

SEP

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TIJUANA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



CONTROL DE ORIENTACIÓN DE UN SISTEMA SUSPENDIDO UTILIZANDO  
REDES NEURONALES

TRABAJO PRESENTADO POR:  
I.N. LUIS DAVID OLGUÍN HERNÁNDEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. SERGIO A. PUGA GUZMÁN

TIJUANA, BAJA CALIFORNIA, MÉXICO.

ENERO DEL 2022

# Dedicatoria

Este trabajo de investigación está dedicado a mi familia que siempre ha estado ahí para apoyar mis decisiones y darme esperanza en los momentos difíciles. A mi madre por su apoyo y amor incondicional que me ha motivado a ser siempre mejor y buscar la verdad. A mi padre por enseñarme el valor del trabajo y apoyarme con consejos durante mi corta vida.

A mis hermanos, por ser atentos espectadores de mi trayectoria, compartir buenos momentos y risas que ayudan a aligerar la carga de lo cotidiano.

A mis alumnos por revivir mi curiosidad y motivarme, con sus preguntas, a seguir aprendiendo.

Finalmente quiero dedicar esta tesis a todos aquellos expertos y profesionales que me han acompañado y han sido parte de mi formación profesional, ya que este trabajo ha sido posible gracias a su apoyo y enseñanza.

# Epígrafe

*“Haré que mi valer como hombre que trabaja, ama y que piensa sea una contribución a la grandeza de mi pueblo.”*  
Patria, honor y fuerza.

*“La palabra convence pero el ejemplo arrastra.”*  
Anónimo.

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, mi familia y a mis amigos por su apoyo y consejos. A mis docentes de la maestría por su paciencia, su compromiso y su dedicación, gracias a su esfuerzo tuve herramientas para desarrollar este trabajo de investigación.

Hago un agradecimiento especial al Dr. Paúl Antonio Valle por apoyar mi ingreso al posgrado en ciencias de la ingeniería y estar atento de mi avance durante su periodo como coordinador. Al Dr. Sergio A. Puga Guzmán por sus enseñanzas, su paciencia y la confianza que depositó en mí como su estudiante. Al Dr. Salvador González Vázquez por compartir su conocimiento y por su apoyo durante la maestría.

Finalmente un agradecimiento especial a mi comité de tesis por su apoyo, tiempo y por estar pendiente de mis avances.

# Resumen

En este trabajo de investigación se describe el desarrollo de controladores neuronales para estabilizar la orientación de mecanismos que utilizan ruedas de reacción inerciales como actuadores. La dinámica de los mecanismos propuestos en este trabajo de tesis es de tipo no lineal y se considera que el modelo dinámico de los mecanismos no se conoce por completo. El controlador propuesto está constituido por una compensación no lineal de tipo proporcional derivativa en un lazo de retroalimentación que se complementa con una red neuronal de una capa que mejora el desempeño del controlador. Los pesos a la salida de la red neuronal son estimados durante el proceso de control a través de leyes de adaptación, por lo que esta no requiere de un proceso de entrenamiento previo. Las funciones de activación usadas en las redes neuronales son tangentes hiperbólicas. En este trabajo de tesis, se comparó el desempeño de un controlador adaptativo por estimación paramétrica, con un controlador adaptativo neuronal, aplicados sobre el modelo de un péndulo de rueda de reacción inercial. También se desarrolló un controlador adaptativo neuronal para estabilizar la orientación de un mecanismo tipo satélite de tres grados de libertad y se demostró que las variables de error de lazo cerrado del sistema permanecen uniformemente últimamente acotadas. Para confirmar lo propuesto en esta tesis, se realizaron simulaciones numéricas de los modelos propuestos aplicando cambios paramétricos y perturbaciones.

***Palabras clave:*** Redes neuronales, aprendizaje durante el proceso, control adaptativo, control no lineal, ruedas de reacción inercial, uniformemente últimamente acotada.

# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>II</b>
<b>Epígrafe</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Lista de símbolos y acrónimos</b>	<b>XII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	1
1.2. Justificación . . . . .	2
1.3. Antecedentes . . . . .	3
1.4. Propósito de la investigación . . . . .	6
1.5. Metodología . . . . .	6
1.6. Hipótesis . . . . .	7
1.7. Objetivos . . . . .	7
1.8. Delimitaciones . . . . .	7
1.9. Contribuciones . . . . .	7
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Redes neuronales . . . . .	9
2.2.1. Redes neuronales de una sola capa . . . . .	11
2.2.2. Redes neuronales multicapa . . . . .	12
2.2.3. Red neuronal de enlace funcional . . . . .	13
2.2.4. Propiedad de aproximación universal de las redes neuronales . . . . .	15

2.2.5. Entrenamiento de redes neuronales . . . . .	15
2.3. Ecuación general para los robots rígidos de $n$ grados de libertad . . . . .	16
2.4. Estabilidad de los sistemas dinámicos . . . . .	17
2.4.1. Equilibrio . . . . .	17
2.4.2. Definición de estabilidad . . . . .	18
2.4.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	18
2.4.4. Función definida positiva y función radialmente desacotada . . . . .	18
2.4.5. Función de Lyapunov y estabilidad de Lyapunov . . . . .	19
2.4.6. Estabilidad uniformemente últimamente acotada . . . . .	19
<b>3. Controladores adaptativos para el seguimiento de trayectoria de un péndulo de rueda inercial</b>	<b>23</b>
3.1. Introducción . . . . .	23
3.2. Modelo dinámico del péndulo de rueda de reacción inercial . . . . .	24
3.3. Problema de control . . . . .	27
3.4. Desarrollo de controladores y pruebas de estabilidad . . . . .	27
3.4.1. Control por estimación de parámetros . . . . .	29
3.4.2. Controlador neuronal . . . . .	31
3.5. Resultados de simulación . . . . .	34
3.5.1. Resultados de simulación del modelo aplicando cambios paramétricos en la masa	34
3.5.2. Resultados de simulación del modelo aplicando una perturbación . . . . .	37
3.6. Conclusión . . . . .	40
<b>4. Control neuronal aplicado a un mecanismo de tres grados de libertad</b>	<b>41</b>
4.1. Introducción . . . . .	41
4.2. Modelo dinámico del mecanismo . . . . .	42
4.2.1. Ecuaciones de movimiento rotacional del modelo tipo satélite . . . . .	44
4.2.2. Definición de los marcos de referencia . . . . .	48
4.2.3. Dinámica de rotación . . . . .	51
4.3. Problema de control . . . . .	52
4.4. Controlador neuronal . . . . .	53
4.5. Análisis de estabilidad . . . . .	55
4.6. Pruebas de simulación . . . . .	56
4.6.1. Orientación del mecanismo con cambio en centro de masa . . . . .	57
4.6.2. Seguimiento de trayectoria de orientación . . . . .	59

4.7. Conclusión . . . . .	64
<b>5. Conclusiones</b>	<b>66</b>
5.1. Conclusiones generales . . . . .	66
5.2. Trabajo a futuro . . . . .	67
<b>6. Apéndice</b>	<b>68</b>
6.1. Funciones $\mathcal{KL}$ . . . . .	68
6.2. Propiedades del producto cruz . . . . .	68
6.3. Propiedades de matrices ortogonales . . . . .	70



# Índice de tablas

3.1. Parámetros físicos del péndulo de rueda de reacción inercial . . . . .	25
3.2. Ganancias de los controladores. . . . .	28
3.3. Norma de los errores. . . . .	40
4.1. Notación de los parámetros del mecanismo tipo satélite . . . . .	45
4.2. Parámetros físicos propuestos para el modelo de tres grados de libertad. . . . .	56
4.3. Norma de los errores para el mecanismo de tres grados de libertad de tipo satélite. . . . .	64

# Índice de figuras

1.1. Vehículos autónomos para exploración y comunicación. . . . .	1
1.2. Mecanismos de control de orientación . . . . .	2
1.3. Mecanismos que usan ruedas de reacción inercial como actuadores. . . . .	5
2.1. Funciones de activación . . . . .	10
2.2. Red neuronal de una sola capa . . . . .	11
2.3. Red neuronal de dos capas . . . . .	13
2.4. Red neuronal de enlace funcional. . . . .	14
2.5. Diagrama para la definición de UUB. . . . .	20
2.6. UUB representación de los conjuntos $\Omega_c$ y $\Omega_\varepsilon$ . . . . .	21
3.1. Diagrama de cuerpo libre del péndulo de rueda de reacción inercial. . . . .	24
3.2. Diagrama de bloques del controlador con estimación paramétrica. . . . .	30
3.3. Diagrama de bloques del controlador neuronal . . . . .	32
3.4. Seguimiento de trayectoria de un péndulo con cambio paramétrico . . . . .	35
3.5. Velocidad de la articulación $q_p$ y la rueda $q_w$ durante prueba de seguimiento de trayectoria con cambio paramétrico . . . . .	35
3.6. Torques de entrada calculados para el péndulo de rueda de reacción en prueba de seguimiento de trayectoria con cambio paramétrico . . . . .	36
3.7. Simulación de la estimación de los parámetros ideales y pesos de salida de la red calculados para el péndulo durante la prueba de seguimiento de trayectoria con cambio paramétrico . . . . .	36
3.8. Evolución de los errores de seguimiento de trayectoria del péndulo aplicando un cambio paramétrico . . . . .	37
3.9. Seguimiento de trayectoria del péndulo de rueda de reacción aplicando una perturbación. . . . .	37
3.10. Velocidades de la articulación $\dot{q}_p$ y de la rueda de reacción $\dot{q}_w$ para el seguimiento de trayectoria del péndulo aplicando una perturbación. . . . .	38

3.11. Torques de entrada calculados para la rueda de reacción durante la prueba de seguimiento de trayectoria en presencia de una perturbación. . . . .	38
3.12. Estimación de parámetros desconocidos y pesos de salida de la red para el seguimiento de trayectoria del péndulo en presencia de una perturbación. . . . .	39
3.13. Evolución temporal de los errores para la ley de control (3.29) ( $e_{EP}$ ) y el controlador en (3.40) ( $e_{NN}$ ) en presencia de una perturbación. . . . .	39
4.1. Diagrama de posiciones del mecanismo de tres grados de libertad. . . . .	44
4.2. Modelo del mecanismo tipo satélite. . . . .	45
4.3. Rotaciones sucesivas del modelo. . . . .	49
4.4. Desplazamiento en el centro de masa del mecanismo. . . . .	57
4.5. Prueba de orientación . . . . .	58
4.6. Torques calculados en prueba de orientación . . . . .	58
4.7. Pesos de salida estimados en prueba de orientación . . . . .	59
4.8. Prueba de seguimiento de trayectoria de orientación . . . . .	60
4.9. Torques de entrada, prueba de seguimiento de orientación . . . . .	60
4.10. Pesos estimados por la red neuronal y errores de seguimiento de trayectoria para la prueba de seguimiento de orientación . . . . .	61
4.11. Prueba de seguimiento de trayectoria de orientación con perturbación . . . . .	61
4.12. Torques de calculados para la prueba de seguimiento de orientación con perturbaciones . . . . .	62
4.13. Pesos de salida calculados por la red y errores de seguimiento de orientación para la prueba de orientación aplicando perturbación . . . . .	62
4.14. Prueba de seguimiento de trayectoria de orientación induciendo falla en un actuador . . . . .	63
4.15. Torques de entrada calculados para la prueba de seguimiento de trayectoria de orientación con falla en un actuador . . . . .	63
4.16. Pesos de salida de la red y errores de seguimiento de trayectoria de orientación para el mecanismo en presencia de una falla en un actuador . . . . .	64

# Lista de símbolos y acrónimos

Lista de símbolos	
Símbolo	Descripción
$\mathbf{x}$	Vector columna de dimensión $n$ .
$\dot{\mathbf{x}}$	Derivada con respecto al tiempo $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ .
$\ddot{\mathbf{x}}$	Segunda derivada con respecto al tiempo $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ .
$\in$	Pertenece a.
$\forall$	Para toda.
$\rightarrow$	Implica, entonces.
$\subset$	Subconjunto de.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}^n$	Espacio Euclidiano de dimensión $n$ .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espacio vectorial de todas las matrices reales de dimensión $n \times m$ .
$\odot$	Término auxiliar que denota un escalar cualesquiera.
$\Phi$	Término auxiliar que denota un vector cualesquiera de dimensión arbitraria.
$\Phi_i$	El $i$ -ésimo elemento del vector $\Phi$ .
$\hat{\Phi}$	Estimación de los elementos de $\Phi$ .
$\tilde{\Phi}$	Error de estimación de los elementos de $\Phi$ .
$\Phi_a \times \Phi_b$	Producto vectorial o cruz entre los vectores $\Phi_a$ y $\Phi_b$ .
$A$	Término auxiliar que denota a una matriz cualesquiera de dimensión $n \times n$ .
$A^{-1}$	Inversa de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
$A^T$	Transpuesta de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
$S(\Phi)$	Matriz tornillo simétrica del vector $\Phi \in \mathbb{R}^3$ .
$\lambda_{\min}\{A\}$	Valor propio mínimo de la matriz $A$ de dimensión arbitraria.
$\lambda_{\max}\{A\}$	Valor propio máximo de la matriz $A$ de dimensión arbitraria.
$ \odot $	Valor absoluto del escalar $\odot$ .
$\ \Phi\ $	Norma euclidiana del vector $\Phi \in \mathbb{R}^n$ .

<b>Lista de acrónimos</b>	
<b>Acrónimo</b>	<b>Descripción</b>
RBF	Radial Basis Function Neural Networks (función de base radial).
QFT	Quantitative feedback theory (Control robusto cuantitativo).
LQR	Linear quadratic regulator (regulador lineal cuadrático).
PD	Proporcional-derivativo.
PID	Proporcional-integral-derivativo.
FLNN	Functional link neural network (red neuronal de enlace funcional).
LIP	Linear in parameters (lineal en los parámetros).
SISL	Stable in sense of Lyapunov (estable en el sentido de Lyapunov).
UUB	Uniformly ultimately bounded (uniformemente últimamente acotado).
RMS	Root mean square (error cuadrático medio).

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Planteamiento del problema

Un sistema de control es aquel que se caracteriza por incidir en un conjunto de elementos manipulables pertenecientes a un mecanismo, tal que se influye sobre el comportamiento de este acorde a reglas y/o criterios preestablecidos. Este debe ser capaz de controlar de forma eficiente la respuesta del mecanismo a partir de la modificación de sus variables de entrada. Además, el algoritmo de control debe ser robusto y permitir el constante monitoreo del desempeño de los actuadores o variables de control, compensar las perturbaciones producidas por variables externas y detectar posibles fallos dentro del sistema de control antes de que estos se vuelvan críticos [2].

Actualmente, gracias a los avances tecnológicos, existe una tendencia creciente por el desarrollo de vehículos aeroespaciales, terrestres y marítimos con aplicaciones relacionadas con la comunicación, la exploración y la investigación. El desarrollo de estos vehículos requiere de la implementación de nuevos sistemas de control eficientes que les permitan desplazarse de forma adecuada a lo largo de una trayectoria, respetando en todo momento su orientación con respecto a un marco referencial [3, 4, 5].

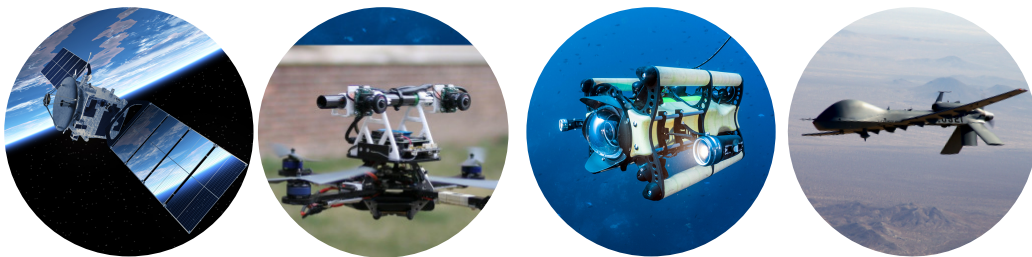


Figura 1.1: Vehículos autónomos para exploración y comunicación.

Los sistemas de control de orientación regularmente utilizan el efecto de la inercia para mantener la posición angular de un objeto con respecto a un marco de referencia inercial. Dichos sistemas son muy utilizados en la industria aeroespacial para el control de orientación de satélites y naves espaciales; pero también pueden aplicarse a todo aquel mecanismo conformado por elementos inerciales que requiera de un control de orientación [6, 7].

Actualmente existen diferentes mecanismos utilizados para estabilizar la orientación de cuerpos rígidos, como los que se muestran en la Figura 1.2. Sin embargo, las ruedas de reacción inercial son ejemplos prácticos de actuadores inerciales que se utilizan comúnmente en las maniobras de ajuste angular o rotación de las naves espaciales y satélites [4, 8, 9, 10].

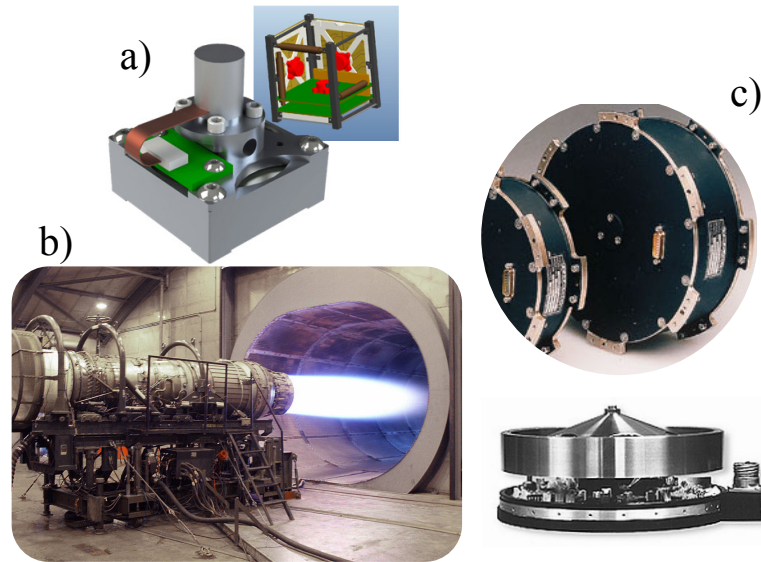


Figura 1.2: Mecanismos usados actualmente para estabilizar la orientación de naves espaciales y satélites; a) magnetorques, b) turbinas, c) ruedas inerciales.

Un reto importante en el diseño de sistemas de control de orientación para este tipo de mecanismos suspendidos es controlar la dinámica no lineal asociada a los movimientos de rotación. En condiciones de trabajo reales, se espera que un sistema de control capaz de asistir maniobras de orientación en un satélite con respuestas rápidas, precisas y estables [11]. El diseño de leyes de control basadas en la linealización de la dinámica puede resolver parcialmente este problema, sin embargo, los controladores obtenidos mediante esta técnica están funcionalmente limitados a trabajar en una región específica y sus respuestas pueden llegar a ser lentas [12, 13, 14].

Otro reto importante es controlar adecuadamente el mecanismo ante incertidumbres inherentes a su modelo dinámico o en sus parámetros, por ejemplo los efectos producidos por cambios en la distribución de la masa y compensar las perturbaciones provocadas por cambios en el entorno [12, 15, 16].

## 1.2. Justificación

La creciente tendencia por el desarrollo de nuevos vehículos de exploración e investigación, ha incrementado el interés por el diseño e implementación de diversos esquemas de control robustos, capaces de estabilizar la orientación del mecanismo durante su recorrido a través de una trayectoria en presencia de incertidumbres en el modelo, perturbaciones y cambios en sus parámetros. La dinámica de vehículos utilizados para la exploración e investigación es de tipo no lineal por lo que desarrollar el

modelo dinámico completo y plantear un esquema de control basado en el modelo, suele ser una tarea laboriosa. Los sistemas cuya dinámica es difícil de determinar pueden ser objeto de estudio de las redes neuronales, las cuales son un modelo avanzado de regresión capaz de llevar a cabo la identificación del modelo dinámico del mecanismo.

ha incrementado el interés por el desarrollo y experimentación de diversas técnicas de control aplicadas

La implementación de un sistema de control adaptativo de aprendizaje durante el proceso, le permite a un dispositivo adaptarse a las condiciones cambiantes de su entorno, sin necesidad de un entrenamiento previo o de actualizaciones periódicas en su base de datos.

Con este trabajo de investigación, se pretende contribuir en el desarrollo de sistemas de control neuronal aplicados a mecanismos que poseen ruedas de reacción inercial como actuadores, así como incrementar el conocimiento acerca del control de estos mecanismos.

### 1.3. Antecedentes

En la última década, la aplicación de redes neuronales para la solución de problemas en distintas áreas de investigación ha ganado el interés de muchos investigadores. El desarrollo de nuevos sistemas de cómputo, capaces de realizar cálculos complejos en un tiempo relativamente corto, ha permitido a las redes neuronales incursionar en campos como el desarrollo web y la ciber-seguridad, predicciones y clasificación, reconocimiento de voz e imagen, desarrollo de fármacos, cuidado de la salud, el transporte y la implementación de estrategias de mitigación ambiental entre otros [29, 30, 31, 32].

Debido a su naturaleza, las redes neuronales pueden establecer relaciones entre las variables independientes (entradas) y los valores dependientes (salidas) de un modelo sin la necesidad de conocerlo a detalle, por lo que resultan muy eficientes en la identificación y aproximación de modelos no lineales. Además, debido a su simplicidad, robustez, fiabilidad y no linealidad son excelentes candidatas para la solución de problemas de ingeniería [29, 33].

En la teoría de control moderna las redes neuronales se han convertido en una buena estrategia para el desarrollo de controladores adaptativos capaces de lidiar con incertidumbres del modelo, y perturbaciones externas. La propiedad de aproximación universal, que se describe en la Sección 2.2.4, permite a las redes neuronales estimar una gran cantidad de funciones no lineales continuas inherentes a diversos sistemas de interés [34, 35, 36, 37, 38, 39].

En la literatura es posible encontrar trabajos donde las redes neuronales son usadas para el desarrollo de controladores en sistemas con restricciones [35, 40], retrasos en la señales de control [34, 36, 41], zonas muertas [20] y efectos dinámicos desconocidos en el actuador [49]. Algunos trabajos interesantes donde las redes neuronales son usadas para estimar parte de la dinámica o los parámetros desconocidos de un mecanismo se describen a continuación. En [43] se presenta el desarrollo de un controlador adaptativo robusto basado en la técnica de retroceso (*Backstepping*) para estimar incertidumbres en el modelo, y compensar perturbaciones externas y variaciones en los parámetros de un péndulo invertido.



Los análisis de estabilidad muestran que las soluciones aplicadas presentan estabilidad asintótica. De forma similar en [44] se explora el desarrollo de un controlador adaptativo neuronal que utiliza una red neuronal RBF (*Radial Basis Function Neural Networks*) implementada en un esquema de control por retroceso (*Backstepping*) con el objetivo de aproximar las no linealidades de un sistema triangular cuya dinámica es desconocida. En [45] se reporta un esquema de control adaptativo neuronal-difuso usado para estimar parte de la dinámica de un péndulo invertido. Por otra parte en [46] los autores integran una red neuronal a un esquema de linealización por retroalimentación para estimar y compensar las componentes desconocidas de la dinámica y estabilizar la trayectoria de un péndulo de Furuta, en donde el esquema de control reportado mantiene a los errores de trayectoria uniformemente últimamente acotados.

Un trabajo muy interesante es el reportado en [47], donde se combinan un esquema de control de modos deslizantes con una red neuronal RBF en un modelo de retroceso, para desarrollar un controlador adaptativo que estabilice la orientación de un vehículo aéreo de ocho rotores. La red neuronal actúa como un observador de incertidumbres. La combinación de la red neuronal con el esquema de control de modos deslizantes le confiere robustez al controlador ante perturbaciones externas e incertidumbres en el modelo. Por su parte, los autores en [48] diseñaron un observador de perturbaciones basado en una red RBF para aproximar incertidumbres y fallas en los actuadores para un robot helicóptero de tres grados de libertad de dinámica desconocida. El análisis de Lyapunov realizado garantiza la convergencia uniformemente asintótica de todas las señales de lazo cerrado.

Un problema relacionado al desarrollo de controladores para robots manipuladores es que se considera que los términos desconocidos cumplen con la condición de linealidad en los parámetros. Otro reto es que en ocasiones es difícil definir la función completa correspondiente a la dinámica del modelo [49]. En este sentido, la implementación de una red neuronal es una estrategia efectiva para el diseño de controladores como se muestra en los trabajos reportados en [50, 51], en los cuales se diseña un controlador neuronal para un robot de tipo manipulador de dos grados de libertad con restricciones espaciales de operación. Los controladores propuestos utilizan una red neuronal para aproximar la dinámica desconocida del robot, compensar las incertidumbres paramétricas del modelo y acotar las soluciones del sistema de lazo cerrado. En ambos trabajos se reporta estabilidad uniformemente últimamente acotada.

Otros trabajos interesantes donde se utilizan redes neuronales son los presentados en [52], donde se muestra el uso de las redes neuronales en el control de un sistemas multi-agente y en [53] donde los autores proponen el desarrollo de un controlador neuro-difuso para el control de un sistema de tratamiento de aguas con el fin de optimizar el consumo energético y mantener la calidad del tratamiento.

En este trabajo de investigación se propone el control de orientación de mecanismos a través de ruedas de reacción inercial y en la literatura existen algunos ejemplos donde el control de orientación se ejerce mediante estos dispositivos, como los que se muestran en la Figura 1.3. Uno de los mecanismos más conocidos es el péndulo de rueda de reacción inercial, el cual puede ser modelado como un robot de dos grados de libertad [64]. En la literatura se pueden encontrar algunos trabajos interesantes que involucran a las redes neuronales en el control de este mecanismo. En [54] se presenta una solución que integra a una red neuronal para el seguimiento de trayectoria de un péndulo de rueda de reacción

inercial cuya dinámica es desconocida. La red neuronal se combina con un esquema de control basado en el modelo y el análisis de estabilidad muestra una convergencia a cero en relación a los errores. Por otra parte en [55] se muestra el desarrollo de un controlador neuronal por modos deslizantes para controlar la rotación de un robot pez a través de una rueda de reacción inercial, cuya estructura conjunta se asemeja a un péndulo de rueda de reacción inercial. La red neuronal estima las compensaciones para corregir la orientación del robot, mientras que el control por modos deslizantes se encarga de compensar las perturbaciones.

Otro mecanismo muy parecido al que se aborda en este trabajo de investigación es un modelo cúbico de tres ruedas de reacción inercial montadas sobre sus ejes principales. Este mecanismo es capaz balancearse sobre sus vértices y aristas, levantarse desde el reposo y avanzar rotando sobre sus vértices. Los autores en [56, 57, 58] lo describen como un péndulo de rueda de reacción de tres dimensiones por su similitud en cuanto a la dinámica.

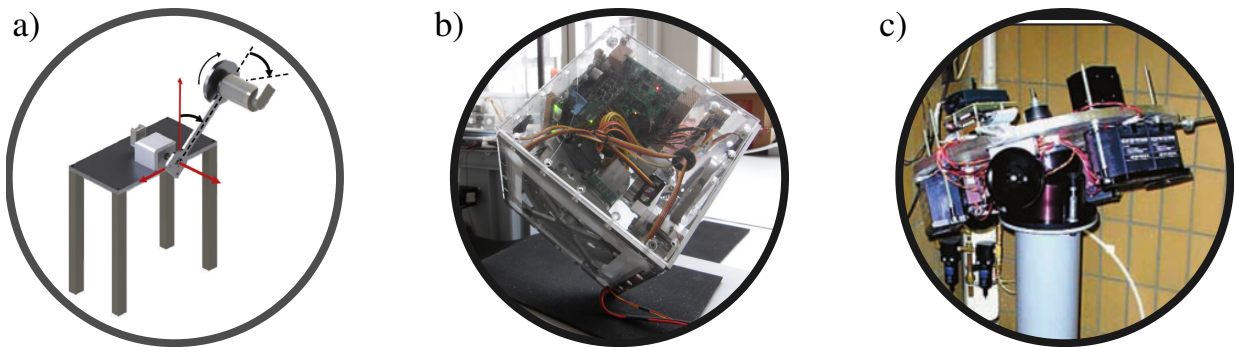


Figura 1.3: Mecanismos que utilizan ruedas de reacción como actuadores. a) Péndulo de rueda de reacción inercial [54], b) Cubli, mecanismo cúbico de tres ruedas de reacción inercial [57], c) Plataforma experimental para algoritmos de control de orientación para satélites y naves espaciales [14].

Finalmente un mecanismo interesante por sus aplicaciones en la industria aeroespacial es el abordado en [14, 59, 60, 61]. Consiste en una plataforma con tres ruedas de reacción inercial montadas sobre los ejes principales del mecanismo. Esta plataforma experimental se usa para el desarrollo y prueba de algoritmos de control de orientación para satélites y naves espaciales. En [59] los autores desarrollan un control QFT (Quantitative Feedback Theory) para la orientación de un satélite actuado por ruedas de reacción. Los trabajos reportados en [14] y [61] también reportan controladores basados en la linealización de la dinámica, que son efectivos para estabilizar la orientación. Un trabajo interesante en el control de orientación de satélites es presentado por [62] donde se reporta el desarrollo de un controlador por retroalimentación de parámetros modificados. El controlador compensa perturbaciones externas, incertidumbres en el modelo y fallas en los actuadores, de acuerdo a los análisis de estabilidad el controlador muestra estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov. Por su parte en [63] se reporta un controlador adaptativo neuronal RBF robusto que se basa en retroceso (*Backstepping*) para estimar en línea la dinámica no modelada y las incertidumbres de un satélite.

## 1.4. Propósito de la investigación

El propósito de esta investigación es el diseño de un controlador adaptativo neuronal para estabilizar la orientación de un mecanismo de tres grados de libertad que bajo condiciones normales de operación se considera suspendido y que utilice ruedas de reacción como actuadores. Se establece el diseñar una solución de control capaz de estimar la dinámica e incertidumbres del modelo y compensar las perturbaciones, así como los cambios paramétricos.

## 1.5. Metodología

La metodología utilizada en esta tesis toma como referencia el trabajo de Lewis [23] y consiste en la integración de una red neuronal a un controlador por retroalimentación de estados de tipo proporcional derivativo (PD). La red neuronal aprende durante el proceso, por lo que no requiere de un entrenamiento previo ni de actualizaciones periódicas usando una base de datos. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se estudia mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov. Además se explora el enfoque de estabilidad de tipo uniformemente últimamente acotada. El procedimiento realizado para alcanzar los objetivos es el siguiente:

- Definir el modelo dinámico y plantear el algoritmo de control para el mecanismo elegido.
- Obtener la dinámica de lazo cerrado del sistema.
- Encontrar las condiciones que aseguren estabilidad de tipo uniformemente últimamente acotada.
- Realizar simulaciones.
- Ajustar los parámetros del controlador en base a los resultados obtenidos.

## 1.6. Hipótesis

Debido a que una red neuronal es capaz de compensar la dinámica no considerada del mecanismo y las condiciones cambiantes del entorno, es posible desarrollar un controlador neuronal de aprendizaje durante el proceso para estabilizar satisfactoriamente la orientación de un mecanismo que utilice ruedas de reacción inercial como actuadores.

## 1.7. Objetivos

### Objetivo general

Desarrollar un controlador adaptativo neuronal para estabilizar la orientación de mecanismos, utilizando ruedas de reacción inercial como actuadores.

### Objetivos específicos

1. Diseñar e implementar virtualmente el mecanismo a controlar y sus actuadores (ruedas inerciales), esto mediante software especializado.
2. Determinar el modelo dinámico que represente el comportamiento del mecanismo virtual ante las acciones realizadas por las ruedas inerciales.
3. Diseñar el controlador neuronal de aprendizaje en tiempo real para estabilizar la orientación del mecanismo propuesto.
4. Evaluar el controlador neuronal propuesto utilizando simulación y realizar los ajustes pertinentes para cumplir con los objetivos propuestos.

## 1.8. Delimitaciones

- Los controladores desarrollados serán evaluados únicamente mediante simulación numérica a través del *software* Simulink de Matlab.
- Las pruebas de simulación se realizarán a mecanismos de uno y tres grados de libertad.

## 1.9. Contribuciones

1. Diseño de un nuevo controlador neuronal de aprendizaje en línea para el seguimiento de trayectoria de un péndulo de rueda de reacción inercial.
2. Comparación de desempeño para un controlador por estimación paramétrica y un controlador adaptativo neuronal, en relación al seguimiento de trayectoria de un péndulo de rueda de reacción inercial.

- 
3. Diseño de un nuevo controlador adaptativo neuronal de aprendizaje en línea para un mecanismo de tres grados de libertad que utiliza ruedas de reacción inercial como actuadores.
  4. Modelado y simulación en 3D de los mecanismos propuestos aplicando las soluciones de control establecidas en este trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Introducción

En este capítulo se abordan algunos fundamentos teóricos relacionados a las redes neuronales, sistemas dinámicos y estabilidad con el fin de proporcionar la información necesaria para una mejor comprensión de los siguientes capítulos. La información se organiza de la siguiente forma: primero se definen los conceptos y las ecuaciones que describen de forma teórica a las redes neuronales y su clasificación. Posteriormente se presenta información general sobre el modelado de la dinámica y la ecuación general de los robots rígidos de  $n$  grados de libertad. Finalmente se abordan algunas definiciones de estabilidad que serán útiles para plantear las soluciones de control en los capítulos subsecuentes.

### 2.2. Redes neuronales

Las redes neuronales computacionales son estructuras informáticas que inspiran su funcionamiento en las redes neuronales biológicas. El objetivo de una red neuronal biológica es aprender y adaptarse de acuerdo a la información proveniente del entorno, lo cual es posible mediante la estimulación y ajuste en sus conexiones sinápticas. En una red neuronal computacional estas conexiones son interpretadas a través de pesos, que relacionan los datos de entrada con cada una de las unidades de procesamiento. El aprendizaje de la red neuronal se logra modificando los pesos de la red hasta minimizar la diferencia entre la respuesta deseada y la salida actual de la red [25].

Las redes neuronales pueden componerse de una o más capas de neuronas (nodos) interconectadas entre sí por una serie de pesos que le permiten a las señales propagarse dentro de la red. Las capas de entrada reciben la información, las capas internas realizan la mayor parte de la clasificación de la información y las capas de salida procesan y ajustan la información que sale de la red.

En el núcleo de la neurona se lleva a cabo una suma ponderada de los datos de entrada provenientes del sistema que previamente están multiplicados por los pesos de entrada a la red. A la suma ponderada

se le añade un valor de umbral que define el potencial de activación de cada neurona. Finalmente la función de activación limita regularmente la amplitud de la salida de cada neurona a un intervalo cerrado entre  $[0, 1]$  o  $[-1, 1]$  dependiendo de la función de activación elegida. Las funciones de activación determinan parte importante del desempeño de la red neuronal [23, 25, 32] y su función es la de emular el comportamiento del soma de una neurona biológica.

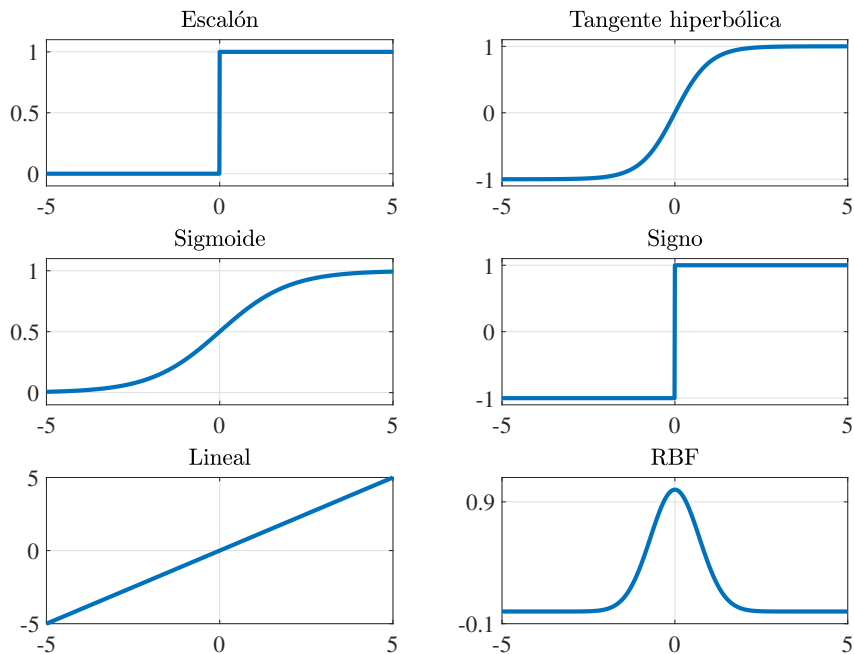


Figura 2.1: Funciones de activación usadas en redes neuronales.

El modelo matemático de la salida  $y(t)$  de una neurona está representado por la siguiente ecuación:

$$y(t) = \sigma \left( \sum_{j=1}^n v_j x_j(t) + v_0 \right), \quad (2.1)$$

donde  $x_j$  representa las señales de entrada a la neurona artificial provenientes del sistema,  $v_j$  son los pesos sinápticos de entrada,  $v_0$  es el valor de umbral de activación de la neurona y  $\sigma(\odot)$  es la función de activación. La ecuación (2.1) puede reescribirse en su forma vectorial como:

$$y(t) = \sigma(\mathbf{v}^T \mathbf{x}(t)), \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{x}(t) = [1 \ x_1 \ \dots \ x_n]^T$  es el vector aumentado de señales de entrada y en su primer elemento contiene la unidad para ser dimensionalmente compatible con el vector renglón  $\mathbf{v}(t) = [v_0 \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  que representa el vector aumentado de pesos de entrada e incluye en su primer elemento al valor de umbral de activación. En la literatura se reportan distintas funciones de activación para redes neuronales, como se muestra en la Figura 2.1, sin embargo la función de activación  $\sigma(\odot)$  utilizada en

este trabajo de investigación es la tangente hiperbólica ( $\tanh(\odot) \in \mathbb{R}$ ) cuyo rango está entre  $[-1, 1]$ .

### 2.2.1. Redes neuronales de una sola capa

La estructura de una red neuronal esta organizada por capas. donde las más simple es la red neuronal de una sola capa que se representa en la Figura 2.2. Está compuesta por una capa de  $L$  neuronas de salida que propagan la información de las  $j$  entradas y pesos. El comportamiento de esta red está dado por la ecuación:

$$y_l = \sigma_l \left( \sum_{j=1}^n v_{lj}x_j + v_{l0} \right), \quad (2.3)$$

donde  $y_l$  representa la  $l$ -ésima salida de la red neuronal, y siendo  $l = 1, 2, 3, \dots, L$ . La ecuación (2.3) puede escribirse en su forma vectorial mediante:

$$\mathbf{y} = \sigma (V^T \mathbf{x}), \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{y} = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_L(t)]^T$  es el vector de salidas y  $\mathbf{x} = [1 \ x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$  es el vector aumentado de entradas a la red. La matriz  $V^T$  es la matriz aumentada de pesos de entrada y contiene en su primer vector columna el valor de los umbrales de activación.

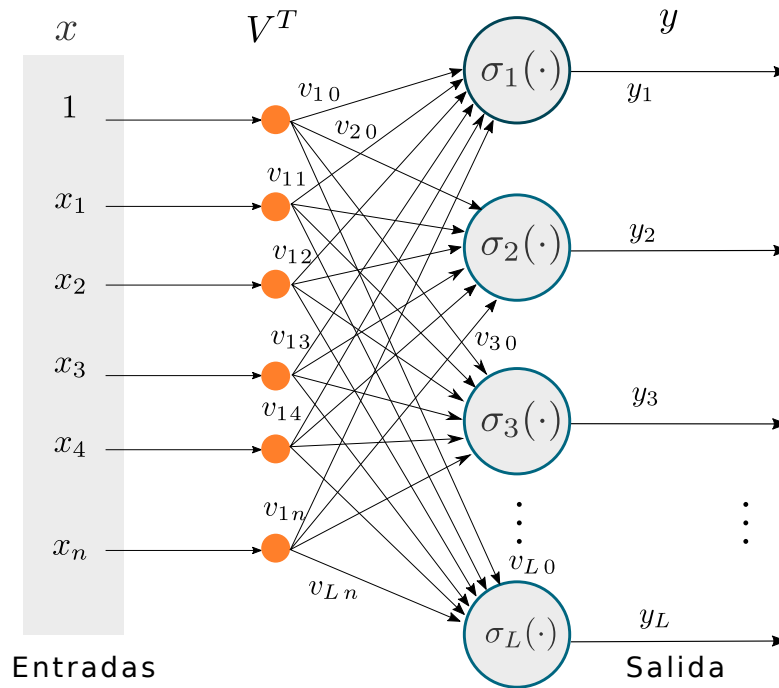


Figura 2.2: Esquema de la red neuronal de una sola capa.



La matriz  $V^T$  de pesos de entrada queda definida como:

$$V^T = \begin{bmatrix} v_{10} & v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{20} & v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{L0} & v_{L1} & v_{L2} & \dots & v_{Ln} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Finalmente, las funciones de activación que modelan el comportamiento de cada neurona quedan expresadas por un arreglo:

$$\boldsymbol{\sigma}(\odot) = [\sigma_1(\odot) \ \sigma_2(\odot) \ \sigma_3(\odot) \ \dots \ \sigma_L(\odot)]^T \quad (2.6)$$

La notación  $\sigma(\odot)$  hace referencia a la función de activación  $\sigma$  utilizada para procesar el argumento  $\odot$  de entrada a la neurona.

### 2.2.2. Redes neuronales multicapa

Se le llaman redes multicapa a las redes neuronales que están compuestas por dos o más capas de neuronas. Las primeras capas se conocen como capas ocultas e intervienen en el procesamiento de los datos de entrada, propagando los valores calculados en una de estas hacia la capa de salida de la red. Las redes neuronales multicapa son capaces de resolver de forma exitosa problemas más complejos que las redes neuronales de una sola capa. Sin embargo, el coste computacional de implementar una red multicapa es mayor, por lo que es necesario contar con la infraestructura adecuada.

En la Figura 2.3 se muestra la estructura de una red neuronal de dos capas. La primera capa recibe el nombre de capa oculta y contiene  $L$  neuronas, por otra parte la segunda capa o capa de salida, contiene  $m$  neuronas. Nótese que la salidas de la capa oculta sirven de entradas a la capa siguiente de la red neuronal.

El comportamiento de una red neuronal de dos capas está dado por la siguiente ecuación:

$$y_i = \bar{\sigma}_i \left( \sum_{l=1}^L w_{il} \sigma \left( \sum_{j=1}^n v_{lj} x_j + v_{l0} \right) + w_{i0} \right); \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) se puede representar también en su forma vectorial mediante:

$$\mathbf{y} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} (W^T \boldsymbol{\sigma} (V^T \mathbf{x})) \quad (2.8)$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = [\bar{\sigma}_1(\odot) \ \bar{\sigma}_2(\odot) \ \bar{\sigma}_3(\odot) \ \dots \ \bar{\sigma}_m(\odot)]^T$ , el vector  $\boldsymbol{\sigma}$  está dado por la ecuación (2.6),  $\mathbf{x}(t) = [1 \ x_1 \ \dots \ x_n]^T$ , la matriz de pesos  $V^T$  es dada por (2.5) y  $W^T$  está dada por:

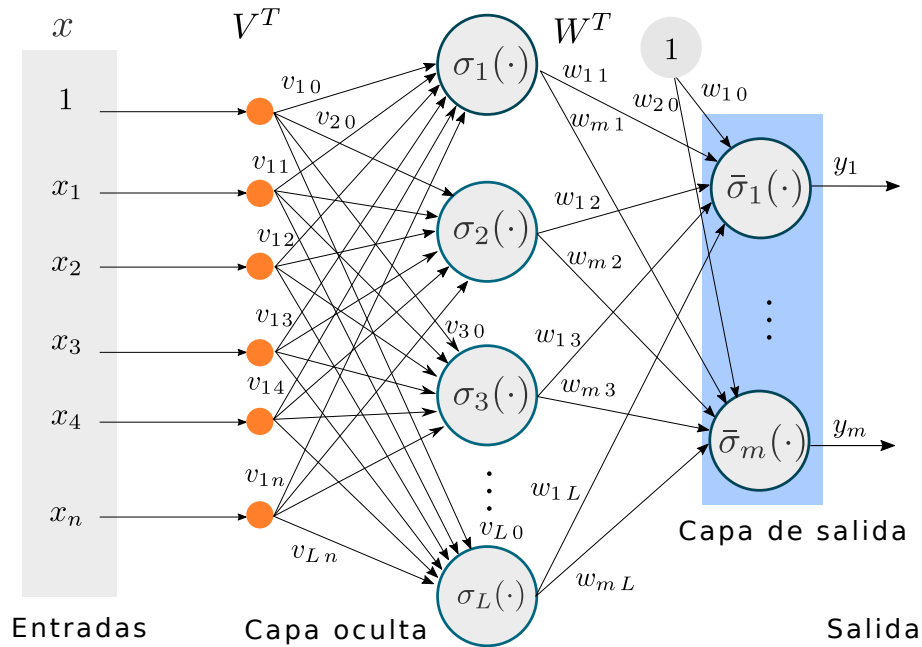


Figura 2.3: Esquema de una red neuronal de dos capas.

$$W^T = \begin{bmatrix} w_{10} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1L} \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{m0} & w_{m1} & w_{m2} & \dots & w_{mL} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

La linealidad o no linealidad de una red neuronal puede elegirse mediante las funciones de activación utilizadas en las neuronas. Una función de activación lineal aplicada entorno a la capa de salida permite simplificar la ecuación (2.8), obteniendo así la ecuación:

$$y = W^T \sigma(V^T \mathbf{x}). \quad (2.10)$$

### 2.2.3. Red neuronal de enlace funcional

Las redes neuronales de enlace funcional (FLNN por sus siglas en inglés), cuya estructura se muestra en la Figura 2.4, forman parte de una clasificación conocida como redes neuronales lineales en los parámetros (LIP por sus siglas en inglés). Si mediante una matriz de valores constantes  $G^T$  se definen los umbrales y pesos de  $V^T$  en la ecuación (2.10), de forma que se puede proponer  $\beta(\eta) = \sigma(V^T \mathbf{x})$ , entonces se obtiene una red neuronal donde solo se estiman los pesos de salida  $Z^T$  (equivalente a  $W^T$  en la ecuación (2.10)). La red neuronal resultante se considera lineal en los parámetros  $Z^T$  y puede definirse a través de la siguiente ecuación:

$$y = Z^T \beta(\eta), \quad (2.11)$$

donde  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de entradas,  $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^L$  es la salida de la red y  $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^L$ , con  $L$  el número de neuronas de la capa oculta.

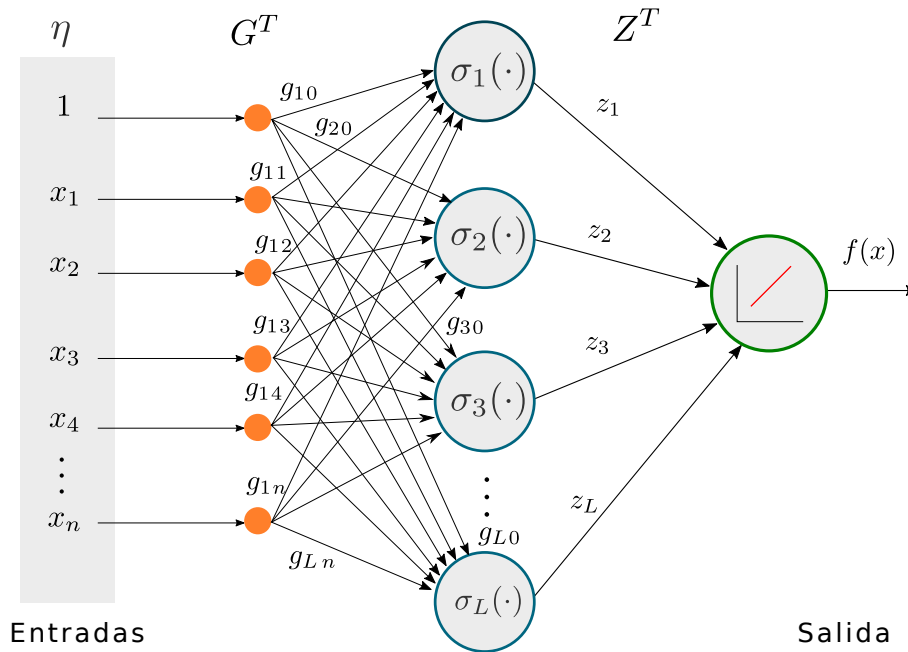


Figura 2.4: Red neuronal de enlace funcional.

Si  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$  no es diagonal, pero  $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta})$  es una función que mapea de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^L$ , entonces se dice que (2.11) es una red neuronal de enlace funcional. Desafortunadamente las redes neuronales LIP no siempre cumplen con la propiedad de aproximación universal de las redes neuronales. Sin embargo, una red neuronal de enlace funcional puede aproximar funciones no lineales siempre que  $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta})$  sea un conjunto de funciones base. Si una función  $f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^L$  es suave en un conjunto compacto  $S \in \mathbb{R}^n$ , entonces existe un amplio conjunto de funciones base que pueden estimar a  $f(\boldsymbol{x})$ , siempre y cuando se cumplan con los requisitos establecidos en [26]:

1. Una función suave en  $S$  puede ser expresada a través de la ecuación (2.11) para un número finito de neuronas  $L$ . Es decir, puede expresarse como una combinación lineal de un número finito de  $\beta(\odot)$ 's.
2. El rango funcional de (2.11) es denso en el espacio de funciones continuas  $S \rightarrow \mathbb{R}^n$  para un número finito de  $L$ . Es decir, para cualquier  $f(\boldsymbol{x}) \in S$  y  $\varepsilon_N > 0$ , existen un número finito de  $Z \in \mathbb{R}^{L \times n}$  tal que:

$$\|f(\boldsymbol{x}) - Z^T \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta})\| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

La condición uno garantiza que se puede utilizar un número finito de funciones básicas para aproximar una función continua independientemente de su norma, siempre que la norma de sus variaciones sea suficientemente pequeña.

Si  $\beta(\boldsymbol{\eta})$  provee un conjunto de funciones base, entonces una función suave  $f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^L$  puede aproximarse dentro de un conjunto compacto  $S$  mediante:

$$f(\boldsymbol{x}) = Z^T \beta(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.13)$$

siempre y cuando  $Z$  contenga los pesos y umbrales ideales y la red este compuesta de un número finito de neuronas.

#### 2.2.4. Propiedad de aproximación universal de las redes neuronales

La propiedad de aproximación universal establece que una función suave  $f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  puede ser aproximada mediante una red neuronal de por lo menos dos capas, dentro de un conjunto compacto, siempre y cuando propongan pesos y umbrales apropiados [23, 24]. Entonces, dado un conjunto compacto  $S \in \mathbb{R}^n$  y un valor positivo  $\varepsilon_N$ , existe una red neuronal tal que:

$$f(\boldsymbol{x}) = W^T \boldsymbol{\sigma}(V^T \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.14)$$

donde  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| < \varepsilon_N$ , para todo  $\boldsymbol{x} \in S$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times L}$  y  $W \in \mathbb{R}^{L \times m}$  son matrices aumentadas de entrada y salida de la red neuronal,  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^L$  es un vector de funciones de activación y  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^m$  es un vector de errores de aproximación.

#### 2.2.5. Entrenamiento de redes neuronales

Los pesos de una red neuronal se ajustan mediante un procedimiento de entrenamiento. Actualizar el valor de los pesos se le conoce como función de aprendizaje y puede llevarse a cabo en tiempo continuo o de forma discreta. Existen distintos algoritmos de aprendizaje para redes neuronales divididos en tres categorías: aprendizaje supervisado, no supervisado y reforzado. En el aprendizaje supervisado, toda la información necesaria para el entrenamiento está disponible a priori. Esta información global no cambia y es usada para calcular los valores de error con los cuales se ajustan los pesos de la red neuronal. Por otro lado, en el aprendizaje no supervisado (también llamado comportamiento de auto-organización) se desconoce la salida deseada para la red neuronal. En cambio, los datos locales se examinan y organizan de acuerdo con propiedades colectivas emergentes. Finalmente, en el aprendizaje reforzado los pesos asociados a una neurona en particular se ajustan en proporción a una señal de refuerzo, en lugar de utilizar el error.

El aprendizaje también puede ser fuera de línea o en línea. En el primer caso la red neuronal es expuesta a un algoritmo de entrenamiento antes de entrar en operación y sus pesos permanecen constantes una vez entrenada. Por otra parte, las redes neuronales de aprendizaje en línea no reciben un entrenamiento previo y sus pesos se ajustan simultáneamente durante el proceso. En este trabajo de investigación se utiliza una red neuronal de aprendizaje en línea [23].

En sistemas de control, es preferible implementar esquemas de entrenamiento en línea para estimar

la dinámica real del modelo, ya que la red neuronal ajusta sus parámetros de acuerdo a las diferencias entre la salida deseada y la salida actual del mecanismo, contemplando factores externos como la gravedad, la fricción y dinámicas inducidas por el movimiento de los actuadores.

### 2.3. Ecuación general para los robots rígidos de $n$ grados de libertad

Definir el modelo dinámico de un mecanismo es una tarea importante en el desarrollo de controladores, ya que se establecen las ecuaciones matemáticas que vinculan a las variables de entrada con las señales de salida del sistema. El modelo matemático del mecanismo a controlar puede obtenerse a través de técnicas analíticas basadas en leyes físicas y ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema, o mediante un proceso experimental que requiere de un conjunto de datos experimentales.

Existen dos clasificaciones de sistemas mecánicos, según sea la cantidad de actuadores instalados en un mecanismo y el número de grados de libertad en los que puede moverse. Los sistemas completamente actuados poseen la misma cantidad de grados de libertad que actuadores instalados, por lo que su análisis y control es relativamente sencillo. Por otra parte los sistemas sub-actuados poseen  $m$  actuadores instalados para controlar  $n$  grados de libertad de movimiento tal que  $m < n$ , por lo que el control de estos sistemas suele ser una tarea más compleja. En este trabajo de investigación se estudia y se diseñan controladores para mecanismos considerados como sistemas completamente actuados [27].

Las ecuaciones dinámicas de un mecanismo pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton [28]. El inconveniente que presenta este método es que el análisis se complica notablemente cuando aumenta el número de grados de libertad. En estos casos, es conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange [27], que se basan en el análisis de la diferencia entre las energías cinética y potencial, conocida como Lagrangiano:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \quad (2.15)$$

donde  $K$  y  $U$  representan a las energías cinética y potencial del mecanismo en función de la posición angular y la velocidad angular expresadas por los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  respectivamente. La generalización del modelo dinámico de un mecanismo con  $n$  posibilidades de movimiento puede expresarse de forma estándar mediante la ecuación dinámica para los robots de  $n$  grados de libertad:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) + F(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.16)$$

donde

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}]$$

$$G(\mathbf{q}) = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}.$$

La ecuación (2.16) es una ecuación diferencial no lineal vectorial donde  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz

de inercia que es matriz definida positiva para todo  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , mientras que  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas centrífugas o de fuerzas de Coriolis,  $G(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es un vector de fuerzas o torques gravitatorios y  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torques de entrada y/o fuerzas externas, que en general corresponde a los torques aplicados por los actuadores. Finalmente, las fuerzas disipativas atribuidas a la fricción son representadas por un vector  $F(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ , que depende solo de la velocidad conjunta  $\dot{\mathbf{q}}$ . Los efectos de fricción son locales, es decir,  $F(\dot{\mathbf{q}})$  puede escribirse como:

$$F(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} f_0(\dot{q}_0) \\ f_1(\dot{q}_1) \\ \vdots \\ f_n(\dot{q}_n) \end{bmatrix}.$$

Cada elemento de  $M(\mathbf{q})$ ,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $G(\mathbf{q})$  es, en general, una expresión relativamente compleja que depende de las posiciones y velocidades de todas las articulaciones o de la geometría del robot en cuestión. Por otra parte, el vector de los pares gravitatorios  $G(\mathbf{q})$ , es simplemente el gradiente de la función de energía potencial  $U(\mathbf{q})$  [27].

## 2.4. Estabilidad de los sistemas dinámicos

La estabilidad y la robustez son características deseables en el comportamiento de un sistema de lazo cerrado. Debido a que algunos sistemas por naturaleza no son estables, es necesario diseñar un sistema de control retroalimentado tal que la estabilidad de lazo cerrado se cumpla. En esta sección se presentan algunos conceptos básicos de la teoría de estabilidad de Lyapunov.

### 2.4.1. Equilibrio

Un sistema dinámico de lazo abierto o cerrado, puede representarse a través un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (2.17)$$

donde el vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  corresponde a los estados del sistema. Se dice que un sistema representado por la ecuación (2.17) es autónomo si no depende explícitamente del tiempo, esto es sí  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ . En caso contrario, la función  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  representa a un sistema no autónomo.

Si para una función no autónoma  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$  las componentes  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y las entradas al sistema  $\mathbf{u}(t)$  son funciones únicamente de  $t$  o constantes, entonces (2.17) representa a un sistema lineal. En caso contrario el sistema representado es no lineal.

Por otra parte, un estado constante  $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema (2.17) si:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_e) = 0 \quad \forall t \geq t_0$$

Si el estado inicial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e$ , entonces la condición inicial  $\mathbf{x}_0$  es justamente un equilibrio, por lo que se satisface que la solución en el tiempo  $\mathbf{x}(t)$  es exactamente el vector constante  $\mathbf{x}_e$  [23, 27].

### 2.4.2. Definición de estabilidad

**Definición 2.4.1** [27] *El origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio estable del sistema en (2.17) si para cada número  $\varepsilon > 0$  es posible encontrar un número  $\delta > 0$ , tal que:*

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (2.18)$$

Lo expuesto anteriormente significaría que el origen es un equilibrio estable si para toda condición inicial acotada, las soluciones también están acotadas.

### 2.4.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

**Definición 2.4.2** *Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  es estable en el sentido de Lyapunov (SISL) en  $t_0$ , si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tal que  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \delta(\varepsilon, t_0)$  implica que  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon$  para  $t \geq t_0$ . Se dice que la estabilidad es uniforme si  $\delta(\odot)$  es independiente de  $t_0$ ; es decir, el sistema es SISL para todo  $t_0$ .*

Cabe destacar que en un sistema SISL es necesario que el estado  $\mathbf{x}(t)$  se mantenga arbitrariamente cerca de  $\mathbf{x}_e$  iniciando suficientemente cerca de él. En muchos sistemas de lazo cerrado este es un requerimiento complejo de satisfacer debido a la presencia de perturbaciones desconocidas, por lo que es necesario recurrir a definiciones más prácticas para estabilizar el sistema.

### 2.4.4. Función definida positiva y función radialmente desacotada

De acuerdo con Kelly en [27], una función continua  $W_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función *definida positiva localmente* si:

- $W_r(\mathbf{0}) = 0$ ,
- $W_r(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  pero con  $\|\mathbf{x}\|$  pequeña.

Una función continua  $W_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función definida positiva globalmente* si:

- $W_r(\mathbf{0}) = 0$ ,
- $W_r(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

Una función continua  $W_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función radialmente desacotada* si:

- $W_r(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ .

### 2.4.5. Función de Lyapunov y estabilidad de Lyapunov

Una función  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una *función candidata de Lyapunov* para el equilibrio  $\mathbf{x} = 0$  de la ecuación (2.17) si es definida positiva localmente y continuamente diferenciable.

La derivada temporal de una función de Lyapunov juega un papel importante en la extracción de conclusiones sobre los atributos de estabilidad para los equilibrios de las ecuaciones diferenciales. Por esta razón se presenta la siguiente definición.

**Definición 2.4.3 (Función de Lyapunov)** [27] Sea  $V(t, \mathbf{x})$  una función candidata de Lyapunov para el sistema (2.17). La derivada de  $V(t, \mathbf{x})$  a lo largo de las trayectorias de (2.17), denotada por  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  está dada por:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V^T(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

Si  $V(\mathbf{x})$  no depende del tiempo y la ecuación (2.17) es autónoma, entonces:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Una función candidata de Lyapunov  $V(t, \mathbf{x})$  para el sistema (2.17) resulta en una función de Lyapunov si su derivada a lo largo de las trayectorias de (2.17) satisface:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (2.19)$$

al menos para  $\|\mathbf{x}\|$  pequeña. Además, el origen  $\mathbf{x} = 0$  es un estado de equilibrio estable del sistema (2.17) si existe una función candidata de Lyapunov  $V(t, \mathbf{x})$  cuya derivada temporal satisfaga la condición en (2.19).

Lo anterior da condiciones suficientes para establecer estabilidad del equilibrio en el sentido de Lyapunov. Conviene apuntar que la conclusión se mantiene si  $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$  y para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , o si la función candidata de Lyapunov  $V(t, \mathbf{x})$  es una función definida positiva globalmente en lugar de ser definida positiva localmente.

Finalmente se establece que el origen  $\mathbf{x} = 0$  es un equilibrio estable, y las soluciones  $\mathbf{x}(t)$  están acotadas para toda condición inicial  $\mathbf{x}_0$ , si existe una *función candidata de Lyapunov* que sea *definida positiva globalmente y radialmente desacotada*,  $V(t, \mathbf{x})$ , tal que su derivada temporal satisfaga:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.20)$$

### 2.4.6. Estabilidad uniformemente últimamente acotada

Un tipo de estabilidad interesante es aquella que se comporta como una señal de tipo UUB (Uniformemente últimamente acotada, por sus siglas en inglés), cuyo comportamiento puede observarse en la Figura 2.5.



**Definición 2.4.4 (UUB)** De acuerdo a la definición en [1], las soluciones de un sistema dinámico representado por (2.17), para un conjunto compacto  $S \in \mathbb{R}^n$ , serán uniformemente últimamente acotadas si:

Para cualquier condición inicial  $\mathbf{x}_0 \in S$  existe una región delimitada por un valor de cota  $C_B$  y un tiempo  $T(\mathbf{x}_0, C_B) \geq 0$  independiente de  $t_0$ , a partir del cual, las trayectorias del sistema en (2.17) permanecen dentro de una vecindad acotada relativa a  $\mathbf{x}_e$  tal que:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \leq C_B, \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (2.21)$$

La diferencia entre UUB y SISL es que en UUB la cota  $C_B$  no puede ser un valor arbitrariamente pequeño partiendo de un estado muy cercano a  $\mathbf{x}_e$ . En los sistemas dinámicos de lazo cerrado,  $C_B$  depende de la magnitud de las perturbaciones en el sistema. El término “uniforme” indica que  $T$  es independiente de  $t_0$ . El término “último” indica que el acotamiento se mantiene para  $t > T$ . Si el conjunto  $S = \mathbb{R}^n$ , se dice entonces que el sistema es globalmente UUB.

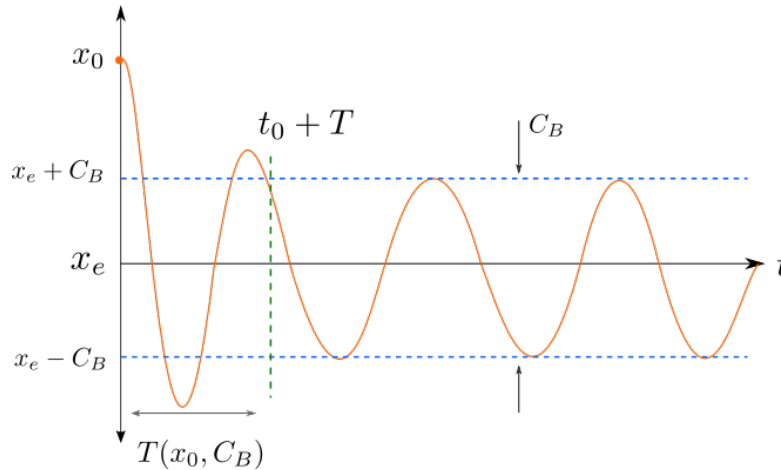


Figura 2.5: Diagrama para la definición de UUB.

Un enfoque de la estabilidad UUB visto desde la teoría de Lyapunov se muestra en la Figura 2.6. Considere una función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  definida positiva, y un conjunto compacto:

$$\Lambda_c = \{\varepsilon_c \leq V(\mathbf{x}) \leq c\}$$

donde  $\varepsilon_c < c$  con  $\varepsilon_c$  y  $c$  constantes positivas. Este conjunto tiene en sus fronteras a los conjuntos  $\Omega_c = \{V(\mathbf{x}) \leq c\}$  y  $\Omega_\varepsilon = \{V(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_c\}$ . Suponga que la derivada de la función candidata de Lyapunov sobre las trayectorias de un sistema del tipo (2.17) satisface:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Lambda_c, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.22)$$

donde  $W_3(\mathbf{x})$  es una función continua definida positiva.

La desigualdad en (2.22) implica que dentro de dos conjuntos  $\Omega_c$  y  $\Omega_\varepsilon$ , véase la Figura 2.6, la

derivada  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es negativa, por lo que una trayectoria que inicia en  $\Lambda_c$  se moverá de forma decreciente sobre  $V(\mathbf{x}(t))$ , comportándose como si el origen fuese un punto de equilibrio asintóticamente estable. La función  $V(\mathbf{x}(t))$  continuará decreciendo hasta entrar en la región  $\Omega_\varepsilon$  en un tiempo finito.

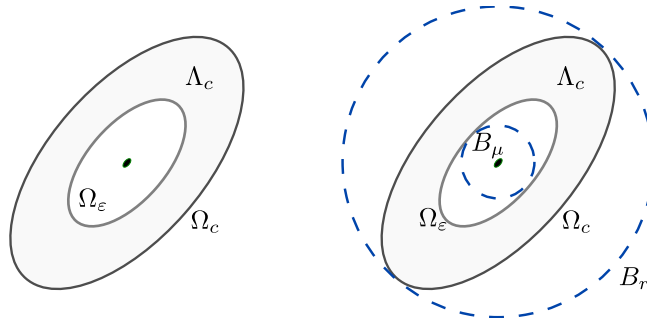


Figura 2.6: A la izquierda la representación de los conjuntos  $\Lambda_c$ ,  $\Omega_c$  y  $\Omega_\varepsilon$ . A la derecha los mismos conjuntos delimitados por las regiones  $B_\mu$  y  $B_r$ .

En muchos diversos problemas de estabilidad,  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x})$  se obtiene mediante la ecuación:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \mu \leq \|\mathbf{x}\| \leq r, \forall t \geq t_0. \quad (2.23)$$

Si  $r$  es suficientemente grande respecto a  $\mu$ , entonces se pueden elegir a  $c$  y  $\varepsilon_c$  de forma que el conjunto  $\Lambda_c$  no esté vacío y a su vez esté contenido en  $\{\mu \leq \|\mathbf{x}\| \leq r\}$ .

El siguiente teorema establece la estabilidad uniformemente últimamente acotada en términos de una función candidata de Lyapunov.

**Teorema 2.4.1** *[1]* Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene al origen y  $V(\mathbf{x})$  una función candidata de Lyapunov globalmente definida positiva de forma que:

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V^T(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0. \quad (2.25)$$

para todo  $t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in S$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones de clase  $\mathcal{K}$  y  $W_3(\mathbf{x})$  es una función continua definida positiva. Seleccionando  $r > 0$  de forma que  $B_r \in S$  y suponiendo que:

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (2.26)$$

entonces existe una función de clase  $\mathcal{KL}$  denominada  $\beta$ , véase la definición 6.1.2 en el Apéndice 6.1, y para cada estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$ , se satisface que  $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ , existe  $T \geq 0$  (dependiente de  $\mathbf{x}(t_0)$  y  $\mu$ ) de forma que las soluciones del sistema (2.17) satisfacen que:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (2.27)$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t_0 \geq t_0 + T. \quad (2.28)$$

Las desigualdades (2.27) y (2.28) muestran que las soluciones de un sistema  $\mathbf{x}(t)$  son uniformemente acotadas para todo  $t \geq t_0$  y uniformemente últimamente acotadas por un valor  $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$ . La cota última es una función  $\mathcal{K}$  y dependiente de  $\mu$ , entonces entre más pequeño es el valor de  $\mu$  la cota última es menor. La cota última tiende a cero conforme  $\mu \rightarrow 0$ .

## Capítulo 3

# Controladores adaptativos para el seguimiento de trayectoria de un péndulo de rueda inercial

### 3.1. Introducción

El modelo del péndulo de rueda de reacción inercial fue introducido por Spong en 1999 y es una aplicación de la ley de la inercia en la que se basan algunos sistemas de tipo robóticos para el control de orientación [64]. Este modelo se basa en un péndulo invertido, con un disco en su extremo que puede girar libremente alrededor de un eje paralelo al eje de rotación del mecanismo. A través de un acoplamiento, la rueda de reacción es accionada por un motor de corriente continua, cuya señal de entrada es calculada por un sistema de control.

Debido a la estructura mecánica y la dinámica simple pero no lineal del péndulo de rueda de reacción inercial, este modelo se puede utilizar como referencia en el diseño de los algoritmos de control no lineal. Desde un punto de vista pedagógico, los péndulos de rueda de reacción inercial también pueden utilizarse como mecanismos de prueba, para demostrar ideas básicas de la teoría de control [65, 66]. Uno de los objetivos en el control del péndulo, es establecer un torque de entrada que le permita al mecanismo seguir una trayectoria de referencia deseada.

Los retos actuales en el control del péndulo de rueda de reacción inercial son estabilizar el mecanismo en un punto de equilibrio inestable ubicado en la parte superior de forma que el péndulo mantenga una posición vertical. A este problema se le conoce como regulación; otro reto es encontrar una ley de control que le permita al mecanismo seguir una trayectoria de referencia deseada, denominado problema de seguimiento de trayectoria.

Actualmente en la literatura existen una gran cantidad de técnicas de control. Sin embargo, el control adaptativo es una herramienta con gran potencial que ha demostrado su eficacia en el tratamiento de las incertidumbres en los parámetros y en la dinámica del mecanismo [23, 67]. En [54], por ejemplo,

se explora una propuesta de control adaptativo basado en un modelo de regresión para controlar el seguimiento de trayectorias del péndulo de rueda inercial. En [68] se reporta un controlador IDA-PBC combinado con una ley de control adaptativa que estima los parámetros desconocidos del mecanismo en línea. En [69] se desarrollan algoritmos de control adaptativos a partir del gradiente de alta velocidad con función dinámica, que permiten la estabilización del péndulo en condiciones de incertidumbre paramétrica completa. Finalmente en [70] se muestra una propuesta de control adaptativo que incorpora una red neuronal para la estabilización y el seguimiento de trayectoria de este mecanismo.

El propósito de este trabajo de tesis es en resolver el problema de control de seguimiento de trayectoria de un péndulo de rueda de reacción inercial, mediante la propuesta de dos controladores adaptativos. El primer controlador adaptativo está basado en la estimación de parámetros, por lo que es necesario definir de forma detallada el modelo ideal del mecanismo. El segundo controlador adaptativo se basa en la incorporación de una red neuronal monocapa de enlace funcional, cuyos pesos de salida son estimados en línea. Este controlador no necesita de un modelo detallado de la planta. Con el objetivo de comparar el desempeño de ambos controladores se realizan pruebas de simulación aplicando cambios paramétricos y perturbaciones al modelo.

### 3.2. Modelo dinámico del péndulo de rueda de reacción inercial

El modelo dinámico del mecanismo se definió de acuerdo al diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 3.1, donde el origen de referencia del mecanismo está situado en  $O_0$ . Las etiquetas  $q_p$  y  $q_w$  denotan a las posiciones angulares del péndulo y de la rueda de reacción inercial respectivamente, y  $\tau_w$  es el par producido por un actuador acoplado con la rueda. Se considera que los centros de masa del brazo y de la rueda de reacción inercial son tales que en conjunto, producen un centro de masa resultante cercano al origen  $O_0$ ; por lo que de forma natural los momentos aplicados por las masas del brazo y la rueda inercial, sitúan al sistema en condiciones dinámicas cercana al equilibrio.

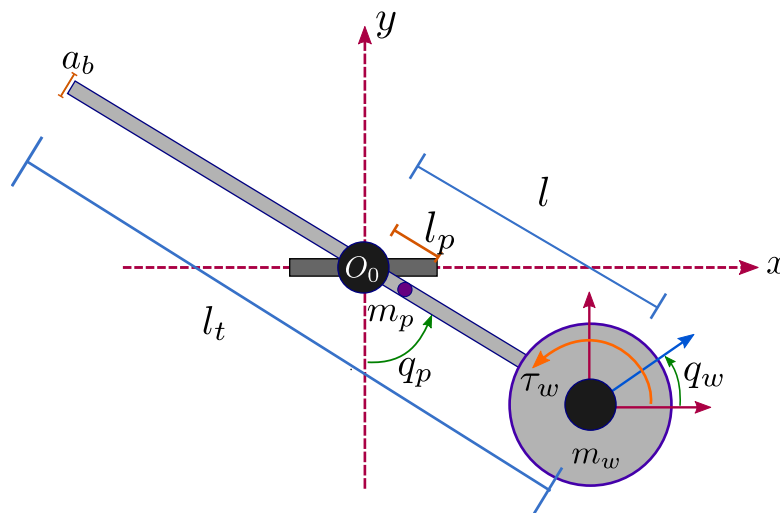


Figura 3.1: Diagrama de cuerpo libre del péndulo de rueda de reacción inercial.

Los parámetros físicos propuestos para este modelo se muestran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Parámetros físicos del péndulo de rueda de reacción inercial

Parámetro	Descripción	Valor
$m_p$	Masa del péndulo	0.30 kg
$m_w$	Masa de la rueda	0.08 kg
$l_t$	Longitud total del brazo (péndulo)	1.5 m
$l$	Distancia del origen de $O_0$ al eje de la rueda de reacción	0.5 m
$a_b$	Ancho del brazo	0.07 m
$l_p$	Distancia del origen al centro de masa resultante	0.15 m
$F_p$	Coefficiente de fricción en la articulación del origen $O_0$	0.0053 N
$F_w$	Coefficiente de fricción en la articulación de la rueda de reacción	0.0023 N
$I_p$	Inercia del péndulo	0.01 kg m <sup>2</sup>
$I_w$	Inercia de la rueda de reacción	0.0016 kg m <sup>2</sup>
$g$	Constante de aceleración gravitacional	9.81 kg m/s <sup>2</sup>

El péndulo de rueda de reacción inercial puede modelarse utilizando la ecuación dinámica para los robots rígidos de  $n$  grados de libertad expresada en (2.16). En este trabajo de tesis la dinámica del mecanismo se obtuvo utilizando el método de Euler-Lagrange [27], cuyo análisis parte de la ecuación (2.15). Siguiendo este enfoque las ecuaciones de movimiento del péndulo se formulan a partir de las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.1)$$

donde  $D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{F} \dot{\mathbf{q}}$  es el término que representa las componentes disipativas y  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal que contiene a las componentes de fricción viscosa asociadas a los elementos en rotación. El vector de gravedad se obtiene de la definición  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ .

Las ecuaciones para la energía cinética y potencial del modelo planteado son:  
Péndulo:

$$K_p = \frac{1}{2} [m_p l_p^2 \dot{q}_p^2 + I_p \dot{q}_p^2], \quad (3.2)$$

$$U_p = -m_p g l_p \cos(q_p). \quad (3.3)$$

Rueda:

$$K_w = \frac{1}{2} [m_w l^2 \dot{q}_p^2 + I_w (\dot{q}_p + \dot{q}_w)^2], \quad (3.4)$$

$$U_w = -m_w g l \cos(q_p) \quad (3.5)$$

donde  $I_p$  e  $I_w$  son las constantes de la inercia del péndulo y de la rueda de reacción respectivamente y  $g$  es el valor de la constante de gravedad.

De acuerdo a [71] la inercia de una barra que rota sobre su centro de masa es:

$$I = \frac{1}{2} M_{total} (a^2 + b^2) \quad (3.6)$$

donde  $M_{total}$  es la masa total del cuerpo rectangular, el cual tiene medidas geométricas  $a$  y  $b$ . Sin embargo como se observa en el esquema de la Figura 3.1, el centro de masa del brazo se encuentra desplazado a una distancia  $l_p$  del centro geométrico por lo que es necesario aplicar el teorema de Steiner de los ejes paralelos. De esta forma la ecuación para calcular la inercia del brazo es:

$$I_p = \frac{1}{12}m_p(a_b^2 + l_t^2) + m_pl_p^2. \quad (3.7)$$

Por otra parte la ecuación que describe la inercia de la rueda de reacción esta dada por:

$$I_w = \frac{1}{2}m_w r_w^2, \quad (3.8)$$

donde  $r_w$  representa el radio de la rueda de reacción inercial.

Obtener las ecuaciones de la dinámica del péndulo requiere de expresar el Lagrangiano del modelo que se obtiene al sustituir (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5) en (2.15) y agrupar términos semejantes. Con ello se obtiene la ecuación:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}[A\dot{q}_p^2 + 2I_w\dot{q}_p\dot{q}_w + I_w\dot{q}_w^2] + Bg \cos(q_p) \quad (3.9)$$

donde  $A = (m_pl_p^2 + I_p + m_w l^2 + I_w)$  y  $B = (m_pl_p + m_w l)$ .

Posteriormente se realizan las derivadas parciales y se sustituye de acuerdo a la ecuación (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_p} &= -Bg \sen q_p & \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_w} &= 0 \\ \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_p} &= A\dot{q}_p + I_w\dot{q}_w & \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_w} &= I_w(\dot{q}_p + \dot{q}_w) \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_p} \right] &= A\ddot{q}_p + I_w\ddot{q}_w & \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_w} \right] &= I_w(\ddot{q}_p + \ddot{q}_w) \end{aligned}$$

Finalmente se agrupan términos semejantes y se agregan las componentes de fricción viscosa  $F_p$  asociada al punto de unión entre el péndulo y la base, y  $F_w$  correspondiente a la unión del brazo con la rueda de reacción respectivamente. De esta forma el modelo dinámico del péndulo queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$A\ddot{q}_p + I_w\ddot{q}_w + Bg \sen(q_p) + F_p\dot{q}_p = -\tau_d \quad (3.10)$$

$$I_w\ddot{q}_p + I_w\ddot{q}_w + F_w\dot{q}_w = \tau_w \quad (3.11)$$

donde  $\tau_w$  es el torque aplicado a la rueda de reacción inercial y  $\tau_d$  son las perturbaciones aplicadas al brazo, que se asume están acotadas por  $\|\tau_d\| < d_B$  con  $d_B > 0$ .

El modelo dinámico del mecanismo (3.10)-(3.11) considerando fricción y perturbaciones se repre-

senta en espacio de estados de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}q_p = \dot{q}_p \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt}\dot{q}_p = \frac{-\tau_w - \tau_d - Bg \operatorname{sen}(q_p) - F_p\dot{q}_p + F_w\dot{q}_w}{A - I_w} \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt}q_w = \dot{q}_w \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt}\dot{q}_w = \frac{\tau_w}{I_w} - \left[ \frac{-\tau_w - \tau_d - Bg \operatorname{sen}(q_p) - F_p\dot{q}_p + F_w\dot{q}_w}{A - I_w} \right] - \frac{F_w\dot{q}_w}{I_w} \quad (3.15)$$

Despejando el segundo término de (3.11) y sustituyéndolo (3.10) se obtiene la ecuación que engloba la dinámica del mecanismo:

$$(A - I_w)\ddot{q}_p = -\tau_w - Bg \operatorname{sen}(q_p) - F_p\dot{q}_p + F_w\dot{q}_w - \tau_d. \quad (3.16)$$

### 3.3. Problema de control

Un reto en el control del péndulo de rueda inercial es hacer que el mecanismo siga una trayectoria de referencia  $q_d$ , la cual se asume es dos veces diferenciable con respecto al tiempo y está acotada de forma que:

$$\begin{cases} \|q_d(t)\| \\ \|\dot{q}_d(t)\| \\ \|\ddot{q}_d(t)\| \end{cases} \leq q_B \quad (3.17)$$

donde  $q_B > 0$  es un valor escalar definido. Siendo  $q_d$  una trayectoria deseada para  $q_p$  y tomando la dinámica del sistema expresada en (3.16), el objetivo de control consiste en diseñar una ley de control  $\tau_w$  que resuelva el problema de control de seguimiento de trayectoria, de forma que el error de seguimiento:

$$e = q_d - q_p \quad (3.18)$$

sea de tipo uniformemente últimamente acotado de acuerdo a la definición 2.4.4.

### 3.4. Desarrollo de controladores y pruebas de estabilidad

A partir de la definición del error en (3.18) se establece la siguiente ecuación:

$$r = (\dot{q}_d - \dot{q}_p) + \Lambda e \quad (3.19)$$

donde  $\Lambda > 0$  es una constante. La ecuación (3.19) reduce las dimensiones del problema ya que considera el error de posición y su razón de cambio en una sola variable, simplificando la obtención de la dinámica del sistema [23]. Se establece entonces una nueva estructura para la ecuación que define a la dinámica



del sistema (3.16):

$$H\ddot{q}_p = -f_0(\dot{q}_p, \dot{q}_w) - g_0(q_p) - \tau_w - \tau_d \quad (3.20)$$

donde  $H$  corresponde a la diferencia de constantes  $(A - I_w)$ ,  $f_0(\dot{q}_p, \dot{q}_w) = F_p\dot{q}_p - F_w\dot{q}_w$  y  $g_0(q_p) = Bg\text{sen}(q_p)$  es el componente de aceleración gravitacional.

Utilizando la definición del error (3.18) en (3.19) y derivando con respecto al tiempo se obtiene entonces que:

$$\dot{r} = \ddot{e} + \Lambda\dot{e}, \quad (3.21)$$

multiplicando (3.21) por la constante  $H$  se obtiene:

$$\begin{aligned} H\dot{r} &= H\ddot{e} + \Lambda H\dot{e} \\ H\dot{r} &= H(\ddot{q}_d - \ddot{q}_p) + \Lambda H\dot{e} \\ H\dot{r} &= -H\ddot{q}_p + H(\ddot{q}_d + \Lambda\dot{e}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Al sustituir (3.20) en el primer termino de la ecuación (3.22), se establece entonces la dinámica del mecanismo de lazo abierto en función de  $r$  mediante:

$$H\dot{r} = f(x) + \tau_d + \tau_w \quad (3.23)$$

donde:

$$f(x) = H[\ddot{q}_d + \Lambda\dot{e}] + f_0(\dot{q}_p, \dot{q}_w) + g_0(q_p) \quad (3.24)$$

es una función que agrupa los estados del mecanismo y la componente no lineal  $g_0(q_p)$ .

El valor de los parámetros de diseño y las ganancias utilizadas en este apartado se encuentran en la Tabla 3.2. Los valores propuestos se obtuvieron mediante un proceso de sintonización de manera heurística, proponiendo valores aleatorios, comprobando el desempeño del controlador y ajustando el valor en base al resultado obtenido.

Tabla 3.2: Ganancias de los controladores.

Ganancia	Descripción	Valor
$K_v$	Ganancia para la compensación PD	10
$\Lambda$	Valor del parámetro de diseño	7
$\kappa_p$	Ganancia para la ley de estimación de parámetros en (3.32)	20
$\Gamma$	Matriz de sintonización para el controlador en (3.32)	$diag\{0.01\}$
$N$	Matriz constante para el controlador en (3.40)	$diag\{10\}$
$Q$	Matriz constante para el controlador en (3.40)	$diag\{0.01\}$

### 3.4.1. Control por estimación de parámetros

Puesto que la función de la dinámica del péndulo en (3.23) es lineal en los parámetros, puede representarse en su forma paramétrica mediante:

$$f(\mathbf{x}) = W_p(\mathbf{x})\phi_p \quad (3.25)$$

donde  $W_p(\mathbf{x}) = [\ddot{q}_d + \Lambda\dot{e} \quad -\sin(q_p) \quad -\dot{q}_p \quad \dot{q}_w]$  es el vector regresor y

$$\phi_p = -[(A - I_w) \quad -Bg \quad -F_p \quad -F_w]^T \quad (3.26)$$

es el vector de parámetros ideales desconocidos acotado por  $\|\phi_p\| \leq \phi_B$ , donde  $\phi_B > 0$  es un valor que depende de los parámetros físicos del sistema. La estimación de la dinámica no lineal a través de este esquema de control se lleva a cabo mediante:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = W_p(\mathbf{x})\hat{\phi}_p \quad (3.27)$$

donde  $\hat{\phi}_p$  es el vector de parámetros ideales desconocidos estimados en línea. Se define entonces el error de estimación de parámetros dado por:

$$\tilde{\phi}_p = \phi_p - \hat{\phi}_p. \quad (3.28)$$

Con base en el trabajo realizado por Slotine [73] se propone la siguiente ley de control para controlar la trayectoria  $q_p$  mediante el torque de entrada a la rueda de reacción  $\tau_w$ :

$$\tau_w = -\hat{f}(\mathbf{x}) - K_v r \quad (3.29)$$

$$\tau_w = -W_p(\mathbf{x})\hat{\phi}_p - K_v r$$

donde,  $K_v > 0$  es una ganancia y  $r$  está definida por (3.19).

Al introducir (3.29) en la dinámica no lineal del mecanismo en (3.23) se obtiene:

$$H\dot{r} = f(\mathbf{x}) + \tau_d - (\hat{f}(\mathbf{x}) + K_v r)$$

$$H\dot{r} = W_p(\mathbf{x})\phi_p + \tau_d - (W_p(\mathbf{x})\hat{\phi}_p + K_v r)$$

$$H\dot{r} = W_p(\mathbf{x})(\phi_p - \hat{\phi}_p) + \tau_d - K_v r.$$

Al sustituir el error de estimación (3.28) se obtiene la expresión:

$$H\dot{r} = W_p(\mathbf{x})\tilde{\phi}_p - K_v r + \tau_d \quad (3.30)$$

$$H\dot{r} = \tilde{f}(\mathbf{x}) - K_v r + \tau_d. \quad (3.31)$$

La ecuación en (3.31) representa la dinámica de lazo cerrado del sistema donde  $\tilde{f}(x)$  es el error de

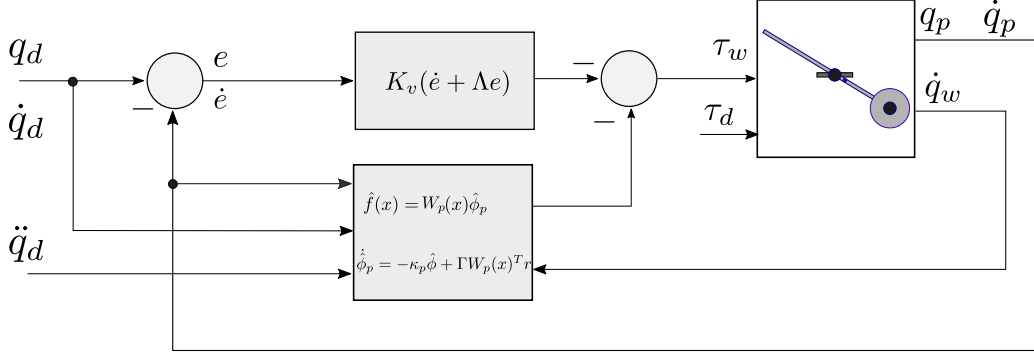


Figura 3.2: Diagrama de bloques del controlador con estimación paramétrica.

estimación de  $f(x)$ . La estimación de los parámetros ideales se calcula mediante la ley de adaptación:

$$\dot{\hat{\phi}}_p = -\kappa_p \hat{\phi}_p + \Gamma W_p(\mathbf{x})^T r \quad (3.32)$$

donde  $\kappa_p > 0$ ,  $\hat{\phi}_p$  es la estimación de los parámetros físicos  $\phi_p$  y  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  es una matriz de valores constantes. Para desarrollar el análisis de estabilidad se propone la función candidata de Lyapunov global definida positiva y radialmente desacotada:

$$V(r, \tilde{\phi}_p) = \frac{1}{2} r^T H r + \frac{1}{2} \tilde{\phi}_p^T \Gamma^{-1} \tilde{\phi}_p. \quad (3.33)$$

Derivando con respecto al tiempo la función candidata de Lyapunov en (3.33) se obtiene:

$$\dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) = \frac{1}{2} [r^T (H \dot{r} + \dot{H} r) + \dot{r}^T H r] + \frac{1}{2} [\tilde{\phi}_p^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\phi}}_p + \dot{\tilde{\phi}}_p^T \Gamma^{-1} \tilde{\phi}_p],$$

aplicando propiedades de las matrices y tomando en cuenta que  $\dot{H} = 0$ , la ecuación se simplifica a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &= \frac{1}{2} [2r^T H \dot{r} + r^T \dot{H} r] + \tilde{\phi}_p^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\phi}}_p \\ \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &= r^T H \dot{r} + \tilde{\phi}_p^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\phi}}_p \end{aligned} \quad (3.34)$$

y sustituyendo  $H \dot{r}$  en (3.34) por la ecuación (3.30) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &= r^T (W_p(\mathbf{x}) \tilde{\phi}_p - K_v r + \tau_d) + \tilde{\phi}_p^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\phi}}_p \\ \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &= r^T W_p(\mathbf{x}) \tilde{\phi}_p - r^T K_v r + r^T \tau_d + \tilde{\phi}_p^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\phi}}_p \\ \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &= -r^T K_v r + \tilde{\phi}_p^T (W_p^T(\mathbf{x}) r + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\phi}}_p) + r^T \tau_d. \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde  $\tilde{\phi}_p = \phi_p - \hat{\phi}_p$ , es el error de estimación de los parámetros ideales del mecanismo.

Tomando en cuenta que el vector de parámetros ideales del mecanismo  $\phi_p$  es un vector de elementos constantes, implicando que  $\dot{\tilde{\phi}}_p = -\dot{\hat{\phi}}_p$ ; al sustituir el error de estimación de los parámetros ideales en

(3.35) por la estimación en (3.32) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &= -r^T K_v r + \tilde{\phi}_p^T (W_p^T(\mathbf{x})r - \Gamma^{-1}[-\kappa_p \hat{\phi}_p + \Gamma W_p^T(\mathbf{x})r]) + r^T \tau_d \\ \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &= -r^T K_v r + \tilde{\phi}_p^T (W_p^T(\mathbf{x})r + \Gamma^{-1} \kappa_p \hat{\phi}_p - W_p^T(\mathbf{x})r) + r^T \tau_d \\ \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &= -r^T K_v r + \tilde{\phi}_p^T \Gamma^{-1} \kappa_p \hat{\phi}_p + r^T \tau_d \\ \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &= -r^T K_v r + \tilde{\phi}_p^T \Gamma^{-1} \kappa_p (\phi_p - \tilde{\phi}_p) + r^T \tau_d \\ \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &= -r^T K_v r + \tilde{\phi}_p^T \Gamma^{-1} \kappa_p \phi_p - \tilde{\phi}_p^T \Gamma^{-1} \kappa_p \tilde{\phi}_p + r^T \tau_d\end{aligned}$$

Recordando que  $\|\phi_p\| < \phi_B$  y  $\|\tau_d\| < d_B$ , se utiliza norma dos para acotar los términos y se obtiene que:

$$\begin{aligned}\dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &\leq -\lambda_{\min}\{K_v\}\|r\|^2 + \kappa_p \phi_B \lambda_{\max}\{\Gamma^{-1}\}\|\tilde{\phi}_p\| - \kappa_p \lambda_{\min}\{\Gamma^{-1}\}\|\tilde{\phi}_p\|^2 + d_B \|r\| \\ \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &\leq -\begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_v\} & \kappa_p \lambda_{\min}\{\Gamma^{-1}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|r\|^2 \\ \|\tilde{\phi}_p\|^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_B & \kappa_p \phi_B \lambda_{\max}\{\Gamma^{-1}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|r\| \\ \|\tilde{\phi}_p\| \end{bmatrix} \\ \dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) &\leq -\left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{\phi}_p \end{bmatrix} \right\| \left[ (\min\{\lambda_{\min}\{K_v\}, \kappa_p \lambda_{\min}\{\Gamma^{-1}\}\}) \left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{\phi}_p \end{bmatrix} \right\| - (\max\{d_B, \kappa_p \phi_B \lambda_{\max}\{\Gamma^{-1}\}\}) \right].\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que  $\dot{V}(r, \tilde{\phi}_p) < 0$ : siempre que que:

$$\left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{\phi}_p \end{bmatrix} \right\| > \frac{(\max\{(d_B), \kappa_p \phi_B \lambda_{\max}\{\Gamma^{-1}\}\})}{(\min\{\lambda_{\min}\{K_v\}, \kappa_p \lambda_{\min}\{\Gamma^{-1}\}\})} \quad (3.36)$$

y de acuerdo a la definición en la sección 2.4.6, las trayectorias del sistema de lazo cerrado (3.31) permanecerán en una región limitada por una hiper-esfera de radio  $r_s$ , donde el radio de esa región de estabilidad estará dado por:

$$\left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{\phi}_p \end{bmatrix} \right\| \geq r_s = \frac{(\max\{(d_B), \kappa_p \phi_B \lambda_{\max}\{\Gamma^{-1}\}\})}{(\min\{\lambda_{\min}\{K_v\}, \kappa_p \lambda_{\min}\{\Gamma^{-1}\}\})} \quad (3.37)$$

de modo que considerando la ecuación (3.19) implica que  $e$ ,  $\dot{e}$  y por ende  $q_p$  y  $\dot{q}_p$  son UUB. Finalmente considerando (3.28) entonces  $\hat{\phi}_p$  es también UUB.

### 3.4.2. Controlador neuronal

Otra forma de estimar la dinámica no lineal en (3.23) es aprovechando la propiedad de aproximación universal que ofrecen las redes neuronales descrita en la sección 2.2.4. Esta propiedad le permite al controlador identificar en general la dinámica del mecanismo y adaptarse a cambios en los parámetros y a perturbaciones externas. Al implementar una red neuronal, la aproximación de la función (3.24) se realiza a través de:

$$f(x) = Z^T \beta(\eta) + \varepsilon \quad (3.38)$$

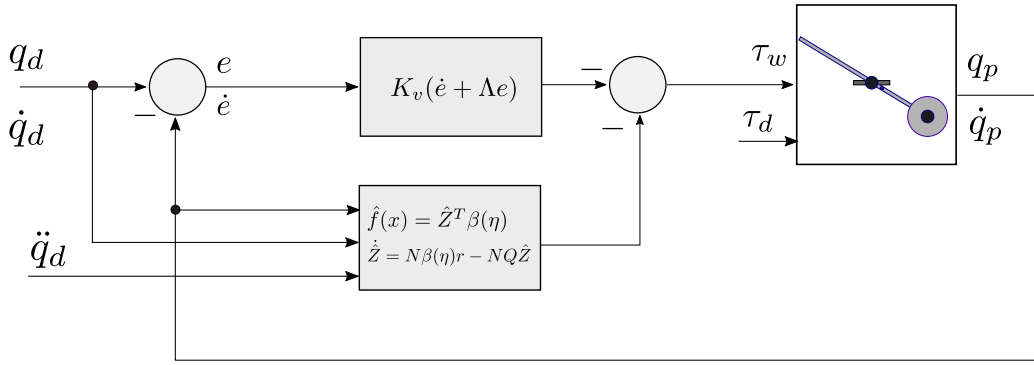


Figura 3.3: Diagrama de bloques del controlador neuronal

donde  $\varepsilon$  es el error de aproximación acotado por  $|\varepsilon| < \varepsilon_N$  con  $\varepsilon_N > 0$ ,  $Z \in \mathbb{R}^L$  es un vector de pesos de salida ideales acotado por  $\|Z\| \leq Z_B$  con  $Z_B > 0$ , siendo  $L$  el número de neuronas de la capa oculta de la red neuronal.

La red neuronal de enlace funcional en (3.38) contiene un vector de funciones base:

$$\beta(\eta) = \sigma(G^T \eta)$$

donde  $\eta \equiv [1 \ e \ \dot{e} \ q_d \ \dot{q}_d \ \ddot{q}_d]^T \in \mathbb{R}^j$  es un vector aumentado que contiene las  $j - 1$  entradas a la red neuronal provenientes del sistema.  $G \in \mathbb{R}^{j \times L}$  es una matriz de pesos aleatorios de entrada de valores constantes y  $\sigma = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_L]^T \in \mathbb{R}^L$  es un vector de funciones de activación de tangentes hiperbólicas [26].

Sustituyendo la aproximación (3.38) en la dinámica del sistema en (3.23) da como resultado:

$$H\dot{r} = Z^T \beta(\eta) + \varepsilon + \tau_d + \tau_w. \quad (3.39)$$

La ley de control propuesta para obtener la dinámica de lazo cerrado del sistema mediante una red neuronal es:

$$\tau_w = -\hat{Z}^T \beta(\eta) - K_v r \quad (3.40)$$

donde la ganancia  $K_v > 0$ ,  $\hat{Z}$  es un vector estimado de pesos ideales variante en el tiempo y  $r$  está dada por (3.19). Al sustituir (3.40) en (3.39) se obtiene la ecuación de la dinámica de lazo cerrado del sistema:

$$H\dot{r} = \tilde{Z}^T \beta(\eta) - K_v r + \tau_d + \varepsilon \quad (3.41)$$

donde

$$\tilde{Z} = Z - \hat{Z} \quad (3.42)$$

es el error de aproximación de los pesos de la red neuronal.

La ley de adaptación de los pesos a la salida de la red neuronal se calcula mediante:

$$\dot{\hat{Z}} = N\beta(\boldsymbol{\eta})r - NQ\hat{Z} \quad (3.43)$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{L \times L}$  y  $N = N^T \in \mathbb{R}^{L \times L}$  son matrices definidas positivas de valores constantes.

El análisis de estabilidad se desarrolla a partir de la función candidata de Lyapunov global definida positiva y radialmente desacotada:

$$V(r, \tilde{Z}) = \frac{1}{2}Hr^2 + \frac{1}{2}tr\{\tilde{Z}^T N^{-1}\tilde{Z}\} \quad (3.44)$$

Al derivar (3.44) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{V}(r, \tilde{Z}) = \frac{1}{2} \left[ r^T (H\dot{r} + \dot{H}r) + \dot{r}^T Hr \right] + \frac{1}{2} tr\{\tilde{Z}^T (N^{-1}\dot{\tilde{Z}} + \dot{N}^{-1}\tilde{Z}) + \dot{\tilde{Z}}^T N^{-1}\tilde{Z}\}.$$

$$\dot{V}(r, \tilde{Z}) = r^T H\dot{r} + tr\{\tilde{Z}^T N^{-1}\dot{\tilde{Z}}\}$$

Recordando que  $Z$  es un vector de pesos ideales de valor constante y tomando la definición del error de estimación en (3.42), implica que  $\dot{\hat{Z}} = -\dot{\tilde{Z}}$ . Al sustituir la dinámica del error y la dinámica de lazo cerrado (3.41) en la ecuación anterior se obtiene:

$$\dot{V}(r, \tilde{Z}) = r^T (\tilde{Z}^T \beta(\boldsymbol{\eta}) - K_v r + \tau_d + \varepsilon) - tr\{\tilde{Z}^T N^{-1} (N\beta(\boldsymbol{\eta})r - NQ\hat{Z})\},$$

$$\dot{V}(r, \tilde{Z}) = \tilde{Z}^T \beta(\boldsymbol{\eta})r - r^T K_v r + r^T (\tau_d + \varepsilon) - tr\{\tilde{Z}^T \beta(\boldsymbol{\eta})r - \tilde{Z}^T Q\hat{Z}\},$$

$$\dot{V}(r, \tilde{Z}) = -r^T K_v r + r^T (\tau_d + \varepsilon) + tr\{\tilde{Z}^T Q(Z - \tilde{Z})\}.$$

Resolviendo y acotando los términos se obtiene:

$$\dot{V}(r, \tilde{Z}) = -[\lambda_{\min}\{K_v} \quad \lambda_{\min}\{Q\}] \begin{bmatrix} \|r\|^2 \\ \|\tilde{Z}\|^2 \end{bmatrix} + [(d_B + \varepsilon_N) \quad Z_B \lambda_{\max}\{Q\}] \begin{bmatrix} \|r\|^2 \\ \|\tilde{Z}\|^2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(r, \tilde{Z}) \leq - \left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \right\| \left[ (\min\{\lambda_{\min}\{K_v\}, \lambda_{\min}\{Q\}\}) \left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \right\| - (\max\{(d_B + \varepsilon_N), Z_B \lambda_{\max}\{Q\}\}) \right]$$

por lo tanto se concluye que:

$$\dot{V}(r, \tilde{Z}) \leq - \left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \right\| < 0 \quad (3.45)$$

siempre que:

$$\left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \right\| > \frac{\max\{(\varepsilon_N + d_B), Z_B \lambda_{\max}\{Q\}\}}{\min\{\lambda_{\min}\{K_v\}, \lambda_{\min}\{Q\}\}} \quad (3.46)$$

y de acuerdo al teorema 2.4.1, las trayectorias del sistema de lazo cerrado en (3.41) permanecerán

dentro de una región limitada por una hiper-esfera de radio  $r_h$ :

$$\left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \right\| \geq r_h = \frac{\max\{(\varepsilon_N + d_B), Z_B \lambda_{\max}\{Q\}\}}{\min\{\lambda_{\min}\{K_v\}, \lambda_{\min}\{Q\}\}} \quad (3.47)$$

por lo que  $r$  y  $\tilde{z}$  tienen soluciones UUB, y considerando las ecuaciones (3.18), (3.19) y (3.42)  $e$ ,  $\dot{e}$ ,  $q_p$ ,  $\dot{q}_p$  y  $\hat{Z}$  son también UUB.

### 3.5. Resultados de simulación

Las ecuaciones del modelo y los algoritmos de control desarrollados fueron simulados en MATLAB SIMULINK®<sup>®</sup>, utilizando el método numérico ode4 (Runge-Kutta) con un paso de integración de [0.001]. Como condición inicial para el modelo se eligió una posición del péndulo muy cercana al equilibrio superior en  $q_p = 3$  rad. La trayectoria deseada se describe mediante la función:

$$q_d = a \operatorname{sen} \left( \omega t + \frac{1}{2} \right) + b \quad (3.48)$$

con  $a = \pi/2$  rad,  $\omega = \pi/6$  rad/s y  $b = \pi$  rad. El controlador adaptativo por estimación de parámetros propuesto en (3.29) y el controlador adaptativo neuronal en (3.40) utilizaron los mismos valores de ganancia  $K_v$  y  $\Lambda$ . El controlador neuronal propuesto en (3.40) se diseñó con  $L = 10$  neuronas y se usaron valores constantes de pesos iniciales aleatorios en la matriz  $G^T$ , en el rango de  $[-1 \ 1]$ .

Cabe destacar que gracias a la propiedad de aproximación universal que poseen las redes neuronales, para implementar el controlador neuronal en (3.40) no se requiere de conocer a detalle los parámetros del mecanismo, a diferencia del controlador por estimación paramétrica (3.29) cuyo desempeño depende mayormente del modelo dinámico y de los parámetros físicos del mecanismo.

Las simulaciones se dividieron en dos ensayos. En la primera prueba se introdujo un cambio paramétrico en línea, modificando el valor de la masa del brazo  $m_p$  de 0.30 kg a 0.6 kg en  $t = 10$  segundos. Con el objetivo de probar la robustez de los controladores, el segundo ensayo consistió en agregar una perturbación en forma de torque al brazo del péndulo con valor de 5 Nm en  $t = 15$  segundos.

#### 3.5.1. Resultados de simulación del modelo aplicando cambios paramétricos en la masa

En esta sección se comparan los resultados obtenidos del controlador neuronal propuesto en (3.29) y el controlador adaptativo por estimación paramétrica en (3.40), empleados en el seguimiento de trayectoria del péndulo de rueda de reacción inercial con un cambio paramétrico en línea. Los resultados de la Figura 3.4 muestran que ambos controladores son efectivos en el seguimiento de la trayectoria  $q_d$  propuesta en (3.48) a pesar del cambio de masa aplicado durante la simulación.

Los valores de velocidad de la articulación  $q_p$  y la rueda de reacción  $q_w$  obtenidos de la prueba

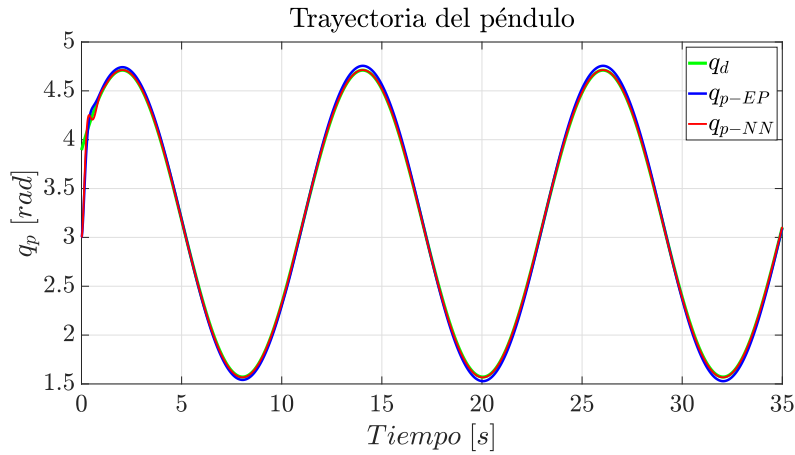


Figura 3.4: Seguimiento de trayectoria del péndulo con cambio de masa usando controlador adaptativo paramétrico  $q_{p-EP}$  y controlador adaptativo neuronal  $q_{p-NN}$ .

numérica son muy similares para ambos controladores, y tal como se observa en la Figura 3.5 se encuentran acotados. También los valores de torque de los gráficos en la Figura 3.6 muestran que ambos controladores reaccionan de forma similar al cambio de masa en el brazo del péndulo, incrementando ligeramente el valor de la entrada  $\tau_w$ .

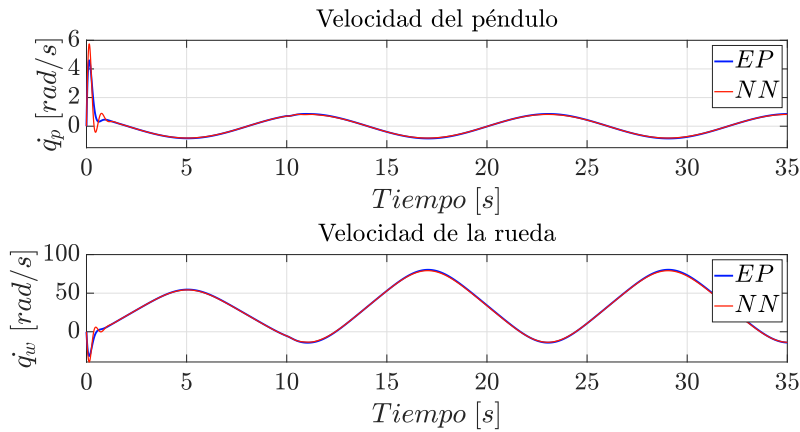


Figura 3.5: Evolución temporal de la velocidad  $\dot{q}_p$  y  $\dot{q}_w$  con el mecanismo asistido por los controladores en (3.29) y (3.40) en presencia de un cambio paramétrico en la masa.



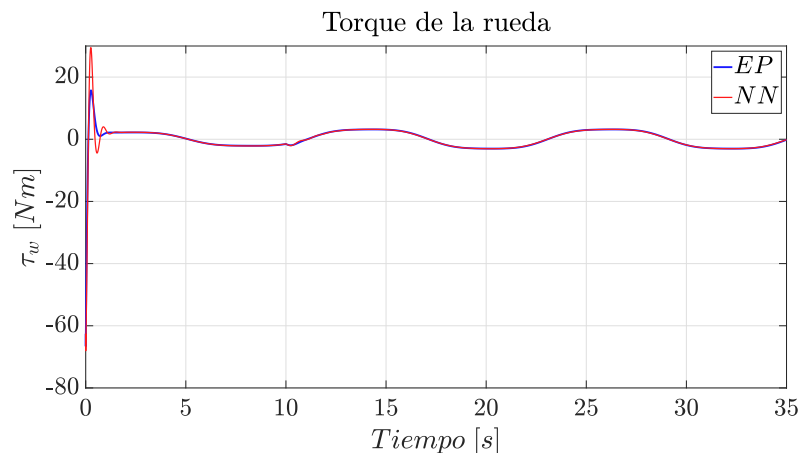


Figura 3.6: Torques de entrada a la rueda de reacción calculados por el controlador en (3.29) ( $EP$ ) y en (3.40) ( $NN$ ) con cambio paramétrico en línea.

Como se concluyó previamente en los análisis de estabilidad en (3.37) y (3.47), los valores estimados por las leyes de adaptación en (3.32) y (3.43) permanecen acotados durante toda la simulación como muestran los gráficos de la Figura 3.7. Además, los resultados obtenidos de la prueba sugieren robustez por parte de ambos controladores en presencia de cambios paramétricos, ya que como se muestra en los gráficos de la Figura 3.8 los errores de seguimiento de trayectoria permanecen acotados. Por lo que las soluciones del sistema dinámico presentan estabilidad de tipo UUB.

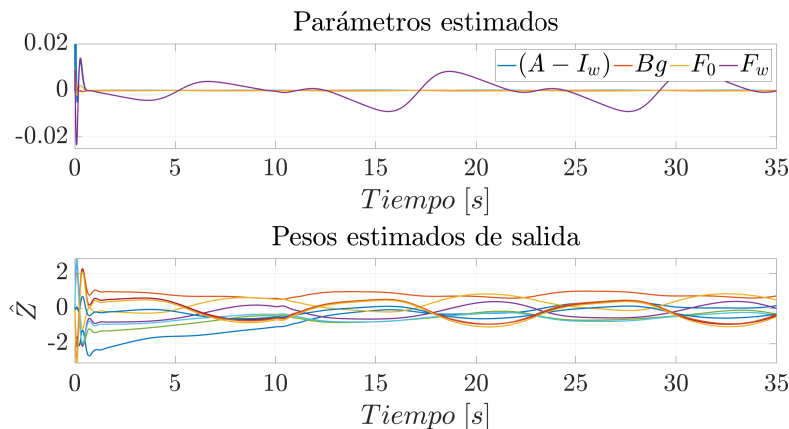


Figura 3.7: Simulación de la estimación de los parámetros desconocidos en (3.32) y estimación de pesos ideales a la salida de la red neuronal en (3.43), con el mecanismo afectado por un cambio de masa durante el proceso.

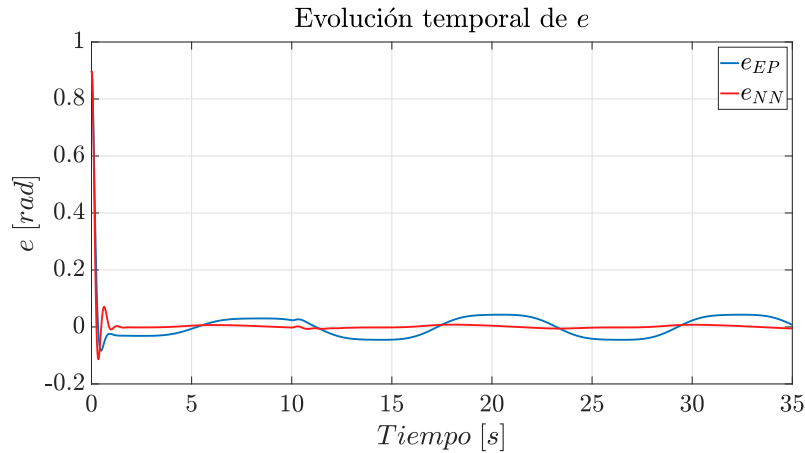


Figura 3.8: Evolución temporal de los errores para la ley de control (3.29) ( $e_{EP}$ ) y el controlador en (3.40) ( $e_{NN}$ ) en presencia de un cambio de masa en línea.

### 3.5.2. Resultados de simulación del modelo aplicando una perturbación

En esta sección se comparan los resultados obtenidos de la prueba de seguimiento de trayectoria para el péndulo de rueda de reacción inercial usando los dos controladores propuestos en (3.32) y (3.43) en presencia de una perturbación aplicada en línea.

Los gráficos de seguimiento de trayectoria de la Figura 3.9 muestran que ambos controladores cumplieron con éxito el objetivo de control propuesto, ya que a pesar de la perturbación aplicada en  $t = 15$  segundos, los movimientos angulares de la articulación  $q_p$  tienden a la trayectoria  $q_d$  propuesta en (3.48) durante toda la prueba.

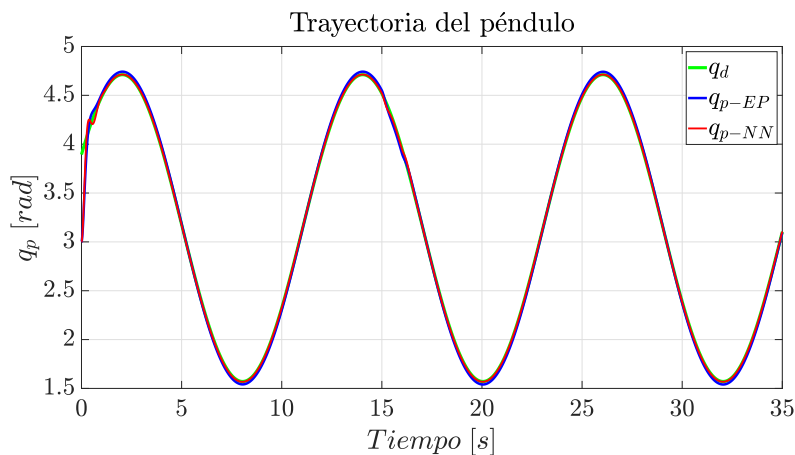


Figura 3.9: Seguimiento de trayectoria del péndulo de rueda de reacción inercial asistido por el controlador adaptativo paramétrico en (3.29) ( $q_{p-EP}$ ) y por el controlador adaptativo neuronal en (3.40) ( $q_{p-NN}$ ), en presencia de una perturbación.

Los valores de velocidad angular de la articulación  $\dot{q}_p$  y de la rueda de reacción  $\dot{q}_w$  obtenidos en esta prueba son muy similares para ambos controladores y permanecen acotados como se observa en la

Figura 3.10. De forma similar los torques calculados por las leyes de adaptación que se muestran en la Figura 3.11 se encuentran acotados durante toda la prueba.

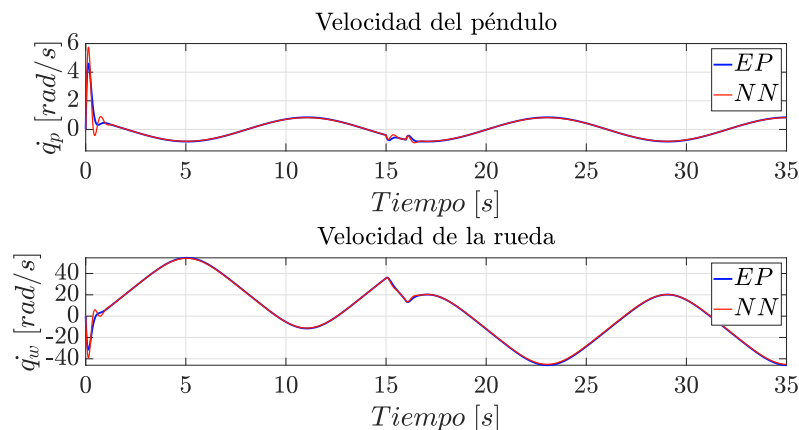


Figura 3.10: Evolución temporal de la velocidad  $\dot{q}_p$  y  $\dot{q}_w$  con el mecanismo asistido por los controladores en (3.29) y (3.40) en presencia de una perturbación.

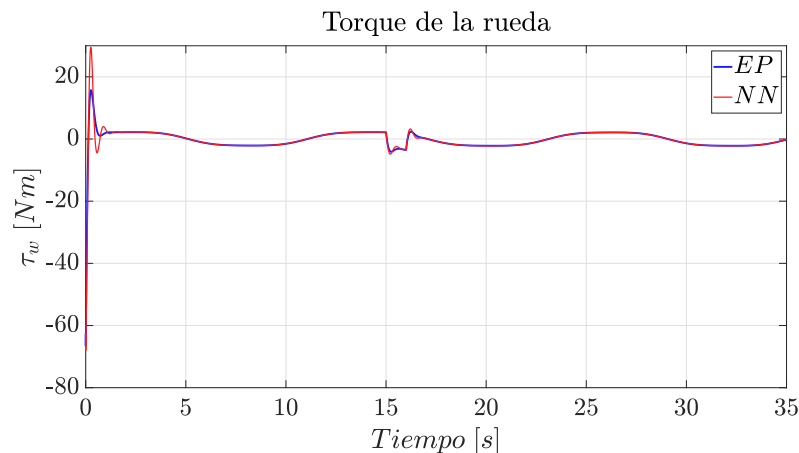


Figura 3.11: Torques de entrada a la rueda de reacción calculados por las leyes de control en (3.29) ( $EP$ ) y en (3.40) ( $NN$ ), en presencia de una perturbación.

Como se concluyó previamente en los análisis de estabilidad en (3.37) y en (3.47), las estimaciones de las leyes de adaptación en (3.32) y (3.43) permanecen acotados durante toda la simulación como muestran los gráficos de la Figura 3.12. Además, los resultados obtenidos de la prueba sugieren robustez por parte de ambos controladores en presencia de perturbaciones, los errores de seguimiento de trayectoria presentados en el gráfico de la Figura 3.13 muestran que el sistema se mantiene estable ya que los valores permanecen acotados.

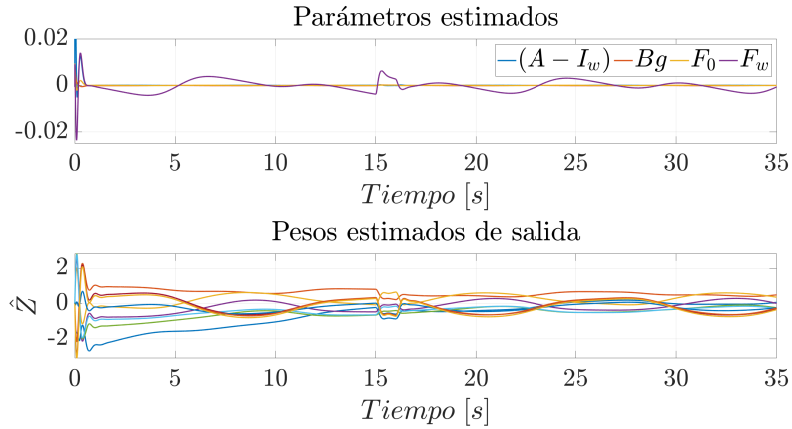


Figura 3.12: Estimación de parámetros desconocidos en (3.32) y estimación de pesos a la salida de la red neuronal en (3.43) con el mecanismo afectado por una perturbación.

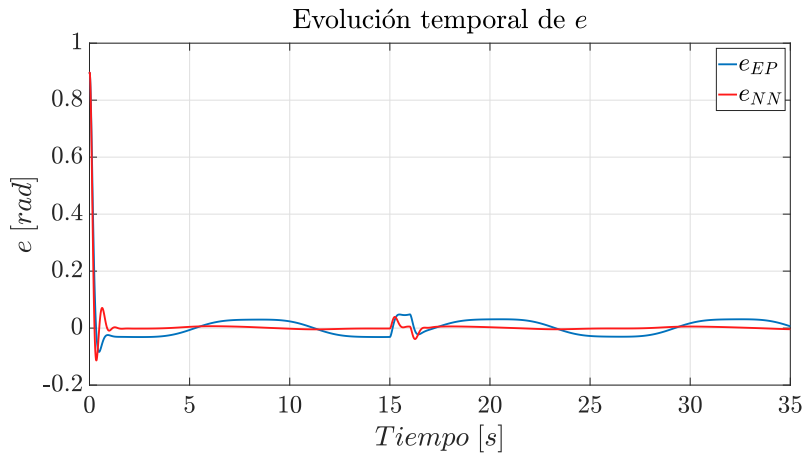


Figura 3.13: Evolución temporal de los errores para la ley de control (3.29) ( $e_{EP}$ ) y el controlador en (3.40) ( $e_{NN}$ ) en presencia de una perturbación.

De acuerdo a las conclusiones halladas en los análisis de estabilidad ambos controladores cumplen con el objetivo de estabilizar el péndulo de rueda de reacción inercial en el seguimiento de una trayectoria deseada con un valor de error de acuerdo a la definición de UUB. Los gráficos de las variables de lazo cerrado del sistema obtenidos durante las pruebas numéricas apoyan esta conclusión. Por otra parte los valores de RMS de las señales de error de seguimiento de trayectoria sugieren que el controlador neuronal propuesto en (3.43) presenta un mejor desempeño.

Tabla 3.3: Norma de los errores.

Controlador	Cambio paramétrico (RMS)	Perturbación (RMS)
Estimación paramétrica	0.0624	0.0591
Neuronal	0.0507	0.0509

### 3.6. Conclusión

En este capítulo se han presentado dos estrategias de control para resolver el problema de control de seguimiento de trayectoria en un péndulo de rueda de reacción inercial, basadas en el control adaptativo paramétrico, en el cual es necesario conocer al menos la estructura del modelo del mecanismo, y el control por compensación neuronal, en el cual no es necesario conocer la estructura exacta del modelo ni los parámetros que lo componen.

Los resultados de simulación obtenidos muestran que las soluciones propuestas logran que  $q_p$  siga la trayectoria deseada  $q_d$  en (3.48) con un valor de error. Además, ambos controladores presentan robustez ante cambios paramétricos y perturbaciones aplicadas al modelo. Se observa en la Tabla 3.3 que el controlador neuronal posee niveles mejores de error en el seguimiento de la trayectoria presentada en (3.48). Sin embargo, ambos controladores pueden modificar el radio de la hiper-esfera dado por las ecuaciones (3.37) y (3.47), cambiando principalmente el parámetro de control  $K_v$  en las ecuaciones (3.29) y (3.40), lo que implica cambiar los niveles de error de ambos controladores.

De acuerdo al teorema 2.4.1, las soluciones de los sistemas de lazo cerrado (3.30) y (3.41) son uniformemente últimamente acotadas (UUB), lo que establece que las soluciones están dentro de las regiones dadas por las ecuaciones (3.37) y (3.47) correspondientes a cada sistema de lazo cerrado. Esto implica que  $r$ ,  $\tilde{\phi}_p$ ,  $\tilde{Z}$ ,  $e$ ,  $\dot{e}$  y  $q_p$  presentan acotamiento de tipo uniformemente últimamente acotado (UUB). Por lo tanto, como se puede observar en los gráficos de las pruebas realizadas a los controladores, se ha cumplido con el objetivo de control propuesto.

## Capítulo 4

# Control neuronal aplicado a un mecanismo de tres grados de libertad

### 4.1. Introducción

Debido a los recientes avances tecnológicos y los nuevos objetivos de exploración que se han planteado en los últimos años, el desarrollo de vehículos de naturaleza no tripulada para la comunicación, reconocimiento y exploración ha ganado el interés de muchos investigadores. En la industria aeroespacial el control de orientación para mecanismos de esta naturaleza se ha hecho notar debido a su potencial aplicación en sistemas de navegación de vehículos espaciales y satélites [11, 15, 12, 74, 16, 75].

Un reto en el desarrollo de controladores para estabilizar la orientación de mecanismos tipo satélite es que poseen una dinámica de tipo no lineal, por lo que el desarrollo de controladores efectivos que se basen en el modelo dinámico suele ser una tarea laboriosa. En la literatura se han reportado trabajos donde la dinámica del sistema es usada para establecer una ley de control basada en el modelo. Mediante la linealización los autores buscan disminuir la complejidad del desarrollo del controlador, sin embargo esto generalmente implica limitar el funcionamiento del controlador entorno a un punto de equilibrio o volver muy lenta su respuesta [12, 13, 14]. Debido a esto, es necesario desarrollar nuevos sistemas de control que consideren gran parte de la dinámica del mecanismo, con el fin de garantizar un buen desempeño en las maniobras efectuadas para estabilizar la de orientación del vehículo.

Para los sistemas tipo satélite, un buen esquema de control debe ser rápido, preciso y lograr compensar las perturbaciones provocadas por factores externos como las radiaciones solares, la gravedad y los gradientes de torque. Además, debe considerar los efectos provocados por cambios en la distribución de la masa, causados por el movimiento de los componentes montados en la superficie de un satélite como antenas y paneles solares o por el movimiento de los tripulantes y el consumo de combustible. Por lo tanto es necesario desarrollar un esquema de control efectivo y robusto a cambios en la distribución de la masa y perturbaciones externas [11, 15, 12, 75, 76].

En la literatura es posible encontrar algunos trabajos donde se desarrollan controladores para me-

canismos tipo satélite que están relacionados al control difuso [74], control óptimo [76, 79], control por retroalimentación no lineal [77], control en modos deslizantes [78] y el control adaptativo [16, 80].

Como parte de este trabajo de tesis se propone el desarrollo de un controlador adaptativo neuronal para estabilizar la orientación de un mecanismo tipo satélite de tres grados de libertad que está actuado por ruedas de reacción inercial. Este mecanismo se inspira en una plataforma satelital suspendida, actuada por tres ruedas de reacción montadas en los ejes principales. El controlador incluye una red neuronal de enlace funcional cuyos pesos de salida son estimados durante el proceso y que le proporciona al controlador la capacidad de adaptarse ante perturbaciones externas y cambios paramétricos. Además, gracias a la propiedad de aproximación universal que poseen las redes neuronales, vista en la sección 2.2.4 este controlador no depende de la dinámica del modelo ni los parámetros que la componen, no obstante, en este Capítulo se modeló el sistema con la finalidad de plantear el análisis-diseño del controlador y realizarse las pruebas numéricas de simulación

## 4.2. Modelo dinámico del mecanismo

La dinámica de rotación del mecanismo tipo satélite se establece a partir del momento angular de un cuerpo rígido, que relaciona la masa del cuerpo  $m$  con su velocidad y está definido a través de la ecuación:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r}_p \times m\mathbf{v}, \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{r}_p$  es la posición relativa de una partícula de masa  $m$  moviéndose a velocidad  $\mathbf{v}$  entorno a un punto estacionario  $O_r$  de referencia.

Mediante la segunda ley de Newton es posible definir la relación entre la cantidad de movimiento rotacional de un cuerpo, descrito por la ecuación (4.1), y el torque aplicado por los elementos que lo componen [28]. Asumiendo que un cuerpo de masa  $m$  esta constituido por un conjunto de partículas más pequeñas de masa elemental  $\partial m$ , la segunda ley de Newton se plantea mediante:

$$\Sigma \partial \mathbf{f} = \Sigma \partial m \mathbf{a} = \frac{d}{dt} \Sigma \mathbf{v} \partial m. \quad (4.2)$$

Seleccionando como referencia a una partícula de masa elemental  $\partial m$  que se encuentra en una posición  $\mathbf{r}_p$  con respecto al origen  $O_r$  y sobre la cual se ejerce una fuerza  $\partial \mathbf{f}$ , entonces al aplicar el producto cruz se obtiene:

$$\partial \mathbf{T} = \mathbf{r}_p \times \partial \mathbf{f} = \mathbf{r}_p \times \partial m \mathbf{a} = \mathbf{r}_p \times \partial m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Si posteriormente se toman en cuenta todas las partículas que componen al cuerpo rígido la ecuación de movimiento rotacional queda descrita como:

$$\mathbf{T} = \Sigma \left( \mathbf{r}_p \times \partial m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right),$$

donde  $\mathbf{T} = \Sigma(\mathbf{r}_p \times \partial \mathbf{f})$  es el torque externo total o neto, que es aplicado entorno al punto  $O_r$ . Entonces,

si el punto  $O_r$  es un punto estacionario, la ecuación del movimiento rotacional del cuerpo entorno a ese punto es:

$$\mathbf{T} = \frac{d}{dt} \Sigma (\mathbf{r}_p \times \partial m \mathbf{v}). \quad (4.3)$$

Por otro lado, si se toma la ecuación (4.1) y se considera a la masa de la partícula como  $m = \Sigma \partial m$ , entonces el momento angular también puede definirse de la forma:

$$\partial \mathbf{H} = \mathbf{r}_p \times \partial m \mathbf{v}. \quad (4.4)$$

Considerando continuidad en la masa, las ecuaciones (4.3) y (4.4) pueden llevarse a un formato de integrales [81]. Por lo tanto se obtiene que el torque es:

$$\mathbf{T} = \int \left( \mathbf{r}_p \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dm, \quad (4.5)$$

mientras que la ecuación que describe el momento angular queda expresada como:

$$\mathbf{H} = \int (\mathbf{r}_p \times \mathbf{v}) dm. \quad (4.6)$$

Asumiendo que el cuerpo es de masa constante, entonces al derivar la ecuación anterior con respecto al tiempo dará como resultado:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \int \left( \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r}_p \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dm.$$

Por propiedades del producto cruz (Apéndice 6.2), el primer término de la integral es cero y el segundo término es equivalente a la ecuación (4.5), por lo que se concluye que:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{T}. \quad (4.7)$$

La velocidad total de un punto arbitrario con posición  $\mathbf{r}_p$  relativa al punto  $O_r$  es:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p, \quad (4.8)$$

donde  $\mathbf{v}_0$  es la velocidad lineal de este punto respecto al origen en  $O_r$  y en tanto  $\boldsymbol{\omega}$  es su velocidad angular. Entonces, al sustituir la ecuación (4.8) en (4.6) se obtiene que:

$$\mathbf{H} = \int (\mathbf{r}_p \times (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p)) dm$$

$$\mathbf{H} = \int (\mathbf{r}_p \times \mathbf{v}_0) dm + \int (\mathbf{r}_p \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p)) dm$$

donde el primer término es eliminado, ya que el punto  $O_r$  es estacionario. Por lo tanto el momento angular del cuerpo rígido se define por:



$$\mathbf{H} = \int (\mathbf{r}_p \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p)) dm. \quad (4.9)$$

#### 4.2.1. Ecuaciones de movimiento rotacional del modelo tipo satélite

La Figura 4.2 muestra un esquema del mecanismo propuesto para este trabajo de tesis donde se observan algunos vectores de posición de masas diferenciales y de los  $n$  actuadores con centros de masa  $\omega_n$ , que serán necesarios para describir la dinámica. Los detalles de la notación se pueden revisar en la Tabla 4.1.

Para describir los movimientos rotacionales del mecanismo se han propuesto dos marcos de referencia. Dado que ambos marcos de referencia tienen el mismo origen  $O_r$ , es posible caracterizar la posición de un sistema en términos del otro utilizando los ángulos de Euler. El marco de referencia no inercial posee coordenadas en  $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  y se encuentra atado al cuerpo rígido en todo momento, mientras que el marco de referencia inercial  $\mathcal{L} = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ , permite caracterizar los movimientos angulares realizados por el mecanismo en relación a un sistema de coordenadas fijo que corresponde al punto de observación en el espacio [28, 81].

Assumiendo que el modelo de la Figura 4.2 es un cuerpo rígido cuyos componentes se encuentran a una distancia fija del origen  $O_r$ , entonces la rotación total del mecanismo está gobernada por los efectos rotatorios de los elementos que lo componen [28, 81].

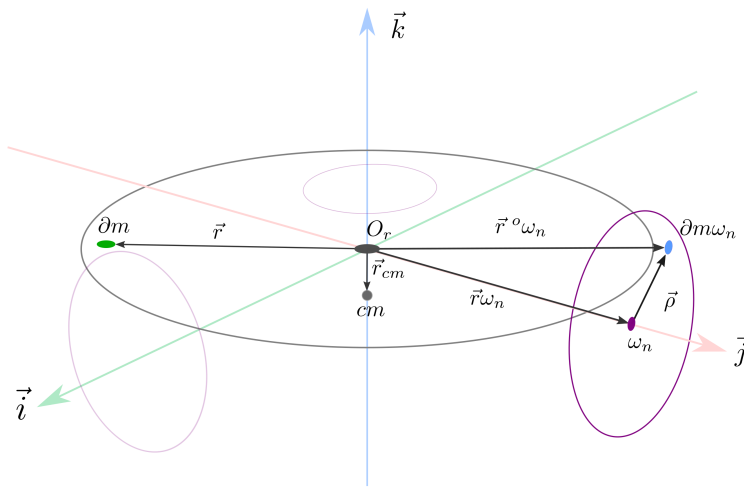


Figura 4.1: Diagrama de posiciones del mecanismo de tres grados de libertad.

Para calcular el momento angular total del mecanismo, se asume que se trabaja con un cuerpo rígido conformado por una plataforma y tres ruedas de reacción inercial montadas sobre los ejes principales en  $\mathcal{B}$ . De esta forma el momento angular del mecanismo será la sumatoria de los momentos angulares de la plataforma y de las ruedas de reacción inercial [14, 60, 81, 82]. Por lo que el momento angular total del mecanismo puede expresarse mediante:

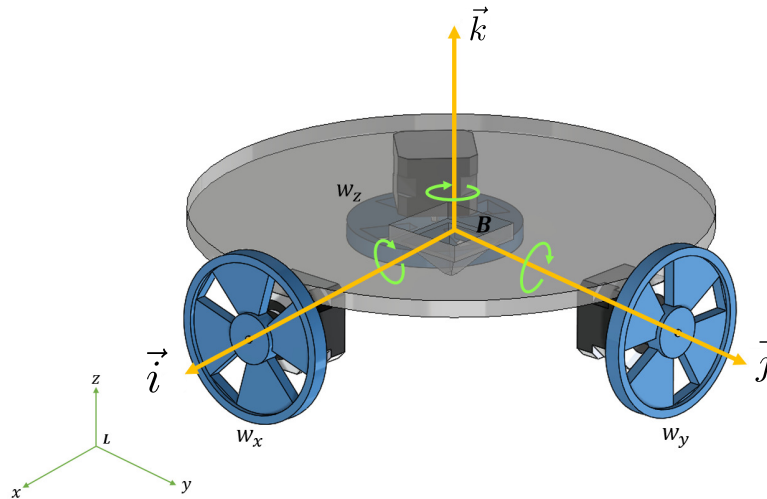


Figura 4.2: Modelo del mecanismo tipo satélite.

Tabla 4.1: Notación de los parámetros del mecanismo tipo satélite mostrado en el esquema de la Figura 4.1.

Parámetro	Descripción
$O_r$	Centro geométrico del satélite
$C_m$	Centro de masa del satélite
$dm$	Masa diferencial de la plataforma del satélite
$\vec{r}$	Posición de la masa diferencial $dm$ con respecto al centro geométrico $O_r$
$\vec{r}_{cm}$	Posición del centro de masa $C_m$ con respecto al centro geométrico del satélite
$w_n$	Centro de masa y geométrico de la rueda de reacción $n$
$dm_{wn}$	Masa diferencial de la rueda de reacción inercial $n$
$\vec{\rho}$	Posición de la masa diferencial $dm_{wn}$ con respecto al centro de masa de la rueda $w_n$
$\vec{r}^o w_n$	Posición de la masa diferencial $dm_{wn}$ con respecto al centro geométrico $O_r$
$\vec{r}_{wn}$	Posición del centro de masa de la rueda de reacción $w_n$ con respecto al centro de geométrico $O_r$

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_w \tag{4.10}$$

El cálculo del momento angular de la plataforma se desarrolla a partir de la definición en (4.9), donde la masa diferencial  $\partial m$  de acuerdo a la Figura 4.1 se encuentra en una posición  $\vec{r}$  con respecto al origen, por lo que al integrar (4.9) y tomando en cuenta que el centro de masa de la plataforma se encuentra desplazado a la posición  $\vec{r}_{cm}$  con respecto al origen, el momento angular de la plataforma queda definido por la expresión:

$$\mathbf{H}_p = M_p [\vec{r}_{cm} \times (\boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} \times \vec{r}_{cm})], \tag{4.11}$$

donde  $M_p$  es la masa de la plataforma,  $\vec{r}_{cm} \in \mathbb{R}^3$  es el vector de posición del centro de masa de la plataforma y  $\boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3$  es el vector que contiene las componentes de velocidad angular de la plataforma.

Al aplicar la identidad del triple producto vectorial (Apéndice 6.2) a la ecuación (4.11) se obtiene la expresión equivalente:

$$\mathbf{H}_p = M_p [\boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}}(\vec{r}_{cm} \cdot \vec{r}_{cm}) - \vec{r}_{cm}(\vec{r}_{cm} \cdot \boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}})]. \quad (4.12)$$

Ya que el vector de posición del centro de masa y el vector de velocidades angulares de la plataforma poseen componentes:

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k} \quad (4.13)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} = p_{cm}\hat{i} + q_{cm}\hat{j} + r_{cm}\hat{k}. \quad (4.14)$$

al sustituir (4.13) y (4.14) en (4.12) se obtiene la expresión que representa el momento angular de la plataforma:

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{J}_p \boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} \quad (4.15)$$

donde  $\mathbf{J}_p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es el tensor de inercia que describe la distribución constante de la masa del cuerpo rígido y esta definido como:

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} M_p(y_{cm}^2 + z_{cm}^2) & -M_p x_{cm} y_{cm} & -M_p x_{cm} z_{cm} \\ -M_p x_{cm} y_{cm} & M_p(x_{cm}^2 + z_{cm}^2) & -M_p y_{cm} z_{cm} \\ -M_p x_{cm} z_{cm} & -M_p y_{cm} z_{cm} & M_p(x_{cm}^2 + y_{cm}^2) \end{bmatrix}.$$

Debido a que los ejes de rotación de las ruedas de reacción inercial son coincidentes de forma paralela a los ejes de rotación principales del cuerpo rígido, su momento angular puede calcularse de forma independiente a la plataforma tomando como referencia su centro de masa. Utilizando el teorema de Steiner de los ejes paralelos permite expresar el momento angular total del sistema (plataforma-ruedas de reacción) a través de una sola ecuación como:

$$\mathbf{H}_S = \mathbf{J}_p \boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} + \mathbf{J}_r (\boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\Omega}_r), \quad (4.16)$$

donde  $\mathbf{J}_r \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es el tensor de inercia que contiene el valor de los momentos de inercia de las ruedas de reacción:

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} I_{wxx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{wyy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{wzz} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

donde cada componente de inercia de las ruedas se calcula mediante la ecuación (3.8) y  $\boldsymbol{\Omega}_r \in \mathbb{R}^3$  es el vector de velocidades angulares de las ruedas inerciales definido como:

$$\boldsymbol{\Omega}_r = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Para establecer la ecuación que describe al modelo dinámico de rotación del mecanismo se usa la

ecuación en (4.7), lo que implica derivar (4.16) con respecto al tiempo [81] para obtener la expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_s = & \mathbf{J}_p \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} \times \mathbf{J}_p \boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} + \mathbf{J}_r \frac{\partial (\boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\Omega}_r)}{\partial t} \\ & + (\boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\Omega}_r) \times \mathbf{J}_r (\boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\Omega}_r). \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde  $\mathbf{T}_s$  es un vector que contiene los pares provocados por fuerzas externas ejercidas al sistema.

De acuerdo a la ecuación (4.7), el torque externo  $\mathbf{T}$  aplicado a un cuerpo en rotación es:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega},$$

donde  $\mathbf{J}$  es el tensor de inercia del cuerpo y  $\boldsymbol{\omega}$  el vector de velocidades angulares. El primer término del lado derecho de esta ecuación ( $\mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}$ ) corresponde a un par interno producido en el cuerpo rígido. Asumiendo que este torque es generado por los actuadores, entonces  $\mathbf{J}_r \frac{\partial (\boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\Omega}_r)}{\partial t}$  en la ecuación (4.19) puede definirse como [60]:

$$\begin{aligned} I_{wx}(\dot{p}_{cm} + \dot{\Omega}_x) &= \tau_{wx} \\ I_{wy}(\dot{q}_{cm} + \dot{\Omega}_y) &= \tau_{wy} \\ I_{wz}(\dot{r}_{cm} + \dot{\Omega}_z) &= \tau_{wz}. \end{aligned}$$

donde  $\tau_{wx}$ ,  $\tau_{wy}$  y  $\tau_{wz}$  representan los pares de entrada a las ruedas de reacción inercial y con ello se obtiene la representación matricial de la dinámica de rotación en lazo abierto:

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} Jp_{xx} & Jp_{xy} & Jp_{xz} \\ Jp_{yx} & Jp_{yy} & Jp_{yz} \\ Jp_{zx} & Jp_{zy} & Jp_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{cm} \\ \dot{q}_{cm} \\ \dot{r}_{cm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{cm} \\ q_{cm} \\ r_{cm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{wx} \\ \tau_{wy} \\ \tau_{wz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{dwx} \\ \tau_{dwy} \\ \tau_{dwz} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

donde las componentes de la matriz de Coriolis y de fuerzas centrífugas están definidas por:

$$\begin{aligned} c_{11} &= Jp_{zx}q_{cm} - Jp_{yx}r_{cm} & c_{21} &= Jp_{xx}r_{cm} - Jp_{zx}p_{cm} + (I_{wx} - I_{wzz})r_{cm} \\ c_{12} &= Jp_{zy}q_{cm} - Jp_{yy}r_{cm} + (I_{wzz} - I_{wy})r_{cm} & c_{22} &= Jp_{xy}r_{cm} - Jp_{zy}p_{cm} \\ c_{13} &= Jp_{zz}q_{cm} - Jp_{yz}r_{cm} & c_{23} &= Jp_{xz}r_{cm} - Jp_{zz}p_{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{31} &= Jp_{yx}p_{cm} - Jp_{xx}q_{cm} + (I_{wy} - I_{wx})q_{cm} \\ c_{32} &= Jp_{yy}p_{cm} - Jp_{xy}q_{cm} \\ c_{33} &= Jp_{yz}p_{cm} - Jp_{xz}q_{cm}. \end{aligned}$$

Las componentes del vector  $\mathbf{T}_s$  en un entorno de operación real de un satélite corresponden a pares gravitatorios, torques aerodinámicos, presiones solares y perturbaciones magnéticas o una sumatoria de todos. Sin embargo, ya que este modelo esta basado en una plataforma experimental la única fuerza externa que actúa sobre mecanismo es la gravedad, por lo que el vector de torques externos se define por el producto cruz:

$$\mathbf{T}_s = \boldsymbol{\tau}_g = \vec{r}_{cm} \times M_s g \vec{\gamma},$$

donde  $M_s$  es la masa total del mecanismo tipo satélite,  $g$  la constante de gravedad y  $\vec{\gamma}$  es un vector que proyecta esta hacia el centro de la tierra [14, 82].

Al sustituir  $\boldsymbol{\tau}_g$  en (4.20) se obtiene una representación matricial de la dinámica de rotación del sistema en forma de la ecuación general para los mecanismos de  $n$  grados de libertad:

$$M_B \dot{\boldsymbol{\omega}}_{cm}^{\mathcal{B}} + C_B(\vec{r}_{cm}, \boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}}) \boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\tau}_w + \boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{\tau}_g, \quad (4.21)$$

donde  $M_B(\vec{r}_{cm}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de inercia;  $C_B(\vec{r}_{cm}, \boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}}) \boldsymbol{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis;  $\boldsymbol{\tau}_w \in \mathbb{R}^3$  es un vector de torques atribuidos a los actuadores y  $\boldsymbol{\tau}_d \in \mathbb{R}^3$  es el vector de perturbaciones.

#### 4.2.2. Definición de los marcos de referencia

La relación entre los movimientos angulares en  $\mathcal{B}$  y el marco de referencia inercial  $\mathcal{L}$  se establece a través de los ángulos de Euler (roll:  $\phi$ , pitch:  $\theta$ , yaw:  $\psi$ ) mediante una matriz de transformación general:

$$R(\boldsymbol{\Theta}) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}$$

donde  $R(\boldsymbol{\Theta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y

$$\boldsymbol{\Theta} = [\phi \ \theta \ \psi]. \quad (4.22)$$

Además, cada movimiento angular en  $\mathcal{B}$  está asociado a una matriz de rotación en particular, a través de la cual se establece una relación entre la posición angular actual y el marco de referencia inercial  $\mathcal{L}$ . Existen distintas formas de caracterizar la orientación de un cuerpo rígido a través de los ángulos de Euler, en este trabajo de tesis se eligió la secuencia (z-y-x) que forma parte de la clasificación de los ángulos de Tait-Bryan [83, 84]. La cual se refiere a la secuencia de rotaciones sucesivas que permiten caracterizar la posición actual del cuerpo rígido respecto al marco de referencia  $\mathcal{L}$ , tal como se muestra en la Figura 4.3.

La primera rotación se realiza entorno al eje  $\hat{i}$  y se representa mediante el ángulo de Euler  $\phi$  correspondiente al movimiento de balanceo o *roll*.

$$\begin{bmatrix} x_\phi \\ y_\phi \\ z_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

La segunda rotación, representada por el ángulo  $\theta$  corresponde al movimiento de cabeceo o *pitch* y se realiza entorno al eje  $y_\phi$ .

$$\begin{bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \\ z_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\phi \\ y_\phi \\ z_\phi \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Finalmente se realiza una rotación sobre el nuevo eje  $z_\theta$  correspondiente al movimiento de guiñada o *yaw* representado por el ángulo  $\psi$ , la cual dejará al cuerpo rígido en su orientación final.

$$\begin{bmatrix} x_\psi \\ y_\psi \\ z_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \\ z_\theta \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

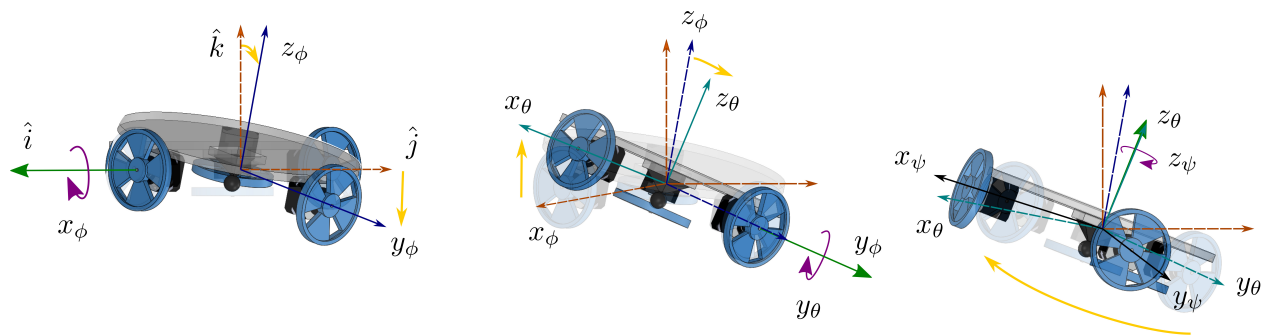


Figura 4.3: Rotaciones sucesivas del modelo.

De lo anterior se obtiene el siguiente conjunto de matrices de transformación:

$$R_{x_b}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix},$$

$$R_{y_b}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$R_{z_b}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mediante la multiplicación sucesiva de las matrices de transformación anteriores se obtiene la matriz de rotación general, a través de la cual las posiciones angulares en  $\mathcal{B}$  pueden expresarse en términos del marco de referencia inercial  $\mathcal{L}$ :

$$R(\Theta) = R_{z_b}(\psi) \cdot R_{y_b}(\theta) \cdot R_{x_b}(\phi)$$

$$R(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Ya que las matrices de rotación cumplen con la propiedad de orto-normalidad, también se pueden referir los movimientos angulares en  $\mathcal{L}$  con respecto a  $\mathcal{B}$  utilizando la inversa:

$$R_{\mathcal{B}} = R(\Theta)^{-1} = R(\Theta)^T \quad (4.27)$$

Otro factor importante para describir la dinámica de rotación del modelo es establecer las razones de cambio del sistema en  $\mathcal{B}$  respecto al marco de referencia  $\mathcal{L}$  mediante la matriz de rotación (4.26) y una matriz anti-simétrica  $\mathbf{S}$ , que a detalle se describe en el Apéndice 6.2 [85]. Para ello se plantea lo siguiente:

Sea  $\mathbf{R}$  una matriz orto-normal de forma que se cumple que:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

y su derivada con respecto al tiempo está dada por:

$$\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$$

Se define entonces una matriz anti-simétrica:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$$

donde:

$$\mathbf{S}^T + \mathbf{S} = \mathbf{0}$$

Aprovechando la propiedad de orto-normalidad, la relación entre la matriz  $\mathbf{R}$  y la matriz anti-simétrica  $\mathbf{S}$  queda definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{R}}, \\ \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Derivado de lo anterior, la relación entre las velocidades angulares en el marco  $\mathcal{B}$  y el marco inercial  $\mathcal{L}$  están definidas por:

$$\dot{R}(\Theta) = R(\Theta) \mathbf{S}(\omega_{cm}^{\mathcal{B}}), \quad (4.29)$$

donde  $\omega_{cm}^{\mathcal{B}} = [p_{cm} \ q_{cm} \ r_{cm}]^T$  son las velocidades angulares en  $\mathcal{B}$  y  $\mathbf{S}(\omega_{cm}^{\mathcal{B}})$  es la matriz tornillo

simétrica del vector  $\omega_{cm}^{\mathcal{B}}$  expresada por [86]:

$$S(\omega_{cm}^{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} 0 & -r_{cm} & q_{cm} \\ r_{cm} & 0 & -p_{cm} \\ -q_{cm} & p_{cm} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

De este modo las razones de cambio entre los movimientos angulares en  $\mathcal{B}$  y los ángulos de Tait-Bryan se establecen mediante las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\Theta} = W_R(\Theta)\omega_{cm}^{\mathcal{B}} \quad (4.31)$$

$$\omega_{cm}^{\mathcal{B}} = W_R(\Theta)^{-1}\dot{\Theta} \quad (4.32)$$

donde  $\dot{\Theta}$  es el vector que representa la variación temporal de los ángulos de Euler,  $\omega_{cm}^{\mathcal{B}}$  es el vector de velocidades angulares en  $\mathcal{B}$  y donde:

$$W_R(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & \text{sen } \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$W_R(\Theta)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \cos \theta \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

La ecuación (4.31) transforma velocidades angulares medidas en  $\mathcal{B}$  a términos de los ángulos de Euler en  $\mathcal{L}$ , mientras que la ecuación (4.32) hace la operacional contraria. Cabe destacar que la matriz de transformación  $W_R(\Theta)$  es singular para valores de  $\theta = \pm 90^\circ[2n + 1]$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  y su inversa  $W(\Theta)^{-1}$  no tiene restricciones.

### 4.2.3. Dinámica de rotación

Anteriormente se propuso la dinámica de rotación del mecanismo en el marco de referencia no inercial  $\mathcal{B}$ , ahora mediante la sustitución de (4.32) en la ecuación (4.21) se establece la dinámica de rotación en términos del vector  $\Theta$  [87]. Para ello se deriva con respecto al tiempo la ecuación (4.32) y se aplica de propiedad de la derivada de una matriz inversa:

$$\dot{W}_R(\Theta)^{-1} = -W_R(\Theta)^{-1}\dot{W}_R(\Theta)W_R(\Theta)^{-1}$$

obteniendo así:

$$\dot{\omega}_{cm}^{\mathcal{B}} = -W_R(\Theta)^{-1}\dot{W}_R(\Theta)W_R(\Theta)^{-1}\dot{\Theta} + W_R(\Theta)^{-1}\ddot{\Theta}. \quad (4.35)$$



Sustituyendo (4.35) en (4.21) se obtiene:

$$M_B(-W_R(\Theta)^{-1}\dot{W}_R(\Theta)W_R(\Theta)^{-1}\dot{\Theta} + W_R(\Theta)^{-1}\ddot{\Theta}) + C_B(\vec{r}_{cm}, \omega_{cm}^{\mathcal{B}})W_R(\Theta)^{-1}\ddot{\Theta} + \tau_w + \tau_d = \tau_g,$$

multiplicando toda la ecuación por  $W(\Theta)^{-T}$  y agrupando términos semejantes se obtiene:

$$W_R(\Theta)^{-T}M_BW_R(\Theta)^{-1}\ddot{\Theta} + W_R(\Theta)^{-T}[C_B(\vec{r}_{cm}, \omega_{cm}^{\mathcal{B}}) - M_BW_R(\Theta)^{-1}\dot{W}_R(\Theta)]W_R(\Theta)^{-1}\dot{\Theta} + W_R(\Theta)^{-T}(\tau_w + \tau_d) = W_R(\Theta)^{-T}\tau_g.$$

Finalmente para simplificar la expresión anterior puede reescribirse como:

$$M_L(\Theta)\ddot{\Theta} + C_L(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta} + \tau_\Omega + \tau_p = \tau_G. \quad (4.36)$$

La ecuación (4.36) representa la dinámica de rotación del mecanismo en términos del marco de referencia inercial  $\mathcal{L}$ , y los términos que componen la expresión están definidos por:

$$M_L = W_R(\Theta)^{-T}M_BW_R(\Theta)^{-1} \quad (4.37)$$

$$C_L = W_R(\Theta)^{-T}[C_B(\vec{r}_{cm}, \omega_{cm}^{\mathcal{B}}) - M_BW_R(\Theta)^{-1}\dot{W}_R(\Theta)]W_R(\Theta)^{-1} \quad (4.38)$$

$$\tau_\Omega = W_R(\Theta)^{-T}\tau_w \quad (4.39)$$

$$\tau_p = W_R(\Theta)^{-T}\tau_d \quad (4.40)$$

$$\tau_G = W_R(\Theta)^{-T}\tau_g, \quad (4.41)$$

Y la representación del modelo en espacio de estados es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ M_L^{-1}(\Theta)[\tau_G - C_L(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta} - \tau_\Omega - \tau_p] \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

donde  $M_L(\Theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de inercia;  $C_L(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta} \in \mathbb{R}^3$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis;  $\tau_\Omega \in \mathbb{R}^3$  es un vector de torques atribuidos a los actuadores,  $\tau_p \in \mathbb{R}^3$  es el vector de perturbaciones y  $\tau_G \in \mathbb{R}^3$  es el vector de torques producidos por la gravedad.

### 4.3. Problema de control

Uno de los retos en la navegación de vehículos suspendidos de tipo satélite es controlar de forma eficiente su orientación durante el seguimiento de una trayectoria [60, 88, 89]. Asumiendo que la orientación deseada para el mecanismo propuesto:

$$\Theta_d = [\phi_d \ \theta_d \ \psi_d]^T \quad (4.43)$$

es dos veces diferenciable con respecto al tiempo y acotada por un valor escalar de forma que:

$$\left\| \begin{array}{l} \Theta_d(t) \\ \dot{\Theta}_d(t) \\ \ddot{\Theta}_d(t) \end{array} \right\| \leq \alpha_B, \quad \alpha_B > 0. \quad (4.44)$$

y tomando la dinámica del mecanismo de tres grados de libertad expresada en (4.36), el problema de control consiste en estabilizar la orientación del mecanismo tipo satélite mediante una señal de entrada  $\tau_\Omega$ , calculada por un controlador adaptativo neuronal de forma que el error de orientación:

$$\xi_r = \Theta_d - \Theta, \quad \xi_r \in \mathbb{R}^3 \quad (4.45)$$

y las variables del sistema en lazo cerrado sean uniformemente últimamente acotadas de acuerdo al teorema 2.4.1.

## 4.4. Controlador neuronal

Como se describió, la propiedad de aproximación universal que poseen las redes neuronales descrita en la sección 2.2.3 permite que el controlador estime la dinámica desconocida del mecanismo y compense las perturbaciones externas y cambios paramétricos. Para incorporar una red neuronal de enlace funcional en este modelo, primero se propone la ecuación:

$$r = (\dot{\Theta}_d - \dot{\Theta}) + \Lambda \xi_r, \quad r \in \mathbb{R}^3 \quad (4.46)$$

donde  $\Lambda > 0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz diagonal de parámetros de diseño y  $\xi_r$  esta dado por (4.45).

La ecuación (4.46) simplifica el desarrollo de la dinámica del sistema de lazo abierto, ya que disminuye la dimensión de las ecuaciones diferenciales que representan al sistema dinámico, al considerar la dinámica del error y su velocidad en una sola variable.

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.46) y multiplicando por la matriz de inercia  $M_L(\eta)$  se obtiene:

$$M_L(\Theta)\dot{r} = M_L(\Theta)[\ddot{\Theta}_d - \ddot{\Theta}] + M_L(\Theta)\Lambda\dot{\xi}_r. \quad (4.47)$$

Posteriormente se despeja el primer término de (4.36):

$$M_L(\Theta)\ddot{\Theta} = -C_L(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta} - \tau_\Omega - \tau_p + \tau_G.$$

y al sustituirlo en la ecuación (4.47):

$$M_L(\Theta)\dot{r} = M_L(\Theta)\ddot{\Theta}_d - [-C_L(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta} - \tau_\Omega - \tau_p + \tau_G] + M_L(\Theta)\Lambda\dot{\xi}_r.$$

se obtiene la dinámica de lazo abierto del mecanismo en términos de  $\mathbf{r}$ :

$$M_L(\Theta)\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}_\Omega + \boldsymbol{\tau}_p \quad (4.48)$$

donde:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = M_L(\Theta)[\ddot{\Theta}_d + \Lambda\dot{\xi}_r] + C_L(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta} - \boldsymbol{\tau}_G \quad (4.49)$$

representa la dinámica no lineal del mecanismo tipo satélite.

Utilizando una red neuronal de enlace funcional, la estimación de la dinámica no lineal  $f(x)$  se lleva a cabo mediante:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = Z^T \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.50)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el error de aproximación acotado por  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| < \varepsilon_N$  y  $\varepsilon_N > 0$  es una constante escalar,  $Z \in \mathbb{R}^{L \times 3}$  es un vector de pesos ideales de valor constante acotado por  $\|Z\| \leq Z_B$  y  $Z_B > 0$  es un valor escalar y donde  $L$  representa el número de neuronas.

La red neuronal contiene en su estructura un vector de funciones base:

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\sigma}(G^T \boldsymbol{\eta})$$

donde el argumento  $\boldsymbol{\eta} \equiv [1 \ \xi_r^T \ \dot{\xi}_r^T \ \Theta_d^T \ \dot{\Theta}_d^T \ \ddot{\Theta}_d^T]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  es el vector aumentado que contiene las  $n + 1$  entradas a la red neuronal provenientes del sistema,  $G \in \mathbb{R}^{(n+1) \times L}$  es una matriz de pesos aleatorios de valor constante y  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1(\odot) \ \sigma_2(\odot) \ \sigma_3(\odot) \ \dots \ \sigma_L(\odot)]^T \in \mathbb{R}^L$  es un vector de funciones de activación que para efectos de este trabajo de tesis contendrá funciones tangente hiperbólica.

Al sustituir la estimación de la dinámica, la ecuación (4.48) queda expresada como:

$$M_L(\Theta)\dot{\mathbf{r}} = Z^T \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}_\Omega + \boldsymbol{\tau}_p \quad (4.51)$$

donde las perturbaciones están acotadas por una constante escalar de forma que  $\|\boldsymbol{\tau}_p\| < d_B$  y  $d_B > 0$ . Se propone entonces la ley de control para el mecanismo:

$$\boldsymbol{\tau}_\Omega = -\hat{Z}^T \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta}) - K_v \mathbf{r} \quad (4.52)$$

donde  $K_v > 0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz diagonal de ganancias constantes y  $\hat{Z} \in \mathbb{R}^{L \times 3}$  es un vector de pesos estimados variantes en el tiempo. Posteriormente se sustituye la ecuación (4.52) en (4.51) y se obtiene la dinámica de lazo cerrado del sistema:

$$M_L(\Theta)\dot{\mathbf{r}} = \tilde{Z}^T \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta}) - K_v \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.53)$$

donde

$$\tilde{Z} = Z - \hat{Z}, \quad (4.54)$$

es el error de estimación de pesos de la salida de la red neuronal.

## 4.5. Análisis de estabilidad

En este análisis de estabilidad se demuestra que las variables del sistema de lazo cerrado y los errores de orientación presentan un comportamiento de tipo UUB, de acuerdo a la definición 2.4.4. El análisis de estabilidad se desarrolla a partir de la función candidata de Lyapunov globalmente definida positiva y radialmente desacotada:

$$V(\mathbf{r}, \tilde{Z}) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T M_L \mathbf{r} + \frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{Z}^T F^{-1} \tilde{Z}\}, \quad (4.55)$$

donde  $F = F^T \in \mathbb{R}^{L \times L}$  es una matriz diagonal definida positiva de valores constantes.

Derivando con respecto al tiempo la función (4.55) y considerando que  $M_L$  es simétrica, además que  $F$  es una matriz de valor constante y que  $F = F^T > 0$ , lo que implica que  $F^{-1} = F^{-T} > 0$ , se obtiene:

$$\dot{V}(\mathbf{r}, \tilde{Z}) = \mathbf{r}^T M_L \dot{\mathbf{r}} + \text{tr}\{\tilde{Z}^T F^{-1} \dot{\tilde{Z}}\}.$$

Se propone entonces que:

$$\dot{\tilde{Z}} = -F \beta(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{r}^T + F D \hat{Z}. \quad (4.56)$$

donde  $D \in \mathbb{R}^{L \times L}$  es matriz diagonal definida positiva de valores constantes.

Al sustituir las ecuaciones (4.53) y (4.56) en la derivada de la función candidata de Lyapunov se obtiene:

$$\dot{V}(\mathbf{r}, \tilde{Z}) = \mathbf{r}^T (\tilde{Z}^T \beta(\boldsymbol{\eta}) - K_v \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\varepsilon}) - \text{tr}\{\tilde{Z}^T (\beta(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{r}^T - D \hat{Z})\},$$

aplicando las propiedades de la traza y despejando  $\hat{Z}$  de la ecuación (4.54):

$$\dot{V}(\mathbf{r}, \tilde{Z}) = \mathbf{r}^T \tilde{Z}^T \beta(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{r}^T K_v \mathbf{r} + \mathbf{r}^T (\boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\varepsilon}) - \text{tr}\{\tilde{Z}^T \beta(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{r}^T - \tilde{Z}^T D \hat{Z}\}$$

$$\dot{V}(\mathbf{r}, \tilde{Z}) = -\mathbf{r}^T (K_v \mathbf{r} - \boldsymbol{\tau}_p - \boldsymbol{\varepsilon}) + \text{tr}\{\tilde{Z}^T D (Z - \tilde{Z})\}$$

$$\dot{V}(\mathbf{r}, \tilde{Z}) = -\mathbf{r}^T K_v \mathbf{r} + \mathbf{r}^T (\boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\varepsilon}) + \text{tr}\{\tilde{Z}^T D Z\} - \text{tr}\{\tilde{Z}^T D \tilde{Z}\}$$

Aplicando norma dos para acotar los términos se obtiene que:

$$\dot{V}(\mathbf{r}, \tilde{Z}) \leq -\lambda_{\min}\{K_v\} \|\mathbf{r}\|^2 + (d_B + \varepsilon_N) \|\mathbf{r}\| + \lambda_{\max}\{D\} Z_B \|\tilde{Z}\| - \lambda_{\min}\{D\} \|\tilde{Z}\|^2$$

$$\dot{V}(\mathbf{r}, \tilde{Z}) \leq -[\lambda_{\min}\{K_v\} \quad \lambda_{\min}\{D\}] \begin{bmatrix} \|\mathbf{r}\|^2 \\ \|\tilde{Z}\|^2 \end{bmatrix} + [(d_B + \varepsilon_N) \quad Z_B \lambda_{\max}\{D\}] \begin{bmatrix} \|\mathbf{r}\| \\ \|\tilde{Z}\| \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(\mathbf{r}, \tilde{Z}) \leq - \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \right\| \left[ (\min\{\lambda_{\min}\{K_v\}, \lambda_{\min}\{D\}\}) \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \right\| - (\max\{(d_B + \varepsilon_N), Z_B \lambda_{\max}\{D\}\}) \right]$$

por lo tanto, se concluye que:

$$\dot{V}(\mathbf{r}, \tilde{Z}) \leq - \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \right\| < 0 \quad (4.57)$$

siempre que:

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \right\| > \frac{\max\{(\varepsilon_N + d_B), Z_B \lambda_{\max}\{D\}\}}{\min\{\lambda_{\min}\{K_v\}, \lambda_{\min}\{D\}\}}. \quad (4.58)$$

Por consiguiente de acuerdo al Teorema 2.4.1 de UUB, las trayectorias del sistema de lazo cerrado (4.53) permanecerán en dentro de una región limitada por una hiper-esfera de radio  $r_{hs}$  cuyo valor es dado por:

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \right\| \geq r_{hs} = \frac{\max\{(\varepsilon_N + d_B), Z_B \lambda_{\max}\{D\}\}}{\min\{\lambda_{\min}\{K_v\}, \lambda_{\min}\{D\}\}} \quad (4.59)$$

y considerando las ecuaciones (4.45) y (4.46)  $\xi_r$  entonces las variables  $\dot{\xi}_r$ ,  $\Theta$ ,  $\dot{\Theta}$  atribuidas a  $\mathbf{r}$  son también UUB. Finalmente considerando la ecuación (4.54), se concluye que la estimación de pesos ideales  $\hat{Z}$  es también de tipo UUB.

Finalmente, sustituyendo la ecuación (4.56) en la derivada con respecto al tiempo de (4.54) y recordando que  $Z$  es un vector de pesos ideales de valor constante, se obtiene la ley de estimación de pesos:

$$\dot{\hat{Z}} = F\beta(\eta)\mathbf{r}^T - FD\hat{Z}. \quad (4.60)$$

## 4.6. Pruebas de simulación

Con el propósito de evaluar el desempeño del controlador neuronal (4.52) se llevaron a cabo ensayos de simulación. Los resultados de las pruebas que se muestran en esta sección se obtuvieron a través de la plataforma MATLAB SIMULINK<sup>®</sup> utilizando el método numérico ode4 (Runge-Kutta) con un paso de integración de [0.001]. Los parámetros físicos propuestos para el mecanismo están listados en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Parámetros físicos propuestos para el modelo de tres grados de libertad.

Ganancia	Descripción	Valor
$r_p$	Radio de la plataforma	0.5 m
$h_p$	Altura de la plataforma	0.1 m
$M_p$	Masa de la plataforma	3 kg
$M_r$	Masa de las ruedas de reacción	0.5 kg
$r_w$	Radio de las ruedas de reacción	0.1 m

Las ganancias de control usadas para la simulación del modelo tipo satélite (4.36) usando el controlador neuronal (4.52) son:  $K_v = \text{diag}\{15, 8, 7\}$ ,  $\Lambda = \text{diag}\{7, 7, 1\}$ ,  $F = \text{diag}\{0.0264, 0.027, 0.03892, 0.2060, 0.3202, 0.1816, 0.730, 0.3302, 0.0334, 0.5320, 0.2136, 0.0128, 0.831, 0.306, 0.0617\}$ ,  $D = \text{diag}\{2.77,$

6.25, 13.3, 12.85, 0.9680, 6.3920, 8.4320, 6.67, 10.51, 1.04, 3.8, 0.235, 0.458, 5.12, 0.5879}. El controlador neuronal se programó con  $L = 15$  neuronas en la capa oculta y la matriz de pesos de entrada  $G$  toma valores aleatorios constantes en el rango de  $[-1, 1]$ .

Cabe destacar que, debido a la propiedad de aproximación universal que presentan las redes neuronales descrita en la sección 2.2.4, este controlador no necesita de los parámetros exactos del modelo para estabilizar el mecanismo; por lo que el vector de entradas a la red neuronal  $\boldsymbol{\eta} \equiv [1 \ \dot{\boldsymbol{\xi}}_r^T \ \ddot{\boldsymbol{\xi}}_r^T \ \boldsymbol{\Theta}_d^T \ \dot{\boldsymbol{\Theta}}_d^T \ \ddot{\boldsymbol{\Theta}}_d^T]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  únicamente contiene errores de seguimiento y la trayectoria deseada.

Como se describió en la sección 4.1 de este capítulo, compensar los cambios en la distribución de la masa es uno de los retos que deben superar los controladores desarrollados para mecanismos de tipo satélite. En las pruebas de simulación que se muestran en esta sección, el controlador neuronal se pone a prueba ante cambios paramétricos de tipo desplazamiento en el centro de masa. Al inicio el centro de masa del mecanismo se sitúa de la posición  $\vec{r}_{cm} = [0, 0, -0.1]$ , posteriormente es desplazado de acuerdo a  $\vec{r}_{cm}(t) = [0 + t/100, 0 - t/100, -0.1]$  durante  $t = 10$  segundos, por lo que el centro de masa ubica su posición final en  $\vec{r}_{cm} = [0.1, -0.1, -0.1]$  como se muestra en la Figura 4.4.

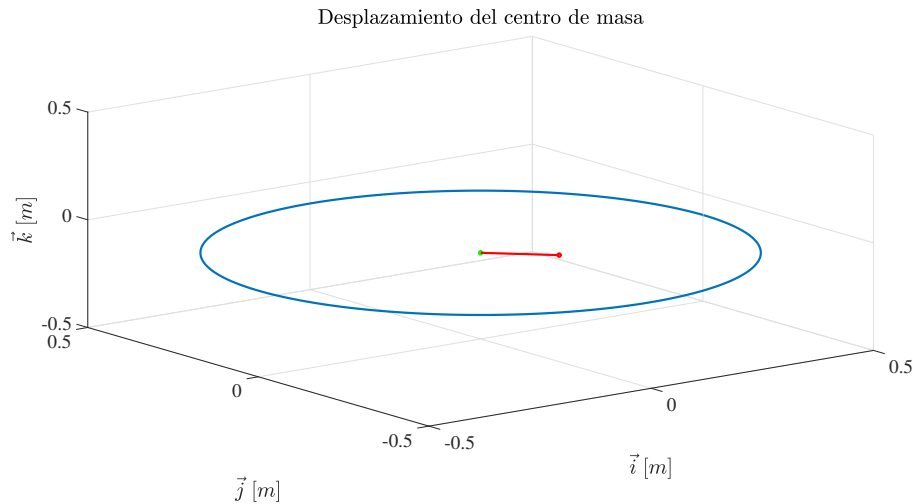


Figura 4.4: Desplazamiento del centro de masa del mecanismo. En verde la posición inicial del centro de masa en rojo el desplazamiento y la posición final.

#### 4.6.1. Orientación del mecanismo con cambio en centro de masa

En esta sección se muestran los resultados de la primera simulación numérica que consiste en estabilizar la orientación del mecanismo de acuerdo sobre los ángulos de Euler:

$$\boldsymbol{\Theta}_d = \left[ \begin{array}{ccc} -\frac{\pi}{6} \text{ rad}, & \frac{\pi}{4} \text{ rad}, & \frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{array} \right]^T.$$

La Figura 4.5 muestra el resultado de la prueba de orientación. Los torques calculados por la ley de control (4.52) se muestran en la Figura 4.6. Los pesos calculados por la ley de adaptación (4.60) y errores de orientación se presentan en las Figura 4.7.

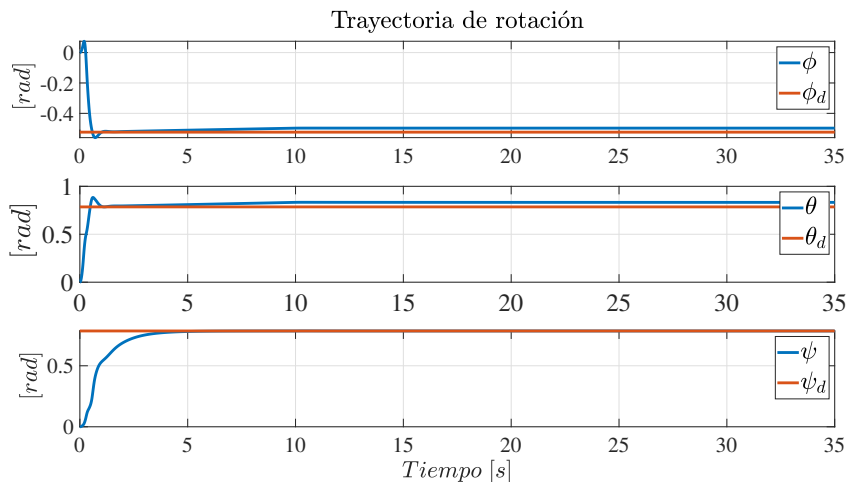


Figura 4.5: Prueba de orientación del mecanismo de tres grados de libertad.

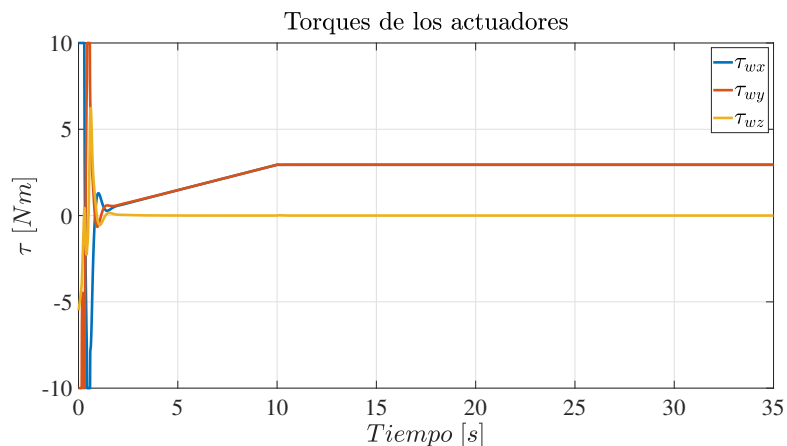


Figura 4.6: Torques de entrada a los actuadores calculados por el controlador adaptativo neuronal en (4.52) durante la prueba de orientación.

De acuerdo a los resultados anteriores, el controlador adaptativo neuronal puede estabilizar la orientación del mecanismo de tres grados de libertad con un valor de error, como se observa en el gráfico de la Figura 4.5, a pesar del desplazamiento en su centro de masa. Nótese que el constante incremento de torque observado en la Figura 4.6 es la respuesta del controlador a este desplazamiento.

Tal como se observa en la Figura 4.7, los errores de orientación y los pesos ideales estimados por (4.60) se mantienen acotados de acuerdo a la conclusión previa en (4.59).

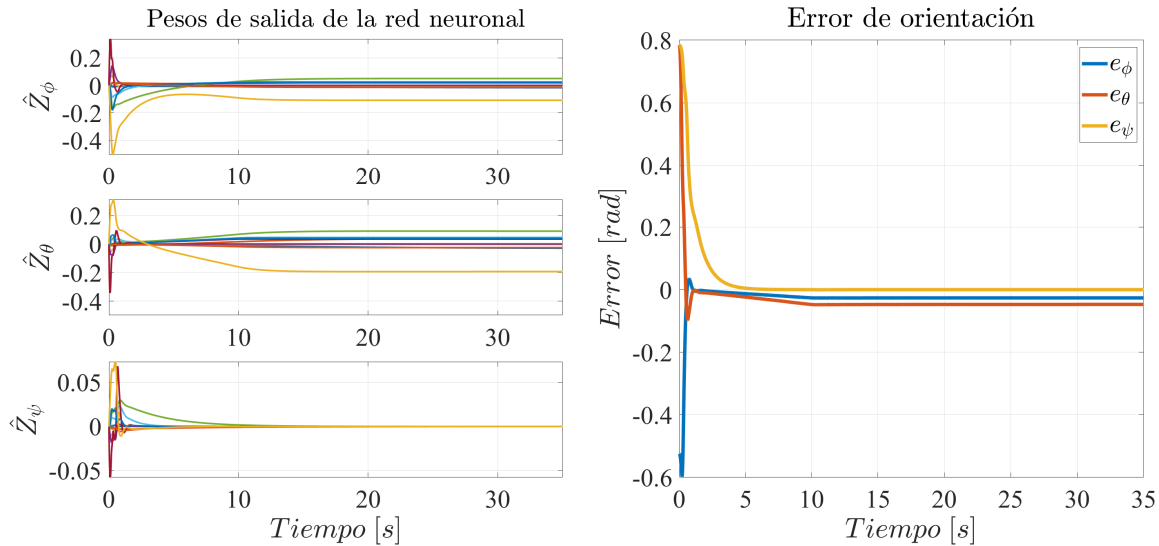


Figura 4.7: A la izquierda los pesos de salida de la red estimados por la ley de adaptación (4.60), a la derecha los errores obtenidos en la prueba de orientación.

#### 4.6.2. Seguimiento de trayectoria de orientación

Las simulaciones numéricas para evaluar el desempeño del controlador neuronal aplicado a una trayectoria de orientación se dividieron en tres escenarios. En el primer escenario se propone una variación con respecto al tiempo de los ángulos de Euler  $\phi_d$  y  $\theta_d$  en el vector de orientación  $\Theta_d$  de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\Theta_i = a \operatorname{sen} \left( \frac{1}{4}t + \frac{3}{4} \right) \quad (4.61)$$

que codifica para una oscilación periódica. La notación  $\Theta_i$  hace referencia a un elemento del vector  $\Theta_d$  (4.43), correspondiente al  $i$ -ésimo ángulo de Euler. Los valores de amplitud para la constante  $a$  de la ecuación (4.61) son:  $a = \pi/4 \text{ rad}$  para  $\phi_d$  y  $a = -\pi/4 \text{ rad}$  para  $\theta_d$ . El valor para el ángulo de guiñada se mantiene constante con valor de  $\psi_d = 1 \text{ rad}$ .

A continuación se muestran los resultados de la prueba de seguimiento de trayectoria en el primer escenario. En la Figura 4.8 se muestra la orientación del mecanismo con respecto a la trayectoria de orientación deseada. Los torques de entrada a los actuadores se muestran en la Figura 4.9, los pesos estimados de salida de la red neuronal dados por la ley de adaptación en (4.60) y los errores de orientación del mecanismo están en la Figura 4.10.



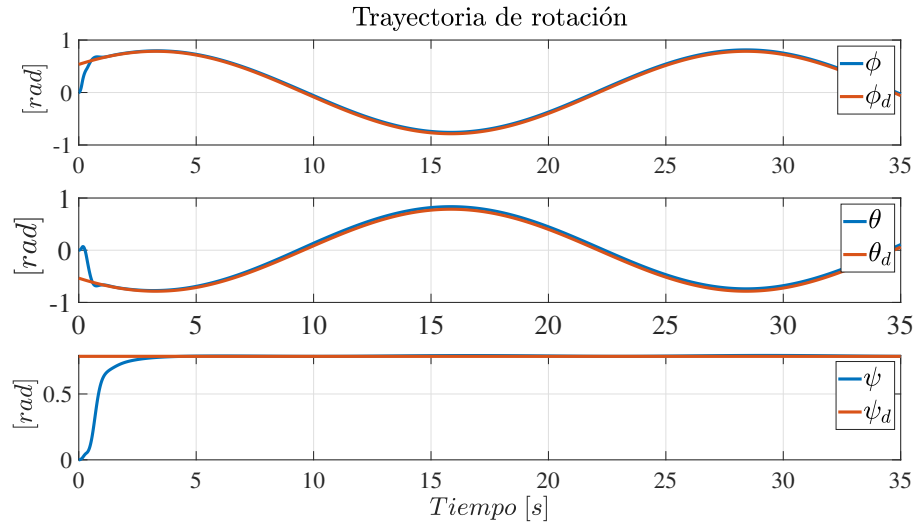


Figura 4.8: Prueba de seguimiento de trayectoria de orientación.

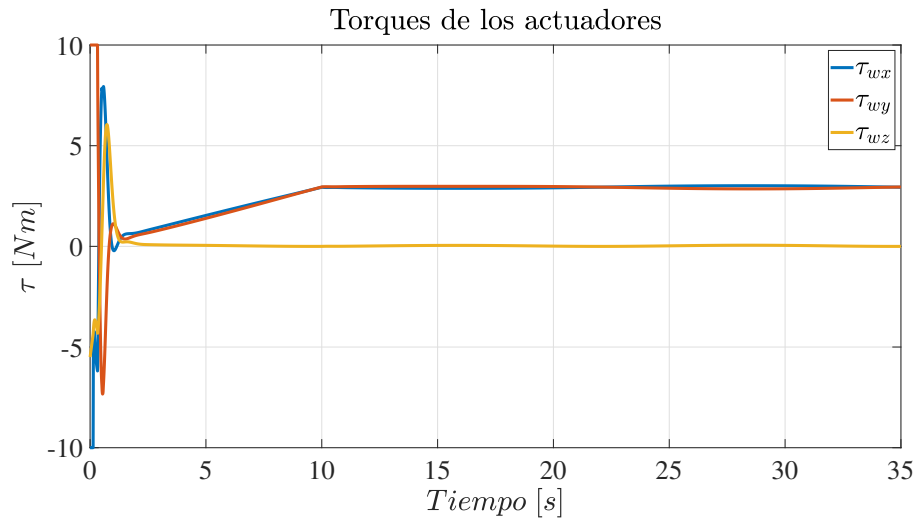


Figura 4.9: Torques de entrada calculados por la ley de control (4.52) para la prueba de seguimiento de orientación.

Con el objetivo de evaluar la robustez del controlador, en el segundo escenario se propone la misma trayectoria para  $\Theta_d$  que el primer escenario agregando una perturbación en forma de torque, que se aplica solo sobre los ángulos  $\phi_d$  y  $\theta_d$  y que varía con respecto al tiempo de acuerdo a la función:

$$\tau_i = \sin\left(t + \frac{3}{4}\right) Nm. \quad (4.62)$$

La notación  $\tau_i$  hace referencia a un valor de par aplicado sobre el  $i$ -ésimo ángulo de Euler.

En la Figura 4.11 se muestra la evolución temporal de los ángulos de Euler con respecto a la trayectoria de orientación deseada. Los pares calculados por el controlador adaptativo neuronal en (4.52) se muestran en la Figura 4.12 y los pesos de salida de la red calculados por la ley de adaptación

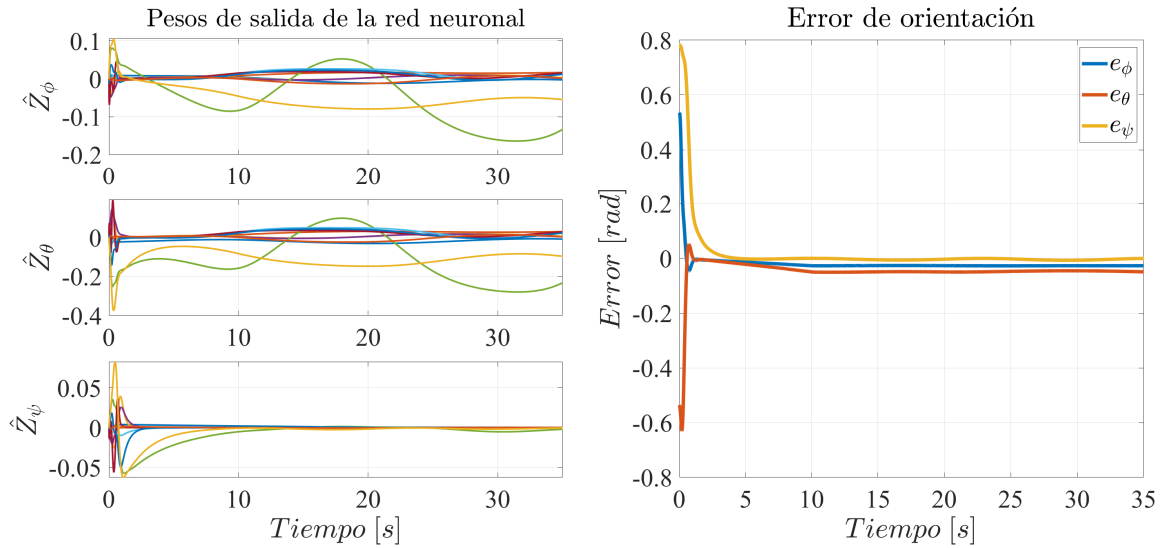


Figura 4.10: A la izquierda los pesos de salida estimados por la red neuronal y a la derecha los valores de error obtenidos de la prueba de seguimiento de trayectoria de orientación para el primer escenario.

en (4.60) se encuentran en la Figura 4.13.

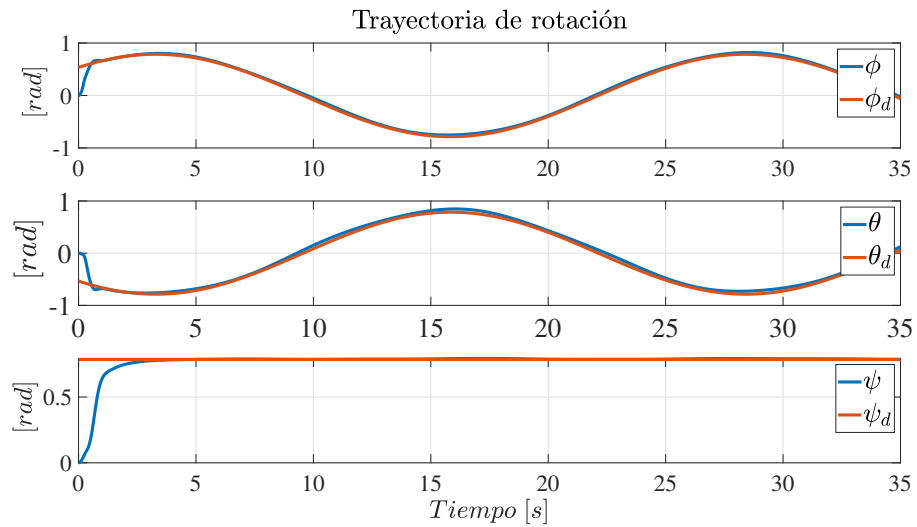


Figura 4.11: Prueba de seguimiento de trayectoria de orientación en presencia de perturbaciones.

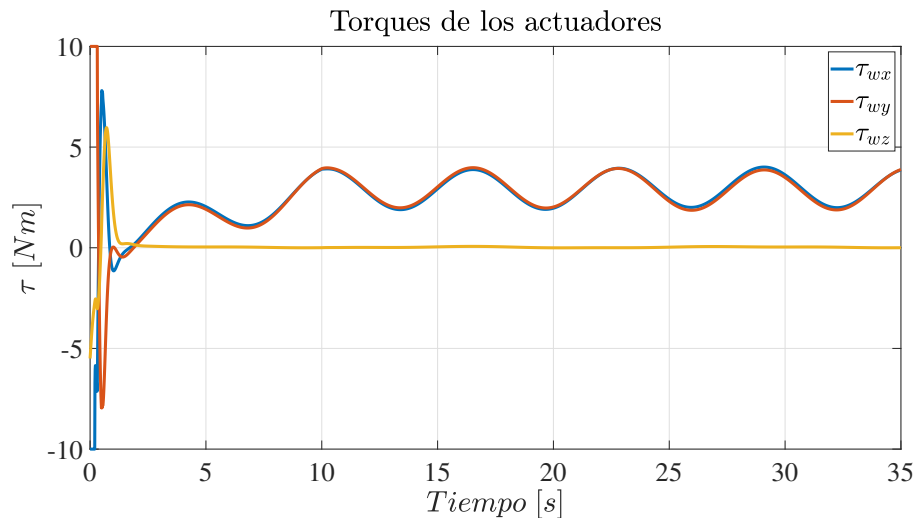


Figura 4.12: Torques de entrada a las ruedas de reacción calculadas por la ley de control (4.52).

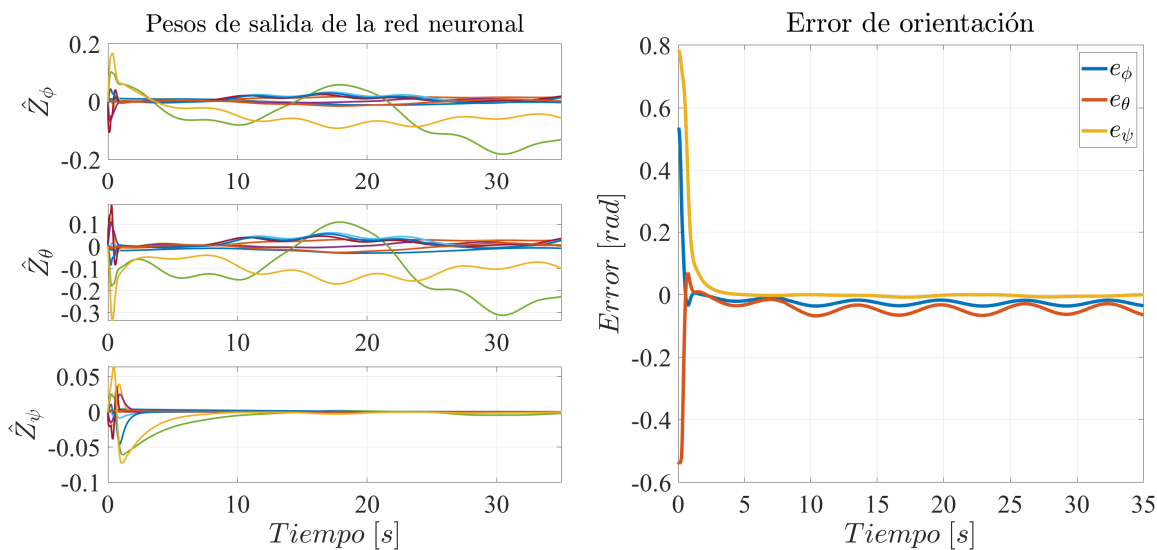


Figura 4.13: A la izquierda los pesos de salida de la red estimados por la ley de adaptación (4.60), a la derecha los errores de seguimiento de orientación en presencia de perturbaciones.

Por ultimo el tercer escenario agrega además una pequeña falla en el actuador montado sobre el eje  $\vec{j}$  del cuerpo rígido. La falla en el actuador se induce a través de un tren de pulsos con periodo  $T = 5$  segundos y un ancho de pulso del 50%.

El gráfico de la Figura 4.14 muestra la evolución temporal de los ángulos de Euler con respecto a la trayectoria de orientación  $\Theta_d$  deseada. Los torques calculados por el controlador neuronal en (4.52) se muestran en el gráfico de la Figura 4.15 y los pesos estimados de salida de la red neuronal dados por la ley de adaptación en (4.60) y los errores de seguimiento de trayectoria de orientación se muestran en el gráfico de la Figura 4.16.

Como se puede observar en los resultados anteriores, el controlador adaptativo neuronal propuesto

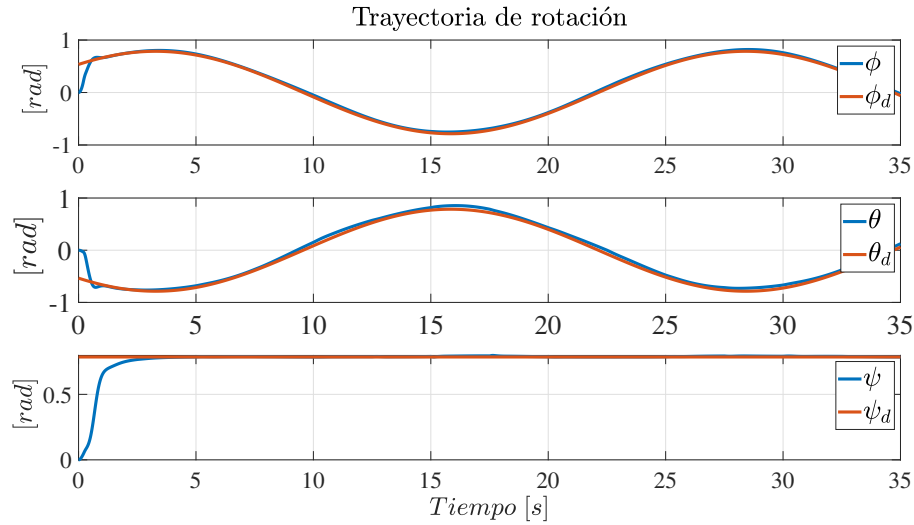


Figura 4.14: Resultados de la prueba de seguimiento de trayectoria de orientación en presencia de perturbaciones e induciendo una falla en el actuador.

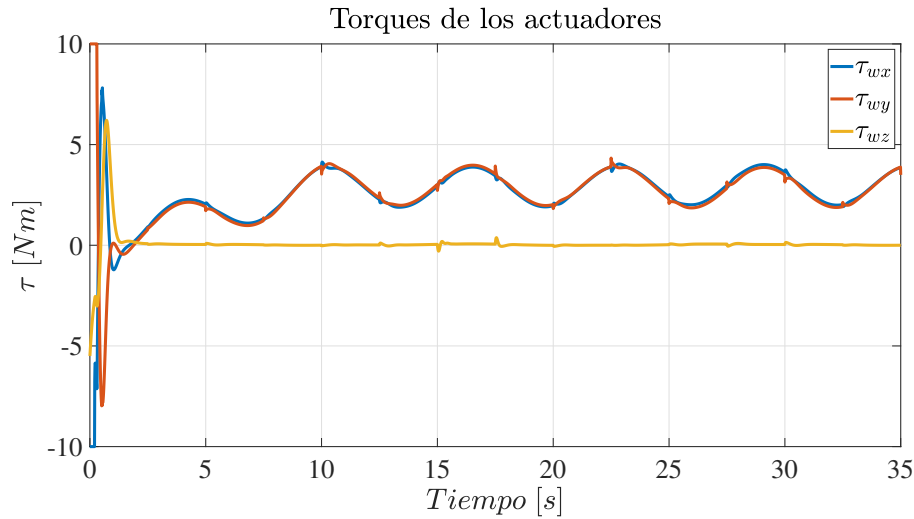


Figura 4.15: Torques calculados por el controlador en (4.52) para la prueba de seguimiento de trayectoria de orientación aplicando una perturbación e induciendo una falla en el actuador del eje  $\vec{j}$  del cuerpo rígido.

en (4.52) para estabilizar la orientación del mecanismo tipo satélite, tiene un buen desempeño en el seguimiento de una trayectoria de orientación deseada con un finito valor de error. Los ángulos de Euler del cuerpo rígido tienden a los valores deseados en presencia de cambios en la ubicación del centro de masa, perturbaciones y fallas inducidas. Los torques calculados por la ley de control responden de acuerdo al desplazamiento en el centro de masa del mecanismo. Como se concluyó previamente en los análisis de estabilidad de la sección (4.59), los pesos de la red calculados por la ley de estimación de pesos propuesta en (4.60) y los errores de seguimiento de trayectoria de orientación se mantienen acotados de acuerdo a la definición de UUB presentada en el teorema 2.4.1 de la sección 2.4.6. Esto es ya que durante el proceso de sintonización del controlador se obtuvieron valores de ganancia para las

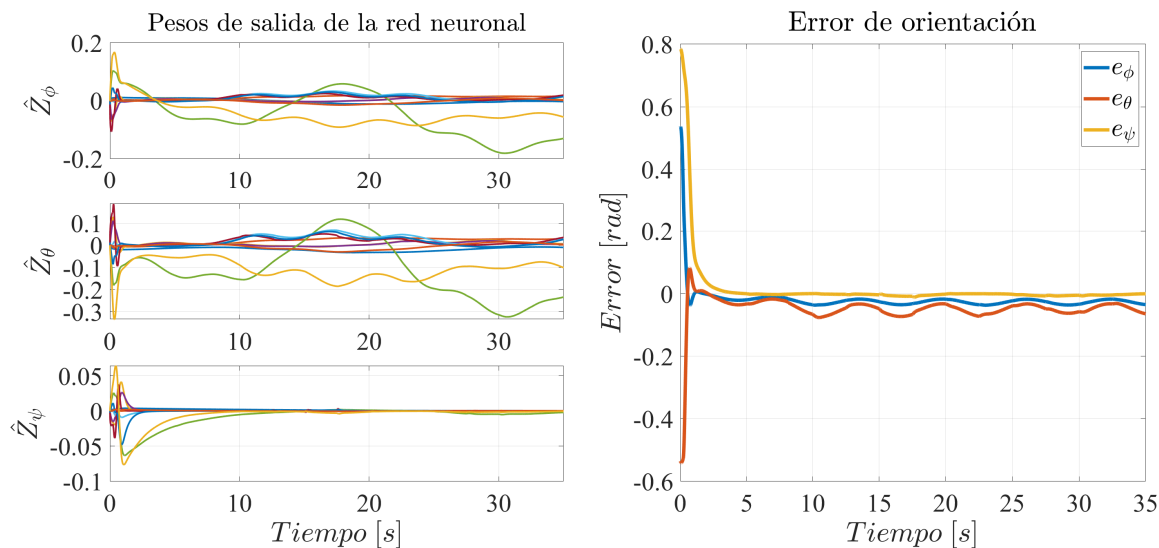


Figura 4.16: A la izquierda los pesos de salida de la red calculados por la ley de estimación en (4.60), a la derecha los errores de seguimiento de trayectoria para el mecanismo en presencia de perturbaciones y con una falla en el actuador montado sobre el eje  $\hat{j}$  del cuerpo rígido.

matrices  $Kv$  y  $D$  que cumplen con las condiciones necesarias en (4.59) para mantener a las variables de error de orientación  $\mathbf{r}$  y  $\tilde{Z}$  dentro de una región cercana al punto de equilibrio deseado.

A continuación se muestra una Tabla 4.3 donde se listan los valores RMS para cada uno de los ángulos de Euler en las pruebas desarrolladas para esta sección. Como se puede observar los valores de RMS son muy similares entre cada una de las pruebas realizadas y se mantienen en un valor pequeño.

Tabla 4.3: Norma de los errores para el mecanismo de tres grados de libertad de tipo satélite.

Prueba	Ángulo $\phi$ (RMS)	Ángulo $\theta$ (RMS)	Ángulo $\psi$ (RMS)
Orientación	0.0598	0.0710	0.1034
Escenario 1	0.0442	0.0740	0.1048
Escenario 2	0.0485	0.0696	0.0992
Escenario 3	0.0485	0.0712	0.0991

## 4.7. Conclusión

En este capítulo se ha presentado una estrategia de control basada en el control adaptativo neuronal para estabilizar la orientación de un mecanismo de tres grados de libertad usando ruedas de reacción inercial como actuadores. Este compensador no necesita la dinámica detallada del modelo ni los parámetros exactos que lo componen.

Los resultados de las pruebas numéricas muestran que la solución de control propuesta es efectiva en la estabilización de la posición angular  $\Theta$  del mecanismo sobre ángulos de Euler constantes o en

seguimiento de una trayectoria deseada  $\Theta_d$  con un valor de error. Además, el controlador adaptativo neuronal en (4.52) presenta robustez ante cambios en el centro de masa del mecanismo y perturbaciones aplicadas al modelo. Los valores de error de orientación pueden mejorarse modificando el radio de la hiper-esfera  $r_{hs}$  dado por ecuación en (4.59), variando principalmente los valores de la matriz de ganancia  $K_v$  y de la matriz  $D$ .

De acuerdo a la definición de UUB en 2.4.6, las soluciones del sistema de lazo cerrado (4.53) son uniformemente últimamente acotadas (UUB), lo que establece que las soluciones están dentro de una región dada por las ecuación (4.59). Esto implica que  $\xi_r$ ,  $\dot{\xi}_r$ ,  $\Theta$ ,  $\dot{\Theta}$  y  $\hat{Z}$  son también UUB.

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Conclusiones generales

A inicios de este trabajo de investigación, se plantearon algunos antecedentes sobre las redes neuronales y su aplicación en el desarrollo de controladores. También se citaron algunos trabajos donde las ruedas de reacción inercial se utilizan como actuadores en un mecanismo. Posteriormente se planteo el objetivo de este trabajo de tesis, una propuesta a la problemática planteada y la metodología a seguir para resolverla. En los capítulos 3 y 4 se propusieron dos mecanismos que utilizan la inercia producida por las ruedas de reacción para controlar su orientación. Se desarrolló el modelo dinámico de ambos mecanismos y se diseño una ley de control que integra una red neuronal *feedforward* y una acción proporcional derivativa. Las conclusiones acerca del trabajo realizado en estos capítulos son las siguientes:

- Los mecanismos estudiados en este trabajo de investigación, al igual que muchos otros reportados en la literatura, poseen una dinámica no lineal que bajo ciertas condiciones no es sencilla de estimar por completo y que influye en el desempeño del controlador. Además cualquier mecanismo bajo condiciones no ideales esta sometido a perturbaciones externas difíciles de modelar en su totalidad. En este sentido, las redes neuronales son una poderosa herramienta que permite estimar de forma efectiva la dinámica no lineal al igual que las perturbaciones, incertidumbres y cambios en los parámetros físicos de mecanismo, sin necesidad de conocer en su totalidad la dinámica o el valor de los parámetros exactos que componen al modelo.
- El controlador adaptativo propuesto se basa en un esquema de control proporcional derivativo que incorpora una red neuronal de enlace funcional *feedforward*. Las redes neuronales empleadas en este trabajo de investigación son de tipo perceptron de una capa con funciones de activación  $\tanh(*)$  que forma parte de un vector de funciones base. El aprendizaje de la red neuronal se lleva a cabo durante el proceso, por lo que la estimación de los pesos se realiza en línea utilizando una ley de adaptación derivada del análisis de convergencia de las soluciones de lazo cerrado.
- A través del análisis de estabilidad de Lyapunov se demuestra que los estados y las variables de

error del sistema son uniformemente últimamente acotados (UUB) dentro de una esfera de radio  $r_h$  para el péndulo de rueda de reacción inercial y de radio  $r_{hs}$  para el mecanismo de tres grados de libertad, de acuerdo a las expresiones obtenidas en (3.47) y (4.59) respectivamente. Los análisis de estabilidad demuestran que los pesos de salida de la red estimados durante el proceso están uniformemente últimamente acotados.

- El radio de la esfera de estabilidad puede reducirse ajustando principalmente los valores de ganancia  $Kv$  de los controladores, sin embargo el valor de esta constante dependerá principalmente del valor de las perturbaciones aplicadas al sistema.
- Los mecanismos estudiados en este trabajo de investigación se llevaron a modelos en tres dimensiones para simulación. Los resultados de las simulaciones numéricas se integraron a los modelos tridimensionales por lo que fue posible representar de forma visual el comportamiento de los mecanismos y apreciar de mejor forma el desempeño de los controladores en un entorno simulado.

## 5.2. Trabajo a futuro

En el presente trabajo de tesis se llevó a cabo la simulación numérica de los controladores basados en redes neuronales *feedforward* por lo que una extensión de este trabajo de investigación es el desarrollo de las plataformas experimentales para ambos mecanismos con el objetivo de contrastar los resultados obtenidos con los resultados de un entorno real. Así como la exploración de soluciones de control que permitan resolver el problema de control de seguimiento de trayectoria y orientación de un mecanismos de tres grados de libertad que use ruedas de reacción inercial como actuadores.



# Capítulo 6

## Apéndice

### 6.1. Funciones $\mathcal{KL}$

Las definiciones planteadas a continuación pueden revisarse en [1]. En teoría de control a veces es necesario verificar la estabilidad de sistemas no autónomos. Para ello es necesario utilizar algunas funciones de comparación especiales. Las funciones  $\mathcal{K}$  son parte de este grupo de funciones.

**Definición 6.1.1 (Función  $\mathcal{K}$ )** Una función continua  $\alpha : (0, a] \rightarrow [0, \infty)$  es una función de clase  $\mathcal{K}$  si la función es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Se dice que la función es de clase  $\mathcal{K}_\infty$  si  $\alpha = \infty$  y  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

**Definición 6.1.2 (Función  $\mathcal{KL}$ )** Una función continua  $\beta : (0, a] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es una función de clase  $\mathcal{KL}$  si por cada  $s$  fijo la función  $\beta(r, s)$  sigue siendo de clase  $\mathcal{K}$  con respecto a  $r$  y, para cada  $r$  fijo la función  $\beta(r, s)$  es decreciente con respecto a  $s$  y  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  conforme  $s \rightarrow \infty$ .

**Lema 6.1.1** Sea  $V : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida positiva definida en el dominio  $S \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen. Considérese  $B_r \subset S$  para un  $r > 0$ . Entonces existen ahí una función  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , definidas en el intervalo  $[0, r]$  tal que:

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

para toda  $x \in B_r$ . Si  $S = \mathbb{R}^n$ , las funciones  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  estarán definidas en  $[0, \infty)$  y la desigualdad precedente se mantendrá para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ . Más aún si la función  $V(x)$  es radialmente desacotada, entonces  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  pueden elegirse como funciones de clase  $\mathcal{K}_\infty$ .

### 6.2. Propiedades del producto cruz

En esta sección se presenta el producto cruz de dos vectores o producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$  y algunas de sus propiedades. La información correspondiente a esta sección puede revisarse a detalle en [90] y [91].

**Definición 6.2.1** Sea  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  dos vectores en  $\mathbb{R}^3$ . El producto cruz de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  se denota por  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  y es el vector:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  vectores en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $c$  un valor escalar. Entonces,

1.  $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
2.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
3.  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$
4.  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$
5.  $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6.  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}$
7.  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
8.  $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = c\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times c\mathbf{v}$

Si  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  y  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ , entonces:

1.  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$
2.  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
3.  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$ ,  $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{i})$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j})$

De acuerdo a [28] sección 2.2, introduciendo la notación abreviada del determinante de la matriz cuadrada:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

se establecen las siguientes identidades del producto vectorial:

1.  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
2.  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

De acuerdo a [86] en la sección 3.7, el producto cruz de los vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , se puede expresar mediante:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = S(\mathbf{u})\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

donde

$$S(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

donde la matriz  $S(\odot)$  es la matriz tornillo simétrica del vector  $\odot$ . Algunas propiedades del producto cruz derivadas de la matriz tornillo que se presentan en [86] (Teorema 11) son las siguientes:

1.  $S(\mathbf{u})\mathbf{u} = 0$
2.  $S(\mathbf{u}) = -S(\mathbf{u})^T = S(-\mathbf{u})^T$
3.  $S(\mathbf{u})\mathbf{v} = -S(\mathbf{u})^T\mathbf{v} = -S(\mathbf{v})\mathbf{u} = S(\mathbf{v})^T\mathbf{u}$
4.  $S(\mathbf{u}) + S(\mathbf{u})^T = 0$
5.  $S(c\mathbf{u}) = cS(\mathbf{u})$
6.  $\|S(\mathbf{u})\| = 0$
7.  $S(\mathbf{u}) + S(\mathbf{v}) = S(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

Considerando una matriz  $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  se obtiene que:

1.  $(\Theta\mathbf{u}) \times (\Theta\mathbf{v}) = \text{adj}(\Theta)^T(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \rightarrow S(\Theta\mathbf{u})\mathbf{u} = |\Theta|\Theta^{-T}S(\mathbf{u})$

### 6.3. Propiedades de matrices ortogonales

Considerando una matriz  $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , se dice que  $\Theta$  es una matriz ortogonal si cumple con las siguientes propiedades:

1.  $|\Theta| = 1$
2.  $\Theta^{-1} = \Theta^T$
3.  $\Theta\Theta^T = I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$
4.  $\frac{d}{dt} [\Theta\Theta^T] = \Theta\dot{\Theta}^T + [\Theta\dot{\Theta}^T]^T = \mathbf{0}$

Comparando las propiedades 11 de la sección anterior y la propiedad anterior se obtiene:

$$\dot{\Theta} = S(\mathbf{u})^T\Theta$$

# Bibliografía

- [1] H. K. Khalil, “Lyapunov stability” in *Nonlinear Systems*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002, pp. 168-174.
- [2] K. D. Kumar, N. Abreu, M. Sinha and others, “Fault-tolerant attitude control of miniature satellites using reaction wheels,” *Acta Astronautica*, vol. 151, no. 1, pp. 206-216, 2018.
- [3] J. Bao, D. Li, X. Qiao and T. Rauschenbach, “Integrated navigation for autonomous underwater vehicles in aquaculture: A review,” *Information Processing in Agriculture*, vol. 7, no. 1, pp. 139-151, 2020.
- [4] G. Avanzini, E. de Angelis, F. Giuliotti and N. Serrano, “Attitude control of Low Earth Orbit satellites by reaction wheels and magnetic torquers,” *Acta Astronautica*, vol. 160, no. 1, pp. 625-634, 2019.
- [5] J. Shields, C. Pong, K. Lo, L. Jones, S. Mohan, C. Marom, I. McKinley, W. Wilson, and L. Andrade, “Characterization of cubesat reaction wheel assemblies,” *ournal of Small Satellites*, vol. 6, no. 1, pp. 565-580, 2017.
- [6] A. Kornienko, J. Rieber, T. Ott, R. Geshnizjani, W. Fichter, J. Forshaw, and G. Aglietti, “Experimental verification of attitude control system for agile spacecraft,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 17, pp. 158-163, 2016.
- [7] M. E. Qazizada and E. Pivarčiová, “Mobile robot controlling possibilities of inertial navigation system,” *Procedia Engineering*, vol. 149, no. 1, pp. 404-413, 2016.
- [8] X. Tan and Q. Hu, “Inertia-free finite-time attitude control of rigid spacecraft with reaction wheels,” In 2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 2016, pp. 2617-2622.
- [9] D. Ye, Z. Sun, and S. Wu, “Hybrid thrusters and reaction wheels strategy for large angle rapid reorientation with high precision,” *Acta Astronautica*, vol. 77, no. 1, pp. 149-155, 2012.
- [10] X. Cao, and B. Wu, “Indirect adaptive control for attitude tracking of spacecraft with unknown reaction wheel friction,” *Aerospace science and technology*, vol. 47, no. 1, pp. 493-500, 2015.
- [11] Q. Hu, Y. Shi and X. Shao, “Adaptive fault-tolerant attitude control for satellite reorientation under input saturation,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 78, no. 1, pp. 171-182, 2018.

- [12] M. Golestani, S. M. Esmailzadeh and S. Mobayen, "Fixed-time control for high-precision attitude stabilization of flexible spacecraft," *European Journal of Control*, pp. 1-10, 2020.
- [13] A. Özcan, "Attitude control of satellite test setup using reaction wheels", in *International Symposium on New Development in Science, Technology, and Social Science*, Dic. 2019.
- [14] B. Kim, E. Velenis, P. Kriengsiri and P. Tsiotras, "Designing a low-cost spacecraft simulator," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 23, no. 4, pp 26-37, 2003.
- [15] J. Dasdemir, "Quaternion-based robust satellite attitude tracking control," *Balkan Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 6, no. 1, pp. 56-61, 2018.
- [16] D. Thakur, S. Srikant and M. Akella, "Adaptive attitude-tracking control of spacecraft with uncertain time-varying inertia parameters," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 38, no. 1, pp. 41-52, 2015.
- [17] K. S. Narendra and K. Parthasarathy, "Identification and control of Dynamical systems using neural networks," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 1, no. 1, pp. 4-27, 1990.
- [18] T. Hayakawa, W. M. Haddad and N. Hovakimyan, "Neural network adaptive control for a class of nonlinear uncertain dynamical systems with asymptotic stability guarantees," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 19, no. 1, pp. 80-89, 2008.
- [19] L. Cheng, Z. G. Hou, and M. Tan, "Adaptive neural network tracking control for manipulators with uncertain kinematics, dynamics and actuator model," *Automatica*, vol. 45, no. 10, pp. 2312-2318.
- [20] T. Zhang and S. S. Ge, "Adaptive neural network tracking control of MIMO nonlinear systems with unknown dead zones and control directions," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 20, no. 3, pp. 493-497, 2009.
- [21] C. Y. Chen, Y. Tang, L. H. Wu, M. Lu, X. S. Zhan, X. Li, C. L. Huang and W. H. Gui, "Adaptive neural-network-based control for a class of nonlinear systems with unknown output disturbance and time delays," *IEEE Access*, vol. 7, no. 1, pp 7702-7716, 2018.
- [22] Q. Zhou, S. Zhao, H. Li, R. Lu, and C. Wu, "Adaptive neural network tracking control for robotic manipulators with dead zone," *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, vol. 30, no. 12, pp. 3611-3620, 2018.
- [23] F. W. Lewis, S. Jagannathan and A. Yesildirak, *Neural network control of robot manipulators and non-linear systems*. Padstow, Padstow, UK: CRC Press, 1998.
- [24] K. Hornik, M. Stinchcombe and H. White, "Multilayer feedforward networks are universal approximators," *Neural networks*, vol. 2, no. 5, pp. 359-366, 1989.
- [25] F. W. Lewis, S. Jagannathan and A. Yesildirak, *Neural networks: a comprehensive foundation*. Patparganj, Delhi, India: Prentice hall, 1999.

- [26] N. Sadegh, "A perceptron network for functional identification and control of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 4, no. 6, pp. 982-988, 1993.
- [27] R. Kelly, V. S. Davila and J. A. L. Perez, "Robot dynamics," in *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media, 2006, pp. 59-88.
- [28] A. Tewari, *Atmospheric and space flight dynamics*, New York, NY: Springer, 2007, pp. 59-504.
- [29] A. B. Nassif, I. Shahin, I. Attili, M. Azzeh and K. Shaalan, "Speech recognition using deep neural networks: A systematic review," *IEEE access*, vol. 7, no. 1, 2019, pp. 19143-19165.
- [30] S. M. Anwar, M. Majid, A. Qayyum, M. Awais, M. Alnowami and M. K. Khan, "Medical image analysis using convolutional neural networks: a review," *Journal of medical systems*, vol. 42, no. 11, 2018, pp. 1-13.
- [31] N. Shahid, R. Tim and W. Berta, "Applications of artificial neural networks in health care organizational decision-making: A scoping review," *PloS one*, vol. 14, no. 2, 2019, pp. 1-22.
- [32] H. Li, Z. Zhang and Z. Liu, "Application of artificial neural networks for catalysis: a review," *Catalysts*, vol. 7, no. 10, 2017, pp. 1-19.
- [33] M. Willis, M. Gary, M. Di, C. Massimo, M. Tham and A. J. Morris, "Artificial neural networks in process estimation and control," *Automatica*, vol. 28, no. 6, 1992, pp. 1181-1187.
- [34] D.P. Li, Y. J. Liu, S. Tong, P. Chen, and D. J. Li, "Neural networks-based adaptive control for nonlinear state constrained systems with input delay," *IEEE transactions on cybernetics*, vol. 49, no. 4, 2018, pp. 1249-1258.
- [35] T. Gao, Y. J. Liu, L. Liu and D. Li, "Adaptive neural network-based control for a class of nonlinear pure-feedback systems with time-varying full state constraints," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 5, no. 5, 2018, pp. 929-933.
- [36] C. Y. Chen, Y. Tang, L. H. Wu, M. Lu, X. S. Zhan, X. Li, C. L. Huang, and W. H. Gui, "Adaptive neural-network-based control for a class of nonlinear systems with unknown output disturbance and time delays," *IEEE Access*, vol. 7, no. 1, 2018, pp. 7702-7716.
- [37] T. Hayakawa, W. M. Haddad and N. Hovakimyan, "Neural network adaptive control for a class of nonlinear uncertain dynamical systems with asymptotic stability guarantees," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 19, no. 1, 2008, pp. 80-89.
- [38] S. S. Ge and C. Wang, "Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback systems," *Automatica*, vol. 38, no. 4, 2002, pp. 671-682.
- [39] A. Chakraborty and M. Arcak, "Robust stabilization and performance recovery of nonlinear systems with unmodeled dynamics," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 54, no. 6, 2009, pp. 1351-1356.

- [40] D. J. Li and D. P. Li, "Adaptive controller design-based neural networks for output constraint continuous stirred tank reactor," *Neurocomputing*, vol. 153, no. 1, 2015, pp. 159-163.
- [41] X. Zhao, H. Yang, H.R. Karimi and Y. Zhu, "Adaptive neural control of MIMO nonstrict-feedback nonlinear systems with time delay," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol.46, no. 6, 2015, pp. 1337-1349.
- [42] L. Cheng, Z. G. Hou and M. Tan, "Adaptive neural network tracking control for manipulators with uncertain kinematics, dynamics and actuator model," *Automatica*, vol. 45, no. 10, 2009, pp. 2312-2318.
- [43] Y. Wang, and W. Hansheng, "Adaptive robust backstepping control for a class of uncertain dynamical systems using neural networks," *Nonlinear Dynamics*, vol. 81, no. 4, 2015, pp. 1597-1610.
- [44] H. Wang, P. Shi, H. Li and Q. Zhou, "Adaptive neural tracking control for a class of nonlinear systems with dynamic uncertainties," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol.47, no. 10, 2016, pp. 3075-3087.
- [45] H. C. Lu, M. H. Chang and C. H. Tsai, "Adaptive self-constructing fuzzy neural network controller for hardware implementation of an inverted pendulum system," *Applied Soft Computing*, vol. 11, no. 5, 2011, pp. 3962-3975.
- [46] J. Moreno-Valenzuela, C. Aguilar-Avelar, S. Puga-Guzmán and V. Santibáñez, "Adaptive neural network control for the trajectory tracking of the Furuta pendulum," *IEEE transactions on cybernetics*, vol. 46, no. 12, 2016, pp. 3439-3452.
- [47] C. Peng, Y. Bai, X. Gong, Q. Gao, C. Zhao Y. Tian, "Modeling and robust backstepping sliding mode control with Adaptive RBFNN for a novel coaxial eight-rotor UAV," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 2, no. 1, 2015, pp. 56-64.
- [48] M. Chen, P. Shi and C. C. Lim, "Adaptive neural fault-tolerant control of a 3-DOF model helicopter system," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 46, no. 2, 2015, pp. 260-270.
- [49] L. Cheng, Z. G. Hou and M. Tan, "Adaptive neural network tracking control for manipulators with uncertain kinematics, dynamics and actuator model," *Automatica*, vol. 45, no. 10, 2009, pp. 2312-2318.
- [50] W. He, Y. Chen and Z. Yin, "Adaptive neural network control of an uncertain robot with full-state constraints," *IEEE transactions on cybernetics*, vol. 46, no. 3, 2015, pp. 620-629.
- [51] Y. J. Liu, S. Lu and S. Tong, "Neural network controller design for an uncertain robot with time-varying output constraint," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, no. 8, 2016, pp. 2060-2028.

- [52] X. Sun and S. S. Ge, "Adaptive neural region tracking control of multi-fully actuated ocean surface vessels," *IEEE/CAA Journal of automatica sinica*, vol. 1, no. 1, 2014, pp. 77-83.
- [53] J. F. Qiao, Y. Hou, L. Zhang and H. G. Han, "Adaptive fuzzy neural network control of wastewater treatment process with multiobjective operation," *Neurocomputing*, vol. 275, no. 1, 2018, pp. 383-393.
- [54] J. Moreno-Valenzuela, C. Aguilar-Avelar, S. Puga-Guzmán and V. Santibáñez, "Two adaptive control strategies for trajectory tracking of the inertia wheel pendulum: neural networks vis à vis model regressor," *Intelligent Automation & Soft Computing*, vol. 23, no. 1, pp. 63-73, 2017.
- [55] P. Zhang, Z. Wu, H. Dong, M. Tan, and J. Yu, "Reaction-wheel-based roll stabilization for a robotic fish using neural network sliding mode control," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 25, no. 4, 2020, pp. 1904-1911.
- [56] M. Muehlebach and R. D'Andrea, "Nonlinear analysis and control of a reaction-wheel-based 3-D inverted pendulum," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 25, no. 1, 2016, pp. 235-246.
- [57] M. Gajamohan, M. Muehlebach, T. Widmer, Tobias and R. D'Andrea, "The Cubli: A reaction wheel based 3D inverted pendulum," *IMU*, vol. 2, no. 2, 2013, pp. 268-274.
- [58] J. Mayr, F. Spanlang and H. Gatringer, "Mechatronic design of a self-balancing three-dimensional inertia wheel pendulum," *Mechatronics*, vol. 30, no. 1, 2015, pp. 1-10.
- [59] Z. Ismail and R. Varatharajoo, "A study of reaction wheel configurations for a 3-axis satellite attitude control," *Advances in Space Research*, vol. 45, no. 6, 2010, pp. 750-759.
- [60] S. N. Nudehi, U. Farooq, A. Alasty and I. Issa, "Satellite attitude control using three reaction wheels," in *2008 American Control Conference*, 2008, pp. 4850-4855.
- [61] M.A. Mendoza-Bárceñas, E. Vicente-Vivas and H. Rodríguez-Cortés, "Mechatronic design, dynamic modeling and results of a satellite flight simulator for experimental validation of satellite attitude determination and control schemes in 3-Axis," *Journal of applied research and technology*, vol. 12, no. 3, 2014, pp. 370-383.
- [62] A. R. Fazlyab, F. Saberi and M. Kabgarian, "Adaptive attitude controller for a satellite based on neural network in the presence of unknown external disturbances and actuator faults," *Advances in Space Research*, vol. 57, no. 1, 2016, pp. 367-377.
- [63] N. Vafamand, "Adaptive robust Neural-Network-Based backstepping control of tethered satellites with additive stochastic noise," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 56, no. 5, 2020, pp. 3922-3930.
- [64] D. J. Block, K. J. Astrom and M. W. Spong, "The reaction wheel pendulum," *Synthesis Lectures on Control and mechatronics*, vol. 1, no. 1, pp. 1-105, 2007.



- [65] R. Olfati-Saber, “Global stabilization of a flat underactuated system: the inertia wheel pendulum,” In Proc. IEEE Conference on Decision and Control, 2001, pp. 3764-3765.
- [66] R. Iriarte, L. T. Aguilar and L. Fridman, “Second order sliding mode tracking controller for inertia wheel pendulum,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 350, no. 1, pp. 92-106, 2013.
- [67] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad and A. Karimi, *Adaptive control: algorithms, analysis and applications*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [68] N. K. Haddad, A. Chemori, J. Pena and S. Belghith, “Stabilization of inertia wheel inverted pendulum by model reference adaptive IDA-PBC: From simulation to real-time experiments,” In 3rd International Conference on Control, Engineering & Information Technology, IEEE, 2015, pp. 1-6.
- [69] A. A. Bobtsov, A. A. Pyrkin and S. A. Kolyubin, “Adaptive stabilization of a reaction wheel pendulum on moving LEGO platform,” In 2009 IEEE Control Applications, (CCA) & Intelligent Control, (ISIC), IEEE, 2009, pp. 1218-1223.
- [70] S. A. Puga-Guzmán, J. Moreno-Valenzuela and V. Santibáñez, “Controlador neuronal para el seguimiento de trayectorias en un péndulo de rueda inercial,” *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 32, no. 4, pp. 204-211, 2016.
- [71] H. D. Young, R. A. Freedman and V. A. Flores, “Rotación de cuerpos rígidos” en *Física Universitaria. Sears-Zemansky*. PEARSON EDUCACIÓN, Vol. 1, 2009, pp. 285-306.
- [72] J. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control*, Bergen, NJ: Prentice hall, 1991.
- [73] J. Slotine, “Putting physics in control-the example of robotics,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 8, no. 6, pp. 12-18, 1988.
- [74] G. S. Huang and H. J. Uang, “Robust adaptive PID tracking control design for uncertain spacecraft systems: a fuzzy approach,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, vol. 42, no. 4, pp. 1506-1514, 2006.
- [75] S. Yin, B. Xiao, S. Ding and D. Zhou, “A review on recent development of spacecraft attitude fault tolerant control system,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 5, pp. 3311-3320, 2016.
- [76] W. Luo, Y. Chu and K. Ling, “Inverse optimal adaptive control for attitude tracking of spacecraft,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 11, pp. 639-1654, 2005.
- [77] A. Behal, D. Dawson, E. Zergeroglu, and Y. Fang, “Nonlinear tracking control of an underactuated spacecraft,” *J. Guid., Control Dyna.*, vol. 25, no. 5, pp. 979-985, 2002.
- [78] G.-Q. Xing and A. S. Parvez, “Nonlinear attitude state tracking control for spacecraft,” *J. Guid., Control Dyna.*, vol. 24, no. 3, pp. 624-626, 2001.

- [79] R. Sharma and A. Tewari, "Optimal nonlinear tracking of spacecraft attitude maneuvers," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 12, no. 5, pp. 677–682, Sep. 2004.
- [80] Z. Zhao, G. Cruz and B. Bernstein, "Adaptive Spacecraft Attitude Control Using Single-Gimbal Control Moment Gyroscopes Without Singularity Avoidance," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 42, no. 11, pp. 2342-2355, 2019.
- [81] H. D. Curtis, *Orbital mechanics for engineering students*, Oxfordshire, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013, pp. 33-543.
- [82] MA. Mendoza-Bárceñas, E. Vicente-Vivas and H. Rodríguez-Cortez, "Mechatronic design, dynamic modeling and results of a satellite flight simulator for experimental validation of satellite attitude determination and control schemes in 3-Axis," *Journal of applied research and technology*, vol. 12, no. 3, pp. 2014, 370-383.
- [83] W. F. Phillips, C. E. Hailey and G.A. Gebert, "Review of attitude representations used for aircraft kinematics," *Journal of aircraft*, vol. 38, no. 4, pp. 718-737, 2001.
- [84] S. J. Tupling and M.R. Pierrynowski, "Use of cardan angles to locate rigid bodies in three-dimensional space," *Medical and Biological Engineering and computing*, vol. 25, no. 5, pp 527-532, 1987.
- [85] J. J. Craig, *Introduction to Robotics - Mechanics and Control*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA, 1989.
- [86] S. Liu and G. Trenkler, "Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products," *International Journal of Information and Systems Sciences*, vol. 4, no. 1, pp. 160-177, 2008.
- [87] S. G. Vazquez, "Modelado y control de movimiento de un vehículo aéreo a escala impulsado por cuatro propelas", Ph. D. Tesis, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, CITEDIPN, Tijuana, B.C., Mexico, 2013.
- [88] Y. Li, D. Ye and Z. Sun, "Robust finite time control algorithm for satellite attitude control," *Aerospace Science and Technology*, vol. 68, no.1, pp. 46-57, 2017.
- [89] S. S. Nasrolahi and F. Abdollahi, "Sensor fault detection and recovery in satellite attitude control," *Acta Astronautica*, vol. 145, no. 1, pp. 275-283, 2018.
- [90] G. Williams, "Producto cruz," en *Álgebra lineal con aplicaciones*. McGraw-Hill, 2001, pp. 479-490.
- [91] D. G. Zill, W. S. Wright "Vectors, Matrices, and Vector Calculus," en *Advanced Engineering Mathematics*. Burlington, MA: Jones & Bartlett Learning, 2014, pp. 309-463.