



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Doctorado

Modelado y simulación de la locomoción
de robots humanoides

presentada por

M.C. Samuel Chávez Vázquez

como requisito para la obtención del grado de

**Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dr. José Francisco Gómez Aguilar

Codirector de tesis

Dr. Jorge Enrique Lavín Delgado

Cuernavaca, Morelos, México. Enero de 2024.

 <small>Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico</small>	ACEPTACIÓN DE IMPRESIÓN DEL DOCUMENTO DE TESIS DOCTORAL	Código: CENIDET-AC-006-D20
		Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2008 7.1, 7.2.1, 7.5.1, 7.6, 8.1, 8.2.4	Página 1 de 1

Cuernavaca, Mor., a 12 de diciembre de 2023

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Subdirector Académico
Presente

At'n: Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez
Presidente del Claustro Doctoral
Departamento De Ingeniería Electrónica

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial del estudiante SAMUEL CHÁVEZ VÁZQUEZ manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado "MODELADO Y SIMULACIÓN DE LA LOCOMOCIÓN DE ROBOTS HUMANOIDES", realizado bajo la dirección del Dr. José Francisco Gómez Aguilar y la codirección del Dr. Jorge Enrique Lavín Delgado, el trabajo se ACEPTA para proceder a su impresión.


ATENTAMENTE



 Dr. Gerardo Vicente Cuerrero Ramírez
 CENIDET



 Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez
 CENIDET



 Dr. Víctor Hugo Olivares Peregrino
 CENIDET



 Dr. José Francisco Gómez Aguilar



 Dr. Jorge Enrique Lavín Delgado



 Dr. José Alfredo Hernández Pérez

c.c.p. M.T. Maria Elena Gómez Torres / jefa del Departamento de Servicios Escolares.
 c.c.p. Dr. Jarniel García Morales / jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica.
 c.c.p. Expediente.

Cuernavaca, Mor.,
No. De Oficio:
Asunto:

15/diciembre/2023
SAC/214/2023
**Autorización de
impresión de tesis**

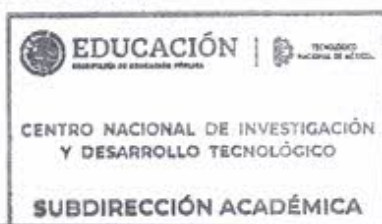
M.C. SAMUEL CHÁVEZ VÁZQUEZ
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“MODELADO Y SIMULACIÓN DE LA LOCOMOCIÓN DE ROBOTS HUMANOIDES”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”



DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz

Dedicatoria

A mi esposa Ivett, por estar siempre a mi lado y demostrarme su amor.

A mi hija Elaine, por ser mi motivación para persistir en este camino.

*Mira que te mando que te esfuerces y seas valiente;
no temas ni desmayes, porque Jehová, tu Dios,
estará contigo dondequiera que vayas.*

Josué 1:9

Agradecimientos

A Jehová mi Dios, por su amor y tener misericordia de mí.

A mis padres, Gilberto Chávez y Gabriela Vázquez, por su amor incondicional y por apoyarme siempre.

A mis hermanos, Luis y Ronaldo, por su apoyo y cariño, por permitirme ser su ejemplo.

Al Dr. José Francisco Gómez Aguilar por su confianza, apoyo y compartir sus conocimientos.

Al Dr. Jorge Enrique Lavín Delgado, por su apoyo y consejos que me ayudaron a desarrollar este trabajo.

A mis revisores, por sus valiosos comentarios y correcciones que me ayudaron a mejorar y enriquecer este trabajo.

Al Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado a través de la beca de doctorado para poder realizar y culminar mis estudios de posgrado.

Al Tecnológico Nacional de México campus Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico por permitirme continuar con mis estudios, a todo el personal que en él laboran, así como de tener un ambiente agradable de trabajo.

A mis compañeros y amigos del CENIDET.

Resumen

Este trabajo de investigación presenta contribuciones significativas en el ámbito de la robótica específicamente en el área de los humanoides, centrándose en dos aspectos fundamentales: el desarrollo del modelo dinámico de las piernas del robot NAO y el diseño de una estrategia de control usando el enfoque del cálculo fraccionario.

Primeramente, se aborda el desarrollo del modelado dinámico de las piernas del robot humanoide NAO, integrando de manera coherente el comportamiento mecánico y eléctrico de motores de corriente continua. Este enfoque integral busca perfeccionar la precisión y la eficiencia de los controles de movimiento, permitiendo al robot generar movimientos de manera más natural al andar humano.

Continuando, se introduce una estrategia de control conformada de tres partes. La primera se dedica al control de seguimiento de trayectoria para las articulaciones de las piernas, optimizando la capacidad del robot para seguir trayectorias predefinidas con máxima fidelidad. La segunda parte aplica controles Proporcional-Integral-Derivativo (PID) para regular el par de los motores de corriente continua, garantizando un comportamiento estable y preciso en diversas situaciones. La tercera fase se concentra en un enfoque de control de modo deslizante diseñado para mantener el equilibrio del robot humanoide.

La contribución adicional y destacada de esta investigación radica en la incorporación del cálculo fraccionario en el diseño de controles y en la evaluación comparativa del rendimiento. El uso de operadores de orden no entero en el control de sistemas robóticos se revela como un enfoque prometedor para mejorar la estabilidad y la adaptabilidad del robot en entornos dinámicos y desafiantes.

Además, se introduce una metodología de ajuste de parámetros utilizando el algoritmo de búsqueda de cuco (CSA), asegurando una sintonización fina de los controladores para un rendimiento óptimo. La prueba de robustez, que incorpora fuerzas externas sobre el humanoide y variaciones en los parámetros del motor, valida la eficacia y resistencia del sistema en condiciones adversas.

La evaluación comparativa entre el caso clásico y el de orden fraccionario, utilizando el root mean square error, destaca que la inclusión de operadores fraccionarios proporciona una mayor robustez al sistema. Este hallazgo subraya la relevancia del enfoque fraccionario en la mejora de la estabilidad y capacidad de adaptación de los robots humanoides en escenarios del mundo real. En conjunto, estas contribuciones avanzan significativamente en la comprensión y diseño de técnicas de control en el campo de la robótica.

Abstract

This research work presents significant contributions in the field of robotics, specifically in the area of humanoid robots, focusing on two fundamental aspects: the development of the dynamic model of the legs of the NAO robot and the design of a control strategy using the fractional calculus approach.

Firstly, the development of the dynamic modeling of the legs of the humanoid robot NAO is addressed, coherently integrating the mechanical and electrical behavior of direct current motors. This comprehensive approach seeks to refine the precision and efficiency of motion controls, enabling the robot to generate movements more naturally, resembling human walking.

Continuing, a three-part control strategy is introduced. The first part is dedicated to trajectory tracking control for the leg joints, optimizing the robot's ability to follow predefined trajectories with maximum fidelity. The second part applies PID controls to regulate the torque of the direct current motors, ensuring stable and precise behavior in various situations. The third phase focuses on a sliding mode control approach designed to maintain the balance of the humanoid robot.

The additional and notable contribution of this research lies in the incorporation of fractional calculus in control design and performance comparative evaluation. The use of non-integer order operators in the control of robotic systems emerges as a promising approach to enhance stability and adaptability in dynamic and challenging environments.

Furthermore, a parameter tuning methodology is introduced using the Cuckoo Search algorithm, ensuring fine-tuning of controllers for optimal performance. The robustness test, incorporating external forces on the humanoid and variations in motor parameters, validates the effectiveness and resilience of the system in adverse conditions.

The comparative evaluation between the classical and fractional order cases, using the root mean square error, highlights that the inclusion of fractional operators provides greater robustness to the system. This finding underscores the relevance of the fractional approach in improving the stability and adaptability of humanoid robots in real-world scenarios. Overall, these contributions significantly advance the understanding and design of control techniques in the field of robotics.

Contenido

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Abstract	VI
Simbología	IX
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	2
1.2. Hipótesis	3
1.3. Objetivos	3
1.4. Metas	3
1.5. Metodología	3
1.6. Aportaciones	4
2. Estado del Arte	5
2.1. Robots Humanoides	5
2.2. Controladores para la Locomoción Bípeda	7
2.3. Robot Humanoide NAO	7
2.4. Motores de Corriente Continua (CC)	12
2.5. Cálculo Fraccionario Aplicado a la Robótica	14
3. Marco Teórico	15
3.1. ¿Cómo realizar la locomoción de un robot humanoide?	15
3.2. Conceptos Básicos para la Locomoción Bípeda	16
3.3. Modelo Matemático	19
3.4. Leyes de Control	25
3.5. Sensor Virtual de Fuerza mediante una Red Neuronal Artificial	27
3.6. Operadores Fraccionarios	30
3.7. Algoritmo de Búsqueda de Cuco (CSA)	30
4. Desarrollo y Resultados	32
4.1. Cinemática Directa de las Piernas del Robot Humanoide NAO	32
4.2. Cinemática Inversa de las Piernas del Robot Humanoide NAO	33
4.3. Matriz Jacobiana de las Piernas del Robot Humanoide NAO	35

CONTENIDO

4.4. Modelo Dinámico de las Piernas del Robot Humanoide NAO	38
4.5. Análisis en Lazo Abierto del Modelo Dinámico	42
4.6. Estrategia de Control	47
4.7. Configuración para la Simulación	49
4.8. Gráficas	52
4.9. Tablas Comparativas	52
5. Conclusiones y Trabajos Futuros	69
5.1. Conclusiones	69
5.2. Trabajos Futuros	70
Bibliografía	71
Apéndices	82
A. Producción Científica	83

Simbología

σ	Orden de modelo acoplado humanoide con los motores.
3-D WS	<i>3-D Walking Sequence</i>
ACO	<i>Ant Colony Optimization</i>
AIST	<i>National Institute of Advanced Industrial Science and Technology</i>
ASIMO	<i>Advanced Step in Innovative Mobility</i>
BPN	<i>Back Propagation Neural Network</i>
CC	<i>Corriente Continua</i>
CF	<i>Cálculo Fraccionario</i>
CoM	<i>Center of Mass</i>
CSA	<i>Cuckoo Search Algorithm</i>
CSA	<i>Cuckoo Search Algorithm</i>
DARPA	<i>Defense Advanced Research Projects Agency</i>
DSP	<i>Double Support Phase</i>
FSR	<i>Force Sensing Resistor</i>
g	<i>gramo</i>
gdl	<i>grados de libertad</i>
HOAP	<i>Humanoid for Open Architecture Platform</i>
HRP	<i>Humanoid Research. Project</i>
IMU	<i>Inertial Measurement Unit</i>
KAIST	<i>Korea Advanced Institute of Science and Technology</i>
kg	<i>kilogramo</i>
KHR	<i>KAIST Humanoid Robot</i>

SIMBOLOGÍA

Li-Ion	<i>iones de litio</i>
LIPPFM	<i>Lineal Inverted Pendulum Plus Flywheel Model</i>
m	<i>metro</i>
MMOEC	<i>Modified Minimal Orbit Energy Control</i>
MPC	<i>Model-based Predictive Control</i>
MRE	<i>Mean Relative Error</i>
N	<i>newton</i>
Ni-MH	<i>níquel-metalhidruro</i>
PETMAN	<i>Protection Ensemble Test Mannequin</i>
PID	<i>Proporcional Integral Derivativo</i>
QRIO	<i>Quest for cuRIOsity</i>
rad	<i>Radián</i>
RE	<i>Relative Error</i>
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>
RNA	<i>Red Neuronal Artificial</i>
rpm	<i>revolución por minuto</i>
s	<i>segundo</i>
SSP	<i>Single Support Phase</i>
TEA	<i>Trastorno del Espectro Autista</i>
WABOT	<i>WAseda roBOT</i>
ZMP	<i>punto momento cero</i>

Capítulo 1

Introducción

Desde que Hefesto construyó el gigante Talos, una estatua de bronce (3500 a. C.) hasta los inventos de Leonardo da Vinci (1500) son diseños antiguos que asentaron el concepto de robot. Pero la palabra robot fue popularizada por el dramaturgo checo Karel Čapek, quien en 1920 escribió su obra de ciencia ficción *Rossum's Universal Robots*, cuyo origen proviene de la palabra eslava *robota* que significa trabajo subordinado. Además, en 1942, el escritor ruso Isaac Asimov publicó su cuento de ciencia ficción, titulado *Runaround*, en el que se mencionan las leyes de la robótica que representan el código moral del robot y surgen como medida de protección para los seres humanos.

Por otro lado, el primer robot fue desarrollado por George C. Devol Jr. y Joseph F. Engelberger en 1961, el cual es básicamente un brazo manipulador, y que dio lugar a la primera generación de robots fijos a un punto y que no pueden moverse libremente. Con el paso del tiempo, se han creado mecanismos robóticos móviles que pueden desenvolverse por cielo, mar y tierra, por ejemplo, robots humanoides y con ruedas, drones y pequeñas aeronaves con alas, vehículos submarinos autónomos, entre otros [1–4].

El área de interés para este tema de tesis son los robots humanoides, los cuales en la actualidad son uno de los campos de investigación que ha tenido un desarrollo notable y progresivo para diversos fines, como tareas típicas de recuperación en desastres, por ejemplo, limpiar escombros y cerrar válvulas, y en estrategias de locomoción como subir escaleras y conducir vehículos utilitarios. Esto se comprueba en el evento DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency) Robotics Challenge [5].

El desarrollo de robots humanoides se remonta a la década de 1970, cuando se creó en Japón el primer humanoide del que se tiene constancia desde el punto de vista académico, el WABOT-1 (WAseda roBOT-1) de Kato [6]. Desde entonces, se han desarrollado varios robots humanoides en todo el mundo, como el WABOT de la Universidad de Waseda, el ASIMO (Advanced Step in Innovative Mobility) de Honda, el QRIO (Quest for cuRIOsity) de SONY, el HOAP (Humanoid for Open Architecture Platform) de Fujitsu, la serie KHR (KAIST Humanoid Robot (Korea Advanced Institute of Science and Technology)) de Kondo y la serie HRP (Humanoid Research. Project) desarrollada conjuntamente por el Instituto Nacional de Ciencia y Tecnología Industrial Avanzada y Kawada Robotics.

Aunque puede haber muchos aspectos en el desarrollo de robots humanoides, la locomoción y la manipulación son los aspectos más importantes en términos de funcionalidad. Especialmente, la locomoción bípeda que puede proporcionar la movilidad del robot en varios terrenos y espacios accidentados

o irregulares en comparación con otros tipos, por ejemplo, los robots móviles con ruedas. Debido al avance de la robótica, es inevitable que en un futuro los robots humanoides se adapten a ambientes domésticos cotidianos.

El Cálculo Fraccionario (CF) es un área de las matemáticas, que se va a utilizar en este tema de tesis doctoral, cuya primera aproximación se atribuye originalmente a Guillaume de L'Hôpital y Gottfried Leibniz en 1695. En una de sus cartas comentaron el significado y la importancia que generaría si el orden de las derivadas no fuera de orden entero. En esta carta, Leibniz concluyó que a partir de los resultados, "algún día conduciría a consecuencias útiles". Desde esa fecha, ha habido más de 300 años de desarrollo constante de esta útil herramienta matemática. Las primeras contribuciones se atribuyen a matemáticos conocidos, como Euler, Laplace, Lacroix, Riemann, Liouville, Fourier, Abel, por nombrar algunos. Recientemente, investigadores como Caputo, Atangana, Baleanu, Fabrizio han realizado importantes aportaciones en este campo [7–9].

Durante sus inicios, esta disciplina fue estudiada únicamente por matemáticos. Sin embargo, en la actualidad se ha desarrollado en aplicaciones desde la perspectiva de la ingeniería, esto debido a que las derivadas e integrales de orden no entero son útiles para la descripción de propiedades de diversos materiales, por ejemplo, en viscoelasticidad [10, 11]. Sin embargo, el CF ha sido de particular interés en diversas y variadas áreas científicas como la física [12, 13], la biología [14, 15], el control automático [16, 17], el procesamiento de señales [18, 19], el caos [20, 21] por nombrar algunos debido a que el CF ha demostrado que puede modelar y controlar sistemas físicos con mayor precisión que cualquier método de orden entero tradicional. En este sentido, se han propuesto varias derivadas e integrales de orden fraccionario [22].

1.1. Planteamiento del Problema

Como se mencionó anteriormente, la locomoción y la manipulación son los aspectos más importantes en términos de funcionalidad de los robots humanoides, pero existen inconvenientes en el diseño para realizar estas tareas, algunos de los desafíos para el desarrollo se encuentran en el modelado del robot bípedo, el generador de patrones de marcha, la estabilidad dinámica, el sistema de control, el diseño mecánico y la simulación, por lo que se busca obtener el mejor desempeño al realizar estas tareas.

Con respecto al CF, ha demostrado representar de mejor manera la dinámica de sistemas físicos debido a que el orden de derivación proporciona un parámetro adicional que puede ser ajustado para obtener un mejor modelo del comportamiento del sistema. Por otra parte, también se han obtenido resultados sobresalientes al aplicar leyes de control de orden fraccionario en sistemas físicos.

Ahora bien, si nos enfocamos en el caso de estudio, el estado del arte nos indica que solo se han desarrollado modelos reducidos por lo que al utilizar el cálculo de orden fraccionario podemos obtener un modelo que represente de mejor manera la dinámica del humanoide. Además, se conoce que el cálculo de orden fraccionario presenta propiedades disipativas, por lo que al aplicarlo al control de la locomoción bípeda podría ayudar a generar los mismos movimientos con menor esfuerzo. Así mismo, se debe tener en cuenta que estos sistemas están expuestos a perturbaciones y fallas, de modo que, es importante diseñar un sistema de control que asista ante estas situaciones.

Por lo que este trabajo aborda el tema de modelado, control y simulación de la locomoción de robots humanoides basado en el cálculo de orden no entero y debido a lo anterior no hay limitaciones para poder utilizar más de un operador fraccionario en el mismo sistema.

1.2. Hipótesis

Con base en los resultados obtenidos en diversos trabajos reportados en la literatura, es posible garantizar mediante simulaciones que al emplear el cálculo de orden no entero se puede mejorar cada aspecto que involucra el desarrollo de la locomoción de robots humanoides.

1.3. Objetivos

General

Desarrollar el modelo dinámico de las extremidades inferiores del robot humanoide NAO para diseñar y aplicar una estrategia de control que permita la locomoción dinámica activa del sistema robótico bípedo, utilizando el enfoque matemático del cálculo fraccionario.

Específicos

- Calcular el modelo cinemático directo del caso de estudio con la convención de Denavit–Hartenberg.
- Obtener matemáticamente la Matriz Jacobiana para el subsistema que corresponde a las piernas del robot NAO.
- Desarrollar modelos dinámicos con diferentes definiciones de operadores fraccionarios.
- Diseñar y aplicar leyes de control fraccionarias al modelo del caso de estudio con el propósito de mejorar el rendimiento de su contra parte clásica en términos de estabilidad dinámica y seguimiento de trayectoria.

1.4. Metas

- Obtener el modelo dinámico de las extremidades inferiores del robot humanoide NAO.
- Establecer el operador fraccionario apropiado para el modelo dinámico del caso de estudio.
- Lograr una estrategia de control fraccionaria para la locomoción bípeda del robot humanoide NAO que sea robusta ante fuerzas externas y variación de parámetros.

1.5. Metodología

Debido a que los resultados de este trabajo de investigación se van a demostrar mediante simulaciones, se opta por investigar robots humanoides desarrollados actualmente para poder seleccionar un caso de estudio (robot humanoide **NAO⁶**), esto nos permitiría visualizar de mejor manera las aportaciones. Una vez elegido el robot humanoide, lo primero que se debe desarrollar es el modelado matemático,

tanto cinemático como dinámico, los cuales, se van a desarrollar mediante la formulación de Denavit-Hartenberg y de Euler-Lagrange, respectivamente. Entonces, acoplar el modelo dinámico del humanoide con el de los actuadores para tener un solo modelo, a este sistema acoplado se le aplicará un control de par a los motores y un control de seguimiento de trayectoria a las articulaciones de las piernas del robot NAO. Además, es importante un control para el equilibrio del robot humanoide, para esto se utiliza el modelo de péndulo invertido lineal 3-D.

1.6. Aportaciones

- Modelado, control y simulación de la locomoción de robots humanoides con el enfoque del cálculo fraccionario.
- Análisis del modelo dinámico del robot humanoide de orden entero con sus generalizaciones de orden fraccionario.
- Análisis comparativo que destaque las ventajas y/o desventajas de utilizar controles de orden fraccionario en robots humanoides.

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Robots Humanoides

Un robot humanoide es un robot que está diseñado para imitar y/o simular la forma y los movimientos de un ser humano [23]. Las principales funciones que se toman en cuentas para el diseño humanoide son, la manipulación de objetos y el estudio de la locomoción bípeda.

En general, los robots humanoides tienen un par de piernas, un torso, un par de brazos y una cabeza, aunque algunas formas de robots humanoides pueden modelar sólo una parte del cuerpo, por ejemplo, la parte inferior (piernas), la parte superior (torso, cabeza y/o brazos) o solo la cabeza. Algunos robots humanoides pueden tener cabezas diseñadas para replicar los rasgos faciales humanos, tales como los ojos y la boca.

A continuación, se presenta algunos de los humanoides de cuerpo completo con mayor investigación y desarrollo en los últimos años.

Atlas-Unplugged

En 2008, Boston Dynamics empezó el desarrollo de una serie de robots humanoides. El propósito era construir bípedos con movilidad y destreza avanzadas. Los primeros bípedos, fueron los robots PETMAN (2009-2012), luego evolucionaron a tres versiones diferentes de Atlas (2013-Actualidad).

Atlas-Unplugged (Figura 2.1 (a)) fue el primer robot bípedo sin cableado externo de Boston Dynamics. La operación con batería le permite aproximadamente 90 minutos de tiempo de ejecución de misión mixta, que consiste en estar de pie, caminar y manipular, entre otras. Este humanoide es silencioso a comparación de sus antecesores. Tiene diferentes tipos de actuadores, hidráulicos y eléctricos. Consta de 30 grados de libertad (gdl), una altura de 188 cm y un peso de 182 kg [24].

HRP-4

El robot humanoide HRP-4 (Figura 2.1 (b)) fue desarrollado por AIST y Kawada Industries Inc. en el 2010, tiene una altura de 151.4 cm, un peso de 39 kg, incluyendo las baterías de Ni-MH siendo el robot más liviano de la familia HRP, y consta de un total de 34 gdl distribuidos en 6 gdl \times 2 piernas,

7 gdl \times 2 brazos, 2 gdl \times 2 manos, 2 gdl en la cintura y 2 gdl en la cabeza.

El desarrollo del HRP-4 se rigió bajo ciertos conceptos de diseño: cuerpo delgado y ligero, mejorar la manipulación de objetos y la capacidad de expansión, así como ser de menor costo y potencia respecto a su antecesor (HRP-2) [25].

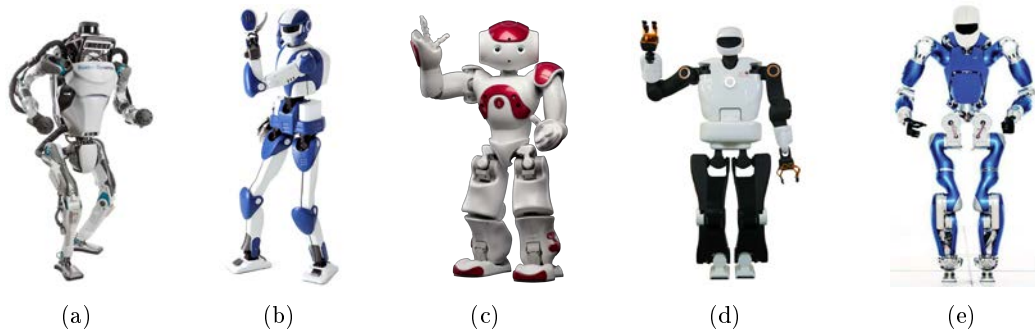


Figura 2.1: Robots humanoides de cuerpo completo (a) Atlas-Unplugged, (b) HRP-4, (c) NAO, (d) TALOS y (e) TORO

NAO

A diferencia de los robots anteriormente presentados, NAO (Figura 2.1 (c)) es un humanoide de tamaño pequeño con apenas 58 cm de altura y un peso de 4.5 kg, es el único en estar disponible al público con reducciones de funcionalidades.

NAO cuenta con 25 gdl, los cuales están distribuidos en 5 gdl \times 2 piernas, 5 gdl \times 2 brazos, 1 gdl \times 2 manos, 1 gdl del pelvis y 2 gdl en la cabeza. Tiene incorporado baterías Li-Ion, así como diferentes tipos de sensores (giroscopio, acelerómetro, encoder, infrarrojo, ultrasónico) [26].

TALOS

En 2016, PAL-Robotics desarrolló el robot humanoide TALOS (Figura 2.1 (d)). Entre las especificaciones sobra salientes con las que cuenta este humanoide son, sensores de par en cada una de sus articulaciones (excepto cabeza, muñecas y pinzas), un par de carga de 6 kg en cada brazo, una autonomía de 1.5 h caminando/3 h en espera y dos pinzas de 3 dedos. Sus articulaciones son accionadas por motores de corriente directa sin escobillas.

TALOS tiene 32 gdl, los cuales son 6 gdl \times 2 piernas, 7 gdl \times 2 brazos, 1 gdl \times 2 manos, 2 gdl en la cintura y 2 gdl en la cabeza. Además, tiene una altura de 175 cm y un peso de 95 kg [27].

TORO

El robot humanoide TORO (Figura 2.1 (e)) es una plataforma de investigación para temas científicos relacionados con el movimiento y la locomoción bípeda. Esto incluye tareas como caminar, subir

escaleras y escenarios de contacto múltiple. TORO ofrece la posibilidad de comparar conceptos de control basados en posición y par.

Dicho humanoide tiene 39 gdl, 6 gdl \times 2 piernas, 6 gdl \times 2 brazos, 6 gdl \times 2 manos, 1 gdl en el torso y 2 gdl en el cuello, de estatura mide 174 cm y pesa aproximadamente 76 kg [28].

2.2. Controladores para la Locomoción Bípeda

El control de la locomoción bípeda de robots humanoides es una tarea compleja que requiere el desarrollo de distintos tipos de estrategias. A continuación se en listan algunos avances recientes en este campo:

- **Control basado en modelos:** es un tipo de controlador que utiliza modelos matemáticos para generar trayectorias óptimas para el movimiento del robot [29]. Estos modelos se utilizan para simular la dinámica de la marcha humana y generar patrones de marcha más naturales y eficientes.
- **Control de retroalimentación:** es un tipo de controlador que se centra en mantener el equilibrio y la estabilidad del robot durante la locomoción [30]. Utiliza la realimentación para ajustar el movimiento del robot en tiempo real.
- **Control basado en el aprendizaje:** es un tipo de controlador que utiliza técnicas de aprendizaje automático para mejorar el rendimiento del robot [31]. Estas técnicas se utilizan para desarrollar algoritmos de control capaces de adaptarse a distintos terrenos y velocidades de marcha.
- **Control basado en la dinámica pasiva:** es un tipo de controlador que utiliza la dinámica pasiva del robot para generar patrones de marcha [32]. Además, no requiere algoritmos de control complejos y puede generar patrones de marcha más naturales y eficientes.
- **Control de modelos virtuales:** es un enfoque intuitivo para la locomoción bípeda que utiliza un modelo virtual del robot para generar patrones de marcha [33]. También, se basa en el principio de la dinámica pasiva.
- **Estabilización de trayectorias de avance:** es un tipo de controlador que genera trayectorias de avance para estabilizar el movimiento del robot durante la locomoción [34]. Se basa en el principio del punto de momento cero (ZMP) y puede generar patrones de marcha más estables y eficientes.

2.3. Robot Humanoide NAO

En esta sección se presenta de manera detallada las especificaciones técnicas del caso de estudio. Además, se exponen trabajos desarrollados en las diferentes áreas de oportunidad del robot humanoide NAO.

Especificaciones Técnicas

NAO es un robot humanoide integrado, programable y de tamaño mediano desarrollado actualmente por SoftBank Robotics. El proyecto comenzó en el 2005 creando el primer prototipo del robot NAO

el cual ha sido mejorado con el paso del tiempo y presentado en sus diversas versiones, como **NAO Next Gen** (2011), **NAO Evolution** (2014) y **NAO⁶** (2018). En todas sus versiones disponen con los mismos gdl en la parte inferior del humanoide, 5 gdl en cada pierna y 1 gdl en la pelvis que se comparte entre las dos piernas (Figura 2.2 (a)), por lo que se tomaran en cuenta las especificaciones técnicas y valores nominales (Tablas 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4) de la parte inferior de la versión más reciente (**NAO⁶** [35]) con el fin de obtener resultados actualizados. Las dos cadenas cinemáticas y sus articulaciones son las siguientes [36–38]:

- **Pierna izquierda:** LHipYawPitch, LHipRoll, LHipPitch, LKneePitch, LAnklePitch, LAnkleRoll.
- **Pierna derecha:** RHipYawPitch, RHipRoll, RHipPitch, RKneePitch, RAnklePitch, RAnkleRoll.

Las articulaciones LHipYawPitch y RHipYawPitch son simplemente nombres diferentes para la articulación compartida (HipYawPitch) entre las dos piernas. Para especificar completamente las articulaciones de ambas piernas del robot NAO, se dan la longitud de los eslabones (Figura 2.2 (b)), el rango operativo en grados de las articulaciones (Figura 2.3), así como la masa de cada articulación/eslabón (Tabla 2.5).

Tabla 2.1: Sensores inerciales.

Girómetro	
Ejes	3
Precisión	5 %
Velocidad Angular	8.7266 rad/s
IMU	
Ejes	3
Precisión	10 %

Tabla 2.2: Sensores de fuerza.

Force Sensing Resistor	
Rango	0 a 45 N
Localización	4 por pie
Sensibilidad	40 g

Tabla 2.3: Posición de los motores en las articulaciones de las piernas.

Nombre	Tipo de motor
HipYawPitch	1
HipRoll	1
HipPitch	2
KneePitch	2
AnklePitch	2
AnkleRoll	1

Tabla 2.4: Tipos de motores de corriente continua.

Característica	Motor tipo 1	Motor tipo 2
Modelo	22NT82213P	22NT Z20
Velocidad sin carga (rpm)	8700 \pm 10 %	8700 \pm 10 %
Par de parada (N.m)	0.065 \pm 8 %	0.065 \pm 10 %
Par continuo (N.m)	0.0178 max	0.0178 max

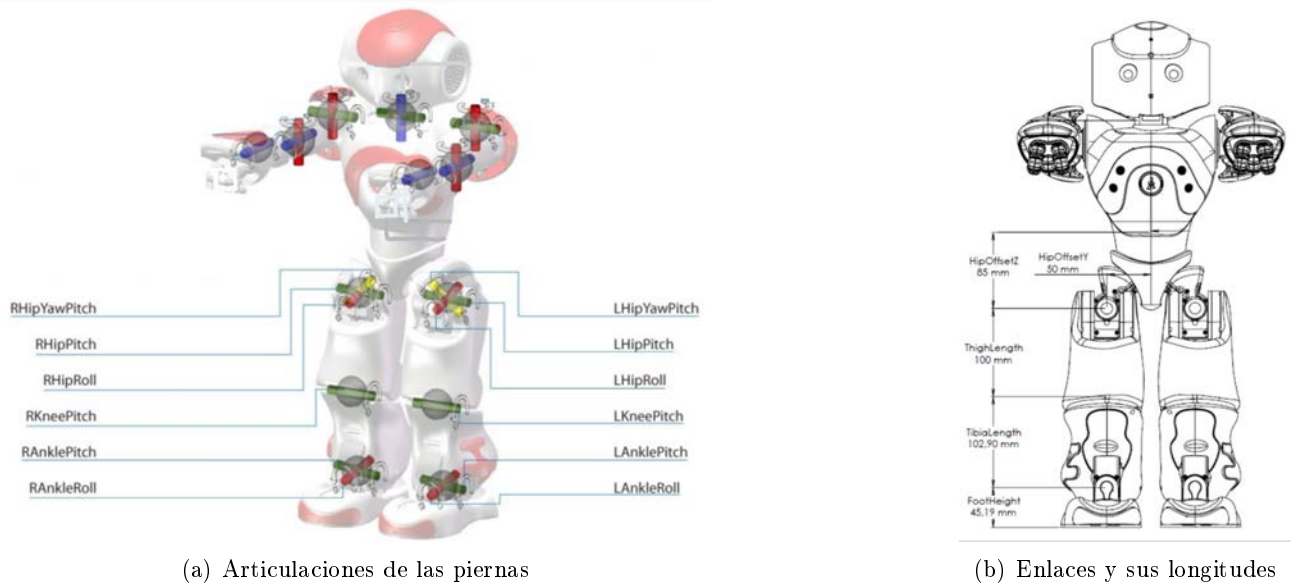


Figura 2.2: Robot humanoide NAO.

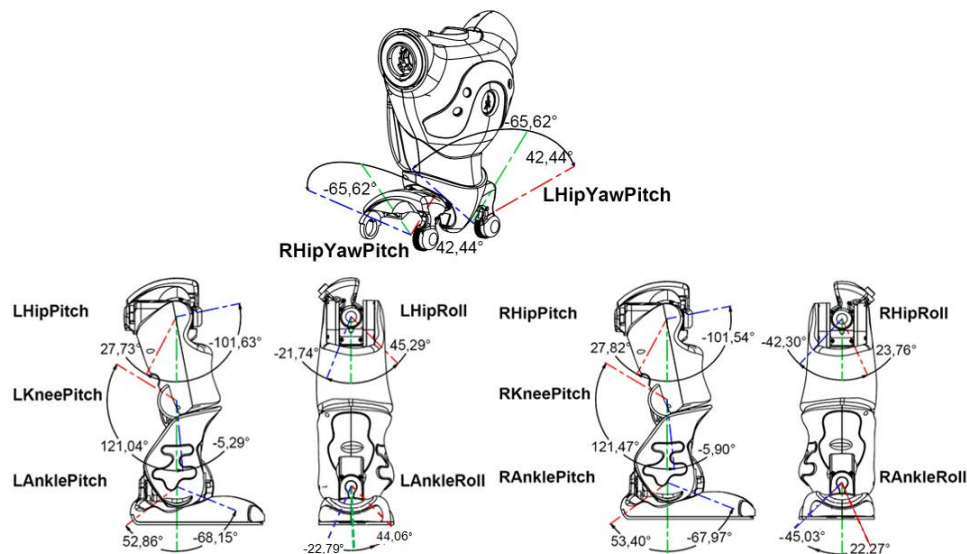


Figura 2.3: Articuciones de las piernas del robot NAO y su rango operativo.

Tabla 2.5: Masas y CoM de los eslabones/articulaciones del robot NAO.

Nombre	Masa (kg)	CoM _x (m)	CoM _y (m)	CoM _z (m)
RHipYawPitch	0.06981	-0.00781	0.01114	0.02661
RHipRoll	0.14053	-0.01549	-0.00029	-0.00515
RHipPitch	0.38968	0.00138	-0.00221	-0.05373
RKneePitch	0.30142	0.00453	-0.00225	-0.04936
RAnklePitch	0.13416	0.00045	-0.00029	0.00685
RAnkleRoll	0.17184	0.02542	-0.0033	-0.03239
LHipYawPitch	0.06981	-0.00781	-0.01114	0.02661
LHipRoll	0.14053	-0.01549	0.00029	-0.00515
LHipPitch	0.38968	0.00138	0.00221	-0.05373
LKneePitch	0.30142	0.00453	0.00225	-0.04936
LAnklePitch	0.13416	0.00045	0.00029	0.00685
LAnkleRoll	0.17184	0.02542	0.0033	-0.03239

NAO - Estado del Arte

El robot humanoide NAO es una plataforma robótica que ha tenido un gran desarrollo desde que inició el proyecto en el año 2005, y se ha convertido especialmente en un estándar en educación e investigación. NAO también es utilizado como asistente por empresas y centros de salud para recibir, informar y entretener a los visitantes.

En el campo de la investigación, se ha utilizado para el desarrollo de una terapia para el Trastorno del Espectro Autista (TEA) en niños basado en la interacción Humano-Robot [39–43]; en [44–49] los autores diseñan estrategias para que el humanoide NAO se desarrolle en el torneo RoboCup; además, se han presentados métodos para el desarrollo de posturas emocionales en el robot humanoide NAO, por ejemplo basados en el sistema del agente conversacional Greta siguiendo la arquitectura de SAI-BA [50], en redes neuronales [51], y en la adaptación de las posturas que se desarrollan para un modelo de cuerpo humano virtual [52]; también se ha trabajado en la parte visual del robot para el reconocimiento y navegación en ambientes desconocidos así como la evasión de obstáculos [53–62]; asimismo se han propuesto técnicas de control a los brazos del humanoide para la manipulación de objetos [63–67].

A continuación, se presentan investigaciones recientes donde han desarrollado estrategias de control para la locomoción del robot humanoide NAO. Los autores en [68] emplean el modelo de péndulo invertido lineal más el modelo de volante (LIPPFM) para el análisis del movimiento dinámico completo del robot humanoide. Para el objetivo de seguimiento de trayectoria, diseñan e implementan un control predictivo basado en modelos (MPC) que está sintonizado con la técnica de optimización de colonias de hormigas (ACO). El controlador propuesto (ACO-MPC híbrido) es comparado con los controladores PID, ACO y MPC en términos del pico máximo y el tiempo de asentamiento. La sintonización del MPC utilizando la técnica ACO se describe en el diagrama de bloques que se muestra en la Figura 2.4.

Noel Maalouf *et al.* [69] proponen un sistema para el diseño de la marcha de humanoides basado en el campo de la kinesiología y en el intercambio de energía entre energías potenciales y cinéticas. Además, diseñan un controlador basado en energía (Ecuación 2.1) con el objetivo de conducir cada articulación a los ángulos de marcha deseados de una manera similar a la humana y eficiente en energía.

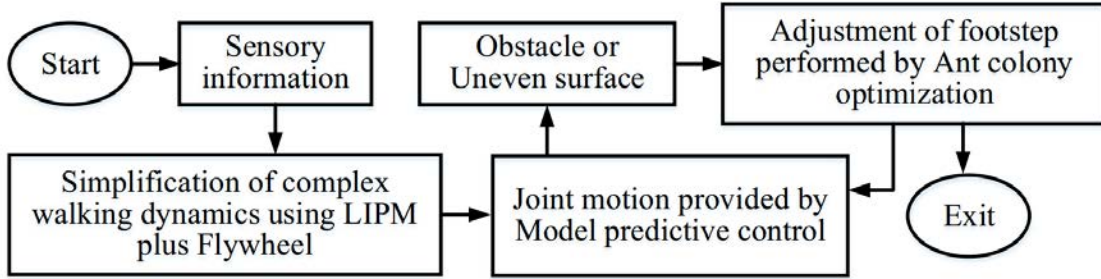


Figura 2.4: Sintonización del MPC utilizando la técnica ACO.

$$u = -\frac{1}{k_1 E} (k_4 + k_2 q + k_3 \ddot{q}), \quad (2.1)$$

donde k_1, k_2, k_3 y k_4 son ganancias, q es el vector de coordenadas generalizadas y $\dot{E} = u\dot{q}$.

En el artículo [70] se propone un controlador para asegurar un andar robusto y mejorar el equilibrio dinámico del robot durante su contacto con el entorno (perturbaciones externas). En el cual, la generación de la trayectoria del centro de masa (CoM) se realiza mediante un controlador MPC junto con la técnica ZMP (Figura 2.5).

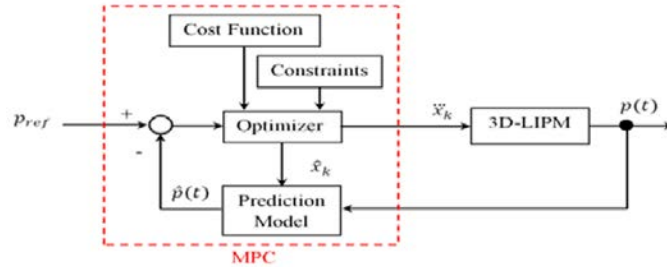


Figura 2.5: Diagrama del esquema de control de equilibrio.

La estructura del método propuesto por J. Ding *et al.* [71] se muestra en la Figura 2.6. Se puede ver que la metodología consta de dos componentes principales: ajuste en línea de secuencias de marcha en 3-D (3-D WS) y control para la marcha estable.

Para el ajuste de 3-D WS, se considera la información del sistema sensorial (encoders, FSR e IMU) para la detección del estado de contacto y la estimación de la postura, y mediante el algoritmo propuesto se lleva a cabo la solución de los diferentes modos de caminar.

Para el control de estabilización, se opta por un control de energía de órbita mínima modificado (MMOEC) para generar la trayectoria deseada ZMP^{des} y CoM^{des} . Usando la trayectoria estimada de ZMP^{real} y CoM^{real} , el control de vista previa con el ajuste del coeficiente de ángulo se combina para generar una trayectoria de referencia ZMP^{ref} y CoM^{ref} . Por otro lado, se diseña un control de aterrizaje con el pie para reducir el impacto del aterrizaje y generar una trayectoria del pie de referencia

($foot^{ref}$). Entonces, el patrón de marcha se genera mediante la cinemática inversa, y finalmente se realiza el control de postura para la marcha estable.

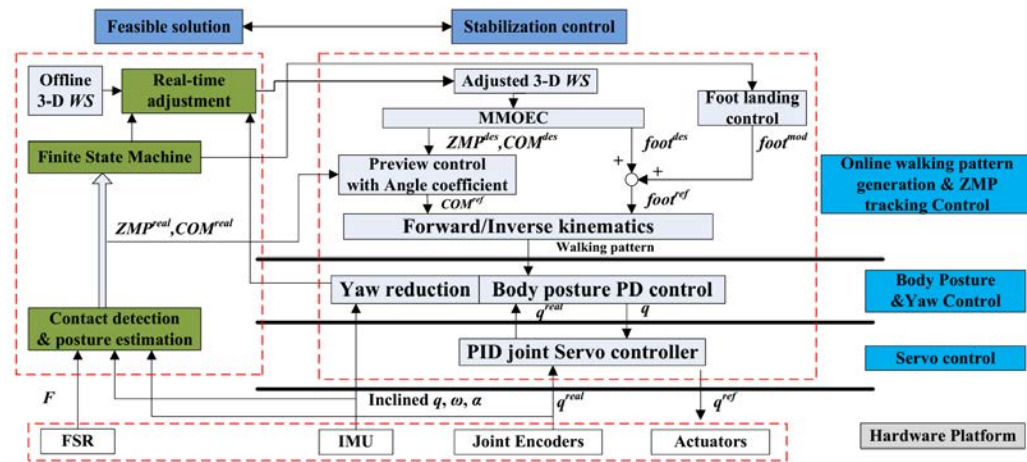


Figura 2.6: Diagrama de la estrategia general propuesta.

2.4. Motores de Corriente Continua (CC)

Ahora, en la Tabla 2.6 se presentan trabajos relacionados con controladores de orden fraccionarios aplicados a motores de corriente continua. En la columna *Ley de control* muestra la estrategia utilizada; en *Definición fraccionaria* señala el operador fraccionario utilizado donde $R-L$ es la definición de *Riemann-Liouville* y $G-L$ es en el sentido de *Grünwald-Letnikov*; y en la columna *Método de optimización* indica el algoritmo utilizado para el ajuste de los parámetros del controlador -algunos artículos implementan más de un algoritmo pero en la tabla muestra el que tuvo mejor rendimiento-, donde

- Phase Margin (PM)
- Bacterial Foraging Optimization (BFO)
- Whale Optimization Algorithm (WOA)
- Harris Hawks Optimization (HHO)
- Differential Evolution Algorithm (DE)
- Nelder-Mead Algorithm (NM)
- Particle Swarm Optimization (PSO)
- Levy mutated Artificial Bee Colony Algorithm (L-ABC):
- Stochastic Fractal Search (SFS)
- Ant Colony Optimization (ACO)
- Genetic Algorithm (GA)

- Chaotic Atom Search Optimization Algorithm (ChASO)
- Grey Wolf Optimizer (GWO)
- Manta Ray Foraging Optimization (MRFO)
- Extremum Seeking Algorithm (ESA)
- Firefly Algorithm (FA)

Tabla 2.6: Leyes de control fraccionarias aplicadas a motores de CC.

Ref.	Ley de control	Definición fraccionaria	Método de optimización	Impl.
Muresan <i>et al.</i> , (2020) [72]	PI	—	—	✓
Copot <i>et al.</i> , (2013) [73]	PI	—	PM	✓
Chowdhury <i>et al.</i> , (2017) [74]	PI	—	BFO	×
Khaniki <i>et al.</i> , (2020) [75]	PI Difuso	R-L	WOA	×
Fekik <i>et al.</i> , (2020) [76]	PI Difuso	—	Autoajuste	×
Munagala <i>et al.</i> , (2021) [77]	PID	G-L	HHO	×
Idir <i>et al.</i> , (2018) [78]	PID	G-L	DE	×
El-Saadawi <i>et al.</i> , (2020) [79]	PID	—	NM	✓
Roy <i>et al.</i> , (2016) [80]	PID	R-L	PSO	×
Rajasekhar <i>et al.</i> , (2011) [81]	PID	Caputo	L-ABC	×
Hasan <i>et al.</i> , (2019) [82]	PID	Caputo	PSO	×
Saini <i>et al.</i> , (2020) [83]	PID	—	SFS	×
Patil <i>et al.</i> , (2021) [84]	PID	R-L	ACO	×
Singhal <i>et al.</i> , (2012) [85]	PID	G-L	—	×
Mehra <i>et al.</i> , (2010) [86]	PID	G-L	GA	✓
Jain <i>et al.</i> , (2016) [87]	PID	—	PSO	×
Wati <i>et al.</i> , (2020) [88]	PID	—	GA	×
Hekimouglu <i>et al.</i> , (2019) [89]	PID	—	ChASO	×
Agarwal <i>et al.</i> , (2018) [90]	PID	G-L	GWO	×
Rastogi <i>et al.</i> , (2013) [91]	PID	G-L	PSO	×
Mohammed <i>et al.</i> , (2018) [92]	PID	G-L	ABC	×
Khubalkar <i>et al.</i> , (2016) [93]	PID	G-L	NM	×
Saleh <i>et al.</i> , (2014) [94]	PID	R-L	GA	×
Petráš <i>et al.</i> , (2009) [95]	PID	G-L	PM	✓
Ahuja <i>et al.</i> , (2014) [96]	PID	R-L	GA	×
Ahmed <i>et al.</i> , (2018) [97]	PID	—	GWO	×
Ekinci <i>et al.</i> , (2021) [98]	PID	—	MRFO	✓
Necaibia <i>et al.</i> , (2014) [99]	PID	R-L	ESA	×
Kommula <i>et al.</i> , (2020) [100]	PID	—	FA	×
Heidarpour <i>et al.</i> , (2017) [101]	Modo Deslizante	Caputo	—	✓
Gupta <i>et al.</i> , (2013) [102]	Difuso	G-L	GA	×
Farahani <i>et al.</i> , (2019) [103]	Neuro Difuso	—	PSO	×

2.5. Cálculo Fraccionario Aplicado a la Robótica

En [104] presenta una revisión bibliográfica sobre las aplicaciones de los operadores fraccionarios en la robótica. Las leyes de control de orden fraccionario se han aplicado a manipuladores, vehículos autónomos y muchos otros sistemas robóticos. El uso del cálculo fraccionario en la robótica ha ido ganando atención en los últimos años debido a su capacidad para proporcionar un análisis más preciso de un sistema robótico que su homólogo de orden entero. El artículo destaca los avances en el modelado y control de sistemas robóticos utilizando el cálculo fraccionario. La revisión abarca distintos tipos de operadores fraccionarios y sus aplicaciones en la robótica. También se analizan los avances en la sintonización de controladores fraccionarios aplicados a la robótica. El artículo concluye que el uso del cálculo fraccionario en robótica tiene el potencial de mejorar el rendimiento y la eficiencia de los sistemas robóticos.

Capítulo 3

Marco Teórico

En este capítulo se introduce y describe la teoría, así como conceptos y definiciones que son relevantes para el tema de investigación.

3.1. ¿Cómo realizar la locomoción de un robot humanoide?

Los robots bípedos tienen ventajas sobre los robots con ruedas, como el entorno de trabajo, el consumo de energía y la adaptabilidad, debido a que, pueden moverse en terrenos regulares e irregulares con una movilidad versátil. El robot bípedo está diseñado para imitar la locomoción humana y realizar determinadas tareas como se clasifica en la Figura 3.1. El robot humanoide puede constar de un tronco y piernas con o sin pies o incluso un mecanismo completo similar a un humano, según la aplicación deseada.

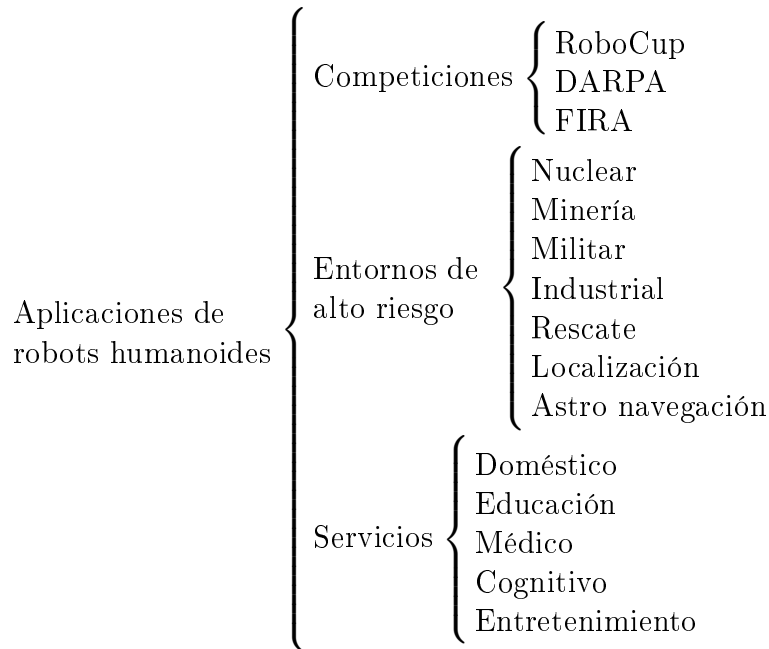


Figura 3.1: Aplicaciones de robots humanoides.

Los robots humanoides son un campo de estudio interdisciplinario, por lo que, el desarrollo de estos sistemas están ligados con la mecánica, el control, la electrónica, la inteligencia artificial y la anatomía humana. Los aspectos a considerar en el desarrollo de la locomoción para robots humanoides son el diseño mecánico, modelado, generador de patrones de marcha, estabilidad, sistema de control y software para pruebas, entre otros. [105].

Para poder hacer que un robot humanoide realice una marcha estable es de trascendencia contar con 3 modelos, primeramente, el modelo del robot, un generador de patrones de marcha y un control para la estabilización del humanoide durante su caminata. En las secciones 2.2 y 2.3 se mostraron algunos trabajos de los diferentes controladores aplicados a la locomoción bípeda. La Figura 3.2 muestra un esquema básico de control para la locomoción de robots humanoides.

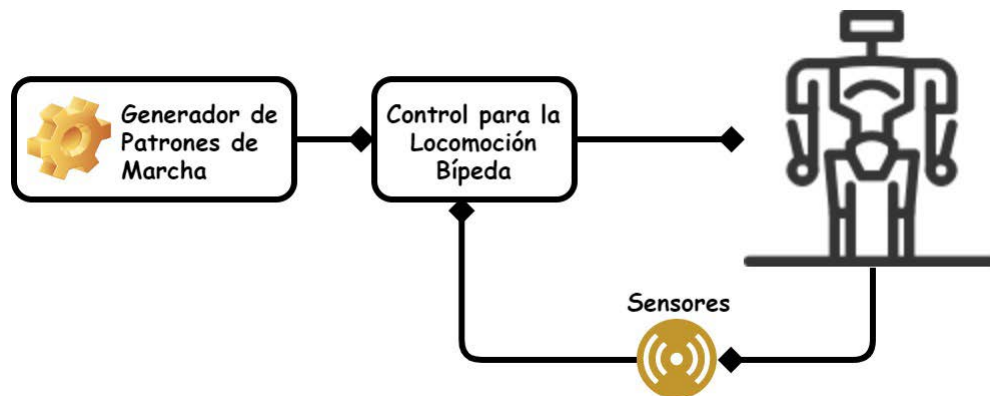


Figura 3.2: Diagrama de control básico

3.2. Conceptos Básicos para la Locomoción Bípeda

Ciclo de Marcha

El ciclo completo de la marcha del caminar humano consta de dos fases sucesivas principales (Figura 3.3): la fase de soporte doble (DSP) y la fase de soporte único (SSP) con subfases intermedias [106]. El DSP surge cuando ambos pies hacen contacto con el suelo dando como resultado un mecanismo de cadena cerrada, mientras que el SSP comienza cuando el pie trasero no tiene contacto en el suelo y con el pie delantero apoyado en el suelo.

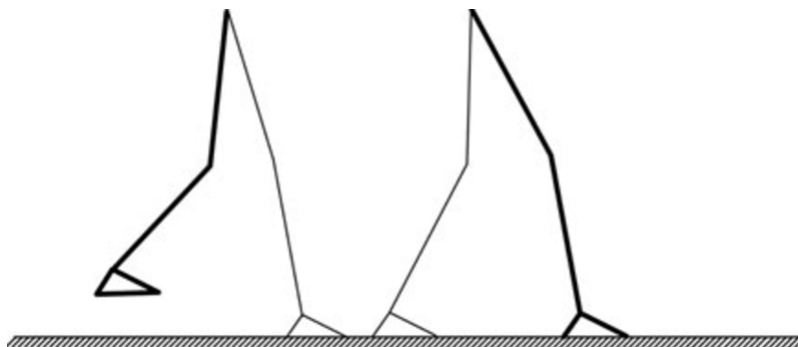


Figura 3.3: Ciclo de marcha bípedo.

Punto Momento Cero (ZMP)

El punto momento cero [107] es el punto en el suelo en el que el momento neto de las fuerzas de inercia y gravedad no tienen componente a lo largo de los ejes horizontales. Usualmente el ZMP (por sus siglas en inglés) se utiliza para planificar un movimiento de un robot humanoide que mantenga contacto entre el pie y el suelo.

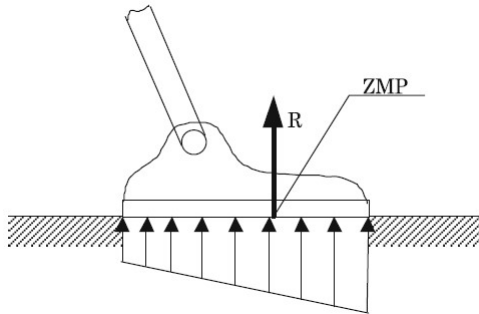


Figura 3.4: Definición del ZMP.

Polígono de Soporte

Otro concepto importante relacionado con el ZMP es el polígono de soporte [108, 109], que es el área formada al encerrar todos los puntos de contacto entre el robot (pies) y el suelo, además el ZMP siempre existe dentro del polígono de soporte (Figura 3.5).



Figura 3.5: Área del polígono de soporte.

Centro de Masa (CoM)

Al punto donde la línea de gravedad del CoM interseca el suelo, se llama la proyección en el suelo del CoM. La proyección en el suelo del CoM puede existir fuera del polígono de apoyo (Figura 3.6).

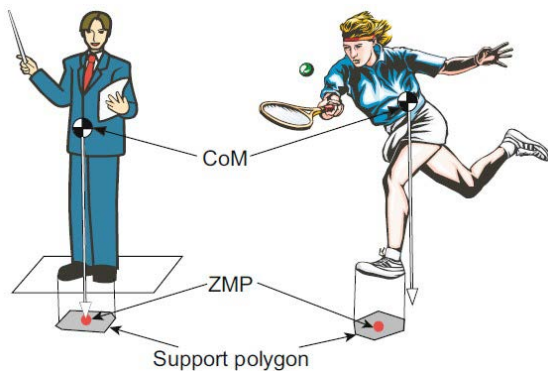


Figura 3.6: Ejemplos del CoM.

Medición del ZMP

El humanoide NAO cuenta con múltiples sensores de fuerza (Figura 3.7) que se utilizan para medir la posición del ZMP.

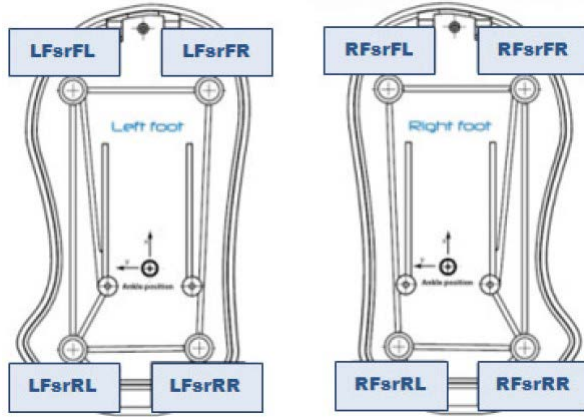


Figura 3.7: Ubicación de las Resistencias Sensibles a la Fuerza (FSR).

El ZMP se debe de medir tanto para la fase de soporte único como la fase de soporte doble, para el caso SSP el ZMP se puede obtener mediante las siguientes ecuaciones

$$p_x = \frac{\sum_{j=1}^N p_{jx} f_{jz}}{\sum_{j=1}^N f_{jz}}, \quad (3.1)$$

$$p_y = \frac{\sum_{j=1}^N p_{jy} f_{jz}}{\sum_{j=1}^N f_{jz}}, \quad (3.2)$$

donde p_x y p_y es la posición del ZMP con respecto a los ejes x e y , respectivamente. N es el número de sensores, p_j son puntos con respecto al sistema de coordenadas de referencia, y f_{jz} es la fuerza medida en el punto p_j .

Para la medición del ZMP cuando el humanoide se encuentra con ambos pies tocando el suelo se calcula de la siguiente manera,

$$p_x = \frac{p_{Rx} f_{Rz} + p_{Lx} f_{Lz}}{f_{Rz} + f_{Lz}}, \quad (3.3)$$

$$p_y = \frac{p_{Ry} f_{Rz} + p_{Ly} f_{Lz}}{f_{Rz} + f_{Lz}}, \quad (3.4)$$

donde R y L indican el lado derecho e izquierdo, respectivamente.

Estabilidad

El mecanismo bípedo es inestable durante la SSP. El desafío en la locomoción bípeda es mantener el equilibrio al caminar en diferentes tipos de entornos. La razón de la inestabilidad es la subactuación debida a la articulación pasiva del contacto pie-suelo.

ESTABILIDAD ESTÁTICA

La estabilidad estática restringe la proyección del CoM del humanoide para permanecer dentro del polígono de soporte, el cual, se define como el área representada por el pie de soporte durante la SSP y el área delimitada entre los pies apoyados durante la DSP (Figura 3.8 (a) y (b), respectivamente). Este tipo de estabilidad inducen a una marcha lenta y un robot bípedo con pies grandes.

ESTABILIDAD DINÁMICA

La estabilidad dinámica proporciona más libertad que la estabilidad estática, ya que el CoM proyectado del bípedo puede salir del polígono de soporte, y por lo tanto, permite una marcha más rápida. Existen varias técnicas para analizar la estabilidad dinámica, entre ellas, el ZMP y la marcha basada en la periodicidad [110–112].

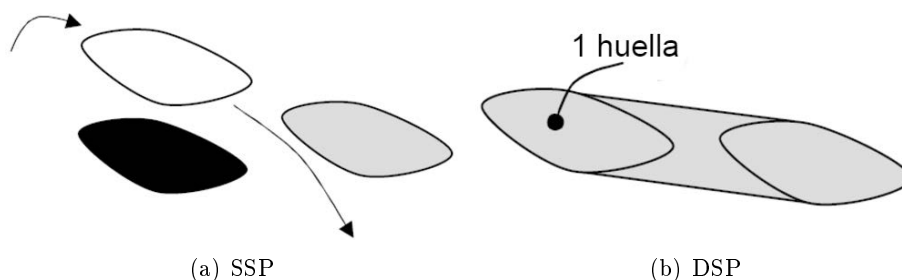


Figura 3.8: Formas del Polígono de Soporte, en gris.

3.3. Modelo Matemático

Cinemática Directa

De manera concreta, la cinemática directa consiste en determinar la posición y orientación del efector final en relación con la base, dados los valores de cada una de las variables articulares de la cadena cinemática.

Existen diversos métodos para la solución del problema de la cinemática directa, por ejemplo, el método geométrico, mediante matrices de transformación homogénea, la convención de Denavit-Hartenberg tanto la estándar como la forma modificada, y también haciendo uso de los cuaternios [113, 114]. En este trabajo se utilizará el algoritmo de Denavit-Hartenberg modificado.

ALGORITMO DE DENAVIT-HARTENBERG MODIFICADO

En este método [115, 116], la posición y orientación del enlace contiguo se describen mediante una matriz de transformación homogénea de 4×4 , la cual, se puede obtener usando solo cuatro parámetros, conocidos como parámetros de Denavit-Hartenberg (DH), que se denotan como a , α , d y θ . Los parámetros solo se pueden describir después de establecer el marco de referencia de cada articulación i con respecto a su articulación anterior como se describe a continuación:

- El eje z_i se establece en la dirección del eje de la articulación (la dirección de rotación).
- El eje x_i es paralelo a la normal común entre z_i y z_{i-1} .

- El eje y_i se determina a partir de la regla de la mano derecha considerando los ejes x_i y z_i .

Los parámetros DH se pueden resumir como:

- a : distancia desde el eje z_{i-1} al eje z_i a lo largo del eje x_{i-1} .
- α : rotación del eje z_{i-1} al eje z_i alrededor del eje x_{i-1} .
- d : distancia desde el eje x_{i-1} al eje x_i a lo largo del eje z_{i-1} .
- θ : rotación del eje x_{i-1} al eje x_i alrededor del eje z_{i-1} .

Para pasar del marco de referencia base de alguna articulación al marco de referencia transformado de esta articulación se utiliza la matriz de transformación T_{DH} , que consta de dos traslaciones y dos rotaciones parametrizadas por los parámetros DH de su respectiva articulación:

$$T_{DH} = Rot_x(\alpha)Tras_x(a)Rot_z(\theta)Tras_z(d), \quad (3.5)$$

$$T_{DH} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & a \\ \sin(\theta)\cos(\alpha) & \cos(\theta)\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & -d\sin(\alpha) \\ \sin(\theta)\sin(\alpha) & \cos(\theta)\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & d\cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Cinemática Inversa

El objetivo del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares de la cadena cinemática para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial. Para esto, un planteamiento posible frente al problema de la cinemática inversa es buscar una solución explícita usando álgebra o geometría (por ejemplo, a partir de la matriz de transformación homogénea, por reducción de polinomios o la solución de Pieper cuando se intersecan tres ejes). Otra posibilidad es encontrar una solución numérica por medio de algún algoritmo de aproximación sucesiva (como el gradiente descendente o algún método de optimización) [114,117,118].

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO A PARTIR DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA

En principio es posible tratar de obtener el modelo cinemático inverso de la cadena cinemática a partir del conocimiento de su modelo directo. Es decir, suponiendo conocidas las relaciones que expresan el valor de la posición y orientación del extremo de la cadena cinemática en función de sus coordenadas articulares, obtener por manipulación de aquellas las relaciones inversas.

Por lo que, dada una matriz de transformación homogénea de 4×4 que represente la posición y orientación deseadas del efector final

$$T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

encontrar una o todas soluciones de la ecuación

$$T = T_0^n(\theta_1, \dots, \theta_n) \quad (3.8)$$

donde

$$T_0^n(\theta_1, \dots, \theta_n) = T_{DH}(\theta_1) \cdots T_{DH}(\theta_n). \quad (3.9)$$

De la Ecuación 3.8 da como resultado doce ecuaciones no lineales en n variables desconocidas, que se pueden escribir como

$$t_{ij} = T_{0ij}^n(\theta_1, \dots, \theta_n), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (3.10)$$

donde t_{ij} y T_{0ij}^n se refieren a las doce entradas no triviales de T y T_0^n , respectivamente. Puesto que, la fila inferior de ambas matrices de la Ecuación 3.8 es $(0, 0, 0, 1)$ cuatro de las dieciséis ecuaciones son triviales.

Matriz Jacobiana

La matriz Jacobiana o simplemente el Jacobiano es uno de los temas más importantes en cuestión en el análisis y control del movimiento del robot. Esto es debido a que, surge en prácticamente todos los aspectos de la manipulación robótica, por ejemplo, en la planificación y ejecución de trayectorias suaves, o en la transformación de fuerzas y momentos de torsión desde el efector final a las articulaciones de la cadena cinemática, por mencionar algunas [113].

Se puede obtener la matriz Jacobiana mediante diversos métodos, por ejemplo, está la forma analítica que relaciona las velocidades de las articulaciones con la velocidad de variación de la posición y orientación del extremo de la cadena cinemática; la jacobiana geométrica es la que establece las velocidades articulares, y la velocidad lineal y angular del extremo de la cadena cinemática; y por último la forma convencional.

MÉTODO GEOMÉTRICO

En la Ecuación 3.11 se presenta la relación de la velocidad lineal y angular del efector final, y las velocidades articulares

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

donde J es la matriz Jacobiana.

El Jacobiano puede ser obtenido de manera directa a partir de la matriz de transformación homogénea

$$T_0^n = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

que define el modelo cinemático directo del robot. La velocidad lineal del extremo expresada en el sistema referencial, es dada por las derivadas respecto del tiempo de las coordenadas (x, y, z) del extremo de la cadena cinemática, de modo que:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \dot{p}_x, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \dot{p}_y, \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} = \dot{p}_z. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por tanto, la relación de la velocidad lineal del extremo de la cadena cinemática (v_x, v_y, v_z) con las velocidades articulares $(\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_n)$ pueden ser obtenidas a partir del vector $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ de la matriz T_0^n , que expresa la posición del extremo en función de las coordenadas articulares.

Para obtener la relación de la velocidad angular (w_x, w_y, w_z) con las velocidades articulares, se utiliza la submatriz (3×3) de rotación $\mathbf{R} = [\mathbf{n} \ \mathbf{o} \ \mathbf{a}]$ de la matriz de transformación homogénea del robot T_0^n .

De tal manera que, para obtener los valores de las velocidades angulares (w_x, w_y, w_z) en función de las velocidades articulares $(\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_n)$, se obtiene $\mathbf{\Omega}$ a partir de \mathbf{R} de acuerdo a la siguiente ecuación

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

entonces se pueden obtener los valores de las velocidades angulares \mathbf{w} .

Modelo Dinámico

En general, obtener el modelo dinámico de un sistema físico es esencial para comprender y predecir el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo y para diseñar sistemas de control que puedan regular el comportamiento del sistema.

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE EULER-LAGRANGE

Para obtener el modelo dinámico del robot humanoide se utiliza la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange dada como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \tag{3.15}$$

donde $\mathcal{L} = K - U$ es denominado el lagrangiano, K es la energía cinética total y U es la energía potencial total.

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}, \tag{3.16}$$

$$U = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \mathbf{p}_{vi}. \tag{3.17}$$

La Ecuación 3.15 se puede representar de forma matricial como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.18)$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ es la matriz de inercia, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ es el vector de fuerzas gravitacionales, $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de pares/fuerzas generalizadas. La matriz de inercia se calcula como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{J}_{v_i}^T \mathbf{J}_{v_i} + \mathbf{J}_{\omega_i}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{\omega_i}), \quad (3.19)$$

donde i es el i -ésimo elemento, n es el número de coordenadas generalizadas, m_i es la masa, \mathbf{I}_i es el tensor de inercia sobre el centro de masa del i -ésimo eslabón, \mathbf{J}_{v_i} y \mathbf{J}_{ω_i} son las matrices Jacobianas básicas.

Una forma para obtener $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es mediante los coeficientes o símbolos de Christoffel $c_{ijk}(\mathbf{q})$ definidos como

$$c_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial H_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial H_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right], \quad (3.20)$$

donde $H_{ij}(\mathbf{q})$ denota el ij -ésimo elemento de la matriz de inercia. Y, el kj -ésimo elemento de $C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis pueden obtenerse como

$$C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{1jk}(\mathbf{q}) \\ c_{2jk}(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ c_{njk}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.21)$$

El vector $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ se extrae de la siguiente manera

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{J}_{v_i}^T \mathbf{g}, \quad (3.22)$$

donde \mathbf{g} es la aceleración debido a la gravedad. Por último, $\boldsymbol{\tau}$ se descompone de la siguiente manera,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_M + \boldsymbol{\tau}_P + \boldsymbol{\tau}_E, \quad (3.23)$$

$\boldsymbol{\tau}_M$ es producido por los actuadores en cada articulación. $\boldsymbol{\tau}_P$ generalmente proviene de la fricción en los reductores y la fuerza contra electromotriz generada por los actuadores, que frecuentemente se modela como

$$\boldsymbol{\tau}_P = -\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \text{diag} \{ \text{sgn}(\dot{q}_i) \} \mathbf{u}_F, \quad (3.24)$$

donde \mathbf{D} es la viscosidad incluyendo el coeficiente contra electromotriz, \dot{q}_i es el i -ésimo componente de \mathbf{q} , \mathbf{u}_F es la fuerza de fricción seca y $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signum. $\boldsymbol{\tau}_E$ surge cuando el sistema está en contacto con objetos externos, y se aproxima mediante un conjunto de fuerzas que actúan en un punto de contacto

$$\boldsymbol{\tau}_E = \mathbf{J}_E^T \mathbf{f}_E, \quad (3.25)$$

donde \mathbf{J}_E es la matriz Jacobiana de la posición del punto de contacto y \mathbf{f}_E es el vector de par/fuerza.

Modelo del motor de corriente continua

El circuito equivalente de control del motor de CC [119–121] se muestra en la Figura 3.9.

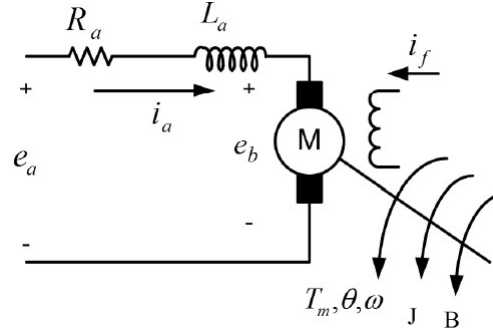


Figura 3.9: Modelo del motor de CC.

El modelo matemático del motor de CC en el circuito eléctrico es dado como

$$e_a = R_a i_a + L_a \dot{i}_a + e_b, \quad (3.26)$$

$$e_b = K_b \dot{\theta} = K_b \omega, \quad (3.27)$$

donde e_a es el voltaje de entrada (V), i_a es la corriente del estator (A), R_a y L_a son la resistencia (Ω) y la inductancia (H) del estator, respectivamente, ω es la velocidad angular del rotor (rad/s), y K_b es la constante de la fuerza contra electromotriz (V·s/rad).

La ecuación dinámica mecánica es

$$\tau_m = J \ddot{\theta} + B \dot{\theta} = K_t i_a, \quad (3.28)$$

donde τ_m es el par motor (N·m), θ es la posición angular del rotor (rad), J es la inercia del rotor ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$), B es el coeficiente de fricción viscosa (N·m·s/rad), y K_t es la constante del par (N·m/A).

La ecuación dinámica eléctrica 3.26 en condiciones nominales se puede reescribir como

$$\dot{i}_a = -\frac{R_a}{L_a} i_a + \frac{1}{L_a} (e_a - K_b \omega), \quad (3.29)$$

Se definen los siguientes coeficientes de la ecuación 3.29 para considerar la incertidumbre paramétrica en el sistema

$$b_1 = \frac{R_a}{L_a}, \quad b_2 = \frac{1}{L_a}. \quad (3.30)$$

Entonces la Ecuación 3.29 se puede expresar como

$$\dot{i}_a = -b_1 i_a + b_2 (e_a - K_b \omega), \quad (3.31)$$

Para considerar las incertidumbres de los parámetros del motor, la Ecuación 3.31 podría reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{i}_a &= -(\bar{b}_1 + \Delta b_1)i_a + (\bar{b}_2 + \Delta b_2)(e_a - K_b\omega), \\ \dot{i}_a &= -\bar{b}_1 i_a + \bar{b}_2(e_a - K_b\omega) + D, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde \bar{b}_1 y \bar{b}_2 son los valores nominales y, Δb_1 y Δb_2 son las incertidumbres. $D = -\Delta b_1 i_a + \Delta b_2(e_a - K_b\omega)$.

Péndulo invertido lineal en 3D

De [122–124] se obtienen las ecuaciones del 3D-LIPM:

$$\ddot{x} = \frac{g}{z_c}(x - p_x), \quad (3.33)$$

$$\ddot{y} = \frac{g}{z_c}(y - p_y), \quad (3.34)$$

donde x es la posición en el eje X, y es la posición en el eje Y, z_c es el punto de intersección con el eje Z y g es la constante de la gravedad.

Patrón de seguimiento para los pies

De acuerdo a [125], la trayectoria del pie puede escribirse como

$$x_{ft} = \left(t - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} \right) L_{ft}, \quad (3.35)$$

$$z_{tf} = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi t)] H_{ft}, \quad (3.36)$$

donde L_{ft} y H_{ft} representan la longitud y la altura del paso, respectivamente.

3.4. Leyes de Control

Control PID

Para controlar el par generado por los motores de CC, se propone la estrategia de control PID. El esquema de control se muestra en la Figura 3.10,



Figura 3.10: Diagrama de bloques del controlador PID.

La ley de control queda descrita de la siguiente manera

$$u = K_p(\tau_d - \tau_m) + K_i \int (\tau_d - \tau_m) + K_d \frac{d}{dt}(\tau_d - \tau_m), \quad (3.37)$$

donde K_p , K_i y K_d representan las ganancias proporcional, integral y derivativa, respectivamente.

Control Adaptativo basado en Pasividad

En [126–128], se deriva un algoritmo de control adaptativo en el que se aprovecha la pasividad y linealidad en los parámetros de la dinámica del sistema robótico. Se toma en cuenta la representación matricial del modelo dinámico del robot humanoide como

$$\mathbf{M}(q)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(q) = \boldsymbol{\tau}_d, \quad (3.38)$$

donde $\mathbf{M}(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia y es definida positiva, $\mathbf{C}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Coriolis, $\mathbf{g}(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerza de gravedad, $\boldsymbol{\tau}_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares de entrada y $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de las coordenadas generalizadas.

Las ecuaciones de movimiento del humanoide se definen en términos de los momentos de inercia, masas, etc., que deben determinarse para cada robot en particular. La complejidad de las ecuaciones dinámicas hace que la obtención de estos parámetros sea una tarea difícil. Afortunadamente, las ecuaciones de movimiento son lineales en dichos parámetros, de tal manera que existe una función de dimensión $n \times l$ (donde n es el número de coordenadas generalizadas y l el número de parámetros a estimar) llamada **Regresor**, $\mathbf{Y}(q, \dot{q}, \ddot{q})$, que contiene los términos que involucran las variables articulares y sus respectivas derivadas, y un vector de dimensión l llamado vector de parámetros $\boldsymbol{\Theta}$, el cual contiene los términos de inercias, masas y longitudes, tal que se pueden escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}(q)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(q) = \mathbf{Y}(q, \dot{q}, \ddot{q})\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\tau}_d. \quad (3.39)$$

A partir de lo anterior se define la ley de control y la ley de estimación como

$$\boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{Y}(q, \dot{q}, v, a)\hat{\boldsymbol{\Theta}} - \mathbf{K}\mathbf{r}, \quad (3.40)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} = -\boldsymbol{\Pi}\mathbf{Y}(q, \dot{q}, v, a)\mathbf{r}, \quad (3.41)$$

donde \mathbf{v} , \mathbf{a} y \mathbf{r} están definidos como

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}}, \\ \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\Lambda}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \\ \mathbf{r} &= \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{v} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

los cuales nos ayudan a eliminar el error de posición en estado estable; $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$; \mathbf{K} , $\boldsymbol{\Pi}$ y $\boldsymbol{\Lambda}$ son matrices diagonales de ganancias positivas.

Control Modo Deslizantes

El control modo deslizante (SMC) consta de dos fases: la fase de alcance y la fase de deslizamiento [129–133]. La superficie de deslizamiento se elige como,

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \nu \right)^3 e, \quad (3.43)$$

donde ν es una constante positiva y e es la señal de error de seguimiento, y es la diferencia entre la salida actual y deseada ($e = x - x_d$). Desarrollando, la Ecuación 3.43 es representada como,

$$s = \ddot{e} + 3\nu\dot{e} + 3\nu^2e + \nu^3e, \quad (3.44)$$

La superficie de deslizamiento definida en la Ecuación 3.44 se basa en la función de seguimiento; cuando la superficie de deslizamiento converge a cero, el error de seguimiento converge automáticamente a cero. La ley de control basada en SMC consta de dos partes; control equivalente (u_{eq}) y control discontinuo (u_{dis}).

La entrada de control u_{eq} se obtiene poniendo la superficie deslizante en $\dot{s} = 0$. Luego, se toma la derivada de la superficie de deslizamiento poniendo el valor de diferentes estados y forzando la derivada del tiempo a cero, el controlador equivalente para el sistema se obtiene como,

$$u_{eq} = x\nu[3 + 3\nu + \nu^2] + \dot{x}_d\nu^3 + 3\ddot{x}_d\nu^2 + \ddot{x}_d[1 + 3\nu]. \quad (3.45)$$

La segunda parte del controlador u_{dis} garantiza que el sistema permanezca en la superficie deslizante y generalmente está diseñado mediante la función *sign* dada como,

$$u_{dis} = -k\text{sign}(s), \quad (3.46)$$

donde k es una constante positiva. Finalmente, la ley de control es dada de la siguiente forma

$$u_{smc} = u_{eq} + u_{dis}. \quad (3.47)$$

3.5. Sensor Virtual de Fuerza mediante una Red Neuronal Artificial

Una red neuronal artificial (RNA) [134, 135] es un sistema de mapeo no lineal que se inspira en la estructura de los sistemas nerviosos biológicos, utilizando principios observados en ellos.

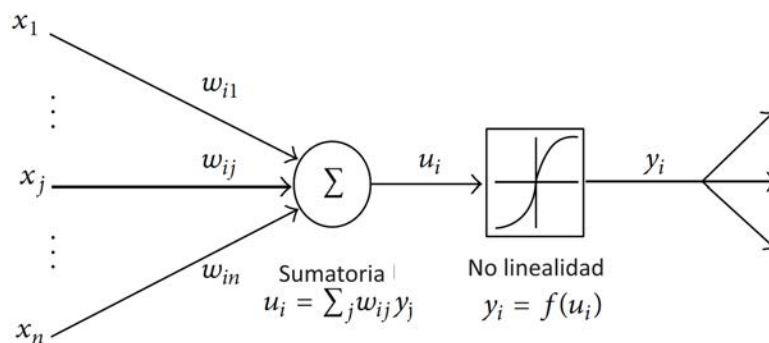


Figura 3.11: Ejemplo del esquema de una red neuronal artificial.

En términos más generales, una RNA (Figura 3.11) está formada por un gran número de nodos simples unidos por conexiones ponderadas. Por analogía, los nodos de procesamiento pueden denominarse neuronas. La salida de cada nodo depende sólo de la información disponible localmente en el nodo, almacenada internamente o que llega a través de las conexiones ponderadas. Cada unidad recibe entradas de muchos otros nodos y transmite su salida a otros nodos. Por sí solo, un elemento de procesamiento no es muy potente: genera una salida escalar con un único valor numérico, que es una simple función no lineal de sus entradas. La potencia del sistema surge de la combinación de muchas unidades de forma adecuada. Una red se especializa para implementar diferentes funciones variando la topología de conexión y los valores de los pesos de conexión. Las funciones complejas pueden implementarse conectando unidades entre sí con los pesos adecuados. De hecho, se ha demostrado que una red suficientemente grande con una estructura adecuada y pesos elegidos con propiedad puede aproximar con precisión arbitraria cualquier función que satisfaga ciertas restricciones generales. Normalmente, las unidades de procesamiento tienen respuestas del tipo

$$y_i = f\left(\sum_i u_i\right), \quad (3.48)$$

donde u_i son las señales de salida de la capa oculta a la capa de salida, y $f(u_i)$ es una función no lineal.

Esta unidad calcula una combinación lineal ponderada de sus entradas y la pasa a través de la no linealidad para producir una salida escalar. En general, se trata de una función no lineal acotada y no decreciente. Este modelo es, por supuesto, una aproximación drásticamente simplificada de los sistemas nerviosos reales. La intención es captar las principales características importantes en las funciones de procesamiento de información de las redes reales sin variar demasiado las restricciones físicas impuestas por la biología. Las impresionantes ventajas de las RNA's son la capacidad de resolver problemas altamente no lineales y complejos y la eficiencia en el procesamiento de datos imprecisos y con ruido. Principalmente, existen tres tipos de condiciones de entrenamiento para las RNA's, nombrados, el entrenamiento supervisado, el entrenamiento graduado y el entrenamiento de auto-organización.

Red Neuronal de Retropropagación (BPN)

La Red Neuronal de Retropropagación (BPN), desarrollada en [136], es el modelo de entrenamiento supervisado de RNA más extendido. La BPN utiliza el método del gradiente descendente para corregir el peso de la neurona de interconexión. Además, resuelve fácilmente la interacción de los elementos de procesamiento añadiendo capas ocultas. En el proceso de aprendizaje de la BPN, los pesos de interconexión se ajustan mediante una técnica de convergencia de errores para obtener una salida deseada para una entrada dada. En general, el error en la capa de salida del modelo BPN se propaga hacia atrás hasta la capa de entrada a través de la capa oculta de la red para obtener la salida final deseada. El método del gradiente descendente se utiliza para calcular el peso de la red y ajusta el peso de las interconexiones para minimizar el error de salida. Las fórmulas utilizadas en este algoritmo son las siguientes:

- Los resultados del cálculo de la capa oculta son,

$$net_i = \sum_{j=1}^n x_j w_{ij}, \quad (3.49)$$

$$u_i = f(\text{net}_i), \quad (3.50)$$

donde x_j y w_{ij} son los datos de entrada y los pesos de la capa oculta, respectivamente, n es el número de datos de entrada, j representa el j -ésimo dato de entrada e i es el número de la capa oculta. f es la función de activación, y u_i es el resultado obtenido de la capa oculta.

- Los resultados del cálculo de la capa de salida son,

$$\text{net}_k = \sum_{j=1}^n u_j w_{jk}, \quad (3.51)$$

$$y_k = f(\text{net}_k), \quad (3.52)$$

donde w_{jk} son los pesos de la capa de salida, y y_k es el resultado obtenido de la capa de salida.

- Las funciones de activación utilizadas en las capas son las siguientes,

$$f(\text{net}_i) = \frac{1}{1 + e^{-\text{net}_i}}, \quad (\text{logsig}) \quad (3.53)$$

$$f(\text{net}_i) = \frac{1 - e^{-\text{net}_i}}{1 + e^{-\text{net}_i}}, \quad (\text{tansig}) \quad (3.54)$$

$$f(\text{net}_i) = \text{net}_i, \quad (\text{lineal}) \quad (3.55)$$

- Los errores cometidos al final de un ciclo son,

$$e_k = (d_k - y_k)y_k(1 - y_k), \quad (3.56)$$

$$e_i = u_i(1 - u_i) \sum e_k w_{ij}, \quad (3.57)$$

donde d_k es el resultado esperado de la capa de salida, e_k es el error ocurrido en la capa de salida, y e_i es el error producido en la capa oculta.

- Los pesos pueden modificarse utilizando estos valores de error calculados de acuerdo a las siguientes ecuaciones

$$w_{jk} = w_{jk} + \alpha e_k u_i + \beta \Delta w_{jk}, \quad (3.58)$$

$$w_{ij} = w_{ij} + \alpha e_i x_i + \beta \Delta w_{ij}, \quad (3.59)$$

donde Δw_{jk} y Δw_{ij} son las correcciones efectuadas en los pesos en el cálculo previo. α es la tasa de aprendizaje, y β es el término que se utiliza para ajustar los pesos.

- El error cuadrático, producido en un ciclo puede hallarse mediante

$$\text{EC} = \sum 0.5 |t_k - o_k|^2. \quad (3.60)$$

La finalización del entrenamiento de la BPN concluye calculando, el error relativo (RE) para cada dato y el error relativo medio (MRE) para todos los datos de acuerdo con,

$$\text{RE} = \left(\frac{100(t_k - o_k)}{t_k} \right), \quad (3.61)$$

$$\text{MRE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{100(t_k - o_k)}{t_k} \right), \quad (3.62)$$

donde n es el número de datos [137, 138].

3.6. Operadores Fraccionarios

El cálculo fraccionario implica derivadas e integrales de orden no entero, es la generalización del cálculo clásico y durante los últimos años se ha convertido en una herramienta ampliamente utilizada para poder representar un mejor modelado y control de procesos en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería [8, 139].

Se consideran derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo porque son las más utilizada en el campo de la ingeniería debido a que las condiciones iniciales pueden ser enteras, es decir, el valor de la función en sí y sus derivadas de orden entero tienen que ser especificados, $x(0)$, $x'(0)$, $x''(0)$. Entonces, teniendo en cuenta lo anterior los datos tienen un significado físico y pueden ser medibles, por ejemplo, si $x(t)$ indica desplazamiento, entonces $x'(t)$ representa velocidad y $x''(t)$ expresa aceleración.

La derivada de Caputo de una función $f(t)$ se define como [140],

$${}_0^C \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\varsigma)}{(t-\varsigma)^{\alpha-n+1}} d\varsigma, \quad n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t > 0, \quad (3.63)$$

donde ${}_0^C \mathbf{D}_t^\alpha$ es el operador de la derivada de Caputo con respecto de t y de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

La definición de la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio es la siguiente [141],

$${}_0^{CF} \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_0^t \dot{f}(\varsigma) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\varsigma)}{1-\alpha}\right] d\varsigma, \quad (3.64)$$

donde $M(\alpha)$ es una función de normalización tal que $M(0) = M(1) = 1$.

La integral fraccionaria de Caputo de la función $f(t)$ de orden α se da de la siguiente manera

$${}_0^C \mathbf{I}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\varsigma) (t-\varsigma)^{\alpha-1} d\varsigma. \quad (3.65)$$

La integral fraccionaria asociada al kernel exponencial [142] viene dada de la siguiente manera,

$${}_0^{CF} \mathbf{I}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t f(\varsigma) \exp\left[-\frac{1-\alpha}{\alpha}(t-\varsigma)\right] d\varsigma. \quad (3.66)$$

3.7. Algoritmo de Búsqueda de Cuco (CSA)

El Algoritmo de Búsqueda de Cuco [143] es una técnica meta-heurística que se inspira en la dinámica del parasitismo de ciertas especies de Cuco y hace uso de vuelos del tipo Lévy. Las pautas fundamentales que gobiernan este algoritmo son las siguientes:

- Un cuco deja un huevo en los nidos de otras especies de aves.
- Los mejores nidos con alta calidad pasan a la siguiente generación.
- Si un ave anfitriona encuentra huevos extraños en su nido, tiene la opción de crear un nuevo nido cercano, dejar el nido original o deshacerse de los huevos ajenos.

El pseudocódigo del CSA se muestra a continuación,

Algoritmo 1 Búsqueda de cuco a través de los vuelos de Lévy

- 1: Inicialización de n nidos
- 2: **while** $t < n_g$ **do**
- 3: Elegir un huevo de cuco utilizando los vuelos de Lévy

$$x_{k+1}^i = x_k^i + \varrho \oplus \text{Lévy}(s, \lambda), \quad \varrho > 0, \quad (3.67)$$

donde

$$\text{Lévy}(s, \lambda) = \frac{\lambda \Gamma(\lambda) \sin(\pi \lambda / 2)}{\pi} \times \frac{1}{s^{1+\lambda}}, \quad s \gg s_0 > 0, \quad (3.68)$$

y se evalúa su capacidad,

$$F_i = \left(\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^m (\mathbf{q}_{\mathbf{d}_n} - \mathbf{q}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{k+1}^i))^2}{m}} \right). \quad (3.69)$$

- 4: Elige un huevo al azar y calcula su capacidad,

$$F_j = \left(\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^m (\mathbf{q}_{\mathbf{d}_n} - \mathbf{q}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{\text{rnd}}^i))^2}{m}} \right). \quad (3.70)$$

- 5: **if** $F_i > F_j$ **then**
 - 6: Sustituir el j -ésimo huevo por el i -ésimo huevo.
 - 7: Una fracción (p_a) de los peores nidos es demolida y sustituida por nidos nuevos.
 - 8: Se conservan los buenos nidos (mejores soluciones).
 - 9: $t \leftarrow t + 1$
-

Capítulo 4

Desarrollo y Resultados

4.1. Cinemática Directa de las Piernas del Robot Humanoide NAO

De [36–38,144] se obtienen los parámetros y tomando en cuenta la Sección 3.3, la cinemática directa de las piernas del robot NAO se muestra a continuación.

Cinemática directa de la pierna izquierda

La Tabla 4.1 muestra los parámetros DH para toda la cadena cinemática de la pierna izquierda.

Tabla 4.1: Parámetros DH para la cadena de la pierna izquierda del robot NAO.

Marco (Articulación)	a	α	d	\mathbf{q}_{r_i}
Base	$\mathbf{A}(0, a, -b)$			
LHipYawPitch	0	$-\frac{3\pi}{4}$	0	$q_{l_1} - \frac{\pi}{2}$
LHipRoll	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$q_{l_2} + \frac{\pi}{4}$
LHipPitch	0	$\frac{\pi}{2}$	0	q_{l_3}
LKneePitch	$-l_1$	0	0	q_{l_4}
LAnklePitch	$-l_2$	0	0	q_{l_5}
LAnkleRoll	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	q_{l_6}
Rotación	$\mathbf{R}_z(\pi)\mathbf{R}_y(-\frac{\pi}{2})$			
LFoot	$\mathbf{A}(0, 0, -c)$			

Y la matriz de transformación final es

$$\mathbf{T}_{Base}^{LFoot} = \mathbf{A}_{Base}^0 \mathbf{T}_0^1 \mathbf{T}_1^2 \mathbf{T}_2^3 \mathbf{T}_3^4 \mathbf{T}_4^5 \mathbf{T}_5^6 \mathbf{R}_z(\pi) \mathbf{R}_y(-\frac{\pi}{2}) \mathbf{A}_6^{LFoot}. \quad (4.1)$$

Cinemática directa de la pierna derecha

La Tabla 4.2 muestra los parámetros DH para toda la cadena cinemática de la pierna derecha.

Tabla 4.2: Parámetros DH para la cadena de la pierna derecha del robot NAO.

Marco (Articulación)	a	α	d	q_{r_i}
Base	$\mathbf{A}(0, -a, -b)$			
RHipYawPitch	0	$-\frac{\pi}{4}$	0	$q_{r_1} - \frac{\pi}{2}$
RHipRoll	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$q_{r_2} - \frac{\pi}{4}$
RHipPitch	0	$\frac{\pi}{2}$	0	q_{r_3}
RKneePitch	$-l_1$	0	0	q_{r_4}
RAnklePitch	$-l_2$	0	0	q_{r_5}
RAnkleRoll	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	q_{r_6}
Rotación	$\mathbf{R}_z(\pi)\mathbf{R}_y(-\frac{\pi}{2})$			
RFoot	$\mathbf{A}(0, 0, -c)$			

Y la matriz de transformación final es

$$\mathbf{T}_{Base}^{RFoot} = \mathbf{A}_{Base}^0 \mathbf{T}_0^1 \mathbf{T}_1^2 \mathbf{T}_2^3 \mathbf{T}_3^4 \mathbf{T}_4^5 \mathbf{T}_5^6 \mathbf{R}_z(\pi) \mathbf{R}_y(-\frac{\pi}{2}) \mathbf{A}_6^{RFoot}. \quad (4.2)$$

4.2. Cinemática Inversa de las Piernas del Robot Humanoide NAO

A continuación, se presentan las soluciones para cada una de las articulaciones de las piernas del humanoide NAO, se considera lo mostrado en la Sección 3.3.

Cinemática inversa de la pierna izquierda

Para la solución de las articulaciones q_{l_4} y q_{l_6} , primero se eliminan las traslaciones conocidas de la cadena cinemática

$$[\mathbf{A}_{Base}^0]^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot [\mathbf{A}_6^{LFoot}]^{-1} = [\mathbf{A}_{Base}^0]^{-1} \cdot \mathbf{T}_{Base}^{LFoot} \cdot [\mathbf{A}_6^{LFoot}]^{-1}, \quad (4.3)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_0^y.$$

Después, se rota el origen de la cadena $\frac{\pi}{4}$ sobre el eje x para hacer que la primera articulación (LHipYawPitch) sea una articulación de guiñada (alineada con el eje z).

$$\mathbf{R}_x(\frac{\pi}{4}) \cdot \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{R}_x(\frac{\pi}{4}) \cdot \mathbf{T}_0^y, \quad (4.4)$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}_0^y.$$

Ahora, se invierte ambos lados de la Ecuación 4.4 para formar la cadena inversa. Y así, solo las articulaciones LAnkleRoll, LAnklePitch y LKneePitch afectan la posición.

$$\hat{\mathbf{T}}^r = [\hat{\mathbf{T}}]^{-1}, \quad (4.5)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_0^{y^r} = [\hat{\mathbf{T}}_0^y]^{-1}.$$

Entonces la solución para q_{l_4} es

$$q_{l_4} = \pm \left(\pi - \text{acos} \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \sqrt{(0 - \hat{\mathbf{T}}_{(1,4)})^2 + (0 - \hat{\mathbf{T}}_{(2,4)})^2 + (0 - \hat{\mathbf{T}}_{(3,4)})^2}}{2l_1l_2} \right) \right). \quad (4.6)$$

A continuación, se extrae el ángulo q_{l_6} del bloque de traslación usando las celdas (2,4) y (3,4)

$$q_{l_6} = \text{atan} \left(\frac{\hat{\mathbf{T}}_{(2,4)}}{\hat{\mathbf{T}}_{(3,4)}} \right). \quad (4.7)$$

Para la articulación 5, volvemos a la Ecuación 4.4 y eliminamos las dos rotaciones al final de la cadena junto con la transformación \mathbf{T}_5^6 debido a que se conoce q_{l_6} :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} \cdot [\mathbf{T}_5^6 \mathbf{R}_z(\pi) \mathbf{R}_y(-\frac{\pi}{2})]^{-1} &= \hat{\mathbf{T}}_0^y \cdot [\mathbf{T}_5^6 \mathbf{R}_z(\pi) \mathbf{R}_y(-\frac{\pi}{2})]^{-1}, \\ \check{\mathbf{T}} &= \mathbf{T}_0^5, \end{aligned} \quad (4.8)$$

nuevamente formamos la cadena inversa de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{T}} &= [\check{\mathbf{T}}]^{-1}, \\ \mathbf{T}_0^5 &= [\mathbf{T}_0^5]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

las soluciones para la articulación q_{l_5} son las siguientes

$$\begin{aligned} q_{l_5} &= \text{asin} \left(-\frac{l_1 \sin(q_{l_4}) \check{\mathbf{T}}_{(1,4)} + (l_2 + l_1 \cos(q_{l_4})) \check{\mathbf{T}}_{(2,4)}}{l_1^2 \sin(q_{l_4})^2 + (l_2 + l_1 \cos(q_{l_4}))^2} \right) \\ q_{l_5} &= \pi - \text{asin} \left(-\frac{l_1 \sin(q_{l_4}) \check{\mathbf{T}}_{(1,4)} + (l_2 + l_1 \cos(q_{l_4})) \check{\mathbf{T}}_{(2,4)}}{l_1^2 \sin(q_{l_4})^2 + (l_2 + l_1 \cos(q_{l_4}))^2} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

De la Ecuación 4.8 eliminamos las matrices \mathbf{T}_3^4 y \mathbf{T}_4^5

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{T}} \cdot [\mathbf{T}_3^4 \mathbf{T}_4^5]^{-1} &= \mathbf{T}_0^5 \cdot [\mathbf{T}_3^4 \mathbf{T}_4^5]^{-1} \\ \bar{\mathbf{T}} &= \mathbf{T}_0^3 \end{aligned} \quad (4.11)$$

De la Ecuación 4.11 se obtiene las soluciones para las articulaciones q_{l_2} , q_{l_3} y q_{l_1}

$$q_{l_2} = \pm \text{acos}(\bar{\mathbf{T}}_{2,3}) - \frac{\pi}{4}, \quad (4.12)$$

$$q_{l_3} = \text{asin} \left(\frac{\bar{\mathbf{T}}_{(2,2)}}{\sin(q_{l_2} + \frac{\pi}{4})} \right), \quad (4.13)$$

$$q_{l_3} = \pi - \text{asin} \left(\frac{\bar{\mathbf{T}}_{(2,2)}}{\sin(q_{l_2} + \frac{\pi}{4})} \right),$$

$$q_{l_1} = \pm \text{acos} \left(\frac{\bar{\mathbf{T}}_{(1,3)}}{\sin(q_{l_2} + \frac{\pi}{4})} \right) + \frac{\pi}{2}. \quad (4.14)$$

Cinemática inversa de la pierna derecha

Las cadenas de las dos piernas son simétricas, por lo que la solución para la pierna derecha será bastante similar a la solución para la pierna izquierda. La única diferencia está en la matriz de rotación para la articulación RHipYawPitch, que debe ser rotada por $-\frac{\pi}{4}$. Además de este cambio, todos los pasos seguidos para llegar a una solución para la pierna izquierda se aplican sin cambios también a la pierna derecha.

4.3. Matriz Jacobiana de las Piernas del Robot Humanoide NAO

A continuación, se presentan los resultados de las cadenas cinemáticas del robot NAO, mediante el método geométrico presentado en la Sección 3.3.

Matriz jacobiana de la pierna izquierda

$$J_l = \begin{bmatrix} \dot{j}_{l11} & \dot{j}_{l12} & \dot{j}_{l13} & \dot{j}_{l14} & \dot{j}_{l15} & \dot{j}_{l16} \\ \dot{j}_{l21} & \dot{j}_{l22} & \dot{j}_{l23} & \dot{j}_{l24} & \dot{j}_{l25} & \dot{j}_{l26} \\ \dot{j}_{l31} & \dot{j}_{l32} & \dot{j}_{l33} & \dot{j}_{l34} & \dot{j}_{l35} & \dot{j}_{l36} \\ \dot{j}_{l41} & \dot{j}_{l42} & \dot{j}_{l43} & \dot{j}_{l44} & \dot{j}_{l45} & \dot{j}_{l46} \\ \dot{j}_{l51} & \dot{j}_{l52} & \dot{j}_{l53} & \dot{j}_{l54} & \dot{j}_{l55} & \dot{j}_{l56} \\ \dot{j}_{l61} & \dot{j}_{l62} & \dot{j}_{l63} & \dot{j}_{l64} & \dot{j}_{l65} & \dot{j}_{l66} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} j_{l11} = & c[\cos(q_{l6})(\sin(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}) \cos(q_{l1}) + \cos(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}) \cos(q_{l2}) \sin(q_{l1})) - \sin(q_{l1}) \sin(q_{l2}) \sin(q_{l6})] \\ & + \cos(q_{l1})[l_2 \sin(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \sin(q_{l3})] + \cos(q_{l2}) \sin(q_{l1})[l_2 \cos(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \cos(q_{l3})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_{l21} = j_{l31} = & -e[c(\cos(q_{l6})(\sin(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}) \sin(q_{l1}) - \cos(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}) \cos(q_{l1}) \cos(q_{l2})) + \cos(q_{l1}) \sin(q_{l2}) \sin(q_{l6}) \\ & + \sin(q_{l1})(l_2 \sin(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \sin(q_{l3})) - \cos(q_{l1}) \cos(q_{l2})(l_2 \cos(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \cos(q_{l3}))], \end{aligned}$$

$$j_{l41} = 0,$$

$$\dot{j}_{l51} = e,$$

$$\dot{j}_{l61} = -e,$$

$$\begin{aligned} j_{l12} = & c \cos(q_{l1})[\cos(q_{l2}) \sin(q_{l6}) + \cos(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}) \cos(q_{l6}) \sin(q_{l2})] \\ & + \cos(q_{l1}) \sin(q_{l2})[l_2 \cos(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \cos(q_{l3})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_{l22} = & e[\cos(q_{l2}) - \sin(q_{l1}) \sin(q_{l2})][l_2 \cos(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \cos(q_{l3})] \\ & - ec[\sin(q_{l6})(\sin(q_{l2}) + \cos(q_{l2}) \sin(q_{l1})) - \cos(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}) \cos(q_{l6})(\cos(q_{l2}) - \sin(q_{l1}) \sin(q_{l2}))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_{l32} = & -e[\cos(q_{l2}) + \sin(q_{l1}) \sin(q_{l2})][l_2 \cos(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \cos(q_{l3})] \\ & + ec[\sin(q_{l6})(\sin(q_{l2}) - \cos(q_{l2}) \sin(q_{l1})) - \cos(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}) \cos(q_{l6})(\cos(q_{l2}) + \sin(q_{l1}) \sin(q_{l2}))], \end{aligned}$$

$$\dot{j}_{l42} = -\sin(q_{l1}),$$

$$\dot{j}_{l52} = \dot{j}_{l62} = -e \cos(q_{l1}),$$

$$\begin{aligned} j_{l13} = & c \cos(q_{l6})[\cos(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}) \sin(q_{l1}) + \sin(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}) \cos(q_{l1}) \cos(q_{l2})] \\ & + \cos(q_{l1}) \cos(q_{l2})[l_2 \sin(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \sin(q_{l3})] + \sin(q_{l1})[l_2 \cos(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \cos(q_{l3})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_{l23} = & e \cos(q_{l1})[l_2 \cos(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \cos(q_{l3})] - e[\sin(q_{l2}) + \cos(q_{l2}) \sin(q_{l1})][l_2 \sin(q_{l3} + q_{l4}) + l_1 \sin(q_{l3})] \\ & - ec \cos(q_{l6})(\sin(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5})(\sin(q_{l2}) + \cos(q_{l2}) \sin(q_{l1})) - \cos(q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}) \cos(q_{l1})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{l_{33}} &= e \cos(q_{l_1})[l_2 \cos(q_{l_3} + q_{l_4}) + l_1 \cos(q_{l_3})] + e[\sin(q_{l_2}) - \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})][l_2 \sin(q_{l_3} + q_{l_4}) + l_1 \sin(q_{l_3})] \\
&\quad + ec \cos(q_{l_6})(\sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})(\sin(q_{l_2}) - \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})) + \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1})), \\
j_{l_{43}} &= j_{l_{44}} = j_{l_{45}} = \cos(q_{l_1}) \sin(q_{l_2}), \\
j_{l_{53}} &= j_{l_{54}} = j_{l_{55}} = e[\cos(q_{l_2}) - \sin(q_{l_1}) \sin(q_{l_2})], \\
j_{l_{63}} &= j_{l_{64}} = j_{l_{65}} = -e[\cos(q_{l_2}) + \sin(q_{l_1}) \sin(q_{l_2})], \\
j_{l_{14}} &= c \cos(q_{l_6})[\cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \sin(q_{l_1}) + \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1}) \cos(q_{l_2})] \\
&\quad + l_2 \cos(q_{l_3} + q_{l_4}) \sin(q_{l_1}) + l_2 \sin(q_{l_3} + q_{l_4}) \cos(q_{l_1}) \cos(q_{l_2}), \\
j_{l_{24}} &= el_2 \cos(q_{l_3} + q_{l_4}) \cos(q_{l_1}) - el_2 \sin(q_{l_3} + q_{l_4})[\sin(q_{l_2}) + \cos(q_{l_2}) * \sin(q_{l_1})] \\
&\quad - c \cos(q_{l_6})[e \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})(\sin(q_{l_2}) + \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})) - e \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1})], \\
j_{l_{34}} &= el_2 \sin(q_{l_3} + q_{l_4})[\sin(q_{l_2}) - \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})] + el_2 \cos(q_{l_3} + q_{l_4}) \cos(q_{l_1}) \\
&\quad + c \cos(q_{l_6})[e \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})(\sin(q_{l_2}) - \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})) + e \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1})], \\
j_{l_{15}} &= c \cos(q_{l_6})[\cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \sin(q_{l_1}) + \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1}) \cos(q_{l_2})], \\
j_{l_{25}} &= -c \cos(q_{l_6})[e \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})(\sin(q_{l_2}) + \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})) - e \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1})], \\
j_{l_{35}} &= c \cos(q_{l_6})[e \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})(\sin(q_{l_2}) - \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})) + e \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1})], \\
j_{l_{16}} &= -c(\sin(q_{l_6})[\sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \sin(q_{l_1}) - \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1}) \cos(q_{l_2})] - \cos(q_{l_1}) \cos(q_{l_6}) \sin(q_{l_2})), \\
j_{l_{26}} &= -c(\sin(q_{l_6})[e \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})(\sin(q_{l_2}) + \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})) \\
&\quad + e \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1})] - e \cos(q_{l_6})(\cos(q_{l_2}) - \sin(q_{l_1}) \sin(q_{l_2}))), \\
j_{l_{36}} &= c(\sin(q_{l_6})[e \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})(\sin(q_{l_2}) - \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})) \\
&\quad - e \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1})] - e \cos(q_{l_6})(\cos(q_{l_2}) + \sin(q_{l_1}) \sin(q_{l_2}))), \\
j_{l_{46}} &= -\cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \sin(q_{l_1}) - \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1}) \cos(q_{l_2}), \\
j_{l_{56}} &= e \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})(\sin(q_{l_2}) + \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})) - e \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1}), \\
j_{l_{66}} &= -e \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})(\sin(q_{l_2}) - \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_1})) - e \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) \cos(q_{l_1}).
\end{aligned}$$

Matriz jacobiana de la pierna derecha

$$J_r = \begin{bmatrix} \dot{j}_{r_{11}} & \dot{j}_{r_{12}} & \dot{j}_{r_{13}} & \dot{j}_{r_{14}} & \dot{j}_{r_{15}} & \dot{j}_{r_{16}} \\ \dot{j}_{r_{21}} & \dot{j}_{r_{22}} & \dot{j}_{r_{23}} & \dot{j}_{r_{24}} & \dot{j}_{r_{25}} & \dot{j}_{r_{26}} \\ \dot{j}_{r_{31}} & \dot{j}_{r_{32}} & \dot{j}_{r_{33}} & \dot{j}_{r_{34}} & \dot{j}_{r_{35}} & \dot{j}_{r_{36}} \\ \dot{j}_{r_{41}} & \dot{j}_{r_{42}} & \dot{j}_{r_{43}} & \dot{j}_{r_{44}} & \dot{j}_{r_{45}} & \dot{j}_{r_{46}} \\ \dot{j}_{r_{51}} & \dot{j}_{r_{52}} & \dot{j}_{r_{53}} & \dot{j}_{r_{54}} & \dot{j}_{r_{55}} & \dot{j}_{r_{56}} \\ \dot{j}_{r_{61}} & \dot{j}_{r_{62}} & \dot{j}_{r_{63}} & \dot{j}_{r_{64}} & \dot{j}_{r_{65}} & \dot{j}_{r_{66}} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
j_{r_{11}} &= c[\cos(q_{r_6})(\sin(q_{r_3} + q_{r_4} + q_{r_5}) \cos(q_{r_1}) + \cos(q_{r_3} + q_{r_4} + q_{r_5}) \cos(q_{r_2}) \sin(q_{r_1})) - \sin(q_{r_1}) \sin(q_{r_2}) \sin(q_{r_6})] \\
&\quad + \cos(q_{r_1})[l_2 \sin(q_{r_3} + q_{r_4}) + l_1 \sin(q_{r_3})] + \cos(q_{r_2}) \sin(q_{r_1})[l_2 \cos(q_{r_3} + q_{r_4}) + l_1 \cos(q_{r_3})], \\
j_{r_{21}} &= j_{r_{31}} = e[c(\cos(q_{r_6})(\sin(q_{r_3} + q_{r_4} + q_{r_5}) \sin(q_{r_1}) - \cos(q_{r_3} + q_{r_4} + q_{r_5}) \cos(q_{r_1}) \cos(q_{r_2})) + \cos(q_{r_1}) \sin(q_{r_2}) \sin(q_{r_6}) \\
&\quad + \sin(q_{r_1})(l_2 \sin(q_{r_3} + q_{r_4}) + l_1 \sin(q_{r_3})) - \cos(q_{r_1}) \cos(q_{r_2})(l_2 \cos(q_{r_3} + q_{r_4}) + l_1 \cos(q_{r_3}))], \\
j_{r_{14}} &= 0, \\
j_{r_{51}} &= j_{r_{61}} = e,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{r12} &= c \cos(q_{r1}) [\cos(q_{r2}) \sin(q_{r6}) + \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r6}) \sin(q_{r2})] \\
&\quad + \cos(q_{r1}) \sin(q_{r2}) [l_2 \cos(q_{r3} + q_{r4}) + l_1 \cos(q_{r3})], \\
j_{r22} &= e [\cos(q_{r2}) + \sin(q_{r1}) \sin(q_{r2})] [l_2 \cos(q_{r3} + q_{r4}) + l_1 \cos(q_{r3})] \\
&\quad - ec [\sin(q_{r6}) (\sin(q_{r2}) - \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) - \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r6}) (\cos(q_{r2}) - \sin(q_{r1}) \sin(q_{r2}))], \\
j_{r32} &= e [\cos(q_{r2}) - \sin(q_{r1}) \sin(q_{r2})] [l_2 \cos(q_{r3} + q_{r4}) + l_1 \cos(q_{r3})] \\
&\quad - ec [\sin(q_{r6}) (\sin(q_{r2}) + \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) - \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r6}) (\cos(q_{r2}) - \sin(q_{r1}) \sin(q_{r2}))], \\
j_{r42} &= -\sin(q_{r1}), \\
j_{r52} &= e \cos(q_{r1}), \\
j_{r62} &= -e \cos(q_{r1}), \\
j_{r13} &= c \cos(q_{r6}) [\cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \sin(q_{r1}) + \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1}) \cos(q_{r2})] \\
&\quad + \cos(q_{r1}) \cos(q_{r2}) [l_2 \sin(q_{r3} + q_{r4}) + l_1 \sin(q_{r3})] + \sin(q_{r1}) [l_2 \cos(q_{r3} + q_{r4}) + l_1 \cos(q_{r3})], \\
j_{r23} &= e \cos(q_{r1}) [l_2 \cos(q_{r3} + q_{r4}) + l_1 \cos(q_{r3})] - e [\sin(q_{r2}) + \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})] [l_2 \sin(q_{r3} + q_{r4}) + l_1 \sin(q_{r3})] \\
&\quad - ec \cos(q_{r6}) (\sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) (\sin(q_{r2}) - \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) + \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1})), \\
j_{r33} &= e \cos(q_{r1}) [l_2 \cos(q_{r3} + q_{r4}) + l_1 \cos(q_{r3})] + e [\sin(q_{r2}) - \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})] [l_2 \sin(q_{r3} + q_{r4}) + l_1 \sin(q_{r3})] \\
&\quad + ec \cos(q_{r6}) (\sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) (\sin(q_{r2}) - \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) + \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1})), \\
j_{r43} &= j_{r44} = j_{r45} = \cos(q_{r1}) \sin(q_{r2}), \\
j_{r53} &= j_{r54} = j_{r55} = e [\cos(q_{r2}) + \sin(q_{r1}) \sin(q_{r2})], \\
j_{r63} &= j_{r64} = j_{r65} = e [\cos(q_{r2}) - \sin(q_{r1}) \sin(q_{r2})], \\
j_{r14} &= c \cos(q_{r6}) [\cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \sin(q_{r1}) + \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1}) \cos(q_{r2})] \\
&\quad + l_2 \cos(q_{r3} + q_{r4}) \sin(q_{r1}) + l_2 \sin(q_{r3} + q_{r4}) \cos(q_{r1}) \cos(q_{r2}), \\
j_{r24} &= -el_2 \cos(q_{r3} + q_{r4}) \cos(q_{r1}) - el_2 \sin(q_{r3} + q_{r4}) [\sin(q_{r2}) + \cos(q_{r2}) * \sin(q_{r1})] \\
&\quad - c \cos(q_{r6}) [e \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) (\sin(q_{r2}) - \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) + e \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1})], \\
j_{r34} &= el_2 \sin(q_{r3} + q_{r4}) [\sin(q_{r2}) - \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})] + el_2 \cos(q_{r3} + q_{r4}) \cos(q_{r1}) \\
&\quad + c \cos(q_{r6}) [e \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) (\sin(q_{r2}) - \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) + e \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1})], \\
j_{r15} &= c \cos(q_{r6}) [\cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \sin(q_{r1}) + \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1}) \cos(q_{r2})], \\
j_{r25} &= -c \cos(q_{r6}) [e \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) (\sin(q_{r2}) + \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) - e \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1})], \\
j_{r35} &= c \cos(q_{r6}) [e \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) (\sin(q_{r2}) - \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) + e \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1})], \\
j_{r16} &= -c (\sin(q_{r6}) [\sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \sin(q_{r1}) - \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1}) \cos(q_{r2})] - \cos(q_{r1}) \cos(q_{r6}) \sin(q_{r2})), \\
j_{r26} &= -c (\sin(q_{r6}) [e \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) (\sin(q_{r2}) + \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) \\
&\quad + e \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1})] - e \cos(q_{r6}) (\cos(q_{r2}) - \sin(q_{r1}) \sin(q_{r2}))), \\
j_{r36} &= c (\sin(q_{r6}) [e \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) (\sin(q_{r2}) - \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) \\
&\quad - e \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1})] - e \cos(q_{r6}) (\cos(q_{r2}) + \sin(q_{r1}) \sin(q_{r2}))), \\
j_{r46} &= -\cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \sin(q_{r1}) - \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1}) \cos(q_{r2}), \\
j_{r66} &= e \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) (\sin(q_{r2}) + \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) - e \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1}), \\
j_{r66} &= -e \sin(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) (\sin(q_{r2}) - \cos(q_{r2}) \sin(q_{r1})) - e \cos(q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}) \cos(q_{r1}).
\end{aligned}$$

4.4. Modelo Dinámico de las Piernas del Robot Humanoide NAO

Aplicando la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange explicada en la Sección 3.3, la representación del modelo dinámico de las piernas del robot humanoide NAO está dada de la siguiente manera.

Modelo dinámico de la pierna izquierda

$$\mathbf{M}_l(q_l)\ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l(q_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{g}_l(q_l) = \boldsymbol{\tau}_l, \quad (4.17)$$

donde

$$\mathbf{M}_l(q_l) = \begin{bmatrix} M_{l11} & M_{l12} & M_{l13} & M_{l14} & M_{l15} & M_{l16} \\ M_{l12} & M_{l22} & M_{l23} & M_{l24} & M_{l25} & M_{l26} \\ M_{l13} & M_{l23} & M_{l33} & M_{l34} & M_{l35} & M_{l36} \\ M_{l14} & M_{l24} & M_{l34} & M_{l44} & M_{l45} & M_{l46} \\ M_{l15} & M_{l25} & M_{l35} & M_{l45} & M_{l55} & M_{l56} \\ M_{l16} & M_{l26} & M_{l36} & M_{l46} & M_{l56} & M_{l66} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} M_{l11} &= I_{l_1} + I_{l_2} + I_{l_3} + I_{l_4} + I_{l_5} + I_{l_6} + m_{l_1}L_1 + [m_{l_2} + m_{l_3}][L_2 \cos(q_{l_1}) + 2L_3 \cos(q_{l_2} + q_{l_3})] \\ &\quad + [m_{l_4} + m_{l_5}][L_3 \cos(q_{l_3}) + 2L_4 \cos(q_{l_4} + q_{l_5})] + m_{l_6}L_5 \cos(q_{l_5} + q_{l_6}), \\ M_{l12} &= I_{l_2} + I_{l_3} + I_{l_4} + I_{l_5} + I_{l_6} + [m_{l_2} + m_{l_3}][\cos(q_{l_2}) + L_3 \cos(q_{l_2} + q_{l_3})] \\ &\quad + [m_{l_4} + m_{l_5}][L_3 \cos(q_{l_3}) + 2L_4 \cos(q_{l_4} + q_{l_5})] + m_{l_6}L_5 \cos(q_{l_5} + q_{l_6}), \\ M_{l13} &= I_{l_3} + I_{l_4} + I_{l_5} + I_{l_6} + m_{l_3}L_3 \cos(q_{l_3}) + [m_{l_4} + m_{l_5}][L_3 \cos(q_{l_3}) + 2L_4 \cos(q_{l_4} + q_{l_5})] \\ &\quad + m_{l_6}L_5 \cos(q_{l_5} + q_{l_6}), \\ M_{l14} &= I_{l_4} + I_{l_5} + I_{l_6} + (m_{l_4} + m_{l_5})L_4 \cos(q_{l_4} + q_{l_5}) + m_{l_6}L_5 \cos(q_{l_5} + q_{l_6}), \\ M_{l15} &= I_{l_5} + I_{l_6} + m_{l_5} \cos(q_{l_5}) + m_{l_6}L_5 \cos(q_{l_5} + q_{l_6}), \\ M_{l16} &= I_{l_6} + (m_{l_5} + m_{l_6}) \cos(q_{l_6}), \\ M_{l22} &= I_{l_3} + I_{l_4} + I_{l_5} + I_{l_6} + L_3[m_{l_3} \cos(q_{l_2} + q_{l_3}) + (m_{l_4} + m_{l_5}) \cos(q_{l_3})] + L_4 \cos(q_{l_4} + q_{l_5}), \\ M_{l23} &= L_1 \cos(q_{l_2} + q_{l_3}), \\ M_{l24} &= L_3 \cos(q_{l_3} + q_{l_4}), \\ M_{l25} &= M_{l35} = M_{l45} = 0, \\ M_{l26} &= M_{l36} = M_{l46} = M_{l56} = I_{l_4} + I_{l_5} + I_{l_6}, \\ M_{l33} &= I_{l_4} + I_{l_5} + I_{l_6} + (m_{l_4} + m_{l_5})L_4 \cos(q_{l_4} + q_{l_5}) + m_{l_6}L_5 \cos(q_{l_5} + q_{l_6}), \\ M_{l34} &= L_2L_3 \cos(q_{l_4} + q_{l_5}), \\ M_{l44} &= I_{l_5} + I_{l_6} + m_{l_5} \cos(q_{l_5}) + m_{l_6}L_5 \cos(q_{l_5} + q_{l_6}), \\ M_{l55} &= I_{l_6} + m_{l_6} \cos(q_{l_6}), \\ M_{l66} &= m_{l_6}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_l(q_l, \dot{q}_l) = \begin{bmatrix} C_{l11} & C_{l12} & C_{l13} & C_{l14} & C_{l15} & C_{l16} \\ C_{l21} & C_{l22} & C_{l23} & C_{l24} & C_{l25} & C_{l26} \\ C_{l31} & C_{l32} & C_{l33} & C_{l34} & C_{l35} & C_{l36} \\ C_{l41} & C_{l42} & C_{l43} & C_{l44} & C_{l45} & C_{l46} \\ C_{l51} & C_{l52} & C_{l53} & C_{l54} & C_{l55} & C_{l56} \\ C_{l61} & C_{l62} & C_{l63} & C_{l64} & C_{l65} & C_{l66} \end{bmatrix},$$

$$C_{l11} = -L_1 \sin(q_{l_2})[m_{l_2}L_2 + (m_{l_3} + m_{l_4})L_3]\dot{q}_{l_2},$$

$$C_{l12} = C_{l13} = C_{l14} = C_{l15} = C_{l16} = 0,$$

$$C_{l21} = -L_1 \sin(q_{l_1})\dot{q}_{l_1} + L_2(\dot{q}_{l_1} + \dot{q}_{l_2}),$$

$$C_{l22} = -m_{l_2}L_1L_2 \sin(q_{l_2})(\dot{q}_{l_1} + \dot{q}_{l_2}) - (m_{l_3} + m_{l_5})L_2L_3 \sin(q_{l_3})(\dot{q}_{l_3} + \dot{q}_{l_4}),$$

$$C_{l23} = C_{l24} = C_{l25} = C_{l26} = 0,$$

$$C_{l31} = m_{l_2}L_1L_2 \sin(q_{l_2})\dot{q}_{l_1} + (m_{l_3} + m_{l_4})L_1L_2 \sin(q_{l_2})\dot{q}_{l_1},$$

$$C_{l32} = L_3[m_{l_2} \sin(q_{l_3}) + m_{l_3} \cos(q_{l_3})],$$

$$C_{l33} = L_3[m_{l_1} \cos(q_{l_2}) \cos(q_{l_2} + q_{l_3}) + m_{l_2} \sin(q_{l_2} + q_{l_3}) \cos(q_{l_2} + q_{l_3}) + m_{l_3} \cos(q_{l_2}) \sin(q_{l_2} + q_{l_3})],$$

$$C_{l34} = C_{l35} = C_{l36} = 0,$$

$$C_{l41} = L_2 \cos(q_{l_2} + q_{l_3}) \cos(q_{l_4}) \sin(q_{l_5}) - \sin(q_{l_2} + q_{l_3})[2L_3 - \sin(q_{l_4})^2],$$

$$C_{l42} = -m_{l_4} \sin(q_{l_2} + q_{l_3}) \cos(q_{l_4}),$$

$$C_{l43} = m_{l_3} \sin(q_{l_4}),$$

$$C_{l44} = C_{l45} = C_{l46} = 0,$$

$$C_{l51} = m_{l_4} \cos(q_{l_2} + q_{l_3}) \sin(q_{l_4}) \cos(q_{l_5}) - L_4 \sin(q_{l_2}) \sin(q_{l_4}) \cos(q_{l_5}) + m_{l_5} \cos(q_{l_2} + q_{l_3}) \sin(q_{l_4}),$$

$$C_{l52} = m_{l_4} \cos(q_{l_2} + q_{l_3}) \sin(q_{l_4}) \cos(q_{l_5}) + L_3 \cos(q_{l_2} + q_{l_3}) \sin(q_{l_4}),$$

$$C_{l53} = m_{l_4} \sin(q_{l_2} + q_{l_3}) \cos(q_{l_4}),$$

$$C_{l54} = C_{l55} = C_{l56} = 0,$$

$$C_{l61} = -m_{l_5} \sin(q_{l_6}),$$

$$C_{l62} = -L_5 \cos(q_{l_6}),$$

$$C_{l63} = C_{l64} = C_{l65} = 0,$$

$$C_{l66} = m_{l_6} \sin(q_{l_5}).$$

$$\mathbf{g}_l(q_l) = \begin{bmatrix} g_{l_1} \\ g_{l_2} \\ g_{l_3} \\ g_{l_4} \\ g_{l_5} \\ g_{l_6} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} g_{l_1} &= m_{l_1}L_1g, \\ g_{l_2} &= -m_{l_2}g \cos(q_{l_2}) - m_{l_3} \sin(q_{l_2} + q_{l_3}) + L_1 \sin(q_{l_2}), \\ g_{l_3} &= L_2g \sin(q_{l_2} + q_{l_3}) + m_{l_1} \cos(q_{l_2} + q_{l_3}), \\ g_{l_4} &= m_{l_4}g \sin(q_{l_2} + q_{l_3}) \sin(q_{l_4}) \sin(q_{l_5}), \\ g_{l_5} &= -L_5m_{l_5}g[\cos(q_{l_3} + q_{l_4}) \sin(q_{l_5}) + \sin(q_{l_3} + q_{l_4}) \cos(q_{l_5}) \cos(q_{l_6})], \\ g_{l_6} &= 0. \end{aligned}$$

Modelo dinámico de la pierna derecha

$$\mathbf{M}_r(q_r)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r(q_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}_r(q_r) = \boldsymbol{\tau}_r, \quad (4.18)$$

donde

$$\mathbf{M}_r(q_r) = \begin{bmatrix} M_{r11} & M_{r12} & M_{r13} & M_{r14} & M_{r15} & M_{r16} \\ M_{r12} & M_{r22} & M_{r23} & M_{r24} & M_{r25} & M_{r26} \\ M_{r13} & M_{r23} & M_{r33} & M_{r34} & M_{r35} & M_{r36} \\ M_{r14} & M_{r24} & M_{r34} & M_{r44} & M_{r45} & M_{r46} \\ M_{r15} & M_{r25} & M_{r35} & M_{r45} & M_{r55} & M_{r56} \\ M_{r16} & M_{r26} & M_{r36} & M_{r46} & M_{r56} & M_{r66} \end{bmatrix},$$

$$M_{r11} = m_{r6},$$

$$M_{r12} = I_{r6} + (m_{r5} + m_{r6}) \cos(q_{r6}),$$

$$M_{r13} = I_{r5} + I_{r6} + m_{r5} \cos(q_{r5}) + m_{r6} L_5 \cos(q_{r5} + q_{r6}),$$

$$M_{r14} = I_{r4} + I_{r5} + I_{r6} + (m_{r4} + m_{r5}) L_4 \cos(q_{r4} + q_{r5}) + m_{r6} L_5 \cos(q_{r5} + q_{r6}),$$

$$M_{r15} = I_{r3} + I_{r4} + I_{r5} + I_{r6} + m_{r3} L_3 \cos(q_{r3}) + [m_{r4} + m_{r5}] [L_3 \cos(q_{r3}) + 2L_4 \cos(q_{r4} + q_{r5})] \\ + m_{r6} L_5 \cos(q_{r5} + q_{r6}),$$

$$M_{r16} = I_{r2} + I_{r3} + I_{r4} + I_{r5} + I_{r6} + [m_{r2} + m_{r3}] [\cos(q_{r2}) + L_3 \cos(q_{r2} + q_{r3})] \\ + [m_{r4} + m_{r5}] [L_3 \cos(q_{r3}) + 2L_4 \cos(q_{r4} + q_{r5})] + m_{r6} L_5 \cos(q_{r5} + q_{r6}),$$

$$M_{r22} = I_{r6} + m_{r6} \cos(q_{r6}),$$

$$M_{r23} = L_3 \cos(q_{r3} + q_{r4}),$$

$$M_{r24} = L_1 \cos(q_{r2} + q_{r3}),$$

$$M_{r25} = M_{r35} = M_{r45} = 0,$$

$$M_{r26} = M_{r36} = M_{r46} = M_{r56} = I_{r4} + I_{r3} + I_{r4},$$

$$M_{r33} = I_{r5} + I_{r6} + m_{r5} \cos(q_{r5}) + m_{r6} L_5 \cos(q_{r5} + q_{r6}),$$

$$M_{r34} = L_3 L_4 \cos(q_{r3} + q_{r4}),$$

$$M_{r44} = I_{r4} + I_{r5} + I_{r6} + (m_{r4} + m_{r5}) L_4 \cos(q_{r4} + q_{r5}) + m_{r6} L_5 \cos(q_{r5} + q_{r6}),$$

$$M_{r55} = I_{r3} + I_{r4} + I_{r5} + I_{r6} + L_3 [m_{r3} \cos(q_{r2} + q_{r3}) + (m_{r4} + m_{r5}) \cos(q_{r3})] + L_4 \cos(q_{r4} + q_{r5}),$$

$$M_{r66} = I_{r1} + I_{r2} + I_{r3} + I_{r4} + I_{r5} + I_{r6} + m_{r1} L_1 + [m_{r2} + m_{r3}] [L_2 \cos(q_{r1}) + 2L_3 \cos(q_{r2} + q_{r3})] \\ + [m_{r4} + m_{r5}] [L_3 \cos(q_{r3}) + 2L_4 \cos(q_{r4} + q_{r5})] + m_{r6} L_5 \cos(q_{r5} + q_{r6}).$$

$$\mathbf{C}_r(q_r, \dot{\mathbf{q}}_r) = \begin{bmatrix} C_{r11} & C_{r12} & C_{r13} & C_{r14} & C_{r15} & C_{r16} \\ C_{r21} & C_{r22} & C_{r23} & C_{r24} & C_{r25} & C_{r26} \\ C_{r31} & C_{r32} & C_{r33} & C_{r34} & C_{r35} & C_{r36} \\ C_{r41} & C_{r42} & C_{r43} & C_{r44} & C_{r45} & C_{r46} \\ C_{r51} & C_{r52} & C_{r53} & C_{r54} & C_{r55} & C_{r56} \\ C_{r61} & C_{r62} & C_{r63} & C_{r64} & C_{r65} & C_{r66} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
C_{r11} &= m_{r6} \sin(q_{r5}), \\
C_{r12} &= -L_1 \sin(q_{r1}) \dot{q}_{r1} + L_2 (\dot{q}_{r1} + \dot{q}_{r2}), \\
C_{r13} &= m_{r2} L_1 L_2 \sin(q_{r2}) \dot{q}_{r1} + (m_{r3} + m_{r4}) L_1 L_2 \sin(q_{r2}) \dot{q}_{r1}, \\
C_{r14} &= L_2 \cos(q_{r2} + q_{r3}) \cos(q_{r4}) \sin(q_{r5}) - \sin(q_{r2} + q_{r3}) [2L_3 - \sin(q_{r4})^2], \\
C_{r15} &= m_{r4} \cos(q_{r2} + q_{r3}) \sin(q_{r4}) \cos(q_{r5}) - L_4 \sin(q_{r2}) \sin(q_{r4}) \cos(q_{r5}) + m_{r5} \cos(q_{r2} + q_{r3}) \sin(q_{r4}), \\
C_{r16} &= -m_{r5} \sin(q_{r6}), \\
C_{r21} &= C_{r22} = 0, \\
C_{r23} &= L_3 [m_{r2} \sin(q_{r3}) + m_{r3} \cos(q_{r3})], \\
C_{r24} &= -m_{r4} \sin(q_{r2} + q_{r3}) \cos(q_{r4}), \\
C_{r25} &= m_{r4} \cos(q_{r2} + q_{r3}) \sin(q_{r4}) \cos(q_{r5}) + L_3 \cos(q_{r2} + q_{r3}) \sin(q_{r4}), \\
C_{r26} &= -L_5 \cos(q_{r6}), \\
C_{r31} &= C_{r32} = C_{r33} = C_{r36} = 0, \\
C_{r34} &= m_{r3} \sin(q_{r4}), \\
C_{r35} &= m_{r4} \sin(q_{r2} + q_{r3}) \cos(q_{r4}), \\
C_{r41} &= C_{r42} = C_{r43} = C_{r45} = C_{r46} = 0, \\
C_{r44} &= L_3 [m_{r1} \cos(q_{r2}) \cos(q_{r2} + q_{r3}) + m_{r2} \sin(q_{r2} + q_{r3}) \cos(q_{r2} + q_{r3}) + m_{r3} \cos(q_{r2}) \sin(q_{r2} + q_{r3})], \\
C_{r51} &= C_{r52} = C_{r53} = C_{r54} = C_{r56} = 0, \\
C_{r55} &= -m_{r2} L_1 L_2 \sin(q_{r2}) (\dot{q}_{r1} + \dot{q}_{r2}) - (m_{r3} + m_{r5}) L_2 L_3 \sin(q_{r3}) (\dot{q}_{r3} + \dot{q}_{r4}), \\
C_{r61} &= C_{r62} = C_{r63} = C_{r64} = C_{r65} = 0, \\
C_{r66} &= -L_1 \sin(q_{r2}) [m_{r2} L_2 + (m_{r3} + m_{r4}) L_3] \dot{q}_{r2}.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{g}_r(q_r) = \begin{bmatrix} g_{r1} \\ g_{r2} \\ g_{r3} \\ g_{r4} \\ g_{r5} \\ g_{r6} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} g_{r1} &= m_{r1} L_1 g, \\ g_{r2} &= -m_{r2} g \cos(q_{r2}) - m_{r3} \sin(q_{r2} + q_{r3}) + L_1 \sin(q_{r2}), \\ g_{r3} &= L_2 g \sin(q_{r2} + q_{r3}) + m_{r1} \cos(q_{r2} + q_{r3}), \\ g_{r4} &= m_{r4} g \sin(q_{r2} + q_{r3}) \sin(q_{r4}) \sin(q_{r5}), \\ g_{r5} &= -L_5 m_{r5} g [\cos(q_{r3} + q_{r4}) \sin(q_{r5}) + \sin(q_{r3} + q_{r4}) \cos(q_{r5}) \cos(q_{r6})], \\ g_{r6} &= 0. \end{aligned}$$

Para $I_{k_i} = m_{k_i} r a_{k_i}$, donde $k = l, r$ indica si es la pierna izquierda o derecha, respectivamente.

$$\begin{array}{lllll}
m_{l1} = 0.17184, & m_{r1} = 0.06981, & r a_{l1} = -0.03239, & r a_{r1} = -0.00781, & L_1 = 0.04519, \\
m_{l2} = 0.13416, & m_{r2} = 0.14053, & r a_{l2} = -0.00029, & r a_{r2} = -0.00515, & L_2 = 0.10290, \\
m_{l3} = 0.30142, & m_{r3} = 0.38968, & r a_{l3} = -0.00225, & r a_{r3} = 0.00221, & L_3 = 0.10000, \\
m_{l4} = 0.38968, & m_{r4} = 0.30142, & r a_{l4} = -0.00221, & r a_{r4} = 0.00225, & L_4 = 0.08500, \\
m_{l5} = 0.14053, & m_{r5} = 0.13416, & r a_{l5} = -0.00515, & r a_{r5} = 0.00029, & L_5 = 0.05000, \\
m_{l6} = 0.06981, & m_{r6} = 0.17184, & r a_{l6} = -0.00781, & r a_{r6} = -0.03239, &
\end{array}$$

4.5. Análisis en Lazo Abierto del Modelo Dinámico

La representación fraccionaria del modelo dinámico de las piernas del robot humanoide NAO, está dada de la siguiente manera,

$$\mathbf{H}_k(\mathbf{q}_k)_0^f \mathbf{D}_t^{2\alpha} \mathbf{q}_k + \mathbf{C}_k(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k)_0^f \mathbf{D}_t^\alpha \mathbf{q}_k + \mathbf{G}_k(\mathbf{q}_k) = \boldsymbol{\tau}_k, \quad (4.19)$$

donde $k = l, r$ indica si es la pierna izquierda o derecha, y $f = C, CF$ denota el sentido de la derivada fraccionaria (Caputo o Caputo-Fabrizio).

A continuación, se presentan los resultados de la simulación del modelo dinámico fraccionario utilizando las derivadas Caputo y Caputo-Fabrizio, este análisis se realiza para determinar qué derivada fraccionaria se aplicará en el modelo del humanoide NAO para realizar el diseño y control de la locomoción del mismo.

Las Figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 muestran las posiciones de las articulaciones de ambas piernas del humanoide con diferentes derivadas y órdenes. Para poder interpretar las gráficas, el “eje x” representa el tiempo (segundos) y el “eje y” denota el desplazamiento angular (rad), así mismo, en las subfiguras “(c)” muestran el detalle de las señales conforme a los ordenes de las derivadas fraccionarias. De los resultados de las simulaciones se decide hacer uso de la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo-Fabrizio para el modelo dinámico de la parte inferior del robot humanoide NAO, ya que representa de mejor manera la dinámica de dicho sistema. Como se observa, cuando el orden de la derivada se aleja de 1 (caso clásico) la dinámica de las articulaciones mantienen la forma pero tiene un desfase, esta característica se asocia con el efecto disipativo que existe en el sistema.

Ahora, se realiza un cambio de variable en las articulaciones de las piernas del robot humanoide NAO, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{LAnkleRoll} &= q_{l_1}, \\ \text{LAnklePitch} &= q_{l_2}, \\ \text{LKneePitch} &= q_{l_3}, \\ \text{LHipPitch} &= q_{l_4}, \\ \text{LHipRoll} &= q_{l_5}, \\ \text{LHipYawPitch} &= q_{l_6}, \\ \text{RHipYawPitch} &= q_{r_1}, \\ \text{RHipRoll} &= q_{r_2}, \\ \text{RHipPitch} &= q_{r_3}, \\ \text{RKneePitch} &= q_{r_4}, \\ \text{RAnklePitch} &= q_{r_5}, \\ \text{RAnkleRoll} &= q_{r_6}. \end{aligned}$$

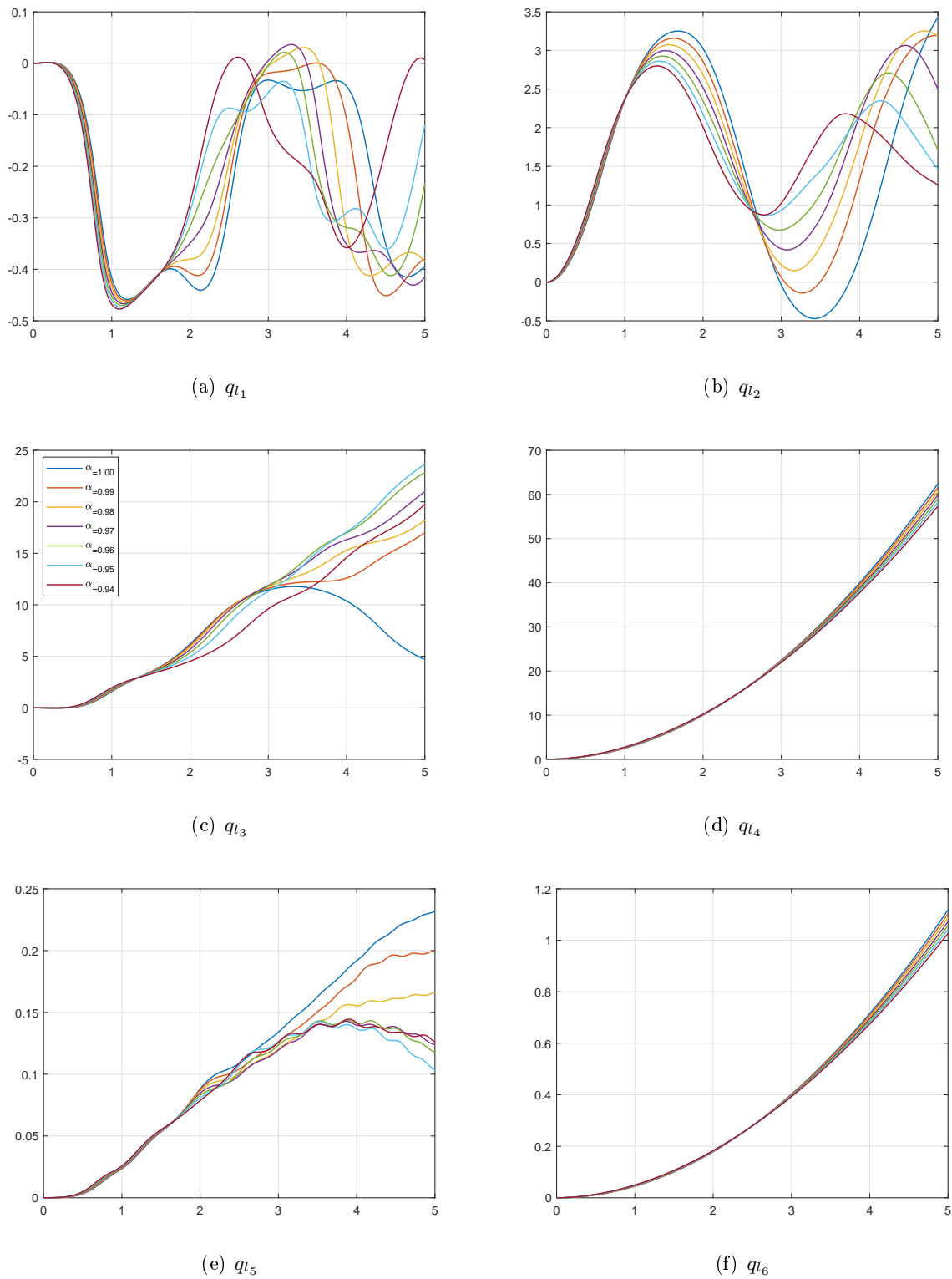
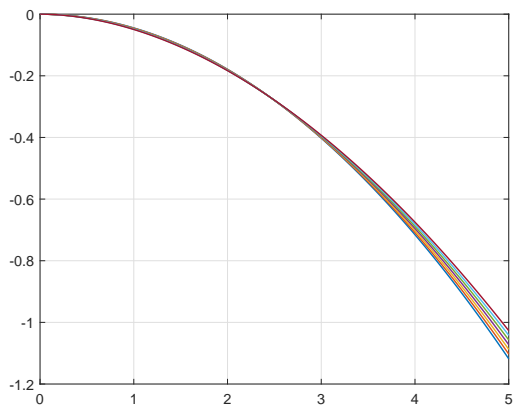
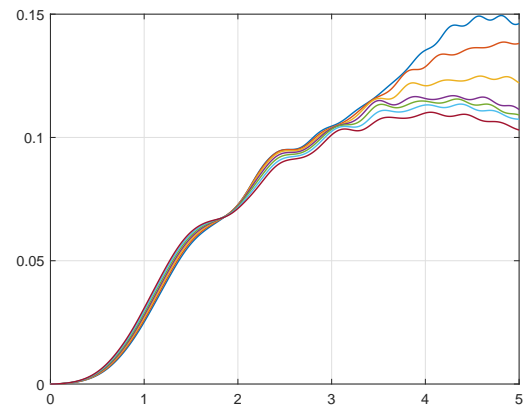


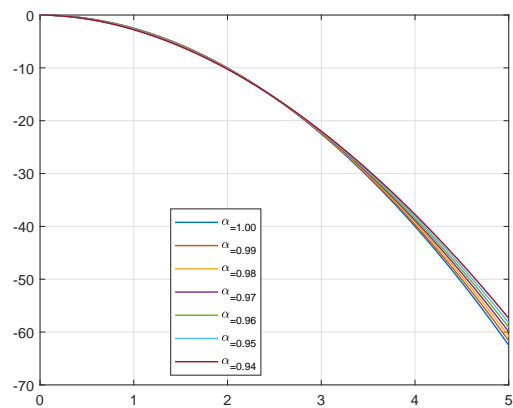
Figura 4.1: Simulación en lazo abierto del modelo dinámico fraccionario de la pierna izquierda del robot humanoide NAO aplicando la derivada de Caputo con diferentes órdenes (Parte 1).



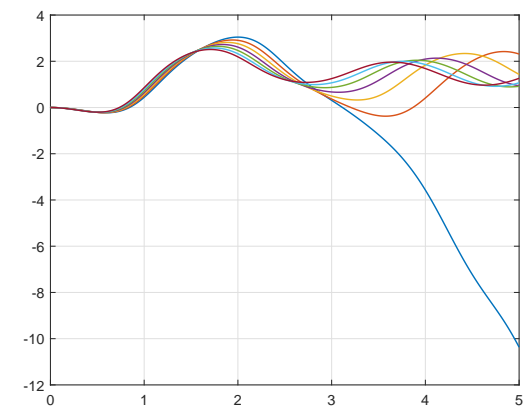
(a) q_{r_1}



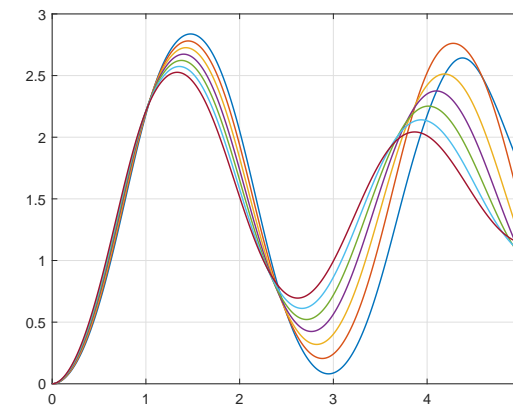
(b) q_{r_2}



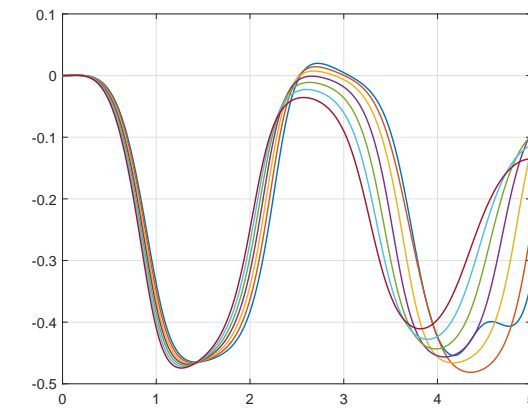
(c) q_{r_3}



(d) q_{r_4}

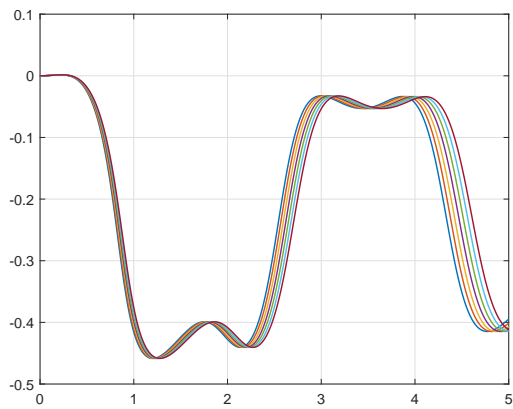


(e) q_{r_5}

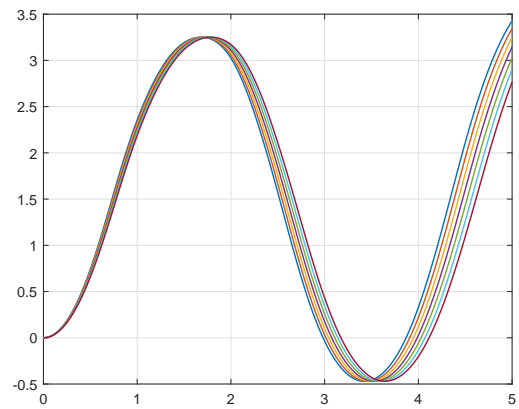


(f) q_{r_6}

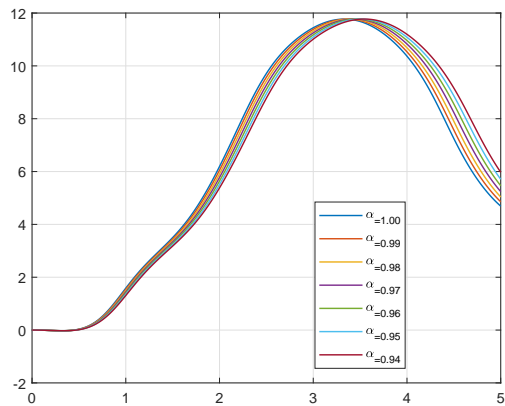
Figura 4.2: Simulación en lazo abierto del modelo dinámico fraccionario de la pierna derecha del robot humanoide NAO aplicando la derivada de Caputo con diferentes órdenes (Parte 2).



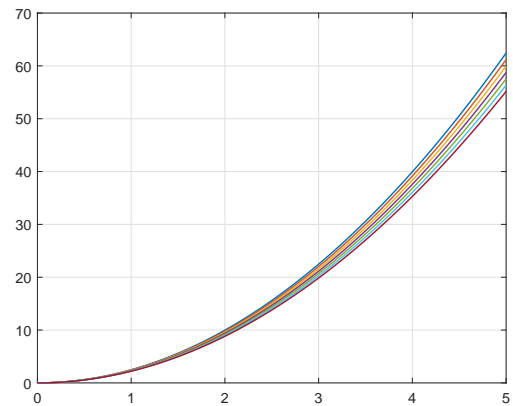
(a) q_{l_1}



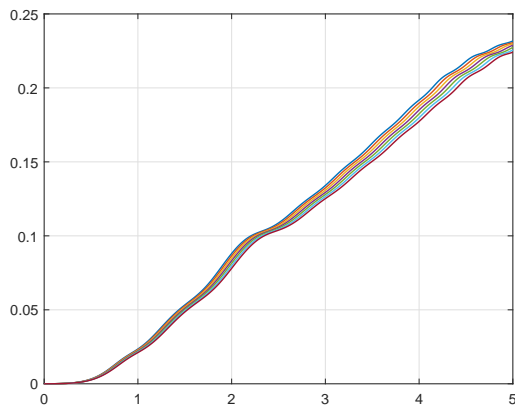
(b) q_{l_2}



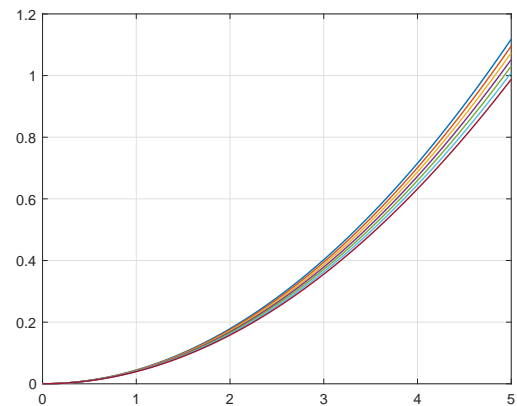
(c) q_{l_3}



(d) q_{l_4}



(e) q_{l_5}



(f) q_{l_6}

Figura 4.3: Simulación en lazo abierto del modelo dinámico fraccionario de la pierna izquierda del robot humanoide NAO aplicando la derivada de Caputo-Fabrizio con diferentes órdenes (Parte 1).

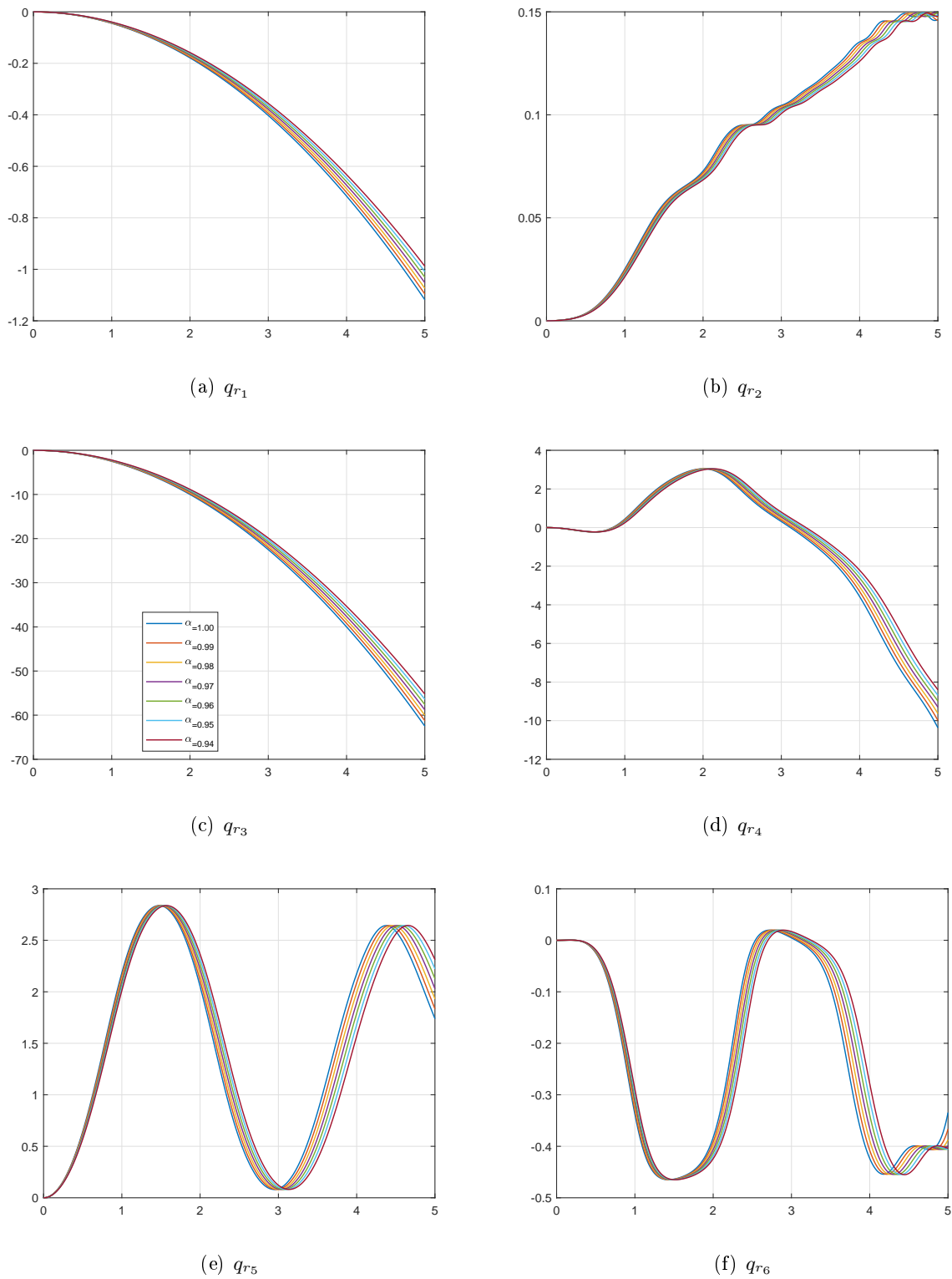


Figura 4.4: Simulación en lazo abierto del modelo dinámico fraccionario de la pierna derecha del robot humanoide NAO aplicando la derivada de Caputo-Fabrizio con diferentes órdenes (Parte 2).

4.6. Estrategia de Control

En la Figura 4.5 se muestra el diagrama de bloques de la estrategia de control propuesta para la locomoción del robot humanoide NAO, la cual consta de tres partes principales.

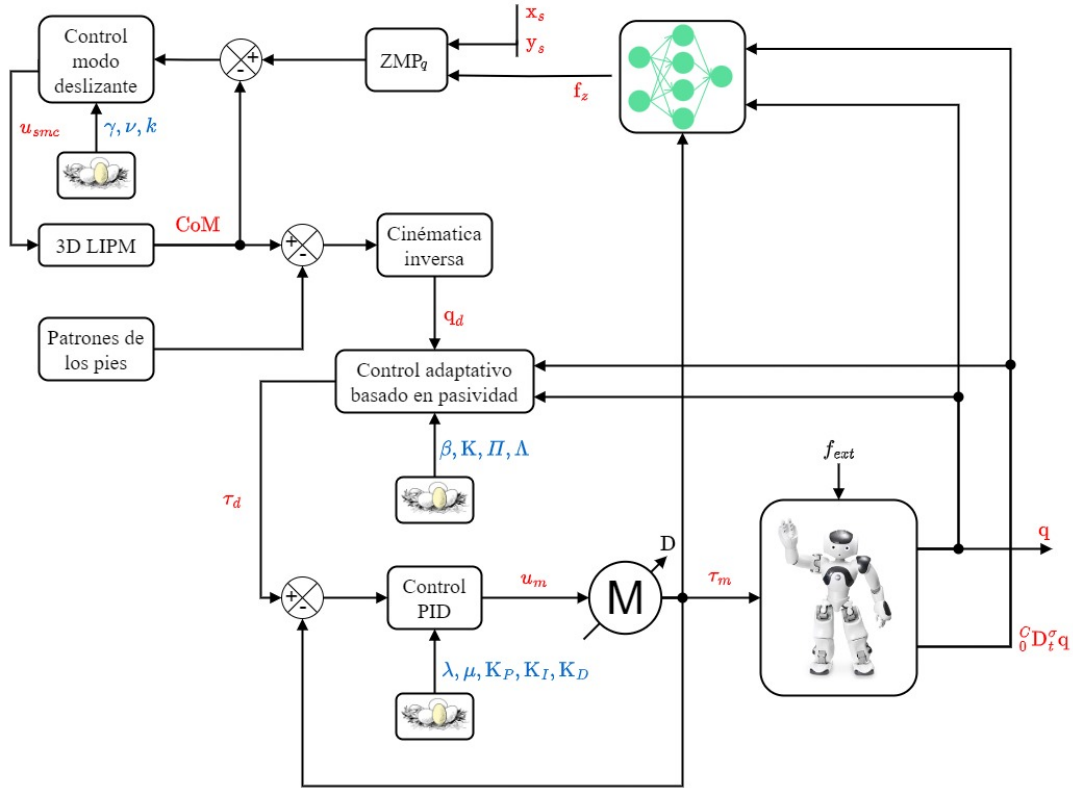


Figura 4.5: Estrategia de control para la locomoción del robot humanoide NAO.

- La primera parte consiste de un control modo deslizante que mantiene en equilibrio al robot NAO cuya entrada es la diferencia del punto momento cero estimado (ZMP_q) y el CoM del modelo 3D-LIPM. Para calcular la posición del ZMP es necesario la fuerza que ejerce los pies sobre el suelo en dirección del eje z , dicha fuerza es estimada mediante una red neuronal. Y la salida va al 3D-LIPM que genera la posición del CoM del humanoide.
- La segunda parte se compone de un control adaptativo basado en pasividad para el seguimiento de trayectoria de las articulaciones de las piernas del robot NAO, así mismo, la señal generada por el controlador se considera como el par deseado (τ_d) de los actuadores. Las entradas de este controlador son las posiciones y las velocidades angulares actuales de las articulaciones del humanoide, así como las posiciones deseadas que se obtienen mediante el modelo cinemático inverso.
- La última parte incluye el control de los motores de CC mediante el diseño de un controlador $PI^{\lambda}D^{\mu}$. Además, se considera la incertidumbre paramétrica de la parte eléctrica de los motores, así como la adición de una fuerza externa sobre las coordenadas generalizadas q_{l6} y q_{r1} .

Representaciones de Orden Fraccionario

Para mantener la generalidad en la representación de las ecuaciones, estas se representan con los operadores fraccionarios debido a que tanto el orden de derivación como el de integración cuando $\rightarrow 1$ la ecuación fraccionaria converge al caso clásico.

El modelo dinámico fraccionario del robot humanoide se representa como

$$\mathbf{H}_k(\mathbf{q}_k)_0^{CF} \mathbf{D}_t^{2\sigma} \mathbf{q}_k + \mathbf{C}_k(\mathbf{q}_k, {}_0^{CF} \mathbf{D}_t^\sigma \mathbf{q}_k)_0^{CF} \mathbf{D}_t^\sigma \mathbf{q}_k + \mathbf{G}_k(\mathbf{q}_k) = \boldsymbol{\tau}_k, \quad (4.20)$$

donde σ denota el orden de la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio para el sistema robótico.

Se considera que la i -ésima articulación de las piernas del robot NAO, donde $i = 1, 2, \dots, n$, es impulsada por un motor de CC. El modelo de orden fraccionario que considera todos los i -ésimos motores de CC para el sistema robótico viene dado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} {}_0^{CF} D_t^\sigma \mathbf{I}_A &= \mathbf{E} \mathbf{L}_A - \mathbf{R} \mathbf{L}_A \mathbf{I}_A - \mathbf{K} \mathbf{L}_A \boldsymbol{\Omega}, \\ \boldsymbol{\tau}_M &= \mathbf{J}_0^{CF} D_t^\sigma \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{B} \boldsymbol{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde $\mathbf{I}_A = [i_{a_1}, i_{a_2}, \dots, i_{a_n}]^T$, $\mathbf{E} \mathbf{L}_A = [\frac{e_{a_1}}{L_{a_1}}, \frac{e_{a_2}}{L_{a_2}}, \dots, \frac{e_{a_n}}{L_{a_n}}]^T$, $\mathbf{R} \mathbf{L}_A = \text{diag}[\frac{R_{a_1}}{L_{a_1}}, \frac{R_{a_2}}{L_{a_2}}, \dots, \frac{R_{a_n}}{L_{a_n}}]$, $\mathbf{K} \mathbf{L}_A = \text{diag}[\frac{K_{b_1}}{L_{a_1}}, \frac{K_{b_2}}{L_{a_2}}, \dots, \frac{K_{b_n}}{L_{a_n}}]$, $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$, $\boldsymbol{\tau}_M = [\tau_{m_1}, \tau_{m_2}, \dots, \tau_{m_n}]^T$, $\mathbf{J} = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_n]$, $\mathbf{B} = \text{diag}[B_1, B_2, \dots, B_n]$.

Se define el vector de las posiciones angulares de los i -ésimos motores como $\boldsymbol{\theta}_k = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Además, se asume que hay un emparejamiento mecánico directo entre el motor de CC y la articulación del robot humanoide, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \boldsymbol{\theta}, \\ {}_0^{CF} D_t^\sigma \mathbf{q} &= \boldsymbol{\Omega}, \\ {}_0^{CF} D_t^{2\sigma} \mathbf{q} &= {}_0^{CF} D_t^\sigma \boldsymbol{\Omega}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ahora bien, el enfoque fraccionario para el control adaptativo se aplica a la ecuación (3.41) debido a que es la que estima los parámetros y una derivada de orden no entero realiza una mejor estimación [145–147], por lo tanto, queda expresada de la siguiente forma

$${}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\beta \hat{\boldsymbol{\Theta}} = -\mathbf{P} \mathbf{Y}(q, \dot{q}, v, a) r. \quad (4.23)$$

El control $\text{PI}^\lambda \text{D}^\mu$ fraccionario queda expresado de la siguiente manera

$$u_m = K_p(\tau_d - \tau_m) + K_i {}_a^{CF} I_t^\lambda (\tau_d - \tau_m) + K_d {}_0^{CF} \mathcal{D}_t^\mu (\tau_d - \tau_m). \quad (4.24)$$

La última representación fraccionaria es aplicada al error de seguimiento de las coordenadas x e y asociada a la superficie deslizante (Ecuación 3.44), cuya expresión es dada de la siguiente manera

$$s = {}_a^{CF} D_t^{3\gamma} e + 3\nu {}_a^{CF} D_t^{2\gamma} e + 3\nu^2 {}_a^{CF} D_t^\gamma e + \nu^3 e, \quad (4.25)$$

4.7. Configuración para la Simulación

Las consideraciones para llevar a cabo las simulaciones se en listan a continuación:

- El orden del sistema acoplado del robot humanoide y los motores se designa como el caso clásico ($\sigma = 1$).
- Los parámetros de los motores son los siguientes, $R_a = 2\Omega$, $L_a = 0.5$ H, $K_b = 0.01$ V·s/rad, $J = 0.02$ (kg·m²), $B = 0.2$ N·m·s/rad y $K_T = 0.015$ N·m/A.
- Para el caso de las incertidumbres, se considera el porcentaje de +5 %.
- La fuerza externa aplicada es $= 0.1$ N.
- Los valores de las variables L_{ft} y H_{ft} del patrón de los pies son 0.05 y 0.07, para ambos casos.
- Para la red neuronal, los datos de entrada son las posiciones y velocidades de las articulaciones, y el par generado por los motores; la función de activación usada es la Ecuación 3.53. Además, la tasa de aprendizaje es $\chi = 0.65$ y el ajuste de los pesos sinápticos es $F = 0.9$.
- La sintonización de las ganancias y ordenes se realiza cuando no se consideran las incertidumbres ni la fuerza externa.

Resultados de la Sintonización de los Parámetros

Para lograr el mejor desempeño de los controladores es necesario ajustar sus parámetros mediante un algoritmo de optimización. El utilizado para este trabajo de investigación es el algoritmo de búsqueda de cuco que se basa en el comportamiento reproductivo de algunas especies de cucos que depositan sus huevos en nidos de otras especies. Los parámetros del algoritmo CSA se muestran en la Tabla 4.3.

A continuación, se despliegan los resultados de la sintonización de las ganancias para ambos enfoques de los controladores, y para el caso fraccionario su respectivo orden de derivación e integración. Las Tablas 4.4 y 4.5 muestran los resultados para los controladores adaptativos basados en pasividad para el caso clásico y fraccionario, respectivamente. Para los controladores modo deslizantes se presentan en las Tablas 4.6 y 4.7 la solución de los parámetros correspondientes. Finalmente, las Tablas 4.8 y 4.9 desglosan las ganancias y ordenes de los controladores PID, tanto el caso clásico como el de orden no entero.

Tabla 4.3: Parámetros de simulación para el algoritmo CSA.

Parámetro	Valor
Generaciones (n_g)	150
Nidos (n)	100
Tasa de descubrimiento (p_a)	0.25
Tamaño del paso (ϱ)	0.001

Tabla 4.4: Ganancias de los controladores adaptativos basados en pasividad para el caso clásico.

Articulación	K	Λ	Parámetro	Π
q_{l_1}	67.35	43.75	$\hat{\Theta}_{l_1}$	9.36
q_{l_2}	57.57	32.47	$\hat{\Theta}_{l_2}$	7.83
q_{l_3}	53.73	34.56	$\hat{\Theta}_{l_3}$	6.57
q_{l_4}	86.38	23.33	$\hat{\Theta}_{l_4}$	3.56
q_{l_5}	89.27	23.75	$\hat{\Theta}_{l_5}$	2.25
q_{l_6}	60.25	31.46	$\hat{\Theta}_{l_6}$	6.68
q_{r_1}	59.38	35.56	$\hat{\Theta}_{r_1}$	5.74
q_{r_2}	78.05	26.87	$\hat{\Theta}_{r_2}$	8.75
q_{r_3}	65.86	19.46	$\hat{\Theta}_{r_3}$	6.56
q_{r_4}	92.55	36.68	$\hat{\Theta}_{r_4}$	5.52
q_{r_5}	66.93	35.57	$\hat{\Theta}_{r_5}$	7.36
q_{r_6}	95.36	45.52	$\hat{\Theta}_{r_6}$	4.78

Tabla 4.5: Ganancias y ordenes de las derivadas para los controladores adaptativos basados en pasividad con el enfoque fraccionario.

Articulación	K	Λ	Parámetro	Π	β
q_{l_1}	67.85	34.45	$\hat{\Theta}_{l_1}$	8.75	0.7967
q_{l_2}	95.46	25.15	$\hat{\Theta}_{l_2}$	3.89	0.7243
q_{l_3}	79.54	36.54	$\hat{\Theta}_{l_3}$	7.57	0.8562
q_{l_4}	78.55	23.57	$\hat{\Theta}_{l_4}$	5.68	0.8213
q_{l_5}	56.56	25.79	$\hat{\Theta}_{l_5}$	5.27	0.8298
q_{l_6}	56.34	29.05	$\hat{\Theta}_{l_6}$	2.65	0.7546
q_{r_1}	68.23	35.67	$\hat{\Theta}_{r_1}$	2.78	0.7982
q_{r_2}	67.12	41.35	$\hat{\Theta}_{r_2}$	7.24	0.8124
q_{r_3}	58.18	34.63	$\hat{\Theta}_{r_3}$	8.36	0.7539
q_{r_4}	59.27	36.11	$\hat{\Theta}_{r_4}$	5.13	0.7924
q_{r_5}	67.25	17.52	$\hat{\Theta}_{r_5}$	8.57	0.8234
q_{r_6}	58.03	28.75	$\hat{\Theta}_{r_6}$	3.98	0.7237

Tabla 4.6: Ganancias del controlador modo deslizante clásico.

Posición	ν	k
x	17.95	19.36
y	15.57	16.39

Tabla 4.7: Ganancias y orden del controlador modo deslizante fraccionario.

Posición	ν	k	γ
x	15.87	16.74	0.9232
y	17.23	14.92	0.9845

Tabla 4.8: Ganancias de los controladores PID, cuando los ordenes λ y μ son 1.

u_{m_i}	K_P	K_I	K_D
u_{m_1}	8.46	67.92	97.15
u_{m_2}	6.54	85.34	34.62
u_{m_3}	7.74	87.57	46.76
u_{m_4}	8.79	78.53	53.85
u_{m_5}	5.74	45.54	74.54
u_{m_6}	9.47	56.32	78.23
u_{m_7}	9.23	96.45	86.91
u_{m_8}	6.36	79.03	68.25
u_{m_9}	7.67	68.34	36.83
$u_{m_{10}}$	8.41	98.12	58.56
$u_{m_{11}}$	5.54	67.43	39.06
$u_{m_{12}}$	6.19	78.24	69.56

Tabla 4.9: Ganancias y ordenes de los operadores fraccionarios para los controladores $PI^\lambda D^\mu$.

u_{m_i}	K_P	K_I	K_D	λ	μ
u_{m_1}	7.56	27.67	35.25	0.9764	0.9656
u_{m_2}	8.34	85.56	44.23	0.9564	0.8398
u_{m_3}	5.43	65.67	23.76	0.9653	0.8934
u_{m_4}	3.96	43.87	73.24	0.8934	0.9342
u_{m_5}	6.48	85.43	42.86	0.8251	0.9247
u_{m_6}	4.68	56.34	43.79	0.9235	0.9823
u_{m_7}	8.96	65.11	37.07	0.9212	0.9136
u_{m_8}	6.56	43.78	67.12	0.9124	0.9452
u_{m_9}	8.53	67.67	71.18	0.8923	0.8942
$u_{m_{10}}$	5.45	75.22	73.83	0.9619	0.8783
$u_{m_{11}}$	5.98	45.54	29.54	0.9109	0.9823
$u_{m_{12}}$	8.56	37.86	21.64	0.9213	0.9238

4.8. Gráficas

En esta sección, se muestran las gráficas de los resultados obtenidos por medio de simulaciones.

- Las Figuras 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9 indican el resultado obtenido de los controladores adaptativos basados en pasividad para el seguimiento de trayectoria de las articulaciones del tren inferior del robot NAO. Los ejes de las graficas representan la posición angular en grados (eje y) y el tiempo en segundos (eje x).
- Los resultados del control de par para los motores de CC se muestran en las Figuras 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13. Los ejes de las graficas muestran el par generado por los motores en Nm (eje y) y el tiempo en segundos (eje x).
- Las Figuras 4.14, 4.15, 4.16 y 4.17 presentan el consumo de corriente demandada por los motores de CC. Los ejes de las graficas representan la corriente eléctrica en amperios (eje y) y el tiempo en segundos (eje x).
- La Figura 4.18 expone la posición del ZMP sobre los ejes “x” e “y”, además de la posición del centro de masa, dichas posiciones son dadas en metros.
- Por último, la estimación de la fuerza generada en la suela de los pies del humanoide mediante la red neuronal se exhibe en la Figura 4.19, los valores están dados en Newtons (N).

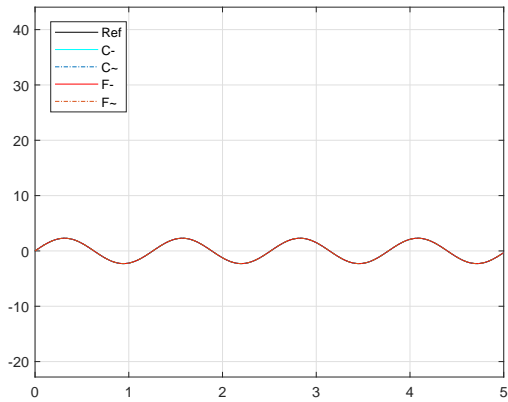
Además, las señales son diferenciadas de la siguiente manera, 'Ref' representa la señal deseada o de referencia, C- y C~ representan el caso clásico sin y con perturbación, respectivamente, y de forma análoga F- y F~ para el caso fraccionario.

4.9. Tablas Comparativas

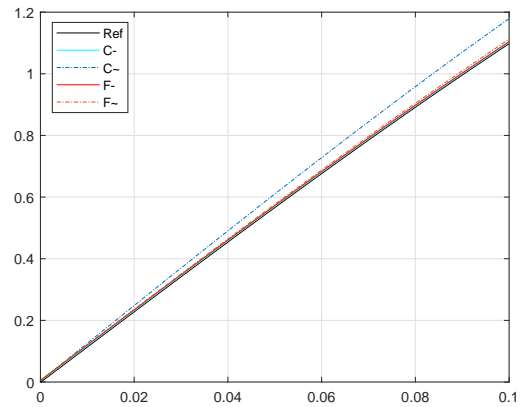
Ahora, para ponderar el desempeño de los controladores clásicos y fraccionarios se emplea la raíz del error cuadrático medio (RMSE) para medir la cantidad de error entre las señales deseadas y las señales obtenidas. Los errores mínimos, máximos y promedios son considerados en las tablas.

La comparativa de los controladores adaptativos basados en pasividad para el seguimiento de trayectoria de las coordenadas generalizadas se muestran en las Tablas 4.10 y 4.11, para los casos sin y con perturbación externa, respectivamente.

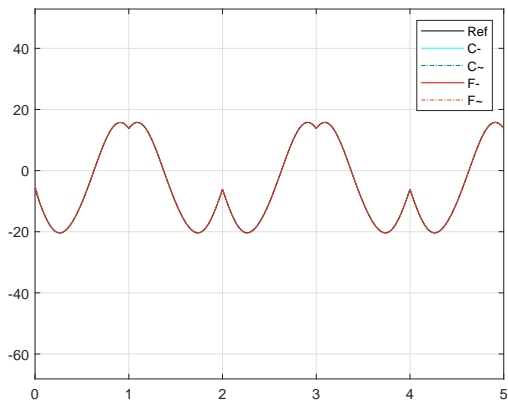
Los resultados del desempeño de los controladores PID y $PI^\lambda D^\mu$ cuando no se agrega ningún tipo de perturbación externa se exponen en la Tabla 4.12, y para el caso cuando se anexa la fuerza externa se muestran en la Tabla 4.13.



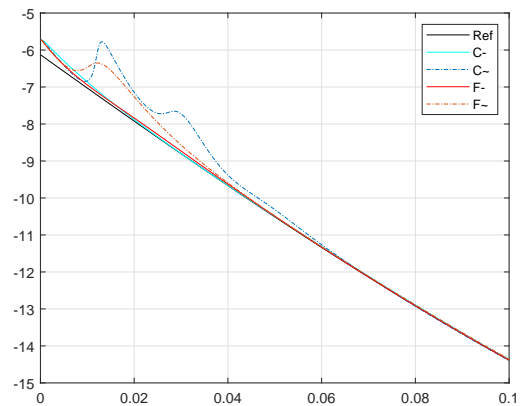
(a) q_{l_1}



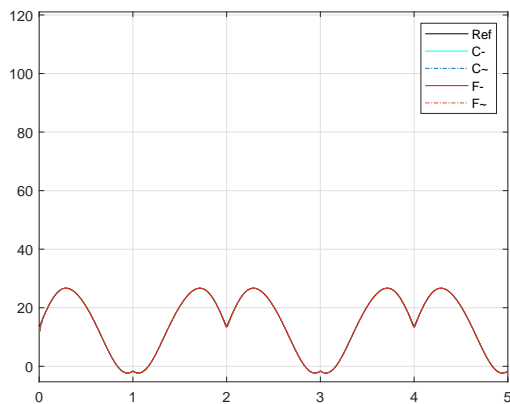
(b) Zoom del 0 al 0.1 s



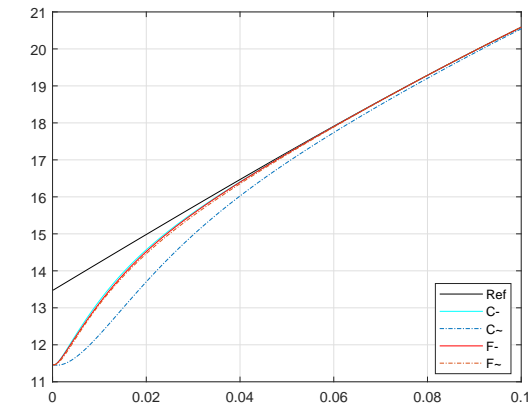
(c) q_{l_2}



(d) Zoom del 0 al 0.1 s

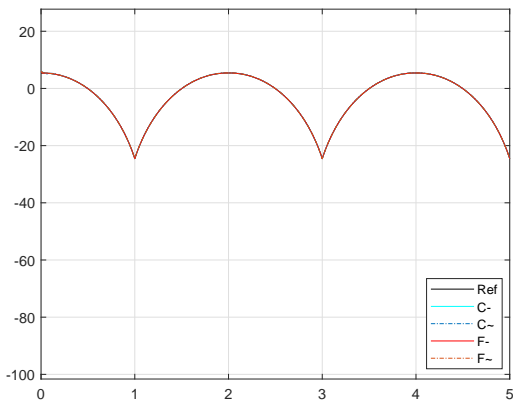


(e) q_{l_3}

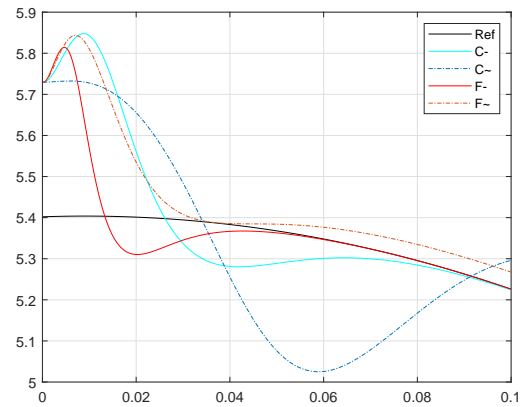


(f) Zoom del 0 al 0.1 s

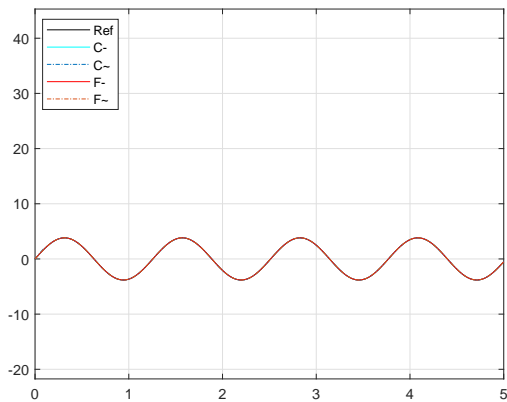
Figura 4.6: Resultados del seguimiento de trayectoria de las articulaciones de la pierna izquierda aplicando control adaptativo basado en pasividad (parte 1).



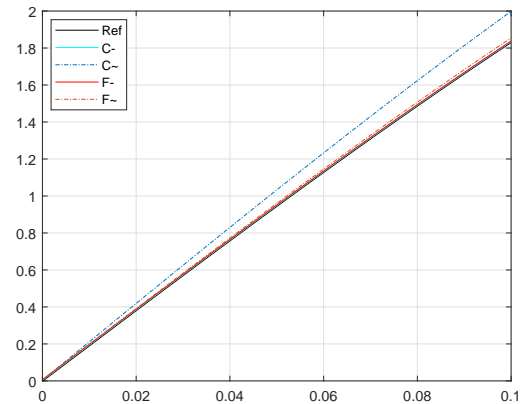
(a) q_{14}



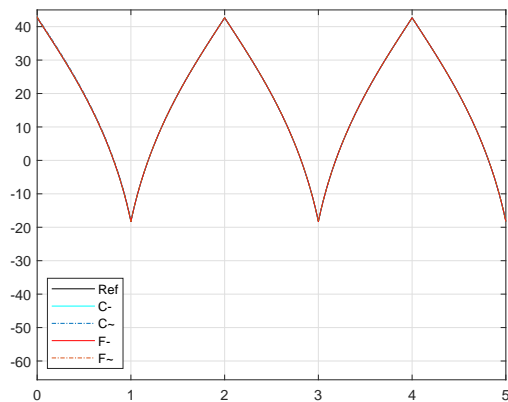
(b) Zoom del 0 al 0.1 s



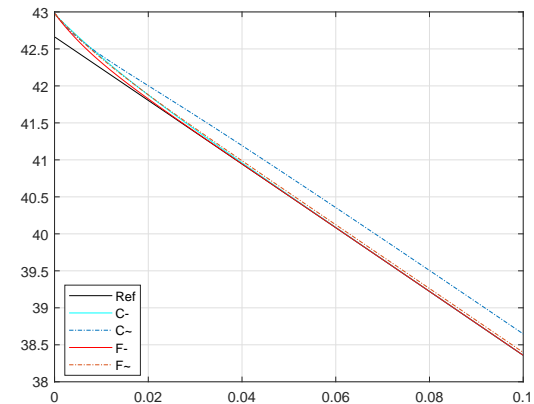
(c) q_{15}



(d) Zoom del 0 al 0.1 s

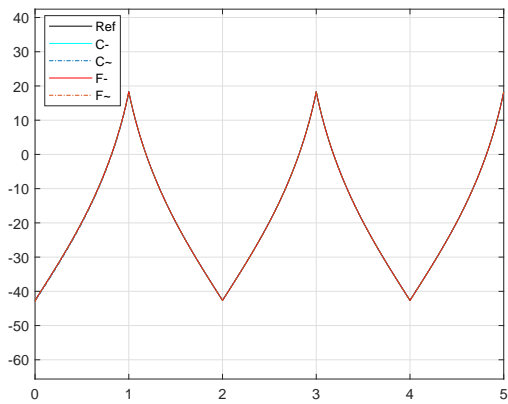


(e) q_{16}

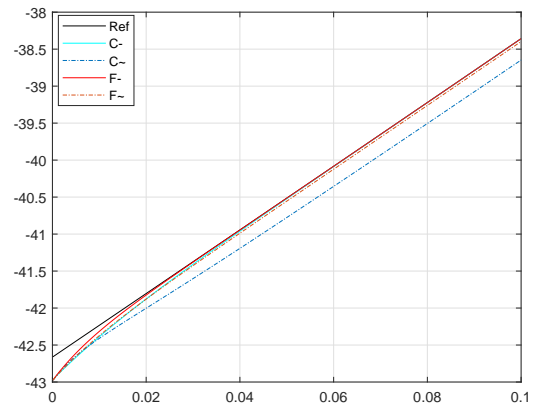


(f) Zoom del 0 al 0.1 s

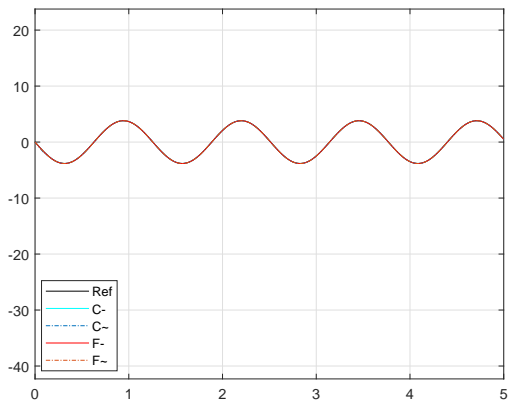
Figura 4.7: Resultados del seguimiento de trayectoria de las articulaciones de la pierna izquierda aplicando control adaptativo basado en pasividad (parte 2).



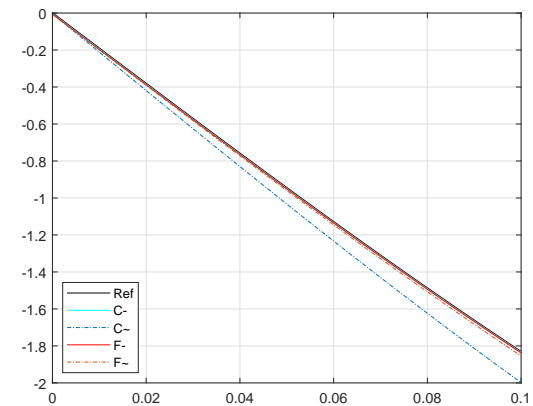
(a) q_{r1}



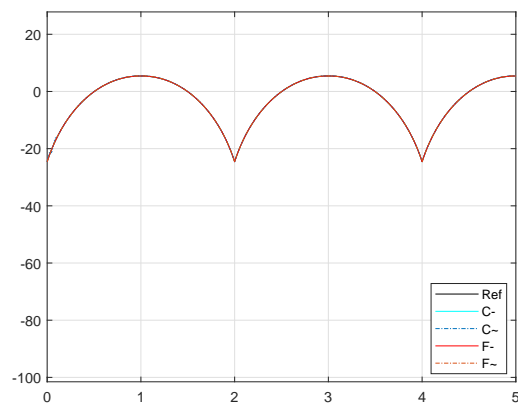
(b) Zoom del 0 al 0.1 s



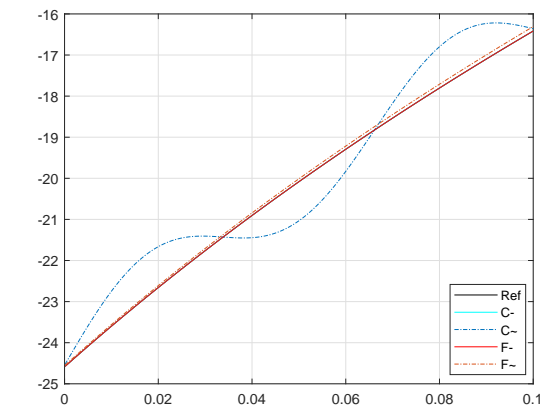
(c) q_{r2}



(d) Zoom del 0 al 0.1 s

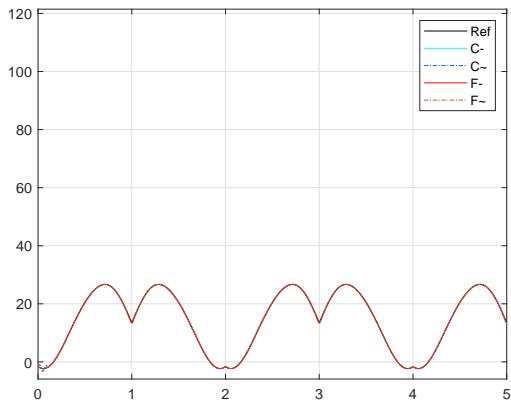


(e) q_{r3}

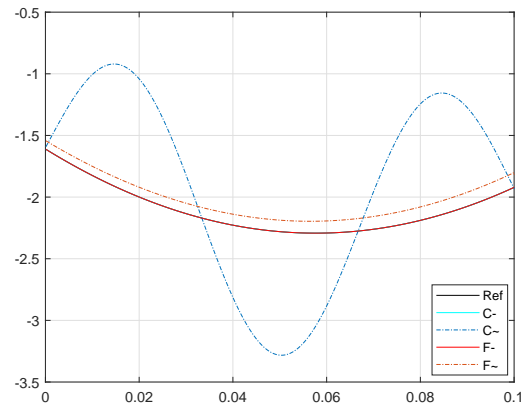


(f) Zoom del 0 al 0.1 s

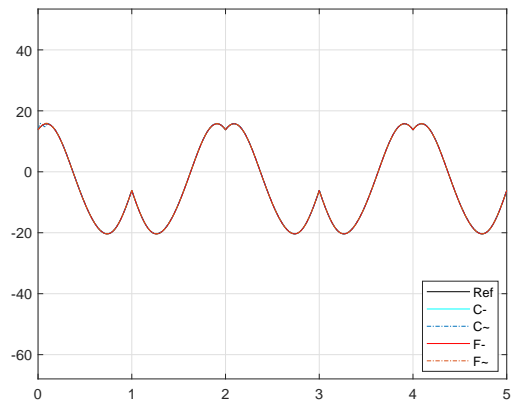
Figura 4.8: Resultados del seguimiento de trayectoria de las articulaciones de la pierna derecha aplicando control adaptativo basado en pasividad (parte 1).



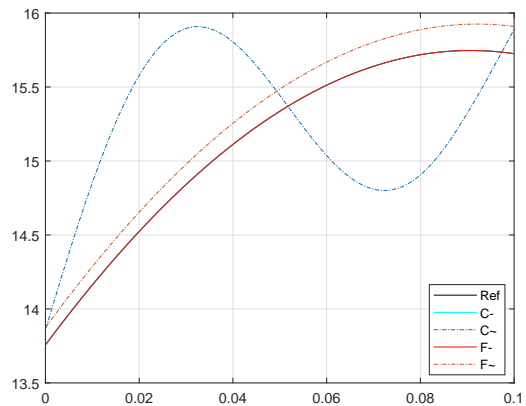
(a) q_{r4}



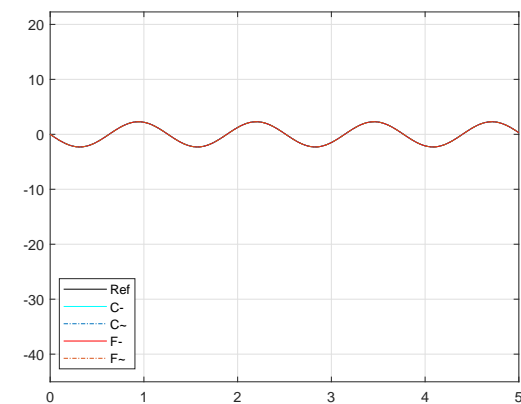
(b) Zoom del 0 al 0.1 s



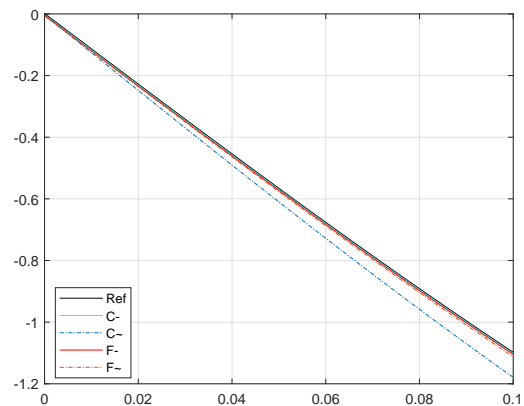
(c) q_{r5}



(d) Zoom del 0 al 0.1 s



(e) q_{r6}



(f) Zoom del 0 al 0.1 s

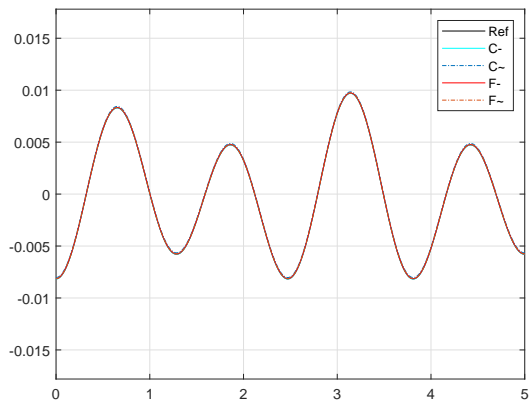
Figura 4.9: Resultados del seguimiento de trayectoria de las articulaciones de la pierna derecha aplicando control adaptativo basado en pasividad (parte 2).

Tabla 4.10: Comparación del desempeño de los controladores adaptativos basados en pasividad para el seguimiento de trayectoria de las articulaciones de las piernas del humanoide NAO, sin considerar perturbaciones externas.

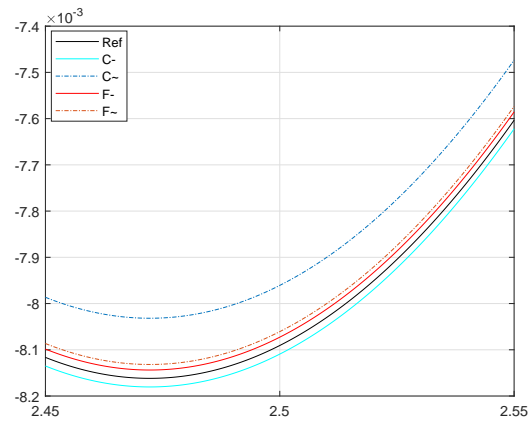
Art	Sin fuerza externa					
	Clásico			Fraccionario		
	mín	máx	pro	mín	máx	pro
q_{l_1}	0	1.0254	0.1463	0	1.0484	0.1465
q_{l_2}	0	2.8564	0.4824	0	3.0194	0.4823
q_{l_3}	0	2.9464	0.4754	0	3.0001	0.4746
q_{l_4}	0	19.8735	3.9654	0	14.1294	3.1833
q_{l_5}	0	4.2359	0.2833	0	4.2234	0.2883
q_{l_6}	0	1.3242	0.1843	0	1.0343	0.2846
q_{r_1}	0	1.2548	0.1939	0	1.2594	0.1899
q_{r_2}	0	1.1294	0.3875	0	1.1245	0.3879
q_{r_3}	0	1.5346	0.1873	0	1.5932	0.1892
q_{r_4}	0	1.3464	0.1944	0	1.3463	0.1944
q_{r_5}	0	1.6563	0.1983	0	1.6593	0.1982
q_{r_6}	0	1.1456	0.1853	0	1.5985	0.1861

Tabla 4.11: Comparación del desempeño de los controladores adaptativos basados en pasividad para el seguimiento de trayectoria de las articulaciones de las piernas del humanoide NAO, tomando en cuenta una fuerza externa.

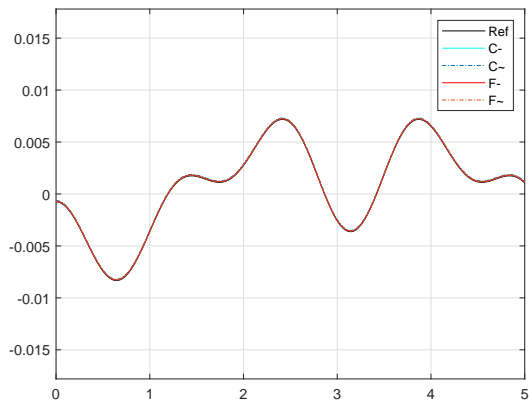
Art	Con fuerza externa					
	Clásico			Fraccionario		
	mín	máx	pro	mín	máx	pro
q_{l_1}	0.010	15.1245	3.9583	0	1.0485	0.1478
q_{l_2}	0	14.4525	3.7448	0	3.0201	0.4828
q_{l_3}	0	19.3463	3.7654	0	3.0081	0.4751
q_{l_4}	0	25.6255	5.1343	0	14.1293	3.1838
q_{l_5}	0	13.6364	3.6744	0	4.2239	0.2899
q_{l_6}	0	11.8244	2.8564	0	1.0345	0.2894
q_{r_1}	0.017	12.9694	2.9633	0	1.2603	0.1938
q_{r_2}	0	9.8386	2.3546	0	1.1247	0.3911
q_{r_3}	0	21.2398	4.8654	0	1.6002	0.1903
q_{r_4}	0	29.9448	5.8544	0	1.3467	0.2009
q_{r_5}	0.011	27.9474	5.3465	0	1.6599	0.2019
q_{r_6}	0	8.9381	2.2123	0	1.5935	0.1866



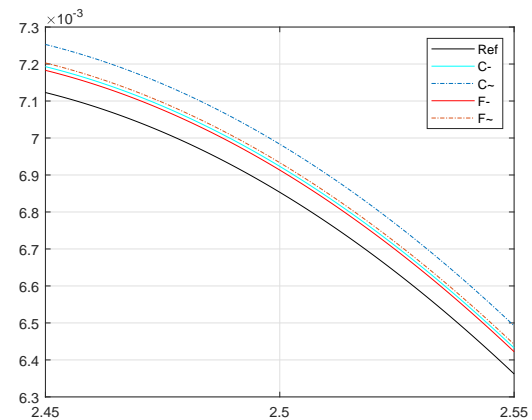
(a) $\tau_{m_1} \rightarrow q_{l_1}$



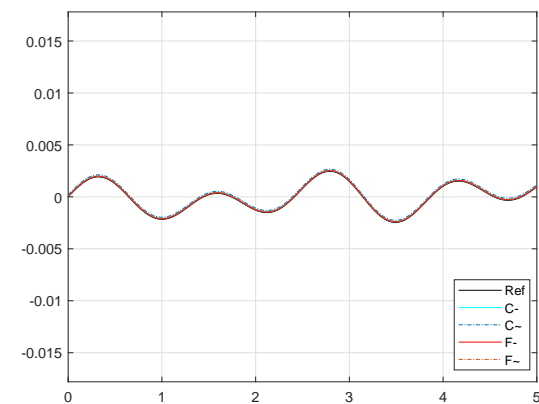
(b) Zoom del 2.45 al 2.55 s



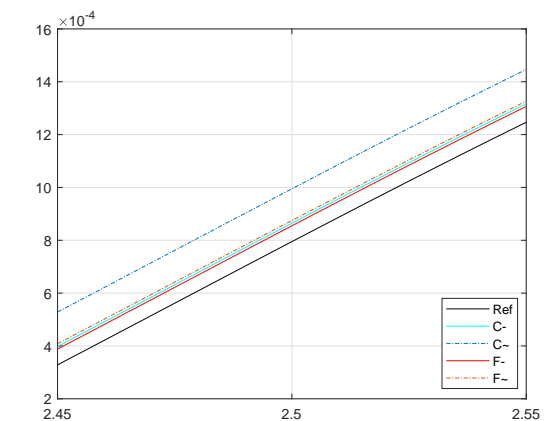
(c) $\tau_{m_2} \rightarrow q_{l_2}$



(d) Zoom del 2.45 al 2.55 s



(e) $\tau_{m_3} \rightarrow q_{l_3}$



(f) Zoom del 2.45 al 2.55 s

Figura 4.10: Resultados del control de par de los motores de CC acoplados a las articulaciones de la pierna izquierda del humanoide NAO (parte 1).

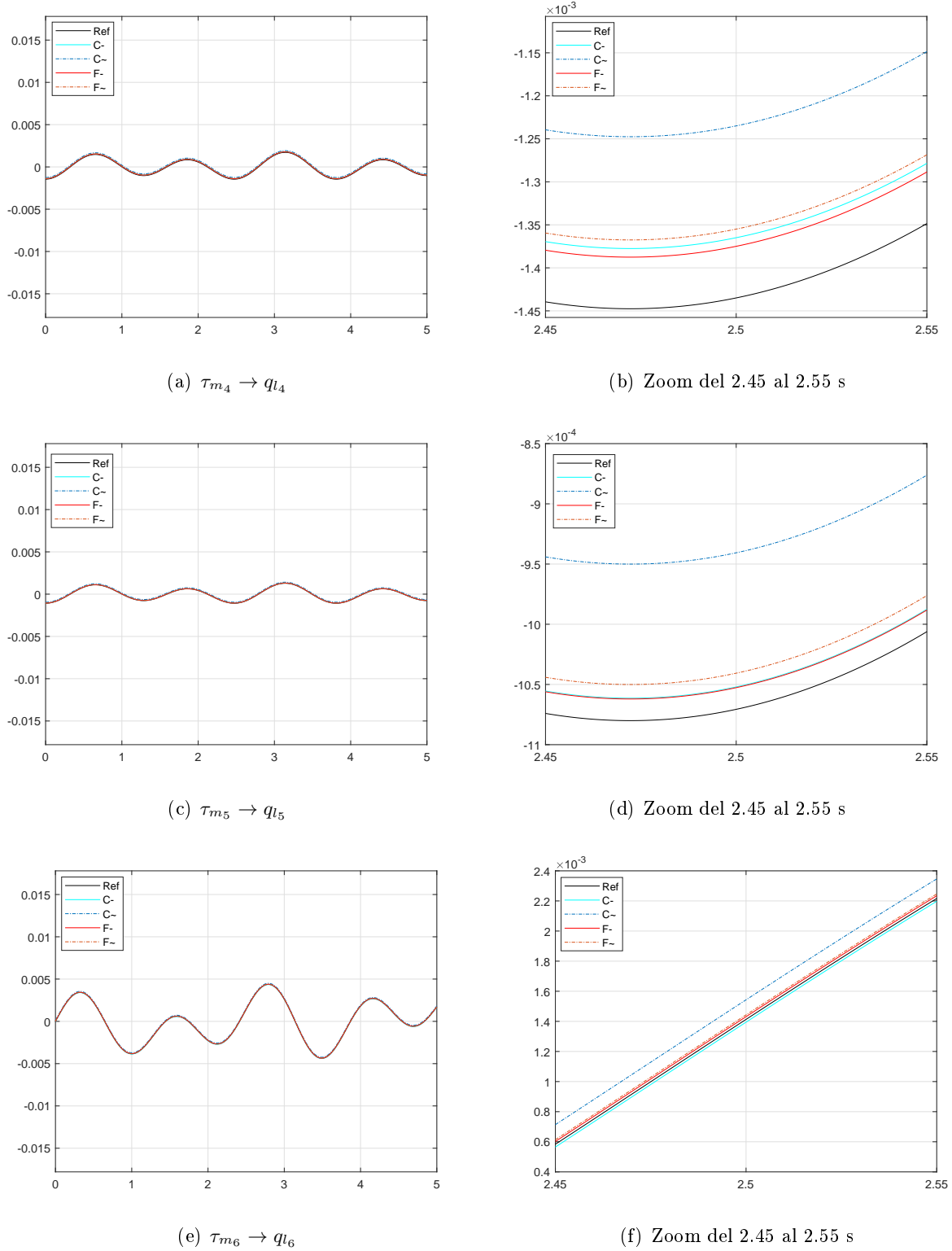
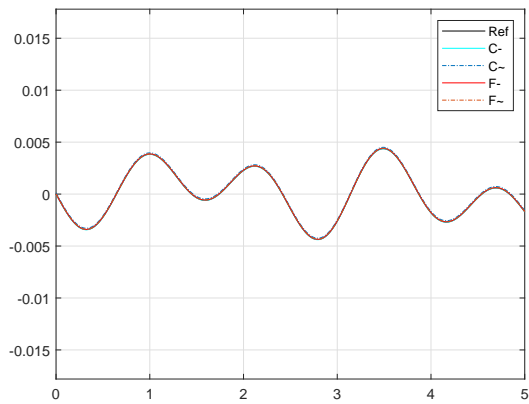
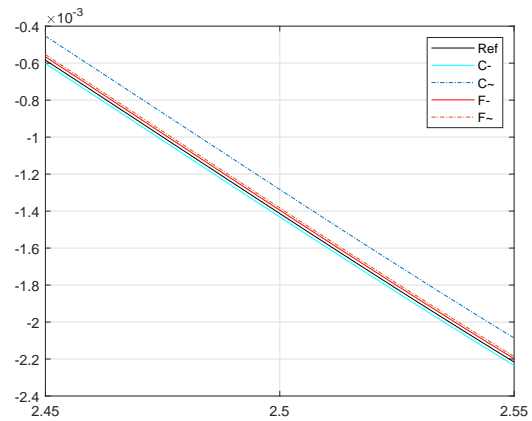


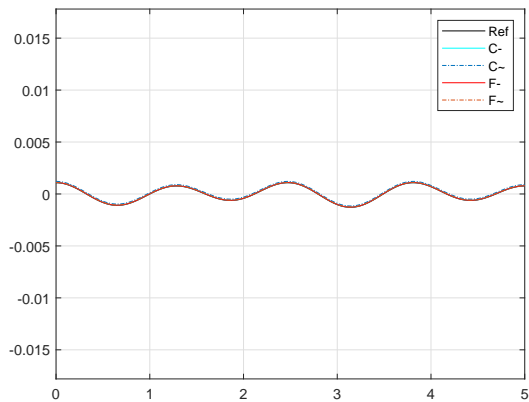
Figura 4.11: Resultados del control de par de los motores de CC acoplados a las articulaciones de la pierna izquierda del humanoide NAO (parte 2).



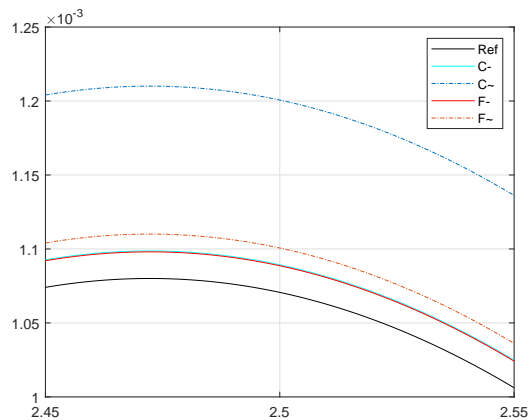
(a) $\tau_{m_7} \rightarrow q_{r_1}$



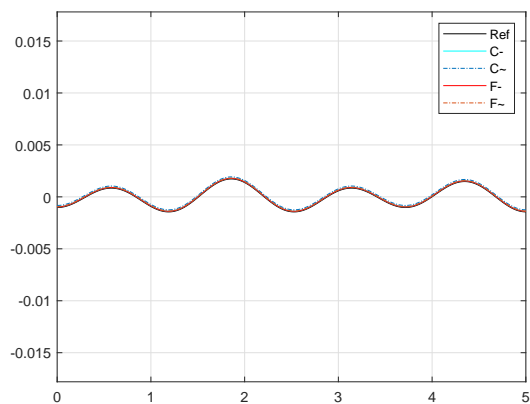
(b) Zoom del 2.45 al 2.55 s



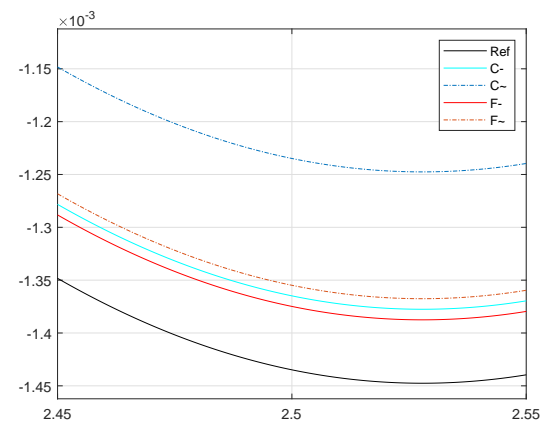
(c) $\tau_{m_8} \rightarrow q_{r_2}$



(d) Zoom del 2.45 al 2.55 s

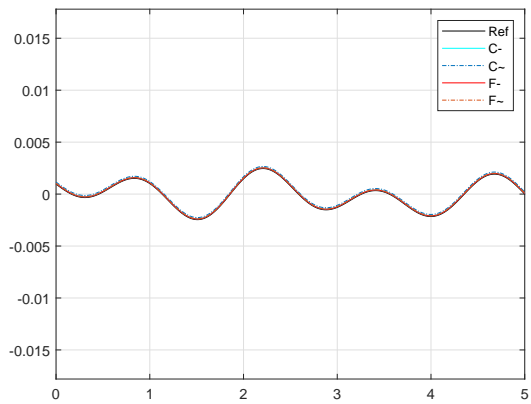


(e) $\tau_{m_9} \rightarrow q_{r_3}$

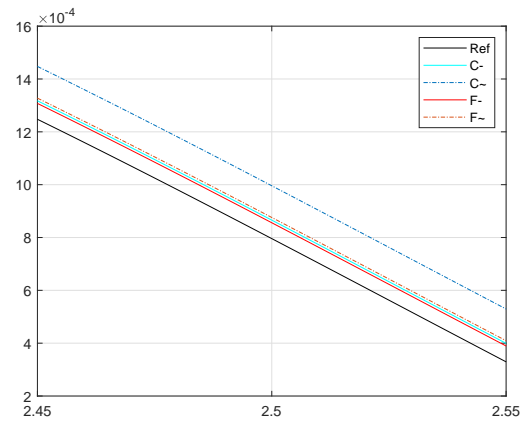


(f) Zoom del 2.45 al 2.55 s

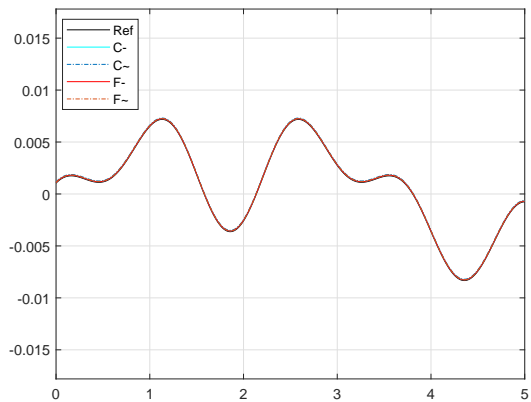
Figura 4.12: Resultados del control de par de los motores de CC acoplados a las articulaciones de la pierna derecha del humanoide NAO (parte 1).



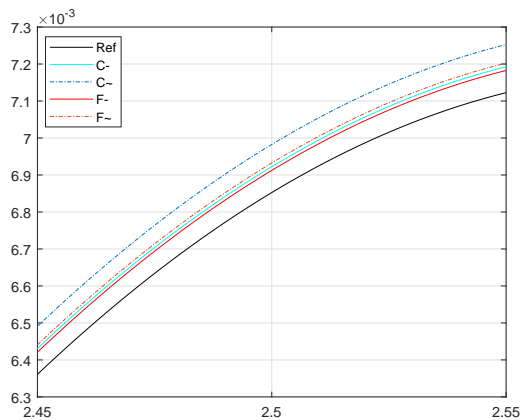
(a) $\tau_{m_{10}} \rightarrow q_{r_4}$



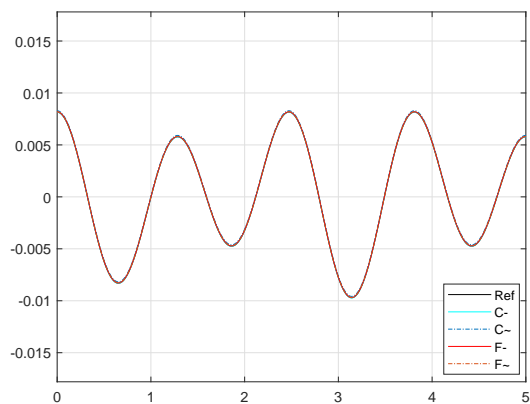
(b) Zoom del 2.45 al 2.55 s



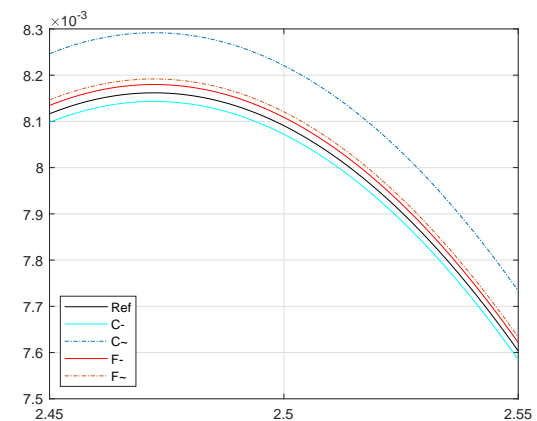
(c) $\tau_{m_{11}} \rightarrow q_{r_5}$



(d) Zoom del 2.45 al 2.55 s



(e) $\tau_{m_{12}} \rightarrow q_{r_6}$



(f) Zoom del 2.45 al 2.55 s

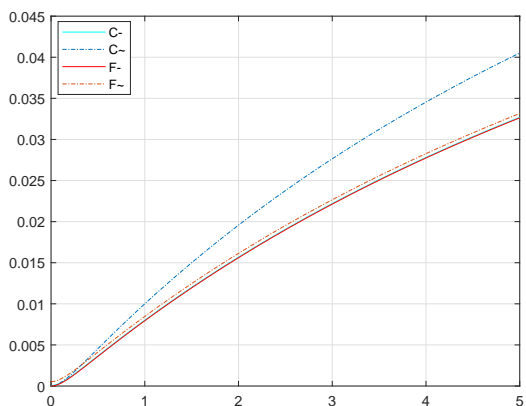
Figura 4.13: Resultados del control de par de los motores de CC acoplados a las articulaciones de la pierna derecha del humanoide NAO (parte 2).

Tabla 4.12: Comparación del desempeño de los controladores PID y $PI^\lambda D^\mu$, sin considerar una fuerza externa.

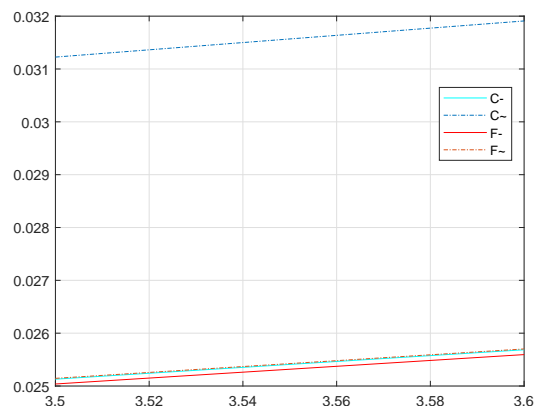
Art	Sin fuerza externa					
	Clásico			Fraccionario		
	mín	máx	pro	mín	máx	pro
τ_{m_1}	0	1.3892	0.3992	0	1.3981	0.4092
τ_{m_2}	0	1.2893	0.2985	0	1.2794	0.2819
τ_{m_3}	0	1.5654	0.3392	0	1.5101	0.3203
τ_{m_4}	0	1.5328	0.3493	0	1.5287	0.3452
τ_{m_5}	0	1.0032	0.2109	0	1.0034	0.2115
τ_{m_6}	0	0.9383	0.0293	0	0.9385	0.0294
τ_{m_7}	0	1.4683	0.2839	0	1.4735	0.2902
τ_{m_8}	0	1.2342	0.0328	0	1.2433	0.0337
τ_{m_9}	0	1.1896	0.0943	0	1.1724	0.0926
$\tau_{m_{10}}$	0	1.4743	0.0756	0	1.4723	0.0744
$\tau_{m_{11}}$	0	1.7858	0.9133	0	1.7833	0.9101
$\tau_{m_{12}}$	0	0.3947	0.0436	0	0.4004	0.0458

Tabla 4.13: Comparación del desempeño de los controladores PID y $PI^\lambda D^\mu$, considerando una fuerza externa.

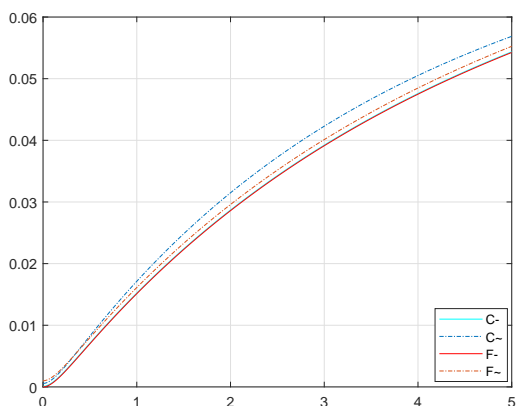
Art	Con fuerza externa					
	Clásico			Fraccionario		
	mín	máx	pro	mín	máx	pro
τ_{m_1}	0.0183	7.3743	1.4589	0	1.4009	0.4143
τ_{m_2}	0.0154	6.2832	1.0039	0	1.2837	0.2897
τ_{m_3}	0.0293	9.8282	1.6143	0	1.5123	0.3287
τ_{m_4}	0.0494	13.7547	2.3822	0.0001	1.5384	0.3501
τ_{m_5}	0.0523	14.2543	2.4001	0	1.0192	0.2137
τ_{m_6}	0.0293	5.8238	0.9882	0	0.9583	0.0312
τ_{m_7}	0.0311	8.2547	1.1832	0.0002	1.4902	0.2971
τ_{m_8}	0.0455	12.3432	1.2215	0	1.2591	0.0354
τ_{m_9}	0.0522	10.3535	1.1033	0	1.2934	0.0959
$\tau_{m_{10}}$	0.0323	7.2764	1.0929	0	1.4891	0.0778
$\tau_{m_{11}}$	0.0093	3.5858	1.6439	0	1.8011	0.9129
$\tau_{m_{12}}$	0.0398	9.8484	1.1939	0.0001	0.4134	0.0489



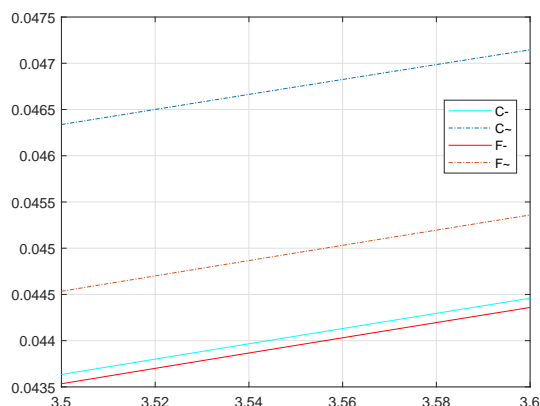
(a) $m_1 \rightarrow i_{a_1}$



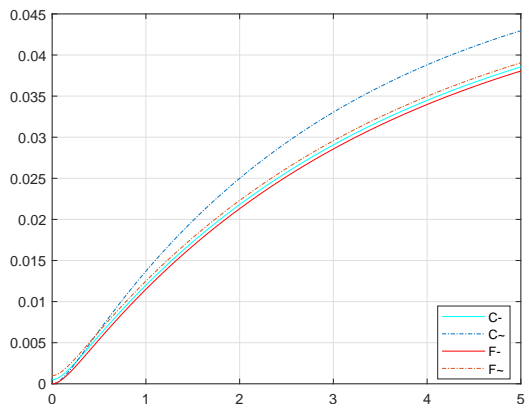
(b) Zoom del 3.5 al 3.6 s



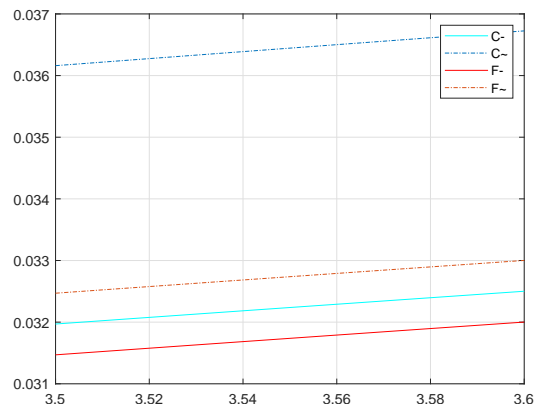
(c) $m_2 \rightarrow i_{a_2}$



(d) Zoom del 3.5 al 3.6 s

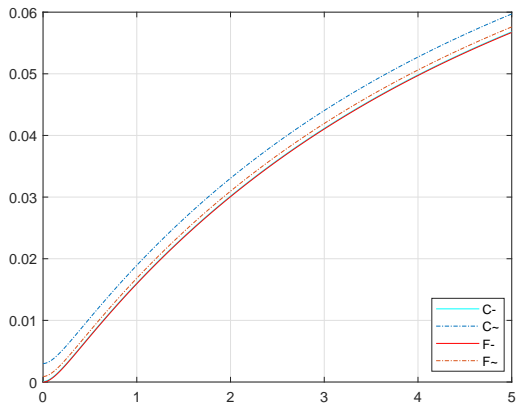


(e) $m_3 \rightarrow i_{a_3}$

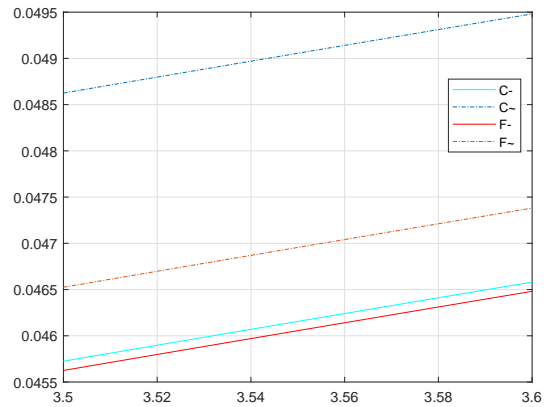


(f) Zoom del 3.5 al 3.6 s

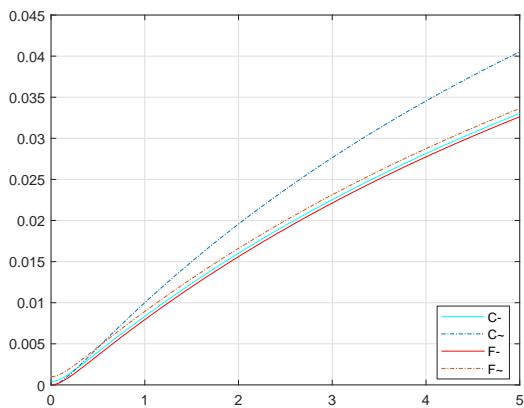
Figura 4.14: Consumo de corriente de los motores de CC acoplados a las articulaciones de la pierna izquierda del humanoide NAO (parte 1).



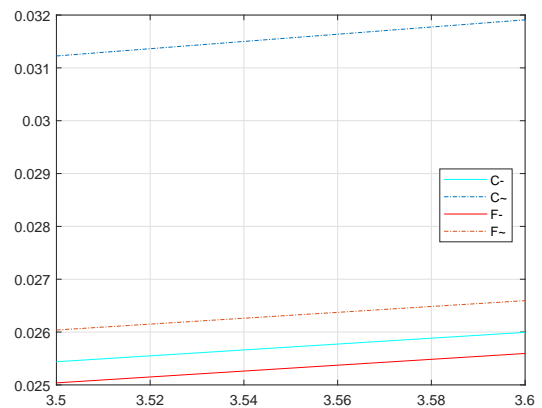
(a) $m_4 \rightarrow i_{a_4}$



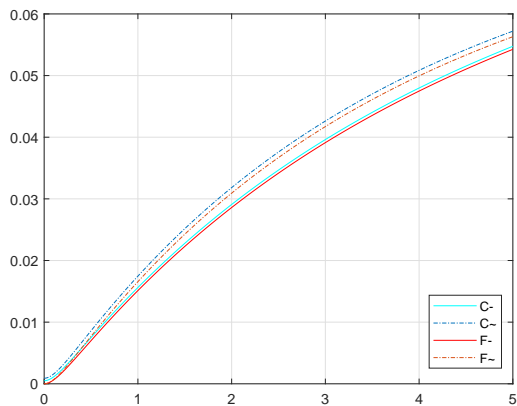
(b) Zoom del 3.5 al 3.6 s



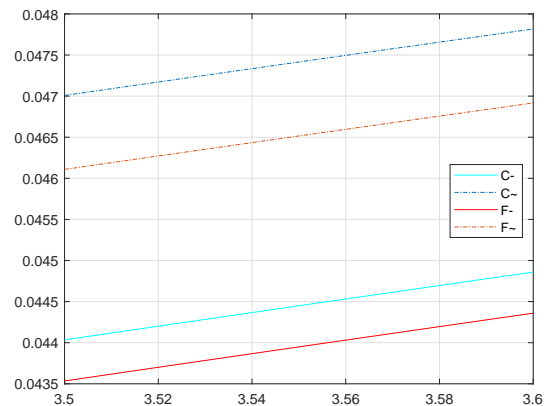
(c) $m_5 \rightarrow i_{a_5}$



(d) Zoom del 3.5 al 3.6 s

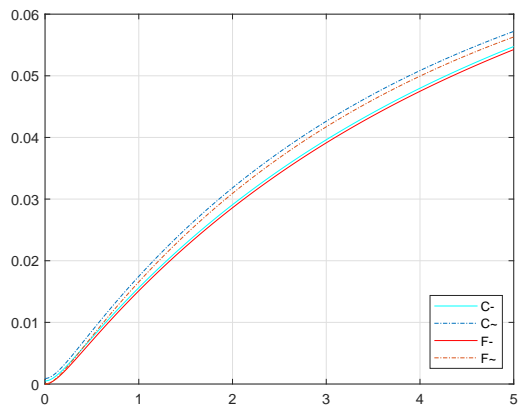


(e) $m_6 \rightarrow i_{a_6}$

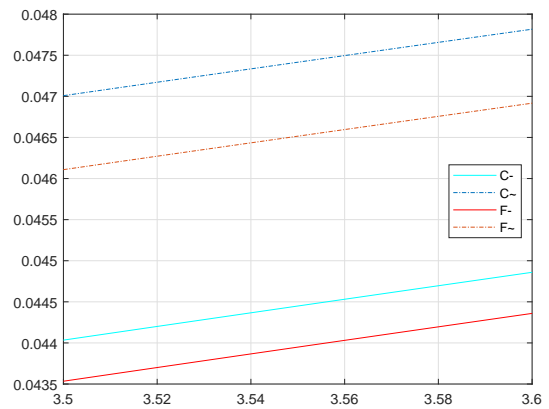


(f) Zoom del 3.5 al 3.6 s

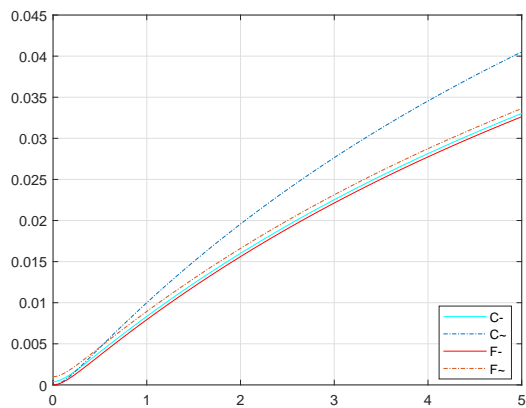
Figura 4.15: Consumo de corriente de los motores de CC acoplados a las articulaciones de la pierna izquierda del humanoide NAO (parte 2).



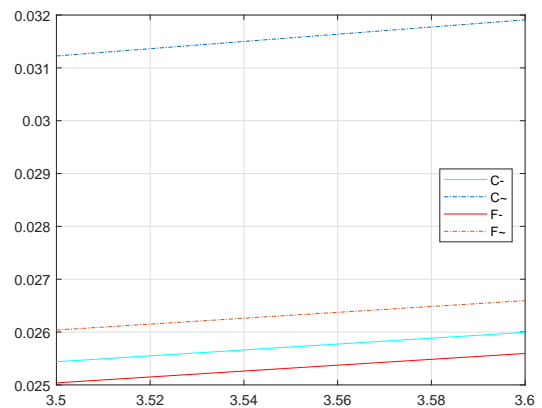
(a) $m_7 \rightarrow i_{a_7}$



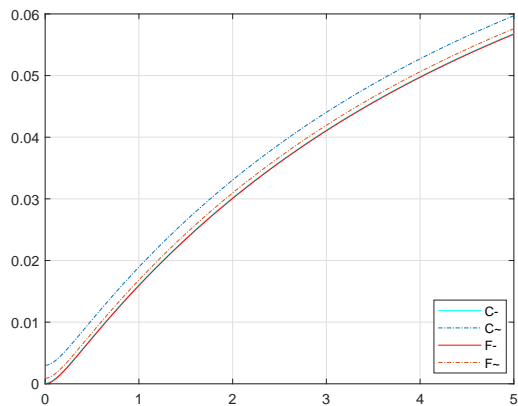
(b) Zoom del 3.5 al 3.6 s



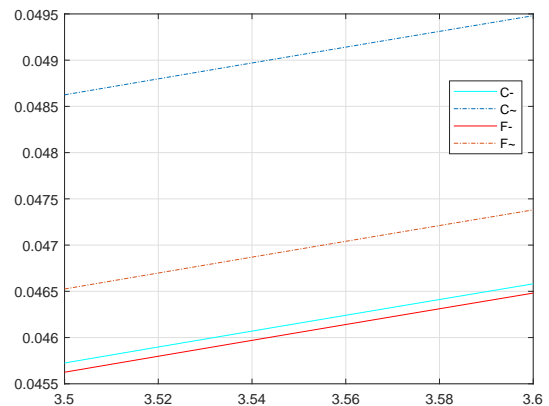
(c) $m_8 \rightarrow i_{a_8}$



(d) Zoom del 3.5 al 3.6 s

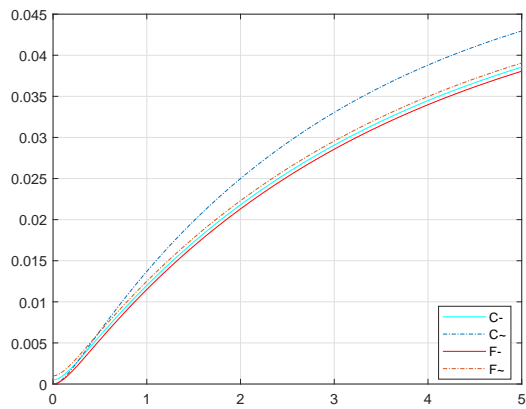


(e) $m_9 \rightarrow i_{a_9}$

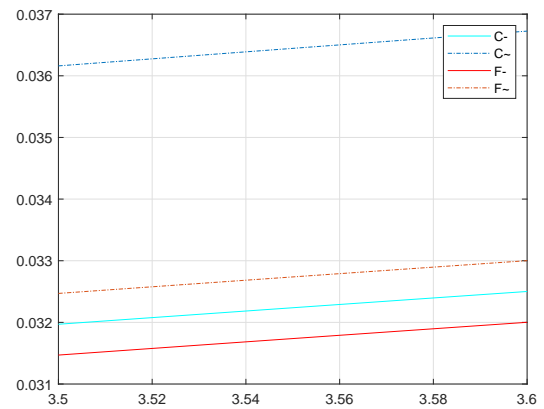


(f) Zoom del 3.5 al 3.6 s

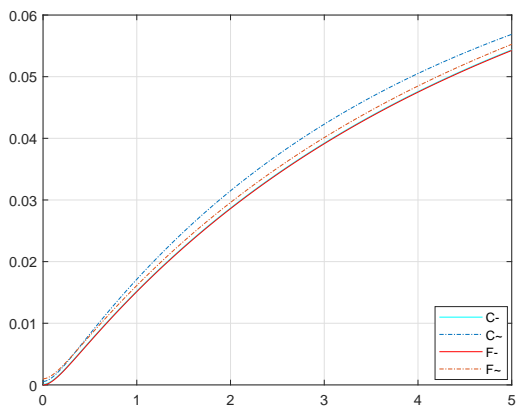
Figura 4.16: Consumo de corriente de los motores de CC acoplados a las articulaciones de la pierna derecha del humanoide NAO (parte 1).



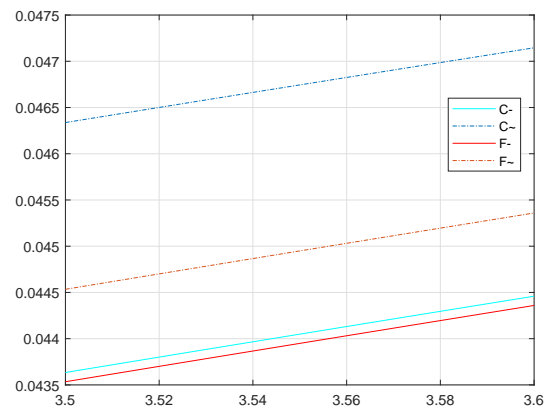
(a) $m_{10} \rightarrow i_{a_{10}}$



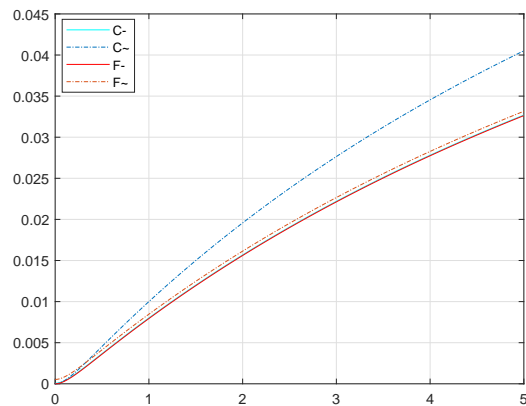
(b) Zoom del 3.5 al 3.6 s



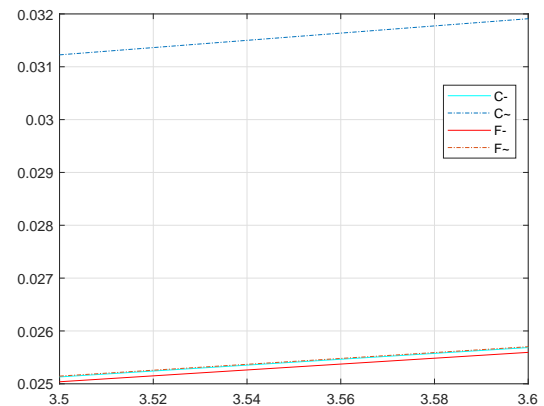
(c) $m_{11} \rightarrow i_{a_{11}}$



(d) Zoom del 3.5 al 3.6 s

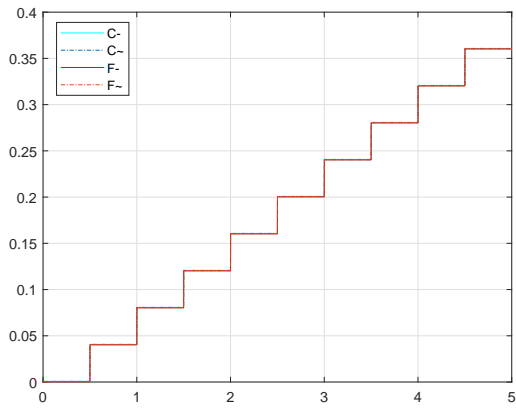


(e) $m_{12} \rightarrow i_{a_{12}}$

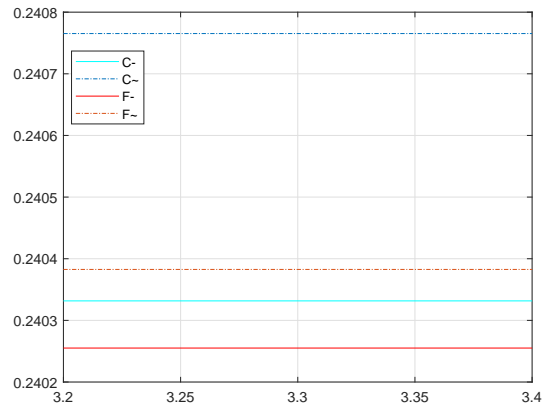


(f) Zoom del 3.5 al 3.6 s

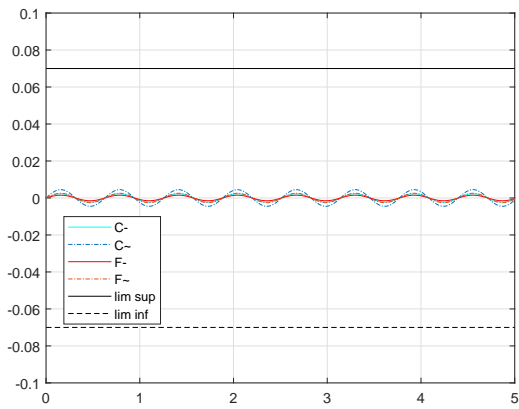
Figura 4.17: Consumo de corriente de los motores de CC acoplados a las articulaciones de la pierna derecha del humanoide NAO (parte 2).



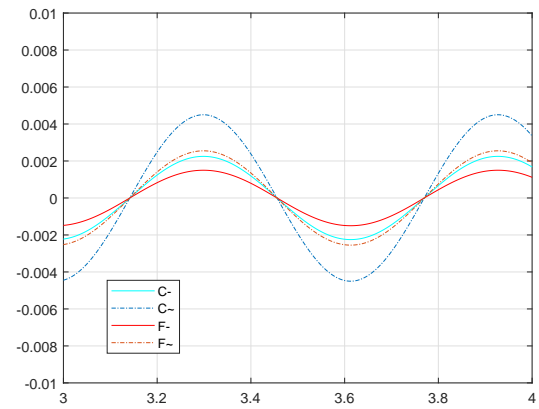
(a) ZMP (Eje x)



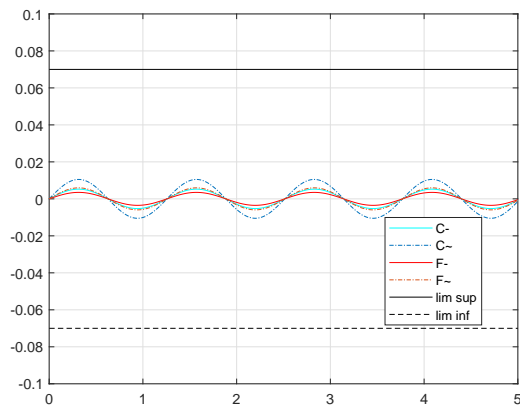
(b) Zoom del 3.2 al 3.4 s



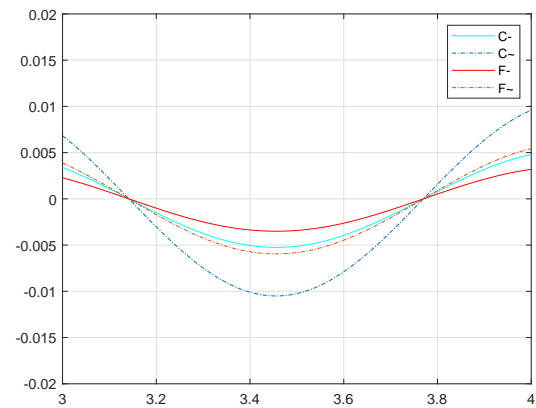
(c) ZMP (Eje y)



(d) Zoom del 3 al 4 s

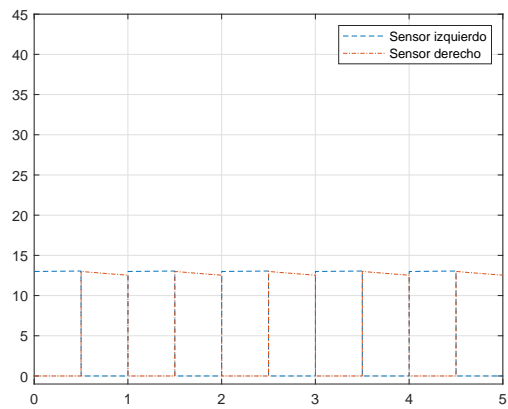


(e) CoM (Eje y)

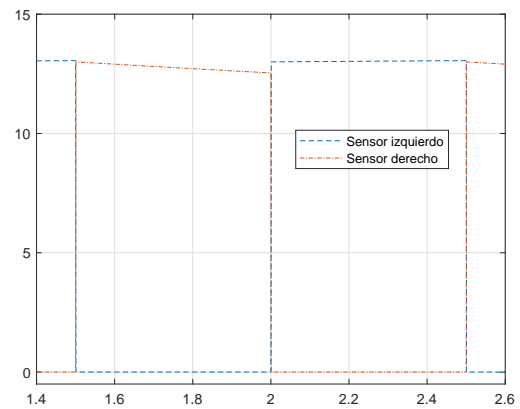


(f) Zoom del 3 al 4 s

Figura 4.18: Trayectoria del punto momento cero (ZMP) y del centro de masa (CoM).



(a) Sensores virtuales



(b) Zoom del 1.4 al 2.6 s

Figura 4.19: Estimación de la fuerza mediante la red neuronal artificial.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos Futuros

5.1. Conclusiones

En esta tesis se desarrollo el modelo dinámico del tren inferior del robot humanoide NAO, además se diseño una estrategia de control para la locomoción bípeda utilizando el enfoque del cálculo fraccionario. A continuación se presentan las conclusiones:

Incorporación exitosa del cálculo fraccionario: el uso del cálculo fraccionario en el diseño de controles muestra ser una contribución prometedora. La aplicación de operadores de orden no entero revela un enfoque eficaz para mejorar la estabilidad y la adaptabilidad del robot en condiciones adversas.

Estrategia de control efectiva: la cual consta de controladores adaptativos basados en pasividad para el seguimiento de trayectorias de las articulaciones, controles PID para los motores y un control con el enfoque de modo deslizante para mantener el equilibrio, hace que el robot tenga una óptima capacidad para seguir trayectorias específicas con fidelidad y mantener su estabilidad en diversas condiciones. Esto implica que el robot puede realizar movimientos más naturales y adaptables, similar al andar humano.

Optimización de parámetros con el Algoritmo de Búsqueda de Cuco: La técnica de ajuste de parámetros demuestra su eficacia al lograr una sintonización fina de las ganancias y ordenes fraccionarios para los controladores, garantizando un rendimiento óptimo del sistema.

Robustez validada en condiciones adversas: La prueba de robustez, que incorpora fuerzas externas y variaciones en los parámetros del motor, valida la eficacia y resistencia del sistema, confirmando que la estrategia de control fraccionaria es capaz de enfrentar condiciones adversas con éxito.

Menor consumo de corriente eléctrica: La aplicación de operadores de orden no entero en el control de los motores ha permitido una gestión más eficiente de la energía, resultando en un menor consumo de corriente, como se puede observar de la Figura 4.14 a la Figura 4.17. Esto se debe a que el cálculo fraccionario presenta la propiedad de disipación, el cual es un factor determinante en la optimización del consumo de corriente eléctrica de los motores de manera notable.

Ventajas de aplicar el enfoque fraccionario: La comparación entre el caso clásico y el de orden fraccionario, utilizando el RMSE, destaca que la inclusión de operadores fraccionarios proporciona una mayor robustez al sistema, subrayando la relevancia del enfoque fraccionario en la mejora de la estabilidad y adaptabilidad del robot, así como la capacidad para influir positivamente en la eficiencia energética de los sistemas robóticos.

La conclusión de que el enfoque fraccionario proporciona una mayor robustez abre la puerta a la posibilidad de transferir este conocimiento a otros contextos y aplicaciones robóticas. La metodología y los principios desarrollados podrían tener aplicaciones más amplias en el diseño y control de diversos tipos de robots y sistemas dinámicos, además de contar con la propiedad de disipación, contribuyendo así a la sostenibilidad y eficiencia en el uso de recursos en la robótica avanzada.

5.2. Trabajos Futuros

- Validar el modelo dinámico del tren inferior del robot humanoide NAO.
- Desarrollar una estrategia de control para la manipulación de objetos.
- Implementar alguno de los controladores propuestos.
- Aplicar el cálculo fraccionario al diseño de redes neuronales artificiales para el desarrollo de sensores virtuales.
- Emplear operadores fraccionarios al modelo dinámico.
- Utilizar otras definiciones de derivadas e integrales de orden no entero.

Bibliografía

- [1] B.-Z. Sandler, “Introduction: Brief historical review and main definitions,” in *Robotics: Designing the Mechanisms for Automated Machinery*, pp. 1–36, Academic Press, 1999.
- [2] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo, “Introduction,” in *Robotics: Modelling, Planning and Control*, pp. 1–37, Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] B. Siciliano and O. Khatib, “Robotics and the handbook,” in *Springer Handbook of Robotics*, pp. 1–6, Springer, 2016.
- [4] P. Corke, “Introduction,” in *Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB®*, pp. 1–14, Springer, 2017.
- [5] M. Spenko, S. Buerger, and K. Iagnemma, *The DARPA Robotics Challenge Finals: Humanoid Robots to the Rescue*, vol. 121. Springer, 2018.
- [6] E. Yoshida, “Robots that look like humans: A brief look into humanoid robotics,” *Metode Science Studies Journal*, vol. 9, pp. 143–151, 2019.
- [7] B. Ross, “Fractional calculus,” *Mathematics Magazine*, vol. 50, no. 3, pp. 115–122, 1977.
- [8] I. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
- [9] R. Matušů, “Application of fractional order calculus to control theory,” *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 5, no. 7, pp. 1162–1169, 2011.
- [10] H. Schiessel, R. Metzler, A. Blumen, and T. Nonnenmacher, “Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 28, no. 23, p. 6567, 1995.
- [11] V. Pandey, *Physical and Geometrical Interpretation of Fractional Derivatives in Viscoelasticity and Transport Phenomena*. PhD thesis, University of Oslo, 2016.
- [12] V. E. Tarasov, *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, vol. 4. Applications in Physics, Part A. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2019.
- [13] V. E. Tarasov, *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, vol. 5. Applications in Physics, Part B. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2019.

- [14] A. Boukhouima, K. Hattaf, E. M. Lotfi, M. Mahrouf, D. F. Torres, and N. Yousfi, “Lyapunov functions for fractional-order systems in biology: Methods and applications,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 140, p. 110224, 2020.
- [15] C. Ionescu, A. Lopes, D. Copot, J. T. Machado, and J. Bates, “The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: A review,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 51, pp. 141–159, 2017.
- [16] R. A. Aguiar, I. C. Franco, F. Leonardi, and F. Lima, “Fractional pid controller applied to a chemical plant with level and ph control,” *Chemical Product and Process Modeling*, vol. 13, no. 4, 2018.
- [17] A. M. d. Almeida, M. K. Lenzi, and E. K. Lenzi, “A survey of fractional order calculus applications of multiple-input, multiple-output (mimo) process control,” *Fractal and Fractional*, vol. 4, no. 2, p. 22, 2020.
- [18] E. Sejdić, I. Djurović, and L. Stanković, “Fractional fourier transform as a signal processing tool: An overview of recent developments,” *Signal Processing*, vol. 91, no. 6, pp. 1351–1369, 2011.
- [19] J. T. Machado and A. M. Lopes, “Analysis of natural and artificial phenomena using signal processing and fractional calculus,” *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 18, no. 2, pp. 459–478, 2015.
- [20] A. Atangana and I. Koca, “Chaos in a simple nonlinear system with atangana–baleanu derivatives with fractional order,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 89, pp. 447–454, 2016.
- [21] J. Gómez-Aguilar and A. Atangana, “New chaotic attractors: Application of fractal-fractional differentiation and integration,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 44, no. 4, pp. 3036–3065, 2021.
- [22] A. Kochubei and Y. Luchko, *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, vol. 1. Basic Theory. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2019.
- [23] S. Kajita, H. Hirukawa, K. Harada, and K. Yokoi, *Introduction to humanoid robotics*, vol. 101. Springer, 2014.
- [24] G. Nelson, A. Saunders, and R. Playter, “The petman and atlas robots at boston dynamics,” *Humanoid robotics: A reference*, pp. 169–186, 2018.
- [25] K. Kaneko, F. Kanehiro, M. Morisawa, K. Akachi, G. Miyamori, A. Hayashi, and N. Kanehira, “Humanoid robot hrp-4-humanoid robotics platform with lightweight and slim body,” in *2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 4400–4407, IEEE, 2011.
- [26] D. Gouaillier, V. Hugel, P. Blazevic, C. Kilner, J. Monceaux, P. Lafourcade, B. Marnier, J. Serre, and B. Maisonnier, “Mechatronic design of nao humanoid,” in *2009 IEEE international conference on robotics and automation*, pp. 769–774, IEEE, 2009.

- [27] O. Stasse, T. Flayols, R. Budhiraja, K. Giraud-Esclasse, J. Carpentier, J. Mirabel, A. Del Prete, P. Souères, N. Mansard, F. Lamiroux, *et al.*, “Talos: A new humanoid research platform targeted for industrial applications,” in *2017 IEEE-RAS 17th International Conference on Humanoid Robotics (Humanoids)*, pp. 689–695, IEEE, 2017.
- [28] J. Engelsberger, A. Werner, C. Ott, B. Henze, M. A. Roa, G. Garofalo, R. Burger, A. Beyer, O. Eiberger, K. Schmid, *et al.*, “Overview of the torque-controlled humanoid robot toro,” in *2014 IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 916–923, IEEE, 2014.
- [29] G. Romualdi, S. Daffarra, Y. Hu, P. Ramadoss, F. J. A. Chavez, S. Traversaro, and D. Pucci, “A benchmarking of dcm-based architectures for position, velocity and torque-controlled humanoid robots,” *International Journal of Humanoid Robotics*, vol. 17, no. 01, p. 1950034, 2020.
- [30] D. Torricelli, J. Gonzalez, M. Weckx, R. Jiménez-Fabián, B. Vanderborght, M. Sartori, S. Dosen, D. Farina, D. Lefeber, and J. L. Pons, “Human-like compliant locomotion: state of the art of robotic implementations,” *Bioinspiration & biomimetics*, vol. 11, no. 5, p. 051002, 2016.
- [31] T. Mikołajczyk, E. Mikołajewska, H. F. Al-Shuka, T. Malinowski, A. Kłodowski, D. Y. Pimenov, T. Paczkowski, F. Hu, K. Giasin, D. Mikołajewski, *et al.*, “Recent advances in bipedal walking robots: Review of gait, drive, sensors and control systems,” *Sensors*, vol. 22, no. 12, p. 4440, 2022.
- [32] C. A. D. Bezerra and D. E. Zampieri, “Biped robots: The state of art,” in *International Symposium on History of Machines and Mechanisms: Proceedings HMM2004*, pp. 371–389, Springer, 2004.
- [33] X. Yang, H. She, H. Lu, T. Fukuda, and Y. Shen, “State of the art: bipedal robots for lower limb rehabilitation,” *Applied Sciences*, vol. 7, no. 11, p. 1182, 2017.
- [34] S. Rezazadeh and R. D. Gregg, “A control framework for anthropomorphic biped walking based on stabilizing feedforward trajectories,” in *Dynamic Systems and Control Conference*, vol. 50695, p. V001T06A007, American Society of Mechanical Engineers, 2016.
- [35] S. R. https://developer.softbankrobotics.com/nao6/nao_documentation, 2018.
- [36] N. Kofinas, *Forward and Inverse Kinematics for the NAO Humanoid Robot*. Phdthesis, Technical University of Crete, jul 2012.
- [37] N. Kofinas, E. Orfanoudakis, and M. G. Lagoudakis, “Complete analytical inverse kinematics for nao,” in *2013 13th International Conference on Autonomous Robot Systems*, pp. 1–6, IEEE, 2013.
- [38] N. Kofinas, E. Orfanoudakis, and M. G. Lagoudakis, “Complete analytical forward and inverse kinematics for the nao humanoid robot,” *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 77, no. 2, pp. 251–264, 2015.
- [39] S. Shamsuddin, H. Yussof, L. I. Ismail, S. Mohamed, F. A. Hanapiah, and N. I. Zahari, “Initial response in hri-a case study on evaluation of child with autism spectrum disorders interacting with a humanoid robot nao,” *Procedia Engineering*, vol. 41, pp. 1448–1455, 2012.
- [40] S. Shamsuddin, H. Yussof, L. Ismail, F. A. Hanapiah, S. Mohamed, H. A. Piah, and N. I. Zahari, “Initial response of autistic children in human-robot interaction therapy with humanoid robot nao,” in *2012 IEEE 8th International Colloquium on Signal Processing and its Applications*, pp. 188–193, IEEE, 2012.

- [41] C. Graf and T. Röfer, “A closed-loop 3d-lipm gait for the robocup standard platform league humanoid,” in *Proceedings of the Fifth Workshop on Humanoid Soccer Robots in conjunction with the*, 2010.
- [42] O. Rudovic, J. Lee, L. Mascarell-Maricic, B. W. Schuller, and R. W. Picard, “Measuring engagement in robot-assisted autism therapy: a cross-cultural study,” *Frontiers in Robotics and AI*, vol. 4, p. 36, 2017.
- [43] M. A. Rosly, M. A. Miskam, S. Shamsuddin, H. Yussof, and N. I. Zahari, “Data linking testing between humanoid robot and iort network server for autism telerehabilitation system development,” in *RITA 2018*, pp. 161–169, Springer, 2020.
- [44] A. Cherubini, F. Giannone, L. Iocchi, M. Lombardo, and G. Oriolo, “Policy gradient learning for a humanoid soccer robot,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 57, no. 8, pp. 808–818, 2009.
- [45] J. C. Zagal, J. Delpiano, and J. Ruiz-del Solar, “Self-modeling in humanoid soccer robots,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 57, no. 8, pp. 819–827, 2009.
- [46] Ł. Przytuła, “Nao soccer robots path planning based on rough mereology,” *Fundamenta Informaticae*, vol. 131, no. 2, pp. 241–251, 2014.
- [47] D. Chen, “Fuzzy obstacle avoidance optimization of soccer robot based on an improved genetic algorithm,” *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, vol. 11, no. 12, pp. 6187–6198, 2020.
- [48] H. Teixeira, T. Silva, M. Abreu, and L. P. Reis, “Humanoid robot kick in motion ability for playing robotic soccer,” in *2020 IEEE International Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions (ICARSC)*, pp. 34–39, IEEE, 2020.
- [49] A. Rezaeipناه, P. Amiri, and S. Jafari, “Performing the kick during walking for robocup 3d soccer simulation league using reinforcement learning algorithm,” *International Journal of Social Robotics*, vol. 13, no. 6, pp. 1235–1252, 2021.
- [50] Q. A. Le, S. Hanoune, and C. Pelachaud, “Design and implementation of an expressive gesture model for a humanoid robot,” in *2011 11th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 134–140, IEEE, 2011.
- [51] C. Stanton, A. Bogdanovych, and E. Ratanasena, “Teleoperation of a humanoid robot using full-body motion capture, example movements, and machine learning,” in *Proc. Australasian Conference on Robotics and Automation*, vol. 8, p. 51, 2012.
- [52] M. S. Erden, “Emotional postures for the humanoid-robot nao,” *International Journal of Social Robotics*, vol. 5, no. 4, pp. 441–456, 2013.
- [53] B. Choi and S. Jo, “A low-cost eeg system-based hybrid brain-computer interface for humanoid robot navigation and recognition,” *PloS one*, vol. 8, no. 9, p. e74583, 2013.
- [54] O. Mohareri and A. B. Rad, “A vision-based location positioning system via augmented reality: An application in humanoid robot navigation,” *International Journal of Humanoid Robotics*, vol. 10, no. 03, p. 1350019, 2013.

- [55] L. George and A. Mazel, “Humanoid robot indoor navigation based on 2d bar codes: Application to the nao robot,” in *2013 13th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, pp. 329–335, IEEE, 2013.
- [56] W. Yan, C. Weber, and S. Wermter, “Learning indoor robot navigation using visual and sensorimotor map information,” *Frontiers in neurorobotics*, vol. 7, p. 15, 2013.
- [57] J. Delfin, H. M. Becerra, and G. Arechavaleta, “Visual path following using a sequence of target images and smooth robot velocities for humanoid navigation,” in *2014 IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 354–359, IEEE, 2014.
- [58] S. Wen, X. Chen, C. Ma, H.-K. Lam, and S. Hua, “The q-learning obstacle avoidance algorithm based on ekf-slam for nao autonomous walking under unknown environments,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 72, pp. 29–36, 2015.
- [59] A. Rioux and W. Suleiman, “Autonomous slam based humanoid navigation in a cluttered environment while transporting a heavy load,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 99, pp. 50–62, 2018.
- [60] J. Delfin, H. M. Becerra, and G. Arechavaleta, “Humanoid navigation using a visual memory with obstacle avoidance,” *Robotics and autonomous systems*, vol. 109, pp. 109–124, 2018.
- [61] P. B. Kumar and D. R. Parhi, “Intelligent hybridization of regression technique with genetic algorithm for navigation of humanoids in complex environments,” *Robotica*, vol. 38, no. 4, pp. 565–581, 2020.
- [62] L.-H. Juang and J.-S. Zhang, “Robust visual line-following navigation system for humanoid robots,” *Artificial Intelligence Review*, vol. 53, no. 1, pp. 653–670, 2020.
- [63] H. Mellmann and G. Cotugno, “Dynamic motion control: Adaptive bimanual grasping for a humanoid robot,” *Fundamenta Informaticae*, vol. 112, no. 1, pp. 89–101, 2011.
- [64] D. Hood, S. Lemaignan, and P. Dillenbourg, “When children teach a robot to write: An autonomous teachable humanoid which uses simulated handwriting,” in *Proceedings of the Tenth Annual ACM/IEEE International Conference on Human-Robot Interaction*, pp. 83–90, 2015.
- [65] S. Wen, T. Wang, Z. Ma, and X. Li, “Dynamics modeling and fuzzy pd control of humanoid arm,” in *2017 36th Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 616–621, IEEE, 2017.
- [66] S. Wen, X. Hu, X. Lv, Z. Wang, and Y. Peng, “Q-learning trajectory planning based on takagi-sugeno fuzzy parallel distributed compensation structure of humanoid manipulator,” *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 16, no. 1, p. 1729881419830204, 2019.
- [67] L. Zhang, H. Zhang, H. Yang, G.-B. Bian, and W. Wu, “Multi-target detection and grasping control for humanoid robot nao,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 33, no. 7, pp. 1225–1237, 2019.
- [68] A. K. Kashyap and D. R. Parhi, “Optimization of stability of humanoid robot nao using ant colony optimization tuned mpc controller for uneven path,” *Soft Computing*, vol. 25, no. 7, pp. 5131–5150, 2021.

- [69] N. Maalouf, I. H. Elhajj, E. Shamma, and D. Asmar, “Biomimetic energy-based humanoid gait design,” *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 100, no. 1, pp. 203–221, 2020.
- [70] B. Brahmi, M. H. Laraki, M. H. Rahman, I. M. Rasedul, and M. A. Uz-Zaman, “Combined model predictive controller technique for enhancing nao gait stabilization,” *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 13, no. 8, pp. 577–584, 2019.
- [71] J. Ding, Y. Wang, M. Yang, and X. Xiao, “Walking stabilization control for humanoid robots on unknown slope based on walking sequences adjustment,” *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 90, no. 3, pp. 323–338, 2018.
- [72] C. I. Muresan, S. Folea, G. Mois, and E. H. Dulf, “Development and implementation of an fpga based fractional order controller for a dc motor,” *Mechatronics*, vol. 23, no. 7, pp. 798–804, 2013.
- [73] C. Copot, C. Muresan, and R. De Keyser, “Speed and position control of a dc motor using fractional order pi-pd control,” in *3rd International Conference on Fractional Signals and Systems (FSS-2013)*, 2013.
- [74] D. R. Chowdhury, J. Dey, and R. Mondal, “Optimal parameter selection of fractional order pi λ controller for speed control of dc motor,” in *2017 IEEE Calcutta Conference (CALCON)*, pp. 347–351, IEEE, 2017.
- [75] M. A. L. Khaniki, S. Esfandiari, and M. Manthouri, “Speed control of brushless dc motor using fractional order fuzzy pi controller optimized via woa,” in *2020 10th International Conference on Computer and Knowledge Engineering (ICCKE)*, pp. 431–436, IEEE, 2020.
- [76] A. Fekik, H. Denoun, A. T. Azar, A. Koubaa, N. A. Kamal, M. Zaouia, M. L. Hamida, and N. Yassa, “Adapted fuzzy fractional order proportional-integral controller for dc motor,” in *2020 First International Conference of Smart Systems and Emerging Technologies (SMARTTECH)*, pp. 1–6, IEEE, 2020.
- [77] V. K. Munagala and R. K. Jatoh, “Design of fractional-order pid/pid controller for speed control of dc motor using harris hawks optimization,” in *Intelligent algorithms for analysis and control of dynamical systems*, pp. 103–113, Springer, 2021.
- [78] A. Idir, M. Kidouche, Y. Bensafia, K. Khettab, and S. A. Tadjer, “Speed control of dc motor using pid and fopid controllers based on differential evolution and pso,” *evolutionary computation*, vol. 20, p. 21, 2018.
- [79] M. M. El-Saadawi, E. A. Gouda, M. A. Elhosseini, and M. S. Essa, “Identification and speed control of dc motor using fractional order pid: Microcontroller,” *European Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, vol. 4, no. 1, 2020.
- [80] A. Roy and S. Srivastava, “Design of optimal pi λ d δ controller for speed control of dc motor using constrained particle swarm optimization,” in *2016 International Conference on Circuit, Power and Computing Technologies (ICCPCT)*, pp. 1–6, IEEE, 2016.
- [81] A. Rajasekhar, P. Kunathi, A. Abraham, and M. Pant, “Fractal order speed control of dc motor using levy mutated artificial bee colony algorithm,” in *2011 world congress on information and communication technologies*, pp. 7–13, IEEE, 2011.

- [82] F. A. Hasan and L. J. Rashad, "Fractional-order pid controller for permanent magnet dc motor based on pso algorithm," *International Journal of Power Electronics and Drive Systems*, vol. 10, no. 4, p. 1724, 2019.
- [83] R. Saini, G. Parmar, and R. Gupta, "Sfs based fractional order pid controller (fopid) for speed control of dc motor," *International Journal*, vol. 9, no. 4, 2020.
- [84] M. D. Patil, K. Vadirajacharya, and S. W. Khubalkar, "Design and tuning of digital fractional-order pid controller for permanent magnet dc motor," *IETE Journal of Research*, pp. 1–11, 2021.
- [85] R. Singhal, S. Padhee, and G. Kaur, "Design of fractional order pid controller for speed control of dc motor," *International Journal of Scientific and Research Publications*, vol. 2, no. 6, pp. 1–8, 2012.
- [86] V. Mehra, S. Srivastava, and P. Varshney, "Fractional-order pid controller design for speed control of dc motor," in *2010 3rd International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology*, pp. 422–425, IEEE, 2010.
- [87] R. V. Jain, M. Aware, and A. Junghare, "Tuning of fractional order pid controller using particle swarm optimization technique for dc motor speed control," in *2016 IEEE 1st International Conference on Power Electronics, Intelligent Control and Energy Systems (ICPEICES)*, pp. 1–4, IEEE, 2016.
- [88] T. Wati *et al.*, "Simulation model of speed control dc motor using fractional order pid controller," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1444, p. 012022, IOP Publishing, 2020.
- [89] B. Hekimoğlu, "Optimal tuning of fractional order pid controller for dc motor speed control via chaotic atom search optimization algorithm," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 38100–38114, 2019.
- [90] J. Agarwal, G. Parmar, R. Gupta, and A. Sikander, "Analysis of grey wolf optimizer based fractional order pid controller in speed control of dc motor," *Microsystem Technologies*, vol. 24, no. 12, pp. 4997–5006, 2018.
- [91] A. Rastogi and P. Tiwari, "Optimal tuning of fractional order pid controller for dc motor speed control using particle swarm optimization," *International journal of soft computing and engineering*, vol. 3, no. 2, pp. 150–157, 2013.
- [92] I. Mohammed and A. Abdulla, "Fractional order pid controller design for speed control dc motor based on artificial bee colony optimization," *International Journal of Computer Applications*, vol. 179, no. 24, pp. 43–49, 2018.
- [93] S. Khubalkar, A. Chopade, A. Junghare, and M. Aware, "Design and tuning of fractional order pid controller for speed control of permanent magnet brushless dc motor," in *2016 IEEE First International Conference on Control, Measurement and Instrumentation (CMI)*, pp. 326–320, IEEE, 2016.
- [94] A. L. Saleh and A. A. Obed, "Speed control of brushless dc motor based on fractional order pid controller," *International Journal of Computer Applications*, vol. 95, no. 4, 2014.
- [95] I. Petráš, "Fractional-order feedback control of a dc motor," *Journal of electrical engineering*, vol. 60, no. 3, pp. 117–128, 2009.

- [96] A. Ahuja and S. K. Aggarwal, “Design of fractional order pid controller for dc motor using evolutionary optimization techniques,” *WSEAS Transactions on systems and control*, vol. 9, pp. 171–182, 2014.
- [97] A. Ahmed, G. Parmar, and R. Gupta, “Application of gwo in design of fractional order pid controller for control of dc motor and robustness analysis,” in *2018 International Conference on Advances in Computing, Communication Control and Networking (ICACCCN)*, pp. 646–651, IEEE, 2018.
- [98] S. Ekinçi, D. Izci, and B. Hekimoğlu, “Optimal fopid speed control of dc motor via opposition-based hybrid manta ray foraging optimization and simulated annealing algorithm,” *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 46, no. 2, pp. 1395–1409, 2021.
- [99] A. Neçaibia, F. Abdelliche, S. Ladaci, and A. Bouraiou, “Optimal auto-tuning of fractional order π λ d μ controller for a dc motor speed using extremum seeking,” in *ICFDA’14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014*, pp. 1–6, IEEE, 2014.
- [100] B. N. Kommula and V. R. Kota, “Direct instantaneous torque control of brushless dc motor using firefly algorithm based fractional order pid controller,” *Journal of King Saud University-Engineering Sciences*, vol. 32, no. 2, pp. 133–140, 2020.
- [101] S. Heidarpour, M. Tabatabaei, and H. Khodadadi, “Speed control of a dc motor using a fractional order sliding mode controller,” in *2017 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2017 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)*, pp. 1–4, IEEE, 2017.
- [102] S. K. Gupta and P. Varshney, “Fractional fuzzy pid controller for speed control of dc motor,” in *2013 Third International Conference on Advances in Computing and Communications*, pp. 1–4, IEEE, 2013.
- [103] G. Farahani and K. Rahmani, “Speed control of a separately excited dc motor using new proposed fuzzy neural algorithm based on fopid controller,” *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 30, no. 5, pp. 728–740, 2019.
- [104] S. Chávez-Vázquez, J. F. Gómez-Aguilar, J. Lavín-Delgado, R. F. Escobar-Jiménez, and V. H. Olivares-Peregrino, “Applications of fractional operators in robotics: a review,” *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 104, no. 4, p. 63, 2022.
- [105] H. F. Al-Shuka, F. Allmendinger, B. Corves, and W.-H. Zhu, “Modeling, stability and walking pattern generators of biped robots: a review,” *Robotica*, vol. 32, no. 6, pp. 907–934, 2014.
- [106] M. Dekker, “Zero-moment point method for stable biped walking,” *Eindhoven University of Technology*, 2009.
- [107] M. Vukobratović and B. Borovac, “Zero-moment point—thirty five years of its life,” *International journal of humanoid robotics*, vol. 1, no. 01, pp. 157–173, 2004.
- [108] A. Goswami and P. Vadakkepat, *Humanoid robotics: a reference*. Springer, 2019.
- [109] S. Kajita, H. Hirukawa, K. Harada, and K. Yokoi, *Introduction to humanoid robotics*, vol. 101. Springer, 2014.

- [110] M. Vukobratović and J. Stepanenko, “On the stability of anthropomorphic systems,” *Mathematical biosciences*, vol. 15, no. 1-2, pp. 1–37, 1972.
- [111] T. McGeer, “Passive dynamic walking,” *I. J. Robotic Res.*, vol. 9, no. 2, pp. 62–82, 1990.
- [112] T. McGeer, “Passive walking with knees,” in *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 1640–1645, IEEE, 1990.
- [113] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2008.
- [114] A. Barrientos, L. F. Peñín, C. Balaguer, and R. Aracil, *Fundamentos de robótica*. McGraw-Hill, 2007.
- [115] H. Wang, H. Qi, M. Xu, Y. Tang, J. Yao, X. Yan, and M. Li, “Research on the relationship between classic denavit-hartenberg and modified denavit-hartenberg,” in *2014 seventh international symposium on computational intelligence and design*, vol. 2, pp. 26–29, IEEE, 2014.
- [116] J. Denavit and R. S. Hartenberg, “A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices,” 1955.
- [117] J. J. Craig, *Introduction to robotics: mechanics and control, 3/E*. Pearson Education India, 2009.
- [118] S. K. Saha, *Introduction to robotics*. Tata McGraw-Hill Education, 2014.
- [119] A. K. Mishra, V. K. Tiwari, R. Kumar, and T. Verma, “Speed control of dc motor using artificial bee colony optimization technique,” in *2013 International conference on control, automation, robotics and embedded systems (CARE)*, pp. 1–6, IEEE, 2013.
- [120] R. G. Kanojiya and P. Meshram, “Optimal tuning of pi controller for speed control of dc motor drive using particle swarm optimization,” in *2012 international conference on advances in power conversion and energy technologies (APCET)*, pp. 1–6, IEEE, 2012.
- [121] C.-K. Lai and S.-C. Chang, “Coreless dc motor drive system design by variable structure scheme,” in *2016 International Symposium on Computer, Consumer and Control (IS3C)*, pp. 952–955, IEEE, 2016.
- [122] S. Kajita, F. Kanehiro, K. Kaneko, K. Yokoi, and H. Hirukawa, “The 3d linear inverted pendulum mode: A simple modeling for a biped walking pattern generation,” in *Proceedings 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Expanding the Societal Role of Robotics in the the Next Millennium (Cat. No. 01CH37180)*, vol. 1, pp. 239–246, IEEE, 2001.
- [123] S. Kajita, F. Kanehiro, K. Kaneko, K. Fujiwara, K. Yokoi, and H. Hirukawa, “Biped walking pattern generation by a simple three-dimensional inverted pendulum model,” *Advanced Robotics*, vol. 17, no. 2, pp. 131–147, 2003.
- [124] A. Kovalev, N. Pavliuk, K. Krestovnikov, and A. Saveliev, “Generation of walking patterns for biped robots based on dynamics of 3d linear inverted pendulum,” in *International conference on interactive collaborative robotics*, pp. 170–181, Springer, 2019.

- [125] E. Hashemi and M. Ghaffari Jadidi, “Dynamic modeling and control study of the nao biped robot with improved trajectory planning,” *Materials with Complex Behaviour II: Properties, Non-Classical Materials and New Technologies*, pp. 671–688, 2012.
- [126] J.-J. E. Slotine and W. Li, “On the adaptive control of robot manipulators,” *The international journal of robotics research*, vol. 6, no. 3, pp. 49–59, 1987.
- [127] M. W. Spong, “On the robust control of robot manipulators,” *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 37, no. 11, pp. 1782–1786, 1992.
- [128] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2008.
- [129] C.-S. Chen and W.-L. Chen, “Robust adaptive sliding-mode control using fuzzy modeling for an inverted-pendulum system,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 45, no. 2, pp. 297–306, 1998.
- [130] A. Nasir, R. Ismail, and M. Ahmad, “Performance comparison between sliding mode control (smc) and pd-pid controllers for a nonlinear inverted pendulum system,” *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 71, pp. 400–405, 2010.
- [131] Z.-Q. Guo, J.-X. Xu, and T. H. Lee, “Design and implementation of a new sliding mode controller on an underactuated wheeled inverted pendulum,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 4, pp. 2261–2282, 2014.
- [132] S. Irfan, A. Mehmood, M. T. Razzaq, and J. Iqbal, “Advanced sliding mode control techniques for inverted pendulum: Modelling and simulation,” *Engineering science and technology, an international journal*, vol. 21, no. 4, pp. 753–759, 2018.
- [133] P. N. Dao and Y.-C. Liu, “Adaptive reinforcement learning strategy with sliding mode control for unknown and disturbed wheeled inverted pendulum,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 19, no. 2, pp. 1139–1150, 2021.
- [134] Z. Ye and M. K. Kim, “Predicting electricity consumption in a building using an optimized back-propagation and levenberg–marquardt back-propagation neural network: Case study of a shopping mall in china,” *Sustainable Cities and Society*, vol. 42, pp. 176–183, 2018.
- [135] S. Walczak, “Artificial neural networks,” in *Advanced methodologies and technologies in artificial intelligence, computer simulation, and human-computer interaction*, pp. 40–53, IGI global, 2019.
- [136] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams, “Learning representations by back-propagating errors,” *nature*, vol. 323, no. 6088, pp. 533–536, 1986.
- [137] H. Zhang, W. Wu, and M. Yao, “Boundedness and convergence of batch back-propagation algorithm with penalty for feedforward neural networks,” *Neurocomputing*, vol. 89, pp. 141–146, 2012.
- [138] H. Shao and G. Zheng, “Convergence analysis of a back-propagation algorithm with adaptive momentum,” *Neurocomputing*, vol. 74, no. 5, pp. 749–752, 2011.

- [139] J. Gómez-Aguilar, R. Razo-Hernández, and D. Granados-Lieberman, “A physical interpretation of fractional calculus in observables terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response,” *Revista mexicana de física*, vol. 60, no. 1, pp. 32–38, 2014.
- [140] T. Abdeljawad, “On riemann and caputo fractional differences,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 62, no. 3, pp. 1602–1611, 2011.
- [141] M. Caputo and M. Fabrizio, “A new definition of fractional derivative without singular kernel,” *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, vol. 1, no. 2, pp. 73–85, 2015.
- [142] M. Caputo and M. Fabrizio, “Applications of new time and spatial fractional derivatives with exponential kernels,” *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, vol. 2, no. 1, pp. 1–11, 2016.
- [143] J. Ma, T. Ting, K. L. Man, N. Zhang, S.-U. Guan, P. W. Wong, *et al.*, “Parameter estimation of photovoltaic models via cuckoo search,” *Journal of applied mathematics*, vol. 2013, 2013.
- [144] SoftBank Robotics, “<https://developer.softbankrobotics.com/nao-naoqi-2-1>,” 28 de Diciembre de 2021.
- [145] F. Zhong, H. Li, and S. Zhong, “State estimation based on fractional order sliding mode observer method for a class of uncertain fractional-order nonlinear systems,” *Signal Processing*, vol. 127, pp. 168–184, 2016.
- [146] I. N’Doye, M. Darouach, H. Voos, and M. Zasadzinski, “Design of unknown input fractional-order observers for fractional-order systems,” *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 23, no. 3, pp. 491–500, 2013.
- [147] A. Sharafian, A. Sharifi, and W. Zhang, “Fractional sliding mode based on rbf neural network observer: Application to hiv infection mathematical model,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 79, no. 11, pp. 3179–3188, 2020.

Apéndices

Apéndice A

Producción Científica



Applications of Fractional Operators in Robotics: A Review

S. Chávez-Vázquez¹ · J. F. Gómez-Aguilar² · J. E. Lavín-Delgado¹ · R. F. Escobar-Jiménez¹ · V. H. Olivares-Peregrino¹

Received: 8 June 2021 / Accepted: 12 February 2022
© The Author(s), under exclusive licence to Springer Nature B.V. 2022

Abstract

This manuscript presents a bibliographic review on fractional-order control laws applied to robotics manipulators, robot vehicles, man-robot systems, as well as biologically inspired robots. The bibliographic review comprises a search about the control strategies design and definitions of fractional calculus used in several robot systems, as manipulator's arms, Wheeled Mobile Robots (WMRs), exoskeletons, humanoids. Also, the main contributions of fractional-order control laws are presented, such as, improve robustness, reduce steady-state error, and reducing energy consumption. Moreover, the optimization methods used to get the controllers' parameters are presented.

Keywords Fractional calculus · Robots · Fractional order controllers · Control strategies

1 Introduction

The first robot was developed by George C. Devol Jr. and Joseph F. Engelberger in 1961, which is basically a manipulator arm, and gave rise to the first generation of robots which are fixed at a point and cannot move freely. With the passage of time, mobile robotic mechanisms have been created which can move over the ground, through the air, and across the water, for example, humanoid, and wheeled robots, drones and small wing-fixed aircraft, Autonomous Underwater Vehicles (AUV).

From the standpoint of the type of task that robots perform, these can be categorized into manufacturing robots (human augmentation), field robots, or service robots. Manufacturing robots are used in factories to increase product production, reduce costs, improve the human operator's ability, and diminish their effort; field robots perform in the environment by performing tasks (construction, exploring, mining, and in space) where the safety of human beings is

in danger; whilst, the service robots facilitate or improve tasks as cleaning, medical rehabilitation, surgery, delivery, or accompaniment robots, etc. [1–4].

The first approximation to the Fractional Calculus (FC) is originally attributed to Guillaume de L'Hôpital and Gottfried Leibniz in 1695. In one of their letters, they discussed the meaning and the importance that would generate if the order of the derivatives were not of integer order. In this letter, Leibniz concluded that from results, "someday it would lead to useful consequences". Since 1695 there have been more than 300 years of constant development of this useful mathematical tool. The earliest contributions are ascribed to well-known mathematicians, such as Euler, Laplace, Lacroix, Riemann, Liouville, Fourier, Abel, to name a few. Recently, researchers as Caputo, Atangana, Baleanu, Fabrizio have made significant apportions in this field [5–7].

Fractional calculus refers to the arbitrary order derivation and integration. During its beginnings, this discipline was studied only by mathematicians. However, at present it has been developed in applications from the engineering perspective, this because of non-integer order derivatives and integrals are quite useful for the description of properties of sundry materials, for example in viscoelasticity [8, 9]. However, Fractional Calculus has been of particular interest in diverse and varied scientific areas such as physics [10, 11], biology [12, 13], automatic control [14–16], signals processing [17, 18], chaos [19, 20] to name a few due to FC has shown that can model and control physical systems with greater precision than any traditional integer order

✉ J. F. Gómez-Aguilar
jose.ga@cenidet.tecnm.mx

¹ Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Tecnológico Nacional de México, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico

² CONACYT-Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Tecnológico Nacional de México, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, Mexico



Intelligent Neural Integral Sliding-mode Controller for a space robotic manipulator mounted on a free-floating satellite

J.E. Lavín-Delgado ^a, S. Chávez-Vázquez ^b, J.F. Gómez-Aguilar ^{c,*}, Madini O. Alassafi ^d,
Fawaz E. Alsaadi ^d, Adil M. Ahmad ^d

^a Dirección de Ingeniería en Redes y Telecomunicaciones, Universidad Politécnica del Estado de Guerrero (UPEG), Puente Campuzano, Carretera Federal Iguala-Taxco K.M. 105, C.P. 40321 Taxco de Alarcón, Guerrero, Mexico

^b Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490 Cuernavaca, Morelos, Mexico

^c CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490 Cuernavaca, Morelos, Mexico

^d Department of Information Technology, Faculty of Computing and Information Technology, King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia

Received 23 May 2022; received in revised form 15 August 2022; accepted 18 August 2022

Available online 22 August 2022

Abstract

In this paper, a fractional neural integral sliding-mode controller based on the Caputo-Fabrizio derivative and Riemann–Liouville integral for a robot manipulator mounted on a free-floating satellite is proposed and developed. The mathematical model is obtained by using the Euler–Lagrange formalism and generalized through the Caputo-Fabrizio derivative. The conventional neural integral sliding-mode controller reported in the literature were also developed to make a comparative analysis between both controllers. The controllers are tuned using a swarm intelligence algorithm. External disturbances are also considered. Simulation results show the superiority and robustness of the proposed control system for trajectory tracking tasks through the root-mean-square error. Additionally, two additional reference trajectories were considered. In this sense, the numerical simulations were done by using the same orders and gains, showing the robustness of our fractional-order control strategy under different operating conditions. Further, the proposed controller uses the fractional derivative in the sense of Caputo-Fabrizio which has not been used enough in the area of robotics, so this is a start to analyse the contributions that arise when using said derivative in this robotic.

© 2022 COSPAR. Published by Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Robot manipulator; Fractional calculus; Neural network controller; Artificial Intelligence; Big Data Analytics; Decision Making; Aerospace systems; Swarm intelligence algorithm

1. Introduction

Robot manipulators play an increasingly important role in space missions due to their high capacity to develop complex tasks in hostile environments like space (Wang et al., 2021f). In this sense, space robotics for on-orbit servicing are used in applications such as repair and maintenance of space stations and satellites, refueling, and space

debris removal, i.e. defunct satellites and spent rocket stages, to mention a few. The main purpose is to prolong the operational lifetime of space stations and satellites and reduce space debris growth in Earth orbit (Rybus et al., 2017). On the other hand, robot manipulators operated by astronauts have been used and operated on the International Space Station for maintenance tasks (Stieber et al., 1999). However, a high level of autonomy and precision is required for applications like the capture of a target satellite in a space environment. A robot manipulator mounted on an unmanned satellite is convenient to

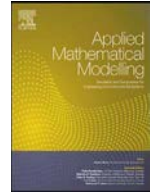
* Corresponding author.

E-mail address: jose.ga@cenidet.tecnm.mx (J.F. Gómez-Aguilar).



Contents lists available at ScienceDirect

Applied Mathematical Modelling

journal homepage: www.elsevier.com/locate/apm

Trajectory tracking of Stanford robot manipulator by fractional-order sliding mode control



Samuel Chávez-Vázquez^a, Jorge E. Lavín-Delgado^b, José F. Gómez-Aguilar^c,
José R. Razo-Hernández^d, Sina Etemad^e, Shahram Rezapour^{e,f,g,*}

^a Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, Cuernavaca, C.P. 62490, Morelos, México

^b Universidad Politécnica del Estado de Guerrero (UPEG), Dirección de Ingeniería en Redes y Telecomunicaciones, Puente Campuzano, Carretera Federal Iguala-Taxco K.M. 105, Taxco de Alarcón, C.P. 40321, Guerrero, México

^c CONACYT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, Cuernavaca, C.P. 62490, Morelos, México

^d ENAP-Research Group, CA-Fuentes Alternas y Calidad de la Energía Eléctrica, Departamento de Ingeniería Electromecánica, Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato (ITESI), Carr. Irapuato-Silao km 12.5, Colonia El Copal, Irapuato, C.P. 36821, Guanajuato, México

^e Department of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

^f Department of Mathematics, Kyung Hee University, 26 Kyungheedae-ro, Dongdaemun-gu, Seoul, Republic of Korea

^g Department of Medical Research, China Medical University Hospital, China Medical University, Taichung, Taiwan

ARTICLE INFO

Article history:

Received 8 August 2022

Revised 31 March 2023

Accepted 3 April 2023

Available online 12 April 2023

Keywords:

Fractional integral sliding mode control

Fractional PI controller

Stanford robot manipulator

Induction motor

Cuckoo search algorithm

ABSTRACT

In this work, a fractional integral sliding-mode control scheme based on the Caputo–Fabrizio derivative and the Atangana–Baleanu integral of the Stanford robot for trajectory tracking tasks is developed and presented. The coupled system is composed of the robot manipulator and the induction motors that drive its joints. The mathematical model of the system is obtained by the Euler–Lagrange method and generalized to an arbitrary order via the Caputo–Fabrizio derivative. The actuators are controlled by fractional PI controllers based on the Atangana–Baleanu integral, while a fractional integral sliding mode control law is also developed for trajectory tracking control. In this context, a fractional version of the sliding surface via the Caputo–Fabrizio derivative is introduced to improve the performance of the control system. In addition, to attenuate the chattering effects, a fractional integral term, based on the Atangana–Baleanu integral, is introduced on the sliding surface further improving system performance with less power consumption. The conventional integral sliding mode control and an optimal super-twisting sliding mode control are also introduced for comparison with the proposed control strategy. The control schemes were tuned using the Cuckoo method. External disturbances are also considered in the system dynamics, as well as different end-effector reference trajectories, which were designed to carry out manufacturing tasks. Simulation results confirm the superiority of our control scheme for trajectory-tracking applications over its conventional version and the optimal super-twisting sliding mode control, even with external disturbances and trajectory changes. To show the robustness of the proposed control scheme under different operating conditions, all the numerical simulations were performed considering the same orders and gains. Finally, our control law introduces the fractional derivative and integral of Caputo–Fabrizio and Atangana–Baleanu respectively, which have not been used enough

* Corresponding author at: Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran.

E-mail addresses: samuel.chavez18ea@cenidet.edu.mx (S. Chávez-Vázquez), jorge.lavin@cenidet.edu.mx (J.E. Lavín-Delgado), jgomez@cenidet.edu.mx (J.F. Gómez-Aguilar), roberto.razo@enap-rg.org (J.R. Razo-Hernández), rezapourshahram@yahoo.ca (S. Rezapour).



**TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO**

cenidet[®]
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico