



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

**Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico**

Tesis de Maestría

**Estrategia de control robusto para la posición de
un rehabilitador de miembros inferiores**

presentada por

Ing. Janeth Jiménez Gómez

como requisito para la obtención del grado de

**Maestra en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Directora de tesis

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo

Codirector de tesis

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Cuernavaca, Morelos, México. Mayo de 2023.



Cuernavaca,
Mor.,
No. de Oficio:
Asunto:

08/mayo/2023

DIE/017/2023

Aceptación de documentos de
tesis

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial de la C. Ing. Janeth Jiménez Gómez, con número de control M21CE035 de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Estrategia de Control robusto para la posición de un rehabilitador de miembros inferiores" y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Doctora en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 9968714

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Doctor en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 5505019

REVISOR 1

Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez
Doctor en Ingeniería
Cédula profesional 3431842

REVISOR 2

Dr. Manuel Adam Medina
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 5992003

C.p. Lic. Silvia del Carmen Ortiz Fuentes- jefa del Departamento de Servicios Escolares
Estudiante
JGM/kmqh





Cuernavaca, Mor.,
No. De Oficio:
Asunto:

09/mayo/2023
SAC/065/2023
Autorización de
impresión de tesis

JANETH JIMÉNEZ GÓMEZ
CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E

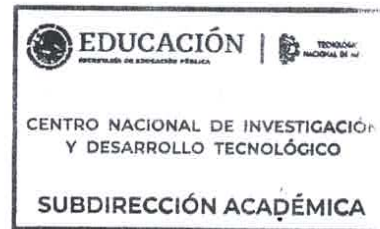
Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“ESTRATEGIA DE CONTROL ROBUSTO PARA LA POSICION DE UN REHABILITADOR DE MIEMBROS INFERIORES”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”

CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/LMZ



Dedicatoria

Dedicado a mis padres, hermano y abuelo, quienes fueron pilares fundamentales para la realización de esta tesis.

Agradecimientos

Quiero agradecer, Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico por brindarme la oportunidad de cursar el programa de posgrado en Ciencias en Ingeniería Electrónica y facilitar sus instalaciones para el desarrollo de mi trabajo y formación académica.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por facilitarme el recurso necesario a través de una beca de posgrado y así permitirme una dedicación en la maestría de tiempo completo.

Quiero agradecer a mi madre María Elena Gómez López, a mi padre Marcos Jiménez de la rosa, mi hermano Marcos Jiménez y mi abuelo que en paz descanse Severino Gómez García. Por siempre darme las palabras y ánimos de seguir adelante con este posgrado. Además de siempre motivarme para superarme y ser una mejor persona.

De igual forma quiero darle un agradecimiento muy especial a mi directora de tesis, la Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo, por su amistad, sus consejos, por siempre tener la disponibilidad, tiempo y paciencia para asesorarme en el desarrollo de esta investigación y a mi co-asesor el Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza.

A mis revisores: El Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez por sus consejos y por siempre tener la disponibilidad para resolver mis dudas. Y al Dr. Manuel Adam Medina por siempre darme palabras de apoyo y consejos para el desarrollo de esta investigación.

También quiero agradecer al Dr. Bulmaro Salazar Hernández por haberme apoyado y motivarme al estudio de un posgrado. A mis compañeros y amigos de generación de la división de control automático Ricardo, Arturo, Ricardo Guadarrama y Miguel Arturo. Así como mis compañeras de la división de potencia Kenya y Sharon.

Finalmente, quiero dar un agradecimiento especial a mi novio por su amor, apoyo y ánimos para seguir adelante, a mi amiga Dulce Alejandra y a la Lic. Verónica por siempre darme esa palabra de aliento y ánimos, cuando más lo necesitaba. De todo corazón muchas gracias.

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el estudio de un robot rehabilitador de rodilla de un grado de libertad que permite movimientos de tipo vertical para rehabilitar posiciones de flexión-extensión en la rodilla. La representación del modelo no lineal que describe el comportamiento del rehabilitador se obtuvo por medio del análisis Euler-Lagrange para posteriormente desarrollar la representación del sistema por modelos Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal.

Posteriormente, se presenta el diseño de un observador proporcional integral de orden completo, enfocado en la estimación de los estados del robot rehabilitador de rodilla. Con base en los estados estimados del observador se construye el controlador por retroalimentación de estados con acción integral para el seguimiento de trayectoria del robot rehabilitador en una rutina de rehabilitación.

Después, se sometió a prueba el controlador ante la presencia de perturbación provocada por el motor del rehabilitador de rodilla, logrando observar que la perturbación genera movimientos bruscos en el seguimiento de trayectoria. Por lo cual, se procedió a diseñar el controlador por retroalimentación de estados con acción integral robusto, con el objetivo de que el controlador atenúe los comportamientos no deseados en el seguimiento de trayectoria y no se vea afectado por la presencia de incertidumbre paramétrica.

Finalmente, se muestran las simulaciones de todos los resultados obtenidos. Para corroborar el correcto comportamiento del observador proporcional integral, así como el esquema de control y el esquema de control robusto con presencia de perturbación generada por el motor del rehabilitador e incertidumbre paramétrica en el coeficiente de fricción del robot rehabilitador. Además de mostrar las leyes de control obtenidas para ambos esquemas de control, en el seguimiento de trayectoria de la rutina de rehabilitación establecida.

Abstract

This thesis work presents the study of a knee rehabilitator robot of one degree of freedom that allows vertical movements to rehabilitate knee flexion-extension positions. The representation of the nonlinear model that describes the behavior of the rehabilitator was obtained by means of the Euler-Lagrange analysis to later develop the representation of the system by Takagi-Sugeno models by the nonlinear sector approach.

Subsequently, the design of a full-order proportional integral observer is presented, focused on the estimation of the states of the knee rehabilitator robot. Based on the estimated states of the observer, the state feedback controller with integral action for trajectory tracking of the rehabilitation robot in a rehabilitation routine is constructed.

Then, the controller was tested in the presence of a disturbance caused by the motor of the knee rehabilitator, and it was observed that the disturbance generates abrupt movements in the trajectory tracking. Therefore, we proceeded to design the controller by state feedback with robust integral action, so that the controller attenuates the undesired behaviors in the trajectory tracking and is not affected by the presence of parametric uncertainty.

Finally, the simulations of all the results obtained are shown. To corroborate the correct behavior of the proportional integral observer, as well as the control scheme and the robust control scheme with the presence of disturbance generated by the motor of the rehabilitator and parametric uncertainty in the friction coefficient of the rehabilitator robot. In addition to showing the control laws obtained for both control schemes, in the trajectory tracking of the established rehabilitation routine.

Índice general

Índice general	VIII
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
Nomenclatura	XIV
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	2
1.1.1. Conclusión del estado del arte	7
1.2. Planteamiento del problema	8
1.3. Hipótesis	10
1.4. Objetivos	10
1.4.1. Objetivo general	10
1.4.2. Objetivos específicos	10
1.5. Alcances	10
1.6. Aportaciones	11
1.7. Estructura del documento	11
1.8. Conclusiones del capítulo	12
2. Marco teórico	13
2.1. Descripción general de la anatomía de los miembros inferiores	13
2.1.1. Articulación de la cadera	14
2.1.2. Articulación de rodilla	15
2.1.3. Articulación de tobillo y pie	16
2.2. Descripción de robots manipuladores	17
2.2.1. Formulismo Euler-Lagrange	18
2.3. Teoría de sistemas Takagi-Sugeno	19
2.3.1. Propiedades de los sistemas Takagi-Sugeno	19

2.3.2.	Representación de sistemas Takagi-Sugeno por el enfoque del sector no lineal	22
2.3.3.	Ejemplo numérico	23
2.3.4.	Simulación y validación del modelo Takagi-Sugeno	24
2.4.	Conceptos básicos de observadores	27
2.4.1.	Estructura del observador proporcional integral	28
2.5.	Control por retroalimentación de estados con acción integral	29
2.6.	Control robusto	31
2.6.1.	Norma L_2	32
2.6.2.	Control H_∞	33
2.6.3.	Lema real acotado	34
2.7.	Conclusiones del capítulo	35
3.	Caso de estudio	36
3.1.	Descripción del robot rehabilitador de rodilla	36
3.2.	Obtención del modelo no lineal del sistema por Euler-Lagrange	37
3.2.1.	Simulación del modelo no lineal	39
3.3.	Representación y validación del sistema por modelos Takagi-Sugeno	42
3.3.1.	Simulación del modelo no lineal por modelos Takagi-Sugeno	44
3.4.	Conclusiones del capítulo	46
4.	Diseño del observador proporcional integral para sistemas Takagi-Sugeno	47
4.1.	Objetivo de diseño	47
4.2.	Diseño del observador proporcional integral	47
4.3.	Parametrización del observador	50
4.4.	Análisis de estabilidad del observador	52
4.5.	Región LMI	53
4.6.	Validación del observador	55
4.6.1.	Simulación del observador proporcional integral	56
4.7.	Conclusiones del capítulo	59
5.	Diseño del controlador basado en el observador	60
5.1.	Objetivo del diseño del controlador	60
5.2.	Cálculo del controlador por retroalimentación de estados con acción integral	61
5.3.	Análisis de estabilidad del controlador	62
5.4.	Aplicación de restricción de entrada en el sistema	64
5.5.	Validación del controlador basado en el observador	66
5.5.1.	Simulación 1 del controlador ante un escenario ideal	68

5.5.2. Simulación 2 del controlador ante un escenario con perturbación . . .	71
5.6. Conclusiones del capítulo	72
6. Diseño del controlador robusto	74
6.1. Objetivo del diseño del controlador robusto y descripción del escenario del sistema	74
6.2. Diseño del controlador robusto	74
6.3. Análisis de estabilidad del controlador robusto	76
6.3.1. Diseño del control H_∞	76
6.4. Validación del controlador robusto con rechazo a perturbaciones	79
6.4.1. Simulación 1 del controlador robusto ante un escenario con perturbación	81
6.4.2. Simulación 2 del controlador robusto ante un escenario con perturba- ción e incertidumbre paramétrica	83
6.5. Conclusiones del capítulo	85
7. Conclusiones generales	86
7.1. Trabajos futuros	88
Bibliografía	89
Anexos	94
A. Simulación del comportamiento de los modelos locales	95
A.1. Simulación 1 modelos locales	96
A.2. Simulación 2 análisis de un modelo local intermedio	98
B. Principio de separación	100
B.1. Principio de separación aplicado a un controlador con retroalimentación de estados y un observador tipo Luenberger	100
B.2. Principio de separación aplicado al caso de estudio	102
C. Publicación en 8ª Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada	105
D. Publicación en la Asociación de México de Control Automático	107

Índice de figuras

2.1. Planos anatómicos.	14
2.2. Movimientos de la cadera.	14
2.3. Movimientos de la rodilla.	15
2.4. Movimientos de la rodilla.	16
2.5. Movimientos del tobillo y pie.	17
2.6. Estructuras de sistemas dinámicos.	19
2.7. Entrada implementada en la simulación del sistema.	25
2.8. Variables premisas.	25
2.9. Funciones de pertenencia.	26
2.10. Comparación de las variables de estado en su representación no lineal contra su representación por modelos T-S.	26
2.11. Estructura de un observador.	27
2.12. Diagrama a bloques de la conexión entre el sistema y el observador proporcional integral.	29
2.13. Esquema de control por retroalimentación de estados con acción integral.	30
3.1. Diagrama de cuerpo libre del rehabilitador de rodilla.	36
3.2. Diagrama de simulación para el sistema no lineal.	40
3.3. Entrada implementada en la simulación del sistema no lineal en lazo abierto.	41
3.4. Salidas del sistema no lineal en lazo abierto.	41
3.5. Diagrama sistema no lineal y presentación Takagi-Sugeno.	42
3.6. Variable premisa.	43
3.7. Comparación de las variables de estado en su representación no lineal y su representación por modelos T-S.	45
3.8. Funciones de pertenencia.	45
4.1. Diagrama a bloques del observador proporcional integral T-S.	48
4.2. Región LMI vertical \mathcal{D}_1	54
4.3. Diagrama del observador para la estimación de estados.	55
4.4. Entrada implementada en la simulación del PIO en lazo abierto.	56

4.5. Estimación de los estados del sistema.	57
4.6. Funciones de pertenencia del sistema T-S y el PIO.	57
5.1. Esquema del controlador.	61
5.2. Diagrama a bloques de la simulación del controlador por retroalimentación de estados con acción integral basado en el PIO.	66
5.3. Señal de referencia $y_c(t)$ para el seguimiento de trayectoria.	68
5.4. Respuesta del controlador ante el seguimiento de trayectoria en la variable de posición.	69
5.5. Respuesta del controlador ante la variable de velocidad.	69
5.6. Error en seguimiento de trayectoria.	70
5.7. Comportamiento de la ley de control.	70
5.8. Señal de perturbación $w(t)$	71
5.9. Respuesta del controlador ante el seguimiento de trayectoria con el sistema sometido a una perturbación.	72
5.10. Respuesta del controlador ante la variable de velocidad con perturbación.	72
6.1. Diagrama a bloques de la simulación del controlador por retroalimentación de estados con acción integral basado en el PIO con perturbación.	79
6.2. Señal de referencia $y_c(t)$ que describe una rutina de rehabilitación.	80
6.3. Señal de perturbación $w(t)$	80
6.4. Respuesta del controlador robusto ante el seguimiento de trayectoria en la variable de posición angular sometido a una perturbación.	81
6.5. Comportamiento de la ley de control robusta ante un escenario con perturbación.	82
6.6. Respuesta del controlador robusto ante el seguimiento de trayectoria en la variable de posición angular sometido a una perturbación e incertidumbre paramétrica.	83
6.7. Comportamiento de la ley de control robusta ante un escenario con perturbación e incertidumbre paramétrica.	84
A.1. Diagrama de la simulación de los modelos locales.	96
A.2. Entrada implementada en la simulación del sistema lineal en lazo abierto.	96
A.3. Respuesta del sistema lineal con el modelo local A_1	97
A.4. Respuesta del sistema lineal con el modelo local A_2	97
A.5. Respuesta del sistema en su representación no lineal y su representación por modelos T-S.	98
A.6. Respuesta del sistema lineal con el modelo local en un punto intermedio.	99

Índice de tablas

2.1. Tipos de movimientos y lesiones en la rodilla	16
3.1. Parámetros numéricos del modelo dinámico del rehabilitador	37
4.1. Índices de desempeño del observador y el sistema no lineal	58
5.1. Índices de desempeño en el seguimiento de trayectoria del controlador	70
6.1. Índices de desempeño en el seguimiento de trayectoria del controlador y del controlador robusto ante un escenario con perturbación	82
6.2. Índices de desempeño en el seguimiento de trayectoria del controlador y del controlador robusto ante un escenario con perturbación e incertidumbre paramétrica	84

Notación y acrónimos

Conjuntos

\mathbb{R}	Conjunto de todos los números reales.
\mathbb{R}^n	Conjunto de vectores reales de dimensión n .
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Conjunto de matrices reales de dimensión $n \times n$.

Notación referente a vectores y matrices

$A > 0$	Matriz real A positiva definida.
$A < 0$	Matriz real A negativa definida.
I	Matriz identidad de dimensiones apropiadas.
0	Matriz de elementos cero de dimensiones apropiadas.
$\det(A)$	Determinante de la matriz A .
$\text{rank}(A)$	Rango de la matriz A .
A^{-1}	Inversa de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$.
A^T	Transpuesta de la matriz A .
A^+	Pseudoinversa de Moore-Penrose de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\text{rank}(A) = m$.
$\ x\ $	Norma Euclidiana del vector x .
$ x $	Valor absoluto de x .
\mathcal{L}	Lagrangiano.
\otimes	Producto de Kronecker

Variables

$x(t)$	Vector de variables de estado.
$u(t)$	Vector de variables de entrada.
$w(t)$	Vector de variables de perturbación.
$y(t)$	Vector de variables de salida.

Variables

$\varphi_i(z)$	Función de pertenencia, $i = 1, \dots, k$ siendo k es número de modelos locales lineales.
$z(t)$	Vector de variables premisas
η_λ^j	Función de ponderación con $\lambda = 1$ para límite superior, $\lambda = 0$ para límite inferior, $j = 1, \dots, \alpha$ siendo α el número de variables premisas.
$\zeta(t)$	Vector de variables de estado del observador.
$v(t)$	Vector auxiliar del observador.
$\hat{x}(t)$	Vector de variables de estimación del observador.
$e(t)$	Vector de error de estimación del observador.
$\beta(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$	Vector aumentado de la dinámica del error de estimación del observador.
$y_c(t) = ref$	Rutina de rehabilitación en el robot rehabilitador.
$x_l(t)$	Integral del error del controlador .
$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix}$	Vector aumentado para el diseño del controlador.
$\tilde{z}(t)$	Función objetivo para el controlador robusto.

Robot rehabilitador

Símbolo	Descripción	Unidades
$\theta(t), \hat{\theta}$	Posición angular (estimada)	$rad, ^\circ$
$\dot{\theta}(t), \dot{\hat{\theta}}(t)$	Velocidad angular (estimada)	rad/s
$\ddot{\theta}(t)$	Aceleración angular	rad/s^2
m	Masa	Kg
l	Longitud	m
g	Gravedad	m/s^2
b	Coefficiente de fricción viscosa	$Nm s/rad$
τ	Par aplicado por el motor	Nm

Acrónimos

LTI	Lineal Invariante en el Tiempo (Linear Time-Invariant).
PIO	Observador Proporcional Integral (Proportional Integral Observer).
DOF	Grados De Libertad (Degree Of Freedom).
LMI	Desigualdad Matricial Lineal (Linear Matrix Inequality).
T-S	Takagi-Sugeno.

Capítulo 1

Introducción

De acuerdo con la organización mundial de la salud (WHO, por sus siglas en inglés *World Health Organization*), la discapacidad forma parte del ser humano y es consustancial a la experiencia humana. Es el resultado de la interacción entre afecciones como la demencia, la ceguera o las lesiones medulares, y una serie de factores ambientales y personales. Se calcula que 1300 millones de personas, es decir, el 16 % de la población mundial, sufren actualmente una discapacidad importante. Esta cifra está aumentando debido al crecimiento de las enfermedades no transmisibles y al incremento de la esperanza de vida de las personas ([WHO, 2022](#)).

Las personas que sufren de una discapacidad normalmente requieren de algún tipo de rehabilitación. La rehabilitación se define como «un conjunto de intervenciones encaminadas a optimizar el funcionamiento y reducir la discapacidad en personas con afecciones de salud en la interacción con su entorno». En otras palabras, la rehabilitación ayuda a los niños, los adultos o las personas mayores a ser lo más independientes posible en su día a día y les permite participar en actividades educativas, laborales, recreativas o llevar a cabo las tareas que dan sentido a su vida, como atender a la familia. Para ello, se tratan las afecciones subyacentes (como el dolor) y se mejora la forma en que una persona es funcional en su día a día, apoyándola para que supere las dificultades que pueda tener para entender, ver, oír, comunicarse, alimentarse o desplazarse ([WHO, 2021](#)).

Ahora bien, centrándonos exclusivamente en México, según datos obtenidos del censo del Instituto Nacional de Estadística y Geografía se reveló que el 16.5 % de la población mexicana tiene algún tipo de discapacidad. De estas, el 4.5 % se refiere a limitaciones motrices como caminar o moverse. En este mismo censo se reveló que la mayoría de personas que presentan este tipo de discapacidades son los adultos mayores ([INEGI, 2020](#)). Observando estos datos estadísticos se aprecia que las discapacidades del tipo motriz son uno de los sectores más

significativos en la población.

Es por ello, que el uso de la robótica en la rehabilitación, ha ido en aumento en las últimas décadas. La rehabilitación asistida por robots mejora significativamente los procedimientos terapéuticos y el rendimiento del personal médico, así como la rápida recuperación del paciente. A lo largo de los años, se han diseñado diversos tipos de rehabilitadores de miembros inferiores, uno de los problemas con estos dispositivos, es que muy pocos diseños consideran la interacción del paciente con el robot rehabilitador, así como el estado del paciente, es decir, no toman en cuenta las perturbaciones que se pueden presentar en el rehabilitador y el daño que el rehabilitador puede llegar a ocasionar al paciente.

En este trabajo se propone el diseño de una ley de control robusta basada en un observador proporcional integral, que permita el seguimiento de trayectoria de una rutina de rehabilitación y limitación del efecto de las perturbaciones provocadas por el motor del rehabilitador en la ley de control. Garantizando así el comportamiento del sistema pese a las perturbaciones a las que sea sometido.

1.1. Estado del arte

Como se mencionó en la introducción la robótica en la rehabilitación ha mejorado significativamente los procedimientos terapéuticos así como la descarga de trabajo para el personal de la salud. Un robot rehabilitador es un dispositivo mecánico que imita los movimientos de alguna extremidad del cuerpo con la ayuda de diversos actuadores y sensores, esto siguiendo una rutina de ejercicios para mejorar el movimiento de la extremidad del cuerpo que presente alguno daño físico y requiera de ejercicios de rehabilitación.

Para que el robot pueda ser un robot rehabilitador y pueda ejecutar rutinas de rehabilitación, se han implementado diversas estrategias de control para que los actuadores operen de forma automática y permitan un correcto seguimiento de trayectoria en las rutinas de rehabilitación. El cuerpo humano se divide en extremidades superiores: hombro, codo, muñeca y mano; extremidades inferiores: cadera, rodilla, tobillo y pie.

Enfocándose únicamente en los robots rehabilitadores de miembros inferiores, en el trabajo de [Wu et al. \(2016\)](#) desarrollaron un robot de rehabilitación de miembros inferiores (por sus siglas en inglés, LLRR) de 3 grados de libertad para la recuperación del movimiento, en la cadera, rodilla y tobillo. Para el diseño del controlador, primero diseñaron el modelo del LLRR y lo validaron mediante simulaciones y experimentos, incluido el modelo cinemático del sis-

tema mecánico, el modelo de fricción de las juntas de rotación y el modelo de los actuadores. Sobre la base de los modelos propuestos, se sintetizó un controlador robusto adaptativo para hacer que cada articulación siguiera la trayectoria de su rutina de rehabilitación diseñada.

Ahora bien, hablando exclusivamente de los robots rehabilitadores de tobillo. En el trabajo de [Abu-Dakka et al. \(2020\)](#) se presenta el estudio de un rehabilitador de tobillo en el cual un terapeuta establece diversas rutinas de rehabilitación que implican movimientos de dorsiflexión/flexión, plantar e inversión/eversión del tobillo. Posteriormente, el robot rehabilitador, por medio un esquema de control de aprendizaje basado en el movimiento dinámico y un control de aprendizaje iterativo, aplica el seguimiento de trayectoria en la rutina de rehabilitación establecida por un terapeuta.

Por otro lado, el trabajo de [Lim et al. \(2018\)](#) presenta simulaciones aplicadas a patologías del tobillo, basándose en simulaciones, construyen un modelo de marcha neuromuscular y con base en este, diseñan la ley de control que entrega los pares que se requieren en los motores del rehabilitador, para la asistencia en la postura y movimientos de las piernas. Las ganancias obtenidas por la ley de control, se determinan realizando optimizaciones dinámicas que tienen en cuenta la dinámica interactiva del exoesqueleto humano. Los resultados muestran que la personalización de la asistencia de varios tipos de marcha es esencial para eficientar la rehabilitación.

Centrándose únicamente en los robots rehabilitadores de rodilla, ya que es una de las articulaciones con mayor susceptibilidad a lesiones y daño muscular. Además de presentar una gran variedad de diseños y estrategias de control en los robots rehabilitadores, por mencionar algunos, se encuentran los trabajos de: [Blanco Ortega et al. \(2012\)](#) y [Mousavi and Golkar \(2020\)](#) este último, muestran un método para la rehabilitación de rodilla utilizando robots rehabilitadores basados en el proceso de interacción humano-robot. El proceso de control se basa en los datos del cuádriceps de una persona sana y empleando un controlador difuso, determinan la participación del paciente y el robot en el proceso de caminar. Los pacientes tratados presentaban antecedentes de accidentes cerebrovasculares o lesiones cerebrales traumáticas.

Entre los rehabilitadores principalmente estudiados en esta investigación se encuentran: El rehabilitador Multi-Iso, propuesto por [Moughamir et al. \(2001\)](#) donde se aplicó el formulismo de Lagrange para obtener la representación del sistema dinámico del rehabilitador. Este robot se compone de una parte mecánica, electrónica, un software y leyes de control de fuerza, posición y velocidad. Su funcionamiento consistió en aplicar un par entregado por un motor

a una (o ambas) extremidades inferiores para ejercer rutinas de flexión-extensión en la rodilla. Mientras que [Delavari and Jokar \(2017\)](#) presenta un control de modos deslizante difuso adaptable de orden fraccional para una órtesis de rodilla. El modelo matemático planteado es similar al Multi-Iso, obtenido a través del formulismo Euler-Lagrange, la diferencia radica en que este presenta con mayor detalle la dinámica del motor y el tipo de controlador aplicado, está diseñado para el rechazo a las perturbaciones externas.

Por otro lado, [Zhang et al. \(2016\)](#) propone un nuevo enfoque para el rehabilitador de extremidades inferiores llamado iLeg, donde plantea el diseño de dos controladores, ambos dedicados al seguimiento de la trayectoria para el control de velocidad y posición en una rutina de rehabilitación. Un controlador proporcional integral (PI) para entrenamiento activo y un controlador que emplea las señales de electromiografía para lograr un entrenamiento activo. Este rehabilitador fue diseñado para pacientes con problemas de hemiplejía o paraplejía.

Como se puede observar, existe una cantidad considerable de rehabilitadores dedicados a la rodilla, el tipo de control o estrategias de control se centran en el seguimiento de trayectoria para garantizar la seguridad del paciente. Se puede concluir que el diseño del controlador dependerá del tipo de ejercicio (rutina de rehabilitación) con el que esté diseñado el rehabilitador. Para concluir con el tema de los robots rehabilitadores, en el trabajo de [Akdoğan and Adli \(2011\)](#) se presentan diferentes rutinas de rehabilitación para la articulación de rodilla y cadera, de las cuales se pueden rescatar los tipos de movimientos (ejercicios de rehabilitación) y los rangos de movimiento que se ejecutan en un rehabilitador de rodilla.

Para el diseño de las estrategias de control y el diseño de controladores es necesario contar con un modelo matemático. En la gran mayoría de robots rehabilitadores los modelos matemáticos que describen el comportamiento dinámico de los rehabilitadores son sistemas no lineal. En la literatura se han reportado diferentes técnicas para la representación de los sistemas no lineales, entre esas se encuentra el enfoque Takagi-Sugeno(T-S). La principal propiedad de un modelo T-S es poder expresar la dinámica global de un sistema no lineal, mediante un conjunto de modelos locales lineales interpolador válidas dentro de una región de operación.

Los sistemas T-S tienen diversas aplicaciones que van desde aplicaciones computacionales ([Bezzaoucha et al., 2013](#)), químicas ([Flores et al., 2018](#)), eléctricas ([Pidikiti et al., 2023](#)), etc. En el trabajo de [Wang and Yang \(2022\)](#) se diseñó un sistema de aprendizaje amplio con un subsistema T-S para la identificación rápida del origen del tabaco. El sistema T-S es aplicado a un sensor con espectroscopia de infrarrojos. El análisis de datos en el sensor se hacía inicialmente con redes neuronales artificiales, pero el entrenamiento de estos requería

de mucho tiempo. Al desarrollar el subsistema T-S observaron que este mejora la precisión de predicción del sensor en comparación con los algoritmos aplicados en redes neuronales artificiales.

Otro ejemplo puede ser el trabajo de [Santana et al. \(2022\)](#) donde utilizando el método de inferencia comparan un sistema semicuantitativo contra un sistema T-S, aplicado a la ruptura de un tanque de almacenamiento de isobutano. Esta comparación les permitió determinar cuál de estas dos metodologías determina de forma precisa las incertidumbres que pueden surgir de la evaluación subjetiva, la variación de datos o la falta de datos del sistema. Llegando a la conclusión que la representación por modelos T-S mostró resultados más precisos.

La representación por modelos T-S permiten diseñar controladores con mayor precisión. Ahora bien, retomando los modelos T-S aplicados al área de robots rehabilitadores, podemos encontrar el trabajo de [Seddiki et al. \(2010\)](#) donde toma el modelo de un robot rehabilitador de miembros inferiores y propone una estructura de control H_∞ basada en modelos T-S para el seguimiento de trayectoria y atenuación de las perturbaciones externas.

Para el diseño de una estrategia de control y un controlador, además de requerir de un modelo matemático, es necesario tener acceso a todas las variables de estado involucradas en un rehabilitador, pero se pueden presentar casos en donde no se tenga acceso a todas las variables de estado del sistema.

Es por ello que se propone el diseño de observadores. Por definición, un observador se basa en el modelo matemático de un sistema en conjunto con sus señales de entrada-salida para generar una estimación de los estados del sistema, los cuales, pueden emplearse para fines de control, monitoreo, detección de fallas, etc. ([Ogata, 2010](#)).

Los observadores tienen distintas aplicaciones. En el trabajo de [Pérez-Pérez et al. \(2022\)](#) se desarrolla un observador con el enfoque de diagnóstico de fallas, aplicado a turbinas eólicas. El comportamiento del sistema se representa en modelos T-S y aplican un método de inferencia neuro difuso adaptable para obtener un conjunto de representaciones lineales basadas en politopos. Luego, considerando el modelo T-S, desarrollan una estrategia de diagnóstico de fallas basada en observadores de estado convexos para generar residuos y así detectar y aislar fallas en los sensores.

Los observadores poseen diferentes estructuras dependiendo del objetivo de control que se persiga. En esta investigación se estudió el observador proporcional integral (PIO) el cual es

comúnmente aplicado en el seguimiento de trayectoria para aquellos sistemas que son susceptibles a incertidumbre paramétrica.

Este tipo de observador se ha reportado para diversas aplicaciones, en [Do et al. \(2020\)](#) los autores plantean el diseño PIO con control robusto por retroalimentación de estado para un sistema lineal de parámetros variantes (LPV). En [Youssef et al. \(2014\)](#) se plantea el diseño de PIO de entradas desconocidas para modelos T-S sujetos a variables premisas no medibles. [Zhao et al. \(2020\)](#) plantea una estructura para el diseño de un PIO para una clase de redes neuronales recurrentes (RNN) en tiempo discreto.

Como se ha mencionado con anterioridad para que un robot rehabilitador permita el correcto seguimiento de una rutina de rehabilitación, además de requerir el modelo matemático del rehabilitador y tener acceso a todas las variables involucradas en el sistema es necesario el diseño de un controlador, el cual proporcionará las ganancias con los cuales deberán de trabajar los actuadores presentes en el rehabilitador. Para finalmente tener un correcto seguimiento de trayectoria en la rutina de rehabilitación.

Existen diferentes tipos de controladores, como por ejemplo, el control por retroalimentación de estados con acción integral. Este tipo de controlador tiene diversas aplicaciones, como lo es, el caso en la industria automotriz, donde [Haemers et al. \(2018\)](#) presenta un control óptimo para la suspensión activa electromecánica de un automóvil, utilizando un controlador de retroalimentación de estado de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) con acciones proporcionales e integrales. Los parámetros óptimos de ajuste del controlador se determinan mediante un algoritmo genético, con respecto a las restricciones del actuador y sin necesidad de algún ajuste manual.

El control por retroalimentación de estados por acción integral es comúnmente aplicado en los sistemas, para cancelar los errores en estado estacionario en respuesta a señales de referencia constante o perturbaciones constantes. Por mencionar algunas de sus aplicaciones, [Benlatreche et al. \(2005\)](#) proponen este tipo de controlador para un motor de tres devanados y en un estudio desarrollado por [Seeber and Tranninger \(2022\)](#) compara el comportamiento de un control por retroalimentación de estados contra un control por retroalimentación de estados por acción integral donde resalta que el control por retroalimentación de estados por acción integral rechaza las perturbaciones constantes.

Por último, en [Moez et al. \(2009\)](#) aplica el control por retroalimentación de estados por acción integral a un motor de inducción. Se diseña un controlador para estabilizar al motor y

garantizar un nivel mínimo de atenuación de perturbaciones para el sistema en lazo cerrado. Las ganancias del control las obtiene resolviendo un conjunto de desigualdades matriciales lineales. En resumen, este tipo de controlador permite estabilizar al sistema, además que permite de una forma eficiente atenuar perturbaciones externas en el sistema.

1.1.1. Conclusión del estado del arte

En esta revisión bibliográfica se muestra información relevante, acerca de los temas involucrados en el diseño de esquemas de control, dedicados al seguimiento de trayectoria y a la reducción o minimización de comportamientos abruptos en el seguimiento de trayectoria del rehabilitador, provocada por perturbaciones en de los robots rehabilitadores de miembros inferiores. Basándose en esta revisión bibliográfica se concluye que existe una gran variedad de robots rehabilitadores dedicados a la rodilla, esto debido a que la rodilla es una de las articulaciones más expuestas y susceptible a lesiones del tipo: muscular, articular y de hueso.

Para poder desarrollar una estrategia de control, primeramente se requiere de un modelo matemático que describa al robot rehabilitador. Dado que comúnmente estos robots, poseen términos no lineales dicho modelo matemático es un sistema no lineal, para lo cual es necesario aplicar un enfoque matemático que permita, la representación y manipulación sencilla del sistema. El enfoque matemático que permite esto, es la representación del sistema no lineal por modelos Takagi-Sugeno. Ahora bien, para el diseño de un controlador cuyo objetivo es el seguimiento de trayectoria es necesario tener acceso a todas las variables de estado que componen al sistema. En la gran mayoría de casos, la medición de estas variables no es posible, por lo que se implementan algoritmos de estimación de estados llamados observadores. Estos poseen diferentes estructuras y aplicaciones, los observadores están basados en el modelo matemático del sistema en conjunto con las señales de entrada y salida de este.

Al tener acceso a todas las variables de estado con el observador, es posible desarrollar el controlador que permita el seguimiento de trayectoria en una rutina de rehabilitación. De igual forma es posible reducir comportamientos no deseados en el seguimiento de trayectoria, diseñando un controlador robusto a perturbaciones. Para el diseño de controladores robustos de acuerdo a esta investigación, es común aplicar el criterio H_∞ .

1.2. Planteamiento del problema

En México existe una gran demanda de pacientes que requieren de terapias de rehabilitación. Desafortunadamente, de acuerdo con datos mostrados en [INEGI \(2021\)](#), existe un número limitado de personal médico dedicado al área de ortopedia, fisioterapia y afines. Los robots rehabilitadores están diseñados para ejecutar movimientos repetitivos durante largos lapsos de tiempo, sin la participación directa de algún personal médico.

Es por ello que el uso de dispositivos robóticos rehabilitadores, ha ido en aumento en las últimas décadas. Su implementación permite aligerar la carga de trabajo al personal médico. Estos robots están programados para desarrollar una rutina de rehabilitación específica.

El inconveniente con estos dispositivos, es que no consideran el estado del paciente. Es decir, no toma en cuenta la gravedad de la lesión que éste presenta, así como la resistencia que puede llegar a ejercer sobre el rehabilitador, debido al dolor que le puede ocasionar. De igual forma, estos robots ignoran las perturbaciones a las que podría ser susceptibles los actuadores del rehabilitador y el impacto que este pueda generar en la rutina de rehabilitación del paciente y por consiguiente el daño que le pueda ocasionar físicamente al paciente.

En la robótica de rehabilitación, el paciente y el robot interactúan constantemente entre sí. Es por ello que medir las variables que describen el comportamiento del rehabilitador se vuelve de suma importancia, para garantizar la seguridad del paciente, así como la eficiencia del seguimiento de la rutina de rehabilitación del robot rehabilitador ([Mohammadi and Dallali, 2020](#)).

Para poder medir las variables involucradas en el rehabilitador, una de las alternativas es la basada en la representación matemática que describa el comportamiento dinámico del rehabilitador. La mayoría de estos sistemas físicos modelados matemáticamente presentan expresiones no lineales, los cuales hacen complejo el diseño de esquemas de monitoreo y control, es por ello, que existen enfoques matemáticos por los cuales se pueden representar dichos modelos no lineales en una familia de modelos locales lineales, que en conjunto generan la dinámica del modelo no lineal. Este enfoque está relacionado con la teoría de multimodelos, siendo uno de los enfoques, el modelado de sistemas por Takagi-Sugeno. Los modelos Takagi-Sugeno obtiene una representación idéntica al no lineal, esto se logra siempre y cuando el modelo no lineal se encuentre en los límites con los que se formó la representación Takagi-Sugeno.

En algunos casos, medir las variables involucradas en los rehabilitadores, implica el uso de sensores costosos, una alternativa para la inclusión de las variables no medibles en los sistemas

de control, se basa en la “estimación de las variables”, esto se logra utilizando “observadores”. Los observadores son una clase especial de algoritmos de estimación, que usan el modelo dinámico del sistema junto con las entradas y salidas para estimar las variables desconocidas en el sistema.

El problema existente en el diseño los robots rehabilitadores, es que son pocos los rehabilitadores que cuentan con diseños de esquemas de control o esquemas de control robustos dedicados al seguimiento de trayectoria de las rutinas de rehabilitación, en los cuales pese a la presencia de perturbaciones se evite o reduzcan los comportamientos abruptos en el seguimiento de trayectoria del rehabilitador. Otra problemática presente en los robots rehabilitadores, son el uso de actuadores y sensores costosos, una forma de reducir costo por medio de los sensores es el diseño de observadores los cuales estiman por medio de algoritmos las variables involucradas en el robot rehabilitador.

Para el diseño del esquema de control robusto, inicialmente se obtendrá el modelo matemático del rehabilitador y la estimación de las variables involucradas, a través del diseño de un observador, para posteriormente diseñar el controlador. El controlador se basará en las variables estimadas por el observador y será diseñado de tal forma que la ley de control permita hacer un seguimiento de trayectoria en la rutina de rehabilitación que recibirá el paciente aun con presencia de perturbación, con la finalidad de evitar o reducir los comportamientos abruptos en el seguimiento de trayectoria del rehabilitador.

Por lo expuesto, se propone una estrategia de control robusto con rechazo a perturbaciones aplicado al seguimiento de trayectoria en los movimientos de un rehabilitador, ya que el control robusto nos garantizará reducir comportamientos abruptos del sistema pese a las perturbaciones a las que sea sometido.

1.3. Hipótesis

Es posible que una estrategia de control robusta reduzca el efecto de dinámicas no deseadas en el seguimiento de trayectoria de un rehabilitador de rodilla, causadas por una perturbación en el motor del rehabilitador.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

- Reducir el efecto de dinámicas no deseadas causadas por una perturbación en el motor de un rehabilitador, mediante un esquema de control basado en el observador para el seguimiento de trayectoria de una rutina de rehabilitación para miembros inferiores.

1.4.2. Objetivos específicos

- Determinar el modelo matemático de un rehabilitador de miembros inferiores analizando su dinámica.
- Diseñar un observador proporcional integral para estimar los estados no disponibles del sistema.
- Definir una ley de control de seguimiento de trayectoria del rehabilitador a través del enfoque Takagi-Sugeno.
- Establecer un controlador robusto para reducir el efecto de dinámicas no deseadas.
- Evaluar el impacto de las perturbaciones en el seguimiento de trayectoria de un rehabilitador y corroborar el correcto funcionamiento mediante una simulación.

1.5. Alcances

- Obtener la representación matemática de un rehabilitador de rodilla, al cual se le obtendrá la representación por modelos Takagi-Sugeno, el cual permite utilizar técnicas de diseño aplicados a sistemas lineales.
- Realizar el diseño de un observador proporcional integral utilizando el enfoque Takagi-Sugeno, el cual permita estimar todos los estados del sistema.
- Definir una rutina de rehabilitación que permita la flexión-extensión de la rodilla.
- Realizar el diseño de un controlador con retroalimentación de estados con acción integral para el seguimiento de trayectoria de una rutina de rehabilitación.

- Realizar el diseño de un controlador robusto para reducir el efecto de dinámicas no deseadas en el seguimiento de una rutina de rehabilitación.

1.6. Aportaciones

La aportación de esta investigación es el diseño de un esquema de control para el seguimiento de trayectoria de una rutina de rehabilitación y un esquema de control robusto a perturbaciones provocadas por el motor de un rehabilitador. Así como el análisis del modelo matemático que describa el comportamiento del rehabilitador de miembros inferiores y la representación del sistema por modelos Takagi-Sugeno.

Además del desarrollo de un observador proporcional integral Takagi-Sugeno de orden completo, y finalmente el desarrollo de un controlador basado en el observador con retroalimentación de estados con acción integral y el desarrolló del mismo controlador, pero robusto el cual reduzca los comportamientos no deseados en la rutina de rehabilitación. Y finalmente, la validación de la estrategia de control y la estrategia de control robusta a través de una simulación.

1.7. Estructura del documento

Los siguientes capítulos se encuentran organizados de la siguiente manera:

A lo largo del **Capítulo 2**, se definen una serie de conceptos básicos y propiedades generales sobre: descripción de los robots manipuladores, formulismo de Euler-Lagrange, representación de sistemas por modelos Takagi-Sugeno, conceptos básicos de observadores y controladores. También se presenta un ejemplo de un sistema no lineal y los pasos para obtener la representación de un sistema por modelos Takagi-Sugeno utilizando el enfoque de sector no lineal.

En el **Capítulo 3**, se describe el caso de estudio con el que se trabajó en esta investigación, así como la obtención, representación y validación del modelo no lineal del sistema por modelos Takagi-Sugeno.

En el **Capítulo 4**, se detalla la metodología aplicada al diseño de un observador proporcional integral de orden completo aplicado a sistemas Takagi-Sugeno. Además, se presenta la parametrización, análisis de estabilidad y validación del mismo.

En el **Capítulo 5**, se presenta el diseño de un controlador por retroalimentación de estados

con acción integral basado en el observador. Se muestra el diseño, cálculo, análisis de estabilidad y validación de dicho controlador.

En el **Capítulo 6**, se describe el diseño de un controlador robusto para reducir el efecto de dinámicas no deseadas. Se define el objetivo del controlador, el tipo de perturbación a limitar, el cálculo, análisis de estabilidad y validación del controlador robusto.

Finalmente, en el **Capítulo 7** se muestran las conclusiones generales del trabajo de investigación y se proponen diversos trabajos futuros.

1.8. Conclusiones del capítulo

En el Capítulo 1, se presentó el panorama general de este trabajo de investigación, donde se expuso el estudio del estado del arte, el planteamiento del problema, los objetivos generales y específicos de esta investigación, así como los alcances, aportaciones e hipótesis, además, de un breve resumen de lo que se mostrará en los capítulos siguientes de este documento. Este capítulo tuvo por propósito mostrar la información fundamental del contenido de la tesis.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Descripción general de la anatomía de los miembros inferiores

En el cuerpo humano, los miembros inferiores o extremo distal¹ permanecen fijos al suelo y sirven como apoyo a toda la estructura corporal. Para que el cuerpo humano genere movimiento intervienen tres sistemas: el esquelético, articular y muscular. Los huesos soportan las cargas del cuerpo; las articulaciones unen los segmentos corporales, limitan los movimientos y amortiguan los impactos; los músculos dan la fuerza necesaria para generar el movimiento ([Neumann and Romero, 2007](#)).

Para comprender los tipos de movimientos que se ejercen en los miembros inferiores es necesario establecer un sistema de referencia, dicho sistema, se llama posición anatómica, esta es la posición de un cuerpo humano que está de pie, con vista al frente, pies juntos, los brazos a lo largo del cuerpo con las palmas de las manos mirando hacia delante (Figura 2.1). A partir de esta posición se establecen los planos de movimiento que se producen en los tres ejes del espacio: plano sagital, frontal y transversal ([Gudiño-Lau et al., 2019](#)).

La estructura de los miembros inferiores está compuesta por tres articulaciones, que se explican a continuación:

¹En el campo de la medicina, se refiere a una parte del cuerpo que está más lejos del centro del cuerpo.

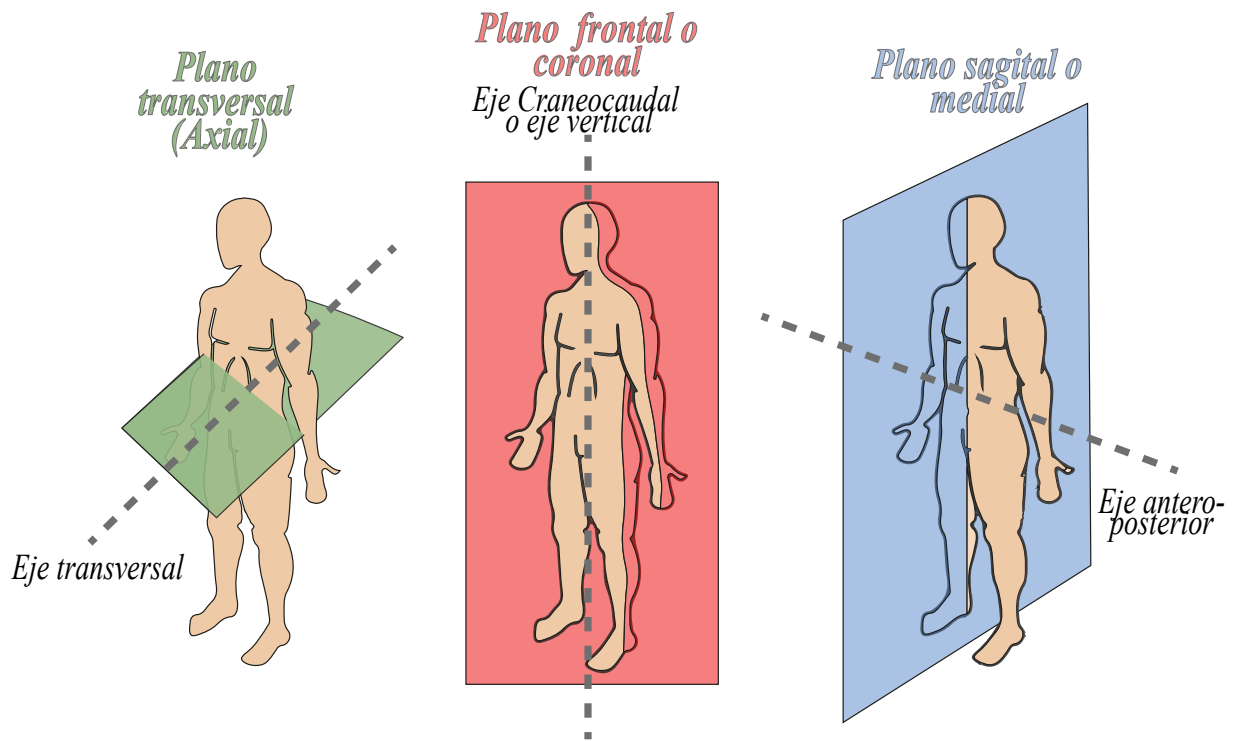


Figura 2.1: Planos anatómicos.

2.1.1. Articulación de la cadera

Los movimientos de la cadera (Figura 2.2) los ejerce una sola articulación, la coxofemoral ². Es una articulación del tipo esférico que funciona en compresión porque soporta el peso del cuerpo. Es la articulación próxima al miembro inferior, situada en su raíz. Su funcionamiento consiste en orientar dicha articulación en diferentes direcciones, para lo cual posee tres ejes y tres grados de libertad (Kapandji, 2010).

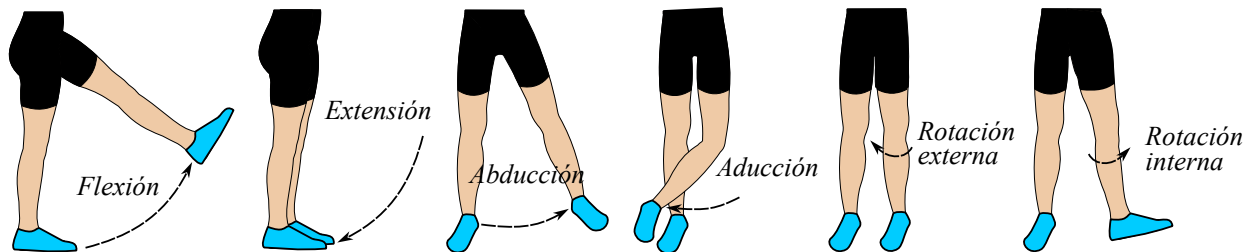


Figura 2.2: Movimientos de la cadera.

²La articulación coxofemoral o articulación de la cadera es un tipo de articulación sinovial esferoide que conecta la cintura pélvica a la extremidad inferior. Esta es una articulación multiaxial que permite un amplio rango de movimientos.

2.1.2. Articulación de rodilla

La rodilla es la articulación intermedia del miembro inferior, es una articulación de un solo grado de libertad que permite movimientos de flexo-extensión (Figura 2.3). Regula la distancia del cuerpo con respecto al suelo (Kapandji, 2010). Fundamentalmente, los movimientos de la articulación de la rodilla pocas veces se producen con independencia del movimiento de las otras articulaciones de la extremidad inferior (Neumann and Romero, 2007).

Esta articulación es la más compleja y voluminosa de todas, pues involucra un gran número de músculos (11 en total, 4 para la extensión y 7 para la flexión) y 4 huesos (fémur, tibia, fíbula y rótula) para funcionar (Torres Ricalde, 2021).

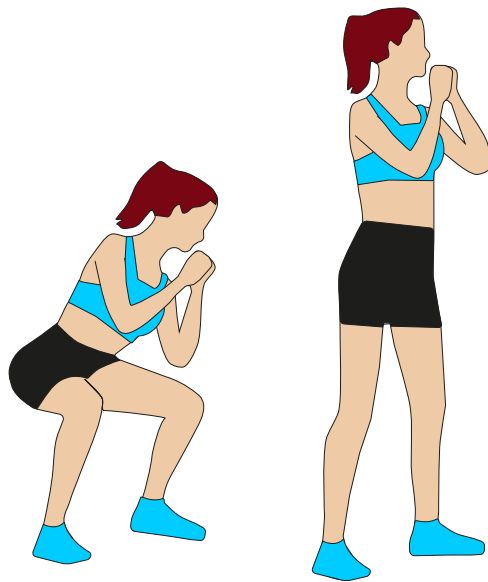


Figura 2.3: Movimientos de la rodilla.

De acuerdo con Zhang et al. (2020) la biomecánica de la rodilla en el plano sagital (Figura 2.1) son aquellos movimientos como: caminar, correr, subir escaleras, sentarse y pararse. Estos son movimientos muy frecuentes en la vida diaria del ser humano. En todos estos movimientos, la función principal de la rodilla incluye soportar el peso corporal, absorber el impacto de los golpes en el talón y ayudar al balanceo de las extremidades inferiores. Según investigaciones, la flexión pasiva de la rodilla podría alcanzar los 160 grados en el plano sagital. La carga máxima a través de la articulación es de 2-3 Kg al caminar, 2-5 Kg al pararse y sentarse, 4-6 Kg al subir escaleras y 7-12 Kg al correr.

Azcaray (2018) muestra que los movimientos de la rodilla (Figura 2.4) se limitan a la flexión y extensión, con cierta rotación axial. Estos movimientos se producen sobre un eje transversal de rotación. La amplitud del movimiento varía con relación a la edad y el sexo. La rotación interna y externa de la rodilla se produce en el plano horizontal sobre un eje vertical o

longitudinal de rotación, también llamado rotación axial. Las lesiones de rodilla afectan considerablemente la calidad de vida, así como la salud mental de un paciente. En la Tabla 2.1 se presentan los movimientos y lesiones que pueden ocurrir en la rodilla (Brent Brotzman and Manske, 2012).

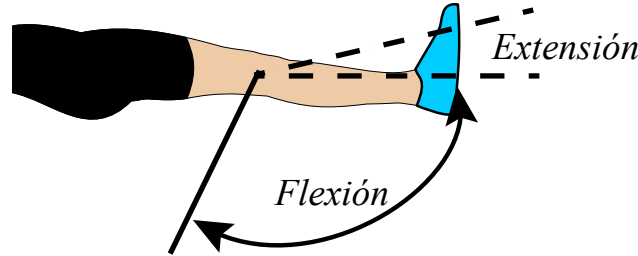


Figura 2.4: Movimientos de la rodilla.

Tabla 2.1: Tipos de movimientos y lesiones en la rodilla

Movimiento	Magnitud	Tipos de lesiones	Lesiones
Flexión	120°	Lesiones de músculos y tendones	Desgarro del ligamento cruzado anterior
	150° (si la cadera está flexionada)		Desgarros meniscales Rodilla del saltador Desgarro del ligamento cruzado posterior
Extensión activa	0°	Lesiones de la articulación	Luxación rotuliana aguda Lesión del ligamento colateral medial Osteocondritis disecante
Extensión pasiva	5-10°	Lesiones de los huesos	Artrosis

2.1.3. Articulación de tobillo y pie

El tobillo, junto con el pie, propulsan y amortiguan al cuerpo durante la marcha, ya sea en terrenos planos, llanos o accidentados. Esta debe tener la flexibilidad suficiente para amortiguar el impacto de millones de contactos a lo largo de su vida.

En Blanco Ortega et al. (2012) se muestra que la articulación del tobillo o talocrural (Figura 2.5) es una articulación distal del miembro inferior, posee un único grado de libertad y condiciona los movimientos de la pierna en relación con el pie en el plano sagital, es una articulación cerrada, que sufre limitaciones importantes. En apoyo monopodal³ soporta todo el peso corporal.

³Posición donde el paciente se mantiene sobre un pie.

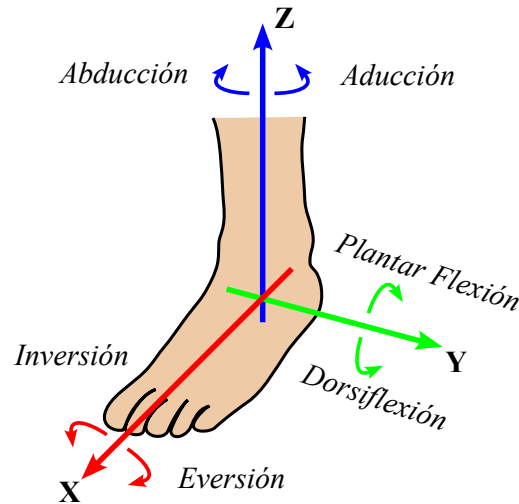


Figura 2.5: Movimientos del tobillo y pie.

2.2. Descripción de robots manipuladores

La dinámica de los robots rehabilitadores o robots en general está descrita por formulaciones matemáticas. Estas formulaciones generan las ecuaciones de movimiento del robot, las cuales son un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento dinámico del sistema.

La representación del sistema en ecuaciones permite simular y evaluar a nivel computacional los movimientos del robot, así como el diseño de estrategias de control aplicadas al seguimiento de trayectoria de una rutina de rehabilitación. En general, el funcionamiento de un robot depende directamente de la eficacia de los algoritmos de control y de su modelo dinámico.

El modelo dinámico de un robot se puede obtener a partir de leyes físicas conocidas, tales como las leyes de la mecánica Newtoniana y Lagrangiana. Este conduce al desarrollo de las ecuaciones de movimiento dinámico en términos de los parámetros geométricos e inerciales de los elementos. Existen métodos convencionales como las formulaciones Euler-Lagrange y Newton-Euler estos se pueden aplicar entonces sistemáticamente para desarrollar las ecuaciones de movimiento del robot rehabilitador.

La obtención del modelo dinámico de un robot basado en la formulación de Euler-Lagrange es simple y sistemática, se fundamenta en el análisis de las energías cinética y potencial, fuerza de Coriolis, centrípeta y fricción.

2.2.1. Formulismo Euler-Lagrange

Para el diseño de un controlador se requiere de un modelo matemático que describa el comportamiento dinámico del sistema con el que se trabaja. De acuerdo con Lewis et al. (2003) el formulismo Euler-Lagrange deriva la energía cinética y potencial de un robot manipulador de n eslabones para posteriormente usar las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

El formulismo Euler-Lagrange, para sistemas no conservativos, está definido por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} = \tau(t) \quad (2.1)$$

donde $q(t)$ es un vector de coordenadas generalizadas, $\tau(t)$ es un vector de fuerzas generalizadas, $\mathcal{F}(\dot{q}(t))$ es la energía disipativa y $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ es el Lagrangiano.

El Lagrangiano del sistema, está definido por la diferencia entre la energía cinética $E_c(q(t), \dot{q}(t))$ y la energía potencial $E_p(q(t))$ siendo,

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = E_c(q(t), \dot{q}(t)) - E_p(q(t)) \quad (2.2)$$

La energía cinética total del sistema se define como:

$$E_c(q(t), \dot{q}(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2(t) \quad (2.3)$$

donde m_i es la masa en movimiento y v_i es velocidad lineal del i -ésimo eslabón siendo $i = 1, \dots, n$, donde n es el número total de eslabones del robot.

La energía potencial total del sistema se define como:

$$E_p(q(t)) = \sum_{i=1}^n m_i g h_i \quad (2.4)$$

donde h_i es la altura a la que se encuentra una masa m_i con un campo gravitatorio constante g . El punto de referencia, que corresponde a la energía potencial cero, se puede seleccionar arbitrariamente.

La energía disipativa total está dada por la siguiente ecuación,

$$\mathcal{F}(\dot{q}(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i v_i^2(t) \quad (2.5)$$

donde b_i es el coeficiente de fricción viscosa, el cual es constante.

De forma que la Ecuación (2.2) para los n eslabones, se puede representar como:

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2(t) - m_i g h_i \right) \quad (2.6)$$

El formulismo Euler-Lagrange nos permite comprender y obtener el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del rehabilitador con el que se trabajará. Los robots rehabilitadores por sus características son sistemas no lineales. En la teoría del control automático, existen distintas técnicas para la representación de sistemas no lineales, entre esas técnicas se encuentra el enfoque Takagi-Sugeno.

2.3. Teoría de sistemas Takagi-Sugeno

Existen diferentes técnicas para la representación de sistemas no lineales (Figura 2.6), el enfoque Takagi-Sugeno (T-S) fue introducido por primera vez por Takagi y Sugeno en 1985 como una herramienta para aproximar la dinámica de un sistema no lineal mediante un conjunto de sistemas lineales.

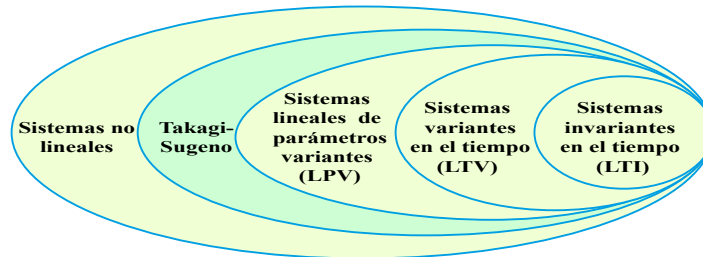


Figura 2.6: Estructuras de sistemas dinámicos.

El enfoque Takagi-Sugeno fue un primer intento de acercar el control difuso al control tradicional y, con ello, formalizar matemáticamente el diseño de controladores (Bernal et al., 2019).

2.3.1. Propiedades de los sistemas Takagi-Sugeno

La principal característica de un modelo T-S es expresar la dinámica local de cada implicación difusa (regla) por un modelo lineal, válido localmente en una región correspondiente. Es por ello que, el enfoque Takagi-Sugeno hace posible reescribir un sistema no lineal de una manera sencilla de estudiar, dividiéndolo en unidades más simples y manejables (Flores, 2019). Esto tomando en cuenta las no linealidades del sistema y considerando una serie de reglas difusas, lo cual nos permite tener una representación fiel al sistema no lineal a través de la interpolación de los modelos locales lineales, obteniendo así el modelo global del sistema,

evitando así la pérdida de información del sistema.

La representación de un sistema no lineal es la siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde f y h son funciones no lineales, f depende de las variables de estado $x(t)$ y de las entradas con respecto al tiempo $u(t)$, $y(t)$ es el vector de salidas; todos estos vectores son de dimensiones apropiadas.

La representación de los sistemas no lineales por modelos Takagi-Sugeno es la siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(C_i x(t))\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de la variable medida de salida. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ son matrices conocidas que representan las matrices del i -ésimo modelo local del sistema T-S, k es el número de modelos locales, $\varphi_i(z)$ son las funciones de pertenencia que dependen de la variable premisa z .

De acuerdo con [Lendek et al. \(2011\)](#), la suma convexa de las funciones de pertenencia debe cumplir con las siguientes propiedades:

$$1 \geq \varphi_i(z) \geq 0; \quad \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) = 1;\tag{2.9}$$

Al cumplirse las propiedades antes mencionadas, se puede asegurar que el sistema Takagi-Sugeno está correctamente planteado y sigue fielmente la dinámica del sistema no lineal. Por lo que, si se da el caso en donde no se cuenta con la medición de todas las variables de estado que componen al sistema, se puede diseñar un observador con una estructura Takagi-Sugeno.

Estabilidad en sistemas Takagi-Sugeno

Para el desarrollo del análisis de estabilidad, diseño de observadores y controladores en los sistemas Takagi-Sugeno, se utilizan las desigualdades matriciales lineales (LMIs, por sus siglas en inglés *Linear Matrix Inequalities*) para facilitar el diseño de estos. La estabilidad de los modelos Takagi-Sugeno se garantiza mediante el método directo de Lyapunov ([Bernal et al.](#),

2019). La función de Lyapunov utilizada habitualmente es la cuadrática,

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \quad (2.10)$$

con $P = P^T > 0$.

Al usar una función de Lyapunov, se habla de “estabilidad cuadrática”. Cuando un sistema es cuadráticamente estable, implica que el sistema es estable. Por lo tanto, las condiciones de estabilidad obtenidas usando la función de Lyapunov (2.10) son más que suficientes para garantizar estabilidad.

Esto considerando la estabilidad asintótica del punto $x(t) = 0$ de la Ecuación (2.8) con $u(t) = 0$, es decir, un sistema Takagi-Sugeno autónomo de la forma,

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) A_i x(t) \quad (2.11)$$

es cuadráticamente estable si la derivada de la función de Lyapunov (2.10) decrece y tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$ en todas las trayectorias de $x(t)$. La derivada de la Ecuación (2.10) a lo largo de las trayectorias del modelo autónomo (2.11) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \varphi_i(z) A_i x(t) \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left(\sum_{i=1}^k \varphi_i(z) A_i x(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) x(t)^T (A_i^T P + P A_i) x(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde las funciones de pertenencia $\varphi_i(z)$ satisfacen las propiedades de la suma convexa mostrada en la Ecuación (2.9).

Definición 2.1. (*Lendek et al., 2011*) *El sistema (2.11) es asintóticamente estable si existe una matriz $P = P^T$ tal, que las siguientes LMI's se satisfagan:*

$$P > 0, \quad A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.13)$$

2.3.2. Representación de sistemas Takagi-Sugeno por el enfoque del sector no lineal

Dentro de la representación Takagi-Sugeno existen distintos métodos de aplicación. Entre estos se encuentra, el enfoque del sector no lineal. Este es uno de los enfoques más aplicados en la construcción de modelos T-S para el diseño de controladores difusos, ya que se puede obtener una representación difusa casi exacta de un sistema no lineal, dado por un conjunto compacto del espacio de estado. De acuerdo con (Flores et al., 2018) los pasos para reproducir esta metodología son:

1. Se reescriben las ecuaciones diferenciales del sistema no lineal en su representación matricial, de la forma:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), u(t))x(t) + B(x(t), u(t))u(t) \quad (2.14)$$

donde $A(x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B(x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son matrices cuyos términos no son necesariamente constantes y pueden depender de los estados o entradas del sistema. En total se identifican α términos no constantes que constituyen el número de variables premisas.

2. Siguiendo con la metodología, se define el escenario de prueba. Este punto depende del comportamiento de la entrada $u(t)$. Para después calcular el valor mínimo \underline{z}_j y máximo \overline{z}_j de cada variable premisa $z_j(t)$.

$$z_j(t) \in [\underline{z}_j \quad \overline{z}_j], \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \quad (2.15)$$

donde α es el número total de variables premisas.

3. Por cada variable premisa $z_j(t)$ se generan dos funciones de ponderación $\eta_0^j(z_j), \eta_1^j(z_j)$ las cuales son:

$$\eta_0^1(z_j) = \frac{\overline{z}_j - z_j(t)}{\overline{z}_j - \underline{z}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \quad (2.16)$$

$$\eta_1^1(z_j) = 1 - \eta_0^1(z_j), \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \quad (2.17)$$

4. Después de definir las funciones de ponderación se generan las funciones de pertenencia $\varphi_i(z)$ que corresponden a cada modelo local.

$$\varphi_i(z) = \prod_{j=1}^{\alpha} \eta_{\lambda}^j(z_j), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.18)$$

donde λ toma el valor de cero o uno según la función de ponderación que se utiliza para cada modelo local y $k = 2^\alpha$ es el número de modelos locales del sistema T-S. Las funciones de pertenencia indican el grado de participación de cada uno de los modelos locales lineales.

5. Finalmente, las matrices A_i , B_i y C_i de la Ecuación (2.8) se obtienen sustituyendo en las matrices $A(x(t))$, $B(x(t))$ y $C(x(t))$ los valores z_j y \bar{z}_j que corresponden según la función de ponderación que se utiliza para cada subsistema lineal.

Observación 1. *Observe que el número de variables premisas α aumenta exponencialmente el número de modelos locales $k = 2^\alpha$. Esto, según sea el caso, puede ser un problema al tratar con sistemas altamente no lineales, ya que se requiere de una mayor demanda computacional para el diseño de algoritmos de control o estimación.*

Observación 2. *Observe que existen múltiples formas de seleccionar las variables premisas y en algunas ocasiones las matrices A_i y B_i pueden tener diversas propiedades no deseables como inestabilidad, observabilidad parcial o controlabilidad parcial.*

2.3.3. Ejemplo numérico

Considere el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -5x_1(t)x_3(t) + 0,5x_2(t) + x_3(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -0,5x_1(t) - 0,2x_2(t)x_3(t) + x_1^2(t)u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -2x_1(t) + x_1(t)x_3(t) - x_3(t) + u(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

1. La representación del sistema no lineal en forma matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5x_3(t) & 0,5 & 1 \\ -0,5 & -0,2x_3(t) & 0 \\ -2 + x_3(t) & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A(x(t))} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ x_1^2(t) \\ 1 \end{bmatrix}}_{B(x(t))} u(t) \quad (2.20)$$

En total se identifican 2 términos no constantes, en las matrices $A(x(t))$ y $B(x(t))$ que corresponde al número de variables premisas.

2. Se define la entrada del sistema (Ecuación (2.19)) para que, mediante una simulación numérica, se obtengan los máximos y mínimos de las variables premisas.

$$u(t) = \begin{cases} 0,8 \cos(1,5t - 15) + 0,8 \sin(2,7t) + 5, & \text{si } t \leq 6,2 \text{ s} \\ 5, & \text{si } t > 6,2 \text{ s} \end{cases} \quad (2.21)$$

Entonces, tras realizar la simulación numérica, los máximos y mínimos de las variables premisas quedan definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_3(t) \in [5,9951, 8,3391] \\ z_2(t) &= x_1^2(t) \in [0,0784, 0,3099] \end{aligned} \quad (2.22)$$

3. Posteriormente, se calculan las dos funciones de ponderación correspondientes a cada variable premisa:

$$\begin{aligned} \eta_0^1(z_1) &= \frac{\bar{z}_1 - z_1(t)}{\bar{z}_1 - \underline{z}_1} = \frac{8,3391 - z_1(t)}{2,3440}, & \eta_1^1(z_1) &= 1 - \eta_0^1(z_1); \\ \eta_0^2(z_2) &= \frac{\bar{z}_2 - z_2(t)}{\bar{z}_2 - \underline{z}_2} = \frac{0,3099 - z_2(t)}{0,2315}, & \eta_1^2(z_2) &= 1 - \eta_0^2(z_2); \end{aligned} \quad (2.23)$$

4. Continuando con la metodología, se definen las funciones de pertenencia de cada modelo local:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \eta_0^1(z_1)\eta_0^2(z_2) & \varphi_2(t) &= \eta_0^1(z_1)\eta_1^2(z_2) \\ \varphi_3(t) &= \eta_1^1(z_1)\eta_0^2(z_2) & \varphi_4(t) &= \eta_1^1(z_1)\eta_1^2(z_2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

5. Finalmente, se construye el sistema T-S de la Ecuación (2.8). Las matrices A_i y B_i de los 4 subsistemas lineales son:

$$\begin{aligned} A_{\{1,2\}} &= \begin{bmatrix} -5\underline{z}_1 & 0,5 & 1 \\ -0,5 & -0,2\underline{z}_1 & 0 \\ -2 + \underline{z}_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29,9755 & 0,5 & 1 \\ -0,5 & -1,1990 & 0 \\ 3,9951 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & B_{\{1,3\}} \begin{bmatrix} 2 \\ \underline{z}_2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2. \\ 0,0784 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A_{\{3,4\}} &= \begin{bmatrix} -5\bar{z}_1 & 0,5 & 1 \\ -0,5 & -0,2\bar{z}_1 & 0 \\ -2 + \bar{z}_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41,6955 & 0,5 & 1 \\ -0,5 & -1,6678 & 0 \\ 6,3391 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & B_{\{2,4\}} \begin{bmatrix} 2 \\ \bar{z}_2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2. \\ 0,3099 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.3.4. Simulación y validación del modelo Takagi-Sugeno

Objetivo de la simulación: Ilustrar detalladamente los pasos para obtener el sistema T-S del ejemplo numérico mostrado en la Sección 2.3.3.

La simulación del sistema se realizó en MATLAB2020a por medio de la herramienta S-

Function perteneciente a Simulink, se consideró un tiempo de simulación de 10 s con un paso de integración de 0.001 s. Las condiciones iniciales consideradas son $x(t) = [0,28 \ 0,15 \ 6]$. La entrada con la que se simuló el sistema es la mostrada en la Figura 2.7.

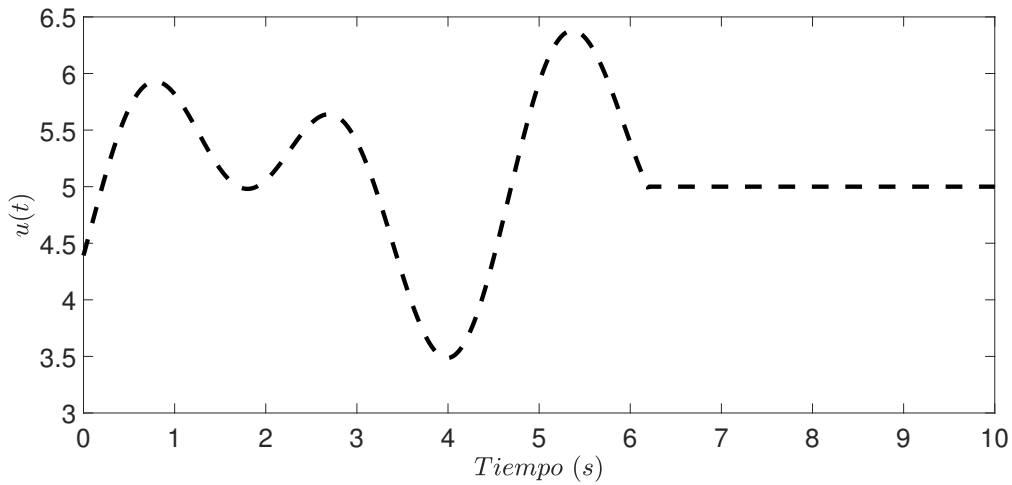


Figura 2.7: Entrada implementada en la simulación del sistema.

Al aplicar la entrada de la Figura 2.7, al sistema se obtienen los máximos y mínimos de las variables premisas (Ecuación (2.22)) que se muestran en la Figura 2.8. Es importante aclarar que fuera de este escenario de prueba las propiedades de la Ecuación 2.9 podrían no cumplirse, por lo tanto, la representación por modelos T-S podría no cumplirse.

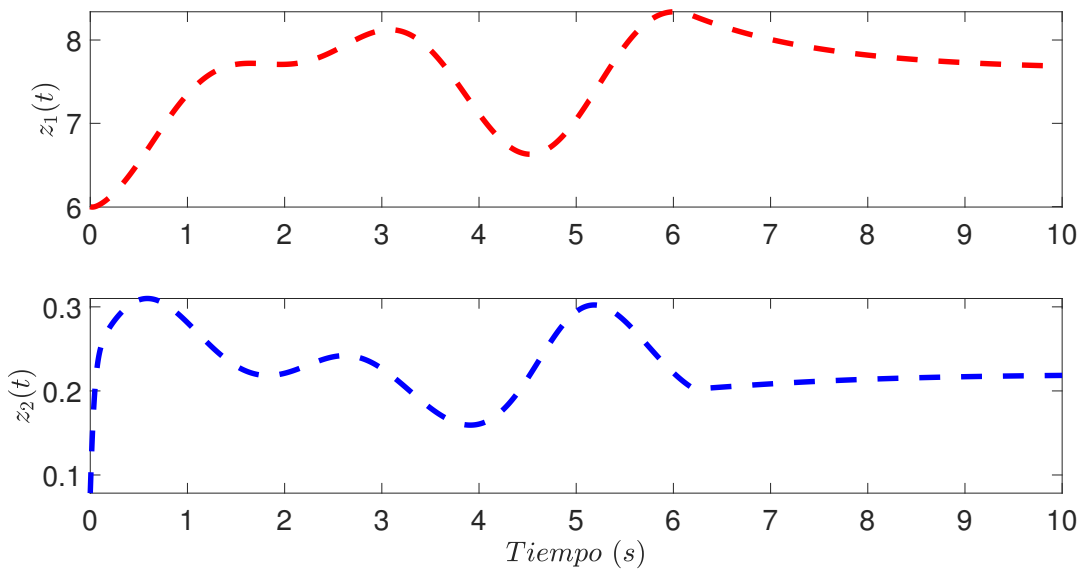


Figura 2.8: Variables premisas.

Simultáneamente, se calculan las funciones de ponderación (Ecuación (2.23)) y las funciones de pertenencia (Ecuación (2.24)). La Figura 2.9 muestra las 4 funciones de pertenencia y la

sumatoria de las 4 funciones que se definieron para construir el modelo T-S. Como se puede observar en la gráfica las propiedades de la Ecuación (2.9) se cumplen.

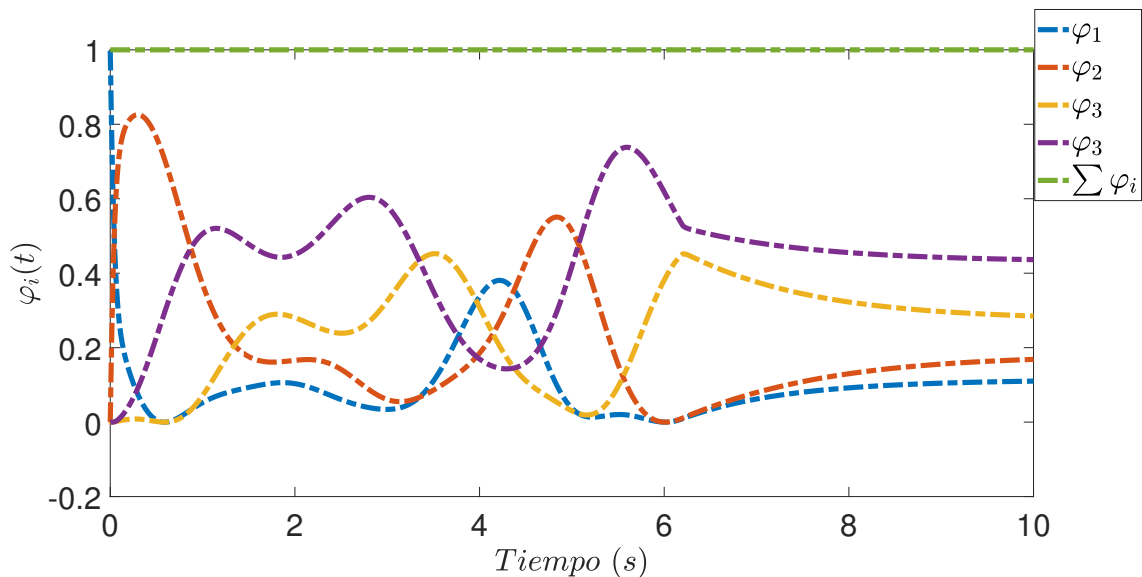


Figura 2.9: Funciones de pertenencia.

Finalmente, se construye el sistema T-S por medio de los modelos locales (Ecuación (2.25)) y se compara con el modelo no lineal Ecuación (2.19).

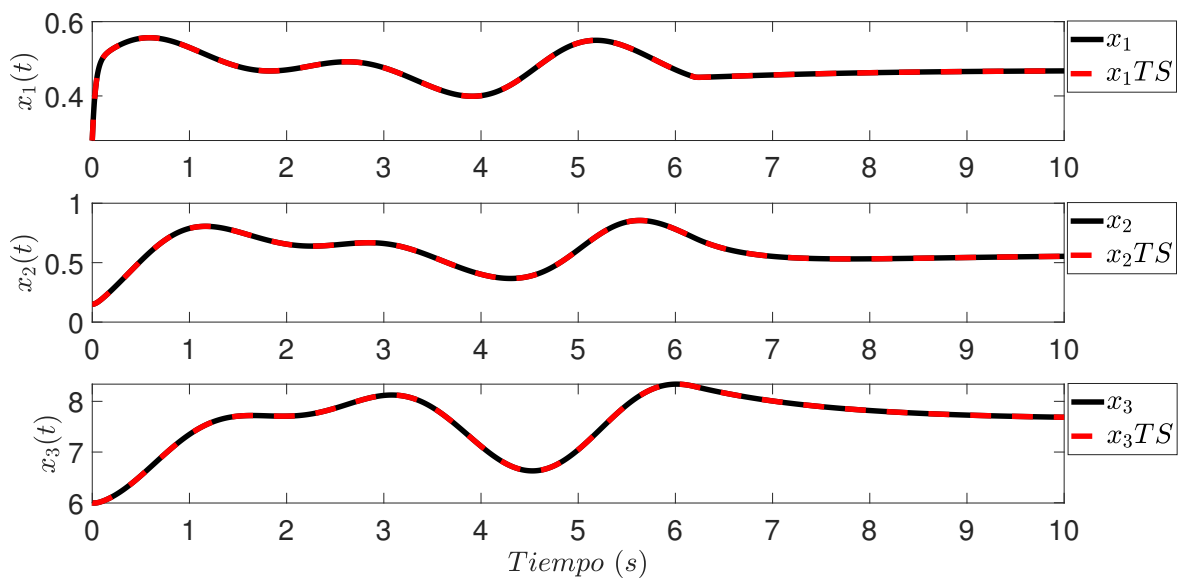


Figura 2.10: Comparación de las variables de estado en su representación no lineal contra su representación por modelos T-S.

Como se puede observar en la Figura 2.10, los resultados muestran que la representación por modelos T-S sigue fielmente la dinámica del sistema no lineal.

2.4. Conceptos básicos de observadores

Un observador (Figura 2.11), en general, es un dispositivo (o un programa de computadora) que estima u observa las variables de estado de un sistema. Usan las señales de entrada y salida junto con el modelo y con base en estos generan una estimación de los estados del sistema, los cuales pueden emplearse en control, monitoreo, detección de fallas, etc. Si el observador estima todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas están disponibles por medición directa, se denomina observador de orden completo (Ogata, 2010).

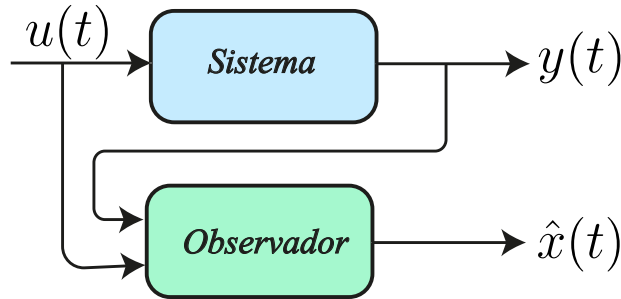


Figura 2.11: Estructura de un observador.

Observabilidad en sistemas lineales

La observabilidad es la posibilidad de estimar los estados de un sistema desde el conocimiento previo de sus entradas y salidas. Considerando la representación en espacio de estados de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI, por sus siglas en inglés *Linear Time Invariant*):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada y $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salidas medidas. Las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, son constantes conocidas.

Definición 2.2. (Ogata, 2010) *Un sistema es observable si existe un tiempo finito tal que, dada una entrada $u(t)$, el valor inicial $x(0)$ puede ser determinado a partir de la observación de $y(t)$.*

En la Ecuación (2.27) se muestra la matriz de observabilidad.

$$Obs = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Observabilidad en sistemas Takagi-Sugeno

Para poder realizar el diseño de un observador, se asume que el sistema T-S (Ecuación (2.8)) cumple con la propiedad de observabilidad completa. La observabilidad en sistemas T-S es la propiedad de reconstruir el vector de estados del sistema para cada modelo local. Dado que el observador está diseñado de tal manera que cada regla difusa tiene una ganancia local, se requiere que los modelos locales sean observables en lugar del sistema no lineal completo (Lendek et al., 2011).

Definición 2.3. (Ogata, 2010) Para el diseño se supone implícitamente que los modelos locales, es decir, los pares $(A_i, C_i), i = 1, 2, \dots, k$, son observables.

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall i = [1, \dots, k] \quad (2.28)$$

donde n es la dimensión del vector de estados del sistema.

2.4.1. Estructura del observador proporcional integral

El Observador Proporcional Integral (PIO, por sus siglas en inglés *Proportional Integral Observer*) posee una ganancia integral adicional del error estimación de la salida en su estructura, para hacer frente al inconveniente de la sensibilidad a las incertidumbres paramétricas, además permite minimizar el error de estimación en estado estacionario.

El observador proporcional integral (Figura 2.12) para el sistema (2.8) posee la siguiente estructura:

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t) + J_i u(t)) \quad (2.29)$$

$$\dot{v}(t) = y(t) - C \hat{x}(t) \quad (2.30)$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + Q y(t) \quad (2.31)$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector del observador, $v(t) \in \mathbb{R}^q$ es un vector auxiliar y $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de $x(t)$. Las matrices N_i, H_i, F_i, J_i y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas que son determinadas de forma tal que $\hat{x}(t)$ converja asintóticamente a $x(t)$.

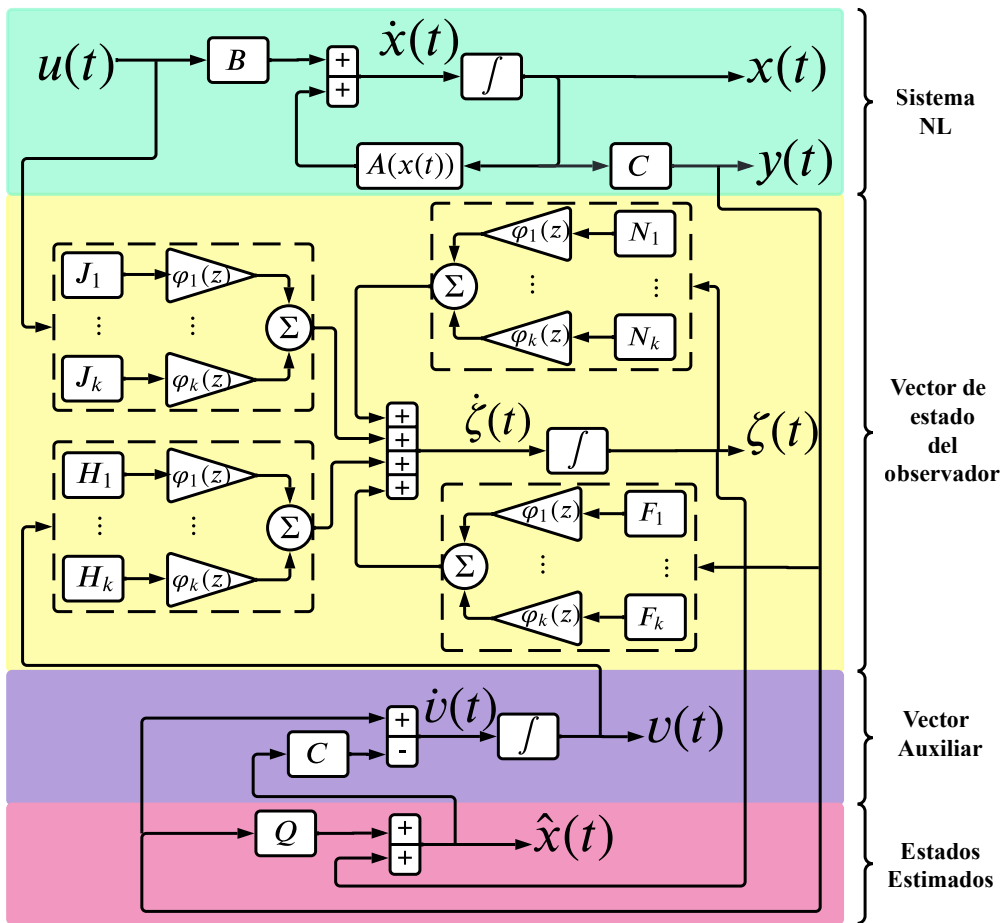


Figura 2.12: Diagrama a bloques de la conexión entre el sistema y el observador proporcional integral.

2.5. Control por retroalimentación de estados con acción integral

En la literatura se han reportado distintos controladores, los más conocidos son los controladores tipo: proporcional (P), proporcional-integral (PI) y proporcional-integral-derivativo (PID). En la presente investigación, se abordará el control por retroalimentación de estados con acción integral, este permite estabilizar al sistema de tal forma que exista un seguimiento de trayectoria aún con presencia de perturbaciones y/o incertidumbres en el proceso. Para poder desarrollar un controlador primero debemos conocer si este es controlable o no.

Controlabilidad en sistemas lineales

La controlabilidad tiene que ver con la posibilidad de llevar al sistema de cualquier estado inicial a cualquier estado final en tiempo finito, no importando que trayectoria siga, o que entrada use.

Definición 2.4. (Ogata, 2010) El sistema (2.26) es completamente controlable si y solo si cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes se satisface:

- El par (A, B) , es controlable.
- La matriz de controlabilidad de $n \times n$:

$$Con = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

tiene rango igual a n , es decir, su determinante es diferente de cero.

Controlabilidad en sistemas Takagi-Sugeno

Para poder realizar el diseño de un controlador, se asume que el sistema T-S (2.8) cumple con la propiedad de controlabilidad.

Definición 2.5. (Lendek et al., 2011) Para el diseño se supone implícitamente que los modelos locales, es decir, los pares $(A_i, B_i), i = 1, 2, \dots, k$, son controlables.

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} B_i & A_i B_i & \dots & A_i^{n-1} B_i \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall i = [1, \dots, k] \quad (2.33)$$

El modelo T-S es totalmente controlable si n es de la dimensión del vector de estados del sistema para todo instante de tiempo $t \geq 0$.

En la Figura 2.13 se muestra la estructura del controlador. Como se puede observar en la Figura, el controlador posee un integrador. El uso de la acción integral dentro del lazo directo del sistema de control, además de garantizar un error nulo en el seguimiento de referencia constante, también le da al sistema la propiedad del rechazo de perturbación en régimen permanente (López-Estrada et al., 2019).

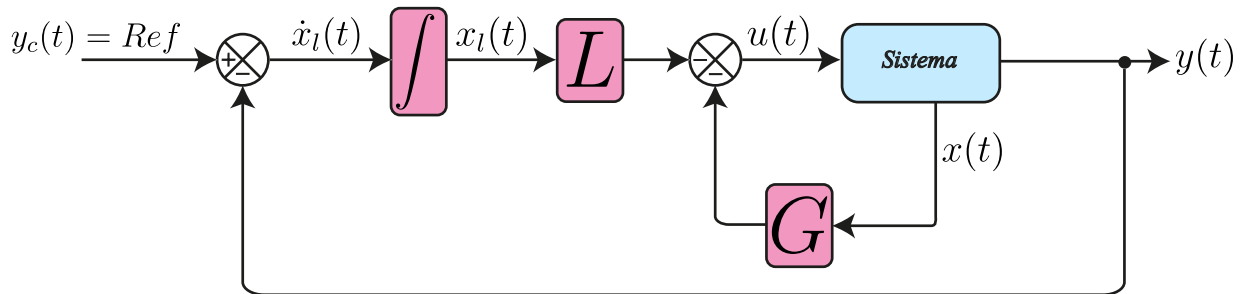


Figura 2.13: Esquema de control por retroalimentación de estados con acción integral.

La ley de control está definida por la Ecuación (2.34)

$$\begin{aligned} u(t) &= -Gx(t) - Lx_l(t) \\ u(t) &= -\underbrace{\begin{bmatrix} G & L \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde \mathbb{K} es la ganancia obtenida al diseñar el controlador y $x_l(t)$ es la integral del error, añadida para compensar los errores en estado estacionario y para alcanzar la referencia deseada $y_c(t)$.

La integral del error está dada por:

$$x_l(t) = \int (y_c(t) - y(t))dt \quad (2.35)$$

cuya derivada es el error de seguimiento de trayectoria definido por,

$$\dot{x}_l = y_c(t) - y(t) = y_c(t) - Cx(t) \quad (2.36)$$

donde se pretende que converja asintóticamente a cero.

2.6. Control robusto

Una perturbación es una señal que tiende a afectar el valor de la salida de un sistema. Si se genera dentro del sistema se denomina interna, mientras que si se genera fuera del sistema constituye una entrada.

De acuerdo con [Dorf et al. \(2005\)](#) el objetivo del diseño de sistemas robustos es asegurar el comportamiento del sistema a pesar de las imprecisiones y cambios del modelo. Un sistema es robusto cuando tiene cambios aceptables en el comportamiento debido a cambios o imprecisiones del modelo

Un sistema de control es robusto cuando:

1. Tiene sensibilidades pequeñas.
2. Es estable sobre el rango de variaciones de parámetros.
3. El comportamiento continúa cumpliendo las especificaciones en presencia de un conjunto de cambios en los parámetros del sistema.

La robustez es la sensibilidad a efectos que no se consideran en la fase de análisis y de diseño (por ejemplo, perturbaciones, ruido de medición y dinámicas no modeladas). El sistema debe

ser capaz de resistir estos efectos despreciados cuando realiza las tareas para las cuales fue diseñado.

Para abordar las técnicas aplicadas al control robusto debemos de definir que es una norma y sus propiedades:

Definición 2.6. Norma Euclídiana: (Doyle et al., 2013) Sea un vector $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la norma Euclídiana queda definida como:

$$\|u(t)\| = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t) + \dots + u_m^2(t)} \quad (2.37)$$

Definición 2.7. Propiedades de las normas (Doyle et al., 2013)

$$\|u\| > 0 \quad (2.38)$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0, \forall t \quad (2.39)$$

$$\|a u\| = |a| \|u\|, \forall a \in \mathbb{R} \quad (2.40)$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (2.41)$$

La Ecuación (2.41) es una desigualdad triangular. La Ecuación (2.42) corresponde a una norma 1 de una señal $u(t)$:

$$\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt \quad (2.42)$$

La Ecuación (2.43) corresponde a una norma 2 de una señal $u(t)$, esta norma representa la energía de la señal:

$$\|u\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.43)$$

En la Ecuación (2.44) se tiene la norma ∞ de una señal $u(t)$, esta norma representa el menor de los límites o cotas superiores del valor absoluto de la señal:

$$\|u\|_{\infty} = \sup_t |u(t)| \quad (2.44)$$

2.6.1. Norma L_2

Considerando el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C_1x(t) + D_1u(t) \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada y $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salidas.

Sea $\gamma > 0$ un escalar fijo. Asumiendo que existe una matriz P simétrica positiva definida, tal que la función cuadrática $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ se cumpla, para algún valor $\epsilon > 0$, la desigualdad

$$\dot{V}(Ax(t) + Bu(t)) \leq -\epsilon [x(t)^T x(t)] + \gamma^2 [u(t)^T u(t)] - [y(t)^T y(t)] \quad (2.46)$$

para toda $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y toda $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Observe que esta propiedad solo puede mantenerse si el sistema es asintóticamente estable. Para $u(t) = 0$ esto se reduce a

$$\dot{V}(Ax(t)) \leq -\epsilon [x(t)^T x(t)] \quad (2.47)$$

lo que implica una estabilidad asintótica.

Suponga que la entrada $u(t)$ del sistema (2.45) está en función de $L_2 [0, \infty)$. La integral de la desigualdad (2.46) en el intervalo $[0, T]$, para cualquier estado inicial $x(0)$ obtenemos:

$$V(x(T)) \leq V(x(0)) + \gamma^2 \int_0^T [u(t)^T u(t)] dt - \int_0^T [y(t)^T y(t)] dt \quad (2.48)$$

para cualquier $T > 0$. Dado que $V(x(T)) \geq 0$, deducimos que

$$[\|y(t)\|_2]^2 \leq \gamma^2 [\|u(t)\|_2]^2, \quad (2.49)$$

o

$$\|y(t)\|_2 \leq \gamma \|u(t)\|_2. \quad (2.50)$$

En otras palabras, para cualquier $u(t) \in L_2 [0, \infty)$, la respuesta del sistema a partir del estado inicial $x(0) = 0$ está definida para todo $t \geq 0$, produce una salida $y(t)$ que está en función de $L_2 [0, \infty)$ y la relación entre la salida y la entrada está limitada por γ . Por esta razón, se dice que el sistema tiene una ganancia L_2 finita, limitada por un número γ (Osorio, 2015).

2.6.2. Control H_∞

Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ \tilde{z}(t) &= C_1 x(t) + D_1 w(t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $w(t) \in L_2 [0, \infty)$ es la señal de perturbación y $\tilde{z}(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ es la función objetivo. Las matrices A, B, C_1 y D_1 son matrices constantes de

dimensiones apropiadas.

El control H_∞ es susceptible de ser expresado en términos de LMI's. Esta técnica consiste en minimizar la relación entre la norma L_2 de la función objetivo y la norma L_2 de la perturbación; es decir, resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\gamma > 0} \gamma : \sup_{\|w(t)\|_{L_2} \neq 0} \frac{\|\tilde{z}(t)\|_{L_2}}{\|w(t)\|_{L_2}} \leq \gamma, \quad (2.52)$$

donde $\gamma > 0$ es un escalar fijo comúnmente llamado constante de atenuación y la norma L_2 (Definición 2.7) de una señal, pongamos por caso, $w(t)$, se define como:

$$\|w(t)\|_{L_2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t)^T w(t) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.53)$$

Si existe una función de Lyapunov $V(x(t))$ asociada al origen del sistema (2.51) el criterio (2.52) se satisface siempre que se encuentre el mínimo $\gamma > 0$ tal que:

$$\dot{V}(x(t)) + \tilde{z}(t)^T \tilde{z}(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) < 0, \quad \forall t \in [0, \infty] \quad (2.54)$$

Expresando (2.52) en términos de un índice de desempeño tenemos, la representación del lema real acotado.

2.6.3. Lema real acotado

La teoría H_∞ es uno de los campos más sofisticados para el diseño de sistemas de control robustos, comúnmente basado en el lema real acotado.

Para un escalar preestablecido $\gamma > 0$, el siguiente índice de desempeño:

$$J < \int_0^\infty \left[\tilde{z}(t)^T \tilde{z}(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \dot{V}(x(t)) \right] dt \quad (2.55)$$

Entonces, a partir de [Boyd et al. \(1994\)](#), se deduce que $J < 0$, para todos $w(t) \in L_2 [0, \infty)$, si y solo si existe una matriz positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que cumpla la siguiente desigualdad:

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & X B & C_1^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D_1^T \\ C_1 & D_1 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.56)$$

donde la matriz simétrica definida positiva P suele denominarse matriz de Lyapunov.

2.7. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentaron primero algunos conceptos básicos relacionados con los miembros inferiores, así como conceptos aplicados a la construcción de modelos matemáticos que describen el comportamiento dinámico de los robots rehabilitadores. Igualmente, se mencionaron conceptos aplicados a la representación de sistemas no lineales por la metodología Takagi-Sugeno, también se presenta un ejemplo numérico que sirve para demostrar la gran capacidad de aplicación que posee esta metodología .

Por último, se presentó la estructura de un observador proporcional integral, un controlador por retroalimentación de estados y los conceptos aplicados al control robusto H_∞ , así como las normas que se involucran dentro de este.

Capítulo 3

Caso de estudio

3.1. Descripción del robot rehabilitador de rodilla

La rodilla es una de las articulaciones que frecuentemente presenta lesiones sin importar el rango de edad. Como se mencionó en la Sección 1.1, en la literatura existen diversos rehabilitadores de rodilla, como lo son el rehabilitador Sys-Réeduc (Seddiki et al., 2007), iLeg (Hu et al., 2012), Physiotherabot (Akdoğan and Adli, 2011), entre otros. El rehabilitador con el que se trabajará en la presente tesis, es el rehabilitador Multi-Iso. De acuerdo con Moughamir et al. (2002) este rehabilitador apoya a pacientes que sufren traumatismo articular y/o muscular. Genera movimientos de flexión - extensión en la rodilla y posee un solo grado de libertad (DOF, por sus siglas en inglés *Degree Of Freedom*). El diagrama de cuerpo libre del rehabilitador, se muestra en Figura. 3.1.

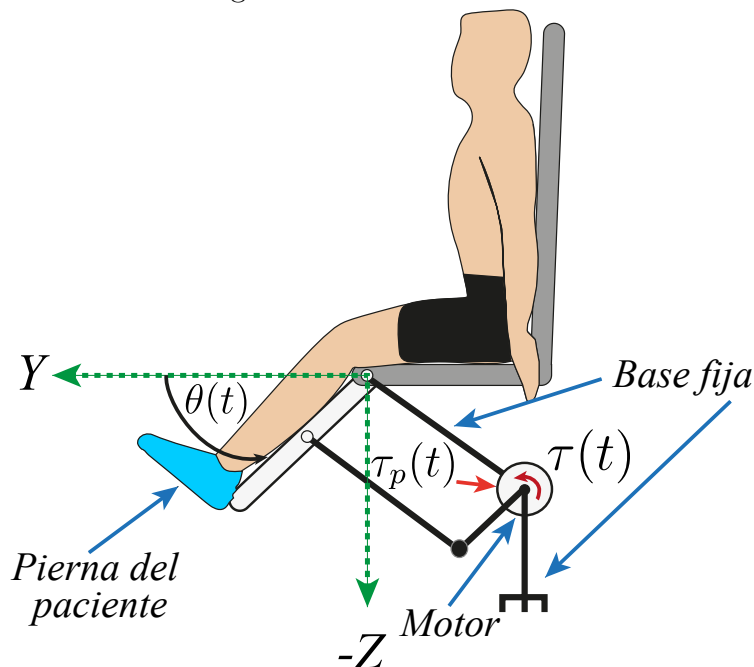


Figura 3.1: Diagrama de cuerpo libre del rehabilitador de rodilla.

En la Figura. 3.1 se puede observar que el rehabilitador genera un movimiento del tipo vertical en el eje Y hacia Z . La posición $\theta(t)$ es el margen de movimiento del rehabilitador. El rehabilitador tiene la restricción físicamente de solo permitir movimientos de $\theta(t) \in [8^\circ, 150^\circ]$. El cambio de posición se debe al par $\tau(t)$ aplicado por el motor. $\tau_p(t)$ es una perturbación presente por alguna descompensación en el motor. En el análisis de balance de energía, se considera que la energía potencial es nula en el eje Y , ya que el rehabilitador solo genera movimiento del tipo vertical.

El modelo dinámico de este rehabilitador se basa en una máquina de ejercicio isocinético ¹ (Pruski and Knops, 2005). El modelo matemático está descrito por la siguiente ecuación:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) - mgl \cos(\theta(t)) = \tau(t) + \tau_p(t) \quad (3.1)$$

donde $\ddot{\theta}(t), \dot{\theta}(t), \theta(t)$ son aceleración (rad/s^2), velocidad (rad/s) y posición angular (rad), $\tau_p(t)$ es una perturbación (Nm) presente en el motor del rehabilitador por algún mal funcionamiento. A lo largo del documento, la posición del rehabilitador se mostrará en grados, esto para comodidad del lector, aunque en el modelo se maneja en radianes.

Tabla 3.1: Parámetros numéricos del modelo dinámico del rehabilitador

Parámetro	Nombre	Valor
m	Masa	2 Kg
l	Longitud	$0,42 \text{ m}$
g	Gravedad	$9,81 \text{ m/s}^2$
b	Coefficiente de fricción viscosa	$0,60 \text{ Nm s/rad}$
τ	Par aplicado por el motor	$\pm 2 \text{ Nm}$

Los valores de los parámetros del sistema son los mostrados en la Tabla 3.1. A partir de estos valores se diseñará la representación del sistema por modelos Takagi-Sugeno, el observador y el controlador.

3.2. Obtención del modelo no lineal del sistema por Euler-Lagrange

En esta sección se presenta el modelo matemático no lineal del robot rehabilitador de rodilla (Figura 3.1). Para obtener el modelo se implementó el formulismo Euler-Lagrange (Sección 2.2.1), ya que en esencia el rehabilitador es un robot manipulador, solo que este se

¹Los ejercicios isocinéticos son aquellos en los que se aplica una velocidad constante para obtener una contracción muscular máxima bien sea concéntrica o excéntrica durante el movimiento.

limitará al rango de operación de 0° a 150° que permite la articulación de rodilla para ejercer los movimientos de flexión-extensión.

En el análisis dinámico del rehabilitador se considera una fuerza disipativa, la cual será la fricción ejercida en el movimiento y se considera la presencia de perturbación en el motor del rehabilitador. Por lo tanto, la ecuación de movimiento que describe al rehabilitador por la metodología Euler-Lagrange es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \dot{\theta}(t))}{\partial \dot{\theta}(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \dot{\theta}(t))}{\partial \theta(t)} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{\theta}(t))}{\partial \dot{\theta}(t)} = \tau(t) + \tau_p(t) \quad (3.2)$$

donde $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ son posición y velocidad angular, $\tau(t)$ es el par aplicado por el motor del rehabilitador, $\tau_p(t)$ es una perturbación, $\mathcal{L}(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ es el Lagrangiano y $\mathcal{F}(\dot{\theta}(t))$ es la función de fuerza disipativa.

Se definen las posiciones lineales en el plano Y y Z del rehabilitador, ya que el rehabilitador solo ejerce movimiento del tipo vertical, por lo cual el plano X no se ve involucrado en este análisis;

$$\begin{aligned} Y &= l \cos(\theta(t)) \\ Z &= -l \sin(\theta(t)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

se derivan las posiciones, para obtener la velocidad de desplazamiento

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= -l \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \\ \dot{Z} &= -l \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

por lo tanto, la velocidad es:

$$v = \dot{Y} + \dot{Z} \quad (3.5)$$

ya que para el cálculo de la energía cinética y potencial se requiere de la v^2 , por lo tanto,

$$v^2 = \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 = l^2 \dot{\theta}^2(t) \quad (3.6)$$

Ahora bien, el Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = E_c(\theta(t), \dot{\theta}(t)) - E_p(\theta(t)) \quad (3.7)$$

donde E_c es la energía cinética definida como:

$$E_c(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2(t) \quad (3.8)$$

y la energía potencial E_p se define como:

$$E_p(\theta(t)) = -mgl \operatorname{sen}(\theta(t)) \quad (3.9)$$

se considera como energía potencial nula en el eje Y . Por lo tanto, el Lagrangiano es el siguiente:

$$\mathcal{L}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(t) + mgl\operatorname{sen}(\theta(t)) \quad (3.10)$$

Considerando la función de fuerza disipativa \mathcal{F}

$$\mathcal{F}(\dot{\theta}(t)) = \frac{1}{2}b\dot{\theta}^2(t) \quad (3.11)$$

Aplicando la Ecuación (3.2) se obtiene el siguiente modelo matemático

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) - mgl\cos(\theta(t)) = \tau(t) + \tau_p(t) \quad (3.12)$$

El cual describe el comportamiento dinámico del rehabilitador de rodilla.

3.2.1. Simulación del modelo no lineal

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación, es observar el comportamiento del robot rehabilitador de rodilla, en su representación no lineal ante una entrada $u(t)$.

Tomando la Ecuación no lineal (3.12) que describe al rehabilitador, sin considerar la perturbación $\tau_p(t)$ en el sistema, se tiene:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) - mgl\cos(\theta(t)) = \tau(t) \quad (3.13)$$

Para llegar a la representación mostrada en Ecuación (3.14)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Es necesario despejar de la Ecuación (3.13) la aceleración $\ddot{\theta}(t)$ por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) &= \left[-b\dot{\theta}(t) + mgl \cos(\theta(t)) + \tau(t) \right] \frac{1}{ml^2} \\ \ddot{\theta}(t) &= \frac{b}{ml^2}\dot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\cos(\theta(t)) + \frac{1}{ml^2}\tau(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

haciendo un cambio de variable para obtener las ecuaciones diferenciales del sistema para

posteriormente simular se tiene:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \theta(t) \\
 \dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= \ddot{\theta}(t) = \frac{b}{ml^2}x_2(t) + \frac{g}{l}\cos(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2}\tau(t)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [\theta(t) \ \dot{\theta}(t)]^T$, son posición y velocidad angular del rehabilitador, la entrada $u(t) = \tau(t)$ es el par aplicado y la salida del sistema $y(t) = [\theta(t) \ \dot{\theta}(t)]^T$.

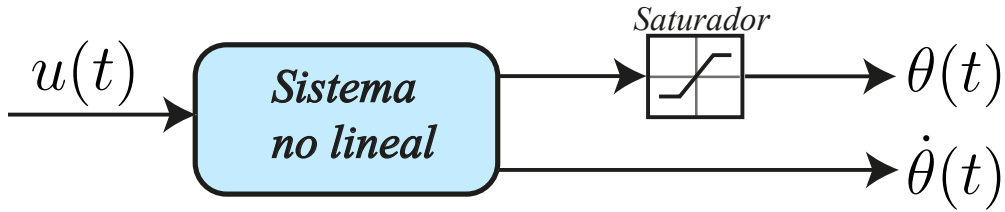


Figura 3.2: Diagrama de simulación para el sistema no lineal.

La Figura 3.2 describe la simulación a desarrollar, siendo el sistema no lineal la Ecuación (3.13) en su representación en ecuaciones diferenciales de la Ecuación (3.16). Como se mencionó en la Sección 3.1 el rehabilitador tiene una restricción física en su movimiento dicha restricción será representada por el saturador en la simulación, ya que dicha restricción física no está considerada en el modelado.

La simulación del sistema, así como las futuras simulaciones se desarrollaron en MATLAB 2020a por medio de la herramienta S-Function perteneciente a Simulink, considerando un paso de integración de 0.001 s con las condiciones iniciales $x(t) = [91^\circ \ 0]$ y los parámetros mostrados en la Tabla 3.1.

Para la simulación del sistema (3.13) en lazo abierto, se aplicó una señal de entrada $u(t)$ (Figura 3.3) del tipo cuadrada de amplitud $\pm 2Nm$ con una frecuencia de $0,8Hz$ con un ciclo de trabajo del 50%.

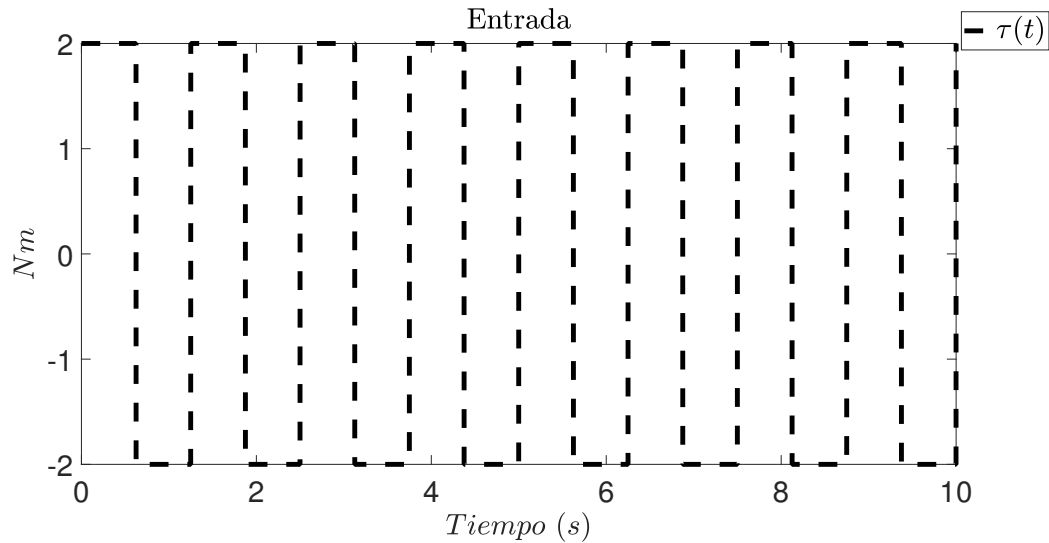


Figura 3.3: Entrada implementada en la simulación del sistema no lineal en lazo abierto.

Al aplicar la entrada de la Figura 3.3 al sistema no lineal, se obtienen las dinámicas de la posición y velocidad del rehabilitador de rodilla mostradas en la Figura 3.4. Cabe recalcar como se mencionó en la Sección 3.1 el rehabilitador físicamente solo tiene un rango de movimiento en la posición $\theta(t) = [8^\circ, 150^\circ]$

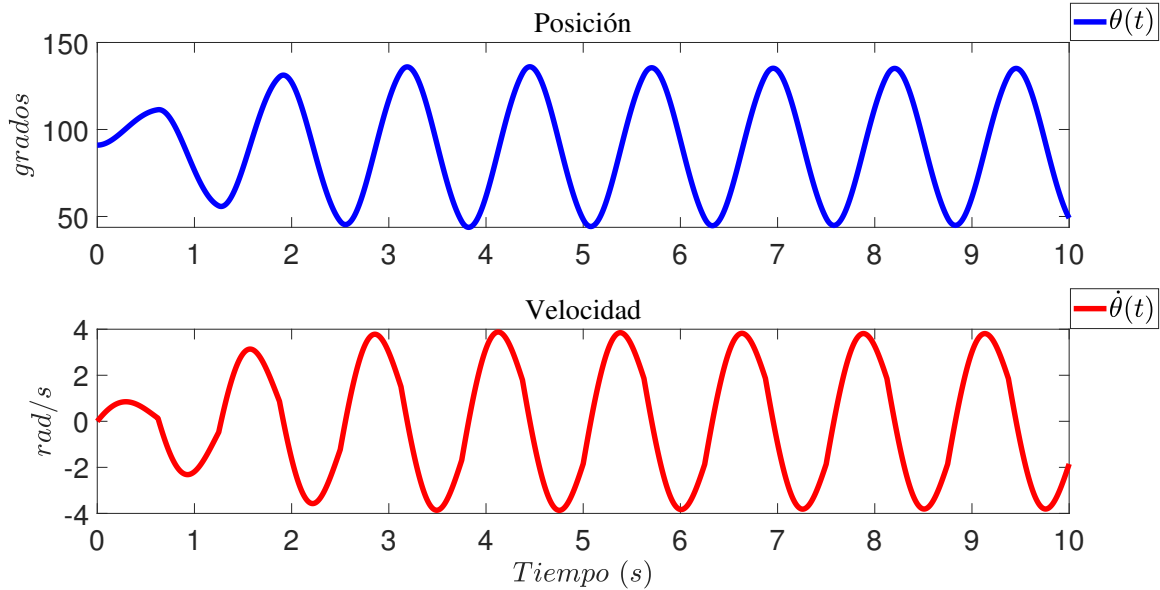


Figura 3.4: Salidas del sistema no lineal en lazo abierto.

El rango de movimiento en la posición con la entrada mostrada en la Figura 3.3 es de $\theta(t) \in [43,7728^\circ \ 136,0410^\circ]$ y en la velocidad $\dot{\theta}(t) \in [-3,8669 \text{ rad/s} \ 3,8781 \text{ rad/s}]$

3.3. Representación y validación del sistema por modelos Takagi-Sugeno

Para el diseño de un controlador se requiere de una correcta representación de la dinámica descrita por el rehabilitador. Es por ello que en esta sección se presenta el modelo matemático no lineal en su representación por modelos Takagi-Sugeno en lazo abierto. El robot rehabilitador (Figura 3.1) es evaluado con los parámetros mostrados en la Tabla 3.1.

Partiendo del análisis de la Sección 3.2 y aplicando la metodología mostrada en el ejemplo numérico de la Sección 2.3.3 se obtiene la representación del sistema por modelos T-S por el enfoque de sector no lineal. En la Figura 3.5 se aprecia de una forma visual lo que se desarrollará en esta sección. Cabe resaltar que la variable premisa del sistema estará alimentada por la señal saturada, ya que este representa la restricción física del rehabilitador.

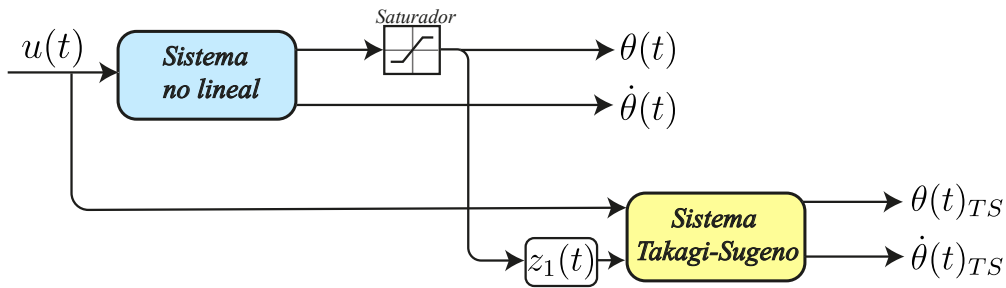


Figura 3.5: Diagrama sistema no lineal y presentación Takagi-Sugeno.

1. Partiendo de las ecuaciones diferenciales mostradas en (3.16) la representación del sistema no lineal en su forma matricial es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g \cos(\theta(t))}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}}_{A(x(t))} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\tau(t)}_{u(t)} \\
 \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

se puede observar en (3.17) que existe un término no linealidad en la matriz $A(x(t))$, por lo tanto, se tiene una variable premisa:

$$z_1 = \frac{\cos(\theta(t))}{\theta(t)} \tag{3.18}$$

La variable premisa z_1 presenta una singularidad cuando $\theta(t) = 0^\circ$. Considerando que el rango de operación del rehabilitador es entre $\theta(t) \in [8^\circ, 150^\circ]$ dicha singularidad nunca se obtendrá, ya que no se encuentra en el rango de operación del rehabilitador.

2. Se define la entrada del sistema, la cual se muestra en la Figura 3.3 para obtener el rango máximo y mínimo de variación de la variable premisa. En la Figura 3.6 se puede observar el comportamiento de la variable premisa respecto al tiempo.

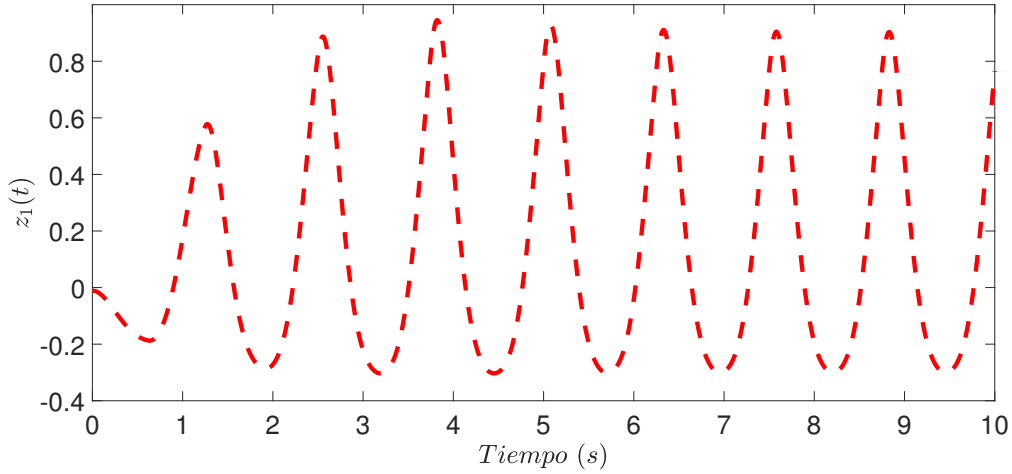


Figura 3.6: Variable premisa.

Entonces, tras realizar la simulación numérica, los máximos y mínimos de las variables premisas quedan definidas de la siguiente forma:

$$z_1(t) \in [-0,3032 \quad 0,9452] \quad (3.19)$$

3. Posteriormente, se calculan las dos funciones de ponderación correspondientes a la variable premisa:

$$\begin{aligned} \eta_0^1(z_1) &= \frac{\bar{z}_1 - z_1(t)}{\bar{z}_1 - \underline{z}_1} = \frac{0,9452 - z_1(t)}{1,2484} \\ \eta_1^1(z_1) &= 1 - \eta_0^1(z_1) \end{aligned} \quad (3.20)$$

4. Continuando con la metodología, se definen las funciones de pertenencia de cada modelo local:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \eta_0^1(z_1) \\ \varphi_2(t) &= \eta_1^1(z_1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

5. Finalmente, se construye el sistema T-S con la estructura de la Ecuación (3.13).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t)) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t)\end{aligned}\tag{3.22}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de la variable medida de salida. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ son matrices conocidas, k es el número de modelos locales, φ_i son las funciones de pertenencia que dependen de la variable premisa z .

Considerando los parámetros de la Tabla 3.1 las matrices A_i y B, C de los sistemas locales son:

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \underline{z_1} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7,0819 & -1,7007 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8345 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \underline{z_1} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 22,0772 & -1,7007 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.23}$$

Al analizar los modelos locales mostrados en (3.23) con la entrada mostrada en la Figura 3.4 se observa que un solo modelo local no es capaz de reconstruir la dinámica del robot rehabilitador. Este análisis es mostrado con mayor detalle en el Anexo A donde se muestran dos simulaciones con el objetivo de documentar y demostrar que un solo modelo local no es capaz de reproducir la dinámica del robot rehabilitador.

3.3.1. Simulación del modelo no lineal por modelos Takagi-Sugeno

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es validar la representación del sistema por modelos T-S previamente construido y compararlo con el modelo no lineal del robot rehabilitador de rodilla. Es importante mencionar que estas simulaciones son en lazo abierto.

Considerando la entrada mostrada en la Figura 3.3 y un tiempo de simulación de 10 s. Se obtienen las gráficas de la Figura 3.7, en líneas azules se muestra el comportamiento de la posición angular del eslabón del rehabilitador, en línea roja la velocidad angular del eslabón del rehabilitador y en color negro las mismas variables, pero correspondientes al sistema T-S.

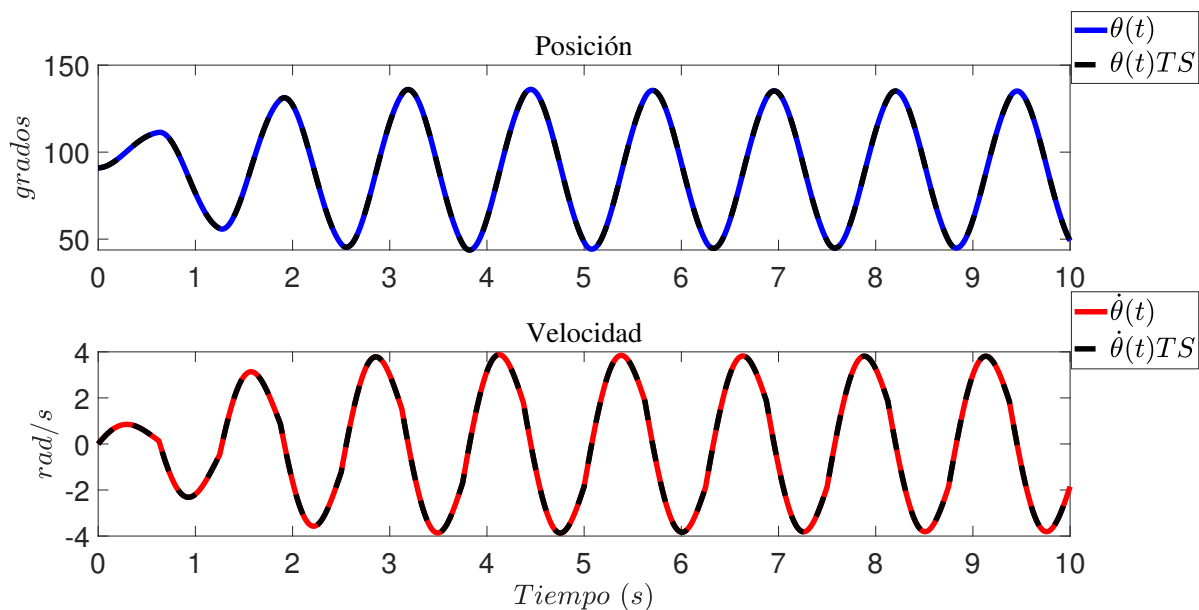


Figura 3.7: Comparación de las variables de estado en su representación no lineal y su representación por modelos T-S.

Como se puede observar, el modelo T-S (Ecuación (3.22)) sigue fielmente el comportamiento del modelo no lineal del rehabilitador. Por lo que podemos concluir que la representación y validación del sistema fue correcta.

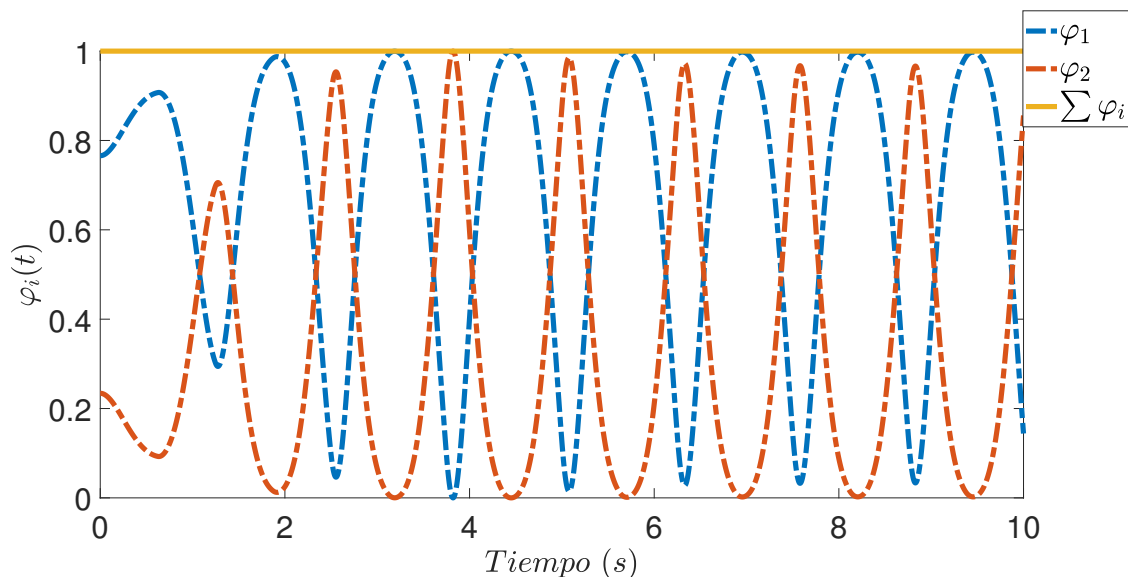


Figura 3.8: Funciones de pertenencia.

La Figura 3.8 muestra el comportamiento de las 2 funciones de pertenencia respecto al tiempo y la sumatoria de estas. Las cuales se definieron para construir el modelo T-S. Como se puede observar en la gráfica las propiedades de la Ecuación (2.9) se cumplen, ya que las funciones de pertenencia se encuentran variando entre el rango de 0 a 1 y la sumatoria de ambas funciones es igual a 1.

3.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó el robot rehabilitador con el que se trabaja a lo largo de esta investigación. El cual es, un robot rehabilitador de rodilla, se escogió esta extremidad porque es una de las articulaciones que sufre más lesiones sin importar el rango de edad de la persona afectada. Este rehabilitador posee un solo grado de libertad. Para la obtención del modelo dinámico que describe el comportamiento del rehabilitador se aplicó, el formulismo Euler-Lagrange, ya que de acuerdo a los estudios hechos esta metodología es aplicada a los robots, independientemente del uso o aplicación que se le dé al robot.

Una vez obtenido el modelo dinámico del robot rehabilitador, en cuyo caso es no lineal, se procedió a realizar la simulación del sistema en lazo abierto, para observar el comportamiento de este y posteriormente obtener la representación del sistema por modelos Takagi-Sugeno, aplicando la metodología del enfoque de sector no lineal. La comparación de las respuestas del modelo no lineal y del modelo T-S nos muestran que la representación multimodelos fue correctamente elaborada, ya que el modelo T-S sigue fielmente la dinámica del modelo no lineal.

Capítulo 4

Diseño del observador proporcional integral para sistemas Takagi-Sugeno

4.1. Objetivo de diseño

En el sistema del rehabilitador se asume que solo se tiene como variable de estado medible a la posición angular $\theta(t)$ y que al evaluar los modelos locales del sistema en su forma T-S (Ecuación (3.23)) el rehabilitador cumple con la propiedad de observabilidad mostrada en la Ecuación (2.28), es por ello que se plantea el desarrollo de un observador del tipo proporcional integral de orden completo, ya que este permite minimizar el error de estimación en estado estacionario.

4.2. Diseño del observador proporcional integral

El observador proporcional integral (PIO) permite obtener la estimación de las variables de estado medibles y no medibles, para poder ser utilizadas en la conformación de una ley de control. El sistema T-S que describe al rehabilitador de rodilla es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t)) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Por lo tanto, la estructura del PIO aplicado al sistema T-S es la siguiente:

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t)) + J u(t) \quad (4.2)$$

$$\dot{v}(t) = y(t) - C \hat{x}(t) \quad (4.3)$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + Q y(t) \quad (4.4)$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector del observador, $v(t) \in \mathbb{R}^q$ es un vector auxiliar y $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de $x(t)$. Las matrices N_i, H_i, F_i, J y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas que son determinadas de forma tal que $\hat{x}(t)$ converja asintóticamente a $x(t)$. En la Figura. 4.1 se muestra el diagrama a bloques de la conexión entre el sistema y el PIO.

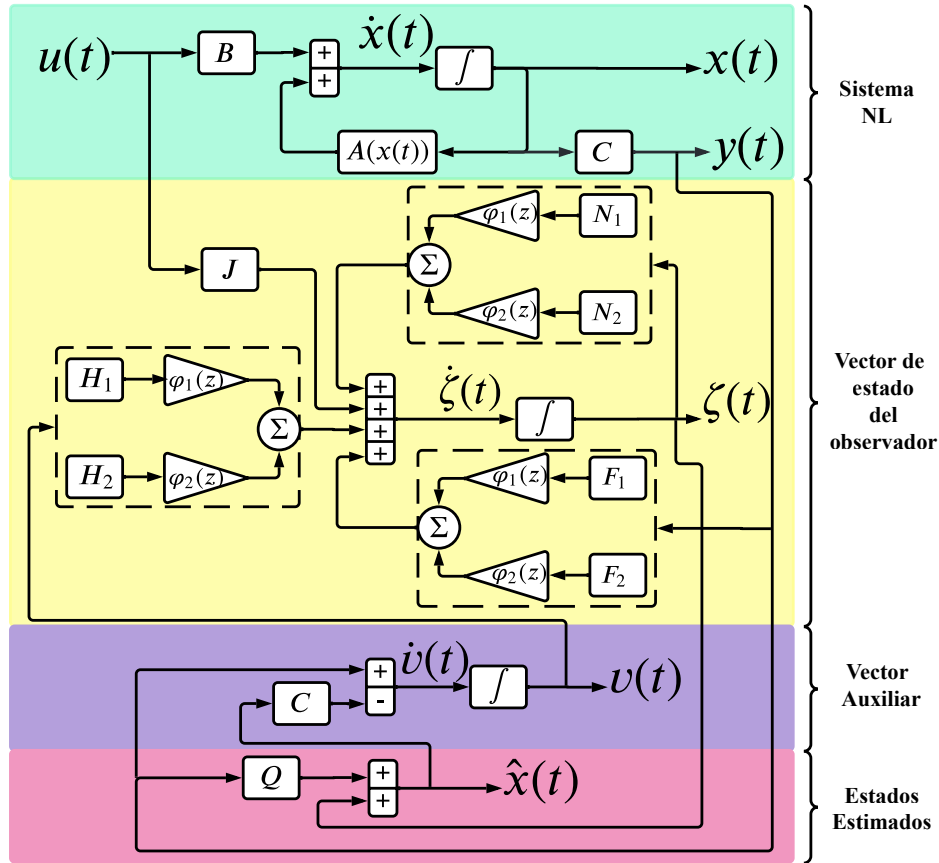


Figura 4.1: Diagrama a bloques del observador proporcional integral T-S.

Para el diseño del observador, se define la ecuación del error de estimación como:

$$\begin{aligned} e(t) &= \hat{x}(t) - x(t) \\ &= \zeta(t) - (I_n - QC)x(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $(I_n - QC)$ se define como una matriz $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de modo que el error de estimación

puede ser expresado como:

$$e(t) = \zeta(t) - Tx(t) \quad (4.6)$$

despejando $\zeta(t)$ se tiene:

$$\zeta(t) = e(t) + Tx(t) \quad (4.7)$$

derivando la Ecuación (4.6) y sustituyendo la Ecuación (4.7), se obtiene la dinámica del error de estimación como

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\zeta}(t) - T\dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) [N_i\zeta(t) + H_iv(t) + F_iy(t)] + Ju(t) - T \left[\sum_{i=1}^k \varphi_i(z) [A_ix(t)] + Bu(t) \right] \\ \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) [N_i\zeta(t) + H_iv(t) + F_iy(t) - TA_ix(t)] + Ju(t) - TBu(t) \\ \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) [N_ie(t) + H_iv(t) + (N_iT + F_iC - TA_i)x(t)] + (J - TB)u(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

reescribiendo la Ecuación (4.3), usando la definición del error $e(t)$ de la Ecuación (4.5) entonces,

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= y(t) - C\hat{x}(t) \\ \dot{v}(t) &= Cx(t) - C\hat{x}(t) \\ \dot{v}(t) &= -Ce(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Suponiendo que se cumplen las siguientes condiciones, obtenidas de la definición de la matriz T y la Ecuación (4.8)

$$T + QC = I_n \quad (4.10a)$$

$$N_iT + F_iC - TA_i = 0 \quad (4.10b)$$

$$J = TB \quad (4.10c)$$

Entonces, la dinámica del error de estimación, formada por las Ecuaciones (4.8) y (4.9), puede reescribirse como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\beta}(t)} = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\beta(t)} \quad (4.11)$$

Si la matriz \mathbb{A}_i es estable, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, por lo tanto, $\hat{x}(t) = x(t)$ en un tiempo finito. Ahora bien, el problema del diseño del PIO se reduce a determinar las matrices N_i, H_i, F_i, J y Q de tal forma que las condiciones de la Ecuación (4.10a – 4.10c) se cumplan.

4.3. Parametrización del observador

En esta sección se presenta la parametrización de las matrices del observador proporcional integral utilizando las condiciones algebraicas de las Ecuaciones (4.10a – 4.10c).

Definición 4.1. (*Osorio, 2015*) Considere la siguiente ecuación de un sistema no homogéneo

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B} \quad (4.12)$$

donde \mathcal{A} , \mathcal{B} son matrices constantes de dimensiones apropiadas y \mathcal{X} es el vector a determinar. La Ecuación (4.12) admite una solución, si y sólo si

$$\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

en este caso, la solución general de la Ecuación (4.12) está dada por:

$$\mathcal{X} = \mathcal{A}^+ \mathcal{B} - (I - \mathcal{A}^+ \mathcal{A}) \mathcal{Z} \quad (4.14)$$

donde \mathcal{Z} es una matriz con elementos arbitrarios y \mathcal{A}^+ es la pseudoinversa de Moore-Penrose. De forma equivalente para un sistema con la forma $\mathcal{X}\mathcal{A} = \mathcal{B}$, la condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución es:

$$\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

en este caso, la solución general está dada por:

$$\mathcal{X} = \mathcal{B}\mathcal{A}^+ - \mathcal{Y}(I - \mathcal{A}\mathcal{A}^+) \quad (4.16)$$

donde \mathcal{Y} es una matriz con elementos arbitrarios.

Tomando la condición de la Ecuación (4.10a) escrita de la forma,

$$\begin{bmatrix} T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (4.17)$$

y considerando una matriz $\Sigma = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$ la Ecuación (4.17) se reescribe como:

$$\begin{bmatrix} T & Q \end{bmatrix} \Sigma = I_n \quad (4.18)$$

De acuerdo con la Definición 4.1, la solución general de (4.18) está dada por

$$\begin{bmatrix} T & Q \end{bmatrix} = \Sigma^+ - \mathbf{Y} (I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+) \quad (4.19)$$

donde \mathbf{Y} es una matriz de elementos arbitrarios y Σ^+ es la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose de Σ . Para obtener la matriz T se despeja de (4.19), obteniendo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} &= \left[\Sigma^+ - \mathbf{Y} (I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+) \right] \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \\ T &= \underbrace{\Sigma^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{T_1} - \underbrace{\mathbf{Y} (I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{T_2} \\ T &= T_1 - \mathbf{Y} T_2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

despejando de (4.19) la matriz Q , se obtiene:

$$\begin{aligned} Q &= \underbrace{\Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}}_{Q_1} - \underbrace{\mathbf{Y} (I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}}_{Q_2} \\ Q &= Q_1 - \mathbf{Y} Q_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Tomando la condición (4.10b) y considerando la definición de T mostrada en (4.20) se tiene que:

$$\begin{aligned} N_i &= \underbrace{(N_i Q - F_i)}_{K_i} C + T A_i \\ N_i &= K_i C + T_1 A_i - \mathbf{Y} T_2 A_i \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde $K_i = N_i Q - F_i$ despejando F_i , se obtiene:

$$F_i = N_i Q - K_i \quad (4.23)$$

reemplazando la Ecuación (4.22) en el error dinámico del observador (4.11) se puede reescribir como:

$$\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \beta(t) \quad (4.24)$$

donde $\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} T_1 A_i - \mathbf{Y} T_2 A_i & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{Y}_i = \Omega \begin{bmatrix} K_i & H_i \end{bmatrix}$, y $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$, tal que $\Omega = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$.

El problema para el diseño del PIO se reduce a determinar la matriz Y y los parámetros de la matriz \mathbb{Y}_i , tal que (4.24) sea estable.

4.4. Análisis de estabilidad del observador

En esta sección se presenta el análisis de estabilidad del PIO basado en Lyapunov, con el cual a través de la resolución de LMI's se obtendrán las matrices Y , \mathbb{Y}_i que hasta el momento son desconocidas. Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$V(\beta(t)) = \beta(t)^T X \beta(t) > 0 \quad (4.25)$$

donde $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$ y $X_1 = X_1^T$ con $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $X_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$. Derivando (4.25) se obtiene:

$$\dot{V}(\beta(t)) = \dot{\beta}(t)^T X \beta(t) + \beta(t)^T X \dot{\beta}(t) < 0 \quad (4.26)$$

Sustituyendo (4.24) en (4.26):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\beta(t)) &= \beta(t)^T \left[(\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X + X (\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \right] \beta(t) < 0 \\ &= \beta(t)^T \left[\mathbb{A}_{1i}^T X + \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T X + X \mathbb{A}_{1i} + X \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 \right] \beta(t) < 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

la desigualdad $\dot{V}(\beta(t)) < 0$ es válido para toda $\beta(t) \neq 0$, si y sólo si, la siguiente LMI se cumple,

$$\mathbb{A}_{1i}^T X + \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T X + X \mathbb{A}_{1i} + X \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (4.28)$$

Las matrices desconocidas en (4.28) son: X y \mathbb{Y}_i , por lo que existe una bilinealidad, es por ello que se agrupan en $\mathbb{W}_i = X \mathbb{Y}_i$, entonces

$$\mathbb{A}_{1i}^T X + \mathbb{A}_2^T \mathbb{W}_i^T + X \mathbb{A}_{1i} + \mathbb{W}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (4.29)$$

Recordemos que, dentro de la matriz \mathbb{A}_{1i} se desconoce la matriz Y , por lo que el producto de

$$X \mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} X_1 T_1 A_i - X_1 Y T_2 A_i & 0 \\ -X_2 C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

dentro de esta matriz existe una bilinealidad generada por, Y y X_1 por lo que se reagrupan en $D = X_1 Y$. Por lo tanto, la desigualdad (4.29) queda expresada de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_i^T T_1^T X_1^T - A_i^T T_2^T D^T & -C^T X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{A}_2^T \mathbb{W}_i^T + \begin{bmatrix} X_1 T_1 A_i - D T_2 A_i & 0 \\ -X_2 C & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{W}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (4.31)$$

Para el cálculo de las matrices desconocidas se tiene:

$$Y = X_1^{-1}D \quad (4.32)$$

$$\mathbb{Y}_i = X^{-1}\mathbb{W}_i \quad (4.33)$$

Despejando de $\mathbb{Y}_i = \Omega \begin{bmatrix} K_i & H_i \end{bmatrix}$ las matrices K_i y H_i se obtiene:

$$\begin{bmatrix} K_i & H_i \end{bmatrix} = \Omega^+ \mathbb{Y}_i \quad (4.34)$$

donde,

$$\begin{aligned} K_i &= \Omega^+ \mathbb{Y}_i \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \\ H_i &= \Omega^+ \mathbb{Y}_i \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Con base en el análisis hecho, la determinación de las matrices N_i y F_i son obtenidas de la solución de (4.22) y (4.23). La matriz H_i y K_i están deducidas en (4.35), las matrices T y Q se obtienen de la solución de (4.20) y (4.21). La matriz Y está definida en (4.32) y finalmente J está deducida en la consideración (4.10c).

4.5. Región LMI

Con la finalidad de que el observador respete la región de operación de las variables a estimar del rehabilitador, se aplica una región LMI del tipo vertical en el análisis de estabilidad del observador mostrado en la Sección 4.4.

Definición 4.2. (*Bernal et al., 2019*) *Un subconjunto \mathcal{D} del plano complejo es llamado región LMI si existe una matriz simétrica $\alpha = \alpha^T$ y una matriz \mathcal{K} tal que:*

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{D}}(s) < 0\} \quad (4.36)$$

donde

$$f_{\mathcal{D}}(s) = \alpha + s\mathcal{K} + s^*\mathcal{K}^T \quad (4.37)$$

La notación s^* denota el valor conjugado de s . $f_{\mathcal{D}}(s)$ se llama función característica de \mathcal{D} .

Teorema 4.1. (*Bernal et al., 2019*) Se establece que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es \mathcal{D} -estable (tiene todos sus eigenvalores en la región \mathcal{D}) si y sólo si existe una matriz $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:

$$\alpha \otimes P + \mathcal{K} \otimes (AP) + \mathcal{K}^T \otimes (AP)^T < 0, \quad P > 0 \quad (4.38)$$

el operador \otimes indica el producto de Kronecker. Note que la relación entre la Ecuación (4.38) y la función $f_{\mathcal{D}}(s)$ está dada por $(P, AP, PA^T) \leftrightarrow (1, s, s^*)$

Definición 4.3. (*Bernal et al., 2019*) Una región LMI del tipo vertical, toma todo el semiplano complejo a la izquierda de un valor δ (Figura 4.2).

$$\mathcal{D}_1 = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) < -\delta \Leftrightarrow f_{\mathcal{D}_1}(s) = \alpha + s + s^* < 0\} \quad (4.39)$$

esta región LMI implica $\alpha = 2\delta$ y $\mathcal{K} = 1$, entonces la Ecuación (4.38) es:

$$2\delta \otimes P + 1 \otimes (AP) + 1 \otimes (AP)^T = 2\delta P + AP + PA^T < 0, \quad P > 0 \quad (4.40)$$

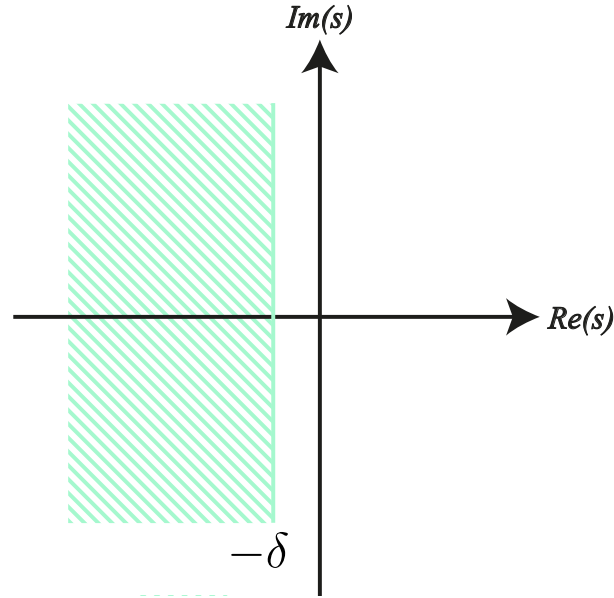


Figura 4.2: Región LMI vertical \mathcal{D}_1 .

Aplicando de la Definición 4.3 a la desigualdad de Lyapunov mostrada en la Ecuación (4.31), se obtiene

$$\begin{bmatrix} A_i^T T_1^T X_1^T - A_i^T T_2^T D^T & -C^T X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{A}_2^T \mathbb{W}_i^T + \begin{bmatrix} X_1 T_1 A_i - D T_2 A_i & 0 \\ -X_2 C & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{W}_i \mathbb{A}_2 + 2\delta X < 0 \quad (4.41)$$

Esta LMI es programada en Matlab 2020b y resuelta por medio de la herramienta Yalmip ([Löfberg, 2004](#)) versión R20200930 con un $\delta = 100$. Una vez programadas las LMI's se

obtuvieron las siguientes ganancias.

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} 4,0278 \times 10^6 & -1,2838 \times 10^{-8} & 0 \\ -1,2838 \times 10^{-8} & 4,0278 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 4,0278 \times 10^6 \end{bmatrix}, \\
 N_1 = N_2 &= \begin{bmatrix} -100,5 & -3,498815 \\ 3,498815 & -100,5 \end{bmatrix}, \\
 H_1 = H_2 &= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5937 \times 10^{-15} \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} -697,31152 \\ -9924,1718 \end{bmatrix}, \\
 F_2 &= \begin{bmatrix} -697,31152 \\ -9895,0128 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8345 \end{bmatrix}, \\
 Q &= \begin{bmatrix} 4,49882 \\ 98,7993 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} -3,49882 & 0 \\ -98,7993 & 1 \end{bmatrix} \\
 K_1 &= \begin{bmatrix} -100,5 \\ 10,5807 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -100,5 \\ -18,57836 \end{bmatrix} \\
 Y &= \begin{bmatrix} 3,99882 & 0 & -3,99882 \\ 98,7993 & 0 & -98,7993 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

4.6. Validación del observador

En esta sección se presenta la validación del observador proporcional integral con estructura Takagi-Sugeno diseñada. En la Figura 4.3 se muestra la estructura de la simulación con la cual se validará el funcionamiento del observador proporcional integral en lazo abierto.

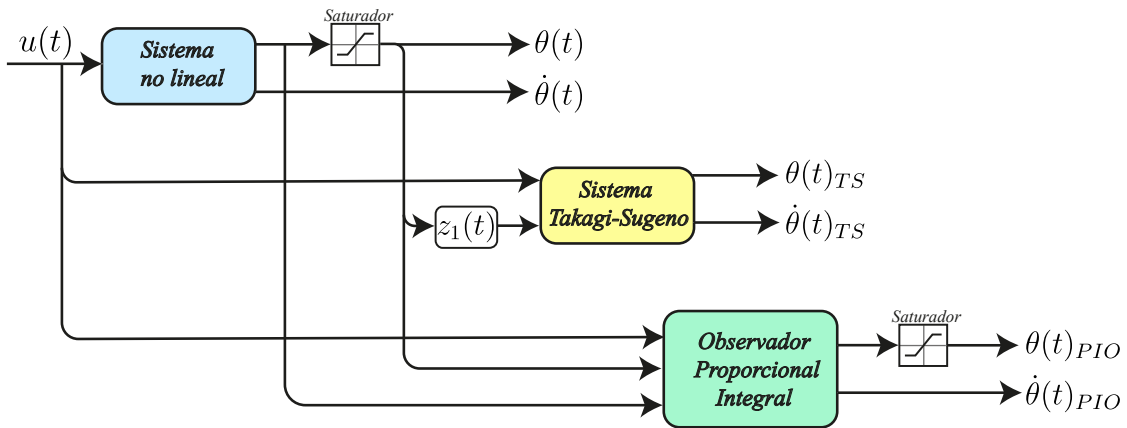


Figura 4.3: Diagrama del observador para la estimación de estados.

Como se había mencionado con anterioridad, el rehabilitador tiene una restricción física de movimiento es por ello, que en la simulación, se representa con un saturador, ya que dicha

restricción física no está considerada en el modelo. Por lo tanto, este mismo saturador se aplica al observador. El observador es alimentado con la entrada $u(t)$, con la variable premisa y con la salida del modelo no lineal sin saturar, puesto que el observador opera directamente con el modelo no lineal.

4.6.1. Simulación del observador proporcional integral

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar por medios de índices de desempeño, que el observador proporcional integral de orden completo estima de forma correcta los estados del sistema en estado estacionario.

La simulación del PIO, aplicado al sistema T-S (3.22) se desarrolló con los parámetros mostrados en la Tabla 3.1. Las condiciones iniciales consideradas en el sistema no lineal y en el modelo T-S son $x(t) = [91^\circ \ 0 \text{ rad/s}]^T$, en el PIO son $\hat{x}(t) = [0^\circ \ 0 \text{ rad/s}]^T$ con la señal de entrada mostrada en la Figura 4.4. Las matrices con las cuales se construyó el observador con la región LMI $\delta = 100$ se muestran en la Ecuación 4.42 .

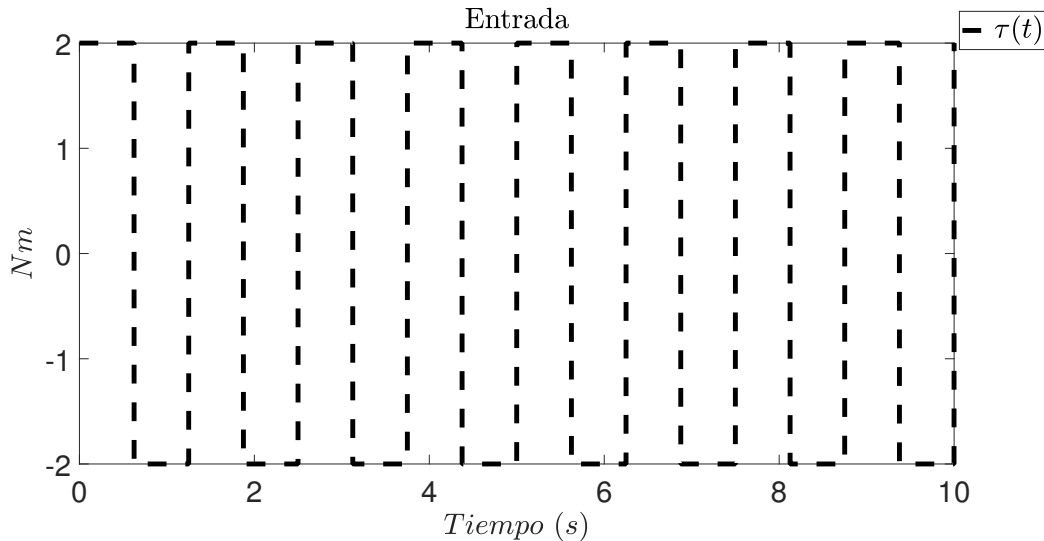


Figura 4.4: Entrada implementada en la simulación del PIO en lazo abierto.

Como se puede apreciar en la Figura 4.5, en color azul se muestra el comportamiento del sistema no lineal, en color negro el sistema T-S y en color rojo se muestra el comportamiento del PIO al estimar las variables de estados del sistema. A partir del instante de tiempo $t > 0,18 \text{ s}$ el observador converge al sistema no lineal y a la representación T-S en la variable de posición angular $\theta(t)$ del eslabón del rehabilitador. En cuanto a la velocidad angular $\dot{\theta}(t)$ a partir de $t > 0,1 \text{ s}$ el observador converge al comportamiento de ambas representaciones.

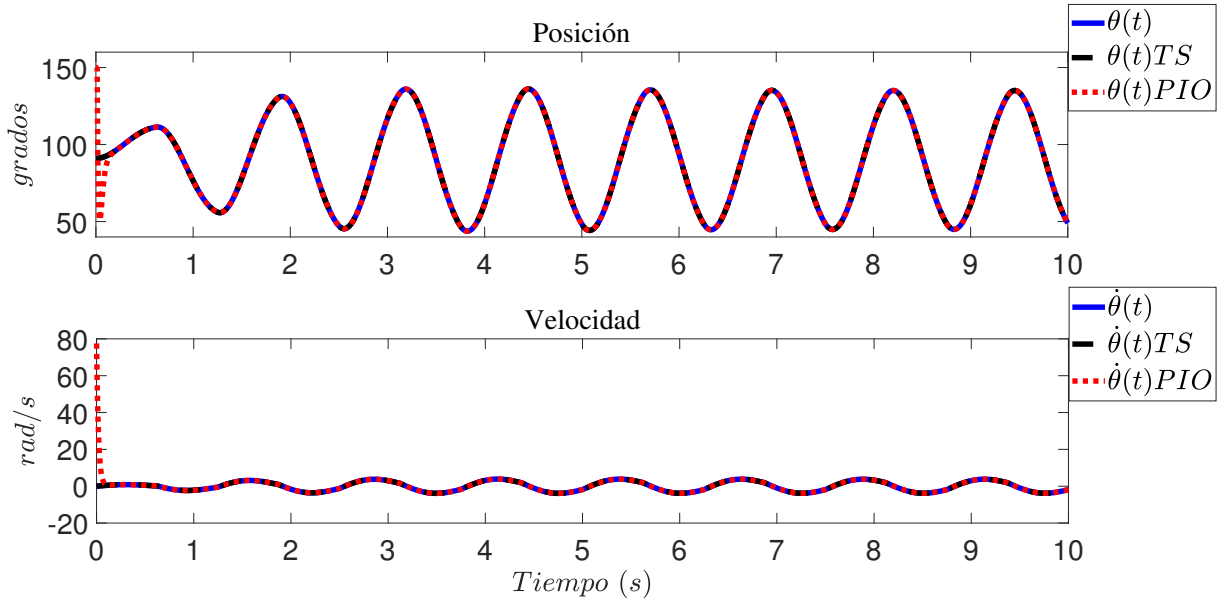


Figura 4.5: Estimación de los estados del sistema.

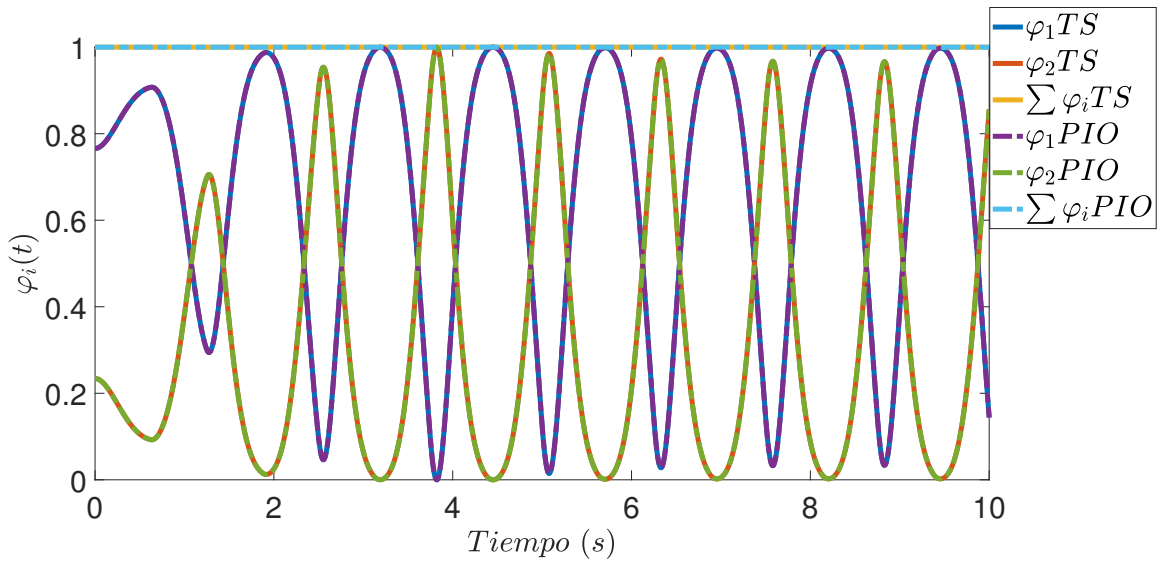


Figura 4.6: Funciones de pertenencia del sistema T-S y el PIO.

En la Figura 4.6 se muestra el comportamiento de las funciones de pertenencia del observador proporcional integral con estructura Takagi-Sugeno y las funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno. Como se puede apreciar el observador cumple con la propiedad de la Ecuación (2.9) al igual que el sistema Takagi-Sugeno.

Definición 4.4. Índices de desempeño (*Åström and Hägglund, 2006*) Una de las formas cuantitativas de caracterizar el error es, la integral del error absoluto.

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (4.43)$$

El criterio IAE es el índice mayormente aplicado, el inconveniente es que requiere la simulación de un sistema por largos lapsos de tiempo. Además de que no puede optimizar sistemas altamente sub y sobre amortiguados.

La integral del error cuadrático,

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (4.44)$$

Es fácil de calcular. Sin embargo, tiene la desventaja de otorgar mayor peso a los errores grandes, lo que a menudo conduce a un lazo de control mal amortiguado.

Los índices como IAE y ISE son usados para caracterizar las respuestas del error en un tiempo inicial respecto a una referencia. Por lo que es necesario tener criterios que le den poco peso al error inicial. Se ha encontrado que los índices:

La integral del tiempo por el error absoluto,

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt \quad (4.45)$$

penaliza fuertemente los errores tardíos.

La integral del tiempo por el error cuadrático,

$$ITSE = \int_0^{\infty} te(t)^2 dt \quad (4.46)$$

los grandes errores iniciales tienen poco peso, pero los errores tardíos son fuertemente penados.

Los índices ITAE y ITSE son más adecuados para analizar el rendimiento del seguimiento de referencias. Estos índices poseen integrales infinitas solo si, el error en estado estable es cero.

Tabla 4.1: Índices de desempeño del observador y el sistema no lineal

	ISE	ITSE	IAE	ITAE
$\theta(t)$	112.2	3.381	3.155	0.2627
$\dot{\theta}(t)$	59.63	0.5905	1.535	0.03197

Al hacer una comparación del PIO contra el sistema no lineal por medio de índices de desempeño, como se muestra en la Tabla 4.1. Los índices de desempeño (Definición 4.4) ISE,

que es la integral del cuadrado del error y IAE, la integral del error, penalizan los errores en el estado transitorio debido a que analizan los primeros instantes de tiempo del error, como se muestra en Figura 4.5 el observador tiene un sobretiro en un instante de tiempo pequeño y posteriormente converge a las variables de estado, es por ellos que estos índices son elevados.

En cuanto a los índices ITSE, que es la integral del cuadrado del error por el tiempo y ITAE, la integral del error por el tiempo, penalizan los errores en estado estacionario, ya que el error es penalizado por el lapso de tiempo a evaluar. Estos índices son pequeños, lo que nos indica que el objetivo del diseño de dicho observador se cumple, puesto que, el observador converge a las variables de estado.

4.7. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó el diseño de un observador proporcional integral con estructura Takagi-Sugeno de orden completo, para la estimación de las variables de estado del rehabilitador de rodilla. De acuerdo a investigaciones hechas se optó por un observador de este tipo, ya que este posee más grados de libertad que los entregados por el observador clásico tipo Luenberger además que el observador proporcional integral minimiza el error de estimación en estado estacionario.

A lo largo de este capítulo se mostró el diseño, parametrización, análisis de estabilidad y validación del observador. El análisis de estabilidad fue hecho por medio de la resolución de LMI's. Para que la convergencia del observador se ajustara a la región de operación del rehabilitador se aplicó una región LMI del tipo vertical.

Podemos concluir que el diseño del observador proporcional integral cumple con su objetivo el cual es una correcta estimación de los estados del sistema los cuales son: posición y velocidad angular del robot rehabilitador de rodilla. Esto se puede corroborar por medio de los índices de desempeños aplicados a este, el observador de igual forma cumplió con el objetivo de minimización del error de estimación en estado estacionario y esto se logra apreciar con los índices ITSE e ITAE.

Capítulo 5

Diseño del controlador basado en el observador

5.1. Objetivo del diseño del controlador

Hasta el momento solo se ha analizado al rehabilitador de rodilla en lazo abierto, por lo que ahora es momento de cerrar el lazo para proceder a desarrollar el controlador. Es por ello, que se desarrollará el controlador del sistema con la finalidad de asignar una rutina de rehabilitación para el paciente.

Por lo que, se aplicará uno de los objetivos del control automático, el cual es el seguimiento de trayectoria, por medio del diseño de un controlador por retroalimentación de estados con acción integral, al cual se le introducirá una referencia *Ref* que será la señal que describe una rutina de rehabilitación, por consiguiente, el controlador determinará la ley de control idónea para el seguimiento de la rutina de rehabilitación.

La representación del robot rehabilitador de rodilla está por medio de modelos Takagi-Sugeno, los cuales son modelos locales lineales convexos. Este tipo de representación permite aplicar el principio de separación. Este principio posibilita el diseño de un controlador basado en los estados estimados por un observador. Además, que el diseño del controlador y el observador pueden desarrollarse de forma independiente. Esto comprobando que los pares (A_i, B) son completamente controlables y los pares (A_i, C) son completamente observables, para cada modelo local del sistema. En el caso del robot rehabilitador de rodilla estas condiciones se cumplen.

En otras palabras, el principio de separación indica que el error de estimación a partir del cual se contruye el observador no es controlable desde la señal de entrada en lazo cerrado del sistema, por lo que este no influye en los estados del sistema. Esto se puede apreciar con más detalle en la Sección B.2 del Anexo B.

5.2. Cálculo del controlador por retroalimentación de estados con acción integral

En esta sección, se presenta el diseño de un controlador basado en el observador por retroalimentación de estados con acción integral, con ganancias constantes.

El sistema T-S que describe al rehabilitador de rodilla es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t)) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

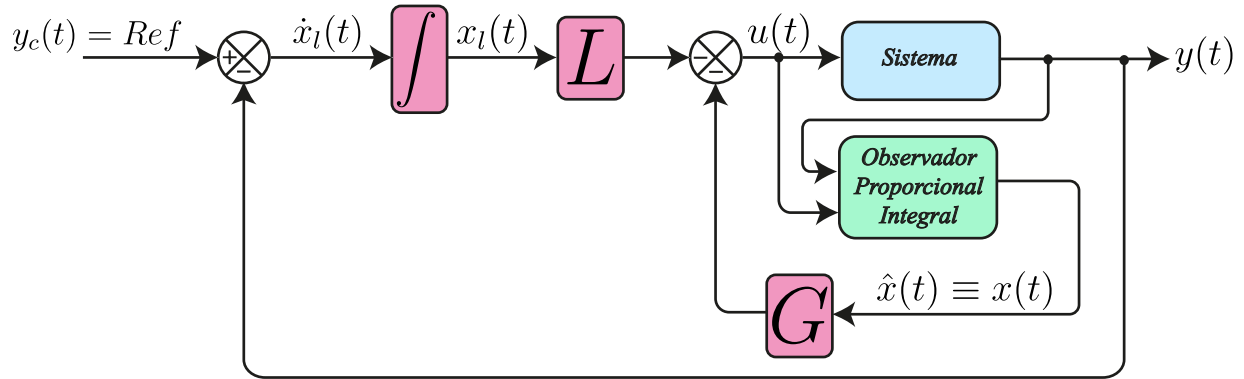


Figura 5.1: Esquema del controlador.

Tomando como referencia el esquema mostrado en la Figura 5.1 para el desarrollo de la ley de control se asume que $x(t) \equiv \hat{x}(t)$, por lo tanto, la ley de control se define como:

$$u(t) = -Gx(t) - Lx_l(t)\tag{5.2}$$

la Ecuación (5.2) se reescribe de la forma:

$$u(t) = - \begin{bmatrix} G & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix}\tag{5.3}$$

donde la integral del error está dada por:

$$x_l(t) = \int (y_c(t) - y(t))dt \quad (5.4)$$

cuya derivada es el error del seguimiento de trayectoria definido por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_l(t) &= y_c(t) - y(t) \\ &= y_c(t) - Cx(t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

La Ecuación (5.5) debe converger asintóticamente a cero.

Sustituyendo la ley de control (5.2) en el sistema T-S (5.1),

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t)) + B[-Gx(t) - Lx_l(t)] \\ \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i - BG)x(t) - BLx_l(t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Como se puede observar al sistema T-S (Ecuación (5.6)) se introduce un nuevo estado $x_l(t)$, por lo que, se reagrupan las Ecuaciones (5.5) y (5.6) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_l(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \begin{bmatrix} A_i - BG & -BL \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} y_c(t) \quad (5.7)$$

se puede reescribir como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_l(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\check{x}}(t)} = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\check{A}_i} - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\check{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} G & L \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix}}_{\check{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{\check{D}} y_c(t) \quad (5.8)$$

$$\dot{\check{x}}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(\check{A}_i - \check{B}\mathbb{K})\check{x}(t) + \check{D}y_c(t) \quad (5.9)$$

Ahora el problema a resolver es, calcular la matriz \mathbb{K} , tal que la Ecuación (5.9) en lazo cerrado sea estable.

5.3. Análisis de estabilidad del controlador

En esta sección se presenta el análisis de estabilidad del controlador por retroalimentación de estados con acción integral basado en Lyapunov, con el cual por medio de la resolución

de LMI's se obtendrá la matriz \mathbb{K} , que hasta ahora se desconoce. Por lo que, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$V(\check{x}(t)) = \check{x}(t)^T P \check{x}(t) > 0 \quad (5.10)$$

donde $P = P^T > 0$. Derivando (5.10) se obtiene:

$$\dot{V}(\check{x}(t)) = \dot{\check{x}}(t)^T P \check{x}(t) + \check{x}(t)^T P \dot{\check{x}}(t) < 0 \quad (5.11)$$

Sustituyendo (5.9) en (5.11):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\check{x}(t)) &= \check{x}(t)^T \left[(\check{A}_i - \check{B}\mathbb{K})^T P + P(\check{A}_i - \check{B}\mathbb{K}) \right] \check{x}(t) < 0 \\ &= \check{x}(t)^T \left[\check{A}_i^T P + P\check{A}_i - P\check{B}\mathbb{K} - \mathbb{K}^T \check{B}^T P \right] \check{x}(t) < 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para asegurar que la desigualdad $\dot{V}(\check{x}(t)) < 0$ para toda $\check{x}(t) \neq 0$, si y sólo si, la siguiente LMI se cumple,

$$\check{A}_i^T P + P\check{A}_i - P\check{B}\mathbb{K} - \mathbb{K}^T \check{B}^T P < 0 \quad (5.13)$$

dado que las matrices P y \mathbb{K} son matrices desconocidas, la expresión $P\check{B}\mathbb{K}$ es un término bilineal. Por lo que, se procede a pre-multiplicar y pos-multiplicar por P^{-1} y su elemento complementario P^{-T} de forma que no se altere la negatividad de la desigualdad, obteniendo

$$P^{-1} \left(\check{A}_i^T P + P\check{A}_i - P\check{B}\mathbb{K} - \mathbb{K}^T \check{B}^T P \right) P^{-T} < 0 \quad (5.14)$$

si consideramos $P = P^T > 0$, entonces

$$P^{-1} \check{A}_i^T + \check{A}_i P^{-1} - \check{B}\mathbb{K}P^{-1} - P^{-1}\mathbb{K}^T \check{B}^T < 0 \quad (5.15)$$

Entonces, se puede hacer el siguiente cambio de variables para expresar (5.15) como una LMI:

$$S = P^{-1}, \quad R = \mathbb{K}S \quad (5.16)$$

Por lo tanto,

$$S\check{A}_i^T + \check{A}_i S - \check{B}R - R^T \check{B}^T < 0 \quad (5.17)$$

Así resolviendo la desigualdad (5.17), se obtienen las matrices S y R las cuales nos permiten calcular la ganancia \mathbb{K} del controlador, la cual está dado por:

$$\mathbb{K} = RS^{-1} \quad (5.18)$$

donde,

$$\begin{bmatrix} G & L \end{bmatrix} = RS^{-1} \quad (5.19)$$

despejando las matrices G y L , tenemos:

$$\begin{aligned} G &= RS^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \\ L &= RS^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Con la finalidad de que el controlador respete la región de operación del rehabilitador, se aplica una región LMI del tipo vertical (Definición (4.3)) a la desigualdad de Lyapunov mostrada en la Ecuación (5.17), obteniendo

$$S\check{A}_i^T + \check{A}_i S - \check{B}R - R^T\check{B}^T + 2\sigma S < 0 \quad (5.21)$$

5.4. Aplicación de restricción de entrada en el sistema

Definición 5.1. Complemento de Schur ([Bernal et al., 2019](#)): Esta propiedad permite convertir expresiones que, en primera instancia, parecen no lineales en expresiones matriciales lineales.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} - \mathcal{R}^T\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{R} > 0 \\ \mathcal{Q} > 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{R}^T \\ \mathcal{R} & \mathcal{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.22)$$

Debido a que ninguna planta física dispone de energía ilimitada para realizar tareas de control, de tal forma, que respetar restricciones en este sentido es importante. En esta sección se presentará una estrategia para restringir la magnitud de la señal de entrada al controlador por medio de LMI's.

Utilizaremos la Definición 2.6 para acotar la ley de control $u(t)$ (Ecuación (5.2)), es decir, se busca que $\|u(t)\| < \mu$ para una $\mu > 0$ donde μ es una constante positiva.

La condición $\|u(t)\| < \mu$ con la ley de control $u(t) = \mathbb{K}\check{x}(t)$ puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| < \mu &\Leftrightarrow \|u(t)\|^2 = u(t)^T u(t) \\ &= \check{x}(t)^T \mathbb{K}^T \mathbb{K} \check{x}(t) \leq \mu^2 \Leftrightarrow \check{x}(t)^T \mathbb{K}^T \mu^{-2} \mathbb{K} \check{x}(t) \leq 1 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Retomando la Ecuación (5.10) la cual nos permite definir la estabilidad en el controlador y que además satisfaga las siguientes condiciones para una condición inicial conocida $\check{x}(0)$

dicha condición inicial se puede proponer. Entonces se tiene:

$$V(\check{x}(t)) = \check{x}(t)^T P \check{x}(t) \leq \check{x}(0)^T P \check{x}(0) \leq 1 \quad (5.24)$$

Debido a que la matriz \mathbb{K} y P se calculan, las desigualdad (5.23) y (5.24) pueden combinarse, por lo tanto,

$$\check{x}(t)^T \mathbb{K}^T \mu^{-2} \mathbb{K} \check{x}(t) \leq \check{x}(t)^T P \check{x}(t) \leq \check{x}(0)^T P \check{x}(0) \leq 1 \quad (5.25)$$

que es equivalente a:

$$\begin{cases} \check{x}(t)^T (P - \mathbb{K}^T \mu^{-2} \mathbb{K}) \check{x}(t) \geq 0 \\ 1 - \check{x}(0)^T P \check{x}(0) \geq 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

Aplicando el complemento de Schur (Definición 5.1) a las LMI's de la Ecuación (5.26) se tienen las siguientes desigualdades equivalentes:

$$\begin{bmatrix} P & \mathbb{K}^T \\ \mathbb{K} & \mu^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.27)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \check{x}(0)^T \\ \check{x}(0) & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.28)$$

Como estas LMI's se van a revolver junto con la LMI (5.21), es necesario que estas desigualdades se expresen en términos de las variables: S y R mostradas en la Ecuación (5.16). Por lo tanto, se pre-multiplica y pos-multiplica por $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Obteniendo,

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1} \mathbb{K}^T \\ \mathbb{K} P^{-1} & \mu^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.29)$$

Haciendo el cambio de variable para las LMI's (5.29) y (5.28) quedan expresadas como:

$$\begin{bmatrix} S & R^T \\ R & \mu^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.30)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \check{x}(0)^T \\ \check{x}(0) & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.31)$$

Estas LMI's se deben de cumplir para garantizar $\|u(t)\| < \mu$.

5.5. Validación del controlador basado en el observador

En esta sección se presenta la validación del controlador por retroalimentación de estados con acción integral con ganancias globales basado en el observador proporcional integral desarrollado en el Capítulo 4.

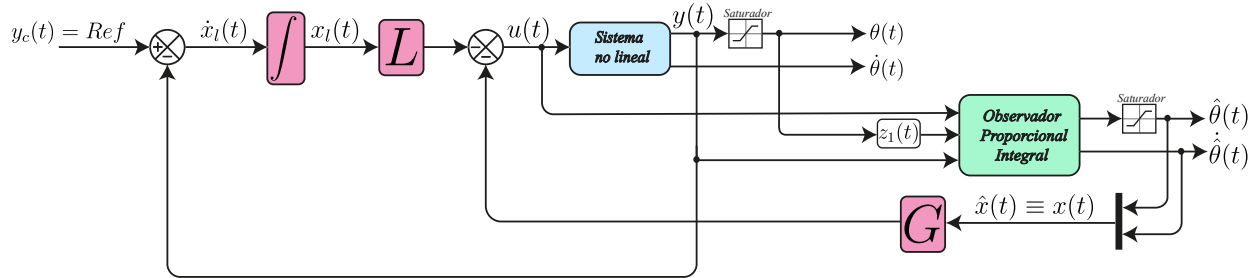


Figura 5.2: Diagrama a bloques de la simulación del controlador por retroalimentación de estados con acción integral basado en el PIO.

La simulación se desarrolló en Simulink, con un paso de integración de 0.001 s se consideró un tiempo de simulación de 400 s. Las condiciones iniciales consideradas en el sistema no lineal son $x(t) = [91^\circ \ 0 \text{ rad/s}]^T$, en el PIO son $\hat{x}(t) = [0^\circ \ 0 \text{ rad/s}]^T$. En la Figura 5.2 se muestra la estructura de la simulación con la cual se validará el funcionamiento del controlador basado en el observador.

En la Sección 3.3 se validó la representación del rehabilitador de rodilla por modelos Takagi-Sugeno, gracias a este se pudo diseñar el observador proporcional integral. Ahora bien, para poder diseñar el controlador es necesario ajustar los máximos y mínimos de operación de la variable premisa $z_1(t)$ esto con la finalidad de darle un rango de operación al rehabilitador de 8° a 150° es por ello que se requiere volver a calcular las ganancias del PIO.

Los máximos y mínimos de la variable premisa, Ecuación (3.19) quedan definidos de la siguiente forma:

$$z_1(t) \in [-0,346605 \ 7,446915] \quad (5.32)$$

Por lo tanto, considerando los parámetros de la Tabla 3.1 las matrices A_i y B de los sistemas locales son los siguientes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8,0957 & -1,7007 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8345 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 173,9387 & -1,7007 \end{bmatrix}$$

Al volver a calcular las ganancias del PIO (Ecuación (4.41)) por medio de Yalmip con una región LMI del tipo vertical con un $\delta = 100$ la cual es la constante a partir del cual Yalmip buscara darle solución a la LMI mostrada en la Ecuación (4.41). Se obtuvieron las siguientes ganancias:

$$\begin{aligned}
X &= \begin{bmatrix} 3,4271 \times 10^6 & -1,1408 \times 10^{-7} & 0 \\ -1,1408 \times 10^{-7} & 3,4271 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 3,4271 \times 10^6 \end{bmatrix}, \\
N_1 = N_2 &= \begin{bmatrix} -100,5 & -41,21073 \\ 41,21073 & -100,5 \end{bmatrix}, \\
H_1 = H_2 &= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} -8213,2707 \\ -8239,103 \end{bmatrix}, \\
F_2 &= \begin{bmatrix} -8213,2707 \\ -8057,0686 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8345 \end{bmatrix}, \\
Q &= \begin{bmatrix} 42,2107 \\ 98,7993 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} -41,2107 & 0 \\ -98,7993 & 1 \end{bmatrix}, \\
K_1 &= \begin{bmatrix} -100,5 \\ 49,30643 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -100,5 \\ -132,7279 \end{bmatrix}, \\
Y &= \begin{bmatrix} 41,7107 & 0 & -41,7107 \\ 98,7992 & 0 & -98,7994 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Resolviendo las LMI's, obtenidas del diseño del controlador por retroalimentación de estados con acción integral basado en el observador proporcional integral y con la aplicación de la restricción de entrada, en la ley de control. Se procede a programar las siguientes LMI's en MATLAB 2020b y resolverlas con la herramienta Yalmip.

$$S\check{A}_i^T + \check{A}_i S - \check{B}R - R^T \check{B}^T + 2\sigma S < 0 \tag{5.35}$$

$$\begin{bmatrix} S & R^T \\ R & \mu^2 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.36}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \check{x}(0)^T \\ \check{x}(0) & S \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.37}$$

Con las siguientes condiciones: Tomando la LMI (5.35) con una región LMI vertical $\sigma = 8$, en la restricción de entrada LMI (5.36) un $\mu = 600$ y en la LMI (5.37) una condición inicial $\check{x}(0) = [91^\circ \ 0 \ 0]^T$. Una vez calculadas las LMI's se obtuvieron las siguientes ganancias para el controlador:

$$G = \begin{bmatrix} 289,9109 & 14,1228 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1,6976 \times 10^3 \end{bmatrix}$$
(5.38)

Para la validación del controlador en el seguimiento de trayectoria basado en el PIO, se fijó una rutina de rehabilitación (Referencia) que corresponde a una rutina de rehabilitación post-operatoria de la reconstrucción del ligamento cruzado anterior (Brent Brotzman and Manske, 2012) que comprende un movimiento de $\theta(t) \in [91^\circ, 150^\circ]$. En la Figura 5.3 se muestra la señal de referencia que corresponde a la rutina de rehabilitación.

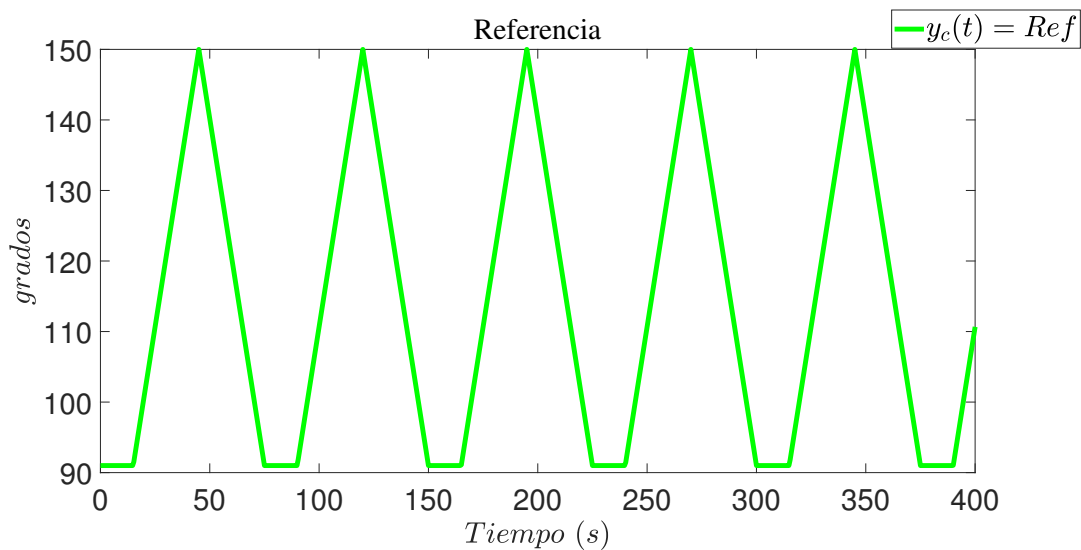


Figura 5.3: Señal de referencia $y_c(t)$ para el seguimiento de trayectoria.

5.5.1. Simulación 1 del controlador ante un escenario ideal

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es mostrar que la ley de control construida a partir de los estados estimados del observador proporcional integral y de la restricción de entrada aplicado, permite el correcto seguimiento de trayectoria de la rutina de rehabilitación asignado al sistema.

En la Figura 5.4 se puede observar en líneas negras la referencia y en azul el comportamiento de la variable de posición angular, una vez controlada. Como se puede apreciar existe el seguimiento de trayectoria, ya que el controlador llega a la referencia establecida. Teniendo un transitorio de $t \leq 0,3$ s para que el controlador converja a la referencia.

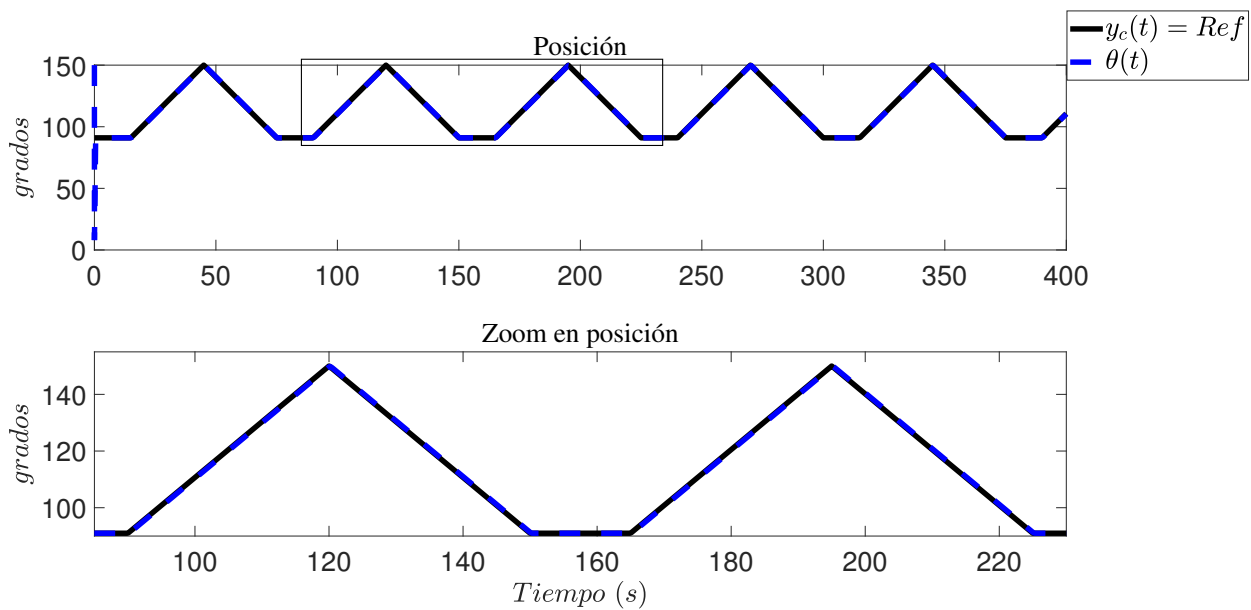


Figura 5.4: Respuesta del controlador ante el seguimiento de trayectoria en la variable de posición.

En la Figura 5.5 se muestra el comportamiento de la velocidad angular ante el seguimiento de trayectoria del rehabilitador de rodilla.

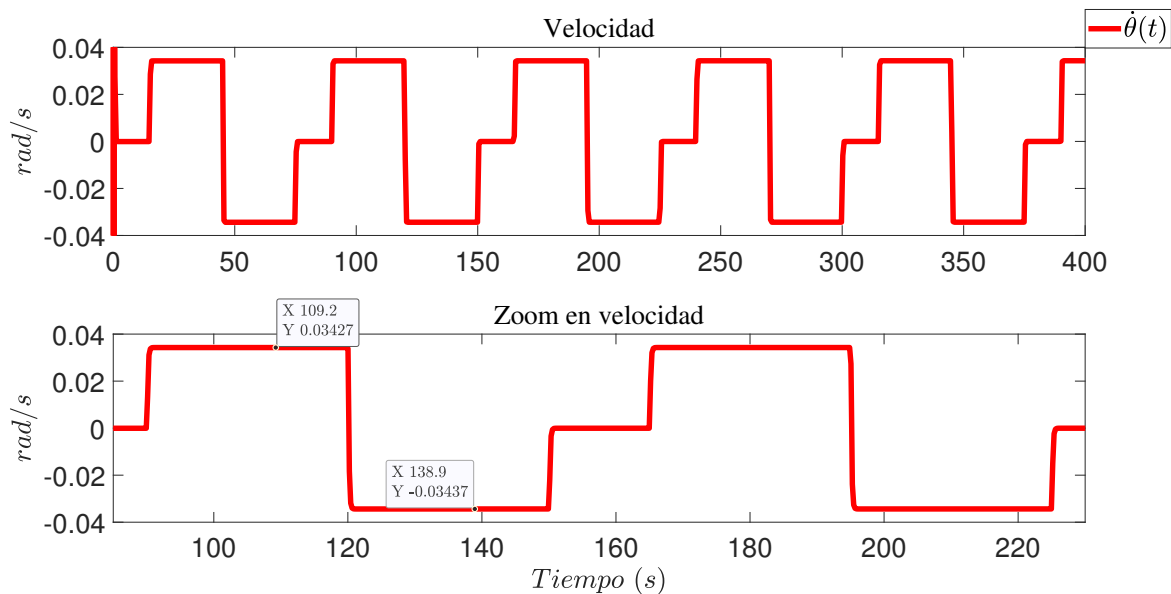


Figura 5.5: Respuesta del controlador ante la variable de velocidad.

En la Figura 5.6 se puede apreciar con mayor detalle el seguimiento de trayectoria del controlador, como tal, existe un error de $0,3533^\circ$ entre la referencia y la variable controlada para fines físicos este error es despreciable, pero una vez evaluado con los índices de desempeño mostrados en la Tabla 5.1 los índices ITAE y ITSE los cuales evalúan la integral el error por el tiempo, es claro que estos nos entregaran valores grandes, ya que el error de $0,3533^\circ$ persiste en la rutina de rehabilitación y como se mencionó al principio está es una simulación de 400 s.

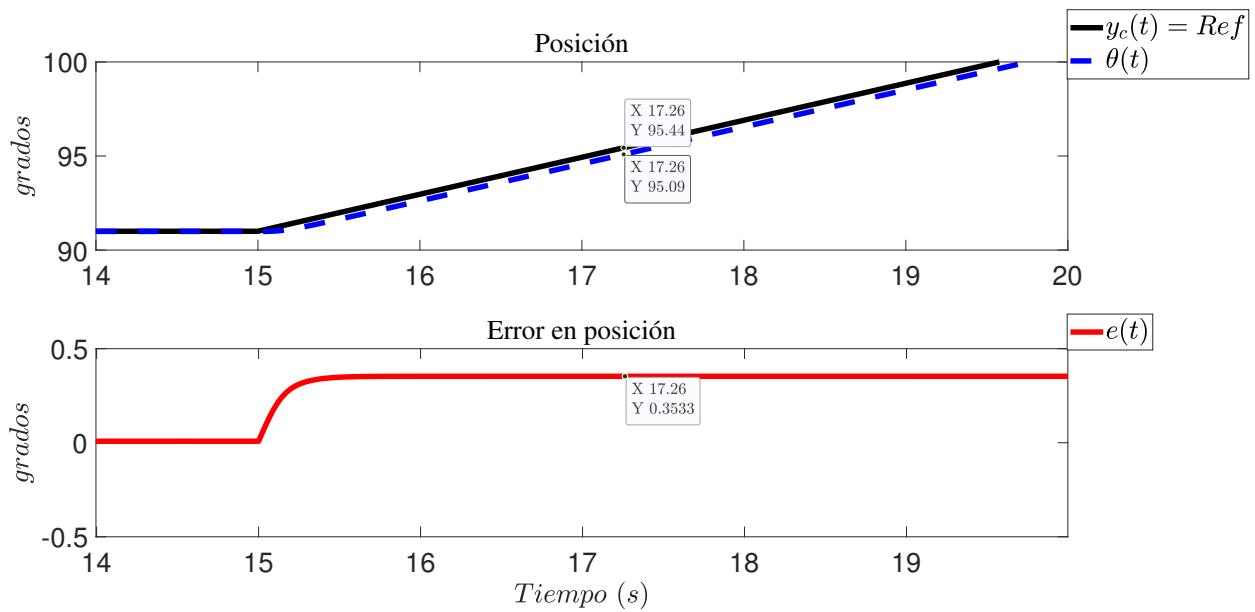


Figura 5.6: Error en seguimiento de trayectoria.

Tabla 5.1: Índices de desempeño en el seguimiento de trayectoria del controlador

	ISE	ITSE	IAE	ITAE
$\theta(t)$	1105	7431	122.2	21453.70

En la Figura 5.7 se muestra el comportamiento de la ley de control diseñada para el seguimiento de trayectoria para la rutina de rehabilitación del robot rehabilitador de rodilla. La ley de control tiene un sobre tiro máximo de $392,2438 \text{ Nm}$ en un transitorio $t \leq 0,362 \text{ s}$. En estado estacionario se mantiene en un rango de $[0,1438 \text{ } 7,132] \text{ Nm}$.

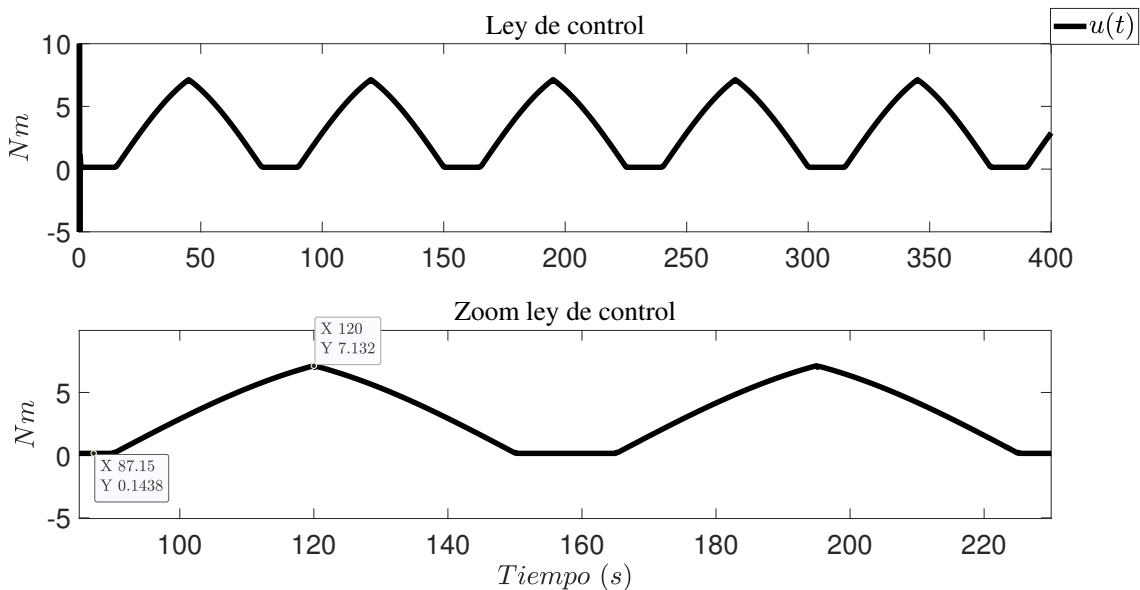


Figura 5.7: Comportamiento de la ley de control.

5.5.2. Simulación 2 del controlador ante un escenario con perturbación

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es mostrar el comportamiento de la ley de control construida a partir de los estados estimados del observador proporcional integral y observar el comportamiento del controlador en el seguimiento de trayectoria una vez sometido el sistema a una perturbación.

Escenario de perturbación: Se consideró una descompensación en el motor del rehabilitador del 14% sobre el par máximo en estado estable de la ley de control mostrado en la Figura 5.7. La señal que describe a la perturbación se muestra en la Figura 5.8 es una señal cuadrada de amplitud 1 Nm.

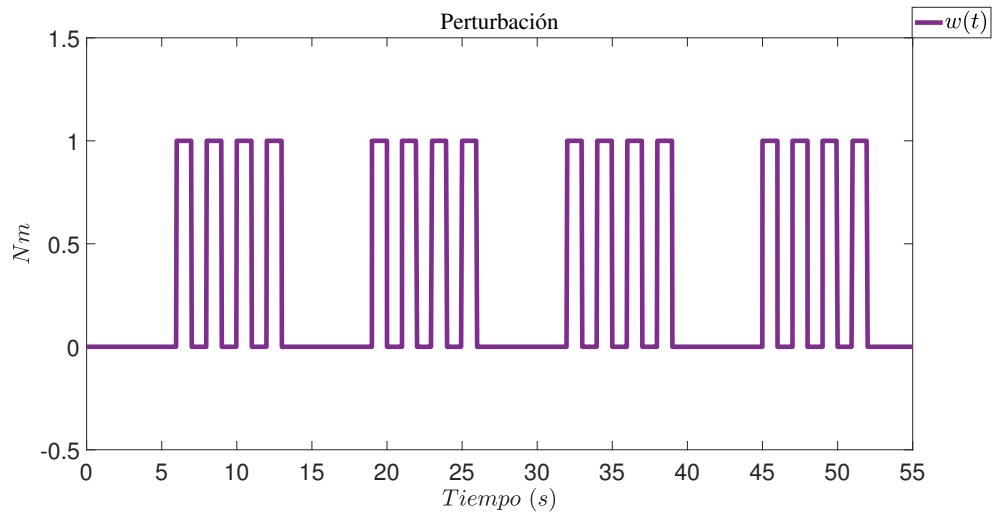


Figura 5.8: Señal de perturbación $w(t)$.

Como se observa en la Figura 5.9 la perturbación en el sistema provoca un comportamiento no deseado en el seguimiento de trayectoria del controlador generando una variación de movimiento de $1,6^\circ$ el cual repercute en la rehabilitación del paciente. Esta misma perturbación se refleja en la velocidad angular del sistema como se muestra en la Figura 5.10.

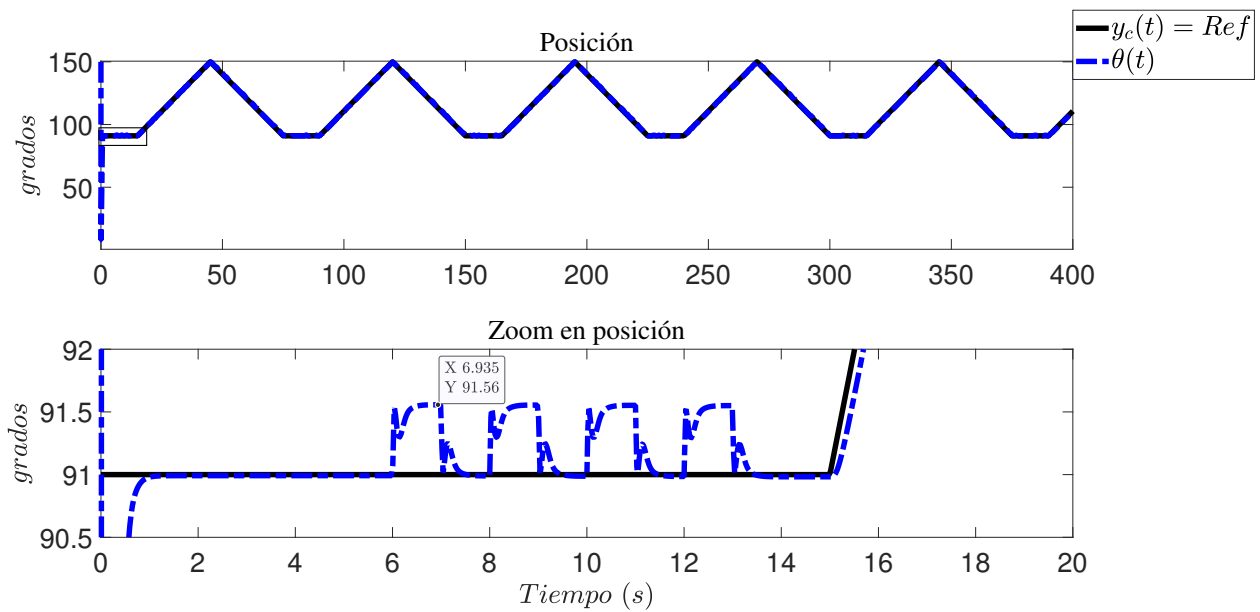


Figura 5.9: Respuesta del controlador ante el seguimiento de trayectoria con el sistema sometido a una perturbación.

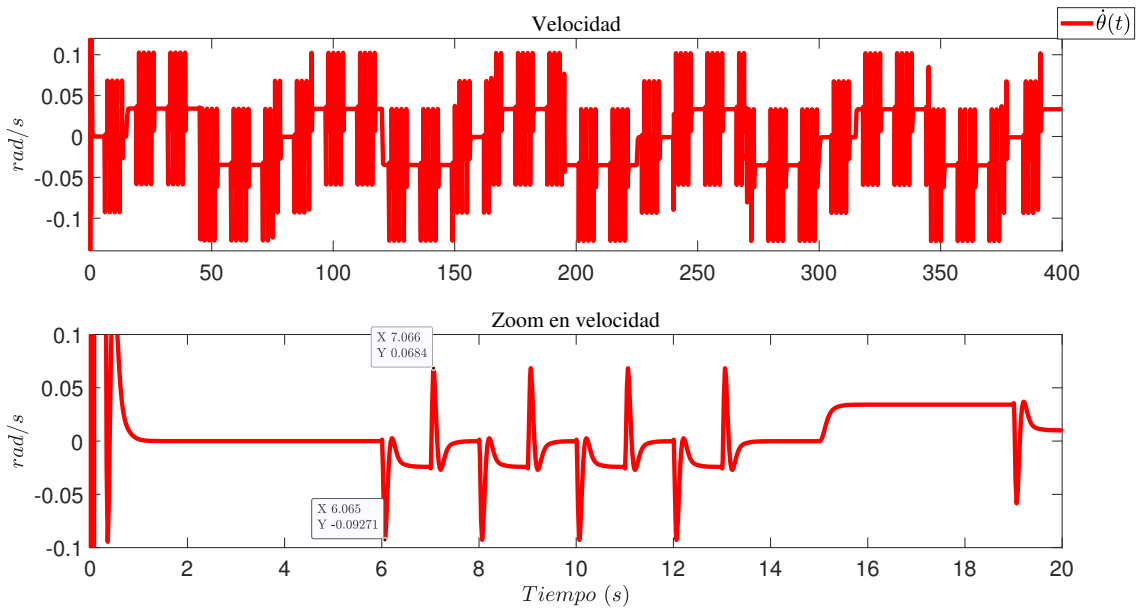


Figura 5.10: Respuesta del controlador ante la variable de velocidad con perturbación.

5.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó el diseño de un controlador por retroalimentación de estados con acción integral. Este tipo de controlador posee un integrador. El cual garantiza un error nulo en el seguimiento de referencias constantes. Con esto se cierra el lazo de control del sistema.

El análisis de estabilidad del controlador se desarrolló por medio de Lyapunov. El controlador diseñado posee una región LMI del tipo vertical, así como una restricción en la entrada (Ley

de control) con la finalidad de que este proporcionará una ley de control satisfactoria. Ya que, de acuerdo a las pruebas desarrolladas, sin la restricción de entrada, el controlador llega a tener un sobretiro mayor al que actualmente posee el controlador además de mantenerse oscilando. Por lo cual la ley de control no poseía una respuesta satisfactoria en el seguimiento de trayectoria de la rutina de rehabilitación.

Las ganancias del controlador obtenidas con la región LMI y la restricción de entrada mostraron un margen de error despreciable en el seguimiento de trayectoria. Por lo tanto, el controlador tiene un seguimiento de referencia aceptable en la rutina de rehabilitación establecida. Finalmente, se procedió a realizar la simulación del sistema controlado sometido a una perturbación con la finalidad de observar el comportamiento del controlador y como se mostró este no es capaz de atenuar la perturbación en el sistema.

Capítulo 6

Diseño del controlador robusto

6.1. Objetivo del diseño del controlador robusto y descripción del escenario del sistema

En el Capítulo 5 se desarrolló un esquema de control para el seguimiento de trayectoria, por medio del diseño de un controlador por retroalimentación de estados con acción integral basado en un observador proporcional integral de orden completo, igualmente se justificó el porqué del diseño independiente del observador y del controlador esto debido al principio de separación. Ahora bien, rigiéndose bajo ese mismo principio se procede a desarrollar el controlador robusto.

Como se observó en la Sección 5.5.2 el esquema de control diseñado, no atenúa el efecto de la perturbación en el seguimiento de trayectoria del controlador, generando una variación de $1,6^\circ$ así como picos bruscos de movimiento.

Por lo tanto, al controlador antes diseñado se le aplicará el control H_∞ con el objetivo de reducir comportamiento no deseado en el seguimiento de trayectoria del rehabilitador de rodilla ante la presencia de una perturbación. La perturbación considerada en este análisis es la provocada por el motor del rehabilitador de rodilla.

6.2. Diseño del controlador robusto

Partiendo del sistema T-S sujeto a perturbación:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t)) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de distribución de perturbación y $w(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de perturbación. Con la ley de control por retroalimentación de estados con acción integral mostrado en el capítulo anterior y asumiendo que $x(t) \equiv \hat{x}(t)$, se tiene:

$$u(t) = - \begin{bmatrix} G & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

donde la derivada del error del seguimiento de trayectoria está definida por:

$$\dot{x}_l(t) = y_c(t) - Cx(t) \quad (6.3)$$

Sustituyendo la ley de control (6.2) en el sistema T-S (6.1),

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (A_i x(t)) + B [-Gx(t) - Lx_l(t)] + Ew(t) \\ \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (A_i - BG)x(t) - BLx_l(t) + Ew(t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Como se puede observar al sistema T-S (Ecuación (6.4)) en lazo cerrado, se introduce un nuevo estado $x_l(t)$, por lo que, se reagrupan las Ecuaciones (6.3) y (6.4) obteniendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_l(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \begin{bmatrix} A_i - BG & -BL \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} y_c(t) \quad (6.5)$$

se puede reescribir como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_l(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\check{x}}(t)} = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \left(\begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\check{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} G & L \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix}}_{\check{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}}_{\check{E}} w(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{\check{D}} y_c(t) \quad (6.6)$$

$$\dot{\check{x}}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (\check{A}_i - \check{B}\mathbb{K})\check{x}(t) + \check{E}w(t) + \check{D}y_c(t) \quad (6.7)$$

Ahora el problema a resolver es, calcular la matriz \mathbb{K} , tal que la Ecuación (6.8) en lazo cerrado sea estable y robusto.

$$\dot{\check{x}}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (\check{A}_i - \check{B}\mathbb{K})\check{x}(t) + \check{E}w(t) \quad (6.8)$$

6.3. Análisis de estabilidad del controlador robusto

En esta sección se presenta el análisis de estabilidad del controlador robusto basado en Lyapunov, con el cual por medio de la resolución de LMI's se obtiene la matriz \mathbb{K} .

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$V(\check{x}(t)) = \check{x}(t)^T \mathcal{Q} \check{x}(t) > 0 \quad (6.9)$$

donde $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T > 0$. Derivando (6.9) se obtiene:

$$\dot{V}(\check{x}(t)) = \dot{\check{x}}(t)^T \mathcal{Q} \check{x}(t) + \check{x}(t)^T \mathcal{Q} \dot{\check{x}}(t) < 0 \quad (6.10)$$

Sustituyendo (6.8) en (6.10), se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\check{x}(t)) &= [(\check{A}_i - \check{B}\mathbb{K})\check{x}(t) + \check{E}w(t)]^T \mathcal{Q} \check{x}(t) + \check{x}(t)^T \mathcal{Q} [(\check{A}_i - \check{B}\mathbb{K})\check{x}(t) + \check{E}w(t)] < 0 \\ &= \check{x}(t)^T [\check{A}_i^T \mathcal{Q} - \mathbb{K}^T \check{B}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \check{A}_i - \mathcal{Q} \check{B} \mathbb{K}] \check{x}(t) + w(t)^T \check{E}^T \mathcal{Q} \check{x}(t) + \check{x}(t)^T \mathcal{Q} \check{E} w(t) < 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.3.1. Diseño del control H_∞

Aplicando el control H_∞ mostrado en la Sección 2.6.2 se define la función objetivo $\tilde{z}(t)$ la cual es:

$$\tilde{z}(t) = \mathcal{C} \check{x}(t) \quad (6.12)$$

donde

$$\mathcal{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \quad \check{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Ya que el objetivo del diseño del controlador robusto, es atenuar el efecto de las perturbaciones en la variable de la posición angular del rehabilitador.

Ahora bien, se busca resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\gamma > 0} \gamma : \sup_{\|w(t)\|_{L_2} \neq 0} \frac{\|\tilde{z}(t)\|_{L_2}}{\|w(t)\|_{L_2}} \leq \gamma, \quad (6.14)$$

donde $\gamma > 0$ es un escalar fijo. Aplicando el lema real acotado mostrado en la Sección 2.6.3, para un escalar preestablecido γ , se debe satisfacer el siguiente índice de desempeño aplicado

al sistema:

$$J < \int_0^\infty [\tilde{z}(t)^T \tilde{z}(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \dot{V}(\tilde{x}(t))] dt \quad (6.15)$$

La condición suficiente para que $J < 0$ es

$$\tilde{z}(t)^T \tilde{z}(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \dot{V}(\tilde{x}(t)) < 0, \quad \forall t \in [0, \infty] \quad (6.16)$$

Sustituyendo la función objetivo (6.12) en (6.16) se obtiene:

$$(\mathcal{C}\tilde{x}(t))^T (\mathcal{C}\tilde{x}(t)) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \dot{V}(\tilde{x}(t)) < 0 \quad (6.17)$$

Sustituyendo la Ecuación (6.11) en (6.17) se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t)^T \mathcal{C}^T \mathcal{C} \tilde{x}(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \tilde{x}(t)^T [\check{A}_i^T \mathcal{Q} - \mathbb{K}^T \check{B}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \check{A}_i - \mathcal{Q} \check{B} \mathbb{K}] \tilde{x}(t) \\ + w(t)^T \check{E}^T \mathcal{Q} \tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)^T \mathcal{Q} \check{E} w(t) < 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Se añade una región LMI del tipo vertical (Definición (4.3)) a la desigualdad mostrada en la Ecuación (6.18), con la finalidad de que el controlador robusto respete la región de operación del rehabilitador, obteniendo

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t)^T \mathcal{C}^T \mathcal{C} \tilde{x}(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \tilde{x}(t)^T [\check{A}_i^T \mathcal{Q} - \mathbb{K}^T \check{B}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \check{A}_i - \mathcal{Q} \check{B} \mathbb{K} + 2\psi \mathcal{Q}] \tilde{x}(t) \\ + w(t)^T \check{E}^T \mathcal{Q} \tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)^T \mathcal{Q} \check{E} w(t) < 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Expresado de forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(t)^T \\ w(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{A}_i^T \mathcal{Q} - \mathbb{K}^T \check{B}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \check{A}_i - \mathcal{Q} \check{B} \mathbb{K} + 2\psi \mathcal{Q} + \mathcal{C}^T \mathcal{C} & \mathcal{Q} \check{E} \\ \check{E}^T \mathcal{Q} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (6.20)$$

Por definición, la última desigualdad se satisface si y solo si

$$\begin{bmatrix} \check{A}_i^T \mathcal{Q} - \mathbb{K}^T \check{B}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \check{A}_i - \mathcal{Q} \check{B} \mathbb{K} + 2\psi \mathcal{Q} + \mathcal{C}^T \mathcal{C} & \mathcal{Q} \check{E} \\ \check{E}^T \mathcal{Q} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.21)$$

dado que las matrices \mathbb{K} y \mathcal{Q} se desconocen, la desigualdad (6.21) posee términos bilineales.

Es por ello que la desigualdad se pre-multiplica y pos-multiplica por $\begin{bmatrix} \mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{A}_i^T \mathcal{Q} - \mathbb{K}^T \check{B}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \check{A}_i - \mathcal{Q} \check{B} \mathbb{K} + 2\psi \mathcal{Q} + \mathcal{C}^T \mathcal{C} & \mathcal{Q} \check{E} \\ \check{E}^T \mathcal{Q} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.22)$$

Obteniendo,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}^{-1}\check{A}_i^T - \mathcal{Q}^{-1}\mathbb{K}^T\check{B}^T + \check{A}_i\mathcal{Q}^{-1} - \check{B}\mathbb{K}\mathcal{Q}^{-1} + 2\psi\mathcal{Q}^{-1} + \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{C}^T\mathcal{C}\mathcal{Q}^{-1} & \check{E} \\ \check{E}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.23)$$

Entonces, se puede hacer el siguiente cambio de variable. Para expresar la Ecuación (6.23) como una LMI:

$$\mathcal{X} = \mathcal{Q}^{-1}, \quad \mathcal{M} = \mathbb{K}\mathcal{X} \quad (6.24)$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}\check{A}_i^T - \mathcal{M}^T\check{B}^T + \check{A}_i\mathcal{X} - \check{B}\mathcal{M} + 2\psi\mathcal{X} + \mathcal{X}\mathcal{C}^T\mathcal{C}\mathcal{X} & \check{E} \\ \check{E}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.25)$$

Dado que todavía existe una bilinealidad generada por $\mathcal{X}\mathcal{C}^T\mathcal{C}\mathcal{X}$, que no fue resuelta por la pre-multiplicación y pos-multiplicación anterior. La LMI (6.25) se puede descomponer como:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}\check{A}_i^T - \mathcal{M}^T\check{B}^T + \check{A}_i\mathcal{X} - \check{B}\mathcal{M} + 2\psi\mathcal{X} & \check{E} \\ \check{E}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{X}\mathcal{C}^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I \\ \mathcal{C}\mathcal{X} \quad 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (6.26)$$

de tal forma que, aplicando el complemento de Schur dado en la Definición 5.1 se obtiene.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}\check{A}_i^T - \mathcal{M}^T\check{B}^T + \check{A}_i\mathcal{X} - \check{B}\mathcal{M} + 2\psi\mathcal{X} & \check{E} & \mathcal{X}\mathcal{C}^T \\ \check{E}^T & -\gamma^2 I & 0 \\ \mathcal{C}\mathcal{X} & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.27)$$

Así resolviendo la desigualdad (6.27), se obtienen las matrices \mathcal{X} y \mathcal{M} las cuales nos permiten calcular la ganancia \mathbb{K} del controlador robusto, la cual está dado por:

$$\mathbb{K} = \mathcal{M}\mathcal{X}^{-1} \quad (6.28)$$

donde,

$$\begin{bmatrix} G & L \end{bmatrix} = \mathcal{M}\mathcal{X}^{-1} \quad (6.29)$$

despejando las matrices G y L , tenemos:

$$\begin{aligned} G &= \mathcal{M}\mathcal{X}^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \\ L &= \mathcal{M}\mathcal{X}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.30)$$

6.4. Validación del controlador robusto con rechazo a perturbaciones

En esta sección se presenta la validación del controlador robusto por retroalimentación de estados con acción integral basado en el observador proporcional integral desarrollado en el Capítulo 4.

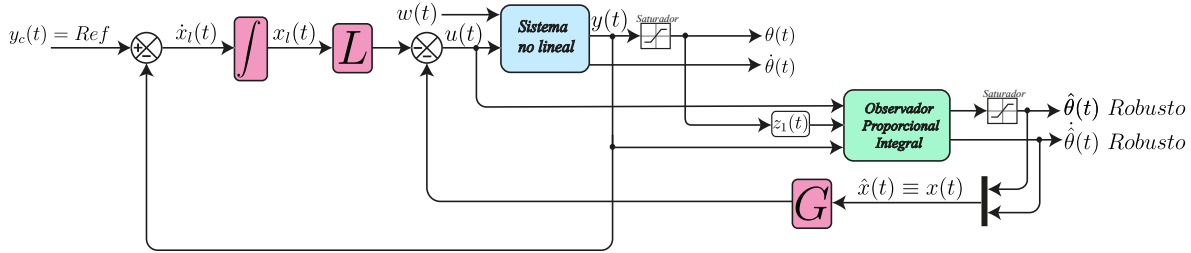


Figura 6.1: Diagrama a bloques de la simulación del controlador por retroalimentación de estados con acción integral basado en el PIO con perturbación.

La simulación se desarrolló en Simulink, con un paso de integración de 0.001 s se consideró un tiempo de simulación de 400 s. Las condiciones iniciales consideradas en el sistema no lineal son $x(t) = [91^\circ \ 0 \text{ rad/s}]^T$, en el PIO son $\hat{x}(t) = [0^\circ \ 0 \text{ rad/s}]^T$. En la Figura 6.1 se muestra la estructura de la simulación con la cual se validará el funcionamiento del controlador robusto basado en el observador proporcional integral.

Los máximos y mínimos de la variable premisa son los mostrados en la Ecuación (5.32). Considerando los parámetros de la Tabla 3.1 las matrices A_i , B y E de los sistemas locales del modelo Takagi-Sugeno son las siguientes:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8,0957 & -1,7007 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8345 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 173,9387 & -1,7007 \end{bmatrix}, & E &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8345 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Las ganancias con la cual trabaja el observador proporcional integral son las mostradas en la Ecuación (5.34). Para el diseño del controlador robusto basado en el observador proporcional integral se debe programar la siguiente LMI que corresponde a la Ecuación (6.27).

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}\check{A}_i^T - \mathcal{M}^T\check{B}^T + \check{A}_i\mathcal{X} - \check{B}\mathcal{M} + 2\psi\mathcal{X} & \check{E} & \mathcal{X}\mathcal{C}^T \\ & \check{E}^T & -\gamma^2 I & 0 \\ & \mathcal{C}\mathcal{X} & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.32)$$

Esta LMI se programa, con una región LMI vertical $\psi = 8$ y con la constante de atenuación $\gamma = 0,8$. Una vez programada con los valores antes mencionados en la herramienta Yalmip, se obtuvieron las siguientes ganancias para el controlador robusto:

$$\begin{aligned} G &= [5,1032 \times 10^3 \quad 25,9632] \\ L &= [4,8076 \times 10^4] \end{aligned} \tag{6.33}$$

En la Figura 6.2 se muestra la señal de referencia que corresponde a la rutina de rehabilitación post-operatoria de la reconstrucción del ligamento cruzado anterior.

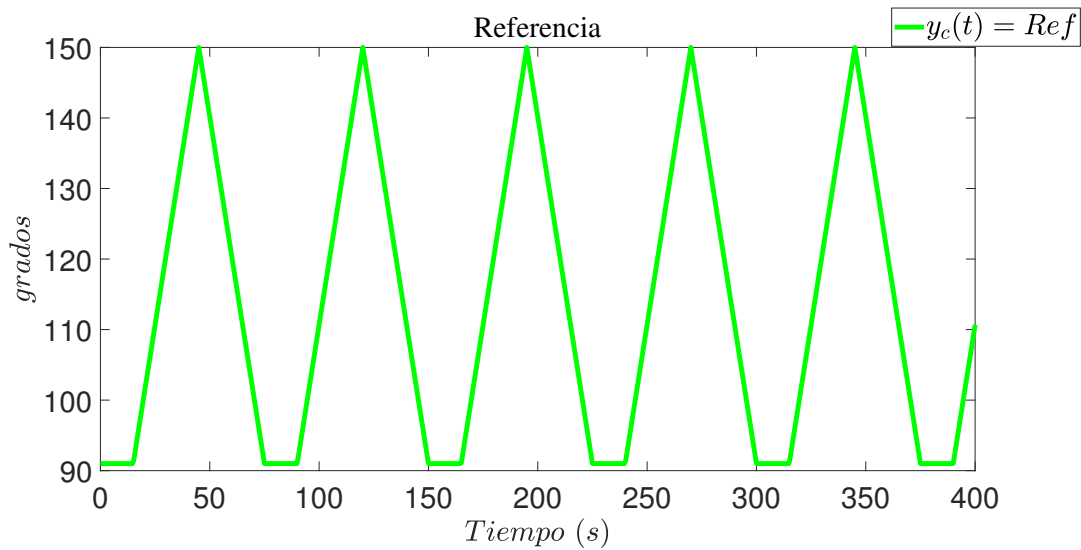


Figura 6.2: Señal de referencia $y_c(t)$ que describe una rutina de rehabilitación.

La señal que describe a la perturbación se muestra en la Figura 6.3 es una señal cuadrada de amplitud 1 Nm .

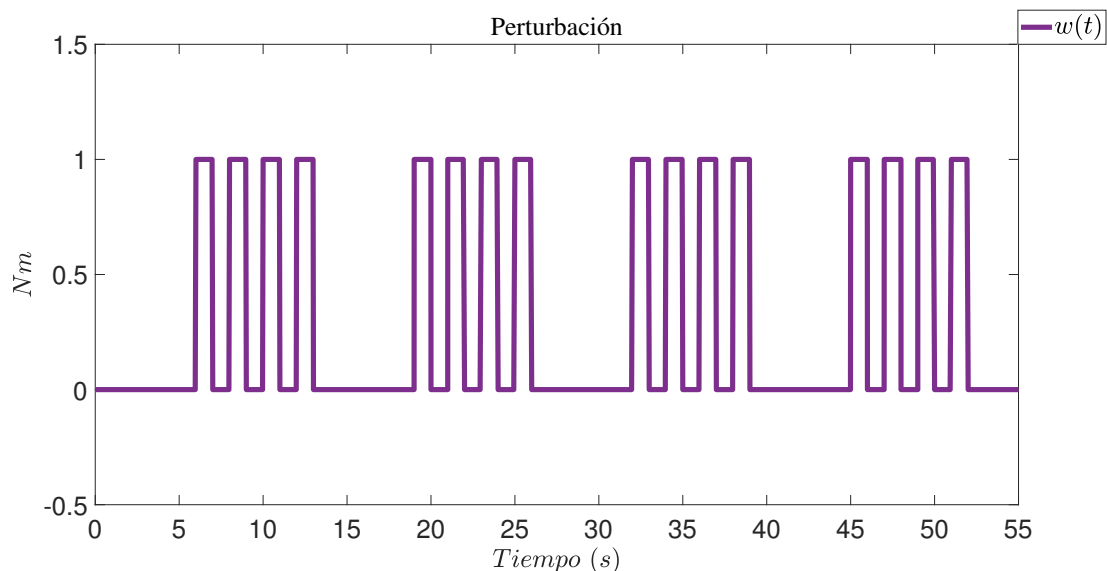


Figura 6.3: Señal de perturbación $w(t)$.

6.4.1. Simulación 1 del controlador robusto ante un escenario con perturbación

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación, es mostrar el comportamiento de la ley de control robusta ante un escenario con perturbación. Construida a partir de los estados estimados del observador proporcional integral. Además de mostrar que esta ley de control, permite limitar los comportamientos no deseados en el seguimiento de trayectoria de la rutina de rehabilitación y comparar ésta con el esquema de control diseñado en el Capítulo 5 sometiéndolo al mismo escenario de perturbación.

Escenario de perturbación: Se consideró una descompensación en el motor del rehabilitador del 14 % sobre el par máximo en estado estable de la ley de control mostrado en la Figura 5.7. La señal que describe a la perturbación se muestra en la Figura 6.3 es una señal cuadrada de amplitud 1 Nm.

En la Figura 6.4 se muestra en líneas azules la referencia y en negro el comportamiento de la variable de posición angular, con el controlador diseñado en el Capítulo 5. En líneas discontinuas rojas se presenta el comportamiento del controlador robusto, como se puede apreciar existe el seguimiento de trayectoria de este controlador, así como la limitación del comportamiento no deseado en el seguimiento de trayectoria. Esto se puede observar a mayor detalle comparando el controlador sin robustez. Como se puede notar el controlador robusto atenúa los picos que se generan con el controlador sin robustez.

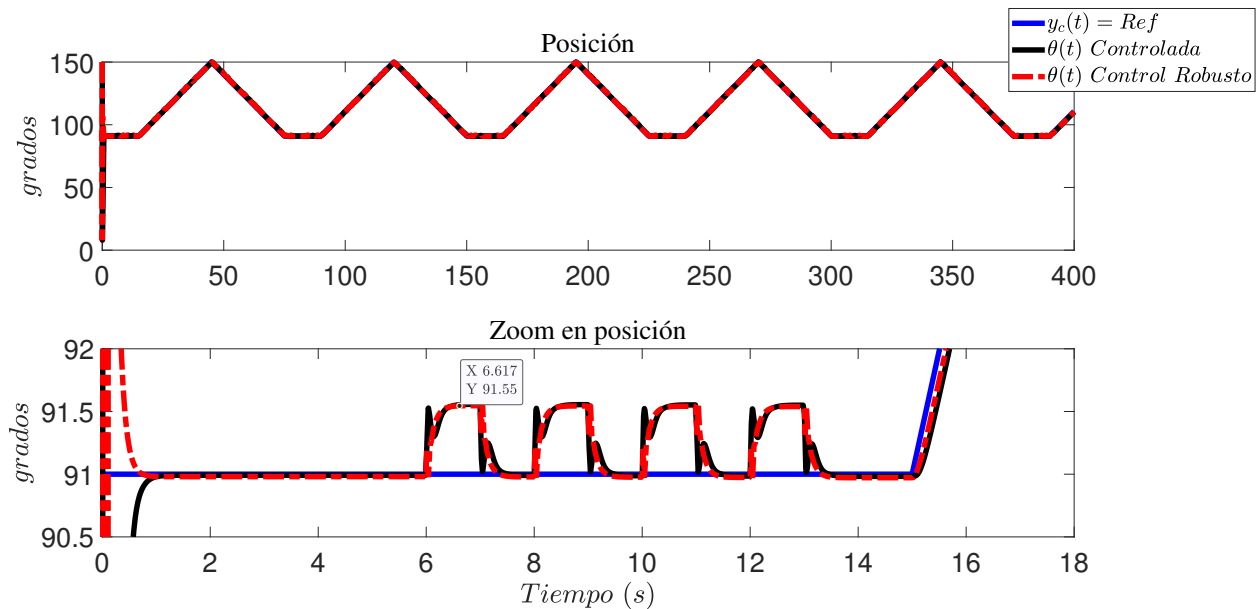


Figura 6.4: Respuesta del controlador robusto ante el seguimiento de trayectoria en la variable de posición angular sometido a una perturbación.

En la Tabla 6.1 se muestran los índices de desempeño del controlador diseñado en el Capítulo 5 comparándolo con el controlador robusto. Como se puede apreciar el controlador robusto tiene un mejor desempeño en el seguimiento de trayectoria de robot rehabilitador ante la presencia de perturbación. Ya que en los índices ISE, IAE y ITAE muestran mejores resultados en el análisis del error ante el escenario de perturbación. Se observan valores altos debido a que el análisis del error se hace en una simulación de 400 s.

Tabla 6.1: Índices de desempeño en el seguimiento de trayectoria del controlador y del controlador robusto ante un escenario con perturbación

	ISE	ITSE	IAE	ITAE
$\theta(t)$ Controlada	1129.25	2417.74	146.59	26595.12
$\theta(t)$ Control Robusto	455.60	7766.62	109.02	20535.54

Al seguir generándose el error en el seguimiento de trayectoria en el estado estacionario del sistema, debido a la perturbación. El índice de desempeño ITSE es más elevado, ya que este penaliza fuertemente los errores en estado estable.

En la Figura 6.5 en línea discontinua azul se muestra el comportamiento de la ley de control robusta. Esta presenta un sobretiro máximo de 5388 Nm en un $t \leq 0,2$ s en estado estacionario se mantiene en un rango de $[-11,29 \ 26,69]$ Nm.

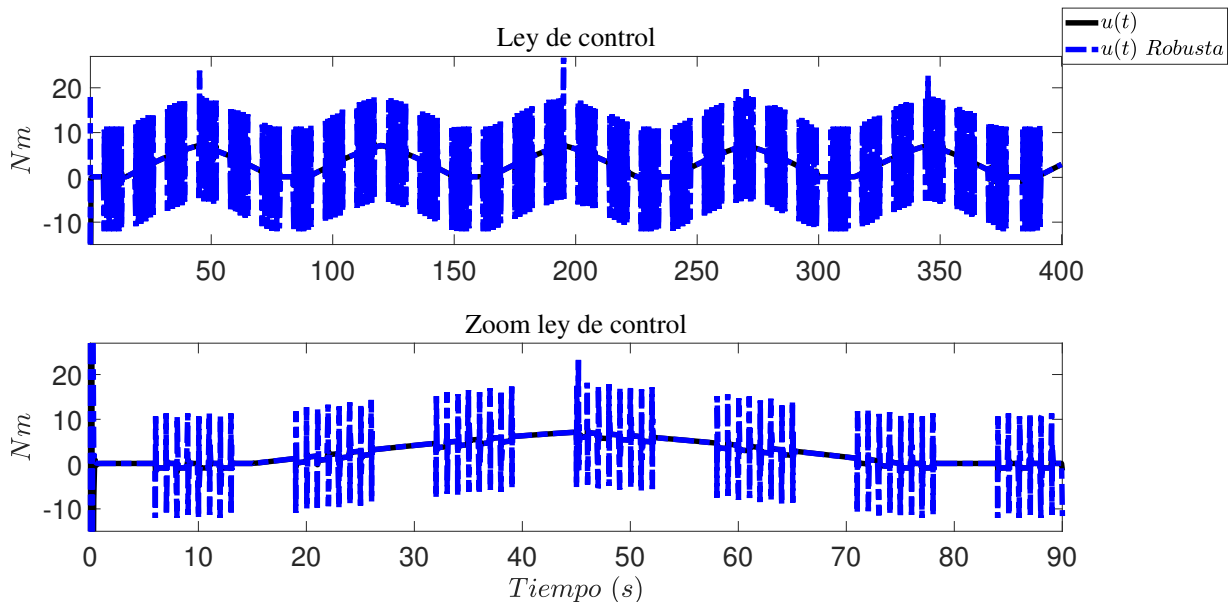


Figura 6.5: Comportamiento de la ley de control robusta ante un escenario con perturbación.

6.4.2. Simulación 2 del controlador robusto ante un escenario con perturbación e incertidumbre paramétrica

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación, es mostrar el comportamiento de la ley de control robusta ante un escenario con perturbación e incertidumbre paramétrica. Construida a partir de los estados estimados del observador proporcional integral.

Escenario de perturbación e incertidumbre paramétrica: Se considera una descompensación en el motor del rehabilitador del 14 % sobre el par nominal obtenido del esquema de control diseñado en el Capítulo 5. La incertidumbre paramétrica a considerar es sobre el parámetro del coeficiente de fricción b donde presenta una variación del 10 %

En la Figura 6.6 se muestra en líneas discontinuas rojas el comportamiento del controlador robusto, como se puede apreciar existe el seguimiento de trayectoria pese a la perturbación e incertidumbre paramétrica. El controlador robusto incluso con la incertidumbre paramétrica nos muestra la misma dinámica en la variable de posición angular que la obtenida en el escenario con solo perturbación. Lo que nos indica que el controlador robusto tiene un desempeño aceptable.

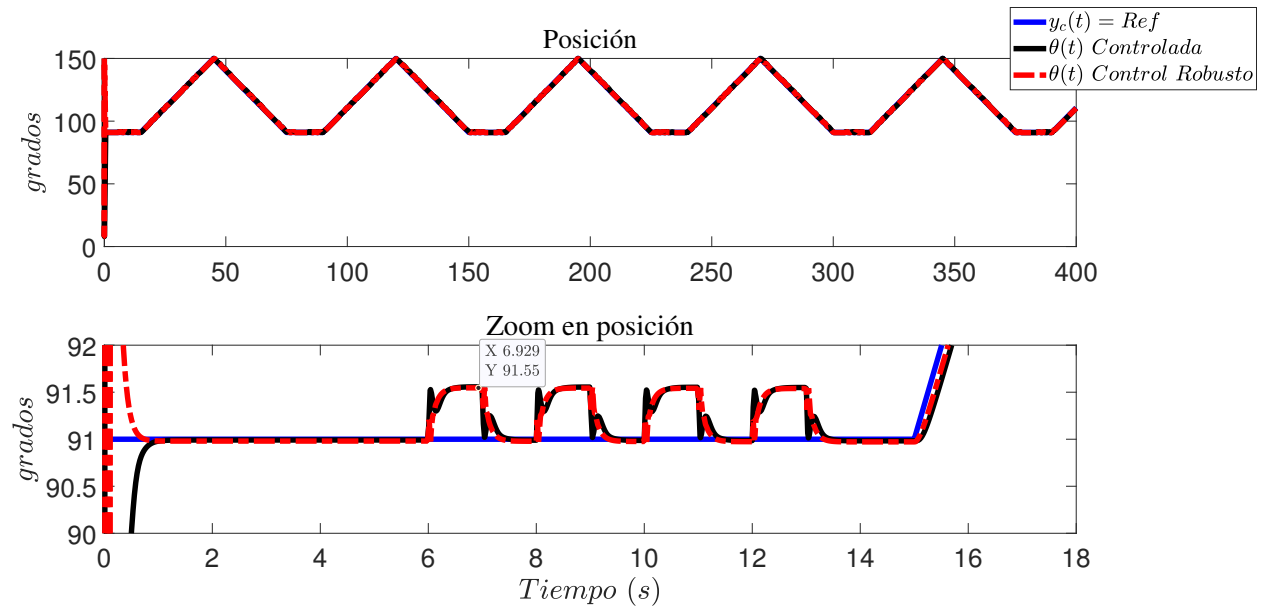


Figura 6.6: Respuesta del controlador robusto ante el seguimiento de trayectoria en la variable de posición angular sometido a una perturbación e incertidumbre paramétrica.

Esto se logra apreciar mejor analizando los índices de desempeño mostrados en la Tabla 6.2 como se observa el controlador diseñado en el Capítulo 5 no logra minimizar el error que existe entre la referencia y la variable de posición mostrada en líneas negras en la Figura 6.6 ante un escenario con perturbación e incertidumbre paramétrica .

Tabla 6.2: Índices de desempeño en el seguimiento de trayectoria del controlador y del controlador robusto ante un escenario con perturbación e incertidumbre paramétrica

	ISE	ITSE	IAE	ITAE
$\theta(t)$ Controlada	1129.25	12417.89	146.59	26595.27
$\theta(t)$ Control Robusto	455.60	7766.73	109.02	20535.72

Como se aprecia en los índices de desempeño ISE e IAE el controlador robusto presenta un mejor desempeño en el estado transitorio aun estando el sistema sometido a una perturbación e incertidumbre paramétrica. De igual forma, los índices ITSE e ITAE muestran una respuesta favorable en el seguimiento de trayectoria de la referencia en estado estable.

En la Figura 6.7 en línea discontinua azul se muestra el comportamiento de la ley de control robusta. Esta ley de control con el escenario expuesto en esta sección posee el mismo comportamiento de la ley de control robusta sometido a solo la perturbación del sistema.

Si bien, la ley de control robusta demanda un par aplicado por el motor mayor, ésta elimina los picos de movimientos bruscos presentes en el controlador sin robustez en el seguimiento de trayectoria del rehabilitador. Además, que el controlador robusto no se ve afectado por la incertidumbre paramétrica presente en el coeficiente de fricción del rehabilitador y esto se puede corroborar con la Tabla 6.2

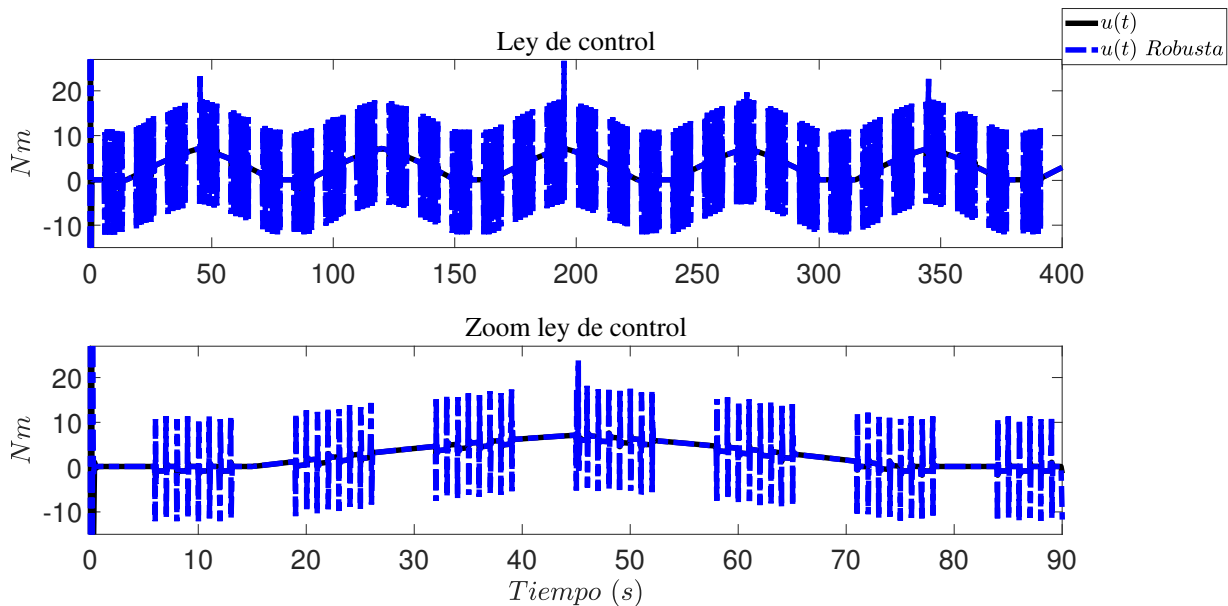


Figura 6.7: Comportamiento de la ley de control robusta ante un escenario con perturbación e incertidumbre paramétrica.

6.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó el diseño del controlador por retroalimentación de estados con acción integral robusto basado en el observador proporcional integral.

El análisis de estabilidad del controlador robusto se desarrolló por medio de Lyapunov al que posteriormente se le aplicó el control H_∞ donde se propuso la función objetivo. Dicha función fue diseñada de tal forma que se atenuará el efecto de la perturbación en la variable de posición angular que va ligada al seguimiento de trayectoria del robot rehabilitador, para posteriormente aplicarle el lema real acotado. Con el cual se procedió al cálculo de las ganancias del controlador robusto.

Las ganancias del controlador robusto, obtenidas con la región LMI, fueron sometidas a dos escenarios de simulación. Uno con presencia de perturbación provocada por alguna descompensación en el motor y el otro escenario fue con perturbación e incertidumbre paramétrica en el coeficiente de fricción viscosa del rehabilitador. El controlador robusto presentó un buen desempeño ante ambos escenarios logrando limitar los movimientos bruscos en presencia de perturbación e incertidumbre paramétrica en el seguimiento de trayectoria. Esto se logra apreciar mejor por medio de los índices de desempeños aplicados en el análisis del error del seguimiento de trayectoria.

Capítulo 7

Conclusiones generales

Al realizar la investigación de los robots rehabilitadores de extremidades inferiores quedó claro que el control y optimización para el uso de estos dispositivos en el área de la salud es uno de los temas con mayor interés en los últimos años. Ya que estos dispositivos apoyan a los pacientes a ser independientes pese a sufrir de alguna discapacidad, así como mejorar su calidad de vida. Es por ello que el conocimiento de todas las variables involucradas en el robot rehabilitador, así como obtener una representación matemática exacta del comportamiento físico del robot rehabilitador y llevar a cabo el control de estos robots, son temáticas abiertas para su investigación.

En este trabajo de tesis, se presentó un estudio del estado del arte para determinar una estrategia de control aplicada a robots rehabilitadores de miembros inferiores. De acuerdo con la investigación realizada, la rodilla es una de las articulaciones más susceptible a presentar lesiones. Por lo que el caso de estudio a tratar fue el desarrollo de una estrategia de control aplicado a un robot rehabilitador de rodilla. Para posteriormente hacer la representación no lineal del robot rehabilitador de rodilla de un grado de libertad con movimiento del tipo vertical obtenida a partir del análisis de Euler-Lagrange. Después se presentó el sistema no lineal por modelos Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal. Este enfoque tiene como finalidad representar el modelo no lineal del rehabilitador de una manera más sencilla. Esto siempre y cuando este se mantenga dentro de los límites con los que se construyó la representación Takagi-Sugeno. A partir de este análisis se llevó a cabo la publicación de un póster para la 8ª Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada.

Se realizó la comparación del modelo no lineal con su representación por modelos Takagi-Sugeno en lazo abierto. Verificando que el sistema Takagi-Sugeno desarrollado representa fielmente la dinámica del sistema no lineal, siempre y cuando este dentro de los límites con los que se construyó esta representación.

En la teoría del control existen diversos tipos de observadores, estos son clasificados de acuerdo al orden o estructura que los constituya. En este tema de tesis se propuso emplear un observador proporcional integral de orden completo, el cual permite minimizar el error de estimación en estado estacionario.

Para el observador proporcional integral se consideró que existen las condiciones necesarias para su desarrollo. Esto tomando en cuenta que se tiene acceso a la medición de la variable de posición angular del rehabilitador además que el rehabilitador cumple con el criterio de observabilidad. Este observador se utilizó para estimar la variable de velocidad angular la cual no está disponible para su medición en el robot rehabilitador, posteriormente se verificó que las condiciones de estabilidad de dicho observador se cumplan agregando una región LMI para que el observador respete la región de operación de las variables a estimar del rehabilitador. A partir del diseño de este observador se llevó a cabo la publicación de un artículo para el Congreso Nacional de Control Automático (CNCA).

Posteriormente, se diseñó el controlador por retroalimentación de estados con acción integral para el seguimiento de trayectoria de una rutina de rehabilitación de rodilla. Al ser el sistema observable y controlable se aplicó el principio de separación al robot rehabilitador. Este principio permite hacer el diseño del observador y controlador de forma independiente, ya que los estados estimados del observador no influyen en la controlabilidad del sistema así, como en la entrada del sistema en lazo cerrado. Con este controlador se desarrollaron simulaciones ante un escenario ideal (sin perturbaciones e incertidumbre paramétrica). El controlador por retroalimentación de estados con acción integral ante un escenario con perturbación en el motor del rehabilitador presentó movimientos bruscos.

Dado que la estrategia de control sin robustez, no fue capaz de evitar o minimizar los comportamientos bruscos en el seguimiento de trayectoria del rehabilitador se procedió al diseño de un controlador por retroalimentación de estados con acción integral robusto basado en el control H_∞ . De acuerdo a las simulaciones hechas, el esquema de control robusto ante un escenario con perturbación y un escenario con perturbación e incertidumbre paramétrica. Demostró que el controlador diseñado solo permite reducir los movimientos bruscos de la perturbación en el seguimiento de trayectoria del robot rehabilitador.

Finalmente, se concluye que se cumplieron con todos los objetivos establecidos para este tema de tesis. Además, se mostró que se puede estimar una ley de control capaz de seguir las rutinas de rehabilitación establecidas para el rehabilitador de rodilla.

7.1. Trabajos futuros

Partiendo de este trabajo de investigación realizado, se pueden derivar diversos trabajos, algunos de estos se presentan a continuación:

1. Investigar las posibilidades teóricas de calcular en paralelo las ganancias del observador y del controlador.
2. El desarrollo del sistema físico del robot rehabilitador de rodilla.
3. Agregar la dinámica que describe al motor en el modelo matemático del robot rehabilitador de rodilla.
4. La discretización del sistema, el controlador y el observador.
5. La implementación de un controlador para la estimación de estados no disponibles.

Bibliografía

- Abu-Dakka, F. J., Valera, A., Escalera, J. A., Abderrahim, M., Page, A., and Mata, V. (2020). Passive exercise adaptation for ankle rehabilitation based on learning control framework. *Sensors*, 20(21).
- Akdoğan, E. and Adli, M. A. (2011). The design and control of a therapeutic exercise robot for lower limb rehabilitation: Physiotherabot. *Mechatronics*, 21(3):509–522.
- Åström, K. J. and Hägglund, T. (2006). Pid control. *IEEE Control Systems Magazine*, 1066.
- Azcaray, H. R. (2018). *Modelado y Control de un Robot Paralelo Sobreactuado para rehabilitación de Extermidades Inferiores*. PhD thesis, TecNM/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- Benlatreche, A., Knittel, D., and Ostertag, E. (2005). State feedback control with full or partial integral action for large scale winding systems. In *Fourtieth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2005 Industry Applications Conference, 2005.*, volume 2, pages 973–978 Vol. 2.
- Bernal, M., Estrada, V., and Márquez, R. (2019). Diseño e implementación de sistemas de control basados en estructuras convexas y desigualdades matriciales lineales.
- Bezzaoucha, S., Marx, B., Maquin, D., and Ragot, J. (2013). Model reference tracking control for nonlinear systems described by takagi-sugeno structure. In *2013 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–8. IEEE.
- Blanco Ortega, A., López Leyva, J., Vela Valdés, G., and Chávez Conde, E. (2012). Control of a knee rehabilitation machine using a virtual prototype. In *Frontiers in Computer Education*, pages 601–609. Springer.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM.
- Brent Brotzman, S. and Manske, R. (2012). Rehabilitación ortopédica clínica, un enfoque basado en la evidencia. *Rehabilitación ortopédica clínica. SA Elsevier: España*.

- Delavari, H. and Jokar, R. (2017). Fractional order adaptive fuzzy terminal sliding mode controller design for a knee joint orthosis with nonlinear disturbance observer. In *2017 5th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA)*, pages 49–54. IEEE.
- Do, M.-H., Koenig, D., and Theilliol, D. (2020). Robust h proportional-integral observer-based controller for uncertain lpv system. *Journal of the Franklin Institute*, 357(4):2099–2130.
- Dorf, R. C., Bishop, R. H., Canto, S. D., Canto, R. D., and Dormido, S. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson Educación.
- Doyle, J. C., Francis, B. A., and Tannenbaum, A. R. (2013). *Feedback control theory*. Courier Corporation.
- Eissmann, J. I. Y. (2001). Equivalencia entre controladores clásicos y control del estado observado. Master’s thesis, Universidad Técnica Federico Santa María.
- Flores, A. A., Reyes, J., Astorga, C. M., Osorio, G. L., and García, C. D. (2018). Temperature control of an alcoholic fermentation process through the takagi–sugeno modeling. *Chemical Engineering Research and Design*, 140:320–330.
- Flores, M. A. (2019). Diseño de una ley de control basada en observadores funcionales para la regulacion de glucosa utilizando el enfoque takagi-sugeno. Master’s thesis, TecNM/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- Gudiño-Lau, J., Rosales, I., Charre, S., Alcalá, J., Duran, M., Vélez-Díaz, D., et al. (2019). Diseño y construccion de un exoesqueleto para rehabilitación. *XIKUA Boletín Científico de la Escuela Superior de Tlahuelilpan*, 7(13):1–10.
- Haemers, M., Derammelaere, S., Ionescu, C.-M., Stockman, K., De Viaene, J., and Verbelen, F. (2018). Proportional-integral state-feedback controller optimization for a full-car active suspension setup using a genetic algorithm. *IFAC-PapersOnLine*, 51(4):1–6.
- Hu, J., Hou, Z., Zhang, F., Chen, Y., and Li, P. (2012). Training strategies for a lower limb rehabilitation robot based on impedance control. In *2012 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 6032–6035. IEEE.
- INEGI (2020). Instituto nacional de estadística geografía e informática. www.inegi.org.mx/app/tabulados/interactivos/?pxq=Discapacidad_Discapacidad_0144ae2514-5d2b-4c7e-ad80-49a3c772ed44.

- INEGI (2021). Instituto nacional de estadística geografía e informática. www.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/aproposito/2021/EAP_Medico2021.docx.
- Kapandji, A. I. (2010). *Fisiología articular esquemas comentados de mecánica humana. Vol.2, Cadera. Rodilla. Tobillo. Pie*. Editorial Medica Panamericana, 6a edition.
- Lendek, Z., Guerra, T. M., Babuska, R., and De Schutter, B. (2011). *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*, volume 262. Springer.
- Lewis, F. L., Dawson, D. M., and Abdallah, C. T. (2003). *Robot manipulator control: theory and practice*. CRC Press.
- Lim, B., Hwang, S. H., Hyung, S., Lee, J., Shim, Y., and Choi, B.-o. (2018). Ankle pathologic gait assistance of a hip exoskeleton: Simulation and experiment. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 3(3):2190–2197.
- Löfberg, J. (2004). Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *In Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan.
- López-Estrada, F.-R., Rotondo, D., and Valencia-Palomo, G. (2019). A review of convex approaches for control, observation and safety of linear parameter varying and takagi-sugeno systems. *Processes*, 7(11).
- Moez, A., Mansour, S., Mohamed, C., and Driss, M. (2009). Takagi-sugeno fuzzy control of induction motor. *Proc. Int. Journal of Electrical and Electronics Engg*, 2(1).
- Mohammadi, A. and Dallali, H. (2020). Disturbance observer applications in rehabilitation robotics: an overview. *Powered prostheses*, pages 113–133.
- Moughamir, S., Manamanni, N., Zaytoon, J., and Afilal, L. (2001). Control law implementation for multi-iso: a training machine for lower limbs. In *2001 Conference Proceedings of the 23rd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, volume 2, pages 1477–1480. IEEE.
- Moughamir, S., Zaytoon, J., Manamanni, N., and Afilal, L. (2002). A system approach for control development of lower-limbs training machines. *Control Engineering Practice*, 10(3):287–299.
- Mousavi, S. A. and Golkar, N. (2020). Management of human-robot interaction in order to control of ankle knee during walking. In *2020 International Congress on Human-Computer Interaction, Optimization and Robotic Applications (HORA)*.
- Neumann, D. A. and Romero, A. G. (2007). *Fundamentos de Rehabilitación Física: Cinesiología del sistema musculoesquelético*. Editorial Paidotribo.

- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
- Osorio, G. L. (2015). *Diseño de Observadores para Sistemas Singulares con Incertidumbre. Aplicación a Control y Diagnóstico*. PhD thesis, TecNM/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- Pérez-Pérez, E.-J., López-Estrada, F.-R., Puig, V., Valencia-Palomo, G., and Santos-Ruiz, I. (2022). Fault diagnosis in wind turbines based on anfis and takagi–sugeno interval observers. *Expert Systems with Applications*, page 117698.
- Pidikiti, T., Gireesha, B., Subbarao, M., Krishna, V. M., et al. (2023). Design and control of takagi-sugeno-kang fuzzy based inverter for power quality improvement in grid-tied pv systems. *Measurement: Sensors*, 25:100638.
- Pruski, A. and Knops, H. (2005). *Assistive Technology: From Virtuality to Reality: AAATE 2005*, volume 16. IOS Press.
- Santana, R., Vianna, S., and Silva, F. (2022). A novel approach in fuzzy bowtie analysis applying takagi–sugeno inference for risk assessment in chemical industry. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 80:104892.
- Seddiki, L., Guelton, K., Moughamir, S., Mansouri, B., and Zaytoon, J. (2007). Modélisation et commande h-infinie d’une machine de rééducation des membres inférieurs. *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 41(2):199–218.
- Seddiki, L., Guelton, K., and Zaytoon, J. (2010). Concept and takagi–sugeno descriptor tracking controller design of a closed muscular chain lower-limb rehabilitation device. *IET control theory & applications*, 4(8):1407–1420.
- Seeber, R. and Tranninger, M. (2022). Integral state-feedback control of linear time-varying systems: A performance preserving approach. *Automatica*, 136:110000.
- Torres Ricalde, D. R. (2021). Diseño de un exoesqueleto para asistir la articulación de la rodilla al correr.
- Wang, D. and Yang, S. X. (2022). Broad learning system with takagi–sugeno fuzzy subsystem for tobacco origin identification based on near infrared spectroscopy. *Applied Soft Computing*, page 109970.
- WHO (2021). World health organization, rehabilitation. www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/rehabilitation.
- WHO (2022). World health organization, disability. www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/disability-and-health.

- Wu, J., Gao, J., Song, R., Li, R., Li, Y., and Jiang, L. (2016). The design and control of a 3dof lower limb rehabilitation robot. *Mechatronics*, 33:13–22.
- Youssef, T., Chadli, M., Karimi, H. R., and Zelmat, M. (2014). Design of unknown inputs proportional integral observers for ts fuzzy models. *Neurocomputing*, 123:156–165.
- Zhang, F., Hou, Z.-G., Cheng, L., Wang, W., Chen, Y., Hu, J., Peng, L., and Wang, H. (2016). ileg—a lower limb rehabilitation robot: a proof of concept. *IEEE Transactions on Human-Machine Systems*, 46(5):761–768.
- Zhang, L., Liu, G., Han, B., Wang, Z., Yan, Y., Ma, J., and Wei, P. (2020). Knee joint biomechanics in physiological conditions and how pathologies can affect it: a systematic review. *Applied bionics and biomechanics*, 2020.
- Zhao, D., Wang, Z., Chen, Y., and Wei, G. (2020). Proportional–integral observer design for multidelayed sensor-saturated recurrent neural networks: A dynamic event-triggered protocol. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 50(11):4619–4632.

Anexos

Anexo A

Simulación del comportamiento de los modelos locales

El sistema Takagi-Sugeno que describe al robot rehabilitador es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (A_i x(t)) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{A.1}$$

Los modelos locales están descritos como:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \bar{z}_1 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \underline{z}_1 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{A.2}$$

donde

$$\begin{aligned}z_1(t) &\in [\underline{z}_1 \quad \bar{z}_1] \\ z_1(t) &\in [-0,3032 \quad 0,9452]\end{aligned}\tag{A.3}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \bar{z}_1 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7,0819 & -1,7007 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8345 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \underline{z}_1 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 22,0772 & -1,7007 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{A.4}$$

Corresponde al valor mínimo \underline{z}_1 y máximo \bar{z}_1 de la variable premisa $z_1(t)$.

Escenario de simulación: La simulación se desarrolló en Simulink, con un paso de integración de 0.001 s. se consideró un tiempo de simulación de 10 s. Las condiciones iniciales consideradas en el sistema lineal son $x(t) = [91^\circ \ 0 \text{ rad/s}]^T$ con un saturador en la variable de posición angular.

A.1. Simulación 1 modelos locales

En la Figura A.1 se muestra la estructura de la simulación con la cual se analizarán los modelos locales mostrados en la Ecuación (A.4).

Objetivo de la simulación: El objetivo de la simulación es mostrar el comportamiento de cada uno de los modelos locales, con la misma entrada y escenario de simulación a los que fueron sometidos el sistema no lineal y el sistema Takagi-Sugeno con la finalidad de comprobar que un solo modelo local no es capaz de recuperar la dinámica completa del robot rehabilitador.

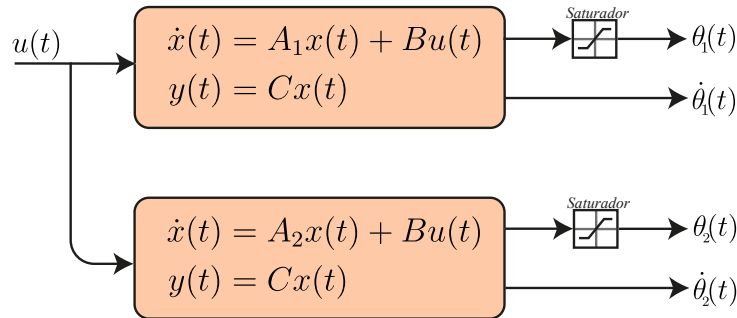


Figura A.1: Diagrama de la simulación de los modelos locales.

En la Figura A.2 se muestra la entrada aplicada a cada modelo local la cual es la misma que fue aplicada en la simulación del sistema no lineal y Takagi-Sugeno (Sección 3.3).

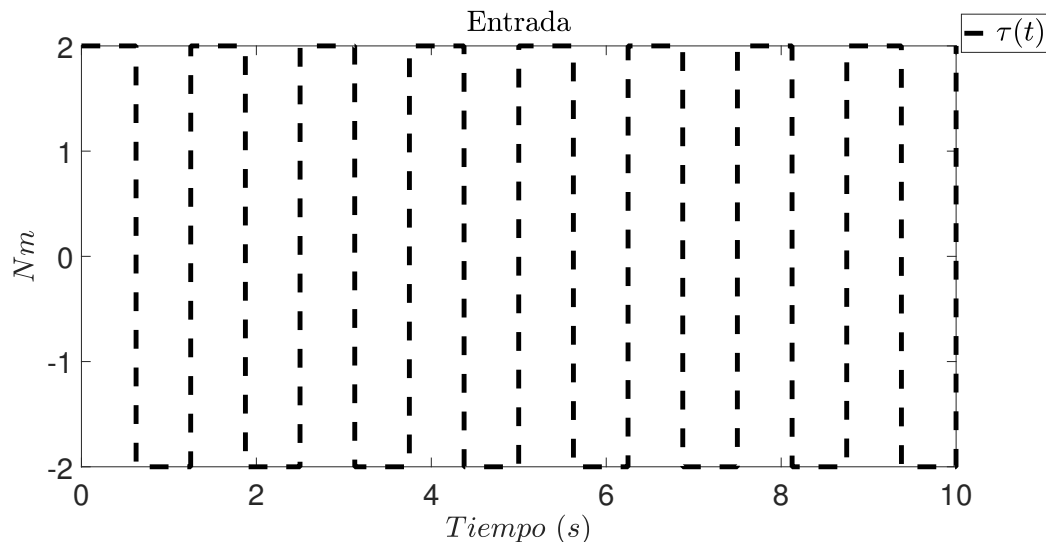


Figura A.2: Entrada implementada en la simulación del sistema lineal en lazo abierto.

Como se puede apreciar en las Figuras A.3 - A.4 los modelos locales A_1 y A_2 por si solos no recuperan la dinámica del rehabilitador. Como lo hace el sistema en su forma no lineal y por modelos Takagi-Sugeno como se muestra en la Figura A.5.

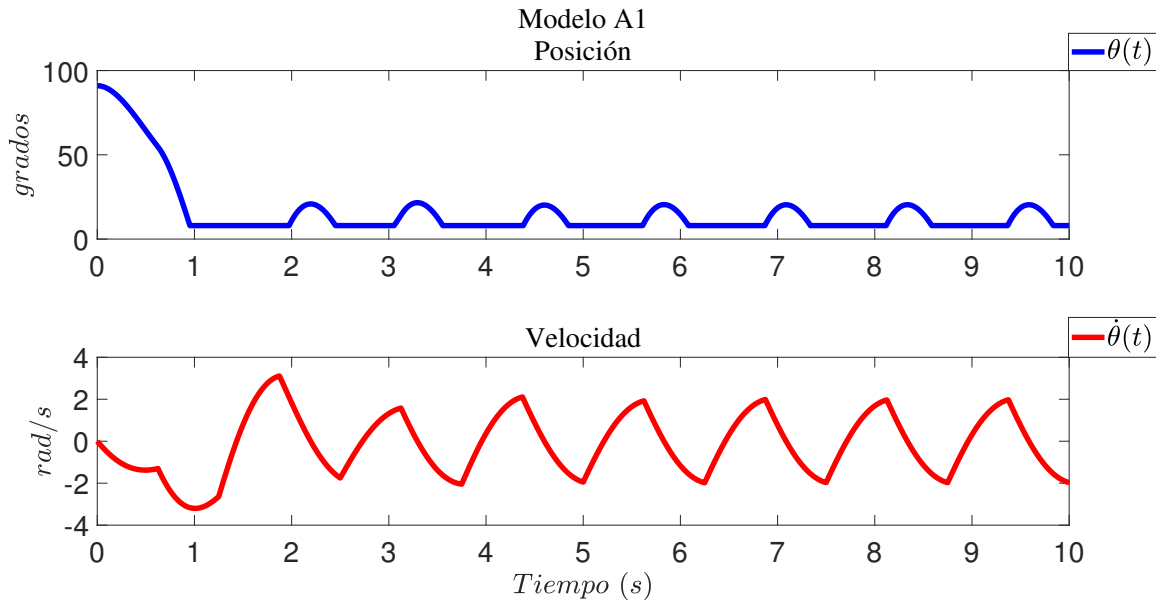


Figura A.3: Respuesta del sistema lineal con el modelo local A_1 .

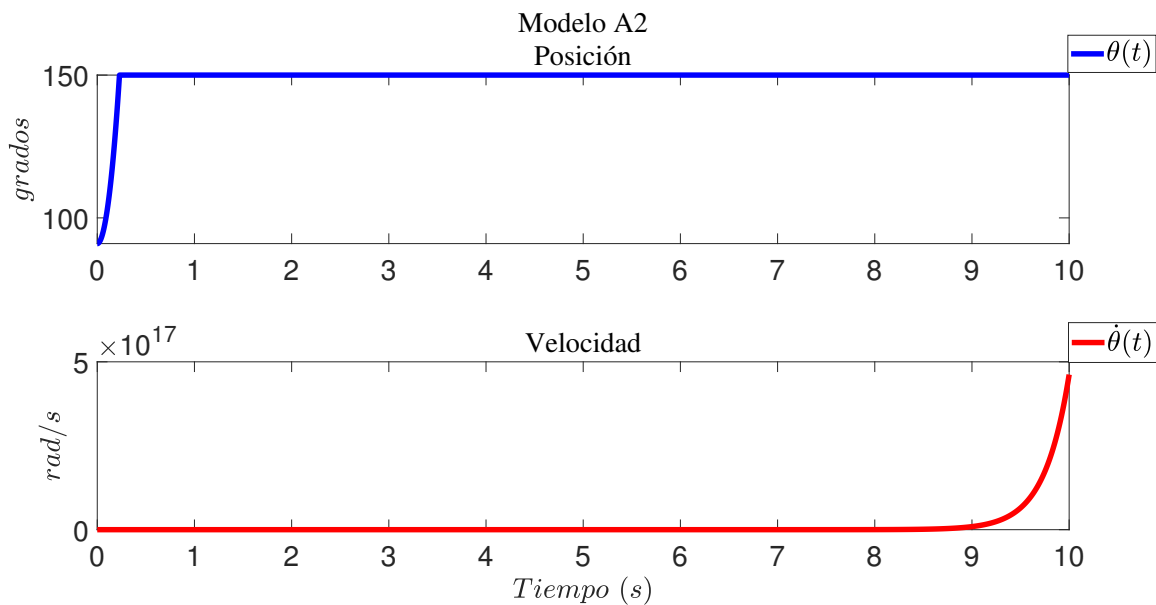


Figura A.4: Respuesta del sistema lineal con el modelo local A_2 .

En azul se muestra el comportamiento de la variable de posición angular, en rojo la velocidad angular del sistema no lineal y negro el comportamiento de ambas variables, pero en la

representación por modelos Takagi-Sugeno.

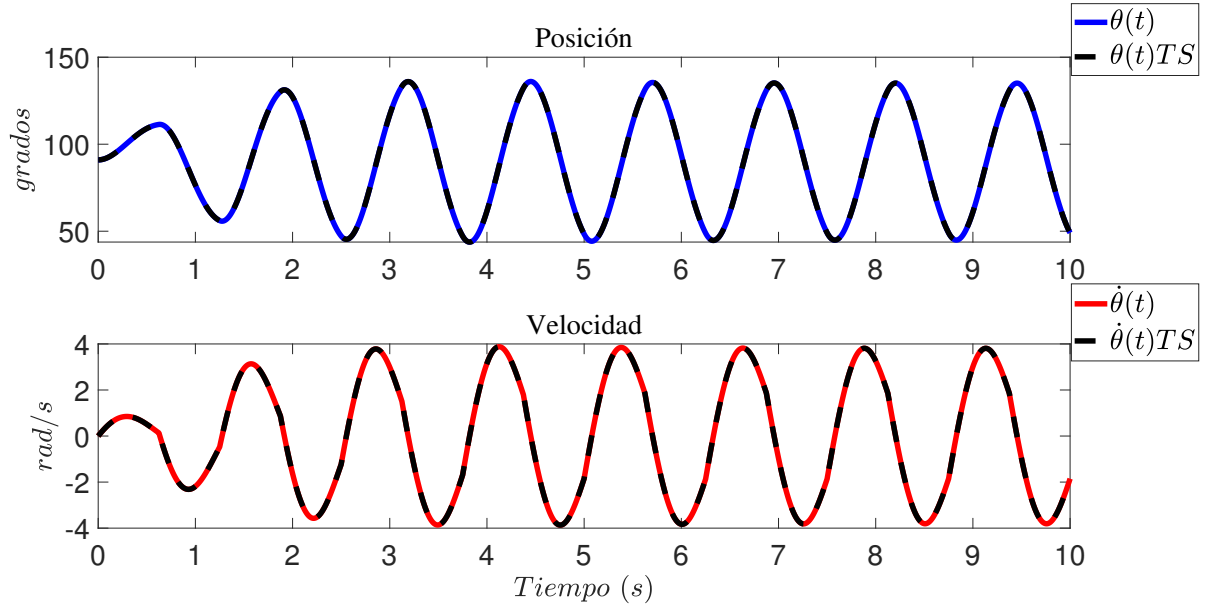


Figura A.5: Respuesta del sistema en su representación no lineal y su representación por modelos T-S.

A.2. Simulación 2 análisis de un modelo local intermedio

Al formarse los modelos locales del sistema Takagi-Sugeno con el valor máximo y mínimo de la variable premisa z_1 mostrada en la Ecuación (A.3), se plantea el siguiente análisis, donde se tomará el valor intermedio de la variable premisa, para posteriormente construir un nuevo modelo local intermedio.

Teniendo la variable premisa los siguientes valores:

$$z_1(t) \in [-0,3032 \ 0,9452] \quad (\text{A.5})$$

el valor medio es,

$$z_m = 0,3210 \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto, el modelo local intermedio queda definido de la siguiente forma

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} z_m & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7,4976 & -1,7007 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8345 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Objetivo de la simulación: El objetivo de la simulación es demostrar y documentar que un modelo local intermedio entre el máximo y mínimo de la variable premisa z_1 no es capaz de reconstruir la dinámica del robot rehabilitador de rodilla.

Como se muestra en Figura A.6 el modelo intermedio no recupera la dinámica del robot rehabilitador. Por lo que, se concluye que se requieren de la participación de ambos modelos locales A_1 y A_2 con sus respectivas funciones de pertenencia, para recuperar la dinámica del rehabilitador como se aprecia en la Figura A.5.

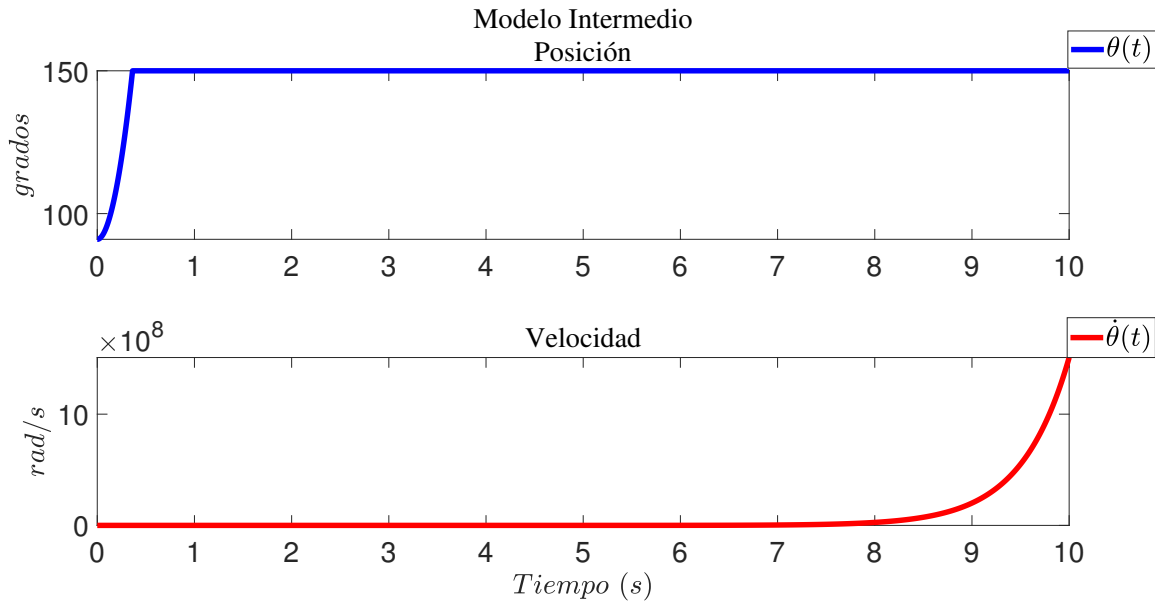


Figura A.6: Respuesta del sistema lineal con el modelo local en un punto intermedio.

Anexo B

Principio de separación

B.1. Principio de separación aplicado a un controlador con retroalimentación de estados y un observador tipo Luenberger

De acuerdo con ([Eissmann, 2001](#)), dado un sistema lineal como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{B.1}$$

Observador:

La forma general de un observador lineal tipo Luenberger es:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + \mathcal{J}(y(t) - \underbrace{C\hat{x}(t)}_{\hat{y}(t)}); \quad \mathcal{J} \in \mathbb{R}^{n \times m}\tag{B.2}$$

donde \mathcal{J} se denomina la ganancia del observador, $\hat{x}(t)$ es el estado estimado y $\hat{y}(t)$ es la salida a partir de este.

La ecuación del error de estimación en el observador está dada por:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)\tag{B.3}$$

el error dinámico está definido como:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= (A - JC)\tilde{x}(t)\end{aligned}\tag{B.4}$$

La ecuación que define al observador (B.2), puede reescribirse como:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - JC)\hat{x}(t) + Bu(t) + \mathcal{J}y(t) \quad (\text{B.5})$$

donde se aprecia más claramente que los polos del observador son los autovalores de $(A - JC)$, es decir, las soluciones de la ecuación

$$E(s) = \det(sI_n - A + \mathcal{J}C) = 0 \quad (\text{B.6})$$

Controlador:

La ley de control para un controlador por retroalimentación de estados basado en el observador queda definida de la siguiente forma:

$$u(t) = r(t) - \mathcal{K}\hat{x}(t) \quad (\text{B.7})$$

donde $r(t)$ es una señal exógena que corresponde a una referencia y \mathcal{K} es la ganancia de retroalimentación.

De las ecuaciones (B.4), (B.1) y (B.7) podemos describir el lazo cerrado mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= (A - JC)\tilde{x}(t) \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + B[r(t) - \mathcal{K}\hat{x}(t)] \\ &= Ax(t) + B[r(t) - \mathcal{K}(x(t) - \tilde{x}(t))] \\ &= (A - B\mathcal{K})x(t) + Br(t) + B\mathcal{K}\tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Las ecuaciones se pueden escribir de manera conjunta como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B\mathcal{K} & B\mathcal{K} \\ 0 & A - JC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (\text{B.9})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Esta expresión en variable de estado del sistema en lazo cerrado es la que permite demostrar la Definición B.1,

Definición B.1. (*Eissmann, 2001*) *Se considera el sistema definido por la Ecuación (B.1), en que el par (A, B) es completamente controlable y el par (A, C) es completamente observable. Si se aplica la realimentación definida por la Ecuación (B.7), en que el estado se estima mediante el observador de orden completo asociado, definido en (B.2), entonces:*

- Los polos de lazo cerrado pueden descomponerse como

$$A_{cl}(s) = \underbrace{\det(sI_n - A + BK)}_{\mathcal{F}(s)} \cdot \underbrace{\det(sI_n - A + \mathcal{J}C)}_{\mathcal{E}(s)} \quad (\text{B.11})$$

Es decir, son los polos que resultan de la realimentación del estado verdadero más los polos que determina el observador del estado.

- El error en la estimación del estado de la planta $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ no es controlable desde la señal de entrada en lazo cerrado $r(t)$.

Ya que,

- Los polos de lazo cerrado están dados por los autovalores de la matriz triangular definida por bloques, lo que corresponde exactamente a la Ecuación (B.11), y
- La señal de entrada al lazo $r(t)$ no afecta en modo alguno a $\tilde{x}(t)$, que corresponde al error de estimación de la planta, lo que significa que esta parte del vector de estado es no controlable, como puede verse al comparar la Ecuación (B.9)

En otras palabras, el observador no influye en el diseño del controlador, ya que este, está directamente relacionado con los estados del sistema los cuales son estimados por el observador.

B.2. Principio de separación aplicado al caso de estudio

En esta sección se demostrará el principio de separación en el controlador por retroalimentación de estados con acción integral y en el observador proporcional integral diseñados en los Capítulos 4 y 5 de esta investigación.

Dado el sistema Takagi-Sugeno:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t)) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

El observador proporcional integral con estructura Takagi-Sugeno:

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t)) + Ju(t) \quad (\text{B.13})$$

$$\dot{v}(t) = y(t) - C\hat{x}(t) \quad (\text{B.14})$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + Qy(t) \quad (\text{B.15})$$

El error de estimación se expresa como:

$$\begin{aligned} e(t) &= \hat{x}(t) - x(t) \\ \hat{x}(t) &= e(t) + x(t) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

El error dinámico del observador está definido como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \left(\begin{bmatrix} T_1 A_i - Y T_2 A_i & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_i & H_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \begin{bmatrix} T_1 A_i - Y T_2 A_i + K_i C & H_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (T_1 A_i - Y T_2 A_i + K_i C) e(t) + H_i v(t) \\ \dot{v}(t) &= -C e(t) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

y la ley del controlador por retroalimentación de estados con acción integral basado en el observador. Donde se asume que $\hat{x}(t) \equiv x(t)$, por lo tanto:

$$u(t) = - \begin{bmatrix} G & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Sustituyendo la ley de control (B.19) en el sistema T-S se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (A_i \hat{x}(t)) + B [-G \hat{x}(t) - L x_l(t)] \\ \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (A_i - BG) \hat{x}(t) - B L x_l(t) \\ y(t) &= C \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Sustituyendo (B.16) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (A_i - BG) (e(t) + x(t)) - B L x_l(t) \\ \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (A_i - BG) e(t) + (A_i - BG) x(t) - B L x_l(t) \\ y(t) &= C e(t) + C x(t) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Las Ecuaciones (B.18) y (B.21) se pueden escribir de manera conjunta como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \underbrace{\begin{bmatrix} \Lambda_i & \Lambda_i & 0 \\ 0 & \Delta_i & H_i \\ 0 & -C & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_i} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -BL \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} x_l(t) \quad (\text{B.22})$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & C & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{e}} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

donde $\Delta_i = T_1 A_i - Y T_2 A_i + K_i C$ y $\Lambda_i = A_i - B G$.

Aplicando la Definición 2.5 a la Ecuación B.22 que describe a la matriz de controlabilidad en sistemas T-S. Se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{A}_i \mathcal{B} & \mathcal{A}_i^2 \mathcal{B} \end{bmatrix} \right) &= n, \quad \forall i = [1, \dots, k] \\ \text{rank} \left(\begin{bmatrix} -BL & -\Lambda_i BL & -\Lambda_i^2 BL \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Al ser el sistema (B.22) de $\text{rank} = 1$ no es controlable, con esto podemos concluir que se cumple el principio de separación dado en la Definición B.1 para el rehabilitador de rodilla, ya que en la Ecuación B.22 la señal de entrada $x_l(t)$ no afecta en modo alguno a el error de estimación del sistema $\hat{x}(t) = e(t) + x(t)$, lo que significa que esta parte del vector de estado es no controlable como se puede ver en la Ecuación (B.24).

Anexo C

Publicación en 8^a Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada

MODELO MATEMÁTICO DE UN REHABILITADOR DE MIEMBROS INFERIORES UTILIZANDO EL ENFOQUE TAKAGI-SUGENO

Ing. Janeth Jiménez Gomez*, Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo*, Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza*

*Tecnológico Nacional de México/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Interior Internado Palmira S/N, Palmira, 62490 Cuernavaca, Mor.

ANTECEDENTES

La finalidad del enfoque Takagi-Sugeno (T-S) es representar fielmente la dinámica de los sistemas no lineales, sin la pérdida de información, esto aplicando los principios de la teoría difusa y control difuso. Mamdani (1974), desarrolló un algoritmo difuso para una máquina de vapor. El algoritmo desarrollado implementa un conjunto de reglas y condicionales difusas. Un primer intento de acercar el control difuso al control tradicional y, con ello formalizar matemáticamente el diseño de controladores lo constituyó el trabajo de Takagi y Sugeno en 1985 (Bernal, Estrada, & Márquez, 2019).

PROBLEMÁTICA

Los modelos matemáticos que describen a los robots rehabilitadores de rodilla contienen términos no lineales, los cuales hacen complejo el desarrollo de controladores para esta clase de sistemas. Uno de los enfoques que permite simplificar la representación de estos sistemas es el de linealización, la desventaja es que permite trabajar en un solo punto de operación, lo cual genera pérdida de información en la respuesta del sistema.

JUSTIFICACIÓN

La representación de la dinámica que describe a un rehabilitador de rodilla o de cualquier sistema con el que se trabaja, es de suma importancia ya que permite diseñar controladores con mayor precisión, obteniendo así un mejor control de las variables que se deseen.

La principal característica de un modelo T-S es expresar la dinámica local de cada implicación difusa (regla) por un modelo afín o lineal, válido localmente en una región correspondiente. Es por ello que el enfoque T-S hace posible reescribir un sistema no lineal de una manera que sea más sencilla de estudiar, dividiéndolo en unidades más simples y manejables (Agustín, 2019). Esto tomando en cuenta las no linealidades del sistema y considerando una serie de reglas difusas. Lo cual nos permite tener una representación fiel al sistema no lineal evitando así la pérdida de información del sistema.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Desarrollar la representación matemática del modelo no lineal de un rehabilitador de rodilla por modelos Takagi-Sugeno la validación del sistema se realizará a través de simulación.

Objetivos Específicos

- Analizar la dinámica de un robot rehabilitador de rodilla y determinar su modelado matemático.
- Representar el modelo matemático del rehabilitador por el método Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal y corroborar el correcto funcionamiento de este mediante una simulación.

PROPUESTA DE SOLUCIÓN

Para el estudio y solución de esta investigación se planteó la siguiente metodología:

- Estudio del estado del arte acerca de los rehabilitadores de rodilla y sus modelos matemáticos, así como la selección de un rehabilitador.
- Desarrollo de la simulación del modelo no lineal del rehabilitador.
- Obtención de las no linealidades, escenario de prueba, funciones de ponderación y las reglas difusas para la representación del modelo Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal.

RESULTADOS

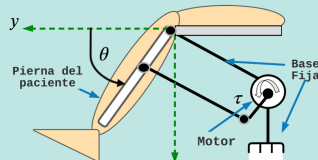


Figura 1. Tipo de lesiones y rehabilitador de rodilla

Figura 2. Diagrama de cuerpo libre del rehabilitador

El rehabilitador de rodilla considerado (Figura 1), genera movimientos de flexión - extensión. El diagrama de cuerpo libre del rehabilitador se muestra en la Figura 2. El modelo matemático se obtiene por medio del formulismo Euler-Lagrange.

Donde la función de energía potencia y cinética son las siguientes:

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2; \quad E_p = -mgl \sin(\theta); \quad (1)$$

donde m es la masa (5 Kg), l es una longitud (0.45 m) g es la gravedad (9.81 m/s²) y θ , $\dot{\theta}$ son la posición (rad) y velocidad angular (rad/s). En el análisis se considera una fuerza disipativa, por lo tanto.

$$m l^2 \ddot{\theta} + b \dot{\theta} - mgl \cos(\theta) = \tau \quad (2)$$

donde b es el coeficiente de fricción (5 Nm s/rad), τ es el par aplicado por el motor (21.5 Nm) y $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular (rad/s²). La representación de la Ecuación 2 en espacio de estado es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g \cos(\theta)}{l} & -\frac{b}{m l^2} \end{bmatrix}}_{A(\theta)} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m l^2} \end{bmatrix}}_B \tau$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

La variable premisa obtenida es la siguiente:

$$z = \frac{g \cos(\theta)}{l \theta}; \quad \theta \in [1.588 \quad 2.689] \text{rad}; \quad (4)$$

de acuerdo al margen de movimiento del rehabilitador definido en la Ecuación 4, se tiene el siguiente intervalo de variación de la variable premisa:

$$z \in [\eta_l, \bar{\eta}_l]; \quad z \in [-7.2912 \quad -0.2395]; \quad (5)$$

Las funciones de ponderación que permiten definir el rango de participación de la variable premisa son:

$$\eta_0^1(z) = \frac{\bar{\eta}_l - z}{\bar{\eta}_l - \eta_l}; \quad \eta_1^1(z) = 1 - \eta_0^1; \quad (6)$$

Las reglas difusas que indican el grado de participación de cada uno de los modelos locales lineales son:

$$\varphi_1(z) = \eta_0^1; \quad \varphi_2(z) = \eta_1^1; \quad (7)$$

La representación del sistema en el enfoque Takagi-Sugeno es el siguiente:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(z) (A_i x) + B u; \quad y = C x; \quad (8)$$

Donde n es el número total de reglas difusas y φ_i es la ponderación de cada regla difusa de cada modelo local. Las matrices A_i son obtenidas al evaluar en la matriz $A(\theta)$ el valor máximo y mínimo de z mostrados en la Ecuación 5, las matrices B y C son mostradas en la Ecuación 3. Las reglas difusas deben de cumplir las siguientes restricciones.

$$1 \geq \varphi_i(z) \geq 0; \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(z) = 1; \quad (9)$$

La simulación del sistema no lineal y su representación en T-S así como la participación de cada modelo local se observan en las Figuras 3 y 4:

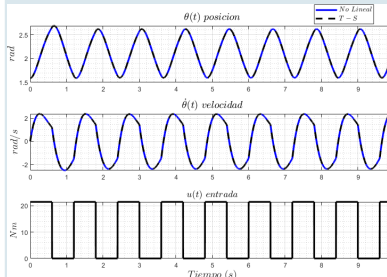


Figura 3. Respuesta del sistema no lineal y su representación en T-S

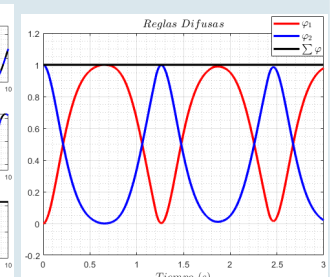


Figura 4. Reglas difusas del modelo T-S

CONCLUSIÓN

La representación T-S obtiene un modelo idéntico al no lineal, siempre y cuando el modelo no lineal, se encuentre en el rango de operación con el que se formó la representación T-S. Los modelos T-S presentan ventajas con respecto al modelo no lineal, debido a que ésta, considera modelos locales lineales a los que se le puede aplicar la teoría de control existente para sistemas lineales, así como el análisis de estabilidad, diseño de: observadores, controladores, esquemas de diagnóstico y esquemas de control u observación con rechazo a perturbaciones.

Bibliografía

- Agustín, M. (2019). Diseño de una ley de control basada en observadores funcionales para la regulación de glucosa utilizando el enfoque Takagi-Sugeno. [Tesis de Maestría].
- Bernal, M., Estrada, V., & Márquez, R. (2019). Diseño e implementación de sistemas de control basados en estructuras convexas y desigualdades matriciales lineales. Pearson.
- Mamdani, E. H. (1974). Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. In Proceedings of the institution of electrical engineers, 121(12), 1585-1588. doi:10.1049/piee.1974.0328

Anexo D

Publicación en la Asociación de México de Control Automático

Proporcional Integral Observer Design for Takagi-Sugeno system applied to a knee rehabilitator

Janeth Jiménez-Gómez* Gloria-L. Osorio-Gordillo*
Carlos-M. Astorga-Zaragoza* Rodolfo-A. Vargas-Méndez*

* *Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado
Palmira S/N, Col. Palmira, 62490 Cuernavaca, Mor. México.
e-mail:m21ce035@cenidet.tecnm.mx*

Abstract: This paper presents the proportional integral observer (PIO) design for Takagi-Sugeno system using the nonlinear sector approach. This observer improves the state estimation due to the integral part. Lyapunov functions are used to analyze the stability of the error dynamic of the observer. Stability conditions are obtained in terms of linear matrix inequalities (LMIs). The effectiveness of the proposed approach is illustrated by a knee rehabilitator robot.

Keywords: Proportional integral observer, Takagi-Sugeno, Nonlinear sector, Knee rehabilitator robot

1. INTRODUCCIÓN

Por definición, un observador se basa en el modelo de un sistema en conjunto con sus señales de entrada-salida para generar una estimación de los estados del sistema, los cuales, pueden emplearse para fines de control, monitoreo, detección de fallas, etc. Ogata (2003).

El uso de los observadores en el diseño de sistemas de control, es una herramienta útil, ya que muchas veces no se cuenta con la medición de todas las variables de estado para fines de control, para lo cual es necesario estimar el resto de variables (Guadarrama-Estrada et al., 2020).

Existen diferentes estructuras aplicables a los observadores, en este artículo se trabajará en un observador proporcional integral (PIO). Este tipo de observador se ha reportado para diversas aplicaciones, en Do et al. (2020) los autores proponen el diseño PIO con control robusto por retroalimentación de estado para un sistema lineal de parámetros variantes (LPV). En Youssef et al. (2014) se plantea el diseño de PIO de entradas desconocidas para modelos Takagi-Sugeno sujetos a variables premisas no medibles. Zhao et al. (2020) propone una estructura nueva para el diseño de un PIO para una clase de redes neuronales recurrentes (RNN) en tiempo discreto.

Los modelos matemáticos que describen a un sistema, tienen diferentes representaciones. Entre esas representaciones se encuentra la forma Takagi-Sugeno la cual se basa en reglas difusas IF-THEN, estas reglas representan relaciones locales lineales de entrada y salida de un sistema no lineal. La principal característica de los modelos Takagi-Sugeno es expresar la dinámica local de cada

implicación difusa (regla) por un modelo afín o lineal, válido localmente en una región correspondiente. El modelo difuso global se consigue mediante una combinación de los modelos locales lineales. De acuerdo con Bernal et al. (2019) un primer intento de acercar el control difuso al control tradicional y con ello formalizar matemáticamente el diseño de controladores lo constituyó el trabajo de Takagi y Sugeno en 1985.

El enfoque Takagi-Sugeno por sector no lineal es uno de los enfoques más utilizados, ya que puede obtener una representación exacta de un sistema no lineal dado en un conjunto interpolado de modelos locales lineales.

El caso de estudio que compete este artículo es un robot rehabilitador de rodilla, basado en el rehabilitador Multi-Iso. En (Seddiki et al., 2006) se planteó este rehabilitador mediante el uso del enfoque Takagi-Sugeno por el sector no lineal, el cual se utilizó para control de seguimiento de trayectoria para establecer rutinas de rehabilitación.

La aportación de esta investigación, es el diseño de un observador proporcional integral de orden completo para la estimación de las variables estado de un sistema, a través del enfoque Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal, aplicado a un robot rehabilitador de rodilla. Se optó por el diseño de un observador del tipo proporcional integral, debido a que este nos permite minimizar el error de estimación en estado estacionario. Esta estimación puede ser útil para fines de control, monitoreo, detección de fallas, y otros.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considere un sistema no lineal continuo en su representación Takagi-Sugeno (T-S) como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t)) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de la variable medida de salida. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ son matrices conocidas, k es el número de modelos locales, φ_i son funciones de ponderación convexas que dependen de la variable premisa z .

De acuerdo con Lendek et al. (2011), la suma convexa de las funciones de ponderación debe cumplir con las siguientes propiedades.

$$1 \geq \varphi_i(z) \geq 0; \quad \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) = 1; \quad (3)$$

Suposición 1. Considere que la siguiente condición de observabilidad se cumple para cada uno de los k modelos locales.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{bmatrix} = n, \quad \forall i = [1, \dots, k] \quad (4)$$

El Observador Proporcional Integral (PIO) aplicado al sistema T-S (2) está dado por

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t)) + Ju(t) \quad (5)$$

$$\dot{v}(t) = y(t) - C\hat{x}(t) \quad (6)$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + Qy(t) \quad (7)$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector del observador, $v(t) \in \mathbb{R}^q$ es un vector auxiliar y $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de $x(t)$. Las matrices N_i, H_i, F_i, J y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas que son determinadas de forma tal que $\hat{x}(t)$ converja asintóticamente a $x(t)$. En la Fig. 1 se muestra el diagrama a bloques de la conexión entre el sistema y el PIO.

Se define la función del error de estimación como:

$$\begin{aligned} e(t) &= \hat{x}(t) - x(t) \\ &= \zeta(t) - (I_n - QC)x(t) \end{aligned} \quad (8)$$

donde $(I_n - QC)$ se define como una matriz $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de modo que la dinámica del error de estimación puede ser expresada como:

$$e(t) = \zeta(t) - Tx(t) \quad (9)$$

derivando la expresión anterior se obtiene la dinámica del error de estimación

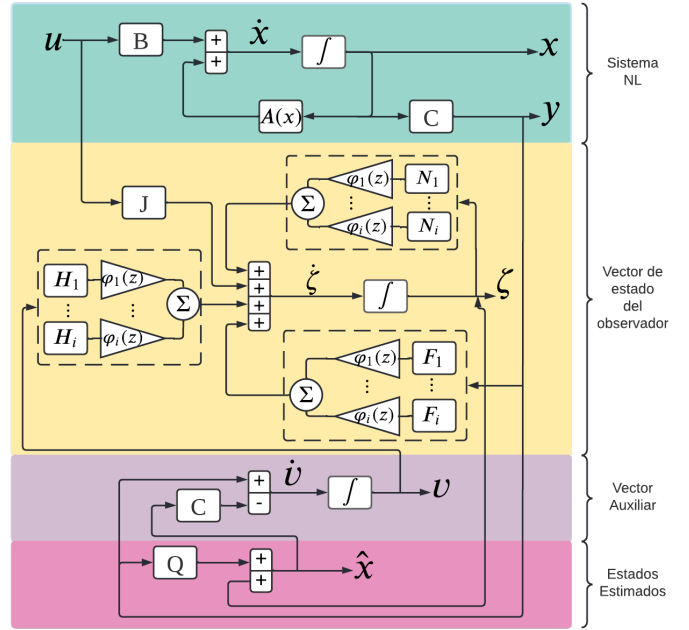


Fig. 1. Diagrama a bloques de la conexión entre el sistema y el observador

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(N_i e(t) + H_i v(t) + (N_i T + F_i C - TA_i)x(t) + (J - TB)u(t)) \quad (10)$$

usando la definición de $e(t)$ reescribimos (6)

$$\dot{v}(t) = -Ce(t) \quad (11)$$

Suponiendo que se cumplen las siguientes condiciones

- $T + QC = I_n$
- $N_i T + F_i C - TA_i = 0$
- $J = TB$

Entonces, la dinámica del error de estimación, formada por (10) y (11), puede reescribirse como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\beta}(t)} = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{A_i} \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\beta(t)} \quad (12)$$

Si la matriz A_i es estable, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, por lo tanto, $\hat{x}(t) = x(t)$ en un tiempo finito.

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR

3.1 Parametrización del observador

En esta sección se presenta la parametrización de las matrices del observador proporcional integral utilizando las condiciones algebraicas a)-c).

Considere la matriz de la forma $\Sigma = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$ tal que la condición a) puede escribirse como:

$$[T \ Q] \Sigma = I_n \quad (13)$$

la solución general de (13) está dada por

$$[T \ Q] = \Sigma^+ - Y (I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+) \quad (14)$$

donde la matriz T y Q se definen como:

$$T = \underbrace{\Sigma^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{T_1} - Y \underbrace{(I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+)}_{T_2} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$Q = \underbrace{\Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}}_{Q_1} - Y \underbrace{(I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+)}_{Q_2} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (16)$$

La matriz Y es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas y Σ^+ es la matriz inversa generalizada de Σ .

Tomando la condición b) y considerando la definición de T y Q mostrada en (15) y (16) se tiene que:

$$N_i = K_i C + T_1 A_i - Y T_2 A_i \quad (17)$$

donde $K_i = N_i Q - F_i$ despejando F_i , se obtiene:

$$F_i = N_i Q - K_i \quad (18)$$

Reemplazando la ecuación (17) en el error dinámico del observador (12) se puede reescribir como:

$$\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \beta(t) \quad (19)$$

donde $\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} T_1 A_i - Y T_2 A_i & 0 \\ 0 & -C \end{bmatrix}$, $\mathbb{Y}_i = \Omega [K_i \ H_i]$, y $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$, tal que $\Omega = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$. El problema para el diseño del PIO se reduce a determinar la matriz Y y los parámetros de la matriz \mathbb{Y}_i , tal que (19) sea estable.

3.2 Análisis de estabilidad del observador

En esta sección se presenta el análisis de estabilidad del PIO basado en Lyapunov, con el cual a través de la resolución de desigualdades matriciales lineales (LMI) se obtendrán las matrices Y , \mathbb{Y}_i .

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\beta(t)) = \beta(t)^T P \beta(t) > 0 \quad (20)$$

donde $P = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$ y $X_1 = X_1^T$ con $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $X_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$.

derivando (20) se obtiene:

$$\dot{V}(\beta(t)) = \dot{\beta}(t)^T P \beta(t) + \beta(t)^T P \dot{\beta}(t) < 0 \quad (21)$$

Sustituyendo (19) en (21):

$$\dot{V}(\beta(t)) = \beta(t)^T [(\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T P + P(\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)] \beta(t) < 0 \quad (22)$$

la desigualdad $\dot{V}(\beta(t)) < 0$ es válido para toda $\beta(t) \neq 0$, si y sólo si

$$\mathbb{A}_{1i}^T P + \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T P + P \mathbb{A}_{1i} + P \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (23)$$

Las matrices desconocidas en (23) son: P y \mathbb{Y}_i , por lo que existe una bilinealidad, es por ello que se agrupan en $\mathbb{W}_i = P \mathbb{Y}_i$, entonces

$$\mathbb{A}_{1i}^T P + \mathbb{A}_2^T \mathbb{W}_i^T + P \mathbb{A}_{1i} + \mathbb{W}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (24)$$

Recordemos que, dentro de la matriz \mathbb{A}_{1i} se desconoce la matriz Y , por lo que el producto de

$$P \mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} X_1 T_1 A_i - X_1 Y T_2 A_i & 0 \\ -X_2 C & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

dentro de esta matriz existe una bilinealidad generada por, Y y X_1 por lo que se reagrupan en $D = X_1 Y$.

Por lo tanto, la desigualdad (24) queda expresada de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_i^T T_1^T X_1^T - A_i^T T_2^T D^T & -C^T X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{A}_2^T \mathbb{W}_i^T + \begin{bmatrix} X_1 T_1 A_i - D T_2 A_i & 0 \\ -X_2 C & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{W}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (26)$$

Para el cálculo de las matrices desconocidas se tiene:

$$Y = X_1^{-1} D \quad (27)$$

$$\mathbb{Y}_i = P^{-1} \mathbb{W}_i \quad (28)$$

Despejando de $\mathbb{Y}_i = \Omega [K_i \ H_i]$ las matrices K_i y H_i se obtiene:

$$[K_i \ H_i] = \Omega^+ \mathbb{Y}_i \quad (29)$$

Con base en el análisis hecho, la determinación de las matrices N_i y F_i son obtenidas de la solución de (17) y (18). La matriz H_i y K_i están deducidas en (29), las matrices T y Q se obtienen de la solución de (15) y (16). La matriz Y está definida en (27) y finalmente J está deducida en la consideración c).

4. CASO DE ESTUDIO

4.1 Modelo dinámico de un rehabilitador de rodilla

En la literatura existen diversos rehabilitadores de rodilla, como lo son el rehabilitador Sys-Réeduc, iLeg, Physiotherabot (Seddiki et al. (2007), Hu et al. (2012), Akdoğan and Adli (2011)) entre otros. El rehabilitador con el que se trabaja es el rehabilitador Multi-Iso. De acuerdo con (Moughamir et al., 2002) este rehabilitador apoya a pacientes que sufren traumatismo articular y/o muscular. Genera movimientos de flexión - extensión en la rodilla y posee un solo grado de libertad (DOF) el diagrama de cuerpo libre se muestra en Fig. 2.

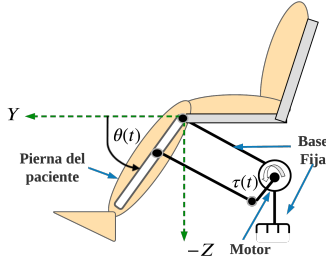


Fig. 2. Diagrama de cuerpo libre del rehabilitador de rodilla

En la Fig. 2 se puede observar que el rehabilitador genera un movimiento del tipo vertical en el eje Y hacia Z . $\theta(t)$ es el margen de movimiento del rehabilitador $[0^\circ \ 150^\circ]$ el cambio de posición se debe al par $\tau(t)$ aplicado por motor. En el análisis de distribución de energía, se considera que la energía potencial es nula en el eje Y ya solo se genera movimiento vertical.

El modelo dinámico de este rehabilitador se basó en una máquina de ejercicio isocinético (Pruski and Knops, 2005). El modelo está descrito por la siguiente ecuación:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) - mgl \cos(\theta(t)) = \tau(t) \quad (30)$$

Los valores de los parámetros aplicados en el sistema se muestran en Tabla 1 (Shen et al., 2020).

Tabla 1. Parámetros numéricos del modelo dinámico del rehabilitador.

Parámetro	Nombre	Valor
m	Masa	5 Kg
l	Longitud	0.45 m
g	Gravedad	9.81 m/s ²
b	Coefficiente de fricción viscosa	5 Nm s/rad
τ	Par aplicado por el motor	21.5 Nm

4.2 Formulación de Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal

Una de las principales características del enfoque de sector no lineal, es que puede representar fielmente un modelo no lineal por medio de un conjunto de modelos lineales, los cuales se interpolan a través de reglas difusas $\varphi_i(z)$ Flores-Hernández et al. (2018). Este enfoque se describe en el siguiente algoritmo:

- (1) Se escribe la ecuación diferencial (30) del sistema en su representación de espacios de estados, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (31)$$

donde $x(t) = [\theta(t) \ \dot{\theta}(t)]^T$, $u(t) = \tau(t)$, $y(t) = \theta(t)$

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g \cos(\theta(t))}{l\theta} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$C = [1 \ 0] \quad (33)$$

Dependiendo el sistema, algunos de los elementos de las matrices A y B pueden depender de estados o entradas del sistema.

- (2) Se identifican los γ términos no constantes del sistema, estos términos pueden encontrarse en las matrices A y B .

$$\gamma = 1 \quad (34)$$

En (32) existe una no linealidad en la matriz $A(x(t))$ la cual es llamada variable premisa z_j donde $j = 1, 2, \dots, \gamma$ por lo tanto,

$$z_1 = \frac{g \cos(\theta(t))}{l\theta} \quad (35)$$

- (3) Se define el escenario de prueba, esta depende de la entrada $\tau(t)$ mostrada en la Fig. 3 el cual permite un rango de movimiento en $\theta(t) \in [1.588 \ 2.689] \text{ rad}$, para después evaluar este rango en la variable premisa (35) y así obtener el valor máximo (\bar{z}_j) y mínimo (\underline{z}_j) de la variable premisa $z_j \in [\underline{z}_j, \bar{z}_j]$. Por lo tanto,

$$z_1 \in [-7.2912 \ -0.2395] \quad (36)$$

- (4) Se definen las funciones de ponderación $\eta_0^j(z_j)$ del sistema T-S. Por cada variable premisa, hay dos funciones de ponderación η_0^j, η_1^j las cuales son:

$$\eta_0^1(z_1) = \frac{\bar{z}_1 - z_1}{\bar{z}_1 - \underline{z}_1} \quad (37)$$

$$\eta_1^1(z_1) = 1 - \eta_0^1 \quad (38)$$

- (5) Se definen las reglas difusas $\varphi_i(z_j)$

$$\varphi_i(z_j) = \prod_{j=1}^{\gamma} \eta_{\lambda}^j(z_j), \quad j = 1, 2, \dots, \gamma \quad (39)$$

donde $i = 1, 2, \dots, 2^\gamma$ y λ es cero o uno. Las reglas difusas indican el grado de participación de cada uno de los modelos locales lineales, por lo tanto,

$$\varphi_1(z_1) = \eta_0^1; \quad (40)$$

$$\varphi_2(z_1) = \eta_1^1; \quad (41)$$

- (6) Se determinan los modelos locales, utilizando los valores máximos y mínimos de variación de z_1 (36) se definen las combinaciones posibles, encontrando $k = 2^\gamma$ modelos locales lineales.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (42)$$

donde $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \bar{z}_j - \frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \underline{z}_j - \frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$ y las matrices B, C se definen en (32) y (33).

De modo que la representación del sistema T-S por el enfoque de sector no lineal se reduce a:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (A_i x(t)) + Bu(t) \quad (43)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (44)$$

La simulación del sistema no lineal (30) y su representación por modelos T-S se muestra en la Fig. 3. Como se puede observar, el modelo T-S sigue fielmente al modelo no lineal del rehabilitador.

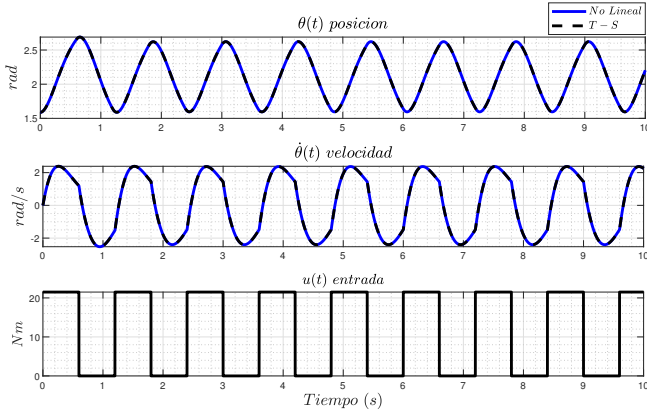


Fig. 3. Respuesta del sistema no lineal y su representación en Takagi-Sugeno

5. RESULTADOS

5.1 Región LMI

Con la finalidad de que el observador respete la región de operación de las variables a estimar del rehabilitador, se aplica una región LMI del tipo vertical en el análisis de estabilidad del observador mostrado en la Sección 3.2. Esta región LMI se caracteriza por la siguiente función.

$$f(s) = s^T + s + 2\delta \quad (45)$$

donde δ es un número constante positivo. Por otro lado, aplicando esta región de solución a la desigualdad de Lyapunov mostrada en la ecuación (26), obtenemos

$$\begin{bmatrix} A_i^T T_1^T X_1^T - A_i^T T_2^T D^T & -C^T X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{A}_2^T \mathbb{W}_i^T + \begin{bmatrix} X_1 T_1 A_i - D T_2 A_i & 0 \\ -X_2 C & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{W}_i \mathbb{A}_2 + 2\delta P < 0 \quad (46)$$

5.2 Resultados de simulación

Aplicando el PIO diseñado en la sección 3 al sistema (43-44) se obtienen las siguientes matrices.

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 &= \begin{bmatrix} -3.5000 & 2.1327 \\ -2.1327 & -3.5000 \end{bmatrix}, \\ H_1 = H_2 &= \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \\ F_1 &= \begin{bmatrix} 4.3970 \\ 2.2911 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 4.3970 \\ 9.3428 \end{bmatrix}, \\ J &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9877 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -1.1327 \\ -1.4383 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

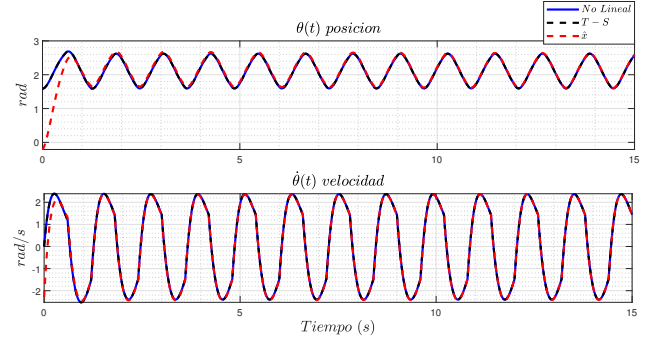


Fig. 4. Estimación de los estados del sistema

En la Fig. 4 se muestra en color azul el comportamiento del sistema no lineal, en color negro el sistema en su representación T-S y en color rojo se muestra el comportamiento del PIO al estimar las variables de estados del sistema.

Se aplicaron cuatro índices de desempeño: La integral del error cuadrático (ISE), la integral del tiempo por el error cuadrático (ITSE), la integral del error absoluto (IAE) y la integral del tiempo por el error absoluto (ITAE). Con el objetivo de mostrar de forma analítica el desempeño del observador. Los índices se muestran en la Tabla 2. En estos índices se puede observar que el PIO cumple con las características de su diseño, el cual es reducir el error de estimación en el estado estacionario debido a la parte integral que este posee en su estructura.

Tabla 2. Índices de desempeño del observador

PIO	Error	
	Posición	Velocidad
ISE	0.7541	0.4494
ITSE	0.1964	0.0633
IAE	1.022	0.6104
ITAE	2	1.209

6. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una metodología para el diseño de un observador proporcional integral de orden completo, para sistemas no lineales con representación Takagi-Sugeno por medio del enfoque de sector no lineal. Para asegurar que el comportamiento del observador sea estable se propuso una función de Lyapunov, la

cual a través de la solución de una serie de LMIs y la aplicación de una región LMI nos proporcionó las condiciones necesarias para la estabilidad del observador.

El desempeño del observador diseñado se evaluó en robot rehabilitador de rodilla de un grado de libertad, con el que se comprobó que el PIO tiene un buen desempeño.

REFERENCES

- Akdoğan, E. and Adli, M.A. (2011). The design and control of a therapeutic exercise robot for lower limb rehabilitation: Physiotherobot. *Mechatronics*, 21(3), 509–522.
- Bernal, M., Estrada, V., and Márquez, R. (2019). Diseño e implementación de sistemas de control basados en estructuras convexas y desigualdades matriciales lineales.
- Do, M.H., Koenig, D., and Theilliol, D. (2020). Robust h proportional-integral observer-based controller for uncertain lpv system. *Journal of the Franklin Institute*, 357(4), 2099–2130.
- Flores-Hernández, A., Reyes-Reyes, J., Astorga-Zaragoza, C., Osorio-Gordillo, G., and García-Beltrán, C. (2018). Temperature control of an alcoholic fermentation process through the takagi-sugeno modeling. *Chemical Engineering Research and Design*, 140, 320–330.
- Guadarrama-Estrada, A.R., Osorio-Gordillo, G.L., Vargas-Méndez, R.A., Saavedra-Benitez, Y.I., and Astorga-Zaragoza, C.M. (2020). Functional generalized dynamic observer for discrete takagi-sugeno systems.
- Hu, J., Hou, Z., Zhang, F., Chen, Y., and Li, P. (2012). Training strategies for a lower limb rehabilitation robot based on impedance control. In *2012 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 6032–6035. IEEE.
- Lendek, Z., Guerra, T.M., Babuska, R., and De Schutter, B. (2011). *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*, volume 262. Springer.
- Moughamir, S., Zaytoon, J., Manamanni, N., and Afilal, L. (2002). A system approach for control development of lower-limbs training machines. *Control Engineering Practice*, 10(3), 287–299.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
- Pruski, A. and Knops, H. (2005). *Assistive Technology: From Virtuality to Reality: AAATE 2005*, volume 16. IOS Press.
- Seddiki, L., Guelton, K., Mansouri, B., and Zaytoon, J. (2006). H-infinity takagi-sugeno fuzzy control of a lower limbs rehabilitation device. In *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 927–932. IEEE.
- Seddiki, L., Guelton, K., Moughamir, S., Mansouri, B., and Zaytoon, J. (2007). Modélisation ts et commande h-infinie d’une machine de rééducation des membres inférieurs. *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 41(2), 199–218.
- Shen, Z., Zhuang, Y., Zhou, J., Gao, J., and Song, R. (2020). Design and test of admittance control with inner adaptive robust position control for a lower limb rehabilitation robot. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 18(1), 134–142.
- Youssef, T., Chadli, M., Karimi, H.R., and Zelmat, M. (2014). Design of unknown inputs proportional integral observers for ts fuzzy models. *Neurocomputing*, 123, 156–165.
- Zhao, D., Wang, Z., Chen, Y., and Wei, G. (2020). Proportional–integral observer design for multidelayed sensor-saturated recurrent neural networks: A dynamic event-triggered protocol. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 50(11), 4619–4632.