



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Doctorado

Control de vibraciones en línea de un sistema rotor
asimétrico-cojinete con discos de balanceo activo

presentada por

MC. Luis Alberto Baltazar Tadeo

como requisito para la obtención del grado de
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis

Dr. Jorge Colín Ocampo

Codirector de tesis

Dr. José Gabriel Mendoza Larios

Cuernavaca, Morelos, México. Noviembre de 2022.



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Departamento de Ingeniería Mecánica

Cuernavaca, Mor., 03/noviembre/2022

No. Oficio: DIM/275/2022

Asunto Aceptación de documento de tesis

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del estudiante **LUIS ALBERTO BALTAZAR TADEO**, con número de control D15CE057, de doctorado en Ciencias en Ingeniería Mecánica le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis de grado titulado "**CONTROL DE VIBRACIONES EN LÍNEA DE UN SISTEMA ROTOR ASIMÉTRICO-COJINETE CON DISCOS DE BALANCEO ACTIVO**" y hemos encontrado que se han atendido todas las observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

ATENTAMENTE

DR. JORGE COLÍN OCAMPO
Director De Tesis

DR. ANDRÉS BLANCO ORTEGA
Revisor 1

DR. MANUEL ARIAS MONTIEL
Revisor 3

DR. JOSÉ GABRIEL MENDOZA LARIOS
Codirector De Tesis

DR. ARTURO ABUNDEZ PLIEGO
Revisor 2

DRA. CLAUDIA CORTÉS GARCÍA
Revisor 4

c.c.p: Departamento de Servicios Escolares
c.c.p: Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
c.c.p: Expediente
MAGJ/RMA



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos
Tel. 01 (777) 3627770, ext. 1408, e-mail dim@cenidet.tecnm.mx tecnm.mx | cenidet.tecnm.mx



2022 Ricardo
Flores
Magón
AÑO DE
PRESENCIA DE LA REVOLUCIÓN MEXICANA

Cuernavaca, Mor., 03/noviembre/2022
No. De Oficio: SAC/157/2022
Asunto: Autorización de impresión de tesis

**LUIS ALBERTO BALTAZAR TADEO
CANDIDATO(A) AL GRADO DE DOCTOR(A) EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTE**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "CONTROL DE VIBRACIONES EN LÍNEA DE UN SISTEMA ROTOR ASIMÉTRICO-COJINETE CON DISCOS DE BALANCEO ACTIVO", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE
Excelencia en Educación Tecnológica®
"Educación Tecnológica al Servicio de México"


DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA
C. c. p. Departamento de Ingeniería Mecánica
Departamento de Servicios Escolares
CMAZ/CHG

DEDICATORIA

*A Dios,
por haberme permitido llegar a esta etapa de mi vida.*

*A mis padres,
José Luis Baltazar Borja y Beatriz Tadeo Prieto, con cariño.*

*A mis hermanas,
Berenice Baltazar Tadeo y María de Jesús Baltazar Tadeo.*

*A mis sobrinos,
Harumy de Jesus Cuastle Baltazar y Aron Antonio Baltazar.*

A mis familiares y amigos.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la financiación de este proyecto de investigación.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por haberme permitido realizar mis estudios de doctorado y brindarme la oportunidad de continuar con mi formación profesional.

A mis asesores de tesis, Dr. Jorge Colín Ocampo y Dr. José Gabriel Mendoza Larios, por la orientación y el apoyo que me brindaron en el desarrollo de este trabajo de investigación.

A los miembros del comité revisor, Dr. Andrés Blanco Ortega, Dr. Arturo Abúndez Pliego, Dr. Manuel Arias Montiel y Dra. Claudia Cortés García, por sus valiosas aportaciones durante la revisión de este trabajo.

A toda la planta de investigadores del área de diseño mecánico de este centro de investigación, que de alguna u otra manera contribuyeron a mi formación profesional en esta etapa.

A mis familiares por su apoyo incondicional.

A mis compañeros y amigos del laboratorio de rotodinámica en el periodo 2018-2022. Saulo Jesús Landa Damas, Cuauhtémoc Mazón Valadez, Demetrio Pérez Viguera, Agustín Erasmo Juárez Martínez, Abraham García Villalobos, Oscar Ramsés Carrasco Córdova, Joel del Ángel Morales Pérez, quienes colaboraron con ideas y consejos para la realización de este trabajo.

A Martín Rodríguez Vázquez y su familia por su apoyo incondicional durante mi estancia en Cuernavaca.

A Juan Rodríguez Santiago, Florimar Méndez Díaz y a los amigos que me apoyan y motivan constantemente para alcanzar mis metas.

A Julio Cesar Vergara Vázquez, Antonio Sandá Merá, Francisco Iván Álvarez Sánchez, y compañeros y amigos del TecNM/CENIDET, quienes supieron escucharme y apoyarme en incontables ocasiones.

RESUMEN

Los efectos de una flecha con sección transversal asimétrica en las características del comportamiento dinámico de la vibración de los rotores son de gran interés para el desarrollo de métodos de balanceo, ya que los métodos de balanceo para este tipo de rotores son escasos y complicados en su aplicación. Por tal motivo, en este trabajo se presenta un método integrado para el balanceo de sistemas rotodinámicos con flecha con sección transversal asimétrica. El método propuesto consiste en tomar las ventajas del balanceo modal convencional (arreglo de pesos modales) integrado con la metodología de identificación algebraica de parámetros. Esta última permite identificar la magnitud y posición angular del desbalance en bajas velocidades, sin la necesidad de llevar al rotor hasta su velocidad nominal y evitando las velocidades críticas del sistema. El identificador algebraico propuesto toma como datos de entrada la respuesta de vibración del rotor sin utilizar masas de prueba. Asimismo, para el balanceo del rotor se propone el uso de discos de balanceo activo (DBAs). Para la identificación del desbalance y su posición angular, se propone un modelo matemático de identificación derivado de las ecuaciones de movimiento para un sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad con flecha con sección transversal asimétrica usando la técnica de identificación algebraica. La identificación de los parámetros del desbalance y su posición angular se validó de forma numérica y experimental considerando que el rotor opera a velocidad constante, y de forma numérica considerando que el rotor opera a velocidad variable (rampas de excitación de tipo lineal).

La metodología propuesta se utilizó para el balanceo de forma numérica y experimental de un sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad con flecha de sección transversal asimétrica, con masas de desbalance colocadas en diferentes posiciones longitudinales del rotor (desbalance discreto). En simulaciones numéricas, se lograron reducciones de más del 95% en la amplitud de vibración del rotor en condiciones de resonancia de cuatro modos de vibración, mientras que en pruebas experimentales, se lograron reducciones mayores al 80% en la amplitud de vibración del rotor en condiciones de resonancia de dos modos de vibración. Los resultados numéricos y experimentales muestran que, con el método propuesto, se requiere de una sola corrida para lograr el balanceo de un sistema rotor asimétrico – cojinete *in situ*.

ABSTRACT

The effect of an asymmetric transversal section on the rotor vibration behavior has recently acquired great interest, mainly due to the expansion on the usage of this type of rotor as well as the lack of effective balancing methods. In this work, an integrated method for Balancing Asymmetric Rotor-Bearing Systems is presented. The proposed method consists in using the advantages of the conventional modal balancing (modal masses array) and then combining it with the methodology of parameter algebraic identification; the latter allows identifying both the magnitude as well as the angular position of the unbalance at low rotor speed regardless the nominal speed, preventing the system from operating at a critical speed. The proposed algebraic identifier requires the rotor vibration response as input data, instead of the vibration response produced by trial masses required in the conventional balancing methods. Likewise, the use of active balancing disks (ABDs) is proposed for rotor balancing. The identification of the unbalance parameters and their angular position was numerically and experimentally validated by considering that the rotor operates at constant speed, and numerically considering that the rotor operates at variable speed at different angular velocities with lineal coast up.

The proposed methodology was used to numerically and experimentally balance a multiple degree-of-freedom rotor with unequal principal moments of inertia of the shaft transverse section and discrete unbalance. In numerical simulations, reductions of more than 95% in the vibration amplitude of the rotor in resonance for 4 vibration modes were achieved, while in its experimental application, reductions of more than 80% in the vibration amplitude of the rotor in resonance for two vibration modes were achieved. The numerical and experimental results showed that a single trial balancing run is required to balance the asymmetric rotor-bearing system in situ.

ÍNDICE DE CONTENIDOS.

| | |
|--|-----------|
| LISTA DE FIGURAS: | VI |
| LISTA DE TABLAS: | IX |
| | |
| CAPÍTULO 1. : INTRODUCCIÓN. | 1 |
| 1.1 Objetivo y alcances de la tesis. | 3 |
| 1.2 Estructura de la tesis. | 4 |
| | |
| CAPÍTULO 2. : ESTADO DEL ARTE. | 5 |
| 2.1 Rotores asimétricos, primeros años. | 5 |
| 2.2 Estudios de las características dinámicas de rotores asimétricos. | 8 |
| 2.3 Balaceo de rotores asimétricos. | 12 |
| 2.3.1 Métodos de balaceo de rotores asimétricos en CENIDET. | 14 |
| 2.4 Identificación algebraica en la estimación de parámetros de sistemas rotodinámicos. | 15 |
| 2.5 Auto-balaceo del sistema rotor cojinete. | 17 |
| 2.6 Conclusiones del estado del arte. | 21 |
| | |
| CAPÍTULO 3. : METODOLOGÍA DE MODELADO MATEMÁTICO PARA ROTORES CON SECCIÓN TRANSVERSAL ASIMÉTRICA. | 24 |
| 3.1 Elementos característicos de un sistema rotor cojinete. | 24 |
| 3.1.1 El disco. | 25 |
| 3.1.2 El eje con sección transversal asimétrica. | 27 |
| 3.1.3 Soportes. | 33 |
| 3.1.4 Masa de desbalance. | 34 |
| 3.2 Modelo de elementos finitos de un rotor con sección asimétrica (partes del rotor). | 35 |
| 3.2.1 El disco. | 35 |
| 3.2.2 Rodamientos y sellos. | 36 |
| 3.2.3 Masa de desbalance. | 37 |
| 3.2.4 El eje con sección asimétrica. | 37 |
| 3.3 Ecuación de movimiento del sistema rotor asimétrico-cojinete (MGDL). | 48 |
| 3.3.1 Excitación del sistema (desbalance). | 51 |
| 3.4 Solución de las ecuaciones de movimiento del sistema rotor-asimétrico, método directo. | 51 |
| 3.5 Solución de las ecuaciones de movimiento del sistema rotor-asimétrico, método de Newmark. | 52 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 3.6 | Rampa de excitación de tipo lineal. | 54 |
| 3.7 | Respuesta al desbalance. | 55 |
| 3.7.1 | Propiedades de un rotor asimétrico. | 55 |
| 3.7.2 | Comportamiento dinámico de un rotor asimétrico. | 56 |
| 3.7.3 | Comportamiento dinámico de un rotor asimétrico: rampa de excitación. | 57 |
| 3.8 | Conclusiones del capítulo. | 59 |

CAPÍTULO 4. : SIMULACIÓN NUMÉRICA DE IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE EN ROTORES ASIMÉTRICOS. 60

| | | |
|------------|--|-----------|
| 4.1 | Identificación de desbalance con modelo de múltiples grados de libertad. | 61 |
| 4.1.1 | Modelo matemático de un sistema rotor asimétrico-cojinete de múltiples grados de libertad con discos de balanceo activo. | 61 |
| 4.1.2 | Modelo matemático para la identificación algebraica en línea del desbalance y posición angular | 62 |
| 4.1.3 | Comportamiento dinámico de un sistema rotor asimétrico – cojinete con DBA. | 65 |
| 4.1.3.1 | Sistema rotodinámico. | 65 |
| 4.1.3.2 | Respuesta de vibración de un sistema rotor asimétrico-cojinete vs número de elementos finitos. | 66 |
| 4.1.4 | Identificación algebraica en línea del desbalance y posición angular de un sistema rotor asimétrico – cojinete. | 68 |
| 4.1.4.1 | Identificación algebraica del desbalance y su posición angular vs rampa de excitación. | 68 |
| 4.1.4.1.1. | Identificación del desbalance y posición angular considerando una respuesta de vibración con rampa de excitación con $\phi = 10 \text{ rad/s}^2$. | 68 |
| 4.1.4.1.2. | Identificación del desbalance y posición angular considerando una respuesta de vibración con rampa de excitación con $\phi = 100 \text{ rad/s}^2$ y $\phi = 200 \text{ rad/s}^2$. | 71 |
| 4.1.4.2 | Identificación algebraica en línea del desbalance y su posición angular a velocidad constante. | 74 |
| 4.1.5 | Método de balanceo para un sistema rotor asimétrico cojinete. | 79 |
| 4.1.5.1 | Arreglo modal de pesos de balanceo. | 79 |
| 4.1.5.2 | Balanceo del rotor asimétrico-cojinete con dos DBA. | 83 |
| 4.2 | Identificación de desbalance modal en rotor asimétrico. | 87 |
| 4.2.1 | Desacoplamiento modal del modelo de múltiples grados de libertad (método pseudo-modal). | 87 |
| 4.2.2 | Respuesta al desbalance. | 88 |
| 4.2.3 | Modelo identificador de desbalance modal. | 89 |
| 4.2.4 | Simulación numérica. | 91 |
| 4.2.4.1 | Descripción del sistema rotodinámico. | 91 |
| 4.2.4.2 | Respuesta al desbalance. | 92 |
| 4.2.4.3 | Identificación de desbalance modal. | 94 |
| 4.2.4.4 | Balanceo modal mediante discos de balanceo activo. | 96 |
| 4.3 | Conclusiones del capítulo. | 99 |

CAPÍTULO 5. : IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE EN ROTORES ASIMÉTRICOS (PRUEBAS EXPERIMENTALES). 100

| | | |
|------------|-------------------------|------------|
| 5.1 | Generalidades. | 101 |
| 5.1.1 | Tratamiento de señales. | 102 |

| | | |
|----------------------|---|------------|
| 5.2 | Aplicación de modelo identificador de MGDL para la estimación de desbalance en rotor asimétrico. | 104 |
| 5.2.1 | Configuración experimental. | 104 |
| 5.2.2 | Identificación del desbalance: rotor asimétrico experimental. | 108 |
| 5.3 | Aplicación de modelo Identificador de desbalance modal en rotor asimétrico. | 112 |
| 5.3.1 | Balanceo modal de rotor asimétrico: control manual. | 113 |
| 5.3.1.1 | Configuración experimental. | 113 |
| 5.3.1.2 | Identificación de desbalance. | 118 |
| 5.3.1.3 | Balanceo del rotor asimétrico sin discos de balanceo. | 120 |
| 5.3.2 | Balanceo modal con un DBA. | 122 |
| 5.3.2.1 | Configuración experimental. | 122 |
| 5.3.2.2 | Identificación de desbalance. | 127 |
| 5.3.2.3 | Balanceo del rotor asimétrico. | 129 |
| 5.3.3 | Balanceo modal con dos DBA. | 132 |
| 5.3.3.1 | Configuración experimental. | 132 |
| 5.3.3.2 | Identificación de desbalance. | 136 |
| 5.3.3.3 | Balanceo del rotor asimétrico. | 139 |
| 5.4 | Conclusiones del capítulo. | 141 |
| CAPÍTULO 6. | : CONCLUSIONES GENERALES. | 143 |
| 6.1 | Aportaciones. | 145 |
| 6.2 | Trabajos futuros. | 146 |
| APÉNDICE A.: | EQUIPO UTILIZADO PARA EN LAS PRUEBAS EXPERIMENTALES. | 147 |
| APÉNDICE B.: | REDISEÑO DEL DISCO DE BALANCEO ACTIVO. | 149 |
| BIBLIOGRAFÍA. | | 163 |

LISTA DE FIGURAS.

| | |
|--|----|
| FIGURA 2.1 . SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN ROTOR DE GENERADOR DE DOS POLOS [6]. | 6 |
| FIGURA 2.2 . ALGORITMO DEL MÉTODO DE BALANCEO DE PARKINSON. | 7 |
| FIGURA 2.3. CLASIFICACIÓN DE ACTUADORES DE BALANCEO [110]. | 17 |
| FIGURA 2.4. BALANCEADOR AUTOMÁTICO CON DOS MASAS DE BALANCEO [42]. | 18 |
| FIGURA 2.5. ROTOR JEFFCOTT CON BALANCEADOR DINÁMICO AUTOMÁTICO [41]. | 18 |
| FIGURA 2.6. 1-SISTEMA ANALIZADO, 2-DISCO, 3-BOLAS EN EL TAMBOR IZQUIERDO, 4-BOLAS EN EL TAMBOR DERECHO, 5-FLECHA, 6-TAMBOR DERECHO [47]. | 19 |
| FIGURA 2.7. DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DEL BALANCEADOR DE PÉNDULOS [46]. | 19 |
| FIGURA 2.8. A) DISEÑO DEL DISCO DE BALANCEO ACTIVO, B) COMPARACIÓN DE RESPUESTA VIBRATORIA CON Y SIN DEA, [49]. | 20 |
| FIGURA 2.9. SISTEMA ROTO COJINETE CON DBA [111]. | 21 |
| FIGURA 2.10. CONTROL DE VIBRACIÓN DE UN SISTEMA ROTOR COJINETE CON DBA [111]. | 21 |
| FIGURA 3.1. COMPONENTES DE UN SISTEMA ROTOR COJINETE. | 25 |
| FIGURA 3.2 MARCOS DE REFERENCIA DEL DISCO SOBRE UN EJE GIRATORIO. | 26 |
| FIGURA 3.3. SECCIÓN TRANSVERSAL ASIMÉTRICA DEL EJE. | 27 |
| FIGURA 3.4. COORDENADAS DEL CENTRO GEOMÉTRICO C Y UN PUNTO ARBITRARIO B EN LA FLECHA. | 29 |
| FIGURA 3.5. RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO DE LOS SOPORTES. | 33 |
| FIGURA 3.6 MASA DE DESBALANCE. | 34 |
| FIGURA 3.7. DESPLAZAMIENTOS DEL DISCO INERCIAL MONTADO EN UN NODO. | 35 |
| FIGURA 3.8. ELEMENTO FINITO TIPO VIGA PARA EL MODELADO DEL EJE [113]. | 38 |
| FIGURA 3.9. ESQUEMA DE LA ACELERACIÓN PROMEDIO DE NEWMARK [115]. | 52 |
| FIGURA 3.10. MODELO ESQUEMÁTICO DE UN ROTOR CON SECCIÓN ASIMÉTRICA. | 55 |
| FIGURA 3.11. RESPUESTA AL DESBALANCE PARA DIFERENTES POSICIONES ANGULARES (0°, 45°, 90° Y 315°) EN EL NODO 3. | 56 |
| FIGURA 3.12. DIAGRAMAS POLARES DE RESPUESTA PARA DIFERENTES POSICIONES ANGULARES (0°, 45°, 90° Y 315°) NODO 3. | 57 |
| FIGURA 3.13. COMPONENTES DE LA RESPUESTA REAL E IMAGINARÍA EN DIRECCIÓN X. | 58 |
| FIGURA 3.14. DESPLAZAMIENTO LOGARÍTMICO RESULTANTE EN LA DIRECCIÓN X. | 58 |
| FIGURA 3.15. DIAGRAMA POLAR DE RESPUESTA AL DESBALANCE EN LA DIRECCIÓN X. | 58 |
| FIGURA 4.1. DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DEL DISCO DE BALANCEO ACTIVO [49]. | 62 |
| FIGURA 4.2. MODELO DEL ROTOR CON EJE ASIMÉTRICO Y DBA. | 65 |
| FIGURA 4.3. DIAGRAMA DE CAMPBELL DEL SISTEMA ROTOR-COJINETE. | 67 |
| FIGURA 4.4. RESPUESTA DEL SISTEMA PARA DIFERENTES DISCRETIZACIONES. | 67 |
| FIGURA 4.5. RESPUESTA EN NODO 6. | 69 |
| FIGURA 4.6. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN DE DESBALANCE, NODO 3. | 69 |
| FIGURA 4.7. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN DE DESBALANCE, NODO 6. | 70 |
| FIGURA 4.8. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN DE DESBALANCE, NODO 11. | 70 |
| FIGURA 4.9. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN DE DESBALANCE, NODO 13. | 71 |
| FIGURA 4.10. RESPUESTA VIBRATORIA EN NODO 6. | 71 |
| FIGURA 4.11. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN DE DESBALANCE, NODO 6. | 72 |
| FIGURA 4.12. RESPUESTA VIBRATORIA EN NODO 6. | 72 |
| FIGURA 4.13. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN DE DESBALANCE, NODO 6. | 73 |
| FIGURA 4.14. RESPUESTA VIBRATORIA DEL ROTOR A 500 RPM (NODO 6). | 76 |
| FIGURA 4.15. IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE EN DISCO INERCIAL D1, NODO 3 ($\phi = 500$ RPM). | 77 |

| | |
|--|-----|
| FIGURA 4.16. IDENTIFICACIÓN DE LA POSICIÓN ANGULAR DE DESBALANCE EN D1, NODO 3 ($\phi = 500$ RPM). | 77 |
| FIGURA 4.17. IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE EN DISCO INERCIAL D2, NODO 6 ($\phi = 500$ RPM). | 77 |
| FIGURA 4.18. IDENTIFICACIÓN DE LA POSICIÓN ANGULAR DE DESBALANCE EN D2, NODO 6 ($\phi = 500$ RPM). | 77 |
| FIGURA 4.19. IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE EN DISCO INERCIAL D3, NODO 11 ($\phi = 500$ RPM). | 77 |
| FIGURA 4.20. IDENTIFICACIÓN DE LA POSICIÓN ANGULAR DE DESBALANCE EN D3, NODO 11 ($\phi = 500$ RPM). | 77 |
| FIGURA 4.21. IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE EN NODO 4 ($\phi = 500$ RPM). | 78 |
| FIGURA 4.22. IDENTIFICACIÓN DE LA POSICIÓN ANGULAR DE DESBALANCE EN NODO 4($\phi = 500$ RPM). | 78 |
| FIGURA 4.23. FORMAS MODALES EN DIRECCIÓN X. | 81 |
| FIGURA 4.24. FORMAS MODALES EN DIRECCIÓN Z. | 81 |
| FIGURA 4.25. RESPUESTA AL DESBALANCE DIRECCIÓN X (NODO 6). | 84 |
| FIGURA 4.26. DIAGRAMA POLAR DE RESPUESTA DIRECCIÓN X (NODO 6). | 84 |
| FIGURA 4.27.. RESPUESTA AL DESBALANCE DIRECCIÓN Z (NODO 6). | 84 |
| FIGURA 4.28. DIAGRAMA POLAR DE RESPUESTA DIRECCIÓN Z (NODO 6). | 84 |
| FIGURA 4.29. RESPUESTA DEL SISTEMA EN EL NODO 6 CON DISCOS DE BALANCEO ACTIVO EN LOS NODOS 2 Y 13. | 85 |
| FIGURA 4.30. RESPUESTA DEL SISTEMA EN EL NODO 6 CON DISCOS DE BALANCEO ACTIVO EN LOS NODOS 5 Y 10. | 86 |
| FIGURA 4.31. RESPUESTA AL DESBALANCE EN NODO 6. | 92 |
| FIGURA 4.32. RESPUESTA AL DESBALANCE A 3000 RPM EN NODO 6. | 93 |
| FIGURA 4.33. RESPUESTA AL DESBALANCE A 11,000 RPM EN NODO 6. | 93 |
| FIGURA 4.34. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN ANGULAR DE DESBALANCE (3000 RPM). | 94 |
| FIGURA 4.35. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN ANGULAR DE DESBALANCE (11,000 RPM). | 95 |
| FIGURA 4.36. RESPUESTA CONTROLADA DEL SISTEMA (NODO 6) CON DISCOS DE BALANCEO ACTIVO. | 97 |
| FIGURA 4.37. RESPUESTA CONTROLADA DEL SISTEMA (NODO 6) CON DISCOS DE BALANCEO ACTIVO, ACERCAMIENTO. | 98 |
| FIGURA 5.1. DIAGRAMA DE FLUJO DEL MÉTODO DE BALANCEO INTEGRADO. | 101 |
| FIGURA 5.2. EJEMPLO DE CONFIGURACIÓN DEL BANCO EXPERIMENTAL. | 102 |
| FIGURA 5.3. COMPARACIÓN DE SEÑALES V_0 Y V_1 A 600 RPM (10 HZ) EN DIRECCIÓN X CON $mud = 2.865 \times 10 - 4$ KG · M Y $\alpha = 45^\circ$. | 103 |
| FIGURA 5.4. DESCOMPOSICIÓN ARMÓNICA DE V_0 . | 103 |
| FIGURA 5.5. SEÑAL V_0 REGENERADA. | 103 |
| FIGURA 5.6. DESCOMPOSICIÓN ARMÓNICA DE V_1 . | 103 |
| FIGURA 5.7. SEÑAL V_1 REGENERADA. | 103 |
| FIGURA 5.8.COMPARACIÓN DE SEÑALES DIRECCIÓN X. | 104 |
| FIGURA 5.9. COMPARACIÓN DE SEÑALES DIRECCIÓN Z. | 104 |
| FIGURA 5.10. CONFIGURACIÓN DE BANCO EXPERIMENTAL. | 105 |
| FIGURA 5.11. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DEL ROTOR EXPERIMENTAL. | 105 |
| FIGURA 5.12. UBICACIÓN DE LOS SENSORES Y GRADUACIÓN DEL DISCO INERCIAL. | 106 |
| FIGURA 5.13. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA CONFIGURACIÓN EXPERIMENTAL. | 107 |
| FIGURA 5.14. FORMAS MODALES CORRESPONDIENTES AL PRIMER MODO. A) DIRECCIÓN X, FRECUENCIA DE 31 HZ, B) DIRECCIÓN Z, FRECUENCIA DE 31 HZ. | 107 |
| FIGURA 5.15. RESPUESTA VIBRATORIA CON $mud = 9.15 \times 10 - 5$ KG·M Y $\alpha = 45^\circ$, 600 RPM. | 109 |
| FIGURA 5.16. RESPUESTA VIBRATORIA EN DIRECCIÓN X. | 109 |
| FIGURA 5.17. RESPUESTA VIBRATORIA EN DIRECCIÓN Z. | 109 |
| FIGURA 5.18. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN ANGULAR EN NODO 8 A 600 RPM. | 110 |
| FIGURA 5.19. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN ANGULAR EN NODO 8 A 1020 RPM. | 110 |
| FIGURA 5.20. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN ANGULAR EN NODO 8 A 840 RPM. | 110 |

| | |
|---|-----|
| FIGURA 5.21. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN ANGULAR EN NODO 8 A 1200 RPM..... | 111 |
| FIGURA 5.22. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN ANGULAR EN NODO 8 A 600 RPM..... | 111 |
| FIGURA 5.23. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN ANGULAR EN NODO 8 A 840 RPM..... | 111 |
| FIGURA 5.24. CONFIGURACIÓN DE BANCO EXPERIMENTAL. 1) FLECHA ASIMÉTRICA, 2) DISCO INERCIAL 3) SENSOR DE PROXIMIDAD, 4) TACÓMETRO, 5) MOTOR..... | 113 |
| FIGURA 5.25. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DEL BANCO EXPERIMENTAL..... | 114 |
| FIGURA 5.26. UBICACIÓN DE LOS SENSORES Y GRADUACIÓN DEL DISCO INERCIAL..... | 115 |
| FIGURA 5.27 . FORMA MODAL DEL PRIMERO MODO..... | 116 |
| FIGURA 5.28. FORMA MODAL DEL SEGUNDO MODO..... | 116 |
| FIGURA 5.29. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA CONFIGURACIÓN EXPERIMENTAL..... | 117 |
| FIGURA 5.30. RESPUESTA AL DESBALANCE NODO 4..... | 117 |
| FIGURA 5.31. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN ANGULAR DE DESBALANCE ($\phi = 1320 \text{ RPM}$, $mud * = 2.631 \times 10 - 5\text{KG-M}$, $\alpha * = 27.29^\circ$)..... | 118 |
| FIGURA 5.32. IDENTIFICACIÓN DE MAGNITUD Y POSICIÓN ANGULAR DE DESBALANCE ($\phi = 3600 \text{ RPM}$, $mud * = 4.12 \times 10 - 5\text{KG-M}$, $\alpha * = 171.8^\circ$)..... | 119 |
| FIGURA 5.33. RESPUESTA AL DESBALANCE NODO 4..... | 120 |
| FIGURA 5.34. RESPUESTA AL DESBALANCE..... | 121 |
| FIGURA 5.35 . CONFIGURACIÓN BANCO EXPERIMENTAL ROTOR ASIMÉTRICO CON DBA..... | 122 |
| FIGURA 5.36. CARACTERÍSTICAS DEL DBA..... | 122 |
| FIGURA 5.37. INTERFAZ PARA LA CONEXIÓN DEL DBA VÍA BLUETOOTH..... | 123 |
| FIGURA 5.38. DISTANCIA RADIAL VS DESBALANCE GENERADO..... | 123 |
| FIGURA 5.39. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DEL BANCO EXPERIMENTAL..... | 124 |
| FIGURA 5.40. FORMA MODAL DEL PRIMER MODO..... | 125 |
| FIGURA 5.41. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA CONFIGURACIÓN EXPERIMENTAL..... | 126 |
| FIGURA 5.42. RESPUESTA DEL ROTOR DESBALANCEADO NODO 3..... | 127 |
| FIGURA 5.43. RESPUESTA AL DESBALANCE NODO 3 (960 RPM)..... | 128 |
| FIGURA 5.44 . DESBALANCE MODAL IDENTIFICADO..... | 128 |
| FIGURA 5.45. RESPUESTA DEL SISTEMA ROTODINÁMICO CON DBA..... | 129 |
| FIGURA 5.46. RESPUESTA 960 RPM..... | 130 |
| FIGURA 5.47. RESPUESTA CON RAMPA DE EXCITACIÓN CON $\phi = 6.43 \text{ RAD/S}^2$ | 131 |
| FIGURA 5.48. PERFIL DE VELOCIDAD DE EXCITACIÓN DEL ROTOR..... | 131 |
| FIGURA 5.49 . CONFIGURACIÓN BANCO EXPERIMENTAL ROTOR ASIMÉTRICO CON DOS DBA..... | 132 |
| FIGURA 5.50 . MODELO DEL BANCO EXPERIMENTAL..... | 133 |
| FIGURA 5.51. FORMA MODAL DEL PRIMERO MODO..... | 134 |
| FIGURA 5.52. FORMA MODAL DEL SEGUNDO MODO..... | 134 |
| FIGURA 5.53. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA CONFIGURACIÓN EXPERIMENTAL..... | 135 |
| FIGURA 5.54. RESPUESTA DEL ROTOR DESBALANCEADO NODO 3..... | 136 |
| FIGURA 5.55. RESPUESTA AL DESBALANCE NODO 3 (1020 RPM)..... | 137 |
| FIGURA 5.56. DESBALANCE MODAL IDENTIFICADO MODO 1..... | 137 |
| FIGURA 5.57. RESPUESTA AL DESBALANCE NODO 3 (3600 RPM)..... | 138 |
| FIGURA 5.58 . DESBALANCE MODAL IDENTIFICADO MODO 2..... | 138 |
| FIGURA 5.59. RESPUESTA AL DESBALANCE EN DIRECCIÓN X..... | 139 |
| FIGURA 5.60. RESPUESTA AL DESBALANCE EN DIRECCIÓN Z..... | 140 |
| FIGURA 5.61. RESPUESTA DEL SISTEMA ROTODINÁMICO CON DOS DBA (NODO 3)..... | 140 |

ÍNDICE DE TABLAS.

| | |
|--|-----|
| TABLA 2.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS UTILIZADOS EN ROTORES ASIMÉTRICOS. | 12 |
| TABLA 3.1. ALGORITMO DE NEWMARK. | 53 |
| TABLA 3.2. PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DE LA FLECHA (r_s = RADIO DE LA SECCIÓN SIMÉTRICA, f = DISTANCIA PERPENDICULAR DEL CENTRO A LA CARA PLANA DE LA SECCIÓN ASIMÉTRICA). | 55 |
| TABLA 3.3. PROPIEDADES DE LOS DISCOS. | 55 |
| TABLA 3.4. PROPIEDADES DE LOS SOPORTES. | 56 |
| TABLA 3.5. PROPIEDADES DEL DESBALANCE. | 56 |
| TABLA 3.6 COEFICIENTES PARA EL AMORTIGUAMIENTO PROPORCIONAL O ESPECTRAL DE RAYLEIGH. | 56 |
| TABLA 4.1. MASAS DE DESBALANCE PRESENTES EN EL SISTEMA. | 65 |
| TABLA 4.2. PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DEL EJE ($*r_s$ =RADIO DE LA SECCIÓN SIMÉTRICA).. | 66 |
| TABLA 4.3. PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DE LOS DISCOS. (* ED=ESPESOR DEL DISCO, RED=RADIO EXTERIOR DEL DISCO, RID=RADIO INTERIOR DEL DISCO). | 66 |
| TABLA 4.4. CARACTERÍSTICAS DE LOS SOPORTES. | 66 |
| TABLA 4.5. COMPARACIÓN DE FRECUENCIAS NATURALES. | 67 |
| TABLA 4.6. IDENTIFICACIÓN ALGEBRAICA EN LÍNEA DEL DESBALANCE Y SU POSICIÓN ANGULAR VS RAMPA DE EXCITACIÓN. | 73 |
| TABLA 4.7. IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE A VELOCIDAD CONSTANTE. | 78 |
| TABLA 4.8. FORMAS MODALES DEL PRIMER Y SEGUNDO MODO EN DIRECCIONES X Y Z. | 81 |
| TABLA 4.9. VALORES DE LAS FUNCIONES CARACTERÍSTICAS EN LA POSICIÓN DE LOS DBA (PLANO YOX). | 82 |
| TABLA 4.10. VALORES DE LAS FUNCIONES CARACTERÍSTICAS EN LA POSICIÓN DE LOS DBA (PLANO YOZ). ... | 82 |
| TABLA 4.11. DESBALANCES MODALES PARA EL PLANO YOX. | 82 |
| TABLA 4.12. DESBALANCES MODALES PARA EL PLANO YOZ. | 82 |
| TABLA 4.13. MASA DE BALANCEO Y SU POSICIÓN ANGULAR. | 83 |
| TABLA 4.14. REDUCCIÓN DE LAS AMPLITUDES DE VIBRACIÓN DEL ROTOR EN SUS VELOCIDADES CRÍTICAS. | 85 |
| TABLA 4.15. MASAS DE BALANCEO Y SUPOSICIÓN ANGULAR. | 86 |
| TABLA 4.16. REDUCCIÓN DE LAS AMPLITUDES DE VIBRACIÓN DEL ROTOR EN SUS VELOCIDADES CRÍTICAS. | 86 |
| TABLA 4.17. CONTRIBUCIÓN MODAL DE PROPIEDADES DE SOPORTE. | 94 |
| TABLA 4.18. IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE MODAL (PRIMER MODO) DE 1000 A 5000 RPM. | 95 |
| TABLA 4.19. IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE MODAL (SEGUNDO MODO) DE 9000 A 13,000 RPM. | 96 |
| TABLA 4.20. MASAS DE BALANCEO EN EL MEJOR DE LOS CASOS DE IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE. | 96 |
| TABLA 4.21. MASAS DE BALANCEO EN EL CASO CRÍTICO DE IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE. | 97 |
| TABLA 4.22. REDUCCIÓN DE AMPLITUDES DE VIBRACIÓN EN VELOCIDADES CRÍTICAS (MEJOR CASO). | 98 |
| TABLA 4.23. REDUCCIÓN DE AMPLITUDES DE VIBRACIÓN EN VELOCIDADES CRÍTICAS (CASO CRÍTICO). | 98 |
| TABLA 5.1. PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DEL EJE. | 106 |
| TABLA 5.2. PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DE LOS DISCOS. | 106 |
| TABLA 5.3. FACTORES DE FORMA. | 108 |
| TABLA 5.4. CONDICIONES DE LAS PRUEBAS EXPERIMENTALES. | 108 |
| TABLA 5.5. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS DE DESBALANCE Y PORCENTAJE DE ERROR EN LA IDENTIFICACIÓN. | 112 |
| TABLA 5.6. PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DEL EJE ($*r_s$ =RADIO DE LA SECCIÓN SIMÉTRICA, f =RADIO DE SECCIÓN ASIMÉTRICA). | 114 |
| TABLA 5.7. PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DE LOS DISCOS (* ED=ESPESOR DEL DISCO, RED=RADIO EXTERIOR DEL DISCO, RID=RADIO INTERIOR DEL DISCO). | 114 |
| TABLA 5.8. DESBALANCE PRESENTE EN EL SISTEMA. | 114 |

| | |
|---|-----|
| TABLA 5.9. FORMAS MODALES DEL PRIMER Y SEGUNDO MODO EN DIRECCIONES X Y Z. | 115 |
| TABLA 5.10. CONDICIONES DE LAS PRUEBAS EXPERIMENTALES. | 117 |
| TABLA 5.11. RESULTADOS DE PRUEBAS EXPERIMENTALES. | 119 |
| TABLA 5.12. RESULTADOS DEL CÁLCULO DE MASAS DE BALANCEO. | 120 |
| TABLA 5.13. REDUCCIÓN DE AMPLITUDES DE VIBRACIÓN EN VELOCIDADES CRÍTICAS. | 121 |
| TABLA 5.14. PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DE LOS DISCOS (* ED=ESPESOR DEL DISCO, RED=RADIO EXTERIOR DEL DISCO, RID=RADIO INTERIOR DEL DISCO). | 124 |
| TABLA 5.15. FORMAS MODALES DEL PRIMER MODO EN DIRECCIONES X Y Z. | 125 |
| TABLA 5.16. DESBALANCE PRESENTE EN EL SISTEMA. | 125 |
| TABLA 5.17 . CONTRIBUCIÓN MODAL DE PROPIEDADES DE SOPORTE. | 127 |
| TABLA 5.18 . DESBALANCE MODAL IDENTIFICADO. | 128 |
| TABLA 5.19. PARÁMETROS PARA EL BALANCEO CON BDA. | 129 |
| TABLA 5.20. REDUCCIÓN DE LAS AMPLITUDES DE VIBRACIÓN EN LA VELOCIDAD CRÍTICA. | 130 |
| TABLA 5.21. PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DEL EJE (* r_s =RADIO DE LA SECCIÓN SIMÉTRICA, F=RADIO DE SECCIÓN ASIMÉTRICA)..... | 133 |
| TABLA 5.22. PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DE LOS DISCOS (* ED=ESPESOR DEL DISCO, RED=RADIO EXTERIOR DEL DISCO, RID=RADIO INTERIOR DEL DISCO). | 133 |
| TABLA 5.23. FORMAS MODALES DEL PRIMER Y SEGUNDO MODO EN DIRECCIONES X Y Z. | 134 |
| TABLA 5.24. DESBALANCE PRESENTE EN EL SISTEMA. | 135 |
| TABLA 5.25 VELOCIDADES PARA LA IDENTIFICACIÓN DEL DESBALANCE Y DESBALANCE MODAL DE REFERENCIA. | 136 |
| TABLA 5.26. CONTRIBUCIÓN MODAL DE PROPIEDADES DE SOPORTE..... | 136 |
| TABLA 5.27 . DESBALANCE MODAL IDENTIFICADO. | 138 |
| TABLA 5.28 . PARÁMETROS DE CONTROL PARA EL BALANCEO CON BDA. | 139 |
| TABLA 5.29. REDUCCIÓN DE AMPLITUDES DE VIBRACIÓN EN VELOCIDADES CRÍTICAS. | 140 |

Capítulo 1.

INTRODUCCIÓN.

La fuente más común de vibración en maquinaria rotatoria está relacionada con la inercia debida al desbalance existente en el rotor. La condición de desbalance se presenta cuando el eje principal de inercia del rotor no coincide con el eje geométrico del sistema. Esto provoca vibraciones que generan fuerzas indeseables que se transmiten directamente a los elementos mecánicos, soportes y cojinetes del rotor [1]. Por lo tanto, disminuir o eliminar el desbalance presente en los sistemas rotatorios se convierte en la solución más evidente si se quieren disminuir los efectos de las vibraciones mecánicas. Esta acción es denominada balanceo.

Los métodos de balanceo clásicos son: el balanceo por coeficientes de influencia y el balanceo modal. Ambos son efectivos en rotores que poseen parámetros de rigidez igual en su sección transversal (rotores simétricos). Palmieri *et al.* [2] mencionan que programas de cómputo comerciales para el balanceo de rotores se basan en los métodos de balanceo clásicos que desafortunadamente no son aplicables a los rotores denominados asimétricos, ya que este tipo de rotores poseen parámetros de rigidez diferente en los ejes principales de inercia de su sección transversal, lo que produce una excitación paramétrica y en consecuencia, inestabilidad y perturbaciones sobre el comportamiento dinámico del rotor, dificultando el poder establecer un método eficiente para su balanceo. Ejemplos de rotores asimétricos se pueden encontrar en los generadores de dos polos, cigüeñales, árboles de levas y rotores de hélices, por mencionar algunos.

Uno de los primeros estudios sobre rotores asimétricos fue realizado por Smith [3], seguido de trabajos como los de Taylor [4], Foote *et al.* [5], Brosens y Crandall [6], que están dirigidos a la comprensión de los mecanismos que causan la inestabilidad del sistema rotor cojinete. Bishop y Parkinson [7], destacan que la vibración de una flecha asimétrica en rotación presenta dos características importantes: 1) la respuesta vibratoria del rotor cambia en amplitud y fase para diferentes posiciones angulares de la fuerza de excitación; 2) existe una componente de la vibración cuya frecuencia es igual al doble de la frecuencia de giro del rotor por efecto de la gravedad. Además, determinaron que cuando la asimetría¹ de la flecha es más grande que el factor de amortiguamiento del sistema, se presenta una inestabilidad en la zona de resonancia. Sus estudios propiciaron futuras investigaciones sobre el comportamiento de los rotores asimétricos ([8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]) derivando en diferentes métodos de balanceo para este tipo de rotores.

1 La asimetría del eje existe cuando se presentan diferencias en los momentos principales de inercia de su sección transversal.

En lo referente a métodos de balanceo, se tienen los trabajos realizados por Parkinson [17], Smalley *et al.* [18], Songbo *et al.* [19], Colín Ocampo [20]. También se cuenta con los trabajos realizados por Matsukura *et al.* [9], Kang *et al.* [21–24], quienes modifican el método de coeficientes de influencia para su aplicación en rotores asimétricos. Los métodos de balanceo reportados en la literatura para rotores asimétricos cumplen el objetivo de disminuir los efectos del desbalance, pero particularmente resultan en aplicaciones idealizadas, complejas, y se hace necesario realizar varias corridas de prueba antes de lograr el estado equilibrio. Recientemente, Colín-Ocampo *et al.* [25], desarrollaron una metodología para la identificación de la posición angular de la fuerza de desbalance en rotores asimétricos. La posición angular se determina mediante un modelo basado en el algoritmo de Newton Raphson que requiere información de la respuesta del diagrama polar de respuesta del rotor para realizar el cálculo.

Con el objetivo de superar las limitaciones e inconvenientes de los métodos de balanceo reportados en la literatura, Nango-Blanco [26] desarrolló un modelo matemático para la estimación de desbalance en línea en rotores asimétricos, utilizando el método de identificación algebraica. Para el desarrollo del modelo identificador utilizó como base un modelo de un sistema rotor–cojinete con flecha asimétrica usando el elemento finito. En las simulaciones realizadas, los resultados numéricos mostraron rapidez en la convergencia de la identificación de desbalance, sin importar el rango de velocidades en que el rotor opere. La ventaja principal que ofrece la metodología desarrollada por Nango-Blanco [26], es que la estimación de los parámetros del desbalance se realiza en bajas velocidades del rotor, sin la necesidad de llevar al sistema rotodinámico hasta su velocidad nominal de operación pasando por sus velocidades críticas. Asimismo, no se requiere de múltiples corridas del rotor para lograr el balanceo del sistema.

La técnica de identificación algebraica fue introducida por Fliess y Sira-Ramírez [27] y toma como base el álgebra diferencial y el cálculo operacional para el desarrollo de estimadores, permitiendo la determinación de parámetros desconocidos de un sistema a partir de su modelo matemático. La estimación de los parámetros se realiza en línea, en el dominio del tiempo, y son independientes de las condiciones iniciales del sistema. Diversos trabajos reportados en la literatura, por citar algunos Beltran-Carbajal *et al.* [28], Arias-Montiel *et al.* [29], Mendoza Larios *et al.* [30], han utilizado la técnica de identificación algebraica para la estimación de parámetros en sistemas rotodinámicos. Sus resultados numéricos y experimentales muestran que la identificación algebraica proporciona una alta robustez frente a la incertidumbre de los parámetros de desbalance, variaciones de frecuencia, errores de medición y ruido. En la literatura se reporta una gran variedad de métodos para la estimación de parámetros en maquinaria rotatoria, encausados al desarrollo y mejora de métodos de control de vibración. Algunos están basados en técnicas de optimización (De Castro *et al.* [31], Villafane Saldarriaga *et al.* [32], Morais *et al.* [33], Mao *et al.* [34], Yao *et al.* [35], Shrivastava y Mohanty [36]), otros implementan algoritmos de inteligencia artificial (Gohari *et al.* [37,38]), además de la aplicación del filtro de Kalman (Shrivastava y Mohanty [39], Zou *et al.* [40]), todos estos métodos reportan resultados satisfactorios en su aplicación, sin embargo, cabe mencionar que la mayoría requiere un alto costo computacional.

Disminuir el número de corridas del rotor para llevar a cabo el proceso de balanceo disminuye los costos de operación de la máquina, por lo que, si el proceso se realiza en línea (*in situ*) se incrementa la eficiencia en el proceso de balanceo. Esto puede lograrse con dispositivos de autobalanceo, y son también utilizados en lectores CD-ROM, DVD, máquinas lavado y máquinas herramienta, mencionan Chung y Ro [41]. Dispositivos como los de Thearle y Schenectady [42], Alexander [43], Cade [44], Lee y Van Moorhem [45], Chung y Ro [41], Horvath *et al.* [46], Majewski *et al.* [47], han sido

utilizados para el balanceo automático. Su configuración es muy similar entre sí y consisten en masas esféricas dentro de discos montados en el rotor. Para lograr el balanceo, el rotor es operado por arriba de la velocidad crítica, posteriormente las masas se dejan rotar libremente, y de manera automática, se posicionan en una condición de equilibrio, posición que se mantiene mediante un mecanismo de embrague. Estos dispositivos han probado reducir la respuesta vibratoria a velocidad constante, sin embargo, a velocidad variable el dispositivo genera inestabilidad en el sistema. Por su parte, Wilson y Mah [48], Blanco-Ortega [49] utilizaron actuadores mecánicos para posicionar las masas de balanceo en dirección radial y angular, mejorando la eficiencia de los balanceadores de bola.

En este trabajo se presenta un método integrado para el balanceo en línea de sistemas rotor – cojinete con eje asimétrico, que integra un modelo matemático para la identificación de desbalance, el balanceo modal convencional y discos de balanceo activo. Para la identificación del desbalance se propusieron modelos matemáticos que permiten la estimación, ya sea del desbalance discreto en diferentes puntos del sistema rotodinámico o la estimación directa del desbalance modal. Dichos modelos se obtuvieron a partir del modelo de elementos finitos de un sistema rotor-cojinete con eje asimétrico mediante el método de identificación algebraica. Los modelos identificadores, permiten la estimación del desbalance en línea de operación a partir de la respuesta vibratoria del sistema rotodinámico, sin ser necesarias masas de prueba, múltiples corridas de prueba o llevar el rotor a través de sus velocidades críticas. La estimación del desbalance mediante el método de identificación algebraica, facilita la aplicación del balanceo modal convencional para el cálculo de un arreglo de masas modales para el balanceo del sistema. Finalmente, los discos de balanceo activo (DBAs) distribuidos estratégicamente a lo largo del rotor, colocan las masas de balanceo en una posición radial y angular, logrando el balanceo del rotor *in situ* en una sola corrida. La metodología propuesta se validó de forma numérica y experimental balanceando un rotor de múltiples grados de libertad con desbalance discreto, logrando reducir la amplitud de vibración del rotor en condiciones de resonancia de dos modos de vibración.

1.1 Objetivo y alcances de la tesis.

El objetivo de esta tesis es desarrollar un método integrado para el balanceo de sistemas rotodinámicos con flecha con sección transversal asimétrica. La metodología propuesta consiste en integrar el método de balanceo modal convencional (arreglo de pesos modales), el método de identificación algebraica de parámetros en línea y el uso de discos de balanceo activo (DBAs).

Los alcances de esta tesis son:

- Validación del modelo propuesto de múltiples grados de libertad (MGDL) para la identificación de los parámetros de desbalance (magnitud, posición angular, posición longitudinal) en un sistema rotodinámico experimental con flecha con sección transversal asimétrica.
- Modelo matemático de MGDL del comportamiento dinámico de un sistema rotodinámico con flecha con sección transversal asimétrica incluyendo el efecto de los discos de balanceo activo (DBAs).

- Implementación de un banco experimental de un sistema rotodinámico con flecha con sección transversal asimétrica incluyendo discos de balanceo activo.
- Caracterización dinámica del sistema rotodinámico experimental con y sin discos de balanceo activo.
- Balanceo de dos modos de vibración del sistema rotodinámico experimental, en una sola corrida sin utilizar pesos de prueba.

1.2 Estructura de la tesis.

La presente tesis está organizada en seis capítulos. En este primer capítulo se ha presentado el panorama general acerca de los estudios realizados a rotores asimétricos, así como metodologías de balanceo aplicables a este tipo de rotores. El estado del arte sobre rotores asimétricos y sus métodos de balanceo, la implementación del método de identificación algebraica para la estimación de parámetros en sistemas rotodinámicos, así como dispositivos para el control del desbalance en sistemas rotor-cojinete, se encuentran reportados en el Capítulo 2. En el Capítulo 3, se muestra el desarrollo de un modelo matemático de un sistema rotor-cojinete con eje asimétrico de múltiples grados de libertad, obtenido mediante la metodología propuesta por Lalanne y Ferraris [50]. En el Capítulo 4, se expone el desarrollo de modelos identificadores de desbalance para rotores asimétricos que cuentan con discos de balanceo activo (DBA). Numéricamente se demuestra que los modelos propuestos pueden hacer identificaciones de desbalance discreto en sistemas rotodinámicos operando, ya sea a velocidad constante o variable, o inclusive, puede realizarse la identificación del desbalance modal del sistema rotodinámico. Asimismo, se demostró que el desbalance estimado con los modelos identificadores permite el cálculo de arreglos de masas de balanceo utilizando el balanceo modal convencional en rotores asimétricos. La mayor parte del contenido de estos cuatro capítulos ha sido publicado en el siguiente artículo:

Baltazar-Tadeo LA, Colín-Ocampo J, Mendoza-Larios JG, et al. (2022), An Integrated Balancing Method for Asymmetric Rotor-Bearing Systems: Algebraic Identification, Modal Balancing, and Active Balancing Disks. *J Vib Eng Technol*. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00598-6>

Los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas, son verificados experimentalmente en el Capítulo 5, en donde se incorpora físicamente el disco de balanceo activo en un banco de pruebas experimentales. Por último, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales con base en los resultados obtenidos en este trabajo de investigación.

Capítulo 2.

ESTADO DEL ARTE.

2.1 Rotores asimétricos, primeros años.

Durante la primera mitad del siglo XX, fabricantes de máquinas eléctricas como General Electric Company comenzaron a desarrollar grandes generadores de dos polos con velocidades de trabajo por encima de sus velocidades críticas. Lo anterior, a causa de la filosofía de diseño de Jeffcott [51], quien demostró que “es mejor desde el punto de vista de la vibración diseñar el eje con su velocidad crítica por debajo de la velocidad de trabajo”. Esta filosofía alentó a los ingenieros de la época a diseñar maquinaria rotatoria con ejes flexibles para operar por encima de sus velocidades críticas. Así, los rotores de generadores de dos polos se fabricaban cada vez más largos con el fin de incrementar la energía de salida, sin que el diámetro se viera afectado debido a limitaciones por consideraciones de esfuerzos. Esto trajo como consecuencia el incremento en la sensibilidad de la vibración del rotor debido principalmente a dos aspectos. Por un lado, se tiene la vibración de primer orden, que es aquella en la que el eje vibra con una frecuencia igual a la velocidad de rotación del eje y que es originada por defectos en el proceso de fabricación (desbalance) y la falta de rectitud inicial del eje (pandeo por el peso del eje). Por el otro lado, se tiene la respuesta de segundo orden, que es aquella en la que el eje se mueve a una frecuencia igual al doble de la frecuencia de giro del eje, generada por la geometría de la sección transversal de los rotores de los generadores de dos polos (excitación paramétrica).

En la Figura 2.1 se muestra un esquema de la sección transversal de un rotor de un generador de dos polos.

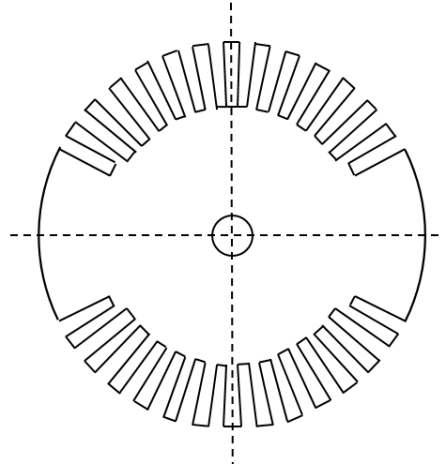


Figura 2.1 . Sección transversal de un rotor de generador de dos polos [7].

El comportamiento de los rotores de generadores de dos polos despertó el interés teórico y económico desde el punto de vista de la mecánica aplicada. Entre los pioneros en investigar el comportamiento de este tipo de rotores se encuentra Smith [3], quién presentó una revisión explícita de problemas básicos de rotodinámica de esa época. Su artículo contenía modelos del sistema rotor-cojinete en los que se analizaba la flexibilidad del eje, tanto simétrico como asimétrico, y la flexibilidad del soporte con características simétricas y asimétricas, además se incluyó la fricción interna (que él llamó "amortiguación rotatoria") modelada como una fuerza acoplada. En lo correspondiente al rotor asimétrico obtuvo que, si las partes giratorias son asimétricas, las velocidades críticas ocurren en pares que encierran rangos de velocidad violentamente inestables; además, la fricción interna puede contribuir a la inestabilidad del rotor. Por su parte, Taylor [4], utilizó una versión del modelo de Jeffcott, con el propósito de estudiar la inestabilidad de un turbogenerador de dos polos. En su estudio concluyó que la fuerza elástica tiene una componente radial que es paralela al desplazamiento y una tangencial que es perpendicular a la dirección del desplazamiento. La componente tangencial la consideró como una característica única de las flechas asimétricas. Experimentalmente, determinó que la influencia de pesos colocados en una misma posición angular del rotor no es proporcional a la respuesta vibratoria.

Continuando con los estudios acerca de los rotores asimétricos, autores como Laffoon y Rose [52], Foote *et al.* [5], Dick [53], Hull [54] ampliaron la teoría de Smith en el análisis del efecto del giro de una flecha con rigidez asimétrica soportada por cojinetes. En su análisis utilizaron un modelo de una flecha sin masa con diferente flexibilidad en dos direcciones en ángulo recto, llevando una masa en su sección media. Los estudios realizados mostraron que, existen dos principales velocidades de giro correspondientes a las frecuencias de vibración a lo largo de sus dos principales ejes con la flecha estacionaria. Cuando el rotor opera entre dichas velocidades existe la posibilidad de inestabilidad de giro, a menos que los cojinetes tengan suficiente amortiguamiento. También se encontró que cuando una flecha asimétrica gira sobre un eje horizontal, hay un giro inducido por la fuerza de gravedad que ocurre a dos veces la velocidad de la flecha.

Si bien, los estudios realizados en los que se utilizó una versión modificada del modelo de Jeffcott aportaron una gran cantidad de información sobre el comportamiento de rotores asimétricos, no

era suficiente para cubrir las necesidades del ingeniero de campo, quien requería una imagen más completa, mencionan Bishop y Parkinson [7]. Por tal motivo, Bishop y Parkinson proponen un análisis modal con el objetivo de ampliar la teoría de la vibración de segundo orden y proporcionar un medio conveniente para interpretar las vibraciones observadas en rotores de generadores de dos polos. En su estudio utilizaron un modelo de un eje asimétrico soportado por cojinetes simétricos y mediante soluciones analíticas, se analizó el movimiento y la estabilidad de dicho rotor en vibración libre y vibración forzada. Determinaron que cuando la asimetría de la flecha es más grande que el factor de amortiguamiento modal del sistema, se presenta una inestabilidad en la zona de resonancia. Además, la sensibilidad de la flecha a un desbalance dado depende de la posición angular de los planos radiales de desbalance, así como de la distribución del desbalance a lo largo de la flecha.

El análisis de Bishop y Parkinson [7] sentó las bases para que Parkinson [17] desarrollara una técnica para el balanceo modal de rotores asimétricos, debido a que las técnicas de balanceo de rotores desarrolladas hasta esa época no eran aplicables a rotores asimétricos. El método de balanceo propuesto es aplicable a rotores con asimetría en el eje. Consiste en encontrar un único plano de desbalance correspondiente a cada par de modos. Esta condición resulta de la orientación del desbalance en los ejes principales de inercia mediante la colocación de masas de prueba en diferentes planos. La Figura 2.2 muestra el algoritmo para el balanceo de rotor asimétrico.

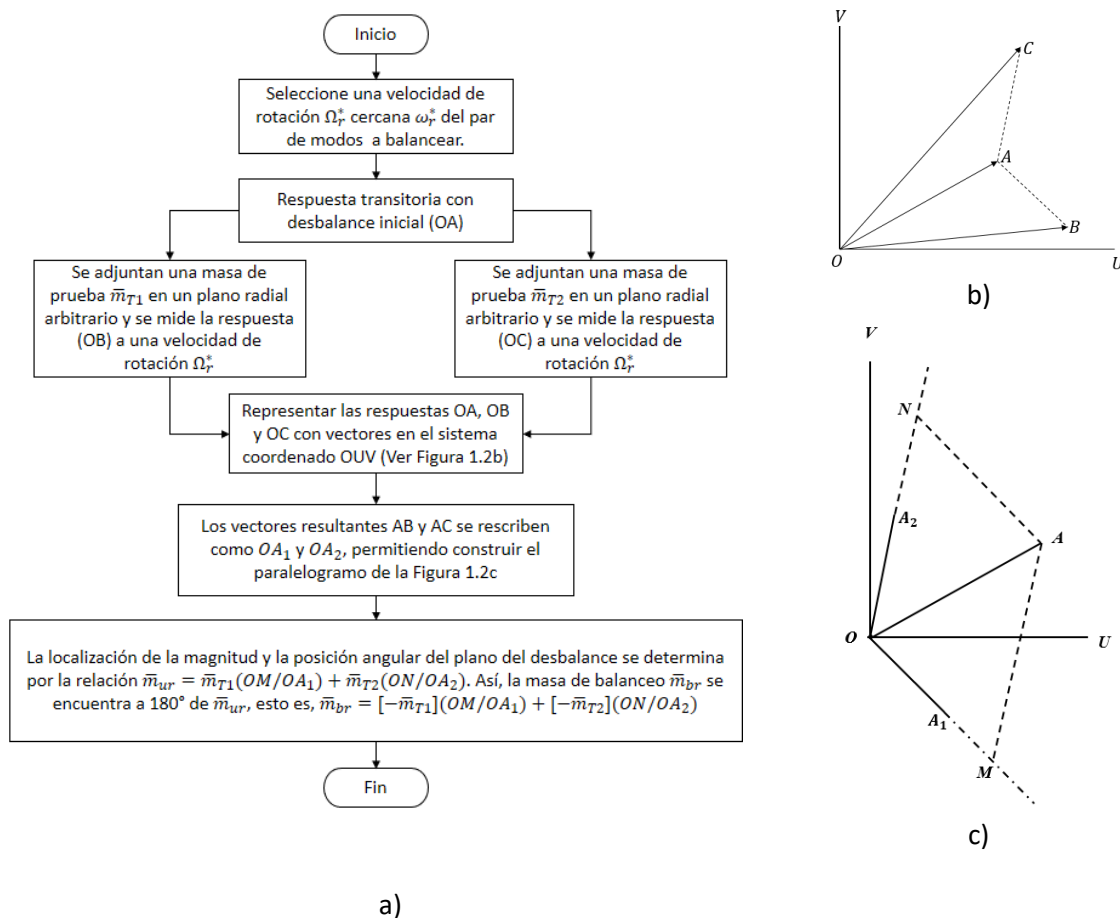


Figura 2.2 . Algoritmo del método de balanceo de Parkinson.

En el trabajo de Parkinson se incluyó un procedimiento para ubicar el ángulo de desbalance usando diagramas polares de respuesta (diagramas de Kennedy-Pancu). Asimismo, describió que los diagramas polares de respuesta pueden presentar formas circulares, elípticas, parábolas o hipérbolas en función del amortiguamiento modal y la asimetría de la flecha. El estudio teórico de Parkinson para la identificación de la posición angular del desbalance mediante diagramas polares de respuesta no es muy práctico, ya que su método requiere identificar puntos en el diagrama polar de respuesta y hacerlo en un sistema real resulta impreciso.

Los estudios previos dieron cabida a dos líneas de investigación. En la primera línea, se continuó analizando el comportamiento de los rotores asimétricos y la determinación de parámetros que influyen en la excitación paramétrica que genera inestabilidad en el rotor. La segunda línea corresponde al desarrollo de métodos de balanceo para este tipo de rotores. En la Secciones 2.2 y 2.3, se mencionan algunas contribuciones relevantes en estas dos líneas de investigación.

2.2 Estudios de las características dinámicas de rotores asimétricos.

Durante la década de 1960, Yamamoto *et al.* [55–58] llevó a cabo una serie de estudios teóricos y experimentales con la finalidad profundizar en el estudio de las vibraciones inestables en rotores asimétricos. En su estudio empleó modelos de cuatro grados de libertad, dos desplazamientos laterales y dos ángulos de inclinación acoplados al rotor mediante los efectos giroscópicos. Además, empleó un modelo de seis grados de libertad en el que los desplazamientos laterales de la masa de los cojinetes de pedestales fueron considerados. Los resultados mostraron que es posible la eliminación de vibraciones inestables mediante la adopción de una combinación apropiada de desigualdades de rigidez e inercia; estos resultados fueron verificados experimentalmente. Los efectos del acoplamiento entre la inercia y las desigualdades de rigidez, el amortiguamiento y cojinetes de pedestal flexibles se discutieron a detalle en [58].

En la década de 1970, Ardayfio y Frohrib [59] estudiaron la dinámica de un rotor asimétrico con asimetría en la inercia y en la rigidez del eje, montado sobre soportes simétricos elásticos. Para su estudio ampliaron el modelo de rotor de cuatro grados de libertad de Yamamoto y Ota [57] para incluir la flexibilidad en los soportes. De este modo, el estudio de las raíces de la ecuación característica del sistema permitió la construcción de un mapa tridimensional de regiones inestables en dos ejemplos numéricos, en donde se muestran los efectos combinados de la asimetría de la inercia, asimetría de eje y la flexibilidad de los soportes. En los resultados se encontró que la flexibilidad de los soportes tiene un efecto muy importante en la tendencia de las regiones de velocidad inestable.

Durante la década de 1980, Inagaki *et al.* [10] realizaron un análisis de la respuesta de un rotor con asimetría empleando un modelo matemático que incluye efectos cortantes. La solución del modelo se realizó por medio del Método de Balance Armónico, que es un método utilizado para calcular las respuestas en estado estable de ecuaciones diferenciales no lineales, y la formulación de matrices de transferencia. Comparó los resultados de la respuesta calculada con respuestas experimentales en diferentes casos donde se varió la posición angular de la masa del desbalance. A pesar de las diferencias entre la parte experimental y la numérica, los resultados del cálculo mostraron una muy buena aproximación, por lo que el autor menciona que el modelo propuesto puede ser utilizado para el diseño, balanceo y diagnóstico de problemas de vibración. Por su parte, Genta [60] implementó el método de elementos finitos y el uso de coordenadas complejas para el estudio del comportamiento dinámico de flexión de un sistema de rotor asimétrico. Su modelo puede tomar en

cuenta tanto la asimetría del eje como la asimetría de las propiedades de los soportes, múltiples nodos y múltiples discos inerciales, a diferencia del modelo de rotor simple. En un ejemplo, se mostró que el modelo de elementos finitos tiene una buena precisión al comparar los resultados del modelo simple (un solo elemento finito) contra el modelo con múltiples elementos finitos.

En la década de 1990, Yuan Kang *et al.* [61] emplearon el Método del Elemento Finito para formular un modelo de rotor asimétrico en el que se incluyen los efectos de la rigidez e inercia desviadoras debido a la asimetría del eje y el disco. Se emplea un elemento de viga de Timoshenko para simular sistemas de rotor-cojinete teniendo en cuenta el momento giroscópico, la inercia rotatoria, la deformación cortante del eje y la asimetría del disco y el eje. Para la solución del modelo se empleó el método del Balanceo Armónico. Finalmente, mediante ejemplos numéricos se muestra que las velocidades correspondientes al pico de la resonancia cambian debido a cambios en la asimetría del eje, rigidez y amortiguamiento en los cojinetes. Cabe mencionar que frecuentemente se utiliza el elemento viga de Timoshenko en la dinámica de rotores para modelar ejes gruesos, ya que considera deformaciones debido a esfuerzos de flexión y cortante, a diferencia del elemento viga Euler–Bernoulli que solo considera esfuerzos de flexión [62]. Jei y Lee [63], analizaron las características modales de rotores asimétricos asociadas con la rotación del rotor. Asimismo, introdujeron los desplazamientos modales complejos para determinar las direcciones (directividades) de los modos hacia adelante y atrás. Chen y Peng [64] estudiaron la estabilidad de un eje giratorio con rigideces diferentes bajo la influencia de la relación de rigidez y las cargas de compresión axial. En el estudio optaron por un modelo de elementos finitos de una viga de Timoshenko para aproximar el eje. Asimismo, los efectos de la inercia rotatoria, las deformaciones cortantes, los momentos giroscópicos y las rigideces torsionales fueron tomados en cuenta. En el estudio se encontró que cuando las cargas de compresión axial aumentan, las velocidades críticas disminuyen y las zonas de inestabilidad aumentan.

Del año 2000 a la actualidad, se cuenta con las aportaciones de Ganesan [65], quien estudió la influencia de los parámetros del eje y del cojinete en las características de estabilidad mediante expresiones analíticas, donde se considera la variación de la velocidad de rotación. En el estudio se encontró que una combinación adecuada de asimetría en eje y cojinete ayuda a estabilizar la respuesta al desbalance del rotor durante las operaciones de arranque y parada. Por su parte Lee *et al.* [66] realizaron un análisis modal complejo utilizando dos enfoques diferentes, la teoría de Floquet y la transformación de coordenadas. Los resultados que obtuvieron muestran que ambos enfoques son computacionalmente eficientes en el cálculo de soluciones propias y funciones de respuesta de frecuencia. Bartylla [67], estudió la posibilidad de utilizar una fuerza axial armónica para estabilizar un rotor asimétrico operando a su velocidad crítica. Srinath *et al.* [68] mediante un análisis adimensional, estudiaron la inestabilidad paramétrica de ejes asimétricos montados sobre rodamientos. Los regímenes de parámetros inestables se determinaron utilizando la teoría de Floquet. Los autores mencionan que los resultados obtenidos pueden ser usados para inferir pautas de selección de materiales, geometrías y rodamientos, y así, garantizar un funcionamiento estable.

Por su parte, Ferfecki *et al.* [69] desarrollaron un procedimiento computacional, basado en la teoría de Floquet, para investigar la estabilidad vibratoria de un rotor flexible compuesto por un eje asimétrico y un disco, soportados por rodamientos de bolas. Sus resultados fueron validados por medio de la integración directa de la ecuación de movimiento. Bharti *et al.* [70] analizaron el efecto Sommerfeld de segundo tipo (relacionado con el fenómeno del salto) en un rotor asimétrico montado sobre cojinetes anisotrópicos. El efecto Sommerfeld del primer tipo se relaciona con la resonancia en el giro síncrono del rotor (velocidades críticas), mientras que el del segundo tipo se

relaciona con la inestabilidad del giro del rotor. Para determinar los dominios de estabilidad se utilizó la teoría de Floquet, basada en el determinante infinito de Hill. De acuerdo con los resultados que obtuvieron, los autores mencionan que la captura de umbrales de estabilidad e inestabilidades paramétricas puede ser útil para seleccionar adecuadamente la potencia nominal del motor impulsor de rotor para alcanzar la velocidad de funcionamiento estable, así como, la selección de secuencias de arranque o paro para evitar zonas de inestabilidad.

Por otro lado, las vibraciones paramétricas también se observan en maquinaria rotatoria con fallas tales como grietas y sistema de cojinetes de rotor engranado. Al respecto, se han realizado trabajos significativos en vibraciones paramétricas en rotores agrietados [12,71–75], en donde los autores estudiaron la ecuación de movimiento en el marco inercial.

Como se ha visto, varios métodos se han utilizado en el estudio de la inestabilidad de rotores asimétricos, entre estos métodos destacan, la teoría de Floquet, que permite soluciones de sistemas lineales que varían periódicamente en el tiempo y el método de Hill que permite soluciones en el dominio de la frecuencia, otros métodos son el método de perturbación y el enfoque de promediación. De acuerdo con Nandi y Neogy [76], los métodos mencionados son difíciles de aplicar en el análisis de estabilidad de modelos de elementos finitos de sistemas rotor-cojinete con un gran número de grados de libertad. Por tal motivo Nandi y Neogy [76], proponen un método para disminuir cálculos costosos en la solución de ecuaciones diferenciales en el análisis de estabilidad de modelos con elementos finitos.

Otros trabajos en los que se utiliza el método de elemento finito para el estudio de inestabilidad en rotores asimétricos fueron reportados por Oncescu *et al.* [77], quienes estudiaron la respuesta en estado estable de un rotor asimétrico utilizando el método de la matriz de transferencia – tiempo, basado en la teoría de Floquet. Los ejemplos numéricos mostraron que el método del elemento finito en unión con el método de la matriz de transferencia es una conveniente manera de predecir el comportamiento dinámico de rotores asimétricos. Por su parte Zheng *et al.* [78], mediante el método de elementos finitos, estudiaron la respuesta en estado estable y la estabilidad de un rotor asimétrico en condiciones de impacto y fricción generados entre el rotor y el estator. Para la solución del modelo utilizaron el método del Equilibrio Armónico en combinación con el método de la longitud de arco. Los resultados numéricos que obtuvieron fueron validados con métodos convencionales de modelado para rotores simétricos y el modelo propuesto por Yuan Kang *et al.* [61]. Entre los resultados obtenidos se encontró que, si el tamaño del espacio entre el rotor y el estator se vuelve más pequeño, es más probable que aparezca el impacto y fricción, esto en combinación con la asimetría del eje hace que el pico resonante único se divida en dos picos resonantes aislados y ambos se desplacen hacia la derecha (mayores velocidades de rotación). Además, no importa si hay un impacto de fricción o no, el rango de la región inestable se expande con el aumento de la asimetría en el eje.

Filippi y Carrera [79] emplearon elementos finitos unidimensionales para realizar evaluaciones de estabilidad y análisis transitorios de rotores asimétricos sobre soportes anisotrópicos, con la finalidad de demostrar que se pueden obtener resultados similares a los modelos de elementos finitos de 3D con ahorros computacionales significativos en comparación con las soluciones de modelos de elementos finitos 2D y 3D. En la realización de este estudio se empleó la teoría de Floquet y el método de matriz de coordenadas. Finalmente, la metodología fue validada mediante el uso de soluciones de elementos finitos en 3D relacionadas con configuraciones simples de rotor-cojinete. Estudios similares han sido reportados en la literatura [80–83].

Durante las últimas dos décadas los modelos de rotor de elementos finitos en 3D han tenido cabida en el análisis de rotores asimétricos. Con esta metodología de modelado, las geometrías complicadas y las condiciones de contorno pueden tratarse con precisión mediante elementos sólidos en 3D. Algunas de las aportaciones donde se emplea este tipo de modelado en el estudio de rotores asimétricos se mencionan a continuación.

Nandy y Neogy [84] realizaron un análisis de velocidad crítica y giro de rotores con secciones transversales variables, considerando ejes huecos, cónicos, grietas y soportes isotrópicos. Para la validación del método, se compararon los resultados del método propuesto con los obtenidos con elementos finitos tipo viga estándar y valores experimentales proporcionados por Vest y Darlow [85]. En sus resultados se muestran casos donde los valores obtenidos usando elementos sólidos tridimensionales están más cerca de los valores medidos experimentalmente, en comparación con los obtenidos usando elementos finitos tipo viga estándar. Los resultados indican que el método es especialmente adecuado para ejes con geometría complicada y secciones no circulares. El autor menciona que una desventaja del presente modelo es que requiere un número muy alto de grados de libertad en comparación con la formulación de elementos de viga, lo que puede provocar un alto costo computacional.

Por su parte Lazarus *et al.* [86], sugirieron un método de elementos finitos sólidos 3D basado en la teoría modal para el análisis de vibraciones del rotor asimétrico en soportes anisotrópicos. Los resultados obtenidos por el método propuesto fueron validados mediante experimentos académicos. Los resultados experimentales y numéricos concordaron muy bien, lo que sugiere que el método numérico propuesto puede usarse para modelar todos los sistemas lineales variables en el tiempo que requieren cinemática 3D. Finalmente, el autor menciona que la dificultad de este método radica en la comprensión del proceso de acoplamiento armónico para modelar las condiciones de contorno de las subestructuras efectivas en cinemática 3D.

Wang *et al.* [87] investigaron los efectos de anisotropía en el eje y cojinetes en la respuesta forzada y el giro de sistemas rotor-asimétrico con base en el modelo de elementos finitos 3D y un método de reducción de orden del modelo llamado Síntesis de Componente Modal (CMS, por sus siglas en inglés). Las ecuaciones resultantes se resuelven mediante una variante del método de Hill. Finalmente, se estudian a detalle los efectos de anisotropía del sistema en la respuesta forzada y las órbitas de giro.

Recientemente, Hu y Palazzolo [88] desarrollaron una formulación de elementos finitos sólidos axisimétricos capaz de incluir los efectos centrífugos de rigidez por tensión y de ablandamiento por rotación. La precisión de la formulación se probó considerando cilindros de paredes delgadas y discos delgados. De acuerdo con el autor, los resultados obtenidos en el análisis de las simulaciones pueden proporcionar a los diseñadores e ingenieros pautas sobre cuándo y cómo utilizar un modelo Elemento Finito axisimétrico en lugar de un modelo Elemento Finito tipo viga para el análisis dinámico del rotor.

De acuerdo con Wang [87], y la literatura mostrada previamente, la Tabla 2.1 muestra algunas de las ventajas y desventajas de las diferentes técnicas de modelado en rotores asimétricos.

Tabla 2.1. Características de los modelos utilizados en rotores asimétricos.

| Tipo de modelado | Ventajas | Desventajas |
|---------------------------------------|---|---|
| Modelo rotor Jeffcott | -Son los modelos más simples en la dinámica del rotor. -Se emplean en estudios cualitativos de rotores simétricos y asimétricos. | -Es incapaz de estudiar rotores complejos, como los cigüeñales de los motores, los rotores de las turbinas eólicas y los rotores con álabes o impulsores. |
| Modelo de viga (elementos finitos 1D) | -Superaron las limitaciones de modelos de rotor Jeffcott. -Son métodos muy eficientes y precisos para el comportamiento dinámico de rotores. | -Son inadecuados para el modelado de rotores con geometrías complejas en algunas aplicaciones industriales . |
| Modelo de elementos finitos 3D | -Es un método eficiente, generalizado y cuantitativo para sistemas de Rotor- cojinete capaz de manejar rotores con geometrías complejas. | -Requieren de un gran esfuerzo computacional. |

En la actualidad, la investigación no solo se centra en analizar y determinar los parámetros que influyen en una excitación paramétrica que genera inestabilidad en el sistema, sino en cómo eliminar las zonas o regiones de inestabilidad mediante el control o diseño de dispositivos mecánicos. Ishida y Liu [89] proponen el uso de resortes con propiedades discontinuas para eliminar la inestabilidad cerca de las principales velocidades críticas de un sistema de eje asimétrico, un sistema de rotor asimétrico y un sistema de rotor parcialmente lleno de líquido. El método propuesto se validó teóricamente, numéricamente, y experimentalmente. Ghasabi *et al.* [90] proponen el uso del control pasivo y activo simultáneamente para reducir la oscilación no lineal cerca de la mayor velocidad crítica de un rotor asimétrico flexible continuo con soportes flexibles. Los resultados muestran que un controlador proporcional derivativo puede disminuir las regiones inestables; además, los soportes flexibles pueden mejorar las condiciones de estabilidad del sistema. Trabajos similares han sido desarrollados por Fan *et al.* [91], Brahem *et al.* [92] y Lai *et al.* [93] para el control de vibraciones en rotores simétricos.

2.3 Balanceo de rotores asimétricos.

Dentro de la literatura existen dos metodologías establecidas para balanceo de rotores, el método de coeficientes de influencia y el método de balanceo modal. El método de coeficientes de influencia fue propuesto por Thearle [42], usa masas de pruebas conocidas para determinar experimentalmente la sensibilidad de un sistema rotor-cojinete y consecuentemente calcular un conjunto de masas de balanceo que minimizará la respuesta de vibración generada por el giro del rotor. Por otro lado, el método de balanceo modal trata de balancear cada modo de vibración de forma independiente, fue establecido por Bishop y Parkinson [94], Kellenberger [95] (N o (N+2) planos), y Shiraki y Kanki [96,97] (el método del círculo modal). Sin embargo, estas metodologías no son aplicables a los rotores asimétricos, o al menos no como originalmente fueron propuestas.

Técnicas para el balanceo de rotores asimétricos en donde se realizan modificaciones al método de coeficientes de influencia para su aplicación en rotores asimétricos, se mencionan a continuación.

Matsukura *et al.* [9] utilizaron el método de coeficientes de influencia para el balanceo de un rotor asimétrico en el que se introdujo el denominado factor de convergencia, cuyo objetivo es hacer que el desbalance residual disminuya rápidamente. En su análisis teórico y experimental, concluyeron que el factor de convergencia es efectivo en el proceso de balanceo y hace que los desbalances residuales converjan rápidamente. Sin embargo, los valores del factor de convergencia dependen de muchos factores (relación de asimetría, rigidez, ángulo de posición del desbalance) haciendo que el proceso de balanceo sea muy complejo.

Xinghua *et al.* [19] reportaron un método de balanceo usando coeficientes de influencia enfocados en rotores flexibles con asimetría en sus rigideces principales, donde los coeficientes de respuesta se determinan a partir de la respuesta del rotor y se modifican a través de un método experimental.

Kang *et al.* [21] proponen la formulación de matrices de coeficientes de influencia a partir de las ecuaciones de movimiento de rotores asimétricos utilizando el método de elementos finitos y el uso de coordenadas complejas. Debido a la diferencia en las propiedades del rotor en sus dos direcciones principales, la formulación da como resultado dos conjuntos de coeficientes de influencia modificados. Esto implica dos masas de prueba colocadas en diferentes direcciones en las dos corridas de prueba para cada plano de balanceo. Además, cuando la asimetría de los rodamientos es considerada, se requieren precesiones hacia adelante en lugar de desplazamientos medidos para calcular los coeficientes de influencia y la distribución del desequilibrio (la precesión es un movimiento orbital elíptico descrito por el giro del rotor). La validez de su método se comprobó mediante ejemplos teóricos y experimentales.

Kang *et al.* [22] extendieron su método para la determinación de matrices de coeficientes de influencia modal, las cuales permiten calcular arreglos de masas de balanceo para el balanceo de un modo de vibración, sin afectar modos inferiores que ya hayan sido balanceados. Otras modificaciones al método de coeficientes para el balanceo de rotores asimétricos fueron reportadas en Kang *et al.* [23,24].

Las modificaciones realizadas al método de coeficientes de influencia resultaron ser exitosas, aunque cabe mencionar que para su aplicación son necesarias múltiples corridas para lograr un correcto balanceo.

Por otro lado, existen métodos de balanceo en donde se utilizan diagramas polares de respuesta para determinar el desbalance, dichos métodos se mencionan a continuación.

Shiraki y Kanki [96] desarrollaron un método práctico de balanceo en campo para rotores flexibles como el de una turbina de vapor. Primero, se realiza la construcción de diagramas polares de respuesta en cada uno de los puntos de medición del rotor, posteriormente se realiza la estimación de desbalance por análisis de círculos modales en combinación con el método de coeficientes de influencia. Los autores mencionan que es un método considerado como estándar en muchas máquinas rotatorias hoy en día [98], sin embargo, su aplicación implica llevar el rotor a través de sus velocidades críticas para la construcción de diagramas polares de respuesta.

Por su parte, Colín Ocampo *et al.* [25] proponen un método para la identificación de la posición angular de la fuerza de desbalance en rotores asimétricos. La metodología propuesta requiere información de la respuesta de vibración de al menos cuatro puntos del diagrama polar de respuesta obtenido de manera experimental, posteriormente esta información se introduce al modelo

identificador basado en el algoritmo de Newton-Rhapson para encontrar la posición angular de la fuerza de desbalance. La metodología resultó ser efectiva, sin embargo, en su aplicación también es necesario llevar al rotor hasta su velocidad nominal para la identificación del desbalance, necesitando dos o más corridas para lograr el balanceo del rotor.

2.3.1 Métodos de balanceo de rotores asimétricos en CENIDET.

En CENIDET también se han realizado algunos trabajos de investigación respecto al balanceo de rotores asimétricos. El primer estudio fue reportado por Colín Ocampo [20], quien propuso un método de balanceo para rotores asimétricos basándose en el análisis de los diagramas polares de respuesta. El análisis de los diagramas polares de respuesta fue realizado de manera teórica mediante un modelo matemático de dos grados de libertad, en donde los efectos del amortiguamiento, asimetría, posición de las masas de desbalance y rampas de excitación en la respuesta del rotor fueron considerados. Los resultados de este análisis mostraron que los desplazamientos máximos y mínimos en el diagrama polar de respuesta se obtienen cuando la posición angular de la masa de desbalance es de $\pm 45^\circ$ con respecto al eje que contiene la rigidez mínima de la sección transversal del rotor, similar a lo reportado por Inagaki *et al.* [10].

El estudio realizado permitió proponer dos alternativas para localizar la fuerza de excitación. La primera consiste en trazar una línea tangente al inicio de la construcción del diagrama polar de respuesta. En esta posición, la dirección de la línea tangente coincide con la dirección de la fuerza de excitación, esto se debe a que a bajas velocidades la excitación está en fase con la respuesta al desbalance independientemente de que el rotor sea asimétrico o no. Este método es efectivo, sin embargo, el ruido y perturbaciones armónicas en la respuesta experimental pueden distorsionar la construcción del diagrama polar afectando la precisión del método. La otra alternativa consiste en orientar los diagramas polares de respuesta a una posición angular de $\pm 45^\circ$, respecto al eje que contiene la rigidez mínima de la sección transversal, mediante pesos de prueba. De este modo, es posible localizar la fuerza de excitación debido a que ésta se encuentra a -45° o $45^\circ + 180^\circ$ sobre la sección transversal del rotor. Una vez que se localiza la posición angular de la fuerza de excitación con cualquiera de las dos alternativas mencionadas, se coloca una masa de balanceo en posición contraria ($+180^\circ$) respecto a la excitación. El método de balanceo se validó de forma experimental reduciendo la vibración de un rotor con flecha asimétrica hasta en un 90 %.

Posteriormente, Molina [99] realizó un estudio de la respuesta dinámica de un rotor asimétrico. Para su estudio, desarrolló un modelo matemático tomando como base la técnica del elemento finito. Posteriormente, propuso un método de balanceo basado en la teoría de análisis modal y coeficientes de influencia, donde se usa un arreglo de pesos modales de prueba para determinar los coeficientes de influencia en los ejes orientados en las posiciones de $\pm 45^\circ$ del rotor. Su método logró reducir hasta un 80% las amplitudes de vibración en un balanceo realizado de forma numérica.

Continuando con esta línea de investigación, Moroyoqui [100] desarrolló una metodología para la identificación de la posición angular de la fuerza de desbalance, a partir de un modelo simple de dos grados de libertad de un rotor asimétrico. La metodología propuesta para la identificación del desbalance requiere el análisis de los diagramas polares de respuesta del rotor, así como la información de vibración de al menos cuatro puntos del diagrama polar de respuesta. Para la identificación se necesita la amplitud de vibración, el ángulo de fase y la velocidad angular del rotor obtenidos experimentalmente. Con estos datos, un sistema de tres ecuaciones y tres variables se

formula y se resuelve mediante el método numérico de Newton-Rhapson para encontrar la posición angular de la fuerza de desequilibrio. Finalmente, el método propuesto se validó de forma numérica y experimental.

En resumen, los métodos propuestos [20,99,100] demostraron ser efectivos en el balanceo de rotores asimétricos; sin embargo, para su aplicación requieren de múltiples corridas y la construcción de diagramas polares. Asimismo, la construcción de diagramas polares de respuesta se puede ver afectada por niveles de vibración, ruido, y perturbaciones que podrían dificultar la aplicación de alguno de estos métodos.

Para superar las limitaciones de los métodos de balanceo anteriormente mencionados [20,99,100], Nango [26] realizó un estudio numérico en el que se realiza la identificación del desbalance en línea en un sistema rotor-cojinete con flecha asimétrica mediante la técnica de identificación algebraica. Para su estudio, desarrolló un modelo matemático de elementos finitos para el análisis de la respuesta al desbalance de un sistema rotor asimétrico-cojinete siguiendo la metodología de modelado de Lalanne y Ferraris [50]. Este modelo se tomó como base en el desarrollo un modelo matemático para la identificación de desbalance en línea utilizando la técnica de identificación algebraica propuesta por Fliess y Sira-Ramírez [27]. Los resultados obtenidos en las simulaciones muestran la rapidez en la convergencia de la identificación de los parámetros de desbalance, sin importar la aceleración de la rampa de excitación. Teóricamente, la ventaja que ofrece el método frente a las metodologías de balanceo mencionadas previamente es que se puede realizar la estimación del desbalance sin la necesidad de llevar el rotor a través de sus velocidades críticas ni la necesidad de múltiples corridas, bastando únicamente la respuesta de vibración del sistema como dato de entrada del modelo identificador.

2.4 Identificación algebraica en la estimación de parámetros de sistemas rotodinámicos.

A través de los años, ingenieros y científicos han intentado representar la naturaleza de sistemas mecánicos mediante expresiones matemáticas, con el propósito de predecir su comportamiento real. Estas expresiones matemáticas se denominan modelos matemáticos y son formulados al representar los sistemas mecánicos como masas puntuales interconectadas por resortes y amortiguadores. Estos elementos poseen propiedades físicas que dotan de cualidades particulares a cada sistema mecánico. Cuando estas propiedades físicas no se pueden medir experimentalmente, se dificulta la representación de sistemas mecánicos mediante modelos matemáticos. Por esta razón, es importante el desarrollo de estimadores o identificadores de propiedades físicas. En la actualidad, hay una vasta literatura sobre métodos de identificación de parámetros, cuyo objetivo está direccionado al monitoreo, control y detección de fallas en sistemas mecánicos.

Para propósitos de la investigación desarrollada en esta tesis, el estudio se limita al empleo del método de identificación algebraica en la estimación de parámetros de sistemas rotodinámicos. Primeramente, Fliess y Sira-Ramírez [27] presentaron un procedimiento de identificación paramétrica de ciclo cerrado para sistemas lineales; el método se basa principalmente en el álgebra diferencial y el cálculo operacional. Mediante simulaciones por computadora, demostraron la eficiencia en la identificación en línea, exhibiendo buenas propiedades de robustez con respecto a una gran variedad de perturbaciones.

Por su parte, Trapero [101] analizó los estimadores de parámetros de señales más prometedores [102–104] hasta ese entonces, con el objetivo de encontrar la técnica más apropiada. En su estudio encontró que los métodos analizados requieren varios ciclos completos de señal para lograr la estimación de parámetros, además, presentan poca robustez contra perturbaciones. Estos inconvenientes se superaron mediante el uso del método de identificación algebraica que realizó estimaciones en un muy corto periodo de tiempo sin importar las condiciones iniciales del sistema, superando a los otros estimadores hasta esa fecha.

Los resultados reportados por Fliess [27] y Trapero [101], animaron a los investigadores a emplear el método de identificación algebraica en la estimación de parámetros de sistemas rotodinámicos. Tal es el caso de Arias-Montiel *et al.* [29], quienes utilizaron la técnica de identificación algebraica para identificar los parámetros del desbalance en línea de un sistema rotor-cojinete en función de la fuerza de excitación. Estos parámetros identificados sirvieron para aplicar fuerzas de control a los actuadores montados en una suspensión activa con el propósito de atenuar las amplitudes de vibración laterales del sistema.

Otro ejemplo de aplicación del método de identificación algebraica es el caso de Mendoza [105], quien desarrolló un modelo basado en la metodología de la identificación algebraica para detectar parámetros de desbalance en línea de sistemas rotor-cojinete. El modelo identificador se desarrolló a partir de las ecuaciones de movimiento de un sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad utilizando el método de elemento finito. La verificación del método y su robustez se realizó mediante simulaciones numéricas. En todos los casos de estudio el identificador convergió al valor de consigna en un tiempo menor a 0.1 segundos. En su aplicación experimental, el modelo identificador no convergió debido a que no fue posible medir las pendientes nodales necesarias en el proceso de identificación; sin embargo, obtuvo resultados favorables en la aplicación de un modelo identificador obtenido a partir de un modelo de rotor simple, con el cual logró estimaciones de desbalance y parámetros de los soportes.

Por su parte, Hernández [106] presenta el desarrollo de modelos matemáticos de identificación en línea de grietas para sistemas rotodinámicos de dos y múltiples grados de libertad. La simulación de los identificadores propuestos, según lo reportado, fueron capaces de detectar fisuras o grietas en etapa incipiente de hasta una relación de grieta de $\mu \approx 0.005$ con un porcentaje de desviación máximo del 10%, siendo $\mu = h/R$, donde h es la profundidad de la grieta y R el radio del rotor.

Continuando con la identificación de parámetros en sistemas mecánicos, Landa [107] desarrolló un modelo matemático para la identificación algebraica en línea de los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada de manera experimental, utilizando como base un sistema rotor-chumacera de dos grados de libertad a velocidad constante y variable. Obtuvo gráficas que muestran el comportamiento de los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada para distintas presiones de inyección del fluido lubricante de la chumacera en función de la velocidad angular, los resultados obtenidos demuestran la eficacia y rapidez del método de identificación algebraica para determinar los parámetros de los soportes en un tiempo mucho menor a 0.1 s.

Otros trabajos en donde se reporta la aplicación del método de identificación algebraica en la estimación de parámetros a partir de la señal de vibración en sistemas lineales y no lineales fueron reportados por Blanco *et al.* [108], Beltrán-Carbajal *et al.* [28], Mendoza-Larios *et al.* [30], Colín-Ocampo *et al.* [1] y Mendoza-Larios *et al.* [109]. En todos estos estudios, los resultados numéricos y experimentales, mostraron que la identificación algebraica proporciona una alta robustez frente a

la incertidumbre de parámetros no considerados como variaciones de frecuencia, errores de medición y ruido.

2.5 Auto-balanceo del sistema rotor cojinete.

La necesidad de mantener la maquinaria rotatoria en marcha evitando paros por mantenimiento o fallas funcionales debido a las vibraciones excesivas, trajo consigo el desarrollo de dispositivos de control de vibración en línea. Estos dispositivos logran atenuar las vibraciones, ya sea al contrarrestar los efectos del desbalance en el rotor o modificando características en sus soportes. Los dispositivos que contrarrestan los efectos del desbalance se denominan dispositivos de autobalanceo, utilizan actuadores para posicionar masas de control en posiciones contrarias al desbalance. Algunos ejemplos de su aplicación se encuentran en: lectores CD-ROM, DVD, BLU RAY, máquinas de lavado, máquinas herramienta, etc. [41].

De acuerdo con Pan *et al.* [110], los dispositivos de autobalanceo se pueden clasificar como de tipo activo o pasivo como se muestra en la Figura 2.3.

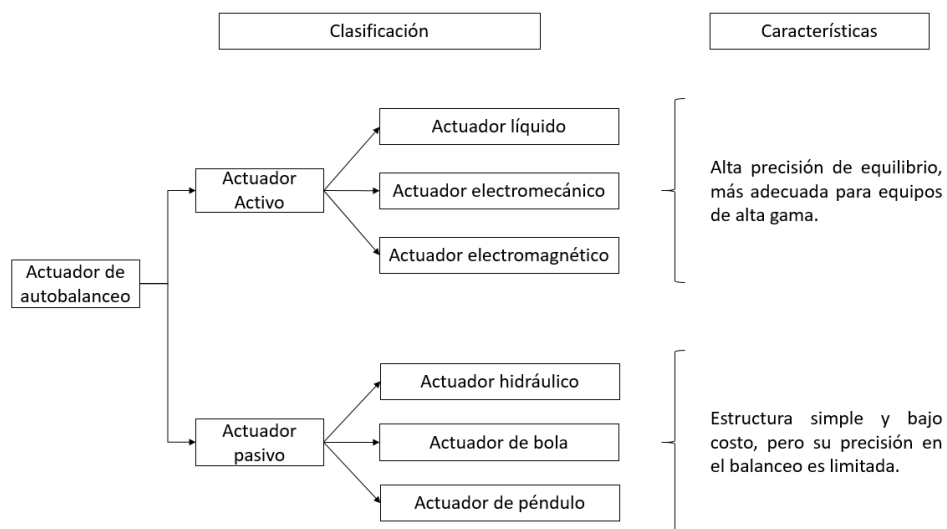


Figura 2.3. Clasificación de actuadores de balanceo [110].

En la clasificación de dispositivos de autobalanceo de tipo pasivo, se cuenta con el trabajo reportado por Thearle [42]. Fue el primero en proponer un dispositivo balanceador automático, consiste en un disco con dos masas del mismo peso y tamaño, montadas en dos eslabones que pueden girar libremente (Figura 2.4).

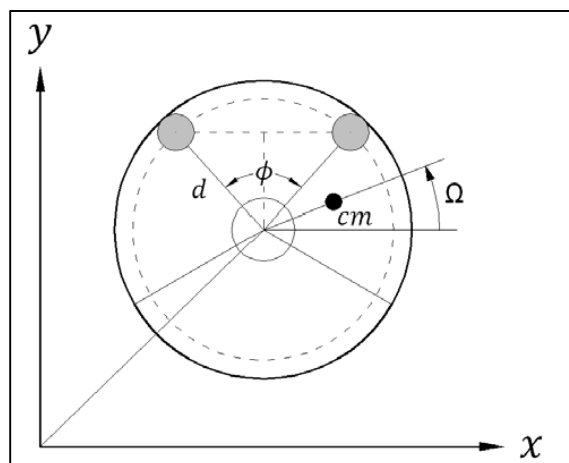


Figura 2.4. Balanceador automático con dos masas de balanceo [42].

Para determinar la posición del desbalance, el rotor era operado por arriba de la velocidad crítica y posteriormente las dos masas se dejaban rotar libremente, de esta manera, las masas eran posicionadas de manera automática en una posición de equilibrio. Después, un embrague fijaba las masas de balanceo en la posición de balanceo requerida realizando el proceso de balanceo automático. Este dispositivo probó reducir la respuesta vibratoria a velocidad constante, pero a velocidades transitorias el dispositivo era capaz de aumentarlas.

Trabajos como los de Alexander [43], Cade [44], Lee y Van Moorhem [45] propusieron configuraciones de Dispositivos Balanceadores de Bolas (DBB) parecidas a las de Thearle [42]. Estos últimos, mostraron que el DBB podría equilibrar un sistema rotativo cuando el sistema es operado incluso por encima de la velocidad crítica, pero no explicaron por qué en algunos casos el dispositivo no fue capaz de realizar el proceso de balanceo correctamente provocando inestabilidades. Lo anterior, se debe a que el método utilizado para el análisis de inestabilidad (teoría de Floquet) no fue el adecuado, menciona Chung [41], quien propone un método para el análisis dinámico de un Balanceador Dinámico Automático (ADB por su siglas en inglés) mostrado en la Figura 2.5 utilizando el criterio de Routh Hurwitz. Concluye que su análisis provee los requerimientos de parámetros físicos para que un ADB proporcione balanceo.

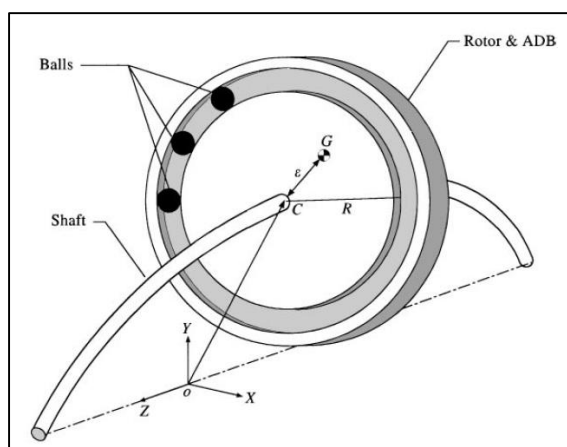


Figura 2.5. Rotor Jeffcott con balanceador dinámico automático [41].

Otra versión de estos discos balanceadores fue presentada por Majewski *et al.* [47], quienes realizaron un análisis del balanceo automático de un disco rígido montado sobre un eje elástico. El sistema de equilibrio consiste en dos tambores a una distancia variable del disco y bolas libres dentro del tambor (ver Figura 2.6). Bajo la premisa de que las bolas pueden cambiar de posición con respecto al rotor y compensar el desequilibrio del rotor, se demuestra de manera numérica y experimental, que las bolas pueden compensar una parte del desequilibrio del rotor dependiendo del posicionamiento de los tambores. Se concluyó que mientras más cercanas estén las bolas del disco inercial, estas pueden compensar hasta un 40% del desbalance del disco.

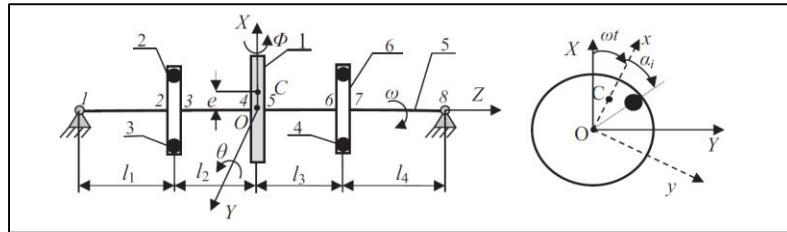


Figura 2.6. 1-Sistema analizado, 2-disco, 3-bolas en el tambor izquierdo, 4-bolas en el tambor derecho, 5-flecha, 6-tambor derecho [47].

También se cuenta con el trabajo de Horvath [46] *et al.*, quienes tomando el mismo principio de los balanceadores de bola, proponen el diseño de un dispositivo de balanceo pasivo basado en péndulos. El dispositivo consta de dos péndulos con la misma masa (A y B), unidos en el centro de un disco, de tal manera que cuando el disco gira a una velocidad ω la masa de los péndulos se coloca en posición contraria a la masa de desbalance M_p (ver Figura 2.7) mediante pines de sujeción. Demostraron teórica y experimentalmente el funcionamiento del dispositivo y concluyeron que su rendimiento está fuertemente influenciado por el desplazamiento del eje, por lo que el movimiento de la base debe ser debidamente controlado si se quiere un equilibrio efectivo.

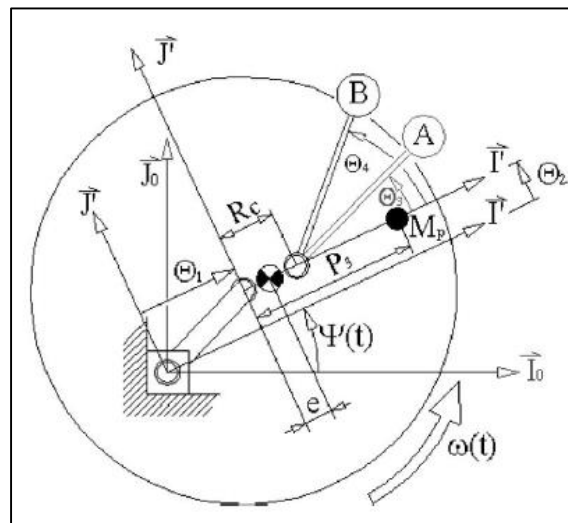


Figura 2.7. Diagrama esquemático del balanceador de péndulos [46].

Generalmente, en los dispositivos de autobalanceo de tipo activo el actuador acepta las instrucciones de control emitidas por un controlador, que a su vez es gobernado por un algoritmo de identificación de desbalance, permitiendo el balanceo dinámico en línea. En este tipo de dispositivos, Blanco *et al.* [49] proponen el diseño del denominado Disco de Equilibrio Activo (DEA)

para el control de vibraciones de un sistema rotor-cojinete (ver Figura 2.8a). En su estudio numérico utiliza un modelo matemático de rotor-cojinete de 2 GDL al cual se le añaden las ecuaciones de movimiento debidas a los grados de libertad del dispositivo de control, resultando un sistema de 5 GDL. Se implementa el método de la identificación algebraica para determinar los parámetros de desbalance del sistema, los cuales sirven de retroalimentación para el control del DEA. Finalmente, realiza una simulación del control de vibración del sistema rotodinámico logrando atenuar la respuesta vibratoria del sistema como se muestra en la Figura 2.8b.

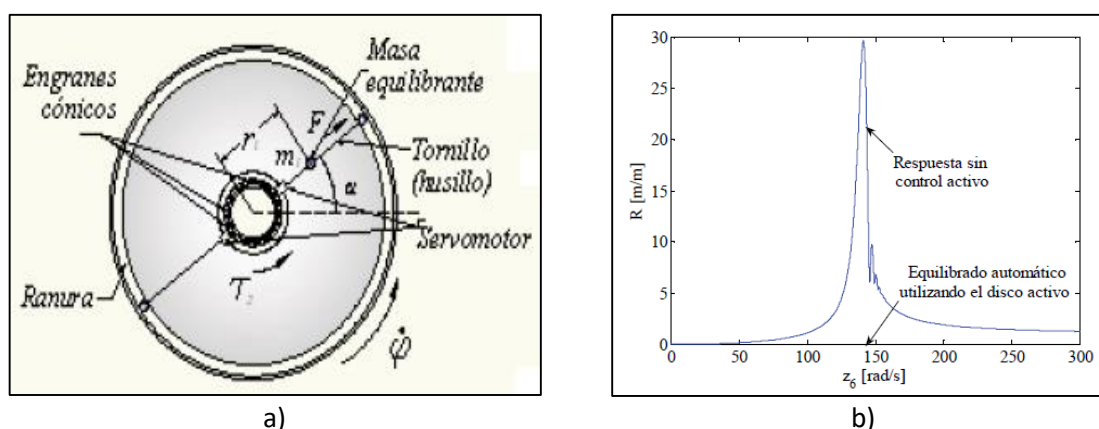


Figura 2.8. a) Diseño del disco de balanceo activo, b) Comparación de respuesta vibratoria con y sin DEA, [49].

Años más tarde, Mendoza Larios [30] realizó un estudio numérico de un sistema rotor cojinete de múltiples grados de libertad, con el objetivo de predecir el comportamiento del sistema al incorporar los efectos del disco de balanceo activo (DBA), similar a lo reportado por Blanco *et al.* [49]. El estudio consistió en simulaciones donde se incorporan DBA en diferentes posiciones a lo largo de la longitud del rotor, con el fin de establecer las posiciones en las que se logra el mejor control de las amplitudes de vibración debidas al desbalance. El estudio reveló que no importa dónde se coloquen los DBA, siempre y cuando el equilibrio de fuerzas y momentos se conserve, el control de vibración se cumple satisfactoriamente. Los resultados de las simulaciones realizadas, verifican que el empleo de dos DBA es capaz de reducir las amplitudes de vibración del rotor hasta de cuatro modos de vibración. Cabe mencionar que los parámetros de masas de balanceo y posición angular, requeridos por los DBA en el proceso de balanceo, fueron obtenidos mediante la técnica de identificación algebraica.

Posteriormente Guzmán [111], inspirado en el disco de equilibrio activo de Blanco [49], diseñó y construyó un disco de balanceo activo (DBA) para el control de vibraciones generadas por una masa de desbalance en un sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott. Para la aplicación experimental del DBA propuso el banco experimental mostrado en la Figura 2.9. Además, propuso que los parámetros de control, masa de balanceo y posición angular, requeridos por el DBA en el proceso de balanceo, fueran estimados mediante un modelo identificador obtenido mediante el método de identificación algebraica. Cabe mencionar que la formulación del modelo identificador se llevó a cabo mediante un modelo simplificado de rotor tipo Jeffcott. En las pruebas experimentales de identificación de parámetros de desbalance (desbalance y posición angular), reportó desviaciones máximas cercanas al 50 % de la magnitud del desbalance y menores al 5 % en la posición angular, tanto en un eje simétrico como asimétrico.

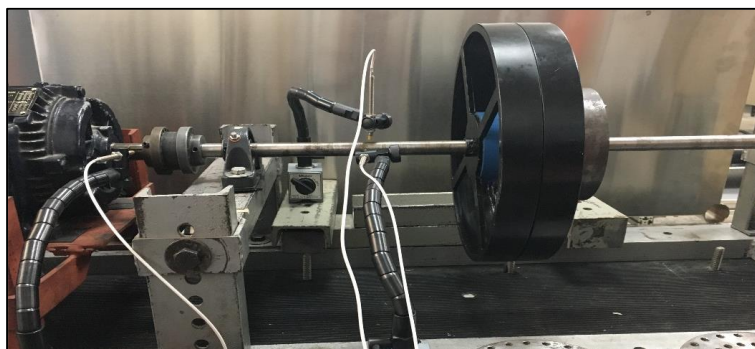


Figura 2.9. Sistema roto cojinete con DBA [111].

Una vez identificado el desbalance del rotor, se enviaron las señales de control al DBA para el control de vibraciones en línea. Con la implementación del DBA se lograron disminuir los efectos del desbalance en el rotor. El proceso de balanceo se muestra en la Figura 2.10, donde v_0 es la vibración inicial del rotor balanceado manualmente, v_1 es la vibración que se obtiene al agregar una masa de desbalance manualmente al sistema, v_f es la señal de vibración controlada mediante el DBA. Con los resultados de la Figura 2.10 se comprueba la efectividad del DBA en conjunto con la identificación algebraica como metodología de control de vibración en línea en sistemas rotor-cojinete. Cabe mencionar que la efectividad de la metodología propuesta puede verse disminuida por errores en la identificación de parámetros de desbalance, así como errores de maquinado en la construcción física del DBA.

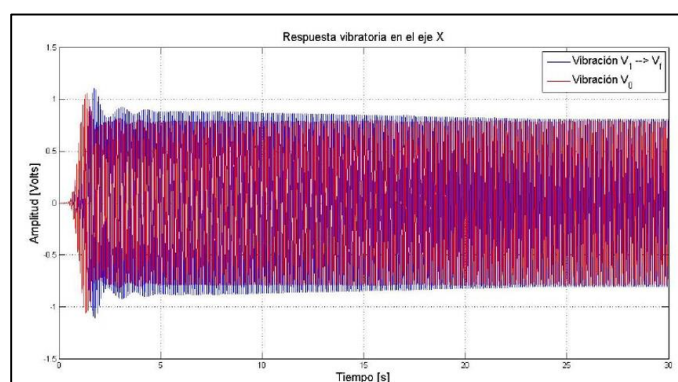


Figura 2.10. Control de vibración de un sistema rotor cojinete con DBA [111].

2.6 Conclusiones del estado del arte.

Como se menciona en el estado del arte, los rotores asimétricos tienen un comportamiento diferente al de los rotores simétricos en la respuesta vibratoria, esto se debe a las características físicas que este tipo de rotores presentan. Por tal motivo, fue necesario el desarrollo de técnicas para disminuir los efectos del desbalance en rotores asimétricos. Los métodos presentados en el estado del arte cumplen el objetivo de disminuir los efectos del desbalance, sin embargo, resultan en aplicaciones idealizadas, complejas y requieren tres o más corridas para su aplicación; además, es necesario llevar el sistema rotor-cojinete a través de velocidades críticas, haciendo el proceso, en algunos casos, riesgoso.

Entre las técnicas de identificación del desbalance en rotores asimétricos vistas en el estado del arte, destaca el método numérico propuesto por Nango [26], quien aplica el método de identificación algebraica para la estimación de desbalance en este tipo de rotores. Su método resulta muy atractivo, sin embargo, aún falta observar su comportamiento en aplicaciones experimentales. De obtener buenos resultados, el método sería bastante eficaz y eficiente, ya que bastaría una sola corrida para determinar la magnitud y la posición angular del desbalance y posteriormente realizar el proceso de balanceo.

La aplicación del método de la identificación algebraica ha sido herramienta para determinar parámetros como: desbalance y coeficientes rotodinámicos en rotores simétricos y asimétricos. Aplicado a procesos de balanceo [26,49,105,111], ofrece una opción más eficiente ante los métodos más comunes, como el balanceo por coeficientes de influencia y el análisis modal, los cuales necesitan la respuesta del sistema ante la influencia de masas de prueba y el análisis de las formas modales o modos de vibración del sistema, teniendo que excitar el sistema a velocidades críticas.

La identificación algebraica tiene como ventajas la precisión y la rapidez con que se lleva a cabo la identificación de parámetros, sin importar las condiciones iniciales del sistema, siendo no necesario que el sistema opere a través de velocidades críticas. Asimismo, ofrece robustez ante perturbaciones, es decir, identifica los parámetros de consigna aun cuando exista cierto margen de error en la medición de las propiedades del sistema rotor-cojinete, de acuerdo con lo reportado por Trapero [101] y Mendoza [105].

Aplicaciones experimentales del método de identificación algebraica para la estimación de parámetros en rotores tipo Jeffcott, han probado la efectividad del método. Ejemplo de esto, se haya en los trabajos reportados por Guzmán [111], Landa [107] y Mendoza [105], donde los parámetros rotodinámicos fueron estimados correctamente. Las estimaciones se realizaron mediante modelos identificadores obtenidos a partir del modelo de rotor simple de dos grados de libertad, a través del método de identificación algebraica. Sin embargo, los modelos identificadores están limitados a la identificación de parámetros en rotores con un solo disco inercial montado sobre un eje.

De acuerdo con la literatura revisada en la sección 2.2, mejores aproximaciones en el comportamiento de sistemas rotor-cojinete pueden realizarse con modelos de viga de elementos finitos, los cuales superan las limitaciones de modelos rotor Jeffcott, con un moderado costo computacional comparado con modelos 3D. Además, estos modelos permiten el modelado de múltiples discos inerciales, múltiples masas de desbalance y múltiples soportes. Debido a estas características, Mendoza [105] utiliza un modelo de MGDL basado en la metodología de elemento finito (modelo de viga) para mejorar el modelado del sistema rotor-cojinete. Con el modelo de MGDL obtuvo un modelo identificador algebraico, capaz de identificar simultáneamente múltiples desbalances discretos en sistemas rotor-cojinete. Al realizar simulaciones numéricas, el identificador funcionó de manera adecuada, sin embargo, al hacer pruebas experimentales el identificador no fue capaz de realizar la estimación del desbalance. Los errores obtenidos se atribuyeron a la medición incorrecta de las pendientes nodales que forman parte de la respuesta de vibración del rotor, requerida en el proceso identificación paramétrica. En resumen, la aplicación experimental del identificador algebraico, obtenido a partir de un modelo de elementos finitos de un sistema rotor-cojinete, requiere la medición correcta de la respuesta, incluyendo las pendientes nodales, lo cual supone una problemática a resolver.

Por otro lado, la implementación de control activo en maquinaria rotatoria proporciona ventajas para atenuar las amplitudes de vibración durante el arranque, operación y paro de estos equipos. En el control activo se utilizan dispositivos para la aplicación de fuerzas de control que se alimentan de la respuesta del sistema. Los mecanismos de control de vibración se basan en contrarrestar las fuerzas que provocan el desbalance o en modificar parámetros de los soportes. En el caso de los dispositivos de balanceo automático, el disco de balanceo activo en conjunto con el método de la identificación algebraica, promete ser una mejor opción para el proceso de autobalanceo; esto frente a los dispositivos pasivos con actuadores de bolas mencionados en la sección 2.5, dónde su aplicación está muy propensa a inestabilidades si no se hace un correcto análisis dinámico. La funcionalidad del DBA fue demostrada experimentalmente por Guzmán [111], y su influencia en el sistema no presentó inestabilidades en el banco experimental del sistema rotor-cojinete-DBA, concordando con las simulaciones realizadas por Mendoza [30].

Capítulo 3.

METODOLOGÍA DE MODELADO MATEMÁTICO PARA ROTORES CON SECCIÓN TRANSVERSAL ASIMÉTRICA.

En este capítulo se exponen conceptos teóricos necesarios para familiarizarse con la metodología de modelado matemático de un sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad, dichos conceptos serán indispensables para el desarrollo de esta tesis. El modelo del sistema rotor-cojinete se formula mediante el método de elemento finito siguiendo la metodología descrita por Lalanne y Ferraris [50]. Para la solución del modelo matemático se desarrolló una plataforma computacional programada en Matlab, la cual puede resolver las ecuaciones de movimiento del sistema rotor-cojinete por medio del método directo o el método de Newmark. La solución obtenida mediante el método directo permite conocer información del sistema tal como: frecuencias naturales, diagrama de Campbell, formas modales y la respuesta de vibración del sistema. Por otro lado, la solución del modelo matemático mediante el algoritmo de Newmark permite conocer la respuesta de vibración al desbalance en función del tiempo.

3.1 Elementos característicos de un sistema rotor cojinete.

Los elementos básicos de un sistema rotor-cojinete son el disco, el eje y los soportes, así como también fuerzas generadas a causa de las masas de desbalance las cuales son inevitables en un sistema rotodinámico. Para caracterizar los elementos del rotor como el disco y la masa de desbalance, es necesario determinar las expresiones para la energía cinética. En lo referente al eje, además de la energía cinética se requiere el conocimiento de la energía de deformación. Asimismo, a partir del principio de los trabajos virtuales se obtienen las fuerzas derivadas de los rodamientos o los sellos que actúan sobre el eje.

Los elementos del rotor pueden apreciarse en la Figura 3.1.

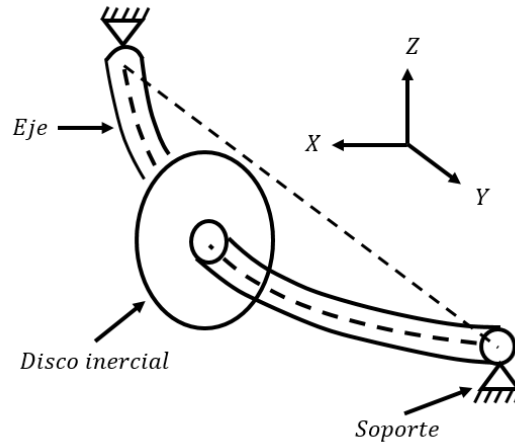


Figura 3.1. Componentes de un sistema rotor cojinete.

De acuerdo con Lalanne y Ferraris [50], la ecuación general del sistema rotodinámico se obtiene a partir de los siguientes pasos:

- Se determina la energía cinética T , la energía de deformación U , y el trabajo virtual de las fuerzas externas para los elementos que conforman el sistema.
- Se aplican las ecuaciones de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento para cada uno de los elementos.

Las ecuaciones de Lagrange son aplicadas en la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i q_i \quad (3.1)$$

donde:

$N(1 \leq i \leq N)$ = Número de grados de libertad

q_i = Coordenadas generalizadas

$F_i q_i$ = Fuerzas generalizadas.

3.1.1 El disco.

Se supone que el disco es rígido, y su caracterización se lleva a cabo al considerar únicamente la energía cinética. $R_0(X, Y, Z)$ es el marco de referencia inercial y $R(x, y, z)$ está fijo en el disco (Figura 3.2). El sistema coordenado xyz está relacionado al sistema XYZ , a través de un conjunto de tres ángulos ψ , θ y ϕ . Para obtener la orientación del disco, primero se rota una cantidad ψ alrededor del eje Z , después una cantidad θ alrededor del nuevo eje x , denotado por x_1 , y por último una cantidad ϕ alrededor del eje final y . El vector de velocidad angular instantánea respecto al marco de referencia xyz es:

$$\omega_{R/R_0} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\phi}y \quad (3.2)$$

donde, Z , x_1 y y son vectores unitarios a lo largo de los ejes Z , x_1 y y . La energía cinética del disco sobre su centro de masa O es calculada usando el marco R . En este sistema el vector de velocidad angular puede expresarse como se escribe en (3.3).

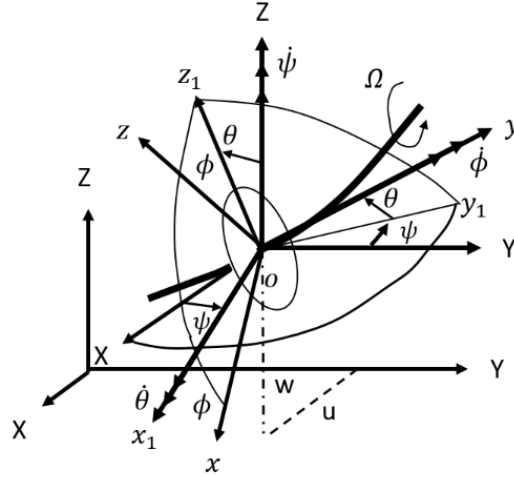


Figura 3.2 Marcos de referencia del disco sobre un eje giratorio.

$$\omega_{R/R_0}^R = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}\cos\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi + \dot{\theta}\sin\phi \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Se designa u y w a las coordenadas de O en R_0 , la coordenada a lo largo del eje Y permanece constante. La masa del disco es M_D y su tensor de inercia en O , cuyas direcciones principales son x , y y z , se escribe en (3.4).

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Por lo tanto, la ecuación para el cálculo de la energía cinética del disco es:

$$T_D = \frac{1}{2}M_D(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}(I_{Dx}\omega_x^2 + I_{Dy}\omega_y^2 + I_{Dz}\omega_z^2) \quad (3.5)$$

La ecuación anterior se puede simplificar si se considera un disco simétrico, es decir, ($I_{Dx} = I_{Dz}$). Adicionalmente, si se considera que los ángulos de rotación θ y ψ son pequeños y que el disco gira a una velocidad angular constante $\dot{\phi} = \Omega$. De esta forma, (3.5) se puede expresar como (3.6).

$$T_D = \frac{1}{2}M_D(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_{Dx}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}I_{Dy}(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\dot{\theta}) \quad (3.6)$$

En la ecuación (3.6), el término $\frac{1}{2}(I_{Dy}\Omega^2)$ es constante y no tiene influencia en las ecuaciones. Por otro lado, el último término que se denota como $I_{Dy}\Omega\dot{\psi}\theta$, representa los efectos giroscópicos (también llamados efecto de Coriolis).

3.1.2 El eje con sección transversal asimétrica.

El eje se representa como una viga con sección transversal constante y su caracterización se realiza mediante el cálculo de las energías cinética y de deformación. Para el caso de estudio en particular, se considera un eje asimétrico cuya sección transversal se muestra en la Figura 3.3. De acuerdo con Pisarenko *et al.* [112], los momentos de inercia I_x y I_z de dicha sección transversal con respecto al marco de referencia rotatorio se definen como:

$$I_x = \frac{(2r)^4}{32} \left(\vartheta - \frac{\text{sen}(4\vartheta)}{4} \right) \tag{3.7}$$

$$I_z = \frac{(2r)^4}{32} \left(\vartheta + \frac{\text{sen}(2\vartheta)}{2} + \frac{\text{sen}(2\vartheta)\cos^2(\vartheta)}{3} \right) \tag{3.8}$$

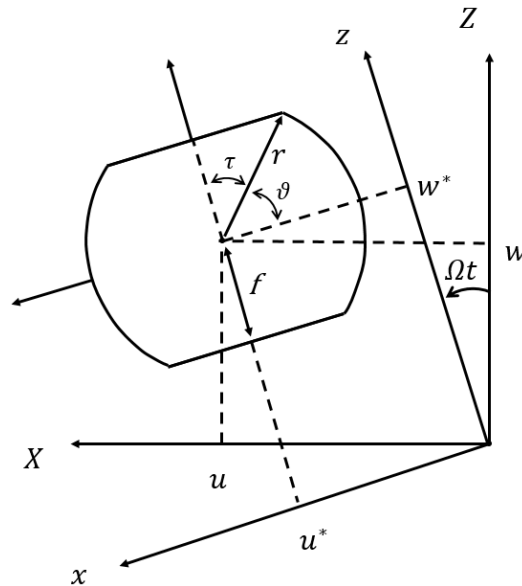


Figura 3.3. Sección transversal asimétrica del eje.

El momento polar de inercia, el área de la sección transversal y el ángulo entre el eje ortogonal a la cara plana y el vértice entre la cara plana y la cara curva, están dados por las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11) respectivamente.

$$I_y = J_o = I_x + I_z \tag{3.9}$$

$$S = r^2(\text{sen}(2\vartheta) + 2\vartheta) \quad (3.10)$$

$$\tau = \cos^{-1}(f/r) \quad (3.11)$$

El ángulo complementario a (3.11) es:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \tau \quad (3.12)$$

Energía cinética.

Los movimientos de la flecha son radiales y rotacionales, por lo que la energía cinética está compuesta por ambos movimientos:

traslacional,

$$T_L = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy \quad (3.13)$$

y rotacional,

$$T_R = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3.14)$$

donde, I se refiere en este caso al tensor de inercia dado por:

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

El vector de velocidad angular del eje está dado por (3.16), y se obtiene de manera similar al disco.

$$\omega_{R/R_0}^R = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\psi \cos\theta \text{sen}\phi + \dot{\theta} \cos\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \text{sen}\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta \cos\phi + \dot{\theta} \text{sen}\phi \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Al sumar la energía cinética traslacional y rotacional, la energía cinética del eje se escribe en (3.17).

$$T_S = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho}{2} \int_0^L (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) dy \quad (3.17)$$

Al sustituir el vector de velocidad angular (3.16) en la ecuación (3.17) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy \\
 & + \frac{\rho I_x}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 \sin^2 \phi - 2\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \phi \cos \phi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi) dy \\
 & + \frac{\rho I_y}{2} \int_0^L (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi} \dot{\psi} \theta + \dot{\psi}^2 \theta^2) dy \\
 & + \frac{\rho I_z}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi + 2\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \phi \cos \phi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi) dy
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

donde, ρ es la densidad del material, S es el área de la sección transversal del eje asimétrico, I_x, I_z son los momentos de inercia de área de la sección transversal del eje, $I_y = I_x + I_z$ es el momento polar de inercia a lo largo del eje neutro. La primera integral es la expresión de la energía cinética de una viga en flexión; la segunda y la cuarta integral es el efecto secundario de la inercia rotacional (viga de Timoshenko). En la tercera integral, el término $\rho I_y L \dot{\phi}^2$ es constante y no tiene influencia en las ecuaciones a causa de que la velocidad angular $\dot{\phi} = cte$ y el término se anula al aplicar la ecuación de Lagrange, el término $\rho I_y \dot{\psi}^2 \theta^2$ se desprecia porque θ^2 es muy pequeño; finalmente, el segundo término de la tercera integral representa el efecto giroscópico (Coriolis).

Energía de deformación.

Para obtener la energía de deformación equivalente a la energía potencial, se inicia por hacer el análisis de la sección transversal del rotor mostrado en la Figura 3.4. Donde C es el centro geométrico de la flecha y $B(x, z)$ es un punto arbitrario en la sección transversal. E es el módulo de Young del material, ε y σ son deformaciones y esfuerzos, u^* y w^* son desplazamientos del centro geométrico con respecto a los ejes x y z .

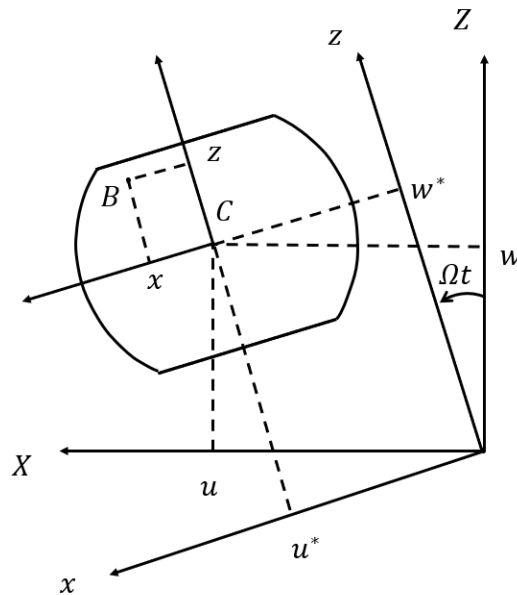


Figura 3.4. Coordenadas del centro geométrico C y un punto arbitrario B en la flecha.

De acuerdo con Lalanne y Ferraris [50], la deformación longitudinal del punto B tiene componentes lineales y no lineales, es decir:

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad (3.19)$$

Las componentes lineales y no lineales de la deformación longitudinal se representan en términos de segundo orden mediante:

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (3.20)$$

Es sabido que la energía de deformación está dada por (3.21) con la relación $\sigma = E\varepsilon$.

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_v \varepsilon^2 \cdot dv \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.19) en (3.21) se obtiene:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_v (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) \cdot dv \quad (3.22)$$

Introduciendo los términos de segundo orden (3.20) en (3.22) se obtiene:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{E}{2} \int_v \varepsilon^2 \cdot dv \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_s \left\{ x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left[xz \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + \left[-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right)^2 \right\} dS dy \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sabiendo que:

$$I_x = \int_s z^2 ds \quad (3.24)$$

$$I_z = \int_s x^2 ds \quad (3.25)$$

$$I_{xz} = \int_s xz ds \quad (3.26)$$

$$Q_x = \int_s z ds \quad (3.27)$$

$$Q_z = \int_s x ds \quad (3.28)$$

$$S = \int_s ds \quad (3.29)$$

la ecuación (3.23) se puede escribir como:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left[I_{xz} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) \right] - \left[Q_z \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + Q_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{1}{4} S \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right)^2 \right\} dy \quad (3.30)$$

Como la sección transversal presenta simetría con respecto al eje x y z (doble simetría), el producto de inercia $I_{xz} = 0$. Por el mismo motivo $Q_x = 0$ y $Q_z = 0$, [113]. El último término, corresponde a una deformación unitaria no lineal y puede despreciarse.

Entonces la ecuación (3.30) se puede escribir como:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.31)$$

Los desplazamientos en las direcciones u^* y w^* respecto al marco de referencia $R_0(X, Y, Z)$ son:

$$\begin{aligned} u^* &= u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* &= u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sustituyendo (3.32) en (3.31) se obtiene la ecuación (3.33).

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ (I_z \cos^2 \phi + I_x \sin^2 \phi) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + (I_x - I_z) \left(2 \cos \phi \sin \phi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) + (I_z \sin^2 \phi + I_x \cos^2 \phi) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dy \quad (3.33)$$

Reordenando y agrupando los términos $\sin^2 \phi$ y $\cos^2 \phi$ y aplicando la identidad $2 \cos \phi \sin \phi = \sin 2\phi$ se tiene:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ \left[I_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \text{sen}^2 \phi + \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \text{cos}^2 \phi \right. \\ \left. + (I_x - I_z) \left(\text{sen}(2\phi) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \right\} dy \quad (3.34)$$

Aplicando las identidades trigonométricas (3.35) en (3.34):

$$\left. \begin{aligned} \text{sen}^2 \phi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\phi) \\ \text{cos}^2 \phi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\phi) \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

se llega a:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ \left[I_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\phi) \right) \right. \\ \left. + \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\phi) \right) \right. \\ \left. + (I_x - I_z) \left(\text{sen}(2\phi) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \right\} dy \quad (3.36)$$

Ordenando los términos de (3.36) se obtiene (3.37).

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ \left[\frac{1}{2} I_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2} I_z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cos(2\phi) I_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cos(2\phi) I_z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} I_z \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2} I_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cos(2\phi) I_z \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cos(2\phi) I_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + (I_x - I_z) \left(\text{sen}(2\phi) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \right\} dy \quad (3.37)$$

Factorizando los momentos de inercia I_x e I_z en (3.37) se obtiene:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{I_x + I_z}{2} \right) \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \left(\left(\frac{I_x - I_z}{2} \right) \cos(2\phi) \right) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + (I_x - I_z) \left(\text{sen}(2\phi) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \right\} dy \quad (3.38)$$

Introduciendo las identidades expresadas en (3.39) en (3.38), se obtiene la ecuación (3.40) que expresa la energía de deformación del eje debida a esfuerzos de flexión.

$$\left. \begin{aligned} I_P &= \left(\frac{I_x + I_z}{2} \right) \\ I_D &= \left(\frac{I_x - I_z}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ I_P \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] + (I_D \cos(2\phi)) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] + 2I_D \left(\sin(2\phi) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \right\} dy \quad (3.40)$$

Si no existe carga axial, $U_S = U_1$, donde U_1 denota la energía de deformación de la flecha asimétrica debida a esfuerzos de flexión.

3.1.3 Soportes.

Para la caracterización de los soportes, se considera que los términos de rigidez k y amortiguamiento c se conocen, éstos se muestran esquemáticamente en la Figura 3.5.

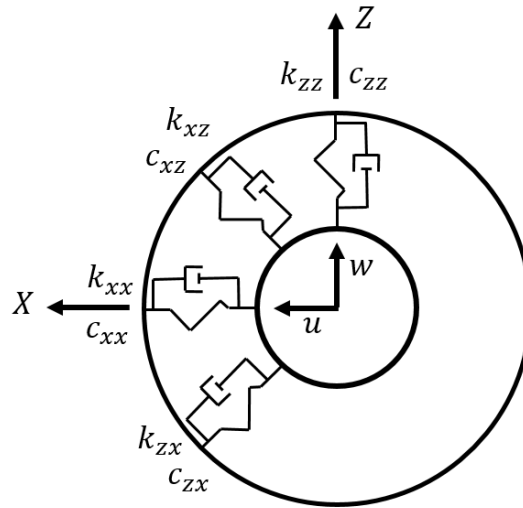


Figura 3.5. Rigidez y amortiguamiento de los soportes.

El trabajo virtual δW que realizan las fuerzas derivadas de las propiedades de los soportes que actúan sobre el eje, se determina de acuerdo a la expresión (3.41):

$$\begin{aligned} \delta W &= -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zx}u\delta w - k_{zz}w\delta w \\ &\quad -c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zx}\dot{u}\delta w - c_{zz}\dot{w}\delta w \end{aligned} \quad (3.41)$$

La ecuación (3.41) se puede escribir como (3.42):

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (3.42)$$

donde, F_u y F_w son las componentes de la fuerza generalizada. En forma matricial, (3.41) y (3.42) se expresan como (3.43).

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

3.1.4 Masa de desbalance.

El desbalance se define mediante una masa m_u localizada a una distancia d a partir del centro geométrico del eje. La masa permanece en un plano perpendicular al eje Y, y su coordenada a lo largo de este eje es constante. En la Figura 3.6 se muestra un esquema de la masa de desbalance.

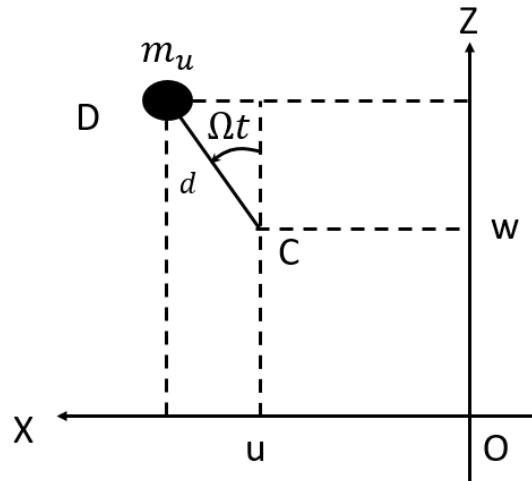


Figura 3.6 Masa de desbalance.

Del diagrama de la Figura 3.6, las coordenadas de la masa de desbalance m_u con respecto al marco de referencia inercial $R_0(X, Y, Z)$, se expresan como (3.44):

$$OD = \begin{Bmatrix} u + d \text{sen} \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \text{cos} \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Si se deriva con respecto al tiempo a (3.44), se obtiene (3.45):

$$V = \frac{dOD}{dt} \begin{Bmatrix} \dot{u} + d \Omega \text{cos} \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d \Omega \text{sen} \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Entonces, la expresión matemática para la energía cinética a casusa del desbalance se define como (3.46).

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega \dot{u} d \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \sin \Omega t) \quad (3.46)$$

El término $m_u \Omega^2 d^2 / 2$ es una constante y no tiene influencia en las ecuaciones. Así mismo, la masa m_u se considera pequeña con respecto a la masa del eje, así que la expresión para la energía cinética está dada por:

$$T_u \cong m_u d \Omega (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t). \quad (3.47)$$

3.2 Modelo de elementos finitos de un rotor con sección asimétrica (partes del rotor).

3.2.1 El disco.

Un nodo determinado del rotor tiene cuatro grados de libertad: dos desplazamientos u y w , y dos ángulos alrededor de los ejes X y Z que son respectivamente θ y ψ . Si se considera que el disco se encuentre en un nodo, entonces el vector de desplazamientos nodal δ del centro del disco se escribe en (3.48). Los desplazamientos del disco se indican en la Figura 3.7.

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^T \quad (3.48)$$

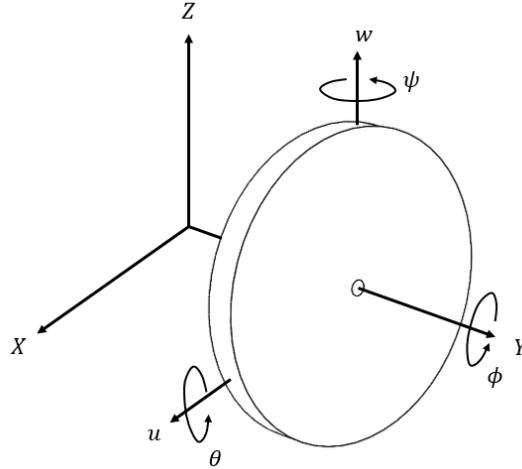


Figura 3.7. Desplazamientos del disco inercial montado en un nodo.

La energía cinética se definió en (3.6) y se reescribe a continuación:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta)$$

El término $\frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2$ es una constante que no tiene influencia en las ecuaciones y representa la energía del disco girando a una velocidad angular constante Ω ($\dot{\phi} = \Omega$). El término $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$

representa el efecto giroscópico (Coriolis). Al aplicar la ecuación de Lagrange (3.1) a la ecuación de energía cinética del disco inercial, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = M_D(\ddot{u} + \ddot{w}) + I_{Dx}(\ddot{\theta} + \ddot{\psi}) + I_{Dy}(\Omega\dot{\theta}) - (I_{Dy}\Omega\dot{\psi}) \quad (3.49)$$

que en forma matricial (3.49) se puede escribir como (3.50).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

En la ecuación (3.50), la primera matriz es la clásica matriz de masa $[M_D]$ y la segunda es la matriz de efectos giroscópicos $[C_D]$.

Si se considera que la velocidad de rotación varía en función del tiempo, es decir $\Omega = \dot{\phi}$, se crea un efecto en la rigidez del disco que surge del análisis de (3.6), donde al aplicar la ecuación de Lagrange, resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = M_D(\ddot{u} + \ddot{w}) + I_{Dx}(\ddot{\theta} + \ddot{\psi}) + I_{Dy}(\dot{\phi}\dot{\theta} - \dot{\phi}\dot{\psi}) + I_{Dy}(\theta\ddot{\phi}) \quad (3.51)$$

y en forma matricial se expresa:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \ddot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

La tercera matriz del miembro derecho es una matriz de rigidez $[K_{DT}]$, la cual sólo tiene un término y está multiplicada por la aceleración angular.

3.2.2 Rodamientos y sellos.

Las expresiones de trabajo virtual para los soportes están dadas por las ecuaciones (3.41) y (3.42), las cuales se expresan en (3.53) y (3.54):

$$F_u = -K_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w} \quad (3.53)$$

$$F_w = -K_{zz}w - k_{zx}u - c_{zz}\dot{w} - c_{zx}\dot{u} \quad (3.54)$$

Se considera que no existen rotaciones en los apoyos, por lo tanto $F_\theta = F_\psi = 0$ y se obtiene (3.55).

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

La primera matriz en (3.55) es una matriz de rigidez $[K_B]$ y la segunda es una matriz de amortiguamiento viscoso $[C_B]$. Estas matrices son generalmente asimétricas (Es decir $k_{xz} \neq k_{zx}$ y $c_{xz} \neq c_{zx}$). Y los términos de las matrices pueden variar significativamente como una función de la velocidad de rotación.

3.2.3 Masa de desbalance.

La expresión general para la energía cinética de la masa de desbalance se escribió en (3.47), y de la aplicación de la ecuación de Lagrange se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = -m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \text{sen} \Omega t \\ \text{cos} \Omega t \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

con el vector de desplazamiento:

$$\delta = [u, w]^T \quad (3.57)$$

La ecuación (3.56), corresponde a una masa de desbalance situada en el eje Z en un tiempo $t = 0$. Por otro lado, las fuerzas producidas por una masa de desbalance localizada en una posición angular α , con respecto al eje Z en el tiempo $t = 0$, se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \text{sen} \Omega t + \alpha \\ \text{cos} \Omega t + \alpha \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Si se considera que Ω varía con el tiempo ($\Omega = \dot{\phi}$), la fuerza debida al desbalance se expresa como:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = m_u d \begin{bmatrix} \dot{\phi}^2 \text{sen}(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \text{cos}(\phi + \alpha) \\ \dot{\phi}^2 \text{cos}(\phi + \alpha) + \ddot{\phi} \text{sen}(\phi + \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

3.2.4 El eje con sección asimétrica.

El eje se modela como un elemento finito tipo viga con sección transversal asimétrica. El elemento finito usado tiene dos nodos con cuatro grados de libertad cada uno, por lo que la matriz de desplazamientos del sistema tiene un tamaño de 8x8, e incluye cuatro desplazamientos y cuatro pendientes como se muestra en la Figura 3.8.

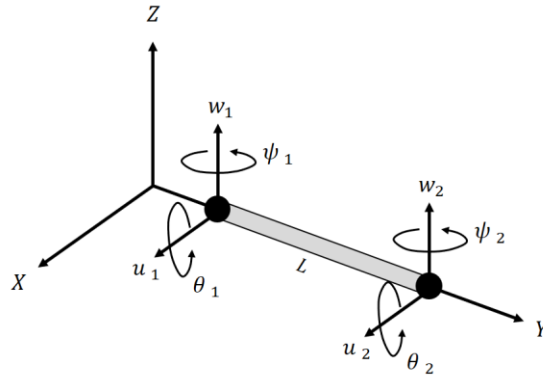


Figura 3.8. Elemento finito tipo viga para el modelado del eje [113].

Las relaciones entre los desplazamientos y los ángulos son:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.60)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.61)$$

El vector de desplazamientos nodal es:

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T \quad (3.62)$$

que incluye los desplazamientos δ_u y δ_w correspondientes a los movimientos en las direcciones X y Z, respectivamente, es decir:

$$\delta_u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \quad (3.63)$$

$$\delta_w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \quad (3.64)$$

El elemento finito se construye a partir de:

$$u = N_1(y)\delta_u \quad (3.65)$$

$$w = N_2(y)\delta_w \quad (3.66)$$

donde, $N_1(y)$ y $N_2(y)$ son las funciones de desplazamiento típicas de una viga en flexión:

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (3.67)$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (3.68)$$

Así:

$$\left. \begin{aligned} u &= N_1(y)\delta_u \\ \dot{u} &= \frac{d}{dt}(N_1(y)\delta_u) = N_1(y)\dot{\delta}_u \\ \dot{u}^2 &= [N_1(y)\dot{\delta}_u]^2 = [N_1(y)\dot{\delta}_u]^T [N_1(y)\dot{\delta}_u] = \dot{\delta}_u^T N_1^T(y) N_1(y) \dot{\delta}_u \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

De la misma manera:

$$\left. \begin{aligned} w &= N_2(y)\delta_w \\ \dot{w} &= \frac{d}{dt}(N_2(y)\delta_w) = N_2(y)\dot{\delta}_w \\ \dot{w}^2 &= [N_2(y)\dot{\delta}_w]^2 = [N_2(y)\dot{\delta}_w]^T [N_2(y)\dot{\delta}_w] = \dot{\delta}_w^T N_2^T(y) N_2(y) \dot{\delta}_w \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

De (3.60) y (3.70) se obtienen las siguientes relaciones:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dN_2(y)}{dy} \delta_w = \frac{dN_2}{dy} \delta_w \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^2 = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\}^2 = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{dN_2(y)}{dy} \dot{\delta}_w \right] \right\}^2 = \left[\frac{dN_2(y)}{dy} \dot{\delta}_w \right]^2 \\ &= \left(\frac{dN_2}{dy} \dot{\delta}_w \right)^T \left(\frac{dN_2}{dy} \dot{\delta}_w \right) = \dot{\delta}_w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \dot{\delta}_w \end{aligned} \quad (3.72)$$

De manera similar, con (3.61) y (3.69) se obtiene:

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dN_1(y)}{dy} \delta_u = -\frac{dN_1}{dy} \delta_u \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^2 &= \left[\frac{d\psi}{dt} \right]^2 = \left\{ \frac{d}{dt} \left[-\frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\}^2 = \left\{ \frac{d}{dt} \left[-\frac{dN_1(y)}{dy} \delta_u \right] \right\}^2 = \left[-\frac{dN_1}{dy} \dot{\delta}_u \right]^2 \\ &= \left(\frac{dN_1}{dy} \dot{\delta}_u \right)^T \left(\frac{dN_1}{dy} \dot{\delta}_u \right) = \dot{\delta}_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \dot{\delta}_u \end{aligned} \quad (3.74)$$

Energía cinética.

La energía cinética se expresó en (3.18) y a continuación se reescribe:

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy \\ &+ \frac{\rho I_x}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 \sin^2 \phi - 2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \phi \cos \phi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi) dy \\ &+ \frac{\rho I_y}{2} \int_0^L (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\theta + \dot{\psi}^2 \theta^2) dy \\ &+ \frac{\rho I_z}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \phi \cos \phi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi) dy \end{aligned}$$

En la ecuación (3.18), es posible utilizar la igualdad $\text{sen}2\phi = 2\text{sen}\phi\text{cos}\phi$ en los términos correspondientes, además de considerar que θ representa un valor muy pequeño, que al elevarlo al cuadrado se hace aún más pequeño por eso este valor se desprecia. Al realizar las operaciones algebraicas correspondientes, es posible obtener la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 T_S = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho}{2} \left(\frac{I_x + I_z}{2} \right) \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy \\
 & + \frac{\rho}{2} \left(\frac{I_x - I_z}{2} \right) \text{cos}(2\phi) \int_0^L [-(\dot{\psi}^2) + (\dot{\theta}^2)] dy \\
 & + \frac{\rho}{2} (-I_x + I_z) \text{sen}(2\phi) \int_0^L (\dot{\psi}\dot{\theta}) dy + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2} \\
 & + \rho I_y \dot{\phi} \int_0^L (\dot{\psi}\theta) dy
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

En (3.75) es posible introducir las identidades $I_P = \left(\frac{I_x + I_z}{2} \right)$ e $I_D = \left(\frac{I_x - I_z}{2} \right)$ escritas en (3.39), resultando:

$$\begin{aligned}
 T_S = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho}{2} I_P \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy \\
 & + \frac{\rho}{2} I_D \text{cos}(2\phi) \int_0^L [-(\dot{\psi}^2) + (\dot{\theta}^2)] dy \\
 & - \rho I_D \text{sen}(2\phi) \int_0^L (\dot{\psi}\dot{\theta}) dy + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2} \\
 & + \rho I_y \dot{\phi} \int_0^L (\dot{\psi}\theta) dy
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Al introducir las expresiones (3.69) a (3.74) en (3.76) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 T_S = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\delta_u^T N_1^T(y) N_1(y) \dot{\delta}_u + \delta_w^T N_2^T(y) N_2(y) \dot{\delta}_w) dy \\
 & + \frac{\rho}{2} I_P \int_0^L \left(\delta_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \dot{\delta}_u + \delta_w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \dot{\delta}_w \right) dy \\
 & + \frac{\rho}{2} I_D \text{cos}(2\phi) \int_0^L \left[\delta_w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \dot{\delta}_w - \delta_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \dot{\delta}_u \right] dy \\
 & + \rho I_D \text{sen}(2\phi) \int_0^L \left(\delta_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \dot{\delta}_w \right) dy + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2} \\
 & - \rho I_y \dot{\phi} \int_0^L \left(\delta_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta_w \right) dy
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

La ecuación (3.77) se puede escribir como:

$$T_S = T_1 + T_2 \tag{3.78}$$

donde:

$$T_1 = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\delta_u^T N_1^T(y) N_1(y) \delta_u + \delta_w^T N_2^T(y) N_2(y) \delta_w) dy \quad (3.79)$$

y

$$\begin{aligned} T_2 = & \frac{\rho}{2} I_P \int_0^L \left(\delta_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta_u + \delta_w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta_w \right) dy \\ & + \frac{\rho}{2} I_D \cos(2\phi) \int_0^L \left[\delta_w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta_w - \delta_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta_u \right] dy \\ & + \rho I_D \sin(2\phi) \int_0^L \left(\delta_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta_w \right) dy + \frac{\rho I_y L \phi^2}{2} \\ & - \rho I_y \phi \int_0^L \left(\delta_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta_w \right) dy \end{aligned} \quad (3.80)$$

La ecuación (3.79) se puede reescribir como se muestra en (3.81).

$$T_1 = \frac{\rho S}{2} [\delta_u^T [M_1] \delta_u + \delta_w^T [M_2] \delta_w] \quad (3.81)$$

Con

$$M_1 = \int_0^L (N_1^T(y) N_1(y)) dy = \frac{pSL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$M_2 = \int_0^L (N_2^T(y) N_2(y)) dy = \frac{pSL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Matriz de masa traslacional.

Aplicando la ecuación de Lagrange a (3.81) conforme a la metodología descrita en Lalanne y Ferraris [50], se obtiene la matriz de masa traslacional de un elemento tipo viga como se escribe en (3.84).

$$[M_{ETA}] = \frac{pSL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Por otro lado, (3.80) se puede simplificar considerando las relaciones (3.85) a (3.87) que se escriben a continuación:

$$M_3 = \int_0^L \left(\frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \right) dy = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

$$M_4 = \int_0^L \left(\frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \right) dy = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$M_5 = \int_0^L \left(\frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \right) dy = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ -3L & -4L^2 & 3L & L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ -3L & L^2 & 3L & -4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Ahora, es posible expresar T_2 en términos de M_3 , M_4 y M_5 como se muestra en (3.88).

$$T_2 = \frac{\rho}{2} I_P [\delta_u^T M_3 \delta_u + \delta_w^T M_4 \delta_w] + \frac{\rho}{2} I_D \cos(2\phi) [\delta_w^T M_4 \delta_w - \delta_u^T M_3 \delta_u] + \rho I_D \sin(2\phi) [\delta_u^T M_5 \delta_w] + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2} - \rho I_y \dot{\phi} [\delta_u^T M_5 \delta_w] \quad (3.88)$$

Al aplicar la ecuación de Lagrange a (3.88) considerando que la velocidad $\dot{\phi}$ varía con el tiempo, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial \delta} = \rho I_P [M_3 \ddot{\delta}_u + M_4 \ddot{\delta}_w] + \rho I_D \cos(2\phi) [M_4 \ddot{\delta}_w - M_3 \ddot{\delta}_u] + 2\rho I_D \dot{\phi} \sin(2\phi) [M_3 \dot{\delta}_u - M_4 \dot{\delta}_w] + \rho I_D \sin(2\phi) [M_5 \ddot{\delta}_w + M_5^T \ddot{\delta}_u] + 2\rho I_D \dot{\phi} \cos(2\phi) [M_5 \dot{\delta}_w + M_5^T \dot{\delta}_u] - \rho I_y \dot{\phi} [M_5 \dot{\delta}_w - M_5^T \dot{\delta}_u] - \rho I_y \ddot{\phi} M_5 \delta_w \quad (3.89)$$

Por otro lado, si se considera que la velocidad $\dot{\phi}$ es constante, la ecuación anterior se escribe:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial \delta} = \rho I_P [M_3 \ddot{\delta}_u + M_4 \ddot{\delta}_w] + \rho I_D \cos(2\phi) [M_4 \ddot{\delta}_w - M_3 \ddot{\delta}_u] + 2\rho I_D \dot{\phi} \sin(2\phi) [M_3 \dot{\delta}_u - M_4 \dot{\delta}_w] + \rho I_D \sin(2\phi) [M_5 \dot{\delta}_w + M_5^T \dot{\delta}_u] + 2\rho I_D \dot{\phi} \cos(2\phi) [M_5 \dot{\delta}_w + M_5^T \dot{\delta}_u] - \rho I_y \dot{\phi} [M_5 \dot{\delta}_w - M_5^T \dot{\delta}_u] \quad (3.90)$$

Nótese que la diferencia entre (3.89) y (3.90), es que en esta última el término $-\rho I_y \ddot{\phi} M_5 \delta_w$ no aparece, este término modifica a la matriz de rigidez cuando la velocidad $\dot{\phi}$ varía con el tiempo.

A partir de (3.89) y haciendo las operaciones indicadas en ella, se pueden obtener las matrices de masa rotacional y efectos giroscópicos como a continuación se describe.

Matriz de masa rotacional.

Para la matriz de masa, se seleccionan los términos en la ecuación (3.89) que contengan aceleración, es decir:

$$\begin{aligned} & \rho I_P [M_3 \ddot{\delta}_u + M_4 \ddot{\delta}_w] + \rho I_D \cos(2\phi) [M_4 \ddot{\delta}_w - M_3 \ddot{\delta}_u] \\ & + \rho I_D \sin(2\phi) [M_5 \ddot{\delta}_w + M_5^T \ddot{\delta}_u] \end{aligned} \quad (3.91)$$

El primer término de (3.91) se reescribe en (3.92), donde $[M_{EP}]$ es la matriz de masa rotacional promedio.

$$[M_{EP}] = \frac{\rho I_P}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

El segundo término de (3.91) se puede reescribir como $\cos(2\phi) \frac{\rho I_D}{30L} [M_{EC1}]$, donde $\frac{\rho I_D}{30L} [M_{EC1}]$ es la matriz de masa rotacional desviada afectada por la función coseno y se escribe como:

$$[M_{EC}] = \frac{\rho I_D}{30L} \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

El tercer término en (3.91) se puede reescribir como $\sin(2\phi) \rho I_D [M_{ES1}]$, donde $\rho I_D [M_{ES1}]$ es la matriz de masa rotacional desviada afectada por la función seno y se escribe como:

$$[M_{ES}] = \frac{\rho I_D}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Matriz de efectos giroscópicos.

De (3.89), se separan los términos que contengan velocidad para obtener la matriz de efectos giroscópicos, es decir:

$$2\rho I_D \dot{\phi} \sin(2\phi) [M_3 \dot{\delta}_u - M_4 \dot{\delta}_w] + 2\rho I_D \dot{\phi} \cos(2\phi) [M_5 \dot{\delta}_w + M_5^T \dot{\delta}_u] - \rho I_y \dot{\phi} [M_5 \dot{\delta}_w - M_5^T \dot{\delta}_u] \quad (3.95)$$

El primer término de (3.95) se puede reescribir como $\sin(2\phi) \dot{\phi} \frac{\rho I_D}{15L} [C_{ES1}]$ (el 2 que tenía el primer término de (3.95), se simplifica con el denominador de 30 que aparece en M_3 y M_4 declarados en (3.85) y (3.86), respectivamente), donde $\frac{\rho I_D}{15L} [C_{ES1}]$ es la matriz de efectos giroscópicos desviada afectada por la función seno y se escribe como:

$$[C_{ES}] = \frac{\rho I_D}{15L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

El segundo término de (3.95) se puede reescribir como $\cos(2\phi) \dot{\phi} \frac{\rho I_D}{15L} [C_{EC1}]$, donde $\frac{\rho I_D}{15L} [C_{EC1}]$ es la matriz de efectos giroscópicos desviada afectada por la función coseno y se escribe como:

$$[C_{EC}] = \frac{\rho I_D}{15L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

El tercer término de (3.95) se puede reescribir como $-\rho I_y \dot{\phi} [C_{EP1}]$, donde $-\rho I_y [C_{EP1}]$ es la matriz de efectos giroscópicos promedio y se escribe como:

$$[C_{EP}] = \frac{\rho I_P}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.98)

Cabe mencionar que el coeficiente de la ecuación (3.98) se obtiene al considerar que $I_y = I_x + I_z = 2I_P$ (I_P se declaró en (3.39)).

Matriz de rigidez.

Retomando la ecuación (3.40) y sustituyendo las relaciones (3.60), (3.61) y (3.65) - (3.74) según corresponda, se obtiene:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ I_P \left[\delta_u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta_w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta \right] + (I_D \cos(2\phi)) \left[\delta_w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta_w - \delta_u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta_u \right] + 2I_D \sin(2\phi) \left(\delta_u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right) \right\} dy \quad (3.99)$$

donde los términos pueden simplificarse con las siguientes relaciones:

$$K_1 = \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \right) dy = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$K_2 = \int_0^L \left(\frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \right) dy = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$K_3 = \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \right) dy = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ -6L & -2L^2 & 6L & -4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Definidas K_1, K_2 y K_3, U_1 en la ecuación (3.99) se puede escribir como:

$$U_1 = \frac{E}{2} \{ I_P [\delta_U^T K_1 \delta u + \delta_w^T K_2 \delta w] + I_D \cos(2\phi) [\delta_w^T K_2 \delta w - \delta_U^T K_1 \delta u] + 2I_D \sin(2\phi) [\delta u^T K_3 \delta w] \} \quad (3.103)$$

Aplicando la ecuación de Lagrange a (3.103) se obtiene (3.104), que describe la fuerza elástica del sistema.

$$\frac{\partial U_s}{\partial \delta} = EI_P [K_1 \delta_u + K_2 \delta_w] + EI_D \cos(2\phi) [K_2 \delta_w - K_1 \delta u] + EI_D \sin(2\phi) [K_3 \delta_w + K_3^T \delta u] \quad (3.104)$$

El primer término de (3.104) se reescribe en (3.105), donde $[K_{EP}]$ es la matriz de rigidez promedio.

$$[K_{EP}] = \frac{EI_P}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

El segundo término de (3.104) se puede reescribir como $\cos(2\phi) \frac{EI_D}{L^3} [K_{EC1}]$, donde $\frac{EI_D}{L^3} [K_{EC1}]$ es la matriz de rigidez desviada afectada por la función coseno y se escribe como:

$$[K_{EC}] = \frac{EI_D}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & 0 & -2L^2 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & -2L^2 & -6L & 0 & 0 & -4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

El tercer término de (3.104) se puede reescribir como $\sin(2\phi) \frac{EI_D}{L^3} [K_{ES1}]$, donde $\frac{EI_D}{L^3} [K_{ES1}]$ es la matriz de rigidez desviada afectada por la función seno y se escribe como:

$$[K_{ES}] = \frac{EI_D}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 6L & 0 & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & 0 & -2L^2 \\ 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 0 & 6L & -2L^2 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 6L & 0 & 0 & -2L^2 & -6L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -6L & -2L^2 & 0 & 0 & 6L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.107)

Incorporando el efecto del cortante a las anteriores matrices de rigidez, como se indica en el artículo Lin [114], se obtienen las siguientes matrices:

$$[K_P] = \frac{EI_P}{(1+b)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+b)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-b)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+b)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-b)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-b)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+b)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-b)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+b)L^2 \end{bmatrix}$$

(3.108)

$$[K_{GC}] = \frac{EI_D}{(1+c)L^3} \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+c)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-c)L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & -(4+c)L^2 & -6L & 0 & 0 & -(2-c)L^2 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-c)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+c)L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & -(2-c)L^2 & -6L & 0 & 0 & -(4+c)L^2 \end{bmatrix}$$

(3.109)

$$[K_{GS}] = \frac{EI_D}{(1+c)L^3} \begin{bmatrix} 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 6L & 0 & 0 & -(4+c)L^2 & -6L & 0 & 0 & -(2-c)L^2 \\ 0 & -6L & -(4+c)L^2 & 0 & 0 & 6L & -(2-c)L^2 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 6L & 0 & 0 & -2L^2 & -6L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -6L & -(2-c)L^2 & 0 & 0 & 6L & -(4+c)L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.110)

donde, E es el módulo de Young del material, b y c son el efecto cortante definidos como:

$$b = \frac{12EI_P}{GSL^2} \quad (3.111)$$

$$c = \frac{12EI_D}{GSL^2} \quad (3.112)$$

con el módulo de cortante:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.113)$$

donde, ν es la relación de Poisson y S es el área de la sección transversal asimétrica.

Cabe recordar que el efecto del último término en (3.89), incorpora parámetros de rigidez que afectan al sistema, así $-\rho I_y \ddot{\phi} M_5 \delta_w$ se puede reescribir como $\ddot{\phi} [K_{ESTA}]$, con:

$$[K_{ESTA}] = \frac{\rho I_P}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

3.3 Ecuación de movimiento del sistema rotor asimétrico-cojinete (MGDL).

La ecuación general de movimiento del sistema rotor asimétrico-cojinete se escribe en (3.115), donde, $[M_G]$, $[C_G]$ y $[K_G]$ son las matrices globales de masa, rigidez y amortiguamiento, respectivamente. $F(t)$ es el vector de fuerzas de excitación.

$$[M_G] \ddot{\delta} + [C_G] \dot{\delta} + [K_G] \delta = F(t) \quad (3.115)$$

La matriz de masa global y las matrices que la conforman se escriben en:

$$[M_G] = [M_{GP}] + [M_{GC}] \cos(2\phi) + [M_{GS}] \sin(2\phi) \quad (3.116)$$

con:

$$[M_{GP}] = [M_{TA}] + [M_P] + [M_D]$$

donde, $[M_{TA}]$ es la matriz global de masa traslacional conformada por matrices elementales $[M_{ETA}]$ de elementos con sección asimétrica. $[M_P]$ es parte de la matriz global de masa rotacional conformada por matrices elementales $[M_{EP}]$. $[M_{GC}] \cos(2\phi)$ y $[M_{GS}] \sin(2\phi)$ son las matrices globales y complementarias de la matriz de masa rotacional asimétrica conformada por las matrices elementales $[M_{EC}]$ y $[M_{ES}]$ respectivamente. $[M_D]$ representa la masa de los discos inerciales.

La matriz de amortiguamiento global y las matrices que la conforman se escriben en (3.117).

$$[C_G] = [C_B] + \dot{\phi}[C_R] \quad (3.117)$$

con:

$$[C_R] = [C_{GP}] + [C_{GC}]\cos(2\phi) + [C_{GS}]\sin(2\phi)$$

$$[C_{GP}] = [C_P] + [C_D]$$

donde, $[C_B]$ es el amortiguamiento proporcionado por los soportes. $[C_P]$ es parte de la matriz global de efectos giroscópicos de la sección asimétrica conformada por matrices elementales $[C_{EP}]$. $[C_{GC}]\cos(2\phi)$ y $[C_{GS}]\sin(2\phi)$ son matrices globales y complementarias de la matriz global de efectos giroscópicos de la sección asimétrica conformada por las matrices elementales $[C_{EC}]$ y $[C_{ES}]$, respectivamente. $[C_D]$ son los efectos giroscópicos de los discos inerciales.

La matriz de Rigidez global y las matrices que la conforman se escriben en:

$$[K_G] = [K_B] + [K_R] + \ddot{\phi}[K_{STA}] \quad (3.118)$$

con:

$$[K_R] = [K_{GP}] + [K_{GC}]\cos(2\phi) + [K_{GS}]\sin(2\phi)$$

$[K_{GP}]$ es parte de la matriz global de rigidez de elementos con sección asimétrica conformada por matrices elementales $[K_{EP}]$. $[K_{GC}]\cos(2\phi)$ y $[K_{GS}]\sin(2\phi)$ son matrices globales y complementarias de la matriz global de rigidez de elementos con sección asimétrica conformada por las matrices elementales $[K_{EC}]$ y $[K_{ES}]$ respectivamente. $[K_{STA}]$ es la matriz global del cambio de rigidez debido al efecto de la aceleración para elementos con sección asimétrica conformada por matrices elementales $[K_{ESTA}]$. La matriz $[K_{STA}]$ solo se considera en el caso de que el sistema rotodinámico opere a velocidad variable. Finalmente $[K_B]$ es la rigidez que aportan los soportes al sistema.

Si el eje del sistema rotodinámico incluye elementos con sección transversal simétrica, las matrices elementales de masa traslacional $[M_{ETS}]$, masa rotacional $[M_{ERS}]$, efectos giroscópicos $[C_{EGSim}]$, rigidez $[K_{ES}]$ y $\ddot{\phi}[K_{ESTS}]$, pueden agregarse a las matrices globales de la ecuación de movimiento del sistema (3.115). Las matrices elementales para elementos con sección transversal simétrica se escriben a continuación:

$$[M_{ETS}] = \frac{pSL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

$$[M_{ERS}] = \frac{pI}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

$$[C_{EGSim}] = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

$$[K_{ES}] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

$$[K_{ESTS}] = \frac{\rho I \ddot{\phi}}{15L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

En las matrices (3.119) a (3.123), E es el módulo de Young del material, I es el momento de inercia de área de la sección transversal del elemento simétrico, ρ es la densidad volumétrica del material, S es el área de la sección transversal, L es la longitud del elemento finito, a es el efecto cortante en elementos con sección simétrica y se determina mediante:

$$a = \frac{12EI}{GSL^2} \quad (3.124)$$

con el módulo de cortante:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.125)$$

donde, ν es la relación de Poisson.

3.3.1 Excitación del sistema (desbalance).

Es el vector de fuerza $F(t)$ de (3.115), puede contener: fuerzas debidas al desbalance, la fuerza de gravedad, fuerzas asíncronas debidas al desalineamiento, fuerzas balanceadoras que pueden ser proporcionadas por el disco de balanceo activo, etc. En esta sección solo se consideran las fuerzas debidas al desbalance. Para simplificar el análisis se considera que solo existe una masa de desbalance $m_u d$. Para tal caso, se presentan las siguientes situaciones:

-Fuerza de excitación debida al desbalance considerando que el rotor opera a velocidad constante ($\Omega = \text{constante}$).

$$F(t) = m_u d \Omega^2 \{ \text{sen}(\Omega t + \alpha) + \text{cos}(\Omega t + \alpha) \} \quad (3.126)$$

-Fuerza de excitación debida al desbalance considerando que el rotor opera a velocidad variable ($\dot{\phi} = \text{variable}$).

$$F(t) = m_u d \{ \dot{\phi}^2 \text{sen}(\dot{\phi} t + \alpha) - \ddot{\phi} \text{cos}(\dot{\phi} t + \alpha) \} + m_u d \{ \dot{\phi}^2 \text{cos}(\dot{\phi} t + \alpha) + \ddot{\phi} \text{sen}(\dot{\phi} t + \alpha) \} \quad (3.127)$$

3.4 Solución de las ecuaciones de movimiento del sistema rotor-asimétrico, método directo.

La respuesta vibratoria del sistema rotor asimétrico-cojinete, que considera masas de desbalance, se obtiene al resolver (3.115), que se reescribe a continuación:

$$[M_G] \ddot{\delta} + [C_G] \dot{\delta} + [K_G] \delta = F(t) \quad (3.128)$$

Para la solución de (3.128), (3.126) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = F_1 \text{sen} \Omega t + F_2 \text{cos} \Omega t \quad (3.129)$$

con

$$F_1 = m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \text{cos} \alpha \\ -\text{sen} \alpha \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

$$F_2 = m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \text{sen} \alpha \\ \text{cos} \alpha \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

donde, F_1 y F_2 contienen componentes de fuerzas producidas a causa de la masa de desbalance con respecto a los ejes X y Z .

Posteriormente, una solución para (3.128) se propone en la forma:

$$\delta = p_1 \text{sen}\Omega t + p_2 \text{cos}\Omega t \quad (3.132)$$

Sustituyendo (3.132) y sus derivadas correspondientes en (3.128) se puede obtener la expresión (3.133) considerando las sub matrices que conforman a $[M_G]$, $[C_G]$ y $[K_G]$.

$$\begin{bmatrix} \{K_{GP} + K_B\} - [M_{GP} - M_{GC}]\Omega^2 - K_{GC} & -\Omega[C_B + \Omega\{C_{GP} - C_{GC}\}] \\ \Omega[C_B + \Omega\{C_{GP} + C_{GC}\}] & \{K_{GP} + K_B\} - [M_{GP} + M_{GC}]\Omega^2 + K_{GC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

Con:

$$\{p_1\} = \begin{Bmatrix} p_{1x} \\ p_{1z} \end{Bmatrix}, \{p_2\} = \begin{Bmatrix} p_{2x} \\ p_{2z} \end{Bmatrix}$$

El sistema (3.133) se resuelve para valores dados de Ω , y los valores de $p_1(\Omega)$ y $p_2(\Omega)$ representan el vector de desplazamientos del sistema.

3.5 Solución de las ecuaciones de movimiento del sistema rotor-asimétrico, método de Newmark.

De acuerdo con Bathe [115], el método de integración numérica de Newmark puede ser entendido como una extensión del método de aceleración lineal, que se basa en la suposición de que la aceleración permanece lineal durante los intervalos de tiempo considerados. En el método de Newmark se considera que el desplazamiento y la velocidad de un sistema están dados por las ecuaciones (3.134) y (3.135).

$$\dot{\delta}(t + \Delta t) = \dot{\delta}(t) + [(1 - \beta)\ddot{\delta}(t) + \beta\ddot{\delta}(t + \Delta t)]\Delta t \quad (3.134)$$

$$\delta(t + \Delta t) = \delta(t) + \dot{\delta}(t)\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \gamma \right) \ddot{\delta}(t) + \gamma\ddot{\delta}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2 \quad (3.135)$$

Newmark propuso originalmente como un esquema incondicionalmente estable el método de aceleración promedio constante (también llamada regla trapezoidal) que tiene valores de $\beta = 1/2$ y $\gamma = 1/4$ (ver Figura 3.9).

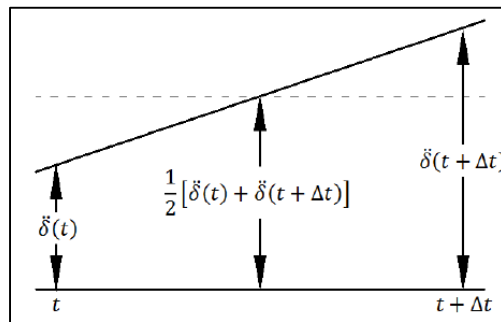


Figura 3.9. Esquema de la aceleración promedio de Newmark [115].

Hasta este punto se conoce el comportamiento del sistema (3.115), es decir $\delta(t)$, $\dot{\delta}(t)$ y $\ddot{\delta}(t)$ se conocen en el instante t . Entonces, el equilibrio para el instante $t + \Delta t$ utilizando las ecuaciones (3.134) y (3.135) se escribe como:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{M}{\gamma \Delta t^2} + [c_1 + \dot{\delta}(t + \Delta t)c_2] \left(\frac{\beta}{\gamma \Delta t} \right) + [K_1 + K_2 + \ddot{\delta}(t + \Delta t)K_3] \right\} \delta(t + \Delta t) \\ & - M \left[\frac{1}{\gamma \Delta t^2} \delta(t) + \frac{1}{\gamma \Delta t} \dot{\delta}(t) + \left(\frac{1}{2\gamma} - 1 \right) \ddot{\delta}(t) \right] \\ & - [c_1 + \dot{\phi}(t)c_2] \left[\frac{\beta}{\gamma \Delta t} \delta(t) + \left(\frac{\beta}{\gamma} - 1 \right) \dot{\delta}(t) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\beta}{\gamma} - 2 \right) \ddot{\delta}(t) \right] \\ & = \dot{\phi}^2(t + \Delta t) F_1 [\phi(t + \Delta t) + \ddot{\phi}(t + \Delta t) F_2 [\phi(t + \Delta t)]] \end{aligned} \quad (3.136)$$

Solucionando el sistema (3.136) se obtiene el vector de desplazamientos $\delta(t + \Delta t)$, y las ecuaciones (3.134) y (3.135) proporcionan respectivamente $\dot{\delta}(t + \Delta t)$ y $\ddot{\delta}(t + \Delta t)$. El proceso de cálculo numérico comienza en $t_0 = 0$, con las condiciones iniciales $\delta(0)$ y $\dot{\delta}(0)$ conocidas, y posteriormente se soluciona el sistema para cada incremento de tiempo. El algoritmo completo, se muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Algoritmo de Newmark.

a) Cálculos iniciales

1. Formular las matrices de rigidez $[K]$, masa $[M]$ y amortiguamiento $[C]$
2. Inicializar $\{\delta(0)\}$, $\{\dot{\delta}(0)\}$ y $\{\ddot{\delta}(0)\}$
3. Seleccionar el paso de tiempo Δt , los parámetros β y γ , y calcular las constantes de integración

$$\begin{aligned} & \beta \geq 0.5 ; \gamma \geq 0.25(0.5 + \beta)^2 \\ & a_0 = \frac{1}{\gamma(\Delta t)^2} ; a_1 = \frac{\beta}{\gamma \Delta t} ; a_2 = \frac{1}{\gamma \Delta t} ; a_3 = \frac{1}{2\gamma} - 1 ; a_4 = \frac{\beta}{\gamma} - 1 ; \\ & a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\beta}{\gamma} - 2 \right) ; a_6 = \Delta t(1 - \beta) ; a_7 = \beta \Delta t \end{aligned}$$

4. Formular la matriz de rigidez efectiva:

$$[\bar{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C]$$

5. Triangularizar $[\bar{K}]$.

$$[\bar{K}] = [L][D][L]^T$$

b) Para cada paso de tiempo:

1. Calcular el vector de fuerza efectiva en el tiempo $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \{\bar{F}(t + \Delta t)\} = \{F(t + \Delta t)\} + [M](a_0 \{\delta(t)\} + a_2 \{\dot{\delta}(t)\} \\ + a_3 \{\ddot{\delta}(t)\}) + [C](a_1 \{\delta(t)\} + a_4 \{\dot{\delta}(t)\} + a_5 \{\ddot{\delta}(t)\}) \end{aligned}$$

2. Resolver para los desplazamientos en el tiempo $t + \Delta t$

$$[\bar{K}]\{\delta(t + \Delta t)\} = \{\bar{F}(t + \Delta t)\}$$

3. Calcular en el tiempo $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \{\ddot{\delta}(t + \Delta t)\} = a_0 (\{\delta(t + \Delta t)\} - \{\delta(t)\}) - a_2 \{\dot{\delta}(t)\} - a_3 \{\ddot{\delta}(t)\} \\ \{\dot{\delta}(t + \Delta t)\} = \dot{\delta}(t) + a_6 \{\ddot{\delta}(t)\} + a_7 \{\ddot{\delta}(t + \Delta t)\} \end{aligned}$$

3.6 Rampa de excitación de tipo lineal.

El cambio de la frecuencia de excitación con respecto al tiempo es denominada rampa de excitación, y puede ser descrito mediante una función que puede ser creciente o decreciente. En aplicaciones industriales, esta rampa de excitación puede aproximarse a una función exponencial [50]. Sin embargo, una función lineal, que proporciona una aceleración constante, también es de interés.

Para la solución de (3.115) se consideró que la variación de la frecuencia de excitación es de la forma:

$$\dot{\phi}(t) = \dot{\phi}_0 + \ddot{\phi}t \quad (3.137)$$

donde:

$\dot{\phi}_0$ = frecuencia de excitación al inicio de la rampa.

$\ddot{\phi}$ = tasa de cambio de la frecuencia de excitación con respecto al tiempo.

t = tiempo.

3.7 Respuesta al desbalance.

3.7.1 Propiedades de un rotor asimétrico.

A continuación, se escriben las propiedades de un rotor asimétrico utilizado por Inagaki *et al.* [10], con el objetivo de verificar el modelo desarrollado en este capítulo. La Figura 3.10 muestra el modelo esquemático de dicho rotor.

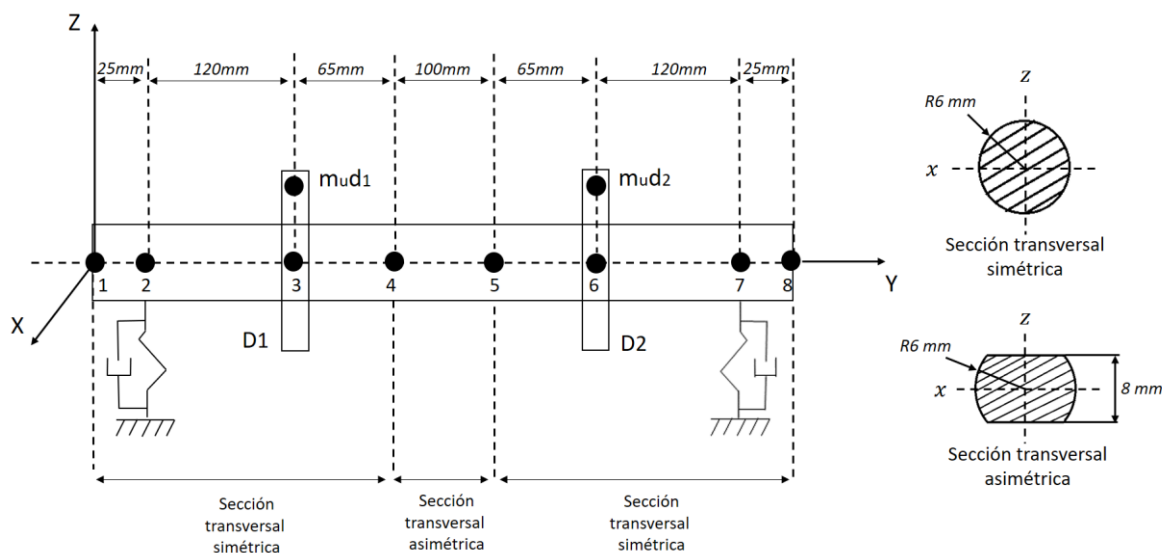


Figura 3.10. Modelo esquemático de un rotor con sección asimétrica.

Las Tablas 3.2 a 3.6 muestran las propiedades del rotor asimétrico, donde las propiedades geométricas y de los materiales se obtuvieron de Inagaki *et al.* [10].

Tabla 3.2. Propiedades mecánicas y geométricas de la flecha (r_s = radio de la sección simétrica, f = distancia perpendicular del centro a la cara plana de la sección asimétrica).

| Propiedades mecánicas | Geometría |
|--|-------------------------|
| $E = 2.0594 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | $r_s = 0.006 \text{ m}$ |
| $\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$ | $f = 0.004 \text{ m}$ |
| $V = 0.3$ | |
| $G = 7.9434 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ | |
| $\alpha = 0.89$ (Factor de deformación por cortante) | |

Tabla 3.3. Propiedades de los discos.

| Propiedades mecánicas | Geometría | | |
|---|-----------|-------|-------|
| $E = 2.0594 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | Disco | D1 | D2 |
| $\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$ | eD (m) | 0.02 | 0.02 |
| $V = 0.3$ | reD (m) | 0.05 | 0.05 |
| | riD (m) | 0.006 | 0.006 |

Tabla 3.4. Propiedades de los soportes.

| Propiedades de los soportes en nodo 2 y 7 | | | |
|---|----------------------|------------------|------------------|
| K_{xx} (N/m) | K_{zz} (N/m) | K_{xz} (N/m) | K_{zx} (N/m) |
| 1.2258×10^5 | 1.2258×10^5 | 0 | 0 |
| C_{xx} (N-s/m) | C_{zz} (N-s/m) | C_{xz} (N-s/m) | C_{zx} (N-s/m) |
| 3.7265×10^4 | 3.7265×10^4 | 0 | 0 |

Tabla 3.5. Propiedades del desbalance.

| Parámetro | Valor |
|-------------------|--|
| Desbalance (kg m) | 1×10^{-5} |
| Ángulo de fase | $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 315^\circ$ |
| Nodo | 3 |

Tabla 3.6 Coeficientes para el amortiguamiento proporcional o espectral de Rayleigh.

| Fracción de amortiguamiento crítico | Frecuencia |
|-------------------------------------|----------------------|
| $\zeta_1=0$ | $\omega_1=0$ rad/s |
| $\zeta_2=0.275$ | $\omega_2=650$ rad/s |

3.7.2 Comportamiento dinámico de un rotor asimétrico.

Considerando las propiedades descritas en la sección 3.7.1 se soluciona la ecuación (3.133), obtenida con el método directo, con la plataforma computacional desarrollada y se obtienen los resultados de las Figura 3.11 y Figura 3.12. En ellas, se muestra la respuesta al desbalance en un rango de velocidades de 0 a 4000 rpm para diferentes posiciones angulares de desbalance en el nodo 3.

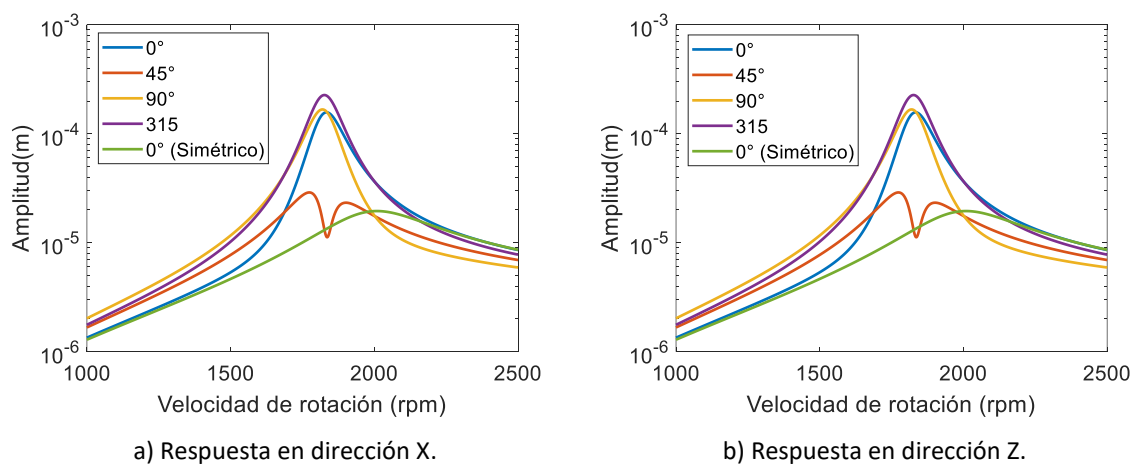


Figura 3.11. Respuesta al desbalance para diferentes posiciones angulares ($0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ y 315°) en el nodo 3.

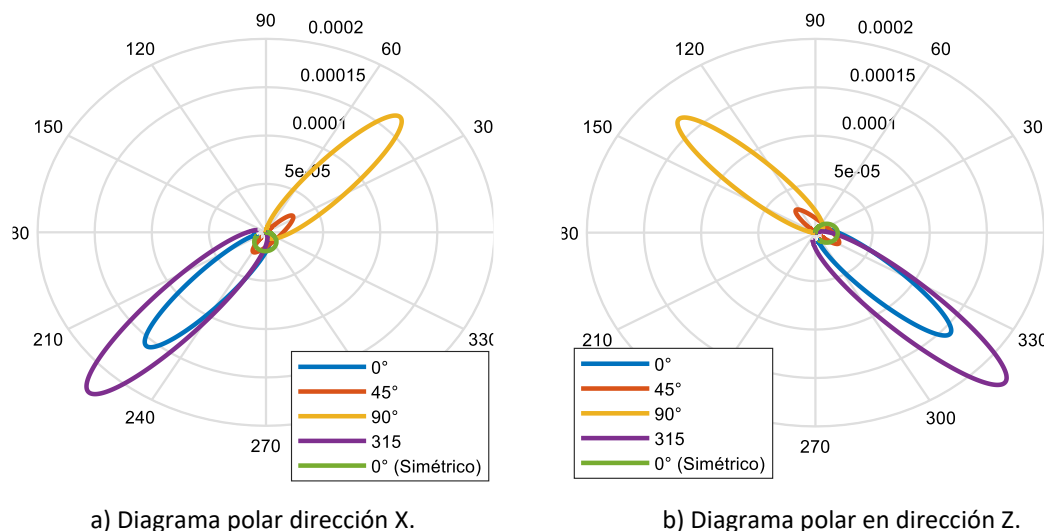


Figura 3.12. Diagramas polares de respuesta para diferentes posiciones angulares (0°, 45°, 90° y 315°) nodo 3.

Las respuestas obtenidas por el modelo desarrollado en este trabajo (Figura 3.11 y Figura 3.12) tienen un comportamiento similar a las presentadas por Inagaki *et al.* [10], además, acorde con la literatura, se verifica que las amplitudes mínimas y máximas de la respuesta en un rotor asimétrico, se obtienen cuando el desbalance está a $\pm 45^\circ$ de la dirección de la cara plana de la sección asimétrica (ver Figura 3.4).

3.7.3 Comportamiento dinámico de un rotor asimétrico: rampa de excitación.

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones del sistema rotor- asimétrico cojinete, con las propiedades de la sección 3.7.1, que se obtuvieron mediante la plataforma computacional desarrollada. La plataforma computacional resuelve el modelo matemático del rotor (3.115) mediante el algoritmo de Newmark de dónde se obtiene la respuesta del sistema desde una velocidad inicial hasta una final. Los resultados se comparan con los obtenidos con el método directo para que sean verificados numéricamente.

La Figura 3.13 a Figura 3.15, muestran la respuesta del sistema rotor asimétrico cojinete en dirección X, obtenidas mediante el método de Newmark. Para la simulación, se utilizó una rampa de excitación de tipo lineal con una aceleración constante de $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$ y un incremento de tiempo $dt = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$. La respuesta que se muestra corresponde al nodo 3, y se obtiene al considerar un desbalance $m_u d = 1 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}$ a una posición angular $\alpha = 45^\circ$.

En la Figura 3.14 y Figura 3.15, puede observarse la comparación de la solución del modelo matemático (3.115) por el método directo y el método de Newmark, se observa que ambas soluciones tienen resultados muy similares. En la Figura 3.13, la parte gris es la respuesta del rotor para cada instante de tiempo y la línea negra representa la señal filtrada. La denominada señal filtrada no es más que la captura de la respuesta en el instante de tiempo en que el rotor completa un ciclo respecto a un punto de referencia, está compuesta por una componente real y una imaginaria y son utilizadas para la comparación de la solución del modelo con el método directo.

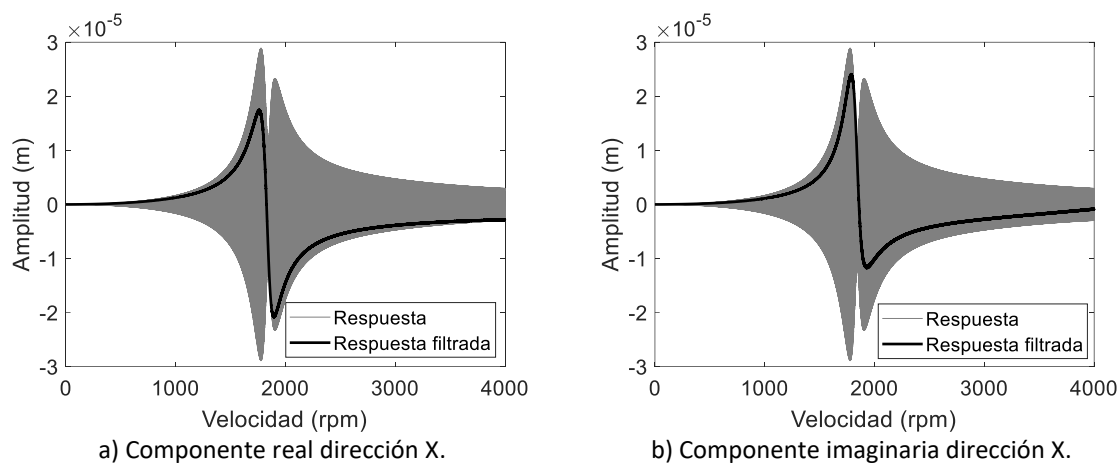


Figura 3.13. Componentes de la respuesta real e imaginaria en dirección X.

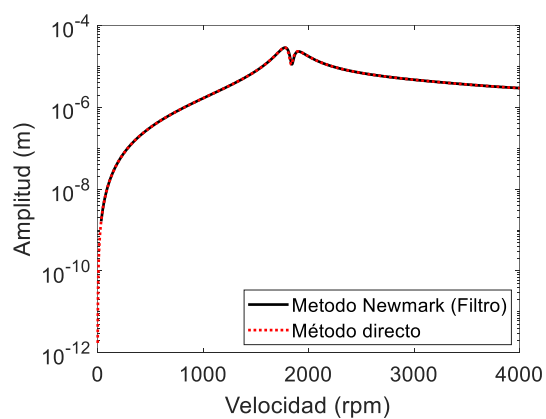


Figura 3.14. Desplazamiento logarítmico resultante en la dirección X.

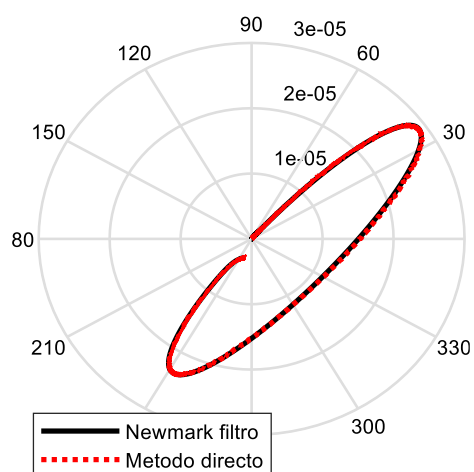


Figura 3.15. Diagrama polar de respuesta al desbalance en la dirección X.

3.8 Conclusiones del capítulo.

En el Capítulo 3, se muestra el desarrollo del modelo matemático de un rotor asimétrico, así como la verificación numérica del mismo al comparar la solución de la ecuación de movimiento del sistema por el método directo y el método de Newmark. Se evaluó el comportamiento del sistema cuando el desbalance se encuentra en diferentes posiciones angulares. Los resultados obtenidos fueron similares al trabajo de Inagaki *et al.* [10], demostrando que el modelo es capaz de representar el comportamiento de un sistema rotor asimétrico-cojinete y que la plataforma computacional desarrollada es eficiente en la simulación de este tipo de sistemas.

Capítulo 4.

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE EN ROTORES ASIMÉTRICOS.

En este capítulo, se expone una metodología de identificación de desbalance para rotores asimétricos mediante estimadores obtenidos con el método de Identificación Algebraica. El desarrollo de los estimadores, parte del modelo matemático de un sistema rotodinámico. En ese sentido, dos modelos de rotor asimétrico son propuestos para el desarrollo de estimadores. El primero es un modelo de Múltiples Grados de Libertad (MGDL) basado en el Método de Elemento Finito. El segundo es un modelo obtenido mediante desacoplamiento modal del modelo de MGDL (modelo pseudo-modal). Los estimadores de desbalance obtenidos para cada modelo, serán puestos a prueba en simulaciones numéricas realizadas en la plataforma computacional programada en Matlab. Así mismo, se comprobará si los parámetros identificados servirán para seleccionar masas de balanceo para el balanceo automático de rotores asimétricos mediante discos de balanceo activo (DBA).

4.1 Identificación de desbalance con modelo de múltiples grados de libertad.

4.1.1 Modelo matemático de un sistema rotor asimétrico-cojinete de múltiples grados de libertad con discos de balanceo activo.

El modelo matemático para el sistema rotor asimétrico-cojinete de múltiples grados de libertad con múltiples masas de desbalance y discos de balanceo activo, puede obtenerse al modificar el modelo de la ecuación (3.115) como se muestra en:

$$\begin{aligned}
 [M_G]\{\ddot{\delta}\} + [C_G]\{\dot{\delta}\} + [K_G]\{\delta\} = \\
 \dot{\phi}^2 \sum_{n=1}^{nm_u} \{F_{u(2n-1)}(\phi)\} + \ddot{\phi} \sum_{n=1}^{nm_u} \{F_{u(2n)}(\phi)\} \\
 + \dot{\phi}^2 \sum_{n=1}^{nm_b} \{F_{b(2n-1)}(\phi)\} + \ddot{\phi} \sum_{n=1}^{nm_b} \{F_{b(2n)}(\phi)\}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

con:

$$F_{u(2n-1)} = m_u d_n (\sin(\phi + \alpha_n) + \cos(\phi + \alpha_n))$$

$$F_{u(2n)} = m_u d_n (\sin(\phi + \alpha_n) - \cos(\phi + \alpha_n))$$

$$F_{b(2n-1)} = m_b e_n (\sin(\phi + \varepsilon_n) + \cos(\phi + \varepsilon_n))$$

$$F_{b(2n)} = m_b e_n (\sin(\phi + \varepsilon_n) - \cos(\phi + \varepsilon_n))$$

donde nm_u es el número de masas de desbalance presentes en el sistema, y nm_b el número de masas de balanceo proporcionadas por los discos de balanceo activo, α_n y ε_n representan las posiciones angulares de las masas de desbalance y balanceo, respectivamente. Asimismo, $\{\delta\}$ es el vector que contiene todos los desplazamientos y rotaciones nodales; $[M_G]$, $[C_G]$ y $[K_G]$ son las matrices globales de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, las submatrices que las conforman se mencionan en la sección 3.3. $\{F_{u(2n-1)}\}$ y $\{F_{u(2n)}\}$ corresponden a las fuerzas de excitación generadas por el desbalance ($m_u d_n$). Por otro lado, $\{F_{b(2n-1)}\}$ y $\{F_{b(2n)}\}$ denotan las fuerzas generadas por las masas de balanceo ($m_b e_n$) en los discos de balanceo activo. Los términos ϕ , $\dot{\phi}$ y $\ddot{\phi}$ representan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración angular del rotor en función del tiempo, respectivamente.

El disco de balanceo activo (DBA) está constituido por una masa m_b que puede posicionarse automáticamente en una posición angular (ε) y radial (e) requerida, tiene el objetivo de compensar el desbalance del sistema rotodinámico. Los componentes del DBA se muestran en el diagrama esquemático de la Figura 4.1.

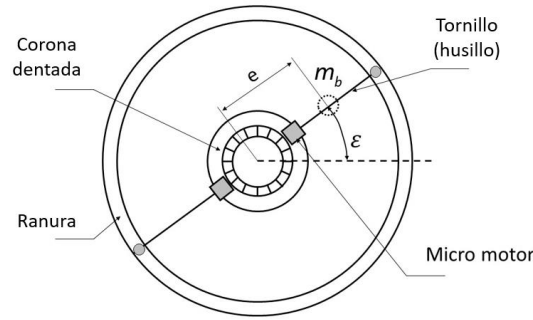


Figura 4.1. Diagrama esquemático del disco de balanceo activo [49].

4.1.2 Modelo matemático para la identificación algebraica en línea del desbalance y posición angular

El modelo identificador de desbalance en línea se obtiene a partir del modelo matemático de un sistema rotodinámico como el que se presenta en la sección 4.1.1. Para el análisis, es necesario incluir las sub matrices que conforman a $[M_G]$, $[C_G]$ y $[K_G]$, además se considera que en el sistema rotor-cojinete existe solo una masa de desbalance y un disco de balanceo activo. Por lo anterior, (4.1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & [M_{GP} + M_{GC}\cos(2\phi) + M_{GS}\sen(2\phi)]\{\ddot{\delta}\} \\
 & + [\dot{\phi}(C_{GP} + C_{GC}\cos(2\phi) + C_{GS}\sen(2\phi)) + C_B]\{\dot{\delta}\} \\
 & + [K_{GP} + K_{GC}\cos(2\phi) + K_{GS}\sen(2\phi) + K_B + \ddot{\phi}K_{ST}]\{\delta\} \\
 & = m_u d [\dot{\phi}^2 \sen(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)] \\
 & + m_u d [\ddot{\phi} \sen(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)] \\
 & + m_b e [\dot{\phi}^2 \sen(\phi + \varepsilon) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \varepsilon)] \\
 & + m_b e [\ddot{\phi} \sen(\phi + \varepsilon) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \varepsilon)]
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde, α y ε denotan las posiciones angulares de las masas de desbalance y balanceo, respectivamente.

Al multiplicar (4.2) por t^2 e integrar dos veces con respecto al tiempo "t", se obtienen las ecuaciones necesarias para obtener el modelo del identificador algebraico del desbalance y su posición angular para un sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad:

$$\begin{aligned}
 & \int^{(2)} \{ [M_{GP} + M_{GC} \cos(2\phi) + M_{GS} \sin(2\phi)] \ddot{\delta} \\
 & + [\dot{\phi} (C_{GP} + C_{GC} \cos(2\phi) + C_{GS} \sin(2\phi)) + C_B] \dot{\delta} \\
 & + [K_{GP} + K_{GC} \cos(2\phi) + K_{GS} \sin(2\phi) + K_B + \ddot{\phi} K_{ST}] \delta \} t^2 dt \\
 & = \int^{(2)} \{ m_u d [\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)] \} t^2 dt \\
 & + \int^{(2)} \{ m_u d [\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)] \} t^2 dt \\
 & + \int^{(2)} \{ m_b e [\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \varepsilon) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \varepsilon)] \} t^2 dt \\
 & + \int^{(2)} \{ m_b e [\ddot{\phi} \sin(\phi + \varepsilon) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \varepsilon)] \} t^2 dt
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde:

$\int^{(N)} \varphi(\sigma_N)$ son integrales iteradas en el tiempo (t) de la forma:
 $\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{(\sigma_{N-1})} \varphi(\sigma_N) d\sigma_N \dots d\sigma_1$, con $\int \varphi(t) = \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma$ y N un número positivo [116].

Posteriormente, al realizar procedimientos de integración por parte y tratamientos algebraicos en (4.3), es posible obtener sistemas de ecuaciones lineales para cada nodo, de la forma mostrada en (4.4).

$$A(t)\theta = B(t) \tag{4.4}$$

En la ecuación (4.4), $\theta = \{ m_u d_\eta = m_u d \cos \alpha, m_u d_\zeta = m_u d \sin \alpha \}^T$ y denota el vector a identificar (η y ζ atienden a las direcciones X y Z respectivamente), $A(t)$ y $B(t)$ se expresan como:

$$A(t) = \begin{bmatrix} -a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{12}(t) & a_{11}(t) \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

con:

$$\begin{aligned}
 a_{11}(t) &= \int t^2 \dot{\phi} \cos \phi - 2 \int^{(2)} t \dot{\phi} \cos \phi \\
 a_{12}(t) &= \int t^2 \dot{\phi} \sin \phi - 2 \int^{(2)} t \dot{\phi} \sin \phi
 \end{aligned}$$

Asimismo $b_1(t)$ y $b_2(t)$ se obtienen de (4.6) y están en función del vector de respuesta de vibración (t), para los desplazamientos en las direcciones X y Z respectivamente en los diferentes nodos del rotor. Para un sistema real, el vector $\{ \delta \}$ representa la señal que se obtiene a partir de sensores de desplazamiento, localizados en cada nodo a lo largo de la discretización de un sistema rotodinámico.

$$\begin{aligned}
 b(t) = & M_G t^2 \delta + \int \{ -4M_G t - 4\dot{\phi} t^2 [M_{GS} \cos(2\dot{\phi} t) - M_{GC} \sin(2\dot{\phi} t)] + (C_G) t^2 \} \delta \\
 & + \int^{(2)} \{ 2M_G - C_R \ddot{\phi} t^2 - 4 (M_{GC} \cos(2\dot{\phi} t) + M_{GS} \sin(2\dot{\phi} t)) \dot{\phi}^2 t^2 \\
 & + (2\ddot{\phi} t^2 + 8\dot{\phi} t) (M_{GS} \cos(2\dot{\phi} t) - M_{GC} \sin(2\dot{\phi} t)) - 2(C_G) t \\
 & + 2\dot{\phi}^2 (C_{GC} \sin(2\dot{\phi} t) - C_{GS} \cos(2\dot{\phi} t)) t^2 + (K_G) t^2 \} \delta \\
 & + \left\{ m_b e \int t^2 \dot{\phi} \cos(\phi + \varepsilon) \right\} - \left\{ 2m_b e \int^{(2)} t \dot{\phi} \cos(\phi + \varepsilon) \right\} \\
 & - \left\{ m_b e \int t^2 \dot{\phi} \sin(\phi + \varepsilon) \right\} + \left\{ 2m_b e \int^{(2)} t \dot{\phi} \sin(\phi + \varepsilon) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

De la ecuación (4.4), se puede establecer que el vector $\{\theta\}$ es identificable si la trayectoria del sistema dinámico es persistente en el sentido establecido por Fliess y Sira Ramírez [27], es decir, que el comportamiento dinámico del sistema satisface la condición $\det[A(t)] \neq 0$. En general, esta condición se mantiene al menos en un intervalo pequeño $(t_0, t_0 + \kappa]$, donde κ es un valor positivo y suficientemente pequeño [116].

De la solución de la ecuación (4.4) se obtiene el modelo para el identificador de desbalance y su posición angular.

$$\left. \begin{aligned}
 m_u d_\eta &= \frac{b_2 a_{12} - b_1 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\
 m_u d_\zeta &= \frac{b_1 a_{12} + b_2 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\
 m_u d &= \sqrt{m_u d_\eta^2 + m_u d_\zeta^2} \\
 \alpha &= \cos^{-1} \left(\frac{m_u d_\eta}{m_u d} \right)
 \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon] \tag{4.7}$$

Como se puede observar en la ecuación (4.7), la identificación de los parámetros del desbalance y su posición angular es independiente de las condiciones iniciales del sistema rotodinámico, solo depende del vector de desplazamientos del sistema en las direcciones X y Z en cada instante de tiempo.

Es importante mencionar, que los denominadores del modelo identificador de la ecuación (4.7) pueden tener cruces por valores de cero, esto provoca cocientes indeterminados que generan un proceso de identificación no fidedigno. Lo anterior puede evitarse al aplicar la ecuación (4.8) , donde se realiza una integración más con respecto al tiempo al valor absoluto del numerador (N) y denominador (D) del modelo identificador.

$$Z = \frac{\int_0^t |N(t)| dt}{\int_0^t |D(t)| dt} \tag{4.8}$$

La ecuación (4.8) evita los cruces por cero e induce un comportamiento del identificador más suave. De acuerdo con Sira–Ramírez *et al.* [117], es posible realizar integraciones adicionales para mejorar el proceso de identificación.

4.1.3 Comportamiento dinámico de un sistema rotor asimétrico – cojinete con DBA.

4.1.3.1 Sistema rotodinámico.

El análisis realizado se basa en el sistema rotodinámico mostrado en la Figura 4.2. El sistema rotodinámico se compone de un eje asimétrico, tres discos inerciales, dos DBA y dos soportes en los extremos. Asimismo, la discretización del rotor consta de 13 elementos finitos de 0.1 m de longitud. La configuración de la sección transversal de la flecha y el desbalance presente en el sistema se indican en la Figura 4.2. Se proponen tres desbalances en tres posiciones angulares diferentes (desbalance discreto), los cuales se colocan en los tres discos inerciales a lo largo del rotor, que corresponden a los nodos 3, 6 y 11 respectivamente. Los valores de los desbalances se presentan en la Tabla 4.1.

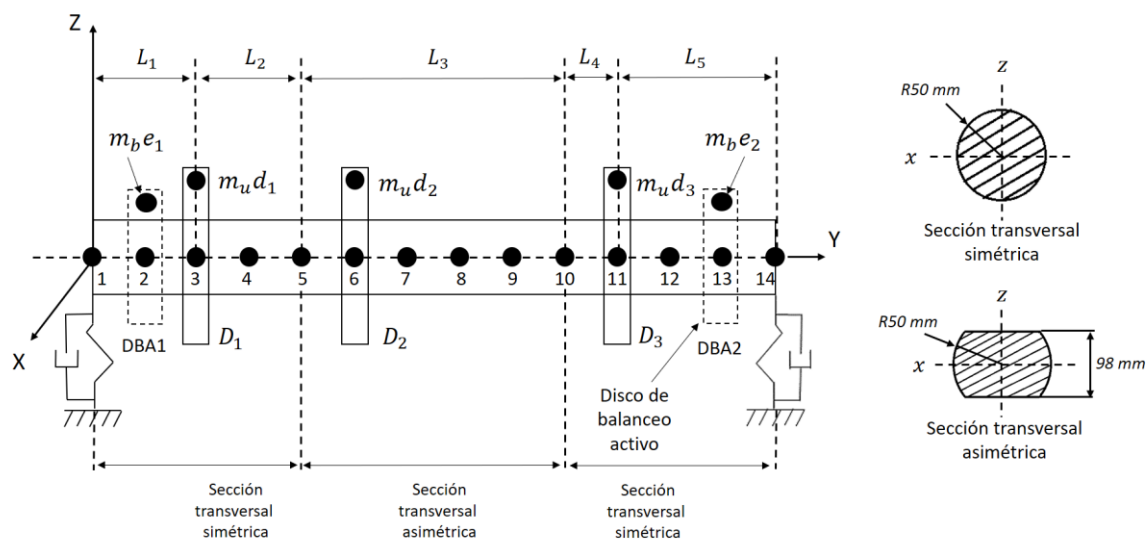


Figura 4.2. Modelo del rotor con eje asimétrico y DBA.

Tabla 4.1. Masas de desbalance presentes en el sistema.

| Desbalance | Posición angular | Nodos |
|--------------------------------|------------------------|-------|
| $m_u d_1 = 1 \times 10^{-4}$ | $\alpha_1 = 45^\circ$ | 3 |
| $m_u d_2 = 2 \times 10^{-4}$ | $\alpha_2 = 120^\circ$ | 6 |
| $m_u d_3 = 2.5 \times 10^{-4}$ | $\alpha_3 = 340^\circ$ | 11 |

En Tabla 4.2 y Tabla 4.3 se muestran las propiedades mecánicas y geométricas del eje y los discos respectivamente. Cabe mencionar que los DBA tienen una masa de 9.76 kg cada uno.

Tabla 4.2. Propiedades mecánicas y geométricas del eje (* r_s =radio de la sección simétrica).

| Propiedades mecánicas | Geometría |
|--------------------------------------|---|
| $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | $r_s = 0.05 \text{ m}$ |
| $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ | $L_1 = 0.2 \text{ m}; L_2 = 0.2 \text{ m}; L_3 = 0.5 \text{ m}$ |
| $\nu = 0.3$ | $L_4 = 0.1 \text{ m}; L_5 = 0.3 \text{ m}$ |

Tabla 4.3. Propiedades mecánicas y geométricas de los discos. (* eD=espesor del disco, ReD=radio exterior del disco, riD=radio interior del disco).

| Propiedades mecánicas | Geometría | | | |
|--------------------------------------|-----------|------|------|------|
| $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | Disco | D1 | D2 | D3 |
| $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ | eD (m) | 0.05 | 0.05 | 0.06 |
| $\nu = 0.3$ | ReD (m) | 0.12 | 0.20 | 0.20 |
| | riD (m) | 0.05 | 0.05 | 0.05 |

En Tabla 4.4 se muestran las características de rigidez y amortiguamiento viscoso de los soportes.

Tabla 4.4. Características de los soportes.

| Propiedades de los soportes en nodos 1 y 14 | |
|---|---|
| $K_{xx} = 5 \times 10^7 \text{ N/m}$ | $C_{xx} = 5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ |
| $K_{zz} = 7 \times 10^7 \text{ N/m}$ | $C_{zz} = 7 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ |
| $K_{xz} = K_{zx} = 0$ | $C_{xz} = C_{zx} = 0$ |

4.1.3.2 Respuesta de vibración de un sistema rotor asimétrico-cojinete vs número de elementos finitos.

Para el análisis de la respuesta de vibración del sistema rotor asimétrico-cojinete con DBA, se utilizó el modelo (4.1), ecuación que puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 [M_G] \{\ddot{\delta}\} + [C_G] \{\dot{\delta}\} + [K_G] \{\delta\} = & \\
 \sum_{n=1}^{nm_u} \{F_{u(2n-1)}\} \text{sen} \Omega t + \sum_{n=1}^{nm_u} \{F_{u(2n)}\} \text{cos} \Omega t & \\
 \sum_{n=1}^{nm_b} \{F_{b(2n-1)}\} \text{sen} \Omega t + \sum_{n=1}^{nm_b} \{F_{b(2n)}\} \text{cos} \Omega t &
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

con:

$$F_{u(2n-1)} = m_u d_n \Omega^2 \begin{Bmatrix} \text{cos} \alpha_n \\ -\text{sen} \alpha_n \end{Bmatrix}, F_{u(2n)} = m_u d_n \Omega^2 \begin{Bmatrix} \text{sen} \alpha_n \\ \text{cos} \alpha_n \end{Bmatrix}$$

$$F_{b(2n-1)} = m_b e_n \Omega^2 \begin{Bmatrix} \text{cos} \varepsilon_n \\ -\text{sen} \varepsilon_n \end{Bmatrix}, F_{b(2n)} = m_b e_n \Omega^2 \begin{Bmatrix} \text{sen} \varepsilon_n \\ \text{cos} \varepsilon_n \end{Bmatrix}$$

En la sección 4.1.3.1, se presentó la configuración de un sistema rotor cojinete mostrado en la Figura 4.2, sus propiedades se escriben en la Tabla 4.1 a la Figura 4.4. El sistema cuenta con 2 DBA colocados por separado en el nodo 2 y 13. En la Figura 4.3 se puede apreciar el diagrama de Campbell perteneciente al sistema rotor-cojinete descrito, se observa que, en el intervalo de velocidades de 0 a 12,000 rpm (Ω = velocidad de rotación), el desbalance discreto en D1, D2 y D3 excita cuatro frecuencias naturales del sistema.

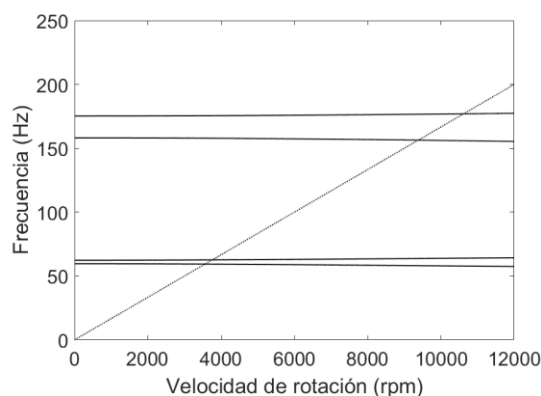


Figura 4.3. Diagrama de Campbell del sistema rotor-cojinete.

Se realizaron simulaciones con discretizaciones de 13, 26, 39 y 52 elementos finitos para explorar el efecto del tamaño de la malla en el comportamiento del sistema dinámico del rotor representado en la Figura 4.2. La comparación de las frecuencias naturales excitadas por el desbalance para cada discretización se presenta en la Tabla 4.5. Asimismo, la respuesta del desbalance calculado en el nodo 6, para cada una de las discretizaciones se representa en la Figura 4.4.

Tabla 4.5. Comparación de frecuencias naturales.

| Frecuencia natural [Hz] | Número de elementos finitos del rotor | | | | Desviación (%) |
|-------------------------|---------------------------------------|----------|----------|----------|-----------------------|
| | 13 | 26 | 39 | 52 | |
| F1 | 59.3322 | 59.3317 | 59.3308 | 59.3296 | 4.38×10^{-3} |
| F2 | 62.6345 | 62.6350 | 62.6356 | 62.6363 | 2.87×10^{-3} |
| F3 | 156.4339 | 156.4210 | 156.4009 | 156.3732 | 3.8×10^{-2} |
| F4 | 176.9327 | 176.9465 | 176.9663 | 176.9861 | 3×10^{-2} |

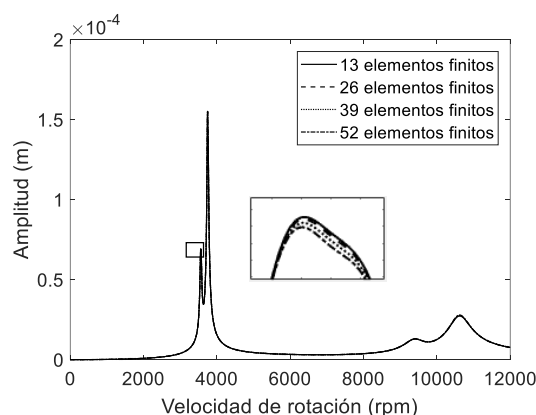


Figura 4.4. Respuesta del Sistema para diferentes discretizaciones.

En los resultados mostrados en la Tabla 4.5, se observa que las frecuencias naturales obtenidas para los diferentes casos de discretización del rotor, exhiben una diferencia porcentual menor al 1% entre la discretización más burda (13 elementos finitos) y la discretización más fina (52 elementos finitos). Un comportamiento similar se observa en la comparación de la respuesta vibratoria en la Figura 4.4, donde la variación de la respuesta de vibración entre los diferentes esquemas de discretización del sistema rotor -cojinete es poco significativa.

Con base en los resultados presentados en la Tabla 4.5 y la Figura 4.4, un modelo del sistema rotor-cojinete con 13 Elementos Finitos es suficiente para realizar un correcto análisis, reduciendo el costo computacional sin pérdida de precisión.

4.1.4 Identificación algebraica en línea del desbalance y posición angular de un sistema rotor asimétrico – cojinete.

4.1.4.1 Identificación algebraica del desbalance y su posición angular vs rampa de excitación.

Un problema asociado a la aplicación de los métodos convencionales de balanceo (balanceo modal, coeficientes de influencia), es que estos requieren de la respuesta de vibración en estado estable para diferentes valores de frecuencia de la excitación, además de la necesidad de llevar el sistema rotatorio hasta su velocidad nominal de operación. En la práctica, la frecuencia de excitación varía de manera continua, lo que impide al sistema alcanzar una vibración completamente estable, por lo que la utilidad de los datos de la respuesta de vibración del rotor, se ve limitada por la carencia de métodos de análisis en los que se considere la velocidad de las rampas de excitación. De acuerdo con lo anterior, se analizó el comportamiento del identificador del desbalance y su posición angular en función del tiempo, para diferentes rampas de excitación de tipo lineal para los casos con $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$ y $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$ en el sistema rotodinámico descrito en la sección 4.1.3.1.

Para la realización de este estudio, se consideró un desbalance en los discos D1, D2 y D3 ubicados en los nodos 3, 6 y 11 respectivamente, su magnitud se escribe en la Tabla 4.1. En la sección 4.1.4.1.1 se muestra el análisis del modelo identificador en función del tiempo en el caso donde $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$ para los nodos 3, 4, 6 y 11. El análisis para los casos con rampas de excitación de $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$ y $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$ se realiza únicamente en el nodo 6 (disco D2) y se muestra en la sección 4.1.4.1.2.

4.1.4.1.1. Identificación del desbalance y posición angular considerando una respuesta de vibración con rampa de excitación con $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$.

La identificación algebraica del desbalance, así como su posición angular, se realizó tomando como dato de entrada la respuesta de vibración del rotor en función del tiempo. La respuesta de vibración del sistema se obtiene de la solución del modelo matemático (4.1), utilizando el método de integración numérica de Newmark con una rampa de excitación de tipo lineal con $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$.

En la Figura 4.5 se muestra la respuesta de vibración correspondiente al nodo 6, aquí se observa que el sistema pasa por cuatro modos de vibración desde su velocidad inicial hasta alcanzar la velocidad nominal de operación. Utilizando una rampa de excitación tipo lineal, el tiempo que tarda el rotor en alcanzar la velocidad nominal de 12,000 rpm es de 125.7 segundos.

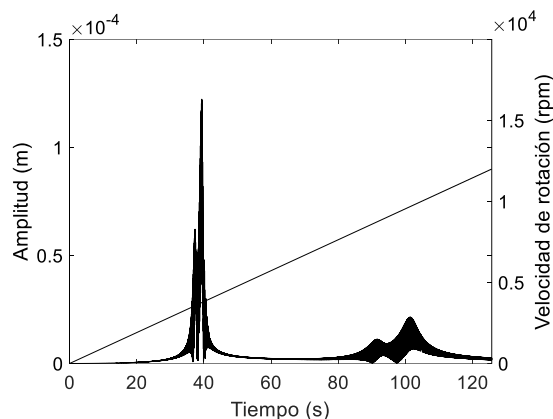


Figura 4.5. Respuesta en nodo 6.

La identificación algebraica en línea del desbalance, así como su posición angular, se determinan con base en la respuesta del rotor en función del tiempo. Como se comentó anteriormente, la respuesta para cada nodo puede obtenerse, esto permite realizar la identificación de desbalance para todos los nodos del sistema utilizando la ecuación(4.7).

La Figura 4.6 – Figura 4.8 muestran el comportamiento del identificador de desbalance y su posición angular en función del tiempo respectivamente, comportamiento que corresponde a los nodos 3, 6, 11 del rotor. En la Figura 4.6 – Figura 4.8, la línea punteada de color rojo representa los valores reales asignados, mientras que la línea negra continua representa el resultado estimado con el modelo identificador.

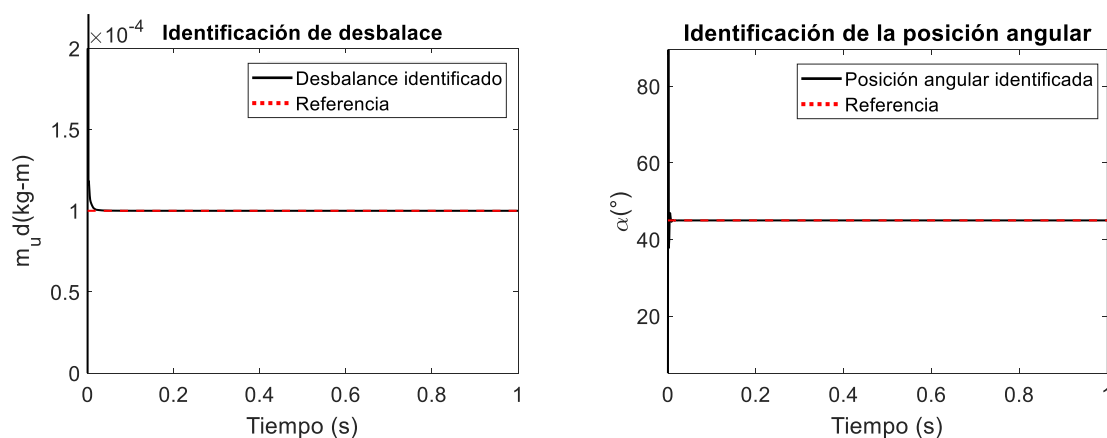


Figura 4.6. Identificación de magnitud y posición de desbalance, nodo 3.

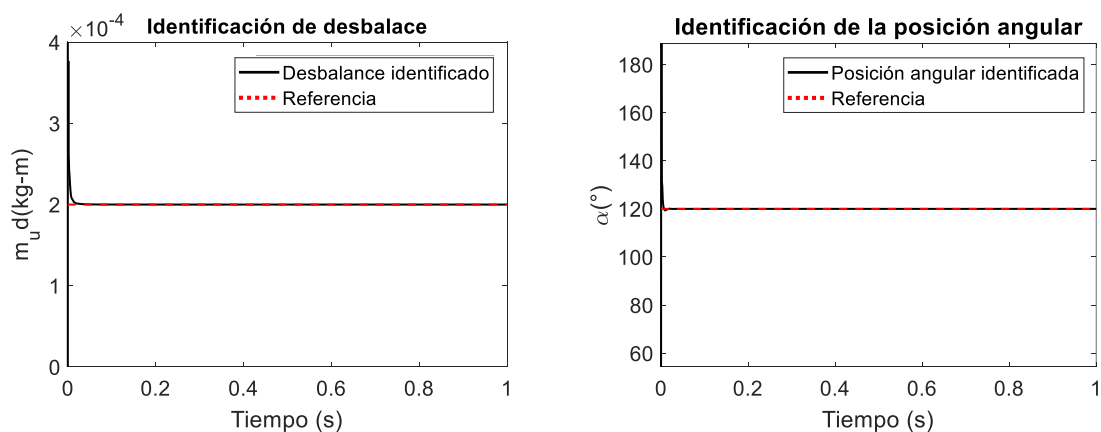


Figura 4.7. Identificación de magnitud y posición de desbalance, nodo 6.

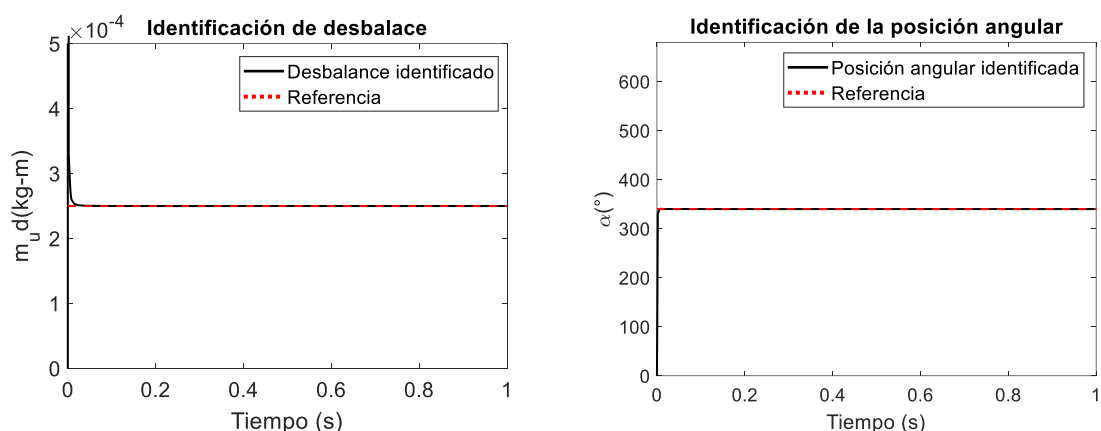


Figura 4.8. Identificación de magnitud y posición de desbalance, nodo 11.

De la Figura 4.6 a la Figura 4.8, se observa que la identificación tanto del desbalance como de su posición angular se lleva a cabo en menos de 0.2 segundos y una vez identificado el parámetro, éste se mantiene constante a lo largo del tiempo hasta alcanzar su velocidad nominal de operación del rotor. En las gráficas solo se muestra un lapso de 1 segundo para resaltar la importancia de la prontitud del identificador para converger hacia el valor identificado. El periodo de tiempo de muestreo utilizado fue 0.001 segundos, periodo de tiempo en el que se observó converge el método de Newmark para la solución de (4.1), y cuyos resultados son los datos de entrada para los identificadores algebraicos propuestos. Además, se verificó que este periodo de tiempo de muestreo es factible de conseguir con los sistemas de adquisición de datos experimentales.

El comportamiento del identificador en función del tiempo en el nodo 4, tanto del desbalance como de su posición angular, se representa en la Figura 4.9. Cabe destacar que no se presenta desbalance en este nodo del rotor.

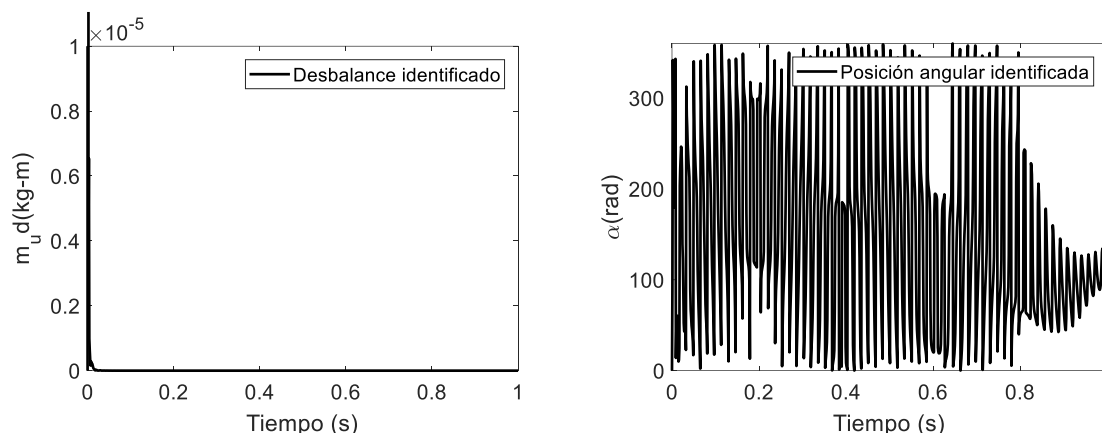


Figura 4.9. Identificación de magnitud y posición de desbalance, nodo 13.

Se puede observar en la Figura 4.9 que el identificador de desbalance se aproxima inmediatamente a cero. De manera similar, también es posible observar que el identificador de posición angular representado no puede alcanzar un valor constante ya que no hay masa presente en el nodo 4. Este comportamiento se exhibe en los nodos del sistema donde no existe desbalance.

4.1.4.1.2. Identificación del desbalance y posición angular considerando una respuesta de vibración con rampa de excitación con $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$ y $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$.

De manera similar al análisis presentado en la sección 4.1.4.1.1. En esta sección se evalúa el desempeño del modelo identificador de desbalance y su posición angular, tomando como dato de entrada la respuesta de vibración del rotor en función del tiempo en el nodo 6. La respuesta de vibración del sistema se obtiene de la solución del modelo matemático (4.1) considerando rampas de excitación lineal de $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$ y $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$.

La Figura 4.10, muestra la respuesta del sistema rotodinámico mostrado en la Figura 4.2, para una rampa de excitación de tipo lineal con $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$. Puede notarse que aumentar 10 veces la rapidez de la rampa de excitación produce un cambio en la señal de vibración si se compara con la Figura 4.5, además de que el tiempo en que tarda el rotor en alcanzar la velocidad de 12,000 rpm se reduce a 12.57 segundos.

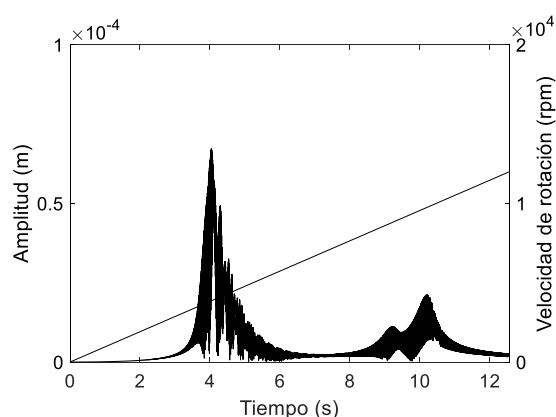


Figura 4.10. Respuesta vibratoria en nodo 6.

La señal de vibración mostrada en la Figura 4.10, se toma como dato de entrada en el modelo identificador de desbalance, obteniendo los resultados mostrados en la Figura 4.11 correspondiente a la magnitud y posición angular. Puede apreciarse que los valores identificados convergen rápidamente al valor de referencia y se mantienen constantes en el tiempo, aun cuando la señal de vibración se ve afectada por la rampa de excitación 10 veces más rápida que en el caso de la Figura 4.5.

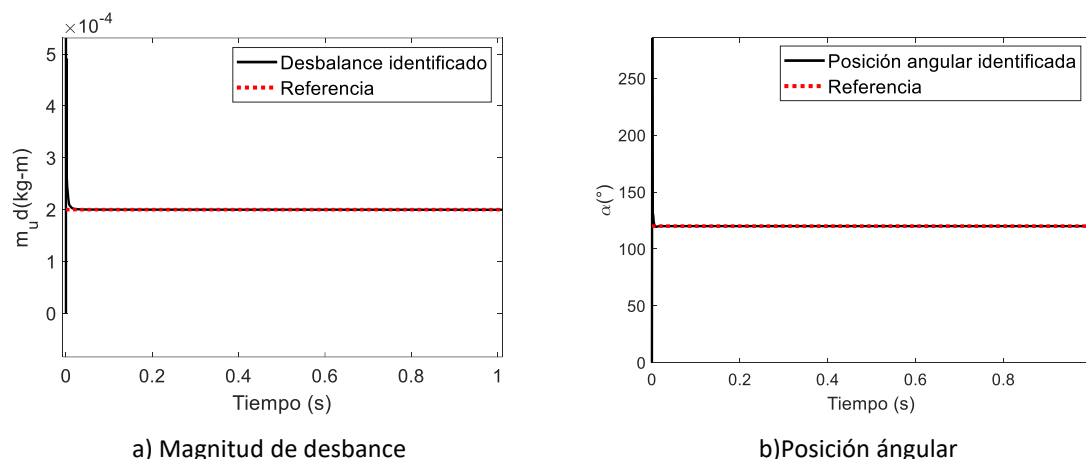


Figura 4.11. Identificación de magnitud y posición de desbalance, nodo 6.

En la Figura 4.12 se puede observar la respuesta vibratoria del mismo rotor, pero ahora con una rampa de excitación de tipo lineal con $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$, equivalente a aumentar 20 veces la rapidez de la rampa de excitación del caso mostrado en la Figura 4.5. Nuevamente se observa un cambio evidente en la respuesta vibratoria, mostrando una señal distorsionada, lo que complica la interpretación y el análisis de esta, además, el tiempo en que tarda el rotor en alcanzar la velocidad de 12,000 rpm es ahora de 6.283 segundos.

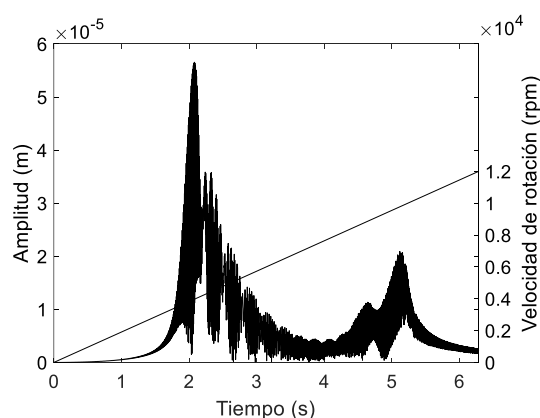


Figura 4.12. Respuesta vibratoria en nodo 6.

La Figura 4.13 corresponde a la magnitud y posición angular del desbalance, obtenidos al introducir la señal de vibración de la Figura 4.12 al modelo identificador. Nuevamente se observa que los valores identificados convergen rápidamente al valor de referencia y se mantienen constantes en el

tiempo, aun cuando la señal de vibración se ve distorsionada por efecto de la rampa de excitación 20 veces más rápida que en el caso de la Figura 4.5. Nótese que los identificadores no se ven afectados por la velocidad de la rampa de excitación, ya que estos son función del vector de desplazamientos del sistema para cada instante de tiempo.

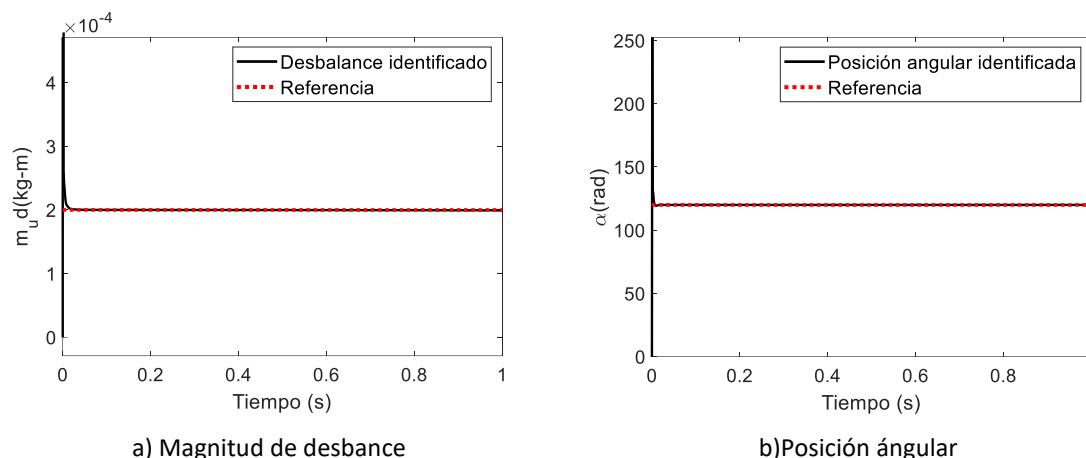


Figura 4.13. Identificación de magnitud y posición de desbalance, nodo 6.

En la Tabla 4.6 se muestra la magnitud y posición angular de los desbalances identificados en los nodos 3, 6 y 11 para los casos con rampa de excitación de tipo lineal con $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$ y $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$. El error relativo entre la magnitud de desbalance identificado y el valor de referencia se denota por $EM_{u,d}$, asimismo, $E\alpha$ denota el error absoluto entre la posición angular identificada y el valor de referencia.

Tabla 4.6. Identificación algebraica en línea del desbalance y su posición angular vs rampa de excitación.

| Aceleración $\ddot{\phi}$ [rad/s ²] | Nodo | Desbalance (Referencia) [kg·m] | Desbalance (Identificado) [kg·m] | $EM_{u,d}$ [%] | Posición angular (Referencia) [°] | Posición angular (Identificada) [°] | $E\alpha$ [°] |
|---|------|--------------------------------|----------------------------------|----------------|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| 10 | 3 | 1×10^{-4} | 1×10^{-4} | 0 | 45 | 45 | 0 |
| | 6 | 2×10^{-4} | 2×10^{-4} | 0 | 120 | 120 | 0 |
| | 11 | 2.5×10^{-4} | 2.5×10^{-4} | 0 | 340 | 340 | 0 |
| 100 | 3 | 1×10^{-4} | 9.997×10^{-5} | 0.03 | 45 | 45.003 | 0.003 |
| | 6 | 2×10^{-4} | 1.999×10^{-4} | 0.05 | 120 | 120.003 | 0.003 |
| | 11 | 2.5×10^{-4} | 2.499×10^{-4} | 0.04 | 340 | 340.003 | 0.003 |
| 200 | 3 | 1×10^{-4} | 9.988×10^{-5} | 0.12 | 45 | 45.007 | 0.007 |
| | 6 | 2×10^{-4} | 1.998×10^{-4} | 0.1 | 120 | 120.007 | 0.007 |
| | 11 | 2.5×10^{-4} | 2.497×10^{-4} | 0.12 | 340 | 340.007 | 0.007 |

Los resultados de la Tabla 4.6, muestran que las cantidades identificadas no se ven afectadas por la velocidad de la rampa de excitación, esto se debe a que son función del vector de desplazamiento del sistema para cada instante de tiempo, así como de la rampa de excitación. Los errores existentes en la magnitud y posición angular del desbalance, en los tres casos analizados no son significativos.

4.1.4.2 Identificación algebraica en línea del desbalance y su posición angular a velocidad constante.

Como se observó en la sección 4.1.4.1, la implementación de la metodología de identificación algebraica para la estimación de desbalance en un sistema rotor cojinete con flecha asimétrica considerando rampas de excitación de tipo lineal fue exitosa, ya que se logró estimar la magnitud y la posición del desbalance discreto a lo largo del rotor de manera simultánea. Resultados similares se obtienen cuando la identificación de los parámetros del desbalance se realiza operando el rotor a velocidad constante, logrando la identificación de la magnitud y posición angular del desbalance sin ser necesario llevar el rotor a través de sus velocidades críticas.

4.1.4.2.1. Modelo identificador de desbalance a velocidad constante.

Para la obtención del modelo identificador de desbalance a velocidad constante, se considera que la ecuación (4.2) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 & [M_{GP} + M_{GC}\cos(2\phi) + M_{GS}\sin(2\phi)]\{\ddot{\delta}\} \\
 & + [\dot{\phi}(C_{GP} + C_{GC}\cos(2\phi) + C_{GS}\sin(2\phi)) + C_B]\{\dot{\delta}\} \\
 & + [K_{GP} + K_{GC}\cos(2\phi) + K_{GS}\sin(2\phi) + K_B]\{\delta\} \\
 & = m_u d [\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha)] + m_u d [\dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)] \\
 & + m_b e [\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \varepsilon)] + m_b e [\dot{\phi}^2 \cos(\phi + \varepsilon)]
 \end{aligned} \tag{ 4.10 }$$

donde, α y ε denotan las posiciones angulares de las masas de desbalance y balanceo respectivamente.

Siguiendo la metodología propuesta por Fliess *et al.* [27], para obtener el modelo del identificador algebraico del desbalance y su posición angular, para un sistema rotor asimétrico-cojinete de múltiples grados de libertad operando a velocidad constante ($\dot{\phi} = \text{constante}$), se multiplica el modelo (4.10) por t^2 y se integra dos veces con respecto al tiempo "t". La ecuación resultante se puede escribir en la forma:

$$A(t)\theta = B(t) \tag{ 4.11 }$$

donde, $\theta = \{ m_u d_\eta = m_u d \cos\alpha, m_u d_\zeta = m_u d \sin\alpha \}^T$ y representa el vector de parámetros a identificar (η y ζ denotan las direcciones X y Z respectivamente). $A(t)$ y $B(t)$ se pueden expresar como:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{bmatrix}, B(t) = \begin{Bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{Bmatrix} \tag{ 4.12 }$$

con:

$$a_{11} = \int^{(2)} \text{sen}(\phi) t^2 dt$$

$$a_{12} = \int^{(2)} \text{cos}(\phi) t^2 dt$$

y

$$b(t) = M_G t^2 \delta + \int \{-4M_G t - 4\dot{\phi} t^2 [M_{GS} \text{cos}(2\dot{\phi} t) - M_{GC} \text{sen}(2\dot{\phi} t)] + (C_G) t^2\} \delta dt$$

$$+ \int^{(2)} \left\{ 2M_G - 4 \left(M_{GC} \text{cos}(2\dot{\phi} t) + M_{GS} \text{sen}(2\dot{\phi} t) \right) \dot{\phi}^2 t^2 \right.$$

$$+ (8\dot{\phi} t) \left(M_{GS} \text{cos}(2\dot{\phi} t) - M_{GC} \text{sen}(2\dot{\phi} t) \right) - 2(C_G) t \quad (4.13)$$

$$+ 2\dot{\phi}^2 (C_{GC} \text{sen}(2\dot{\phi} t) - C_{GS} \text{cos}(2\dot{\phi} t)) t^2 + (K_G) t^2 \left. \right\} \delta dt$$

$$- \int^{(2)} \left\{ m_b d [\dot{\phi}^2 \text{sen}(\phi + \varepsilon)] + m_b d [\dot{\phi}^2 \text{cos}(\phi + \varepsilon)] \right\} t^2 dt$$

Los valores de $b_1(t)$ y $b_2(t)$ se obtienen de la ecuación (4.13) y son función del vector de respuesta de vibración $\{\delta(t)\}$, para los desplazamientos en las direcciones X y Z respectivamente en los diferentes nodos del rotor. Para un sistema real, el vector $\{\delta(t)\}$ representa la señal que se obtiene a partir de sensores de desplazamiento, localizados en cada nodo a lo largo de la discretización del sistema rotodinámico. Cabe mencionar que a velocidad constante la matriz $[K_G]$ no depende de la matriz $\ddot{\phi}[K_{ST}]$, es decir $\ddot{\phi}[K_{ST}] = 0$.

De la solución de (4.11) se obtiene el modelo para el identificador de desbalance y su posición angular a velocidad constante:

$$\left. \begin{aligned} m_u d_\eta &= \frac{b_1 a_{11} + b_2 a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ m_u d_\zeta &= \frac{b_1 a_{12} - b_2 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ m_u d &= \sqrt{m_u d_\eta^2 + m_u d_\zeta^2} \\ \alpha &= \cos^{-1} \left(\frac{m_u d_\eta}{m_u d} \right) \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon] \quad (4.14)$$

donde, los subíndices η y ζ denotan las direcciones X y Z respectivamente. De la ecuación (4.14) se observa que modelo identificador de desbalance de un sistema rotor asimétrico cojinete es independiente de las condiciones iniciales del sistema, solo depende del vector de desplazamientos del sistema en las direcciones X y Z para cada instante del tiempo.

4.1.4.2.2. Identificación algebraica en línea del desbalance y su posición angular.

Para el análisis del modelo identificador a velocidad constante (4.14), se consideró el sistema rotodinámico de la Figura 4.2 operando a velocidad constante. Para la identificación de la magnitud y posición angular del desbalance se consideró que el rotor opera a una velocidad de $\dot{\phi} = 500$ rpm,

$\dot{\phi} = 1000$ rpm y $\dot{\phi} = 2000$ rpm. En el primer caso, la identificación se realizó en los nodos 3, 6 y 11, nodos donde existe el desbalance. Por simplificación, para el segundo y tercer caso, solo se muestra la identificación en el nodo 6, nodo donde se encuentra el disco inercial D2. La magnitud y posición angular del desbalance a lo largo del rotor se muestran en la Tabla 4.1.

La respuesta de vibración en las direcciones X y Z de cada nodo, se obtuvieron de la solución del modelo de (4.10) utilizando el método de integración numérica de Newmark, considerando un periodo de muestreo de 0.001 segundos para cada velocidad. Por otra parte, para la identificación de los parámetros del desbalance se utilizó el modelo (4.14) y se tomó como dato de entrada 1 segundo de tiempo de la respuesta de vibración del rotor que se obtuvo en cada uno de los nodos de análisis en las direcciones X y Z.

En la Figura 4.14 se muestra la respuesta de vibración en el nodo 6 del sistema rotodinámico operando a una velocidad constante de $\dot{\phi} = 500$ rpm.

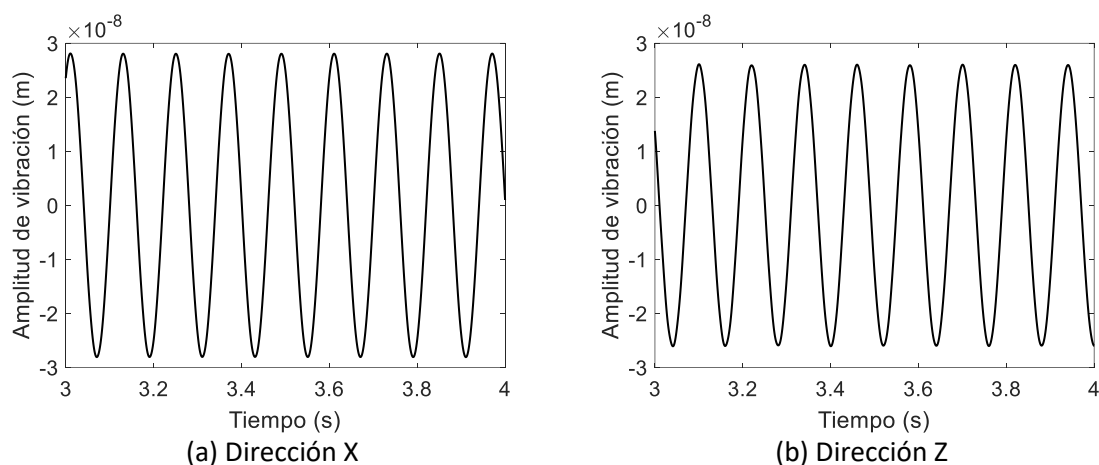


Figura 4.14. Respuesta vibratoria del rotor a 500 rpm (nodo 6).

En la Figura 4.15 y Figura 4.16 se muestra el comportamiento en función del tiempo de la identificación de la magnitud y posición angular del desbalance del rotor correspondiente al nodo 3. Adicionalmente, en la Figura 4.17 y Figura 4.18 se muestra la identificación en el nodo 6, mientras que en la Figura 4.19 y Figura 4.20 se muestra la identificación realizada en el nodo 11. En cada uno de los nodos analizados se observa como el valor identificado (línea color negro), tanto de la magnitud como de la posición angular del desbalance, converge al valor de referencia (línea punteada de color rojo) logrando la identificación de forma inmediata, presentando un comportamiento constante durante todo el tiempo de análisis.

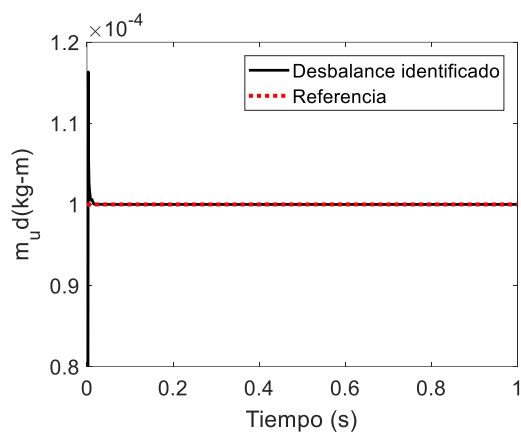


Figura 4.15. Identificación de desbalance en disco inercial D1, nodo 3 ($\dot{\phi} = 500$ rpm).

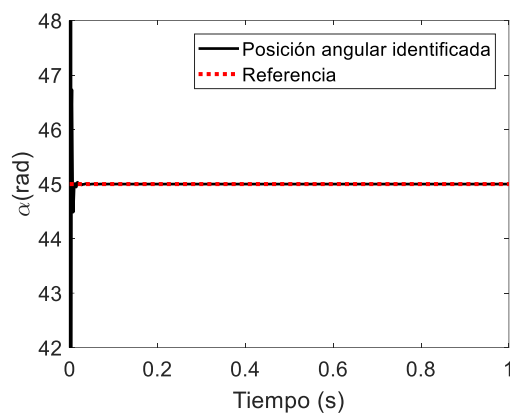


Figura 4.16. Identificación de la posición angular de desbalance en D1, nodo 3 ($\dot{\phi} = 500$ rpm).

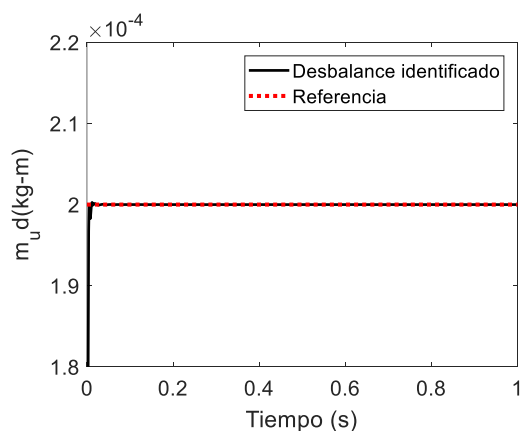


Figura 4.17. Identificación de desbalance en disco inercial D2, nodo 6 ($\dot{\phi} = 500$ rpm).

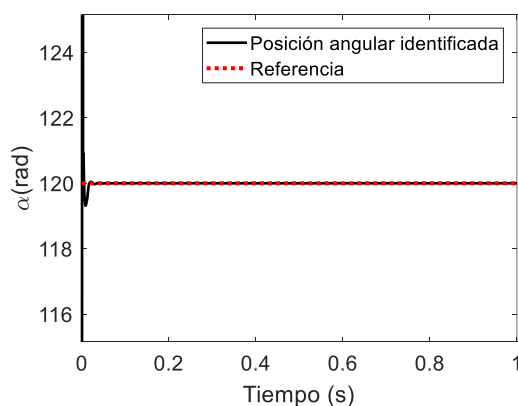


Figura 4.18. Identificación de la posición angular de desbalance en D2, nodo 6 ($\dot{\phi} = 500$ rpm).

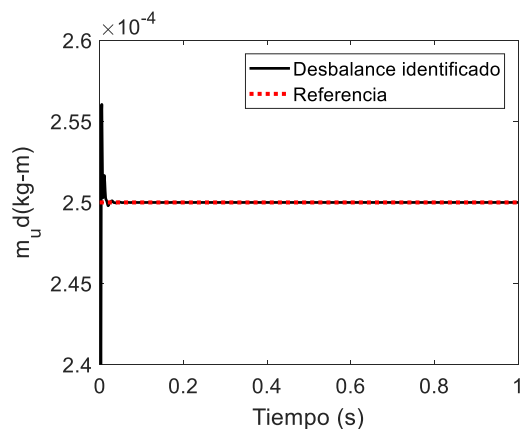


Figura 4.19. Identificación de desbalance en disco inercial D3, nodo 11 ($\dot{\phi} = 500$ rpm).

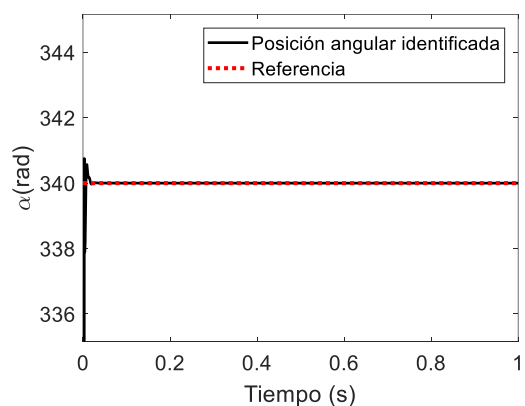


Figura 4.20. Identificación de la posición angular de desbalance en D3, nodo 11 ($\dot{\phi} = 500$ rpm).

Como se mostró en la Figura 4.15 a Figura 4.20, el modelo identificador de desbalance permite realizar la estimación del desbalance discreto en los diferentes nodos a lo largo del rotor de manera simultánea. Asimismo, es importante observar el comportamiento del modelo identificador en nodos donde no existe desbalance. Como ejemplo, en la Figura 4.21 y Figura 4.22 se muestra el comportamiento en función del tiempo de la identificación de la magnitud y posición angular del desbalance del rotor correspondiente al nodo 4, nodo donde no existe desbalance de acuerdo con la Tabla 4.1. Se puede observar en la Figura 4.21 que el valor identificado de la magnitud del desbalance tiende a un valor de cero, mientras que en la Figura 4.22 la identificación de la posición angular del desbalance no converge a un valor de referencia. Cabe hacer notar que este comportamiento del identificador se presenta en todos los nodos del rotor donde no existe masa de desbalance.

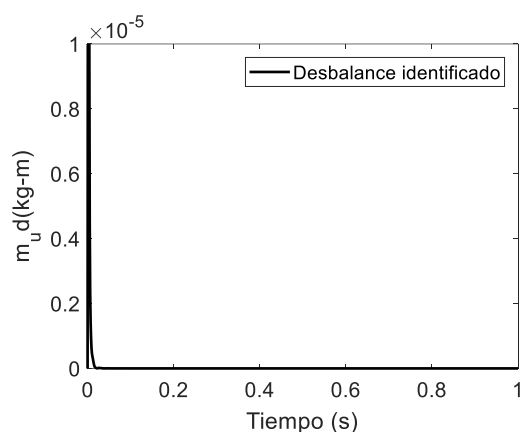


Figura 4.21. Identificación de desbalance en nodo 4 ($\dot{\phi} = 500$ rpm).

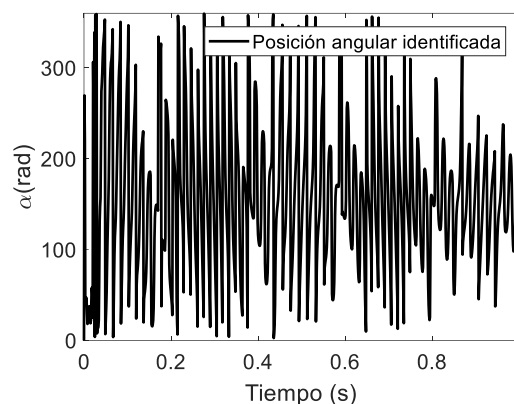


Figura 4.22. Identificación de la posición angular de desbalance en nodo 4 ($\dot{\phi} = 500$ rpm).

En la Tabla 4.7 se presenta un resumen de los valores de magnitud y la posición angular identificados para los nodos 3, 6 y 11 del rotor a velocidad constante para los casos donde $\dot{\phi} = 500, 1000$ y 2000 rpm. Asimismo, se muestra el error relativo EM_{ud} entre la magnitud de desbalance identificada y el valor de referencia, así como el error absoluto $E\alpha$ entre la posición angular identificada y la referencia.

Tabla 4.7. Identificación de desbalance a velocidad constante.

| Velocidad $\dot{\phi}$ [rpm] | Nodo | Desbalance (Referencia) [kg·m] | Desbalance (Identificado) [kg·m] | EM_{ud} [%] | Posición angular (Referencia) [°] | Posición angular (Identificada) [°] | $E\alpha$ [°] |
|---------------------------------|------|--------------------------------------|--|------------------|---|---|------------------|
| 500 | 3 | 1×10^{-4} | 9.999×10^{-5} | 0.01 | 45 | 45 | 0 |
| | 6 | 2×10^{-4} | 2×10^{-4} | 0 | 120 | 120 | 0 |
| | 11 | 2.5×10^{-4} | 2.499×10^{-4} | 0.04 | 340 | 340 | 0 |
| 1000 | 3 | 1×10^{-4} | 9.999×10^{-5} | 0.01 | 45 | 45 | 0 |
| | 6 | 2×10^{-4} | 2×10^{-4} | 0 | 120 | 120 | 0 |
| | 11 | 2.5×10^{-4} | 2.499×10^{-4} | 0.04 | 340 | 340 | 0 |
| 2000 | 3 | 1×10^{-4} | 9.999×10^{-5} | 0.01 | 45 | 45 | 0 |
| | 6 | 2×10^{-4} | 2×10^{-4} | 0 | 120 | 120 | 0 |
| | 11 | 2.5×10^{-4} | 2.499×10^{-4} | 0.04 | 340 | 340 | 0 |

En la Tabla 4.7 se puede observar que sin importar la velocidad de operación del rotor, la identificación de la magnitud y posición angular del desbalance en los nodos 3, 6 y 11 del rotor son

muy similares a los valores de referencia, presentando un error relativo máximo del 0.04% y un error absoluto de 0° en la posición angular del desbalance.

Nótese que la magnitud y posición angular del desbalance identificado operando el rotor con rampas de excitación de tipo lineal (Tabla 4.6), es el mismo desbalance que se identificó operando el rotor a velocidad constante (Tabla 4.7). Con estos resultados, se verifica que es posible realizar identificaciones de desbalance precisas en cualquier de estas dos condiciones de operación del rotor con la metodología de identificación propuesta

En las simulaciones realizadas en esta sección 4.1.4 se demuestra que el modelo identificador de desbalance de MGD, ya sea a velocidad constante o a velocidad variable, requiere únicamente la respuesta $\delta(t)$ del sistema para realizar el proceso de identificación. Esta respuesta está compuesta por desplazamientos laterales u y w , así como de rotaciones θ y ψ en cada nodo del rotor. Mendoza [105] determinó numéricamente que con la información de los desplazamientos de tres nodos es suficiente para tener los mismos resultados en la estimación del desbalance que con el vector de desplazamiento completo. Esta misma condición se verificó con el modelo identificador presentado en la sección 4.1 y permite reducir el número de sensores para la aplicación experimental del modelo identificador. Por lo anterior, en la aplicación experimental del modelo identificador de desbalance, se requiere la información del nodo donde se pretende realizar la identificación del desbalance, así como, la información de dos nodos vecinos. Los desplazamientos laterales u y w pueden medirse directamente mediante sensores de proximidad y las rotaciones o pendientes nodales θ y ψ pueden aproximarse mediante las expresiones (4.15) y (4.16).

$$\theta_i = \frac{\partial w}{\partial y} \cong \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2 * \Delta y} \quad (4.15)$$

$$\psi_i = -\frac{\partial u_i}{\partial y} \cong -\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 * \Delta y} \quad (4.16)$$

Finalmente, para completar la información necesaria de los tres nodos requeridos en el proceso de identificación, experimentalmente se requiere la medición de los desplazamientos laterales u y w de dos nodos a la izquierda y dos nodos a la derecha del nodo donde se pretende realizar la identificación del desbalance.

4.1.5 Método de balanceo para un sistema rotor asimétrico cojinete.

4.1.5.1 Arreglo modal de pesos de balanceo.

En la sección 4.1.4, se demostró la efectividad del método de identificación algebraica para la estimación de desbalance y posición angular en un rotor asimétrico de múltiples grados de libertad, donde la identificación puede realizarse en condiciones de velocidad constante o variable.

Una vez identificado el desbalance discreto a lo largo del rotor, es posible calcular un arreglo de masas modales de balanceo que serán posicionados en magnitud y ángulo por los DBA, mismos que están colocados en planos de balanceo del rotor, ver Figura 4.2.

Por otra parte, mediante el arreglo matricial que se presenta en (4.17), es posible determinar un arreglo de pesos modales para balancear un modo de vibración en específico, sin afectar modos inferiores que ya hayan sido balanceados [94].

$$\begin{aligned}
 m_b e_1 \varphi_1(y_1) + m_b e_2 \varphi_1(y_2) + \dots + m_b e_j \varphi_1(y_j) &= 0 \\
 m_b e_1 \varphi_2(y_1) + m_b e_2 \varphi_2(y_2) + \dots + m_b e_j \varphi_2(y_j) &= 0 \\
 \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 m_b e_1 \varphi_{j-1}(y_1) + m_b e_2 \varphi_{j-1}(y_2) + \dots + m_b e_j \varphi_{j-1}(y_j) &= 0 \\
 m_b e_1 \varphi_j(y_1) + m_b e_2 \varphi_j(y_2) + \dots + m_b e_j \varphi_j(y_j) &= -Ma_j
 \end{aligned}
 \tag{ 4.17 }$$

En la ecuación (4.17) y_j indica la posición del plano de balanceo sobre el eje Y del rotor, j es el j th modo de vibración y φ_j es la función característica (forma modal normalizada) del modo de vibración a considerar. La magnitud $m_b e_j$ es la masa de balanceo en cada plano (y_j) de balanceo del j th modo, y puede calcularse para los planos YOX y YOZ del sistema mostrado en la Figura 4.2. Este procedimiento puede repetirse para la cantidad de modos que se requieran afectar.

El desbalance modal Ma_j se calcula a partir del desbalance discreto a lo largo del rotor $m_u d_i$ y sus formas modales φ_j , como se indica en (4.18), donde i denota el número del desbalance identificado a lo largo del rotor.

$$Ma_j = \varphi_j^T m_u d_i
 \tag{ 4.18 }$$

El desbalance modal Ma_j puede ser calculado a partir de los desbalances $m_u d_i$ identificados, ya sea a velocidad constante o variable, por lo que pueden utilizarse los valores calculados en la Tabla 4.6 o Tabla 4.7. Para el caso de ejemplo en esta sección, se utilizan los parámetros identificados en la Tabla 4.7, correspondientes a los parámetros identificados cuando el rotor opera a velocidad constante.

En la Figura 4.5 se muestra la respuesta de vibración correspondiente al nodo 6. Nótese que el rotor pasa por cuatro modos de vibración desde su velocidad inicial hasta alcanzar la velocidad nominal de operación, primer y segundo modo de vibración en la dirección X, primer y segundo modo de vibración en la dirección Z.

En la Tabla 4.8 se muestran los datos normalizados del primer y segundo modo de vibración del rotor en la dirección X y Z respectivamente. En este caso se encuentran normalizados al nodo 6.

Tabla 4.8. Formas modales del primer y segundo modo en direcciones X y Z.

| Nodo | Modo 1 | | Modo 2 | |
|------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | φ_x | φ_z | φ_x | φ_z |
| 1 | 0.2253 | 0.1723 | 1.5981 | 1.2857 |
| 2 | 0.4226 | 0.3835 | 1.7009 | 1.4855 |
| 3 | 0.6085 | 0.5824 | 1.7264 | 1.5973 |
| 4 | 0.7724 | 0.7577 | 1.6254 | 1.5631 |
| 5 | 0.9056 | 0.8997 | 1.3847 | 1.3657 |
| 6 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 7 | 1.0477 | 1.0505 | 0.4875 | 0.4856 |
| 8 | 1.0489 | 1.0512 | -0.0830 | -0.0948 |
| 9 | 1.0048 | 1.0034 | -0.6497 | -0.6681 |
| 10 | 0.9175 | 0.9096 | -1.1518 | -1.1619 |
| 11 | 0.7903 | 0.7731 | -1.5329 | -1.5089 |
| 12 | 0.6281 | 0.5987 | -1.7362 | -1.6417 |
| 13 | 0.4421 | 0.3989 | -1.7978 | -1.6061 |
| 14 | 0.2438 | 0.1859 | -1.7737 | -1.4703 |

Asimismo, en la Figura 4.23 y Figura 4.24 se muestran gráficamente las formas modales correspondientes al primer y segundo modo de vibración para las direcciones X y Z respectivamente.

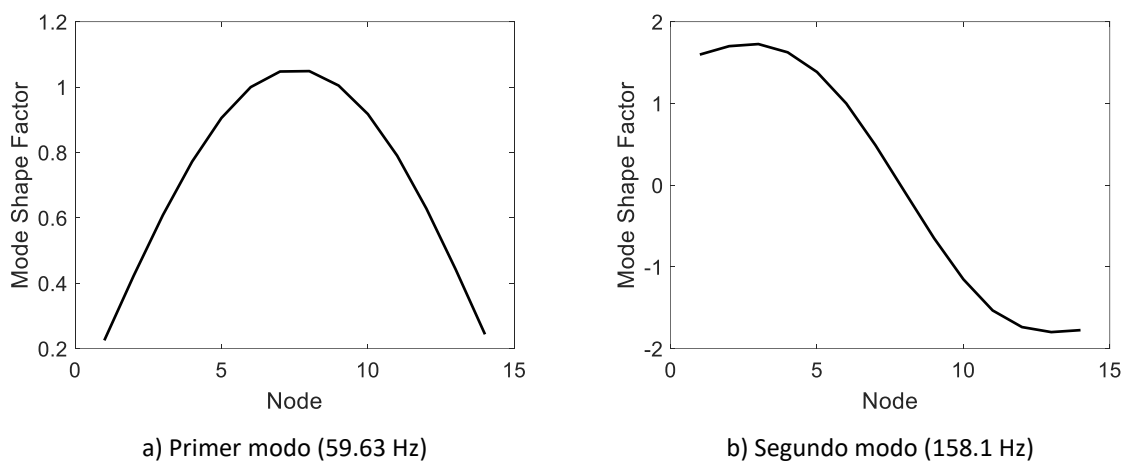


Figura 4.23. Formas modales en dirección X.

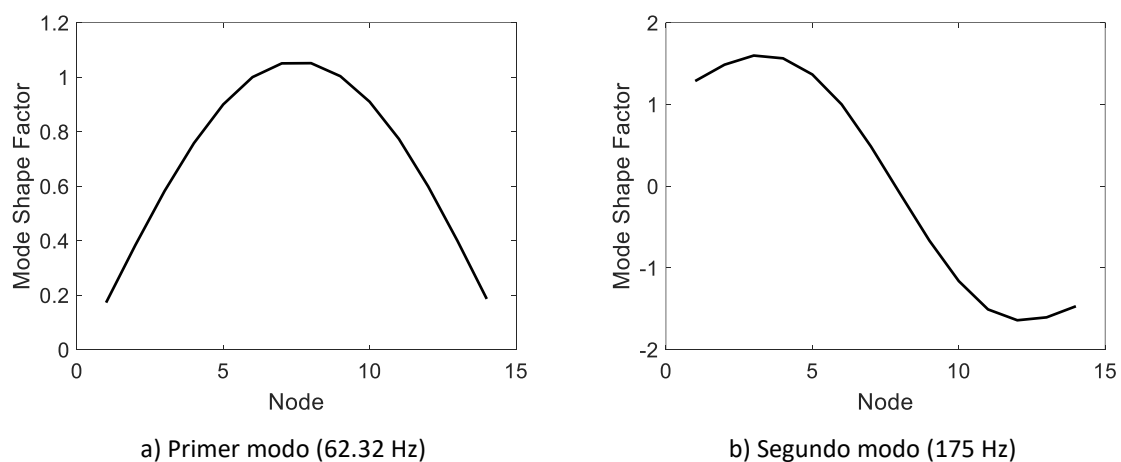


Figura 4.24. Formas modales en dirección Z.

Como el rotor pasa por dos modos de vibración hasta alcanzar su velocidad nominal, se seleccionan dos planos de balanceo de forma arbitraria a lo largo del rotor, para los planos de balanceo seleccionados es necesario que se cumpla que:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(y_1) & \phi_1(y_2) \\ \phi_2(y_1) & \phi_2(y_2) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (4.19)$$

Los masas de balanceo serán más efectivas si son usadas en los puntos de máxima deflexión, es decir donde φ_j tiene valores máximos [118].

Para el cálculo del arreglo de masas modales de balanceo para los dos primeros modos de vibración, se seleccionan los nodos 2 y 13 del rotor. Los valores de los factores de forma modal en los planos de balanceo, en los planos YOX y YOZ, se presentan en la Tabla 4.9 y Tabla 4.10, respectivamente. Cabe mencionar que los planos YOX y YOZ en el rotor, están orientados de acuerdo a la Figura 4.2.

Tabla 4.9. Valores de las funciones características en la posición de los DBA (Plano YOX).

| Plano de balanceo | Primer modo | Segundo modo |
|-------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1 | $\varphi_1(y_1) = 0.4227$ | $\varphi_2(y_1) = 1.7009$ |
| 2 | $\varphi_1(y_2) = 0.4421$ | $\varphi_2(y_2) = -1.7978$ |

Tabla 4.10. Valores de las funciones características en la posición de los DBA (Plano YOZ).

| Plano de balanceo | Primer modo | Segundo modo |
|-------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1 | $\varphi_1(y_1) = 0.3835$ | $\varphi_2(y_1) = 1.4855$ |
| 2 | $\varphi_1(y_2) = 0.3989$ | $\varphi_2(y_2) = -1.6061$ |

El desbalance modal para los planos YOX y YOZ se muestra en la Tabla 4.11 y Tabla 4.12 respectivamente. Estos se obtienen al descomponer los desbalances identificados en cada nodo del rotor en sus componentes rectangulares en las direcciones X y Z, para posteriormente aplicar la ecuación (4.18) en cada dirección.

Tabla 4.11. Desbalances modales para el plano YOX.

| | | |
|--------------|-----------|------------------------------|
| Primer modo | $M_x a_1$ | $1.2870 \times 10^{-4} kgm$ |
| Segundo modo | $M_x a_2$ | $-3.3804 \times 10^{-4} kgm$ |

Tabla 4.12. Desbalances modales para el plano YOZ.

| | | |
|--------------|-----------|-----------------------------|
| Primer modo | $M_z a_1$ | $1.4829 \times 10^{-4} kgm$ |
| Segundo modo | $M_z a_2$ | $4.1517 \times 10^{-4} kgm$ |

Se puede notar que ahora se conoce el desbalance modal debido a que, durante el proceso de identificación algebraica, se identificó el desbalance discreto de cada nodo en el rotor. Por lo tanto, el arreglo matricial dado en (4.17) a lo largo de las direcciones X y Z se puede simplificar como:

$$\begin{aligned} m_b e_{1x} \varphi_1(y_1) + m_b e_{2x} \varphi_1(y_2) &= -M_x a_1 \\ m_b e_{1x} \varphi_2(y_1) + m_b e_{2x} \varphi_2(y_2) &= -M_x a_2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} m_b e_{1z} \varphi_1(y_1) + m_b e_{2z} \varphi_1(y_2) &= -M_z a_1 \\ m_b e_{1z} \varphi_2(y_1) + m_b e_{2z} \varphi_2(y_2) &= -M_z a_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

En la ecuación (4.20) el coeficiente $m_b e_{1x}$ se refiere a la masa de balanceo en el plano 1 (nodo 2) para balancear el modo 1 y 2 en la dirección X, mientras que $m_b e_{2x}$ denota la masa de balanceo en el plano 2 (nodo 13) para balancear el modo 1 y 2 en la dirección X. De forma similar en la ecuación (4.21), el coeficiente $m_b e_{1z}$ se refiere a la masa de balanceo en el plano 1 (nodo 2) para balancear el modo 1 y 2 en la dirección Z, mientras que $m_b e_{2z}$ denota la masa de balanceo en el plano 2 (nodo 13) para balancear el modo 1 y 2 en la dirección Z.

Una vez que se conocen las masas de balanceo en los planos de balanceo (nodo 2 y 13 del rotor) para los modos 1 y 2 del rotor en las direcciones X y Z, la masa de balanceo resultante para cada plano de balanceo se calcula de la siguiente manera (arreglo de masas modales):

$$m_b e_1 = \sqrt{(m_b e_{1x})^2 + (m_b e_{1z})^2} \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_1 = \tan^{-1} \left(\frac{m_b e_{1z}}{m_b e_{1x}} \right) \quad (4.23)$$

$$m_b e_2 = \sqrt{(m_b e_{2x})^2 + (m_b e_{2z})^2} \quad (4.24)$$

$$\varepsilon_2 = \tan^{-1} \left(\frac{m_b e_{2z}}{m_b e_{2x}} \right) \quad (4.25)$$

Donde ε_1 y ε_2 es la posición angular de la masa de balanceo resultante $m_b e_1$ y $m_b e_2$ en el plano 1 (nodo2) y 2 (nodo 13) respectivamente.

En la Tabla 4.13 se presentan la magnitud y posición angular de la masa de balanceo en cada plano. Cabe hacer notar que en cada plano de balanceo se coloca un DBA, el cual colocará la masa de balanceo a una distancia y posición angular adecuada.

Tabla 4.13. Masa de balanceo y su posición angular.

| DBA1 | | DBA2 | |
|-------------------------|------------------|-------------------------|------------------|
| Masa de balanceo (kg-m) | Angular position | Masa de balanceo (kg-m) | Angular position |
| $m_b e_1$ | ε_1 | $m_b e_2$ | ε_2 |
| 3.3847×10^{-4} | 260.79° | 2.4456×10^{-4} | 191.92° |

4.1.5.2 Balanceo del rotor asimétrico-cojinete con dos DBA.

Una vez realizada la identificación del desbalance discreto en el rotor asimétrico, mediante la metodología propuesta en la sección 4.1.4, se calcula el arreglo de pesos modales para el balanceo del sistema como se describió en la sección 4.1.5.1.

La respuesta del sistema dinámico del rotor con DBAs se obtiene resolviendo el modelo escrito en (4.9), usando la información de las matrices presentadas en la sección 3.2 del capítulo 3 y las propiedades del sistema rotodinámico de la Figura 4.2 presentadas en la Tabla 4.1 a la Tabla 4.4 como datos de entrada. Además, se sustituye un arreglo modal de masas de balanceo, presentado en la Tabla 4.13, que equivale a colocar el DBA 1 y DBA 2 en los nodos 2 y 13 del rotor, respectivamente.

En la Figura 4.25 a la Figura 4.28 se muestra la respuesta de vibración del comportamiento dinámico del sistema rotor asimétrico- cojinete en el nodo 6, desbalanceado y balanceado con DBAs.

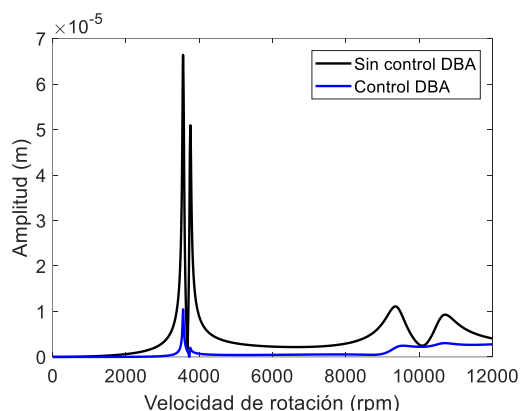


Figura 4.25. Respuesta al desbalance dirección X (nodo 6).

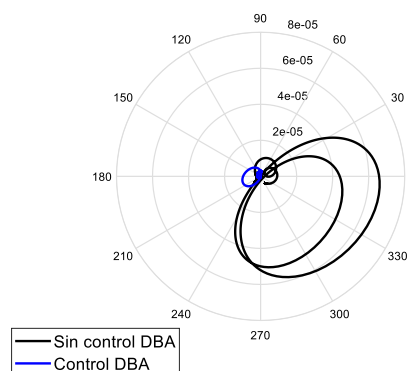


Figura 4.26. Diagrama polar de respuesta dirección X (nodo 6).

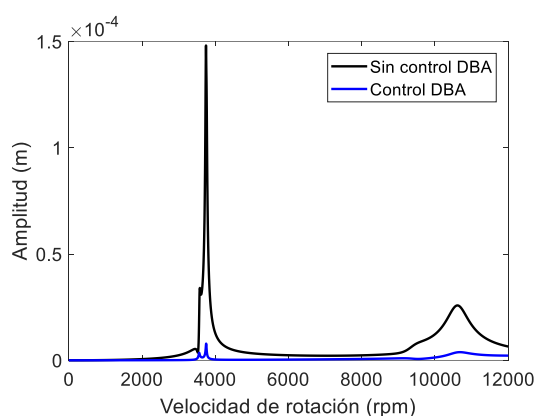


Figura 4.27.. Respuesta al desbalance dirección Z (nodo 6).

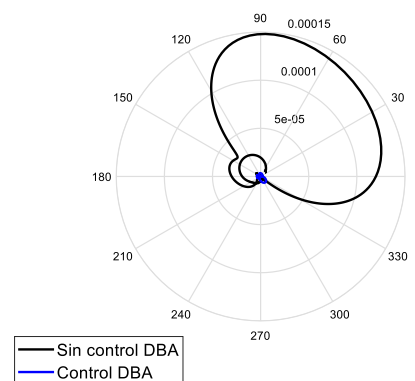


Figura 4.28. Diagrama polar de respuesta dirección Z (nodo 6).

En la Figura 4.25 y Figura 4.26 se muestra el diagrama de Bode y diagrama polar de respuesta en la dirección X, mientras que en la Figura 4.27 y Figura 4.28 se muestra el diagrama de Bode y diagrama polar de respuesta en la dirección Z. En la Figura 4.25-Figura 4.28, es posible observar que la línea negra sólida es la respuesta de vibración del rotor desbalanceado, mientras que la línea azul sólida es la respuesta de vibración del rotor balanceado incluyendo el efecto de los DBAs. Además, en la Figura 4.26 y Figura 4.28 se puede observar que los diagramas polares de respuesta en las direcciones X y Z respectivamente son elípticos, característica que presenta la respuesta de vibración de un rotor con rigidez diferente en sus ejes de inercia principales (rotor asimétrico) y que dificulta determinar el desbalance del sistema con los métodos de balanceo modal convencionales.

Nótese en la Figura 4.25 a la Figura 4.28 que el arreglo de masas modales, calculado a partir de la identificación del desbalance global del rotor, balanceó el primer y segundo modo de vibración en las direcciones X y Z respectivamente (cuatro modos de vibración).

Por otra parte, en la Figura 4.29 se presenta el diagrama de Bode resultante de la respuesta de vibración del sistema rotodinámico en el nodo 6. En la Figura 4.29 se puede observar que el efecto de los DBAs implementado en el rotor asimétrico redujo las amplitudes de vibración del sistema en todos los modos de vibración en el intervalo de 0 a 12,000 rpm.

En la Tabla 4.14 se muestra la amplitud de vibración para cada velocidad crítica del rotor en el intervalo de 0 a 12,000 rpm, con el rotor desbalanceado y balanceado con DBAs, asimismo, se muestra el porcentaje de reducción de la amplitud de vibración para cada velocidad crítica.

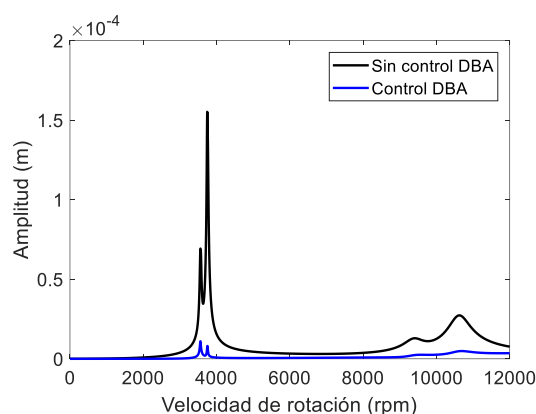


Figura 4.29. Respuesta del sistema en el nodo 6 con discos de balanceo activo en los nodos 2 y 13.

Tabla 4.14. Reducción de las amplitudes de vibración del rotor en sus velocidades críticas.

| Velocidad de rotación [rpm] | Amplitud [m] (sin control DBA) | Amplitud [m] (control DBA) | % reducción |
|-----------------------------|--------------------------------|----------------------------|-------------|
| 3560 | 6.928×10^{-5} | 1.104×10^{-5} | 84.06 |
| 3747 | 1.552×10^{-4} | 7.645×10^{-6} | 95.07 |
| 9410 | 1.293×10^{-5} | 2.366×10^{-6} | 81.70 |
| 10626 | 2.729×10^{-5} | 4.814×10^{-6} | 82.35 |

De acuerdo con los datos mostrados en la Tabla 4.14, se puede observar que las amplitudes de vibración en condiciones de resonancia se redujeron en un porcentaje mayor al 80% con respecto a la amplitud de vibración inicial del rotor.

En la sección 4.1.5.1 se mencionó que los pesos de balanceo serán más efectivos si se calcula a partir de los puntos de máxima deflexión, es decir donde φ_j presente valores máximos [118]. De acuerdo con las formas modales presentadas en la Figura 4.23 y Figura 4.24 dirección X y Z respectivamente, se propone modificar los planos de balanceo, es decir posicionar los DBA en los nodos 5 y 10 respectivamente.

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.1.5.1, se calcula el arreglo modal de masas para el balanceo del rotor. En la Tabla 4.15 se muestra el arreglo modal de masas para el DBA 1 (nodo 5) y para el DBA 2 (nodo 10).

Tabla 4.15. Masas de balanceo y suposición angular.

| DBA 1 | | DBA 2 | |
|-------------------------|------------------|-------------------------|------------------|
| Masa de balanceo (kg-m) | Posición angular | Masa de balanceo (kg-m) | Posición angular |
| $m_b e_1$ | ε_1 | $m_b e_2$ | ε_2 |
| 2.4836×10^{-4} | 286.45° | 2.2109×10^{-4} | 160.84° |

En la Figura 4.30 se presenta el diagrama de Bode resultante de la respuesta de vibración del sistema rotodinámico en el nodo 6, desbalanceado y balanceado con DBAs. En la Figura 4.30 se puede observar que el efecto de los DBAs colocados en los nodos 5 y 10 en el rotor asimétrico, redujo en mayor porcentaje las amplitudes de vibración del sistema en todos los modos de vibración en el intervalo de 0 a 12,000 rpm.

En la Tabla 4.16 se muestra la amplitud de vibración para cada velocidad crítica del rotor en el intervalo de 0 a 12,000 rpm con y sin DBAs, asimismo, se muestra el porcentaje de reducción de la amplitud de vibración para cada velocidad crítica.

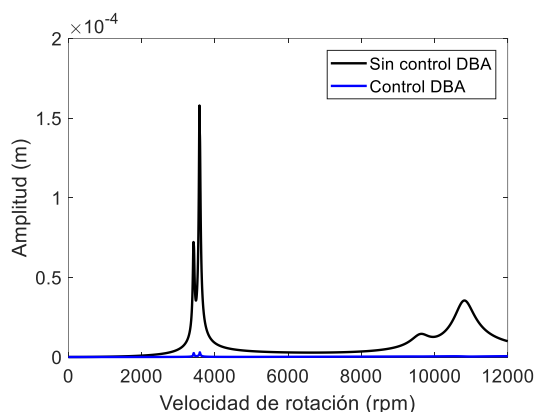


Figura 4.30. Respuesta del sistema en el nodo 6 con discos de balanceo activo en los nodos 5 y 10.

Tabla 4.16. Reducción de las amplitudes de vibración del rotor en sus velocidades críticas.

| Velocidad de rotación [rpm] | Amplitud [m] (sin control DBA) | Amplitud [m] (control DBA) | % reducción |
|-----------------------------|--------------------------------|----------------------------|-------------|
| 3417 | 7.2221×10^{-5} | 2.116×10^{-6} | 97.07 |
| 3580 | 1.579×10^{-4} | 2.042×10^{-6} | 98.71 |
| 9645 | 1.454×10^{-5} | 3.368×10^{-7} | 97.68 |
| 10815 | 3.547×10^{-5} | 3.773×10^{-7} | 98.93 |

De acuerdo con los datos mostrados en la Tabla 4.16, se puede observar que las amplitudes de vibración en condiciones de resonancia se redujeron en un porcentaje mayor al 95% con respecto a la amplitud de vibración inicial del rotor. Aun cuando no se documentó en este trabajo, se registró un comportamiento similar en la respuesta de vibración en los nodos restantes del sistema rotodinámico.

De acuerdo al comportamiento de la respuesta de vibración que se presenta en la Figura 4.29 y Figura 4.30, se muestra que el método de identificación algebraica de parámetros propuesto para la identificación del desbalance en un rotor asimétrico-cojinete de múltiples grados de libertad, permite el cálculo de un arreglo modal de masas para el balanceo del rotor en al menos cuatro modos de vibración con 2 DBAs, utilizando el método de balanceo modal convencional.

4.2 Identificación de desbalance modal en rotor asimétrico.

En la sección 4.1 se mostró la integración del método de identificación algebraica, balanceo modal convencional y discos de balanceo activo para el balanceo de un sistema rotor asimétrico-cojinete. Mediante simulaciones numéricas se demostró la efectividad del modelo identificador algebraico en la estimación del desbalance discreto en múltiples puntos del rotor. La estimación del desbalance discreto permitió el cálculo del desbalance modal, lo que facilitó el cálculo de un arreglo de masas de balanceo modal mediante el método de balanceo modal convencional. Finalmente, el arreglo de masas de balanceo fue proporcionado por los DBAs, logrando el balanceo de hasta cuatro modos de vibración. En esta sección, se propone un modelo identificador algebraico para estimar directamente el desbalance modal de un sistema rotor asimétrico - cojinete. La principal ventaja de este modelo, es que solo se requiere la respuesta de un solo nodo como dato de entrada para la estimación directa del desbalance modal. Mediante simulaciones numéricas, se mostrará la efectividad de la integración del modelo identificador de desbalance modal, el balanceo modal convencional y discos de balanceo activo para el balanceo de un sistema rotor asimétrico cojinete de múltiples grados de libertad.

4.2.1 Desacoplamiento modal del modelo de múltiples grados de libertad (método pseudo-modal).

Para el desacoplamiento modal, es necesario retomar el modelo rotodinámico (4.1) de la sección 4.1.1, que de manera simplificada se reescribe en (4.26).

$$[M_G]\ddot{\delta} + [C_G]\dot{\delta} + [K_G]\delta = F(t) \quad (4.26)$$

Posteriormente, una base modal se define por la solución de:

$$[M_G]\{\ddot{\delta}\} + [K_G]\{\delta\} = 0 \quad (4.27)$$

Los j primeros modos $\varphi_1, \dots, \varphi_j$ forman una matriz

$$\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_j] \quad (4.28)$$

la cual es usada para obtener un nuevo conjunto de ecuaciones de

$$\delta = \varphi p. \quad (4.29)$$

De manera más explícita, Gunter *et al.* [119] menciona que se puede asumir que las amplitudes del rotor se pueden expresar como una serie en términos de formas modales para cada velocidad crítica como sigue:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = p_1 \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \vdots \\ \varphi_{1n} \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \vdots \\ \varphi_{2n} \end{bmatrix} + \dots + p_j \begin{bmatrix} \varphi_{j1} \\ \varphi_{j2} \\ \vdots \\ \varphi_{jn} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

donde:

j =modo de vibración.

n = número de nodo del sistema.

Pre-multiplicando el vector traspuesto φ_j^T en (4.26) se obtiene:

$$[\varphi_j^T][M_G][\varphi_j]\ddot{p}_j + [\varphi_j^T][C_G][\varphi_j]\dot{p}_j + \varphi_j^T[K_G][\varphi_j]p_j = \varphi_j^T F(t) \quad (4.31)$$

Considerando las sub matrices que componen a $[M_G]$, $[C_G]$ y $[K_G]$, descritas en la sección 3.3 del capítulo 3, la ecuación (4.31) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & [\varphi_j^T][M_{GP} + M_{GC}\cos(2\phi) + M_{GS}\sin(2\phi)][\varphi_j]\ddot{p}_j \\ & + [\varphi_j^T][\dot{\phi}(C_{GP} + C_{GC}\cos(2\phi) + C_{GS}\sin(2\phi)) + C_B][\varphi_j]\dot{p}_j \\ & + \varphi_j^T[K_{GP} + K_{GC}\cos(2\phi) + K_{GS}\sin(2\phi) + K_B][\varphi_j]p_j = \varphi_j^T F(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

De esta manera se obtiene el modelo pseudo-modal escrito como:

$$\begin{aligned} & [[m_{GP}] + \cos(2\phi)[m_{GC}] + \sin(2\phi)[m_{GS}]]\ddot{p}_j \\ & + [\dot{\phi}\{[c_{GP}] + \cos(2\phi)[c_{GC}] + \sin(2\phi)[c_{GS}]\} + [c_B]]\dot{p}_j \\ & + [[k_{GP}] + \cos(2\phi)[k_{GC}] + \sin(2\phi)[k_{GS}] + [k_B]]p_j \\ & = f(t) \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde, p_j es la respuesta modal correspondiente al modo φ_j , además, (4.33) está compuesta por:

$$\begin{aligned} [m_{GP}] &= [\varphi_j^T][M_{GP}][\varphi_j] & [c_B] &= [\varphi_j^T][C_B][\varphi_j] \\ [m_{GC}] &= [\varphi_j^T][M_{GC}][\varphi_j] & [k_{GP}] &= [\varphi_j^T][K_{GP}][\varphi_j] \\ [m_{GS}] &= [\varphi_j^T][M_{GS}][\varphi_j] & [k_{GS}] &= [\varphi_j^T][K_{GS}][\varphi_j] \\ [c_{GP}] &= [\varphi_j^T][C_{GP}][\varphi_j] & [k_{GC}] &= [\varphi_j^T][K_{GC}][\varphi_j] \\ [c_{GC}] &= [\varphi_j^T][C_{GC}][\varphi_j] & [k_B] &= [\varphi_j^T][K_B][\varphi_j] \\ [c_{GS}] &= [\varphi_j^T][C_{GS}][\varphi_j] & [f(t)] &= [\varphi_j^T][F(t)]. \end{aligned}$$

4.2.2 Respuesta al desbalance.

Para el análisis de la respuesta, se considera que en el sistema rotor-cojinete existe solo una masa de desbalance y un disco de balanceo activo, además se considera que $\dot{\phi}$ tiene un valor constante. Por lo tanto, (4.33) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & [[m_{GP}] + \cos(2\phi)[m_{GC}] + \sin(2\phi)[m_{GS}]]\ddot{p}_j \\ & + [\dot{\phi}\{[c_{GP}] + \cos(2\phi)[c_{GC}] + \sin(2\phi)[c_{GS}]\} + [c_B]]\dot{p}_j \\ & + [[k_{GP}] + \cos(2\phi)[k_{GC}] + \sin(2\phi)[k_{GS}] + [k_B]]p_j \\ & = f_1\sin\dot{\phi}t + f_2\cos\dot{\phi}t \end{aligned} \quad (4.34)$$

con:

$$f_1 = \varphi_j^T F_1 \quad (4.35)$$

$$f_2 = \varphi_j^T F_2 \quad (4.36)$$

y

$$\begin{aligned} F_1 &= m_u d \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\text{sen } \alpha \end{bmatrix} + m_b e \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ -\text{sen } \varepsilon \end{bmatrix} \\ F_2 &= m_u d \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \text{sen } \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} + m_b e \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \text{sen } \varepsilon \\ \cos \varepsilon \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para el caso en el que el sistema rotor-cojinete cuente con múltiples desbalances discretos a lo largo del rotor y múltiples discos de balanceo activo, F_1 y F_2 son vectores que contienen masas de desbalance $m_u d$ y masas balanceadoras $m_b e$ ubicadas en los diferentes nodos del rotor.

Las soluciones de (4.34) son buscadas como:

$$p = p_1 \text{sen } \dot{\phi} t + p_2 \text{cos } \dot{\phi} t \quad (4.37)$$

Al sustituir (4.37) y sus derivadas correspondientes en la ecuación (4.34), y agrupando términos en $\text{sen } \dot{\phi} t$ y $\text{cos } \dot{\phi} t$ se obtiene la siguiente relación matemática:

$$\begin{bmatrix} \{k_{GP} + k_B\} - [m_{GP} - m_{GC}] \dot{\phi}^2 - k_{GC} & -\dot{\phi} \{c_B + \dot{\phi} \{c_{GP} - c_{GC}\}\} \\ \dot{\phi} \{c_B + \dot{\phi} \{c_{GP} + c_{GC}\}\} & \{k_{GP} + k_B\} - [m_{GP} + m_{GC}] \dot{\phi}^2 + k_{GC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

El sistema (4.38) se resuelve para valores dados de $\dot{\phi}$, y los valores de $p_1(\dot{\phi})$ y $p_2(\dot{\phi})$ representan el vector de desplazamientos del sistema y se relacionan con δ (Respuesta del Sistema de Múltiples Grados de Libertad) mediante la ecuación (4.29).

4.2.3 Modelo identificador de desbalance modal.

Para obtener el modelo del identificador algebraico, es necesario multiplicar (4.33) por t^2 e integrar dos veces con respecto al tiempo "t", como se indica en la ecuación (4.39).

$$\begin{aligned} & \int^{(2)} \{ [[m_{GP}] + \cos(2\phi) [m_{GC}] + \text{sen}(2\phi) [m_{GS}]] \ddot{p}_j \\ & + [\dot{\phi} \{ [c_{GP}] + \cos(2\phi) [c_{GC}] + \text{sen}(2\phi) [c_{GS}] \} + [c_B]] \dot{p}_j \\ & + [[k_{GP}] + \cos(2\phi) [k_{GC}] + \text{sen}(2\phi) [k_{GS}] + [k_B]] p_j \} t^2 dt \\ & = \int^{(2)} \{ f(t) \} t^2 dt \end{aligned} \quad (4.39)$$

Para un primer par de modos:

$$\{ p_j(t) \} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Así mismo, $f(t)$ cuando el sistema opera a velocidad constante se escribe como:

$$f(t) = m_u d^* \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \text{sen}(\phi + \alpha^*) \\ \text{cos}(\phi + \alpha^*) \end{bmatrix} + f_b(t) \quad (4.41)$$

Donde $m_u d^*$ es el desbalance modal a identificar y $f_b(t)$ es el vector de fuerzas balanceadoras que esta pre-multiplicado por el vector transpuesto de la forma modal del modo a analizar, tal como se indica en (4.42).

$$f_b(t) = \varphi_j^T F_b(t) \quad (4.42)$$

Cabe mencionar que $m_u d^*$ puede calcularse conociendo el desbalance discreto a lo largo del rotor $m_u d_i$ y sus formas modales φ_j , como se indica en (4.43), donde i denota el desbalance existente en los diferentes nodos del rotor.

$$m_u d^* = \varphi_j^T m_u d_i \quad (4.43)$$

Posteriormente, al realizar procedimientos de integración por parte y tratamientos algebraicos en (4.39), es posible obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A(t)\theta = B(t) \quad (4.44)$$

donde, $\theta = \{ m_u d_\eta^* = m_u d^* \text{sen}\alpha, m_u d_\zeta^* = m_u d^* \text{cos}\alpha \}^T$ y denota el vector a identificar (η y ζ denotan las direcciones X y Z respectivamente). $A(t)$ y $B(t)$ se expresan como:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{12}(t) & -a_{11}(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

con:

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= \int^{(2)} \text{sen}(\phi) dt \\ a_{12}(t) &= \int^{(2)} \text{cos}(\phi) dt \end{aligned} \quad (4.46)$$

Asimismo, $b_1(t)$ y $b_2(t)$ se obtienen de (4.47) y están en función del vector de respuesta de vibración $p_j(t)$ para los desplazamientos en las direcciones p_1 y p_2 . En una aplicación real, se puede considera que p_1 y p_2 son aproximadamente iguales a los desplazamientos laterales en las direcciones X y Z en el nodo del rotor donde las formas modales están normalizadas y solo en el intervalo de velocidad en los alrededores de la velocidad crítica del par de modos analizado.

$$\begin{aligned}
 b(t) = & m_G t^2 p_j + \int \{-4m_G t - 4\dot{\phi} t^2 [m_{GS} \cos(2\dot{\phi} t) - m_{GC} \sin(2\dot{\phi} t)] + (c_G) t^2\} p_j dt \\
 & + \int^{(2)} \{2m_G - 4(m_{GC} \cos(2\dot{\phi} t) + m_{GS} \sin(2\dot{\phi} t)) \dot{\phi}^2 t^2 \\
 & + (8\dot{\phi} t) (m_{GS} \cos(2\dot{\phi} t) - m_{GC} \sin(2\dot{\phi} t)) - 2(c_G) t \\
 & + 2\dot{\phi}^2 (c_{GC} \sin(2\dot{\phi} t) - c_{GS} \cos(2\dot{\phi} t)) t^2 + (k_G) t^2\} p_j dt \\
 & - \int^{(2)} \{f_b(t)\} t^2 dt
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

De la ecuación (4.44), se puede establecer que el vector $\{\theta\}$ es identificable si la trayectoria del sistema dinámico es persistente en el sentido establecido por Fließ y Sira-Ramirez [27], es decir, que el comportamiento dinámico del sistema satisface la condición $\det[A(t)] \neq 0$. En general, esta condición se mantiene al menos en un intervalo pequeño $(t_0, t_0 + \kappa]$, donde κ es un valor positivo y suficientemente pequeño. Al resolver (4.44), se obtiene el modelo para el identificador de desbalance modal y su posición angular que se escribe en:

$$\left. \begin{aligned}
 m_u d_\eta^* &= \frac{b_1 a_{11} + b_2 a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\
 m_u d_\zeta^* &= \frac{b_1 a_{12} - b_2 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\
 m_u d^* &= \sqrt{m_u d_\eta^{*2} + m_u d_\zeta^{*2}} \\
 \alpha^* &= \cos^{-1} \left(\frac{m_u d_\eta^*}{m_u d^*} \right)
 \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon] \tag{4.48}$$

donde, los subíndices η y ζ atienden a las direcciones p_1 y p_2 respectivamente, además se observa que el modelo identificador de desbalance de un sistema rotor asimétrico cojinete es independiente de las condiciones iniciales del sistema, solo depende del vector de desplazamientos $\{p_j(t)\}$ para cada instante del tiempo. Cabe mencionar que los parámetros identificados en (4.48) son válidos a una velocidad de operación cercana a la velocidad crítica del modo j analizado.

4.2.4 Simulación numérica.

4.2.4.1 Descripción del sistema rotodinámico.

El sistema rotodinámico con el que se realiza este estudio se mostró en la Figura 4.2 del presente capítulo. Las propiedades geométricas y mecánicas, tanto del eje como del disco, se mostraron en la Tabla 4.2 y Tabla 4.3. El sistema cuenta con desbalance discreto y colocado en sus discos inerciales, tal como se indica en la Tabla 4.1. Las propiedades de amortiguamiento y rigidez atribuibles a los soportes se muestran en la Tabla 4.4.

4.2.4.2 Respuesta al desbalance.

El rotor descrito en la sección 4.2.4.1 inicia su operación desde una velocidad inicial $\dot{\phi} = 0$ rpm hasta su velocidad nominal de $\dot{\phi} = 12,000$ rpm. Bajo las condiciones descritas, la respuesta del rotor se calcula mediante (4.38) para el modelo pseudo-modal y se compara con la respuesta del modelo de MGDL en el nodo 6 que se mostró en la sección 4.1.3.2. Los resultados de esta comparación se muestran en la Figura 4.31.

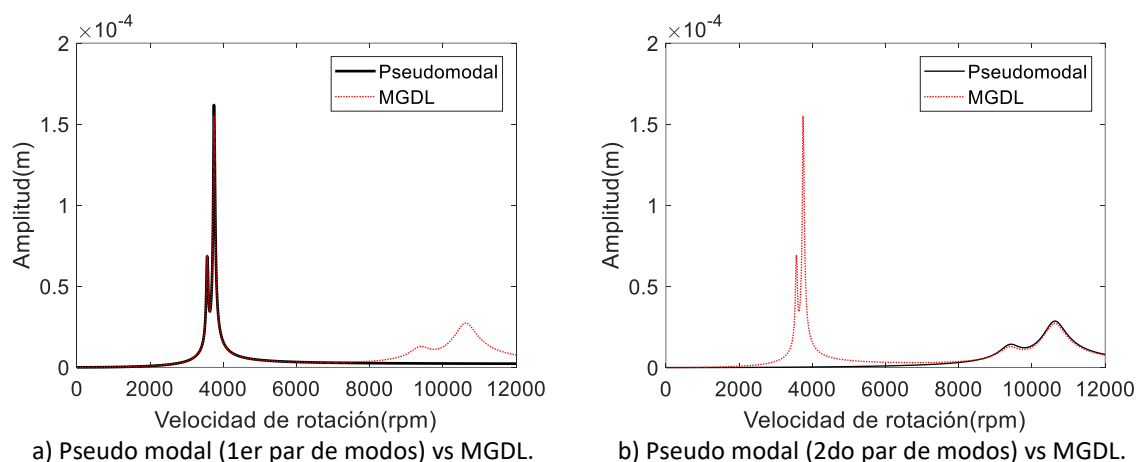


Figura 4.31. Respuesta al desbalance en nodo 6.

En la Figura 4.31a se observa la comparación entre la respuesta del modelo del rotor de MGDL y la obtenida con el método pseudo-modal. En esta última, se consideran las formas modales correspondientes al primer modo de vibración en dirección X y Z en el cálculo de la respuesta (primer par de modos). De manera similar, la Figura 4.31b, muestra la comparación entre la respuesta del modelo de MGDL y la obtenida con el modelo pseudo-modal al considerar el segundo modo en dirección X y Z en el cálculo de la respuesta (segundo par de modos). Las formas modales utilizadas en el análisis se mostraron en la Figura 4.23 y Figura 4.24, y los valores de los factores de forma modal se escriben en la Tabla 4.8. La comparación realizada en Figura 4.31, muestra claramente como la respuesta del modelo pseudo-modal, es muy parecida al modelo de MGDL en el rango de velocidades correspondiente al par de modos de vibración empleado en el análisis.

La respuesta del rotor en función del tiempo para una velocidad constante $\dot{\phi}$, puede obtenerse al resolver (4.10) en el caso del sistema de múltiples grados de libertad o (4.33) en el caso del modelo pseudomodal, utilizando el método de integración numérica de Newmark. Una comparación entre ambas soluciones puede realizarse al evaluar el modelo pseudomodal en un rango de velocidades correspondiente al modo a evaluar y la relación de la ecuación (4.29). En la Figura 4.32 se muestra la comparación de respuestas obtenidas por ambos modelos a una velocidad de 3000 rpm en las direcciones X y Z. Esta velocidad se encuentra en el rango de velocidades correspondientes al primer modo, por ello se utiliza el primer par de modos para la solución Pseudo-modal y corresponden al primer modo en direcciones X y Z. La similitud entre las respuestas obtenidas por ambos modelos es notoria, ya que las diferencias son mínimas como puede observarse. Cabe mencionar que en el cálculo, se utilizaron incrementos de tiempo $dt = 0.001$ segundos.

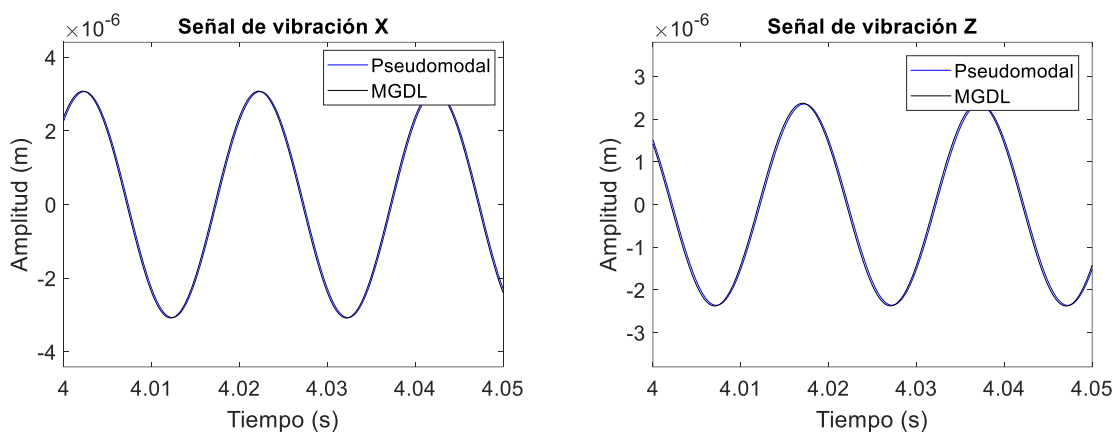


Figura 4.32. Respuesta al desbalance a 3000 rpm en nodo 6.

Una segunda comparación de respuestas entre ambos modelos se muestra en la Figura 4.33. Ahora el rotor gira a una velocidad de rotación de 11,000 rpm. Esta velocidad se encuentra en el rango del segundo modo, por lo tanto, la solución del modelo pseudo-modal requiere del segundo par de modos si se desea comparar con el modelo de MGDL. La Figura 4.33 muestra las respuestas en direcciones X y Z en el nodo 6. Puede verse que las respuestas obtenidas por ambos modelos también son muy parecidas. Al igual que en el caso anterior, se utilizaron incrementos de tiempo $dt=0.001$ segundos para el cálculo de la respuesta con el método de Newmark.

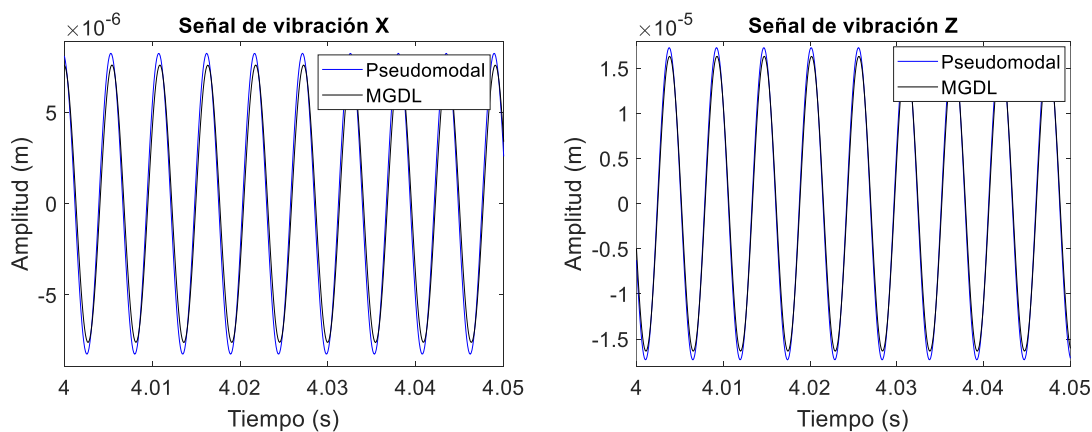


Figura 4.33. Respuesta al desbalance a 11,000 rpm en nodo 6.

Los resultados obtenidos en esta sección verifican que la respuesta de un modelo de múltiples grados de libertad con eje asimétrico puede descomponerse en sus componentes modales, tanto en la solución en estado estable como la solución en función del tiempo, tal como se expresa en la ecuación (4.30). Además, los resultados muestran que la componente modal de respuesta será muy similar a la obtenida por un sistema de MGDL, siempre que el rotor opere en el rango de velocidades del modo a analizar y que no existan influencias de modos inferiores o superiores. Finalmente, por medio de la ecuación (4.29), puede obtenerse un valor muy aproximado de $\{p_i(t)\}$ al medir la respuesta de un sistema de MGDL a una velocidad dentro del rango del modo analizado, permitiendo la aplicación del modelo identificador descrito en la sección 4.2.3.

4.2.4.3 Identificación de desbalance modal.

En esta sección, el modelo identificador de desbalance modal es puesto a prueba al realizar estimaciones a distintas velocidades en el rango correspondiente al modo a evaluar. Lo anterior, tiene el propósito de obtener las desviaciones del valor identificado respecto al valor de referencia, en función de la velocidad de rotación del rotor.

Además de la respuesta en función del tiempo, el modelo identificador requerirá como dato de entrada las formas modales correspondientes al modo a evaluar, mismas que deberán estar normalizadas al nodo de extracción de la respuesta. En la Tabla 4.8 se muestran los factores de forma correspondientes al primero y segundo modo, en las direcciones X y Z del rotor con la configuración presentada en la sección 4.1.3.1 (sistema rotodinámico de la Figura 4.2 con propiedades dadas en la Tabla 4.2 y Tabla 4.3.) y están normalizadas al nodo 6. Dichas formas modales al igual que la respuesta al desbalance, pueden extraerse en un rotor experimental.

En el análisis será necesario obtener la contribución modal de rigidez y amortiguamiento de los soportes. Numéricamente esto es $[k_B] = [\varphi_i^T][K_B][\varphi_i]$ y $[c_B] = [\varphi_i^T][C_B][\varphi_i]$ respectivamente. La Tabla 4.17 muestra dicha contribución de los soportes en el presente caso de estudio.

Tabla 4.17. Contribución modal de propiedades de soporte.

| Modo | k_{BX} (N/m) | k_{BZ} (N/m) | c_{BX} (Ns/m) | c_{BZ} (Ns/m) |
|------|--------------------|---------------------|-----------------|-----------------|
| 1 | 5.51×10^6 | 4.497×10^6 | 55.1 | 44.97 |
| 2 | 2.85×10^8 | 2.67×10^8 | 2850 | 2670 |

Definido lo anterior, se procede a la evaluación del modelo identificador. En un primer caso, se utiliza la respuesta del modelo de MGDL cuando el rotor opera a 3000 rpm, esta respuesta se mostró en la Figura 4.32 y se encuentra en el rango del primer modo, tiene un desbalance modal $m_u d^* = 1.928 \times 10^{-4}$ kg-m en una posición angular $\alpha^* = 50.44^\circ$. Los resultados obtenidos por el modelo identificador (4.48) se muestran en la Figura 4.34. Puede observarse, cómo el valor identificado (línea color negro) converge a un valor muy cercano a la referencia (línea de color rojo) en los primeros instantes de tiempo del proceso de identificación. Además, esta cantidad permanece estable a lo largo del tiempo, tanto para la magnitud del desbalance (Figura 4.34a) como en la posición angular (Figura 4.34b).

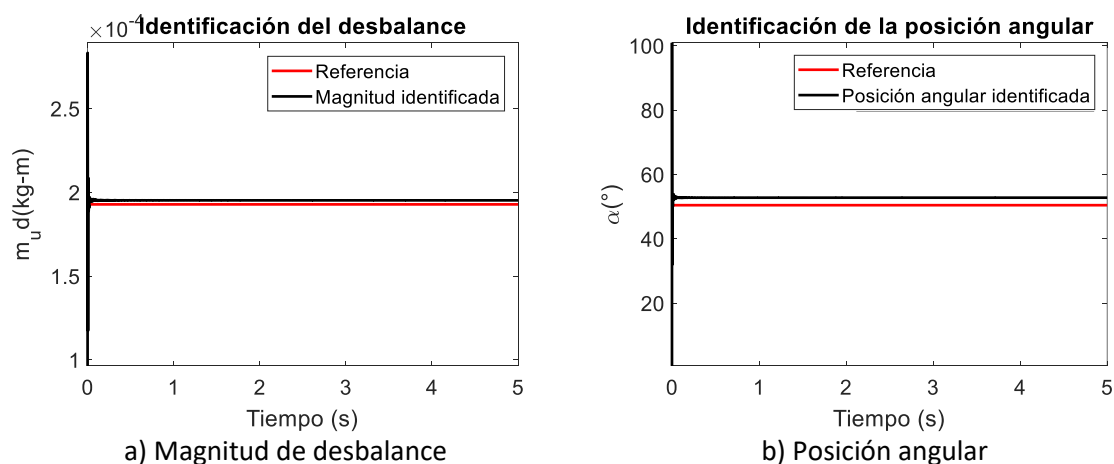


Figura 4.34. Identificación de magnitud y posición angular de desbalance (3000 rpm).

En un segundo caso, el rotor opera a 11,000 rpm, esta vez se encuentra en el rango de velocidades correspondiente al segundo modo. El desbalance modal ahora es de $m_u d^* = 5.463 \times 10^{-4} \text{kg}\cdot\text{m}$ en una posición angular $\alpha^* = 128.7^\circ$. La Figura 4.35 muestra los resultados obtenidos por el modelo identificador (4.48). Nuevamente, se observa como el valor identificado (línea color negro) converge a un valor cercano a la referencia (línea de color rojo). Esta cantidad permanece estable a lo largo del tiempo, tanto para la magnitud del desbalance (Figura 4.35a) como en la posición angular (Figura 4.35b).

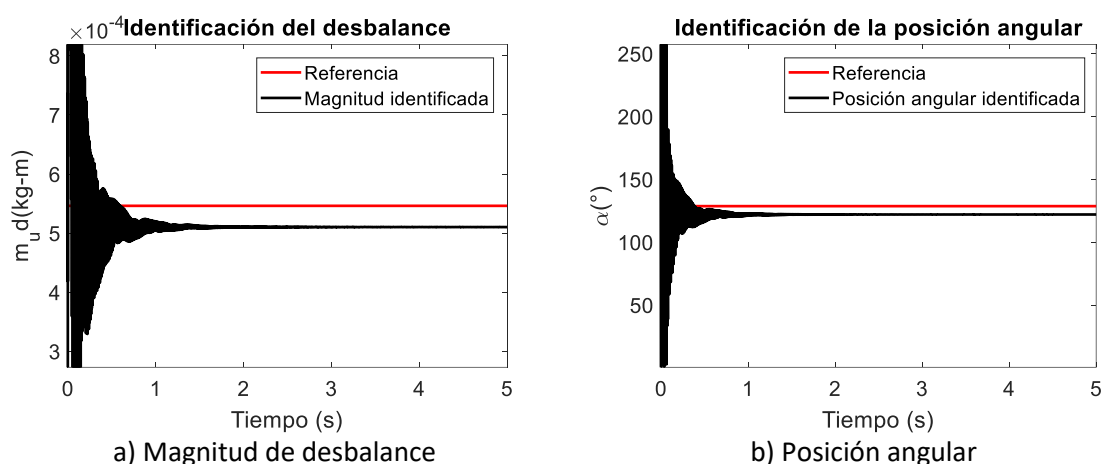


Figura 4.35. Identificación de magnitud y posición angular de desbalance (11,000 rpm).

Las Tablas 4.18 y 4.19 muestran los resultados de identificaciones realizadas a velocidades en el rango del primer y segundo modo, respectivamente. En el primer modo, el error relativo $EM_u d^*$ entre la magnitud de desbalance identificada y el valor de referencia son: máximo=3.053% y mínimo= 0.088%. El error absoluto $E\alpha^*$ entre la posición angular identificada y la referencia fue: máximo=9.83° y mínimo= 2.34°. En el caso del segundo modo, el error relativo $EM_u d^*$ entre la magnitud de desbalance identificada y el valor de referencia son: máximo=9.163% y mínimo= 0.686%. El error absoluto $E\alpha^*$ entre la posición angular identificada y la referencia fue: máximo=28.3° y mínimo= 6.6°.

Tabla 4.18. Identificación de desbalance modal (primer modo) de 1000 a 5000 rpm.

| Velocidad ϕ [rpm] | Desbalance (Referencia) [kg·m] | Desbalance (Identificado) [kg·m] | $EM_u d^*$ [%] | Posición angular (Referencia) [°] | Posición angular (Identificada) [°] | $E\alpha^*$ [°] |
|------------------------|--------------------------------|----------------------------------|----------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| 1000 | | 1.987×10^{-4} | 3.053 | | 57.57 | 7.13 |
| 2000 | | 1.973×10^{-4} | 2.334 | | 55.89 | 5.45 |
| 3000 | 1.928×10^{-4} | 1.952×10^{-4} | 1.247 | 50.44 | 52.78 | 2.34 |
| 4000 | | 1.926×10^{-4} | 0.088 | | 48.28 | 2.16 |
| 5000 | | 1.914×10^{-4} | 0.743 | | 40.61 | 9.83 |

Tabla 4.19. Identificación de desbalance modal (segundo modo) de 9000 a 13,000 rpm.

| Velocidad ϕ [rpm] | Desbalance (Referencia) [kg·m] | Desbalance (Identificado) [kg·m] | $EM_u d^*$ [%] | Posición angular (Referencia) [°] | Posición angular (Identificada) [°] | Ea^* [°] |
|---------------------------|--------------------------------------|--|-------------------|---|---|---------------|
| 9000 | | 5.55×10^{-4} | 0.686 | | 154.1 | 25.4° |
| 10,000 | | 4.962×10^{-4} | 9.163 | | 136.5 | 7.8 |
| 11,000 | 5.463×10^{-4} | 5.104×10^{-4} | 6.575 | 128.7 | 122.1 | 6.6 |
| 12,000 | | 5.089×10^{-4} | 6.843 | | 110.3 | 18.4 |
| 13,000 | | 5.06×10^{-4} | 7.371 | | 100.4 | 28.3 |

La velocidad de la prueba influye en la estimación de los parámetros de desbalance, teniendo mayor precisión en velocidades cercanas a la velocidad crítica, esto de acuerdo con los resultados de las Tablas 4.18 y 4.19. Lo anterior se debe a que a esas velocidades la respuesta del sistema de MGD, se aproxima a la respuesta modal, tal como se mostró en la Figura 4.31. Sin embargo, también se observan buenos resultados a velocidades un poco más alejadas, permitiendo seleccionar velocidades para la identificación, ya sea antes, durante o después de velocidades críticas del modo analizado.

4.2.4.4 Balanceo modal mediante discos de balanceo activo.

En la sección 4.2.4.3 se demostró la efectividad del método de identificación algebraica para la estimación de desbalance modal $m_u d^*$ y su posición angular a^* en el sistema rotor-cojinete expuesto en la sección 4.1.3.1. Estos valores se calcularon para el primer y segundo modo de vibración del rotor, ya que son los modos excitados en el intervalo de velocidad de operación de rotor que va de 0 a 12,000 rpm de acuerdo con la Figura 4.31, y son los modos de vibración que se desean balancear.

Una vez conocido el desbalance modal, es necesario calcular las masas de balanceo que los DBAs deben aportar para el balanceo de los dos primeros modos de vibración del rotor. Este cálculo puede realizarse siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.1.5.1, considerando que los DBAs se encuentran en posiciones fijas en los nodos 2 y 13 como se muestra en la Figura 4.2, así como las formas modales de Tabla 4.8.

En el cálculo de las masas de balanceo mediante (4.20) y (4.21), se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 4.20 para los DBAs 1 y 2. Estos valores se calcularon a partir de los parámetros de desbalance identificados previamente en la sección 4.2.4.3 en las Tabla 4.18 y Tabla 4.19, con la menor desviación porcentual respecto a la referencia, esto es $EM_u d^* = 0.088\%$ y $Ea^* = 2.16^\circ$ en el primer modo y $EM_u d^* = 0.686\%$ y $Ea^* = 6.6^\circ$ en el segundo modo.

Tabla 4.20. Masas de balanceo en el mejor de los casos de identificación de desbalance.

| DBA1 | | DBA2 | |
|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| Masa de balanceo $m_b e_1$ | Posición angular ε_1 | Masa de balanceo $m_b e_2$ | Posición angular ε_2 |
| 3.1697×10^{-4} (kg·m) | 256.68° | 2.5296×10^{-4} (kg·m) | 186.88° |

Como información adicional, en la Tabla 4.21. se escriben las masas de balanceo calculadas para los DBAs 1 y 2 en un caso crítico. Estos valores se calcularon a partir de los parámetros de desbalance identificados previamente en la sección 4.2.4.3 ($m_u d^*$ y α^*) con las máximas desviaciones porcentuales respecto al valor de referencia en ambos modos, es decir $EM_u d^* = 3.053\%$ y $Ea^* =$

9.83° en el primer modo y $EM_u d^* = 9.163\%$ y $Ea^* = 28.3^\circ$ en el segundo modo. Evidentemente, este cálculo se realizó siguiendo el procedimiento descrito en esta sección 4.1.5.1.

Tabla 4.21. Masas de balanceo en el caso crítico de identificación de desbalance.

| DBA1 | | DBA2 | |
|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| Masa de balanceo $m_b e_1$ | Posición angular ε_1 | Masa de balanceo $m_b e_2$ | Posición angular ε_2 |
| 3.4226×10^{-4} (kg-m) | 240.04° | 2.1403×10^{-4} (kg-m) | 182.43° |

En la Figura 4.36, se muestra la respuesta de vibración del comportamiento dinámico del sistema rotor asimétrico- cojinete de MGDL en el nodo 6, antes y después de ser balanceado por los DBAs. Esta respuesta se obtiene resolviendo el modelo (4.34), manteniendo todos los grados de libertad en el cálculo. Así mismo, en el cálculo se utiliza la información de las matrices presentadas en la sección 3.2 del capítulo 3 y las propiedades del sistema rotodinámico de la Figura 4.2 presentadas en la Tabla 4.1 a la Tabla 4.4 como datos de entrada.

En la Figura 4.36, la línea color negro representa la respuesta del sistema sin el balanceo proporcionado por DBAs. Por otro lado, las líneas verde y roja representan la respuesta del rotor balanceado por los DBAs con los arreglos de masas de balanceo calculados en el mejor y crítico caso de identificación del desbalance modal, respectivamente. En ambos casos, se puede observar que los discos de balanceo activo balancearon cuatro modos de vibración (correspondientes al primer y segundo modo en direcciones X y Z), reduciendo las amplitudes de vibración del sistema en el intervalo de 0 a 12,000 rpm. Para apreciar mejor el cambio en la respuesta debido al balanceo del rotor por los DBA, la Figura 4.37 muestra un acercamiento a las amplitudes de vibración en el rango de velocidades correspondientes al primer modo de vibración en la Figura 4.37a, y al segundo modo en la Figura 4.37b.

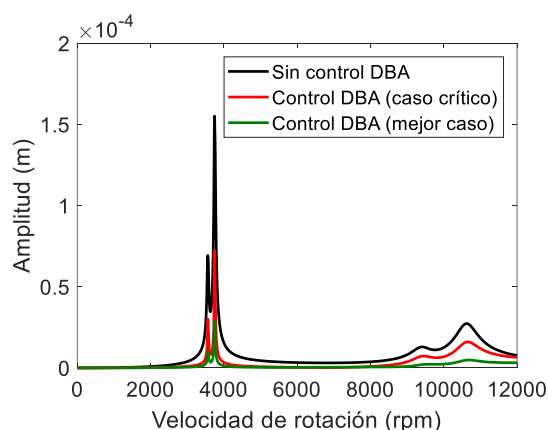


Figura 4.36. Respuesta controlada del sistema (nodo 6) con discos de balanceo activo.

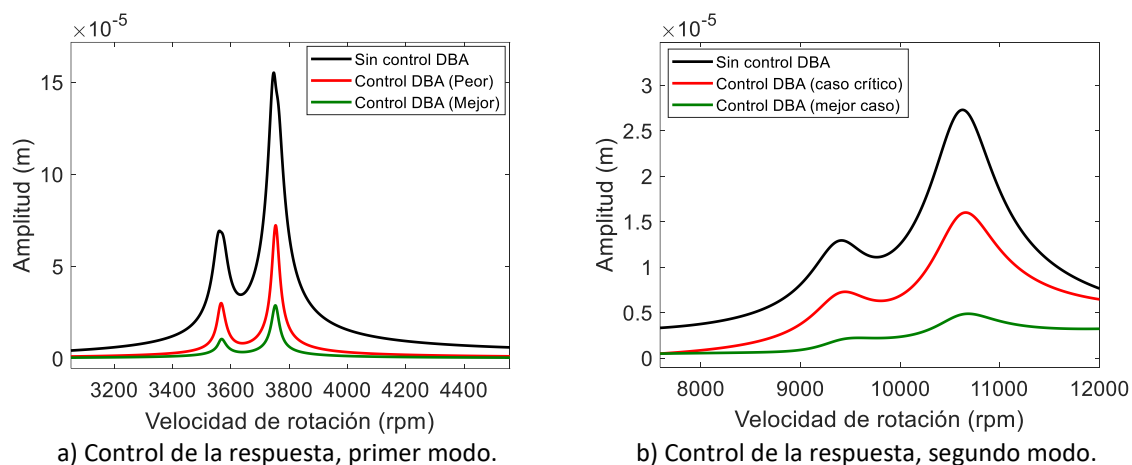


Figura 4.37. Respuesta controlada del sistema (nodo 6) con discos de balanceo activo, acercamiento.

En la Tabla 4.22 se muestra la reducción de las amplitudes de respuesta en las velocidades críticas por efecto de los DBA en el mejor de los casos de identificación de desbalance. Además, se incluye el porcentaje de reducción de la respuesta para cada velocidad crítica, el cual fue mayor al 80% en los cuatro modos de vibración.

Tabla 4.22. Reducción de amplitudes de vibración en velocidades críticas (mejor caso).

| Velocidad de rotación [rpm] | Amplitud [m] (Sin control DBA) | Amplitud [m] (Con control DBA) | % reducción |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
| 3560 | 6.928×10^{-5} | 9.035×10^{-6} | 86.9587 |
| 3747 | 1.552×10^{-4} | 2.654×10^{-5} | 82.8994 |
| 9410 | 1.293×10^{-5} | 2.05×10^{-6} | 84.1453 |
| 10626 | 2.729×10^{-5} | 4.802×10^{-6} | 82.4038 |

La Tabla 4.22, muestra la amplitud de la repuesta en las velocidades críticas, antes y después de aplicar el control DBA en un caso crítico de identificación de desbalance. Se incluye el porcentaje de reducción de la respuesta en cada velocidad. Para este caso, se obtuvo una reducción de respuesta mayor al 40% en los cuatro modos de vibración.

Tabla 4.23. Reducción de amplitudes de vibración en velocidades críticas (caso crítico).

| Velocidad de rotación [rpm] | Amplitud [m] (Sin control DBA) | Amplitud [m] (Con control DBA) | % reducción |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
| 3560 | 6.928×10^{-5} | 2.706×10^{-5} | 60.941 |
| 3747 | 1.552×10^{-4} | 6.448×10^{-5} | 58.453 |
| 9410 | 1.293×10^{-5} | 7.242×10^{-6} | 43.990 |
| 10626 | 2.729×10^{-5} | 1.591×10^{-5} | 41.700 |

Los resultados obtenidos, muestran que el control de la respuesta vibratoria en un sistema rotor cojinete con flecha asimétrica mediante discos de balanceo activo es posible. Así mismo, un mejor control de la respuesta dependerá de la precisión de la identificación de desbalance modal.

4.3 Conclusiones del capítulo.

Las simulaciones realizadas en este capítulo muestran que la implementación de la metodología de identificación algebraica para la estimación de desbalance en un sistema rotor cojinete con flecha asimétrica que incluye discos de balanceo activo fue exitosa, ya que se logró estimar la magnitud y la posición del desbalance discreto a lo largo del rotor de manera simultánea, en un tiempo menor a 0.1 segundos, sin importar la rapidez de la rampa de excitación. La rapidez de la convergencia al valor de referencia hace innecesario evaluar al intervalo completo de velocidad de rotor (0 a 12,000 rpm en este caso de estudio), ya que el desbalance es identificado en los primeros instantes de la respuesta del sistema, bastando solo un fragmento de la respuesta de vibración del sistema del intervalo de velocidad. Además, los valores estimados son lo suficientemente precisos para que un controlador pueda utilizarlos fácilmente para realizar una tarea determinada.

Se combinó la técnica de identificación algebraica, con un método de balanceo modal y discos de balanceo activo, logrando reducir a más del 95% las amplitudes de vibración de los primeros cuatro modos de vibración de un rotor asimétrico. Asimismo, es posible la implementación de un sistema de control pasivo, utilizando únicamente la técnica de identificación algebraica de los parámetros del desbalance y posteriormente proceder al balanceo del rotor.

Los resultados obtenidos en esta investigación, visualizan la aplicación de la metodología de balanceo propuesta en sistemas rotor-cojinete con flecha asimétrica de manera experimental. Esto resolvería algunos inconvenientes que las metodologías para el balanceo de este tipo de rotores presentan, tales como el número de corridas de prueba, la complejidad de la aplicación del método o la construcción de diagramas polares de respuesta para la determinación del desbalance. Ya que la metodología ofrece la posibilidad de realizar el balanceo en línea de operación, sin ser necesarias corridas de prueba o la construcción de diagramas de polares de respuesta para la determinación de desbalance.

Capítulo 5.

IDENTIFICACIÓN DE DESBALANCE EN ROTORES ASIMÉTRICOS (PRUEBAS EXPERIMENTALES).

El presente estudio tiene como objetivo determinar de manera experimental el desbalance presente en un sistema rotor asimétrico – cojinete, mediante los modelos identificadores propuestos en el capítulo 4. Se opta por identificar desbalance en condiciones donde el rotor gira a una velocidad constante, ya que se tiene un mejor control sobre la respuesta vibratoria, lo que permite obtener una señal estable que facilita el filtrado de armónicos o sub armónicos que pudieran afectar la estimación de parámetros. Además, como se vio en el capítulo 4, no es necesario evaluar la respuesta en todo el intervalo de velocidad de operación del rotor, ya que la estimación de desbalance se realiza en los primeros instantes y su valor permanece constante a lo largo del tiempo durante todo el intervalo de la velocidad de operación. Esto significa que la identificación puede realizarse en cualquier intervalo de velocidad, incluso a velocidad constante. Finalmente, se comprobará si los parámetros identificados permiten calcular un arreglo de masas de balanceo para el balanceo modal de sistemas rotor cojinete con eje asimétrico y se comprobará la efectividad del disco de balanceo activo para el balanceo de rotores asimétricos.

5.1 Generalidades.

El objetivo de esta investigación es desarrollar un método de balanceo en línea para rotores asimétricos, que integre el método de identificación algebraica para la estimación del desbalance, el método de balanceo modal y discos de balanceo activo. Con respecto a la estimación del desbalance con el método de identificación algebraica, simulaciones numéricas realizadas en el capítulo 4, demostraron la posibilidad de estimar tanto el desbalance discreto en diferentes puntos del sistema rotodinámico, como la estimación directa del desbalance modal. Se demostró que ambas alternativas para la estimación del desbalance pueden combinarse con el método de balanceo modal y discos de balanceo activo. En el capítulo 5, ambas alternativas de aplicación del método de balanceo, se intentarán aplicar siguiendo los procedimientos mostrados en los esquemas de la Figura 5.1.

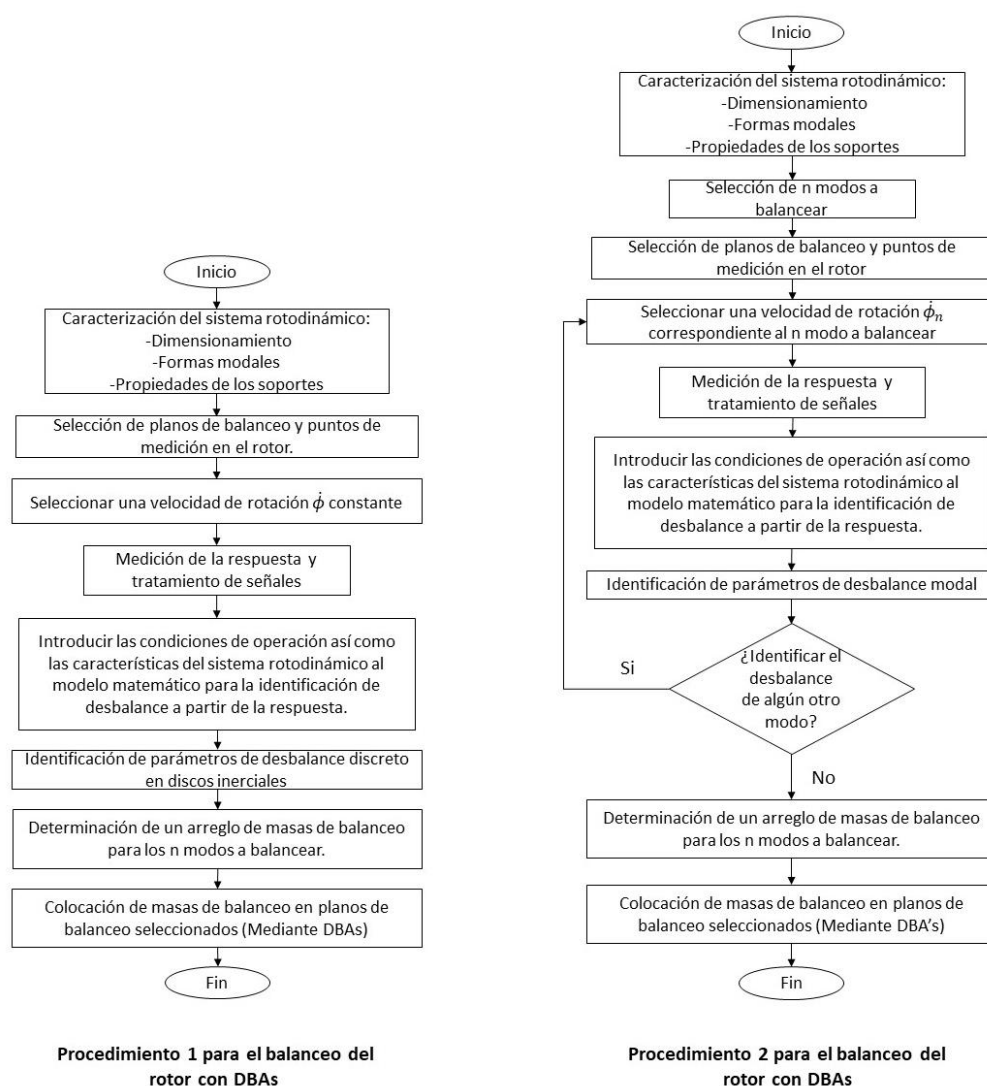


Figura 5.1. Diagrama de flujo del método de balanceo integrado.

5.1.1 Tratamiento de señales.

Las alternativas para la aplicación del método de balanceo integrado, señaladas en la Figura 5.1, tienen en común un elemento muy importante, que es el tratamiento de señales. El procedimiento para realizar el tratamiento de señales requerido en la aplicación del método de balanceo integrado se describe a continuación. Para fines prácticos, el rotor se balancea inicialmente mediante cualquier otro método. La respuesta que se obtiene después de balancear el rotor es la vibración inicial del rotor. Esta respuesta cuenta con perturbaciones iniciales debidas a un desbalance residual, desalineamiento, ruido generado por el sistema eléctrico, asimetría en la sección transversal de la flecha, etc. Esta señal de vibración inicial es denominada "Run Out". Por tal motivo, la señal de vibración debe ser filtrada dejando únicamente la componente fundamental $1X$, correspondiente a la velocidad de rotación donde predomina el efecto del desbalance inicial. Para el desarrollo de las pruebas experimentales la señal filtrada se denotará como V_0 . Cuando se añade una masa de desbalance "conocida" (desbalance a identificar), se genera una nueva respuesta V_1 (que también habrá que filtrar), que es la suma de la respuesta inicial (V_0) más la respuesta debida al efecto del desbalance agregado. Por tal motivo, si se desea comparar el desbalance identificado con el desbalance conocido de manera precisa, lo que se debe introducir al identificador, es el cambio en la vibración debido a la masa de desbalance, esto es $V_E = V_1 - V_0$.

Una vez establecida la configuración banco experimental, por ejemplo la configuración mostrada en la Figura 5.2, se realiza la adquisición de V_0 y V_1 con una tasa de 10,000 muestras por segundo para generar V_E .

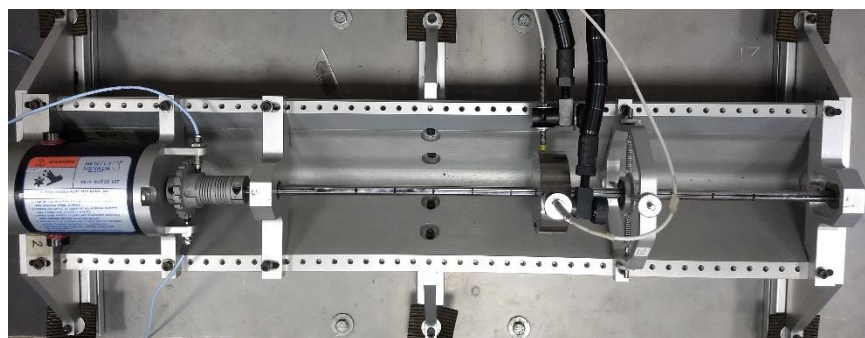


Figura 5.2. Ejemplo de configuración del banco experimental.

Obtenidas las señales V_0 y V_1 , se recortan en un punto de referencia común como lo es el tacómetro, tal como se muestra en el ejemplo de la Figura 5.3, donde se contrasta V_0 y V_1 en dirección X al agregar un desbalance de 2.865×10^{-4} kg-m a 45° cuando un rotor con asimetría en su sección transversal de eje gira a 600 rpm (10 Hz).

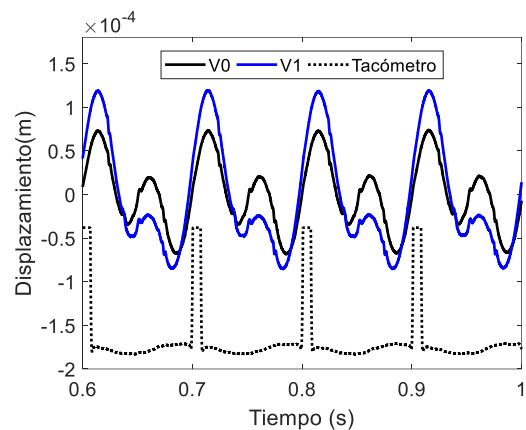


Figura 5.3. Comparación de señales V_0 y V_1 a 600 rpm (10 Hz) en dirección X con $m_u d = 2.865 \times 10^{-4}$ kg · m y $\alpha = 45^\circ$.

Posteriormente, las componentes armónicas y sub armónicas de V_0 y V_1 son obtenidas mediante la Transformada rápida de Fourier, como se observa en las Figuras 5.4 y 5.6.

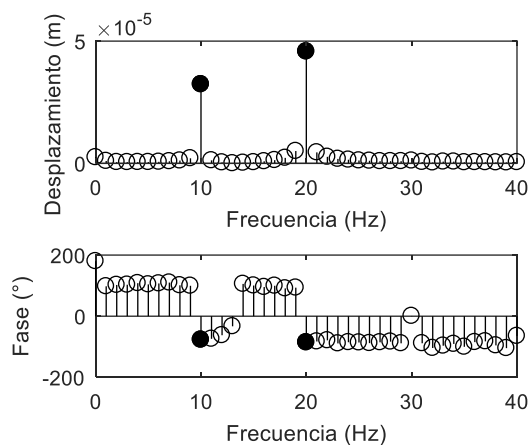


Figura 5.4. Descomposición armónica de V_0 .

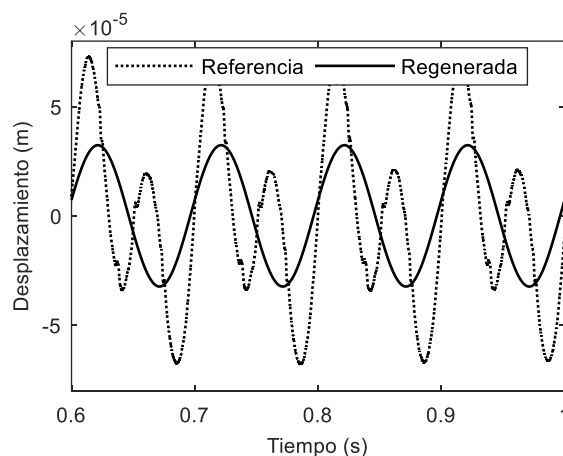


Figura 5.5. Señal V_0 regenerada.

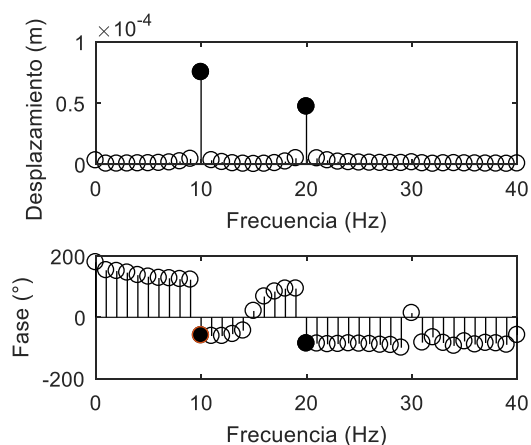


Figura 5.6. Descomposición armónica de V_1 .

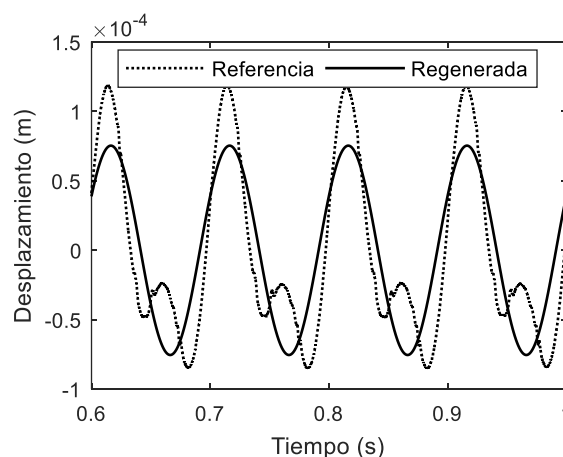


Figura 5.7. Señal V_1 regenerada.

La comparación entre las Figuras 5.4 y 5.6 muestran que la segunda componente de vibración (a 20 Hz), generada por la asimetría en el sistema y el efecto de la gravedad, no se ve afectada en amplitud o fase por un cambio en el desbalance en sistema. Esto justifica considerar solo la componente fundamental 1X en el proceso de identificación, ya que en el modelo identificador no se consideró el efecto de la gravedad. Determinadas las amplitudes y fases para V_0 y V_1 con la Transformada rápida de Fourier, es posible regenerarlas de la forma $y = A\text{sen}(\omega t + \gamma)$, donde A es la amplitud correspondiente al efecto del desbalance, ω es la velocidad de rotación de la prueba y γ es la correspondiente fase. La Figura 5.5 y Figura 5.7 muestran las señales regeneradas V_0 y V_1 en dirección X, las cuales tienen una amplitud y fase constante a lo largo del tiempo con las que se descarta la posibilidad de variaciones de velocidad de rotación que pudieran perturbar el proceso de identificación. Realizado lo anterior se obtiene V_E y se compara con V_0 y V_1 en la Figura 5.8. El mismo procedimiento es aplicado para obtener V_E en dirección Z y su comparación con V_0 y V_1 se muestra en la Figura 5.9.

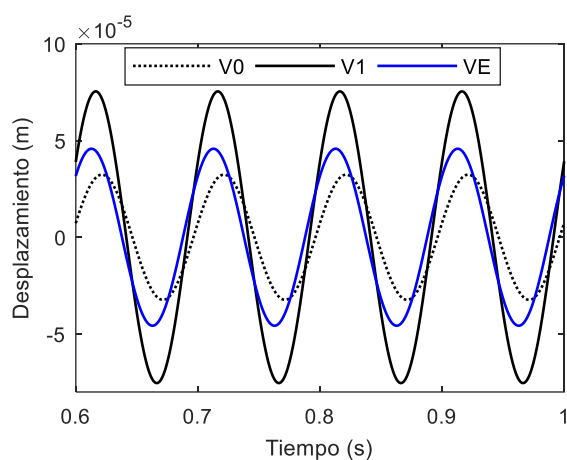


Figura 5.8. Comparación de señales dirección X.

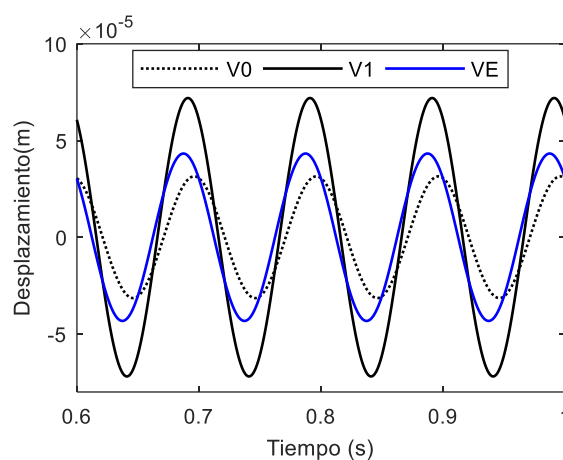


Figura 5.9. Comparación de señales dirección Z.

5.2 Aplicación de modelo identificador de MGD L para la estimación de desbalance en rotor asimétrico.

En esta sección se implementa el modelo identificador de MGD L (4.14) para la identificación de desbalance en un rotor experimental que opera a velocidad constante. Los efectos de las masas balanceadoras $m_b e$ en (4.14) se desprecian, ya que el banco experimental propuesto en la sección 5.2.1 no contiene discos de balanceo activo. Para la evaluación del modelo identificador, se propone una serie de pruebas en las que el rotor opera bajo diferentes condiciones. Los resultados obtenidos en cada una de estas pruebas se muestran a detalle en la sección 5.2.2.

5.2.1 Configuración experimental.

El banco experimental para la aplicación del modelo identificador de MGD L se muestra en la Figura 5.10, es un rotor kit de marca Bently Nevada. Está compuesto por una flecha que tiene un largo de 510 mm de soporte a soporte y un diámetro de 10 mm. Sobre la flecha se encuentra montado un disco inercial que tiene una masa de 0.8 kg. Consta de un motor con un variador de velocidad que puede alcanzar una velocidad de 0 a 10,000 rpm. Una tarjeta de adquisición de la marca National

Instruments USB-6251. Sensores de proximidad Bently Nevada. Fuente de voltaje CD para la alimentación de los sensores del banco experimental. El procesamiento de señales y su visualización se realiza en una computadora mediante el programa informático Sound and Vibration de Labview. Más detalles sobre el equipo utilizado se muestran en el Apéndice A.

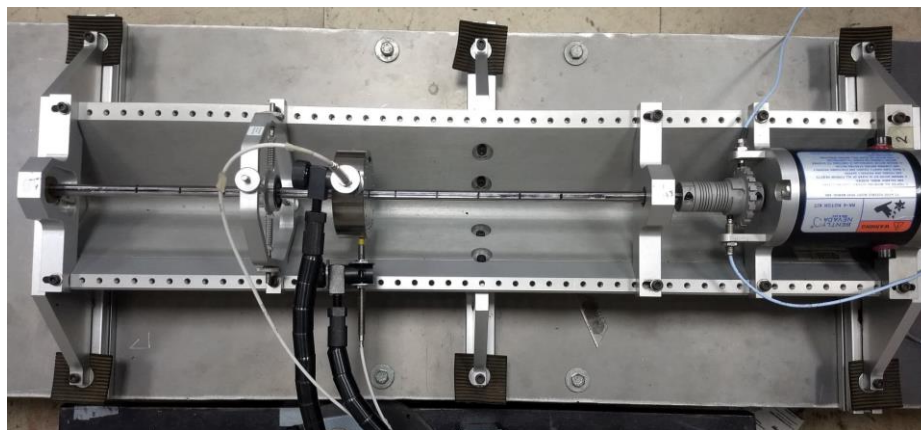


Figura 5.10. Configuración de banco experimental.

La representación esquemática del banco experimental se muestra la Figura 5.11, donde se observa la discretización de elementos que conforman la flecha, número de nodos, localización del disco inercial y de los soportes, además de la sección transversal de la flecha. Las propiedades de la flecha y el disco se especifican en las Tablas 5.1 y 5.2. Todas estas características mecánicas y geométricas del rotor deben precargarse en la plataforma computacional programada en MATLAB, misma que contiene al modelo matemático que realiza el proceso de identificación.

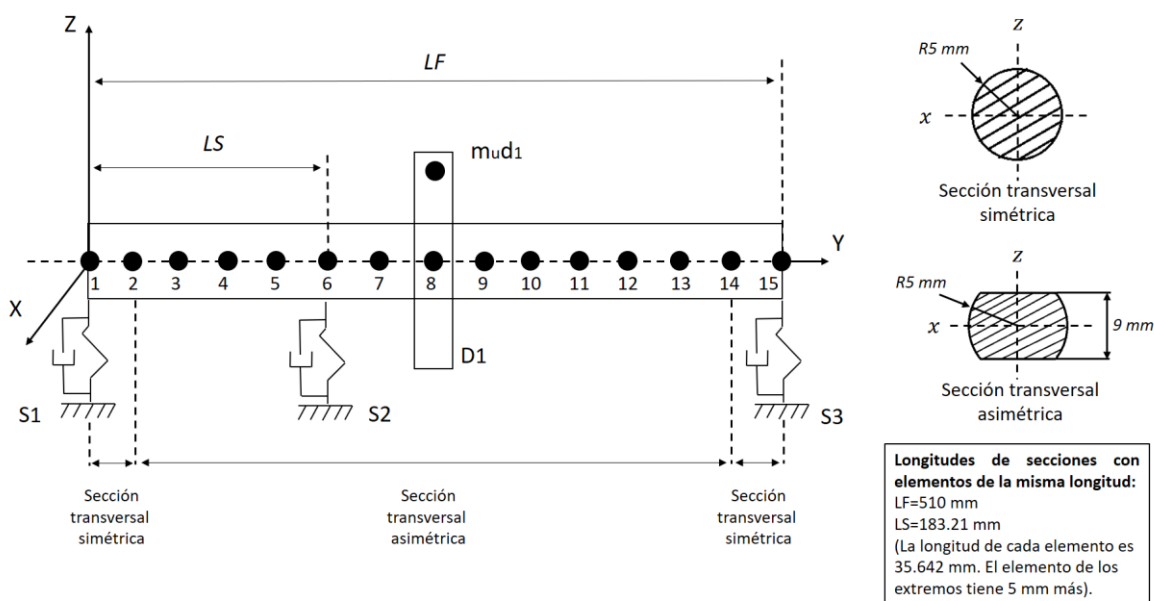


Figura 5.11. Representación esquemática del rotor experimental.

Tabla 5.1. Propiedades mecánicas y geométricas del eje.

| Propiedades mecánicas | Geometría |
|--------------------------------------|----------------------|
| $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | $r_s = 5 \text{ mm}$ |
| $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ | $f = 4.5 \text{ mm}$ |
| $\nu = 0.3$ | |

(* r_s =radio de la sección simétrica, f =distancia del centro a cara plana de la sección asimétrica).

Tabla 5.2. Propiedades mecánicas y geométricas de los discos.

| Propiedades mecánicas | Geometría | |
|--------------------------------------|-----------|---------|
| $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | Disco | D1 |
| $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ | eD | 25.4 mm |
| $\nu = 0.3$ | ReD | 37.5 mm |
| | riD | 5 mm |

(* eD=espesor del disco, ReD=radio exterior del disco, riD=radio interior del disco).

Para la medición de la respuesta, los sensores deben ubicarse en el rotor tomando como referencia los ejes X y Z , considerando la graduación angular de los discos inerciales cómo se indica en la Figura 5.12.

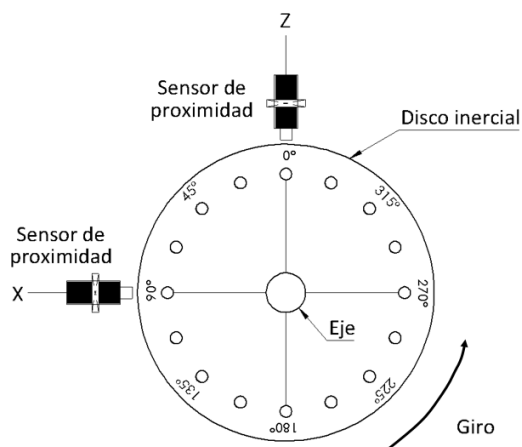


Figura 5.12. Ubicación de los sensores y graduación del disco inercial.

De manera general, el proceso experimental de identificación de desbalance es el siguiente. Primeramente se coloca un desbalance conocido $m_u d$ en el disco inercial del sistema rotodinámico mostrado en la Figura 5.10. Posteriormente se opera el rotor a una velocidad angular constante $\dot{\phi}$, lo que genera una señal de vibración debido al desbalance $m_u d$. Esta señal de vibración es captada por un sensor de proximidad que está conectado a un módulo de adquisición de datos que envía la información captada a un equipo de cómputo. Después, se realiza un tratamiento de señales para eliminar perturbaciones que puedan afectar la estimación de parámetros, como se indicó en la Sección 5.1.1. Posteriormente, la respuesta resultante es utilizada por la plataforma computacional programada en Matlab para la estimación del desbalance. Finalmente, los resultados obtenidos se comparan con los parámetros de desbalance conocidos para la validación de la metodología de identificación propuesta. El proceso experimental para la identificación de desbalance se presenta de manera esquemática en la Figura 5.13.

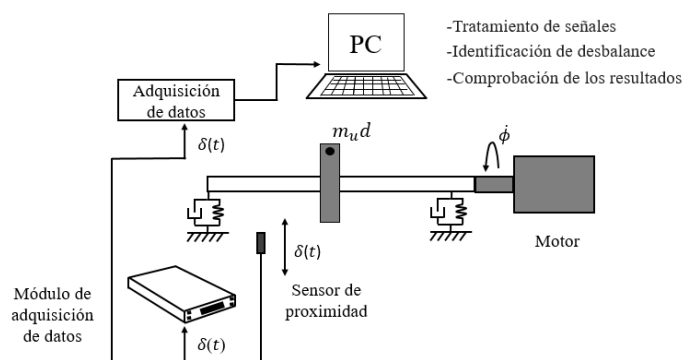


Figura 5.13. Representación esquemática de la configuración experimental.

La medición de la respuesta se realiza en el nodo donde se pretende identificar el desbalance, por lo tanto, en el banco experimental propuesto la respuesta se medirá en nodo 8, nodo donde se encuentra el disco inercial. Como se explica al final de la sección 4.1.4, además de la respuesta medida en el nodo a identificar, la aplicación experimental del identificador de desbalance de MGDL requiere los desplazamientos laterales u y w de los 2 nodos vecinos a la izquierda y a la derecha, es decir las respuestas de los nodos 6, 7, 9 y 10. Los desplazamientos de estos nodos pueden extrapolarse a partir de la respuesta medida en el nodo 8 mediante los factores de forma modal correspondientes.

Las formas modales del rotor mostrado en la Figura 5.10 son obtenidas mediante la prueba de martillo de impacto. Las formas modales correspondientes al primer modo se muestran en la Figura 5.14 para las direcciones X y Z, y se encuentran normalizadas al nodo central (nodo 8). Cabe mencionar que la cara plana de la asimetría quedó orientada hacia el eje Z (dirección vertical) en esta prueba.

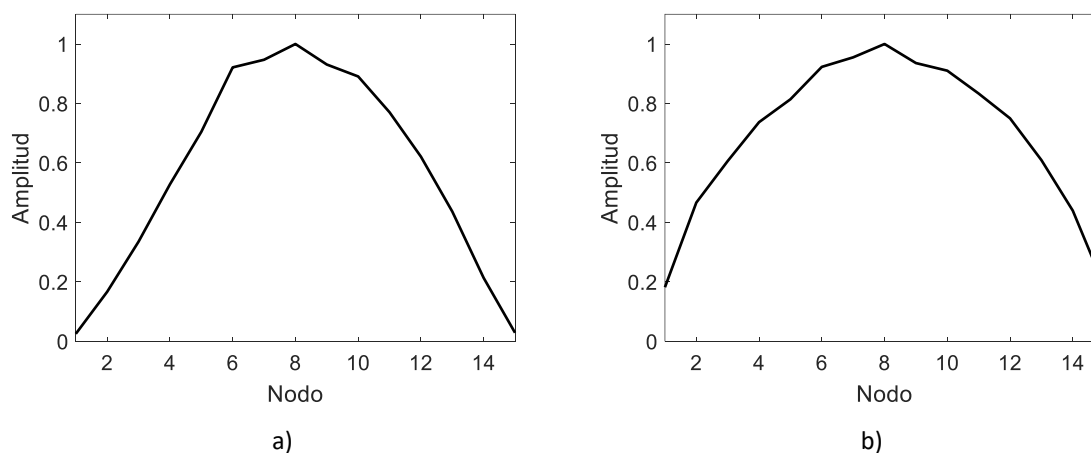


Figura 5.14. Formas modales correspondientes al primer modo. a) Dirección X, frecuencia de 31 Hz, b) Dirección Z, frecuencia de 31 Hz.

Los factores de forma correspondientes al primer modo en las direcciones X y Z se escriben en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3. Factores de forma.

| Nodo | Modo 1 (31/31 Hz) | |
|------|-------------------|-------------|
| | φ_X | φ_Z |
| 1 | 0.026 | 0.182 |
| 2 | 0.167 | 0.467 |
| 3 | 0.336 | 0.606 |
| 4 | 0.528 | 0.737 |
| 5 | 0.705 | 0.814 |
| 6 | 0.921 | 0.923 |
| 7 | 0.947 | 0.955 |
| 8 | 1.000 | 1.000 |
| 9 | 0.931 | 0.936 |
| 10 | 0.891 | 0.910 |
| 11 | 0.771 | 0.833 |
| 12 | 0.621 | 0.750 |
| 13 | 0.437 | 0.610 |
| 14 | 0.214 | 0.440 |
| 15 | 0.029 | 0.186 |

Las condiciones a las que el banco experimental será sometido se muestran en la Tabla 5.4. Las columnas 1 y 2 muestran la magnitud $m_u d$ y la posición angular α del desbalance que se agrega al sistema, respectivamente. Además de excitar el sistema, estos parámetros son los valores de referencia que el modelo identificador intentará devolver a partir de la respuesta vibratoria $\delta(t)$ cuando el rotor opere a las velocidades indicadas en la columna 3.

Tabla 5.4. Condiciones de las pruebas experimentales.

| Magnitud de desbalance [kg-m] | Posición angular de desbalance α [°] | Velocidad de rotación [rpm] |
|-------------------------------|---|-----------------------------|
| 9.15×10^{-5} | 45 | 600 |
| 9.15×10^{-5} | 225 | 1020 |
| 1.776×10^{-4} | 135 | 840 |
| 1.776×10^{-4} | 315 | 1200 |
| 2.865×10^{-4} | 45 | 600 |
| 2.865×10^{-4} | 135 | 840 |

5.2.2 Identificación del desbalance: rotor asimétrico experimental.

Una vez montado el banco experimental como en la Figura 5.10, se procede a la adquisición de señales generadas por las condiciones dadas en la Tabla 5.4, mismas que deben ser tratadas como se indica en la sección 5.1.1. Como ejemplo, la Figura 5.15 muestra la respuesta vibratoria medida en el nodo 8 en las direcciones X y Z, la cual es generada por un desbalance $m_u d = 9.15 \times 10^{-5}$ kg-m a una posición angular $\alpha = 45^\circ$ cuando el rotor gira a 600 rpm, con una tasa de 10,000

muestras por segundo. Cabe mencionar que estas respuestas fueron tratadas como se indica en la sección 5.1.1.

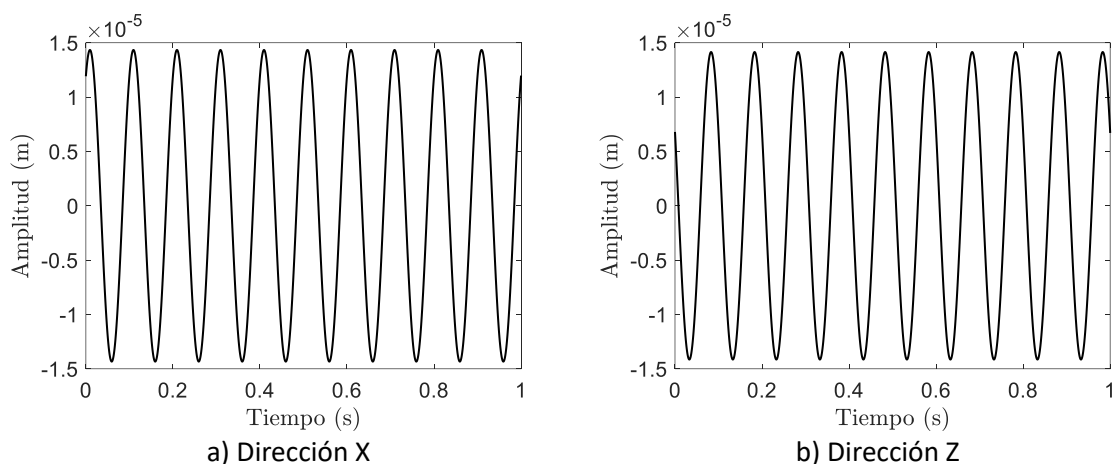


Figura 5.15. Respuesta vibratoria con $m_u d = 9.15 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}$ y $\alpha = 45^\circ$, 600 rpm.

A partir de la señales de vibración medidas en el nodo 8 (Figura 5.15), se obtienen las respuestas de vibración de los nodos vecinos mediante los factores de forma de la Tabla 5.3. Estas respuestas son necesarias para la aplicación del modelo identificador de desbalance de MGDL y se muestran en la Figura 5.16 y Figura 5.17 para las direcciones X y Z respectivamente.

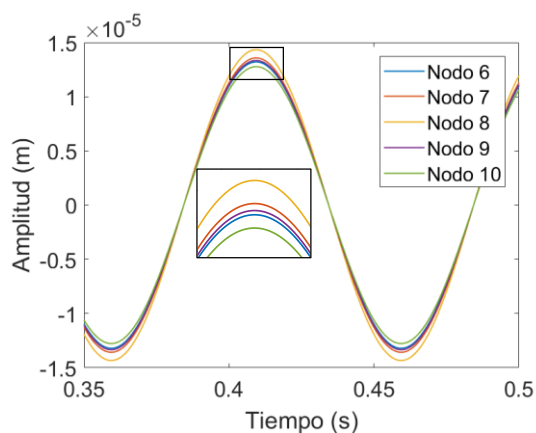


Figura 5.16. Respuesta vibratoria en dirección X.

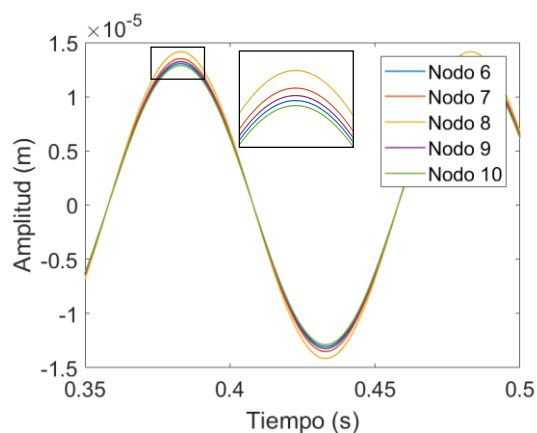


Figura 5.17. Respuesta vibratoria en dirección Z.

Una vez establecido el procedimiento del tratamiento de señales, se continúa con la implementación del identificador de desbalance para las pruebas indicadas en la Tabla 5.4. Donde el primer par de pruebas tiene un desbalance de $9.15 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}$ y el rotor opera a 600 y 1020 rpm. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.18 y Figura 5.19 respectivamente.

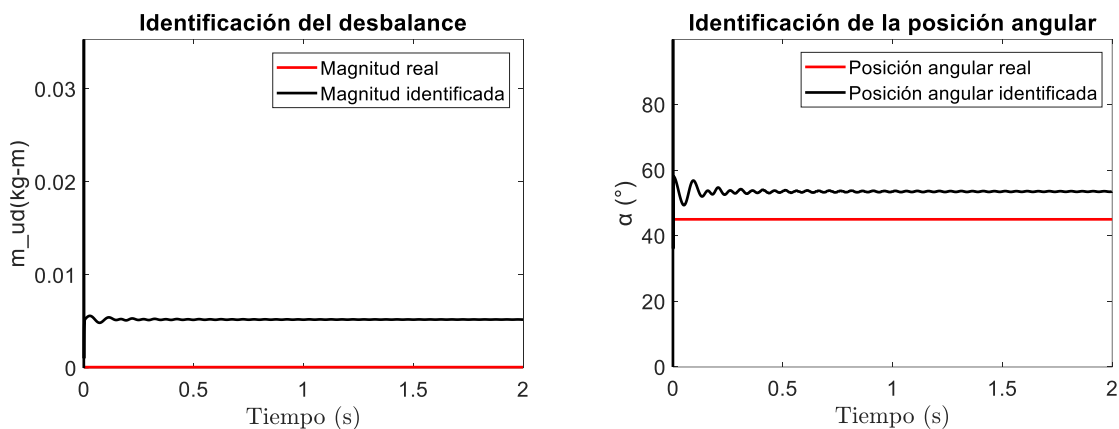


Figura 5.18. Identificación de magnitud y posición angular en nodo 8 a 600 rpm.

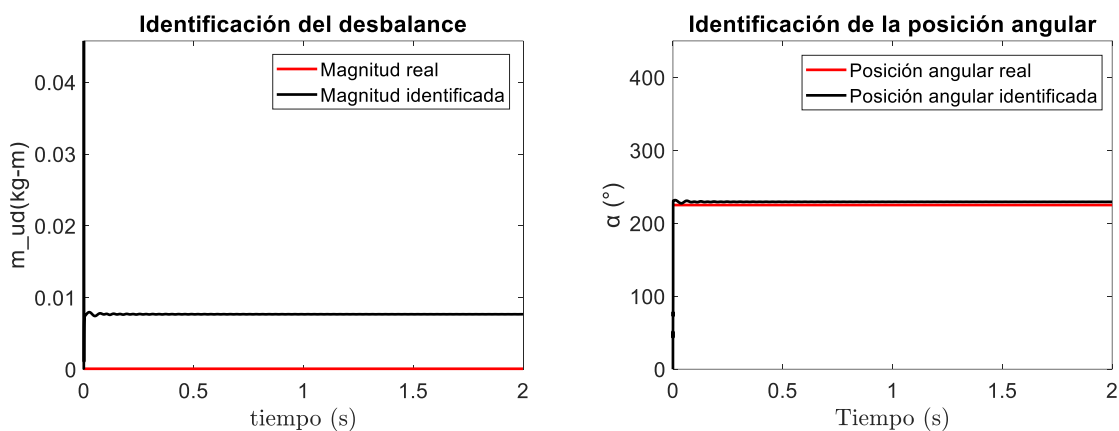


Figura 5.19. Identificación de magnitud y posición angular en nodo 8 a 1020 rpm.

El segundo par de pruebas tiene un desbalance de 1.776×10^{-4} kg·m y el rotor opera a 840 y 1200 rpm. Al ejecutar el proceso de identificación se obtienen los resultados mostrados en Figura 5.20 y Figura 5.21.

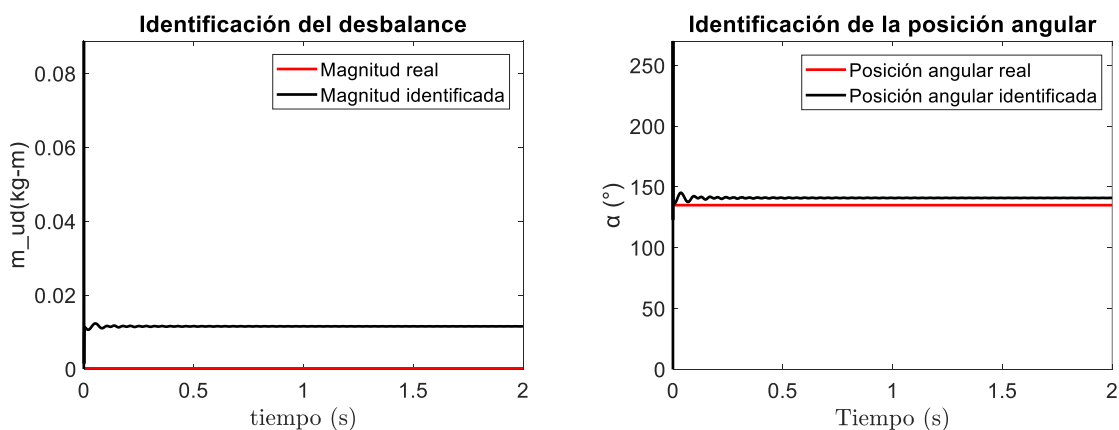


Figura 5.20. Identificación de magnitud y posición angular en nodo 8 a 840 rpm.

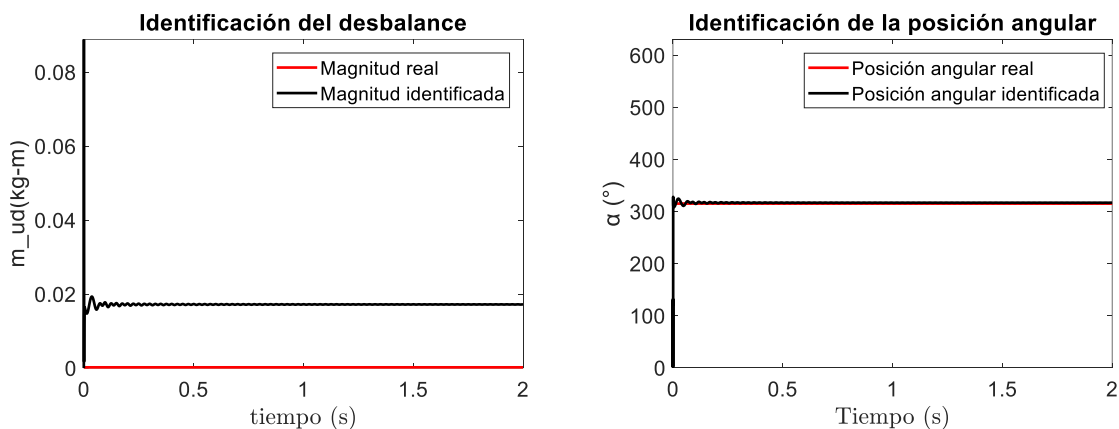


Figura 5.21. Identificación de magnitud y posición angular en nodo 8 a 1200 rpm.

Finalmente, el último par de pruebas tiene un desbalance de 2.865×10^{-4} kg-m y el rotor opera a 600 y 840 rpm. Los resultados de identificación de desbalance se muestran en Figura 5.22 y Figura 5.23.

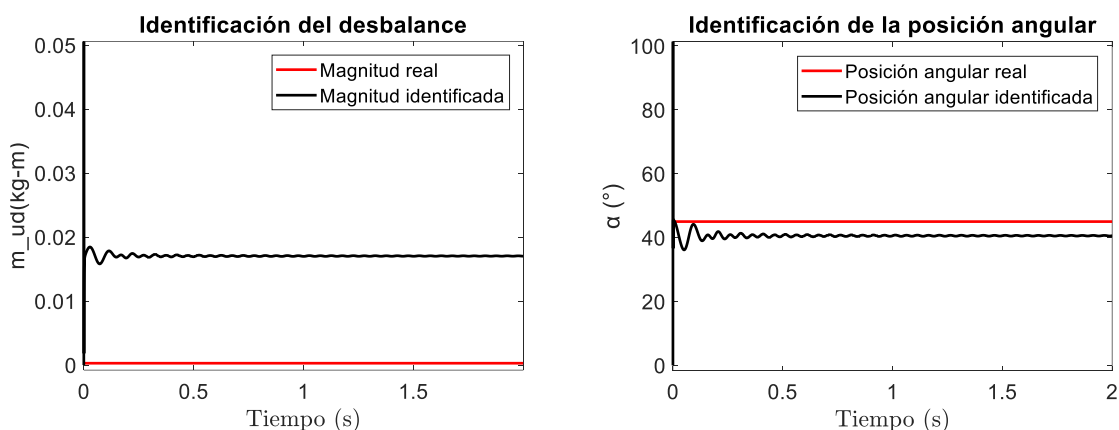


Figura 5.22. Identificación de magnitud y posición angular en nodo 8 a 600 rpm.

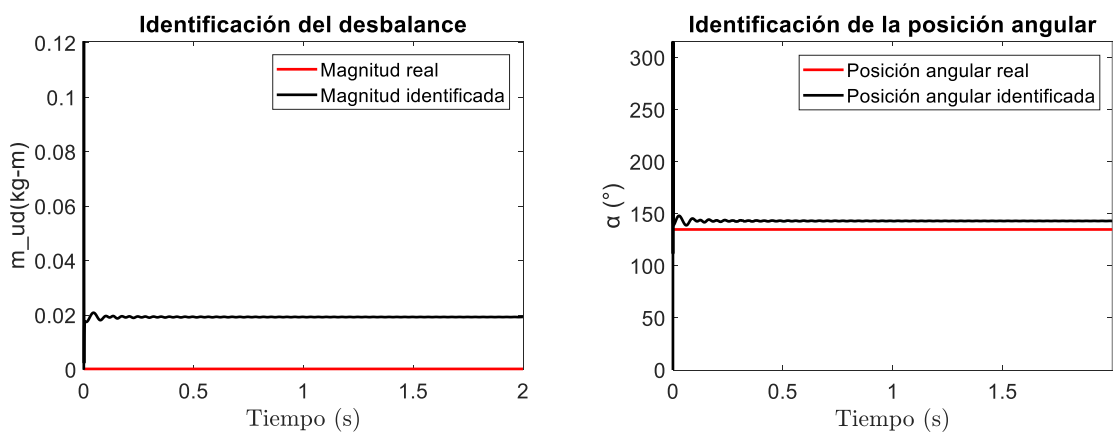


Figura 5.23. Identificación de magnitud y posición angular en nodo 8 a 840 rpm.

La Tabla 5.5 muestra a detalle los resultados de identificación para cada una de las pruebas realizadas. Se incluye además el porcentaje de error relativo EM_{ud} entre la magnitud de desbalance identificado y el valor de referencia (real), así como el error absoluto $E\alpha$ en la identificación de la posición angular.

Tabla 5.5. Identificación de parámetros de desbalance y porcentaje de error en la identificación.

| Velocidad $\dot{\phi}$ [rpm] | Nodo | Desbalance (Referencia) [kg·m] | Desbalance (Identificado) [kg·m] | EM_{ud} [%] | Posición angular (Referencia) [°] | Posición angular (Identificada) [°] | $E\alpha$ [°] |
|---------------------------------|------|--------------------------------------|--|------------------|--|--|------------------|
| 600 | 8 | 9.15×10^{-5} | 0.005203 | 5587 | 45 | 53.47 | 8.47 |
| 1020 | | | 0.00768 | 8295 | 225 | 229.3 | 4.3 |
| 840 | | 1.776×10^{-4} | 0.01156 | 6410 | 135 | 140.9 | 5.9 |
| 1200 | | | 0.0172 | 9585 | 315 | 316.7 | 1.7 |
| 600 | | 2.865×10^{-4} | 0.01701 | 5838 | 45 | 40.57 | 4.43 |
| 840 | | | 0.01937 | 6660 | 135 | 143.1 | 8.1 |

Los resultados obtenidos en la Tabla 5.5 muestran buenas aproximaciones en la identificación de la posición angular de desbalance con un error absoluto menor a 9° respecto al valor de referencia, siendo indiferente la velocidad de la prueba y la posición angular de desbalance. Sin embargo, en el caso de la magnitud de desbalance, los resultados difieren en gran medida del valor de referencia.

Mendoza [105] implementó un modelo identificador similar al expuesto en este trabajo de tesis en un rotor experimental con eje simétrico, pero no le fue posible estimar el desbalance discreto en el rotor. Entre sus conclusiones menciona que es necesario tener como dato de entrada los valores correctos de las pendientes en cada uno de los nodos del sistema para llevar a cabo la identificación del desbalance. Esto permite inferir, que los errores encontrados en las identificaciones de las magnitudes de desbalance mostrados en la en la Tabla 5.5, se atribuyen a las aproximaciones realizadas en la respuesta del sistema a partir de la medición de un solo nodo. Asimismo, el mal acondicionamiento de las matrices del sistema, común en estimadores de desbalance de sistemas rotodinámicos [40], el tratamiento de señales y errores de medición del sistema de adquisición de datos, también pueden influir en los resultados del modelo identificador de MGD.

Debido a que no fue posible estimar el desbalance discreto en el rotor experimental expuesto en la Figura 5.10, no será posible darle continuidad al procedimiento 1 de balanceo integral expuesto en la Figura 5.1, al menos no en este trabajo. Sin embargo, se intentará aplicar el procedimiento 2 de balanceo integral expuesto en Figura 5.1 como se muestra en secciones subsecuentes.

5.3 Aplicación de modelo Identificador de desbalance modal en rotor asimétrico.

Como se menciona en la sección 5.2.2, la aplicación experimental del modelo identificador de MGDL es sensible a errores de medición en la respuesta del sistema rotor- cojinete, sobre todo si se hacen aproximaciones de las respuestas a partir de la medición en un solo nodo. Para disminuir los errores en la identificación del desbalance, es necesario disminuir los errores en la medición y aproximación de la respuesta requerida por el modelo identificador. El modelo identificador de desbalance modal escrito en la ecuación (4.47) puede superar los inconvenientes que presenta el modelo identificador de MGD, ya que para su aplicación solo se requiere de la medición de los

desplazamientos laterales X y Z en un solo nodo, sin ser necesarias aproximaciones de respuestas ni cálculo de pendientes nodales. Como se vio en la sección 4.2.4.4, los parámetros obtenidos con el modelo identificador de desbalance modal deben permitir el cálculo de arreglos de masa de balanceo para el balanceo de uno o más modos de vibración, que pueden ser aplicados de manera manual o mediante los DBAs. Esto se comprobará de manera experimental en las secciones 5.3.1, 5.3.2 y 5.3.3, en donde se aplica el procedimiento 2 de balanceo integral expuesto en la Figura 5.1.

5.3.1 Balanceo modal de rotor asimétrico: control manual.

5.3.1.1 Configuración experimental.

El banco experimental utilizado en este estudio es un rotor kit de la marca Bently Nevada, está constituido por una flecha que tiene un largo de 510 mm de soporte a soporte. En la Figura 5.24 se muestra la configuración de sus elementos. Puede apreciarse que tres discos inerciales están montados sobre la flecha los cuales tienen una masa de 0.8 kg cada uno. Consta de un motor con un variador de velocidad RK4 rotor Kit que puede alcanzar una velocidad de 0 a 10,000 rpm. Una tarjeta de adquisición de la marca National Instruments USB-6251. Sensores de proximidad Bently Nevada 3300 XL series. Fuente de voltaje CD para la alimentación de los sensores del banco experimental. El procesamiento de señales y su visualización se realiza en una computadora mediante el programa informático Sound and Vibration de Labview.

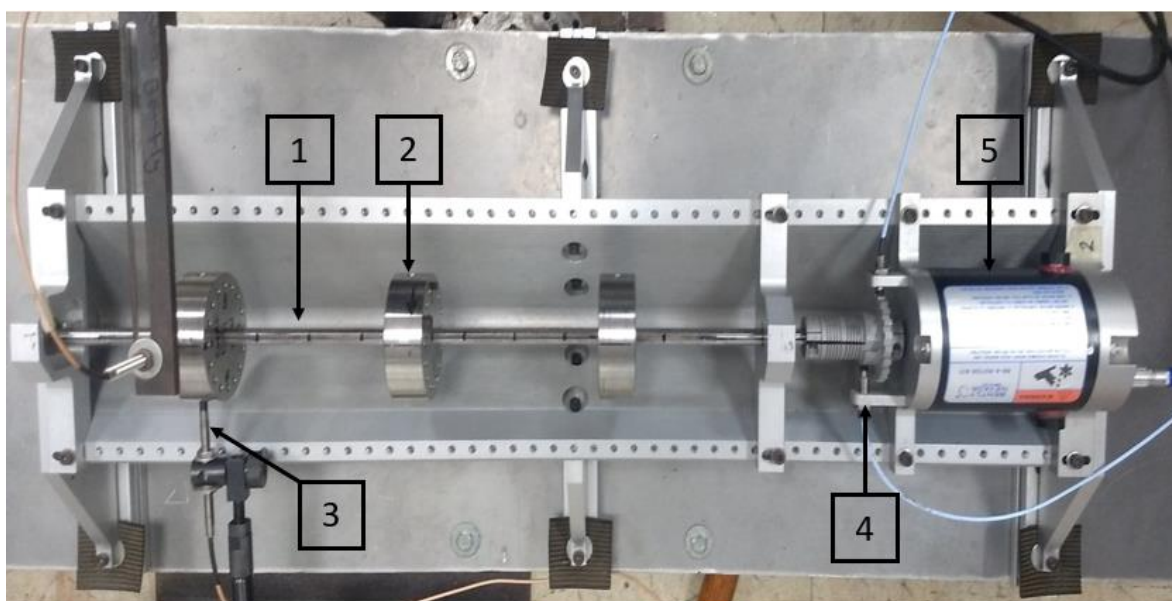


Figura 5.24. Configuración de banco experimental. 1) Flecha asimétrica, 2) Disco inercial 3) Sensor de proximidad, 4) Tacómetro, 5) Motor.

El banco experimental de la Figura 5.24 puede representarse esquemáticamente como se muestra en la Figura 5.25. Se observa que la flecha está constituida por dos secciones simétricas con una longitud de 41.1 mm cada una, y una sección asimétrica compuesta por 12 elementos con una longitud de 35.65 mm cada uno. También, se especifica la configuración de las secciones transversales de la flecha.

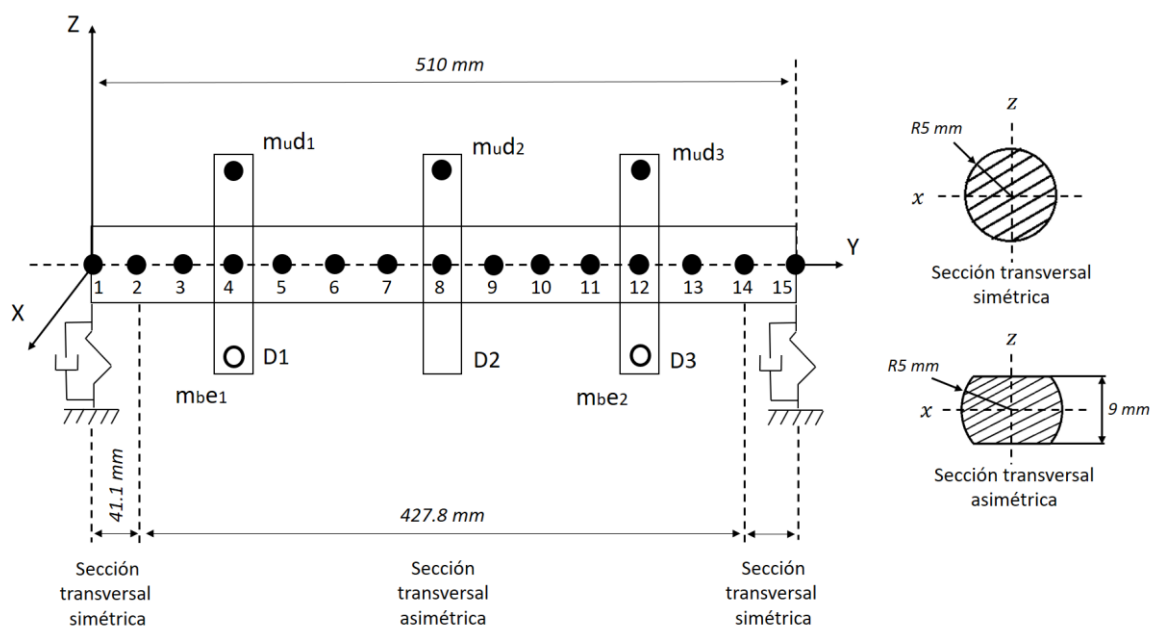


Figura 5.25. Representación esquemática del banco experimental.

Las propiedades mecánicas y geométricas del eje y los discos inerciales se especifican en la Tabla 5.6 y Tabla 5.7. El sistema cuenta con desbalance discreto en cada uno de sus discos inerciales tal como se presenta en la Tabla 5.8.

Tabla 5.6. Propiedades mecánicas y geométricas del eje (* r_s =radio de la sección simétrica, f =radio de sección asimétrica).

| Propiedades mecánicas | Geometría |
|--------------------------------------|----------------------|
| $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | $r_s = 5 \text{ mm}$ |
| $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ | $f = 4.5 \text{ mm}$ |
| $\nu = 0.3$ | |

Tabla 5.7. Propiedades mecánicas y geométricas de los discos (* eD=espesor del disco, ReD=radio exterior del disco, riD=radio interior del disco).

| Propiedades mecánicas | Geometría | | | |
|--------------------------------------|-----------|---------|---------|---------|
| | Disco | D1 | D2 | D3 |
| $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | eD | 25.4 mm | 25.4 mm | 25.4 mm |
| $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ | ReD | 37.5 mm | 37.5 mm | 37.5 mm |
| $\nu = 0.3$ | riD | 5 mm | 5 mm | 5 mm |

Tabla 5.8. Desbalance presente en el sistema

| Posición | Masa de desbalance (g) | Excentricidad (mm) | Posición angular (°) |
|----------|------------------------|--------------------|------------------------|
| nodo 4 | $m_u1 = 1.16$ | $d = 30$ | $\alpha_1 = 135^\circ$ |
| nodo 8 | $m_u2 = 1$ | $d = 30$ | $\alpha_2 = 315^\circ$ |
| nodo 12 | $m_u3 = 0.782$ | $d = 30$ | $\alpha_3 = 45^\circ$ |

En la Figura 5.26 se muestra un esquema de cómo se encuentran ubicados los sensores en el rotor, tomando como referencia los ejes X y Z , así como la graduación angular del disco inercial.

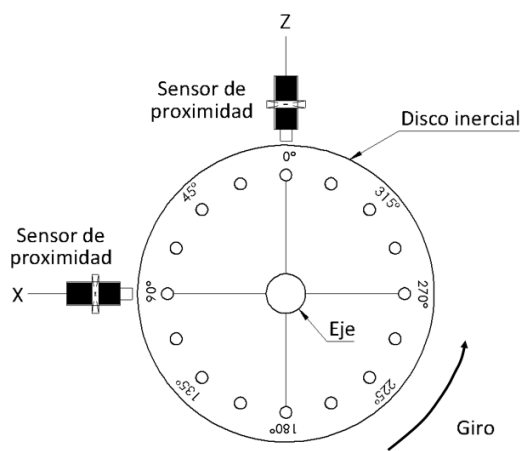


Figura 5.26. Ubicación de los sensores y graduación del disco inercial.

La Tabla 5.9, muestra las formas modales correspondientes al el primer y segundo modo en direcciones X y Z . Dichas formas modales están normalizadas al nodo 4 y fueron obtenidas experimentalmente mediante la prueba del martillo de impacto. La Figura 5.27 y Figura 5.28 muestran gráficamente las formas modales correspondientes al primer y segundo modo respectivamente, en las direcciones X y Z .

Tabla 5.9. Formas modales del primer y segundo modo en direcciones X y Z .

| Nodo | Modo 1 (20/21 Hz) | | Modo 2 (83/77 Hz) | |
|------|-------------------|-------------|-------------------|-------------|
| | φ_x | φ_z | φ_x | φ_z |
| 1 | 0.6667 | 0.3333 | 0.8876 | 0.7303 |
| 2 | 0.7118 | 0.4515 | 0.9036 | 0.8364 |
| 3 | 0.8696 | 0.8182 | 0.9639 | 0.9697 |
| 4 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 5 | 1.0805 | 1.2424 | 0.8876 | 0.8818 |
| 6 | 1.1594 | 1.4485 | 0.7189 | 0.6576 |
| 7 | 1.3269 | 1.5424 | 0.4458 | 0.4061 |
| 8 | 1.3977 | 1.5758 | 0.1201 | 0.0303 |
| 9 | 1.3285 | 1.5000 | -0.2241 | -0.4121 |
| 10 | 1.2222 | 1.3636 | -0.5382 | -0.6758 |
| 11 | 1.0725 | 1.1576 | -0.8112 | -0.8485 |
| 12 | 1.0467 | 0.8697 | -0.9759 | -0.9364 |
| 13 | 0.9452 | 0.6788 | -0.9839 | -0.8576 |
| 14 | 0.7359 | 0.4121 | -0.9317 | -0.7000 |
| 15 | 0.6200 | 0.3152 | -0.8675 | -0.6000 |

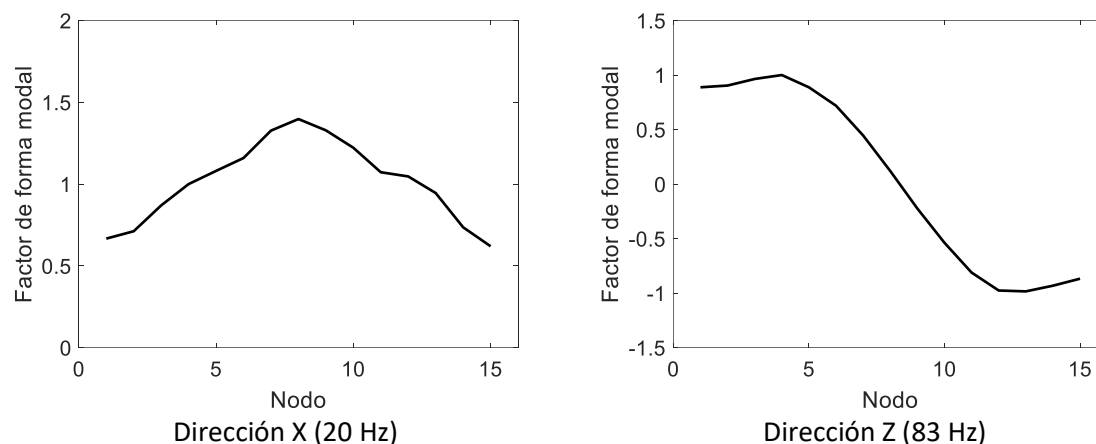


Figura 5.27 . Forma modal del primero modo.

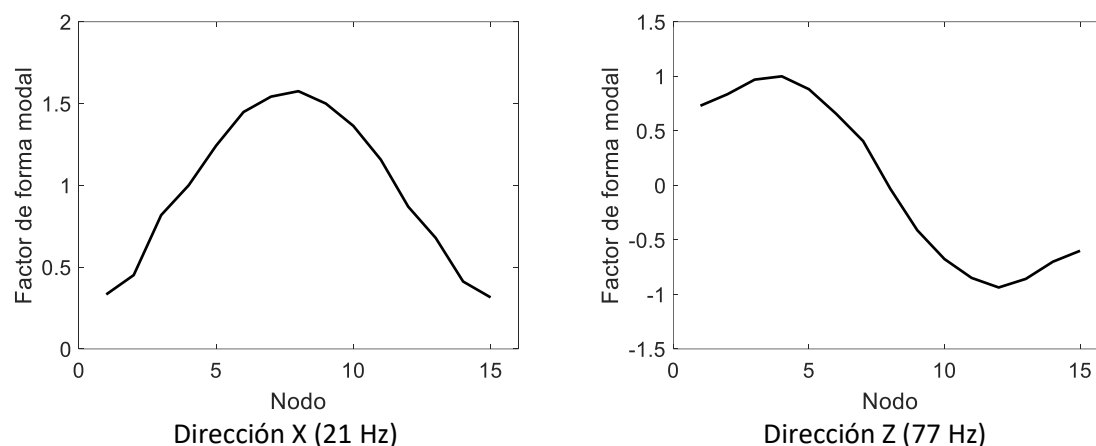


Figura 5.28. Forma modal del segundo modo.

Cabe mencionar que todas las características mecánicas y geométricas del rotor descrito en esta sección, deben precargarse en la plataforma computacional programada en MATLAB, misma que contiene al modelo matemático que realiza el proceso de identificación.

La prueba experimental consiste básicamente en estimar el desbalance modal $m_u d^*$, provocado por el desbalance discreto que se mostró en la Tabla 5.8, así como su posición angular α^* . Para obtener un valor de referencia debe emplearse la ecuación (4.43). La Figura 5.29 muestra de manera esquemática el proceso de identificación. Primero, el rotor gira a una velocidad angular ω constante en el rango de velocidades correspondiente al modo de estudio, lo que genera una respuesta vibratoria $\delta(t)$ que debe ser medida en las direcciones X y Z en el nodo de normalización de las formas modales (nodo 4, en este caso). Después, la respuesta es colectada por el módulo de adquisición de datos y enviada a un equipo de cómputo para su tratamiento y procesamiento. Posteriormente, la identificación de desbalance se realiza mediante una plataforma computacional programada en Matlab. Finalmente, los valores obtenidos deben compararse con los valores de referencia para la verificación del método.

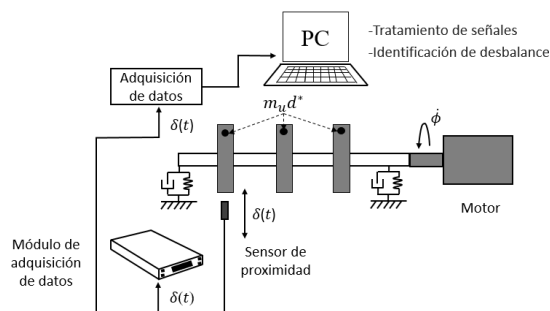


Figura 5.29. Representación esquemática de la configuración experimental.

El rotor opera desde una velocidad inicial de 0 rpm hasta una velocidad final de 6000 rpm, logrando excitar el primer y segundo modo de vibración con el desbalance indicado en Tabla 5.8. Estas condiciones generan la respuesta de la Figura 5.30 medida en el nodo 4. La identificación de desbalance modal debe realizarse a velocidades cercanas al correspondiente modo de estudio. Por tal motivo, en la Tabla 5.10 se proponen algunas velocidades de rotación para la realización de la prueba experimental. Además, se señalan el desbalance modal $m_u d^*$ y su posición angular α^* como parámetros de referencia.

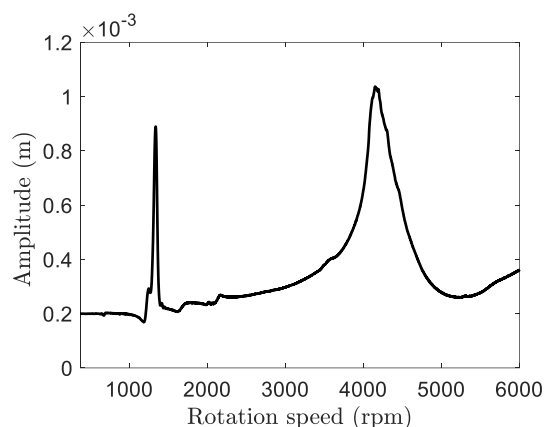


Figura 5.30. Respuesta al desbalance nodo 4.

Tabla 5.10. Condiciones de las pruebas experimentales.

| Modo | Velocidad de prueba [rpm] | Desbalance modal $m_u d^*$ [kg-m] | Posición α^* [°] |
|------|---------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| 1 | 960 (16 Hz) | 2.631×10^{-5} | 27.29 |
| | 1080 (18 Hz) | | |
| | 1200 (20 Hz) | | |
| | 1320 (22Hz) | | |
| | 1440 (24 Hz) | | |
| 2 | 3600 (60 Hz) | 4.12×10^{-5} | 171.8 |
| | 3840 (64Hz) | | |
| | 4080 (68 Hz) | | |
| | 4320 (72Hz) | | |
| | 4560 (76 Hz) | | |
| | 4800 (80 Hz) | | |

5.3.1.2 Identificación de desbalance.

Las condiciones mostradas en la Tabla 5.10 generan respuestas vibratorias que deben ser tratadas como se indicó en la sección 5.1 y posteriormente evaluadas por el modelo identificador para estimar los parámetros de desbalance en cada configuración. A continuación, se presenta un primer caso de ejemplo de identificación de desbalance, donde se emplea la respuesta del sistema operando a 1320 rpm correspondiente al primer modo. En ese caso, el desbalance modal de referencia es $m_u d^* = 2.631 \times 10^{-5} \text{kg}\cdot\text{m}$ y tiene una posición angular $\alpha^* = 27.29^\circ$. Es importante señalar que las propiedades de los soportes son esenciales para la aplicación de este método. Para el presente caso de estudio, la aportación modal de propiedades de los soportes es: $k_{BX} = -3.46 \times 10^5 \text{ N/m}$, $k_{BZ} = -7.825 \times 10^5 \text{ N/m}$, $c_{BX} = -178.9 \text{ Ns/m}$ y $c_{BZ} = 26.03 \text{ Ns/m}$, las cuales pueden obtenerse mediante un método de estimación de parámetros como identificación algebraica, algoritmos genéticos, etc. Cuando la respuesta es evaluada por el modelo identificador de desbalance (4.48) se obtienen los resultados mostrados en la Figura 5.31.

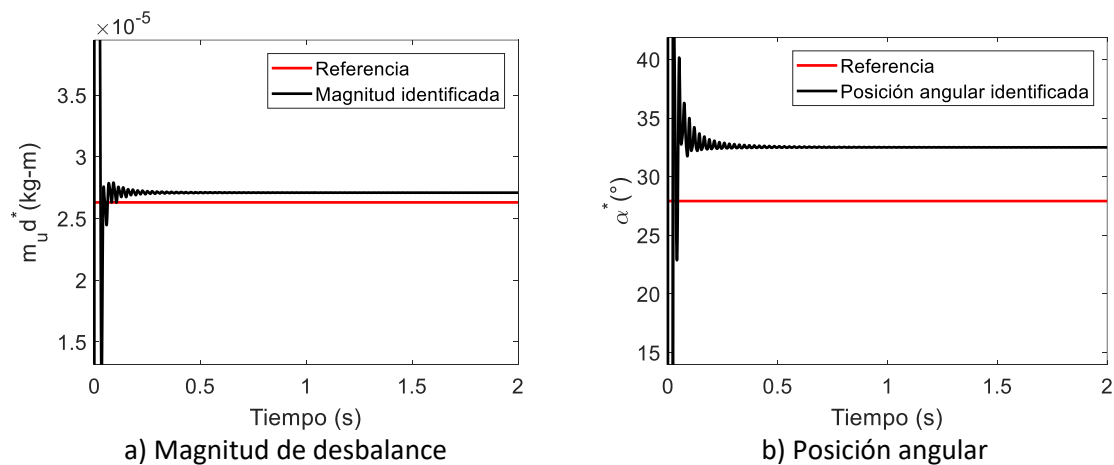


Figura 5.31. Identificación de magnitud y posición angular de desbalance ($\dot{\phi} = 1320 \text{ rpm}$, $m_u d^* = 2.631 \times 10^{-5} \text{kg}\cdot\text{m}$, $\alpha^* = 27.29^\circ$).

En la Figura 5.31, la línea de color rojo representa los valores de referencia, mientras que la línea negra representa el resultado estimado con el modelo identificador. Los valores estimados son próximos al valor de referencia, el error relativo entre la magnitud desbalance identificado y el valor de referencia es menor al 5%, mientras que el desfase entre la posición angular identificada y su valor de referencia es de 5.41° . Se observa además, que los valores identificados se estabilizan en un tiempo menor a 1 segundo, tanto en la magnitud (Figura 5.31a) como en posición angular (Figura 5.31b).

En un segundo caso de ejemplo, la respuesta experimental es medida cuando el rotor opera a una velocidad de 3600 rpm. Esa velocidad se encuentra en el rango del segundo modo de acuerdo con la Figura 5.30. El desbalance modal de referencia para el segundo modo es $m_u d^* = 4.12 \times 10^{-5} \text{kg}\cdot\text{m}$ y tiene una posición angular $\alpha^* = 171.8^\circ$. Para este caso, la aportación modal de propiedades de los soportes es: $k_{BX} = 7.676 \times 10^4 \text{ N/m}$, $k_{BZ} = -1.363 \times 10^5 \text{ N/m}$, $c_{BX} = 154.3 \text{ Ns/m}$ y $c_{BZ} = 138.4 \text{ Ns/m}$. Al evaluar la respuesta experimental en el modelo identificador (4.48) se obtienen los resultados mostrados en la Figura 5.32. De nuevo, la línea de color rojo es el valor de referencia y la línea continua de color negro representa el valor identificado, que se estabiliza en un tiempo

menor a 1 segundo manteniéndose constante a lo largo del tiempo. Para este caso, error relativo entre la magnitud de desbalance identificada y el valor de referencia fue de 0.264%, el error absoluto en el valor identificado de la posición angular fue de 3°.

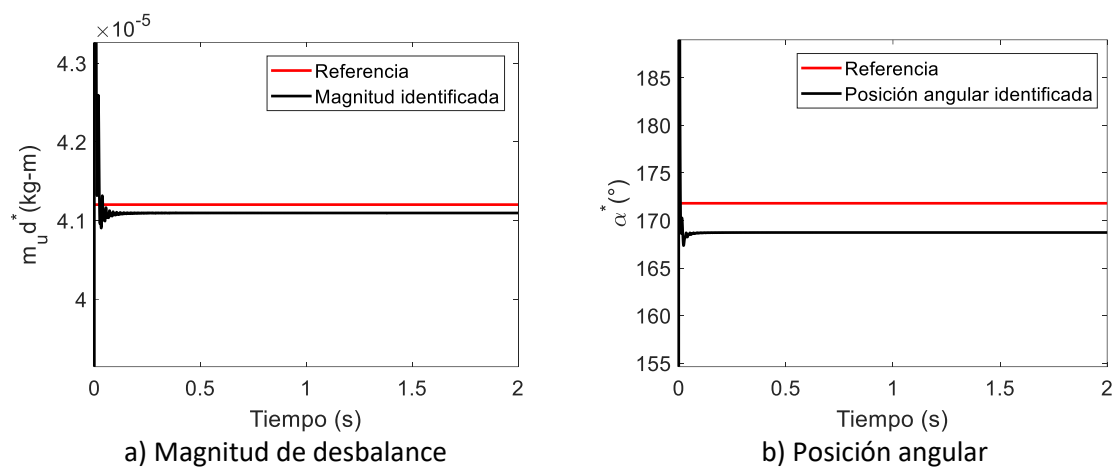


Figura 5.32. Identificación de magnitud y posición angular de desbalance ($\phi = 3600$ rpm, $m_u d^* = 4.12 \times 10^{-5}$ kg-m, $\alpha^* = 171.8^\circ$).

Como se observó en la Figura 5.31 y Figura 5.32 los parámetros de desbalance estimados con la metodología propuesta, tienen una buena aproximación. Sin embargo, es interesante conocer el comportamiento del identificador a diferentes velocidades, antes, durante o después de las correspondientes velocidades críticas del modo de estudio. Por esa razón se evalúa el comportamiento del identificador en cada una de las condiciones mostradas en la Tabla 5.10 . En Tabla 5.11 se resumen los resultados obtenidos en cada una de estas condiciones de operación. Se incluye además el porcentaje de error relativo $EM_u d^*$ entre la magnitud de desbalance identificado y el valor de referencia, así como el error absoluto $E\alpha^*$ en la identificación de la posición angular.

Tabla 5.11. Resultados de pruebas experimentales.

| Modo | Velocidad de prueba [rpm] | Desbalance (Referencia) [kg-m] | Desbalance (Identificado) [kg-m] | $EM_u d^*$ [%] | Posición angular (Referencia) [°] | Posición angular (Identificada) [°] | $E\alpha^*$ [°] |
|------|---------------------------|--------------------------------|----------------------------------|----------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| 1 | 960 | 2.63×10^{-5} | 2.5×10^{-5} | 4.964 | 27.29 | 20.45 | 6.84 |
| | 1080 | | 2.542×10^{-5} | 3.386 | | 20.43 | 6.86 |
| | 1200 | | 2.811×10^{-5} | 6.847 | | 21.32 | 5.97 |
| | 1320 | | 2.715×10^{-5} | 3.188 | | 32.7 | 5.41 |
| | 1440 | | 2.378×10^{-5} | 9.626 | | 23.98 | 3.31 |
| | 1560 | | 2.4×10^{-5} | 8.771 | | 22.61 | 4.68 |
| 2 | 3600 | 4.12×10^{-5} | 4.108×10^{-5} | 0.2641 | 171.8 | 168.8 | 3 |
| | 3840 | | 4.096×10^{-5} | 0.60 | | 169.6 | 2.2 |
| | 4080 | | 4.106×10^{-5} | 0.3395 | | 172.5 | 0.7 |
| | 4320 | | 3.924×10^{-5} | 4.72 | | 172.4 | 0.6 |
| | 4560 | | 3.941×10^{-5} | 4.353 | | 169.6 | 2.2 |
| | 4800 | | 3.954×10^{-5} | 4.057 | | 169.3 | 2.5 |

Los resultados obtenidos en las pruebas experimentales demuestran la efectividad del método para la identificación de desbalance modal en rotores asimétricos. En todos los casos, el error relativo es

menor a 10% en la magnitud del desbalance identificado con desfases menores a 7° en la posición angular respecto a los valores de referencia.

5.3.1.3 Balanceo del rotor asimétrico sin discos de balanceo.

En esta sección, se muestra el cambio en la respuesta del sistema al balancear el rotor en el primer y segundo modo de vibración, a partir de parámetros de desbalance identificados en la sección 5.3.1.2. Para ello es necesario hacer un arreglo de masas de balanceo, tal y como se indicó en la sección 4.1.5.1 con las ecuaciones (4.20) y (4.21). Las masas de balanceo $m_b e_n$ calculadas serán colocadas manualmente en los discos inerciales D1 y D3, los cuales se encuentran posicionados en los nodos 4 y 12 (ver Figura 5.25), y que son nodos seleccionados como planos de balanceo. La Tabla 5.12 muestra los resultados de la selección de masas de balanceo para los parámetros identificados con la mayor (caso A) y la menor (caso B) desviación porcentual respecto a los valores de referencia. Puede apreciarse que no hay una diferencia considerable entre ambos casos. Se incluyen también, valores de masas de balanceo que físicamente están disponibles para su colocación en los planos de balanceo. Estos valores se encuentran cercanos a los calculados para los casos A y B, por lo que son utilizados para el balanceo del rotor.

Tabla 5.12. Resultados del cálculo de masas de balanceo.

| Caso | D1 | | D3 | |
|------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| | Masa de balanceo $m_b e_1$ (kg-m) | Posición angular ε_1 | Masa de balanceo $m_b e_2$ (kg-m) | Posición angular ε_2 |
| A | 1.058×10^{-5} | 311.29° | 3.365×10^{-5} | 180.57° |
| B | 1.057×10^{-5} | 309.67° | 3.638×10^{-5} | 184.36° |
| Disponible | 1.101×10^{-5} | 315 | 3.573×10^{-5} | 180° |

La Figura 5.33 muestra el cambio en la respuesta del sistema después de colocar las masas de balanceo disponibles físicamente en los discos D1 y D3. En este caso la respuesta fue medida en el nodo 4 y se observa una evidente reducción de amplitud, tanto en el modo 1 como en el modo 2.

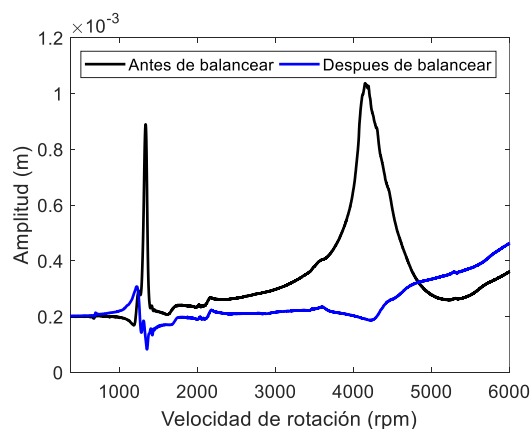


Figura 5.33. Respuesta al desbalance nodo 4.

Para comprobar que el balanceo realizado es adecuado, el efecto de reducción de la respuesta debe ser similar en todos los nodos del rotor. Las Figuras 5.34a y 5.34b muestran las respuestas medidas

en los nodos 8 y 12 respectivamente. En ambos casos, se aprecia el mismo efecto de reducción de respuesta en el primer y segundo modo.

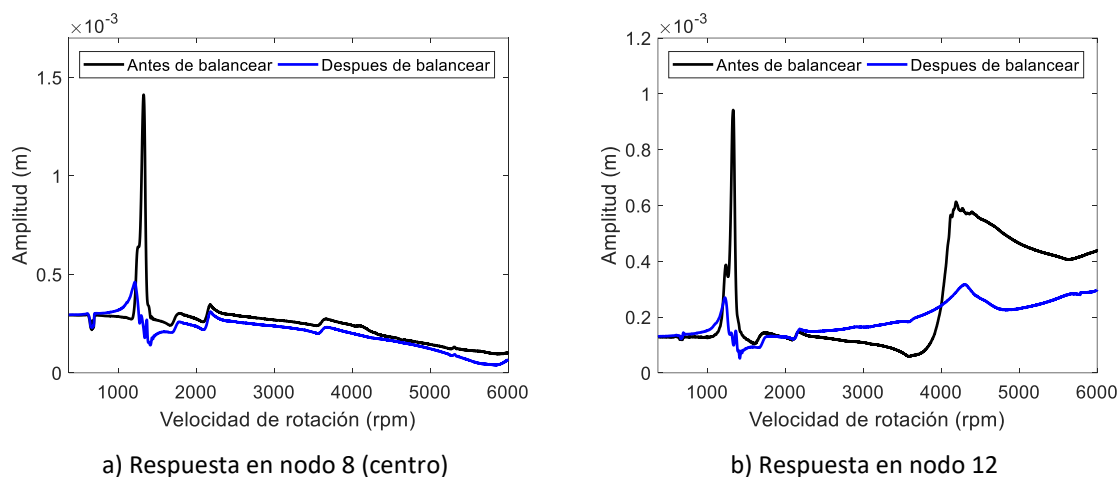


Figura 5.34. Respuesta al desbalance.

La Tabla 5.13 muestra a detalle la amplitud de la repuesta en las velocidades críticas, en los nodos 4, 8 y 12, antes y después del balanceo. Se incluye el porcentaje de reducción de la respuesta en cada caso. Los resultados muestran reducciones mayores al 80% en los 3 nodos de medición. La reducción del 20.26% en el segundo modo en el nodo 8, es porque es una posición nodal donde las amplitudes están disminuidas para el segundo modo, sin embargo, puede apreciarse el efecto en la reducción de amplitud por el balanceo. La reducción del 52.92% del segundo modo en el nodo 12, puede mejorarse con una selección de masas de balanceo físicamente más precisa.

Tabla 5.13. Reducción de amplitudes de vibración en velocidades críticas.

| Nodo de medición | Velocidad de rotación [rpm] | Amplitud [m] (Sin control DBA) | Amplitud [m] (Con control DBA) | % reducción |
|------------------|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
| 4 | 1336 | 8.895×10^{-4} | 1.210×10^{-4} | 86.39 |
| | 4150 | 1.036×10^{-3} | 1.913×10^{-4} | 81.55 |
| 8 | 1327 | 1.412×10^{-3} | 2.217×10^{-4} | 84.29 |
| | 4115 | 2.383×10^{-4} | 1.900×10^{-4} | 20.26 |
| 12 | 1333 | 9.420×10^{-4} | 1.022×10^{-4} | 89.15 |
| | 4190 | 6.133×10^{-4} | 2.887×10^{-4} | 52.92 |

La aplicación de la metodología propuesta logró reducir las amplitudes de vibración del primer y segundo modo con porcentajes bastante aceptables, su efecto pudo verse en los nodos 4, 8 y 12. La selección adecuada de masas de balanceo fue posible gracias al modelo identificador de desbalance modal, en donde a pesar de las diferencias entre los valores identificados y las referencias, se logra hacer estimaciones que permiten el balanceo de rotores asimétricos.

5.3.2 Balanceo modal con un DBA.

5.3.2.1 Configuración experimental.

Para realizar la demostración del balanceo Modal de un rotor asimétrico con múltiples desbalances mediante 1 DBA, fue necesario montar el banco experimental de la Figura 5.35. Está constituido por una flecha asimétrica con una longitud de 510 mm de soporte a soporte, sobre la cual se hayan montados tres discos inerciales, así como un DBA. Para la medición de la vibración del rotor se posiciona un par de sensores de proximidad Bently Nevada 3300 XL series en un disco inercial. La adquisición de las señales de vibración se logra a través de una tarjeta de adquisición de la marca National Instruments USB-6251 y su visualización se realiza en una computadora mediante el programa informático Sound and Vibration de Labview.

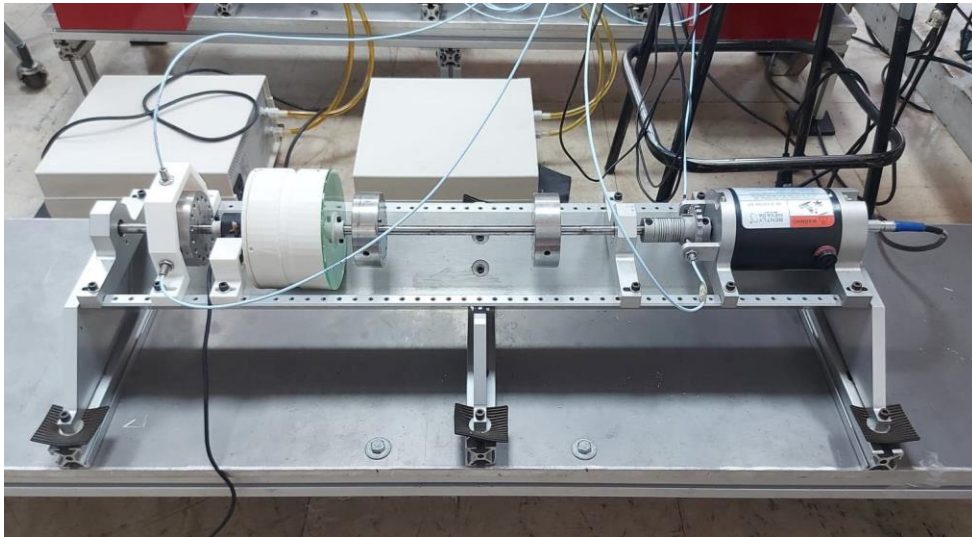


Figura 5.35 . Configuración banco experimental rotor asimétrico con DBA.

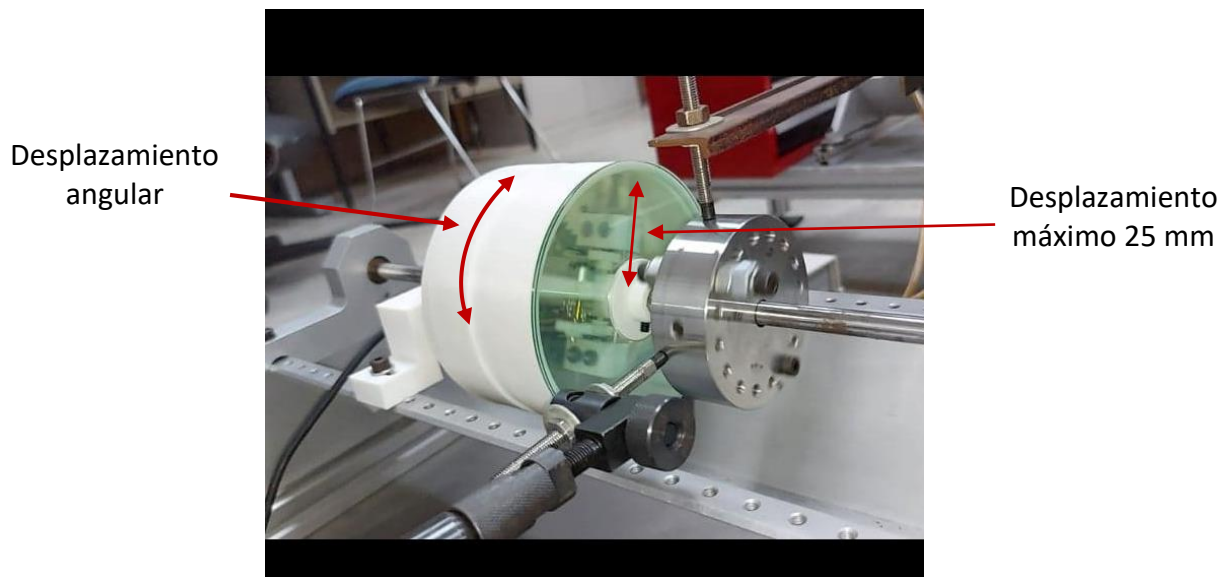


Figura 5.36. Características del DBA.

En la Figura 5.36, se muestra una fotografía del DBA y se indican los movimientos que puede realizar. Asimismo, el DBA es controlado vía Bluetooth por la interfaz desarrollada por Guzmán [111] que se muestra en la Figura 5.37. Con la interfaz, la masa móvil del DBA de 5.5g puede colocarse a una posición angular de 0 a 360° y a una posición radial de 0 a 25 mm, generando los desbalances que se muestran en la Figura 5.38. El desbalance máximo generado (masa de balanceo) por el DBA es de 1.375×10^4 kg·m. Cabe mencionar que, en caso de requerir mayor desbalance, las masas móviles pueden reemplazarse por otras con mayor masa.

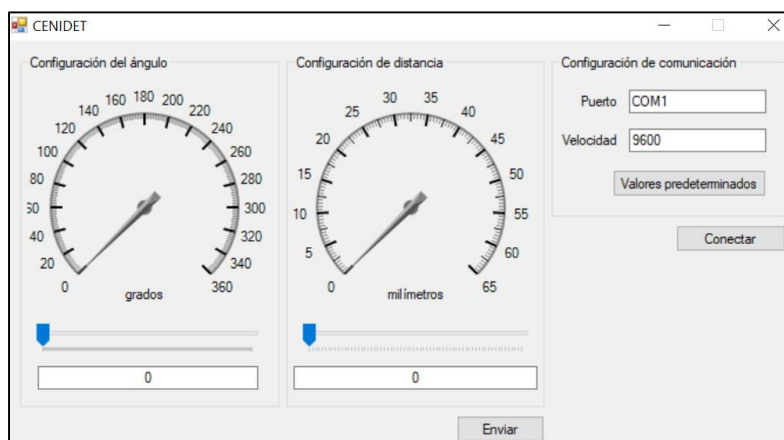


Figura 5.37. Interfaz para la conexión del DBA vía Bluetooth.

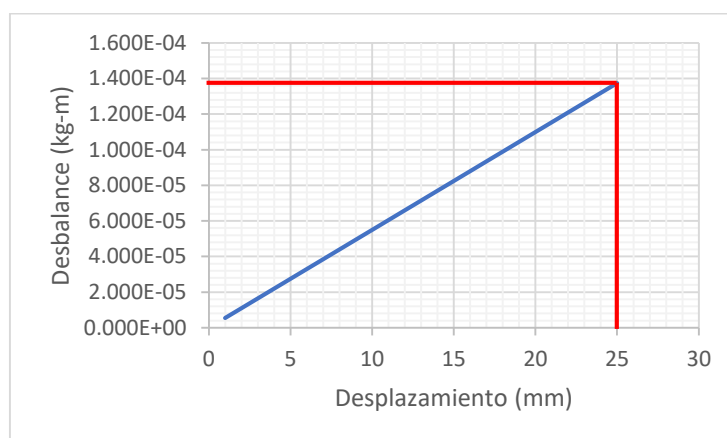


Figura 5.38. Distancia radial vs desbalance generado.

El banco experimental de la Figura 5.35 puede representarse esquemáticamente como se muestra en la Figura 5.39. Se observa que la flecha está constituida por 2 secciones simétricas con una longitud de 41.1 mm cada una, y una sección asimétrica compuesta por 12 elementos con una longitud de 35.65 mm cada uno. También, se especifica la configuración de las secciones transversales de la flecha.

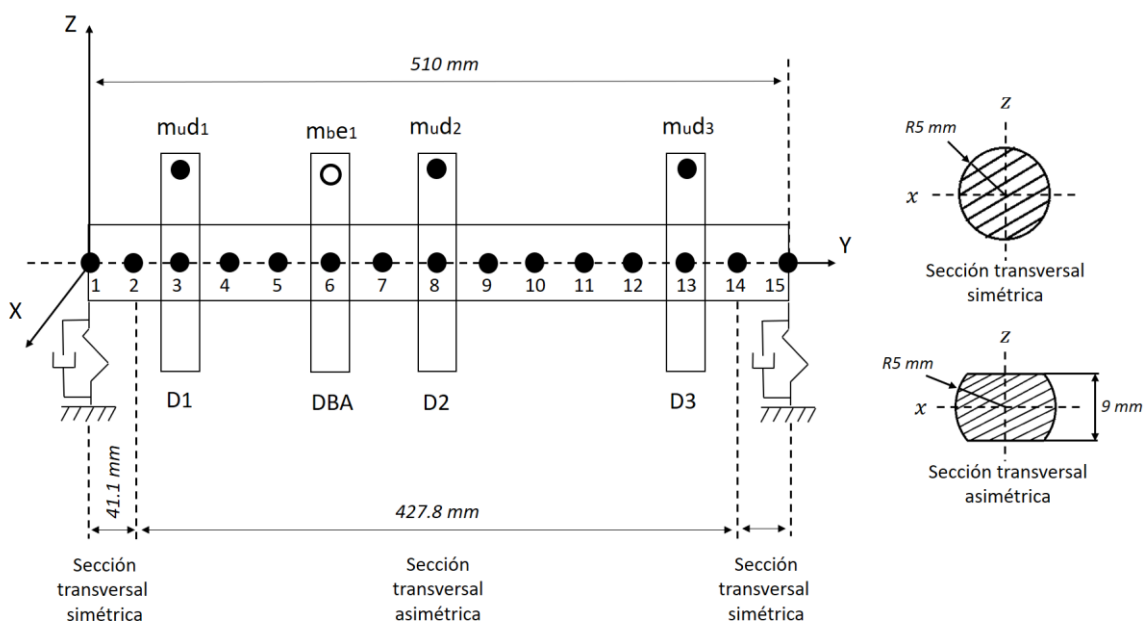


Figura 5.39. Representación esquemática del banco experimental.

Las propiedades mecánicas y geométricas del eje y los discos inerciales se especifican en Tabla 5.13 y Tabla 5.14. El DBA tiene una masa de 337.6 g y se posiciona en el nodo 6. Como ya se mencionó, la masa móvil tiene un valor de 5.5 g para las siguientes pruebas experimentales.

Tabla 5.13. Propiedades mecánicas y geométricas del eje (* r_s =radio de la sección simétrica, f =radio de sección asimétrica).

| Propiedades mecánicas | Geometría |
|--------------------------------------|----------------------|
| $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | $r_s = 5 \text{ mm}$ |
| $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ | $f = 4.5 \text{ mm}$ |
| $\nu = 0.3$ | |

Tabla 5.14. Propiedades mecánicas y geométricas de los discos (* eD =espesor del disco, ReD =radio exterior del disco, riD =radio interior del disco).

| Propiedades mecánicas | Geometría | | | |
|--------------------------------------|-----------|---------|---------|---------|
| | Disco | D1 | D2 | D3 |
| $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | | | | |
| $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ | | | | |
| $\nu = 0.3$ | | | | |
| | eD | 25.4 mm | 25.4 mm | 25.4 mm |
| | ReD | 37.5 mm | 37.5 mm | 37.5 mm |
| | riD | 5 mm | 5 mm | 5 mm |

La Tabla 5.15 muestra los factores de forma correspondientes al primer modo, en las direcciones X y Z del rotor con la configuración presentada en la Figura 5.39 y están normalizados al nodo 3. Asimismo, en la Figura 5.40 se muestran gráficamente las formas modales correspondientes al primer modo de vibración para las direcciones X y Z respectivamente.

Tabla 5.15. Formas modales del primer modo en direcciones X y Z.

| Nodo | Modo 1 (20/23 Hz) | |
|------|-------------------|-------------|
| | φ_X | φ_Z |
| 1 | 0.5487 | 0.3586 |
| 2 | 0.7128 | 0.5805 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | 1.3162 | 1.4286 |
| 5 | 1.5556 | 1.7669 |
| 6 | 1.7094 | 2.0226 |
| 7 | 1.7949 | 2.1805 |
| 8 | 1.8462 | 2.2632 |
| 9 | 1.7949 | 2.2331 |
| 10 | 1.7265 | 2.1203 |
| 11 | 1.5624 | 1.8872 |
| 12 | 1.3812 | 1.4361 |
| 13 | 1.0239 | 0.9699 |
| 14 | 0.7231 | 0.4947 |
| 15 | 0.5795 | 0.3699 |

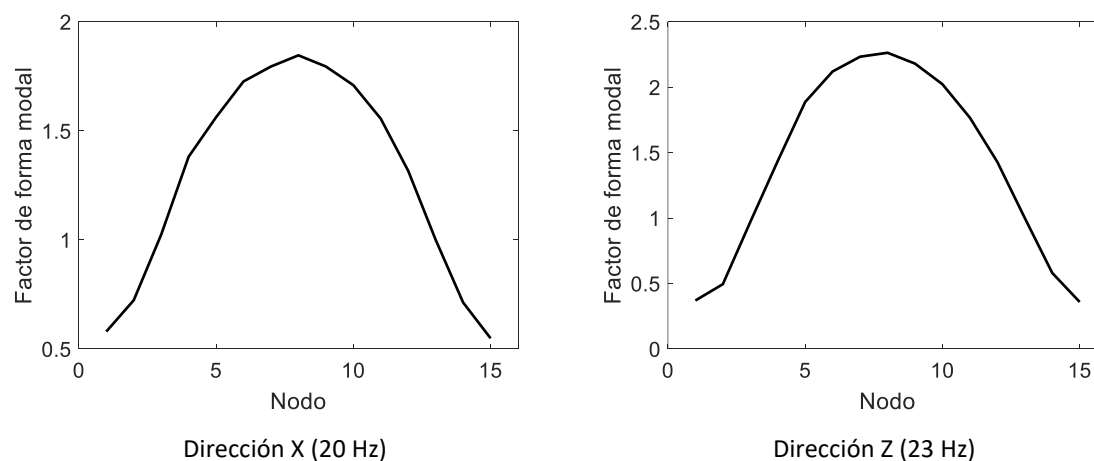


Figura 5.40. Forma modal del primer modo.

La distribución de desbalance en los discos inerciales del rotor que se propone para la prueba experimental, se muestra en la Tabla 5.16.

Tabla 5.16. Desbalance presente en el sistema.

| Posición | Masa de desbalance (g) | Excentricidad (mm) | Posición angular (°) |
|----------|------------------------|--------------------|--------------------------|
| nodo 3 | $m_u1 = 0.7$ | $d = 30$ | $\alpha_1 = 157.5^\circ$ |
| nodo 8 | $m_u2 = 1$ | $d = 30$ | $\alpha_2 = 180^\circ$ |
| nodo 13 | $m_u3 = 0.7$ | $d = 30$ | $\alpha_3 = 202.5^\circ$ |

Cabe mencionar que todas las características mecánicas y geométricas del rotor descrito en esta sección, deben precargarse en la plataforma computacional programada en MATLAB, misma que contiene al modelo matemático que realiza el proceso de identificación.

La prueba experimental consiste en disminuir las vibraciones del primer modo de vibración del rotor descrito en esta sección, mediante un DBA. Primeramente, el rotor gira a una velocidad angular $\dot{\phi}$ constante en el rango de velocidades correspondiente al primer modo de vibración, lo que genera una respuesta vibratoria $\delta(t)$ que debe ser medida en las direcciones X y Z en el nodo de normalización de las formas modales (nodo 3). Después, la señal de la respuesta vibratoria es colectada por el módulo de adquisición de datos y enviada a un equipo de cómputo para su tratamiento y procesamiento. Posteriormente, se realiza la identificación del desbalance modal $M_u d_n^*$, provocado por el desbalance que se indica en la Tabla 5.16. Luego, se realiza el cálculo de la masa de balanceo $M_b e_n$ por medio de la ecuación (4.17), como se indicó en la sección 4.1.5.1. Después, se introducen los parámetros de control en la interfaz de comunicación entre el equipo de cómputo y el DBA y la señal de control es enviada al DBA mediante un sistema de control de lazo abierto. La Figura 5.41 muestra de manera esquemática el proceso de balanceo aquí descrito. Por último, se compara la respuesta controlada por el DBA contra la respuesta que tenía el rotor desbalanceado. La comparación de las respuestas tiene el objetivo de observar la disminución de la amplitud de vibración por efecto del DBA y comprobar que el rotor balanceo correctamente.

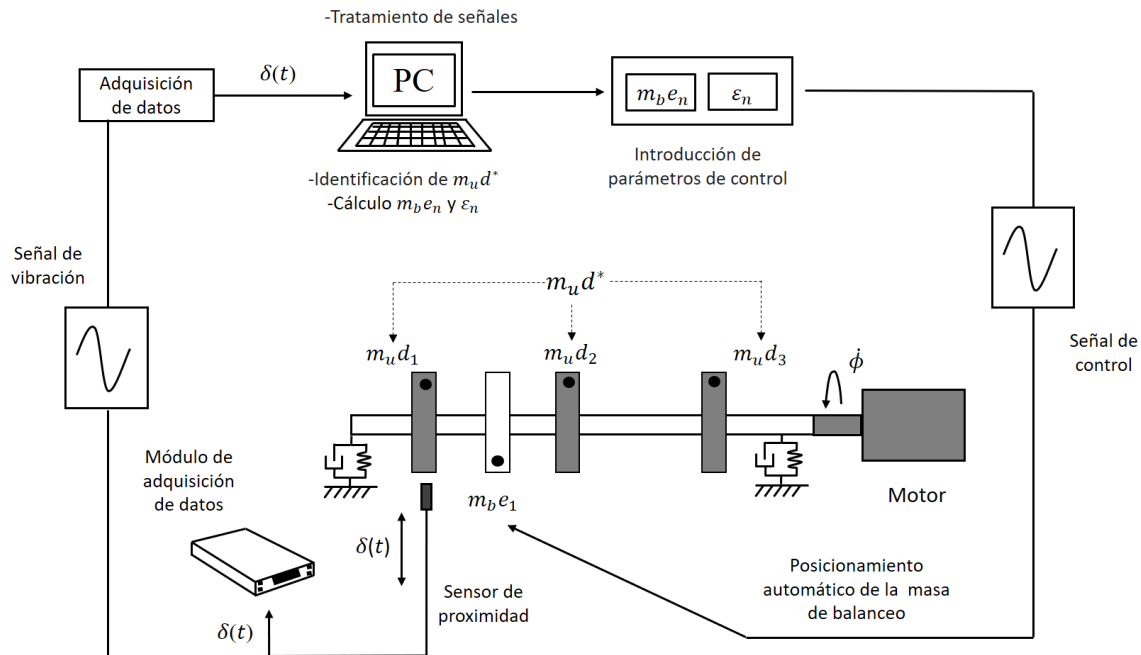


Figura 5.41. Representación esquemática de la configuración experimental.

El sistema rotodinámico descrito en esta sección, inicia su operación en 0 rpm hasta alcanzar la velocidad nominal de operación designada de 2000 rpm, en ese rango de velocidad se excita el primer modo de vibración del rotor y la respuesta resultante medida en el nodo 3 se muestra en la Figura 5.42.

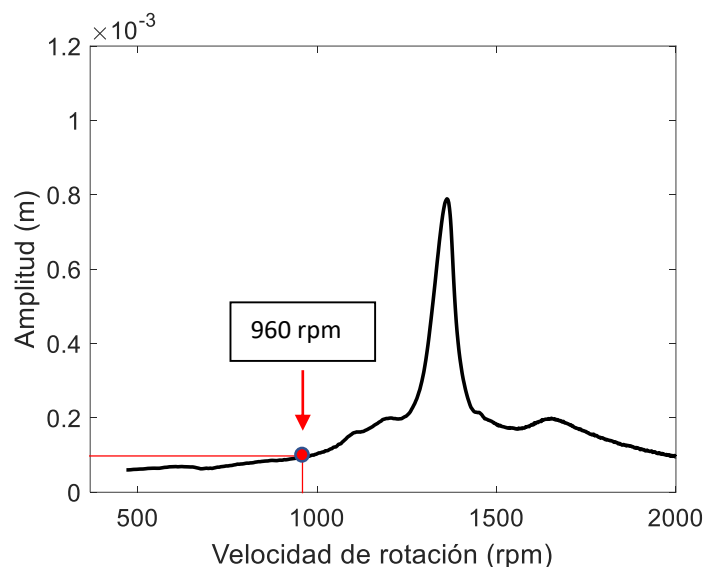


Figura 5.42. Respuesta del rotor desbalanceado nodo 3.

En la Figura 5.42 se puede observar que, 960 rpm (16 Hz) es una velocidad que se aproxima a la velocidad crítica del primer modo (1364 rpm \cong 22.7 Hz), por lo que se selecciona para realizar la identificación y el control. Esto de acuerdo a lo establecido en la sección 4.2.4.3, referente al proceso de identificación de desbalance modal.

La contribución modal de las propiedades de soporte, rigidez y amortiguamiento, correspondiente al rotor del banco experimental de la Figura 5.35 se muestran en la Tabla 5.17.

Tabla 5.17 . Contribución modal de propiedades de soporte.

| Modo | k_{BX} (N/m) | k_{BZ} (N/m) | c_{BX} (Ns/m) | c_{BZ} (Ns/m) |
|------|----------------------|---------------------|-----------------|-----------------|
| 1 | -3.412×10^5 | -8.71×10^5 | -349.2 | -360.2 |

5.3.2.2 Identificación de desbalance.

La respuesta del rotor descrito en la sección 5.3.2.1 a una velocidad constante de 960 rpm en el nodo 3 se muestra en la Figura 5.43. Esta respuesta se obtuvo mediante el tratamiento de señales indicado en la sección 5.1.1 a una tasa de muestreo de 1×10^{-4} s, y será utilizada para la identificación del desbalance modal.

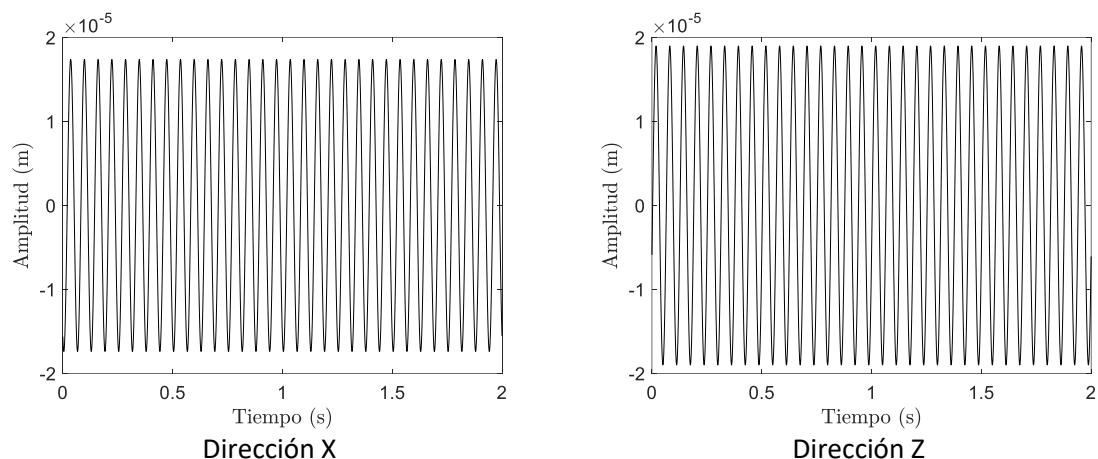


Figura 5.43. Respuesta al desbalance nodo 3 (960 rpm).

Al realizar la evaluación de la respuesta del rotor en el nodo 3, que se muestra en la Figura 5.43, el modelo identificador obtiene los resultados mostrados en la Figura 5.44.

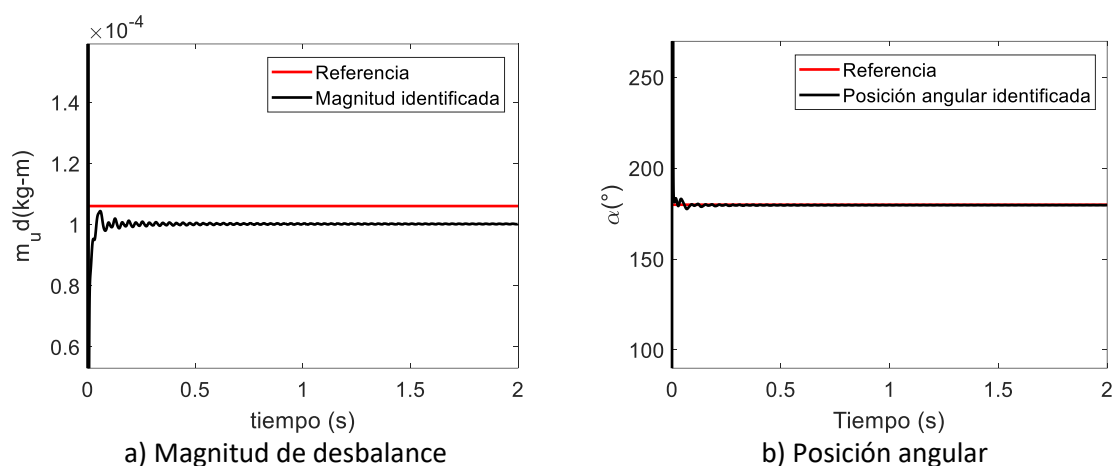


Figura 5.44 . Desbalance modal identificado.

En Figura 5.44 se observa que los parámetros identificados (línea color negro), son muy próximos a los parámetros de desbalance de referencia (línea color rojo). Esto se cumple desde los primeros instantes de evaluación de la respuesta hasta el tiempo final de evaluación de la respuesta. La Tabla 5.18 muestra el promedio del desbalance identificado y su posición angular en el intervalo de tiempo de evaluación de la respuesta. Se incluyen los valores de referencia del desbalance y su posición angular, así como los errores en la identificación.

Tabla 5.18 . Desbalance modal identificado.

| Velocidad de prueba [rpm] | Desbalance (Referencia) [kg·m] | Desbalance (Identificado) [kg·m] | $EM_{u d}$ [%] | Posición angular (Referencia) [°] | Posición angular (Identificada) [°] | $E\alpha$ [°] |
|---------------------------|--------------------------------|----------------------------------|----------------|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| 960 | 1.061×10^{-4} | 9.958×10^{-5} | 6.14 | 179.9 | 179.83 | 0.07 |

5.3.2.3 Balanceo del rotor asimétrico.

Una vez identificado el desbalance modal, es posible calcular un arreglo de pesos modales de balanceo mediante la ecuación (4.17). El arreglo de pesos modales resultante será posicionado en magnitud y ángulo a través del DBA que se encuentra en una posición fija en el rotor.

La Tabla 5.19 muestra los parámetros calculados para el balanceo del rotor mediante el DBA, $m_b e_1$ es la masa de balanceo resultante, m_b es la masa del elemento móvil del DBA y e el movimiento radial que debe realizar la masa móvil para generar la masa de balanceo $m_b e_1$ requerida. Asimismo, φ_x y φ_z son los factores de forma correspondientes al nodo 6, nodo en que se encuentra el DBA, que se utilizan para el cálculo de $m_b e_1$.

Tabla 5.19. Parámetros para el balanceo con BDA.

| φ_x | φ_z | $m_b e_1$ | m_b | e | ε_1 |
|-------------|-------------|-----------------------------|-------|----------|-----------------|
| 1.7094 | 2.0226 | 5.825×10^{-5} kg-m | 5.5 g | 10.59 mm | 359.83° |

En la Figura 5.45 se muestra la respuesta resultante del rotor expuesto en la sección 5.3.2.1 en el intervalo de velocidad que va desde 0 a 2000 rpm, en los nodos 3 y 8. La respuesta del sistema sin el control proporcionado por el DBA se indicada con una línea negra, mientras que la respuesta controlada mediante el DBA se indica con la línea color azul.

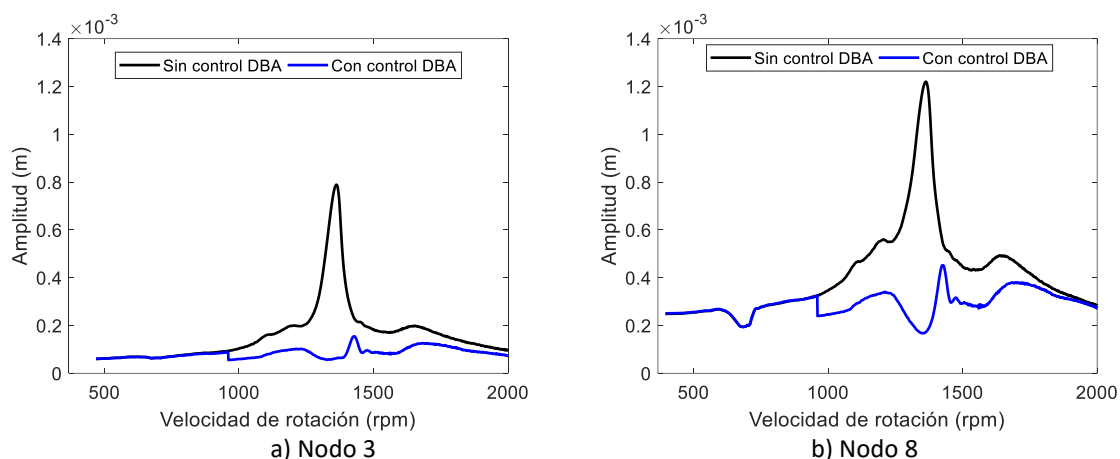


Figura 5.45. Respuesta del sistema rotodinámico con DBA.

En la Figura 5.45 se puede notar claramente la disminución de la respuesta del rotor a partir de que el DBA inicia su operación. Este efecto de disminución de la respuesta puede verse tanto en el nodo 3 (nodo de medición de respuesta para la identificación del desbalance) como en el nodo 8 (nodo central). En la Tabla 5.20 se muestra la amplitud de vibración de la velocidad crítica del rotor en los nodos 3 y 8, con y sin el control del DBA. Así mismo, se incluye el porcentaje de reducción de la amplitud de vibración en la velocidad crítica por efecto del control DBA.

Tabla 5.20. Reducción de las amplitudes de vibración en la velocidad crítica.

| Nodo | Velocidad de rotación [rpm] | Amplitud [m] (Antes del balanceo) | Amplitud [m] (Después del balanceo) | % reducción |
|------|-----------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-------------|
| 3 | 1362 | 7.892×10^{-4} | 6.289×10^{-5} | 92.03 |
| 8 | 1364 | 1.22×10^{-3} | 1.728×10^{-4} | 85.83% |

El efecto de atenuación y control de vibración en el rotor, proporcionado por el DBA, también se puede observar en la respuesta del sistema en función del tiempo. En este sentido, en la Figura 5.46 se muestra la respuesta del sistema medida en el nodo 3, cuando el rotor opera a una velocidad constante de 960 rpm. La línea de color negro es la respuesta del rotor sin el control DBA y la línea azul es la respuesta del rotor con el control DBA. Se observa cómo la respuesta controlada disminuye de mayor a menor amplitud en las direcciones X y Z en el intervalo de tiempo mostrado.

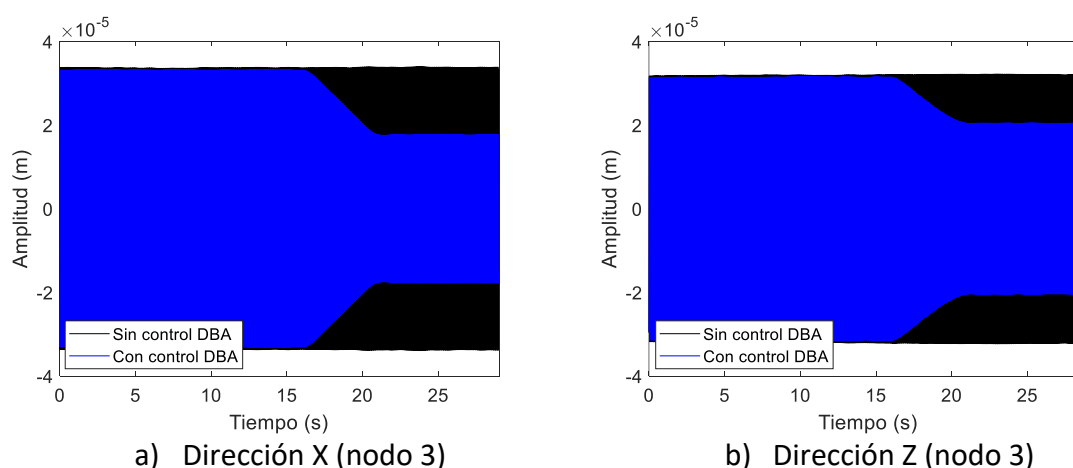


Figura 5.46. Respuesta 960 rpm.

El control de la respuesta en función del tiempo también puede observarse a velocidad variable. En este sentido, la Figura 5.47 muestra la respuesta del rotor en el nodo 3 para las direcciones X y Z en el instante en el que el DBA realiza la operación de balanceo a 960 rpm. Posteriormente, el rotor aumenta su velocidad con una tasa constante $\dot{\phi} = 6.43 \text{ rad/s}^2$ hasta que el rotor alcanza su velocidad nominal de operación de 2000 rpm. En la Figura 5.47, la línea de color negro es la respuesta en función del tiempo del rotor sin el control DBA y la línea de color azul es la respuesta en función del tiempo con control DBA. Claramente puede notarse una disminución de la respuesta del rotor por el efecto del DBA en el intervalo de tiempo mostrado tanto en dirección X como en dirección Z.

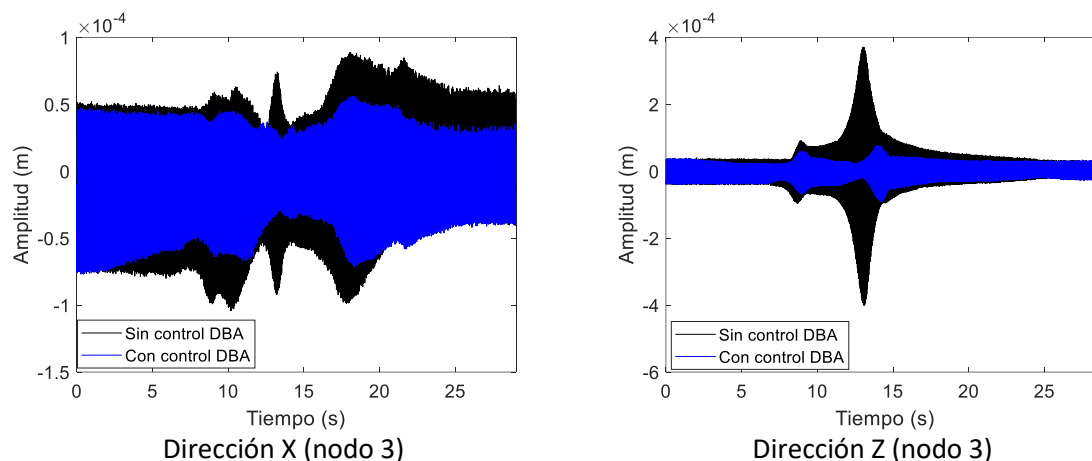


Figura 5.47. Respuesta con rampa de excitación con $\dot{\phi} = 6.43 \text{ rad/s}^2$.

Para obtener las gráficas de la Figura 5.47, fue necesario implementar una rampa de excitación escalonada. Primeramente, se operó el rotor desde una velocidad inicial de 0 rpm hasta la velocidad de 960 rpm (16 Hz). Luego se mantuvo esa velocidad por un intervalo tiempo en el que puede realizarse la identificación y el movimiento de los elementos de control del DBA. Una vez realizado el posicionamiento de la masa de balanceo, se llevó el rotor hasta la velocidad de operación de 2000 rpm con una aceleración constante $\dot{\phi} = 6.43 \text{ rad/s}^2$. La Figura 5.48 muestra gráficamente lo descrito.

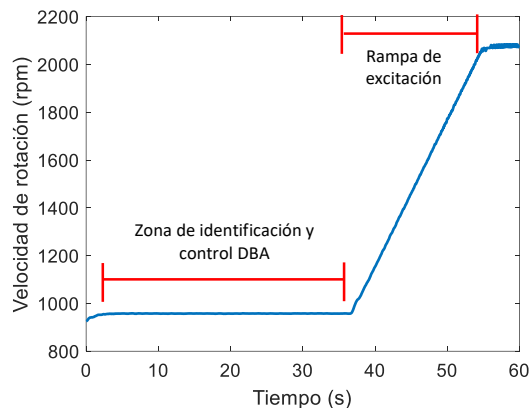


Figura 5.48. Perfil de velocidad de excitación del rotor.

Los resultados obtenidos en esta sección demuestran que puede implementarse un control activo para el balanceo en línea de un rotor asimétrico, esto mediante la metodología de balanceo propuesta en este trabajo. Como se ha visto, esta metodología integra, el método de identificación algebraica, el método de balanceo modal y el disco de balanceo activo, y se demostró que puede reducir la amplitud de la respuesta de un rotor en más de un 85% en condiciones de resonancia.

Cabe mencionar que se presentaron casos en donde el control proporcionado por el DBA tuvo un menor desempeño. Esto se debe a perturbaciones generadas por el propio desbalance del DBA, ya sea por defectos en el maquinado de sus piezas o la distribución de los elementos en el ensamblado

del DBA. Este desbalance interfiere con la masa de balanceo controlada, generando una masa de balanceo resultante diferente a la requerida para balancear el sistema. De ahí que el desempeño del DBA en el balanceo del rotor pueda verse disminuido.

5.3.3 Balanceo modal con dos DBA.

5.3.3.1 Configuración experimental.

Para la validación experimental de la metodología de balanceo propuesta en este trabajo, se montó el banco experimental mostrado en la Figura 5.49. Está constituido por un Rotor Kit de la marca Bently Nevada, cuenta con una flecha asimétrica que tiene una longitud de 510 mm de soporte a soporte y sobre la cual están montados 3 discos inerciales y 2 DBA en la disposición mostrada en la Figura 5.49. Cuenta también con un motor con un variador de velocidad RK4 rotor Kit que puede alcanzar una velocidad de 0 a 10,000 rpm. La medición de vibración se lleva a cabo mediante un par de sensores de proximidad Bently Nevada 3300 XL series colocados en un disco inercial. La adquisición de las señales de vibración se logra a través de una tarjeta de adquisición de la marca National Instruments USB-6251 y su visualización se realiza en una computadora mediante el programa informático Sound and Vibration de Labview.

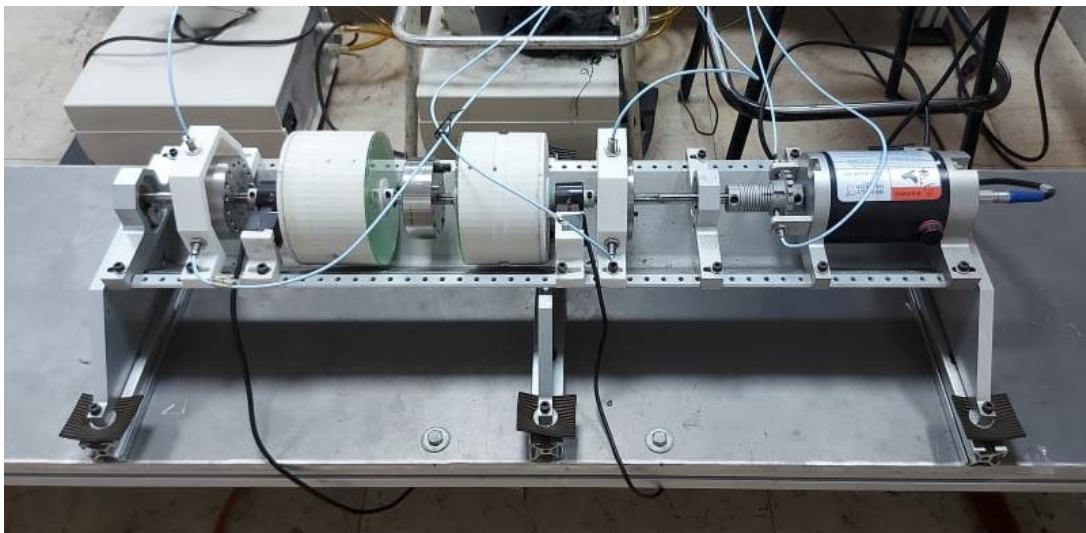


Figura 5.49 . Configuración banco experimental rotor asimétrico con dos DBA.

El banco experimental de la Figura 5.49 puede representarse esquemáticamente como se muestra en la Figura 5.50. Se observa que la flecha está constituida por 2 secciones simétricas con una longitud de 41.1 mm cada una, y una sección asimétrica compuesta por 12 elementos con una longitud de 35.65 mm cada uno. También, se especifica la configuración de las secciones transversales de la flecha.

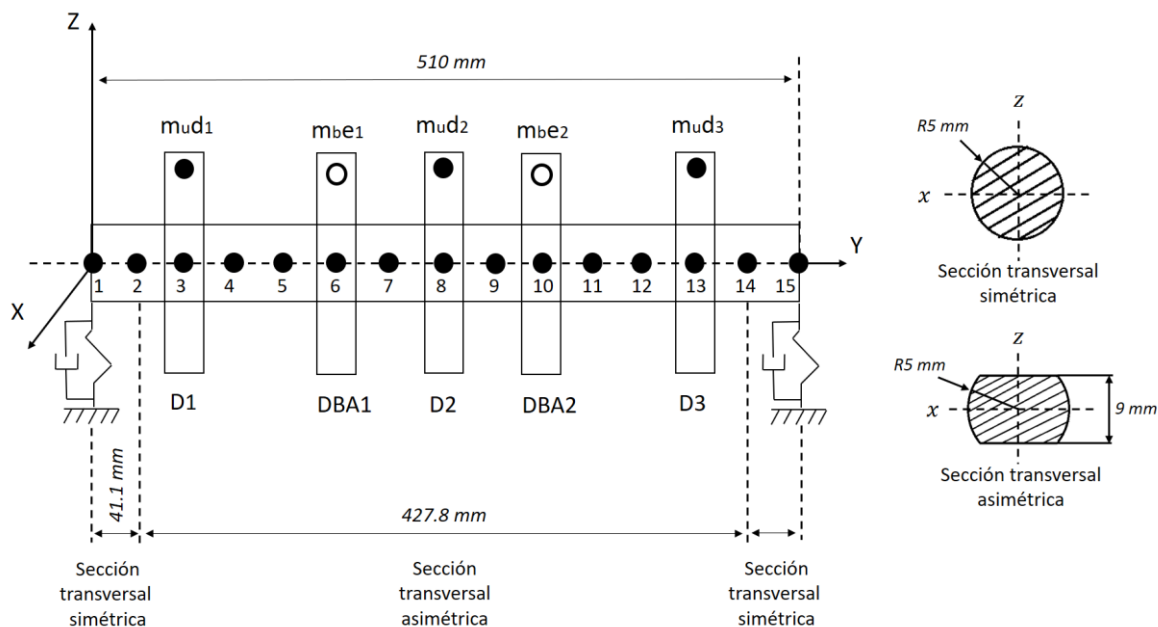


Figura 5.50 . Modelo del banco experimental.

Las propiedades mecánicas y geométricas del eje y los discos inerciales se especifican en Tabla 5.21 y Tabla 5.22 respectivamente. Cabe mencionar que los DBA tienen una masa de 337.6 g cada uno y se posicionan en los nodos 6 y 10. Las masas móviles de los DBA son de 5.5 g.

Tabla 5.21. Propiedades mecánicas y geométricas del eje (* r_s =radio de la sección simétrica, f =radio de sección asimétrica).

| Propiedades mecánicas | Geometría |
|--------------------------------------|----------------------|
| $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | $r_s = 5 \text{ mm}$ |
| $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ | $f = 4.5 \text{ mm}$ |
| $\nu = 0.3$ | |

Tabla 5.22. Propiedades mecánicas y geométricas de los discos (* eD=espesor del disco, ReD=radio exterior del disco, riD=radio interior del disco).

| Propiedades mecánicas | Geometría | | | |
|--------------------------------------|-----------|---------|---------|---------|
| | Disco | D1 | D2 | D3 |
| $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | eD | 25.4 mm | 25.4 mm | 25.4 mm |
| $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ | ReD | 37.5 mm | 37.5 mm | 37.5 mm |
| $\nu = 0.3$ | riD | 5 mm | 5 mm | 5 mm |

La Tabla 5.23, muestra las formas modales correspondientes al el primer y segundo modo en direcciones X y Z. Dichas formas modales están normalizadas al nodo 3 y fueron obtenidas experimentalmente mediante la prueba del martillo de impacto. La Figura 5.51 y Figura 5.52 muestran gráficamente las formas modales correspondientes al primer y segundo modo respectivamente, en las direcciones X y Z.

Tabla 5.23. Formas modales del primer y segundo modo en direcciones X y Z.

| Nodo | Modo 1 (23/21 Hz) | | Modo 2 (74/73 Hz) | |
|------|-------------------|-------------|-------------------|-------------|
| | φ_x | φ_z | φ_x | φ_z |
| 1 | 0.3545 | 0.3978 | 0.8921 | 0.8222 |
| 2 | 0.5424 | 0.4946 | 0.9674 | 0.8761 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1.303 | 1.4086 | 0.9674 | 1.0256 |
| 5 | 1.5758 | 1.828 | 0.8837 | 0.9402 |
| 6 | 1.9091 | 2.2581 | 0.5814 | 0.6496 |
| 7 | 2.1061 | 2.5054 | 0.2326 | 0.2778 |
| 8 | 2.1727 | 2.6452 | -0.2093 | -0.1282 |
| 9 | 2.1212 | 2.5376 | -0.4884 | -0.5128 |
| 10 | 1.9545 | 2.2903 | -0.7535 | -0.812 |
| 11 | 1.7576 | 1.8774 | -0.8651 | -0.9658 |
| 12 | 1.3636 | 1.3978 | -1.0233 | -0.9829 |
| 13 | 0.9848 | 0.9247 | -0.9767 | -0.8761 |
| 14 | 0.6364 | 0.4839 | -0.8744 | -0.6966 |
| 15 | 0.397 | 0.3849 | -0.7907 | -0.6068 |

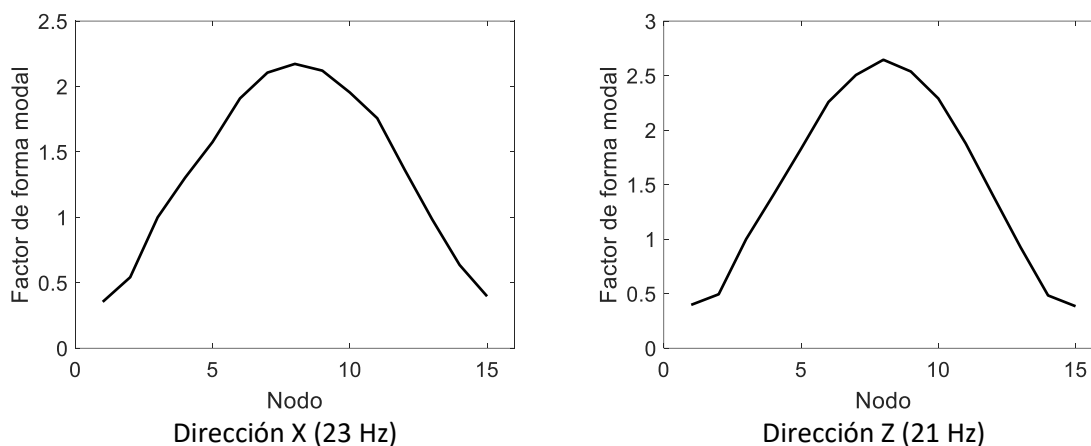


Figura 5.51. Forma modal del primero modo.

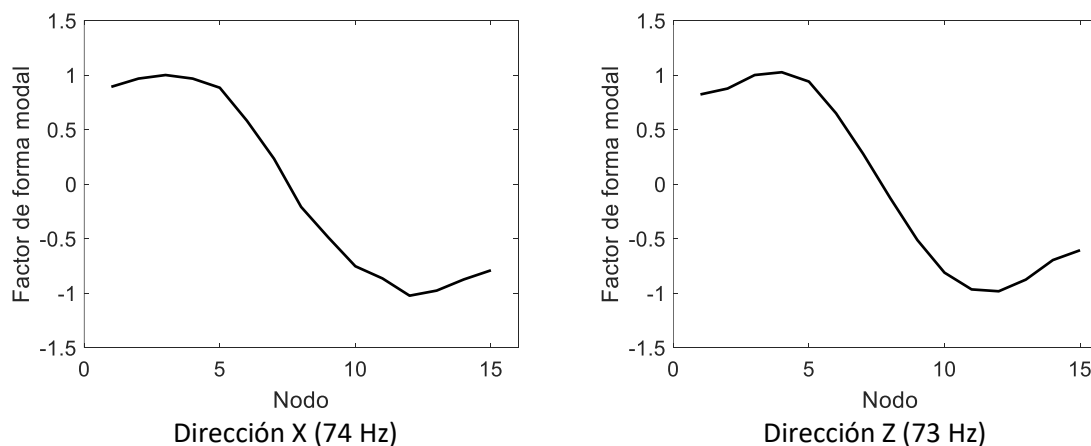


Figura 5.52. Forma modal del segundo modo.

El rotor cuenta con desbalance discreto en cada uno de sus discos inerciales tal como se indica en la Tabla 5.24

Tabla 5.24. Desbalance presente en el sistema.

| Posición | Masa de desbalance (g) | Excentricidad (mm) | Posición angular (°) |
|----------|------------------------|--------------------|------------------------|
| nodo 3 | $m_u1 = 1.16$ | $d = 30$ | $\alpha_1 = 135^\circ$ |
| nodo 8 | $m_u2 = 1$ | $d = 30$ | $\alpha_2 = 315^\circ$ |
| nodo 13 | $m_u3 = 1.16$ | $d = 30$ | $\alpha_3 = 45^\circ$ |

Cabe mencionar que todas las características mecánicas y geométricas del rotor descrito en esta sección, deben precargarse en la plataforma computacional programada en MATLAB, misma que contiene al modelo matemático que realiza el proceso de identificación.

La prueba experimental consiste en disminuir las vibraciones de los primeros dos modos de vibración del rotor descrito en esta sección, mediante dos discos de balanceo activo. Primeramente, el rotor gira a una velocidad angular $\dot{\phi}$ constante en el rango de velocidades correspondiente al modo de estudio, lo que genera una respuesta vibratoria $\delta(t)$ que debe ser medida en las direcciones X y Z en el nodo de normalización de las formas modales (nodo 3). Después, la señal de la respuesta vibratoria es colectada por el módulo de adquisición de datos y enviada a un equipo de cómputo para su tratamiento y procesamiento. Posteriormente, se realiza la identificación del desbalance modal $M_u d_n^*$, provocado por el desbalance que se indica en la Tabla 5.24, de los modos que se quieran afectar. Luego, se realiza el cálculo de las masas de balanceo $M_b e_n$ por medio de la ecuación (4.17), como se indicó en la sección 4.1.5.1. Después, se introducen los parámetros de control en la interfaz de comunicación entre el equipo de cómputo y los DBA y las señales de control son enviadas a los DBA mediante un sistema de control de lazo abierto. La Figura 5.53 muestra de manera esquemática el proceso de balanceo aquí descrito. Finalmente, se realiza una corrida del rotor a través de las velocidades correspondientes a los modos balanceados para verificar que el rotor se haya balanceado correctamente.

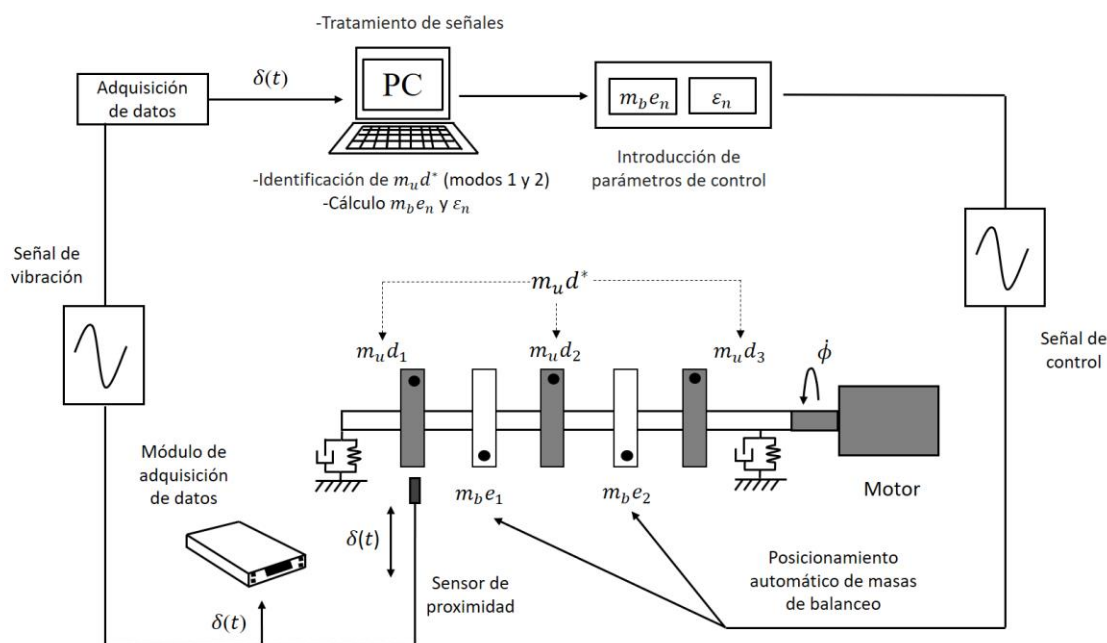


Figura 5.53. Representación esquemática de la configuración experimental.

El rango de la velocidad operación del rotor es de 0 a 5000 rpm con una aceleración $\ddot{\phi} = 6 \text{ rad/s}^2$, en ese rango de velocidades se excitan el primer y segundo modo de vibración. Bajo esas condiciones de operación y con el desbalance mostrado en la Tabla 5.24, se obtiene la respuesta mostrada en la Figura 5.54 medida en el nodo 3. Bajo la premisa de que la identificación de desbalance modal debe realizarse a velocidades cercanas al correspondiente modo de estudio, se propone utilizar las respuestas del rotor a 1020 y 3600 rpm para la identificación de los modos 1 y 2 respectivamente.

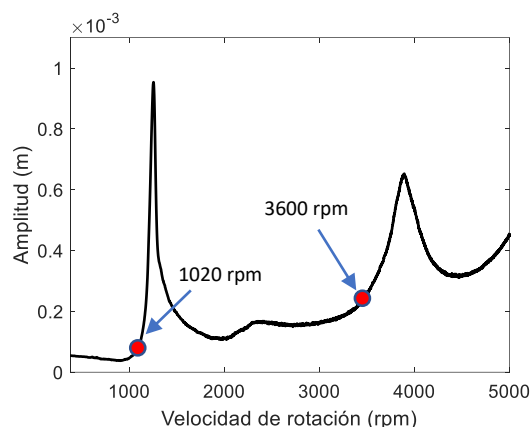


Figura 5.54. Respuesta del rotor desbalanceado nodo 3.

En la Tabla 5.25 se indican las velocidades propuestas para el proceso de identificación, también se muestran los parámetros de referencia del desbalance modal del primer y segundo modo, para su posterior comparación con los desbalances identificados. Cabe recordar, que los parámetros de referencia se calculan mediante la ecuación (4.43) e involucra el desbalance discreto señalado en la Tabla 5.24 y las formas modales escritas en la Tabla 5.23.

Tabla 5.25 Velocidades para la identificación del desbalance y desbalance modal de referencia.

| Modo | Velocidad de prueba [rpm] | Desbalance modal $m_u d^*$ [kg-m] | Posición α^* [°] |
|------|---------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| 1 | 1020 | 5.433×10^{-5} | 2.902 |
| 2 | 3600 | 4.9141×10^{-5} | 174.144 |

5.3.3.2 Identificación de desbalance.

Las condiciones dadas en la Tabla 5.25, generan respuestas vibratorias que deben ser tratadas como se indicó en la sección 5.1.1 y posteriormente evaluadas por el modelo identificador para estimar los parámetros de desbalance. Para este sistema, el aporte modal de propiedades de soporte se escribe en la Tabla 5.26, que como ya se ha mencionado, pueden obtenerse mediante un método de estimación de parámetros como identificación algebraica, algoritmos genéticos, etc.

Tabla 5.26. Contribución modal de propiedades de soporte.

| Modo | k_{BX} (N/m) | k_{BZ} (N/m) | c_{BX} (Ns/m) | c_{BZ} (Ns/m) |
|------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| 1 | -7.553×10^5 | -1.396×10^6 | -320.4 | -424 |
| 2 | -2.421×10^5 | -9.545×10^4 | -25.04 | -36.96 |

En el primer caso, se extrae la respuesta del rotor a 1020 rpm que corresponde al rango de velocidades del primer modo y se muestra en la Figura 5.55. Cuando esta respuesta es evaluada por el modelo identificador (4.48), se obtienen los resultados de la Figura 5.56.

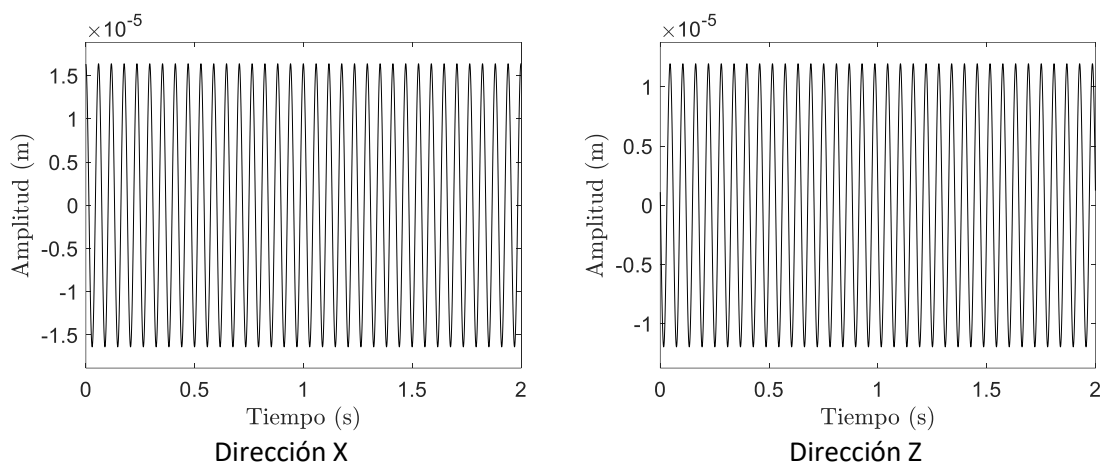


Figura 5.55. Respuesta al desbalance nodo 3 (1020 rpm).

En la Figura 5.56 a), se puede observar que el valor identificado (línea color negro) se estabiliza en un valor de $m_u d^* = 4.864 \times 10^{-5}$ kg·m que es un valor próximo al valor de referencia $m_u d^* = 5.433 \times 10^{-5}$ kg·m (línea color rojo), en los primeros instantes de evaluación de la respuesta. En el caso de la identificación de la posición angular, la Figura 5.56 b) muestra un valor identificado (Línea color negro) que visualmente aparenta estar alejado del valor de referencia pero que tiene un valor $\alpha^* = 356.6^\circ$, que es un valor muy cercano al valor de referencia $\alpha^* = 2.902^\circ$.

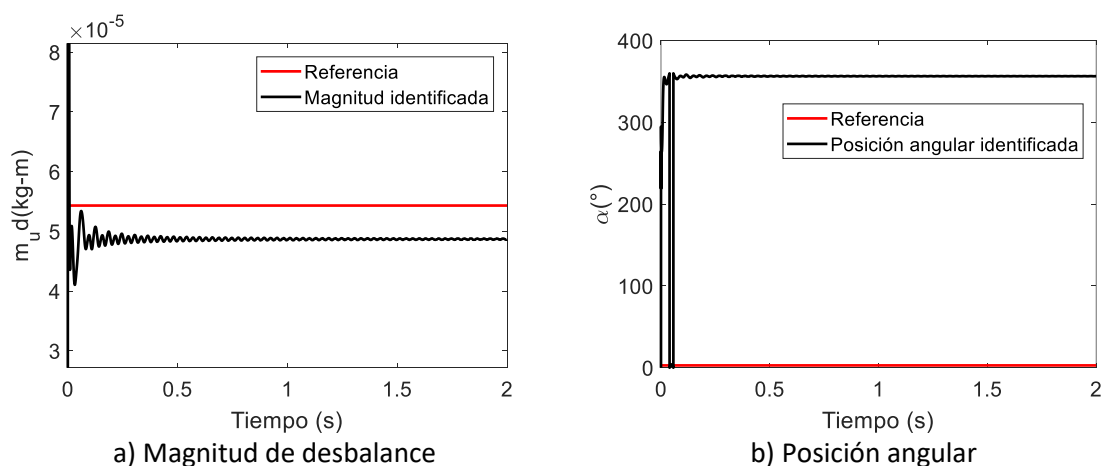


Figura 5.56. Desbalance modal identificado modo 1.

En el segundo caso, la respuesta al desbalance del sistema a 3600 rpm en las direcciones X y Z, se muestra en la Figura 5.57 y corresponde a la análisis del sistema en el segundo modo. Cuando esta respuesta es evaluada por el modelo identificador de desbalance se obtienen los resultados mostrados en la Figura 5.58.

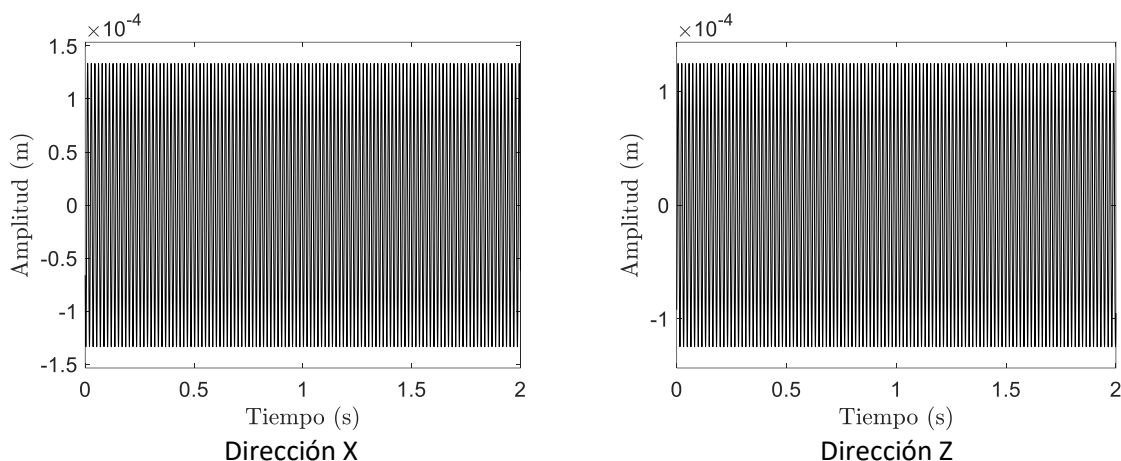


Figura 5.57. Respuesta al desbalance nodo 3 (3600 rpm).

En la Figura 5.58, se puede observar que los valores identificados (línea color negro) convergen al valor de referencia (línea color rojo) en los primeros instantes del proceso de identificación, y permanecen así a lo largo del tiempo restante, tanto en la magnitud del desbalance como en su posición angular.

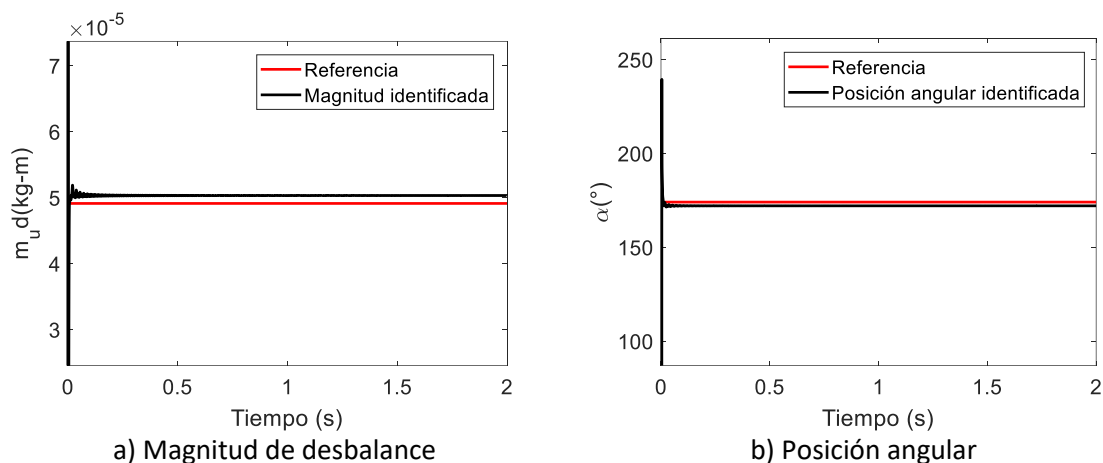


Figura 5.58 . Desbalance modal identificado modo 2.

Los valores identificados a las velocidades de 1020 y 3600 rpm se resumen en la Tabla 5.27, además se muestra el error absoluto y relativo respecto a los parámetros de desbalance de referencia.

Tabla 5.27 . Desbalance modal identificado.

| Velocidad de prueba [rpm] | Desbalance (Referencia) [kg·m] | Desbalance (Identificado) [kg·m] | $EM_u d^*$ [%] | Posición angular (Referencia) [°] | Posición angular (Identificada) [°] | $E\alpha^*$ [°] |
|---------------------------|--------------------------------|----------------------------------|----------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| 1200 | 5.433×10^{-5} | 4.864×10^{-5} | 10.473 | 2.902 | 356.6 | 6.302 |
| 3600 | 4.914×10^{-5} | 5.034×10^{-5} | 2.44 | 174.1 | 172.1 | 2 |

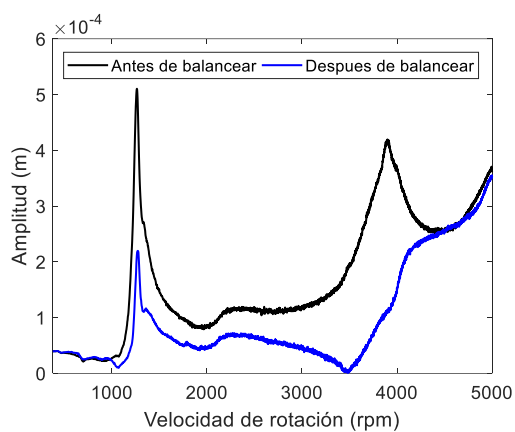
5.3.3.3 Balanceo del rotor asimétrico.

Conocido el desbalance modal, se procede a calcular las masas de balanceo y su posición angular mediante las ecuaciones (4.20) y (4.21). La Tabla 5.28 muestra los parámetros de control para los DBA que se obtuvieron en el cálculo. En dicha Tabla, la columna $m_b e_n$ indica masas de balanceo para cada DBA, estas masas de balanceo se generan al desplazar masas móviles m_b de 5.5 g una posición radial e_n que se indica en la columna correspondiente, así mismo, la masa móvil debe colocarse a la posición angular ε_n como se señala en la Tabla 5.28.

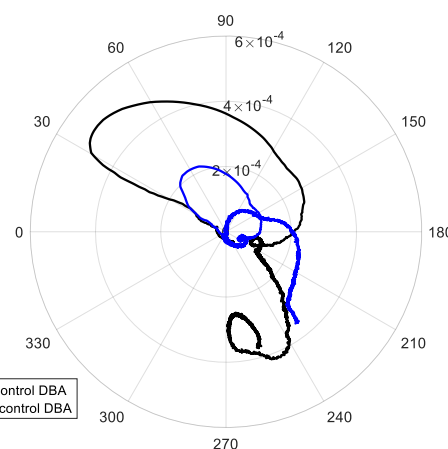
Tabla 5.28 . Parámetros de control para el balanceo con BDA.

| DBA 1 | $m_b e_n$ | m_b (g) | e_n (mm) | ε_n (°) |
|-------|------------------------|-----------|------------|---------------------|
| 1 | 2.294×10^{-5} | 5.5 | 4.171 | 348.92 |
| 2 | 4.378×10^{-5} | 5.5 | 7.960 | 172.411 |

Una vez que los parámetros de control de la Tabla 5.28 son enviados a los DBA, el rotor se opera en el rango de 0 a 5000 rpm con una aceleración constante de $\ddot{\phi} = 6 \text{ rad/s}^2$, con lo cual se obtienen las respuestas de la Figura 5.59 y Figura 5.60 medidas en el nodo 3 para las direcciones X y Z respectivamente. En la Figura 5.59 a) y Figura 5.60 a) se pueden observar los diagramas de Bode de respuesta en las direcciones X y Z respectivamente, antes (línea color negro) y después (línea color azul) del control proporcionado por los DBA, donde la disminución de amplitud de la respuesta es bastante evidente, tanto en el primer y segundo modo en las direcciones X y Z, este mismo efecto se observa en los Diagramas Polares de Respuesta de la Figura 5.59 a) y Figura 5.60 b).



a) Diagrama de Bode de respuesta



b) Diagrama polar de respuesta

Figura 5.59. Respuesta al desbalance en dirección X.

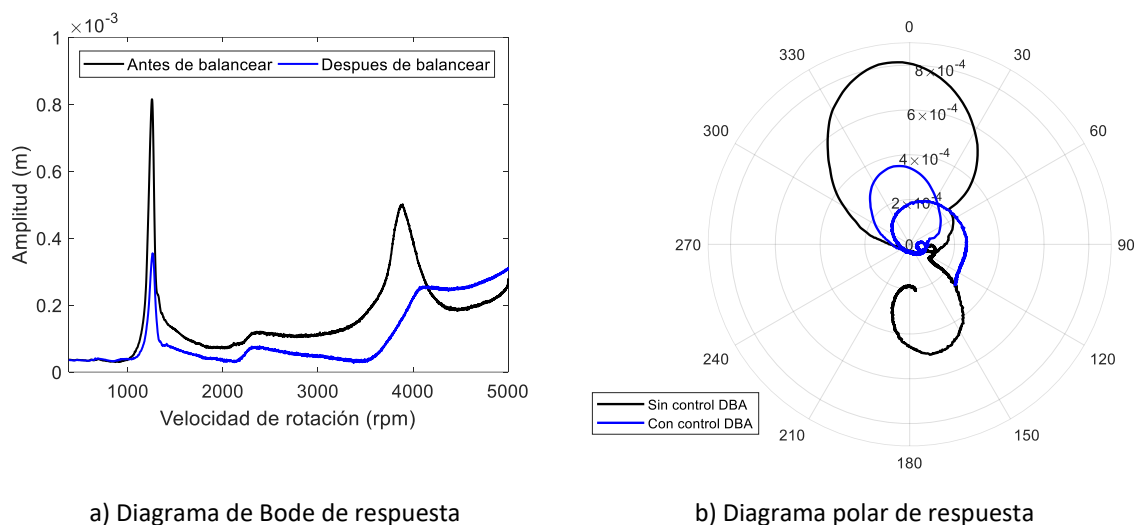


Figura 5.60. Respuesta al desbalance en dirección Z.

Por otra parte, en la Figura 5.61 se presenta el diagrama de Bode resultante de la respuesta de vibración del sistema rotodinámico en el nodo 3. Se puede observar que el efecto de los DBA implementados en el rotor asimétrico redujo las amplitudes de vibración del sistema en todos los modos de vibración en el intervalo de 0 a 5,000 rpm.

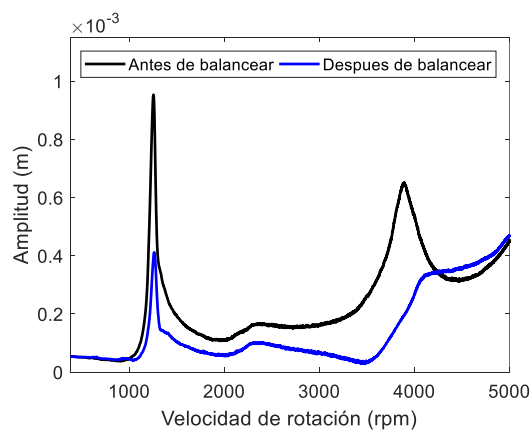


Figura 5.61. Respuesta del sistema rotodinámico con dos DBA (nodo 3).

Finalmente, la Tabla 5.29 muestra la amplitud de vibración para cada velocidad crítica del rotor en el intervalo de 0 a 5,000 rpm con y sin el control proporcionado por los DBAs, asimismo, se muestra el porcentaje de reducción de la amplitud de vibración para cada velocidad crítica.

Tabla 5.29. Reducción de amplitudes de vibración en velocidades críticas.

| Nodo de medición | Modo | Velocidad de rotación [rpm] | Amplitud [m] (Sin control DBA) | Amplitud [m] (Con control DBA) | % reducción |
|------------------|------|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
| 3 | 1 | 1256 | 9.535×10^{-4} | 3.981×10^{-4} | 58.24 |
| | 2 | 3893 | 6.527×10^{-4} | 1.963×10^{-4} | 69.92 |

5.4 Conclusiones del capítulo.

En la sección 5.2 se implementó el modelo identificador de desbalance de MGDL en un rotor asimétrico montado en un banco experimental, dicho modelo se obtuvo mediante el método de identificación algebraica en la sección 4.1. El modelo identificador requiere como datos de entrada la respuesta vibratoria del rotor en el nodo a identificar, así como la respuesta de dos nodos vecinos (en las direcciones u y w), y sus correspondientes pendientes nodales (θ y ψ). Para disminuir el número sensores en la obtención de la respuesta, se aproximaron los desplazamientos en las direcciones u y w de los nodos requeridos con la forma modal del rotor, y en función de estos, se calcularon las pendientes nodales θ y ψ con las expresiones (4.15) y (4.16). Los resultados obtenidos por el modelo identificador mostraron buenas aproximaciones en la identificación de la posición angular de desbalance, logrando estimaciones con desfases menores a 9° respecto a la posición angular de referencia (valor real). Sin embargo, en la identificación de la magnitud de desbalance se obtuvieron valores estimados con errores relativos muy altos respecto a los parámetros de referencia (valores reales).

Debido a los resultados obtenidos con el modelo identificador de MGDL, se propuso una alternativa para estimar el desbalance de un rotor asimétrico, a través del modelo identificador de desbalance modal expuesto en la sección 5.3. Este modelo también está basado en el método de identificación algebraica y solo requiere la respuesta en un solo nodo del rotor para realizar la estimación del desbalance. Se utilizó para la estimación de desbalance en tres diferentes configuraciones del banco experimental en las secciones 5.3.1, 5.3.2 y 5.3.3, respectivamente. En todas las pruebas realizadas se obtuvieron magnitudes de desbalance con errores relativos menores al 11% respecto a los valores de referencia, así como desfases menores a 10° en la posición angular. El modelo identificador de desbalance modal se sometió a condiciones experimentales similares a las que fue sometido el modelo identificador de MGDL, es decir, mismo banco experimental, mismo tratamiento de señales, mismo sistema de adquisición de datos, etc. La diferencia entre ambos modelos, es que en el modelo identificador de desbalance modal no fue necesario hacer aproximaciones de desplazamientos ni pendientes nodales. Con esto se puede inferir, que los errores obtenidos en la implementación del modelo de MGDL, se atribuyen principalmente a errores de medición en la respuesta de vibración del rotor, así como a errores en la aproximación de desplazamientos nodales. De esta manera, se corrobora lo reportado por Mendoza [105], quien implementó un modelo identificador similar en un rotor simétrico, argumentando que es necesario tener como dato de entrada los valores correctos de las pendientes en cada uno de los nodos del sistema para poder realizar una correcta estimación de parámetros de desbalance.

Los parámetros de desbalance identificados con el modelo identificador de desbalance modal permiten calcular un arreglo de masas de balanceo para el balanceo de uno o más modos de vibración en sistemas rotor-cojinete con eje asimétrico. Estas masas de balanceo pueden ser colocadas manualmente como se vio en la sección 5.3.1, o colocadas automáticamente mediante discos de balanceo activo como se vio en las secciones 5.3.2 y 5.3.3. La colocación de las masas de balanceo, permitieron la reducción de amplitudes de respuesta mayores al 50% en el primer y segundo modo de vibración. Los resultados experimentales obtenidos en la sección 5.3, validan los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas de la sección 4.2, en donde se propone la integración de la metodología de identificación algebraica para la estimación del desbalance modal, el balanceo modal convencional y el balanceo por discos de balanceo activo. Los resultados obtenidos de manera experimental comprueban que es factible la implementación de los DBA para el balanceo de un rotor asimétrico, con los cuales se logró disminuir la respuesta de hasta dos modos

de vibración en los casos de estudio presentados. Cabe mencionar que la correcta selección de masas de balanceo para lograr el balanceo del rotor depende de la precisión de la identificación de desbalance.

Como se estableció en la sección 4.2, en la aplicación del modelo identificador del desbalance modal debe seleccionarse una velocidad de operación del rotor cercana a la velocidad crítica del modo analizado. Esto se debe a que en estas condiciones la componente modal de respuesta del modo analizado es muy similar a la respuesta del sistema de múltiples grados de libertad, como se mostró en la Figura 4.31. Por lo que la respuesta requerida por el identificador de desbalance modal se encuentra en un rango de velocidades cercano a la velocidad crítica. Sin embargo, los resultados reportados en la Tabla 5.11, demuestran que la selección de la velocidad de operación para llevar a cabo el proceso de identificación de desbalance modal, puede realizarse en un margen de velocidad considerable, en la cercanía de la velocidad crítica del modo analizado, ya sea antes o después de la velocidad crítica. Esto permite seleccionar una velocidad de operación del rotor para la extracción de la respuesta, en donde la amplitud de la misma no se encuentre demasiado amplificada por el efecto de la resonancia.

Capítulo 6.

CONCLUSIONES GENERALES.

En este trabajo se propuso un método integrado para el balanceo de rotores asimétricos en línea. El método integra tres elementos principales; un modelo identificador de desbalance que se basa en el método de identificación algebraica; el balanceo modal convencional y discos de balanceo activo.

El primer elemento del método de balanceo integrado es el modelo identificador de desbalance para rotores asimétricos. Inicialmente se propuso un modelo identificador obtenido a partir de las ecuaciones de movimiento de un sistema rotor-cojinete de MGDL a través de la metodología de identificación algebraica. En simulaciones numéricas, el modelo identificador demostró ser efectivo en la estimación de desbalances discretos colocados en los discos inerciales de un sistema rotor cojinete. Sin embargo, en pruebas experimentales se encontraron discrepancias considerables en la identificación de desbalance con respecto a los valores reales. Los errores en la medición de la respuesta, la aproximación de los desplazamientos y pendientes nodales, en combinación con un mal acondicionamiento de las matrices, común en estimadores de desbalance de sistemas rotodinámicos [40], pueden explicar las desviaciones encontradas en la estimación de los parámetros de desbalance.

Debido a la problemática presentada por el modelo identificador de MGDL en pruebas experimentales, se propuso una alternativa para la estimación del desbalance en el rotor. La alternativa consistió en el desarrollo de un modelo identificador de desbalance modal, formulado a partir del desacoplamiento modal de las ecuaciones de movimiento del modelo de un sistema de MGDL (modelo pseudo-modal), así como el método de identificación algebraica. La diferencia entre el identificador de desbalance de MGDL y el modelo identificador de desbalance modal, es que el primero permite identificar el desbalance discreto en todos los nodos a lo largo de la longitud de rotor; mientras que el segundo, permite identificar el desbalance modal provocado por múltiples desbalances discretos colocados sobre la longitud del rotor.

Para su aplicación, el modelo identificador de desbalance modal solo requiere la respuesta vibratoria en un solo nodo del rotor y no son necesarias las aproximaciones de pendientes nodales. Por lo tanto, los errores en el proceso de identificación, generados por errores de medición de la respuesta, se ven disminuidos. El modelo identificador de desbalance modal se utilizó para la estimación de desbalance en tres diferentes configuraciones del banco experimental en las secciones 5.3.1, 5.3.2 y 5.3.3, respectivamente. En todas las pruebas realizadas, se estimaron magnitudes de desbalance con errores relativos menores al 11% respecto a los valores de referencia. Asimismo, se obtuvieron desfases menores a 10° en la posición angular identificada respecto a los valores de referencia. Las estimaciones se realizaron en tiempos menores a un segundo, sin ser necesarias masas de prueba, arranque-parada, construcción de diagramas polares de respuesta, o llevar el rotor a través de sus velocidades críticas. Debido a los buenos resultados obtenidos, se eligió el modelo identificador de desbalance modal como el primer elemento en la metodología de balanceo integrada.

El segundo elemento, lo constituye la metodología de balanceo modal convencional propuesta por Bishop y Parkinson [94]. Esta metodología consiste en el cálculo de un arreglo de masas de balanceo para el balanceo modal de sistemas rotodinámicos. Dicho cálculo se realiza a partir de conocer el desbalance modal del sistema. Originalmente, el desbalance modal se identificaba mediante iteraciones de prueba y error. Con el modelo algebraico de identificación de desbalance modal propuesto en este trabajo de investigación, resulta fácil determinar las masas balanceadoras.

El tercer elemento en la metodología de balanceo propuesta, lo constituyen los DBAs. Estos son colocados en posiciones estratégicas sobre la longitud del eje del rotor, con el objetivo de posicionar las masas de balanceo de manera automática. Su efecto en sistemas rotor-cojinete con eje asimétrico fue estudiado mediante simulaciones numéricas y pruebas experimentales, obteniéndose resultados favorables. Una alternativa a este elemento, es detener el rotor y agregar manualmente las masas de balanceo que se requieran en los planos de balanceo del rotor.

Finalmente, la integración de estos tres elementos permitió el balanceo en línea de un sistema rotor-cojinete con eje asimétrico, reduciendo las amplitudes de vibración del rotor en más del 50% en los dos primeros modos de vibración, con lo cual, se logra cumplir con éxito el objetivo principal de este trabajo.

Los resultados obtenidos por la metodología expuesta en esta investigación, los cuales fueron verificados mediante simulaciones numéricas en el capítulo 4 de este trabajo, y validados experimentalmente como se mostró en el capítulo 5, permiten establecer una metodología de balanceo en línea para sistemas rotor – cojinete con eje asimétrico.

Por último, es necesario mencionar que en las pruebas experimentales dónde se implementó la metodología de balanceo en línea, hubo casos en los que el propio desbalance del DBA, generado en el proceso de fabricación, interfirió con las masas de control (masas de balanceo). Esto provocó que la eficiencia del método de balanceo propuesto se viera disminuida para esos casos.

6.1 Aportaciones.

Las aportaciones, resultado de este trabajo de investigación se enlistan a continuación:

Un modelo matemático de un rotor asimétrico de MGDL con discos de balanceo activo. Este modelo matemático se obtuvo mediante el método de elemento finito, siguiendo la metodología de Lalanne y Ferraris [50], en combinación con el trabajo previo realizado por Nango [26]. El modelo considera elementos viga con cuatro grados de libertad por nodo, tomando en cuenta los efectos de inercia rotatoria y deformaciones por cortante. El modelo fue pieza fundamental en el desarrollo de este trabajo y permite el modelado de sistemas rotor-cojinete con múltiples desbalances, múltiples discos inerciales, múltiples DBAs, múltiples soportes y cambios en la sección transversal del eje.

Una plataforma computacional para el análisis de comportamiento dinámico de un sistema rotor asimétrico-cojinete con DBA. La plataforma computacional permite conocer la información del sistema, tal como: frecuencias naturales, diagrama de Campbell, formas modales y la respuesta de vibración debida al desbalance del sistema, mediante la solución del modelo matemático del rotor. En esta plataforma computacional se llevaron a cabo las simulaciones realizadas en este trabajo de investigación.

Modelos identificadores de desbalance en sistemas rotor-cojinete con eje asimétrico. Estos modelos se obtuvieron a partir del modelo matemático de MGDL, mencionado arriba, mediante la metodología de identificación algebraica. Estos modelos permitieron dos esquemas de identificación del desbalance en rotores asimétricos. El primero, permite hacer estimaciones de desbalances discretos a lo largo de la longitud del eje en rotores asimétricos. Las estimaciones pueden realizarse, ya sea que el rotor se encuentre operando a velocidad constante o variable. El segundo esquema, permite realizar las estimaciones del desbalance modal en sistemas rotor-cojinete.

Disco de balanceo activo para Rotor Bently Nevada. El diseño y construcción de DBAs se inspiró en el diseño del prototipo original propuesto por Guzmán [111]. El DBA permite colocar masas de control en una posición angular y radial requerida. La alimentación eléctrica del disco se realiza mediante anillos rozantes, y las instrucciones de control se realizan de manera remota vía bluetooth.

Un banco experimental de un sistema rotor-cojinete con eje asimétrico con DBAs. Este banco experimental sirvió para comprobar los resultados teóricos obtenidos en las simulaciones numéricas realizadas en este trabajo de investigación.

Una metodología de balanceo para rotores asimétricos. Esta metodología puede implementarse en línea de operación, sin ser necesarias masas de prueba, arranque-parada, construcción de diagramas polares de respuesta, o llevar el rotor a través de sus velocidades críticas.

6.2 Trabajos futuros.

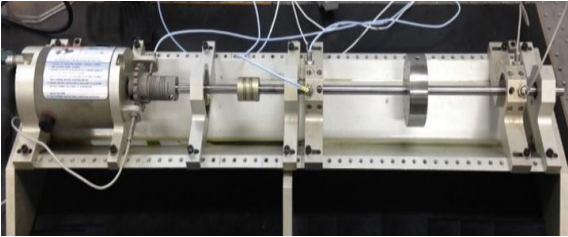


Los resultados obtenidos en la implementación de la metodología de balanceo propuesta, demuestran su efectividad en el balanceo en línea de rotores asimétricos, incluso puede aplicarse a rotores simétricos. Este tipo de sistemas rotor-cojinete son utilizados ampliamente en el ámbito industrial, en máquinas rotatorias como: turbinas, generadores, ventiladores, máquinas herramientas, bombas, etc. La implementación de la metodología de balanceo en este tipo de sistemas, puede generar una reducción de costos por manteniendo, ahorro por tiempos fuera de operación de las máquinas, así como horas hombre en el montaje y desmontaje del rotor para operaciones de balanceo.

Para garantizar los beneficios debidos a la implementación del método de balanceo propuesto en sistemas rotor-cojinete, es necesario resolver las dificultades causadas por el propio desbalance del DBA. Esto puede resolverse mediante una mejor distribución de los elementos internos del DBA, un mejor proceso de fabricación, o incluso, un diseño que permita que el DBA pueda ser balanceado antes de que el sistema rotor-cojinete entre en operación.

Por otro lado, resolver el problema de los errores en la medición de la respuesta y aproximación de pendientes nodales para la aplicación del identificador de desbalance de MGDL en sistemas rotor cojinete, permitiría realizar la identificación de desbalances discretos a lo largo de la longitud del eje del rotor. Esto ofrecería una alternativa al proceso de identificación de desbalance en la metodología de balanceo integrada para rotores asimétricos.

APÉNDICE A.

Apéndice A. Equipo utilizado en las pruebas experimentales.

| Nombre | Descripción |
|---|---|
|  | <p>Equipo de cómputo con LabView instalado y paquetería de Sound and Vibration.</p> |
|  | <p>Rotor Kit Bently Nevada</p> <p>Consta del motor, flecha, discos inerciales y soportes.</p> |
|  | <p>RK 4 Rotor Kit Proximitor</p> <p>Alimenta los sensores de proximidad a un voltaje de 24 Volts y recoge los valores censados.</p> |
|  | <p>Sensores de Proximidad GE Bently Nevada 3300 XL series.</p> <p>Sensibilidad $8\text{mv}/\mu\text{m}$</p> |



RK 4 Rotor Kit Speed control

Controla la velocidad del Rotor Kit, desde una velocidad de 0 a 10,000 rpm.



Tarjeta de adquisición de datos de la marca National Instruments USB-6251.

16 entradas analógicas (16 bits), razón de muestreo de 1.25 MS/s.

2 salidas analógicas (16 bits a 2.8 MS/s), 24 E/S digitales (8 controladas por reloj), contadores de 32 bits



Fuente de poder

0 ~ 32 VCC
5 VCC



Multímetro digital

Utilizado para la calibración de sensores.

APÉNDICE B.

Apéndice B. Rediseño del disco de balanceo activo.

Con el propósito de demostrar experimentalmente la aplicación de la metodología de balanceo mediante DBA, fue necesario rediseñar el prototipo DBA propuesto por Guzmán [111], esto por los problemas que se presentaron en su aplicación en su banco experimental. Entre los problemas presentados se tiene que las masas de balanceo son insuficientes, en el sentido de que las masas utilizadas son mucho menores al desbalance del sistema, impidiendo realizar una disminución considerable en las amplitudes de vibración debida al desbalance del sistema. Además, la fuente de energía, proporcionada por una batería de 9V que está incorporada dentro del DBA, tiende a descargarse después de realizar movimientos en los mecanismos del disco e incluso por mantener encendido el circuito electrónico y el módulo bluetooth, por lo que la energía suministrada a los motores de los mecanismos está limitada para esta aplicación. Además, la estructura de la base del banco experimental agrega mucho ruido a la señal de vibración, por lo que se requiere agregar un desbalance considerable para ver su efecto en la respuesta del sistema.

Debido a los problemas mencionados anteriormente, se decide utilizar el banco experimental Rotor Kit de la marca Bently Nevada, disponible en el laboratorio de rotodinámica del CENIDET, para realizar la validación experimental de la metodología de balanceo propuesta en este trabajo. La principal ventaja de utilizar dicho banco experimental es que el ruido en la señal de vibración debido a la estructura de la base es menor, permitiendo observar la respuesta al desbalance con poco desbalance en el sistema, en consecuencia, las masas balanceadoras serán de la misma proporción. Así, masas balanceadoras más pequeñas significan menos carga para los motores, permitiendo realizar los movimientos de los mecanismos más fácilmente. Para casos donde se requieran mayores o menores masas de balanceo, los DBA pueden tener masas de balanceo removibles e intercambiables. Asimismo, una fuente que suministre energía de manera ininterrumpida y constante (sin variaciones de voltaje) garantizará que los mecanismos de posicionamiento de las masas de balanceo sean más precisos.

Por lo anteriormente mencionado, en esta sección se propone un rediseño del DBA para su montaje en el banco experimental Rotor Kit de la marca Bently Nevada.

B.1 Condiciones de diseño

Se requiere un disco de balanceo activo acorde a las dimensiones y limitaciones del banco experimental rotor kit de la marca Bently Nevada. Las siguientes consideraciones para el diseño del DBA deben ser tomadas en cuenta:

- 1) Movimiento angular y radial de la masa balanceo vía bluetooth.
- 2) Diámetro interno y externo del DBA debe ser de 10 mm y 120 mm respectivamente.
- 3) La distribución de los elementos mecánicos y eléctricos en el DBA debe ser simétrica, de tal forma que el centro de masa del DBA esté lo más cerca posible del centro geométrico
- 4) Las masas móviles del DBA deben ser intercambiables, es decir cambiar de menor a mayor masa según los requerimientos del diseño.
- 5) La alimentación eléctrica de los DBA debe ser externa y garantizar un consumo energético ininterrumpido y constante.

B2. Diseño de mecanismos

El diseño del DBA se pensó tal como se muestra en la Figura B1, y está inspirado en el diseño del prototipo original propuesto por Guzmán [111]. Consta de dos mecanismos, uno que proporciona el movimiento radial de la masa de balanceo, y otro, el movimiento angular. La masa de balanceo es un bloque unido por 2 piezas que está montado en un tornillo sin fin, dicho bloque puede desmontarse e intercambiarse por otros para cambiar las masas de balanceo según las necesidades del sistema a balancear.

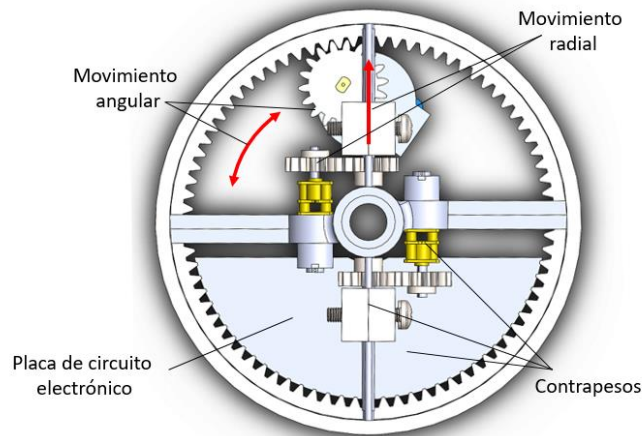


Figura. B1. Diseño preliminar del DBA.

En los siguientes puntos se da una descripción más detallada de los mecanismos del DBA.

B.2.1. Mecanismo de movimiento radial.

El movimiento radial de la masa móvil es accionado por un tornillo sin fin acoplado a una transmisión de engranes, formado por 2 engranes, con una relación de engranajes $e=1$. Los parámetros del diseño del mecanismo tornillo sin fin y de la transmisión de engranajes para el movimiento radial se escriben en las Tablas B1 y B2.

Tabla B1. Parámetros de diseño de tornillo sin fin.

| Tornillo sin fin | |
|------------------|---------|
| Paso grueso | 0.7 |
| Diámetro | 4 mm |
| Longitud | 40 mm |
| Tipo de rosca | Métrica |

Tabla B2. Parámetros de diseño de transmisión de engranaje.

| Parámetro | Piñón | Corona |
|-----------------------------|-------|--------|
| Módulo | 1 | 1 |
| No. De dientes | 15 | 15 |
| Ángulo de presión φ | 20 | 20 |
| Relación de engranaje (e) | 1 | |

En la Figura B2, se muestra la interacción de los elementos del mecanismo de accionamiento radial de la masa de balanceo del DBA. El mecanismo es accionado por un micro motor-reductor (Alimentación 6V CD) a través de su flecha, con una velocidad (ω_e) de 500 rpm con un torque (T) de 0.0284 N·m según el fabricante. Estos parámetros son transmitidos al tornillo sin fin mediante un par de engranes rectos con el mismo módulo y número de dientes, dotando a la masa de balanceo con una velocidad lineal (v) de 5.833×10^{-3} m/s.

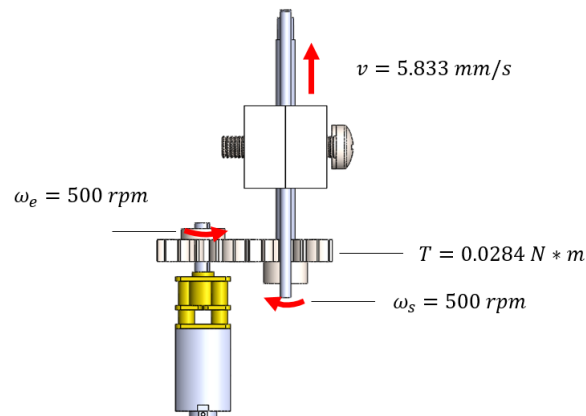


Figura B2. Interacción de elementos en mecanismo de movimiento radial.

El movimiento radial de la masa de balanceo actuará bajo la influencia del movimiento giratorio del rotor a una velocidad ω , por lo que las fuerzas que se oponen a su movimiento deben calcularse. En la Figura B3 a) se muestra el mecanismo del movimiento radial, se puede observar que la posición de la masa m se encuentra a una distancia p del centro del DBA, así mismo, el rotor se encuentra girando a una velocidad ω constante junto con el DBA. Dicho mecanismo, puede representarse como un eslabón rotatorio con una junta deslizante como se muestra en la Figura B3 b), donde se muestran las coordenadas de posición p y θ del punto P en el sistema de referencia X y Y de acuerdo con la figura.

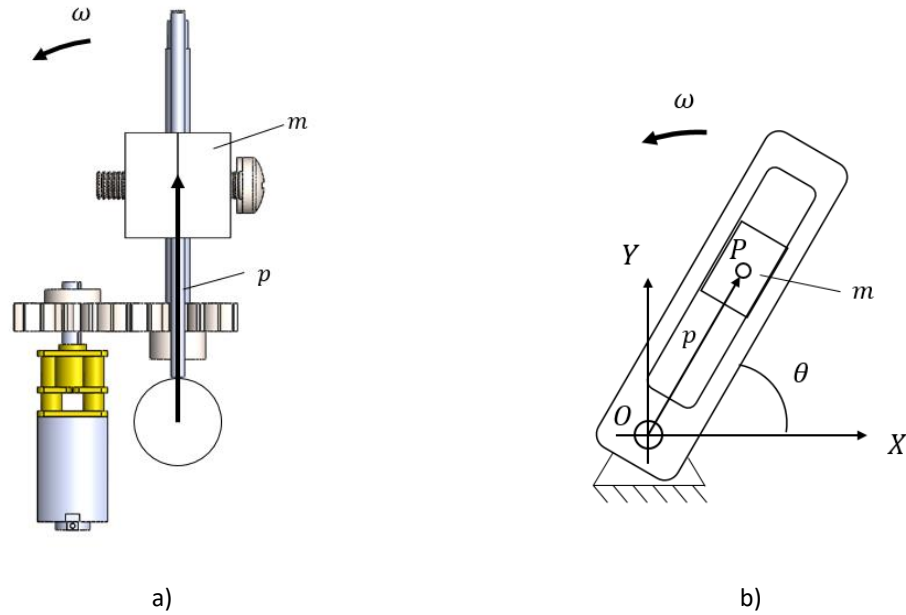


Figura B3. Movimiento radial de la masa de balanceo.

El vector de posición del punto P se escribe como:

$$R_P = p e^{j\theta} \tag{B.1}$$

Observe que existen dos funciones de tiempo p y θ en la ecuación (B.1), al derivar con respecto al tiempo se obtiene la ecuación de velocidad dada por (B.2).

$$V_P = p\omega j e^{j\theta} + \dot{p} e^{j\theta} \tag{B.2}$$

En la ecuación (B.2), los términos que están en función del tiempo son nuevamente p y θ . La velocidad del rotor ω se considera constante así como la velocidad lineal \dot{p} con la que se mueve la masa de balanceo ($\dot{p} = v$). Diferenciando con respecto al tiempo a (B.2), se obtiene (B.3).

$$A_p = -p\omega^2 e^{j\theta} + 2\dot{p}\omega j e^{j\theta} \tag{B.3}$$

Los términos de la ecuación (B.3) representan las siguientes componentes:

$$A_p = A_{P \text{ normal}} + A_{P \text{ coriolis}} \tag{B.4}$$

En la Figura B4 se muestran las componentes de aceleración actuando en el eslabón rotatorio.

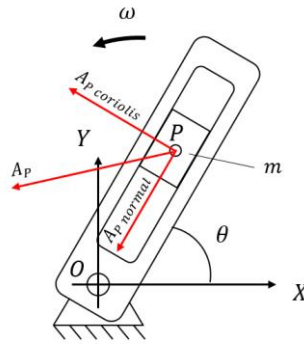


Figura B4. Movimiento radial de la masa de balanceo.

Si el rotor gira a una velocidad angular constante de $\omega = 900 \text{ rpm}$, y sabiendo que la velocidad lineal con que se mueve la masa de balanceo es $\dot{p} = 5.833 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ y que la máxima posición de $p = 25 \text{ mm}$, la aceleración resultante A_p es:

$$A_p = (25 \times 10^{-3} \text{ m})(94.2478 \text{ rad/s})^2 i + 2(5.833 \times 10^{-3} \text{ m/s})(94.2478 \text{ rad/s}) j$$

$$A_p = \sqrt{(-222.066 \text{ m/s}^2)^2 + (1.099 \text{ m/s}^2)^2} = 222.068 \text{ m/s}^2$$

Puede observarse que la componente de aceleración debida a la aceleración de Coriolis es poco significativa para el caso de estudio, por lo que puede despreciarse, así, la fuerza que se opone al movimiento radial de la masa balanceo es:

$$F = mA_n = (5.5 \times 10^{-3} \text{ kg})(222.06 \text{ m/s}^2) = 1.2213 \text{ N} \quad (\text{B.5})$$

El torque correspondiente a la carga F en un tornillo, puede calcularse con la ecuación (B.6) (Budynas [120]).

$$T_{Op} = \frac{Fd_m}{2} \left(\frac{l + \pi f d_m \sec(\lambda)}{\pi d_m - f l \sec(\lambda)} \right) \quad (\text{B.6})$$

Donde:

F = fuerza axial

d_m = diámetro medio del tornillo = $d_{mayor} - p/2$

λ = ángulo de la rosca

$l = p$ = paso de la cuerda

f = coeficiente de fricción

Los parámetros para un tornillo $M4 \times 0.7$ se pueden obtener de [120] y son:

$d_m = 3.65 \text{ mm}$

$\lambda = 30^\circ$

$l = p = 0.7 \text{ mm}$

$f = 0.25$ (acero - acero)

Con $F = 1.2213 \text{ N}$

Sustituyendo los parámetros del tornillo en (B.6), el torque T_{Op} debido a la carga F es:

$$T_{Op} = \frac{(1.2213 \text{ N})(3.65 \times 10^{-3} \text{ m})}{2} \left(\frac{0.7 \times 10^{-3} \text{ m} + \pi(0.25)(3.65 \times 10^{-3} \text{ m})\sec(30)}{\pi(3.65 \times 10^{-3} \text{ m}) - (0.25)(0.7 \times 10^{-3} \text{ m})\sec(30)} \right)$$

$$T_{Op} = 7.9375 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Así mismo, el motor tendrá que vencer un torque debido a la inercia debida al bloque de la masa de balanceo, y puede aproximarse con la ecuación (B.7).

$$T_{Imb} = I\alpha \tag{B.7}$$

Sabiendo que el momento de inercia del bloque es $I = 4.1137 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}$, y que la aceleración α , suponiendo que el motor-reductor de CD alcanza la velocidad de 0 a 500 rpm en 0.1s es $\alpha = 523.6 \text{ rad/s}^2$, se tiene que:

$$T_{Imb} = (4.1137 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}) \left(523.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) = 2.1539 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Ahora, el torque total que se opone al movimiento radial de la masa balanceo es:

$$T_{Cr} = T_{Op} + T_{Imb} = 1.009 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \tag{B.8}$$

Finalmente, para que la masa de balanceo pueda moverse, el torque del motor T_m ($28.4 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$) debe ser mayor al torque de la carga T_{Cr} , condición que se cumple con los resultados de la ecuación (B.8). La Figura B5 muestra la gráfica del torque T_{Cr} en función de la velocidad de rotación del rotor en el rango de 0 a 8000, y se indica la velocidad máxima en la que el movimiento radial de la masa podrá realizarse.

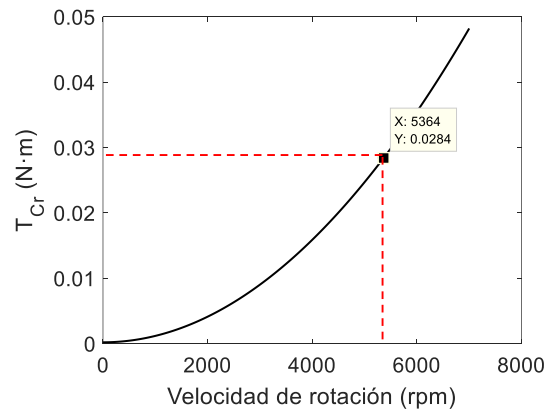


Figura B5. Movimiento radial de la masa de balanceo.

De la gráfica de la Figura B5, se obtiene que el motor propuesto podrá mover la masa de balanceo a velocidades menores a 5364 rpm.

B.2.2. Mecanismo de movimiento angular

El movimiento angular es proporcionado por una transmisión de engranaje piñón-corona. El piñón es impulsado por un motor a pasos 28byj-48, con una flecha que entrega un toque de $34.3 \text{ mN} \cdot \text{m}$ ($0.0343 \text{ N} \cdot \text{m}$) a una velocidad de 15 RPM, el ángulo de cada paso es de 5.625° y la alimentación es de 5-12 voltios DC. La Tabla B3 muestra los parámetros de diseño del mecanismo piñón corona.

Tabla B3. Parámetros de diseño de mecanismo piñón corona.

| Parámetro | Piñón | Corona |
|---------------------------|--------------|------------|
| Módulo | 1.27 | 1.27 |
| No. de dientes | 18 | 80 |
| Ángulo de presión ϕ | 20° | 20° |
| Relación de engranaje (e) | 80/18=4.4444 | |

De la relación de engrane se tiene que, para que la corona del mecanismo de una vuelta completa, el piñón debe girar 4.4444 vueltas. Sabiendo que el piñón tiene un desplazamiento angular de 5.625° por cada paso, la corona tendrá entonces un desplazamiento angular mínimo de 1.26° . La Figura B6 muestra la interacción entre el piñón y la corona dentada del DBA.

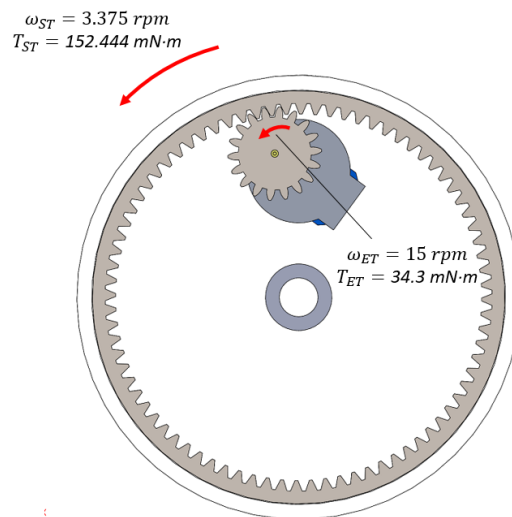


Figura B6. Mecanismo de posicionamiento angular de la masa de balanceo.

Como se mencionó anteriormente, el torque a la entrada del mecanismo es $T_{ET} = 34.3 \text{ mN} \cdot \text{m}$, por la relación de engranaje, el toque a la salida es de $T_{ST} = 152.444 \text{ mN} \cdot \text{m}$. Para asegurarse de que el torque del motor propuesto pueda realizar el movimiento angular, se calcula el torque que se opondrá al movimiento, por simplificación solo se considera la inercia de la masa del mecanismo.

La inercia de la masa del mecanismo (obtenida en Solidwors) es $I = 4.097 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Asimismo, su aceleración, suponiendo que su velocidad angular va de 0 a 3.375 rpm en un tiempo de 0.1 s, es de $\alpha = 0.35 \text{rad/s}^2$. Sustituyendo estos datos en la ecuación B.9,

$$T_{Inercia} = I\alpha \quad \text{B.9}$$

se obtiene $T_{Inercia} = 1.4339 \times 10^{-4} \text{N} \cdot \text{m}$, que es un valor mucho menor al torque T_{ST} que proporciona el movimiento angular, por lo que el motor seleccionado no tendría problemas en mover el mecanismo de la posición angular de la masa de desbalance.

B.3. Solución de las condiciones de diseño

1) Conexión de vía bluetooth e interfaz de conexión PC con tarjeta electrónica DBA.

En este punto, se conservó la interfaz de conexión desarrollada por Guzmán [111], así como los componentes electrónicos, y las relaciones mecánicas de los mecanismos del DBA, respetando las limitaciones dimensionales impuestas por el Rotor Kit Bentley Nevada. De esta manera se conserva la misma plataforma de comunicación entre la PC y la tarjeta electrónica DBA.

La interfaz de usuario se muestra en la Figura B.7. Se observa que es posible introducir una posición angular de 0° a 360° , así como una posición radial, recordando que la posición máxima de la masa móvil en el nuevo DBA es de 25 mm.

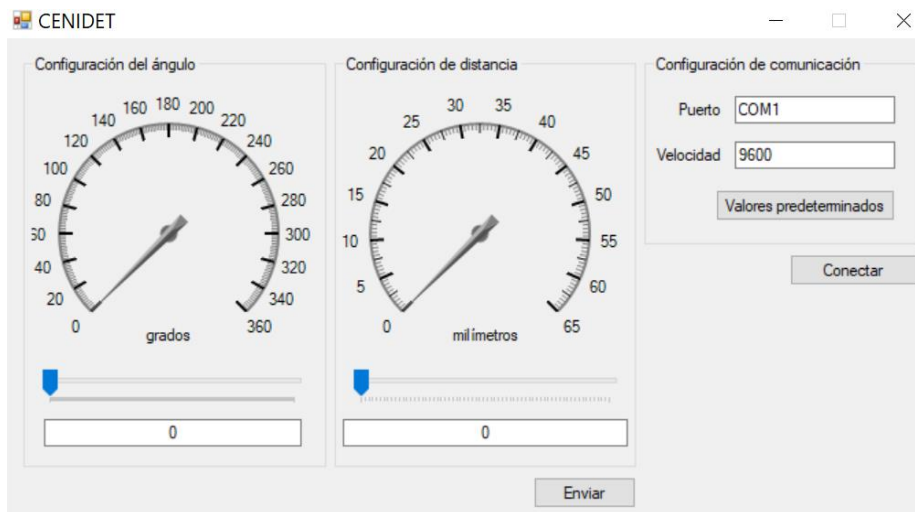







Figura B.7. Interfaz de control del DBA.

Los componentes electrónicos empleados se muestran en la Tabla B.4. La conexión entre los componentes electrónicos se muestra en la Figura B.8.

Tabla B4. Componentes electrónicos del DBA.

| Nombre | Descripción |
|---|---|
|  | Módulo de Bluetooth HC-05 Etapa de comunicación |
|  | Arduino nano Procesador del circuito |
|  | L293d Control de giro de motores |
|  | Micro Moto-reductor N20 |
|  | Motor a pasos 28BYJ-48 Etapa final Etapa de accionamiento |

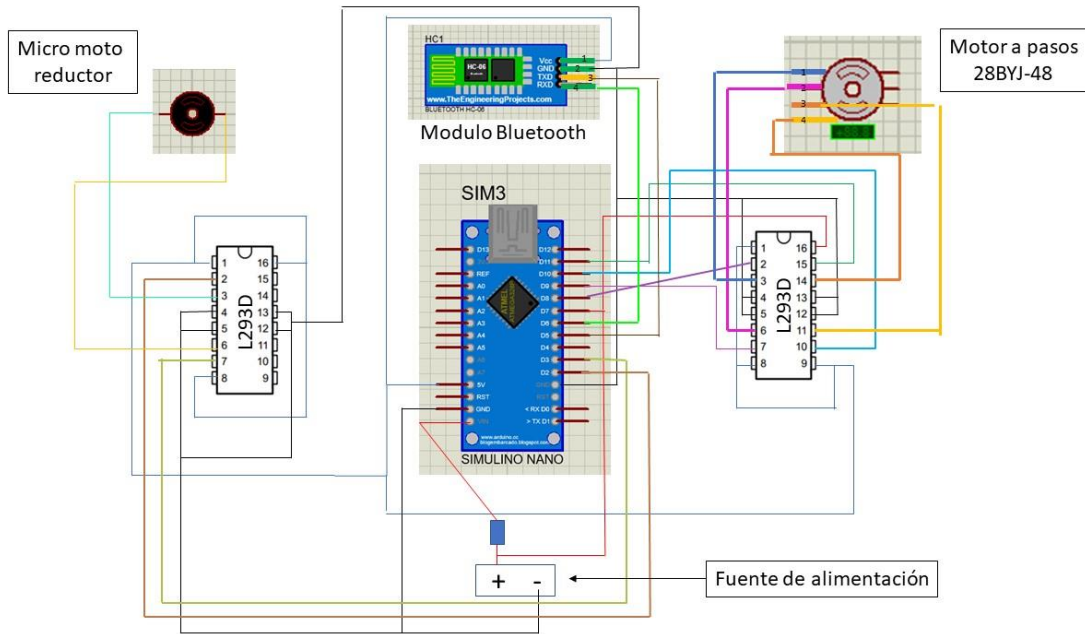


Figura B.8. Diagrama de conexiones de componentes eléctricos del DBA

En la Figura B.9, se muestra la disposición de los elementos electrónicos en la tarjeta electrónica. Los cables rojo y azul que se ven sueltos en la Figura B.10, son la alimentación del Micro Moto-Reductor.

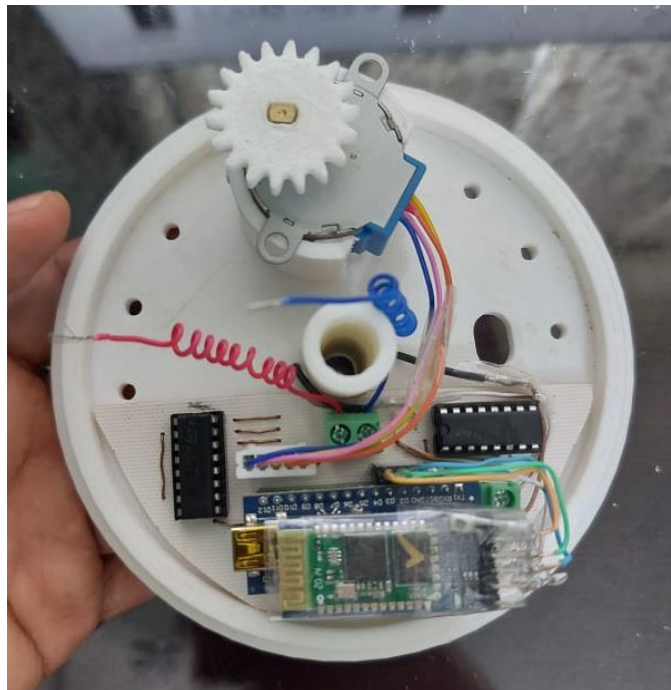


Figura B.10. Disposición de elementos electrónicos en tarjeta electrónica.

2) Dimensionamiento del DBA.

El dimensionamiento del DBA con las condiciones establecidas de diámetro interno y externo del DBA de 10 mm y 120 mm, fue posible.

3) La distribución de los elementos mecánicos y eléctricos en el DBA debe ser simétrica.

La distribución de los elementos del disco trató de hacerse lo más simétrica posible, resultando el dispositivo físico que se muestra en la Figura B.11.



Figura B.11. Distribución simétrica de elementos del DBA.

4) Las masas balanceo del DBA deben ser intercambiables

Para lograr masas de balanceo desmontables e intercambiables, fue necesario hacer un bloque unido por dos piezas sólidas. La Figura B.12 muestra la solución propuesta, entendiendo que esos bloques pueden ser de diferente material, acorde a los requerimientos de la masa de balanceo del sistema a balancear.

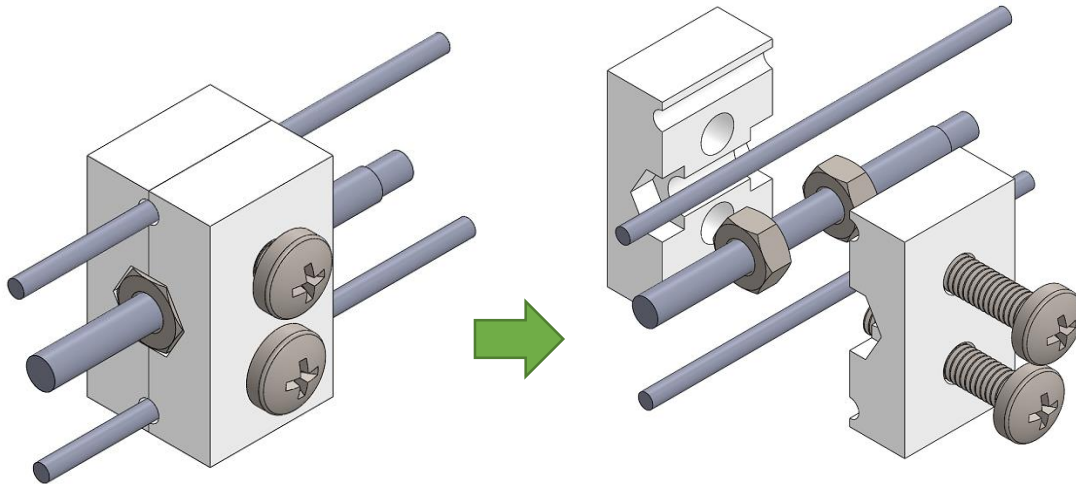


Figura B.12. Masa de balanceo desmontable e intercambiable.

5) La alimentación eléctrica de los DBA debe ser externa y garantizar un consumo energético ininterrumpido y constante.

Para lograr una alimentación externa con un voltaje constante e ininterrumpido, fue necesario adaptar un colector de anillos rozantes, alimentados por sus respectivos carbones. La Figura B.13 muestra el colector utilizado.



Figura B.13. Colector de anillos rozantes.

La Figura B.14 a), muestra la posición del colector en el DBA. Así también, la Figura E.1B b) muestra la alimentación del colector mediante un porta carbones que se encuentra anclado a la estructura del Rotor Kit Bentley Nevada.

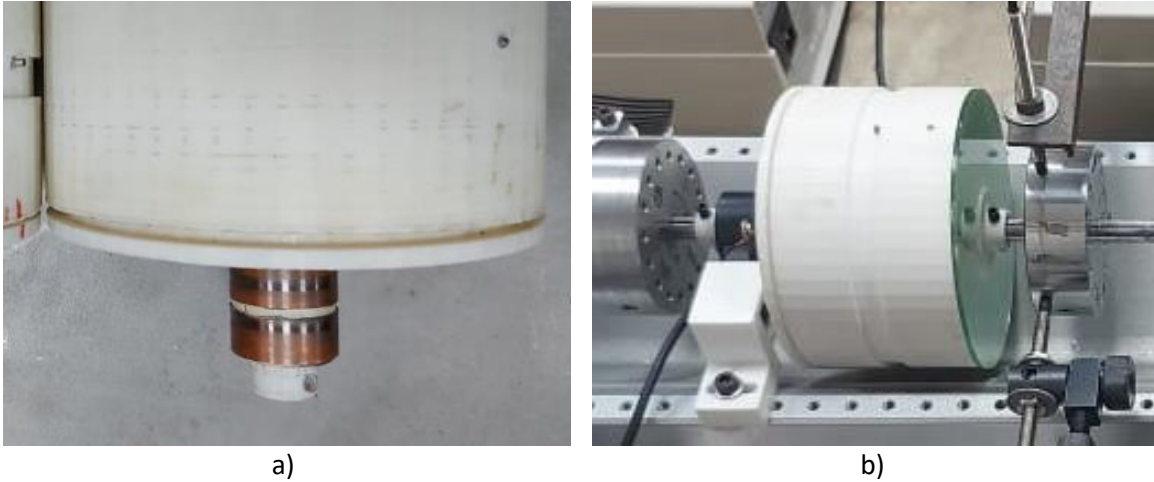


Figura B.14. Alimentación externa mediante anillos rozantes.

Como se ha podido observar, las condiciones de diseño planteadas en la sección B.1 han sido cumplidas. Logrando un DBA funcional para su montaje en Rotores Bentley Nevada.



An Integrated Balancing Method for Asymmetric Rotor-Bearing Systems: Algebraic Identification, Modal Balancing, and Active Balancing Disks

Luis Alberto Baltazar-Tadeo¹ · Jorge Colín-Ocampo¹ · José Gabriel Mendoza-Larios² · Arturo Abúndez-Pliego¹ · Mauricio Nango-Blanco¹ · Andrés Blanco-Ortega¹ · Saulo Jesús Landa-Damas¹

Received: 4 March 2022 / Revised: 9 May 2022 / Accepted: 1 June 2022
© Krishtel eMaging Solutions Private Limited 2022

Abstract

Purpose The effect of an asymmetric transversal section on the rotor vibration behavior has recently acquired great interest, mainly due to the expansion in the usage of this type of rotor as well as the lack of effective balancing methods. In this work, an integrated method for Balancing Asymmetric Rotor-Bearing Systems is presented.

Methods The proposed method consists in using the advantages of the conventional modal balancing (modal masses array) and then combining it with the methodology of parameter algebraic identification; the latter allows identifying both the magnitude as well as the angular position of the unbalance at low rotor speed regardless the nominal speed, preventing the system from operating at a critical speed. The proposed algebraic identifier requires the rotor vibration response as input data, instead of the vibration response produced by trial masses required in the conventional balancing methods. Likewise, the use of active balancing disks (ABDs) is proposed for rotor balancing.

Results The identification of the unbalance parameters and their angular position was numerically validated by considering that the rotor operates at (a) constant speed and (b) variable speed at different angular velocities with lineal coast up. The proposed methodology was used to numerically balance a multiple degree-of-freedom rotor with unequal principal moments of inertia of the shaft transverse section and discrete unbalance, achieving a reduction of more than 95% in the vibration amplitude of the rotor in resonance for four vibration modes. The numerical results showed that a single trial balancing run is required to balance the asymmetric rotor-bearing system in situ.

Keywords Asymmetric rotors · Rotor balancing · Algebraic identification · Finite element

Introduction

Asymmetric rotors exhibit unequal moments of inertia and stiffness in the principal axis of the inertia shaft transverse section. Examples of this feature include flat shafts, shafts with a keyway, shafts with a transverse crack, and two-pole

generators, all of which are rotor dynamic systems with unequal rotatory inertia about two principal axes of the rotating disk. When this type of rotor is operating, it exhibits a parametric excitation due to the periodically variable stiffness and inertia, which generates instability and perturbations in the rotor's dynamic behavior. The effect of the asymmetric

✉ Jorge Colín-Ocampo
jorge.co@cenidet.tecnm.mx

Luis Alberto Baltazar-Tadeo
luis_atadeo@cenidet.edu.mx

José Gabriel Mendoza-Larios
jgml@mixteco.utm.mx

Arturo Abúndez-Pliego
arturo.ap@cenidet.tecnm.mx

Mauricio Nango-Blanco
mauricio.nango@cinvestav.mx

Andrés Blanco-Ortega
andres.bo@cenidet.tecnm.mx

Saulo Jesús Landa-Damas
saulojesuslanda@cenidet.edu.mx

¹ Tecnológico Nacional de México /CENIDET., Int. Internado Palmira S/N. Col. Palmira, Cuernavaca Morelos, México C.P. 62490

² Instituto de Ingeniería Industrial y Automotriz, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León 69000, Oaxaca, México

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Colín Ocampo, J.G. Mendoza Larios, A. Blanco Ortega, A. Abúndez Pliego, E.S. Gutiérrez Wing, Determinación del Desbalance en Sistemas Rotor-cojinete a velocidad constante: Método de Identificación Algebraica, *Ing. Mecánica, Tecnol. y Desarro.* 5 (2016) 385–394.
- [2] F. Palmieri, D. Violante, A. Klemnow, Análisis modal y balanceo de un turbogenerador de energía eléctrica, *XI Congr. Iberoam. Ing. Mecánica XI CIBIM 2013.* (ISBN 978-950-34-1025-7). (2013).
- [3] D.M. Smith, The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings, *Proc. R. Soc. London. Ser. A, Contain. Pap. a Math. Phys. Character.* 142 (1933) 92–118. <https://doi.org/10.1098/rspa.1933.0158>.
- [4] H.D. Taylor, Critical Speed Behavior of Unsymmetrical Shafts, *J. Appl. Mech.* 7 (1940) A71–A79. <https://doi.org/10.1115/1.4009017>.
- [5] W.R. Foote, H. Poritsky, J.J. Slade, Critical Speeds of a Rotor With Unequal Shaft Flexibilities, Mounted in Bearings of Unequal Flexibility—I, *J. Appl. Mech.* 10 (1943) A77–A84. <https://doi.org/10.1115/1.4009262>.
- [6] P.J. Brosens, S.H. Crandall, Whirling of Unsymmetrical Rotors, *J. Appl. Mech.* 28 (1961) 355–362. <https://doi.org/10.1115/1.3641711>.
- [7] R.E.D. Bishop, A.G. Parkinson, Second order vibration of flexible shafts, *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A, Math. Phys. Sci.* 259 (1965) 1–31. <https://doi.org/10.1098/rsta.1965.0052>.
- [8] T. Yamamoto, H. Ota, K. Sato, On the Forced Vibrations of the Shaft Carrying an Unsymmetrical Rotor : Forced Vibrations Having the Circular Frequencies Differing from the Rotating Angular Velocity of the Shaft, *Bull. JSME.* 9 (1966) 58–66. <https://doi.org/10.1299/jsme1958.9.58>.
- [9] Y. Matsukura, M. Kiso, T. Inoue, M. Tomisawa, On the balancing convergence of flexible rotors, with special reference to asymmetric rotors, *J. Sound Vib.* 63 (1979) 419–428. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(79\)90684-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(79)90684-9).
- [10] T. Inagaki, H. Kanki, K. Shiraki, Response Analysis of a General Asymmetric Rotor-Bearing System, *J. Mech. Des.* 102 (1980) 147–157. <https://doi.org/10.1115/1.3254705>.
- [11] Z.A. Parszewski, J.M. Krodkiewski, J. Rucinski, Parametric instabilities of rotor-support systems with asymmetric stiffness and damping matrices, *J. Sound Vib.* 109 (1986) 111–125. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(86\)80026-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(86)80026-8).
- [12] Q. Han, F. Chu, Parametric instability of a Jeffcott rotor with rotationally asymmetric inertia and transverse crack, *Nonlinear Dyn.* 73 (2013) 827–842. <https://doi.org/10.1007/s11071-013-0835-6>.
- [13] M.W. Meng, W.J. Jun, W. Zhi, Frequency and Stability Analysis Method of Asymmetric Anisotropic Rotor-Bearing System Based on Three-Dimensional Solid Finite Element Method, *J. Eng. Gas Turbines Power.* 137 (2015) 1–9. <https://doi.org/10.1115/1.4029968>.
- [14] Y. Zuo, J. Wang, W. Ma, Quasimodes instability analysis of uncertain asymmetric rotor system based on 3D solid element model, *J. Sound Vib.* 390 (2017) 192–204. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.10.047>.
- [15] I. Părașanu, H. Gheorghiu, C. Petre, G. Jiga, N. Crișan, The modeling of the dynamic behavior of an unsymmetrical rotor, in: *AIP Conf. Proc.*, 2018: p. 030031. <https://doi.org/10.1063/1.5024181>.
- [16] Y.-S. Kim, J.-C. Kim, Analysis of chaotic vibration of Shilnikov-type in rotor with asymmetric

- and non-linear stiffness, *Int. J. Non. Linear. Mech.* 109 (2019) 132–139. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.12.002>.
- [17] A.G. Parkinson, On the balancing of shafts with axial asymmetry, *Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.* 294 (1966) 66–79. <https://doi.org/10.1098/rspa.1966.0194>.
- [18] A.J. Smalley, M. Tessarzik, R.A. Rio, *Balancing Techniques for High-speed Flexible Rotors*, 1978. <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19780012571.pdf>.
- [19] X. Songbo, W. Xinghua, W. Guangming, P. Yucai, L. Rongqiang, X. Shichang, A new balance method for flexible rotors with asymmetric principal stiffnesses, *Am. Soc. Mech. Eng.* (1989) 411–415.
- [20] J. Colín Ocampo, *Balaneo de rotores asimétricos* (Master's Thesis), Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 1996.
- [21] Y. Kang, C.-P. Liu, G.-J. Sheen, A MODIFIED INFLUENCE COEFFICIENT METHOD FOR BALANCING UNSYMMETRICAL ROTOR-BEARING SYSTEMS, *J. Sound Vib.* 194 (1996) 199–218. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0353>.
- [22] Y. Kang, G.-J. Sheen, S.-M. Wang, DEVELOPMENT AND MODIFICATION OF A UNIFIED BALANCING METHOD FOR UNSYMMETRICAL ROTOR-BEARING SYSTEMS, *J. Sound Vib.* 199 (1997) 349–369. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0652>.
- [23] Y. Kang, Y.-P. Chang, M.-H. Tseng, P.-H. Tang, Y.-F. Chang, A modified approach based on influence coefficient method for balancing crank-shafts, *J. Sound Vib.* 234 (2000) 277–296. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2873>.
- [24] Y. Kang, M.-H. Tseng, S.-M. Wang, C.-P. Chiang, C.-C. Wang, An accuracy improvement for balancing crankshafts, *Mech. Mach. Theory.* 38 (2003) 1449–1467. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(03\)00097-1](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(03)00097-1).
- [25] J. Colín Ocampo, E.S. Gutiérrez Wing, F.J. Ramírez Moroyoqui, A. Abúndez Pliego, A. Blanco Ortega, J. Mayén, A novel methodology for the angular position identification of the unbalance force on asymmetric rotors by response polar plot analysis, *Mech. Syst. Signal Process.* 95 (2017) 172–186. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.03.028>.
- [26] M. Nango Blanco, *Identificación Algebraica en Línea de Parámetros para el Balanceo de Rotores Asimétricos.*, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2015.
- [27] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification, *ESAIM Control. Optim. Calc. Var.* 9 (2003) 151–168. <https://doi.org/10.1051/cocv:2003008>.
- [28] F. Beltran-Carbajal, G. Silva-Navarro, M. Arias-Montiel, Active Unbalance Control of Rotor Systems Using On-Line Algebraic Identification Methods, *Asian J. Control.* 15 (2013) 1627–1637. <https://doi.org/10.1002/asjc.744>.
- [29] M. Arias-Montiel, F. Beltrán-Carbajal, G. Silva-Navarro, On-line algebraic identification of eccentricity parameters in active rotor-bearing systems, *Int. J. Mech. Sci.* 85 (2014) 152–159. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.027>.
- [30] J.G. Mendoza Larios, J. Colín Ocampo, A. Blanco Ortega, A. Abúndez Pliego, E.S. Gutiérrez Wing, Balanceo Automático de un Sistema Rotor-Cojinete: Identificador Algebraico en Línea del Desbalance Para un Sistema Rotodinámico, *Rev. Iberoam. Automática e Informática Ind. RIAI.* 13 (2016) 281–292. <https://doi.org/10.1016/j.riai.2016.03.004>.
- [31] H.F. De Castro, K.L. Cavalca, L.W.F. De Camargo, N. Bachschmid, Identification of unbalance forces by metaheuristic search algorithms, *Mech. Syst. Signal Process.* 24 (2010) 1785–1798. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2009.11.012>.
- [32] M. Villafane Saldarriaga, V. Steffen, J. Der Hagopian, J. Mahfoud, On the balancing of flexible rotating machines by using an inverse problem approach, *JVC/Journal Vib. Control.* 17 (2011) 1021–1033. <https://doi.org/10.1177/1077546310370669>.

- [33] T.S. Morais, J. Der Hagopian, V. Steffen, J. Mahfoud, Optimization of unbalance distribution in rotating machinery with localized non linearity, *Mech. Mach. Theory.* 72 (2014) 60–70. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2013.09.012>.
- [34] W. Mao, G. Liu, J. Li, J. Liu, An Identification Method for the Unbalance Parameters of a Rotor-Bearing System, *Shock Vib.* 2016 (2016) 1–9. <https://doi.org/10.1155/2016/8284625>.
- [35] J. Yao, L. Liu, F. Yang, F. Scarpa, J. Gao, Identification and optimization of unbalance parameters in rotor-bearing systems, *J. Sound Vib.* 431 (2018) 54–69. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.05.050>.
- [36] A. Shrivastava, A.R. Mohanty, Identification of unbalance in a rotor system using a joint input-state estimation technique, *J. Sound Vib.* 442 (2019) 414–427. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.11.019>.
- [37] M. Gohari, A.M. Eydi, Modelling of shaft unbalance: Modelling a multi discs rotor using K-Nearest Neighbor and Decision Tree Algorithms, *Measurement.* 151 (2020) 107253. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.107253>.
- [38] M. Gohari, A. Kord, H. Jalali, Unbalance Rotor Parameters Detection Based on Artificial Neural Network: Development of Test Rig, *J. Vib. Eng. Technol.* (2022). <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00546-4>.
- [39] A. Shrivastava, A.R. Mohanty, Estimation of single plane unbalance parameters of a rotor-bearing system using Kalman filtering based force estimation technique, *J. Sound Vib.* 418 (2018) 184–199. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.11.020>.
- [40] D. Zou, H. Zhao, G. Liu, N. Ta, Z. Rao, Application of augmented Kalman filter to identify unbalance load of rotor-bearing system: Theory and experiment, *J. Sound Vib.* 463 (2019) 114972. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114972>.
- [41] J. CHUNG, D.S. RO, Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanisms, *J. Sound Vib.* 228 (1999) 1035–1056. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2456>.
- [42] E.L. Thearle, N.Y. Schenectady, Dynamic Balancing of Rotating Machinery in the Field, *J. Appl. Mech.* 56 (1934) 745–753.
- [43] J.D. ALEXANDER, An automatic dynamic balancer, in: *Proc. Second Southeast. Conf.* 2, 1964: pp. 415–426.
- [44] J.W. CADE, Self-compensating balancing in rotating mechanisms, *Des. News.* (1965) 234–239.
- [45] J. Lee, W.K. Van Moorhem, Analytical and Experimental Analysis of a Self-Compensating Dynamic Balancer in a Rotating Mechanism, *J. Dyn. Syst. Meas. Control.* 118 (1996) 468–475. <https://doi.org/10.1115/1.2801169>.
- [46] R. Horvath, G.T. Flowers, J. Fausz, Passive Balancing of Rotor Systems Using Pendulum Balancers, *J. Vib. Acoust.* 130 (2008) 1–11. <https://doi.org/10.1115/1.2731401>.
- [47] T. Majewski, D. Szwedowicz, M.A.M. Melo, Self-balancing system of the disk on an elastic shaft, *J. Sound Vib.* 359 (2015) 2–20. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.06.035>.
- [48] E. Wilson, R. Mah, Automatic Balancing and Intelligent Fault Tolerance for a Space-Based Centrifuge, in: *AIAA Guid. Navig. Control Conf. Exhib.*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, Virginia, 2005: pp. 5065–5117. <https://doi.org/10.2514/6.2005-6377>.
- [49] A. Blanco-Ortega, F. Beltran-Carbajal, A. Favela-Contreras, G. Silva-Navarro, Active disk for automatic balancing of rotor-bearing systems, in: *2008 Am. Control Conf.*, IEEE, 2008: pp. 3023–3028. <https://doi.org/10.1109/ACC.2008.4586956>.
- [50] M. Lalanne, G. Ferraris, *Rotordynamics prediction in engineering*, 2nd ed., John Wiley and Sons, 1988.
- [51] H.H. Jeffcott, XXVII. The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed.— The effect of want of balance, *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci.* 37

- (1919) 304–314. <https://doi.org/10.1080/14786440308635889>.
- [52] C.M. Laffoon, B.A. Rose, Special Problems of Two-Pole Turbine Generators, *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.* 59 (1940) 30–34. <https://doi.org/10.1109/T-AIEE.1940.5058002>.
- [53] J. Dick, CXI. The whirling of shafts having sections with unequal principal bending moduli, London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci. 39 (1948) 946–955. <https://doi.org/10.1080/14786444808521703>.
- [54] E.H. Hull, Shaft Whirling as Influenced by Stiffness Asymmetry, *J. Eng. Ind.* 83 (1961) 219–226. <https://doi.org/10.1115/1.3664468>.
- [55] T. Yamamoto, H. Ota, On the Unstable Vibrations of a Shaft Carrying an Unsymmetrical Rotor, *J. Appl. Mech.* 31 (1964) 515–522. <https://doi.org/10.1115/1.3629670>.
- [56] T. Yamamoto, H. Ota, The Damping Effect on Unstable Whirlings of a Shaft Carrying an Unsymmetrical Rotor., Nagoya University, 1967.
- [57] T. Yamamoto, H. Ota, K. Kono, On the Unstable Vibrations of a Shaft With Unsymmetrical Stiffness Carrying an Unsymmetrical Rotor, *J. Appl. Mech.* 35 (1968) 313–321. <https://doi.org/10.1115/1.3601197>.
- [58] T. YAMAMOTO, K. YASUDA, Unstable Vibrations of an Unsymmetrical Rotor Supported by Flexible Bearing Pedestals, *Bull. JSME.* 15 (1972) 1063–1073. <https://doi.org/10.1299/jsme1958.15.1063>.
- [59] D. Ardayfio, D.A. Frohrib, Instabilities of an Asymmetric Rotor With Asymmetric Shaft Mounted on Symmetric Elastic Supports, *J. Eng. Ind.* 98 (1976) 1161–1165. <https://doi.org/10.1115/1.3439074>.
- [60] G. Genta, Whirling of unsymmetrical rotors: A finite element approach based on complex coordinates, *J. Sound Vib.* 124 (1988) 27–53. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(88\)81404-4](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(88)81404-4).
- [61] Y. Kang, Y.-P. Shih, A.-C. Lee, Investigation on the Steady-State Responses of Asymmetric Rotors, *J. Vib. Acoust.* 114 (1992) 194–208. <https://doi.org/10.1115/1.2930249>.
- [62] S. Ganguly, A. Nandi, S. Neogy, A viscoelastic Timoshenko shaft finite element for dynamic analysis of rotors, *J. Vib. Control.* 24 (2018) 2180–2200. <https://doi.org/10.1177/1077546316681685>.
- [63] Y.-G. Jei, C.-W. Lee, Modal Characteristics Of Asymmetrical Rotor-bearing Systems, *J. Sound Vib.* 162 (1993) 209–229. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1114>.
- [64] L.W. Chen, W.K. Peng, Stability analyses of a Timoshenko shaft with dissimilar lateral moments of inertia, *J. Sound Vib.* 207 (1997) 33–46. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1111>.
- [65] R. Ganesan, Effects of bearing and shaft asymmetries on the instability of rotors operating at near-critical speeds, *Mech. Mach. Theory.* 35 (2000) 737–752. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(99\)00038-5](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(99)00038-5).
- [66] C.-W. Lee, D.-J. Han, J.-H. Suh, S.-W. Hong, Modal analysis of periodically time-varying linear rotor systems, *J. Sound Vib.* 303 (2007) 553–574. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.01.041>.
- [67] D. Bartylla, Stability investigation of rotors with periodic axial force, *Mech. Mach. Theory.* 58 (2012) 13–19. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.08.003>.
- [68] R. Srinath, A. Sarkar, A.S. Sekhar, Instability of asymmetric shaft system, *J. Sound Vib.* 362 (2016) 276–291. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.10.008>.
- [69] P. Ferrecki, F. Zaoral, J. Zapoměl, Using Floquet Theory in the Procedure for Investigation of the Motion Stability of a Rotor System Exhibiting Parametric and Self-Excited Vibration, *Strojnícky Časopis - J. Mech. Eng.* 69 (2019) 33–42. <https://doi.org/10.2478/scjme-2019-0027>.
- [70] S.K. Bharti, A. Sinha, A.K. Samantaray, R. Bhattacharyya, The Sommerfeld effect of second kind: passage through parametric instability in a rotor with non-circular shaft and anisotropic flexible supports, *Nonlinear Dyn.* 100 (2020) 3171–3197. <https://doi.org/10.1007/s11071->

020-05681-9.

- [71] M.A. Al-Shudeifat, On the finite element modeling of the asymmetric cracked rotor, *J. Sound Vib.* 332 (2013) 2795–2807. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.12.026>.
- [72] M.A. Al-Shudeifat, Stability analysis and backward whirl investigation of cracked rotors with time-varying stiffness, *J. Sound Vib.* 348 (2015) 365–380. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.03.007>.
- [73] C. Guo, M.A. Al-Shudeifat, J. Yan, L.A. Bergman, D.M. McFarland, E.A. Butcher, Stability analysis for transverse breathing cracks in rotor systems, *Eur. J. Mech. A/Solids.* 42 (2013) 27–34. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.04.001>.
- [74] Q. Han, F. Chu, The effect of transverse crack upon parametric instability of a rotor-bearing system with an asymmetric disk, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 17 (2012) 5189–5200. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.03.037>.
- [75] G.I. Giannopoulos, S.K. Georgantzinou, N.K. Anifantis, Coupled vibration response of a shaft with a breathing crack, *J. Sound Vib.* 336 (2015) 191–206. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.09.037>.
- [76] A. Nandi, S. Neogy, An efficient scheme for stability analysis of finite element asymmetric rotor models in a rotating frame, *Finite Elem. Anal. Des.* 41 (2005) 1343–1364. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2005.03.001>.
- [77] F. ONCESCU, A.A. LAKIS, G. OSTIGUY, INVESTIGATION OF THE STABILITY AND STEADY STATE RESPONSE OF ASYMMETRIC ROTORS, USING FINITE ELEMENT FORMULATION, *J. Sound Vib.* 245 (2001) 303–328. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3570>.
- [78] Z. Zheng, Y. Xie, D. Zhang, X. Ye, Effects of Stator Stiffness, Gap Size, Unbalance, and Shaft's Asymmetry on the Steady-State Response and Stability Range of an Asymmetric Rotor with Rub-Impact, *Shock Vib.* 2019 (2019) 1–11. <https://doi.org/10.1155/2019/6162910>.
- [79] M. Filippi, E. Carrera, Stability and transient analyses of asymmetric rotors on anisotropic supports, *J. Sound Vib.* 500 (2021) 116006. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116006>.
- [80] E. Carrera, M. Filippi, Vibration Analysis of Thin/Thick, Composites/Metallic Spinning Cylindrical Shells by Refined Beam Models, *J. Vib. Acoust. Trans. ASME.* 137 (2015) 1–9. <https://doi.org/10.1115/1.4029688>.
- [81] E. Carrera, M. Filippi, A refined one-dimensional rotordynamics model with three-dimensional capabilities, *J. Sound Vib.* 366 (2016) 343–356. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.12.036>.
- [82] M. Filippi, E. Carrera, Dynamic Analyses of Axisymmetric Rotors Through Three-Dimensional Approaches and High-Fidelity Beam Theories, *J. Vib. Acoust. Trans. ASME.* 139 (2017). <https://doi.org/10.1115/1.4036927>.
- [83] M. Filippi, E. Zappino, E. Carrera, A node-dependent kinematic approach for rotordynamics problems, *J. Eng. Gas Turbines Power.* 141 (2019) 1–12. <https://doi.org/10.1115/1.4042285>.
- [84] A. Nandi, S. Neogy, Modelling of rotors with three-dimensional solid finite elements, *J. Strain Anal. Eng. Des.* 36 (2001) 359–371. <https://doi.org/10.1243/0309324011514539>.
- [85] T.A. Vest, M.S. Darlow, A Modified Conical Beam Element Based on Finite Element Analysis: Experimental Correlations, *J. Vib. Acoust.* 112 (1990) 350–354. <https://doi.org/10.1115/1.2930515>.
- [86] A. Lazarus, B. Prabel, D. Combescure, A 3D finite element model for the vibration analysis of asymmetric rotating machines, *J. Sound Vib.* 329 (2010) 3780–3797. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.03.029>.
- [87] S. Wang, Y. Wang, Y. Zi, Z. He, A 3D finite element-based model order reduction method for parametric resonance and whirling analysis of anisotropic rotor-bearing systems, *J. Sound Vib.* 359 (2015) 116–135. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.08.027>.

- [88] L. Hu, A. Palazzolo, An Enhanced Axisymmetric Solid Element for Rotor Dynamic Model Improvement, *J. Vib. Acoust. Trans. ASME*. 141 (2019). <https://doi.org/10.1115/1.4043411>.
- [89] Y. Ishida, J. Liu, Elimination of Unstable Ranges of Rotors Utilizing Discontinuous Spring Characteristics: An Asymmetrical Shaft System, an Asymmetrical Rotor System, and a Rotor System With Liquid, *J. Vib. Acoust.* 132 (2010) 0110111–0110118. <https://doi.org/10.1115/1.4000842>.
- [90] S.A. Ghasabi, M. Arbabtafti, M. Shahgholi, Time-delayed control of a nonlinear asymmetrical rotor near the major critical speed with flexible supports, *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 0 (2020) 1–26. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1715230>.
- [91] Y.-H. Fan, S.-T. Chen, A.-C. Lee, Active control of an asymmetrical rigid rotor supported by magnetic bearings, *J. Franklin Inst.* 329 (1992) 1153–1178. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(92\)90009-6](https://doi.org/10.1016/0016-0032(92)90009-6).
- [92] M. Brahem, M. Chouchane, A. Amamou, Active vibration control of a rotor bearing system using flexible piezoelectric patch actuators, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 31 (2020) 1284–1297. <https://doi.org/10.1177/1045389X20916804>.
- [93] T. Lai, J. Liu, Active vibration control of a rotor-bearing-actuator system using robust eigenvalue placement method, *Meas. Control.* 53 (2020) 531–540. <https://doi.org/10.1177/0020294019836125>.
- [94] R.E.D. Bishop, A.G. Parkinson, On the Use of Balancing Machines for Flexible Rotors, *J. Eng. Ind.* 94 (1972) 561–572. <https://doi.org/10.1115/1.3428193>.
- [95] W. Kellenberger, Should a Flexible Rotor Be Balanced in N or $(N + 2)$ Planes?, *J. Eng. Ind.* 94 (1972) 548–558. <https://doi.org/10.1115/1.3428190>.
- [96] K. Shiraki, H. Kanki, New Field Balancing Method on Tandem Connected Multispan Flexible Rotor System, in: *Dyn. Rotors*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1975: pp. 494–523. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48784-2_19.
- [97] K. Shiraki, H. Kanki, A New Vibration Criteria For High Speed Large Capacity Turbomachinery, Texas A&M University, 1979. <https://doi.org/https://doi.org/10.21423/R1D96C>.
- [98] H. KANKI, K. ADACHI, Reviews of Japan's Rotordynamics Development "Balancing," *J. Syst. Des. Dyn.* 7 (2013) 170–177. <https://doi.org/10.1299/jsdd.7.170>.
- [99] J.G. Molina, Arreglo de pesos modales para el balanceo de rotores asimétricos, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2009.
- [100] F.J. Ramírez Moroyoqui, Análisis Experimental en el Balanceo Modal de Rotores Asimétricos, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2016.
- [101] J.R. Trapero Arenas, Técnicas de Identificación Algebraicas y Espectrales de Señales Armónicas. Aplicaciones en Mecatrónica y Economía, Universidad de Castilla-La Mancha, 2008.
- [102] A.. Ziarani, A. Konrad, A method of extraction of nonstationary sinusoids, *Signal Processing*. 84 (2004) 1323–1346. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2004.05.008>.
- [103] M. Mojiri, A.R. Bakhshai, An Adaptive Notch Filter for Frequency Estimation of a Periodic Signal, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 49 (2004) 314–318. <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.821414>.
- [104] M. Hou, Amplitude and frequency estimator of a sinusoid, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 50 (2005) 855–858. <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.849244>.
- [105] J.G. Mendoza Larios, Identificador Algebraico en Línea del Desbalance para un Sistema Rotodinámico, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2016.
- [106] O. Hernández Mendoza, Detección de fracturas en línea de Sistemas Rotodinámicos., Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2017.
- [107] S.J. Landa Damas, Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de una

- Chumacera Presurizada, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2017.
- [108] A. Blanco-Ortega, G. Silva-Navarro, J. Coln-Ocampo, M. Oliver-Salazar, G. Vela-Valds, Automatic Balancing of Rotor-Bearing Systems, in: *Adv. Anal. Control Vib. - Theory Appl.*, InTech, 2012. <https://doi.org/10.5772/48621>.
- [109] J.G. Mendoza-Larios, E. Barredo, M. Arias-Montiel, L.A. Baltazar-Tadeo, S.J. Landa-Damas, R. Tapia-Herrera, J. Colín-Ocampo, An Algebraic Approach for Identification of Rotordynamic Parameters in Bearings with Linearized Force Coefficients, *Mathematics*. 9 (2021) 2747. <https://doi.org/10.3390/math9212747>.
- [110] X. Pan, J. Lu, J. Huo, J. Gao, H. Wu, A Review on Self-Recovery Regulation (SR) Technique for Unbalance Vibration of High-End Equipment, *Chinese J. Mech. Eng.* 33 (2020) 89. <https://doi.org/10.1186/s10033-020-00514-7>.
- [111] C.F. Guzmán Correa, Análisis de la respuesta de un rotor asimétrico con un disco de balanceo activo, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2017.
- [112] G.S. Pisarenko, A.P. Yákovlev, V. V. Matvéev, *Manual de resistencia de materiales*, 1985.
- [113] F.P. BEER, J. E. RUSSELL JOHNSTON, D.F. MAZUREK, E.R. EISENBERG, *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Estática*, Novena Ed, 2010.
- [114] Y.H. Lin, Vibration analysis of timoshenko beams transversed by moving loads, *J. Mar. Technol.* Vol. 2 (1994) 25–35.
- [115] K.J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Segunda ed, 2016.
- [116] A. Blanco-Ortega, F. Beltrán-Carbajal, G. Silva-Navarro, H. Méndez-Azúa, Control de Vibraciones en Maquinaria Rotatoria, *Rev. Iberoam. Automática e Informática Ind. RIAI*. 7 (2010) 36–43. [https://doi.org/10.1016/S1697-7912\(10\)70058-3](https://doi.org/10.1016/S1697-7912(10)70058-3).
- [117] H. Sira-Ramírez, C. García-Rodríguez, J. Cortés-Romero, A. Luviano-Juarez, *Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems*, John Wiley & Sons Ltd, 2014.
- [118] R.E.D. Bishop, G.M.L. Gladwell, The Vibration and Balancing of an Unbalanced Flexible Rotor, *J. Mech. Eng. Sci.* 1 (1959) 66–77. https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1959_001_010_02.
- [119] E.J. Gunter, L.E. Barrett, P.E. Allaire, Balancing Of Multimass Flexible Rotors, *Texas A&M Univ. Gas Turbine Lab.* (1976) 133–148. <https://doi.org/https://doi.org/10.21423/R1W38D>.
- [120] R.G. Budynas, J.K. Nisbett, *DISEÑO EN INGENIERIA MECANICA DE SHIGLEY*, Novena edi, 2012.



**TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO**

cenidet[®]
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico