

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

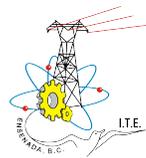
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ENSENADA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECATRÓNICA

EDUCACIÓN  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO



CONTROL ÓPTIMO DE ROBOTS TOMANDO EN CUENTA LÍMITES  
ARTICULARES

*Trabajo de tesis presentado por* SERGIO MORALES LÓPEZ  
*para obtener el grado de* MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECATRÓNICA

*Bajo la dirección de* JUAN ANTONIO ROJAS QUINTERO  
*y la co-dirección de* EUSEBIO BUGARIN CARLOS

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, MÉXICO, AGOSTO 2022

Instituto Tecnológico de Ensenada  
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Ensenada, Baja California, **17/Agosto/2022**

No. Oficio: DEPI/016/2022

Asunto: Autorización de impresión de Trabajo de Tesis

**C. SERGIO MORALES LÓPEZ**  
**ESTUDIANTE DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA MECATRÓNICA**  
**PRESENTE**

Con base en el dictamen de aprobación emitido por el Comité Tutorial de la Tesis con título: CONTROL ÓPTIMO DE ROBOTS TOMANDO EN CUENTA LÍMITES ARTICULARES, entregado por Usted para su análisis, le informamos atentamente que se AUTORIZA la impresión de dicho trabajo de tesis; en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias.

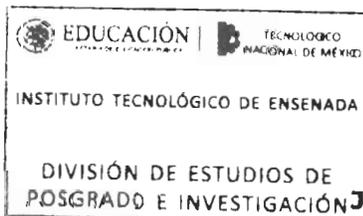
**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica.*

**Vo. Bo.**



**EUSEBIO BUGARIN CARLOS**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS**  
**DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**



**JUAN CARLOS LEAL NODAL**  
**JEFE DIRECTOR ACADÉMICO**

ccp. Archivo

EBC



## MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECATRÓNICA DICTAMEN DEL COMITÉ TUTORIAL

Ensenada, B.C. a 16 de agosto de 2022

DATOS DEL ESTUDIANTE			
<b>Nombre:</b>	<b>Sergio Morales López</b>	<b>No. de Control:</b>	<b>M14760292</b>

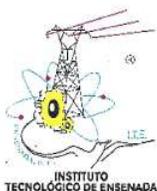
DATOS DEL PROYECTO DE TESIS	
<b>Título:</b>	Control óptimo de robots tomando en cuenta límites articulares
<b>Línea de Investigación:</b>	Robótica y Control

COMITÉ DE TESIS		
Miembro	Nombre	Firma
DIRECTOR DE TESIS (Director del comité)	Dr. Juan Antonio Rojas Quintero	
CODIRECTOR DE TESIS	Dr. Eusebio Bugarin Carlos	
MIEMBRO DEL COMITÉ	Dr. Eduardo Rodríguez Orozco	
MIEMBRO DEL COMITÉ	Dra. Ana Yaveni Aguilar Bustos	
<b>Dictamen:</b>	Se aprueba el trabajo de tesis, en virtud de que realizó las correcciones correspondientes conforme a las observaciones planteadas por este Comité Tutorial.	

M.C. Josefina Campos García  
Coordinador Académico

Dra. Ana Yaveni Aguilar Bustos  
Presidente del Consejo de Posgrado

STA\_10\_dictamen\_tesis\_comite\_tutorial\_V1.1





## CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS

Ensenada, Baja California, a 15 de agosto de 2022

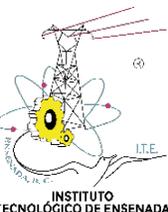
Bajo protesta de decir verdad, quien suscribe SERGIO MORALES LÓPEZ, con número de control M14760292, alumno de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecatrónica y con la dirección de Juan Antonio Rojas Quintero, declaro que soy autor del trabajo original de Tesis

### CONTROL ÓPTIMO DE ROBOTS TOMANDO EN CUENTA LÍMITES ARTICULARES

Y otorgo mi conformidad, sin límite de temporalidad, para ceder los derechos de reproducir y distribuir copias en su totalidad o en partes al Tecnológico Nacional de México campus Instituto Tecnológico de Ensenada (TecNM-ITE), mencionando la fuente. Lo anterior incluye que la tesis pueda ser publicada y difundida por el TecNM-ITE en los medios que considere convenientes. Asimismo, manifiesto que el TecNM-ITE queda liberado de cualquier conflicto surgido a raíz de la publicación. De igual manera, es de mi conocimiento que la publicación de la tesis no es con finalidad lucrativa, sino académica.

### ATENTAMENTE

**SERGIO MORALES LÓPEZ**  
**ALUMNO DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA MECATRÓNICA**



Blvd. Tecnológico #150, Ex Ejido Chapultepec, C.P. 22780, Ensenada, Baja California  
Tel. 01 (646) 1775680 e-mail: [dir\\_ensenada@tecnm.mx](mailto:dir_ensenada@tecnm.mx) | [ensenada.tecnm.mx](http://ensenada.tecnm.mx)



Ricardo  
**2022 Flores**  
Año de  
**Magón**  
PRECURSOR DE LA REVOLUCIÓN MEXICANA

## RESUMEN

Este proyecto de tesis aborda el análisis del control óptimo de robots manipuladores usando tres técnicas: el Principio del Máximo de Pontryagin, las Ecuaciones de Control Covariantes y el Regulador Lineal Cuadrático. Apoyados en este análisis, se genera movimiento óptimo de estos sistemas dinámicos reduciendo la amplitud angular de sus articulaciones (sólo se estudian robots manipuladores con articulaciones rotacionales).

Para el Principio del Máximo de Pontryagin, el Hamiltoniano del sistema tiene una gran importancia; ya que impacta en las ecuaciones de control resultantes. De esta manera la función costo, que está incrustada en dicho Hamiltoniano, dicta el comportamiento en el movimiento del manipulador robótico.

Dentro de este marco realizamos pruebas numéricas con 4 funciones costo: 2 de ellas presentes en la literatura y 2 que proponemos como una mejor alternativa. Las 4 funciones anteriores están restringidas en los casos en los que la función costo depende de los pares de torsión y de las velocidades del robot. Dentro de las pruebas numéricas se evalúa el impacto de cada función costo en el control óptimo de un manipulador de 2 GDL. Las pruebas mostraron que la presencia del tensor de masas en la función costo tiene un efecto favorable con respecto a la amplitud de movimiento en las articulaciones. También se observa una mayor robustez numérica con respecto a cambios en la duración de la trayectoria y menores tiempos de procesamiento. De tal forma que estas funciones costo tienen beneficios en el control y generación de trayectorias para robots manipuladores.

Este proyecto de tesis se enmarca en el proyecto SEP-CONACYT Investigación Científica Básica A1-S-29874 titulado **Modelado por medio de métodos de mecánica analítica para optimizar trayectorias y diseñar controladores para sistemas robóticos.**

**Palabras clave:** Control óptimo, Función costo, Optimización de trayectoria, Robot manipulador.

---

## ABSTRACT

This thesis project addresses the analysis of the optimal control of manipulator robots using three techniques: the Pontryagin Maximum principle, the Covariant Control Equations and the Quadratic Linear Regulator. Based on this analysis, optimal motion of these dynamic systems is generated by reducing the angular amplitude of their joints (only manipulator robots with rotational joints are studied).

For Pontryagin's Maximum Principle, the Hamiltonian of the system is of great importance; as it impacts the resulting control equations. Thus the cost function, which is embedded in the Hamiltonian, dictates the behavior in the motion of the robotic manipulator.

Within this framework we perform numerical tests with 4 cost functions: 2 of them present in the literature and 2 that we propose as a better alternative. The above 4 functions are constrained in the cases where the cost function depends on the torques and speeds of the robot. Within the numerical tests the impact of each cost function on the optimal control of a 2 GDL manipulator is evaluated. The tests showed that the presence of the mass tensor in the cost function has a favorable effect with respect to the range of motion in the joints. Also, it is observed a higher numerical robustness with respect to changes in trajectory duration and shorter processing times. Thus, these cost functions have benefits in the control and generation of trajectories for manipulator robots.

This thesis project is part of the SEP-CONACYT project Basic Scientific Research A1-S-29874 entitled **Modeling by means of analytical mechanics methods to optimize trajectories and design controllers for robotic systems.**

**Keywords:** Optimal control, Cost function, Trajectory optimization, Manipulator robot.

---

## DEDICATORIA

Los cimientos de mi desarrollo, cada uno de ustedes –Mi Familia– han propuesto tiempo para enseñarme nuevas cosas, brindarme consejos invaluable que me servirán para toda la vida...

Especialmente siempre estuvieron presentes en el desarrollo y evolución total de mi tesis, les agradezco de corazón –Los quiero–.

**“Que tus sueños sean más grandes que tus miedos, que la vida sea un juego, que siempre quedes primero, que tu tiempo no se escape entre tus dedos y que todas esas dudas que te aterran se conviertan en sí puedo.”**

Adrián Cervantes.



## AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT-México) le agradezco la beca recibida durante la maestría, así como múltiples apoyos para proyectos, congresos y financiamiento para la formación de maestros.

En particular agradezco el apoyo económico recibido a través del proyecto de “Ciencia Básica” CONACYT A1-S-29874, que me permitió participar en un congreso internacional en el extranjero.

Agradezco al Tecnológico Nacional de México/Campus Ensenada, esta institución de enorme calidad, que me brindó todo el apoyo durante mi estancia.

Expreso mi profundo agradecimiento a mi amigo y tutor de tesis el Dr. Juan Antonio Rojas Quintero, por su amistad, consejos y colaboración durante el desarrollo de esta investigación. Al Dr. Eusebio Bugarín Carlos le agradezco su dedicación y valiosos aportes durante la maestría.

---

## CONTENIDO

Resumen	v
Abstract	vii
Agradecimientos	xi
Contenido	xiv
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	5
1.2.1. Objetivos generales . . . . .	5
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	5
1.3. Organización del documento . . . . .	5
2. MARCO TEÓRICO	7
2.1. Estudio del Cálculo de Variaciones . . . . .	7
2.1.1. La braquistócrona . . . . .	7
2.2. Estudio de los extremos . . . . .	9
2.2.1. La insuficiencia de los extremos . . . . .	10
2.2.2. Casos especiales de la ecuación de Euler-Lagrange . . . . .	11
2.3. Estudio de las condiciones necesarias de optimalidad . . . . .	12
2.3.1. La condición necesaria de Legendre . . . . .	12
2.3.2. La condición necesaria de Jacobi . . . . .	13
2.3.3. Variaciones débiles frente a fuertes . . . . .	13
2.3.4. La condición necesaria de Weierstrass . . . . .	14
2.4. Estudio de las condiciones suficientes fundamentales . . . . .	15
2.4.1. La integral invariante de Hilbert . . . . .	16
2.4.2. La condición suficiente fundamental . . . . .	17
2.5. Problemas isoperimétricos . . . . .	17
2.6. Enlace entre cálculo de variaciones y control óptimo . . . . .	19
2.7. Teoría básica del control óptimo usando ecuaciones de control co-variantes . . . . .	20
2.8. Dinámica de robots manipuladores . . . . .	21
2.8.1. Ecuaciones de movimiento con Euler-Lagrange . . . . .	22
3. ANÁLISIS DEL CONTROL ÓPTIMO DE ROBOTS MANIPULADORES	23
3.1. Ejemplo: robot manipulador de un grado de libertad . . . . .	23
3.1.1. Desarrollo y aplicación del PMP . . . . .	25

## CONTENIDO

---

3.1.2. Desarrollo y aplicación del RLC . . . . .	28
3.1.3. Desarrollo y aplicación de las ECC . . . . .	32
3.2. Robot manipulador de dos grados de libertad . . . . .	34
3.2.1. Aplicación del PMP . . . . .	37
3.2.2. Aplicación del RLC . . . . .	39
3.2.3. Aplicación de las ECC . . . . .	39
4. COMPARACIÓN NUMÉRICA DE FUNCIONES COSTO UTILIZANDO EL PMP	43
4.1. Índice de desempeño y función costo . . . . .	44
4.2. Control óptimo de un manipulador robótico de 2 GDL . . . . .	44
4.3. Motivación del análisis . . . . .	46
4.4. Comparación de 4 funciones costo aplicando el PMP a un mani- pulador de 2 GDL . . . . .	48
4.5. Pequeña prueba de función costo con criterio de aceleración . . . . .	51
5. CONCLUSIONES	53
Bibliografía	55
Anexos	61
A. CONTROL ÓPTIMO EN EL TIEMPO DE UN SISTEMA LINEAL (EJEMPLO):	61
B. ESQUEMA CINEMÁTICO Y DINÁMICO DE UN ROBOT MANIPULADOR DE 2 GDL	63
C. GEOMETRÍA DE RIEMANN	65
D. RIGIDEZ NUMÉRICA Y TIEMPOS DE EJECUCIÓN	67

LISTA DE FIGURAS

1.1.	Evolución histórica del cálculo de variaciones. . . . .	4
2.1.	Trayectoria de una partícula sobre un cordón sin fricción. . . . .	8
2.2.	Trayectorias evaluadas. . . . .	9
2.3.	El típico problema isoperimétrico. . . . .	18
3.1.	Esquema del manipulador de 1 GDL. . . . .	24
3.2.	Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 1 GDL. . . . .	27
3.3.	Solución numérica $(\lambda_1, \lambda_2)$ . . . . .	28
3.4.	Entrada de control $u$ óptima. . . . .	28
3.5.	Solución numérica $(x_1, x_2)$ . . . . .	31
3.6.	Entrada de control $u$ óptima. . . . .	32
3.7.	Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 1 GDL. . . . .	33
3.8.	Entrada de control $u$ óptima. . . . .	34
3.9.	Manipulador de 2 GDL. . . . .	35
3.10.	Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 2 GDL. . . . .	38
3.11.	Entradas de control $u_1$ y $u_2$ . . . . .	38
3.12.	Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 2 GDL. . . . .	40
3.13.	Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 2 GDL. . . . .	41
4.1.	Control óptimo (pares): Posiciones articulares y pares. . . . .	45
4.2.	Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 2 GDL. . . . .	46
4.3.	Control óptimo (Velocidades, pares): Par RMS, Potencia RMS, Tiem- po de CPU. . . . .	49
4.4.	Control óptimo (Velocidades, pares): posiciones articulares y pares. . . . .	49
4.5.	Control óptimo (Velocidades, Pares): enfrentando $\gamma_1$ contra $\gamma_3$ y $\gamma_2$ contra $\gamma_4$ . . . . .	50
4.6.	Control óptimo (Aceleraciones): Par RMS, Potencia RMS, Tiempo de la CPU. . . . .	52
4.7.	Control óptimo (Velocidades, Pares): posiciones articulares y pares. . . . .	52

B.1. Esquema cinemático del manipulador robótico utilizado: (a) Manipulador robótico 2-GDL. Los parámetros  $(m_i, I_i, L_{ci}, L_i, q_i)$  denotan respectivamente i-avos: masa del eslabón; momento de inercia del eslabón; distancia del centro de torsión al centro de masa; longitud del eslabón; parámetro de configuración. . . . . 63

LISTA DE TABLAS

3.1. Convención de nomenclatura para un manipulador de  $n$  GDL . . . . 23

3.2. Datos del robot manipulador de 1 GDL . . . . . 27

4.1. Funciones costo evaluadas.  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  están presentes en la literatura;  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  presentan el tensor de masa y se proponen como alternativas a  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , respectivamente. . . . . 47



# 1

## INTRODUCCIÓN

En el marco del control óptimo una de las principales tareas es llevar un sistema, mediante variables de control  $u(t)$ , de un estado inicial  $x(t_0)$  a otro estado  $x(t_1)$  optimizando algún índice de desempeño representado matemáticamente por una funcional integral (Callies y Rentrop, 2008). El control óptimo se utiliza en muchas vertientes, puede minimizar costos o tiempos, o maximizar alguna tarea en específico.

La teoría del control óptimo es un campo que tiene raíces históricas en el cálculo de variaciones (Mesterton-Gibbons, 2009), esto se remonta a la época en que Johann Bernoulli formuló el problema de la braquistócrona (Sussmann y Willems, 1997). Esta teoría se convirtió en un campo por derecho propio en los años de 1960 en relación con el desarrollo de la exploración espacial. El problema ingenieril del lanzamiento del satélite Sputnik a una órbita estable dio lugar a los primeros desarrollos de esta teoría. El control óptimo brinda las técnicas para resolver una cantidad de problemas diversos en diferentes campos científicos y tecnológicos (Chen *et al.*, 2017; Kirk, 2004).

En esta propuesta de tesis, el concepto principal es el control óptimo visto desde la Macatrónica; con fundamento en las ecuaciones de movimiento de los sistemas dinámicos. Lo que nos permite ver esta idea central con más detalle son las siguientes disciplinas de la ciencia: Matemáticas, Mecánica Analítica, Mecánica Computacional, Métodos Numéricos, Optimización y Teoría de Control.

De acuerdo a la literatura relacionada, existen dos métodos tradicionales para optimizar un sistema dinámico:

1. Principio del Máximo de Pontryagin (PMP) que requiere la resolución de un sistema Hamiltoniano acoplado de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) que gobiernan las variables conjugadas y de estado (Pontryagin *et al.*, 1962).
2. Principio de Optimalidad de Bellman (POB) que pone en juego un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (Bellman, 1957).

Uno de los objetivos principales de este proyecto de tesis es investigar y estudiar la técnica de control óptimo presentada en [Dubois \*et al.\* \(2015\)](#), en donde se formula el PMP con geometría de Riemann, y de presentarla en una formulación vectorial más sencilla. También se estudiará la técnica presentada por [Rojas-Quintero \*et al.\* \(2021a\)](#) para luego implementar dicha técnica y llevar a cabo simulaciones de movimiento controlado de robots.

Se analizarán y evaluarán diversas funciones costo que aparecen en la literatura especializada. Se buscará alguna que reduzca adecuadamente la amplitud de los movimientos, es decir, que restrinja el giro en las articulaciones durante el movimiento (sólo se estudiaron robots manipuladores con articulaciones rotacionales).

## 1.1 ANTECEDENTES

El Principio del Máximo de Pontryagin ([Pontryagin \*et al.\*, 1962](#)) fue una propuesta matemática al desafío planteado por las ciencias e ingenierías aeroespaciales en las décadas de los cincuenta y sesenta del siglo pasado ([Sussmann y Willems, 1997](#)). Es una herramienta poderosa para el estudio de problemas matemáticos, no solamente de la teoría de control óptimo sino también de nuevas estructuras geométricas; por ejemplo, para el estudio de curvas rígidas y para lo que hoy se conoce como geometría sub-Riemanniana ([Schättler y Ledzewicz, 2012](#)).

El método de control óptimo propuesto en [Dubois \*et al.\* \(2015\)](#) está precisamente basado en el PMP ([Pontryagin \*et al.\*, 1962](#)), salvo que las condiciones de optimalidad resultan estar formuladas dentro del marco de la geometría Riemanniana; como lo es en [Rojas-Quintero \*et al.\* \(2021a\)](#), en donde estas condiciones son llamadas ecuaciones de control covariantes. Tomamos como base y referencia el trabajo propuesto en [Geering \*et al.\* \(1986\)](#), que utiliza el PMP para realizar el control óptimo de robots manipuladores en líneas de producción.

Para realizar los objetivos específicos de este proyecto de tesis, se estudió principalmente la técnica del PMP. Esta técnica es una de las más estudiadas en la disciplina del control óptimo ([Kirk, 2004](#); [Pontryagin \*et al.\*, 1962](#); [Schättler y Ledzewicz, 2012](#); [Arnăutu y Neittaanmäki, 2003](#); [Betts, 2010](#); [Geering, 2007](#)). Destaquemos que en [Arnăutu y Neittaanmäki \(2003\)](#) se abordan métodos numéricos para problemas de control óptimo gobernados por ecuaciones diferenciales parciales. Se presentan los métodos numéricos principales para resolver problemas en espacios discretos. Destaquemos también que [Geering \(2007\)](#) describe como utilizar el PMP para convertir un esquema de control de

lazo abierto en un esquema de control óptimo de lazo cerrado. También explica cómo diseñar controladores óptimos de lazo cerrado utilizando la teoría de Hamilton Jacobi-Bellman.

Hay que tomar en cuenta que otra de las técnicas muy utilizadas en control óptimo es el POB (Kirk, 2004; Bellman, 1957; Arnăutu y Neittaanmäki, 2003; Betts, 2010; Geering, 2007; Rodriguez, 1997). En Rodriguez (1997) se presentan problemas de dimensión finita: se describe la evolución temporal del sistema dinámico con soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias (de dimensión finita) en oposición a ecuaciones diferenciales parciales (con infinitas dimensiones, característica tradicional en programación dinámica).

Notemos que existen ejemplos en donde las dos técnicas de control óptimo cohabitan, ya que el PMP permite obtener las condiciones de optimalidad, y la programación dinámica permite resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales que se presentan (Robinett *et al.*, 2005). El POB puede llevar, por ejemplo, a lo que se conoce como funciones generadoras (Hao, 2014). Las funciones generadoras, generan una solución aproximada de las ecuaciones que rigen el movimiento y el control del sistema. Sin embargo, para los objetivos de este trabajo nos concentraremos en la aplicación del PMP.

En el trabajo de este proyecto de tesis se consideraron principalmente controladores óptimos de punto a punto, mejores conocidos por problemas de valor de frontera en dos puntos (TPBVP por sus siglas en inglés: two-point boundary-value problem). Se busca agregar mayores restricciones al método propuesto en Dubois *et al.* (2015). En Rojas-Quintero *et al.* (2021a) se utilizaron puntos fijos en las fronteras de inicio y de final. Es posible sin embargo, llevar al sistema de un punto fijo, a otro que se sitúe sobre alguna curva; es decir, que el punto final sea movable (Mesterton-Gibbons, 2009). Por ejemplo, el trabajo expuesto en Kerbal y Ahmed (1998) buscó establecer la existencia de condiciones de optimalidad en donde los puntos de frontera son dinámicos; es decir, variables con respecto al tiempo. Más tarde, Wang y Wang (2014) buscaron probar la existencia de un control óptimo con valores de frontera entre dos puntos dinámicos (a lo que el autor llama: problemas de frontera estocásticos). En Craven (1989) se explora la posibilidad de agregar restricciones en el tiempo de trayectoria, en donde se presenta un control en tiempo óptimo. Aquí se muestra que las condiciones de frontera pueden deducirse de las condiciones de un problema en tiempo fijo, de manera intuitiva.

Remarquemos que una metodología de control óptimo muy popular es la denominada RLC (Regulador Lineal Cuadrático), que ignora las no-linealidades características de los sistemas dinámicos comunes (Grancharova y Johansen, 2005). Sin embargo, se sabe que los esquemas de control no-lineales resultan, en gene-

ral, en un desempeño más alto (Geering *et al.*, 1986; Galicki, 2017). Se busca por lo tanto siempre considerar las no-linealidades de las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de los sistemas dinámicos bajo estudio, así como de las condiciones de optimalidad que se deduzcan.

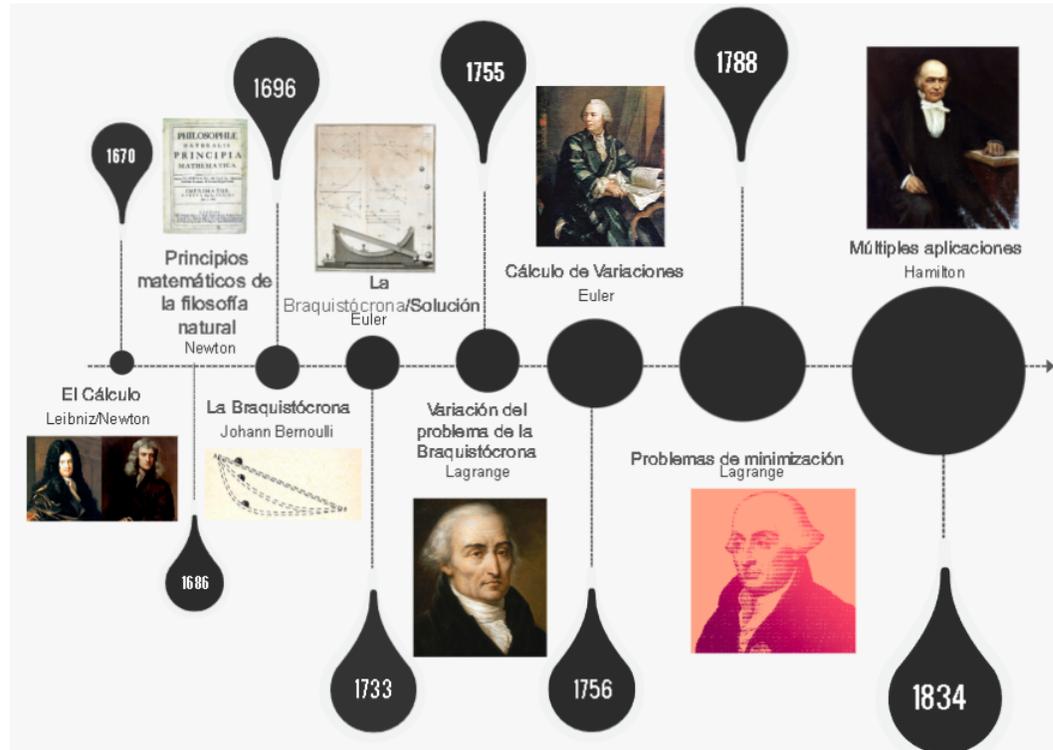


Figura 1.1: Evolución histórica del cálculo de variaciones.

Dentro de la evolución histórica del cálculo de variaciones (ver Figura 1.1) es generalmente admitido que las nociones modernas del cálculo fueron promovidas por Leibniz y Newton que son (grandes matemáticos contemporáneos) alrededor de 1670. En 1686 es publicada la obra maestra de Newton titulada **Principios matemáticos de la filosofía natural** donde utiliza sus conceptos de cálculo para explicar el movimiento de los objetos. Después, en 1696, el matemático Johann Bernoulli publica su solución al problema de la braquistócrona que es encontrar el camino tomado por una partícula influenciada únicamente por el efecto de la gravedad que una 2 puntos fijos en el menor tiempo posible. En 1733 Euler solucionó por primera vez el problema de la braquistócrona. Para 1755 Lagrange publica un artículo donde analiza una variación al problema de la braquistócrona de manera analítica. En 1756 Euler publica un artículo sobre

cálculo de variaciones. Para 1788 Lagrange publica su análisis mecánico diferente al de Newton donde estipula que las ecuaciones de movimiento pueden derivarse considerando ciertos problemas mecánicos como problemas de minimización. Por último, en 1834 Hamilton generaliza el análisis de Lagrange a una gama mucho más amplia de problemas.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 *Objetivos generales*

1. Desarrollar algoritmos de planeación de trayectorias para generar movimiento óptimo de sistemas dinámicos.
2. Aplicar un método de control óptimo en el marco de la geometría Riemanniana para la navegación de robots.

### 1.2.2 *Objetivos específicos*

1. Estudiar las técnicas de control óptimo presentadas en [Dubois \*et al.\* \(2015\)](#) y [Rojas-Quintero \*et al.\* \(2021a\)](#).
2. Implementar la técnica de Pontryagin con condiciones de optimalidad Riemannianas ([Dubois \*et al.\*, 2015](#)) y efectuar simulaciones de movimiento controlado de robots.
3. Agregar restricciones al método presentado en [Dubois \*et al.\* \(2015\)](#) y realizar control óptimo de robots.

## 1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

En el Capítulo 2 se desarrolla el marco teórico sobre el estudio del cálculo de variaciones y el enlace que tiene con el control óptimo, también se describen las ecuaciones de movimiento de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad (GDL). Enseguida, en el Capítulo 3, se ejemplifica el desarrollo y aplicación de 3 métodos de control óptimo: Principio del Máximo de Pontryagin (PMP), Regulador Lineal Cuadrático (RLC) y Ecuaciones de Control Covariantes (ECC), en 2 robots manipuladores (uno y dos GDL)

Después en el Capítulo 4 se muestran comparaciones numéricas, se tomaron dos funciones costo utilizadas en la literatura y se compararon con las funciones costo propuestas que integran el tensor de masas del sistema.

Para finalizar, en el Capítulo 5 se detallan las conclusiones de las pruebas numéricas y se evidencian los beneficios de utilizar las funciones costo invariantes con el tensor de masa, siendo considerado como una métrica riemanniana (ver Anexo C).

# 2

## MARCO TEÓRICO

### 2.1 ESTUDIO DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

El cálculo de variaciones es un método matemático que permite calcular máximos y mínimos de funcionales y por ende, tiene múltiples aplicaciones. Una de ellas es precisamente el control óptimo, para así poder encontrar el control de un sistema dinámico que minimice o maximice alguna función objetivo (Mesterton-Gibbons, 2009; Hamill, 2013). El control óptimo puede ser visto como un conjunto de métodos que determinan las trayectorias de un sistema dinámico que resultan en una variable de control que minimiza la función objetivo en algún intervalo de tiempo (Callies y Rentrop, 2008). Una de las principales preguntas a las cuales responde el conjunto de estos dos temas es (lo cual se verá en las siguientes secciones):

- ¿Cuál es la trayectoria que nos da la menor distancia entre dos puntos en un plano?

#### 2.1.1 La braquistócrona

Johann Bernoulli, en 1696, publicó su solución al problema de encontrar el camino tomado por una partícula, únicamente bajo el efecto de la gravedad, para pasar de un punto A a un punto B (como en la Figura 2.1), en el menor tiempo posible (Mesterton-Gibbons, 2009; Sussmann y Willems, 1997).

Como sabemos, se trata de minimizar una expresión del tiempo de trayectoria que está dado por el funcional

$$J[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{1 - y'}} dx \quad (2.1)$$

donde  $g$  es la constante de aceleración gravitacional. Notemos que debemos encontrar la función  $y = y(x)$  que minimice el valor de la funcional.

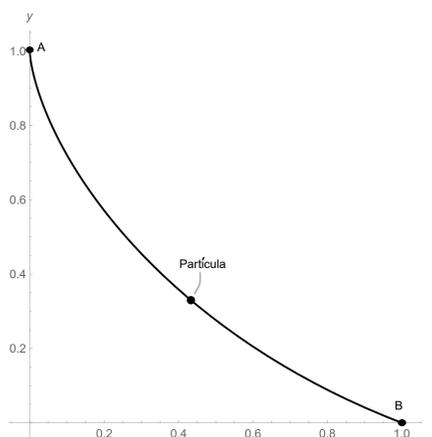


Figura 2.1: Trayectoria de una partícula sobre un cordón sin fricción.

$$J[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{1 - y'}} dx \quad (2.2)$$

En el análisis, si proponemos una función distinta a la curva sobre la cual se desliza la partícula, el valor de la funcional cambiará. Tomemos 4 curvas de ensayo: línea recta

$$y(x) = 1 - x; \quad (2.3)$$

cuarto de círculo

$$y(x) = 1 - \sqrt{2x - (x)^2}; \quad (2.4)$$

función de prueba

$$y(x) = 1 - x^\epsilon; \quad (2.5)$$

cicloide

$$x = \frac{\theta + \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{1}{2}\pi}{\cos^2(\theta_1)}, \quad y = 1 - \left\{ \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta_1)} \right\}^2 \quad (2.6)$$

$$-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \theta_1, \quad \theta_1 \approx -0.364791.$$

Tomemos además la siguiente funcional, ignorando  $1/\sqrt{2g}$  de (2.2) que es constante y no tiene efecto sobre el minimizador:

$$J[y] = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{1 - y'}} dx. \quad (2.7)$$

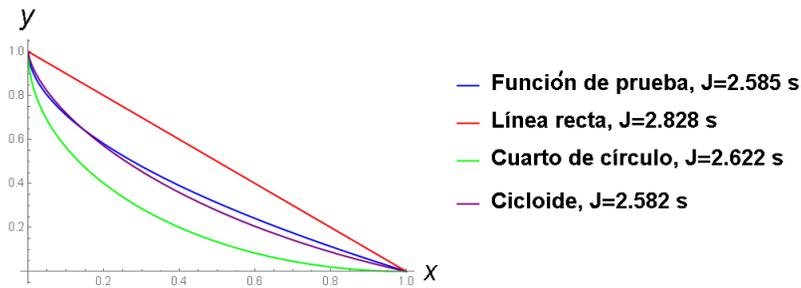


Figura 2.2: Trayectorias evaluadas.

Si usamos la cicloide, se encuentra el valor mínimo de la funcional (como en la Figura 2.2).

Pudiéramos pensar que con el análisis anterior encontramos la función de  $y(x)$  que minimiza la funcional. Sin embargo, en esta etapa no podríamos decir que la cicloide es la braquistócrona. En realidad, esta función que aparentemente minimiza la funcional, podría no ser más que un límite superior para una familia de mínimos. El cálculo de variaciones, que se enfoca en calcular extremos, definirá las condiciones para encontrar el mínimo absoluto.

## 2.2 ESTUDIO DE LOS EXTREMOS

El problema de la braquistócrona es un caso especial, así que plantearemos un problema de control óptimo. De una manera general se trata de minimizar una funcional que también podemos llamar función objetivo o índice de desempeño (Mesterton-Gibbons, 2009; Kirk, 2004)

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2.8)$$

donde  $F = F(x, y, y')$  es comúnmente llamada "función costo" y además está sujeta a condiciones de frontera del tipo

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (2.9)$$

Llamemos  $\Gamma$  la familia de curvas candidatas a minimizar 2.8. Debemos buscar entre todas ellas, una que minimice (2.8) y además cumpla con las condiciones de frontera (2.9). También debe ser una función continua (por trozos) y suficientemente derivable en el dominio  $[a, b]$ . Por otro lado no tendría sentido

permitir una función discontinua ya que una partícula no podría deslizarse por un cable discontinuo.

Por lo tanto  $y$  debe ser continua y su derivada  $y'$  debe existir y ser continua, excepto en un número finito de puntos en los que puede saltar con alguna cantidad finita. Denominaremos a esta clase de funciones como  $D_1$ . Por ende, la función  $y$  debe pertenecer a  $D_1$  y cumplir con las condiciones de frontera (2.9).

Denominaremos también  $C_1$  a la clase de funciones continuamente diferenciables o suaves en el dominio  $[a, b]$ . Llamaremos  $C_2$  a la clase de funciones suaves y dos veces derivables en el dominio  $[a, b]$ . Por construcción,  $C_2 \subset C_1 \subset D_1$ .

Para que una función  $y$  sea minimizadora debe cumplir las condiciones de frontera y además cumplir con la ecuación de Euler-Lagrange (EEL):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} = 0 \quad (2.10)$$

- Es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) que al resolverse, proporciona el extremo  $y \in C_2$
- Cabe recalcar que un extremo es solamente un candidato a minimizar la funcional (2.8) (bien puede resultar ser un maximizador).

No podemos perder de vista que un candidato pudiera maximizar a  $J[y]$ . Cuando sucede esto, la función  $F = F(x, y, y')$  actual se convierte en  $-F = -F(x, y, y')$ . En efecto, los problemas de maximización se convierten en un problema típico de minimización. Por lo tanto, nos enfocaremos en buscar mínimos.

### 2.2.1 La insuficiencia de los extremos

La EEL extremiza una funcional. En la práctica, este extremo resulta ser un minimizador en la mayoría de los casos. Sin embargo, debemos remarcar ciertas posibilidades.

- Aunque el extremo sea realmente un minimizador, hay que demostrarlo.
- El extremo puede no ser el minimizador.
- Pudiera no haber algún extremo que satisfaga las condiciones de frontera.

Recordemos la idea de la braquistócrona en donde nos preguntábamos como saber si la cicloide es realmente el minimizador. En estos momentos sólo podemos dar una respuesta muy general. En ciertos casos especiales podemos usar

un método llamado directo para verificar que nuestro candidato es realmente un minimizador. Si por ejemplo,

$$J[\phi(x) + \epsilon\eta(x)] - J[\phi(x)] \geq 0, \quad (2.11)$$

en donde  $y = \phi(x)$  es la minimizadora candidata,  $\epsilon$  es una variable escalar, y  $\eta$  es una función admisible arbitraria que pertenece a  $D_1$  tal que  $\eta(a) = 0 = \eta(b)$ ; entonces,  $y = \phi(x)$  es la función minimizadora.

### 2.2.2 Casos especiales de la ecuación de Euler-Lagrange

Sabemos que la EEL de la funcional (2.8) es en general una EDO no lineal de segundo orden. Siempre se reduce a una EDO de primer orden en 2 casos especiales.

1. Si  $F = F(y, y')$ , es decir, cuando  $\partial f / \partial x = 0$ , entonces la EEL se reduce a

$$H(y, y') = y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} - F(y, y') = \text{constante}; \quad (2.12)$$

2. O bien si  $F = F(x, y')$ , es decir, cuando  $\partial f / \partial y = 0$ , entonces tendremos

$$\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = \text{constante}. \quad (2.13)$$

A partir de ahora se usará la notación de derivadas parciales tal que  $f_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta}$ , por lo tanto las ecuaciones cambian de la siguiente manera.

$$H(y, y') = y' F_{y'}(y, y') - F(y, y') = \text{constante} \quad (2.14)$$

$$F_{y'}(x, y') = \text{constante} \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.14) y (2.15) son más fáciles de resolver que una EDO de segundo orden. Resta saber si habrá discontinuidades en algún punto o si es una función por trozos.

## 2.3 ESTUDIO DE LAS CONDICIONES NECESARIAS DE OPTIMALIDAD

Hasta el momento se supuso que  $\eta$  pertenece a  $C_2$ , por lo tanto podemos deducir que  $\phi$  debe satisfacer la EEL. Pero ahora supongamos que  $\eta \in D_1$  toma el lugar de  $\eta \in C_2$ , observamos que  $F_y(x, \phi, \phi')$  puede ser discontinua en los puntos en que  $\phi'(x)$  es discontinua. Ahora esas esquinas están permitidas, porque suponemos que  $\phi \in D_1$ . Sin embargo sabemos que  $F_y(x, \phi, \phi')$  es continua en las esquinas.

Todo esto implica que una condición necesaria para que  $\phi \in D_1$  y además minimice la funcional  $J[y]$  es que cumpla

$$F_{y'}(x, \phi, \phi') = \int_a^x F_y(\xi, \phi, \phi') d\xi + C, \quad (2.16)$$

en donde  $C$  es una constante. Esta es la ecuación de du Bois-Reymond. Por derivación, podemos llegar a la EEL cuando  $\phi \in C_1$ , mismo cuando el integrando del lado derecho de la ecuación es discontinua en  $C$  porque salta de  $\partial F(c, \phi(c), \omega_1)$  a  $\partial F(c, \phi(c), \omega_2)$ . La integral es continua y por ende, la constante  $C$  y el lado izquierdo de la igualdad también lo son. Gracias a este análisis se llega a la primera condición de esquina de Weierstrass-Erdmann:

$$F_{y'}(c, \phi(x), \omega_1) = F_{y'}(c, \phi(x), \omega_2) \quad (2.17)$$

El resultado es que cualquier extremo roto debe cumplir la EEL excepto en las esquinas; cualquier esquina debe cumplir (2.17). Esta condición puede utilizarse para excluir la posibilidad de un extremo roto.

De manera general siempre que  $F_{y'y'} \neq 0$  sabemos que  $F_{y'}$  varía uniformemente con respecto a su tercer argumento y por ende no puede tener el mismo valor para dos valores distintos de  $y'$ . De este modo, (2.17) no puede cumplirse si  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

La segunda condición de esquina de Weierstrass-Erdmann se enfoca en la continuidad del Hamiltoniano con respecto al tercer argumento. Combinando las siguientes ecuaciones en cualquier esquina  $F_{y'}(x, y, y')$  y  $H(x, y, y')$ , deben de ser continuas, aunque  $y'$  salte de  $\omega_1$  a  $\omega_2$ :

$$H(c, \phi(x), \omega_1) = H(c, \phi(x), \omega_2). \quad (2.18)$$

## 2.3.1 La condición necesaria de Legendre

Una condición necesaria para que  $y = \phi(x)$  genere un mínimo de (2.8) es que se cumpla la siguiente ecuación:

$$F_{\phi'\phi'} = F_{y'y'}(x, \phi(x), \phi'(x)) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.19)$$

Se trata de la condición necesaria de Legendre y se utiliza para identificar si un extremo minimiza o maximiza.

### 2.3.2 La condición necesaria de Jacobi

Definamos el siguiente par de funciones:

$$P(x) = F_{\phi'\phi'}, \quad Q(x) = F_{\phi\phi} - \frac{dF_{\phi\phi'}}{dx}. \quad (2.20)$$

Con las cuales definimos la ecuación de Jacobi que es lineal, de segundo orden, y además homogénea:

$$P(x)\eta'' + P'(x)\eta' = Q(x)\eta. \quad (2.21)$$

Esta ecuación debe de satisfacer  $\eta = 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , pero tenemos que tener en cuenta que una solución no nula de la ecuación de Jacobi pudiera también alcanzar un mínimo. Así que para ser aceptable, cualquier solución de este tipo debe desaparecer claramente tanto en  $x = a$  como en  $x = b$ . Sin embargo, si  $\eta(c) = 0$  para  $a < c < b$  entonces  $\phi$  no es un minimizador: se dice que  $\eta(c)$  es un punto conjugado a  $\eta(a)$  y para que  $\phi$  sea un minimizador, no debe de haber puntos conjugados. Esto es la condición necesaria de Jacobi (CNJ).

La ecuación (2.21) es homogénea y lineal, podemos buscar la solución con las condiciones de frontera (2.22) sin que haya efecto sobre la generalidad de la CNJ.

$$\eta(a) = 0, \quad \eta'(a) = 1 \quad (2.22)$$

Si analizamos un poco, podemos observar que la CNJ se cumple automáticamente cuando  $F$  es independiente de  $y$ . Ahí,  $F_{yy}$  y  $F_{yy'}$  son nulas y de esa manera  $Q(x) = 0$ .

### 2.3.3 Variaciones débiles frente a fuertes

En el cálculo de variaciones hay distinción entre variaciones débiles y fuertes. Equivale a distinguir entre mínimos locales débiles o fuertes.

Podemos definir la variación de  $y$  como la diferencia de  $\delta y$  entre la función de prueba  $y_\epsilon$  y el minimizador  $\phi$ :

$$\delta y(x) = y_\epsilon(x) - \phi(x). \quad (2.23)$$

También, la variación de  $y'$  es la diferencia  $\delta y'$  entre las derivadas:

$$\delta y'(x) = y'_\epsilon(x) - \phi'(x) = \frac{d\delta y}{dx}. \quad (2.24)$$

Entonces, para una variación fuerte  $|\delta y|$  es pequeña para todo  $x \in [a, b]$  pero  $|\delta y'|$  no necesita estar acotada. Para una variación débil,  $|\delta y'|$  es pequeña para todo  $x \in [a, b]$ , lo cual implica que  $|\delta y|$  también es pequeña. Un mínimo local débil es un mínimo sobre todas las variaciones débiles, un mínimo local fuerte es un mínimo sobre todas las variaciones fuertes y un mínimo global es un mínimo sobre todas las variaciones fuertes o débiles. También, todo mínimo global es un mínimo fuerte y todo mínimo fuerte es también un mínimo débil, pero lo inverso no se cumple.

#### 2.3.4 La condición necesaria de Weierstrass

Hasta ahora tenemos 3 condiciones necesarias conocidas:

1. Ecuación de Euler-Lagrange (EEL)
2. Condición necesaria de Legendre (CNL)
3. Condición necesaria de Jacobi (CNJ)

Las cuales son eficaces para buscar mínimos locales débiles. Por lo tanto debemos buscar una condición necesaria que permita variaciones fuertes como la ecuación exceso Weierstrass.

$$E(x, y, y', \omega) = F(x, y, \omega) - F(x, y, y') - (\omega - y')F_{y'}(x, y, y'). \quad (2.25)$$

Como  $c$  es cualquier punto de  $[a, b]$  y no necesariamente una esquina, al utilizar  $J'(0) \geq 0$  obtenemos la condición necesaria de Weierstrass para que  $\phi \in D_1$  sea un minimizador de  $J$ . Esta condición consiste en que se cumpla

$$E(x, \phi(x), \phi'(x), \omega) \geq 0, \quad (2.26)$$

para todo  $x \in [a, b]$  y para todo  $\omega$  que pertenezca a los reales. Si  $\phi$  tiene una esquina en  $x = c$  podemos interpretar la ecuación (2.26) de la siguiente manera:  $E(x, \phi(x), \phi'(-c), \omega) \geq 0$  como  $E(x, \phi(x), \phi'(c), \omega) \geq 0$  para todo  $\omega$  que pertenece a los reales. Estas desigualdades se siguen por continuidad y toman los límites a medida que  $x \rightarrow -c$  y a medida que  $x \rightarrow +c$ .

Tenemos 3 observaciones:

- La condición necesaria de Weierstrass se satisface invariablemente cuando el problema de minimización satisface:

$$F_{y'y'} > 0 \quad \forall (x, y, y'); \quad (2.27)$$

- La condición necesaria de Weierstrass implica la de Legendre (2.19).
- La condición necesaria de Weierstrass también implica la condición de esquina de Weierstrass-Erdmann (2.18).

#### 2.4 ESTUDIO DE LAS CONDICIONES SUFICIENTES FUNDAMENTALES

Supongamos que los puntos finales  $\Gamma_\epsilon$  se encuentran en las curvas  $\Lambda_A$  y  $\Lambda_B$  con ecuaciones paramétricas:

$$x = x_A(\epsilon), \quad y = y_A(\epsilon) \quad \text{para } \Lambda_A; \quad (2.28)$$

$$x = x_B(\epsilon), \quad y = y_B(\epsilon) \quad \text{para } \Lambda_B; \quad (2.29)$$

De modo que:

$$y(x_A(\epsilon), \epsilon) = y_A(\epsilon) \quad (2.30)$$

$$y(x_B(\epsilon), \epsilon) = y_B(\epsilon) \quad (2.31)$$

Si el punto final inferior  $A$  está fijo, entonces se debe satisfacer que  $x_A = y_A = \text{constante}$  y por ende, se cumple.

$$dx_A = 0, \quad dy_A = 0. \quad (2.32)$$

Una posibilidad más es cuando  $A$  sea limitado a estar en una línea vertical  $x = \text{constante}$  se le denomina a  $y_A$  como libre. Por lo tanto implica que  $dx_A = 0$  y  $dy_B \neq 0$ , estos requisitos nos hacen cumplir la segunda condición

$$F_{\phi'} = 0 \quad \text{en } A. \quad (2.33)$$

Y entonces también existe la posibilidad de que  $A$  sea limitado para estar en una línea horizontal  $y = \text{constante}$ , se le denomina a  $x_A$  como libre. Por lo tanto implica que  $dy_A = 0$  y  $dx_B \neq 0$  estos requisitos nos hace cumplir la tercera condición.

$$H(x, \phi, \phi') = 0 \quad \text{en } A. \quad (2.34)$$

La posibilidad más general es que  $dx_A$  y  $dy_A$  sean diferentes de 0, en este caso implica que surja la cuarta condición (2.35).

$$F_{\phi'} \frac{dy}{dx} = H(x, \phi, \phi') \quad \text{en } A. \quad (2.35)$$

Con  $dy/dx$  evaluada en  $\Lambda_A$ .

#### 2.4.1 La integral invariante de Hilbert

Un campo de extremos se le denomina familia de extremos de un sólo parámetro que cubre una región  $R$  del plano en el sentido de que solo una de sus curvas pasa por cada punto de  $R$ . Por ende, un campo de extremos destina una única pendiente a cada punto de  $R$ .

De esta manera se define una función de 2 variables que desde ahora denotaremos por  $\rho$  y lo llamamos campo de dirección de la familia; la pendiente de la curva que pasa por  $(x, y)$  se denota como

$$y' = \rho(x, y). \quad (2.36)$$

Utilizando un subíndice  $y'$  para denotar la diferenciación con respecto al tercer argumento, porque un extremo es una solución de la ecuación Euler-Lagrange.

$$F_y(x, y, \rho(x, y)) - \frac{d}{dx} \{F_{y'}(x, y, \rho(x, y))\} = 0. \quad (2.37)$$

Dado un campo de extremos, sea  $\Gamma$  cualquier curva entre  $(a, \alpha)$  y  $(b, \beta)$  que se encuentre enteramente dentro de la región  $R$  que cubre el campo de extremos y por lo tanto podemos definir la integral.

$$K[\Gamma] = \int_a^b \left\{ F(x, y, \rho(x, y)) + \left( \frac{dy}{dx} - \rho(x, y) \right) F_{y'}(x, y, \rho(x, y)) \right\} dx \quad (2.38)$$

donde la integral se evalúa a lo largo de  $\Gamma$ . Teniendo en cuenta (2.39) y (2.40) que  $H$  y  $\rho$  están definidas por:

$$H(x, y, y') = y' F_{y'}(x, y, y') - F(x, y, y'); \quad (2.39)$$

$$\rho(x, y, y') = F_{y'}(x, y, y'). \quad (2.40)$$

Con estas igualdades podemos reescribir la ecuación (2.38) como:

$$K[\Gamma] = \int_a^b \left\{ -H(x, y, \rho(x, y)) + \frac{dy}{dx} \rho(x, y, \rho(x, y)) \right\} dx. \quad (2.41)$$

#### 2.4.2 La condición suficiente fundamental

Si la curva  $\Gamma$  con ecuación  $y = \phi(x)$ , punto final inferior  $(a, \alpha)$  y punto final superior  $(b, \beta)$  es candidata minimizadora de (2.8) y si  $\Gamma$  está dentro del campo de extremos con el de dirección  $\rho$ , la integral invariante de Hilbert (2.38) puede utilizarse para derivar una condición suficiente.

Denotaremos lo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \phi'(x) = \rho(x, \phi(x)). \quad (2.42)$$

Ahora, dado que  $\Gamma$  es cualquier curva suave de  $A$  a  $B$  que se encuentra totalmente en  $R$ , está claro que (2.26) es una condición suficiente para que  $\Delta J \geq 0$ , cuando denotamos a  $\Delta J$  como:

$$\Delta J = \int_a^b E(x, y, \rho, \omega) dx. \quad (2.43)$$

Si  $\Gamma$  está dentro de un campo de extremos con el campo de dirección  $\rho$  y  $E(x, y, \rho, \omega) \geq 0$  para todo  $\omega \in \mathcal{R}$  posible, entonces  $J[y]$  alcanza un mínimo fuerte en  $\Gamma$ .

## 2.5 PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

El problema típico de la isoperimetría es el poder encontrar la forma de una cuerda de una longitud dada que encierre la mayor superficie posible.

Tomaremos de ejemplo lo siguiente: se tienen dos puntos  $A$  y  $B$  en el plano  $xy$  (como en la Figura 2.3). El punto  $A$  se sitúa en  $(x_A, y_A)$  mientras que el punto  $B$  se sitúa en  $(x_B, y_B)$  y los une un cable de longitud  $l$  que es mayor que la distancia entre  $A$  y  $B$  que denominaremos  $d_{AB}$ . El objetivo es encontrar la forma del cable, es decir la función de  $x$  que maximiza el área debajo de la curva que se ha construido a partir del cable.

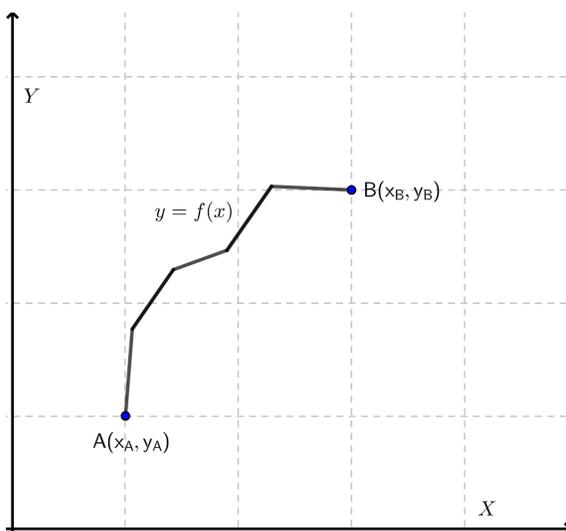


Figura 2.3: El típico problema isoperimétrico.

La razón por la que se mantiene una longitud de cable mayor  $d_{AB}$  es porque si fuera igual a  $d_{AB}$  tendríamos una línea recta que sabemos que no encierra la mayor superficie.

Entonces, el problema isoperímetro típico se convierte en el de minimizar:

$$J[y] = - \int_a^b y \, dx. \quad (2.44)$$

Sujeto a una restricción de longitud de curva tal que:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx. \quad (2.45)$$

Denominaremos a (2.45) como:

$$l = I[y] = \int_a^b G(x, y, y') \, dx. \quad (2.46)$$

Ahora ya teniendo definidas las ecuaciones nos encontramos con un problema de variación restringida que configuramos con una funcional compuesta

$$\Psi(x, y, y') = J[y] - \lambda I[y] \quad (2.47)$$

donde  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange. Si sustituimos las integrales en (2.47) surge

$$\Psi(x, y, y') = - \int_a^b y \, dx - \lambda \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (2.48)$$

Podemos tomar  $\lambda$  dentro de la segunda integral y combinar ambas integrales, ya que los límites son los mismos:

$$\Psi(x, y, y') = \int_a^b \left( -y - \lambda \sqrt{1 + (y')^2} \right) dx. \quad (2.49)$$

Al aplicar la EEL a la funcional resulta que

$$\lambda^2 = (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2, \quad (2.50)$$

dónde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes desconocidas. Para poder encontrarlas usamos la condiciones de frontera dadas por los puntos  $A$  y  $B$ .

## 2.6 ENLACE ENTRE CÁLCULO DE VARIACIONES Y CONTROL ÓPTIMO

En el cálculo de variaciones se minimiza una funcional del tipo

$$J[y] = \int_{t_0}^{t_1} \gamma(x, \dot{x}, t) dt, \quad (2.51)$$

con  $x(t_0) = x_0$  y  $x(t_1) = x_1$ .

Lo anterior se puede transformar a un problema de control óptimo. Si denominamos  $\dot{x}(t) = u(t)$  como la variable de control, entonces la funcional (2.51) cambia de la siguiente manera:

$$J[y] = \int_{t_0}^{t_1} \gamma(x, u, t) dt, \quad (2.52)$$

que además estará sometida al sistema dinámico  $\dot{x}(t) = u(t)$  con  $x(t_0) = x_0$  y  $x(t_1) = x_1$ . Así consideramos el problema de cálculo de variaciones como un caso particular del problema de control.

Definamos el hamiltoniano como:

$$H(x, u, t) = \lambda u - \gamma(x, u, t), \quad (2.53)$$

que se utilizará en las condiciones del Principio del Máximo de Pontryagin.

El Principio del Máximo de Pontryagin es la clave para el control óptimo ya que brinda las condiciones necesarias de optimalidad global para solucionar

problemas de control óptimo utilizando una variable de control que maximiza al hamiltoniano del sistema en todos los instantes del tiempo (Rios, 2017; Liberzon, 2012).

**Principio del Máximo de Pontryagin:** Sea  $u^*(t)$  y  $x^*(t)$  óptimas en  $[t_0, t_1]$  entonces existe un vector  $\lambda^*(t)$  de la siguiente manera:

$$\lambda^*(t) = (\lambda_0^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t), \dots, \lambda_n^*(t)), \quad (2.54)$$

continuo y con derivadas parciales continuas, tal que se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $\dot{\lambda}_i^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$  y  $\lambda_i^*(t) = \frac{\partial s[x(t_1)]}{\partial x_i} \quad \forall \quad i \in N.$

2. Que  $u^*(t)$  maximice el Hamiltoniano por lo tanto:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (2.55)$$

3.  $\dot{x}(t) = F(x, u, t)$  con  $x(t_0) = x_0$  y  $x(t_1) = x_1.$

En el (Anexo A) se ilustra un ejemplo de control en el tiempo de un sistema lineal usando el PMP.

## 2.7 TEORÍA BÁSICA DEL CONTROL ÓPTIMO USANDO ECUACIONES DE CONTROL CO-VARIANTES

Considera la notación sensorial para describir los parámetros de configuración  $q^i$ , el campo de velocidad del robot se puede interpretar como una función lineal de variables  $q^i$ . Su energía cinética  $K(q, \dot{q})$  es convexa y cuadrática

$$K = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (2.56)$$

en donde  $M_{ij}$  es el tensor de masa del sistema, que se considera una métrica de Riemann (ver Anexo C).

La energía potencial  $V(q)$  esta definida como el producto entre la masa, intensidad del campo gravitatorio local y la altura del centro de masa. El método toma ciertas cuestiones, también consta de llevar un sistema robótico articulado de un estado de posición inicial a un estado de posición final en un tiempo prescrito  $T$  (ver Sección 4.1).

Con la función costo

$$\gamma_u = \frac{1}{2} M^{ij} u_i u_j, \quad (2.57)$$

propuesta en los trabajos de Rojas-Quintero *et al.* (2021b); Dubois *et al.* (2015) que contiene métrica de Riemman, el tensor de masa  $M$  y  $u$  es el vector par de torsión del robot. Para encontrar el par necesario para llevar el sistema a la posición deseada, minimizan la siguiente funcional integral

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T \frac{1}{2} M^{ij} u_i u_j dt \quad (2.58)$$

en donde  $u_i$  y  $u_j$  surgen de aplicar la EEL

$$\frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i} \right\} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right\} + \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (2.59)$$

con  $L = \frac{1}{2} M^{ij} u_i u_j$ , del cual surge el sistema (3.33) de 2 EDO no-lineales del segundo orden que rigen el control óptimo de este sistema.

## 2.8 DINÁMICA DE ROBOTS MANIPULADORES

Un robot manipulador es un sistema mecánico articulado que está conformado por eslabones conectados de forma serial entre sí a través de articulaciones. Las articulaciones son generalmente de dos tipos: rotacionales o traslacionales. Las posiciones de las articulaciones, se agrupan en el vector de coordenadas generalizadas  $q$  (Kelly y Santibáñez, 2003), que designa las variables de configuración.

Por ende, para un robot con  $n$  articulaciones ( $n$  GDL), el vector de coordenadas generalizadas  $q$  tendrá  $n$  elementos:

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T. \quad (2.60)$$

Deseamos controlar la posición y orientación del órgano terminal del robot. En efecto, el órgano terminal es aquel que entra en contacto con el entorno. La posición generalmente se expresa en términos del marco de referencia coordenado cartesiano  $(x, y, z)$  que puede tener como origen la base del robot.

Dichas coordenadas son agrupadas en el vector de posiciones cartesianas:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T. \quad (2.61)$$

**Modelo cinemático directo:** Representa la relación entre la coordenada  $q$  generalizada y las coordenadas  $x$  del dispositivo terminal del robot. Dicho modelo tiene una relación de la forma:

$$x = f(q). \quad (2.62)$$

**Modelo cinemático inverso:** Representa la relación entre las coordenadas  $x$  y las coordenadas generalizadas  $q$ . Dicho modelo tiene una relación de la forma:

$$q = f^{-1}(x). \quad (2.63)$$

**Modelo dinámico:** Consiste en una EDO vectorial en las coordenadas generalizadas  $q$  o coordenadas  $x$ , generalmente de segundo orden, y se expresa de la siguiente manera:

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, u) = 0 \quad (2.64)$$

Donde  $u$  denota el vector de pares y fuerzas aplicadas en las articulaciones por medio de los accionadores.

### 2.8.1 Ecuaciones de movimiento con Euler-Lagrange

Las ecuaciones que describen el movimiento de un robot manipulador pueden ser obtenidas a partir del principio fundamental de la dinámica estipulado por Newton. Uno de los problemas que presenta este método, es que el análisis se complica conforme el número de articulaciones del robot aumenta. Aplicaremos entonces la EEL (2.10) al lagrangiano del robot, que es la diferencia entre su energía cinética  $K$  y su energía potencial  $V$ :

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q). \quad (2.65)$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de  $n$  GDL, están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = u_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.66)$$

Nótese que se tendrán tantas ecuaciones dinámicas como GDL tenga el robot manipulador. El uso de la EEL se reduce a cuatro etapas esenciales:

1. Cálculo de la energía cinética  $K(q, \dot{q})$ .
2. Cálculo de la energía potencial  $V(q)$ .
3. Cálculo del Lagrangiano del robot (2.65).
4. Desarrollo de las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

# 3

## ANÁLISIS DEL CONTROL ÓPTIMO DE ROBOTS MANIPULADORES

### 3.1 EJEMPLO: ROBOT MANIPULADOR DE UN GRADO DE LIBERTAD

Este sistema es muy sencillo y con este ejemplo ilustraremos el funcionamiento básico de 3 métodos de control óptimo: PMP, RLC y ECC.

Recordando las cuatro etapas anteriormente citadas en 2.8.1, primeramente mostraremos la convención que usaremos junto con el diagrama del manipulador (como en la Tabla 3.1 y Figura 3.1).

VARIABLES	DESCRIPCIÓN
$m_i$	Masa del eslabón $i$
$I_i$	Momento de inercia del eslabón $i$
$l_{ci}$	Distancia al centro de masas $i$
$L_i$	Longitud del eslabón $i$
$q_i$	Posición angular de la articulación $i$

Tabla 3.1: Convención de nomenclatura para un manipulador de  $n$  GDL

La energía cinética  $K(q, \dot{q})$  de este manipulador viene dada por:

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2, \quad \text{donde } v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_{c1} \\ \dot{y}_{c1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

De acuerdo a la Figura (3.1) se sabe que:

$$x_{c1} = l_{c1} \cos(q_1) \quad \therefore \quad \dot{x}_{c1} = -l_{c1} \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 \quad (3.2)$$

$$y_{c1} = l_{c1} \text{sen}(q_1) \quad \therefore \quad \dot{y}_{c1} = l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \quad (3.3)$$

Conociendo los términos  $\dot{x}_{c1}$  y  $\dot{y}_{c1}$  se realizan las debidas operaciones hasta llegar a la igualdad de

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2. \quad (3.4)$$

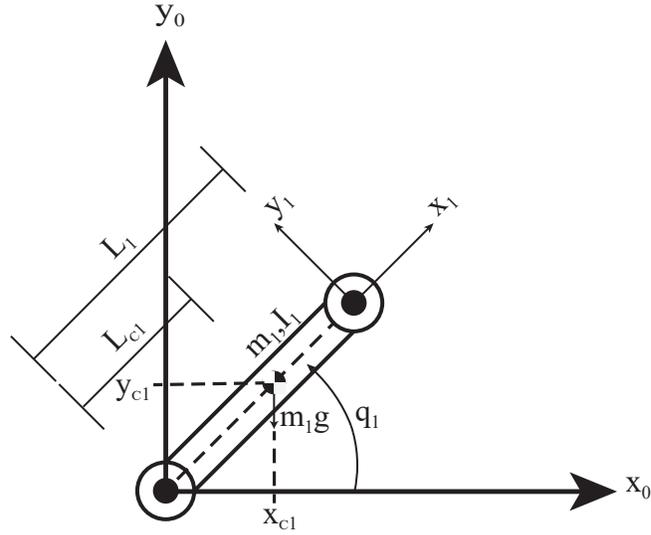


Figura 3.1: Esquema del manipulador de 1 GDL.

La correspondiente energía potencial es

$$V(q) = m_1 g l_{c1} \text{sen}(q_1), \quad (3.5)$$

donde  $g$  es la constante de aceleración gravitacional. El lagrangiano  $L(q, \dot{q})$  expresado por (2.65) es, en este caso

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 - m_1 g l_{c1} \text{sen}(q_1) \quad (3.6)$$

de donde puede obtenerse

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} = m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1 + I_1 \dot{q}_1; \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right\} = m_1 l_{c1}^2 \ddot{q}_1 + I_1 \ddot{q}_1; \\ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} = -m_1 g l_{c1} \text{cos}(q_1). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

La ecuación de Lagrange (2.66) correspondiente es entonces

$$u_1 = m_1 l_{c1}^2 \ddot{q}_1 + I_1 \ddot{q}_1 + m_1 g l_{c1} \text{cos}(q_1) \quad (3.8)$$

en donde  $u_1$  es el par aplicado a la articulación 1. La ecuación (3.8) describe el comportamiento dinámico de este mecanismo.

## 3.1.1 Desarrollo y aplicación del PMP

El objetivo del problema de control óptimo, es encontrar la mejor entrada de control  $u^*(t)$  para conducir el sistema dinámico de un estado a otro, tomando en cuenta restricciones (Sastry y Montgomery, 1993). Consideremos el índice de desempeño (funcional integral) en,

$$J = \int_a^b \gamma dt, \quad (3.9)$$

que está sujeto al siguiente intervalo  $[x_0(a), x_f(b)]$ , en donde  $\gamma = \frac{u^2}{2}$  es una función costo convexa de tal manera que  $J$  sea razonablemente minimizable. Entonces considerando el índice de desempeño (3.9), el hamiltoniano puede ser establecido usando la ecuación (2.53), esto es

$$H = \lambda^T f - \gamma, \quad (3.10)$$

en donde  $\lambda^T$  es el vector de co-estados y  $f$  es el sistema dinámico del robot en variables de estado.

La ecuación (3.8) describe el comportamiento dinámico del manipulador de 1 GDL, y se puede representar en variables de estado como:

$$x = [x_1 \quad x_2]^T = [q_1 \quad \dot{q}_1]^T; \quad (3.11)$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u-G}{M} \end{bmatrix}; \quad (3.12)$$

en donde  $M = m_1 l_{c1}^2 + I_1$  y  $G = m_1 g l_{c1} \cos(x_1)$ . Por lo tanto el hamiltoniano se transforma en:

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 \left( \frac{u-G}{M} \right) - \frac{u^2}{2}. \quad (3.13)$$

Nótese que conforme el índice de desempeño  $J$  sea menor, el rendimiento del robot será mejor de acuerdo a la función costo seleccionada (Asgari y Nikoobin,

2020). Por lo tanto utilizando el PMP, se definen las condiciones de optimalidad de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{u - G}{M}; \\ \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_2 \left( \frac{m_1 g l_{c1} \text{sen}(x_1)}{M} \right); \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Enseguida maximizamos el hamiltoniano con respecto al control, es decir cuando su derivada con respecto al control, se anula:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = \frac{\lambda_2}{M} - u \quad \therefore \rightarrow u = \frac{\lambda_2}{M}. \quad (3.15)$$

Sustituimos la entrada de control (3.15) en las ecuaciones (3.14) para eliminar  $u$  y dejarlas en función de las variables de estado  $x$  y co-estados  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = -\frac{\lambda_2}{M^2} - \frac{m_1 g l_{c1} \cos(x_1)}{M}; \\ \dot{\lambda}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_2 \left( \frac{m_1 g l_{c1} \text{sen}(x_1)}{M} \right); \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Finalmente se resuelve el sistema de ecuaciones de primer orden, sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

$$x_1(a) = \alpha, \quad x_1(b) = \beta, \quad x_2(a) = 0, \quad x_2(b) = 0, \quad (3.17)$$

en donde las constantes  $a$  y  $b$  son los tiempos de inicio y final del movimiento deseado,  $\alpha$  y  $\beta$  representan el valor de la posición angular al inicio y final del movimiento con velocidad nula en ambos casos.

De acuerdo al análisis anterior y a la obtención de las ecuaciones (3.16) se llevó a cabo la siguiente simulación de trayectoria con los valores estipulados en la Tabla (3.2). Si graficamos la solución numérica de  $x_1$  y  $x_2$  (como en la Figura 3.2), se observa que si cumple con las condiciones de frontera de la Tabla (3.2).

VARIABLES	VALOR	UNIDAD
$m_1$	2.4	kg
$g$	9.81	$\text{ms}^{-2}$
$l_{c1}$	0.4	m
$I_1$	1	$\text{kgm}^2$
$a$	0	s
$b$	2.672	s
$\alpha$	0	rad
$\beta$	0.8	rad

Tabla 3.2: Datos del robot manipulador de 1 GDL

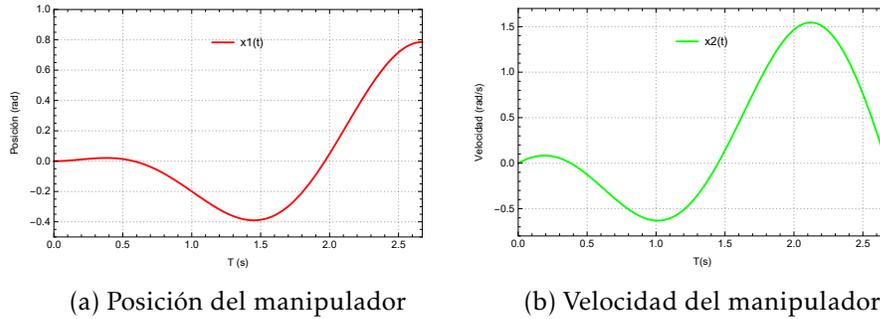


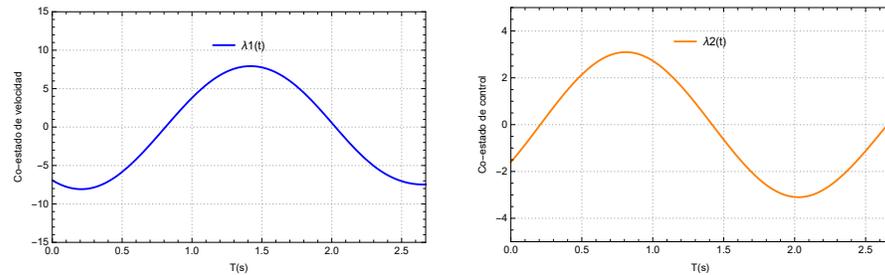
Figura 3.2: Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 1 GDL.

El PMP establece la trayectoria óptima, los co-estados y la entrada de control óptima  $u$  que minimizan la ecuación (3.13) para las condiciones iniciales y finales (como en la Figura 3.3).

La entrada de control  $u$  óptima que minimiza la ecuación (3.9) evoluciona según se muestra en la Figura 3.4.

Como el objetivo es minimizar el consumo del par en la articulación, podemos cuantificar la raíz del promedio cuadrático de los pares durante la trayectoria según la expresión

$$u_{rms} = \sqrt{\int_a^b \frac{u^2}{b} dt}. \quad (3.18)$$



(a) Co-estado que controla la velocidad (b) Co-estado que controla la entrada de control  $u$

Figura 3.3: Solución numérica  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

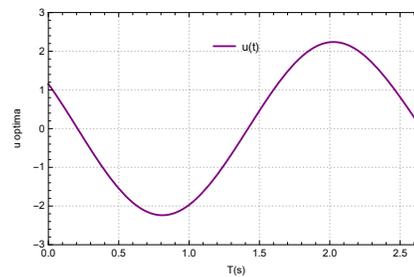


Figura 3.4: Entrada de control  $u$  óptima.

Utilizaremos las siglas en inglés RMS (root mean square) para referirnos a la media cuadrática para una colección de  $N$  valores.

El valor del índice de desempeño (3.9) y del par RMS (3.18), con este método son:

$$J = 3.08984, \quad u_{rms} = 2.31275 \text{ Nm} \quad (3.19)$$

### 3.1.2 Desarrollo y aplicación del RLC

En esta sección exploramos el método RLC que es muy usado para el control óptimo de sistemas robóticos (Kumar *et al.*, 2017). Es importante entender que una comparación directa con la metodología anteriormente expuesta no es realmente posible. En efecto, con el método de control RLC no es directamente posible especificar el tiempo de trayectoria, esto por razones inherentes al método RLC. Sin embargo, la idea de esta sección es precisamente de recalcar estas pequeñas diferencias.

En términos de control diremos que un control es óptimo si minimiza una función costo en la que se manifiesta un compromiso entre diversas especificaciones y restricciones (Khamseh y Janabi-Sharifi, 2017; Kumar *et al.*, 2017; Najafi *et al.*, 2014). En este caso y al igual que en el PMP se busca minimizar el índice de desempeño en

$$J = \int_0^{\infty} \gamma dt \rightarrow J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (3.20)$$

donde  $Q$  y  $R$  son matrices reales simétricas, constantes y definidas positivas. En donde  $Q$  actúa como el factor de ponderación de los estados del sistema y  $R$  es el factor de ponderación de la variable de control  $u$ . La función costo de este índice de desempeño también es una cantidad escalar cuadrática.

El control esta sujeto a:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du. \quad (3.21)$$

Hay que tomar en cuenta que la  $u$  de control de este método utiliza la retroalimentación de estados para ir regulando el sistema hasta llevarlo al punto de equilibrio:

$$u_{PE} = -R^{-1} B^T P x = -kx; \quad (3.22)$$

$$k = R^{-1} B^T P; \quad (3.23)$$

donde  $P$  es una matriz simétrica definida positiva y además es la solución de la Ecuación Algebraica de Riccati (EAR):

$$-A^T P - PA - Q + PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (3.24)$$

Este controlador es una de las herramientas más prácticas del control moderno lineal.

La finalidad del método es aplicar el control RLC a un manipulador de 1 GDL en el cual además de ser no lineal, se busca manipular las condiciones de frontera como en el control PMP. Por lo tanto, usaremos (3.11) y (3.12) para linealizar el jacobiano respecto al punto de operación al que se desea llegar:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Obteniendo las matrices  $A$  y  $B$  se resuelve (3.24), para calcular una variación (3.22).

Tenemos:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad y = h(x, u), \quad (3.27)$$

y sabemos que podemos estabilizar el punto de equilibrio o de operación del sistema no lineal mediante su linealización alrededor del punto de equilibrio u operación. Es decir, si:

$$\begin{cases} Z & = x - x^* & = x - x_{ss}, \\ T & = u - u^* & = u - u_{ss}, \\ W & = y - h(x^*, u^*) & = y - h(x_{ss}, u_{ss}). \end{cases} \quad (3.28)$$

De forma similar que para los casos lineales, empleamos una ley de control lineal (RLC) para obtener:

$$T^* = -kZ \Rightarrow \dot{Z} = (A - Bk)Z \quad \text{Sea asintótica estable de forma global.} \quad (3.29)$$

Debemos tomar en cuenta que este controlador se encuentra en las coordenadas linealizadas, por lo que es necesario regresarlo al sistema original. Si transformamos la ecuación (3.29) utilizando las ecuaciones (3.28) surge el siguiente sistema de control:

$$u - u_{ss} = -k(x - x_{ss}) \quad \therefore \rightarrow u = -k(x - x_{ss}) + u_{ss}, \quad (3.30)$$

en donde  $u_{ss}$  es el valor inicial del control que surge de igualar  $f_1$  y  $f_2$  a las condiciones iniciales del sistema y resolviendo para  $u$ .

De acuerdo al índice de desempeño (3.20) y a los datos anteriores (ver Tabla 3.2), se realiza el espacio de estados para (3.8):

$$x = [x_1 \quad x_2]^T = [q_1 \quad \dot{q}_1]^T$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u-G}{M} \end{bmatrix}$$

Con el cual calculamos las matrices (3.25) y (3.26):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4.8116 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7225 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos la ecuación (3.24) para obtener la matriz  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 61.5359 & 1.3932 \\ 1.3932 & 0.0852 \end{bmatrix}.$$

Se seleccionan las matrices  $Q$  y  $R$  de ponderación arbitrariamente:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix},$$

$$R = [0.001].$$

Resolviendo ahora la ecuación (3.24) se obtiene la ganancia de retroalimentación.

$$k = [k_1 \quad k_2] = [14.0312 \quad 6.3118]$$

Después calculamos  $uss$ :

$$uss = 6.6592$$

Si graficamos la solución numérica de  $x_1$  y  $x_2$  (como en la Figura 3.5), se observa que cumple con las condiciones de frontera de la Tabla 3.2 que se le plantean al robot.

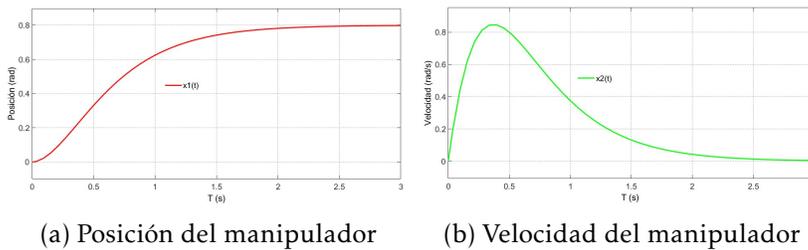


Figura 3.5: Solución numérica  $(x_1, x_2)$ .

La entrada de control  $u$  óptima para este método se describe de la siguiente manera (como en la Figura 3.6).

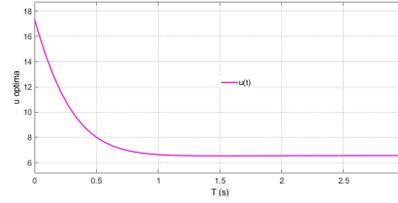


Figura 3.6: Entrada de control  $u$  óptima.

El consumo por RMS que resulta de este método viene dado por el siguiente valor

$$u_{rms} = 6.4999 \text{ Nm},$$

que es mas de 2 veces mayor que el resultado obtenido con la aplicación del PMP y ECC.

### 3.1.3 Desarrollo y aplicación de las ECC

Este método fue presentado en [Rojas-Quintero et al. \(2021b\)](#); [Dubois et al. \(2015\)](#) y por lo tanto dirigimos al lector (ver sección 2.7) para ver los detalles de esta metodología. El método es similar al PMP, sin embargo en lugar de obtener un sistema de  $4n$  EDO del primer orden, se obtiene un sistema de  $2n$  EDO del segundo orden que son no-lineales en el caso de robots manipuladores con articulaciones rotacionales. Una de las ideas centrales de este método es obtener EDO con una estructura Riemanniana (ver mas acerca de este tema en el anexo C). Esto se logra inyectando una métrica Riemanniana (en este caso el tensor de masas del sistema) dentro de la función costo seleccionada. El índice de desempeño es el mismo que en (3.9), pero en donde la función costo es en este caso.

$$\gamma = \frac{u^2}{2M}. \quad (3.31)$$

Notemos que en este caso,  $\gamma$  sigue siendo convexa de tal manera que  $J$  sigue siendo razonablemente minimizable. Utilizando la ecuación

$$\begin{cases} M_{ij} \frac{\hat{d}q^j}{dt} + \nabla_i V = u_i \\ \frac{\hat{d}^2 u_i}{dt^2} + R_{jil}^k \hat{q}^j \hat{q}^l u_k + \nabla_i \nabla_l V u^l = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

de [Rojas-Quintero et al. \(2021a\)](#), obtenemos el siguiente sistema de 2 EDO no-lineales del segundo orden que rigen el control óptimo de este sistema:

$$\begin{cases} M(\dot{x}_2 + \omega^2 \text{sen}(x_1)) = 0 \\ \ddot{u} + \omega^2 \text{sen}(x_1)u = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

En donde  $M = m_1 l_{c1}^2 + I_1$  y  $\omega = \sqrt{\frac{m_1 g l_{c1}}{M}}$ , con esto tendremos 2 ecuaciones de segundo orden, para resolver directamente  $x_1$  y  $u$  con los mismos datos de la simulación anterior (ver Tabla 3.2).

Por lo tanto, si graficamos la solución numérica de  $x_1$  y  $x_2$  (como en la Figura 3.7), se observa que cumple con las condiciones de frontera que se le plantean al robot. Además vemos que se obtienen los mismos resultados que con el PMP.

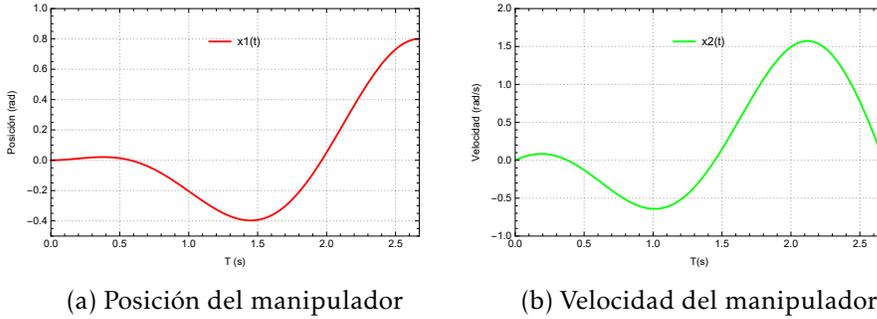


Figura 3.7: Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 1 GDL.

La entrada de control  $u$  óptima para este método se describe de la siguiente manera (como en la Figura 3.8). De nueva cuenta se busca minimizar el par RMS que está dado por la siguiente ecuación:

$$u_{rms} = \sqrt{\int_a^b \frac{u^2}{b} dt} \quad (3.34)$$

Los valores de índice de desempeño (3.9) y de par RMS (3.34), con este método son:

$$J = 2.31188, \quad u_{rms} = 2.31275 \text{ Nm}. \quad (3.35)$$

Sin olvidar que las soluciones obtenidas con el PMP y con las ECC son las mismas y menores que con el método RLC. En [Rojas-Quintero et al. \(2022a\)](#) presentan una formulación de Riemman del Principio del Máximo de Pontryaguin

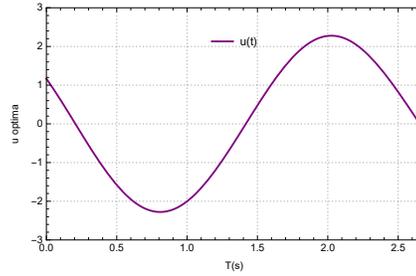


Figura 3.8: Entrada de control  $u$  óptima.

donde al considerar la función costo como una función del parámetro de configuración y aplicando la EEL, obtienen como resultado una ecuación para el par óptimo, que es una ecuación covariante de segundo orden.

Después aplican el PMP, y demuestran que los co-estados resultantes son de hecho una representación de primer orden de una ecuación covariante de segundo orden, por tal motivo existe una equivalencia entre la aplicación de las ecuaciones de EEL y el PMP.

### 3.2 ROBOT MANIPULADOR DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

Considérese el brazo mecánico de 2 GDL (como en la Figura 3.9), el robot manipulador está formado por 2 eslabones rígidos de longitudes  $L_1$  y  $L_2$  y masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Las articulaciones de los eslabones son rotacionales.

El vector de coordenadas generalizadas  $q(t)$  se define como:

$$q(t) = [q_1(t) \quad q_2(t)]^T \quad (3.36)$$

La energía cinética  $K(q, \dot{q})$  para este robot manipulador puede descomponerse en la suma de dos partes:  $K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q})$  donde  $K_1(q, \dot{q})$  y  $K_2(q, \dot{q})$  que son las energías cinéticas respectivas de cada eslabón.

Las coordenadas del centro de masa del primer eslabón están expresadas en el plano  $x - y$  por:

$$\begin{cases} x_{c1} = l_{c1} \cos(q_1) \\ y_{c1} = l_{c1} \sin(q_1). \end{cases} \quad (3.37)$$

El vector de velocidad  $v_1$  del centro de masa resulta ser:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_{c1} \\ \dot{y}_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

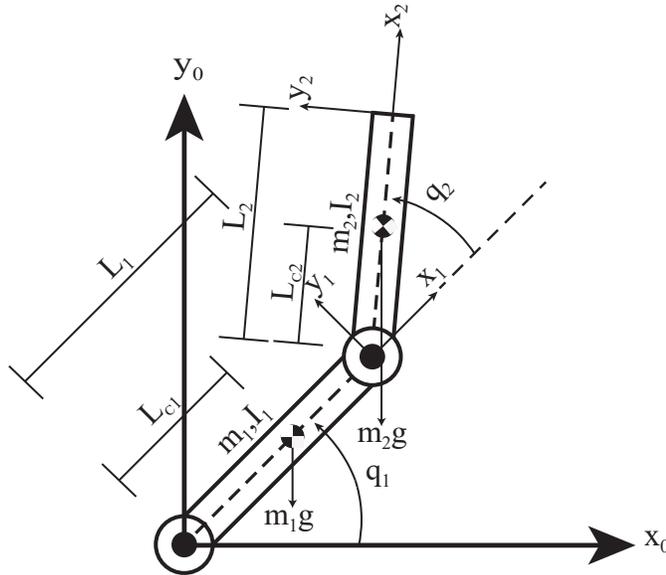


Figura 3.9: Manipulador de 2 GDL.

Por lo tanto, la velocidad al cuadrado  $v_1^T v_1$  del centro de masa resulta ser:

$$v_1^T v_1 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2. \quad (3.39)$$

Finalmente, la energía cinética del movimiento del eslabón 1 se expresa como:

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2. \quad (3.40)$$

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 2 expresadas en el plano  $x - y$  son:

$$\begin{cases} x_{c2} = L_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ y_{c2} = L_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2). \end{cases} \quad (3.41)$$

El vector de velocidad  $v_2$  del centro de masa resulta ser:

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_{c2} \\ \dot{y}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_{c2} \sin(q_1 + q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ L_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Empleando las siguientes identidades trigonométricas  $\cos^2(\theta) + \sen^2(\theta) = 1$  y  $\sen(q_1)\sen(q_1 + q_2) + \cos(q_1)\cos(q_1 + q_2) = \cos(q_2)$  se obtiene la velocidad al cuadrado  $v_2^T v_2$  del centro de masa:

$$v_2^T v_2 = L_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2L_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2). \quad (3.43)$$

de donde:

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2, \quad (3.44)$$

que al desarrollar, lleva a

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{m_2}{2} L_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + m_2 L_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2.$$

La energía potencial puede descomponerse como la suma de 2 partes:  $V(q) = V_1(q) + V_2(q)$  donde  $V_1(q)$  y  $V_2(q)$  son las energías potenciales respectivas de cada masa. Se tiene entonces que:

$$\begin{cases} V_1(q) = m_1 g l_{c1} \sen(q_1) \\ V_2(q) = m_2 g [L_1 \sen(q_1) + l_{c2} \sen(q_1 + q_2)]. \end{cases} \quad (3.45)$$

A partir de las ecuaciones de energía cinética y de energía potencial puede obtenerse el lagrangiano del sistema:

$$L(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) - V_1(q) - V_2(q). \quad (3.46)$$

De esta última ecuación pueden obtenerse las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 L_1^2] \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 + 2m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1 \\ &\quad + m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_2 + I_1 \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right\} &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 L_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 L_1 l_{c2} \sen(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 L_1 l_{c2} \sen(q_2) \dot{q}_2^2 + I_1 \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -[m_1 l_{c1} + m_2 L_1] g \cos(q_1) - m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 + m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2],$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right\} &= m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 - m_2 L_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &\quad + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 L_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1^2] - m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2).$$

Las ecuaciones de Lagrange (2.66) correspondientes son:

$$\begin{aligned} u_1 &= [m_1 l_{c2}^2 + m_2 L_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2] \ddot{q}_1 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_2 - 2m_2 L_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &\quad - m_2 L_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + [m_1 l_{c1} + m_2 L_1] g \cos(q_1) + m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2), \quad (3.47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= [m_2 l_{c2}^2 + m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 + m_2 L_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\ &\quad + m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2). \quad (3.48) \end{aligned}$$

Donde  $u_1$  y  $u_2$  corresponden el par aplicado en cada una de las articulaciones.

### 3.2.1 Aplicación del PMP

En la Figura 3.9 se muestra un esquema cinemático del manipulador robótico de 2 grados de libertad. Los parámetros para este robot se presentan en [Reyes y Kelly \(2001\)](#), pero aún adoptamos la nomenclatura de la Tabla 3.1.

Para la siguiente simulación se tomarán las siguientes condiciones de frontera, con  $T = 2$  s.

$$\begin{cases} \mathbf{q}(0) = (x_1(0), x_3(0)) = (0, 0) \text{ rad} \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = (x_2(0), x_4(0)) = (0, 0) \text{ rad s}^{-1} \\ \mathbf{q}(T) = (x_1(T), x_3(T)) = (0.8, 1.0) \text{ rad} \\ \dot{\mathbf{q}}(T) = (x_2(T), x_4(T)) = (0, 0) \text{ rad s}^{-1}. \end{cases} \quad (3.49)$$

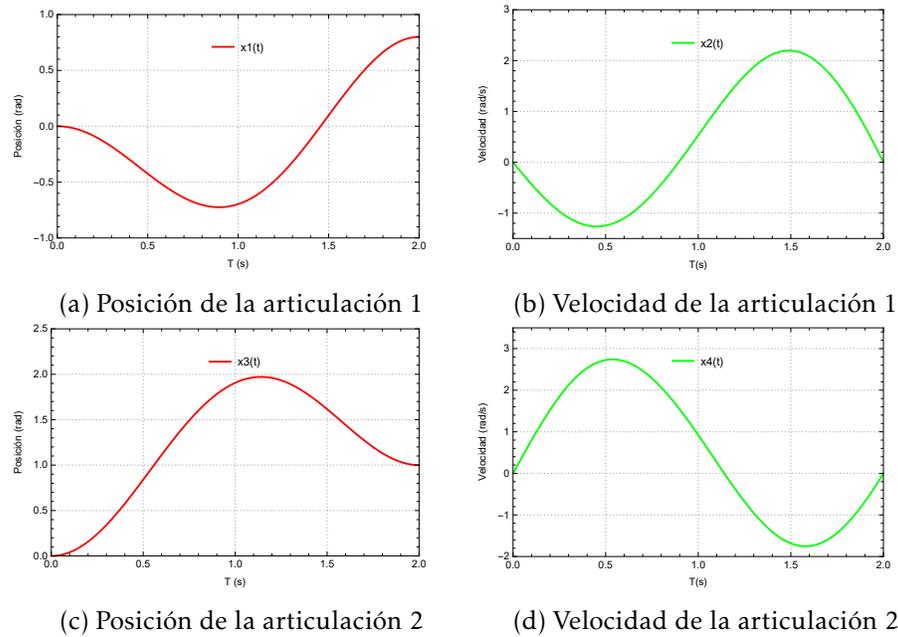


Figura 3.10: Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 2 GDL.

Por lo tanto, si graficamos la solución numérica de  $x_1$  a  $x_4$  (como en la Figura 3.10), se observa que cumplen con las condiciones que se le plantean al robot.

Las entradas de control  $u_i$  óptimas para este método se describen de la siguiente manera (como en la Figura 3.11).

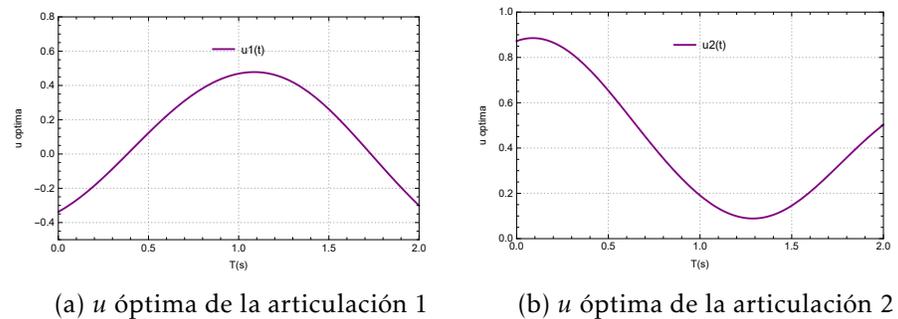


Figura 3.11: Entradas de control  $u_1$  y  $u_2$ .

Los valores del índice desempeño (3.9) y del par RMS (3.34) son en este caso de:

$$J = 0.336956, \quad u_{rms} = 0.580479 \text{Nm} \quad (3.50)$$

### 3.2.2 Aplicación del RLC

Al igual que en la sección (3.1.2) en esta sección exploramos el método RLC que es muy usado para el control óptimo de sistemas robóticos (Kumar *et al.*, 2017). Recordemos que una comparación directa con la metodología anteriormente expuesta no es realmente posible. En efecto, con el método de control RLC no es directamente posible especificar el tiempo de trayectoria, esto por razones inherentes al método RLC. Sin embargo, la idea de esta sección es precisamente de recalcar estas pequeñas diferencias.

Cabe recalcar que para este caso de estudio las condiciones iniciales y finales del robot son las siguientes.

$$\begin{cases} \mathbf{q}(0) = (x_1(0), x_3(0)) = (0.8, 1.0) \text{ rad} \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = (x_2(0), x_4(0)) = (0, 0) \text{ rad s}^{-1} \\ \mathbf{q}(\infty) = (x_1(\infty), x_3(\infty)) = (0, 0) \text{ rad} \\ \dot{\mathbf{q}}(\infty) = (x_2(\infty), x_4(\infty)) = (0, 0) \text{ rad s}^{-1}. \end{cases} \quad (3.51)$$

Por lo tanto, si graficamos la solución numérica de  $x_1$  a  $x_4$  (como en la Figura 3.12), se observa que parte de posiciones iniciales diferentes a 0rad para ambas articulaciones a velocidad inicial de 0rad s<sup>-1</sup> y llegan a la posición final de 0rad a velocidad nula.

Recordando que una comparación directa entre metodologías vistas en esta sección no es posible por la naturaleza de las mismas, pero se logró llevar el sistema de una posición inicial fuera del origen a 0rad como posición final.

### 3.2.3 Aplicación de las ECC

De nueva cuenta se tomará como referencia la metodología de Dubois *et al.* (2015) aplicada en el robot manipulador (como en la Figura 3.9), además se seguirán respetando las condiciones de frontera de la ecuación (4.5) con  $T = 2$ .

Por lo tanto, si graficamos la solución numérica de  $x_1$  a  $x_4$  (como en la Figura 3.13), se observa que cumple con las condiciones que se le plantean al robot.

Hay que tener en cuenta que el par de trayectorias utilizando esta metodología tienen una evolución más suave que utilizando el PMP, pero el tiempo de cálculo para cada una de las soluciones se incrementa así que cada método tiene sus ventajas o desventajas según la tarea que se le destinará al robot manipulador. El aumento en el tiempo de cálculo con respecto al PMP se podría explicar

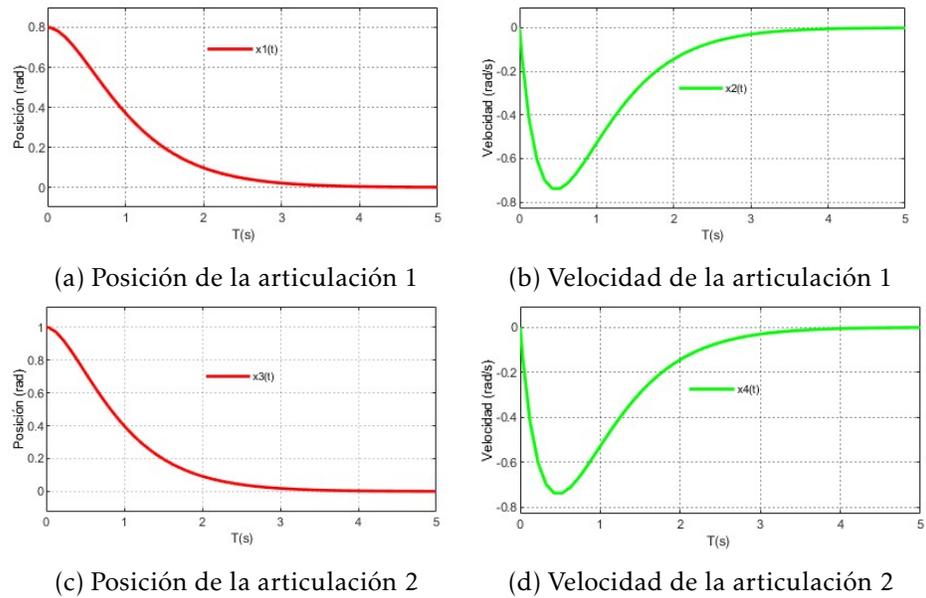
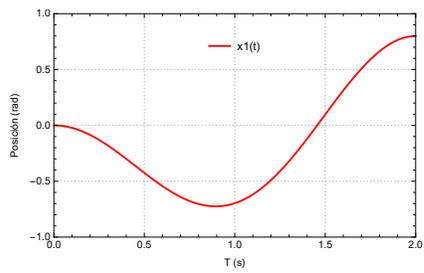


Figura 3.12: Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 2 GDL.

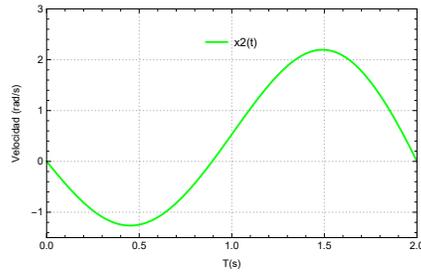
por el hecho de que las ECC son del segundo orden mientras que con el PMP las ecuaciones son del primer orden.

Los valores de índice desempeño (3.9) y de par RMS (3.34) en este caso de:

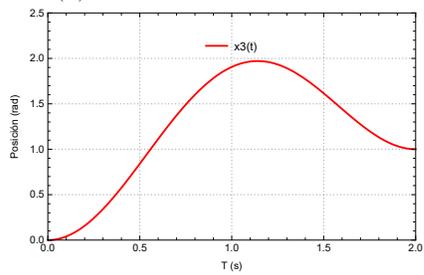
$$J = 17.4868, \quad u_{rms} = 0.580479 \text{ N.m.} \quad (3.52)$$



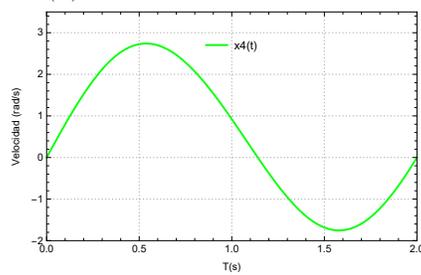
(a) Posición de la articulación 1



(b) Velocidad de la articulación 1



(c) Posición de la articulación 2



(d) Velocidad de la articulación 2

Figura 3.13: Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 2 GDL.



# 4

## COMPARACIÓN NUMÉRICA DE FUNCIONES COSTO UTILIZANDO EL PMP

Uno de los enfoques tradicionales del control óptimo, implica la optimización de la trayectoria óptima que conduce a la aplicación del Principio Máximo de Pontryagin (PMP). Esto requiere resolver un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que gobiernan las variables de estado y conjugadas (Pontryagin *et al.*, 1962). Estamos interesados en desarrollar una metodología de control óptima basada en PMP. En esta metodología, el objetivo es minimizar (o maximizar) una función integral que se considera un índice de rendimiento (PI) (también comúnmente llamado función objetivo) (Mesterton-Gibbons, 2009; Liberzon, 2012). El PI funcional es la integral de una función costo elegida apropiadamente que luego compone un hamiltoniano. La aplicación del PMP a este hamiltoniano óptimo conduce a un sistema de EDO para las variables de estado y control. Por lo tanto, para el control de robots, la elección del hamiltoniano es una parte crítica de este proceso. En este trabajo, estudiamos el impacto numérico de dos funciones costo en el control óptimo de manipuladores robóticos usando PMP. Tomamos una función costo que se usa comúnmente en la literatura y la comparamos con una que proponemos como mejor alternativa. Las simulaciones numéricas realizadas en el manipulador robótico de 2 GDL (como en el Anexo B) muestran cómo nuestra función costo propuesta mejora la robustez numérica y además reduce el tiempo de cálculo requerido.

Tradicionalmente, el principal enfoque del control óptimo es optimizar la trayectoria que resulta de aplicar el Principio Máximo de Pontryagin. Requiere dar solución a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan el control y variables de estado (Pontryagin *et al.*, 1962). Durante el desarrollo del artículo “**Comparing cost functions for the optimal control of robotic manipulators using Pontryagin’s Maximum Principle**” (Ramírez-de Ávila *et al.*, 2021) nos interesaba comparar dos funciones costo, una utilizada en la literatura y una donde incrustamos el tensor de masa en la función costo para obtener mayor robustez numérica con respecto a los cambios en el tiempo, al momento de resolver las ecuaciones que rigen el movimiento óptimo del robot.

#### 4.1 ÍNDICE DE DESEMPEÑO Y FUNCIÓN COSTO

Deseamos llevar el sistema robótico articulado de un estado de posiciones y velocidades iniciales  $(q(0), \dot{q}(0))$  a un estado final  $(q(T), \dot{q}(T))$  en un tiempo prescrito  $T$ . Las magnitudes del par requeridas para lograr esto, se pueden restringir minimizando una función integral del tipo:

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T \gamma(\mathbf{u}) dt. \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector par de torsión del robot que para el estudio se consideran como las variables de control de nuestro sistema. La función integral (4.1), donde  $\gamma$  es la función costo seleccionada, de tal manera que (4.1) pueda ser razonablemente minimizada, que en nuestro caso dependerá de los pares de torsión del robot manipulador  $\mathbf{u}$ .

Durante el estudio de la literatura notamos que cuando se busca minimizar las intensidades de par  $\gamma$  normalmente se elige como:

$$\gamma_A = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de ponderación de coeficientes constantes y diagonal que generalmente se toma como la identidad (Eriksson, 2007; Nikoobin y Moradi, 2011; Mirz *et al.*, 2018; Asgari y Nikoobin, 2020; Vezvari *et al.*, 2020). Realizamos simulaciones usando esta función costo cuando  $\mathbf{A}$  es la identidad.

Para la propuesta tomamos como base a (Dubois *et al.*, 2015; Rojas-Quintero *et al.*, 2021a) y se propone el uso de la siguiente función costo

$$\gamma_M = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{u}. \quad (4.3)$$

#### 4.2 CONTROL ÓPTIMO DE UN MANIPULADOR ROBÓTICO DE 2 GDL

Sabemos que para todo robot de  $n$  GDL para el cual  $n > 1$ , el tensor de masas  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{q})$  dependerá de la configuración del sistema, por lo tanto impactará en el control óptimo del mismo. Para las siguientes simulaciones tomamos las siguientes condiciones de frontera;

$$\begin{cases} \mathbf{q}(0) = (x_1(0), x_3(0)) = (0, 0) \text{ rad} \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = (x_2(0), x_4(0)) = (0, 0) \text{ rad s}^{-1} \\ \mathbf{q}(T) = (x_1(T), x_3(T)) = (0.8, 1.0) \text{ rad} \\ \dot{\mathbf{q}}(T) = (x_2(T), x_4(T)) = (0, 0) \text{ rad s}^{-1}. \end{cases} \quad (4.4)$$

En la Figura 4.1 se muestran tres conjuntos de curvas de valores promedio para el par, potencia y el tiempo de cálculo de la CPU necesarios para obtener una solución para los valores de tiempo prescrito  $T$ .

Como podemos observar hay huecos en las gráficas lo que nos indica que nuestro solucionador no pudo encontrar una solución que respete las condiciones de frontera que antes estipulamos, esto se debe a la rigidez de las ecuaciones diferenciales (sobre este concepto de rigidez ver Anexo D).

Algo que recalcar es que para  $\gamma_M$  el solucionador si encuentra solución para cada uno de los tiempos prescritos  $T$ , lo que nos indica una robustez numérica (sobre este concepto de robustez numérica ver Anexo D) en cuanto a calcular las soluciones para cada tiempo. Otro punto a recalcar es que el tiempo de computación es menor con  $\gamma_M$ . A partir del segundo 2, los tiempos de cálculo se incrementan demasiado, pero siempre obteniendo una solución, que a comparación de  $\gamma_A$ , no es posible obtener para todos los tiempos.

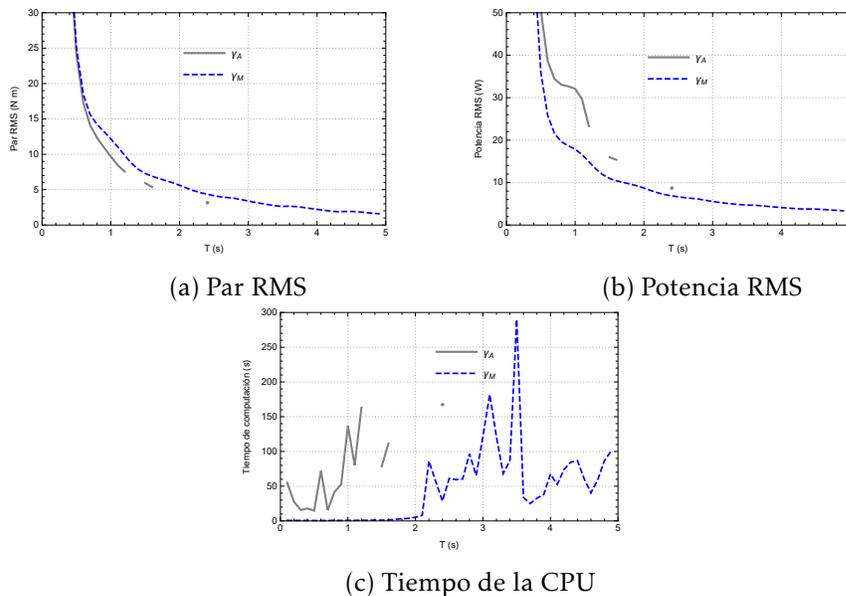


Figura 4.1: Control óptimo (pares): Posiciones articulares y pares.

La Figura 4.2 nos muestra las trayectorias para diferentes tiempos prescritos, el objetivo de esto es ver más claramente qué función costo nos ayuda a tener un movimiento más suave en el robot.

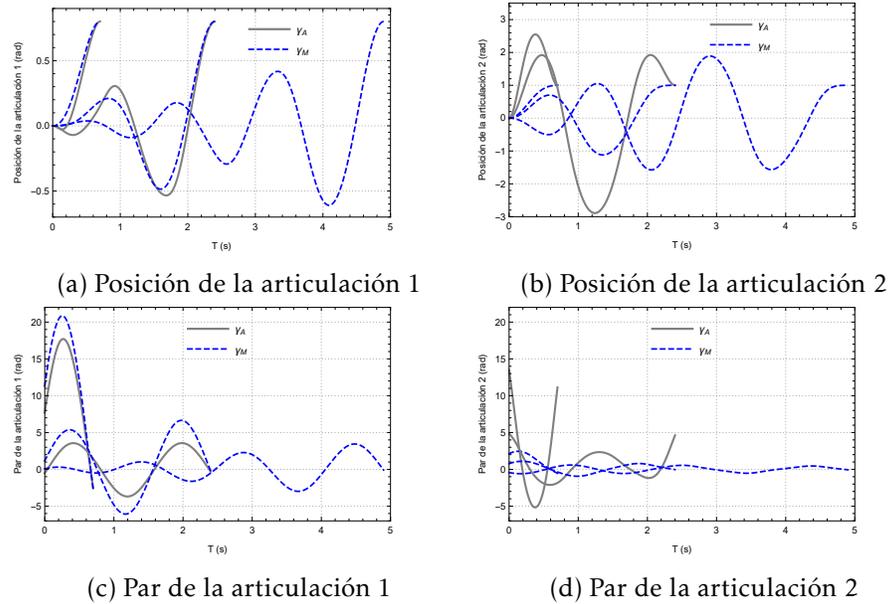


Figura 4.2: Solución numérica del control óptimo de un manipulador robótico de 2 GDL.

Analizamos el impacto numérico de dos funciones costo en el solucionador NDSolve de Wolfram Mathematica<sup>®</sup>. Observamos que para la primera función costo  $\gamma_A$  que es usada generalmente en la literatura antes citada, se tiene la ventaja de provocar un menor consumo de par durante el movimiento óptimo del sistema, sin embargo hace que las ecuaciones de control óptimas que gobiernan el sistema sean rígidas. Mediante las gráficas antes planteadas, se observa la rigidez hasta el punto de que las soluciones solo se pueden encontrar en un conjunto limitado de intervalos de tiempo prescrito  $T$ . Además los límites articulares de los eslabones en la trayectoria son mas altos que con la otra función costo.

### 4.3 MOTIVACIÓN DEL ANÁLISIS

En el primer acercamiento experimentando con el tensor de masas en las funciones costo seleccionadas, notamos que tienen propiedades interesantes tales como aumento en la robustez numérica y amplitudes de movimiento menores. Por lo tanto, las pruebas numéricas nos motivan a inyectar el tensor de masas en las funciones costo ya existentes en la literatura.

El objetivo principal es realizar un control óptimo en manipuladores observando los límites articulares. En las anteriores pruebas numéricas tuvimos un acercamiento muy aceptable por lo tanto restringiremos el resto de nuestras pruebas a los casos en los que la función costo depende de los pares de torsión y de las velocidades del robot.

Conociendo estos parámetros hemos tomado dos funciones costo utilizadas en la literatura. En cada una de ellas inyectamos el tensor de masas con la hipótesis de obtener mayor robustez numérica y disminución en los límites articulares.

CRITERIO	FUNCIÓN COSTO $\gamma_i$
Par (Kaphle y Eriksson, 2008; Eriksson y Nordmark, 2010) (Ghasemi <i>et al.</i> , 2012; Eriksson, 2007) (Nikoobin y Moradi, 2011; Mirz <i>et al.</i> , 2018) Asgari y Nikoobin (2020); Vezvari <i>et al.</i> (2020)	$\gamma_1 = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{u}$
Par + Velocidad articular (Kaphle y Eriksson, 2008; Eriksson y Nordmark, 2010)	$\gamma_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{u} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}})$
Par (Dubois <i>et al.</i> , 2015; Rojas-Quintero <i>et al.</i> , 2021a,b)	$\gamma_3 = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{u}$
Par + Velocidad articular (proposición nueva)	$\gamma_4 = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{u} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}})$

Tabla 4.1: Funciones costo evaluadas.  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  están presentes en la literatura;  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  presentan el tensor de masa y se proponen como alternativas a  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , respectivamente.

La Tabla 4.1 presenta una descripción de las cuatro diferentes funciones costo con las que realizamos pruebas numéricas para comparar cuatro aspectos:

- Robustez numérica para calcular los controladores óptimos con tiempos crecientes prescritos  $T$ .
- Consumo de par y de potencia de la articulación del robot;
- Tiempos de cálculo para resolver el sistema de EDO no lineales;
- Amplitud de movimiento en la articulación;

#### 4.4 COMPARACIÓN DE 4 FUNCIONES COSTO APLICANDO EL PMP A UN MANIPULADOR DE 2 GDL

Para las siguientes pruebas numéricas evaluamos el impacto de cada función costo  $\gamma_i$  de la Tabla 4.1 en el control óptimo de un manipulador de 2 GDL.

Seguimos una metodología específica que garantiza que todas las pruebas se realicen en igualdad de condiciones. La cual se detalla en los siguientes pasos.

Para las siguientes simulaciones tomamos las siguientes condiciones de frontera;

$$\begin{cases} \mathbf{q}(0) = (x_1(0), x_3(0)) = (0, 0) \text{ rad} \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = (x_2(0), x_4(0)) = (0, 0) \text{ rad s}^{-1} \\ \mathbf{q}(T) = (x_1(T), x_3(T)) = (0.8, 1.0) \text{ rad} \\ \dot{\mathbf{q}}(T) = (x_2(T), x_4(T)) = (0, 0) \text{ rad s}^{-1}. \end{cases} \quad (4.5)$$

En la Figura 4.3 se muestran los resultados de las pruebas numéricas para el par RMS, potencia RMS y tiempo de cálculo de la CPU. Cada una de estas gráficas se traza contra el tiempo de trayectoria prescrito  $T$  el cual hemos limitado hasta 10 s. En primer lugar podemos observar que no todas las curvas alcanzan el valor de  $T = 10$  s, esto se debe a que solo con  $\gamma_4$  el solucionador NDSolve de Wolfram Mathematica<sup>®</sup> nos arroja un resultado al sistema de EDO no lineales. Además si tomamos el caso de  $\gamma_2$  observamos los huecos del análisis anterior que se deben a problemas numéricos que surgen en el control óptimo de sistemas dinámicos como la rigidez (Grancharova y Johansen, 2005).

La evaluación que tuvimos para cada función costo nos indica una mayor robustez numérica con  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  con respecto a los valores crecientes de  $T$ .

En la Figura 4.4 se muestran las posiciones y pares para cuatro trayectorias diferentes en cuatro diferentes tiempos prescritos  $T$  (0.7 s, 2.4 s, 4.9 s y 10 s) para las cuatro funciones costo diferentes. Cabe recalcar que cada uno de los valores elegidos para  $T$  corresponde al valor máximo para el cual el solucionador NDSolve de Wolfram Mathematica<sup>®</sup> pudo determinar una solución usando cada función costo  $\gamma_i$ . Por lo tanto, solo una trayectoria corresponde a  $\gamma_2$  (línea roja punteada); dos trayectorias corresponden a  $\gamma_1$  (línea gris); tres de ellos corresponden a  $\gamma_3$  (línea azul discontinua); cuatro de ellos corresponden a  $\gamma_4$  (línea negra).

Se puede apreciar una tendencia a medida que incrementa el valor de  $T$ , el comportamiento es similar con cada función costo. Las posiciones articulares tienden a oscilar cuando el robot se acerca a la posición que indicamos previamente en las condiciones de frontera, para los pares del robot sucede algo similar oscila en torno a cero para minimizar el consumo de par.

4.4 COMPARACIÓN DE 4 FUNCIONES COSTO APLICANDO EL PMP A UN  
MANIPULADOR DE 2 GDL

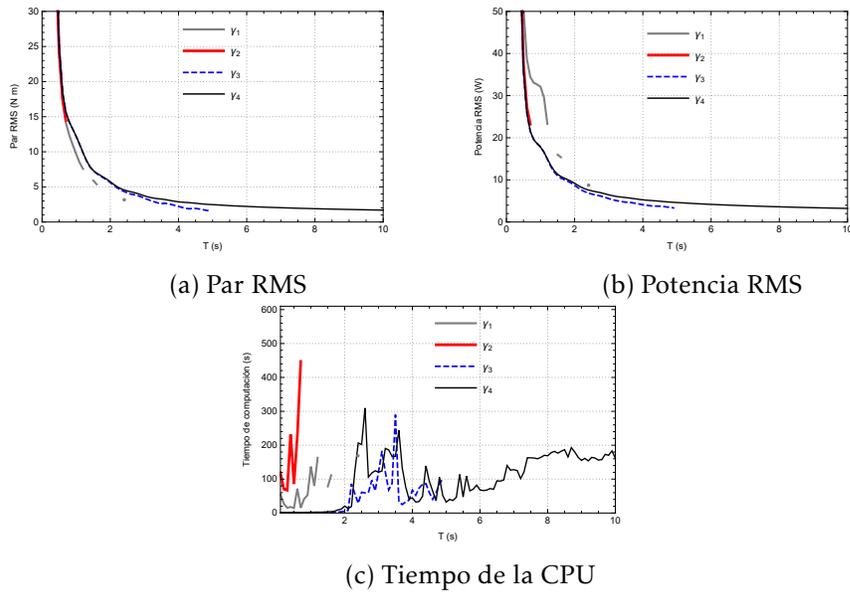


Figura 4.3: Control óptimo (Velocidades, pares): Par RMS, Potencia RMS, Tiempo de CPU.

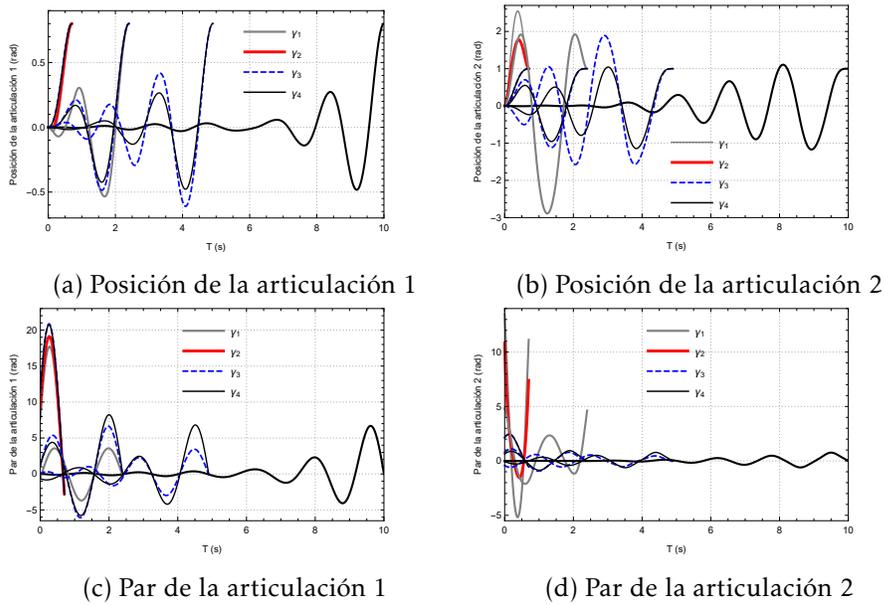


Figura 4.4: Control óptimo (Velocidades, pares): posiciones articulares y pares.

Esta comparación podría llamarse injusta ya que las funciones costo tienen criterios diferentes que las caracterizan a cada una de ellas, por lo tanto podemos comparar las que más se parecen entre ellas. Por ejemplo el criterio de torsión caracteriza dos de ellas ( $\gamma_1$  y  $\gamma_3$ ), un criterio de torsión + velocidad articular caracteriza a  $\gamma_2$  y  $\gamma_4$ . Siguiendo la lógica anterior la Figura 4.5 muestra la confrontación de las posiciones articulares de la trayectoria de estos dos pares de funciones costo más a detalle. Como punto a destacar podemos observar una reducción en la amplitud de movimiento articular en las articulaciones, que convenientemente para nuestro estudio se presentan en las funciones costo donde está inyectado el tensor de masas y esto evidencia que su presencia dentro de la función tiene un efecto favorecedor con respecto a la amplitud de movimiento del sistema robótico.

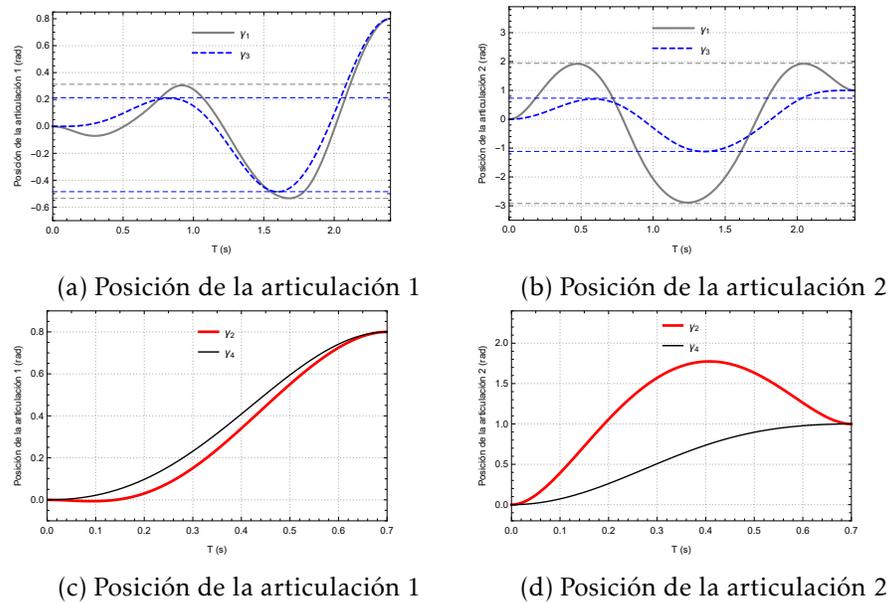


Figura 4.5: Control óptimo (Velocidades, Pares): enfrentando  $\gamma_1$  contra  $\gamma_3$  y  $\gamma_2$  contra  $\gamma_4$ .

En la Figura 4.5 podemos observar los movimiento más óptimos en cuanto a límites articulares, pero hay que tomar en cuenta que estamos optimizando dos factores, el par y la velocidad. Por lo tanto el valor del par no es el mínimo que podría obtenerse con alguna otra función costo. Aseguramos un control más adecuado ya que normalmente los manipuladores tienen una área de trabajo y usando la función costo que minimiza los pares se presentaban movimientos más erráticos que podrían causar una colisión en el plano del movimiento.

## 4.5 PEQUEÑA PRUEBA DE FUNCIÓN COSTO CON CRITERIO DE ACELERACIÓN

En una amplia búsqueda por encontrar la mejor función costo para disminuir los límites articulares nos encontramos con una ya utilizada en la literatura:

$$\gamma_5 = \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{q}}^T \ddot{\mathbf{q}}), \quad (4.6)$$

en la cual la variable de control sería la aceleración angular, y el criterio sería una minimización de la aceleración angular. El usar las aceleraciones dentro del índice de desempeño no es tan común ya que normalmente se trata de minimizar los costos de operación para generar el movimiento y con esta función simplemente no se obtienen esos resultados (Flash y Hogan, 1985). Algunos detalles significativos que arroja esta función costo son:

- Mayor robustez numérica
- Tiempos de computación menores

Hay que tener en cuenta que son ventajas que tiene sobre otras funciones costo pero la utilidad es diferente. Nos encontramos con una función costo que genera una trayectoria directa sin usar la propia dinámica del manipulador, además obtiene mayores tiempos de trayectoria lo cual indica que las ecuaciones de control y variables de estado tienen una mayor robustez numérica.

En la Figura 4.6 se muestran los resultados de las pruebas numéricas para el par RMS, potencia RMS y tiempo de cálculo. Teniendo como punto positivo los tiempos de cálculo tan bajos a comparación de las demás funciones costo.

La Figura 4.7 muestra el movimiento de cada articulación en diferente tiempos prescritos  $T$  y además se observa que cumple con las condiciones de frontera.

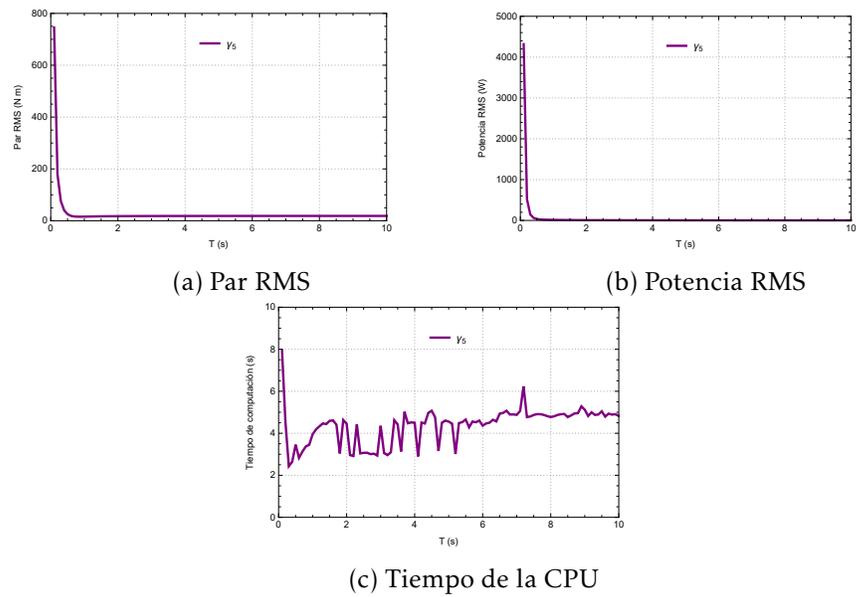


Figura 4.6: Control óptimo (Aceleraciones): Par RMS, Potencia RMS, Tiempo de la CPU.

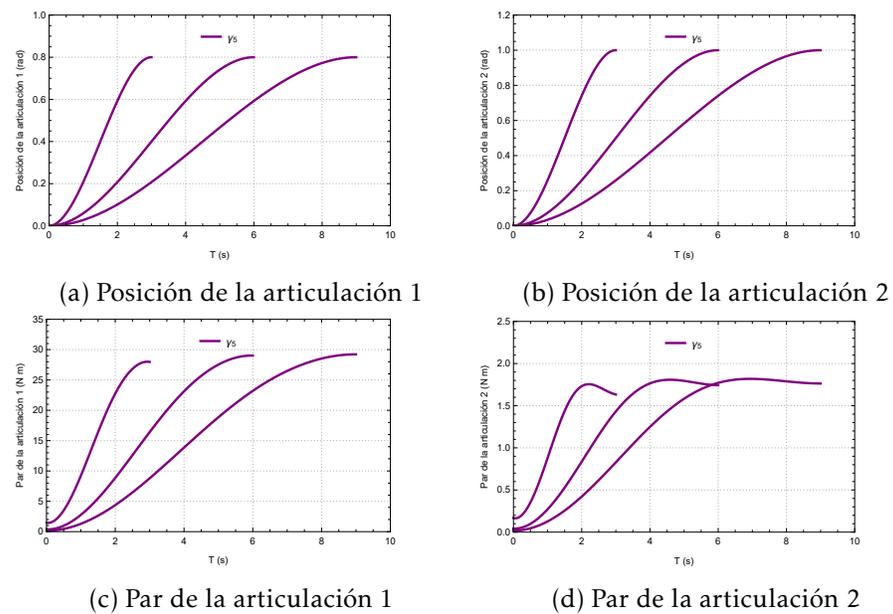


Figura 4.7: Control óptimo (Velocidades, Pares): posiciones articulares y pares.

# 5

## CONCLUSIONES

Se lograron realizar simulaciones de movimiento óptimo controlado en un robot manipulador de 1 y 2 GDL, obteniendo resultados interesantes. Se compararon funciones costo utilizadas en la literatura con las funciones costo propuestas que integran en su estructura el tensor de masas  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  del sistema, a partir de las ya citadas funciones. Se utilizó el programa NDSolve de Wolfram Mathematica<sup>®</sup> para realizar las pruebas numéricas.

Los resultados analizados arrojaron que las funciones costo con el tensor de masas  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  tienen una mayor robustez numérica en cuanto a tratar de resolver las ecuaciones de control y variables de estado.

En el marco del Principio del Maximo de Pontryagin, esta tesis también tuvo como resultado el artículo **“Evaluation of invariant cost functions for the optimal control of robotic manipulators”** (Morales-López *et al.*, 2021) donde se analizaron los beneficios de utilizar una función costo invariante que presenta el tensor de masa del sistema. Funciones costo que son comúnmente utilizadas en la literatura especializada fueron modificadas insertando el tensor de masa del sistema, de tal forma que se vuelven invariantes ante un cambio de coordenadas. Después se llevaron a cabo simulaciones de movimiento óptimas y analizamos su impacto en: (a) un solucionador comercial ODE y (b) el movimiento del robot.

Empleando las funciones costo de la literatura más utilizadas, se llega a un menor consumo de par. Sin embargo existen mayores beneficios al usar nuestras funciones costo invariantes propuestas. Estos representan un medio para obtener sistemáticamente los siguiente beneficios:

- menores tiempos de cálculo de la CPU ;
- mayor robustez numérica con respecto al tiempo de trayectoria prescrito;
- reducción de amplitud de movimiento.

Estos beneficios son una consecuencia de haber elegido funciones costo con una estructura invariante, que se logró tras construirlas con el tensor de masa

del sistema, que es considerado como una métrica Riemanniana. En general, este trabajo contribuye a proporcionar evidencia de que el tensor de masa simplifica el proceso de solución del sistema de EDOs del control óptimo otorgando una mayor robustez numérica; además cabe destacar que se han considerado límites articulares.

## BIBLIOGRAFÍA

- Arnăutu, V. y Neittaanmäki, P. (2003) . *Optimal Control from Theory to Computer Programs*. Springer.
- Asgari, M. y Nikoobin, A. (2020) . Analysis of optimal dynamic manipulation for robotic manipulator based on pontryagin's minimum principle. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 45:9159–9169.
- Bellman, R. E. (1957) . *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Betts, J. (2010) . *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics, second edition.
- Callies, R. y Rentrop, P. (2008) . Optimal control of rigid-link manipulators by indirect methods. *GAMM-Mitteilungen*, 31(1):27–58.
- Chen, D., Wang, B., y Wang, L. (2017) . Optimal control of robot manipulators via double generating functions. In *2017 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, pages 2337–2342.
- Craven, B. D. (1989) . Boundary conditions optimal control. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 30(3):343–349.
- Dubois, F., Fortuné, D., Rojas Quintero, J. A., y Vallée, C. (2015) . Pontryagin calculus in riemannian geometry. In Nielsen, F. y Barbaresco, F., editors, *Geometric Science of Information*, pages 541–549, Cham. Springer International Publishing.
- Eriksson, A. (2007) . Temporal finite elements for target control dynamics of mechanisms. *Computers & Structures*, 85(17):1399–1408. Computational Structures Technology.
- Eriksson, A. y Nordmark, A. (2010) . Temporal finite element formulation of optimal control in mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(25):1783–1792.

- Flash, T. y Hogan, N. (1985) . The coordination of arm movements: an experimentally confirmed mathematical model. In *The Journal of neuroscience : the official journal of the Society for Neuroscience*.
- Galicki, M. (2017) . The planning of optimal motions of non-holonomic systems. *Nonlinear Dynamics*, 90.
- Geering, H. (2007) . *Optimal Control with Engineering Applications*.
- Geering, H., Guzzella, L., Hepner, S., y Onder, C. (1986) . Time-optimal motions of robots in assembly tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(6):512–518.
- Ghasemi, M., Kashiri, N., y Dardel, M. (2012) . Time-optimal trajectory planning of robot manipulators in point-to-point motion using an indirect method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 226:473–484.
- Grancharova, A. y Johansen, T. A. (2005) . *Survey of Explicit Approaches to Constrained Optimal Control*, pages 47–97. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Grinfeld, P. (2013) . *Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving Surfaces*. Springer New York, New York, NY.
- Gu, Y.-L. (1991) . Modeling and simplification for dynamic systems with testing procedures and metric decomposition. In *Conference Proceedings 1991 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, pages 487–492 vol.1.
- Hairer, E. y Wanner, G. (1999) . Stiff differential equations solved by radau methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 111(1):93–111.
- Hamill, P. (2013) . *A Student's Guide to Lagrangians and Hamiltonians*. Student's Guides. Cambridge University Press.
- Hao, Z. (2014) . Optimal trajectory generation via double generating functions and application to biped robots.
- Kaphle, M. y Eriksson, A. (2008) . Optimality in forward dynamics simulations. *Journal of biomechanics*, 41(6):1213–21.

- Kelly, R., Santibáñez Dávila, V., y Loría Pérez, J. A. (2005) . *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer-Verlag London.
- Kelly, R. y Santibáñez, V. (2003) . *Control de movimiento de robots manipuladores*. Automática robótica. Pearson Educación.
- Kerbal, S. y Ahmed, N. (1998) . Optimal boundary control of distributed systems involving dynamic boundary conditions. *Mathematical Problems in Engineering*, 3(5):387–411.
- Khamseh, H. B. y Janabi-Sharifi, F. (2017) . Ukf-based lqr control of a manipulating unmanned aerial vehicle. *Unmanned Syst.*, 5:131–139.
- Kirk, D. (2004) . *Optimal Control Theory an Introduction*. Dover.
- Kumar, A., Kasera, S., y Prasad, L. B. (2017) . Optimal control of 2-link underactuated robot manipulator. In *2017 International Conference on Innovations in Information, Embedded and Communication Systems (ICIIECS)*, pages 1–6.
- Liberzon, D. (2012) . *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Mesterton-Gibbons, M. (2009) . *A primer on the calculus of variations and optimal control theory*, volume 50. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Mirz, C., Scholer, F., Barreto, J. P., y Corves, B. (2018) . Optimal control based path planning for parallel kinematic manipulators utilising natural motion. In *2018 IEEE 14th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*, pages 223–228. IEEE.
- Moler, C. (2003) . Electronic references.
- Morales-López, S., Rojas-Quintero, J. A., Ramírez-de Ávila, H. C., y Bugarin, E. (2021) . Evaluation of invariant cost functions for the optimal control of robotic manipulators. In *2021 9th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, pages 350–355.
- Najafi, E., Lopes, G., y Babuska, R. (2014) . Balancing a legged robot using state-dependent riccati equation control. volume 19.
- Nikoobin, A. y Moradi, M. (2011) . Optimal balancing of robot manipulators in point-to-point motion. *Robotica*, 29:233–244.

- Park, F., Bobrow, J., y Ploen, S. (1995) . A lie group formulation of robot dynamics. *The International Journal of Robotics Research*, 14(6):609–618.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., y Mishchenko, E. F. (1962) . *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. John Wiley & Sons, New York.
- Ramírez-de Ávila, H. C., Antonio Rojas-Quintero, J., Morales-López, S., y Bugarin, E. (2021) . Comparing cost functions for the optimal control of robotic manipulators using pontryagin’s maximum principle. In *2021 XXIII Robotics Mexican Congress (ComRob)*, pages 106–111.
- Reyes, F. y Kelly, R. (2001) . Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm. *Mechatronics*, 11:267–282.
- Rios, R. A. L. (2017) . *Análisis de problemas de control de Markov vía Principio del Máximo de Pontryagin y Programación Dinámica*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Robinett, R. D., Wilson, D., Eisler, G. R., y Hurtado, J. E. (2005) . *Applied dynamic programming for optimization of dynamical systems*.
- Rodríguez, U. (1997) . *Optimización dinámica*. Servicio de Publicaciones. Universidad de Oviedo.
- Rojas-Quintero, J. A., Dubois, F., y Ramírez-de Ávila, H. C. (2022a) . Riemannian formulation of pontryagin’s maximum principle for the optimal control of robotic manipulators. *Mathematics*, 10(7).
- Rojas-Quintero, J. A., Dubois, F., y Ramírez-de Ávila, H. C. (2022b) . Riemannian formulation of pontryagin’s maximum principle for the optimal control of robotic manipulators. *Mathematics*, 10(7).
- Rojas-Quintero, J. A., Rojas-Estrada, J. A., Villalobos-Chin, J., Santibañez, V., y Bugarin, E. (2021a) . Optimal controller applied to robotic systems using covariant control equations. *International Journal of Control*, 0(0):1–14.
- Rojas-Quintero, J. A., Villalobos-Chin, J., y Santibañez, V. (2021b) . Optimal control of robotic systems using finite elements for time integration of covariant control equations. *IEEE Access*, 9:104980–105001.
- Sastry, S. y Montgomery, R. (1993) . The structure of optimal controls for a steering problem. In FLIESS, M., editor, *Nonlinear Control Systems Design 1992*, IFAC Symposia Series, pages 135–140. Pergamon, Oxford.

- Schättler, H. y Ledzewicz, U. (2012) . *Geometric Optimal Control*, volume 38 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer New York.
- Spijker, M. (1996) . Stiffness in numerical initial-value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 72(2):393–406.
- Sussmann, H. J. y Willems, J. C. (1997) . 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. *IEEE Control Systems Magazine*, 17(3):32–44.
- Vezvari, M. R., Nikoobin, A., y Ghoddosian, A. (2020) . Zero-power balancing a two-link robot manipulator for a predefined point-to-point task. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 34(6):2585–2595.
- Wang, W. y Wang, B. (2014) . Existence of the optimal control for stochastic boundary control problems governed by semilinear parabolic equations. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014.



# A

## CONTROL ÓPTIMO EN EL TIEMPO DE UN SISTEMA LINEAL (EJEMPLO):

Minimizar la funcional (A.1), que está sujeta a las siguientes condiciones:  
 $\dot{y} = t^2 u$ ,  $y(0) = 0$  y  $y(1) = 1$ .

$$J[y] = \int_0^1 u^2 dt. \quad (\text{A.1})$$

1. Construimos el hamiltoniano de acuerdo a la ecuación (2.53):

$$H = u^2 + \lambda t^2 u. \quad (\text{A.2})$$

2. Aplicamos las condiciones del PMP al hamiltoniano:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 = -\dot{\lambda} \quad \therefore \quad \lambda = C_1. \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda t^2 = 0 \quad \therefore \quad u = \frac{-C_1 t^2}{2}. \quad (\text{A.4})$$

Ahora resolvemos la dinámica del sistema  $\dot{y} = t^2 u$ , sustituyendo  $u$  en  $\dot{y}$ :

$$\dot{y} = \frac{-C_1 t^4}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Integramos a ambos lados de la igualdad para calcular  $y$ :

$$y = \frac{-C_1 t^5}{10} + C_2. \quad (\text{A.6})$$

Después usamos las condiciones del problema para calcular las constantes  $C_1$  y  $C_2$ :

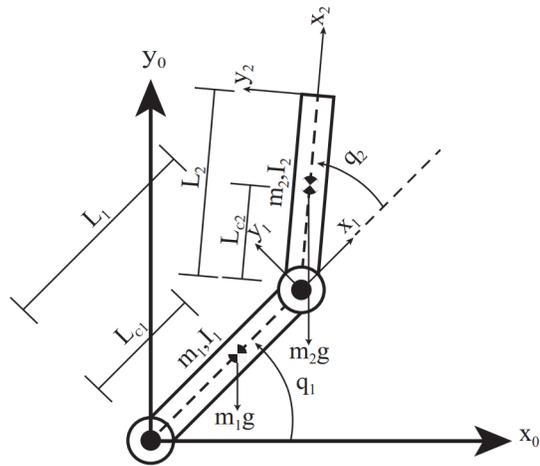
$$C_1 = -10, \quad C_2 = 0. \quad (\text{A.7})$$

Por lo tanto, teniendo los valores de las constantes calculamos  $u^*(t)$  óptima:

$$u^*(t) = \frac{-(-10)t^2}{2} = 5t^2. \quad (\text{A.8})$$

# B

## ESQUEMA CINEMÁTICO Y DINÁMICO DE UN ROBOT MANIPULADOR DE 2 GDL



(a) Manipulador robótico de 2 GDL.

Figura B.1: Esquema cinemático del manipulador robótico utilizado: (a) Manipulador robótico 2-GDL. Los parámetros  $(m_i, I_i, L_{ci}, L_i, q_i)$  denotan respectivamente  $i$ -avos: masa del eslabón; momento de inercia del eslabón; distancia del centro de torsión al centro de masa; longitud del eslabón; parámetro de configuración.

Para establecer el modelo dinámico, seguimos los procedimientos estándar que se pueden encontrar en [Kelly et al. \(2005\)](#). El manipulador robótico se rige por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de movimiento de segundo orden de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (\text{B.1})$$

En la Figura B.1(a) se muestra un esquema cinemático del manipulador robótico de 2 GDL objetivo. Los parámetros de este robot se presentan en [Reyes y Kelly \(2001\)](#). Para este manipulador, (B.1) conduce a dos ecuaciones de movimiento,  $u_1$  y  $u_2$ , que describen cada articulación. Los términos de composición de cada una de estas ecuaciones de movimiento vienen dados por

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= I_1 + I_2 + m_1 L_{c1}^2 + m_2 (L_{c2}^2 + L_1^2 + 2L_1 L_{c2} \cos(q_2)); \\
 M_{12} &= I_2 + m_2 L_{c2}^2 + m_2 L_1 L_{c2} \cos(q_2); \\
 M_{21} &= I_2 + m_2 L_{c2}^2 + m_2 L_1 L_{c2} \cos(q_2); \\
 M_{22} &= I_2 + m_2 L_{c2}^2; \\
 V_1 &= -m_2 L_1 L_{c2} \sin(q_2) (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2); \\
 V_2 &= m_2 L_1 L_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2; \\
 G_1 &= g (m_1 L_{c1} + m_2 L_1) \sin(q_1) + m_2 g L_{c2} \sin(q_1 + q_2); \\
 G_2 &= m_2 g L_{c2} \sin(q_1 + q_2).
 \end{aligned} \tag{B.2}$$



La geometría Riemanniana es geometría diferencial en donde la métrica define las operaciones básicas ([Grinfeld, 2013](#), página 60).

### Ejemplo: producto escalar

$$\langle u, v \rangle \text{ en Geometría Riemanniana} \rightarrow Mu.v$$

Por lo tanto, inyectando el tensor de masas  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  en la estructura de nuestras funciones costo y utilizando la lógica del producto escalar en geometría Riemanniana.

$$\langle u, u \rangle \text{ en Geometría Riemanniana} \rightarrow M^{-1}u^2$$

$$\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle \text{ en Geometría Riemanniana} \rightarrow M\dot{q}^2$$

Donde  $M$  fue identificado como la métrica Riemanniana para sistemas robóticos por [Park et al. \(1995\)](#); [Gu \(1991\)](#); [Rojas-Quintero et al. \(2022b\)](#). Enseguida, el lector podría preguntarse ¿porqué usar  $M^{-1}$  en lugar de  $M$  para definir  $\langle u, u \rangle$ ? Para responder a esto hay que presentar detalles técnicos propios al cálculo tensorial.

Existen tensores llamados covariantes, para los cuales, los índices llamados “vivos”, son “bajos” como en el caso del tensor  $u_j$ . Existen también tensores llamados contravariantes, para los cuales, los índices vivos son “altos”, como en el caso del tensor  $u^i$ . Ambos objetos están estrechamente relacionados pues en la lógica de Riemann,

$$u_i = M_{ij}u^j \quad \text{y} \quad u^i = M^{ij}u_j.$$

$M_{ij} \equiv M$ , es decir, representan los elementos de la métrica Riemanniana. De igual manera,  $M^{ij} \equiv M^{-1}$ , es decir, representan los elementos de la métrica inversa. Entonces, es importante remarcar que al aplicar las reglas de transformación anteriores,

$$\langle u, u \rangle = M_{ij}u^i u^j = u^i M_{ij}u^j = u^i u_i = M^{ij}u_j u_i.$$

Resta entender qué representan los  $u_i$  físicamente con respecto a los  $u^i$ . Para esto se dirige al lector hacia los trabajos de [Rojas-Quintero et al. \(2021a, 2022b\)](#), en donde se explica que la versión covariante  $u_i$  es aquella que representa los pares articulares y no los  $u^j$ , por oposición con las coordenadas generalizadas  $q^i$  que son contravariantes, y que representan las posiciones angulares del robot. Así,

$$\langle u, u \rangle \equiv M^{-1}u^2.$$

# D

## RIGIDEZ NUMÉRICA Y TIEMPOS DE EJECUCIÓN

La rigidez numérica es un concepto sutil, pero difícil e importante en la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, depende de la ecuación diferencial y de sus condiciones iniciales y finales así como del método numérico empleado ([Moler, 2003](#)).

Una ecuación diferencial ordinaria es rígida si la solución a encontrar cambia lentamente, pero hay soluciones vecinas que cambian rápidamente, por lo que el método numérico elegido debe dar pequeñas iteraciones para obtener el resultado ([Hairer y Wanner, 1999](#)).

Las soluciones de este tipo de sistemas rígidos son de gran interés para la comunidad científica, ya que se han propuesto métodos numéricos y analíticos para su solución.

En [Spijker \(1996\)](#) se da una definición simple y concreta la cual adoptamos para toda referencia de la misma en esta investigación.

**Definición:** Los problemas de valor inicial son rígidos si son (extremadamente) difíciles de resolver mediante métodos ordinarios paso a paso explícitos, mientras que ciertos métodos implícitos funcionan bastante bien.

La rigidez es un problema de eficiencia, ya que forma parte de la estabilidad numérica y del tiempo que lleva un cálculo denominado tiempo de ejecución, que para esta investigación será adoptado como el tiempo que se requiere para terminar un proceso de cálculo utilizando un equipo computacional.

