



**TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO**  
Instituto Tecnológico de la Laguna

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

# “Análisis y Evaluación de Diferentes Formulaciones para Modelado Dinámico de Mecanismos Robóticos”

POR

**Jaqueline Ivonne Bernal Franco**

## TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Ricardo Emmanuel Campa Cocom

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (02)-TDCIE-2018

Torreón, Coahuila. México,  
Abril 2018

*“Fear not, for I am with you. Do not be dismayed.  
I am your God. I will strengthen you; I will help you;  
I will uphold you with my victorious right hand”*

Isaiah 41:10

*En honor a lo más valioso de mi universo:  
mis padres.*

# Agradecimientos

Para culminar este importante proyecto de mi vida fue necesario el apoyo de muchas personas, así que, ¿cómo no iniciar la escritura de mi tesis, expresando mi más sincera gratitud a las personas que intervinieron en todo lo que comenzó con el sueño de una adolescente que gustaba de leer libros de Física?

Por supuesto, primero deseo agradecer profundamente a mis padres, **Martín Bernal** y **María Franco**, por su amor incondicional, por sus llamadas de atención, por enseñarme a luchar por lo que quiero, por heredarme tenacidad y persistencia, por enseñarme que a través de la responsabilidad y el duro trabajo es posible alcanzar mis metas, por sembrar en mí el deseo de aprender y de avanzar, por darle valor, pasión y sentido a mi vida con sus enseñanzas. Principalmente agradezco y reconozco el ejemplo de vida que representa mi padre...¡Te amo papá!

También deseo agradecer a cada héroe de pizarrón y gis que sembró en mí curiosidad, a quienes me enseñaron a ser crítica y tener iniciativa, a quienes me enseñaron a confiar en mi capacidad y premiaron cada uno de mis aciertos. A los que desafiaron mi inteligencia con problemas muy complicados y me motivaron a trabajar con verdadera pasión. A los que me enseñaron a no conformarme, ya que esto me ha permitido vivir múltiples experiencias gratas que ni siquiera yo imaginé. He aquí algunos de ellos: **Miriam Rodríguez**, **Celsa Fonseca**, **Rodrigo Díaz** y **Armando Ramírez**.

Agradezco a mi hermanos y mis sobrinos por apoyarme y amarme como soy, por alegrar mi vida con tan sólo existir. Agradezco también el apoyo de mis amigos que me invitan cada día a soñar, me corrigen, me comprenden y me acompañan en esta aventura llamada vida: **Nayeli Fernández**, **Olimpia Franco**, **Natalia Bustos**, **Rosa Rivera**, **Jocabed** y **Francisco Acosta**.

Deseo también agradecer a todos mis compañeros de posgrado con quienes pasé momentos muy agradables, por su compañía y por el respeto brindado en todo momento, principalmente a: **Eduardo Fierro**, **Omar Martínez** y **Gustavo Cordero**.

Deseo también expresar mi gratitud al Dr. **Ricardo Campa**, quien me aceptó como tesista y proveyó buena parte de los recursos financieros y materiales necesarios para llevar a cabo esta tesis. Ante todo, agradezco los conocimientos y experiencias compartidos y las buenas intenciones profesionales que ha tenido hacia mí. También me permito agradecer al **CONACYT** por apoyar mis estudios con una beca.

Finalmente, en esta ocasión deseo agradecerte **Dios** por tu inmerecido amor, por el deber sembrado de avanzar (aunque normalmente avanzo un paso y retrocedo dos), por levantarme al caer, por enseñarme que el rendirme no es una opción. Te agradezco por las personas hermosas mencionadas, que me apoyaron para alcanzar esta meta, pero también por las personas difíciles y las situaciones adversas, porque sin duda también éstas han forjado mi carácter, fortalecido mis convicciones y afirmado mi identidad, sin los cuales habría sido imposible alcanzar esta meta.

# “Análisis y evaluación de diferentes formulaciones para modelado dinámico de mecanismos robóticos”

por: Jaqueline I. Bernal Franco

## Resumen

Para describir la configuración de un mecanismo robótico de  $n$  grados de libertad, generalmente se emplean un conjunto de  $m$  coordenadas generalizadas que puede ser mínimo ( $m = n$ ) o no mínimo ( $m > n$ ); en el último caso deben existir ciertas ecuaciones (mejor conocidas como restricciones) que relacionan las coordenadas generalizadas únicamente (restricciones holonómicas) o también con sus derivadas (restricciones no holonómicas). Una vez definidas las coordenadas generalizadas para un mecanismo robótico, es posible obtener: (a) su modelo cinemático, el cual establece la relación entre tales coordenadas y la postura (posición y orientación) de algún elemento de interés en el mecanismo, además de (b) su modelo dinámico, que establece la relación entre las coordenadas generalizadas y las fuerzas y/o momentos externos aplicados al mecanismo para llevar a cabo su movimiento. Desde el siglo XVII hasta la actualidad han surgido diversas formulaciones para modelado dinámico de sistemas mecánicos. En este trabajo de tesis, después de presentar los fundamentos del modelado cinemático y dinámico, se realiza un análisis de las cuatro principales formulaciones encontradas en la literatura: Newton-Euler, Euler-Lagrange, Hamilton y Kane. Estas cuatro formulaciones se utilizan en esta tesis para obtener el modelo dinámico de algunos mecanismos simples que presentan diferentes tipos de restricciones, y se hace un estudio comparativo. Adicionalmente, en el marco de este trabajo se llevó a cabo la obtención de los modelos cinemático y dinámico de un robot paralelo del tipo denominado 6-3-PUS, que es comercialmente conocido como Hexapod; se implementaron en tiempo real dos controladores para este robot, uno de ellos empleando el modelo cinemático y el otro el modelo dinámico; los resultados experimentales fueron satisfactorios, lográndose así la validación de los modelos obtenidos.

# “Analysis and Evaluation of Different Formulations for the Dynamics Modeling of Robotic Mechanisms”

by: Jaqueline I. Bernal Franco

## Abstract

To describe the configuration of a robotic mechanism with  $n$  degrees of freedom, we generally use a set of  $m$  generalized coordinates that can be minimal ( $m = n$ ) or non-minimal ( $m > n$ ); in the latter case there must be certain equations (better known as constraints) that relate the generalized coordinates only (holonomic constraints) or also with their derivatives (non-holonomic constraints). Once the generalized coordinates for a robotic mechanisms are defined, it is possible to obtain: (a) its kinematics model, which establishes the relationship between such coordinates and the pose (position and orientation) of some element of interest in the mechanism, in addition to (b) its dynamics model, which establishes the relationship between the generalized coordinates and the external forces and/or moments applied to the mechanism to produce its motion. From the 17th century to the present, several formulations have arisen for obtaining the dynamics model of mechanical systems. In this thesis work, after presenting the theoretical foundations of kinematics and dynamics modeling, we perform an analysis of the four main formulations for dynamics modeling found in the literature: those of Newton-Euler, Euler-Lagrange, Hamilton and Kane. These formulations are employed in this thesis for obtaining the dynamics model of some simple mechanisms that present different types of constraints, and a comparative study is performed. Additionally, in the framework of this thesis, we obtain the kinematics and dynamics models of a parallel robot of the type called 6-3-PUS, which is commercially known as Hexapod; two controllers were implemented in real time for this robot, one of them using the kinematics model and the other the dynamics model; the experimental results were satisfactory, thus achieving the validation of the obtained models.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Conceptos básicos de mecánica . . . . .	1
1.1.1	Espacios de configuración y coordenadas generalizadas . . . . .	1
1.1.2	Restricciones cinemáticas y grados de libertad . . . . .	8
1.1.3	Cuerpos rígidos . . . . .	10
1.2	Fundamentos de robótica . . . . .	13
1.2.1	Componentes de un robot . . . . .	13
1.2.2	Articulaciones y movilidad . . . . .	15
1.2.3	Clasificación de robots según sus restricciones . . . . .	17
1.3	Modelado de mecanismos robóticos . . . . .	20
1.3.1	Modelo cinemático de postura . . . . .	21
1.3.2	Modelo cinemático de velocidad . . . . .	22
1.3.3	Modelado dinámico . . . . .	23
1.4	Formulaciones para modelado . . . . .	25
1.4.1	Formulaciones para la transformación de coordenadas $\mathbf{q} \rightarrow \boldsymbol{\rho}$ . . . . .	25
1.4.2	Formulaciones para modelado cinemático . . . . .	27
1.4.3	Formulaciones para modelado dinámico . . . . .	28
1.5	Motivación para el tema . . . . .	29
1.5.1	Raíces históricas sobre modelado dinámico . . . . .	29
1.5.2	Estado del arte sobre evaluación de formulaciones de la dinámica . . . . .	31
1.5.3	Trabajos previos sobre modelado dinámico . . . . .	32
1.5.4	Problemas detectados al inicio de la tesis . . . . .	34

1.6	Objetivos de la tesis . . . . .	34
1.7	Organización del documento . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Preliminares matemáticos</b>	<b>37</b>
2.1	Conjuntos numéricos . . . . .	37
2.2	Estructuras algebraicas . . . . .	38
2.3	Álgebra lineal . . . . .	42
2.3.1	Vectores y matrices . . . . .	42
2.3.2	Transformaciones lineales . . . . .	48
2.3.3	Proyecciones . . . . .	48
2.4	Cálculo multivariable . . . . .	49
2.4.1	Teoría de funciones . . . . .	49
2.4.2	Sistemas de coordenadas curvilíneas . . . . .	51
2.4.3	Derivada direccional, gradiente y jacobiana . . . . .	62
2.4.4	Curvas de nivel y multiplicadores de Lagrange . . . . .	63
2.4.5	Funcionales y cálculo de variaciones . . . . .	64
2.4.6	Las ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	65
2.4.7	La transformación de Legendre . . . . .	68
2.5	Sistemas de ecuaciones . . . . .	70
2.5.1	Ecuaciones algebraicas . . . . .	70
2.5.2	Ecuaciones diferenciales . . . . .	73
2.6	Geometría diferencial . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Cinemática</b>	<b>78</b>
3.1	Cinemática de cuerpos rígidos . . . . .	78
3.1.1	Cinemática de postura . . . . .	79
3.1.2	Cinemática de velocidad . . . . .	86
3.2	El método de Denavit–Hartenberg . . . . .	91
3.2.1	Convenciones originales . . . . .	94
3.2.2	Convenciones modificadas . . . . .	98
3.3	Obtención de la matriz $A(\mathbf{q})$ . . . . .	101



3.4	Modelado cinemático de mecanismos robóticos . . . . .	103
3.4.1	Robot con cadena cinemática abierta (seriales) . . . . .	103
3.4.2	Robots con cadena cinemática arborescente . . . . .	104
3.4.3	Robots con cadena cinemática cerrada . . . . .	106
3.4.4	Robots móviles con ruedas tipo diferencial . . . . .	107
3.5	Modelado cinemático de mecanismos simples . . . . .	110
3.5.1	Robot serial planar de 3 g.d.l. . . . .	111
3.5.2	Mecanismo de cinco barras . . . . .	113
3.5.3	Robot móvil con ruedas . . . . .	115
<b>4</b>	<b>Dinámica</b>	<b>118</b>
4.1	Conceptos básicos . . . . .	118
4.1.1	Centro de masa . . . . .	118
4.1.2	Cantidad de movimiento lineal . . . . .	119
4.1.3	Cantidad de movimiento angular . . . . .	120
4.2	Las leyes de la dinámica vectorial . . . . .	123
4.2.1	Las leyes de Newton . . . . .	123
4.2.2	Las leyes de Euler . . . . .	124
4.3	Los principios variacionales . . . . .	126
4.3.1	Principios variacionales diferenciales . . . . .	126
4.3.2	Principios variacionales integrales . . . . .	131
4.3.3	Las ecuaciones de Hamilton . . . . .	138
4.4	Las cuatro formulaciones básicas . . . . .	140
4.4.1	Formulación de Newton-Euler . . . . .	142
4.4.2	Formulación de Euler-Lagrange . . . . .	144
4.4.3	Formulación de Hamilton . . . . .	146
4.4.4	Formulación de Kane . . . . .	148
4.4.5	Relación entre formulaciones . . . . .	150
4.5	Otras formulaciones de la dinámica . . . . .	154
<b>5</b>	<b>Modelado dinámico de mecanismos simples</b>	<b>157</b>

5.1	Aplicación a un manipulador serial planar . . . . .	157
5.1.1	Cálculo de la postura de cada cuerpo rígido . . . . .	160
5.1.2	Cálculo de la velocidad lineal y angular de cada cuerpo rígido .	160
5.1.3	Modelado dinámico . . . . .	161
5.2	Aplicación a un mecanismo de cinco barras . . . . .	168
5.2.1	Descripción geométrica del robot . . . . .	168
5.2.2	Cálculo de la postura de cada cuerpo rígido . . . . .	170
5.2.3	Cálculo de la velocidad lineal y angular de cada cuerpo rígido .	171
5.2.4	Modelado dinámico . . . . .	173
5.3	Aplicación a un robot móvil tipo diferencial . . . . .	180
5.3.1	Descripción geométrica del robot . . . . .	180
5.3.2	Cálculo de la postura de cada cuerpo rígido . . . . .	181
5.3.3	Cálculo de las velocidades lineal y angular de cada cuerpo rígido	182
5.3.4	Modelado dinámico . . . . .	184
5.4	Análisis comparativo . . . . .	189
<b>6</b>	<b>El robot paralelo Hexapod</b>	<b>195</b>
6.1	Descripción geométrica del robot . . . . .	195
6.2	Modelado cinemático . . . . .	199
6.2.1	Modelo cinemático directo de postura . . . . .	199
6.2.2	Modelo cinemático directo de velocidad . . . . .	206
6.3	Modelado dinámico . . . . .	209
6.3.1	Cálculo de las velocidades de cada cuerpo rígido . . . . .	209
6.3.2	Cálculo del modelo dinámico inverso . . . . .	217
6.4	Validación de los modelos . . . . .	219
6.5	Experimentos en tiempo real . . . . .	222
6.5.1	Controlador de doble lazo . . . . .	222
6.5.2	Controlador por dinámica inversa . . . . .	225
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>231</b>
7.1	Aportaciones del trabajo . . . . .	231

7.2	Problemas abiertos . . . . .	233
<b>8</b>	<b>Apéndices</b>	<b>235</b>
8.1	Coordenadas de Plücker y el principio de transferencia . . . . .	235
8.2	Análisis de las convenciones de parámetros D-H . . . . .	239
8.3	Conjuntos equivalentes de parámetros D-H . . . . .	239
8.3.1	Relación entre las convenciones estándar . . . . .	244
	<b>LITERATURA CITADA</b>	<b>248</b>
	<b>APÉNDICES</b>	
<b>A</b>	<b>Coordenadas de Plücker y el principio de transferencia</b>	<b>256</b>
<b>B</b>	<b>Análisis de las convenciones de parámetros D-H</b>	<b>261</b>
B.1	Conjuntos equivalentes de parámetros D-H . . . . .	262
B.2	Relación entre las convenciones estándar . . . . .	266

# Índice de figuras

1.1	Posibles coordenadas generalizadas para una varilla en el plano: (a) $(x_A, y_A, \theta)$ ; (b) $(x_B, y_B, \phi)$ ; (c) $(x_A, y_A, x_B)$ .(Soto, 2014). . . . .	5
1.2	Mecanismo planar de dos eslabones.(Soto, 2014). . . . .	6
1.3	Dos configuraciones posibles para la misma posición del punto $P$ .(Soto, 2014). . . . .	7
1.4	Diagrama de un péndulo esférico.(Soto, 2014). . . . .	8
1.5	Cuerpos rígidos en 2D (Soto, 2014): (a) con 2 puntos; (b) con 3 puntos; (c) con 11 puntos. . . . .	11
1.6	Cuerpos rígidos en 3D: (a) con 2 puntos; (b) con 3 puntos; (c) con 6 puntos. (Soto, 2014). . . . .	12
1.7	Algunos tipos de articulaciones y sus grados de libertad.(Soto, 2014). . . . .	16
1.8	Mecanismo planar de un grado de movilidad. . . . .	17
1.9	Ejemplos de mecanismos con restricciones holonómicas (Soto, 2014). . . . .	18
1.10	Mecanismos que presentan no holonomía debido a la primera causa.(Soto, 2014). . . . .	19
1.11	Mecanismos que presentan no holonomía debido a la segunda causa.(Soto, 2014). . . . .	20
1.12	Mecanismos que presentan no holonomía debido a la tercera causa (Soto, 2014). . . . .	21
1.13	Diagrama representativo de una formulación para modelado cinemático . . . . .	27
1.14	Diagrama de una formulación dinámica cuya cinemática de cada eslabón es no mínima . . . . .	28
1.15	Diagrama de una formulación dinámica cuya cinemática de cada eslabón es mínima. . . . .	29
2.1	Coordenadas curvilíneas $(a, b, c)$ asociadas al punto $P(x_0, y_0, z_0)$ . . . . .	53

2.2	Componentes covariantes del vector $\mathbf{a}$ , observadas al hacer incidir luz sobre él de forma perpendicular al eje $u_1$ y $u_2$ , respectivamente (Fleisch, 2012). . . . .	55
2.3	Componentes contravariantes del vector $\mathbf{a}$ , observadas al hacer incidir luz sobre él de forma paralela al eje $u_2$ y $u_1$ , respectivamente (Fleisch, 2012). . . . .	56
2.4	a) Adición de componentes contravariantes del vector $\mathbf{a}$ . b) Adición de componentes covariantes del vector $\mathbf{a}$ (Fleisch, 2012). . . . .	56
2.5	Vectores base recíprocos y componentes covariantes del vector $\mathbf{a}$ (Fleisch, 2012). . . . .	57
2.6	Suma de las componentes covariantes $a^1$ y $a^2$ de un vector $\mathbf{a}$ , empleando vectores base recíprocos. (Fleisch, 2012) . . . . .	57
2.7	Superficie acotada por las curvas $u^2$ y $u^3$ . . . . .	60
2.8	Máximo de una función $f(x, y)$ , sujeta a una restricción $g(x, y) = c$ . . . . .	64
3.1	Posición y orientación de un cuerpo rígido. (Campa, 2005) . . . . .	79
3.2	Parámetros Denavit-Hartenberg para una línea recta. . . . .	92
3.3	Parámetros D-H para la convención $O1$ . . . . .	95
3.4	Parámetros D-H para la convención $O2$ . . . . .	96
3.5	Parámetros D-H para la convención $O3$ . . . . .	97
3.6	Parámetros D-H para la convención $M1$ . . . . .	99
3.7	Parámetros D-H para la convención $M2$ . . . . .	100
3.8	Parámetros D-H para la convención $M3$ . . . . .	101
3.9	Notación para un robot con estructura de árbol. . . . .	104
3.10	Parámetros Denavit-Hartenberg para un eslabón con más de dos articulaciones. . . . .	105
3.11	Marcos asociados a la articulación $k$ . . . . .	107
3.12	Marcos asignados a los cuerpos rígidos de un RMR, de acuerdo a la convención de Sheth-Uicker. . . . .	109
3.13	Robot serial de 3gdl: (a) fotografía del robot, (b) marcos asociados a los eslabones del robot. (Soto, 2009) . . . . .	111
3.14	Mecanismo de cinco barras: (a) fotografía del mecanismo, (b) marcos asociados a los eslabones del mecanismo. . . . .	113
3.15	Robot móvil con ruedas: marcos asociados a los cuerpos del mecanismo. . . . .	116

4.1	Diagrama de vectores: (a) para un cuerpo compuesto de $N$ partículas, (b) para un cuerpo con distribución de masa continua. . . . .	119
5.1	Análisis del robot serial de 3 gdl: (a) fotografía del robot, (b) diagrama esquemático. (Soto, 2009) . . . . .	158
5.2	Marcos asociados a los eslabones del mecanismo de cinco barras . . . . .	169
5.3	Marcos asociados a los cuerpos rígidos del robot móvil con ruedas (RMR). . . . .	180
5.4	Tiempo de cálculo del modelo dinámico. . . . .	190
5.5	Tamaño del código necesario para calcular el modelo dinámico. . . . .	191
5.6	Tiempo de ejecución del modelo dinámico. . . . .	193
5.7	Tamaño del código que representa el modelo dinámico. . . . .	193
6.1	Robot Hexapod con líneas y puntos guía. . . . .	196
6.2	Diagrama esquemático del robot Hexapod: (a) vista superior, (b) vista en perspectiva. . . . .	198
6.3	Marcos para definir la orientación de las piernas del robot. . . . .	199
6.4	Localización del centro de masa de las piernas del Hexapod. . . . .	210
6.5	Cuerpos rígidos en las articulaciones del Hexapod: (a) articulación PU, (b) articulación S. . . . .	212
6.6	Marcos coordenados empleados para modelar las articulaciones esféricas. . . . .	214
6.7	Coordenadas de postura de la plataforma calculadas por el modelo analítico (línea azul) y SolidWorks Motion (línea negra), respectivamente. . . . .	221
6.8	Fuerzas en las articulaciones activas calculadas por el modelo analítico (línea azul) y SolidWorks Motion (línea negra), respectivamente. . . . .	221
6.9	Diagrama esquemático del controlador de doble lazo. . . . .	222
6.10	Controlador de doble lazo: Norma del error de posición. . . . .	225
6.11	Controlador de doble lazo: Norma del error de orientación. . . . .	226
6.12	Controlador de doble lazo: Velocidades alcanzadas en las articulaciones prismáticas. . . . .	226
6.13	Controlador de doble lazo: Fuerzas aplicadas en las articulaciones prismáticas. . . . .	227
6.14	Diagrama esquemático del controlador por dinámica inversa. . . . .	228
6.15	Controlador por dinámica inversa: Norma del error de posición. . . . .	229
6.16	Controlador por dinámica inversa: Norma del error de orientación. . . . .	229

6.17	Controlador por dinámica inversa: Fuerzas aplicadas en las articulaciones prismáticas. . . . .	230
8.1	Parámetros de una recta en el espacio. . . . .	236
8.2	Diagrama cinemático para las cuatro equivalentes variantes de un robot planar de 2-dof: (a)V00; (b)V10;c)V20;(d)V30. . . . .	242
8.3	Diagrama cinemático de un robot de 3-dof, considerando la variante V312 de la convención O1. . . . .	244
8.4	Diagrama cinemático de un robot de 3-dof, considerando la convención M1. . . . .	244
A.1	Parámetros de una recta en el espacio. . . . .	257
B.1	Diagrama cinemático para las cuatro variantes equivalentes de un robot planar de 2 gdl: (a)V00; (b)V10;c)V20;(d)V30. . . . .	264
B.2	Diagrama cinemático de un robot de 3 gdl, considerando la variante V312 de la convención O1. . . . .	266
B.3	Diagrama cinemático de un robot de 3 gdl, considerando la convención M1. . . . .	268

# Índice de tablas

2.1	Algunos grupos de Lie multiplicativos. . . . .	77
3.2	Parámetros Denavit-Hartenberg del robot R3. . . . .	112
3.3	Parámetros Denavit-Hartenberg del mecanismo de cinco barras . . . . .	114
5.1	Parámetros Denavit-Hartenberg del robot serial de 3 gdl. . . . .	159
5.2	Parámetros cinemáticos y dinámicos de los robots analizados. . . . .	192
6.1	Parámetros dinámicos del Hexapod para validación del modelo. . . . .	220
6.2	Parámetros dinámicos del Hexapod para experimentos. . . . .	228
8.1	Parámetros y ejes para los cuatro casos que determinan la orientación del marco $\Sigma_i$ . . . . .	241
8.2	Parámetros D-H de la convención $O1$ para los casos mostrados en la figura B.1. . . . .	242
8.3	Parámetros D-H para las 16 diferentes combinaciones de parámetros de sentido. . . . .	243
8.4	Parámetros cinemáticos y dinámicos de los mecanismos analizados. . .	245
8.5	Parámetros cinemáticos y dinámicos de los mecanismos analizados. . .	245
B.1	Parámetros y ejes para los cuatro casos que determinan la orientación del marco $\Sigma_i$ . . . . .	263
B.2	Parámetros D-H de la convención $O1$ para los casos mostrados en la figura B.1. . . . .	264
B.3	Parámetros D-H para las 16 diferentes combinaciones de parámetros de sentido. . . . .	265



B.4	Parámetros D-H de la convención $O1$ , para la variante 000 y la variante 312. . . . .	266
B.5	Parámetros D-H de las seis convenciones, para el robots de 3 gdl, variante 000. . . . .	267



**TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO**  
Instituto Tecnológico de la Laguna

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

# “Análisis y Evaluación de Diferentes Formulaciones para Modelado Dinámico de Mecanismos Robóticos”

POR

**Jaqueline Ivonne Bernal Franco**

## TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTOR DE TESIS

**Dr. Ricardo Emmanuel Campa Cocom**

ISSN: 0188-9060



**RIITEC: (02)-TDCIE-2018**

Torreón, Coahuila. México,  
Abril 2018

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Conceptos básicos de mecánica

La mecánica es la rama de la física que estudia el movimiento y el equilibrio de los cuerpos, así como de las fuerzas que los producen. Un sistema mecánico es aquél formado por cualquier conjunto de elementos, que pueden tener movimiento o no, pero que interactúan entre sí a través de fuerzas (de contacto, gravitacionales, inerciales, etc.).

Existen diferentes tipos de sistemas mecánicos, desde el más simple, que sería una partícula de masa puntual, hasta complejos sistemas de cuerpos sólidos (rígidos o flexibles) en contacto. Los conceptos dados a continuación aplican a sistemas mecánicos en general. La mayor parte de los conceptos básicos presentados en ésta sección fueron tomados de (Soto, 2014).

#### 1.1.1 Espacios de configuración y coordenadas generalizadas

En este documento se define el *espacio físico* como el espacio tridimensional que contiene cualquier objeto material sobre el cual se aplican las leyes de la física clásica (y que se denominará aquí como un *objeto físico*). En su sentido más amplio, este espacio físico abarcaría entonces el universo entero. Sin embargo, en mecánica clásica es común aislar los cuerpos bajo análisis, reduciendo así el espacio físico de interés.

Para fines de análisis, el espacio físico se modela mediante el *espacio euclidiano* de dimensión tres, denotado por  $\mathbb{E}^3$ . Cabe recordar que un espacio euclidiano (un concepto puramente matemático) es un espacio vectorial sobre los reales con una *estructura geométrica* adicional, que le permite manejar tanto vectores como puntos.

Las coordenadas de un punto en un espacio euclidiano son independientes. Y en el caso del espacio físico esto se logra empleando el sistema de coordenadas cartesianas

$(x, y, z)$  y su correspondiente marco de coordenadas ortogonal como marco de referencia. Tal marco, denotado aquí como  $\Sigma(X, Y, Z)$ , tiene su origen en el punto  $O$  y sus ejes  $X, Y$  y  $Z$  quedan determinados por los vectores unitarios  $\hat{x}, \hat{y}$ , y  $\hat{z} \in \mathbb{R}^3$ , indicando la dirección en la que crecen las coordenadas  $x, y$  y  $z$ , respectivamente. Las coordenadas de un punto en el espacio físico, medidas con respecto a este marco de referencia, se denominan aquí como *coordenadas físicas*, y tienen unidades de longitud.

De acuerdo con lo anterior, un punto en el espacio físico  $\mathbb{E}^3$  que tiene asociadas las coordenadas físicas  $(x, y, z)$ , con respecto al marco  $\Sigma_O(X, Y, Z)$ , se puede describir también por medio de un *vector de posición*  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  tal que

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

o, en forma compacta, como

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \ y \ z]^T.$$

Por otra parte, se le llama *configuración* de un sistema mecánico a la ubicación en el espacio físico de todos los elementos del sistema en un instante de tiempo dado. Y se le llama *espacio de configuración* al conjunto formado por todas las configuraciones posibles que puede tomar el sistema en cualquier tiempo.

Ahora bien, generalmente para describir la configuración de un sistema se emplea un conjunto de variables que determinan de manera única la posición de todos los puntos del mismo. Si tales variables, digamos  $m$  en total, se agrupan en un vector  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m$ , entonces el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^m$  daría una representación adecuada del espacio de configuración del sistema y cada elemento del mismo correspondería a una configuración específica.

Considérense los siguientes dos ejemplos:

**Ejemplo 1 (Una partícula libre)** *La configuración de una sola partícula puntual queda determinada completamente por las tres coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  que dan la posición de la partícula en el espacio físico. El espacio de configuración de tal partícula sería entonces todo el espacio  $\mathbb{R}^3$  y el vector  $[x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$  sería un elemento de ese espacio.*

**Ejemplo 2 (Dos partículas libres)** *El sistema mecánico está ahora compuesto no por una sino por dos partículas puntuales independientes, una con coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$  y la otra con coordenadas  $(x_2, y_2, z_2)$  respecto al mismo marco de referencia. El espacio de configuración en este caso sería  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^6$  y el vector  $[x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2]^T \in \mathbb{R}^6$  pudiera corresponder a un elemento de ese espacio (aunque también podría serlo el vector  $[x_1 \ x_2 \ y_1 \ y_2 \ z_1 \ z_2]^T \in \mathbb{R}^6$ ).*

En general, un sistema formado por  $N$  partículas independientes (libres) en el espacio físico requiere  $3N$  variables, y el espacio de configuración de tal sistema será  $\mathbb{R}^{3N}$ . No obstante, si las partículas no se mueven libremente en todo el espacio, o bien, existen relaciones entre ellas (que puedan ser descritas como expresiones matemáticas entre sus parámetros) que reducen el número de parámetros independientes, entonces el espacio de configuración se reduce también.

**Ejemplo 3 (Una partícula en el plano  $x = y$ )** *Considérese ahora el caso de una partícula que ya no se mueve libremente en tres dimensiones, sino que se ve forzada a moverse en el plano definido por la ecuación  $x = y$  en coordenadas cartesianas o, lo que es lo mismo, por*

$$x - y = 0. \quad (1.1)$$

*En otras palabras, tal partícula debe pertenecer siempre al conjunto dado por*

$$P = \left\{ [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \right\} \quad (1.2)$$

*Nótese que la ecuación (1.1) establece una relación de dependencia entre las variables  $x$  e  $y$ , de modo que para describir la configuración de esta partícula ya no es necesario especificar las tres coordenadas cartesianas sino sólo  $x$  y  $z$  (o bien  $y$  y  $z$ ), ya que usando (1.1) siempre será posible obtener la coordenada faltante. Así mismo, el espacio de configuración ya no es  $\mathbb{R}^3$  sino sólo el subconjunto de éste dado por (1.2), que además resulta ser un subespacio vectorial isomórfico al plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . Efectivamente, si se define un marco coordenado  $\Sigma_O(X', Y', Z')$  con el mismo origen  $O$  que  $\Sigma_O(X, Y, Z)$  pero orientado de tal manera que el vector unitario  $\hat{x}'$  pertenezca al plano  $x = y$ , entonces un elemento de tal espacio de configuración podría ser descrito usando sólo las coordenadas  $x'$  (en la dirección del vector  $\hat{x}'$ ) y  $z$ .*

Un subconjunto de un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^m$  que se puede considerar, al menos localmente, como isomórfico (con la misma estructura) a un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \leq m$ , se dice que es una *variedad* de dimensión  $n$  en  $\mathbb{R}^m$  (ver sección 2.6). Así, en el último caso estudiado se hablaría de una *variedad de configuración* (que se denota como  $M^n \subset \mathbb{R}^m$ ).

El término *coordenadas generalizadas* se refiere a las variables que describen la configuración de un sistema con respecto a alguna configuración de referencia. El adjetivo “generalizadas” se usa para resaltar el hecho de que estas coordenadas representan variables que describen la configuración del sistema y no coordenadas en el sentido tradicional, que dan la ubicación de un punto en el espacio físico.

Si se tienen  $m$  coordenadas generalizadas en un sistema, también es posible agrupar tales coordenadas para formar un vector (específicamente, lo que se conoce como un *vector de coordenadas*) pero perteneciente al espacio euclidiano  $\mathbb{R}^m$ . Así, para fines de

este trabajo, defínase el conjunto de  $m$  coordenadas generalizadas como  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m\}$ , de manera que tales coordenadas se pueden agrupar en el vector

$$\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \cdots \quad \rho_m]^T \in \mathbb{R}^m.$$

En este sentido, las coordenadas generalizadas sí determinan la ubicación de un punto pero no en el espacio físico, sino en el espacio de configuración, definido por  $\mathbb{R}^m$ .

Debe notarse entonces que el espacio de configuración proporciona una manera de visualizar el estado de un sistema mecánico como si fuera un punto en un espacio de dimensión mayor. Además, una trayectoria (es decir, una curva parametrizada en función de tiempo) en el espacio de configuración de un sistema mecánico, describe el movimiento de tal sistema en el espacio físico.

Cuando se trata de un sistema de  $N$  partículas libres (como en los ejemplos 1 y 2) es común emplear como coordenadas generalizadas las  $m = 3N$  coordenadas físicas asociadas (tres por cada una de las  $N$  partículas). Sin embargo, en ciertos casos puede resultar más ventajoso utilizar un conjunto de variables diferente al de las coordenadas físicas para describir el movimiento del sistema. Pero aunque así sea, debe ser posible obtener las coordenadas físicas de cada una de las partículas a partir de las coordenadas generalizadas empleadas. Por ejemplo si el sistema de  $N$  partículas libres es descrito por el vector  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m$ , entonces debe ser posible expresar las  $3N$  coordenadas físicas en función de ese vector, es decir:

$$x_1 = x_1(\boldsymbol{\rho}), \quad y_1 = y_1(\boldsymbol{\rho}), \quad z_1 = z_1(\boldsymbol{\rho}), \quad x_2 = x_2(\boldsymbol{\rho}), \quad \dots, \quad z_N = z_N(\boldsymbol{\rho})$$

Y aunque no siempre es fácil encontrar las expresiones analíticas, también es posible expresar el vector  $\boldsymbol{\rho}$  en función de las coordenadas físicas:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_N)$$

Para un mismo sistema es posible emplear diferentes conjuntos de coordenadas generalizadas. Y, en general, dados dos conjuntos de coordenadas generalizadas que describen el mismo sistema, debe ser posible expresar un conjunto en términos del otro (o, lo que es lo mismo, definir una transformación de coordenadas generalizadas).

Por otra parte, se dice que un conjunto de coordenadas generalizadas es *completo* si los valores de las coordenadas correspondientes a una configuración arbitraria geoméricamente posible son suficientes para definir la ubicación exacta de todas las partes del sistema (Chung, 2004).

En el caso del ejemplo 2, el conjunto  $\{x_1, x_2, y_1, y_2, z_2\}$  sería un conjunto de coordenadas generalizadas incompleto, ya que con el mismo, no sería posible determinar la ubicación exacta de una de las dos partículas.

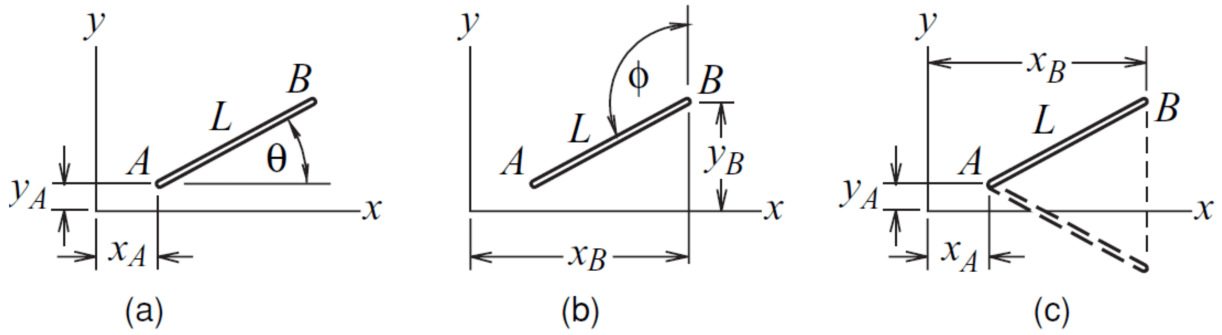


Figura 1.1: Posibles coordenadas generalizadas para una varilla en el plano: (a)  $(x_A, y_A, \theta)$ ; (b)  $(x_B, y_B, \phi)$ ; (c)  $(x_A, y_A, x_B)$ . (Soto, 2014).

Por otra parte, si un conjunto de coordenadas generalizadas no determina una única configuración, sino un número finito de configuraciones (que comparten los mismos valores de las coordenadas) entonces se tiene un conjunto de *coordenadas generalizadas ambiguas*.

**Ejemplo 4 (Varilla rígida con movimiento en 2D)** *Considérese el caso de una varilla rígida que se puede mover únicamente en el plano  $XY$ . Suponga que los extremos de la varilla, de longitud  $L$ , quedan determinados por los puntos  $A$  y  $B$ , con coordenadas  $(x_A, y_A)$  y  $(x_B, y_B)$ , respectivamente (ver figura 1.1).*

*Debe resultar claro que para conocer completamente la configuración de la varilla basta con especificar las dos coordenadas de un extremo y el ángulo de inclinación de la varilla; en otras palabras, se pueden seleccionar como variables generalizadas a  $x_A, y_A$  y al ángulo  $\theta$ , tal como se muestra en la figura 1.1(a).*

*En la figura 1.1(b) se muestra cómo es posible utilizar también un conjunto diferente de coordenadas generalizadas para describir la configuración del mismo sistema. En este caso se seleccionaron las coordenadas  $x_B, y_B$  y el ángulo  $\phi$  mostrado. Y nótese que la transformación del conjunto de coordenadas de la figura 1.1(a) a la figura 1.1(b) está dada por:*

$$x_B = x_A + L \cos(\theta), \quad y_B = y_A + L \sin(\theta), \quad \phi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

*Otra posible elección de coordenadas generalizadas para el mismo sistema sería la que se muestra en la figura 1.1(c), en donde se ha seleccionado a  $x_A, y_A$  y  $x_B$ . Sin embargo, como se aprecia en la misma figura, esta selección de coordenadas generalizadas es ambigua, puesto que es posible encontrar dos posibles configuraciones diferentes con los mismos valores de  $x_A, y_A$  y  $x_B$ . De hecho, es posible comprobar que la coordenada  $y_B$  debe satisfacer:*

$$y_B = y_A \pm \sqrt{L^2 - (x_B - x_A)^2}$$

Para describir la configuración de un sistema, es común emplear conjuntos de co-

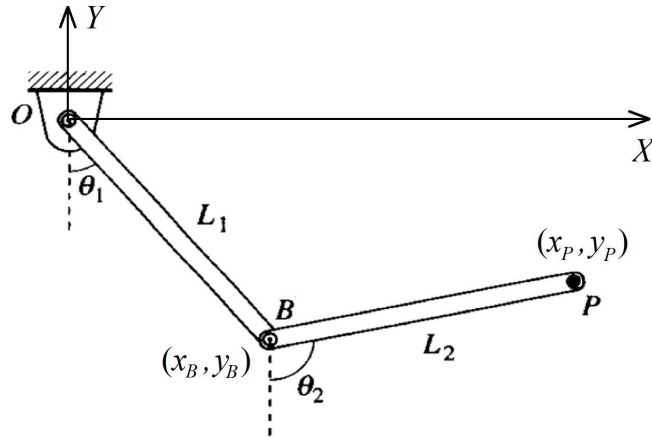


Figura 1.2: Mecanismo planar de dos eslabones.(Soto, 2014).

ordenadas generalizadas en las que cada coordenada es independiente de las otras. De hecho, algunos autores afirman que las coordenadas generalizadas deben ser independientes por definición. Sin embargo, en este trabajo se tomará el enfoque de (Baruh, 1999), quien habla de *coordenadas generalizadas independientes* (o *mínimas*) y *coordenadas generalizadas dependientes* (*redundantes*, o *no mínimas*).

Como una manera de distinguir a las coordenadas generalizadas mínimas, en este documento se les designará como  $q_i$  (en vez de  $\rho_i$ ), con  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde  $n$  es el número de coordenadas generalizadas independientes; así mismo,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  será el vector de coordenadas generalizadas mínimas.

Y debe notarse que, siempre que se emplee un conjunto de coordenadas generalizadas dependientes ( $\rho_i$ ), existirán relaciones matemáticas (comúnmente llamadas *restricciones de configuración*) que establecen esa dependencia entre tales coordenadas.

**Ejemplo 5 (Mecanismo planar de dos eslabones)** *Considérese ahora el caso del mecanismo de dos eslabones que se muestra en la figura 1.2, cuyo movimiento se realiza en el plano X-Y. El primer eslabón, de longitud  $L_1$ , tiene un extremo fijo al punto O (el origen del marco de coordenadas) y el otro extremo (punto B) rota con respecto a O; el segundo eslabón, de longitud  $L_2$  tiene un extremo unido al punto B y el otro extremo (punto P) rota con respecto a B.*

*Debe resultar claro que la configuración de tal mecanismo puede ser descrita fácilmente empleando los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  que se muestran en la figura. Esta sería entonces una conveniente selección de coordenadas generalizadas. Otra opción sería emplear como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas del punto P, es decir  $x_P$  y  $y_P$ , pero en este caso se tendrían coordenadas generalizadas ambiguas, ya que para una misma posición de P se tienen dos posibles configuraciones del mecanismo, tal como se muestra en la figura 1.3.*



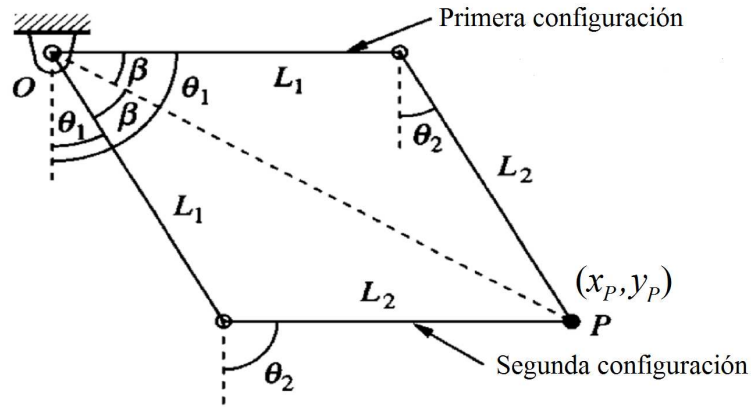


Figura 1.3: Dos configuraciones posibles para la misma posición del punto  $P$ .(Soto, 2014).

Una tercera opción sería emplear como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas de los puntos  $B$  y  $P$ , es decir  $x_B$ ,  $y_B$ ,  $x_P$  y  $y_P$ . Nótese que en este caso ya no se tiene ninguna ambigüedad, pero tal conjunto de coordenadas es redundante, puesto que se tienen las siguientes relaciones entre las coordenadas seleccionadas:

$$x_B^2 + y_B^2 = L_1^2, \quad \text{y} \quad (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 = L_2^2.$$

Ahora bien, la razón de cambio de una coordenada generalizada  $\rho_i$  (con  $i = 1, 2, \dots, m$ ) respecto al tiempo es llamada *velocidad generalizada* y es denotada por  $\dot{\rho}_i$ . Y el espacio de dimensión  $2m$  generado por las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas de un sistema mecánico es llamado el *espacio de estados* del sistema.

Un término también relevante en modelado de robots es el concepto de *cuasi-velocidad*, que en general es una función que depende de  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , pero cuya integral no tiene necesariamente un significado físico. Un ejemplo clásico de cuasi-velocidad es la llamada velocidad angular.

Hasta ahora es posible concluir lo siguiente (Baruh, 1999):

1. Las coordenadas generalizadas, sean independientes o no, no constituyen un conjunto único. Esto en realidad es una gran ventaja y da mucha flexibilidad.
2. Se debe tener cuidado al seleccionar las coordenadas generalizadas, especialmente coordenadas generalizadas independientes, para evitar redundancias y ambigüedades. Una mala elección de las coordenadas generalizadas puede hacer que la formulación y la solución del problema sean innecesariamente difíciles.

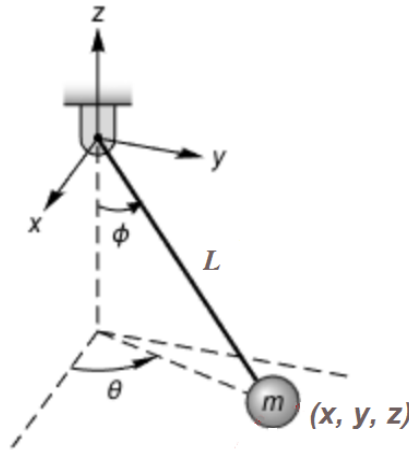


Figura 1.4: Diagrama de un péndulo esférico.(Soto, 2014).

### 1.1.2 Restricciones cinemáticas y grados de libertad

El número de *grados de libertad* (o, por simplicidad, *gdl*) de un sistema mecánico es el número de variables *independientes* que determinan su configuración. Como las coordenadas generalizadas son justamente las que describen tal configuración, el número de grados de libertad es también el número *mínimo* de coordenadas generalizadas que se requieren para describir el sistema.

Sea  $n$  el número de grados de libertad de un sistema y  $m$  el número de coordenadas generalizadas empleadas para describir su configuración. Si  $m > n$  entonces deben existir  $r = m - n$  restricciones de configuración. Dicho de otra manera, el número de grados de libertad se puede obtener simplemente restando el número de coordenadas generalizadas (dependientes) que se empleen menos el número de restricciones de configuración entre ellas.

El número de grados de libertad es una característica propia de un sistema mecánico, y es independiente de las coordenadas utilizadas para describir su configuración. En otras palabras, a pesar de que se puede seleccionar el número y tipo de coordenadas generalizadas en más de una manera, el valor  $n = m - r$  es invariante.

**Ejemplo 6 (Péndulo esférico)** *Considérese el péndulo esférico mostrado en la figura 1.4, y supóngase en principio que la longitud  $L$  puede cambiar.*

*La configuración del péndulo puede entonces ser descrita empleando como coordenadas generalizadas, ya sea las coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , o bien  $L$ ,  $\theta$  y  $\phi$  (lo que sería equivalente a utilizar coordenadas esféricas). Estos dos conjuntos de coordenadas*

están matemáticamente relacionados por

$$\begin{aligned}x &= L \cos(\theta) \text{sen}(\phi) \\y &= L \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \\z &= -L \cos(\phi)\end{aligned}$$

y es claro que el número de grados de libertad es tres.

Ahora supóngase que la longitud del péndulo es constante. En tal caso ya no tendría sentido emplear  $L$  como coordenada generalizada;  $\theta$  y  $\phi$  serían suficientes. Pero si se emplean las coordenadas cartesianas, entonces, dado que el número de grados de libertad se reduce a dos, existe una restricción de configuración, dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2 = \text{constante}$$

que muestra que tales coordenadas ( $x$ ,  $y$  y  $z$ ) no son independientes.

Debe notarse que si el sistema mecánico bajo estudio queda caracterizado por  $p$  partículas moviéndose en un espacio de dimensión  $d$ , entonces el número de coordenadas generalizadas sería  $m = dp$  y, en caso de existir  $r$  restricciones de configuración, el número de grados de libertad quedaría:

$$n = dp - r. \quad (1.3)$$

Para terminar esta sección, cabe mencionar que las *restricciones de configuración* (que reducen el espacio de configuración de un sistema mecánico) son únicamente aquellas que se establecen entre los elementos del vector de coordenadas generalizadas no mínimas y que pueden ser igualadas a cero (es decir, si  $\gamma_i(\boldsymbol{\rho})$  es una restricción de configuración entonces debe ser posible escribir  $\gamma_i(\boldsymbol{\rho}) = 0$ ).

Así, las  $r$  restricciones de configuración (o restricciones holonómicas) de un sistema mecánico pueden ser agrupadas en un vector:

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r. \quad (1.4)$$

Por otro lado, en algunos sistemas mecánicos las restricciones que se presentan involucran también las velocidades generalizadas, es decir, tienen la forma general:

$$\boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r \quad (1.5)$$

la cual no puede ser integrada para obtener una restricción de la forma (1.4). En este caso se dice que se tienen restricciones no holonómicas de primer orden, las cuales no reducen el espacio de configuración (ni el número de gdl) pero sí el espacio de las velocidades generalizadas instantáneas. En otras palabras, aunque un robot con restricciones no holonómicas puede moverse a cualquier postura dentro de su espacio

de configuración, ese movimiento no lo puede realizar de manera instantánea, sin violar las restricciones no holonómicas.

Un caso particular de restricciones no holonómicas de primer orden son las restricciones pfaffianas, las cuales poseen la forma:

$$\gamma'(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = A(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{b}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}.$$

Finalmente, algunos sistemas mecánicos presentan restricciones que involucran también a las aceleraciones generalizadas, es decir, tienen la forma:

$$\gamma''(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}, \ddot{\boldsymbol{\rho}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r$$

pero tales restricciones no pueden ser integradas para obtener la forma (1.5), se habla entonces de restricciones no holonómicas de segundo orden.

### 1.1.3 Cuerpos rígidos

Un *cuerpo rígido* es, por definición, un objeto físico con la característica de que si se toman dos puntos dentro del mismo, la distancia entre ellos se mantiene constante en todo momento. En otras palabras, un cuerpo rígido es un objeto sólido no deformable. Aunque se trata de una idealización, este concepto resulta ser muy útil en el estudio de mecánica de sólidos.

Sean  $P_i$  y  $P_j$  dos puntos cualesquiera pertenecientes a un cuerpo rígido, con coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  y  $(x_j, y_j, z_j)$ , respectivamente, respecto a un mismo marco de referencia, y sea  $d_{ij}$  la distancia entre esos dos puntos, es decir,

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \quad (1.6)$$

entonces, aunque el cuerpo se encuentre en movimiento, al ser rígido se debe cumplir siempre que  $d_{ij}$  es constante.

Ahora bien, es claro que un punto que se mueve libremente en el espacio (3D) tiene 3 gdl, y si el punto está restringido a moverse en un plano (2D) tiene sólo 2 gdl (considerando, sin pérdida de generalidad, que el plano del movimiento es el  $z = 0$ , entonces esa restricción es la que reduce la dimensión del espacio de configuración y sólo se requieren las coordenadas  $x$  y  $y$  del punto para localizarlo). No obstante, un cuerpo rígido que se mueve ya sea en 3D ó 2D tiene un número mayor de grados de libertad que un punto. El siguiente análisis permite establecer ese número.

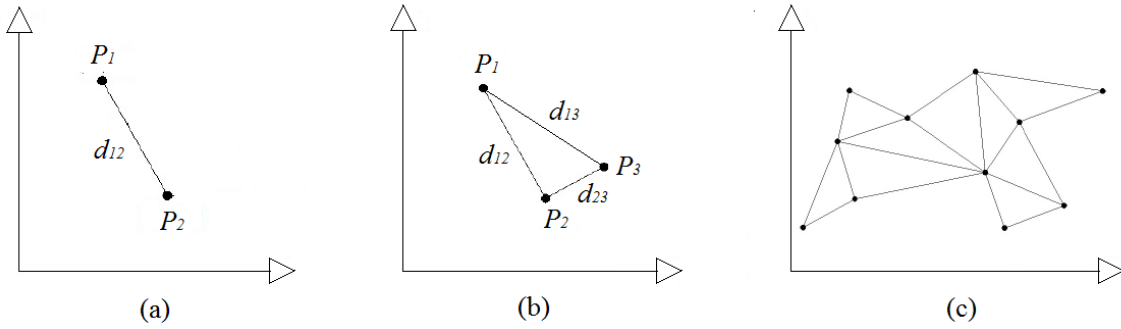


Figura 1.5: Cuerpos rígidos en 2D (Soto, 2014): (a) con 2 puntos; (b) con 3 puntos; (c) con 11 puntos.

### Análisis de los grados de libertad de un cuerpo rígido en 2D

Considérese el caso de un cuerpo rígido que idealmente se mueve en un plano (2D). Suponga que ese cuerpo está constituido únicamente por dos puntos,  $P_1$  y  $P_2$  (ver figura 1.5(a)); la distancia entre estos puntos, denotada por  $d_{12}$ , estaría dada por la expresión (1.6) y sería una restricción en el sistema. Empleando la fórmula (1.3) con  $d = 2$ ,  $p = 2$  y  $r = 1$  se concluye que este cuerpo rígido elemental tiene tres grados de libertad. Este sistema es similar al descrito en el ejemplo 4, es decir, se pueden usar dos coordenadas para localizar uno de los dos puntos y luego un ángulo medido con respecto a alguna referencia previamente definida, para localizar el segundo punto con respecto al primero.

Suponga ahora que se agrega un tercer punto ( $P_3$ ) al sistema (ver figura 1.5(b)). Para que el cuerpo siga siendo rígido es necesario agregar además dos restricciones de rigidez (las que hacen que  $d_{13}$  y  $d_{23}$  sean constantes). Al aplicar de nuevo la fórmula (1.3), ahora con  $p = 3$  y  $r = 3$ , se observa que el número de grados de libertad se sigue manteniendo igual a tres. Esto se puede hacer extensivo a cualquier número de puntos, ya que por cada punto que se agregue, con tal de mantener la rigidez del cuerpo será necesario agregar dos restricciones (por ejemplo, en la figura 1.5(c) se muestra un cuerpo rígido con 11 puntos, que también tiene 3 gdl).

De lo anterior se concluye que cualquier cuerpo rígido (así sea uno formado por un número infinito de puntos, es decir, un cuerpo rígido continuo) requiere tres grados de libertad para determinar su configuración, ya que definiendo la posición de uno de sus puntos (por ejemplo el centro de masa), y la inclinación de la recta que une este punto con cualquier otro punto del cuerpo previamente seleccionado, es posible localizar cualquier punto del cuerpo rígido.

El análisis anterior se puede extender a cuerpos que se mueven en 3D, como se explica a continuación.

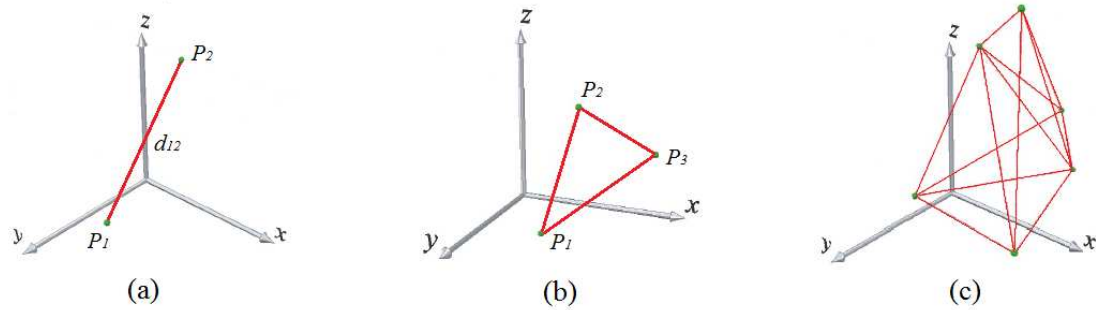


Figura 1.6: Cuerpos rígidos en 3D: (a) con 2 puntos; (b) con 3 puntos; (c) con 6 puntos. (Soto, 2014).

### Análisis de los grados de libertad de un cuerpo rígido en 3D

Supóngase el caso de un cuerpo rígido formado por dos puntos,  $P_1$  y  $P_2$ , pero donde cada uno de estos tiene tres coordenadas (ver figura 1.6(a)) La aplicación de la fórmula (1.3) se hace ahora con  $d = 3$ ,  $p = 2$  y  $r = 1$ , lo que lleva a que este sistema tiene 5 gdl Y es fácil verificar que esto es correcto, ya que tres de esas coordenadas independientes dan la posición de un punto, y una vez localizado éste, se requieren sólo dos ángulos para localizar el segundo punto con respecto al primero (estos ángulos corresponden a dos de las coordenadas esféricas, ya que la tercera, el radio, corresponde a  $d_{12}$  y es constante).

Al agregar un tercer punto ( $P_3$ ), manteniendo la rigidez del cuerpo, se deben agregar también dos restricciones (veáse la figura 1.6(b)). El resultado de aplicar la fórmula (1.3) en este caso da 6 gdl, los cuales corresponden a las cinco coordenadas requeridas para localizar los dos primeros puntos (e.g.  $P_1$  y  $P_2$ , como se explicó en el párrafo anterior) más un tercer ángulo, el cual permite definir la posición del tercer punto, o dicho de otra manera, la inclinación del triángulo  $P_1$ - $P_3$ - $P_2$  con respecto al eje que une los dos primeros puntos, respecto a alguna referencia previamente establecida.

Nótese que al agregar nuevos puntos al cuerpo, con tal de mantener la rigidez de éste, hay que asegurar que la distancia de cada nuevo punto a tres puntos cualesquiera diferentes del cuerpo se mantenga constante; en otras palabras, por cada nuevo punto se agregan tres restricciones de rigidez. En la figura 1.6(c) se muestra un cuerpo rígido con 6 puntos y 12 restricciones, por lo que se siguen manteniendo los 6 grados de libertad.

Se concluye entonces que, en el caso del movimiento en 3D, un cuerpo rígido requiere de 6 gdl para determinar su configuración. Basta con seleccionar tres puntos cualquiera dentro del cuerpo: la posición de uno de esos puntos (generalmente se selecciona el centro de masa) da la posición del cuerpo, mientras que para definir la orientación se requieren tres ángulos, dos para localizar el segundo punto con respecto al primero y uno más para localizar el tercer punto con respecto a la línea que une los dos primeros

puntos.

## Postura de un cuerpo rígido

A lo largo de este documento se denominará como *postura* (en inglés “*pose*”) a la combinación de la posición y orientación de un cuerpo rígido en el espacio.

Sea  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$  el vector de posición de un cuerpo rígido que se mueve en un espacio físico de dimensión  $d$  (es decir,  $d = 2$  si el movimiento es el plano y  $d = 3$  si es el espacio tridimensional). De acuerdo al análisis anterior, es posible demostrar que la orientación de tal; cuerpo pertenece a una variedad de dimensión  $\delta = \frac{d(d-1)}{2}$ , la cual se denotará aquí simplemente como  $M^\delta$ . Si  $\boldsymbol{\psi}$  es en el elemento de esa variedad de orientación entonces se escribe  $\boldsymbol{\psi} \in M^\delta \subset \mathbb{R}^s$  donde  $s$  es el número de parámetros usados para describir la orientación. Y si  $\mathbf{r}$  y  $\boldsymbol{\psi}$  se agrupan en un vector  $\boldsymbol{\xi}$  de manera que:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d \times M^\delta \subset \mathbb{R}^{d+s} \quad (1.7)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}$  es un elemento de la variedad que da la postura del cuerpo rígido, cuya dimensión es:

$$d + \delta = d + \frac{d(d-1)}{2} = \frac{d(d+1)}{2}$$

Se dice entonces que, en general, la dimensión del espacio de configuración de la postura de un cuerpo rígido que se mueve en un espacio físico de dimensión  $d$ , es  $\frac{d(d+1)}{2}$ .

## 1.2 Fundamentos de robótica

Después de revisar algunos conceptos básicos de mecánica, en esta sección se muestra su aplicación al modelado de sistemas robóticos. Para esto, considérese que, en general, un robot es un mecanismo automático, controlado, reprogramable y capaz de posicionar y orientar piezas, útiles o dispositivos especiales, siguiendo trayectorias definidas por el usuario, para la ejecución de diversas tareas. Su unidad de control incluye un dispositivo de memoria y, ocasionalmente, de percepción del entorno. Normalmente los robots se emplean para realizar una tarea de manera cíclica, pudiéndose adaptar a otra sin cambios permanentes en su estructura (Barrientos et al.,1997).

### 1.2.1 Componentes de un robot

Los robots se clasifican en dos grandes categorías:

- *Robots manipuladores.* Un robot manipulador se puede definir de manera simple como una estructura mecánica (o *mecanismo*) formado por un conjunto de cuerpos rígidos (comúnmente denominados *eslabones*) unidos por medio de *articulaciones* que dan movimiento a la estructura. Además un manipulador generalmente cuenta con un eslabón fijo, conocido como la *base*, y un eslabón cuyo movimiento es el que se desea controlar, el cual es denominado *elemento final* u *órgano terminal*.
- *Robots móviles.* Un robot móvil es un vehículo que generalmente cuenta con un sistema de propulsión autónoma y su movimiento es programado por medio de control automático ya sea en el mismo robot (control a bordo) o a distancia, desde una computadora fija (control remoto). Dependiendo del medio en el cual se desplazan, los robots móviles pueden clasificarse en: terrestres, aéreos, acuáticos y espaciales.

Los robots manipuladores son, por mucho, los más usados en la industria, al grado de que el término robot industrial se ha vuelto un sinónimo de robot manipulador.

Se le llama *cadena cinemática* a una sucesión de eslabones y articulaciones a través de una estructura mecánica. Si un manipulador presenta sólo una cadena cinemática desde la base hasta el órgano terminal (es decir, tiene una *cadena cinemática abierta*) entonces se tiene un *robot manipulador serie* (o serial). Por otro lado, si un manipulador presenta más de un camino desde la base hasta el órgano terminal (es decir, tiene una *cadena cinemática cerrada*) entonces se tiene un *robot manipulador paralelo*.

Pero además de la estructura mecánica los robots manipuladores cuentan con:

- *Actuadores* que ponen en movimiento al manipulador por medio de las articulaciones; los motores empleados son típicamente eléctricos e hidráulicos, y ocasionalmente neumáticos.
- *Sensores* que miden el estado del manipulador (sensores propioceptivos) y, de ser necesario, el estado de su entorno (sensores exteroceptivos).
- Un *sistema de control* (computadora) que permite controlar y supervisar el movimiento del manipulador.

Los robots móviles se consideran formados por los mismos elementos básicos (estructura mecánica, actuadores, sensores y sistemas de control) que los manipuladores. Y, de hecho, aunque tienen diferencias estructurales y funcionales, los robots manipuladores y móviles tienen también características en común. Por ejemplo, en ambos casos se busca controlar la postura de algún elemento de interés del mecanismo, pero mientras que en los manipuladores ese elemento es el órgano terminal, en los robots móviles es el robot móvil en sí.

Al trabajar con robots también son importantes los siguientes conceptos:



- Se dice que un robot es *completamente actuado* si el número de actuadores independientes que posee es igual al número de grados de libertad del robot. Además un *robot subactuado* es aquel que tiene menos actuadores independientes que grados de libertad, y un *robot sobreactuado* es el que tiene más actuadores independientes que grados de libertad.
- Un robot es *redundante* si tiene más grados de libertad que los que requiere para realizar una tarea asignada. De este modo, si la tarea es controlar la postura del elemento de interés, entonces el robot será redundante si posee más de 6 gdl, en el caso de movimiento en 3D (ó 3 gdl, si el robot es planar). Un robot no redundante es el que tiene exactamente el número de gdl requeridos para la tarea a realizar.

## 1.2.2 Articulaciones y movilidad

Un mecanismo robótico está compuesto por un conjunto de cuerpos rígidos que están conectados entre sí. Si entre dos cuerpos rígidos adyacentes existe movimiento relativo entonces se presenta lo que se conoce como un *par cinemático* (en inglés “*kinematic pair*”).

Para fines de análisis es posible considerar que uno de los cuerpos rígidos que constituye un par cinemático es fijo, mientras que el otro es móvil. Se presentan entonces dos casos:

- Un *par cinemático inferior* (“*lower kinematic pair*”) es aquel en el que el contacto entre los dos cuerpos adyacentes se da sobre una superficie, de manera que todos los puntos en la superficie de contacto tienen siempre el mismo movimiento relativo entre ellos.
- Un *par cinemático superior* (“*higher kinematic pair*”) es aquel en el que el contacto entre los dos cuerpos adyacentes se da sólo sobre un punto o una línea de contacto.

La figura 1.7 muestra algunos ejemplos de articulaciones que constituyen pares cinemáticos inferiores; éstas se encuentran principalmente en robots manipuladores. Por otro lado, ejemplos de pares cinemáticos superiores son los engranes y las levas, así como el contacto que tiene una rueda o una esfera rodando sobre una superficie.

En la figura 1.7 se indica el número de gdl de cada tipo de articulación. El número de grados de libertad de una articulación indica el número de movimientos independientes (libres) que se permiten entre los dos eslabones que une tal articulación.

Debe notarse además que las articulaciones rotacional (tipo R) y prismática (tipo P) tienen sólo un gdl (un movimiento de rotación y traslación, respectivamente) y se consideran articulaciones básicas pues casi todos los demás tipos de articulaciones

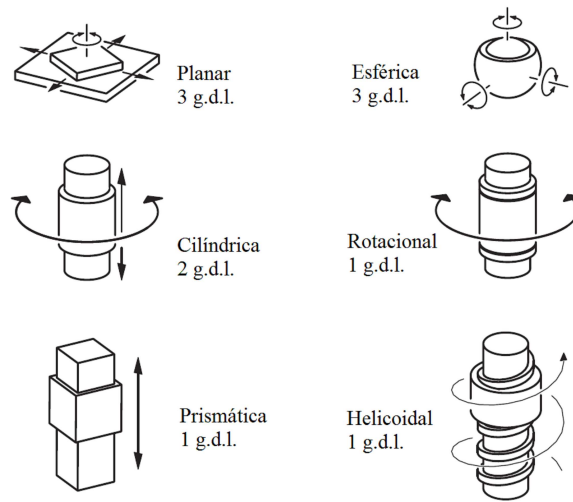


Figura 1.7: Algunos tipos de articulaciones y sus grados de libertad.(Soto, 2014).

(excepto la helicoidal) se pueden obtener a partir de ellas; por ejemplo, una articulación cilíndrica puede verse como la combinación de una articulación tipo P y una tipo R, y una articulación esférica combina tres articulaciones tipo R.

Cabe mencionar que para modelar un robot generalmente se seleccionan como coordenadas generalizadas las variables que describen el movimiento en las articulaciones del robot. En tal caso se dice que se emplean *coordenadas articulares*.

La *movilidad* de un robot indica la libertad de movimiento que éste posee. En el caso de robots que poseen únicamente articulaciones con pares cinemáticos inferiores el análisis de movilidad depende únicamente de las restricciones cinemáticas que imponen todas las articulaciones.

Considérese un sistema formado por  $n$  cuerpos rígidos que se mueven en un espacio físico de dimensión  $d$ . Si cada cuerpo se moviera de manera independiente, el número de grados de libertad de movimiento (o *grados de movilidad*) sería  $\frac{nd(d+1)}{2}$ , de acuerdo al último párrafo de la sección 1.1.3, pero por cada articulación que se agregue al sistema (es decir, por cada acoplamiento que se haga entre dos cuerpos rígidos) el número de grados de movilidad se reduce en un valor igual a  $\frac{d(d+1)}{2} - l$ , donde  $l$  es el número de grados de libertad que posee la articulación que se agrega (así, por ejemplo, en un mecanismo que se mueve en 3D, una articulación rotacional agrega cinco restricciones holonómicas)

Lo anterior lleva a la siguiente expresión, conocida como fórmula de Grübler, para obtener el número de grados de movilidad  $W$  de mecanismos articulados (McCarthy,

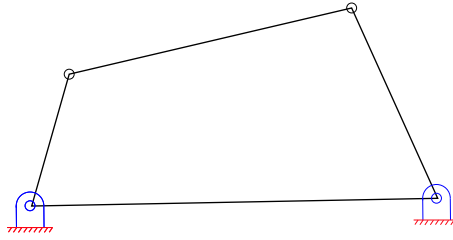


Figura 1.8: Mecanismo planar de un grado de movilidad.

2011):

$$W = \frac{d(d+1)}{2}n - \sum_{i=1}^j \left[ \frac{d(d+1)}{2} - l_i \right] = \frac{d(d+1)}{2}(n-j) + \sum_{i=1}^j l_i. \quad (1.8)$$

En la fórmula anterior,  $n$  es el número de eslabones móviles,  $j$  es el número total de articulaciones,  $l_i$  es el número de grados de libertad de la articulación  $i$  (para  $i = 1, 2, \dots, j$ ) y  $d$  es la dimensión del espacio en el que se mueve el mecanismo. Si algún cuerpo rígido se mantiene inmóvil (fijo), es obvio que éste no aporta movilidad.

**Ejemplo 7 (Mecanismo planar de dos grados de libertad)** *El mecanismo planar de la figura 1.8 se mueve en el plano, por lo que  $d = 2$ , tiene tres eslabones móviles  $n = 3$  y  $j = 4$ , ya que existen cuatro articulaciones; debido a que todas las articulaciones son rotacionales,  $l_i = 1$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Sustituyendo los valores anteriores en (1.8), se obtiene que el número de grados de movilidad del mecanismo es 1.*

Debe notarse también que un robot móvil, aunque puede poseer articulaciones y partes con movimiento relativo al robot en sí, siempre habrá más eslabones (móviles todos) que articulaciones, y de acuerdo a la fórmula (1.8), siempre tendrá al menos  $\frac{d(d+1)}{2}$  grados de movilidad. Aunque esto pareciera indicar que el control de la postura de un robot móvil es más sencillo que el de un manipulador, en la práctica no es así, sino lo contrario, esto se debe a que la distribución de los actuadores en este tipo de robots normalmente produce un movimiento que está sujeto a restricciones no holonómicas.

### 1.2.3 Clasificación de robots según sus restricciones

Tal como se explicó en la sección anterior, las articulaciones que unen los eslabones en un mecanismo robótico imponen restricciones al movimiento de éstos. Así que, a excepción del caso ideal de un único cuerpo rígido que se mueve en el espacio, todos los robots presentan restricciones. No obstante, si para describir el movimiento de un mecanismo se emplea un conjunto mínimo de coordenadas (y velocidades) generalizadas entonces se puede considerar que el modelo de tal mecanismo no incluye restricciones de ningún tipo en sus coordenadas. Se presentan entonces tres posibles casos:

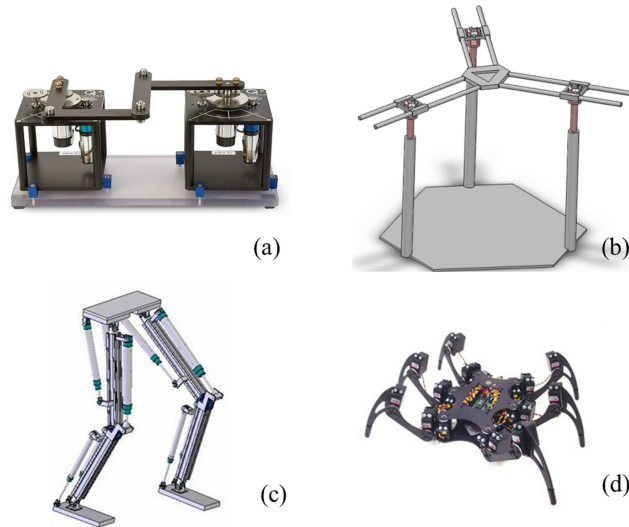


Figura 1.9: Ejemplos de mecanismos con restricciones holonómicas (Soto, 2014).

### Robots sin restricciones

En estos robots el número de coordenadas generalizadas (empleadas para modelar el mecanismo) es igual al número de gdl del mecanismo,  $n$ , y además,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  y  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  son empleadas como vectores de coordenadas y velocidades generalizadas, respectivamente.

Esta selección de coordenadas y velocidades generalizadas se realiza normalmente en robots manipuladores seriales, donde comúnmente se emplean las coordenadas articulares para modelar el mecanismo del robot.

### Robots con restricciones holonómicas

Como ya se ha explicado, en general si un mecanismo de  $n$  gdl es descrito por medio de  $m > n$  coordenadas generalizadas, deben de existir  $r = m - n$  restricciones holonómicas de la forma:

$$\gamma(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m-n}.$$

Como generalmente en los robots manipuladores se emplean las variables articulares como coordenadas generalizadas, se considera que un robot con restricciones holonómicas es aquel que tiene más articulaciones que grados de libertad, tal como ocurre en un manipulador que tenga cadenas cinemáticas cerradas. Ejemplos típicos son entonces los manipuladores paralelos y los robots con patas cuando al menos dos de ellas están en contacto con el piso (Mistry & Righetti, 2012). En la figura 1.9 se muestran algunos ejemplos de estos tipos de robots.



Robot con ruedas



Mano multidedos

Figura 1.10: Mecanismos que presentan no holonomía debido a la primera causa. (Soto, 2014).

### Robots con restricciones no holonómicas

Se pueden considerar tres causas que motivan el empleo de velocidades generalizadas no mínimas, sujetas a restricciones no holonómicas, en el modelado de sistemas mecánicos:

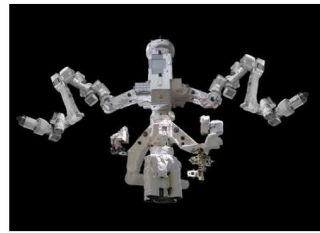
1. El contacto rodante entre dos cuerpos sin deslizamiento
2. La conservación del momento angular de ciertos mecanismos y
3. Mecanismos robóticos bajo una operación de control especial

Algunos ejemplos que se presentan debido a la primera causa son (ver figura 1.10):

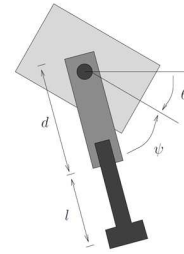
- Robots móviles con ruedas y vehículos donde el contacto rodante toma lugar entre las ruedas y la tierra
- Manipulación diestra con manos robóticas multidedos, donde la restricción se presenta en el contacto rodante de la punta de los dedos con los objetos.

La segunda causa de la presencia de restricciones holonómicas es cuando en el movimiento de un sistema mecánico que presenta ciertas propiedades de simetría existen cantidades conservadas. Si estas cantidades conservadas, por ejemplo el momento angular, no son integrables, estas cantidades pueden ser interpretadas como una restricción no holonómica. La conservación del momento angular produce una restricción diferencial que es no integrable.

Sistemas que caen en esta segunda clase son los sistemas multicuerpo que están flotando libremente, i.e., sin tener una base fija, por ejemplo (ver figura 1.11):



Robot espacial



Robot saltarín

Figura 1.11: Mecanismos que presentan no holonomía debido a la segunda causa. (Soto, 2014).

- Robots manipuladores montados en estructuras espaciales.
- Robots brincadores, o un mecanismo que puedan imitar las maniobras de un gimnasta o un clavadista (en fase de vuelo).
- Satélites con ruedas de reacción para la estabilización de su orientación.

Finalmente, la tercera causa de comportamiento no holonómico es la operación de un controlador en particular adoptada en algunas estructuras robóticas. Como ejemplos ilustrativos se pueden mencionar (ver figura 1.12)

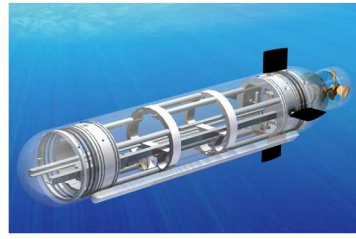
- Robots redundantes bajo un control de cinemática inversa particular.
- Sistemas robóticos subacuáticos y embarcaciones donde la propulsión hacia adelante se permite sólo en la dirección de señalamiento.
- Robots manipuladores subactuados.

Cabe mencionar que las dos primeras causas llevan a mecanismos con restricciones no holonómicas de primer orden, mientras que la tercera causa produce restricciones holonómicas de segundo orden.

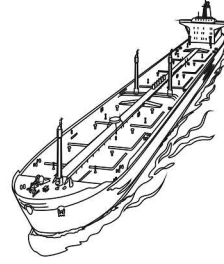
### 1.3 Modelado de mecanismos robóticos

Un modelo es una representación matemática de un sistema físico, biológico, etc. Los modelos permiten razonar sobre un sistema y hacer predicciones acerca del comportamiento de éste. El modelo que se elija depende de las preguntas que se desean responder, así, puede haber varios modelos de un solo sistema, con diferentes niveles de fidelidad en función de los fenómenos de interés (Astrom, 2008).

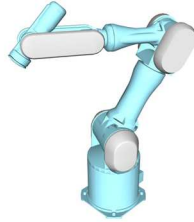
En el caso de sistemas mecánicos, dos tipos de modelos son de interés:



Robot acuático



Robot autónomo



Robot redundante



Robot subactuado

Figura 1.12: Mecanismos que presentan no holonomía debido a la tercera causa (Soto, 2014).

- El *modelo cinemático* que atiende a la descripción del movimiento del mecanismo sin considerar las causas que lo producen. Existe el modelo cinemático de postura, el modelo cinemático de velocidad y el modelo cinemático de aceleración.
- El *modelo dinámico* sí atiende a las causas que producen el movimiento de un mecanismo.

A continuación se describen con mayor detalle el modelo cinemático de postura, el modelo cinemático de velocidad y el modelo dinámico, los cuales son de relevancia para este trabajo de tesis.

### 1.3.1 Modelo cinemático de postura

El *modelo cinemático de postura* es el modelo que da la relación entre las coordenadas generalizadas  $\rho \in \mathbb{R}^m$  empleadas para describir la configuración del mecanismo, y las coordenadas empleadas para describir la postura del cuerpo rígido que se desea controlar, las cuales pueden ser descritas por  $\xi$ , tal como en (1.7).

Es útil mencionar que en un robot serial el cuerpo rígido de interés es el último eslabón, en el caso de un robot paralelo el cuerpo rígido de importancia es la plataforma, y en un robot móvil es la base del robot.

Al modelo cinemático que permite obtener, dadas las coordenadas generalizadas

( $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m$ ), las coordenadas de postura ( $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^3$ ), se le llama *modelo cinemático directo de postura* (MCDP) y se representa así:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\rho}).$$

Por otro lado, cuando el modelo cinemático permite obtener, dadas las coordenadas de postura, las coordenadas generalizadas, el modelo es conocido como *modelo cinemático inverso de postura* (MCIP) y se representa así:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}).$$

### 1.3.2 Modelo cinemático de velocidad

El modelo que da la relación entre la primera derivada de las coordenadas generalizadas  $\dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^m$ , y los vectores de velocidad lineal  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  y angular  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  del cuerpo rígido de interés del robot, es conocido como *modelo cinemático de velocidad*.

Para obtener  $\mathbf{v}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  a partir de  $\boldsymbol{\rho}$  se emplea la siguiente expresión conocida como: *modelo cinemático directo de velocidad* (MCDV):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = J_G(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (1.9)$$

donde  $J_G(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{6 \times m}$  es conocido como el jacobiano geométrico del robot (Sciavicco & Siciliano, 2000). La matriz columna  $[\mathbf{v}^T \ \boldsymbol{\omega}^T]^T$  define el estado de velocidad (o “twist”, en inglés) del cuerpo.

Mientras que para obtener  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  a partir de  $\mathbf{v}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  se emplea el *modelo cinemático inverso de velocidad* (MCIV) dado por:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = J_G^\dagger(\boldsymbol{\rho}) \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}.$$

donde  $J_G^\dagger(\boldsymbol{\rho})$  es la pseudoinversa derecha de  $J_G(\boldsymbol{\rho})$ . Por otro lado, es útil reescribir la ecuación (1.9) como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_p(\boldsymbol{\rho}) \\ J_o(\boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

donde  $J_p(\boldsymbol{\rho}), J_o(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$  son las matrices correspondientes a la contribución de las velocidades generalizadas  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  a las velocidades lineal y angular, respectivamente.

Por otra parte, considerando el vector de coordenadas de postura  $[\mathbf{r}^T \ \boldsymbol{\psi}^T]^T \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^3$ , se tiene que la derivada del vector de posición  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  es justamente la



velocidad lineal:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \dot{\boldsymbol{\rho}} = J_p(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^3.$$

Y en el caso de  $\boldsymbol{\psi} \in M^3 \subseteq \mathbb{R}^s$ , se tiene

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \dot{\boldsymbol{\rho}} = J_\psi(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^s$$

con  $J_\psi(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{s \times m}$ . De esta manera es posible escribir

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_p(\boldsymbol{\rho}) \\ J_\psi(\boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}} = J_A(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (1.10)$$

donde  $J_A(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{(3+s) \times m}$  puede calcularse a partir de:

$$J_A(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}},$$

el cual para fines de esta tesis será llamado *jacobiano analítico* del manipulador (Sciavicco & Siciliano, 2000). Dada una parametrización de la orientación  $\boldsymbol{\psi}$ , es posible encontrar una relación lineal entre los vectores  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ . Es decir

$$\boldsymbol{\omega} = T_\psi(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\psi}} \quad (1.11)$$

donde  $T_\psi \in \mathbb{R}^{3 \times s}$  es una matriz de transformación que depende de la parametrización de la orientación empleada. Combinando (1.10) y (1.11), es posible escribir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = T_A(\boldsymbol{\rho}) \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} \end{bmatrix} = T_A(\boldsymbol{\rho}) J_A(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (1.12)$$

donde

$$T_A(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} I_{[3]} & O_{[3,s]} \\ O_{[3,3]} & T_\psi(\boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times (3+s)},$$

e  $I_{[i]} \in \mathbb{R}^i$  es la matriz identidad y  $O_{[i,j]} \in \mathbb{R}^{i,j}$  una matriz nula. Esta notación será empleada en el resto del documento.

En el capítulo 3 (sección 3.2), se menciona a detalle cómo calcular  $T_\psi(\boldsymbol{\rho})$  para diversas parametrizaciones de la orientación.

### 1.3.3 Modelado dinámico

El *modelo dinámico* es el conjunto de expresiones matemáticas que establecen la relación del vector de coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m$ , su primera derivada  $\dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^m$  y su segunda derivada  $\ddot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^m$ , con el vector de fuerzas generalizadas externas  $\boldsymbol{\tau}_\rho \in \mathbb{R}^m$ ,

aplicadas al robot para llevar a cabo su movimiento.

Al igual que en cinemática, existen dos casos:

- El *modelo dinámico directo* (MDD) se enfoca en encontrar el movimiento resultante del robot expresado en términos de  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  y  $\ddot{\boldsymbol{\rho}}$  ante la aplicación de las fuerzas generalizadas externas  $\boldsymbol{\tau}_\rho$ .
- El *modelo dinámico inverso* (MDI) permite encontrar las fuerzas generalizadas  $\boldsymbol{\tau}_\rho$  requeridas para lograr un movimiento deseado del robot (que puede ser expresado mediante  $\boldsymbol{\rho}$  y sus derivadas).

Considérese un robot descrito por el vector de coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m$ . Si  $\boldsymbol{\tau}_\rho \in \mathbb{R}^m$  representa el vector de fuerzas generalizadas aplicadas al robot, es decir:

$$\boldsymbol{\tau}_\rho = [ \tau_1 \quad \tau_2 \quad \dots \quad \tau_m ]^T \in \mathbb{R}^m,$$

donde  $\tau_i$  es la fuerza generalizada aplicada en la dirección de crecimiento de  $\rho_i$ , entonces el modelo dinámico directo es una función  $\boldsymbol{\mu} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{3m}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} \\ \ddot{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\tau})$$

mientras que el modelo dinámico inverso sería:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}^{-1}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}, \ddot{\boldsymbol{\rho}}).$$

Existen diferentes formulaciones para el modelado dinámico de mecanismos robóticos, pero en todas ellas generalmente se requiere conocer las coordenadas de postura y los vectores de velocidad lineal y angular de un marco coordenado, colocado en el centro de masa (c.d.m) de cada eslabón que constituye el mecanismo.

Supóngase que un mecanismo está formado por  $b$  cuerpos rígidos, si al centro de masa (c.d.m.) del cuerpo  $l$  (con  $l = 1, 2, \dots, b$ ) se le asocia un marco coordenado  $\Sigma_l$ , entonces la postura del cuerpo  $l$ , con respecto al marco fijo  $\Sigma_0$ , está dada por:

$$\boldsymbol{\xi}_l = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_l \\ \boldsymbol{\psi}_l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (1.13)$$

donde el subíndice  $l$  indica que la postura (posición y orientación) es la del marco  $\Sigma_l$  con respecto  $\Sigma_0$ .

Además, los vectores de velocidad lineal y angular del marco  $\Sigma_l$ , con respecto al marco  $\Sigma_0$ , son  $\boldsymbol{v}_l \in \mathbb{R}^3$  y  $\boldsymbol{\omega}_l \in \mathbb{R}^3$ , y éstos pueden ser obtenidos a partir de las derivadas del vector de posición  $\boldsymbol{p}_l$  y la parametrización de la orientación  $\boldsymbol{\psi}_l$  que se esté utilizando,

como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_l \\ \boldsymbol{\omega}_l \end{bmatrix} = J_{G_l}(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^6. \quad (1.14)$$

Cabe mencionar que cuando se emplea un conjunto de coordenadas  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  independientes, entonces  $m = n$  y el modelo dinámico es conocido como *modelo dinámico mínimo* del robot. Cabe resaltar que cualquier modelo dinámico no mínimo puede ser reducido a un modelo dinámico mínimo, como se explicará a detalle en el capítulo 4 de esta tesis.

Por otro lado, una representación del modelo dinámico mínimo de un robot, comúnmente empleada en teoría de control es la siguiente:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_q$$

donde  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  representan los vectores de coordenadas articulares, su primera y segunda derivada, respectivamente;  $\boldsymbol{\tau}_q \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas externas aplicadas a los actuadores en las articulaciones;  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es llamada matriz de inercias,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas gravitacionales.

## 1.4 Formulaciones para modelado

En su acepción más general, una *formulación* es simplemente el proceso de poner juntos varios componentes en una relación o estructura, de acuerdo con una fórmula.

Este trabajo de tesis se enfoca al estudio de diferentes formulaciones para obtener el modelo dinámico de robots. Para obtener el modelo dinámico de un robot se requiere conocer primero el modelo cinemático, así que en esta sección se define lo que es:

- Una formulación para la transformación de coordenadas  $\mathbf{q} \rightarrow \boldsymbol{\rho}$ .
- Una formulación para modelado cinemático.
- Una formulación para modelado dinámico.

En los capítulos 3 y 4, se darán más detalles sobre las diferentes formulaciones para modelado cinemático y dinámico, respectivamente.

### 1.4.1 Formulaciones para la transformación de coordenadas $\mathbf{q} \rightarrow \boldsymbol{\rho}$

Tanto el modelo cinemático como el modelo dinámico de un robot se pueden obtener en términos del vector  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m$  de coordenadas generalizadas no mínimas. Sin embargo,

generalmente se prefiere emplear modelos mínimos, los cuales emplean un conjunto mínimo de coordenadas generalizadas (es decir,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  en vez de  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m$ ). Así que es necesario establecer claramente la relación entre los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\boldsymbol{\rho}$ .

Lo más sencillo es definir las coordenadas generalizadas mínimas a partir de un conjunto dado de coordenadas generalizadas no mínimas. Esto se hace mediante la función  $\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que:

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.15)$$

La transformación inversa estaría dada por:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \quad (1.16)$$

con  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; sin embargo, esta función puede no estar bien definida (por ejemplo, puede ser que una misma  $\mathbf{q}$  dé varias posibles  $\boldsymbol{\rho}$ ) o incluso puede que no sea posible expresarla en forma analítica (esto ocurre, por ejemplo, en el caso de los robots paralelos), aunque el teorema de la función implícita asegura que sí debe existir, al menos en forma local (para una vecindad de cualquier  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ).

Si  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})$  se conoce, entonces debe ser posible derivarla con respecto al tiempo para obtener:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (1.17)$$

donde

$$A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (1.18)$$

se denomina aquí como *matriz de proyección* y es un elemento esencial para poder aplicar el *método de proyección*, que permite reducir un modelo no mínimo en uno mínimo.

En caso de que la función  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})$  no sea conocida de manera explícita, debe emplearse algún método indirecto para obtener la matriz  $A(\mathbf{q})$ . Esto se explica en la sección 3.3.

En resumen, los pasos para obtener la transformación de coordenadas mínimas a no mínimas ( $\mathbf{q} \rightarrow \boldsymbol{\rho}$ ) dada por (1.16) y (1.17) son:

1. Determinar si se conoce o es posible determinar la función  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})$ , o su inversa  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$ .
2. Identificar el vector de  $r = m - n$  restricciones  $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r$ ; si se tienen sólo restricciones holonómicas, entonces  $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$ .
3. Si se conoce la función  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho})$ , entonces la matriz  $A(\mathbf{q})$  está dada simplemente por (1.18); si no, es necesario utilizar algún método indirecto (ver sección 3.3) para obtener  $A(\mathbf{q})$ , a partir de las funciones  $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$  y  $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})$  (ó  $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$ ).

El bloque inferior del diagrama de la figura (1.13) describe precisamente los pasos anteriores.

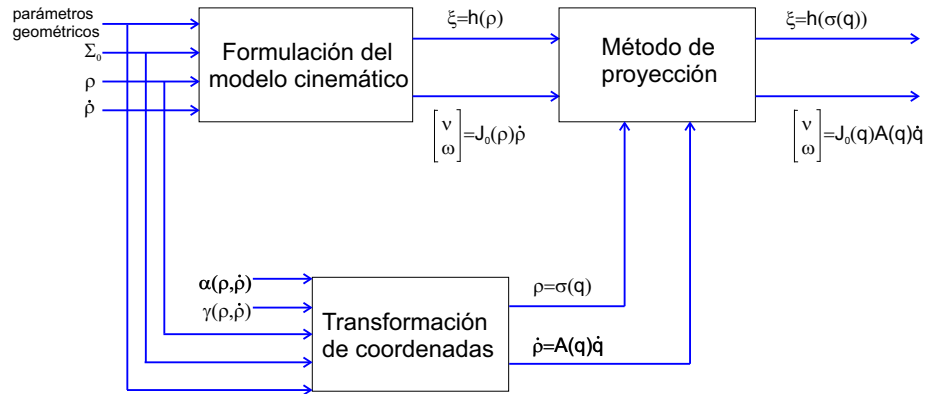


Figura 1.13: Diagrama representativo de una formulación para modelado cinemático

### 1.4.2 Formulaciones para modelado cinemático

Para fines de esta tesis, una *formulación para modelado cinemático* es una serie de pasos que deben seguirse para obtener el modelo cinemático directo de posición (MCDP), y el modelo cinemático directo de velocidad (MCDV) de un robot.

Los pasos a seguir para obtener el modelo cinemático de un robot en general son los siguientes:

1. Definir el vector de coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\rho}$  a emplear, así como su primera derivada  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , el marco fijo de la base del robot, y los parámetros cinemáticos (geométricos) del robot (longitudes y ángulos constantes necesarios para definir la postura de los eslabones).
2. Seleccionar una parametrización (representación matemática) para la postura del elemento de interés  $\boldsymbol{\xi}$ , y expresar esa postura en términos de las coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\rho})$  (es decir, determinar el MCDP).
3. A partir del MCDP, obtener la velocidad lineal y angular del elemento de interés empleando las ecuaciones correspondientes a la parametrización de la postura seleccionada; en otras palabras, obtener el MCDV (ver sección 3.1.2).
4. En caso de que las coordenadas generalizadas seleccionadas en el paso 1 sean mínimas, el proceso termina. En caso de que se hayan seleccionado coordenadas no mínimas, entonces, realizar la transformación de coordenadas correspondiente para obtener el MCDP y el MCDV empleando coordenadas mínimas (método de proyección); para ello se usan la función  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{q})$  y la matriz  $A(\boldsymbol{q})$  descritas en la sección anterior.

La figura (1.13) ilustra todo el proceso para obtener el modelo cinemático directo de postura y de velocidad. El método de proyección en este caso consiste simplemente en

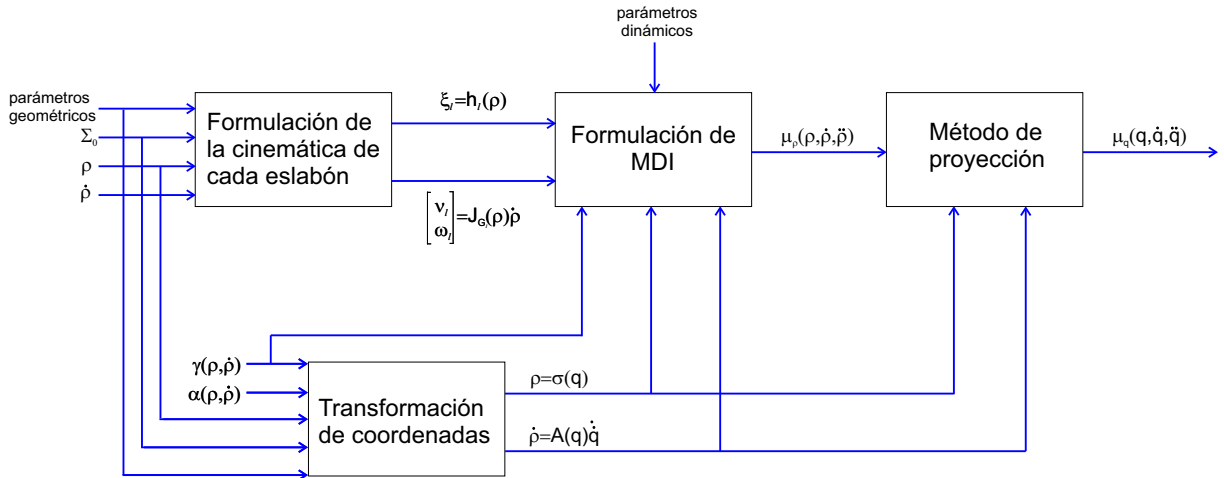


Figura 1.14: Diagrama de una formulación dinámica cuya cinemática de cada eslabón es no mínima

sustituir  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$  en las expresiones del MCDP y el MCDV que emplean coordenadas no mínimas.

### 1.4.3 Formulaciones para modelado dinámico

En esta tesis, una *formulación para modelado dinámico* es una serie de pasos que tienen que seguirse para obtener el modelo dinámico inverso de un sistema mecánico. Básicamente podemos encontrar dos tipos de formulaciones:

- *Formulaciones con cinemática no mínima*: En este tipo de formulaciones se requiere que para cada eslabón  $l$  del robot el vector de coordenadas de postura  $\boldsymbol{\xi}_l$  y los vectores de velocidad lineal  $\mathbf{v}_l$  y velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_l$  estén expresados en términos de coordenadas generalizadas no mínimas. Una vez que se obtiene el modelo dinámico empleando coordenadas no mínimas, entonces se aplica el método de proyección para reducir el sistema y obtener el modelo dinámico mínimo (véase figura (1.14)). Ejemplos de estas formulaciones son la formulación de Newton, Euler-Lagrange y Hamilton (ver sección 4.4).
- *Formulaciones con cinemática mínima*: En este tipo de formulación es necesario que el vector de coordenadas de postura, así como los vectores de velocidad lineal y angular de cada eslabón (es decir,  $\boldsymbol{\xi}_l$ ,  $\mathbf{v}_l$  y  $\boldsymbol{\omega}_l$ ) estén expresados en términos de coordenadas mínimas para aplicar las ecuaciones de movimiento correspondientes a la formulación. Cuando es difícil de describir la cinemática empleando coordenadas mínimas, se emplea el método de proyección (véase figura (1.15)). Un ejemplo de este tipo de formulaciones es la formulación de Kane (ver sección 4.4).

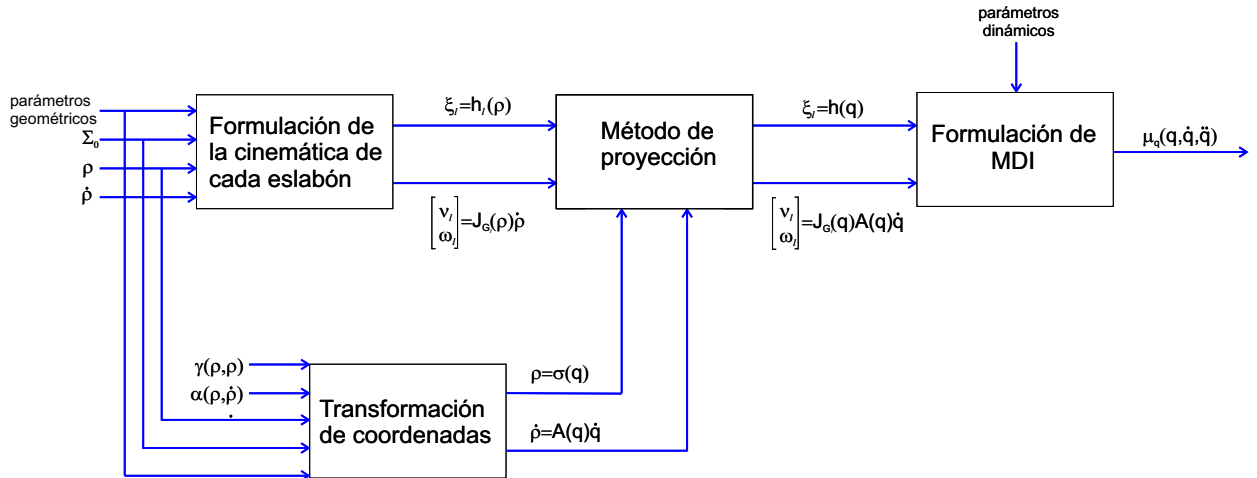


Figura 1.15: Diagrama de una formulación dinámica cuya cinemática de cada eslabón es mínima.

Los pasos generales en las formulaciones para modelado dinámico de mecanismos robóticos son los siguientes:

1. Obtener el vector de postura  $\xi_l(\boldsymbol{\rho})$ , así como los vectores de velocidad lineal  $\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho})$  y velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho})$  usando las expresiones correspondientes ((1.13) y (1.14)).
2. Aplicar las ecuaciones de movimiento dadas por la formulación de modelo dinámico elegida (ver capítulo 4).
3. En caso de que la formulación empleada sea con cinemática no mínima, y se desee obtener el modelo mínimo del robot, aplicar el método de proyección, empleando  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})$  y  $A(\mathbf{q})$ .

En el capítulo 4 se explican a detalle cuatro formulaciones para modelado dinámico: Newton-Euler, Euler-Lagrange, Hamilton y Kane; de estas formulaciones, las tres primeras emplean la cinemática no mínima de cada eslabón, mientras que el método de Kane emplea la cinemática mínima de cada eslabón.

## 1.5 Motivación para el tema

### 1.5.1 Raíces históricas sobre modelado dinámico

El elemento más simple estudiado por la mecánica es una partícula libre, siendo ésta un cuerpo dotado de masa del que se hace abstracción del tamaño y de la forma, pudiéndose considerar como un punto. Este concepto fue introducido por Isaac Newton en 1686,

en su obra: “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” (Newton, 2017); en este trabajo Newton dio a conocer sus tres leyes de la mecánica, las cuales aplicó únicamente a partículas. Newton empleó coordenadas cartesianas para modelar las partículas.

Transcurriendo un poco más de 50 años, el matemático suizo Leonhard Euler publicó el primero de sus dos principios aplicados a mecánica de cuerpos rígidos, ahora conocidos como leyes de Euler. Estos principios fueron deducidos de las leyes de Newton, para un sistema compuesto de un conjunto de  $n$  partículas cuyas posiciones relativas no cambian, es aquí donde nació el concepto de cuerpo rígido. Para ese tiempo, Euler se aventuró a modelar cuerpos rígidos restringidos, para lo cual ya empleaba el concepto de fuerzas de reacción (Schiehlen, 2007). Las ecuaciones obtenidas son conocidas en dinámica de sistemas multicuerpo como ecuaciones de Newton-Euler.

Un sistema de cuerpos restringidos fue considerado en 1743 por D’Alembert en su “Traité de Dynamique”. D’Alembert logró deducir las ecuaciones de la dinámica empleando métodos de estática, a partir del hecho de que si las fuerzas inerciales (dadas por  $m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ) son sumadas a las fuerzas activas (incluyendo las fuerzas de reacción de las restricciones), tal sistema está en equilibrio (McGill et al., 1991b).

Posteriormente, Lagrange combinó la idea de D’Alembert y el principio de trabajo virtual empleado por Galileo en 1655 (McGill et al., 1991a), para obtener el principio de D’Alembert-Lagrange, el cual establece que la suma del trabajo de las fuerzas activas e inerciales en todo desplazamiento virtual es cero. Como resultado, Lagrange obtuvo un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

En 1788, Lagrange estableció un análisis sistemático para sistemas con restricciones; la aplicación del cálculo variacional a la energía cinética y potencial total del sistema, considerando la restricciones cinemáticas, resultó en las ecuaciones de Lagrange de primera y segunda clase. Las ecuaciones de Lagrange de primera clase representan un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales (DAEs por sus siglas en inglés) en términos de coordenadas generalizadas no mínimas, mientras que las de segunda clase conducen a un conjunto mínimo de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs, por sus siglas en inglés) en términos de coordenadas generalizadas mínimas. Nótese que Lagrange ya utilizaba el concepto de coordenadas generalizadas para modelar los sistemas mecánicos.

Fue en el año de 1833 cuando Hamilton formuló, a partir de las ecuaciones de movimiento de Lagrange (1788), un conjunto de ecuaciones de movimiento de primer orden, las cuales permiten derivar principios de conservación que son más difíciles de obtener a partir de otros enfoques (Ginsberg, 2008). También Hamilton empleó coordenadas generalizadas.

El primer uso de *cuasi-velocidades* para describir la dinámica, es atribuído a Heun, Hamel y Appell. El resultado derivó en las ecuaciones de Gibbs-Appell, las cuales se basan en el principio de Gauss, y datan del comienzo del siglo XX. El inconveniente de las ecuaciones de Gibbs-Appell, es que es necesario el cálculo de una función escalar que depende de las aceleraciones lineales y angulares, la cual debe ser diferenciada, lo



que hace que el enfoque sea difícil de aplicar (Papastavridis, 1998; Baruh, 1999).

Otro enfoque que emplea el uso de cuasi-velocidades, para derivar las ecuaciones de movimiento, son las ecuaciones de Kane (Kane & Levinson, 1985), sin embargo, en este enfoque Kane llama a las cuasi-velocidades, velocidades generalizadas, lo que resulta confuso. Una formulación más reciente que hace uso de las cuasi-velocidades, son las ecuaciones de Boltzman-Hamel, también conocidas como ecuaciones de Lagrange con cuasi-velocidades (Meirovitch, 1970).

En 1992, Udwadia y Kalaba propusieron una nueva formulación basada en la segunda ley de Newton (Udwadia & Kalaba, 1992). Esta formulación, de igual modo que la mecánica lagrangiana, hace distinción entre las fuerzas externas aplicadas y las fuerzas internas de restricción, pero sin el uso de multiplicadores de Lagrange. La formulación de Udwadia y Kalaba toma en cuenta incluso las fuerzas que no obedecen el principio de D'Alembert. Esta formulación también emplea coordenadas generalizadas.

Como se aprecia en este recuento histórico, aún en los últimos 200 años (después de las formulaciones clásicas de Euler, Lagrange y Hamilton), se ha llevado a cabo intenso trabajo en la descripción de la dinámica del movimiento restringido. La escuela rusa de mecánica analítica también ha estado muy activa en esta área. En 1968, un monógrafo ruso en la materia listó más de 500 publicaciones (recientes en esos momentos) sobre el tema (Neimark & Fufaev, 1972). En fin, los avances en materia de modelado dinámico continúan, pero ahora el estudio ya no sólo es en cuerpos rígidos, sino también en cuerpos flexibles y elásticos.

### **1.5.2 Estado del arte sobre evaluación de formulaciones de la dinámica**

En la actualidad las formulaciones para modelado dinámico más empleadas son las formulaciones de Newton-Euler (N-E), Euler Lagrange (E-L), Hamilton y Kane. A lo largo de los años, diversos estudios que intentan evaluar las formulaciones más empleadas han sido realizados.

En 1980, Kane y Levinson (Kane & Levinson, 2012) relizaron una comparación cualitativa entre el método de Newton-Euler, Euler-Lagrange, Kane, Boltzmann-Hamel, Gibbs-Appell y Hamilton, el estudio se fundamentó en el modelo dinámico de una nave espacial.

Hollerbach (Hollerbach, 1980) desarrolló una forma recursiva de la formulación Lagrangiana y comparó este método con el formalismo de Newton-Euler (N-E), tomando en cuenta las complejidades computacionales. Turney et al. (Turney et al., 1981) compararon la complejidad computacional de las formulaciones de Lagrange, Lagrange recursivo y N-E, considerando el número de eslabones en un brazo.

En (Baruh, 2000), Baruh clasificó las formulaciones en dos partes: las basadas en

principios variacionales vectoriales y las basadas en principios variacionales escalares. El estudio comparativo realizado fue cualitativo y tomó en cuenta la formulación de Euler-Lagrange, Kane, Gibbs-Appell, Maggi y Boltzman-Hamel.

Featherstone ha llevado a cabo estudios detallados en la minimización computacional de las ecuaciones dinámicas, mostrando cómo el costo de calcular la matriz de inercias varía con la topología del mecanismo (Featherstone & Orin, 2000; Featherstone, 1983; Featherstone, 1999; Featherstone, 2005). Toz y Kucuk (Toz & Kucuk, 2011) realizaron un estudio en el que analizaron 16 diferentes manipuladores de tres grados de libertad empleando las formulaciones de N-E, E-L, y Hamilton, el costo computacional de estas ecuaciones dinámicas fueron comparados en términos de las propiedades de las articulaciones, las formulaciones y la geometría del espacio de trabajo del manipulador.

Sandino et al., en (Sandino et al., 2013) muestran un análisis comparativo cuantitativo de las formulaciones de N-E, E-L y Hamilton para el modelado de un helicóptero. En este estudio se comparó el tiempo necesario para generar el modelo dinámico, pero también el tiempo necesario para ejecutar el código.

En resumen, las evaluaciones reportadas en la literatura en las últimas décadas sobre las diversas formulaciones para obtener el modelo dinámico de robots son básicamente comparaciones cualitativas; en algunos estudios se muestran las relaciones entre las formulaciones, y se selecciona una de las formulaciones como la ideal para modelar un mecanismo tomando en cuenta lo “complicado” que parecen ser las ecuaciones de movimiento obtenidas.

Por otro lado, los estudios comparativos cuantitativos encontrados en la literatura, se basan en el número de operaciones realizadas para obtener el modelo dinámico de un robot en especial (comúnmente con estructura serial), y suelen descartar a las formulaciones como la de Euler-Lagrange por poseer en su estructura derivadas parciales; sin embargo, en nuestros días, con los avances tecnológicos, el obtener derivadas parciales ya no es un problema, por lo que la formulación de Euler-Lagrange (entre otras que emplean derivadas parciales) puede ser comparada con las ecuaciones de Newton-Euler también desde el punto de vista de eficiencia computacional.

### **1.5.3 Trabajos previos sobre modelado dinámico**

En lo que se refiere al modelado dinámico, los investigadores de la línea de Mecatrónica y Control de la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de la Laguna (ITLag), se han tenido que enfrentar a los retos de modelado de los siguientes tipos de robots: seriales, redundantes, subactuados, paralelos, móviles con ruedas, móviles aéreos, bípedos y humanoides.

Los primeros trabajos sobre modelado de robots fueron acerca de robots seriales, así que los primeros retos enfrentados fueron: el empleo de la formulación de Newton-Euler y de Euler-Lagrange para la obtención del modelo dinámico (Kelly & Santibáñez,

2003; Ramírez, 2008; Soto, 2009), la utilización de software especializado para obtener el modelo dinámico de robots con varios grados de libertad (Salinas, 2011; Sánchez-Mazuca, 2014), y el estudio de parámetros base para la obtención de modelos más sencillos, con la finalidad de llevar a cabo la identificación paramétrica y control de estos robots (Sánchez-Mazuca, 2014). Los robots seriales estudiados han sido: las dos versiones del robot Salviati, el robot CICESE de 2 gdl (réplica del que se encuentra en ese centro de investigación), un robot planar de 3 gdl y el robot Mitsubishi PA10-7CE de 7gdl

Por otro lado, los avances en teoría de control motivaron el empleo de mecanismos subactuados, y la necesidad de estudiar su modelo dinámico, como puede observarse en los trabajos referentes a los sistemas: carro péndulo (García, 2006), levitador magnético (Ollervides et al., 2007), péndulo invertido esférico (Alvarez, 2006), giroscopio (Oronoz, 2013), y pendubot (Sánchez-Mazuca, 2014), entre otros, los cuales se encuentran en el laboratorio de Mecatrónica y Control.

Motivados por la precisión, rigidez y velocidad de respuesta que presentan los robots de cadena cerrada, respecto a los robots seriales, el estudio de robots paralelos surgió en el ITLag. Los trabajos sobre modelado dinámico de robots con cadena cerrada hasta el 2014 fueron referentes al robot paralelo 3RRR (Revels, 2011) y al llamado mecanismo de cinco barras, tal como puede observarse en (Alvarado, 2010). En estos trabajo uno de los problemas principales a resolver fue la identificación de las singularidades dadas por el modelo cinemático. Respecto al modelo dinámico, diversos vectores de coordenadas generalizadas mínimas y no mínimas fueron empleados, así como las formulaciones de Euler-Lagrange y Newton-Euler.

Otros robots estudiados en los que se han aplicado diversas técnicas de control y cuyo modelo dinámico ha sido útil para llevar a cabo la simulación e implementación de los controladores, son los robots móviles con ruedas y aéreos, en donde uno de los retos de modelado enfrentados ha sido el tratamiento de restricciones no holonómicas. Todos los trabajos de modelado realizados hasta el 2013 en el ITLag, respecto a robots móviles, han sido desarrollados empleando la formulación de Euler-Lagrange. Dentro de los robots móviles con ruedas, cuya dinámica ha sido estudiada, están: el Segway RMP100 (Soto, 2014) y el Nexus (Sáenz et al., 2015). Y en cuanto al estudio de robots móviles aéreos están un avión y un cuadrotor.

Otra gama de robots también estudiada es la de los robots bípedos y humanoides, en los cuales debido a la necesidad del conocimiento de las fuerzas de reacción en el piso, la formulación de Newton-Euler ha sido ampliamente utilizada. Cabe mencionar que estos robots pueden ser modelados como robots paralelos o seriales, dependiendo de si ambos pies se encuentran apoyados en el suelo o no, respectivamente.

Un importante avance en esta línea de investigación es el empleo de software para la obtención numérica del modelo dinámico de robots humanoides, una vez teniendo el modelo CAD del robot, tal como el paquete Webots, ya que este tipo de software

permite validar las ecuaciones del modelo dinámico obtenido de forma analítica. Algunos trabajos sobre modelado dinámico de este tipo de robots realizados en el ITLag, pueden encontrarse en (Alvarez, 2006; Martínez, 2011; Campos, 2011; Reyes, 2012; Fierro, 2013), aplicados al robot bípedo construido en el ITLag (conocido como BipIT-Lag), al robot Bioloid y al robot Nao.

#### **1.5.4 Problemas detectados al inicio de la tesis**

Durante los primeros semestres de este proyecto de tesis (que inicio en agosto del 2013), se identificaron los siguientes puntos referentes al modelado dinámico de robots:

1. Poco conocimiento de las relaciones entre las principales convenciones de parámetros de Denavit-Hartenberg, con tal de facilitar la obtención del modelo cinemático y su aplicación al modelado dinámico.
2. La complejidad de los métodos clásicos para obtener el modelo dinámico de robots, principalmente debido a la selección de las coordenadas generalizadas.
3. Poco conocimiento de algoritmos de programación o paquetes de software para el cálculo del modelo dinámico de forma rápida.
4. Necesidad de la validación del modelo dinámico de cualquier tipo de robot a través de software.
5. Falta de una metodología para la obtención del modelo dinámico, que aplique por igual a diferentes tipos de robots con restricciones holonómicas y no holonómicas.
6. Desconocimiento de otras formulaciones y algoritmos para la obtención del modelo dinámico de robots, con el fin de conocer cuál técnica permite obtenerlo de forma más fácil y con una representación sencilla y útil para llevar a cabo control.

Todos estos puntos sirvieron de base para definir los objetivos de la tesis que se enuncian en la siguiente sección.

### **1.6 Objetivos de la tesis**

El objetivo general de esta tesis es estudiar a fondo las principales formulaciones existentes para obtener el modelado dinámico de robots en general, con la intención de evaluar sus ventajas y desventajas en aspectos tales como la complejidad analítica o la eficiencia computacional. Se espera que una parte importante del análisis consista en emplear diferentes conjuntos de variables generalizadas, ya sea parametrizaciones

de la postura conocidas (e.g., tornillos, cuaterniones duales, vectores en 6-D) o alguna selección particular de variables de interés.

Los objetivos específicos de la tesis son los siguientes:

1. Estudiar los conceptos básicos y fundamentos teóricos sobre modelado dinámico.
2. Analizar las diferentes formulaciones para modelado dinámico de robots en general.
3. Evaluar las diferentes formulaciones en forma cualitativa y cuantitativa.
4. Aplicar la teoría estudiada al modelado y control de sistemas robóticos reales.

## 1.7 Organización del documento

El resto de este documento de tesis se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se explican los fundamentos matemáticos requeridos para el desarrollo de la tesis: definiciones generales, conjuntos numéricos, estructuras algebraicas, vectores y matrices, teoría de funciones, transformaciones de coordenadas, sistemas de ecuaciones y geometría diferencial.

El capítulo 3 es dedicado al estudio de la cinemática. Este capítulo comienza con la descripción de la cinemática de cuerpos rígidos y de diversas parametrizaciones de la postura. Luego se muestra un análisis de las diferentes convenciones de parámetros Denavit-Hartenberg. Al final del capítulo se explica cómo obtener el modelo cinemático de robots con cadena cinemática abierta, de robots con cadena cinemática cerrada y de robots móviles con ruedas.

En el capítulo 4 se explica lo referente al modelado dinámico de cuerpos rígidos y mecanismos. Primero se definen los principios variacionales en los que se basan las diferentes formulaciones de modelado dinámico, y enseguida se explica la dinámica de cuerpos rígidos y mecanismos. Aquí se explican las cuatro formulaciones básicas (Newton-Euler, Euler-Lagrange, Hamilton y Kane) a detalle, así como las relaciones entre éstas. Finalmente, se incluye un breve estudio sobre otras formulaciones de modelado dinámico empleadas en la literatura.

En el capítulo 5 se presenta la aplicación de las cuatro formulaciones estudiadas a un manipulador serial, un mecanismo de cinco barras y un robot móvil tipo diferencial, los cuales son representativos de un robot sin restricciones, un robot con restricciones holonómicas y un robot con restricciones no holonómicas, respectivamente. Al término del capítulo se incluye un análisis comparativo cuantitativo de las formulaciones estudiadas.

Por otro lado, en el capítulo 6 se muestra la obtención del modelo cinemático y dinámico de un robot paralelo recién adquirido en el ITLag, conocido como robot Hexapod, así como la validación numérica de tales modelos. Enseguida se explica la implementación en el robot Hexapod de dos controladores que emplean el modelo cinemático y dinámico en su estructura, y al final se muestran los resultados experimentales, los cuales permitieron la validación de los modelos obtenidos.

Por último, en el capítulo 7 se exponen las aportaciones de la tesis y los problemas aún por resolver.

# Capítulo 2

## Preliminares matemáticos

Este capítulo está destinado a presentar conceptos y herramientas básicas que serán útiles en los capítulos subsecuentes. Teniendo en cuenta el grado de abstracción de algunos conceptos, se ha procurado presentarlos de manera clara aunque sin perder el formalismo matemático. Se incluyen también algunos ejemplos sencillos cuando se requiere. La mayor parte del material ha sido extraído de libros y enciclopedias de matemáticas, así como de textos diversos sobre sistemas no lineales. Las principales fuentes de consulta en este capítulo son (Campa, 2005; Antsaklis & Michel, 2006; Stratton, 1941; Fleisch, 2012; Lanczos, 2012; Larson, 2006).

### 2.1 Conjuntos numéricos

Los conjuntos numéricos empleados en esta tesis se describen a continuación:

- El conjunto de todos los números enteros positivos y el cero es conocido como conjunto de los *números naturales*. Este conjunto se denota con el símbolo  $\mathbb{N}$  y pueden escribirse como:

$$\mathbb{N} \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- Al conjunto formado por los enteros negativos, el número cero y los enteros positivos se le llama conjunto de los *números enteros*. Este conjunto se denota con el símbolo  $\mathbb{Z}$  y se pueden escribir como:

$$\mathbb{Z} \equiv \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- Los *números racionales* son los números que resultan de la razón (división) entre dos números enteros, siempre y cuando el divisor sea diferente de cero. El conjunto

de los números racionales se denota como  $\mathbb{Q}$ , así que

$$\mathbb{Q} \equiv \left\{ r = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

- Los números decimales que no pueden ser expresados como la razón de dos enteros son conocidos como *números irracionales* y son denotados por  $\bar{\mathbb{Q}}$ . Algunos ejemplos de números irracionales son:  $\sqrt[3]{5}$ ,  $\pi$  y  $\sqrt{2}$ .
- El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se denomina conjunto de los *números reales* y se denota como  $\mathbb{R}$ , es decir  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bar{\mathbb{Q}}$ .
- Se les llama *números complejos* a los números que son expresados en la forma  $x + iy$ , donde  $x$  y  $y$  son números reales e  $i^2 = -1$ . El conjunto de los números complejos se denota por  $\mathbb{C}$ , de modo que:

$$\mathbb{C} \equiv \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

- Se le llama *números duales* a los números que son expresados en la forma  $x + \sigma y$ , donde  $x$  y  $y$  son números reales y  $\sigma$  es un número diferente de 0, tal que  $\sigma^2 = 0$ . El conjunto de los números duales se denota por  $\mathbb{D}$ , de modo que:

$$\mathbb{D} \equiv \{z = x + \sigma y : x, y \in \mathbb{R}, \sigma^2 = 0\}.$$

- Se le llama *cuaterniones* a los números que pueden ser expresados en la forma:  $a + ib + jc + kd$ , donde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y los elementos  $i, j$  y  $k$  satisfacen:  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ , e  $ij = k$ ,  $jk = i$ ,  $ki = j$ . El conjunto de cuaterniones se denota por  $\mathbb{H}$ , de modo que:

$$\mathbb{H} \equiv \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j\}.$$

## 2.2 Estructuras algebraicas

Se dice que un conjunto de números  $S$  es *cerrado* bajo una *operación binaria*  $*$ , si para todo  $a, b \in S$  se tiene que  $a * b \in S$ . Por ejemplo, el conjunto de los *números naturales* es cerrado bajo las operaciones de adición (+) y multiplicación ( $\times$ ), pero no lo es en general para la sustracción y la división.

### Grupo

Un grupo  $(G, *)$  se define como un conjunto  $G$  que es cerrado bajo la operación binaria  $*$ , y que satisface los siguientes axiomas,  $\forall a, b, c \in G$  :



- *Asociatividad:*  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .
- *Elemento identidad:*  $\exists e \in G : a * e = e * a = a$ .
- *Elemento inverso:*  $\exists d \in G : a * d = d * a = e$  (el elemento identidad).

Si además de los axiomas anteriores se satisface también el siguiente:

- *Conmutatividad:*  $a * b = b * a$

se dice que el grupo es *abeliano*. Por ejemplo, los números reales forman un grupo abeliano bajo la adición, pero ni siquiera forman un grupo bajo la multiplicación, ya que el cero no tiene inversa multiplicativa.

## Anillo

Un anillo  $(R, +, \times)$  es un conjunto  $R$  que es cerrado bajo las operaciones de adición  $(+)$  y  $(\times)$ , y satisface los siguientes axiomas  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ :

- *Asociatividad aditiva:*  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
- *Conmutatividad aditiva:*  $a + b = b + a$ .
- *Identidad aditiva:*  $\exists 0 \in R : 0 + a = a + 0 = a$ .
- *Inversa aditiva:*  $\exists -a \in R : a + (-a) = (-a) + a = 0$ .
- *Asociatividad multiplicativa:*  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ .
- *Distributividad:*  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$  y  $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ .

Se puede decir que un anillo es un grupo abeliano con una segunda operación que es asociativa y distributiva sobre la operación del grupo abeliano. El ejemplo más común de anillo son los números enteros; otros ejemplos que son de interés en esta tesis, son los números duales y los cuaterniones.

## Campo

Un campo  $(F, +, \times)$  es un conjunto  $F$  que es cerrado bajo las operaciones de adición  $(+)$  y multiplicación  $(\times)$ , tiene un elemento identidad aditivo  $(0)$  diferente del elemento identidad multiplicativo  $(1)$  y satisface los siguientes axiomas,  $\forall a, b, c \in F$ :

- *Asociatividad aditiva:*  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

- *Conmutatividad aditiva:*  $a + b = b + a$ .
- *Identidad aditiva:*  $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ .
- *Inversa aditiva:*  $\exists -a \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ .
- *Asociatividad multiplicativa:*  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ .
- *Conmutatividad multiplicativa:*  $a \times b = b \times a$ .
- *Identidad multiplicativa:*  $\exists 1 \in F : a \times 1 = 1 \times a = a$ .
- *Inversa multiplicativa (excepto para 0):*  $\forall a \in F - \{0\}, \exists a^{-1} \in F : a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ .
- *Distributividad:*  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$  y  $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ .

Se puede decir que un campo es un conjunto de números que es cerrado para las operaciones de adición, multiplicación, sustracción y división (diferente de cero). La condición  $0 \neq 1, 0, 1 \in F$  asegura que un campo debe tener al menos dos elementos. El campo más pequeño es entonces el de los números binarios, donde las operaciones básicas del campo de los binarios son “XOR” y “AND”. Otros ejemplos de campos son: los números racionales ( $\mathbb{Q}$ ), los números reales ( $\mathbb{R}$ ) y los *números complejos* ( $\mathbb{C}$ ), con las operaciones de adición y multiplicación convencionales. Los *cuaterniones* ( $\mathbb{H}$ ) y los *números duales* ( $\mathbb{D}$ ) no forman un campo, pues los primeros no satisfacen el axioma de conmutatividad multiplicativa y los segundos no cumplen con la inversa multiplicativa  $\forall z \in \mathbb{D} - \{0\}$ .

## Espacio vectorial

Un *espacio vectorial*  $(V, +, \cdot)$  sobre un campo  $(F, +, \times)$  es un conjunto  $V$ , cerrado bajo las operaciones *adición vectorial*  $(+ : V \times V \rightarrow V)$  y *multiplicación escalar*  $(\cdot : F \times V \rightarrow V)$ , y que además satisface las siguientes propiedades,  $\forall a, b \in F, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ :

1. *Asociatividad aditiva:*  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ .
2. *Conmutatividad aditiva:*  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ .
3. *Identidad aditiva:*  $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ .
4. *Inversa aditiva:*  $\forall \mathbf{v} \in V, \exists -\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ .
5. *Asociatividad multiplicativa:*  $a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \times b) \cdot \mathbf{v}$ .
6. *Identidad multiplicativa:*  $\exists 1 \in F : \forall \mathbf{v} \in V, 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ .

7. *Distributividad sobre la adición vectorial:*  $a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$ .

8. *Distributividad sobre la adición del campo:*  $(a+b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$ .

Los elementos de un espacio vectorial se conocen en general como vectores. Una *base* de un espacio vectorial  $V$  sobre  $F$ , se define como un conjunto de *vectores básicos*  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_n \in V$  que son *linealmente independientes* y que *generan* (“*span*” en inglés) el espacio  $V$ . Consecuentemente, si  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$  es un conjunto de vectores en  $V$  entonces esos vectores forman una base si y sólo si todo  $\mathbf{v} \in V$  puede ser escrito en forma única como

$$\mathbf{v} = a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_n \hat{\mathbf{e}}_n$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ . Un espacio vectorial tendrá muchas bases diferentes, pero hay siempre el mismo número de vectores básicos en cada una de ellas. El número de vectores básicos es llamado la *dimensión* de  $V$ .

Si  $F$  es el campo de los números reales  $\mathbb{R}$ , entonces se habla de un *espacio vectorial sobre los reales*. El ejemplo más común de un espacio vectorial sobre los reales es el *espacio euclidiano de dimensión  $n$* , denotado por  $\mathbb{R}^n$ . Otros ejemplos de espacios vectoriales sobre los reales son los números complejos, los números duales y los cuaterniones.

Sean  $U$  y  $V$  dos espacios vectoriales sobre el mismo campo  $F$ , y sea  $\mathbf{f} : U \rightarrow V$  una función invertible tal que

$$\mathbf{f}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathbf{f}(\mathbf{x}) + b\mathbf{f}(\mathbf{y})$$

para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$  y todo  $a, b \in F$ , entonces se dice que  $\mathbf{f}$  es un *isomorfismo* y  $U$  y  $V$  son *isomórficos*, es decir, son esencialmente idénticos.

En general, dos espacios vectoriales sobre los reales son isomórficos si y sólo si tienen la misma dimensión. Por ejemplo, los números complejos definen un espacio vectorial sobre los reales de dimensión dos, que es isomórfico al espacio vectorial real  $\mathbb{R}^2$ , esto se escribe:

$$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

Los espacios vectoriales (o *espacios lineales*) y las transformaciones entre ellos son el objeto de estudio principal de la llamada *álgebra lineal*.

## Álgebra sobre un campo

Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial sobre un campo  $(F, +, \times)$ . Si se define una operación *multiplicación vectorial*  $(* : V * V \rightarrow V)$  tal que  $V$  sea cerrado bajo esa operación, y satisfaga las siguientes propiedades,  $\forall a \in F, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ :

- *Distributividad:*  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) * \mathbf{w} = \mathbf{u} * \mathbf{w} + \mathbf{v} * \mathbf{w}$  y  $\mathbf{u} * (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} * \mathbf{v} + \mathbf{u} * \mathbf{w}$ .

- *Bilinealidad*:  $(a \cdot \mathbf{u}) * \mathbf{v} = \mathbf{u} * (a \cdot \mathbf{v}) = a \cdot (\mathbf{u} * \mathbf{v})$ .

entonces se tiene un *álgebra*  $(V, +, \cdot, *)$  sobre el campo  $(F, +, \times)$ .

Nótese que un álgebra no requiere ni asociatividad ni conmutatividad en la multiplicación de vectores, es por eso que pueden definirse *álgebras no conmutativas* y *álgebras no asociativas*. Por ejemplo, el *álgebra de matrices* es asociativa, pero no conmutativa.

Un tipo interesante de álgebras no asociativas y no conmutativas son las *álgebras de Lie*, que satisfacen las siguientes propiedades,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in (V, +, \cdot, *)$ :

- *Antisimetría*:  $\mathbf{u} * \mathbf{v} = -\mathbf{v} * \mathbf{u}$ . (2.2)

- *Identidad de Jacobi*:  $\mathbf{u} * (\mathbf{v} * \mathbf{w}) + \mathbf{w} * (\mathbf{u} * \mathbf{v}) + \mathbf{v} * (\mathbf{w} * \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ . (2.3)

Un ejemplo común de un álgebra de Lie es el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , con la multiplicación vectorial dada por el *producto cruz* de vectores.

## 2.3 Álgebra lineal

### 2.3.1 Vectores y matrices

#### Definición de vector y matriz

El espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  es el conjunto de vectores  $\mathbf{x}$  de *dimensión*  $n$ , formados por  $n$ -adas de números reales en forma de columna:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  son las *coordenadas* del vector  $\mathbf{x}$ . Similarmente, se denota por  $\mathbb{R}^{n \times m}$  al conjunto de *matrices*  $A$  formadas por arreglos de números reales ordenados por  $n$  renglones y  $m$  columnas:

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

En general, el espacio de matrices  $\mathbb{R}^{n \times m}$  es isomórfico al espacio de vectores  $\mathbb{R}^{nm}$ , y tiene por tanto *dimensión*  $nm$ . Nótese también que un vector es simplemente una *matriz columna*, es decir, con  $m = 1$ .

## Tipos de matrices

Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es cuadrada si  $n = m$ . Una matriz cuadrada  $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *diagonal* si  $a_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ . Una matriz diagonal será denotada por  $\text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . En el caso en que  $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = a$ , la matriz correspondiente se denotará por  $\text{diag}\{a\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

El conjunto de matrices diagonales de  $n \times n$  forma un espacio vectorial, de dimensión  $n$ , sobre los reales. Una matriz diagonal de particular utilidad es la matriz *identidad*, definida como  $I_{[n]} = \text{diag}\{1\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y la matriz *nula*:  $O_{[n,n]} = \text{diag}\{0\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

La matriz *transpuesta* de  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , denotada por  $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , es la que se obtiene al intercambiar los renglones y columnas de  $A$ . Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *simétrica* si es igual a su transpuesta, es decir, si  $A = A^T$ , mientras que es *antisimétrica* si  $A = -A^T$ . Nótese que, dada una matriz cualquiera  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , las matrices  $A^T A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $AA^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son simétricas. Es fácil comprobar que los conjuntos de matrices simétricas y antisimétricas forman subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , cuyas dimensiones son  $\frac{1}{2}n(n+1)$  y  $\frac{1}{2}n(n-1)$ , respectivamente. Por ejemplo, la matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

es claramente isomórfica a  $\mathbb{R}^6$ , por lo que su dimensión es 6. El conjunto de matrices antisimétricas de  $n \times n$  es de importancia y se denomina  $\text{so}(n)$ , es decir:

$$\text{so}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = -A^T\}.$$

El *rango* de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , denotado por  $\text{rank}(A)$ , se define como el máximo número de renglones (o columnas) linealmente independientes de  $A$ . En general,  $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$ . Si  $\text{rank}(A) = \min\{m, n\}$  se dice que  $A$  es de *rango completo* (*full rank*).

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *singular* si su determinante es nulo, i.e., si  $\det(A) = 0$ ; si  $\det(A) \neq 0$ , entonces  $A$  es *no singular* y su matriz *inversa*,  $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , cumple  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ; además  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$ .

El conjunto de matrices cuadradas no singulares forma un grupo bajo la multiplicación matricial convencional. Este grupo es denominado *grupo lineal general*,  $\text{GL}(n)$ :

$$\text{GL}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}. \quad (2.4)$$

La operación inversa de matrices puede extenderse al caso de matrices no cuadradas, siempre y cuando sean de rango completo. Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n > m$  y  $\text{rank}(A) = m$ ,

entonces existe una matriz *pseudoinversa izquierda* de  $A$ ,  $A_l^\dagger \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , dada por

$$A_l^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$$

tal que  $A_l^\dagger A = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Si por el contrario,  $n < m$  y  $\text{rank}(A) = n$ , entonces se tiene la matriz *pseudoinversa derecha* de  $A$ ,  $A_r^\dagger \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$A_r^\dagger = A^T (A A^T)^{-1} \quad (2.5)$$

tal que  $A A_r^\dagger = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Es fácil demostrar que si  $n = m$  y  $\text{rank}(A) = n$  (o lo que es lo mismo,  $\det(A) \neq 0$ ), entonces  $A_l^\dagger = A_r^\dagger = A^{-1}$ .

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que satisface que  $A^T A = A A^T = I$  se dice que es *ortogonal*. Obsérvese que si  $A$  es ortogonal, entonces  $A^{-1} = A^T$ . El conjunto de matrices ortogonales de  $n \times n$  se denota por  $O(n)$ , es decir:

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A A^T = A^T A = I\}.$$

$O(n)$  no forma un espacio vectorial, pero sí un grupo, bajo la operación multiplicación matricial, y es llamado el *grupo ortogonal*. El determinante de una matriz ortogonal puede ser 1 ó  $-1$ . El conjunto de matrices ortogonales de  $n \times n$  con determinante igual a 1 es también un grupo multiplicativo, conocido como *grupo especial ortogonal*,  $SO(n)$ :

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}.$$

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , no necesariamente simétrica, es *definida positiva*, y se escribe  $A > 0$ , si:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Cualquier matriz simétrica y definida positiva  $A = A^T > 0$  es no singular; por tanto su inversa existe. Más aún,  $A = A^T > 0$  si y sólo si  $A^{-1} = (A^{-1})^T > 0$ . Una forma sencilla de determinar la positividad de una matriz simétrica  $A = \{a_{ij}\}$  es empleando el llamado *teorema de Sylvester*, que establece que  $A > 0$  si y sólo si se cumple que

$$\det[a_{11}] > 0, \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \det[A] > 0. \quad (2.6)$$

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *semidefinida positiva*, y se escribe  $A \geq 0$ , si:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *definida negativa* si  $-A$  es definida positiva, mientras que es *semidefinida negativa* si  $-A$  es semidefinida positiva.

## Productos de vectores

Dados dos vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , el *producto interior* (*producto escalar* o *producto punto*),  $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , se define como:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \in \mathbb{R}.$$

El producto interior permite definir la *norma euclidiana* de un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , denotada por  $\|\mathbf{x}\|$ , como:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Propiedades útiles de la norma euclidiana son,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ :

- $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (desigualdad del triángulo). (2.7)

- $|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$  (desigualdad de Schwartz). (2.8)

En el caso particular del espacio  $\mathbb{R}^3$  se tiene también el *producto exterior* (*producto vectorial* o *producto cruz*) de dos vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que se define como:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Alternativamente, se puede escribir  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = S(\mathbf{x})\mathbf{y}$ , donde, para un vector  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ , la matriz  $S(\mathbf{x})$  se define como:

$$\begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{so}(3) \quad (2.9)$$

que es una matriz antisimétrica. Así que  $S(\cdot)$  se puede ver como un operador matricial  $S(\cdot) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{so}(3)$ .

El operador  $S(\cdot)$  satisface las siguientes propiedades,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ :

$$S(\mathbf{x})^T = S(-\mathbf{x}) = -S(\mathbf{x}), \quad (2.10)$$

$$S(\mathbf{x})(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = S(\mathbf{x})\mathbf{y} + S(\mathbf{x})\mathbf{z}, \quad (2.11)$$

$$S(\mathbf{x})\mathbf{y} = -S(\mathbf{y})\mathbf{x}, \quad (2.12)$$

$$S(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y}^T S(\mathbf{x})\mathbf{y} = 0, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{x}^T S(\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{z}^T S(\mathbf{x})\mathbf{y}, \quad (2.15)$$

$$S(\mathbf{x})S(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\mathbf{x}^T - \mathbf{x}^T\mathbf{y}I, \quad (2.16)$$

$$S(S(\mathbf{x})\mathbf{y}) = \mathbf{y}\mathbf{x}^T - \mathbf{x}\mathbf{y}^T. \quad (2.17)$$

### Valores y vectores propios

Considérese la transformación lineal de un vector  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ , establecida por una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si el vector resultante de la transformación tiene la misma dirección de  $\mathbf{u}$  (con  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ), entonces

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \quad (2.18)$$

donde, en general,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . La ecuación (2.18) puede ser reescrita como

$$(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

Para que el sistema homogéneo de ecuaciones (2.19) tenga una solución diferente de la trivial, se debe tener

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

que es la *ecuación característica* de  $A$ . Las  $n$  raíces de esta ecuación, denotadas  $\lambda_1\{A\}$ ,  $\lambda_2\{A\}$ ,  $\dots$ ,  $\lambda_n\{A\}$  son los *valores propios* (*valores característicos* o *eigenvalores*) de  $A$ . Bajo la suposición de valores propios distintos, los  $n$  vectores  $\mathbf{u}_i$  que satisfacen la ecuación

$$(\lambda_i\{A\}I - A)\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n$$

son llamados los *vectores propios* (*vectores característicos* o *eigenvectores*) asociados a los valores propios  $\lambda_i\{A\}$ .

La *traza* de una matriz cuadrada  $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , denotada por  $\text{tr}(A)$ , es la suma de los elementos en la diagonal principal de  $A$ , es decir:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$



Dados los  $n$  valores propios de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la traza y el determinante de  $A$  satisfacen:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\{A\}, \quad (2.20)$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i\{A\}. \quad (2.21)$$

En el caso de una matriz simétrica  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  todos sus valores propios son números reales. En lo sucesivo, se denotará por  $\lambda_m\{A\}$  y  $\lambda_M\{A\}$  a los valores propios mínimo y máximo de una matriz simétrica  $A$ , respectivamente. El *teorema de Rayleigh–Ritz* establece que en una matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se tiene,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\lambda_m\{A\} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \lambda_M\{A\} \|\mathbf{x}\|^2. \quad (2.22)$$

Una matriz cuadrada, no necesariamente simétrica,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es definida positiva si y sólo si los valores propios de  $A + A^T$  son positivos, i.e.,  $\lambda_i\{A + A^T\} > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Más aún, una matriz simétrica  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es definida positiva si y sólo si  $\lambda_i\{A\} > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ .

## Norma espectral

La *norma espectral* de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  se define como:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_M\{A^T A\}}.$$

Si  $A$  es simétrica entonces  $\|A\| = \max_i |\lambda_i\{A\}|$ . Si  $A$  es además definida positiva,  $A = A^T > 0$ , entonces simplemente  $\|A\| = \lambda_M\{A\}$ . Por otra parte, en el caso particular de  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  antisimétrica, i.e.,  $A \in \operatorname{so}(3)$ , entonces existe un vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $A = S(\mathbf{a})$ , y se puede demostrar que

$$\|A\| = \|S(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}\|. \quad (2.23)$$

y que

$$\|A^2\| = \|AA\| = \|S(\mathbf{a})S(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}\|^2. \quad (2.24)$$

donde  $\|A\|$  es la norma espectral de la matriz  $A$ , mientras que  $\|\mathbf{a}\|$  denota la norma euclidiana del vector  $\mathbf{a}$ .

Un resultado importante es el siguiente. Considérese la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y el vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ . La norma euclidiana del vector  $A\mathbf{x}$  satisface:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|.$$

Más aún, siendo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , el valor absoluto de  $\mathbf{y}^T A \mathbf{x}$  satisface:

$$|\mathbf{y}^T A \mathbf{x}| \leq \|A\| \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{x}\|. \quad (2.25)$$

### 2.3.2 Transformaciones lineales

Un mapeo  $\mathcal{T}$  de un espacio vectorial  $V$  en el espacio vectorial  $W$ , donde  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales sobre el mismo campo  $F$ , es llamado una *transformación lineal* o un *operador lineal* siempre que (Antsaklis & Michel, 2006):

- $\mathcal{T}(x + y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$  para todo  $x, y \in V$
- $\mathcal{T}(\alpha x) = \alpha \mathcal{T}(x)$  para toda  $x \in V$  y  $\alpha \in F$ .

El conjunto de transformaciones lineales de  $V$  a  $W$  se denota aquí como  $L(V, W)$ , de modo que se puede escribir  $\mathcal{T} \in L(V, W)$ .

Además se define el espacio nulo de  $\mathcal{T}$  como el conjunto:

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \{v \in V : \mathcal{T}v = 0\}$$

y el espacio rango de  $\mathcal{T}$  como el conjunto

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \{w \in W : w = \mathcal{T}v, v \in V\}.$$

Una transformación lineal está completamente determinada por el conocimiento de cómo ésta transforma los vectores base en su dominio, este hecho permite representar las transformaciones lineales definidas en espacios de dimensión finita de una manera inequívoca a través de matrices (Antsaklis & Michel, 2006).

### 2.3.3 Proyecciones

Sea  $V$  la suma directa de los espacios vectoriales  $V_1$  y  $V_2$ , es decir,  $V = V_1 \oplus V_2$ , y sea  $v = v^1 + v^2$  la única representación de  $v \in V$ , donde  $v^1 \in V_1$  y  $v^2 \in V_2$ . La proyección en  $V_1$  a lo largo de  $V_2$  es la transformación definida por (Antsaklis & Michel, 2006):

$$\mathcal{P}(v) = v^1.$$

Es fácil verificar que :

- $\mathcal{P} \in L(V, V)$
- $\mathcal{R}(\mathcal{P}) = V_1$

- $\mathcal{N}(\mathcal{P}) = V_2$

Más general, es posible demostrar que si  $\mathcal{P} \in L(V, V)$ , entonces  $\mathcal{P}$  es una proyección sobre  $\mathcal{R}(\mathcal{P})$  a lo largo de  $\mathcal{N}(\mathcal{P})$  si y sólo si  $\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ . Lo que da lugar al siguiente concepto:  $\mathcal{P} \in L(V, V)$  es indempotente si  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ .

Es posible verificar que  $\mathcal{P}$  es una proyección sobre un espacio vectorial si y sólo si  $(I - \mathcal{P})$  es una proyección. Si en particular  $\mathcal{P}$  es la proyección sobre  $V_1$  a lo largo de  $V_2$ , entonces  $(I - \mathcal{P})$  es la proyección sobre  $V_2$  a lo largo de  $V_1$ .

Si  $\mathcal{P}$  es una proyección, entonces:

$$V = \mathcal{R}(\mathcal{P}) \oplus \mathcal{N}(\mathcal{P}).$$

**Ejemplo 8** Sea

$$\mathcal{P} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces  $\mathcal{P}$  proyecta  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^2$ , es decir  $\mathbf{v}_1 = [x \ y \ 0]^T \in V_1$  y  $\mathbf{v}_2 = [0 \ 0 \ z]^T \in V_2$  con  $\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Si  $\mathcal{P} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , entonces  $x = y = 0$ , así que  $\mathcal{N}(\mathcal{P}) = \{(x, y, z) : x = y = 0, z \in \mathbb{R}\}$ , es decir,  $V_2$  y  $\mathcal{R}(\mathcal{P}) = \{(x, y, z) : z = 0, x \in \mathbb{R}\}$ , es decir  $V_1$ .

## 2.4 Cálculo multivariable

### 2.4.1 Teoría de funciones

#### Función

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una *función* (también llamada aplicación o mapeo) entre ellos es una asociación  $f$  que a cada elemento de  $A$  le asigna un único elemento de  $B$ .

Se dice entonces que  $A$  es el *dominio* (también conjunto de partida o conjunto inicial) de  $f$  y que  $B$  es su *codominio* (también conjunto de llegada o conjunto final).

Un objeto o valor genérico  $a$  en el dominio  $A$  se denomina la variable independiente; y un objeto genérico  $b$  del codominio  $B$  es la variable dependiente. También se les llama valores de entrada y de salida, respectivamente.

## Tipos de funciones

Sean  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  dos espacios métricos y una función  $f : X \rightarrow Y$ . Se dice que la función  $f$  es continua en el punto  $p \in X$  si para cada número  $\epsilon > 0$  se puede encontrar un número  $\delta > 0$  tal que,  $\forall x \in X$ :

$$\|p - x\| < \delta \implies \|f(p) - f(x)\| < \epsilon.$$

Dada la función  $f : X \rightarrow Y$ , se dice que  $f$  es (Weisstein,2002)

- *continua* si es continua en cada punto  $p \in X$ .
- *suave* si es infinitamente diferenciable (tiene derivadas de cualquier orden).
- *inyectiva* si  $\forall y \in Y$  existe a lo más un  $x \in X$ , tal que  $y = f(x)$ .
- *sobreyectiva* si  $\forall y \in Y$  existe al menos un  $x \in X$ , tal que  $y = f(x)$ .
- *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva (es decir, es uno a uno).

## Función identidad

En cualquier conjunto puede definirse una función identidad, que teniendo como dominio y codominio al propio conjunto, asocia cada elemento consigo mismo.

Dado un conjunto  $A$ , la *función identidad* de  $A$  es la función  $id_A : A \rightarrow A$  que a cada  $a \in A$  le asocia  $id_A(a) = a$ .

La función identidad actúa como un elemento neutro al componer funciones, ya que “no hace nada”. La función única sobre un conjunto  $X$  que asigna cada elemento a sí mismo se denomina función de identidad para  $X$  y, típicamente, se indica con  $id_X$ . Cada conjunto tiene su propia función identidad.

## Función inversa

Una función puede tener inversa, es decir, otra función que al componerla con ella resulte en la identidad, del mismo modo que un número multiplicado por su inverso da la unidad 1.

Dada una función  $f : A \rightarrow B$ , se dice que  $g : B \rightarrow A$  es la inversa o recíproca de  $f$  si se cumple:

$$f \circ g = id_B \tag{2.26}$$

$$g \circ f = id_A \tag{2.27}$$

La inversa de  $f$  se denota por  $g = f^{-1}$ , y tanto  $f$  como  $f^{-1}$  se dicen invertibles.

No todas las funciones son invertibles, sino que sólo aquellas que sean biyectivas poseen inversa: Toda función biyectiva  $f$  es invertible, y su inversa  $f^{-1}$  es biyectiva a su vez. Recíprocamente, toda función invertible  $f$  es biyectiva.

## Función implícita

Una función definida por una ecuación de la forma  $f(x, y) = 0$  es conocida como función implícita. Si  $y$  es elegida como la variable dependiente, se dice que  $f(x, y)$  define a  $y$  como una función implícita de  $x$ .

## Teorema de la función implícita

Sea  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continuamente diferenciable, y sean  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  las coordenadas de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Considerándose un punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ . Si la matriz jacobiana

$$J_{f,y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})=(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

es invertible, entonces existe un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  conteniendo a  $\mathbf{x}_0$ , en el que existe una función única  $\mathbf{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$$

y

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

Además, las derivadas parciales de  $\mathbf{g}$  en  $U$  están dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -J_{f,y}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}}.$$

### 2.4.2 Sistemas de coordenadas curvilíneas

En geometría, un sistema de coordenadas es un sistema que utiliza uno o más números (coordenadas) para determinar unívocamente la posición de un punto en un espacio.

En una región dada del espacio tridimensional, sean

$$u^1 = f_1(x, y, z), \quad u^2 = f_2(x, y, z), \quad u^3 = f_3(x, y, z),$$

tres funciones escalares independientes, continuas, diferenciables y biyectivas (es decir,

a cada tripleta  $(x, y, z)$  se le asigna una única tripleta  $(u^1, u^2, u^3)$ , al menos en la región de interés. Estas ecuaciones pueden ser resueltas con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y dar

$$x = \varphi_1(u^1, u^2, u^3), \quad y = \varphi_2(u^1, u^2, u^3), \quad z = \varphi_3(u^1, u^2, u^3),$$

tres funciones que son también independientes, continuas, diferenciables y biyectivas en cierta región.

En la región tratada, a cada punto  $P(x, y, z)$  se asocia una tripleta de valores  $u^1$ ,  $u^2$  y  $u^3$ , funciones conocidas como *coordenadas curvilíneas* o *coordenadas generales* (Stratton, 1941). Por cada punto  $P$ , pasan tres superficies llamadas: *superficies coordenadas*

$$u^1 = a, \quad u^2 = b, \quad \text{y} \quad u^3 = c,$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes reales (ver figura 2.1). En cada superficie coordenada, una coordenada es constante y dos son variables, por tanto, toda superficie coordenada es designada por la coordenada constante.

Dos superficies coordenadas se intersecan en una curva, la cual recibe el nombre de *curva coordenada*. En esta curva, sólo una coordenada es variable y para nombrarla generalmente se utiliza esa coordenada. Así por ejemplo, la curva coordenada  $u^2 = b$  y  $u^3 = c$ , es la curva en la dirección de la coordenada  $u^1$  (figura 2.1).

## Vectores base de las coordenadas curvilíneas

Sea  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  un vector desde el origen del marco de coordenadas  $\Sigma(X, Y, Z)$ , al punto variable  $P(x, y, z)$ . El punto  $P(x, y, z)$  puede, alternativamente ser especificado por las coordenadas  $u^1$ ,  $u^2$  y  $u^3$ , mientras que su vector de posición  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  puede ser representado por una función vectorial de las coordenadas curvilíneas  $u^1$ ,  $u^2$  y  $u^3$  (figura 2.1):

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(u^1, u^2, u^3) \\ \varphi_2(u^1, u^2, u^3) \\ \varphi_3(u^1, u^2, u^3) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}(u^1, u^2, u^3).$$

Por ejemplo, para el caso de las coordenadas esféricas, el punto  $P$  se especifica empleando  $(r, \phi, \theta)$ , mientras que su vector de posición  $\mathbf{r}$  está dado por:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r, \tag{2.28}$$

donde  $\hat{\mathbf{e}}_r$  es un vector unitario en la dirección del incremento de  $\mathbf{r}$ . En coordenadas cartesianas  $\hat{\mathbf{e}}_r = \text{sen}\theta \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \text{sen}\theta\text{sen}\phi\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z$ , y constituye un vector base de las coordenadas esféricas, concepto que enseguida se define.

Un incremento diferencial en  $\mathbf{r}$ , debido a un pequeño desplazamiento de  $P(u^1, u^2, u^3)$

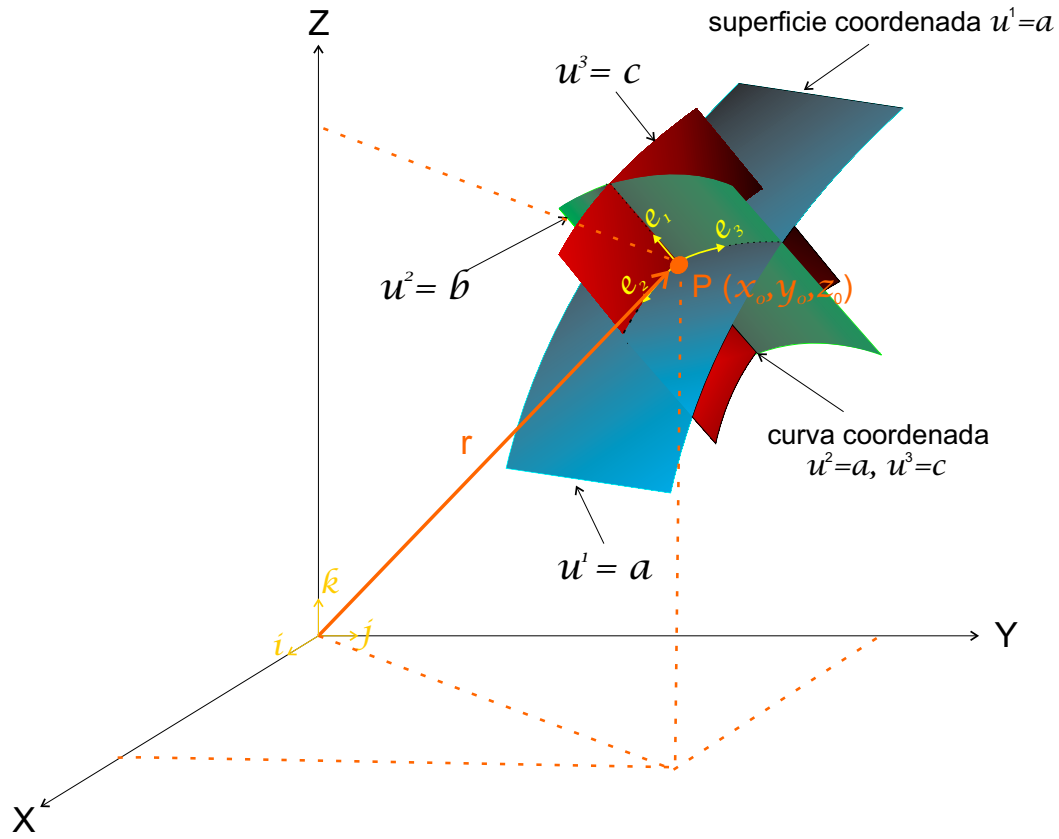


Figura 2.1: Coordenadas curvilíneas  $(a, b, c)$  asociadas al punto  $P(x_0, y_0, z_0)$ .

a lo largo de las curvas coordenadas, es expresado por (Stratton, 1941):

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} du^3. \quad (2.29)$$

Ahora, si el punto  $P(u^1, u^2, u^3)$  se mueve una distancia unitaria a lo largo de la curva  $u^2 = b$  y  $u^3 = c$ , el cambio en  $\mathbf{r}$  está dirigido tangencialmente a esta curva, en la dirección del vector  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}$ . A los vectores

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}, \quad (2.30)$$

se les conoce como vectores base asociados al punto  $P(u^1, u^2, u^3)$ , (Stratton, 1941; Fleisch, 2012). Es importante tomar en cuenta que los vectores base no son necesariamente de longitud unitaria y/o dirección constante (caso de las coordenadas cartesianas), estas propiedades dependen de la naturaleza de las coordenadas curvilíneas

empleadas. Por ejemplo, si se emplean coordenadas esféricas,  $\mathbf{r}$  está dado por:

$$\mathbf{r}(r, \phi, \theta) = \begin{bmatrix} r \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ r \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \\ r \cos(\phi) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

y de (2.30), se tiene que los vectores base  $\hat{\mathbf{e}}_r$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_\phi$  y  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  son:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -r \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \\ r \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} r \cos(\phi) \cos(\theta) \\ r \cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \\ -r \operatorname{sen}(\phi) \end{bmatrix},$$

de manera que  $\mathbf{r}$  puede reescribirse como:

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r.$$

Nótese que los vectores base de las coordenadas esféricas no son unitarios.

Por otro lado, sustituyendo (2.30) en (2.29), el incremento diferencial en  $d\mathbf{r}$  queda expresado como:

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_1 du^1 + \hat{\mathbf{e}}_2 du^2 + \hat{\mathbf{e}}_3 du^3. \quad (2.31)$$

### Componentes covariantes y contravariantes de un vector

Una base está compuesta por el conjunto de los vectores base del sistema coordenado. De acuerdo a la magnitud y orientación de los vectores base, se distinguen tres tipos de bases:

- Base ortonormal. En esta base, los vectores son perpendiculares entre sí y además, su magnitud es igual a 1.
- Base ortogonal. En esta base, al igual que la base ortonormal, los vectores son perpendiculares entre sí; sin embargo, no son de magnitud unitaria.
- Base oblicua. En esta base, los vectores no son ni perpendiculares entre sí, ni de magnitud igual a uno.

En un sistema de coordenadas cuyos vectores base son perpendiculares entre sí, no existe ambigüedad cuando se desea proyectar un vector en los ejes coordenados; sin embargo, esto no pasa en un sistema coordenado con base oblicua.



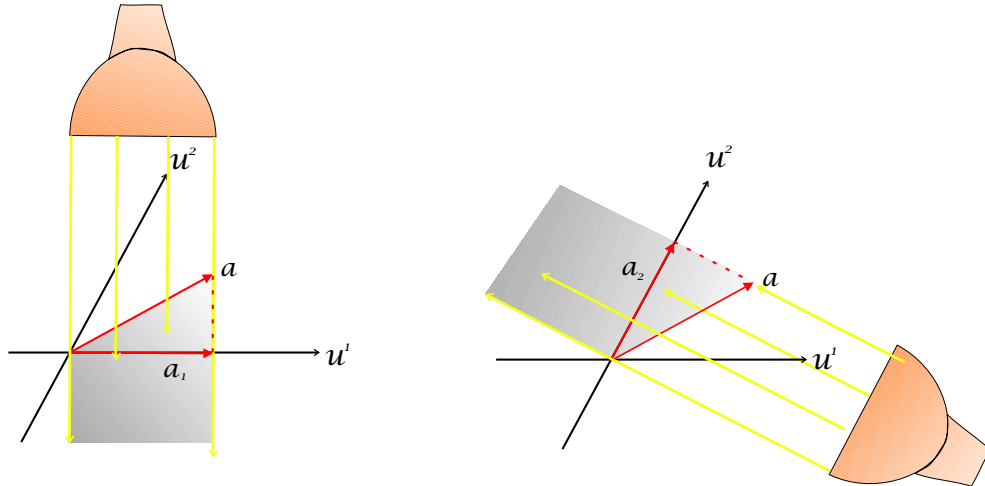


Figura 2.2: Componentes covariantes del vector  $\mathbf{a}$ , observadas al hacer incidir luz sobre él de forma perpendicular al eje  $u_1$  y  $u_2$ , respectivamente (Fleisch, 2012).

Considérese un sistema coordenado de dos dimensiones, con ejes coordenados  $u_1$  y  $u_2$  a un ángulo menor de  $90^\circ$ . En tal caso, el proceso de proyección del vector en cada eje coordenado se torna un poco complicado, ¿porqué? Bueno, existen dos maneras de proyectar el vector. Si se desea obtener la componente en  $u_1$  y  $u_2$  de un vector  $\mathbf{a}$ , el vector  $\mathbf{a}$  puede ser proyectado perpendicularmente al eje  $u_1$  y al eje  $u_2$ , respectivamente, obteniéndose así las componentes  $a_1$  y  $a_2$ , las cuales son llamadas: *componentes covariantes* del vector  $\mathbf{a}$ , (Fleisch, 2012). Este proceso es fácil de observar si imaginamos la sombra que se formaría en cada eje coordenado, si los rayos de una lámpara incidieran sobre el vector de forma perpendicular al eje  $u_1$  y  $u_2$  (ver figura 2.2). Otra manera de obtener las componentes del vector  $\mathbf{a}$ , es proyectándolo paralelo al eje  $u_2$  y  $u_1$ , obteniéndose así las componentes  $a^1$  y  $a^2$ , respectivamente, las cuales son conocidas como *componentes contravariantes* del vector  $\mathbf{a}$  (ver figura 2.3).

Ya que existen dos clases de componentes de un vector, es natural que surja la pregunta: ¿existe alguna otra diferencia entre las componentes contravariantes y covariantes de un vector? Sí, sus propiedades algebraicas son diferentes. Si se desea emplear la regla de adición de vectores acostumbrada, es decir, sumar cada componente con su componente correspondiente, para el caso en que las componentes del vector son covariantes  $(a_1, a_2)$ , la suma de éstas no es igual al vector  $\mathbf{a}$ , como se puede apreciar en la figura 2.4.

Para entender por qué los valores covariantes son llamados “componentes” y mucho más importante, para entender porqué las componentes covariantes y contravariantes son cantidades significativas y cómo éstas pueden ser usadas para escribir leyes físicas que no dependen del sistema de referencia del observador, es necesario entender el concepto de vector base recíproco o dual.

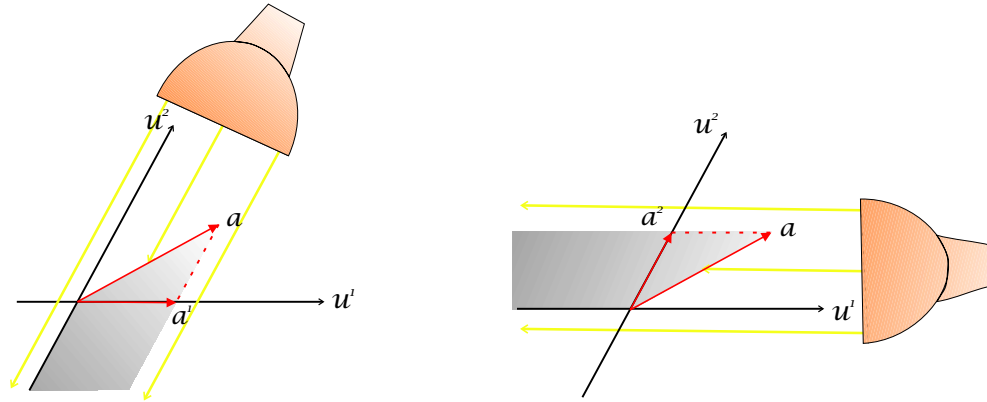


Figura 2.3: Componentes contravariantes del vector  $\mathbf{a}$ , observadas al hacer incidir luz sobre él de forma paralela al eje  $u_2$  y  $u_1$ , respectivamente (Fleisch, 2012).

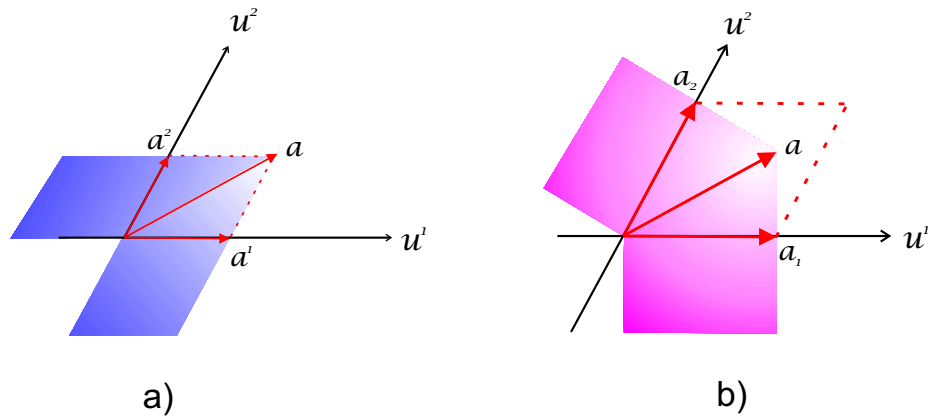


Figura 2.4: a) Adición de componentes contravariantes del vector  $\mathbf{a}$ . b) Adición de componentes covariantes del vector  $\mathbf{a}$  (Fleisch, 2012).

### Vectores base recíprocos

Como ya se mencionó, se tiene que la suma de las componentes covariantes no es igual al vector  $\mathbf{a}$ ; sin embargo, si se establecen como vectores base, vectores perpendiculares a cada uno de los ejes coordenados ( $u_2$  y  $u_1$ ), como se muestra en la figura 2.5, entonces la suma de las componentes covariantes de un vector, sí es igual al vector  $\mathbf{a}$ , tal y como se observa en la figura 2.6. A estas nuevos vectores base se les conoce como vectores base recíprocos, y se les denota como  $\hat{\mathbf{e}}^1$  y  $\hat{\mathbf{e}}^2$ .

Los vectores base recíprocos tienen dos características. La primera, es que cada vector base recíproco es perpendicular a los vectores base originales con diferente índice, es decir,  $\hat{\mathbf{e}}_i$  es perpendicular a  $\hat{\mathbf{e}}^j$ , para  $i \neq j$ . La segunda característica es que

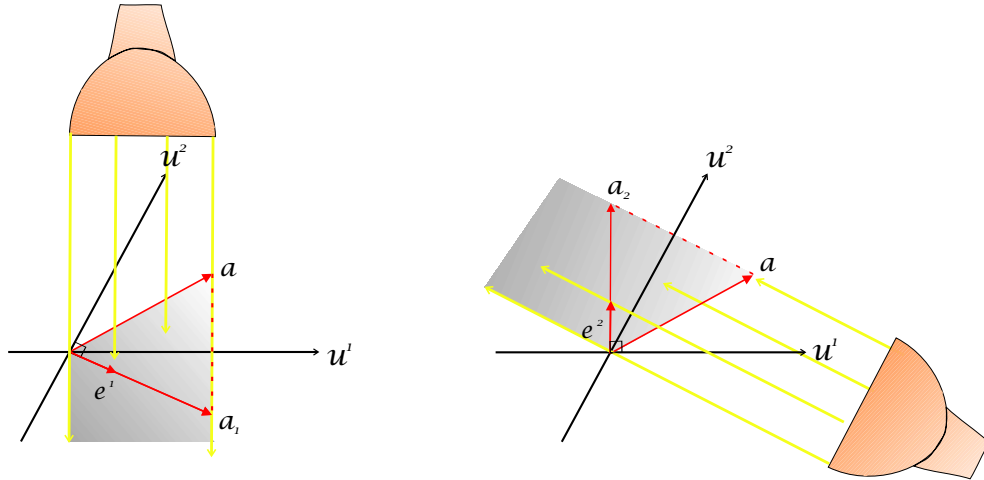


Figura 2.5: Vectores base recíprocos y componentes covariantes del vector  $\mathbf{a}$  (Fleisch, 2012).

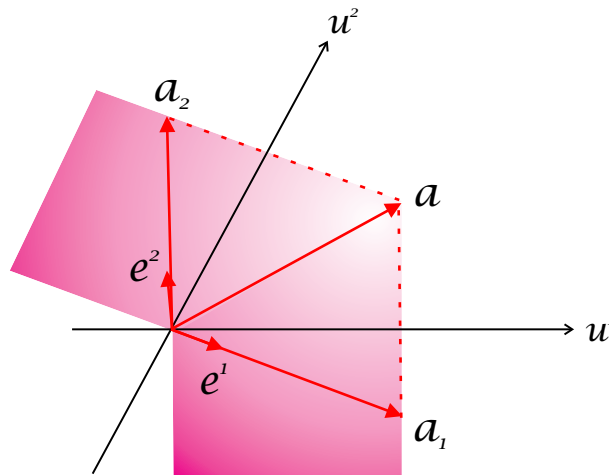


Figura 2.6: Suma de las componentes covariantes  $a^1$  y  $a^2$  de un vector  $\mathbf{a}$ , empleando vectores base recíprocos. (Fleisch, 2012)

el producto punto de los vectores base duales con los correspondientes vectores base originales es igual a 1, es decir  $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ . Ambas características se pueden combinar escribiendo  $\mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ , donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker definida como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.32)$$

Con el concepto de vectores base recíprocos, es ahora posible entender por qué

las proyecciones perpendiculares (covariantes) pueden ser consideradas componentes, la clave es que las proyecciones deben ser hechas en la dirección de los vectores base recíprocos, en vez de hacerlo en la dirección de los vectores base covariantes originales. Si se hace esto, entonces las componentes covariantes pueden ser multiplicadas por los vectores base recíprocos y ahora sí ser sumados para obtener el vector original  $\mathbf{a}$ .

Nótese que las diferencias entre los vectores base covariantes originales y los vectores base recíprocos desaparecen para sistemas coordenados ortonormales (como el cartesiano), así como también las diferencias entre componentes covariantes y contravariantes (Fleisch, 2012).

En un espacio de tres dimensiones, los vectores base recíprocos  $\hat{\mathbf{e}}^1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}^2$  y  $\hat{\mathbf{e}}^3$  pueden ser obtenidos a partir de los vectores base covariantes originales  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$  y  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , como se muestra enseguida:

$$\hat{\mathbf{e}}^1 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3}{V}, \quad \hat{\mathbf{e}}^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1}{V} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{e}}^3 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2}{V},$$

donde  $V$  es el triple producto escalar de  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$  y  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , es decir  $V = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3) = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot (\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1) = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2)$ .

Es muy sencillo verificar que con las definiciones anteriores, los vectores base recíprocos  $\hat{\mathbf{e}}^1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}^2$  y  $\hat{\mathbf{e}}^3$  cumplen que todo vector base recíproco es perpendicular a los vectores base covariantes originales con diferente índice, y además, que el producto punto de cada vector base recíproco  $\hat{\mathbf{e}}^i$  con su correspondiente vector base original  $\hat{\mathbf{e}}_i$  es igual a 1.

Con tales definiciones, entonces ahora sí es posible escribir cualquier vector  $\mathbf{a}$  como:

$$\mathbf{a} = a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 = a_1 \hat{\mathbf{e}}^1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}^2$$

con componentes contravariantes  $a^1$ ,  $a^2$  y covariantes  $a_1$ ,  $a_2$ .

Si se emplean vectores base recíprocos, el diferencial  $d\mathbf{r}$ , además de ser escrito como (2.31), puede escribirse como:

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}^1 du_1 + \hat{\mathbf{e}}^2 du_2 + \hat{\mathbf{e}}^3 du_3. \quad (2.33)$$

Los diferenciales  $du_1$ ,  $du_2$  y  $du_3$  son evidentemente componentes de  $d\mathbf{r}$  en la dirección definida por los nuevos vectores base. Las cantidades  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  son funciones de las coordenadas  $u^1$ ,  $u^2$  y  $u^3$ ; sin embargo, los diferenciales  $du_1$ ,  $du_2$  y  $du_3$  están relacionados a los diferenciales de las coordenadas por un conjunto de ecuaciones lineales que en general no son integrables. No obstante, es posible aprovechar las igualdades (2.31) y

(2.33) que reescribiéndolas empleando sumatorias, quedan:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i du^i = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}^j du_j. \quad (2.34)$$

### Tensor métrico

Si se desea obtener la distancia diferencial  $|d\mathbf{r}|$  (magnitud del vector diferencial de desplazamiento  $d\mathbf{r}$ ) del punto  $A$  al punto  $B$ , se realiza el producto punto de  $d\mathbf{r}$  por sí mismo. De la relación (2.34) se tiene que:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j du^i du^j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}^j du_i du_j \quad (2.35)$$

Los productos escalares de los vectores base son representados por los símbolos:

$$g_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = g_{ji} \quad (2.36)$$

$$g^{ij} = \hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}^j = g^{ji}, \quad (2.37)$$

de manera que (2.35) puede reescribirse como:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} du^i du^j = \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} du_i du_j \quad (2.38)$$

donde  $g_{ji}$  y  $g^{ji}$  son conocidos como tensores métricos o coeficientes métricos.

Considérese una superficie acotada por las curvas  $u^2$  y  $u^3$  como se indica en la figura 2.7. El área de tal elemento es igual en magnitud a:

$$dA = |\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3| du^2 du^3 \quad (2.39)$$

$$= \sqrt{(\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3)} du^2 du^3. \quad (2.40)$$

Empleando la siguiente identidad de vectores:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

donde  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$  son vectores in  $\mathbb{R}^3$ , se tiene que

$$dA = g_{22}g_{33} - g_{23}^2.$$

Finalmente, el diferencial de volumen  $dV$  acotado por superficies coordenadas es

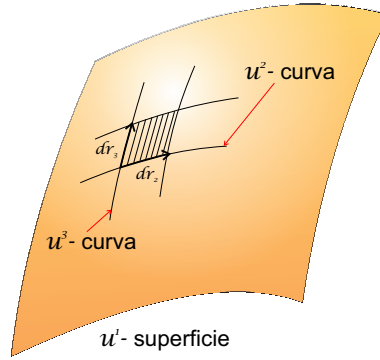


Figura 2.7: Superficie acotada por las curvas  $u^2$  y  $u^3$ .

escrito como (Stratton, 1941):

$$dV = \hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) du^1 du^2 du^3,$$

ecuación que mediante manipulación algebraica puede reescribirse como:

$$dV = \sqrt{G} du^1 du^2 du^3,$$

donde  $G = \det \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$ .

### Derivada covariante y símbolos de Cristoffel

En muchas áreas de la ingeniería es importante conocer cómo un campo vectorial cambia de una localización a otra. Para vectores expresados usando coordenadas cartesianas, derivar un vector es sencillo, simplemente se toma la derivada de cada una de sus componentes. Esto es posible porque los vectores base de las coordenadas cartesianas son constantes en todo punto, tanto en magnitud como en dirección, de manera que no es necesario preocuparse por la derivada de los vectores base. Sin embargo, esto no es cierto para otros sistemas de coordenadas, como es el caso de las esféricas, en las que sus vectores base tienen diferentes direcciones en cada punto del espacio tridimensional, esto quiere decir que, si se toma la derivada de un vector expresado en tales coordenadas, es necesario considerar la derivada de los vectores base.

Sea  $\mathbf{a}$  un vector expresado en coordenadas curvilíneas  $x^1$ ,  $x^2$  y  $x^3$ , con vectores base covariantes  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  y  $\hat{e}_3$ :

$$\mathbf{a} = a^1 \hat{e}_1 + a^2 \hat{e}_2 + a^3 \hat{e}_3$$

la derivada de  $\mathbf{a}$  respecto a la coordenada  $x^1$  es

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^1} &= \frac{\partial(a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{e}}_3)}{\partial x^1} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a^i \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial x^1} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a^i}{\partial x^1} \hat{\mathbf{e}}_i + \sum_{i=1}^3 a^i \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial x^1}.\end{aligned}$$

Es el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior el que complica el proceso de derivación en sistemas coordenados en los cuales la magnitud y/o la dirección de los vectores base cambia en el espacio. Esto mismo ocurre si se deriva respecto a las otras coordenadas  $x^2$  y  $x^3$ .

Así que, si se desea evaluar los cambios en un campo vectorial expresado en coordenadas no ortonormales, se tiene que tomar en cuenta los posibles cambios en los vectores base, de esta manera, la derivada retiene las características tensoriales del objeto original. El proceso de derivar un vector que emplea coordenadas curvilíneas no ortonormales, es llamado derivada covariante. Este proceso cobrará mayor sentido si primero se explica el significado de los símbolos de Cristoffel.

Cada símbolo de Cristoffel es escrito a través de la letra  $\Gamma$ , y la relación que define los símbolos de Cristoffel de segunda clase es:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial x^j},$$

en donde el índice  $i$  especifica la base del vector para el cual la derivada está siendo tomada; el índice  $j$  denota la coordenada que está variando para inducir un cambio en el  $i$ -ésimo vector base, y el índice  $k$ , indica la dirección en la cual esta componente de la derivada señala. Por ejemplo, si se emplean coordenadas esféricas, los dos símbolos de Cristoffel, tales como  $\Gamma_{r\theta}^r = 0$  y  $\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}$ , indican que:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = 0 \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Otra manera de expresar los símbolos de Cristoffel, es empleando los coeficientes métricos:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

Por tanto, empleando símbolos de Cristoffel, la derivada covariante queda como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j} &= \frac{\partial(a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{e}}_3)}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a^i \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \hat{\mathbf{e}}_i + a^i \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial x^j} \right].\end{aligned}$$

### 2.4.3 Derivada direccional, gradiente y jacobiana

La derivada direccional es la tasa de cambio de una función multivariable en dirección de un vector unitario  $\hat{\mathbf{u}}$ . Para una función de dos variables  $f(x, y)$ , la derivada direccional se denota como:

$$D_{\hat{\mathbf{u}}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

donde  $\nabla f(x, y) = \left[ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]^T$  es conocido como el gradiente de  $f(x, y)$ .

Por otro lado, como:

$$D_{\hat{\mathbf{u}}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\nabla f(x, y)| |\hat{\mathbf{u}}| \cos(\theta),$$

la derivada direccional máxima se encuentra orientada en la dirección del gradiente de la función,  $\nabla f(x, y)$ , ya que, como se puede observar en la ecuación anterior,  $|D_{\hat{\mathbf{u}}}f(x, y)|$  alcanza su valor máximo cuando el ángulo entre  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\nabla f(x, y)$  es cero. Por tanto, para obtener el máximo incremento y/o decremento de una función, basta con calcular el gradiente de la función en tal punto.

### Matriz jacobiana

Sea  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función que toma como entrada el vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y produce como salida el vector  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad f_m(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^m$ . Entonces, la matriz jacobiana  $J_f$  de  $\mathbf{f}$  es una matriz definida como:

$$J_f = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$



De la definición de coordenadas curvilíneas, se tiene que las columnas de  $J$  son vectores tangentes a las curvas coordenadas de  $\mathbf{x}$ . Además, nótese que debido a que

$$\dot{\mathbf{y}} = J\dot{\mathbf{x}},$$

entonces  $\dot{\mathbf{y}}$  es un vector generado por las columnas de  $J$ , propiedad útil para la obtención del modelo dinámico reducido de un robot con restricciones en sus coordenadas.

## 2.4.4 Curvas de nivel y multiplicadores de Lagrange

### Curvas de nivel

Debido a la complejidad de representación de algunas funciones de dos variables, en la actualidad se utilizan conjuntos bidimensionales para obtener información tridimensional, como son: las trazas y las curvas de nivel, de los cuales el conjunto más utilizado es el de las curvas de nivel. Para una función de dos variables,  $z = f(x, y)$ , la curva de nivel para  $z = k$ , es el conjunto de todos los pares de valores  $(x, y)$  tales que su imagen es el valor  $k$ . En topografía, una curva de nivel es aquella línea que une todos los puntos que tienen igualdad de condiciones y de altura.

Como en una misma curva de nivel no existe tasa de cambio de la función, la derivada direccional dirigida a un vector unitario tangente a la curva de nivel es cero, por lo tanto:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = 0,$$

concluyendo que el gradiente de una función  $\nabla f(x, y)$  es siempre perpendicular a la curva de nivel de la función en el punto analizado.

### Multiplicadores de Lagrange

Considerando las definiciones expuestas, es fácil reconocer que para obtener el máximo y/o mínimo de una función sujeta a una restricción  $g(x, y)$ , es necesario encontrar los puntos críticos de la función  $f(x, y)$ , los cuales son aquellos puntos en los que las curvas de nivel de  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  son perpendiculares.

Caso bidimensional. Supongamos que se tiene la función  $f(x, y)$  y se quiere maximizarla estando ésta sujeta a la condición:

$$g(x, y) = c$$

donde  $c$  es una constante.

Las curvas de nivel de  $f(x, y)$  están dadas por  $f(x, y) = d_n$  y en general son distintas a las curvas de nivel de  $g(x, y)$ . La curva  $g(x, y) = c$  usualmente intersecta y cruza

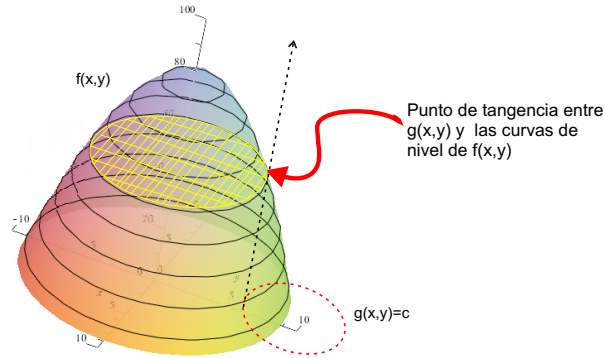


Figura 2.8: Máximo de una función  $f(x, y)$ , sujeta a una restricción  $g(x, y) = c$ .

muchos contornos de  $f(x, y)$ , de hecho, moviéndose a través de la línea  $g(x, y) = c$  es posible incrementar o disminuir el valor de  $f(x, y)$ ; sin embargo, sólo cuando  $g(x, y) = c$  toca tangencialmente un contorno de  $f(x, y)$ , la función no se incrementa o disminuye, por tanto ha ocurrido un máximo o mínimo de la función restringida.

Analíticamente la condición de tangencia de las curvas de nivel  $f(x, y)$  y  $g(x, y) = c$  se traduce a:

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

donde la constante  $\lambda$  es conocida como multiplicador de Lagrange. En mecánica los multiplicadores de Lagrange son empleados para encontrar las trayectorias y velocidades (“puntos críticos”) que el sistema toma, dada la energía aplicada al sistema y la restricción a la cual el sistema se encuentra sujeto.

### 2.4.5 Funcionales y cálculo de variaciones

El *cálculo de variaciones* es un campo del análisis matemático que trata con maximizar o minimizar *funcionales*, que son mapeos de un conjunto de funciones a los números reales. Las funcionales son comúnmente expresadas como integrales definidas, involucrando funciones y sus derivadas. El interés está en las funciones extremas (funciones estacionarias) que hacen que el funcional alcance un valor máximo o mínimo, aquellas donde la tasa de cambio del funcional es cero.

Un concepto importante en cálculo variacional es el concepto de *desplazamiento virtual*, el cual se refiere a un cambio imaginario en la configuración del sistema analizado (impuesto por la persona que desea analizar el sistema) el cual es consistente con las fuerzas y restricciones impuestas en el instante dado  $t$ , con el fin de realizar una especie experimento matemático (Goldstein, 1965; Lanczos, 2012). El desplazamiento es llamado virtual para distinguirlo de un desplazamiento real del sistema que ocurre en un intervalo de tiempo  $dt$ , durante el cual las fuerzas y restricciones pueden cambiar.

## 2.4.6 Las ecuaciones de Euler-Lagrange

En esta sección se explica cómo obtener la llamada ecuación de Euler-Lagrange, que da condiciones necesarias y suficientes para que un funcional tenga un valor estacionario (máximo o mínimo).

### Obtención empleando incrementos y diferencias

El problema es encontrar una función  $y = f(x)$  que hará la la integral:

$$I = \int_a^b F(y, y', x) dx \quad (2.41)$$

un máximo o al menos un valor estacionario.

Euler resolvió el problema haciendo uso del hecho de que una integral definida puede ser reemplazada por la suma de un número de términos incrementales. Además, la derivada puede ser reemplazada por un coeficiente de diferencias. Acorde con el procedimiento de cálculo se divide el intervalo entre  $x = a$  y  $x = b$  en pequeños intervalos iguales, obteniendo un conjunto de valores de abscisa:

$$a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$$

y las correspondientes ordenadas

$$\alpha, y_1, y_2, \dots, y_n, \beta$$

donde

$$y_k = f(x_k).$$

Ahora, reemplazando la derivada  $f'(x_k)$  por el coeficiente de diferencias:

$$z_k = \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (2.42)$$

y la integral (2.41) por la sumatoria:

$$S = \sum_{k=0}^n F(y_k, z_k, x_k)(x_{k+1} - x_k). \quad (2.43)$$

Esto conlleva un error, el cual tiende a ser cero conforme  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  tiende a cero también. En seguida, se reemplaza la integral original (2.41) por la suma (2.43) y se busca el valor estacionario de ésta.

Como  $y_k$  y  $y_{k+1}$  son arbitrariamente cercanas, es permisible cambiar  $F(y_k, z_k, x_k)$

por  $F(y_{k+1}, z_k, x_k)$ . Así la función que se desea minimizar se define finalmente como:

$$S' = \sum_{j=0}^n F(y_{j+1}, z_j, x_j)(x_{j+1} - x_j). \quad (2.44)$$

Ahora, tomando la derivada parcial de  $S'$  con respecto a  $y_{k+1}$ , se tiene que tener en mente que  $y_{k+1}$  aparece en la suma  $S'$  en dos términos vecinos, esos para los cuales  $j = k$  y  $j = k + 1$ , en vista de la definición (2.42) de  $z_{k+1}$ . La diferenciación parcial con respecto a  $y_{k+1}$  da por lo tanto:

$$\frac{\partial S'}{\partial y_{k+1}} = \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{x=x_k} (x_{k+1} - x_k) + \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{x=x_k} - \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{x=x_{k+1}}$$

Dividiendo por  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ , esta ecuación puede ser escrita como sigue:

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right]_{x=x_k} = 0 \quad (2.45)$$

donde  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Aquí se tienen las condiciones necesarias y suficientes para que la suma  $S'$  sea estacionaria. Es importante notar que las dos ordenadas  $y_0$  y  $y_{n+1}$  son cantidades dadas y así permanecen invariadas. En el límite, cuando  $\Delta x$  tiende a cero, la ecuación de diferencias (2.45) se convierte en una ecuación diferencial.

Además, ya que los puntos  $x_k$  se encuentran arbitrariamente cerca de cualquier punto del intervalo  $(a, b)$ , esta ecuación diferencial tiene que mantenerse para el intervalo entero:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2.46)$$

en  $a \leq x \leq b$ . Esta ecuación fundamental fue descubierta independientemente por Euler y Lagrange y es usualmente llamada: ecuación diferencial de Euler-Lagrange.

### Obtención a través de cálculo de variaciones

Dada la integral definida

$$I = \int_a^b F(y, y', x) dx \quad (2.47)$$

con las condiciones

$$f(a) = \alpha \quad \text{y} \quad f(b) = \beta \quad (2.48)$$

se desea encontrar el valor estacionario de esta integral.

Con la finalidad de resolver este problema, se investigará la tasa de cambio de la integral dada, causada por la variación de la función  $y = f(x)$ . Se comenzará con la variación del integrando  $F(y, y', x)$ , causada por la variación de  $y$ . Tómese en cuenta

que  $F$  es una función de tres variables  $y, y', x$  y esta dependencia funcional no es alterada por el proceso de variación:

$$\delta F(y, y', x) = F(y + \epsilon\phi, y' + \epsilon\phi', x) - F(y, y', x) \quad (2.49)$$

$$= \epsilon \left( \frac{\partial F}{\partial y} \phi + \frac{\partial F}{\partial y'} \phi' \right). \quad (2.50)$$

Los términos de alto orden del desarrollo de Taylor pueden ser despreciados ya que  $\epsilon$  se aproxima a cero.

Ahora es posible evaluar la variación de la integral definida (2.47), como:

$$\delta I = \delta \int_a^b F dx = \int_a^b \delta F dx = \epsilon \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \phi + \frac{\partial F}{\partial y'} \phi' \right) dx.$$

Con la finalidad de obtener la tasa de cambio de la integral, todo se divide entre el parámetro  $\epsilon$ , así, la cantidad que tiene que desvanecerse para un valor estacionario de la integral  $I$  es

$$\frac{\delta I}{\epsilon} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \phi + \frac{\partial F}{\partial y'} \phi' \right) dx. \quad (2.51)$$

Aplicando el método de integración por partes, se tiene que:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \phi' dx = \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \phi \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \phi dx.$$

El primer término del lado derecho es nulo, ya que se varía entre límites definidos, así que  $\phi(x)$  desaparece en los puntos  $a$  y  $b$ . Haciendo uso de esta transformación, la ecuación (2.51) se convierte en:

$$\frac{\delta I}{\epsilon} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \phi dx \quad (2.52)$$

Ahora, si se introduce:

$$E(x) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'},$$

y escribiendo la condición para un valor estacionario de  $I$  en la forma:

$$\int_a^b E(x) \phi(x) dx = 0.$$

Ahora no es difícil ver que esta integral desaparece para una función arbitraria  $\phi(x)$ , sólo si  $E(x)$  desaparece entre los límites  $a$  y  $b$ . De hecho, se planeó que la función  $\phi(x)$  desaparezca en cualquier parte, con la excepción de un arbitrario intervalo pequeño

alrededor del punto  $x = \xi$ . Pero dentro de este intervalo  $E(x)$  es prácticamente constante y puede sacarse de la integral:

$$\frac{\delta I}{\epsilon} = E(\xi) \int_{\xi-\rho}^{\xi+\rho} \phi(x) dx.$$

El error tiende a cero, mientras  $\rho$  tiende a cero. Ya que la segunda integral está a nuestra disposición y necesita no desaparecer. El desvanecimiento de  $\delta I/\epsilon$  requiere la desaparición del primer factor. El punto  $x = \xi$  puede ser seleccionado como cualquier punto del intervalo entre  $a$  y  $b$ . Así, se obtiene para el intervalo entero entre  $a$  y  $b$  la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2.53)$$

Esta condición debe satisfacerse para la desaparición de  $\delta I$ . Por otro lado, es también suficiente, por que si el integrando de (2.52) desaparece, la integral también desaparece.

La ecuación diferencial (2.53) es así la condición necesaria y suficiente para que la integral definida  $I$  sea estacionaria bajo las condiciones de contorno (2.48).

### 2.4.7 La transformación de Legendre

Sea  $F = F(u_1, \dots, u_n)$  una función de  $n$  variables  $u_1, \dots, u_n$ , y sea  $v_1, \dots, v_n$  un segundo conjunto de variables, que satisface:

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}. \quad (2.54)$$

Suponiendo independencia de las  $n$  variables  $v_i$ , es posible despejar de (2.54) las coordenadas  $u_i$  como funciones de las coordenadas  $v_i$ .

Ahora, defínase una nueva función  $G$  como sigue:

$$G = \sum_{i=1}^n u_i v_i - F. \quad (2.55)$$

Expresando las coordenadas  $u_i$  en términos de las coordenadas  $v_i$ , éstas se sustituyen en (2.55). De este modo, la función  $G$  puede ser expresada en términos de las nuevas variables  $v_i$  como:

$$G = G(v_1, \dots, v_n). \quad (2.56)$$

Ahora, considérese la variación infinitesimal de  $G$  producida por variaciones infinitesi-

males arbitrarias de las variables  $v_i$ . La combinación de (2.56) y (2.55) da

$$\begin{aligned}
 \delta G &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial v_i} \delta v_i \\
 &= \sum_{i=1}^n (u_i \delta v_i + v_i \delta u_i) - \delta F \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[ u_i \delta v_i + \left( v_i - \frac{\partial F}{\partial u_i} \right) \delta u_i \right]. \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

Ya que  $G$  es una función de las coordenadas  $v_i$ , únicamente, ahora se deben expresar las coordenadas  $u_i$  como funciones de las coordenadas  $v_i$ . Esto expresa las variaciones de las coordenadas  $u_i$  en términos de las variaciones de las coordenadas  $v_i$ . Sin embargo, el análisis de la ecuación (2.57) muestra que la eliminación del coeficiente de  $\delta u_i$  es debida a la forma en que se han definido las coordenadas  $v_i$  según (2.54). Así (2.57) da a la vez:

$$u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}.$$

Este resultado expresa una remarcable dualidad de la transformación de Legendre, de quien recibió el nombre de “transformación dual”. El siguiente esquema muestra esta dualidad:

Las propiedades básicas de la transformación son las siguientes:

Sistema inicial:

- Función:  $F = F(u_1, \dots, u_n)$ ;
- Variables:  $u_1, \dots, u_n$ .

Sistema nuevo:

- Función:  $G = G(v_1, \dots, v_n)$ ;
- Variables:  $v_1, \dots, v_n$ .

Transformación:

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}, \quad u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}, \tag{2.58}$$

$$G = \sum u_i v_i - F \quad F = \sum u_i v_i - G \tag{2.59}$$

$$G = G(v_1, \dots, v_n) \quad F = F(u_1, \dots, u_n). \tag{2.60}$$

Precisamente como las nuevas variables son las derivadas parciales de las funciones iniciales con respecto a las variables iniciales, entonces las variables iniciales son las derivadas parciales de las nuevas funciones con respecto a las nuevas variables.

La transformación dada por (2.57) es enteramente simétrica. “Sistema inicial” y “sistema nuevo” se refiere al hecho que se comienza en la izquierda y se va a la derecha. Sin embargo, es posible ir de la misma manera de la derecha a la izquierda. “Inicial” y “nuevo” son enteramente equivalentes para esta transformación.

Extendiendo la transformación en un aspecto más, supóngase que  $F$  es una función de dos conjuntos de variables:  $u_1, \dots, u_n$  y  $w_1, \dots, w_m$ :

$$F = F(w_1, \dots, w_m; u_1, \dots, u_n) \quad (2.61)$$

Las  $w_i$  son independientes de las  $u_i$ . Éstas ocurren en  $F$  como simples parámetros, pero no participan en la transformación, la cual es realizada como antes. La nueva función  $G$  las contendrá. Llamando las  $u_i$  variables activas y las  $w_i$  variables pasivas.

Ahora, regresando a la ecuación (2.57), y encontrando la variación completa de  $G$ , dejando todas las variables  $v_i$  y  $w_i$  variar arbitrariamente, entonces es posible obtener una relación adicional:

$$\frac{\partial F}{\partial w_i} = -\frac{\partial G}{\partial w_i}. \quad (2.62)$$

## 2.5 Sistemas de ecuaciones

### 2.5.1 Ecuaciones algebraicas

Una ecuación algebraica es un polinomio  $p(x)$ , con coeficientes reales o complejos, igualado a cero. Donde  $x$  denota un número desconocido que la satisface, esto es que reemplazado en  $p(x)$  da cero como resultado. Cualquier número que satisface la ecuación se llama raíz; el problema de resolver una ecuación significa hallar todas sus raíces. Cuando el grado del polinomio es  $n$ , se dice que la ecuación correspondiente es de grado  $n$ .

**Ejemplo 9** *Considérense los siguientes polinomios: Ejemplo: El polinomio con coeficientes enteros*

$$p(x) = x^3 - 7x - 6$$

*determina la ecuación  $p(x) = 0$ , es decir,  $x^3 - 7x - 6 = 0$ . Las soluciones de esta ecuación determinana las raíces del polinomio y están dadas por:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$  y  $x_3 = 6$ .*



Para resolver un sistema de ecuaciones algebraicas, se puede usar el método de Bezout, el cual es explicado enseguida.

### Método de eliminación de Bezout

Dados dos polinomios de grados  $m$  y  $n$ , con  $n \geq m$ , es decir:

$$f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \cdots + f_1 x + f_0 \quad (2.63)$$

$$g(x) = g_m x^m + g_{m-1} x^{m-1} + \cdots + g_1 x + g_0 \quad (2.64)$$

y  $f_i, g_i \in \mathbb{R}$ , la condición necesaria y suficiente para que éstos tengan raíces comunes, es que el eliminante (expresión calculada por el determinante de la matriz de Bezout) sea igual a cero (Kapur, 1995).

Para calcular la matriz de Bezout, primero es necesario el cálculo de  $n$  ecuaciones a partir de (2.63) y (2.64). A continuación se listan los pasos para lograrlo (Kapur, 1995):

1. Las primeras  $m$  ecuaciones son formadas a partir de los polinomios (2.63) y (2.64) y las expresiones:

$$\begin{aligned} g_m f(x) - f_n g(x) x^{n-m} &= 0 \\ (g_m x + g_{m-1}) f(x) - (f_n x + f_{n-1}) g(x) x^{n-m} &= 0 \\ &\vdots = \vdots \\ \left( \sum_{i=0}^{i=m} g_i x^i \right) f(x) - \left( \sum_{i=0}^{i=m} f_i x^i \right) g(x) x^{n-m} &= 0, \end{aligned}$$

las cuales, desarrollando, equivalen a:

$$\begin{aligned} f_n \sum_{i=0}^{i=m-1} g_i x^i - g_m \sum_{i=0}^{i=n-1} f_i x^i &= 0 \\ (f_n x + f_{n-1}) \sum_{i=0}^{i=m-2} g_i x^i - (g_m x + g_{m-1}) \sum_{i=0}^{i=n-2} f_i x^i &= 0 \\ &\vdots = \vdots \\ \left( \sum_{i=0}^{i=m} f_{n-i} x^{m-i-1} \right) g_0 x^{n-m} - \sum_{i=1}^{i=m} (g_i x^{i-1}) \sum_{i=0}^{i=m} f_i x^{n-i} &= 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

2. Enseguida,  $n - m$  ecuaciones restantes se construyen al multiplicar  $g(x)$  por

$x^{n-m-1}, \dots, x, 1$ , respectivamente, como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} g(x)x^{n-m-1} &= 0 \\ &\vdots \\ g(x)x &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.66}$$

3. Así, de (2.65) y (2.66) se obtienen  $n$  ecuaciones que pueden reescribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{n-1} \\ x^{n-2} \\ \vdots \\ x^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

4. Por lo tanto, de acuerdo al método de Bezout, el eliminante asociado a los polinomios (2.63) y (2.64) está dado por:

$$\det [A] = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es conocida como matriz de Bezout.

**Ejemplo 10** *Considérense los siguientes polinomios:*

$$f(x) = f_4x^4 + f_3x^3 + f_2x^2 + f_1x + f_0 = 0 \tag{2.67}$$

$$g(x) = g_2x^2 + g_1x + g_0 = 0. \tag{2.68}$$

*En este ejemplo  $n = 4$  y  $m = 2$ . Por lo tanto, aplicando el paso 1, se pueden obtener los siguientes polinomios*

$$\begin{aligned} (f_4g_1 - g_2f_3)x^3 + (f_4g_0 - g_2f_2)x^2 - g_2f_1x - g_2f_0 &= 0 \\ (f_4g_0 - g_2f_2)x^3 + (f_3g_0 - g_2f_1 - g_1f_2)x^2 - (g_2f_0 + g_1f_1)x - g_1f_0 &= 0. \end{aligned} \tag{2.69}$$

*Por otro lado, aplicando las reglas del paso 2, se obtienen de (2.68) y (2.66) las ecuaciones:*

$$\begin{aligned} g_2x^3 - g_1x^2 - g_0x &= 0 \\ g_2x^2 - g_1x - g_0 &= 0 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Así que de los pasos 3 y 4, y las expresiones (2.69) y (2.70), se tiene que el eliminante asociado a los polinomios (2.67) y (2.68) está dado por:

$$\det \begin{bmatrix} f_4 g_1 - g_2 f_3 & f_4 g_0 - g_2 f_2 & -g_2 f_1 & -g_2 f_0 \\ f_4 g_0 - g_2 f_2 & f_3 g_0 - g_2 f_1 - g_1 f_2 & -g_2 f_0 - g_1 f_1 & -g_1 f_0 \\ g_2 & g_1 & g_0 & 0 \\ 0 & g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix}.$$

## 2.5.2 Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas. Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a su tipo en ordinarias y parciales.

### Ecuación diferencial ordinaria

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que contiene una función de una variable independiente y sus derivadas. Por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} + 10y = e^x \quad \text{y} \quad -\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

### Ecuación diferencial parcial

Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación diferencial que contiene una función multivariable  $u$  y sus derivadas parciales. Estas ecuaciones se utilizan para formular problemas que involucran funciones de varias variables. Por ejemplo:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} = 0$$

### Ecuación diferencial algebraica

Se dice que una ecuación diferencial es *implícita* cuando tiene la forma (Wijckmans, 1996):

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0 \tag{2.71}$$

donde  $\mathbf{x} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  y donde la función  $\mathbf{f} : [0, T] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  se supone suficientemente diferenciable. La matriz jacobiana  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$  puede ser singular; si  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$  es no singular, la ecuación (2.71) es localmente un sistema de ODEs; sin embargo, si la jacobiana es singular, la ecuación (2.71) es un sistema de *ecuaciones diferenciales algebraicas*

o *EDA* (en inglés “Differential Algebraic Equations” o DAE). En este último caso, el sistema de ecuaciones diferenciales tiene restricciones algebraicas en las variables.

Existen varias clases de EDA con una estructura relativamente simple, las EDA con la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)), \quad (2.72)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)), \quad (2.73)$$

donde  $\mathbf{x} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  son llamadas EDA *semi-explicitas* (Wijckmans, 1996). Todas las demás EDA de la forma (2.71) son llamadas EDA *completamente implícitas*. Las EDA semi-explicitas ilustran que las EDA pueden ser consideradas como sistemas de ecuaciones diferenciales combinadas con ecuaciones algebraicas. Estas ecuaciones algebraicas definen una variedad a la cual la solución está restringida. Por lo tanto, las EDAs pueden ser interpretadas como ecuaciones diferenciales sobre variedades.

Algunos de los métodos empleados para resolver una EDA son:

- Eliminación directa de las variables excedentes (a través de sustitución).
- Cálculo de los multiplicadores de Lagrange.
- Proyección del sistema de ecuaciones al espacio tangente de la variedad de restricción.

Este último método es lo que se denomina en esta tesis como el “método de proyección”

## 2.6 Geometría diferencial

### El concepto de variedad

Aunque la definición formal de una *variedad* (en inglés “*manifold*”) es algo compleja, para fines de esta tesis, el concepto se puede explicar de una manera simple. Supóngase que se tiene un espacio vectorial de dimensión  $m$ , el cual se considera equivalente (isomórfico) al espacio euclideo  $\mathbb{R}^m$ . Una variedad de dimensión  $n$  (con  $n \leq m$ ) es simplemente un subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  que en forma local se puede ver como un espacio euclideo de dimensión  $n$ .

El ejemplo clásico de una variedad es el de la superficie de una esfera (la superficie de la Tierra idealmente lo es). Aunque una esfera es un cuerpo geométrico de tres dimensiones, en forma local (es decir, sobre la superficie de la esfera), se puede considerar que sólo tiene dos dimensiones, por lo que es localmente equivalente al plano  $\mathbb{R}^2$ .

Se puede decir entonces que una esfera es una variedad de dimensión 2, la cual es un subconjunto del espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ .

En general, se usará aquí la notación  $M^n \subseteq \mathbb{R}^m$  para referirse a una variedad de dimensión  $n$  en el espacio  $\mathbb{R}^m$ . Nótese que  $1 \leq n \leq m$ .

Así que si  $M^n \subseteq \mathbb{R}^m$ , entonces

$$M^n = \{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m-n}\}$$

Por ejemplo, obsérvese que una esfera de radio  $r$  y centro en el origen del marco de referencia, puede definirse en términos de las tres coordenadas cartesianas como:

$$\left\{ \left[ \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \right]^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \right\}$$

Una variedad de dimensión uno es una curva vista en un espacio de dimensión mayor o igual a uno. Una variedad de dimensión 2 es una superficie, la cual puede existir sólo en un espacio de dimensión 2 o mayor. Una variedad de dimensión 3 representa entonces un volumen pero que existe en un espacio de dimensión mayor o igual a tres.

La definición formal de una *variedad diferenciable* requiere también conceptos avanzados de geometría diferencial; pero, en términos generales se puede decir que una variedad es diferenciable si en cada punto de la variedad se puede definir una función continua y diferenciable.

## Curva

Una *curva*  $\boldsymbol{\gamma}(t)$  es un mapeo continuo de un espacio de dimensión uno hacia un espacio de dimensión  $n$ , es decir,  $\boldsymbol{\gamma} : A \rightarrow B$ , donde  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Nótese que  $B$  puede ser una variedad, i.e.,  $B = M^m \subset \mathbb{R}^n$ . La variable  $t$  es conocida como el *parámetro de la curva*. Dada una curva  $\boldsymbol{\gamma}(t)$ , el *vector tangente a la curva* en  $t$ , denotado por  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ , es el valor de la derivada de  $\boldsymbol{\gamma}$  en  $t$  (un vector en  $\mathbb{R}^n$ ) calculada de la manera convencional:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \frac{d\boldsymbol{\gamma}(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\gamma}(t+h) - \boldsymbol{\gamma}(t)}{h}.$$

Es importante resaltar que si  $\boldsymbol{\gamma}(t_o) = \boldsymbol{p} \in B$ , es decir, la curva  $\boldsymbol{\gamma}(t)$  “pasa” por el punto  $\boldsymbol{p}$  en  $t = t_o$ , entonces  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_o) \in \mathbb{R}^n$  es el vector tangente a la curva  $\boldsymbol{\gamma}(t)$  en  $\boldsymbol{p}$ .

## Espacio tangente

Sea  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  una variedad diferenciable. Dado cualquier punto  $\boldsymbol{p} \in M^m$ , defínase  $\Gamma_{\boldsymbol{p}}$  como el conjunto de todas las curvas suaves  $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ,  $\boldsymbol{\gamma} : U \rightarrow M^m$  ( $U \subset \mathbb{R}$ , con  $0 \in U$ ),

que pasan por el punto  $\mathbf{p}$  en  $t = 0$ , es decir

$$\Gamma_{\mathbf{p}} = \{\gamma(t) \in M^m, \text{ con } t \in U : \gamma(0) = \mathbf{p}\},$$

de modo que para cada curva  $\gamma(t) \in \Gamma_{\mathbf{p}}$  hay un vector  $\mathbf{v}_p = \dot{\gamma}(0) \in \mathbb{R}^n$  tangente a esa curva en el punto  $\mathbf{p}$ . El conjunto formado por todos esos vectores tangentes en  $\mathbf{p}$  forma un espacio vectorial de dimensión  $m$ . Tal espacio vectorial es conocido como el *espacio tangente* de  $M^m$  en  $\mathbf{p}$  y se denota por  $T_{\mathbf{p}}M^m$ .

Para cualquier  $\mathbf{p} \in M^m$ , se tiene que  $T_{\mathbf{p}}M^m$  es también una variedad de dimensión  $m$  en  $\mathbb{R}^n$ . Por ejemplo, el espacio tangente en cada punto  $\mathbf{p}$  de la esfera unitaria  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  es un plano  $P_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^3$  que es tangente a la esfera en  $\mathbf{p}$ , es decir,  $T_{\mathbf{p}}S^2 = P_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^3$ . Localmente (en  $\mathbf{p}$ ) cada plano  $P_{\mathbf{p}}$  es isomórfico a  $\mathbb{R}^2$ , por eso es común escribir  $T_{\mathbf{p}}S^2 = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , para todo  $\mathbf{p} \in S^2$ . Así mismo, se tiene que  $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  para cualquier  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Se le llama *fibrado tangente* (*tangent bundle*) de una variedad  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  a la colección de todos los vectores tangentes  $\mathbf{v}_p \in T_{\mathbf{p}}M^m$ , junto con la información del punto  $\mathbf{p} \in M^m$  al cual son tangentes. El fibrado tangente de  $M^m$  se denota por  $TM^m$  y se define como:

$$TM^m = \{(\mathbf{p}, \mathbf{v}_p) : \mathbf{p} \in M^m, \mathbf{v}_p \in T_{\mathbf{p}}M^m\}$$

Nótese que si  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  entonces  $TM^m$  es una variedad de dimensión  $2m$  en  $\mathbb{R}^{2n}$ . Por ejemplo, en el caso del círculo unitario el fibrado tangente es  $TS = S \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$ . La importancia del fibrado tangente es que permite definir el *espacio de fase* de un sistema dinámico, donde cada punto  $\mathbf{p} \in M^m$  corresponde a una configuración del sistema y  $T_{\mathbf{p}}M^m$  es el *espacio de velocidades* para cada  $\mathbf{p} \in M^m$ .

## Grupos de Lie

La importancia de los llamados grupos de Lie se debe a que son herramientas matemáticas que tienen aplicación en diversos problemas de mecánica de sólidos y física cuántica. Fueron introducidos por Sophus Lie en 1870 con el fin de estudiar las simetrías de las ecuaciones diferenciales.

De manera formal un *grupo de Lie* es un conjunto  $G$  que satisface las siguientes condiciones:

- $G$  es un grupo.
- $G$  es una variedad (i.e.  $G = M^m \subset \mathbb{R}^n$ ).
- La operación de grupo  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  y el mapeo inverso  $^{-1} : G \rightarrow G$  son funciones continuas y diferenciables (suaves).

La *dimensión* de un grupo de Lie es la dimensión de la variedad correspondiente, es

decir, si  $G = M^m \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $\dim\{G\} = m$ . Los ejemplos más comunes de grupos de Lie son los grupos de matrices invertibles de  $n \times n$  (bajo la operación multiplicación), es decir, el grupo lineal general,  $GL(n)$ , definido en (2.4) y todos sus subgrupos, que son, en general, variedades en  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

En la tabla 2.1 se enlistan algunos grupos de Lie que son de interés en el modelado de cuerpos rígidos.  $U(n)$  es el *grupo unitario* de orden  $n$ , es decir, el conjunto de matrices complejas no singulares  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tales que  $(A^*)^T A = I$ , donde  $(A^*)^T$  es la *matriz adjunta* (transpuesta conjugada) de  $A$ .  $SU(n)$  es el *grupo especial unitario* de matrices unitarias con determinante igual a 1. Obsérvese que  $SU(1)$  no está definido y que  $U(1)$  es el grupo formado por los números complejos de la forma  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ . En la tabla se incluyen también  $S$  y  $S^3$  como ejemplos de grupos de Lie, bajo la multiplicación convencional de números complejos y cuaterniones, respectivamente.

Tabla 2.1: Algunos grupos de Lie multiplicativos.

Grupo ( $G$ )	Dimensión
$GL(n, \mathbb{R}) \equiv \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}$	$n^2$
$O(n) \equiv \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = I\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$SO(n) \equiv \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$GL(n, \mathbb{C}) \equiv \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}$	$n^2$
$U(n) \equiv \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : (A^*)^T A = I\}$	$n^2$
$SU(n) \equiv \{A \in U(n) : \det(A) = 1\}$	$n^2 - 1$
$S \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{C} : \ \mathbf{x}\  = 1\}$	1
$S^3 \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{H} : \ \mathbf{x}\  = 1\}$	3

Cabe recordar aquí que, en general, el conjunto  $S^n$  se define como

$$S^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

, pero como  $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$  y  $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{H}$ , entonces  $S$  y  $S^3$  son los conjuntos de números complejos unitarios y cuaterniones unitarios, respectivamente. Adicionalmente, aunque no forma un grupo,  $S^2$  es el conjunto de vectores unitarios en  $\mathbb{R}^3$ .

# Capítulo 3

## Cinemática

Este trabajo de tesis se enfoca principalmente al análisis de las diferentes formulaciones para modelado dinámico, las cuales serán presentadas a detalle hasta el capítulo 4. Sin embargo, tal como se explicó en la introducción, todas las formulaciones para modelado dinámico parten de conocer el arreglo de coordenadas de postura y los vectores de velocidad lineal y velocidad angular de cada uno de los cuerpos rígidos que componen al mecanismo de interés.

Este capítulo primero presenta las parametrizaciones más comunes de la postura de un cuerpo rígido. Luego se describe el método propuesto por Denavit-Hartberg, que es el más común para modelado cinemático de manipuladores robóticos, así como también los métodos de Muir-Neuman (Muir & Neuman, 1987) y Campion que se usan para modelado cinemático de robots móviles con ruedas. Además, se habla de las restricciones cinemáticas y los métodos para obtener la matriz de proyección, la cual permite transformar el modelo cinemático no mínimo, en un modelo cinemático mínimo. Finalmente, a manera de resumen se explica cómo obtener el modelo cinemático de diferentes tipos de mecanismos robóticos. La mayor parte de los conceptos presentados en este capítulo fueron extraídos principalmente de las referencias: (Bernal, 2013; Bernal & Campa, 2015; Muir & Neuman, 1987; Khalil & Kleinfinger, 1986).

### 3.1 Cinemática de cuerpos rígidos

En esta sección se describen las principales parametrizaciones de la postura de un cuerpo rígido:

- Vector de posición y ángulos de Euler.
- Vector de posición y matriz de rotación.
- Matriz de transformación homogénea.



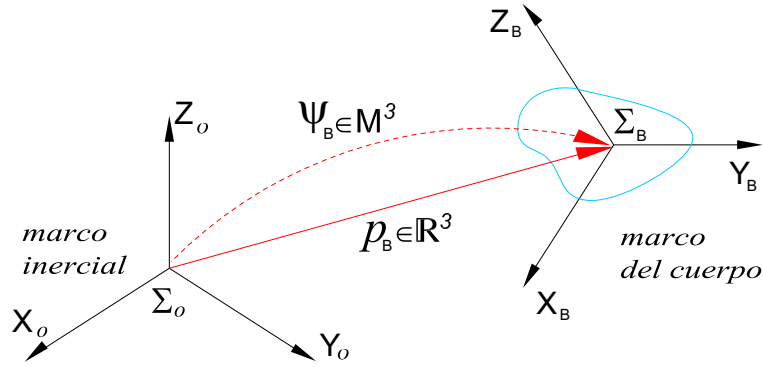


Figura 3.1: Posición y orientación de un cuerpo rígido. (Campa, 2005)

- Matriz ortogonal especial dual.
- Vector de posición y cuaternión unitario.
- Cuaternión dual unitario.

En la subsección 3.1.1 se presentan las expresiones para la cinemática de postura, y en la sección 3.1.2 para la cinemática de velocidad, empleando todas estas parametrizaciones. Más información sobre esto puede encontrarse en (Bernal, 2013).

### 3.1.1 Cinemática de postura

Considérese un cuerpo rígido que se mueve libremente en el espacio (ver figura 3.1), el cuerpo tiene un marco coordenado  $\Sigma_B(X_B, Y_B, Z_B)$  que se mueve junto con él y además existe un marco de referencia fijo (inercial)  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ . Para especificar la posición del cuerpo rígido con respecto al marco inercial, se usa un vector  $\mathbf{p}_B \in \mathbb{R}^3$  que va del origen de  $\Sigma_0$  al origen de  $\Sigma_B$ . Para la orientación  $\boldsymbol{\psi}_B \in M^3 \subseteq \mathbb{R}^m$ , donde  $m \geq 3$  indica el número de parámetros usados para describir la variedad de orientación.

#### Vector de posición y ángulos de Euler

Los ángulos de Euler son tres ángulos  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  que indican rotaciones sucesivas alrededor de los ejes coordenados del marco  $\Sigma_B$ , necesarios para hacer que  $\Sigma_0$  coincida con  $\Sigma_B$ . Existen doce posibles sucesiones de rotaciones (también llamadas convenciones) de ángulos de Euler, las cuales se denotan según la sucesión de ejes que se rotan y son: XYX, XYZ, XZX, XZY, YXY, YXZ, YZX, YZY, ZXY, ZXZ, ZYX, ZYZ. Si se

especifica la convención a utilizar, entonces la orientación queda definida por:

$$\boldsymbol{\psi}_B = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

por lo que se trata de una parametrización mínima (que tiene el mínimo número de parámetros); sin embargo, cualquier parametrización mínima de una variedad presenta configuraciones singulares; es decir, orientaciones para las cuales los ángulos de Euler no están definidos de manera única.

Cuando se utilizan ángulos de Euler para describir la orientación, entonces la postura queda definida por medio de:

$$\boldsymbol{\xi}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_B \\ \boldsymbol{\psi}_B \end{bmatrix}$$

y se dice que se trabaja en espacio operacional (Khatib, 1987).

### Vector de posición y matriz de rotación

Las matrices de rotación son el método de representación de la orientación más extendido en la actualidad debido a la simplicidad del álgebra de matrices. Las matrices de rotación pertenecen al grupo especial ortogonal de matrices de  $3 \times 3$ ,  $SO(3)$ . Este grupo también conocido como grupo de rotación en  $\mathbb{R}^3$ , describe la orientación relativa entre dos marcos coordenados con origen común en el espacio tridimensional.

Las matrices de rotación son conocidas también como matrices de cosenos directores, porque sus nueve elementos son los cosenos de los ángulos directores (o cosenos directores) de cada uno de los ejes del marco  $\Sigma_B$  con respecto al marco  $\Sigma_0$ . Cabe recordar que los ángulos directores de un vector  $\mathbf{v}$ , con respecto a un marco  $\Sigma(X, Y, Z)$ , son los ángulos que forma el vector con cada uno de los ejes coordenados ( $X$ ,  $Y$  y  $Z$ ), suponiendo que  $v$  pasa por el origen de  $\Sigma$ . Si se les llama  $\psi_{vX}$ ,  $\psi_{vY}$  y  $\psi_{vZ}$  a los ángulos directores entre el vector  $\mathbf{v}$  y los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , respectivamente, entonces los tres cosenos directores de  $\mathbf{v}$  son  $\cos(\psi_{vX})$ ,  $\cos(\psi_{vY})$  y  $\cos(\psi_{vZ})$  y se puede comprobar que satisfacen

$$\cos^2(\psi_{vX}) + \cos^2(\psi_{vY}) + \cos^2(\psi_{vZ}) = 1. \quad (3.1)$$

Ahora bien, si se define  $\boldsymbol{\psi}_v$  como el vector de ángulos directores del vector  $\mathbf{v}$  con respecto a  $\Sigma(X, Y, Z)$ , es decir,  $\boldsymbol{\psi}_v = [\psi_{vX} \ \psi_{vY} \ \psi_{vZ}]^T$ , y además, el vector de cosenos directores  $\cos(\boldsymbol{\psi}_v)$  como el vector de cosenos directores de  $\mathbf{v}$  con respecto a  $\Sigma$ , entonces:

$$\cos(\boldsymbol{\psi}_v) = [\cos(\psi_{vX}) \ \cos(\psi_{vY}) \ \cos(\psi_{vZ})]^T$$

, y la ecuación (3.1) se reescribe como

$$\|\cos(\boldsymbol{\psi}_v)\| = 1.$$

Siguiendo esta notación, una matriz de rotación  ${}^0R_B$  que da la orientación del marco  $\Sigma_B(X_B, Y_B, Z_B)$  con respecto a  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , sería

$${}^0R_B = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{X_B X_0}) & \cos(\psi_{Y_B X_0}) & \cos(\psi_{Z_B X_0}) \\ \cos(\psi_{X_B Y_0}) & \cos(\psi_{Y_B Y_0}) & \cos(\psi_{Z_B Y_0}) \\ \cos(\psi_{X_B Z_0}) & \cos(\psi_{Y_B Z_0}) & \cos(\psi_{Z_B Z_0}) \end{bmatrix} \in \text{SO}(3)$$

o, en términos de vectores de cosenos directores con respecto al marco  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ :

$${}^0R_B = \begin{bmatrix} \cos(\boldsymbol{\psi}_{X_B}) & \cos(\boldsymbol{\psi}_{Y_B}) & \cos(\boldsymbol{\psi}_{Z_B}) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

y se observa que la transpuesta de  ${}^0R_B$  corresponde a la matriz de rotación del marco  $\Sigma_0$  con respecto al marco  $\Sigma_B$ , es decir

$${}^B R_0 = ({}^0R_B)^T.$$

Debido a que sólo se necesitan 3 variables independientes para definir la orientación, entonces deben existir seis restricciones holonómicas entre los nueve elementos de una matriz  ${}^0R_B \in \text{SO}(3)$ . Si  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \in \mathbb{R}^3$  son las tres columnas de  ${}^0R_B$ , es decir

$${}^B R_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \in \text{SO}(3) \quad (3.3)$$

entonces las seis restricciones (conocidas como restricciones de ortogonalidad) son:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 &= 1; & \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 &= 0 \\ \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 &= 1; & \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_3 &= 0 \\ \mathbf{r}_3^T \mathbf{r}_3 &= 1; & \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si se hace uso de la notación propuesta en (Bach & Paielli, 1993), las tres columnas de la matriz de rotación se pueden apilar en un vector columna:

$$\boldsymbol{\psi}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \in \text{M}^3 \subset \mathbb{R}^9 \quad (3.5)$$

el cual es más adecuado para aplicaciones de control.

Las matrices de rotación alrededor de los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  de un marco coordenado,

se conocen como matrices de rotación elementales y son

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

donde la variable  $\theta$  corresponde al ángulo de la rotación y el subíndice indica el eje del marco sobre el cual se realiza la rotación correspondiente.

Todas las matrices de rotación poseen las siguientes propiedades:

$${}^A R_C = {}^A R_B {}^B R_C \quad (3.9)$$

$${}^A \mathbf{p}_C = {}^A R_B {}^B \mathbf{p}_C + {}^A \mathbf{p}_B \quad (3.10)$$

### Matriz de transformación homogénea

Las matrices de transformación homogénea (MTH) permiten trabajar de una forma más compacta con la postura relativa entre dos marcos cuando la orientación es descrita por medio de una matriz de rotación. Si  ${}^0 \mathbf{p}_B \in \mathbb{R}^3$  es el vector de posición y  ${}^0 R_B \in \text{SO}(3)$  es la matriz de rotación del marco  $\Sigma_B(X_B, Y_B, Z_B)$  con respecto al  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , entonces la matriz de transformación homogénea correspondiente (entre esos mismos dos marcos),  ${}^0 T_B$ , está dada por

$${}^0 T_B = \begin{bmatrix} {}^0 R_B & {}^0 \mathbf{p}_B \\ \mathbf{O} & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3) \quad (3.11)$$

donde  $\text{SE}(3)$  es conocido como el grupo especial euclidiano de transformaciones rígidas en  $\mathbb{R}^3$ .

Las matrices de transformación homogénea cumplen las siguientes propiedades:

$${}^A T_C = {}^A T_B {}^B T_C$$

de donde se extraen las propiedades (3.9) y (3.10).

Además

$${}^A T_B^{-1} = \begin{bmatrix} {}^A R_B^T & -{}^A R_B^T A \mathbf{p}_B \\ O & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3). \quad (3.12)$$

### Matriz ortogonal especial dual

Considérese nuevamente la figura 3.1 y supóngase que se usa una matriz de rotación para describir la orientación. De acuerdo al principio de transferencia (ver apéndice A), la matriz resultante al “dualizar” la ecuación (3.2) es:

$${}^0 \bar{R}_B = \begin{bmatrix} \cos(\boldsymbol{\psi}_{x_B} + \sigma \bar{\boldsymbol{\psi}}_{x_B}) & \cos(\boldsymbol{\psi}_{y_B} + \sigma \bar{\boldsymbol{\psi}}_{y_B}) & \cos(\boldsymbol{\psi}_{z_B} + \sigma \bar{\boldsymbol{\psi}}_{z_B}) \end{bmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{D}),$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\psi}}_{x_B}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\psi}}_{y_B}$  y  $\bar{\boldsymbol{\psi}}_{z_B}$  son vectores que van del origen del marco  $\Sigma_0$  a un punto de los ejes  $X_B$ ,  $Y_B$  y  $Z_B$  (ver figura 3.1), respectivamente, en que los vectores  $\bar{\boldsymbol{\psi}}_{x_B}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\psi}}_{y_B}$  y  $\bar{\boldsymbol{\psi}}_{z_B}$  son perpendiculares a cada respectivo eje, y  $\sigma$  cumple con la propiedad  $\sigma^2 = 0$  (ver definición de números duales en sección 2.1). Aquí se denomina  $\text{SO}(3, \mathbb{D})$  al conjunto de matrices especiales ortogonales con elementos duales (o simplemente *matrices especiales ortogonales duales*) que se define como:

$$\text{SO}(3, \mathbb{D}) = \{ {}^0 \bar{R}_B = {}^0 R_B + \sigma {}^0 R'_B \in \mathbb{D}^{3 \times 3} : {}^0 \bar{R}_B^T {}^0 \bar{R}_B = I, \det({}^0 \bar{R}_B) = 1 \}$$

Y debe verificarse que  $\text{SO}(3, \mathbb{D})$  es una variedad de dimensión 6 en  $\mathbb{D}^{3 \times 3}$ . Si  ${}^0 R_B = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}^T$  y  ${}^0 R'_B = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_4 & \mathbf{r}_5 & \mathbf{r}_6 \end{bmatrix}^T$ , entonces se deben cumplir las seis restricciones de ortogonalidad (3.4), más las siguientes seis restricciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_4 &= 0; & \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_5 &= 0 \\ \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_6 &= 0; & \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_5 &= 0 \\ \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_6 &= 0; & \mathbf{r}_3^T \mathbf{r}_6 &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ahora bien, empleando la expresión (A.4), es posible reacomodar la ecuación anterior quedando:

$${}^0 \bar{R}_B = [I + \sigma S(\mathbf{p}_B)] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{x_B} & \boldsymbol{\psi}_{y_B} & \boldsymbol{\psi}_{z_B} \end{bmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{D}),$$

donde  $\mathbf{p}_B$  es el vector de posición que va del origen del marco  $\Sigma_0$  al origen del marco  $\Sigma_B$ ; por lo tanto

$${}^0 \bar{R}_B = [I + \sigma S(\mathbf{p}_B)] {}^0 R_B \in \text{SO}(3, \mathbb{D}). \quad (3.14)$$

Para mayor información sobre el tema ver (Bernal, 2013).

## Con vector de posición y cuaternión unitario

Euler demostró que dados dos marcos coordenados  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_B$  con un origen común siempre es posible transformar  $\Sigma_0$  en  $\Sigma_B$  realizando una rotación de un ángulo  $\theta$  alrededor de un eje definido por el vector unitario  $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T \in S^2$ , con  $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$ . Ahora bien, dados  $\theta$  y  $\mathbf{u}$  es posible definir los siguientes parámetros:

$$\eta_B = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_B = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{u} \quad (3.16)$$

y es fácil comprobar que estos parámetros, conocidos como parámetros de Euler, satisfacen una restricción de norma unitaria, es decir

$$\eta_B^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_B^T \boldsymbol{\varepsilon}_B = 1$$

de modo que  $\boldsymbol{\zeta}_B = [\eta_B \ \boldsymbol{\varepsilon}_B^T]^T$  puede ser considerado como un cuaternión unitario, el cual representa otra parametrización de la variedad de orientación.

Dados los parámetros de Euler  $\boldsymbol{\zeta}_B = [\eta_B \ \boldsymbol{\varepsilon}_B^T]^T \in S^3$ , la matriz de rotación correspondiente se obtiene usando la siguiente expresión:

$$R(\eta_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B) = (\eta_B^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_B^T \boldsymbol{\varepsilon}_B)I + 2\eta_B S(\boldsymbol{\varepsilon}_B) + 2\boldsymbol{\varepsilon}_B \boldsymbol{\varepsilon}_B^T,$$

y, obsérvese que la matriz de rotación obtenida con los parámetros  $\boldsymbol{\zeta} = [\eta \ \boldsymbol{\varepsilon}^T]^T \in S^3$  es exactamente la misma que la obtenida con  $-\boldsymbol{\zeta} = [-\eta \ -\boldsymbol{\varepsilon}^T]^T \in S^3$ . Esto significa que dos cuaterniones diferentes dan como resultado la misma orientación:

$$\pm \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \in S^3 \Leftrightarrow R(\eta, \boldsymbol{\varepsilon}) \in \text{SO}(3)$$

Un hecho importante es que la multiplicación de parámetros de Euler es equivalente a la multiplicación de matrices de rotación. Si  $\pm\boldsymbol{\zeta}_1, \pm\boldsymbol{\zeta}_2 \in S^3$  son los parámetros de Euler correspondientes a las matrices de rotación  $R_1$  y  $R_2 \in \text{SO}(3)$ , respectivamente, entonces las siguientes relaciones se satisfacen:

$$R_1 R_2 \iff \pm\boldsymbol{\zeta}_1 \otimes \boldsymbol{\zeta}_2 \quad \text{y} \quad (3.17)$$

$$R_1 \mathbf{v} \iff \boldsymbol{\zeta}_1 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{\zeta}_1^*. \quad (3.18)$$

donde el operador  $(*)$  indica el conjugado de  $\boldsymbol{\zeta} = [\eta \ \boldsymbol{\varepsilon}^T]^T$ , es decir  $\boldsymbol{\zeta}^* = [\eta \ -\boldsymbol{\varepsilon}^T]^T$ ,

y el operador ( $\otimes$ ) expresa el producto de cuaterniones, es decir, dados  $\zeta_1 = [ \eta_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_1^T ]^T$  y  $\zeta_2 = [ \eta_2 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2^T ]^T$ , el producto  $\zeta_1 \otimes \zeta_2$ , se define como:

$$\zeta_1 \otimes \zeta_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 \eta_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \eta_1 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + S(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}$$

Cuando se hace uso de esta representación de la orientación para describir la postura de un cuerpo rígido, es decir  $\boldsymbol{\xi} = [ \boldsymbol{p}_B^T \ \eta_B \ \boldsymbol{\varepsilon}_B^T ]^T \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^7$ , se dice que se trabaja en *espacio de tarea* (Natale, 2003).

Para mayor información sobre el uso de parámetros de Euler en la cinemática de robots, el lector puede servirse de (Bernal, 2013).

### Cuaternión dual unitario

Cuando se emplean cuaterniones duales unitarios, el vector de postura del cuerpo rígido tienen la forma

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \eta_B \\ \boldsymbol{\varepsilon}_B \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \nu_B \\ \boldsymbol{v}_B \end{bmatrix} \in S_D^3 \subset \mathbb{D}^4$$

donde  $S_D^3$  es el conjunto de los cuaterniones duales unitarios, un subconjunto de los cuaterniones duales ( $\mathbb{D}^4 \equiv \mathbb{H}^2$ ), en el que se deben satisfacer las restricciones

$$\eta_B^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_B^T \boldsymbol{\varepsilon}_B = 1 \quad \text{y} \quad \eta_B \nu_B + \boldsymbol{\varepsilon}_B^T \boldsymbol{v}_B = 0. \quad (3.19)$$

Otra forma de representar un cuaternión dual unitario es la siguiente:

$$\boldsymbol{\chi}_B = \boldsymbol{\zeta}_B + \sigma \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{p}_B \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{\zeta}_B, \quad (3.20)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}_B \in \mathbb{S}^3$  son los parámetros de Euler que dan la orientación del marco  $\Sigma_B$ , y  $\boldsymbol{p}_B \in \mathbb{R}$  es el vector que da la posición de su origen respecto al marco  $\Sigma_0$  (ver figura 3.1).

Debido a que un cuerpo en movimiento general requiere de seis coordenadas generalizadas para ser definido, un cuaternión dual unitario no es una representación mínima, pero sí una representación compacta y eficiente (Ramírez-Gordillo et al., 2011).

Para mayor información sobre el uso de cuaterniones duales unitarios en la cinemática de robots, el lector puede servirse de (Bernal, 2013).

### 3.1.2 Cinemática de velocidad

En general, el movimiento de un cuerpo rígido con un marco  $\Sigma_B$  respecto a un marco inercial  $\Sigma_0$  estará compuesto de un movimiento traslacional y de un movimiento rotacional. De acuerdo al teorema de Chasles (Murray et al., 1994), ambos movimientos son independientes y pueden tratarse por separado. La tasa de cambio temporal de cada uno de estos movimientos queda descrita, respectivamente, por medio de un vector velocidad lineal  $\mathbf{v}_B$  y un vector velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_B$ .

En un movimiento de traslación pura (desplazamiento lineal, sin rotación), se presenta un vector velocidad lineal que indica la rapidez (magnitud) y dirección instantáneas del desplazamiento. Sea  $\mathbf{p}_B \in \mathbb{R}^3$  el vector posición que describe la posición de un cuerpo rígido con respecto al marco inercial. La velocidad lineal del cuerpo  $\mathbf{v}_B$ , es simplemente la derivada temporal del vector de posición, es decir:

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{p}_B}{dt}.$$

En un movimiento de rotación pura (desplazamiento angular, sin traslación) se presenta un vector velocidad angular cuya dirección indica el eje instantáneo de rotación y la magnitud indica la tasa de cambio del desplazamiento angular (en rad/s).

Sea  $\boldsymbol{\psi}_B \in M^3 \subset \mathbb{R}^s$  la parametrización de la orientación de un cuerpo rígido con respecto a un marco inercial, donde  $s$  es el número de parámetros usados para describir la orientación, la relación entre la derivada temporal de  $\boldsymbol{\psi}_B$  y la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_B$  está dada por:

$$\boldsymbol{\omega}_B = T_\psi(\boldsymbol{\psi}_B)\dot{\boldsymbol{\psi}}_B,$$

donde  $T_\psi(\boldsymbol{\psi}_B) \in \mathbb{R}^{3 \times s}$ , es una matriz de transformación que depende de la parametrización empleada para describir la orientación, y es llamada *jacobiiana de representación*.

En las subsecciones siguientes se obtiene la matriz  $T_A$  para cada una de las representaciones de la postura mencionadas anteriormente.

#### Con vector de posición y ángulos de Euler

Cuando se usan ángulos de Euler para describir la orientación, la jacobiana de representación depende de la secuencia de rotaciones (convención de ángulos de Euler) empleada. Suponga que la orientación de un cuerpo rígido está variando con el tiempo y queda descrita por medio de los ángulos de Euler  $\lambda(t)$ ,  $\nu(t)$  y  $\mu(t)$ . Los ejes de rotación correspondientes a cada uno de éstos ángulos de Euler se denotan por  $\mathbf{u}_\lambda$ ,  $\mathbf{u}_\nu$ , y  $\mathbf{u}_\mu$ , respectivamente. Entonces la velocidad angular del cuerpo en movimiento puede ser



descompuesta de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\omega}_B = \dot{\lambda}\mathbf{u}_\lambda + \dot{\nu}\mathbf{u}_\nu + \dot{\mu}\mathbf{u}_\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\lambda & \mathbf{u}_\nu & \mathbf{u}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$T_\phi(\lambda, \nu, \mu) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\lambda & \mathbf{u}_\nu & \mathbf{u}_\mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

y las expresiones de  $\mathbf{u}_\lambda$ ,  $\mathbf{u}_\nu$  y  $\mathbf{u}_\mu$  en términos de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  dependen de la convención de ángulos de Euler utilizada. Por ejemplo, si se usa la convención  $ZYZ$ , entonces:

$$T_\phi(\lambda, \nu, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}(\lambda) & \text{sen}(\nu) \cos(\lambda) \\ 0 & \cos(\lambda) & \text{sen}(\nu) \text{sen}(\lambda) \\ 1 & 0 & \cos(\nu) \end{bmatrix}$$

Y se observa que esta matriz es singular cuando  $\nu = n\pi$ . En (de la Torre, 2007) se encuentran las matrices  $T_\phi$  para las 12 convenciones de ángulos de Euler, todas ellas presentan singularidades para alguna configuración.

### Con vector de posición y matriz de rotación

Si la orientación de un cuerpo rígido es descrita por una matriz de rotación  $R \in \text{SO}(3)$ , entonces la relación entre  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\dot{R}$  está dada por:

$${}^0\dot{R}_B = S(\boldsymbol{\omega}_B) {}^0R_B. \quad (3.21)$$

Si  ${}^0R_B = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$  y  ${}^0\dot{R}_B = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 & \dot{\mathbf{r}}_2 & \dot{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix}$ , entonces la expresión anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(\boldsymbol{\omega}_B)\mathbf{r}_1 \\ S(\boldsymbol{\omega}_B)\mathbf{r}_2 \\ S(\boldsymbol{\omega}_B)\mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) \\ S(\mathbf{r}_2) \\ S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_B, \quad (3.22)$$

donde se ha usado la propiedad (2.12).

Obsérvese que

$$\begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) & S(\mathbf{r}_2) & S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) \\ S(\mathbf{r}_2) \\ S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} = -2I \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

así que es posible despejar  $\boldsymbol{\omega}$  de la ecuación (3.22) obteniendo:

$$\boldsymbol{\omega}_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) & S(\mathbf{r}_2) & S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

De modo que si se considera el vector de orientación  $\boldsymbol{\psi}$  definido en (3.5), está claro que

$$T_\psi({}^0R_B) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) & S(\mathbf{r}_2) & S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 9}. \quad (3.24)$$

Note que  $T_\psi({}^0R_B)$  no posee singularidades de representación, esto es porque la parametrización dada por  $\text{SO}(3)$  describe en forma global la variedad de orientación.

### Matriz de transformación homogénea

De (3.12) se tiene que la derivada de la matriz de transformación homogénea es:

$${}^0\dot{T}_B = \begin{bmatrix} {}^0\dot{R}_B & {}^0\dot{\mathbf{p}}_B \\ \mathbf{O} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 & \dot{\mathbf{r}}_2 & \dot{\mathbf{r}}_3 & \dot{\mathbf{p}}_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

de modo que se puede tomar  $\boldsymbol{\xi}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_B & \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \subset \mathbb{R}^{12}$

De la propiedad de la matriz de rotación dada en (3.23), se tiene que la velocidad lineal y angular de un cuerpo rígido cuya postura es representada por matrices de transformación homogénea está dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_B \\ \boldsymbol{\omega}_B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2I_{[3,3]} & O_{[3,3]} & O_{[3,3]} & O_{[3,3]} \\ O_{[3,3]} & S(\mathbf{r}_1) & S(\mathbf{r}_2) & S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_B \\ \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

### Con matrices ortogonales duales

Tomando la derivada de (3.14), se puede comprobar que

$${}^0\dot{R}_B = [S(\boldsymbol{\omega}_B) + \sigma [S(\mathbf{v}_B) + S(\mathbf{p}_B)S(\boldsymbol{\omega}_B)]] {}^0R_B \quad (3.26)$$

$$= [I + \sigma S(\mathbf{p}_B)] [S(\boldsymbol{\omega}_B) + \sigma S(\mathbf{v}_B)] {}^0R_B \quad (3.27)$$

$$= [I + \sigma S(\mathbf{p}_B)] [S(\boldsymbol{\omega}_B + \sigma \mathbf{v}_B)] {}^0R_B \quad (3.28)$$

$$(3.29)$$

Premultiplicando por  $[I - \sigma S(\mathbf{p}_B)]$  y observando que  $[I - \sigma S(\mathbf{p}_B)][I - \sigma S(\mathbf{p}_B)] = I$ :

$$[I - \sigma S(\mathbf{p}_B)]\dot{R} = S(\boldsymbol{\omega}_B + \sigma \mathbf{v}_B)R$$

Reescribiendo la ecuación anterior, haciendo uso nuevamente de la representación propuesta por Bach y Paielli (Bach & Paielli, 1993) para las matrices de rotación:

$$\begin{bmatrix} (I - \sigma S(\mathbf{p}_B))\dot{\mathbf{r}}_1 \\ (I - \sigma S(\mathbf{p}_B))\dot{\mathbf{r}}_2 \\ (I - \sigma S(\mathbf{p}_B))\dot{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(\boldsymbol{\omega}_B + \sigma \mathbf{v}_B)\mathbf{r}_1 \\ S(\boldsymbol{\omega}_B + \sigma \mathbf{v}_B)\mathbf{r}_2 \\ S(\boldsymbol{\omega}_B + \sigma \mathbf{v}_B)\mathbf{r}_3 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la propiedad (2.12), la ecuación anterior queda:

$$\begin{pmatrix} (I - \sigma S(\mathbf{p}_B))\dot{\mathbf{r}}_1 \\ (I - \sigma S(\mathbf{p}_B))\dot{\mathbf{r}}_2 \\ (I - \sigma S(\mathbf{p}_B))\dot{\mathbf{r}}_3 \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) \\ S(\mathbf{r}_2) \\ S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}_B + \sigma(\mathbf{v}_B)].$$

Finalmente, observando que

$$\begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) & S(\mathbf{r}_2) & S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) \\ S(\mathbf{r}_2) \\ S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} = -2I \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (3.30)$$

es posible despejar  $\boldsymbol{\omega}_B + \sigma \mathbf{v}_B$ :

$$\boldsymbol{\omega}_B + \sigma \mathbf{v}_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) & S(\mathbf{r}_2) & S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (I - \sigma S(\mathbf{p}_B))\dot{\mathbf{r}}_1 \\ (I - \sigma S(\mathbf{p}_B))\dot{\mathbf{r}}_2 \\ (I - \sigma S(\mathbf{p}_B))\dot{\mathbf{r}}_3 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

La expresión (3.31) permite obtener en un sólo paso la velocidad lineal  $\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{p}}_B$  y la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_B$  del cuerpo rígido a partir de los elementos de la matriz especial ortogonal dual y sus derivadas.

### Con vector de posición y cuaternión unitario

La derivada de los parámetros de Euler que describen la postura del marco  $\Sigma_B$  respecto a  $\Sigma_0$  está dada por la llamada regla de propagación del cuaternión (Campa, 2005):

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_B \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} E(\eta_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B) \boldsymbol{\omega}_B \quad (3.32)$$

donde  $\boldsymbol{\omega}_B$  es la velocidad angular y

$$E(\eta_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B) = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon}_B^T \\ \eta_B I - S(\boldsymbol{\varepsilon}_B) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}. \quad (3.33)$$

Usando la propiedad (2.16) y la restricción de la norma unitaria de un cuaternión unitario, es fácil demostrar que

$$E(\eta_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B)^T E(\eta_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B) = I, \quad (3.34)$$

de manera que se puede despejar  $\boldsymbol{\omega}_B$  de (3.32), obteniéndose:

$$\boldsymbol{\omega}_B = 2E(\eta_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B)^T \begin{bmatrix} \dot{\eta}_B \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_B \end{bmatrix}; \quad (3.35)$$

donde el jacobiano de representación en este caso es

$$T_A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_\phi(\eta_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B) \end{bmatrix},$$

donde

$$T_\phi(\eta_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B) = 2E(\eta_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B)^T = 2 \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon}_B & \eta_B I + S(\boldsymbol{\varepsilon}_B) \end{bmatrix},$$

el cual es de rango completo para todo  $[\eta_B \ \boldsymbol{\varepsilon}_B^T]^T \in \mathbb{S}^3$ . La afirmación anterior significa que esta parametrización también es global; sin embargo, desafortunadamente esta parametrización no tiene la propiedad de unicidad, ya que como se explicó en la subsección 3.1.1, si  $[\eta_B \ \boldsymbol{\varepsilon}_B^T]^T \in \mathbb{S}^3$  se reemplaza por  $[-\eta_B \ -\boldsymbol{\varepsilon}_B^T]^T \in \mathbb{S}^3$  se obtiene exactamente la misma orientación.

### Cuaternión dual unitario

En (Han et al., 2008) se puede encontrar la siguiente relación:

$$2 \begin{bmatrix} \bar{\eta}_B \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_B \end{bmatrix} = E(\bar{\eta}_B, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_B)[I + \sigma S(\mathbf{p}_B)][\boldsymbol{\omega}_B + \sigma \mathbf{v}_B]$$

donde  $E(\bar{\eta}_B, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_B) = \begin{bmatrix} -\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_B^T \\ \bar{\eta}_B I - S(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_B) \end{bmatrix} \in \mathbb{D}^4$ .

Ahora, considerando que  $E(\bar{\eta}_B, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_B)^T E(\bar{\eta}_B, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_B) = I$  se puede despejar  $\boldsymbol{\omega}_B + \sigma \mathbf{v}_B$  quedando:

$$\boldsymbol{\omega}_B + \sigma \mathbf{v}_B = 2[I - \sigma S(\mathbf{p}_B)]E(\eta_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B) \begin{bmatrix} \dot{\eta}_B \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_B \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

La expresión (3.36) permite obtener  $\mathbf{v}_B$  y  $\boldsymbol{\omega}_B$  a partir del cuaternión dual unitario dado por  $[\bar{\eta}_B \ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_B^T]^T$  y su derivada temporal.

## 3.2 El método de Denavit–Hartenberg

La mayor parte de esta sección fue tomado de (Bernal & Campa, 2015).

Para determinar la ubicación en el espacio de una recta, se requieren sólo cuatro parámetros independientes. Sin embargo, existen varias parametrizaciones posibles, siendo una de las más conocidas la dada por las llamadas coordenadas de Plücker (ver apéndice A), que son seis parámetros (representando dos vectores tridimensionales) sujetos a dos restricciones holonómicas, de manera que se trata de una parametrización no mínima.

En 1955 Jacques Denavit y Richard S. Hartenberg (Denavit & Hartenberg, 1955) presentaron la primera parametrización mínima de la ubicación de una recta. El concepto geométrico principal que permitió a Denavit y Hartenberg encontrar tal representación mínima, fue el de *normal común* entre dos líneas.

Considérese una línea recta en el espacio tridimensional, tal como la que se muestra en la figura 3.2. Para encontrar los cuatro parámetros de Denavit-Hartenberg (o simplemente *parámetros D-H*) que describen la ubicación de la línea con respecto al marco  $\Sigma_o$  (con ejes  $X_o$ ,  $Y_o$  y  $Z_o$ ), primero se debe encontrar la normal común entre la línea y uno de los ejes (por convención el eje  $Z$ ) del marco. Denavit y Hartenberg notaron que el marco  $\Sigma_o$  podría ser transformado en el marco  $\Sigma_1(X, Y, Z)$ , con  $Z_1$  en la dirección de la línea y  $X_1$  en la dirección de la normal común, después de realizar las siguientes cuatro transformaciones básicas (ver figura 3.2):

- Una traslación de una distancia  $d$  a lo largo del eje  $Z_o$ .
- Una rotación de un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $Z_o$ .
- Una traslación de una distancia  $a$  a lo largo del eje  $X_1$ .
- Una rotación de un ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $X_1$ .

Los parámetros D-H para una línea son entonces:  $d$ ,  $\theta$ ,  $a$  y  $\alpha$ . Pero, cabe resaltar que estos parámetros no sólo describen una línea, sino también la *postura* (es decir, la *posición* y *orientación*) de un marco; y como, para el caso general, la postura de un marco tiene seis grados de libertad, esto significa que los marcos que pueden ser descritos por parámetros D-H, deben satisfacer dos restricciones: (a) el eje  $X$  del marco  $\Sigma_1$  interseca el eje  $Z$  del marco de referencia  $\Sigma_0$ , y (b) el eje  $X$  del marco  $\Sigma_1$  es paralelo al plano  $XY$  del marco de referencia  $\Sigma_0$ . Esto llevó a Denavit y Hartenberg a proponer un método general para la obtención del modelo cinemático directo de mecanismos (Denavit & Hartenberg, 1955).

Lo que Denavit y Hartenberg hicieron fue asociar a cada eslabón del robot un marco coordenado, de tal modo que el movimiento relativo de la articulación  $i$ , encontrada entre el eslabón  $i$  y el eslabón  $i + 1$ , está dado por la postura del marco  $\Sigma_{i+1}$  con respecto al marco  $\Sigma_i$  (Denavit & Hartenberg, 1955; Lipkin, 2005)(el cual, como se

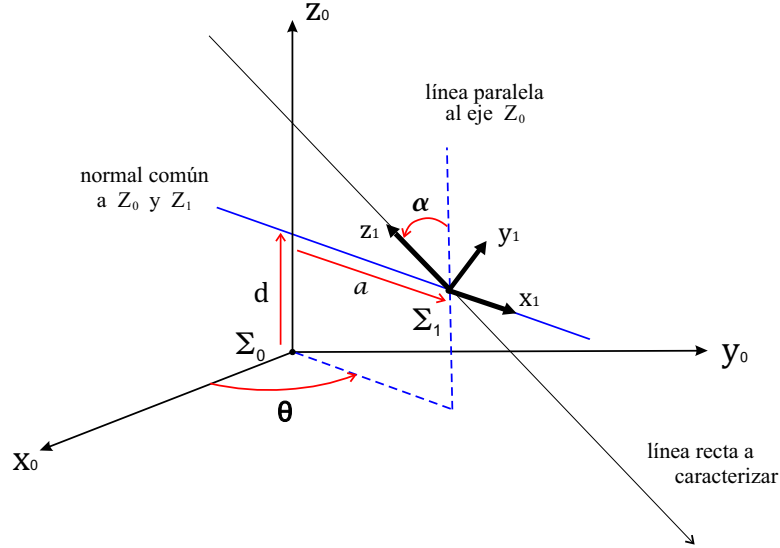


Figura 3.2: Parámetros Denavit-Hartenberg para una línea recta.

mencionó antes, puede ser parametrizado por  $d_i$ ,  $\theta_i$ ,  $a_i$  y  $\alpha_i$ ). Con el objetivo de hacer esto, ellos siguieron la idea en la figura 3.2, colocando el eje  $Z_i$  alineado con el eje de la articulación  $i$  y el eje  $X_{i+1}$  alineado con la normal común a los ejes de las articulaciones  $i$  e  $i+1$  (es decir  $Z_i$  y  $Z_{i+1}$ , respectivamente). Luego Denavit y Hartenberg propusieron el uso de matrices de transformación homogénea para obtener el modelo cinemático directo de mecanismos (Denavit & Hartenberg, 1955).

La postura del elemento terminal del robot es determinada por su posición y orientación la cual está descrita por medio de la matriz de transformación homogénea  ${}^oT_e \in \text{SE}(3)$ , definida como:

$${}^oT_e = \begin{bmatrix} {}^oR_e & {}^o\mathbf{p}_e \\ \mathbf{0}_{[1,3]} & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3),$$

donde  ${}^oR_e \in \text{SO}(3)$  es la matriz de rotación que define la orientación del marco asociado con el efector final del robot ( $\Sigma_e$ ), con respecto al marco de referencia asociado a la base ( $\Sigma_o$ ) y  ${}^o\mathbf{p}_e \in \mathbb{R}^3$  es el vector de posición del origen del marco  $\Sigma_e$ , con respecto a el origen del marco  $\Sigma_o$ .

Para el análisis subsecuente se requiere calcular la postura del marco  $\Sigma_i$  con respecto al marco  $\Sigma_{i-1}$ . La correspondiente MTH está dada por:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}\mathbf{p}_i \\ \mathbf{0}_{[1,3]} & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3)$$

donde ahora  ${}^{i-1}R_i \in \text{SO}(3)$ , y  ${}^{i-1}\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$  son, respectivamente, la matriz de rotación y el vector de posición que dan la orientación y la posición del marco  $\Sigma_i$  con respecto al

marco  $\Sigma_{i-1}$ .

Es fácil mostrar que las MTHs elementales (MTH que describe la postura de un marco que se obtiene por medio de una traslación  $r$  y una rotación  $\phi$  sobre el mismo eje) para el eje  $X$  y el eje  $Z$  son:

$$T_X(r, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & C_\phi & -S_\phi & 0 \\ 0 & S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T_Z(r, \phi) = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

donde se usa la notación simplificada para el seno y el coseno, es decir,  $C_\phi = \cos(\phi)$  y  $S_\phi = \sin(\phi)$ . Es importante observar también que si  $r = \phi = 0$ , entonces

$$T_X(0, 0) = T_Z(0, 0) = I \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (3.37)$$

### Variantes del método original

El algoritmo propuesto por Denavit y Hartenberg, no es único. Existen varias versiones o convenciones, las cuales difieren principalmente en la manera en que se nombran los marcos asociados a cada eslabón y en cómo se definen los cuatro parámetros D-H.

En 1981, R. Paul (Paul, 1981) describió en su libro una variante del método original de Denavit y Hartenberg, la cual ya había sido publicada en 1970 (Kahn, 1970). Básicamente, esta convención propone modificar la definición de los cuatro parámetros D-H, de manera que ahora se calculan entre los marcos  $\Sigma_{i-1}$  y  $\Sigma_i$  (en lugar de entre  $\Sigma_i$  y  $\Sigma_{i+1}$ , como en la convención original). Y aunque este cambio parece ser no importante, conduce a una convención más clara y fácil de aplicar. Esta convención de Paul es algunas veces conocida como la convención “original” de parámetros D-H. Pero, como se explica más adelante, la convención de Paul y la convención original de Denavit y Hartenberg pertenecen a una misma familia (o clase), denominada aquí como la: “familia original” de convenciones de parámetros D-H.

En 1986, Khalil y Kleinfinger (Khalil & Kleinfinger, 1986) propusieron una modificación al método original de Denavit-Hartenberg (aunque ellos en realidad se referían a la convención de Paul). La convención de Khalil-Kleinfinger, que según los autores corrige ambigüedades en el método original, principalmente propone una nueva forma de colocar los marcos coordenados, y cambia el orden de las transformaciones requeridas para calcular la postura relativa entre marcos consecutivos. En el mismo año, J. J. Craig publicó en su libro (Craig, 1986) otra variante del método de Denavit-Hartenberg ya empleada en (Featherstone, 1984). La convención de Craig emplea una distribución de marcos y orden de transformaciones similar a la de Khalil-Kleinfinger, pero la definición de los parámetros es diferente. Como se muestra en este trabajo, estas dos convenciones pertenecen a la misma familia, la cual aquí es nombrada “familia

modificada” de parámetros D-H.

Después de un minucioso estudio de las diferencias entre las convenciones de parámetros D-H, es posible mostrar que todas las convenciones pueden ser clasificadas en las dos familias ya mencionadas: la familia original (o familia  $O$ ) y la familia modificada (o familia  $M$ ).

La diferencia entre ambas familias consiste en el orden en el cual se realizan las transformaciones requeridas para obtener la postura relativa entre los marcos  $\Sigma_i$  y  $\Sigma_{i-1}$ . Para las convenciones pertenecientes a la familia  $O$ , la secuencia de transformaciones se realiza como lo propusieron originalmente Denavit y Hartenberg, es decir:

- Una traslación y una rotación en el eje  $Z$  del marco  $\Sigma_{i-1}$ .
- Una traslación y una rotación en el eje  $X$  del marco  $\Sigma_i$ .

Para las convenciones de la familia  $M$ , el orden de las transformaciones se invierte, es decir, el orden es:

- Una traslación y una rotación en el eje  $X$  del marco  $\Sigma_{i-1}$ .
- Una traslación y una rotación en el eje  $Z$  del marco  $\Sigma_i$ .

Existen tres convenciones de parámetros D-H básicas (o estándar) en cada familia. Las tres convenciones de la familia  $O$  serán denotadas simplemente por  $O1$ ,  $O2$  y  $O3$ ; mientras que para la familia  $M$  se tienen las convenciones  $M1$ ,  $M2$  y  $M3$ .

A continuación se explicará brevemente cada una de las seis convenciones estándar de parámetros D-H. Además, en el apéndice B se hace un análisis de las posibles variantes de parámetros D-H que puede haber en una misma convención así como de las transformaciones entre diferentes convenciones.

### 3.2.1 Convenciones originales

Para todas las convenciones en esta familia, es necesario colocar los marcos coordenados de acuerdo a las siguientes reglas:

- (1) Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , colocar el eje  $Z_{i-1}$  en la dirección de eje de la articulación  $i$ . Colocar  $Z_n$  en el elemento terminal, paralelo a  $Z_{n-1}$ .
- (2) Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , identificar la recta normal común entre los ejes  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$ , y colocar  $X_i$  en dirección de esa normal común. Colocar el eje  $X_0$  en la base, con una dirección arbitraria.



Nótese que estas reglas determinan la localización de los marcos  $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ . Así, cuando se emplean las convenciones de la familia  $O$ ,  $n + 1$  marcos y  $4n$  parámetros D-H se requieren para el modelo cinemático. Además, es posible verificar que la postura  ${}^0T_e$  del elemento terminal del robot, empleando la familia  $O$ , se obtiene usando:

$${}^0T_e = {}^0T_1 {}^1T_2 \cdots {}^{n-1}T_n,$$

donde  $n$  es el número de articulaciones simples del robot.

La diferencia entre las tres convenciones originales es el modo en el cual los cuatro parámetros D-H son definidos.

### Convención $O1$

Los cuatro parámetros D-H para esta convención se definen como:

- $d_i$ : Distancia de  $X_{i-1}$  a  $X_i$ , a lo largo de  $Z_{i-1}$ .
- $\theta_i$ : Ángulo de  $X_{i-1}$  a  $X_i$ , con respecto a  $Z_{i-1}$ .
- $a_i$ : Distancia de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$ , a lo largo de  $X_i$ .
- $\alpha_i$ : Ángulo de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$ , con respecto a  $X_i$ .

Estos parámetros pueden apreciarse en la figura 3.3.

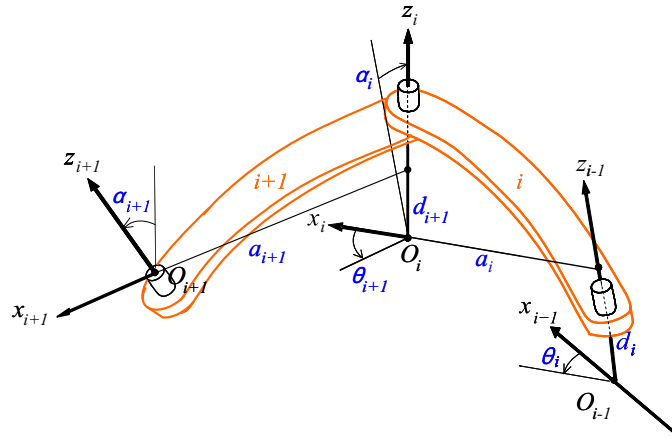


Figura 3.3: Parámetros D-H para la convención  $O1$ .

La transformación entre el marco  $\Sigma_{i-1}$  y el marco  $\Sigma_i$  usando esta convención está dada por la siguiente expresión:

$${}^{i-1}T_i = T_{Z_{i-1}}(d_i, \theta_i)T_{X_i}(a_i, \alpha_i) = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -C_{\alpha_i}S_{\theta_i} & S_{\alpha_i}S_{\theta_i} & a_iC_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\alpha_i}C_{\theta_i} & -S_{\alpha_i}C_{\theta_i} & a_iS_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta convención corresponde a la usada por Paul en (Paul, 1981).

### Convención $O2$

Para esta convención los cuatro parámetros D-H se definen como:

- $d_i$ : Distancia de  $X_i$  a  $X_{i+1}$ , a lo largo de  $Z_i$ .
- $\theta_i$ : Ángulo de  $X_i$  a  $X_{i+1}$ , con respecto a  $Z_i$ .
- $a_i$ : Distancia de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$ , a lo largo de  $X_i$ .
- $\alpha_i$ : Ángulo de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$ , con respecto a  $X_i$ .

Estos parámetros son los que se muestran en la figura 3.4.

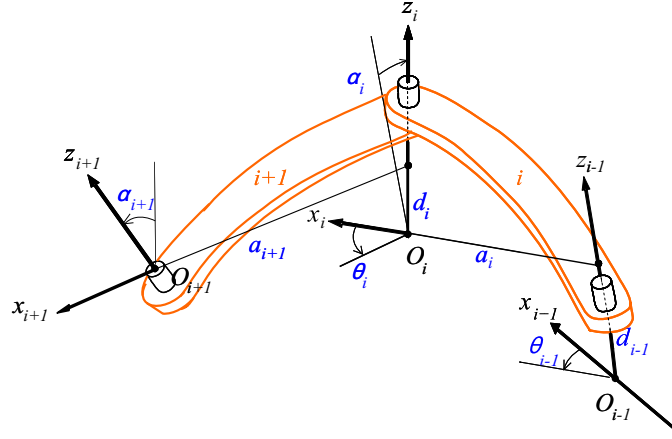


Figura 3.4: Parámetros D-H para la convención  $O2$ .

La transformación entre el marco  $\Sigma_{i-1}$  y el marco  $\Sigma_i$ , usando esta convención, está dada por:

$${}^{i-1}T_i = T_{Z_{i-1}}(d_{i-1}, \theta_{i-1})T_{X_i}(a_i, \alpha_i) = \begin{bmatrix} C_{\theta_{i-1}} & -C_{\alpha_i}S_{\theta_{i-1}} & S_{\alpha_i}S_{\theta_{i-1}} & a_iC_{\theta_{i-1}} \\ S_{\theta_{i-1}} & C_{\alpha_i}C_{\theta_{i-1}} & -S_{\alpha_i}C_{\theta_{i-1}} & a_iS_{\theta_{i-1}} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasta donde se sabe, esta convención de parámetros D-H no había sido reportada en la literatura, aunque, de acuerdo al análisis realizado en (Bernal & Campa, 2015), tiene relación con la convención  $M2$  de la familia  $M$ .

### Convención $O3$

Los cuatro parámetros D-H para esta convención son definidos como:

- $d_i$ : Distancia de  $X_i$  a  $X_{i+1}$ , a lo largo de  $Z_i$ .
- $\theta_i$ : Ángulo de  $X_i$  a  $X_{i+1}$ , con respecto a  $Z_i$ .
- $a_i$ : Distancia de  $Z_i$  a  $Z_{i+1}$ , a lo largo de  $X_{i+1}$ .
- $\alpha_i$ : Ángulo de  $Z_i$  a  $Z_{i+1}$ , con respecto a  $X_{i+1}$ .

En la figura 3.5 se muestran estos parámetros.

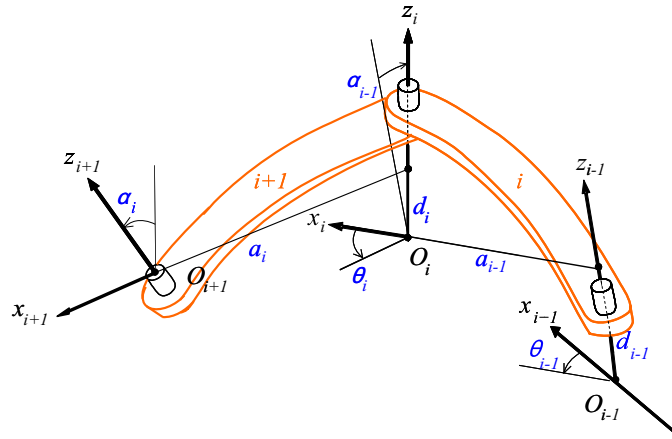


Figura 3.5: Parámetros D-H para la convención  $O3$ .

La MTH entre el marco  $\Sigma_{i-1}$  y el marco  $\Sigma_i$  usando esta convención resulta ser:

$${}^{i-1}T_i = T_{Z_{i-1}}(d_{i-1}, \theta_{i-1})T_{X_{i-1}}(a_{i-1}, \alpha_{i-1}) = \begin{bmatrix} C_{\theta_{i-1}} & -C_{\alpha_{i-1}}S_{\theta_{i-1}} & S_{\alpha_{i-1}}S_{\theta_{i-1}} & a_{i-1}C_{\theta_{i-1}} \\ S_{\theta_{i-1}} & C_{\alpha_{i-1}}C_{\theta_{i-1}} & -S_{\alpha_{i-1}}C_{\theta_{i-1}} & a_{i-1}S_{\theta_{i-1}} \\ 0 & S_{\alpha_{i-1}} & C_{\alpha_{i-1}} & d_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que esta convención es la que propusieron originalmente Denavit y Hartenberg en (Denavit & Hartenberg, 1955).

### 3.2.2 Convenciones modificadas

Para las convenciones en esta familia, los marcos coordenados se deben colocar de acuerdo a las siguientes reglas:

- (1) Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , colocar el eje  $Z_i$  en la dirección del eje de la articulación  $i$ . El eje  $Z_0$  debe ser colineal a  $Z_i$ . El eje  $Z_{n+1}$  se coloca en el elemento terminal, paralelo al eje  $Z_n$ .
- (2) Para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , identificar la recta normal común entre los ejes  $Z_i$  y  $Z_{i+1}$  y colocar  $X_i$  en dirección de esa normal común. Colocar el eje  $X_{n+1}$  en el efector final, paralelo a  $X_n$ .

Cabe mencionar que estas reglas determinan la ubicación de los marcos coordenados  $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n+1}$ . Así que, para las convenciones de la familia  $M$  se requieren  $n + 2$  marcos coordenados, pero como los ejes  $Z_0$  y  $Z_1$  son colineales, así como los ejes  $X_n$  y  $X_{n+1}$ , entonces se tiene que los parámetros  $a_1, \alpha_1, d_{n+1}$  y  $\theta_{n+1}$  son siempre igual a cero, y también se requieren  $4n$  parámetros D-H para definir los marcos de esta familia.

Es posible verificar que la postura  ${}^0T_e$  del efector final del robot, empleando la familia  $M$ , puede obtenerse usando:

$${}^0T_e = {}^0T_1 {}^1T_2 \cdots {}^{n-1}T_n {}^nT_{n+1}, \quad (3.38)$$

donde  $n$  es el número de articulaciones del robot.

Al igual que las convenciones originales, las tres convenciones modificadas difieren en cómo se definen los cuatro parámetros D-H tal como se muestra en seguida.

#### Convención $M1$

En esta convención los cuatro parámetros D-H se definen como:

- $d_i$ : Distancia de  $X_{i-1}$  a  $X_i$ , a lo largo de  $Z_i$ .
- $\theta_i$ : Ángulo de  $X_{i-1}$  a  $X_i$ , con respecto a  $Z_i$ .
- $a_i$ : Distancia de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$ , a lo largo de  $X_{i-1}$ .
- $\alpha_i$ : Ángulo de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$ , con respecto a  $X_{i-1}$ .

En la figura 3.6 se muestran los parámetros correspondientes a esta convención. Debe notarse que para fines de comparación, en las figuras 3.3 a 3.8 se muestran los mismos dos eslabones ( $i$  e  $i + 1$ ), pero siguiendo las reglas de ubicación de marcos de las convenciones de la familia  $M$  y la definición de los parámetros de la convención  $M1$ , los

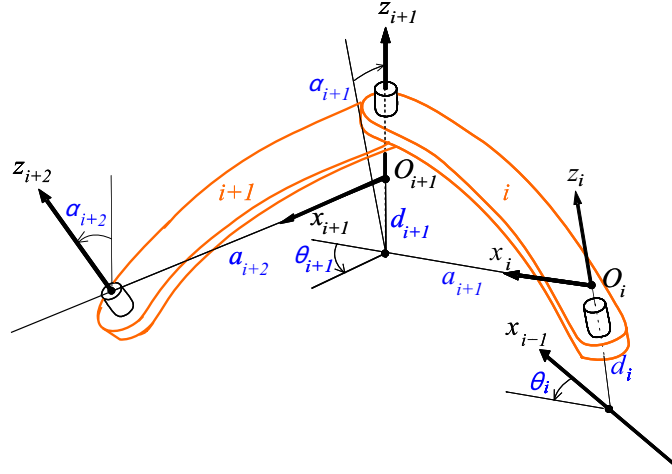


Figura 3.6: Parámetros D-H para la convención  $M1$ .

parámetros  $a_i$  y  $\alpha_i$  no se muestran en la figura 3.6 (tales parámetros pueden apreciarse si se reduce en una unidad los índices mostrados en la figura).

La transformación entre  $\Sigma_{i-1}$  y  $\Sigma_i$  usando esta convención está dada por la siguiente expresión:

$${}^{i-1}T_i = T_{X_{i-1}}(a_i, \alpha_i)T_{Z_i}(d_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} & 0 & a_i \\ C_{\alpha_i}S_{\theta_i} & C_{\alpha_i}C_{\theta_i} & -S_{\alpha_i} & -d_iS_{\alpha_i} \\ S_{\alpha_i}S_{\theta_i} & S_{\alpha_i}C_{\theta_i} & C_{\alpha_i} & d_iC_{\alpha_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

La convención  $M1$  corresponde a la convención propuesta en (Khalil & Kleinfinger, 1986) por Khalil y Kleinfinger.

### Convención $M2$

Para esta convención los cuatro parámetros D-H se definen así:

- $d_i$ : Distancia de  $X_{i-1}$  a  $X_i$ , a lo largo de  $Z_i$ .
- $\theta_i$ : Ángulo de  $X_{i-1}$  a  $X_i$ , con respecto a  $Z_i$ .
- $a_i$ : Distancia de  $Z_i$  a  $Z_{i+1}$ , a lo largo de  $X_i$ .
- $\alpha_i$ : Ángulo de  $Z_i$  a  $Z_{i+1}$ , con respecto a  $X_i$ .

En la figura 3.7 se muestran estos parámetros.

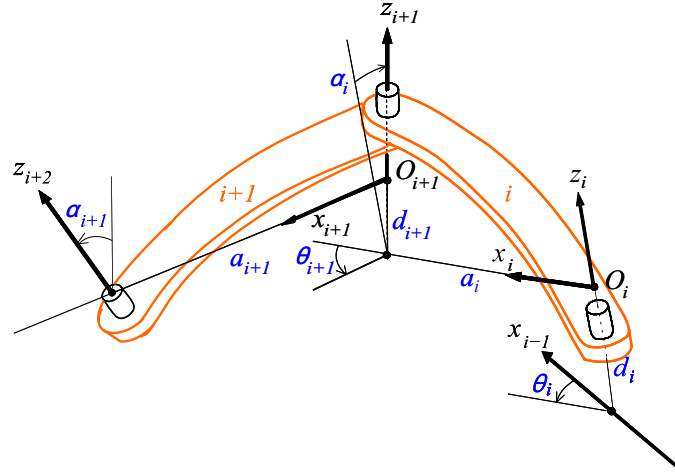


Figura 3.7: Parámetros D-H para la convención  $M2$ .

La MTH entre los marcos  $\Sigma_{i-1}$  y  $\Sigma_i$ , usando esta convención, es:

$${}^{i-1}T_i = T_{X_{i-1}}(a_{i-1}, \alpha_{i-1})T_{Z_i}(d_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ C_{\alpha_{i-1}}S_{\theta_i} & C_{\alpha_{i-1}}C_{\theta_i} & -S_{\alpha_{i-1}} & -d_iS_{\alpha_{i-1}} \\ S_{\alpha_{i-1}}S_{\theta_i} & S_{\alpha_{i-1}}C_{\theta_i} & C_{\alpha_{i-1}} & d_iC_{\alpha_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que esta convención corresponde a la del libro de Craig (Craig, 1986). Una peculiaridad de esta convención (y también de la convención  $O2$ ) es el hecho de que para establecer la postura de dos marcos consecutivos, se necesitan parámetros de D-H con índices diferentes.

### Convención $M3$

Los cuatro parámetros D-H para esta convención se definen así:

- $d_i$ : Distancia de  $X_i$  a  $X_{i+1}$ , a lo largo de  $Z_{i+1}$ .
- $\theta_i$ : Ángulo de  $X_i$  a  $X_{i+1}$ , con respecto a  $Z_{i+1}$ .
- $a_i$ : Distancia de  $Z_i$  a  $Z_{i+1}$ , a lo largo de  $X_i$ .
- $\alpha_i$ : Ángulo de  $Z_i$  a  $Z_{i+1}$ , con respecto a  $X_i$ .

Estos parámetros se aprecian en la figura 3.8.

Por otra parte, la transformación entre el marco  $\Sigma_{i-1}$  y el marco  $\Sigma_i$  usando esta convención está dada por la siguiente expresión:

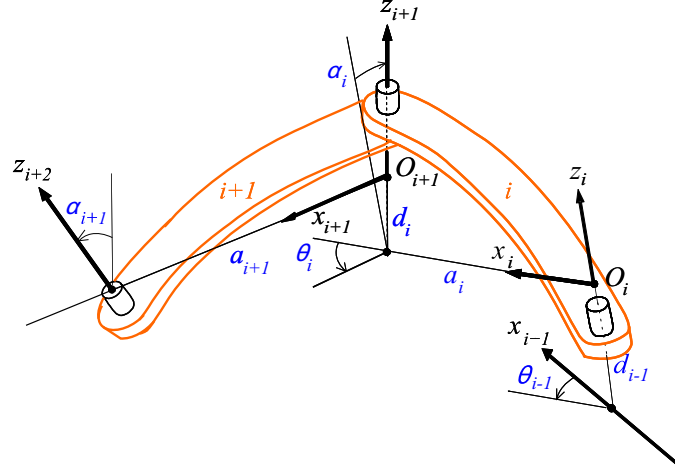


Figura 3.8: Parámetros D-H para la convención  $M3$ .

$${}^{i-1}T_i = T_{X_{i-1}}(a_{i-1}, \alpha_{i-1})T_{Z_i}(d_{i-1}, \theta_{i-1}) = \begin{bmatrix} C_{\theta_{i-1}} & -S_{\theta_{i-1}} & 0 & a_{i-1} \\ C_{\alpha_{i-1}}S_{\theta_{i-1}} & C_{\alpha_{i-1}}C_{\theta_{i-1}} & -S_{\alpha_{i-1}} & -d_{i-1}S_{\alpha_{i-1}} \\ S_{\alpha_{i-1}}S_{\theta_{i-1}} & S_{\alpha_{i-1}}C_{\theta_{i-1}} & C_{\alpha_{i-1}} & d_{i-1}C_{\alpha_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta convención fue reportada en (Bernal & Campa, 2015). En el apéndice  $B$  se muestra que esta convención tiene propiedades muy similares a las de la convención  $M1$ .

Todas las convenciones mostradas son equivalentes, como se muestra en el apéndice  $B$ , por lo que pueden utilizarse de manera indistinta en cualquier aplicación.

### 3.3 Obtención de la matriz $A(\mathbf{q})$

En la sección 1.4 se explicó que en el caso de robots con restricciones cinemáticas, que son modelados empleando un conjunto no mínimo de coordenadas generalizadas, siempre existe una matriz  $A(\mathbf{q})$  que relaciona el vector de velocidades generalizadas no mínimas  $\dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^m$  con el vector de velocidades generalizadas mínimas  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ , con  $n < m$  igual al número de g.d.l. del robot.

También se explicó que en algunos robots es posible encontrar una función  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})$$

, de modo que  $A(\mathbf{q})$  es simplemente el jacobiano de  $\boldsymbol{\sigma}$ , es decir:

$$A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$$

Sin embargo, si  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})$  no se conoce de forma explícita (y analítica), entonces se debe emplear algún método indirecto para obtener  $A(\mathbf{q})$ . A continuación se explican algunos de los procedimientos para esto, según el tipo de restricciones que se presentan.

- Restricciones holonómicas.

En la literatura se han reportado algunos métodos para encontrar la matriz  $A(\mathbf{q})$ , por ejemplo, en (Ghorbel et al., 2000) y (Soto & Campa, 2015). En esta trabajo de tesis se propone un nuevo método para obtener la matriz  $A(\mathbf{q})$ , que aplica para aquellos robots en los que el vector  $\boldsymbol{\rho}$  es seleccionado como:

$$\boldsymbol{\rho} = [ \mathbf{q} \quad \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) ]^T \in \mathbb{R}^m$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas mínimas.

El vector de restricciones holonómicas  $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(m-n)}$  se puede escribir también como  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}$ , y se tiene que al tomar la derivada con respecto al tiempo de esta última expresión, queda

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0}, \quad (3.40)$$

de la cual es posible despejar  $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

o bien

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.41)$$

Además, como la función  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})$  está dada por

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) \end{bmatrix},$$

entonces de (3.41), la matriz  $A(\mathbf{q})$  es

$$A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} I \\ \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (3.42)$$



- Restricciones no holonómicas

Si  $\dot{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^m$  son las velocidades generalizadas no mínimas, obtener la relación  $\dot{\boldsymbol{p}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ . La matriz  $A(\boldsymbol{q})$  puede ser obtenida a través de:

$$A(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}.$$

## 3.4 Modelado cinemático de mecanismos robóticos

En esta sección se presentan los pasos para obtener el MCDP y el MCDV de diferentes tipos de mecanismos robóticos. En particular, se consideran:

- Robots con cadena cinemática abierta.
- Robots con cadena cinemática arborescente.
- Robots con cadena cinemática cerrada.
- Robots móviles con ruedas.

### 3.4.1 Robot con cadena cinemática abierta (seriales)

El método propuesto originalmente por Denavit y Hartenberg así como su diferente variantes se aplican directamente a robots con cadena cinemática abierta para obtener su MCDP empleando matrices de transformación homogénea.

A continuación se resume el método:

1. Seleccionar la convención de parámetros de Denavit y Hartenberg a utilizar.
2. Asignar un marco de referencia  $\Sigma_i(X_i, Y_i, Z_i)$  a cada eslabón  $i$  conforme a las reglas de la convención original o modificada seleccionada.
3. Determinar los cuatro parámetros D-H ( $d_i, \theta_i, a_i$  y  $\alpha_i$ ) que especifican la posición de cada marco respecto al precedente de acuerdo a la convención seleccionada.
4. Sustituir en las expresiones correspondientes a la convención seleccionada los parámetros D-H con tal de obtener las matrices de transformación  ${}^{i-1}T_i \in \text{SE}(3)$ .
5. Obtener la matriz del marco asociado al órgano terminal  $\Sigma_e$  con respecto al marco de la base  $\Sigma_0$  es decir,  ${}^0T_e$ . Si la convención D-H utilizada es de la familia  $O$ , entonces  $\Sigma_e$  coincide con  $\Sigma_n$  y

$${}^0T_e = {}^0T_1 {}^1T_2 \cdots {}^{n-1}T_n,$$

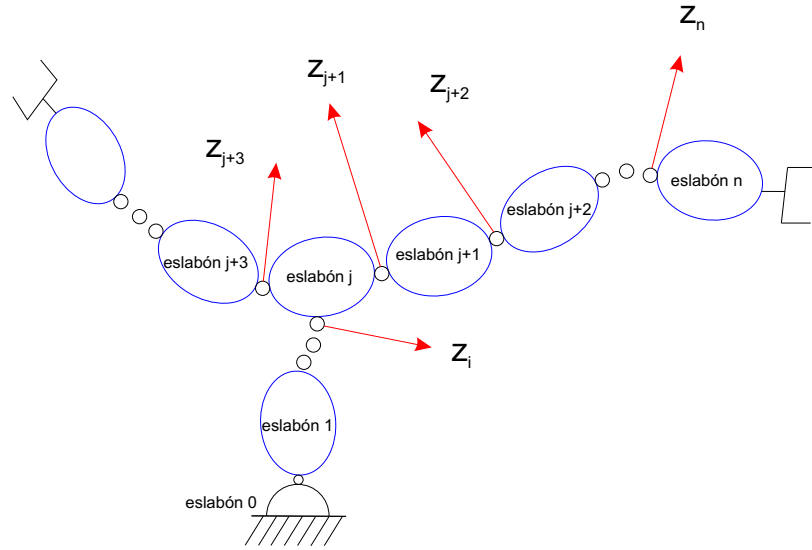


Figura 3.9: Notación para un robot con estructura de árbol.

mientras que si la convención empleada es de la familia  $M$ , entonces  $\Sigma_e = \Sigma_{n+1}$  y

$${}^0T_e = {}^0T_1 {}^1T_2 \cdots {}^{n-1}T_n {}^nT_{n+1},$$

donde  $n$  es el número de articulaciones del robot.

6. El MCDV se puede obtener usando (3.25) y considerando los elementos de  ${}^0T_e$ .

### 3.4.2 Robots con cadena cinemática arborescente

Un robot con estructura arborescente está compuesto de  $n$  gdl,  $n + 1$  eslabones y  $n$  articulaciones. El eslabón 0 es la base y el eslabón  $n$  es un eslabón final. Los eslabones son enumerados consecutivamente de la base a los eslabones terminales (ver figura 3.9). La articulación  $j$  conecta el eslabón  $j$  al eslabón  $a(j)$ , donde  $a(j)$  denota el eslabón anterior al eslabón  $j$ . Un marco  $\Sigma_i$  es asignado a cada eslabón  $i$  tal que:

- $Z_i$  está a lo largo del eje de la articulación  $i$ ;
- $X_i$  está a lo largo de la normal común entre  $Z_i$  y uno de los ejes de la articulación siguiente.

Dos casos son considerados para el cálculo de la matriz de transformación  ${}^i T_j$ , la cual define la postura del marco  $\Sigma_j$  respecto al marco  $\Sigma_i$ :

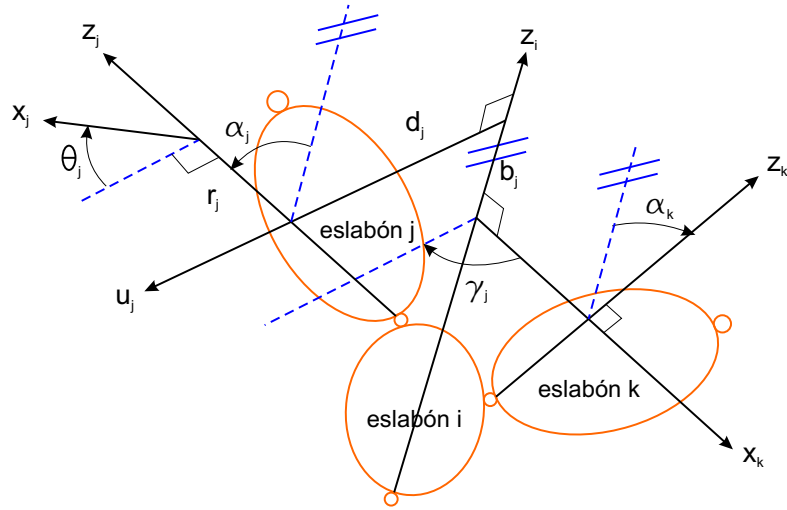


Figura 3.10: Parámetros Denavit-Hartenberg para un eslabón con más de dos articulaciones.

- Si  $X_i$  está a lo largo de la normal común entre  $Z_i$  y  $Z_j$ , entonces  ${}^i T_j$  es igual a la matriz de transformación entre dos marcos consecutivos de una estructura serial. En este caso el marco es definido como una función de cuatro parámetros ( $\alpha_j, d_j, \theta_j, a_j$ ) y  ${}^i T_j$  está dada por:

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} & 0 & a_j \\ C_{\alpha_j} S_{\theta_i} & C_{\alpha_j} C_{\theta_i} & -S_{\alpha_j} & -d_i S_{\alpha_j} \\ S_{\alpha_j} S_{\theta_i} & S_{\alpha_j} C_{\theta_i} & C_{\alpha_j} & d_i C_{\alpha_j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si  $X_i$  no se encuentra a lo largo de la normal común entre  $Z_i$  y  $Z_j$ , entonces la matriz  ${}^i T_j$  debe ser definida usando seis parámetros geométricos. Este caso es ilustrado en la figura 3.10, donde  $X_i$  no se encuentra a lo largo de la normal común entre  $Z_j$  y  $Z_k$ . Para obtener los seis parámetros que definen el marco  $\Sigma_j$  respecto a  $\Sigma_i$ , defínase  $\mathbf{u}_j$  como la normal común entre  $Z_i$  y  $Z_j$ . La transformación del marco  $\Sigma_i$  al marco  $\Sigma_j$  puede ser obtenida como una función de los seis parámetros geométricos ( $\gamma_j, b_j, \alpha_j, d_j, \theta_j, a_j$ ), donde:

- $\gamma_i$  es el ángulo entre  $X_i$  y  $\mathbf{u}_j$ , con respecto a  $Z_i$ ;
- $b_i$  es la distancia entre  $X_i$  y  $\mathbf{u}_j$ , a lo largo de  $Z_i$ ;

Los parámetros  $\gamma_j$  y  $b_j$  permiten definir  $\mathbf{u}_j$  con respecto a  $X_i$ , mientras que los parámetros clásicos ( $\alpha_j, d_j, \theta_j, r_j$ ) permiten definir el marco  $\Sigma_j$  con respecto al marco intermedio cuyo eje  $X$  está a lo largo de  $\mathbf{u}_j$  y el eje  $Z$  a lo largo de  $Z_j$ .

La matriz de transformación  ${}^i T_j$  se obtiene como:

$${}^i T_j = T_{Z_j}(b_j, \gamma_j) T_{X_j}(a_j, \alpha_j) T_{Z_j}(d_j, \theta_j)$$

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} C_{\gamma_j} C_{\theta_j} - S_{\gamma_j} C_{\alpha_j} S_{\theta_j} & -C_{\gamma_j} S_{\theta_j} - S_{\gamma_j} C_{\alpha_j} C_{\theta_j} & S_{\gamma_j} C_{\alpha_j} & d_j C_{\gamma_j} + r_j S_{\gamma_j} S_{\alpha_j} \\ S_{\gamma_j} C_{\theta_j} + C_{\gamma_j} C_{\alpha_j} S_{\theta_j} & -S_{\gamma_j} S_{\theta_j} + C_{\gamma_j} C_{\alpha_j} C_{\theta_j} & -C_{\gamma_j} S_{\alpha_j} & d_j S_{\gamma_j} + r_j C_{\gamma_j} S_{\alpha_j} \\ S_{\alpha_j} C_{\theta_j} & S_{\alpha_j} C_{\theta_j} & -C_{\alpha_j} & r_j C_{\alpha_j} + b_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que si  $X_i$  está a lo largo de la normal común entre  $Z_i$  y  $Z_j$ ,  $\gamma_j$  y  $b_j$  son cero.

Nótese que una estructura serial es un caso especial de una estructura arborescente donde  $a(j) = j - 1$ ,  $\gamma_j = 0$ ,  $b_j = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .

### 3.4.3 Robots con cadena cinemática cerrada

El sistema está compuesto de  $L$  articulaciones y  $n + 1$  eslabones, donde el eslabón 0 es la base fija y  $L > n$ . El número de lazos cerrados independientes es igual a  $B = L - n$ .

Las articulaciones pueden ser activas (actuadas) o pasivas y la postura de todos los eslabones puede ser determinada como una función de las variables articulares activas. Para obtener el MCDP de un robot con cadena cinemática cerrada se deben seguir los siguientes pasos:

1. Construir una estructura equivalente de árbol con  $n$  articulaciones, cortando virtualmente cada cadena cerrada en una de sus articulaciones pasivas. Los parámetros geométricos son determinados por los correspondientes a la cadena arborescente equivalente.
2. Numerar las articulaciones cortadas como  $k = n + 1, \dots, L$ .
3. Definir los marcos  $\Sigma_k$  y  $\Sigma_{k+B}$  para cada articulación cortada  $k$ , la cual une a los eslabones  $i$  y  $j$ ; estos marcos se definen como sigue (ver figura 3.11):
  - Para el marco  $\Sigma_k$ ,  $a(k) = i$ . El eje  $z_k$  está a lo largo del eje de la articulación  $k$  y  $x_k$  está a lo largo de la normal común entre  $z_k$  y  $z_j$ . La matriz  ${}^i T_k$  está determinada por los seis (o cuatro) parámetros  $(\gamma_k, b_k, \alpha_k, d_k, \theta_k, r_k)$ .
  - Para el marco  $\Sigma_{k+B}$ ,  $a(k+B) = j$ . Este marco está siempre alineado con el marco  $\Sigma_k$ , pero está fijo al eslabón  $j$ , así que la matriz  ${}^j T_{k+B}$  es constante y puede obtenerse a partir de los parámetros  $(\alpha_k, d_k, \theta_k, r_k)$ .

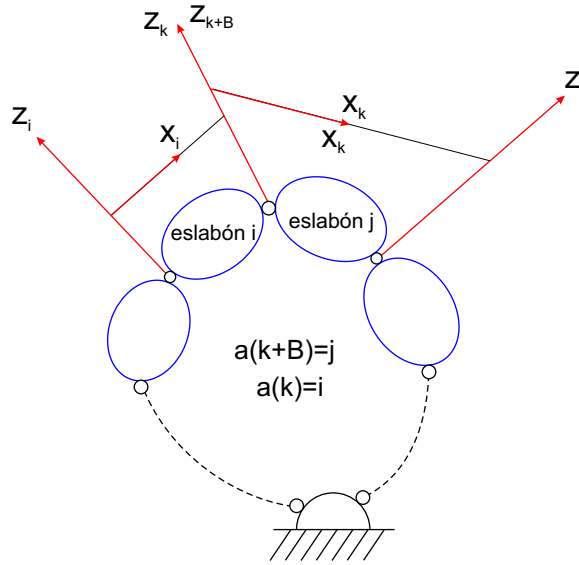


Figura 3.11: Marcos asociados a la articulación  $k$ .

4. Obténganse las ecuaciones de restricción. A partir de éstas obtener las articulaciones pasivas en función de las activas. Ya que  $\Sigma_k$  y  $\Sigma_{k+B}$  coinciden, las ecuaciones geométricas de restricción de cada lazo pueden ser escritas como:

$${}^{k+B}T_j \dots {}^i T_k = I_{[4,4]} \quad (3.43)$$

5. Una vez obtenidas las variables articulares pasivas como funciones de las variables articulares activas (ya sea en forma analítica o empleando métodos numéricos), el modelo cinemático directo de postura del robot, representado aquí por  ${}^0T_e$ , está dado por el producto de las matrices de transformación correspondientes a los eslabones encontrados a lo largo de la cadena cinemática que conecta el eslabón terminal con la base.
6. Finalmente, para obtener el MCDV se puede emplear (3.25) tomando la derivada temporal de los eslabones de  ${}^0T_e$ .

### 3.4.4 Robots móviles con ruedas tipo diferencial

Un robot móvil con ruedas (RMR) es un robot capaz de moverse sobre una superficie, únicamente a través de la actuación de ensamblaje de ruedas montados en el robot y en contacto con la superficie. Un ensamblaje de ruedas es un dispositivo que provee o permite movimiento relativo entre su base y una superficie en la cual se pretende tener

un simple punto de contacto rodante. Cada rueda y todos los eslabones entre el cuerpo del robot y la rueda constituyen un ensamblaje de ruedas (Muir & Neuman, 1987).

Para simplificar el problema de modelado, se supone respecto al diseño del RMR que:

- El RMR no contiene partes flexibles.
- Hay cero ó un eslabón direccionable por rueda.
- Todas los ejes direccionales son perpendiculares a la superficie.

mientras que en cuanto a su operación, se supone que:

- El RMR se mueve en una superficie plana.
- La fricción traslacional en el punto de contacto entre la rueda y la superficie es lo suficientemente grande que no puede ocurrir deslizamiento traslacional.
- La fricción rotacional en el punto de contacto entre la rueda y la superficie es lo suficientemente pequeña que puede ocurrir deslizamiento rotacional.

A continuación se enumeran los pasos para obtener el MCDP y el MCDV de un RMR:

1. Asignar a cada parte del robot, de acuerdo con la convención de Sheth-Uicker, un marco solidario tal como se explica enseguida (ver figura 3.12):

$F$	Marco inercial con el eje $Z$ ortogonal a la superficie de movimiento.
$R$	Marco solidario al RMR, con el eje $Z$ ortogonal a la superficie de movimiento.
$H_i$	Marco solidario al RMR, con el eje $Z$ coincidente con el eje de la articulación direccionable $i$ ; si no existe, es coincidente con el marco $C_i$ .
$S_i$	Marco que se mueve con el eslabón direccionable $i$ , con el eje $Z$ coincidente con el eje $Z$ de $H_i$ , y el origen coincidente con el origen de $H_i$ .
$C_i$	Marco solidario al eslabón direccionable $i$ , con origen en el punto de contacto entre la rueda y la superficie; el eje $Y$ es paralelo a la rueda y el plano $X - Y$ es tangente a la superficie.
$\bar{R}$	Marco coincidente con el marco $R$ y estacionario con respecto al marco $F$ .
$\bar{C}_i$	Marco coincidente con el marco $C_i$ y estacionario con respecto al marco $F$ .

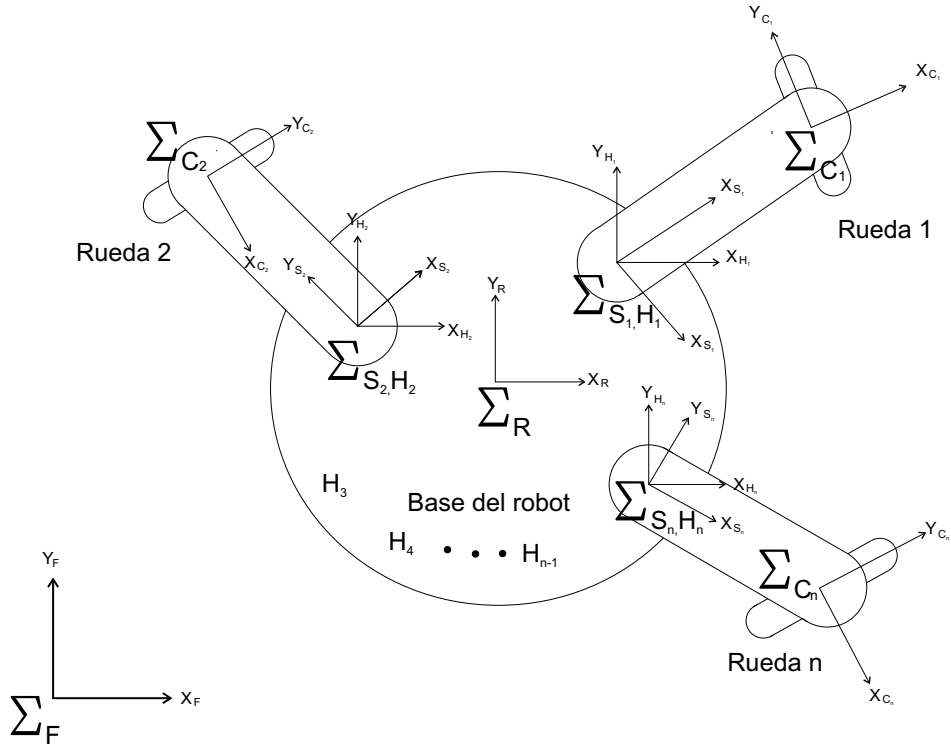


Figura 3.12: Marcos asignados a los cuerpos rígidos de un RMR, de acuerdo a la convención de Sheth-Uicker.

2. Calcular las matrices de transformación homogénea asociadas a cada marco, las cuales de acuerdo con la convención de Sheth-Uicker, para un RMR tienen la forma:

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} R_Z({}^A \theta_B) & {}^A \mathbf{p}_B \\ \mathbf{0}_{[1 \times 3]} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

donde:

- ${}^A \theta_B$  es el ángulo entre el eje  $X$  del marco  $A$  y el eje  $X$  del marco  $B$ , con respecto al eje  $Z$  del marco  $A$ .
  - ${}^A \mathbf{p}_B$  es el vector de posición entre el origen del marco  $A$  y el origen del marco  $B$ .
3. Aplicar la propiedad de composición de matrices de transformación homogénea para obtener  ${}^F T_R$ . Nótese que debido a que un RMR contiene cadenas cinemáticas cerradas, es posible obtener  ${}^F T_R$  a partir del producto de diferentes matrices. Si

se considera la rueda  $i$ , la matriz de transformación  ${}^F T_R$  queda:

$${}^F T_R = {}^F T_{\bar{C}_i}({}^F \theta_{\bar{C}_i}, {}^F \mathbf{p}_{F\bar{C}_i}) \bar{C}_i T_{C_i}(\bar{C}_i \theta_{C_i}, \bar{C}_i \mathbf{p}_{\bar{C}_i C_i}) {}^{C_i} T_{S_i}({}^{C_i} \theta_{S_i}, {}^{C_i} \mathbf{p}_{C_i S_i}) {}^{S_i} T_{H_i}({}^{S_i} \theta_{H_i}, {}^{S_i} \mathbf{p}_{S_i H_i}) {}^{H_i} T_R({}^{H_i} \theta_R, {}^{H_i} \mathbf{p}_{H_i R}) \quad (3.45)$$

De acuerdo a la metodología para asignar marcos, algunos de los marcos coinciden en cuanto orientación y/o posición, de manera que  $\bar{C}_i \theta_{C_i} = {}^{H_i} \theta_R = 0$ , mientras que  $\bar{C}_i \mathbf{p}_{\bar{C}_i C_i} = {}^{S_i} \mathbf{p}_{S_i H_i} = 0$ , así que (3.45) queda  ${}^F T_R$ :

$${}^F T_{\bar{C}_i}({}^F \theta_{\bar{C}_i}, {}^F \mathbf{p}_{F\bar{C}_i}) \bar{C}_i T_{C_i}(0, \mathbf{0}) {}^{C_i} T_{S_i}({}^{C_i} \theta_{S_i}, {}^{C_i} \mathbf{p}_{C_i S_i}) {}^{S_i} T_{H_i}({}^{S_i} \theta_{H_i}, \mathbf{0}) {}^{H_i} T_R(0, {}^{H_i} \mathbf{p}_{H_i R}) \quad (3.46)$$

Ya que entre marcos adyacentes sólo hay giros sobre el eje  $Z$ , entonces  ${}^F T_R$  es:

$${}^F T_R = \begin{bmatrix} \cos({}^F \theta_{\bar{C}_i} + {}^{C_i} \theta_{S_i} + {}^{S_i} \theta_{H_i}) & -\sin({}^F \theta_{\bar{C}_i} + {}^{C_i} \theta_{S_i} + {}^{S_i} \theta_{H_i}) & 0 & {}^F p_{FRx} \\ \sin({}^F \theta_{\bar{C}_i} + {}^{C_i} \theta_{S_i} + {}^{S_i} \theta_{H_i}) & \cos({}^F \theta_{\bar{C}_i} + {}^{C_i} \theta_{S_i} + {}^{S_i} \theta_{H_i}) & 0 & {}^F p_{FRy} \\ 0 & 0 & 1 & {}^F p_{FRz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  ${}^F p_{FR} = [ {}^F p_{FRx} \quad {}^F p_{FRy} \quad {}^F p_{FRz} ]^T \in \mathbb{R}^3$  y

$$\begin{aligned} {}^F p_{FC_ix} &= {}^F p_{FRx} + \cos({}^F \theta_C) {}^{C_i} p_{C_i S_ix} - \sin({}^F \theta_C) {}^{C_i} p_{C_i S_iy} + \cos({}^F \theta_R + {}^{C_i} \theta_{S_i} + {}^{S_i} \theta_{H_i}) {}^{H_i} p_{H_i R_x} - \sin({}^F \theta_R + {}^{C_i} \theta_{S_i} + {}^{S_i} \theta_{H_i}) {}^{H_i} p_{H_i R_y} \\ {}^F p_{FC_iy} &= {}^F p_{FRy} + \sin({}^F \theta_C) {}^{C_i} p_{C_i S_ix} - \cos({}^F \theta_C) {}^{C_i} p_{C_i S_iy} + \sin({}^F \theta_R + {}^{C_i} \theta_{S_i} + {}^{S_i} \theta_{H_i}) {}^{H_i} p_{H_i R_x} - \cos({}^F \theta_R + {}^{C_i} \theta_{S_i} + {}^{S_i} \theta_{H_i}) {}^{H_i} p_{H_i R_y} \\ {}^F p_{FC_iz} &= {}^F p_{FRz} + {}^R p_{RH_iz} + {}^{S_i} p_{S_i C_iz} \end{aligned}$$

4. Finalmente, para obtener el MCDV se puede emplear (3.25) tomando la derivada temporal de  ${}^F T_R$ . Nótese que en el caso de robots móviles, existen restricciones no holonómicas, así que es necesario obtener  $\dot{\boldsymbol{\rho}} = A(\boldsymbol{\rho})\dot{\mathbf{q}}$  y posteriormente sustituir en las expresiones de velocidad lineal y angular obtenidas, las cuales son funciones de  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ .

### 3.5 Modelado cinemático de mecanismos simples

En esta sección se presenta el modelo cinemático de un robot serial y un mecanismo de cinco barras, empleando la metodología de la sección precedente.



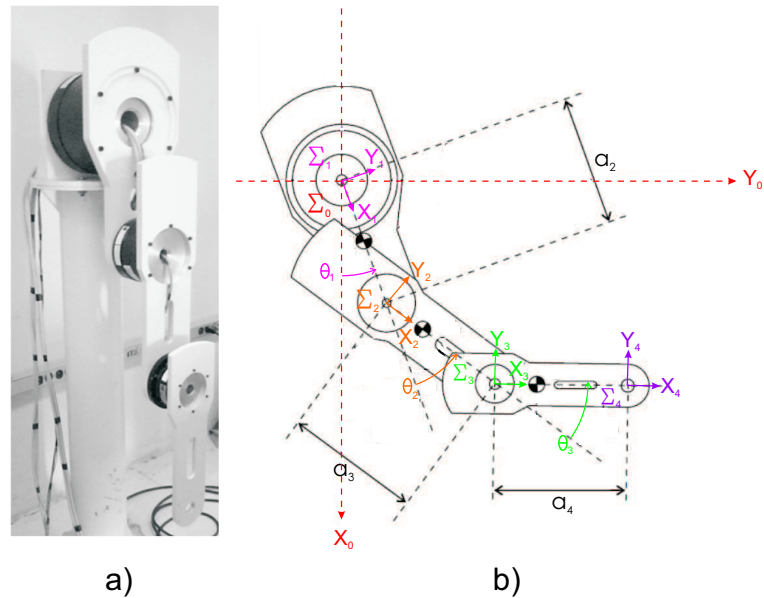


Figura 3.13: Robot serial de 3gdl: (a) fotografía del robot, (b) marcos asociados a los eslabones del robot. (Soto, 2009)

### 3.5.1 Robot serial planar de 3 g.d.l.

Sea el robot serial de 3gdl mostrado en la figura 3.13a. Empleando la convención de parámetros D-H *M1*, a continuación se obtienen el MCDP y el MCDV de este mecanismo.

#### Modelo cinemático directo de postura

Siguiendo los pasos mencionados anteriormente, primero se procede a asignar los marcos  $\Sigma_i$  asociados a cada eslabón de acuerdo a la convención seleccionada, en este caso la convención *M1*. Véase figura 3.13b.

Ahora, se procede a definir los parámetros D-H dados por la convención *M1*, correspondientes a este robot, para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Ver tabla 3.2.

De (3.39) y los parámetros mostrados en la tabla 3.2, se tiene que las matrices de transformación que dan la postura del marco  $\Sigma_i(X_i, Y_i, Z_i)$  respecto al marco

Tabla 3.2: Parámetros Denavit-Hartenberg del robot R3.

$i$	$\theta_i$	$\mathbf{a}_i$	$\alpha_i$	$\mathbf{d}_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	$\theta_2$	$a_2$	0	0
3	$\theta_3$	$a_3$	0	0
4	0	$a_4$	0	0

$\Sigma_{i-1}(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  están dadas por:

$$\begin{aligned}
 {}^0T_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1T_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^4T_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

donde  $s_i = \sin(q_i)$  y  $c_i = \cos(q_i)$ .

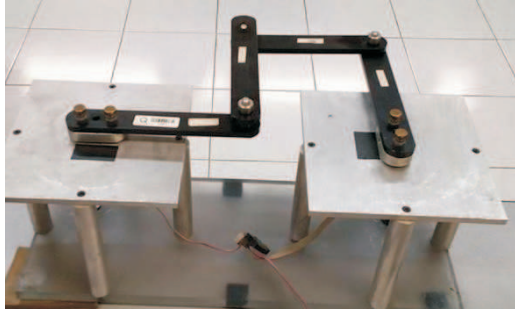
Finalmente, a partir de la ecuación (3.38) y las matrices dadas en (3.47), se tiene que la cinemática de postura  ${}^0T_e$  de este robot está dada por la matriz:

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

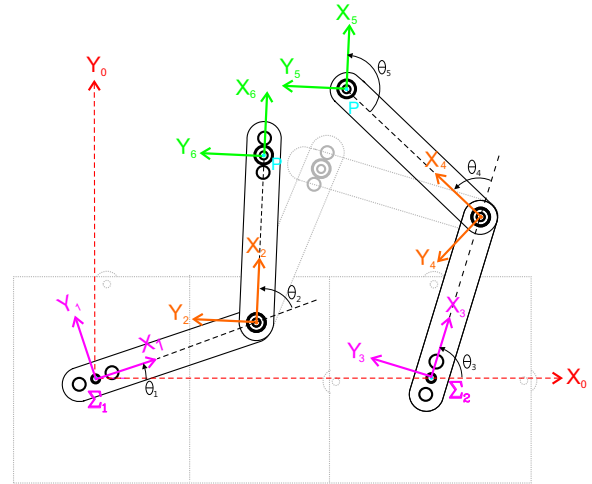
donde  $s_{12} = \sin(q_1+q_2)$ ,  $c_{12} = \cos(q_1+q_2)$ ,  $s_{123} = \sin(q_1+q_2+q_3)$  y  $c_{123} = \cos(q_1+q_2+q_3)$ .

### Modelo cinemático directo de velocidad

El modelo directo de velocidad del robot está dada por  ${}^0T_3$  y (3.25) como:



a)



b)

Figura 3.14: Mecanismo de cinco barras: (a) fotografía del mecanismo, (b) marcos asociados a los eslabones del mecanismo.

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = T_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -a_2s_1 - a_3s_{12} - a_4s_{123} & -a_3s_{12} - a_4s_{123} & -a_4s_{123} \\ a_2c_1 + a_3c_{12} + a_4c_{123} & a_3c_{12} - a_4c_{123} & a_4c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.49)$$

### 3.5.2 Mecanismo de cinco barras

Sea el mecanismo de cinco barras mostrado en la figura 3.14a. A continuación se obtienen el MCDP y el MCDV de este mecanismo.

#### Modelo cinemático directo de postura

Para este mecanismo  $L = 5$ ,  $n = 4$  y  $B = L - n = 1$  y las dos articulaciones actuadas son la no. 1 y la no. 3 (ver figura 3.14b). Siguiendo los pasos mencionados anteriormente, primero se obtiene la estructura de árbol correspondiente al mecanismo, haciendo un corte de la cadena cinemática en la articulación 5. Enseguida se asignan los marcos  $\Sigma_i$  asociados a cada eslabón (ver figura 3.14b).

Ahora se procede a definir los parámetros D-H dados por la convención *M1*, corres-

Tabla 3.3: Parámetros Denavit-Hartenberg del mecanismo de cinco barras

$\mathbf{a}(i)$	$\mathbf{i}$	$\theta_i$	$\mathbf{a}_i$	$\alpha_i$	$\mathbf{d}_i$
0	1	$\theta_1$	0	0	0
1	2	$\theta_2$	$a_2$	0	0
0	3	$\theta_3$	$a_3$	0	0
3	4	$\theta_4$	$a_4$	0	0
4	5	$\theta_5$	$a_5$	0	0
2	6	0	$a_6$	0	0

pendientes a este robot para  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , véase tabla 3.3. Nótese que  $b_i = 0$  y  $\gamma_i = 0$  para todo  $i$ , dado que en este mecanismo  $x_i$  siempre se encuentra a lo largo de la normal común entre  $z_i$  y  $z_j$ .

De (3.39) y los parámetros mostrados en la tabla 3.3, se tiene que las matrices de transformación que dan la postura del marco  $\Sigma_i(X_i, Y_i, Z_i)$  con respecto al marco  $\Sigma_{i-1}(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  son:

$$\begin{aligned}
 {}^0T_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^1T_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^0T_3 &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & a_5 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^2T_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

donde  $s_i = \sin(q_i)$  y  $c_i = \cos(q_i)$ .

Por otro lado, a partir de la ecuación (3.38) y las matrices dadas en (5.1), se tiene que la postura del marco  $\Sigma_5$  y  $\Sigma_6$ , está dada por  ${}^0T_e = {}^0T_6 = {}^0T_5$ :

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1c_1 + a_6 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

donde  $s_1 = \sin(\theta_1)$ ,  $c_1 = \cos(\theta_1)$ ,  $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$  y  $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ .

Finalmente, para obtener la variable articular pasiva  $\theta_2$ , en función de las variables

articulares activas  $\theta_1$  y  $\theta_3$ , de (3.43) se tiene que

$${}^0T_6 {}^5T_0 = I$$

de donde es posible despejar  $\theta_2$  y  $\theta_4$ . Otra manera de calcular  $\theta_2$  y  $\theta_4$ , es a partir de las relaciones geométricas del vector de posición del punto  $P$ , dadas por:

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} a_2 \cos(\theta_1) + a_6 \cos(\theta_1 + \theta_2) - a_4 \cos(\theta_3) - a_5 \cos(\theta_3 + \theta_4) - a_3 \\ a_2 \text{sen}(\theta_1) + a_6 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) - a_4 \text{sen}(\theta_3) - a_5 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

en donde a través de Matlab R2010a es posible despejar  $\theta_2$  y  $\theta_4$ .

### Modelo cinemático directo de velocidad

El modelo cinemático directo de velocidad del robot está dada por  ${}^0T_e = {}^0T_6$  y (3.25) como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = T_A \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -a_2 \text{sen}(\theta_1) - a_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)(1 + r_{11}) & -a_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)r_{12} \\ -a_2 \cos(\theta_1) - a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2)(1 + r_{11}) & a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2)r_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 + r_{11} & r_{12} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.52)$$

donde  $r_{11} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_3 - \theta_4)}{\sin(\theta_1 - \theta_3 + \theta_2 - \theta_4)} - 1$  y  $r_{12} = -\frac{\sin(\theta_4)}{\sin(\theta_1 - \theta_3 + \theta_2 - \theta_4)}$ .

### 3.5.3 Robot móvil con ruedas

Sea el robot móvil con ruedas mostrado en la figura 3.15. A continuación se obtienen el MCDP y el MCDV de este mecanismo.

#### Modelo cinemático directo de postura

Para este mecanismo, debido a que las ruedas no son direccionables, los marcos  $\Sigma_{H_i}$ ,  $\Sigma_{S_i}$ ,  $\Sigma_{C_i}$  y  $\Sigma_{\bar{C}_i}$  coinciden, de manera que todos los parámetros  ${}^A\theta_B$  y  ${}^A\mathbf{p}_B$  son 0, excepto  ${}^F\theta_{\bar{C}_i}$ ,  ${}^F\mathbf{p}_{F\bar{C}_i}$  y  ${}^{H_i}\mathbf{p}_{H_i\bar{R}_i}$ .

De (3.44) y los parámetros  ${}^A\theta_B$  y  ${}^A\mathbf{p}_B$  para este robot, se tiene que las matrices de transformación que dan la postura del marco  $\Sigma_B(X_B, Y_B, Z_B)$  con respecto al marco  $\Sigma_A(X_A, Y_A, Z_A)$  son:

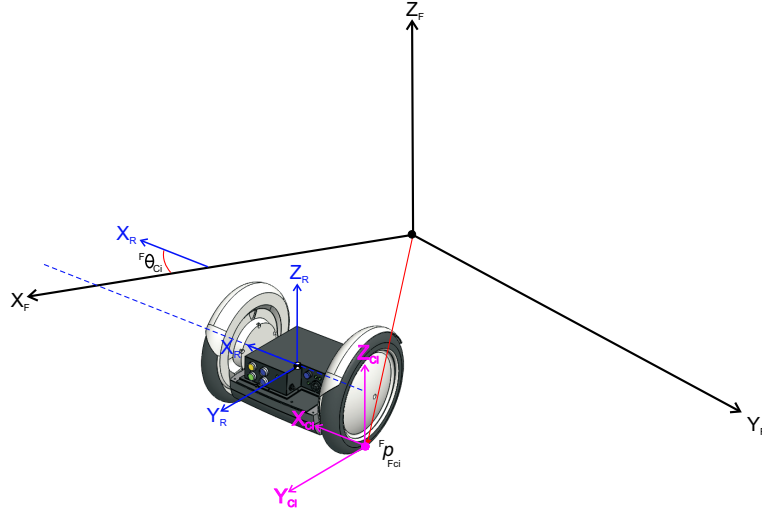


Figura 3.15: Robot móvil con ruedas: marcos asociados a los cuerpos del mecanismo.

$$\bar{C}_i T_{C_i} = C_i T_{S_i} = S_i T_{H_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$H_i T_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & {}^H p_{H_i R x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

$${}^F T_{\bar{C}_i} = \begin{bmatrix} c({}^F \theta_{\bar{C}_i}) & -s({}^F \theta_{\bar{C}_i}) & 0 & {}^F p_{F_i \bar{C}_i x} \\ s({}^F \theta_{\bar{C}_i}) & c({}^F \theta_{\bar{C}_i}) & 0 & {}^F p_{F_i \bar{C}_i y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

donde  $s({}^F \theta_{\bar{C}_i}) = \sin({}^F \theta_{\bar{C}_i})$  y  $c({}^F \theta_{\bar{C}_i}) = \cos({}^F \theta_{\bar{C}_i})$ .

Por otro lado, a partir de la ecuación (3.45) y las matrices dadas en (3.53)-(3.55), se tiene que:

$${}^F T_R = \begin{bmatrix} c({}^F \theta_{\bar{C}_i}) & -s({}^F \theta_{\bar{C}_i}) & 0 & {}^F p_{F_i \bar{C}_i x} + {}^H p_{H_i R x} c({}^F \theta_{\bar{C}_i}) \\ s({}^F \theta_{\bar{C}_i}) & c({}^F \theta_{\bar{C}_i}) & 0 & {}^F p_{F_i \bar{C}_i y} + {}^H p_{H_i R x} s({}^F \theta_{\bar{C}_i}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

### Modelo cinemático directo de velocidad

El modelo cinemático directo de velocidad del robot está dada por  ${}^F T_R$  y (3.25) como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = T_A \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & s({}^F \theta_{\bar{C}_i}) \\ 0 & c({}^F \theta_{\bar{C}_i}) \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.57)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\theta} \quad \dot{x}_m]^T$ , con  $\dot{x}_m$  en dirección del eje  $Y_R$ .

# Capítulo 4

## Dinámica

En esta sección, primeramente se presentan conceptos básicos para modelado dinámico de cuerpos rígidos. Enseguida se presentan las leyes de Newton y las leyes de Euler, así como los principios variacionales sobre los cuales las formulaciones de modelado dinámico se fundamentan. En seguida se explican las formulaciones de Newton-Euler, Euler-Lagrange, Hamilton y Kane. Al término de la sección se mencionan de forma breve otras formulaciones de la dinámica. La mayor parte del texto de este capítulo fue extraído de: (McGill et al., 1991a; Lanczos, 2012; Ghorbel et al., 2000; Duindam et al., 2009; Kane & Levinson, 2012)

### 4.1 Conceptos básicos

#### 4.1.1 Centro de masa

El *centro de masa* (c.d.m) de un cuerpo es un punto en el que se puede considerar concentrada toda la masa del cuerpo. Si se aplica una fuerza al c.d.m., entonces el cuerpo únicamente se traslada (sin rotar).

Considérese un cuerpo formado por  $N$  partículas (ver figura 4.1(a)), el vector de posición  $\mathbf{p}_c$  del c.d.m. con respecto al origen  $O$  de un marco inercial  $\Sigma_o$ , es:

$$\mathbf{p}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_i,$$

donde  $m$  es la masa total del cuerpo, es decir:

$$m = \sum_{i=1}^N m_i$$



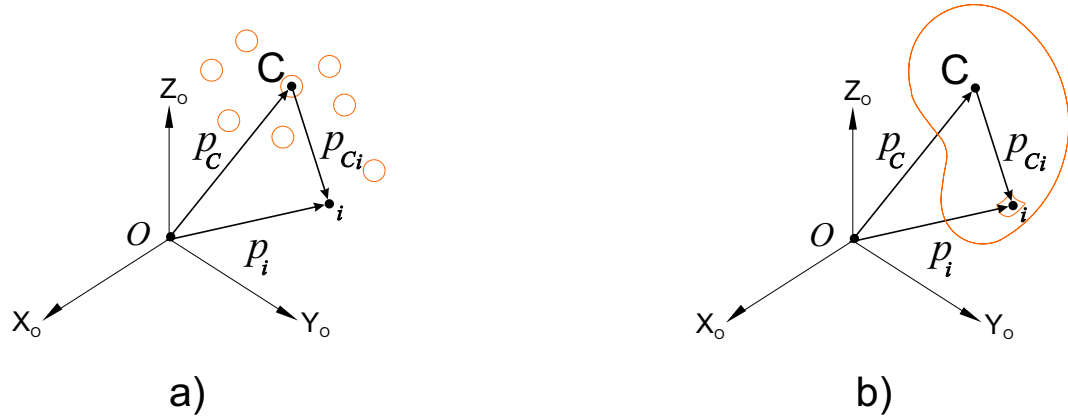


Figura 4.1: Diagrama de vectores: (a) para un cuerpo compuesto de  $N$  partículas, (b) para un cuerpo con distribución de masa continua.

En el caso de un cuerpo cuya masa está distribuida de forma continua (ver figura 4.1(b)), la masa del cuerpo está dada por:

$$m = \int dm,$$

así que la ubicación del c.d.m. es:

$$\mathbf{p}_c = \frac{\int \mathbf{p}_i dm}{m}$$

donde  $\mathbf{p}_i$  es el vector de posición del elemento diferencial de masa  $dm$ .

### 4.1.2 Cantidad de movimiento lineal

Considérese el caso de un cuerpo compuesto por  $N$  partículas. La *cantidad de movimiento lineal* o *momentum lineal*  $\mathbf{m}_i$  de una partícula  $i$  respecto a un punto  $O$  fijo en un marco inercial  $\Sigma_0$ , se define como:

$$\mathbf{m}_i = \frac{d}{dt} m_i \mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{p}}_i = m_i \mathbf{v}_i \quad (4.1)$$

donde  $m_i$  y  $\mathbf{v}_i$  son la masa y la velocidad lineal de la partícula  $i$ , y  $\mathbf{p}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$ , respecto al marco  $\Sigma_0$  (ver figura 4.1 a)). Mientras que el momentum lineal total del cuerpo con respecto al punto  $O$ , es:

$$\mathbf{m} = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_i \right\} = \frac{d}{dt} \{ m \mathbf{p}_c \} = m \mathbf{v}_c. \quad (4.2)$$

En el caso de un cuerpo cuya masa está distribuida de forma continua (ver figura 4.1(b)), el momento lineal del cuerpo está dado por:

$$\mathbf{m} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{p}_i dm = \frac{d}{dt} \{m\mathbf{p}_c\}. \quad (4.3)$$

### 4.1.3 Cantidad de movimiento angular

Considérese un cuerpo rígido formado por  $N$  partículas (ver figura 4.1(a)). La *cantidad de movimiento angular* o *momentum angular* de la  $i$ -ésima partícula con respecto al origen  $O$  del marco de referencia  $\Sigma_o$  es:

$$\mathbf{l}_i = S(\mathbf{p}_i)\mathbf{m}_i,$$

donde  $S(\cdot)$  se definió en (2.9). O usando (4.1), el momento angular puede reescribirse como:

$$\mathbf{l}_i = S(\mathbf{p}_i) \frac{d}{dt} \{m_i \mathbf{p}_i\} = m_i S(\mathbf{p}_i) \mathbf{v}_i$$

y el momento angular total del cuerpo rígido es

$$\mathbf{l}_o = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^N m_i S(\mathbf{p}_i) \mathbf{v}_i \quad (4.4)$$

Ahora bien si se considera el c.d.m. del cuerpo, localizado en el punto  $C$  (ver figura 4.1), entonces queda

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_c + \mathbf{p}_{ci} \quad (4.5)$$

donde  $\mathbf{p}_c$  es el vector de posición del c.d.m. respecto al marco de referencia y  $\mathbf{p}_{ci}$  es el vector que va del c.d.m. a la  $i$ -ésima partícula.

Derivando (4.5) con respecto al tiempo se tiene que

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{ci} = \mathbf{v}_c + S(\boldsymbol{\omega}_c)\mathbf{p}_{ci} \quad (4.6)$$

donde  $\boldsymbol{\omega}_c$  es la velocidad angular del cuerpo rígido.

Sustituyendo (4.5) y (4.6) en (4.4)

$$\mathbf{l}_o = \sum_{i=1}^N m_i S(\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_{ci})(\mathbf{v}_c + S(\boldsymbol{\omega}_c)\mathbf{p}_{ci}) \quad (4.7)$$

Desarrollando (4.7)

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}_o &= \sum_{i=1}^N m_i [S(\mathbf{p}_c)\mathbf{v}_c + S(\mathbf{p}_c)S(\boldsymbol{\omega}_c)\mathbf{p}_{ci} + S(\mathbf{p}_{ci})\mathbf{v}_c + S(\mathbf{p}_{ci})S(\boldsymbol{\omega}_c)\mathbf{p}_{ci}] \\
&= \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) S(\mathbf{p}_c)\mathbf{v}_c + S(\mathbf{p}_c) \sum_{i=1}^N m_i S(\boldsymbol{\omega}_c)\mathbf{p}_{ci} - S(\mathbf{v}_c) \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_{ci} + \sum_{i=1}^N m_i S(\mathbf{p}_{ci})S(\boldsymbol{\omega}_c)\mathbf{p}_{ci}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

De la definición de c.d.m. :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_{ci} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_c) \\
&= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_i - \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{p}_c \\
&= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_i - m \mathbf{p}_c = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

y, de manera similar

$$\sum_{i=1}^N m_i S(\boldsymbol{\omega}_c)\mathbf{p}_{ci} = \mathbf{0}$$

de modo que (4.8) se reduce a

$$\mathbf{l}_o = m S(\mathbf{p}_c)\mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^N m_i S(\mathbf{p}_{ci})S(\boldsymbol{\omega}_c)\mathbf{p}_{ci}$$

o de la definición de moméntum lineal  $\mathbf{m}_c$ :

$$\mathbf{l}_o = \underbrace{S(\mathbf{p}_c)\mathbf{m}_c}_{\mathbf{l}_{oc}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N S(\mathbf{p}_{ci})\mathbf{m}_{ci}}_{\mathbf{l}_c} \tag{4.9}$$

De las propiedades del operador  $S(\cdot)$ , se tiene que:

$$\mathbf{l}_c = \sum_{i=1}^N m_i S(\mathbf{p}_{ci})S(\boldsymbol{\omega}_c)\mathbf{p}_{ci} = - \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{p}_{ci}^T \mathbf{p}_{ci} I_{[3]} - \mathbf{p}_{ci} \mathbf{p}_{ci}^T) \boldsymbol{\omega}_c = I_c \boldsymbol{\omega}_c \tag{4.10}$$

donde la matriz

$$I_c = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{p}_{c_i} \mathbf{p}_{c_i}^T - \mathbf{p}_{c_i}^T \mathbf{p}_{c_i} I_{[3]}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (4.11)$$

es el tensor de momentos de inercia del cuerpo rígido, con respecto a un marco que tiene su origen en el c.d.m. pero está orientado como  $\Sigma_0$ .

Si

$$\mathbf{p}_{c_i} = [x_{c_i} \quad y_{c_i} \quad z_{c_i}]^T$$

entonces

$$I_c = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} m_i(y_{c_i}^2 + z_{c_i}^2) & -m_i x_{c_i} y_{c_i} & -m_i x_{c_i} z_{c_i} \\ -m_i x_{c_i} y_{c_i} & m_i(x_{c_i}^2 + z_{c_i}^2) & -m_i y_{c_i} z_{c_i} \\ -m_i x_{c_i} z_{c_i} & -m_i y_{c_i} z_{c_i} & m_i(x_{c_i}^2 + y_{c_i}^2) \end{bmatrix}$$

Ahora bien, si en vez de analizar un sistema de partículas separadas por una distancia constante, se analiza un cuerpo cuya masa está distribuida de forma continua, (4.11) cambiaría a:

$$I_c = \int_m (\mathbf{p}_{c_i} \mathbf{p}_{c_i}^T - \mathbf{p}_{c_i}^T \mathbf{p}_{c_i} I_{[3]}) dm. \quad (4.12)$$

y si  $\mathbf{p}_{c_i} = [x_{c_i} \quad y_{c_i} \quad z_{c_i}]^T$ , entonces

$$I_c = \begin{bmatrix} \int (y_{c_i}^2 + z_{c_i}^2) dm & -\int x_{c_i} y_{c_i} dm & -\int x_{c_i} z_{c_i} dm \\ -\int x_{c_i} y_{c_i} dm & \int (x_{c_i}^2 + z_{c_i}^2) dm & -\int y_{c_i} z_{c_i} dm \\ -\int x_{c_i} z_{c_i} dm & -\int y_{c_i} z_{c_i} dm & \int (x_{c_i}^2 + y_{c_i}^2) dm \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Nótese que hasta ahora se ha considerado que todos los vectores están referidos al marco  $\Sigma_0$ . Es por eso que el tensor de inercias dado por (4.11) y (4.12) es calculado con respecto a un marco orientado como  $\Sigma_0$  y con origen en el centro de masa del cuerpo.

Pero recordando que

$${}^0 \mathbf{l}_c = {}^0 R_c {}^c \mathbf{l}_c \quad \text{y} \quad {}^0 \boldsymbol{\omega}_c = {}^0 R_c {}^c \boldsymbol{\omega}_c$$

se puede obtener el tensor de momentos de inercia con respecto a un marco con origen en el c.d.m, pero orientado como  $\Sigma_c$  (el marco asociado al cuerpo). Este tensor de inercias será denotado por  ${}^c I_c$  y se puede demostrar que se satisface:

$${}^c I_c = {}^c R_o {}^o I_c {}^o R_c, \quad (4.13)$$

Es importante resaltar que (4.13) establece la relación entre dos tensores de inercia que se calculan respecto a marcos cuyo origen se encuentra en el mismo punto (en este caso el c.d.m.), pero cuya orientación es diferente. En forma general, la notación  ${}^p I_q$  se usa para el tensor de inercias medido con respecto a un marco orientado como  $\Sigma_p$ , pero que tiene su origen en el punto  $q$ .

Por otro lado, la expresión (4.9) da la relación entre los momentos angulares medidos con respecto a dos puntos diferentes. Si el eje de giro del cuerpo coincide con el punto  $O$ , es posible reescribir (4.9) como:

$$\mathbf{l}_o = (I_c - mS(\mathbf{p}_c)S(\mathbf{p}_c))\boldsymbol{\omega}_c = I_o\boldsymbol{\omega}_c, \quad (4.14)$$

donde  $I_o$  es el tensor de momentos de inercia del cuerpo calculado en  $\Sigma_o$ . Finalmente, si todos los vectores se refieren al marco  $\Sigma_c$ , es posible llegar a la siguiente expresión:

$${}^c\mathbf{l}_o = {}^cI_o {}^c\boldsymbol{\omega}_c$$

donde

$${}^cI_o = {}^cI_c - mS({}^c\mathbf{p}_c)S({}^c\mathbf{p}_c)$$

es el tensor de inercias del cuerpo con respecto a un marco orientado como  $\Sigma_c$  pero cuyo origen coincide con el origen del marco  $\Sigma_o$ .

## 4.2 Las leyes de la dinámica vectorial

### 4.2.1 Las leyes de Newton

El punto de partida usual para relacionar las fuerzas externas que actúan en un cuerpo y su movimiento resultante son las leyes de Newton. Éstas fueron propuestas por el científico inglés Isaac Newton en su famoso trabajo *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, conocido en forma abreviada como *Principia*, y publicado en 1687 (ver (Newton, 2017)). Estas leyes se enuncian como sigue:

#### Primera ley de Newton

“Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare” (Todo cuerpo preservará su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él).

#### Segunda ley de Newton

“Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur” (El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella

fuerza se imprime). Enunciado que en forma matemática puede ser escrito como:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{m}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v}_c)}{dt} = m\mathbf{a}_c \quad (4.15)$$

donde  $\mathbf{f}$  es la resultante de las fuerzas aplicadas a la partícula,  $\mathbf{m}$  es el momento lineal de la partícula,  $m$  es la masa de ésta,  $\mathbf{v}_c$  es su velocidad y  $\mathbf{a}_c$  es su aceleración con respecto a un marco inercial.

### Tercera ley de Newton

“Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi” (Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: quiere decir que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto).

Es claro que la primera ley puede considerarse como un caso especial de la segunda y que debe hacerse una suposición respecto al marco de referencia, ya que un punto puede tener velocidad constante en un marco, y variable en otro. Los marcos de referencia en los que estas leyes son válidas se denominan galileanos, newtonianos o inerciales.

En Principia, Newton consideró únicamente partículas, Newton no extendió su trabajo a problemas en los que es necesario tomar en cuenta los tamaños reales de los cuerpos y la forma en que está distribuida su masa. Transcurrieron más de 50 años antes de que el matemático suizo Leonhard Euler presentara el primero de los dos principios que han venido a conocerse como leyes de Euler.

### 4.2.2 Las leyes de Euler

Las dos leyes de Euler se pueden obtener a partir de la segunda ley de Newton, tal como se explica a continuación.

#### Primera ley de Euler

La segunda ley de Newton (4.15) puede ser generalizada al caso de un cuerpo rígido compuesto por  $N$  partículas, es decir:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \mathbf{m}_i$$

o bien, empleando (4.2) y definiendo  $\mathbf{f}$  como la resultante de las fuerzas aplicadas al cuerpo como:

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}\mathbf{m} = m\dot{\mathbf{v}}_c \quad (4.16)$$

expresión que es conocida como la primera ley de Euler.

Cabe mencionar que en el caso de un cuerpo cuya masa está distribuida de forma continua (ver figura 4.1(b)), el momento lineal del cuerpo rígido con respecto al punto  $O$  es (4.3), de modo que la expresión (4.16) aplica también a este caso.

## Segunda ley de Euler

La segunda ley de Euler relaciona el par aplicado a un cuerpo rígido  $\tau$  con la velocidad angular que tal par genera.

En el caso general, la segunda ley de Euler se escribe como:

$$\boldsymbol{\mu}_c = \frac{d}{dt}\mathbf{l}_c = \frac{d}{dt}\{I_c\boldsymbol{\omega}_c\} \quad (4.17)$$

sustituyendo  $I_c = {}^oR_c {}^cI_c {}^oR_c^T$  y calculando la derivada

$$\boldsymbol{\mu}_c = \left\{ \frac{d}{dt} {}^oR_c \right\} {}^cI_c {}^cR_o \boldsymbol{\omega}_c + {}^oR_c \left\{ \frac{d}{dt} {}^cI_c \right\} {}^cR_c \boldsymbol{\omega}_c + {}^oR_c {}^cI_c \left\{ \frac{d}{dt} {}^cR_o \right\} \boldsymbol{\omega}_c + I_c \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}_c \quad (4.18)$$

Luego, usando  $\frac{d}{dt} {}^oR_c = S(\boldsymbol{\omega}_c) {}^oR_c$ ,  $\frac{d}{dt} {}^cI_c = 0$  y  $\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}_c = \dot{\boldsymbol{\omega}}_c$ , (4.18) queda:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_c &= S(\boldsymbol{\omega}_c) {}^oR_c {}^cI_c {}^cR_o \boldsymbol{\omega}_c + {}^oR_c {}^cI_c S({}^c\boldsymbol{\omega}_c) {}^cR_o \boldsymbol{\omega}_c + I_c \dot{\boldsymbol{\omega}}_c \\ &= S(\boldsymbol{\omega}_c) {}^oI_c \boldsymbol{\omega}_c + I_c \dot{\boldsymbol{\omega}}_c \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde  $\frac{d}{dt} {}^cI_c = 0$  y la propiedad  $S(\mathbf{v})\mathbf{v} = 0$  (donde  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ) y (4.13), fueron empleadas para simplificar.

Ahora bien, si se desea calcular el momento en el c.d.m. visto en el marco  $\Sigma_c$ , entonces (4.19) se premultiplica por  ${}^oR_c$ , lo que lleva a:

$${}^c\boldsymbol{\mu}_c = S({}^c\boldsymbol{\omega}_c) {}^cI_c {}^c\boldsymbol{\omega}_c + {}^cI_c {}^c\dot{\boldsymbol{\omega}}_c$$

donde se usa (4.13) y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}_c &= \frac{d}{dt} {}^oR_c \boldsymbol{\omega}_c = (S(\boldsymbol{\omega}_c) {}^oR_c) {}^c\boldsymbol{\omega}_c + {}^oR_c \frac{d}{dt} {}^c\boldsymbol{\omega}_c \\ &= {}^oR_c \frac{d}{dt} {}^c\boldsymbol{\omega}_c \end{aligned}$$

## 4.3 Los principios variacionales

Desde que Newton presentó los fundamentos de la dinámica formulando las leyes del movimiento, la ciencia de la mecánica se desarrolló a lo largo de dos ramas: la *mecánica vectorial* y la *mecánica analítica*. La mecánica vectorial se basa en las leyes de movimiento de Newton. En esta rama se buscan todas las fuerzas que actúan sobre una partícula dada, de esta manera su movimiento queda determinado a través del conocimiento de las fuerzas que actúan en ella en cada instante. El análisis y síntesis de fuerzas y momentos es así la principal ocupación de la mecánica vectorial (Lanczos, 2012).

Por otra parte, un contemporáneo de Newton, Leibniz, defendió el uso de la energía cinética como el indicador de la acción dinámica de las fuerzas. Así Leibniz reemplazó el momento lineal de Newton ( $m\mathbf{v}$ ), por la energía cinética ( $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^T\mathbf{v}$ ) y reemplazó la fuerza por el trabajo de la fuerza. Leibniz es así el originador de la segunda rama de la mecánica, usualmente llamada mecánica analítica, la cual basa el estudio del equilibrio y movimiento en dos cantidades escalares fundamentales: la energía cinética y la energía potencial (Lanczos, 2012).

Los principios variacionales de la mecánica clásica son los fundamentos de la mecánica analítica expresados en la forma de relaciones variacionales, de las cuales las ecuaciones diferenciales de movimiento y todas las afirmaciones y leyes de la mecánica pueden ser obtenidas (Lanczos, 2012).

### 4.3.1 Principios variacionales diferenciales

#### Principio de trabajo virtual

El primer principio variacional encontrado en mecánica es el principio del trabajo virtual. Este principio rige el equilibrio de un sistema mecánico y es fundamental para el desarrollo posterior de la mecánica analítica. Según (Goldstein, 1965) y (Lanczos, 2012), un *desplazamiento virtual* de un sistema se refiere a un cambio imaginario en la configuración del sistema (impuesto por la persona que desea analizar el sistema) el cual es consistente con las fuerzas y restricciones impuestas en el instante dado  $t$ , con el fin de realizar una especie de experimento matemático. El desplazamiento es llamado virtual para distinguirlo de un desplazamiento real del sistema que ocurre en un intervalo de tiempo  $dt$ , durante el cual las fuerzas y restricciones pueden cambiar.

Considérese primero emplear el lenguaje de la mecánica vectorial. Supóngase que fuerzas externas conocidas  $\overline{\mathbf{f}}_1, \overline{\mathbf{f}}_2, \dots, \overline{\mathbf{f}}_n \in \mathbb{R}^3$  actúan en los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  de un sistema (en este capítulo se usará una barra sobre un vector de fuerzas o momentos para indicar que sus componentes son fuerzas o momentos externos aplicados al sistema). El desplazamiento virtual de estos puntos será denotado por  $\delta\mathbf{r}_1, \delta\mathbf{r}_2, \dots, \delta\mathbf{r}_n \in \mathbb{R}^3$ .



Estos desplazamientos virtuales deben ser consistentes con las restricciones cinemáticas dadas. El principio de trabajo virtual afirma que tal sistema mecánico estará en equilibrio si y sólo si el trabajo virtual total de todas las fuerzas externas es cero, es decir (Lanczos, 2012):

$$\delta w = \overline{\mathbf{f}}_{r_1}^T \delta \mathbf{r}_1 + \overline{\mathbf{f}}_{r_2}^T \delta \mathbf{r}_2 + \dots + \overline{\mathbf{f}}_{r_n}^T \delta \mathbf{r}_n = 0 \quad (4.20)$$

Ahora se procederá a traducir esta ecuación al lenguaje de la mecánica analítica. Para este propósito, los vectores  $\mathbf{r}_i$  se expresarán como funciones de las coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_m$ , donde  $m$  es la dimensión del espacio de configuración. Si se sabe que

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

entonces (4.20) se puede reescribir como:

$$\delta w = \overline{\mathbf{f}}_{r_1}^T \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_j} \delta q_j + \overline{\mathbf{f}}_{r_2}^T \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \overline{\mathbf{f}}_{r_n}^T \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \text{con } j = 1, \dots, m$$

donde, agrupando los coeficientes de  $\delta q_j$ , se obtiene (Goldstein, 1965):

$$\delta w = f_{q_1} \delta q_1 + f_{q_2} \delta q_2 + \dots + f_{q_m} \delta q_m = \overline{\mathbf{f}}_q^T \delta \mathbf{q} = 0 \quad (4.21)$$

donde  $f_{q_j} = \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{f}}_{r_i}^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$  es la  $j$ -ésima componente del vector de fuerzas generalizadas  $\overline{\mathbf{f}} = [f_{q_1} \ f_{q_2} \ \dots \ f_{q_m}]^T \in \mathbb{R}^m$  y  $\delta \mathbf{q} = [\delta q_1 \ \delta q_2 \ \dots \ \delta q_m]^T \in \mathbb{R}^m$ . La desaparición del producto escalar  $\overline{\mathbf{f}}^T \delta \mathbf{q}$ , significa que la fuerza  $f_{q_j}$  es perpendicular a cualquier desplazamiento virtual posible.

Según la mecánica newtoniana, el estado de equilibrio requiere que la fuerza resultante en cualquier partícula del sistema sea cero. Esta fuerza resultante es la suma de las fuerzas externas  $\overline{\mathbf{f}}_{q_i}$  y las fuerzas que mantienen las restricciones dadas  $\mathbf{f}_{Rq_i}$  (estas últimas son comúnmente llamadas fuerzas de reacción). Ya que el principio de equilibrio requiere que la resultante de las fuerzas sea cero, es decir  $\overline{\mathbf{f}}_i + \mathbf{f}_{Ri} = 0$ , se concluye que el trabajo virtual ejercido por las fuerzas externas  $\overline{\mathbf{f}}^T \delta \mathbf{q}$  puede ser reemplazado por el negativo del trabajo virtual ejercido por las fuerzas de reacción  $-\mathbf{f}_{Rq}^T \delta \mathbf{q}$ . Es así como el principio de trabajo virtual puede ser formulado de la siguiente manera:

“El trabajo virtual de las fuerzas de reacción es siempre cero, para cualquier desplazamiento virtual que sea consistente con las restricciones cinemáticas dadas.”

Pero lo interesante es que este postulado no se restringe sólo a la estática, se aplica

igualmente a dinámica cuando el principio de trabajo virtual es adecuadamente generalizado por medio del principio de D'Alembert.

## Principio de D'Alembert

Con un toque de genialidad, el filósofo y matemático D'Alembert logró extender la aplicabilidad del principio del trabajo virtual de estática a dinámica. La idea simple pero de largo alcance de D'Alembert es la siguiente. Defínase un vector  $\mathbf{f}^*$  por la ecuación (Lanczos, 2012):

$$\mathbf{f}^* = -m\mathbf{a}$$

Este vector  $\mathbf{f}^*$  puede ser considerado como una fuerza creada por el movimiento, esta fuerza es llamada “fuerza inercial”. Con este concepto la ecuación de la segunda ley de Newton puede ser escrita como sigue:

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}^* = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

donde  $\mathbf{f}$  son las fuerzas activas, es decir, las fuerzas externas  $\bar{\mathbf{f}}$  más las fuerzas de restricción  $\mathbf{f}_R$ .

La importancia de la ecuación (4.22) se encuentra en el hecho de que ésta no es una reformulación de la ecuación de Newton, sino un principio. De la mecánica newtoniana se sabe que el desvanecimiento de una fuerza significa equilibrio, así la ecuación (4.22) dice que la adición de la fuerza inercial a las otras fuerzas activas produce equilibrio. Esto significa que cualquier criterio aplicable al equilibrio de un sistema mecánico se puede extender de inmediato a un sistema que está en movimiento. Todo lo que se tiene que hacerse es añadir la nueva “fuerza inercial” a las fuerzas activas.

La oposición que puede encontrarse al principio anterior es: si la masa  $m$  está realmente en movimiento: ¿por qué ésta es tratada como si estuviera en equilibrio? El movimiento es un fenómeno relativo. Es posible introducir una sistema de referencia que se mueve con el cuerpo y el cuerpo puede observarse en tal sistema, es así como el cuerpo puede considerarse incluso en reposo y  $\mathbf{f}^*$  como una fuerza ficticia agregada a  $\mathbf{f}$  para lograr el equilibrio de tal masa.

D'Alembert generalizó su consideración de equilibrio de una simple partícula a un sistema mecánico arbitrario de  $N$  partículas. Su principio establece que cualquier sistema de fuerzas está en equilibrio si se agrega a las fuerzas externas las fuerzas inerciales. Esto significa que el trabajo virtual de las fuerzas externas, aumentado por las fuerzas inerciales, desaparece para desplazamientos virtuales:

$$\sum_{k=1}^N (\mathbf{f}_k - m_k \mathbf{a}_k)^T \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (4.23)$$

## Principio de Gauss

Gauss dió una ingeniosa reinterpretación del principio de D'Alembert. Considere el siguiente problema: en un cierto tiempo  $t$  la posición y la velocidad de todas las partículas de un sistema mecánico se conocen, sin embargo, se dispone de las aceleraciones a voluntad, aunque sujetas a las restricciones dadas. La posición de la partícula  $i$  en el tiempo  $t + \tau$  está dada por el teorema de Taylor:

$$\mathbf{r}_i(t + \tau) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)\tau + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i(t)\tau^2 + \dots$$

al suponer que  $\tau$  es arbitrariamente pequeño se pueden despreciar los términos de orden superior, y como  $\mathbf{r}_i(t)$  y  $\mathbf{v}_i(t)$  se suponen conocidas se considera que la única variación posible en  $\mathbf{r}_i(t + \tau)$  es debida a la variación de la aceleración, es decir:

$$\delta\mathbf{r}_i(t + \tau) = \frac{1}{2}\delta\mathbf{a}_i(t)\tau^2 \quad (4.24)$$

Como el principio de D'Alembert establece que

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{f}_i - m_i\mathbf{a}_i]^T \delta\mathbf{r}_i = 0,$$

para un tiempo  $t + \tau$ , de (4.24) se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{f}_i - m_i\mathbf{a}_i]^T \delta\mathbf{a}_i = 0, \quad (4.25)$$

Como las fuerzas externas son conocidas y no pueden ser variadas, entonces  $\delta\mathbf{f}_i = \mathbf{0}$  y es correcto escribir:

$$\delta\mathbf{a}_i = -\frac{1}{m_i}\delta(\mathbf{f}_i - m_i\mathbf{a}_i)$$

de modo que (4.25) queda:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} (\mathbf{f}_i - m_i\mathbf{a}_i)^T \delta(\mathbf{f}_i - m_i\mathbf{a}_i) = 0, \quad (4.26)$$

y como en general, para cualquier vector  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v}^T \delta\mathbf{v} = \frac{1}{2}\delta(\mathbf{v}^T \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\delta\|\mathbf{v}\|^2$$

entonces se llega a

$$\delta \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \|\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i\|^2 = 0. \quad (4.27)$$

Gauss definió la cantidad:

$$Z = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \|\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i\|^2.$$

como la restricción del movimiento y denominó la ecuación (4.27) como el principio de mínima restricción: el movimiento real que ocurre en la naturaleza es tal que bajo las condiciones cinemáticas dadas  $Z$  se hace tan pequeña como sea posible (Lanczos, 2012).

### Principio de Jourdain

Como ya se mencionó, el principio de D'Alembert establece que:

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i]^T \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

como

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k,$$

donde  $k$  denota el número de grados de libertad del sistema mecánico considerado. Entonces, el principio de D'Alembert puede reescribirse como:

$$\left( \sum_{i=1}^N [\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i]^T \frac{\delta \mathbf{v}_i}{\delta \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0 \quad (4.28)$$

Como  $\delta q_k$  es independiente, de la ecuación (4.28) se tiene que:

$$\left( \sum_{i=1}^N [\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i]^T \frac{\delta \mathbf{v}_i}{\delta \dot{q}_k} \right) = 0 \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.29)$$

donde  $q_k$  son las coordenadas generalizadas mínimas, y  $n$  el número de grados de libertad. Aplicando propiedades del cálculo variacional se tiene que:

$$\left( \sum_{i=1}^N [\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i]^T \delta \mathbf{v}_i \right) = 0 \quad (4.30)$$

De manera que el principio de Jourdain puede ser enunciado como: Un sistema mecánico restringido realiza movimientos tales que la potencia total virtual  $\delta P = \sum_{i=1}^N [\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i]^T \delta \mathbf{v}_i$  es cero.

### 4.3.2 Principios variacionales integrales

#### El principio de mínima acción

En física se le llama *acción* a un atributo de un sistema físico del cual se pueden derivar las ecuaciones de movimiento. La acción es un funcional (ver sección 2.4.5) que toma la trayectoria del sistema en el espacio de configuración como su entrada, y da como resultado un número real. Se ha demostrado que la evolución de un sistema físico (es decir, cómo el sistema progresa de un estado a otro) corresponde a un punto estacionario (usualmente un mínimo) de la acción (Lanczos, 2012).

Varias definiciones diferentes de la acción se usan en física. La acción es usualmente una integral sobre el tiempo, sin embargo, en ocasiones también puede tratarse de una integral sobre las variables espaciales. En algunas casos la acción es integrada a lo largo de la ruta seguida por el sistema físico, sin importar su parametrización con respecto al tiempo.

El crédito de la formulación del principio de mínima acción se da a P.L. Maupertuis (aunque hay quienes afirman que G. Leibniz ya lo utilizaba desde 1707), quien en 1744 afirmaba que: “la naturaleza es ahorrativa en todas sus acciones”.

Maupertuis sugirió que la cantidad a ser minimizada era el producto de la duración (tiempo) del movimiento en un sistema, por la “vis viva” (cantidad igual al doble de la energía cinética):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} 2\mathcal{K}(t)dt = 0. \quad (4.31)$$

La expresión (4.31) es una de las primeras formulaciones del principio de mínima acción, y de hecho, algunos lo denominan el principio de Maupertuis.

Euler dió una formulación alterna al principio de mínima acción, la cual es conocida como el principio de Euler, y que generalmente se escribe matemáticamente como:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} m\mathbf{v}^T ds = 0 \quad (4.32)$$

donde  $s$  es la longitud de arco entre  $s_1 = s(t_1)$  y  $s_2 = s(t_2)$ . Como se puede ver, (4.32) es equivalente a (4.31), ya que  $\mathcal{K} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^T \frac{ds}{dt}$ .

Otras formulaciones del principio de mínima acción son los principios de Jacobi, de Lagrange y de Hamilton que se describen a continuación.

## El principio de Jacobi

El uso de coordenadas generalizadas arbitrarias para describir el movimiento de un sistema mecánico, es una de las principales características de la mecánica analítica. Las ecuaciones de la mecánica analítica poseen una estructura que les permite ser establecidas independientemente de las coordenadas usadas.

El descubrimiento de Descartes de que la geometría puede ser tratada en forma analítica, marcó un hito en la historia de la materia, sin embargo, la geometría de Descartes supone una estructura euclidiana del espacio y la norma euclidiana se convierte en la métrica de ese espacio. Un elemento diferencial de línea en el espacio euclideano está dado por:

$$d\mathbf{s} = [ dx \quad dy \quad dz ]^T \in \mathbb{R}^3$$

y su norma al cuadrado es un funcional, definido como:

$$ds^2 = d\mathbf{s}^T d\mathbf{s} = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

El escalar  $ds$  puede ser visto como un diferencial de la longitud de arco entre dos puntos en el espacio cartesiano.

Pero al trabajar con coordenadas generalizadas, que en general son coordenadas curvilíneas, el elemento diferencial de línea es:

$$d\mathbf{q} = [ dq_1 \quad dq_2 \quad \dots \quad dq_n ]^T \in \mathbb{R}^n$$

y el diferencial de longitud de arco al cuadrado es:

$$ds^2 = d\mathbf{q}^T M(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \sum_{i,j=1}^n m_{ij}(\mathbf{q}) dq_i dq_j \quad (4.33)$$

donde  $M(\mathbf{q})$  es la matriz de inercias, la cual es considerada el tensor métrico del espacio de configuración del sistema, con coordenadas  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , visto como un espacio de Riemann (Lanczos, 2012; Spong, 1992).

Ahora, recordando que la energía cinética se puede escribir como:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{q}^T}{dt} M(\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{dt}$$

y usando (4.33):

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (4.34)$$

Este es un resultado interesante que indica que la energía cinética se puede expresar en

una forma que no depende de la masa. De (4.34) se tiene que:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2\mathcal{K}}$$

y además:

$$2\mathcal{K}dt = \left(\frac{ds}{dt}\right) ds = \sqrt{2\mathcal{K}}ds$$

de modo que, sustituyendo en la expresión (4.31), se tiene

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2\mathcal{K}}ds$$

Finalmente, sustituyendo  $\mathcal{K} = \mathcal{E} - \mathcal{U}$ , se llega a:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2(\mathcal{E} - \mathcal{U})}ds$$

que de acuerdo con (Lanczos, 2012) es conocido como el principio de Jacobi.

## El principio de Lagrange

El principio de Maupertuis y el de Euler suponen que la energía total a lo largo de la trayectoria que se integra es constante. Si  $\mathcal{E}$  es esa constante, entonces:

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{U} \tag{4.35}$$

donde  $\mathcal{K}$  es la energía cinética y  $\mathcal{U}$  es la energía potencial del sistema.

Lagrange partió del principio de Euler y lo generalizó al caso de  $N$  partículas. El resultado es lo que se conoce como el principio de Lagrange:

$$\delta \left( \sum_{i=1}^N m_i \int_A^B \mathbf{v}_i^T ds \right) = 0, \tag{4.36}$$

donde  $A$  es la configuración inicial y  $B$  la configuración final. Este principio también supone que  $\mathcal{E}$  es constante. La demostración de (4.36), desarrollada por Lagrange, es básicamente la siguiente.

Si  $(x_i, y_i, z_i)$  son las coordenadas de la  $i$ -ésima partícula, entonces es posible escribir:

$$\delta \left( \sum_{i=1}^N m_i \int_A^B \mathbf{v}_i^T ds \right) = \delta \left( \sum_{i=1}^N m_i \int_A^B [\dot{x}_i dx_i + \dot{y}_i dy_i + \dot{z}_i dz_i] \right)$$

ó, abusando de la notación:

$$\delta \left( \sum_{i=1}^N m_i \int_A^B \mathbf{v}_i^T ds \right) = \delta \left( \sum_{i=1}^N m_i \int_A^B \sum_{x,y,z} \dot{x}_i dx_i \right),$$

y aplicando las propiedades del cálculo de variaciones:

$$\begin{aligned} \delta \left( \sum_{i=1}^N m_i \int_A^B \mathbf{v}_i^T ds \right) &= \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \int_A^B \delta(m_i \dot{x}_i dx_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \int_A^B [m_i \dot{x}_i d(\delta x_i) + m_i \delta \dot{x}_i dx_i] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \int_A^B [m_i d(\dot{x}_i \delta x_i) - m_i d\dot{x}_i \delta x_i + m_i \delta \dot{x}_i dx_i] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Por otro lado, siguiendo con la notación empleada, la energía cinética del sistema es:

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

de modo que (4.35) queda

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \mathcal{U}$$

y

$$\delta \mathcal{E} = \delta \left( \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \mathcal{U} \right) \quad (4.38)$$

o bien

$$\sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \left( m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} \delta x_i \right) = 0 \quad (4.39)$$

Así que, si en el último término de (4.37) se reemplaza  $dx_i$  por  $\dot{x}_i dt$ , y se usa (4.39), queda

$$\delta \left( \sum_{i=1}^N m_i \int_A^B \mathbf{v}_i^T ds \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \int_A^B [m_i d(\dot{x}_i \delta x_i) - m_i d\dot{x}_i \delta x_i - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} dt \delta x_i]$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} [m_i \dot{x}_{iB} \delta x_B - m_i \dot{x}_{iA} \delta x_A] - \int_A^B \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \left[ m_i d\dot{x}_i \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} dt \right] \delta x_i \tag{4.40}
\end{aligned}$$

donde los subíndices  $B$  y  $A$  corresponden a la configuración final e inicial respectivamente, y dado que esas configuraciones se suponen conocidas, el primer término de (4.40) es cero, así que la condición necesaria y suficiente para que la variación de la acción de Lagrange se desvanezca es que

$$m_i d\dot{x}_i + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} dt = 0$$

o bien

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial W}{\partial x_i} = F_{x_i}$$

que no es otra cosa más que la segunda ley de Newton para la componente  $x_i$ , y una ecuación similar aplica para las otras dos componentes.

Del análisis anterior se concluye que, partiendo de la ley de la conservación de la energía y de las leyes de Newton, la formulación de Lagrange del principio de mínima acción se satisface. Pero es claro que de esta manera (4.36) no puede ser considerado un principio por sí mismo.

Una generalización se da si se considera que la energía no se conserva a lo largo de toda la trayectoria; en tal caso (4.38) no es cero, y (4.39) queda:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i = - \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} \delta x_i + \delta \mathcal{E}.$$

Al final (4.40) es reemplazada por:

$$\begin{aligned}
\delta \left( \sum_{i=1}^N m_i \int_A^B \mathbf{v}_i^T ds \right) &= \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} [m_i \dot{x}_{iB} \delta x_B - m_i \dot{x}_{iA} \delta x_A] \\
&\quad + \int \left[ - \sum_{i=1}^N \sum_{x,y,z} \left( m_i dx_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} dt \right) \delta x_i + \delta \mathcal{E} dt \right] \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Nuevamente, empleando la segunda ley de Newton y el hecho de que la configuración inicial y final son conocidas, queda:

$$\delta \left( \sum_{i=1}^N m_i \int \mathbf{v}_i^T ds \right) = \delta \int \mathcal{E} dt$$

o bien

$$\delta \int 2\mathcal{K}dt - \delta \int \mathcal{E}dt = \delta \int [2\mathcal{K} - \mathcal{E}]dt = \delta \int \mathcal{L}dt.$$

que es conocido como el principio de Hamilton.

## Principio de Hamilton

El principio de D'Alembert opera con un diferencial no integrable, una cierta cantidad infinitesimal (el trabajo virtual hecho por las fuerzas externas y las fuerzas inerciales) que es igualada a cero. Aunque implícitamente usado por Euler y Lagrange, fue Hamilton quien primero transformó el principio de D'Alembert, mostrando que una integración con respecto al tiempo da como resultado un nuevo principio que es más fácil de manejar.

Para llegar al principio de Hamilton, considérese reescribir el principio de D'Alembert de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{f}_i - \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) \right]^T \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Al multiplicar el lado izquierdo de esta expresión por  $dt$  e integrar entre los límites  $t = t_1$  y  $t = t_2$  queda

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{f}_i - \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) \right]^T \delta \mathbf{r}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{r}_i dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i)^T \delta \mathbf{r}_i dt \quad (4.42)$$

Ahora bien, el término  $\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{r}_i$  representa el trabajo virtual total  $\delta W$  producido por todas las fuerzas externas, y si se considera que esas fuerzas son conservativas, entonces debe existir una función energía potencial  $\mathcal{U}$  tal que  $\delta W = -\delta U$ , de modo que el primer término del miembro derecho en (4.42) se puede escribir como

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{r}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{U} dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{U} dt \quad (4.43)$$

La segunda integral del miembro derecho de (4.42) se puede resolver usando integración por partes ya que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i)^T \delta \mathbf{r}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i^T \delta \mathbf{r}_i) dt + \int_{t_1}^{t_2} (m_i \mathbf{v}_i)^T \frac{d}{dt}(\delta \mathbf{r}_i) dt$$

El primer término del lado derecho es integrable y resulta en:

$$(m_i \mathbf{v}_i^T \delta \mathbf{r}_i) \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (4.44)$$

mientras que para el segundo término, haciendo uso de la naturaleza intercambiable de la variación y la diferenciación, es posible escribir:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (m_i \mathbf{v}_i)^T \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r}_i) dt &= \int_{t_1}^{t_2} (m_i \mathbf{v}_i)^T \delta \mathbf{v}_i dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m_i \delta (\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i) dt \\ &= \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} m_i \|\mathbf{v}_i\|^2 dt \end{aligned} \quad (4.45)$$

Así que de (4.43)-(4.45), se tiene que (4.42) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{f}_i - \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right]^T \delta \mathbf{r}_i dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\mathbf{v}_i\|^2 dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^T \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{U} dt \end{aligned} \quad (4.46)$$

y de la definición de la energía cinética de una partícula, se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{f}_i - \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right]^T \delta \mathbf{r}_i dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{K} - \mathcal{U}) dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^T \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (4.47)$$

Hasta aquí,  $\delta \mathbf{r}_i$  es un cambio virtual arbitrario del vector  $\mathbf{r}_i$ . Ahora, se requiere que  $\delta \mathbf{r}_i$  se devanezca en los dos límites  $t_1$  y  $t_2$ :

$$\delta \mathbf{r}_i(t_1) = \mathbf{0} \quad (4.48)$$

$$\delta \mathbf{r}_i(t_2) = \mathbf{0}, \quad (4.49)$$

esto significa que la posición del sistema mecánico está dado por  $t = t_1$  y  $t = t_2$ , y ninguna variación es permitida en estos límites. Se dice que se está variando entre límites definidos, ya que las posiciones limitantes del sistema están establecidas. En este caso, el segundo término en el lado derecho de (4.47) desvanece y la integral respecto al tiempo del trabajo virtual hecho por las fuerzas efectivas se convierte en la variación de la integral definida:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{f}_i - \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right]^T \delta \mathbf{r}_i dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{K} - \mathcal{U}) dt. \quad (4.50)$$

Ya que el principio de D'Alembert (4.23) requiere que el trabajo virtual desvanezca en cualquier tiempo, (4.50) desvanece también. Así, el principio de D'Alembert puede ser reformulado como:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{K} - \mathcal{U}) dt = 0,$$

este es el principio de Hamilton, el cual establece que el movimiento de un sistema mecánico arbitrario ocurre de tal manera que la integral definida (4.51) sea estacionaria para arbitrarias variaciones posibles de la configuración del sistema, siempre que las configuraciones inicial y final del sistema sean prescritas.

### 4.3.3 Las ecuaciones de Hamilton

Para la derivación de las ecuaciones de Hamilton, se comenzará explicando la aplicación de la transformación de Legendre a la función lagrangiana.

#### Transformación de Legendre aplicada a la función lagrangiana

La función lagrangiana  $\mathcal{L}$  de un problema de variación es generalmente alguna función de las  $n$  coordenadas generalizadas  $q_i$ , la  $n$  velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ , y el tiempo  $t$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t). \quad (4.51)$$

Para el presente desarrollo, tómense las velocidades  $\dot{q}_i$  simplemente como  $n$  variables, enteramente independientes de  $q_i$ . Ahora, aplicando la transformación de Legendre, considerando  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  como variables activas y todas las otras como variables pasivas. Así, las coordenadas  $q_i$  corresponden a las coordenadas  $u_i$ , y las  $q_1, \dots, q_n$  y  $t$  a las  $w_i$  del esquema general presentado en la sección 2.4.7. Así que el número  $m$  de variables pasivas es  $n + 1$  en el problema presente.

Siguiendo el esquema general de la transformación de Legendre, se procederá en tres pasos:

1. Se introducen las nuevas variables, las cuales aquí son llamadas “momentos”, y son denotadas por  $p_i$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.52)$$

2. Ahora se introduce una nueva función, la cual es denotada por  $\mathcal{H}$  y es llamada energía total:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (4.53)$$

3. Ahora se expresa la nueva función  $\mathcal{H}$  en términos de las nuevas variables  $p_i$ , resolviendo las ecuaciones (4.52) para las  $\dot{q}_i$ , y sustituyendo en (4.53). Así, se obtiene:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t), \quad (4.54)$$

siendo  $\mathcal{H}$  ahora llamada: función hamiltoniana.

Las propiedades básicas de la transformación son las siguientes:

Sistema inicial:

- Función: función lagrangiana  $\mathcal{L}$ .
- Variables: velocidades  $\dot{q}_i$ .
- Variables pasivas: coordenadas de posición  $q_i$ , tiempo  $t$ .

Sistema nuevo:

- Función: función Hamiltoniana  $\mathcal{H}$ .
- Variables: momento  $p_i$ .
- Variables pasivas: coordenadas de posición  $q_i$ , tiempo  $t$ .

La naturaleza dual de la transformación es expresada en el siguiente esquema:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad (4.55)$$

$$\mathcal{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad \mathcal{L} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \quad (4.56)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) \quad (4.57)$$

Así que, si se comienza de la función lagrangiana  $\mathcal{L}$ , es posible contruir la función Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  a través de los tres pasos, y viceversa.

La ecuación (2.62) del esquema general ahora toma la forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (4.59)$$

## Obtención de las ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Lagrange son ecuaciones diferenciales de segundo orden en las coordenadas generalizadas  $q_i$ . Sin embargo, éstas pueden ser escritas como un par de ecuaciones diferenciales de primer orden si se introduce una cantidad intermedia llamada momento generalizado  $p_i$  definida por:

$$p_i = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.60)$$

Las ecuaciones de Lagrange pueden entonces ser escritas en la forma

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (4.61)$$

donde solamente se ha agregado la variable  $p_i$  para simplificar la escritura de las ecuaciones de Lagrange. Además, la introducción de  $p_i$  tiene el efecto de reemplazar el sistema original de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden, por un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, es decir, por las ecuaciones (4.60) y (4.63).

Ahora, aplicando la transformación de Legendre (ver sección 2.4.7), (4.60) puede ser escrita como (Lanczos, 2012):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (4.62)$$

Las ecuaciones (4.60) y (4.64) son equivalentes.

Las ecuaciones de Lagrange están contenidas en (4.63). Aplicando la transformación de Legendre, éstas pueden ser escritas como:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.63)$$

Así, finalmente las ecuaciones de Lagrange han sido reemplazadas por un nuevo conjunto de ecuaciones diferenciales, llamado las ecuaciones canónicas de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.64)$$

Estas ecuaciones son enteramente equivalentes a las ecuaciones de Lagrange y son simplemente una nueva representación matemática de las mismas.

## 4.4 Las cuatro formulaciones básicas

Para la comprensión de esta sección, considérese la siguiente nomenclatura:

$\Sigma_0$	Marco fijo a la base del robot.
$\Sigma_l$	Marco solidario al cuerpo $l$ del robot.
$\mathbf{g}_0$	Vector de aceleración gravitacional, con respecto al marco $\Sigma_0$ .
${}^l I_l$	Tensor de inercias del cuerpo $l$ , respecto a un marco orientado como $\Sigma_l$ , pero cuyo origen se encuentra en su centro de masa.
$m_l$	Masa del cuerpo $l$ .
$\boldsymbol{\rho}$	Vector de coordenadas generalizadas no mínimas.
$\mathbf{q}$	Vector de coordenadas generalizadas mínimas.
$\boldsymbol{\gamma}_h(\boldsymbol{\rho})$	Vector de restricciones holonómicas.
$\boldsymbol{\gamma}_{nh}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$	Vector de restricciones no holonómicas.
$\mathcal{K}, \mathcal{U}$	Energía cinética y potencial total del sistema, respectivamente.
$\mathbf{p}_l$	Vector de posición del c.d.m. del cuerpo $l$ , referida en el marco $\Sigma_0$ .
${}^l \boldsymbol{\omega}_l$	Vector velocidad angular del cuerpo rígido $l$ , con respecto al marco $\Sigma_l$ .
$\mathbf{v}_l$	Vector velocidad lineal del c.d.m. del cuerpo rígido $l$ , con respecto al marco $\Sigma_0$ .
$\mathbf{f}_{Rl}$	Vector de fuerzas debidas a las restricciones en el cuerpo rígido $l$ .
$\boldsymbol{\mu}_{Rl}$	Vector de momentos debidos a las restricciones en el cuerpo rígido $l$ , calculado en su c.d.m.
$\overline{\mathbf{f}}_l$	Vector de fuerzas ejercidas por los actuadores en el cuerpo rígido $l$ .
$\overline{\boldsymbol{\mu}}_l$	Vector de momentos ejercidas por los actuadores en el cuerpo rígido $l$ , calculado en su c.d.m.
$\boldsymbol{\tau}_q^*$	Vector de fuerzas generalizadas inerciales mínimas.
$\overline{\boldsymbol{\tau}}_q, \overline{\boldsymbol{\tau}}_\rho$	Vector de fuerzas generalizadas mínimas y no mínimas, respectivamente.

En esta sección se describen las cuatro formulaciones más comunes que se emplean para la obtención del modelo dinámico de robots manipuladores, es decir:

- La formulación de Newton-Euler.
- La formulación de Euler-Lagrange
- La formulación de Hamilton
- La formulación de Kane

Cabe mencionar que, tal como se explicó en la sección 1.4, se supone que las entradas a cada formulación son:

- Los parámetros cinemáticos y dinámicos
- El vector de coordenadas generalizadas no mínimas  $\boldsymbol{\rho}$  y el vector de coordenadas generalizadas mínimas  $\mathbf{q}$ .

- El vector de restricciones holonómicas  $\gamma_h(\boldsymbol{\rho})$  y/o el vector de restricciones no holonómicas  $\gamma_{nh}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$ .
- Los vectores velocidad lineal  $\mathbf{v}_l$  y velocidad angular  ${}^l\boldsymbol{\omega}_l$  los cuales están referidos al marco  $\Sigma_0$  y al marco  $\Sigma_l$ , respectivamente.

Es importante señalar que si el vector de posición del c.d.m. con respecto al marco de referencia es  $\mathbf{p}_l(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^3$ , entonces

$$\mathbf{v}_l = \dot{\mathbf{p}}_l(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\partial \mathbf{p}_l(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \dot{\boldsymbol{\rho}} = J_{G_l}(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (4.65)$$

donde  $J_{G_l}(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{3 \times m}$  es llamada en este documento matriz jacobiana de posición del eslabón  $l$ .

De manera similar a lo anterior, si  $\phi_l(\boldsymbol{\rho}) \in M^3 \subset \mathbb{R}^m$  es el elemento de la variedad de orientación que describe la orientación del cuerpo rígido, entonces:

$$\dot{\phi}_l(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \frac{\partial \phi_l(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

y de (de la Torre, 2007) se tiene que:

$$\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = T_\phi(\boldsymbol{\rho}) \dot{\phi}_l(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = T_\phi(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \phi_l(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (4.66)$$

donde  $T_\rho \in \mathbb{R}^{3 \times m}$  es la matriz de transformación que permite extraer la velocidad angular de  $\dot{\phi} \in \mathbb{R}^m$  y para el caso de la matriz de rotación está dada por (3.24) (ver sección 3.1.2). Finalmente,

$${}^l\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = {}^lR_0(\boldsymbol{\rho}) T_\phi(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \phi_l(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \dot{\boldsymbol{\rho}} = K_{G_l}(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (4.67)$$

y en este documento  $K_{G_l}$  es llamada matriz jacobiana de orientación del eslabón  $l$ .

#### 4.4.1 Formulación de Newton-Euler

Se conocen como ecuaciones de Newton-Euler(N-E) a la primera y segunda ley de Euler. Así que, las ecuaciones de N-E que gobiernan el movimiento del  $l$ -ésimo cuerpo rígido de un robot se escriben como:

$${}^lI_l {}^l\dot{\boldsymbol{\omega}}_l + S({}^l\boldsymbol{\omega}_l) {}^lI_l {}^l\boldsymbol{\omega}_l = {}^l\boldsymbol{\mu}_{Rl} + {}^l\overline{\boldsymbol{\mu}}_l, \quad (4.68)$$

$$m_l \dot{\mathbf{v}}_l = \mathbf{f}_{Rl} + \overline{\mathbf{f}}_l + m_l \mathbf{g}_0 \quad (4.69)$$



Definiendo  $\dot{\boldsymbol{\rho}}_l = [ {}^l\boldsymbol{\omega}_l^T \quad \mathbf{v}_l^T ]^T \in \mathbb{R}^6$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{Rl} = [ {}^l\boldsymbol{\mu}_{Rl}^T \quad \mathbf{f}_{Rl}^T ]^T \in \mathbb{R}^6$ ,  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_l = [ {}^l\bar{\boldsymbol{\mu}}_l^T \quad \bar{\mathbf{f}}_l^T ]^T \in \mathbb{R}^6$  y  $\mathbf{g}_l = [ O_{[1,3]} \quad m_l \mathbf{g}_0^T ]^T \in \mathbb{R}^6$ , (4.68) y (4.69) pueden ser escritas en forma matricial como:

$$M_l \dot{\boldsymbol{\rho}}_l + W_l(\dot{\boldsymbol{\rho}}_l) M_l \dot{\boldsymbol{\rho}}_l = \boldsymbol{\tau}_{Rl} + \bar{\boldsymbol{\tau}}_l + \mathbf{g}_l \quad (4.70)$$

donde

$$W_l(\dot{\boldsymbol{\rho}}_l) = \begin{bmatrix} S({}^l\boldsymbol{\omega}_l) & O_{[3,3]} \\ O_{[3,3]} & O_{[3,3]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (4.71)$$

$$M_l = \begin{bmatrix} {}^l I_l & O_{[3,3]} \\ O_{[3,3]} & m_l I_{[3]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}. \quad (4.72)$$

Si el mecanismo está formado por  $b$  cuerpos rígidos, entonces existen  $b$  sistemas de ecuaciones de la forma (4.70) que pueden ser expresados como:

$$M_\rho \ddot{\boldsymbol{\rho}} + C_\rho(\dot{\boldsymbol{\rho}}) \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{g}_\rho = \boldsymbol{\tau}_{R\rho} + \bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho \quad (4.73)$$

donde

$$M_\rho = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_b) \in \mathbb{R}^{6b \times 6b}, \quad (4.74)$$

$$C_\rho(\dot{\boldsymbol{\rho}}) = \text{diag}(W_1, W_2, \dots, W_b) \in \mathbb{R}^{6b \times 6b}, \quad (4.75)$$

$\dot{\boldsymbol{\rho}} = [ \dot{\boldsymbol{\rho}}_1^T \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_2^T \quad \dots \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_b^T ]^T$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{R\rho} = [ \boldsymbol{\tau}_{R1}^T \quad \boldsymbol{\tau}_{R2}^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\tau}_{Rb}^T ]^T$ ,  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho = [ \bar{\boldsymbol{\tau}}_1^T \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_2^T \quad \dots \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_b^T ]^T$  y  $\mathbf{g}_\rho = - [ \mathbf{g}_1^T \quad \mathbf{g}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{g}_b^T ]^T \in \mathbb{R}^{6b}$ .

Por otro lado, las restricciones holonómicas y no holonómicas en su forma diferencial pueden ser expresadas como:

$$D(\boldsymbol{\phi}) \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{6r_h + 3r_{nh}} \quad (4.76)$$

donde  $r_h$  y  $r_{nh}$  son el número de restricciones holonómicas y no holonómicas, respectivamente y  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{n+6r_h}$  es el vector de coordenadas generalizadas empleadas para modelar el robot, aunque no necesariamente igual a la integral de  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ .

Ahora, sea  $n$  el número de grados de libertad del robot, entonces es posible definir un vector de velocidades generalizadas mínimas  $\dot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$ ; y el vector  $\dot{\boldsymbol{\phi}}$  puede ser expresado como:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \bar{A}(\boldsymbol{\phi}) \dot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{6b}, \quad (4.77)$$

donde

$$\bar{A}(\boldsymbol{\phi}) = [ \bar{A}_1(\boldsymbol{\phi})^T \quad \bar{A}_2(\boldsymbol{\phi})^T \quad \dots \quad \bar{A}_b(\boldsymbol{\phi})^T ]^T \in \mathbb{R}^{6b \times n} \quad (4.78)$$

siendo  $\bar{A}_l(\boldsymbol{\phi}) = \begin{bmatrix} \bar{K}_{G_l}^T & \bar{J}_{G_l}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  una matriz que satisface:

$$\bar{A}_l(\boldsymbol{\phi})\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{G_l} \\ \bar{J}_{G_l} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_l \\ \boldsymbol{v}_l \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

Si se sustituye (4.77) en (4.76), se llega a que:

$$D(\boldsymbol{\phi})\bar{A}(\boldsymbol{\phi}) = O \in \mathbb{R}^{(6r_h+3r_{nh}) \times 6p}$$

lo cual muestra que  $\bar{A}(\boldsymbol{\phi})$  es un complemento ortogonal de  $D(\boldsymbol{\phi})$ . Debido a la forma particular de elegir este complemento, a  $\bar{A}(\boldsymbol{\phi})$  se le llama *complemento ortogonal natural* (NOC, por sus siglas en inglés) de  $D(\boldsymbol{\phi})$ . Como las columnas de  $D(\boldsymbol{\phi})$  son vectores en la misma dirección de las fuerzas de ligadura, entonces, al multiplicar (4.73) por la transpuesta de  $\bar{A}(\boldsymbol{q})$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{Rl}$  se elimina de esta ecuación, quedando

$$\bar{A}(\boldsymbol{\phi})^T M \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \bar{A}(\boldsymbol{\phi})^T W(\dot{\boldsymbol{\rho}}) M \dot{\boldsymbol{\rho}} = \bar{A}(\boldsymbol{\phi})^T (\bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho - \boldsymbol{g}_\rho). \quad (4.80)$$

Además, usando (4.77) y su derivada temporal, se llega a

$$\bar{A}(\boldsymbol{\phi})^T M \bar{A}(\boldsymbol{\phi}) \ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{A}(\boldsymbol{\phi})^T (M \dot{\bar{A}}(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) + W(\dot{\boldsymbol{\rho}}) M \bar{A}(\boldsymbol{\phi})) \dot{\boldsymbol{q}} = \bar{A}(\boldsymbol{\phi})^T (\bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho - \boldsymbol{g}_\rho). \quad (4.81)$$

o bien, reagrupando términos

$$\bar{M}_q(\boldsymbol{\phi}) \ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{C}_q(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) \dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{g}}_q(\boldsymbol{\phi}) = \bar{\boldsymbol{\tau}}_q \quad (4.82)$$

donde

$$\bar{M}_q(\boldsymbol{\phi}) = \bar{A}(\boldsymbol{\phi})^T M \bar{A}(\boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.83)$$

$$\bar{C}_q(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \bar{A}(\boldsymbol{\phi})^T (M \dot{\bar{A}}(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) + W(\dot{\boldsymbol{\rho}}) M \bar{A}(\boldsymbol{\phi})) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.84)$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}_q(\boldsymbol{\phi}) = \bar{A}(\boldsymbol{\phi})^T \boldsymbol{g}_\rho \in \mathbb{R}^n \quad (4.85)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_q(\boldsymbol{\phi}) = \bar{A}(\boldsymbol{\phi})^T \bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho \in \mathbb{R}^n. \quad (4.86)$$

#### 4.4.2 Formulación de Euler-Lagrange

La formulación lagrangiana comienza calculando la energía cinética total  $\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) \in \mathbb{R}$  y la energía potencial total  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}$  del robot. Una expresión útil para el cálculo de  $\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  en un robot, con  $b$  cuerpos rígidos, está dada por:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^b (m_l \boldsymbol{v}_l^T \boldsymbol{v}_l + {}^l \boldsymbol{\omega}_l^{Tl} I_l^l \boldsymbol{\omega}_l) \quad (4.87)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^b \dot{\boldsymbol{\rho}}^T (m_l J_{G_l}^T J_{G_l} + K_{G_l}^T I_l K_{G_l}) \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (4.88)$$

donde  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de coordenadas generalizadas seleccionado,  $J_{G_l} \in \mathbb{R}^{3 \times m}$  y  $K_{G_l} \in \mathbb{R}^{3 \times m}$  son matrices que cumplen con:

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_l \\ {}^l\boldsymbol{\omega}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{G_l} \\ K_{G_l} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^{6 \times m}. \quad (4.89)$$

y pueden obtenerse a partir de (4.65) y (4.67) respectivamente.

Mientras que la energía potencial total puede ser calculada a partir de:

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}) = -\mathbf{g}_0^T \sum_{l=1}^b m_l \mathbf{p}_l. \quad (4.90)$$

Por otro lado, una vez calculadas  $\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  y  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho})$ , se procede a obtener la función lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) - \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}),$$

y enseguida obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange (caso general) del robot, las cuales están dadas por (Arczewski & Blajer, 1996):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho + D(\boldsymbol{\rho})^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (4.91)$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho \in \mathbb{R}^m$  es el vector de fuerzas generalizadas no mínimo,  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^r$  (donde  $r = m - n$ ) es el vector de multiplicadores de Lagrange y

$$D(\boldsymbol{\rho}) = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_h(\boldsymbol{\rho})^T}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{nh}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})^T}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} \right]^T \in \mathbb{R}^{(r_n + r_{nh}) \times m},$$

con  $\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_h(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^{r_h \times m}$ ,  $\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{nh}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} \in \mathbb{R}^{r_{nh} \times m}$ . En esta formulación se están únicamente tomando en cuenta restricciones no holonómicas del tipo  $A(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ . Nótese que en el caso de emplear coordenadas generalizadas mínimas (sin restricciones, es decir  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ), el último término de la expresión (4.91) desaparece.

Por otra parte, expandiendo y simplificando (4.91), es posible obtener una forma útil de esta expresión, la cual está dada por:

$$M_\rho(\boldsymbol{\rho})\ddot{\boldsymbol{\rho}} + C_\rho(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{g}_\rho(\boldsymbol{\rho}) = \bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho + D^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (4.92)$$

donde  $M_\rho(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  denota la matriz de inercias,  $C_\rho(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, y  $\mathbf{g}_\rho(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de gravedad.

Es posible comprobar empleando las expresiones (4.88) y (4.91), que  $M_\rho(\boldsymbol{\rho})$ ,  $C_\rho(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  y  $\mathbf{g}_\rho$  pueden ser calculadas a través de:

$$M_\rho(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{l=1}^b (m_l J_{G_l}^T J_{G_l} + K_{G_l}^T I_l K_{G_l}), \quad (4.93)$$

$$C_\rho(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{M}(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} (\dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}}), \quad (4.94)$$

$$\mathbf{g}_\rho(\boldsymbol{\rho}) = -\mathbf{g}_0^T \sum_{l=1}^b m_l J_{G_l}. \quad (4.95)$$

Por otro lado, de la relación entre  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^m$ , dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (4.96)$$

y la expresión:

$$D(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{r_h+r_{nh}},$$

se tiene que

$$A(\mathbf{q})^T D(\boldsymbol{\rho})^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times (r_h+r_{nh})};$$

así que, multiplicando (4.92) por  $A(\mathbf{q})^T$ , es posible obtener el modelo reducido del sistema, el cual está dado por (Ghorbel et al., 2000):

$$\overline{M}_q(\boldsymbol{\rho})\ddot{\mathbf{q}} + \overline{C}_q(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})\dot{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{g}}_q(\boldsymbol{\rho}) = \overline{\boldsymbol{\tau}}_q, \quad (4.97)$$

donde:

$$\overline{M}_q(\boldsymbol{\rho}) = A(\mathbf{q})^T M_\rho(\boldsymbol{\rho}) A(\mathbf{q}) \quad (4.98)$$

$$\overline{C}_q(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = A(\mathbf{q})^T C_\rho(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) A(\mathbf{q}) + A(\mathbf{q})^T M_\rho(\boldsymbol{\rho}) \dot{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.99)$$

$$\overline{\mathbf{g}}_q = A(\mathbf{q})^T \mathbf{g}_\rho(\boldsymbol{\rho}) \quad (4.100)$$

$$\overline{\boldsymbol{\tau}}_q = A(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\tau}_\rho \quad (4.101)$$

### 4.4.3 Formulación de Hamilton

Una cantidad importante en la formulación de Hamilton es el *momento generalizado*  $\mathbf{p}_\rho \in \mathbb{R}^m$ , el cual está dado por (Duindam et al., 2009):

$$\mathbf{p}_\rho = M_\rho(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}}. \quad (4.102)$$

Además, esta formulación emplea el *hamiltoniano*, el cual es una cantidad que se define como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) &= \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) + \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}). \\
&= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\rho}}^T M_\rho(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho})
\end{aligned}$$

Pero usando (4.102) es posible reescribir el hamiltoniano en términos de  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\mathbf{p}_\rho$ :

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\rho) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_\rho^T M_\rho(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{p}_\rho + \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}). \quad (4.103)$$

Las ecuaciones de movimiento de Hamilton son:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\rho)}{\partial \mathbf{p}_\rho} \quad (4.104)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_\rho + \frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\rho)}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho + D(\boldsymbol{\rho})^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.105)$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho \in \mathbb{R}^m$  es el vector de fuerzas generalizadas no mínimo,  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{m-n}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange y

$$D(\boldsymbol{\rho}) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \gamma_h(\boldsymbol{\rho})^T}{\partial \boldsymbol{\rho}} & \frac{\partial \gamma_{nh}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})^T}{\partial \boldsymbol{\rho}} \end{array} \right]^T \in \mathbb{R}^{(r_h+r_{nh}) \times m},$$

con  $\frac{\partial \gamma_h(\boldsymbol{\rho})^T}{\partial \boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^{m \times r_h}$ ,  $\frac{\partial \gamma_{nh}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})^T}{\partial \boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^{m \times r_{nh}}$ , con  $r = r_h + r_{nh}$ . En esta formulación se están únicamente tomando en cuenta restricciones no holonómicas del tipo  $D(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{r_h+r_{nh}}$ . En el caso de emplear coordenadas generalizadas mínimas (sin restricciones, es decir  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ), el último término de la expresión (4.105) desaparece.

Por otra parte, expandiendo y simplificando (4.105), se llega a

$$M_\rho(\boldsymbol{\rho}) \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{M}(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{2} \mathbf{p}_\rho^T \frac{\partial M^{-1}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{p}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_\rho + D(\boldsymbol{\rho})^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.106)$$

y comparando con (4.88), (4.91) y (4.102), se tiene que

$$M_\rho(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{l=1}^b (m_l J_{G_l}^T J_{G_l} + K_{G_l}^T I_l K_{G_l}), \quad (4.107)$$

$$C_\rho(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\rho) = \dot{M}_\rho(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\rho) + \frac{1}{2} \mathbf{p}_\rho^T \frac{\partial M_\rho(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial \boldsymbol{\rho}} M_\rho(\boldsymbol{\rho}), \quad (4.108)$$

$$\mathbf{g}_\rho(\boldsymbol{\rho}) = -\mathbf{g}_0^T \sum_{l=1}^b m_l J_{G_l}, \quad (4.109)$$

con  $\dot{M}_\rho(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\rho) = \frac{\partial M_\rho(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\rho)}{\partial \mathbf{p}_\rho}$ .

Por otro lado, de la relación entre  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^m$ , dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (4.110)$$

y de la expresión:

$$D(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{r_h+r_{nh}},$$

se tiene que

$$A(\mathbf{q})^T D(\boldsymbol{\rho})^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times (r_h+r_{nh})};$$

así que, multiplicando (4.106) por  $A(\mathbf{q})^T$ , es posible eliminar los multiplicadores de Lagrange, y así obtener el modelo reducido del sistema (Duindam et al. , 2009; Van der Schaft & Maschke, 1994), el cual está dado por (4.97).

#### 4.4.4 Formulación de Kane

Las ecuaciones de Kane establecen que (Kane & Levinson, 1983; Kane & Levinson, 1985; Parsa, 2007):

$$\boldsymbol{\tau}_q^* + \boldsymbol{\tau}_q = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.111)$$

donde  $n$  es el número de grados de libertad del sistema,  $\boldsymbol{\tau}_q = \bar{\boldsymbol{\tau}}_q + \boldsymbol{\tau}_{Rq} - \bar{\boldsymbol{g}}_q$  son las fuerzas generalizadas activas,  $\boldsymbol{\tau}_q^*$  es el vector de fuerzas generalizadas inerciales,  $\boldsymbol{\tau}_{Rq}$  es el vector de fuerzas generalizadas de restricción (el cual es 0, ya que las fuerzas de restricción no están realizando trabajo),  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_q$  es el vector de fuerzas generalizadas y  $\bar{\boldsymbol{g}}_q$  es el vector de fuerzas y pares gravitacionales (Kane & Levinson, 1983).

Para obtener el modelo dinámico de un robot a través del método de Kane, primero es necesario definir las coordenadas generalizadas mínimas del sistema dadas por  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . Una vez definidas las coordenadas generalizadas mínimas, se procede a definir las *velocidades generalizadas mínimas*.

De acuerdo con (Parsa, 2007) la fuerza inercial generalizada en la articulación  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), denotada aquí como  $\tau_{q_j}$ , está dada por:

$$\tau_{q_j}^* = - \sum_{l=1}^b \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{d}{dt} \{m_l \mathbf{v}_l\} + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_l}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{d}{dt} \{I_l \boldsymbol{\omega}_l\} \right] \in \mathbb{R}, \quad (4.112)$$

donde  $b$  es el número de cuerpos rígidos del robot.

Si ahora se emplean (4.112) y las propiedades  $S({}^B \boldsymbol{\omega}_{B/A}) = {}^B R_A S({}^A \boldsymbol{\omega}_{B/A}) {}^B R_A^T$  y  ${}^B I = {}^B R_A {}^A I {}^B R_A^T$ , se llega a

$$\tau_{q_j}^* = - \sum_{l=1}^b \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{d}{dt} m_l \mathbf{v}_l + \left( \frac{\partial {}^l \boldsymbol{\omega}_l}{\partial \dot{q}_j} \right)^T {}^0 R_l^T \frac{d}{dt} ({}^0 R_l {}^l I_l \boldsymbol{\omega}_l) \right] \in \mathbb{R}. \quad (4.113)$$

Ahora, empleando la regla de la cadena y la propiedad  ${}^A \dot{R}_B = S({}^A \boldsymbol{\omega}_{B/A}) {}^A R_B$ , es posible derivar una forma alterna de (4.112) dada por (Parsa, 2007):

$$\tau_{q_j}^* = - \sum_{l=1}^b \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial \dot{q}_j} \right)^T m_l \dot{\mathbf{v}}_l + \left( \frac{\partial {}^l \boldsymbol{\omega}_l}{\partial \dot{q}_j} \right)^T (S({}^l \boldsymbol{\omega}_l) {}^l I_l \boldsymbol{\omega}_l + {}^l I_l \dot{\boldsymbol{\omega}}_l) \right] \in \mathbb{R}. \quad (4.114)$$

Por otra parte, la fuerza generalizada debida a la gravedad  $\bar{g}_{q_j}$ , en la articulación  $j$ , está dada por:

$$\bar{g}_{q_j} = - \sum_{l=1}^b \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{v}_l^T \mathbf{g}_0 \right] \in \mathbb{R}. \quad (4.115)$$

Así que, las fuerzas inerciales en cada articulación están dadas por el vector de fuerzas inerciales  $\boldsymbol{\tau}_q^*$ :

$$\boldsymbol{\tau}_q^* = - \sum_{l=1}^b \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial \dot{q}_1} \right)^T \\ \left( \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial \dot{q}_2} \right)^T \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial \dot{q}_n} \right)^T \end{array} \right] m_l \dot{\mathbf{v}}_l + \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial {}^l \boldsymbol{\omega}_l}{\partial \dot{q}_1} \right)^T \\ \left( \frac{\partial {}^l \boldsymbol{\omega}_l}{\partial \dot{q}_2} \right)^T \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial {}^l \boldsymbol{\omega}_l}{\partial \dot{q}_n} \right)^T \end{array} \right] (S({}^l \boldsymbol{\omega}_l) {}^l I_l \boldsymbol{\omega}_l + {}^l I_l \dot{\boldsymbol{\omega}}_l) \in \mathbb{R}^n. \quad (4.116)$$

Ahora, empleando las matrices:

$$\bar{J}_{G_l}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^{3 \times n} \quad \text{y} \quad \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q}) = \frac{\partial {}^l \boldsymbol{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^{3 \times n}, \quad (4.117)$$

se tiene que el vector de fuerzas generalizadas inerciales  $\boldsymbol{\tau}_q^* \in \mathbb{R}^n$  puede ser obtenido a través de:

$$\boldsymbol{\tau}_q^* = - \sum_{l=1}^b [\bar{J}_{G_l}(\mathbf{q})^T (m_l \dot{\mathbf{v}}_l) + \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q})^T (S({}^l \boldsymbol{\omega}_l) {}^l I_l \boldsymbol{\omega}_l + {}^l I_l \dot{\boldsymbol{\omega}}_l)] \in \mathbb{R}^n; \quad (4.118)$$

mientras que de (4.115) y (4.117) se tiene que el vector fuerzas debidas a la gravedad  $\bar{\mathbf{g}}_q$  está dado por:

$$\bar{\mathbf{g}}_q = - \sum_{l=1}^b m_l \bar{J}_{G_l}^T \mathbf{g}_0. \quad (4.119)$$

Así que, para el cálculo del vector de fuerzas generalizadas aplicadas por los motores  $\bar{\tau}_q$ , de (4.111), (4.118) y (4.119) se tiene que

$$\bar{\tau}_q = -\tau_q^* + \bar{g}_q.$$

Además, si se desea obtener el modelo dinámico en función de  $\bar{M}_q(\mathbf{q})$ ,  $\bar{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $\bar{g}_q(\mathbf{q})$ , nótese que sustituyendo (4.117) en  ${}^l\boldsymbol{\omega}_l$  y  $\mathbf{v}_l$  de (4.118) se llega a:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_q = & \sum_{l=1}^b \left[ m_l \bar{J}_{G_l}(\mathbf{q})^T \left( \dot{\bar{J}}_{G_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \bar{J}_{G_l}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \right) + \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q})^T \left( S({}^l\boldsymbol{\omega}_l) {}^l I_l \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \right. \right. \\ & \left. \left. {}^l I_l \dot{\bar{K}}_{G_l}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + {}^l I_l \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \right) \right] + \bar{g}_q \end{aligned}$$

de donde se desprende que:

$$\bar{M}_q(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^b (m_l \bar{J}_{G_l}(\mathbf{q})^T \bar{J}_{G_l}(\mathbf{q}) + \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q})^T {}^l I_l \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q})) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (4.120)$$

$$\bar{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{l=1}^b \left[ m_l \bar{J}_{G_l}(\mathbf{q})^T \dot{\bar{J}}_{G_l}(\mathbf{q}) + \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q})^T \left( S({}^l\boldsymbol{\omega}_l) {}^l I_l \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q}) + {}^l I_l \dot{\bar{K}}_{G_l}(\mathbf{q}) \right) \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (4.121)$$

$$\bar{g}_q(\mathbf{q}) = - \sum_{l=1}^b m_l \bar{J}_{G_l}(\mathbf{q})^T \mathbf{g}_0, \in \mathbb{R}^n. \quad (4.122)$$

Cabe mencionar que el método explicado aplica de igual manera para robots sin restricciones y con restricciones holonómicas y no holonómicas.

#### 4.4.5 Relación entre formulaciones

##### Relación entre las formulaciones de Newton-Euler y Kane

En esta sección se mostrará la equivalencia entre las ecuaciones del modelo dinámico obtenido a través de la formulación de Kane y la metodología del complemento ortogonal natural (que es denominada aquí como formulación de Newton-Euler).

Se comienza mostrando la equivalencia de la matriz de inercias obtenida a través de ambas metodologías (ecuaciones (4.83) y (4.120)).

De (5.44) y (4.74) , se tiene que (4.83) puede reescribirse como:



$$\bar{M}_q = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \vdots \\ \bar{A}_b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \vdots \\ \bar{A}_b \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

$$= \sum_{l=1}^b (\bar{A}_l^T M_l \bar{A}_l) \quad (4.124)$$

Ahora, de (4.72) y (4.79) se tiene que (4.124) puede ser reescrita como:

$$\bar{M}_q = \begin{bmatrix} \bar{K}_{G_l}^T & \bar{J}_{G_l}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^l I_l & O_{[3,3]} \\ O_{[3,3]} & m_l I_{[3]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K}_{G_l} \\ \bar{J}_{G_l} \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

$$= \sum_{l=1}^b \left( m_l \bar{J}_{G_l}^T \bar{J}_{G_l} + \bar{K}_{G_l}^T {}^l I_l \bar{K}_{G_l} \right) \quad (4.126)$$

lo cual muestra que (4.83) y (4.120) son equivalentes.

Ahora, continuando con la matriz de Coriolis, de (4.74), (4.75) y (5.44) se tiene que  $C_q$  dada por (4.83) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} C_q &= \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \vdots \\ \bar{A}_b \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{A}}_1 \\ \dot{\bar{A}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\bar{A}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \vdots \\ \bar{A}_b \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{l=1}^b \left( \bar{A}_l^T M_l \dot{\bar{A}}_l + \bar{A}_l^T W_l M_l \bar{A}_l \right) \end{aligned} \quad (4.127)$$

Ahora, sustituyendo (4.71), (4.72) y (4.79) en (4.127), se tiene que

$$\bar{C}_q = \begin{bmatrix} \bar{K}_{G_l}^T & \bar{J}_{G_l}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^l I_l & O \\ O & m_l I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{K}}_{G_l} \\ \dot{\bar{J}}_{G_l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_{G_l}^T & \bar{J}_{G_l}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(\boldsymbol{\omega}_l) & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^l I_l & O \\ O & m_l I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K}_{G_l} \\ \bar{J}_{G_l} \end{bmatrix}$$

lo cual muestra que (4.84) y (4.121) son equivalentes.

Finalmente (4.85) y (4.122) que representan  $\bar{\mathbf{g}}_q$  tienen la misma forma, por lo que se demuestra que  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_q$  de ambas formulaciones es equivalente.

## Relación entre las formulaciones de Kane y Euler-Lagrange

En esta sección se mostrará la equivalencia entre las ecuaciones del modelo dinámico obtenido a través de la formulación de Euler-Lagrange y la metodología de Kane.

Se comenzará mostrando la equivalencia entre las matrices de inercia obtenidas a través de ambas metodologías (ecuaciones (4.98) y (4.120)). De las expresiones (4.89), (4.110) y (4.117), se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \overline{K}_{G_l} \\ \overline{J}_{G_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{G_l} \\ J_{G_l} \end{bmatrix} A(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}, \quad (4.128)$$

por lo tanto, de (4.128) se tiene que (4.98) puede reescribirse como:

$$\overline{M}_q = \sum_{l=1}^b \left( m_l \overline{J}_{G_l}^T \overline{J}_{G_l} + \overline{K}_{G_l}^T {}^l I_l \overline{K}_{G_l} \right) \quad (4.129)$$

lo cual muestra que (4.98) y (4.120) son equivalentes.

Ahora, continuando con la matriz de Coriolis (matriz representada por (4.99) y (4.121)), de (4.94) se tiene que el vector de Coriolis  $C_\rho(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})\dot{\boldsymbol{\rho}}$  de un sistema no restringido está dado por:

$$C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{M}(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} (\dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}}). \quad (4.130)$$

De la expresión (4.98) se tiene que

$$\dot{M}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{l=1}^b \left( m_l \dot{J}_{G_l}^T J_{G_l} + m_l J_{G_l}^T \dot{J}_{G_l} + \dot{K}_{G_l}^T {}^l I_l K_{G_l} + K_{G_l}^T {}^l I_l \dot{K}_{G_l} \right) \quad (4.131)$$

Ahora, sustituyendo la expresión (4.98) en  $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} (\dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}})$  y aplicando la identidad:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^T \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}},$$

donde  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^a$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^c$  son vectores, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} (\dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}}) = 2 \sum_{l=1}^b \left( m_l (J_{G_l} \dot{\boldsymbol{\rho}})^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} (J_{G_l} \dot{\boldsymbol{\rho}}) + (K_{G_l} \dot{\boldsymbol{\rho}})^T {}^l I_l \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} (K_{G_l} \dot{\boldsymbol{\rho}}) \right), \quad (4.132)$$

y empleando las propiedades (Lenarčič & Thomas, 2013; Parsa, 2007):

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} (J_{G_l} \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \dot{J}_{G_l} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} (K_{G_l} \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \dot{K}_{G_l} + S(\boldsymbol{\omega}_l) K_{G_l},$$

la expresión (4.132) puede reescribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}} = 2 \sum_{l=1}^b \left[ \left( \dot{K}_{G_l} + K_{G_l} S(\boldsymbol{\omega}_l) \right)^T {}^l I_l K_{G_l} \dot{\mathbf{q}} + m_l \dot{J}_{G_l}^T J_{G_l} \dot{\mathbf{q}}_l \right] \quad (4.133)$$

y  $C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  puede expresarse como:

$$C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = m_l J_{G_l}^T \dot{J}_{G_l} + K_{G_l}^T {}^l I_l \dot{K}_{G_l} + K_{G_l}^T S(\boldsymbol{\omega}_l) {}^l I_l K_{G_l}. \quad (4.134)$$

Ahora, sustituyendo (4.134) en (4.99) y empleando la relación (4.128), se llega a (4.121), quedando demostrada la equivalencia entre las expresiones de la matriz de Coriolis obtenidas a través de la formulación de Euler-Lagrange y la metodología de Kane (ecuaciones (4.99) y (4.121)).

Finalmente, la equivalencia entre las expresiones del vector gravitacional dadas por ambas metodologías (ecuaciones (4.100) y (4.122)), puede mostrarse sustituyendo (4.128) en (4.100).

## Relación entre las formulaciones de Euler-Lagrange y Hamilton

En el siguiente desarrollo se mostrará como pasar de las ecuaciones (4.104) y (4.105) de la formulación hamiltoniana, a la expresión (4.97) obtenida a través de la metodología de Euler-Lagrange. De la expresión (4.102) se tiene que

$$\mathbf{p}_\rho = M_\rho(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}},$$

entonces la derivada temporal de  $\mathbf{p}_\rho$  es:

$$\dot{\mathbf{p}}_\rho = \dot{M}_\rho \dot{\boldsymbol{\rho}} + M_\rho \ddot{\boldsymbol{\rho}}. \quad (4.135)$$

Por otra parte, de (4.103) se tiene que

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\rho) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_\rho^T M_\rho(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{p}_\rho + \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}), \quad (4.136)$$

así que aplicando la identidad

$$\frac{\partial B(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -B(\mathbf{v})^{-1} \frac{\partial B(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} B(\mathbf{v})^{-1}$$

donde  $B(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{a \times b}$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^b$ , se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\rho)}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{2} \mathbf{p}_\rho^T M_\rho(\boldsymbol{\rho})^{-1} \frac{\partial M_\rho(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} M_\rho(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{p}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.137)$$

así que de (4.102) y (4.137), se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\rho}}^T \frac{\partial M_\rho(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.138)$$

por lo tanto de (4.135) y (4.138), se tiene que (4.105) puede reescribirse como:

$$M_\rho(\boldsymbol{\rho}) \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{M}_\rho(\boldsymbol{\rho}) \dot{\boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\rho}}^T \frac{\partial M_\rho(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_q + D^T \boldsymbol{\lambda}$$

y de (4.93)-(4.110) como (4.98), lo cual muestra la equivalencia entre ambas formulaciones.

## 4.5 Otras formulaciones de la dinámica

Actualmente existen otras formulaciones para la obtención del modelo dinámico de robots, entre estas se encuentran:

- Las ecuaciones de Gibbs-Appell.
- Las ecuaciones de Boltzmann-Hamel.
- Las ecuaciones de Udwadia-Kalaba.

En seguida se explica brevemente en qué consiste cada una de estas formulaciones.

### Ecuaciones de Gibbs-Appell

Las ecuaciones de Gibbs-Appell están dadas por (Ginsberg, 2008):

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{u}_j} = \bar{\tau}_j - \sum_{l=1}^m \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho_l} \frac{\partial \dot{\rho}_l}{\partial u_j} + \sum_{l=1}^{m-n} A_{l,j} \lambda_l$$

donde

$$S = \sum_{l=1}^b \left( \frac{1}{2} m_l \mathbf{a}_{G_l}^T \mathbf{a}_{G_l} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\omega}}_l^T \frac{\partial^l I_l \boldsymbol{\omega}_l}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_l^T S(\boldsymbol{\omega}_l)^l I_l \boldsymbol{\omega}_l \right),$$

$\mathcal{U}$  es la energía potencial total del sistema,  $\lambda_l$  es el multiplicador de Lagrange  $l$ ,  $\rho_l$  la coordenada generalizada  $l$ ,  $\bar{\tau}_j$  la fuerza generalizada  $j$  y  $u_j$  es el elemento  $j$  del vector  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  de cuasi-velocidades.

## Ecuaciones de Boltzmann-Hamel

Las ecuaciones de Boltzmann-Hamel son una generalización de las ecuaciones de Euler-Lagrange, sólo que en vez de emplear velocidades generalizadas, emplean cuasi-velocidades. Si en las ecuaciones de Euler-Lagrange se sustituyen las velocidades generalizadas  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  por la expresión de las cuasi-velocidades dada por:  $\mathbf{u} = W(\boldsymbol{\rho}, t)\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{w}(\boldsymbol{\rho}, t)$  se llega a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{K}}}{\partial \mathbf{u}} \right) + W^{-1} \gamma \frac{\partial \bar{\mathcal{K}}}{\partial \mathbf{u}} - W^{-1} \frac{\partial \bar{\mathcal{K}}}{\partial \mathbf{q}} = W^{-1} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\rho} - W^{-1} D(\boldsymbol{\rho})^T \boldsymbol{\lambda}$$

donde  $\bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u})$  es la energía cinética total del sistema,  $W^{-1}$  es la inversa de  $W(\boldsymbol{\rho}, t)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  son los multiplicadores de Lagrange y  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{\rho}$  es el vector de fuerzas generalizadas. Para mayor información sobre el método véase (Likins, 1974).

## Ecuación de Udwadia-Kalaba

Las ecuaciones de Udwadia y Kalaba son una reformulación de la segunda ley de Newton. Esta formulación, así como la mecánica lagrangiana, hace distinción entre las fuerzas externas aplicadas y las fuerzas internas de restricción, pero sin el uso de multiplicadores de Lagrange.

La formulación de Udwadia y Kalaba toma en cuenta incluso las fuerzas de restricción que no obedecen el principio de D'Alembert.

Suponiendo que un sistema está restringido a un conjunto de  $r = m - n$  restricciones dadas por:

$$A(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}, t)\ddot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{b}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}, t) = \mathbf{0}, \quad (4.139)$$

donde  $A(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}, t) \in \mathbb{R}^{(m-n) \times m}$  es una matriz de rango  $a$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m-n}$  es un vector conocido. Nótese que las restricciones holonómicas y no holonómicas pueden ser derivadas para tomar la forma de (4.139). Como se puede observar en (4.139), en la formulación de Udwadia-Kalaba, las restricciones pueden ser especificadas como funciones no lineales de  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , y además, depender explícitamente del tiempo.

Las ecuaciones de movimiento de Udwadia-Kalaba para un sistema restringido están dadas en todo tiempo por:

$$M\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\tau}_{\rho} + M^{1/2} (AM^{-1/2})^+ (\mathbf{b} - AM^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\rho}),$$

donde  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz de inercias,  $A = A(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}, t) \in \mathbb{R}^{(m-n) \times m}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{\rho} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de fuerzas generalizadas, y el símbolo  $+$  denota la pseudoinversa de la matriz  $AM^{-1/2}$ . Por otro lado, la fuerza de restricción está dada por:

$$\mathbf{Q}_c = M^{1/2} (AM^{-1/2})^+ (\mathbf{b} - AM^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\rho})$$

y la aceleración generalizada estaría dada por:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = M^{-1}\boldsymbol{\tau}_\rho + M^{-1/2} (AM^{-1/2})^+ (\mathbf{b} - AM^{-1}\boldsymbol{\tau}_\rho).$$

Para mayor información sobre el método véase (Udwadia & Kalaba, 1992).

# Capítulo 5

## Modelado dinámico de mecanismos simples

En este capítulo se presenta la aplicación de las formulaciones de modelado dinámico, explicadas en el capítulo anterior, a un robot serial, un robot paralelo y un robot móvil con ruedas, los cuales fueron modelados empleando coordenadas independientes, y coordenadas sujetas a restricciones holonómicas y no holonómicas, respectivamente. Al término del capítulo se muestra un análisis comparativo cuantitativo de las formulaciones aplicadas, en el cual se midió el tiempo necesario para calcular el modelo dinámico a través de cada una de las formulaciones, y también el tiempo para ejecutarlo; además, también fue comparado el espacio ocupado en memoria de cada modelo dinámico obtenido.

### 5.1 Aplicación a un manipulador serial planar

#### Descripción geométrica del robot

En esta sección se abordará la cinemática de un robot serial de 3gdl, el cual puede apreciarse en la figura 5.1. A continuación se describen los puntos y marcos que fueron asociados a los cuerpos rígidos que conforman el robot, los cuales son útiles en la obtención del modelo cinemático de éste.

A la base del robot se le asoció el marco  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , como se muestra en la figura 5.1. Para obtener la postura de cada uno de los eslabones que componen el robot, a cada eslabón  $l$  se asignó el punto  $C_l$  en su centro de masa, y el marco  $\Sigma_l(X_l, Y_l, Z_l)$  de acuerdo con la convención  $M1$  de parámetros Denavit-Hartenberg la cual fue explicada en la sección 3.2 (ver figura 5.1).

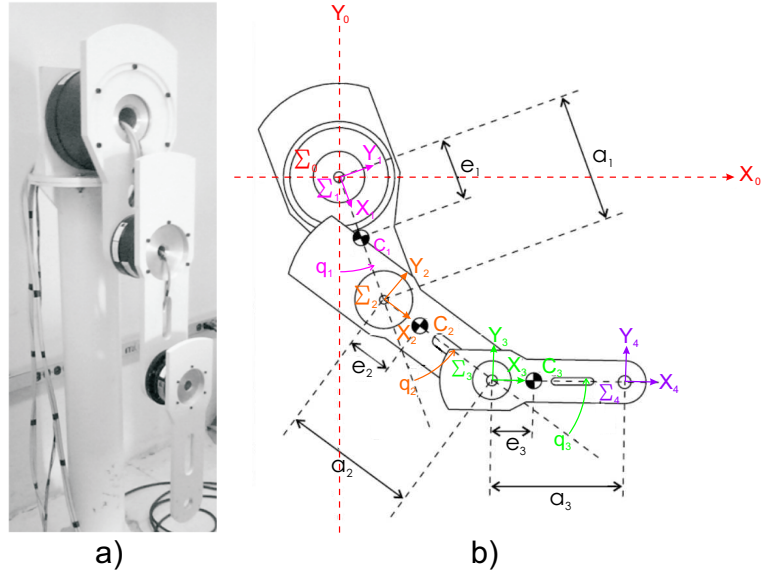


Figura 5.1: Análisis del robot serial de 3 gdl: (a) fotografía del robot, (b) diagrama esquemático. (Soto, 2009)

Las coordenadas generalizadas para modelar el sistema están dadas por:

$$\mathbf{q} = [ q_1 \quad q_2 \quad q_3 ] \in \mathbb{R}^3$$

donde  $q_l$  (con  $l = 1, 2, 3$ ) es la variable articular mostrada en la figura 5.1.

La nomenclatura empleada en esta subsección es la siguiente:

$a_l$  : Distancia del origen del marco  $\Sigma_l(X_l, Y_l, Z_l)$  al marco  $\Sigma_{l+1}(X_{l+1}, Y_{l+1}, Z_{l+1})$ .

$e_l$  : Distancia del origen del marco  $\Sigma_l(X_l, Y_l, Z_l)$  al centro de masa  $C_l$ .

$\mathbf{p}_l$  : Vector de posición del centro de masa  $C_l$  respecto al origen del marco  $\Sigma_l(X_l, Y_l, Z_l)$ .

${}^0R_l$  : Matriz de rotación que da la orientación del marco  $\Sigma_l(X_l, Y_l, Z_l)$  respecto al marco  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ .

Los parámetros de D-H (convención  $M1$ ) asociados al marco  $\Sigma_l(X_l, Y_l, Z_l)$ , con  $l = 1, 2, 3, 4$ , están dados en la tabla 5.1. De (3.39) y los parámetros mostrados en la tabla 5.1, se tiene que las matrices de transformación homogénea que dan la postura del marco  $\Sigma_l(X_l, Y_l, Z_l)$  respecto al marco  $\Sigma_{l-1}(X_{l-1}, Y_{l-1}, Z_{l-1})$  para  $l = 1, 2, 3, 4$  están dadas por:



Tabla 5.1: Parámetros Denavit-Hartenberg del robot serial de 3 gdl.

$i$	$\theta_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$a_i$
1	$q_1 - \frac{\pi}{2}$	0	0	0
2	$q_2$	$a_1$	0	0
3	$q_3$	$a_2$	0	0
4	0	$a_3$	0	0

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

y

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

donde  $s_l = \sin(q_l)$  y  $c_l = \cos(q_l)$ .

Además, empleando la composición de matrices, a partir de las expresiones (5.1)-(5.3) se tiene que:

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 \\ -c_{12} & s_{12} & 0 & -a_1 c_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

y

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ -c_{123} & s_{123} & 0 & -a_1 c_1 - a_2 c_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

donde  $s_{12} = \sin(q_1+q_2)$ ,  $c_{12} = \cos(q_1+q_2)$ ,  $s_{123} = \sin(q_1+q_2+q_3)$  y  $c_{123} = \cos(q_1+q_2+q_3)$ .

### 5.1.1 Cálculo de la postura de cada cuerpo rígido

La postura del eslabón  $l$  queda especificada por el vector de posición  $\mathbf{p}_l$  del punto  $C_l$  (asociado a su centro de masa), respecto al marco de la base  $\Sigma_0$  y la matriz de rotación  ${}^0R_l$  que da la orientación del marco  $\Sigma_l(X_l, Y_l, Z_l)$  respecto al marco inercial  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ . A partir de las ecuaciones (3.12), (5.1) y (5.5), y la figura 5.1, se tiene que la postura de cada eslabón del robot está dada por:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} e_1 s_1 \\ -e_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^0R_1 = \begin{bmatrix} s_1 & c_1 & 0 \\ -c_1 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 s_1 + e_2 s_{12} \\ -a_1 c_1 - e_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^0R_2 = \begin{bmatrix} s_{12} & c_{12} & 0 \\ -c_{12} & s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} a_1 s_1 + a_2 s_{12} + e_3 s_{123} \\ -a_1 c_1 - a_2 c_{12} - e_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^0R_3 = \begin{bmatrix} s_{123} & c_{123} & 0 \\ -c_{123} & s_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

### 5.1.2 Cálculo de la velocidad lineal y angular de cada cuerpo rígido

De (4.67), (5.6)-(5.8) se tiene que la velocidad angular  ${}^l\boldsymbol{\omega}_l$  del eslabón  $l$  (con  $l = 1, 2, 3$ ) está dada por:

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = K_{G_1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.9)$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = K_{G_2}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.10)$$

$${}^3\boldsymbol{\omega}_3 = K_{G_3}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (5.11)$$

De (4.65) y (5.6)-(5.8) se tiene que la velocidad lineal  $\mathbf{v}_l$  del eslabón  $l$  (con  $l = 1, 2, 3$ ) está dada por:

$$\mathbf{v}_1 = J_{G_1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} e_1c_1 & 0 & 0 \\ e_1s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{v}_2 = J_{G_2}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} a_1c_1 + e_2c_{12} & e_2c_{12} & 0 \\ a_1s_1 + e_2s_{12} & e_2s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{v}_3 = J_{G_3}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} + e_3c_{123} & a_2c_{12} + e_3c_{123} & e_3c_{123} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} + e_3s_{123} & a_2s_{12} + e_3s_{123} & e_3s_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.14)$$

### 5.1.3 Modelado dinámico

En esta sección se explicará cómo obtener el modelo dinámico del robot serial de 3gdl, a partir de la información expuesta en la subsección anterior, y la metodología de la sección 4.4. Las masa de cada eslabón  $l$  es nombrado aquí  $m_l$ . Los tensores de inercia  $I_l$  están calculados con respecto a un marco orientado igual que  $\Sigma_l(X_l, Y_l, Z_l)$  pero con origen en el c.d.m. del eslabón  $l$ .

#### Formulación de Newton-Euler

A partir de la ecuación (4.83) y las expresiones (5.9)-(5.14) es posible obtener  $\bar{M}_q(\mathbf{q})$  a partir de:

$$\bar{M}_q(\mathbf{q}) = \bar{A}^T M \bar{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

donde

$$\bar{A} = [ \bar{K}_{G_1}^T \quad \bar{J}_{G_1}^T \quad \bar{K}_{G_2}^T \quad \bar{J}_{G_2}^T \quad \bar{K}_{G_3}^T \quad \bar{J}_{G_3}^T ] \in \mathbb{R}^{18 \times 3} \quad (5.15)$$

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, M_3) \in \mathbb{R}^{18 \times 18} \quad (5.16)$$

con  $M_l = \begin{bmatrix} {}^l I_l & O_{[3,3]} \\ O_{[3,3]} & m_l I_{[3,3]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y  ${}^l I_l \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  como la matriz de tensores de inercias del eslabón  $l$ , quedando

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

con

$$\begin{aligned}
m_{11} &= I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3} + m_3(a_1^2 + a_2^2 + e_3^2 + 2a_1a_2c_2 + 2a_1e_3c_{23} + 2a_2e_3c_3) + m_2(a_1^2 + e_2^2 \\
&\quad + 2a_1e_2c_2) + m_1e_1^2 \\
m_{12} &= m_{21} = I_{z_2} + I_{z_3} + m_3(a_2^2 + e_3^2 + a_1a_2c_2 + 2a_2e_3c_3 + a_1e_3c_{23}) + m_2(e_2^2 + a_1e_2c_2) \\
m_{13} &= m_{31} = I_{z_3} + m_3(e_3^2 + a_1e_3c_{23} + a_2e_3c_3) \\
m_{22} &= I_{z_2} + I_{z_3} + m_3(e_3^2 + a_2^2 + 2a_2e_3c_3) + m_2e_2^2 \\
m_{23} &= m_{32} = I_{z_3} + m_3(e_2^2 + a_2e_3c_3) \\
m_{33} &= I_{z_3} + m_3e_3^2,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Además, de la ecuación (4.84), y las expresiones (5.15) y (5.16), se tiene que la matriz de Coriolis está dada por:

$$\bar{C}_q(\mathbf{q}) = \bar{A}^T(M\dot{\bar{A}} + W\bar{M}\bar{A}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

donde  $W = \text{diag}(W_1, W_2, W_3) \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$ , con  $W_l = \begin{bmatrix} S({}^l\boldsymbol{\omega}_l) & O_{[3,3]} \\ O_{[3,3]} & O_{[3,3]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y  ${}^l\boldsymbol{\omega}_l$  para  $l = 1, 2, 3$  está dada por las expresiones (5.9)-(5.11), lo cual desarrollando da:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned}
c_{11} &= -m_3(e_3a_2s_3 + a_1e_3s_{23})\dot{q}_3 - (a_1e_3m_3s_{23} + a_1a_2m_3s_2 + a_1e_2m_2s_2)\dot{q}_2 \\
c_{12} &= -(m_3a_1a_2s_2 + m_3a_1e_3s_{23} + m_2a_1e_2s_2)\dot{q}_1 - (m_3a_1a_2s_2 + m_3a_1e_3s_{23} + m_2a_1e_2s_2)q_2 \\
&\quad - m_3(a_1e_3s_{23} + a_2e_3s_3)q_3 \\
c_{13} &= -m_3(a_1e_3s_{23} + a_2e_3s_3)\dot{q}_1 - m_3(a_1e_3s_{23} + a_2e_3s_3)\dot{q}_2 - m_3(a_1e_3s_{23} + a_2e_3s_3)\dot{q}_3 \\
c_{21} &= (m_3a_1a_2s_2 + m_3a_1e_3s_{23} + m_2a_1e_2s_2)\dot{q}_1 - m_3a_2e_3s_3\dot{q}_3 \\
c_{22} &= m_3a_2e_3s_3\dot{q}_3 \\
c_{23} &= -m_3a_2e_3s_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
c_{31} &= (m_3a_1e_3s_{23} + m_3a_2e_3s_3)\dot{q}_1 + m_3a_2e_3s_3\dot{q}_3 \\
c_{32} &= -m_3a_2e_3s_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
c_{33} &= 0
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Finalmente, de (4.85) y (5.44) se tiene que el vector de gravedad está dado por:

$$\bar{\mathbf{g}}_q(\mathbf{q}) = \bar{A}^T \mathbf{g}_l(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^3,$$

con  $\mathbf{g}_l(\boldsymbol{\rho}) = [ O_{[1,3]} \quad m_l \mathbf{g}_0^T \quad O_{[1,3]} \quad m_l \mathbf{g}_0^T \quad O_{[1,3]} \quad m_l \mathbf{g}_0^T ] \in \mathbb{R}^{18}$ . Lo cual desarrollando da:

$$\mathbf{g}_q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_0 m_1 e_1 s_1 + g_0 m_2 (a_1 s_1 + e_2 s_{12}) + g_0 m_3 (a_1 s_1 + a_2 s_{12} + e_3 s_{123}) \\ g_0 m_2 e_2 s_{12} + g_0 m_3 (a_2 s_{12} + e_3 s_{123}) \\ g_0 m_3 e_3 s_{123} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

## Formulación de Euler-Lagrange

Aplicando la metodología de Euler-Lagrange explicada en la sección 4.4.2, de la expresión (4.93) y las jacobianas geométricas  $J_{G_l}(\mathbf{q})$  y  $K_{G_l}(\mathbf{q})$  dadas en (5.9)-(5.14) para  $l = 1, 2, 3$ , se tiene que la matriz de inercias para el robot serial es:

$$\bar{M}_q(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^3 (m_l J_{G_l}(\mathbf{q})^T J_{G_l}(\mathbf{q}) + K_{G_l}(\mathbf{q})^T I_l K_{G_l}(\mathbf{q}))$$

lo cual desarrollando da (5.17).

Mientras que de (4.94) y (5.17), se tiene que la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis está dada por:

$$\bar{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{M}_q(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \{ \dot{\mathbf{q}}^T M_q(\mathbf{q}) \}$$

lo cual desarrollando da (5.19).

De (4.95) y las expresiones (5.12)-(5.14), el vector de fuerzas gravitacionales por:

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = -\mathbf{g}_0^T \sum_{l=1}^3 m_l J_{G_l}(\mathbf{q})$$

donde  $\mathbf{g}_0 = [ 0 \quad 0 \quad -g_0 ]^T$  es la aceleración debida a la gravedad. Lo cual desarrollando da (5.20).

## Formulación de Hamilton

A través de esta formulación, la matriz de inercias  $M(\mathbf{q})$  puede ser calculada a partir de (4.107) y las jacobianas geométricas  $J_{G_l}(\mathbf{q})$  y  $K_{G_l}(\mathbf{q})$  dadas en (5.9)-(5.14) para  $l = 1, 2, 3$ :

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^3 (m_l J_{G_l}(\mathbf{q})^T J_{G_l}(\mathbf{q}) + K_{G_l}(\mathbf{q})^T I_l K_{G_l}(\mathbf{q})), \quad (5.21)$$

con elementos  $m_{l,j}$  dados en (5.18) y cuya inversa  $M(\mathbf{q})^{-1}$  es:

$$\frac{1}{|M(\mathbf{q})|} \begin{bmatrix} m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32} & -m_{12}m_{33} + m_{13}m_{32} & m_{12}m_{23} - m_{13}m_{22} \\ m_{31}m_{23} - m_{21}m_{33} & -m_{31}m_{13} + m_{11}m_{33} & m_{21}m_{13} - m_{11}m_{23} \\ -m_{31}m_{22} + m_{21}m_{32} & m_{31}m_{12} - m_{11}m_{32} & -m_{21}m_{12} + m_{11}m_{22} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

con

$$|M(\mathbf{q})| = m_{31}m_{12}m_{23} - m_{31}m_{13}m_{22} - m_{21}m_{12}m_{33} + m_{21}m_{13}m_{32} + m_{11}m_{22}m_{33} - m_{11}m_{23}m_{32},$$

y  $m_{ij}$  es el elemento  $(i, j)$  de la matriz de inercias  $M(\mathbf{q})$ .

Derivando (5.21) respecto al tiempo, se tiene que:

$$\dot{M}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \dot{M}(1, 1) & \dot{M}(1, 2) & \dot{M}(1, 3) \\ \dot{M}(2, 1) & \dot{M}(2, 2) & \dot{M}(2, 3) \\ \dot{M}(3, 1) & \dot{M}(3, 2) & \dot{M}(3, 3) \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} \dot{M}(1, 1) &= (Dp_3(m_{11}m_{23} - m_{13}m_{21}) - Dp_2(m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31}) + Dp_1(m_{21}m_{33} \\ &\quad - m_{23}m_{31}))(2a_1e_3m_3 \sin(q_2 + q_3) + 2a_1a_2m_3 \sin(q_2) + 2a_1e_2m_2 \sin(q_2)) \\ &\quad - (2a_1e_3m_3 \sin(q_2 + q_3) + 2a_2e_3m_3 \sin(q_3))(Dp_3(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) \\ &\quad - Dp_2(m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31}) + Dp_1(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})) \\ \dot{M}(1, 2) &= (Dp_3(m_{11}m_{23} - m_{13}m_{21}) - Dp_2(m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31}) + Dp_1(m_{21}m_{33} \\ &\quad - m_{23}m_{31}))(a_1e_3m_3 \sin(q_2 + q_3) + a_1a_2m_3 \sin(q_2) + a_1e_2m_2 \sin(q_2)) \\ &\quad - (a_1e_3m_3 \sin(q_2 + q_3) + 2a_2e_3m_3 \sin(q_3))(Dp_3(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) \\ &\quad - Dp_2(m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31}) + Dp_1(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})) \\ \dot{M}(1, 3) &= a_1e_3m_3 \sin(q_2 + q_3)(Dp_3(m_{11}m_{23} - m_{13}m_{21}) - Dp_2(m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31}) \\ &\quad + Dp_1(m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31})) - (a_1e_3m_3 \sin(q_2 + q_3) \\ &\quad + a_2e_3m_3 \sin(q_3))(Dp_3(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) - Dp_2(m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31}) \\ &\quad + Dp_1(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})) \\ \dot{M}(2, 1) &= (Dp_3(m_{11}m_{23} - m_{13}m_{21}) - Dp_2(m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31}) + Dp_1(m_{21}m_{33} \\ &\quad - m_{23}m_{31}))(a_1e_3m_3 \sin(q_2 + q_3) + a_1a_2m_3 \sin(q_2) + a_1e_2m_2 \sin(q_2)) \\ &\quad - (a_1e_3m_3 \sin(q_2 + q_3) + 2a_2e_3m_3 \sin(q_3))(Dp_3(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) \\ &\quad - Dp_2(m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31}) + Dp_1(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})) \\ \dot{M}(2, 2) &= -2a_2e_3m_3 \sin(q_3)(Dp_3(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) - Dp_2(m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31}) \\ &\quad + Dp_1(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})) \\ \dot{M}(2, 3) &= -a_2e_3m_3 \sin(q_3)(Dp_3(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) - Dp_2(m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +Dp_1(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})) \\
\dot{M}(3, 1) &= a_1e_3m_3 \sin(q_2 + q_3)(Dp_3(m_{11}m_{23} - m_{13}m_{21}) - Dp_2(m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31}) \\
& +Dp_1(m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31})) - (a_1e_3m_3 \sin(q_2 + q_3) \\
& +a_2e_3m_3 \sin(q_3))(Dp_3m_{22} - m_{12}m_{21}) - Dp_2(m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31}) \\
& +Dp_1(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})) \\
\dot{M}(3, 2) &= -a_2e_3m_3 \sin(q_3)(Dp_3(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) - Dp_2(m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31}) \\
& +Dp_1(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})) \\
\dot{M}(3, 3) &= 0
\end{aligned}$$

donde  $D = |M(\mathbf{q})|^{-1}$  y  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  son los componentes del momento generalizado  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ .

Por otro lado, tomando la parcial de  $M^{-1}$  respecto a  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ , se tiene que:

$$\frac{\partial M(\mathbf{q})^{-1}}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \frac{\partial M(\mathbf{q})^{-1}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial M(\mathbf{q})^{-1}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial M(\mathbf{q})^{-1}}{\partial q_3} \right]^T,$$

donde  $\frac{\partial M(\mathbf{q})^{-1}}{\partial q_1} = 0_{[3,3]}$ , los elementos de  $\frac{\partial M(\mathbf{q})^{-1}}{\partial q_2} = M_2^{-1}$  son:

$$\begin{aligned}
M_2^{-1}(1, 1) &= \frac{m_{11}}{D_2} \\
M_2^{-1}(1, 2) &= m_3a_1a_2s_2I_{z_3} + m_2a_1e_2s_2I_{z_3} + a_1a_2s_2m_3^2e_3^2 + m_2a_1e_2s_2m_3e_3^2 + \frac{m_{12}}{D_2} \\
& - a_2c_3m_3^2a_1e_3^2s_{23} \\
M_2^{-1}(1, 3) &= -(m_3a_2s_2I_{z_3} + m_2e_2s_2I_{z_3} + a_2s_2m_3^2e_3^2 - a_2^2m_3^2e_3s_{23} - I_{z_2}m_3e_3s_{23} \\
& + m_2e_2s_2m_3a_2e_3c_3 + m_2e_2s_2m_3e_3^2 - a_2c_3m_3^2e_3^2s_{23} - m_2e_2^2m_3e_3s_{23} \\
& + s_2m_3^2a_2^2e_3c_3)a_1 + \frac{m_{13}}{D_2} \\
M_2^{-1}(2, 2) &= -2m_3a_1a_2s_2I_{z_3} - 2m_2a_1e_2s_2I_{z_3} - 2a_1a_2s_2m_3^2e_3^2 - 2m_2a_1e_2s_2m_3e_3^2 \\
& + 2a_2c_3m_3^2a_1e_3^2s_{23} + 2m_3^2a_1^2e_3^2c_{23}s_{23} + \frac{m_{22}}{D_2} \\
M_2^{-1}(3, 2) &= m_3a_1a_2s_2I_{z_3} + m_2a_1e_2s_2I_{z_3} + a_1a_2s_2m_3^2e_3^2 - a_2^2m_3^2a_1e_3s_{23} - I_{z_2}m_3a_1e_3s_{23} \\
& + m_2a_1e_2s_2m_3e_3^2 - a_2c_3m_3^2a_1e_3^2s_{23} - a_2s_2m_3^2a_1^2e_3c_{23} - a_2c_2m_3^2a_1^2e_3s_{23} \\
& - m_2e_2^2m_3a_1e_3s_{23} + a_1s_2m_3^2a_2^2e_3c_3 - 2m_3^2a_1^2e_3^2c_{23}s_{23} - m_2e_2s_2m_3a_1^2e_3c_{23} \\
& - m_2e_2c_2m_3a_1^2e_3s_{23} + m_2a_1e_2s_2m_3a_2e_3c_3 + \frac{m_{32}}{D_2} \\
M_2^{-1}(3, 3) &= 2a_2s_2m_3^2a_1^2e_3c_{23} + 2a_2c_2m_3^2a_1^2e_3s_{23} + 4m_2e_2m_3a_1^2a_2c_2s_2 + 2m_3^2a_1^2e_3^2c_{23}s_{23} \\
& + 2m_3^2a_1^2a_2^2c_2s_2 + 2m_2^2a_1^2e_2^2c_2s_2 + 2m_2e_2s_2m_3a_1^2e_3c_{23} + 2m_2e_2c_2m_3a_1^2e_3s_{23} \\
& + \frac{m_{33}}{D_2}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
D_2 &= \frac{\partial |M(\mathbf{q})|}{\partial q_2} \\
&= 2m_3^3 a_1^2 e_3^2 c_{23} a_2^2 s_{23} + 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 c_{23} I_{z_2} s_{23} + 2c_2 a_2^2 a_1^2 m_3^2 I_{z_3} s_2 + 2c_2 a_2^2 a_1^2 m_3^3 e_3^2 s_2 \\
&\quad + 2c_2 e_2^2 a_1^2 m_2^2 I_{z_3} s_2 - 2m_3^3 a_1^2 e_3^2 s_{23} c_2 a_2^2 c_3 - 2m_3^3 a_1^2 e_3^2 c_{23} s_2 a_2^2 c_3 + 4c_2 a_2 a_1^2 m_3 e_2 m_2 I_{z_3} s_2 \\
&\quad + 4c_2 a_2 a_1^2 m_3^2 e_2 m_2 e_3^2 s_2 + 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 c_{23} e_2^2 m_2 s_{23} + 2c_2 e_2^2 a_1^2 m_2^2 m_3 e_3^2 s_2 \\
&\quad - 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 s_{23} c_2 e_2 m_2 a_2 c_3 - 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 c_{23} s_2 e_2 m_2 a_2 c_3
\end{aligned}$$

y los elementos de  $\frac{\partial M(\mathbf{q})^{-1}}{\partial q_3} = M_3^{-1}$  son:

$$\begin{aligned}
M_3^{-1}(1, 1) &= 2m_3^2 a_2^2 e_3^2 c_3 s_3 + \frac{m_{11}}{D_3} \\
M_3^{-1}(1, 2) &= -a_2 s_3 m_3^2 a_1 e_3^2 c_{23} - a_2 c_3 m_3^2 a_1 e_3^2 s_{23} - 2m_3^2 a_2^2 e_3^2 c_3 s_3 + \frac{m_{12}}{D_3} \\
M_3^{-1}(1, 3) &= -(-a_2^2 m_3^2 e_3 s_{23} - I_{z_2} m_3 e_3 s_{23} + m_2 e_2 c_2 m_3 a_2 e_3 s_3 - a_2 s_3 m_3^2 e_3^2 c_{23} \\
&\quad - a_2 c_3 m_3^2 e_3^2 s_{23} - m_2 e_2^2 m_3 e_3 s_{23} + c_2 m_3^2 a_2^2 e_3 s_3) a_1 + \frac{m_{13}}{D_3} \\
M_3^{-1}(2, 2) &= 2a_2 s_3 m_3^2 a_1 e_3^2 c_{23} + 2a_2 c_3 m_3^2 a_1 e_3^2 s_{23} + 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 c_{23} s_{23} + 2m_3^2 a_2^2 e_3^2 c_3 s_3 + \frac{m_{22}}{D_3} \\
M_3^{-1}(2, 3) &= -a_2^2 m_3^2 a_1 e_3 s_{23} - I_{z_2} m_3 a_1 e_3 s_{23} + m_3 a_2 e_3 s_3 I_{z_1} + a_2 e_3 s_3 m_3^2 a_1^2 - a_2 s_3 m_3^2 a_1 e_3^2 c_{23} \\
&\quad - a_2 c_3 m_3^2 a_1 e_3^2 s_{23} + m_3 a_2 e_3 s_3 m_2 a_1^2 + m_3 a_2 e_3 s_3 m_1 e_1^2 - a_2 c_2 m_3^2 a_1^2 e_3 s_{23} \\
&\quad - m_2 e_2^2 m_3 a_1 e_3 s_{23} + a_1 c_2 m_3^2 a_2^2 e_3 s_3 - 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 c_{23} s_{23} - m_2 e_2 c_2 m_3 a_1^2 e_3 s_{23} \\
&\quad + m_2 a_1 e_2 c_2 m_3 a_2 e_3 s_3 + \frac{m_{23}}{D_3} \\
M_3^{-1}(3, 3) &= -2m_3 a_2 e_3 s_3 I_{z_1} - 2a_2 e_3 s_3 m_3^2 a_1^2 - 2m_3 a_2 e_3 s_3 m_2 a_1^2 - 2m_3 a_2 e_3 s_3 m_1 e_1^2 \\
&\quad + 2a_2 c_2 m_3^2 a_1^2 e_3 s_{23} + 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 c_{23} s_{23} + 2m_2 e_2 c_2 m_3 a_1^2 e_3 s_{23} + \frac{m_{33}}{D_3}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
D_3 &= \frac{\partial |M(\mathbf{q})|}{\partial q_3} \\
&= 2m_3^3 a_1^2 e_3^2 c_{23} a_2^2 s_{23} + 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 c_{23} I_{z_2} s_{23} + 2I_{z_1} m_3^2 a_2^2 e_3^2 c_3 s_3 + 2m_3^3 a_1^2 a_2^2 e_3^2 c_3 s_3 \\
&\quad - 2m_3^3 a_1^2 e_3^2 s_{23} c_2 a_2^2 c_3 - 2m_3^3 a_1^2 e_3^2 c_{23} c_2 a_2^2 s_3 + 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 c_{23} e_2^2 m_2 s_{23} + 2m_2 a_1^2 m_3^2 a_2^2 e_3^2 c_3 s_3 \\
&\quad + 2m_1 e_1^2 m_3^2 a_2^2 e_3^2 c_3 s_3 - 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 s_{23} c_2 e_2 m_2 a_2 c_3 - 2m_3^2 a_1^2 e_3^2 c_{23} c_2 e_2 m_2 a_2 s_3.
\end{aligned}$$

Ahora, con las expresiones anteriores es posible calcular la matriz de Coriolis, a través de (4.108), (5.21) y (5.22):



$$C(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} c_{11} &= \dot{M}(1, 1) \\ c_{12} &= \dot{M}(1, 2) \\ c_{13} &= \dot{M}(1, 3) \\ c_{21} &= \dot{M}(2, 1) - m_{31}((M_2^{-1}(1, 3)p_1)/2 + (M_2^{-1}(3, 3)p_3)/2) - m_{21}((M_2^{-1}(1, 2)p_1)/2 + \\ &\quad (M_2^{-1}(2, 2)p_2)/2 + (M_2^{-1}(3, 2)p_3)/2) - (M_2^{-1}(1, 1)m_{11}p_1)/2 \\ c_{22} &= \dot{M}(2, 2) - m_{32}((M_2^{-1}(1, 3)p_1)/2 + (M_2^{-1}(3, 3)p_3)/2) - m_{22}((M_2^{-1}(1, 2)p_1)/2 + \\ &\quad (M_2^{-1}(2, 2)p_2)/2 + (M_2^{-1}(3, 2)p_3)/2) - (M_2^{-1}(1, 1)m_{12}p_1)/2 \\ c_{23} &= \dot{M}(2, 3) - m_{33}((M_2^{-1}(1, 3)p_1)/2 + (M_2^{-1}(3, 3)p_3)/2) - m_{23}((M_2^{-1}(1, 2)p_1)/2 + \\ &\quad (M_2^{-1}(2, 2)p_2)/2 + (M_2^{-1}(3, 2)p_3)/2) - (M_2^{-1}(1, 1)m_{13}p_1)/2 \\ c_{31} &= \dot{M}(3, 1) - m_{31}((M_3^{-1}(1, 3)p_1)/2 + (M_3^{-1}(3, 3)p_3)/2) - m_{21}((M_3^{-1}(1, 2)p_1)/2 + \\ &\quad (M_3^{-1}(2, 2)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 2)p_3)/2) - (M_3^{-1}(1, 1)m_{11}p_1)/2 \\ c_{33} &= \dot{M}(3, 2) - m_{32}((M_3^{-1}(1, 3)p_1)/2 + (M_3^{-1}(3, 3)p_3)/2) - m_{22}((M_3^{-1}(1, 2)p_1)/2 + \\ &\quad (M_3^{-1}(2, 2)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 2)p_3)/2) - (M_3^{-1}(1, 1)m_{12}p_1)/2 \\ c_{34} &= \dot{M}(3, 3) - m_{33}((M_3^{-1}(1, 3)p_1)/2 + (M_3^{-1}(3, 3)p_3)/2) - m_{23}((M_3^{-1}(1, 2)p_1)/2 + \\ &\quad (M_3^{-1}(2, 2)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 2)p_3)/2) - (M_3^{-1}(1, 1)m_{13}p_1)/2. \end{aligned}$$

Por otro lado,  $-\mathbf{g}_0^T \sum_{l=1}^3 m_l J_{G_l}(\mathbf{q})$  está dado en (5.20). Como fueron seleccionadas coordenadas mínimas, el último término de (4.105) no existe.

## Formulación de Kane

Aplicando la metodología de Kane explicada en la sección 4.4.4, de la ecuación (4.120) y las expresiones (5.12)-(5.14), se llega, para robots seriales, al igual que con la metodología de Euler-Lagrange, a que  $M_q(\mathbf{q})$  está dada por:

$$M_q(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^3 (m_l \bar{J}_{G_l}(\mathbf{q})^T \bar{J}_{G_l}(\mathbf{q}) + \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q})^T I_l \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q})), \quad (5.23)$$

donde los elementos de  $M(\mathbf{q})$  pueden encontrarse en (5.18).

Además, de la ecuación (5.23), y las expresiones (5.12)-(5.14), se tiene que la matriz

de Coriolis está dada por:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{l=1}^3 \left( m_l \bar{J}_{G_l}^T \dot{J}_{G_l} + \bar{K}_{G_l}^T (S({}^l\boldsymbol{\omega}_l)^l I_l \bar{K}_{G_l} + I_l \dot{\bar{K}}_{G_l}) \right) \quad (5.24)$$

y como para este robot  $\bar{K}_{G_l}^T (S({}^l\boldsymbol{\omega}_l)^l I_l \bar{K}_{G_l} + I_l \dot{\bar{K}}_{G_l}) = 0$  para toda  $l$ , entonces:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{l=1}^3 \left( m_l \bar{J}_{G_l}^T \dot{J}_{G_l} \right) \quad (5.25)$$

donde los elementos de  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  pueden encontrarse en (5.19).

Finalmente, el vector de fuerzas gravitacionales está dado por (4.122) y (5.20), y ya que para este robot  $\bar{J}_{G_l} = J_{G_l}$ , el vector de fuerzas gravitacionales, al igual que con la metodología de E-L, es (5.20).

## 5.2 Aplicación a un mecanismo de cinco barras

### 5.2.1 Descripción geométrica del robot

En esta sección se abordará la cinemática de un robot paralelo de 2 gdl conocido como mecanismo de cinco barras, el cual puede apreciarse en la figura 5.2 y se encuentra en el laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de la Laguna. A continuación se describen los puntos y marcos que fueron asociados a los cuerpos rígidos que conforman el robot, los cuales son útiles en la obtención del modelo cinemático de éste.

A la base del robot se le asoció el marco  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , como se muestra en la figura 5.2. Para obtener la postura de cada uno de los eslabones que componen el robot, a cada eslabón  $l$  se asignó el punto  $C_l$  en su centro de masa.

La nomenclatura empleada en esta subsección es la siguiente:

$l_l$  : Longitud del eslabón  $l$ .

$l_{c_l}$  : Distancia del origen del marco  $\Sigma_l(X_l, Y_l, Z_l)$ , al centro de masa  $C_l$  del eslabón  $l$ .

$r_{02}$  : Distancia del origen del marco  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , al origen del marco  $\Sigma_2(X_2, Y_2, Z_2)$ .

Las coordenadas generalizadas mínimas seleccionadas para modelar el sistema están dadas por:

$$\mathbf{q} = [ q_1 \quad q_2 ] \in \mathbb{R}^2,$$

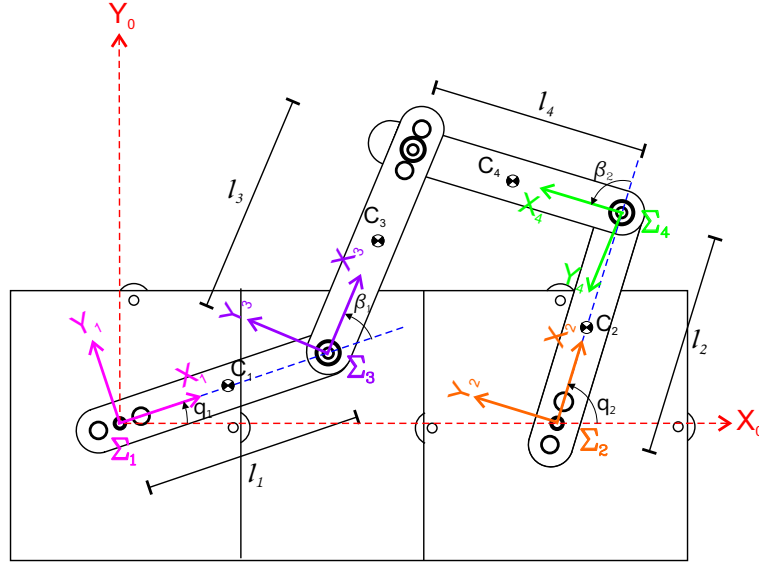


Figura 5.2: Marcos asociados a los eslabones del mecanismo de cinco barras

donde  $q_1$  es la variable articular medida del eje  $X_0$  al eje  $X_1$ , y  $q_2$  es la variable articular medida del eje  $X_0$  al eje  $X_2$ . Mientras que las coordenadas generalizadas no mínimas seleccionadas están dadas por:

$$\boldsymbol{\rho} = [ q_1 \quad q_2 \quad \beta_1 \quad \beta_2 ] \in \mathbb{R}^4,$$

donde  $\beta_1$  es la variable articular medida del eje  $X_1$  al eje  $X_3$ , y  $\beta_2$  es la variable articular medida del eje  $X_2$  al eje  $X_4$ , sujetas a las restricciones:

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_3 \cos(q_1 + \beta_1) - l_2 \cos(q_2) - l_4 \cos(q_2 + \beta_2) - r_{02} \\ l_1 \sin(q_1) + l_3 \sin(q_1 + \beta_1) - l_2 \sin(q_2) - l_4 \sin(q_2 + \beta_2) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

Además, de la restricción (5.26) y la definición de derivada implícita, es posible derivar respecto al tiempo (5.26):

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0},$$

donde  $\boldsymbol{\beta} = [ \beta_1 \quad \beta_2 ]^T$ ; luego, despejando  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  queda:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\beta}}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}},$$

de modo que ya es posible encontrar la relación entre  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = A(\boldsymbol{\rho})\dot{\mathbf{q}}$$

donde

$$A(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} I_{[2]} \\ -\frac{\partial\gamma(\boldsymbol{\rho})}{\partial\boldsymbol{\beta}}^{-1} \frac{\partial\gamma(\boldsymbol{\rho})}{\partial\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

con  $a_{11} = -\frac{\sin(q_1 - q_2 - \beta_2)}{\sin(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)} - 1$ ,  $a_{12} = -\frac{\sin(\beta_2)}{\sin(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)}$ ,  $a_{21} = \frac{\sin(\beta_1)}{\sin(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)} - 1$  y  $a_{22} = -\frac{\sin(q_1 - q_2 + \beta_1)}{\sin(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)} - 1$ . Esta matriz, aquí nombrada matriz de proyección, será de utilidad para definir la cinemática de velocidad de cada cuerpo rígido que conforma el robot.

### 5.2.2 Cálculo de la postura de cada cuerpo rígido

La postura del eslabón 1 queda especificada por el vector de posición  $\mathbf{p}_1$  del punto  $C_1$  y la matriz de rotación  ${}^0R_1$  que da la orientación del marco  $\Sigma_1(X_1, Y_1, Z_1)$ , respecto al marco inercial  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , como:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} l_{c_1} \cos(q_1) \\ l_{c_1} \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^0R_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

De manera análoga al eslabón 3, la postura del eslabón 2 queda especificada por el vector de posición  $\mathbf{p}_2$  del punto  $C_2$  y la matriz de rotación  ${}^0R_2$  que da la orientación del marco  $\Sigma_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , respecto al marco inercial  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , como:

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} l_{c_2} \cos(q_2) + r_{12} \\ l_{c_2} \text{sen}(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^0R_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

donde  $r_{12}$  es la distancia entre los orígenes de los marcos  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ .

Así mismo, la postura del eslabón 3 queda especificada por el vector de posición  $\mathbf{p}_3$  del punto  $C_3$  y la matriz de rotación  ${}^0R_3$  que da la orientación del marco  $\Sigma_3(X_3, Y_3, Z_3)$ , respecto al marco inercial  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , como:

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} l_{c_1} \cos(q_1) + l_{c_3} \cos(q_1 + \beta_1) \\ l_{c_1} \text{sen}(q_1) + l_{c_3} \text{sen}(q_1 + \beta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^0R_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + \beta_1) & -\text{sen}(q_1 + \beta_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1 + \beta_1) & \cos(q_1 + \beta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

De manera analoga al eslabón 1, la postura del eslabón 4 queda especificada por el vector de posición  $\mathbf{p}_4$  del punto  $C_4$  y la matriz de rotación  ${}^0R_4$  que da la orientación del marco  $\Sigma_4(X_4, Y_4, Z_4)$  respecto al marco inercial  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , como:

$$\mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} l_{c_2} \cos(q_2) - l_{c_4} \cos(q_2 + \beta_2) \\ l_{c_2} \sin(q_2) - l_{c_4} \sin(q_2 + \beta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^0R_4 = \begin{bmatrix} \cos(q_2 + \beta_2) & -\sin(q_2 + \beta_2) & 0 \\ \sin(q_2 + \beta_2) & \cos(q_2 + \beta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

### 5.2.3 Cálculo de la velocidad lineal y angular de cada cuerpo rígido

De (4.65), (4.67) y (5.28) se tiene que, empleando velocidades generalizadas no mínimas, la velocidad lineal y angular del eslabón 1 pueden ser especificadas a través de:

$$\mathbf{v}_1 = J_{G_1} \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} -l_{c_1} \sin(q_1) & 0 & 0 & 0 \\ l_{c_1} \cos(q_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \quad \text{y} \quad {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = K_{G_1} \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}, \quad (5.32)$$

o bien, a partir de (5.27) y (5.32) a través de velocidades generalizadas mínimas como:

$$\mathbf{v}_1 = \bar{J}_{G_1} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_{c_1} \sin(q_1) & 0 \\ l_{c_1} \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{y} \quad {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \bar{K}_{G_1} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (5.33)$$

De (4.65), (4.67) y (5.29) se tiene que, empleando velocidades generalizadas no mínimas, la velocidad lineal y angular del eslabón 2 pueden ser especificadas a través de:

$$\mathbf{v}_2 = J_{G_2} \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & -l_{c_2} \sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & l_{c_2} \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \quad \text{y} \quad {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = K_{G_2} \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}, \quad (5.34)$$

o bien, a partir de (5.27) y (5.34) a través de velocidades generalizadas mínimas como:

$$\mathbf{v}_2 = \bar{J}_{G_2} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & -l_{c_2} \sin(q_2) \\ 0 & l_{c_2} \cos(q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{y} \quad {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \bar{K}_{G_2} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (5.35)$$

De (4.65), (4.67) y (5.30) se tiene que, empleando velocidades generalizadas no mínimas, la velocidad lineal y angular del eslabón 2 pueden ser especificadas a través de:

$$\mathbf{v}_2 = J_{G_2} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_{c_3} \sin(q_1 + \beta_1) & 0 & -l_{c_3} \sin(q_1 + \beta_1) & 0 \\ l_1 \cos(q_1) + l_{c_3} \cos(q_1 + \beta_1) & 0 & l_{c_3} \cos(q_1 + \beta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (5.36)$$

y

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = K_{G_2} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (5.37)$$

o bien, a partir de (5.27), (5.36) y (5.37) a través de velocidades generalizadas mínimas como:

$$\mathbf{v}_2 = \bar{J}_{G_2} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_{c_1} \sin(q_1) - l_{c_3} \sin(q_1 + \beta_1)(1 + a_{11}) & -l_{c_3} \sin(q_1 + \beta_1) a_{12} \\ -l_{c_1} \cos(q_1) - l_{c_3} \cos(q_1 + \beta_1)(1 + a_{11}) & l_{c_3} \cos(q_1 + \beta_1) a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.38)$$

y

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \bar{K}_{G_2} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 + a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (5.39)$$

De (4.65), (3.24) y (5.31) se tiene que, empleando velocidades generalizadas no mínimas, la velocidad lineal y angular del eslabón 4 pueden ser especificadas a través de:

$$\mathbf{v}_4 = J_{G_4} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 0 & -l_2 \sin(q_2) - l_{c_4} \sin(q_2 + \beta_2) & 0 & -l_{c_4} \sin(q_2 + \beta_2) \\ 0 & l_2 \cos(q_2) + l_{c_4} \cos(q_2 + \beta_2) & 0 & l_{c_4} \cos(q_2 + \beta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (5.40)$$

y

$${}^4\boldsymbol{\omega}_4 = K_{G_4} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (5.41)$$

o bien, a partir de (5.27), (5.40) y (5.41) a través de velocidades generalizadas mínimas como:

$$\mathbf{v}_4 = \bar{J}_{G_4} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_{c_4} \sin(q_2 + \beta_2) a_{21} & -l_2 \sin(q_2) - l_{c_4} \sin(q_2 + \beta_2)(1 + a_{22}) \\ l_{c_4} \cos(q_2 + \beta_2) a_{21} & l_2 \cos(q_2) + l_{c_4} \cos(q_2 + \beta_2)(1 + a_{22}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.42)$$

y

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \bar{K}_{G_2} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (5.43)$$

## 5.2.4 Modelado dinámico

En esta subsección se explicará cómo obtener el modelo dinámico del mecanismo de cinco barras (M5B) a partir de la información expuesta en la subsección anterior, y la metodología de la sección 4.4. Las masa de cada eslabón  $l$  es nombrada aquí como  $m_l$ , mientras que el tensor de inercia  ${}^lI_l$  está calculado respecto a un marco orientado igual que  $\Sigma_l$ , pero cuyo origen se encuentra en el centro de masa del cuerpo  $l$ . Por simplicidad se consideró que los tensores de inercia  ${}^lI_l$  de cada eslabón  $l$  que conforman el robot son matrices diagonales, es decir  ${}^lI_l = \text{diag}\{I_{x_l}, I_{y_l}, I_{z_l}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

### Formulación de Newton-Euler

A partir de la ecuación (4.83) y las expresiones (5.33), (5.35), (5.38), (5.42) y (5.43) es posible obtener  $\bar{M}_q(\mathbf{q})$  a partir de:

$$\bar{M}_q(\mathbf{q}) = \bar{A}^T M \bar{A} \in \mathbb{R}^{24 \times 24},$$

donde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{G1}^T & \bar{J}_{G1}^T & \bar{K}_{G2}^T & \bar{J}_{G2}^T & \bar{K}_{G3}^T & \bar{J}_{G3}^T & \bar{K}_{G4}^T & \bar{J}_{G4}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 24} \quad (5.44)$$

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, M_3, M_4) \in \mathbb{R}^{24 \times 24} \quad (5.45)$$

con  $M_l = \begin{bmatrix} {}^lI_l & O_{[3,3]} \\ O_{[3,3]} & m_l I_{[3]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ . Desarrollando queda:

$$\bar{M}_q(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)^2} \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} \\ \bar{m}_{21} & \bar{m}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{m}_{11} = & m_3 L_1^2 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)^2 - m_3 L_1 l_{c3} \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)^2 + m_3 L_1 l_{c3} \text{sen}(\beta_1)^2 \\ & - m_3 L_1 l_{c3} \text{sen}(q_1 - q_2 - \beta_2)^2 + m_1 l_{c1}^2 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)^2 + m_3 l_{c3}^2 \text{sen}(q_1 - q_2 \\ & - \beta_2)^2 + m_4 l_{c4}^2 \text{sen}(\beta_1)^2 + I_1 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)^2 + I_4 \text{sen}(\beta_1)^2 + I_3 \text{sen}(q_1 - q_2 \\ & - \beta_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_{12} = & I_3 \text{sen}(\beta_2) \text{sen}(q_1 - q_2 - \beta_2) - I_4 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1) \text{sen}(\beta_1) - l_{c4}^2 m_4 \text{sen}(q_1 - q_2 \\ & + \beta_1) \text{sen}(\beta_1) + l_{c3}^2 m_3 \text{sen}(\beta_2) \text{sen}(q_1 - q_2 - \beta_2) - L_1 l_{c3} m_3 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 \\ & - \beta_2) \cos(q_1 + \beta_1) \cos(q_1) \text{sen}(\beta_2) + L_2 l_{c4} m_4 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2) \cos(q_2 \\ & + \beta_2) \cos(q_2) \text{sen}(\beta_1) - L_1 l_{c3} m_3 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2) \text{sen}(q_1 + \beta_1) \text{sen}(q_1) \text{sen}(\beta_2) \\ & + L_2 l_{c4} m_4 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2) \text{sen}(q_2 + \beta_2) \text{sen}(q_2) \text{sen}(\beta_1) \end{aligned}$$

$$\bar{m}_{21} = I_3 \text{sen}(\beta_2) \text{sen}(q_1 - q_2 - \beta_2) - I_4 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1) \text{sen}(\beta_1) - l_{c4}^2 m_4 \text{sen}(q_1 - q_2$$

$$\begin{aligned}
& +\beta_1)\text{sen}(\beta_1) + l_{c3}^2 m_3 \text{sen}(\beta_2) \text{sen}(q_1 - q_2 - \beta_2) - L_1 l_{c3} m_3 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 \\
& - \beta_2) \cos(q_1 + \beta_1) \cos(q_1) \text{sen}(\beta_2) + L_2 l_{c4} m_4 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2) \cos(q_2 \\
& + \beta_2) \cos(q_2) \text{sen}(\beta_1) - L_1 l_{c3} m_3 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2) \text{sen}(q_1 + \beta_1) \text{sen}(q_1) \text{sen}(\beta_2) \\
& + L_2 l_{c4} m_4 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2) \text{sen}(q_2 + \beta_2) \text{sen}(q_2) \text{sen}(\beta_1) \\
\bar{m}_{22} = & m_4 L_2^2 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)^2 - m_4 L_2 l_{c4} \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)^2 - m_4 L_2 l_{c4} \text{sen}(q_1 \\
& - q_2 + \beta_1)^2 + m_4 L_2 l_{c4} \text{sen}(\beta_2)^2 + m_2 l_{c2}^2 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)^2 + m_3 l_{c3}^2 \text{sen}(\beta_2)^2 \\
& + m_4 l_{c4}^2 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1)^2 + I_2 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)^2 + I_4 \text{sen}(q_1 - q_2 + \beta_1)^2 \\
& + I_3 \text{sen}(\beta_2)^2
\end{aligned}$$

Además, de la ecuación (4.84), y las expresiones (5.44) y (5.45), se tiene que la matriz de Coriolis está dada por:

$$\bar{C}_q(\boldsymbol{\rho}) = \bar{A}^T (M \dot{\bar{A}} + W M \bar{A}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

donde  $W = \text{diag}(W_1, W_2, W_3, W_4) \in \mathbb{R}^{24 \times 24}$ , con  $W_l = \begin{bmatrix} S({}^l \boldsymbol{\omega}_l) & O_{[3,3]} \\ O_{[3,3]} & O_{[3,3]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y  ${}^l \boldsymbol{\omega}_l$  para  $l = 1, 2, 3, 4$  dada por las expresiones (5.33), (5.35), (5.38) y (5.43). Lo cual desarrollando queda:

$$\bar{C}_q(\boldsymbol{\rho}) = O_{[2,2]} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (5.47)$$

Finalmente, de (4.85) y (5.44) se tiene que el vector de gravedad está dado por:

$$\bar{\mathbf{g}}_q(\boldsymbol{\rho}) = \bar{A}^T \mathbf{g}_\rho(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^2,$$

con  $\mathbf{g}_\rho = [O_{[1,3]} \quad m_1 \mathbf{g}_0^T \quad O_{[1,3]} \quad m_2 \mathbf{g}_0^T \quad O_{[1,3]} \quad m_3 \mathbf{g}_0^T \quad O_{[1,3]} \quad m_4 \mathbf{g}_0^T] \in \mathbb{R}^{24}$ . Lo cual desarrollando queda:

$$\bar{\mathbf{g}}_q(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2. \quad (5.48)$$

## Formulación de Euler-Lagrange

Aplicando la metodología de Euler-Lagrange explicada en la subsección 4.4.2, de la expresión (4.93) y las jacobianas geométricas  $J_{G_l}(\boldsymbol{\rho})$  y  $K_{G_l}(\boldsymbol{\rho})$  dadas en (5.32), (5.34), (5.36), (5.37), (5.40), (5.41) se tiene que la matriz de inercias para este mecanismo es:

$$M_\rho(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{l=1}^4 (m_l J_{G_l}(\boldsymbol{\rho})^T J_{G_l}(\boldsymbol{\rho}) + K_{G_l}(\boldsymbol{\rho})^T I_l K_{G_l}(\boldsymbol{\rho})) \quad (5.49)$$



$$= \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & m_{24} \\ m_{31} & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & m_{42} & 0 & m_{44} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_3 (L_1^2 + l_{c3}^2 + 2L_1 l_{c3} \cos(\beta_1)) + I_1 + I_3, \\ m_{13} &= m_{31} = m_3 (l_{c3}^2 + L_1 l_{c3} \cos(\beta_1)) + I_3, \\ m_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + m_4 (L_2^2 + l_{c4}^2 + 2L_2 l_{c4} \cos(\beta_2)) + I_2 + I_4, \\ m_{24} &= m_{42} = m_4 (l_{c4}^2 + L_2 l_{c4} \cos(\beta_2)) + I_4, \\ m_{33} &= m_3 l_{c3}^2 + I_3, \\ m_{44} &= m_4 l_{c4}^2 + I_4; \end{aligned} \quad (5.50)$$

Mientras que de (4.94) y (5.50), se tiene que la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis está dada por:

$$C_\rho(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \dot{M}_\rho(\boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} (\dot{\boldsymbol{\rho}}^T M_\rho(\boldsymbol{\rho})) \quad (5.51)$$

donde

$$C_\rho(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & c_{24} \\ c_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

con  $c_{11} = -c_{31} = -m_3 L_1 l_{c3} \sin(\beta_1) \dot{\beta}_1$ ,  $c_{13} = -m_3 L_1 l_{c3} \sin(\beta_1) (\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1)$ ,  $c_{22} = -c_{42} = -m_4 L_2 l_{c4} \sin(\beta_2) \dot{\beta}_2$  y  $c_{24} = -m_4 L_2 l_{c4} \sin(\beta_2) (\dot{q}_2 + \dot{\beta}_2)$ .

Por otra parte, de (4.95) y las expresiones (5.32),(5.34),(5.36) y (5.40), el vector de fuerzas gravitacionales está dado por:

$$\mathbf{g}_\rho(\boldsymbol{\rho}) = -\mathbf{g}_0^T \sum_{l=1}^4 m_l J_{G_l}(\boldsymbol{\rho}) \quad (5.53)$$

donde  $\mathbf{g}_0 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  es la aceleración debida a la gravedad. Al final queda  $\mathbf{g}_\rho(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$  porque el mecanismo se mueve en un plano horizontal.

Finalmente, el modelo reducido del sistema extendido está dado por la expresión (4.97), la matriz  $A(\boldsymbol{\rho})$  dada en (5.27) y las expresiones dadas en (5.50), (5.51) y (5.53), quedando (5.46),(5.47) y (5.48).

## Formulación de Hamilton

A través de esta formulación, la matriz de inercias  $M(\mathbf{q})$  puede ser calculada a partir de (4.107) y las jacobianas geométricas  $J_{G_l}(\mathbf{q})$  y  $K_{G_l}(\mathbf{q})$  dadas en (5.32),(5.34),(5.36), (5.37), (5.40), (5.41) para  $l = 1, 2, 3, 4$ :

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^4 (m_l J_{G_l}(\mathbf{q})^T J_{G_l}(\mathbf{q}) + K_{G_l}(\mathbf{q})^T I_l K_{G_l}(\mathbf{q})), \quad (5.54)$$

con elementos  $m_{i,j}$  dados en (5.50) y cuya inversa es:

$$M(\mathbf{q})^{-1} = \begin{bmatrix} m_{33}/d_1 & 0 & -m_{13}/d_1 & 0 \\ 0 & m_{44}/d_2 & 0 & -m_{24}/d_2 \\ -m_{31}/d_1 & 0 & 1/d_1 m_{11} & 0 \\ 0 & -m_{42}/d_2 & 0 & 1/d_2 m_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

donde  $d_1 = -m_{31}m_{13} + m_{11}m_{33}$  y  $d_2 = m_{44}m_{22} - m_{42}m_{24}$ .

Derivando respecto al tiempo (5.54), se tiene:

$$\dot{M}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_\rho) = \begin{bmatrix} \dot{M}(1,1) & \dot{M}(1,2) & \dot{M}(1,3) & \dot{M}(1,4) \\ \dot{M}(2,1) & \dot{M}(2,2) & \dot{M}(2,3) & \dot{M}(2,4) \\ \dot{M}(3,1) & \dot{M}(3,2) & \dot{M}(3,3) & \dot{M}(3,4) \\ \dot{M}(4,1) & \dot{M}(4,2) & \dot{M}(4,3) & \dot{M}(4,4) \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} \dot{M}(1,1) &= -((m_{11}p_3)/(d(m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31})) - (m_{31}p_1)/(d(m_{11}m_{33} \\ &\quad - m_{13}m_{31}))) (2l_{c3}m_3 \sin(q_1 + q_3)(l_{c3} \cos(q_1 + q_3) + L_1 \cos(q_1)) - 2l_{c3}m_3 \cos(q_1 \\ &\quad + q_3)(l_{c3} \sin(q_1 + q_3) + L_1 \sin(q_1))) \end{aligned}$$

$$\dot{M}(1,2) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{M}(1,3) &= -((m_{11}p_3)/(d(m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31})) - (m_{31}p_1)/(d(m_{11}m_{33} \\ &\quad - m_{13}m_{31}))) (l_{c3}m_3 \sin(q_1 + q_3)(l_{c3} \cos(q_1 + q_3) + L_1 \cos(q_1)) - l_{c3}m_3 \cos(q_1 \\ &\quad + q_3)(l_{c3} \sin(q_1 + q_3) + L_1 \sin(q_1))) \end{aligned}$$

$$\dot{M}(1,4) = 0$$

$$\dot{M}(2,1) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{M}(2,2) &= -((m_{22}p_4)/(d(m_{22}m_{44} - m_{24}m_{42})) - (m_{42}p_2)/(d(m_{22}m_{44} \\ &\quad - m_{24}m_{42}))) (2l_{c4}m_4 \sin(q_2 + q_4)(l_{c4} \cos(q_2 + q_4) + L_2 \cos(q_2)) - 2l_{c4}m_4 \cos(q_2 \\ &\quad + q_4)(l_{c4} \sin(q_2 + q_4) + L_2 \sin(q_2))) \end{aligned}$$

$$\dot{M}(2,3) = 0$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}(2, 4) &= -((m_{22}p_4)/(d(m_{22}m_{44} - m_{24}m_{42})) - (m_{42}p_2)/(d(m_{22}m_{44} \\
&\quad - m_{24}m_{42}))) (l_{c4}m_4 \sin(q_2 + q_4)(l_{c4} \cos(q_2 + q_4) + L_2 \cos(q_2)) - l_{c4}m_4 \cos(q_2 \\
&\quad + q_4)(l_{c4} \sin(q_2 + q_4) + L_2 \sin(q_2))) \\
\dot{M}(3, 1) &= -((m_{11}p_3)/(d(m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31})) - (m_{31}p_1)/(d(m_{11}m_{33} \\
&\quad - m_{13}m_{31}))) (l_{c3}m_3 \sin(q_1 + q_3)(l_{c3} \cos(q_1 + q_3) + L_1 \cos(q_1)) - l_{c3}m_3 \cos(q_1 \\
&\quad + q_3)(l_{c3} \sin(q_1 + q_3) + L_1 \sin(q_1))) \\
\dot{M}(3, 2) &= 0 \\
\dot{M}(3, 3) &= 0 \\
\dot{M}(3, 4) &= 0 \\
\dot{M}(4, 1) &= 0 \\
\dot{M}(4, 2) &= -((m_{22}p_4)/(d(m_{22}m_{44} - m_{24}m_{42})) - (m_{42}p_2)/(d(m_{22}m_{44} \\
&\quad - m_{24}m_{42}))) (l_{c4}m_4 \sin(q_2 + q_4)(l_{c4} \cos(q_2 + q_4) + L_2 \cos(q_2)) - l_{c4}m_4 \cos(q_2 \\
&\quad + q_4)(l_{c4} \sin(q_2 + q_4) + L_2 \sin(q_2))) \\
\dot{M}(4, 3) &= 0 \\
\dot{M}(4, 4) &= 0
\end{aligned}$$

donde  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  son elementos del vector de momentos generalizados  $\mathbf{p}_\rho \in \mathbb{R}^4$ .

Por otro lado, tomando la parcial de  $M^{-1}$  respecto a  $\boldsymbol{\rho} = [q_1 \ q_2 \ \beta_1 \ \beta_2]^T \in \mathbb{R}^4$ , se tiene que:

$$\left[ \frac{\partial M(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial M(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial M(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial \beta_1} \quad \frac{\partial M(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial \beta_2} \right]^T, \quad (5.56)$$

donde  $\frac{\partial M(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial q_1} = \frac{\partial M(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial q_2} = 0_{4 \times 4}$  y los elementos de  $\frac{\partial M(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial \beta_1} = M_3^{-1}$  y  $\frac{\partial M(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial \beta_2} = M_4^{-1}$  son cero, excepto:

$$\begin{aligned}
M_3^{-1}(1, 1) &= -2(l_{c3}^2 m_3 + I_3)/(l_{c3}^2 m_3 l_{c1}^2 m_1 + l_{c3}^2 m_3^2 L_1^2 + l_{c3}^2 m_3 I_1 + I_3 l_{c1}^2 m_1 + I_3 m_3 L_1^2 \\
&\quad + I_3 I_1 - m_3^2 c_3^2 l_{c3}^2 L_1^2)^2 m_3^2 c_3 l_{c3}^2 L_1^2 s_3 \\
M_3^{-1}(1, 2) &= m_3 s_3 l_{c3} L_1 / (l_{c3}^2 m_3 l_{c1}^2 m_1 + l_{c3}^2 m_3^2 L_1^2 + l_{c3}^2 m_3 I_1 + I_3 l_{c1}^2 m_1 + I_3 m_3 L_1^2 + I_3 I_1 \\
&\quad - m_3^2 c_3^2 l_{c3}^2 L_1^2) + 2(l_{c3}^2 m_3 + m_3 c_3 l_{c3} L_1 + I_3) / (l_{c3}^2 m_3 l_{c1}^2 m_1 + l_{c3}^2 m_3^2 L_1^2 + l_{c3}^2 m_3 I_1 \\
&\quad + I_3 l_{c1}^2 m_1 + I_3 m_3 L_1^2 + I_3 I_1 - m_3^2 c_3^2 l_{c3}^2 L_1^2)^2 m_3^2 c_3 l_{c3}^2 L_1^2 s_3 \\
M_3^{-1}(1, 3) &= M_3^{-1}(3, 1) \\
M_3^{-1}(3, 3) &= -2 / (l_{c3}^2 m_3 l_{c1}^2 m_1 + l_{c3}^2 m_3^2 L_1^2 + l_{c3}^2 m_3 I_1 + I_3 l_{c1}^2 m_1 + I_3 m_3 L_1^2 + I_3 I_1 \\
&\quad - m_3^2 c_3^2 l_{c3}^2 L_1^2)^2 (l_{c1}^2 m_1 + m_3 L_1^2 + l_{c3}^2 m_3 + 2m_3 c_3 l_{c3} L_1 + I_1 + I_3) m_3^2 c_3 l_{c3}^2 L_1^2 s_3 \\
&\quad - 2m_3 s_3 l_{c3} L_1 / (l_{c3}^2 m_3 l_{c1}^2 m_1 + l_{c3}^2 m_3^2 L_1^2 + l_{c3}^2 m_3 I_1 + I_3 l_{c1}^2 m_1 + I_3 m_3 L_1^2 + I_3 I_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m_3^2 c_3^2 l_{c_3}^2 L_1^2) \\
M_4^{-1}(2, 2) &= -2(l_{c_4}^2 m_4 + I_4)/(l_{c_4}^2 m_4 l_{c_2}^2 m_2 + l_{c_4}^2 m_4^2 L_2^2 + l_{c_4}^2 m_4 I_2 + I_4 l_{c_2}^2 m_2 + I_4 m_4 L_2^2 \\
& + I_4 I_2 - m_4^2 c_4^2 l_{c_4}^2 L_2^2)^2 m_4^2 c_4 l_{c_4}^2 L_2^2 s_4 \\
M_4^{-1}(2, 4) &= m_4 s_4 l_{c_4} L_2 / (l_{c_4}^2 m_4 l_{c_2}^2 m_2 + l_{c_4}^2 m_4^2 L_2^2 + l_{c_4}^2 m_4 I_2 + I_4 l_{c_2}^2 m_2 + I_4 m_4 L_2^2 + I_4 I_2 \\
& - m_4^2 c_4^2 l_{c_4}^2 L_2^2) + 2(l_{c_4}^2 m_4 + m_4 c_4 l_{c_4} L_2 + I_4) / (l_{c_4}^2 m_4 l_{c_2}^2 m_2 + l_{c_4}^2 m_4^2 L_2^2 \\
& + l_{c_4}^2 m_4 I_2 + I_4 l_{c_2}^2 m_2 + I_4 m_4 L_2^2 + I_4 I_2 - m_4^2 c_4^2 l_{c_4}^2 L_2^2)^2 m_4^2 c_4 l_{c_4}^2 L_2^2 s_4 \\
M_4^{-1}(4, 2) &= M_4^{-1}(2, 4) \\
M_4^{-1}(4, 4) &= -2/(l_{c_4}^2 m_4 l_{c_2}^2 m_2 + l_{c_4}^2 m_4^2 L_2^2 + l_{c_4}^2 m_4 I_2 + I_4 l_{c_2}^2 m_2 + I_4 m_4 L_2^2 + I_4 I_2 \\
& - m_4^2 c_4^2 l_{c_4}^2 L_2^2)^2 (l_{c_2}^2 m_2 + m_4 L_2^2 + l_{c_4}^2 m_4 + 2m_4 c_4 l_{c_4} L_2 + I_2 + I_4) m_4^2 c_4 l_{c_4}^2 L_2^2 s_4 \\
& - 2m_4 s_4 l_{c_4} L_2 / (l_{c_4}^2 m_4 l_{c_2}^2 m_2 + l_{c_4}^2 m_4^2 L_2^2 + l_{c_4}^2 m_4 I_2 + I_4 l_{c_2}^2 m_2 + I_4 m_4 L_2^2 \\
& + I_4 I_2 - m_4^2 c_4^2 l_{c_4}^2 L_2^2)
\end{aligned}$$

Ahora, con las expresiones anteriores es posible calcular la matriz de Coriolis, a través de (4.108), (5.54) y (5.55):

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{p}_\rho) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \dot{M}_{11} \\
c_{12} &= 0 \\
c_{13} &= \dot{M}_{13} \\
c_{14} &= 0 \\
c_{21} &= 0 \\
c_{22} &= \dot{M}_{22} \\
c_{23} &= 0 \\
c_{24} &= \dot{M}_{24} \\
c_{31} &= \dot{M}_{31} - m_{11}((M_3^{-1}(1, 1)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 1)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 1)p_3)/2 \\
& + (M_3^{-1}(4, 1)p_4)/2) - m_{31}((M_3^{-1}(1, 3)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 3)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 3)p_3)/2 \\
& + (M_3^{-1}(4, 3)p_4)/2) \\
c_{32} &= -m_{22}((M_3^{-1}(1, 2)p_1)/2 + (M_2^{-1}2_3 p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 2)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 2)p_4)/2) \\
& - m_{42}((M_3^{-1}(1, 4)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 4)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 4)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 4)p_4)/2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{33} &= \dot{M}_{33} - m_{13}((M_3^{-1}(1,1)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2,1)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3,1)p_3)/2 \\
&\quad + (M_3^{-1}(4,1)p_4)/2) - m_{33}((M_3^{-1}(1,3)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2,3)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3,3)p_3)/2 \\
&\quad + (M_3^{-1}(4,3)p_4)/2) \\
c_{34} &= -m_{24}((M_3^{-1}(1,2)p_1)/2 + (M_2^{-1}2_3p_2)/2 + (M_3^{-1}(3,2)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4,2)p_4)/2) \\
&\quad - m_{44}((M_3^{-1}(1,4)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2,4)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3,4)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4,4)p_4)/2) \\
c_{41} &= -m_{11}((M_4^{-1}(1,1)p_1)/2 + (M_4^{-1}(2,1)p_2)/2 + (M_4^{-1}(3,1)p_3)/2 + (M_4^{-1}(4,1)p_4)/2) \\
&\quad - m_{31}((M_3^{-1}(1,3)p_1)/2 + (M_4^{-1}(2,3)p_2)/2 + (M_4^{-1}(3,3)p_3)/2 + (M_4^{-1}(4,3)p_4)/2) \\
c_{42} &= \dot{M}_{42} - m_{22}((M_4^{-1}(1,2)p_1)/2 + (M_4^{-1}(2,2)p_2)/2 + (M_3^{-1}2_4p_3)/2 + (M_4^{-1}(4,2)p_4)/2) \\
&\quad - m_{42}((M_4^{-1}(1,4)p_1)/2 + (M_4^{-1}(2,4)p_2)/2 + (M_4^{-1}(3,4)p_3)/2 + (M_4^{-1}(4,4)p_4)/2) \\
c_{43} &= -m_{13}((M_4^{-1}(1,1)p_1)/2 + (M_4^{-1}(2,1)p_2)/2 + (M_4^{-1}(3,1)p_3)/2 + (M_4^{-1}(4,1)p_4)/2) \\
&\quad - m_{33}((M_3^{-1}(1,3)p_1)/2 + (M_4^{-1}(2,3)p_2)/2 + (M_4^{-1}(3,3)p_3)/2 + (M_4^{-1}(4,3)p_4)/2) \\
c_{44} &= \dot{M}_{44} - m_{24}((M_4^{-1}(1,2)p_1)/2 + (M_4^{-1}(2,2)p_2)/2 + (M_3^{-1}2_4p_3)/2 + (M_4^{-1}(4,2)p_4)/2) \\
&\quad - m_{44}((M_4^{-1}(1,4)p_1)/2 + (M_4^{-1}(2,4)p_2)/2 + (M_4^{-1}(3,4)p_3)/2 + (M_4^{-1}(4,4)p_4)/2)
\end{aligned}$$

Por otro lado,  $\mathbf{g}_0^T \sum_{l=1}^3 m_l J_{G_l}(\boldsymbol{\rho})$  está dado en (5.20).

Como las coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^4$  son no mínimas, el sistema reducido está dado por las expresiones (4.97),(4.108),(5.27),(5.53) y (5.54).

## Formulación de Kane

A partir de la ecuación (4.120), y las expresiones (5.33), (5.35), (5.38) y (5.42), se llega a que  $\bar{M}_q(\mathbf{q})$  está dada por:

$$\bar{M}_q(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^4 (m_l \bar{J}_{G_l}(\mathbf{q})^T \bar{J}_{G_l}(\mathbf{q}) + \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q})^T I_l \bar{K}_{G_l}(\mathbf{q})),$$

donde los elementos de  $\bar{M}_q(\mathbf{q})$  pueden encontrarse en (5.46).

Además, de la ecuación (4.121), y las expresiones (5.33), (5.35), (5.38) y (5.42), se tiene que la matriz de Coriolis está dada por:

$$\bar{C}_q(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^4 \left( m_l \bar{J}_{G_l}^T \dot{\bar{J}}_{G_l} + \bar{K}_{G_l}^T (\dot{I}_l \bar{K}_{G_l} + I_l \dot{\bar{K}}_{G_l}) \right) = \mathbf{0}.$$

Y de la expresión (4.122) y las matrices jacobianas (5.33), (5.35), (5.38) y (5.42), el

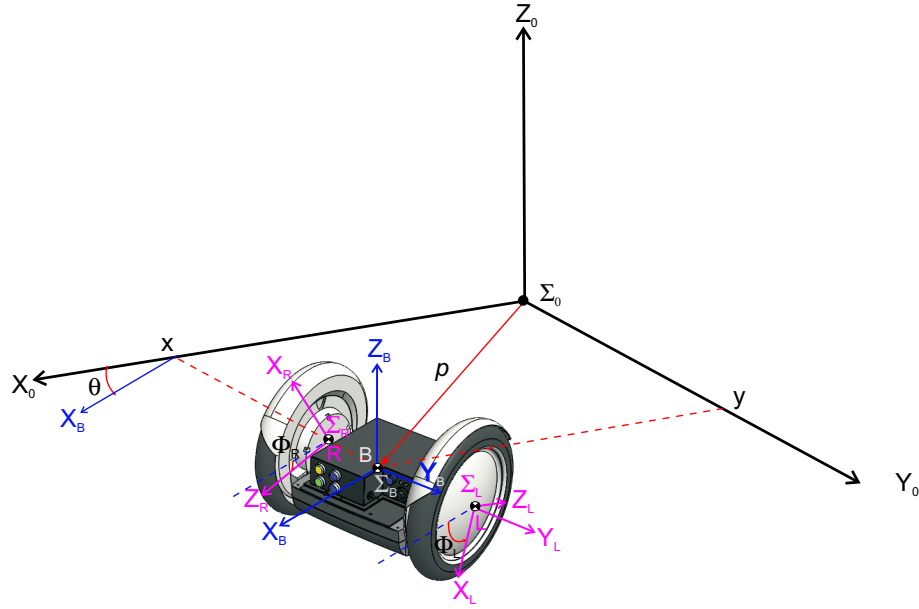


Figura 5.3: Marcos asociados a los cuerpos rígidos del robot móvil con ruedas (RMR).

vector de fuerzas gravitacionales está dado por:

$$\bar{\mathbf{g}}_q(\mathbf{q}) = -\mathbf{g}_0^T \sum_{l=1}^4 m_l \bar{\mathbf{J}}_{G_l}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (5.57)$$

donde  $\mathbf{g}_0 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$ , es la aceleración debida a la gravedad.

## 5.3 Aplicación a un robot móvil tipo diferencial

### 5.3.1 Descripción geométrica del robot

En esta sección se abordará la cinemática de un robot móvil con ruedas tipo diferencial, el cual puede apreciarse en la figura 5.3. A continuación se describen los puntos y marcos que fueron asociados a los cuerpos rígidos que conforman el robot, los cuales son útiles en la obtención del modelo cinemático de éste.

A la base del robot se le asoció el marco  $\Sigma_B(X_B, Y_B, Z_B)$ , haciendo coincidir su origen  $B$ , con el centro de masa de la base (el cual se supone que se encuentra en el eje de las ruedas). Como se puede apreciar en la figura 5.3, el ángulo  $\theta$  es el ángulo

formado entre el eje  $X_0$  del marco inercial  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , y el eje  $X_B$ , de manera que la orientación de la base respecto al marco inercial, empleando matrices de rotación es:

$${}^0R_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Por otra parte, a cada rueda del robot se le asignó un marco solidario  $\Sigma_R(X_R, Y_R, Z_R)$  y  $\Sigma_L(X_L, Y_L, Z_L)$ , respectivamente, cuyos orígenes  $R$  y  $L$  coinciden en todo momento con los centros de masa de la rueda correspondiente, ver figura 5.3. Nótese que los ángulos  $\phi_L$  y  $\phi_R$ , se encuentran definidos entre el eje  $X_B$  y el eje  $X_L$  y  $X_R$ , respectivamente. De manera que la orientación de cada rueda, relativa al marco  $\Sigma_B$  solidario a la base del robot, está dado por:

$${}^BR_L = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi_L) & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \text{sen}(\phi_L) \\ \text{sen}(\theta) \cos(\phi_L) & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi_L) \\ -\text{sen}(\phi_L) & 0 & \cos(\phi_L) \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

y

$${}^BR_R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi_R) & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \text{sen}(\phi_R) \\ \text{sen}(\theta) \cos(\phi_R) & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi_R) \\ -\text{sen}(\phi_R) & 0 & \cos(\phi_R) \end{bmatrix}, \quad (5.60)$$

respectivamente.

### 5.3.2 Cálculo de la postura de cada cuerpo rígido

La postura del robot móvil está especificada respecto al marco inercial  $\Sigma_0$  y a través del marco  $\Sigma_B$  asociado a la base del robot. La posición del origen del marco  $\Sigma_B$  está dada por el vector  $\mathbf{p}_B$  y su orientación por la matriz de rotación  ${}^0R_B$  como:

$${}^0\mathbf{p}_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^0R_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas cartesianas del punto  $B$ , respecto al marco  $\Sigma_0$ .

Por otro lado, de la figura 5.3 se tiene que la posición del centro de masa  $L$  de la rueda izquierda del robot está dada por:

$${}^0\mathbf{p}_L = {}^0\mathbf{p}_B + {}^0\mathbf{p}_{BL} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0R_B \begin{bmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - l \text{sen}(\theta) \\ y + l \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

donde  $l$  es la distancia del punto  $B$  al punto  $L$  (la mitad de la distancia entre las ruedas). Además, de las expresiones (5.58) y (5.59) se tiene que la orientación de la rueda izquierda está dada por:

$${}^0R_L = {}^0R_B {}^B R_L = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi_L) & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \text{sen}(\phi_L) \\ \text{sen}(\theta) \cos(\phi_L) & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi_L) \\ -\text{sen}(\phi_L) & 0 & \cos(\phi_L) \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

De manera análoga, la posición de la rueda derecha del robot está dada por:

$${}^0\mathbf{p}_R = {}^0\mathbf{p}_B + {}^0\mathbf{p}_{BR} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0R_B \begin{bmatrix} 0 \\ -l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + l \text{sen}(\theta) \\ y - l \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

mientras que su orientación, a partir de las expresiones (5.58) y (5.60) por:

$${}^0R_R = {}^0R_B {}^B R_R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi_R) & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \text{sen}(\phi_R) \\ \text{sen}(\theta) \cos(\phi_R) & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi_R) \\ -\text{sen}(\phi_R) & 0 & \cos(\phi_R) \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

### 5.3.3 Cálculo de las velocidades lineal y angular de cada cuerpo rígido

Con fines metódicos, en esta sección se describirá la cinemática de velocidad del robot en función de un conjunto de coordenadas mínimas:

$$\dot{\mathbf{q}} = [ \dot{x}_m \quad \dot{\theta} ]^T \in \mathbb{R}^2.$$

y un conjunto de coordenadas no mínimas:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = [ \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\phi}_L \quad \dot{\phi}_R ]^T \in \mathbb{R}^5, \quad (5.66)$$

sujeto a las restricciones (Soto, 2014):

$$-\dot{x} \text{sen}(\theta) + \dot{y} \cos(\theta) = 0 \quad (5.67)$$

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \text{sen}(\theta) + l \dot{\theta} - r \dot{\phi}_R = 0 \quad (5.68)$$

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \text{sen}(\theta) - l \dot{\theta} - r \dot{\phi}_L = 0 \quad (5.69)$$

Además, de (5.67)-(5.69) es posible obtener la relación matricial  $A(\boldsymbol{\rho})$  entre  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$



como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_L \\ \dot{\phi}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{l}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

relación que será de utilidad en esta sección para definir la cinemática de velocidad de cada cuerpo rígido que conforma el robot a través de  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^2$  ó  $\dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^5$ .

De (4.65), (4.67) y (5.61) se tiene que, empleando velocidades generalizadas no mínimas, la velocidad lineal y angular de la base pueden ser especificadas a través de:

$${}^0\mathbf{v}_B = J_{G_B}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad \text{y} \quad {}^B\boldsymbol{\omega}_B = K_{G_B}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (5.71)$$

o bien, a partir de (5.70) y (5.72) a través de velocidades generalizadas mínimas como:

$${}^0\mathbf{v}_B = \bar{J}_{G_B}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{y} \quad {}^B\boldsymbol{\omega}_B = \bar{K}_{G_B}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.72)$$

Por otra parte, la velocidad lineal y angular de la rueda izquierda, a partir de (4.65), (4.67), (5.62) y (5.63), pueden ser especificadas a través de velocidades generalizadas no mínimas como:

$${}^0\mathbf{v}_L = J_{G_L}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l\cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l\text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

y

$${}^L\boldsymbol{\omega}_L = K_{G_L}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\text{sen}(\phi_L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi_L) & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (5.73)$$

o bien, a partir de (5.70) y (5.73) por medio de velocidades generalizadas mínimas como:

$${}^0\mathbf{v}_L = \bar{J}_{G_L}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -l\cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & -l\text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{y} \quad {}^L\boldsymbol{\omega}_L = \bar{K}_{G_L}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}(\phi_L) \\ \frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \\ 0 & \cos(\phi_L) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.74)$$

De manera análoga, las velocidades lineal y angular de la rueda derecha, empleando velocidades generalizadas no mínimas, puede ser especificada a partir de (4.65), (4.67),

(5.64) y (5.65) a través de:

$${}^0\mathbf{v}_R = J_{G_R}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l \operatorname{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

y

$${}^R\boldsymbol{\omega}_R = K_{G_R}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\phi_L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi_L) & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (5.75)$$

o bien, por medio de velocidades generalizadas mínimas a partir de (5.70) y (5.75), como:

$${}^0\mathbf{v}_L = \bar{J}_{G_R}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & l \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & l \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{y} \quad {}^R\boldsymbol{\omega}_R = \bar{K}_{G_R}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{sen}(\phi_R) \\ \frac{1}{r} & \frac{l}{r} \\ 0 & \cos(\phi_R) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (5.76)$$

### 5.3.4 Modelado dinámico

En esta sección se explicará cómo obtener el modelo dinámico del robot móvil, a partir de la información expuesta, y la metodología de la sección 4.4. En aras de la simplicidad, se consideró que el centro de masa de la base del robot posee las mismas coordenadas del centroide de un prisma rectangular con las mismas dimensiones de la base del robot. Además, se consideró que los tensores de inercia de los cuerpos rígidos que conforman el robot son matrices diagonales, y que ambas ruedas del robot tienen un radio igual a  $r$ .

A continuación se enlista la nomenclatura empleada para nombrar los parámetros dinámicos del robot:

$r$  : Radio de las ruedas

$m_B$  : Masa de la base del robot.

$m_L$  : Masa de la rueda izquierda del robot.

$m_R$  : Masa de la rueda derecha del robot.

$I_B$  : Tensor de inercia de la base del robot con respecto a  $\Sigma_B$  dada por  $I_B = \operatorname{diag}\{I_{x_B}, I_{y_B}, I_{z_B}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

$I_L$  : Tensor de inercia de la rueda izquierda del robot con respecto a  $\Sigma_L$  dada por  $I_L = \operatorname{diag}\{I_{x_L}, I_{y_L}, I_{z_L}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

$I_R$  : Tensor de inercia de la rueda derecha del robot con respecto a  $\Sigma_R$  dada por  $I_R = \text{diag}\{I_{x_R}, I_{y_R}, I_{z_R}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

### Formulación de Newton-Euler

A partir de la ecuación (4.83) y las expresiones (5.72), (5.74) y (5.76) es posible obtener  $\bar{M}_q(\mathbf{q})$  a partir de:

$$\bar{M}_q(\mathbf{q}) = \bar{A}^T M \bar{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

donde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{G_B}^T & \bar{J}_{G_B}^T & \bar{K}_{G_L}^T & \bar{J}_{G_L}^T & \bar{K}_{G_R}^T & \bar{J}_{G_R}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{18 \times 2} \quad (5.77)$$

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, M_3) \in \mathbb{R}^{18 \times 18} \quad (5.78)$$

con  $M_l = \begin{bmatrix} {}^l I_l & O_{[3,3]} \\ O_{[3,3]} & m_l I_{[3]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y  ${}^l I_l \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  como la matriz de tensores de inercias del cuerpo  $l$ , en este caso con  $l \in \{B, L, R\}$ . Desarrollando  $\bar{M}_q(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  queda:

$$\begin{bmatrix} (m_B + m_L + m_R) + \frac{1}{r^2}(I_{y_L} + I_{y_R}) & l(-m_L + m_R) + \frac{l}{r^2}(-I_{y_L} + I_{y_R}) \\ l(-m_L + m_R) + \frac{l}{r^2}(-I_{y_L} + I_{y_R}) & l^2(m_L + m_R) + I_{z_B} + I_{x_L} + I_{x_R} + \frac{l^2}{r^2}(I_{y_L} + I_{y_R}) \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

Además, de la ecuación (4.84), y las expresiones (5.77) y (5.78), se tiene que la matriz de Coriolis está dada por:

$$\bar{C}_q(\boldsymbol{\rho}) = \bar{A}^T (M \dot{T} + W M \bar{A}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

donde  $W = \text{diag}(W_1, W_2, W_3) \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$ , con  $W_l = \begin{bmatrix} S({}^l \boldsymbol{\omega}_l) & O_{[3,3]} \\ O_{[3,3]} & O_{[3,3]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y  ${}^l \boldsymbol{\omega}_l$  para  $l = B, L, R$  dada por las expresiones (5.33), (5.72), (5.74) y (5.76). Lo cual desarrollando da

$$\bar{C}_q(\boldsymbol{\rho}) = \bar{A}^T (M \dot{A} + W M \bar{A}) = O_{[2,2]} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (5.80)$$

Finalmente, de (4.85) y (5.77) se tiene que el vector de gravedad está dado por:

$$\bar{\mathbf{g}}_q(\mathbf{q}) = \bar{A}^T \mathbf{g}_\rho \in \mathbb{R}^2,$$

con  $\boldsymbol{\omega} = [ O_{[1,3]} \quad m_1 \mathbf{g}^T \quad O_{[1,3]} \quad m_2 \mathbf{g}^T \quad O_{[1,3]} \quad m_3 \mathbf{g}^T ] \mathbb{R}^{18}$ , lo cual desarrollando da:

$$\bar{\mathbf{g}}_q(\mathbf{q}) = \bar{A}^T \mathbf{g}_\rho \in \mathbb{R}^2 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2. \quad (5.81)$$

## Formulación de Euler-Lagrange

Aplicando la metodología de Euler-Lagrange explicada en la subsección 4.4.2, de la expresión (4.93) y las jacobianas geométricas (5.71),(5.73),(5.75), se tiene que la matriz de inercias para el robot móvil es:

$$M(\boldsymbol{\rho}) = m_B J_{G_B}^T J_{G_B} + m_L J_{G_L}^T J_{G_L} + m_R J_{G_R}^T J_{G_R} + K_{G_B}^T I_B K_{G_B} + K_{G_L}^T I_L K_{G_L} + K_{G_R}^T I_R K_{G_R},$$

la cual desarrollando da:

$$\begin{bmatrix} m_B + m_L + m_R & 0 & l \cos(\theta)(-m_L + m_R) & 0 & 0 \\ 0 & m_B + m_L + m_R & l \sin(\theta)(-m_L + m_R) & 0 & 0 \\ l \cos(\theta)(-m_L + m_R) & l \sin(\theta)(-m_L + m_R) & l^2(m_L + m_R) + I_{z_B} + I_{x_L} + I_{x_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

Mientras que de (4.94) y (5.82), se tiene que la matriz de Coriolis es:

$$C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = l(m_L - m_R) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin(\theta)\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\theta)\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0.5\sin(\theta)\dot{\theta} & -0.5\cos(\theta)\dot{\theta} & 0.5(-\dot{x}\sin(\theta) + \dot{y}\cos(\theta)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

y de (4.95) el vector de gravedad es:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) = -(m_B J_{G_B}^T + m_L J_{G_L}^T + m_R J_{G_R}^T) \mathbf{g}_0 = \mathbf{0}, \quad (5.84)$$

donde  $\mathbf{g}_0 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  es la aceleración debida a la gravedad.

Una vez calculado el modelo extendido del robot y las expresiones (5.70) y (5.82)-(5.89), el modelo reducido del robot móvil está dado por (4.97) a través de (5.79), (5.80) y (5.81).

## Formulación de Hamilton

A través de esta formulación, la matriz de inercias  $M(\mathbf{q})$  puede ser calculada a partir de (4.107) y las jacobianas geométricas  $J_{G_i}(\mathbf{q})$  y  $K_{G_i}(\mathbf{q})$  dadas en (5.71),(5.73),(5.75), como:

$$m_B J_{G_B}^T J_{G_B} + m_L J_{G_L}^T J_{G_L} + m_R J_{G_R}^T J_{G_R} + K_{G_B}^T I_B K_{G_B} + K_{G_L}^T I_L K_{G_L} + K_{G_R}^T I_R K_{G_R} \quad (5.85)$$

con elementos  $m_{i,j}$  dados en (5.82) y cuya inversa es:

$$M(\mathbf{q})^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} m_{33}m_{11} - m_{23}^2 & m_{23}m_{13} & -m_{11}m_{13} & 0 & 0 \\ m_{23}m_{13} & m_{33}m_{11} - m_{13}^2 & -m_{11}m_{23} & 0 & 0 \\ -m_{11}m_{13} & -m_{11}m_{23} & m_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{111}/m_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{111}/m_{55} \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

donde  $m_{111} = (m_{33}m_{11} - m_{13}^2 - m_{23}^2)m_{11}$ .

Derivando (5.85) respecto al tiempo, se tiene:

$$\dot{M}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{M}(1,3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{M}(2,3) & 0 & 0 \\ \dot{M}(3,1) & \dot{M}(3,2) & \dot{M}(3,3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} \dot{M}(1,3) &= -(Lm_{Ls\theta} - Lm_{Rs\theta})(m_{11}m_{13}p_1 - m_{11}^2p_3 + m_{11}m_{23}p_2) \\ \dot{M}(2,3) &= (Lm_{Lc\theta} - Lm_{Rc\theta})(m_{11}m_{13}p_1 - m_{11}^2p_3 + m_{11}m_{23}p_2) \\ \dot{M}(3,1) &= -(Lm_{Ls\theta} - Lm_{Rs\theta})(m_{11}m_{13}p_1 - m_{11}^2p_3 + m_{11}m_{23}p_2) \\ \dot{M}(3,2) &= (Lm_{Lc\theta} - Lm_{Rc\theta})(m_{11}m_{13}p_1 - m_{11}^2p_3 + m_{11}m_{23}p_2) \\ \dot{M}(3,3) &= -(m_{11}p_4(2I_{x_L}c_{\phi_L}s_{\phi_L} - 2I_{z_L}c_{\phi_L}s_{\phi_L})(m_{13}^2 + m_{23}^2 - m_{11}m_{33}))/m_{44} \\ &\quad - (m_{11}p_5(2I_{x_R}c_{\phi_R}s_{\phi_R} - 2I_{z_R}c_{\phi_R}s_{\phi_R})(m_{13}^2 + m_{23}^2 - m_{11}m_{33}))/m_{55} \end{aligned}$$

donde  $c_\theta = \cos(\theta)$ ,  $s_\theta = \sin(\theta)$ ,  $c_{\phi_L} = \cos(\phi_L)$ ,  $s_{\phi_L} = \sin(\phi_L)$ ,  $c_{\phi_R} = \cos(\phi_R)$  y  $s_{\phi_R} = \sin(\phi_R)$ .

Por otro lado, tomando la parcial de  $M^{-1}$  respecto a  $\boldsymbol{\rho} = [x \ y \ \theta \ \phi_L \ \phi_R]^T \in \mathbb{R}^5$

$$\frac{\partial M^{-1}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial M(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial \rho_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 25}, \quad (5.87)$$

donde

$$\frac{\partial M(\boldsymbol{\rho})^{-1}}{\partial \rho_3} = L(-m_l + m_r) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{cos}(\theta) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora, con las expresiones anteriores es posible calcular la matriz de Coriolis, a través

de (4.108),(5.85),(5.86):

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{13} = \dot{M}_{13}$$

$$c_{23} = \dot{M}_{23}$$

$$c_{31} = \dot{M}_{31} - m_{11}((M_3^{-1}(1, 1)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 1)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 1)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 1)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 1)p_5)/2) - m_{21}((M_3^{-1}(1, 2)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 2)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 2)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 2)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 2)p_5)/2) - m_{31}((M_3^{-1}(1, 3)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 3)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 3)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 3)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 3)p_5)/2)$$

$$c_{32} = \dot{M}_{32} - m_{12}((M_3^{-1}(1, 1)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 1)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 1)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 1)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 1)p_5)/2) - m_{22}((M_3^{-1}(1, 2)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 2)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 2)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 2)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 2)p_5)/2) - m_{32}((M_3^{-1}(1, 3)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 3)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 3)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 3)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 3)p_5)/2)$$

$$c_{33} = \dot{M}_{33} - m_{13}((M_3^{-1}(1, 1)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 1)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 1)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 1)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 1)p_5)/2) - m_{23}((M_3^{-1}(1, 2)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 2)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 2)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 2)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 2)p_5)/2) - m_{33}((M_3^{-1}(1, 3)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 3)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 3)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 3)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 3)p_5)/2)$$

$$c_{34} = -m_{44}((M_3^{-1}(1, 4)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 4)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 4)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 4)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 4)p_5)/2)$$

$$c_{35} = -m_{45}((M_3^{-1}(1, 4)p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 4)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 4)p_3)/2 + (M_3^{-1}(4, 4)p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 4)p_5)/2) - m_{55}((M_1^{-1}5_3p_1)/2 + (M_3^{-1}(2, 5)p_2)/2 + (M_3^{-1}(3, 5)p_3)/2 + (M_4^{-1}5_3p_4)/2 + (M_3^{-1}(5, 5)p_5)/2)$$

Como las coordenadas generalizadas  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^5$  son no mínimas, el sistema reducido está dado por las expresiones (4.97),(4.108),(5.70) y (5.85).

## Formulación de Kane

Aplicando la metodología de Kane explicada en la subsección 4.4.4, de la expresión (4.120) y las jacobianas geométricas (5.72),(5.74),(5.76), se tiene que la matriz de iner-

cias para el robot móvil es:

$$\bar{M}_q(\mathbf{q}) = m_B \bar{J}_{G_B}^T \bar{J}_{G_B} + m_L \bar{J}_{G_L}^T \bar{J}_{G_L} + m_R \bar{J}_{G_R}^T \bar{J}_{G_R} + \bar{K}_{G_B}^T I_B \bar{K}_{G_B} + \bar{K}_{G_L}^T I_L \bar{K}_{G_L} + \bar{K}_{G_R}^T I_R \bar{K}_{G_R},$$

la cual desarrollando da:

$$\begin{bmatrix} (m_B + m_L + m_R) + \frac{1}{r^2}(I_{y_L} + I_{y_R}) & l(-m_L + m_R) + \frac{l}{r^2}(-I_{y_L} + I_{y_R}) \\ l(-m_L + m_R) + \frac{l}{r^2}(-I_{y_L} + I_{y_R}) & l^2(m_L + m_R) + I_{z_B} + I_{x_L} + I_{x_R} + \frac{l^2}{r^2}(I_{y_L} + I_{y_R}) \end{bmatrix}.$$

Mientras que de la expresión (4.121) y las jacobianas (5.72),(5.74),(5.76), se tiene que la matriz de Coriolis para el robot móvil está dada por:

$$\begin{aligned} C_q(\mathbf{q}) &= m_B \bar{J}_{G_B}^T \dot{\bar{J}}_{G_B} + m_L \bar{J}_{G_L}^T \dot{\bar{J}}_{G_L} + m_R \bar{J}_{G_R}^T \dot{\bar{J}}_{G_R} + \bar{K}_{G_B}^T I_B \dot{\bar{K}}_{G_B} + \bar{K}_{G_L}^T I_L \dot{\bar{K}}_{G_L} + \bar{K}_{G_R}^T I_R \dot{\bar{K}}_{G_R} \\ &= O_{[2,2]} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \end{aligned} \tag{5.88}$$

y de la expresión (4.122) y las matrices jacobianas (5.72),(5.74),(5.76), el vector de fuerzas gravitacionales está dado por:

$$\mathbf{g}_q(\boldsymbol{\rho}) = -(m_B \bar{J}_{G_B}^T + m_L \bar{J}_{G_L}^T + m_R \bar{J}_{G_R}^T) \mathbf{g}_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2, \tag{5.89}$$

donde  $\mathbf{g}_0 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  es la aceleración debida a la gravedad.

## 5.4 Análisis comparativo

Con la finalidad de llevar a cabo una evaluación cuantitativa de las formulaciones estudiadas desde el punto de vista del manejo de restricciones holonómicas y no holonómicas, se obtuvo el modelo dinámico de un manipulador serie (robot RRR), un manipulador paralelo (mecanismo de cinco barras) y un robot móvil con ruedas (tipo diferencial), los cuales son representativos de un mecanismo sin restricciones, un mecanismo con restricciones holonómicas y un mecanismo con restricciones no holonómicas, respectivamente. Como desde el punto de vista de control es deseable conocer las expresiones de la matriz de inercias, la matriz centrífuga y de Coriolis y el vector de gravedad, el análisis realizado en esta sección consistió en obtener tales expresiones. Cabe mencionar que hasta donde se tiene conocimiento, no existe publicado en la literatura un estudio comparativo cuantitativo sobre el desempeño de estas formulaciones en robots sin restricciones y con restricciones (holonómicas y no holonómicas).

Con el fin de medir el tiempo de cálculo ocupado por cada formulación, las matrices fueron obtenidas a partir de Matlab. Los datos de entrada fueron las velocidades

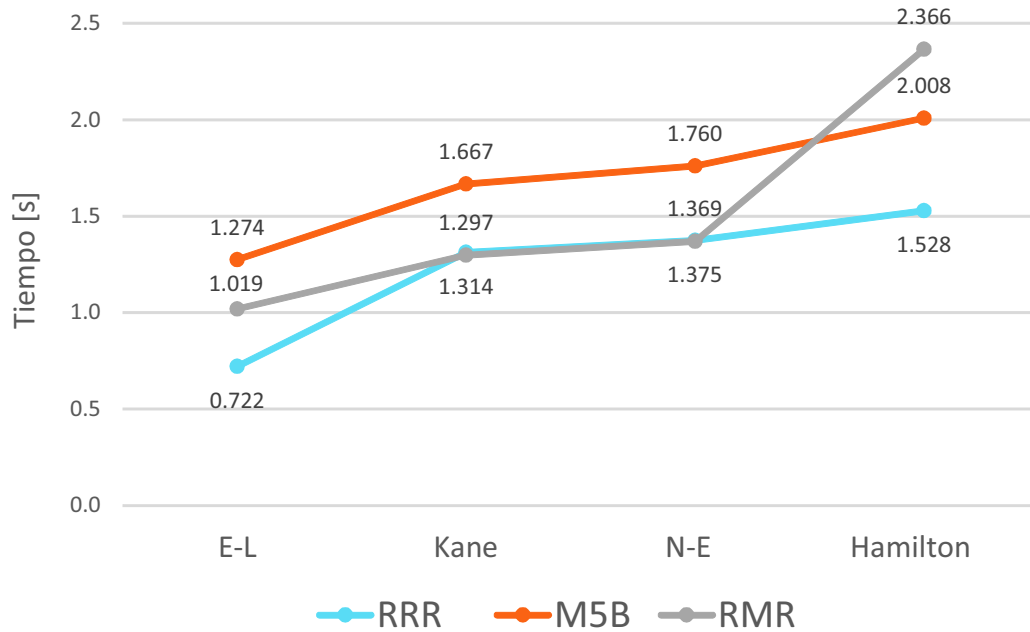


Figura 5.4: Tiempo de cálculo del modelo dinámico.

lineales y angulares, así como las ecuaciones de restricción y los parámetros cinemáticos y dinámicos de cada mecanismo. Los resultados de este análisis se muestran en las figuras 5.4-5.7; como puede observarse en la figura 5.4, la formulación que requirió menor tiempo para calcular las matrices fue la de Euler-Lagrange, mientras que la que requirió mayor tiempo fue la formulación de Hamilton, como era de esperarse, debido a la necesidad del cálculo de la inversa de la matriz de inercias.

El espacio ocupado en memoria por cada código se aprecia en la figura 5.5, en donde se puede observar que la formulación que requirió más código fue la formulación de Hamilton, mientras que, en promedio, la formulación que requirió menos código fue la de Euler-Lagrange.

Por otro lado, una vez obtenidas las matrices y vectores representativos del modelo dinámico, se procedió a dar una referencia deseada a cada articulación activa de los mecanismos, con la finalidad de observar el tiempo de ejecución de cada modelo para llevar a cabo una simulación de 10s en Simulink.

Las trayectorias empleadas fueron las siguientes:

- Manipulador serial (RRR):

$$q_1(t) = q_2(t) = q_3(t) = \frac{\pi}{20} \text{sen}(5\pi t) \quad [\text{rad}] \quad (5.90)$$



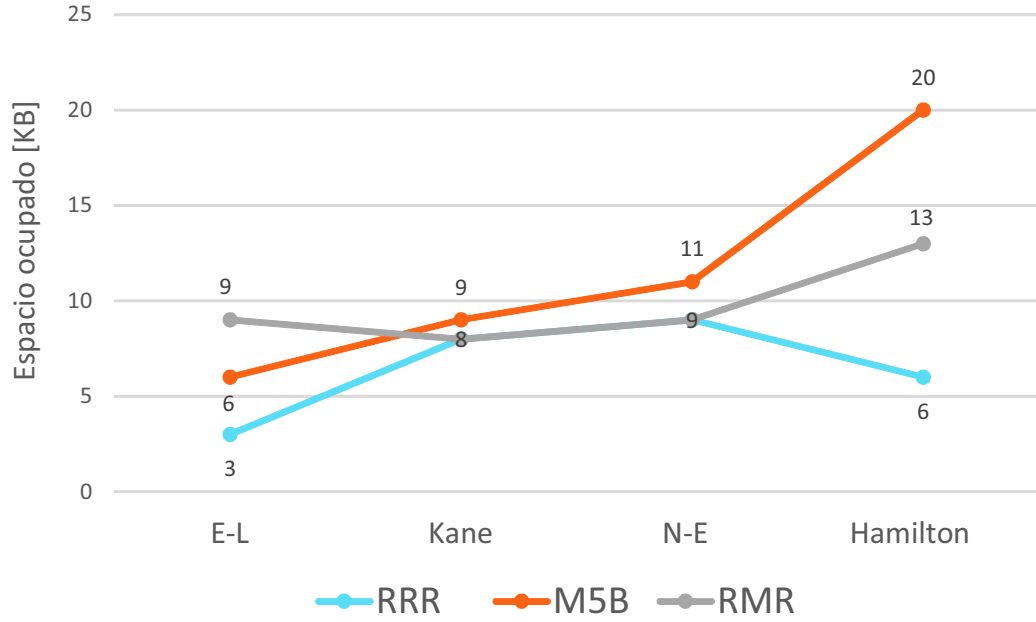


Figura 5.5: Tamaño del código necesario para calcular el modelo dinámico.

- Mecanismo de cinco barras (M5B):

$$q_1(t) = \frac{\pi}{20} \text{sen}(5\pi t) \text{ [rad]} \quad (5.91)$$

$$q_2(t) = -\frac{\pi}{20} \text{sen}(2\pi t) + \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \quad (5.92)$$

- Robot móvil con ruedas (RMR):

$$\dot{x}_m(t) = 1 \text{sen}\left(\frac{\pi}{15}t\right) \text{ [m/s]} \quad (5.93)$$

$$\dot{\theta}(t) = 1 \text{sen}\left(\frac{\pi}{15}t\right) \text{ [rad/s]} \quad (5.94)$$

con

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = 0 \text{ y } \phi_L(0) = (L-1) \frac{a}{rb} \text{ y } \phi_R(0) = -(L+1) \frac{a}{rb}.$$

Cabe mencionar que en el caso del M5B, la trayectoria fue tomada de (Soto, 2014), y el método de Newton-Raphson fue empleado para encontrar los valores de  $\beta_1$  y  $\beta_2$  a partir de  $q_1$  y  $q_2$ . Los parámetros cinemáticos y dinámicos empleados para cada robot pueden ser observados en la tabla 5.2.

En promedio, el tiempo de ejecución para cada formulación y cada robot puede observarse en la figura 5.6, mientras que el espacio en memoria ocupado por cada

Tabla 5.2: Parámetros cinemáticos y dinámicos de los robots analizados.

	Descripción	Notación	Valor	Unidades
RRR	Longitud eslabón $l$	$l_l$	0.313	m
	Masa (eslabón 1)	$m_1$	22.4466	Kg
	Masa (eslabón 2)	$m_2$	8.5708	Kg
	Masa (eslabón 3)	$m_3$	2.732	Kg
	Distancia al centro de masa (eslabón 1)	$l_{c_1}$	0.0641	m
	Distancia al centro de masa (eslabón 2)	$l_{c_2}$	0.0785	m
	Distancia al centro de masa (eslabón 3)	$l_{c_3}$	0.0512	m
	Momento de inercia respecto al eje $Z$ (eslabón 1)	$I_1$	0.7013	Kgm <sup>2</sup>
	Momento de inercia respecto al eje $Z$ (eslabón 2)	$I_2$	0.2835	Kgm <sup>2</sup>
Momento de inercia respecto al eje $Z$ (eslabón 3)	$I_3$	0.0416	Kgm <sup>2</sup>	
M5B	Masa (eslabón 1)	$m_1$	0.126	Kg
	Masa (eslabón 2)	$m_2$	0.121	Kg
	Masa (eslabón 3)	$m_3$	0.085	Kg
	Masa (eslabón 4)	$m_4$	0.063	Kg
	Distancia al centro de masa (eslabón 1)	$l_{c_1}$	0.047	m
	Distancia al centro de masa (eslabón 2)	$l_{c_2}$	0.045	m
	Distancia al centro de masa (eslabón 3)	$l_{c_3}$	0.069	m
	Distancia al centro de masa (eslabón 4)	$l_{c_4}$	0.062	m
	Momento de inercia respecto al eje $Z$ (eslabón 1)	$I_1$	0.0017	Kgm <sup>2</sup>
	Momento de inercia respecto al eje $Z$ (eslabón 2)	$I_2$	0.0017	Kgm <sup>2</sup>
	Momento de inercia respecto al eje $Z$ (eslabón 3)	$I_3$	0.0014	Kgm <sup>2</sup>
	Momento de inercia respecto al eje $Z$ (eslabón 4)	$I_4$	$8.74 \times 10^{-5}$	Kgm <sup>2</sup>
RMR	Radio de las ruedas	$r$	0.2000	m
	Distancia media entre ruedas	$L$	0.2340	m
	Masa de la base	$m_B$	26.4800	Kg
	Masa de las ruedas	$m_R, m_L$	2.3500	Kg
	Momento de inercia de la base respecto al eje $Z$	$I_{zB}$	0.6157	Kgm <sup>2</sup>
	Momento de inercia de las ruedas respecto al eje $Y$	$I_{yL}, I_{yR}$	0.0550	Kgm <sup>2</sup>
	Momento de inercia de las ruedas respecto al eje $Z$	$I_{zL}, I_{zR}$	0.0282	Kgm <sup>2</sup>

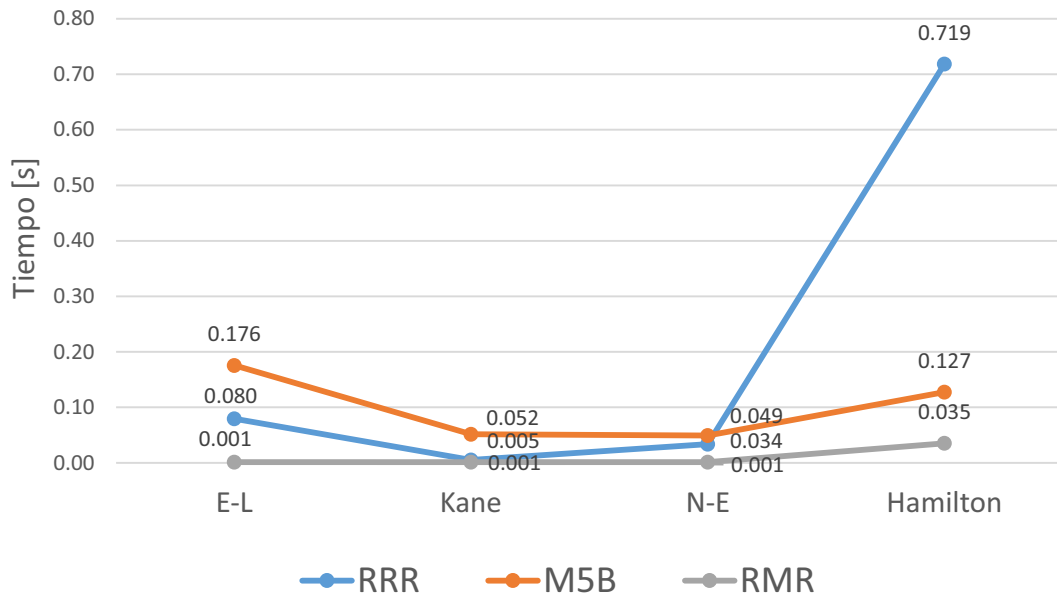


Figura 5.6: Tiempo de ejecución del modelo dinámico.

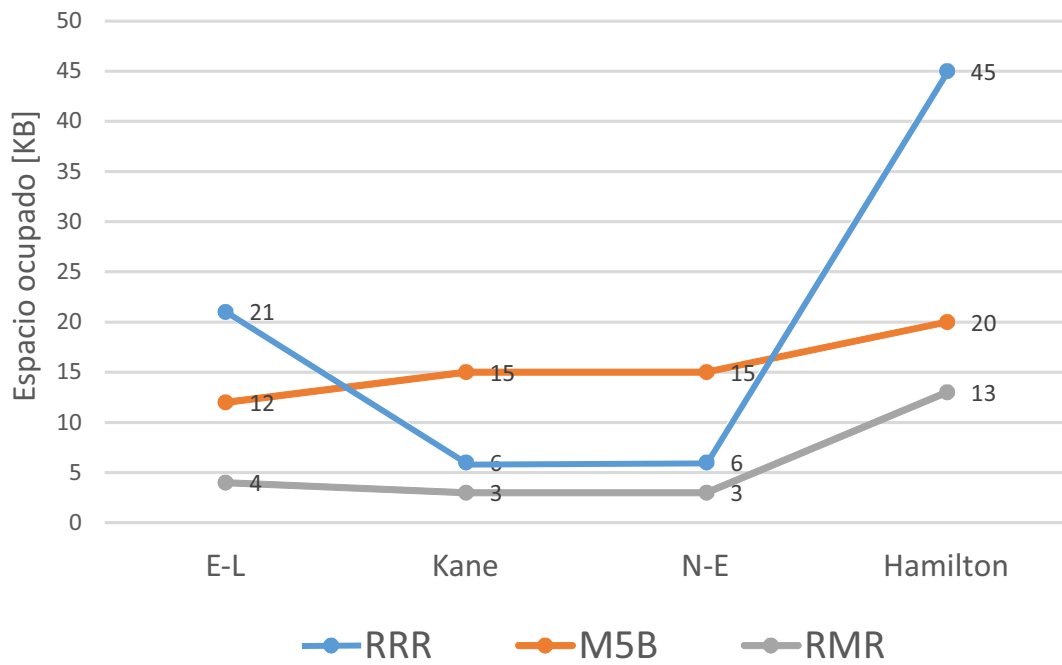


Figura 5.7: Tamaño del código que representa el modelo dinámico.

modelo se encuentra dado en 5.7. Cabe mencionar que los modelos obtenidos por cada formulación son iguales algebraicamente, sin embargo, el tiempo de ejecución de cada modelo fue medido empleando las expresiones tal y como Matlab los entrega.

# Capítulo 6

## El robot paralelo Hexapod

En este capítulo primeramente se describe el robot paralelo Hexapod. En seguida se obtiene el modelo cinemático directo de postura y de velocidad del robot. Posteriormente, se aplica la formulación de Euler-Lagrange para obtener el modelo dinámico de este robot. Al final se presentan los resultados experimentales obtenidos de la implementación de dos controladores, uno de los cuales emplea el MCDP y el otro el MDI. La información que se presenta en este capítulo fue extraída de (Bernal et al., 2018) y (Campa et al, 2018).

### 6.1 Descripción geométrica del robot

El robot paralelo Hexapod es producido por la compañía Quanser Inc. Este mecanismo tiene seis articulaciones actuadas de tipo P, incrustadas en la base, que imprimen movimiento lineal (a lo largo de rieles rectos que forman un triángulo equilátero en la base) a seis articulaciones universales. Las piernas son los eslabones rígidos que unen las seis articulaciones universales en el triángulo de la base con las tres articulaciones.

En la figura 6.1 se muestra una fotografía del robot Hexapod en la que se han sobrepuesto algunas marcas que sirven para obtener el modelo cinemático directo del robot. A continuación se describen algunas de estas marcas.

Los puntos  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  son los vértices de un triángulo equilátero horizontal que está fijo a la base del robot. Es importante señalar que, para simplificar el análisis, estos tres puntos no se encuentran al ras de la base del robot, sino a una altura tal que los centros de las seis articulaciones universales se encuentran en los lados del triángulo  $T_1T_2T_3$ . La longitud de cada lado de este triángulo es  $L_B$ .

El marco de referencia  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$  se encuentra fijo a la base del robot, en el centro del triángulo  $T_1T_2T_3$ , y su orientación es tal que el eje  $X_0$  apunta hacia el vértice  $T_2$ ; el eje  $Z_0$  es perpendicular a la base del robot y apunta hacia arriba de ésta. Nótese

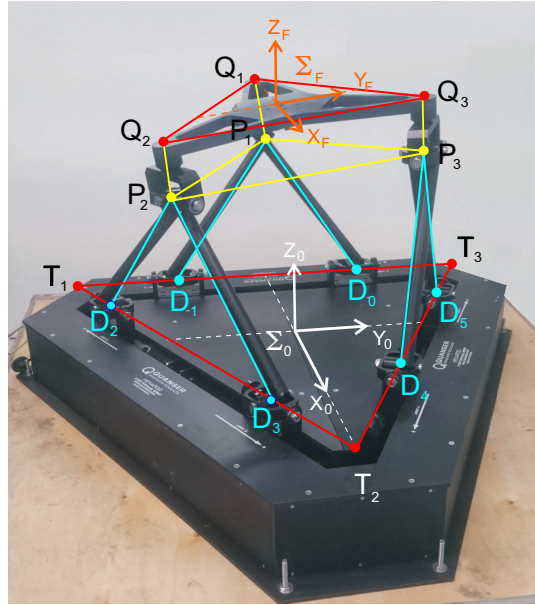


Figura 6.1: Robot Hexapod con líneas y puntos guía.

que el eje  $Y_0$  es paralelo al lado  $T_1T_3$ .

Los puntos denotados como  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  en la figura 6.1, forman también un triángulo equilátero rígido, pero éste se encuentra sobre la superficie de la plataforma móvil del robot. En el centro de este triángulo, denotado por  $F$ , está localizado el origen del marco coordenado  $\Sigma_F(X_F, Y_F, Z_F)$ , el cual está orientado tal que el eje  $X_F$  es perpendicular al lado  $Q_2Q_3$ , y el eje  $Z_F$  es perpendicular a la plataforma y apunta hacia arriba.

Debido al diseño mecánico de las articulaciones esféricas, los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  mostrados en la figura 6.1 también forman un triángulo equilátero rígido, el cual es paralelo al triángulo  $Q_1Q_2Q_3$  y tiene las mismas dimensiones, así que juntos constituyen un prisma triangular rígido recto cuya longitud de cada lado es  $L_P = \frac{L_B}{2}$ , y su altura  $H_{PQ}$ .

La simetría propia de este mecanismo simplifica bastante su análisis cinemático. Suponiendo en lo sucesivo que la trípleta de índices  $(i, j, k)$  es un elemento cualquiera del conjunto de permutaciones cíclicas  $\{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \equiv S_3$ , es posible obtener expresiones para un lado del triángulo equilátero de la base que son similares a las de los otros dos lados, cambiando sólo los índices en las expresiones correspondientes.

Así, con la intención de simplificar el análisis, se asignó un marco  $\Sigma_{T_i}(X_{T_i}, Y_{T_i}, Z_{T_i})$  a cada vértice  $T_i$  del triángulo asociado a la base. Y, como se aprecia en el diagrama esquemático de la figura 6.2, este marco es tal que el eje  $X_{T_i}$  tiene la dirección del vector  $\mathbf{r}_{T_kT_i}$ , que va del punto  $T_k$  al punto  $T_i$  (en lo sucesivo, a no ser que se indique otra cosa,

se usará esta notación para los vectores), el eje  $Z_{T_i}$  es siempre perpendicular a la base y apunta hacia arriba.

La matriz que relaciona la orientación del marco  $\Sigma_i$  y el marco  $\Sigma_0$  es:

$${}^0R_{T_i}(\beta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) & -\text{sen}(\beta_i) & 0 \\ \text{sen}(\beta_i) & \cos(\beta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

donde  $\beta_i$  es el ángulo del eje  $X_0$  al eje  $X_{T_i}$ , alrededor del eje  $Z_0$ , de modo que  $\beta_1 = -90^\circ$ ,  $\beta_2 = 30^\circ$  y  $\beta_3 = 150^\circ$ .

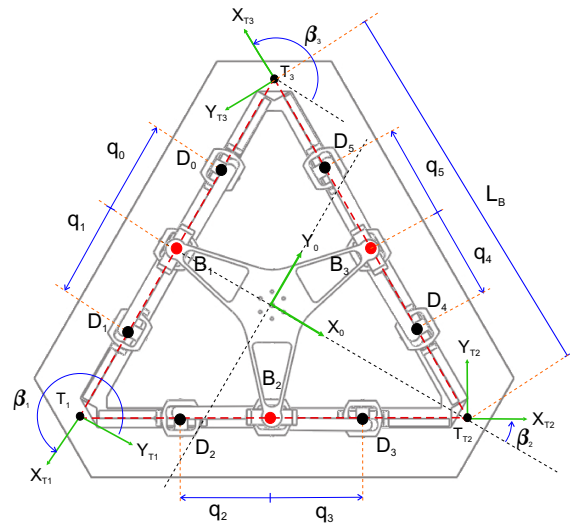
La figura 6.2 también muestra los centros de cada una de las seis articulaciones universales, llamados  $D_0, D_1, \dots, D_5$ , y los puntos medios de los segmentos  $T_k T_i$ , denotados como  $B_i$ . Tal como se muestra en la misma figura, las variables articulares consideradas son:  $q_0, q_1, \dots, q_5$ , de modo que  $q_{2i-2}$  y  $q_{2i-1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son las distancias del punto  $B_i$  a los puntos  $D_{2i-2}$  y  $D_{2i-1}$ , respectivamente, los cuales están en el mismo lado del triángulo de la base. Estas variables pueden ser agrupadas en el vector de coordenadas articulares activas:

$$\mathbf{q} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T \in \mathbb{R}^6.$$

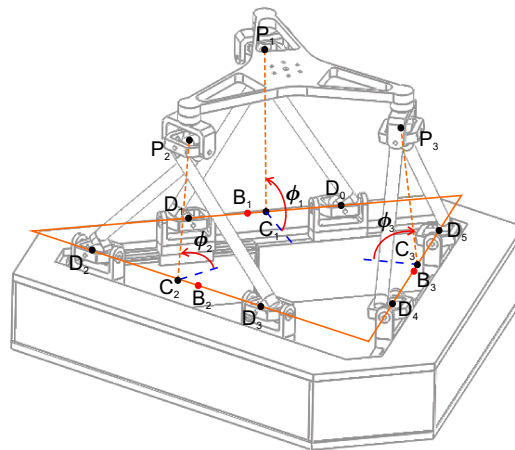
En este robot, la longitud de cada eslabón en las piernas es constante y es denotada por  $L$ . De esta manera, así como se muestra en la figura 6.2(b), los puntos  $D_{2i-2}$  y  $D_{2i-1}$  (los cuales pertenecen al eje  $X_{T_i}$ ) forman un triángulo isósceles junto con el vértice  $P_i$  del triángulo asociado a la plataforma móvil. La base de este triángulo tiene una longitud igual a  $q_{2i-2} + q_{2i-1}$  y su punto medio es  $C_i$ . Además, se debe notar que el vector  $\mathbf{r}_{C_i P_i}$ , el cual es la altura del triángulo  $D_{2i-2} P_i D_{2i-1}$ , siempre es perpendicular al eje  $X_{T_i}$  y forma un ángulo  $\phi_i$  con el eje  $Y_{T_i}$ .

Además, a cada lado  $i$  de la base del robot se asignaron los siguientes marcos coordenados (ver figura 6.3):

- El marco  $\Sigma_{C_i}(X_{C_i}, Y_{C_i}, Z_{C_i})$  da la inclinación del triángulo  $D_{2i-2} P_i D_{2i-1}$ , y su orientación corresponde a la del marco  $\Sigma_{T_i}$  después de girar  $\phi_i$  grados alrededor del eje  $X_{T_i}$ .
- Los marcos  $\Sigma_{D_{2i-2}}(X_{D_{2i-2}}, Y_{D_{2i-2}}, Z_{D_{2i-2}})$  y  $\Sigma_{D_{2i-1}}(X_{D_{2i-1}}, Y_{D_{2i-1}}, Z_{D_{2i-1}})$  dan la inclinación de los segmentos  $D_{2i-2} P_i$  y  $D_{2i-1} P_i$ , respectivamente; sus orientaciones están dadas por el marco  $\Sigma_{C_i}$  después de una rotación de  $-\alpha_i$  y  $\alpha_i$  alrededor de los ejes  $Z_{D_{2i-2}}$  y  $Z_{D_{2i-1}}$ , respectivamente (ver figura 6.3).



(a)



(b)

Figura 6.2: Diagrama esquemático del robot Hexapod: (a) vista superior, (b) vista en perspectiva.



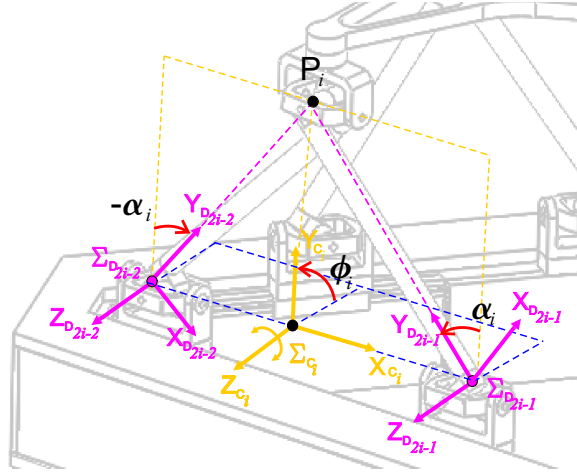


Figura 6.3: Marcos para definir la orientación de las piernas del robot.

## 6.2 Modelado cinemático

### 6.2.1 Modelo cinemático directo de postura

En esta sección se describe el cálculo del MCDP y el MCDV del robot paralelo Hexapod. Es importante mencionar que estos modelos fueron reportados en (Campa et al., 2016), junto con los experimentos que permitieron validarlos.

Para obtener el MCDP del robot Hexapod, es necesario calcular la posición  $\mathbf{r}_F(\mathbf{q})$  y la orientación  ${}^0R_F(\mathbf{q})$  de la plataforma. Para lograr esto, primero se obtendrá el vector de posición de cada punto  $P_i$  con respecto al marco  $\Sigma_0$ , el cual será nombrado aquí  $\mathbf{r}_{P_i}$  y es función de  $\mathbf{q}$ .

Considérese nuevamente la figura 6.2. Es fácil comprobar que el vector  $\mathbf{r}_{P_i}$  está dado por:

$$\mathbf{r}_{P_i} = \mathbf{r}_{B_i} + \mathbf{r}_{B_i C_i} + \mathbf{r}_{C_i P_i} \in \mathbb{R}^3. \quad (6.2)$$

A continuación se explica como obtener cada uno de los términos del lado derecho de (6.2).

De la figura 6.2, considerando (6.1) y recordando que la distancia del centro de un triángulo equilátero de lado  $l$  a cada uno de sus vértices es  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , es posible constatar que:

$$\mathbf{r}_{B_i} = {}^0R_{T_i}(\beta_i) \mathbf{r}_{B_i} = -\frac{L_B}{2\sqrt{3}} {}^0R_{T_i}(\beta_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Los vectores  $\mathbf{r}_{B_i C_i}$  y  $\mathbf{r}_{C_i P_i}$  se pueden expresar en función de las variables articulares

del lado correspondiente (es decir,  $q_{2i-1}$  y  $q_{2i-2}$ ), como:

$$\mathbf{r}_{B_i C_i} = {}^0 R_{T_i}(\beta_i)^i \mathbf{r}_{B_i C_i} = \left( \frac{q_{2i-1} - q_{2i-2}}{2} \right) {}^0 R_{T_i}(\beta_i) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

mientras que  $\mathbf{r}_{C_i P_i}$  está dado por:

$$\mathbf{r}_{C_i P_i} = \left( \frac{\sqrt{4L^2 - (q_{2i-1} + q_{2i-2})^2}}{2} \right) {}^0 R_{T_i} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\phi_i) \\ \text{sen}(\phi_i) \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

donde  $\phi_i$  (el ángulo entre  $Y_{C_i}$  y  $Y_{T_i}$  alrededor de  $X_{T_i}$ ) es en general función de  $\mathbf{q}$ .

Así que, sustituyendo (6.3), (6.4) y (6.5) en (6.2) se tiene que:

$$\mathbf{r}_{P_i} = {}^0 R_{T_i}(\beta_i) \begin{bmatrix} r_{B_i C_i} \\ -\frac{L_B}{2\sqrt{3}} + r_{C_i P_i} \cos(\phi_i) \\ r_{C_i P_i} \text{sen}(\phi_i) \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

donde

$$r_{B_i C_i} = \frac{q_{2i-1} - q_{2i-2}}{2} \quad (6.7)$$

$$r_{C_i P_i} = \frac{\sqrt{4L^2 - \bar{q}_i^2}}{2}, \quad (6.8)$$

con

$$\bar{q}_i = q_{2i-1} + q_{2i-2}, \quad (6.9)$$

Es importante mencionar que las expresiones (6.7) y (6.8) se pueden considerar como una transformación de coordenadas de  $(q_{2i-2}, q_{2i-1})$  a  $(r_{B_i C_i}, r_{C_i P_i})$ . Como se muestra en (6.6),  $r_{B_i C_i}$  y  $r_{C_i P_i}$  junto con  $\phi_i$  pueden usarse para describir la posición del punto  $P_i$ . El mismo razonamiento se aplica en (Carbonari et al., 2011) para transformar los tres mecanismos del tipo 2-1-PUS en tres mecanismos con estructura equivalente del tipo PRPS.

Ahora bien, debe notarse que dados los vectores  $\mathbf{r}_{P_i}$  es posible obtener los vectores

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{P_j} - \mathbf{r}_{P_i}, \quad (6.10)$$

los cuales cumplen con la restricción:

$$\|\mathbf{r}_{ij}\| = \|\mathbf{r}_{P_j} - \mathbf{r}_{P_i}\| = L_p, \quad \forall (i, j, k) \in S_3. \quad (6.11)$$

Por otro lado, sean  $\hat{\mathbf{x}}_F$ ,  $\hat{\mathbf{y}}_F$  y  $\hat{\mathbf{z}}_F$  vectores unitarios en la dirección de los ejes del marco  $\Sigma_F(X_F, Y_F, Z_F)$  con respecto al marco  $\Sigma_0$ ; entonces es claro que

$${}^0 R_F = [\hat{\mathbf{x}}_F \quad \hat{\mathbf{y}}_F \quad \hat{\mathbf{z}}_F].$$

De la geometría del robot (ver figura 6.1) se tiene que, como el eje  $Y_F$  es paralelo al

lado  $Q_2Q_3$  del triángulo  $Q_1Q_2Q_3$ , entonces el vector unitario  $\hat{\mathbf{y}}_F$  está dado por:

$$\hat{\mathbf{y}}_F = \frac{1}{L_P} \mathbf{r}_{23},$$

y considerando la definición del producto cruz de vectores, se tiene que el vector unitario  $\hat{\mathbf{z}}_F$ , que es normal a la plataforma, debe satisfacer

$$\mathbf{r}_{23} \times \mathbf{r}_{21} = \|\mathbf{r}_{23}\| \|\mathbf{r}_{21}\| \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} \right) \hat{\mathbf{z}}_F,$$

así que

$$\hat{\mathbf{z}}_F = \frac{2}{\sqrt{3}L_P^2} \mathbf{r}_{23} \times \mathbf{r}_{21}. \quad (6.12)$$

Además, como  $\hat{\mathbf{x}}_F = \hat{\mathbf{y}}_F \times \hat{\mathbf{z}}_F$  entonces se tiene que

$$\hat{\mathbf{x}}_F = \frac{2}{\sqrt{3}L_P^3} \mathbf{r}_{23} \times (\mathbf{r}_{23} \times \mathbf{r}_{21}),$$

y empleando la identidad  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}^T \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}^T \mathbf{b})$ , con  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ , se llega a:

$$\hat{\mathbf{x}}_F(\boldsymbol{\rho}) = \frac{2}{\sqrt{3}L_P} \left( \frac{1}{2} \mathbf{r}_{23} - \mathbf{r}_{21} \right),$$

ya que por definición del producto interno  $\mathbf{r}_{23}^T \mathbf{r}_{21} = \frac{1}{2} L_P^2$  y  $\mathbf{r}_{23}^T \mathbf{r}_{23} = L_P^2$ . Así, la matriz de rotación  ${}^0R_F$  puede ser escrita en términos de los vectores  $\mathbf{r}_{ij}$  como:

$${}^0R_F = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}L_P} (\frac{1}{2} \mathbf{r}_{23} - \mathbf{r}_{21}) & \frac{1}{L_P} \mathbf{r}_{23} & \frac{2}{\sqrt{3}L_P^2} \mathbf{r}_{23} \times \mathbf{r}_{21} \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Además, el vector de posición  $\mathbf{r}_F$  está dado por

$$\mathbf{r}_F = \mathbf{r}_{P_1} + \mathbf{r}_{P_1F} = \mathbf{r}_{P_1} + {}^0R_F {}^F \mathbf{r}_{P_1F}, \quad (6.14)$$

donde  ${}^F \mathbf{r}_{P_1F}$  es el vector de  $P_1$  a  $F$  expresado en coordenadas de  $\Sigma_F$ ; sin embargo, nótese que  ${}^F \mathbf{r}_{P_1F}$  tiene componentes sólo en la dirección de los ejes  $X_F$  y  $Z_F$ , es decir:

$${}^F \mathbf{r}_{P_1F} = \begin{bmatrix} \frac{L_P}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ H_{PQ} \end{bmatrix},$$

así que, sustituyendo (6.13) en (6.14), se obtiene:

$$\mathbf{r}_F = \mathbf{r}_{P_1} + \frac{1}{3} \mathbf{r}_{23} - \frac{2}{3} \mathbf{r}_{21} + \frac{2H_{PQ}}{\sqrt{3}L_P^2} (\mathbf{r}_{23} \times \mathbf{r}_{21}),$$

o considerando (6.10) y la definición  $\hat{\mathbf{z}}_F$  en (6.13), se obtiene:

$$\mathbf{r}_F = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_{P_1} + \mathbf{r}_{P_2} + \mathbf{r}_{P_3}) + H_{PQ}\hat{\mathbf{z}}_F. \quad (6.15)$$

De las ecuaciones (6.10), (6.13) y (6.15) se puede concluir que para obtener el MCDP del robot Hexapod, es suficiente conocer los vectores  $\mathbf{r}_{P_1}$ ,  $\mathbf{r}_{P_2}$  and  $\mathbf{r}_{P_3}$ . Sin embargo, se observa en (6.6), que para definir completamente los vectores  $\mathbf{r}_{P_i}$ , es necesario conocer  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  como funciones de  $\mathbf{q}$ ; y esto es precisamente la dificultad del MCDP de este robot, ya que en general,  $\phi_i$  depende de todas las variables articulares activas. Así que es necesario obtener  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  para un vector dado  $\mathbf{q}$ .

Para realizar esto, se sustituye (6.6) en (6.11), y se obtienen tres expresiones de la forma:

$$a_i \cos(\phi_i) + b_i \cos(\phi_j) + c_i \cos(\phi_i) \cos(\phi_j) + d_i \sin(\phi_i) \sin(\phi_j) + e_i = 0 \quad (6.16)$$

donde los coeficientes

$$a_i = -\sqrt{3}r_{C_i P_i} \left( r_{B_j C_j} + \frac{1}{2}L_B \right) \quad (6.17)$$

$$b_i = \sqrt{3}r_{C_j P_j} \left( r_{B_i C_i} - \frac{1}{2}L_B \right) \quad (6.18)$$

$$c_i = r_{C_i P_i} r_{C_j P_j} \quad (6.19)$$

$$d_i = -2r_{C_i P_i} r_{C_j P_j} \quad (6.20)$$

$$e_i = \frac{1}{4}L_B^2 + \frac{1}{2}L_B(r_{B_j C_j} - r_{B_i C_i}) + r_{B_i C_i} r_{B_j C_j} + r_{B_i C_i}^2 + r_{C_i P_i}^2 + r_{B_j C_j}^2 \quad (6.21)$$

$$+ r_{C_j P_j}^2 - L_P^2 \quad (6.22)$$

son en general funciones de  $\mathbf{q}$ , y se ha empleado el hecho de que  $\beta_j - \beta_i = 120^\circ$ , para todo  $(i, j, k) \in S_3$ .

Nótese que si se elige el vector de coordenadas generalizadas no mínimas como

$$\boldsymbol{\rho} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]^T \in \mathbb{R}^9 \quad (6.23)$$

o en forma compacta

$$\boldsymbol{\rho} = [\mathbf{q}^T \ \boldsymbol{\phi}^T]^T$$

con  $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  denotando el ángulo de inclinación de los triángulos isósceles formados por las piernas (ver figura 6.2(b)), entonces las tres expresiones en (6.16) pueden ser tomadas como las restricciones holonómicas a ser satisfechas.

Esto quiere decir que el vector de restricciones  $\gamma(\boldsymbol{\rho}) = \gamma(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}$  sería:

$$\gamma(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi}) = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{q})c(\phi_1) + b_1(\mathbf{q})c(\phi_2) + c_1(\mathbf{q})c(\phi_1)c(\phi_2) + d_1(\mathbf{q})s(\phi_1)s(\phi_2) + e_1(\mathbf{q}) \\ a_2(\mathbf{q})c(\phi_2) + b_2(\mathbf{q})c(\phi_3) + c_2(\mathbf{q})c(\phi_2)c(\phi_3) + d_2(\mathbf{q})s(\phi_2)s(\phi_3) + e_2(\mathbf{q}) \\ a_3(\mathbf{q})c(\phi_3) + b_3(\mathbf{q})c(\phi_1) + c_3(\mathbf{q})c(\phi_3)c(\phi_1) + d_3(\mathbf{q})s(\phi_3)s(\phi_1) + e_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

con  $c(\phi_i) = \cos(\phi_i)$  y  $s(\phi_i) = \sin(\phi_i)$ .

Además, nótese que para la selección dada de  $\boldsymbol{\rho}$ , se tiene

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} I & O \end{bmatrix} \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \rho_5 & \rho_6 \end{bmatrix}^T,$$

la cual claramente es una función suave (o continuamente diferenciable); entonces, del teorema de la función implícita se asegura la existencia de la función  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})$ .

A continuación se explica cómo resolver el sistema de ecuaciones dado por (6.16) empleando un método analítico. Para comenzar, todos los senos y cosenos en (6.16) son respectivamente reemplazados por

$$\cos(\phi_i) = \frac{1 - x_i^2}{1 + x_i^2} \quad \text{y} \quad \sin(\phi_i) = \frac{2x_i}{1 + x_i^2}$$

donde  $x_i = \tan\left(\frac{\phi_i}{2}\right)$ . Reagrupando términos en  $\gamma_1(\boldsymbol{\rho})$ ,  $\gamma_2(\boldsymbol{\rho})$  y  $\gamma_3(\boldsymbol{\rho})$ , se obtienen las ecuaciones

$$x_2^2(f_1x_1^2 + g_1) + h_1x_1^2 + 4d_1x_1x_2 + k_1 = 0 \quad (6.25)$$

$$x_3^2(f_2x_2^2 + g_2) + h_2x_2^2 + 4d_2x_2x_3 + k_2 = 0 \quad (6.26)$$

$$x_1^2(f_3x_3^2 + g_3) + h_3x_3^2 + 4d_3x_3x_1 + k_3 = 0 \quad (6.27)$$

donde  $f_i = -a_i - b_i + c_i + e_i$ ,  $g_i = a_i - b_i - c_i + e_i$ ,  $h_i = -a_i + b_i - c_i + e_i$  y  $k_i = a_i + b_i + c_i + e_i$ , con  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  y  $e_i$  dados por (6.17)-(6.22).

Para obtener un polinomio que sólo depende de la variable  $x_1$  aplicando el método de Bezout (Nanua et al., 1990), primero se elimina  $x_3$  de (6.26) y (6.27), obteniéndose una ecuación que contiene sólo  $x_1$  y  $x_2$ . Luego, nuevamente empleando el método de Bezout a partir de la ecuación obtenida en el paso anterior y la ecuación (6.25), es posible obtener una ecuación que depende sólo de  $x_1$ .

En aras de la simplicidad, las ecuaciones (6.26) y (6.27) se reescriben como:

$$A_1x_3^2 + B_1x_3 + C_1 = 0 \quad (6.28)$$

$$A_2x_3^2 + B_2x_3 + C_2 = 0 \quad (6.29)$$

donde  $A_1 = f_2x_2^2 + g_2$ ,  $B_1 = 4d_2x_2$ ,  $C_1 = h_2x_2^2 + k_2$ ,  $A_2 = f_3x_1^2 + h_3$ ,  $B_2 = 4d_3x_1$  y  $C_2 = g_3x_1^2 + k_3$ .

Ahora, siguiendo el procedimiento descrito en (Nanua et al., 1990), de las ecuaciones (6.28) y (6.29) es posible obtener la ecuación:

$$\det \left[ \begin{array}{c} \det \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{bmatrix} \end{array} \det \begin{bmatrix} B_2 & B_1 \\ A_2 & A_1 \\ A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{bmatrix} \right] = Dx_2^4 + Ex_2^3 + Fx_2^2 + Gx_2 + H = 0 \quad (6.30)$$

donde  $\det[\cdot]$  indica el determinante de la matriz en el argumento,  $D = l_1x_1^4 + n_1x_1^2 + o_1$ ,  $E = m_1x_1^3 + p_1x_1$ ,  $F = l_2x_1^4 + n_2x_1^2 + o_2$ ,  $G = m_2x_1^3 + p_2x_1$ , y  $H = l_3x_1^4 + n_3x_1^2 + o_3$ , con

$$l_1 = f_2^2g_3^2 - 2f_2f_3g_3h_2 + f_3^2h_2^2 \quad (6.31)$$

$$m_1 = -16d_2d_3f_2g_3 - 16d_2d_3f_3h_2 \quad (6.32)$$

$$n_1 = 16d_3^2f_2h_2 + 2f_2^2g_3k_3 - 2f_2f_3h_2k_3 - 2f_2g_3h_2h_3 + 2f_3h_2^2h_3 \quad (6.33)$$

$$o_1 = f_2^2k_3^2 - 2f_2h_2h_3k_3 + h_2^2h_3^2 \quad (6.34)$$

$$p_1 = -16d_2d_3f_2k_3 - 16d_2d_3h_2h_3 \quad (6.35)$$

$$l_2 = 16d_2^2f_3g_3 - 2f_2f_3g_3k_2 + 2f_2g_2g_3^2 + 2f_3^2h_2k_2 - 2f_3g_2g_3h_2 \quad (6.36)$$

$$m_2 = -16d_2d_3f_3k_2 - 16d_2d_3g_2g_3 \quad (6.37)$$

$$n_2 = 16d_2^2f_3k_3 + 16d_2^2g_3h_3 + 16d_3^2f_2k_2 + 16d_3^2g_2h_2 - 2f_2f_3k_2k_3 \quad (6.38)$$

$$+4f_2g_2g_3k_3 - 2f_2g_3h_3k_2 - 2f_3g_2h_2k_3 + 4f_3h_2h_3k_2 - 2g_2g_3h_2h_3 \quad (6.39)$$

$$o_2 = 16d_2^2h_3k_3 + 2f_2g_2k_3^2 - 2f_2h_3k_2k_3 \quad (6.40)$$

$$p_2 = -16d_2d_3g_2k_3 - 16d_2d_3h_3k_2 \quad (6.41)$$

$$l_3 = f_3^2k_2^2 - 2f_3g_2g_3k_2 + g_2^2g_3^2 \quad (6.42)$$

$$n_3 = 16d_3^2g_2k_2 - 2f_3g_2k_2k_3 + 2f_3h_3k_2^2 + 2g_2^2g_3k_3 - 2g_2g_3h_3k_2 - 2g_2g_3h_3k_2 \quad (6.43)$$

$$o_3 = g_2^2k_3^2 - 2g_2h_3k_2k_3 + h_3^2k_2^2. \quad (6.44)$$

Seguindo un método similar al proporcionado en (Nanua et al., 1990), es posible eliminar  $x_2$  de las ecuaciones (6.25) y (6.30) y obtener la siguiente ecuación:

$$r_1x_1^{16} + r_2x_1^{14} + r_3x_1^{12} + r_4x_1^{10} + r_5x_1^8 + r_6x_1^6 + r_7x_1^4 + r_8x_1^2 + r_9 = 0 \quad (6.45)$$

cuyos coeficientes pueden ser obtenidos a partir de la expresión:

$$\det \begin{bmatrix} \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,2} & \Lambda_{1,3} & \Lambda_{1,4} \\ \Lambda_{2,1} & \Lambda_{2,2} & \Lambda_{2,3} & \Lambda_{2,4} \\ \Lambda_{3,1} & \Lambda_{3,2} & \Lambda_{3,3} & \Lambda_{3,4} \\ \Lambda_{4,1} & \Lambda_{4,2} & \Lambda_{4,3} & \Lambda_{4,4} \end{bmatrix} = 0$$

donde

$$\begin{aligned}
\Lambda_{1,1} &= (m_1 f_1 - 4l_1 d_1)x_1^5 + (m_1 g_1 + f_1 p_1)x_1^3 - 4d_1 n_1 x_1^2 + (g_1 p_1 - 4d_1 o_1)x_1 \\
\Lambda_{1,2} &= (l_1 f_1 + l_1 h_1)x_1^6 + (g_1 l_2 + f_1 n_2 - h_1 l_1 - k_1 l_1 - h_1 n_1)x_1^4 + (g_1 n_2 + f_1 o_2 - k_1 n_1 \\
&\quad - h_1 o_1)x_1^2 + g_1 o_2 - k_1 o_1 \\
\Lambda_{1,3} &= f_1 m_2 x_1^5 + (g_1 m_2 + f_1 p_2)x_1^3 + g_1 p_2 x_1 \\
\Lambda_{1,4} &= f_1 l_3 x_1^6 + g_1 l_3 x_1^4 + f_1 n_3 x_1^4 + g_1 n_3 x_1^4 + g_1 n_3 x_1^2 + f_1 o_3 x_1^2 + g_1 o_3 \\
\Lambda_{2,1} &= (l_1 f_1 + l_1 h_1)x_1^6 + (g_1 l_2 + f_1 n_2 - h_1 l_1 - k_1 l_1 - h_1 n_1)x_1^4 + (g_1 n_2 + f_1 o_2 - k_1 n_1 \\
&\quad - h_1 o_1)x_1^2 + g_1 o_2 - k_1 o_1 \\
\Lambda_{2,2} &= (4d_1 l_2 - h_1 m_1 + f_1 m_2)x_1^5 + (4d_1 n_2 - k_1 m_1 - h_1 p_1 + f_1 p_2 + g_1 m_2)x_1^3 \\
&\quad + (-h_1 m_1 - k_1 p_1 + g_1 p_2)x_1 \\
\Lambda_{2,3} &= f_1 l_3 x_1^6 + (4d_1 m_2 + f_1 n_3 + g_1 l_3)x_1^4 + (4d_1 p_2 + f_1 o_3 + g_1 n_3)x_1^2 + g_1 o_3 \\
\Lambda_{2,4} &= 4d_1 l_3 x_1^5 + 4d_1 n_3 x_1^3 + 4d_1 o_3 \\
\Lambda_{3,1} &= f_1 x_1^2 + g_1 \\
\Lambda_{3,2} &= 4d_1 x_1 \\
\Lambda_{3,3} &= h_1 x_1^2 + k_1 \\
\Lambda_{3,4} &= 0 \\
\Lambda_{4,1} &= 0 \\
\Lambda_{4,2} &= f_1 x_1^2 + g_1 \\
\Lambda_{4,3} &= 4d_1 x_1 \\
\Lambda_{4,4} &= h_1 x_1^2 + k_1
\end{aligned}$$

y los coeficientes de  $x_1$  en  $\Lambda_{i,j}$  son funciones de  $\mathbf{q}$ , como puede observarse en (6.17)-(6.22) y (6.31)-(6.44).

Dados los parámetros cinemáticos del robot, es posible emplear Matlab para obtener las 16 raíces del polinomio (6.45), es decir, los valores de  $\tan(\frac{\phi_i}{2})$ , y de allí lo valores de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  que satisface el sistema (6.16). Nótese que el polinomio (6.45) puede ser reducido a un polinomio de grado 8 en términos de una nueva variable  $\zeta = x_1^2$ , y despejando  $x_1$ , finalmente se obtiene  $x_1 = \pm\sqrt{\zeta}$ . Esto significa que las 16 soluciones de (6.45) vienen en pares (es decir, si  $\bar{x}_1$  es una solución de (6.45), entonces también lo es  $-\bar{x}_1$ ).

Es importante mencionar que solo una de las 16 soluciones corresponde a los ángulos que describen la configuración real del robot. Para determinar cuál es la solución real, es necesario evaluar el MCDP para cada una de las soluciones y comparar con la configuración real del robot.

Hasta el momento no se ha realizado un estudio completo de las singularidades del robot Hexapod, incluyendo aquellas configuraciones para las cuales  $J_\psi(\boldsymbol{\rho})$  es singular, sin embargo, la intuición parece indicar que debido a la simetría del robot y a los límites

físicos de cada variable articular activa, todo el espacio de trabajo real del Hexapod es un subconjunto de  $\Omega_\rho^*$ .

## 6.2.2 Modelo cinemático directo de velocidad

Los vectores de velocidad lineal  $\mathbf{v}$  y velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  de la plataforma móvil del Hexapod pueden ser calculados usando (4.65) y (4.67).

Así, considerando (6.13) y (6.15) se tiene que

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_F = \left[ \frac{1}{3}(J_1 + J_2 + J_3) + H_{PQ}J_z \right] A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (6.46)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} [S(\hat{\mathbf{x}}_F)J_x + S(\hat{\mathbf{y}}_F)J_y + S(\hat{\mathbf{z}}_F)J_z] A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (6.47)$$

donde las jacobianas auxiliares

$$J_i = \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.48)$$

y

$$J_x = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_F}{\partial \boldsymbol{\rho}}, \quad J_y = \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}_F}{\partial \boldsymbol{\rho}}, \quad J_z = \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}_F}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (6.49)$$

están dadas por:

$$J_x = \frac{2}{\sqrt{3}L_p} \left( -J_1 + \frac{1}{2}J_2 + \frac{1}{2}J_3 \right) \quad (6.50)$$

$$J_y = \frac{1}{L_p} (J_3 - J_2) \quad (6.51)$$

$$J_z = \frac{2}{\sqrt{3}L_p^2} (S(\mathbf{r}_{P_3} - \mathbf{r}_{P_2})J_1 + S(\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_3})J_2 + S(\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1})J_3) \quad (6.52)$$

Para el cálculo de la matriz  $A(\mathbf{q})$  considérese el procedimiento descrito en la sección 3.3, según el cual, si el vector de coordenadas generalizadas no mínimas se selecciona de manera que

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) = [ \mathbf{q}^T \quad \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q})^T ]^T$$

, entonces  $A(\mathbf{q})$  está dada por (3.42). Las expresiones para  $\left( \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1}$  y  $\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi}}$  en el caso del robot Hexapod están dadas por:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})^{-1}}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \frac{1}{\Phi} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix} \quad (6.53)$$



donde

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= (-a_2s(\phi_2) - c_2s(\phi_2)c(\phi_3) + d_2c(\phi_2)s(\phi_3))(-a_3s(\phi_3) - c_3s(\phi_3)c(\phi_1) + d_3c(\phi_3)s(\phi_1)) \\
\Phi_{12} &= -(-b_1s(\phi_2) - c_1c(\phi_1)s(\phi_2) + d_1s(\phi_1)c(\phi_2))(-a_3s(\phi_3) - c_3s(\phi_3)c(\phi_1) + d_3c(\phi_3)s(\phi_1)) \\
\Phi_{13} &= (-b_1s(\phi_2) - c_1c(\phi_1)s(\phi_2) + d_1s(\phi_1)c(\phi_2))(-b_2s(\phi_3) - c_2c(\phi_2)s(\phi_3) + d_2s(\phi_2)c(\phi_3)) \\
\Phi_{21} &= (-b_2s(\phi_3) - c_2c(\phi_2)s(\phi_3) + d_2s(\phi_2)c(\phi_3))(-b_3s(\phi_1) - c_3c(\phi_3)s(\phi_1) + d_3s(\phi_3)c(\phi_1)) \\
\Phi_{22} &= (-a_1s(\phi_1) - c_1s(\phi_1)c(\phi_2) + d_1c(\phi_1)s(\phi_2))(-a_3s(\phi_3) - c_3s(\phi_3)c(\phi_1) + d_3c(\phi_3)s(\phi_1)) \\
\Phi_{23} &= -(-a_1s(\phi_1) - c_1s(\phi_1)c(\phi_2) + d_1c(\phi_1)s(\phi_2))(-b_2s(\phi_3) - c_2c(\phi_2)s(\phi_3) + d_2s(\phi_2)c(\phi_3)) \\
\Phi_{31} &= -(-a_2s(\phi_2) - c_2s(\phi_2)c(\phi_3) + d_2c(\phi_2)s(\phi_3))(-b_3s(\phi_1) - c_3c(\phi_3)s(\phi_1) + d_3s(\phi_3)c(\phi_1)) \\
\Phi_{32} &= (-b_3s(\phi_1) - c_3c(\phi_3)s(\phi_1) + d_3s(\phi_3)c(\phi_1))(-b_1s(\phi_2) - c_1c(\phi_1)s(\phi_2) + d_1s(\phi_1)c(\phi_2)) \\
\Phi_{33} &= (-a_1s(\phi_1) - c_1s(\phi_1)c(\phi_2) + d_1c(\phi_1)s(\phi_2))(-a_2s(\phi_2) - c_2s(\phi_2)c(\phi_3) + d_2c(\phi_2)s(\phi_3)) \\
\Phi &= (-a_1s(\phi_1) - c_1s(\phi_1)c(\phi_2) + d_1c(\phi_1)s(\phi_2))(-a_2s(\phi_2) - c_2s(\phi_2)c(\phi_3) + d_2c(\phi_2)s(\phi_3)) \\
&\quad (-a_3s(\phi_3) - c_3s(\phi_3)c(\phi_1) + d_3c(\phi_3)s(\phi_1)) + (-b_3s(\phi_1) - c_3c(\phi_3)s(\phi_1) + d_3s(\phi_3)c(\phi_1)) \\
&\quad (-b_1s(\phi_2) - c_1c(\phi_1)s(\phi_2) + d_1s(\phi_1)c(\phi_2))(-b_2s(\phi_3) - c_2c(\phi_2)s(\phi_3) + d_2s(\phi_2)c(\phi_3))
\end{aligned}$$

con  $s(\cdot) = \text{sen}(\cdot)$ ,  $c(\cdot) = \text{cos}(\cdot)$ , los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  definidos en (6.17)-(6.22), y

$$\frac{\partial \gamma(\boldsymbol{\rho})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & \Gamma_{25} & \Gamma_{26} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} & \Gamma_{35} & \Gamma_{36} \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

donde

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= -\sqrt{3}n_1(r_{B_2C_2} + 0.5L_B)c(\phi_1) - 0.5\sqrt{3}r_{C_2P_2}c(\phi_2) + n_1r_{C_2P_2}c(\phi_1)c(\phi_2) \\
&\quad - 2n_1r_{C_2P_2}s(\phi_1)s(\phi_2) + (0.25L_B - 0.5r_{B_2C_2} - r_{B_1C_1} + 2r_{C_1P_1}n_1) \\
\Gamma_{12} &= -\sqrt{3}n_1(r_{B_2C_2} + 0.5L_B)c(\phi_1) + 0.5\sqrt{3}r_{C_2P_2}c(\phi_2) + n_1r_{C_2P_2}c(\phi_1)c(\phi_2) \\
&\quad - 2n_1r_{C_2P_2}s(\phi_1)s(\phi_2) + (-0.25L_B + 0.5r_{B_2C_2} + r_{B_1C_1} + 2r_{C_1P_1}n_1) \\
\Gamma_{13} &= 0.5\sqrt{3}r_{C_1P_1}c(\phi_1) + \sqrt{3}n_2(r_{B_1C_1} - 0.5L_B)c(\phi_2) + n_2r_{C_1P_1}c(\phi_2)c(\phi_1) \\
&\quad - 2n_2r_{C_1P_1}s(\phi_2)s(\phi_1) + (-0.25L_B - 0.5r_{B_1C_1} - r_{B_2C_2} + 2r_{C_2P_2}n_2) \\
\Gamma_{14} &= -0.5\sqrt{3}r_{C_1P_1}c(\phi_1) + \sqrt{3}n_2(r_{B_1C_1} - 0.5L_B)c(\phi_2) + n_2r_{C_1P_1}c(\phi_2)c(\phi_1) \\
&\quad - 2n_2r_{C_1P_1}s(\phi_2)s(\phi_1) + (0.25L_B + 0.5r_{B_1C_1} + r_{B_2C_2} + 2r_{C_2P_2}n_2) \\
\Gamma_{15} &= 0 \\
\Gamma_{16} &= 0 \\
\Gamma_{21} &= 0 \\
\Gamma_{22} &= 0 \\
\Gamma_{23} &= -\sqrt{3}n_2(r_{B_3C_3} + 0.5L_B)c(\phi_2) - 0.5\sqrt{3}r_{C_3P_3}c(\phi_3) + n_2r_{C_3P_3}c(\phi_2)c(\phi_3) \\
&\quad - 2n_2r_{C_3P_3}s(\phi_2)s(\phi_3) + (0.25L_B - 0.5r_{B_3C_3} - r_{B_2C_2} + 2r_{C_2P_2}n_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{24} &= -\sqrt{3}n_2(r_{B_3C_3} + 0.5L_B)c(\phi_2) + 0.5\sqrt{3}r_{C_3P_3}c(\phi_3) + n_2r_{C_3P_3}c(\phi_2)c(\phi_3) \\
&\quad - 2n_2r_{C_3P_3}s(\phi_2)s(\phi_3) + (-0.25L_B + 0.5r_{B_3C_3} + r_{B_2C_2} + 2r_{C_2P_2}n_2) \\
\Gamma_{25} &= 0.5\sqrt{3}r_{C_2P_2}c(\phi_2) + \sqrt{3}n_3(r_{B_2C_2} - 0.5L_B)c(\phi_3) + n_3r_{C_2P_2}c(\phi_3)c(\phi_2) \\
&\quad - 2n_3r_{C_2P_2}s(\phi_3)s(\phi_2) + (-0.25L_B - 0.5r_{B_2C_2} - r_{B_3C_3} + 2r_{C_3P_3}n_3) \\
\Gamma_{26} &= -0.5\sqrt{3}r_{C_2P_2}c(\phi_2) + \sqrt{3}n_3(r_{B_2C_2} - 0.5L_B)c(\phi_3) + n_3r_{C_2P_2}c(\phi_3)c(\phi_2) \\
&\quad - 2n_3r_{C_2P_2}s(\phi_3)s(\phi_2) + (0.25L_B + 0.5r_{B_2C_2} + r_{B_3C_3} + 2r_{C_3P_3}n_3) \\
\Gamma_{31} &= 0.5\sqrt{3}r_{C_3P_3}c(\phi_3) + \sqrt{3}n_1(r_{B_3C_3} - 0.5L_B)c(\phi_1) + n_1r_{C_3P_3}c(\phi_1)c(\phi_3) \\
&\quad - 2n_1r_{C_3P_3}s(\phi_1)s(\phi_3) + (-0.25L_B - 0.5r_{B_3C_3} - r_{B_1C_1} + 2r_{C_1P_1}n_1) \\
\Gamma_{32} &= -0.5\sqrt{3}r_{C_3P_3}c(\phi_3) + \sqrt{3}n_1(r_{B_3C_3} - 0.5L_B)c(\phi_1) + n_1r_{C_3P_3}c(\phi_1)c(\phi_3) \\
&\quad - 2n_1r_{C_3P_3}s(\phi_1)s(\phi_3) + (0.25L_B + 0.5r_{B_3C_3} + r_{B_1C_1} + 2r_{C_1P_1}n_1) \\
\Gamma_{33} &= 0 \\
\Gamma_{34} &= 0 \\
\Gamma_{35} &= -\sqrt{3}n_3(r_{B_1C_1} + 0.5L_B)c(\phi_3) - 0.5\sqrt{3}r_{C_1P_1}c(\phi_1) + n_3r_{C_1P_1}c(\phi_3)c(\phi_1) \\
&\quad - 2n_3r_{C_1P_1}s(\phi_3)s(\phi_1) + (0.25L_B - 0.5r_{B_1C_1} - r_{B_3C_3} + 2r_{C_3P_3}n_3) \\
\Gamma_{36} &= -\sqrt{3}n_3(r_{B_1C_1} + 0.5L_B)c(\phi_3) + 0.5\sqrt{3}r_{C_1P_1}c(\phi_1) + n_3r_{C_1P_1}c(\phi_3)c(\phi_1) \\
&\quad - 2n_3r_{C_1P_1}s(\phi_3)s(\phi_1) + (-0.25L_B + 0.5r_{B_1C_1} + r_{B_3C_3} + 2r_{C_3P_3}n_3)
\end{aligned}$$

con  $n_1 = -\frac{q_0+q_1}{4r_{C_1P_1}}$ ,  $n_2 = -\frac{q_2+q_3}{4r_{C_2P_2}}$  y  $n_3 = -\frac{q_4+q_5}{4r_{C_3P_3}}$ , y  $r_{B_iC_i}$  y  $r_{C_iP_i}$  dada en (6.4) y (6.5), respectivamente.

Por otra parte, si se emplea el vector de ángulos de Euler  $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\rho}) = [\lambda \quad \mu \quad \nu]^T \in \mathbb{R}^3$  para definir la orientación de la plataforma del Hexapod, la jacobiana analítica  $J_A(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  satisface que:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\rho}) = J_A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, \quad (6.55)$$

donde  $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \left[ \boldsymbol{v}^T \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}^T \right]^T \in \mathbb{R}^6$ .

Y como se sabe que la velocidad angular puede también ser expresada como (1.11), entonces, de las ecuaciones (1.11), (6.46), (6.47) y (6.55), la matriz jacobiana analítica  $J_A(\boldsymbol{\rho})$  para el Hexapod está dada por:

$$J_A(\boldsymbol{\rho}) = \left[ \begin{array}{c} \left[ \frac{1}{3}(J_1 + J_2 + J_3) + H_{PQ}J_z \right] \\ \frac{1}{2}T(\boldsymbol{\psi})^{-1} [S(\hat{\boldsymbol{x}}_F)J_x + S(\hat{\boldsymbol{y}}_F)J_y + S(\hat{\boldsymbol{z}}_F)J_z] \end{array} \right] A(\boldsymbol{q}), \quad (6.56)$$

donde  $T(\boldsymbol{\psi}) = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \cos(\lambda) & \sin(\lambda)\sin(\mu) \\ 0 & \sin(\lambda) & -\cos(\lambda)\sin(\mu) \\ 1 & 0 & \cos(\mu) \end{array} \right]$ , para la convención  $ZYX$  de los ángulos de Euler.

## 6.3 Modelado dinámico

En esta sección se muestra la aplicación del procedimiento descrito en la sección 4.4.2 (formulación de Euler-Lagrange) para calcular el modelo dinámico inverso del robot paralelo Hexapod.

El análisis considera que el robot Hexapod consiste de un total de  $b = 25$  cuerpos rígidos móviles distribuidos como se indica enseguida:

- La plataforma: 1.
- Las piernas: 6.
- Los eslabones entre una articulación P y una articulación U: 6.
- Los eslabones entre los dos extremos de una articulación U: 6.
- Los dos eslabones entre los dos extremos de una articulación S:  $2 \times 3 = 6$ .

### 6.3.1 Cálculo de las velocidades de cada cuerpo rígido

En esta subsección se explica cómo calcular  $\mathbf{v}_l$  y  ${}^l\boldsymbol{\omega}_l$  para cada cuerpo rígido del Hexapod. En cada uno de los apartados siguientes primero se muestra cómo describir la postura del cuerpo rígido  $l$ , a través del vector de posición  $\mathbf{r}_l \in \mathbb{R}^3$  y la matriz de rotación  ${}^0R_l \in \text{SO}(3)$ ; después de esto,  $\mathbf{v}_l$  y  ${}^l\boldsymbol{\omega}_l$  son calculados empleando  $\dot{\mathbf{r}}_l$  y  ${}^0\dot{R}_l$ . Para simplificar el análisis subsecuente, se emplean los jacobianos  $J_{G_l}$  y  $K_{G_l}$  los cuales satisfacen que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_l \\ {}^l\boldsymbol{\omega}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{G_l} \\ K_{G_l} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (6.57)$$

así que

$$J_{G_l} = \frac{\partial \mathbf{r}_l(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (6.58)$$

$$K_{G_l} = \frac{1}{2} {}^0R_l(\boldsymbol{\rho})^T \left[ S(\hat{\mathbf{x}}_l(\boldsymbol{\rho})) \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_l(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} + S(\hat{\mathbf{y}}_l(\boldsymbol{\rho})) \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}_l(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} + S(\hat{\mathbf{z}}_l(\boldsymbol{\rho})) \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}_l(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right] \quad (6.59)$$

#### Plataforma

Considérese  $l = 1$  en el caso de la plataforma. De (6.15), el vector de posición del centro de masa es

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_{P_1} + \mathbf{r}_{P_2} + \mathbf{r}_{P_3}) + H^* \hat{\mathbf{z}}_F,$$

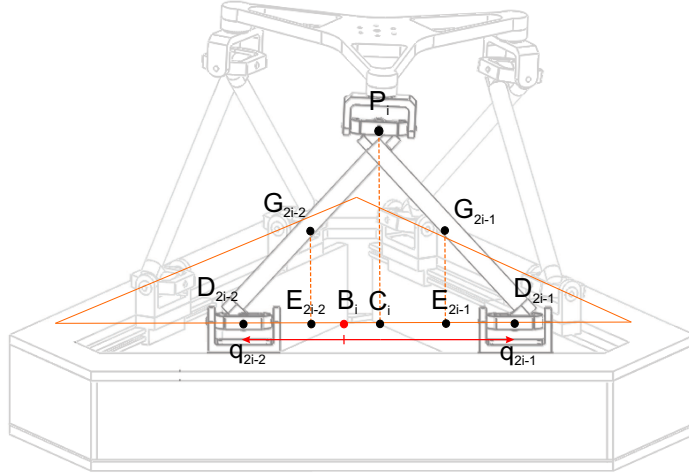


Figura 6.4: Localización del centro de masa de las piernas del Hexapod.

donde  $H^*$  es la distancia del centro del triángulo  $P_1P_2P_3$  al centro de masa de la plataforma. Empleando el marco  $\Sigma_F$  para calcular la velocidad angular de la plataforma, es posible escribir

$${}^0R_1 = {}^0R_F = [\hat{x}_F(\boldsymbol{\rho}) \quad \hat{y}_F(\boldsymbol{\rho}) \quad \hat{z}_F(\boldsymbol{\rho})],$$

considerando (6.13). Así, los vectores de velocidad lineal y angular pueden ser calculados a través de (6.57), con  $l = 1$ , usando:

$$J_{G_1} = \frac{1}{3} (J_1 + J_2 + J_3) + H^* J_z \quad (6.60)$$

y

$$K_{G_1} = \frac{1}{2} {}^0R_F^T [S(\hat{x}_F)J_x + S(\hat{y}_F)J_y + S(\hat{z}_F)J_z], \quad (6.61)$$

donde las jacobianas auxiliares  $J_i$ ,  $J_x$ ,  $J_y$  y  $J_z$  están definidas en (6.48) y (6.49), y sus expresiones para el caso del Hexapod están dadas en (6.50)-(6.52).

## Piernas

El robot Hexapod tiene seis piernas, dos en cada lado del triángulo de la base. La figura 6.4 muestra el lado  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) con las piernas  $2i - 2$  y  $2i - 1$  (las cuales están acopladas a las articulaciones activas con el mismo número). Para el análisis, considérese que la pierna  $2i - 2$  corresponde al cuerpo  $l = 2i$  y la pierna  $2i - 1$  al cuerpo  $l = 2i + 1$ . Así, en la cuenta de  $b = 25$  cuerpos rígidos, las piernas corresponden a los números  $l = 2, 3, \dots, 7$ .

Por simplicidad, supóngase que cada pierna es simétrica, así que su centro de masa,

etiquetado como  $G_{2i-2}$  ó  $G_{2i-1}$ , está en el punto medio del segmento correspondiente, ya sea  $P_i D_{2i-2}$  ó  $P_i D_{2i-1}$ .

Como se observa en la figura 6.4,  $E_{2i-2}$  y  $E_{2i-1}$  son los puntos medios de los segmentos  $C_i D_{2i-2}$  y  $C_i D_{2i-1}$ , respectivamente, por lo tanto  $\mathbf{r}_{C_i E_{2i-1}} = -\mathbf{r}_{C_i E_{2i-2}} = \frac{\bar{q}_i}{4} {}^0 R_{T_i}(\beta_i) [1 \ 0 \ 0]^T$  y  $\mathbf{r}_{E_{2i-1} G_{2i-1}} = \mathbf{r}_{E_{2i-2} G_{2i-2}} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{C_i P_i}$ ; así que, los vectores de posición de  $G_{2i-2}$  y  $G_{2i-1}$ ,  $\mathbf{r}_{G_{2i-2}}$  y  $\mathbf{r}_{G_{2i-1}}$ , están dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{2i} &= \mathbf{r}_{G_{2i-2}} = \mathbf{r}_{C_i} + \mathbf{r}_{C_i E_{2i-2}} + \mathbf{r}_{E_{2i-2} G_{2i-2}} \\ &= {}^0 R_{T_i}(\beta_i) \begin{bmatrix} r_{B_i C_i} - \frac{\bar{q}_i}{4} \\ -\frac{L_B}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} r_{C_i P_i} \cos(\phi_i) \\ \frac{1}{2} r_{C_i P_i} \sin(\phi_i) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{P_i} + {}^0 R_{T_i}(\beta_i) \begin{bmatrix} -\frac{q_{2i-2}}{2} \\ -\frac{L_B}{4\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{2i+1} &= \mathbf{r}_{G_{2i-1}} = \mathbf{r}_{C_i} + \mathbf{r}_{C_i E_{2i-1}} + \mathbf{r}_{E_{2i-1} G_{2i-1}} \\ &= {}^0 R_{T_i}(\beta_i) \begin{bmatrix} r_{B_i C_i} + \frac{\bar{q}_i}{4} \\ -\frac{L_B}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} r_{C_i P_i} \cos(\phi_i) \\ \frac{1}{2} r_{C_i P_i} \sin(\phi_i) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{P_i} + {}^0 R_{T_i}(\beta_i) \begin{bmatrix} \frac{q_{2i-1}}{2} \\ -\frac{L_B}{4\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, considerando los marcos  $\Sigma_{C_i}$ ,  $\Sigma_{D_{2i-2}}$  y  $\Sigma_{D_{2i-1}}$ , definidos al final de la sección 6.1, y mostrados en la figura 6.3, se tiene que la orientación de las piernas  $2i-1$  y  $2i-2$ , con respecto al marco de la base, está respectivamente dada por:

$$\begin{aligned} {}^0 R_{2i} &= {}^0 R_{D_{2i-1}} = {}^0 R_{T_i}(\beta_i) R_x(\phi_i) R_z(\alpha_i) \\ {}^0 R_{2i+1} &= {}^0 R_{D_{2i-2}} = {}^0 R_{T_i}(\beta_i) R_x(\phi_i) R_z(-\alpha_i) \end{aligned}$$

donde se emplearon las matrices de rotación elementales  $R_x(\cdot)$  y  $R_z(\cdot)$  definidas en (3.6) y (3.8), respectivamente, y donde fueron empleadas las relaciones:  $\sin(\alpha_i) = \frac{\|\mathbf{r}_{C_i D_{2i-1}}\|}{L} = \frac{\bar{q}_i}{2L}$  y  $\cos(\alpha_i) = \frac{r_{C_i P_i}}{L}$ , con  $r_{C_i P_i}$  y  $\bar{q}_i$  definidos en (6.8) y (6.9), respectivamente, y  $L$  la longitud del eslabón.

Ahora, aplicando (6.58) y (6.59) para  $l = 2i$  y  $l = 2i + 1$ , puede verificarse que

$$J_{G_{2i}} = \frac{1}{2} J_i + {}^0 R_{T_i}(\beta_i) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \begin{bmatrix} -\frac{q_{2i-2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_{G_{2i+1}} = \frac{1}{2} J_i + {}^0 R_{T_i}(\beta_i) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \begin{bmatrix} \frac{q_{2i-1}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.62)$$

$$K_{G_{2i}} = \frac{r_{C_i P_i}}{L} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \begin{bmatrix} \phi_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\bar{q}_i}{2L} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2r_{C_i P_i}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{q}_i \end{bmatrix}$$

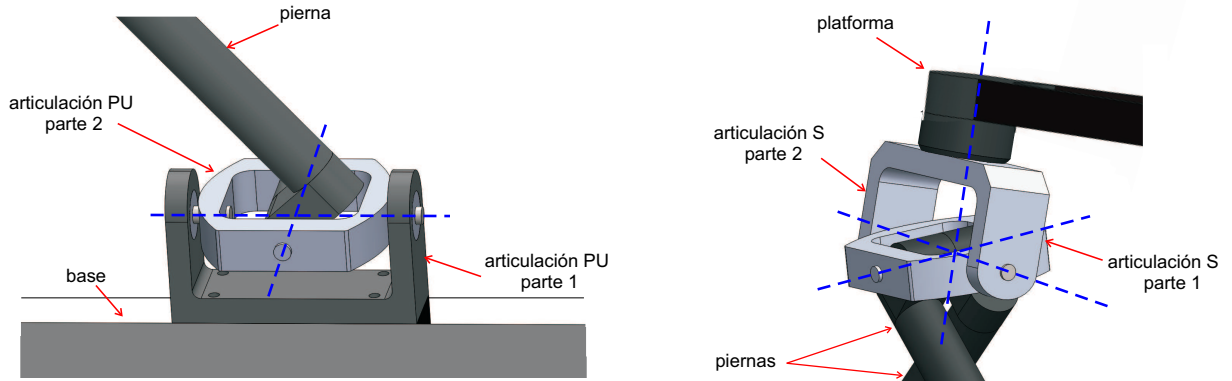


Figura 6.5: Cuerpos rígidos en las articulaciones del Hexapod: (a) articulación PU, (b) articulación S.

y

$$K_{G_{2i+1}} = \frac{r_{C_i P_i}}{L} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \begin{bmatrix} \phi_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\bar{q}_i}{2L} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2r_{C_i P_i}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{q}_i \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

así que

$$\mathbf{v}_{2i} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_{P_i} + {}^0 R_{T_i}(\beta_i) \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\bar{q}}_{2i-2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{2i+1} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_{P_i} + {}^0 R_{T_i}(\beta_i) \begin{bmatrix} \frac{\dot{\bar{q}}_{2i-1}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$${}^{2i} \boldsymbol{\omega}_{2i} = \begin{bmatrix} \frac{r_{C_i P_i}}{L} \dot{\phi}_i \\ \frac{\bar{q}_i}{2L} \dot{\phi}_i \\ -\frac{1}{2r_{C_i P_i}} \dot{\bar{q}}_i \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad {}^{2i+1} \boldsymbol{\omega}_{2i+1} = \begin{bmatrix} \frac{r_{C_i P_i}}{L} \dot{\phi}_i \\ -\frac{\bar{q}_i}{2L} \dot{\phi}_i \\ \frac{1}{2r_{C_i P_i}} \dot{\bar{q}}_i \end{bmatrix}.$$

### Articulaciones P y U

Nótese que las articulaciones prismática (P) y universal (U) pueden ser vistas como una articulación compuesta de 2 g.d.l. entre la base del robot y cada una de sus piernas. Cada articulación PU contiene dos cuerpos rígidos (o partes) intermedios los cuales pueden ser apreciados en la figura 6.5(a):

- Articulación PU, parte 1: Esta es la base de la articulación U, la cual se mueve a lo largo del lado de la base del triángulo, variando la articulación activa correspondiente; debido al efecto del actuador en la articulación P.

- Articulación PU, parte 2: Es el eslabón acoplado entre la parte 1 de una articulación PU y la pierna correspondiente, su movimiento combina el desplazamiento de una coordenada articular activa y la rotación de una coordenada articular pasiva correspondiente a la variación del ángulo  $\phi$ .

### Articulación PU, parte 1

Considérese que la parte 1 de la articulación PU  $2i - 2$  corresponde al cuerpo  $l = 2i + 6$  y la misma parte de la articulación PU  $2i - 1$  al cuerpo  $l = 2i + 7$ . Así, las primeras partes de las articulaciones PU son los cuerpos rígidos con los números  $l = 8, 9, \dots, 13$ .

Nótese que la posición del vector del centro de masa para la primera parte de una articulación PU es:

$$\mathbf{r}_{2i+6} = {}^0R_{T_i}(\beta_i) [-q_{2i-2} \quad d \quad -l_{c_1}]^T \quad \text{o} \quad \mathbf{r}_{2i+7} = {}^0R_{T_i}(\beta_i) [q_{2i-1} \quad d \quad -l_{c_1}]^T,$$

donde  $d = -\frac{L_B}{2\sqrt{3}}$  y  $l_{c_1}$  es la distancia del punto  $D_{2i-2}$  y el punto  $D_{2i-1}$  (con  $i = 1, 2, 3$ ), al centro de masa de la parte 1 de la articulación PU correspondiente. Por lo tanto

$$J_{G_{2i+6}} = {}^0R_{T_i}(\beta_i) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} [-q_{2i-2} \quad d \quad -l_{c_1}]^T \quad \text{y} \quad J_{G_{2i+7}} = {}^0R_{T_i}(\beta_i) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} [q_{2i-1} \quad d \quad -l_{c_1}]^T. \quad (6.64)$$

Y como estas partes no giran, entonces

$$K_{G_{2i+6}} = K_{G_{2i+7}} = O \in \mathbb{R}^{3 \times 9}. \quad (6.65)$$

### Articulación PU, parte 2

Para la enumeración de cuerpos rígidos, considérese que la parte 2 de la articulación PU  $2i - 2$  corresponde al cuerpo rígido  $l = 2i + 12$ , y la parte 2 de la articulación PU  $2i - 1$  al cuerpo  $l = 2i + 13$ . Así que, la segunda parte de la articulación PU es el cuerpo rígido con los números  $l = 14, 15, \dots, 19$ .

El vector de posición de la segunda parte de la articulación PU es

$$\mathbf{r}_{2i+6} = {}^0R_{T_i}(\beta_i) [-q_{2i-2} \quad d \quad 0]^T \quad \text{o} \quad \mathbf{r}_{2i+7} = {}^0R_{T_i}(\beta_i) [q_{2i-1} \quad d \quad 0]^T$$

donde  $d = -\frac{L_B}{2\sqrt{3}}$ . Así que

$$J_{G_{2i+12}} = {}^0R_{T_i}(\beta_i) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} [-q_{2i-2} \quad d \quad 0]^T \quad \text{y} \quad J_{G_{2i+13}} = {}^0R_{T_i}(\beta_i) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} [q_{2i-1} \quad d \quad 0]^T. \quad (6.66)$$

La orientación de esta parte para  $l = 2i - 2$  y  $l = 2i - 1$  está dada por

$${}^0R_{2i+12} = {}^0R_{2i+13} = {}^0R_{T_i}(\beta_i) R(\phi_i)$$

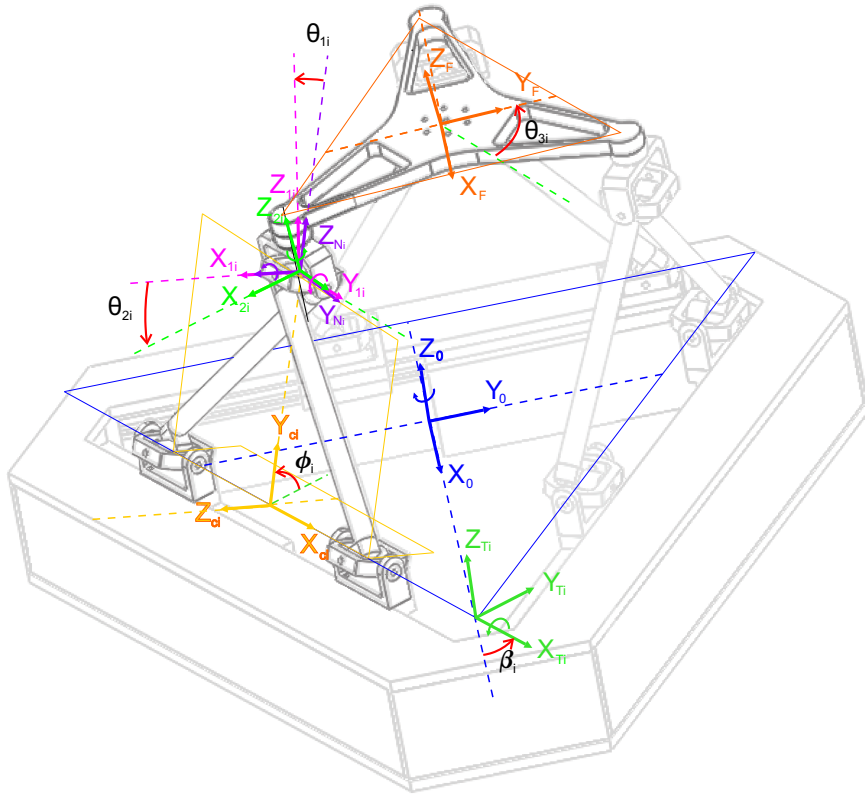


Figura 6.6: Marcos coordenados empleados para modelar las articulaciones esféricas.

así que

$$K_{G_{2i+12}} = K_{G_{2i+13}} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{bmatrix} \phi_i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (6.67)$$

### Articulaciones S

En el robot Hexapod hay sólo tres articulaciones esféricas. La articulación esférica  $i$  está ubicada en el lado  $i$  de la base del triángulo, y une el vértice  $Q_i$  del triángulo asociado a la plataforma con las piernas  $2i - 2$  y  $2i - 1$ . La figura 6.6 muestra el lado del robot en primer plano. Cada articulación esférica puede ser analizada como una articulación compuesta, formada por un articulación universal y un articulación rotacional, o bien, como tres articulaciones rotacionales independientes; sean  $\theta_{1i}$ ,  $\theta_{2i}$  y  $\theta_{3i}$  las coordenadas de la articulación S en el lado  $i$  del robot. Nótese en la figura 6.6 que estos tres ángulos pueden ser considerados los ángulos de Euler de la convención  $XYZ$ , los cuales permiten expresar la orientación relativa del marco  $\Sigma_F$  con respecto al marco denotado en la misma figura como  $\Sigma_{N_i}$ . En otras palabras,  $\theta_{1i}$ ,  $\theta_{2i}$  y  $\theta_{3i}$  son los ángulos que  $\Sigma_{N_i}$  tiene que rotar para tener la misma orientación que  $\Sigma_F$ .



Ahora, con respecto a la postura del marco  $\Sigma_{N_i}$ , es importante notar que el origen de este marco está en el punto  $P_i$ , y su orientación está dada por la siguiente composición de matrices:

$${}^0R_{N_i} = {}^0R_{T_i}(\beta_i)R_x(\phi_i)C_iR_{N_i}$$

donde

$$C_iR_{N_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{SO}(3)$$

es la matriz de rotación que da la orientación relativa del marco  $\Sigma_{N_i}$  con respecto a  $\Sigma_{C_i}$ .

Analizando los marcos coordenados en la figura 6.6, es claro que la siguiente expresión es válida:

$${}^0R_F = {}^0R_{T_i}(\beta_i)R_x(\phi_i)C_iR_{N_i}R_x(\theta_{1i})R_y(\theta_{2i})R_z(\theta_{3i}) \quad (6.68)$$

donde las matrices elementales de rotación  $R_x(\cdot)$ ,  $R_y(\cdot)$ , y  $R_z(\cdot)$  están definidas en (3.6)-(3.8).

Aplicando la propiedad  $R^{-1} = R^T$  de las matrices de rotación  $R \in \text{SO}(3)$ , se puede reescribir (6.68) como

$$R_x(\theta_{1i})R_y(\theta_{2i})R_z(\theta_{3i}) = C_iR_{N_i}^TR_x(\phi_i)T^0R_{T_i}(\beta_i)T^0R_F = C_iR_F(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.69)$$

Los ángulos  $\theta_{1i}$ ,  $\theta_{2i}$ , y  $\theta_{3i}$  pueden ahora ser calculados usando las fórmulas estándar para la convención de ángulos de Euler XYZ (ver (Craig, 2005)), es decir:

$$\theta_{1i} = \text{atan2}(-R_{2,3}(\boldsymbol{\rho}), R_{3,3}(\boldsymbol{\rho})) \quad (6.70)$$

$$\theta_{2i} = \text{atan2}\left(R_{1,3}(\boldsymbol{\rho}), \sqrt{R_{2,3}(\boldsymbol{\rho})^2 + R_{3,3}(\boldsymbol{\rho})^2}\right) \quad (6.71)$$

$$\theta_{3i} = \text{atan2}(-R_{1,2}(\boldsymbol{\rho}), R_{1,1}(\boldsymbol{\rho}))$$

donde  $R_{u,v}(\boldsymbol{\rho})$  es el elemento  $(u, v)$  de la matriz  $C_iR_F(\boldsymbol{\rho})$  definida en (6.69).

Además, hay dos cuerpos rígidos (o partes) en cada articulación esférica (ver figura 6.5(b)):

- Articulación S, parte 1: Éste es el eslabón que está acoplado a las piernas a través de la articulación rotacional con  $\theta_{1i}$  como variable articular.
- Articulación S, parte 2: Este eslabón está acoplado a la parte 1 (de la misma articulación S) y a la plataforma a través de las articulaciones rotacionales cuyas coordenadas son  $\theta_{2i}$  y  $\theta_{3i}$ .

## Articulación S, parte 1

Las primeras partes de las articulaciones S, corresponden a los cuerpos rígidos con  $l = 20, 21, 22$ , ó, en términos de  $i$ , a  $l = 19 + i$ . Por simplicidad, considérese que el centro de masa de este cuerpo rígido se encuentra en el punto  $P_i$ , es decir

$$\mathbf{r}_{19+i} = \mathbf{r}_{P_i}$$

así que

$$J_{G_{19+i}} = J_i, \quad (6.72)$$

donde  $J_i = \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial \boldsymbol{\rho}}$ .

El marco asociado a este cuerpo rígido está etiquetado como  $\Sigma_{1i}$  en la figura 6.6, y su orientación está dada por:

$${}^0R_{19+i}(\boldsymbol{\rho}) = {}^0R_{T_i}(\beta_i)R_x(\phi_i)^{C_i}R_{N_i}R_x(\theta_{1i});$$

y se puede mostrar que

$$K_{G_{19+i}} = R_x(\theta_{1i})^{TC_i}R_{N_i}^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} [\phi_i \ 0 \ 0]^T + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} [\theta_{1i} \ 0 \ 0]^T, \quad (6.73)$$

donde el término  $\frac{\partial \theta_{1i}}{\partial \boldsymbol{\rho}}$  puede ser calculado tomando la derivada parcial de (6.70), obteniéndose que

$$\frac{\partial \theta_{1i}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{R_{2,3}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial R_{3,3}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} - R_{3,3}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial R_{2,3}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}}}{R_{2,3}(\boldsymbol{\rho})^2 + R_{3,3}(\boldsymbol{\rho})^2}.$$

Así, la velocidad angular está dada por:

$${}^{19+i}\boldsymbol{\omega}_{19+i} = R_x(\theta_{1i})^{TC_i}R_{N_i}^T \begin{bmatrix} \dot{\phi}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Articulación S, parte 2

Las segundas partes de las articulaciones S corresponden a los cuerpos rígidos con  $l = 23, 24, 25$ , ó, en términos de  $i$ , a  $l = 22 + i$ . En este caso, el centro de masa de la parte 2 de la articulación S no está en el punto  $P_i$  pero sí a una distancia  $l_c$  en la dirección de  $\hat{\mathbf{z}}_F$ , es decir

$$\mathbf{r}_{22+i} = \mathbf{r}_{P_i} + l_c \hat{\mathbf{z}}_F$$

así que

$$J_{G_{22+i}} = J_i + l_c J_z; \quad (6.74)$$

donde  $J_i = \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial \boldsymbol{\rho}}$  y  $J_z = \frac{\partial \mathbf{z}_F}{\partial \boldsymbol{\rho}}$  está dada en (6.52) para el robot Hexapod.

El marco asociado a este cuerpo está etiquetado como  $\Sigma_{2i}$  en la figura 6.6, y su orientación está dada por:

$${}^0R_{22+i}(\boldsymbol{\rho}) = {}^0R_{T_i}(\beta_i)R_x(\phi_i)C_i R_{N_i}R_x(\theta_{1i})R_y(\theta_{2i});$$

así que se puede demostrar

$$K_{G_{22+i}} = R_y(\theta_{2i})^T K_{G_{19+i}} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} [0 \quad \theta_{2i} \quad 0]^T \quad (6.75)$$

donde el término  $\frac{\partial \theta_{2i}}{\partial \boldsymbol{\rho}}$  puede ser calculado tomando la derivada parcial (6.71), obteniéndose

$$\frac{\partial \theta_{2i}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{(R_{2,3}(\boldsymbol{\rho})^2 + R_{3,3}(\boldsymbol{\rho})^2) \frac{\partial R_{1,3}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} - R_{1,3}(\boldsymbol{\rho}) \left( R_{2,3}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial R_{2,3}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} + R_{3,3}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial R_{3,3}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right)}{\sqrt{R_{2,3}(\boldsymbol{\rho})^2 + R_{3,3}(\boldsymbol{\rho})^2}}.$$

Así que la velocidad angular está dada por:

$${}^{22+i}\boldsymbol{\omega}_{22+i} = R_y(\theta_{2i})^T {}^{19+i}\boldsymbol{\omega}_{19+i} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_{2i} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que la velocidad angular de este cuerpo rígido está dada como una función de la velocidad angular de la parte 1 de la articulación S correspondiente.

### 6.3.2 Cálculo del modelo dinámico inverso

De acuerdo con (4.87)-(4.90) la energía cinética y potencial total del robot Hexapod está dada por:

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \sum_{l=1}^{25} \mathcal{K}_l = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{25} [m_l \mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l + {}^l\boldsymbol{\omega}_l I_l^l \boldsymbol{\omega}_l] \quad (6.76)$$

y

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{l=1}^{25} \mathcal{U}_l = - \left[ \sum_{l=1}^{25} m_l \mathbf{r}_l^T \right] \mathbf{g}_o, \quad (6.77)$$

Ahora, reemplazando (6.57) en (6.76) se tiene que

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\rho}}^T \left[ \sum_{l=1}^{25} m_l J_{G_l}^T J_{G_l} + K_{G_l}^T I_l K_{G_l} \right] \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

y comparando con (4.87) y (4.93), es claro que

$$M(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{l=1}^{25} [m_l J_{G_l}^T J_{G_l} + K_{G_l}^T I_l K_{G_l}] \quad (6.78)$$

donde las jacobianas  $J_{G_l}$  y  $K_{G_l}$ , con  $l = 1, 2, \dots, 25$ , para el robot Hexapod fueron obtenidas en la sección anterior (ecuaciones (6.60), (6.61), (6.62)-(6.67) y (6.72)-(6.75)), y los parámetros dinámicos  $m_l$  y  $I_l$  fueron determinados para el robot Hexapod empleando el modelo CAD del robot en SolidWorks.

Una vez que se calcula  $M(\boldsymbol{\rho})$ , el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis puede obtenerse a partir de (4.94) como:

$$C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \dot{M}(\boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} (\dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\boldsymbol{\rho})) \quad (6.79)$$

Finalmente, el vector de fuerzas gravitacionales puede ser obtenido aplicando (4.95) a (6.77), es decir,

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = - \left[ \sum_{l=1}^{25} m_l \frac{\partial \mathbf{r}_l(\boldsymbol{\rho})^T}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right] \mathbf{g}_o = - \left[ \sum_{l=1}^{25} m_l J_{G_l}^T \right] \mathbf{g}_o \quad (6.80)$$

donde  $\mathbf{g}_o = [0 \ 0 \ -g_o]^T$ , con  $g_o = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>] como la aceleración debida a la fuerza de gravedad.

Una vez que las matrices del modelo dinámico no mínimo, dadas por (6.78), (6.79), y (6.80) son calculadas, es posible emplear la matriz  $A(\mathbf{q})$  dada en (3.42), es decir

$$A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I \\ -\frac{\partial \gamma(\mathbf{q}, \phi)}{\partial \phi}^{-1} \frac{\partial \gamma(\mathbf{q}, \phi)}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 6},$$

para calcular las matrices correspondientes al modelo dinámico mínimo (4.97)

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{M}_q(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \bar{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}_q(\mathbf{q}) \quad (6.81)$$

usando (4.98)-(4.101). Los términos  $\frac{\partial \gamma(\mathbf{q}, \phi)}{\partial \phi}^{-1}$  y  $\frac{\partial \gamma(\mathbf{q}, \phi)}{\partial \mathbf{q}}$  están dadas en (6.53) y (6.54), respectivamente.

## 6.4 Validación de los modelos

Para realizar la validación del modelo cinemático directo y el modelo dinámico inverso del robot Hexapod, obtenidos en las secciones previas, se llevaron a cabo simulaciones en las cuales, para un perfil de movimiento asignado a las articulaciones activas, se compararon los resultados obtenidos de los modelos obtenidos (el MCDP y el MDI) con los correspondientes resultados obtenidos al emplear el software SolidWorks Motion.

Una vez definida la trayectoria articular deseada, fueron calculados a través de SolidWorks Motion: (a) el vector de coordenadas de postura de la plataforma  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^6$  (tres coordenadas cartesianas y los ángulos de Euler), el cual es la salida del MCDP; y (b) el vector de fuerzas generalizadas en las articulaciones activas  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_q$ , el cual es la salida del MDI. Enseguida, los resultados generados por SolidWorks Motion fueron comparados con las trayectorias proporcionadas por las expresiones analíticas del MCDP y el MDI obtenidas en las secciones 6.2.1 y 6.3.2.

SolidWorks Motion es un módulo de la familia de productos de SolidWorks®, el cual es útil para el análisis y diseño de mecanismos, cuando se cuenta con el modelo CAD. SolidWorks Motion puede calcular el modelo cinemático y dinámico de forma numérica para un movimiento deseado basado en el tiempo.

Las trayectorias que fueron asignadas a las articulaciones activas están dadas por el vector:

$$\mathbf{q}_d(t) = \mathbf{q}(0) + \begin{bmatrix} c_0(1 - e^{-\kappa t^3})\text{sen}(\omega_0 t) \\ c_1(1 - e^{-\kappa t^3})\text{sen}(\omega_1 t) \\ c_2(1 - e^{-\kappa t^3})\text{sen}(\omega_2 t) \\ c_3(1 - e^{-\kappa t^3})\text{sen}(\omega_3 t) \\ c_4(1 - e^{-\kappa t^3})\text{sen}(\omega_4 t) \\ c_5(1 - e^{-\kappa t^3})\text{sen}(\omega_5 t) \end{bmatrix} \text{ m}, \quad (6.82)$$

donde  $\mathbf{q}(0)$  corresponde al vector de coordenadas activas en la configuración de casa, el cual, según las especificaciones del robot está dado por:

$$\mathbf{q}(0) = 0.1765 [ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 ]^T \text{ m}$$

y corresponde a la postura de la plataforma dada por el vector de posición:

$$\mathbf{r}_F(0) = [ x(0) \ y(0) \ z(0) ]^T = [ 0 \ 0 \ 0.424 ]^T \text{ m} \quad (6.83)$$

y la matriz de rotación  ${}^0R_F(0) = I$ , o de manera equivalente, el vector de ángulos de Euler (convención ZYX):

$$[\lambda(0) \ \mu(0) \ \nu(0)]^T = [ 0 \ 0 \ 0 ]^T \text{ rad.} \quad (6.84)$$

Los parámetros de la trayectoria (6.82) fueron seleccionados como  $c_0 = c_3 = c_5 = 0.05$  [m],  $c_1 = c_2 = c_4 = 0.08$  [m]  $\kappa = 1[\text{s}^{-3}]$  y  $\omega_0 = \omega_1 = 2\omega_2 = 2\omega_3 = 4\omega_4 = 4\omega_5 = 3$  [rad/s]. Es importante notar que esta trayectoria comienza en la posición inicial con velocidad y aceleración nulas (es decir,  $\mathbf{q}_d(t) = \dot{\mathbf{q}}_d(t) = \ddot{\mathbf{q}}_d(t) = 0$  para  $t = 0$ ). También nótese que cuando  $t \rightarrow \infty$ , la trayectoria deseada se reduce a una función sinusoidal simple en cada eje.

Una vez que el vector de posición  $\mathbf{r}_F$  y la matriz de rotación  ${}^0R_F$  han sido calculados siguiendo los pasos al final de la sección 6.2.1, los ángulos de Euler ZYX son determinados usando las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}\lambda &= \text{atan}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right) \\ \mu &= \text{atan}\left(\frac{-r_{31}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}}\right) \\ \nu &= \text{atan}\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right).\end{aligned}$$

donde  $r_{ij}$  es el elemento  $i, j$  de la matriz  ${}^0R_F$ .

Los parámetros cinemáticos empleados son  $L_B = 0.866$ [m],  $L = 0.3689$ [m] y  $H_{PQ} = .090$ [m], mientras que los parámetros dinámicos son  $H^* = .0791$ [m],  $l_{c_1} = 0.0287$ [m],  $l_{c_2} = 0.03081$ [m] y los proporcionados en la tabla 6.2.

Tabla 6.1: Parámetros dinámicos del Hexapod para validación del modelo.

<b>Cuerpo rígido</b>	<b>Masa [Kg]</b>	<b>(Ixx, Iyy, Izz) [Kg · cm<sup>2</sup>]</b>
Plataforma móvil	2.085	(198.58, 199.84, 396.31)
Pierna $k$	0.44917	(54.66, 0.50, 54.78)
PU-articulación parte 1	0.3194	(4.94, 5.51, 2.51)
PU-articulación parte 2	0.2200	(1.76, 3.36, 1.75)
S-articulación parte 1	0.2200	(1.75, 1.76, 3.36)
S-articulación parte 2	0.3025	(5.864, 1.22, 5.218)

La figura 6.7 muestra la evolución de las seis variables operacionales que definen la postura de la plataforma calculada por SolidWorks Motion y las expresiones analíticas del MCDP. Debe notarse que ambos gráficos son muy similares. Si se consideran los primeros 20 segundos mostrados en la figura 6.7, la máxima desviación entre ambos gráficos está dada por  $\tilde{x} = 0.55$  [mm],  $\tilde{y} = 1.28$  [mm] y  $\tilde{z} = 0.235$  [mm],  $\tilde{\alpha} = 0.1314^\circ$  [mm],  $\tilde{\beta} = 0.1050^\circ$  [mm] y  $\tilde{\gamma} = 0.1317^\circ$  [mm].

La figura 6.8 muestra la evolución temporal de las fuerzas generalizadas generadas por SolidWorks y las expresiones analíticas del MDI. La desviación máxima de ambas gráficas es:  $\tilde{\tau}_{q_0} = 0.179$  [N],  $\tilde{\tau}_{q_1} = 0.239$  [N],  $\tilde{\tau}_{q_2} = 0.143$  [N],  $\tilde{\tau}_{q_3} = 0.116$  [N],  $\tilde{\tau}_{q_4} = 0.094$

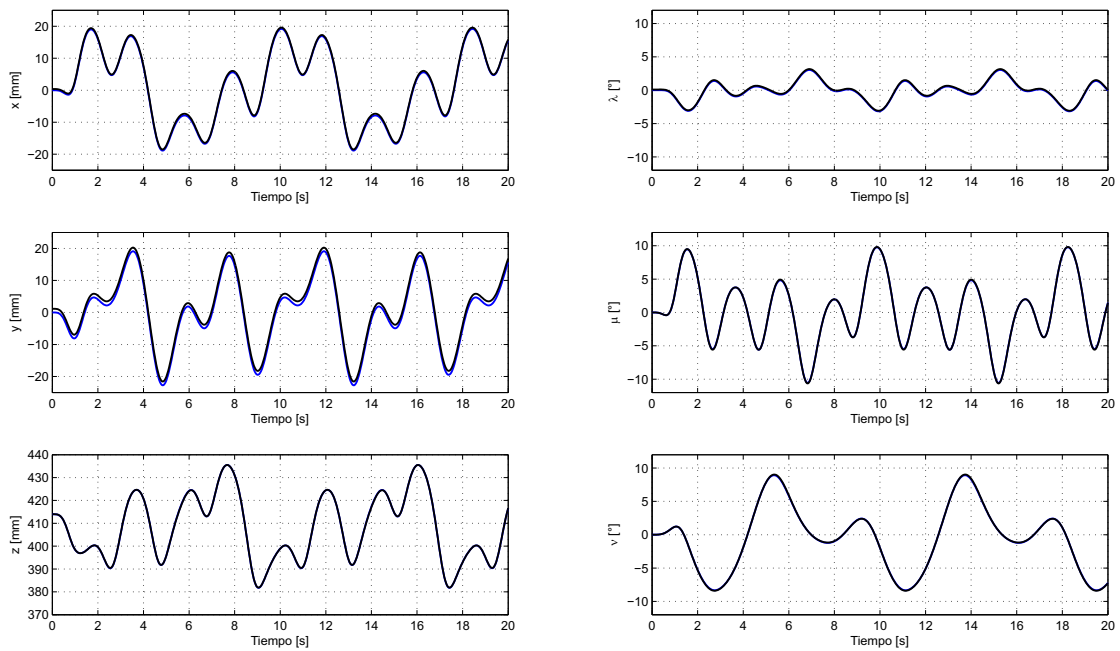


Figura 6.7: Coordenadas de postura de la plataforma calculadas por el modelo analítico (línea azul) y SolidWorks Motion (línea negra), respectivamente.

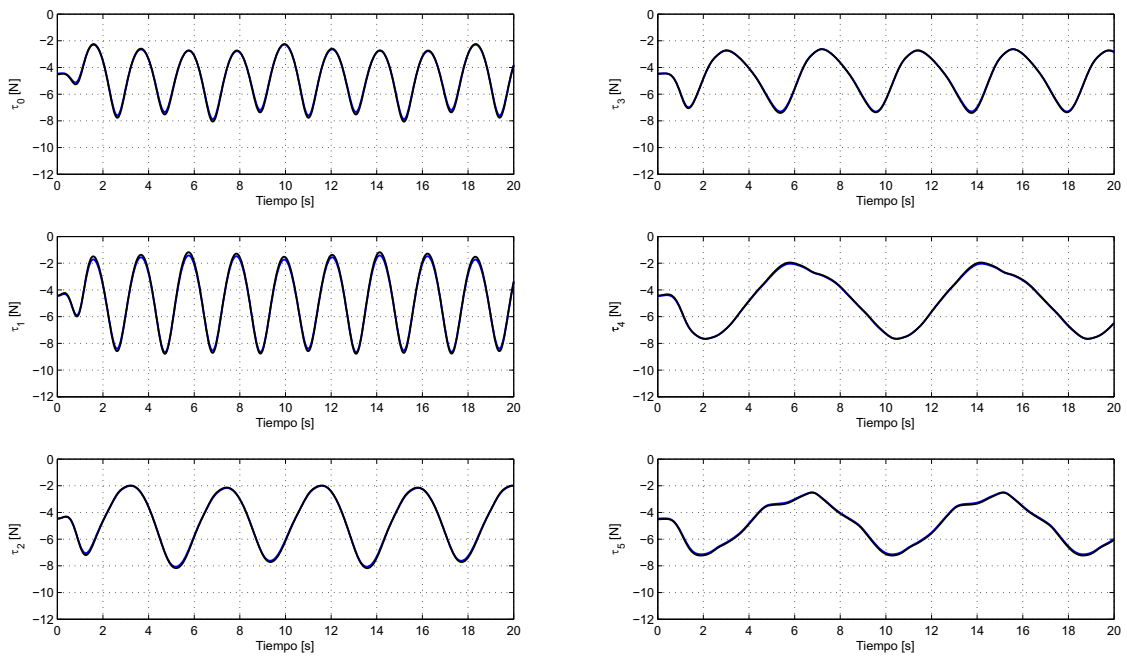


Figura 6.8: Fuerzas en las articulaciones activas calculadas por el modelo analítico (línea azul) y SolidWorks Motion (línea negra), respectivamente.

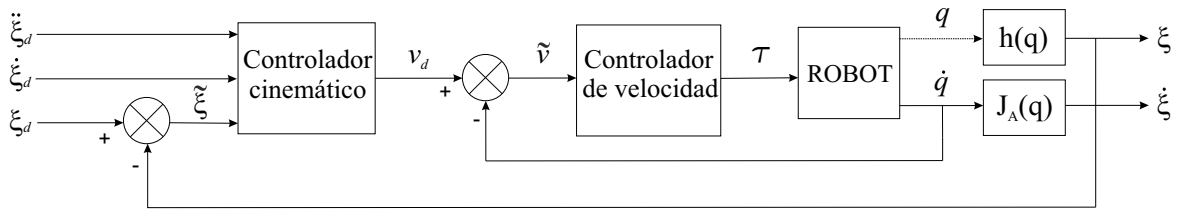


Figura 6.9: Diagrama esquemático del controlador de doble lazo.

[N] y  $\tilde{\tau}_{q_5} = 0.096$  [N].

Es claro, por los resultados presentados en esta sección, que las expresiones analíticas obtenidas del modelo cinemático directo de postura y del modelo dinámico inverso del robot Hexapod son validadas por el software SolidWorks Motion.

## 6.5 Experimentos en tiempo real

En esta sección se presentan los resultados de la implementación de dos controladores de seguimiento de postura en espacio operacional en el robot paralelo Hexapod que se encuentra en el laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de la Laguna. Los controladores evaluados son:

- Un controlador jerárquico de doble lazo que consiste en un controlador cinemático del tipo conocido como control de movimiento resuelto (RMRC) en el lazo externo (cuya salida es el vector de velocidades articulares deseadas), y un PI en el lazo interno, para controlar las velocidades articulares.
- Un controlador por dinámica inversa, cuya salida es el vector de torques deseados requeridos para cancelar la dinámica no lineal del robot

Es importante mencionar que el controlador cinemático requiere el cálculo de la inversa de una matriz jacobiana analítica, mientras que el controlador dinámico usa el modelo dinámico inverso del robot.

Los experimentos fueron llevados a cabo usando el software proporcionado por Quanser, a través de la plataforma de Matlab/Simulink y la herramienta QUARC para control en tiempo real.

### 6.5.1 Controlador de doble lazo

La figura 6.9 muestra el diagrama de bloques del controlador de doble lazo propuesto como un controlador de seguimiento en espacio operacional para el robot Hexapod. La



aplicación de este controlador a robots manipuladores seriales y el análisis de estabilidad correspondiente se reportan en (Camarillo et al., 2008).

Por control cinemático se entiende cualquier esquema que usa una jacobiana para calcular las velocidades articulares deseadas directamente de las variables de postura de la tarea deseada. Así, un controlador cinemático es frecuentemente empleado como un lazo externo de un controlador de doble lazo, tal como el de la figura 6.9. En este trabajo se emplea un controlador cinemático del tipo conocido como "de velocidad resuelta", el cual fue propuesto por Whitney (Whitney, 1969). Usando este esquema, la velocidad articular deseada para el lazo interno, puede ser escrita como:

$$\boldsymbol{\nu}_d = J_A(\mathbf{q})^{-1} \left[ \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_d + K\tilde{\boldsymbol{\xi}} \right], \quad (6.85)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}_d \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidad articular deseado,  $J_A(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  es la matriz jacobiana definida en (6.56),  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_d \in \mathbb{R}^6$  es la derivada temporal de  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_d$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}_d - \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^6$  es el vector de error de postura en espacio operacional y  $K \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  es una matriz de ganancias de control simétrica y definida positiva.

Bajo el supuesto de seguimiento perfecto de velocidad, es decir,  $\dot{\mathbf{q}} \equiv \boldsymbol{\nu}_d$ , pre-multiplicando ambos lados de (6.85) por  $J_A(\mathbf{q})$  y sustituyendo (6.56), se tiene

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = -K\tilde{\boldsymbol{\xi}}. \quad (6.86)$$

y como  $K$  es una matriz simétrica definida positiva, se llega a la conclusión de que  $\tilde{\boldsymbol{\xi}} \rightarrow \mathbf{0}$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Sin embargo, un controlador de velocidad articular real no asegura el seguimiento instantáneo de la velocidad deseada  $\boldsymbol{\nu}_d$ . En la práctica, se obtiene el seguimiento de velocidad asintótica en lugar de seguimiento ideal de velocidad. Por lo tanto, la implementación del control cinemático (6.85) requiere el diseño de un controlador de velocidad articular.

Para este fin defínase el error de velocidad articular como:

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}_d - \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad (6.87)$$

De modo que ahora, considerando (6.56), (6.85) y (6.87), se tiene que:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = -K\tilde{\boldsymbol{\xi}} + J_A(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\nu}}, \quad (6.88)$$

en vez de (6.86).

Para el lazo interno en la figura 6.9, cosidérese el clásico controlador proporcional

integral PI de velocidad usado en robots industriales, el cual puede ser escrito como:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\boldsymbol{v}} + K_i \int_0^t \tilde{\boldsymbol{v}} dt,$$

donde  $K_p, K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales definidas positivas, y  $n$  es el número de articulaciones actuadas.

## Resultados experimentales

Los experimentos comenzaron en la configuración de casa del robot Hexapod, la cual está dada por el siguiente vector de coordenadas articulares:

$$\boldsymbol{q}(0) = 0.1765 [ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 ]^T \text{ m},$$

el cual corresponde a la postura:

$$\boldsymbol{r}_F(0) = [ 0 \ 0 \ 0.424 ]^T \text{ m} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\psi}(0) = [ 0 \ 0 \ 0 ]^T \text{ rad}.$$

Como trayectoria deseada se empleó:

$$\boldsymbol{r}_d(t) = \begin{bmatrix} c_1(1 - e^{-\kappa t^3}) \cos(\omega t) \\ c_2(1 - e^{-\kappa t^3}) \text{sen}(\omega t) \\ c_3(1 - e^{-\kappa t^3}) (\text{sen}(\omega t) - \frac{z_0}{c_3}) + 0.424 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$\boldsymbol{\psi}_d(t) = \begin{bmatrix} c_4(1 - e^{-\kappa t^3}) \cos(\omega t) \\ c_5(1 - e^{-\kappa t^3}) \text{sen}(\omega t) \\ c_6(1 - e^{-\kappa t^3}) \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix} \text{ rad}$$

con  $c_1 = c_2 = c_3 = z_0 = 0.02$  [m],  $\kappa = 0.01$  [s<sup>-3</sup>],  $\omega = 0.20\pi$  [rad/s], y  $c_4 = c_5 = c_6 = \frac{\pi}{60}$  [rad]. Es importante hacer notar que se eligió esta trayectoria para que los vectores correspondientes de las coordenadas de postura  $\boldsymbol{\xi}_d = [ \boldsymbol{r}_d^T \ \boldsymbol{\psi}_d^T ]^T$ , comiencen en la posición de casa, mientras que los vectores de velocidades  $[ \dot{\boldsymbol{r}}_d^T \ \dot{\boldsymbol{\psi}}_d^T ]^T$  y aceleraciones de postura  $[ \ddot{\boldsymbol{r}}_d^T \ \ddot{\boldsymbol{\psi}}_d^T ]^T$  sean cero en  $t = 0$ . Notése que cuando  $t \rightarrow \infty$ , la trayectoria deseada se reduce a funciones sinusoidales simples en cada eje.

Los parámetros cinemáticos del robot, empleados durante los experimentos fueron medidos directamente en el robot real, obteniéndose:  $L_B = 0.866$  [m],  $L = 0.378$  [m] y  $H_{PQ} = .090$  [m].

Durante los experimentos, la matriz de ganancias en el controlador cinemático fue elegida diagonal e igual a  $K = \text{diag}\{15, 15, 10, 15, 10, 10\}$  [s<sup>-1</sup>], y para el controlador de velocidad, las matrices seleccionadas fueron  $K_p = 3000I_{[6,6]}$  [Nm · s/rad] y  $K_i =$

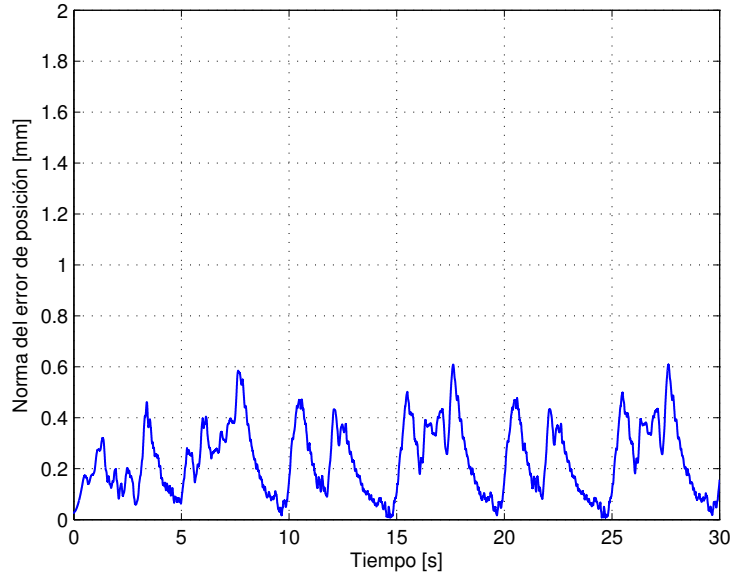


Figura 6.10: Controlador de doble lazo: Norma del error de posición.

$4750.6I_{[6,6]}$  [Nm/rad]. El proceso de sintonización del controlador se realizó eje por eje a prueba y error.

Las figuras 6.10 y 6.11 muestran, respectivamente, la evolución en el tiempo del error de posición (coordenadas cartesianas) y el error de orientación (en ángulos de Euler ZYX). Nótese que en ambos casos se tienen errores cercanos a cero, lo que significa que la postura del efector final de la plataforma móvil sigue la trayectoria deseada.

Las figuras 6.12 y 6.13 muestran las velocidades alcanzadas y los torques aplicados a las articulaciones prismáticas actuadas, respectivamente.

Por otro lado, según los datos proporcionados por el fabricante, los motores pueden aceptar una velocidad máxima de  $0.65$  [m/s], y un par máximo de  $0.530$  [Nm] (el par máximo de arranque es de  $5.65$  [Nm]), que corresponde a  $333.01$  [N]. Las figuras 6.12 y 6.13 muestran las velocidades alcanzadas y las fuerzas aplicadas a las articulaciones prismáticas actuadas en el desempeño del controlador de doble lazo. Nótese que  $\bar{\tau}_q$  y  $\dot{q}$  son relativamente pequeñas.

## 6.5.2 Controlador por dinámica inversa

El *control por dinámica inversa* es una técnica clásica para realizar control de seguimiento de robots manipuladores cuyo objetivo es encontrar una ley de control que linealice y desacople el sistema mecánico, al agregar los términos no lineales necesarios

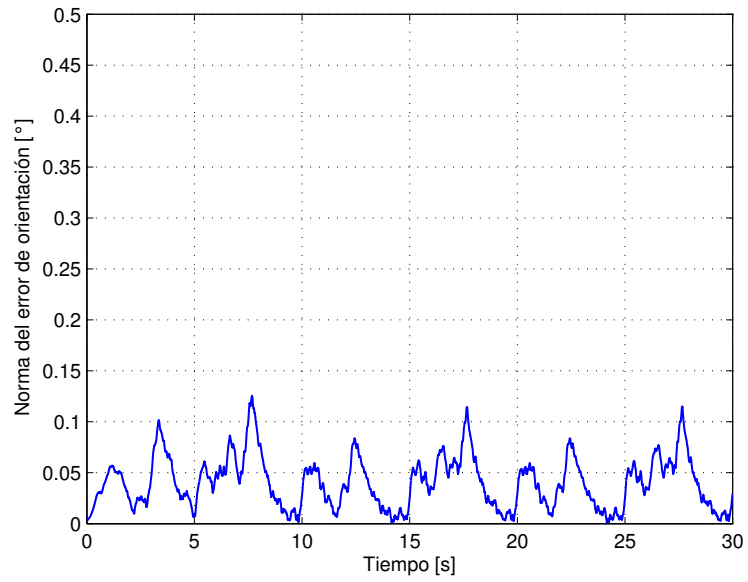


Figura 6.11: Controlador de doble lazo: Norma del error de orientación.

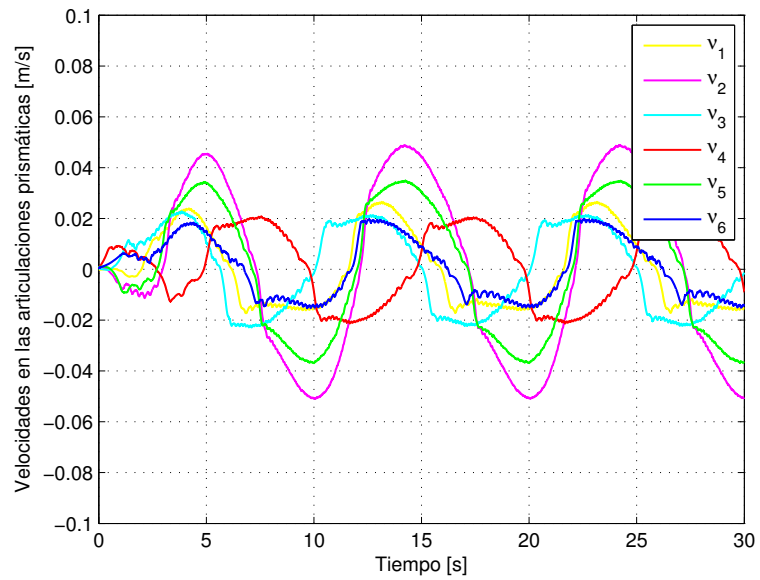


Figura 6.12: Controlador de doble lazo: Velocidades alcanzadas en las articulaciones prismáticas.

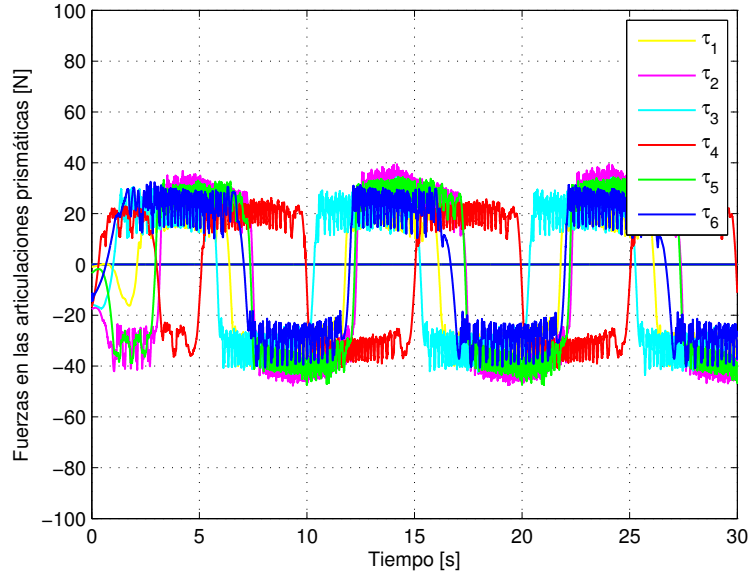


Figura 6.13: Controlador de doble lazo: Fuerzas aplicadas en las articulaciones prismáticas.

a la entrada de control (Cheah & Haghghi, 2014).

En este trabajo se emplea el controlador por dinámica inversa en espacio operacional propuesto por Khatib (Khatib, 1987), el cual emplea ángulos de Euler para parametrizar la orientación, por lo que se habla de un controlador por dinámica inversa en espacio operacional. Este controlador está dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{M}(\mathbf{q})J_A(\mathbf{q})^{-1} \left[ \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d + K_V\dot{\boldsymbol{\xi}} + K_P\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \dot{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \right] + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}), \quad (6.89)$$

donde  $J_A(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  es el jacobiano analítico definido en (6.56),  $J_A(\mathbf{q})^{-1}$  su inversa y  $\dot{J}_A(\mathbf{q})$  su derivada respecto al tiempo,  $K_P, K_V \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  son matrices de ganancias de control definidas positivas, y  $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}_d - \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^6$ , siendo  $\boldsymbol{\xi}_d$ ,  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_d$  y  $\ddot{\boldsymbol{\xi}}_d$  los vectores de coordenadas de postura deseada, sus velocidades y aceleraciones respectivamente.

La figura 6.14 muestra el diagrama de bloques del controlador dado por la ecuación (6.89). Sustituyendo esta ley de control en la dinámica del robot (6.81), y suponiendo que  $J_A(\mathbf{q})$  es de rango completo en la región del espacio en que se desea trabajar, es posible demostrar, usando  $\dot{\boldsymbol{\xi}} = J_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$  y su derivada temporal que el sistema en lazo cerrado es:

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + K_V\dot{\boldsymbol{\xi}} + K_P\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^6,$$

el cual es un sistema lineal con un equilibrio en el origen que es asintóticamente estable.

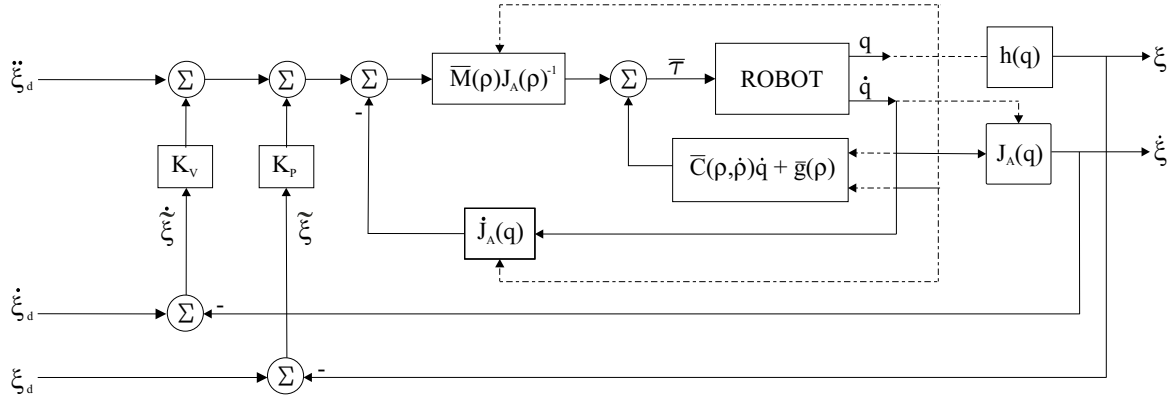


Figura 6.14: Diagrama esquemático del controlador por dinámica inversa.

Tabla 6.2: Parámetros dinámicos del Hexapod para experimentos.

Cuerpo rígido	Masa [m]	( $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ ) $10^{-4}$ [Kg] · [m <sup>2</sup> ]
Plataforma móvil	1.7917	(253.98, 253.98, 505.01)
Pierna	0.3900	(46.54, 46.54, 0.35)
A. prismática	0.3194	(4.94, 5.51, 2.51)
A. universal	0.2200	(1.76, 3.36, 1.75)
A. rotacional $i1$	0.2200	(1.75, 1.76, 3.36)
A. rotacional $i2$	0.3025	(5.864, 1.22, 5.218)

## Resultados experimentales

Para la implementación del controlador por dinámica inversa se usaron la misma trayectoria deseada, las mismas condiciones iniciales y los mismos parámetros cinemáticos que en el controlador de doble lazo. Los parámetros dinámicos del robot empleados en los experimentos se muestran en la tabla 6.2, y fueron obtenidos a partir de información proporcionada por el fabricante y el empleo del modelo de SolidWorks disponible.

Durante los experimentos las matrices de ganancias seleccionadas fueron  $K_P = \text{diag}\{35, 35, 50, 80, 100, 90\}[10^3/s^2]$  y  $K_V = \text{diag}\{190, 250, 420, 550, 550, 500\}[1/s]$ . El proceso de sintonización del controlador se realizó eje por eje y fueron empleados valores aproximados a los obtenidos a través de las fórmulas de sintonización de un controlador PID, para lograr una respuesta críticamente amortiguada.

Las figuras 6.15 y 6.16 muestran la evolución en el tiempo de la norma del error de posición (en coordenadas cartesianas) y del error de orientación (en ángulos de Euler, convención ZYX).

Nótese que ambas normas se mantienen acotadas, lo que significa que la postura de la plataforma móvil sigue la trayectoria deseada con un error relativamente pequeño.

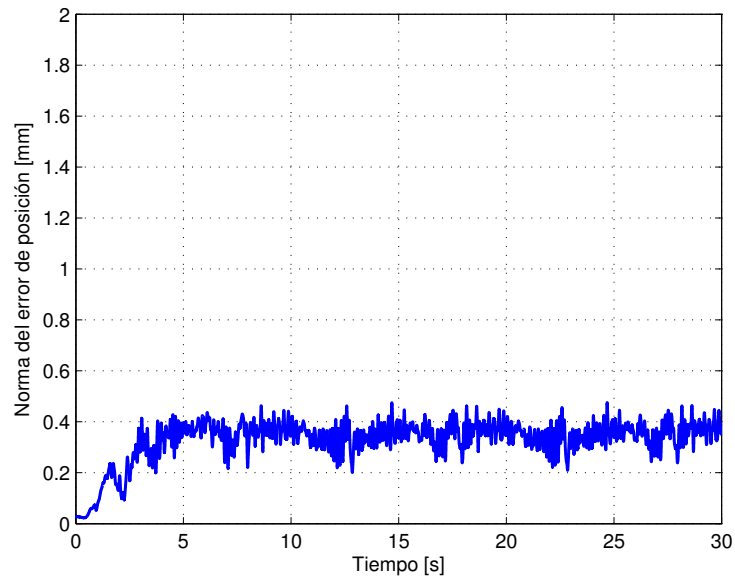


Figura 6.15: Controlador por dinámica inversa: Norma del error de posición.

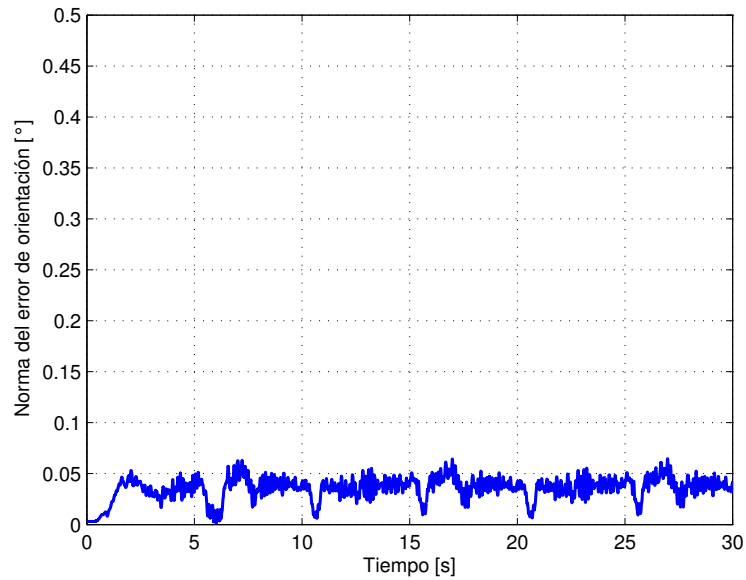


Figura 6.16: Controlador por dinámica inversa: Norma del error de orientación.

La figura 6.17 muestra las fuerzas aplicadas a las articulaciones prismáticas. Nótese que  $\boldsymbol{\tau}$  y  $\dot{\boldsymbol{q}}$  son relativamente pequeñas.

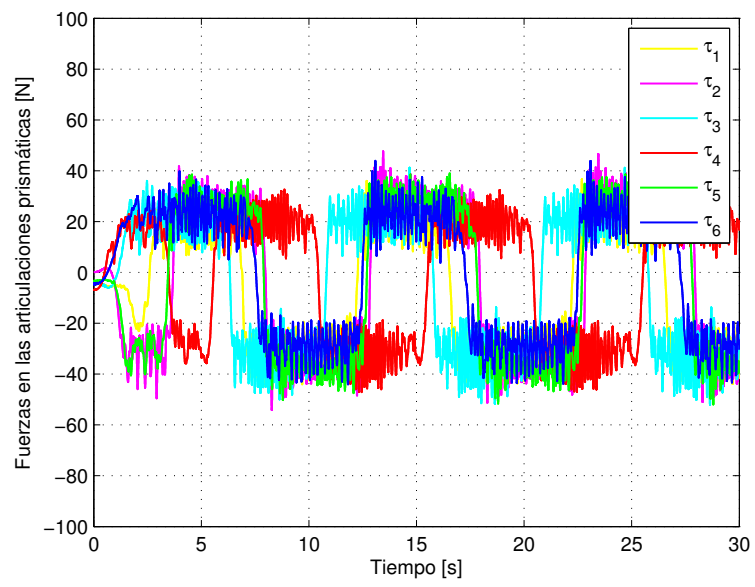


Figura 6.17: Controlador por dinámica inversa: Fuerzas aplicadas en las articulaciones prismáticas.



# Capítulo 7

## Conclusiones

### 7.1 Aportaciones del trabajo

Enseguida se enumeran las aportaciones de esta tesis:

- Se llevó a cabo el análisis de las diferentes convenciones de parámetros D-H, el estudio permitió observar que es posible definir dos convenciones más de parámetros D-H no reportadas en la literatura. También se estudió la forma de implementar la metodología de Denavit-Hartenberg a la obtención del modelo cinemático de robots con cadena abierta, arborescente y cerrada.
- Se definieron los conceptos *formulación para modelo cinemático* y *formulación para modelo dinámico*.
- Se realizó un estudio detallado de las cuatro formulaciones más importantes para modelado dinámico de robots, y se investigaron las relaciones entre éstas.
- Se obtuvo el modelo cinemático y dinámico de un robot con cadena cinemática abierta, un robot con cadena cinemática cerrada y un robot móvil con ruedas, a través de coordenadas independientes, coordenadas sujetas a restricciones holonómicas y coordenadas sujetas a restricciones no holonómicas, respectivamente. En cada caso se emplearon las formulaciones de modelado dinámico estudiadas.
- Se evaluaron y compararon cuantitativamente las cuatro formulaciones estudiadas, aplicadas a los mecanismos indicados en el párrafo anterior. Esta evaluación permitió conocer que con el avance tecnológico actual, la formulación de Euler-Lagrange en estos días resulta ser la más rápida para calcular un modelo dinámico mientras que la de Newton-Euler resultó ser la formulación que proporcionó el modelo dinámico con un tiempo de ejecución menor, en comparación con las otras tres formulaciones analizadas, al menos para los robots analizados en la tesis.

- Se obtuvo el modelo cinemático y dinámico del robot paralelo Hexapod. Cabe resaltar que el modelo dinámico de este robot no se encuentra aún publicado en la literatura.
- Se implementó el modelo CAD del Hexapod en SolidWorks Motion, con el fin de obtener de forma numérica (a través de elemento finito) el modelo cinemático y dinámico del robot. Los resultados obtenidos permitieron validar los modelos analíticos obtenidos.
- Se implementaron controladores en el robot Hexapod que emplean tanto el modelo cinemático como el modelo dinámico. Los resultados fueron bastante satisfactorios, por lo que se logró llevar a cabo el control de postura del robot y la validación experimental de los modelos cinemático y dinámico obtenidos.

Como resultado de todo lo anterior, hasta la fecha se tienen las siguientes publicaciones y trabajos sometidos:

- Bernal, J., Campa, R. Analysis of the Different Conventions of Denavit-Hartenberg Parameters. The International Review on Modelling and Simulations (IREMOS). (Aceptado, 2018). (Bernal & Campa, 2015)
- Bernal, J., Campa, R. y Soto, I. Kinematics and dynamics modeling of the 6-3-PUS-type Hexapod parallel mechanism. Journal of Mechanical Science and Technology (Aceptado, 2018). (Bernal et al., 2018)
- R. Campa, J. Bernal y I. Soto. Modeling and motion control of the 6-3-PUS-type Hexapod parallel mechanism. In: O. O. Vergara-Villegas, M. J. Nandayapa-Alfaro and A. I. Soto-Marrufo (Eds.). Advanced Topics on Computer Vision, Control and Robotics in Mechatronics. Springer (in press) (Campa et al, 2018).
- Bernal, J. y R. Campa. Control por dinámica inversa del robot paralelo Hexapod. Memorias del Congreso Mexicano de Robótica 2016. Mazatlán, Sinaloa. Noviembre 2016 (Bernal & Campa, 2016).
- Campa, R., J. Bernal y I. Soto. Kinematic modeling and control of the Hexapod parallel robot. Proceedings of the IEEE 2016 American Control Conference (pp. 1203-1208). Boston MA, USA. Julio 2016 (Campa et al., 2016).
- Bernal, J., R. Campa y I. Soto. Solución de la cinemática directa e inversa del robot paralelo Hexapod. En Memorias del Congreso Mexicano de Robótica 2015.

Los Cabos, BCS, México. Noviembre 2015 (Bernal et al., 2015).

- Campa, R. y J. Bernal. Análisis de las Diferentes Convenciones de Parámetros Denavit-Hartenberg. En Memorias del Congreso Internacional de Robótica y Computación 2015. Los Cabos, BCS, México. Abril 2015 (Campa & Bernal, 2015).

## 7.2 Problemas abiertos

Los puntos de esta tesis que quedaron pendientes y que se dejan como trabajo futuro, se resumen a continuación:

- Establecer una metodología general que emplee parámetros D-H para la obtención del modelo cinemático de robots con coordenadas generalizadas independientes y con coordenadas generalizadas sujetas a restricciones holonómicas y no holonómicas.
- Proponer una metodología general que emplee cuaterniones duales para la obtención del modelo cinemático de robots con y sin restricciones.
- Proponer una metodología general que emplee números duales para la obtención del modelo dinámico de robots con y sin restricciones. Actualmente solo existe una metodología aplicable a robot seriales.
- Emplear diversas formulaciones de modelado dinámico de robots para proponer nuevas metodologías empleando números duales. Actualmente solo existe desarrollada la metodología con números duales para la formulación de Euler-Lagrange y Newton-Euler, para robots seriales.
- Aplicar y evaluar las formulaciones estudiadas en esta tesis a robots con mayor número de grados de libertad, con la finalidad de evaluar su desempeño conforme el número de grados de libertad aumenta.
- Proponer una metodología para calcular la solución real del MCDP de robots tipo plataforma de Stewart, como lo es el Hexapod.
- Descubrir el significado físico de la matriz  $\frac{\partial \gamma(\mathbf{q}, \phi)}{\partial \phi}$ , con la finalidad de obtener de forma sencilla y práctica sus valores singulares, ya que éstos determinan en qué puntos el modelo cinemático y el modelo dinámico de robots con restricciones holonómicas no pueden ser determinados, y además, el control tampoco es posible, a través de las metodologías mostradas en esta tesis.

- Obtener una metodología general para obtener el grado de movilidad de cualquier robot con cadena cerrada.

# Capítulo 8

## Apéndices

### 8.1 Coordenadas de Plücker y el principio de transferencia

Para localizar una recta en el espacio se necesitan cuatro coordenadas independientes. Existen diferentes parametrizaciones de la postura de una recta, una de ellas fue propuesta por Plücker (Rooney, 2007) y consiste en especificar dos vectores: un vector unitario  $\mathbf{u}$  en la dirección de la recta y un vector de posición  $\mathbf{p}$  del origen del marco de referencia a un punto de la recta. En la figura A.1 se muestra una recta y los dos vectores que la caracterizan.

Las coordenadas de Plücker están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ S(\mathbf{p})\mathbf{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

y se encuentran sujetas a las siguientes restricciones:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1 \quad , \quad \mathbf{u}^T S(\mathbf{p})\mathbf{u} = 0.$$

Ahora bien, dado que  $\mathbf{u}$  es un vector unitario sus componentes son los cosenos de los ángulos directores  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  y  $\alpha_z$  mostrados en la figura A.1, es decir:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

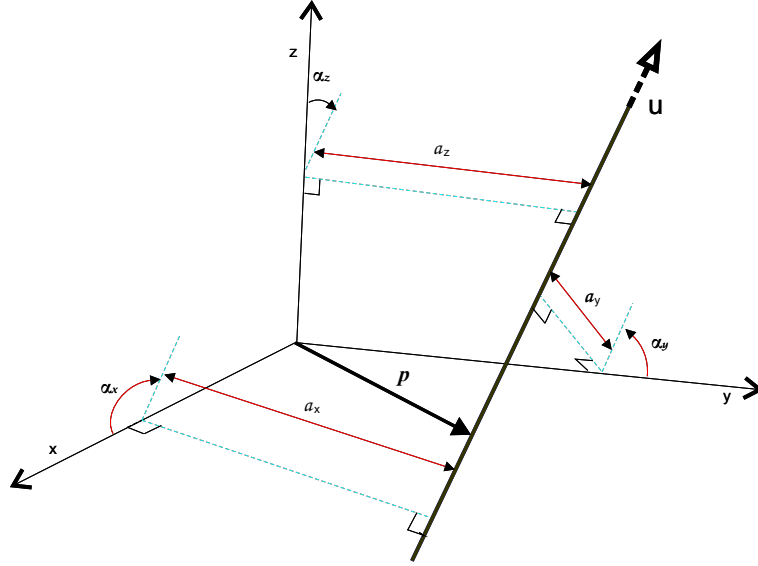


Figura 8.1: Parámetros de una recta en el espacio.

y por lo tanto:

$$S(\mathbf{p})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} p_y \cos(\alpha_z) - p_z \cos(\alpha_y) \\ p_z \cos(\alpha_x) - p_x \cos(\alpha_z) \\ p_x \cos(\alpha_y) - p_y \cos(\alpha_x) \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

donde  $p_x, p_y$  y  $p_z$  son las componentes de  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ .

En la figura A.1 se muestran también los segmentos  $a_x, a_y$  y  $a_z$  que indican la distancia mínima entre la recta y los ejes X, Y y Z, respectivamente. De la misma figura, y de la definición del producto cruz de vectores, es fácil comprobar que los vectores unitarios en dirección de los segmentos  $a_x, a_y$  y  $a_z$  son, respectivamente:

$$\hat{\mathbf{a}}_x = \frac{\hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_x)}; \quad \hat{\mathbf{a}}_y = \frac{\hat{\mathbf{j}} \times \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_y)}; \quad \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_z)}$$

Es importante señalar que estos vectores indican la dirección de la normal común a la recta dada por  $\mathbf{u}$  y cada uno de los ejes del marco. Y como la distancia entre dos rectas es igual a la proyección de cualquier vector que vaya de una recta a la otra en la dirección de la normal común a ambas rectas, entonces se tiene que

$$a_x = \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{a}}_x = \frac{\mathbf{p}^T S(\hat{\mathbf{i}})\mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_x)} = -\frac{\hat{\mathbf{i}}^T S(\mathbf{p})\mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_x)} = -\frac{p_y \cos(\alpha_z) - p_z \cos(\alpha_y)}{\text{sen}(\alpha_x)}$$

$$\begin{aligned}
a_y &= \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{a}}_y = \frac{\mathbf{p}^T S(\hat{\mathbf{j}}) \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_y)} = -\frac{\hat{\mathbf{j}}^T S(\mathbf{p}) \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_y)} = -\frac{p_z \cos(\alpha_x) - p_x \cos(\alpha_z)}{\text{sen}(\alpha_y)} \\
a_z &= \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{\mathbf{p}^T S(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_z)} = -\frac{\hat{\mathbf{k}}^T S(\mathbf{p}) \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_z)} = -\frac{p_x \cos(\alpha_y) - p_y \cos(\alpha_x)}{\text{sen}(\alpha_z)}
\end{aligned}$$

Así que

$$S(\mathbf{p}) \mathbf{u} = - \begin{bmatrix} a_x \text{sen}(\alpha_x) \\ a_y \text{sen}(\alpha_y) \\ a_z \text{sen}(\alpha_z) \end{bmatrix}. \quad (8.3)$$

En (Rooney, 2007) se explica cómo las coordenadas de Plücker se pueden expresar con un vector de tres números duales  $\mathbf{u} + \sigma S(\mathbf{p}) \mathbf{u} \in S_D^2 \subset \mathbb{D}^3$ , donde, en general,

$$S_D^n = \{\mathbf{u} + \sigma \mathbf{v} \in \mathbb{D}^{n+1} : \mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1, \mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0\}$$

se denomina aquí una hiperesfera unitaria dual, que es una variedad de dimensión  $2n$ .

De (A.1) y (A.3) se tiene que

$$\mathbf{u} + \sigma S(\mathbf{p}) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) - \sigma a_x \text{sen}(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) - \sigma a_y \text{sen}(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) - \sigma a_z \text{sen}(\alpha_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x + \sigma a_x) \\ \cos(\alpha_y + \sigma a_y) \\ \cos(\alpha_z + \sigma a_z) \end{bmatrix}$$

donde se ha usado la definición de una función dual (ver sección 3.2.3).

Por otro lado, si se define  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z]^T \in S^2$ ,  $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T \in \mathbb{R}^3$  y la función coseno de un vector  $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$  como  $\cos(\mathbf{v}) = [\cos(v_x) \ \cos(v_y) \ \cos(v_z)]^T$ , entonces es posible escribir

$$\mathbf{u} + \sigma S(\mathbf{p}) \mathbf{u} = [I + \sigma S(\mathbf{p})] \mathbf{u} = \cos(\boldsymbol{\alpha} + \sigma \mathbf{a}). \quad (8.4)$$

El término  $\boldsymbol{\alpha} + \sigma \mathbf{a}$  se conoce como vector de ángulos directores duales. Nótese que la parte primaria de  $\cos(\boldsymbol{\alpha} + \sigma \mathbf{a})$  es el vector de cosenos directores de  $\mathbf{u}$  y por lo tanto definen la dirección de la recta; la parte secundaria determina el desplazamiento de la recta con respecto al origen (si  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  entonces la recta pasa por el origen).

Lo que se acaba de hacer es comprobar que la parametrización de la postura de una recta que no pasa por el origen, dada por las coordenadas de Plücker, puede verse como una extensión de la parametrización de una recta que pasa por el origen dada por los cosenos directores. Esto se logra simplemente “dualizando” los ángulos directores, de modo que

$$\alpha_x \longrightarrow \alpha_x + \sigma a_x$$

$$\alpha_y \longrightarrow \alpha_y + \sigma a_y$$

$$\alpha_z \longrightarrow \alpha_z + \sigma a_z$$

En otras palabras, si un vector unitario  $\mathbf{u}$  en la dirección de una recta que pasa por el origen, es parametrizado usando

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{bmatrix} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

entonces un vector unitario en la dirección de una recta que no pasa por el origen es parametrizado por

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_x + \sigma a_x) \\ \cos(\alpha_y + \sigma a_y) \\ \cos(\alpha_z + \sigma a_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} a_x \sin(\alpha_x) \\ a_y \sin(\alpha_y) \\ a_z \sin(\alpha_z) \end{bmatrix} \in S_D^2 \subset \mathbb{D}^3,$$

con las siguientes restricciones holonómicas:

$$\cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z) = 1$$

$$a_x \cos(\alpha_x) \sin(\alpha_x) + a_y \cos(\alpha_y) \sin(\alpha_y) + a_z \cos(\alpha_z) \sin(\alpha_z) = 0.$$

Todo lo anterior es una aplicación simple del llamado principio de transferencia que fue establecido inicialmente por Kotelnikov en 1895, el cual menciona que: “geoméricamente, la relación entre una cantidad real y su correspondiente cantidad dual es esencialmente la relación entre la geometría de líneas que se intersectan (geometría esférica) y la geometría de las líneas alabeadas (geometría espacial).” (Rooney, 2007)

Cabe recordar que las líneas (rectas) alabeadas (“skew lines” en inglés) son las rectas que no son paralelas ni se intersectan en el espacio; esto equivale a decir que no pertenecen al mismo plano.

La geometría esférica tiene que ver con el conjunto de líneas rectas que se intersectan en el espacio. La geometría espacial tiene que ver con la situación más general de líneas alabeadas o no intersectantes en el espacio. Ahora bien, para rotaciones alrededor de un punto fijo,  $O$ , todos los ejes de rotación se intersectan en  $O$  y la geometría es esférica; mientras que para desplazamientos en tornillo, es decir, rotaciones y traslaciones sobre líneas alabeadas, la geometría es espacial.

La relación entre la geometría esférica y la geometría espacial está dada por el Principio de Transferencia, el cual establece lo siguiente (Rooney, 2007).

“todas las leyes y fórmulas relacionadas a una configuración esférica (que involucra líneas intersectantes y ángulos reales) son también válidas cuando se aplica a una configuración espacial equivalente de líneas alabeadas, si cada ángulo  $\alpha$ , en la formulación esférica se reemplaza por el correspondiente ángulo dual  $\alpha + \sigma a$ .”

El principio de transferencia y el álgebra de números duales son así empleados para



obtener parametrizaciones de la postura (posición y orientación) de un cuerpo rígido a partir de parametrizaciones de sólo la orientación.

## 8.2 Análisis de las convenciones de parámetros D-H

El análisis en esta sección aplica a robots manipuladores seriales con  $n$  dof, los cuales requieren un conjunto de  $4n$  parámetros D-H para definir su modelo cinemático.

Primero hay que enfatizar el hecho de que, desde el punto de vista de cinemática, todas las convenciones de D-H son equivalentes, en el sentido de que producen el mismo modelo cinemático de un robot manipulador, con la única condición de que los marcos solidarios a la base y al elemento terminal sean los mismos. En otras palabras, el modelo cinemático es independiente de la convención D-H empleada para obtenerlo.

En la sección B.1 se analiza primero el hecho de que para un robot dado, el conjunto de los  $4n$  parámetros D-H de una convención no es único, sin embargo, existe un número finito de conjuntos, obtenidos cuando el sentido de un par de ejes coordenados de cualquier marco  $\Sigma_i$  en la cadena cinemática es invertido (es decir, cambiando el sentido de los ejes, pero no su dirección). Estos conjuntos de parámetros D-H originados, para una convención dada, es llamado aquí: *variante*. Nótese que dos variantes son equivalentes si éstas comparten el mismo marco inicial y final (es decir, las dos variantes producen el mismo modelo cinemático del robot).

Después de esto, en la sección B.2 se hace una comparación de las seis convenciones que fueron descritas en (3.2), con el fin de resaltar las relaciones que existen entre sus parámetros D-H y mostrar cómo, de un variante dada, es posible determinar otra, incluso de una convención diferente.

## 8.3 Conjuntos equivalentes de parámetros D-H

Si analizamos las reglas para colocar los marcos de coordenadas de las familias originales y modificadas, observamos que, en ambos: (a) los ejes  $Z$  de los marcos asociadas a cada eslabón siempre van a lo largo del eje de articulación correspondiente (excepto el último marco, y el marco  $\Sigma_0$  en las convenciones de la familia  $M$ ), y (b) los ejes  $X$  van a lo largo de la línea normal común a dos ejes  $Z$  consecutivos. Pero las reglas no dicen nada sobre el sentido de cada uno de estos ejes, y por lo tanto es arbitrario. Este hecho conduce a la posibilidad de diferentes variantes de parámetros D-H para el mismo robot, incluso cuando se utiliza una convención particular.

Para el análisis, notemos que el sentido positivo de un eje se indica por su punta de flecha. Además, si  $A$  (con  $A \in \{X, Y, Z\}$ ) es un eje de coordenadas, entonces el vector unitario correspondiente en la dirección de  $A$ , que indica su sentido positivo, es  $\hat{a}$  (con

$\hat{\mathbf{a}} \in \{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ ).

Con el fin de establecer un procedimiento general para determinar todas las posibles variantes equivalentes de los parámetros D-H en un robot manipulador, es necesario definir una convención base y una variante base para tal convención (de modo que todas las otras variantes se puedan calcular a partir de esa variante base). En lo que sigue, supongamos que la convención base es la  $O1$  (esta elección no es significativa, ya que como se mostrará en la sección B.2, dado un conjunto de parámetros para una convención D-H, el conjunto correspondiente para cualquier otra convención puede ser determinado).

Entonces la variante base (o variante cero) de la convención  $O1$ , es la variante que cumple con las siguientes reglas adicionales para colocar los marcos coordenados:

1. Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , elegir el sentido positivo del eje  $Z_{i-1}$  de modo que el movimiento correspondiente del eslabón  $i$  con respecto al eslabón  $i - 1$ , ya sea a lo largo o alrededor de dicho eje (dependiendo del tipo de articulación), produce un incremento de la correspondiente variable articular (es decir,  $d_i$  o  $\theta_i$  respectivamente). El eje  $Z_n$  se elige de modo que tenga el mismo sentido que el eje  $Z_{n-1}$ . En un robot real, como la dirección en la que cada variable de articulación aumenta normalmente se especifica, la elección de todos los ejes  $Z$  para la variante base se determina fácilmente.
2. Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , elegir el sentido positivo del eje  $X_i$  de acuerdo con lo siguiente: si los ejes  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$  no son paralelos, entonces el vector unitario  $\hat{\mathbf{x}}_i$  está dado por  $\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \times \hat{\mathbf{z}}_i$  (donde  $\times$  representa el operador de producto cruz); si los ejes  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$  son paralelos entonces el vector  $\mathbf{x}_i$  señala de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$ . El sentido del eje  $X_0$  se puede elegir arbitrariamente.

Para identificar los ejes  $X$  y  $Z$  del  $i$ -ésimo marco coordenado de la variante base (los que cumplen con las reglas anteriores), denotémoslos como  $\bar{X}_i$  y  $\bar{Z}_i$ ; además sea  $\bar{\mathbf{x}}_i$  y  $\bar{\mathbf{z}}_i$  los vectores unitarios que dan el sentido positivo de  $\bar{X}_i$  y  $\bar{Z}_i$ , respectivamente; entonces  $\bar{\Sigma}_i(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$  es el marco correspondiente, donde el eje  $\bar{Y}_i$  tiene un sentido positivo dado por el vector unitario  $\bar{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{z}}_i \times \bar{\mathbf{x}}_i$ .

Después de un análisis detallado de las diferentes variantes de la convención  $O1$ , obtenidas cambiando el sentido de los ejes  $Z_i$  y  $X_i$  de cualquier marco  $\Sigma_i$  de la variante de base, es posible llegar a las siguientes conclusiones:

- Sólo hay cuatro formas de orientar cualquier marco  $\Sigma_i$  en la cadena cinemática ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), dependiendo del sentido de los ejes  $X_i$  y  $Z_i$  correspondientes.
- Para describir cada una de las orientaciones posibles del marco  $\Sigma_i$ , asignémosle un par de parámetros binarios  $\mu_i$  y  $\nu_i$  que indican el sentido de los ejes  $X_i$  y  $Z_i$ , respectivamente. Si  $\mu_i = \nu_i = 0$ , entonces se obtiene  $\Sigma_i(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$ , este caso es

Tabla 8.1: Parámetros y ejes para los cuatro casos que determinan la orientación del marco  $\Sigma_i$ .

Caso	$\mu_i$	$\nu_i$	$X_i$	$Z_i$	$\Sigma_i(X_i, Y_i, Z_i)$
0	0	0	$X_i$	$Z_i$	$\Sigma_i(X_i, Y_i, Z_i)$
1	1	0	$-X_i$	$Z_i$	$\Sigma_i(-X_i, -Y_i, Z_i)$
2	0	1	$X_i$	$-Z_i$	$\Sigma_i(X_i, -Y_i, -Z_i)$
3	1	1	$-X_i$	$-Z_i$	$\Sigma_i(-X_i, Y_i, -Z_i)$
0	0	0	$X_i$	$Z_i$	$\Sigma_i(X_i, Y_i, Z_i)$

etiquetado como caso 0 en la tabla B.1. Los otros tres casos (etiquetados como 1, 2 y 3) también se presentan en esta tabla.

- Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que el marco de base  $\Sigma_0$  es el mismo, y que posee los parámetros  $\mu_0 = \nu_0 = 0$  para todos los casos, entonces hay variantes equivalentes de parámetros DH que producen el mismo modelo cinemático de un manipulador de robot en serie con  $n$  dof (es decir, tienen el mismo marco  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_i$ ). Pero, como también hay cuatro maneras de orientar el marco  $\Sigma_n$ , entonces hay cuatro posibles modelos cinemáticos, y un total de  $4^n$  posibles variantes.
- Cada una de las  $4^n$  variantes puede ser identificada por un código numérico formado por  $n$  dígitos, donde cada uno de los dígitos puede ser 0, 1, 2 ó 3, indicando, según los casos de la Tabla B.1, cómo cada uno de los marcos  $\Sigma_i$  de coordenadas para) está orientado respecto a la variante de base.

Según la notación anterior, para un robot con  $n = 4$  dof la variante 2032 (o  $V2032$ ) corresponde a la que  $\Sigma_1$  se orienta como en el caso 2,  $\Sigma_2$  como en el caso 0,  $\Sigma_3$  como en el caso 3, y  $\Sigma_4$  como en el caso 2. Por lo tanto, vale la pena notar que las  $4^{n-1}$  variantes equivalentes (con el mismo modelo cinemático) son aquellas que tienen el mismo último dígito en el código numérico, y que la variante base es la etiquetada con únicamente ceros.

Como ejemplo, considere el caso de un robot planar de 2-dof. La fig. B.1 muestra el diagrama cinemático de tal mecanismo utilizando las cuatro maneras diferentes de colocar el marco coordinado intermedio  $\Sigma_1$ , el cual cumple con las reglas de la familia  $O$ . De acuerdo con la notación ya descrita y los parámetros de sentido del eje mostrados en el figura, los diagramas mostrados corresponden a las variantes denotadas como  $V00$  (la variante base),  $V10$ ,  $V20$  y  $V30$ . La tabla B.2 muestra la conjuntos de parámetros D-H para los cuatro casos mostrados en la figura B.1, empleando la convención  $O1$ ; utilizando estos parámetros es posible calcular las MTH correspondientes y verificar que todas estas variantes producen el mismo modelo cinemático.

El siguiente paso es obtener los parámetros D-H para todas las posibles variantes, siempre y cuando conozcamos los parámetros D-H de la variante base. Para ello, se representarán los parámetros D-H de la variante base como  $\bar{d}_i$ ,  $\bar{\theta}_i$ ,  $\bar{a}_i$  y  $\bar{\alpha}_i$  los cuales dan

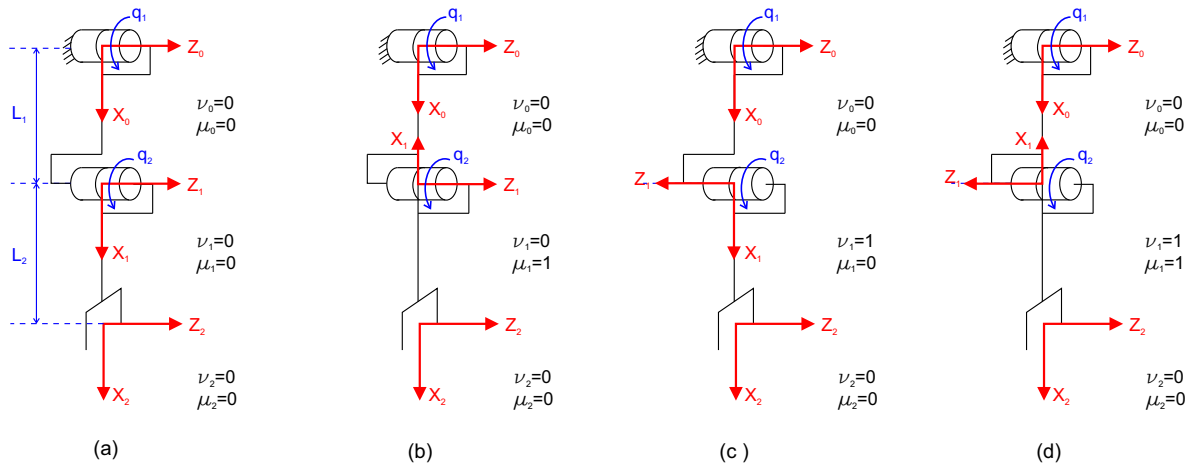


Figura 8.2: Diagrama cinemático para las cuatro equivalentes variantes de un robot planar de 2-dof: (a)V00; (b)V10;c)V20;(d)V30.

Tabla 8.2: Parámetros D-H de la convención  $O1$  para los casos mostrados en la figura B.1.

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1$	$L_1$	0
2	0	$q_2$	$L_2$	0

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1 + \pi$	$-L_1$	0
2	0	$q_2 + \pi$	$L_2$	0

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1$	$L_1$	$\pi$
2	0	$-q_2$	$L_2$	$\pi$

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1 + \pi$	$-L_1$	$\pi$
2	0	$-q_2 + \pi$	$L_2$	$\pi$

Tabla 8.3: Parámetros D-H para las 16 diferentes combinaciones de parámetros de sentido.

$(\mu_{i-1}, \nu_{i-1}, \mu_i, \nu_i)$	$(d_i, \theta_i, a_i, \alpha_i)$	$(\mu_{i-1}, \nu_{i-1}, \mu_i, \nu_i)$	$(d_i, \theta_i, a_i, \alpha_i)$
(0, 0, 0, 0)	$(d_i, \theta_i, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i)$	(0, 0, 0, 1)	$(d_i, \theta_i, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i + \pi)$
(1, 0, 0, 0)	$(d_i, \theta_i - \pi, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i)$	(1, 0, 0, 1)	$(d_i, \theta_i - \pi, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i + \pi)$
(0, 1, 0, 0)	$(-d_i, -\theta_i, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i - \pi)$	(0, 1, 0, 1)	$(-d_i, -\theta_i, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i)$
(1, 1, 0, 0)	$(-d_i, -\theta_i + \pi, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i - \pi)$	(1, 1, 0, 1)	$(-d_i, -\theta_i + \pi, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i)$
(0, 0, 1, 0)	$(d_i, \theta_i + \pi, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i)$	(0, 0, 1, 1)	$(d_i, \theta_i + \pi, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i - \pi)$
(1, 0, 1, 0)	$(d_i, \theta_i, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i)$	(1, 0, 1, 1)	$(d_i, \theta_i, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i)$
(0, 1, 1, 0)	$(-d_i, -\theta_i - \pi, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i + \pi)$	(0, 1, 1, 1)	$(-d_i, -\theta_i - \pi, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i)$
(1, 1, 1, 0)	$(-d_i, -\theta_i, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i + \pi)$	(1, 1, 1, 1)	$(-d_i, -\theta_i, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i)$

la postura relativa del marco  $\Sigma_i$  con respecto al marco  $\Sigma_{i-1}$  cuando los parámetros de sentido de ambos marcos es cero.

Es posible demostrar que, partiendo de los parámetros D-H de la variante base, los parámetros de D-H de cualquier variante están dados por las siguientes expresiones:

$$d_i = (-1)^{\nu_{i-1}} \bar{d}_i \quad (8.5)$$

$$\theta_i = (-1)^{\nu_{i-1}} (\bar{\theta}_i + [\mu_i + \mu_{i-1}] \pi) \quad (8.6)$$

$$a_i = (-1)^{\mu_{i-1}} \bar{a}_i \quad (8.7)$$

$$\alpha_i = (-1)^{\mu_{i-1}} (\bar{\alpha}_i + [\nu_i + \nu_{i-1}] \pi) \quad (8.8)$$

donde  $(\mu_{i-1}, \nu_{i-1})$  y  $(\mu_i, \nu_i)$  son los parámetros de sentido de los marcos  $\Sigma_{i-1}$  y  $\Sigma_i$ , respectivamente.

Como sólo hay 16 combinaciones de los parámetros de sentido, para dos marcos consecutivos de coordenadas ( $\Sigma_{i-1}$  y  $\Sigma_i$ ) podemos calcular explícitamente los parámetros D-H para esas combinaciones, y obtener la tabla (B.3), la cual es muy útil para calcular los parámetros D-H de cualquier variante siempre que tengamos los parámetros D-H base y los parámetros de sentido de todos los marcos de la cadena cinemática.

Podemos verificar que los parámetros D-H en la tabla B.1 cumplen con las expresiones (B.1)-(B.1) y también con la tabla B.3.

Como un segundo ejemplo, considere el robot de 3 dof en la fig. (B.2), y supongamos que, por alguna razón, estamos interesados en calcular los parámetros D-H considerando los cuatro marcos coordenados mostrados en línea continua roja en la misma figura, que satisfacen las reglas de la convención O1. La figura (B.2) muestra también, en línea discontinua, los ejes correspondientes a la variante base de la misma convención, por lo que es fácil verificar que los parámetros de sentido  $(\mu_i$  y  $\nu_i, i = 1, 2, 3)$  son los indicados

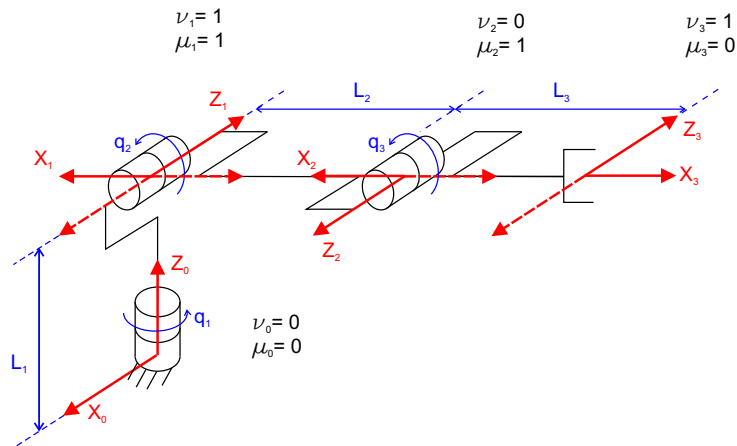


Figura 8.3: Diagrama cinemático de un robot de 3-dof, considerando la variante V312 de la convención O1.

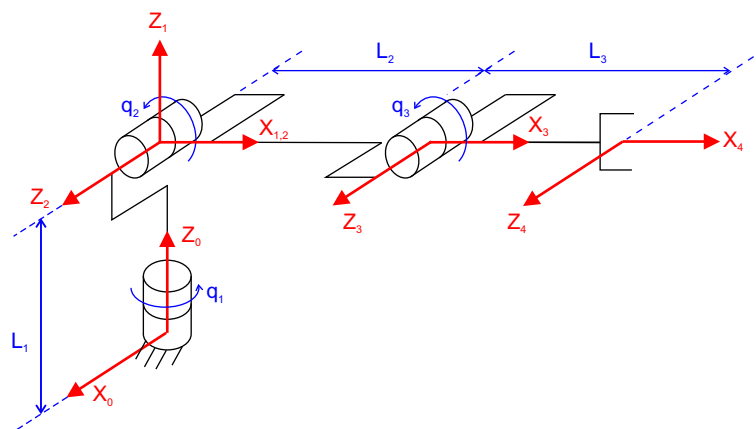


Figura 8.4: Diagrama cinemático de un robot de 3-dof, considerando la convención M1.

en la misma figura (se supone que el marco  $\Sigma_0$  tiene  $\mu_0 = \nu_0 = 0$ ). Entonces podemos verificar que los marcos que nos interesan corresponden a la variante V312.

Usando la Tabla (B.3) es posible verificar que los parámetros D-H para la variante base (V000) y la variante V312 están dados en la Tabla (B.4).

### 8.3.1 Relación entre las convenciones estándar

En la subsección previa se describieron las reglas para obtener los parámetros D-H de todas las variantes de una convención (la convención O1). Pero ¿qué pasa, si se tiene interés en usar una convención diferente a la O1? En esta sección se muestra como es

Tabla 8.4: Parámetros cinemáticos y dinámicos de los mecanismos analizados.

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$q_2$	$L_2$	0
3	0	$q_3$	$L_3$	0

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1 - \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$q_2$	$-L_2$	$\pi$
3	0	$q_3 + \pi$	$L_3$	$\pi$

Tabla 8.5: Parámetros cinemáticos y dinámicos de los mecanismos analizados.

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$q_2$	$L_2$	0
3	0	$q_3$	$L_3$	0

$i$	$d_{i-1}$	$\theta_{i-1}$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$q_2$	$L_2$	0
3	0	$q_3$	$L_3$	0

$i$	$d_{i-1}$	$\theta_{i-1}$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$
1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$q_2$	$L_2$	0
2	0	$q_2$	$L_2$	0

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	0
2	0	$q_2$	0	$\frac{\pi}{2}$
3	0	$q_3$	$L_2$	0
4	0	0	$L_3$	0

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$
1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	0
2	0	$q_2$	0	$\frac{\pi}{2}$
3	0	$q_3$	$L_2$	0
4	0	0	$L_3$	0

$i$	$d_{i-1}$	$\theta_{i-1}$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$
1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	0
2	0	$q_2$	0	$\frac{\pi}{2}$
3	0	$q_3$	$L_2$	0
4	0	0	$L_3$	0

posible establecer relaciones entre los correspondientes parámetros D-H de diferentes convenciones.

Para esto, considérese por simplicidad el modelo cinemático directo de un robot manipulador de 2 gdl. Entonces, la MTH  ${}^0T_e$  para las tres convenciones de la familia  $O$  sería:

$$O1 : {}^0T_2 = T_{Z_0}(d_1, \theta_1)T_{X_1}(a_1, \alpha_1)T_{Z_1}(d_2, \theta_2)T_{X_2}(a_2, \alpha_2) \quad (8.9)$$

$$O2 : {}^0T_2 = T_{Z_0}(d_0, \theta_0)T_{X_1}(a_1, \alpha_1)T_{Z_1}(d_1, \theta_1)T_{X_2}(a_2, \alpha_2) \quad (8.10)$$

$$O3 : {}^0T_2 = T_{Z_0}(d_0, \theta_0)T_{X_1}(a_0, \alpha_0)T_{Z_1}(d_1, \theta_1)T_{X_2}(a_1, \alpha_1) \quad (8.11)$$

$$(8.12)$$

Por otro lado, si se usa la familia  $M$  se tiene lo siguiente:

$$M1 : {}^0T_3 = T_{X_0}(a_1, \alpha_1)T_{Z_1}(d_1, \theta_1)T_{X_1}(a_2, \alpha_2) \cdot T_{Z_2}(d_2, \theta_2)T_{X_2}(a_3, \alpha_3)T_{Z_3}(d_3, \theta_3) \quad (8.13)$$

$$M2 : {}^0T_3 = T_{X_0}(a_0, \alpha_0)T_{Z_1}(d_1, \theta_1)T_{X_1}(a_1, \alpha_1) \cdot T_{Z_2}(d_2, \theta_2)T_{X_2}(a_2, \alpha_2)T_{Z_3}(d_3, \theta_3) \quad (8.14)$$

$$M3 : {}^0T_3 = T_{X_0}(a_0, \alpha_0)T_{Z_1}(d_0, \theta_0)T_{X_1}(a_1, \alpha_1) \cdot T_{Z_2}(d_1, \theta_1)T_{X_2}(a_2, \alpha_2)T_{Z_3}(d_2, \theta_2) \quad (8.15)$$

Pero como la primera y la última MTH son igual a la identidad, es posible comparar todas las convenciones. Para el caso general, se tienen las siguientes relaciones entre las tres convenciones de la familia  $O$ :

$$O2 \leftrightarrow O1 : \quad {}^{o2}(d_i, \theta_i) = {}^{o1}(d_{i+1}, \theta_{i+1}) \quad \text{y} \quad {}^{o2}(a_i, \alpha_i) = {}^{o1}(a_i, \alpha_i) \quad (8.16)$$

$$O3 \leftrightarrow O2 : \quad {}^{o3}(d_i, \theta_i) = {}^{o2}(d_i, \theta_i) \quad \text{y} \quad {}^{o3}(a_i, \alpha_i) = {}^{o2}(a_{i+1}, \alpha_{i+1}) \quad (8.17)$$

$$O3 \leftrightarrow O1 : \quad {}^{o3}(d_i, \theta_i) = {}^{o1}(d_{i+1}, \theta_{i+1}) \quad \text{y} \quad {}^{o3}(a_i, \alpha_i) = {}^{o1}(a_{i+1}, \alpha_{i+1}) \quad (8.18)$$

De manera similar se pueden obtener las relaciones entre las tres convenciones de la familia  $M$ :

$$M2 \leftrightarrow M1 : \quad {}^{m2}(d_i, \theta_i) = {}^{m1}(d_i, \theta_i) \quad \text{y} \quad {}^{m2}(a_i, \alpha_i) = {}^{m1}(a_{i+1}, \alpha_{i+1}) \quad (8.19)$$

$$M3 \leftrightarrow M2 : \quad {}^{m3}(d_i, \theta_i) = {}^{m2}(d_{i+1}, \theta_{i+1}) \quad \text{y} \quad {}^{m3}(a_i, \alpha_i) = {}^{m2}(a_i, \alpha_i) \quad (8.20)$$

$$M3 \leftrightarrow M1 : \quad {}^{m3}(d_i, \theta_i) = {}^{m1}(d_{i+1}, \theta_{i+1}) \quad \text{y} \quad {}^{m3}(a_i, \alpha_i) = {}^{m1}(a_{i+1}, \alpha_{i+1}) \quad (8.21)$$

así como entre las convenciones correspondientes de ambas familias:

$$M1 \leftrightarrow O1 : \quad {}^{m1}(d_i, \theta_i) = {}^{o1}(d_i, \theta_i) \quad \text{y} \quad {}^{m1}(a_i, \alpha_i) = {}^{o1}(a_{i-1}, \alpha_{i-1}) \quad (8.22)$$

$$M2 \leftrightarrow O2 : \quad {}^{m2}(d_i, \theta_i) = {}^{o2}(d_{i-1}, \theta_{i-1}) \quad \text{y} \quad {}^{m2}(a_i, \alpha_i) = {}^{o2}(a_i, \alpha_i) \quad (8.23)$$

$$M3 \leftrightarrow O3 : \quad {}^{m3}(d_i, \theta_i) = {}^{o3}(d_i, \theta_i) \quad \text{y} \quad {}^{m3}(a_i, \alpha_i) = {}^{o3}(a_{i-1}, \alpha_{i-1}). \quad (8.24)$$

Empleando las expresiones anteriores, es posible determinar la relación entre dos



convenciones de parámetros D-H cualesquiera.

La figura B.3 muestra el diagrama cinemático de el mismo robot en la figura B.2, pero ahora se siguieron las reglas para colocar los marcos según la familia  $M$ . La tabla B.5 muestra los parámetros D-H de las seis convenciones estudiadas en este documento para el robot mostrado en la figura B.2 (variante 000) y la figura B.3.

Es también importante notar que si se siguen las reglas para obtener el conjunto  $n_i$  base de parámetros D-H, entonces, los ejes  $X_i$  en todas las seis convenciones coinciden (no así los orígenes de los marcos). Incluso, las tres convenciones de cada familia tienen la misma ubicación de los marcos. Todo esto puede observarse en la figuras 3.3-??.

## LITERATURA CITADA

- Aneke, N. P. I. (2003). *Control of underactuated mechanical systems*. Tesis doctoral, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, Netherlands.
- Angeles, J. (2002). *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems*. Springer-Verlag.
- Antsaklis, P. and Michel, A.N. (2006). *Linear Systems*. Springer.
- Álvarez, E. (2006). *Modelado dinámico de un robot bípedo: Aplicación al diseño de sus mecanismos y al análisis de la marcha*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah. México.
- Arczewski, K. and Blajer, W. (1996). “A unified approach to the modelling of holonomic and nonholonomic mechanical systems”. *Mathematical Modelling of Systems*, Vol. 2, No. 3, pp 157–174.
- Bach, R. and Paielli, R. (1993). “Linearization of attitude-control error dynamics”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 10, pp 1521–1525.
- Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer, C. and Aracil, R. (1997). *Fundamentos de Robótica*. McGraw-Hill.
- Baruh, H. (1999). *Analytical Dynamics*. McGraw-Hill.
- Baruh, H. (2000). “Another look at the describing equations of dynamics”. *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, Vol. 21, No. 1, pp 15–23.
- Bernal, J. (2013). *Aplicación de los números duales al modelado y control de robots*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah. México.
- Bernal, J. y Campa, R. (2015). “Analysis of the Different Conventions of Denavit-Hartenberg Parameters”. *International Review on Modelling and Simulations*. Accepted (April 2018).
- Bernal, J., Campa, R. y Soto, I. (2015). “Solución de la cinemática directa e inversa del robot paralelo Hexapod”. *Memorias del 2016 Congreso Mexicano de Robótica*. Los Cabos, BCS, México.
- Bernal, J., Campa, R. (2016). “Control por dinámica inversa del robot paralelo Hexapod”. *Memorias del 2016 Congreso Mexicano de Robótica*. Mazatlán, Sinaloa, México.
- Bernal, J., Campa, R. and Soto, I. (2018). “Kinematics and dynamics modeling of the 6-3-PUS-type Hexapod parallel mechanism”. *Journal of Mechanical Science and Technology*, Accepted (March 2018).

- Bloch, A. M., Krishnaprasad, P., Marsden, J. E. and Murray, R. M. (1996). “Nonholonomic mechanical systems with symmetry”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 136, No. 1, pp. 21–99.
- Bottema, O. and Roth, B. (2011). *Theoretical Kinematics*. Dover Publications.
- Bremer, H. (1987). “On the dynamics of flexible manipulators”. Proceedings of the 1987 *International Conference on Robotics and Automation*. Raleigh, NC, USA.
- Camarillo, K., Campa, R., Santibáñez, V. y Moreno-Valenzuela, J. (2008). “Stability analysis of the operational space control for industrial robots using their own joint velocity PI controllers”. *Robotica*, Vol. 26, No. 6, pp. 729–738.
- Campa, R. (2005). *Control de robots manipuladores en espacio de tarea*. Tesis doctoral, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B.C., México.
- Campa, R. y Bernal, J. (2015). “Análisis de las diferentes convenciones de parámetros Denavit-Hartenberg”. Memorias del *II Congreso Internacional de Robótica y Computación*. Cabo San Lucas, B. C. S., México.
- Campa, R., Bernal, J. and Soto, I. (2018). Modeling and motion control of the 6-3-PUS-type Hexapod parallel mechanism. In: Vergara-Villegas, O.O., Nandayapa-Alfaro, M. J. and Soto-Marrufo, A. I. (Eds.) *Advanced Topics on Computer Vision, Control and Robotics in Mechatronics*. Springer. In press (April 2018).
- Campa, R., Bernal, J. and Soto, I. (2016). “Kinematic modeling and control of the Hexapod parallel robot”. Proceedings of the *American Control Conference*. Boston, MA, USA.
- Campa, R. and de la Torre, H. (2009). “Pose control of robot manipulators using different orientation representations: A comparative review”. Proceedings of the *American Control Conference*. St. Louis, MO, USA.
- Campos, C. (2011). *Estudio de controladores y patrones de marcha de un robot bípedo de 5 gdl*. Tesis doctoral, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- Carbonari, L., Krovi, V. N., and Callegari, M. (2011). “Soluzione polinomiale del problema di cinematica diretta di un robot ad architettura parallela 6-PUS”. Memorias del Congreso dell’Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata. Bologna, Italia.
- Cheah, C. C. and Haghghi, R. (2014). Motion control of robot manipulators. In: Nee, A. Y. C. (Ed.) *Handbook of Manufacturing Engineering and Technology*. Springer.
- Chung, W. (2004). *Nonholonomic Manipulators*. Springer.

- Cordero, G. (2013). *Modelado y control de un vehículo autónomo tipo bicicleta*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- Cortés, J. (2002). *Geometric, Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems* Springer-Verlag.
- Costa Castelló, R., Griñó, R., and Basañez, L. (1998). DAE Methods in Constrained Robotics System Simulation. *Revista Computación y Sistemas*, Vol. 1, No. 3,
- Craig, J.J. (1986). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* Addison-Wesley. Addison-Wesley.
- Craig, J.J. (2005). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Pearson Prentice Hall.
- de la Torre, H. (2007). *Estudio comparativo de controladores de postura de robots manipuladores empleando diferentes representaciones de la orientación*. Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, México.
- de Luca, A. and Oriolo, G. (1995). Modelling and control of nonholonomic mechanical systems. In: Angeles J. y Kecskemethy, A. (Eds.) *Kinematics and Dynamics of Multi-body Systems*. Springer.
- Denavit, J. and Harteneberg R. S. (1955). “A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices”. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, pp. 215–221.
- Duindam, V., Macchelli, A., Stramigioli, S., and Bruyninckx, H. (2009). *Modeling and Control of Complex Physical Systems: The Port-Hamiltonian Approach*. Springer.
- Featherstone, R. (1983). The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 2, No. 1, pp 13–30.
- Featherstone, R. (1984). *Robot dynamics algorithms*. PhD. thesis, University of Edinburgh. Edinburgh, Scotland.
- Featherstone, R. (1999). “A divide-and-conquer articulated-body algorithm for parallel  $O(\log(n))$  calculation of rigid-body dynamics. Part 1: Basic algorithm”. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 18, No. 9, pp 867–875.
- Featherstone, R. (2005). “Efficient factorization of the joint-space inertia matrix for branched kinematic trees”. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 24, No. 6, pp 487–500.
- Featherstone, R. (2008). *Robot Dynamics Algorithms*. Springer.
- Featherstone, R. and Orin, D. (2000). “Robot dynamics: equations and algorithms”. Proceedings of the *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Vol. 1, pp 826–834. San Francisco, CA, USA.

- Fierro, E. (2013). *Estudio de movimientos deportivos en humanoides*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- Fleisch, D. (2012). *A Student's Guide to Vectors and Tensors*. Cambridge University Press.
- García, J. (2006). *Implementación y control de un sistema péndulo invertido*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- Ghorbel, F. H., Chételet, O., Gunawardana, R., and Longchamp, R. (2000). "Modeling and set point control of closed-chain mechanisms: Theory and experiment". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 8, No. 5, pp 801–815.
- Ginsberg, J. (2008). *Engineering Dynamics*. Cambridge University Press.
- Goldstein, H. (1965). *Classical Mechanics*. Pearson Education.
- Han, D. P., Wei, Q., and Li, Z. X. (2008). "Kinematic control of free rigid bodies using dual quaternions". *International Journal of Automation and Computing*, Vol. 5, No. 3, pp 319–324.
- Hollerbach, J.M. (1980). *A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics* Technical report. Massachusetts Institute of Technology, Boston, MA, USA.
- Kahn, M. E. (1970). *The near minimum-time control of open-loop articulated kinematic*. PhD. thesis, Stanford University. Stanford, CA, USA.
- Kane, T. R. and Levinson, D.A. (1983). "The use of Kane's dynamical equations in robotics". *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 2, No. 3, pp. 3–21.
- Kane, T. R. and Levinson, D.A. (1985). *Dynamics, Theory and Applications*. McGraw Hill.
- Kane, T. R. and Levinson, D.A. (2012). "Formulation of equations of motion for complex spacecraft". *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. Vol. 3, No.2, pp99-112.
- Kapur, D. (1995). "Algorithmic elimination methods". In *Tutorial notes of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* Montreal, Canadá.
- Kelly, R. and Santibáñez, V. (2003). *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson Educación.
- Khalil, W. and Kleinfinger, J. (1986). "A new geometric notation for open and closed-loop robots". Proceedings of the *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 3, pp. 1174–1179. San Francisco, CA, USA.

- Khatib, O. (1987). “A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation”. *Journal of Robotics and Automation*, Vol. 3, No. 1, pp. 43–53.
- Lanczos, C. (2012). “The variational principles of mechanics”. *Journal of Robotics and Automation*. Courier Corporation.
- Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Heyd, D. E., y Abellanas, L. (2006). *Cálculo*. McGraw-Hill.
- Lenarčič, J. and Thomas, F. (2013). *Advances in robot kinematics: Theory and applications*. Springer.
- Likins, P. W. (1974). *Analytical dynamics and non-rigid spacecraft simulation*. Technical report. Jet Propulsion Laboratory. Pasadena, CA, USA.
- Lipkin, H. (2005). “A note on Denavit-Hartenberg notation in robotics”. Proceedings of *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Vol. 7, pp. 921–926. Long Beach, CA USA
- Martínez, G. (2011). *Estudio de controladores y patrones de marcha de un robot bípedo de 5 gdl*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- Mason, M. T. (2001). *Mechanics of Robotic Manipulation*. MIT press.
- Sánchez-Mazuca, S. (2014). *Análisis y evaluación de métodos de estimación paramétrica aplicados al control de sistemas mecatrónicos*. Tesis doctoral, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- McCarthy J. M., Soh G. S. (2011). *Geometric Design of Linkages*. Springer.
- McGill, D. J., King, W. W. and González, J.G. (1991b). *Mecánica para ingeniería y sus aplicaciones I: Estática*. Iberoamérica.
- McGill, D. J., King, W. W. y González, J.G. (1991a). *Mecánica para Ingeniería y sus Aplicaciones II: Dinámica*. Iberoamérica.
- Meirovitch, L. (1970). *Methods of Analytical Mechanics*. McGraw Hill.
- Mistry, M. and Righetti, L. (2012). “Operational space control of constrained and underactuated systems”. In: Durrant-Whyte, H., Roy, N. y Abbeel, P. (Eds.) *Proceedings of Robotics: Science and systems*, MIT Press.
- Muir, P. F. and Neuman, C. P. (1987). “Kinematic modeling of wheeled mobile robots”. *Journal of Field Robotics*, Vol. 4, No. 2, pp. 281–340.

- Murray, R. M., Li, Z., and Sastry, S. S. (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press.
- Nanua, P., Waldron, K. J., and Murthy, V. (1990). “Direct kinematic solution of a Stewart platform”. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vo. 6, No. 4, pp. 438–444.
- Natale, C. (2003). *Interaction control of robot manipulators: Six degrees-of-freedom tasks*. Springer.
- Neimark, I. I. and Fufaev, N.A. (1972). *Dynamics of Nonholonomic Systems*. American Mathematical Society.
- Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Forgotten Books.
- Ollervides, J., Santibáñez, V., and Camarillo, A. (2007). “Controlador PID en modo fuerza aplicado en un sistema de suspensión magnética, como caso de estudio”. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático AMCA*. Monterrey, N.L., México.
- Oronoz, I. (2013). *Modelado y control de un giroscopio de 3 gdl*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- Papastavridis, J. G. (1998). “Panoramic overview of the principles and equations of motion of advanced engineering dynamics”. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 51, pp. 239–266.
- Parsa, K. (2007). “The Lagrangian derivation of Kane’s equations”. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, Vol. 31, No. 4, pp 407–420.
- Paul, R. P. (1981). *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control*. MIT Press.
- Ramírez, C. (2008). *Modelado dinámico y control en modo par del robot Mitsubishi PA10-7CE*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- Ramírez-Gordillo, J., Merchan-Cruz, E.A., Lugo-González, E., Rodríguez-Cañizo, R.G., Ponce-Reynoso, R., and Urriolagoitia-Sosa, G. (2011). “Desarrollo de una nueva solución compacta a la cinemática de manipuladores robóticos basada en cuaterniones duales”. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, Vol. 8, No. 4, pp. 334–344.
- Reveles, D. (2011). *3RRR*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.

- Reyes, G. (2012). *Optimización de la marcha omnidireccional del robot humanoide bioloid*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- Rooney, J. (2007). William Kingdon Clifford (1845-1879). En: Ceccarelli, M., *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science: Their Contributions and Legacies*, Springer.
- Sáenz, A., Bugarín, E., and Santibáñez, V. (2015). “Modelado cinemático y dinámico de un robot móvil omnidireccional de 4 ruedas considerando dinámica de actuadores”. *Memorias del Congreso Internacional de Robótica y Computación*. Los Cabos, B.C.S., México.
- Salinas, A. (2011). *Análisis e implementación de esquemas de control de interacción activa para robots manipuladores: Aplicación al robot Mitsubishi PA10*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, México.
- Sandino, L. A., Bejar, M., and Ollero, A. (2013). “A survey on methods for elaborated modeling of the mechanics of a small-size helicopter. Analysis and comparison”. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 72, No. 2, pp. 219–238.
- Schiehlen, W. (2007). “Research trends in multibody system dynamics”. *Multibody System Dynamics*, Vol. 18, No. 1, pp. 3–13.
- Sciavicco, L. and Siciliano, B. (2000). *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer.
- Soto, I., and Campa, R. (2015) “Modelling and control of a spherical inverted pendulum on a five-bar mechanism”. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 12, No. 7, pp 95.
- Soto, I. (2009). *Análisis e implementación de esquemas de control en espacio de postura para robots manipuladores redundantes*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- Soto, I. (2014). *Modelado y control de robots con restricciones holonómicas y no holonómicas*. Tesis doctoral, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México.
- Spong, M. W. (1992). “Remarks on robot dynamics: Canonical transformations and Riemannian geometry”. *Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 72, pp. 554–559. Nice, France.
- Stratton, J. A. (1941). *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill.



- Toz, M. and Kucuk, S. (2011). “A comparative study for computational cost of fundamental robot manipulators”. Proceedings of *the Conference on International Industrial Technology* . Auburn, AL, USA
- Tsai, L.W. (1999). *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons.
- Turney, J. L., Mudge, T. N., and Lee, C. (1981). Connection between formulations of robot arm dynamics with applications to simulation and control. Technical report. College of Engineering, The University of Michigan. Ann Arbor, Michigan, USA.
- Udwadia, F. E., and Kalaba, R. E. (1992). “A new perspective on constrained motion”. *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*. Vol. 439, pp. 407–410.
- Van der Schaft, A. and Maschke, B. (1994). “On the Hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems”. *Reports on Mathematical Physics*, Vol. 34, No. 2, pp. 225–233.
- Whitney, D.E. (1969). “Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses”. *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*. Vol.10, No. 2, pp. 47-53.
- Wijckmans, P. J. (1996). *Conditioning of differential algebraic equations and numerical solution of multibody dynamics*. PhD thesis. Technische Universiteit Eindhoven. Eindhoven, Netherlands.

# Apéndice A

## Coordenadas de Plücker y el principio de transferencia

El contenido de este apéndice es tomado de (Bernal, 2013).

Para localizar una recta en el espacio se necesitan cuatro coordenadas independientes. Existen diferentes parametrizaciones de la postura de una recta, una de ellas fue propuesta por Plücker (Rooney, 2007) y consiste en especificar dos vectores: un vector unitario  $\mathbf{u}$  en la dirección de la recta y un vector de posición  $\mathbf{p}$  del origen del marco de referencia a un punto de la recta. En la figura A.1 se muestra una recta y los dos vectores que la caracterizan.

Las coordenadas de Plücker están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ S(\mathbf{p})\mathbf{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

y se encuentran sujetas a las siguientes restricciones:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1 \quad , \quad \mathbf{u}^T S(\mathbf{p})\mathbf{u} = 0.$$

Ahora bien, dado que  $\mathbf{u}$  es un vector unitario sus componentes son los cosenos de los ángulos directores  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  y  $\alpha_z$  mostrados en la figura A.1, es decir:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

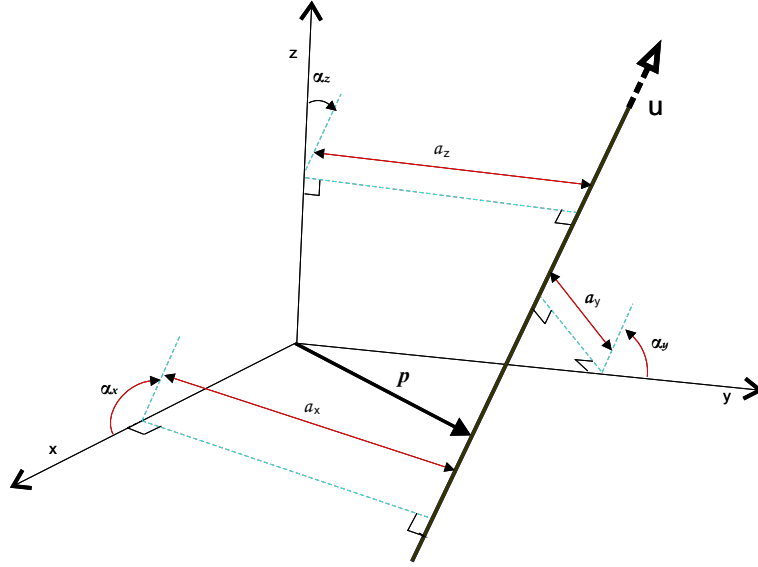


Figura A.1: Parámetros de una recta en el espacio.

y por lo tanto:

$$S(\mathbf{p})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} p_y \cos(\alpha_z) - p_z \cos(\alpha_y) \\ p_z \cos(\alpha_x) - p_x \cos(\alpha_z) \\ p_x \cos(\alpha_y) - p_y \cos(\alpha_x) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

donde  $p_x, p_y$  y  $p_z$  son las componentes de  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ .

En la figura A.1 se muestran también los segmentos  $a_x$ ,  $a_y$  y  $a_z$  que indican la distancia mínima entre la recta y los ejes X, Y y Z, respectivamente. De la misma figura, y de la definición del producto cruz de vectores, es fácil comprobar que los vectores unitarios en dirección de los segmentos  $a_x$ ,  $a_y$  y  $a_z$  son, respectivamente:

$$\hat{\mathbf{a}}_x = \frac{\hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_x)}; \quad \hat{\mathbf{a}}_y = \frac{\hat{\mathbf{j}} \times \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_y)}; \quad \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_z)}$$

donde  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  y  $\hat{\mathbf{k}}$  son los vectores unitarios en dirección de los ejes X, Y y Z, respectivamente.

Es importante señalar que estos vectores indican la dirección de la normal común a la recta dada por  $\mathbf{u}$  y cada uno de los ejes del marco. Y como la distancia entre dos rectas es igual a la proyección de cualquier vector que vaya de una recta a la otra en la

dirección de la normal común a ambas rectas, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} a_x &= \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{a}}_x = \frac{\mathbf{p}^T S(\hat{\mathbf{i}}) \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_x)} = -\frac{\hat{\mathbf{i}}^T S(\mathbf{p}) \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_x)} = -\frac{p_y \cos(\alpha_z) - p_z \cos(\alpha_y)}{\text{sen}(\alpha_x)} \\ a_y &= \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{a}}_y = \frac{\mathbf{p}^T S(\hat{\mathbf{j}}) \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_y)} = -\frac{\hat{\mathbf{j}}^T S(\mathbf{p}) \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_y)} = -\frac{p_z \cos(\alpha_x) - p_x \cos(\alpha_z)}{\text{sen}(\alpha_y)} \\ a_z &= \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{\mathbf{p}^T S(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_z)} = -\frac{\hat{\mathbf{k}}^T S(\mathbf{p}) \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_z)} = -\frac{p_x \cos(\alpha_y) - p_y \cos(\alpha_x)}{\text{sen}(\alpha_z)} \end{aligned}$$

Así que

$$S(\mathbf{p}) \mathbf{u} = - \begin{bmatrix} a_x \text{sen}(\alpha_x) \\ a_y \text{sen}(\alpha_y) \\ a_z \text{sen}(\alpha_z) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

En (Rooney, 2007) se explica cómo las coordenadas de Plücker se pueden expresar con un vector de tres números duales  $\mathbf{u} + \sigma S(\mathbf{p}) \mathbf{u} \in S_D^2 \subset \mathbb{D}^3$ , donde, en general,

$$S_D^n = \{\mathbf{u} + \sigma \mathbf{v} \in \mathbb{D}^{n+1} : \mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1, \mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0\}$$

se denomina aquí una hiperesfera unitaria dual, que es una variedad de dimensión  $2n$ .

De (A.1) y (A.3) se tiene que

$$\mathbf{u} + \sigma S(\mathbf{p}) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) - \sigma a_x \text{sen}(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) - \sigma a_y \text{sen}(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) - \sigma a_z \text{sen}(\alpha_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x + \sigma a_x) \\ \cos(\alpha_y + \sigma a_y) \\ \cos(\alpha_z + \sigma a_z) \end{bmatrix}$$

donde se ha usado la definición de una función dual (ver sección 3.2.3).

Por otro lado, si se define  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z]^T \in S^2$ ,  $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T \in \mathbb{R}^3$  y la función coseno de un vector  $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$  como  $\cos(\mathbf{v}) = [\cos(v_x) \ \cos(v_y) \ \cos(v_z)]^T$ , entonces es posible escribir

$$\mathbf{u} + \sigma S(\mathbf{p}) \mathbf{u} = [I + \sigma S(\mathbf{p})] \mathbf{u} = \cos(\boldsymbol{\alpha} + \sigma \mathbf{a}). \quad (\text{A.4})$$

El término  $\boldsymbol{\alpha} + \sigma \mathbf{a}$  se conoce como vector de ángulos directores duales. Nótese que la parte primaria de  $\cos(\boldsymbol{\alpha} + \sigma \mathbf{a})$  es el vector de cosenos directores de  $\mathbf{u}$  y por lo tanto definen la dirección de la recta; la parte secundaria determina el desplazamiento de la recta con respecto al origen (si  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  entonces la recta pasa por el origen).

Lo anterior permite comprobar que la parametrización de la postura de una recta que no pasa por el origen, dada por las coordenadas de Plücker, puede verse como una extensión de la parametrización de una recta que pasa por el origen dada por los cosenos directores. Esto se logra simplemente “dualizando” los ángulos directores, de

modo que

$$\begin{aligned}\alpha_x &\longrightarrow \alpha_x + \sigma a_x \\ \alpha_y &\longrightarrow \alpha_y + \sigma a_y \\ \alpha_z &\longrightarrow \alpha_z + \sigma a_z\end{aligned}$$

En otras palabras, si un vector unitario  $\mathbf{u}$ , en la dirección de una recta que pasa por el origen, es parametrizado usando

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

entonces un vector unitario, en la dirección de una recta que no pasa por el origen, es parametrizado por

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_x + \sigma a_x) \\ \cos(\alpha_y + \sigma a_y) \\ \cos(\alpha_z + \sigma a_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} a_x \sin(\alpha_x) \\ a_y \sin(\alpha_y) \\ a_z \sin(\alpha_z) \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_D^2 \subset \mathbb{D}^3,$$

con las siguientes restricciones holonómicas:

$$\cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z) = 1$$

$$a_x \cos(\alpha_x) \sin(\alpha_x) + a_y \cos(\alpha_y) \sin(\alpha_y) + a_z \cos(\alpha_z) \sin(\alpha_z) = 0.$$

Todo lo anterior es una aplicación simple del llamado *principio de transferencia* que fue establecido inicialmente por Kotelnikov en 1895, el cual menciona que: “geométricamente, la relación entre una cantidad real y su correspondiente cantidad dual es esencialmente la relación entre la geometría de líneas que se intersectan (geometría esférica) y la geometría de las líneas alabeadas (geometría espacial).” (Rooney, 2007)

Cabe recordar que las líneas (rectas) alabeadas (“skew lines” en inglés) son las rectas que no son paralelas ni se intersectan en el espacio; esto equivale a decir que no pertenecen al mismo plano.

La geometría esférica tiene que ver con el conjunto de líneas rectas que se intersectan en el espacio. La geometría espacial tiene que ver con la situación más general de líneas alabeadas o no intersectantes en el espacio. Ahora bien, para rotaciones alrededor de un punto fijo,  $O$ , todos los ejes de rotación se intersectan en  $O$  y la geometría es esférica; mientras que para desplazamientos en tornillo, es decir, rotaciones y traslaciones sobre líneas alabeadas, la geometría es espacial.

La relación entre la geometría esférica y la geometría espacial está dada por el Principio de Transferencia, el cual establece lo siguiente (Rooney, 2007).

“todas las leyes y fórmulas relacionadas a una configuración esférica (que involucra líneas intersectantes y ángulos reales) son también válidas cuando se aplica a una configuración espacial equivalente de líneas alabeadas, si cada ángulo  $\alpha$ , en la formulación esférica se reemplaza por el correspondiente ángulo dual  $\alpha + \sigma a$ .”

El principio de transferencia y el álgebra de números duales son así empleados para obtener parametrizaciones de la postura (posición y orientación) de un cuerpo rígido a partir de parametrizaciones de sólo la orientación.

## Apéndice B

# Análisis de las convenciones de parámetros D-H

El análisis en esta sección aplica a robots manipuladores seriales con  $n$  gdl, los cuales requieren un conjunto de  $4n$  parámetros D-H para definir su modelo cinemático. La totalidad de esta sección fue extraída de (Bernal & Campa, 2015).

Primero hay que enfatizar el hecho de que, desde el punto de vista de cinemática, todas las convenciones de D-H son equivalentes, en el sentido de que producen el mismo modelo cinemático de un robot manipulador, con la única condición de que los marcos solidarios a la base y al elemento terminal sean los mismos. En otras palabras, el modelo cinemático es independiente de la convención D-H empleada para obtenerlo.

En la sección B.1 se analiza primero el hecho de que para un robot dado, el conjunto de los  $4n$  parámetros D-H de una convención no es único, sin embargo, existe un número finito de conjuntos, obtenidos cuando el sentido de un par de ejes coordenados de cualquier marco  $\Sigma_i$  en la cadena cinemática es invertido (es decir, cambiando el sentido de los ejes, pero no su dirección). Cada uno de estos conjuntos de parámetros D-H originados, para una convención dada, es llamado: *variante*. Nótese que dos variantes son equivalentes si éstas comparten el mismo marco inicial y final (es decir, las dos variantes producen el mismo modelo cinemático del robot).

En la sección B.2 se hace una comparación de las seis convenciones que fueron descritas en la sección 3.2, con el fin de resaltar las relaciones que existen entre sus parámetros D-H y mostrar cómo, de un variante dada, es posible determinar otra, incluso de una convención diferente.

## B.1 Conjuntos equivalentes de parámetros D-H

Si se analiza las reglas para colocar los marcos de coordenadas de las familias originales y modificadas, se observa que, en ambos: (a) los ejes  $Z$  de los marcos asociadas a cada eslabón siempre van a lo largo del eje de articulación correspondiente (excepto el último marco, y el marco  $\Sigma_0$  en las convenciones de la familia  $M$ ), y (b) los ejes  $X$  van a lo largo de la línea normal común a dos ejes  $Z$  consecutivos. Pero las reglas no dicen nada sobre el sentido de cada uno de estos ejes, y por lo tanto es arbitrario. Este hecho conduce a la posibilidad de diferentes variantes de parámetros D-H para el mismo robot, incluso cuando se utiliza una convención particular.

Para el análisis, nótese que el sentido positivo de un eje se indica por su punta de flecha. Además, si  $A$  (con  $A \in \{X, Y, Z\}$ ) es un eje de coordenadas, entonces el vector unitario correspondiente en la dirección de  $A$ , que indica su sentido positivo, es  $\hat{\mathbf{a}}$  (con  $\hat{\mathbf{a}} \in \{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ ).

Con el fin de establecer un procedimiento general para determinar todas las posibles variantes equivalentes de los parámetros D-H en un robot manipulador, es necesario definir una convención base y una variante base para tal convención (de modo que todas las otras variantes se puedan calcular a partir de esa variante base). En lo que sigue, supóngase que la convención base es la  $O1$  (esta elección no es significativa, ya que como se mostrará en la sección B.2, dado un conjunto de parámetros para una convención D-H, el conjunto correspondiente para cualquier otra convención puede ser determinado).

Entonces la variante base (o variante cero) de la convención  $O1$ , es la variante que cumple con las siguientes reglas adicionales para colocar los marcos coordenados:

1. Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , elegir el sentido positivo del eje  $Z_{i-1}$  de modo que el movimiento correspondiente del eslabón  $i$  con respecto al eslabón  $i - 1$ , ya sea a lo largo o alrededor de dicho eje (dependiendo del tipo de articulación), produce un incremento de la correspondiente variable articular (es decir,  $d_i$  o  $\theta_i$  respectivamente). El eje  $Z_n$  se elige de modo que tenga el mismo sentido que el eje  $Z_{n-1}$ . En un robot real, como la dirección en la que cada variable articular aumenta normalmente se especifica, la elección de todos los ejes  $Z$  para la variante base se determina fácilmente.
2. Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , elegir el sentido positivo del eje  $X_i$  de acuerdo con lo siguiente: si los ejes  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$  no son paralelos, entonces el vector unitario  $\hat{\mathbf{x}}_i$  está dado por  $\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \times \hat{\mathbf{z}}_i$  (donde  $\times$  representa el operador de producto cruz); si los ejes  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$  son paralelos entonces el vector  $\mathbf{x}_i$  señala de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$ . El sentido del eje  $X_0$  se puede elegir arbitrariamente.

Para identificar los ejes  $X$  y  $Z$  del  $i$ -ésimo marco coordenado de la variante base (los que cumplen con las reglas anteriores), denótese como  $\bar{X}_i$  y  $\bar{Z}_i$ ; además sean  $\bar{\mathbf{x}}_i$  y  $\bar{\mathbf{z}}_i$



Tabla B.1: Parámetros y ejes para los cuatro casos que determinan la orientación del marco  $\Sigma_i$ .

Caso	$\mu_i$	$\nu_i$	$X_i$	$Z_i$	$\Sigma_i(X_i, Y_i, Z_i)$
0	0	0	$X_i$	$Z_i$	$\Sigma_i(X_i, Y_i, Z_i)$
1	1	0	$-X_i$	$Z_i$	$\Sigma_i(-X_i, -Y_i, Z_i)$
2	0	1	$X_i$	$-Z_i$	$\Sigma_i(X_i, -Y_i, -Z_i)$
3	1	1	$-X_i$	$-Z_i$	$\Sigma_i(-X_i, Y_i, -Z_i)$
0	0	0	$X_i$	$Z_i$	$\Sigma_i(X_i, Y_i, Z_i)$

los vectores unitarios que dan el sentido positivo de  $\bar{X}_i$  y  $\bar{Z}_i$ , respectivamente; entonces  $\bar{\Sigma}_i(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$  es el marco correspondiente, donde el eje  $\bar{Y}_i$  tiene un sentido positivo dado por el vector unitario  $\bar{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{z}}_i \times \bar{\mathbf{x}}_i$ .

Después de un análisis detallado de las diferentes variantes de la convención *O1*, obtenidas cambiando el sentido de los ejes  $Z_i$  y  $X_i$  de cualquier marco  $\Sigma_i$  de la variante de base, es posible llegar a las siguientes conclusiones:

- Sólo hay cuatro formas de orientar cualquier marco  $\Sigma_i$  en la cadena cinemática ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), dependiendo del sentido de los ejes  $X_i$  y  $Z_i$  correspondientes.
- Con el fin de describir cada una de las orientaciones posibles del marco  $\Sigma_i$ , se le asigna a éste un par de parámetros binarios  $\mu_i$  y  $\nu_i$  que indican el sentido de los ejes  $X_i$  y  $Z_i$ , respectivamente. Si  $\mu_i = \nu_i = 0$ , entonces se obtiene  $\Sigma_i(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$  y este caso es etiquetado como caso 0 en la tabla B.1. Los otros tres casos (etiquetados como 1, 2 y 3) también se presentan en esa tabla.
- Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que el marco de base  $\Sigma_0$  es fijo, y que tiene los parámetros  $\mu_0 = \nu_0 = 0$  para todos los casos, entonces hay variantes equivalentes de parámetros D-H que producen el mismo modelo cinemático de un robot manipulador serial con  $n$  gdl (es decir, tienen los mismos marcos  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_i$ ). Pero, como también hay cuatro maneras de orientar el marco  $\Sigma_n$ , entonces hay cuatro posibles modelos cinemáticos, y un total de  $4^n$  posibles variantes.
- Cada una de las  $4^n$  variantes puede ser identificada por un código numérico formado por  $n$  dígitos, donde cada uno de los dígitos puede ser 0, 1, 2 ó 3, indicando, según los casos de la tabla B.1, cómo cada uno de los marcos de coordenadas  $\Sigma_i$  (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ) está orientado con respecto a la variante base.

Según la notación anterior, para un robot con  $n = 4$  gdl la variante 2032 (o *V2032*) corresponde aquella en la que  $\Sigma_1$  se orienta como en el caso 2,  $\Sigma_2$  como en el caso 0,  $\Sigma_3$  como en el caso 3, y  $\Sigma_4$  como en el caso 2. Además, vale la pena notar que las  $4^{n-1}$  variantes equivalentes (con el mismo modelo cinemático) son aquellas que tienen el mismo último dígito en el código numérico, y que la variante base es la etiquetada únicamente con ceros.

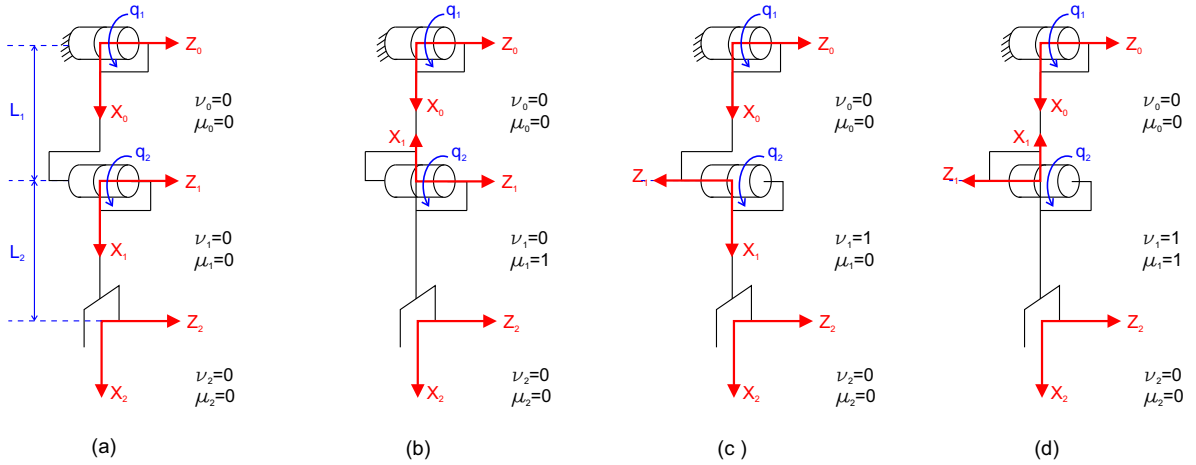


Figura B.1: Diagrama cinemático para las cuatro variantes equivalentes de un robot planar de 2 gdl: (a)V00; (b)V10;c)V20;(d)V30.

Tabla B.2: Parámetros D-H de la convención O1 para los casos mostrados en la figura B.1.

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1$	$L_1$	0
2	0	$q_2$	$L_2$	0

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1 + \pi$	$-L_1$	0
2	0	$q_2 + \pi$	$L_2$	0

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1$	$L_1$	$\pi$
2	0	$-q_2$	$L_2$	$\pi$

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1 + \pi$	$-L_1$	$\pi$
2	0	$-q_2 + \pi$	$L_2$	$\pi$

Como ejemplo, considérese el caso de un robot planar de 2 gdl. La figura B.1 muestra el diagrama cinemático de tal mecanismo utilizando las cuatro maneras diferentes de colocar el marco coordinado intermedio  $\Sigma_1$ , que cumplen con las reglas de la familia O. De acuerdo con la notación ya descrita y los parámetros de sentido mostrados en el figura, los diagramas mostrados corresponden a las variantes denotadas como V00 (la variante base), V10, V20 y V30. La tabla B.2 muestra los conjuntos de parámetros D-H para los cuatro casos mostrados en la figura B.1, empleando la convención O1; utilizando estos parámetros es posible calcular las MTH correspondientes y verificar que todas estas variantes producen el mismo modelo cinemático.

El siguiente paso es obtener los parámetros D-H para todas las posibles variantes,

Tabla B.3: Parámetros D-H para las 16 diferentes combinaciones de parámetros de sentido.

$(\mu_{i-1}, \nu_{i-1}, \mu_i, \nu_i)$	$(d_i, \theta_i, a_i, \alpha_i)$	$(\mu_{i-1}, \nu_{i-1}, \mu_i, \nu_i)$	$(d_i, \theta_i, a_i, \alpha_i)$
(0, 0, 0, 0)	$(d_i, \theta_i, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i)$	(0, 0, 0, 1)	$(d_i, \theta_i, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i + \pi)$
(1, 0, 0, 0)	$(d_i, \theta_i - \pi, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i)$	(1, 0, 0, 1)	$(d_i, \theta_i - \pi, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i + \pi)$
(0, 1, 0, 0)	$(-d_i, -\theta_i, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i - \pi)$	(0, 1, 0, 1)	$(-d_i, -\theta_i, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i)$
(1, 1, 0, 0)	$(-d_i, -\theta_i + \pi, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i - \pi)$	(1, 1, 0, 1)	$(-d_i, -\theta_i + \pi, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i)$
(0, 0, 1, 0)	$(d_i, \theta_i + \pi, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i)$	(0, 0, 1, 1)	$(d_i, \theta_i + \pi, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i - \pi)$
(1, 0, 1, 0)	$(d_i, \theta_i, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i)$	(1, 0, 1, 1)	$(d_i, \theta_i, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i)$
(0, 1, 1, 0)	$(-d_i, -\theta_i - \pi, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i + \pi)$	(0, 1, 1, 1)	$(-d_i, -\theta_i - \pi, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i)$
(1, 1, 1, 0)	$(-d_i, -\theta_i, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i + \pi)$	(1, 1, 1, 1)	$(-d_i, -\theta_i, -\bar{a}_i, -\bar{\alpha}_i)$

siempre y cuando conozcamos los parámetros D-H de la variante base. Para ello, se representarán los parámetros D-H de la variante base como  $\bar{d}_i$ ,  $\bar{\theta}_i$ ,  $\bar{a}_i$  y  $\bar{\alpha}_i$  los cuales dan la postura relativa del marco  $\Sigma_i$  con respecto al marco  $\Sigma_{i-1}$  cuando los parámetros de sentido de ambos marcos es cero.

Es posible demostrar que, partiendo de los parámetros D-H de la variante base, los parámetros de D-H de cualquier variante están dados por las siguientes expresiones:

$$d_i = (-1)^{\nu_{i-1}} \bar{d}_i \quad (\text{B.1})$$

$$\theta_i = (-1)^{\nu_{i-1}} (\bar{\theta}_i + [\mu_i + \mu_{i-1}] \pi) \quad (\text{B.2})$$

$$a_i = (-1)^{\mu_{i-1}} \bar{a}_i \quad (\text{B.3})$$

$$\alpha_i = (-1)^{\mu_{i-1}} (\bar{\alpha}_i + [\nu_i + \nu_{i-1}] \pi) \quad (\text{B.4})$$

donde  $(\mu_{i-1}, \nu_{i-1})$  y  $(\mu_i, \nu_i)$  son los parámetros de sentido de los marcos  $\Sigma_{i-1}$  y  $\Sigma_i$ , respectivamente.

Como sólo hay 16 combinaciones de los parámetros de sentido para dos marcos coordenados consecutivos ( $\Sigma_{i-1}$  y  $\Sigma_i$ ) se pueden calcular explícitamente los parámetros D-H para esas combinaciones, y obtener la tabla B.3, la cual es muy útil para calcular los parámetros D-H de cualquier variante siempre que tengamos los parámetros D-H base y los parámetros de sentido de todos los marcos de la cadena cinemática.

Se puede verificar que los parámetros D-H en la tabla B.1 cumplen con las expresiones (B.1)-(B.4) y también con la tabla B.3.

Como un segundo ejemplo, considérese el robot de 3 gdl en la figura B.2, y supóngase que, por alguna razón, interesa calcular los parámetros D-H considerando los cuatro marcos coordenados mostrados en línea continua roja en la misma figura, los cuales satisfacen las reglas de la convención O1. La figura B.2 muestra también, en línea

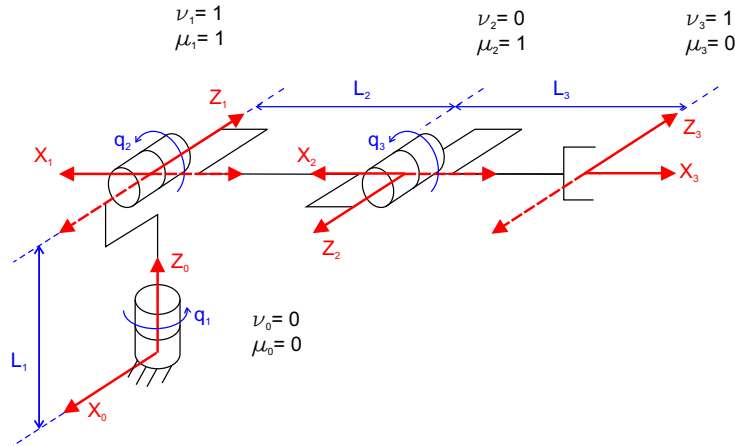


Figura B.2: Diagrama cinemático de un robot de 3 gdl, considerando la variante V312 de la convención  $O1$ .

Tabla B.4: Parámetros D-H de la convención  $O1$ , para la variante 000 y la variante 312.

V 000				
$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$q_2$	$L_2$	0
3	0	$q_3$	$L_3$	0

V312				
$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1 - \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$q_2$	$-L_2$	$\pi$
3	0	$q_3 + \pi$	$L_3$	$\pi$

discontinua, los ejes correspondientes a la variante base de la misma convención, por lo que es fácil verificar que los parámetros de sentido ( $\mu_i$  y  $\nu_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) son los indicados en la misma figura (se supone que el marco  $\Sigma_0$  tiene  $\mu_0 = \nu_0 = 0$ ). Entonces se puede verificar que los marcos de interés corresponden a la variante V312.

Usando la tabla (B.3) es posible verificar que los parámetros D-H para la variante base (V000) y la variante V312 están dados en la tabla (B.4).

## B.2 Relación entre las convenciones estándar

En la sección previa se describieron las reglas para obtener los parámetros D-H de todas las variantes de una convención ( $O1$ ). Pero ¿qué pasa si se tiene interés en usar una convención diferente a la  $O1$ ? En esta sección se muestra como es posible establecer relaciones entre los correspondientes parámetros D-H de diferentes convenciones.

Para esto, considérese por simplicidad el modelo cinemático directo de un robot

Tabla B.5: Parámetros D-H de las seis convenciones, para el robots de 3 gdl, variante 000.

Convención O1					Convención O2					Convención O3				
$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$	$i$	$d_{i-1}$	$\theta_{i-1}$	$a_i$	$\alpha_i$	$i$	$d_{i-1}$	$\theta_{i-1}$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$
1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$q_2$	$L_2$	0	2	0	$q_2$	$L_2$	0	2	0	$q_2$	$L_2$	0
3	0	$q_3$	$L_3$	0	3	0	$q_3$	$L_3$	0	2	0	$q_2$	$L_2$	0

Convención M1					Convención M2					Convención M3				
$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$	$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$i$	$d_{i-1}$	$\theta_{i-1}$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$
1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	0	1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	0	1	$L_1$	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	0
2	0	$q_2$	0	$\frac{\pi}{2}$	2	0	$q_2$	0	$\frac{\pi}{2}$	2	0	$q_2$	0	$\frac{\pi}{2}$
3	0	$q_3$	$L_2$	0	3	0	$q_3$	$L_2$	0	3	0	$q_3$	$L_2$	0
4	0	0	$L_3$	0	4	0	0	$L_3$	0	4	0	0	$L_3$	0

manipulador de 2 gdl. Entonces, la MTH  ${}^0T_e$  para las tres convenciones de la familia  $O$  serían:

$$\begin{aligned}
 O1 : {}^0T_2 &= T_{Z_0}(d_1, \theta_1)T_{X_1}(a_1, \alpha_1)T_{Z_1}(d_2, \theta_2)T_{X_2}(a_2, \alpha_2) \\
 O2 : {}^0T_2 &= T_{Z_0}(d_0, \theta_0)T_{X_1}(a_1, \alpha_1)T_{Z_1}(d_1, \theta_1)T_{X_2}(a_2, \alpha_2) \\
 O3 : {}^0T_2 &= T_{Z_0}(d_0, \theta_0)T_{X_1}(a_0, \alpha_0)T_{Z_1}(d_1, \theta_1)T_{X_2}(a_1, \alpha_1)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, si se usa la familia  $M$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 M1 : {}^0T_3 &= T_{X_0}(a_1, \alpha_1)T_{Z_1}(d_1, \theta_1)T_{X_1}(a_2, \alpha_2)T_{Z_2}(d_2, \theta_2)T_{X_2}(a_3, \alpha_3)T_{Z_3}(d_3, \theta_3) \\
 M2 : {}^0T_3 &= T_{X_0}(a_0, \alpha_0)T_{Z_1}(d_1, \theta_1)T_{X_1}(a_1, \alpha_1)T_{Z_2}(d_2, \theta_2)T_{X_2}(a_2, \alpha_2)T_{Z_3}(d_3, \theta_3) \\
 M3 : {}^0T_3 &= T_{X_0}(a_0, \alpha_0)T_{Z_1}(d_0, \theta_0)T_{X_1}(a_1, \alpha_1)T_{Z_2}(d_1, \theta_1)T_{X_2}(a_2, \alpha_2)T_{Z_3}(d_2, \theta_2)
 \end{aligned}$$

Pero como la primera y la última MTH son igual a la identidad, es posible comparar todas las convenciones. Para el caso general, se tienen las siguientes relaciones entre las tres convenciones de la familia  $O$ :

$$\begin{aligned}
 O2 \leftrightarrow O1 & : \quad {}^{02}(d_i, \theta_i) = {}^{01}(d_{i+1}, \theta_{i+1}) \quad \text{y} \quad {}^{02}(a_i, \alpha_i) = {}^{01}(a_i, \alpha_i) \\
 O3 \leftrightarrow O2 & : \quad {}^{03}(d_i, \theta_i) = {}^{02}(d_i, \theta_i) \quad \text{y} \quad {}^{03}(a_i, \alpha_i) = {}^{02}(a_{i+1}, \alpha_{i+1}) \\
 O3 \leftrightarrow O1 & : \quad {}^{03}(d_i, \theta_i) = {}^{01}(d_{i+1}, \theta_{i+1}) \quad \text{y} \quad {}^{03}(a_i, \alpha_i) = {}^{01}(a_{i+1}, \alpha_{i+1})
 \end{aligned}$$

De manera similar, se pueden obtener las relaciones entre las tres convenciones de

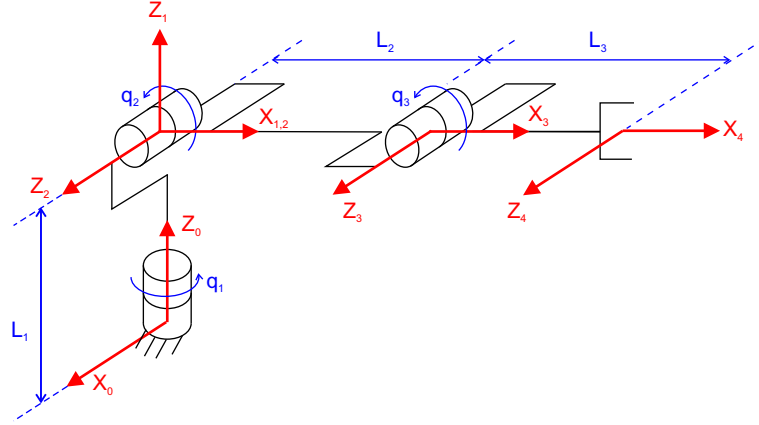


Figura B.3: Diagrama cinemático de un robot de 3 gdl, considerando la convención  $M1$ .

la familia  $M$ :

$$\begin{aligned}
 M2 \leftrightarrow M1 : \quad m^2(d_i, \theta_i) &= m^1(d_i, \theta_i) \quad \text{y} \quad m^2(a_i, \alpha_i) = m^1(a_{i+1}, \alpha_{i+1}) \\
 M3 \leftrightarrow M2 : \quad m^3(d_i, \theta_i) &= m^2(d_{i+1}, \theta_{i+1}) \quad \text{y} \quad m^3(a_i, \alpha_i) = m^2(a_i, \alpha_i) \\
 M3 \leftrightarrow M1 : \quad m^3(d_i, \theta_i) &= m^1(d_{i+1}, \theta_{i+1}) \quad \text{y} \quad m^3(a_i, \alpha_i) = m^1(a_{i+1}, \alpha_{i+1})
 \end{aligned}$$

así como entre las convenciones correspondientes de ambas familias:

$$\begin{aligned}
 M1 \leftrightarrow O1 : \quad m^1(d_i, \theta_i) &= o^1(d_i, \theta_i) \quad \text{y} \quad m^1(a_i, \alpha_i) = o^1(a_{i-1}, \alpha_{i-1}) \\
 M2 \leftrightarrow O2 : \quad m^2(d_i, \theta_i) &= o^2(d_{i-1}, \theta_{i-1}) \quad \text{y} \quad m^2(a_i, \alpha_i) = o^2(a_i, \alpha_i) \\
 M3 \leftrightarrow O3 : \quad m^3(d_i, \theta_i) &= o^3(d_i, \theta_i) \quad \text{y} \quad m^3(a_i, \alpha_i) = o^3(a_{i-1}, \alpha_{i-1}).
 \end{aligned}$$

Empleando las expresiones anteriores, es posible determinar la relación entre dos convenciones de parámetros D-H cualesquiera.

La figura B.3 muestra el diagrama cinemático del mismo robot en la figura B.2, pero ahora se siguen las reglas para colocar los marcos según la familia  $M$ . La tabla B.5 muestra los parámetros D-H de las seis convenciones estudiadas en este documento para el robot mostrado en la figura B.2 (variante 000) y la figura B.3.

Es también importante notar que si se siguen las reglas para obtener el conjunto base de parámetros D-H, entonces, los ejes  $X_i$  en todas las seis convenciones coinciden (aunque no así los orígenes de los marcos). Incluso, las tres convenciones de cada familia tienen la misma ubicación de los marcos. Todo esto puede observarse en la figuras 3.3-3.8.