

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
**“Modelado Computacional y Validación Experimental
de los Efectos de la Telefonía Celular para su
Estudio en Oncología Cerebral”**

POR
Ing. Francisco Javier Lares Ramírez

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Mario Francisco Jesús Cepeda Rubio

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Francisco Valdez Perezgasga

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (09)-TMCIE-2015

Torreón, Coahuila. México
Septiembre 2015

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
Instituto Tecnológico de La Laguna

"2015. Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Torreón, Coah., 03/Septiembre/2015
Dependencia: DFPI/CPCIE
Oficio: DEPI/CPCIE/163/2015
Asunto: Autorización de impresión
de tesis.

C. FRANCISCO JAVIER LARES RAMÍREZ
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"MODELADO COMPUTACIONAL Y VALIDACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS EFECTOS
DE LA TELEFONÍA CELULAR PARA SU ESTUDIO EN ONCOLOGÍA CEREBRAL"**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (09)-TMCIE-2015**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

DR. JOSÉ LUIS MEZA MEDINA
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de la Laguna

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO
de la Laguna
División de Estudios de Posgrado
e Investigación

J.L.M.



Bvd. Revolución y Cdad. Cuauhtémoc s/n Col. Centro C.P. 27000
Torreón, Coah. Tel. 7031313. e-mail. wimasturg@italaguna.edu.mx
www.italaguna.edu.mx



1502/2004
150014 Versión 2014-02

DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

"Modelado computacional y validación experimental de los efectos de la telefonía celular para su estudio en oncología cerebral."


Desarrollado por el **C. Francisco Javier Lares Ramirez**, con número de control **M1313070** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN



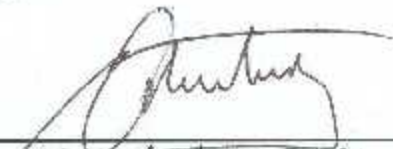
Dr. Mario E. Cepeda Rubio
Asesor/Director de Tesis



Dr. Francisco Valdes Perezgaga
Coasesor de Tesis



Dr. Víctor M. Cabrera Morelos
Comité Tutorial



M.C. Martín Vázquez Rueda
Comité Tutorial

Resumen

Hoy en día, las radiofrecuencias de los teléfonos celulares son catalogadas como potencialmente peligrosas. La tasa de absorción específica (SAR por sus siglas en inglés), es un parámetro de gran importancia para evitar riesgos en la salud de las personas que usan estos dispositivos. En esta investigación se diseña el modelo computacional de una cabeza humana a través de imágenes médicas obtenidas en un estudio tomográfico. Después, mediante un software de análisis numérico se simulan los efectos térmicos de la telefonía celular utilizando frecuencias de 900 y 1800 MHz. Ambas frecuencias mostraron un SAR de 0.88 y 1.03 W/kg respectivamente. Los resultados en las simulaciones permitieron llegar a la conclusión de que al aumentar la frecuencia, la penetración de los campos electromagnéticos disminuye provocando una mayor absorción de energía en la superficie de la cabeza humana.

Abstract

At present, radio frequencies of mobile phones are classified as potentially dangerous. The specific absorption rate (SAR), is a parameter of great importance to prevent health risks for people who use these devices. This research designed a computer model of a human head through medical images obtained in a tomographic study. Then, the thermal effects of mobile phones are simulated by numerical analysis software using frequencies of 900 and 1800 MHz. Both frequencies showed a SAR of 0.88 and 1.03 W / kg respectively. The results in the simulations allowed us to conclude that as the frequency increases, the penetration of electromagnetic fields decreases which causes increased energy absorption at the surface of the human head.

Índice

Capítulo 1. Introducción.....	1
1.1 Problema de la investigación	1
1.2 Objetivo general y objetivos específicos de la investigación	3
1.3 Justificación de la investigación	4
Capítulo 2. Marco Teórico	6
2.1 Telefonía celular y la salud.....	6
2.1.1 Estudios epidemiológicos	7
2.1.2 Estudios científicos	8
2.1.3 Estudios computacionales	9
2.2 Transferencia de calor	11
2.2.1 Balance de energía	11
2.2.2 Conducción	12
2.2.3 Convección	13
2.2.4 Radiación	14
2.2.4.1 Efectos de la superficie.....	16
2.2.4.2 Efectos de la forma geométrica	18
2.2.5 Transferencia de calor en sistemas biológicos	21
2.3 Campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo	22
2.3.1 Interacción de los campos electromagnéticos en tejidos biológicos	25
2.3.2 Propagación de los campos electromagnéticos en tejidos biológicos.....	27
2.4 El electromagnetismo computacional.....	30
2.4.1 Técnicas CEM de onda completa	30
2.5 El método del elemento finito (FEM)	31
2.5.1 El enfoque variacional.....	35
2.5.1.1 La función de forma	36
2.5.1.2 Manipulando el término energía	38
2.5.1.3 Conexión de los elementos	39
2.5.1.4 Más sobre el enfoque variacional.....	42
2.5.1.5 Equivalencia entre el funcional y la PDE	42
2.5.1.6 Condiciones de entorno en interfaces materiales.....	44

2.5.1.7 La ecuación de Poisson: incorporación de un término fuente	45
2.5.1.8 Coordenadas simples	46
2.5.1.9 Coordenadas simples en una, dos y tres dimensiones.....	47
2.5.1.10 Elemento vector.....	49
2.5.1.11 Elemento vector en triángulo (Elemento Whitney).....	51
2.5.1.12 El funcional de alta frecuencia.....	53
Capítulo 3. Metodología de la Investigación	54
3.1 Modelo computacional (cabeza humana)	55
3.1.1 Construcción 3D de volumen	56
3.1.2 Procesamiento	57
3.1.3 Segmentación.....	58
3.1.4 Exportación del modelo	58
3.2 Análisis numérico (FEM)	59
3.2.1 Establecimiento del dominio geométrico.....	60
3.2.2 Definición de los materiales	61
3.2.3 Identificación de las ecuaciones	62
3.2.3.1 Ecuación para el análisis electromagnético	62
3.2.3.2 Ecuación para el análisis térmico	62
3.2.3.3 Ecuación para el análisis del SAR	64
3.2.4 Identificación de las condiciones de entorno	64
3.2.4.1 Condiciones para el análisis electromagnético.....	64
3.2.4.2 Condiciones de entorno para el análisis térmico	66
3.2.5 Discretización del dominio	67
3.3 Tipo de investigación	68
3.4 Diseño de la investigación.....	68
Capítulo 4. Resultados	69
Capítulo 5. Conclusiones.....	73
5.1 Productos de la investigación.....	74

Índice de Figuras

Figuras del Capítulo 2

Figura 2.1 Suscripciones mundiales a teléfonos celulares 2001-2014.....	6
Figura 2.2 Balance de energía.....	12
Figura 2.3 Transferencia de calor por conducción.....	12
Figura 2.4 Transferencia de calor por convección.....	13
Figura 2.5 Potencia emisiva espectral de un cuerpo negro.....	15
Figura 2.6 Efectos de la irradiación en una superficie real.....	17
Figura 2.7 Elemento que representa una resistencia de superficie.....	20
Figura 2.8 Elemento que representa una resistencia espacial.....	20
Figura 2.9 Conexión de dos elementos triangulares.....	39
Figura 2.10 Coordenadas simples en triángulo.....	48
Figura 2.11 Vector 2D de un elemento rectangular.....	49

Figuras del Capítulo 3

Figura 3.1 Metodología para el diseño del volumen 3D de la cabeza humana.....	55
Figura 3.2 Matriz bidimensional.....	56
Figura 3.3 Matriz tridimensional.....	56
Figura 3.4 Artefacto en el archivo DICOM.....	57
Figura 3.5 Mascaras del modelo computacional de la cabeza humana.....	58
Figura 3.6 Modelo NURBS de la cabeza humana.....	58
Figura 3.7 Análisis FEM computacional.....	59
Figura 3.8 Geometría de la antena tipo parche.....	60
Figura 3.9 Dominio geométrico.....	60
Figura 3.10 Geometrías de la cabeza humana.....	61
Figura 3.11 Puerto de la antena tipo parche.....	66
Figura 3.12 Discretización del dominio.....	68

Figuras del Capítulo 4

Figura 4.1 Niveles del SAR. a) A 900 MHz. b) A 1800 MHz.....	69
Figura 4.2 Distribución del SAR. a) A 900 MHz. b) A 1800 MHz.....	70
Figura 4.3 Distribución de la temperatura. a) A 900 MHz. b) A 1800 MHz. c) Sin antena.....	71

Índice de Tablas

Tablas del Capítulo 3

Tabla 3.1 Propiedades dieléctricas de los tejidos.....	61
Tabla 3.2 Propiedades térmicas de los tejidos.....	61

Tablas del Capítulo 4

Tabla 4.1 Validación del proyecto de investigación.....	70
---------------------------------------------------------	----

Agradecimientos

Agradezco a Dios por brindarme vida y permitirme realizar una maestría a través de una buena salud, fuerza mental y fe espiritual. A mi familia y seres queridos por darme su apoyo y confiar en mí en el cumplimiento de este sueño.

Al Instituto Tecnológico de la Laguna y al CONACYT por abrirme las puertas en el área de la investigación y formarme un futuro como Maestro en Ciencias.

De igual manera, agradezco a mis queridos formadores y en especial a mi asesor de tesis el Dr. Mario Francisco Jesús Cepeda Rubio por brindarme los conocimientos necesarios para la realización del presente proyecto de investigación.

*“La única verdadera medida del éxito
es la relación entre lo que podíamos haber sido
y lo que hemos logrado llegar a ser”.*

H. G. Wells

Capítulo 1. Introducción

1.1 Problema de la investigación

Los teléfonos celulares emiten ondas de radio frecuencia, una forma de radiación electromagnética no ionizante que puede ser absorbida por los tejidos más cercanos a estos dispositivos. Debido al incremento dramático en el número de usuarios suscritos a servicios de telefonía celular, en la actualidad se ha generado una preocupación por la posible existencia de efectos negativos en los campos electromagnéticos producidos por los teléfonos celulares [1]. Sin embargo, no está claro si la exposición a estos dispositivos afecta la salud de las personas.

Durante los años 80's y 90's, científicos de todo el mundo realizaron estudios para establecer los potenciales efectos de las emisiones electromagnéticas. Estas investigaciones condujeron a la determinación de los niveles admisibles por debajo de los cuales se garantiza la ausencia de riesgos en la utilización de teléfonos celulares. Un parámetro de gran importancia en la determinación de los efectos negativos producidos por los campos electromagnéticos es la tasa de absorción específica (SAR por sus siglas en inglés) [2].

El SAR se define como la potencia máxima absorbida por el tejido vivo. Los gobiernos han puesto estándares para no exceder los niveles máximos de SAR y evitar riesgos en la salud humana [3]. En la actualidad, este nivel se encuentra en 2 W/kg sobre 10 g de tejido para EUA y Europa. Estos valores se emplean para frecuencias entre 100kHz y 300GHz (radiaciones no ionizantes particularmente de los teléfonos celulares) [4, 5].

Los campos electromagnéticos emitidos por los teléfonos GSM modernos tienen una potencia máxima de 1 a 2 W, mientras que otras tecnologías celulares digitales tienen potencias por debajo de 1 W. Estos niveles son generalmente considerados como seguros por las autoridades reguladoras internacionales [6].

Una posible relación entre la telefonía celular y el riesgo a contraer cáncer tomó importancia a raíz de una demanda judicial realizada en mayo de 1993 en Estados Unidos. En el caso, el demandante sostenía que el uso del teléfono celular era el causante de la generación de un tumor cerebral en su esposa. Esta demanda fue desaprobada debido a la falta de evidencia [2]. Desde entonces se han realizado numerosos estudios epidemiológicos, científicos y computacionales para validar la existencia de efectos negativos en la telefonía celular.

1.2 Objetivo general y objetivos específicos de la investigación

Esta investigación tiene como objetivo general la realización de un análisis numérico en un modelo computacional de cabeza humana para medir los efectos térmicos de la telefonía celular. Para cumplir este propósito se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Recapitulación y reevaluación del estado del arte sobre los efectos térmicos de la telefonía celular.
- Investigación y selección de un software de diseño que cumpla con las necesidades del proyecto para la elaboración de una cabeza humana.
- Investigación y selección de un software de análisis numérico que cumpla con las necesidades del proyecto para la simulación de los efectos térmicos producidos por un teléfono celular.
- Realizar el modelo de la cabeza humana en un formato que pueda ser importado al software de análisis numérico.
- Adquirir conocimientos de las ecuaciones y condiciones de entorno que regirán el análisis numérico.

Una vez alcanzado el objetivo general, se pretende comprobar que mediante la realización de un análisis numérico en un modelo computacional de cabeza humana, es posible medir los efectos térmicos de la telefonía celular para su estudio en oncología cerebral.

1.3 Justificación de la investigación

La Agencia Internacional de Investigación sobre el Cáncer ha clasificado a los campos electromagnéticos producidos por los teléfonos celulares como posibles carcinógenos para los seres humanos. Las principales razones que despiertan inquietud sobre la existencia de efectos negativos en la telefonía celular son:

- Las ondas de radio frecuencia es una forma de radiación electromagnética no ionizante que puede ser absorbida por los tejidos biológicos.
- El número de usuarios suscritos a servicios de telefonía celular aumenta con gran rapidez.
- Las tecnologías de los teléfonos celulares cambian constantemente.
- El aumento en el número de llamadas realizadas por parte de los usuarios y su duración.

Estas razones ponen en relieve la necesidad de realizar estudios que documenten la existencia de efectos negativos en las ondas de radiofrecuencia emitidas por los teléfonos celulares. Es de suma importancia investigar, comprender y seguir de cerca las repercusiones de la telefonía celular en la salud humana.

Debido a que los estudios sobre los efectos electromagnéticos en seres humanos son limitados, la implementación de modelos computacionales y análisis numérico pueden ser herramientas útiles en la determinación de los efectos térmicos producidos por los teléfonos celulares. Como ingeniero comprometido con el código de ética, es de suma importancia desarrollar investigaciones que tengan un impacto positivo en la sociedad y el medio ambiente. Además, la realización de este proyecto de investigación es pertinente ya que los estudios computacionales generan menos gastos que los estudios reales.

Se debe tener en cuenta que las superficies reales presentan notables diferencias con respecto a las superficies ideales. Lo anterior se debe a que las superficies reales no se difunden de manera perfecta y la intensidad de radiación emitida no es constante en todas las direcciones. También, la conductividad del material es un parámetro de gran importancia ya que los conductores emiten más energía en una dirección que tenga un amplio ángulo acimutal. Con la implementación de un modelo computacional de una cabeza humana compuesta por tres geometrías, se pueden obtener valores de la distribución de temperatura y SAR más acercados a la realidad.

Esta investigación tiene como objetivo personal la generación y aportación de un antecedente para futuros estudios sobre los efectos de la telefonía celular en los tejidos biológicos. En el 2016, la OMS realizara una evaluación formal de los estudios que se han realizado sobre los efectos de las radiofrecuencias en la salud humana.

Capítulo 2. Marco Teórico

2.1 Telefonía celular y la salud

Desde el año 2001, el número de usuarios suscritos a servicios de telefonía celular ha tenido un incremento considerable. En la Figura 2.1 se muestra el número de suscripciones a teléfonos celulares desde el año 2001 al 2015 a nivel mundial [7].

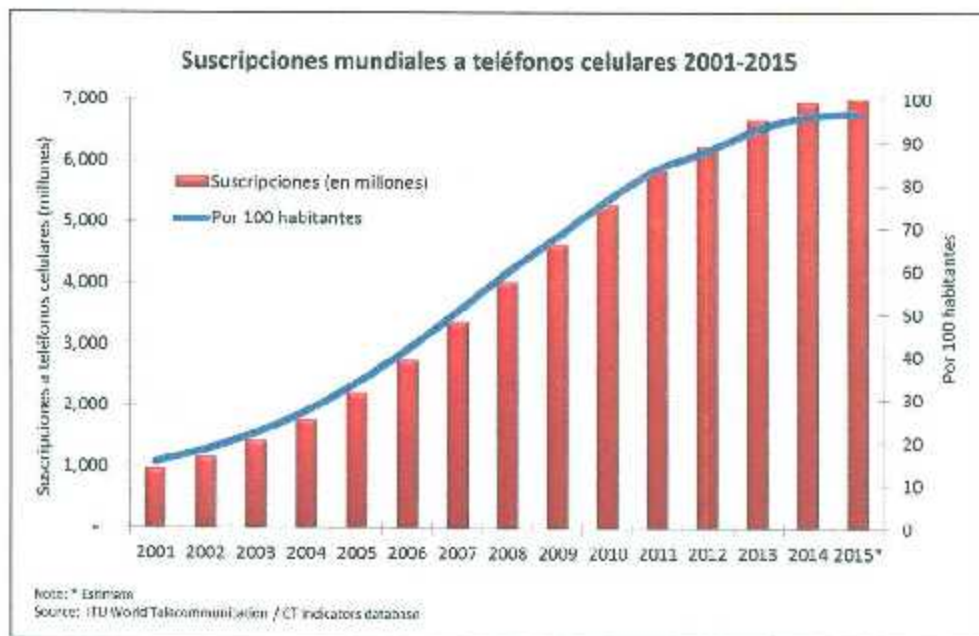


Figura 2.1 Suscripciones mundiales a teléfonos celulares 2001-2015.

En la valoración de los posibles efectos negativos de los campos electromagnéticos en la salud de las personas, los distintos comités científicos integrados por expertos de distintas áreas y especialidades, han tomado en cuenta más de 3,000 investigaciones publicadas y sometidas al método científico [8]. Estas publicaciones se basan en estudios epidemiológicos, científicos y computacionales para la obtención de resultados.

2.1.1 Estudios epidemiológicos

Los investigadores han llevado a cabo varios tipos de estudios epidemiológicos para investigar la existencia de una relación entre los teléfonos celulares y la generación de tumores cerebrales cancerígenos.

Los estudios epidemiológicos de caso-control y cohortes miden indirectamente el grado de exposición a la radiofrecuencia por medio de información obtenida en entrevistas o cuestionarios [1]. Estas medidas incluyen los siguientes aspectos:

- La duración promedio de una llamada telefónica típica.
- La frecuencia o el número promedio de llamadas telefónicas hechas en el día, semana o mes.
- La edad y año en la que los participantes de estudio usaron por primera y última vez un teléfono celular. Esto permite calcular la duración y el tiempo desde el principio de su uso.
- El número total de horas que se ha usado un teléfono celular a lo largo de la vida. Esto se calcula por la duración de una llamada típica, la frecuencia y el tiempo de uso.

En los estudios de caso-control, los participantes son seleccionados en función de que tengan (caso) o no tengan (control) una determinada enfermedad. Después de haber seleccionado los individuos de cada grupo, el siguiente paso es investigar si estuvieron expuestos o no a una característica de interés. El objetivo es realizar una comparación de los resultados obtenidos en los dos grupos [1].

A diferencia de lo anterior, en los estudios de cohortes se hace una comparación de la frecuencia de una determinada enfermedad entre dos poblaciones. Los individuos que componen los grupos de estudio se seleccionan en función de la presencia de una determinada característica o exposición. Los resultados en ambos estudios no han proporcionado evidencia clara de una relación entre el uso de los teléfonos celulares y el cáncer [1].

2.1.2 Estudios científicos

Los estudios realizados en seres humanos para medir los efectos de las radiofrecuencias telefónicas han producido resultados variables. Por ejemplo, los estudios que utilizaron la tomografía por emisión de positrones para medir cambios en el flujo sanguíneo cerebral reportaron resultados variables, es decir, se ha encontrado aumento, disminución o estabilidad en el flujo sanguíneo [9].

Nora D. Volkow, Dardo Tomasi y Gene-Jack Wang (2011) utilizaron la actividad cerebral como un marcador para evaluar los efectos que produce la exposición aguda de un teléfono celular. La experimentación se realizó a 47 participantes sanos en un único laboratorio de Estados Unidos en febrero del 2011. Los participantes fueron sometidos a dos tomografías por emisión de positrones con un teléfono celular en cada oído. También, se les aplicó una inyección de fluorodesoxiglucosa (^{18}F) para medir el metabolismo de la glucosa cerebral. El primer estudio de tomografía fue realizado con el celular del lado derecho activado durante 50 minutos y el otro con ambos dispositivos desactivados. Los investigadores llegaron a la conclusión de que la exposición al teléfono celular activado durante 50 minutos se asoció con un incremento en el metabolismo de la glucosa celular. Este hallazgo es de importancia clínica desconocida [10].

2.1.3 Estudios computacionales

También, se han invocado a los efectos térmicos de las radiofrecuencias como mecanismos que podrían afectar la actividad neuronal. Existen varios métodos computacionales para estudiar los efectos de los campos electromagnéticos producidos por un teléfono celular. Estos métodos se pueden dividir en dos partes:

- Métodos analíticos y semianalíticos basados en una geometría idealizada (esfera homogénea, esferas concéntricas y modelos planos de multicapa).
- Métodos numéricos basados en una geometría compleja (cabeza humana).

A. A. Omar (2010) implementó la técnica de imagen compleja (CIT) para calcular el campo eléctrico y la distribución del SAR en la cabeza humana mediante las funciones de Green. En esta investigación se elaboró el modelo de una cabeza humana compuesta por tres capas planas de materiales dieléctricos que corresponden a la piel, hueso y cerebro. Para el cálculo de resultados se posicionó una antena dipolo a una distancia de 2 cm del modelo y se utilizaron frecuencias de 900 y 1800 MHz. La exactitud del análisis se verificó comparando los resultados del CIT con los obtenidos por el software de elementos finitos ANSYS HFSS. El estudio señaló que el número de capas tiene poco efecto en los niveles máximos de SAR. Esto se corroboró mediante la realización del mismo procedimiento en un modelo homogéneo de cabeza humana (solo material cerebral). Al comparar ambos modelos se observó una variación de resultados mínima. También, se investigaron los efectos de las frecuencias y se demostró que el SAR aumenta a medida que la frecuencia se incrementa. El investigador concluye en que al incrementar la frecuencia, la profundidad de penetración del campo electromagnético disminuye causando un aumento en la disipación de potencia en los tejidos [3].

Asma Lak y Homayoon Oraizi (2012) estudiaron la interacción entre modelos de cabeza humana y fuentes de campos electromagnéticos. En esta investigación se elaboraron dos modelos esféricos de cabeza humana compuestos por una y seis capas respectivamente. Las seis capas corresponden a la piel, grasa, hueso, duramadre, factor estimulante de colonias y cerebro. Para el cálculo de los resultados se utilizó una antena dipolo como fuente de emisión y se posicionó a una distancia de 5 mm en ambos modelos. En la realización del estudio se implementó el software ANSYS HFSS para simular los efectos del campo electromagnético a una frecuencia de 900 MHz. Al comparar los resultados de las simulaciones se observó un nivel máximo de SAR en el modelo de seis capas. También, se investigaron los efectos de la distancia y se demostró que el SAR disminuye a medida que la distancia entre la antena y el modelo aumenta. Los investigadores concluyeron que los valores del SAR dependen de la distancia de la antena y de la conductividad de los materiales [11].

Teerapot Wessapan, Siramate Srisawatdhisukul y Phadungsak Rattanadecho (2012) presentaron el análisis numérico de la distribución de temperatura y SAR en un modelo de cabeza humana realista. Para el cálculo de los resultados se utilizó una antena tipo parche y se posicionó a diferentes distancias del modelo utilizando frecuencias de 900 y 1800 MHz. En esta investigación se estudiaron sistemáticamente tanto los efectos de las frecuencias en los tejidos biológicos, como los efectos de la distancia entre la antena y el modelo. Cabe destacar que los investigadores utilizaron la geometría SAM Phantom de cabeza humana proporcionada por la IEEE para mediciones y especificaciones del SAR. Además, se implementó una interpolación volumétrica para estimar la variación de los materiales en el interior de la cabeza. Los efectos de los campos electromagnéticos se simularon a través del software COMSOL Multiphysics. Los resultados en las simulaciones demostraron que la distribución de temperatura y SAR en el modelo no son directamente proporcionales [12].

2.2 Transferencia de calor

La transferencia de calor es la ciencia que busca predecir la transferencia de energía entre cuerpos materiales como resultado de una diferencia de temperatura. En termodinámica, a la transferencia de energía se le denomina calor [13]. Los tres mecanismos de transferencia de calor son: conducción, convección y radiación.

2.2.1 Balance de energía

Para comprender el movimiento de calor dentro de un material, es necesario considerar un balance de energía en el sistema de interés a estudiar: Una vez que se han identificado tanto el sistema de interés como el proceso de transferencia de calor, el balance de energía nos muestra que la tasa de cambio en la energía interna almacenada en el sistema, es igual a la sumatoria de las energías que interactúan con el sistema a través del medio ambiente. Lo anterior se establece en la primera ley de la termodinámica (ley de la conservación de energía), y se define mediante la siguiente ecuación [14]:

$$\frac{dE}{dt} = \sum Q - W + \sum m(h_{in} - h_{out}) + Q_{gen} \quad (2.1)$$

Donde E es la energía del sistema, $\sum Q$ es la sumatoria de todos los flujos de calor, W es la tasa a la que el trabajo se realiza en el entorno, $\sum m(h_{in} - h_{out})$ es la sumatoria de todos los flujos de masa que cruzan la frontera del sistema con sus diferencias de entalpía, Q_{gen} es la tasa a la que se produce o disipa energía en el interior del sistema. En la Figura 2.2 se pueden visualizar los términos de la ecuación de balance térmico.

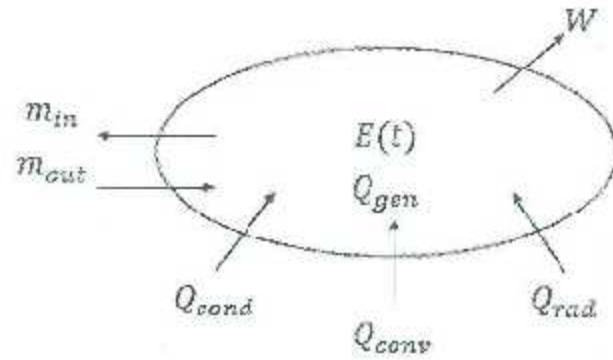


Figura 2.2 Balance de energía.

2.2.2 Conducción

El fenómeno de transferencia de calor por conducción constituye un proceso de propagación de energía en un medio sólido, líquido o gaseoso mediante la comunicación molecular directa. Al haber gradiente de temperatura en el medio, la segunda ley de la termodinámica establece que la transferencia de calor se lleva a cabo de la región de mayor temperatura a la de menor [15]. Este fenómeno se puede visualizar en la Figura 2.3.

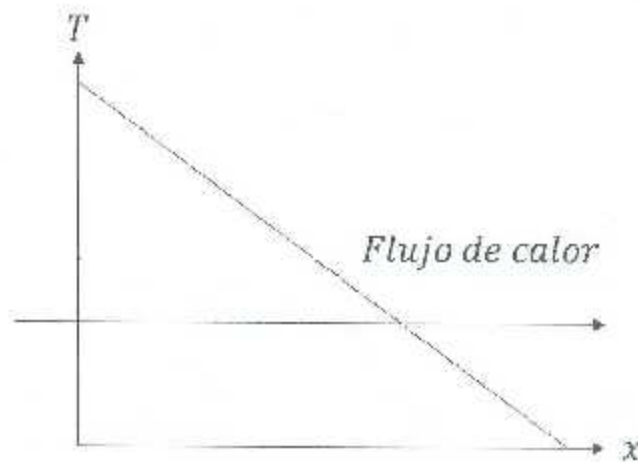


Figura 2.3 Transferencia de calor por conducción.

La ecuación constitutiva de la transferencia de calor por conducción se describe mediante la ley de Fourier [15]:

$$Q_{\text{cons}} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.2)$$

Donde k es la conductividad térmica del material, x es una coordenada a lo largo de la cual existe un gradiente de temperatura y A es el área normal a la gradiente y la sección transversal por donde fluye el calor.

2.2.3 Convección

El fenómeno de transferencia de calor por convección es un proceso de transporte de energía que se lleva a cabo como consecuencia del movimiento de un fluido (líquido o gas) en la vecindad de una superficie [15]. Este fenómeno se puede visualizar en la Figura 2.4.

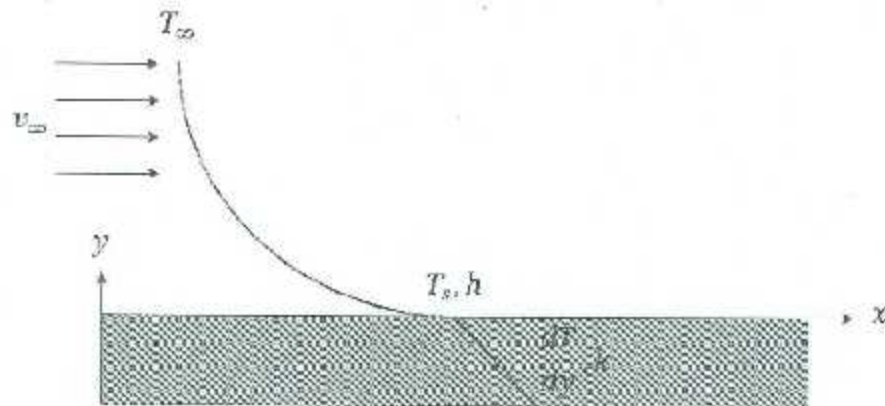


Figura 2.4 Transferencia de calor por convección.

La ecuación constitutiva de la transferencia de calor por convección se describe mediante la ley de Newton del enfriamiento [15]:

$$Q_{conv} = hA(T_s - T_{\infty}) \quad (2.3)$$

Donde h es el coeficiente de transferencia de calor en (W/m^2K) , A es el área de transferencia de calor por convección y $(T_s - T_{\infty})$ es la diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido. Al sustituir la ecuación 2 en la ecuación 3, el coeficiente de transferencia de calor se puede determinar mediante la siguiente expresión:

$$-k \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = h(T_s - T_{\infty}) \quad (2.4)$$

2.2.4 Radiación

Los mecanismos de transferencia de calor por conducción y convección requieren de un medio para propagar la energía. Sin embargo, el calor puede propagarse en el vacío por medio de la radiación. La radiación térmica se define como la energía radiante emitida por un cuerpo debido a su temperatura. Esta emisión comprende una longitud de onda entre 0.1 a 100 μm . Un cuerpo negro emite energía radiante de su superficie a una razón proporcional de su temperatura absoluta elevada a la cuarta potencia. Lo anterior se define en la ley de Stefan-Boltzmann [15]:

$$E_b = \sigma T^4 \quad (2.5)$$

Donde E_b es la potencia emisiva de un cuerpo negro en (W/m^2) y σ es la constante de Stefan-Boltzmann cuyo valor numérico es 5.67×10^{-8} (W/m^2K^4).

La potencia emisiva monocromática de un cuerpo negro se define mediante la ley de Planck [15]:

$$E_{b\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)} \quad (2.6)$$

Donde $E_{b\lambda}$ es la potencia emisiva monocromática en ($W/m^2\mu m$), λ es la longitud de onda en (μm), $C_1 = 3.742 \times 10^8$ ($W\mu m^4/m^2$) y $C_2 = 1.439 \times 10^4$ (μmK). En la Figura 2.5 se muestra la variación de la potencia emisiva monocromática de un cuerpo negro como función de la longitud de onda para distintas temperaturas.

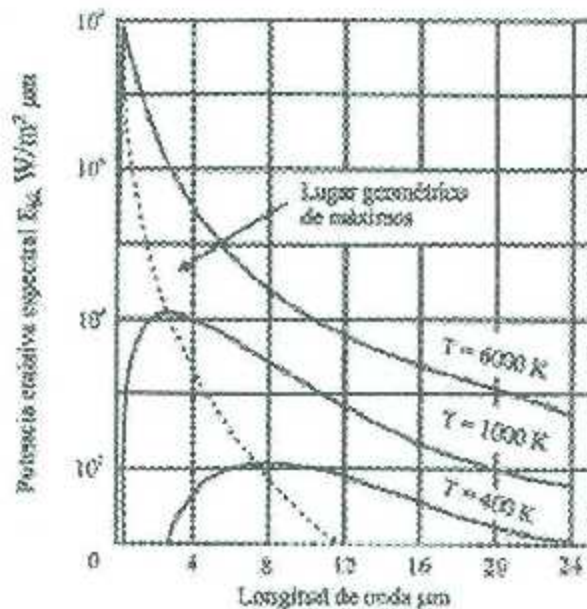


Figura 2.5 Potencia emisiva espectral de un cuerpo negro.

La ley del desplazamiento de Wien describe una relación entre la temperatura absoluta y la longitud de onda en la que ocurre la máxima emisión [15]:

$$\lambda_{max}T = 2897.8 \mu mK \quad (2.7)$$

La energía emitida en una banda específica de longitudes de onda se calcula mediante la siguiente ecuación [15]:

$$E_{b,0-\lambda} = \int_0^{\lambda} E_{b,\lambda} d\lambda \quad (2.8)$$

Al dividir la ecuación 2.8 entre la ecuación 2.5 se obtiene la siguiente expresión [15]:

$$\frac{E_{b,0-\lambda}}{\sigma T^4} = \int_0^{\lambda} \frac{C_1 d(\lambda T)}{\sigma(\lambda T)^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)} \quad (2.9)$$

La ecuación 2.9 representa el área bajo las curvas isotérmicas de la Figura 2.5. Estas curvas delimitan la potencia emisiva de una superficie a determinada temperatura.

2.2.4.1 Efectos de la superficie

El cálculo de la transferencia de calor por radiación en superficies negras es relativamente fácil ya que la energía radiante total es absorbida. Cuando se tiene una superficie real, la energía incidente se absorbe, se refleja y se transmite.

Las fracciones de la radiación incidente se determinan mediante los coeficientes de absorción (α), reflexión (ρ) y transmisión (τ). Aplicando la conservación de la energía, estas tres propiedades se relacionan entre sí mediante la siguiente ecuación [14]:

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (2.10)$$

Se le llama irradiación al flujo radiante total que incide en una superficie y se denota mediante el símbolo G . En una superficie real, la irradiación se compone de muchas longitudes de onda y se denota mediante el símbolo G_λ [14]. En la Figura 2.6 se representa este fenómeno.

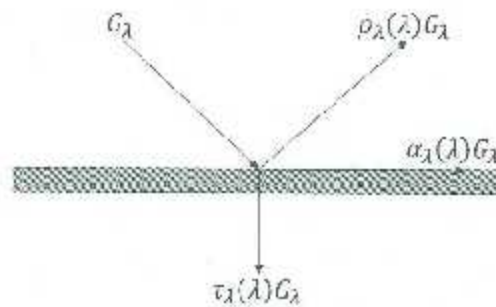


Figura 2.6 Efectos de la irradiación en una superficie real.

La emisividad monocromática de una superficie real se define como la proporción del poder emisorio monocromático del cuerpo al poder emisorio monocromático del cuerpo negro. Lo anterior se describe mediante la siguiente ecuación [15]:

$$\epsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{\lambda b}} \quad (2.11)$$

La ley de Kirchhoff establece que para cualquier superficie real, la emisividad monocromática es igual a la absorbancia monocromática [15]:

$$\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda} \quad (2.12)$$

Debido a que los cuerpos opacos no transmiten la radiación térmica, la ecuación 10 se puede reescribir como [15]:

$$\alpha_{\lambda} + \rho_{\lambda} = 1 \quad (2.13)$$

Al combinar la ecuación anterior con la ley de Kirchhoff obtenemos [15]:

$$\rho_{\lambda} = 1 - \varepsilon_{\lambda} \quad (2.14)$$

2.2.4.2 Efectos de la forma geométrica

El factor de forma ($F_{m \rightarrow n}$) se define como la cantidad de energía que sale de una superficie m e incide en una superficie n . Existen dos tipos de relaciones que rigen el factor de forma y son de gran utilidad en el análisis de la radiación. La primera es la relación de reciprocidad y establece una igualdad entre dos superficies [14]:

$$A_n F_{n \rightarrow m} = A_m F_{m \rightarrow n} \quad (2.15)$$

La segunda es la relación de la regla de adición y establece que la suma de los factores de forma es igual a uno [14]:

$$\sum_{k=1}^n F_{m \rightarrow k} = 1 \quad (2.16)$$

Se le llama radiosidad a la radiación total que deja la superficie y se denota mediante el símbolo J . En otras palabras, la radiosidad se define como la suma de la energía emitida y reflejada por una superficie cuando no existe transmisión. Lo anterior se describe mediante la siguiente ecuación [14]:

$$J = \varepsilon E_b + \rho G \quad (2.17)$$

La energía neta que intercambia la superficie es la diferencia entre la radiosidad e irradiación [14]:

$$\frac{Q}{A} = J - G = \varepsilon E_b + (1 - \varepsilon)G - G \quad (2.18)$$

Que puede ser escrito como [14]:

$$Q = \frac{E_b - J}{(1 - \varepsilon)/\varepsilon A} \quad (2.19)$$

En la Figura 2.7 se muestra un elemento de red que representa la resistencia superficial al flujo de calor.

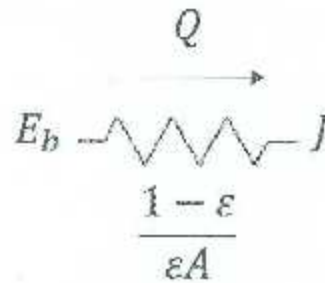


Figura 2.7 Elemento que representa una resistencia de superficie.

Retomando el tema del factor de forma, el intercambio neto de energía entre dos superficies se puede definir como la suma de sus flujos en ambas direcciones. Lo anterior se describe mediante la siguiente ecuación [14]:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = J_1 A_1 F_{1 \rightarrow 2} - J_2 A_2 F_{2 \rightarrow 1} = \frac{J_1 - J_2}{1/A_1 F_{1 \rightarrow 2}} \quad (2.20)$$

En la Figura 2.8 se muestra un elemento de red que representa la resistencia espacial para el intercambio de radiación entre dos cuerpos.

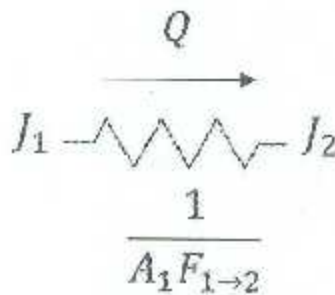


Figura 2.8 Elemento que representa una resistencia espacial.

2.2.5 Transferencia de calor en sistemas biológicos

Los procesos de bioalentamiento en tejido vivo son influenciados por la perfusión sanguínea a través de la red vascular. Pennes (1948) propuso un modelo para describir los efectos del metabolismo y la perfusión sanguínea en un balance de energía dentro del tejido. Estos dos efectos son incorporados en la ecuación de Bioalentamiento que se muestra a continuación [14]:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T + (\rho c)_b \omega_b (T_b - T) + Q_{met} \quad (2.21)$$

Donde $(\rho c)_b \omega_b (T_b - T)$ es el término de perfusión sanguínea y Q_{met} es la fuente de calor metabólica.

2.3 Campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo

El electromagnetismo es la ciencia que se encarga del estudio de los campos eléctricos y magnéticos, así como de su interacción [16]. Los campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo se describen mediante las ecuaciones de Maxwell. En su forma integral, estas ecuaciones describen los campos en el libre espacio. A continuación, se muestra este conjunto de ecuaciones [14]:

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV \quad (2.22)$$

$$\oint_l E \cdot dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad (2.23)$$

$$\oint_S B \cdot dS = 0 \quad (2.24)$$

$$\oint_l B \cdot dl = \mu_0 \int_S J \cdot dS + \epsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial E}{\partial t} \cdot dS \quad (2.25)$$

Donde J es la densidad de corriente en (A/m^2) .

En la ecuación 2.23 se establece que la fuerza electromotriz alrededor de un circuito cerrado, es igual a la velocidad de cambio del flujo magnético que cortar el circuito. A este fenómeno se le conoce como la ley de Faraday. La ecuación 2.24 indica que el flujo total del campo magnético a través de una superficie cerrada, es igual a cero. Por último, la ecuación 2.25 muestra la dependencia del campo magnético con la corriente continua en desplazamiento. Esta corriente a su vez, está relacionada con la velocidad de cambio del campo eléctrico, lo que asegura la conservación de la carga. La corriente total que pasa a través de cualquier superficie cerrada, debe ser igual a la variación total de la carga dentro de la superficie. Lo anterior se define como [14]:

$$\oint_S J \cdot dS = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.26)$$

Las formas diferenciales de las ecuaciones de Maxwell son [14]:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.27)$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.29)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (2.30)$$

La ecuación 2.27 indica que la densidad de carga es una fuente de campo eléctrico, y que las líneas de campo eléctrico comienzan y finalizan en cargas. En la ecuación 2.29 se muestra que las líneas de campo magnético son siempre circuitos cerrados. En las ecuaciones 2.28 y 2.30 se puede observar como los campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo están íntimamente relacionados. Los campos eléctricos y magnéticos estáticos pueden ser considerados por separado debido a que sus derivativas en el tiempo son cero [14].

Sin embargo, incluso cuando las derivativas en el tiempo no son cero pero siguen siendo pequeñas, la aproximación de que los campos eléctricos y magnéticos son independientes sigue siendo válida. A esto se le conoce como aproximación cuasi-estática y en términos prácticos requiere que las dimensiones del problema sean pequeñas en comparación con la longitud de onda. Los campos eléctricos y magnéticos también satisfacen la ecuación de onda [14]:

$$\nabla^2 E - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (2.31)$$

$$\nabla^2 B - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 \quad (2.32)$$

La solución más simple es asumir una onda sinusoidal a una sola frecuencia [14]:

$$\begin{aligned} E(r, t) &= \text{Re}\{E(r)e^{j\omega t}\} \\ B(r, t) &= \text{Re}\{B(r)e^{j\omega t}\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Y en el caso de una onda plana [14]:

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 e^{-jk \cdot r} \\ B(r) &= B_0 e^{-jk \cdot r} \end{aligned} \quad (2.34)$$

En donde E_0 y B_0 son amplitudes y k es el vector de onda que se relaciona con la frecuencia angular a través de [14]:

$$|k| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.35)$$

La velocidad de onda se determina mediante la siguiente ecuación [14]:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (2.36)$$

2.3.1 Interacción de los campos electromagnéticos en tejidos biológicos

La interacción de los campos eléctricos y magnéticos con el medio en general se puede describir en términos de conducción de corriente, polarización dieléctrica y magnetización. Los tejidos biológicos son esencialmente no magnéticos, es por esta razón que solo se describen el primer y segundo mecanismo en esta sección [14].

Los campos eléctricos ejercen una fuerza en las cargas que resulta en una acumulación de electrones que se impone al movimiento térmico aleatorio. Esto da lugar a una corriente de conducción que se representa mediante la siguiente ecuación [14]:

$$J_c = \sigma E \quad (2.37)$$

Donde σ es la conductividad eléctrica del tejido en (S/m).

Los campos eléctricos también interactúan con las moléculas polares de los tejidos causando pequeños desplazamientos y la reorientación de sus posiciones de equilibrio en ausencia del campo. La polarización de densidad está relacionada con el campo eléctrico a través de la susceptibilidad eléctrica [14]:

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (2.38)$$

En donde χ cuenta para los dos tipos de polarización y se relaciona con la permisividad relativa mediante la siguiente ecuación [14]:

$$\chi = \epsilon_r - 1 \quad (2.39)$$

La permisividad indica la facilidad con la que se polariza el medio [14]:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = (1 + \chi) \epsilon_0 \quad (2.40)$$

Mediante una cantidad conocida como la permisividad compleja, se puede explicar la acumulación de cargas de conducción y la polarización [14]:

$$\epsilon^* = (\epsilon' - j\epsilon'') \quad (2.41)$$

En la ecuación 2.41, la parte real ϵ' representa la polarización y es una medida de la energía almacenada en el medio. La parte imaginaria ϵ'' representa la conducción y es una medida de la energía perdida por parte del campo eléctrico en el medio. Lo anterior puede ser expresado en términos de conductividad σ y frecuencia angular ω como [14]:

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad (2.42)$$

2.3.2 Propagación de los campos electromagnéticos en tejidos biológicos

Para describir la propagación de los campos electromagnéticos en medios dieléctricos como tejidos biológicos, la permisividad en las ecuaciones diferenciales de Maxwell se sustituye por la permisividad compleja. La solución para una onda plana análoga a la ecuación es [14]:

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 e^{-\gamma r} \\ B(r) &= B_0 e^{-\gamma r} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Donde γ es la propagación compleja en $(1/m)$ y estada dada por [14]:

$$\gamma = j\omega\mu_0\varepsilon_0 \left(\varepsilon' - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \right) \quad (2.44)$$

La parte real e imaginaria de α y β respectivamente son [14]:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon'}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon'} \right)^2} - 1 \right]} \quad (2.45)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon'}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon'} \right)^2} + 1 \right]} \quad (2.46)$$

Donde α es el coeficiente de atenuación en (Np/m) y β es la constante de fase en (rad/m) .

En ingeniería, la profundidad de penetración se toma como la distancia en un medio sobre el cual un campo eléctrico se reduce en un factor e . Para ondas planas, la profundidad de penetración se obtiene mediante la siguiente ecuación [14]:

$$d = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2c}{\sqrt{\varepsilon''^2 + \varepsilon'^2} - \varepsilon'}} \quad (2.47)$$

La longitud de onda característica de un medio está dada por [14]:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.48)$$

La tasa de absorción específica (SAR por sus siglas en inglés) se define como la derivada en el tiempo de la energía incremental dW absorbida o disipada en una masa incremental dm contenida en un elemento volumétrico dV de densidad conocida ρ . Lo anterior se define mediante la siguiente ecuación [14]:

$$SAR = \frac{d}{dt} \left(\frac{dW}{dm} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dW}{\rho dV} \right) \quad (2.49)$$

En términos de campo eléctrico en un punto, el SAR se define mediante la siguiente ecuación [14]:

$$SAR = \frac{\sigma |E|^2}{\rho} \quad (2.50)$$

Donde las unidades del SAR son los watts por kilogramo (W/kg).

2.4 El electromagnetismo computacional

El electromagnetismo computacional (CEM por sus siglas en inglés) es un campo multidisciplinario cuyas disciplinas básicas son la teoría del electromagnetismo y los métodos numéricos. Para implementaciones útiles, el modelado geométrico y los algoritmos computacionales desempeñan un papel importante en este campo [17].

2.4.1 Técnicas CEM de onda completa

Las técnicas CEM de onda completa acercan numéricamente la ecuación de Maxwell sin aproximaciones físicas iniciales. A continuación se mencionan los métodos CEM más utilizados [17]:

- Las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD por sus siglas en inglés).
- El método de los momentos (MOM por sus siglas en inglés).
- El método del elemento finito (FEM por sus siglas en inglés).

Estos métodos tienen como objetivo la discretización de alguna propiedad electromagnética desconocida. Por lo general, se discretiza la corriente superficial en MOM y el campo eléctrico en FDTD y FEM. A este proceso de discretización se le conoce como mallado e implica la subdivisión de una geometría en un gran número de elementos pequeños. Dentro de cada elemento, una dependencia funcional simple es asumida para la variación espacial de lo desconocido [17].

2.5 El método del elemento finito (FEM)

El método del elemento finito es una de las técnicas más utilizadas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales (PDE por sus siglas en inglés) de las matemáticas aplicadas y la mecánica computacional. La idea central de este método es remplazar alguna función desconocida en el dominio, por un conjunto de elementos con forma definida pero de amplitud desconocida. Los elementos más utilizados en el análisis FEM son las líneas en una dimensión (1D), los triángulos en dos dimensiones (2D) y los tetraedros en tres dimensiones (3D) [18]. Independientemente de la naturaleza física del problema, el análisis FEM sigue los siguientes pasos:

- **Definición del problema y su dominio**

El análisis FEM tiene implícito tres tipos de aproximación. La primera se relaciona con la definición física y geométrica del problema (dominio). Las otras dos están asociadas con la discretización de las ecuaciones gobernantes y los algoritmos empleados en la solución de las ecuaciones simultáneas resultantes [18].

- **Discretización del dominio**

Debido a que usualmente los problemas en el análisis FEM están definidos sobre el dominio continuo, las ecuaciones gobernantes del problema son validadas en cualquier parte del dominio. Esto permite idealizar el dominio mediante regiones de tamaño finito (elementos) interconectados de diferente forma y tamaño [18].

- **Identificación de las variables de estado**

Dependiendo de la naturaleza física del estudio, esto nos conducirá a las variables de estado asociadas al problema. Las variables de estado se relacionan entre sí por medio de ecuaciones constitutivas que representan una ley física en particular [18].

- **Formulación del problema**

Es el enfoque utilizado para la solución de las ecuaciones constitutivas de un fenómeno físico. Los problemas se pueden resolver de manera directa por medio de una PDE. También, se puede trabajar con un problema equivalente, es decir, un funcional de energía cuya mínima corresponde a la solución de la PDE. En ambos casos se llega a la misma solución [18].

- **Establecimiento del sistema local de referencia**

Además del sistema global de referencia, se debe establecer un sistema local de referencia para cada elemento. Este procedimiento nos permite establecer la función de forma en base a la figura geométrica seleccionada para representar a los elementos [18].

- **Construcción de las funciones de aproximación de los elementos**

Una vez que se ha establecido el sistema local de referencia, el dominio se aproxima mediante funciones algebraicas para obtener la función de forma. Del mismo modo, las variables de estado involucradas se aproximen mediante funciones lineales y se obtiene el funcional de la ecuación constitutiva [18].

- **Determinación de las ecuaciones a nivel de cada elemento**

A esta altura, el modelado del problema se ha completado. Después, mediante algún modelo matemático se procede a establecer una relación entre ambas funciones para obtener la matriz de rigidez de cada elemento. Esta matriz relaciona la variable de estado con el flujo del problema físico [18].

- **Transformación de las coordenadas**

Antes de proceder al ensamblaje de las matrices de todos los elementos para obtener el comportamiento total del sistema, es necesario realizar la transformación de coordenadas. Esto permite que la matriz de rigidez de todos los elementos se transforme desde sus respectivos coordenados locales al sistema global de referencia [18].

- **Ensamblaje de las ecuaciones de los elementos**

El ensamblaje de las matrices se realiza de acuerdo a la configuración topológica de los elementos. Esta configuración se obtiene del establecimiento de una relación entre la numeración de los nodos locales de cada elemento con la numeración global del sistema de referencia. La matriz resultante se denomina matriz global del sistema [18].

- **Introducción de las condiciones de entorno**

En este proceso se introduce las condiciones de entorno en la matriz global del sistema para reducirla o condensarla a su forma final. Existen algunos algoritmos más refinados que permiten introducir que permiten introducir las condiciones de entorno durante el ensamblaje de las ecuaciones de los elementos [18].

- **Solución del sistema de ecuaciones resultantes**

Independientemente de la naturaleza del problema en el análisis FEM, el paso final es la solución del sistema de ecuaciones simultáneas resultantes. Se establecen dos grupos para clasificar los procedimientos de solución de dichos sistemas [18]:

1. Métodos directos: Gauss y Cholesky para sistema pequeños o moderados.
2. Métodos iterativos: Gauss-Seidel y Jacobi para sistemas de gran orden.

- **Interpretación de resultados**

Con la solución del sistema de ecuaciones se obtiene se obtienen los valores aproximados de las variables en los puntos discretos o nodos del dominio. Generalmente estos valores son interpretados y usados en el cálculo de otras cantidades físicas [18].

2.5.1 El enfoque variacional

En este apartado se analiza el método del elemento finito desde el punto de vista del enfoque variacional. Considere la siguiente PDE en dos dimensiones [17]:

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla \phi = 0 \quad (2.51)$$

Donde ε es la permisividad eléctrica y ϕ es el flujo del campo eléctrico. Para una PDE de segundo grado como la anterior, las condiciones de entorno son las siguientes [17]:

- Si se especifica el valor de la función ϕ , esto es una condición de entorno de Dirichlet. Se le llama condición de entorno homogénea cuando $\phi = 0$.
- Si se especifica el valor de la derivativa normal $\frac{\partial \phi}{\partial n}$, esto es una condición de entorno de Neumann. Se le llama condición de entorno homogénea de Neumann cuando $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$.

En lugar de resolver la ecuación anterior de forma directa, se procede a trabajar con un problema equivalente, es decir, un funcional de energía cuya mínima corresponde a la solución de la PDE. El funcional adecuado para la ecuación 2.51 es [17]:

$$W(\phi) = \frac{1}{2} \iint \varepsilon (\nabla \phi)^2 dS \quad (2.52)$$

Para un medio isotrópico lineal tenemos que $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$. Al definir en cero la derivativa de W , podremos dividir todo entre ε_0 dejando solo el término ε_r [17]:

$$W(\phi) = \frac{1}{2} \iint \varepsilon_r (\nabla \phi)^2 dS \quad (2.53)$$

2.5.1.1 La función de forma

En una dimensión, la única opción es hacer la forma de la función base, pero en dos y tres dimensiones podemos elegir tanto la función de forma como la forma geométrica del elemento. La opción más popular en dos dimensiones son los triángulos, pero también se utilizarán elementos rectangulares para introducir algunas ideas sobre elemento vector. Debido a que los elementos de orden cero no se pueden diferenciar, se procede a comenzar con los elementos de primer orden. En este caso, la función de aproximación puede escribirse como [17]:

$$\phi \approx a + bx + cy \quad (2.54)$$

Las constantes a , b y c son las que requiere el análisis FEM para ser calculado. Sin embargo, es conveniente escribir esta función de tal manera que las incógnitas sean los potenciales en los tres nodos del triángulo, en otras palabras [17]:

$$\phi \approx \alpha_1(x, y)\phi_1 + \alpha_2(x, y)\phi_2 + \alpha_3(x, y)\phi_3 \quad (2.55)$$

Tomando en cuenta que $\phi_1 = a + bx_1 + cy_1$, y de manera similar para los otros nodos tenemos que [17]:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Invirtiéndolo las coordenadas nodales de la matriz encontramos que [17]:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Ahora tenemos que [17]:

$$\phi = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Que puede ser escrito como [17]:

$$\phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i \alpha_i(x, y) \quad (2.59)$$

Con $\alpha_i = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$ y A el área del triángulo que es convenientemente la mitad del determinante de la matriz de coordenadas nodales.

Las funciones α_2 y α_3 se obtienen por intercambio cíclico de los índices (el módulo tres). Se debe tener en cuenta que las funciones α_i son interpoladas en los tres vértices (nodos), es decir, unidad en el nodo i y cero en los nodos restantes. No todos los elementos finitos tienen esta propiedad [17].

2.5.1.2 Manipulando el término energía

Al sustituir la ecuación 2.53 en la ecuación 2.59, se obtiene lo siguiente para la energía en un elemento e [17]:

$$W^e = \frac{1}{2} \iint_{S^e} \varepsilon_r^e \nabla \phi \cdot \nabla \phi dS - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_r^e \phi_i \left[\iint_{S^e} \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \right] \phi_j \quad (2.60)$$

Donde se ha asumido que la permisividad es constante dentro del elemento e . Esta ecuación se puede compactar escribiéndose en notación matricial como [17]:

$$W^e = \frac{1}{2} \{\phi\}^T \varepsilon_r^e [S^e] \{\phi\} \quad (2.61)$$

Con $\{\phi\}$ como el vector de potenciales nodales y $[S^e]$ como la matriz de rigidez. Se le da este nombre debido al origen de la mecánica estructural del método. Esta matriz proviene de la expresión que se muestra a continuación [17]:

$$S_{ij}^e = \iint_{S^e} \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \quad (2.62)$$

Y puede ser evaluada de manera simple como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$S_{12}^e = \frac{1}{3A} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)]$$

2.5.1.3 Conexión de los elementos

Hasta este momento se ha trabajado con los elementos de forma aislada. Debido a que cada elemento cuenta con nodos numerados localmente, es necesario la existencia de algún método para interconectar a los elementos. Para esto, se asume la existencia de una matriz de conexión que nos dice como asignar los nodos no conectados en la malla [17]. Como un simple ejemplo, en la Figura 2.9 se muestra la conexión de dos elementos triangulares.

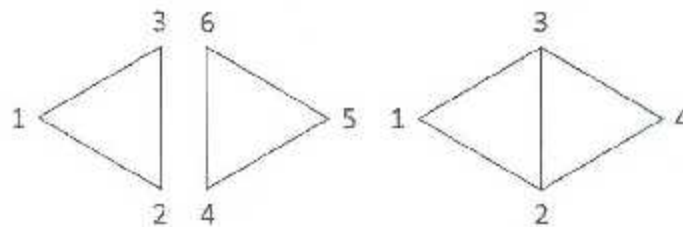


Figura 2.9 Conexión de dos elementos triangulares.

La matriz de conexión para este sistema es [17]:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Y por lo tanto [17]:

$$\begin{aligned}\{\phi_{dis}\} &= \{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_5 \phi_6\}_{dis}^T \\ \{\phi_{con}\} &= \{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4\}_{con}^T\end{aligned}\tag{2.64}$$

Esta matriz de conexión asegura que el potencial en cada nodo, sea el mismo en todos los elementos que comparten ese nodo. Teniendo en cuenta esto, la ecuación resultante para la energía en todo el sistema es [17]:

$$W = \frac{1}{2} \{\phi_{con}\}^T [S] \{\phi_{con}\}\tag{2.65}$$

La matriz de rigidez se obtiene a través de [17]:

$$[S] = [C]^T [\epsilon_r^e S_{dis}] [C]\tag{2.66}$$

El término $[\epsilon_r^e S_{dis}]$ requiere que la matriz de rigidez de cada elemento, sea multiplicada por la permisividad relativa asociada con el elemento antes de proseguir con el análisis. Se debe tener en cuenta que la ecuación 2.65 es solo la solución que minimiza el variacional funcional correspondiente a la PDE, y todo lo que tenemos hasta este momento es una expresión de la energía para los elementos conectados [17].

Ahora, es necesario establecer este mínimo distinguiendo formalmente entre los potenciales *free* (f) y los *prescribed* (p). Los primeros son los grados de libertad (incógnitas) en el problema y los segundos son los prescritos por las condiciones de entorno de Dirichlet.

Es conveniente elegir primero enumerar los potenciales *free* y después los *prescribed*. Al diferenciar con respecto a los potenciales *free*, y estableciendo la expresión resultante a cero obtenemos [17]:

$$\frac{\partial W}{\partial \{\phi_f\}} = \frac{\partial}{\partial \{\phi_f\}} \left(\{\phi_f \phi_p\}^T \begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fp} \\ S_{pf} & S_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_f \\ \phi_p \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad (2.67)$$

Expandiendo la cuadrática, diferenciando y usando $[S_{fp}] = [S_{pf}]$ obtenemos [17]:

$$[S_{ff}] \begin{Bmatrix} \phi_f \\ \phi_p \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.68)$$

O más conveniente [17]:

$$[S_{ff}] \{\phi_f\} = -[S_{fp}] \{\phi_p\} \quad (2.69)$$

Las matrices $[S_{ff}]$ y $[S_{fp}]$ solo contienen las entradas donde los nodos son compartidos por los elementos. Se debe tener en cuenta que estos términos incluyen ε_r^e en los elementos de la matriz $[S]$. En la ecuación 2.69, se puede observar como los potenciales *prescribed* forman el lado derecho de la ecuación de la matriz. El método más sencillo consiste en numerar las incógnita *free* y después las *prescribed* como se mencionó anteriormente. Las entradas de la forma S_{ff} (es decir, ambos nodos *free*), se introducen a la matriz del sistema; las entradas de la forma S_{fp} (es decir, un nodo *free*), se multiplica por el potencial *prescribed* y se introduce en el vector del lado derecho. Las entradas de la forma S_{pf} y S_{pp} no juegan ningún papel. En realidad, $[S_{pf}]^T = [S_{fp}]$ y esto está incluido implícitamente en el proceso de minimización [17].

2.5.1.4 Más sobre el enfoque variacional

Regresando a las bases teóricas del método, vamos a trabajar con la PDE más general de Poisson que incluye un término fuente. Para una región homogénea tenemos que [17]:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.70)$$

Donde ρ es la fuente y las condiciones de entorno en $S \equiv S_1 + S_2$ son: Dirichlet en S_1 y Neumann en S_2 .

A continuación, se propone el siguiente funcional que corresponde a la ecuación de Poisson con las condiciones de entorno requeridas [17]:

$$W(\phi) = \frac{1}{2} \iint \nabla \phi \cdot \nabla \phi dS - \iint \phi \frac{\rho}{\epsilon} dS \quad (2.71)$$

2.5.1.5 Equivalencia entre el funcional y la PDE

En este apartado se demuestra la equivalencia entre el funcional y la PDE mediante un análisis variacional. A continuación, se postula lo siguiente [17]:

$$\phi' = \phi + \theta h \quad (2.72)$$

Donde ϕ' es la solución de prueba, ϕ es la solución de la PDE, h es alguna función (diferenciable) y θ es un parámetro de perturbación (valor real). Sustituyendo la ecuación 2.72 en el funcional de la ecuación 2.71 obtenemos [17]:

$$W(\phi + \theta h) - W(\phi) + \theta \iint \nabla \phi \cdot \nabla h dS - \theta \iint \frac{\rho}{\varepsilon} h dS + \frac{1}{2} \theta^2 \iint \nabla h \cdot \nabla h dS \quad (2.73)$$

El término en θ es la primer variación y se tiene que demostrar que este es cero. Para lograr esto, se utiliza el teorema de Green que es esencialmente la integración multidimensional por partes [17]:

$$\iint_S u \nabla^2 v dS = \oint_C u (\nabla v) \cdot d\vec{c} = \iint_S \nabla u \nabla v dS \quad (2.74)$$

Usando esto obtenemos [17]:

$$\iint \nabla \phi \cdot \nabla h dS = \oint h \frac{\partial \phi}{\partial n} dC - \iint h \nabla^2 \phi dS \quad (2.75)$$

La integral de contorno debe ser cero para eliminar el primer variacional. Por definición, h es igual a cero en S_1 ya que el valor de ϕ es conocido. Se logra el objetivo solo si $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ es igual a cero en S_2 .

El procedimiento anterior es solo para la condición de entorno de Neumann. Para el término integral de superficie tenemos que [17]:

$$- \iint h \nabla^2 \phi dS = \iint \frac{\rho}{\epsilon} h dS \quad (2.76)$$

Ya que ϕ es la solución de la PDE, esto se cancela con el otro término en θ . Por lo tanto, el primer variacional es cero y se comprueba la equivalencia para la condición de entorno de Dirichlet.

2.5.1.6 Condiciones de entorno en interfaces materiales

Una de las grandes fortalezas del análisis FEM es el simple manejo de las regiones no homogéneas. En condiciones dieléctricas apropiadas, las condiciones de entorno para el potencial electrostático en la Interfaz de dos regiones son las siguientes [17]:

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (2.77)$$

$$\epsilon_{r1} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_{r2} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad (2.78)$$

Las ecuaciones anteriores provienen del requerimiento de continuidad en el campo eléctrico tangencial y flujo eléctrico normal respectivamente.

Con el enfoque de la matriz de conexión, los potenciales son forzados a ser continuos en la interfaz del material. Para demostrar esto, se comienza con [17]:

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.79)$$

Y el funcional como [17].

$$W(\phi) = \frac{1}{2} \iint \varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla \phi dS - \iint \phi \rho dS \quad (2.80)$$

Después, se procede con un análisis variacional exactamente igual al anterior pero con una división del dominio en dos. En el primer variacional aparecen dos términos adicionales que representan la condición de continuidad en el flujo.

2.5.1.7 La ecuación de Poisson: incorporación de un término fuente

En este apartado se incorpora el término $-\frac{1}{\varepsilon} \int \phi \rho dS$ que representa la fuente en los resultados funcionales de una nueva matriz $[T]$ (también llamada matriz de masa por razones históricas). Las entradas en $[T]$ se calculan a partir de [17].

$$T_{ij}^e = \iint_{S^e} \alpha_i \alpha_j dS \quad (2.81)$$

En donde α_i y α_j son de igual manera, las funciones de interpolación nodales como se vio anteriormente. El resultado es una ecuación matricial de la siguiente forma [17]:

$$[S_{ff}]\{\phi_f\} = \frac{1}{\epsilon}[T]\{\rho\} - [S_{fv}]\{\phi_v\} \quad (2.82)$$

Es interesante notar que la parte no homogénea $\{\rho\}$ de la PDE, desempeña el mismo papel en el sistema de matrices como la parte no homogénea $\{\phi_v\}$ de las condiciones de entorno [17].

Hasta este momento se concluye con la introducción del análisis FEM en electromagnetismo. Sin embargo, para problemas electrodinámicos es necesario agregar el concepto de elemento vector. Para esto, se introduce el término de coordenadas simples el cual brindara una mayor comprensión sobre el tema.

2.5.1.8 Coordenadas simples

Las coordenadas simples proporcionan una descripción geométrica totalmente local dentro de un triángulo en 2D o un tetraedro en 3D. Este procedimiento permite realizar la mayor parte del trabajo requerido en lo que se conoce como elemento *padre*. Después, mediante una simple escala geométrica, el trabajo realizado puede ser aplicado en cualquier elemento (triángulo o tetraedro) [17].

En general, las coordenadas simples se definen como las proporciones de longitud (1D), área (2D) y volumen (3D) que un punto en el interior o límite, divide a la línea, triángulo o tetraedro respectivamente. El tamaño $\sigma(S)$ se define como [17]:

$$\sigma(S) = \frac{1}{N!} \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(N)} \\ 1 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N+1}^{(1)} & x_{N+1}^{(2)} & \dots & x_{N+1}^{(N)} \end{vmatrix} \quad (2.83)$$

Donde los superíndices denotan las direcciones espaciales y los subíndices denotan los vértices.

2.5.1.9 Coordenadas simples en una, dos y tres dimensiones

- En una dimensión tenemos que [17]:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma(S_1)}{\sigma(S)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}}{L} = \frac{x_2 - x}{L} \quad (2.84)$$

$$\lambda_2 = \frac{\sigma(S_2)}{\sigma(S)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x \end{vmatrix}}{L} = \frac{x - x_1}{L} \quad (2.85)$$

Las ecuaciones 2.84 y 2.85 representan las proporciones de longitud desde los nodos de la derecha e izquierda, al punto x en la longitud total del elemento.

- En dos dimensiones tenemos que [17]:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma(S_1)}{\sigma(S)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{2A} = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{2A} \quad (2.86)$$

La ecuación 2.86 representa la proporción de área del triángulo (P23 a 123) que se muestra en la Figura 2.10. Hay tres coordenadas simples en 2D (λ_1 , λ_2 y λ_3) que describen las tres relaciones de área.

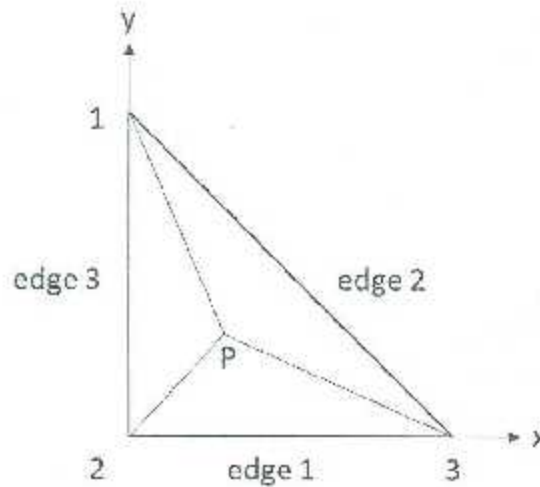


Figura 2.10 Coordenadas simples en triángulo.

- En tres dimensiones tenemos que [17]:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma(S_1)}{\sigma(S)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}{6V} \quad (2.87)$$

La ecuación 2.87 representa la proporción de volumen del tetraedro (P234). Hay cuatro coordenadas simples en 3D ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4) que describen las cuatro relaciones de volumen.

2.5.1.10 Elemento vector

Existen varias razones por las cuales el elemento vector, es una herramienta de gran utilidad en el análisis FEM. A continuación se mencionan algunas [17]:

- Para los elementos de orden más bajo, los grados de libertad son proporcionales al campo eléctrico tangencial a lo largo del borde. De este modo, la continuidad tangencial es muy simple de hacer cumplir.
- La continuidad de flujo es una condición de frontera natural.
- Ya que no existen valores nodales en la singularidad, es fácil modelar esquinas u otras regiones donde el campo eléctrico se convierte en singular.

Se introduce el tema usando un vector 2D de un elemento rectangular como el que se muestra en la Figura 2.11.

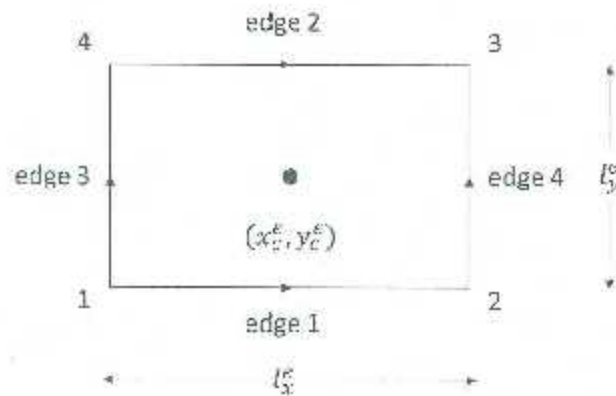


Figura 2.11 Vector 2D de un elemento rectangular.

El campo se aproxima como [17]:

$$\vec{E}_e \approx \sum_{i=1}^4 \vec{N}_i^e \vec{E}_i^e \quad (2.88)$$

En esta ecuación, \vec{N}_i^e es la función base del vector y \vec{E}_i^e es el campo tangencial a lo largo del i-ésimo borde. Las funciones vectoriales son dadas por [17]:

$$\begin{aligned} \vec{N}_1^e &= \frac{1}{l_y^e} \left(y_c^e - y + \frac{l_y^e}{2} \right) \hat{x} \\ \vec{N}_2^e &= \frac{1}{l_y^e} \left(y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2} \right) \hat{x} \\ \vec{N}_3^e &= \frac{1}{l_x^e} \left(x_c^e - x + \frac{l_x^e}{2} \right) \hat{y} \\ \vec{N}_4^e &= \frac{1}{l_x^e} \left(x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2} \right) \hat{y} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Donde (x_c^e, y_c^e) son las coordenadas del centro y (l_x^e, l_y^e) son las longitudes del elemento en las direcciones (x, y) respectivamente. Se debe tener en cuenta que [17]:

- $\vec{N}_1^e = 0$ en el borde 2, ya que $y = y_c^e + \frac{l_y^e}{2}$ en cualquier lugar de este borde.
- \vec{N}_1^e es unidad en el borde 1. También, es puramente tangencial \hat{x} a lo largo de este borde.
- En los bordes 3 y 4, \vec{N}_1^e se incrementa linealmente desde la parte superior a la parte inferior. También, es puramente normal \hat{y} a lo largo de estos bordes.

Con esta información se establece rápidamente que las funciones vectoriales \vec{N}_2^e, \vec{N}_3^e y \vec{N}_4^e , tienen las mismas propiedades pero intercambiando el número de bordes y las coordenadas en (x, y) [17].

En conclusión, estas funciones proporcionan una aproximación de orden mixto del campo en los bordes. Debido a que las aproximaciones son tangencialmente constantes y normalmente lineales, estos elementos son frecuentemente llamados como elementos CT/LN (constante tangencial, lineal normal).

2.5.1.11 Elemento vector en triángulo (Elemento Whitney)

Recordando el triángulo visto en la Figura, existen tres elementos por triángulo y cada uno de estos elementos está asociado con el borde desde el nodo i al nodo j . En su forma de orden más bajo, el elemento Whitney tiene la siguiente definición [17]:

$$\vec{w}_{ij} = \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i \quad (2.90)$$

Debido a que el área del triángulo 123 es $\frac{1}{2}$ y las bases en los triángulos P12 y P23 son unidad, las coordenadas simples de cada elemento son las siguientes proporciones [17]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= y \\ \lambda_2 &= 1 - (x - y) \\ \lambda_3 &= x \end{aligned} \quad (2.91)$$

Después de obtener las expresiones de las coordenadas simples, se procede a establecer sus gradientes [17]:

$$\begin{aligned}\nabla\lambda_1 &= \hat{y} \\ \nabla\lambda_2 &= -\hat{x} - \hat{y} \\ \nabla\lambda_3 &= \hat{x}\end{aligned}\tag{2.92}$$

Se debe tener en cuenta que las gradientes $\nabla\lambda_1$, $\nabla\lambda_2$ y $\nabla\lambda_3$ son normales a los bordes 1, 2 y 3 respectivamente. Ahora, se procede a escribir las funciones Whitney de manera cartesiana como se muestra a continuación [17]:

$$\begin{aligned}\vec{N}_1 &= \vec{w}_{23} = (1-y)\hat{x} + x\hat{y} \\ \vec{N}_2 &= -\vec{w}_{13} = -y\hat{x} + x\hat{y} \\ \vec{N}_3 &= \vec{w}_{12} = -y\hat{x} + (-1+x)\hat{y}\end{aligned}\tag{2.93}$$

A continuación, se establecen algunas características fundamentales de las funciones del elemento Whitney [17]:

- \vec{N}_1 es puramente normal a lo largo de los bordes 2 y 3. Los incrementos lineales son del nodo opuesto al borde, hacia el nodo localizado en la base del borde.
- A lo largo del borde 1, \vec{N}_1 es puramente normal como tangencial. También, los componentes tangenciales son constantes y los componentes normales son lineales.

Estas características son las mismas para las funciones \vec{N}_2 y \vec{N}_3 pero intercambiando la secuencia en los bordes y la dirección de los incrementos lineales. En conclusión, estas funciones son constantes tangenciales en su base y lineales normales a lo largo de todos los bordes [17].

2.5.1.12 El funcional de alta frecuencia

Las ecuaciones de Maxwell nos permiten describir la propagación de las ondas electromagnéticas en el espacio Ω . Para problemas electrodinámicos, estas ecuaciones se simplifican mediante la ecuación vectorial de Helmholtz que se muestra a continuación [17]:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad (2.94)$$

Donde μ_r es la permeabilidad relativa, k_0 es la onda vectorial del espacio libre y ϵ_r es la permisividad. El equivalente variacional funcional sujeto a las mismas condiciones de entorno es [17]:

$$F(\vec{E}) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu_r} |\nabla \times \vec{E}|^2 - k_0^2 \epsilon_r |\vec{E}|^2 \right] d\Omega \quad (2.95)$$

En este caso, la solución es el conjunto de eigen-valores k_0 y eigen-vectores \vec{E} asociados.

Capítulo 3. Metodología de la Investigación

La energía de las ondas electromagnéticas que los teléfonos celulares producen es absorbida por la cabeza humana. Después, esta energía es disipada en forma de calor produciendo un aumento de temperatura en los tejidos biológicos.

En el presente proyecto de investigación se diseña el modelo computacional de una cabeza humana compuesta por tres geometrías que corresponden al cerebro, cráneo y piel respectivamente. Después, mediante un software de análisis numérico se simulan los efectos térmicos producidos por un teléfono celular en un estudio estacionario. Para el cálculo de resultados se posiciona una antena tipo parche a una distancia de 1 cm del modelo y se genera un campo electromagnético con una potencia de 1 W. También, en la investigación se utilizan frecuencias de 900 y 1800 MHz para medir sus efectos en las geometrías que representan los tejidos biológicos.

Debido a las condiciones éticas sobre la exposición prolongada de seres humanos a campos electromagnéticos, la simulación de los efectos térmicos producidos por un teléfono celular se realiza en el modelo computacional de una cabeza humana. Esta geometría se diseña a través de imágenes médicas obtenidas en un estudio tomográfico utilizando el software Simpleware Ltd.

El estudio sobre los efectos térmicos producidos por el teléfono celular está gobernado por la ecuación vectorial de Helmholtz y la ecuación de Biocalentamiento. Este sistema de ecuaciones se resuelve mediante un análisis numérico por el método de los elementos finitos utilizando el software COMSOL Multiphysics.

3.1 Modelo computacional (cabeza humana)

El enfoque típico de un diseño asistido por computadora (CAD por sus siglas en inglés) utiliza entidades geométricas vectoriales, superficies y sólidos para la descripción de un volumen. Sin embargo, no existe una descripción CAD disponible para una amplia gama de geometrías complejas como estructuras biológicas. En la actualidad, existe una gran variedad de softwares que permiten generar volúmenes de alta calidad mediante imágenes provenientes de algunos equipos de imagenología médica como el de la tomografía computacional (TC) y la resonancia magnética (RM) entre otros. Comúnmente, estas imágenes vienen almacenadas en archivos DICOM (Digital Imaging and Communication in Medicine). Este formato es el estándar mundialmente reconocido para el intercambio de pruebas médicas.

La geometría de la cabeza humana se diseña a través de imágenes médicas obtenidas en un estudio tomográfico realizado a una modelo phantom de cabeza humana. Este modelo contiene únicamente los sustitutos biológicos del cerebro, cráneo y piel. A continuación, en la Figura 3.1 se presenta la metodología que se utiliza en el diseño del volumen 3D de la cabeza humana.

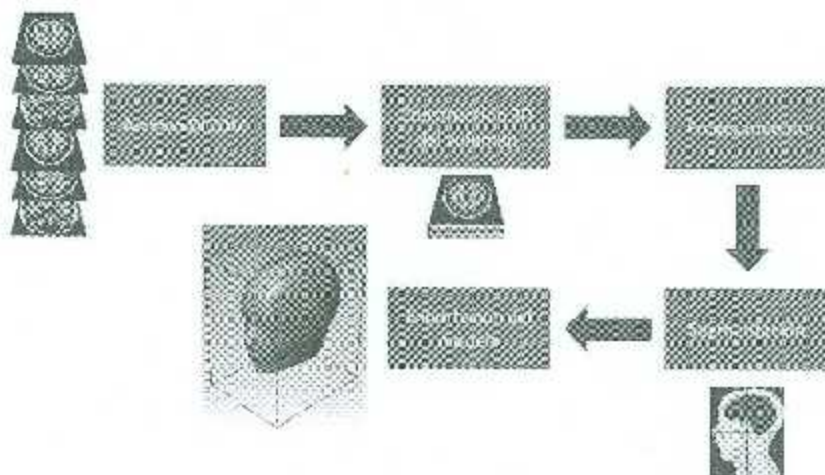


Figura 3.1 Metodología para el diseño del volumen 3D de la cabeza humana

3.1.1 Construcción 3D de volumen

Las imágenes adquiridas en el estudio tomográfico se pueden representar como una matriz bidimensional de tamaño $x \times y$ como la que se muestra en la Figura 3.2.

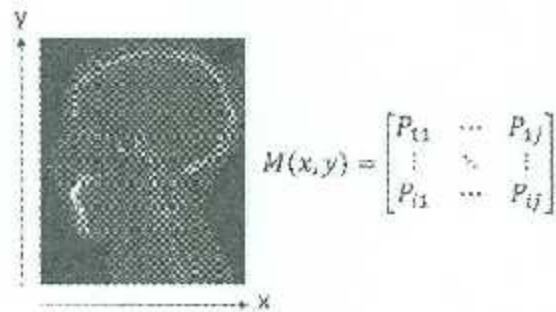


Figura 3.2 Matriz bidimensional.

Cada punto P_{ij} de la matriz bidimensional representa un valor en escala de grises y se le denomina con el nombre de pixel. Estos pixeles refleja la atenuación del haz radiológico en el tejido. La construcción del volumen 3D se obtiene a través de un apilamiento en paralelo de las imágenes del archivo DICOM con respecto al eje Z. Este volumen se puede representar como una matriz tridimensional de tamaño $x \times y \times z$ como la que se muestra en la Figura 3.3.

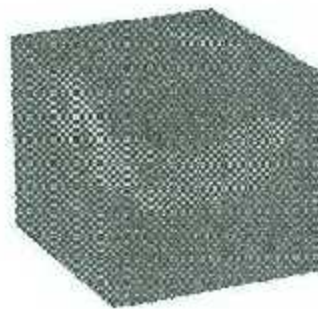


Figura 3.3 Matriz tridimensional.

De igual manera, cada elemento de la matriz tridimensional representa un valor en escala de grises y se le denomina con el nombre de voxel (elemento básico de un volumen). El tamaño del volumen 3D se puede representar por el número de voxeles que contiene o en unidades reales de medición (mm).

3.1.2 Procesamiento

Comúnmente, las imágenes obtenidas en los estudios de imagenología contienen ruido o artefactos que impiden la realización del modelo 3D. En la Figura se puede observar la existencia de una base que sostiene el modelo phantom de la cabeza humana al realizar el estudio de tomografía.



Figura 3.4 Artefacto en el archivo DICOM.

En esta etapa se utilizan algoritmos de filtrado para eliminar el ruido y los artefactos de las imágenes contenidas en el archivo DICOM. A continuación, se mencionan los filtros más utilizados en la etapa de procesamiento:

- Filtro Gaussiano: elimina ruido en la imagen.
- Filtro de Media: asigna el valor de la media a un pixel calculado a través de los pixeles vecinos.
- Filtro de Mediana: asigna el valor de la mediana a un pixel calculado a través de los pixeles vecinos.

3.1.3 Segmentación

La etapa de segmentación consiste en dividir el volumen en regiones o sub-volumenes cuyos elementos o voxeles tienen propiedades comunes. Después, la información de los voxeles se transfiere a unas máscaras que permiten la realización de las geometrías tridimensionales. En la Figura 3.5 se muestran las máscaras del modelo computacional de la cabeza humana.



Figura 3.5 Máscaras del modelo computacional de la cabeza humana.

3.1.4 Exportación del modelo

NURBS (non-uniform rational B-spline), es un método matemático muy utilizado en computación gráfica para representar la superficie de una geometría tridimensional con precisión. A través de las máscaras se realizan las geometrías NURBS de los tejidos biológicos. Estas geometrías se exportan en formato IGES y el modelo final de la cabeza humana se muestra en la Figura 3.6.



Figura 3.6 Modelo NURBS de la cabeza humana.

3.2 Análisis numérico (FEM)

El método del elemento finito es una de las técnicas más utilizadas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales de las matemáticas aplicadas a la ingeniería. La idea central de este método es remplazar alguna función desconocida en el dominio, por un conjunto de elementos con forma definida pero de amplitud desconocida. La implementación computacional del análisis FEM se realiza de forma general mediante tres unidades básicas que son el pre-procesado, procesado y post-procesado. En la Figura 3.7 se resumen las operaciones realizadas en cada unidad.

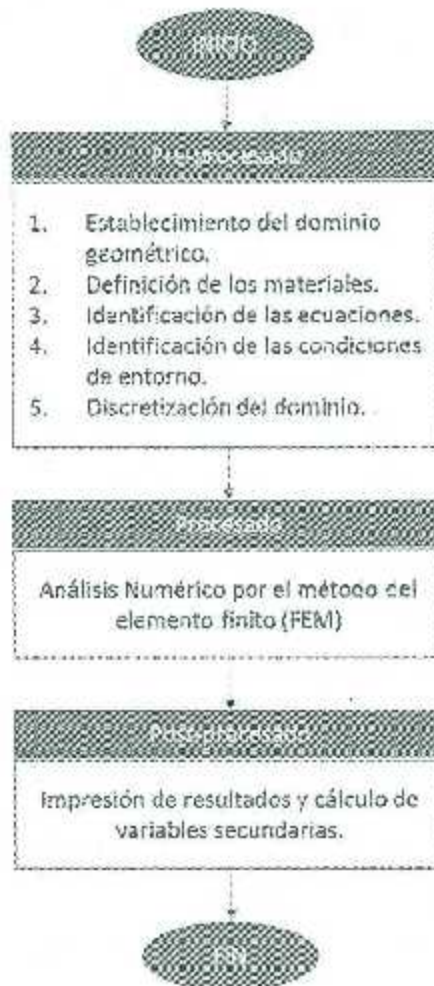


Figura 3.7 Análisis FEM computacional.

3.2.1 Establecimiento del dominio geométrico

El modelo de la cabeza humana es exportado al software de análisis numérico. Después, se diseña el modelo computacional de una antena tipo parche y se sitúa en el lado izquierdo de la cabeza. Las antenas tipo parche (microstrip) son de gran utilidad ya que pueden imprimirse directamente en la placa de un circuito. En la actualidad, este tipo de antenas se han generalizado en el mercado de la telefonía celular debido al bajo costo que tienen y a la facilidad de fabricación. A continuación, en la Figura 3.8 se muestra el diseño geométrico de la antena y sus componentes.

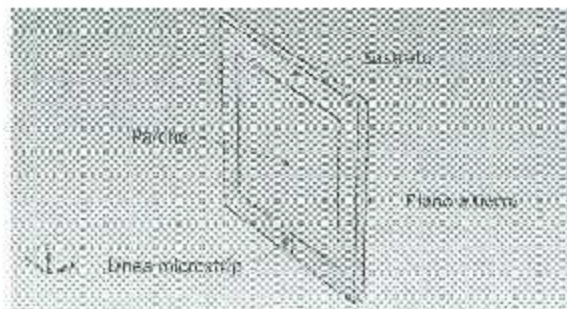


Figura 3.8 Geometría de la antena tipo parche.

Para finalizar, estas dos geometrías son encapsuladas en una esfera que simula el aire donde se propagan las ondas electromagnéticas. En la Figura 3.9 se puede visualizar el dominio geométrico.

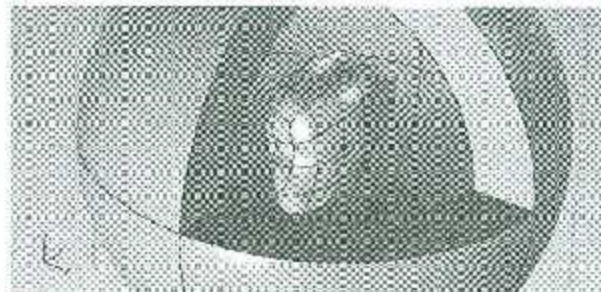


Figura 3.9 Dominio geométrico.

3.2.2 Definición de los materiales

El modelo computacional de la cabeza humana está compuesto por tres geometrías que corresponden al cerebro, cráneo y piel respectivamente. Estas geometrías se pueden visualizar en la Figura 3.10.

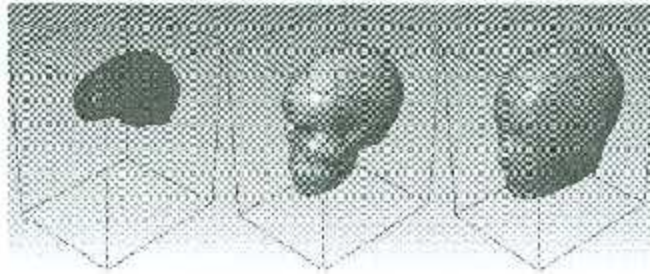


Figura 3.10 Geometrías de la cabeza humana.

A cada geometría se le asignó las propiedades dieléctricas y térmicas del tejido que representan. En las Tablas 3.1 y 3.2 se pueden visualizar estos valores [12].

Tabla 3.1 Propiedades dieléctricas de los tejidos.

Tipo de tejido	900 MHz		1800 MHz	
	Permisividad relativa	Conductividad eléctrica (S/m)	Permisividad relativa	Conductividad eléctrica (S/m)
Cerebro	45.805	0.765	53.0	1.7
Cráneo	20.79	0.34	8.0	0.16
Piel	41.41	0.87	32.5	0.52

Tabla 3.2 Propiedades térmicas de los tejidos.

Tipo de tejido	Densidad (kg/m^3)	Conductividad térmica ($W/m\cdot C$)	Capacidad térmica ($J/kg\cdot C$)	Fuente metabólica (W/m^3)	Perfusión sanguínea ($1/s$)
Cerebro	1038	0.535	3650	7100	8.83E-03
Cráneo	1990	0.37	3100	610	4.36E-04
Piel	1125	0.42	3600	1620	0.02

3.2.3 Identificación de las ecuaciones

Dependiendo de la naturaleza física del estudio, esto nos conducirá a las variables de estado asociadas al problema. Las variables de estado se relacionan entre sí por medio de ecuaciones constitutivas que representan una ley física en particular.

3.2.3.1 Ecuación para el análisis electromagnético

Las ecuaciones de Maxwell permiten describir la propagación de las ondas electromagnéticas en el espacio. Para problemas electrodinámicos, estas ecuaciones se simplifican mediante la ecuación vectorial de Helmholtz que se muestra a continuación [12]:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times E - k_0^2 \epsilon_r E = 0 \quad (3.1)$$

Donde E es el campo eléctrico (V/m), μ_r es la permeabilidad eléctrica relativa, ϵ_r es la permisividad eléctrica relativa y k_0 es el número de onda del libre espacio (m^{-1}).

3.2.3.2 Ecuación para el análisis térmico

La ecuación de Biocalentamiento integra los términos de la fuente de calor biológica y fuente de calor externa que permiten describir la transferencia de calor en el modelo de la cabeza humana [12]:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q_{bio} + Q_{ext} \quad (3.2)$$

Donde ρ es la densidad del tejido (kg/m^3), C es la capacidad térmica del tejido ($J/kg \cdot ^\circ C$), k es la conductividad térmica del tejido ($W/m \cdot ^\circ C$), T es la temperatura del tejido ($^\circ C$), Q_{bio} es la fuente de calor biológica y Q_{ext} es una fuente de calor externa.

En la fuente de calor biológica se describen los efectos de la perfusión sanguínea y el metabolismo mediante la siguiente ecuación [12]:

$$Q_{bio} = \rho_b C_b W_b (T_b - T) + Q_{met} \quad (3.3)$$

Donde $\rho_b C_b W_b (T_b - T)$ es el término de perfusión sanguínea y Q_{met} es la fuente de calor metabólica.

La fuente de calor externa es una resistencia térmica generada por el campo electromagnético y se define mediante la siguiente ecuación [12]:

$$Q_{ext} = \frac{\sigma |E|^2}{2} = \frac{\rho}{2} \cdot SAR \quad (3.4)$$

Donde la conductividad del tejido se define como $\sigma = 2\pi f \epsilon_r \epsilon_0$.

3.2.3.3 Ecuación para el análisis del SAR

Como se vio anteriormente, el SAR se define como la potencia máxima absorbida por el tejido vivo. Lo anterior se describe mediante la siguiente ecuación [12]:

$$SAR = \frac{\sigma}{\rho} |E|^2 \quad (3.5)$$

Donde E el campo eléctrico (V/m), σ es la conductividad eléctrica (S/m) y ρ es la densidad del tejido (kg/m^3).

3.2.4 Identificación de las condiciones de entorno

Debido a que el análisis numérico se realiza en un dominio geométrico tridimensional, las condiciones de entorno permiten facilitar el problema y definir como debe de comportarse el análisis numérico bajo ciertas circunstancias.

3.2.4.1 Condiciones para el análisis electromagnético

Los campos electromagnéticos deben satisfacer la ecuación de Helmholtz en cada tejido y sus límites. La condición de continuidad electromagnética que se debe cumplir en la interfaz de los tejidos es la siguiente [12]:

$$(F_A - F_B) \times n = 0 \quad (3.6)$$

Donde n es un vector normal y $(E_A - E_B)$ es la diferencia de campos entre tejidos (V/m).

La condición de esparcimiento delimita el dominio geométrico del espacio libre y permite que las ondas electromagnéticas atraviesen el dominio sin reflexión. Esta condición se define mediante la siguiente ecuación [12]:

$$n \times (\nabla \times (E + E_b)) - \left(jk + \frac{1}{r} \right) n \times (E \times n) = 0 \quad (3.7)$$

Donde n es un vector normal, E es el campo eléctrico (V/m), j y E_b son la onda plana incidente (V/m) y k es el número de onda (m^{-1}).

Los elementos que integran el modelo de la antena como el parche, la línea microstrip y el plano a tierra, deben de estar hechos de un material de alta conductividad. Por lo tanto, la condición de entorno para un conductor perfecto se define como [12]:

$$n \times E = 0 \quad (3.8)$$

Donde n es un vector normal y E es el campo eléctrico (V/m).

En la parte inferior de la antena tipo parche, se coloca un puerto entre las dos placas para generar el campo electromagnético a partir de un diferencial de tensión. La condición para la generación del campo electromagnético es [12]:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} \quad (3.9)$$

Donde Z_{in} es la impedancia de entrada (Ω), V_1 el voltaje entre las placas (V) y I_1 la corriente eléctrica (A). En la Figura 3.11 se muestra el puerto en la antena tipo parche.

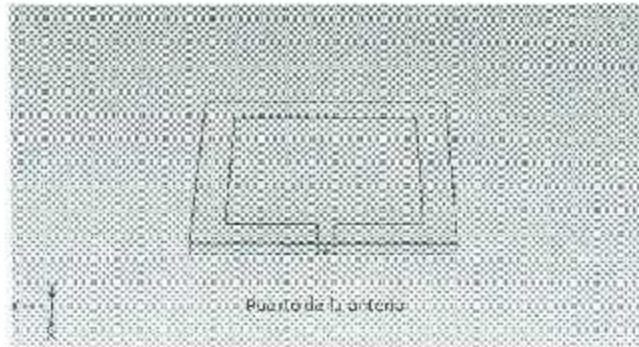


Figura 3.11 Puerto de la antena tipo parche.

3.2.4.2 Condiciones de entorno para el análisis térmico

La condición de continuidad térmica permite que no se establezca ninguna resistencia de contacto entre los tejidos que componen el modelo computacional de la cabeza humana. Esta condición se define mediante la siguiente ecuación [12]:

$$n \cdot (k_u \nabla T_u - k_d \nabla T_d) = 0 \quad (3.10)$$

Donde n es un vector normal y $(k_u \nabla T_u - k_d \nabla T_d)$ es la diferencia de temperaturas entre los tejidos.

La condición de aislamiento térmico permite delimitar el flujo de calor en los bordes de la cabeza humana. Esta condición se define mediante la siguiente ecuación [12]:

$$n \cdot (k \nabla T) = 0 \quad (3.11)$$

Donde n es un vector normal, k es la conductividad térmica del tejido ($W/m \cdot ^\circ C$) y T es la temperatura ($^\circ C$).

3.2.5 Discretización del dominio

Al proceso de discretización se le conoce como mallado e implica la subdivisión de una geometría en un número de elementos pequeños. Los elementos más utilizados en el análisis FEM son las líneas en una dimensión, los triángulos en dos dimensiones y los tetraedros en tres dimensiones.

Según Kuhlemeyer y Lysmer (1973), la longitud de onda característica del medio es importante en la determinación de un modelo numérico preciso en los análisis dinámicos. El tamaño del elemento debe ser menor que 1/8 a 1/10 de la longitud de onda.

La discretización del dominio se realizó utilizando elementos tetraédricos en las geometrías de la cabeza humana y la antena tipo parche. En la geometría de la esfera se utilizaron elementos triangulares. En la Figura 3.12 se puede visualizar la discretización del dominio.

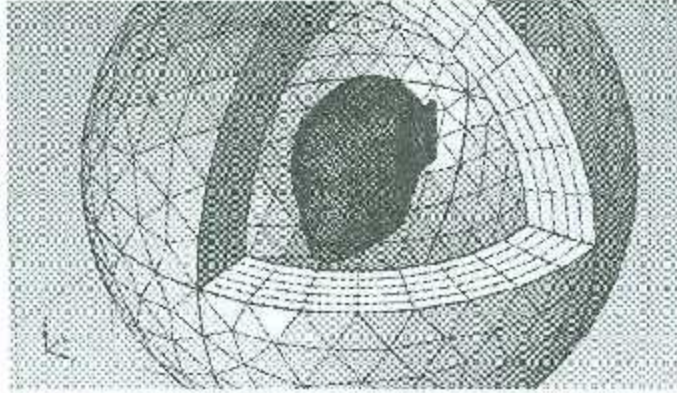


Figura 3.12 Discretización del dominio.

3.3 Tipo de investigación

La presente investigación es de tipo cuantitativo ya que se realiza una recolección de datos con base en mediciones numéricas para establecer patrones de comportamiento y comprobar la hipótesis a través del análisis e interpolación de resultados.

3.4 Diseño de la investigación

El diseño de la investigación es de tipo cuasiexperimental ya que se manipula la variable independiente (análisis numérico en un modelo computacional de cabeza humana), para observar su efecto y relación con la variable dependiente (efectos térmicos de la telefonía celular).

Capítulo 4. Resultados

En la etapa de post-procesado se utilizaron gráficos tridimensionales para visualizar los resultados obtenidos en el análisis numérico. Ya que las redes GSM (Global System for Mobile Communications) utilizan frecuencias de 900 y 1800 MHz, en el presente proyecto de investigación se estudiaron y compararon los efectos de dichas frecuencias en los tejidos biológicos que integran al modelo computacional de la cabeza humana.

En la Figura 4.1 se muestran los niveles de SAR obtenidos en gráficos superficiales de la cabeza humana utilizando frecuencias de 900 y 1800 MHz.

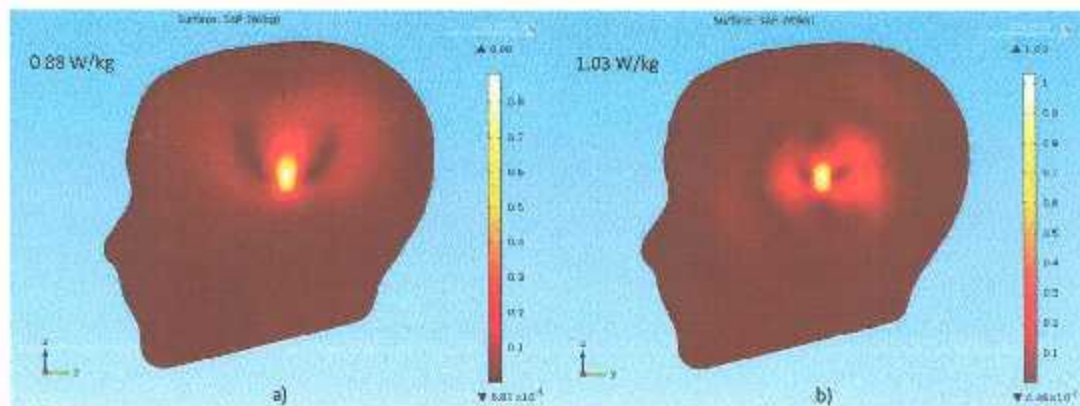


Figura 4.1 Niveles del SAR. a) A 900 MHz. b) A 1800 MHz.

Debido a que la piel es el tejido biológico más cercano a la antena tipo parche, los gráficos superficiales permitieron medir los niveles máximos de SAR en esta región. Las frecuencias de 900 y 1800 MHz mostraron un SAR de 0.88 y 1.03 W/kg respectivamente. En ambos casos, estos valores se localizaron en las regiones de la cabeza humana más cercanas al puerto de la antena.

Para validar la eficiencia de las simulaciones, los resultados obtenidos en el análisis numérico se compararon con los valores publicados por Teerapot Wessapan et al. [12]. La Tabla 4.1 muestra la comparación entre ambos estudios y el porcentaje de error que se obtuvo.

Tabla 4.1 Validación del proyecto de investigación.

Frecuencia (MHz)	Presente proyecto SAR máximo (W/kg)	Artículo publicado SAR máximo (W/kg)	Porcentaje de error (%)
900	0.88	0.823	6.92
1800	1.03	1.187	13.22

Los efectos de las radiofrecuencias se estudiaron mediante gráficos que muestran la distribución del SAR y la temperatura, en cortes axiales del modelo computacional de la cabeza humana. Como se muestra en la Figura 4.2, estos gráficos permitieron visualizar la penetración del SAR en el interior de la cabeza.

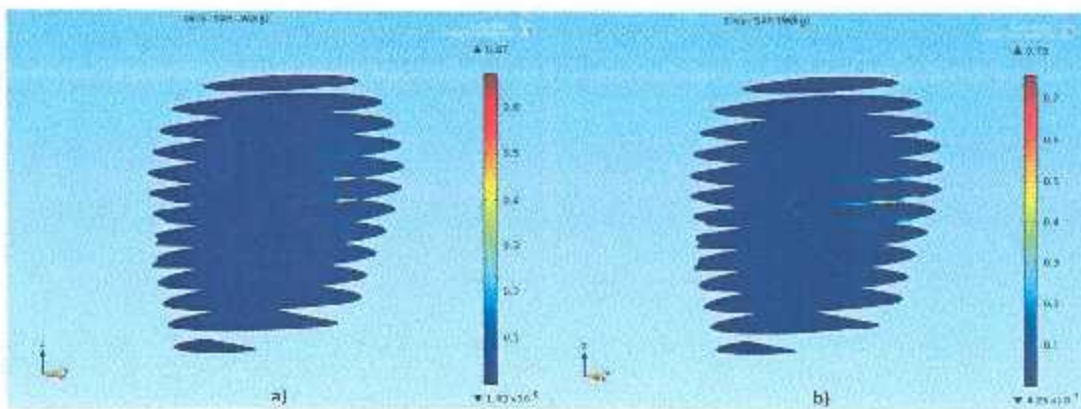


Figura 4.2 Distribución del SAR. a) A 900 MHz. b) A 1800 MHz.

En el análisis numérico, la frecuencia de 900 MHz mostró una mayor absorción de energía electromagnética en el interior de la cabeza humana, pero con un menor nivel de SAR en la superficie. Por otra parte, la frecuencia de 1800 MHz mostro una menor absorción de energía electromagnética en el interior de la cabeza humana, pero con un mayor nivel de SAR en la superficie.

Para estudiar la transferencia de calor en el interior de la cabeza humana, los efectos térmicos de las radiofrecuencias se compararon con los resultados obtenidos en una simulación donde no se utilizó una antena tipo parche. En la Figura 4.3 se muestran las distribuciones de temperatura en cortes axiales del modelo computacional desde una vista superior.

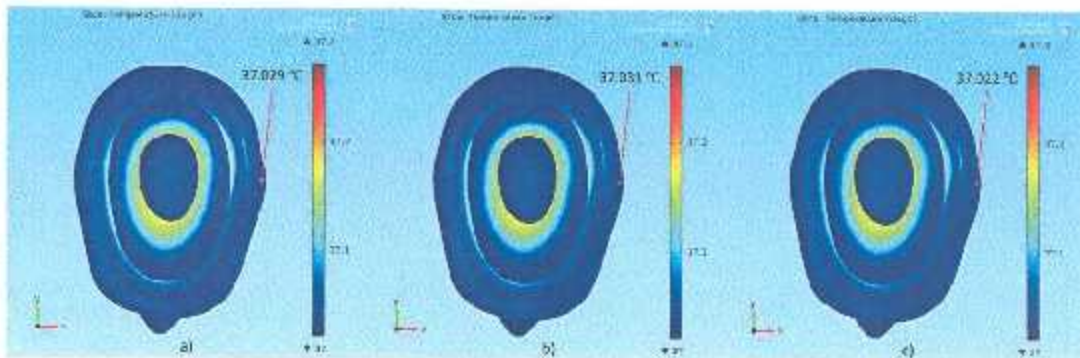


Figura 4.3 Distribución de la temperatura. a) A 900 MHz. b) A 1800 MHz. c) Sin antena.

La simulación sin antena permitió establecer las temperaturas que deben de tener los tejidos biológicos no sometidos a campos electromagnéticos. Estos valores sirvieron de referencia para medir los incrementos de temperatura generados por las frecuencias de estudio. En las regiones de la piel más cercanas al puerto de la antena, las frecuencias de 900 y 1800 MHz mostraron incrementos de 0.007 y 0.009 °C respectivamente. Por otra parte, los niveles de temperatura se mantuvieron estables en las regiones del cerebro.

Tanto en el estudio electromagnético como en el estudio térmico, los niveles máximos de SAR e incrementos de temperatura estuvieron muy por debajo de los estándares. En la actualidad, estos valores están establecidos en niveles menores de 2 W/kg para el SAR, e incrementos menores de 1 °C para la temperatura.

Capítulo 5. Conclusiones

En esta investigación se logró diseñar el modelo computacional de una cabeza humana en base a las imágenes médicas obtenidas en un estudio tomográfico. Dicho estudio tomográfico permitió generar un modelo computacional compuesto por tres geometrías que corresponden al cerebro, cráneo y piel respectivamente. También, mediante un software de análisis numérico se logró el objetivo de simular los efectos térmicos producidos por un teléfono celular.

Los resultados en el estudio electromagnético indicaron que las propiedades dieléctricas de los tejidos biológicos a una determinada frecuencia, tienen un gran efecto en el comportamiento y distribución del SAR. Debido a que la conductividad eléctrica de los tejidos biológicos es relativamente mayor a una frecuencia de 900 MHz, es por esta razón que existe una mayor conducción de corriente y absorción de energía electromagnética en el interior de la cabeza humana. Lo anterior se ve reflejado en una disminución de los niveles de SAR en las regiones de la piel más cercanas al puerto de la antena.

De igual manera, los resultados en el estudio térmico indicaron que las propiedades térmicas de los tejidos biológicos, tienen un gran efecto en el comportamiento y distribución de la temperatura. Aunque la energía electromagnética absorbida por el tejido biológico de la piel fue mayor en ambas frecuencias, los incrementos más altos de temperatura se registraron en las regiones del cerebro. Este fenómeno se debe a la alta generación metabólica que tiene el tejido biológico del cerebro. Por otra parte, los altos niveles de perfusión sanguínea en las regiones de la piel jugaron un papel importante en el mantenimiento de la temperatura.

Esta investigación concluye que al aumentar la frecuencia, la penetración de los campos electromagnéticos disminuye provocando una mayor absorción de energía en la superficie de la cabeza humana. Debido a que los teléfonos celulares utilizaran frecuencias cada vez más altas, este comportamiento es de suma importancia para seguir realizando simulaciones y evitar riesgos en las regiones de la piel.

Este proyecto de investigación afrontó el problema de comprobar si mediante la realización de un análisis numérico en un modelo computacional de cabeza humana, es posible medir los efectos térmicos de la telefonía celular para su estudio en oncología cerebral. En base a los resultados obtenidos en las simulaciones, es evidente que la implementación de modelos computacionales y análisis numéricos, son herramientas útiles en la determinación de los efectos térmicos producidos por un teléfono celular. Ya que los incrementos de temperatura fueron mínimos en ambas frecuencias, como propuesta se tiene el simular la generación de calor que produce la batería de un teléfono celular y medir su efecto en el estudio térmico.

5.1 Productos de la investigación

Participación en el congreso CIESLAG 2015 con el tema: "Modelado Computacional y Análisis Numérico de los Efectos de la Telefonía Celular a una Frecuencia de 835 MHz".

Bibliografía

- [1] NIH. (2015). "Cell Phones and Cancer Risk", *National Cancer Institute at the National Institutes of Health*. [En línea]. Disponible: <http://www.cancer.gov/about-cancer/causes-prevention/risk/radiation/cell-phones-fact-sheet> [Consultado: July 07, 2015].
- [2] F. D. Saraví, "Telefonía móvil (celular) y salud humana," *Revista Médica Universitaria Facultad de Ciencias Médicas - UNCuyo*, vol. 3, p. 60, 2007.
- [3] O. Amjad, "Complex image solution of SAR inside a human head illuminated by a finite-length dipole," *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 24, pp. 223-239, 2010.
- [4] IEEE, "IEEE Standard for Safety Levels With Respect to Human Exposure to Radio Frequency Electromagnetic Fields, 3 kHz to 300 GHz," *IEEE Std C95.1-2005 (Revision of IEEE Std C95.1-1991)*, pp. 1-238, 2006.
- [5] ICNIRP, "ICNIRP Guidelines for Limiting Exposure to Time-Varying Electric, Magnetic and Electromagnetic Fields (UP to 300 GHz)," *Health Physics*, vol. 74, pp. 494-522, 1998.
- [6] V. G. Khurana, C. Ieo, M. Kundi, L. Hardell, and M. Carlberg, "Cell phones and brain tumors: a review including the long-term epidemiologic data," *Surgical Neurology*, vol. 72, pp. 205-214, 9// 2009.
- [7] ITU. (2015). "Statistics: Global ICT developments", *International Telecommunication Union*. [En línea]. Disponible: <http://www.itu.int/en/ITU-D/Statistics/Pages/stat/default.aspx> [Consultado: July 07, 2015].
- [8] AETIC, *Infraestructuras de Telefonía Móvil*. Madrid, España: Asociación de Empresas de Electrónica, Tecnologías de la Información y Telecomunicaciones de España, 2005.
- [9] R. Huber, V. Treyer, A. A. Borbély, J. Schuderer, J. M. Gottselig, H. P. Landolt, *et al.*, "Electromagnetic fields, such as those from mobile phones, alter regional cerebral blood flow and sleep and waking EEG," *Journal of Sleep Research*, vol. 11, pp. 289-295, 2002.
- [10] N. D. Volkow, D. Tomasi, G. Wang, and *et al.*, "Effects of cell phone radiofrequency signal exposure on brain glucose metabolism," *JAMA*, vol. 305, pp. 808-813, 2011.
- [11] A. Lak and H. Oraizi, "Evaluation of SAR Distribution in Six-Layer Human Head Model," *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2013, p. 8, 2013.
- [12] T. Wessapan, S. Srisawatdhisukul, and P. Rattanadecho, "Specific absorption rate and temperature distributions in human head subjected to mobile phone radiation at different frequencies," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 55, pp. 347-359, 1/15/ 2012.
- [13] J. P. Holman, *Transferencia de calor*, 10 ed. México, D.F.: Compañía Editorial Continental S.A. de C.V., 1999.
- [14] E. Moros, *Physics of thermal therapy fundamentals and clinical applications*, 1 ed. EUA: CRC Press, 2013.
- [15] J. Manrique, *Transferencia de calor*, 2 ed. México, D.F.: Alfaomega, 2008.
- [16] D. Cheng, *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*, 1 ed. Edo. de México: Pearson Addison Wesley, 1998.
- [17] D. Davidson, *Computational electromagnetics for RF and microwave engineering*, 1 ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005.
- [18] T. Chandrupatla and A. Belegundu, *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*, 2 ed. México D.F.: Pearson Prentice Hall, 1999.