



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Instituto Tecnológico de La Laguna



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO®

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**"Control Difuso Sectorial con Compensación Neuronal  
para Manipuladores Robóticos"**

POR

**M.C. Andrés Othón Pizarro Lerma**

**T E S I S**

**PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR  
EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS**

**Dr. Ramón García Hernández**

**CODIRECTOR DE TESIS**

**Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila**

**ISSN: 0188-9060**



**RIITEC: (02)-TDCIE-2022**

**Torreón, Coahuila. México**

**Junio de 2022**



Instituto Tecnológico de La Laguna

Torreón, Coah., **09/Junio/2022**

Dependencia: DEPI/CPCIE

Oficio: DEPI/CPCIE/025/2022

Asunto: Autorización de impresión de tesis.

**M.C. ANDRÉS OTHON PIZARRO LERMA**  
**C. CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.**  
**PRESENTE**

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

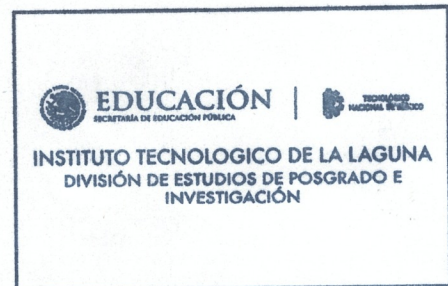
**"CONTROL DIFUSO SECTORIAL CON COMPENSACIÓN NEURONAL PARA  
MANIPULADORES ROBÓTICOS "**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (02)-TDCIE-2022**, para que proceda a la impresión del mismo.

**ATENTAMENTE**

*EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN*

**DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ**  
**Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación**  
**del Instituto Tecnológico de la Laguna**



Blvd. Revolución y Av. Instituto Tecnológico de La Laguna Col. Centro C.P.  
27000

Tel: 01 (871) 706-1113 / [www.tecnm.mx](http://www.tecnm.mx) / [www.iflalaquna.edu.mx](http://www.iflalaquna.edu.mx)



**2022 Flores**  
Año de Magón  
PRELUDIO DE LA REVOLUCIÓN MEXICANA

Torreón Coah., 07/Junio/2022

Asunto: Autorización de Impresión

**DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

**“CONTROL DIFUSO SECTORIAL CON COMPENSACIÓN NEURONAL PARA  
MANIPULADORES ROBÓTICOS”**

Desarrollado por el **C. Andrés Othón Pizarro Lerma**, con número de control **D1713002** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

**ATENTAMENTE**

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN



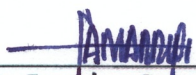
\_\_\_\_\_  
**Dr. Ramón García Hernández**  
Asesor/Director de Tesis



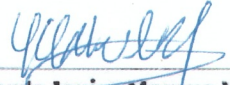
\_\_\_\_\_  
**Dr. Víctor A. Santibañez Dávila**  
Coasesor/Co Director de Tesis



\_\_\_\_\_  
**Dr. Miguel Ángel Llama Leal**  
Comité Tutorial



\_\_\_\_\_  
**Dr. Francisco Juárez Zamarripa**  
Comité Tutorial



\_\_\_\_\_  
**Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela**  
Comité Tutorial Externo



*Para todos aquellos que necesiten leer este trabajo. . .*

## Resumen

En este trabajo, como primer paso en la metodología de investigación para llegar al controlador difuso sectorial (SFC, acrónimo del inglés *Sectorial Fuzzy Controller*) con precompensación neuronal adaptable, se propone un SFC con una precompensación de la dinámica deseada del robot en el espacio de las articulaciones, esto es, evaluada en las posiciones, velocidades y aceleraciones angulares deseadas, aplicada al seguimiento de la trayectoria de un brazo robótico con todas sus articulaciones del tipo de revolución. La prueba de estabilidad asintótica uniforme global, aplicando el teorema directo de Lyapunov, se introduce para este nuevo esquema de control mediante el planteamiento y uso de una función de Lyapunov estricta. Esta función de Lyapunov estricta es la primera dentro del campo del control difuso que se aplica al control de seguimiento de trayectorias en los manipuladores robóticos. Después de esto, se desarrolla la prueba de estabilidad del SFC con precompensación neuronal adaptable, en el que la dinámica deseada es estimada por medio de una red neuronal artificial recurrente de una capa oculta, la cual permite estimar toda la dinámica deseada sin conocerla previamente, a la vez que le da al controlador la capacidad de sobreponerse a cambios en los valores de los componentes de ésta. Para este controlador, el análisis de estabilidad se desarrolla aplicando corolarios de LaSalle-Yoshikawa para sistemas discontinuos, ya que su ley de control posee discontinuidades. Adicionalmente, se dan resultados experimentales físicos y de simulación para ambos esquemas; para el SFC precompensado se dan en comparación con el esquema de control original en el que se inspira este nuevo controlador: el controlador proporcional y derivativo (PD) con precompensación (en inglés *feedforward*); mientras que para el SFC con precompensación neuronal adaptable se dan en comparación a toda una batería de controladores con leyes de control similares en su estructura (un controlador PD lineal, no lineal o difuso, más una forma de precompensación, adaptable o no, de la dinámica deseada del robot). Los resultados experimentales arrojaron un mejor rendimiento en general para los nuevos esquemas de control difuso en comparación con la estructura clásica, y las propuestas nuevas similares, tanto en los errores de posición de las articulaciones para valores similares o menores de pares aplicados; además de que en el caso de los controladores propuestos

no se requirió de una sintonización *in situ* para tener resultados semejantes a los obtenidos en simulación, lo que muestra la tolerancia esperada a las desviaciones paramétricas e incertidumbres (dinámicas no modeladas y perturbaciones) que le otorga la parte del controlador difuso.

## Abstract

In this work, a Sectorial Fuzzy Controller (SFC) with a feedforward compensation of the robot dynamics in joint space, evaluated at the desired angular positions, velocities, and accelerations, applied to the trajectory tracking control of an all revolving joints robotic arm, is proposed as a first step within the research methodology in order to reach the final goal of this doctoral thesis: the SFC plus adaptive neural compensation. Global uniform asymptotic stability proof applying the direct Lyapunov theorem is introduced for this new control scheme by using a strict Lyapunov function. This strict Lyapunov function is the first one within the field of fuzzy control that is applied to the trajectory control of robotic manipulators. As the final step, the SFC plus adaptive neural precompensation is proposed. This latter is a SFC with feedforward compensation, but in which the desired dynamics is estimated by means of an adaptive artificial neural network of one hidden layer, which allows estimating all the desired dynamics without previously knowing it, while giving the controller the ability to overcome changes in the values of the robot components. For this second controller, the stability analysis is developed by applying some LaSalle-Yoshikawa corollaries for discontinuous systems due to the fact that its control law has discontinuities. Additionally, simulation and physical experimental results are given for both control schemes; for the SFC plus feedforward, its results are given in comparison with the original control scheme from which this new controller is inspired: the Proportional-Derivative (PD) controller plus feedforward; whilst for the SFC with adaptive neural precompensation, they are given in comparison to a whole array of controllers with similar control laws (similar in the sense that all of them have a nonlinear, linear or fuzzy approximation of a PD controller plus some form of adaptive or not, feedforward block of the desired robot dynamics). The experimental results yielded a better performance in general for the new fuzzy control schemes compared to the classical structure, and the similar new proposals, both in the position errors on the joints for similar or lower values of applied pairs. In addition, in the case of the proposed controllers, an in-site tuning was not required to obtain results similar to those obtained from simulation, which shows the expected tolerance to parametric deviations and uncertainties (mainly, non modelled dynamics and unknown disturbances) that the part of the SFC bestows.

# Agradecimientos

A la vida, y a la suerte que me fue otorgada para poder vivirla, a todo lo bueno y lo malo que me ha tocado experimentar en carne propia, y que finalmente me ha facilitado el poder estar en el lugar en el que me encuentro en este momento.

Al ITSON y sus autoridades por todo el apoyo brindado, tanto para poder estudiar este doctorado, como por el apoyo económico para asistir a los diferentes congresos en los que se difundieron los diversos trabajos emanados del presente estudio de investigación.

A PRODEP por el apoyo otorgado para estudiar este doctorado.

A mi asesor, el Dr. Ramón García Hernández, primero por la confianza que tuvo en mí para venir a desarrollar este trabajo al Instituto Tecnológico de La Laguna aún y cuando mi solicitud fue muy apresurada; y segundo por toda la guía, consejos, y apoyo que me brindó a lo largo de estos cuatro años y cacho que estuve bajo su tutela.

A mi coasesor, el Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila, también por la confianza que tuvo en mí para desarrollar esta propuesta de controlador; su dedicación como instructor en el curso de Control de Robots; y después en todo el apoyo para llevar a cabo las pruebas de análisis de estabilidad de los controladores, y en esas tardes y noches cuando implementamos los diversos controladores en el robot CICESE.

A los doctores Miguel Ángel Llama Leal y Francisco Jurado Zamarripa, primero por haber sido mis instructores en las materias de Control Inteligente y de Control Adaptable que se aplicaron bastante en mi tesis, y segundo, por sus comentarios y consejos para llevar a cabo el desarrollo de este trabajo como parte del comité tutorial de mi trabajo doctoral.

Al todavía M.C., y próximamente, Doctor en Ciencias, Jorge Alberto Villalobos Chin, mi camaradota El Chin. Sin tu enorme apoyo en la implementación de los controladores en la interfaz del *robot de dos g.d.l.*, y en



la demostración de la estabilidad de los controladores propuestos, en esas muchas tardes y noches, este trabajo no habría podido ser completado.

Al Dr. Alejandro Enrique Dzul López, quién fungió como instructor de la materia de Control No Lineal, que me sirvió muchísimo para poder desarrollar mi trabajo, sobretodo ese curso de LaTeX incluido con la hechura de las tareas.

Al Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela, por sus valiosos comentarios y consejos que hizo en la revisión de este trabajo para mejorar su calidad final.

A mis compañeros de maestría que llevaron las materias conmigo: M.C. Amaury Meza Pérez, M.C. Óscar González Medina, M.C. Roberto Franco Jaramillo, M.C. Rubén Hernández Rodríguez. La mera verdad que junto con El Chin, qué buen equipo hicimos raza!

A todos mi contemporaneos del Posgrado: Oscar Murillo, Israel Reyes, Omar, Felipe "Félix", mi tocayo Andrés Ramírez, Los Falcón, Jackie, Spíndola y todos los demás que siempre estuvimos compartiendo en esas comidas y debates de temas de control y física.

A Mary Salinas Lerma (Yram Salinas, que es su pseudónimo de poetisa) que gracias a su trabajo siempre es que el posgrado del Tec. Laguna sigue su buena marcha. Ojalá que siga escribiendo su poesía todo el tiempo.

A la M.A. Graciela Salinas Lerma y al Dr. Irving Hernández por su apoyo en todos los trámites realizados.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>7</b>
1.1	Antecedentes . . . . .	8
1.2	Planteamiento del problema . . . . .	15
1.3	Objetivos . . . . .	15
1.3.1	Objetivo general . . . . .	15
1.3.2	Objetivos específicos . . . . .	16
1.4	Metodología propuesta . . . . .	16
1.5	Justificación . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Fundamentos teóricos</b>	<b>19</b>
2.1	Introducción . . . . .	19
2.2	Robots industriales . . . . .	20
2.2.1	Definición de robot industrial . . . . .	20
2.2.2	Clasificaciones de los robots industriales . . . . .	20
2.3	Modelo dinámico de un robot manipulador con articulaciones rígidas . . . . .	23
2.3.1	Propiedades del modelo dinámico de un robot manipulador . . . . .	24
2.4	Control proporcional y derivativo con precompensación para el seguimiento de trayectorias . . . . .	26
2.5	Sistemas de control de lógica difusa . . . . .	27
2.5.1	Controladores de lógica difusa . . . . .	29
2.5.2	Tipos de funciones de membresía . . . . .	31
2.5.3	Defusificación . . . . .	35
2.6	Redes neuronales artificiales adaptables . . . . .	36
2.6.1	Redes neuronales adaptables de una sola capa oculta y el teorema de aproximación universal de funciones . . . . .	37
2.6.2	Funciones de activación . . . . .	38

2.7	Corolarios del teorema de LaSalle- Yoshizawa para sistemas discontinuos . . . . .	40
2.8	Descripción del robot manipulador de dos grados de libertad . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Control difuso sectorial con precompensación</b>	<b>44</b>
3.1	Controlador difuso sectorial y sus propiedades . . . . .	44
3.2	Controlador difuso sectorial con precompensación . . . . .	47
3.3	Prueba de estabilidad del SFC con precompensación . . . . .	49
	Ecuación de lazo cerrado del SFC con precompensación	49
3.3.1	Puntos de equilibrio del SFC con precompensación . . . . .	50
3.3.2	Función candidata de Lyapunov . . . . .	50
3.3.3	Derivada de la función candidata de Lyapunov . . . . .	55
3.3.4	Condición necesaria para $\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2) \neq 0$ . . . . .	62
3.4	Diseño y simulación del SFC con precompensación . . . . .	68
3.5	Pruebas experimentales al SFC con precompensación . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Controlador difuso sectorial con precompensación neuronal adaptable</b>	<b>76</b>
4.1	Introducción . . . . .	76
4.2	Diagrama a bloques del SFC con precompensación neuronal adaptable . . . . .	76
4.3	Prueba de estabilidad del SFC con precompensación neuronal adaptable . . . . .	78
	Ecuación de lazo cerrado del SFC con precompensación neuronal adaptable . . . . .	78
	Función candidata de Lyapunov . . . . .	81
	Derivada de la función candidata de Lyapunov . . . . .	82
4.4	Diseño y simulación del SFC con precompensación neuronal adaptable . . . . .	87
4.5	Pruebas experimentales al SFC con precompensación neuronal adaptable . . . . .	92
4.5.1	Comparación de resultados obtenidos en simulación para cada controlador . . . . .	94
4.5.2	Comparación de resultados experimentales para cada controlador . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>99</b>
5.1	Conclusiones . . . . .	99

5.2	Trabajos a futuro . . . . .	101
<b>APÉNDICES</b>		<b>112</b>
<b>A</b>	<b>Diseño y simulación de los controladores a usar para comparación</b>	<b>113</b>
A.1	Control PD con precompensación . . . . .	113
A.2	Control PD no lineal con saturación de tangente hiperbólica en $K_p$ y $K_v$ precompensado . . . . .	117
A.3	Control PD no lineal con precompensación neuronal adaptable	121
<b>B</b>	<b>Implementación experimental de los controladores a usar para comparación</b>	<b>126</b>
B.1	Control PD con precompensación . . . . .	126
B.2	Control PD no lineal con precompensación neuronal adaptable	128
<b>ANEXO</b>		
<b>P</b>	<b>Publicaciones</b>	
P.1	Ponencias en congresos arbitrados . . . . .	
P.2	Artículo publicado en revista indexada . . . . .	
P.3	Artículo para someterse a revista . . . . .	

# Índice de figuras

1.1	Robot UNIMATE aplicado en el mantenimiento de máquinas de acero. . . . .	8
1.2	Sistema de control propuesto. . . . .	17
2.1	La <i>Maschinenmensch</i> (Hombre-máquina) <i>María</i> , escena de la película muda <i>Metrópolis</i> (1927). (imagen libre de derechos de autor) . . . . .	20
2.2	Tipos de robots industriales, a)MiR250 del catálogo de MiR robots: <a href="https://www.mobile-industrial-robots.com/">https://www.mobile-industrial-robots.com/</a> , b)IRB 1200 del catálogo de ABB Robots: <a href="https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots">https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots</a> . . . . .	21
2.3	Tipos de robots manipuladores. . . . .	21
2.4	Tipos de articulaciones usadas en robots manipuladores. . . . .	22
2.5	Clasificación de robots manipuladores por tipo de articulación. . . . .	23
2.6	Diagrama del control PD con precompensación. . . . .	26
2.7	Diagrama del controlador PD precompensado simplificado para mostrar mejor el bloque de precompensación ( <i>feedforward</i> , en inglés) que se formó con la dinámica del robot evaluada en las trayectorias deseadas. . . . .	27
2.8	Diagrama de bloques para un FLC utilizado en forma directa. Las señales de entrada $\mathbf{x}$ al FLC son los errores obtenidos del punto de suma, y sus salidas $\mathbf{y}$ son las señales de control a la planta. . . . .	29
2.9	Diagrama interno de un FLC mostrando todos los elementos que calculan su salida. . . . .	30
2.10	MF tipo <i>singleton</i> . . . . .	32
2.11	MF tipo triangular . . . . .	33
2.12	MF tipo trapezoidal. . . . .	33
2.13	MF tipo gaussiana. . . . .	34

2.14	MF tipo campana generalizada. . . . .	35
2.15	Diagrama general de una red neuronal multicapa con una sola capa oculta. . . . .	38
2.16	Algunas funciones de activación usadas en redes neuronales. . .	39
2.17	Diagrama del robot manipulador de 2-DOF . . . . .	42
3.1	Propuesta de control difuso sectorial con precompensación. . .	48
3.2	Definición de los conjuntos difusos para $x_1 = \tilde{q}_i$ . . . . .	58
3.3	Definición de los conjuntos difusos para $x_2 = \tilde{q}_i$ . . . . .	58
3.4	$\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$ para $x_2$ evaluada en diferentes $P_{2,j}$ . . . . .	60
3.5	$\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$ en función de $x_1$ y $x_2$ . . . . .	61
3.6	$\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$ en función de $x_1$ y $x_2$ . . . . .	61
3.7	Funciones de membresía difusas para la entrada $\tilde{q}_i(t)$ . . . . .	69
3.8	Funciones de membresía difusas para la entrada $\tilde{q}_i(t)$ . . . . .	69
3.9	Funciones de membresía difusas para la salida $\tau_i$ . . . . .	69
3.10	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1. . .	71
3.11	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2. . .	72
3.12	Error de posición en articulaciones 1 y 2. . . . .	72
3.13	Par aplicado en la articulación 1. . . . .	73
3.14	Par aplicado en la articulación 2. . . . .	73
3.15	Error de posición en articulaciones 1 y 2. . . . .	74
3.16	Par aplicado en la articulación 1. . . . .	75
3.17	Par aplicado en la articulación 2. . . . .	75
4.1	Control difuso sectorial con precompensación neuronal adap- table. . . . .	77
4.2	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1. . .	88
4.3	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2. . .	88
4.4	Error de posición en articulaciones 1 y 2. . . . .	89
4.5	Par aplicado en la articulación 1. . . . .	89
4.6	Par aplicado en la articulación 2. . . . .	90
4.7	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1. . .	90
4.8	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2. . .	91
4.9	Error de posición en articulaciones 1 y 2. . . . .	91
4.10	Par aplicado en la articulación 1. . . . .	92
4.11	Par aplicado en la articulación 2. . . . .	92
4.12	Error de posición en articulaciones 1 y 2. . . . .	93
4.13	Par aplicado en la articulación 1. . . . .	93

4.14	Par aplicado en la articulación 2. . . . .	94
4.15	Comparación en simulación de la respuesta en el tiempo de $\tilde{q}_1$ para cada controlador diseñado. Los dos controladores con parte neuronal poseen 20 neuronas en su capa oculta. . . . .	95
4.16	Comparación en simulación de la respuesta en el tiempo de $\tilde{q}_2$ para cada controlador diseñado. Los dos controladores con parte neuronal poseen 20 neuronas en su capa oculta. . . . .	95
4.17	Comparación en tiempo real de la respuesta de $\tilde{q}_1$ para cada controlador diseñado. . . . .	97
4.18	Comparación en tiempo real de la respuesta de $\tilde{q}_2$ para cada controlador diseñado. . . . .	97
A.1	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1. . . . .	114
A.2	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2. . . . .	115
A.3	Error de posición en articulaciones 1 y 2. . . . .	115
A.4	Par aplicado en la articulación 1. . . . .	116
A.5	Par aplicado en la articulación 2. . . . .	116
A.6	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1. . . . .	118
A.7	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2. . . . .	118
A.8	Error de posición en articulaciones 1 y 2. . . . .	119
A.9	Par aplicado en la articulación 1. . . . .	119
A.10	Par aplicado en la articulación 2. . . . .	120
A.11	Diagrama del Control PD no lineal con precompensación neuronal adaptable. . . . .	121
A.12	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1. . . . .	123
A.13	Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2. . . . .	123
A.14	Error de posición en articulaciones 1 y 2. . . . .	124
A.15	Par aplicado en la articulación 1. . . . .	124
A.16	Par aplicado en la articulación 2. . . . .	125
B.1	Error de posición en articulaciones 1 y 2. . . . .	127
B.2	Par aplicado en la articulación 1. . . . .	127
B.3	Par aplicado en la articulación 2. . . . .	128
B.4	Error de posición en articulaciones 1 y 2. . . . .	129
B.5	Par aplicado en la articulación 1. . . . .	129
B.6	Par aplicado en la articulación 2. . . . .	130

# Capítulo 1

## Introducción

Cuando este trabajo de investigación comenzó en junio de 2017, el portal de estadísticas *Statista* (Statista, 2017) y el *Executive Summary World Robotics 2016-Industrial Robots* (IFR.org, 2017) reportaban que se calculaba que entre 1.600 y 1.824 millones de robots industriales estaban operando a nivel mundial en 2015, con una estimación de un incremento a 2.589 millones de robots ya instalados, trabajando en industrias de todo el mundo, para 2019; y una inversión en la compra e instalación de robots de casi 2 mil millones de dólares reportada sólo en 2016, con una tasa de crecimiento promedio anual de 16 % de unidades vendidas por año, proyectada de 2016 a 2025, (www.recode.net, 2017; RIA, 2017). Cuatro años después, y de acuerdo a los mismos portales de estadísticas el crecimiento pronosticado en la implementación de robots industriales se excedió en 2017 (+23 %) y 2018 a más del (+15 %), cayendo en 2019 (−12 %), producto de la disputa comercial entre China y EUA, y aún más en 2020 (aún por contabilizar) debido a la completa desaceleración de la economía mundial por la pandemia del virus SARS-CoV-2, causante de la enfermedad COVID-19 (IFR.org, 2021a). Esto último, sin embargo, se puede ver ya no como una oportunidad de crecimiento para los robots industriales o los robots manipuladores en general, si no como una necesidad de prever que las actividades esenciales que sostienen a nuestra sociedad, se puedan mantener en el caso de un evento de este tipo, porque de todas las industrias en general, las de cuarta generación o *Industry 4.0* (Paiva Santos et al., 2018) son las únicas que pudieran mantenerse operando todo el tiempo sin restricciones de ningún tipo. Y en este tipo de industria, aún cuando se encuentran ya operando miles de unidades de robots colaborativos, esto es, que operan en conjunto con los operarios, el robot manipulador sigue siendo



la pieza fundamental, y de éste, sus sistemas de control e instrumentación que son los que garantizan o no la calidad y confiabilidad de las tareas que lleve a cabo.

## 1.1 Antecedentes

Desde que G. Devol desarrolló el primer robot programable en 1954 (patente US #2988237), el cual fue implementado en 1961 por la compañía UNIMATION como el robot industrial UNIMATE (Koren, 1985) (ver figura 1.1), el problema del control de un robot manipulador se puede dividir en dos partes: primero, para una tarea dada, y considerando que en el caso de un robot manipulador industrial, éste típicamente tiene una configuración serie con todas sus articulaciones del tipo revolución, encontrar el modelo cinemático inverso con el cual calcular los valores de posición, velocidad y aceleración angular que deben de poseer cada una de ellas, tal que el órgano efector cumpla con las especificaciones para efectuar dicha tarea; y segundo, dados estos valores de posición, velocidad y aceleración angular para cada articulación, obtener el valor de par de fuerzas en cada una de ellas, tal que se controlen estas variables de forma que se garantice la ejecución y el desempeño dentro de especificaciones de calidad de la tarea planteada en un principio.

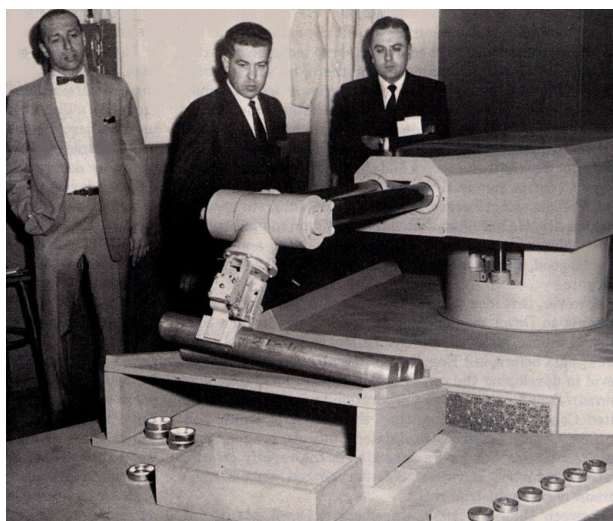


Figura 1.1: Robot UNIMATE aplicado en el mantenimiento de máquinas de acero.

Las primeras propuestas de control, y que de hecho se mantuvieron vigentes durante mucho tiempo en el ámbito industrial, fue el controlar al robot por medio de controladores del tipo proporcional, integrador y derivativo (PID) o simplificaciones de éste, diseñados aplicando alguna de las metodologías de control clásico lineal. Takegaki y Arimoto demostraron, utilizando el método de Lyapunov, que controladores tan simples como el proporcional, derivativo (PD) y el PID son efectivos como controladores de regulación para robots, a pesar de la no linealidad y las incertidumbres en la dinámica del robot (Takegaki and Arimoto, 1981; Arimoto, 1996). Un robot es un sistema altamente no lineal, con variaciones en sus parámetros casi en cada punto de ejecución de una tarea, sobre todo cuando el robot cambian las características físicas de su órgano efector, por ejemplo, cuando transporta diferentes piezas de un punto a otro, o cuando varía la cantidad de pintura en el aspersor con que está pintando, o la cantidad de soldadura cuando está soldando. Si operan en una pequeña vecindad de puntos respecto del punto de operación (que deseablemente se convierte en un punto de equilibrio del sistema de lazo cerrado) y los requisitos de calidad del control no son demasiado altos, entonces la filosofía de diseño lineal suele ser suficiente. Tenía que ser el caso cuando los controladores eran de construcción mecánica o basados en electrónica analógica (Tatjewski, 2007), por lo que los robots estaban limitados a tareas donde la exactitud y precisión no fueran extremadamente demandantes. Con la llegada de los procesadores digitales de señales (DSPs, del inglés *Digital Signal Processors*) en la década de los ochenta, fue posible implementar propuestas de control mucho más avanzadas, las cuales ya habían empezado a ser desarrolladas desde la década de los sesenta y lograr una mayor calidad en las tareas desarrolladas por robots. Esto solamente es posible cuando los controladores pueden trabajar de forma fiable no únicamente en la proximidad de un único valor de referencia, sino también para una serie de puntos de ajuste que corresponden a diversos cambios en los valores de entrada-salida del proceso, es decir, controladores que son capaces de controlar un sistema no lineal (Tatjewski, 2007). Generalmente, el desarrollo de algoritmos de control capaces de hacer frente a los cambios de los puntos de operación y a los cambios en el medio ha ido en dos direcciones: control adaptable y control no lineal (Tatjewski, 2007). La base del control adaptable es una adaptación en línea de los parámetros del controlador conforme cambian las características de la planta, usualmente usando un controlador lineal estándar (por ejemplo un PID). La adaptación se realiza de forma directa o indirecta mediante la identificación en línea de un modelo lineal y la selección apropiada

de los parámetros del controlador, usualmente utilizando uno de los métodos clásicos (Lugar geométrico de las raíces, respuesta en frecuencia, etcétera). Las diversas técnicas de diseño de control adaptable de robots se categorizan en tres grupos: (I) control adaptable por modelo de referencia, (II) control adaptable autosintonizable, y (III) control adaptable por perturbación lineal (Hsia, 1986). Aún cuando existe una extensa cantidad de trabajos de control adaptable orientado a robots, la identificación en línea conlleva el riesgo de fallo, particularmente cuando los parámetros a estimar presentan una alta variabilidad en períodos de tiempo pequeños, o bien, como en el caso del control de robots, el número de parámetros a estimar o sintonizar al mismo tiempo es excesivamente grande (hasta 10 parámetros por articulación) (Yoo and Ham, 2000). Por lo tanto, para el control de robots, el control adaptable ha encontrado hasta ahora una aplicación práctica limitada (Tatjewski, 2007).

La esencia del control no lineal (no adaptable) es el diseño de un controlador no lineal que utiliza de manera directa un modelo no lineal de la planta a controlar, válido para una amplia gama de variabilidad de los valores de entrada-salida. El problema de la aplicación del control no lineal al control de robots manipuladores es que todas las metodologías de diseño aplicables (linealización por realimentación, control por par calculado, etcétera) requieren de un conocimiento exacto de los parámetros del sistema a controlar y su función en el tiempo si éstos son además variantes con el tiempo. Este esquema de control no lineal no es aplicable prácticamente a un robot, ya que implica que deben conocerse las longitudes exactas de los eslabones, los desplazamientos de las articulaciones y el objeto que el robot sostiene; cuando el robot levanta objetos o herramientas de diferentes longitudes, orientaciones desconocidas y puntos de agarre, la totalidad de la cinemática está cambiando y, por lo tanto resulta difícil de obtenerla exactamente (Cheah et al., 2006).

La mayoría de los brazos robóticos industriales se controlan en tareas de seguimiento de trayectoria mediante la aplicación de un controlador PID, aunque no se ha demostrado que este tipo de controlador realmente pueda llegar a tener un error en estado estable cero para ese tipo específico de tareas. A partir de los esquemas de control originales que se aplicaron a los brazos robóticos solamente se ha demostrado que el par calculado y el PD con precompensación tienden asintóticamente a un error de estado estable cero para el seguimiento de trayectoria en brazos robóticos, cuya prueba se extiende a una estabilidad asintótica global. Esto último implica que el

error de posición inicial puede ser de cualquier valor y los dos esquemas de control antes mencionados lograrán que el brazo robótico siga la trayectoria deseada después de un tiempo de estabilización. Ambos esquemas de control utilizan un controlador PD más toda la dinámica del robot conectada de alguna manera; para el caso del controlador de par calculado (CTC, del inglés *computed-torque controller*) se logra eliminar todas las no linealidades del modelo del robot y convertir el equivalente de lazo cerrado del sistema total en un sistema lineal. En el caso del PD con precompensación, el bloque de precompensación (*feedforward*) está compuesto por el modelo del robot evaluado en las posiciones, velocidades y aceleraciones angulares deseadas, lo que arroja un excelente rendimiento de seguimiento, comparable al del CTC (Kelly et al., 2005). No obstante, un robot es altamente no lineal con variaciones en sus parámetros en casi cada punto de ejecución. Dentro de los diversos enfoques de control existentes para el control de movimiento de robots, los controladores difusos pueden ser una alternativa robusta y eficiente en los casos en los que es difícil tener un modelo exacto de la planta a controlar, o hay muchas perturbaciones y cambios en algunos de los sus parámetros clave. Además, el control difuso permite combinar elementos heurísticos con los modelos analíticos. Una vez dadas algunas pautas para diseñar controladores difusos con propiedades sectoriales, denominados controladores difusos sectoriales (SFCs), que permiten su análisis de estabilidad, en Calcev (1998), surgieron algunos trabajos sobre el control de movimiento de robots manipuladores: En Santibanez et al. (2004), un control de par calculado con un SFC en lugar de un controlador PD, mostró excelentes resultados en experimentos físicos en el control de movimiento de seguimiento de un brazo robótico de 2 grados de libertad (2-DOF, del inglés *2 degrees of freedom*). Se aplicó un SFC con compensación de gravedad a un manipulador robótico de 2-DOF para regular sus posiciones articulares en Santibanez et al. (2005), nuevamente mostrando excelentes resultados en sus experimentos físicos, y agregando la propiedad de tener pares acotados. En Zheng et al. (2017), se presentó un control difuso saturado para la regulación de robots manipuladores con restricciones en los actuadores. Este controlador se forma uniendo una acción integral saturada con el SFC, formando así una especie de controlador PID difuso sectorial. Una prueba de estabilidad asintótica global utilizando el método directo de Lyapunov fue esbozada sin probar alguna de las suposiciones planteadas por los autores. En dicho artículo, solamente presentaron los resultados de la simulación en Matlab sin considerar la fricción en el modelo de robot. En el trabajo de Mijares (2014) se presentan propuestas relaciona-

das con la aplicación de la lógica difusa para sintonizar controladores PD y PID en el control de movimiento robots manipuladores, presentando buenos resultados y la demostración de su estabilidad asintótica global. En el artículo de [Llama et al. \(2015b\)](#) se propone un algoritmo de control que utiliza sistemas difusos adaptables para aproximar porciones locales de la dinámica de un robot manipulador industrial con el fin de resolver el problema del seguimiento de la trayectoria, sin requerir ningún conocimiento de su modelo dinámico. El robot se modela mediante una aproximación descentralizada, y se presentan buenos resultados experimentales con bajas tasas de error en el seguimiento de trayectorias.

Todos los enfoques de control mencionados anteriormente utilizan un SFC tipo Mamdani como elemento central; sin embargo, existe la contraparte de controladores difusos del tipo Takagi - Sugeno (T-S) aplicados al control de sistemas mecánicos o mecatrónicos: en [Nguyen et al. \(2018\)](#) se empleó un descriptor T-S para controlar un manipulador robótico de 2-DOF con articulaciones elásticas y fricción seca. El diseño del control de seguimiento y la garantía de estabilidad se reformula como un problema de optimización basado en la solución de una Desigualdades Matriciales Lineales (LMIs, de las siglas del inglés *Linear Matrix Inequalities*). Los procedimientos de diseño y el rendimiento del controlador fueron validados mediante simulación numérica en Matlab. Se compararon dos metodologías difusas para realizar el seguimiento de la trayectoria de un péndulo de Furuta en [Coronado et al. \(2017\)](#) mientras se usa una representación convexa exacta y una regulación dinámica de la salida, que no resuelve las ecuaciones diferenciales parciales no lineales conocidas como ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes (FIB). Al final, el enfoque difuso T-S arrojó mejores resultados en contraste con el enfoque de regulación dinámico de la salida. Este trabajo reporta resultados experimentales. En el trabajo desarrollado en [Llama et al. \(2015a\)](#) se presenta el control de un carro péndulo invertido donde también se aplica control T-S, usando tres esquemas diferentes, en uno aplicando un observador T-S de modelo extendido con incertidumbres para poder obtener la velocidad y posición del carro. Se hicieron experimentos en tiempo real validando el funcionamiento de mantener el péndulo en posición vertical mientras el carro sigue una señal de referencia. En [Kang and Lim \(2019\)](#), un robot de 3-DOF se controla en simulaciones mediante el enfoque de  $H_\infty$ ; los resultados presentados son excelentes al emplear 16 matrices en el proceso de fusificación T-S. Sin embargo, al igual que con todos los enfoques de este tipo de control difuso, el modelo mecánico tiene que pasar por una manipulación algebraica

extensa para obtener las ecuaciones que se usarán en la formulación de las LMIs y, al hacerlo, los resultados obtenidos solamente se pueden aplicar a la planta específica para la cual se diseñó el control difuso T-S.

Las redes neuronales (NN de las siglas del inglés, *Neural Networks*) adaptables y recurrentes también se han aplicado a la tarea de seguimiento de movimiento en robots, de los trabajos previos el de [Lewis et al. \(1996\)](#) es uno de los más relevantes ya que aquí presenta la base para todo lo que es el algoritmo de aprendizaje de filtrado del error para redes neuronales y más aún mostrando diferentes combinaciones de la aplicación de las redes neuronales para el control en tiempo real del seguimiento de trayectorias en manipuladores. En [Huang et al. \(2008\)](#) se utiliza una red neuronal adaptable para controlar un robot de enlace rígido accionado eléctricamente. Las dimensiones de la red neuronal de base radial se ven enormemente decrementadas respecto de las propuestas previas al aplicar el análisis de estabilidad basado en Lyapunov y *back-stepping*, donde a través de este método se obtienen las ecuaciones de la dinámica de los pesos de la red neuronal. En [Quynh et al. \(2020\)](#), donde se presenta una red neuronal recurrente de enlace funcional wavelet difusa que se basa en un compensador de zona muerta para controladores de robots manipuladores industriales. El artículo muestra un análisis de estabilidad extenso, utilizando Lyapunov, el teorema de invariancia de LaSalle y el Lema de Barbălat. Sin embargo, ninguno de esos teoremas se puede aplicar para el análisis de estabilidad bajo ese enfoque, ya que su ley de control posee una discontinuidad en el origen. Se reportan resultados de simulación y experimentos sobre un brazo robótico de 3-DOF, mostrando excelentes resultados. Sin embargo, el inconveniente radica en que existen más de diez matrices que deben calcularse en cada período de muestreo para poder mantener resultados excelentes. En [Puga-Guzmán et al. \(2014\)](#) se utiliza una red neuronal adaptable como precompensación para un controlador PD saturado no lineal. Nuevamente, la cantidad de elementos que se calcularán en cada tiempo de muestreo es muy grande, considerando el número de grados del robot utilizado. Este trabajo presenta tanto simulación como experimentos con resultados aceptables, ya que al tener una actualización de los pesos de la red neuronal se provoca que el sistema completo presente un tiempo de estabilización muy lento (hasta de 7 segundos). En [Vázquez et al. \(2018\)](#) proponen el uso de una estructura de red neuronal recurrente de alto orden (RHONN, por sus siglas en inglés de *Recurrent High Order Neural Network*) descentralizada para lograr un menor tiempo de adaptación, se demuestra que este tipo de controlador posee estabilidad asintótica

global considerando el algoritmo de filtrado del error para la actualización de pesos, sin embargo se tienen errores de más de  $5^\circ$  en las posiciones angulares debido a que se emplean servomotores industriales para el posicionamiento de las articulaciones del robot. El trabajo de [Montoya-Cháirez et al. \(2022\)](#) propone un controlador adaptable para robots de articulación flexible. La parte adaptable se desarrolla utilizando dos técnicas, un controlador de red neuronal adaptable, que aproxima la función con las incertidumbres mientras que la posición deseada del rotor necesaria para la linealización de realimentación entrada-salida se implementa con un regresor adaptable de dinámica de enlace. Se llevaron a cabo comparaciones de experimentos en tiempo real entre el controlador propuesto y otros anteriores logrando una mejora en la respuesta. En [Zhou et al. \(2019\)](#) desarrollan un enfoque de control de seguimiento de NN adaptables para los manipuladores robóticos sujetos a la zona muerta. Las NN se utilizan para identificar las señales de control intermedias con funciones no lineales desconocidas en el procedimiento de control del *backlash*, y luego se obtienen los controladores virtuales y reales. El análisis de estabilidad asegura solamente que todas las señales en lazo cerrado estén limitadas en semiglobal y uniformemente, y las señales de salida del sistema puedan seguir a las señales de referencia con un error aceptable. Solamente se reportaron resultados de simulación en un robot Puma 560. Un esquema de control NN adaptable basado en observadores de perturbaciones para un robot de n-DOF con incertidumbres en su modelo, y sujeto a restricciones variables en el tiempo y perturbaciones desconocidas se ha desarrollado en [He et al. \(2017\)](#), utilizando las NN para estimar el modelo dinámico desconocido del manipulador y usando los observadores de perturbaciones para aproximar la perturbación variable en el tiempo. Se utiliza una función de Lyapunov barrera asimétrica para evitar el no cumplir con las restricciones de salida. Solamente se entregan resultados en simulación demostrando que la salida sigue bien a la trayectoria objetivo, al mismo tiempo que se garantiza que se cumpla con las restricciones dadas.

Aunque el control de modos deslizantes no es aconsejable en cualquier aplicación que involucre un sistema mecánico, debido a la naturaleza destructiva de los fenómenos de castaño (*chattering*, en inglés), que es una característica de este tipo de enfoque de control, se han hecho grandes avances para hacer frente a este problema usando lógica difusa: un controlador de modo deslizante basado en difuso que se aplicó a sistemas no lineales de entrada única y salida única se desarrolló en [Prieto-Entenza et al. \(2020\)](#) y aplicado al control de regulación de un péndulo de un solo eslabón. En este trabajo se

presenta un análisis extenso de Lyapunov. Se aplica un sistema difuso Mamdani para reducir el *chattering* y se presentan excelentes resultados para el control del péndulo, éste hace su trabajo de regulación con un error mínimo.

## 1.2 Planteamiento del problema

Dada la gran cantidad de robots en uso en la actualidad, sobre todo en aplicaciones industriales (Statista, 2017; IFR.org, 2017; www.recode.net, 2017; RIA, 2017), y a que cada vez se les utiliza en aplicaciones que demandan más exactitud y precisión, es necesario encontrar un sistema de control que sea capaz de controlar la posición, velocidad y aceleración de las articulaciones de un robot serial, tal que cumpla con las especificaciones de calidad en la tarea en la que se le de uso. De los antecedentes, aún existe un problema abierto en encontrar un controlador que logre esos objetivos de control en un robot manipulador serial, ya que un robot representa un reto enorme respecto a lo que se refiere a su control debido a todos los factores que intervienen para que éste funcione de acuerdo a lo planeado.

En las referencias revisadas, o bien el trabajo presentado sólo es aplicable a la planta específica para la que se está realizando el diseño del controlador, como en Coronado et al. (2017); Nguyen et al. (2018); Kang and Lim (2019) (en el caso de controladores difusos T-S), o el controlador requiere un cálculo tan extenso como en Quynh et al. (2020) que hace prohibitiva su aplicación en los típicos robots manipuladores industriales, o podría aplicarse a los robots si su trabajo puede extenderse a más de un eslabón (Prieto-Entenza et al., 2020). Además, solamente en la mitad de los artículos se presentó un análisis de estabilidad completo y ninguno de los trabajos anteriores encontró una función de Lyapunov estricta para dicho análisis de su enfoque de control.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo general

Desarrollar una nueva metodología de control difuso sectorial para mejorar la respuesta transitoria y el error en estado estable de seguimiento de trayectorias en un robot manipulador, considerando las limitantes de par de fuerzas máximo aplicable en cada articulación, con perturbaciones típicas compen-



sadas por medio de una red neuronal adaptable, y garantizando estabilidad asintótica uniforme global, en el rango de operación aplicable.

### 1.3.2 Objetivos específicos

- Desarrollar una nueva metodología de control difuso sectorial con base en el esquema de Mamdani para controlar el seguimiento de trayectorias en un robot manipulador, compensado con la dinámica deseada del robot.
- Desarrollar una nueva metodología de control difuso sectorial con base en el esquema de Mamdani para controlar el seguimiento de trayectorias en un robot manipulador, compensando inercias, el efecto Coriolis y posibles cambios en los parámetros del robot, o dinámicas no modeladas por medio de una red neuronal adaptable.
- Analizar la estabilidad de las nuevas propuestas de metodología de control difuso sectorial precompensado con la dinámica deseada, y con compensación por redes neuronales adaptables, delimitando al rango de operación a controlar el robot manipulador.
- Implementar y validar físicamente las nuevas propuestas de metodología de control difuso sectorial con precompensación, y con compensación por medio de red neuronal adaptable en un robot manipulador de 2 grados de libertad.

## 1.4 Metodología propuesta

La propuesta es obtener provecho de las ventajas observadas en control difuso sectorial (Santibanez et al., 2004, 2005), aplicándolas al controlador PD precompensado (para información más detallada de este controlador, revisar la sección 2.4 o consultar Santibanez and Kelly (2001); Yarza et al. (2011)), cambiando el controlador PD por un controlador difuso sectorial, y potenciarlo con las técnicas de control adaptable con redes neuronales de Puga-Guzmán et al. (2014) tal que el controlador difuso sectorial se encargue principalmente de lograr que las posiciones  $\mathbf{q}$  de cada articulación del robot lleguen a sus valores deseados  $\mathbf{q}_d$  considerando el modelo del robot definido en (2.1), tomando en cuenta la saturación en actuadores usados respecto de

los pares de fuerzas  $\tau$  máximo que pueden proveer, y dejando que el compensador de red neuronal adaptable sea el que reduzca al máximo los errores  $\tilde{q}$  causados por todas las incertidumbres, debidas a dinámicas no modeladas y perturbaciones por cambios en parámetros, como se muestra en la figura 1.2.

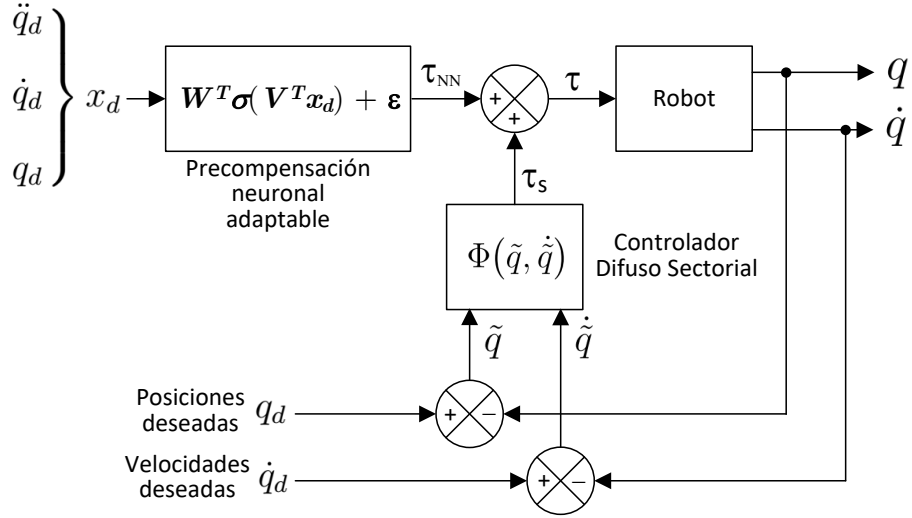


Figura 1.2: Sistema de control propuesto.

La idea es complementar los resultados en el desempeño presentado en los trabajos previos de [Santibanez et al. \(2004, 2005\)](#); [Vázquez et al. \(2018\)](#), y [Llama et al. \(2015b\)](#) respecto de la eliminación de perturbaciones y mejorar el tiempo de respuesta, manteniendo la capacidad de eliminación de perturbaciones mostrada en [Puga-Guzmán et al. \(2014\)](#) y al mismo tiempo analizar la estabilidad global de todo el sistema e implementarlo experimentalmente. Se trabajará en implementar el control difuso sectorial de acuerdo a Mamdani para seguimiento, tal que el robot a controlar pueda ser cambiado sin que el desempeño disminuya de calidad. Se llevarán a cabo pruebas experimentales, con la meta final de que el sistema de control propuesto pueda ser implementado en un robot manipulador industrial en un futuro próximo.

## 1.5 Justificación

En trabajos anteriores donde se aplicó el SFC para asegurar globalmente el control de regulación de posición (Santibanez et al., 2005) y seguimiento global de trayectorias (Santibanez et al., 2004) para los manipuladores robóticos, presentan como característica común que los respectivos sistemas de lazo cerrado son autónomos. Sin embargo, el problema del seguimiento de la trayectoria del movimiento para los robots manipuladores con realimentación o precompensación generalmente conduce a sistemas de lazo cerrado no lineales no autónomos. El principal obstáculo para asegurar la estabilidad asintótica uniforme global (GUAS, de las siglas del inglés *Global Uniform Asymptotic Stability*) en esta clase de sistemas es la falta de una función de Lyapunov estricta (una función definida globalmente positiva, decreciente y radialmente desacotada, cuya derivada en el tiempo es una función definida globalmente negativa). Con el objetivo de superar tal desafío, este trabajo presentará nuevas propiedades de los SFCs que nos permiten construir una función de Lyapunov estricta que lleve a probar la GUAS en lazo cerrado en el SFC con precompensación aplicado al control de seguimiento de trayectorias en robots manipuladores. Por lo que en el presente trabajo, presentamos, por primera vez, la aplicación de un SFC en sistemas de lazo cerrado no autónomos en manipuladores robóticos. Además, la ley de control propuesta para el SFC precompensado tiene la característica útil de proporcionar pares acotados, que pueden ser diseñados de acuerdo con los límites de los actuadores. Para el caso de aplicaciones donde pudiera haber cambios o incertidumbres en los parámetros del robot, la precompensación se implementará por medio de una red neuronal adaptable.

# Capítulo 2

## Fundamentos teóricos

### 2.1 Introducción

La palabra **Robot** (trabajo bajo servitud, en idioma Checo) fue usada por primera vez en la obra **R.U.R (Rossumovi Univerzální Roboti)** por el escritor Karel Čapek en 1920 para referirse a personas artificiales construidas con el único fin de servir a los seres humanos y realizar todos sus trabajos. Este término desplazó a otros usados previamente, tales como *autómata*, y fue más tarde ampliamente difundido por Isaac Asimov en sus muchas obras; así como en películas tales como *Metropolis* (1927) con su *Maschinenmensch María* (ver figura 2.1), que influenciaría a todas las demás producciones relacionadas como *Star Wars* (1977), y series de TV como *Perdidos en el Espacio* (años sesenta del siglo pasado) y otras más; en las cuales se muestran máquinas humanoides con cierto nivel de consciencia e inteligencia.

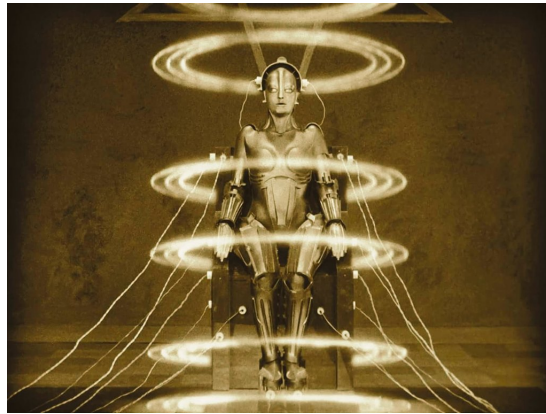


Figura 2.1: La *Maschinenmensch* (Hombre-máquina) *María*, escena de la película muda *Metrópolis* (1927). (imagen libre de derechos de autor)

## 2.2 Robots industriales

### 2.2.1 Definición de robot industrial

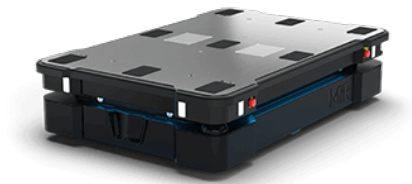
De acuerdo a la organización Internacional para la Estandarización (ISO, de las siglas del inglés *International Organization for Standardization*), un robot industrial se define como:

“Un manipulador multipropósito, reprogramable, controlado automáticamente, programable en tres o más ejes, que puede ser fijo en su lugar o móvil para su uso en aplicaciones de automatización industrial” ([IFR.org](http://IFR.org), 2021b).

### 2.2.2 Clasificaciones de los robots industriales

En general, los robots industriales de acuerdo a su arquitectura más básica pueden clasificarse en robots móviles y robots manipuladores, tal como se aprecia en la figura 2.2:

De éstos, los más utilizados y por lo mismo más estudiados son los robots manipuladores, ya que en aplicaciones industriales los robots móviles pueden ser reemplazados por bandas transportadoras. Los robots manipuladores a su vez también pueden clasificarse de acuerdo a la configuración de sus eslabones en robots seriales o paralelos ([Craig, 2005](#)), ver figura 2.3:



(a) Robot móvil.



(b) Robot manipulador.

Figura 2.2: Tipos de robots industriales, a)MiR250 del catálogo de MiR robots: <https://www.mobile-industrial-robots.com/>, b)IRB 1200 del catálogo de ABB Robots: <https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots>

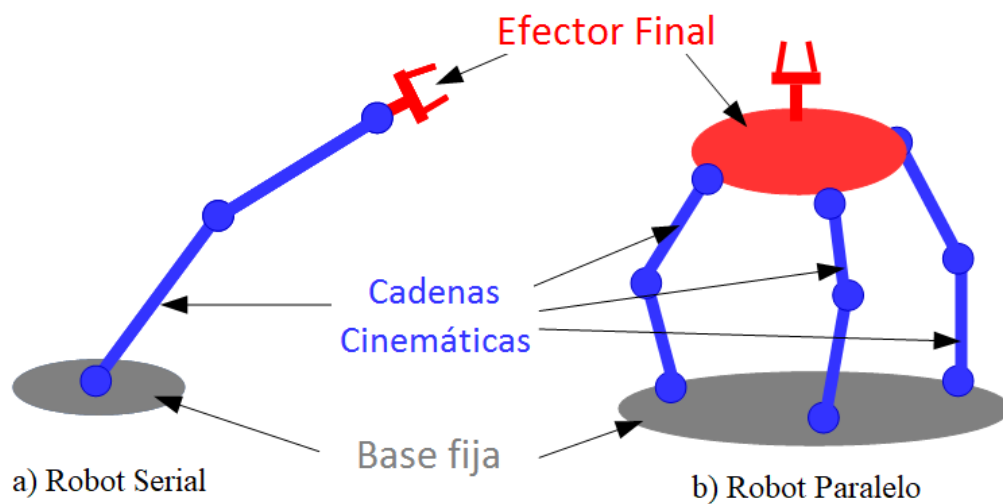


Figura 2.3: Tipos de robots manipuladores.

Con base a la arquitectura y tipo de articulación usada, De Revolución (R), Prismática (P), Helicoidal (H), Cilíndrica (C), Universal (U) o Esférica (S), mostradas en la figura 2.4, los robots manipuladores se clasifican a su vez como (ver figura 2.5 (OSHA, 2020)):

- Robot de coordenadas rectangulares
- Robot de coordenadas cilíndricas
- Robot de coordenadas Esféricas
- Robot de brazo articulado
- Robot de grúa
- Robot SCARA (del acrónimo en inglés de *Selective Compliance Articulated Robot Arm*)

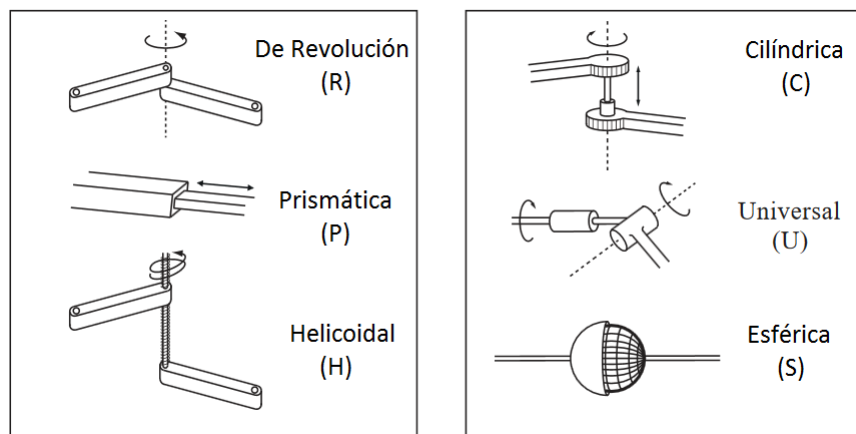


Figura 2.4: Tipos de articulaciones usadas en robots manipuladores.

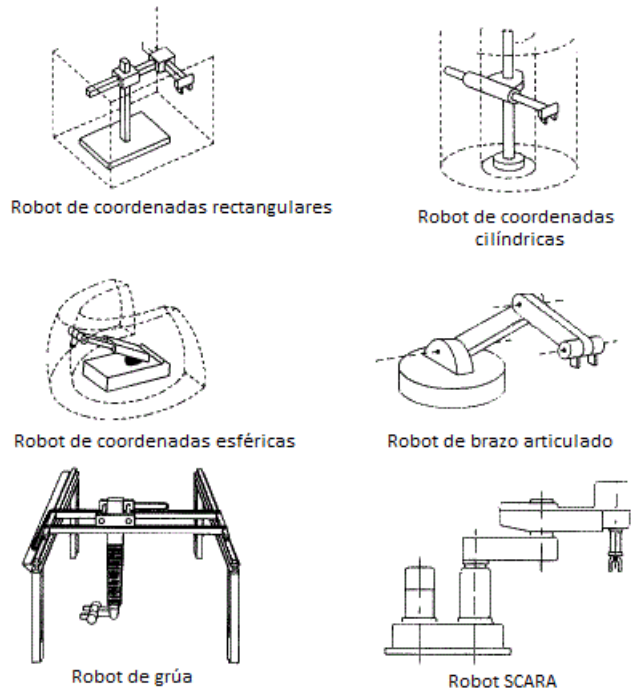


Figura 2.5: Clasificación de robots manipuladores por tipo de articulación.

## 2.3 Modelo dinámico de un robot manipulador con articulaciones rígidas

El modelo dinámico de un robot serial de  $n$ -eslabones puede resumirse por las ecuaciones de Euler-Lagrange (Lewis et al., 2004; Merabet and Gu, 2010) como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\eta}, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el  $n \times 1$  vector de las posiciones angulares de las articulaciones en coordenadas generalizadas y disponible para su medición,  $\dot{\mathbf{q}}$  es el  $n \times 1$  vector de velocidades angulares,  $\ddot{\mathbf{q}}$  es el  $n \times 1$  vector de aceleraciones angulares en cada articulación,  $\boldsymbol{\tau}$  es el  $n \times 1$  vector de pares de fuerzas aplicados a cada articulación,  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  es la  $n \times n$  matriz definida positiva de inercia de los eslabones que componen al robot,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  es el  $n \times 1$  vector de Coriolis



y de los pares de fuerzas centrípetas,  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es el vector de pares de fuerzas gravitacionales,  $\boldsymbol{\eta}$  es el  $n$ -vector de incertidumbre, que incluye a las perturbaciones externas y todas las dinámicas no modeladas del robot; y,  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$  es el  $n \times 1$  vector de fuerzas de fricción en cada articulación tal que  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$  solamente depende de las velocidades angulares en cada articulación  $\dot{\mathbf{q}}$  (Kelly et al., 2005). Un modelo de fricción estática combina fenómenos de fricción tanto viscosa como de Coulomb. Este modelo establece que el vector  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$  se compone de

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_C \mathbf{sign}(\dot{\mathbf{q}}). \quad (2.2)$$

Los elementos diagonales de  $\mathbf{F}_v$  son los parámetros de fricción viscosa y los elementos de  $\mathbf{F}_C$  son los parámetros de fricción de Coulomb; ambas son matrices definidas positivas diagonales de  $n \times n$ , donde  $\mathbf{sign}(\dot{\mathbf{q}})$  denota la función vectorial signo:

$$\mathbf{sign}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ \text{sign}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{sign}(\dot{q}_n) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

### 2.3.1 Propiedades del modelo dinámico de un robot manipulador

La dinámica del robot manipulador serial de  $n$ -eslabones modelado por (2.1) tiene las siguientes propiedades válidas para manipuladores de eslabones rígidos que tienen todas sus articulaciones del tipo revolución (Kelly et al., 2005; Slotine and Li, 1987),

- **Propiedad A.** La matriz de inercia  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  es simétrica y definida positiva; esto es,

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{M}\} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{M}\} \|\mathbf{x}\|^2, \quad (2.4)$$

donde  $\lambda_{\min}\{\mathbf{M}\} = \inf_q \lambda_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}$ ,  $\lambda_{\max}\{\mathbf{M}\}$  denota el  $\sup_q \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}$ , y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es cualquier vector de  $n$  valores reales.

- **Propiedad B.** El vector  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}$  satisface la cota

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{C1}\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; \quad k_{C1} > 0. \quad (2.5)$$

- **Propiedad C.** Suponiendo que la matriz de pares de fuerzas centrífugas y de Coriolis  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  se calcula mediante los símbolos de Christoffel del primer tipo, ésta se relaciona con la derivada de la matriz de inercia  $\mathbf{M}$  como

$$\mathbf{x}^T [\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.6)$$

lo que significa que  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  tiene una relación de antisimetría con  $\dot{\mathbf{M}}$ :

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T. \quad (2.7)$$

- **Propiedad D.** La dinámica residual  $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  (Arimoto, 1995a,b) se define como

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= [\mathbf{M}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{M}(\mathbf{q})] \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ &\quad + [\mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}}_d, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{q}_d$  es la posición angular deseada en la articulación, que se supone que es tres veces diferenciable (con esto se permite que la aceleración angular también pueda ser diferenciable) con derivadas acotadas para todo tiempo  $t \geq 0$ . El error de posición angular en la articulación queda denotado por

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}. \quad (2.9)$$

La dinámica residual (2.8) tiene la propiedad que se define en (2.10) y satisface la desigualdad en (2.11) (Kelly et al., 2005):

$$\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

$$\|\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| \leq k_{h1}\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + k_{h2}\|\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\|, \quad (2.11)$$

donde  $k_{h1}$  y  $k_{h2}$  son constantes estrictamente positivas suficientemente grandes que dependen de los parámetros del modelo del robot, con  $\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}}) = [\mathbf{tanh}(\tilde{q}_1) \quad \mathbf{tanh}(\tilde{q}_2) \dots \mathbf{tanh}(\tilde{q}_n)]^T$ , y  $\|\mathbf{q}\|$  denota la norma euclidiana del vector  $\mathbf{q}$ . La desigualdad que se expresa en (2.11) implica que  $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  tiene definido un acotamiento superior.

## 2.4 Control proporcional y derivativo con precompensación para el seguimiento de trayectorias

La figura 2.6 muestra el diagrama de bloques del control PD con precompensación (*feedforward*) que se utiliza para el control de seguimiento de trayectorias en un robot manipulador.

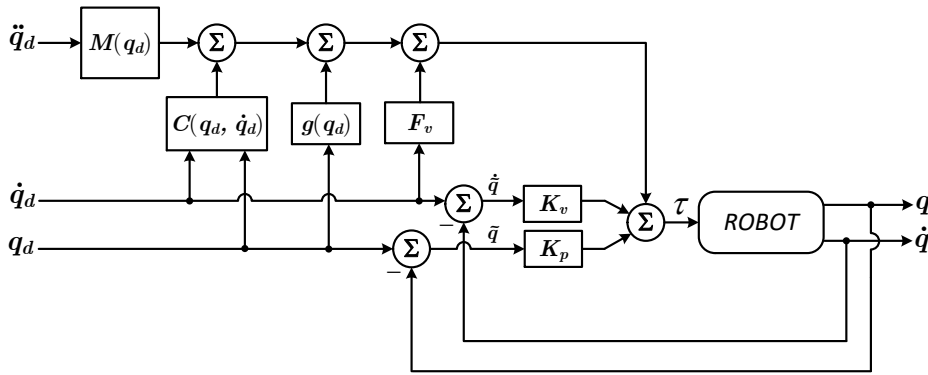


Figura 2.6: Diagrama del control PD con precompensación.

La ley de control para este esquema viene dada por (Kelly et al., 2005; Santibanez and Kelly, 2001)

$$\tau = \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{M}(\mathbf{q}_d) \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{f}_v \dot{\mathbf{q}}_d, \quad (2.12)$$

donde  $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices definidas positivas simétricas, que se denominan ganancias de posición y velocidad respectivamente; y

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}} \quad (2.13)$$

es el error de velocidad angular.

Se ha demostrado que este controlador tiene una estabilidad asintótica uniforme global si el robot se modela como en (2.1), o considerando los actuadores del robot y sus saturaciones (Santibanez and Kelly, 2001; Yarza et al., 2011).

La parte precompensada (*feedforward*) de este esquema de control, de la que recibe su nombre, son los elementos del modelo de robot, como se describe en (2.1). Si estos elementos se consideran en un solo bloque equivalente usando álgebra de bloques, se tiene la representación equivalente de la figura 2.7,

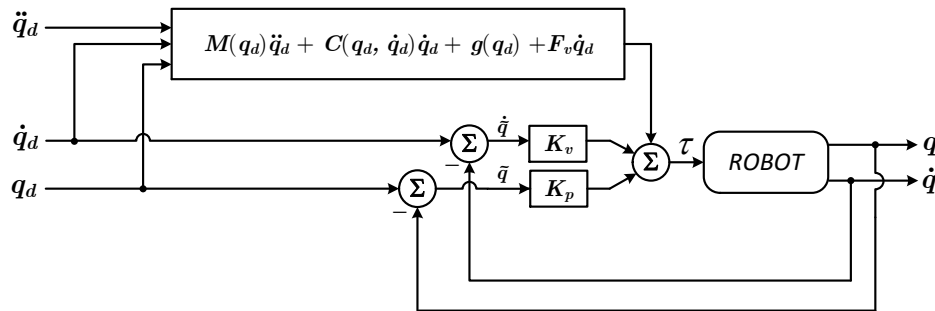


Figura 2.7: Diagrama del controlador PD precompensado simplificado para mostrar mejor el bloque de precompensación (*feedforward*, en inglés) que se formó con la dinámica del robot evaluada en las trayectorias deseadas.

El término precompensado o “*feedforward*” en inglés, se acuñó en los primeros años del desarrollo del campo de los sistemas de control como un nombre intuitivo para referirse a la contraparte de la realimentación utilizada en los sistemas de lazo cerrado. Adicionalmente, es básicamente un bloque que conecta la entrada del sistema de control a la entrada de la planta controlada, como se muestra en la figura 2.7. Normalmente, el bloque de precompensación (*feedforward*) se utiliza como herramienta para eliminar perturbaciones en la planta junto con el control de realimentación (Marlin, 2015, pág. 483–497), pero, en el caso específico de este controlador, ayuda al controlador PD a compensar todo lo que le haga falta de la dinámica del robot y conseguir GUAS.

## 2.5 Sistemas de control de lógica difusa

La idea y las definiciones de un conjunto difuso y una lógica difusa fueron propuestas por L. A. Zadeh en 1964 (Zadeh, 1965) e implementadas en 1976

en una planta de cemento danesa. El auge real en el desarrollo de la teoría y aplicaciones de la lógica difusa para el control se produjo a finales de la década de 1980 y se mantiene hasta hoy. Resulta que los controladores difusos pueden ser una herramienta robusta y eficiente, especialmente en casos donde es difícil tener una descripción puramente analítica adecuada del proceso controlado, pero donde se tiene disponible el conocimiento empírico, la experiencia de los operadores que controlan tales procesos o patrones del comportamiento requerido de los procesos controlados. Por otro lado, el control difuso de los procesos no lineales resultó ser una herramienta muy eficiente que permitió combinar efectivamente elementos de conocimiento de desempeño sobre el proceso con el enfoque analítico. El modelado difuso de los procesos no lineales para fines de control resultó ser, junto al modelado de redes neuronales, el enfoque más intensamente desarrollado que se ha aplicado de manera práctica a partir de los años noventa. Esta es una de las construcciones más exitosas de controladores no lineales, especialmente desde un punto de vista práctico y de aplicación (Tatjewski, 2007).

Un conjunto difuso puede definirse matemáticamente asignando a cada individuo posible en el universo del discurso un valor que representa su grado de pertenencia al conjunto difuso. Este grado corresponde a una medida del nivel en que ese individuo es similar o compatible con el concepto representado por el conjunto difuso. Así, los individuos pueden pertenecer al conjunto difuso en un grado mayor o menor como lo indica un grado de membresía mayor o menor. Estos grados de pertenencia son muy a menudo representados por valores reales en el intervalo cerrado entre 0 y 1. Debido a que la pertenencia completa y la no pertenencia completa al conjunto difuso todavía pueden ser indicadas por los valores de 1 y 0, respectivamente, se puede considerar el concepto de un conjunto nítido (*crisp*, en inglés) como un caso restringido del concepto más general de un conjunto difuso para el cual sólo se permiten estos dos grados de membresía.

La importancia de las variables difusas es que facilitan transiciones graduales entre diferentes estados y, en consecuencia, poseen una capacidad natural para expresar y hacer frente a las incertidumbres de medición y observación. Aunque la definición de estados por conjuntos nítidos es matemáticamente correcta, no es realista frente a errores de medición inevitables. Una medición que cae en un vecindario cercano de cada frontera definida precisamente entre estados de una variable nítida se toma como soporte probatorio para sólo uno de los estados, a pesar de la incertidumbre inevitable implicada en esta decisión.

Las reglas de control difuso pueden considerarse como el conocimiento de un experto en cualquier campo de aplicación relacionado. Una regla difusa está representada por una secuencia de la forma *IF-THEN* (que en español significa SI-ENTONCES), dando lugar a algoritmos que describen qué acción o salida debe tomarse en términos de la información actualmente observada, que incluye tanto la entrada como la realimentación si se aplica un sistema de control de lazo cerrado. La ley para diseñar o construir un conjunto de reglas difusas se basa en el conocimiento o la experiencia de un ser humano, que depende de cada aplicación real diferente. Una regla difusa *IF-THEN* asocia una condición descrita usando variables lingüísticas y conjuntos difusos a una salida o a una conclusión. La parte *IF* se utiliza principalmente para capturar el conocimiento mediante el uso de las condiciones elásticas, y la parte *THEN* puede utilizarse para dar la conclusión o salida en forma de variable lingüística. Esta regla *IF-THEN* es ampliamente utilizada por el sistema de inferencia difusa para calcular el grado al cual los datos de entrada coinciden con la condición de una regla (Bai et al., 2006).

### 2.5.1 Controladores de lógica difusa

La figura 2.8 muestra el diagrama de bloques típico de un controlador lógico difuso (FLC, por sus siglas en inglés de *Fuzzy Logic Controller*) utilizado en forma directa para controlar una planta.

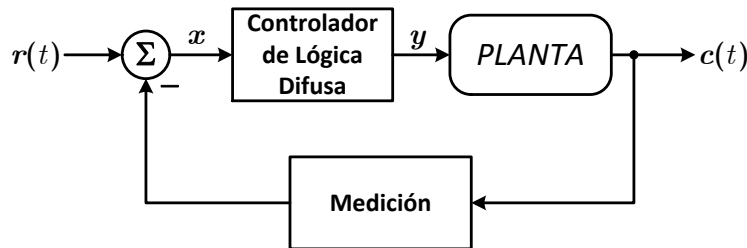


Figura 2.8: Diagrama de bloques para un FLC utilizado en forma directa. Las señales de entrada  $\mathbf{x}$  al FLC son los errores obtenidos del punto de suma, y sus salidas  $\mathbf{y}$  son las señales de control a la planta.

Un FLC puede representarse internamente en forma general como en la

figura 2.9 (Lily, 2010, pág. 29–31, 47–49).

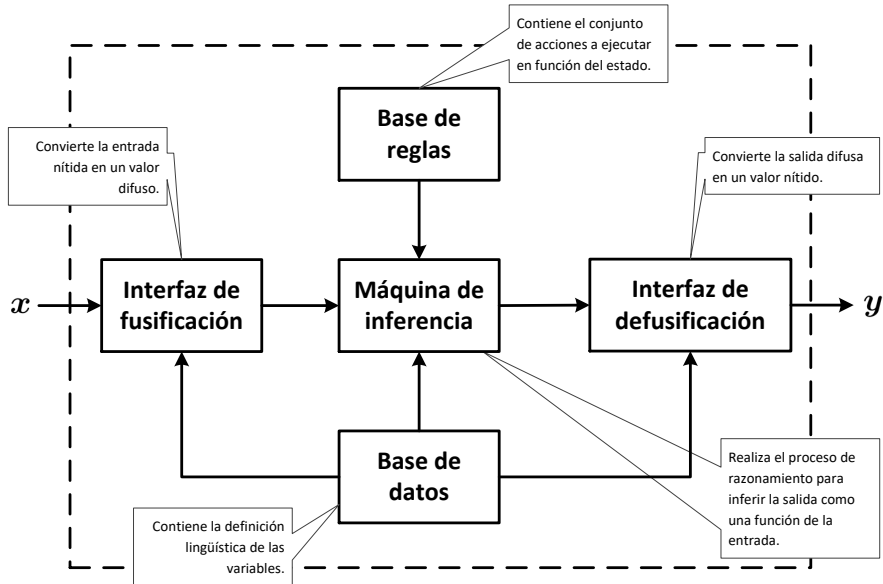


Figura 2.9: Diagrama interno de un FLC mostrando todos los elementos que calculan su salida.

La inferencia difusa deduce la salida difusa de la base de reglas y las señales de entrada. Esto divide a los FLCs en dos tipos que se pueden distinguir principalmente:

Tipo Mamdani, cuando las reglas y sus consecuentes se definen lingüísticamente, y tipo TSK (Takagi, Sugeno y Kang) cuando las reglas y/o sus consecuentes están en forma de función matemática, y el motor de inferencia funciona de manera diferente al ser tipo Sugeno.

En la presente investigación se tiene el interés de trabajar principalmente con el tipo de FLC Mamdani. Al considerar que el FLC tiene  $n$  entradas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $m$  salidas  $y_1, y_2, \dots, y_m$ ; estas  $n \times m$  variables definen la base de conocimiento para el FLC con sus reglas *IF-THEN* de la forma

$$\begin{aligned}
 & \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^{l_1} \text{ AND } x_2 \text{ is } A_2^{l_2} \dots \text{ AND } x_N \text{ is } A_n^{l_n} \\
 & \text{THEN } y_i \text{ is } B_i^{l_1 l_2 \dots l_n}; \quad i = 1, 2, \dots, m,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

con  $x_k \in \mathbb{U}_k \subset \mathbb{R}$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$  donde  $\mathbb{U}_k$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$  son los universos del discurso para cada  $x_k$ ;  $y_i \in \mathbb{U}_{O_i} \subset \mathbb{R}$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ , donde  $\mathbb{U}_{O_i}$  son los universos del discurso para cada salida  $y_i$ .  $A_j^{l_k} \subset \mathbb{U}_k$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, N_k$ , son los conjuntos difusos para cada  $x_k$ ;  $B_i^{l_1 l_2 \dots l_n} \subset \mathbb{U}_{O_i}$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$  son los conjuntos difusos para cada salida  $y_i$ . Cuando se activa la  $l_j$  regla difusa, la función  $\mu_{A_j}^{l_k}(x_k)$ , que se llama función de pertenencia (MF, de las siglas del inglés *Membership Function*) de  $x_k$  en  $A_j$ , asigna un valor al grado de membresía de  $x_k$  en el conjunto difuso  $A_j$ ; y finalmente, la variable de salida  $y$  tiene un  $M_O$  número de MFs  $\mu_{B_i}^{l_1 l_2 \dots l_n}(\bar{y})$  que están relacionadas con cada consecuente de la base de reglas,  $\mu_{B_i}^{l_1 l_2 \dots l_n}(\bar{y})$ , donde  $\bar{y}$  es la salida difusa. El número total de reglas difusas se calcula como  $N = N_1 N_2 \dots N_n$ , esto es, la multiplicación del número de MFs para cada entrada.

## 2.5.2 Tipos de funciones de membresía

Un conjunto difuso se caracteriza principalmente por sus MFs. Las MFs son esenciales, ya que la interpretación que se hace de la base de reglas difusas se basa principalmente en la forma como están definidas. Las MFs afectan directamente la precisión del modelado y el rendimiento del sistema al convertir la entrada nítida proporcionada a la máquina de inferencia difusa, y esto mismo ocurre en el momento de la defusificación. Por lo tanto, su definición dentro del universo de discurso es una tarea decisiva en la implementación de un sistema difuso. La función de membresía difusa es una forma gráfica de visualizar el grado de membresía de cualquier valor en un conjunto difuso dado. Las MFs pueden tener cualquier forma regular o irregular, sin embargo lo más recomendable es que se puedan expresar matemáticamente en términos de parámetros. Las MFs con una forma muy irregular no se pueden parametrizar fácilmente, y el cálculo para su aplicación las hacen inviables. Por lo general se utilizan MFs regulares conocidas ya parametrizadas. Algunas MFs comunes y ampliamente utilizadas se muestran a continuación (Siddique, 2014; Wang, 1997).

- a) MF tipo *singleton* (o impulsiva). Asigna el valor de membresía 1 a un único valor del universo de discurso de  $x$  y 0 al resto. Está representado por la función pulso, como se muestra en la figura 2.10. Casi siempre su aplicación es como MFs del conjunto de las salidas para expeditar el cálculo de la defusificación.

Definido matemáticamente como



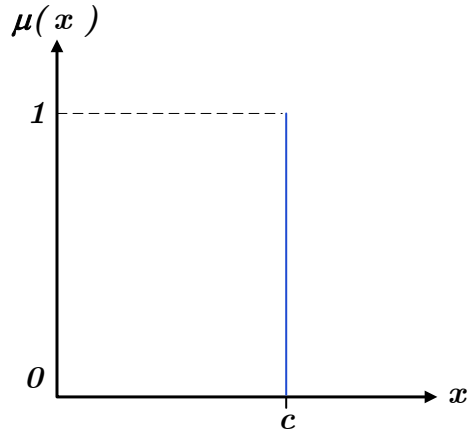


Figura 2.10: MF tipo *singleton*

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x = c \\ 0, & x \neq c \end{cases} \quad (2.15)$$

- b) MF tipo triangular. Ésta es una de las MF más ampliamente utilizadas en controladores difusos. El triángulo con el que se fusifica la entrada se puede definir mediante los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ , donde  $a$  y  $c$  definen la base y  $b$  la altura del triángulo. Su gráfica se puede apreciar en la figura 2.11.

Su definición matemática es

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases} \quad (2.16)$$

- c) MF tipo trapezoidal. Esta también es una de las MF más utilizadas para control difusos. Esta MF se define mediante los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , como se visualiza en la figura 2.12.

Matemáticamente se define como

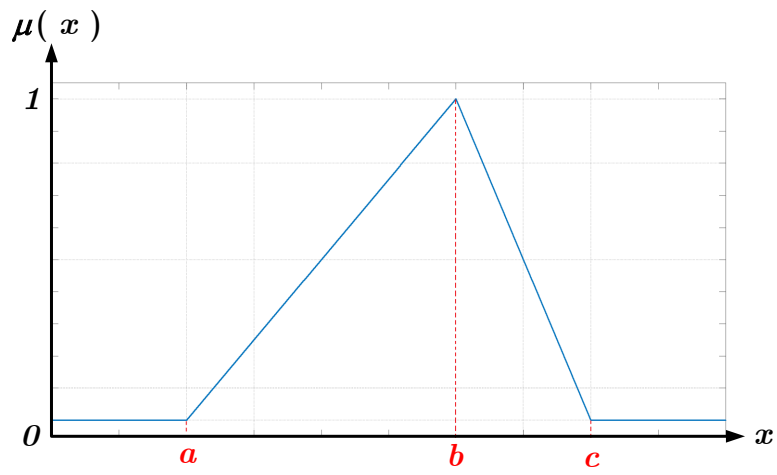


Figura 2.11: MF tipo triangular

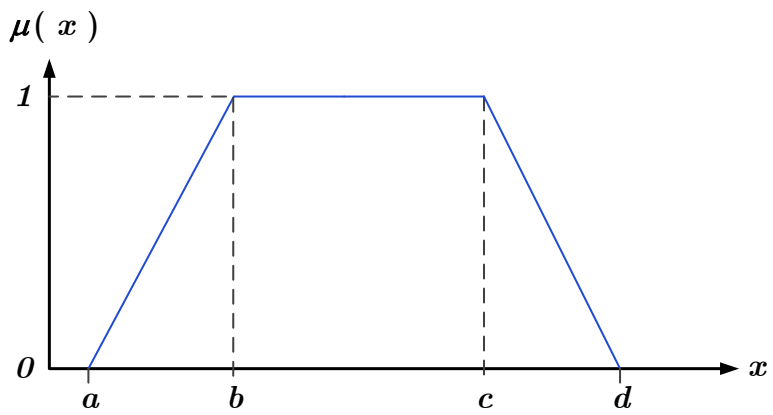


Figura 2.12: MF tipo trapezoidal.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases} \quad (2.17)$$

- d) MF tipo gaussiana. En esta función,  $m$  representa el centro de la curva y  $\sigma$  su dispersión, como se puede ver en la figura 2.13. Esta MF provee una manera más natural de representar la distribución de datos a la hora de hacer la fusificación o defusificación, pero debido a la complejidad matemática para implementarla, sobretodo en sistemas *embedded*, no se usa tanto.

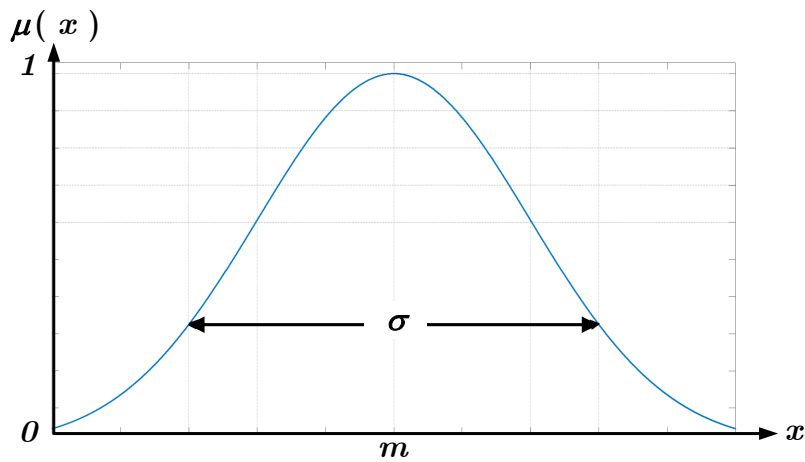


Figura 2.13: MF tipo gaussiana.

Matemáticamente se define como

$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad (2.18)$$

- e) MF tipo campana generalizada. También se le llama MF de Cauchy. Una MF de este tipo se especifica mediante tres parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y se puede definir de acuerdo a la gráfica mostrada en la figura 2.14. Se llama generalizada porque al cambiar los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ , se pueden producir diferentes familias de MFs.

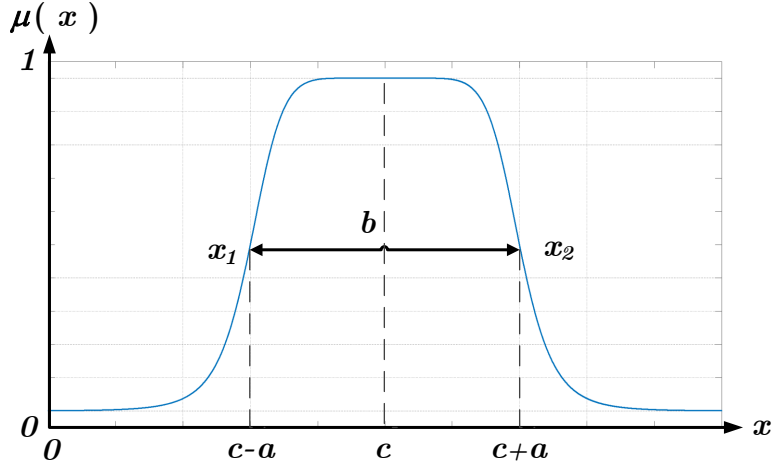


Figura 2.14: MF tipo campana generalizada.

Su ecuación matemática es

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}} \quad (2.19)$$

### 2.5.3 Defusificación

Para el bloque de defusificación que convierte la salida difusa  $y$  en un valor nítido existen varios métodos reportados en la literatura (Talon and Curt, 2017, pág. 160–174), de éstos los más utilizados en la implementación de FLCs Mamdani son el Centro de gravedad (COG, de las siglas del inglés *Center Of Gravity*) y el centro promedio (CA, de las siglas del inglés *Center Average*), y de esos dos, el CA es de particular interés, ya que la mayoría de las implementaciones de FLCs usan *singletons* como conjuntos difusos de salida. Con un defusificador CA y una inferencia de mínimos, cada salida del FLC Mamdani se calcula como

$$y = \frac{\sum_{l_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{N_n} \bar{y}^{l_1 \cdots l_n} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}^{l_i}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{N_n} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}^{l_i}(x_i)}, \quad (2.20)$$

y si se usa el método de inferencia del producto, cada salida es igual a

$$y = \frac{\sum_{l_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{N_n} \bar{y}^{l_1 \cdots l_n} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}^{l_i}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{N_n} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}^{l_i}(x_i)}. \quad (2.21)$$

Además, si los conjuntos difusos de salida se definen como *singletons*,  $\bar{y}$  es directamente el valor del *singleton* correspondiente, sin la necesidad de calcular los centros de la salida inferenciada.

## 2.6 Redes neuronales artificiales adaptables

Varios tipos de redes neuronales se pueden usar en sistemas de control: la red neuronal multicapa entrenada con el algoritmo de propagación hacia atrás comúnmente atribuido a Rumelhart et al., las redes neuronales recurrentes tales como la de Hopfield, el controlador del modelo de articulación cerebral (CMAC) modelo de Albus, la memoria de contenido direccionable de Kohonen, y la red nodal gaussiana de Moody y Darken, (Rovithakis and Christodoulou, 2000). La elección de la red neuronal a utilizar y el procedimiento de entrenamiento a invocar varían en función de la aplicación.

El tipo de red neuronal más comúnmente utilizado en los sistemas de control es la red neuronal del tipo multicapa hacia adelante o *feedforward*, en la que no se realimenta información durante su operación. Sin embargo, hay información de realimentación durante el entrenamiento de la red. Esto es generalmente un proceso lento y que emplea muchos recursos de procesamiento, porque el algoritmo por lo general tarda mucho tiempo en converger. Normalmente se utilizan más a menudo los métodos de aprendizaje supervisado, donde la red neuronal se entrena para aprender los patrones de entrada-salida que se le presentan. Muy a menudo algunas versiones del algoritmo de retropropagación (BP, por sus siglas en inglés de *Back Propagation*) se utilizan para ajustar los pesos de las redes neuronales durante su entrenamiento. Esto es lo que lo vuelve un proceso lento y muy consumidor de tiempo, ya que este algoritmo suele tardar mucho tiempo en converger. También se utilizan funciones gaussianas de base radial, o bien en el caso de redes neuronales recurrentes de alto orden, RHONN, se usan otros algoritmos como el de filtro de Kalman para incrementar su rapidez de respuesta como en Garcia-Hernandez et al. (2013), o el así llamado filtrado del error, que no

es otra cosa más que un algoritmo de aprendizaje usando modos deslizantes (Vázquez et al., 2018).

### 2.6.1 Redes neuronales adaptables de una sola capa oculta y el teorema de aproximación universal de funciones

De acuerdo a los trabajos consultados (Lewis et al., 1996; Huang et al., 2008; Puga-Guzmán et al., 2014; Zhou et al., 2019; He et al., 2017), el término de red neuronal artificial adaptable surge cuando se propone una red neuronal, ya sea para control directo de un sistema, o bien para estimar la dinámica o partes de ésta que se usan en la ley de control. En todos esos casos la ecuación de aprendizaje que actualiza las sinápsis o pesos de la red se obtiene por medio del análisis de estabilidad del sistema de lazo cerrado, ya sea aplicando el segundo método de Lyapunov, LaSalle o el lema de Barbălat, o metodos derivados como el de *back-stepping*, de esta manera no hay un algoritmo genérico que se pueda aplicar *per se* para las leyes de aprendizaje que definen a la red neuronal.

Para este trabajo el interés radica en usar una red neuronal adaptable que sea primero, capaz de aproximar con un error pequeño a la dinámica deseada del robot a controlar, y segundo, que aparte pueda considerar dentro de esa aproximación cambios en los parámetros de dicha dinámica, tales como variaciones en la fricción viscosa (que depende de muchos factores desde el climático hasta del tiempo de uso del robot), así como dinámicas no modeladas, que en el caso de este trabajo se considera dentro de este rubro a la fricción de Coulomb. De aquí que los estudios teóricos de varios grupos de investigación (Cybenko, 1989; Funahashi, 1989) que han demostrado que las redes neuronales multicapa con una sola capa oculta pueden aproximar cualquier función continua  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  uniformemente sobre un dominio compacto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , simplemente ajustando los pesos sinápticos, tal que se minimice la función del error entre la salida de la red neuronal y la salida del mapeo desconocido, sea de la más vital importancia. El diagrama de bloques de este tipo de red neuronal que posee una sola capa oculta se muestra en la figura 2.15. La ecuación que modela esta red neuronal se da en (2.22):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma} \left( \mathbf{V}^T \mathbf{x}_{ext} \right) + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \forall \mathbf{x}_{ext} \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{x}_{ext} \in \mathbb{R}^{N+1}$  es el vector de señales de entrada a la red neuronal,  $N + 1$

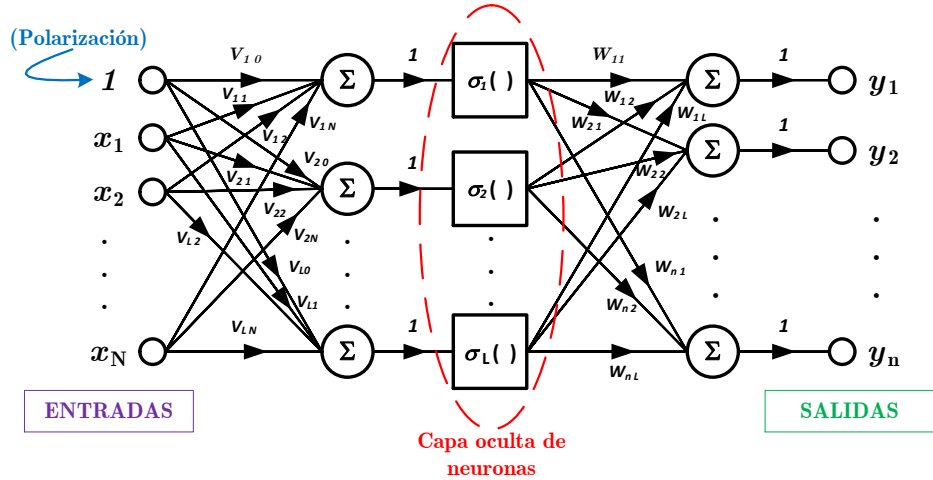


Figura 2.15: Diagrama general de una red neuronal multicapa con una sola capa oculta.

es el número de señales de entrada a la red, incrementada en 1 respecto de la variable de entrada  $\mathbf{x}$ , porque se considera la señal de polarización (mejor conocida como *bias* que es su equivalente en inglés) como una entrada extra (tal como se indica en la figura 2.15),  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times L}$  es la matriz de pesos óptimos de entrada a la red,  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{L \times n}$  es la matriz de pesos óptimos de salida de la red,  $L$  es el número de neuronas en la capa oculta,  $\sigma(\cdot) \in \mathbb{R}^L$  es la función de activación en la capa oculta, y  $\epsilon \in \mathbb{R}^n$  es el error de aproximación donde

$$|\epsilon_i| \leq \varphi \quad (2.23)$$

es válido  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , con  $\varphi > 0$ .

Finalmente, Cotter (1990) extendió aún más la demostración de la propiedad universal de las redes neuronales hasta para funciones  $L^P(I^m)$ .

## 2.6.2 Funciones de activación

Algunas de las funciones de activación más utilizadas en los distintos modelos de redes neuronales son las mostradas en la figura 2.16. Cabe resaltar que

las principales funciones de activación utilizadas en aplicaciones de control, la  $\tanh(\cdot)$  y la sigmoide representan funciones analíticas que pueden ser expandidas correctamente por medio de series de Taylor.

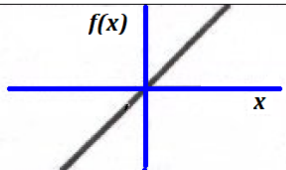
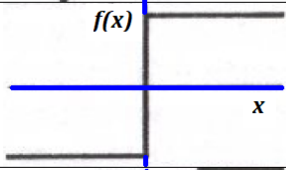
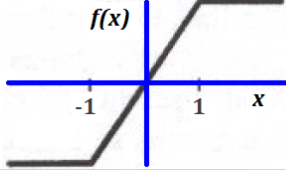
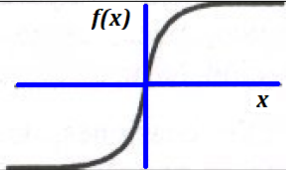
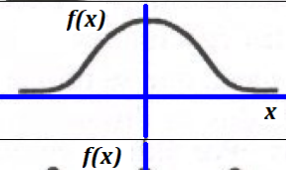
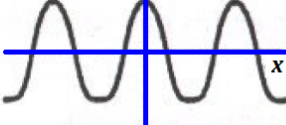
	<b>Función</b>	<b>Rango</b>	<b>Gráfica</b>
<b>Lineal</b>	$y = x$	$[-\infty, \infty]$	
<b>Signo</b>	$y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$[0, 1]$ $[-1, 1]$	
<b>Lineal a tramos</b>	$y = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 1 \\ x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -1, & \text{si } x < -1 \end{cases}$	$[-1, 1]$	
<b>Sigmoide</b>	$y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ $y = \tanh(x)$	$[0, 1]$ $[-1, 1]$	
<b>Gaussiana</b>	$y = Ae^{-Bx^2}$	$[0, 1]$	
<b>Sinusoidal</b>	$y = A \sin(wx + \varphi)$	$[-1, 1]$	

Figura 2.16: Algunas funciones de activación usadas en redes neuronales.



## 2.7 Corolarios del teorema de LaSalle-Yoshizawa para sistemas discontinuos

Dado que el sistema de control propuesto posee discontinuidades en el origen debido a que en su ley de control se tiene una función signo, no se pueden aplicar directamente los teoremas de Lyapunov, LaSalle o el lema de Barbălat para el análisis de su estabilidad. En la referencia [Fischer et al. \(2013\)](#) se demuestra un corolario para este caso, adaptando el teorema de LaSalle-Yoshizawa para sistemas discontinuos. Este corolario también extiende el lema de Barbălat para poderse aplicar a este caso de discontinuidades a través de inclusiones diferenciales con soluciones de Filippov, tal que no exista como tal el requerimiento de que el sistema sea Lipschitz en la región de interés.

**Corolario 2** Para el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad (2.24)$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  es el vector de estados, y si se supone que  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es Lebesgue medible y esencialmente acotada localmente, uniformemente en  $t$ , y si se considera que  $\mathcal{D}$  es un conjunto abierto y conectado que contiene a  $\mathbf{x} = 0$ , y  $U : \mathcal{D} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  también se supone que es regular y localmente Lipschitz tal que

$$W_1(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{x}, t) \leq W_2(\mathbf{x}), \quad (2.25)$$

$$\dot{U}(\mathbf{x}, t) \leq -W_3(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

$\forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$  donde  $W_1(\mathbf{x})$  y  $W_2(\mathbf{x})$  son funciones continuas definidas positivas, y  $W_3(\mathbf{x})$  es una función continua semidefinida positiva  $\mathcal{D}$ . Si se escoge  $r > 0$  y  $c > 0$  tal que  $B_r \subset \mathcal{D}$  y  $c < \min_{\|\mathbf{x}\|=r} W_1(\mathbf{x})$ . Entonces todas las soluciones de Filippov de (2.24) tal que  $\mathbf{x}(t_0) \in \{\mathbf{x} \in B_r | W_2(\mathbf{x}) \leq c\}$  están acotadas y satisfacen

$$W_3(\mathbf{x}(t)) \rightarrow 0 \text{ conforme } t \rightarrow \infty \quad (2.27)$$

En este caso, si se supone que  $\mathbf{x}(t)$  es una solución Filippov de (2.24),  $\dot{U}(\mathbf{x}, t)$  es la derivada en tiempo de la función regular  $U(\mathbf{x}, t)$  usando el

gradiente de Clarke generalizado calculado como

$$\dot{\tilde{U}}(\mathbf{x}, t) = \bigcap_{\xi \in \partial U(\mathbf{x}, t)} \xi^T \begin{pmatrix} K[f](\mathbf{x}(t), t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

donde  $K[f](\mathbf{x}(t), t)$  es un mapeo superior semicontinuo, no vacío, compacto y convexo en  $\mathcal{D}$  definido por

$$K[f](\mathbf{x}(t), t) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{co}} f(B(\mathbf{x}(t), \delta) \setminus N, t) \quad (2.29)$$

con  $\bigcap_{\delta > 0}$  definida como la intersección de  $N$  conjuntos de medida Lebesgue cero,  $\overline{\text{co}}$  la cerradura convexa, y

$$B(\mathbf{x}(t), \delta) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}(t) - v\| < \delta\} \quad (2.30)$$

Por lo tanto, la función de Lyapunov  $U(\mathbf{x}, t)$  que se utilizará para aplicar este corolario del Teorema de Lasalle-Yoshizawa, que establece que el origen es el atractor dentro del conjunto invariante que lo incluye, debe ser tanto decreciente como radialmente desacotada, tal como se indica en (2.25) y su derivada en el tiempo debe poder ser acotada por una función semidefinida negativa como en (2.26).

## 2.8 Descripción del robot manipulador de dos grados de libertad

Para evaluar mediante simulación y de forma experimental el desempeño del algoritmo de control propuesto se utilizó un robot manipulador de dos grados de libertad, construido en el CICESE (Reyes and Kelly, 1997) – (Reyes and Kelly, 2001) y ubicado en el Instituto Tecnológico de La Laguna, que se mueve en el plano vertical, como se muestra en la Fig. 2.17. Este robot consta de dos eslabones rígidos; se utilizan servos de alto par de fuerzas de accionamiento directo sin escobillas para operar las articulaciones sin transmisión reductora. Este tipo de articulaciones presenta una reducción en el retroceso y una fricción significativamente menor respecto de los actuadores que usan engranajes. El par máximo que pueden aplicar estos actuadores, de acuerdo al fabricante, es 150 [N-m] para la articulación 1 y 15 [N-m] para la articulación 2.

Tabla 2.1: Valores de los parámetros para el robot de 2-DOF

Parámetro	Valor	Unidades
$l_1$	0.450	m
$l_2$	0.450	m
$l_{c1}$	0.091	m
$l_{c2}$	0.048	m
$m_1$	23.902	Kg
$m_2$	3.880	Kg
$I_1$	1.266	Kg m <sup>2</sup>
$I_2$	0.093	Kg m <sup>2</sup>
$fv_1$	2.288	N-m s
$fv_2$	0.175	N-m s
$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>

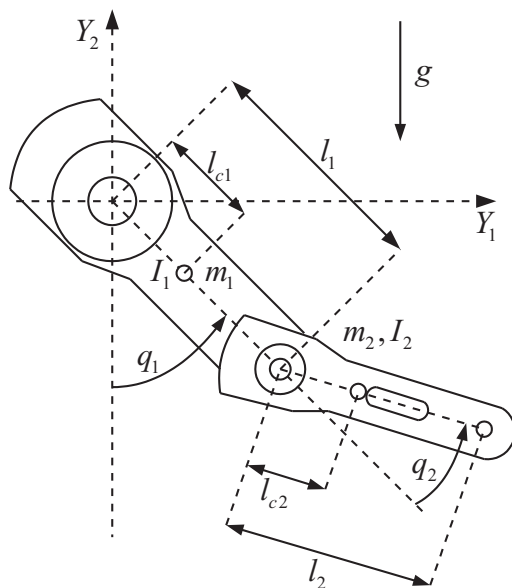


Figura 2.17: Diagrama del robot manipulador de 2-DOF

Los valores de los parámetros para este robot se muestran en la Tabla 2.1  
El modelo dinámico del robot mostrado en la Fig. 2.17 se puede expresar, de acuerdo a (2.1), como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}}_{M(q)} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}}_{C(q, \dot{q})} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}}_{g(q)} + \underbrace{\begin{bmatrix} f v_1 \\ f v_2 \end{bmatrix}}_{F_v} \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

donde

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_1 + I_2, \\ M_{12}(q) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\ M_{21}(q) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\ M_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ C_{11}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, \\ C_{12}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \\ C_{21}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1, \\ C_{22}(q, \dot{q}) &= 0, \\ g_1(q) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \\ g_2(q) &= m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \end{aligned}$$

En este caso, los términos de fricción de Coulomb no fueron incluidos dentro del modelado y se considerarán como perturbaciones.

Cualquier algoritmo de control que se vaya a implementar se programa en ANSI C en la plataforma WinMech Lab corriendo en Windows XP de tiempo real (presentada en Campa et al. (2004)), que con el robot y sus *drivers* conforma toda una plataforma de pruebas experimentales. El WinMech Lab corre en una PC desktop con microprocesador Pentium IV de 1.8 GHz, utilizando una tarjeta adquisitora MultiQ-PCI de Quanser Consulting Inc, con un periodo de muestreo de 2.5 ms.

# Capítulo 3

## Control difuso sectorial con precompensación

### 3.1 Controlador difuso sectorial y sus propiedades

Un controlador difuso sectorial (SFC) es una clase especial de controlador difuso que forma mapeo estático no lineal de entrada–salida que relaciona dos entradas con una salida, con propiedades sectoriales útiles que permiten el análisis de su estabilidad. Ya que hay dos entradas  $x_1, x_2$  y una salida  $y$ , estas tres variables definen la base de conocimiento para el SFC con sus reglas *IF-THEN* (SI-ENTONCES en español) siendo de la forma,

$$\text{IF } x_1 \text{ is } A_1^{l_1} \text{ AND } x_2 \text{ is } A_2^{l_2} \text{ THEN } y \text{ is } B^{l_1 l_2}, \quad (3.1)$$

con  $x_1 \in \mathbb{U}_1 \subset \mathbb{R}$  y  $x_2 \in \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$  son los universos de discurso de  $x_1, x_2$ , respectivamente; y, tomados en tándem, forman un universo bidimensional de discurso para el vector de entrada  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]$ :  $\mathbf{x} \in \mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{R}^2$ ;  $y \in \mathbb{U}_O \subset \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{U}_O$  es el universo de discurso de la salida  $y$ .  $A_1^{l_1} \subset \mathbb{U}_1$ ,  $A_2^{l_2} \subset \mathbb{U}_2$ , son los conjuntos difusos para  $x_1, x_2$ , respectivamente; mientras que,  $B^{l_1 l_2} \subset \mathbb{U}_O$  son los conjuntos difusos para  $y$ . Cuando una regla difusa  $l_1, l_2$  se dispara, la función función de membresía  $\mu_{A_1}^{l_1}(x_1)$  de  $x_1$  en  $A_1$ , asigna un valor al grado de membresía de  $x_1$  en el conjunto difuso  $A_1$ ; de la misma manera, la MF  $\mu_{A_2}^{l_2}(x_2)$  asigna un valor al grado de membresía de  $x_2$  en el conjunto difuso  $A_2$ ; y finalmente, la variable de salida,  $y$  tiene un número impar  $M_O$  de MFs  $\mu_{B^i}(\bar{y})$  relacionado con cada consecuente de la base

de reglas,  $\mu_{B^{l_1 l_2}}(\bar{y}) \in \{\mu_B^{-\frac{M_O-1}{2}}(\bar{y}), \mu_B^{-\frac{M_O-1}{2}-1}(\bar{y}) \dots, \mu_B^{\frac{M_O-1}{2}}(\bar{y})\}$ . En este caso, para que un controlador difuso sea un SFC debe tener un número impar de conjuntos difusos de entrada y salida, es decir  $M_1$ ,  $M_2$ , y  $M_O$  deben ser impares (Calcev, 1998), por lo tanto  $l_i = \{-\frac{M_i-1}{2}, -\frac{M_i-1}{2}+1, \dots, \frac{M_i-1}{2}\}$ ,  $i = 1, 2, O$  (donde  $O$  es el subíndice usado para referirse a la salida). El número total de reglas difusas se calcula como  $M = M_1 M_2$ , la multiplicación del número de MFs para cada entrada. Un ejemplo de la base de reglas difusas resumida se muestra en su tabla de búsqueda en la Tabla 3.1.

Un controlador difuso debe definirse como sigue para ser un SFC (Calcev, 1998; Santibanez et al., 2004, 2005): Una salida como mapeo difuso de dos entradas. Todos las MFs tienen que ser simétricas con respecto a cero, con un número impar de conjuntos difusos de entrada y salida. Se debe definir la MF de los conjuntos difusos de entrada adyacentes tal que tengan grados de pertenencia complementarios para cada valor de entrada. La definición de conjuntos difusos para la MF de entrada debe de ser convexa en el sentido dado por Calcev (1998), y alrededor de cero no se pueden utilizar MFs trapezoidales o similares, solamente funciones que tengan un máximo aislado, ya que para entradas nulas debe haber un consecuente nulo. Los consecuentes de la tabla de reglas difusas aumentan de izquierda a derecha y de arriba a abajo, con una salida nula para entradas nulas lo que crea una antisimetría diagonal alrededor del centro de la tabla de reglas difusas, como se puede ejemplificar y ver fácilmente en la Tabla 3.1. La salida es calculada por el defusificador centro promedio, aplicando el método de inferencia de producto o mínimo. Debido a la condición de  $|\phi_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) - \phi_i(0, \dot{\tilde{q}}_i)| \neq 0$  establecida en (3.58) que se encuentra dentro del desarrollo del Lema 3 en la siguiente sección, ninguna columna o fila adyacente a una fila o columna de entrada cero puede tener los mismos consecuentes. Con todas estas especificaciones y lineamientos, la salida del SFC se calcula como el mapeo estático no lineal de entrada-salida que relaciona dos entradas con una salida,  $\phi(x_1, x_2)$ , como sigue

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{\sum_{l_1=-\frac{M_1-1}{2}}^{\frac{M_1-1}{2}} \sum_{l_2=-\frac{M_2-1}{2}}^{\frac{M_2-1}{2}} \mu_{A_1}^{l_1}(x_1) \mu_{A_2}^{l_2}(x_2) \bar{y}^{l_1, l_2}}{\sum_{l_1=-\frac{M_1-1}{2}}^{\frac{M_1-1}{2}} \sum_{l_2=-\frac{M_2-1}{2}}^{\frac{M_2-1}{2}} \mu_{A_1}^{l_1}(x_1) \mu_{A_2}^{l_2}(x_2)}, \quad (3.2)$$

si se selecciona el método de inferencia de producto, y

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{\sum_{l_1=-\frac{M_1-1}{2}}^{\frac{M_1-1}{2}} \sum_{l_2=-\frac{M_2-1}{2}}^{\frac{M_2-1}{2}} \left( \mu_{A_1}^{l_1}(x_1) \cap \mu_{A_2}^{l_2}(x_2) \right) \bar{y}^{l_1, l_2}}{\sum_{l_1=-\frac{M_1-1}{2}}^{\frac{M_1-1}{2}} \sum_{l_2=-\frac{M_2-1}{2}}^{\frac{M_2-1}{2}} \mu_{A_1}^{l_1}(x_1) \cap \mu_{A_2}^{l_2}(x_2)}, \quad (3.3)$$

si se utiliza el método de inferencia del mínimo.

Cuando un SFC se define como se describe en los párrafos anteriores, tendrá las siguientes propiedades sectoriales que se enumeran a continuación. Todas estas propiedades ya han sido completamente demostradas en [Calcev \(1998\)](#); [Santibanez et al. \(2004\)](#).

- Propiedad 1,  $\phi(0, 0) = 0$ , (salida nula para entradas nulas);
- Propiedad 2,  $\phi_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) = -\phi_i(-\tilde{q}_i, -\dot{\tilde{q}}_i)$ , (Simétrico alrededor del origen);
- Propiedad 3, existen  $\zeta_i, \rho_i > 0$ , tal que

$$0 < \tilde{q}_i \left[ \phi_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) - \phi_i(0, \dot{\tilde{q}}_i) \right] \leq \rho_i \tilde{q}_i^2, \quad (3.4)$$

$$0 < \dot{\tilde{q}}_i \left[ \phi_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) - \phi_i(\tilde{q}_i, 0) \right] \leq \zeta_i \dot{\tilde{q}}_i^2, \quad (3.5)$$

lo que significa que tanto en (3.4) como (3.5), ambos términos dentro de las desigualdades son positivos y están acotados por la cuadrática de  $\tilde{q}_i$  y  $\dot{\tilde{q}}_i$ , respectivamente.

- Propiedad 4,  $\phi_i(\tilde{q}_i, 0) = 0 \Rightarrow \tilde{q}_i = 0$ , (corolario de la Propiedad 1);
- Propiedad 5,  $\left| \phi_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) \right| \leq \delta := \max_{l_1, l_2} \bar{y}^{l_1, l_2}$ , (el SFC está acotado por el valor de salida máximo);
- Propiedad 6,  $\bar{y}^{k, 0} \leq |\phi_i(\tilde{q}_i, 0)| \leq \bar{y}^{k+1, 0}$ ; (comportamiento sectorial de  $(\tilde{q}_i, 0)$ ) para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , donde  $\bar{y}^{l_1, l_2}, \bar{y}^{k, 0}, \bar{y}^{k+1, 0}$  representan los centros de las MFs correspondientes de salida que se definen durante la etapa de diseño.

Para el resto de este trabajo se han seleccionado, sin pérdida de generalidad, las siguientes especificaciones para definir el SFC en estudio:

- Consecuentes *singleton*, de modo que los centros de las MFs de salida correspondientes no necesitan ser calculados, tal que se disminuye el tiempo de cálculo y la complejidad de computación de este controlador. Esto nos permitirá implementarlo en cualquier plataforma de tiempo real de gama baja,
- inferencia producto, lo que convertirá a (3.2) en la combinación convexa de 3.6) tal como fue explotada previamente en Santibanez et al. (2004, 2005), y
- un defusificador centro promedio, que es un requisito previo para que el controlador sea un SFC.

Aplicando estas especificaciones a (3.2), y considerando también los  $n \times 1$  elementos de  $\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  en (3.8), haciendo que  $x_1 = \tilde{q}_n, x_2 = \dot{\tilde{q}}_n$  en (3.2), se tiene que los elementos de este vector se pueden calcular como

$$\phi_n(\tilde{q}_n, \dot{\tilde{q}}_n) = \sum_{l_1 = -\frac{N_1-1}{2}}^{\frac{N_1-1}{2}} \sum_{l_2 = -\frac{N_2-1}{2}}^{\frac{N_2-1}{2}} \mu_{A_{1n}}^{l_1}(\tilde{q}_n) \mu_{A_{2n}}^{l_2}(\dot{\tilde{q}}_n) \bar{y}^{l_1, l_2}, \quad (3.6)$$

donde  $\mu_{A_{1n}}^{l_1}(\tilde{q}_n)$  representa la MF que asigna un valor al grado de membresía de  $\tilde{q}_n$  en el conjunto difuso  $A_{1n}$ ;  $\mu_{A_{2n}}^{l_2}(\dot{\tilde{q}}_n)$  representa la MF, que asigna un valor al grado de membresía de  $\dot{\tilde{q}}_n$  en el conjunto difuso  $A_{2n}$ ; y,  $\bar{y}^{l_1, l_2}$  es el consecuente de la regla difusa que se ha disparado de acuerdo con los valores de  $\tilde{q}_n, \dot{\tilde{q}}_n$ .

## 3.2 Controlador difuso sectorial con precompensación

El objetivo es encontrar un controlador difuso sectorial para el seguimiento de trayectorias y asegurar la estabilidad asintótica uniforme global del sistema de lazo cerrado no autónomo, garantizando que los errores de posición angular tiendan asintóticamente a cero. Con este fin, se propone el controlador difuso sectorial con precompensación (*feedforward*), que tiene una configuración muy similar al control PD con precompensación (*feedforward*), como se describe en Kelly et al. (2005), excepto que, en esta propuesta, el control PD



se reemplaza por un SFC, como se muestra en la figura 3.1. La ley de control para este nuevo esquema está dada por

$$\tau = \Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) + M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q_d) + F_v\dot{q}_d \quad (3.7)$$

donde  $\Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$  es un vector de dimensión  $n \times 1$ , cuyos elementos  $\phi_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i)$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , son las mapeos reales de entrada-salida de los  $n$  SFC,

$$\Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\tilde{q}_1, \dot{\tilde{q}}_1) \\ \phi_2(\tilde{q}_2, \dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \phi_n(\tilde{q}_n, \dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

En Villalobos-Chin et al. (2020) se demuestra que un SFC es en realidad un controlador PD, pero, en este caso, sus ganancias se convierten en un equivalente difuso no lineal de las ganancias  $K_P$  y  $K_V$  de un controlador PD normal vía el cálculo de la función  $\Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ . Esto proporciona al control PD original una precompensación con las propiedades de un controlador difuso, principalmente la tolerancia a ligeras desviaciones paramétricas.

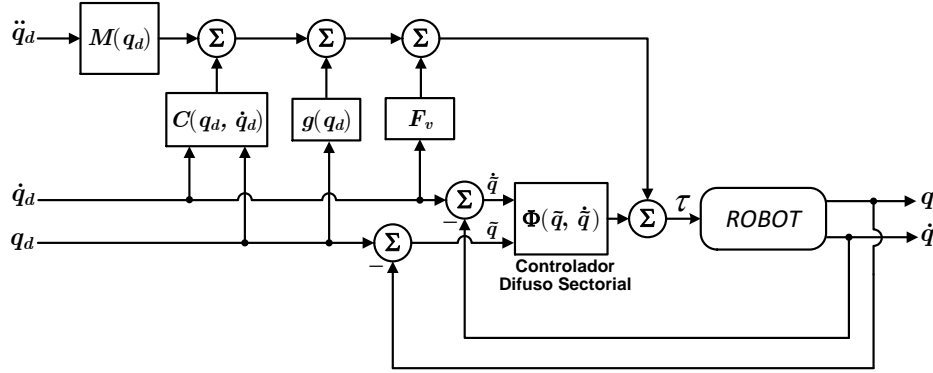


Figura 3.1: Propuesta de control difuso sectorial con precompensación.

### 3.3 Prueba de estabilidad del SFC con precompensación

#### Ecuación de lazo cerrado del SFC con precompensación

El lazo cerrado del sistema de control difuso con precompensación se obtiene de la siguiente manera:

La ley de control definida en (3.7) puede escribirse como

$$\tau = \Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) + \tau_d \quad (3.9)$$

con

$$\tau_d = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q_d) + f_v\dot{q}_d \quad (3.10)$$

Dada la ecuación de la dinámica de un robot,

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f_v\dot{q} \quad (3.11)$$

restando (3.11) de (3.10), se tiene

$$\tau_d - \tau = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q_d) + f_v\dot{q}_d - M(q)\ddot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - f_v\dot{q}$$

$$\tau_d - \tau = M(q)\ddot{\tilde{q}} + C(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}} + f_v\dot{\tilde{q}} + h(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \quad (3.12)$$

donde  $h(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$  fué definida en (2.8).

Cerrando el lazo, sustituyendo la ley de control (3.9) en la ecuación de la dinámica del robot (3.11), se tiene que

$$\Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) + \tau_d = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f_v\dot{q} \quad (3.13)$$

o, equivalentemente,

$$0 = \Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) + \tau_d - M(q)\ddot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - f_v\dot{q} = \Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) + \tau_d - \tau \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.12) en (3.14) se llega a:

$$0 = \Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) + M(q)\ddot{\tilde{q}} + C(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}} + f_v\dot{\tilde{q}} + h(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \quad (3.15)$$

que resulta en,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [-\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{f}_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

### 3.3.1 Puntos de equilibrio del SFC con precompensación

Si  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$  y  $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [-\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0}) - \mathbf{C}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{q}})\mathbf{0} - \mathbf{f}_v\mathbf{0} - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})] \end{bmatrix}$$

entonces

$$0 = \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0}) + \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})$$

Esta ecuación tiene un equilibrio en el origen ya que si  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$ , por propiedades de la dinámica residual (Kelly and Santibáñez, 2003),

$$\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

y por la propiedad 1 de  $\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ ,

$$\Phi(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

por lo tanto,

$$0 = \Phi(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + \mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} \quad (3.17)$$

El origen es un equilibrio del sistema en lazo cerrado, que de hecho se convierte en el único equilibrio al cumplir las condiciones de estabilidad de Lyapunov que se originan para  $\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  respecto de  $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ , como se verá más adelante.

### 3.3.2 Función candidata de Lyapunov

Para analizar la estabilidad del control difuso sectorial con precompensación, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i + \gamma \mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

la cual puede ser acotada por debajo para comprobar que es una función definida positiva y radialmente desacotada y menguante. Acotando por debajo cada término de  $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t)$  se tiene

$$\frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (3.18)$$

$$\gamma \mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \geq -\gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \|\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (3.19)$$

Para el término  $\sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i$  se desarrollaron los siguientes dos lemas:

**Lema 1.** *Considérese una vecindad  $\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \epsilon\}$  para algún  $\epsilon > 0$ . Sea  $f(x)$  una función  $C'$ , diferenciable al menos una vez, de  $x$  estrictamente creciente (sobre  $\alpha$ ) que satisface  $f(0) = 0$ . Entonces, existe  $\beta > 0 \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\int_0^x f(\tau) d\tau \geq \beta \tanh^2(x)$$

se mantiene  $\forall x \in \alpha$ , con  $\beta < \frac{1}{6} \inf\{f'(x)\}$

*Prueba del Lema 1.* Definiendo la función

$$g(x) := \int_0^x f(\tau) d\tau - \beta \tanh^2(x) \quad (3.20)$$

diferenciando a (3.20), se obtiene

$$\frac{dg}{dx} = f(x) - 2\beta \operatorname{sech}^2(x) \tanh(x) \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2g}{dx^2} = f'(x) + \operatorname{sech}^2(x) [4\beta \tanh^2(x) - 2\beta \operatorname{sech}^2(x)] \quad (3.22)$$

Es posible verificar que

$$f(0) - 2\beta \operatorname{sech}^2(0) \tanh(0) = 0$$

por lo que  $g(x)$  tiene un máximo en  $x = 0$ .

Enseguida, para que (3.22) sea positiva  $\forall x \in \alpha$  se debe tener que

$$\frac{\inf \{f'(x)\}}{\beta} > -\operatorname{sech}^2(x) [4 \tanh^2(x) - 2\operatorname{sech}^2(x)] \quad (3.23)$$

dado que

$$\sup_{x \in \alpha} \left\{ -\operatorname{sech}^2(x) [4 \tanh^2(x) - 2\operatorname{sech}^2(x)] \right\} \leq 4$$

se puede establecer que (3.23) se verificará si

$$\inf \{f'(x)\} > 4\beta$$

Consecuentemente,  $g(x)$  es convexo y tiene un mínimo local estricto en  $x = 0$ . Ya que  $g(0) = 0 \forall x \in \alpha$ , esto a su vez implica que

$$\int_0^x f(\tau) d\tau - \beta \tanh^2(x) \geq 0,$$

o en otras palabras,

$$\int_0^x f(\tau) d\tau \geq \beta \tanh^2(x)$$

□

**Lema 2.** Defínase  $\phi(x_1, x_2)$  como en *Calcev (1998)*; *Santibanez et al. (2004)*. Sea  $\mu_A^0(x)$  diferenciable en una vecindad del origen, pero posiblemente no en el origen, y  $\mu_{A_1}^0'(x) > 0$  para  $x < 0$ ,  $\mu_{A_1}^0'(x) < 0$  para  $x > 0$ . Entonces existe una  $\beta > 0$  tal que

$$\int_0^x \phi(\tau, 0) d\tau \geq \beta \tanh^2(x)$$

se mantiene  $\forall x \in \mathbb{R}$ , con  $\beta < \frac{1}{6} \inf \{f'(x)\}$

*Prueba del Lema 2.* Considérese una vecindad  $\alpha$  del origen, tal como en el Lema 1 cercana al origen, la función  $\phi(x, 0)$  puede expresarse como

$$\phi(x, 0) = \bar{y}^{1,0} \left( 1 - \mu_{A_1}^0(x) \right) \quad (3.24)$$

para  $x > 0$ , y

$$\phi(x, 0) = -\bar{y}^{1,0} (1 - \mu_{A_1}^0(x)) \quad (3.25)$$

para  $x < 0$ .

La derivada de (3.24), en  $x > 0$  es

$$\phi'(x, 0) = -\bar{y}^{1,0} \mu_{A_1}^0'(x), \quad (3.26)$$

De manera similar, la derivada de (3.25) en  $x < 0$  se puede expresar como,

$$\phi'(x, 0) = \bar{y}^{1,0} \mu_{A_1}^0'(x), \quad (3.27)$$

debido a la simetría se tiene

$$\mu_{A_1}^0'(x^-) = -\mu_{A_1}^0'(x^+),$$

Donde  $\mu_{A_1}^0'(x^-)$  denota a  $\mu_{A_1}^0'(x)$  en  $x < 0$  y  $\mu_{A_1}^0'(x^+)$  a  $\mu_{A_1}^0'(x)$  en  $x > 0$ . Por lo tanto, de las ecuaciones (3.26) y (3.27) se puede establecer que  $\phi'(x, 0)$  es diferenciable en el origen.

Ya que  $\mu_{A_1}^0'(x) < 0$  para  $x > 0$  y  $\mu_{A_1}^0'(x) > 0$  para  $x < 0$ , se puede concluir de las ecuaciones (3.26) y (3.27) que

$$\phi'(x, 0) > 0. \quad (3.28)$$

Mediante la aplicación del Lema 1 se puede establecer que

$$\int_0^x \phi(\tau, 0) d\tau \geq \beta \tanh^2(x) \quad (3.29)$$

en una vecindad del origen. Haciendo que la vecindad sea definida por  $\epsilon = P_{1_j}$ , el valor máximo de  $\phi$  en  $\alpha$  se alcanza cuando  $x = P_{1_j}$ , este valor está dado por

$$\gamma = \int_0^{P_{1_j}} \bar{y}^{1,0} (1 - \mu_{A_1}^0(\tau)) d\tau \quad (3.30)$$

ya que  $\bar{y}^{k+1,0} > \bar{y}^{k,0}$ , entonces

$$\int_0^x \phi(\tau, 0) d\tau > \gamma; \quad x > P_{1_j} \quad (3.31)$$

□

Lo anterior implica que si  $\gamma \geq \beta$  entonces (3.29) se mantiene para  $x > P_{1j}$ . La simetría permite concluir lo mismo para  $x < 0$ . Por lo tanto, aplicando los lemas 1 y 2 a la función  $\sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i$  se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i &\geq \sum_{i=1}^n \beta_i \tanh^2(\tilde{q}_i) \\ \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i &\geq \lambda_{\min}\{\mathbf{B}\} \|\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{B} = \mathbf{diag}\{\beta_i\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por lo que entonces, para  $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t)$  queda que

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i + \gamma \mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) &\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 - \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \|\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ &\quad + \lambda_{\min}\{\mathbf{B}\} \|\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \end{aligned}$$

Expresando la desigualdad anterior en la forma cuadrática

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) \geq \begin{bmatrix} \|\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{\mathbf{B}\} & -\frac{\gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}}{2} \\ -\frac{\gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}}{2} & \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \|\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}$$

por lo tanto si  $\mathbf{P} > 0$ ,  $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t)$  es una función definida positiva y radialmente desacotada. Para que  $\mathbf{P} > 0$ ,  $\lambda_{\min}\{\mathbf{B}\} > 0$ ,  $\lambda_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} > 0$ , y  $\det(\mathbf{P}) > 0$ :

$$\det(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \lambda_{\min}\{\mathbf{B}\} - \frac{1}{4} \gamma^2 \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}^2 > 0 \quad (3.32)$$

despejando  $\gamma$  de (3.32)

$$0 < \gamma < \frac{\sqrt{2 \lambda_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \lambda_{\min}\{\mathbf{B}\}}}{\lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}} \quad (3.33)$$

entonces, para que  $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t)$  sea definida positiva y radialmente desacotada y menguante,  $\gamma$  debe de ser escogida positiva y lo suficientemente pequeña para que cumpla con (3.33).

Para demostrar que la función candidata es decreciente o menguante, se aplica la propiedad 3, establecida en (3.4), que poseen los SFCs a la parte de la integral sobre  $\phi(\cdot)$ , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i &\leq \rho_i \int_0^{\tilde{q}_i} \xi_i d\xi_i \\ &\leq \frac{\rho_i}{2} \tilde{q}_i^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aplicando este resultado a la función candidata de Lyapunov se tiene que

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}\{\mathbf{M}\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\max}\{\mathbf{R}_o\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (3.35)$$

con  $\mathbf{R}_o = \mathbf{diag}\{\rho_i\}$ ,  $i = 1 \dots n$ , con lo que se prueba que la función candidata de Lyapunov también es decreciente o menguante, además de ser radialmente desacotada.

### 3.3.3 Derivada de la función candidata de Lyapunov

Para poder aplicar el teorema de estabilidad de Lyapunov es necesario obtener la derivada de la función candidata en las trayectorias de la dinámica del sistema, y aplicando la regla de Leibniz para  $\sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i$  queda:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \gamma [\operatorname{sech}^2(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad + \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned}$$

sustituyendo  $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}$  de la ecuación de lazo cerrado (3.16) y simplificando, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})] - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{C}^T(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad + \gamma \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \operatorname{sech}^2(\tilde{\mathbf{q}}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \end{aligned}$$



Acotando término a término  $\dot{V}$ , aplicando propiedades de la dinámica residual,  $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  y de  $\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ , de acuerdo a [Kelly and Santibáñez \(2003\)](#), se tiene que,

$$-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq -\lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (3.36)$$

$$-\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{F}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (3.37)$$

$$-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq K_{h1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + K_{h2} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (3.38)$$

$$-\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq \gamma K_{h1} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \gamma K_{h2} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \quad (3.39)$$

$$\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{C}^T(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq \gamma K_{C1} \left( \|\dot{\mathbf{q}}_{dmax}\| \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \sqrt{n} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \right) \quad (3.40)$$

$$\gamma \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \operatorname{sech}^2(\tilde{\mathbf{q}}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (3.41)$$

Para  $-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})]$ , por la propiedad 3, da como resultado,

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})] > 0 \quad (3.42)$$

$$\therefore -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})] < 0 \quad (3.43)$$

En el caso de  $-\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  se tiene,

$$-\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = -\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \quad (3.44)$$

$$= -\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] - \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \quad (3.45)$$

Analizando el término  $\Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ , se tiene que de la propiedad 3, obteniendo el valor absoluto de la ecuación, se tiene que

$$0 < \left| \dot{\tilde{q}}_i \right| \left| \phi_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) - \phi_i(\tilde{q}_i, 0) \right| \leq \gamma \left| \dot{\tilde{q}}_i \right|^2$$

Despejando  $\left| \phi_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) - \phi_i(\tilde{q}_i, 0) \right|$

$$|\phi_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) - \phi_i(\tilde{q}_i, 0)| \leq \gamma |\dot{\tilde{q}}_i|$$

y evaluando en  $\tilde{q}_i = 0$ , se tiene que

$$|\phi_i(0, \dot{\tilde{q}}_i) - \phi_i(0, 0)| \leq \gamma |\dot{\tilde{q}}_i| \quad (3.46)$$

$$|\phi_i(0, \dot{\tilde{q}}_i)| \leq \gamma |\dot{\tilde{q}}_i| \quad (3.47)$$

con lo cual, extrapolando para el caso matricial, (3.47) queda

$$\|\phi_i(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| \leq \Gamma \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (3.48)$$

donde  $\Gamma = \gamma_{i(\max)} > 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Por lo que (3.45) se puede comenzar a acotar como,

$$\begin{aligned} -\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \\ &\quad - \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} &\leq -\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \\ &\quad + \gamma \Gamma \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Analizando ahora más a detalle el término

$$[\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})], \quad (3.51)$$

haciendo  $x_1 = \tilde{q}_i$  y  $x_2 = \dot{\tilde{q}}_i$  tal que  $\phi(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) = \phi(x_1, x_2)$ , considerando que siguiendo los lineamientos planteados por Calcev (Calcev, 1998) y Santibáñez et al (Santibanez et al., 2004, 2005) para las reglas difusas, solamente se pueden activar cuatro reglas difusas y de conjuntos aledaños,  $k$  y  $k + 1$  para la entrada  $x_1 = \tilde{q}_i$ , y  $m$  y  $m + 1$  para la entrada  $x_2 = \dot{\tilde{q}}_i$ , tal como se muestra en las figuras 3.2 y 3.3,

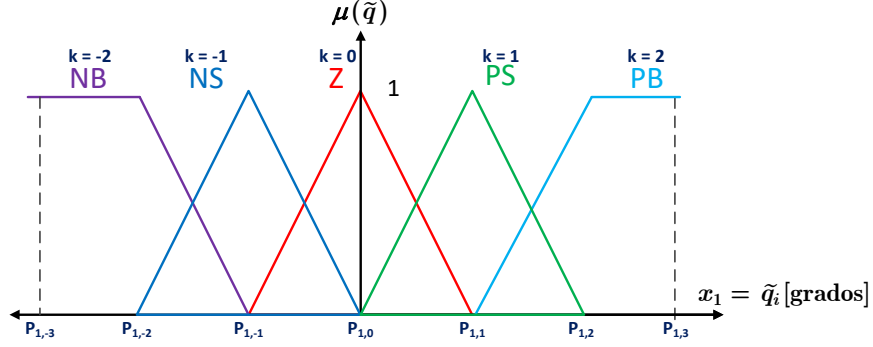


Figura 3.2: Definición de los conjuntos difusos para  $x_1 = \tilde{q}_i$ .

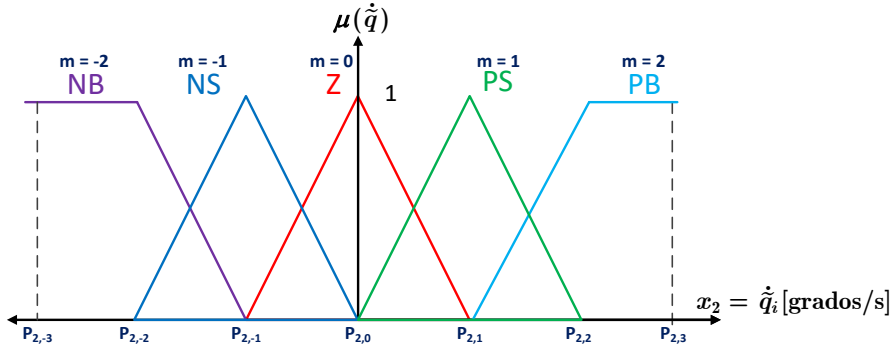


Figura 3.3: Definición de los conjuntos difusos para  $x_2 = \dot{\tilde{q}}_i$ .

se tiene

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) = & \mu_{A_1}^k(x_1)\mu_{A_2}^m(x_2)\bar{y}^{k,m} + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1)\mu_{A_2}^m(x_2)\bar{y}^{k+1,m} \\ & + \mu_{A_1}^k(x_1)\mu_{A_2}^{m+1}(x_2)\bar{y}^{k,m+1} + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1)\mu_{A_2}^{m+1}(x_2)\bar{y}^{k+1,m+1} \end{aligned} \quad (3.52)$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\phi(0, x_2) &= \mu_{A_1}^0(0)\mu_{A_2}^m(x_2)\bar{y}^{0,m} + \mu_{A_1}^1(0)\mu_{A_2}^m(x_2)\bar{y}^{1,m} \\
&\quad + \mu_{A_1}^0(0)\mu_{A_2}^{m+1}(x_2)\bar{y}^{0,m+1} + \mu_{A_1}^1(0)\mu_{A_2}^{m+1}(x_2)\bar{y}^{1,m+1} \\
&= \mu_{A_2}^m(x_2)\bar{y}^{0,m} + \mu_{A_2}^{m+1}(x_2)\bar{y}^{0,m+1} \\
&= \mu_{A_2}^m(x_2)\bar{y}^{0,m} + \left(1 - \mu_{A_2}^m(x_2)\right)\bar{y}^{0,m+1} \\
&= \bar{y}^{0,m+1} + \mu_{A_2}^m(x_2)\left[\bar{y}^{0,m} - \bar{y}^{0,m+1}\right]
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Restando (3.53) de (3.52), y simplificando se llega a

$$\begin{aligned}
\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2) &= \mu_{A_2}^m(x_2)\left[\mu_{A_1}^k(x_1)\bar{y}^{k,m} + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1)\bar{y}^{k+1,m} - \bar{y}^{0,m}\right] \\
&\quad + \mu_{A_2}^{m+1}(x_2)\left[\mu_{A_1}^k(x_1)\bar{y}^{k,m+1} \right. \\
&\quad \quad \left. + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1)\bar{y}^{k+1,m+1} - \bar{y}^{0,m+1}\right]
\end{aligned}$$

Analizando esta ecuación, se puede ver que  $\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2) = 0$ ;  $x_1 = 0 \forall x_2$ , por lo que cuando  $x_1 = 0$  la función siempre comienza en el origen sin importar el valor de  $x_2$ . Si se considera que para  $x_2$  se definieron los conjuntos difusos de la figura 3.3 usando funciones de membresía triangulares y trapezoidales, evaluando  $\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$  en  $x_2 = P_{2,0}, P_{2,1}, \dots, P_{2,j}$ , se tiene que para  $x_2 = P_{2,0}$ , considerando la membresía al conjunto difuso ZE como la membresía  $m$ , y al conjunto aledaño, PS, como  $m + 1$ ,

$$\begin{aligned}
\phi(x_1, 0) - \phi(0, 0) &= \mu_{A_2}^m(0)\left[\mu_{A_1}^k(x_1)\bar{y}^{k,0} + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1)\bar{y}^{k+1,0} - \bar{y}^{0,0}\right] \\
&\quad + \mu_{A_2}^1(0)\left[\mu_{A_1}^k(x_1)\bar{y}^{k,1} + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1)\bar{y}^{k+1,1} - \bar{y}^{0,1}\right] \\
\phi(x_1, 0) &= \mu_{A_1}^k(x_1)\bar{y}^{k,0} + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1)\bar{y}^{k+1,0} - \bar{y}^{0,0} \\
&= \bar{y}^{k,0} + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1)\left[\bar{y}^{k+1,0} - \bar{y}^{k,0}\right]
\end{aligned}$$

Para  $x_2 = P_{2,1}$ , considerando la membresía al conjunto difuso PS como la membresía  $m$ , y al conjunto aledaño, PB, como  $m + 1$ , después de simplificar queda,

$$\phi(x_1, P_{2,1}) - \phi(0, P_{2,1}) = \left[\bar{y}^{k,1} - \bar{y}^{0,1}\right] + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1)\left[\bar{y}^{k+1,1} - \bar{y}^{k,1}\right]$$

generalizando para el  $j$ -ésimo punto  $P_{2,j}$  se tiene que,

$$\phi(x_1, P_{2,j}) - \phi(0, P_{2,j}) = [\bar{y}^{k,j} - \bar{y}^{0,j}] + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1) [\bar{y}^{k+1,j} - \bar{y}^{k,j}] \quad (3.54)$$

La ecuación (3.54) representa segmentos de recta que se van generando y construyendo una función compuesta de rectas con pendiente variante, la cual comienza a cambiar en cada punto  $P_{1,i}$  para  $x_1$ , y de acuerdo a la definición de reglas, y lo expuesto por el mismo Calcev (Calcev, 1998), esta señal que se forma es monótonicamente creciente hasta  $x = P_{1,i_{\text{máx}}}$ ,  $x_2$  solamente afecta el valor de la pendiente en cada tramo, así como el valor final en el que se satura la función, con lo que se puede ver que  $\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$  depende principalmente de  $x_1$ , tal como se muestra en la figura 3.4, y se representa en (3.55)

$$\phi(x_1, P_{2,j}) - \phi(0, P_{2,j}) = [\bar{y}^{k,j} - \bar{y}^{0,j}] + \underbrace{\mu_{A_1}^{k+1}(x_1) [\bar{y}^{k+1,j} - \bar{y}^{k,j}]}_{\text{pendiente monótonicamente creciente}} (x_1 - P_{1,i}) \quad (3.55)$$

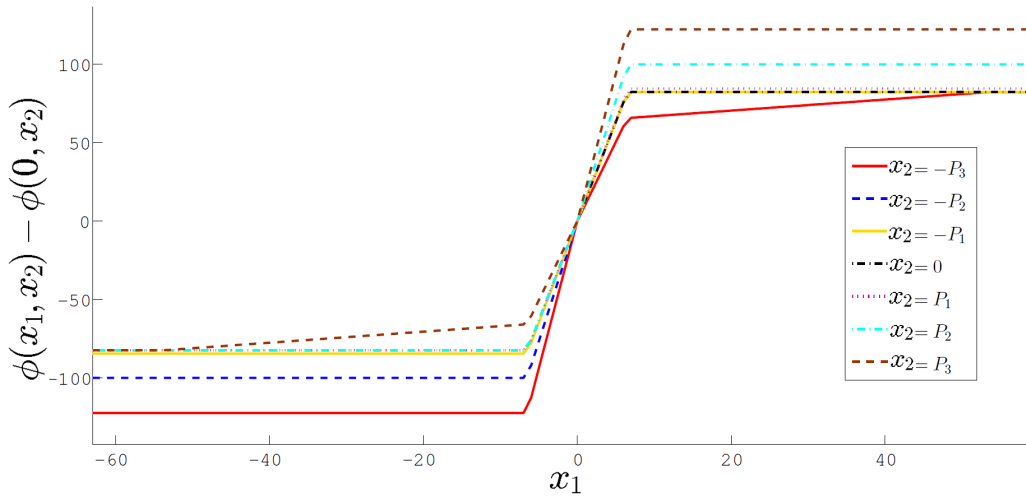


Figura 3.4:  $\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$  para  $x_2$  evaluada en diferentes  $P_{2,j}$ .

considerando también las variaciones en  $x_2$  en conjunto se muestra en las figuras 3.5 y 3.6. (NOTA: tanto la figura anterior, como las figuras siguientes se muestran sin unidades ya que el sistema difuso considerado es sintético, y por lo tanto no representa o se aplica a ningún sistema físico).

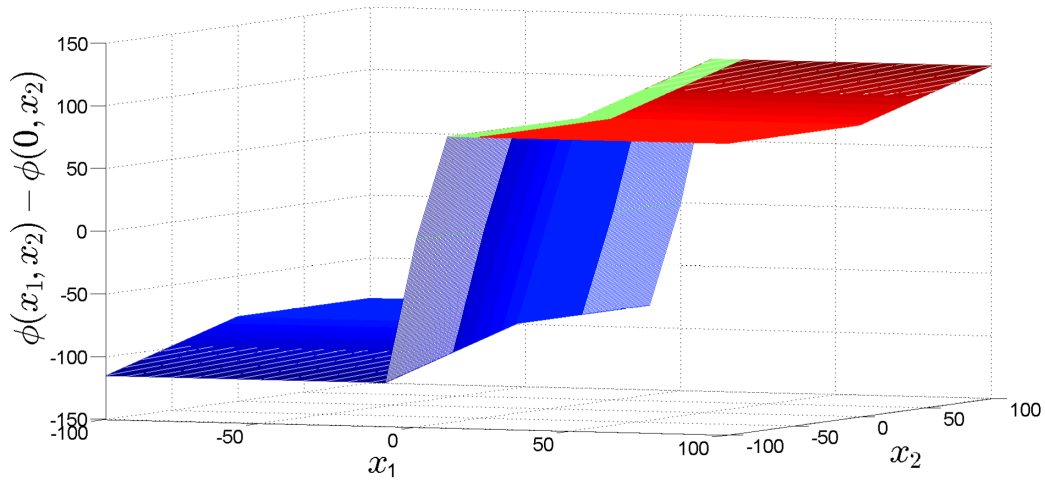


Figura 3.5:  $\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$  en función de  $x_1$  y  $x_2$ .

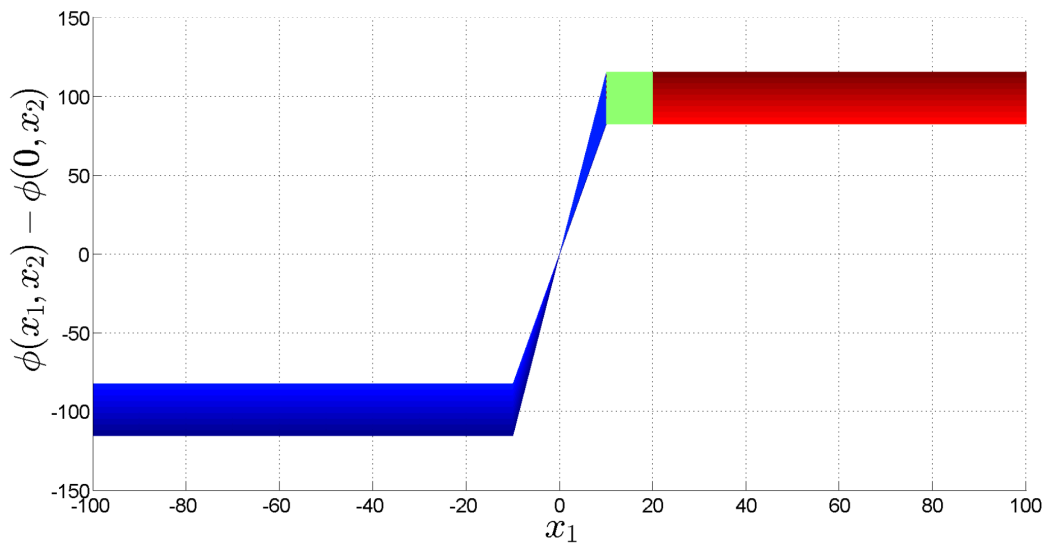


Figura 3.6:  $\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$  en función de  $x_1$  y  $x_2$ .

Cómo se puede ver en las figuras 3.4–3.6, la función  $\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$  puede ser acotada por debajo, al menos para valores positivos de  $x_1$  por una función  $C_k \text{sat}(x_1)$ , tal y como se hizo en Mijares (2014), o por medio de una función  $\alpha \tanh(x_2)$  como se propone en el presente trabajo,

$$\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2) \geq \alpha \tanh(x_2)$$

donde

$$\alpha \leq \min_{j \neq 0} \left| \bar{y}^{k,j} - \bar{y}^{0,j} \right| \quad (3.56)$$

lo que se comprueba con el Lema 3.

### 3.3.4 Condición necesaria para $\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2) \neq 0$

Considérese la diferencia

$$d(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$$

La función  $d(x_1, x_2)$  puede ser escrita en términos de las funciones de membresía y los valores de la tabla de reglas difusas, como

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) = & \mu_{A_1}^k(x_1) \mu_{A_2}^m(x_2) \bar{y}^{k,m} + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1) \mu_{A_2}^m(x_2) \bar{y}^{k+1,m} + \mu_{A_1}^k(x_1) \mu_{A_2}^{m+1}(x_2) \bar{y}^{k,m+1} \\ & + \mu_{A_1}^{k+1}(x_1) \mu_{A_2}^{m+1}(x_2) \bar{y}^{k+1,m+1} - \bar{y}^{0,m+1} - \mu_{A_2}^m(x_2) (\bar{y}^{0,m} - \bar{y}^{0,m+1}) \end{aligned}$$

ahora, si se considera que  $x_1 = x_1^*$ , donde  $x_1^* \Rightarrow 0$  es positivo y cercano al origen tal que,  $k = 0$ .

Evaluando  $d(x_1, x_2)$  en  $x_1 = x_1^*$  se obtiene

$$\begin{aligned} d(x_1^*, x_2) = & \mu_{A_1}^0(x_1^*) \mu_{A_2}^m(x_2) \bar{y}^{0,m} + \mu_{A_1}^1(x_1^*) \mu_{A_2}^m(x_2) \bar{y}^{1,m} + \mu_{A_1}^0(x_1^*) \mu_{A_2}^{m+1}(x_2) \bar{y}^{0,m+1} \\ & + \mu_{A_1}^1(x_1^*) \mu_{A_2}^{m+1}(x_2) \bar{y}^{1,m+1} - \bar{y}^{0,m+1} - \mu_{A_2}^m(x_2) (\bar{y}^{0,m} - \bar{y}^{0,m+1}) \end{aligned}$$

Si  $\bar{y}_0 = \bar{y}^{0,m} = \bar{y}^{1,m}$ ,  $\bar{y}_1 = \bar{y}^{0,m+1} = \bar{y}^{1,m+1}$ . Entonces, usando el hecho de que

$$\mu_{A_i}^n(x_i) + \mu_{A_i}^{n+1}(x_i) = 1$$

se puede convertir  $d(x_1, x_2)$  como está indicado en la expresión

$$\begin{aligned} d(x_1^*, x_2) = & \mu_{A_2}^m(x_2) \bar{y}_0 \left[ \mu_{A_1}^0(x_1^*) + \mu_{A_1}^1(x_1^*) \right] \\ & + \mu_{A_2}^{m+1}(x_2) \bar{y}_1 \left[ \mu_{A_1}^0(x_1^*) + \mu_{A_1}^1(x_1^*) \right] \\ & - \bar{y}_1 - \mu_{A_2}^m(x_2) [\bar{y}_0 - \bar{y}_1] \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
d(x_1^*, x_2) &= \mu_{A_2}^m(x_2)\bar{y}_0 + \mu_{A_2}^{m+1}(x_2)\bar{y}_1 - \bar{y}_1 - \mu_{A_2}^m(x_2) [\bar{y}_0 - \bar{y}_1] \\
&= \mu_{A_2}^m(x_2)\bar{y}_0 + (1 - \mu_{A_2}^m(x_2))\bar{y}_1 - \bar{y}_1 - \mu_{A_2}^m(x_2) [\bar{y}_0 - \bar{y}_1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

lo que implica que si  $\bar{y}^{0,m} = \bar{y}^{1,m}$  y  $\bar{y}^{0,m+1} = \bar{y}^{1,m+1}$  entonces  $d(x_1^*, x_2)$  es igual a cero para todos los valores de  $x_1$  para los cuales  $k = 0$  y todos los valores de  $x_2$ . Lo mismo puede ser demostrado que es cierto si  $\bar{y}^{-1,m} = \bar{y}^{0,m}$  y  $\bar{y}^{-1,m+1} = \bar{y}^{0,m+1}$ . Para valores grandes de  $x_2$ , cuando  $m + 1 = M$ ,  $\mu_{A_2}^{M-1}(x_2) = 0$  y  $\mu_{A_2}^M = 1$ . De (3.57) es posible ver que la única restricción necesaria para que  $d(x_1^*, x_2)$  sea cero es que cualquiera de  $\bar{y}^{-1,M} = \bar{y}^{0,M}$  o  $\bar{y}^{0,M} = \bar{y}^{1,M}$  se cumpla.

**Lema 3.** *Considerando la función  $\phi(x_1, x_2)$ , y si todas las condiciones de la sección previa se cumplen, se tiene que*

$$\bar{y}^{0,m} \neq \bar{y}^{1,m}, \quad \bar{y}^{0,m+1} \neq \bar{y}^{1,m+1}, \quad \bar{y}^{-1,m} \neq \bar{y}^{0,m}, \quad \bar{y}^{-1,m+1} \neq \bar{y}^{0,m+1} \quad (3.58)$$

si se supone que la MF  $\mu_1^0(x_1)$  es derivable en los intervalos  $0 < x_1 < P_1$  y  $-P_1 < x_1 < 0$ , entonces el valor absoluto de su derivada  $|\mu_1^0'(x_1)|$  está acotada por debajo por una constante  $\beta$ , que se define como

$$\alpha = \beta \left| \min_{-M < m < M} \{ \bar{y}^{1,m} - \bar{y}^{0,m}, \bar{y}^{1,m+1} - \bar{y}^{0,m+1}, \bar{y}^{0,m} - \bar{y}^{-1,m}, \bar{y}^{0,m+1} - \bar{y}^{-1,m+1} \} \right|$$

Entonces, se tiene que

$$|\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)| \geq \alpha |\tanh(x_1)|$$

*Prueba del Lema 3.* Primero, si se considera el intervalo  $I_1 = [0, P_1]$ ,  $x_1 \in I_1$ ,  $k = 0$ , esto es, el primer intervalo donde  $|\mu_1^0'(x_1)|$  existe para valores positivos de  $x_1$ . Si

$$\Delta(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)$$

y tomando un valor fijo de  $x_2$ , llamado  $x_2 = x_2^*$ . La función  $\Delta(x_1, x_2)$  se convierte en una función diferenciable de  $x_1$  en  $I_1$ . aplicando el teorema del valor medio, debe de existir una  $C \in I_1$  tal que,



$$\Delta(x_1, x_2^*) - \Delta(0, x_2^*) = \frac{d}{dx_1} (\Delta(x_1, x_2^*)) \Big|_{x_1=C} (x - 0) \quad (3.59)$$

ya que  $\Delta(0, x_2^*) = \phi(0, x_2^*) - \phi(0, x_2^*) = 0$ , (3.59) se convierte en

$$\Delta(x_1, x_2^*) = \frac{d}{dx_1} (\Delta(x_1, x_2^*)) \Big|_{x_1=C} x \quad (3.60)$$

la derivada de  $\Delta(x_1, x_2^*)$  se puede calcular como sigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} (\Delta(x_1, x_2^*)) &= \mu_2^m(x_2^*) [\mu_1^0'(x_1) \bar{y}^{1,m} - \mu_1^0'(x_1) \bar{y}^{0,m}] \\ &\quad + \mu_2^{m+1}(x_2^*) [\mu_1^0'(x_1) \bar{y}^{1,m+1} - \mu_1^0'(x_1) \bar{y}^{0,m+1}] \\ &= \mu_1^0'(x_1) (\mu_2^m(x_2^*) [\bar{y}^{1,m} - \bar{y}^{0,m}] + \mu_2^{m+1}(x_2^*) [\bar{y}^{1,m+1} - \bar{y}^{0,m+1}]) \end{aligned}$$

lo que satisface la cota inferior

$$\left| \frac{d}{dx_1} (\Delta(x_1, x_2^*)) \right| \geq \beta \underbrace{\left| \min_{-M < m < M} \{ \bar{y}^{1,m} - \bar{y}^{0,m}, \bar{y}^{1,m+1} - \bar{y}^{0,m+1} \} \right|}_{\alpha_1}$$

de (3.60), se puede verificar que

$$|\Delta(x_1, x_2^*)| \geq \alpha_1 |x_1| \geq \alpha_1 |\tanh(x_1)|$$

un argumento similar permite establecer que para el intervalo  $I_2 = [-P_1, 0]$  se mantiene que

$$\left| \frac{d}{dx_1} (\Delta(x_1, x_2^*)) \right| \geq \beta \underbrace{\left| \min_{-M < m < M} \{ \bar{y}^{0,m} - \bar{y}^{-1,m}, \bar{y}^{0,m+1} - \bar{y}^{-1,m+1} \} \right|}_{\alpha_2}$$

entonces se puede tomar

$$\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

lo que lleva al resultado en el intervalo  $I = I_1 \cup I_2$  de que la cota inferior se mantiene para todos los valores de  $x_1$ . Si se denota como  $\epsilon_{\max}$  al máximo

valor de  $\Delta(x_1, x_2^*)$  en  $I$ . Entonces por diseno se tiene que  $\bar{y}^{1,m} > \bar{y}^{0,m}$ , donde el valor máximo se alcanza en  $P_1$ , esto es  $\bar{y}^{1,m+1} > \bar{y}^{0,m+1}$

$$\epsilon_{\text{máx}} = \mu_2^m(x_2^*) [\bar{y}^{1,m} - \bar{y}^{0,m}] + \mu_2^{m+1}(x_2^*) [\bar{y}^{1,m+1} - \bar{y}^{0,m+1}]$$

en los siguientes intervalos, para  $k \geq 1$ , el valor mínimo de  $\Delta(x_1, x_2^*)$ , denotado como  $\epsilon_{\text{mín}}$ , se encuentra que es

$$\epsilon_{\text{mín}} = \mu_2^m(x_2^*) [\bar{y}^{k,m} - \bar{y}^{0,m}] + \mu_2^{m+1}(x_2^*) [\bar{y}^{k,m+1} - \bar{y}^{0,m+1}]$$

ya que  $\bar{y}^{k,m} \geq \bar{y}^{1,m}$  y  $\bar{y}^{k,m+1} \geq \bar{y}^{1,m+1}$  para  $k \geq 1$  entonces,  $\Delta(x_1, x_2^*) \geq \epsilon_{\text{máx}}$  para  $x_1 \in [P_1, \infty)$ . Como  $|\tanh(x_1)| \leq 1$ , entonces la cota

$$|\Delta(x_1, x_2^*)| \geq \alpha |\tanh(x_1)|$$

se mantiene para todo  $x_1 \geq 0$ . La discusión de que esta cota se mantiene para  $x_1 \leq 0$  es idéntica. Finalmente, ya que el resultado se obtuvo para cualquier valor arbitrario de  $x_2$ , se tiene que

$$|\phi(x_1, x_2) - \phi(0, x_2)| \geq \alpha |\tanh(x_1)| \quad (3.61)$$

□

y ya que la propiedad 3 establece que  $[\Phi(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) - \Phi(0, \dot{\tilde{q}}_i)]$  tiene el mismo signo que  $\tilde{q}_i$ , por lo que, esta propiedad en el caso vectorial se puede expresar como:

$$\tilde{\mathbf{q}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \geq 0 \quad (3.62)$$

y como también,

$$\tilde{q}_i \tanh(\tilde{q}_i) \geq 0$$

entonces la ecuación (3.62) que expresa la propiedad 3 en el caso matricial puede ser reescrita como,

$$\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \geq 0 \quad (3.63)$$

extrapolando (3.61) al caso vectorial, para la ecuación (3.51) que se estaba analizando, y utilizando la propiedad 3 reescrita como (3.63), se tiene que:

$$\begin{aligned}\tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] &\geq \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{A} \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) \geq 0 \\ &\geq \lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{A} = \text{diag}(\alpha_i)$ , con lo que (3.50) puede ser completamente acotada como

$$\begin{aligned}-\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \\ &= -\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \\ &\quad - \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &\leq -\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \\ &\quad + \gamma \Gamma \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \tag{3.64}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq -\gamma \lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \\ &\quad + \gamma \Gamma \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \tag{3.65}\end{aligned}$$

Usando todas las ecuaciones de (3.37) a (3.41), con las ecuaciones (3.43) y (3.65), la derivada de la función candidata de Lyapunov puede ser acotada por arriba como:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) &\leq -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})] - \gamma \lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 + \gamma \Gamma \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ &\quad - \lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{F}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + K_{h1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \\ &\quad + K_{h2} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \gamma K_{h1} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \gamma K_{h2} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \\ &\quad + \gamma K_{C1} (\|\dot{\mathbf{q}}_{dmax}\| \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \sqrt{n} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2) + \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) &\leq -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})] - \gamma (\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} - K_{h2}) \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \\ &\quad + \gamma \left( \Gamma + \lambda_{\max}\{\mathbf{F}\} + \frac{K_{h2}}{\gamma} + K_{h1} + K_{C1} \|\dot{\mathbf{q}}_{dmax}\| \right) \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ &\quad - \gamma \left( \frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} - K_{h1}}{\gamma} - \sqrt{n} K_{C1} - \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \right) \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2\end{aligned}$$

si se hacen las siguientes sustituciones,

$$\begin{aligned}
a &= \lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} - K_{h2} \\
b &= K_{h2} \\
c &= \Gamma + \lambda_{\max}\{\mathbf{F}\} + K_{h1} + K_{C1}\|\dot{\mathbf{q}}_{dmax}\| \\
d &= \lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} - K_{h1} \\
e &= \sqrt{n}K_{C1} + \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) &\leq -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})] \\
&\quad - \gamma \begin{bmatrix} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} a & -\frac{b+c}{2} \\ -\frac{b+c}{2} & \frac{d}{\gamma} - e \end{bmatrix}}_{P_2} \begin{bmatrix} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Si  $P_2 > 0$ , entonces como  $-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})] < 0 \forall \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ ,  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) < 0$ . Para lograr esto se debe cumplir,

$$\begin{aligned}
a > 0 &\implies \lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} > K_{h2} \\
\frac{d}{\gamma} - e > 0 &\implies \lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} > \gamma(\sqrt{n}K_{C1} + \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}) + K_{h1} \\
\det(P_2) &> 0
\end{aligned}$$

calculando  $\det(P_2)$ ,

$$\det(P_2) = a \left( \frac{d}{\gamma} - e \right) - \frac{(b + \gamma c)^2}{4} > 0$$

despejando  $a$  del determinante, y de ahí a  $\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}$ , sustituyendo el valor de  $d$  queda que,

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} > \frac{(b + \gamma c)^2}{4\gamma(\lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} - \gamma[\sqrt{n}K_{C1} - \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}] - K_{h1})} + K_{h2} \quad (3.66)$$

Si  $\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}$  cumple con (3.66),  $\det(P_2) > 0$ , también, despejando  $\gamma$  a partir del determinante,

$$\frac{2ad - bc - \sqrt{a^2d^2 - ab^2e - abcd}}{c^2 + 4ae} < \gamma < \frac{2ad - bc + \sqrt{a^2d^2 - ab^2e - abcd}}{c^2 + 4ae}$$

La existencia de  $\gamma$  y el que  $\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}$  cumpla con (4.39), garantiza que la  $\dot{V}$  propuesta sea definida negativa, con lo que se prueba que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente globalmente estable, con un único punto de equilibrio en el origen, ya que  $\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} > K_{h2}$  que es una desigualdad trivial, dada (4.39), hace que (3.17) solamente se cumpla para el origen.

### 3.4 Diseño y simulación del SFC con precompensación

Continuando con la metodología, se implementó un control difuso sectorial con precompensación para controlar el robot de 2-DOF mostrado en la sección 2.8 modelado con fricción viscosa y de Coulomb. Las funciones de membresía para cada entrada de cada articulación se definieron tal como se muestra en las figuras 3.7 y 3.8, para la articulación 1; la función de membresía de salida para la articulación 1 se muestra en la figura 3.9. La función de membresía de la salida se define mediante *singletones* para agilizar el cálculo de la salida en tiempo real. Para la articulación 2 es la misma definición. Para cada función de membresía difusa se tiene que, NB = Negative Big (Negativo grande), NS = Negative Small (Negativo Pequeño), Z = Zero (Cero), PS = Positive Small (Positivo Pequeño), PB = Positive Big (Positivo Grande). Con lo que las reglas difusas quedan resumidas en la tabla 3.1, donde se ve que se cumplen las propiedades listadas para poder ser un SFC.

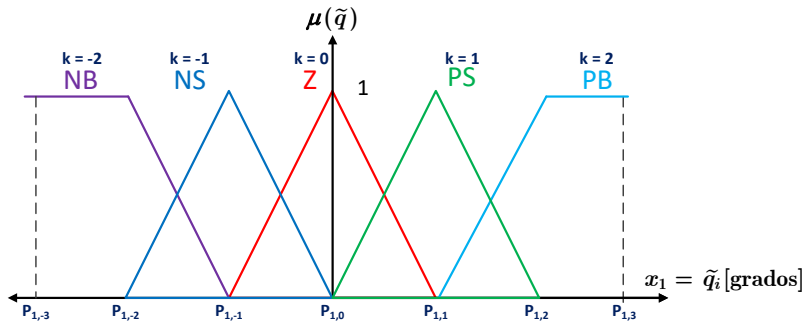


Figura 3.7: Funciones de membresía difusas para la entrada  $\tilde{q}_i(t)$ .

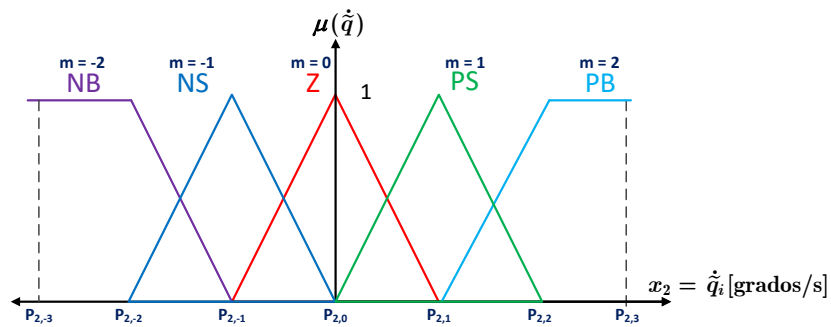


Figura 3.8: Funciones de membresía difusas para la entrada  $\dot{\tilde{q}}_i(t)$ .

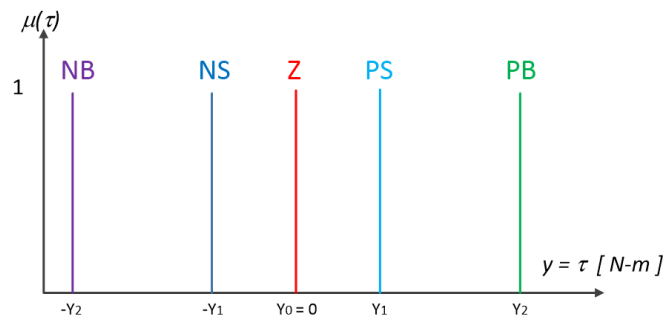


Figura 3.9: Funciones de membresía difusas para la salida  $\tau_i$ .

Los valores de las particiones que definen a los conjuntos difusos fueron

Tabla 3.1: Tabla de reglas difusas

$\tilde{q}/\tilde{q}$	NB	NS	Z	PS	PB
NB	NB	NB	NS	Z	Z
NS	NB	NB	NS	Z	Z
Z	NS	NS	Z	PS	PS
PS	Z	Z	PS	PB	PB
PB	Z	Z	PS	PB	PB

encontrados mediante la aplicación de Algoritmos Genéticos (GA, de las siglas del inglés *Genetic Algorithms*), tal como se muestra en [Pizarro et al. \(2018\)](#), con una población inicial de 50 individuos (valores) generados de manera aleatoria con distribución gaussiana con media cero y varianza 1, alrededor de los valores aportados por el trabajo de [Santibanez et al. \(2004\)](#), por 30 generaciones y con método de selección por "Torneo". Los valores de soporte para los conjuntos difusos obtenidos vía GA son:  $P_{1,0} = 0$ ,  $P_{1,1} = 6.518$ ,  $P_{1,2} = 53.77$ ,  $P_{1,3} = 125.5$ ,  $P_{2,0} = 0$ ,  $P_{2,1} = 122.2$ ,  $P_{2,2} = 138.5$ ,  $P_{2,3} = 871.8$ ,  $Y_0 = 0$ ,  $Y_1 = 82.29$ ,  $Y_2 = 204.5$ , para la articulación 1; y,  $P_{1,0} = 0$ ,  $P_{1,1} = 5.982$ ,  $P_{1,2} = 36.67$ ,  $P_{1,3} = 163.5$ ,  $P_{2,0} = 0$ ,  $P_{2,1} = 153.8$ ,  $P_{2,2} = 318.7$ ,  $P_{2,3} = 1016$ ,  $Y_0 = 0$ ,  $Y_1 = 15$ ,  $Y_2 = 180$ , para la articulación 2.

Las trayectorias de posición, velocidad y aceleración articular deseadas:  $\mathbf{q}_d(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ , están dadas por las ecuaciones ([Kelly et al. \(2005\)](#)):

$$\begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 [1 - e^{-2.0t^3}] + c_1 [1 - e^{-2.0t^3}] \text{sen}(\omega_1 t) \\ b_2 [1 - e^{-1.8t^3}] + c_2 [1 - e^{-1.8t^3}] \text{sen}(\omega_2 t) \end{bmatrix} \text{ [rad]} \quad (3.67)$$

donde  $a_1 = \pi/2$  [rad],  $b_1 = \pi/4$  [rad],  $c_1 = \pi/18$  [rad] y  $\omega_1 = 15$  [rad/s], son los parámetros de referencia de posición deseada para la primera articulación, mientras que  $a_2 = \pi/2$  [rad],  $b_2 = \pi/3$  [rad],  $c_2 = 25\pi/36$  [rad] y  $\omega_2 = 3.5$  [rad/s], son parámetros de la referencia de posición deseada para la segunda articulación.

A partir de las posiciones deseadas, es posible obtener analíticamente las

velocidades deseadas, que vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{d1} &= 6b_1t^2e^{-2.0t^3} + 6c_1t^2e^{-2.0t^3}\text{sen}(\omega_1t) \\ &\quad + [c_1 - c_1e^{-2.0t^3}]\text{cos}(\omega_1t)\omega_1 \text{ [rad/s]},\end{aligned}\quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_{d2} &= 5.4b_2t^2e^{-1.8t^3} + 5.4c_2t^2e^{-1.8t^3}\text{sen}(\omega_2t) \\ &\quad + [c_2 - c_2e^{-1.8t^3}]\text{cos}(\omega_2t)\omega_2 \text{ [rad/s]}.\end{aligned}\quad (3.69)$$

De la misma manera, se procede para obtener analíticamente las aceleraciones deseadas

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{d1} &= 12b_1te^{-2.0t^3} - 36b_1t^4e^{-2.0t^3} + 12c_1te^{-2.0t^3}\text{sen}(\omega_1t) \\ &\quad - 36c_1t^4e^{-2.0t^3}\text{sen}(\omega_1t) + 12c_1t^2e^{-2.0t^3}\text{cos}(\omega_1t)\omega_1 \\ &\quad - [c_1 - c_1e^{-2.0t^3}]\text{sen}(\omega_1t)\omega_1^2 \text{ [rad/s}^2\text{]}\end{aligned}\quad (3.70)$$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{d2} &= 10.8b_2te^{-1.8t^3} - 29.2b_2t^4e^{-1.8t^3} + 10.8c_2te^{-1.8t^3}\text{sen}(\omega_2t) \\ &\quad - 29.2c_2t^4e^{-1.8t^3}\text{sen}(\omega_2t) + 10.8c_2t^2e^{-1.8t^3}\text{cos}(\omega_2t)\omega_2 \\ &\quad - [c_2 - c_2e^{-1.8t^3}]\text{sen}(\omega_2t)\omega_2^2 \text{ [rad/s}^2\text{]}\end{aligned}\quad (3.71)$$

Con lo que se obtuvieron las respuestas de posición angular en cada articulación, error de posición angular en cada articulación, así como de pares de fuerzas aplicados (NOTA: A partir de este punto en el documento, al par o pares de fuerzas se les llamará solamente par o pares por simplicidad), tal como se muestra en las figuras 3.10 – 3.14, respectivamente.

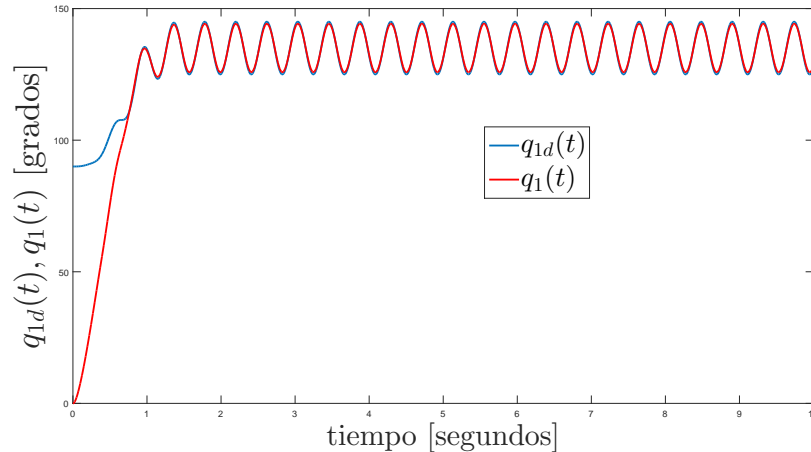


Figura 3.10: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1.



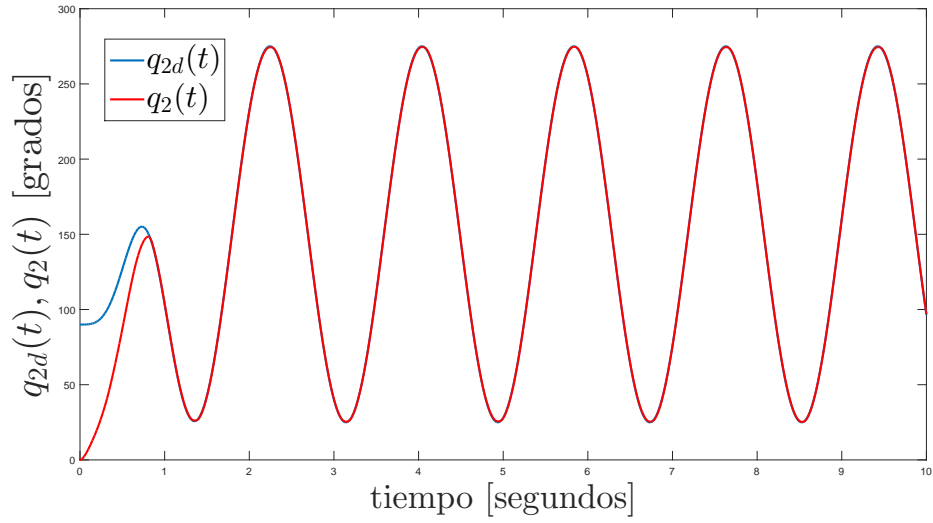


Figura 3.11: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2.

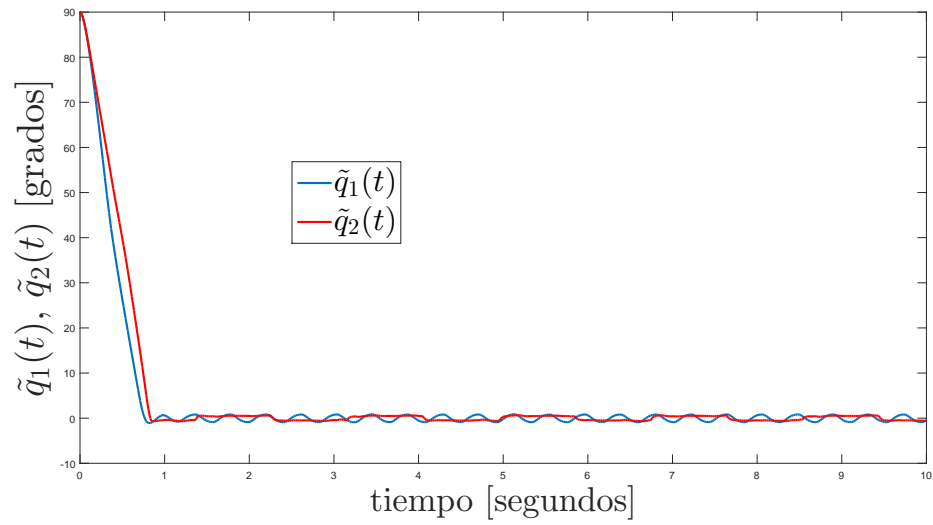


Figura 3.12: Error de posición en articulaciones 1 y 2.

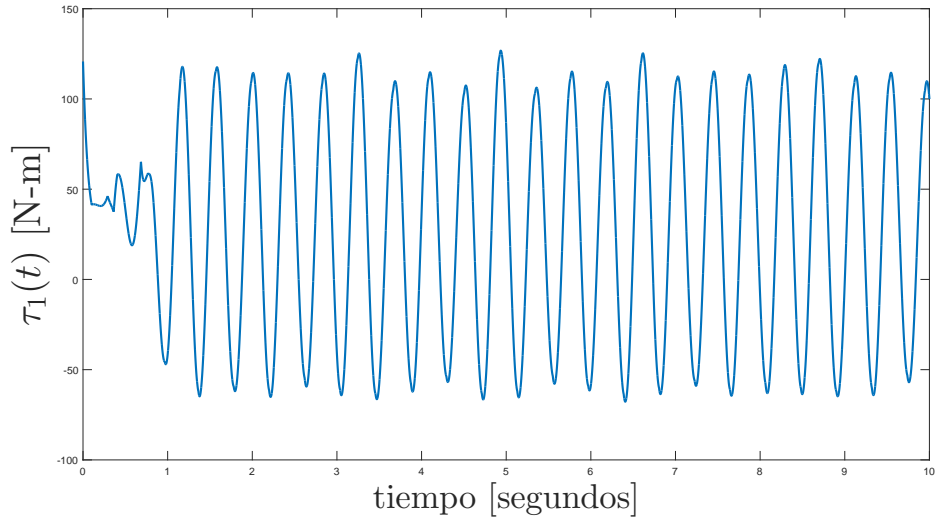


Figura 3.13: Par aplicado en la articulación 1.

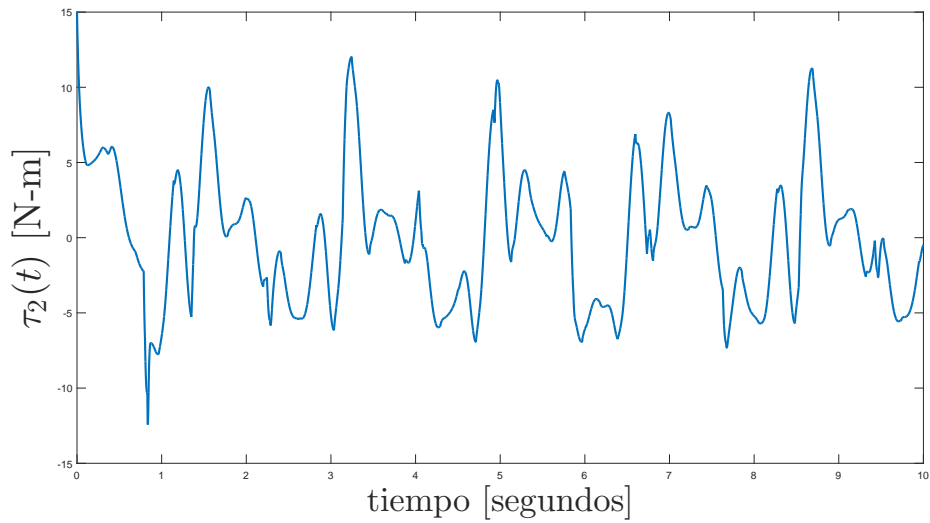


Figura 3.14: Par aplicado en la articulación 2.

En la sección 4.5.1 se compara la respuesta en simulación de este controlador, tanto gráfica como numéricamente, con otros controladores similares.

### 3.5 Pruebas experimentales al SFC con pre-compensación

La implementación experimental del controlador diseñado en la sección previa se llevó a cabo en el robot de 2-DOF que se encuentra en el laboratorio del edificio 27 del Instituto Tecnológico de La Laguna. En el WinMech Lab se usó un periodo de muestreo de 2.5 ms. A continuación se muestran los resultados para las señales de referencia dadas de la ecuación (3.67) a la (3.71); las respuestas de error de posición angular en cada articulación, así como de pares aplicados de manera experimental se muestran en las figuras 3.15, 3.16 y 3.17, respectivamente.

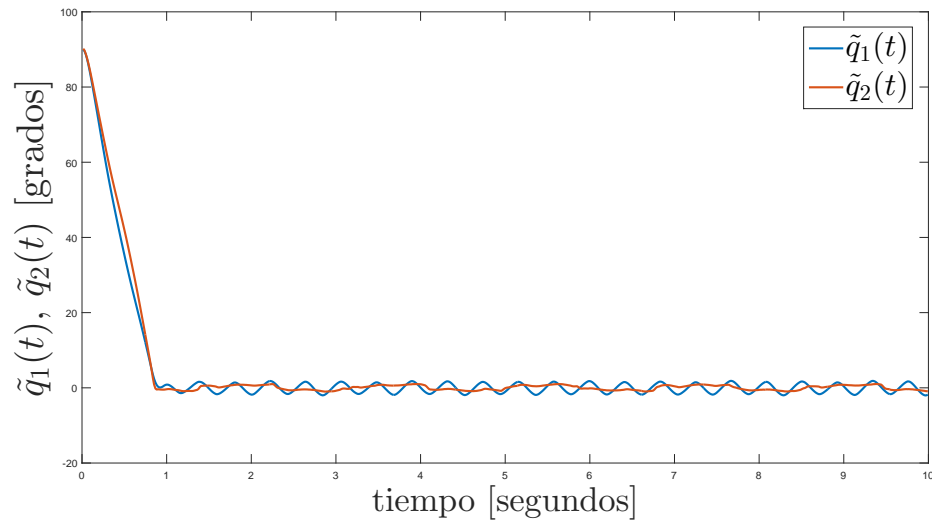


Figura 3.15: Error de posición en articulaciones 1 y 2.

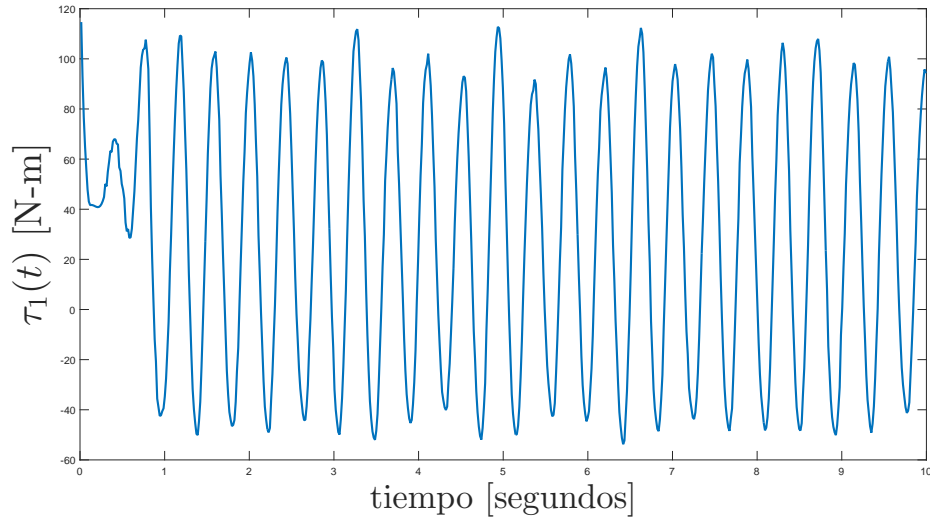


Figura 3.16: Par aplicado en la articulación 1.

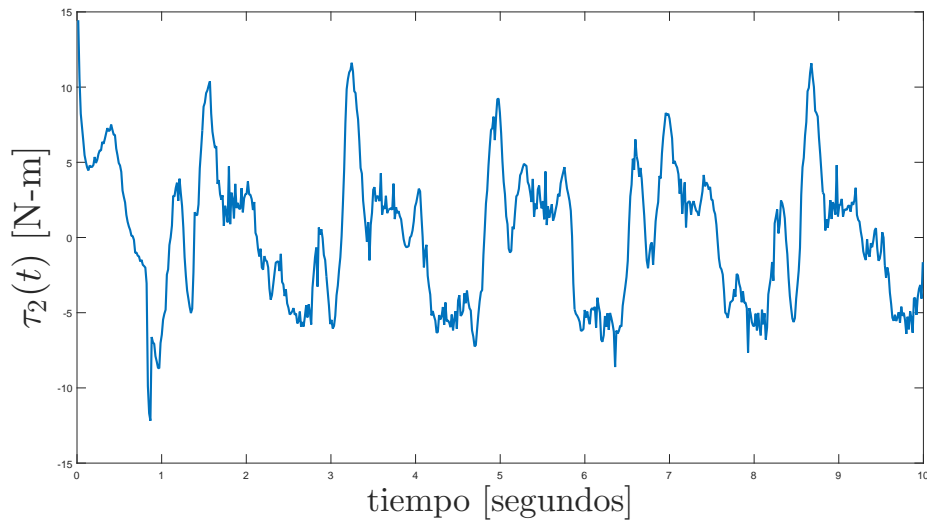


Figura 3.17: Par aplicado en la articulación 2.

En la sección 4.5.2 se compara la respuesta experimental en tiempo real de este controlador, tanto gráfica como numéricamente, con otros controladores similares.

# Capítulo 4

## Controlador difuso sectorial con precompensación neuronal adaptable

### 4.1 Introducción

En este capítulo se propone un nuevo controlador difuso sectorial con precompensación neuronal adaptable, se desarrolla su prueba de estabilidad y las demostraciones de propiedades necesarias que respaldan dicha prueba, el diseño para el control de seguimiento de trayectorias del robot de 2-DOF, descrito en la sección 2.8, así como las pruebas comparativas con otros controladores similares, tanto en simulación como experimentales.

### 4.2 Diagrama a bloques del SFC con precompensación neuronal adaptable

El diagrama a bloques de este controlador se mostró en la figura 1.2, y se muestra redefinido de vuelta en la figura 4.1. La ley de control para este controlador está dada por,

$$\tau = \widehat{\mathbf{W}}^T \sigma(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) + \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \Delta \text{sign}(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

donde,

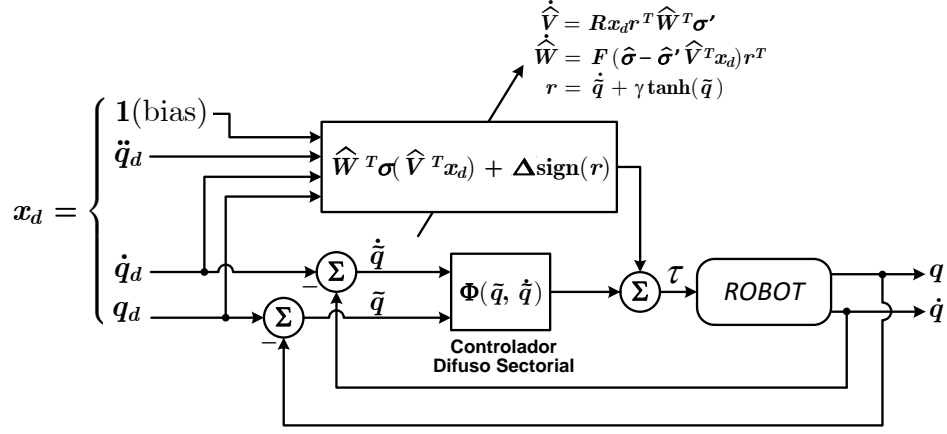


Figura 4.1: Control difuso sectorial con precompensación neuronal adaptable.

$$\mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d^T & \dot{\mathbf{q}}_d^T & \ddot{\mathbf{q}}_d^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (4.2)$$

es el vector de señales de entrada a la red neuronal, y  $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva de diseño,  $\gamma$  es un escalar positivo,  $\widehat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times L}$  es la matriz de pesos estimados de entrada,  $\widehat{\mathbf{W}} \in \mathbb{R}^{L \times n}$  es la matriz de pesos estimados de salida, cuyas dinámicas de actualización vienen dadas por (4.3) y (4.4),

$$\dot{\widehat{\mathbf{V}}} = \mathbf{R} \mathbf{x}_d \mathbf{r}^T \widehat{\mathbf{W}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (4.3)$$

$$\dot{\widehat{\mathbf{W}}} = \mathbf{F} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}' \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d \right) \mathbf{r}^T \quad (4.4)$$

Estás dinámicas de actualización de los pesos estimados, tanto de las entradas como de las salidas, se muestran al principio de la presentación de este nuevo esquema, pero en realidad se definen arbitrariamente durante la prueba de estabilidad para eliminar todos los términos que contienen tanto a  $\widetilde{\mathbf{V}}$  como a  $\widetilde{\mathbf{W}}$  en (4.28), tal que la derivada de la función de Lyapunov sea semidefinida negativa. Como estas actualizaciones de pesos se definen de manera arbitraria, y dependen también de la forma como se haya planteado la función de Lyapunov, existen un gran número de maneras en que se pueden

definir tal como se muestra en los ejemplos dados en [Lewis et al. \(1998\)](#) de la página 197 a la 208.  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{L \times L}$  son matrices diagonales de diseño definidas positivas;  $\hat{\sigma}$  y  $\hat{\sigma}'$  se definirán en (4.16) y (4.17); y,

$$\mathbf{r} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \gamma \mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (4.5)$$

La definición del vector  $\mathbf{r}$  surge de una sustitución de términos que se realiza con el objetivo de simplificar la notación algebraica y facilitar la manipulación de las ecuaciones durante la prueba de estabilidad.

$\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  es un vector  $n \times 1$  definido previamente en (3.8) con propiedades sectoriales útiles de sus mapeos entrada-salida, las cuales han sido bien establecidas en [Calcev \(1998\)](#); [Santibanez et al. \(2004\)](#), y también en las que se demostraron a través de los lemas desarrollados en el capítulo 3 de este trabajo.

### 4.3 Prueba de estabilidad del SFC con precompensación neuronal adaptable

#### Ecuación de lazo cerrado del SFC con precompensación neuronal adaptable

El lazo cerrado del sistema de control difuso con precompensación se obtiene de la siguiente manera:

Definiendo la función de par deseado,  $\tau_d$ , como en (3.10):

$$\tau_d = \mathbf{M}(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{f}_v\dot{\mathbf{q}}_d \quad (4.6)$$

dada la ecuación de la dinámica de un robot sin tomar en cuenta las incertidumbres ya que son desconocidas,  $\boldsymbol{\eta}$ , y considerando a la fricción de Coulomb como parte de éstas, se tiene que

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_v\dot{\mathbf{q}} \quad (4.7)$$

restando las ecuaciones (4.7) y (4.6), se tiene

$$\tau_d - \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{f}_v\dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_v\dot{\mathbf{q}}$$

$$\boldsymbol{\tau}_d - \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{f}_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \quad (4.8)$$

donde la Dinámica Residual,  $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  se definió ya en la sección 2.8

Aproximando ahora el par deseado,  $\boldsymbol{\tau}_d$  en (4.6) por medio de una red neuronal, se tiene que,

$$\boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}^T \mathbf{x}_d) + \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.9)$$

con  $\mathbf{x}_d$  definida como en (4.2)

Cerrando el lazo, sustituyendo la ley de control, (4.1), en la ecuación (4.8), y usando (4.9) para aproximar a  $\boldsymbol{\tau}_d$  se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{f}_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Delta \text{sign}(\mathbf{r}) \\ &\quad + \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}^T \mathbf{x}_d) \\ &\quad - \widehat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) + \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \quad (4.10)$$

En las redes neuronales multicapa, se puede aplicar una serie de Taylor para aproximar la función de activación,  $\boldsymbol{\sigma}(\cdot)$  en función de  $\widehat{\mathbf{V}}$ , la cual es la estimación de los pesos de entrada óptimos  $\mathbf{V}$ , tal que aplicando esta expansión se tiene para  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}^T \mathbf{x}_d)$  que,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}^T \mathbf{x}_d) &= \boldsymbol{\sigma}(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) + \boldsymbol{\sigma}'(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) (\mathbf{V}^T \mathbf{x}_d - \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) \\ &\quad + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}''(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) (\mathbf{V}^T \mathbf{x}_d - \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}'(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d)$  es el Jacobiano de  $\boldsymbol{\sigma}(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d)$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}'(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d)}{\partial \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d}; \quad (4.12)$$

Definiendo los errores de estimación de los pesos  $\widetilde{\mathbf{V}}$ ,  $\widetilde{\mathbf{W}}$  para  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  respectivamente como

$$\widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} - \widehat{\mathbf{V}} \quad (4.13)$$

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \widehat{\mathbf{W}} \quad (4.14)$$



Además, usando  $\mathcal{O}(\widetilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d)$  para concentrar los términos correspondientes a las derivadas de orden superior:

$$\mathcal{O}(\widetilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) = \frac{1}{2} \sigma''(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) (\widetilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d)^2 + \dots \quad (4.15)$$

También, si se define

$$\hat{\sigma} = \sigma(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) \quad (4.16)$$

$$\hat{\sigma}' = \sigma'(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) \quad (4.17)$$

Se puede reescribir (4.11) como sigue,

$$\sigma(\mathbf{V}^T \mathbf{x}_d) = \hat{\sigma} + \hat{\sigma}' \widetilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d + \mathcal{O}(\widetilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) \quad (4.18)$$

Aplicando esta expansión de series de Taylor a las redes neuronales en (4.10), y simplificando, queda

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = & -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}_v \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Delta \text{sign}(\mathbf{r}) \\ & + \widetilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma} - \widetilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma}' \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d + \widetilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma}' \widetilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d + \omega(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde  $\omega(t)$  se define como

$$\omega(t) = \widetilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma}' \mathbf{V}^T \mathbf{x}_d + \mathbf{W}^T \mathcal{O}(\widetilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) + \epsilon \quad (4.20)$$

con lo que, incluyendo las dinámicas de las actualizaciones de los pesos  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{V}$ , dadas en (4.4) y (4.3), se puede escribir las dinámicas de los errores en lazo cerrado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \widetilde{\mathbf{V}} \\ \widetilde{\mathbf{W}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [ -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{f}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Delta \text{sign}(\mathbf{r}) \\ + \widetilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma} - \widetilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma}' \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d + \widetilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma}' \widetilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d + \omega(t) ] \\ -\mathbf{R} \mathbf{x}_d \mathbf{r}^T (\mathbf{W}^T - \widetilde{\mathbf{W}}^T) \hat{\sigma}' \\ -\mathbf{F} (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}' \mathbf{V}^T \mathbf{x}_d + \hat{\sigma}' \widetilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) \mathbf{r}^T \end{bmatrix}$$

### Función candidata de Lyapunov

Para analizar la estabilidad del control difuso sectorial con precompensación, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned}
U(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}, t) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i \\
&+ \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\
&+ \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}) + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{W}})
\end{aligned} \tag{4.21}$$

la cual puede ser acotada por arriba y por debajo para comprobar que es una función radialmente desacotada y menguante, tal como lo requiere el corolario revisado en la Sección 2.7.

Acotando por debajo cada término de  $U(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}, t)$ , se tiene que:

$$\frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \tag{4.22}$$

$$\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \geq -\gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \tag{4.23}$$

para el término  $\sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i$  se aplican los Lemas 1 y 2 definidos en las subsecciones previas, respectivamente; por lo que entonces, aplicando además el resultado del Lema 3 para  $U(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}, t)$  queda que,

$$\begin{aligned}
U(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}, t) &\geq \frac{1}{2} \left( \lambda_{\min}\{\mathbf{M}\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \lambda_{\min}\{\mathbf{B}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i |\ln(\cosh(\tilde{q}_i))| - \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|. \\
&+ \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}) + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{W}})
\end{aligned}$$

En la forma cuadrática,

$$\begin{aligned}
U(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}, t) &\geq \frac{1}{2} \left( g(\tilde{q}_i) + \begin{bmatrix} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}) + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{W}})
\end{aligned}$$

con  $g(\tilde{q}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\ln(\cosh(\tilde{q}_i))|$ , y

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{\mathbf{B}\} & -\gamma\lambda_{\max}\{\mathbf{M}\} \\ -\gamma\lambda_{\max}\{\mathbf{M}\} & \lambda_{\min}\{\mathbf{M}\} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

donde  $\mathbf{Q}$  es positiva definida si  $\lambda_{\min}\{\mathbf{B}\} > 0$ , lo que ya se cumple porque  $B > 0$  en su definición, y si

$$\det(\mathbf{Q}) = \lambda_{\min}\{\mathbf{M}\}\lambda_{\min}\{\mathbf{B}\} - \gamma^2\lambda_{\max}\{\mathbf{M}\}^2 > 0 \quad (4.25)$$

se cumple también. Obteniendo  $\gamma$  de (4.25),

$$0 < \gamma < \frac{\sqrt{\lambda_{\min}\{\mathbf{M}\}\lambda_{\min}\{\mathbf{B}\}}}{\lambda_{\max}\{\mathbf{M}\}} \quad (4.26)$$

este valor de  $\gamma$  asegura que la función candidata de Lyapunov sea positiva definida y radialmente desacotada.

Para demostrar que la función candidata es decreciente o menguante, se aplica el resultado obtenido en (3.34) de la sección 3.3.2 a la parte de la integral sobre  $\phi(\cdot)$ , con lo que se obtiene,

$$\begin{aligned} U(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}, t) &\leq \frac{1}{2}\lambda_{\max}\{\mathbf{M}\}\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\max}\{\mathbf{R}_o\}\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \gamma\lambda_{\max}\{\mathbf{M}\}\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ &\quad + \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}) + \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

con  $\mathbf{R}_o = \mathbf{diag}\{\rho_i\}$ ,  $i = 1 \dots n$ , con lo que se prueba que la función candidata de Lyapunov es también decreciente o menguante.

### Derivada de la función candidata de Lyapunov

Para poder aplicar el teorema de estabilidad de LaSalle-Yoshizawa es necesario obtener la derivada de la función candidata en las trayectorias de la dinámica del sistema, dado que es diferenciable, el gradiente generalizado de Clarke se reduce al gradiente estándar. Aplicando la regla de Leibniz para  $\sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \phi(\xi_i, 0) d\xi_i$  queda:

$$\begin{aligned}
\dot{U}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{V}, \tilde{W}, t) \subset & \dot{\tilde{q}}^T M(q) K[f] \ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} + \Phi(\tilde{q}, 0)^T \dot{\tilde{q}} + \\
& \gamma \left[ \text{sech}^2(\tilde{q}) \dot{\tilde{q}} \right]^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \gamma \tanh(\tilde{q})^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} \\
& + \gamma \tanh(\tilde{q})^T M(q) \ddot{\tilde{q}} + \text{tr} \left( \tilde{V}^T R^{-1} \dot{\tilde{V}} \right) \\
& + \text{tr} \left( \tilde{W}^T F^{-1} \dot{\tilde{W}} \right)
\end{aligned}$$

En este caso la inclusión diferencial queda debido a que se está trabajando con soluciones desde el punto de vista de Filippov, y éstas se definen de esa manera, a la vez de que la derivada de la función de Lyapunov es una derivada generalizada de Clarke. Esto además agrega la multiplicación del conjunto  $K[\text{sign}(\mathbf{r})]$  a  $\ddot{\tilde{q}}$ .

Entonces, sustituyendo  $\ddot{\tilde{q}}$  de la ecuación de lazo cerrado, y simplificando,

$$\begin{aligned}
\dot{U}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{V}, \tilde{W}, t) \subset & -\dot{\tilde{q}}^T \left[ \Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) - \Phi(\tilde{q}, 0) \right] - \dot{\tilde{q}}^T F \dot{\tilde{q}} - \gamma \tanh(\tilde{q})^T F \dot{\tilde{q}} \\
& - \dot{\tilde{q}}^T \mathbf{h}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) - \gamma \tanh(\tilde{q})^T \mathbf{h}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \\
& + \gamma \tanh(\tilde{q})^T C^T(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \dot{\tilde{q}} + \gamma \dot{\tilde{q}}^T \text{sech}^2(\tilde{q}) M(q) \dot{\tilde{q}} \\
& - \gamma \tanh(\tilde{q})^T \Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) - \text{tr} \left( \tilde{V}^T R^{-1} \dot{\tilde{V}} \right) \quad (4.28) \\
& - \text{tr} \left( \tilde{W}^T F^{-1} \dot{\tilde{W}} \right) + \mathbf{r}^T (\boldsymbol{\omega}(t) - \Delta K[\text{sign}(\mathbf{r})]) \\
& + \mathbf{r}^T \left( \tilde{W}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{W}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' \tilde{V}^T \mathbf{x}_d + \tilde{W}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' \tilde{V}^T \mathbf{x}_d \right)
\end{aligned}$$

Donde  $K[\text{sign}(\mathbf{r})]$  se convierte en

$$K[\text{sign}(\mathbf{r})] = \mathbf{SIGN}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \text{SIGN}(r_1) \\ \text{SIGN}(r_2) \\ \text{SIGN}(r_3) \\ \vdots \\ \text{SIGN}(r_n) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

con

$$\text{SIGN}(r_j) = \begin{cases} 1 & ; r_j > 0 \\ [1 \quad -1] & ; r_j = 0 \\ -1 & ; r_j < 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

Aplicando las propiedades de la traza de matrices, y la transposición a la multiplicación de vectores, sustituyendo las funciones para  $\hat{\mathbf{V}}$  y  $\hat{\mathbf{W}}$ , definidas en (4.3) y (4.4) respectivamente, queda

$$\begin{aligned} \dot{U}(\cdot) \subset & -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})] - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{C}^T(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & + \gamma \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \text{sech}^2(\tilde{\mathbf{q}}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \\ & - \mathbf{r}^T [\boldsymbol{\omega}(t) - \Delta \text{SIGN}(\mathbf{r})] \end{aligned}$$

acotando término a término a  $\dot{U}(\cdot)$ , aplicando propiedades de la dinámica residual,  $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  y de  $\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ , de acuerdo a Kelly and Santibáñez (2003), definidas en (2.10) y (2.11), se tiene que,

$$-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq -\lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (4.31)$$

$$-\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{F}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (4.32)$$

$$-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq K_{h1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + K_{h2} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (4.33)$$

$$-\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq \gamma K_{h1} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \gamma K_{h2} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \quad (4.34)$$

$$\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{C}^T(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq \gamma K_{C1} \left( \|\dot{\mathbf{q}}_{dmax}\| \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \sqrt{n} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \right) \quad (4.35)$$

$$\gamma \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \text{sech}^2(\tilde{\mathbf{q}}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (4.36)$$

$$-\mathbf{r}^T [\boldsymbol{\omega}(t) - \Delta \text{SIGN}(\mathbf{r})] \leq -[\lambda_{\min}\{\Delta\} - k_{\omega}] \sum_{i=1}^n |r_i| \quad (4.37)$$

Para  $-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})]$ , usando todas las ecuaciones de (4.31) a (4.37), con las ecuaciones (3.43) y (3.65) obtenidas en la sección 3, la derivada de la función candidata de Lyapunov puede ser acotada por arriba como:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{U}}(\cdot) &\leq -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[ \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0}) \right] - \gamma \lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 + \gamma \Gamma \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\
&\quad - \lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{F}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + K_{h1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \\
&\quad + K_{h2} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \gamma K_{h1} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \gamma K_{h2} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \\
&\quad + \gamma K_{C1} \left( \|\dot{\mathbf{q}}_{dmax}\| \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \sqrt{n} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \right) + \gamma \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \\
&\quad - [\lambda_{\min}\{\Delta\} - k_\omega] \sum_{i=1}^n |r_i|.
\end{aligned}$$

Simplificando y ordenando queda

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{U}}(\cdot) &\leq -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[ \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0}) \right] - \gamma (\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} - K_{h2}) \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \\
&\quad + \gamma \left( \Gamma + \lambda_{\max}\{\mathbf{F}\} + \frac{K_{h2}}{\gamma} + K_{h1} + K_{C1} \|\dot{\mathbf{q}}_{dmax}\| \right) \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\
&\quad - \gamma \left( \frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} - K_{h1}}{\gamma} - \sqrt{n} K_{C1} - \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \right) \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \\
&\quad - [\lambda_{\min}\{\Delta\} - k_\omega] \sum_{i=1}^n |r_i|.
\end{aligned}$$

si se hacen las siguientes sustituciones,

$$\begin{aligned}
a &= \lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} - K_{h2} \\
b &= K_{h2} \\
c &= \Gamma + \lambda_{\max}\{\mathbf{F}\} + K_{h1} + K_{C1} \|\dot{\mathbf{q}}_{dmax}\| \\
d &= \lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} - K_{h1} \\
e &= \sqrt{n} K_{C1} + \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{U}}(\cdot) &\leq -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[ \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0}) \right] \\
&\quad - \gamma \left[ \begin{array}{c} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{array} \right]^T \underbrace{\left[ \begin{array}{cc} a & -\frac{b+c}{2} \\ -\frac{b+c}{2} & d-\gamma-e \end{array} \right]}_{P_2} \left[ \begin{array}{c} \|\tanh(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{array} \right] \\
&\quad - [\lambda_{\min}\{\Delta\} - k_\omega] \sum_{i=1}^n |r_i|.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Si  $P_2 > 0$ , entonces como  $-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{0})] < 0 \forall \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ , y si  $\lambda_{\min}\{\mathbf{\Delta}\} \geq k_\omega \geq \|\boldsymbol{\omega}(t)\| \forall t > 0$ , entonces  $\dot{U}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}, t) < 0$ . Para lograr esto se debe cumplir,

$$\begin{aligned} a > 0 &\implies \lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} > K_{h2} \\ \frac{d}{\gamma} - e > 0 &\implies \lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} > \gamma (\sqrt{n}K_{C1} + \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}) + K_{h1} \\ \det(P_2) > 0 & \end{aligned}$$

calculando  $\det(P_2)$ ,

$$\det(P_2) = a \left( \frac{d}{\gamma} - e \right) - \frac{(b + \gamma c)^2}{4} > 0$$

despejando a  $a$  a partir del determinante, y de ahí a  $\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}$ , sustituyendo el valor de  $d$  queda:

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} > \frac{(b + \gamma c)^2}{4\gamma (\lambda_{\min}\{\mathbf{F}\} - \gamma [\sqrt{n}K_{C1} - \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}] - K_{h1})} + K_{h2} \quad (4.39)$$

Si  $\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}$  cumple con (4.39),  $\det(P_2) > 0$ , también, despejando a  $\gamma$  a partir del determinante, queda:

$$\frac{2ad - bc - \sqrt{a^2d^2 - ab^2e - abcd}}{c^2 + 4ae} < \gamma < \frac{2ad - bc + \sqrt{a^2d^2 - ab^2e - abcd}}{c^2 + 4ae}$$

La existencia de  $\gamma$  y el que  $\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}$  cumpla con (4.39), garantiza que la derivada de la función candidata de Lyapunov propuesta sea definida negativa, con esto, y dado que es una función definida positiva y radialmente desacotada, cada curva de nivel  $U(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}, t) = c$  es compacta, con  $c \in \mathbb{R}, c > 0$ . Además como  $U(\cdot)$  es decreciente, se puede concluir que cada solución del sistema de lazo cerrado definido en (4.19) está acotada (Fischer et al., 2013).

Dado que el sistema de control usado tiene discontinuidades en el origen debido a que en su ley de control se tiene una función signo, aquí no se puede

aplicar el lema de Barbălat. Aplicando el corolario desglosado en la sección 2.7, a partir de la función de  $\dot{U}(\cdot)$ , dada en (4.38), se puede encontrar la función  $W_3(\cdot)$  que pide este teorema:

$$W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}) = \gamma \begin{bmatrix} \|\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} a & -\frac{b+c}{2} \\ -\frac{b+c}{2} & d - e \end{bmatrix}}_{P_2} \begin{bmatrix} \|\mathbf{tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

que es una función semidefinida positiva, si se cumplen las condiciones definidas anteriormente, por lo tanto, ya que se encontró a  $W_3$  y la función candidata de Lyapunov, como se demostró anteriormente, es globalmente desacotada y menguante, con esto se puede concluir también que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{q}}\| &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| &= 0. \end{aligned}$$

## 4.4 Diseño y simulación del SFC con precompensación neuronal adaptable

Para este controlador se eligió una función de activación  $\sigma(\mathbf{x}) = \tanh(\mathbf{x})$ , número de neuronas igual a 20,  $L = 20$ ; de nueva cuenta se diseñó y simuló usando como planta el robot de 2-DOF presentado en la Sección 2.8 modelado con fricción viscosa y de Coulomb, por lo que  $n = 2$ . Valores de matrices y escalares de diseño:

$$\begin{aligned} \alpha &= 7.7 & \Delta &= 0.69 \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 2.6 & 0 \\ 0 & 2.6 \end{bmatrix} & \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 2.2 & 0 \\ 0 & 2.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para el caso del bloque difuso sectorial se tomaron los mismos valores de diseño que para el control difuso sectorial precompensado diseñado en la sección 3.4.

Este controlador una vez diseñado, se simuló aplicando al robot las trayectorias de posición, velocidad y aceleración articular deseadas  $\mathbf{q}_d(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$



y  $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ , dadas de nuevo por las ecuaciones (3.67) a la (3.71). Se obtuvieron las respuestas de posición angular en cada articulación, error de posición angular en cada articulación, así como de pares aplicados, tal como se muestra en las figuras 4.2 – 4.6, respectivamente.

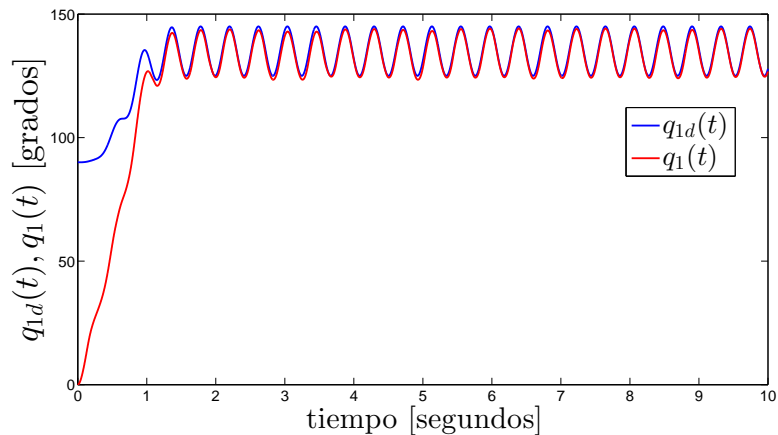


Figura 4.2: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1.

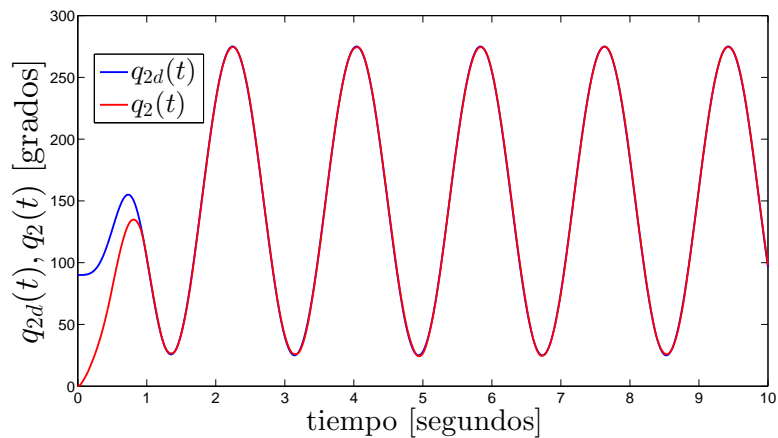


Figura 4.3: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2.

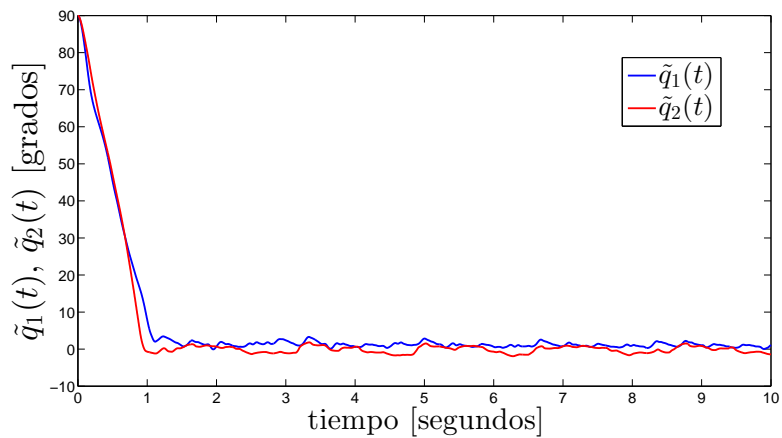


Figura 4.4: Error de posición en articulaciones 1 y 2.

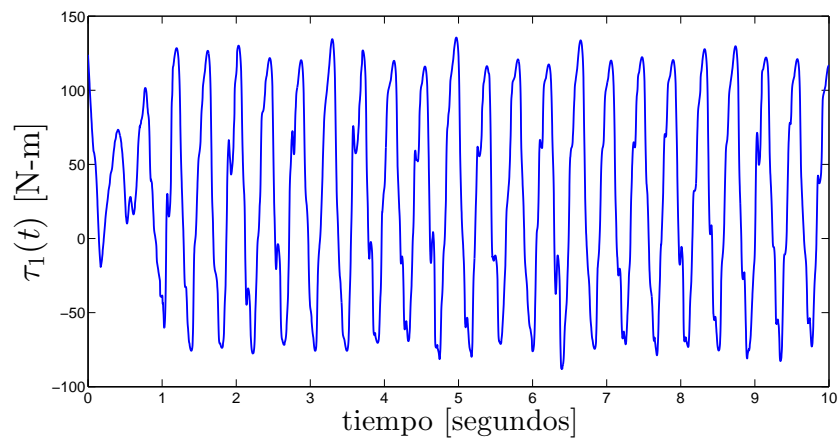


Figura 4.5: Par aplicado en la articulación 1.

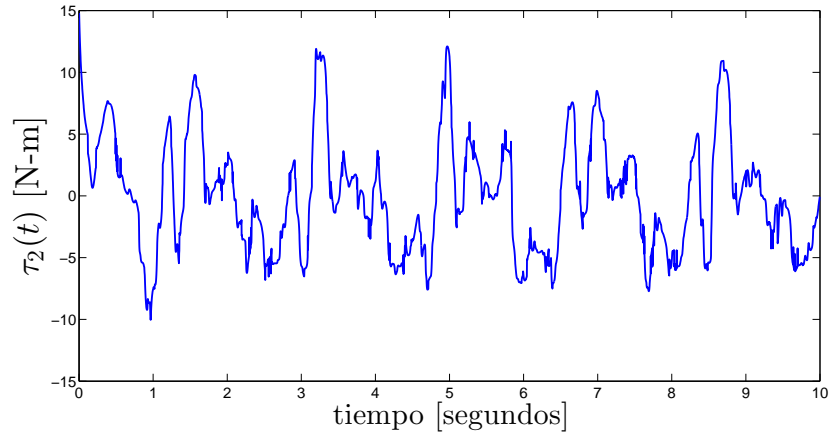


Figura 4.6: Par aplicado en la articulación 2.

Se cambió el número de neuronas a 40, y se obtuvieron los resultados en simulación de las respuestas de posición angular en cada articulación, error de posición angular en cada articulación, así como de pares aplicados, tal como se muestra en las figuras 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11, respectivamente.

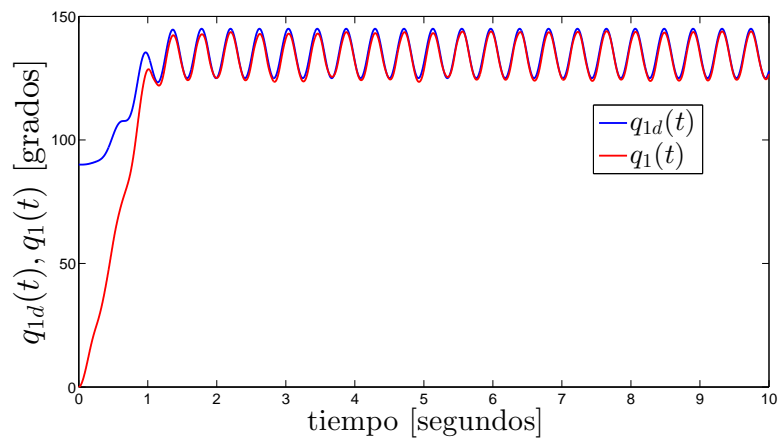


Figura 4.7: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1.

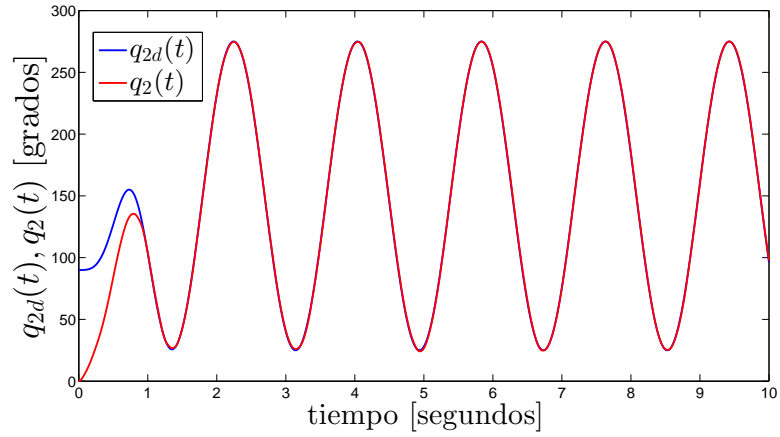


Figura 4.8: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2.

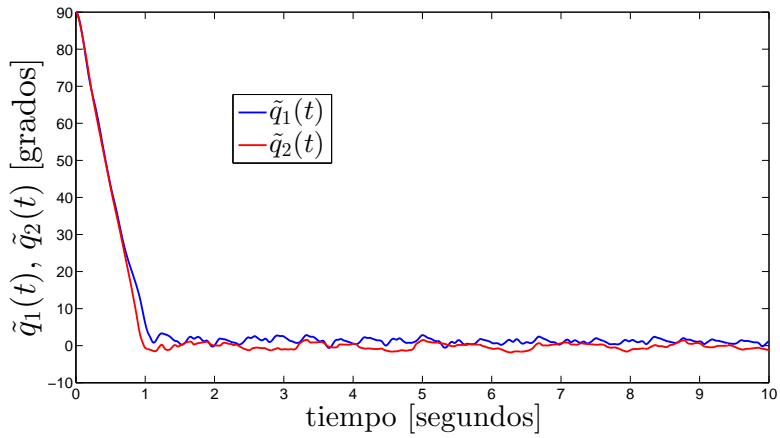


Figura 4.9: Error de posición en articulaciones 1 y 2.

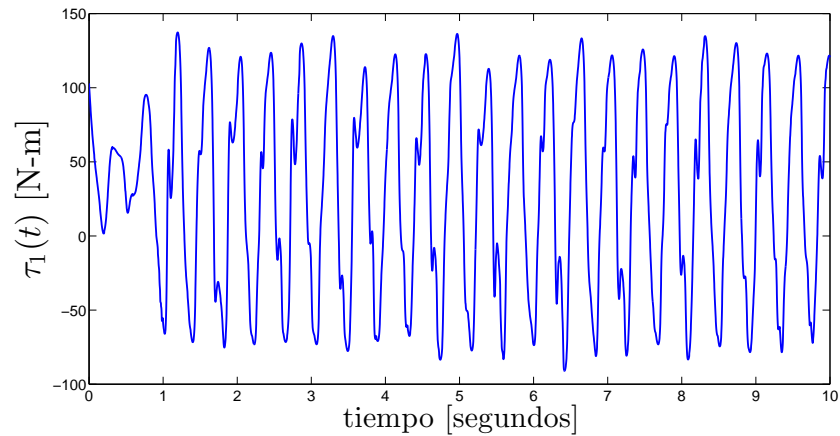


Figura 4.10: Par aplicado en la articulación 1.

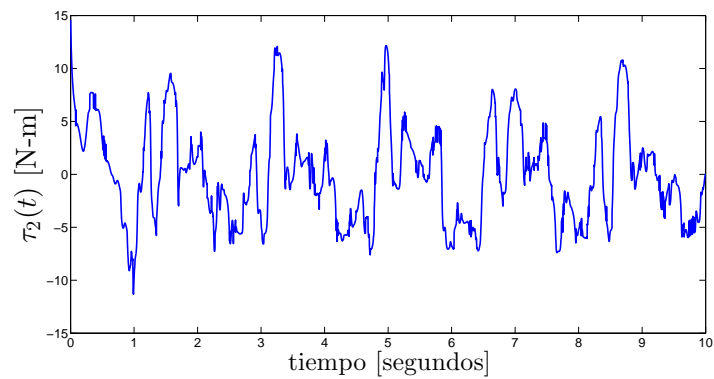


Figura 4.11: Par aplicado en la articulación 2.

En la sección 4.5.1 se compara la respuesta en simulación de este controlador para los dos valores considerados de número de neuronas, tanto gráfica como numéricamente, con otros controladores similares.

## 4.5 Pruebas experimentales al SFC con pre-compensación neuronal adaptable

La implementación experimental en tiempo real del controlador diseñado en la sección previa se realizó de nueva cuenta en el robot de 2-DOF físico,

usando en el WinMech Lab un periodo de muestreo de 2.5 ms. A continuación se muestran los resultados para las señales de referencia dadas en las ecuaciones (3.67) – (3.71), las respuestas experimentales de error de posición angular en cada articulación, así como de pares aplicados, se muestran en las figuras 4.12, 4.13 y 4.14, respectivamente.

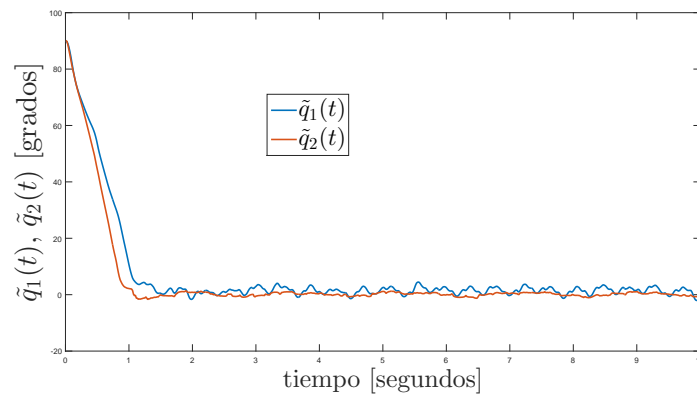


Figura 4.12: Error de posición en articulaciones 1 y 2.

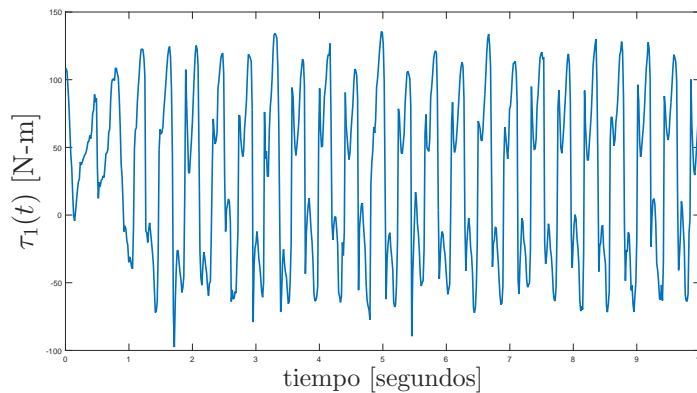


Figura 4.13: Par aplicado en la articulación 1.

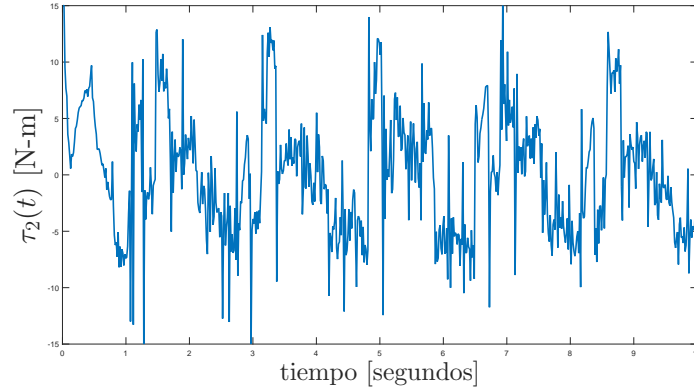


Figura 4.14: Par aplicado en la articulación 2.

En la sección 4.5.2 se compara la respuesta experimental en tiempo real de este controlador, tanto gráfica como numéricamente con otros controladores similares.

#### 4.5.1 Comparación de resultados obtenidos en simulación para cada controlador

Se diseñaron e implementaron en Matlab - Simulink los siguientes controladores para compararlos con el SFC con precompensación adaptable: control PD con precompensación (ver A.1), control PD no lineal con saturación de tangente hiperbólica en  $K_p$  y  $K_v$  precompensado (ver A.2), y control PD no lineal con precompensación neuronal adaptable (ver A.3), tal como se muestra en el apéndice A, donde además se incluyen sus respuestas individuales de errores de posición angular y pares aplicados. Las respuestas obtenidas de estos controladores se graficaron en conjunto con las del SFC precompensado y del SFC con precompensación neuronal adaptable, y en las figuras 4.15 y 4.16 se muestra dicha comparación en la respuesta del error de posición para las articulaciones 1 y 2,  $\tilde{q}_1(t)$  y  $\tilde{q}_2(t)$ , respectivamente.

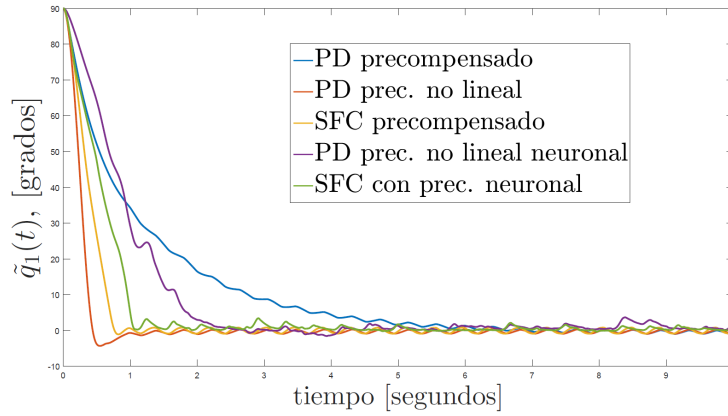


Figura 4.15: Comparación en simulación de la respuesta en el tiempo de  $\tilde{q}_1$  para cada controlador diseñado. Los dos controladores con parte neuronal poseen 20 neuronas en su capa oculta.

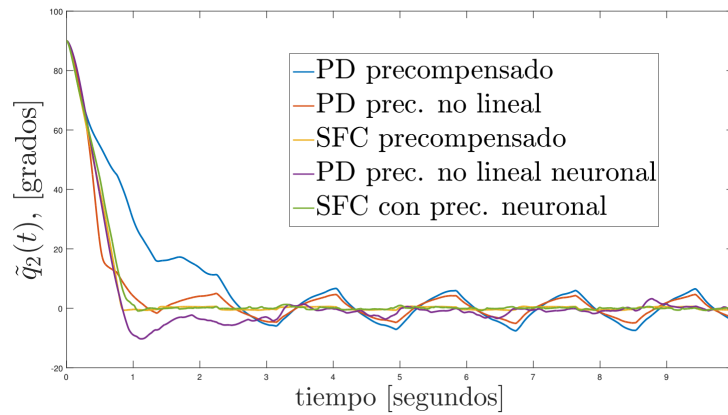


Figura 4.16: Comparación en simulación de la respuesta en el tiempo de  $\tilde{q}_2$  para cada controlador diseñado. Los dos controladores con parte neuronal poseen 20 neuronas en su capa oculta.

En la tabla 4.1 se muestra la comparación en el valor RMS del error de posición angular  $\tilde{\mathbf{q}}_{(RMS)}$  para cada controlador en cada una de las articulaciones para todas las muestras de señal obtenidas en la simulación completa, así como las de en estado estable  $\tilde{\mathbf{q}}_{(RMS,ss)}$ , donde el subíndice *ss* viene de las siglas de *steady-state* (que en inglés significa precisamente estado estable), considerado a partir de 5 s y hasta el final de la simulación.



Aparte de los controladores comparados en la gráfica se comparó la simulación que se obtuvo del SFC con precompensación neuronal adaptable usando 40 neuronas. El valor RMS se obtuvo por medio de la función  $rms()$  de Matlab. Esta función calcula el valor RMS de un vector  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$  (el vector puede ser columna o renglón indistintamente) de  $N$  elementos como (<https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/rms.html>)

$$rms(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i|^2} \quad (4.41)$$

Tabla 4.1: Tabla comparativa en simulación de  $\tilde{\mathbf{q}}_{(RMS)}$  total y  $\tilde{\mathbf{q}}_{(RMS,ss)}$ .

<i>Controlador</i>	$\tilde{\mathbf{q}}_1(RMS)$	$\tilde{\mathbf{q}}_1(RMS,ss)$	$\tilde{\mathbf{q}}_2(RMS)$	$\tilde{\mathbf{q}}_2(RMS,ss)$
PD precompensado	20.8706°	0.6086°	20.4219°	3.7940°
PD prec. no lineal	12.1784°	0.5106°	15.6026°	2.8373°
SFC precompensado	14.3812°	0.6217°	15.8117°	0.5126°
PD prec. no lin. neuro.	21.3372°	0.6842°	16.4593°	0.4984°
SFC prec. neuro.(20 N)	16.8950°	0.5724°	16.2417°	0.3278°
SFC prec. neuro.(40 N)	17.1922°	0.6855°	16.1869°	0.5149°

## 4.5.2 Comparación de resultados experimentales para cada controlador

Se realizó una comparación de la implementación experimental de los controladores diseñados y simulados en el apéndice A, donde esas implementaciones experimentales se muestran de manera individual en el Apéndice B, con los propuestos en este trabajo de tesis, ya llevadas a cabo individualmente en las sección 3.5 para el SFC precompensado, y al inicio de esta sección (sección 4.5) para el SFC con precompensación neuronal adaptable. Las respuestas obtenidas de todos estos controladores se graficaron en conjunto y en las figuras 4.17 y 4.18 se muestran las comparaciones en las respuestas del error de posición para las articulaciones 1 y 2, respectivamente.

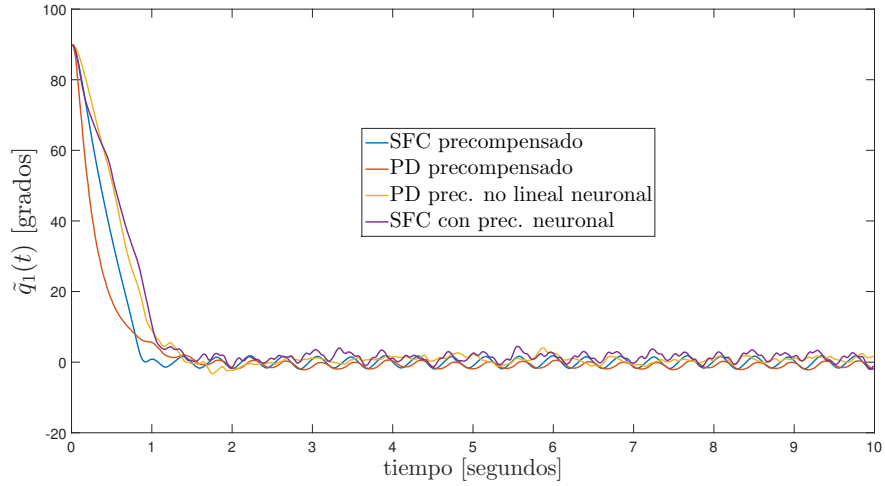


Figura 4.17: Comparación en tiempo real de la respuesta de  $\tilde{q}_1$  para cada controlador diseñado.

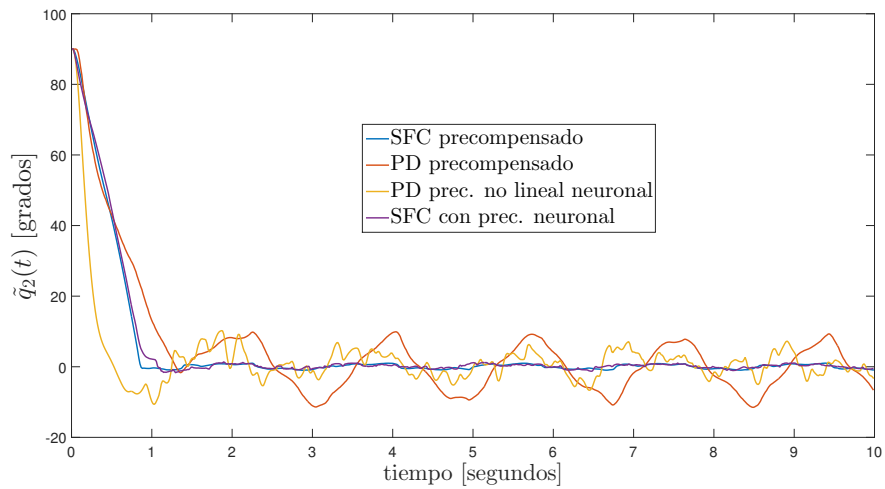


Figura 4.18: Comparación en tiempo real de la respuesta de  $\tilde{q}_2$  para cada controlador diseñado.

En la tabla 4.2 se muestra la comparación en el valor RMS del error de posición angular  $\tilde{\mathbf{q}}_{(RMS)}$  para cada controlador en cada una de las articulaciones para todas las muestras de señal obtenidas por el WinMech Lab en

la ventana de tiempo completa del experimento, así como las de en estado estable  $\tilde{\mathbf{q}}_{(RMS,ss)}$  considerado a partir de 5 s y hasta el final de la prueba experimental. De nueva cuenta el valor RMS se obtuvo por medio de la función  $rms( )$  de Matlab descrita en (4.41).

Tabla 4.2: Tabla comparativa de  $\tilde{\mathbf{q}}_{RMS}$  total y  $\tilde{\mathbf{q}}_{(RMS,ss)}$  en tiempo real.

<i>Controlador</i>	$\tilde{\mathbf{q}}_1(RMS)$	$\tilde{\mathbf{q}}_1(RMS,ss)$	$\tilde{\mathbf{q}}_2(RMS)$	$\tilde{\mathbf{q}}_2(RMS,ss)$
PD precompensado	12.1854°	1.1312°	17.6392°	6.2840°
PD prec. no lin. neuro.	17.8876°	1.2271°	11.0523°	3.4717°
SFC precompensado	15.218°	1.1837°	15.9701°	0.6274°
SFC prec. neuronal	17.8882°	1.8252°	16.3109°	0.5902°

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajos futuros

### 5.1 Conclusiones

Se han presentado de manera exitosa dos controladores que emplean lógica difusa aplicados al control de seguimiento de trayectorias en robots manipuladores, desarrollándose sus pruebas de estabilidad, así como sus implementaciones físicas en un robot de dos grados de libertad con el que se han hecho las pruebas experimentales que muestran el funcionamiento de los controladores propuestos. La ventaja de usar controladores basados en lógica difusa es el hecho de la gran flexibilidad que presentan, sobretodo cuando se tienen variaciones en los parámetros del robot, lo que fue altamente evidenciado en las pruebas experimentales comparativas, en las cuales los controladores que no poseían un núcleo de lógica difusa en su ley de control requirieron de múltiples sintonizaciones para llegar a tener una respuesta similar a la obtenida en simulaciones. El esquema de control propuesto SFC con precompensación posee las siguientes ventajas con respecto a los otros controladores revisados y comparados:

- Una función de Lyapunov estricta que garantiza una estabilidad asintótica uniforme global total, lo que, a su vez, garantiza que el robot manipulador al que se le aplique este controlador podrá seguir la trayectoria de posición deseada, independientemente de su posición angular inicial.
- La disponibilidad de una función de Lyapunov estricta permitirá llevar a cabo el análisis de sensibilidad a parámetros de forma muy directa.
- Más aún, la ley de control propuesta tiene la característica útil de pro-

porcionar pares acotados de acuerdo con los límites de los actuadores. Esto se debe a las características de acotamiento de salida del SFC, y a que su precompensación está formada por los parámetros del robot, que también están acotados, siempre que las trayectorias deseadas estén acotadas.

- Además, es muy sencillo de diseñar, ya que casi todos los parámetros de ajuste ya están definidos por las pautas de diseño del controlador difuso sectorial a las que tiene que adherirse, y el hecho de que el bloque de precompensación es fijo, sin parámetros que cambiar.
- Ya que debido a su ley de control, el diseño de cada SFC para cada articulación, para este esquema de control, se puede hacer de manera individual, lo que es contrario al controlador sectorial de par calculado, como se define en [Santibanez et al. \(2004\)](#), donde los SFC de todas las articulaciones de un robot tienen que afinarse juntos, lo que, para un robot industrial de 3, 5, 6 o 7 grados de libertad, se convierte en una tarea muy complicada. Lo anterior es muy sencillo de entender con una simple inspección de su ley de control, ya que la parte del SFC termina multiplicando a toda la dinámica del robot, y por lo mismo todos sus elementos afectan a la señal de control que se calcula para cada articulación individual, por lo que cualquier modificación de uno de los componentes del SFC afecta la respuesta de todas las articulaciones al mismo tiempo. Esto se comprobó en el artículo ([Pizarro et al., 2018](#)), donde al aplicar GA a la búsqueda de los valores de las particiones que definen a las MFs del SFC individual para cualquiera de las articulaciones, la función a optimizar (*fitness function* en inglés) requería de que se incluyeran valores del error de posición angular y de la pendiente del par de ambas articulaciones del robot CICESE, que es de 2-DOF.
- Por otro lado, esta independencia entre las partes del controlador se puede utilizar para modelar el robot como un sistema distribuido o descentralizado que puede conducir a esquemas de control mejores y más simples.
- Este controlador es muy sencillo de implementar. No es necesario que una computadora de gama alta ejecute el código que implementa este esquema de control, lo que permite que se pueda exportar a un sistema

integrado, como un DSP de bajo costo o un circuito integrado ya sintetizado a través de lenguaje de descripción de hardware, lo que a su vez puede reducir los costos de producción masiva de robots que usen este tipo de controlador.

- Esta estructura de control se puede aplicar a cualquier robot en serie que esté compuesto por  $n$ -eslabones sin necesidad de cambiar nada en su ley de control y procedimiento de diseño, manteniendo todas sus propiedades.
- La aplicación de este controlador en aplicaciones industriales se limita a aquellas, como soldadura o pintura, donde no hay muchos cambios en los parámetros de masa del robot. Las aplicaciones disponibles pueden extenderse a tareas de *pick-and-place* o similares, si este controlador está acoplado con un bloque adaptable o estimador que puede modificar su bloque de precompensación (*feedforward*).

Para el caso de la compensación neuronal adaptable, ésta aproxima perfectamente bien la dinámica deseada, que fue la tarea que se le dió; sin embargo no es capaz de eliminar por completo, también obviamente por las mismas características y propiedades de las redes neuronales, a la fricción de Coulomb, que siempre fué considerada como una perturbación, debido a que esta fricción es discontinua y las redes neuronales solamente aproximan funciones suaves, sin discontinuidades. Lo anterior se comprobó en simulación cuando se incrementó al doble el número de pesos de salida, y el remanente de error de posición en las articulaciones disminuyó a la mitad en promedio. La compensación neuronal le agrega al SFC con precompensación la capacidad de poder hacer la tarea de control de seguimiento de trayectorias sin conocer de manera exacta el modelo completo del robot. Por último, la actualización de los pesos de la red neuronal adaptable son dependientes del tipo de algoritmo de integración que se implemente, tal y como se observó en las simulaciones en Simulink. Asimismo, existe una dependencia muy fuerte en los valores con que se inicialicen los pesos estimados de entradas y salidas.

## 5.2 Trabajos a futuro

De los resultados obtenidos en este trabajo se pueden proponer los siguientes trabajos a futuro:

- Como en la mayoría de los casos reales del control de seguimiento de trayectorias en manipuladores, la velocidad angular en cada articulación se estima por medio de un filtro pasaltas (que aproxima a un derivador a bajas frecuencias, y limita la ganancia a altas frecuencias para evitar amplificar el ruido que generalmente contienen todas las señales provenientes de sensores) en vez de medirse directamente, es necesario analizar cómo este hecho modifica los resultados presentados para las dos propuestas de controladores que se presentan en esta tesis, sobretodo en el análisis de estabilidad desarrollado.
- Un esquema de control SFC precompensado donde en la precompensación se tome en cuenta la fricción de Coulomb, dado que cuando ésta se eliminaba del modelo del robot, o se añadía a la precompensación, el error de posición angular de cada articulación en estado estable era prácticamente cero. Esto involucraría, obviamente, cambiar la estrategia de análisis de estabilidad ya que la fricción de Coulomb es discontinua y de esa naturaleza quedaría la ley de control.
- Utilizar otros esquemas adaptables para aproximar la dinámica deseada aparte del que se usó en este trabajo, que fue una red neuronal adaptable. En vez de esta estructura se pueden aplicar: series de Fourier, como en [Villalobos-Chin and Santibáñez \(2021\)](#), wavelets, un sistema difuso, etcétera.
- Para los dos esquemas, con y sin sistema adaptable de aproximación de la dinámica deseada, cambiar el SFC que es en sí un sistema difuso tipo 1, por un tipo 2 y analizar tanto su estabilidad como su implementación para el control de seguimiento de trayectorias en manipuladores robóticos.
- Proponer otros esquemas de control que sean una combinación de todo lo anterior: SFC tipo 2 con diferentes tipos de esquemas de aproximación de la dinámica deseada del manipulador, con estimación de la velocidad angular en las articulaciones por medio de filtrado pasa altas que aproxima la derivada de la señal de posición angular a bajas frecuencias.

# Referencias

- Arimoto, S. (1995a). Fundamental problems of robot control: Part I, innovations in the realm of robot servo-loops. *Robotica*, 13(1):19–27.
- Arimoto, S. (1995b). Fundamental problems of robot control: Part II a non-linear circuit theory towards an understanding of dexterous motions. *Robotica*, 13(2):111–112.
- Arimoto, S. (1996). *Control Theory of Nonlinear Mechanical Systems - A Passivity-Based and Circuit-Theoretic Approach*. Clarendon Press, Oxford, U.K.
- Bai, Y., Zhuang, H., and Wang, D. (2006). *Advanced Fuzzy Logic Technologies in Industrial Applications*. Springer-Verlag Limited, London.
- Bhattacharjee, V., Chatterjee, D., and Karabasoglu, O. (2017). Hybrid control strategy for a semi active suspension system using fuzzy logic and bio-inspired chaotic fruit fly algorithm. *CoRR*, abs/1703.08878.
- Calcev, G. (1998). Some remarks on the stability of Mamdani fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 6:436–442.
- Calcev, G., Gorez, R., and Neyer, M. D. (1998). Passivity approach to fuzzy control systems. *Automatica*, 34:339–344.
- Campa, R., Kelly, R., and Santibanez, V. (2004). Windows-based real-time control of direct-drive mechanisms: platform description and experiments. *Mechatronics*, 14:1021–1036.
- Cao, Y. J. and Wu, Q. H. (1999). Teaching genetic algorithm using Matlab. *Int. J. Elect. Enging. Educ.*, 36:139–153.



- Cheah, C. C., Liu, C., and Slotine, J. J. E. (2006). Adaptive Jacobian tracking control of robots with uncertainties in kinematic, dynamic and actuator models. *IEEE Transactions on automatic control*, 51(6):1024–1029.
- Chen, W., Mills, J. K., Chu, J., and Sun, D. (2001). Uniform ultimate boundedness of a fuzzy logic controlled industrial robot. *J. Robot. Syst.*, 18:553–561.
- Cong, S. and Liang, Y. (2009). PID-like neural network nonlinear adaptive control for uncertain multivariable motion control systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(10):3872–3879.
- Coronado, A., Peñaloza-Mejía, O., Estrada-Manzo, V., and Bernal, M. (2017). A comparison of fuzzy schemes for trajectory tracking on the Furuta pendulum. In *Proceedings of the Congreso Nacional de Control Automático 2017*, pages 499–503.
- Cotter, N. (1990). The stone-weierstrass theorem and its application to neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1(4):290–295.
- Craig, J. J. (2005). *Introduction to Robotics, Mechanics and Control (3rd edition)*. PEARSON Prentice-Hall.
- Cybenko, G. (1989). Approximations by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2(4):303–314.
- Díaz, N. P., Jimenez, R. L., and Gonzalez, A. (2013). Tuning fuzzy control rules via genetic algorithms: An experimental evaluation. *Research Journal of Recent Sciences*, 2:81–87.
- Fischer, N., Kamalapurkar, R., and Dixon, W. E. (2013). LaSalle-Yoshizawa corollaries for nonsmooth systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(9):2333–2338.
- Funahashi, K.-I. (1989). On the approximate realization of continuous mappings by neural networks. *Neural Networks*, 2(3):183–192.
- Garcia-Hernandez, R., Ruz-Hernandez, J. A., Sanchez, E. N., and Saad, M. (2013). Real-time decentralized neural control for a five Dof redundant robot. *Intelligent Automation & Soft Computing*, 19(1):23–37.

- He, W., Dong, Y., and Sun, C. (2016). Adaptive neural impedance control of a robotic manipulator with input saturation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 46:334–344.
- He, W., Huang, H., and Ge, S. S. (2017). Adaptive neural network control of a robotic manipulator with time-varying output constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 47(10):3136–3147.
- Herrera, F., Lozano, M., and Verdegay, J. L. (1995). Tuning fuzzy logic controllers by genetic algorithms. *International Journal of Approximate Reasoning*, 12:299–315.
- Hsia, T. (1986). Adaptive control of robot manipulators - a review. In *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 183–189.
- Huang, S., Tan, K., and Lee, T. (2008). Adaptive neural network algorithm for control design of rigid-link electrically driven robots. *Neurocomputing*, 71(4):885–894. *Neural Networks: Algorithms and Applications 50 Years of Artificial Intelligence: a Neuronal Approach*.
- IFR.org (2017). International Federation of Robotics - executive summary world robotics 2016 - industrial robots. Consultada el 29 de mayo de 2017, ya no disponible, se eliminan los archivos anteriores al año en curso.
- IFR.org (2021a). Executive summary world robotics 2020 industrial robots. Consultada el 11 de mayo de 2021.
- IFR.org (2021b). International Federation of Robotics, robot definitions at ISO. Consultada el 29 de mayo de 2017.
- Kang, H. B. and Lim, H.-K. (2019). Robust  $H_\infty$  tracking controller design for 3-R link robotic manipulator via Takagi-Sugeno fuzzy form. In *2019 19th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, pages 1152–1157.
- Kelly, R. and Santibáñez, V. (2003). *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Automática robótica. Pearson, Prentice Hall, Madrid, Spain.
- Kelly, R., Santibanez, V., and Loria, A. (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag London Limited, Germany.

- Khalil, W. and Dombre, E. (2004). *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science paper edition Modeling, identification & control of robots. Elsevier Science.
- Koren, Y. (1985). *Robotics For Engineers*. McGraw-Hill, Israel.
- Kramer, O. (2017). *Genetic Algorithm Essentials*. Springer International Publishing AG, Switzerland.
- Lewis, F., Yesildirek, A., and Liu, K. (1996). Multilayer neural-net robot controller with guaranteed tracking performance. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 7(2):388–399.
- Lewis, F. L., Dawson, D. M., and Abdallah, C. T. (2004). *Robot Manipulator Control, Theory and Practice, 2nd Edition, Revised and Expanded*. Marcel Dekker, Inc., NewYork and Basel.
- Lewis, F. L., Yesildirak, A., and Jagannathan, S. (1998). *Neural Network Control of Robot Manipulators and Nonlinear Systems*. Taylor & Francis, Inc., USA.
- Li, W., Chang, X. G., Farrell, J., and Wahl, F. (2001). Design of an enhanced hybrid fuzzy P + ID controller for a mechanical manipulator. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, 31:938–945.
- Lily, J. H. (2010). *Fuzzy Control and Identification*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- Llama, M., De La Torre, W., Jurado, F., and Garcia-Hernandez, R. (2015a). Robust Takagi-Sugeno fuzzy dynamic regulator for trajectory tracking of a pendulum-cart system. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
- Llama, M. A., Flores, A., Santibáñez, V., and Campa, R. (2015b). Global convergence of a decentralized adaptive fuzzy control for the motion of robot manipulators: Application to the Mitsubishi PA10-7CE as a case of study. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 82(3-4):363–377.
- Llama, M. A., Kelly, R., and Santibanez, V. (2000). Stable computed-torque control of robot manipulators via fuzzy self-tuning. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, 30:143–150.

- Llama, M. A., Kelly, R., and Santibanez, V. (2001). A stable motion control system for manipulators via fuzzy self-tuning. *Fuzzy Sets Syst.*, 124:133–154.
- Luh, J. Y. S. (1983). Conventional controller design for industrial robots - a tutorial. *IEEE Transactions On Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-13(3):298–316.
- MacNeil, D. and Eliasmith, C. (2011). Fine-tuning and the stability of recurrent neural networks. *PLOS ONE*, 6(9):1–16.
- Marlin, T. (2015). *Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance, 2nd edition*. McGraw-Hill, Hoboken, NJ, USA.
- Megherbia, H., Megherbia, A., Megherbib, N., and Benmahammedc, K. (2014). Design and robustness enhancement of sectorial fuzzy controller via evolutionary algorithm. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 27:2757–2773.
- Merabet, A. and Gu, J. (2010). *Advanced Nonlinear Control of Robot Manipulators, Robot Manipulators New Achievements*. InTech, www.intechopen.com.
- Mester, G. (2014). Design of the fuzzy control systems based on genetic algorithm for intelligent robots. *Interdisciplinary Description of Complex Systems*, 12:245–254.
- Mijares, J. S. (2014). *Estabilidad Global de Reguladores Tipo PID No lineales de Ganancias Variables para Robots*. PhD thesis, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coahuila, México.
- Montoya-Cháirez, J., Moreno-Valenzuela, J., Santibáñez, V., Carelli, R., Rosomando, F. G., and Pérez-Alcocer, R. (2022). Combined adaptive neural network and regressor-based trajectory tracking control of flexible joint robots. *IET Control Theory & Applications*, 16(1):31–50.
- Nguyen, V.-A., Nguyen, A.-T., Dequidt, A., Vermeiren, L., and Dambrine, M. (2018). LMI-based 2-DoF control design of a manipulator via T-S descriptor approach. In *12th IFAC Symposium on Robot Control SYROCO 2018*, volume 51, pages 102–107.

- Ortega, R. and Spong, M. W. (1989). Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automatica*, 25(6):877–888.
- OSHA, U. S. (2020). United States Department of Labor, Occupational Safety and Health Administration (OSHA) technical manual, section IV, chapter 4 industrial robots and robot system safety, II. types and classification of robots. Consultada originalmente el 29 de mayo de 2017, revisada el 21 de noviembre de 2021.
- Paiva Santos, B., Charrua-Santos, F., and Lima, T. M. (2018). Industry 4.0: an overview. In *Proceedings of the World Congress on Engineering 2018*, volume II, pages 1–6.
- Paul, R. P. (1981). *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*. MIT Press, Cambridge, MA, USA.
- Pizarro, A., Garcia-Hernandez, R., and Santibanez, V. (2018). Fine-tuning of a fuzzy computed-torque control for a 2-DOF robot via genetic algorithms. *Proceedings of the Second IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems*, 51(13):326–331. 2nd IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2018.
- Prieto-Entenza, P. J., Cazarez-Castro, N. R., Aguilar, L. T., Cardenas-Maciel, S. L., and Lopez-Renteria, J. A. (2020). A Lyapunov analysis for Mamdani type fuzzy-based sliding mode control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 28(8):1887–1895.
- Puga-Guzmán, S., Moreno-Valenzuela, J., and Santibanez, V. (2014). Adaptive neural network motion control of manipulators with experimental evaluations. *The Scientific World Journal*, 2014:1–13.
- Quynh, N., Nan, W., and Yen, V. (2020). Design of a robust adaptive sliding mode control using recurrent fuzzy wavelet functional link neural networks for industrial robot manipulator with dead zone. In *Intelligent Service Robotics*, volume 13, pages 219–233.
- recode.net (2017). The number of robots sold in the U.S. will jump nearly 300 percent in nine years. <https://www.recode.net>, 1(1):1–9.

- Reyes, F. and Kelly, R. (1997). Experimental evaluation of identification schemes on a direct-drive robot. *Robotica*, 15(1):563–571.
- Reyes, F. and Kelly, R. (2001). Experimental evaluation of model-based controllers on a drive robot arm. *Mechatronics*, 11(1):267–282.
- RIA (2017). Robotic Industries Association (RIA), robotics industry news, north american 2016 breaks records for north american robot orders and shipments. Consultada el 29 de mayo de 2017.
- Rovithakis, G. A. and Christodoulou, M. A. (2000). *Adaptive Control with Recurrent High-order Neural Networks, Theory and Industrial Applications*. Springer.
- Santibanez, V. and Kelly, R. (2001). PD control with feedforward compensation for robot manipulators: analysis and experimentation. *Robotica*, 19(1):11–19.
- Santibanez, V., Kelly, R., and Llama, M. (2004). Global asymptotic stability of a tracking sectorial fuzzy controller for robot manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part B: Cybernetics*, 34:710–718.
- Santibanez, V., Kelly, R., and Llama, M. A. (2005). A novel global asymptotic stable set-point fuzzy controller with bounded torques for robot manipulators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13:362–372.
- Sciavicco, L. and Siciliano, B. (2000). *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, UK.
- Siddique, N. (2014). *Intelligent control. A hybrid approach based on fuzzy logic, neural networks and genetic algorithms. With a foreword by Bernard Widrow*, volume 517.
- Slotine, J. E. and Li, W. (1987). On the adaptive control of robot manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6:49–59.
- Solgi, Y. and Ganjefar, S. (2018). Variable structure fuzzy wavelet neural network controller for complex nonlinear systems. *Applied Soft Computing*, 64:674–685.

- Spong, M. and Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics and Control*. Wiley, New York, USA.
- Statista, T. S. P. (2017). Industrial robots: Estimated operational stock worldwide through 2019. Consultada el 29 de mayo de 2017.
- Takegaki, M. and Arimoto, S. (1981). A new feedback method for dynamic control of manipulators. *ASME J. Dynam. Syst., Meas. Control*, 103(2):119–125.
- Talon, A. and Curt, C. (2017). Selection of appropriate defuzzification methods: Application to the assessment of dam performance. *Expert Systems with Applications*, 70:160–174.
- Tatjewski, P. (2007). *Advanced Control of Industrial Processes: Structures and Algorithms*. Springer, UK.
- Vázquez, L. A., Jurado, F., Castañeda, C. E., and Santibáñez, V. (2018). Real-time decentralized neural control via backstepping for a robotic arm powered by industrial servomotors. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 29(2):419–426.
- Villalobos-Chin, J., Pizarro, A., Santibanez, V., Garcia-Hernandez, R., and Zavala-Rio, A. (2020). Non-lipschitz input membership functions that yield finite time convergence in sectorial fuzzy control. *Número Especial de la revista Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, 20(1):1–6.
- Villalobos-Chin, J. and Santibáñez, V. (2021). An adaptive regressor-free Fourier series-based tracking controller for robot manipulators: Theory and experimental evaluation. *Robotica*, 39(11):1981–1996.
- Wang, L. (1997). *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall.
- Wei, S., Wang, Y., and Zuo, Y. (2012). Wavelet neural networks robust control of farm transmission line deicing robot manipulators. *Computer Standards & Interfaces*, 34:327–333.
- www.recode.net (2017). The number of robots sold in the U.S. will jump nearly 300 percent in nine years. Consultada el 29 de mayo de 2017.

- Yarza, A., Santibanez, V., and Moreno-Valenzuela, J. (2011). Global asymptotic stability of the classical PID controller by considering saturation effects in industrial robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 8(4):160–174.
- Yoo, B. K. and Ham, W. C. (2000). Adaptive control of robot manipulator using fuzzy compensator. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(2):186–199.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(1):338–353.
- Zadeh, L. A. (1971). Similarity relations and fuzzy orderings. *Information sciences*, 3(1):177–200.
- Zheng, C., Su, Y., and Mercorelli, P. (2017). A simple fuzzy controller for robot manipulators with bounded inputs. In *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, pages 1737–1742.
- Zhou, Q., Zhao, S., Li, H., Lu, R., and Wu, C. (2019). Adaptive neural network tracking control for robotic manipulators with dead zone. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 30(12):3611–3620.



# APÉNDICES

# Apéndice A

## Diseño y simulación de los controladores a usar para comparación

En las siguientes secciones se muestran los diseños y simulación en Simulink y Matlab de los diferentes controladores usados para comparación con los controladores propuestos en este trabajo de tesis. En todos los casos el robot usado como planta es el robot de 2-DOF descrito en la sección 2.8 considerando en su modelado tanto fricción viscosa como de Coulomb. Las trayectorias de posición, velocidad y aceleración articular deseadas:  $\mathbf{q}_d(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ , están dadas por las ecuaciones (3.67) – (3.71).

### A.1 Control PD con precompensación

Se desarrolló y simuló un controlador PD con precompensación, cuyo diagrama de bloques se mostró en la figura 2.6.

La ley de control para este controlador viene dada por 2.12, de la Sección 2.4:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{M}(\mathbf{q}_d) \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{f}_v \dot{\mathbf{q}}_d,$$

Se asignaron los valores a las matrices de ganancias  $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  de:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Estos valores se calcularon a prueba y error para que los pares aplicados a las articulaciones del robot no excedan los valores límites de 150 [N-m] para la primera articulación, y de 15 [N-m] para la segunda articulación. Este controlador una vez diseñado, se simuló en Simulink donde se obtuvieron las respuestas de posición angular en cada articulación, error de posición angular en cada articulación, así como de pares aplicados, tal como se muestra en las figuras A.1 – A.5, respectivamente.

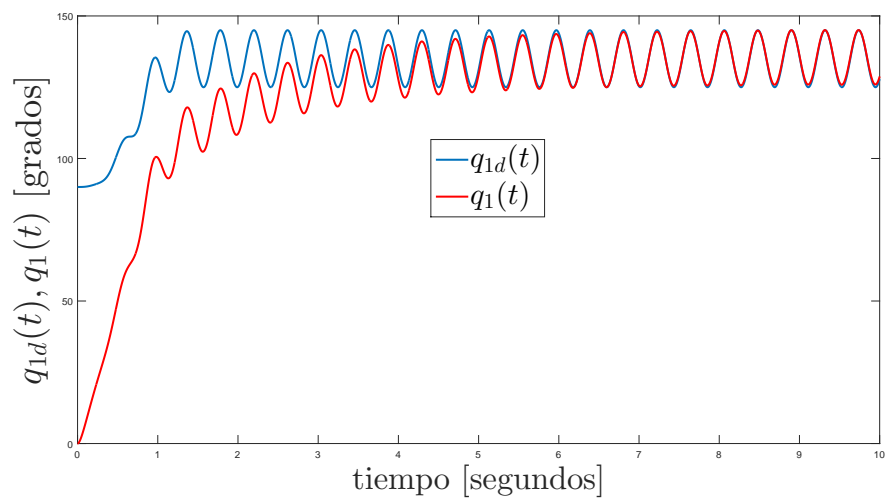


Figura A.1: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1.

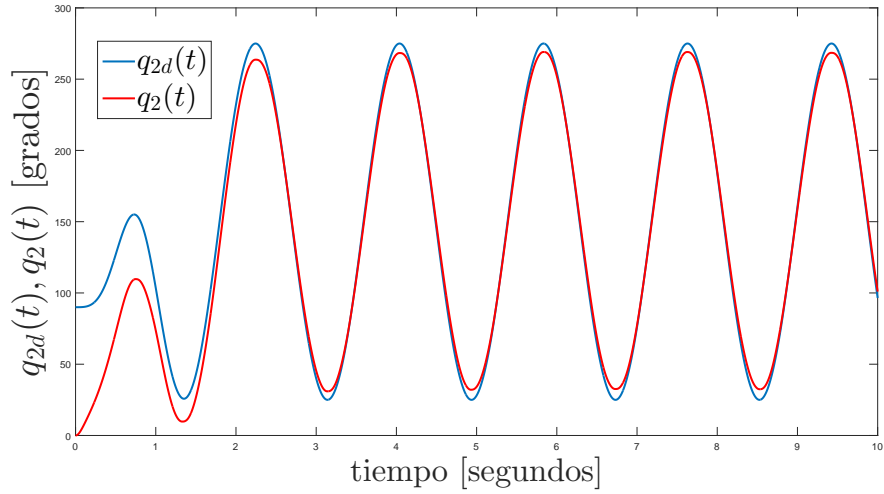


Figura A.2: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2.

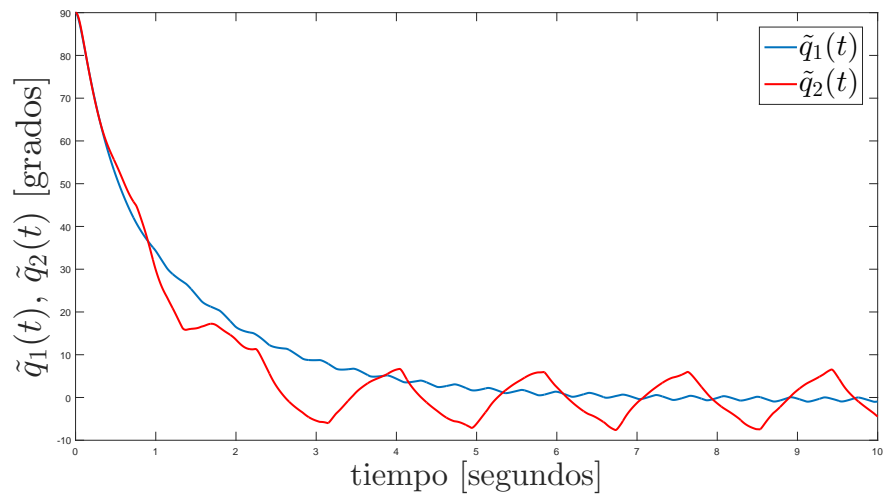


Figura A.3: Error de posición en articulaciones 1 y 2.

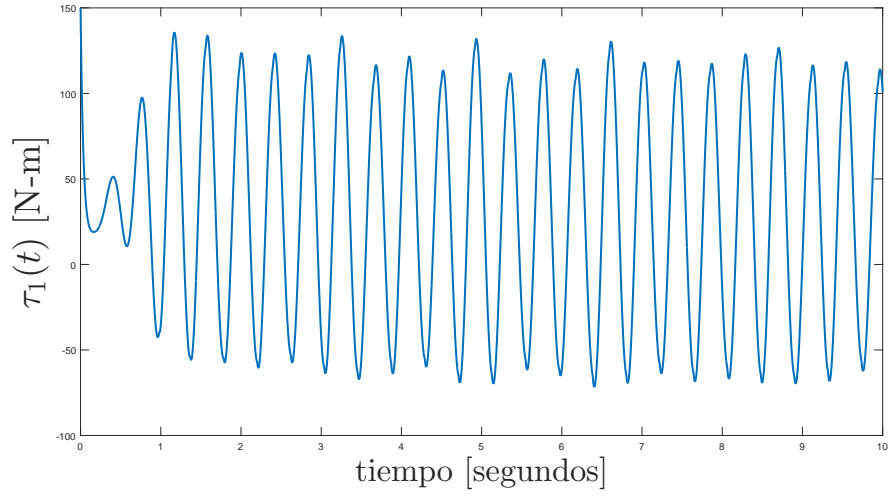


Figura A.4: Par aplicado en la articulación 1.

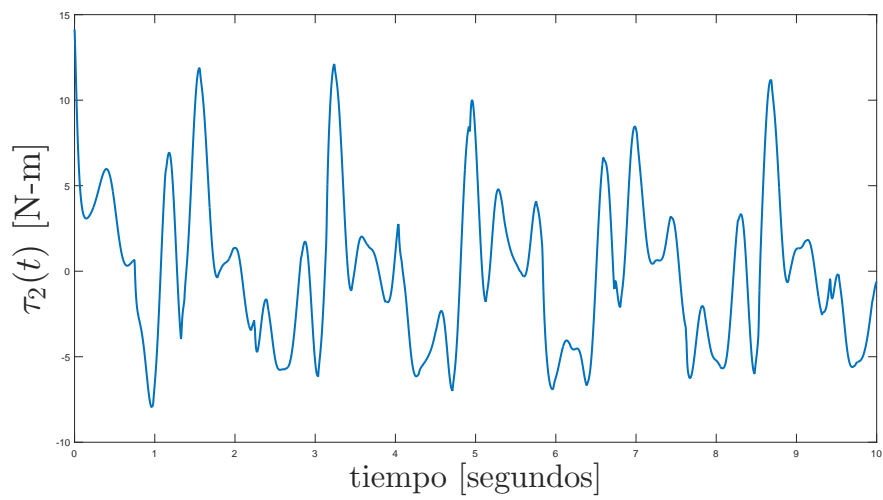


Figura A.5: Par aplicado en la articulación 2.

## A.2 Control PD no lineal con saturación de tangente hiperbólica en $K_p$ y $K_v$ precompensado

Se diseñó e implementó en simulación un controlador PD no lineal con saturación de tangente hiperbólica en  $K_p$  y  $K_v$  precompensado, cuya ley de control está dada por,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_v \tanh(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \mathbf{M}(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}_d)$$

donde  $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas definidas positivas de diseño llamadas ganancias de posición y velocidad, respectivamente. Como de costumbre  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$  denota el error de posición. La función tangente hiperbólica permite la saturación de los valores que entregan la multiplicación de las constantes por los errores de posición y velocidad.

El diagrama a bloques de este controlador es el mismo que el de la figura 2.6, pero cambiando la entrada al bloque  $\mathbf{K}_p$  por  $\tanh(\tilde{\mathbf{q}})$  en vez de  $\tilde{\mathbf{q}}$ .

Se asignaron los valores a las matrices de ganancias  $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  de:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 112.4 & 0 \\ 0 & 19 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 80.5 & 0 \\ 0 & 7.5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Estos valores se calcularon a prueba y error para que los pares aplicados a las articulaciones del robot no excedan los valores límites de 150 [N-m] para la primera articulación, y de 15 [N-m] para la segunda; y se obtuvieron las respuestas de posición angular en cada articulación, error de posición angular en cada articulación, así como de pares aplicados, tal como se muestra en las figuras A.6 – A.10, respectivamente.

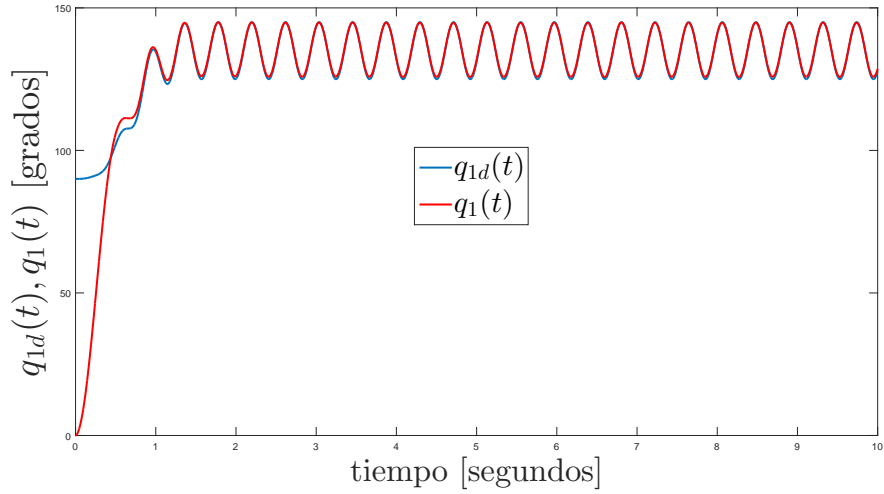


Figura A.6: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1.

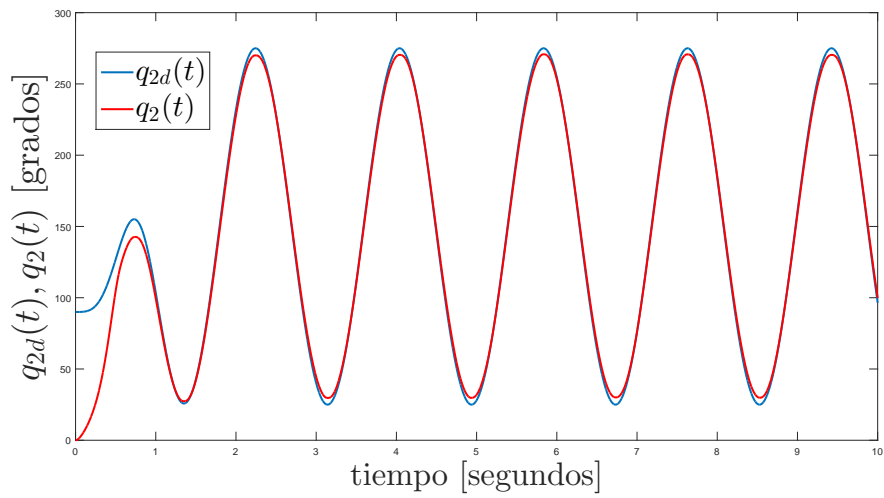


Figura A.7: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2.

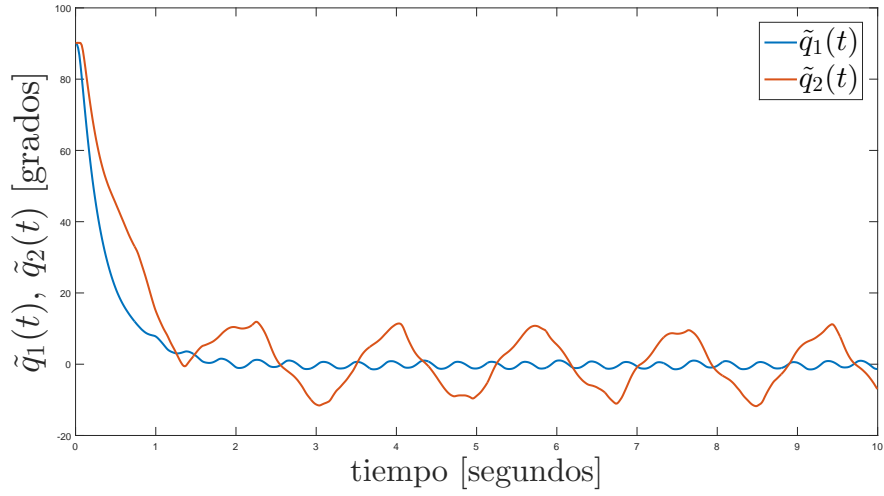


Figura A.8: Error de posición en articulaciones 1 y 2.

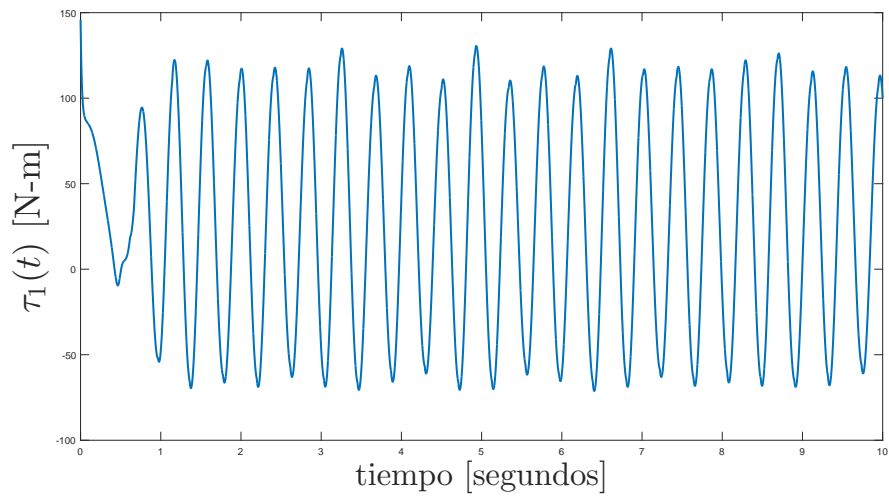


Figura A.9: Par aplicado en la articulación 1.



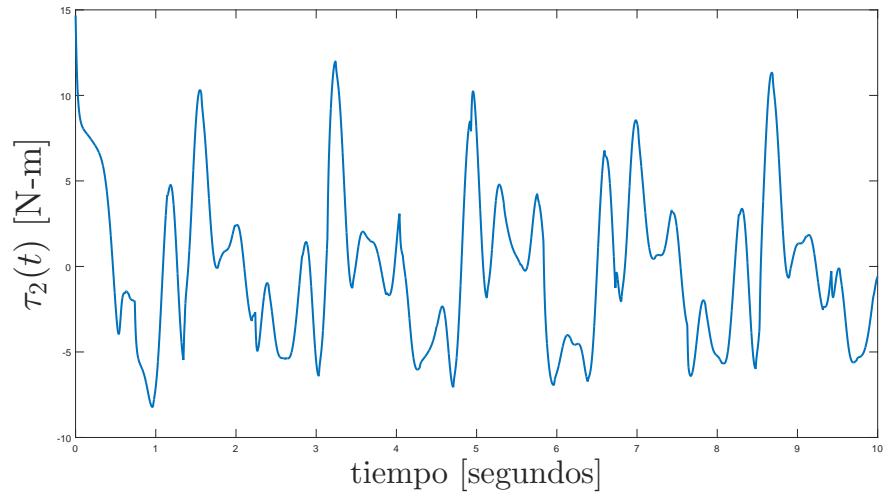


Figura A.10: Par aplicado en la articulación 2.

### A.3 Control PD no lineal con precompensación neuronal adaptable

Este controlador se tomó directamente del trabajo de Puga et al (Puga-Guzmán et al., 2014). Su diagrama a bloques se muestra en la figura A.11.

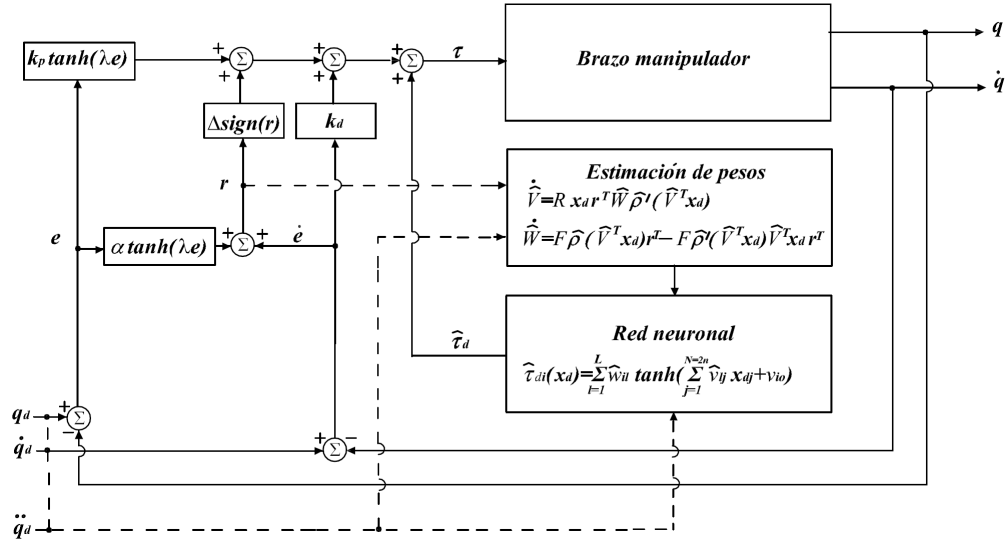


Figura A.11: Diagrama del Control PD no lineal con precompensación neuronal adaptable.

En este caso la ley de control está dada por,

$$\tau = \widehat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d) + \mathbf{K}_p \tanh(\gamma \tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Delta \text{sign}(r)$$

donde  $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_v, \Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas definidas positivas de diseño.  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$  denota el error de posición, y,

$$\mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d^T & \dot{\mathbf{q}}_d^T & \ddot{\mathbf{q}}_d^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (\text{A.3})$$

es el vector de señales de entrada a la red neuronal, en este caso  $N = 3n$ , donde  $n$  = número de eslabones.

$\gamma$  es un escalar positivo,  $\widehat{\mathbf{V}}$ , es la matriz estimada de pesos de entrada,  $\widehat{\mathbf{W}}$  es la matriz estimada de pesos de salida, con dinámicas,

$$\dot{\widehat{\mathbf{V}}} = \mathbf{R} \mathbf{x}_d \mathbf{r}^T \widehat{\mathbf{W}}^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{\widehat{\mathbf{W}}} = \mathbf{F} \left( \widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}' \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d \right) \mathbf{r}^T \quad (\text{A.5})$$

donde  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{L \times L}$  son matrices definidas positivas,  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \left( \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d \right)$ , y  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}'$  es el Jacobiano de  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ :

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}' = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}; \quad \mathbf{x} = \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x}_d \quad (\text{A.6})$$

También,

$$\mathbf{r} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \alpha \tanh(\gamma \tilde{\mathbf{q}}) \quad (\text{A.7})$$

Para este controlador se eligió una función de activación  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{tanh}(\mathbf{x})$ , número de neuronas igual a 20, por lo tanto  $L = 20$ . Los valores de las matrices y escalares de diseño quedaron dados como:

$$\alpha = 7.7 \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma = 0.4 \quad (\text{A.9})$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{diag}(0.69) \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{diag}(2.6) \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{diag}(2.2) \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 91 & 0 \\ 56.1 & 13.205 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 56.1 & 0 \\ 0 & 17.05 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Los pesos de las matrices  $\widehat{\mathbf{V}}$  y  $\widehat{\mathbf{W}}$  fueron definidos de manera aleatoria de inicio. Con todo esto, se obtuvieron las respuestas de posición angular en cada articulación, error de posición angular en cada articulación, así como de pares aplicados, tal como se muestra en las figuras [A.12](#) – [A.16](#), respectivamente.

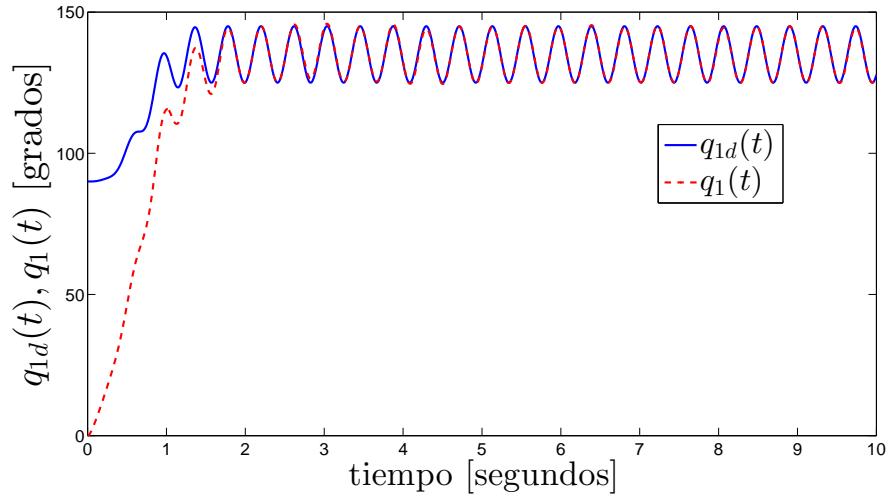


Figura A.12: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 1.

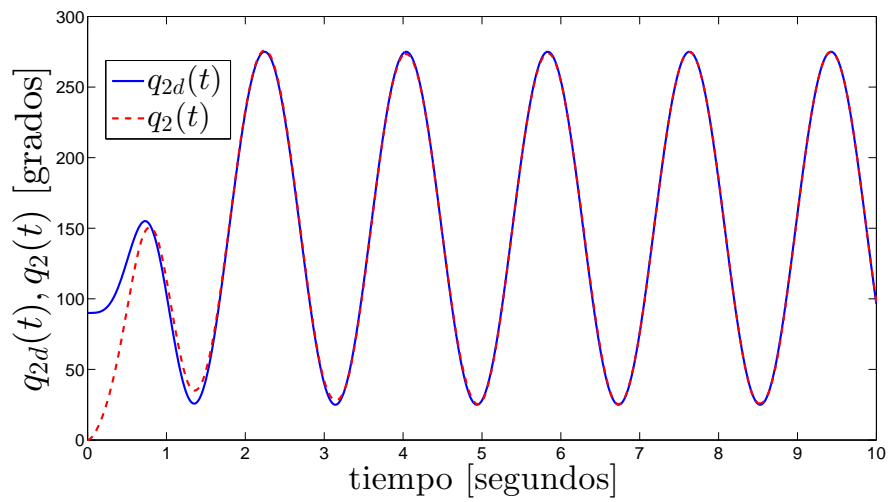


Figura A.13: Respuesta de posición deseada vs. actual en la articulación 2.

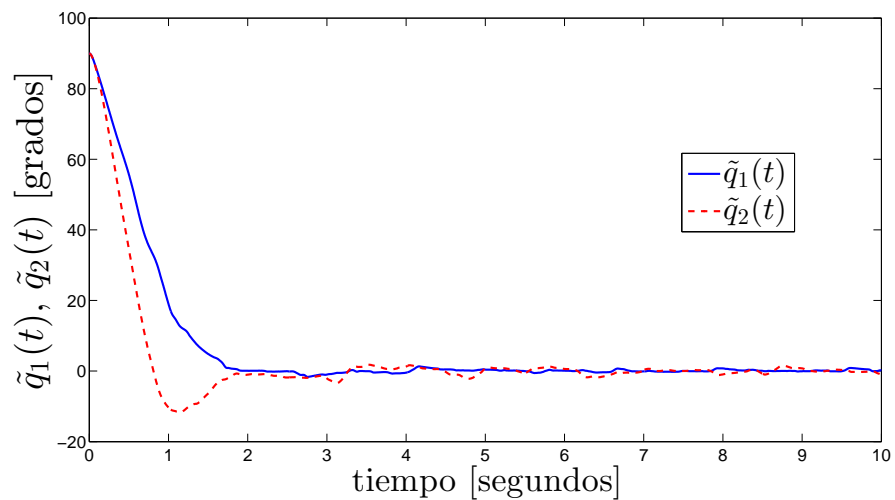


Figura A.14: Error de posición en articulaciones 1 y 2.

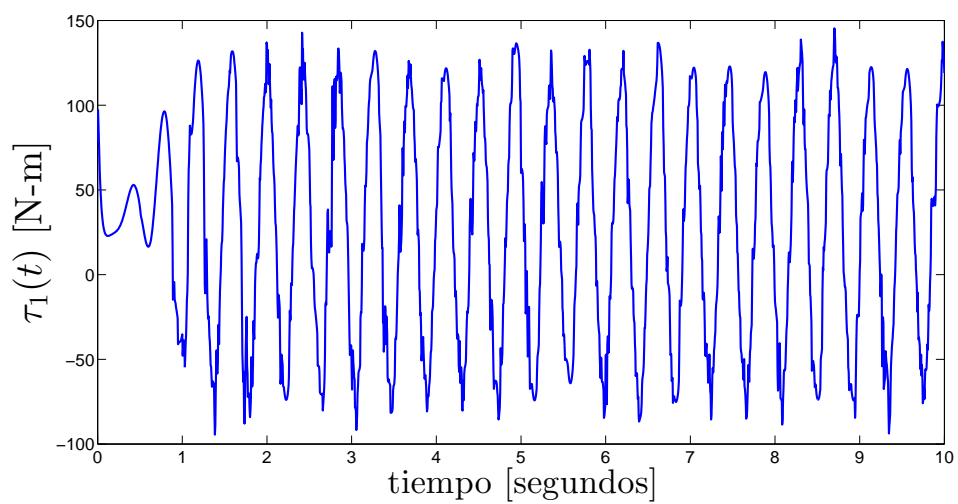


Figura A.15: Par aplicado en la articulación 1.

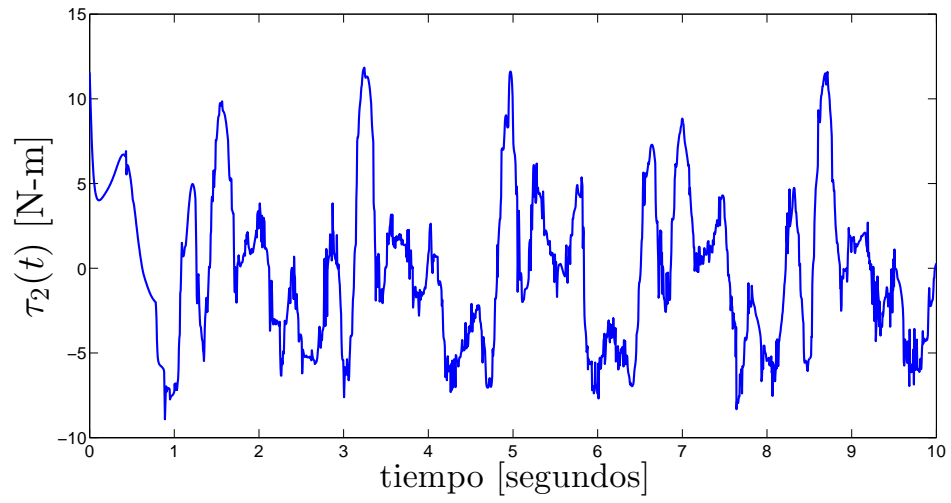


Figura A.16: Par aplicado en la articulación 2.

## Apéndice B

# Implementación experimental de los controladores a usar para comparación

En las siguientes secciones se muestran las implementaciones experimentales en tiempo real del Control PD con precompensación, y del Control PD no lineal con precompensación neuronal adaptable, diseñados previamente en las secciones [A.1](#) y [A.3](#) del apéndice [A](#), respectivamente, usados para comparación con los controladores propuestos en este trabajo de tesis. De nueva cuenta, en todos los casos el robot usado como planta es el robot de 2-DOF descrito en la sección [2.8](#) y ubicado en el edificio 27 del Instituto Tecnológico de La Laguna. En el WinMech Lab se usó un periodo de muestreo de 2.5 ms. Las trayectorias de posición, velocidad y aceleración articular deseadas:  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$  y  $\ddot{q}_d(t)$ , están también dadas por las ecuaciones [\(3.67\)](#) a [\(3.71\)](#).

### B.1 Control PD con precompensación

Se probó experimentalmente el Control PD con precompensación, y se obtuvieron los resultados mostrados para los errores de posición en cada articulación, así como los pares, tal como se muestra en las figuras [B.1](#), [B.2](#), [B.3](#), respectivamente.

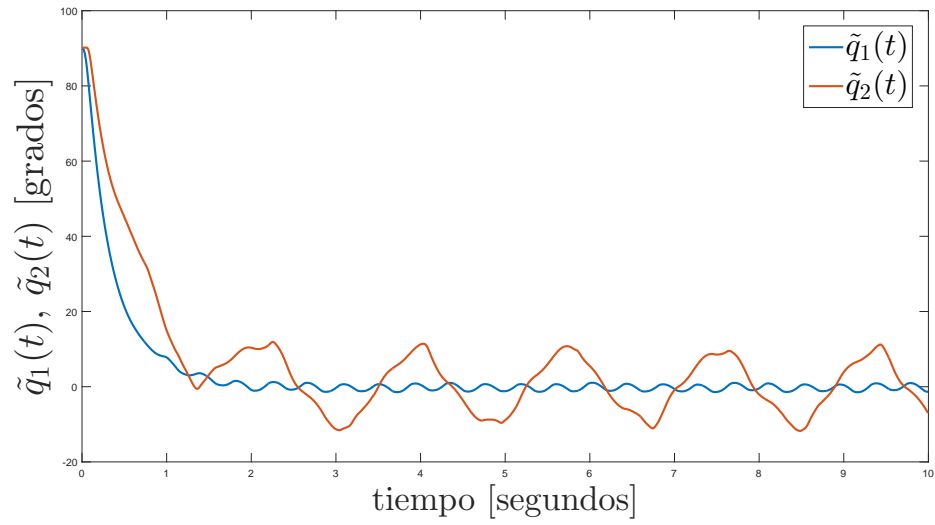


Figura B.1: Error de posición en articulaciones 1 y 2.

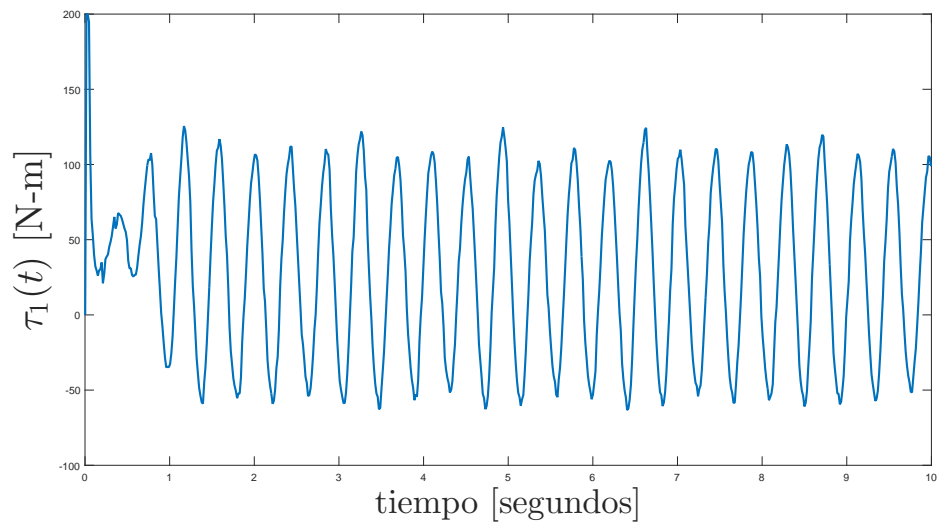


Figura B.2: Par aplicado en la articulación 1.



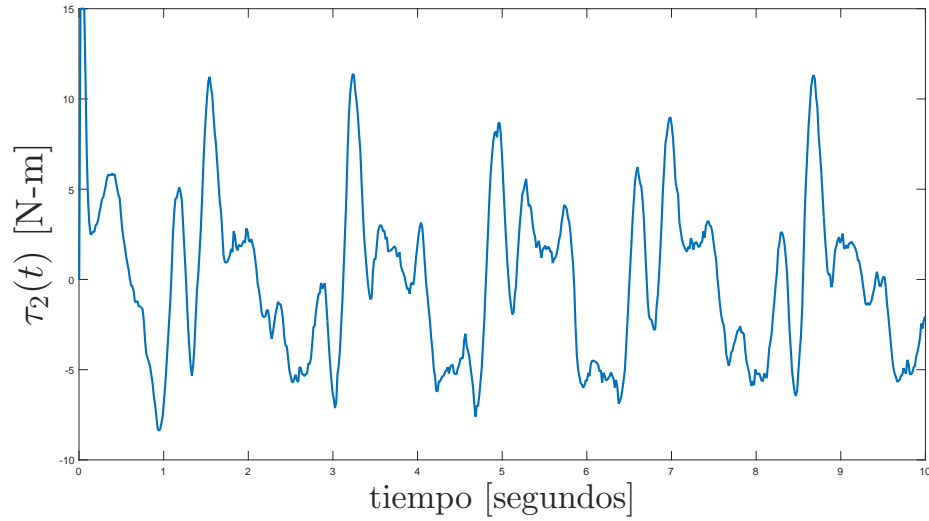


Figura B.3: Par aplicado en la articulación 2.

## B.2 Control PD no lineal con precompensación neuronal adaptable

Se hicieron pruebas experimentales también al Control PD no lineal con precompensación neuronal adaptable, y se obtuvieron los resultados mostrados para los errores de posición en cada articulación, así como los pares, tal como se muestra en las figuras B.4, B.5 y B.6, respectivamente.

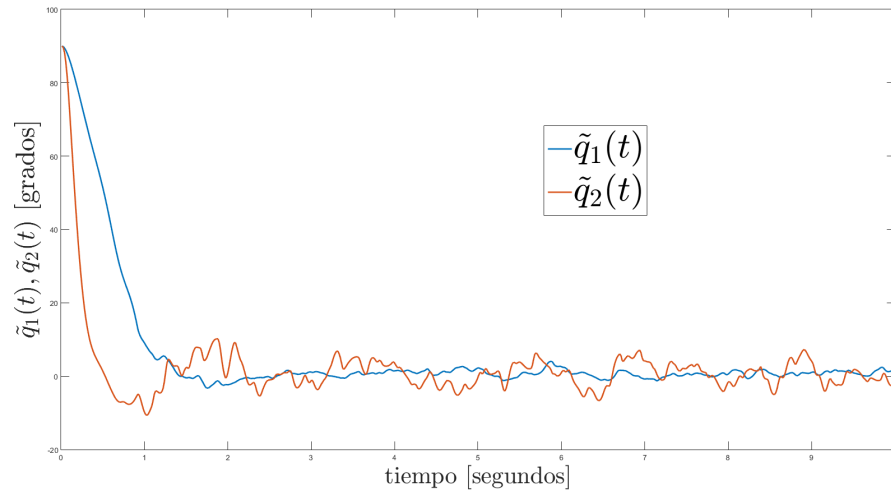


Figura B.4: Error de posición en articulaciones 1 y 2.

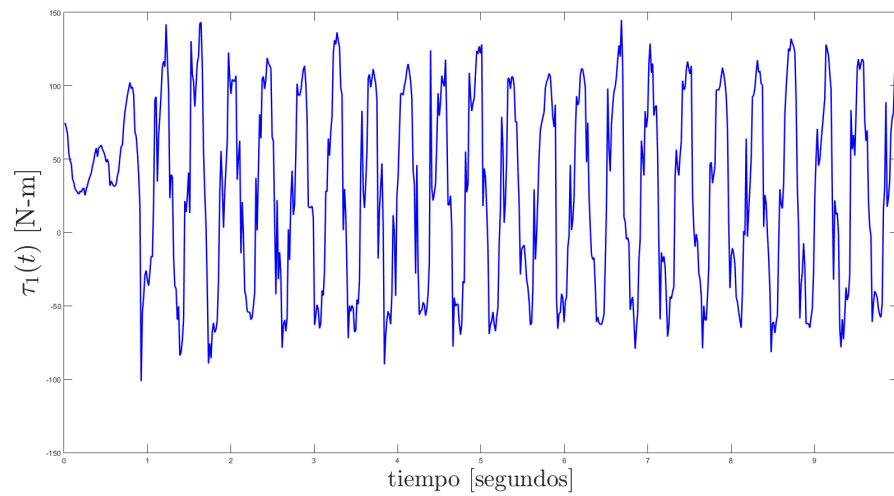


Figura B.5: Par aplicado en la articulación 1.

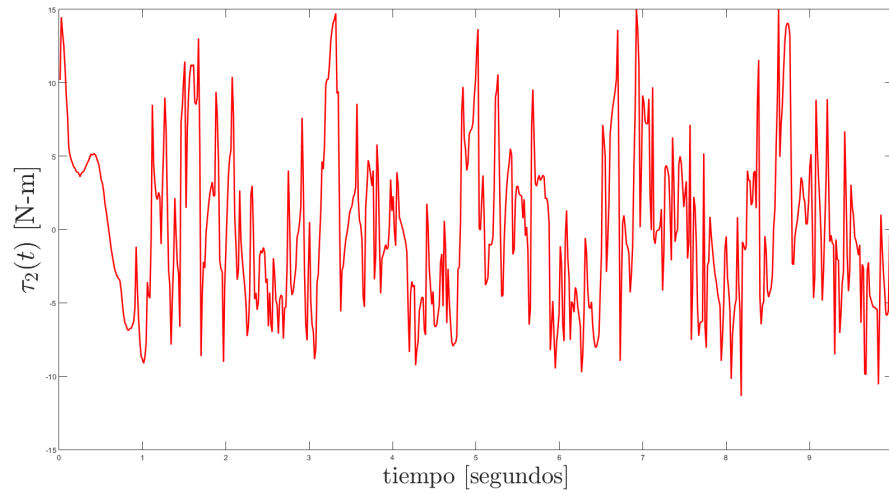


Figura B.6: Par aplicado en la articulación 2.

# ANEXO

# ANEXO P

## Publicaciones

### P.1 Ponencias en congresos arbitrados

1. Pizarro-Lerma, A. O., García-Hernández, R., Santibáñez, V. A. **Fine-Tuning of a Fuzzy Computed-Torque Control for a 2-DOF Robot via Genetic Algorithms**, Proceedings of the Second IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems, Guadalajara, Mexico, June 20-22, 2018.
2. Pizarro-Lerma, Andrés; Santibáñez, Víctor; García-Hernández, Ramón; Villalobos Chin, Jorge. **Evaluación experimental del control difuso sectorial con precompensación para seguimiento de trayectorias en robots manipuladores**. XXI Congreso Mexicano de Robótica 2019 (COMRob 2019), 13 al 15 de Noviembre, 2019, Manzanillo, Colima, México.
3. Pizarro-Lerma, Andrés O; García-Hernández, Ramón; Santibáñez, Víctor; Villalobos Chin, Jorge. **Experimental Evaluation of a Sectorial Fuzzy Controller Plus Adaptive Neural Network Compensation Applied to a 2-DOF Robot Manipulator**. 13th IFAC Workshop on Adaptive and Learning Control Systems (ALCOS 2019), 4 - 6 December, 2019, Winchester, UK. **(ya con dos citas)**
4. Pizarro-Lerma, Andrés O; Santibáñez, Víctor; García-Hernández, Ramón; Villalobos Chin, Jorge. **Sectorial Fuzzy Controller Plus Feed-forward applied to the Trajectory Tracking of Robot Manipulators**. 21st IFAC World Congress 2020, Berlin, Germany.

## Fine-Tuning of a Fuzzy Computed-Torque Control for a 2-DOF Robot via Genetic Algorithms

A. O. Pizarro-Lerma \* R. García-Hernández \*\*  
V. A. Santibáñez \*\*

\* Instituto Tecnológico de Sonora, 5 de febrero 818 sur, Col. Centro,  
Cd. Obregón, Son., México, 85000, (e-mail: apizarro@itson.mx)

\*\* Instituto Tecnológico de La Laguna, Blvd. Revolución y Av. Instituto  
Tecnológico de La Laguna s/n, Centro, 27000 Torreón, Coah.,  
México, (e-mail: rgarciah@correo.itlalaguna.edu.mx,  
vsantiba@itlalaguna.edu.mx)

---

**Abstract:** This paper shows that a hybrid fuzzy logic controller depends mainly on its control fuzzy rules and fuzzy membership functions. However, it is important to adjust these parameters for the process to be controlled. An strategy for fine-tuning membership functions using genetic algorithms (GA) in order to control the tracking position of a robot possessing two joints is presented. Also, the comparison between the controller without optimisation and the optimised controller using GA is shown in simulations.

*Keywords:* Genetic Algorithms, Fuzzy Control, Robot Control.

---

### 1. INTRODUCTION

Tracking motion control of robot manipulators usually involves the use of a Proportional-Integral-Derivative (PID) controller or some of its sub-derivatives in combination with compensation of gravity, Kelly et al. (2005), Khalil and Dombre (2004). Nevertheless, robot manipulators have inherent physical constraints such as saturation nonlinearities of actuators, and friction phenomena at the robot joints. These constraints may deteriorate the system performance and stability. Saturation may lead to a lack of stability guarantee and may spoil electromechanical actuators, and friction will cause steady-state tracking error and oscillations, Santibanez et al. (2005). To counter attack these phenomena, hybrid control techniques that combine fuzzy logic and conventional control to design fuzzy logic controllers have been proposed. These approaches can offer better control performance of complex systems, Llama et al. (2000), Chen et al. (2001), Li et al. (2001). The idea behind this approach is to mix model-based control techniques with fuzzy logic schemes. For these fuzzy controllers, global asymptotic stability of the closed-loop system has been proved. Fuzzy logic has been also utilized to generate feedforward signals in a computed torque control in Llama et al. (2000). In contrast with the use of fuzzy logic to help conventional control schemes by means of fuzzy tuning or fuzzy feedforward signals, one important application of fuzzy logic is as direct fuzzy controllers where the control actions are directly computed by the fuzzy controller. A class of these fuzzy controllers, so-called Sectorial Fuzzy Controllers (SFC), has useful sectorial properties of their input-output mappings, which have been established in Calcev (1998) and Calcev et al. (1998). A SFC has two inputs and one output and it can

be characterized from an input-output point of view as a nonlinear static mapping. The sectorial properties of the SFC allow to analyse the stability of these fuzzy control systems. Instead of using fuzzy techniques for tuning controller gains or add fuzzy feedforward signals, in Santibanez et al. (2005), Llama et al. (2000) and Llama et al. (2001) a motion tracking controller for robot manipulators based on a combination of a model based technique and a sectorial Mamdani fuzzy scheme has been proposed and proved to be asymptotically stable. However, the membership functions (MFs) used in all these previous works have been proposed in a heuristic way. Several approaches in this regard have already been proposed for fine tuning a fuzzy control systems via Genetic Algorithms (GA) in Herrera et al. (1995), Díaz et al. (2013) and Bhattacharjee et al. (2017). But none has been applied to optimise fuzzy controllers used in robot control. Also, the problematic encountered in the definition of both input and output fuzzy membership functions is better suited for optimisation using GA instead of other optimisation tools. This problematic deals with having a reduced torque at every joint during the whole operation of the robot, with special emphasis on the overshoot that usually appears at start-up, while reducing the position error to the minimum attainable.

The complete control structure proposed in this work is composed by a sectorial fuzzy Mamdani Proportional-Derivative (PD) controller plus a full nonlinear robot dynamics compensation computed torque control, in such way that this structure leads to a very simple closed-loop system, which is represented by an autonomous nonlinear differential equation as proposed in Santibanez et al. (2005), but, to fine tune the fuzzy section of the controller, we use GA to optimize the definition of both the inputs

# Evaluación experimental del control difuso sectorial con precompensación para seguimiento de trayectorias en robots manipuladores

Andrés Pizarro-Lerma  
Dpto. de Ingeniería Eléctrica y Electrónica  
Instituto Tecnológico de Sonora  
Cd. Obregón, Sonora, México  
andres.pizarro@itson.edu.mx

Ramón García-Hernández  
TecNM / Instituto Tecnológico de La Laguna  
Torreón, Coahuila, México  
rgarciah@correo.itlalaguna.edu.mx

Víctor Santibáñez  
TecNM / Instituto Tecnológico de La Laguna  
Torreón, Coahuila, México  
vsantiba@itlalaguna.edu.mx, santibanez@ieccc.org

Jorge Villalobos Chin  
TecNM / Instituto Tecnológico de La Laguna  
Torreón, Coahuila, México  
jorgevillaloboschin@hotmail.com

**Resumen**—En este trabajo se propone un controlador difuso sectorial con precompensación para control de seguimiento de trayectorias en robots manipuladores. Se presentan los resultados experimentales y se hace una comparación del desempeño obtenido con su contraparte clásica: el controlador PD con precompensación. Los resultados obtenidos por el controlador propuesto indican un mejor comportamiento y tolerancia a variaciones paramétricas.

**Index Terms**—Control difuso sectorial, seguimiento de trayectorias, control con precompensación.

## I. INTRODUCCIÓN

El portal de estadísticas “Statista” [1] y el “Executive Summary World Robotics 2016 - Industrial Robots” [2] reportan que se calcula que entre 1.6 y 1.824 millones de robots industriales estaban operando a nivel mundial en 2015, con una estimación de un incremento a 2.589 millones de robots ya instalados para 2019; y una inversión en la compra e instalación de robots de casi 2 mil millones de dólares en 2016, con una tasa de crecimiento promedio anual de 16% proyectada de 2016 a 2025 [3]. Dada la gran cantidad de robots en uso en la actualidad, industrialmente hablando, y a que cada vez se les utiliza en aplicaciones más exactas y precisas, es necesario encontrar un sistema de control que sea capaz de controlar la posición, velocidad y aceleración de las articulaciones de un robot serie, tal que cumpla con las especificaciones de calidad en la tarea en la que se le de uso. Las propuestas de control aún vigentes en el ámbito industrial son los controladores Proporcional+Integrador+Derivativo (PID) o simplificaciones de éste, diseñados con alguna de las metodologías de control clásico. Takegaki y Arimoto [4] y Arimoto [5] demostraron, utilizando Lyapunov, que controladores como el PD y el PID son efectivos como controladores de regulación para robots, a

pesar de las no linealidades y las incertidumbres en su dinámica. Un robot es altamente no lineal, con variaciones en sus parámetros casi en cada punto de ejecución de una tarea, sobre todo en el transporte de piezas. El desarrollo de controladores, capaces de afrontar los cambios de los puntos de operación y a perturbaciones, ha ido en dos direcciones: control adaptable y control no lineal [6]. En el caso de control no lineal, dentro de las diversas propuestas como lo son PID, Par Calculado, etc., la propuesta del controlador Proporcional+Derivativo (PD) con precompensación [9] presenta grandes ventajas respecto a la eliminación de perturbaciones, aún más si éste se usa en forma adaptable o por medio de algún controlador difuso. La idea y las definiciones de un conjunto y una lógica difusa fueron propuestas por L. A. Zadeh en 1964 [8], e implementadas en 1976 (en una planta de cemento danesa) por Mamdani. Los controladores difusos pueden ser una herramienta robusta y eficiente en casos donde es difícil tener un modelo del proceso a controlar, pero donde sí se tenga un conocimiento empírico del funcionamiento de la planta. El control difuso de los procesos no lineales ha resultado ser una herramienta muy eficiente que permite combinar elementos heurísticos con modelos analíticos [6]. En este trabajo se presenta la aplicación de un controlador PD con precompensación para el control de seguimiento de trayectorias, dicho controlador es comparado y sustituido por un diseño original que sustituye la parte PD por un controlador difuso sectorial, formándose así un nuevo controlador difuso sectorial con precompensación, lo que le otorga las propiedades y ventajas de controladores difusos en relación a la tolerancia a la variación de parámetros.

## II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### II-A. Modelo dinámico de un robot

El modelo dinámico de un robot puede resumirse por las ecuaciones de Euler-Lagrange (1),

Este trabajo ha sido apoyado PRODEP con la beca ITSON-126 y por Proyectos TecNM

## Experimental Evaluation of a Sectorial Fuzzy Controller Plus Adaptive Neural Network Compensation Applied to a 2-DOF Robot Manipulator<sup>\*</sup>

Andres O. Pizarro-Lerma<sup>\*</sup> Ramon Garcia-Hernandez<sup>\*\*</sup>  
Victor Santibanez<sup>\*\*</sup> Jorge Villalobos Chin<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Instituto Tecnológico de Sonora, Cd. Obregón, Sonora 85000 México  
(e-mail: andres.pizarro@itson.edu.mx).

<sup>\*\*</sup> Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila 27000 México (e-mail: rgarciah@correo.italaguna.edu.mx, vsantiba@italaguna.edu.mx, santibanez@ieee.org, jorgevillaloboschin@hotmail.com)

**Abstract:** In this paper we propose a novel control architecture that employs an adaptive neural network (NN) for feedforward compensation and a sectorial fuzzy controller in the feedback loop applied to the trajectory tracking control of robot manipulators. Both simulation and experimental results are presented in comparison with the original classic Proportional-Derivative (PD) plus feedforward controller, from which this new proposal is based, and two preliminary versions of the application of feedforward sectorial fuzzy control and feedforward adaptive neural nonlinear PD control to the trajectory tracking control of a two-degree of freedom (2-DOF) robot manipulator. The proposed controller has, in general, better performance than its counterparts in terms of transient response and steady-state error while it maintains one of the main characteristics of fuzzy controllers: Its tolerance to parameter deviation.

**Keywords:** Adaptive neural feedforward compensation, feedforward sectorial fuzzy controller, robot manipulator, trajectory tracking.

### 1. INTRODUCTION

Reported experiences in the literature of robot motion control using the PD Control plus Feedforward Controller detail an excellent performance actually comparable with the performance of the popular computed-torque control law (Kelly et al., 2005). Nonetheless, typically a feedforward compensation is usually used in adaptive form to cope with model uncertainties or disturbances, as in He et al. (2016), where an adaptive controller based in neural networks was proposed to deal with uncertainties and input saturation of a robotic manipulator, or as in Wei et al. (2012) where a wavelet neural network (WNNs) was proposed to control a farm transmission line deicing robot manipulators. In this controller, the disturbances and unknown dynamics of the system were approximated by the WNNs. In this paper we propose a novel hybrid controller which employs a sectorial fuzzy controller (SFC) in its feedback loop and an adaptive neural network (NN) in feedforward mode to compensate for disturbances and parameter deviation. The proposed architecture is far more simple to analyse and implement than the approaches detailed in the aforementioned papers as it will be seen further within this work.

<sup>\*</sup> This work was supported in part by Programa para el Desarrollo Profesional Docente (PRODEP-México) under grant ITSON-126 and Tecnológico Nacional de México (TecNM) projects.

### 2. PRELIMINARIES

#### 2.1 Dynamics of Robot Manipulators

The dynamics of a serial  $n$ -link robot can be written as (Spong and Vidyasagar, 1989):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (1)$$

where  $\mathbf{q}$  is the  $n \times 1$  vector of joint positions,  $\dot{\mathbf{q}}$  is the  $n \times 1$  vector of joint velocities,  $\ddot{\mathbf{q}}$  is the  $n \times 1$  vector of joint accelerations,  $\boldsymbol{\tau}$  is the  $n \times 1$  vector of applied torques,  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  is the  $n \times n$  symmetric positive definite manipulator inertia matrix,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  is the  $n \times 1$  vector of centripetal and Coriolis torques,  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  is the vector of gravitational torques, and  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$  is the  $n \times 1$  vector of friction torques. In the static models, friction is modeled by a vector  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$  that depends only on the joint velocity  $\dot{\mathbf{q}}$ , (Kelly et al., 2005).

A “classical” static friction model is one that combines the so-called viscous and Coulomb friction phenomena. This model establishes that the vector  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$  is given by (2).

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{m2} \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2)$$





## Sectorial Fuzzy Controller Plus Feedforward applied to the Trajectory Tracking of Robot Manipulators <sup>\*</sup>

Andres O. Pizarro-Lerma <sup>\*</sup> Victor Santibanez <sup>\*\*</sup>  
Ramon Garcia-Hernandez <sup>\*\*</sup> Jorge Villalobos Chin <sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Instituto Tecnológico de Sonora, Cd. Obregón, Sonora 85000 México  
(e-mail: andres.pizarro@itson.edu.mx).

<sup>\*\*</sup> Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila 27000 México (e-mail: rgarciah@correo.tlallaguna.edu.mx, vsantiba@itllaguna.edu.mx, santibanez@ieee.org, jorgevillaloboschin@hotmail.com)

**Abstract:** In this paper, we propose a novel sectorial fuzzy controller plus feedforward for the trajectory tracking control of robot manipulators. An outline of the stability proof via Lyapunov criterion of the proposed controller is given. Experimental results are presented in comparison to its classical counterpart: The Proportional-Derivative (PD) plus feedforward controller, from which this new proposal is based. The results obtained using the proposed controller indicate a better performance in terms of joint position error and tolerance to parametric variations.

Copyright © 2020 The Authors. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0>)

**Keywords:** Feedforward control, sectorial fuzzy controller, robot manipulator, trajectory tracking.

### 1. INTRODUCTION

Given the large number of industrial robots currently in use, applied to increasingly more exact and precise tasks (recode.net, 2017), it is necessary to find a controller capable of controlling the position of a robotic manipulator, such that it meets the task quality specifications. The control approaches still in use in many industrial applications are the Proportional + Integrator + Derivative (PID) control and its derivatives. A robot is highly nonlinear, with variations in its parameters almost at each point of execution. Within the various existing controller approaches to the motion control of robots, the Proportional + Derivative (PD) controller plus feedforward has great advantages on the elimination of disturbances, with an excellent tracking performance, comparable with that of the computed-torque controller (Kelly et al., 2005). Fuzzy controllers can be a robust and efficient alternative in cases where it is difficult to have an exact model of the plant to be controlled, or there are many disturbances and changes in some of its key parameters. Also, fuzzy control allows combining heuristic elements with analytical models. Once guidelines to design fuzzy controllers with sectorial properties, named Sectorial Fuzzy Controllers (SFC), which enable their stability analysis were given in Calcev (1998), many works on the motion control of robot manipulators emerged: In Santibanez et al. (2004), a computed torque control where its PD controller was exchanged by a SFC, showed excellent results in the tracking motion control of a 2-DOF Robot. A SFC with gravity compensation was

applied to a robotic manipulator in order to regulate its joint positions in Santibanez et al. (2005), having excellent results. Our paper retakes the main idea of these previous works, as it presents the application of a PD controller plus feedforward for trajectory tracking control, where the PD part of the control law is replaced by a SFC, thus forming a novel SFC plus feedforward control, which has the properties and advantages of a SFC in relation to its tolerance to parameter deviation.

### 2. PRELIMINARIES

#### 2.1 Dynamics of Robot Manipulators with rigid links

The dynamics of a serial  $n$ -link robot can be summarised by the Euler-Lagrange equations (Lewis et al., 2004), (Merabet and Gu, 2010) as:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \tau + \eta \quad (1)$$

where  $q$  is the  $n \times 1$  vector of angular positions at every joint in generalized coordinates and available for measurement,  $\dot{q}$  is the  $n \times 1$  vector of joint angular velocities,  $\ddot{q}$  is the  $n \times 1$  vector of joint angular accelerations,  $\tau$  is the  $n \times 1$  vector of applied torques,  $M(q)$  is the  $n \times n$  symmetric positive definite inertia matrix,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  is the  $n \times 1$  vector of centrifugal and Coriolis torques,  $g(q)$  is the vector of gravitational torques,  $\eta$  is the  $n$ -vector of uncertainties, which includes external disturbances, and all uncertainties in the parameters and dynamics not modelled in the robot; and  $f(\dot{q})$  is the  $n \times 1$  vector of friction torques. In the static models, friction is modelled by a vector  $f(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  that depends only on the joint velocity  $\dot{q}$  (Kelly et al., 2005). A

<sup>\*</sup> This work was supported in part by Programa para el Desarrollo Profesional Docente (PRODEP-México) under grant ITSON-126 and Tecnológico Nacional de México (TecNM) projects.

## P.2 Artículo publicado en revista indexada





1. Pizarro-Lerma, Andrés O; Santibáñez, Víctor; García-Hernández, Ramón; Villalobos Chin, Jorge. **Sectorial Fuzzy Controller Plus Feedforward for the Trajectory Tracking Control of Robotic Arms in Joint Space**, publicado en la revista MDPI Mathematics (JCR Q1), con fecha de marzo de 2021, DOI = 10.3390/math9060616.  
<https://www.mdpi.com/2227-7390/9/6/616>

## P.3 Artículo para someterse a revista

1. Pizarro-Lerma, Andrés O; Santibáñez, Víctor; García-Hernández, Ramón; Villalobos Chin, Jorge; Moreno-Valenzuela, Javier. **A Sectorial Fuzzy Controller with Adaptive Feedforward Neural Network Compensation Applied to the Trajectory Tracking Control of Robot Manipulators**, en proceso de edición para someter a revista.

Article

# Sectorial Fuzzy Controller Plus Feedforward for the Trajectory Tracking of Robotic Arms in Joint Space

Andres Pizarro-Lerma <sup>1</sup>, Victor Santibañez <sup>2</sup>, Ramon Garcia-Hernandez <sup>2,\*</sup> and Jorge Villalobos-Chin <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Tecnológico de Sonora, 5 de Febrero 818 sur, Ciudad Obregón C.P. 85000, Sonora, Mexico; andres.pizarro@itson.edu.mx

<sup>2</sup> Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de La Laguna, Blvd. Revolución y Av. Instituto Tecnológico de La Laguna S/N, Torreon C.P. 27000, Coahuila, Mexico; vsantiba@italaguna.edu.mx (V.S.); jorgevchin@gmail.com (J.V.-C.)

\* Correspondence: rgarciah@correo.italaguna.edu.mx; Tel.: +52-871-705-1324

**Abstract:** In this paper, we propose a Sectorial Fuzzy Controller (SFC) with a feedforward compensation of the robot dynamics in joint space, evaluated at the desired angular positions, velocities, and accelerations, applied to the trajectory tracking of all revolute joints robotic arms. Global uniform asymptotic stability proof applying the direct Lyapunov theorem, is introduced for this new control scheme by using a strict Lyapunov function. This strict Lyapunov function is the first one within the field of fuzzy control that is applied to the trajectory control of robotic manipulators. With this strict Lyapunov function, a sensitivity analysis was also computed for this novel control scheme. Additionally, physical and simulation experimental results are given in comparison to the original control scheme, in which this new controller is inspired: the Proportional-Derivative (PD) controller plus feedforward compensation. The experimental results yielded better performance for the new fuzzy control scheme when compared to the classical structure, in both the joint position errors for similar or smaller values of applied torques, showing the expected tolerance to parametric deviations and uncertainties that all fuzzy controllers possess.

**Keywords:** sectorial fuzzy controller; robotic arm; tracking control; feedforward compensation; strict lyapunov function



**Citation:** Pizarro-Lerma, A.; Santibañez, V.; Garcia-Hernandez, R.; Villalobos-Chin, J. Sectorial Fuzzy Controller Plus Feedforward for the Trajectory Tracking of Robotic Arms in Joint Space. *Mathematics* **2021**, *9*, 616. <https://doi.org/10.3390/math9060616>

Academic Editor: Mihaela Colhon

Received: 7 February 2021

Accepted: 11 March 2021

Published: 15 March 2021

**Publisher's Note:** MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



**Copyright:** © 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

## 1. Introduction

### 1.1. Motivation

Most industrial robotic arms are controlled in trajectory tracking tasks by applying a Proportional + Integral + Derivative (PID) controller, although it has not been proven that this type of controller can actually approach to a zero steady-state error for that specific type of tasks. From the original control schemes that were applied to robotic arms, only the computed-torque and the Proportional-Derivative (PD) plus feedforward schemes have been proved to tend asymptotically to zero steady-state error for trajectory tracking in robotic arms, whose proof extends to a global asymptotic stability. The latter implies that the initial position error can be of any value and both of the aforementioned control schemes will achieve that the robotic arm follows the desired trajectory. Both of the control schemes use a PD controller plus the whole robot dynamics connected in some fashion; in the case of the Computed-Torque Controller (CTC), it manages to eliminate all of the non-linearities of the robot model and turn the closed-loop equivalent into a linear system. In the case of the PD plus feedforward (PD + ff), the feedforward block is composed by the robot model evaluated at the desired angular positions, velocities, and accelerations, which yields an excellent tracking performance, comparable with that of the CTC [1]. Nonetheless, a robot is highly nonlinear, with variations in its parameters at almost each point of execution. Within the various existing control approaches to the motion control of robots, fuzzy controllers can be a robust and efficient alternative in cases where it is difficult

# A Sectorial Fuzzy Controller with Adaptive Feedforward Neural Network Compensation Applied to the Trajectory Tracking Control of Robot Manipulators

Andres O. Pizarro-Lerma, Victor Santibanez, *Member, IEEE*, Ramon Garcia-Hernandez, Jorge Villalobos Chin, and Javier Moreno-Valenzuela.

**Abstract**—In this paper we propose a novel control architecture that employs an adaptive neural network (NN) for feedforward compensation and a sectorial fuzzy controller in the feedback loop applied to the trajectory tracking control of robot manipulators. Both simulation and experimental results are presented in comparison with the original classic Proportional-Derivative (PD) plus feedforward controller, from which this new proposal is based, and two preliminary versions of the application of feedforward sectorial fuzzy control and feedforward adaptive neural nonlinear PD control to the trajectory tracking control of a two-degree of freedom (2-DOF) robot manipulator. The proposed controller has, in general, better performance than its counterparts in terms of transient response and steady-state error while it maintains one of the main characteristics of fuzzy controllers: Its tolerance to parameter deviation.

**Index Terms**—Feedforward sectorial fuzzy controller, adaptive neural feedforward compensation, robot manipulator, trajectory tracking.

## I. INTRODUCTION

SINCE Calcev published his papers outlining a guideline for the design of fuzzy controllers to be input and output strictly passive sectorial fuzzy controllers [1] – [2], several approaches using this type of controller applied to the motion control of robotic manipulators, both for regulation and trajectory tracking, have been presented in different instances showing excellent results [3] – [4].

An important controller in the field of robot manipulators control is feedforward control which is a very simple strategy that uses the inverse dynamics of a given system evaluated along the reference signals as a control law [5]. However, to apply this type of control strategy, a precise model of the plant and all its parameters is needed. An improvement to this control strategy is given by the PD plus feedforward control scheme [6]. Reported experiences in the literature of robot motion control using the PD Control plus Feedforward Controller detail an excellent performance actually comparable

with the performance of the popular computed-torque control law [7]. The dynamics of a robot manipulator is, in most cases, very difficult to model accurately due to the existence of nonlinearities and many parametric uncertainties, like the friction occurring at the robot's joints. Consequently, model-based controllers do not always work properly [7]. To circumvent this problem, a wide variety of techniques have been explored, such as fuzzy control and adaptive control. Fuzzy controllers can be a robust and efficient tool in cases where it is difficult to have a model of the process to be controlled, but where there is an empirical knowledge of the operation of the plant. Fuzzy control of nonlinear processes has proved to be a very efficient tool that allows combining heuristic elements with analytical models. The fuzzy modeling of non-linear processes for control purposes proved to be, along with the modeling via neural networks, the most intensely developed approach that has been applied in a practical way since the 1990s. This is one of the most successful constructions of nonlinear controllers, especially from a practical and application point of view [8], [9]. Reported experiences in the literature of robot motion control using the PD Control plus Feedforward Controller detail an excellent performance actually comparable with the performance of the popular computed-torque control law [7]. Nonetheless, typically a feedforward compensation is usually used in adaptive form to cope with model uncertainties or disturbances, as in [10], where an adaptive controller based in neural networks was proposed to deal with uncertainties and input saturation of a robotic manipulator, or as in [11] where a wavelet neural network (WNNs) was proposed to control a farm transmission line deicing robot manipulators. In this controller, the disturbances and unknown dynamics of the system were approximated by the WNNs. In this paper we propose a novel hybrid controller which employs a sectorial fuzzy controller (SFC) in its feedback loop and an adaptive neural network (NN) in feedforward mode to compensate for disturbances and parameter deviation. The proposed architecture is far more simple to analyse and implement than the approaches detailed in the aforementioned papers as it will be seen further within this work.

A. O. Pizarro-Lerma is with the Instituto Tecnológico de Sonora, Cd. Obregón, Sonora 85000 México, e-mail: andres.pizarro@itson.edu.mx.

V. Santibanez, R. Garcia-Hernandez and J. Villalobos Chin are with Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila 27000 México, e-mails: jorgevillaloboschin@hotmail.com, vsantiba@itlalaguna.edu.mx, santibanez@ieee.org, rgarciah@correo.itlalaguna.edu.mx.

J. Moreno-Valenzuela is with CITEDI-IPN Tijuana, B.C., México  
Manuscript received