MANUAL DE PRÁCTICAS

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL

DEPARTAMENTO ACADEMICO: SISTEMAS Y COMPUTACIÓN

MANUAL DE PRÁCTICAS DE SIMULACIÓN

AUTOR:
ZARINA MARYELA BASULTO ALVAREZ

NO. DE DICTAMEN

AS-1-027/2018

FECHA:
28 DE ENERO DE 2019

ÍNDICE DE PRÁCTICAS

OBJETIVO 3

JUSTIFICACION 3

UTILIDAD DEL MANUAL 3

I. Número de práctica: 1 4

Introducción a la Simulación 4

I. Número de práctica: 2 19

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método algoritmo de cuadrados medios 19

I. Número de práctica: 3 27

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método algoritmo de productos medios. 27

I. Número de práctica: 4 31

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método algoritmo de multiplicador constante. 31

I. Número de práctica: 5 34

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método algoritmo lineal 34

I. Número de práctica: 6 39

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método congruencial multiplicativo 39

I. Número de práctica: 7 43

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método congruencial aditivo. 43

I. Número de práctica: 8 46

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método congruencial no lineales 46

I. Número de práctica: 9 50

Pruebas estadísticas de uniformidad. Prueba Chi cuadrada 50

I. Número de práctica: 10 60

Pruebas estadísticas de uniformidad. Prueba de Kolmogorov-Smirnov 60

I. Número de práctica: 11 67

Pruebas estadísticas de Independencia. Prueba de corridas de arriba y abajo 67

I. Número de práctica: 12 72

Pruebas estadísticas de Independencia. Prueba póker 72

I. Número de práctica: 13 79

Pruebas estadísticas de Independencia. Prueba de series 79

I. Número de práctica: 14 86

Pruebas estadísticas de Independencia. Prueba de huecos 86
I. Número de práctica: 15 92
Pruebas estadísticas de aleatoriedad. Prueba de Anderson-Darling 92
I. Número de práctica: 16 102
Generación de variables aleatorias. Método de la transformada inversa 102
I. Número de práctica: 17 115
Generación de variables aleatorias. Método de convolución 115
I. Número de práctica: 18 120
Generación de variables aleatorias. Método de composición 120
I. Número de práctica: 19 126
Generación de variables aleatorias. Método de transformación directa 126
I. Número de práctica: 20 130
Modelo de un Sistema de inventarios 130
I. Número de práctica: 21 139
Casos prácticos de simulación 139
I. Número de práctica: 22 143
Proyecto Integrador 143

OBJETIVO

Es el que un Ingeniero en Sistemas Computacionales pueda aplicar los conocimientos adquiridos para plantear modelos matemáticos a sistemas reales complejos lineales para la toma de decisiones y la solución a estos, empleando herramientas matemáticas y computacionales, dado que las tendencias actuales exigen realizar la simulación en áreas como la ciencia, la industria y los negocios.

El alumno analizará, modelará, desarrollará y experimentará sistemas productivos y de servicios, reales o hipotéticos, a través de la simulación de eventos discretos, para dar servicio al usuario que necesite tomar decisiones, con el fin de describir con claridad su funcionamiento, aplicando herramientas matemáticas.

JUSTIFICACION

La interpretación y comprensión de las diferentes materias de las retículas de Sistemas computacionales y Tecnologías de la información y comunicaciones, ha demostrado la necesidad de realizar prácticas que lleve al alumno aplicar sus conocimientos resolviendo problemáticas relacionadas con su ámbito de estudio.

En el caso de la materia de Simulación ahí se ven diferentes técnicas numéricas para conducir experimentos en una computadora digital. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos periodos de tiempo. Recientes avances en las metodologías de simulación y la gran disponibilidad de software que actualmente existe en el mercado han hecho que la técnica de simulación sea una de las herramientas más usadas en el análisis de sistemas.

Los manuales proporcionarán a los estudiantes casos prácticos que estarán disponibles para ellos permitiéndoles desarrollar sus habilidades, contribuyendo al logro los objetivos de las asignaturas y de las competencias específicas, instrumentales, interpersonales y sistémicas que requieren.

Para concluir, estos instrumentos aportarán al alumno, mediante las prácticas, un fortalecimiento en sus competencias profesionales.

UTILIDAD DEL MANUAL

Este manual se utilizará en la materia de Simulación apoyando al Docente con las prácticas para un mejor entendimiento de los temas que se abordarán, apoyando al perfil profesional del alumno.

I. Número de práctica: 1

II. Nombre:

Introducción a la Simulación

III. Competencia(s) a desarrollar.

Interpretar el uso y limitaciones de la simulación computacional en el ámbito de una empresa real para apoyar la toma de decisiones de forma eficaz.

IV. Introducción.

La simulación es una forma de estudiar los procesos aleatorios, los cuales se encuentran prácticamente en todas las operaciones de sistemas de producción y servicios. Aprender a modelar con simulación estocástica discreta es un reto demandante, principalmente por la complejidad del tema y porque el proceso de simulación y el análisis de los resultados requieren de un razonable conocimiento de probabilidad, estadística y computación.

La experiencia nos ha mostrado que estos temas son difíciles de dominar, y desafortunadamente la mayoría de los estudiantes no se sienten cómodos al trabajar con ellos.

La creación de nuevos y mejores desarrollos en el área de la computación ha traído consigo innovaciones muy importantes tanto en la toma de decisiones como en el diseño de procesos y productos. Una de las técnicas para realizar estudios piloto, con resultados rápidos y a un relativo bajo costo, se basa en la modelación − la cual se conoce como simulación− que se ha visto beneficiada por estos avances.

En la actualidad resulta fácil encontrar paquetes de software con gran capacidad de análisis, así como mejores animaciones (2D y 3D) y aplicaciones para generación de reportes con información relevante para la toma de decisiones.

La simulación se refiere a un gran conjunto de métodos y aplicaciones que buscan imitar el comportamiento de sistemas reales, generalmente por medio de una computadora con un software apropiado.

Existen distintos modelos de simulación que permiten representar situaciones reales de diferentes tipos. Podemos tener modelos físicos − como el del avión que mencionamos en el párrafo anterior− o modelos matemáticos, a los cuales pertenecen los modelos de simulación de eventos discretos.

Asimismo, los modelos pueden diferenciarse según el tipo de ecuaciones matemáticas que los componen. Por ejemplo, los modelos continuos son aquellos en los que las relaciones entre las variables relevantes de la situación real se definen por medio de ecuaciones diferenciales, ya que éstas permiten conocer el comportamiento de las variables en cierto tiempo. Problemas tales como saber de qué manera se transfiere el calor en un molde, o determinar cómo fluye cierto material dentro de una tubería, e incluso prever el comportamiento del nivel de un tanque de gasolina al paso del tiempo, mientras el vehículo está en marcha, pueden simularse con este tipo de modelo.

Además de modelos continuos tenemos modelos discretos. En ellos el comportamiento que nos interesa analizar puede representarse por medio de ecuaciones evaluadas en un punto determinado. Por ejemplo, si hacemos un muestreo del número de personas que llegaron a un banco en un lapso específico, podemos simular esta variable con ecuaciones ligadas a distribuciones de probabilidad que reflejen dicho comportamiento.

Otro tipo de clasificación es el de los modelos dinámicos o estáticos. Los modelos dinámicos son aquellos en los que el estado del sistema que estamos analizando cambia respecto del tiempo. Por ejemplo, el número de personas que hacen fila para entrar a una sala de cine varía con el tiempo. Por otro lado, los modelos estáticos representan un resultado bajo un conjunto de situaciones o condiciones determinado; por ejemplo, al lanzar un dado los únicos valores que se puede obtener son 1, 2, 3, 4, 5 o 6, de manera que el resultado de la simulación será uno de tales valores posibles; a esto se le conoce generalmente como simulación de Monte Cario.

Por último, podemos hablar de modelos determinísticos y modelos probabilísticos, llamados también estocásticos.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

1. Conceptos básicos de la simulación.
2. Metodología de la simulación.
3. Estructura y etapas de un estudio de simulación.
4. Etapas de un proyecto de simulación
5. Elementos básicos de un simulador de eventos discretos

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Para poder realizar un buen estudio de simulación es necesario entender los conceptos básicos que componen nuestro modelo. Comenzaremos por definir el concepto de simulación de eventos discretos como el conjunto de relaciones lógicas, matemáticas y probabilísticas que integran el comportamiento de un sistema bajo estudio cuando se presenta un evento determinado. El objetivo del modelo de simulación consiste, precisamente, en comprender, analizar y mejorar las condiciones de operación relevantes del sistema.

En la definición anterior encontramos elementos como sistema, modelo y evento, de los que se desprenden otros conceptos importantes dentro de una simulación. A continuación, abundaremos en cada uno.

La definición básica de **sistema** nos dice que se trata de un conjunto de elementos que se interrelacionan para funcionar como un todo; desde el punto de vista de la simulación, tales elementos deben tener una frontera clara. Por ejemplo, podemos hablar del sistema de atención a clientes en un banco, del sistema de inventarios de una empresa, o del sistema de atención en la sala de emergencia de un hospital. Cada uno puede dividirse en elementos que son relevantes para la construcción de lo que será su modelo de simulación; entre ellos tenemos entidades, estado del sistema, eventos actuales y futuros, localizaciones, recursos, atributos, variables, y el reloj de la simulación, los cuales a continuación se describen:

Una **entidad** por lo general es la representación de los flujos de entrada y salida en un sistema; al entrar a un sistema una entidad es el elemento responsable de que el estado del sistema cambie. Ejemplos de entidades pueden ser; los clientes que llegan a la caja de un banco, las piezas que llegan a un proceso, o el embarque de piezas que llega a un inventario.

El **estado del sistema** es la condición que guarda el sistema bajo estudio en un momento de tiempo determinado; es como una fotografía de lo que está pasando en el sistema en cierto instante. El estado del sistema se compone de variables o características de operación puntuales (digamos el número de piezas que hay en el sistema en ese momento), y de variables o características de operación acumuladas, o promedio (como podría ser el tiempo promedio de permanencia de una entidad en el sistema, en una fila, almacén o equipo).

Un **evento** es un cambio en el estado actual del sistema; por ejemplo, la entrada o salida de una entidad, la finalización de un proceso en un equipo, la interrupción o reactivación de una operación (digamos por un descanso del operario), o la descompostura de una máquina. Podemos catalogar estos eventos en dos tipos: **eventos actuales**, aquellos que están sucediendo en el sistema en un momento dado, y **eventos futuros**, cambios que se presentarán en el sistema después del tiempo de simulación, de acuerdo con una programación específica. Por ejemplo, imagine que cierta pieza entra a una máquina para que ésta realice un proceso. El evento actual sería precisamente que la entidad llamada "pieza" se encuentra en la máquina. El evento futuro podría ser el momento en que la máquina concluirá su trabajo con la pieza y ésta seguirá su camino hacia el siguiente proceso lógico, de acuerdo con la programación: almacenamiento, inspección o entrada a otra máquina.

Además del esquema transaccional (pieza en tarima -> pieza en estación) que se presenta en un modelo de simulación, es necesario considerar algunos otros elementos que también forman parte de este tipo de modelaciones. A continuación, describiremos algunos de ellos.

Las **localizaciones** son todos aquellos lugares en los que la pieza puede detenerse para ser transformada o esperar a serlo. Dentro de estas localizaciones tenemos almacenes, bandas transportadoras, máquinas, estaciones de inspección, etcétera.

Los **recursos** son aquellos dispositivos − diferentes a las localizaciones− necesarios para llevar a cabo una operación. Por ejemplo, un montacargas que transporta una pieza de un lugar a otro: una persona que realiza la inspección en una estación y toma turnos para descansar; una herramienta necesaria para realizar un proceso pero que no forma parte de una localización específica, sino que es trasladada de acuerdo con los requerimientos de aquel.

Un **atributo** es una característica de una entidad. Por ejemplo, si la entidad es un motor, los atributos serían su color, peso, tamaño o cilindraje. Los atributos son muy útiles para diferenciar entidades sin necesidad de generar una nueva, y pueden adjudicarse al momento de la creación de la entidad, o asignarse y/o cambiarse durante el proceso.

Como indica su nombre, las **variables** son condiciones cuyos valores se crean y modifican por medio de ecuaciones matemáticas y relaciones lógicas. Pueden ser continuas (por ejemplo, el costo promedio de operación de un sistema) o discretas (como el número de unidades que deberá envasarse en un contenedor). Las variables son muy útiles para realizar conteos de piezas y ciclos de operación, así como para determinar características de operación del sistema.

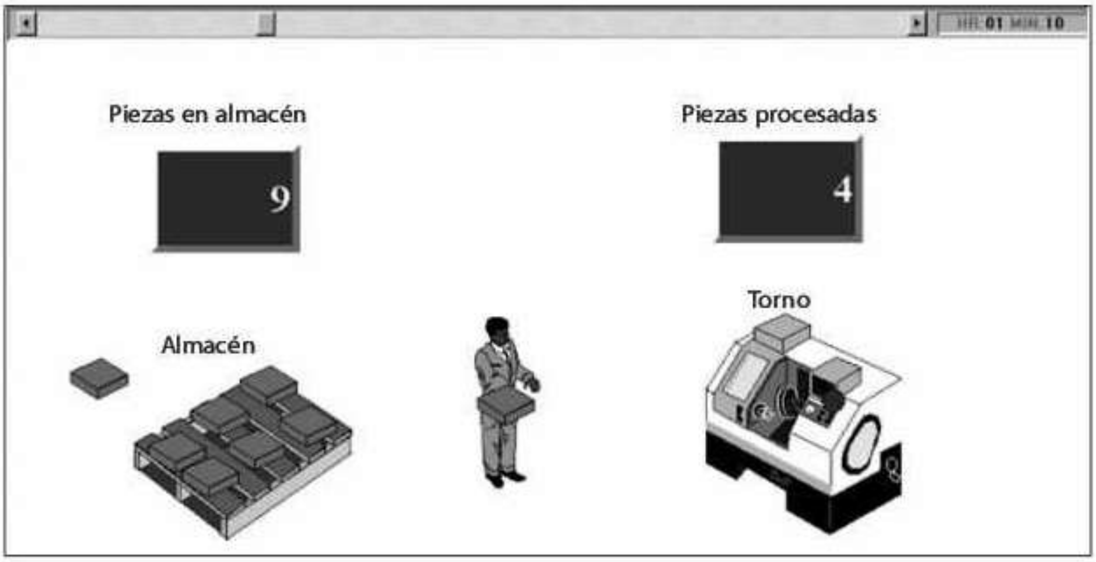
El **reloj** de la simulación es el contador de tiempo de la simulación, y su función consiste en responder preguntas tales como cuánto tiempo se ha utilizado el modelo en la simulación, y cuánto tiempo en total se quiere que dure esta última. En general, el reloj de simulación se relaciona con la tabla de eventos futuros, pues al cumplirse el tiempo programado para la realización de un evento futuro, éste se convierte en un evento actual. Podemos hablar de dos tipos de reloj de simulación: el reloj de simulación absoluto, que parte de cero y termina en un tiempo total de simulación definido, y el reloj de simulación relativo, que sólo considera el lapso que transcurre entre dos eventos. Por ejemplo, podemos decir que el tiempo de proceso de una pieza es relativo, mientras que el absoluto sería el tiempo global de la simulación: desde que la pieza entró a ser procesada hasta el momento en el que terminó su proceso.

Ejemplo

Un taller recibe ciertas piezas, mismas que son acumuladas en un almacén temporal en donde esperan a ser procesadas. Esto ocurre cuando un operario transporta las piezas del almacén a u n torno. Desarrolle un modelo que incluya el número de piezas que hay en el almacén y que esperan ser atendidas en todo momento, y el número de piezas procesadas en el torno.

En la siguiente figura podemos observar cómo se vería un modelo de simulación para este ejemplo.

Figura 1.1 Ejemplo



En este ejemplo podemos identificar algunos de los elementos que participan en un modelo de simulación, de acuerdo con las definiciones que hemos comentado:

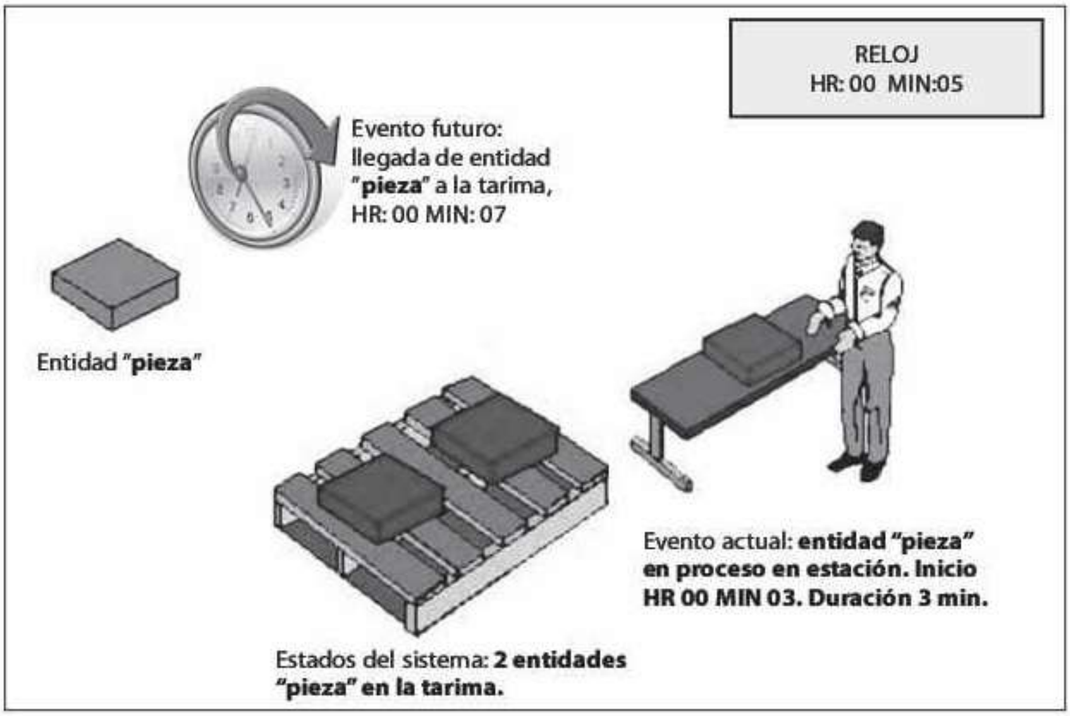
Sistema: En este caso, el sistema está conformado por el conjunto de elementos interrelacionados para el funcionamiento del proceso: las piezas, el almacén temporal, el operario, el torno.

Entidades: En este modelo sólo tenemos una entidad; las piezas, que representan los flujos de entrada al sistema del problema bajo análisis.

Estado del sistema: Podemos observar que cuando llevamos 1 hora 10 minutos de simulación (vea el extremo superior derecho de la figura) en el almacén se encuentran 9 piezas esperando a ser procesadas; el operario está transportando una pieza más para procesarla en el torno. El torno, por lo tanto, no está trabajando en ese m omento, aunque ya ha procesado 4 piezas. Adicional a estos datos, podemos llevar un control de otras estadísticas relacionadas con el estado del sistema, como el tiempo promedio de permanencia de las piezas en los estantes del almacén temporal o en el sistema global.

Eventos: Entre otros, podríamos considerar como eventos de este sistema el tiempo de descanso del operario o la salida de una pieza tras ser procesada por el torno. Además, es posible identificar un evento futuro: la llegada de la siguiente pieza al sistema (tendríamos más eventos de este tipo respecto de las piezas que esperan a que el operario las tome).

Figura 1.2. Representación de conceptos de simulación.



Localizaciones: En este caso tenemos el almacén al que deberán llegar las piezas y en el que esperarán a ser procesadas, así como el torno en donde esto ocurrirá.

Recursos: En este modelo, un recurso es el operario que transporta las piezas del almacén al torno.

Atributos: Digamos que (aunque no se menciona en el ejemplo) las piezas pueden ser de tres tamaños diferentes. En este caso, un atributo llamado tamaño podría agregarse a la información de cada pieza que llega al sistema, para más adelante seleccionar el tipo de operación que deberá realizarse y el tiempo necesario para llevarla a cabo de acuerdo con dicho atributo.

Variables: Tenemos dos variables definidas en este caso: el número de piezas en el almacén y el número de piezas procesadas en el torno.

Reloj de la simulación: Como se puede ver en la esquina superior derecha de la figura 1.2, en este momento la simulación lleva 1 hora 10 minutos. El reloj de la simulación continuará avanzando hasta el momento que se haya establecido para el término de la simulación, o hasta que se cumpla una condición lógica para detenerla, por ejemplo, el número de piezas que se desean simular.

Otro concepto importante que vale la pena definir es el de **réplica** o corrida de la simulación. Cuando ejecutamos el modelo una vez, los valores que obtenemos de las variables y parámetros al final del tiempo de simulación generalmente serán distintos de los que se producirán si lo volvemos a correr con diferentes números pseudoaleatorios. Por lo tanto, es necesario efectuar más de una réplica del modelo que se esté analizando, con la finalidad de obtener estadísticas de intervalo que nos den una mejor ubicación del verdadero valor de la variable bajo los diferentes escenarios que se presentan al modificar los números pseudoaleatorios en cada oportunidad.

De esta manera, la pregunta clave es: ¿cuánto tiempo se debe simular un modelo para obtener resultados confiables? En general, podemos decir que todas las variables que se obtienen en términos de promedios presentan dos diferentes etapas: un estado transitorio y un estado estable. El primero se presenta al principio de la simulación; por ejemplo, en el arranque de una planta, cuando no tiene material en proceso: el último de los procesos estará inactivo hasta que el primer cliente llegue, y si el tiempo de simulación es bajo, su impacto sobre la utilización promedio de este proceso será muy alto, lo cual no ocurriría si el modelo se simulara lo suficiente para lograr una compensación. En el estado transitorio hay mucha variación entre los valores promedio de las variables de decisión del modelo, por lo que formular conclusiones con base en ellos sería muy arriesgado, toda vez que difícilmente nos darían una representación fiel de la realidad.

Por otro lado, en el estado estable los valores de las variables de decisión permanecen muy estables, y presentan sólo variaciones poco significativas. En este momento las decisiones que se tomen serán mucho más confiables. Sin embargo, no todas las variables convergen al estado estable con la misma rapidez: algunas pasan con más lentitud que otras de un estado transitorio a uno estable. Es responsabilidad del analista verificar que las variables de decisión del modelo se encuentren en estado estable antes de detener el tiempo de la simulación.

Pasos para realizar un estudio de simulación

Debemos considerar que − igual a lo que ocurre con otras herramientas de investigación− la realización de un estudio de simulación requiere la ejecución de una serie de actividades y análisis que permitan sacarle el mejor provecho.

A continuación, se mencionan los pasos básicos para realizar un estudio de simulación, aunque en muchas ocasiones será necesario agregar otros o suprimir algunos de los aquí enumerados, de acuerdo con la problemática en cuestión.

1. Definición del sistema bajo estudio. En esta etapa es necesario conocer el sistema a modelar. Para ello se requiere saber qué origina el estudio de simulación y establecer los supuestos del modelo: es conveniente definir con claridad las variables de decisión del modelo, determinar las interacciones entre éstas, y establecer con precisión los alcances y limitaciones que aquel podría llegar a tener. Antes de concluir este paso es recomendable contar con la información suficiente para lograr establecer un modelo conceptual o un mapa mental del sistema bajo estudio, el cual debe incluir sus fronteras y todos los elementos que lo componen, además de las interacciones entre ellos, los flujos de productos, las personas y los recursos, así como las variables de mayor interés para el problema.

2. Generación del modelo de simulación base. Una vez que se ha definido el sistema en términos de un modelo conceptual, la siguiente etapa del estudio consiste en la generación de un modelo de simulación base. No es preciso que este modelo sea demasiado detallado, pues se requiere mucha más información estadística sobre el comportamiento de las variables de decisión del sistema. La generación de este modelo es el primer reto para el programador de la simulación, ya que debe traducir a un lenguaje de simulación la información que se obtuvo en la etapa de definición del sistema, e incluir las interrelaciones de todos los posibles subsistemas que existan en el problema a modelar. En caso de que se requiera una animación, éste también es un buen momento para definir qué gráfico puede representar mejor el sistema que se modela. Igual que ocurre en otras ramas de la investigación de operaciones, "la simulación exige ciencia y arte en la generación de sus modelos". El realizador de un estudio de simulación es, en este sentido, como un artista que debe usar toda su creatividad para realizar un buen modelo que refleje la realidad del problema que se está analizando. Conforme se avanza en el modelo base se pueden ir agregando las variables aleatorias del sistema, con sus respectivas distribuciones de probabilidad asociadas.

3. Recolección y análisis de datos. Es posible comenzar la recopilación de la información estadística de las variables aleatorias del modelo de manera paralela a la generación del modelo base. En esta etapa se debe establecer qué información es útil para la determinación de las distribuciones de probabilidad asociadas a cada una de las variables aleatorias necesarias para la simulación. Aunque en algunos casos se logra contar con datos estadísticos, suele suceder que el formato de almacenamiento o de generación de reportes no es el apropiado para facilitar el estudio. Por ello, es muy importante dedicar el tiempo suficiente a esta actividad. De no contar con la información requerida o en caso de desconfiar de la disponible, será necesario realizar un estudio estadístico del comportamiento de la variable que se desea identificar, para luego incluirla en el modelo. Más adelante se hará el análisis de los datos indispensables para asociar una distribución de probabilidad a una variable aleatoria, así como las pruebas que se le deben aplicar. Al finalizar la recolección y análisis de datos para todas las variables del modelo, se tendrán las condiciones para generar una versión preliminar del problema que se está simulando.

4. Generación del modelo preliminar. En esta etapa se integra la información obtenida a partir del análisis de los datos, los supuestos del modelo y todos los datos necesarios para crear un modelo lo más cercano posible a la realidad del problema bajo estudio. En algunos casos − sobre todo cuando se trata del diseño de un nuevo proceso o esquema de trabajo− no se cuenta con información estadística, por lo que debe estimarse un rango de variación o determinar (con ayuda del cliente) valores constantes que permitan realizar el modelado. Si éste puede, con base en su experiencia, realizar algunas sugerencias de distribuciones de probabilidad que comúnmente se asocien al tipo de proceso que se desea incluir en el modelo. Al finalizar esta etapa el modelo está listo para su primera prueba: su verificación o, en otras palabras, la comparación con la realidad.

5. Verificación del modelo. Una vez que se han identificado las distribuciones de probabilidad de las variables del modelo y se han implantado los supuestos acordados, es necesario realizar un proceso de verificación de datos para comprobar la propiedad de la programación del modelo, y comprobar que todos los parámetros usados en la simulación funcionen correctamente. Ciertos problemas, en especial aquellos que requieren muchas operaciones de programación o que involucran distribuciones de probabilidad difíciles de programar, pueden ocasionar que el comportamiento del sistema sea muy diferente del que se esperaba. Por otro lado, no se debe descartar la posibilidad de que ocurran errores humanos al alimentar el modelo con la información. Incluso podría darse el caso de que los supuestos iniciales hayan cambiado una o varias veces durante el desarrollo del modelo. Por lo tanto, debemos asegurarnos de que el modelo que se va a ejecutar esté basado en los más actuales.

Una vez que se ha completado la verificación, el modelo está listo para su comparación con la realidad del problema que se está modelando. A esta etapa se le conoce también como validación del modelo.

6. Validación del modelo. El proceso de validación del modelo consiste en realizar una serie de pruebas simultáneas con información de entrada real para observar su comportamiento y analizar sus resultados.

Si el problema bajo simulación involucra un proceso que se desea mejorar, el modelo debe someterse a prueba con las condiciones actuales de operación, lo que nos dará como resultado un comportamiento similar al que se presenta realmente en nuestro proceso. Por otro lado, si se está diseñando un nuevo proceso la validación resulta más complicada. Una manera de validar el modelo, en este caso, consiste en introducir algunos escenarios sugeridos por el cliente y validar que el comportamiento sea congruente con las expectativas que se tienen de acuerdo con la experiencia. Cualquiera que sea la situación, es importante que el analista conozca bien el modelo, de manera que pueda justificar aquellos comportamientos que sean contrarios a la experiencia de los especialistas que participan en su validación.

7. Generación del modelo final. Una vez que el modelo se ha validado, el analista está listo para realizar la simulación y estudiar el comportamiento del proceso. En caso de que se desee comparar escenarios diferentes para un mismo problema, éste será el modelo raíz; en tal situación, el siguiente paso es la definición de los escenarios a analizar.

8. Determinación de los escenarios para el análisis. Tras validar el modelo es necesario acordar con el cliente los escenarios que se quieren analizar. Una manera muy sencilla de determinarlos consiste en utilizar un escenario pesimista, uno optimista y uno intermedio para la variable de respuesta más importante. Sin embargo, es preciso tomar en cuenta que no todas las variables se comportan igual ante los cambios en los distintos escenarios, por lo que tal vez sea necesario que más de una variable de respuesta se analice bajo las perspectivas pesimista, optimista e intermedia. El riesgo de esta situación radica en que el analista podría realizar un diseño de experimentos capaz de generar una gran cantidad de réplicas, lo que redundaría en un incremento considerable de costo, análisis y tiempo de simulación. Es por ello que muchos paquetes de simulación cuentan con herramientas para realizar este proceso, las cuales eliminan la animación y acortan los tiempos de simulación. Estas herramientas permiten realizar varias réplicas del mismo escenario para obtener resultados con estadísticas importantes respecto de la toma de decisiones (por ejemplo, los intervalos de confianza).

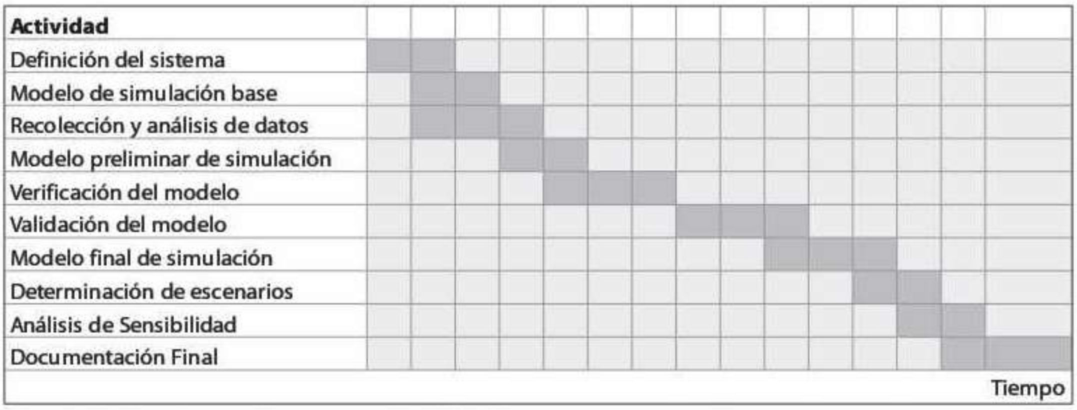
Por su parte, el analista también puede contribuir a la selección de escenarios, sugiriendo aquellos que considere más importantes; al hacerlo dará pie a que se reduzca el número de combinaciones posibles.

9. Análisis de sensibilidad. Una vez que se obtienen los resultados de los escenarios es importante realizar pruebas estadísticas que permitan comparar los escenarios con los mejores resultados finales. Si dos de ellos tienen resultados similares será necesario comparar sus intervalos de confianza respecto de la variable de respuesta final. Si no hay intersección de intervalos podremos decir con certeza estadística que los resultados no son iguales; sin embargo, si los intervalos se sobreponen será imposible definir estadísticamente que una solución es mejor que otra. Si se desea obtener un escenario "ganador", será necesario realizar más réplicas de cada modelo y/o incrementar el tiempo de simulación de cada corrida. Con ello se busca acortar los intervalos de confianza de las soluciones finales y, por consiguiente, incrementar la probabilidad de diferenciar las soluciones.

10. Documentación del modelo, sugerencias y conclusiones. Una vez realizado el análisis de los resultados, es necesario efectuar toda la documentación del modelo. Esta documentación es muy importante, pues permitirá el uso del modelo generado en caso de que se requieran ajustes futuros. En ella se deben incluir los supuestos del modelo, las distribuciones asociadas a sus variables, todos sus alcances y limitaciones y, en general, la totalidad de las consideraciones de programación. También es importante incluir sugerencias tanto respecto del uso del modelo como sobre los resultados obtenidos, con el propósito de realizar un reporte más completo. Por último, deberán presentarse las conclusiones del proyecto de simulación, a partir de las cuales es posible obtener los reportes ejecutivos para la presentación final.

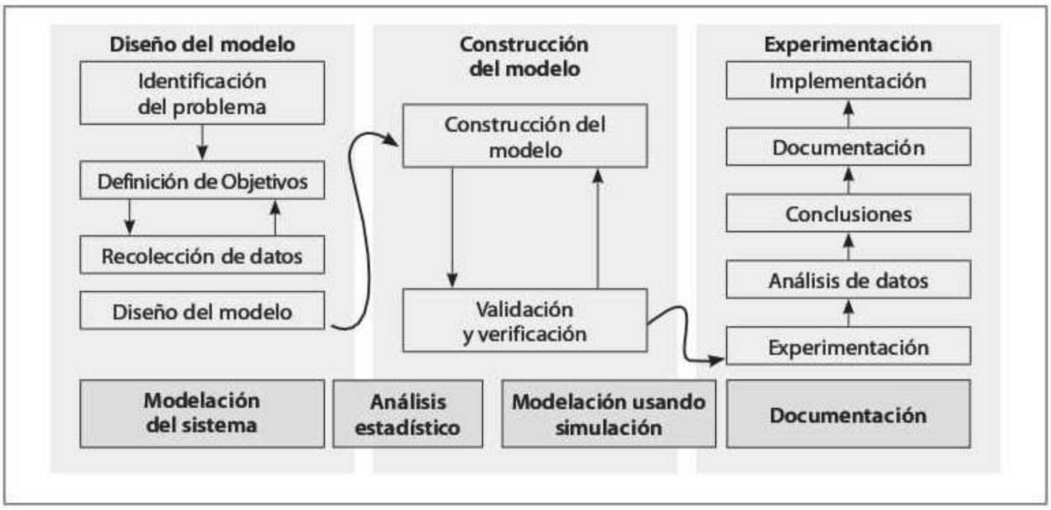
En la figura 1.3 se presenta una gráfica de Gantt en donde se muestra, a manera de ejemplo, la planificación de los pasos para realizar una simulación que hemos comentado en esta sección.

Figura 1.3. Gráfica de Gantt de un proyecto de simulación



Podemos decir que la realización de un proyecto de simulación implica tres grandes fases. El diseño del modelo del problema a analizar, la construcción del modelo y la experimentación que se puede realizar con éste. La figura 1.4 ilustra una manera alternativa de presentar este mismo proceso.

Figura 1.4. Representación de un ciclo de un proyecto de simulación



Como podemos observar en la figura 1.3, la construcción del modelo es sólo una parte del beneficio de una herramienta como simulación. También se puede usar para hacer análisis con diferentes escenarios y tomar decisiones sustentadas estadísticamente.

Problemas

1. Determine los elementos de cada uno de los siguientes sistemas, de acuerdo con lo que se ha comentado.

a) La sala de emergencia de un hospital
b) Un banco mercantil

c) Una línea telefónica de atención a clientes
d) La recepción de un hotel
é) Un taller de tornos
f) El proceso de pintura de un automóvil
g) Un hospital
h) Un sistema de respuesta en caso de emergencias

2. Defina los elementos de cada uno de estos sistemas, de acuerdo con lo que analizó anteriormente.

a) El sistema de mantenimiento de los equipos de una empresa, llevado a cabo por una cuadrilla de personas
b) Un aeropuerto
c) Una bodega de distribución de productos
d) Una línea embotelladora de refrescos
e) Un sistema de control de tránsito para la ciudad
f) Una línea de armado de refrigeradores
g) Un supermercado
h) Un taller de mantenimiento de moldes

3. ¿Cuáles podrían ser las entidades de cada uno de los siguientes sistemas?

a) Un cajero automático
b) Un sistema automático de inspección de botellas
c) Una máquina dobladora de lámina
d) Un proceso de empaque de televisores
e) Una sala de urgencias de un hospital
f) Un almacén de producto terminado
g) Una línea de embutido de carnes

4. ¿Cuáles podrían ser las entidades de cada uno de los siguientes sistemas?

a) Un sistema de distribución de paquetería
b) Un sistema de cobranza
c) Un conmutador telefónico
d) Un departamento de devolución de mercancía
e) El abordaje de un crucero por el Caribe
f) Un taller de reparación de motores
g) Un centro de despacho y asignación de pedidos de productos

5. Determine qué atributos podrían ser relevantes para la simulación de los siguientes sistemas.

a) El maquinado de una familia de engranes
b) Un proceso de pintura de refrigeradores
c) Un sistema de recepción de materia prima
d) Un proceso de soldadura para varios productos
é) Una sala de tratamientos dentales

f) Un sistema de registro de pacientes en un hospital
g) Un sistema de localización de mercancía por radio frecuencia

6. ¿Qué atributos podrían ser relevantes para la simulación de los siguientes sistemas?

a) Un proceso de empaque de 10 productos por caja, donde cada producto es diferente
b) Un proceso de separación de 3 productos para enviarlos a sus respectivas áreas de procesamiento
c) Un sistema de inspección de calidad de piezas maquinadas
d) Un sistema de programación de mantenimiento que califica sus trabajos como urgentes y no urgentes, además de asignarles etiquetas de "Pendiente de asignar", "Asignado", "En proceso" y "Terminado"

7. Especifique las variables que podrían ser relevantes en los siguientes sistemas.

a) El maquinado de una familia de engranes
b) Un proceso de pintura de refrigeradores
c) Un sistema de recepción de materia prima
d) Un proceso de soldadura para varios productos
e) Una sala de tratamientos dentales
f) Un sistema de registro de pacientes en un hospital
g) Un sistema de localización de mercancía por radio frecuencia

8. De los siguientes sistemas, ¿cuáles podrían ser clasificados como eventos?

a) Una sala de urgencias de un hospital
b) Un sistema de emergencias epidemiológicas
c) Un sistema de control de calidad de una planta que fabrica botellas
d) Un restaurante de comida rápida
e) Una terminal de camiones de carga
f) Una aduana comercial de importaciones y exportaciones

9. Determine el promedio móvil de los números de la siguiente tabla y grafique los promedios. ¿Llega a estado estable la gráfica? En caso afirmativo, ¿a partir de qué valor se puede considerar el inicio del estado estable?

0.6435	0.9849	0.9152	0.8327	0.2803	0.1730	0.9002	0.1853	0.3499	0.7368
0.0168	0.1133	0.5673	0.5013	0.0330	0.9814	0.7602	0.1865	0.5518	0.1064
0.3553	0.3846	0.3063	0.1319	0.3769	0.3809	0.5290	0.8586	0.6225	0.5425
0.1242	0.2806	0.9285	0.4257	0.5007	0.9997	0.2072	0.0580	0.5460	0.3910
0.4006	0.2376	0.3883	0.7998	0.9111	0.5554	0.6080	0.6724	0.0332	0.9451
0.2944	0.5657	0.4072	0.6198	0.6809	0.7154	0.8810	0.3028	0.5950	0.3131
0.1438	0.7546	0.0982	0.4946	0.1837	0.5438	0.6598	0.6460	0.8039	0.1599
0.7612	0.8071	0.5163	0.5810	0.6720	0.6020	0.0120	0.4502	0.4228	0.2734
0.4776	0.1012	0.0935	0.4389	0.7195	0.7738	0.8939	0.5225	0.1220	0.8265
0.6031	0.9288	0.1209	0.5537	0.1219	0.9657	0.9734	0.9955	0.2281	0.1084

Promedio móvil: $r_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$ *para* $n = 1, 2, \ldots, 100$

10. Determine el promedio móvil de los números de la siguiente tabla y grafique los promedios. ¿Llega a estado estable la gráfica? En caso afirmativo, ¿a partir de qué valor se puede considerar el inicio del estado estable?

0.1762	0.0477	0.5245	0.6735	0.9922	0.3669	0.1380	0.6584	0.5371	0.4580
0.9750	0.7266	0.2094	0.5885	0.5842	0.5057	0.2614	0.6131	0.8510	0.9502
0.9770	0.6959	0.2955	0.4447	0.2856	0.3545	0.2401	0.5406	0.0547	0.4552
0.4181	0.7080	0.5093	0.1922	0.0685	0.3380	0.7969	0.3670	0.4124	0.9608
0.4409	0.8448	0.4257	0.0763	0.0513	0.8583	0.9419	0.8389	0.0096	0.0633
0.6124	0.8186	0.1288	0.8095	0.1313	0.8238	0.9628	0.0736	0.8992	0.3657
0.7017	0.8310	0.2849	0.5471	0.3716	0.7481	0.0009	0.0936	0.2608	0.5415
0.9343	0.5679	0.0116	0.3081	0.6192	0.4047	0.9659	0.5638	0.7183	0.5649
0.1087	0.8235	0.9399	0.6169	0.0711	0.3051	0.4250	0.5276	0.2523	0.1242
0.8740	0.0961	0.2166	0.5799	0.2477	0.1443	0.4937	0.7373	0.9575	0.1706

Promedio móvil: $r_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$ *para* $n = 1, 2, \ldots, 100$

11. Genere en una hoja de cálculo 100 números con la función $x_i = -3\ln(1 -)$; donde r; es un número pseudoleatorio entre cero y uno, obtenido a partir de la función ALEATORIO de la hoja de cálculo. Suponga que estos valores son tiempos de proceso de cierta pieza. Determine un promedio móvil de estos valores conforme se va realizando el procesamiento de las piezas, y grafique ese

promedio. ¿El tiempo promedio de proceso es estable? ¿Y si en lugar de 100 se generan 200 números? (Sugerencia: Para evitar que se recalculen los números aleatorios es necesario copiarlos y pegarlos mediante pegado especial de sólo valores).

12. En una hoja de cálculo genere 100 números con la función x¡ =5 + 10/;.;donde/;.es un número pseudoaleatorio entre cero y uno, obtenido a partir de la función ALEATORIO de la hoja de cálculo. Suponga que estos valores son tiempos de atención a clientes en un banco. Determine un promedio móvil de estos valores conforme se va realizando la atención de los clientes, y grafique ese promedio. ¿El tiempo promedio de atención a clientes es estable? ¿Qué pasa si ahora se generan 200 números?

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

García Dunna Eduardo, García Reyes Heriberto y Cárdenas Barrón Leopoldo. (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. Ed. Pearson.

Goodsell, C. A. y Van Kely(T. J. (2004)."lnventory Management Simulation at-CAT Logistics", En J.A. Joines, R. R. Barton, K. Kang, y P. A. Fishwick (Eds).

Chan, F.T.S., N. K. H., Tang, H. C. W., Lau, y R. W. L., Ip (2002). "A Simulation Approach in Supply Chain Management", Integrated Manufacturing Systems, volumén 13 (número 2).

O'Kane, J. (2004)."Simulating production performance: cross case analysis and policy implications" Industrial Management and Data Systems, volumén 104 (número 4).

Mahanti, R. y Antony, J (2005)."Confluence of Six Sigma, Simulation and Software Development" Managerial Auditing Journal, volumén 20 (número 7).

Strauss, U. (2006). "Using a Business Simulation to Develop Key Skills - the MERKIS Experience", Industrial and Commercial Training, volumén 38 (número 4).

García, H. y Centeno, M. A. (2009)."S.U.C.C.E.S.S.F.U.L.: a Frameworkfor Designing Discrete Event Simulation Course", Proceed’mgsofthe 2009 WinterSimulation Conference, M. D. Rossetti, R. R. Hill, B. Johansson, A. Dunkin y R. G. Ingalls (Eds).

I. Número de práctica: 2

II. Nombre:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método algoritmo de cuadrados medios

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas

IV. Introducción.

Para poder realizar una simulación que incluya variabilidad dentro de sus eventos, es preciso generar una serie de números que sean aleatorios por sí mismos, y que su aleatoriedad se extrapole al modelo de simulación que se está construyendo. Como puede comprender, en la construcción del modelo los números aleatorios juegan un papel relevante.

Así, una de las primeras tareas que es necesario llevar a cabo consiste en determinar si los números que utilizaremos para "correr" o ejecutar la simulación son realmente aleatorios o no. Por desgracia, precisar lo anterior con absoluta certidumbre resulta muy complicado, ya que para ello tendríamos que generar un número infinito de valores que nos permitiera comprobar la inexistencia de correlaciones entre ellos. Esto sería muy costoso y tardado, además volvería impráctico el uso de la simulación aun con las computadoras más avanzadas.

A pesar de lo anterior, podemos asegurar que el conjunto de números que utilizaremos en una simulación se comporta de manera muy similar a un conjunto de números totalmente aleatorios; por ello es que se les denomina números pseudoaleatorios. Casi todas las aplicaciones comerciales tienen varios generadores de números pseudoaleatorios que pueden generar un conjunto muy grande de números sin mostrar correlación entre ellos.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Para realizar una simulación se requieren números aleatorios en el intervalo (0,1), a los cuales se hará referencia como r_i es decir, una secuencia r_i= { r_1, r_2, r_3,..., r_n } que contiene "*n*" números, todos ellos diferentes. El valor "*n*" recibe el nombre de periodo o ciclo de vida del generador que creó la secuencia r_i.

Los r_i constituyen la parte medular de la simulación de procesos estocásticos, y por lo regular, se usan para generar el comportamiento de variables aleatorias, tanto continuas como discretas. Debido a que no es posible generar números realmente aleatorios, consideramos los r_f como números pseudoaleatorios generados por medio de algoritmos determinísticos que requieren parámetros de arranque.

Para simular el comportamiento de una o más variables aleatorias es necesario contar con un conjunto suficientemente grande de r_i, que permita, por ejemplo, que la secuencia tenga al menos un periodo de vida de $n=2^{31}$=2,147,483,648. De acuerdo con L'Ecuyer una secuencia de r_i con periodo de vida de $n = 2^{31}$ es relativamente pequeña; de hecho, incluso una secuencia de r_i que contenga un ciclo de vida de $n = 2^{64}$ se considera pequeña. En la actualidad, contamos ya con generadores y procesadores capaces de construir una secuencia de r_i con periodo de vida de $n = 2^{200}$.

Tal vez se preguntará; ¿por qué debe interesarnos construir una secuencia de números r_i lo bastante grande? A continuación ilustraremos la razón mediante un ejemplo.

Suponga que queremos simular el tiempo de atención a clientes en un banco que tiene 5 cajeros en paralelo, cada uno de los cuales atiende alrededor de 50 clientes diarios. Para simular el tiempo de atención se requiere un generador de variable aleatoria en función de r_f como por ejemplo $T_i = 5 + 2r_f$ expresado en minutos para toda *i* = 1, 2, 3 ... *n*. Si simulamos el tiempo de atención de manera aislada, es decir, sin considerar el tiempo transcurrido desde la llegada de éstos, serán necesarios 5 x 50 = 250 números r_i para simular un día; si deseáramos simular 5 días se necesitarían 250 x 5 = 1250 r_f Ahora bien, si consideramos el tiempo desde la llegada de los clientes, precisaríamos de 250 r_i para simular el tiempo transcurrido desde la llegada al banco de los 250 clientes por día, y 250 x 5 = 1250 r_i para simular el correspondiente al total de clientes atendidos durante 5 días. Por lo tanto, se requerirán 2500 números pseudoaleatorios r_i para simular la operación del banco durante 5 días.

Como se mencionó anteriormente, los resultados no pueden basarse en una sola simulación del sistema; por el contrario, es necesario realizar varias réplicas de la misma, corriendo cada una de ellas con números pseudoaleatorios diferentes. Si retomamos el ejemplo del banco, simular 5 días otra vez significa que necesitamos otros 2500 números pseudoaleatorios en el intervalo (0,1). En consecuencia, se requieren 5000 r_i para realizar la simulación del sistema de atención a clientes con dos réplicas.

Usted podrá imaginar cuántos números r_i serán necesarios para simular la operación del banco durante un año con 9 réplicas, o cuántos números *r*, se requieren para simular un sistema productivo durante un año con varias líneas de producción, y cada una con varias estaciones, y cada estación con uno o más procesos.

Dada la importancia de contar con un conjunto de r_i suficientemente grande, en esta sección se presentan diferentes algoritmos determinísticos para obtenerlo. Por otra parte, es conveniente señalar que el conjunto de r_i debe ser sometido a una variedad de pruebas para verificar si los números que lo conforman son realmente independientes y uniformes. Más adelante veremos las pruebas estadísticas que determinan si un conjunto r_i tiene las propiedades de independencia y uniformidad . Una vez generado el conjunto r_i mediante un algoritmo determinístico, es necesario someterlo a las pruebas antes mencionadas: si las supera, podrá utilizarse en la simulación; de lo contrario, simplemente deberemos desecharlo.

Un conjunto de r_i debe seguir una distribución uniforme continua, la cual está definida por:

$$f(r)=\begin{cases} 1, & 0\leq r\leq 1 \\ 0, & \textit{en cualquier otro valor} \end{cases}$$

Generar un conjunto de r_i, es una tarea relativamente sencilla; para ello, el lector sólo tiene que diseñar su propio algoritmo de generación. Lo que resulta difícil es diseñar un algoritmo que genere un conjunto de r_i con periodo de vida lo bastante grande (*N*), y que además pase sin problema las pruebas de uniformidad e independencia, lo cual implica evitar problemas como éstos:

- Que los números del conjunto r_i no estén uniformemente distribuidos, es decir, que haya demasiados r_i en un subintervalo y en otro muy pocos o ninguno.
- Que los números r_i generados sean discretos en lugar de continuos.
- Que la media del conjunto sea muy alta o muy baja, es decir, que esté por arriba o por debajo de *1/2* .
- Que la varianza del conjunto sea muy alta o muy baja, es decir, que se localice por arriba o por debajo del *1/2*

En ocasiones se presentan también anomalías como números r_i seguidos por arriba o por debajo de la media; secuencia de r_i por arriba de la media, seguida de una secuencia por debajo de la media, y viceversa, o varios r_i seguidos en forma ascendente o descendente.

A continuación, se presentan diferentes algoritmos determinísticos para generar los r_i, los cuales se clasifican en algoritmos no congruenciales y congruenciales. Los algoritmos no congruenciales que analizaremos en esta práctica son: cuadrados medios, productos medios y multiplicador constante. Entre los algoritmos congruenciales se encuentran los algoritmos congruenciales lineales y los no lineales. En este libro abordaremos los algoritmos congruenciales lineales − tales como algoritmo congruencial lineal, multiplicativo y aditivo−, y los algoritmos no lineales, como el algoritmo de Blum, Blum y Shub, y el congruencial cuadrático.

Algoritmo de cuadrados medios

Este algoritmo no congruencial fue propuesto en la década de los cuarenta del siglo XX por Von Neuman y Metrópolis. Requiere un número entero detonador (llamado semilla) con *D* dígitos, el cual es elevado al cuadrado para seleccionar del resultado los *D* dígitos del centro; el primer número r_i se determina simplemente anteponiendo el " 0 " a esos dígitos. Para obtener el segundo r_i se sigue el mismo procedimiento, sólo que ahora se elevan al cuadrado los D dígitos del centro que se seleccionaron para obtener el primer r_f Este método se repite hasta obtener *n* números r_f A continuación se presentan con más detalle los pasos para generar números con el algoritmo de cuadrados medios.

1. Seleccionar una semilla (X_0) con *D* dígitos (*D* > 3).
2. Sea Y_0 = resultado de elevar X_0 al cuadrado; sea X_i = los *D* dígitos del centro, y sea r_i = 0. D dígitos del centro.
3. Sea Y_i= resultado de elevar X_i al cuadrado; sea X_{i+1} = los *D* dígitos del centro, y sea r_i = 0. *D* dígitos del centro para toda *i*= 1, 2,3 ,... *n*.
4. Repetir el paso 3 hasta obtener los *n* números r_i deseados.

Nota : Si no es posible obtener los *D* dígitos del centro del número Y_f agregue ceros a la izquierda del número Y_f Para ilustrar la mecánica del algoritmo de cuadrados medios se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1

Generar los primeros 5 números r_i a partir de una semilla X_0 = 5735, de donde se puede observar que *D* = 4 dígitos.

Solución

$Y_0 = (5735)^2 = 32890225$ $\quad X_1 = 8902$ $\quad r_1 = 0.8902$
$Y_1 = (8902)^2 = 79245604$ $\quad X_2 = 2456$ $\quad r_2 = 0.2456$

$Y_2 = (2456)^2 = 06031936$ $X_3 = 0319$ $r_3 = 0.0319$
$Y_3 = (0319)^2 = 101761$ $X_4 = 0176$ $r_4 = 0.0176$
$Y_4 = (0176)^2 = 030976$ $X_5 = 3097$ $r_5 = 0.3097$

El algoritmo de cuadrados medios generalmente es incapaz de generar una secuencia de r_i con periodo de vida *n* grande. Además, en ocasiones sólo es capaz de generar un número, por ejemplo, si $X_0 = 1000$, entonces $X_1 = 0000$; $r_i = 0.0000$ y se dice que el algoritmo se degenera con la semilla de $X_0 = 1000$.

Ejercicios resueltos

1.- Los miembros de un equipo ciclista se dividen al azar en tres grupos que entrenan con métodos diferentes. El primer grupo realiza largos recorridos a ritmo pausado, el segundo grupo realiza series cortas de alta intensidad y el tercero trabaja en el gimnasio con pesas y se ejercita en el pedaleo de alta frecuencia. Después de un mes de entrenamiento se realiza un test de rendimiento consistente en un recorrido cronometrado de 9 Km. Los tiempos empleados fueron los siguientes:

Método 1	Método 2	Método 3
15	14	13
16	13	12
14	15	11
15	16	14
17	14	11

A un nivel de confianza del 95% ¿Puede considerarse que los tres métodos producen resultados equivalentes? O por el contrario ¿Hay algún método superior a los demás?

Solución: Comenzamos calculando los totales y los cuadrados de los totales divididos por el número de observaciones:

	Método 1	Método 2	Método 3	Total	Sum^2/n
suma	77	72	61	210	2940
Sum^2/n	1,185,8	1,036,8	744,2	2,966,8	

A continuación, calculamos los cuadrados de las observaciones y su total:

Método 1	Método 2	Método 3	
225	196	169	
256	169	144	
196	225	121	
225	256	196	
289	196	121	
1191	1042	751	2984

A partir de estas cantidades básicas calculamos las Sumas de Cuadrados:
SC(total) = 2984 - 2940 = 44
SC(intra) = 2984 – 2966,8 = 17,2
SC(entre) = 2966,8 – 2940 = 26,8

Los cuadrados medios serán:

CM(entre) = 26,8/2 = 13,4
CM(intra) = 17,2/12 = 1,43

Por consiguiente el estadístico de contraste vale:

F = 13,4/ 1,43 = 9,37

El valor de la F teórica con 2 y 12 grados de libertad, a un nivel de confianza del 95% es 3,89. Por consiguiente se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los tres métodos de entrenamiento producen diferencias significativas.

2.- Una lista de palabras sin sentido se presenta en la pantalla del ordenador con cuatro procedimientos diferentes, asignados al azar a un grupo de sujetos. Posteriormente se les realiza una prueba de recuerdo de dichas palabras, obteniéndose los siguientes resultados:

Procedimiento 1	Procedimiento 2	Procedimiento 3	Procedimiento 4
5	9	8	1
7	11	6	3
6	8	9	4
3	7	5	5
9	7	7	1
7		4	4
4		4	
2			

¿Qué conclusiones pueden sacarse acerca de las cuatro formas de presentación, con un nivel de significación del 5%?

Solución: Comenzamos calculando los totales y los cuadrados de los totales divididos por el número de observaciones:

	Proced 1	Proced 2	Proced 3	Proced 4	**Total**	**Sum^2 /n**
suma	43	42	43	18	146	819,8
Sum^2 /n	231,2	352,8	264,1	54	902	

A continuación, calculamos los cuadrados de las observaciones y su total:

Procedimiento 1	Procedimiento 2	Procedimiento 3	Procedimiento 4	
25	81	64	1	
49	121	36	9	
36	64	81	16	
9	49	25	25	
81	49	19	1	
49		16	16	
16		16		
4				
269	364	287	68	988

A partir de estas cantidades básicas calculamos las Sumas de Cuadrados:

SC(total) = 988 – 819,8 = 168,2
SC(intra) = 988 – 902 = 86
SC(entre) = 902 – 819,8 = 82,2

Los cuadrados medios serán:

CM(entre) = 82,2/3 = 27,4
CM(intra) = 86/22 = 3,9

Por consiguiente, el estadístico de contraste vale:

F = 27,4/ 3,9 = 7,03

El valor de la F teórica con 3 y 22 grados de libertad, a un nivel de confianza del 95% es 3,05. Por consiguiente, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los cuatro procedimientos de presentación producen diferencias significativas.

Ejercicio

1. Programe en una hoja de cálculo la generación automática de números pseudoaleatorios con el método de cuadrados medios. Genere una muestra de 50 números con la semilla 5735, y determine con un nivel de aceptación de 90% si son uniformes entre 0 y 1.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) Nueva Jersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random Number Generator, SIAMJ. Comput, volumén 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. Of Operations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Theory to Numérica Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

García Duna, Eduardo, García Reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 3

II. Nombre:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método algoritmo de productos medios.

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas

IV. Introducción.

Un elemento importante en simulación es tener rutinas que generen variables aleatorias con distribuciones específicas: uniforme, normal, etc. Para ello la base es generar una secuencia de números aleatorios distribuidos uniformemente entre 0 y 1.

La clave es generar números enteros aleatorios y uniformemente distribuidos en un cierto intervalo de una manera eficiente.

La mecánica de generación de números pseudoaletorios de este algoritmo no congruencial es similar al del algoritmo de cuadrados medios. La diferencia entre ambos radica en que el algoritmo de productos medios requieren 2 semillas ambas con *D* dígitos; además, en lugar de elevarlas al cuadrado, las semillas se multiplican y del producto se seleccionan los D dígitos del centro, los cuales forman el primer número pseudoaleatorio r_i= 0. Después se elimina una semilla y las otras se multiplican por el primer número D dígitos, para luego seleccionar del producto los *D* dígitos que conformarán un segundo número r_i entonces *e* elimina la segunda semilla y multiplica por el primer número de *D* dígitos por el segundo número de *D* dígitos, del producto se obtiene el tercer número r_i. Siempre se irá eliminando el número más antiguo y el procedimiento se repetirá hasta generar los " *n* " números pseudoaleatorios.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con el siguiente tema de la materia de Simulación:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Algoritmo de productos medios

La mecánica de generación de números pseudoaleatorios de este algoritmo no congruencial es similar a la del algoritmo de cuadrados medios. La diferencia entre ambos radica en que el algoritmo de productos medios requiere dos semillas, ambas con *D* dígitos; además, en lugar de elevarlas al cuadrado, las semillas se multiplican y del producto se seleccionan los *D* dígitos del centro, los cuales formarán el primer número pseudoaleatorio r_i = 0. *D* dígitos. Después se elimina una semilla, y la otra se multiplica por el primer número de *D* dígitos, para luego seleccionar del producto los *D* dígitos que conformarán un segundo número r_i Entonces se elimina la segunda semilla y se multiplican el primer número de D dígitos por el segundo número de *D* dígitos; del producto se obtiene el tercer número r_i. Siempre se irá eliminando el número más antiguo, y el procedimiento se repetirá hasta generar los *n* números pseudoaleatorios. A continuación, se presentan con más detalle los pasos del método para generar números con el algoritmo de producto medios.

1. Seleccionar una semilla (X_0) con *D* dígitos (*D* > 3)
2. Seleccionar una semilla (X_1) con *D* dígitos (*D* > 3)
3. Sea Y_0= X_0 * X_1; sea X_2= los *D* dígitos del centro, y sea r_i = 0. *D* dígitos del centro.
4. Sea Y_i = X_i* X_{i+1}; sea X_{i+2} = los *D* dígitos del centro, y sea r_{i+1} = 0. *D* dígitos del centro para toda *i* = 1, 2, 3 ,... n.
5. Repetir el paso 4 hasta obtener los n números r_i deseados.

Nota: Si no es posible obtener los *D* dígitos del centro del número Y_i, agregue ceros a la izquierda del número $Y_{i.}$

Para ilustrar la mecánica del algoritmo de productos medios se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1

Generar los primeros 5 números r_i, a partir de las semillas X_0 = 5015 y X_1=5734; observe que ambas semillas tienen *D* = 4 dígitos.

Solución:

$Y_0 = (5015)(5734) = 28756010$	$X_2 = 7560$	$r_1 = 0.7560$
$Y_1 = (5734)(7560) = 43349040$	$X_3 = 3490$	$r_2 = 0.3490$
$Y_2 = (7560)(3490) = 26384400$	$X_4 = 3844$	$r_3 = 0.3844$
$Y_3 = (3490)(3844) = 13415560$	$X_5 = 4155$	$r_4 = 0.4155$
$Y_4 = (3844)(4155) = 15971820$	$X_6 = 9718$	$r_5 = 0.9718$

Ejercicio resuelto

$X_0 = 36$ $\quad X_{00} = 97$

$X_1 = (36)(97) = 3{,}492$	$X_1 = 49$	$r_1 = 0.49$
$X_2 = (97)(49) = 4{,}753$	$X_2 = 75$	$r_2 = 0.75$
$X_3 = (49)(75) = 3{,}675$	$X_3 = 67$	$r_3 = 0.67$
$X_4 = (75)(67) = 5{,}025$	$X_4 = 02$	$r_4 = 0.02$

Ejercicio

Generar los primeros 5 números r_i, a partir de las semillas $X_0 = 3017$ y X_1=6872; observe que ambas semillas tienen D = 4 dígitos.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará el ejercicio realizado de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) Nueva Jersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random Number Generator, SIAMJ. Comput, volumén 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. Of Operations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applica-tions o f Number Theory to Numérica Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

García Duna, Eduardo, García Reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 4

II. Nombre:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método algoritmo de multiplicador constante.

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas

IV. Introducción.

Es similar al algoritmo de productos medios. La diferencia entre ambos radica en que el algoritmo de productos requiere dos semillas, ambas con *D* dígitos, además, en lugar de elevarlas al cuadrado las semillas se multiplican y del producto se seleccionan los *D* dígitos del dentro, los cuales forman el primer número pseudoaleatorio r_i = 0 *D* dígitos.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con el siguiente tema de la materia de Simulación:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Algoritmo de multiplicador constante

Este algoritmo no congruencial es similar al algoritmo de productos medios. Los siguientes son los pasos necesarios para generar números pseudoaleatorios con el algoritmo de multiplicador constante.

1. Seleccionar una semilla (X_0) con *D* dígitos (*D* > 3).
2. Seleccionar una constante (a) con *D* dígitos (*D* > 3).
3. Sea Y_0 = *a* *$X_{0,}$ sea X_1 = los *D* dígitos del centro, y sea r_i= 0. *D* dígitos del centro.
4. Sea Y_i= *a**X_i; sea X_{i+1}, = los *D* dígitos del centro, y sea r_{i+1} = 0. *D* dígitos del centro para toda *i* = 1, 2, 3 ... n.
5. Repetir el paso 4 hasta obtener los *n* números r_i deseados.

Nota: Si no es posible obtener los *D* dígitos del centro del número Y_i, agregue ceros a la izquierda del número Y_i.

Para ilustrar la mecánica del algoritmo de multiplicador constante se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1

Generar los primeros 5 números r_i a partir de la semilla X_0 = 9803 y con la constante *a* = 6965. Observe que tanto la semilla como la constante tienen *D* = 4 dígitos.

Solución:

Y_0 = (6965) (9803) = 68277895	X_1 = 2778	r_1 =0.2778
Y_1 = (6965) (2778) = 19348770	X_2 = 3487	r_2 =0.3487
Y_2 = (6965) (3487) = 24286955	X_3 = 2869	r_3 =0.2869
Y_3 = (6965) (2869) = 19982585	X_4 = 9825	r_4 =0.9825
Y_4 = (6965) (9825) = 68431125	X_5 = 4311	r_5 =0.4311

Ejercicio

Generar los primeros 5 números r_i a partir de la semilla X_0 = 3089 y con la constante *a* = 8654. Observe que tanto la semilla como la constante tienen *D* = 4 dígitos.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) Nueva Jersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random Number Generator, SIAMJ. Comput, volumen 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. Of Operations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Theory to Numérica Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

García Duna, Eduardo, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 5

II. Nombre:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método algoritmo lineal

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas

IV. Introducción.

Este algoritmo también conocido como congruencial fue propuesto por D.H. Lehmer en 1951. Según Law y Kelton, este algoritmo ha sido el más usado. El algoritmo congruencial genera una secuencia de numero enteros por medio de una ecuación recursiva que se verá más adelante.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con el siguiente tema de la materia de Simulación:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Algoritmo lineal

El algoritmo congruencial lineal genera una secuencia de números enteros por medio de la siguiente ecuación recursiva:

$X_i + 1 = (ax_i + c)\text{mod}(m)$ $\qquad\qquad$ $i = 0 , 1, 2, 3 , . . n$

donde X_0 es la semilla, *a* es la constante multiplicativa, *c* es una constante aditiva, y *m* es el módulo. $X_0 > 0$, $a > 0$, $c > 0$ y $m > 0$ deben ser números enteros. La operación "mod (*m*)" significa multiplicar X_i, por *a*, sumar c_i, y dividir el resultado entre *m* para obtener el residuo X_{i+1}. Es importante señalar que la ecuación recursiva del algoritmo congruencial lineal genera una secuencia de números enteros *S* = {0, 1 ,2 , 3 ,..., *m* - 1}, y que para obtener números pseudoaleatorios en el intervalo (0, 1) se requiere la siguiente ecuación:

$$r_i = \frac{X_i}{m-1} \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

Formula:

X_{i+1}= (a x_i + c) mod (*m*) $\qquad\qquad$ $r_i = x_i / m - 1$

X_0= 6	*k*= número entero	*c*= número impar	*g*=número entero
	a= 1 + 4*k*	*c*=5	*m*=2^g
	k=8		*g*= 2
	a= 1+ 4(8)= 33		*m*= 2^2= 4

X_1= (33*6+5) mod(4)= 203 mod (4)= 3 $\qquad$ 203/4= 50.75
0.75(4)= 3

r_1 = 3/ (4-1) = 1.00

X_2=(33*3+5) mod(4)= 104 mod (4)= 0 $\qquad$ 104/4=26.00
0(4)= 0

r_2 = 0/ (4-1) = 0.00

X_3=(33*0+5) mod(4)= 5 mod (4)= 1

r_3= 1/ (4-1) = 0.33

X_4=(33*1+5) mod(4)= 38 mod (4)= 2

r_4 = 2/ (4-1) = 0.66

X_5=(33*2+5) mod(4)= 71 mod (4)= 3

r_5 = 3/ (4-1) = 1.00

Analice el siguiente ejemplo para comprender mejor la mecánica del algoritmo congruencial lineal:

Ejemplo 5.1

Generar 4 números entre 0 y 1 con los siguientes parámetros: X_0= 37, *a*= 19, *c*= 33 y *m* = 100.

Solución:

X_1 = (19*37 + 33) mod 100 = 36 r_1 = 36/99 = 0.3636
X_2= (19*36 + 33) mod 100 = 17 r_2 = 17/99 = 0.1717
X_3= (19*17 + 33) mod 100 = 56 r_3 = 56/99 = 0.5656
X_4= (19*56 + 33) mod 100 = 97 r_4 = 97/99 = 0.9797

En el ejemplo anterior se dieron de manera arbitraria cada uno de los parámetros requeridos: X_0, *a, c*, *m*. Sin embargo, para que el algoritmo sea capaz de lograr el máximo periodo de vida *N*, es preciso que dichos parámetros cumplan ciertas condiciones. Se sugieren lo siguiente:

$m = 2^g$
$a = 1 + 4k$
k debe ser entero
c relativamente primo a *m*
g debe ser entero

Bajo estas condiciones se obtiene un periodo de vida máximo: *N* = *m* = *2g*. Veamos un ejemplo más, tomando en cuenta lo anterior.

Ejemplo 5.2

Generar suficientes números entre 0 y 1 con los parámetros X_0 = 6 , *k* = 3, *g* = 3 y *c* = 7, hasta encontrar el periodo de vida máximo (*N*).

Como podemos ver, si se cumplen las condiciones anteriores, se logrará el periodo máximo *N* = *m* = 8. A continuación, se presenta el desarrollo de la generación de los números r_i

$$a = 1 + 4\,(3) = 13 \text{ y } m = 2^3 = 8$$

X_0 = 6
X_1 = (13*6 + 7) mod 8 = 5 r_1 = 5/7 = 0.714
X_2 = (13*5 + 7) mod 8 = 0 r_2 = 0/7 = 0.000
X_3 = (13*0 + 7) mod 8 = 7 r_3= 7/7 = 1.000
X_4= (13*7 + 7) mod 8 = 2 r_4 = 2/7 = 0.285
X_5 = (13*2 + 7) mod 8 = 1 r_5 = 1/7 = 0.142
X_6 = (13*1 + 7) mod 8 = 4 r_6 = 4/7 = 0.571
X_7= (13*4 + 7) mod 8 = 3 r_7 = 3/7 = 0.428
X_8 = (13*3 + 7) mod 8 = 6 r_8 = 6/7 = 0.857

Es importante mencionar que el número generado en X_8= 6 es exactamente igual a la semilla X_0 y si continuáramos generando más números, éstos se repetirían. Además, sabemos que el algoritmo congruencial lineal genera una secuencia de números enteros *S* = {0, 1,2 , 3 ,..., *m* - 1}. Observe que en este caso se genera la secuencia *S* = {0 ,1 ,2 , 3, 4, 5 ,6 , 7}.

Ejemplo 5.3

Consideremos de nuevo el ejemplo anterior, pero tratemos de infringir de manera arbitraria alguna de las condiciones. Supongamos que *a* = 12; se sabe que *a* no es el resultado de 1 + 4*k*, donde *k* es un entero. Veamos el comportamiento del algoritmo congruencial lineal ante tal cambio.

Solución:

$$a = 1 + 4\,(3) = 13 \text{ y } m = 2^3 = 8$$

X_0= 6
X_1= (12*6 + 7) mod 8 = 7 r_1= 7/7 = 1.000
X_2= (12*7 + 7) mod 8 = 3 r_2 = 3/7 = 0.428
X_3= (12*3 + 7) mod 8 = 3 r_3= 3/7 = 0.428

El periodo de vida en este caso es *N* = 2, de manera que, como puede ver, el periodo de vida máximo no se logra. Como conclusión tenemos que si no se cumple alguna de las condiciones, el periodo de vida máximo *N* = *m* no se garantiza, por lo que el periodo de vida será menor que *m*.

Ejercicio

Generar suficientes números entre 0 y 1 con los parámetros X_0= 8 , *k* = 6, *g* = 5 y *c* = 7, hasta encontrar el periodo de vida máximo (*N*).

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará el ejercicio realizado de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) Nueva Jersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random Number Generator, SIAMJ. Comput, volumen 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. Of Operations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Theory to Numérica Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

García Duna, Eduardo, García Reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 6

II. Nombre:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método congruencial multiplicativo

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas.

IV. Introducción.

El algoritmo congruencial multiplicativo surge del algoritmo congruencial lineal cuando *b* = 0. Entonces la ecuación recursiva es:

$$Y_0 = (X_0 * a) \bmod(m)$$

En comparación con el algoritmo congruencial lineal, la ventaja del algoritmo multiplicativo es que implica una operación menos a realizar. Los parámetros de arranque de este algoritmo son X_0*a* y *m*, todos los cuales deben ser números enteros y mayores que cero.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con el siguiente tema de la materia de Simulación:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Algoritmo congruencial multiplicativo

El algoritmo congruencial multiplicativo surge del algoritmo congruencial lineal cuando c = 0. Entonces la ecuación recursiva es:

$$X_{i+1} = (aX_i) \bmod (m) \quad i = 0, 1, 2, 3, ..., n$$

En comparación con el algoritmo congruencial lineal, la ventaja del algoritmo multiplicativo es que implica una operación menos a realizar. Los parámetros de arranque de este algoritmo son X_0, a y m, los cuales deben ser números enteros y mayores que cero. Para transformar los números X_1 en el intervalo (0,1) se usa la ecuación $r_i = x_i / (m - 1)$. De acuerdo con Banks, Carson, Nelson y Nicol, las condiciones que deben cumplir los parámetros para que el algoritmo congruencial multiplicativo alcance su máximo periodo N, son:

$m = 2^g$
$a = 3 + 8k$ o $a = 5 + 8k$
$k = 0, 1, 2, 3, ...$
X_0 = debe ser un número impar
g debe ser entero

A partir de estas condiciones se logra un periodo de vida máximo $N=k/4=2^{g+2}$

Ejemplo 6.1

Generar suficientes números entre 0 y 1 con los siguientes parámetros: X_0 = 17, k = 2 y g = 5, hasta encontrar el periodo o ciclo de vida.

Solución:

$$a = 5 + 8(2) = 21 \text{ y } m = 32$$

$X_0 = 17$
$X_1 = (21*17) \bmod 32 = 5$ $\qquad r_1 = 5/31 = 0.612$
$X_2 = (21*5) \bmod 32 = 9$ $\qquad r_2 = 9/31 = 0.2903$
$X_3 = (21*9) \bmod 32 = 29$ $\qquad r_3 = 29/31 = 1.9354$
$X_4 = (21*29) \bmod 32 = 1$ $\qquad r_4 = 1/31 = 0.3225$
$X_5 = (21*1) \bmod 32 = 21$ $\qquad r_5 = 21/31 = 0.6774$
$X_6 = (21*21) \bmod 32 = 25$ $\qquad r_6 = 25/31 = 0.8064$
$X_7 = (21*25) \bmod 32 = 13$ $\qquad r_7 = 13/31 = 0.4193$
$X_8 = (21*13) \bmod 32 = 17$ $\qquad r_8 = 17/31 = 0.5483$

Si la semilla X_0 se repite, volverán a generarse los mismos números. Por lo tanto, el periodo de vida es n = 8 , el cual corresponde a $N = m/4 = 32/4 = 8$.

Ejemplo 6.2

Ahora bien, si quebrantamos la condición de que la semilla sea un número impar, digamos con X_0 = 12, tenemos:

Solución:
X_0= 12
X_1= (21*12) mod 32 = 28 r_1 =28/31 = 0.9032
X_2= (21*28) mod 32 =12 r_2= 12/31 = 0.3870

En vista de que la semilla X_0 se repite, volverán a generarse los mismos números. Por lo tanto, el periodo de vida es N = 2.

Ejemplo 6.3

Formula X_{i+1}= (aX_i) mod *m* Num Pseudoaleatorio: *Rn*= *Xn* / *m* -1

X_0= 17
a= 3
m=100

n	Xn	Rn
1	51	0.51
2	53	0.53
3	59	0.59
4	77	0.77

X_i= (3* 17)= 51 mod 100 51 / 100= 0.51 por lo que se toma 51
Rn= 51/100-1= 0.51

X_2= (3 * 51)= 153 mod 100 153/100= 1.53 por lo que se toma 53
Rn= 53/99= 0.53

X_3= (3 *53)= 159 mod 100 159/100= 1.59 por lo que se toma 59
Rn= 59/99=0.59

X_4=(3 * 59)= 177 mod 100 177/100= 1.77 por lo que se toma 77
Rn =77/99=0.77

Ejercicio

1. Generar suficientes números entre 0 y 1 con los siguientes parámetros: X_0 = 13, *k* = 4 y *g* = 7, hasta encontrar el periodo o ciclo de vida.

2. Generar suficientes números entre 0 y 1 con los siguientes parámetros: X_0 = 9, *k* = 3 y *g* = 5, hasta encontrar el periodo o ciclo de vida.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) Nueva Jersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random Number Generator, SIAMJ. Comput, volumen 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. OfOperations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Theory to Numérica Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

García Duna, Eduardo, García Reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 7

II. Nombre:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método congruencial aditivo.

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas

IV. Introducción.

Es un algoritmo determinantico que nos permite generar una serie de números pseudoaleatorios a partir de parámetros de arranque.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con el siguiente tema de la materia de Simulación:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Algoritmo congruencial aditivo

Este algoritmo requiere una secuencia previa de *n* números enteros X_1, X_2, X_3, X_4, ..., X_n para generar una nueva secuencia de números enteros que empieza en X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}, X_{n+4},...

Su ecuación recursiva es:

X_i= (X_{i+1}, + X_{i+n},) mod (*m*) *i* = *n* + 1, *n* + 2, *n* + 3 ,...*N*

Los números r_i pueden ser generados mediante la ecuación:

$$r_i = x_i / m - 1$$

Ejemplo 7.1

Generar 7 números pseudoaleatorios entre cero y uno a partir de la siguiente secuencia de números enteros: 65, 89, 98, 03, 69; *m* = 100.

Sean X_1= *65,* X_2= *89,* X_3 = *98,* X_4 = *03,* X_5 = *69*. Para generar r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 y $r_7$antes es necesario generar X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}.

Solución:

X_6= (X_5+ X_1) mod 100 = (69 + 65) mod 100 = 34 r_1= 34/99 = 0.3434

X_7 = (X_5+ X_2) mod 100 = (34 + 89) mod 100 = 23 r_2 =23/99 = 0.2323

X_8= (X_7 + X_3) mod 100 = (23+ 98) mod 100 = 21 r_3 =21/99 = 0.2121

X_9 = (X_8 + X_4) mod 100 = (21 + 03) mod 100 = 24 r_4 = 24/99 = 0.2424

X_{10}= (X_9 + X_5) mod 100 = (24 + 69) mod 100 = 93 r_5= 93/99 = 0.9393

X_{11} = (X_{10} + X_6) mod 100 = (93 + 34) mod 100 = 27 r_6 = 27/99 = 0.2727

X_{12} =(X_{11}+ X_7) mod 100 = (27 + 23) mod 100 =50 r_7 = 50/99 = 0.5050

Ejercicios

1. Generar 7 números pseudoaleatorios entre cero y uno a partir de la siguiente secuencia de números enteros: 88, 71, 38, 63, 64; *m* = 100.

2. Generar 7 números pseudoaleatorios entre cero y uno a partir de la siguiente secuencia de números enteros: 15, 82, 78, 26, 55; *m* = 100.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) Nueva Jersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random Number Generator, SIAMJ. Comput, volumen 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. Of Operations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Theory to Numérica Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

García Duna, Eduardo, García Reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 8

II. Nombre:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios. Método congruencial no lineales

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas

IV. Introducción.

Los métodos congruenciales No lineales que se manejaran en esta práctica son 2: el congruencial cuadrático y el algoritmo de Blum, Blum y Shub.

El algoritmo congruencial cuadrático, tiene la ecuación recursiva:

X_{i+1}= ($aX_i{}^2$ + bX_i + c) mod (m)

Con *i* = 0,1, 2, 3,..., n.

En este caso, los números R_i pueden ser generados por la ecuación:

R_i= X_i / m-1

De acuerdo con L'Ecuyer, las condiciones que deben cumplir los parámetros *m*, *a, b y c* para alcanzar un período máximo de *N* = *m* son: *m* debe ser múltiplo de g^2, donde g debe ser entero, a debe ser un número par, *m* debe ser un número impar, y (*b*−1) mod 4 =1. De esta manera se logra un período de vida máximo *N* = *m*.

Algoritmo de Blum, Blum y Shub

Si en el algoritmo congruencial cuadrático *a*=1 *b*=0 y *c*=0, entonces se construye una nueva ecuación recursiva: La ecuación anterior fue propuesta por Blum, Blum y Shub como un método para generar números que no tienen un comportamiento predecible.

Es un algoritmo un poco más lento que el XOR-Shift u otros ya que este usa exponenciaciones modulares pero este es más seguro, fue creado por Lenore Blum, Manuel Blum y Michael Shub, este algoritmo genera bits con la formula x_i = x_{i+1}^2 mod *N* sacando el bit menos significativo del x_i. Este algoritmo es más seguro ya que la variable N es grande y difícil de factorizar ya que se haya de la misma manera que en RSA (obtenemos dos primos grandes *P* y *Q*, los multiplicamos y así hayamos *N*.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con el siguiente tema de la materia de Simulación:

Métodos de generación de números Pseudoaleatorios.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Algoritmos congruenciales no lineales

En esta sección se analizarán dos algoritmos congruenciales no lineales: el congruencial cuadrático y el algoritmo presentado por Blum, Blum y Shub.

Algoritmo congruencial cuadrático

Este algoritmo tiene la siguiente ecuación recursiva:

$$X_{i+1} = (aX_i^2 + bX_i + c) \bmod (m) \quad i = 0 ,1, 2,3 , ...N$$

En este caso, los números r_i pueden ser generados con la ecuación $r_i = x_i/(m - 1)$. De acuerdo con L'Ecuyer, las condiciones que deben cumplir los parámetros *m , a, b* y *c* para alcanzar un periodo máximo de *N = m* son:
$m = 2^g$
a debe ser un número par
c debe ser un número impar
g debe ser entero

(b - 1) mod 4 = 1

De esta manera se logra un periodo de vida máximo $N = m$.

Ejemplo 8.1

Generar, a partir del algoritmo congruencial cuadrático, suficientes números enteros hasta alcanzar el periodo de vida, para esto considere los parámetros X_0= 13, m = 8, a = 26, b = 27 y c = 27. Como todas las condiciones estipuladas para los parámetros se satisfacen, es de esperarse que el periodo de vida del generador sea $N = m = 8$, tal como podrá comprobar al revisar los cálculos correspondientes, que se presentan a continuación.

Solución:

$X_1 = (26 * 13^2 + 27 *13 + 27) \bmod (8) = 4$
$X_2 = (26 * 4^2 + 27 *4 + 27) \bmod (8) = 7$
$X_3 = (26 * 7^2 + 27 *7 + 27) \bmod (8) = 2$
$X_4 = (26 * 2^2 + 27 * 2 + 27) \bmod (8) = 1$
$X_5 = (26 * 1^2 + 27 * 1 + 27) \bmod (8) = 0$
$X_6 = (26 * 0^2 + 27 * 0 + 27) \bmod (8) = 3$
$X_7 = (26 * 3^2 + 27 * 3 + 27) \bmod (8) = 6$
$X_8 = (26 * 6^2 + 27 * 6 + 27) \bmod (8) = 5$
$X_9 = (26 * 5^2 + 27 * 5 + 27) \bmod (8) = 4$

Por otro lado, el algoritmo cuadrático genera una secuencia de números enteros $S = \{0, 1, 2, 3, m - 1\}$, al igual que el algoritmo congruencial lineal.

Algoritmo de Blum, Blum y Shub

Blum, Blum y Shub (BBS) es un generador pseudoaleatorio de números propuesto por Lenore Blum, Manuel Blum y Michael Shub en 1986.

El algoritmo BBS es:

$$X_{n+1} = (X_n)^2 \bmod M$$

donde $M=pq$ es el producto de dos números *primos* muy grandes p y q. En cada paso del algoritmo, se obtiene un resultado para xn; el resultado es por lo general o bien el *bit de paridad* de xn ó uno ó más de los bits menos significativos de xn.

Los dos números primos, p y q, deben ser ambos congruentes a $3\ (mod\ 4)$ (esto asegura que cada residuo cuadrático posee una raíz cuadrada que también es un residuo cuadrático) y $mcd(\varphi(p-1), \varphi(q-1))$ debe ser pequeña (esto hace que la longitud del ciclo sea extensa).

Una característica interesante del generador BBS generador es la posibilidad de calcular todo valor x_i en forma directa:

$$X_i = (X_0^{\,2^{i} \bmod (p-1)(q-1)}) \bmod M$$

Si en el algoritmo congruencial cuadrático a = 1 , b = 0 y c = 0, entonces se construye una nueva ecuación recursiva:

$$X_{i+} = (x_{i^2}) \bmod (m) \qquad i = 0,1,2,3 ,...n$$

La ecuación anterior fue propuesta por Blum, Blum y Shub como un nuevo método para generar números que no tienen un comportamiento predecible.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) Nueva Jersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random Number Generator, SIAMJ. Comput, volumen 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. Of Operations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Theory to Numérica Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

García Duna, Eduardo, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 9

II. Nombre:

Pruebas estadísticas de uniformidad. Prueba Chi cuadrada

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas

IV. Introducción.

Empecemos definiendo uniformidad:

Semejanza o igualdad que presentan las características de los distintos elementos de un conjunto.

Prueba de Chi cuadrada

La prueba Chi-cuadrada también conocida como la prueba de Pearson o la prueba de frecuencias es una prueba de bondad de ajuste que establece si difiere o no la frecuencia observada de una distribución teórica. El inglés Karl Pearson desarrolló a principios del siglo XX esta prueba, y hasta la fecha tiene muchas aplicaciones en el campo estadístico. La prueba chi-cuadrada es una de las pruebas más útiles y ampliamente utilizadas en la estadística. La distribución Chi-Cuadrada es en teoría una distribución matemática que se aplica ampliamente en el trabajo estadístico. El término Chi- cuadrada proviene del uso de la letra griega χ el cual se pronuncia ji o chi y es el que define a esta distribución.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

- De uniformidad.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Prueba Chi-cuadrada

Se trata de una prueba de hipótesis a partir de datos, basada en el cálculo de un valor llamado estadístico de prueba, al cual suele comparársele con un valor conocido como valor crítico, mismo que se obtiene, generalmente, de tablas estadísticas. El procedimiento general de la prueba es:

1. Obtener al menos 30 datos de la variable aleatoria a analizar.
2. Calcular la media y varianza de los datos.
3. Crear un histograma de $m = \sqrt{n}$ intervalos, y obtener la frecuencia observada en cada intervalo O_i.
4. Establecer explícitamente la hipótesis nula, mediante una distribución de probabilidad que se ajuste a la forma del histograma.
5. Calcular la frecuencia esperada, E_i, a partir de la función de probabilidad propuesta.
6. Calcular el estadístico de prueba

$$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$$

7. Definir el nivel de significancia de la prueba, a, y determinar el valor crítico de la prueba, $X^2_{\alpha,m-k-1}$ (*k* es el número de parámetros estimados en la distribución propuesta).
8. Comparar el estadístico de prueba con el valor crítico. Si el estadístico de prueba es menor que el valor crítico no se puede rechazar la hipótesis nula.

Ejemplo 9.1

Éstos son los datos del número de automóviles que entran a una gasolinera cada hora:

14	7	13	16	16	13	14	17	15	16
13	15	10	15	16	14	12	17	14	12
13	20	8	17	19	11	12	17	9	18
20	10	18	15	13	16	24	18	16	18
12	14	20	15	10	13	21	23	15	18

Determinar la distribución de probabilidad con un nivel de significancia a de 5%. El histograma (vea la figura 9.1) de los n = 50 datos, que considera m = 11 intervalos, la media muestral de 15.04 y la varianza muestral de 13.14, permite establecer la siguiente hipótesis:

H_0: Poisson (λ = 15) automóviles/hora
H_1 Otra distribución

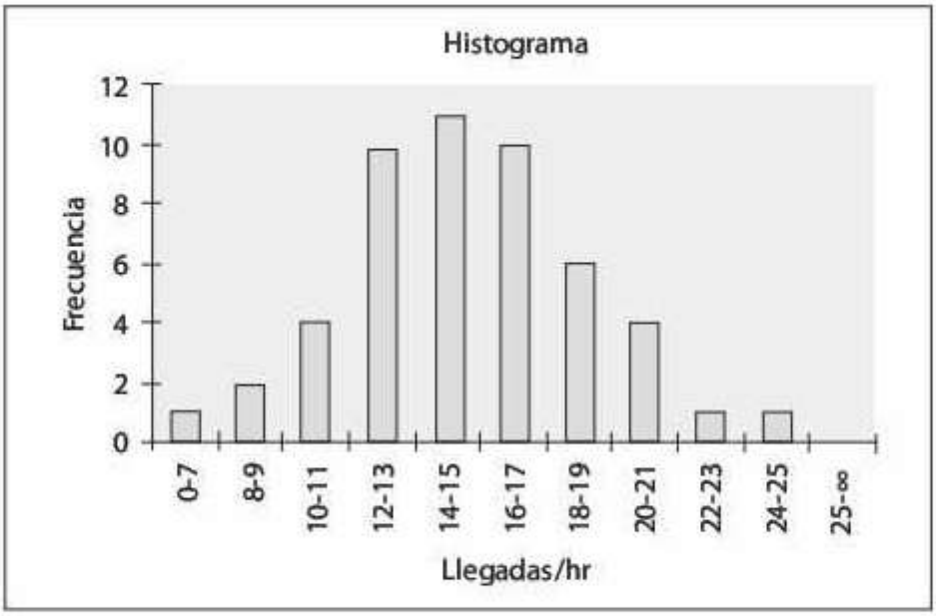


Figura 9.1 Histograma de frecuencia de la llegada de automóviles a la gasolinera.

Comenzamos por calcular la probabilidad de cada intervalo a partir de la función de probabilidad de Poisson:

$$p(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x=0,1,2,\ldots$$

$$p(x)=\frac{15^x e^{-15}}{x!} \qquad x=0,1,2,\ldots$$

Por ejemplo, para el intervalo 8-9

$$p(x=8,9)=\frac{15^8 e^{-15}}{8!}+\frac{15^9 e^{-15}}{9!}=0.0519$$

Enseguida calculamos la frecuencia esperada en cada intervalo, multiplicando la probabilidad *p(x)* por el total de datos de la muestra:

$$E_i = np(x)$$
$$E_i = 50p(x)$$

Y luego estimamos el estadístico de prueba:

$$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} = \frac{(0.9001-1)^2}{0.9001} + \frac{(2.5926-2)^2}{2.5926} + \ldots + \frac{(0.3092-0)^2}{0.3092} = 1.7848$$

A partir de los cálculos anteriores se obtiene la tabla 9.1.

Tabla 9.1 Cálculos para la prueba Chi-cuadrada

Intervalo	O_i	$p(x)$	$E_i = 50^*p(x)$	Error
0-7	1	0.0180	0.9001	0.0111
8-9	2	0.0519	2.5926	0.1354
10-11	4	0.1149	5.7449	0.5300
12-13	10	0.1785	8.9233	0.1299
14-15	11	0.2049	10.2436	0.0559
16-17	10	0.1808	9.0385	0.1023
18-19	6	0.1264	6.3180	0.0160
20-21	4	0.0717	3.5837	0.0483
22-23	1	0.0336	1.6821	0.2766
24-25	1	0.0133	0.6640	0.1700
25-8	0	0.0062	0.3092	0.3092
Total	50	1	50	1.78481

El valor del estadístico de prueba, X_{α}^2 = 1.7848, comparado con el valor de tablas crítico, $X_{0.05,11-0-1}^2$= 18,307, indica que no podemos rechazar la hipótesis de que la variable aleatoria se comporta de acuerdo con una distribución de Poisson, con una media de 15 automóviles/hora.

Ejemplo 9.2

Realizar la prueba Chi-cuadrada a los siguientes 100 números de un conjunto r_i, con un nivel de confianza de 95%.

Tabla 9.2

0.347	0.832	0.966	0.472	0.797	0.101	0.696	0.966	0.404	0.603
0.993	0.371	0.729	0.067	0.189	0.977	0.843	0.562	0.549	0.992
0.674	0.628	0.055	0.494	0.494	0.235	0.178	0.775	0.797	0.252
0.426	0.054	0.022	0.742	0.674	0.898	0.641	0.674	0.821	0.19
0.46	0.224	0.99	0.786	0.393	0.461	0.011	0.977	0.246	0.881
0.189	0.753	0.73	0.797	0.292	0.876	0.707	0.562	0.562	0.821
0.112	0.191	0.584	0.347	0.426	0.057	0.819	0.303	0.404	0.64
0.37	0.314	0.731	0.742	0.213	0.472	0.641	0.944	0.28	0.663
0.909	0.764	0.999	0.303	0.718	0.933	0.056	0.415	0.819	0.444
0.178	0.516	0.437	0.393	0.268	0.123	0.945	0.527	0.459	0.652

Antes de proceder, es recomendable crear una tabla similar a la tabla 9.2, en donde se resumen los pasos que deben llevarse a cabo en la prueba Chi-cuadrada.

Tabla 9.3 Cálculos para la prueba Chi-cuadrada

Intervalo	O_i	$E_i = \frac{n}{m}$	$\frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$
[0.00-0.10)	7	10	0.9
[0.10-0.20)	9	10	0.1
[0.20-0.30)	8	10	0.4
[0.30-0.40)	9	10	0.1
[0.40-0.50)	14	10	1.6
[0.50-0.60)	7	10	0.9
[0.60-0.70)	11	10	0.1
[0.70-0.80)	14	10	1.6
[0.80-0.90)	9	10	0.1
[0.90-1.00)	12	10	0.4

El estadístico $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} = 6.2$ es menor al estadístico correspondiente de la Chi-cuadrada $x^2_{0.05,9}$ = 16.9. En consecuencia, no se puede rechazar que los números r_i siguen una distribución uniforme.

Ejercicios

1. Utilice la prueba Chi-cuadrada para determinar, con un nivel de confianza de 90%, qué tipo de distribución siguen los datos.

17.392	8.110	4.078	3.151	3.528	2.440	5.924	3.461	2.052	10.369
3.690	10.870	4.793	2.498	0.569	8.281	0.154	5.959	3.384	12.877
13.602	5.244	16.677	5.977	4.313	4.767	2.381	6.443	1.392	1.578
8.115	4.891	6.720	7.728	2.717	10.451	5.901	0.818	7.088	2.637
4.714	3.032	1.495	15.733	7.768	2.333	7.822	3.708	6.412	1.290
3.957	5.285	7.094	3.078	1.264	2.630	10.177	2.155	2.945	7.552
11.094	4.772	7.281	14.344	19.867	0.119	2.072	1.486	3.791	4.214
1.611	1.781	1.530	3.280	4.301	0.202	7.489	1.422	1.453	0.022
6.001	9.269	8.477	3.043	0.877	6.966	2.103	1.816	0.433	2.547
0.843	1.182	8.121	2.007	1.395	4.661	7.378	5.300	17.066	12.171

2. A partir de la prueba Chi-cuadrada determine, con un nivel de confianza de 90% , qué tipo de distribución siguen los datos.

18.799	14.889	20.977	25.106	24.793	26.933	11.266	19.063	24.380	15.653
17.239	13.238	12.612	16.089	16.906	11.528	17.728	18.384	20.539	18.538
18.692	18.519	25.371	19.659	19.255	17.947	27.889	23.463	29.503	17.380
26.646	13.550	22.156	23.609	27.676	19.662	17.905	22.701	18.475	23.030
14.223	16.611	13.914	18.548	19.870	20.112	18.709	28.778	13.030	17.054
9.690	25.791	14.881	17.386	23.031	21.867	23.498	22.383	14.513	15.537
22.776	21.291	16.241	19.036	20.526	22.231	20.555	16.356	27.539	21.949
20.289	23.319	23.448	17.454	16.307	24.445	15.195	13.764	22.845	22.554
28.823	25.775	25.216	20.452	20.008	21.815	19.898	15.781	12.901	3.313
21.777	22.472	20.854	15.892	24.953	18.755	16.640	16.715	18.284	18.187

3. Determine, con un nivel de confianza de 90% , qué tipo de distribución siguen los datos.

12.656	11.664	11.855	11.399	11.845	9.766	11.866	10.671	12.157	12.503
13.317	11.381	11.252	12.146	11.769	11.792	13.577	12.038	11.854	13.830
11.369	13.271	11.985	11.936	13.610	12.363	12.437	11.765	12.683	11.931
11.264	10.902	12.204	11.019	13.940	11.873	10.412	11.665	12.957	11.617
11.346	10.634	12.316	11.836	12.571	11.363	11.654	12.286	11.669	12.212
9.526	11.931	12.247	14.116	10.475	10.441	9.695	13.172	14.374	11.610
10.999	12.548	12.659	11.148	12.809	12.660	11.793	10.452	13.013	12.763
11.650	11.309	12.863	12.347	12.556	14.086	12.273	10.893	12.480	10.771
12.566	11.843	12.299	12.357	12.131	11.728	10.653	14.121	13.598	13.049
10.522	10.883	12.533	12.074	11.991	12.161	10.118	11.743	11.062	11.002

4. Emplee la prueba Chi-cuadrada para determinar, con un nivel de confianza de 95%, qué tipo de distribución siguen los datos.

1.679	1.187	0.234	1.780	1.458	2.628	0.504	0.951	1.383	0.486
0.561	0.494	4.923	0.635	0.504	2.606	0.382	1.380	2.700	0.468
2.771	3.141	1.019	2.516	1.182	2.258	0.161	8.055	0.464	2.312
2.327	0.761	1.876	1.506	2.451	0.831	5.715	0.699	1.450	3.582
0.684	3.192	1.427	0.518	2.198	0.922	1.597	2.660	2.933	4.518

5. Determine, con un nivel de confianza de 95%, qué tipo de distribución siguen los datos; emplee la prueba Chi-Cuadrada.

12.561	2.695	12.082	10.335	13.260	2.549	4.594	2.500	24.930	7.805
8.322	7.422	11.143	20.599	7.508	4.367	1.544	3.706	8.185	14.405
4.057	15.584	9.049	6.265	10.663	10.257	11.475	4.688	16.256	4.688
11.963	5.599	19.204	1.784	25.998	12.299	10.317	3.779	18.993	7.419
15.154	9.579	8.423	6.934	2.005	13.234	5.542	5271	12.831	8.231
15.330	7.958	7.103	16.134	0.189	10.165	14.624	15.696	10.212	0.891
3.186	9.051	11.118	4.449	17.901	15.497	6.645	5.078	11.555	3.724
21.500	7.160	13.528	3.372	15.334	7.603	31.066	1.992	21.127	10.784
3.643	27.334	3.178	1.313	10.962	6.936	3.140	16.877	19.171	6.620
3.775	16.675	1.368	17.583	1.669	11.157	16.432	2.831	7.844	10.745

6. Emplee la prueba Chi-cuadrada para determinar, con un nivel de confianza de 90%, qué tipo de distribución siguen los datos.

x	Frecuencia
0	21
1	17
2	14
3	9
4	8
5	6
6	6
7	1
8	4
9	4
10	1
11	0
12	1
13	2
14-∞	6

7. Determine, con un nivel de confianza de 90% , qué tipo de distribución siguen los datos; use la prueba Chi-cuadrada.

0	1	0	2	2	1	0	2	5	0
6	0	0	0	3	1	4	0	0	2
1	2	1	0	1	4	0	0	0	1
2	2	2	0	1	0	0	0	4	3
0	1	0	0	2	1	0	0	9	3
4	2	0	1	8	0	2	0	6	1
1	1	0	3	2	0	0	0	3	1
0	5	0	0	1	1	1	0	1	0
7	0	0	2	0	2	0	2	0	2
0	0	5	9	1	2	4	0	0	0

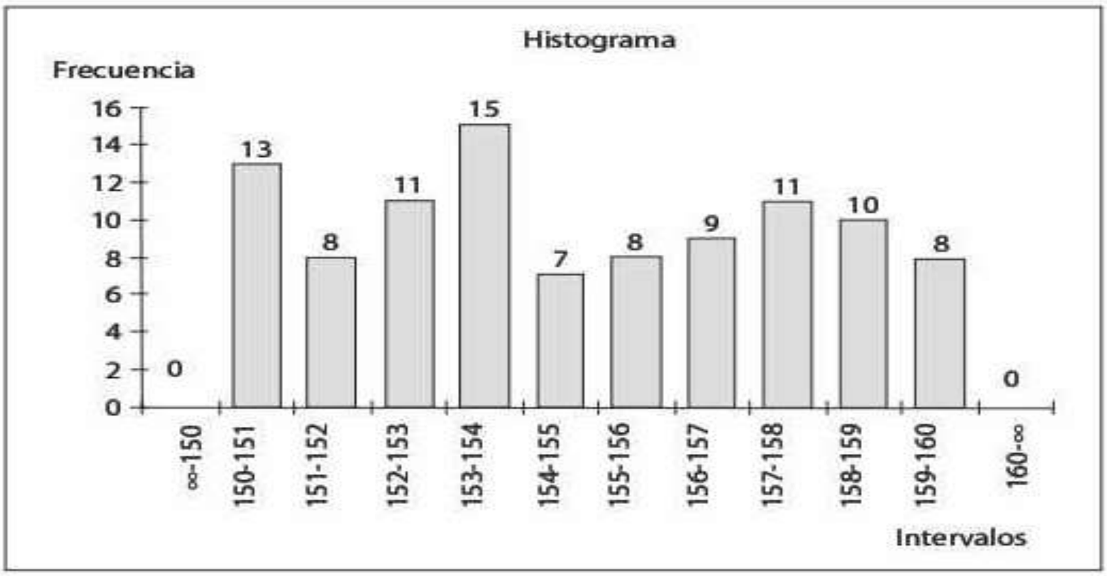
8. Determine, con un nivel de confianza de 95%, qué tipo de distribución siguen los datos; emplee la prueba Chi-cuadrada.

8	8	6	6	4	7	5	4	6	6
8	8	5	4	6	5	4	4	6	4
6	8	6	8	7	5	4	6	5	6
7	5	8	7	6	8	5	5	4	7
6	8	8	5	6	7	4	4	7	6
4	5	6	5	8	4	5	8	4	8
6	5	7	4	7	8	8	4	5	4
5	7	6	6	5	5	6	5	5	5
5	6	6	5	8	4	8	5	6	7
4	4	4	4	7	7	8	8	5	7

9. Utilice la prueba Chi-cuadrada para determinar con un nivel de confianza de 95% qué tipo de distribución siguen los datos.

4	5	3	5	5	4	3	2	4	3
4	6	4	3	5	2	2	3	3	4
4	4	3	3	3	2	2	3	2	3
3	4	5	2	3	4	3	3	5	3
2	5	3	4	4	1	4	5	4	5
7	2	4	4	2	4	1	5	4	4
5	5	5	2	4	4	5	4	4	1
6	4	6	6	2	4	4	2	2	2
3	3	2	5	3	5	1	3	2	4
1	2	5	2	3	1	5	3	2	5

10. Determine, con un nivel de confianza de 95% , qué tipo de distribución siguen los datos. Utilice la prueba Chi-cuadrada.



X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Azarang, M. y García, E. (1996). Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos (1a ed.): McGraw Hill.

Banks J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M. (2005). Discrete- vent System Simulation (4,h ed.): Prentice Hall NJ.

Law, A.M. y Kelton, W.D.(2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

García Duna, Eduardo, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 10

II. Nombre:

Pruebas estadísticas de uniformidad. Prueba de Kolmogorov-Smirnov

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas.

IV. Introducción.

Desarrollada en la década de los treinta del siglo XX, esta prueba permite − al igual que la prueba Chi-cuadrada− determinar la distribución de probabilidad de una serie de datos.

Una limitante de la prueba de Kolmogorov-Smirnov estriba en que solamente se puede aplicar al análisis de variables continuas.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

- De uniformidad.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

3. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
4. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Prueba Kolmogorov-Smirnov

El procedimiento general de la prueba es:

1. Obtener al menos 30 datos de la variable aleatoria a analizar.

2. Calcular la media y la varianza de los datos.

3. Crear un histograma de $m = \sqrt{n}$ intervalos, y obtener la frecuencia observada en cada intervalo 0_i.

4. Calcular la probabilidad observada en cada intervalo $PO_i = O_i / n$, esto es, dividir la frecuencia observada O_i entre el número total de datos, n.

5. Acumular las probabilidades PO_i para obtener la probabilidad observada hasta el i-ésimo intervalo, POA_i.

6. Establecer de manera explícita la hipótesis nula, para esto se propone una distribución de probabilidad que se ajuste a la forma del histograma.

7. Calcular la probabilidad esperada acumulada para cada intervalo, PEA_i, a partir de la función de probabilidad propuesta.

8. Calcular el estadístico de prueba

$$c = \text{máx}\left|PEA_i - POA_i\right| \qquad i = 1, 2, 3, ..., k, ..., m$$

9. Definir el nivel de significancia de la prueba a, y determinar el valor crítico de la prueba, Dan (consulte la tabla de valores críticos de la prueba de Kolmogorov-Smirnov en la sección de apéndices).

10. Comparar el estadístico de prueba con el valor crítico. Si el estadístico de prueba es menor que el valor crítico no se puede rechazar la hipótesis nula.

Ejemplo 10.1

A continuación se muestra un estudio del comportamiento del tiempo entre roturas de cierto filamento, medido en minutos/rotura.

4.33	1.61	2.16	2.88	0.70	0.44	1.59	2.15	8.59	7.36
9.97	7.86	5.49	0.98	4.52	2.12	4.44	0.82	6.96	3.04
2.81	14.39	3.44	9.92	4.38	8.04	2.18	6.19	4.48	9.66
4.34	1.76	2.30	5.24	11.65	10.92	12.16	6.60	0.85	4.82
1.36	3.53	6.58	1.45	8.42	3.69	2.44	0.28	1.90	2.89

Determinar la distribución de probabilidad con un nivel de significancia a de 5%.

El histograma (vea la figura 10.1) de los n = 50 datos con m = 8 intervalos, la media muestral de 4.7336 y la varianza muestral de 12.1991 permiten estimar un parámetro de forma de 1.38 y un parámetro de escala de 5.19, y establecer la hipótesis:

H_o: Weibull ($\alpha = 1.38$, $\beta = 5.19$) minutos/rotura
H_1: Otra distribución

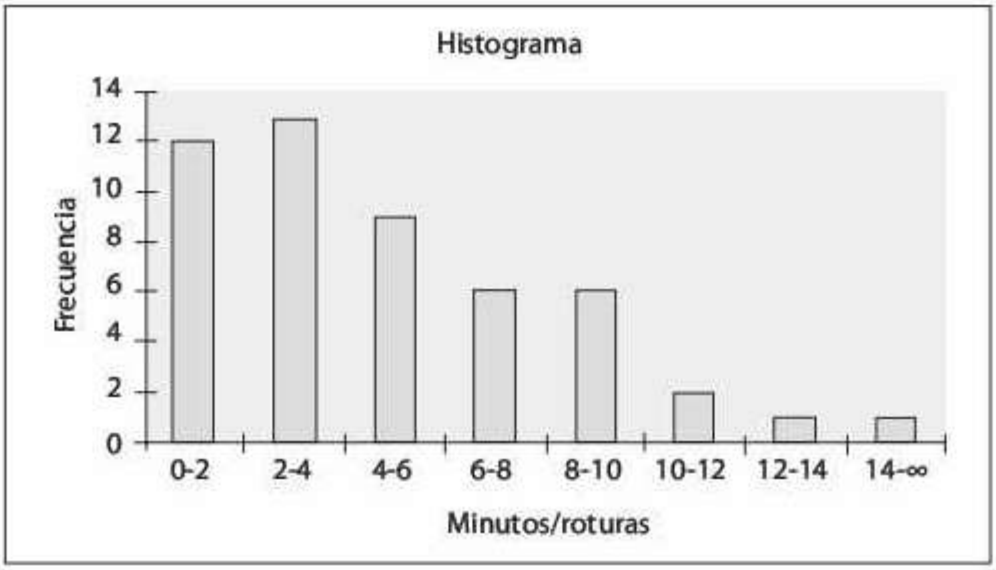


Figura 10.1. Histogramas de frecuencias del tiempo de roturas.

Iniciamos el procedimiento con el cálculo de la probabilidad observada en cada intervalo:

$$PO_i = \frac{O_i}{n} = \frac{O_i}{50} = \left\{ \frac{12}{50}, \frac{13}{50}, \frac{9}{50}, \frac{6}{50}, \frac{6}{50}, \frac{2}{50}, \frac{1}{50}, \frac{1}{50}, \right\}$$

para después calcular la probabilidad observada acumulada hasta el intervalo i.

$$F(x) = \int_0^x \alpha\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} dx$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{5.19}\right)^{1.38}}$$

Por ejemplo, para el intervalo con el límite superior de 8:

$$PEA_8 = F(x=8) = 1 - e^{-\left(\frac{8}{5.19}\right)^{1.38}} = 0.8375$$

Por último, calculamos el estadístico de prueba

$$c = \text{máx}\left|POA_i - PEA_i\right| = \text{máx}\left\{\left|0.24 - 0.2353\right|, \left|0.50 - 0.5025\right|, \ldots, \left|1-1\right|\right\} = 0.0375$$

A partir de los cálculos anteriores se obtiene la tabla 10.1:

Tabla 10.1. Cálculos para la prueba de Kolmogorov-Smirnov

Intervalo	O_i	PO_i	POA_i	PEA_i	$\lvert POA_i\text{-}PEA_i \rvert$
0-2	12	0.24	0.24	0.23526	0.0047
2-4	13	0.26	0.50	0.50247	0.0025
4-6	9	0.18	0.68	0.70523	0.0252
6-8	6	0.12	0.80	0.83747	0.0375
8-10	6	0.12	0.92	0.91559	0.0044
10-12	2	0.04	0.96	0.95839	0.0016
12-14	1	0.02	0.98	0.98042	0.0004
14-8	1	0.02	1.00	1	0.0000
Total	50	1		c	0.0375

El valor del estadístico de prueba, c = 0.0375, comparado con el valor de tablas crítico, $D_{0.05,50}$ = 0.1923 indica que no podemos rechazar la hipótesis de que la variable aleatoria se comporta de acuerdo con una distribución de Weibull con parámetro de escala 5.19 y parámetro deforma 1.38.

Ejemplo 10.2

Realizar la prueba Kolgomorov-Smirnov, con un nivel de confianza de 90%, al siguiente conjunto r_i de 10 números:

$$r_i = \{0.97, 0.11, 0.65, 0.26, 0.98, 0.03, 0.13, 0.89, 0.21, 0.69\}$$

El nivel de confianza de 90% implica α = 10%. Si se ordenan los números r_i de menor a mayor, la secuencia es:

0.03	0.11	0.13	0.21	0.26	0.65	0.69	0.89	0.97	0.98

Para determinar los valores de *D*, D~* y *D* es recomendable realizar una tabla como la siguiente.

Tabla 2.2 Cálculos de la prueba Kolmogorov-Smimov.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{i}{n}$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
r_i	0.03	0.11	0.13	0.21	0.26	0.65	0.69	0.89	0.97	0.98
$\frac{i-1}{n}$	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
$\frac{i}{n}-r_i$	0.07	0.09	0.17	0.19	0.24	–0.05	0.01	–0.09	-0.07	0.02
$r_i-\frac{i-1}{n}$	0.03	0.01	–0.07	–0.09	–0.14	0.15	0.09	0.19	0.17	0.08
n	10									
D^+	0.24	D^-	0.19	D	0.24					

De acuerdo con la tabla de valores para la prueba Kolmogorov-Smirnov, el valor crítico D_{01010} correspondiente a n = 10 es D_{01010} = 0.368, que resulta mayor al valor D = 0.24; por lo tanto, se concluye que los números del conjunto r_i se distribuyen uniformemente.

Ejercicios.

1. Determine, con un nivel de confianza de 90%, qué tipo de distribución siguen los datos; emplee la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

16.032	24.076	16.463	21.151	14.817	14.702	27.014	12.165	16.597	21.404
18.825	19.364	18.515	14.240	24.154	19.916	16.238	20.795	25.924	18.874
17.532	16.713	16.677	18.739	14.206	19.501	18.590	18.587	19.929	25.354
12.858	16.452	17.487	22.658	22.240	17.471	16.537	23.960	14.417	18.338
28.501	16.939	17.926	24.477	17.673	22.422	13.373	21.971	20.549	24.509

2. Determine, con un nivel de confianza de 90%, qué tipo de distribución siguen los datos mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

4.548	3.136	5.366	1.979	6.097	3.823	5.520	4.203	4.972	8.429
3.242	4.705	5.919	5.530	6.891	5.997	6.640	6.376	6.860	5.991
6.303	6.476	8.503	3.863	1.738	2.913	5.171	6.856	5.665	3.396
5.225	5.966	4.743	7.228	6.030	6.184	7.600	5.716	5.781	4.465
5.307	8.546	6.093	4.720	5.771	4.521	3.715	5.368	1.871	1.629

3. Determine, con un nivel de confianza de 90%, qué tipo de distribución siguen los datos; utilice la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

7.982	40.122	5.862	21.920	7.902	10.824	22.258	13.343	11.045	23.603
18.951	12.348	8.725	11.536	10.187	11.442	13.396	13.070	13.668	7.954
6.361	6.405	34.450	24.956	5.442	12.996	5.073	13.620	11.020	11.729
3.382	14.387	10.037	5.481	2.969	7.503	4.159	23.466	5.219	11.713
37.134	21.099	9.021	6.080	9.053	5.178	18.700	9.056	6.647	5.767
17.684	8.814	22.939	2.491	10.123	3.244	9.433	11.774	3.271	10.390
6.839	7.073	10.708	25.237	7.568	1.152	8.059	26.399	29.285	22.350
3.274	7.325	10.046	9.888	13.798	15.255	20.507	11.147	19.691	7.711
22.836	11.811	14.650	2.898	20.041	10.228	9.553	19.870	8.520	26.182
12.427	14.432	24.699	6.848	7.197	12.156	1.674	8.582	16.293	16.126

4. Determine, con un nivel de confianza de 90%, qué tipo de distribución siguen los datos; utilice la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

1.338	0.530	0.580	0.102	0.285	0.725	5.567	6.773	0.101	5.549
1.198	0.049	0.294	3.661	3.072	5.193	0.329	2.721	0.988	0.716
1.852	1.426	1.586	0.664	6.032	0.093	3.856	1.779	1.729	1.456
3.050	4.688	4.117	2.350	2.954	0.883	1.790	3.847	2.659	3.622
1.003	0.460	1.645	2.342	3.983	1.517	0.695	3.564	0.573	0.204
0.286	1.581	0.395	3.986	2.416	0.577	0.617	1.494	0.468	1.037
2.283	0.774	0.483	0.852	4.342	0.064	0.299	0.214	3.294	0.345
0.388	0.429	2.156	4.276	0.371	4.520	0.408	0.113	0.240	2.923
0.095	2.267	1.355	2.859	0.799	4.718	8.664	0.339	1.892	1.262
0.265	2.032	7.487	2.852	0.040	1.860	0.716	3.551	0.493	0.269

5. Determine, con un nivel de confianza de 95%, qué tipo de distribución siguen los datos; emplee la prueba de Kolmogorov-Smirnov

20.931	18.562	26.714	25.275	24.580	22.090	19.608	15.447	29.631	28.821
28.013	26.693	29.751	22.189	20.807	27.339	22.556	24.069	15.724	21.614
25.570	18.746	16.818	29.122	27.190	26.915	26.844	19.573	26.853	17.053
22.518	18.883	26.128	24.007	28.127	25.213	19.964	27.141	25.458	26.060
29.791	17.890	15.515	24.985	17.717	19.063	29.986	24.074	23.517	20.733

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Azarang, M. y García, E. (1996). Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos (1a ed.): McGraw Hill.

BanksJ., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M. (2005). Discrete- vent System Simulation (4,h ed.): Prentice Hall NJ.

Law, A.M. y Kelton, W.D.(2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

García Duna, Eduardo, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 11

II. Nombre:

Pruebas estadísticas de Independencia. Prueba de corridas de arriba y abajo

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas.

IV. Introducción.

Todos los métodos de inferencia que hemos estudiado se basan en la suposición de que las muestras son aleatorias; no obstante, hay muchas aplicaciones en que es difícil decidir si la suposición es justificable. Esto es verdadero, particularmente, cuando tenemos poco control o ninguno sobre la selección de los datos, como es el caso, por ejemplo, cuando confiamos en cualquier registro disponible para hacer pronósticos de alcance sobre el clima, cuando usamos cualquier dato disponible para estimarla tasa de mortalidad como consecuencia de una enfermedad o cuando usamos los registros de ventas del mes pasado para pronosticar las ventas de una tienda de departamento. Ninguna de estas informaciones constituyen una muestra aleatoria en forma estricta. Hay varios métodos para juzgar el azar de una muestra con base en el orden en que se tiene las observaciones; nos permite decidir, después de haber recopilado los datos, si se puede atribuir a la probabilidad los patrones que aparentan ser no aleatorios. La técnica que describiremos se basa en la teoría de las corridas.

Una corrida es una sucesión de letras idénticas (u otra clase de símbolos) seguida o precedida por letras diferentes o ninguna letra en absoluto. Para ilustrar esto considere la siguiente disposición de olmos saludables, H y enfermos, D, Plantados hace mucho años a lo largo de una carretera:

HHHHDDDHHHHHHHDDHHDDDD

Usando el subrayado para combinar las letras que constituye las corridas, encontramos que primero hay una corrida de cuatro H`s, luego una corrida d tres D`s, luego una corrida de siete H`s, después una corrida de dos D`s, después de dos H`s y por último de cuatro D`s.

El número total de corridas que aparece en una disposición de esta clase a menudo es un buen indicio de una posible falta de azar. Si hay muy pocas corridas podríamos sospechar que hay una agrupación o un conglomerado, o quizá una tendencia: si hay muchas corridas, podríamos sospechar que hay cierto patrón alternativo o cíclico.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

- Pruebas Independencia.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Prueba de corridas arriba y abajo de la media

El procedimiento de esta prueba consiste en determinar una secuencia de unos y ceros, de acuerdo con una comparación entre los números del conjunto r_i y 0.5. Después se determina el número de corridas observadas, C_0 y los valores de n_0 y n_1. C_0 es el número de corridas en la secuencia, el cual está determinado de la misma manera que en la prueba de corridas arriba y abajo; n_0 es igual a la cantidad de ceros en la secuencia, y n_1 es igual a la cantidad de unos en la secuencia, y se cumple que $n_0 + n_1 = n.$ (Recuerde que una corrida se identifica como la cantidad de unos o ceros consecutivos). Luego se calcula el valor esperado, la varianza del número de corridas, y el estadístico Z_0con las siguientes ecuaciones:

$$\mu_{C_0} = \frac{2n_0 n_1}{n} + \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2_{C_0} = \frac{2n_0 n_1 (2n_0 n_1 - n)}{n^2 (n-1)}$$

$$Z_0 = \frac{C_0 - \mu_{C_0}}{\sigma_{C_0}}$$

Si el estadístico Z_0 está fuera del intervalo:$-Z\frac{\propto}{2}Zo\ Z\frac{\propto}{2}$, se concluye que los números del conjunto r_i no son independientes. De lo contrario no se puede rechazar que el conjunto de r_i es independiente.

Considere la siguiente secuencia de 10 números de un conjunto $r_{i.}$

$$r_i = \{0.67, 0.62, 0.05, 0.49, 0.59, 0.42, 0.05, 0.02, 0.74, 0.67\}$$

La secuencia de unos y ceros se construye de la siguiente manera: se asigna un uno si el número r_i es mayor que o igual a 0.5. En caso contrario se asignará un cero. Al seguir esta regla, la secuencia de unos y ceros es:

$$S = \{1, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, 1\}$$

El número de corridas se determina de la misma manera que en la prueba de corridas arriba y abajo. En este caso se tiene que el número de corridas de la secuencia *S* es C_0 = 5. Por otra parte, la secuencia tiene 5 ceros y 5 unos, así que n_0= 5 y n_1 = 5.

Ejemplo 2.16

Realizar la prueba de corridas arriba y abajo, con un nivel de aceptación de 95%, al siguiente conjunto de 50 números r_i:

0.809	0.042	0.432	0.538	0.225	0.88	0.688	0.772	0.036	0.854
0.397	0.268	0.821	0.897	0.07	0.721	0.087	0.35	0.779	0.482
0.136	0.855	0.453	0.197	0.444	0.799	0.809	0.691	0.545	0.857
0.692	0.055	0.348	0.373	0.436	0.29	0.015	0.834	0.599	0.724
0.564	0.709	0.946	0.754	0.677	0.128	0.012	0.498	0.6	0.913

Construiremos la secuencia de unos y ceros por renglón quedando de la siguiente manera:

$$S = \{1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, \mathbf{0}, 1, 1, 1, \mathbf{0}, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, 1, \mathbf{0}, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0},$$
$$1, 1, 1, 1, 1, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, 1\}$$

A partir de la secuencia anterior se determina que hay 21 corridas, 23 ceros y 27 unos. Por lo tanto, C_0 = 21, n_0 = 23 y n_1 = 27. A continuación se presentan los cálculos del valor esperado y de la varianza del número de corridas:

$$\mu_{C_o} = \frac{2n_0 n_1}{n} + \frac{1}{2} = \frac{2(23)(27)}{50} + \frac{1}{2} = 25.34$$

$$\sigma^2_{C_o} = \frac{2n_0 n_1(2n_0 n_1 - n)}{n^2(n-1)} = \frac{2(23)(27)[2(23)(27)-50]}{(50)^2(50-1)} = 12.08542$$

$$Z_0 = \frac{C_O - \mu_{C_o}}{\sigma_{C_o}} = \frac{21-25.34}{\sqrt{12.08542}} = -1.2484$$

Como el valor de Z_0 cae dentro del intervalo -1.9 6 < Z_0 = -1.2484 <1.96, se dice que no se puede rechazar que los números del conjunto r_i son independientes con un nivel de confianza de 95%. De acuerdo con esta prueba, el conjunto de números r_i se puede usar en un estudio de simulación.

Ejercicios

1. Determine con la prueba de corridas arriba y abajo si los 50 números de la tabla son independientes con un nivel de aceptación de 90%.

0.6069	0.5316	0.5929	0.4131	0.2991	0.6848	0.8291	0.1233	0.2497	0.9481
0.4411	0.8195	0.3521	0.8068	0.1062	0.5384	0.9287	0.7954	0.7271	0.5739
0.4029	0.2549	0.1003	0.5523	0.1897	0.8725	0.4439	0.6056	0.8310	0.4709
0.1926	0.0266	0.5696	0.7504	0.8542	0.6045	0.2269	0.7970	0.3738	0.1284
0.6367	0.9543	0.5385	0.2574	0.2396	0.3468	0.4105	0.5143	0.2014	0.9900

2. Determine, con la prueba de corridas arriba y abajo de la media, si los 50 números de la tabla son independientes con un nivel de aceptación de 90%.

0.6351	0.0272	0.0227	0.3827	0.0659	0.3683	0.2270	0.7323	0.4088	0.2139
0.4271	0.4855	0.2028	0.1618	0.5336	0.7378	0.3670	0.6637	0.1864	0.6734
0.9498	0.9323	0.0265	0.4696	0.7730	0.9670	0.7500	0.5259	0.5269	0.5406
0.3641	0.0356	0.2181	0.0866	0.6085	0.4468	0.0539	0.9311	0.3128	0.1562
0.8559	0.7280	0.7789	0.1746	0.6637	0.0687	0.5494	0.1504	0.8397	0.2995

3. Abra el directorio telefónico en la primera página de la letra D y seleccione los últimos 5 dígitos de los primeros 50 números telefónicos. Determine si esta selección es aleatoria con un nivel de aceptación de 95%; utilice para ello las pruebas de corridas arriba y abajo de la media.

4. Observe y anote los 4 dígitos de las placas de 100 automóviles que pasen por alguna calle. Determine si esta selección es aleatoria con un nivel de aceptación de 95%; utilice para ello las pruebas de corridas arriba y abajo de la media.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) Nueva Jersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random Number Generator, SIAMJ. Comput, volumén 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. Of Operations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Theory to Numérica Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

García Duna, Eduardo, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 12

II. Nombre:

Pruebas estadísticas de Independencia. Prueba póker

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas

IV. Introducción.

Esta prueba examina en forma individual los dígitos del número pseudoaleatorio generado. La forma como esta prueba se realiza es tomando 5 dígitos a la vez y clasificándolos como : Par, dos pares, tercia, póker quintilla full y todos diferentes. Las probabilidades para cada una de las manos del póker diferentes se muestran enseguida:

Todos diferentes = 0.3024

Un par = 0.504

Dos pares = 0.108

Tercia = 0.072

Full = 0.009

Quintilla = 0.0001

Con las probabilidades anteriores y con el número de números pseudoaleatorios generados, se puede calcular la frecuencia esperada de cada posible resultado, la cual al compararse con la frecuencia observada, produce el estadístico:

$$\chi_0^7 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(FO_i - FE_i)^2}{FE_i} \quad \text{Si} \quad \chi_0^2 < \chi_{\alpha,6}^2$$

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

- Pruebas Independencia.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Prueba póker

Esta prueba consiste en visualizar el número r_i con cinco decimales (como si fuera una mano del juego de póker, con 5 cartas), y clasificarlo como: todos diferentes (TD), exactamente un par (1P), dos pares (2P), una tercia (T), una tercia y un par (TP), póker (P) y quintilla (Q). Por ejemplo, si r_i = 0.69651 se le clasifica como par, porque hay dos números 6 . Ahora bien, consideremos el caso de r_i=0.13031, el cual debe clasificarse como dos pares (dos números 1 y dos números 3). Finalmente, r_i= 0.98898 debe clasificarse como una tercia y un par, porque hay tres números 8 y dos números 9. La prueba póker se puede realizar a números r_i con tres, cuatro y cinco decimales. Para r_i con tres decimales sólo hay tres categorías de clasificación: todos diferentes (TD), un par (1P) y una tercia (T).

Cuando se consideran r_i con cuatro decimales se cuenta con cinco opciones para clasificar los números: todos diferentes (TD), exactamente un par (1P), dos pares (2P), una tercia (T) y póker (P). Las tablas 2.3 a 2.5 presentan la probabilidad esperada para cada una de las categorías de clasificación de esta prueba para conjuntos r_i que contienen *n* números con 3, 4 y 5 decimales.

Tabla 12.1 Prueba póker para números con 3 decimales.

Categoría	Probabilidad	E_i
Todos diferentes (TD)	0.72	0.72n
Exactamente un par (1P)	0.27	0.27n
Tercia (T)	0.01	0.01n

Tabla 12.2 Prueba póker para números con 4 decimales.

Categoría	Probabilidad	E_i
Todos diferentes (TD)	0.5040	0.5040n
Exactamente 1 par (1P)	0.4320	0.4320n
2 pares (2P)	0.0270	0.0270n
Tercia (T)	0.0360	0.0360n
Póker (P)	0.0010	0.0010n

Tabla 12.3 Prueba póker para números con 5 decimales.

Categoría	Probabilidad	E_i
Todos diferentes (TD)	0.3024	0.3024n
Exactamente 1 par (1P)	0.5040	0.5040n
2 pares (2P)	0.1080	0.1080n
1 tercia y 1 par (TP)	0.0090	0.0090n
Tercia (T)	0.0720	0.0720n
Póker (P)	0.0045	0.0045n
Quintilla (Q)	0.0001	0.0001n

La prueba póker requiere el estadístico de la distribución Chi-cuadrada $x^2_{\alpha,6}$ para números con 5 decimales, $X^2_{\alpha,4}$ para números con 4 decimales, y $x^2_{\alpha,2}$ ara números con 3 decimales. $x^2_{\alpha,6}$ tiene 6 grados de libertad, debido a que los números se clasifican en 7 categorías o clases: todos diferentes, exactamente un par, dos pares, una tercia y un par, una tercia, póker y quintilla.

El procedimiento de la prueba consiste en:

a) Determinar la categoría de cada número del conjunto r_i
b) Contabilizar los números r_i de la misma categoría o clase para obtener la frecuencia observada (O_i).
c) Calcular el estadístico de la prueba X^2_0 con la ecuación

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i},$$

donde E_i es la frecuencia esperada de números r_i en cada categoría, y m representa la cantidad de categorías o clases en las que se clasificaron los números r_i, siendo m = 7, m = 5, y m = 3 los números de categorías para la prueba póker con 5, 4 y 3 decimales, respectivamente. Por último:

d) Comparar el estadístico de X^2_0 con $X^2_{\alpha,m-1}$

Si X^2_0 es menor que $X^2_{\alpha,m-1}$ se dice que no se puede rechazar la independencia de los números del conjunto r_i. En caso contrario la independencia de los números del conjunto r_i se rechaza.

Ejemplo 12.1

Realice la prueba póker, con un nivel de aceptación de 95%, a los siguientes 30 números entre cero y uno, con 5 decimales.

0.06141	0.72484	0.94107	0.56766	0.14411	0.87648
0.81792	0.48999	0.18590	0.06060	0.11223	0.64794
0.52953	0.50502	0.30444	0.70688	0.25357	0.31555
0.04127	0.67347	0.28103	0.99367	0.44598	0.73997
0.27813	0.62182	0.82578	0.85923	0.51483	0.09099

Primero hay que clasificar cada número del conjunto r_i, asignándole las claves que se mencionaron antes. El resultado es el que se muestra en la tabla 12.4.

Tabla 12.4 Clasificación de los números de un conjunto r_i, de acuerdo con la prueba póker.

0.06141	1P	0.72484	1P	0.94107	TD	0.56766	T	0.14411	TP	0.87648	1P
0.81792	TD	0.48999	T	0.18590	TD	0.06060	TP	0.11223	2P	0.64794	1P
0.52953	1P	0.50502	2P	0.30444	T	0.70688	1P	0.25357	1P	0.31555	T
0.04127	TD	0.67347	1P	0.28103	TD	0.99367	1P	0.44598	1P	0.73997	2P
0.27813	TD	0.62182	1P	0.82578	1P	0.85923	TD	0.51483	TD	0.09099	TP

Para seguir con la prueba se recomienda hacer una tabla como la siguiente:

Tabla 12.5 Cálculos de la prueba póker.

Categorías	O_i	E_i	$\frac{(E_i-O_i)^2}{E_i}$
Todos diferentes (TD)	8	(0.3024)(30) = 9.072	0.12667
Exactamente 1 par (1P)	12	(0.5040)(30) = 15.12	0.64380
2 pares (2P)	3	(0.1080)(30) = 3.24	0.01777
1 tercia y 1 Par (TP)	3	(0.0090)(30) = 0.27	27.6033
Tercia (T)	4	(0.0720)(30) = 2.16	1.56740
Póker (P)	0	(0.0045)(30) = 0.135	0.135
Quintilla (Q)	0	(0.0001)(30) = 0.003	0.003

El estadístico $\chi_0^2=\sum_{i=1}^{7}\frac{(E_i-O_i)^2}{E_i}=30.0969$ es mayor que el estadístico correspondiente de la Chi-cuadrada: $X^2_{005,6}$= 12.59. En consecuencia, se rechaza que los números del conjunto r_i son independientes.

Ejercicios

1. Utilice la prueba de póker con nivel de aceptación de 95 % para comprobar la hipótesis de que los números de la siguiente lista son aleatorios.

0.5632	0.2395	0.5583	0.8050	0.4166	0.5454	0.5491	0.5593	0.7725	0.2326
0.1020	0.4708	0.5690	0.3802	0.8224	0.6866	0.7098	0.9352	0.1388	0.4535
0.0945	0.1357	0.9191	0.1503	0.1645	0.9770	0.1301	0.1100	0.2523	0.4439
0.9499	0.9415	0.7413	0.9335	0.0805	0.8295	0.4575	0.1863	0.5504	0.8926
0.9035	0.1133	0.1115	0.8761	0.0007	0.6222	0.4605	0.0688	0.9164	0.3482
0.9419	0.3802	0.8765	0.5340	0.6593	0.8266	0.5932	0.4277	0.9162	0.7300
0.0927	0.4691	0.5736	0.5615	0.1909	0.2143	0.2672	0.7864	0.3218	0.4765
0.5581	0.0888	0.3969	0.0151	0.8605	0.9615	0.7752	0.0461	0.1122	0.7559
0.4251	0.7327	0.8791	0.4445	0.8864	0.6384	0.6607	0.2892	0.8905	0.5126
0.7184	0.0512	0.5982	0.3277	0.0407	0.2668	0.5557	0.8139	0.3261	0.7949
0.2236	0.1455	0.5083	0.6106	0.7605	0.9788	0.0204	0.6006	0.1452	0.1234

2. Determine, mediante la prueba de póker, si los 100 números de la tabla son pseudoaleatorios con un nivel de aceptación de 90 %.

0.78	0.98	0.24	0.73	0.43	0.16	0.78	0.47	0.18	0.55
0.04	0.29	0.68	0.77	0.16	0.03	0.79	0.22	0.37	0.80
0.96	0.26	0.91	0.55	0.75	0.55	0.64	0.39	0.53	0.45
0.61	0.14	0.38	0.12	0.40	0.74	0.78	0.98	0.27	0.60
0.43	0.67	0.62	0.32	0.53	0.54	0.24	0.29	0.18	0.08
0.82	0.94	0.19	0.98	0.41	1.00	0.74	0.92	0.14	0.43
0.83	0.88	0.18	0.21	0.50	0.13	0.43	0.69	0.08	0.12
0.22	0.50	0.16	0.11	0.18	0.89	0.80	0.42	0.29	0.87
0.83	0.79	0.65	0.28	0.78	0.49	0.36	0.86	0.87	0.64
0.51	0.07	0.18	0.94	0.50	0.22	0.66	0.91	0.48	0.24

3. Un método congruencial genera 71500 números de 4 dígitos, de los cuales 3500 se clasifican como 2 pares. Calcule el error de este evento respecto de su frecuencia esperada bajo la prueba póker.

4. Al realizar la prueba póker a 50 números aleatorios de 4 dígitos, el resultado del error total es de 11.07. ¿Aceptaría la hipótesis de independencia con nivel de aceptación de 95%?

5. Al realizar la prueba póker a X cantidad de números aleatorios de 6 dígitos, el resultado del error total es de 15.51. ¿Aceptaría la hipótesis de independencia con nivel de aceptación de 95%?

6. Un método congruencial genera 357500 números de 6 dígitos, de los cuales 17500 se clasifican como 2 pares. Calcule el error de este evento respecto de su frecuencia esperada bajo la prueba póker.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) Nueva Jersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random Number Generator, SIAMJ. Comput, volumén 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling and Analysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. Of Operations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Theory to Numérica Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

García Duna, Eduardo, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 13

II. Nombre:

Pruebas estadísticas de Independencia. Prueba de series

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas.

IV. Introducción.

La prueba de series se utiliza para comprobar el grado de aleatoriedad entre números sucesivos.

Usualmente esta prueba consiste en formar parejas de números, las cuáles son consideradas como coordenadas unitario dividido en n^2 celdas.

El valor de n se toma a criterio de cada uno, de acuerdo al tamaño de la muestra de N números. La prueba consiste en generar N números pseudoaleatorios de los cuales se forman parejas aleatorias entre Ui y Ui+1, es decir, se generan 10 números, entonces las parejas aleatorias que se pueden formar serian:
(U1,U2), (U2,U3), (U3,U4), (U4,U5), (U5,U6), (U6,U7), (U7,U8), (U8,U9), (U9,U10).

Enseguida, se determina la celda a que pertenece cada pareja ordenada, con lo cual se determina la frecuencia observada de cada celda.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

- Pruebas Independencia.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

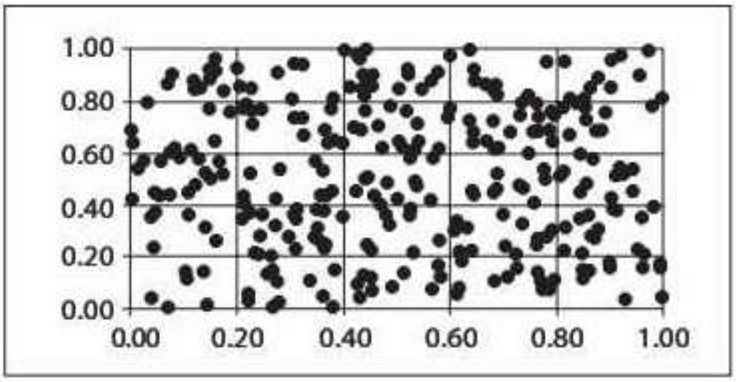
IX. Sugerencias didácticas.

Prueba de series

Esta prueba consiste en comparar los números con el propósito de corroborar a independencia entre números consecutivos. Las hipótesis básicas son:
Ho : r_i ~ Independientes
H_i : r_i ~ Dependientes

La prueba funciona de esta manera: se inicia al crear una gráfica de dispersión entre los números consecutivos (r_i, r_i+1); luego se divide la gráfica en m casillas, como se muestra en la figura 2.3, con *m* como el valor entero más cercano a $\sqrt{n}$ que permita formar de preferencia, aunque no necesariamente, una matriz cuadrada.

Figura 13.1. Gráfica de dispersión: primer paso de la prueba de series.



Enseguida se determina la frecuencia observada 0_f al contabilizar el número de puntos en cada casilla y su correspondiente frecuencia esperada E_i, de acuerdo con E_i = (n - 1)/m, donde n - 1 es el número total de pares ordenados o puntos en la gráfica. Se procede entonces a calcular el error o estadístico de prueba $x^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(Ei-Oi)^2}{Ei}$, finalmente, si el valor del error es menor que o igual al estadístico de tablas $X^2_{\alpha,m-1}$, no podemos rechazar la hipótesis de independencia entre números consecutivos.

Ejemplo 13.1

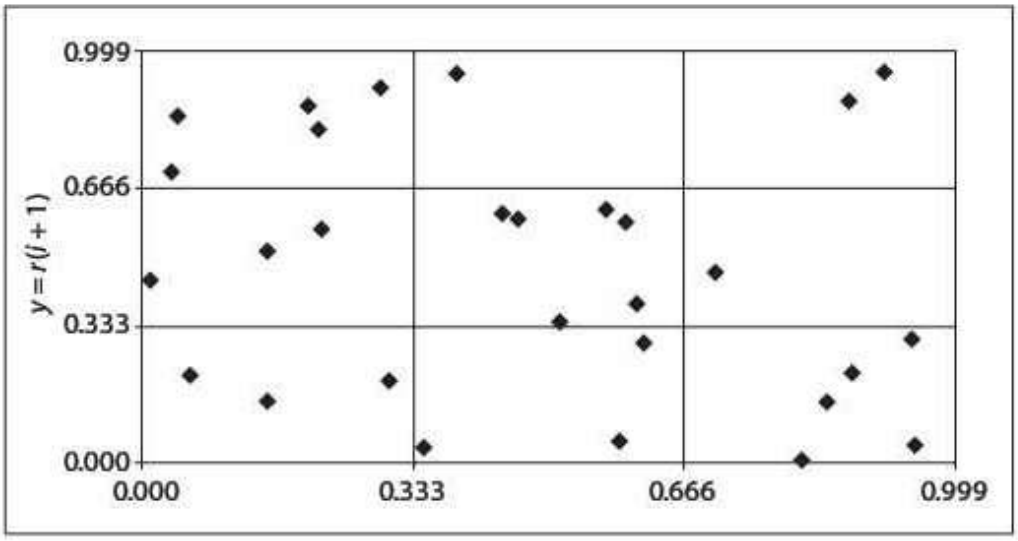
Realice la prueba de series a los siguientes 30 números, con un nivel de confianza de 95%.

0.872	0.950	0.343	0.058	0.384
0.219	0.041	0.036	0.213	0.946
0.570	0.842	0.706	0.809	0.300
0.618	0.512	0.462	0.005	0.203
0.291	0.151	0.596	0.443	0.868
0.913	0.511	0.586	0.608	0.879

Para empezar, generamos la gráfica de dispersión (vea la figura 2.4) con la secuencia de los 29 pares ordenados (x ,y) = (r¡, r/+1) siguientes:

$$(r_1, r_2) = (0.872, 0.219)$$
$$(r_2, r_3) = (0.219, 0.570)$$
$$(r_3, r_4) = (0.570, 0.618)$$
$$(r_4, r_5) = (0.618, 0.291)$$
$$(r_5, r_6) = (0.291, 0.913)$$
$$(r_6, r_7) = (0.913, 0.950)$$
$$(r_{28}, r_{29}) = (0.203, 0.868)$$
$$(r_{29}, r_{30}) = (0.868, 0.879)$$

Figura 13.2 Gráfica de dispersión del ejemplo 13.1.



En la tabla 13.1 se presenta el resto del procedimiento: se contabiliza el número de puntos en cada casilla O_i, y se calcula la frecuencia esperada E_i de acuerdo con E_i = 29/9; en la última columna se presenta el cálculo del estadístico de prueba

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} = \sum_{i=1}^{9} \frac{(3.22 - O_i)^2}{3.22}$$

Tabla 13.1 Cálculos de la prueba de series.

Intervalo	**O_i**	$E_i = \frac{n-1}{m} = \frac{29}{9}$	$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$
1	3	3.22	0.015
2	3	3.22	0.015
3	5	3.22	0.984
4	3	3.22	0.015
5	6	3.22	2.400
6	1	3.22	1.530
7	5	3.22	0.984
8	1	3.22	1.530
9	2	3.22	0.462
Total	29	29	7.935

El valor de tablas $X^2_{0.005,8}$ = 15.507 es mayor que el error total de 7.935, por lo cual no podemos rechazar la hipótesis de independencia.

Ejemplo 13.2

Se tiene 1200 datos pseudoaleatorios:
0.41, 0.68, 0.89, 0.94, 0.74, 0.91, 0.55, 0.62, 0.36, 0.27, 0.19, 0.72, 0.75, 0.08, 0.54, 0.02, 0.01, 0.36, ...

Se forman los 600 pares:
(0.41, 068) (0.89, 0.94) (0.74, 0.91) (0.55, 0.62) (0.36, 0.27) (0.19, 0.72) (0.75,0.08) (0.54, 0.02) (0.01, 0.36) ...

Tabla de frecuencia de 2 dimensiones:

	0-0.2	0.2-0.4	0.4-0.6	0.6-0.8	0.8-1
0-0.2	18	30	20	21	25
0.2-0.4	30	21	26	18	31
0.4-0.6	22	29	22	32	25
0.6-0.8	29	26	24	17	22
0.8-1	25	26	21	27	23

La probabilidad teórica de cada celda es de 1/25 por eso la frecuencia esperada FE es de 600/25=24

Con esta información se puede aplicar la prueba X^2

En la tabla se muestra el valor de $\frac{(\text{FE}-\text{FO})^2}{\text{FE}}$

	0-0.2	0.2-0.4	0.4-0.6	0.6-0.8	0.8-1
0-0.2	1.5	1.5	0.67	0.38	0.04
0.2-0.4	1.5	0.38	0.17	1.5	2.04
0.4-0.6	0.17	1.04	0.17	2.67	0.04
0.6-0.8	1.04	0.17	0	2.04	0.17
0.8-1	0.04	0.17	0.38	0.38	0.04

Se obtiene X^2_{calc} =18,17

Grados de libertad gl: como no se usan los datos para estimar parámetros de la distribución, se tiene gl=24

El valor critico de la X^2 con 24 grados de libertad con α=0,05 es X^2_{crit} = 36,42

Decisión:
Cómo $X^2_{\text{calc}} \leq X^2_{\text{crit}}$ se acepta la hipótesis que los datos tiene distribución uniforme bidimensional.

Conclusión:
El resultado de la prueba no permite rechazar la hipótesis de independencia.

Ejercicios

1. Determine, mediante la prueba de independencia de series si los 100 números de la tabla son pseudoaleatorios con un nivel de aceptación de 90%.

0.78	0.98	0.24	0.73	0.43	0.16	0.78	0.47	0.18	0.55
0.04	0.29	0.68	0.77	0.16	0.03	0.79	0.22	0.37	0.80
0.96	0.26	0.91	0.55	0.75	0.55	0.64	0.39	0.53	0.45
0.61	0.14	0.38	0.12	0.40	0.74	0.78	0.98	0.27	0.60
0.43	0.67	0.62	0.32	0.53	0.54	0.24	0.29	0.18	0.08
0.82	0.94	0.19	0.98	0.41	1.00	0.74	0.92	0.14	0.43
0.83	0.88	0.18	0.21	0.50	0.13	0.43	0.69	0.08	0.12
0.22	0.50	0.16	0.11	0.18	0.89	0.80	0.42	0.29	0.87
0.83	0.79	0.65	0.28	0.78	0.49	0.36	0.86	0.87	0.64
0.51	0.07	0.18	0.94	0.50	0.22	0.66	0.91	0.48	0.24

2. Observe y anote los 4 dígitos de las placas de 100 automóviles que pasen por alguna calle. Determine si esta selección es aleatoria con un nivel de aceptación de 95%; utilice para ello la prueba de series.

3. Utilice la prueba de series para determinar si los 50 números de la tabla son independientes con un nivel de aceptación de 90%.

0.5858	0.8863	0.8378	0.3203	0.4115	0.2710	0.9238	0.1959	0.9268	0.6702
0.6213	0.4360	0.6279	0.8415	0.5786	0.0543	0.3567	0.1655	0.3880	0.8080
0.1931	0.0843	0.9152	0.6093	0.7587	0.4515	0.3203	0.5139	0.7070	0.9123
0.1242	0.8826	0.9921	0.8523	0.6723	0.8540	0.4722	0.4781	0.2101	0.1680
0.8658	0.4028	0.6136	0.8720	0.1126	0.5857	0.9172	0.8943	0.8095	0.6408

4. Para los siguientes números pseudoaleatorios determine por medio de una prueba de series si se pueden considerar independientes.

a) Utilice 9 casillas equiprobables
b) Utilice 16 casillas equiprobables
c) Utilice 25 casillas equiprobables

0.1108	0.9082	0.4738	0.1181	0.7422	0.5005	0.6438	0.1873	0.7379	0.4999
0.3316	0.2974	0.2480	0.0048	0.9841	0.8873	0.6742	0.4242	0.2729	0.5008
0.1813	0.7348	0.4232	0.5429	0.7373	0.3440	0.4653	0.1465	0.1511	0.7932
0.6113	0.1508	0.4751	0.2777	0.4041	0.2909	0.4072	0.7725	0.7611	0.5241
0.4128	0.7647	0.8461	0.3529	0.9966	0.6576	0.1951	0.1844	0.0851	0.9698
0.1883	0.1328	0.4944	0.5323	0.0333	0.1106	0.3004	0.1128	0.4664	0.4820
0.2977	0.9579	0.6782	0.2963	0.9185	0.8141	0.9240	0.5254	0.8034	0.7441
0.5114	0.3399	0.2121	0.0674	0.8534	0.2144	0.9660	0.2248	0.9855	0.9394
0.0213	0.0164	0.8420	0.8373	0.7677	0.9857	0.6978	0.4136	0.4721	0.2812
0.6239	0.0502	0.1848	0.1978	0.5805	0.1240	0.9546	0.2802	0.6087	0.7146

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) NuevaJersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random NumberGenerator, SIAMJ. Comput, volumen 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling andAnalysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. OfOperations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachussetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Iheoryto Numérica! Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

Garcia Duna, Eduado, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 14

II. Nombre:

Pruebas estadísticas de Independencia. Prueba de huecos

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas.

IV. Introducción.

La prueba de huecos (GAP) es usada para asegurar que la recurrencia de cada dígito particular en un flujo de números suceda con un intervalo aleatorio. Se pueden usar dos pruebas para comparar estos intervalos con la longitud esperada de los huecos: La prueba Chi-Cuadrada (Ȥ2) y la prueba Kolmogorov – Smirnov (KS) es entonces usada para comparar.

Esta prueba se realiza considerando a los número pseudoaleatorios considerados generados como dígitos, entonces la prueba consiste en contar el número de dígitos que aparece en ocurrencias sucesivas de un mismo dígito. Por ejemplo, 58245 ilustra un hueco de tamaño 3 entre los dos cincos. La probabilidad de cada uno de los tamaños del hueco (i = 0,1,2,3,....) se obtiene de la siguiente expresión:

$$P_i = 0.1\,(0.9)^i \quad \text{para } i = 0,1,2,...$$

Sin embargo, como teóricamente el valor del tamaño del hueco puede ser infinito, es conveniente, agrupar las probabilidades para valores de i mayores o iguales a un determinado valor de n, tal sumatoria se obtiene de la siguiente expresión:

$$P_{i \geq n} \sum_{m=0}^{x} 0.1\,(0.9)^{m+n} = (0.9)^n$$

Con las ecuaciones anteriores se obtienen las frecuencias esperadas para cada tamaño del hueco.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

- Pruebas de Independencia.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Prueba de huecos

Esta prueba consiste en comparar los números con el propósito de verificar el tamaño del "hueco" que existe entre ocurrencias sucesivas de un número. Las hipótesis fundamentales son:

$$H_0 : r_i \sim \text{Independientes}$$
$$H_1 : r_i \sim \text{Dependientes}$$

La prueba se inicia al definir un intervalo de prueba (α , ß), donde (α , ß) ∈ (0,1), posteriormente se construye una secuencia de unos y ceros de esta manera: se asigna un uno si el r_i pertenece al intervalo (α , ß), y un 0 si no pertenece a dicho intervalo. Por ejemplo, si se define un intervalo (α , ß) = (0.6, 0.7) y se tiene la muestra de 10 números:

$$r_i = \{0.67, 0.62, 0.05, 0.49, 0.59, 0.42, 0.64, 0.06, 0.74, 0.67\},$$

se asignará un uno si el r_i está entre 0.6 y 0.7; en caso contrario se asignará un cero. Si se sigue la regla anterior, la secuencia binaria es:

$$S = \{1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1\}$$

El tamaño de hueco se define como el número de ceros existentes entre unos consecutivos. En el caso de la secuencia de nuestro ejemplo tenemos h = 3 huecos, el primero de tamaño 0, el segundo de tamaño 4, y el tercero de tamaño 2 de acuerdo con:

$$S=\left\{\underbrace{1,1}_{0},\underbrace{0,0,0,0}_{4},1,\underbrace{0,0}_{2},1\right\}$$

A partir del conjunto anterior se determina la frecuencia observada O_i, al contabilizar el número de ocurrencias de cada tamaño de hueco y su correspondiente frecuencia esperada E_i, de acuerdo con E_i= (h)(ß -α)(1 − (ß -α))^i, donde *h* es el número total de huecos en la muestra. La frecuencia del último intervalo se puede calcular mediante la diferencia entre el total y la suma de las frecuencias esperadas de los intervalos anteriores. En la tabla 14.1 se muestra un resumen de estos cálculos.

Tabla 14.1. Frecuencias observadas y esperadas en la prueba de huecos

Tamaño del hueco i	O_i	$E_i=(h)(\beta-\alpha)(1-(\beta-\alpha))^i$ $E_i=(3)(0.7-0.6)(1-(0.7-0.6))^i$	E_i
0	1	$(3)(0.1)(0.9)^0$	0.3
1	0	$(3)(0.1)(0.9)^1$	0.27
2	1	$(3)(0.1)(0.9)^2$	0.243
3	0	$(3)(0.1)(0.9)^3$	0.2187
4	1	$(3)(0.1)(0.9)^4$	0.1968
≥5	0	$(3)(0.1)(0.9)^5$	1.7715
Total	$h=3$	$h=3$	$h=3$

Se procede entonces a calcular el error o estadístico de prueba

$$X_0^2=\sum_{i=1}^{m}\frac{(E_i-O_i)^2}{E_i},$$

por último, si este valor es menor que o igual al estadístico de tablas $X^2_{\alpha,\, m-1}$, no podemos rechazar la hipótesis de la independencia entre los números.

Ejemplo

Realizar la prueba de huecos a los siguientes 30 números, con un nivel de confianza de 95% para el intervalo (α- ß) = (0.8,1.0).

0.872	0.950	0.343	0.058	0.384
0.219	0.041	0.036	0.213	0.946
0.570	0.842	0.706	0.809	0.300
0.618	0.512	0.462	0.005	0.203
0.291	0.151	0.596	0.443	0.868
0.913	0.511	0.586	0.608	0.879

Tomando los números por renglón (o fila) y teniendo en cuenta el intervalo (0.8,1.0), la secuencia de unos y ceros es:

$$S=\{1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,1\}$$

Si calculamos los huecos de la muestra, tenemos:

$$S=\left\{1,\underbrace{}_{0}1,\underbrace{0,0,0,0,0,0,0}_{7},1,\underbrace{0}_{1},1,\underbrace{0}_{1},1,\underbrace{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}_{10},1,\underbrace{}_{0}1,\underbrace{0,0,0}_{3},1\right\}$$

El número de ocurrencias de cada tamaño de hueco 0¡, su correspondiente frecuencia esperada E_i y el cálculo del estadístico de prueba se muestran en la tabla 2.10.

Tabla 2.10 Ejemplo de la prueba de huecos

Tamaño del hueco i	O_i	$E_i=(h)(\beta-\alpha)(1-(\beta-\alpha))^i$ $E_i=(7)(0.2)(0.8)^i$	$\frac{(E_i-O_i)^2}{E_i}$
0	2	1.4	0.2571
1	2	1.12	0.6914
2	0	0.896	0.896
3	1	0.7168	0.1119
4	0	0.5734	0.5734
≥5	2	$7(0.8)^5=2.2938$	0.0376
Total	$h=7$	$h=7$	2.5675

Ya que el estadístico de prueba $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} = 2.5675$ es menor que el estadístico de tablas $X^2{}_{\alpha,\, m-1} = X^2{}_{0.05,5}$ =11.07, no podemos rechazar la hipótesis de independencia entre los números.

Ejercicios

1. Determine, mediante las pruebas de independencia de huecos si los 100 números de la tabla son pseudoaleatorios con un nivel de aceptación de 90%.

0.78	0.98	0.24	0.73	0.43	0.16	0.78	0.47	0.18	0.55
0.04	0.29	0.68	0.77	0.16	0.03	0.79	0.22	0.37	0.80
0.96	0.26	0.91	0.55	0.75	0.55	0.64	0.39	0.53	0.45
0.61	0.14	0.38	0.12	0.40	0.74	0.78	0.98	0.27	0.60
0.43	0.67	0.62	0.32	0.53	0.54	0.24	0.29	0.18	0.08
0.82	0.94	0.19	0.98	0.41	1.00	0.74	0.92	0.14	0.43
0.83	0.88	0.18	0.21	0.50	0.13	0.43	0.69	0.08	0.12
0.22	0.50	0.16	0.11	0.18	0.89	0.80	0.42	0.29	0.87
0.83	0.79	0.65	0.28	0.78	0.49	0.36	0.86	0.87	0.64
0.51	0.07	0.18	0.94	0.50	0.22	0.66	0.91	0.48	0.24

2.- La siguiente tabla muestra los resultados de la prueba de huecos con ß - α=0.1 después de clasificar los números uniformes.

Tamaño del hueco	Frecuencia observada
0	5
1	4
2	3
3	3
> 3	25
Total	40

a) Calcule el error total existente entre lo real y lo teórico.

b) ¿Se puede considerar que esta muestra es pseudoaleatoria con un nivel de aceptación de 90%?

3.- Determine, mediante la prueba de huecos, con α = 0.5 y ß= 0.8, si los 50 números de a tabla son independientes con un nivel de aceptación de 90%.

0.5858	0.8863	0.8378	0.3203	0.4115	0.2710	0.9238	0.1959	0.9268	0.6702
0.6213	0.4360	0.6279	0.8415	0.5786	0.0543	0.3567	0.1655	0.3380	0.8080
0.1931	0.0843	0.9152	0.6093	0.7587	0.4515	0.3203	0.5139	0.7070	0.9123
0.1242	0.8826	0.9921	0.8523	0.6723	0.8540	0.4722	0.4781	0.2101	0.1680
0.8658	0.4028	0.6136	0.8720	0.1126	0.5857	0.9172	0.8943	0.8095	0.6408

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) NuevaJersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random NumberGenerator, SIAMJ. Comput, volumen 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling andAnalysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. OfOperations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachussetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Iheoryto Numérica! Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

Garcia Duna, Eduado, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 15

II. Nombre:

Pruebas estadísticas de aleatoriedad. Prueba de Anderson-Darling

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrollar programas para generar números pseudoaleatorios utilizando diferentes métodos y aplica pruebas estadísticas para garantizar que sean uniformemente distribuidos e independientemente con el fin de utilizarlos en la solución de problemas.

IV. Introducción.

Se dio a conocer en 1954. Esta prueba tiene como propósito corroborar si una muestra de variables aleatorias proviene de una población con una distribución de probabilidad específica. En realidad se trata de una modificación de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, aunque tiene la virtud de detectar las discrepancias en los extremos de las distribuciones.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

- Pruebas de estadísticas de aleatoriedad.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

La principal desventaja de la prueba de Anderson-Darling estriba en que es necesario calcular los valores críticos para cada distribución. La prueba es muy sensible en los extremos de la distribución, por lo que debe usarse con mucho cuidado en distribuciones con límite inferior acotado, y no es confiable para distribuciones de tipo discreto. En la actualidad es posible encontrar tablas de valores críticos para las distribuciones normal, lognormal, exponencial, log-logística, de Weibull y valor extremo tipo I. El procedimiento general de la prueba es:

1. Obtener n datos de la variable aleatoria a analizar.
2. Calcular la media y la varianza de los datos.
3. Organizar los datos en forma ascendente: Y_i i= 1,2,...,n
4. Ordenar los datos en forma descendente. Y_{n+1-i} = 1,2,...,n
5. Establecer de manera explícita la hipótesis nula, al proponer una distribución de probabilidad.
6. Calcular la probabilidad esperada acumulada para cada número Y_i PEA(Y_i), y la probabilidad esperada acumulada para cada número Y_{n+1-i}, PEA(Y_{n+1-i}) ,a partir de la función de probabilidad propuesta.
7. Calcular el estadístico de prueba

$$A_n^2 = -\left[n + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\ln PEA(Y_i) + \ln(1 - PEA(Y_{n+1-i})\right]\right]$$

8. Ajustar el estadístico de prueba de acuerdo con la distribución de probabilidad propuesta.
9. Definir el nivel de significancia de la prueba α, y determinar su valor crítico, $a_{\alpha n}$(vea la tabla 15.1).
10. Comparar el estadístico de prueba con el valor crítico. Si el estadístico de prueba es menor que el valor crítico no se puede rechazar la hipótesis nula.

Tabla 15.1 Estadísticos de prueba y valores críticos para la prueba de Anderson-Darling.

Distribución	Estadístico de prueba ajustado	Valores críticos α			
		0.1	.05	.025	.001
Parámetros conocidos $n \geq 5$	A_n^2	1.933	2.492	3.070	3.857
Normal	$A_n^2\left(1+\frac{4}{n}-\frac{25}{n^2}\right)$	0.632	0.751	0.870	1.029
Exponencial	$A_n^2\left(1+\frac{3}{5n}\right)$	1.070	1.326	1.587	1.943
De Weibull	$A_n^2\left(1+\frac{1}{5\sqrt{n}}\right)$	0.637	0.757	0.877	1.038
Log-logística	$A_n^2\left(1+\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)$	0.563	0.660	0.769	0.906

Ejemplo 15.1

Los siguientes son los datos de un estudio del tiempo de atención a los clientes en una florería, medido en minutos/cliente:

9.400	8.620	9.346	13.323	7.112	13.466	5.764	8.974	9.831	10.056
7.445	6.619	9.260	6.775	8.306	5.633	8.864	13.944	8.952	9.355
10.489	6.306	12.685	11.078	6.957	9.532	9.192	11.731	11.350	14.389
12.553	8.045	9.829	11.804	9.274	12.190	10.270	14.751	9.237	6.515
12.397	8.453	9.628	13.838	9.935	7.827	9.269	8.690	11.515	8.527

Determinar la distribución de probabilidad con un nivel de significancia a de 5 por ciento.
El histograma (vea la figura 15.1) de los n = 50 datos, que considera m = 10 intervalos, la media muestral de 9.786 y la varianza muestral de 5.414, permite establecer la siguiente hipótesis nula:

H_0: Normal (μ = 10, σ = 2.0) minutos/cliente
H_1: Otra distribución

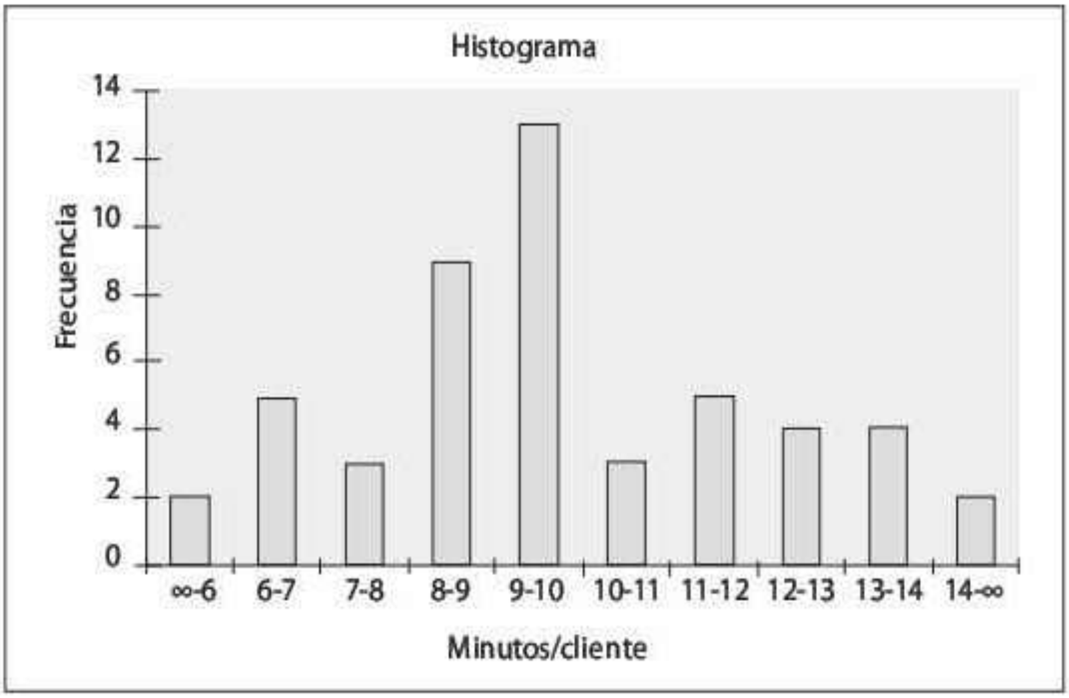


Figura 15.1
Histograma de frecuencias del tiempo de servicio en la florería.

En la tabla 15.2 se muestran los resultados de los cálculos de cada uno de los pasos del procedimiento siguiente:

- En la columna C1 se ordenaron los datos Y_i, *i* =1,2,...,30 en forma ascendente.
- En la columna C2 se organizaron los datos Y_{30+1-i} *i* = 1,2,...,30 en forma descendente.
- En la columna C3 se calcula la variable auxiliar 2i − 1 *i* = 1,2,...,30 del estadístico de prueba.
- En las columnas C4 y C5 se calcula la probabilidad esperada acumulada para cada número Y_i: PEA(Y_i) de la columna C1, y el complemento de la probabilidad esperada acumulada para cada número Y_{n+1-i} :1 -PEA (Y_{n+1-i}) de la columna C2 a partir de la función de probabilidad propuesta, que en este ejemplo es una normal (μ =10, σ = 2.0).

Si se toma, por ejemplo, el renglón *i* = 7 con Y_7 = 7.8266 de la columna C1 y Y_{24} = 10.0562 de la columna C2, y se estandarizan ambos valores

$$z_{i=7} = \frac{7.8266 - 10}{2} = -1.0867$$

$$z_{i=24} = \frac{10.0562 - 10}{2} = 0.0281$$

se encuentra la probabilidad acumulada en la tabla normal estándar. De esta forma tenemos una PEA_7 = 0.1385 para z = -1 .0 8 6 7 y, para z = 0.0285 una PEA2A = 0.5112 y 1 - PEA_{24} = 0.4888.

En las columnas C6, C7 y C8 se desglosan los cálculos del estadístico de prueba

$$A_n^2 = -\left[n + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\ln PEA(Y_i) + \ln(1 - PEA(Y_{n+1-i}))\right]\right]$$

$$A_n^2 = -\left[30 + \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(2i-1)\left[\ln PEA(Y_i) + \ln(1 - PEA(Y_{n+1-i}))\right]\right]$$

$$A_n^2 = -\left[30 + \frac{1}{30}\left[(1)\left[-4.2399 - 3.1812\right] + (3)\left[-4.0692 - 3.1812\right] + \ldots + (59)\left[-0.0424 - 0.0146\right]\right]\right]$$

$$A_n^2 = 2.825724$$

Una vez calculado el estadístico de prueba es necesario ajustarlo de acuerdo con la tabla 15.1. En este caso, como tenemos n > 5 no se requiere ajuste.

Por último, al comparar el estadístico de prueba A_n^2 =2.825724 con el valor crítico de la prueba y el nivel de significancia seleccionado, $\alpha_{0.05,30}$ = 2.492 (vea la tabla 15.1, en donde se dan los valores críticos de α), se rechaza la hipótesis H .

Tabla 15.2 Cálculo s de la hipótesis inicia l en la prueba de Anderson -Darling .

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
i	Y_i	Y_{30+1-i}	$2i-1$	$PEA(Y_i)$	$1-PEA(Y_{30+1-i})$	$LN(C4)$	$LN(C5)$	(C3)*((C6)+C(7))
1	5.63282	13.4663	1	0.014496	0.0415	−4.2339	−3.1812	−7.4151
2	5.76414	13.4663	3	0.01709	0.0415	−4.0692	−3.1812	−21.7513
3	5.76414	13.3229	5	0.01709	0.0483	−4.0692	−3.0301	−35.4967
4	6.95686	12.6853	7	0.064058	0.0897	−2.7480	−2.4114	−36.1152
5	7.11163	12.19	9	0.074343	0.1368	−2.5991	−1.9896	−41.2977
6	7.11163	10.2697	11	0.074343	0.4464	−2.5991	−0.8066	−37.4625
7	7.8266	10.0562	13	0.138585	0.4888	−1.9763	−0.7158	−34.9974
8	8.30552	9.93504	15	0.198431	0.5130	−1.6173	−0.6676	−34.2732
9	8.61959	9.83097	17	0.245033	0.5337	−1.4064	−0.6280	−34.5836
10	8.86415	9.82943	19	0.285043	0.5340	−1.2551	−0.6274	−35.7676
11	8.97359	9.62768	21	0.303903	0.5738	−1.1910	−0.5554	−36.6755
12	9.1919	9.53164	23	0.343089	0.5926	−1.0698	−0.5233	−36.6399
13	9.25952	9.39954	25	0.355602	0.6180	−1.0339	−0.4813	−37.8803
14	9.26901	9.34602	27	0.357372	0.6282	−1.0290	−0.4650	−40.3362
15	9.27425	9.34602	29	0.358348	0.6282	−1.0262	−0.4650	−43.2450
16	9.34602	9.27425	31	0.371838	0.6417	−0.9893	−0.4437	−44.4233
17	9.34602	9.26901	33	0.371838	0.6426	−0.9893	−0.4422	−47.2391
18	9.39954	9.25952	35	0.382	0.6444	−0.9623	−0.4394	−49.0620
19	9.53164	9.1919	37	0.407422	0.6569	−0.8979	−0.4202	−48.7701
20	9.62768	8.97359	39	0.426161	0.6961	−0.8529	−0.3623	−47.3930
21	9.82943	8.86415	41	0.466018	0.7150	−0.7635	−0.3355	−45.0617
22	9.83097	8.61959	43	0.466323	0.7550	−0.7629	−0.2811	−44.8902
23	9.93504	8.30552	45	0.487045	0.8016	−0.7194	−0.2212	−42.3263

24	10.0562	7.8266	47	0.511216	0.8614	−0.6710	−0.1492	−38.5467
25	10.2697	7.11163	49	0.553636	0.9257	−0.5912	−0.0773	−32.7565
26	12.19	7.11163	51	0.863247	0.9257	−0.1471	−0.0773	−11.4396
27	12.6853	6.95686	53	0.910306	0.9359	−0.0940	−0.0662	−8.4894
28	13.3229	5.76414	55	0.951689	0.9829	−0.0495	−0.0172	−3.6715
29	13.4663	5.76414	57	0.958464	0.9829	−0.0424	−0.0172	−3.4007
30	13.4663	5.63282	59	0.958464	0.9855	−0.0424	−0.0146	−3.3645

Replanteamiento de una nueva hipótesis:

$$H_0\text{: Normal } (\mu = 9.604, \sigma = 2.0) \text{ minutos/cliente}$$
$$H_1\text{: Otra distribución}$$

En la tabla 15.3 se presenta el resumen de resultados de cada uno de los pasos del procedimiento; la modificación se ve reflejada en los cálculos de las probabilidades esperadas acumuladas. Por ejemplo, para el renglón i = 7 tenemos ahora:

$$z_{i=7} = \frac{7.8266 - 9.604}{2} = -0.8887$$
$$z_{i=24} = \frac{10.0562 - 9.604}{2} = 0.2261$$

Con estos valores se encuentra la probabilidad esperada acumulada en la tabla normal estándar: a z = -0.8887 le corresponde PEA_7 = 0.18707, y a z = 0.2261, PEA_{24} = 0.5894 y 1 - PEA_{24} = 0.4106.

Al calcular de nuevo el estadístico de prueba se obtiene:

$$A_n^2 = -\left[n + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\ln PEA(Y_i) + \ln(1 - PEA(Y_{n+1-i}))\right]\right]$$
$$A_n^2 = -\left[30 + \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(2i-1)\left[\ln PEA(Y_i) + \ln(1 - PEA(Y_{n+1-i}))\right]\right]$$
$$A_n^2 = -\left[30 + \frac{1}{30}\left[(1)\left[-3.749 - 3.6218\right] + (3)\left[-3.5961 - 3.6218\right] + \ldots + (59)\left[-0.0271 - 0.0238\right]\right]\right]$$
$$A_n^2 = 1.3516$$

Una vez calculado el estadístico de prueba, es necesario ajustarlo de acuerdo con la tabla 15.1. En este caso, como tenemos n ≥ 5 , no se requiere ajuste.

Por último, al comparar el estadístico de prueba A^2_n =1.3516 con el valor crítico y el nivel de significancia seleccionado, $\alpha_{0.005,30}$ = 2.492 (tabla 15.1 de valores críticos de α), vemos que no se puede rechazar la hipótesis H_0.

Tabla 15.3 Cálculos de la segunda hipótesis en la prueba de Anderson -Darling .

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
i	Y_i	Y_{30+1-i}	$2i-1$	$PEA(Y_i)$	$1-PEA(Y_{30+1-i})$	$LN(C4)$	$LN(C5)$	(C3)*((C6) + C(7))
1	5.63282	13.4663	1	0.02354	0.0267	−3.7491	−3.6218	−7.3709
2	5.76414	13.4663	3	0.02743	0.0267	−3.5961	−3.6218	−21.6535
3	5.76414	13.3229	5	0.02743	0.0315	−3.5961	−3.4583	−35.2718
4	6.95686	12.6853	7	0.09282	0.0617	−2.3771	−2.7854	−36.1375
5	7.11163	12.19	9	0.10634	0.0980	−2.2411	−2.3227	−41.0743
6	7.11163	10.2697	11	0.10634	0.3696	−2.2411	−0.9952	−35.5997
7	7.8266	10.0562	13	0.18707	0.4106	−1.6763	−0.8902	−33.3641
8	8.30552	9.93504	15	0.25808	0.4343	−1.3545	−0.8341	−32.8282
9	8.61959	9.83097	17	0.31128	0.4548	−1.1671	−0.7878	−33.2332
10	8.86415	9.82943	19	0.35571	0.4551	−1.0336	−0.7872	−34.5951
11	8.97359	9.62768	21	0.37629	0.4953	−0.9774	−0.7026	−35.2802
12	9.1919	9.53164	23	0.41837	0.5144	−0.8714	−0.6647	−35.3296
13	9.25952	9.39954	25	0.43161	0.5407	−0.8402	−0.6148	−36.3768
14	9.26901	9.34602	27	0.43348	0.5513	−0.8359	−0.5954	−38.6460
15	9.27425	9.34602	29	0.43451	0.5513	−0.8335	−0.5954	−41.4399
16	9.34602	9.27425	31	0.44867	0.5655	−0.8015	−0.5701	−42.5173
17	9.34602	9.26901	33	0.44867	0.5665	−0.8015	−0.5682	−45.2004
18	9.39954	9.25952	35	0.45927	0.5684	−0.7781	−0.5650	−47.0071
19	9.53164	9.1919	37	0.48556	0.5816	−0.7225	−0.5419	−46.7817
20	9.62768	8.97359	39	0.50471	0.6237	−0.6838	−0.4721	−45.0777
21	9.82943	8.86415	41	0.54486	0.6443	−0.6072	−0.4396	−42.9200
22	9.83097	8.61959	43	0.54516	0.6887	−0.6067	−0.3729	−42.1221
23	9.93504	8.30552	45	0.56572	0.7419	−0.5697	−0.2985	−39.0677
24	10.0562	7.8266	47	0.58943	0.8129	−0.5286	−0.2071	−34.5783
25	10.2697	7.11163	49	0.63037	0.8937	−0.4615	−0.1124	−28.1205
26	12.19	7.11163	51	0.90199	0.8937	−0.1031	−0.1124	−10.9946
27	12.6853	6.95686	53	0.93829	0.9072	−0.0637	−0.0974	−8.5385
28	13.3229	5.76414	55	0.96852	0.9726	−0.0320	−0.0278	−3.2892
29	13.4663	5.76414	57	0.97326	0.9726	−0.0271	−0.0278	−3.1301
30	13.4663	5.63282	59	0.97326	0.9765	−0.0271	−0.0238	−3.0042

Ejercicios

1. Utilice la prueba de Anderson-Darling para determinar, con un nivel de confianza de 90%, qué tipo de distribución siguen los datos.

1.018	0.283	1.672	−0.289	−1.343	−0.418	1.317	0.249	0.937	−0.670
−1.322	−0.296	−1.638	1.970	−0.541	1.567	−1.717	0.125	−0.608	1.027
2.295	−0.952	0.431	2.210	−0.477	0.913	−0.697	−0.145	−1.088	0.137
−1.108	−0.281	0.564	0.683	−0.691	0.010	−0.429	−1.420	−0.070	1.517
0.095	−0.104	1.240	−0.354	−1.525	1.077	0.200	−0.959	−0.144	−1.169

2. Determine, con un nivel de confianza de 90%, qué tipo de distribución siguen los datos mediante la prueba de Anderson-Darling.

7.717	7.971	5.261	5.994	7.215	6.100	6.876	7.514	6.409	6.679
6.377	6.155	7.512	7.936	7.960	6.157	5.796	7.579	6.450	6.719
6.150	5.983	5.091	7.492	6.974	5.386	6.347	5.053	5.129	5.922
6.174	5.962	5.153	6.838	5.741	5.478	5.471	7.745	5.057	5.548
7.814	6.238	7.484	6.150	7.561	7.734	5.595	7.587	5.235	7.872

3. Determine, con un nivel de confianza de 90% , qué tipo de distribución siguen los datos; utilice la prueba de Anderson-Darling

191.088	178.781	199.534	191.382	173.618	193.244	185.665	192.927	175.524	189.795
176.583	187.396	198.267	181.183	186.406	192.473	193.006	192.881	182.241	187.850
193.267	192.581	195.991	200.364	188.597	188.870	191.077	206.708	190.292	198.489
198.414	174.540	194.575	184.283	194.842	186.476	196.176	183.730	197.700	184.097
203.231	192.099	177.140	172.582	188.939	183.386	180.174	195.355	193.626	206.255

4. Determine, con un nivel de confianza de 90%, qué tipo de distribución siguen los datos, a) Emplee la prueba de Anderson-Darling, b) emplee la prueba Chi-cuadrada.

Intervalo	Frecuencia
-∞-12	3
12.0-12.5	4
12.5-13.0	3
13.0-13.5	6
13.5-14.0	8
14.0-14.5	15
14.5-15.0	12
15.0-15.5	13
15.5-16.0	7
16.0-16.5	16
16.5-17.0	7
17.0-∞	6

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M.(2005). Discrete-Event System Simulation (4* ed.) NuevaJersey: Prentice Hall.

Blum, L., Blum, M.y Shub, M.A(1986). Simple Unpredictable Pseudo-random NumberGenerator, SIAMJ. Comput, volumen 15 (número 2).

Law, A.M. y Kelton, W.D. (2000). Simulation Modeling andAnalysis (3*. ed.): McGraw Hill.

L'Ecuyer, P (1994b). Uniform Random Number Generation, Ann. OfOperations Research.

Lehmer D.H. (1951). Proceedings o f the Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery, Massachussetts: Harvard University Press, Cambridge.

Lewis P.A., Goodman A.S., and Miller J.M. (1969). A pseudo-random number generator for the System/360, IBMSyst. J., volúmenes 8,2.

Margsalia D.H. (1972). The structure of linear congruential sequences, Applications o f Number Iheoryto Numérica! Analysis, S.K. Zaremba, Nueva York: Academic Press.

Garcia Duna, Eduado, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 16

II. Nombre:

Generación de variables aleatorias. Método de la transformada inversa

III. Competencia(s) a desarrollar.

Aplica métodos para la generación de variables aleatorias que definan el comportamiento de los sistemas, para implementar programas que simulen situaciones reales eficientemente.

IV. Introducción.

El método de la transformada inversa puede utilizarse para simular variables aleatorias continuas, lo cual se logra mediante la función acumulada F(x) y la generación de números pseudoaleatorios r_i ~ U (0,1).

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

De la unidad 3:
3.1 Conceptos básicos
3.2 Variables aleatorias discretas
3.3 Variables aleatorias continuas
3.4 Métodos para generar variables aleatorias
3.4.1 Método de la transformada inversa.
3.4.2 Método de convolución.
3.4.3 Método de composición.
3.5 Procedimientos especiales.
3.6 Pruebas estadísticas.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

El método consiste en:

1. Definir la función de densidad F(x) que represente la variable a modelar.
2. Calcular la función acumulada F(x).
3. Despejar la variable aleatoria x y obtener la función acumulada inversa $F(x)^{-1}$.
4. Generar las variables aleatorias x, sustituyendo valores con números pseudoaleatorios $r_i \sim U(0,1)$ en la función acumulada inversa.

El método de la transformada inversa también puede emplearse para simular variables aleatorias de tipo discreto, como en las distribuciones de Poisson, de Bernoulli, binomial, geométrica, discreta general, etcétera. La generación se lleva a cabo a través de la probabilidad acumulada P(x) y la generación de números pseudoaleatorios $r_i \sim U(0,1)$. El método consiste en:

1. Calcular todos los valores de la distribución de probabilidad p(x) de la variable a modelar.
2. Calcular todos los valores de la distribución acumulada P(x).
3. Generar números pseudoaleatorios $r_i \sim U(0,1)$.
4. Comparar con el valor de P(x) y determinar qué valor de x corresponde a P(x).

En la figura 16.1 se muestra gráficamente la metodología para generar variables aleatorias continuas:

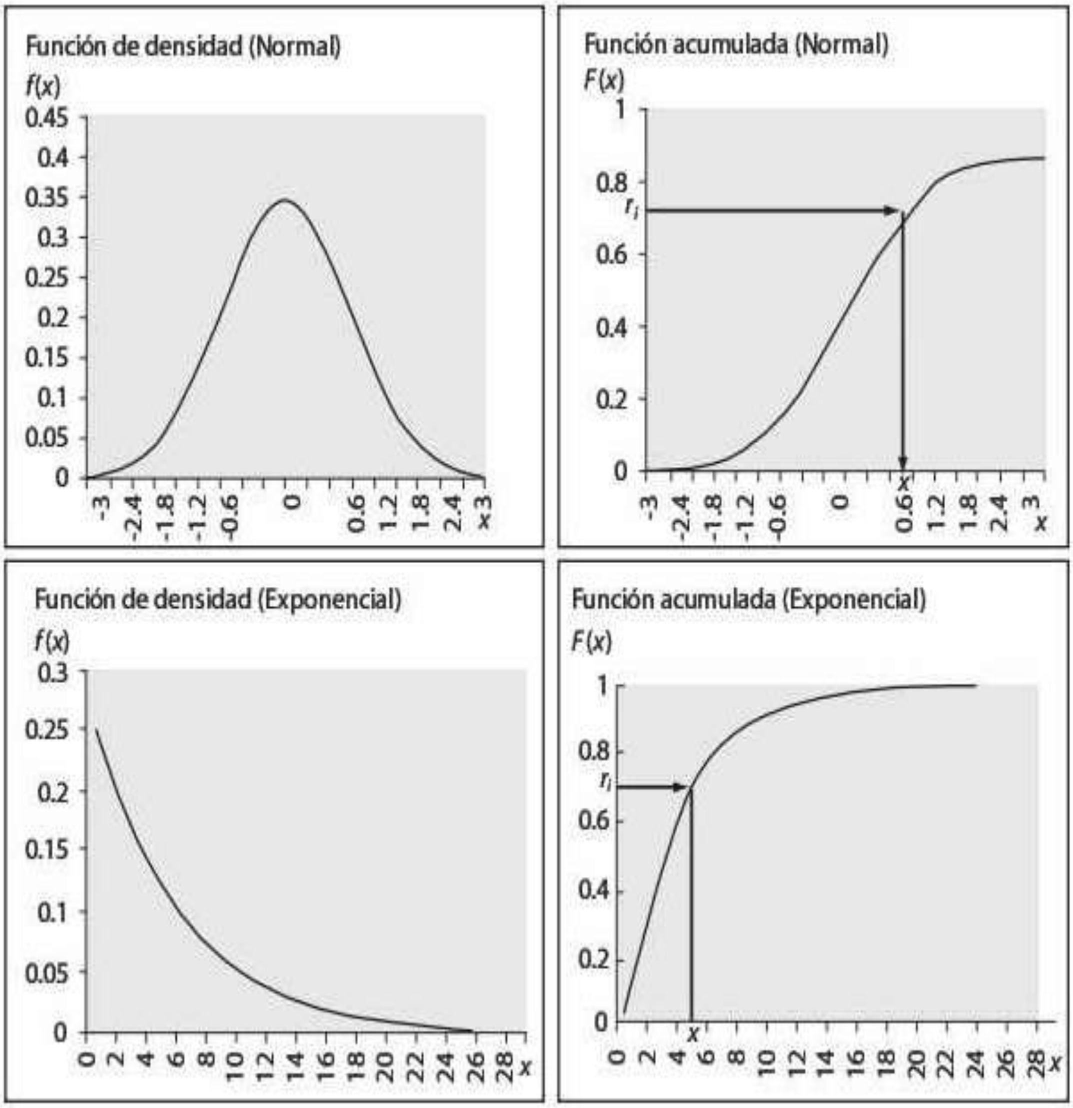


Figura 16.1 Esquematización del método de la transformada inversa para variables continuas.

Por su parte, la figura 16.2 muestra de manera gráfica la metodología para generar variables aleatorias discretas.

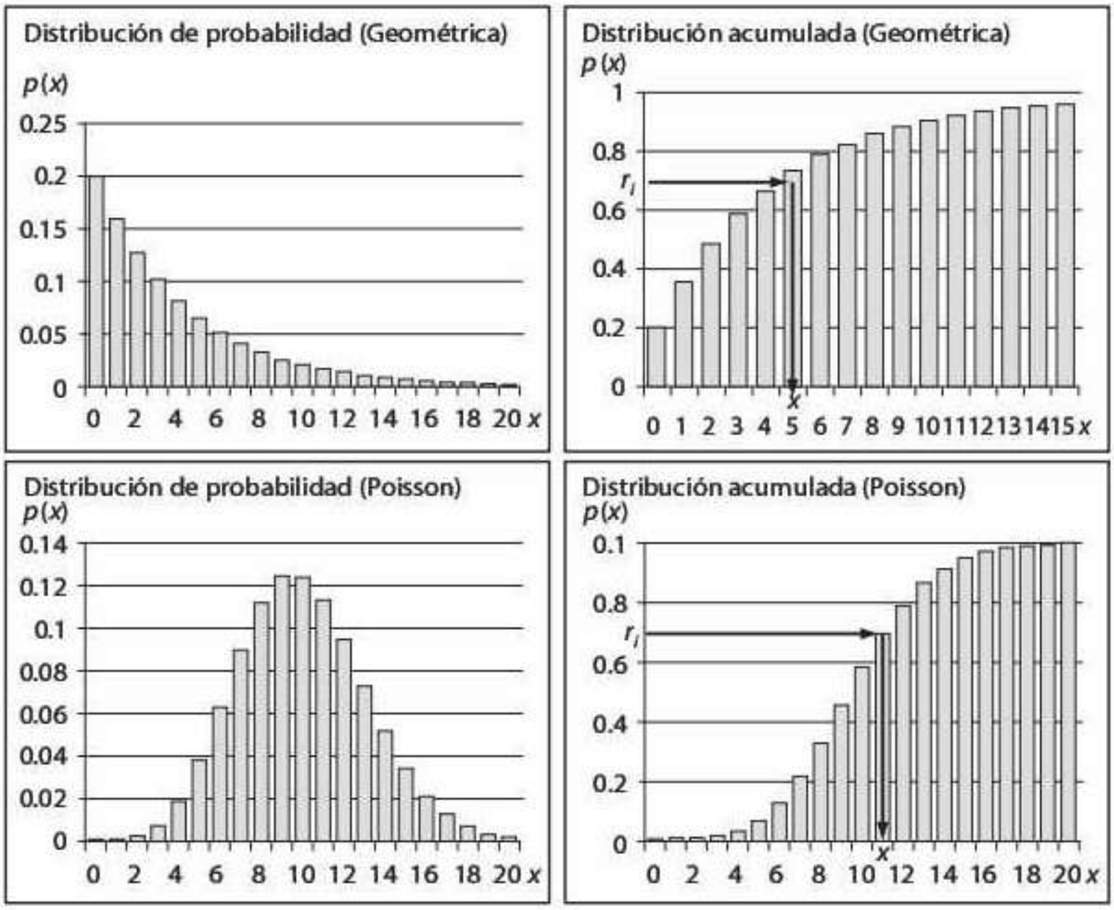


Figura 16.2 Esquematización del método de la transformada inversa para variables discretas.

Distribución uniforme

A partir de la función de densidad de las variables aleatorias uniformes entre a y b,

$$F(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

se obtiene la función acumulada

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx \quad = \quad \frac{x-a}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$

Al igualar la función acumulada F(x) con el número pseudoaleatorio r_i~U(0,1), y despejar x se obtiene:

$$x_i = a + (b-a)\,F(x)_i$$

$$x_i = a + (b-a)\,r_i$$

Ejemplo 1

La temperatura de una estufa se comporta de manera uniforme dentro del rango de 95 a 100° C. La lista de números pseudoaleatorios y la ecuación x_i= 95 + 5r_i nos permiten modelar el comportamiento de la variable aleatoria que simula la temperatura de la estufa. (vea la tabla 16.1).

Tabla 16.1 Simulación de las temperaturas de una estufa.

Medición	r_i	Temperatura °C
1	0.48	97.40
2	0.82	99.10
3	0.69	98.45
4	0.67	98.35
5	0.00	95.00

Distribución exponencial

A partir de la función de densidad de las variables aleatorias exponenciales con media 1/λ,

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \text{para} \qquad x \geq 0$$

se obtiene la función acumulada

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx \quad = \quad 1 - e^{-\lambda x} \quad para \quad x \geq 0$$

Si igualamos la función acumulada F(x) con el número pseudoaleatorio r_i~U(0,1), y despejamos x se obtiene:

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - F(x)_i)$$

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i)$$

Ejemplo 2

Los datos históricos del tiempo de servicio en la caja de un banco se comportan de forma exponencial con media de 3 minutos/cliente. Una lista de números pseudoaleatorios r_i~U(0,1) y la ecuación generadora exponencial x_i=-3ln(1 - r_i) nos permiten simular el comportamiento de la variable aleatoria (vea la tabla 16.2).

Tabla 16.2 Simulación del tiempo de servicio en la caja de un banco

Cliente	r_i	Tiempo de servicio (min)
1	0.64	3.06
2	0.83	5.31
3	0.03	0.09
4	0.50	2.07
5	0.21	0.70

Distribución de Bernoulli

A partir de la distribución de probabilidad de las variables aleatorias de Bernoulli con media

$$p(x) = p^x(1-\mathrm{p})^{1-x} \qquad \text{para} \qquad x = 0, 1$$

se calculan las probabilidades para x = 0 y x = 1, para obtener

x	0	1
$p(x)$	$1-p$	p

Si acumulamos los valores de p(x) obtenemos:

x	0	1
$p(x)$	$1-p$	1

Al generar los números pseudoaleatorios r_i~U(0,1) se aplica la regla:

$$x_i = \begin{cases} 0 & si \quad r_i \in (0, 1-p) \\ 1 & si \quad r_i \in (1-p, 1) \end{cases}$$

Ejemplo 3.

Los datos históricos sobre la frecuencia de paros de cierta máquina muestran que existe una probabilidad de 0.2 de que ésta falle (x= 1), y de 0.8 de que no falle (x = 0) en un día determinado. Genere una secuencia aleatoria que simule este comportamiento.

A partir de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Bernoulli con media 0.8,

$$p(x) = (0.2)^x (0.8)^{1-x} \qquad \text{para} \qquad x = [0, 1]$$

se calculan las probabilidades puntuales y las acumuladas para x = 0 y x = 1, y se obtienen los datos ilustrados en la tabla 16.3:

Tabla 16.3 Cálculo de las probabilidades acumuladas de las fallas de la máquina del ejemplo 3.

x	0	1
$P(x)$	0.8	0.2
$P(x)$	0.8	1

La regla para generar esta variable aleatoria estaría definida por:

$$x_i = \begin{cases} 0 & si \quad r_i \in (0-0.8) \\ 1 & si \quad r_i \in (0.8-1) \end{cases}$$

Con una lista de números pseudoaleatorios r_i~U(0,1) y la regla anterior es posible simular el comportamiento de las fallas de la máquina a lo largo del tiempo, al considerar lo siguiente:

· Si el número pseudoaleatorio es menor que 0.8, la máquina no fallará.
· Si el número pseudoaleatorio es mayor que 0.8, ocurrirá la falla (vea la tabla 16.4).

Tabla 16.4 Simulación de las fallas de la máquina.

Día	r_i	x_i	Evento: la máquina
1	0.453	0	no falla
2	0.823	1	falla
3	0.034	0	no falla
4	0.503	0	no falla
5	0.891	1	falla

Ejemplo 4

El número de piezas que entran a un sistema de producción sigue una distribución de Poisson con media de 2 piezas/hr. Simule el comportamiento de la llegada de las piezas al sistema.

A partir de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson con media 2,

$$p(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad para \qquad x=0,\ 1,2,3,...$$

$$p(x)=\frac{2^x e^{-2}}{x!} \qquad para \qquad x=0,\ 1,2,3,...$$

se calculan las probabilidades puntuales y las acumulad as para x = 0 , 1; 2,...,
y se obtienen los datos de la tabla 16.5.

Tabla 16.5. Cálculo de las probabilidades acumuladas para el ejemplo 16.4.

x	$p(x)$	$P(x)$
0	0.1353	0.1353
1	0.2706	0.4060
2	0.2706	0.6766
3	0.1804	0.8571
4	0.0902	0.9473
5	0.0360	0.9834
6	0.0120	0.9954
7	0.0034	0.9989
8	0.0008	0.9997
9	0.0001	0.9999
10	0.00003	0.9999

La regla para generar esta variable aleatoria estaría definida por:

$$x_i=\begin{cases}0 & si \quad r_i\in(0-0.1353)\\ 1 & si \quad r_i\in(0.1353-0.4060)\\ 2 & si \quad r_i\in(0.4060-0.6766)\\ 3 & si \quad r_i\in(0.6766-0.8572)\\ 4 & si \quad r_i\in(0.8571-0.9473)\\ 5 & si \quad r_i\in(0.9473-0.9834)\\ 6 & si \quad r_i\in(0.9834-0.9954)\\ 7 & si \quad r_i\in(0.9954-0.9989)\\ 8 & si \quad r_i\in(0.9989-0.9997)\\ 9 & si \quad r_i\in(0.9997-0.9999) \quad ...\end{cases}$$

Con una lista de números pseudoaleatorios r_i~U(0,1) y la regla anterior es posible simular la llegada de las piezas al sistema de producción, con los resultados consignados en la tabla 16.6.

Tabla 16.6. Simulación de la llegada de piezas al sistema, con variables aleatorias de Poisson

Hora	r_i	Piezas/hr
1	0.6754	2
2	0.0234	0
3	0.7892	3
4	0.5134	2
5	0.3331	1

Ejemplo 5

La tabla siguiente muestra la demanda diaria de cepillos dentales en un supermercado.

Simule el comportamiento de la demanda mediante el método de la transformada inversa.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Demanda	1	2	2	1	3	0	3	1	3

A partir de la información histórica se calculan las probabilidades puntuales y las acumuladas para x = 0, 1, 2, 3 (vea la tabla 16.7).

Tabla 16.7 Cálculo de la probabilidades acumuladas para el ejemplo 5.

x	$p(x)$	$p(x)$
0	0.1111	0.1111
1	0.2222	0.3333
2	0.3333	0.6666
3	0.3333	1

La regla para generar esta variable aleatoria estaría determinada por:

$$x_i = \begin{cases} 0 & si \quad r_i \in (0 - 0.1111) \\ 1 & si \quad r_i \in (0.1111 - 0.3333) \\ 2 & si \quad r_i \in (0.3333 - 0.6666) \\ 3 & si \quad r_i \in (0.6666 - 1) \end{cases}$$

Con una lista de números pseudoaleatorios $r_i \sim U(0,1)$ y la regla anterior es posible simular la demanda diaria de cepillos dentales, tal como se muestra en la tabla 16.8.

Tabla 16.8. Simulación de la demanda de cepillos dentales.

Día	r_i	Demanda diaria
1	0.213	1
2	0.345	2
3	0.021	0
4	0.987	3
5	0.543	2

Ejercicios

1. Genere, mediante el método de la transformada inversa, 100 números aleatorios para las siguientes distribuciones de probabilidad.

a) $p(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}$ para $x = 1, 2, 3, \ldots$

b) $p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ para $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

c) $p(x)=\frac{20+10x}{200}$ para $x=0,1,2,3,4$

d) $p(x)=\frac{18-4x}{50}$ para $x=0,1,2,3,4$

e) $p(x)=\frac{3x+8}{100}$ para $x=2,3,4,5,6$

f) $p(x)=\frac{1}{6}$ para $x=6,7,8,9,10,11$

g) $p(x)=\frac{p(1-p)^{x-1}}{1-(1-p)^{n}}$ para $x=1,2,\ldots,n$

2. Obtenga, con el método de la transformada inversa, la expresión matemática para generar variables aleatorias que sigan las funciones de densidad indicadas.

a) $f(x)=\frac{x}{5}e^{-\frac{x^2}{10}}$ para $x\geq 0$

b) $f(x)=36x^2e^{-12x^3}$ para $x\geq 0$

c) $f(x)=4x^3e^{-x^4}$ para $x\geq 0$

3. En los siguientes incisos genere variables aleatorias con densidad f(x) mediante los números aleatorios 0.123,0.765,0.893, 0.563,0.642, 0.225,0.334,0.076, 0.984 y 0.445. Use el método de la transformada inversa.

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} 3/4 & 0\le x\le 1 \\ 1/4 & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$b)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{12}(x-7) & 7\le x\le 10 \\ \frac{1}{20}(15-x) & 10\le x\le 15 \end{cases}$$

$$c)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{12}(x-8) & 8\le x\le 11 \\ \frac{5}{8} & 11\le x\le 12 \end{cases}$$

$$d)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6} & 8\le x\le 10 \\ \frac{1}{12} & 10\le x\le 14 \\ \frac{1}{3} & 14\le x\le 15 \end{cases}$$

4. Genere 100 variables aleatorias para las siguientes distribuciones de probabilidad; utilice el método de la transformada inversa

$$a)\quad f(x)=\frac{(x-4)^2}{72} \quad \text{para} \quad 0\le x\le 4+\sqrt[3]{152}$$

$$b)\quad f(x)=\frac{(x-4)^2}{72} \quad \text{para} \quad 4\le x\le 10$$

$$c)\quad f(x)=\frac{1}{5} \quad \text{para} \quad 2\le x\le 7$$

$$d)\quad f(x)=\frac{x}{2} \quad \text{para} \quad 0\le x\le 2$$

$$e)\quad f(x)=\frac{x^2}{4} \quad \text{para} \quad 1\le x\le \sqrt[3]{13}$$

$$f)\quad f(x)=\frac{(x-14)}{200} \quad \text{para} \quad 14\le x\le 34$$

5. Genere 50 variables aleatorias para las siguientes distribuciones de probabilidad; emplee el método de la transformada inversa.

a) $f(x)=\frac{(x-1)}{4}$ para $1\leq x\leq 1+\sqrt{8}$

b) $f(x)=\frac{1}{6}$ para $7\leq x\leq 13$

c) $f(x)=\frac{3}{2}x$ para $1\leq x\leq \sqrt{7/3}$

d) $f(x)=\frac{1}{0.3}x^2$ para $2\leq x\leq \sqrt[3]{8.9}$

e) $f(x)=\frac{1}{0.8}x^2$ para $0\leq x\leq \sqrt[3]{2.4}$

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Azarang, M. y García, E. (1996). Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos (1a ed.): McGraw Hill.

BanksJ., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M. (2005). Discrete-EventSystem Simulation (4,h ed.): Prentice Hall NJ.

Law, A.M. y Kelton, W.D.(2000). Simulation Modeling andAnalysis (3*. ed.): McGraw Hill.

Garcia Duna, Eduado, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 17

II. Nombre:

Generación de variables aleatorias. Método de convolución

III. Competencia(s) a desarrollar.

Aplica métodos para la generación de variables aleatorias que definan el comportamiento de los sistemas, para implementar programas que simulen situaciones reales eficientemente.

IV. Introducción.

En algunas distribuciones de probabilidad la variable aleatoria a simular, Y, puede generarse mediante la suma de otras variables aleatorias X de manera más rápida que a través de otros métodos. Entonces, el método de convolución se puede expresar como:

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_k$$

Las variables aleatorias de cuatro de las distribuciones más conocidas (de Erlang, normal, binomial y de Poisson) pueden generase a través de este método, como se verá a continuación.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

De la unidad 3:
3.1 Conceptos básicos
3.2 Variables aleatorias discretas
3.3 Variables aleatorias continuas
3.4 Métodos para generar variables aleatorias
3.4.1 Método de la transformada inversa.
3.4.2 Método de convolución.
3.4.3 Método de composición.
3.5 Procedimientos especiales.
3.6 Pruebas estadísticas.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Distribución de Erlang

La variable aleatoria *k*-Erlang con media 1/λ puede producirse a partir de la generación de *k* variables exponenciales con m edia 1/*k*λ:

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

$$Y = -\frac{1}{k\lambda}\ln(1-r_1) - \frac{1}{k\lambda}\ln(1-r_2) - \ldots - \frac{1}{k\lambda}\ln(1-r_k)$$

$$Y = -\frac{1}{k\lambda}\left[\ln(1-r_1) + \ln(1-r_2) + \ldots + \ln(1-r_k)\right]$$

$$Y = -\frac{1}{k\lambda}\left[\ln\left((1-r_1)(1-r_2)\ldots(1-r_k)\right)\right]$$

$$Y = -\frac{1}{k\lambda}\left[\ln\left((1-r_1)(1-r_2)\ldots(1-r_k)\right)\right]$$

$$Y = ER_i = -\frac{1}{k\lambda}\ \ln\prod_{i=1}^{k}(1-r_i)$$

Ejemplo 1

El tiempo de proceso de cierta pieza sigue una distribución 3-Erlang con media 1/λ de 8 minutos/pieza. Una lista de números pseudoaleatorios r_i~U(0,1) y la ecuación de generación de números Erlang permite obtener la tabla 17.1, que indica el comportamiento de la variable aleatoria.

$$Y = ER_i = -\frac{8}{3} \ln \prod_{i=1}^{k} (1 - r_i)$$

$$Y = -\frac{8}{3} \ln\left[(1 - r_1)(1 - r_1)(1 - r_1)\right]$$

Tabla 17.1 Simulación del tiempo de proceso para el ejemplo 1.

Pieza	$1 - r_i$	$1 - r_i$	$1 - r_i$	Tiempo de proceso (min/pieza)
1	0.28	0.52	0.64	6.328
2	0.96	0.37	0.83	3.257
3	0.04	0.12	0.03	23.588
4	0.35	0.44	0.50	6.837
5	0.77	0.09	0.21	11.279

Distribución normal

La variable aleatoria normal con media μ y desviación estándar σ puede generarse mediante el teorema del límite central:

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_k \sim N(k\mu_x, k\sigma_x^2)$$

Al sustituir X_i por números pseudoaleatorios r_i se obtiene:

$$Y = r_1 + r_2 + ... + r_k \sim N(k\frac{1}{2}, k\frac{1}{12})$$

$$Y = r_1 + r_2 + ... + r_{12} \sim N(\frac{12}{2}, \frac{12}{12}) \sim N(6,1)$$

$$Y = Z = (r_1 + r_2 + ... + r_{12}) - 6 \sim N(0,1)$$

$$Z = \sum_{i=1}^{12} (r_i) - 6 = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Si despejamos *X*, tenemos que

$$x = N_i = \left[\sum_{i=1}^{12} (r_i) - 6 \ \ \sigma + \mu\right]$$

Ejemplo 2.

El volumen de líquido de un refresco sigue una distribución normal con media de 12 onzas y desviación estándar de 0.4 onzas. Genere 5 variables aleatorias con esta distribución para simular el proceso de llenado.

$$N_i = \left[\sum_{i=1}^{12}(r_i) - 6\right]\sigma + \mu$$

$$N_i = \left[\sum_{i=1}^{12}(r_i) - 6\right](0.4) + 12$$

Tabla 17.2 Simulación del volumen de llenado de refrescos (ejemplo 2).

Botella	$\sum_{i=1}^{12}(r_i)$	$\sum_{i=1}^{12}(r_i) - 6$	Volumen (onzas)
1	6.21	0.21	12.084
2	5.34	−0.66	11.736
3	6.03	0.03	12.012
4	6.97	0.97	12.038
5	4.81	−1.19	11.524

Distribución Binomial

La variable aleatoria Binomial con parámetros *N* y *p* puede ser generada a través de la suma de *N* variables aleatorias con distribución de Bernoulli con parámetro *p*.

$$Y = B_i = BE_1 + BE_2 + \ldots + BE_N \sim BI(N, p)$$

Ejemplo 3.

Al inspeccionar lotes de tamaño *N* = 5, la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es 0.03. Simule el proceso de inspección para determinar el número de piezas defectuosas por lote.

Este proceso sigue una distribución Binomial con *N* = 5 y *p* = 0.03, y será simulado mediante la generación de variables aleatorias de Bernoulli con *p* = 0.03, de acuerdo con el procedimiento señalado en la sección anterior, donde BE_i= 0 representa una pieza en buen estado y BE_i= 1, una pieza defectuosa. (Observe los resultados en la tabla 17.3.)

$$BE_i = \begin{cases} 0 & si \quad r_i \in (0-0.97) \\ 1 & si \quad r_i \in (0.97-1) \end{cases}$$

$$B_i = BE_1 + BE_2 + ... + BE_5$$

Tabla 17.3 Simulación del sistema de inspección del ejemplo 3.

Lote	r_1	BE_1	r_2	BE_2	r_3	BE_3	r_4	BE_4	r_5	BE_5	Piezas defectuosas
1	0.49	0	0.32	0	0.15	0	0.01	0	0.45	0	0
2	0.11	0	0.85	0	0.93	0	0.99	1	0.61	0	1
3	0.57	0	0.92	0	0.84	0	0.74	0	0.82	0	0
4	0.62	0	0.01	0	0.68	0	0.98	1	0.99	1	2
5	0.34	0	0.98	1	0.99	1	0.02	0	0.98	1	3

Ejercicio

Mediante cualquier hoja de cálculo, genere 50 variables aleatorias.

a) Distribuidas de manera exponencial con $\lambda = 5$.
b) Distribuidas de forma normal con media 50 y varianza 36.
c) Distribuidas de manera uniforme con límite inferior igual a 20 y límite superior igual a 100.
d) Distribuidas triangularmente con límite inferior = 5, valor más probable = 15 y límite superior =25.
e) Con distribución binomial y parámetros $N = 5$, $p = 0.3$, $q = 0.7$.
f) Con distribución de Poisson, con $\lambda = 3$.
g) Con distribución Erlang con parámetro de forma 4 y media 20.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Azarang, M. y García, E. (1996). Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos (1a ed.): McGraw Hill.

BanksJ., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M. (2005). Discrete-EventSystem Simulation (4,h ed.): Prentice Hall NJ.

Law, A.M. y Kelton, W.D.(2000). Simulation Modeling andAnalysis (3*. ed.): McGraw Hill.

I. Número de práctica: 18

II. Nombre:

Generación de variables aleatorias. Método de composición

III. Competencia(s) a desarrollar.

Aplica métodos para la generación de variables aleatorias que definan el comportamiento de los sistemas, para implementar programas que simulen situaciones reales eficientemente.

IV. Introducción.

El método de composición − conocido también como método mixto− permite generar variables aleatorias x cuando éstas provienen de una función de densidad f(x) que puede expresarse como la combinación convexa de *m* distribuciones de probabilidad $f_i(x)$.

Entonces, la combinación convexa se puede expresar como:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x) I_A(x)$$

donde:

$$I_A(x)=\begin{cases}1 & si \quad x\in A\\ 0 & si \quad x\notin A\end{cases}$$

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

De la unidad 3:
3.1 Conceptos básicos
3.2 Variables aleatorias discretas
3.3 Variables aleatorias continuas
3.4 Métodos para generar variables aleatorias
3.4.1 Método de la transformada inversa.
3.4.2 Método de convolución.
3.4.3 Método de composición.
3.5 Procedimientos especiales.
3.6 Pruebas estadísticas.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Algunas de las distribuciones más conocidas que pueden expresarse como una combinación convexa son: la triangular, la de Laplace y la trapezoidal. El procedimiento general de generación es el siguiente:

1. Calcule la probabilidad de cada una de las distribuciones f_i(x).
2. Asegúrese que cada función f_i(x) sea función de densidad.
3. Obtenga, mediante el método de la transformada inversa, las expresiones para generar variables aleatorias de cada una de las distribuciones f_i(x).
4. Genere un número pseudoaleatorio r_i que permita definir el valor de I_A(x).
5. Seleccione la función generadora correspondiente a la función f_i(x).
6. Genere un segundo número pseudoaleatorio r_i y sustitúyalo en la función generadora anterior para obtener *Y*.

Distribución triangular

A partir de la función de densidad triangular

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a\le x\le c\\[2ex] \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c< x\le b\end{cases}$$

calcule la probabilidad de cada uno de los segmentos de la función

$$p(x)=\begin{cases}\int_a^c \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}dx\\ \int_c^b \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}dx\end{cases}$$

$$p(x)=\begin{cases}\frac{(c-a)}{(b-a)} & a\le x\le c\\ \frac{(b-c)}{(b-a)} & c<x\le b\end{cases}$$

Ya que los segmentos por separado no son funciones de densidad, se ajustan al dividir entre su correspondiente *p*(x).

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}\frac{(b-a)}{(c-a)}=\frac{2(x-a)}{(c-a)^2} & a\le x\le c\\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}\frac{(b-a)}{(b-c)}=\frac{2(b-x)}{(b-c)^2} & c<x\le b\end{cases}$$

Al expresar la función como una combinación convexa se obtiene:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x)I_A(x)=\sum_{i=1}^{2} f_i(x)I_A(x)$$

$$f(x)=\frac{2(x-a)}{(c-a)^2}I_{a\le x\le c}(x)+\frac{2(b-x)}{(b-c)^2}I_{c<x\le b}(x)$$

donde

$$I_A(x)=\begin{cases}1 & si & x\in A\\ 0 & si & x\notin A\end{cases}$$

Para aplicar el método de la transformada inversa, primero integramos a cada segmento de la función:

$$F(x)=\begin{cases}\int_a^x \frac{2(x-a)}{(c-a)^2}dx=\frac{(x-a)^2}{(c-a)^2} & a\le x\le c\\ \int_c^x \frac{2(b-x)}{(b-c)^2}dx=1-\frac{(b-x)^2}{(b-c)^2} & c<x\le b\end{cases}$$

Luego, al despejar *x* y sustituir r_i en *F*(x) obtenemos:

$$x = \begin{cases} a+(c-a)\sqrt{r_i} \\ b-\left[(b-c)\sqrt{1-r_i}\,\right] \end{cases}$$

Por último, al expresar la ecuación anterior incluyendo la función indicadora $I_A(x)$ tenemos que:

$$x = \begin{cases} a+(c-a)\sqrt{r_i} & si \quad r_j \le \dfrac{(c-a)}{(b-a)} \\ b-\left[(b-c)\sqrt{1-r_i}\,\right] & si \quad r_j > \dfrac{(c-a)}{(b-a)} \end{cases}$$

Ejemplo 1.

Genere una muestra de 5 variables aleatorias con distribución triangular a partir de los parámetros: valor mínimo 5, moda 10 y valor máximo 20.

$$x = \begin{cases} a+(c-a)\sqrt{r_i} & si \quad r_j \le \dfrac{(c-a)}{(b-a)} \\ b-\left[(b-c)\sqrt{1-r_i}\,\right] & si \quad r_j > \dfrac{(c-a)}{(b-a)} \end{cases}$$

Al sustituir a = 5, c = 10 y ó = 20 obtenemos

$$x = \begin{cases} 5+(5)\sqrt{r_i} & si \quad r_j \le \dfrac{5}{15} \\ 20-\left[(10)\sqrt{1-r_i}\,\right] & si \quad r_j > \dfrac{5}{15} \end{cases}$$

Al generar una secuencia de números pseudoaleatorios se obtiene la secuencia de variables triangulares que se lista en la tabla 18.1:

Tabla 18.1 Simulación de variables aleatorias triangulares .

Variable	r_j	r_i	$x=5+5\sqrt{r_i}$ si $r_j \leq .33$	$x=20-10\sqrt{1-r_i}$ si $r_j > 0.33$
1	0.231	0.456	8.37	–
2	0.421	0.967	–	18.18
3	0.853	0.982	–	18.65
4	0.048	0.134	6.83	–
5	0.675	0.536	–	13.18

Ejercicios

Obtenga las funciones generadoras mediante el método de composición de las siguientes funciones de densidad:

a) $f(x)=\begin{cases} 3/4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1/4 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{12}(x-7) & 7 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{20}(15-x) & 10 \leq x \leq 15 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{12}(x-8) & 8 \leq x \leq 11 \\ \frac{5}{8} & 11 \leq x \leq 12 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6} & 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{3} & 4 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{12} & 5 \leq x \leq 9 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & -\infty \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & 0 \leq x \leq \infty \end{cases}$

2. Mediante cualquier hoja de cálculo, genere 50 variables aleatorias distribuidas de manera triangular con límite inferior = 12, valor más probable = 18 y límite superior = 25, use:

a) El método de composición.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Azarang, M. y García, E. (1996). Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos (1a ed.): McGraw Hill.

BanksJ., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M. (2005). Discrete-EventSystem Simulation (4,h ed.): Prentice Hall NJ.

Law, A.M. y Kelton, W.D.(2000). Simulation Modeling andAnalysis (3*. ed.): McGraw Hill.

Garcia Duna, Eduado, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 19

II. Nombre:

Generación de variables aleatorias. Método de transformación directa

III. Competencia(s) a desarrollar.

Aplica métodos para la generación de variables aleatorias que definan el comportamiento de los sistemas, para implementar programas que simulen situaciones reales eficientemente.

IV. Introducción.

Este método se basa en el teorema de Pitágoras, y se usa para generar variables aleatorias normales.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

De la unidad 3:
3.1 Conceptos básicos
3.2 Variables aleatorias discretas
3.3 Variables aleatorias continuas
3.4 Métodos para generar variables aleatorias
3.4.1 Método de la transformada inversa.
3.4.2 Método de convolución.
3.4.3 Método de composición.
3.5 Procedimientos especiales.
3.6 Pruebas estadísticas.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Como se dijo antes este método se basa en el teorema de Pitágoras, y se usa para generar variables aleatorias normales. En la figura 19.1 se muestra la relación entre las variables involucradas en él.

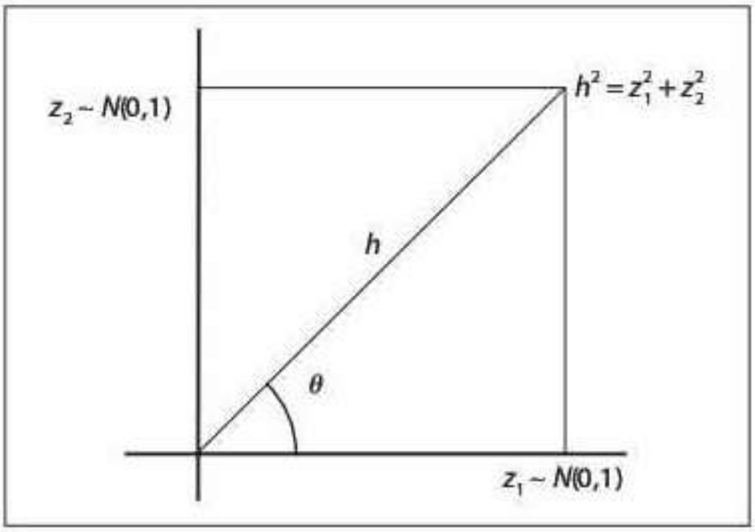


Figura 19.1 Generación de variables aleatorias z~ N(0,1).

Geométricamente,

$$z_2 = h\,\text{sen}\,\theta$$
$$z_2 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\text{sen}\,\theta$$

La suma de *v* variables aleatorias normales estándar sigue una distribución Chi-cuadrada con *v* grados de libertad:

$$z_2 = \sqrt{\chi^2_{v=2}}\,\text{sen}\,\theta$$

La función de densidad de una variable aleatoria Chi-cuadrada con 2 grados de libertad es la misma de una distribución exponencial con media igual a 2. En consecuencia, a través de la ecuación obtenida por el método de la transformada inversa para generar variables aleatorias exponenciales, y sustituyéndola en la ecuación anterior se obtiene:

$$z_2 = \sqrt{-2\ln(1-r_i)}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Se generan valores aleatorios uniformes del ángulo θ entre 0 y 2π mediante el método de la transformada inversa:

$$\theta = a + (b-a)r_j$$
$$\theta = (2\pi)r_j$$

Y al sustituir obtenemos

$$z_2 = \sqrt{-2\ln(1-r_i)}\,\mathrm{sen}(2\pi r_j)$$

Para cualquier variable aleatoria normal N,

$$z = \frac{N-\mu}{\sigma}$$

Al despejar N y sustituir el valor de z previamente desarrollado, se llega a la expresión final para la generación de variables aleatorias normales:

$$N_i = \left[\left(\sqrt{-2\ln(1-r_i)}\right)\mathrm{sen}(2\pi r_j)\right]\sigma + \mu$$

Este procedimiento debe iniciarse también a través de la generación de la variable aleatoria z_1, lo cual dará lugar a la ecuación final

$$N_i = \left[\left(\sqrt{-2\ln(1-r_i)}\right)\cos(2\pi r_j)\right]\sigma + \mu$$

Cualquiera de las dos últimas ecuaciones puede utilizarse para resolver el ejemplo 2 de la Práctica 17, en donde el generador de variables aleatorias que simulan el volumen de las botellas sería:

$$N_i = \left[\left(\sqrt{-2\ln(1-r_i)}\right)\mathrm{sen}(2\pi r_j)\right](0.4) + 12$$

De manera que si producimos los números pseudoaleatorios uniformes 0.43 y 0.75, el volumen del líquido generado para alguna de las botellas sería

$$N_i = \left[\left(\sqrt{-2\ln(1-0.43)}\right)\mathrm{sen}(2\pi(0.75))\right](0.4) + 12 = 11.575 \quad \text{onzas}$$

Ejercicio

Mediante cualquier hoja de cálculo, genere 50 variables aleatorias distribuidas de manera triangular con límite inferior = 12, valor más probable = 18 y límite superior = 25, use:

a) El método de la transformada directa.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Azarang, M. y García, E. (1996). Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos (1a ed.): McGraw Hill.

BanksJ., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M. (2005). Discrete-EventSystem Simulation (4,h ed.): Prentice Hall NJ.

Law, A.M. y Kelton, W.D.(2000). Simulation Modeling andAnalysis (3*. ed.): McGraw Hill.

Garcia Duna, Eduado, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 20

II. Nombre:

Modelo de un Sistema de inventarios

III. Competencia(s) a desarrollar.

Distingue las características de los lenguajes de simulación y de los simuladores para simular un sistema de líneas de espera o sistemas de inventario, aplicando en forma pertinente los componentes obtenidos en los temas anteriores.

IV. Introducción.

Gracias al avance tecnológico, en la actualidad existen en el mercado aplicaciones con interfaces gráficas tan poderosas que permiten a muchos usuarios con inclinaciones técnicas desarrollar modelos en el área de la simulación. Por desgracia, en general, dichos usuarios, aunque aprenden a usar el lenguaje relacionado y manejan algunos de los conceptos básicos, ponen muy poca atención al análisis correcto de los resultados. Así, muchos estudios son interpretados de manera errónea y es muy probable que conduzcan, en consecuencia, a malas decisiones.

El fenómeno que acabamos de describir ocurre por razones como éstas: en primer lugar, el falso sentido de seguridad que desarrolla el usuario por el simple hecho de conocer el lenguaje utilizado en el área; la facilidad de uso del software de simulación actual y su capacidad para desarrollar gráficos y animaciones y, sobre todo, la dificultad implícita en el análisis estadístico de la información. Es muy común encontrar personas que después de simular un sistema estocástico aseguran de manera bastante ingenua que el resultado de la variable de respuesta es un valor único − por ejemplo, que el número de piezas que se acumulan ante una máquina es tan sólo el promedio de la variable− , y dejan de lado un completo análisis estadístico de dicha variable.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

De la unidad 4:

4.1 Lenguaje de simulación y simuladores

4.2 Aprendizaje y uso lenguaje de simulación o un simulador

4.3 Casos prácticos de simulación

4.3.1 Problemas con líneas de espera.

4.3.2 Problemas con sistemas de Inventarios.

4.4 Validación de un simulador

4.4.1 Pruebas paramétricas

4.4.2 Pruebas no paramétricas.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Modelo de un sistema de inventarios

Ejemplo 20.1

La demanda de azúcar en una tienda sigue una distribución exponencial con media de 100 kg/día. El dueño de la tienda revisa el inventario cada 7 días, y hace un pedido a la planta igual a la capacidad de la bodega menos la cantidad de azúcar que tiene disponible en ese momento; la entrega es inmediata. La demanda no surtida por falta de existencias representa ventas perdidas. La capacidad de almacenamiento de la bodega es de 700 kg. El costo de ordenar es de $1,000/orden. El costo de faltante es de $6/kg, y el costo de llevar el inventario es de $ 1 /kg. Determine el comportamiento del inventario a lo largo del tiempo y el costo promedio/día para un horizonte de dos meses.

Para la solución del ejemplo se requiere:

- Identificación de los elementos

Variable de estado	Inventario en el almacén
Entidades	Clientes
Evento	Demanda Ventas Entrega de material por parte del proveedor
Actividades	Cálculo de los costos

- Construcción de la tabla de eventos
-

Tabla 4.7 Tablas de eventos para el ejemplo 4.10.

9	B	C	D	E	F	G
10	Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final
11	0	700	=C11	=-100*LN(1-RAND())	=IF(D11>=E11,E11,D11)	=MAX(0,$D11-$E11)
12	=B11+1	=IF(MOD(B12,7)=0,700-G11,0)	=G11+C12	=-100*LN(1-RAND())	=IF(D12>=E12,E12,D12)	=MAX(0,$D12-$E12)
13	=B12+1	=IF(MOD(B13,7)=0,700-G12,0)	=G12+C13	=-100*LN(1-RAND())	=IF(D13>=E13,E13,D13)	=MAX(0,$D13-$E13)
14	=B13+1	=IF(MOD(B14,7)=0,700-G13,0)	=G13+C14	=-100*LN(1-RAND())	=IF(D14>=E14,E14,D14)	=MAX(0,$D14-$E14)
15	=B14+1	=IF(MOD(B15,7)=0,700-G14,0)	=G14+C15	=-100*LN(1-RAND())	=IF(D15>=E15,E15,D15)	=MAX(0,$D15-$E15)

(a) Relación entre los elementos

9	H	I	J	K	L
10	Costo de ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de faltante	Costo total	Costo promedio
11	=IF(MOD(B11,7)=0,1000,0)	=1*(D11+G11)/2	=IF(D11<=E11,6*(E11-D11),0)	=SUM(J11:L11)	=AVERAGE($M$11:M11)
12	=IF(MOD(B12,7)=0,1000,0)	=1*(D12+G12)/2	=IF(D12<=E12,6*(E12-D12),0)	=SUM(J12:L12)	=AVERAGE($M$11:M12)
13	=IF(MOD(B13,7)=0,1000,0)	=1*(D13+G13)/2	=IF(D13<=E13,6*(E13-D13),0)	=SUM(J13:L13)	=AVERAGE($M$11:M13)
14	=IF(MOD(B14,7)=0,1000,0)	=1*(D14+G14)/2	=IF(D14<=E14,6*(E14-D14),0)	=SUM(J14:L14)	=AVERAGE($M$11:M14)
15	=IF(MOD(B15,7)=0,1000,0)	=1*(D15+G15)/2	=IF(D15<=E15,6*(E15-D15),0)	=SUM(J15:L15)	=AVERAGE($M$11:M15)

(b) Relación entre los costos

Las tablas 4.7(a) y 4.7(b) muestran la relación matemática entre las diferentes variables o elementos del sistema; la tabla está desarrollada en un programa de hoja de cálculo, y el significado de cada columna es el siguiente:

- B : Contador de los Días transcurridos.
- C: En esta columna se simulan las Entregas de material: cada siete días se restablece el inventario en un nivel de 700 kg. Los valores se calculan como la diferencia entre la Capacidad del almacén y el Inventario final del día anterior. El uso de la función **residuo** o **módulo** (MOD) permite controlar que la entrega se realice cada vez que el Día (columna B) sea múltiplo de siete.
- D : El Inventario a l inicio del día se calcula mediante la suma del Inventario final del día anterior y las Entregas de material por parte del proveedor.
- E : La Demanda es una variable aleatoria con distribución exponencial y media de 100 kg. Se simula mediante el generador RAND() o ALEATORIO () de la hoja de cálculo y la ecuación generadora

$$E_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-r_i).$$

- F: Las Ventas representan la cantidad que le fue entregada al cliente, y se calcula como el valor mínimo entre el Inventario al inicio del día y la Demanda.
- G: El Inventario a l final del día se calcula mediante la resta de las Ventas (columna F) del Inventario inicial del día (columna D), se verifica previamente que no exista faltante.
- H: En esta columna la función residuo o módulo (MOD) permite incrementar en $1,000 el Costo de ordenar cada vez que llegue una orden a la tienda.
- I: Se calcula el inventario promedio durante el día, y el resultado se multiplica por $1/kg.
- J: En caso de no cubrir la Demanda, el Costo de faltan te se calcula multiplicando la demanda no surtida en ese día por el costo de faltante por unidad, que en el ejemplo es de $6/kg.
- K: El Costo total se determina mediante la suma de las columnas Costos de inventario, Faltante y Ordenar.
- L: La forma de calcular esta columna permite tener el Costo total como promedio móvil: cada vez que se simula un nuevo día, el costo se recalcula. Con esta columna se analiza la estabilidad de la variable inventario promedio.

- Simulación de sistema.

La tabla 4.8 muestra los resultados, es una réplica de 14 días de la simulación del sistema, utiliza las ecuaciones de las tablas 4.7(a) y 4.7(b).

Tabla 4.8 Tabla de eventos del sistema de inventarios (realizada en Excel).

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de faltante	Costo total	Costo promedio
0	700.00	700.00	181.23	181.23	518.77	1000.00	609.39		1609.39	1609.39
1		518.77	29.40	29.40	489.37		504.07		504.07	1056.73
2		489.37	205.65	205.65	283.72		386.55		386.55	833.33
3		283.72	112.36	112.36	171.36		227.54		227.54	681.89
4		171.36	107.42	107.42	63.94		117.65		117.65	569.04
5		63.94	77.26	63.94	0.00		31.97	79.96	111.93	492.85
6		0.00	43.34	0.00	0.00		0.00	260.06	260.06	459.60
7	700.00	700.00	42.02	42.02	657.98	1000.00	678.99		1678.99	612.02
8		657.98	121.36	121.36	536.61		597.30		597.30	610.38
9		536.61	83.89	83.89	452.73		494.67		494.67	598.81
10		452.73	139.21	139.21	313.52		383.12		383.12	579.20
11		313.52	185.00	185.00	128.51		221.01		221.01	549.36
12		128.51	46.62	46.62	81.89		105.20		105.20	515 19
13		81.89	329.79	81.89	0.00		40.94	1487.43	1528.37	587.56
14	700.00	700.00	150.99	150.99	549.01	1000.00	624.51		1624.51	656.69

- Resultados:

La figura 4.11 muestra el comportamiento del inventario al inicio del día (columna C) a lo largo del tiempo, para el periodo simulado de 60 días.

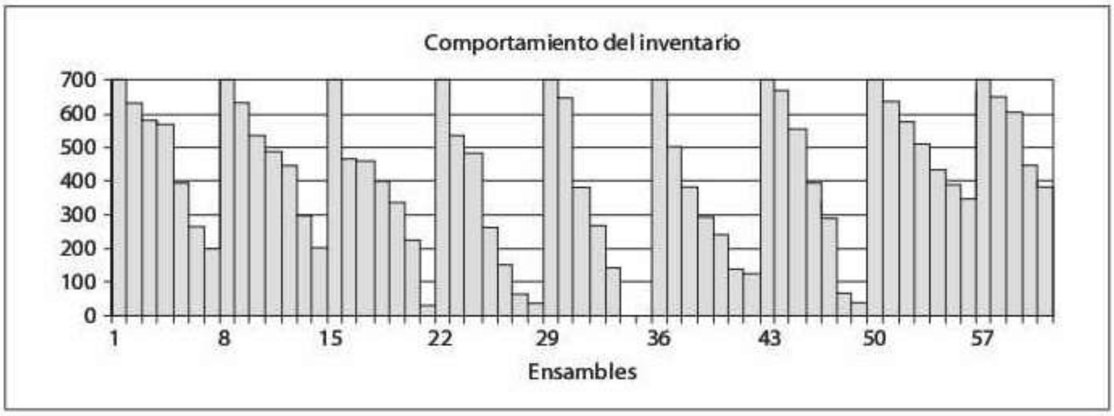


Figura 4.11 Simulación del sistema de inventarios (realizada en Excel).

El análisis del costo promedio de operación de la tienda incluye en primera instancia las gráficas de estado estable (figura 4.12) de cinco réplicas independientes de los resultados de la tabla 4.8. El resultado nos permite observar la convergencia del costo respecto del tiempo.

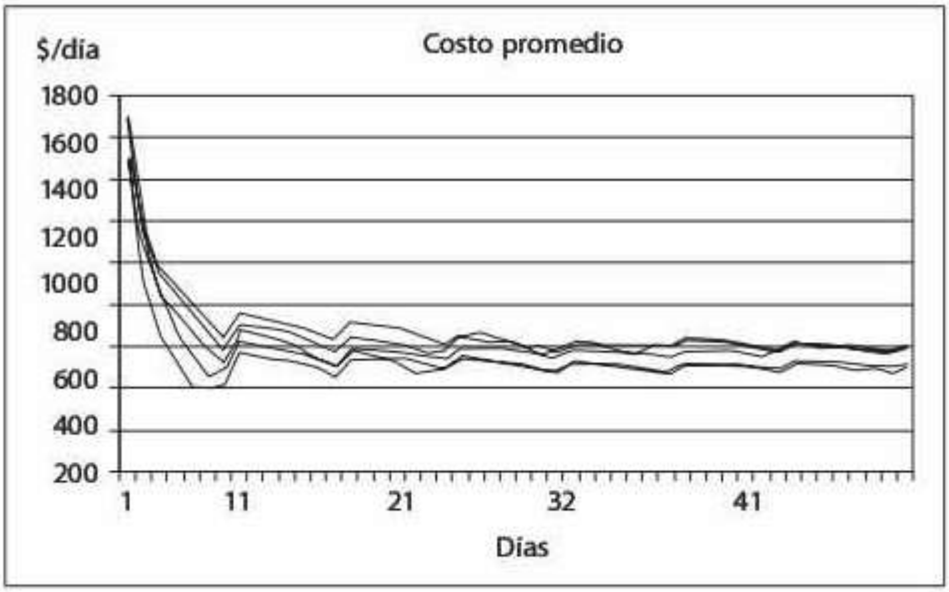


Figura 4.12. Costo promedio por día de cinco réplicas independientes.

Los valores finales del costo de operación de estas cinco réplicas son 592.55, 527.45, 506.13, 605.59 y 597.85. Con esta información calculamos un valor promedio de 565.9 y una desviación estándar de 45.7. Debido a que esta información es insuficiente para demostrar la normalidad de los datos, el cálculo del intervalo de confianza con un nivel de aceptación de 95% (nivel de rechazo 5%) se realiza mediante el teorema de Tchebycheff:

$$IC = \left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{r\alpha}} \quad , \quad \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{r\alpha}} \right]$$

$$IC = \left[565.9 - \frac{45.7}{\sqrt{(5)(0.05)}} \quad , \quad 565.9 + \frac{45.7}{\sqrt{(5)(0.05)}} \right]$$

$$IC = [474.49 \quad , \quad 657.33] \$/\text{día}$$

Selección de lenguajes de simulación

En un principio, los programas de simulación se elaboraban mediante algún lenguaje de propósito general, como ASSEM BLER, FORTRAN, ALGOL o LP/1. A partir de la década de 1960 hacen su aparición los lenguajes específicos para simulación que permiten a analistas y programadores desarrollar modelos de una forma más rápida, gracias a módulos estandarizados. En aquella época surgieron lenguajes como GPSS, GASP, SIMSCRIPT, SLAM, SIMAN y SSED. En la última década del siglo pasado la aparición de las interfaces gráficas revolucionaron el campo de las aplicaciones en esta área, y ocasionaron el nacimiento de los simuladores, con los cuales se ha facilitado enormemente la programación de los modelos.

En el terreno práctico, es importante utilizar la aplicación que mejor se adecúe al tipo de sistema a simular, ya que de la selección del lenguaje o simulador dependerá el tiempo de desarrollo del modelo de simulación. Las opciones van desde las hojas de cálculo, lenguajes de tipo general (como Visual Basic, C++o FORTRAN), lenguajes específicos de simulación (como GPSS, SLAM, SIMAN, SIMSCRIPT, GAS y SSED), hasta simuladores específicamente desarrollados para diferentes objetivos (como SIMPROCESS, ProModel, Witness, Taylor II, Crystal Ball, Delmia).

En la actualidad la selección del lenguaje o simulador depende de los siguientes factores:

1. Los mercados primarios a los que atenderá la sim ulación, así com o las aplicaciones
2. típicas en que se le utilizará, por ejemplo: administración estratégica, logística, telecomunicaciones, manufactura, sistemas militares, sistemas de salud, manejo de materiales, análisis de riesgo, simulación continua o discreta, etcétera.
3. Los requerimientos de equipo, como plataforma o sistema operativo, memoria RAM y utilización de disco duro.
4. La capacidad de construcción y programación del modelo a través de iconos o mediante procesos de tipo "arrastrar y colocar" (drag and drop), así como acceso a programación estándar. A este respecto también es importante considerar el tiempo y la velocidad en la detección de erro-

res, así como la posibilidad de reutilizar partes de código, objetos o plantillas (templates).

5. La inclusión de herramientas complementarias para la realización de pruebas de bondad de ajuste en forma automática, el análisis de las variables de respuesta, la posibilidad de crear diseño de experimentos, y la optimización del sistema simulado.
6. La animación del sistema, considerando aspectos como velocidad, uso de diferentes vistas, facilidad de exportación, compatibilidad con otras aplicaciones, y la posibilidad de poder prescindir del uso de la animación.
7. El costo y el tipo de licencia otorgada, así como el soporte técnico y la facilidad de entrenamiento y uso de m anuales y ayudas en línea.
8. Otras consideraciones, como la capacidad de empaquetamiento de los modelos, la distribución a otros usuarios, y la capacidad que tenga la compañía para actualizar su producto.

Algunas aplicaciones en el área de simulación disponibles actualmente en el mercado son:

aGPSS	Analytica 4.4	Arena Simulation Software	Bluesss Simulation System
Capacity Planning Simulator	CSIM 20	Enrmgmsuite	Enterprise Dynamics
ExtendSim	Flexsim	GoldSim	LABAMS
MAST	MedModel Optimization Suite	Micro Saint Sharp	Oracle Crystal Ball Suite
Patient Flow Simulator	Portfolio Simulator	Process Simulator	Project Simulator
ProModel Optimization Suite	SAIL	SAS Simulation Studio	ServiceModel Optimization Suite
Simcad Pro	Simio	SIMPROCESS	SIMSCRIPT III
SimTrack	SIMUL8	SLIM	Vanguard Business Analytics

Ejercicios

1. En un restaurante de comida rápida se venden hamburguesas a $6 cada una, con un costo de producción por unidad de $3.5. Después de un estudio se encontró que la demanda por hora en este local se distribuye de acuerdo con la siguiente función de probabilidad:

Demanda	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidades	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.08	0.07

Simule la utilidad promedio por hora que se obtendría en 100 horas de trabajo. Realice 5 corridas y construya la gráfica de estabilización de la utilidad promedio para cada corrida, incluyendo su respectivo intervalo de confianza a 95%. ¿Considera que las conclusiones obtenidas son estadísticamente válidas? ¿Por qué? ¿Cuál es la diferencia de concluir mediante los intervalos de confianza de cada réplica y emplear el intervalo de confianza global para las 5 réplicas?

2. Después de realizar una simulación de 5 réplicas se obtuvieron los siguientes valores en estado estable para el nivel de ingresos promedio mensual de una compañía: 1236,1324,1289, 1302 y 1265. Determine el intervalo de confianza para establecer el verdadero valor del nivel de ingresos promedio mensual de la compañía.

3. Un modelo simula el número de botellas rotas por año en una línea de producción. Los resultados de 6 años de esta variable son: 11540, 10870, 12520,13750, 10550 y 9850. No se tiene la certeza que el resultado de esta variable siga una distribución Normal.

a) Calcule la exactitud actual del modelo con un nivel de aceptación del 95%.

b) Determine el número de años que es necesario simular para obtener una exactitud en el resultado de $\pm$300 botellas rotas con un nivel de aceptación del 90%.

4. Una simulación predice el precio por barril de petróleo a nivel mundial para finales de 2015 en función de ciertos parámetros macroeconómicos que tienen variabilidad.
Se realizaron 5 réplicas de 1 año cada una y el precio al final en cada una de las 5 réplicas fue: 125.50,132.75, 120.80, 138.20 y 127.50 dólares por barril. Suponga normalidad en esta variable para lo siguiente:

a) Determinar la exactitud lograda con este número de réplicas y con un nivel de aceptación del 95%.

b) Calcular el número de réplicas que se deben realizar para lograr una exactitud de $\pm$0.35 con un nivel de aceptación de 90%.

5. Se desea conocer el número de productos a simular en un modelo de llenado de botes de mermelada para lograr una exactitud del volumen promedio de llenado de $\pm$10 mililitros con un nivel de aceptación de 95%. Se realizaron observaciones del volumen (en mi) de 10 botes obteniendo los siguientes resultados: 556, 557, 572, 561, 559, 558, 552, 558, 560 y 558.

6. El tiempo de reparación de un avión se comporta normalmente con media de 5 días y desviación estándar de 1 día. ¿Cuántas reparaciones se tendrían que realizar para que el resultado promedio del tiempo tuviera una exactitud de $\pm$0.2 días con un nivel de aceptación de 95%?

7. Determine el número de cajas de cereal que es necesario simular en un proceso de llenado para que la exactitud del peso promedio de las cajas no difiera en más de ±0.33(7 con un nivel de aceptación de 98% , considere que la máquina de llenado introduce hojuelas en cada caja con una distribución de weibull.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Azarang, M. y García, E. (1996). Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos (1a ed.): McGraw Hill.

BanksJ., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M. (2005). Discrete-EventSystem Simulation (4,h ed.): Prentice Hall NJ.

Law, A.M. y Kelton, W.D.(2000). Simulation Modeling andAnalysis (3*. ed.): McGraw Hill.

Garcia Duna, Eduado, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 21

II. Nombre:

Casos prácticos de simulación

III. Competencia(s) a desarrollar.

Distingue las características de los lenguajes de simulación y de los simuladores para simular un sistema de líneas de espera o sistemas de inventario, aplicando en forma pertinente los componentes obtenidos en los temas anteriores.

IV. Introducción.

La importancia de esta práctica es introducir al Estudiante en ejercicios que le vayan demostrando la importancia de la utilidad de la simulación en diferentes casos de la vida cotidiana.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:
De la unidad 4:

4.1 Lenguaje de simulación y simuladores

4.2 Aprendizaje y uso lenguaje de simulación o un simulador

4.3 Casos prácticos de simulación

4.3.1 Problemas con líneas de espera.

4.3.2 Problemas con sistemas de Inventarios.

4.4 Validación de un simulador

4.4.1 Pruebas paramétricas

4.4.2 Pruebas no paramétricas.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Desarrolla los siguientes **ejercicios**:

1. En un restaurante de comida rápida se venden hamburguesas a $6 cada una, con un costo de producción por unidad de $3.5. Después de un estudio se encontró que la demanda por hora en este local se distribuye de acuerdo con la siguiente función de probabilidad:

Demanda	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidades	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.08	0.07

Simule la utilidad promedio por hora que se obtendría en 100 horas de trabajo.
Realice 5 corridas y construya la gráfica de estabilización de la utilidad promedio para cada corrida, incluyendo su respectivo intervalo de confianza a 95%. ¿Considera que las conclusiones obtenidas son estadísticamente válidas? ¿Por qué? ¿Cuál es la diferencia de concluir mediante los intervalos de confianza de cada réplica y emplear el intervalo de confianza global para las 5 réplicas?

2. Después de realizar una simulación de 5 réplicas se obtuvieron los siguientes valores en estado estable para el nivel de ingresos promedio mensual de una compañía: 1236,1324,1289, 1302 y 1265. Determine el intervalo de confianza para establecer el verdadero valor del nivel de ingresos promedio mensual de la compañía.

3. Un modelo simula el número de botellas rotas por año en una línea de producción. Los resultados de 6 años de esta variable son: 11540, 10870, 12520,13750, 10550 y 9850. No se tiene la certeza que el resultado de esta variable siga una distribución Normal.

a) Calcule la exactitud actual del modelo con un nivel de aceptación del 95%.

b) Determine el número de años que es necesario simular para obtener una exactitud en el resultado de $\pm$300 botellas rotas con un nivel de aceptación del 90%.

4. Una simulación predice el precio por barril de petróleo a nivel mundial para finales de 2015 en función de ciertos parámetros macroeconómicos que tienen variabilidad. Se realizaron 5 réplicas de 1 año cada una y el precio al final en cada una de las 5 réplicas fue: 125.50,132.75, 120.80, 138.20 y 127.50 dólares por barril. Suponga normalidad en esta variable para lo siguiente:

a) Determinar la exactitud lograda con este número de réplicas y con un nivel de aceptación del 95%.

b) Calcular el número de réplicas que se deben realizar para lograr una exactitud de $\pm$0.35 con un nivel de aceptación de 90%.

5. Se desea conocer el número de productos a simular en un modelo de llenado de botes de mermelada para lograr una exactitud del volumen promedio de llenado de $\pm$10 mililitros con un nivel de aceptación de 95%. Se realizaron observaciones del volumen (en ml) de 10 botes obteniendo los siguientes resultados: 556, 557, 572, 561, 559, 558, 552, 558, 560 y 558.

6. El tiempo de reparación de un avión se comporta normalmente con media de 5 días y desviación estándar de 1 día. ¿Cuántas reparaciones se tendrían que realizar para que el resultado promedio del tiempo tuviera una exactitud de $\pm$0.2 días con un nivel de aceptación de 95%?

7. A un operario le llegan ciertas piezas para que las inspeccione; la revisión se desarrolla de acuerdo con la distribución de tiempo $t = 3r^2_i$. Si el operario recibe un lote de 10 piezas, simule cuánto tiempo tardará en revisar el lote. Utilice los siguientes números aleatorios: 0.6251, 0.5948, 0.6674, 0.2807, 0.9359, 0.1655, 0.1189, 0.7857, 0.4783, 0.9987.

Simule ahora 100 lotes mediante una hoja de cálculo y el generador de números pseudoaleatorios y determine el tiempo de promedio de revisión por lote.

8. Se tiene un proceso de fabricación de refrigeradores. La demanda diaria de este producto está distribuida de manera normal. La demanda promedio es de 80 refrigeradores por día, con una desviación estándar de 10 refrigeradores diarios. Se desea saber cuál es la mejor política de producción, considere 60, 70, 80, 90 y 100 refrigeradores por día. El costo por faltante es de $8/refrigerador por día, y el costo de tener un refrigerador en el inventario es de $5/refrigerador por día.

a) Se le pide realizar 5 corridas de 100 días para cada política.

b) Obtenga el costo promedio por día de cada política, y un intervalo de confianza para ese promedio diario.
c) Determine, con base en sus resultados, cuál de las políticas seleccionadas es la que debe implementar la empresa.

9. Un cilindro con diámetro x_1 será insertado en un agujero con diámetro x_2 Si x_1 sigue una distribución normal con media de 1.5 cm y varianza de 0.0016, y x_2, una distribución 2-Erlang y una media de 2.5 cm, simule en una hoja de cálculo la inserción de 500 cilindros y determine mediante el estimador la probabilidad de que haya interferencia (es decir, que cilindro pequeño no entre en el agujero).

10. Un proceso consta de 2 etapas: la primera tiene una duración de t_1 minutos y la segunda dura t_2 minutos, t_1 sigue una distribución normal con media de 30 min y varianza de 10 min, y t_2 una distribución 3-Erlang y una media de 20 min, el tiempo máximo de producción permitido de este proceso es de 55 min, simule en una hoja de cálculo la producción de 1000 piezas y estime la probabilidad de que una pieza consuma más tiempo del permitido.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Azarang, M. y García, E. (1996). Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos (1a ed.): McGraw Hill.

BanksJ., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M. (2005). Discrete-EventSystem Simulation (4,h ed.): Prentice Hall NJ.

Law, A.M. y Kelton, W.D.(2000). Simulation Modeling andAnalysis (3*. ed.): McGraw Hill.

Garcia Duna, Eduado, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.

I. Número de práctica: 22

II. Nombre:

Proyecto Integrador

III. Competencia(s) a desarrollar.

Desarrolla un programa que implementa el modelo matemático del sistema estudiado, experimenta con él y obtiene un reporte estadístico para que éste apoye en la toma de decisiones.

IV. Introducción.

En esta práctica el Estudiante utilizará todos sus conocimientos para llevarlos en práctica con tres casos prácticos que se expondrán mas adelante.

V. Especificar la correlación con el o los temas y subtemas del programa de estudio vigente. Aplicación en el contexto.

Se relaciona con los siguientes temas de la materia de Simulación:

De la unidad 5:

5.1 Análisis, modelado y simulación de un sistema o subsistema de servicios o productivo, de una empresa para detectar las mejoras posibles a realizar.

VI. Medidas de seguridad e higiene

Ninguna.

VII. Material y equipo necesario

Bibliografía sugerida
Hojas, bolígrafo y computadora

VIII. Metodología

1. Investigar y analizar en diferentes fuentes bibliográficas, los temas y conceptos contemplados en la unidad.
2. Individual o en binas desarrollar los ejercicios contemplados en las sugerencias didácticas.

IX. Sugerencias didácticas.

Caso de estudio 1

La compañía PELICRE se dedica a la fabricación de shampoo para el crecimiento de cabello. La empresa cuenta con 2 líneas de producción donde se llenan, tapan y etiquetan los frascos.

El índice de producción anual es de cinco millones de frascos en la línea 1 y tres millones de frascos en la línea 2.

La empresa ha padecido un largo historial de dificultades en cuanto a la colocación de las tapas. Cuando ocurre una de estas fallas se debe detener la línea hasta que se corrige el imperfecto. Se ha descubierto que la distribución del tiempo entre fallas es el siguiente:

Tabla 22.1. Tiempo entre fallas de la línea de producción 1 (años /falla).

0.002603	0.039543	0.007795	0.002774	0.019015
0.007731	0.020012	0.000224	0.001501	0.001067
0.001784	0.006437	0.011479	0.050093	0.000667
0.006141	0.015217	0.001125	0.003704	0.003504
0.002996	0.011127	0.002341	0.005903	0.005369
0.0022	0.000258	0.009986	0.012724	0.014449
0.002533	0.013669	0.005693	0.013389	0.013057
0.014287	0.009593	0.019847	0.003017	0.006602
0.027379	0.01309	0.01223	0.002126	0.008752
0.010181	0.015025	0.007304	0.01711	0.049539

Tabla 22.2. Tiempo entre fallas de la línea de producción 2 (años /falla).

0.004286	0.004294	0.005361	0.008621	0.00891
0.008475	0.006741	0.003123	0.008298	0.011369
0.00732	0.008715	0.005589	0.012689	0.006035
0.009587	0.008716	0.003464	0.00747	0.006335
0.008301	0.009675	0.005695	0.009542	0.007926
0.006663	0.008711	0.008972	0.007954	0.012864
0.008863	0.008215	0.004428	0.008506	0.007099
0.007903	0.009177	0.007846	0.006076	0.008713
0.009643	0.007276	0.011721	0.009558	0.008087
0.00954	0.006018	0.007876	0.009368	0.008413

El tiempo de reparación sigue una distribución exponencial con una media de (0.001/n) años, donde *n* denota el número de trabajadores en el equipo de reparaciones.

Cada vez que ocurre una falla se destruyen cierta cantidad de frascos, lo que equivale a un costo de $ 7.0 cada uno. Cada frasco se vende a $ 8.0.

Un muestreo sobre el número de frascos que se destruyen cuando ocurre una falla arroja la siguiente información.

Tabla 22.3. Frascos rotos/falla.

8	10	12	10	9
10	17	10	11	14
13	10	7	8	8
8	10	10	13	8
7	7	7	7	10
14	12	10	12	11
11	15	7	8	12
6	8	15	14	9
10	7	12	19	8
6	10	4	4	11

El costo anual por trabajador es de $50,000/año.

a) La empresa desea determinar el tamaño óptimo del equipo de reparaciones, esto es, el número de trabajadores que deben estar asignados para la reparación de las líneas de producción con la finalidad de obtener la mayor utilidad posible.

b) La solución obtenida en el inciso (a) seguirá siendo óptima si se cumple cual de las siguientes opciones:

1. El tiempo promedio entre fallas de la línea 1 disminuye en un 80%
2. El tiempo promedio entre fallas de la línea 1 aumenta en un 100%
3. El tiempo promedio entre fallas de la línea 2 disminuye en un 70%
4. El tiempo promedio entre fallas de la línea 2 aumenta en un 80%
5. El número de botellas rotas por falla aumenta en un 200%

Caso de estudio 2

La empresa DRE produce piezas electrónicas y las ensambla en una línea semiautomática.

Una de las piezas es producida en lotes de tamaño N = 10000 unidades por semana. Al final de cada semana, se inspecciona una muestra aleatoria de n = 25 unidades para determinar si la producción de la semana cum ple con los estándares de calidad. Si como resultado de la inspección, el número de piezas defectuosas obtenidas " ***d*** " es menor o igual a un valor de rechazo "***c***", el lote será aceptado y enviado a la línea de ensamble y por cada pieza defectuosa que entre a la línea de ensamble, ocurrirá una falla que detendrá la línea de producción y ocasionará un costo de $ 25/falla. Por otro lado, si el número de piezas defectuosas "***d*** " es mayor que el valor de rechazo "***c***", el lote será rechazado y enviado a desperdicio, en este caso, para que la línea de ensamble no se detenga, el lote deberá ser repuesto con un lote libre de defectos comprado a un proveedor a un costo de $30,000. El costo de producción de cada pieza es $ 2. Las unidades inspeccionadas se destruyen y el costo de mano de obra y equipo usado en la inspección es $ 0.5. Por lo tanto, el costo total de las piezas inspeccionadas es de $ 2.50.

La siguiente tabla muestra datos históricos de la fracción de piezas defectuosas en 100 lotes.

0.068	0.012	0.145	0.027	0.034	0.146	0.007	0.041	0.100	0.003
0.003	0.081	0.061	0.093	0.012	0.024	0.005	0.011	0.022	0.069
0.076	0.025	0.032	0.057	0.123	0.046	0.129	0.139	0.002	0.013
0.158	0.012	0.016	0.072	0.040	0.029	0.036	0.008	0.013	0.069
0.025	0.001	0.014	0.006	0.021	0.016	0.054	0.036	0.007	0.001
0.005	0.072	0.018	0.106	0.078	0.049	0.007	0.012	0.026	0.115
0.055	0.130	0.075	0.029	0.043	0.038	0.006	0.068	0.061	0.008
0.033	0.109	0.036	0.011	0.006	0.055	0.002	0.061	0.047	0.011
0.004	0.120	0.044	0.001	0.047	0.027	0.213	0.012	0.007	0.001
0.098	0.063	0.050	0.016	0.018	0.036	0.090	0.006	0.118	0.040

a) Desarrolle un modelo de simulación en una hoja de cálculo para el valor óptimo de determinar el valor de rechazo "***c***" para este plan de muestreo simple, que asegure el mínimo costo.

b) Si la fracción de piezas defectuosas de los lotes fuera tres veces más grande que los datos históricos, ¿cambiaría el valor de " ***c*** " ?

Caso de estudio 3

En un proceso de fabricación de televisores, se desea saber el número de televisores a producir, considere como opciones 60, 70, 80, 90 y 100 televisores por día. En la siguiente tabla se muestran los datos históricos de la demanda por día.

99	94	80	73	86	95	90	70	92	83
89	93	62	94	86	62	77	72	63	88
96	99	98	77	96	74	86	81	94	81
70	98	78	86	74	94	95	77	79	89
65	94	88	72	71	70	76	95	92	96
93	72	97	75	97	72	76	69	61	69
99	83	83	61	64	95	80	70	79	65
80	85	72	68	83	78	84	64	72	67
94	100	78	93	66	99	97	74	93	95
70	93	64	86	72	80	83	65	66	96
95	84	88	68	65	70	88	90	85	92
81	68	92	64	84	69	73	71	98	66
68	74	93	94	86	69	82	71	79	100
84	65	99	100	61	78	73	80	72	100
100	98	82	60	93	75	84	75	76	71
94	74	84	72	71	71	85	69	88	97
93	63	91	89	89	99	93	62	99	77
69	82	66	91	73	88	61	63	67	76
100	93	82	72	75	92	87	74	60	93
77	60	84	64	83	75	68	64	97	78

El costo por faltante es de $40/televisor por día, el costo de tener un televisor en el inventario es de $20/televisor por día. Existe una probabilidad de 3% de que un televisor esté defectuoso debido al mal manejo de producto y al proceso mismo, por lo que antes de salir de la fábrica, un inspector de calidad lo rechaza y este televisor no puede ser reprocesado, lo que provoca una pérdida directa de $90 por televisor. Por otro lado, el cliente realiza un proceso de inspección aleatoria para determinar si recibió televisores que se dañaron en el traslado de la planta a su tienda, el número de televisores que inspeccionan varía a diario. A continuación, se muestran los recopilados del número de productos inspeccionados todos los días por el cliente.

4	2	1	1	1	2	2	0	2	1
2	2	0	2	1	0	1	0	0	2
3	3	3	1	3	1	1	1	2	1
0	3	1	1	1	2	2	1	1	2
0	2	2	1	0	0	1	2	2	3
2	1	3	1	3	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	2	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
2	4	1	2	0	3	3	1	2	2
0	2	0	1	1	1	1	0	0	2

De este proceso de inspección el número de televisores defectuosos que encuentra el cliente se distribuye de acuerdo a una distribución Binomial con una probabilidad de encontrar un televisor defectuoso de 5%. El fabricante paga el costo de un televisor defectuoso, el cual es de $120 por televisor.

a) Obtenga el costo promedio por día de cada política y un intervalo de confianza para este promedio diario.

b) Con base en sus resultados determine cuál de las políticas seleccionadas es la que debe implantar la empresa.

X. Reporte del alumno (discusión de resultados y conclusiones).

El Estudiante presentará los ejercicios realizados de acuerdo al formato solicitado por el Docente.

XI. Bibliografía (emplear formato APA)

Azarang, M. y García, E. (1996). Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos (1a ed.): McGraw Hill.

BanksJ., Carson, J.S., Nelson, B.L., y Nicol, D.M. (2005). Discrete-EventSystem Simulation (4,h ed.): Prentice Hall NJ.

Law, A.M. y Kelton, W.D.(2000). Simulation Modeling andAnalysis (3*. ed.): McGraw Hill.

Garcia Duna, Eduado, García reyes Heriberto, Cárdenas Barrón Leopoldo (2013). Simulación y análisis de sistemas con ProModel. (2da ed.) PEARSON , México.