

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**“Estabilización del robot autobalanceable  
Balanduino por moldeo de energía”**

POR

**Ing. Isaac Gandarilla Esparza**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL  
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS**

**Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila**

ISSN: 0188-9060

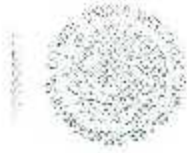


**RIITEC: (16)-TMCIE-2015**

Torrcón, Coahuila, México  
Diciembre 2015

SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
Instituto Tecnológico de La Laguna

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Torreón, Coah., **09/Diciembre/2015**

Dependencia: DEPI/CPCIE

Oficio: DEPI/CPCIE/230/2015

Asunto: Autorización de impresión  
de tesis.

**C. Isaac Gandarilla Esparza**

**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.**

**PRESENTE**

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"Estabilización del robot autobalanceable Balanduino por moldeo de energía"**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (16)-TMCIE-2015**, para que proceda a la impresión del mismo.

**ATENTAMENTE**

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

**DR. JOSÉ LUIS MEZA MEDINA**

Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación  
del Instituto Tecnológico de la Laguna

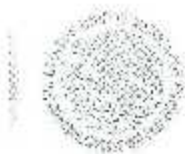


JLMM/RHSR



Blvd. Revolución y Cdha. Cuauhtémoc s/n Col. Centro C.P. 27000  
Torreón, Coah. Tel. 7091313, e-mail: [wmiascon@italaguna.edu.mx](mailto:wmiascon@italaguna.edu.mx)  
[www.italaguna.edu.mx](http://www.italaguna.edu.mx)





"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Torreón, Coah., 08/Diciembre/2015

**DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

**"Estabilización del robot autobalanceable Balanduino por moldeo de energía"**

Desarrollado por el **C. Isaac Gandarilla Esparza**, con número de control **M1413002** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

**ATENTAMENTE**

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

---

**Dr. Víctor A. Santibáñez Dávila**  
Asesor/Director de Tesis

---

**Dr. Juan Sifuentes Mijares**  
Comité Tutorial

---

**Dr. Miguel A. Liama Leal**  
Comité Tutorial

---

**Dr. Alejandro E. Dzul López**  
Comité Tutorial


# Dedicatoria

A mi padre, Juan Gandarilla Burciaga, quien fue un padre admirable, siempre pensaba en darle lo mejor a su familia y fue un ejemplo de trabajo y dedicación.

A mi madre, Verónica Esparza González, que siempre me ha apoyado para poder seguir superándome.

A mi hermana, Diana Denny Gandarilla Esparza, quien es mi ejemplo de dedicación en los estudios.



# Agradecimientos

Al Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila, por su trabajo de asesoría en esta tesis, el material facilitado concerniente a los temas de este trabajo y su confianza en el trabajo desarrollado en la misma. Al Dr. Ricardo Emmanuel Campa Cocom, por el material facilitado que sirvió para obtener un mejor entendimiento de los temas manejados en esta tesis. Al Dr. Miguel Ángel Llama Leal, por las clases impartidas desde mis estudios de ingeniería y la motivación para estudiar una maestría. A los doctores Francisco Jurado Zamarripa, Alejandro Enrique Dzul López y José Alfonso Pámanes García y el M. C. Edmundo Javier Ollervides Vázquez, por sus clases impartidas a lo largo de mis estudios de posgrado.

A mi familia, compañeros y amigos, por el apoyo que me han dado durante la realización de este trabajo.

Al Tecnológico Nacional de México por hacer posible este estudio de posgrado. A CONACyT, por los apoyos aportados por medio de la beca otorgada y el proyecto 134534 con que se financió este proyecto.

# Resumen

En este trabajo de tesis se muestra el diseño de leyes de control basadas en los métodos de Lagrangiano Controlado e IDA-PBC, y que a su vez son una modificación del lagrangiano o hamiltoniano, respectivamente, del sistema a estabilizar. En este documento se resuelve el problema de estabilización de un robot autobalanceable en un punto de equilibrio arbitrario y se detalla el estudio de estabilidad de los controladores propuestos. Se hace una descripción breve del robot autobalanceable Balanduino. Se realizan simulaciones y pruebas experimentales del trabajo teórico propuesto usando la plataforma Balanduino y los resultados son mostrados.

# Abstract

This thesis shows the design of control laws based on the Controlled Lagrangian and IDA-PBC methods, and which in turn are a modification of the systems's lagrangian and hamiltonian, respectively. The problem of stabilization of a self-balancing robot in an arbitrary point is solved in this document, and the stability study of the proposed controllers is detailed. A brief description of the self-balancing robot Balanduino is made. Simulations and experimental tests of the proposed theoretical work are performed using the Balanduino platform and the results are reported.

# Índice general

Dedicatoria	i
Agradecimientos	ii
Resumen	iii
Abstract	iv
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos de la tesis	4
1.1.1. Objetivo general	4
1.1.2. Objetivos específicos	4
1.2. Organización de la tesis	4
<b>2. Estudio del Lagrangiano Controlado e IDA-PBC</b>	<b>5</b>
2.1. Lagrangiano Controlado	5
2.1.1. Condiciones de apareamiento	6
2.1.2. Proyecciones horizontal y vertical	6
2.1.3. Modificación del lagrangiano del sistema	7
2.2. IDA-PBC	11
<b>3. Modelado de robot autobalanceable</b>	<b>13</b>
3.1. Modelo dinámico	13
3.1.1. Cálculo de la energía cinética	14
3.1.2. Cálculo de la energía potencial	15
3.1.3. Cálculo del lagrangiano del sistema	15
3.1.4. Cálculo de las ecuaciones de Lagrange	16
3.1.5. Puntos de equilibrio del robot autobalanceable	17



<b>4. Controladores basados en moldeo de energía</b>	<b>18</b>
4.1. Método de lagrangiano controlado	18
4.1.1. Condiciones de aparcamiento	19
4.1.2. Desarrollo de ley de control	19
4.1.3. Análisis de estabilidad	22
4.2. Método de IDA-PBC	25
4.2.1. Solución de las ecuaciones diferenciales	28
4.2.2. Análisis de estabilidad	33
<b>5. Balanduino</b>	<b>35</b>
5.1. Componentes	36
5.2. Programación	37
5.3. Parámetros físicos	37
<b>6. Resultados de simulación</b>	<b>39</b>
6.1. Estabilización fuera del origen con referencia constante	41
6.1.1. Resultados de Lagrangiano controlado	41
6.1.2. Resultados de IDA-PBC	43
6.2. Estabilización fuera del origen con referencia variable con el tiempo	44
6.2.1. Resultados de Lagrangiano controlado	45
6.2.2. Resultados de IDA-PBC	46
6.3. Comportamiento ante perturbaciones externas	48
6.3.1. Resultados de Lagrangiano controlado	48
6.3.2. Resultados de IDA-PBC	50
<b>7. Resultados experimentales</b>	<b>52</b>
7.1. Implementación de leyes de control	52
7.2. Pruebas de estabilización	55
7.3. Pruebas con perturbaciones	58
<b>8. Conclusiones</b>	<b>63</b>
8.1. Trabajo futuro	64
8.2. Contribuciones extras	64
APÉNDICE	65
<b>A. Demostración de soluciones</b>	<b>65</b>
A.1. Solución de (4.12) usando el método de características dado en [Olver (2014)]	65
A.2. Demostración de que (4.14) cumple con (2.29)	66
A.3. Obtención de (4.15)	67
A.4. Desarrollo de (2.22) para el robot autobalanceable	70
A.5. Solución de (4.15)	70

A.6. Solución de (4.81)	71
<b>B. Programa de la plataforma Balanduino</b>	<b>73</b>
B.1. Lagrangiano Controlado	73
B.2. IDA-PBC	75

# Índice de figuras

1.1. Robots autobalanceables para transporte personal	3
1.2. Segway RMP220	3
3.1. Diagrama de cuerpo libre del robot autobalanceable	13
4.1. Diagrama a bloques del robot autobalanceable en lazo cerrado con el control por Lagrangiano Controlado	21
4.2. Diagrama a bloques del robot autobalanceable en lazo cerrado con el control por Lagrangiano Controlado	33
5.1. Robot autobalanceable Balanduino	35
5.2. Tarjeta controladora de la plataforma Balanduino	36
5.3. Esquema de los componentes de la plataforma Balanduino	37
5.4. Ensamblaje del robot autobalanceable Balanduino en SolidWorks	38
6.1. Archivo de Simulink para simulaciones	40
6.2. Error de posición angular de las llantas	41
6.3. Posición angular del cuerpo del robot	42
6.4. Señal de control	42
6.5. Error de posición angular de las llantas	43
6.6. Posición angular del cuerpo del robot	43
6.7. Señal de control	44
6.8. Error de posición angular de las llantas	45
6.9. Posición angular del cuerpo del robot	45
6.10. Señal de control	46
6.11. Error de posición angular de las llantas	46
6.12. Posición angular del cuerpo del robot	47
6.13. Señal de control	47
6.14. Error de posición angular de las llantas	48
6.15. Posición angular del cuerpo del robot	49
6.16. Señal de control	49
6.17. Error de posición angular de las llantas	50
6.18. Posición angular del cuerpo del robot	50
6.19. Señal de control	51

7.1. Esquema de programa usado en la plataforma Balanduino	54
7.2. Error de posición angular de las llantas	56
7.3. Posición angular del cuerpo del robot	56
7.4. Señal de control	57
7.5. Error de posición angular de las llantas	57
7.6. Posición angular del cuerpo de robot	58
7.7. Señal de control	58
7.8. Error de posición angular de las llantas	59
7.9. Posición angular del cuerpo del robot	60
7.10. Señal de control	60
7.11. Error de posición angular de las llantas	61
7.12. Posición angular del cuerpo del robot	61
7.13. Señal de control	62

# Índice de tablas

3.1. Parámetros físicos de un robot autobalanceable	14
5.1. Parámetros del robot autobalanceable Balanduino	38
7.1. Parámetros de los motores de la plataforma Balanduino	53



# Capítulo 1

## Introducción

Para resolver el problema de estabilizar un punto de equilibrio arbitrario de un sistema mecánico subactuado, aquel en el cual no es posible controlar de manera directa todas sus coordenadas, se han propuesto metodologías de control que se basan en moldear la energía total del sistema, de allí surge el nombre de controles basados en moldeo de energía. En estos métodos de control se preserva la estructura mecánica del sistema al mismo tiempo que se hace que ésta cumpla con ciertos requisitos que hacen que el punto de equilibrio al que se desea llevar el sistema sea estable.

Dos ejemplos de este tipo de controladores son: el método de Lagrangiano Controlado y el método de Control Basado en Pasividad por Interconexión e Inyección de Amortiguamiento (*Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control*), IDA-PBC. En el primer método, propuesto por Bloch *et al.* [Bloch *et al.* (2001)] se realiza una modificación del lagrangiano de sistemas mecánicos subactuados que cumplen con ciertas restricciones, llamadas condiciones de apareamiento, con las que se consigue estabilidad asintótica local de un punto de equilibrio arbitrario deseado del sistema. En [Machleit *et al.* (2007)] y [Kamath *et al.* (2010)] se describe la aplicación de este método a un péndulo Furuta y a una grúa puente, respectivamente.

El segundo método, propuesto por Ortega *et al.* [Ortega *et al.* (2001)] se basa en la modificación del hamiltoniano del sistema, agregando a éste una componente de fuerzas centrífugas. Para este método, las restricciones que se deben cumplir están en la forma de ecuaciones diferenciales parciales, lo que constituye un reto al intentar aplicar este método a sistemas subactuados. Ejemplos de la aplicación de este control a plantas subactuadas se muestran en [Gómez-Estern *et al.* (2001)] y [Ryalat y Laila (2013)]; en el primer caso a un sistema bola-barra y a un carro péndulo, mientras que en el segundo a un péndulo Furuta. El problema de resolver las ecuaciones diferenciales parciales también ha sido abordado en varios trabajos, como en [Acosta *et al.* (2004)], donde se propone un método para resolver las ecuaciones en sistemas con una sola coordenada no actuada, y en [Charg (2014)], donde se propone un método sistemático para tratar el mismo problema en sistemas más generales.

Un robot autobalanceable es un robot móvil que se desplaza sobre dos llantas coaxiales, cada una actuada por un motor independiente. Este sistema es subactuado, altamente no lineal e inestable, todo esto lo hace interesante para el estudio de leyes de control no lineales. Además, el sistema tiene la ventaja de ocupar una superficie reducida, lo que lo hace ideal para maniobrar en espacios reducidos.

Los robots autobalanceables han tenido una gran cabida en el mercado en las últimas dos décadas, sobre todo en el campo del transporte personal, donde se pueden encontrar productos como lo son el Toyota Winglet o el Segway PT, mostrados en la Figura 1.1. En cuanto a la investigación, también se encuentran en el mercado productos diseñados para este propósito, como el RMP220 de Segway (ver Figura 1.2). Los robots autobalanceables también se han convertido en una plataforma popular para los aficionados a la robótica, como se aprecia en la gran proliferación de dispositivos de este tipo de bajo costo, como la plataforma Balanduino.

Los primeros acercamientos al control de un robot autobalanceable se realizaron usando leyes de control lineales, como realimentación de estados [Batler y Bright (2008)] y LQR [Xiaogang *et al.* (2008)]. En trabajos posteriores se implementaron, al mismo, leyes de control no lineales, como se muestra en [Nguyen *et al.* (2010)], donde Nguyen *et al.* propusieron un control por *backstepping* para la estabilización del péndulo, mientras que un control PID se encarga de controlar la posición de las llantas; en [Fuquan *et al.* (2012)] se muestra una ley de control por modos deslizantes.

En este trabajo de tesis se muestra el diseño de leyes de control usando los métodos de control Lagrangiano Controlado e IDA-PBC para solucionar el problema de estabilizar un robot autobalanceable en un punto de equilibrio arbitrario y se prueba la estabilidad de las leyes de control propuestas. Los resultados teóricos son validados por medio de simulaciones usando los parámetros físicos del robot autobalanceable Balanduino así como con pruebas experimentales en dicha plataforma.



(a) Toyota Winglet



(b) Segway PT

Figura 1.1: Robots autobalanceables para transporte personal



Figura 1.2: Segway RMP220



## 1.1. Objetivos de la tesis

### 1.1.1. Objetivo general

Proponer leyes de control basadas en métodos de moldeo de energía para el robot autobalanceable Balanduino.

### 1.1.2. Objetivos específicos

- Estudiar las leyes de control por moldeo de energía presentes en la literatura para obtener la estabilización del robot autobalanceable en su equilibrio inestable.
- Proponer leyes de control por los métodos de Lagrangiano Controlado e IDA-PBC para el robot autobalanceable.
- Realizar el estudio de estabilidad de las leyes de control propuestas.
- Realizar la evaluación experimental de las leyes de control propuestas en el robot autobalanceable Balanduino.

## 1.2. Organización de la tesis

Este documento se compone de 8 capítulos, los cuales están ordenados de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se presenta un estudio sobre las metodologías de control por moldeo de energía Lagrangiano Controlado e IDA-PBC, haciendo énfasis en los requisitos que deben ser cumplidos para poder aplicar estos métodos de control a un sistema en particular. En el Capítulo 3 se describe el modelo dinámico del robot autobalanceable con restricción en el movimiento de las llantas, así como la obtención de los puntos de equilibrio de dicho sistema. En el Capítulo 4 se detalla el diseño de leyes de control utilizando los métodos mostrados en el Capítulo 2, con el propósito de estabilizar el robot con el péndulo en posición vertical y con las llantas del mismo en una posición descada; en este Capítulo también se incluye un estudio sobre la estabilidad de los controles propuestos en el mismo. En el Capítulo 5 se hace una descripción del robot autobalanceable Balanduino; se menciona el hardware con el que cuenta y las características de éste. En el Capítulo 6 se muestran los resultados de simulación, en los cuales se usaron los parámetros físicos de la plataforma Balanduino y fueron realizados en MATLAB/Simulink. En el Capítulo 7 se muestran los resultados de las pruebas experimentales realizadas en el robot Balanduino; también se hace una descripción de la manera en que se implementaron las leyes de control propuestas en esta tesis en la plataforma Balanduino. En el Capítulo 8 se dan las conclusiones obtenidas de este trabajo, así como el trabajo futuro propuesto y las contribuciones extras dadas durante la realización de esta tesis.

## Capítulo 2

# Estudio del Lagrangiano Controlado e IDA-PBC

### 2.1. Lagrangiano Controlado

En [Bloch *et al.* (1999)] se propone una ley de control para la estabilización, en puntos de equilibrio inestables, de una cierta clase de sistemas mecánicos subactuados cuyo lagrangiano tiene la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \mathcal{U}(q), \quad (2.1)$$

con la cual se modifica solamente la energía cinética del sistema en lazo abierto, conduciendo a su vez a un lagrangiano modificado del sistema en lazo cerrado. En [Bloch *et al.* (2000)] se modifica la ley de control propuesta en [Bloch *et al.* (1999)] para agregar disipación y así lograr que las coordenadas no actuadas tiendan asintóticamente a cero. En [Bloch *et al.* (2001)] se incluye la modificación de la energía potencial en la metodología propuesta en [Bloch *et al.* (2000)] en sistemas mecánicos cuya energía potencial puede depender de las coordenadas actuadas, y con eso se logra la estabilización asintótica de todas las coordenadas del sistema.

Este método de control se diferencia de otros que moldean la energía en que no se requiere resolver un número considerable de ecuaciones diferenciales parciales, lo cual es, generalmente, una árdua labor. Por otro lado, se requiere que el sistema cuente con ciertas características, llamadas condiciones de apareamiento, [Bloch *et al.* (1999)]. Si el sistema cumple con estas condiciones entonces es posible obtener una ley de control que estabilice el sistema por este método.



### 2.1.1. Condiciones de apareamiento

Para el caso de un sistema mecánico subactuado, cuyas coordenadas contenidas en el vector  $\mathbf{q}$  pueden dividirse en  $m$  coordenadas actuadas  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$  y  $n$  coordenadas no actuadas  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

es posible descomponer su matriz de inercias  $M$  en las submatrices  $M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $M_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . El lagrangiano de un sistema mecánico con estas características se reescribe como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T & \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(\mathbf{x}) & M_2(\mathbf{x}) \\ M_2(\mathbf{x})^T & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} - \mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}). \quad (2.3)$$

Las condiciones de apareamiento que debe de cumplir el sistema (CA) son:

CA1  $M_3$  no depende de  $\mathbf{x}$ .

CA2  $\frac{\partial M_{i,j}(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial M_{k,i}(\mathbf{x})}{\partial x_j}$  para  $i$  y  $k$  de 1 hasta  $n$  y  $j$  desde 1 hasta  $m$ .

CA3  $\frac{\partial^2 \mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial x_i \partial \theta_j} M_{3,j,k}^{-1} M_{2,i,k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 \mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial x_l \partial \theta_j} M_{3,j,k}^{-1} M_{2,l,k}(\mathbf{x})$  para  $i$  y  $l$  de 1 hasta  $n$ ,  $j$  y  $k$  desde 1 hasta  $m$ .

CA4 La matriz  $M_2(\mathbf{x})^T$  es inyectiva al ser evaluada en el punto en que se desea estabilizar el sistema.

La verificación de que el sistema cumple con las condiciones de apareamiento CA1 a CA3 es sencilla. Para la verificación de CA4 se debe cumplir con que, según [Grossman (2008)], la única solución para

$$M_2(\mathbf{x})^T \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

con  $M_2(\mathbf{x})$  evaluado en el punto en donde se desea estabilizar el sistema, y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ , es la solución trivial  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . De esto también se encuentra que es necesario que  $m > n$ , lo que indica que el sistema debe tener igual o mayor número de coordenadas actuadas que no actuadas.

### 2.1.2. Proyecciones horizontal y vertical

En sistemas cuyo lagrangiano se puede escribir como en (2.3) las velocidades del mismo,  $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}^T$  pueden descomponerse proyectando  $\dot{\mathbf{q}}$  sobre los espacios horizontal  $Hor$  y vertical  $Ver$ ; estos espacios son subespacios del espacio vectorial formado por las velocidades del sistema (ver [Bloch (2003)]). El subespacio horizontal se puede definir como

$$Hor = \left\{ \dot{\mathbf{q}} : M_2(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} + M_3 \dot{\boldsymbol{\theta}} = 0 \right\}. \quad (2.5)$$

El subespacio  $Ver$  se define de manera que cumpla con

$$\dot{\mathbf{q}} = Ver(\dot{\mathbf{q}}) + Hor(\dot{\mathbf{q}}), \quad (2.6)$$

donde  $Ver(\dot{\mathbf{q}})$  representa la proyección de  $\dot{\mathbf{q}}$  en  $Ver$ , y  $Hor(\dot{\mathbf{q}})$  representa la proyección de  $\dot{\mathbf{q}}$  en  $Hor$ .

Los subespacios  $Hor$  y  $Ver$  también cumplen con

$$\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} = Hor(\dot{\mathbf{q}})^T M Hor(\dot{\mathbf{q}}) + Ver(\dot{\mathbf{q}})^T M Ver(\dot{\mathbf{q}}). \quad (2.7)$$

Para un sistema mecánico que puede representarse en la forma (2.3), las proyecciones de  $\dot{\mathbf{q}}$  en  $Hor$  y  $Ver$  son

$$Hor(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T & \left( -M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} \right)^T \end{bmatrix}^T, \quad (2.8)$$

$$Ver(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \left( \dot{\boldsymbol{\theta}} - M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} \right)^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.9)$$

### 2.1.3. Modificación del lagrangiano del sistema

La modificación de la energía cinética del sistema, propuesta en [Bloch *et al.* (1999)], consiste de los siguientes dos puntos:

- Transformación de las proyecciones  $Hor(\dot{\mathbf{q}})$  y  $Ver(\dot{\mathbf{q}})$  en  $Hor_{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}})$  y  $Ver_{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}})$ .
- El cambio de  $M$  por  $M_p$  y  $M_s$ , donde  $M_p$  y  $M_s$  son matrices que satisfacen (2.12), mostrada más adelante.

Los cambios en las proyecciones vertical y horizontal se realizan agregando el término  $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}})^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{m+n}$  con  $\boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^m$ . Las proyecciones modificadas tienen la forma:

$$Hor_{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T & \left( -M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}}) \right)^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.10)$$

$$Ver_{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \left( \dot{\boldsymbol{\theta}} + M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}}) \right)^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.11)$$

Estos cambios nos dan un lagrangiano modificado con forma

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\tau}, \sigma, \rho} = \frac{1}{2} \left[ Hor_{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}})^T M_s Hor_{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}}) + Ver_{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}})^T M_p Ver_{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}}) \right] - \mathcal{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}). \quad (2.12)$$

La modificación de la energía potencial se realiza haciendo que la energía potencial para el sistema en lazo cerrado sea

$$\mathcal{U}_c(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathcal{U}_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}). \quad (2.13)$$

La introducción de (2.13) en (2.12) nos da el lagrangiano del sistema, en lazo cerrado, de la forma

$$\mathcal{L}_{\tau, \sigma, \rho, \epsilon} = \frac{1}{2} [Hor_{\tau}(\dot{\mathbf{q}})^T M_{\sigma} Hor_{\tau}(\dot{\mathbf{q}}) + Ver_{\tau}(\dot{\mathbf{q}})^T M_{\rho} Ver_{\tau}(\dot{\mathbf{q}})] - \mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - \mathcal{U}_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}). \quad (2.14)$$

Suponiendo que  $Hor(\dot{\mathbf{q}})^T M_{\sigma} Hor(\dot{\mathbf{q}}) = Hor(\dot{\mathbf{q}})^T M Hor(\dot{\mathbf{q}})$ , (2.14) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tau, \sigma, \rho, \epsilon} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T & (\dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}}))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(\mathbf{x}) & M_2(\mathbf{x}) \\ M_2(\mathbf{x})^T & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\rho_1} & M_{\rho_2} \\ M_{\rho_2}^T & M_{\rho_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & (\dot{\boldsymbol{\theta}} + M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}}))^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} M_{\rho_1} & M_{\rho_2} \\ M_{\rho_2}^T & M_{\rho_3} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} M_1(\mathbf{x}) & M_2(\mathbf{x}) \\ M_2(\mathbf{x})^T & M_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} + M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \\ &\quad - \mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - \mathcal{U}_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde  $M_{\sigma_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_{\sigma_2} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $M_{\sigma_3} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son submatrices de  $M_{\sigma}$  y  $M_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_{\rho_2} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $M_{\rho_3} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son submatrices de  $M_{\rho}$ . Observando (2.15) se puede apreciar que, de las matrices  $M_{\sigma}$  y  $M_{\rho}$ , sólo forman parte del lagrangiano  $\mathcal{L}_{\tau, \sigma, \rho, \epsilon}$  los elementos  $M_{\sigma_3}$  y  $M_{\rho_3}$ .

Definiendo

$$\boldsymbol{\tau}(\dot{\mathbf{x}}) := \kappa M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}}, \quad (2.16)$$

$$M_{\sigma_3} := -\frac{1}{\kappa} M_3, \quad (2.17)$$

$$M_{\rho_3} := \rho M_3, \quad (2.18)$$

donde los términos  $\kappa$  y  $\rho$  son parámetros de control constantes. Sustituyendo (2.16), (2.17) y (2.18) en (2.15) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tau, \sigma, \rho, \epsilon} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \left[ M_1(\mathbf{x}) + \rho(\kappa + 1) \left( \kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) M_2(\mathbf{x}) M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \right] \dot{\mathbf{x}} \\ &\quad + \dot{\mathbf{x}}^T [\rho(\kappa - 1) M_2(\mathbf{x})]^T \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \rho M_3 \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - \mathcal{U}_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

La ley de control  $\mathbf{u}$  que transforma (2.3) en (2.15) se obtiene a partir de las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

Sea

$$\mathcal{E}_q(\mathcal{L}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (2.20)$$

el operador Euler-Lagrange con el que se obtienen las ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones de movimiento correspondientes a las coordenadas actuadas del sistema en lazo abierto,  $\mathcal{E}_\theta(\mathcal{L})$ , están dadas por

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\theta}} \mathcal{L}) - \nabla_{\theta} \mathcal{U}(\mathbf{x}, \theta) = \mathbf{u}, \quad (2.21)$$

donde  $\nabla_w f$  es el gradiente transpuesto de  $f$  con respecto a  $\mathbf{w}$ .

Mientras que para el sistema en lazo cerrado,  $\mathcal{E}_\theta(\mathcal{L}_{\tau, \sigma, \rho, \kappa})$  es

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\theta}} \mathcal{L}_{\tau, \sigma, \rho, \kappa}) - \nabla_{\theta} \mathcal{U}(\mathbf{x}, \theta) - \nabla_{\theta} \mathcal{U}_c(\mathbf{x}, \theta) = 0. \quad (2.22)$$

Comparando (2.21) con (2.22) resulta la ley de control

$$\mathbf{u} = -\frac{d}{dt} \left( \kappa M_2(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}}^2 \right) - \frac{\rho-1}{\rho} \nabla_{\theta} \mathcal{U}(\mathbf{x}, \theta) - \frac{1}{\rho} \nabla_{\theta} \mathcal{U}_c(\mathbf{x}, \theta). \quad (2.23)$$

La ley de control (2.23) puede simplificarse para que no dependa de aceleraciones, lo que da

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & -\kappa \left\{ \nabla_{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}}^T M_2(\mathbf{x})) \dot{\mathbf{x}} - M_2(\mathbf{x}) A^{-1} \left[ \nabla_{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}}^T M_1(\mathbf{x})) \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}}^T M_1(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}) \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + \kappa) M_2(\mathbf{x}) M_3^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}}^T M_2(\mathbf{x})) \dot{\mathbf{x}} \right] \right\} + \kappa M_2(\mathbf{x})^T A^{-1} \nabla_{\theta} \mathcal{U}(\mathbf{x}, \theta) \\ & + \nabla_{\theta} \mathcal{U}(\mathbf{x}, \theta) - \frac{1}{\rho} \left( 1 - \kappa M_2(\mathbf{x})^T A^{-1} M_2(\mathbf{x}) M_3^{-1} \right) \nabla_{\theta} (\mathcal{U}(\mathbf{x}, \theta) + \mathcal{U}_c(\mathbf{x}, \theta)), \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde

$$A = M_1(\mathbf{x}) - (1 + \kappa) M_2(\mathbf{x}) M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T. \quad (2.25)$$

Para conseguir la estabilidad asintótica se agrega el término disipativo  $\mathbf{u}_{\text{diss}}$  a la ley de control. Este término tiene la forma

$$\mathbf{u}_{\text{diss}} = K_c M_3 \left( \dot{\theta} + \left( \kappa - \frac{\rho-1}{\rho} \right) M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} \right). \quad (2.26)$$

El término  $K_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz de ganancias de control. Debe ser definida positiva (negativa) en caso de que el punto en que se desea estabilizar el sistema sea un máximo (mínimo) de la energía potencial. Agregando (2.26) en (2.24) se obtiene



$$\begin{aligned}
\mathbf{u} = & -\kappa \left\{ \nabla_{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}}^T M_2(\mathbf{x})) \dot{\mathbf{x}} - M_2(\mathbf{x})^T A^{-1} \left[ \nabla_{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}}^T M_1(\mathbf{x})) \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}}^T M_1(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}) \right. \right. \\
& \left. \left. - (1 + \kappa) M_2(\mathbf{x}) M_3^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}}^T M_2(\mathbf{x})) \dot{\mathbf{x}} \right] \right\} - \kappa M_2(\mathbf{x})^T A^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \\
& + \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{\rho} \left( 1 + \kappa M_2(\mathbf{x})^T A^{-1} M_2(\mathbf{x}) M_3^{-1} \right) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} (\mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - \mathcal{U}_e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})) \\
& + \frac{1}{\rho} \left( 1 + \kappa M_2(\mathbf{x})^T A^{-1} M_2(\mathbf{x}) M_3^{-1} \right) \mathbf{u}_{\text{des}}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Para asegurar que (2.27) sea capaz de convertir (2.3) en (2.15) se debe hacer que  $\mathcal{E}_{\mathbf{x}}(\mathcal{L}_{\tau, \sigma, \rho, \kappa})$  concuerde con  $\mathcal{E}_{\mathbf{x}}(\mathcal{L})$ , esto es

$$\mathcal{E}_{\mathbf{x}}(\mathcal{L}_{\tau, \sigma, \rho, \kappa}) = \mathcal{E}_{\mathbf{x}}(\mathcal{L}) = 0. \tag{2.28}$$

Para asegurar que (2.28) se cumpla,  $\mathcal{U}_e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  se diseña de manera que dependa tanto de  $\mathbf{x}$  como de  $\boldsymbol{\theta}$  y cumpla con la ecuación diferencial parcial

$$-(\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{U}_e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})) \left( \kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) M_3^{-1} M_2(\mathbf{x})^T + \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{U}_e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = 0. \tag{2.29}$$

Las constantes de control  $\kappa$  y  $\rho$  deben cumplir con ciertas restricciones para asegurar el funcionamiento de la ley de control. Estas restricciones dependen de si el equilibrio  $\mathbf{q}_e$  en que se desea estabilizar el sistema es un punto de máxima o mínima energía potencial del sistema en lazo abierto.

Para el caso en que  $\mathbf{q}_e = \arg \min (\mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))$  las constantes de control deben cumplir con

$$\kappa - 1 < \min \left[ \lambda \left| \det \left( M_1(\mathbf{x}) - \lambda M_2(\mathbf{x}) M_1(\mathbf{x})^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \right) \right|_{\mathbf{q}_e} - 0 \right], \tag{2.30}$$

$$\rho > 0, \tag{2.31}$$

$$K_v < 0. \tag{2.32}$$

En caso de que  $\mathbf{q}_e = \arg \max (\mathcal{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))$  las condiciones son

$$\kappa + 1 > \max \left[ \lambda \left| \det \left( M_1(\mathbf{x}) - \lambda M_2(\mathbf{x}) M_1(\mathbf{x})^{-1} M_2(\mathbf{x})^T \right) \right|_{\mathbf{q}_e} - 0 \right], \tag{2.33}$$

$$\rho < 0, \tag{2.34}$$

$$K_v > 0. \tag{2.35}$$

En el primer caso, los valores de  $\kappa$  y  $\rho$  hacen que la energía potencial del sistema en lazo cerrado tenga un mínimo en  $\mathbf{q}_e$ , y la energía cinética sea definida positiva en una cierta región alrededor de  $\mathbf{q}_e$ , mientras que en el segundo, la energía potencial tiene un máximo en  $\mathbf{q}_e$  y la energía cinética es definida negativa.



## 2.2. IDA-PBC

El método de Control Basado en Pasividad por Interconexión e Inyección de Amortiguamiento (IDA-PBC por sus siglas en inglés) se basa en la modificación tanto de la energía cinética como de la energía potencial de sistemas mecánicos; este método ha sido ampliamente usado para resolver los problemas de estabilización de sistemas mecánicos subactuados, como se muestra en [Ortega *et al.* (2002)] y [Acosta *et al.* (2004)].

Los sistemas a los que se aplica esta metodología son aquellos cuyo hamiltoniano tiene la forma:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (2.36)$$

donde  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  corresponde al vector de momentos generalizados que está dado por

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.37)$$

Aplicando las ecuaciones de movimiento de Hamilton y suponiendo que el sistema no tiene amortiguamiento natural, el modelo dinámico del sistema puede ser expresado como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(\mathbf{q})u \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Desarrollando los términos  $\nabla_{\mathbf{q}} H$  y  $\nabla_{\mathbf{p}} H$  en (2.38), se obtiene

$$\dot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p}, \quad (2.39)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{q}} (\mathbf{p}^T M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p}) - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q}) - G(\mathbf{q})u. \quad (2.40)$$

Con el método de IDA-PBC lo que se busca es hacer que el sistema tenga una estructura deseada particular en lazo cerrado, conservando la estructura hamiltoniana, de manera que el hamiltoniano deseado del sistema en lazo cerrado sea

$$H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M_d(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}_d(\mathbf{q}), \quad (2.41)$$

donde  $M_d(\mathbf{q})$  y  $\mathcal{U}_d(\mathbf{q})$  son la matriz de inercias deseada y la energía potencial deseada, respectivamente. Estos elementos deben cumplir con  $\dot{M}_d(\mathbf{q}) = M_d(\mathbf{q})^2$  y  $M_d(\mathbf{q}) > 0$ , al menos en una región alrededor del punto  $\mathbf{q}^*$  en que se desea estabilizar el sistema, y  $\mathbf{q}^* = \arg \min \mathcal{U}_d$ .

La forma del modelo dinámico que se desea tener una vez aplicada la metodología de IDA-PBC es

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_d M^{-1} \\ -M_d M^{-1} & J_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - GK_v G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H_d \\ \nabla_{\mathbf{p}} H_d \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

donde  $J_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -J_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$ ,  $K_v = K_v^T > 0$  y se han omitido los argumentos de  $M(\mathbf{q})$ ,  $M_d(\mathbf{q})$  y  $H_d(\mathbf{q})$  con el propósito de evitar ecuaciones voluminosas. De (2.42) se tiene

$$\nabla_q H_d = \frac{1}{2} \nabla_q (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) + \nabla_q \mathcal{U}_d(\mathbf{q}), \quad (2.43)$$

$$\nabla_p H_d = M_d^{-1} \mathbf{p}. \quad (2.44)$$

Desarrollando las ecuaciones de movimiento de Hamilton para (2.41), da como resultado

$$\dot{\mathbf{q}} = M^{-1} \mathbf{p}, \quad (2.45)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -M_d M^{-1} \left( \frac{1}{2} \nabla_q (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) + \nabla_q \mathcal{U}_d(\mathbf{q}) \right) + J_2 M_d^{-1} \mathbf{p} - G K_v G^T M_d^{-1} \mathbf{p}. \quad (2.46)$$

Igualando (2.46) con (2.40), y despejando  $u$ , se define la ley de control por IDA-PBC con la que se consigue que un sistema se comporte como si su hamiltoniano fuera (2.41):

$$u = (G^T G)^{-1} G^T \{ \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} \mathbf{p} \} - K_v G^T \nabla_p H_d. \quad (2.47)$$

El problema que se presenta cuando esta metodología se aplica a sistemas subactuados es que, debido a que no se pueden controlar directamente todas coordenadas del sistema, es necesario que  $M_d$  y  $V_d$  cumplan con las siguientes restricciones

$$G^{-} \{ \nabla_q (\mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p}) - M_d M^{-1} \nabla_q (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) - 2 J_2 M_d^{-1} \mathbf{p} \} = 0, \quad (2.48)$$

$$G^{-} \{ \nabla_q \mathcal{U} - M_d M^{-1} \nabla_q \mathcal{U}_d \} = 0. \quad (2.49)$$

Estas restricciones dan un grupo de ecuaciones diferenciales parciales con las que deben de cumplir  $M_d$  y  $V_d$ .  $G^{-}$  es el aniquilador por la izquierda de  $G$  y se define como

$$G^{-} = I_n - G (G^T G)^{-1} G^T. \quad (2.50)$$

El principal obstáculo para la implementación de una ley de control, por el método de IDA-PBC en un sistema subactuado, es definir  $M_d$  y  $V_d$  de manera que tengan las propiedades necesarias para asegurar la estabilidad del sistema en el punto deseado, al menos en una región alrededor de dicho punto, al mismo tiempo que cumple con (2.48) y (2.49).

## Capítulo 3

# Modelado de robot autobalanceable

En este capítulo se muestran el modelo dinámico de un robot autobalanceable con ciertas restricciones, así como los pasos desarrollados para la obtención de, mismo, utilizando el lagrangiano del sistema y las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

### 3.1. Modelo dinámico

En este trabajo el robot autobalanceable está restringido a movimientos perpendiculares al eje de rotación de las llantas debido a que éstas se mueven al unísono. También está restringido a movimientos sobre un plano horizontal, esto simplifica el modelado del robot ya que sólo cuenta con dos grados de libertad, que son: la posición angular de las llantas,  $\phi$ , que es igual en ambas llantas por la restricción ya mencionada, y la posición angular del cuerpo del robot,  $\psi$ . En la Figura 3.1 se muestra un diagrama del robot autobalanceable con las restricción mencionada, cuyos parámetros físicos se describen en la tabla 3.1.

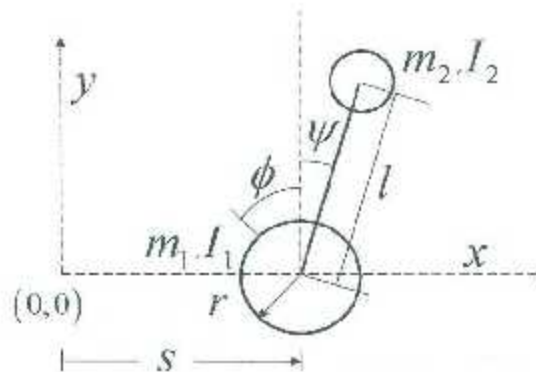


Figura 3.1: Diagrama de cuerpo libre del robot autobalanceable

Símbolo	Descripción	Unidades
$\phi$	posición angular de las llantas	rad
$\psi$	posición angular del cuerpo del robot	rad
$l$	distancia del eje de giro de las llantas al centro de masa del cuerpo del robot	m
$m_1$	masa de una llanta	Kg
$m_2$	masa del cuerpo del robot	Kg
$I_1$	momento de inercia de una llanta	Kg·m <sup>2</sup>
$I_2$	momento de inercia del cuerpo del robot	Kg·m <sup>2</sup>

Tabla 3.1: Parámetros físicos de un robot autobalancable.

Para el modelado también se considera que la masa del cuerpo del robot está concentrada en su centro de masa.

### 3.1.1. Cálculo de la energía cinética

La energía cinética  $\mathcal{K}$  del robot está compuesta por la energía cinética debido a las velocidades lineales en el robot  $\mathcal{K}_1$  y la debida a las velocidades angulares en el mismo  $\mathcal{K}_2$ .

Para calcular  $\mathcal{K}_1$  es necesario conocer las velocidades lineales de las masas, las cuales se suponen concentradas en los centros de masa de las llantas  $\mathbf{v}_{m_1}$  y del cuerpo del robot  $\mathbf{v}_{m_2}$ ; estas velocidades en función de los valores articulares del robot son:

$$v_{m_1} = \frac{ds}{dt} = r\dot{\phi}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v}_{m_2}^T \mathbf{v}_{m_2} = \left( r\dot{\phi} + l \cos(\psi) \dot{\psi} \right)^2 + \left( l \sin(\psi) \dot{\psi} \right)^2, \quad (3.2)$$

donde  $s$  es la posición de las llantas con respecto al origen del marco  $x-y$ , mostrado en la Figura 3.1 y

$$\mathbf{v}_{m_2} = \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{m_2} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r\phi - l \sin(\psi) \\ l \cos(\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\dot{\phi} + l \cos(\psi) \dot{\psi} \\ -l \sin(\psi) \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

con  $\mathbf{p}_{m_2}$  siendo el vector de posición de la masa del cuerpo del robot.

Usando (3.1) y (3.2),  $\mathcal{K}_1$  resulta ser:



$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 &= m_1 v_{m_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{m_2}^2 \\
\mathcal{K}_1 &= m_1 (r \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( (r \dot{\phi} - l \cos(\psi) \dot{\psi})^2 + (l \sin(\psi) \dot{\psi})^2 \right), \\
\mathcal{K}_1 &= \left( m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) r^2 \dot{\phi}^2 + l m_2 r \cos(\psi) \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\psi}^2.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

El cálculo de  $\mathcal{K}_2$  es más sencillo y da:

$$\mathcal{K}_2 = l_1 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} l_2 \dot{\psi}^2. \tag{3.5}$$

La energía cinética total del sistema es la suma de (3.4) y (3.5):

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2, \\
\mathcal{K} &= \left( m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) r^2 \dot{\phi}^2 + l m_2 r \cos(\psi) \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\psi}^2 + l_1 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} l_2 \dot{\psi}^2, \\
\mathcal{K} &= \left( \left( m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) r^2 + l_1 \right) \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (m_2 l^2 + l_2) \dot{\psi}^2 + l m_2 r \cos(\psi) \dot{\psi} \dot{\phi}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

### 3.1.2. Cálculo de la energía potencial

Tomando como referencia el eje  $x$  para calcular la altura, y considerando que una masa que se encuentra a una distancia  $l$  del eje  $x$  tiene energía potencial igual a cero, la única parte del sistema que tiene energía potencial es el cuerpo del robot, por lo tanto la energía potencial de todo el robot está dada por:

$$U = m_2 g l (\cos(\psi) - 1). \tag{3.7}$$

### 3.1.3. Cálculo del lagrangiano del sistema

El lagrangiano para el robot autobalanceable, con las restricciones impuestas en este trabajo, es de la forma energía cinética menos energía potencial

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - U. \tag{3.8}$$

Sustituyendo (3.6) y (3.7) en (3.8), obtenemos el lagrangiano del robot autobalanceable como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} (m_2 l^2 + l_2) \dot{\psi}^2 + l m_2 r \cos(\psi) \dot{\psi} \dot{\phi} + \left( \left( m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) r^2 + l_1 \right) \dot{\phi}^2 \\
&\quad - m_2 g l (\cos(\psi) - 1).
\end{aligned} \tag{3.9}$$



### 3.1.4. Cálculo de las ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones del modelo dinámico se obtienen resolviendo las ecuaciones de Lagrange:

$$\tau_i - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad (3.10)$$

donde  $q_i$  representa el  $i$ -ésimo grado de libertad, y  $\tau_i$  es la fuerza generalizada aplicada al  $i$ -ésimo grado de libertad. Desarrollando (3.10) para  $\psi$  y  $\phi$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= (m_2 l^2 + I_2) \dot{\psi} + l m_2 r \cos(\psi) \dot{\phi}, \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right] &= (m_2 l^2 + I_2) \ddot{\psi} + l m_2 r \cos(\psi) \ddot{\phi} - l m_2 r \sin(\psi) \dot{\psi} \dot{\phi}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= m_2 g l \sin(\psi) - l m_2 r \sin(\psi) \dot{\psi} \dot{\phi}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= ((2m_1 + m_2) r^2 + 2I_1) \dot{\phi} + l m_2 r \cos(\psi) \dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right] &= ((2m_1 + m_2) r^2 + 2I_1) \ddot{\phi} + l m_2 r \cos(\psi) \ddot{\psi} - l m_2 r \sin(\psi) \dot{\psi}^2, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para el robot autobalanceable quedan como:

$$\tau_\psi = (m_2 l^2 + I_2) \ddot{\psi} + l m_2 r \cos(\psi) \ddot{\phi} - m_2 g l \sin(\psi), \quad (3.11)$$

$$\tau_\phi = ((2m_1 + m_2) r^2 + 2I_1) \ddot{\phi} + l m_2 r \cos(\psi) \ddot{\psi} - l m_2 r \sin(\psi) \dot{\psi}^2. \quad (3.12)$$

El modelo dinámico del robot puede expresarse en la forma

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}\tau, \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{q} = [\psi \ \phi]^T$  representa el vector de posiciones articulares,  $\tau$  es el torque entregado por los motores del robot, y

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_2 l^2 + I_2 & l m_2 r \cos(\psi) \\ l m_2 r \cos(\psi) & (2m_1 + m_2) r^2 + 2I_1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l m_2 r \sin(\psi) \dot{\psi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 g l \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

### 3.1.5. Puntos de equilibrio del robot autobalaceable

Definiendo  $a = m_2 l^2 + l_2$ ,  $b = l m_2 r$ ,  $c = (2m_1 + m_2) r^2 - 2l_1$ ,  $d = m_2 g l$ , se reescribe el vector de estados como  $\mathbf{x} = [\psi \ \dot{\psi} \ \phi \ \dot{\phi}]^T$  y reescribiendo el modelo dinámico del robot autobalaceable dado por (3.13) - (3.17), en la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , quedando como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \frac{(cd - b^2 \dot{\psi}^2) \sin(\psi)}{ac - b^2} \\ \frac{(a\dot{\psi}^2 - d) b \sin(\psi)}{ac - b^2} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema en lazo abierto se buscan los valores de  $\mathbf{x}$  tales que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (3.19)$$

Como  $\mathbf{x}$  se mantiene constante, entonces  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ . Sustituyendo  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  en (3.18), se obtiene

$$\dot{\psi} = 0, \quad (3.20)$$

$$\dot{\phi} = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{(cd - b^2 \dot{\psi}^2) \sin(\psi)}{ac - b^2} = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{(a\dot{\psi}^2 - d) b \sin(\psi)}{ac - b^2} = 0. \quad (3.23)$$

Simplificando (3.22) y (3.23), da como resultado

$$cd \sin(\psi) = 0, \quad (3.24)$$

$$bd \sin(\psi) = 0. \quad (3.25)$$

Tanto de (3.24), como de (3.25), se puede afirmar que

$$\sin(\psi) = 0, \quad (3.26)$$

y por lo tanto de (3.24) se tiene que

$$\psi = \pm n\pi : n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.27)$$

Considerando  $\psi \in [0, 2\pi)$  y  $\phi \in \mathbb{K}$ , los puntos de equilibrio del sistema son  $\mathbf{x}_{e_1} = [0 \ \dot{\psi}^* \ 0 \ 0]^T$  y  $\mathbf{x}_{e_2} = [\pi \ \dot{\psi}^* \ 0 \ 0]^T$ .  $\mathbf{x}_{e_1}$  es un punto de equilibrio inestable y es el equilibrio en el que se desea estabilizar el sistema con  $\dot{\psi}^*$  arbitrario.

## Capítulo 4

# Controladores basados en moldeo de energía

En este capítulo se muestra el desarrollo de leyes de control basadas en el moldeo de energía que han sido ya descritas en la literatura, pero que no habían sido aplicadas al robot autobalanceable, con el propósito de estabilizarlo en el punto  $\mathbf{x}_e$ , que es el equilibrio inestable del robot autobalanceable en lazo abierto, de manera que:

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_{e1} = \begin{bmatrix} 0 & \phi^* & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

### 4.1. Método de lagrangiano controlado

El robot autobalanceable tiene un lagrangiano que es igual a la energía cinética menos la energía potencial, pero no se tiene al menos una coordenada que sea totalmente no actuada, como nos lo indica (3.17), por lo que se propone un cambio de variables con el que se consiga que

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

El cambio de coordenadas propuesto es

$$x_1 = \psi, \quad (4.3)$$

$$x_2 = \dot{\phi} - \dot{\psi}. \quad (4.4)$$

Aplicando este cambio de coordenadas al robot autobalanceable, su modelo dinámico queda de la forma

$$(a + 2b \cos(x_1) + c) \ddot{x}_1 + (c + b \cos(x_1)) \ddot{x}_2 - b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 - d \sin(x_1) = 0, \quad (4.5)$$

$$(c + b \cos(x_1)) \ddot{x}_1 + c \ddot{x}_2 - b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 = \tau. \quad (4.6)$$

Con esto se deduce que las coordenadas no actuadas son  $x = x_1$  y las coordenadas actuadas son  $\theta = x_2$ . La matriz de inercias  $M$  del robot autobalanceable para el cambio de variables es

$$M_x = \begin{bmatrix} a + 2b \cos(x_1) + c & c + b \cos(x_1) \\ c + b \cos(x_1) & c \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Las submatrices  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  de la matriz de inercias, que para el caso del robot autobalanceable son escalares, quedan como:

$$M_1 = a + 2b \cos(x_1) + c, \quad (4.8)$$

$$M_2 = c + b \cos(x_1), \quad (4.9)$$

$$M_3 = c. \quad (4.10)$$

La energía potencial, en función de  $x_1$  y  $x_2$ , es

$$U = d(\cos(x_1) - 1). \quad (4.11)$$

#### 4.1.1. Condiciones de apareamiento

Fácilmente se comprueba que CA1 se cumple ya que  $M_3 = c$  es una constante. Dado que  $M_2$  es un escalar, CA2 también se cumple. Como la energía potencial del sistema no depende de  $\theta$ , CA3 se cumple. Al evaluar  $M_2$  en  $x_c$ , se obtiene  $c + b$ , y se cumple con CA4.

#### 4.1.2. Desarrollo de ley de control

Tomando (2.29), y desarrollando para el robot autobalanceable, da como resultado

$$-\frac{\partial \mathcal{M}_c}{\partial x_2} \left( \kappa - \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{c + b \cos(x_1)}{c} + \frac{\partial \mathcal{M}_c}{\partial x_1} = 0. \quad (4.12)$$

Resolviendo (4.12), se obtiene (Ver Apéndice A.1):

$$u_c = F \left( x_2 + \frac{(b \sin(x_1) + cx_1) \left( \kappa - \frac{\rho - 1}{\rho} \right)}{c} + C \right), \quad (4.13)$$

con  $F(\cdot)$  como una función cualquiera, y  $C$  como una constante de integración.

Dado que  $x_c$  es un punto de máxima energía potencial para el sistema en lazo abierto,  $\mathcal{U}_c(\mathbf{x}, \theta)$  se define de manera que también tenga un máximo en  $x_c$ , lo que se consigue fácilmente definiéndola como una función cuadrática negativa. Para hacer que el robot se desplace sobre el eje  $x$  una cierta distancia  $s_d$ , se busca que el robot se estabilice con un valor de  $\phi_d = s_d/r$ . Para esto se introduce en  $\mathcal{U}_c(\mathbf{x}, \theta)$  el término  $\bar{x}_2 = x_2 - \phi_d$ , donde  $-\phi_d$  toma el lugar de la constante de integración  $C$ , de manera que  $\mathcal{U}_c$  dependa de la posición angular del cuerpo del robot y del error en la posición angular de las llantas. Para el robot autobalanceable se propone  $\mathcal{U}_c$ , ahora en función de  $x_1$  y  $\bar{x}_2$ , como

$$\mathcal{U}_c(x_1, x_2) = -\frac{d\epsilon c^2}{2h} \left( \bar{x}_2 + \frac{(b \sin(x_1) + cx_1) \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right)}{c} \right)^2, \quad (4.14)$$

con  $\epsilon > 0$  como una variable de control. Se puede probar que (4.14) cumple con (2.29) (Ver Apéndice A.2).

La ley de control por lagrangiano controlado, para el robot autobalanceable, se obtiene resolviendo (2.27) (Ver Apéndice A.3):

$$u = \frac{1}{A} \left\{ \kappa \sin(x_1) [b(a + b \cos(x_1)) \dot{x}_1^2 - d(c + b \cos(x_1))] + \eta(x_1) u_{diss} - \eta(x_1) P \left( \bar{x}_2 + \frac{(b \sin(x_1) + cx_1) \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right)}{c} \right) \right\}, \quad (4.15)$$

donde

$$A = a + 2b \cos(x_1) + c - (\kappa - 1) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c}, \quad (4.16)$$

$$u_{diss} = k_c c \left[ \dot{x}_2 + \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right) \frac{c + b \cos(x_1)}{c} \dot{x}_1 \right], \quad (4.17)$$

$$\eta(x_1) = \frac{1}{\rho} \left[ a + 2b \cos(x_1) + c - \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} \right], \quad (4.18)$$

$$P = -\frac{d\epsilon c^2}{2h}. \quad (4.19)$$

En la Figura 4.1 se muestra un diagrama a bloques de la ley de control dada por (4.15) aplicada al robot autobalanceable.



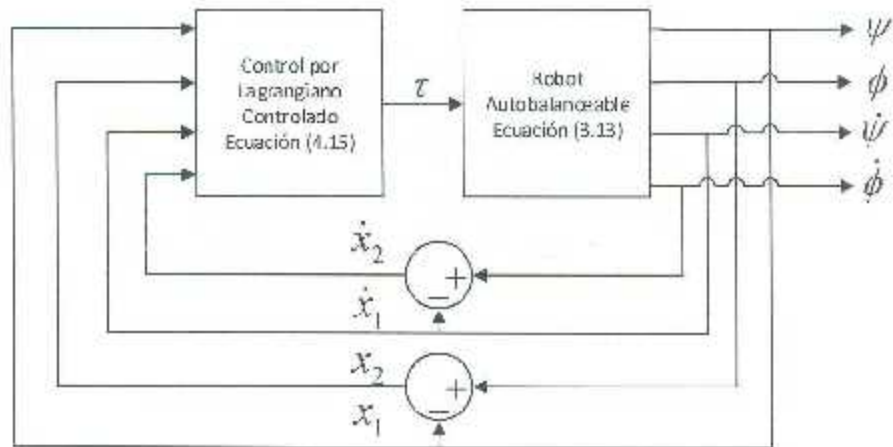


Figura 4.1: Diagrama a bloques del robot autobalanceable en lazo cerrado con el control por Lagrangiano Controlado

La aplicación de (4.15) al robot autobalanceable da el lagrangiano en lazo cerrado

$$\mathcal{L}_{mod} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{e1} & m_{e2} \\ m_{e2} & m_{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} - \mathcal{U}_c(x_1, \hat{x}_2), \quad (4.20)$$

donde

$$m_{e1} = a - 2b \cos(x_1) + c + \rho(\kappa - 1) \left( \kappa - \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c}, \quad (4.21)$$

$$m_{e2} = \rho(\kappa + 1)(c + b \cos(x_1)), \quad (4.22)$$

$$m_{e3} = \rho c. \quad (4.23)$$

$$\mathcal{U}_c = d(\cos(x_1) - 1) + \mathcal{U}_t(x_1, \hat{x}_2). \quad (4.24)$$

Dado que  $x_0$  es un punto de máxima energía potencial,  $\rho$  debe ser negativa y  $\kappa$  debe cumplir con (2.33), que para el robot autobalanceable equivale a

$$\kappa > \frac{ac - b^2}{(c + b)^2} \quad (4.25)$$

Para encontrar la región en que la matriz de inercias modificada  $M_c$  es definida negativa se deben buscar los rangos en los que

$$m_{x_1} < 0, \quad (4.26)$$

$$\det(M_c) > 0, \quad (4.27)$$

se cumplan simultáneamente. Esto ocurre para valores de  $x_1$  pertenecientes a  $(-\epsilon, \epsilon)$ , donde

$$\epsilon = \arccos \left( \frac{\sqrt{c(a\kappa + a - c\kappa) - c\kappa}}{b\kappa + b} \right). \quad (4.28)$$

### 4.1.3. Análisis de estabilidad

Para simplificar los cálculos de la demostración de estabilidad, se utiliza el cambio de coordenadas siguiente:

$$y = \hat{x}_2 = \left( \kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{(cx_1 + b \sin(x_1))}{c}. \quad (4.29)$$

Con el cambio de coordenadas (4.29), la matriz de inercias y la energía potencial del robot autobalanceable, en lazo cerrado, adoptan la forma

$$M_2 = \begin{bmatrix} m_{y_1} & m_{y_2} \\ m_{y_2} & m_{y_3} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$m_{y_1} = a + 2b \cos(x_1) - c - \left( \kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c}, \quad (4.31)$$

$$m_{y_2} = c - b \cos(x_1), \quad (4.32)$$

$$m_{y_3} = \rho c, \quad (4.33)$$

$$U_{c_2} = d(\cos(x_1) - 1) + P y^2. \quad (4.34)$$

Proponiendo como función de Lyapunov  $V_L(x_1, y, \dot{x}_1, \dot{y})$

$$V_L(x_1, y, \dot{x}_1, \dot{y}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{y} \end{bmatrix} M_2 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y} \end{bmatrix} - U_{c_2}. \quad (4.35)$$

$V_L(x_1, y, \dot{x}_1, \dot{y})$  es definida positiva en la región  $D \subset \mathbb{R}^4$  definida como

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 \in (-\epsilon, \epsilon) \right\}. \quad (4.36)$$

Derivando (4.35) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{V}_L = -k_c c y^2. \quad (4.37)$$

Dado que  $k_c > 0$  y  $c > 0$ , entonces  $\dot{V}_L$  es semidefinida negativa y se demuestra que el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado, correspondiente al origen, es estable.

### Estabilidad asintótica

Acomodando el modelo en la forma  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$  con  $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T = [x_1 \ y \ \dot{x}_1 \ \dot{y}]^T$ , y considerando el cambio de coordenadas (4.29), el sistema en lazo cerrado queda como

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ \frac{1}{m_2} \left[ m_{y2} \left( P z_2 - u_{des}(z_4) - b \sin(z_1) z_3^2 \right) - m_{y3} \left( -d \sin(z_1) - \left( b \sin(z_1) \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right) \frac{M_2}{M_3} - b \sin(z_1) \right) z_3^2 \right) \right] \\ \frac{1}{m_1} \left[ m_{y2} \left( -d \sin(z_1) + \left( b \sin(z_1) \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right) \frac{M_2}{M_3} - b \sin(z_1) \right) z_3^2 \right) - m_{y1} \left( P z_2 - u_{des}(z_4) - b \sin(z_1) z_3^2 \right) \right] \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

donde  $u_{des}$  está dada por (4.17) y cuyo punto de equilibrio es  $\mathbf{z}_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

Para la demostración de estabilidad asintótica local de  $\mathbf{z}_e$ , se utiliza el teorema de Krasovkii-LaSalle. Invocando este teorema tenemos que, dado el conjunto  $\Omega$ , definido como

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \mathbf{z} \in D : \dot{V}_L = 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{z} \in D : z_4 = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde  $D \subset \mathbb{R}^4$  está dado en (4.36), se requiere que  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$  sea la única trayectoria que iniciando en  $\Omega$  permanezca en éste para todo  $t \geq 0$ .

De (4.39), sabemos que para que una trayectoria  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^4$  permanezca en  $\Omega \forall t \geq 0$  es necesario y suficiente que  $z_4(t) = 0 \forall t \geq 0$ , y por lo tanto se debe cumplir que

$$\int_0^t z_4(v) dv \equiv 0, \quad (4.40)$$

$$\dot{z}_4(t) = 0. \quad (4.41)$$

Dado que de (4.38),  $z_4(t) = \dot{z}_2(t)$ , entonces, sustituyendo  $z_4(t)$  en (4.40), tenemos

$$z_2(t) = z_2(0). \quad (4.42)$$

Desarrollando (2.22) para el robot autobalaceable, se obtiene (Ver Apéndice A.4):

$$(c - b \cos(z_1(t)))\dot{z}_3(t) - \rho c \dot{z}_4(t) - b \sin(z_1) z_3(t)^2 = 2P z_2(t), \quad (4.43)$$

donde  $P$  está definido en (4.19). Despejando (4.41) y (4.42) en (4.43), da

$$(c + b \cos(z_1))\dot{z}_3 - b \sin(z_1) z_3^2 = 2P z_2(0). \quad (4.44)$$

Dado de (4.38),  $z_3 = \dot{z}_1$  y  $\dot{z}_3 = \ddot{z}_1$ , entonces (4.44) se puede reescribir como una ecuación diferencial

$$(c + b \cos(z_1))\ddot{z}_1 - b \sin(z_1) \dot{z}_1^2 = 2P z_2(0). \quad (4.45)$$

Resolviendo (4.45) (Ver Apéndice A.5), se obtiene la solución implícita

$$c z_1 + b \sin(z_1) = P z_2(0) t^2 + C_1 t + C_2. \quad (4.46)$$

Los términos  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración. Dado que ya se mostró la estabilidad de  $\mathbf{z}_c$  en la región  $D$ , debe existir una región alrededor de  $\mathbf{z}_c$  en la cual las soluciones de  $\mathbf{z}$  están acotadas, como se indica en [Kelly y Santibáñez (2003)], página 37; por lo tanto, dado que  $P \neq 0$ , entonces  $z_2(0)$  debe necesariamente cumplir con  $z_2(0) = 0$  y  $C_1 = 0$ , y de acuerdo con (4.42):

$$z_2(t) = 0. \quad (4.47)$$

Luego, (4.43) se reduce a

$$c z_1 + b \sin(z_1) = C_2. \quad (4.48)$$

Ahora derivando con respecto al tiempo (4.48), se llega a

$$(c + b \cos(z_1)) z_3 = 0. \quad (4.49)$$

Para que (4.49) se cumpla en  $D$ , es necesario que  $z_3(t) = 0$  ya que ningún valor de  $z_1 \in D$  hace que se cumpla (4.49), por lo tanto  $\dot{z}_2(t) \equiv 0$ . Con esto las ecuaciones de  $\dot{z}_3$  y  $\dot{z}_4$  de (4.38) se reducen a

$$-d(c + b \cos(z_1)) \sin(z_1) = 0, \quad (4.50)$$

$$d\rho c \sin(z_1) = 0. \quad (4.51)$$

Despejando  $z_1$  de (4.50) o (4.51) en  $D$  resulta  $z_1(t) \equiv 0$ , y por lo tanto  $\mathbf{z} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$  es la única trayectoria que se mantiene en  $\Omega$  para toda  $t \geq 0$ , y se comprueba así la estabilidad asintótica local del sistema en lazo cerrado.

## 4.2. Método de IDA-PBC

Para encontrar  $M_d$  y  $\mathcal{U}_d$  se utilizó el método mostrado en [De León Gómez (2014)]. Con el propósito de simplificar las ecuaciones (2.48) y (2.49), se utiliza el cambio de variables dado por

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \phi - \psi \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

con el cual la matriz de inercia  $M$  se reescribe como

$$M_q = \begin{bmatrix} a + 2b \cos(q_1) + c & c + b \cos(q_1) \\ c + b \cos(q_1) & c \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

y

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = M_q \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} (a + 2b \cos(q_1) + c) \dot{q}_1 + (c + b \cos(q_1)) \dot{q}_2 \\ (c + b \cos(q_1)) \dot{q}_1 - c \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Se define  $M_d = M_d(q)$ , al hacer esto, (2.48) pasa de ser una ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial ordinaria, esto dado que  $M_q$  sólo depende de  $q_1$ . Para el sistema con cambio de variables  $G^+$  queda como

$$G^+ = I_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Para el desarrollo de la ley de control (2.47),  $G^+$  se tomará como  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Tomando (2.48), y multiplicando cada término dentro de las llaves por  $G^-$ , da

$$G^+ \nabla_q (\mathbf{p}^T M_q^{-1} \mathbf{p}) - G^- M_d M_q^{-1} \nabla_q (\mathbf{p}^T M_q^{-1} \mathbf{p}) + G^+ 2J_2 M_q^{-1} \mathbf{p} = 0. \quad (4.56)$$

Trabajando con el primer término de (4.56), se observa que

$$\begin{aligned} G^- \nabla_q (\mathbf{p}^T M_q^{-1} \mathbf{p}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}^T M_q^{-1} \mathbf{p}) \\ \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{p}^T M_q^{-1} \mathbf{p}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}^T M_q^{-1} \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (4.57)$$



Dado que  $\mathbf{p}$  no depende explícitamente de  $\mathbf{q}$ , y usando el hecho de que

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (M_q^{-1}) = -M_q^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} (M_q) M_q^{-1}, \quad (4.58)$$

la ecuación (4.57) se puede reescribir como

$$G^1 \nabla_q (\mathbf{p}^T M_q^{-1} \mathbf{p}) = -\mathbf{p}^T M_q^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} (M_q) M_q^{-1} \mathbf{p}. \quad (4.59)$$

Debido a que  $M_d$  se definió como dependiente sólo de  $q_1$ , se nota que

$$\begin{aligned} \nabla_q (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) \\ \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Definiendo  $\mathbf{e}_1$  como

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

se puede decir que

$$\nabla_q (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}). \quad (4.62)$$

Aplicando (4.58) a (4.62), y despejando el resultado en el segundo término de (4.56), da

$$G^1 M_d M_q^{-1} \nabla_q (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) = -G^1 M_d M_q^{-1} \mathbf{e}_1 \mathbf{p}^T M_d^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) M_d^{-1} \mathbf{p}. \quad (4.63)$$

Ahora, introduciendo el término  $\Lambda$ , el cual se define como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} = M_d M_q^{-1}, \quad (4.64)$$

(4.63) se reduce a

$$G^1 M_d M_q^{-1} \nabla_q (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) = -G^1 \Lambda \mathbf{e}_1 \mathbf{p}^T M_d^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) M_d^{-1} \mathbf{p}, \quad (4.65)$$

y debido a que  $-G^1 \Lambda \mathbf{e}_1$  es un valor escalar, (4.65) puede reescribirse como

$$G^1 M_d M_q^{-1} \nabla_q (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) = -\mathbf{p}^T M_d^{-1} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) M_d^{-1} \mathbf{p}. \quad (4.66)$$

Como parte del método utilizado, la matriz  $J_2$  se define como  $J_2 = \bar{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\alpha} W$ , donde  $W \in SO(2)$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T$  con  $\alpha_2$  como parámetro libre que se define como dependiente de  $q_1$ .  $\bar{\mathbf{p}}$  es una coordenada parcial dada por

$$\bar{\mathbf{p}} = M_d^{-1} \mathbf{p}, \quad (4.67)$$

con esto, el tercer término de (4.56) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} G^{-2} J_2 M_d^{-1} \mathbf{p} &= G^{-2} \bar{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\alpha} W M_d^{-1} \mathbf{p}, \\ &= G^{-2} (M_d^{-1} \mathbf{p})^T \boldsymbol{\alpha} W M_d^{-1} \mathbf{p}, \\ &= G^{-2} \mathbf{p}^T M_d^{-1} \boldsymbol{\alpha} W M_d^{-1} \mathbf{p}, \\ &= 2 \mathbf{p}^T M_d^{-1} \boldsymbol{\alpha} G^+ W M_d^{-1} \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Despejando (4.59), (4.66) y (4.68) en (4.56), da

$$-\mathbf{p}^T M_d^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) M_d^{-1} \mathbf{p} + \mathbf{p}^T M_d^{-1} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) M_d^{-1} \mathbf{p} + 2 \mathbf{p}^T M_d^{-1} \boldsymbol{\alpha} G^+ W M_d^{-1} \mathbf{p} = 0. \quad (4.69)$$

La ecuación (4.69) puede ser expresada como

$$\mathbf{p}^T \left[ M_d^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) M_d^{-1} + M_d^{-1} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) M_d^{-1} + 2 M_d^{-1} \boldsymbol{\alpha} G^+ W M_d^{-1} \right] \mathbf{p} = 0. \quad (4.70)$$

Para asegurar que (4.56) se cumpla, se hace que lo que se encuentra entre paréntesis en la parte izquierda de (4.70) sea igual a cero, esto es,

$$M_d^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) M_d^{-1} + M_d^{-1} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) M_d^{-1} + 2 M_d^{-1} \boldsymbol{\alpha} G^+ W M_d^{-1} = 0. \quad (4.71)$$

Multiplicando por  $M_d$  por ambos lados (4.71), se obtiene

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) \Lambda^T + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) + 2 \boldsymbol{\alpha} G^+ W = 0, \quad (4.72)$$

Usando la definiciones de  $\Lambda$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $G^+$ ; definiendo  $W$  como

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

y tomando sólo la parte simétrica de  $\boldsymbol{\alpha} G^+ W$ , la ecuación (4.72) se puede expresar como:

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial q_1} (M_d) \Lambda^T + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (\Lambda M_d) + 2 \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 2\alpha_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.74)$$

En cuanto a (2.49), sustituyendo (4.64) en (2.49) y definiendo el término  $\mathcal{U}_d$  dependiente tanto de  $q_1$  como  $q_2$ , se obtiene

$$G^+ \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U} \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \mathcal{U} \end{array} \right] - \Lambda \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U}_d \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \mathcal{U}_d \end{array} \right] = 0,$$

$$G^- \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U} \\ 0 \end{array} \right] - \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U}_d \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \mathcal{U}_d \end{array} \right] = 0, \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U}_d - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \mathcal{U}_d = 0. \quad (4.76)$$

#### 4.2.1. Solución de las ecuaciones diferenciales

Tomando (4.76) y desarrollando la derivada de  $\mathcal{U}$ , da como resultado

$$d \sin(q_1) - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U}_d - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \mathcal{U}_d = 0. \quad (4.77)$$

Para encontrar una solución para (4.77), se hace la suposición de que  $\mathcal{U}_d$  está compuesta por una parte sólo dependiente de  $q_1$  y otra que depende tanto de  $q_1$  como de  $q_2$ , de manera que  $\mathcal{U}_d$  queda como

$$\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_{d_1}(q_1) + \mathcal{U}_{d_2}(q_1, q_2). \quad (4.78)$$

Sustituyendo (4.78) en (4.77) y simplificando resulta en

$$-d \sin(q_1) - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U}_{d_1} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U}_{d_2} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \mathcal{U}_{d_2} = 0. \quad (4.79)$$

Con el propósito de simplificar la obtención de  $\mathcal{U}_{d_1}$  y  $\mathcal{U}_{d_2}$ , se hace

$$-d \sin(q_1) - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U}_{d_1} = 0, \quad (4.80)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{U}_{d_2} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \mathcal{U}_{d_2} = 0. \quad (4.81)$$

La solución de (4.80) es bastante sencilla y da como resultado

$$\mathcal{U}_{d_1} = \int \frac{-d \sin(q_1)}{\lambda_1} dq_1. \quad (4.82)$$

En el caso de  $\mathcal{U}_{d_2}$ , es necesario aplicar el método de características. Aplicando este método a (4.81) (Ver Apéndice A.6), da

$$\mathcal{U}_{d_2} = F \left( q_2 - \int \frac{\lambda_2}{\lambda_1} dq_1 + C \right), \quad (4.83)$$

donde  $F(\cdot)$  es una función arbitraria, y  $C$  es una constante de integración. Con esto,  $\mathcal{U}_d$  queda como

$$\mathcal{U}_d = \int \frac{-d \sin(q_1)}{d\lambda_1} dq_1 + F \left( q_2 - \int \frac{\lambda_2}{\lambda_1} dq_1 - C \right). \quad (4.84)$$

Para simplificar las integrales contenidas en (4.84), se hace la suposición de que  $\lambda_1 = k_1$ , donde  $k_1$  es una constante. Aplicando esto a (4.84) da

$$\mathcal{U}_d = \frac{d \cos(q_1)}{k_1} - F \left( q_2 - \frac{1}{k_1} \int \lambda_2 dq_1 + C \right). \quad (4.85)$$

Una de las propiedades con las que debe de cumplir  $\mathcal{U}_d$  consiste en que tenga un mínimo en  $q_d$ ; para asegurar esto, se requiere que  $k_1 < 0$ . Además, como se busca que el sistema se estabilice en  $\phi_d$ , que es un valor arbitrario de  $\phi$ , se introduce en  $\mathcal{U}_d$  el término  $\hat{q}_2 = q_2 - \phi_d$ ; esto se logra haciendo  $C = -\phi_d$ . Con esto,  $\mathcal{U}_d$  toma la forma

$$\mathcal{U}_d = \frac{d(\cos(q_1) - 1)}{k_1} + g_1 \left( \hat{q}_2 - \frac{1}{k_1} \int \lambda_2 dq_1 \right)^2, \quad (4.86)$$

donde  $g_1$  es una ganancia de control.

Ahora, trabajando con el sistema de ecuaciones diferenciales (4.74), es importante recordar que la matriz  $M_d$  debe ser simétrica, por lo que se revisa la definición de  $\Lambda$  dada en (4.64). Despejando  $M_d$  de (4.64) da

$$M_d = \begin{bmatrix} \lambda_1(a + 2b \cos(q_1) + c) + \lambda_2(c + b \cos(q_1)) & \lambda_2(c + b \cos(q_1)) + \lambda_2 c \\ \lambda_3(a + 2b \cos(q_1) + c) + \lambda_4(c - b \cos(q_1)) & \lambda_3(c + b \cos(q_1)) + \lambda_4 c \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Para asegurar que  $M_d$  sea simétrica, es necesario que

$$\lambda_1(c + b \cos(q_1)) + \lambda_2 c = \lambda_3(a - 2b \cos(q_1) + c) + \lambda_4(c + b \cos(q_1)). \quad (4.88)$$

Despejando  $\lambda_3$  de (4.88), resulta en

$$\lambda_3 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(c + b \cos(q_1)) - \lambda_2 c}{(a + 2b \cos(q_1) + c)}. \quad (4.89)$$

Despejando (4.89) en (4.74), tomando en cuenta que  $\lambda_1$  fue definido como  $k_1$  al resolver (4.76), y desarrollando (4.74), se obtiene

$$k_1 \left( \lambda_2 b \sin(q_1) + \left( \frac{d}{dq_1} \lambda_2 \right) c + \left( \frac{d}{dq_1} \lambda_2 \right) b \cos(q_1) \right) = 0 \quad (4.90)$$

$$\frac{(-2k_1 b \sin(q_1) - \lambda_2 b \sin(q_1)) ((k_1 - \lambda_2)(c + b \cos(q_1)) + \lambda_2 c)}{a + 2b \cos(q_1) + c} + k_1 b \sin(q_1) \lambda_4 + k_1 \left( k_1 b \sin(q_1) + \left( \frac{d}{dq_1} \lambda_2 \right) c \right) + c_1 = 0, \quad (4.91)$$

$$\frac{(-2k_1 b \sin(q_1) - \lambda_2 b \sin(q_1)) ((k_1 - \lambda_4)(c + b \cos(q_1)) + \lambda_2 c)}{a - 2b \cos(q_1) - c} + k_1 b \sin(q_1) \lambda_4 + k_1 \left( -k_1 b \sin(q_1) + \left( \frac{d}{dq_1} \lambda_2 \right) c \right) + c_1 = 0. \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{(2(k_1 - \lambda_4)(c - b \cos(q_1)) + 2\lambda_2 c) b \sin(q_1) - \lambda_4 b \sin(q_1)}{a + 2b \cos(q_1) + c} - \lambda_4 b \sin(q_1) \right) \\ & \quad \times ((k_1 - \lambda_4)(c + b \cos(q_1)) + \lambda_2 c) (a + 2b \cos(q_1) + c)^{-1} \\ & \quad + \frac{((k_1 - \lambda_4)(c - b \cos(q_1)) - \lambda_2 c) b \sin(q_1) \lambda_4}{a + 2b \cos(q_1) + c} \\ & + k_1 \left( \frac{\left( - \left( \frac{d}{dq_1} \lambda_4 \right) (c + b \cos(q_1)) - (k_1 - \lambda_4) b \sin(q_1) + \left( \frac{d}{dq_1} \lambda_2 \right) c \right) (c - b \cos(q_1))}{a - 2b \cos(q_1) + c} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(2(k_1 - \lambda_4)(c + b \cos(q_1)) - 2\lambda_2 c)(c + b \cos(q_1)) b \sin(q_1)}{(a + 2b \cos(q_1) - c)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{((k_1 - \lambda_4)(c + b \cos(q_1)) + \lambda_2 c) b \sin(q_1)}{a + 2b \cos(q_1) + c} + \left( \frac{d}{dq_1} \lambda_4 \right) c \right) + 2c_2 \\ & = 0, \quad (4.93) \end{aligned}$$

Usando la función "pdsolve" de Maple, se obtiene que los valores para  $\lambda_2$  y  $\lambda_4$  que satisfacen las ecuaciones (4.90) a (4.93) son

$$\lambda_2 = C_1 (c - b \cos(q_1)), \quad (4.94)$$

$$\lambda_4 = k_1, \quad (4.95)$$

donde los términos  $C_1$  y  $k_1$  son constantes.

Retomando  $\mathcal{U}_d$ , despejando (4.94) en (4.86), ésta queda como

$$\mathcal{U}_d = \frac{d \cos(q_1)}{k_1} + q_1 \left( q_2 - \varphi_d - \frac{C_1 (c q_1 - b \sin(q_1))}{k_1} \right)^2. \quad (4.96)$$



En cuanto a los términos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , éstos quedan definidos como

$$\alpha_1 = \frac{1}{a - 2b \cos(q_1) - c} (b \sin(q_1) (k_1 - k_4 + C_1 c) (ck_1 - ak_1 - C_1 c^2 + C_1 b^2 \cos(q_1)^2 + 2C_1 b c \cos(q_1))), \quad (4.97)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{(a + 2b \cos(q_1) + c)^2} ((k_1 - k_4 + C_1 c) (-b(C_1 c + k_4) \cos(q_1) - C_1 c^2 - k_1 c + a(k_1 - k_4)) b(c + b \cos(q_1)) \sin(q_1)). \quad (4.98)$$

Ahora que ya se tienen definidas  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$ , la matriz  $M_d$  adquiere la forma

$$M_d = \begin{bmatrix} k_1 (a + 2b \cos(q_1) + c) + C_1 (c + b \cos(q_1))^2 & (k_1 + c C_1) (c + b \cos(q_1)) \\ (k_1 + c C_1) (c + b \cos(q_1)) & \frac{(k_1 - k_4 + C_1 c) (c + b \cos(q_1))^2}{a + 2b \cos(q_1) + c} + k_4 c \end{bmatrix}. \quad (4.99)$$

Gracias a la manera en que se definió  $\lambda_3$ ,  $M_d$  es simétrica. Ahora es necesario asegurar que  $M_d$  sea definida positiva al menos en una región alrededor de  $\mathbf{q}_c$ . Para demostrar esto, se comprobará que los determinantes de las matrices menores principales de  $M_d$  sean positivos. El primer menor principal es un escalar, por lo que basta con comprobar que sea positivo, lo que es igual a

$$k_1 (a + 2b \cos(q_1) + c) - C_1 (c + b \cos(q_1))^2 > 0, \quad (4.100)$$

despejando  $C_1$  de (4.100), se obtiene que éste debe cumplir con

$$C_1 > \frac{-k_1 (a + 2b \cos(q_1) + c)}{(c + b \cos(q_1))^2}. \quad (4.101)$$

Observando (4.101), se nota que el denominador puede tender a 0 si  $b > c$ , lo que hace que la parte derecha de (4.101) tienda a infinito conforme  $q_1$  se aleja de 0, pero aún así existe una vecindad alrededor de  $q_1 = 0$  para la cual  $C_1$  puede tomar valores razonables.

El siguiente menor principal es la propia matriz  $M_d$ , por lo que se debe demostrar que  $\det(M_d) > 0$ . Para hacer eso, se recurre al hecho de que si  $C = AB$ , donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices, entonces  $\det(C) = \det(A) \det(B)$ , usando la definición de  $A$  se puede decir que

$$\det(M_d) = \det(A) \det(M), \quad (4.102)$$

y dado que el determinante de  $M$  es siempre positivo, basta con analizar  $\det(A)$ . El determinante de  $A$  es

$$\det(A) = k_1 k_4 - \frac{(k_1 - k_4 + c C_1) (c + b \cos(q_1))^2 C_1}{a + 2b \cos(q_1) + c}. \quad (4.103)$$

Suponiendo  $\det(A) > 0$ , y despejando  $k_4$ , se obtiene que  $k_4$  debe cumplir con

$$k_1 > \frac{(k_1 + cC_1)(c - b \cos(q_1))^2 C_1}{k_1(a + 2b \cos(q_1) + c) - (c + b \cos(q_1))^2 C_1} \quad (4.104)$$

Con las definiciones obtenidas para  $M_d$ ,  $U_d$  y  $J_d$ , en base a  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , la ley de control para la estabilización de un robot autobalanceable basada en IDA-PBC está dada por

$$u = -(\lambda_3 H_{d_3} + \lambda_4 H_{d_4}) + J \frac{m_{d_2} p_2 - m_{d_2} v_2}{\det(M_d)} - k_v H_{d_{v_2}} \quad (4.105)$$

donde

$$J = \frac{(\alpha_1 (M_{d_{2,2}} p_2 - M_{d_{2,1}} p_1) + \alpha_2 (M_{d_{1,2}} p_1 - M_{d_{1,1}} p_2))}{\det(M_d)} \quad (4.106)$$

$$p_1 = (a + 2b \cos(q_1) + c) \dot{q}_1 - (c + b \cos(q_1)) \dot{q}_2, \quad (4.107)$$

$$p_2 = (c + b \cos(q_1)) \dot{q}_1 - c \dot{q}_2, \quad (4.108)$$

$$H_{d_{v_3}} = -2g_1 \left( \tilde{q}_2 - \frac{C_1 (c q_1 + b \sin(q_1))}{k_1} \right), \quad (4.109)$$

$$H_{d_{v_2}} = \frac{(k_1(a + 2b \cos(q_1) + c) + C_1(c + b \cos(q_1))^2) p_2}{\det(M_d)} - \frac{(k_1 + cC_1)(c + b \cos(q_1)) p_1}{\det(M_d)} \quad (4.110)$$

El término  $H_{d_4}$  se define como

$$H_{d_4} = \frac{1}{2} \left( -\frac{M_{d_{2,2}} M_{d_{1,1} q_1} + M_{d_{1,1}} M_{d_{2,2} q_1} - 2M_{d_{1,2}} M_{d_{1,2} q_1}}{\det(M_d)^2} \times (M_{d_{2,2}} p_1^2 - 2M_{d_{1,2}} p_1 p_2 + M_{d_{1,1}} p_2^2) + \frac{1}{\det(M_d)} (M_{d_{2,2} q_1} p_1^2 - 2M_{d_{1,2} q_1} p_1 p_2 + M_{d_{1,1} q_1} p_2^2) \right) + U_{d_4} \quad (4.111)$$

donde

$$M_{d_{1,1} q_1} = -2bk_1 \sin(q_1) - 2C_1 b \sin(q_1)(c + b \cos(q_1)), \quad (4.112)$$

$$M_{d_{1,2} q_1} = -b \sin(q_1)(k_1 + C_1 c), \quad (4.113)$$

$$M_{d_{2,2} q_1} = \frac{2b \sin(q_1)(c + b \cos(q_1))(k_1 - k_4 + C_1 c)}{a + 2b \cos(q_1) + c} \times \left( \frac{c - b \cos(q_1)}{a + 2b \cos(q_1) + c} - 1 \right) \quad (4.114)$$



Despejando (2.44) en (4.116), y utilizando la regla de la cadena, y (2.43) en (4.116), se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{q}} (\mathbf{p}^T M_d \mathbf{p}) \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{q}} U_d \dot{\mathbf{q}}, \\ &= (\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T \dot{\mathbf{p}} + (\nabla_{\mathbf{q}} H_d)^T \dot{\mathbf{q}}.\end{aligned}\quad (4.117)$$

Tomando  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\mathbf{p}}$  de las ecuaciones de movimiento de Hamilton para el robot autobalancable, dadas por (2.46), y despejando en (4.117), da

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T \dot{\mathbf{p}} + (\nabla_{\mathbf{q}} H_d)^T \dot{\mathbf{q}}, \\ &= (\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T (-M_d M^{-1} (\nabla_{\mathbf{q}} H_d) + J_2 \nabla_{\mathbf{p}} H_d - G K_v G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d) + (\nabla_{\mathbf{q}} H_d)^T M^{-1} \mathbf{p}, \\ &= -(\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T M_d M^{-1} (\nabla_{\mathbf{q}} H_d) + (\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T J_2 \nabla_{\mathbf{p}} H_d - (\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T G K_v G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d \\ &\quad + (\nabla_{\mathbf{q}} H_d)^T M^{-1} \mathbf{p}, \\ &= -(\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T M_d M^{-1} (\nabla_{\mathbf{q}} H_d) - (\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T G K_v G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d + (\nabla_{\mathbf{q}} H_d)^T M^{-1} \mathbf{p}, \\ &= -\mathbf{p}^T M_d^{-1} M_d M^{-1} (\nabla_{\mathbf{q}} H_d) - (\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T G K_v G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d + (\nabla_{\mathbf{q}} H_d)^T M^{-1} \mathbf{p}, \\ &= -\mathbf{p}^T M^{-1} (\nabla_{\mathbf{q}} H_d) - (\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T G K_v G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d + (\nabla_{\mathbf{q}} H_d)^T M^{-1} \mathbf{p}, \\ &= -(\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T G K_v G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d, \\ &= -\mathbf{p}^T M_d^{-1} G K_v G^T M_d^{-1} \mathbf{p}.\end{aligned}\quad (4.118)$$

Usando la definición de  $M_d$  dada en (1.99), (4.118) se reduce a

$$\dot{V} = -k_2 \frac{((k_1(a - 2b \cos(q_1)) + c) - C_1(c - b \cos(q_1)))^2 p_2 - (k_1 + c C_1)(c + b \cos(q_1)) p_1)^2}{\det(M_d)^2}.\quad (4.119)$$

Dado que  $k_2 > 0$ ,  $\dot{V}$  es semidefinida negativa, ya que no depende de  $q_2$ , y por lo tanto se demuestra la estabilidad del sistema en lazo cerrado con la ley de control (4.105).

## Capítulo 5

### Balarduino

Balarduino, mostrado en la Figura 5.1, es un robot autobalanceable de bajo costo, de arquitectura abierta y compatible con la plataforma Arduino. Es fabricado por TKJ Electronics.

Su estructura se compone de tres placas de aglomerado, que sirven de soporte para los componentes. Estas placas están sujetas entre si por medio de cuatro tornillos y mantenidas en su lugar por tuercas.

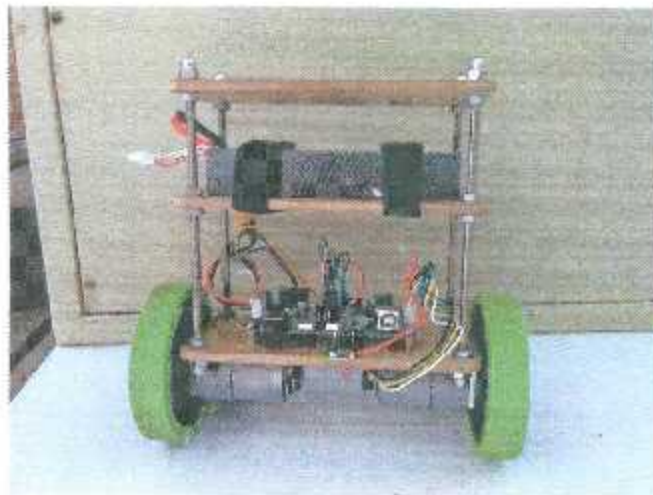


Figura 5.1: Robot autobalanceable Balarduino



## 5.1. Componentes

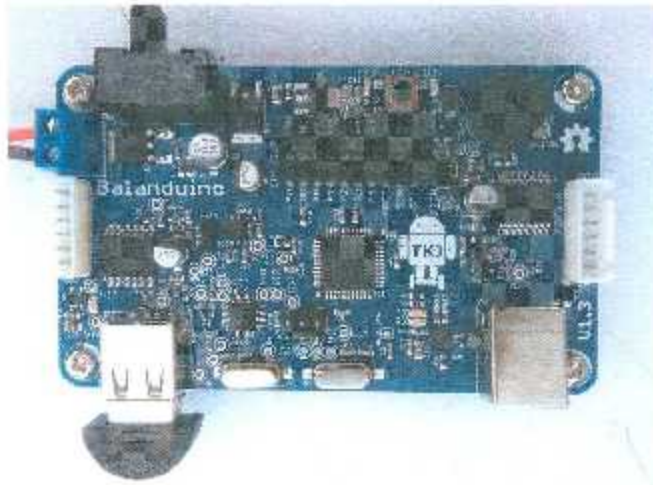


Figura 5.2: Tarjeta controladora de la plataforma Balduino

El robot cuenta con dos motores de corriente directa XH-GM500 37D. Cada motor tiene un encoder de efecto Hall de 64 pulsos por revolución, además de una caja de engranes con una relación 30:1, con lo que cada vuelta en la flecha, a la salida del juego de engranes, produce 1920 pulsos en el encoder. Estos motores tienen un torque de bloqueo de aproximadamente 0.8 N·m y una velocidad máxima sin carga de 350 rpm. El sensor Hall funciona con voltajes de 3.5 hasta 20 volts.

El sistema tiene una tarjeta de circuitos que contiene un microcontrolador ATMEGA1284P, una central inercial MPU6050, dos drivers VN15180A, un integrado de comunicación serial USB FT230X, un controlador USB MAX3421E y un adaptador bluetooth. La tarjeta de circuitos se muestra en la Figura 5.2.

El microcontrolador ATMEGA1284P es un microcontrolador Atmel de la familia AVR de 8 bits, que en la plataforma Balduino trabaja a 10 MHz. Tiene 32 pines de c/s. A continuación se enlistan los pines con los que cuenta el microcontrolador, entre paréntesis se indican los disponibles en la tarjeta de circuitos de Balduino

- 8 entradas analógicas (5)
- 6 salidas PWM (4)
- una interfaz  $I^2C$
- una interfaz serial

El integrado MPU6050 es una central inercial de 5 ejes que cuenta con giroscopio de tres ejes y un acelerómetro de igual número de ejes con comunicación  $I^2C$ . El giroscopio

tiene un rango de medición desde  $\pm 250^\circ/\text{s}$  hasta  $\pm 2000^\circ/\text{s}$ , mientras que el acelerómetro tiene un rango de  $-2g$  hasta  $+8g$ .

En la Figura 5.3 se muestra un esquema de las conexiones entre los distintos componentes de robot Balanduino.

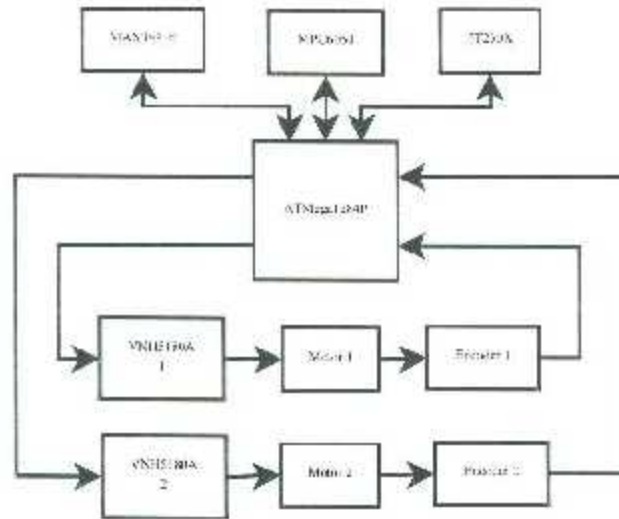


Figura 5.3: Esquema de los componentes de la plataforma Balanduino

## 5.2. Programación

Es posible utilizar el Ambiente de Desarrollo Integrado (IDE por sus siglas en inglés) de Arduino en su versión 1.5.6-r2 para crear y cargar programas en el microcontrolador del robot Balanduino. Para esto, se descarga la última versión del código fuente de Balanduino y se copian los archivos a la carpeta de proyecto de Arduino, generalmente localizada en la carpeta de documentos de usuario. Una vez hecho esto, en el menú de herramientas del IDE de Arduino, en la opción Placa se escoge Balanduino, y en la opción Versión, la correspondiente a la versión de Balanduino con el que se cuenta; que para el caso de este trabajo es la versión 1.3.

El microprocesador es compatible con todas las instrucciones y librerías existentes para tarjetas Arduino que cuentan con microcontroladores de 8 bits.

## 5.3. Parámetros físicos

La planta con la que se probarán experimentalmente los controladores propuestos en este trabajo es el robot autobalancable Balanduino, cuyos parámetros físicos son mostrados en la Tabla 5.1

Parámetro	Valor [Unidades]
$m_1$	0.208 [kg]
$m_2$	0.740 [kg]
$r$	0.049 [m]
$l$	0.107 [m]
$I_1$	0.0001291 [kg · m <sup>2</sup> ]
$I_2$	0.001976 [kg · m <sup>2</sup> ]

Tabla 5.1: Parámetros del robot autobalanceable Balandino

Las masas de las llantas y del cuerpo de robot, así como el radio de las llantas, fue medido directamente en el robot, mientras que las inercias y la distancia entre el eje de las ruedas y el centro de masa del robot fue obtenido por medio del programa SolidWorks recorriendo el cuerpo del robot en dicho programa como se muestra en la Figura 5.4

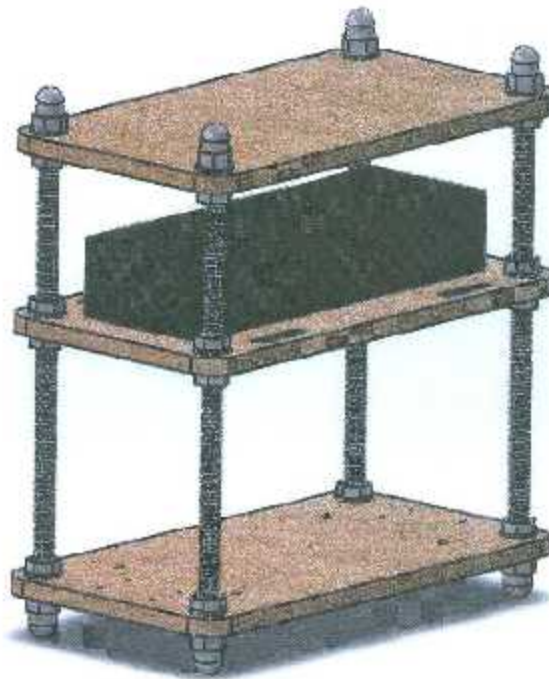


Figura 5.4: Eusamblaje del robot autobalanceable Balandino en SolidWorks

## Capítulo 6

### Resultados de simulación

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos de la simulación realizada en Simulink/MATLAB del robot autobalanceable Balanduino, en lazo cerrado, con las leyes de control propuestas en el Capítulo 5. En la Figura 6.1 se muestra una parte del archivo de Simulink con que se realizaron las simulaciones.

Para las simulaciones, se realizaron 3 pruebas considerando diferentes condiciones iniciales, objetivos de control y perturbaciones, estas pruebas fueron:

- Estabilización fuera del origen con una referencia constante.
- Estabilización fuera del origen con referencia que varía con el tiempo.
- Comportamiento ante perturbaciones externas.

Las pruebas se hicieron usando tanto la ley de control obtenida por el método de Lagrangiano Controlado como aquella obtenida a través del IDA-PBC usando las mismas condiciones iniciales y referencias.

Para el control por lagrangiano controlado se usaron las ganancias de control:

- $\kappa = 1$ .
- $\rho = -0.2$ .
- $\epsilon = 0.00005$ .
- $k_v = 0.3$ .

En el caso del control por IDA-PBC, las ganancias de control usadas fueron:

- $k_v = 0.05$ .
- $k_1 = -0.006$ .



- $g_1 = 0.1$ .
- $C_1 = 9.7717$ .
- $k_d = 0.2414$ .

Para identificar los estados del sistema se usa el vector  $x$ , definido como

$$x = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Para las simulaciones mostradas en este capítulo, las unidades de  $\psi$  y  $\phi$  son radianes, mientras que para  $\dot{\psi}$  y  $\dot{\phi}$  son radianes por segundo. En los resultados se muestra el error de posición de las llantas  $\tilde{\phi}$ , definido como  $\tilde{\phi} = \phi - \phi_d$ , equivalente a  $\tilde{x}_2$  en el caso del Lagrangiano Controlado, y  $\tilde{q}_2$  en el caso de IDA-PBC.

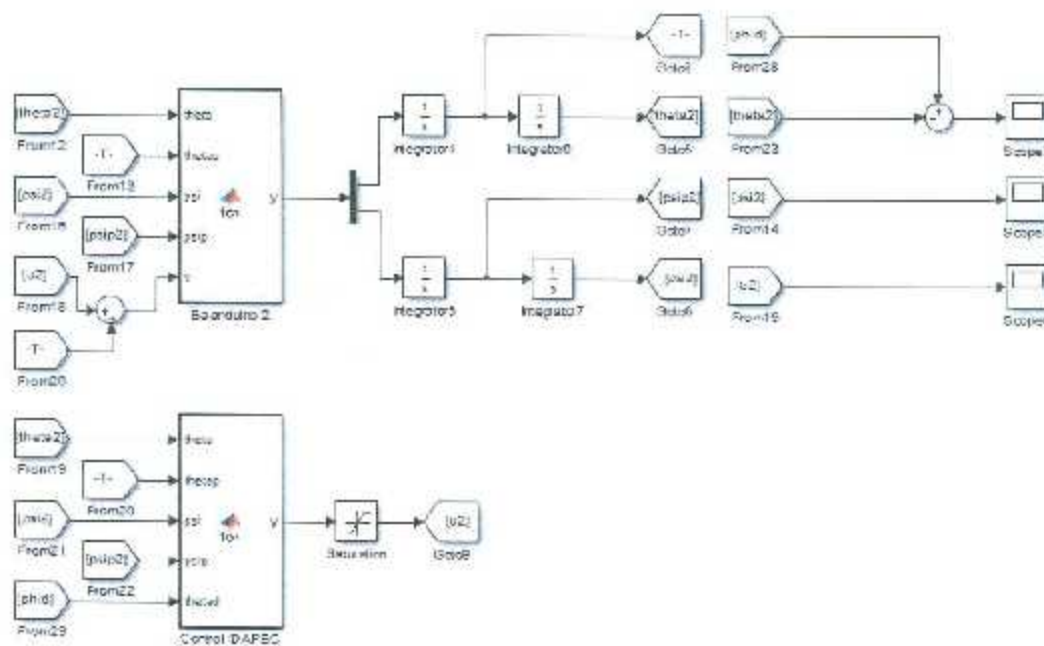


Figura 6.1: Archivo de Simulink para simulaciones



## 6.1. Estabilización fuera del origen con referencia constante

En estas simulaciones, los valores iniciales del sistema son  $\mathbf{x}^T(0) = [\pi/8 \ 0 \ 0 \ 0]$  y se pretende que se estabilice en el punto  $[0 \ 5 \ 0 \ 0]$ . Se muestran 10 segundos de simulación. Las Figuras 6.2, 6.3 y 6.4 muestran los resultados correspondientes al control por Lagrangiano Controlado, se puede apreciar que el control consigue llevar a cero a la coordenada  $\psi$  en aproximadamente 3 segundos, mientras que tarda aproximadamente 6 segundos en llevar a cero el error de posición de las llantas. En el caso del control por IDA-PBC, cuyos resultados se muestran en las Figuras 6.5, 6.6 y 6.7, se observan resultados parecidos en cuanto a  $\psi$  y  $\dot{\psi}$ , pero se nota que el torque dado por la ley de control al inicio en el control IDA-PBC es varias veces mayor que en el control por Lagrangiano Controlado, lo que puede producir problemas al momento de implementar la ley de control en experimentos.

### 6.1.1. Resultados de Lagrangiano controlado

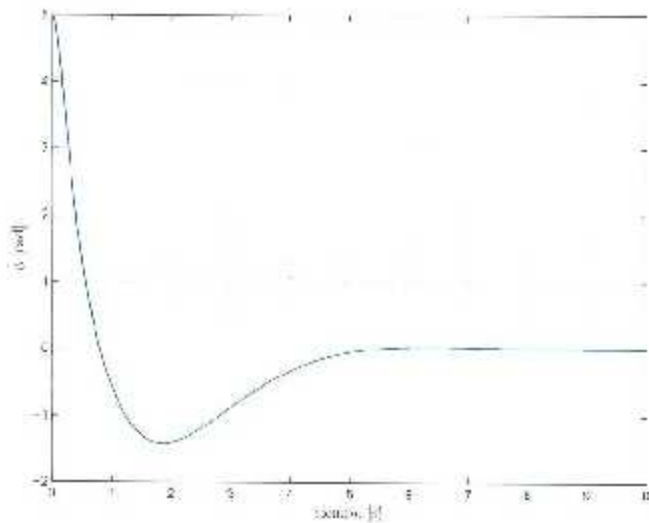


Figura 6.2: Error de posición angular de las llantas

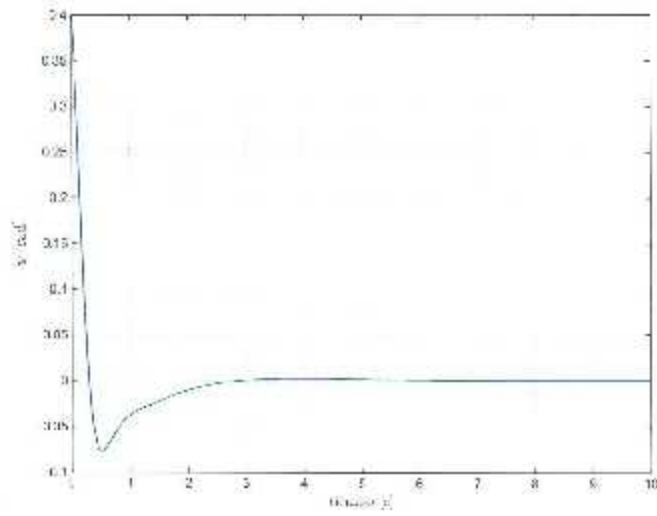


Figura 6.3: Posición angular del cuerpo del robot

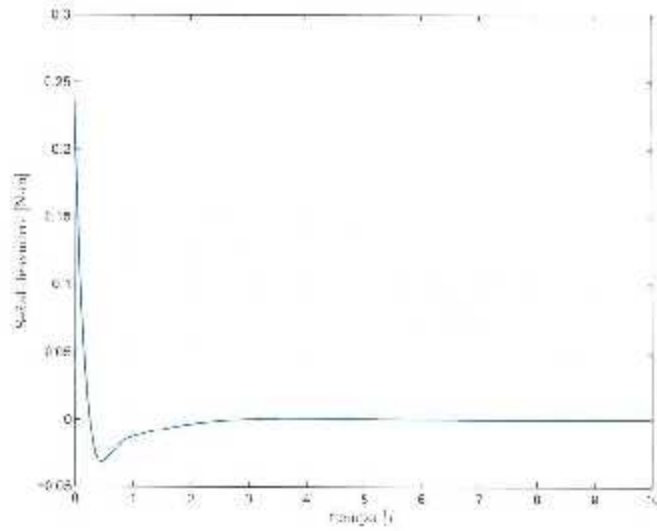


Figura 6.4: Señal de control

### 6.1.2. Resultados de IDA-PBC

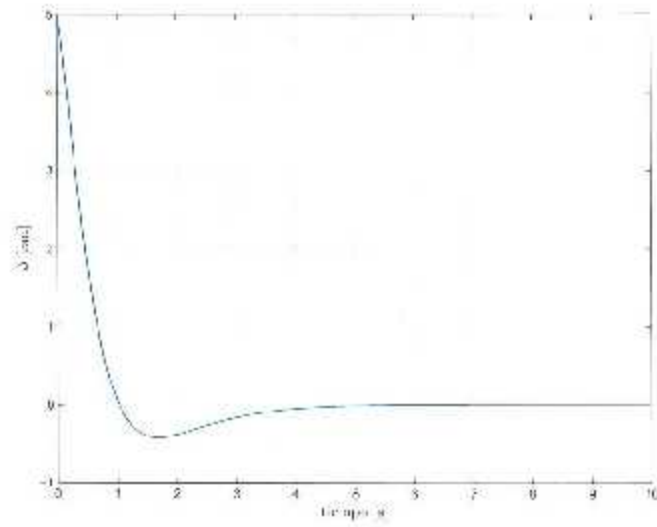


Figura 6.5: Error de posición angular de las llantas

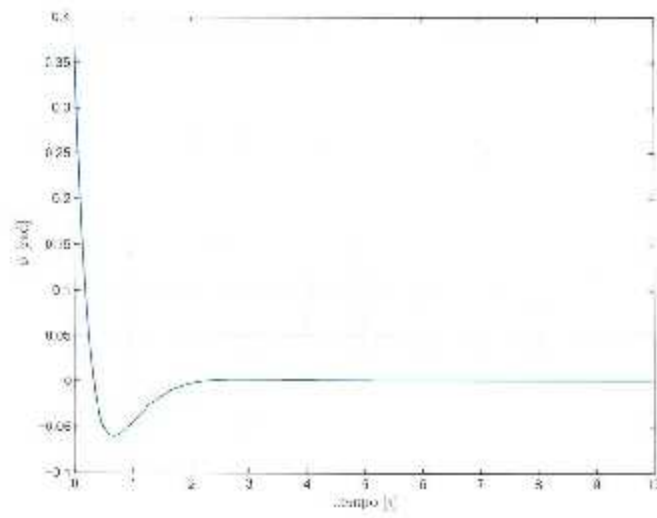


Figura 6.6: Posición angular del cuerpo del robot

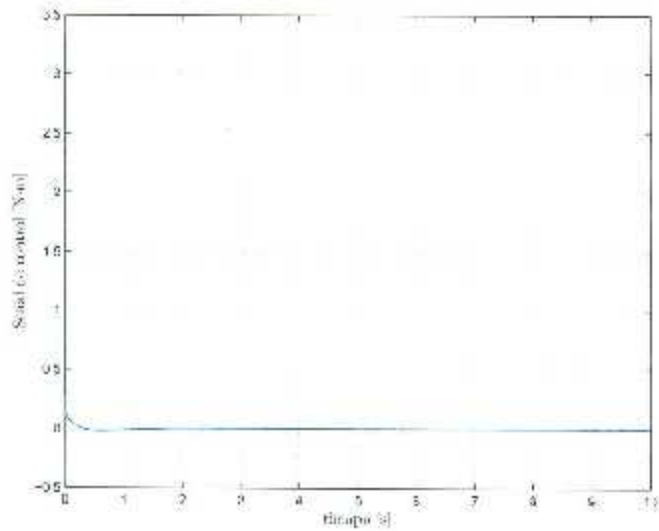


Figura 6.7: Señal de control

En la Figura 6.7 el valor inicial de la señal de control para el caso del control por IDA-PBC es de 3.3 N·m, que es difícil de apreciar debido a la rapidez con la que cambia el valor de la señal de control.

## 6.2. Estabilización fuera del origen con referencia variable con el tiempo

Para esta prueba se busca estabilizar el sistema en el punto  $\mathbf{x} = [0 \ \phi(t)_d \ 0 \ 0]^T$ , donde  $\phi(t)_d$  es una referencia que cambia cada 5 segundos. Las condiciones iniciales son  $\mathbf{x}^T(0) = [\pi/8 \ 0 \ 0 \ 0]$  y se muestran 30 segundos de simulación en las Figuras 6.8 a 6.10 para el Lagrangiano Controlado y 6.11 a 6.13 para IDA-PBC.

### 6.2.1. Resultados de Lagrangiano controlado

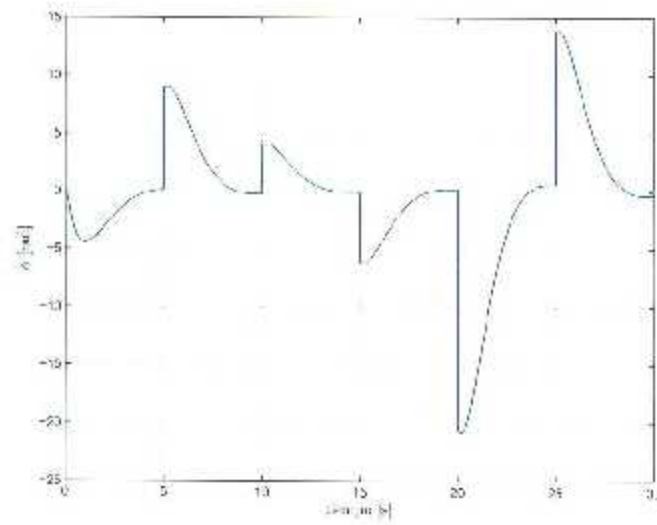


Figura 6.8: Error de posición angular de las llantas

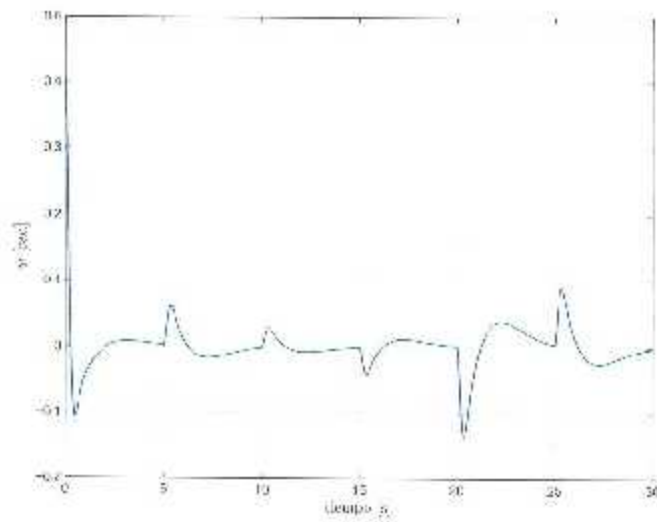


Figura 6.9: Posición angular del cuerpo del robot



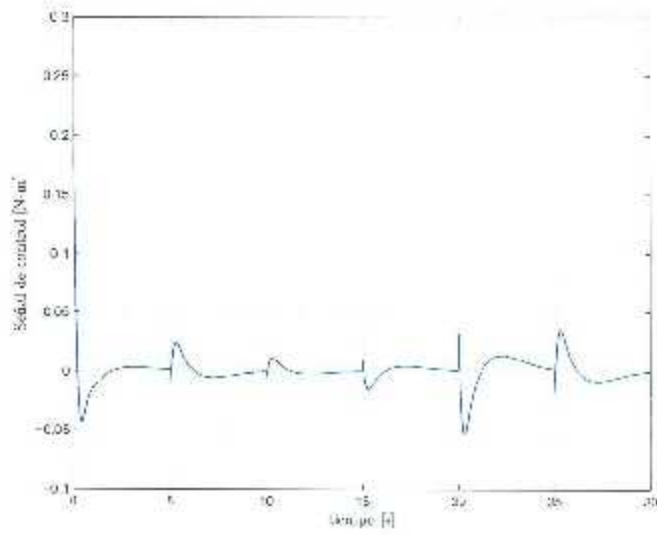


Figura 6.10: Señal de control

### 6.2.2. Resultados de IDA-PBC

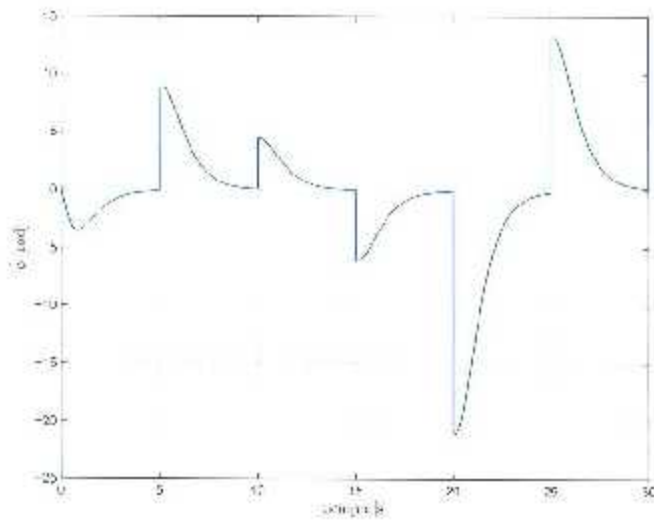


Figura 6.11: Error de posición angular de las llantas

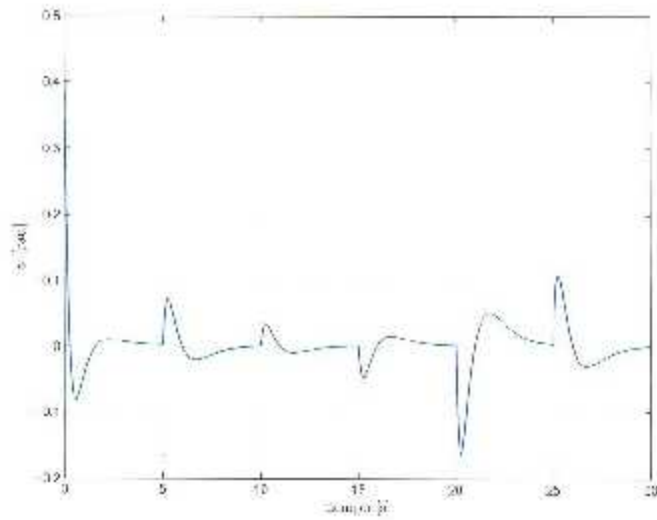


Figura 6.12: Posición angular del cuerpo del robot

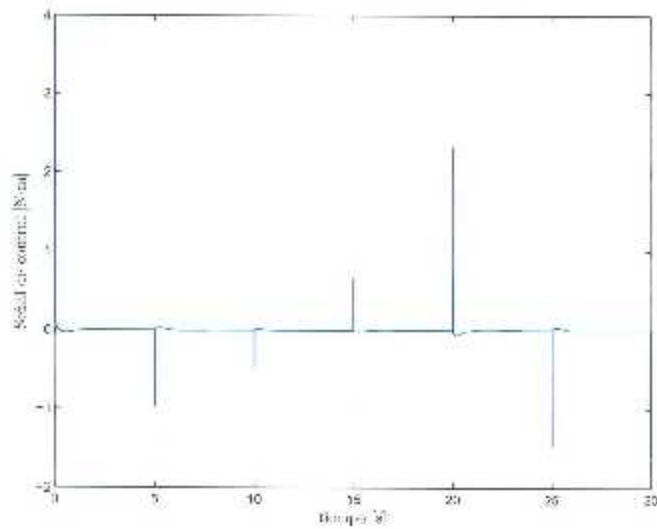


Figura 6.13: Señal de control

Comparando los resultados del control por Lagrangiano Controlado (ver Figuras 6.8, 6.9 y 6.10) con los de IDA-PBC (ver Figuras 6.11, 6.12 y 6.13), se puede observar que el segundo controlador (IDA-PBC) logra llevar en menos tiempo el error a cero; pero, igual que en las pruebas con referencia constante, el torque de la ley de control por IDA-PBC es muy grande.

## 6.3. Comportamiento ante perturbaciones externas

En estas simulaciones se aplicaron al cuerpo del robot impulsos de una amplitud de 0.1 N-m con una duración de 0.2 segundos y periodo de 10 segundos. Las condiciones iniciales usadas fueron  $\mathbf{x}^T(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ .

En los resultados obtenidos, tanto para Lagrangiano Controlado (ver Figuras 6.14, 6.15 y 6.16), como para IDA-PBC (ver Figuras 6.17, 6.18 y 6.19), se aprecia que los controladores propuestos logran mantener estable el sistema ante las perturbaciones y se aprecia que, a diferencia de los resultados de las pruebas anteriores, el control por IDA-PBC produce una señal de control de menor magnitud, además de que los estados del robot alcanzan valores menores con este control.

### 6.3.1. Resultados de Lagrangiano controlado

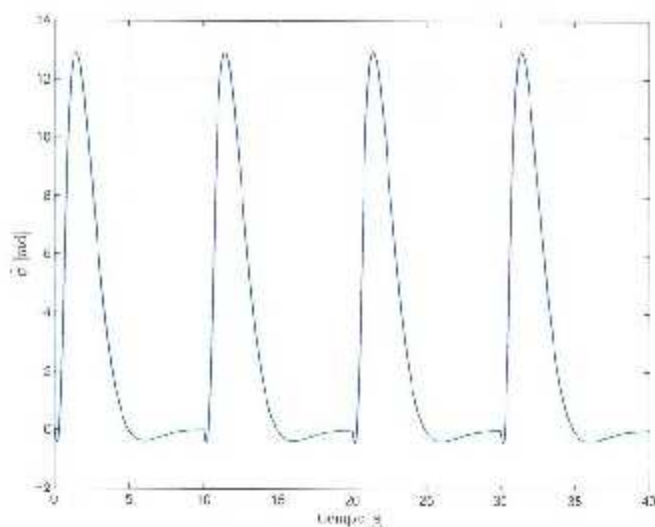


Figura 6.14: Error de posición angular de las llantas

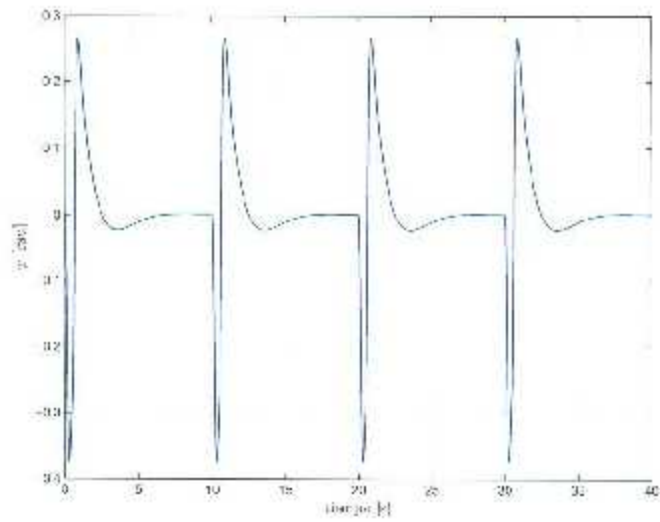


Figura 6.15: Posición angular del cuerpo del robot

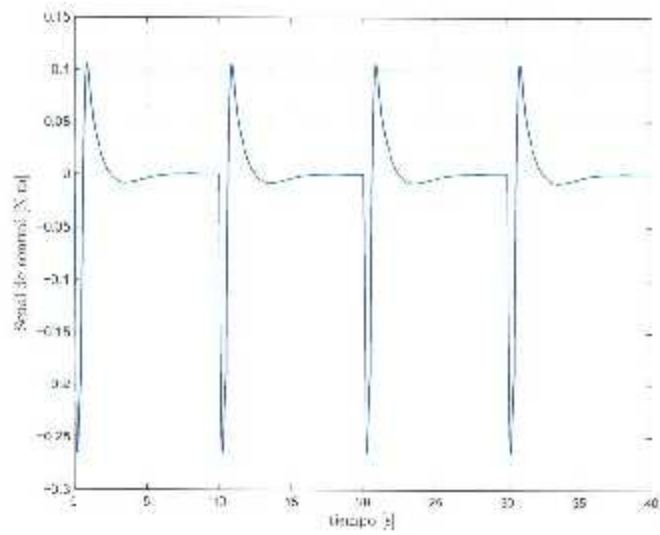


Figura 6.16: Señal de control

### 6.3.2. Resultados de IDA-PBC

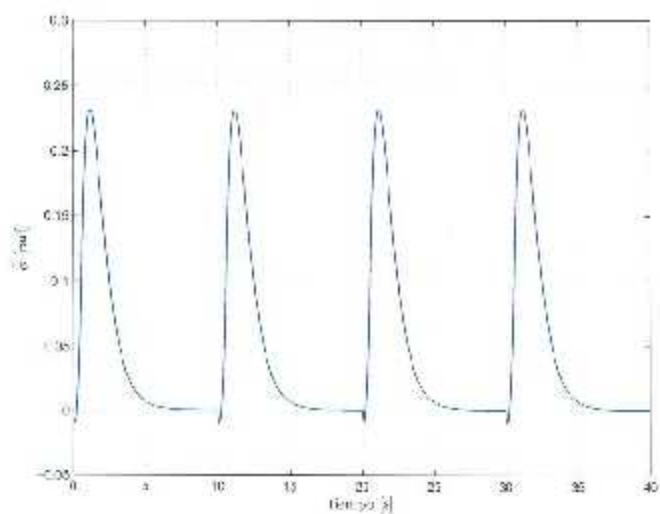


Figura 6.17: Error de posición angular de las llantas

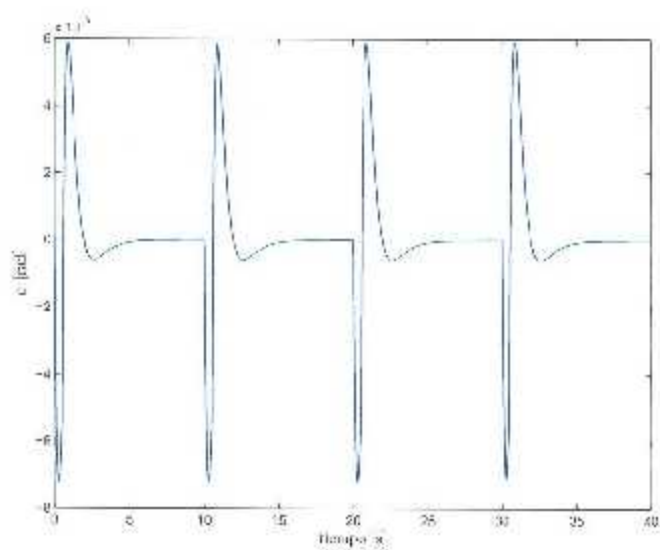


Figura 6.18: Posición angular del cuerpo del robot



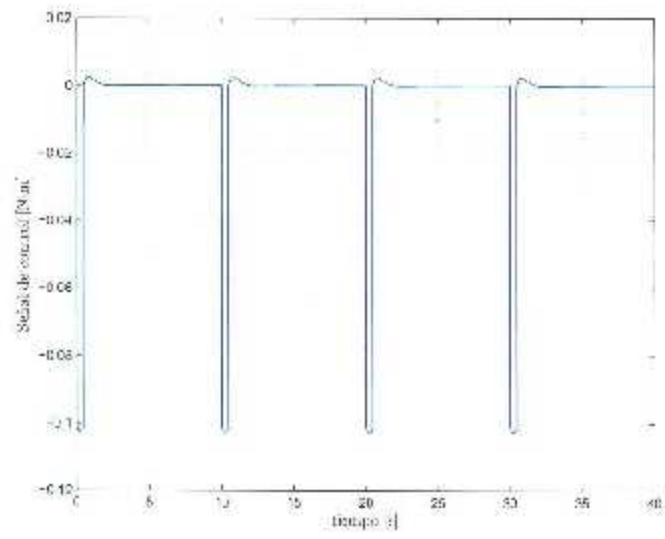


Figura 6.19: Señal de control

# Capítulo 7

## Resultados experimentales

En este capítulo se presentan los resultados experimentales llevados a cabo con el robot autobalanceable Balanduino usando las leyes de control propuestas en el Capítulo 4.

### 7.1. Implementación de leyes de control

Las leyes de control propuestas en el Capítulo 5 se implementaron directamente en el microcontrolador embebido en el Balanduino, a través del IDE de arduino. En el apéndice B se muestra el código adicional agregado al programa con el que cuenta la plataforma Balanduino.

En la Figura 7.1 se muestra un esquema del programa usado para controlar el Balanduino. En la configuración de hardware, se configura la comunicación  $I^2C$  a una velocidad de 400 kb/s. En cuanto a la central inercial, ésta se programa con una velocidad de 500 muestras por segundo, se coloca la frecuencia de corte del filtro pasa bajas para las lecturas de aceleración en 44Hz, y para el filtro del giroscopio en 42Hz, además de configurar los rangos de medición en  $\pm 250^\circ/\text{s}$  para el giroscopio y  $\pm 2\text{g}$  para el acelerómetro. En el mismo proceso de configuración se hace que las salidas PWM de 16 bits del microcontrolador trabajen a 20 kHz.

En la calibración del giroscopio se corre una rutina en la cual se realizan 25 lecturas, que luego son promediadas para calcular el offset del sensor. En esta misma rutina se revisan los valores obtenidos, y en caso de encontrar un valor anormalmente grande, se descartan todos los valores y se repite la toma de los mismos.

En la toma de valores, se leen los valores crudos, los valores tal cual los entregan los sensores, dados por la central inercial y los encoders de los motores. Con los valores de la central inercial se hacen dos cálculos diferentes de  $\psi$ , uno obtenido integrando numéricamente el valor de velocidad rotacional con respecto al eje  $x$  obtenido del giroscopio, y otro obtenido a través de las medidas de aceleración en los ejes  $y$  y  $z$  de la central inercial;

el ángulo se obtiene usando la función atan2 aplicada a las aceleraciones obtenidas. Los valores de los *encoders* se promedian para obtener una estimación de  $\phi$ .

Las mediciones dadas por la central inercial presentaron problemas, los valores obtenidos del giroscopio presentaron desviación, lo que hizo que el valor absoluto de la medición obtenida de la integración de las lecturas del giroscopio creciera con el tiempo, mientras que los valores dados por el acelerómetro presentaron un importante ruido de alta frecuencia. Para eliminar este problema, se usó el filtro de Kalman que tiene integrado el programa de control con el que se distribuye el Balanduino; con este filtro se estima el valor de  $\psi$  a partir de los calculados con los valores crudos de la central inercial.

A partir de los valores  $\psi$  y  $\phi$  obtenidos, se calculan  $\dot{\psi}$  y  $\dot{\phi}$  aplicando el método de Euler hacia atrás.

Ya con los valores de los estados de la planta, se procede a calcular la ley de control, ya sea (4.15) o (4.105). Se debe tomar en cuenta que la señal de control está dada en Newton por metro, pero el hardware incluido en la plataforma Balanduino sólo puede controlar el voltaje aplicado a los motores, por lo que se usa una relación entre el torque entregado por un motor y el voltaje aplicado a sus terminales para deducir el voltaje que se debe aplicar a los motores. Esta relación es:

$$v = \frac{R_a}{K_a} \left( \frac{K_a K_b r}{R_a} \ddot{q}_2 - \frac{\tau}{r} \right). \quad (7.1)$$

La relación (7.1) está basada en el modelo dinámico de un motor de corriente continua mostrado en el apéndice A de [Kelly y Santibáñez (2003)]. Los parámetros usados en este modelo, y sus correspondientes valores para los motores de la plataforma Balanduino, son mostrados en la tabla 7.1

El valor de voltaje obtenido de (7.1) se aplica a los motores por medio de los drivers con los que cuenta la plataforma, para hacer esto se convierte dicho voltaje en una señal PWM.

Por último, se manda por medio de un puerto serial los datos sobre el estado del sistema, la ley de control y el tiempo de muestreo a una computadora para su almacenamiento. Los pasos desde la lectura del estado del sistema por medio de los sensores, hasta el envío de los mismos por el puerto serial se repiten constantemente. Figura 7.1

Símbolo	Descripción	Valor [Unidades]
$R_a$	Resistencia de armadura	3.5 [ $\Omega$ ]
$K_a$	Constante torque-corriente	0.01102 [N·m/A]
$K_b$	Constante de fuerza contraelectromotriz	0.01102 [V s/rad]
$r$	Relación c.e. caja de engranes	30:1

Tabla 7.1: Parámetros de los motores de la plataforma Balanduino

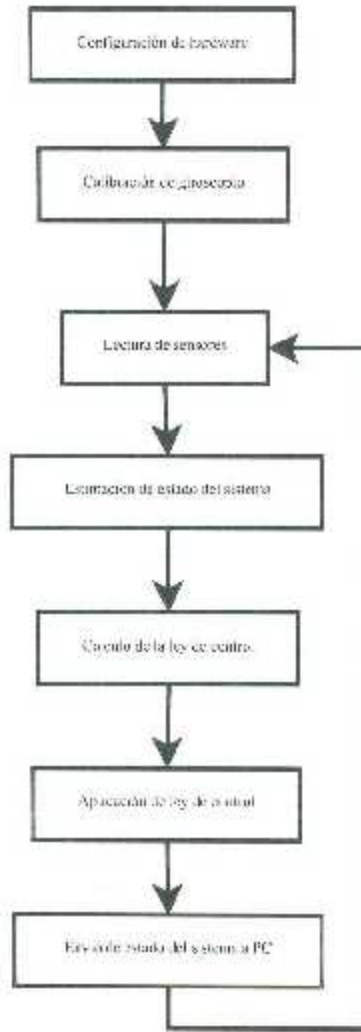


Figura 7.1.: Esquema de programa usado en la plataforma Baladrino

Para indicar los valores iniciales de los estados del sistema y los valores a los que se desea que llegue usa el vector  $\mathbf{x}$ , definido como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

En los resultados mostrados en este capítulo las unidades de  $\psi$  y  $\dot{\psi}$  son radianes, mientras que para  $\phi$  y  $\dot{\phi}$  son radianes por segundo. En los resultados se muestra el error de posición de las llantas  $\hat{\phi}$ , definido como  $\hat{\phi} = \phi - \phi_d$ , equivalente a  $\hat{x}_2$  en el caso del Lagrangiano Controlado y  $\tilde{q}_2$  en el caso de IDA-PBC.

## 7.2. Pruebas de estabilización

En estas pruebas se buscó que las leyes de control trataran de llevar el sistema al punto  $\mathbf{x} = [0 \quad -2 \quad 0 \quad 0]$  con condiciones iniciales en el origen.

Para estas pruebas, las ganancias de control usadas en la ley de Lagrangiano Controlado fueron

- $\kappa = 10$
- $\rho = -0.17$
- $\epsilon = 0.1$
- $k_c = -2$

Y para el control IDA-PBC fueron:

- $k_0 = 0.005$
- $k_1 = -0.009$
- $g_1 = 0.05$
- $C_1 = 48.8583$
- $k_4 = 1.1669$

En las Figuras 7.2 a 7.7, se muestran los resultados experimentales tanto para el control por Lagrangiano controlado como para IDA-PBC en la prueba de estabilización.

En la Figura 7.2 se aprecia que el control por Lagrangiano Controlado no es capaz de llevar el sistema hasta el valor deseado en  $\phi$ , ya que se tiene un error de aproximadamente 0.5 radianes, aunque sí logra mantener estable el sistema. Para el caso del control por IDA PBC, se consigue un mejor resultado en la posición de las llantas con un error de aproximadamente -0.1 radianes. En ambos casos se mantiene estable el sistema.



## Resultados de Lagrangiano Controlado

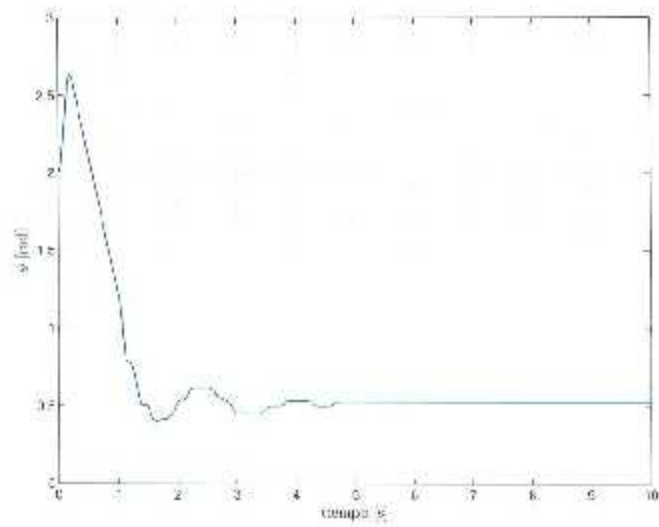


Figura 7.2: Error de posición angular de las llantas

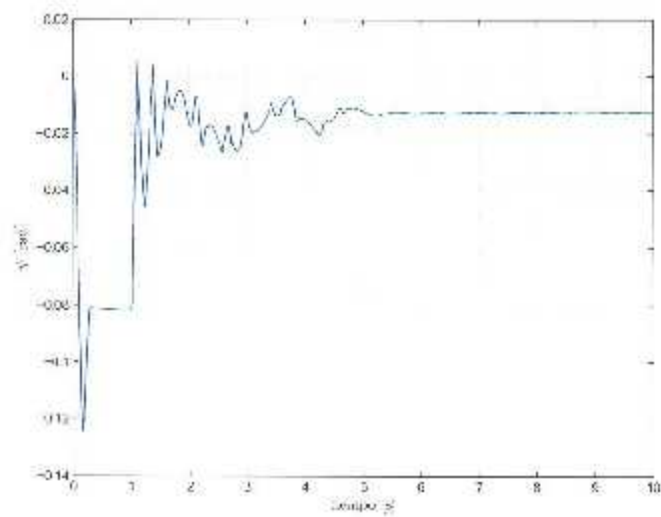


Figura 7.3: Posición angular del cuerpo del robot

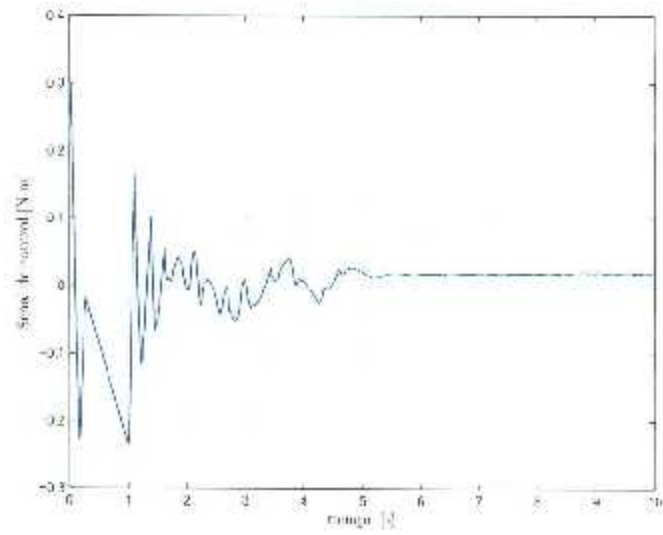


Figura 7.4: Señal de control

### Resultados de IDA-PBC

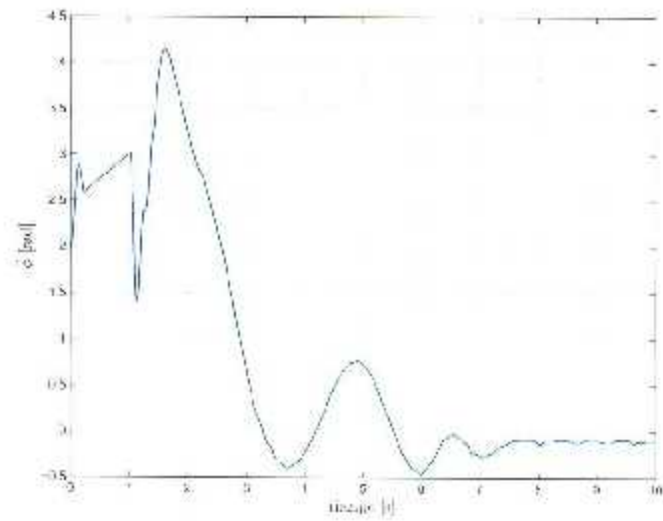


Figura 7.5: Error de posición angular de las llantas

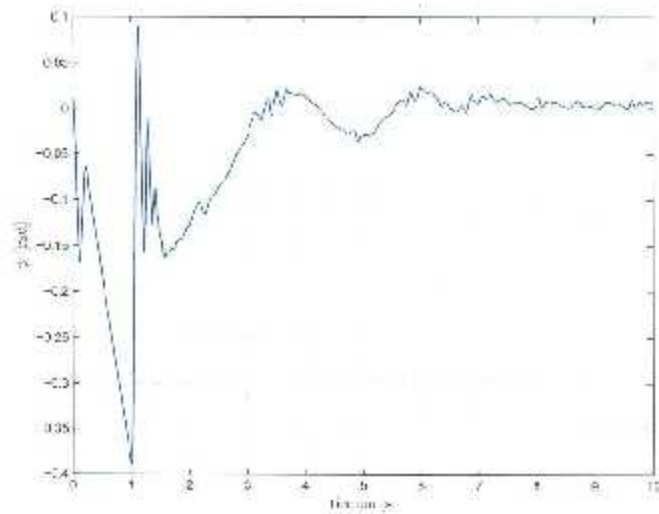


Figura 7.6: Posición angular del cuerpo del robot.

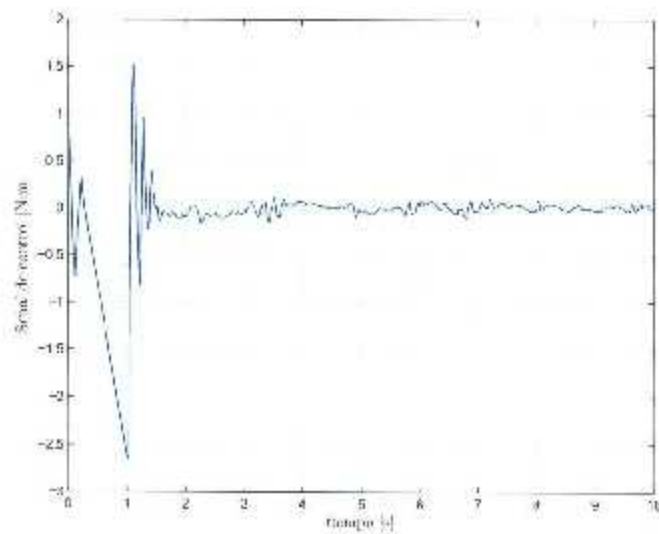


Figura 7.7: Señal de control

### 7.3. Pruebas con perturbaciones

Para las pruebas con perturbaciones, se probó el sistema iniciándolo en el origen con las leyes de control, manteniendo el robot en el mismo origen. Las perturbaciones consistieron de golpes dados al robot de manera perpendicular al eje de giro de las llantas, en la placa superior del robot, estas perturbaciones fueron aplicadas con un periodo de 10 segundos.

En cuanto a las ganancias de control, para el control por Lagrangiano Controlado se usaron las mismas, mientras que para control por IDA-PBC se uso  $g_c = 0.15$  con las demás ganancias iguales.

En las Figuras 7.8 a 7.13, se muestran los resultados experimentales tanto para el control por Lagrangiano controlado como para IDA-PBC. En la prueba con perturbaciones, comparando los resultados, se observa que el control por IDA-PBC logra regresar el sistema al origen en menor tiempo y con menos oscilaciones que el control por Lagrangiano Controlado, aunque este último produce sobrepulsos de menor magnitud.

### Resultados de Lagrangiano Controlado

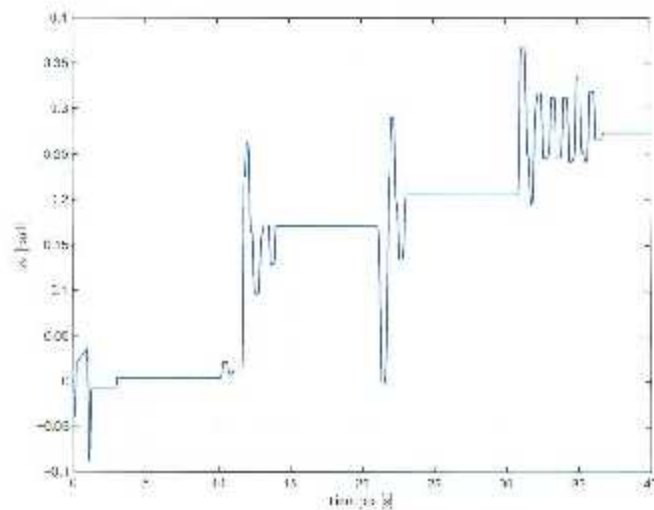


Figura 7.8: Error de posición angular de las llantas

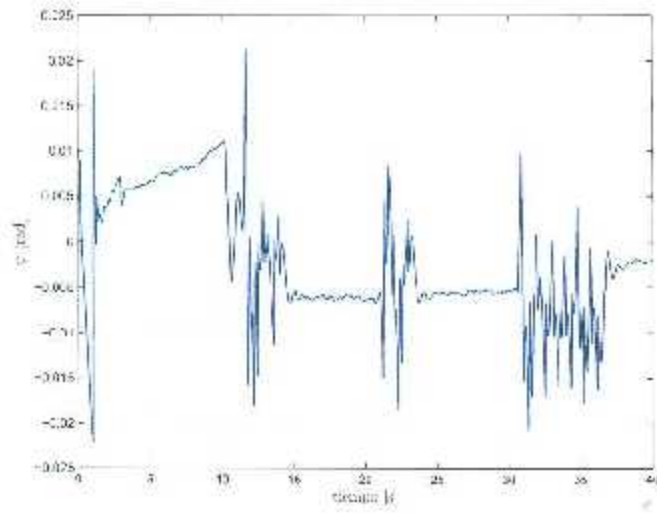


Figura 7.9: Posición angular del cuerpo del robot.

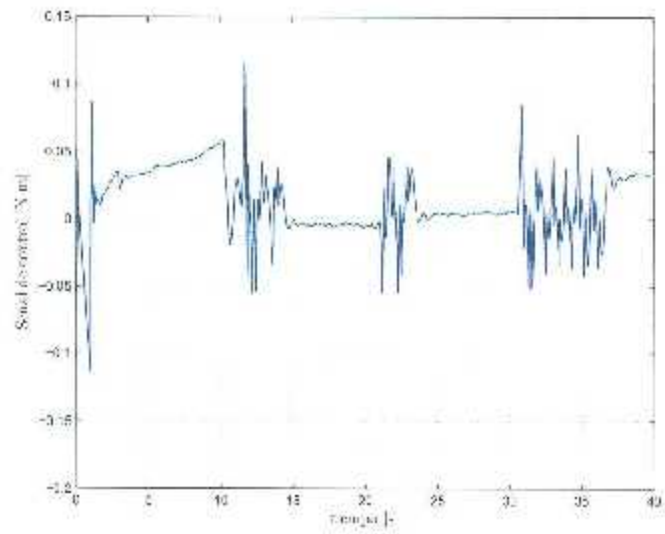


Figura 7.10: Señal de control



## Resultados de IDA-PBC

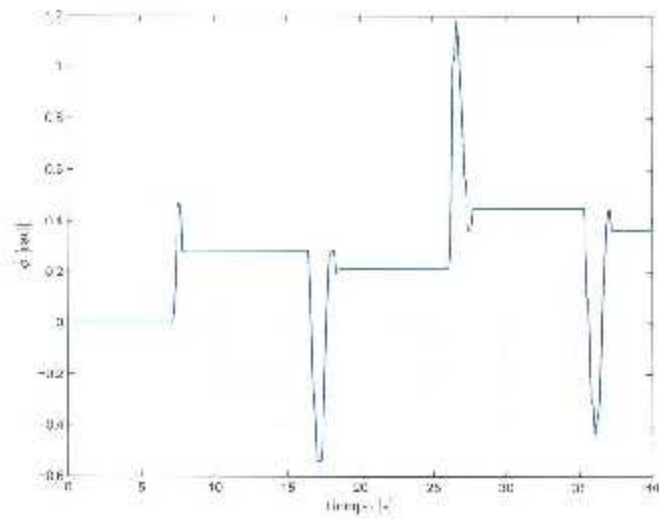


Figura 7.11: Error de posición angular de las llantas

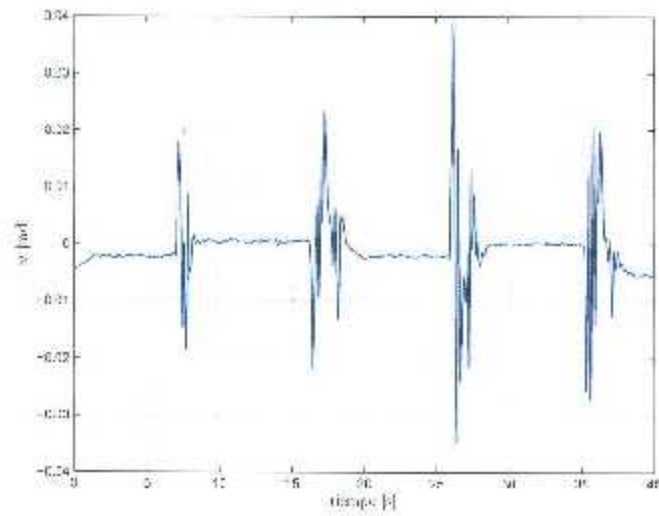


Figura 7.12: Posición angular del cuerpo del robot

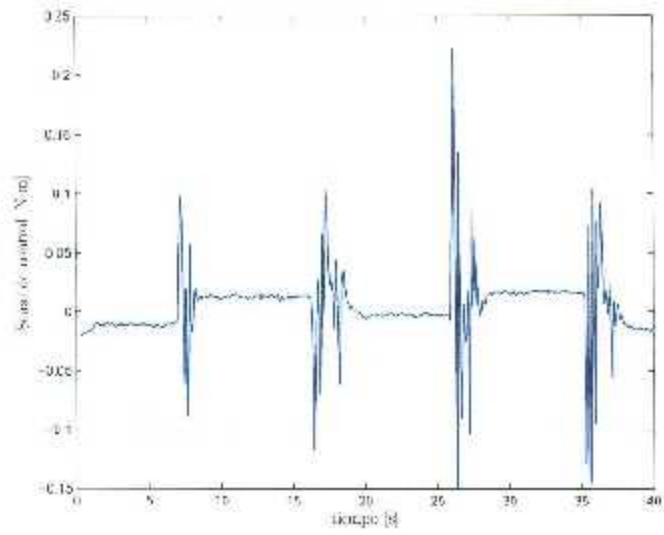


Figura 7.13: Señal de control

## Capítulo 8

### Conclusiones

El objetivo de esta tesis consistió en la proposición de leyes de control para la estabilización del robot autobalancable Balanduino, basadas en los métodos de moldeo de energía Lagrangiano Controlado e IDA-PBC. Estas leyes de control se obtuvieron usando el modelo dinámico del robot autobalancable, con ciertas restricciones, obtenido por medio de las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Se planteó un cambio de variables para que fuera posible aplicar las metodologías de control ya mencionadas, y se realizaron simulaciones y pruebas experimentales de las leyes de control propuestas. Se realizó también el análisis de estabilidad a las leyes propuestas y se demostró la estabilidad asintótica local del control por Lagrangiano Controlado.

Observando los resultados experimentales, se nota que ambos controles, Lagrangiano Controlado e IDA-PBC, cumplen con el propósito de estabilizar el robot autobalancable, pero no son capaces de llevar los valores de los estados del sistema a  $\mathbf{x}_d$ , aunque sí reducen el error, por lo que se puede decir que las pruebas experimentales arrojaron resultados aceptables. El hecho de que los errores no se hagan cero se pueden atribuir principalmente a la falta de un control sobre el torque entregado por los motores en el sistema usado para los experimentos y, ya que los controles diseñados tiene como salida torques, es un problema importante; para solucionar este problema se propuso usar la relación entre torque y voltaje mostrada en (7.1). Otro problema que afectó las pruebas experimentales fue el tiempo de muestreo, que rondaba los 10 ms para el control por Lagrangiano controlado y de 15 ms para IDA-PBC, este problema en parte se produce por lo altamente no lineales y gran tamaño de las leyes de control probadas y también por lo lento de la comunicación serial que se usó para almacenar el estado de sistema, así como las bajas prestaciones del microcontrolador con el que cuenta la plataforma Balanduino. Una última razón que podría explicar que los errores no lleguen a cero fue es que no se consideró la fricción en el sistema al diseñar las leyes de control.

## 8.1. Trabajo futuro

Con el propósito de solucionar los problemas que se tuvieron en las pruebas experimentales y para que se siga usando el robot autobalanceable Balanduino, como plataforma para la prueba de controladores, se propone como trabajo futuro lo siguiente:

- Inclusión de un control de torque en los motores.
- Cambiar el microcontrolador incluido en el robot por uno de mayores prestaciones.
- Buscar un método para el almacenamiento de los datos sobre el estado del sistema de mayor velocidad.

Con referencia al trabajo teórico, se propone:

- Expandir el modelo dinámico usado para diseñar leyes de control que consideren todos los grados de libertad posibles en un robot autobalanceable.
- Rediseñar las leyes de control propuestas para el modelo dinámico expandido.
- Probar estabilidad asintótica, al menos local, para el robot autobalanceable con el control por IDA-PBC.

## 8.2. Contribuciones extras

Como parte de esta tesis, se generó el siguiente artículo con su respectiva ponencia: "Control de un robot autobalanceable usando el método del Lagrangiano Controlado", Isaac Gandarilla, Víctor Adrián Santibañez Davila; presentado en el Congreso Mexicano de Robótica COVRob 2015 en San José de Los Cabos, Baja California Sur, México.

# Apéndice A

## Demostración de soluciones

### A.1. Solución de (4.12) usando el método de características dado en [Olver (2014)]

Se hace la suposición de que  $x_1 = x_1(s)$  y  $x_2 = x_2(s)$ . Con esta definición, y usando la regla de la cadena, se puede decir que

$$\frac{d\mathcal{U}_\varepsilon}{ds} = \frac{\partial \mathcal{U}_\varepsilon}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \mathcal{U}_\varepsilon}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds}. \quad (\text{A.1})$$

Haciendo  $\frac{d\mathcal{U}_\varepsilon}{ds} = 0$ , da

$$\frac{\partial \mathcal{U}_\varepsilon}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \mathcal{U}_\varepsilon}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Igualando (A.2) con (4.12), se puede afirmar que

$$\frac{dx_1}{ds} = 1, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{dx_2}{ds} = - \left( \kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{c - b \cos(x_1)}{c}. \quad (\text{A.4})$$

De (A.3) se obtiene que  $ds = dx_1$ ; sustituyendo esto en (A.4), da

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= - \left( \kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{c - b \cos(x_1)}{c}, \\ dx_2 &= - \left( \kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{c - b \cos(x_1)}{c} dx_1. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$



Integrando ambos lados de (A.5), da como resultado

$$\dot{x}_2 + \frac{(b \sin(x_1) + cx_1) \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right)}{c} - C = 0. \quad (\text{A.6})$$

Por el método usado se obtiene que la solución para (4.12) es una función arbitraria de (A.6), es decir, una función  $F$  con argumento (A.6)

## A.2. Demostración de que (4.14) cumple con (2.29)

Desarrollando (2.29), para el robot autobalanceable, da

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial x_2} \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right) \frac{c + b \cos(x_1)}{c} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial x_1} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo (4.14) en (A.7), y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{d\dot{c}c^2}{2b} \left( \tilde{x}_2 + \frac{(b \sin(x_1) + cx_1) \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right)}{c} \right)^2 \right) \\ & \quad \times \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right) \frac{c + b \cos(x_1)}{c} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{d\dot{c}c^2}{2b} \left( \tilde{x}_2 + \frac{(b \sin(x_1) + cx_1) \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right)}{c} \right)^2 \right) = 0, \\ & \quad \frac{d\dot{c}c^2}{b} \left( \tilde{x}_2 - \frac{(b \sin(x_1) - cx_1) \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right)}{c} \right) \\ & \quad \times \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right) \frac{c - b \cos(x_1)}{c} \\ & - \frac{d\dot{c}c^2}{b} \left( \hat{x}_2 - \frac{(b \sin(x_1) - cx_1) \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right)}{c} \right) \\ & \quad \times \left( \kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right) \frac{c - b \cos(x_2)}{c} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

### A.3. Obtención de (4.15)

Sabiendo que  $\mathbf{x} = x_1, \theta = x_2$  y sustituyendo (4.9) y (4.10) en (2.26) se obtiene

$$u_{diss} = K_c c \left( \dot{x}_2 + \left( \kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{1}{c} (c - b \cos(x_1)) \dot{x}_1 \right), \quad (\text{A.9})$$

$$= K_c c \left( \dot{x}_2 + \left( \kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{c + b \cos(x_1)}{c} \dot{x}_1 \right). \quad (\text{A.10})$$

Usando (4.8), (4.9) y (4.10) en (2.25), da

$$A = (a + 2b \cos(x_1) + c) - (1 + \kappa) (c + b \cos(x_1)) \frac{1}{c} (c - b \cos(x_1)), \quad (\text{A.11})$$

$$= (a + 2b \cos(x_1) + c) - (1 + \kappa) \frac{(c - b \cos(x_1))^2}{c}. \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) y (4.14) en (2.26), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\kappa \left\{ \nabla_{x_1} (\dot{x}_1 (c + b \cos(x_1))) \dot{x}_1 - (c + b \cos(x_1)) A^{-1} \right. \\ &\quad \times \left[ \nabla_{x_1} (\dot{x}_1 (a - 2b \cos(x_1) + c)) \dot{x}_1 - \frac{1}{2} \nabla_{x_1} (\dot{x}_1 (a + 2b \cos(x_1) + c) \dot{x}_1) \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 - \kappa) (c - b \cos(x_1)) \frac{1}{c} \nabla_{x_1} (\dot{x}_1 (c + b \cos(x_1))) \dot{x}_1 \right] \right\} \\ &\quad + \kappa (c + b \cos(x_1)) A^{-1} \nabla_{x_1} \mathcal{U}(x_1, x_2) + \nabla_{x_2} \mathcal{U}(x_1, x_2) \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left( 1 + \kappa (c - b \cos(x_1)) A^{-1} (c + b \cos(x_1)) \frac{1}{c} \right) \nabla_{x_2} (\mathcal{U}(x_1, x_2) - \mathcal{U}_s(x_1, x_2)) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left( 1 + \kappa (c - b \cos(x_1)) A^{-1} (c + b \cos(x_1)) \frac{1}{c} \right) u_{diss}, \\ &= -\kappa \left\{ -b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 - (c + b \cos(x_1)) \frac{1}{A} \left[ -b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 + \kappa) (c - b \cos(x_1)) \frac{1}{c} (-b \sin(x_1)) \dot{x}_1^2 \right] \right\} + \kappa (c - b \cos(x_1)) \frac{1}{A} (-d \sin(x_1)) \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left( 1 + \kappa \frac{1}{A} \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} \right) \frac{d c \dot{x}_1^2}{\dot{b}} \left( \dot{x}_2 - \frac{(b \sin(x_1) - c x_1) \left( \kappa - \frac{\rho - 1}{\rho} \right)}{c} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left( 1 + \kappa \frac{1}{A} \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} \right) u_{diss}. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

El término  $\left(1 + \kappa \frac{1}{A} \frac{(c+b \cos(x_1))^2}{c}\right)$  en (A.13) puede reducirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \frac{A + \kappa \frac{(c+b \cos(x_1))^2}{c}}{A}, \\ & \frac{1}{A} \left( A - \kappa \frac{(c-b \cos(x_1))^2}{c} \right), \\ & \frac{1}{A} \left( (a + 2b \cos(x_1) + c) - (1 + \kappa) \frac{(c+b \cos(x_1))^2}{c} + \kappa \frac{(c+b \cos(x_1))^2}{c} \right), \\ & \frac{1}{A} \left( (a + 2b \cos(x_1) - c) - \frac{(c+b \cos(x_1))^2}{c} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Usando (A.14) se propone el término  $\eta(x_1)$  como

$$\eta(x_1) = \frac{1}{\rho} \left[ a + 2b \cos(x_1) + c - \frac{(c+b \cos(x_1))^2}{c} \right], \quad (\text{A.15})$$

y sustituyendo (A.15) en (A.13), da

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & -\kappa \left\{ -b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 - (c+b \cos(x_1)) \frac{1}{A} \left[ -b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + \kappa) (c-b \cos(x_1)) \frac{1}{c} (-b \sin(x_1)) \dot{x}_1^2 \right] \right\} + \kappa (c+b \cos(x_1)) \frac{1}{A} (-d \sin(x_1)) \\ & - \frac{1}{A} \eta(x_1) \frac{d c c^2}{b} \left( \hat{x}_2 - \frac{(b \sin(x_1) + c x_1) \left( \kappa + \frac{c-1}{\rho} \right)}{c} \right) - \frac{1}{A} \eta(x_1) u_{diss}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Simplificando (A.16), se llega a

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & -\kappa \left\{ b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{A} \left[ (b \sin(x_1)) (c+b \cos(x_1)) \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 - \kappa) (b \sin(x_1)) \frac{(c+b \cos(x_1))^2}{c} \right] \dot{x}_1^2 \right\} - \frac{1}{A} \kappa (d \sin(x_1)) (c+b \cos(x_1)) \\ & - \frac{1}{A} \eta(x_1) \frac{d c c^2}{b} \left( \hat{x}_2 - \frac{(b \sin(x_1) - c x_1) \left( \kappa + \frac{c-1}{\rho} \right)}{c} \right) + \frac{1}{A} \eta(x_1) u_{diss}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Tomando los términos que se encuentra dentro de los corchetes en (A.17), estos se pueden reducir a

$$\begin{aligned}
& -b \sin(x_1) \dot{x}_1^3 + \frac{1}{A} \left[ (b \sin(x_1)) (c + b \cos(x_1)) \right. \\
& \quad \left. - (1 + \kappa) (b \sin(x_1)) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} \right] \dot{x}_1^2, \\
& \frac{1}{A} \left( -Ab \sin(x_1) \dot{x}_1^2 + (b \sin(x_1)) (c + b \cos(x_1)) \dot{x}_1^2 \right. \\
& \quad \left. - (1 + \kappa) (b \sin(x_1)) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} \dot{x}_1^2 \right), \\
& \frac{1}{A} \left( - \left( (a + 2b \cos(x_1) + c) - (1 - \kappa) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} \right) b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 \right. \\
& \quad \left. + (b \sin(x_1)) (c + b \cos(x_1)) \dot{x}_1^2 - (1 - \kappa) (b \sin(x_1)) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} \dot{x}_1^2 \right), \\
& \frac{1}{A} \left( - \left( (a - 2b \cos(x_1) + c) - (1 + \kappa) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} \right) b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 \right. \\
& \quad \left. - (b \sin(x_1)) (c + b \cos(x_1)) \dot{x}_1^2 - (1 + \kappa) (b \sin(x_1)) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} \dot{x}_1^2 \right), \\
& \frac{1}{A} \left( - (a + b \cos(x_1)) b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 - (c + b \cos(x_1)) b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 \right. \\
& \quad \left. - (1 - \kappa) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 - (b \sin(x_1)) (c + b \cos(x_1)) \dot{x}_1^2 \right. \\
& \quad \left. - (1 + \kappa) (b \sin(x_1)) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{c} \dot{x}_1^2 \right), \\
& - \frac{1}{A} (a + b \cos(x_1)) b \sin(x_1) \dot{x}_1^2. \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (A.18) en (A.17), la ley de control por Lagrangiano Controlado para el robot autobalanceable está dada por

$$\begin{aligned}
u = & \frac{1}{A} \left\{ \kappa \sin(x_1) \left[ b (a + b \cos(x_1)) \dot{x}_1^2 - d (c + b \cos(x_1)) \right] + \eta(x_1) u_{des} \right. \\
& \left. - \eta(x_2) P \left( \hat{x}_2 + \frac{(b \sin(x_1) + c x_1) \left( \kappa + \frac{\mu-1}{\nu} \right)}{c} \right) \right\}. \tag{A.19}
\end{aligned}$$

## A.4. Desarrollo de (2.22) para el robot autobalanceable

Usando el lagrangiano en lazo cerrado del robot con el cambio de coordenadas (4.29), que está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tau,\sigma,\rho,\epsilon} &= \frac{1}{2} \left( a + 2b \cos(x_1) + c - \left( \kappa + \frac{\rho - 1}{\theta} \right) \frac{(c + b \cos(x_1))^2}{\epsilon} \right) \dot{x}_1^2 \\ &\quad - (c + b \cos(x_1)) \dot{x}_1 \dot{y} - \frac{1}{2} \rho c \dot{y}^2 - d (\cos(x_1) - 1) + P y^2. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Los términos que componen (2.22) están dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}_{\tau,\sigma,\rho,\epsilon} &= (c + b \cos(x_1)) \dot{x}_1 + \rho c \dot{y}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \mathcal{L}_{\tau,\sigma,\rho,\epsilon} \right) &= (c + b \cos(x_1)) \ddot{x}_1 - b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 - \rho c \ddot{y}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{U}_{c_p} = 2P y. \quad (\text{A.22})$$

de manera que (2.22), para el robot autobalanceable, está dado por

$$(c + b \cos(x_1)) \ddot{x}_1 - b \sin(x_1) \dot{x}_1^2 + \rho c \ddot{y} - 2P y = 0. \quad (\text{A.23})$$

Usando  $z$ , (A.23) se reescribe como

$$(c + b \cos(z_1(t))) \ddot{z}_3(t) + \rho c \ddot{z}_4(t) - b \sin(z_1) z_3(t)^2 = 2P z_2(t). \quad (\text{A.24})$$

## A.5. Solución de (4.45)

Integrando (4.45) dos veces con respecto al tiempo, se tiene

$$\begin{aligned} c \int \ddot{z}_1 dt + b \int \cos(z_1) \ddot{z}_1 dt - b \int \sin(z_1) \dot{z}_1^2 dt - 2P z_2(0) \int dt, \\ c \dot{z}_1 + b \int \cos(z_1) \ddot{z}_1 dt - t \left( -\cos(z_1) \dot{z}_1 + \int \cos(z_1) \dot{z}_1 dt \right) = 2P z_2(0) t + C_1, \\ c \ddot{z}_1 + b \int \cos(z_1) \ddot{z}_1 dt - b \cos(z_1) \dot{z}_1 - b \int \cos(z_1) \ddot{z}_1 dt = 2P z_2(0) t + C_1. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
c\dot{z}_1 + b \cos(z_1) \dot{z}_1 &= 2Pz_2(0)t + C_1, \\
c \int \dot{z}_1 dt + b \int \cos(z_1) \dot{z}_1 dt &= 2Pz_2(0) \int t dt + C_1 \int dt.
\end{aligned}
\tag{A.25}$$

Finalmente, integrando (A.25) se obtiene la solución implícita

$$cz_1 - b \sin(z_1) = Pz_2(0)t^2 + C_1t + C_2.
\tag{A.26}$$

## A.6. Solución de (4.81)

Para encontrar una solución para (4.81), se aplicó el método de características visto en [Olver (2014)]. Se hace la suposición de que  $q_1 = q_1(s)$  y  $q_2 = q_2(s)$ . Con esta definición, y usando la regla de la cadena, se puede decir que

$$\frac{d\mathcal{U}_{d_1}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{U}_{d_1}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{ds} + \frac{\partial \mathcal{U}_{d_1}}{\partial q_2} \frac{dq_2}{ds}.
\tag{A.27}$$

Haciendo  $\frac{\partial \mathcal{U}_{d_1}}{\partial s} = 0$ , da

$$\frac{\partial \mathcal{U}_{d_1}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{ds} + \frac{\partial \mathcal{U}_{d_1}}{\partial q_2} \frac{dq_2}{ds} = 0.
\tag{A.28}$$

Igualando (A.28) con (4.81), se puede afirmar que

$$\frac{dq_1}{ds} = 1,
\tag{A.29}$$

$$\frac{dq_2}{ds} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.
\tag{A.30}$$

De (A.29) se obtiene que  $ds = dq_1$ , sustituyendo esto en (A.30), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{dq_2}{dq_1} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \\
dq_2 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} dq_1.
\end{aligned}
\tag{A.31}$$

Integrando ambos lados de (A.31), da como resultado

$$q_2 - \int \frac{\lambda_2}{\lambda_1} dq_1 + C = 0.
\tag{A.32}$$

Ahora, se define  $\mathcal{U}_{d_2}$  como

$$U_{\dot{q}_2} = F \left( q_2 - \int \frac{\lambda_2}{\lambda} dq_1 + C \right). \quad (\text{A.33})$$

donde  $F(\cdot)$  es una función arbitraria de (A.32), y  $C$  es una constante de integración.

## Apéndice B

### Programa de la plataforma

### Balanduino

#### B.1. Lagrangiano Controlado

```
static double pitch = 0.0; // Result from Kalman filter
static double pitchant = 0.0;
static double pitchp = 0.0;
static double ql = 0.0, qlp = 0.0, qlant = 0.0, qls = 0.0;
static double torque;
static double a = 0.0030, b = 0.0039, c = 0.0104, D = 0.7677;
//parametros del robot
static double k = 10.0, rho = -0.47, e = 0.4, N = 0.5, phid =
-2.0; //parametros de la ley de control
static double lapso = 0.0;

void updatePID(double restAngle, double offset, double turning,
double dt)
{
    double u1, u2, u3, u4;
    turning = (double)(readLeftEncoder() - readRightEncoder
    ())*0.01;

    pitch = (pitch - 179.6) * PI / 180.0;
    if (!inicio)
    {
```

```

        pitchp = (pitch - pitchant) / (dt);
    }
    pitchant = pitch;

    ql = (double)getWheelsPosition() * 0.00327 / 2.0;
    if (!inicio)
    {
        qlp = (ql - qlant) / (dt);
    }
    qlant = ql;
    qle = ql - phid;

    u1 = b*k*pitchp*pitchp*sin(pitch)*(((a + b*cos(pitch))
        *(((a + b*cos(pitch))*(k + 1))/a - 1))/(a + c + 2*b*
        cos(pitch) - (pow((a + b*cos(pitch)),2)*(k + 1))/a) +
        1);
    u2 = (D*k*sin(pitch)*(a + b*cos(pitch)))/(a + c + 2*b*
        cos(pitch) - (pow((a + b*cos(pitch)),2)*(k + 1))/a);
    u3 = -(D*c*c*e*((k*pow((a + b*cos(pitch)),2))/(a*(a - c
        + 2*b*cos(pitch) - (pow((a + b*cos(pitch)),2)*(k + 1))
        /a)) + 1)*(qle - ((a*pitch + b*sin(pitch))*(rho - k*
        rho - 1))/(a*rho)))/(b*b*rho);
    u4 = (N*a*((k*pow((a + b*cos(pitch)),2))/(a*(a + c + 2*b
        *cos(pitch) - (pow((a + b*cos(pitch)),2)*(k - 1))/a))
        + 1)*(qlp + (pitchp*(a - b*cos(pitch))*(k + (rho - 1)/
        rho))/a))/rho;

    torque = u1 - u2 - u3 + u4;

    PIDValue = -1.651*qlp - 68.18*torque;

    PIDLeft = PIDValue - turning;
    PIDRight = PIDValue - turning;

    if (PIDLeft >= 0)
    moveMotor(left, forward, PIDLeft);
    else
    moveMotor(left, backward, -PIDLeft);
    if (PIDRight >= 0)
    moveMotor(right, forward, PIDRight);
    else
    moveMotor(right, backward, -PIDRight);
}

```

```

Serial.print(q1, 4);
Serial.print(",");
Serial.print(q1p, 4);
Serial.print(",");
Serial.print(pitch, 4);
Serial.print(",");
Serial.print(pitchp, 4);
Serial.print(",");
Serial.print(torque, 4);
Serial.print(",");
Serial.println(lapso, 6);

```

## B.2. IDA-PBC

```

static double pitch = 0.0; // Result from Kalman filter
static double q1 = 0.0, q1p = 0.0, q1ant = 0.0;
static double q2 = 0.0, q2p = 0.0, q2ant = 0.0;
static double torque;
static double c = 0.003, b = 0.0039, a = 0.0104, d = 0.7768; //
    parametros del robot
static double k1 = -0.009, kv = 0.001, g1 = 0.15, q2d = -2.0,
    q2e = 0.0; //parametros de la ley de control
static double q = 0.0;
static double C1 = 0.0, k4 = 0.0;
static double Cle = 25.0, k1e = 0.05;
static double lapso = 0.0;

void updatePID(double restAngle, double offset, double turning,
    double dt)
{
    double md1 = 0.0, md2 = 0.0, md3 = 0.0, Jaq1 = 0.0, Jaq2
        = 0.0, Jap2 = 0.0, lambda3 = 0.0, lambda4 = 0.0, j =
        0.0, p1 = 0.0, p2 = 0.0, alfa1 = 0.0, alfa2 = 0.0, u1
        = 0.0, u2 = 0.0, u3 = 0.0, u4 = 0.0;

    turning = (double)(readLeftEncoder() - readRightEncoder
        ())*0.01;

    q1 = (pitch - 178.6) * PI / 180.0;
    if (!inicio)
    {

```



```

        q1p = (q1 - q1ant) / (dt);
    }
    q1ant = q1;

    q2 = (double) getWheelsPosition() * 0.00327 / 2.0;
    if (!inicio)
    {
        q2p = (q2 - q2ant) / (dt);
    }
    q2ant = q2;
    q2e = (q2 - q2d);
    // q2e = constrain(q2e, -0.5, 0.5);

    p1 = q2p * (c + b * cos(q1)) + q1p * (a + c + 2 * b *
        cos(q1));
    p2 = q1p * (c + b * cos(q1)) + c * q2p;

    lambda3 = ((c + b * cos(q1)) * (k1 - k4) + C1 * c * (c +
        b * cos(q1))) / (a + c + 2 * b * cos(q1));
    lambda4 = k4;

    Jaq1 = (2 * C1 * g1 * (c + b * cos(q1)) * (-k1 * q2e +
        C1 * c * q1 - C1 * b * sin(q1))) / (k1 * k1) - (d *
        sin(q1)) / k1 - (b * p1 * (a * k1 * p2 * sin(c1) - 2 *
        c * k1 * p1 * sin(q1) - 3 * c * k1 * p2 * sin(q1) - 2
        * C1 * (c * c) * p1 * sin(q1) - 3 * C1 * (c * c) * p2
        * sin(q1) - b * k1 * p1 * sin(2 * q1) + 2 * b * k1 *
        p2 * sin(2 * q1) + b * k4 * p1 * sin(2 * c1) - C1 * b
        * c * p1 * sin(2 * q1) - 2 * C1 * b * c * p2 * sin(2 *
        q1) + C1 * a * c * p2 * sin(q1))) / ((a * c - (b * b)
        * (cos(q1) * cos(q1))) * ((C1 * C1) * (c * c * c) - a
        * k1 * k4 - c * k1 * k4 + C1 * (c * c) * k1 - C1 * (c
        * c) * k4 - C1 * (b * b) * k1 * (cos(q1) * cos(q1)) -
        C1 * (b * b) * k4 * (cos(q1) * cos(q1)) + (C1 * C1) *
        (b * b) * c * (cos(q1) * cos(q1)) - 2 * b * k1 * k4 *
        cos(q1) - 2 * (C1 * C1) * b * (c * c) * cos(c1) + 2 *
        C1 * b * c * k1 * cos(q1) - 2 * C1 * b * c * k4 * cos
        (q1))) + (b * p2 * (a + c + 2 * b * cos(q1)) * (2 * k1
        * p2 * sin(q1) - k1 * p1 * sin(q1) - C1 * c * p1 *
        sin(q1) + 2 * C1 * c * p2 * sin(q1) - 2 * C1 * b * p2
        * cos(q1) * sin(q1))) / ((a * c - (b * b) * (cos(c1) *
        cos(q1))) * ((C1 * C1) * (c * c * c) - a * k1 * k4 -
        c * k1 * k4 - C1 * (c * c) * k1 - C1 * (c * c) * k4 -

```

$$\begin{aligned}
& C1 * (b * b) * k1 * (\cos(q1) * \cos(q1)) - C1 * (b * b) \\
& * k4 * (\cos(q1) * \cos(q1)) - (C1 * C1) * (b * b) * c \\
& * (\cos(q1) * \cos(q1)) - 2 * b * k1 * k4 * \cos(q1) - 2 \\
& * (C1 * C1) * b * (c * c) * \cos(q1) + 2 * C1 * b * c * \\
& k1 * \cos(q1) - 2 * C1 * b * c * k4 * \cos(q1)) + (2 * \\
& b * p2 * \sin(q1) * (a * k1 * p2 - c * k1 * p1 - c * \\
& k1 * p2 - C1 * (c * c) * p1 - C1 * (c * c) * p2 - C1 * \\
& (b * b) * p2 * (\cos(q1) * \cos(q1)) - b * k1 * p1 * \\
& \cos(q1) + 2 * b * k1 * p2 * \cos(q1) - C1 * b * c * p1 \\
& * \cos(q1) + 2 * C1 * b * c * p2 * \cos(q1))) / ((a * c \\
& - (b * b) * (\cos(q1) * \cos(q1))) * ((C1 * C1) * (c * c \\
& * c) - a * k1 * k4 - c * k1 * k4 + C1 * (c * c) * k1 \\
& - C1 * (c * c) * k4 + C1 * (b * b) * k1 * (\cos(q1) * \\
& \cos(q1)) - C1 * (b * b) * k4 * (\cos(q1) * \cos(q1)) + ( \\
& C1 * C1) * (b * b) * c * (\cos(q1) * \cos(q1)) - 2 * b * \\
& k1 * k4 * \cos(q1) + 2 * (C1 * C1) * b * (c * c) * \cos \\
& (q1) + 2 * C1 * b * c * k1 * \cos(q1) - 2 * C1 * b * c \\
& * k4 * \cos(q1))) + (2 * b * p1 * \sin(q1) * (C1 * (c * \\
& c * c) * p2 - C1 * (c * c * c) * p1 - (c * c) * k1 * \\
& p1 + (c * c) * k1 * p2 - (b * b) * k1 * p1 * (\cos(q1) \\
& * \cos(q1)) + 2 * (b * b) * k1 * p2 * (\cos(q1) * \cos(q1) \\
& )) + (b * b) * k1 * p1 * (\cos(q1) * \cos(q1)) + C1 * a \\
& * (c * c) * p2 - a * c * k1 * p2 - a * c * k4 * p1 - 2 \\
& * C1 * b * (c * c) * p1 * \cos(q1) + 3 * C1 * b * (c * \\
& c) * p2 * \cos(q1) - C1 * (b * b) * c * p1 * (\cos(q1) \\
& * \cos(q1)) + 2 * C1 * (b * b) * c * p2 * (\cos(q1) * \\
& \cos(q1)) - a * b * k1 * p2 * \cos(q1) - 2 * b * c * k1 \\
& * p1 * \cos(q1) - 3 * b * c * k1 * p2 * \cos(q1) - C1 * \\
& a * b * c * p2 * \cos(q1)) * ((C1 * C1) * a * (c * c * \\
& c) - 2 * C1 * (b * b * b) * k1 * (\cos(q1) * \cos(q1) * \\
& \cos(q1)) - 2 * C1 * (b * b * b) * k4 * (\cos(q1) * \cos( \\
& q1) * \cos(q1)) - 3 * (b * b) * k1 * k4 * (\cos(q1) * \\
& \cos(q1)) - C1 * a * (c * c) * k1 - C1 * a * (c * c) * \\
& k4 - 2 * (C1 * C1) * (b * b * b) * c * (\cos(q1) * \cos( \\
& q1) * \cos(q1)) - 3 * (C1 * C1) * (b * b) * (c * c) * ( \\
& \cos(q1) * \cos(q1)) - a * c * k1 * k4 - (C1 * C1) * b * \\
& (c * c * c) * \cos(q1) - C1 * b * (c * c) * k1 * \cos( \\
& q1) + C1 * b * (c * c) * k4 * \cos(q1) - (C1 * C1) * a \\
& * b * (c * c) * \cos(q1) - 3 * C1 * (b * b) * c * k1 * \\
& (\cos(q1) * \cos(q1)) - 3 * C1 * (b * b) * c * k4 * (\cos \\
& (q1) * \cos(q1)) - a * b * k1 * k4 * \cos(q1) - b * c * \\
& k1 * k1 * \cos(q1) - C1 * a * b * c * k1 * \cos(q1) - C1 \\
& * a * b * c * k4 * \cos(q1))) / (\text{pow}((a * c - (b * b)
\end{aligned}$$

```

* (cos(q1) * cos(q1)), 2) * pow(((C1 * C1) * (c * c *
  e) - a * k1 * k4 - c * k1 * k4 + C1 * (c * c) * k1 -
  C1 * (c * c) * k4 - C1 * (b * b) * k1 * (cos(q1) + cos
  (q1)) - C1 * (b * b) * k4 * (cos(q1) + cos(q1)) + (C1
  * C1) * (b * b) * c * (cos(q1) * cos(q1)) - 2 * b * k1
  * k4 * cos(q1) + 2 * (C1 * C1) * b * (c * c) * cos(q1
  ) + 2 * C1 * b * c * k1 * cos(q1) - 2 * C1 * b * c *
  k4 * cos(q1)), 2)) - (2 * b * p2 + sin(q1) * (a + c +
  2 * b * cos(q1)) * (a * k1 * p2 - c * k1 * p1 - c * k1
  * p2 - C1 * (c * c) * p1 + C1 * (c * c) * p2 - C1 * (
  b * b) * p2 * (cos(q1) * cos(q1)) - b * k1 * p1 * cos(
  q1) - 2 * b * k1 * p2 * cos(q1) - C1 * b * c * p1 *
  cos(q1) + 2 * C1 * b * c * p2 * cos(q1)) * ((C1 * C1)
  * a * (c * c * c) - 2 * C1 * (b * b * b) * k1 * (cos(
  q1) * cos(q1) * cos(q1)) - 2 * C1 * (b * b * b) * k4 *
  (cos(q1) * cos(q1) * cos(q1)) + 3 * (b * b) * k1 * k4
  * (cos(q1) * cos(q1)) + C1 * a * (c * c) * k1 - C1 *
  a * (c * c) * k4 - 2 * (C1 * C1) * (b * c * b) * c * (
  cos(q1) * cos(q1) * cos(q1)) - 3 * (C1 * C1) * (b * b)
  * (c * c) * (cos(q1) * cos(q1)) - a * c * k1 * k4 - (
  C1 * C1) * b * (c * c * c) * cos(q1) - C1 * b * (c * c
  ) * k1 * cos(q1) + C1 * b * (c * c) * k4 * cos(q1) + (
  C1 * C1) * a * b * (c * c) * cos(q1) - 3 * C1 * (b * b
  ) * c * k1 * (cos(q1) * cos(q1)) + 3 * C1 * (b * b) *
  c * k4 * (cos(q1) * cos(q1)) + a * b * k1 * k4 * cos(
  q1) + b * c * k1 * k4 * cos(q1) - C1 * a * b * c * k1
  * cos(q1) - C1 * a * b * c * k4 * cos(q1))) / (pow((a
  * c - (b * b) * (cos(q1) * cos(q1))), 2) * pow(((C1 *
  C1) * (c * c * c) - a * k1 * k4 - c * k1 * k4 - C1 * (
  c * c) * k1 - C1 * (c * c) * k4 + C1 * (b * b) * k1 *
  (cos(q1) + cos(q1)) - C1 * (b * b) * k4 * (cos(q1) *
  cos(q1)) + (C1 * C1) * (b * b) * c * (cos(q1) * cos(q1
  )) - 2 * b * k1 * k4 * cos(q1) + 2 * (C1 * C1) * b * (
  c * c) * cos(q1) + 2 * C1 * b * c * k1 * cos(q1) - 2 *
  C1 * b * c * k4 * cos(q1)), 2));
Jac2 = -(2 * g1 * (C1 * c * q1 - k1 * (-q2e) + C1 * b *
  sin(q1))) / k1;

md1 = C1 * pow((c - b * cos(q1)), 2) - k1 * (a + c + 2 *
  b * cos(q1));
md2 = (c + b * cos(q1)) * (k1 + C1 * c);
md3 = c * k4 + (pow((c + b * cos(q1)), 2) * (k1 - k4 +
  C1 * c)) / (a + c + 2 * b * cos(q1));

```



```

alfa1 = -(b * sin(q1) * (k1 - k4 + C1 * c) * (c * k1 - a
    * k1 - C1 * c * c + C1 * b * b * cos(q1) * cos(q1) +
    2 * C1 * b * c * cos(q1))) / (a + c - 2 * b * cos(q1))
;
alfa2 = (k1 - k4 - C1 * c) * (-b * (C1 * c + k4) * cos(
    q1) - C1 * c * c - k1 * c + a * (k1 - k4)) * (c + b *
    cos(q1)) * sin(q1) * b / pow((a - 2 * b * cos(q1) + c)
    , 2);

j = -(alfa1 * md2 * p2 - alfa1 * md3 * p1 - alfa2 * md1
    * p2 + alfa2 * md2 * p1) / (- md2 * md2 + md1 * md3);

Jap2 = -(2 * (a + c + 2 * b * cos(q1)) * (a * k1 * p2 -
    c * k1 * p1 + c * k1 * p2 - C1 * (c * c) * p1 + C1 * (
    c * c) * p2 + C1 * (b * b) * p2 * (cos(q1) * cos(q1))
    - b * k1 * p1 * cos(q1) + 2 * b * k1 * p2 * cos(q1) -
    C1 * b * c * p1 * cos(q1) + 2 * C1 * b * c * p2 * cos(
    q1))) / ((a * c - (b * b) * (cos(q1) * cos(q1))) * ((
    C1 * C1) * (c * c * c) - a * k1 * k4 - c * k1 * k4 +
    C1 * (c * c) * k1 - C1 * (c * c) * k4 + C1 * (b * b) *
    k1 * (cos(q1) * cos(q1)) - C1 * (b * b) * k4 * (cos(
    q1) * cos(q1)) + (C1 * C1) * (b * b) * c * (cos(q1) *
    cos(q1)) - 2 * b * k1 * k4 * cos(q1) + 2 * (C1 * C1) *
    b * (c * c) * cos(q1) + 2 * C1 * b * c * k1 * cos(q1)
    - 2 * C1 * b * c * k4 * cos(q1))););

u1 = -lambda3 * Jaq1 - lambda4 * Jaq2;
u2 = (j * (md2 * p2 - md3 * p1)) / (- md2 * md2 + md1 *
    md3);
u3 = -kv * Jap2;

torque = u1 + u2 + u3;

PIDValue = -1.651*q2p - 68.18*torque;

PIDLeft = PIDValue * 0.8 + turning;
PIDRight = PIDValue - turning;

if (PIDLeft >= 0)
moveMotor(left, forward, PIDLeft);
else
moveMotor(left, backward, -PIDLeft);

```

```
    if (PIDRight >= 0)
    moveMotor(right, forward, PIDRight);
    else
    moveMotor(right, backward, -PIDRight);
}

Serial.print(q1, 4);
Serial.print(",");
Serial.print(q1p, 4);
Serial.print(",");
Serial.print(q2, 4);
Serial.print(",");
Serial.print(q2p, 4);
Serial.print(",");
Serial.print(torque, 4);
Serial.print(",");
Serial.println(lapso, 6);
```



## Bibliografía

- [Acosta *et al.* (2004)] J. A. Acosta, R. Ortega, A. Astolfi, A. D. Mahindrakar (2004) Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one *IEEE Transactions on Automatic Control*, volumen 4, pp. 3029-3024, Junio, 2004, Boston, EU.
- [Bloch *et al.* (1999)] A. M. Bloch, N. E. Leonard, J. E. Marsden (1999), Stabilization of the Pendulum on a Rotor Arm by the Method of Controlled Lagrangians. *IEEE International Conference on Robotics & Automation*, volumen 1, pp. 500-505, Mayo, 1999, Detroit, EU.
- [Bloch *et al.* (2000)] A. M. Bloch, D. E. Chang, N. E. Leonard, J. E. Marsden (2000), Controlled Lagrangians and the stabilization of Mechanical Systems I: The First Matching Theorem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, volumen 45, número 12, pp. 2253 - 2270, diciembre, 2000.
- [Bloch *et al.* (2001)] A. M. Bloch, D. E. Chang, N. E. Leonard, J. E. Marsden (2001), Controlled Lagrangians and the stabilization of Mechanical Systems II: Potential Shaping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volumen 46, número 10, pp. 1556 - 1571, octubre, 2001.
- [Bloch (2003)] A. M. Bloch (2003), Nonholonomic Mechanics and Control, *Spring*.
- [Butler y Bright (2008)] L. J. Butler and G. Bright (2008), Feedback control of a self-balancing material handling robot *International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, diciembre, 2008, Hanoi, Vietnam.
- [Chang (2014)] D. E. Chang, On the method of interconnection and damping assignment passivity-based control for the stabilization of mechanical systems, *Regular and Chaotic Dynamics*, volumen 19, número 5, pp. 556-575, septiembre, 2014.
- [De León Gómez (2014)] V. S. de León Gómez (2014) *Control de Robots Bipedos* Tesis doctoral, TNM Instituto Tecnológico de La Laguna, 2014.
- [Fuquan *et al.* (2012)] D. Fuquan, L. Fangxing, B. Yang, G. Wenzeng, Z. Chengguo, G. Xueshan (2012), Development of a Coaxial Self-Balancing Robot Based on Sliding

- Mode Control, *International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 1241 - 1246, agosto, 2012, Chengdu, China.
- Gómez-Estern et al. (2001) F. Gómez-Estern, R. Ortega, F. R. Rubio, J. Aracil (2001), Stabilization of a Class of Under Actuated Mechanical Systems via Total Energy Shaping *IEEE Conference on Decision and Control*, volumen 2, pp. 1137 - 1143, diciembre, 2001, Orlando, FL.
- Grossman (2008) S. I. Grossman (2008) *Algebra Lineal Mc Graw-Hill*.
- Kamath et al. (2010) A. K. Kamath, N. M. Singh, F. Kezi y R. Pasumarthy (2010), Dynamics and Control of 2D SpiderCane: A Controlled Lagrangian Approach *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3556 - 3601, diciembre, 2010, Atlanta, EU.
- Kelly y Santibáñez (2003) R. Kelly, V. Santibáñez (2003), *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, Pearson-Prentice Hall, España.
- Machleit et al. (2007) K. Machleit, J. Kronel y S. Liu (2007) Stabilization of the Furuta Pendulum Using a Nonlinear Control Law Based on the Method of Controlled Lagrangians *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 2129 - 2134, julio, 2007, Vigo, España.
- Nguyen et al. (2010) G. M. T. Nguyen, H. Doung, H. P. Nguyen (2010), A PID Backstepping Controller For Two-Wheeled Self-Balancing Robot *International Forum on Strategic Technology*, pp. 76 - 81, octubre, 2010, Ulsan, Corea del Sur.
- Olver (2014) P. Olver (2014) Introduction to Partial Differential Equations *Springer*.
- Ortega et al. (2001) R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke, G. Escobarm (2001) Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems *Automatica*, volumen 38, número 4, pp. 585-596, abril, 2001.
- Ortega et al. (2002) R. Ortega, M. W. Spong, F. Gómez-Estern, G. Blankenstein (2002), Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems Via Interconnection and Damping Assignment, *IEEE Transactions on Automatic Control*, volumen 47, número 8, pp. 1218 - 1233, agosto, 2002.
- Rybalat y Lalla (2013) M. Rybalat, D. S. Lalla IDA PBC for a Class of Underactuated Mechanical Systems with application to a Rotary Inverted Pendulum *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5240 - 5245, diciembre, 2013, Florence, Italia.
- Xiegang et al. (2008) R. Xiegang, R. Jiang, D. Haijiang, L. Xinyuan (2008), Design and I-Q Control of a two-wheeled self-balancing robot, *Chinese Control Conference* pp. 275 - 279, julio, 2008, Kunming, China.