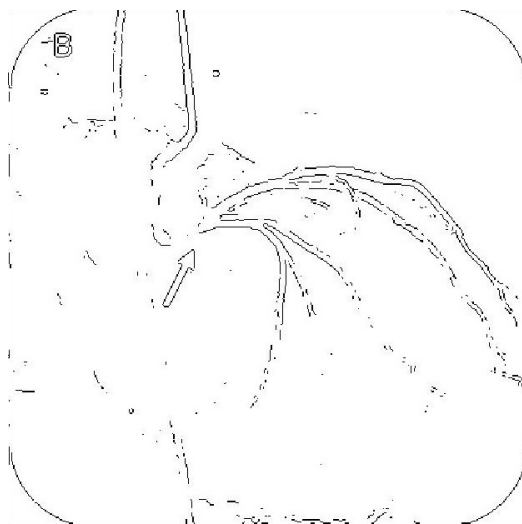


Fig. 3.10. Operador diferencial de Sobel.

Después, en la Figura 3.11 se muestra la aplicación del algoritmo de detección de bordes de Canny. En esta imagen se observan los bordes de los vasos sanguíneos así como la flecha que indica la ubicación de la estenosis. La estenosis a simple vista no se alcanza a distinguir y se puede confundir con algún otro borde detectado.

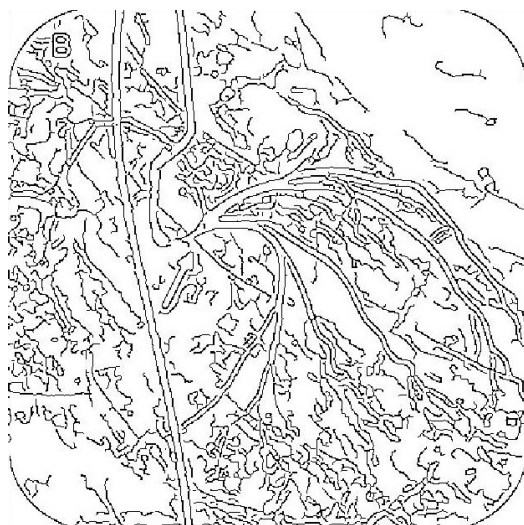


Fig. 3.11. Algoritmo de detección de Canny.

Finalmente, en la Figura 3.12 se presenta el Laplaciano del Gaussiano aplicado a la imagen médica. En esta imagen podemos observar que no todos los vasos sanguíneos se pueden apreciar de manera detallada, en la parte de la estenosis, los bordes no son completamente definidos y las texturas se pueden confundir con los bordes de los vasos sanguíneos.

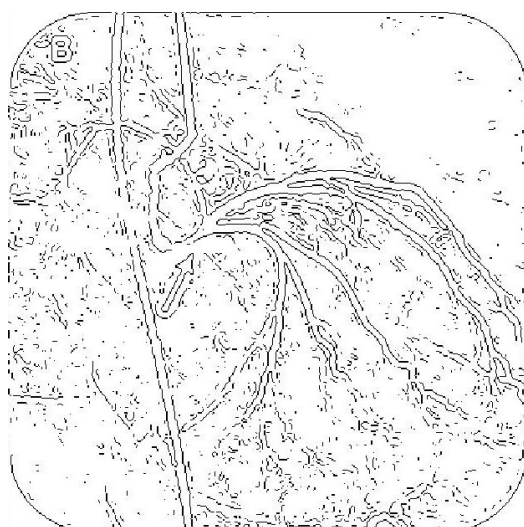


Fig. 3.12. Operador Laplaciano del Gaussiano

Los detectores de bordes clásicos utilizados en las Figuras 3.1-3.12 funcionan adecuadamente cuando se utilizan en imágenes con componentes de alta frecuencia. Sin embargo, su desempeño se ve afectado al aplicarlos a regiones lisas [31].

En la siguiente sección se muestran algunas métricas utilizadas en la comparación del rendimiento de los algoritmos de detección de bordes clásicos.

3.3. Métricas

En este apartado se propone realizar una comparación entre los operadores y algoritmos más utilizados en la literatura con los propuestos en esta tesis para medir su desempeño en la detección de bordes.

La relación señal ruido (PSNR) y el error cuadrático medio (MSE) son métricas ampliamente utilizadas para medir el nivel de ruido. Aunque no son adecuadas para medir la precisión, son apropiados para medir la robustez.

El error cuadrático medio especifica la diferencia promedio de los píxeles a lo largo de la imagen original. Un error cuadrático medio más alto indica una mayor diferencia entre la imagen original y la imagen procesada [73].

El error cuadrático medio se calcula utilizando la siguiente ecuación

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [I_1(xy) - I_2(xy)]^2, \quad (3.2)$$

donde, m y n representan el tamaño de la imagen, mientras que $I_1(xy)$ y $I_2(xy)$ representan la imagen original y el borde detectado en la imagen con ruido, respectivamente.

El PSNR se calcula a partir de MSE como se muestra a continuación

$$PSNR = 10_{\log} \frac{\max(I)^2}{MSE}, \quad (3.3)$$

donde $\max(I)$ es la variación máxima de los datos de la imagen de entrada y generalmente se expresa en decibelios (dB).

En la Tabla 3.1 se muestran los valores obtenidos al calcular las métricas para cada imagen médica con los diferentes detectores de bordes clásicos.

Tabla 3.1. Métricas para la imagen correspondiente a la estenosis.

Operador	MSE	RMSE	PSNR
Sobel	29048.6475	170.4366	3.4995
Roberts	29140.0611	170.7046	3.4858
LoG	28021.0792	167.3949	3.6559
Prewitt	29050.7112	170.4426	3.4992
Canny	27223.6624	164.9959	3.7813

En la Tabla anterior se puede apreciar que el algoritmo de Canny tiene mejor desempeño en comparación con el resto de detectores de bordes clásicos, esto es debido a que la media del error al cuadrado o MSE, promedia el error al cuadrado de todos los valores entre la imagen original y la imagen resultante al aplicar la detección de bordes. Un valor bajo de MSE significa menos error en la imagen reconstruida con respecto a la imagen original, es decir, cuando el valor sea más cercano a cero se detecta

3.4. DETECTOR DE BORDES UTILIZANDO LA DERIVADA FRACCIONARIA DE CAPUTO-FABRIZIO

la mayor cantidad de información posible, por lo que en la imagen resultante se observa una mayor detección de bordes. Al obtener la raíz cuadrada del MSE obtenemos el valor promedio de todos los píxeles correspondientes entre 0 y 255, donde 0 es negro y 255 es blanco, como se observa en la imagen 3.13.

La relación señal ruido o PSNR es una medida en decibeles basada en el MSE. Un valor grande en el PSNR es recomendable ya que significa que la razón señal ruido es significativa y por ende esto significa que la imagen resultante muestra mayor similitud con respecto a la imagen original .

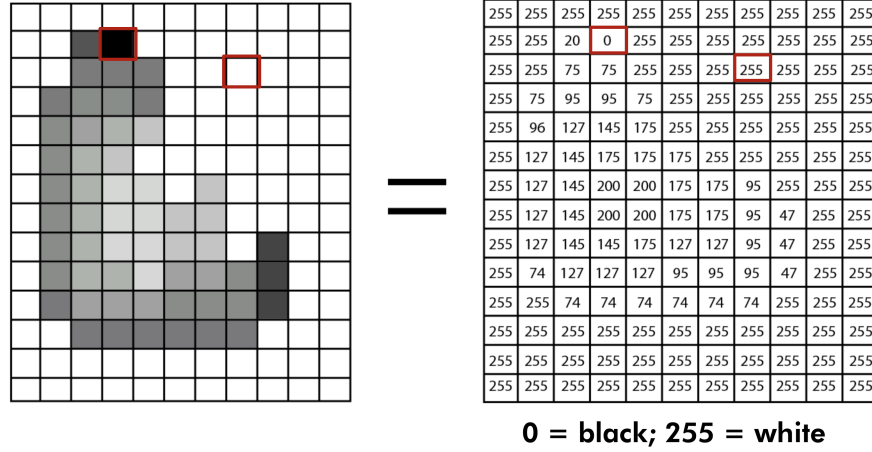


Fig. 3.13. Representación digital de una imagen en 2D obtenida de [81]

En la siguiente sección se mostrará el algoritmo propuesto con la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio para la detección de bordes.

3.4. Detector de bordes utilizando la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio

Los filtros derivativos fraccionarios h_x y h_y no-singulares, son obtenidos a partir de la generalización de la ecuación (2.5) con el operador de Caputo-Fabrizio como sigue:

$$h_x^\alpha := {}_0^{CF} D_t^\alpha I(x) = I(x+1) - I(x-1), \quad (3.4)$$

$$h_y^\alpha := {}_0^{CF} D_t^\alpha I(y) = I(y+1) - I(y-1). \quad (3.5)$$

De este modo, si se considera una vecindad de píxeles vecinos de 3×3 esta generalización queda expresada como sigue:

$${}_0^{CF} D_t^\alpha h_x = (Z_3 + CZ_6 + Z_9) - (Z_1 + CZ_4 + Z_7), \quad (3.6)$$

3.4. DETECTOR DE BORDES UTILIZANDO LA DERIVADA FRACCIONARIA DE CAPUTO-FABRIZIO

$${}_0^{CF}D_t^\alpha h_y = (Z_1 + CZ_2 + Z_3) - (Z_7 + CZ_8 + Z_9). \quad (3.7)$$

O de manera matricial

$${}_0^{CF}D_t^\alpha h_x = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ CZ_4 & Z_5 & CZ_6 \\ Z_7 & Z_8 & Z_9 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$${}_0^{CF}D_t^\alpha h_y = \begin{bmatrix} Z_1 & CZ_2 & Z_3 \\ Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ Z_7 & CZ_8 & Z_9 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

donde,

$$Z_1 = I(x - 1, y - 1), \quad Z_2 = I(x, y - 1), \quad Z_3 = I(x + 1, y - 1), \quad (3.10)$$

$$Z_4 = I(x - 1, y), \quad Z_6 = I(x + 1, y), \quad Z_7 = I(x - 1, y + 1), \quad (3.11)$$

$$Z_8 = I(x, y + 1), \quad Z_9 = I(x + 1, y + 1), \quad (3.12)$$

y además, I denota la imagen de entrada.

La Figura (3.14), muestra el diagrama de flujo considerado para la generalización del detector de bordes utilizando la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio.

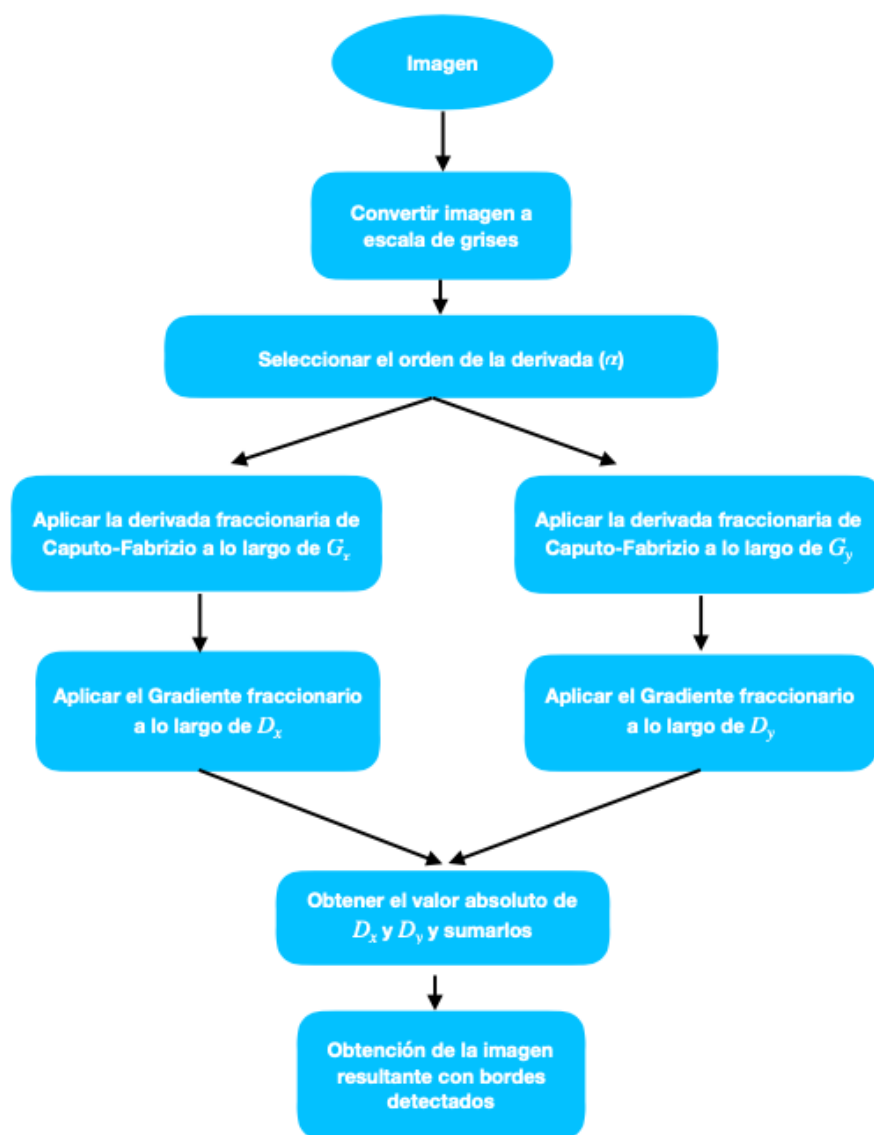


Fig. 3.14. Detector de bordes utilizando la derivada de Caputo-Fabrizio

El pseudocódigo utilizado para el algoritmo de detección de bordes utilizando la derivada de Caputo-Fabrizio es mostrado en el Anexo A pseudocódigo 1.

En las Figuras 3.15-3.17, se realiza la detección de bordes y se muestran los bordes detectados por la metodología propuesta variando el orden α de entre 0.6 a 0.9.

3.4. DETECTOR DE BORDES UTILIZANDO LA DERIVADA FRACCIONARIA DE CAPUTO-FABRIZIO



Fig. 3.15. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.6$

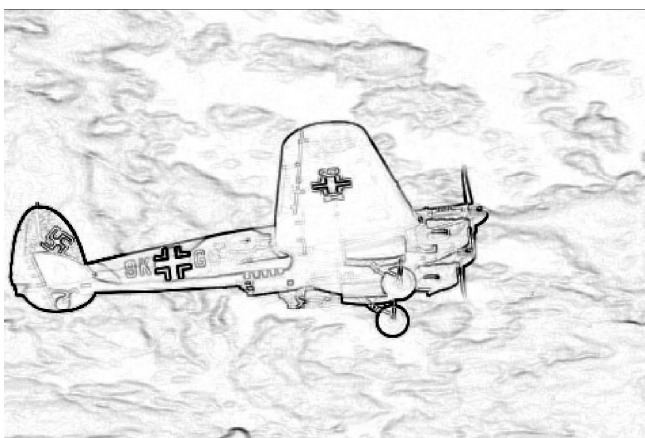


Fig. 3.16. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.8$



Fig. 3.17. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.9$

3.4. DETECTOR DE BORDES UTILIZANDO LA DERIVADA FRACCIONARIA DE CAPUTO-FABRIZIO

Ahora, el detector de bordes fraccionario en el sentido de Caputo-Fabrizio es aplicado a la siguiente imagen médica que corresponde a una estenosis. Los resultados de simulación se pueden apreciar en las Figuras 3.18-3.20 y en la Tabla 3.2.

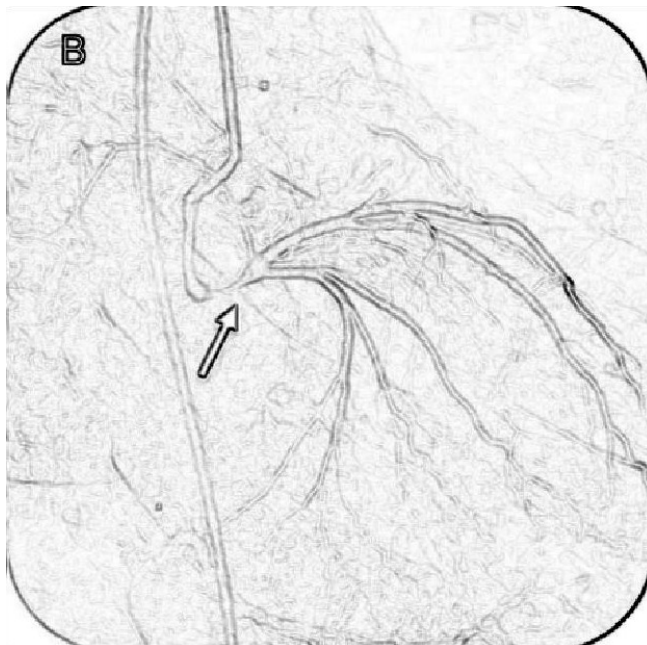


Fig. 3.18. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.6$

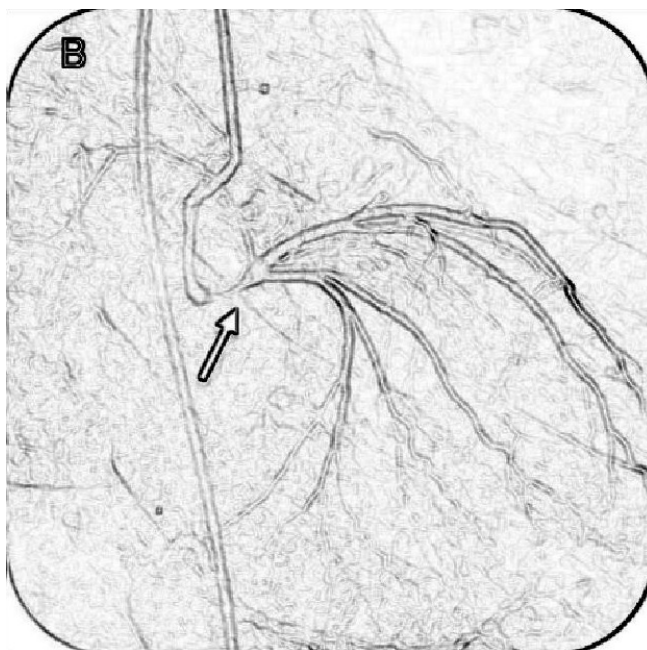


Fig. 3.19. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.8$

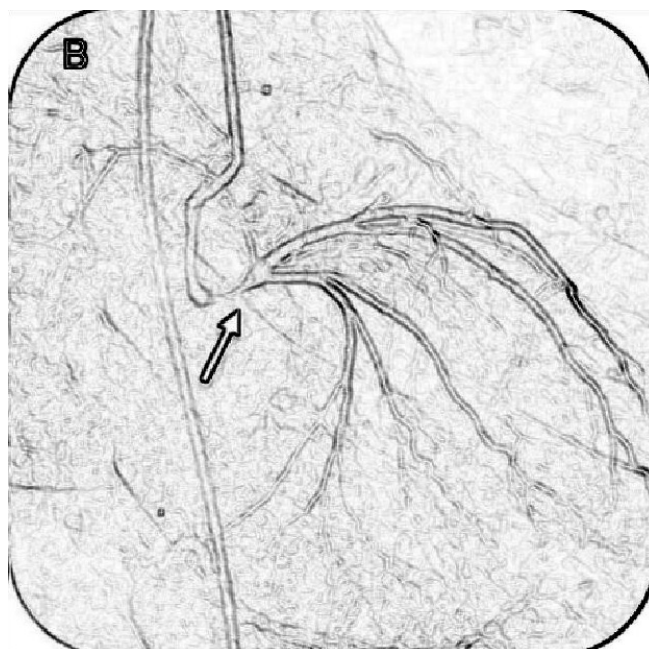


Fig. 3.20. Detector de borde fraccionario con $\alpha = 0.9$

Tabla 3.2. Métricas para la imagen correspondiente a la estenosis considerando el detector de bordes fraccionario.

Operador	MSE	RMSE	PSNR
Sobel	29048.6475	170.4366	3.4995
Roberts	29140.0611	170.7046	3.4858
LoG	28021.0792	167.3949	3.6559
Prewitt	29050.7112	170.4426	3.4992
Canny	27223.6624	164.9959	3.7813
Fraccionario $\alpha = 0.9$	19195.5701	138.5480	5.2994
Fraccionario $\alpha = 0.8$	19800.4624	140.7141	5.1640
Fraccionario $\alpha = 0.6$	21077.6878	145.1815	4.8925

De acuerdo con la Tabla anterior, se puede observar que el detector de bordes fraccionario presenta un mejor desempeño y robustez. Ésto debido a que el MSE es bajo y el PSNR es alto en comparación con los operadores clásicos.

Para imágenes con componentes en alta frecuencia, los detectores de bordes clásicos mostraron bajo desempeño cuando fueron aplicados a regiones lisas mientras que el detector fraccionario tiene la capacidad de mantener características del contorno cuando se aplica a regiones de alta frecuencia, así como de mejorar los detalles de las texturas.

En la siguiente sección se consideran diferentes tipos de ruido que pueden presentarse en imágenes de naturaleza médica.

3.5. Algoritmos de detección de bordes fraccionario a imágenes con ruido tipo Gaussiano y tipo sal y pimienta

Las imágenes médicas contienen ruido Gaussiano y sal-pimienta. Este ruido Gaussiano es generado por los circuitos electrónicos mientras que el tipo tipo sal-pimienta se presenta principalmente en el proceso de digitalización.

3.5.1. Ruido tipo Gaussiano

Este tipo de ruido produce pequeñas variaciones en la imagen, es decir, los píxeles que componen la imagen cambian su valor de acuerdo con su densidad de probabilidad.

En la Figura 3.21 se muestra la imagen de una mariposa obtenida de la base de segmentación de Berkeley [68] mientras que en la Figura 3.22 se presenta en escala de grises. A esta imagen le es aplicado ruido tipo gaussiano con una media $\mu = 0$ y una varianza $\sigma = 1$.



Fig. 3.21. Imagen original, Mariposa

3.5. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE BORDES FRACCIONARIO A IMÁGENES CON RUIDO TIPO GAUSSIANO Y TIPO SAL Y PIMIENTA



Fig. 3.22. Imagen original con ruido tipo gaussiano

En la Figura 3.23 se muestra el resultado de aplicar el operador de Roberts a la imagen en escala de grises de la mariposa contaminada con ruido tipo Gaussiano.

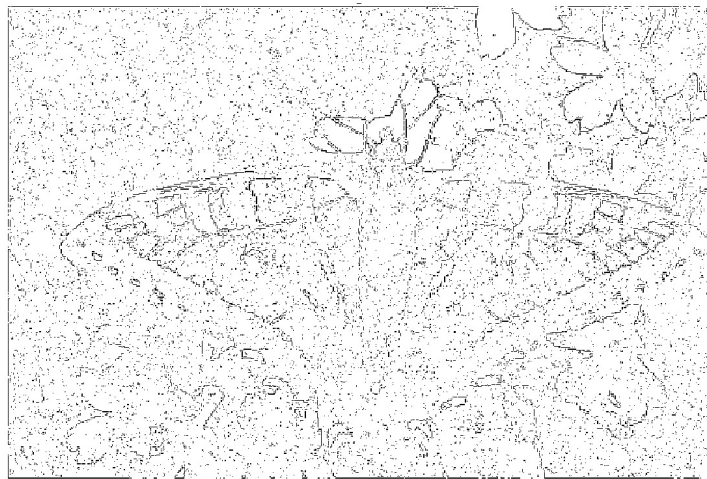


Fig. 3.23. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el operador de Roberts

En la Figura 3.24 se muestra el resultado de aplicar el operador de Prewitt a la imagen en escala de grises de la mariposa con ruido tipo Gaussiano.

3.5. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE BORDES FRACCIONARIO A IMÁGENES CON RUIDO TIPO GAUSSIANO Y TIPO SAL Y PIMIENTA

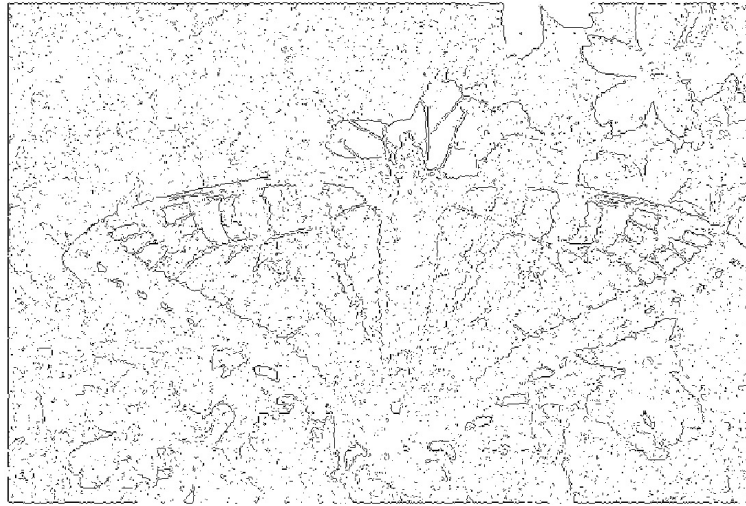


Fig. 3.24. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el operador de Prewitt

En la Figura 3.25 se muestra el resultado de aplicar el operador de Sobel a la imagen en escala de grises de la mariposa con ruido tipo Gaussiano.

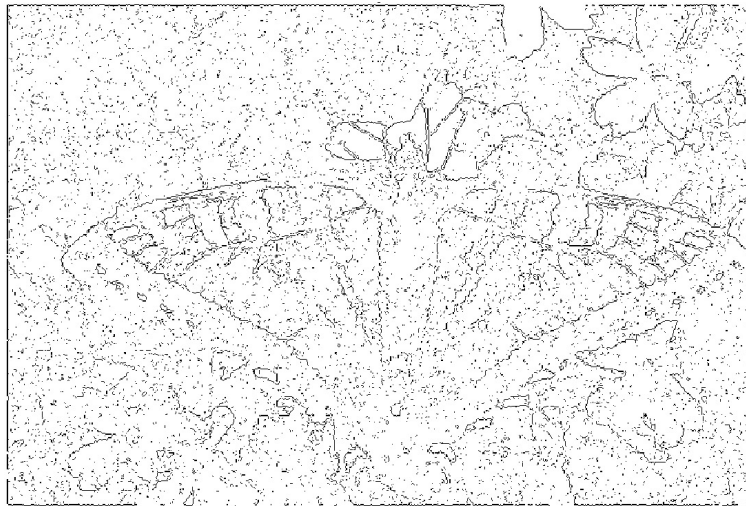


Fig. 3.25. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el operador de Sobel

En la Figura 3.26 se muestra el resultado de aplicar el algoritmo de Canny a la en escala de grises original de la mariposa con ruido tipo Gaussiano.

3.5. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE BORDES FRACCIONARIO A IMÁGENES CON RUIDO TIPO GAUSSIANO Y TIPO SAL Y PIMIENTA

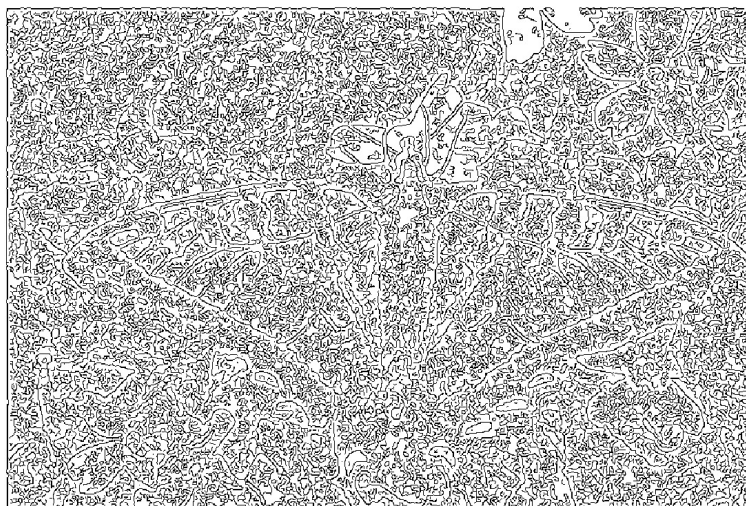


Fig. 3.26. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el algoritmo de Canny

En la Figura 3.27 se muestra el resultado de aplicar el operador Laplaciano del Gaussiano a la imagen en escala de grises de la mariposa con ruido tipo Gaussiano.

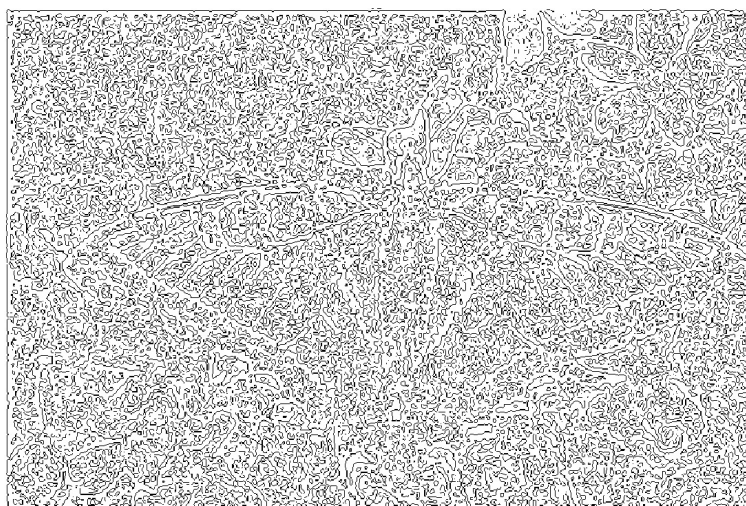


Fig. 3.27. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el algoritmo Laplaciano del Gaussiano

En las Figuras 3.28-3.30 se muestran las imágenes de la mariposa con ruido tipo Gaussiano aplicando el detector de bordes fraccionario con diferentes ordenes de derivada que van desde 0.6 hasta 0.9, éstos ordenes se consideraron de tal manera que el resultado visual de la imagen pudiera notarse la mariposa sin confundirse con el ruido tipo Gaussiano, también se considera el resultado al aplicar las métricas ya que se obtuvo el mejor desempeño en comparación con los operadores clásicos.

3.5. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE BORDES FRACCIONARIO A IMÁGENES CON RUIDO TIPO GAUSSIANO Y TIPO SAL Y PIMIENTA



Fig. 3.28. Imagen original con ruido tipo gaussiano y detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$



Fig. 3.29. Imagen original con ruido tipo gaussiano y detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$

3.5. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE BORDES FRACCIONARIO A IMÁGENES CON RUIDO TIPO GAUSSIANO Y TIPO SAL Y PIMIENTA

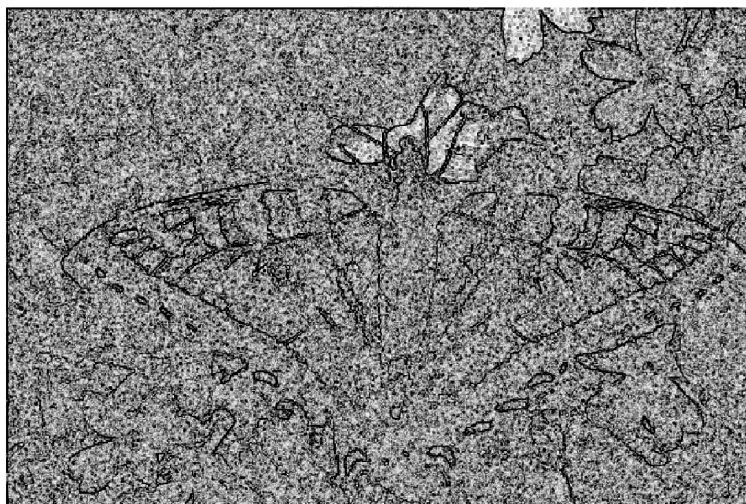


Fig. 3.30. Imagen original con ruido tipo gaussiano y detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$

En la tabla (3.3) se muestran los valores de las métricas al aplicarlas a los diferentes tipos de detectores de bordes clásicos y fraccionario con ruido tipo Gaussiano. Donde se puede observar que los valores del MSE en el detector de bordes fraccionario es menor comparado con los detectores de bordes clásicos.

Tabla 3.3. Métricas correspondientes a la imagen de la mariposa considerando ruido tipo Gaussiano.

Operador	Gaussiano	
	MSE	PSNR
Sobel	19703.6079	5.1853
Roberts	19702.6075	5.1855
LoG	19693.1099	5.1876
Prewitt	19701.8933	5.1857
Canny	19686.3507	5.1891
Fraccionario $\alpha = 0.9$	11945.9544	7.3585
Fraccionario $\alpha = 0.8$	12203.8494	7.2658
Fraccionario $\alpha = 0.6$	12866.1496	7.0363

De acuerdo con la Tabla anterior, se pudo observar que el detector de bordes fraccionario es robusto ante ruido tipo Gaussiano. Ésto debido a que el MSE es bajo y el PSNR es alto, en comparación con los operadores clásicos.

3.5.2. Ruido tipo sal y pimienta

Este tipo de ruido está definido como ocurrencias aleatorias de píxeles blancos y negros en donde los píxeles son muy diferentes en color o intensidad a los circundantes. En una imagen con este tipo de ruido se puede encontrar puntos blancos sobre puntos negros o puntos negros sobre puntos blancos, por esta razón se le llama ruido "sal y pimienta".

3.5. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE BORDES FRACCIONARIO A IMÁGENES CON RUIDO TIPO GAUSSIANO Y TIPO SAL Y PIMIENTA

En la Figura 3.31 se muestra la imagen original en escala de grises con ruido tipo sal-pimienta con una densidad de $\nu = 0.01$.



Fig. 3.31. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta

Aplicando los operadores de Roberts, Prewitt, Sobel y el algoritmo de Canny a la imagen con ruido sal-pimienta, en las Figuras 3.32-3.36 se puede observar que las técnicas clásicas no son capaces de definir adecuadamente los bordes débiles y fuertes. Sin embargo, al aplicar el detector de bordes fraccionario, en las Figuras 3.37-3.39 se alcanza a apreciar que los bordes y las texturas son delimitados adecuadamente aún ante la presencia de ruido. Las métricas que dan soporte a esta conclusión se encuentran en la Tabla 3.4.

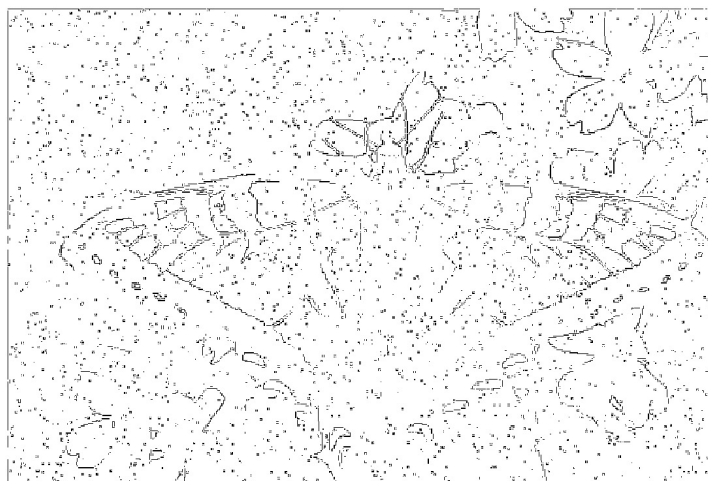


Fig. 3.32. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el operador de Roberts

3.5. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE BORDES FRACCIONARIO A IMÁGENES CON RUIDO TIPO GAUSSIANO Y TIPO SAL Y PIMIENTA

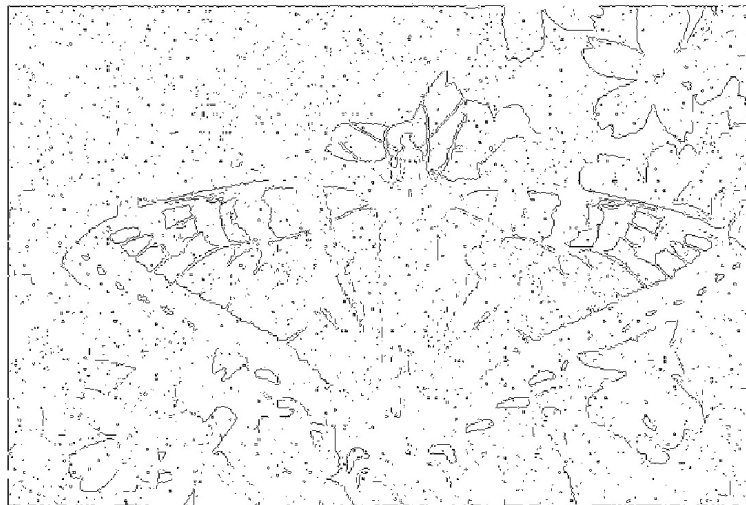


Fig. 3.33. Imagen original con ruido tipo gaussiano aplicando el operador de Prewitt

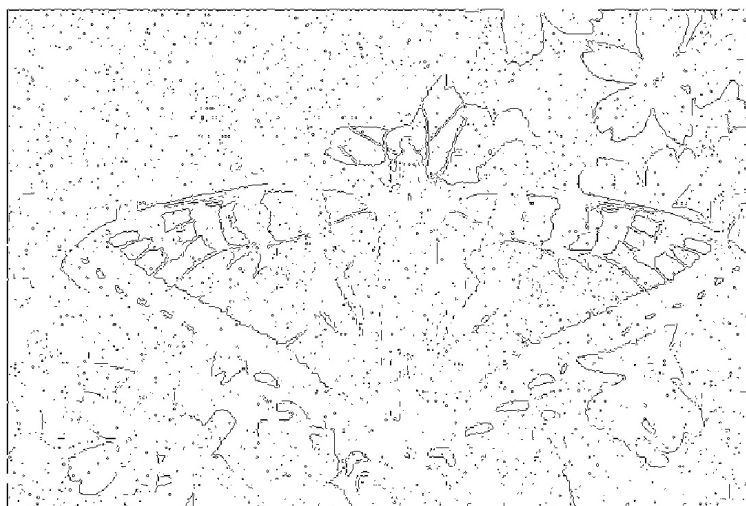


Fig. 3.34. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el operador de Sobel

3.5. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE BORDES FRACCIONARIO A IMÁGENES CON RUIDO TIPO GAUSSIANO Y TIPO SAL Y PIMIENTA

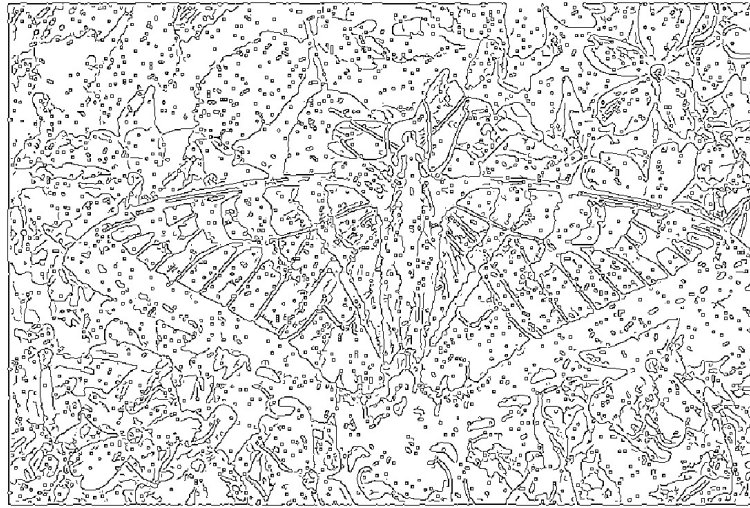


Fig. 3.35. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el algoritmo de Canny

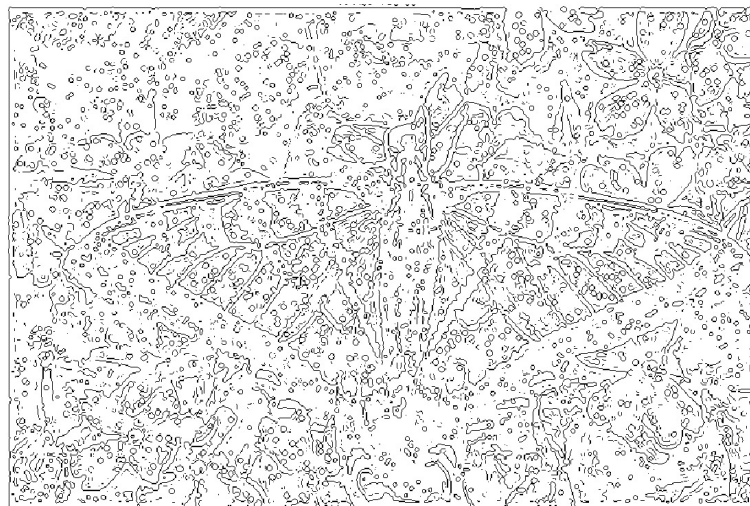


Fig. 3.36. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el algoritmo Laplaciano del Gaussiano

3.5. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE BORDES FRACCIONARIO A IMÁGENES CON RUIDO TIPO GAUSSIANO Y TIPO SAL Y PIMIENTA

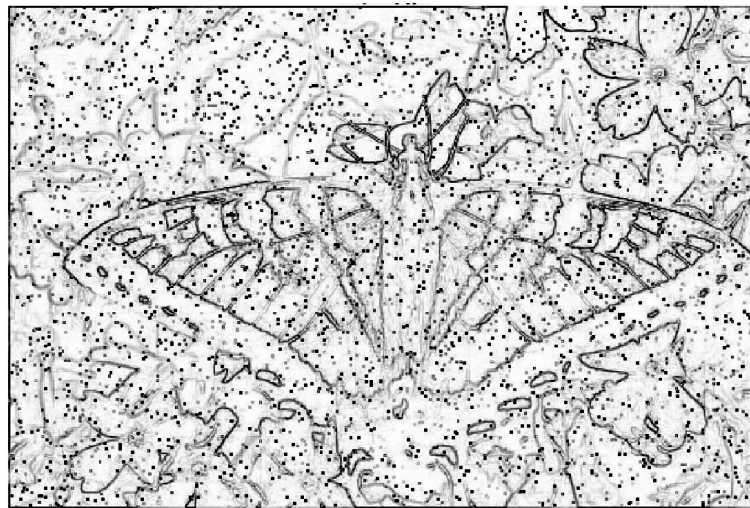


Fig. 3.37. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$

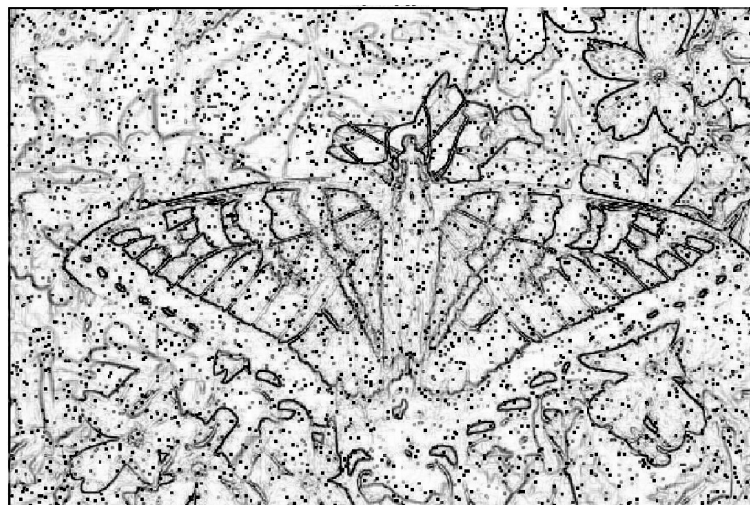


Fig. 3.38. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$

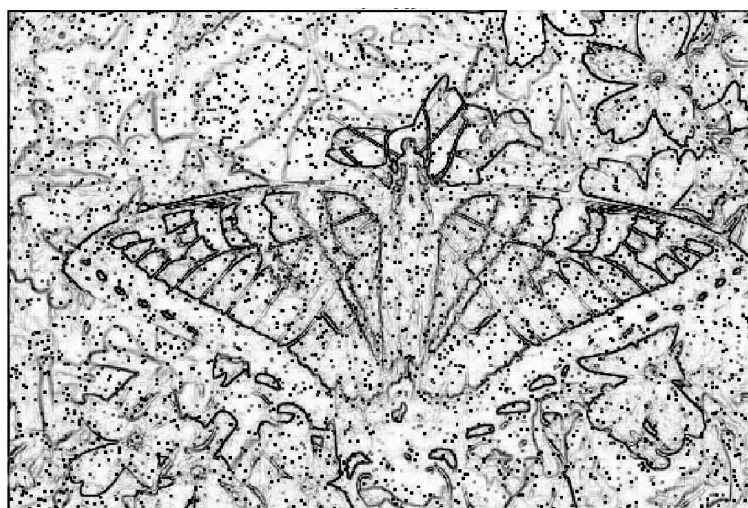


Fig. 3.39. Imagen original con ruido tipo sal y pimienta aplicando el detector de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$

Tabla 3.4. Métricas correspondientes a la imagen de la mariposa considerando ruido tipo sal y pimienta.

Operador	Sal y pimienta	
	MSE	PSNR
Sobel	19699.0921	5.1863
Roberts	19702.6075	5.1855
LoG	19693.1099	5.1876
Prewitt	19701.8933	5.1857
Canny	19686.3507	5.1891
Fraccionario $\alpha = 0.9$	11954.9544	7.3585
Fraccionario $\alpha = 0.8$	12203.8494	7.2658
Fraccionario $\alpha = 0.6$	12866.1496	7.0363

De acuerdo con los resultados de simulación obtenidos, se pudo observar que el detector de bordes fraccionario es robusto ante ruido de tipo Gaussiano y sal-pimienta. Ésto debido a que el MSE y el PSNR son bajo y alto respectivamente, en comparación con los operadores clásicos. Además, con este detector no sólo es posible detectar bordes gruesos sino también bordes débiles.

La matriz Hessiana es una matriz cuadrada de conformada por las segundas derivadas parciales. Con esta matriz es posible encontrar el punto máximo y mínimo, así como, puntos silla de una función dada.

A continuación, se presenta la matriz Hessiana fraccionaria con la derivada de Caputo-Fabrizio.

3.6. Matriz Hessiana con derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio

La matriz Hessiana clásica está dada por la siguiente expresión:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

donde, I es la imagen en escala de grises.

$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ es la segunda derivada parcial con respecto a x de la imagen.

$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}$ es la segunda derivada parcial con respecto a x y con respecto a y de la imagen.

$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$ es la segunda derivada parcial con respecto a y de la imagen.

Considerando el gradiente fraccionario en el sentido de Caputo-Fabrizio, la matriz Hessiana clásica puede ser generalizada como sigue:

$${}^{CFC}H^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{2\alpha} I}{\partial x^{2\alpha}} & \frac{\partial^{2\alpha} I}{\partial x^\alpha \partial y^\alpha} \\ \frac{\partial^{2\alpha} I}{\partial y^\alpha \partial x^\alpha} & \frac{\partial^{2\alpha} I}{\partial y^{2\alpha}} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

las derivadas parciales se obtienen mediante las siguientes expresiones

$$\frac{\partial^{2\alpha} I}{\partial x^{2\alpha}} \approx {}^{CFC}D_x^\alpha ({}^{CFC}D_x^\alpha I), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^{2\alpha} I}{\partial y^{2\alpha}} \approx {}^{CFC}D_y^\alpha ({}^{CFC}D_y^\alpha I), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^{2\alpha} I}{\partial x^\alpha \partial y^\alpha} \approx \frac{\partial^{2\alpha} I}{\partial y^\alpha \partial x^\alpha}. \quad (3.17)$$

La matriz Hessiana es utilizada para obtener la curvatura principal que define los bordes y su resultante [69], donde λ_1 y λ_2 son los puntos máximos y mínimos, respectivamente. Dicho de otra manera, son los eigenvalores de la matriz Hessiana [70]. Debido a que λ_2 carece de contraste, λ_1 es elegido para los propósitos de esta tesis.

La curvatura principal está dada por las siguientes expresiones:

$$P(x^\beta) = \max(\lambda_1, 0), \quad \forall \beta \in (0, 1], \quad (3.18)$$

y

$$P(x^\beta) = \min(\lambda_2, 0), \forall \beta \in (0, 1]. \quad (3.19)$$

La Figura (3.40), muestra el diagrama de flujo considerado para la generalización de la matriz Hessiana utilizando la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio.

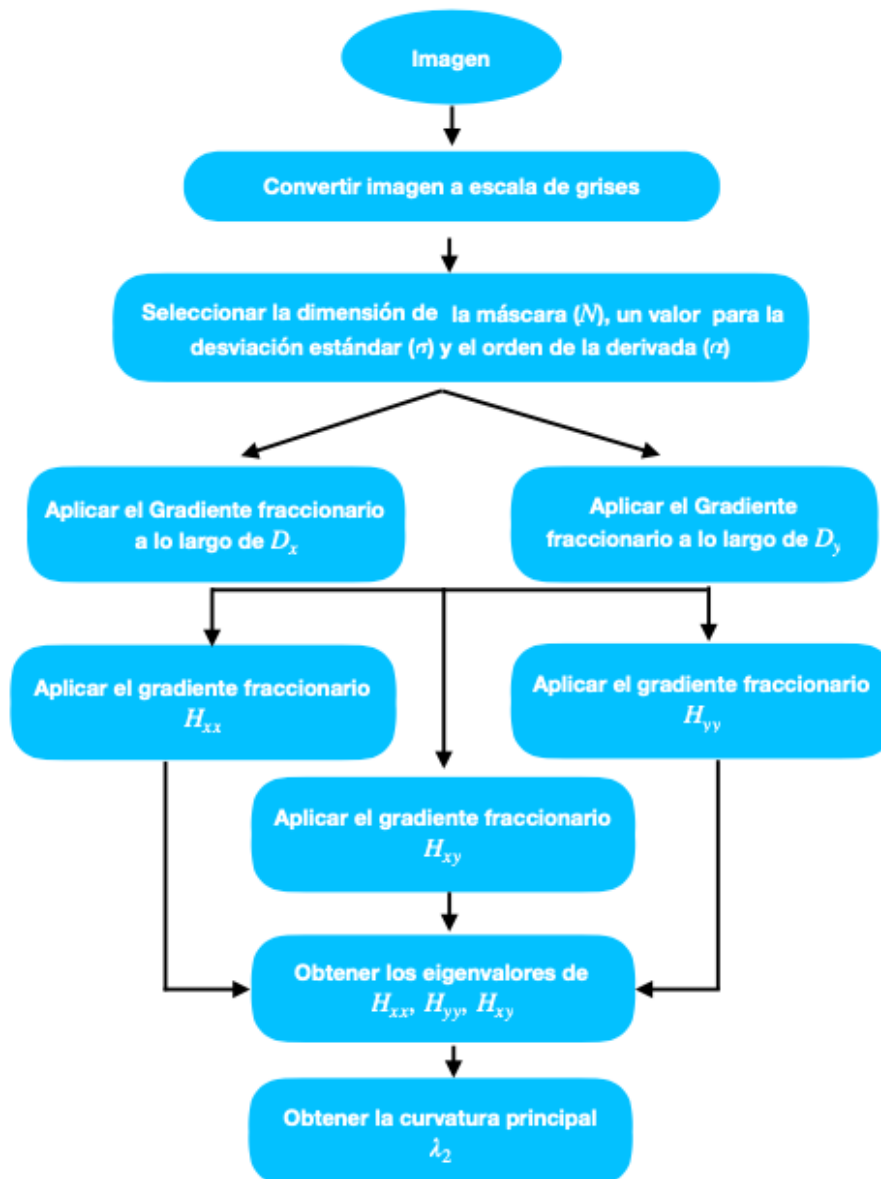


Fig. 3.40. Matriz Hessiana utilizando la derivada de Caputo-Fabrizio

El pseudocódigo utilizado para el algoritmo de detección de bordes utilizando la matriz Hessiana con

3.6. MATRIZ HESSIANA CON DERIVADA FRACCIONARIA DE CAPUTO-FABRIZIO

la derivada de Caputo-Fabrizio es mostrado en el Anexo A pseudocódigo 2.

En la Figura 3.41 se muestra λ_1 mientras que en la Figura 3.42 se presenta λ_2 . En estos resultados se puede interpretar la imagen de entrada como una superficie de intensidad en diferentes direcciones.



Fig. 3.41. Lambda 1 (λ_1)



Fig. 3.42. Lambda 2 (λ_2)

En las siguientes Figuras, se muestran los resultados obtenidos al aplicar la curvatura principal a la imagen de la estenosis presentada en la Figura 3.7.

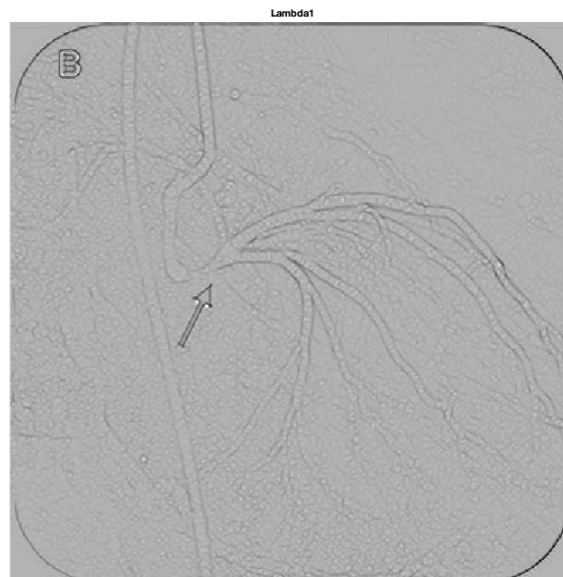


Fig. 3.43. Lambda 1 (λ_1)

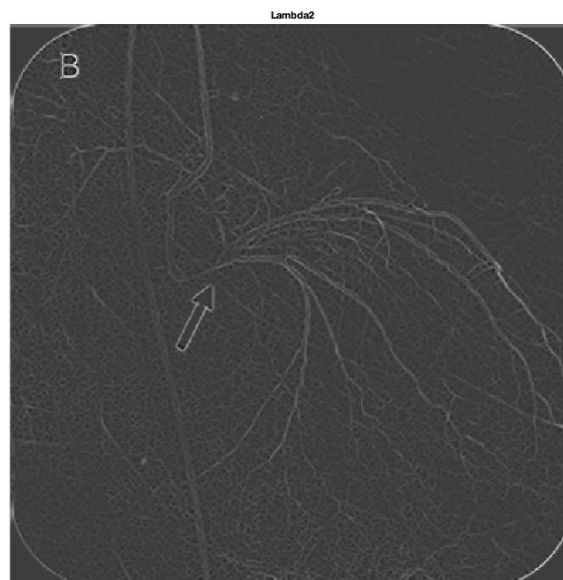


Fig. 3.44. Lambda 2 (λ_2)

En seguida se presentan los resultados obtenidos al aplicar la generalización de la matriz Hessiana con la utilización de la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio variando α desde 0.5 hasta 0.8 y $\alpha = 1$ (el caso ordinario). Estos resultados se muestran las Figuras 3.45-3.54.



Fig. 3.45. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_1 con $\alpha = 0.5$

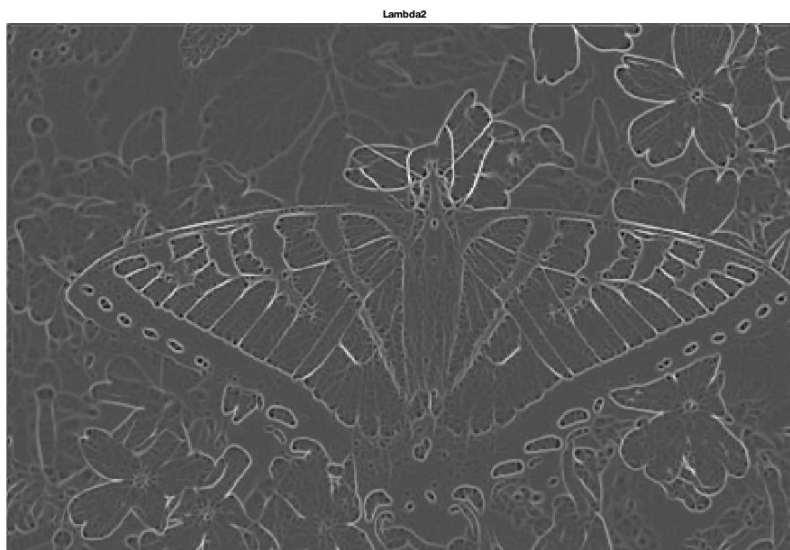


Fig. 3.46. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_2 con $\alpha = 0.5$

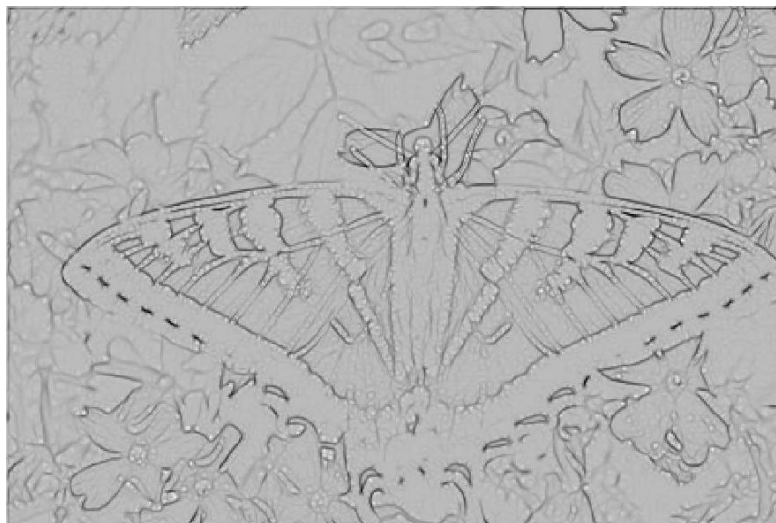


Fig. 3.47. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_1 con $\alpha = 0.6$

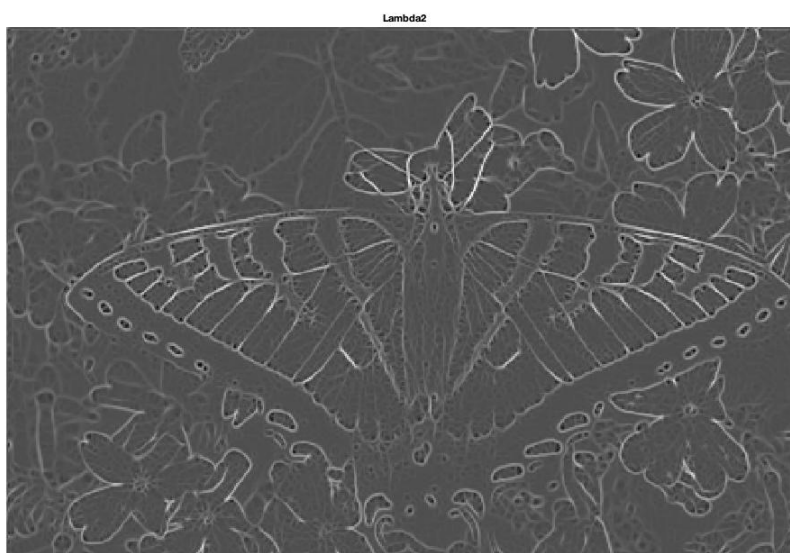


Fig. 3.48. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_2 con $\alpha = 0.6$



Fig. 3.49. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_1 con $\alpha = 0.7$

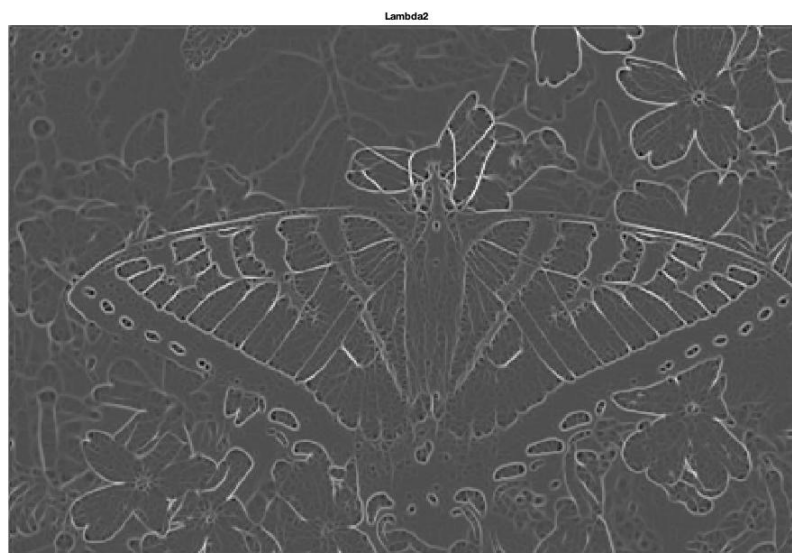


Fig. 3.50. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_2 con $\alpha = 0.7$



Fig. 3.51. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_1 con $\alpha = 0.8$



Fig. 3.52. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_2 con $\alpha = 0.8$



Fig. 3.53. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_1 con $\alpha = 1$



Fig. 3.54. Hessiana utilizando la derivada de CF λ_2 con $\alpha = 1$

Al realizar un análisis de la curvatura principal sobre la matriz Hessiana fraccionaria se obtuvieron resultados interesantes pues las imágenes obtenidas con λ_1 destacan las orientas con λ_2 , ésto debido a que las primeras aportan mayor información sobre los bordes de las imágenes. Además, se puede analizar que los bordes obtenidos resaltan sobre un fondo blanco mientras que en los casos con λ_2 siempre carece de buen contraste. Por otro lado, las métricas que nos permiten medir el desempeño del enfoque propuesto, se muestran en la Tabla 3.5. En estos resultados se observa que los valores del PSNR para λ_1 y λ_2 van en aumento mientras $\alpha \rightarrow 1$. En la métrica correspondiente al MSE, se observa que para λ_1 y para λ_2 van disminuyendo conforme se acerca a 1.

Tabla 3.5. Métricas obtenidas para la Matriz Hessiana utilizando la derivada de Caputo-Fabrizio.

Operador	MSE	PSNR
Fracionario λ_1 con $\alpha = 0.5$	16746.0574	5.8916
Fracionario λ_2 con $\alpha = 0.5$	19395.2108	5.2538
Fracionario λ_1 con $\alpha = 0.6$	16670.1090	5.9114
Fracionario λ_2 con $\alpha = 0.6$	19344.8511	5.2651
Fracionario λ_1 con $\alpha = 0.7$	16609.1369	5.9273
Fracionario λ_2 con $\alpha = 0.7$	19299.1255	5.2754
Fracionario λ_1 con $\alpha = 0.8$	16550.2284	5.9427
Fracionario λ_2 con $\alpha = 0.8$	19257.6176	5.2847

Debido a la naturaleza fractal de las imágenes, a continuación se presenta el gradiente Gaussiano conformable donde se utiliza el kernel Gaussiano y la derivada conformable de tipo Khalil. Esta derivada local tiene la facilidad de poder describir medios fractales y con variaciones espaciales paramétricas.

3.7. Gradiente Gaussiano Conformable

El Gradiente Gaussiano Conformable es obtenido a partir del filtro de kernel Gaussiano de tipo Khalil. Para ello, el kernel Gaussiano clásico (2.18) es derivado para obtener:

$$g(x) = -\frac{(x - \mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (3.20)$$

Considerando la notación para la derivada de Khalil dada en la ecuación (2.26), se obtiene la siguiente representación del Kernel gaussiano conformable

$${}^K D_t^\alpha g(x) = t^{1-\alpha} \left[-\frac{(x - \mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \right]. \quad (3.21)$$

Sustituyendo la ecuación (3.20) en la ecuación (3.21) finalmente se obtiene:

$${}^K_0 D_t^\alpha g(x) = t^{1-\alpha} \left[-\frac{(x - \mu)}{\sigma^2} \cdot g(x) \right]. \quad (3.22)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.22) se utiliza para obtener el gradiente a lo largo de x y a lo largo de y , como se muestran en las ecuaciones (3.23) y (3.24)

$$\frac{\partial^\alpha I}{\partial x^\alpha} \approx \left({}^K_0 D_t^\alpha g(x) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \otimes I, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial^\alpha I}{\partial y^\alpha} \approx \left({}^K_0 D_t^\alpha g(y) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \otimes I, \quad (3.24)$$

3.7. GRADIENTE GAUSSIANO CONFORMABLE

donde I es la imagen de entrada.

La Figura (3.55), muestra el diagrama de flujo considerado para la generalización del gradiente Gaussiano conformable

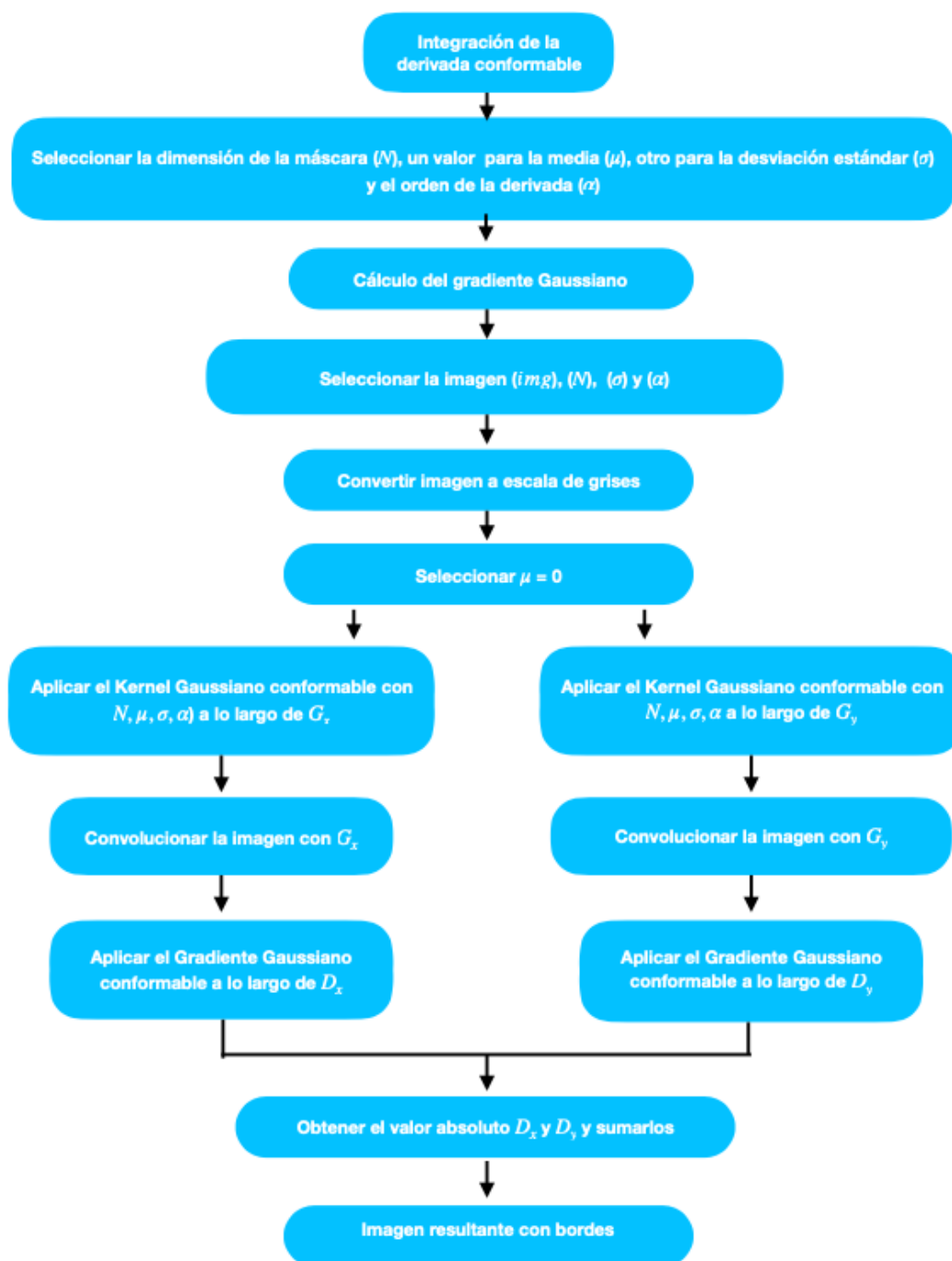


Fig. 3.55. Gradiente Gaussiano conformable

3.7. GRADIENTE GAUSSIANO CONFORMABLE

El pseudocódigo utilizado para el algoritmo de detección de bordes utilizando el gradiente Gaussiano conformable es mostrado en el Anexo A pseudocódigo 3.

En las Figuras 3.56-3.61 se muestran los resultados de aplicar el gradiente Gaussiano conformable variando α de 0.5 hasta 1.



Fig. 3.56. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 0.5$



Fig. 3.57. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 0.6$



Fig. 3.58. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 0.7$



Fig. 3.59. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 0.8$

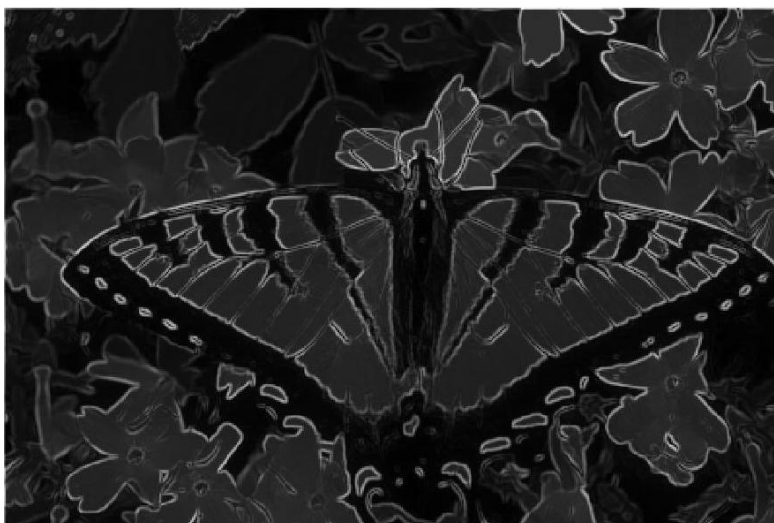


Fig. 3.60. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 0.9$



Fig. 3.61. Imagen aplicando el gradiente con $\alpha = 1$

En estos resultados se aprecian características diferentes conforme α está variando. Se puede observar que mientras $\alpha \rightarrow 1$, el caso clásico es recuperado. Sin embargo, si α varía es posible observar los bordes y la textura de la imagen con mayor definición.

Por consiguiente, el gradiente Gaussiano conformable es utilizado para generalizar la matriz Hessiana.

3.8. Matriz Hessiana conformable de tipo Khalil

Como se ha mencionado con anterioridad, la matriz Hessiana (3.13) está definida como una matriz de segundas derivadas parciales. Por esta razón, las derivadas parciales con aproximadas mediante las siguientes expresiones

$$\frac{\partial^2 {}^K I}{\partial x^2} \approx ({}^K D_t^\beta g(x) \times [1 \ 0 \ -1]) \times \frac{\partial^\beta I}{\partial x^\beta}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^\beta I}{\partial x^\beta} \approx ({}^K D_t^\beta g(x) \times [1 \ 0 \ -1]) \times I, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^{2\beta} I}{\partial x^\beta \partial y^\beta} \approx ({}^K D_t^\beta g(x) \otimes [1 \ 0 \ -1]) \otimes \frac{\partial^\beta I}{\partial y^\beta}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^\beta I}{\partial y^\beta} \approx \left({}^K D_t^\beta g(x) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \otimes I, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial^{2\beta} I}{\partial x^\beta \partial y^\beta} \approx \frac{\partial^{2\beta} I}{\partial y^\beta \partial x^\beta}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial^{2\beta} I}{\partial y^{2\beta}} \approx \left({}^K D_t^\beta g(x) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \otimes \frac{\partial^\beta I}{\partial y^\beta}, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^\beta I}{\partial y^\beta} \approx \left({}^K D_t^\beta g(x) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \otimes I. \quad (3.31)$$

donde ${}^K D_t^\beta g(x)$ y ${}^K D_t^\beta g(y)$ representan el kernel gaussiano conformable dados por las siguientes ecuaciones:

$${}^K D_t^\beta g(x) = -\frac{(x - \mu)}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.32)$$

$${}^K D_t^\beta g(y) = -\frac{(y - \mu)}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.33)$$

Finalmente, la matriz Hessiana conformable se puede escribir como

$${}^K H^\beta = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{2\beta} I}{\partial x^{2\beta}} & \frac{\partial^2 I}{\partial x^\beta \partial y^\beta} \\ \frac{\partial^{2\beta} I}{\partial y^\beta \partial x^\beta} & \frac{\partial^{2\beta} I}{\partial y^{2\beta}} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

De igual manera, el análisis de la curvatura principal es aplicado a esta nueva generalización. Donde ahora los valores propios, es decir, los valores máximos y mínimos de una superficie de intensidad son locales y fractales.

La Figura (3.62), muestra el diagrama de flujo considerado para la generalización de la matriz Hessiana conformable.

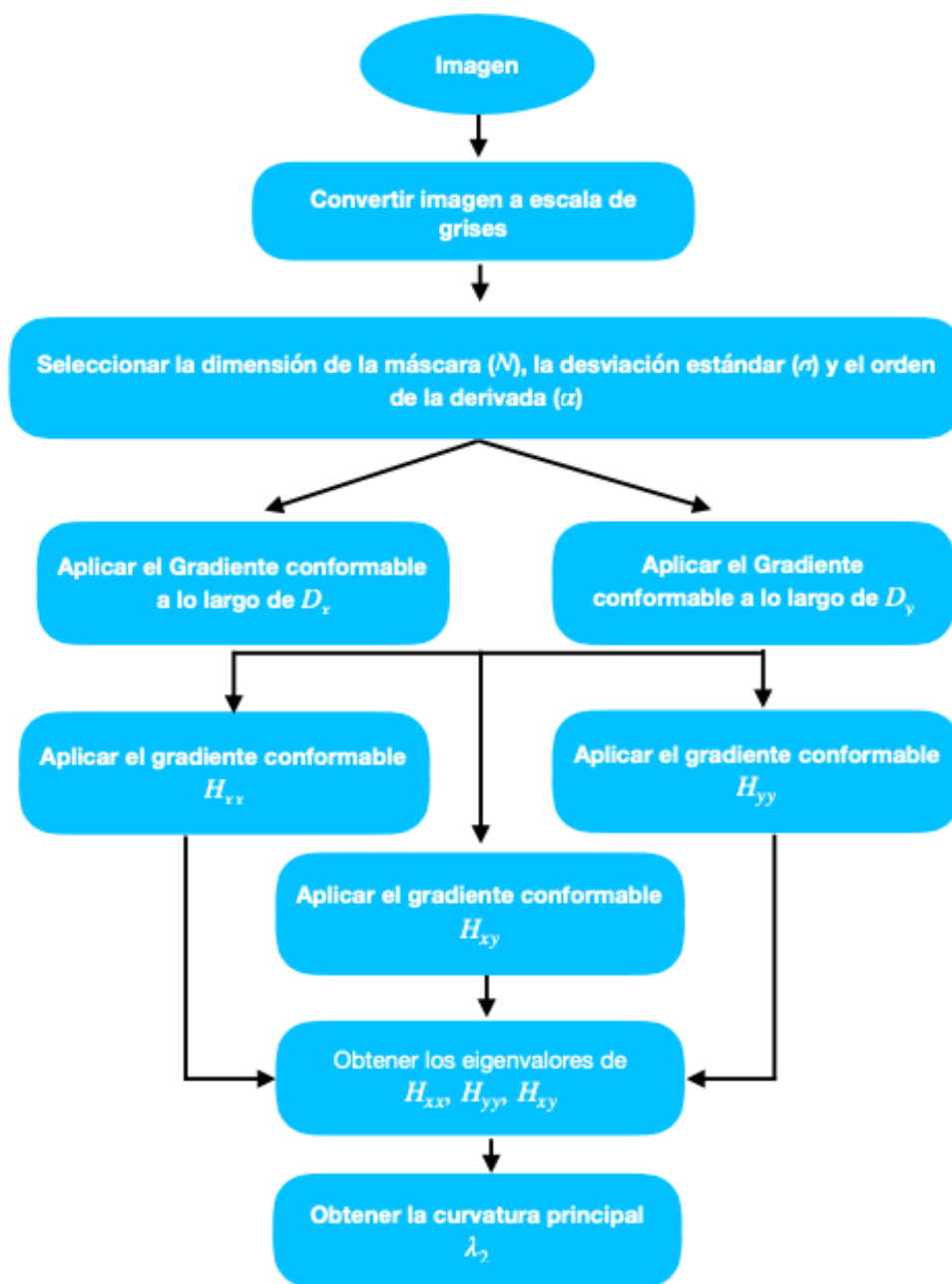


Fig. 3.62. Matriz Hessiana conformable

El pseudocódigo utilizado para el algoritmo de detección de bordes utilizando la matriz Hessiana conformable es mostrado en el Anexo A pseudocódigo 4.

En la Figura (3.63) se muestra a λ_1 mientras que en la Figura (3.64) se presenta λ_2 ; ambas con $\alpha = 0.5$. Por otro lado, en las Figuras 3.65-3.72 se puede visualizar el efecto de variar α de 0.5 hasta 1.

3.8. MATRIZ HESSIANA CONFORMABLE DE TIPO KHALIL

En estos resultados se puede observar que al momento de variar el orden de la derivada la textura de las imágenes correspondientes a λ_1 toman mayor notoriedad conforme $\alpha \rightarrow 1$. Los valores obtenidos por las métricas utilizadas para la evaluación del enfoque propuesto se muestran en la Tabla (3.6). Además, los valores PSNR para λ_1 y λ_2 no mantiene una relación conforme el orden de la derivada varía. Con los valores del MSE, se observa que para λ_1 éste disminuye conforme $\alpha \rightarrow 1$ y mientras que para el caso de λ_2 no se observa una variación significativa.

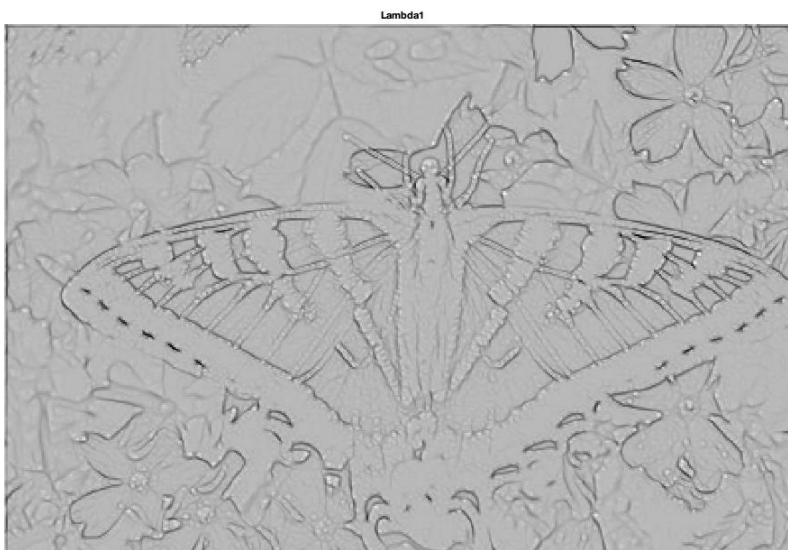


Fig. 3.63. Hessiana λ_1 con $\alpha = 0.5$

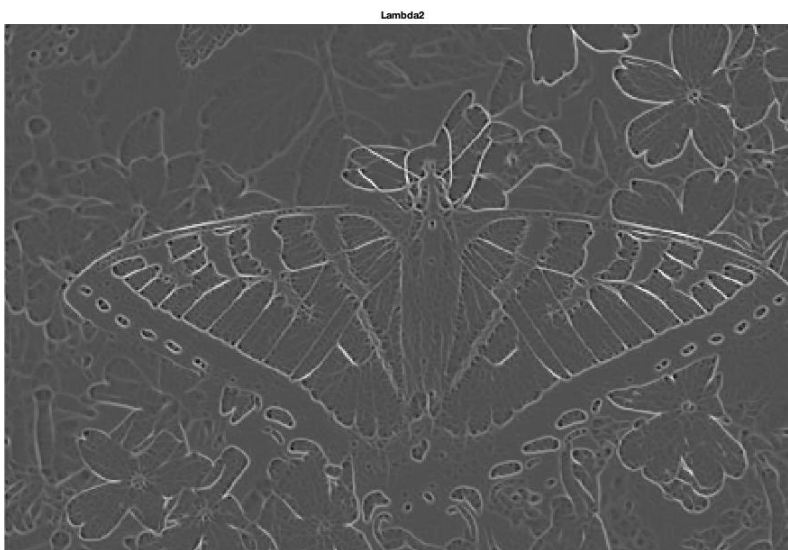


Fig. 3.64. Hessiana λ_2 con $\alpha = 0.5$



Fig. 3.65. Hessiana λ_1 con $\alpha = 0.6$



Fig. 3.66. Hessiana λ_2 con $\alpha = 0.6$

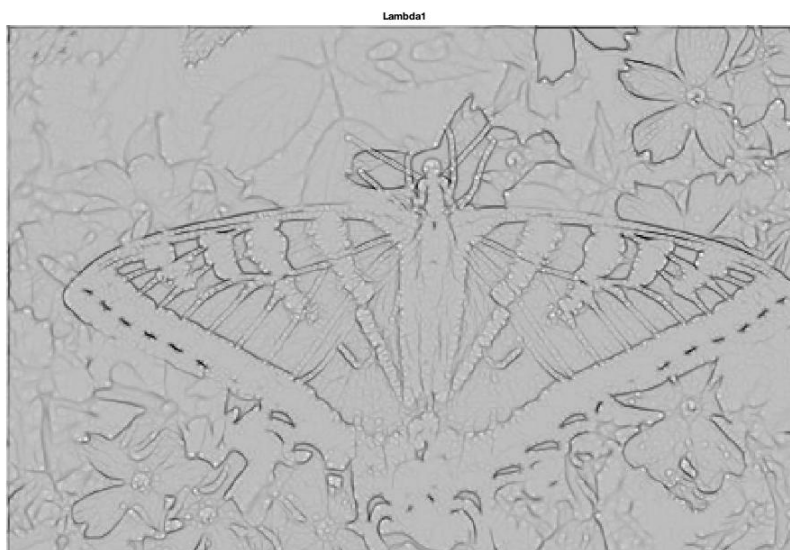


Fig. 3.67. Hessiana λ_1 con $\alpha = 0.7$



Fig. 3.68. Hessiana λ_2 con $\alpha = 0.7$

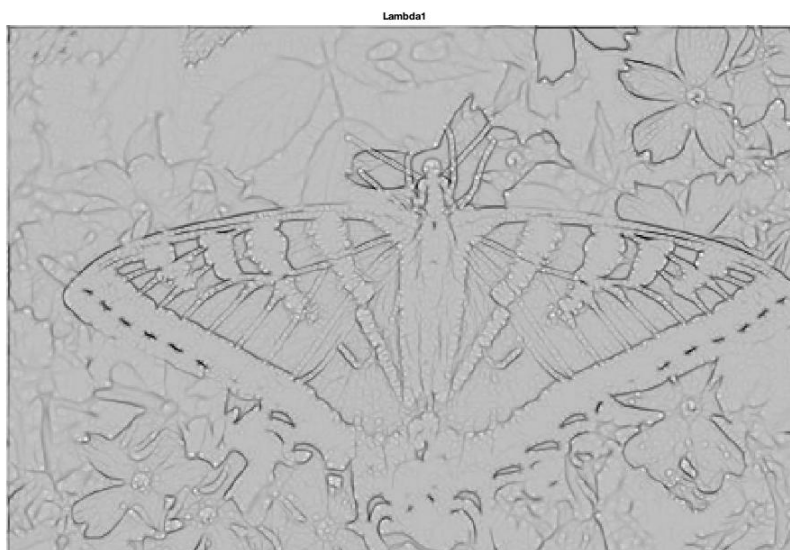


Fig. 3.69. Hessiana λ_1 con $\alpha = 0.8$



Fig. 3.70. Hessiana λ_2 con $\alpha = 0.8$

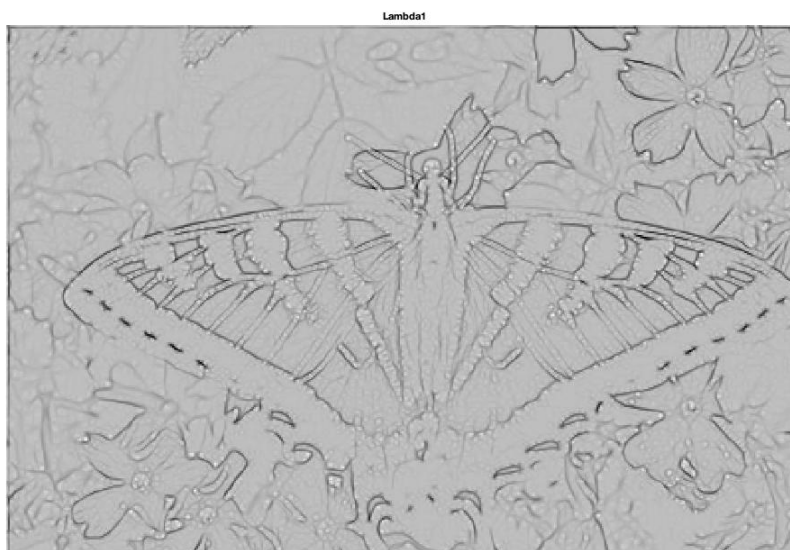


Fig. 3.71. Hessiana λ_1 con $\alpha = 1$



Fig. 3.72. Hessiana λ_2 con $\alpha = 1$

Tabla 3.6. Métricas obtenidas para la Matriz Hessiana utilizando la derivada conformable.

Operador	MSE	PSNR
Conformable λ_1 con $\alpha = 0.5$	18565.3386	5.4437
Conformable λ_2 con $\alpha = 0.5$	19633.6333	5.2007
Conformable λ_1 con $\alpha = 0.6$	18563.3986	5.4442
Conformable λ_2 con $\alpha = 0.6$	19633.4586	5.2008
Conformable λ_1 con $\alpha = 0.7$	18561.3647	5.4447
Conformable λ_2 con $\alpha = 0.7$	19633.3432	5.2008
Conformable λ_1 con $\alpha = 0.8$	18559.6328	5.4451
Conformable λ_2 con $\alpha = 0.8$	19633.2315	5.2008

3.9. Dimensión fractal

La geometría fractal se introdujo en 1982 y ha ganado impulso a lo largo de los años debido a su amplio espectro de aplicaciones. El análisis fractal se aplica ampliamente para estudiar las características de una imagen. Sin embargo, en la mayoría de estas aplicaciones el interés común es determinar la dimensión fractal de un objeto por la información sobre su estructura geométrica [71]. Usando el algoritmo de conteo de cajas (box counting), es posible calcular la dimensión fractal en un área determinada.

El algoritmo de conteo de cajas consta de sobreponer una cuadrícula sobre la imagen a medir. Cada cuadro que compone la cuadrícula se le denomina caja y determina un tamaño de área del objeto a medir dentro de la imagen. A medida que el tamaño de las cajas se aproxima a cero, el área total cubierta por las cajas convergerá a la medida deseada. Esta afirmación está representada por la siguiente expresión

$$FD = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N_r)}{\log(1/r)}, \quad (3.35)$$

donde $N(r)$ es el número total de cajas de tamaño requeridas para cubrir el área a calcular y

$$FD_B = FD, \quad (3.36)$$

donde FD_B es la dimensión fractal [77].

En los siguientes casos, se consideró un tomografía computarizada con tumores de diferentes dimensiones. Al utilizar el algoritmo de conteo de cajas se puede ahorrar un proceso costoso e invasivo para el paciente pues estos estudios pueden variar desde \$1,200.00 MXN hasta \$2,900.00 MXN según la Secretaría de Salud [78].

La Figura (3.73), muestra el diagrama de flujo considerado para el algoritmo de conteo de cajas.

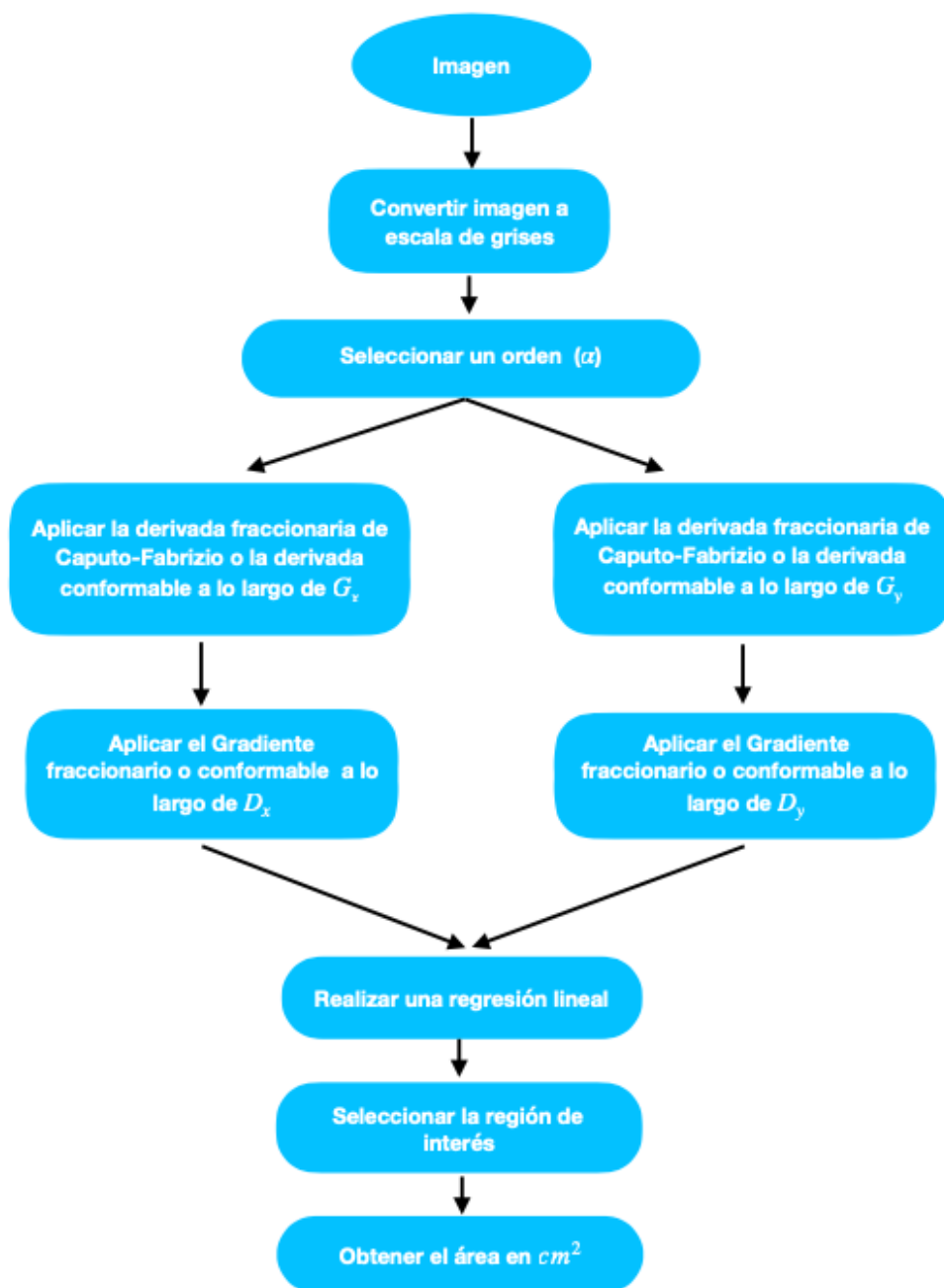


Fig. 3.73. Matriz Hessiana conformable

El pseudocódigo utilizado para el algoritmo de conteo de cajas es mostrado en el Anexo A pseudocódigo 5.

3.9.1. Caso 1

El primer caso a analizar es una tomografía computarizada que corresponde a una mujer de 51 años de edad con meningioma en el ala esfenoidal [45]. Esta imagen se puede ver en la Figura 3.74.



Fig. 3.74. Imagen original de la tomografía computarizada del caso 1

En las Figuras 3.75-3.79 se muestran los resultados obtenidos de aplicar el gradiente fraccionario en el sentido de Caputo-Fabrizio, donde el orden α varía desde 0.5 hasta 0.9.

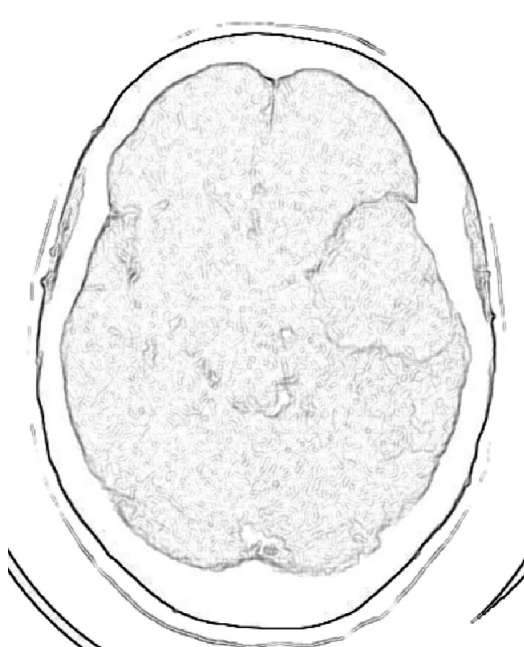


Fig. 3.75. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.5$



Fig. 3.76. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$

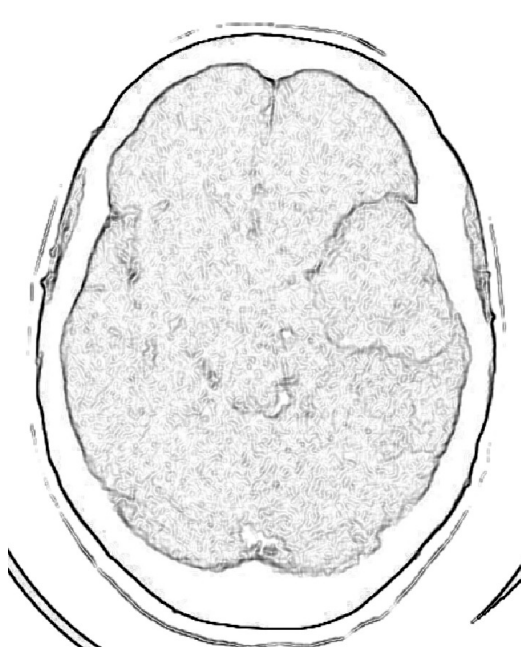


Fig. 3.77. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.7$

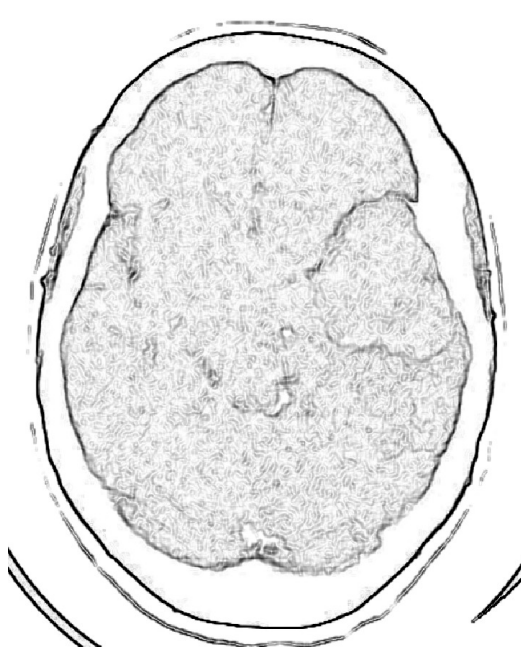


Fig. 3.78. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$

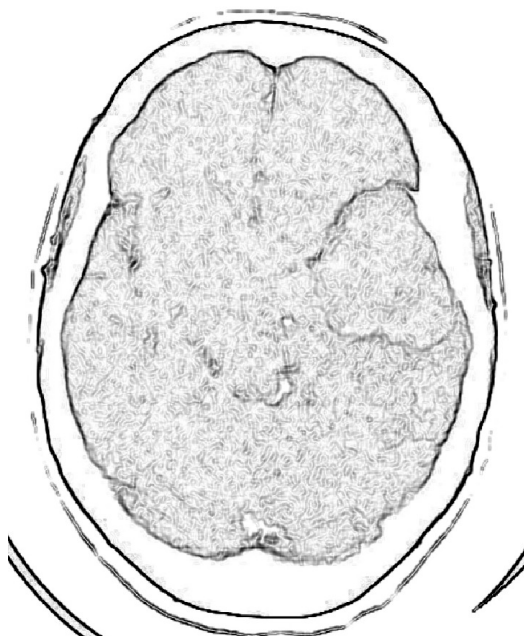


Fig. 3.79. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$

En las Figuras 3.75-3.79 se observa que al variar el orden de la derivada, las texturas correspondientes al área del cerebro tienen mayor nitidez, en consecuencia el meningioma es detectado con eficacia.

Del mismo modo, el gradiente Gaussiano conformable de tipo Khalil es aplicado para mostrar su desempeño. Ésto se puede ver en las Figuras 3.80-3.84 con $\alpha \in [0.5, 0.9]$.

En estos resultados se aprecia que conforme $\alpha \rightarrow 1$, las texturas comienzan a disminuir dejando sólo los bordes de la imagen original correspondiente a la tomografía computarizada. Los valores obtenidos por las métricas utilizadas se muestran en la Tabla 3.7.

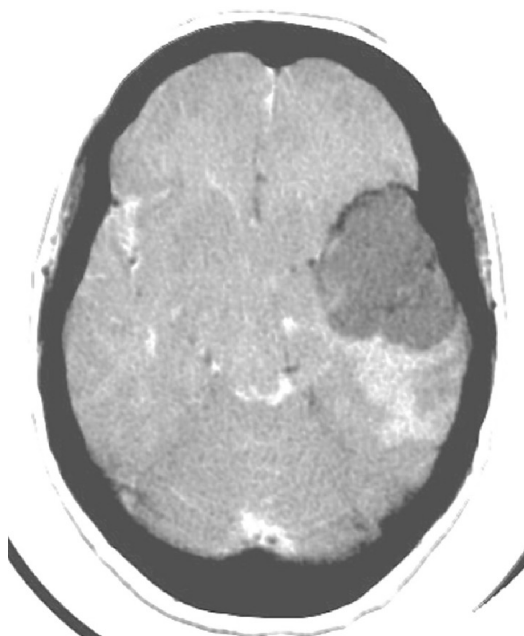


Fig. 3.80. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.5$

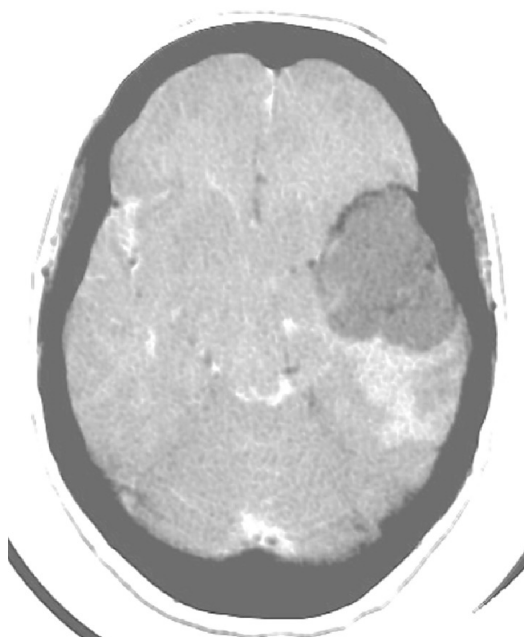


Fig. 3.81. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.6$

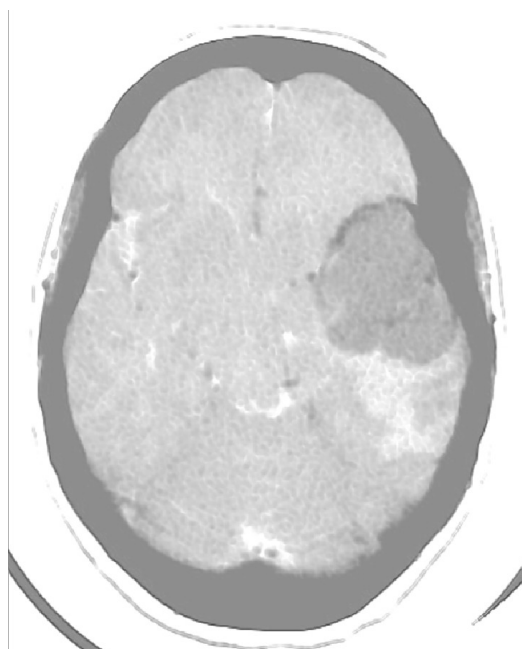


Fig. 3.82. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.7$

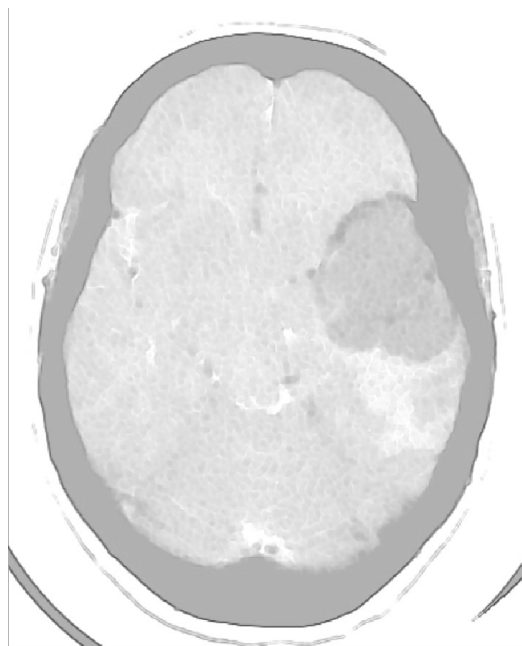


Fig. 3.83. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.8$

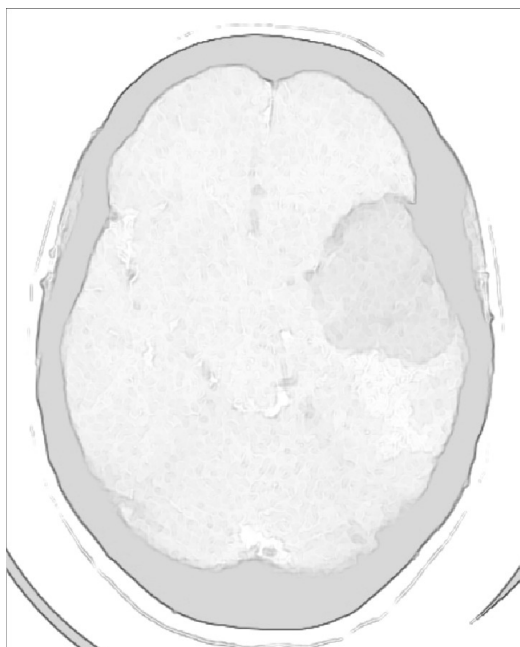
Fig. 3.84. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.9$

Tabla 3.7. Métricas obtenidas para el caso de estudio 1.

Operador	MSE	PSNR
Fraccionario $\alpha = 0.5$	23661.2311	4.3904
Fraccionario $\alpha = 0.6$	23661.3850	4.3904
Fraccionario $\alpha = 0.7$	23650.7763	4.3923
Fraccionario $\alpha = 0.8$	23661.2248	4.3904
Fraccionario $\alpha = 0.9$	23642.3757	4.3938
Conformable $\alpha = 0.5$	14146.1396	6.6244
Conformable $\alpha = 0.6$	13864.4046	6.7117
Conformable $\alpha = 0.7$	13583.0468	6.8008
Conformable $\alpha = 0.8$	13068.6578	6.9684
Conformable $\alpha = 0.9$	13066.5948	6.9691

En la Tabla 3.7 se observan las métricas obtenidas considerando dos algoritmos diferentes los cuales corresponden al detector de bordes fraccionario con la derivada de Caputo-Fabrizio y al gradiente Gaussiano conformable para diferentes ordenes de derivada. En esta tabla se observa que mientras el orden de la derivada se acerca a 1 el PSNR va aumentando mientras que el MSE va disminuyendo. Esto es para el caso del gradiente Gaussiano conformable mientras que para el detector fraccionario se observa que el PSNR aumentó cuando tiene un orden de derivada de 0.9, y el MSE va disminuyendo mientras se acerca a 1.

3.9.2. Caso 2

En el caso 2 se presenta la tomografía computarizada de una mujer de 24 años con un pseudoquiste pancreático de $10 \times 10 \times 9$ cm [46], ver Figura 3.85.



Fig. 3.85. Imagen original de la tomografía computarizada del caso 2

Aplicando el gradiente fraccionario, en las Figuras 3.86-3.90 se muestran los resultados obtenidos variando α desde 0.5 hasta 0.9. En estos resultados los bordes correspondientes a las costillas son resaltados cuando el orden de la derivada se acerca a 1, así mismo, el pseudoquiste se aprecia mejor delimitado cuando el orden de la derivada es igual a 0.8.

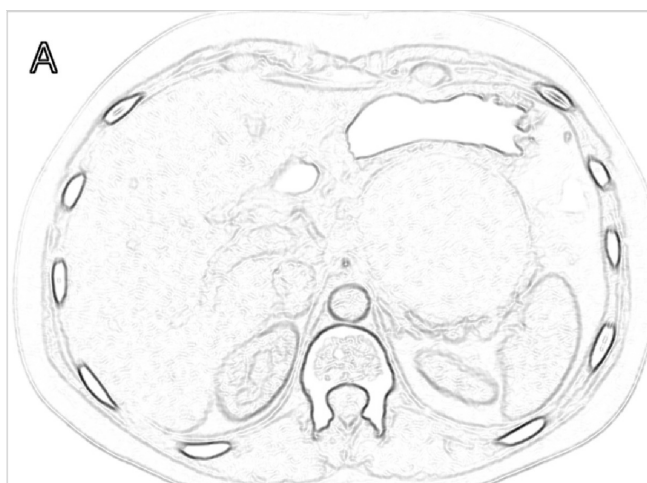


Fig. 3.86. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.5$



Fig. 3.87. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$



Fig. 3.88. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.7$

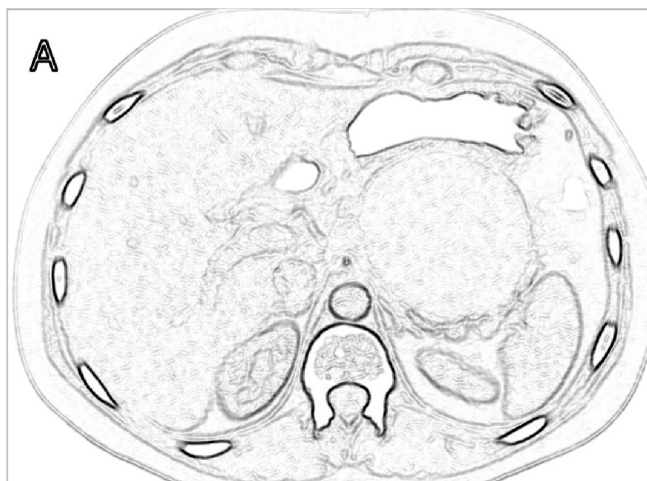


Fig. 3.89. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$

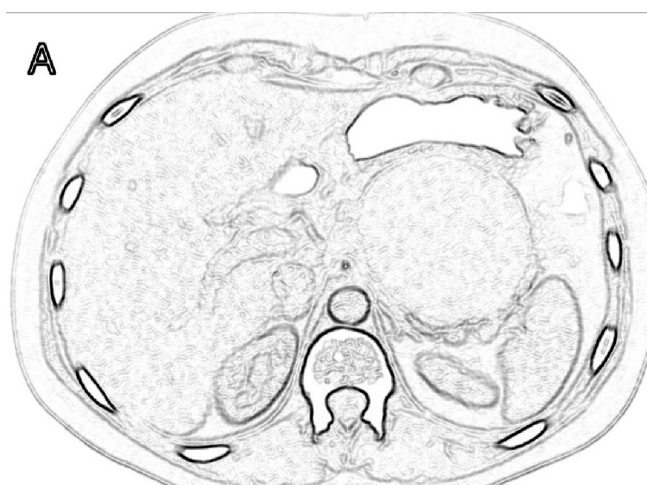


Fig. 3.90. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$

De igual manera, el gradiente Gaussiano conformable es aplicado. Los resultados se pueden observar en las Figuras 3.91-3.95 con $\alpha \in [0.5, 0.9]$.



Fig. 3.91. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.5$



Fig. 3.92. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.6$

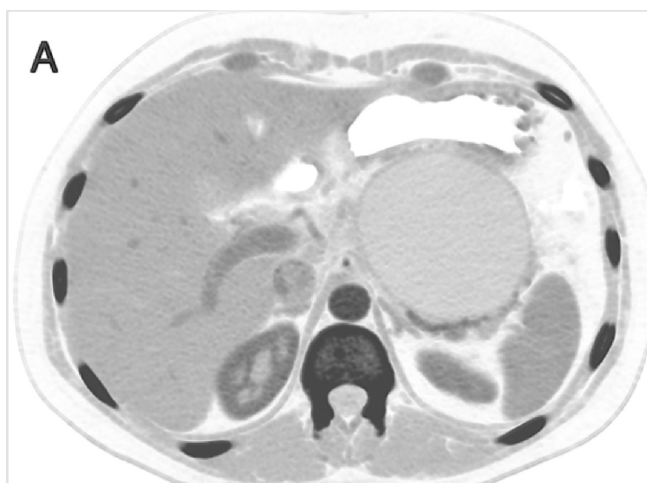


Fig. 3.93. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.7$

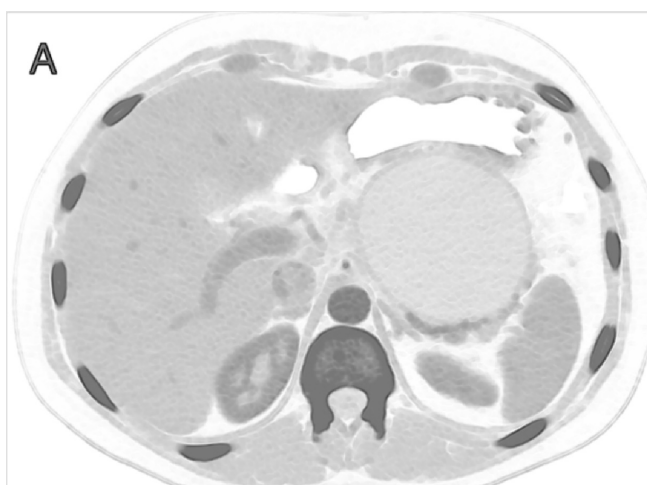
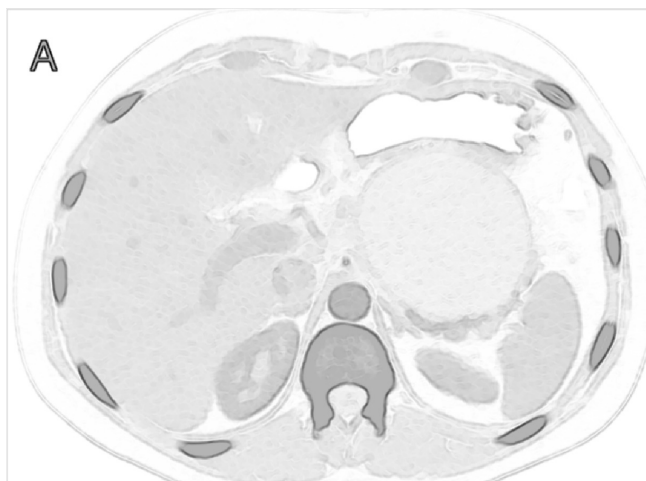


Fig. 3.94. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.8$

Fig. 3.95. Gradiente Gaussiano Conformable con $\alpha = 0.9$

De las figuras anteriores se tiene que cuando el orden de la derivada se acerca a 1, el borde del pseudo-quirte no tiene textura. De esta forma, la aplicación del algoritmo de conteo de cajas permitirá calcular una medida más cercana a la realidad. En la Tabla 3.8 se muestran los resultados de las métricas obtenidas para el caso 2.

Tabla 3.8. Métricas obtenidas para el caso de estudio 2.

Operador	MSE	PSNR
Fraccionario $\alpha = 0.5$	47960.9101	11.3219
Fraccionario $\alpha = 0.6$	46283.6523	11.4765
Fraccionario $\alpha = 0.7$	44778.0715	11.6201
Fraccionario $\alpha = 0.8$	43444.2580	11.7514
Fraccionario $\alpha = 0.9$	42343.7885	11.8629
Conformable $\alpha = 0.5$	13850.5129	16.7161
Conformable $\alpha = 0.6$	21168.7403	14.8738
Conformable $\alpha = 0.7$	29407.1532	13.4462
Conformable $\alpha = 0.8$	38528.2525	12.2730
Conformable $\alpha = 0.9$	48578.5516	11.2663

De la Tabla anterior, se puede observar que el MSE aumenta conforme el orden de la derivada en el gradiente fraccionario mientras se acerque a 0. Del mismo para el caso del gradiente Gaussiano conformable. Con respecto al PSNR, disminuye en el caso del detector de bordes fraccionario mientras que para el caso del gradiente Gaussiano conformable aumenta.

3.9.3. Caso 3

En este caso, se presenta la tomografía computarizada de una mujer de 60 años que presenta un tumor en el seno derecho de 30 cm^2 [47].



Fig. 3.96. Imagen original de la tomografía computarizada del caso 3

En las Figuras 3.97-3.101 se presentan los bordes obtenidos al aplicar el gradiente de Caputo-Fabrizio variando el orden de la derivada desde 0.5 hasta 0.9.

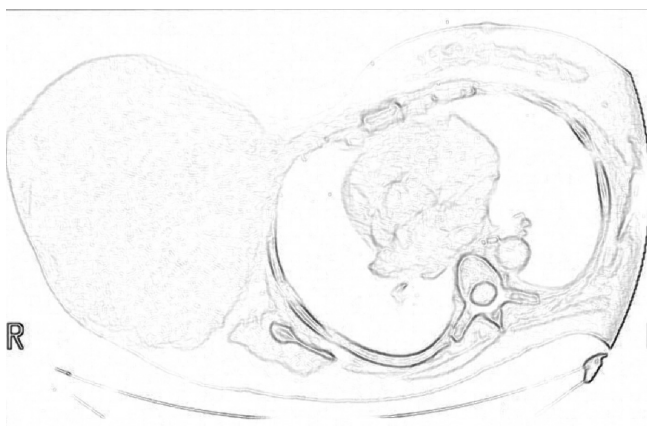


Fig. 3.97. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.5$

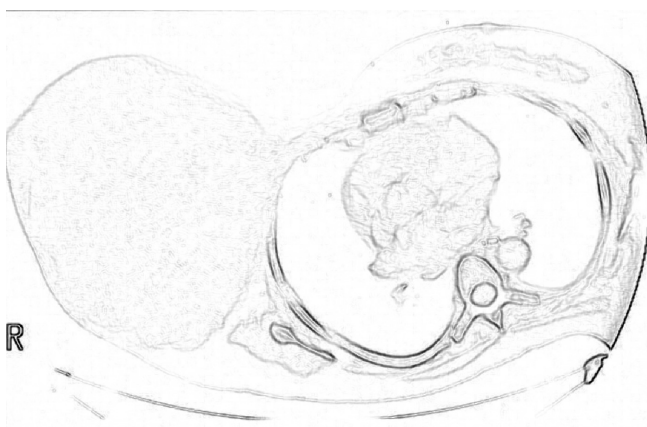


Fig. 3.98. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$

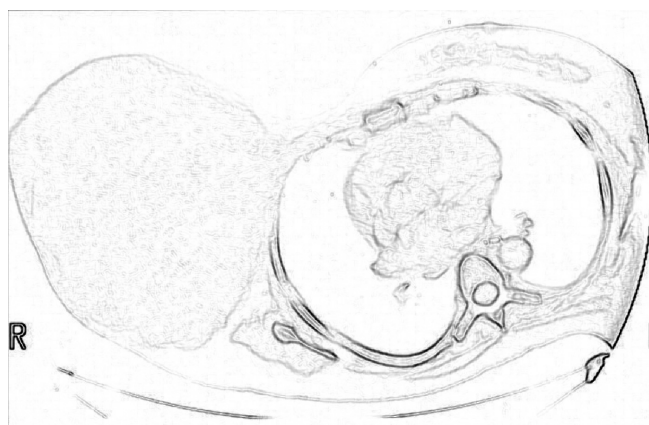


Fig. 3.99. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.7$

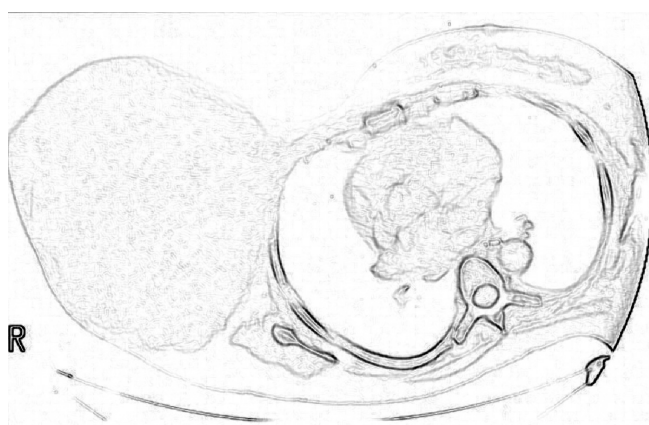


Fig. 3.100. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$

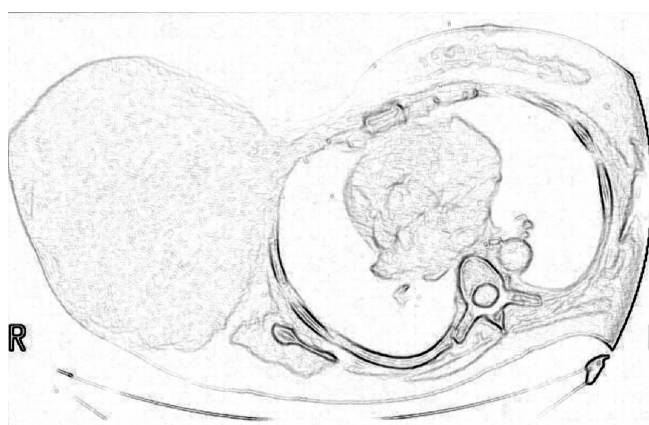


Fig. 3.101. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$

En las figuras anteriores se puede observar que el tumor presente es resaltado con mayor facilidad.

A continuación, se aplica el detector de bordes utilizando el gradiente Gaussiano conformable con $\alpha \in [0.5, 1]$. Ver Figuras 3.102-3.106

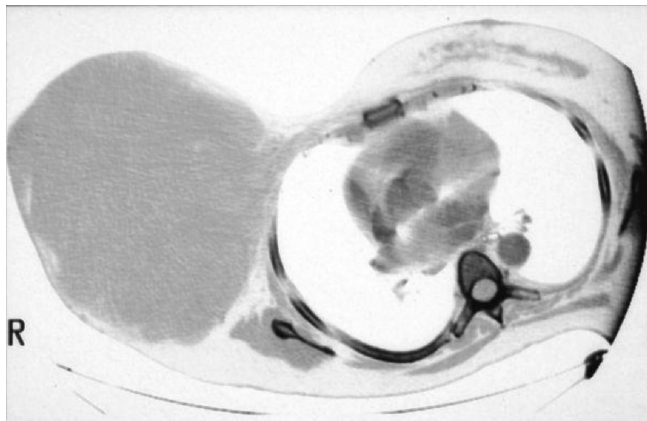


Fig. 3.102. Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.5$

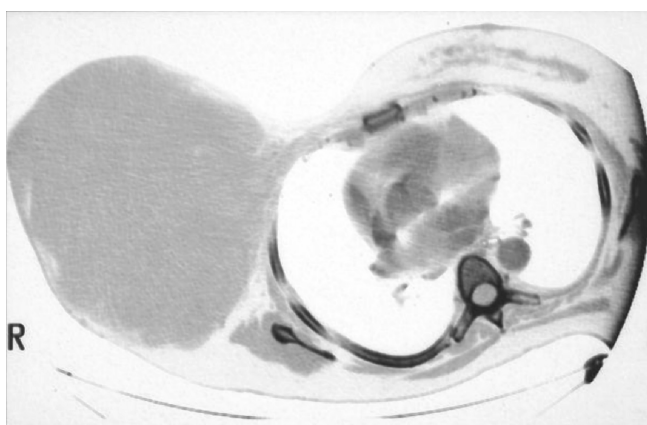


Fig. 3.103. Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.6$

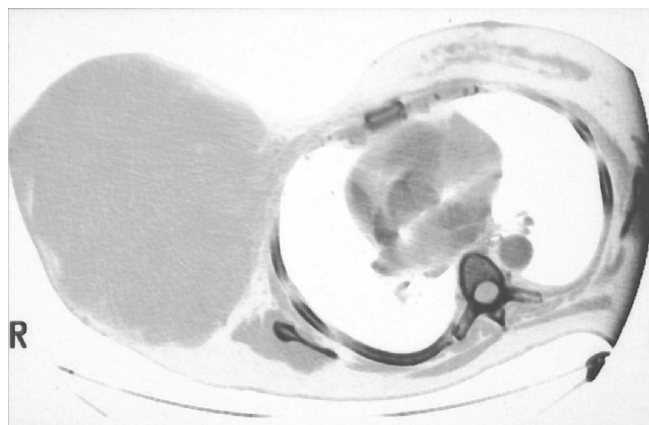


Fig. 3.104. Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.7$

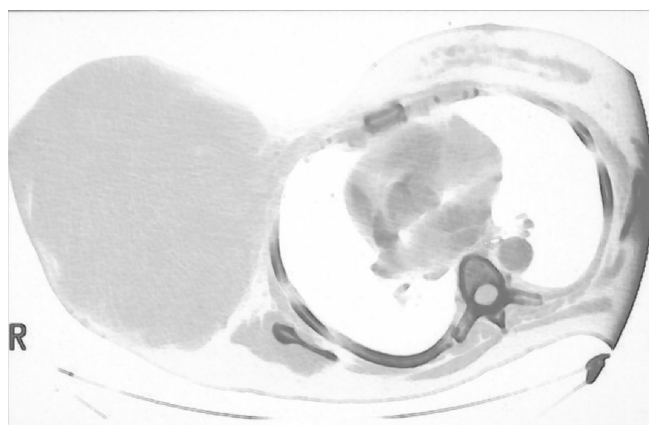


Fig. 3.105. Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.8$

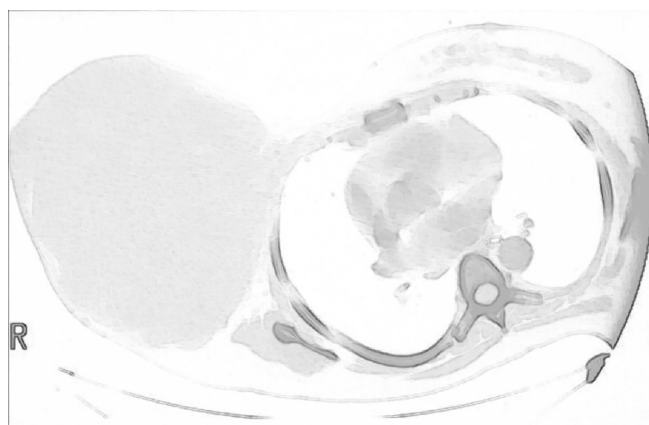


Fig. 3.106. Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.9$

Al visualizar estas imágenes podemos destacar que al llegar a un orden de derivada cercano a 1, se

delimita el tumor a una zona. En la Tabla 3.9 se muestran los resultados de las métricas obtenidas para el caso 3.

Tabla 3.9. Métricas obtenidas para el caso de estudio 3.

Operador	MSE	PSNR
Fraccionario $\alpha = 0.5$	34941.8743	12.6973
Fraccionario $\alpha = 0.6$	33528.8596	12.8766
Fraccionario $\alpha = 0.7$	32215.4486	13.0501
Fraccionario $\alpha = 0.8$	30981.6366	13.2197
Fraccionario $\alpha = 0.9$	29893.1418	13.3750
Conformable $\alpha = 0.5$	10368.3870	17.9736
Conformable $\alpha = 0.6$	15841.5276	16.1328
Conformable $\alpha = 0.7$	22001.5257	14.7062
Conformable $\alpha = 0.8$	28824.5050	13.5331
Conformable $\alpha = 0.9$	36327.4876	12.5284

Las imágenes médicas utilizadas fueron consideradas debido a que la tarea consistía en la delimitación de tumores. De esta manera al aplicar el algoritmo el conteo de cajas, se obtuvo mayor cercanía al resultado comparado con los médicos al extraer el tumor. Estas delimitaciones se muestran en las Figuras 3.105-3.100.

3.9.4. Caso 4

Finalmente, para el caso 4 es considerada la tomografía computarizada de un hombre de 52 años con un aneurisma de 58×60 mm de diámetro [48].



Fig. 3.107. Imagen original de la tomografía computarizada correspondiente al caso 4

A continuación, se aplica el detector de bordes fraccionario utilizando la derivada de Caputo-Fabrizio variando el orden de la derivada desde 0.5 hasta 0.9, ver Figuras 3.108-3.112.

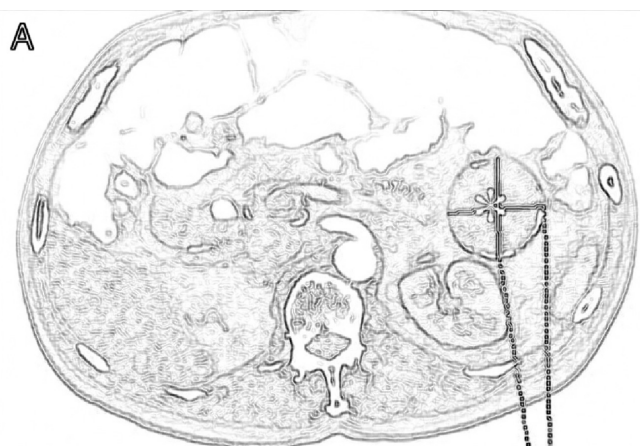


Fig. 3.108. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.5$

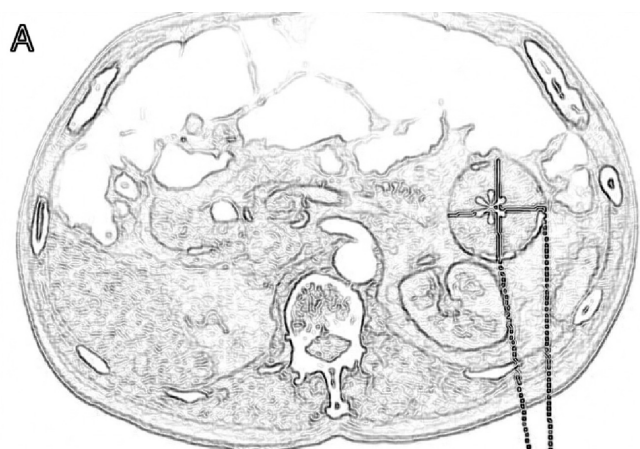


Fig. 3.109. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.6$

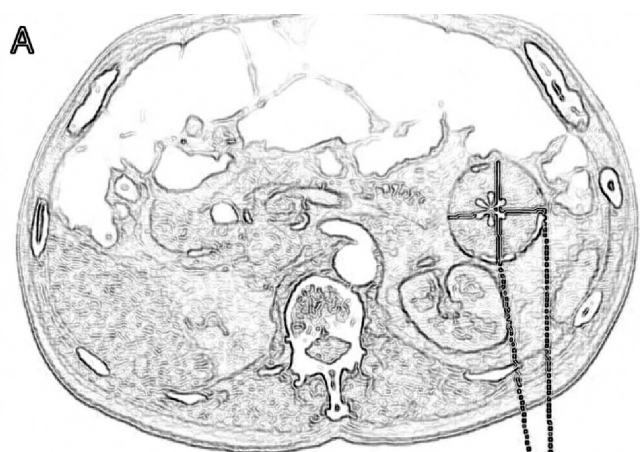


Fig. 3.110. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.7$

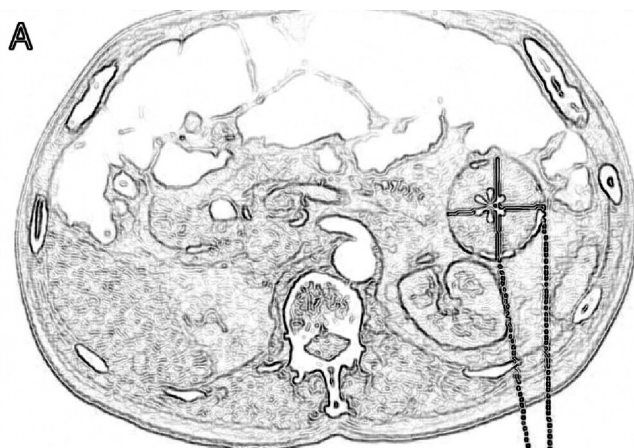


Fig. 3.111. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.8$

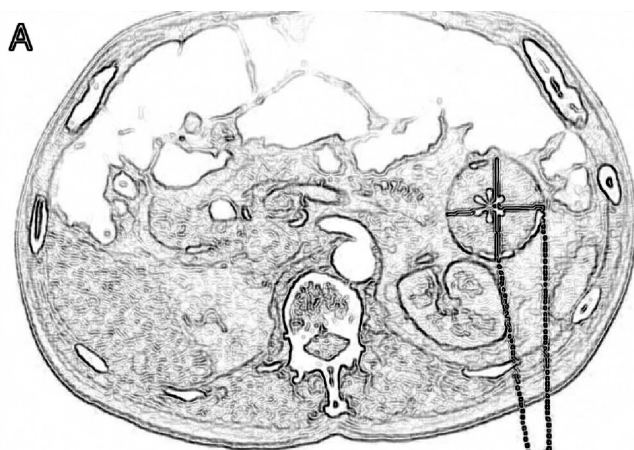


Fig. 3.112. Algoritmo de detección de bordes fraccionario con $\alpha = 0.9$

En la Figura 3.111 se puede observar que en la detección de los bordes resalta una cruz tan grande como el aneurisma mientras que en la Figura 3.108 se observa el aneurisma menos detalle. A continuación, se aplica el detector de bordes utilizando la derivada conformable de tipo Khalil, conforme se muestra en Figuras 3.113-3.117, variando el orden de la derivada desde 0.5 hasta 0.9.



Fig. 3.113. Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.5$



Fig. 3.114. Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.6$



Fig. 3.115. Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.7$

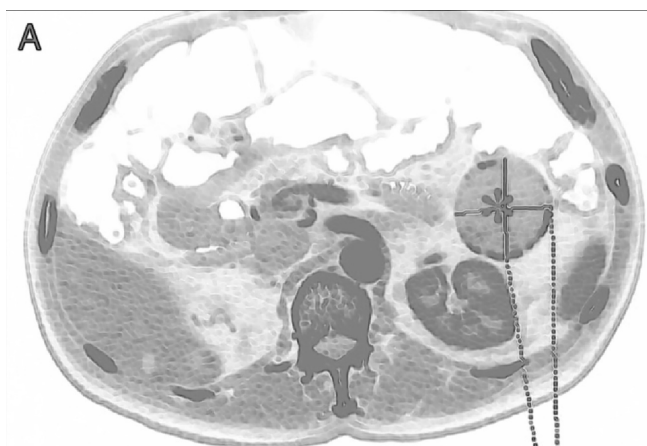


Fig. 3.116. Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.8$

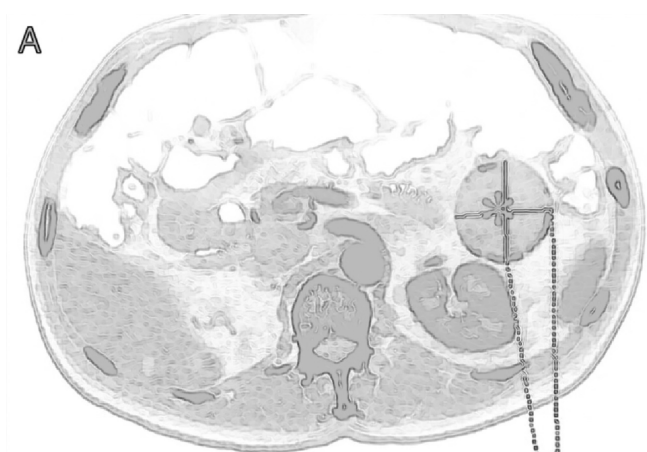


Fig. 3.117. Gradiente Gaussiano conformable con $\alpha = 0.9$

En la Tabla 3.10 se muestran los resultados de las métricas obtenidas para el caso 4 y con base a los resultados obtenidos se muestra un significativo cambio entre ellas al momento de variar el orden de la derivada.

Tabla 3.10. Métricas obtenidas para el caso de estudio 4.

Operador	MSE	PSNR
Fraccionario $\alpha = 0.5$	81840.0466	9.0011
Fraccionario $\alpha = 0.6$	77384.3293	9.2442
Fraccionario $\alpha = 0.7$	73520.3405	9.4667
Fraccionario $\alpha = 0.8$	70282.6675	9.6623
Fraccionario $\alpha = 0.9$	67685.8551	9.8258
Conformable $\alpha = 0.5$	26004.1493	13.9803
Conformable $\alpha = 0.6$	39710.5480	12.1417
Conformable $\alpha = 0.7$	55090.7494	10.7200
Conformable $\alpha = 0.8$	72009.9316	9.5568
Conformable $\alpha = 0.9$	90379.9416	8.5700

En la Tabla 3.11 se muestra una comparación entre los resultados obtenidos y los reportados en los siguientes trabajos [45–48].

Tabla 3.11. Comparación de medidas.

Caso	Medida real [45–48]	Conteo de cajas	Detector fraccionario	Gradiente Gaussiano Conformable
Caso 1 [45]	2.9 cm ²	2 cm ²	2.4 cm ²	2.7 cm ²
Caso 2 [46]	4 cm ²	3.3 cm ²	3.5 cm ²	4.2 cm ²
Caso 3 [47]	30 cm ²	28.2 cm ²	30.3 cm ²	29.4 cm ²
Caso 4 [48]	3.4 cm ²	2.5 cm ²	3.6 cm ²	2.9 cm ²

El algoritmo de conteo de cajas permite calcular áreas de interés dentro de una imagen. En la Tabla 3.11, se observa que los resultados obtenidos para los casos considerados son mas precisos utilizando los detectores fraccionarios y/o conformables.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo de tesis se presentó la generalización del gradiente de una imagen para la detección de bordes y texturas, considerando la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio. Con base a los resultados obtenidos, se observó que la generalización obtenida presentó robustez ante la presencia de ruido Gaussiano y sal-pimienta. Se observó, al comparar las métricas obtenidas entre los diferentes enfoques, que los operadores fraccionarios se desempeñaron mejor en comparación con los operadores clásicos.

También se generalizó el kernel Gaussiano con la derivada conformable de tipo Khalil para desarrollar el gradiente Gaussiano conformable. Además, se obtuvo la matriz Hessiana fraccionaria en el sentido de Caputo-Fabrizio así como conformable de tipo Khalil.

En el caso de la matriz Hessiana fraccionaria se pudo observar una mayor definición y precisión en la detección de bordes mientras que la matriz Hessiana conformable mostró una mayor robustez y sensibilidad en la detección de texturas.

Tanto para el enfoque fraccionario como para el enfoque conformable, se utilizaron imágenes de segmentación obtenidas de la base de segmentación de Berkeley con la finalidad de validar la robustez de los operadores propuestos con base a las métricas RMSE y PSNR.

Considerando que los operadores fraccionarios y conformables permiten detectar de manera óptima los bordes de una imagen, se calculó la dimensión fractal en varias imágenes que presentaron tumores en diferentes áreas del cuerpo humano. Estos tumores pueden ser medidos mediante su extracción (por medio de cirugía) o con equipos especializados costosos y/o invasivos para el paciente.

El algoritmo de conteo de cajas se generalizó al involucrar el detector de bordes fraccionario y conformable donde se obtuvo una mayor precisión al calcular el área del tumor en comparación con la medida real.

4.1. Trabajos Futuros

De acuerdo con los resultados obtenidos en esta tesis, se proponen los siguientes de trabajos de investigación:

- Generalizar los distintos algoritmos de detección de bordes utilizando derivadas fraccionarias con kernel de tipo Mittag-Leffler, locales de tipo M y derivadas de tipo fractal-fraccionarias.
- Considerar el algoritmo de conteo de cajas considerando diferentes imágenes de naturaleza médica, como pueden ser: coágulos, estenosis, cálculos biliares o incluso en la medición de órganos, por ejemplo, para detectar cardiomegalia (aumento anormal del volumen del corazón).

Bibliografía

- [1] U. D. Bosco, “Introducción a matlab y toolbox image processing,” Facultad de ingeniería, imágenes médicas, 2013.
- [2] J. Macias, J. Rodríguez-Meza, Alba-Juárez, and H. Taud, “Extraccion de bordes; operadores sobel, prewitt y roberts,” Instituto Politécnico Nacional, vol. 55, 2016.
- [3] M. Sánchez, R. Vaquero, and C. Vásquez, “Control de un robot móvil con visión: rectificación de imágenes para agricultura de precisión,” Proyecto de Sistemas Informáticos, Universidad Complutense de Madrid, 2012.
- [4] W. M. Rene Reynaga, “Introducción al reconocimiento de patrones,” 2009.
- [5] C. Platero, “Introducción a la visión artificial,” Descargado de http://www.elai.upm.es/webantigua/spain/Asignaturas/MIP_VisionArtificial/ApuntesVA/cap1IntroVA.pdf, 2009.
- [6] J. E. Elizondo and L. P. Maestre, “Fundamentos de procesamiento de imágenes,” Documentación Universidad Autónoma de Baja California, Unidad Tijuana, 2002.
- [7] W. Gao, X. Zhang, L. Yang, and H. Liu, “An improved sobel edge detection,” in 2010 3rd International Conference on Computer Science and Information Technology, vol. 5. IEEE, 2010, pp. 67–71.
- [8] J. Canny, “A computational approach to edge detection,” in Readings in computer vision. Elsevier, 1987, pp. 184–203.
- [9] N. Senthilkumaran and R. Rajesh, “Edge detection techniques for image segmentation-a survey of soft computing approaches,” International journal of recent trends in engineering, vol. 1, no. 2, p. 250, 2009.
- [10] D. Sierociuk, T. Skovranek, M. Macias, I. Podlubny, I. Petras, A. Dzielinski, and P. Ziubinski, “Diffusion process modeling by using fractional-order models,” Applied Mathematics and Computation, vol. 257, pp. 2–11, 2015.
- [11] I. Podlubny, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier, 1998, vol. 198.

- [12] A. Nandal, H. Gamboa-Rosales, A. Dhaka, J. Celaya Padilla, J. Galván Tejada, C. Galván Tejada, F. Javier Martínez-Ruiz, and C. Guzmán Valdivia, “Image edge detection using fractional calculus with feature and contrast enhancement.” Circuits, Systems, and Signal Processing, vol. 37, pp. 1–27, 01 2018.
- [13] L. Roberts, “Machine perception of three-dimensional solids,[w:] jt tippet et al.(red.), optical and electro-optical information processing,” 1965.
- [14] I. Sobel and G. Feldman, “A 3x3 isotropic gradient operator for image processing, presented at a talk at the stanford artificial project,” Pattern Classification and Scene Analysis, pp. 271–272, 3.
- [15] J. M. Prewitt, “Object enhancement and extraction,” Picture processing and Psychopictorics, vol. 10, no. 1, pp. 15–19, 1970.
- [16] R. Roesser, “A discrete state-space model for linear image processing,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 20, no. 1, pp. 1–10, 1975.
- [17] G. Deng and L. Cahill, “An adaptive gaussian filter for noise reduction and edge detection,” in 1993 IEEE Conference Record Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference. IEEE, 1993, pp. 1615–1619.
- [18] F. Russo, “Edge detection in noisy images using fuzzy reasoning,” in IMTC/98 Conference Proceedings. IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference. Where Instrumentation is Going (Cat. No. 98CH36222), vol. 1. IEEE, 1998, pp. 369–372.
- [19] M. Gudmundsson, E. A. El-Kwae, and M. R. Kabuka, “Edge detection in medical images using a genetic algorithm,” IEEE transactions on medical imaging, vol. 17, no. 3, pp. 469–474, 1998.
- [20] M. Sharifi, M. Fathy, and M. T. Mahmoudi, “A classified and comparative study of edge detection algorithms,” in Proceedings. International conference on information technology: Coding and computing. IEEE, 2002, pp. 117–120.
- [21] H. Nezamabadi-Pour, S. Saryazdi, and E. Rashedi, “Edge detection using ant algorithms,” Soft Computing, vol. 10, no. 7, pp. 623–628, 2006.
- [22] C. Zhan, X. Duan, S. Xu, Z. Song, and M. Luo, “An improved moving object detection algorithm based on frame difference and edge detection,” in Fourth International Conference on Image and Graphics (ICIG 2007). IEEE, 2007, pp. 519–523.
- [23] G. Shrivakshan and C. Chandrasekar, “A comparison of various edge detection techniques used in image processing,” International Journal of Computer Science Issues (IJCSI), vol. 9, no. 5, p. 269, 2012.
- [24] K. Patidar, Lalit, Singh, and Bagaria, “Image filtering using linear and non linear filter for gaussian noise.” International Journal of Computer Applications, vol. 93(8), pp. 29–34, 2014.
- [25] A. Aslam, E. Khan, and M. S. Beg, “Improved edge detection algorithm for brain tumor segmentation,” Procedia Computer Science, vol. 58, pp. 430–437, 2015.

- [26] A. Halder, P. Bhattacharya, and A. Kundu, “Edge detection method using richardson’s extrapolation formula,” in Soft Computing in Data Analytics. Springer, 2019, pp. 727–733.
- [27] E. Avots, H. S. Arslan, L. Valgma, J. Gorbova, and G. Anbarjafari, “A new kernel development algorithm for edge detection using singular value ratios,” Signal, Image and Video Processing, vol. 12, no. 7, pp. 1301–1309, 2018.
- [28] B. M. Vinagre and C. A. Monje, “Introducción al control fraccionario,” Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, vol. 3, no. 3, pp. 5–23, 2009.
- [29] C. Gao, J. Zhou, J. Hu, and F. Lang, “Edge detection of colour image based on quaternion fractional differential,” IET Image Processing, vol. 5, no. 3, pp. 261–272, 2011.
- [30] D. Tian, J. Wu, and Y. Yang, “A fractional-order edge detection operator for medical image structure feature extraction,” in The 26th Chinese Control and Decision Conference (2014 CCDC). IEEE, 2014, pp. 5173–5176.
- [31] Q. Yang, D. Chen, T. Zhao, and Y. Chen, “Fractional calculus in image processing: a review,” Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 19, no. 5, pp. 1222–1249, 2016.
- [32] M. Caputo and M. Fabrizio, “A new definition of fractional derivative without singular kernel,” Progr. Fract. Differ. Appl., vol. 1, no. 2, pp. 1–13, 2015.
- [33] J. M. Cruz-Duarte, J. Rosales-Garcia, C. R. Correa-Cely, A. Garcia-Perez, and J. G. Avina-Cervantes, “A closed form expression for the gaussian-based caputo-fabrizio fractional derivative for signal processing applications,” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 61, pp. 138–148, 2018.
- [34] J. Lavín-Delgado, J. Solís-Pérez, J. Gómez-Aguilar, and R. Escobar-Jiménez, “A new fractional-order mask for image edge detection based on caputo-fabrizio fractional-order derivative without singular kernel,” Circuits, Systems, and Signal Processing, pp. 1–30, 2019.
- [35] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh, “A new definition of fractional derivative,” Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 264, pp. 65–70, 2014.
- [36] A. Atangana, D. Baleanu, and A. Alsaedi, “New properties of conformable derivative,” Open Mathematics, vol. 13, no. 1, 2015.
- [37] H. Aguirre-Ramos, J. G. Avina-Cervantes, I. Cruz-Aceves, J. Ruiz-Pinales, and S. Ledesma, “Blood vessel segmentation in retinal fundus images using gabor filters, fractional derivatives, and expectation maximization,” Applied Mathematics and Computation, vol. 339, pp. 568–587, 2018.
- [38] A. P. Pedro, D. A. Hugo, and C. M. Francisco, “Una introduccion al calculo fraccionario,” Facultad de Ingeniera Electrica, Universidad de Oriente, 2008.
- [39] A. Atangana, “Blind in a commutative world: Simple illustrations with functions and chaotic attractors,” Chaos, Solitons & Fractals, vol. 114, pp. 347–363, 2018.

- [40] —, “Non validity of index law in fractional calculus: A fractional differential operator with markovian and non-markovian properties,” Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 505, pp. 688–706, 2018.
- [41] G.-A. J. Atangana, Abdon, “Fractional derivatives with no-index law property: application to chaos and statistics,” Chaos, Solitons & Fractals, vol. 114, pp. 516–535, 2018.
- [42] A. Atangana and S. Jain, “The role of power decay, exponential decay and mittag-leffler function’s waiting time distribution: Application of cancer spread,” Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 512, pp. 330–351, 2018.
- [43] Z. Pajouhi and K. Roy, “Image edge detection based on swarm intelligence using memristive networks,” IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, vol. 37, no. 9, pp. 1774–1787, 2018.
- [44] . A. A. Sert, E., “Image edge detection based on neutrosophic set approach combined with chan–vese algorithm.” International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, vol. 1954008, 2018.
- [45] Z. Shariff, P. Lim, A. Wright, and S. Al-Ghazal, “Tumour to tumour metastasis of malignant melanoma to intracranial tumour,” Journal of clinical medicine research, vol. 1, no. 5, p. 300, 2009.
- [46] F. y. S. F. y. R. M. Palomeque, Antonio y Herrera et al., “Hemorragia digestiva alta por rotura de pseudoaneurisma de la arteria esplénica: breaking splenic artery pseudoaneurysm,” Revista chilena de cirugía, vol. 65, no. 6, pp. 487–488, 2013.
- [47] S. Mazy, J. Hustin, and P. Van Reepinghen, “Phyllodes tumor of the breast.” JBR-BTR: organe de la Societe royale belge de radiologie (SRBR)= orgaan van de Koninklijke Belgische Vereniging voor Radiologie (KBVR), vol. 82, no. 3, p. 118, 1999.
- [48] E. A. Rodríguez-Caulo, O. Araji, N. Miranda, J. C. Téllez, and C. Velázquez, “Aneurisma fusiforme gigante de arteria esplénica,” Cirugía Española, vol. 92, no. 3, pp. 215–216, 2014.
- [49] L. R. Szymanski Florencia, E. R. Benítez Cejudo, and V. M. Rivera Mellado, “Meningioma craneal: Reporte de un caso y revisión de la literatura,” Revista Salud Quintana Roo, pp. 20–23, 2011.
- [50] W. McIlhagga, “Estimates of edge detection filters in human vision,” Vision research, vol. 153, pp. 30–36, 2018.
- [51] M. F. G. Herrera and J. J. R. García, “Ecuaciones diferenciales fraccionarias y sus aplicaciones a la ingeniería,” Jóvenes en la ciencia, vol. 3, no. 2, pp. 888–892, 2017.
- [52] R. Rodríguez Miranda, “La teoría de fractales: aplicación experimental e implicaciones en la metodología de la ciencia,” Ph.D. dissertation, Universidad Autónoma de Nuevo León, 1995.
- [53] A. Atangana and J. Gómez-Aguilar, “Decolonisation of fractional calculus rules: Breaking commutativity and associativity to capture more natural phenomena,” The European Physical Journal Plus, vol. 133, pp. 1–22, 2018.

- [54] P. Amoako-Yirekyi, J. K. Appati, and I. K. Dontwi, “A new construction of a fractional derivative mask for image edge analysis based on riemann-liouville fractional derivative,” Advances in Difference Equations, vol. 2016, no. 1, p. 238, 2016.
- [55] Anonymus, International journal of pattern recognition and artificial intelligence. World Scientific Publishing Company, 1987.
- [56] G.-A. J. Francisco, R.-G. Juan, G.-C. Manuel, and R.-H. J. Roberto, “Fractional rc and lc electrical circuits,” Ingeniería, Investigación y Tecnología, vol. 15, no. 2, pp. 311–319, 2014.
- [57] H.-A. A. Rafael, R.-O. M. Pedro, C.-B. Jorge et al., “Simulación del fenómeno de creep en suelos arcillosos mediante reología y ecuaciones diferenciales fraccionarias,” Ingeniería, investigación y tecnología, vol. 15, no. 4, pp. 561–574, 2014.
- [58] H. Zhou, S. Yang, and S. Zhang, “Conformable derivative approach to anomalous diffusion,” Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 491, pp. 1001–1013, 2018.
- [59] M. Caputo, “Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii,” Geophysical Journal International, vol. 13, no. 5, pp. 529–539, 1967.
- [60] A. Atangana and D. Baleanu, “New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model,” arXiv preprint arXiv:1602.03408, 2016.
- [61] R. Almeida, “A caputo fractional derivative of a function with respect to another function,” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 44, 09 2016.
- [62] F. Lara and F. U. K. Lorenz, “Derivación matricial,” Bogotá: Fundación Universitaria KOnrad Lorenz, 2007.
- [63] A. L. Ozores, “Cálculo fraccionario y dinámica newtoniana,” Pensamiento Matemático, vol. 4, no. 1, pp. 77–105, 2014.
- [64] H. Li, J. Cao, and C. Li, “High-order approximation to caputo derivatives and caputo-type advection–diffusion equations (iii),” Journal of computational and Applied mathematics, vol. 299, pp. 159–175, 2016.
- [65] H. Aminikhah, A. R. Sheikhan, and H. Rezaadeh, “Sub-equation method for the fractional regularized long-wave equations with conformable fractional derivatives,” Scientia Iranica. Transaction B, Mechanical Engineering, vol. 23, no. 3, p. 1048, 2016.
- [66] H. Rezaadeh and B. P. Ziabarya, “Sub-equation method for the conformable fractional generalized kuramoto sivashinsky equation,” Comput. Res. Prog. Appl. Sci. Eng., vol. 2, no. 3, pp. 106–109, 2016.
- [67] Prieto, M. Segui, Allen, and A. R., “A similarity metric for edge images,” IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 25, no. 10, pp. 1265–1273, 2003.
- [68] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik, “A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics,” in Proc. 8th Int’l Conf. Computer Vision, vol. 2, July 2001, pp. 416–423.

- [69] D. G. Lowe, “Distinctive image features from scale-invariant keypoints,” International journal of computer vision, vol. 60, no. 2, pp. 91–110, 2004.
- [70] H. Deng, W. Zhang, E. Mortensen, T. Dietterich, and L. Shapiro, “Principal curvature-based region detector for object recognition,” in 2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE, 2007, pp. 1–8.
- [71] S. Shanmugavadivu, “Fractal dimension based texture analysis of digital images,” Procedia Engineering, vol. 38, pp. 2981–2986, 2012.
- [72] K. S. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, 1993.
- [73] P. Vidya, S. Veni, and K. Narayanankutty, “Performance analysis of edge detection methods on hexagonal sampling grid,” International Journal of Electronic Engineering Research, vol. 1, no. 4, pp. 313–328, 2009.
- [74] H. Vera, G. Elva, D. Tovar, C. Hernán, T. Duany Díaz, A. Valdés Martín, L. González González, and Y. López Piñeiro, “Estenosis aórtica basada en la evidencia,” Revista Cubana de Cardiología y Cirugía Cardiovascular, vol. 24, no. 1, 2018.
- [75] SEDENA, “Prevención, diagnóstico y criterios de referencia de la estenosis aórtica en el primer nivel de atención,” CENETEC, 2008.
- [76] V. Autores, “Aortic stenosis prognosis,” [urlhttp://www.heartvalves.com/0he8CdOsWBIVDK9J.99](http://www.heartvalves.com/0he8CdOsWBIVDK9J.99), 2019.
- [77] S. M. F. Fraga and J. R. Mondragón, “Cálculo de dimensión fractal para series de tiempo con el método de multiresolución de conteo de cajas,” 2015.
- [78] S. de salud publica, “Catálogo vigente de tomografía,” [urlhttp://www.hnm.org.mx](http://www.hnm.org.mx), 2019.
- [79] I. M. del Seguro Social, “El instituto mexicano del seguro social alcanza una reducción de la mortalidad del 86 % en pacientes con estenosis aórtica crítica,” [urlhttps://codigof.mx/instituto-mexicano-del-seguro-social-alcanza-una-reduccion-la-mortalidad-del-86-en-pacientes-estenosis-aortica-critica/](https://codigof.mx/instituto-mexicano-del-seguro-social-alcanza-una-reduccion-la-mortalidad-del-86-en-pacientes-estenosis-aortica-critica/), 2017.
- [80] INEGI, “Características de las defunciones registradas en México durante 2017,” 2018.
- [81] U. O. Toronto, “sd image digital representation,” [urlhttp://edtech.engineering.utoronto.ca/files/2d-image-digital-representation](http://edtech.engineering.utoronto.ca/files/2d-image-digital-representation).

Anexos

Anexo A

Pseudocódigos

Pseudocódigo 1 Gradiente en el sentido de Caputo-Fabrizio

```
1: procedure GRADIENTE_FRAC_X(img,  $\alpha$ )
2:    $G_x \leftarrow \text{fractional\_integration\_x}(img, \alpha)$ 
3: procedure GRADIENTE_FRAC_Y(img,  $\alpha$ )
4:    $G_y \leftarrow \text{fractional\_integration\_y}(img, \alpha)$ 
5: procedure GRADIENTE_FRACCIONARIO(img,  $\alpha$ )
6:    $D_x \leftarrow \text{GRADIENTE\_FRAC\_X}(img, \alpha)$ 
7:    $D_y \leftarrow \text{GRADIENTE\_FRAC\_Y}(img, \alpha)$ 
8:    $edge \leftarrow \text{abs}(D_x) + \text{abs}(D_y)$ 
9: return  $edge$ 
```

Pseudocódigo 2 Matriz Hessiana fraccionaria

```
1: procedure MATRIZ_HESSIANA_CONF(img,  $N, \sigma, \alpha$ )
2:    $D_x \leftarrow \text{GRADIENTE\_FRAC\_X}(img, \alpha)$ 
3:    $D_y \leftarrow \text{GRADIENTE\_FRAC\_Y}(img, \alpha)$ 
4:    $H_{xx} \leftarrow \text{GRADIENTE\_FRAC\_X}(D_x, \alpha)$ 
5:    $H_{yy} \leftarrow \text{GRADIENTE\_FRAC\_Y}(D_y, \alpha)$ 
6:    $H_{xy} \leftarrow \text{GRADIENTE\_FRAC\_X}(D_y, \alpha)$ 
7:    $\lambda_2 \leftarrow \text{image\_eigenvalues}(H_{xx}, H_{yy}, H_{xy})$ 
8:    $max_{\lambda_2} \leftarrow \text{principal\_curvature}(\lambda_2)$ 
9: return  $max_{\lambda_2}$ 
```

Pseudocódigo 3 Gradiente Gaussiano conformable

```
1: procedure KERNEL_GAUSS_CONF( $N, \mu, \sigma, \alpha$ )
2:    $g \leftarrow conformable\_integration(N, \mu, \sigma, \alpha)$ 
3: return  $g$ 
4: procedure GRADIENTE_GAUSSIANO_X( $img, N, \sigma, \alpha$ )
5:    $img \leftarrow rgb2gray(string)$ 
6:    $\mu \leftarrow 0$ 
7:    $G_x \leftarrow KERNEL\_GAUSS\_CONF(N, \mu, \sigma, \alpha)$ 
8:    $D_x \leftarrow convolution\_2D(img, G_x)$ 
9: return  $D_x$ 
10: procedure GRADIENTE_GAUSSIANO_Y( $img, N, \sigma, \alpha$ )
11:    $img \leftarrow rgb2gray(string)$ 
12:    $\mu \leftarrow 0$ 
13:    $G_y \leftarrow KERNEL\_GAUSS\_CONF(N, \mu, \sigma, \alpha)$ 
14:    $D_y \leftarrow convolution\_2D(img, G_y)$ 
15: return  $D_y$ 
16: procedure GAUSSIAN_GRADIENT( $img, N, \sigma, \alpha$ )
17:    $D_x \leftarrow GRADIENTE\_GAUSS\_CONF\_X(img, N, \sigma, \alpha)$ 
18:    $D_y \leftarrow GRADIENTE\_GAUSS\_CONF\_Y(img, N, \sigma, \alpha)$ 
19:    $edge \leftarrow abs(D_x) + abs(D_y)$ 
20: return  $edge$ 
```

Pseudocódigo 4 Matriz Hessiana Gaussiana conformable

```
1: procedure MATRIZ_HESSIANA_CONF( $img, N, \sigma, \alpha$ )
2:    $D_x \leftarrow GRADIENTE\_CONF\_X(img, N, \sigma, \alpha)$ 
3:    $D_y \leftarrow GRADIENTE\_CONF\_Y(img, N, \sigma, \alpha)$ 
4:    $H_{xx} \leftarrow GRADIENTE\_CONF\_X(D_x, N, \sigma, \alpha)$ 
5:    $H_{yy} \leftarrow GRADIENTE\_CONF\_Y(D_y, N, \sigma, \alpha)$ 
6:    $H_{xy} \leftarrow GRADIENTE\_CONF\_X(D_y, N, \sigma, \alpha)$ 
7:    $\lambda_2 \leftarrow image\_eigenvalues(H_{xx}, H_{yy}, H_{xy})$ 
8:    $max_{\lambda_2} \leftarrow principal\_curvature(\lambda_2)$ 
9: return  $max_{\lambda_2}$ 
```

Pseudocódigo 5 Dimensión fractal

```
1: procedure GRADIENTE_FRAC_X(img,α)
2:    $G_x \leftarrow \text{fractional\_integration\_x}(img, \alpha)$ 
3: procedure GRADIENTE_FRAC_Y(img,α)
4:    $G_y \leftarrow \text{fractional\_integration\_y}(img, \alpha)$ 
5: procedure GRADIENTE_FRACCIONARIO(img,α)
6:    $D_x \leftarrow \text{GRADIENTE\_FRAC\_X}(img, \alpha)$ 
7:    $D_y \leftarrow \text{GRADIENTE\_FRAC\_Y}(img, \alpha)$ 
8: procedure REGRESION_LINEAL( $D_x, D_y$ )
9:    $FD \leftarrow \text{Slope\_Regression\_line}(D_x, D_y)$ 
10: procedure REGION_INTEREST(FD)
11:    $FD \leftarrow \text{mat2gray}(FD)$ 
12:    $FD \leftarrow \text{roipoly}(FD)$ 
13:    $cm^2 \leftarrow \text{Average}(FD)$ 
14: return Area
```
