

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE NUEVO LEÓN



DISEÑO Y MODELADO DE EXOESQUELETO  
DE HOMBRO PARA REHABILITACIÓN MOTORA DE  
PACIENTES CON ENFERMEDAD CEREBROVASCULAR

T E S I S  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRIA EN INGENIERIA

P R E S E N T A  
ING. EDGAR GIOVANY IBARRA ZEA  
No. DE CONTROL G14580245

ASESOR: DRA. DULCE CITLALLI MARTÍNEZ PEÓN

CD. GUADALUPE, NUEVO LEÓN JUNIO, 2023



**Aceptación de documento de Tesis**

Guadalupe Nuevo León, **17/MAYO/2023**

**DR. JOSÉ ISIDRO HERNÁNDEZ VEGA**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS**  
**DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**  
**PRESENTE:**

La Comisión de Revisión de Tesis nos es grato comunicarle que, conforme a los lineamientos para la obtención del grado de Maestría en Ingeniería de este Instituto, y después de haber sometido a revisión académica el proyecto de Tesis titulado: **"DISEÑO Y MODELADO DE EXOESQUELETO DE HOMBRO PARA REHABILITACIÓN MOTORA DE PACIENTES CON ENFERMEDAD CEREBROVASCULAR"**, realizado por el **ING. EDGAR GIOVANY IBARRA ZEA**, No. De Control: **G14580245**, dirigida por la **Dra. Dulce Citlalli Martínez Peón** y habiendo realizado las correcciones que le fueron indicadas, acordamos **ACEPTAR** el documento final de proyecto de Tesis, así mismo le solicitamos tenga a bien extender el correspondiente oficio de autorización de impresión.

Sin otro particular, agradecemos la atención.

**ATENTAMENTE**

Excelencia en Educación Tecnológica  
"CIENCIA Y TECNOLOGÍA AL SERVICIO DEL HOMBRE"

**DIRECTOR DE TESIS**

**DRA. DULCE CITLALLI MARTÍNEZ PEÓN**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA**  
**Y FÍSICA BIOMÉDICA**  
**CÉDULA: 10160178**

**REVISOR**

**DR. MARIO CÉSAR OSORIO ABRAHAM**  
**DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL**  
**CÉDULA 7576591**

**REVISOR**

**DR. MIGUEL ÁNGEL REYES GONZÁLEZ**  
**DOCTOR EN CIENCIAS**  
**CÉDULA: 10880895**

**REVISOR**

**DR. ALEJANDRO ALONZO GARCÍA**  
**MAestrÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA**  
**CÉDULA: 6672631**

C.c.p.- Expediente





Guadalupe Nuevo León, **30/mayo/2023**

**ING. EDGAR GIOVANY IBARRA ZEA  
CANDIDATO A OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA  
PRESENTE**

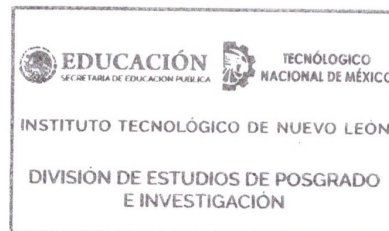
Después de haber atendido las recomendaciones sugeridas por la Comisión del Consejo de Posgrado de Ingeniería, en relación a su trabajo de Proyecto de Tesis, cuyo título es: **"DISEÑO Y MODELADO DE EXOSQUELETO DE HOMBRO PARA REHABILITACIÓN MOTORA DE PACIENTES CON ENFERMEDAD CEREBROVASCULAR)"**, me permito comunicarle que, conforme a los **Lineamientos para la Operación de los Estudios de Posgrado**, se le concede la autorización para que proceda con la impresión de su proyecto de Tesis.

Sin otro particular, agradecemos la atención.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica®*  
"CIENCIA Y TECNOLOGÍA AL SERVICIO DEL HOMBRE"

**JOSÉ ISIDRO HERNÁNDEZ VEGA  
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS  
DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**



C.c.p.- Expediente

JIHV/ross\*





## AUTORIZACIÓN PARA PRESENTAR EXAMEN DE GRADO DE MAESTRÍA

Guadalupe Nuevo León, **30/MAYO/2023**

**ING. EDGAR GIOVANY IBARRA ZEA  
PRESENTE:**

Por medio del presente me es grato comunicarle que **SE AUTORIZA** la presentación del examen de grado de **Maestría en Ingeniería**, toda vez que ha cubiertos los requisitos necesarios.

Aprovecho la ocasión para desearle el mejor de los éxitos en su examen, así como en su vida profesional, y agradecerle la confianza depositada en nuestra institución para la realización de sus estudios de Posgrado.

### ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®  
"CIENCIA Y TECNOLOGÍA AL SERVICIO DEL HOMBRE"

  
**DR. MIGUEL ÁNGEL OCHOA VILLEGAS  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



C.c.p.- Expediente

  
JH/W/ross







# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO EN CIENCIAS DE LA SALUD  
Unidad de Neuromodulación y Plasticidad Cerebral  
Monterrey, N.L. a 20 de Mayo del 2022

Asunto: Carta de Impacto

**DR. MARIO CÉSAR OSORIO ABRAHAM**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**  
**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE NUEVO LEÓN**  
**P R E S E N T E**

El(la) que suscribe **Dr. Juan Fernando Góngora Rivera**, Neurólogo del Hospital Universitario y Coordinador de la Unidad de Neuromodulación y Plasticidad Cerebral, Centro de Investigación y Desarrollo en Ciencias de la Salud (CIDICS), ambas de la Universidad Autónoma de Nuevo León **VALIDÓ** que el alumno **Ing. Edgar Giovany Ibarra Zea** estudiante del semestre 6 del programa de **MAESTRÍA EN INGENIERÍA**, asistió y presentó la temática general que aborda con el proyecto de investigación que realiza en su institución titulado: "Diseño y modelado de exoesqueleto de hombro para rehabilitación motora de pacientes con enfermedad cerebrovascular".

Como resultado de esta visita, dejo de manifiesto que la institución que represento considera que dicho proyecto resulta de alto impacto para nosotros y, seguramente, para otras instituciones similares. Dicho proyecto podría representar un vínculo academia-industria a mediano plazo, una vez que la investigación incremente su nivel de madurez.

Sin más por el momento, quedo a sus órdenes para cualquier información adicional.

**Dr. Juan Fernando Góngora Rivera,**  
Coordinador de la Unidad de Neuromodulación y Plasticidad Cerebral  
Centro de Investigación y Desarrollo en Ciencias de la Salud (CIDICS),  
Universidad Autónoma de Nuevo León  
Av. Dr. José Eleuterio González, Mitras Centro, 64460 Monterrey, N.L.  
81 1340 4370

c.c.p. Ing. Edgar Giovany Ibarra Zea - estudiante de maestría  
Dra. Dulce Citlalli Martínez Peón - directora de tesis  
Dr. Vicente Parra Vega - codirector de tesis  
Dr. José Isidro Hernández Vega -coordinador de Posgrado de la MI



Campus de Ciencias de la Salud  
Dr. Carlos Canseco s/n esquina Dr. J. E. González, Col. Mitras Centro, C.P. 64460  
Monterrey, Nuevo León, México  
Tels.: (81) 1340 4370 • 8329 4000, ext. 1813, 1815



Guadalupe, Nuevo León, 29 / Mayo / 2023

**M. PEDRO ROSALES GUTIERREZ**  
**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE NUEVO LEÓN**  
**DIRECTOR**  
**PRESENTE**

Hago manifiesta la

**CESIÓN DE DERECHOS**

De la tesis Diseño y modelado de exoesqueleto de hombro para rehabilitación motora de pacientes con enfermedad cerebrovascular que fue dirigida por el Dr(a). Dulce Citlalli Martínez Peón.

En cumplimiento a los requisitos de obtención del grado que señala el numeral 2.15.5 de los Lineamientos para la Operación de los Estudios de Posgrado en el Tecnológico Nacional de México.

**ATENTAMENTE** (Montserrat ExtraBold en 10 pts)

*Excelencia en Educación Tecnológica®* (Montserrat Extra Light, *itálicas*, en 8 pts)  
"CIENCIA Y TECNOLOGÍA AL SERVICIO DEL HOMBRE"

**Edgar Giovany Ibarra Zea**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO DEL PROGRAMA MAestrÍA EN INGENIERÍA**

ccp. Archivo



Eloy Cavazos No. 2001, Col. Tolteca, C.P. 67170, Guadalupe, Nuevo León. Tel. (81) 8157 0500  
www.tecnm.mx | nuevoleon.tecnm.mx



**2023**  
AÑO DE  
**Francisco**  
**VILLA**  
EL REVOLUCIONARIO DEL PUEBLO

NOMBRE DEL TRABAJO

**Tesis\_Edgar\_\_Corregida.pdf**

AUTOR

**Edgar Ibarra**

RECuento DE PALABRAS

**35407 Words**

RECuento DE CARACTERES

**160803 Characters**

RECuento DE PÁGINAS

**104 Pages**

TAMAÑO DEL ARCHIVO

**9.9MB**

FECHA DE ENTREGA

**Apr 26, 2023 2:50 PM CDT**

FECHA DEL INFORME

**Apr 26, 2023 2:53 PM CDT****● 23% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base c

- 21% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 8% Base de datos de trabajos entregados
- 9% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossr

**● Excluir del Reporte de Similitud**

- Fuentes excluidas manualmente

● **23% de similitud general**

Principales fuentes encontradas en las siguientes bases de datos:

- 21% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 8% Base de datos de trabajos entregados
- 9% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

FUENTES PRINCIPALES

Las fuentes con el mayor número de coincidencias dentro de la entrega. Las fuentes superpuestas no se mostrarán.

1	<b>memoriascnib.mx</b> Internet	10%
2	<b>repositorio.utm.mx</b> Internet	1%
3	<b>documents.mx</b> Internet	<1%
4	<b>hdl.handle.net</b> Internet	<1%
5	<b>Massimo Nespolo, Benoît Guillot. " : charge distribution analysis of no...</b> Crossref	<1%
6	<b>nemertes.library.upatras.gr</b> Internet	<1%
7	<b>Universidad Católica San Pablo on 2018-04-16</b> Submitted works	<1%
8	<b>didgeridoo.une.edu.au</b> Internet	<1%

# Resumen

El presente trabajo presenta el diseño, modelado cinemático y dinámico de un exoesqueleto de cuatro grados de libertad que asista a la rehabilitación motora de hombro en pacientes que sufrieron de una enfermedad cerebrovascular. El mecanismo fue diseñado de acuerdo con las necesidades que plantearon especialistas en rehabilitación del Centro de Investigación y Desarrollo en Ciencias de la Salud de la Universidad Autónoma de Nuevo León, además se consideraron las medidas antropométricas de la población mexicana adulta para el diseño del exoesqueleto. El diseño se realizó utilizando el software de SOLIDWORKS® y se analizó el elemento finito del exoesqueleto. El modelo cinemático se desarrolló mediante la metodología de Denavit Hartenberg mientras que el modelado dinámico se realizó con la metodología de Lagrange y posteriormente se simuló utilizando el software MATLAB®. Todo el diseño del exoesqueleto está considerado para manufacturar con materiales de impresión 3D, con el fin de disminuir tanto el peso como el costo del exoesqueleto.



# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>XII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Antecedentes	3
1.1.1. Exoesqueletos desarrollados para hombro	4
1.1.2. Exoesqueletos comerciales	7
1.2. Planteamiento del problema	8
1.3. Hipótesis	9
1.4. Objetivo general	9
1.4.1. Objetivos específicos	9
1.5. Estructura de la tesis	10
<b>2. Marco teórico</b>	<b>11</b>
2.1. Biomecánica	11
2.1.1. Aplicaciones de la biomecánica	12
2.1.2. Planos y ejes anatómicos	13
2.1.3. Huesos del hombro	14
2.1.4. Movimientos y rangos del hombro	15
2.1.5. Músculos que ocasionan el movimiento del hombro	18
2.1.6. Acciones musculares	20
2.1.7. Electromiografía	22
2.2. Ergonomía	24
2.2.1. Antropometría	24
2.2.2. Espacio del trabajo	25
2.2.3. Dimensiones antropométricas de población mexicana	26
2.2.4. Parámetros inerciales	28
2.3. Rehabilitación	29
2.3.1. Fase aguda	30
2.3.2. Fase subaguda	30
2.3.3. Fase tardía o de estabilización	32

<b>3. Modelo matemático</b>	<b>33</b>
3.1. Modelado cinemático	33
3.1.1. Cinemática	33
3.1.2. Eslabones y articulaciones	34
3.1.3. Ángulos de Euler y transformación homogénea	35
3.1.4. Cinemática directa	37
3.1.5. Cinemática directa del brazo utilizando D-H	40
3.1.6. Cinemática inversa	42
3.1.7. Cinemática diferencial	43
3.2. Dinámica	44
<b>4. Sistema mecatrónico</b>	<b>46</b>
4.1. Sensores empleados en los exoesqueletos	46
4.2. Mecanismos	48
4.2.1. Reductor epicicloidal	48
4.2.2. Motores	50
4.2.3. Columna telescópica	50
4.3. Materiales	51
4.3.1. Material para la estructura del exoesqueleto	51
4.3.2. Material para la base del exoesqueleto	52
<b>5. Resultados</b>	<b>53</b>
5.1. Diseño mecánico	53
5.1.1. Análisis de elemento finito	58
5.2. Modelo cinemático directo	61
5.3. Modelo cinemático inverso	63
5.4. Cinemática diferencial	66
5.5. Simulación del modelo cinemático	68
5.6. Modelo dinámico	70
<b>6. Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>72</b>
6.1. Conclusiones	72
6.2. Trabajo a futuro	72
<b>A. Electromiograma (EMG)</b>	<b>74</b>
<b>B. Artículo de congreso</b>	<b>79</b>
<b>C. Certificado de idioma inglés</b>	<b>84</b>
<b>D. Cálculos modelado</b>	<b>87</b>
D.1. Matriz de inercias	87
D.2. Matriz de Coriolis	88
D.3. Vector de gravedad	95



# Índice de figuras

1.1. El exoesqueleto MARSE-5 cuenta con dos correas, una ubicada en el antebrazo y otra en el brazo para sujetarlo y evitar movimientos involuntarios. . . . .	4
1.2. Exoesqueleto con 4 GDL. . . . .	5
1.3. En la imagen se representan la ubicación de los 5 grados de libertad de este exoesqueleto (3 GDL en el hombro y 2 en el codo). . . . .	5
1.4. En la figura se enumera la ubicación de cada grado de libertad del exoesqueleto. . . . .	6
1.5. Exoesqueleto con 7 GDL. . . . .	6
1.6. Exoesqueleto con 8 GDL. . . . .	7
1.7. Exoesqueleto desarrollado por la empresa Chattanooga. . . . .	7
1.8. Exoesqueleto desarrollado por la empresa Hocoma. . . . .	8
1.9. Exoesqueleto desarrollado por la empresa Orte. . . . .	8
2.1. Representación de las dos principales aplicaciones de la biomecánica. . . . .	13
2.2. Planos y ejes de rotación en el cuerpo humano. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement"[1]. . . . .	14
2.3. Anatomía del hombro humano. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement"[1]. . . . .	15
2.4. Movimiento de flexión y extensión considerado como 1 GDL. . . . .	16
2.5. Movimiento de abducción y aducción considerado como 1 GDL. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement"[1]. . . . .	17
2.6. Movimiento de rotación externa e interna considerado como 1 GDL. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement"[1]. . . . .	17
2.7. Relación de movimiento glenohumeral a escapular. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement"[1]. . . . .	18
2.8. Miembro superior: músculos superficiales (vista posterior). Imagen tomada del libro "Fundamentos de anatomía y fisiología."[2]. . . . .	19
2.9. Miembro superior: músculos superficiales (vista anterior). Imagen tomada del libro "Fundamentos de anatomía y fisiología."[2]. . . . .	19
2.10. Acción muscular isométrica: el momento de torsión en la abducción ( $M_A$ ) es exactamente igual al momento de torsión externo ( $M_E$ ). . . . .	21
2.11. Acción muscular concéntrica: el momento de torsión en la abducción ( $M_A$ ) es mayor al momento de torsión externo ( $M_E$ ). . . . .	21

2.12. Acción muscular excéntrica: el momento de torsión en la aducción ( $M_A$ ) es menor al momento de torsión externo ( $M_E$ ). . . . .	21
2.13. Comparación de acciones musculares isométricas, concéntricas y excéntricas. . . . .	22
2.14. La unión neuromuscular. . . . .	22
2.15. Representación de las dimensiones obtenidas para el diseño del exoesqueleto. . . . .	26
3.1. Cinemática directa e inversa. . . . .	34
3.2. Articulación prismática (P). . . . .	34
3.3. Articulaciones: a) revoluta, b) planar, c) cilíndrica y d) planar. . . . .	35
3.4. Ángulos de Euler. . . . .	35
3.5. Representación de la orientación de los ángulos de Euler. . . . .	36
3.6. Parámetro $a_i$ . . . . .	37
3.7. Parámetro $d_i$ . . . . .	38
3.8. Parámetro $\theta_i$ . . . . .	38
3.9. Parámetro $\alpha_i$ . . . . .	38
3.10. Parámetros de Denavit-Hartenber. . . . .	39
3.11. Sistemas de Coordenadas del brazo. . . . .	41
4.1. Reductor epicicloidal con tres satélites. . . . .	49
5.1. Resultado del diseño propuesto. El sistema cuenta con una columna telescópica que conecta al exoesqueleto de hombro con el suelo. Esta columna permite una práctica transportación del sistema. . . . .	54
5.2. Base móvil. . . . .	56
5.3. Columna telescópica TLC 12ZWDS. . . . .	57
5.4. Reductor epicicloidal con relación 13.17:1 . . . . .	58
5.5. Ajuste de la longitud del brazo. . . . .	58
5.6. Ajuste de la longitud del antebrazo. . . . .	59
5.7. Exoesqueleto en la posición de mayor esfuerzo (Flexión $90^\circ$ ). . . . .	59
5.8. Tensiones de Von Mises en donde el color azul representa el esfuerzo mínimo, mientras que el color rojo indica el esfuerzo máximo. . . . .	60
5.9. Representa los desplazamientos resultantes que sufre la estructura en cm. . . . .	61
5.10. Representa la deformación unitaria en la estructura . . . . .	61
5.11. Sistemas de Coordenadas del exoesqueleto. . . . .	62
5.12. Representación de las cuatro articulaciones del exoesqueleto en simulink. . . . .	68
5.13. Movimiento de flexión a $90^\circ$ , en donde el eje horizontal representa el tiempo en segundos y el eje vertical la distancia recorrida en metros. . . . .	68
5.14. Movimiento de abducción a $90^\circ$ , en donde el eje horizontal representa el tiempo en segundos y el eje vertical la distancia recorrida en metros. . . . .	69



5.15. Movimiento de rotación interna a $90^\circ$ , en donde el eje horizontal representa el tiempo en segundos y el eje vertical la distancia recorrida en metros. . . . .	69
5.16. Movimiento de flexión del codo a $90^\circ$ , en donde el eje horizontal representa el tiempo en segundos y el eje vertical la distancia recorrida en metros. . . . .	70

# Índice de tablas

1.1. Los factores de riesgo de las EVC [3]. . . . .	3
2.1. Músculos que provocan el movimiento del humero [2] . . . . .	20
2.2. Medidas antropométricas de la población femenina. . . . .	27
2.3. Medidas antropométricas de la población Masculina. . . . .	27
2.4. Porcentajes de segmentos corporales determinados por distintos investigadores. . . . .	28
2.5. Porcentajes de centros de gravedad propuestos por distintos investigadores. . . . .	29
3.1. Sistemas de Coordenadas del brazo. . . . .	42
4.1. Combinación de los componentes del reductor epicicloidal. . . . .	49
4.2. Datos técnicos [4]. . . . .	51
4.3. Datos técnicos [5]. . . . .	51
4.4. Datos técnicos [6]. . . . .	52
5.1. Comparativa entre los exoesqueletos utilizando las métricas [7]. . . . .	55
5.2. Dimensiones del exoesqueleto. . . . .	55
5.3. Materiales del exoesqueleto . . . . .	56
5.4. Parámetros D-H del exoesqueleto . . . . .	62

# Agradecimientos

---

**Al Instituto Tecnológico de Nuevo León**

*Por proporcionarme las herramientas necesarias para obtener el conocimiento.*

**Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología**

*Por la beca proporcionada que fue un recurso indispensable para poder continuar mis estudios y preparación académica.*

**A mi comité del posgrado**

*Por asesorarme y corregirme durante el desarrollo de mi tema de tesis.*

**Al Dr. Sergio y la Maestra Deira**

*Por los conocimientos que me brindaron para el desarrollo de la tesis y/o futuros proyectos.*

**A la Dra. Laura y su familia**

*Por apoyarme de manera incondicionalmente y brindarme ánimos durante los tiempos de pandemia.*

**A mi familia**

*Por apoyarme de manera incondicional en un nivel más de mis estudios y motivarme a seguir esforzándome hasta lograr mis metas.*

**A Diana Rodríguez**

*Por todo el apoyo y ánimo que me brindo para lograr esta meta.*

**A mis docentes de licenciatura**

*Al Ing. Francisco Ramírez e Ing. Sylvia García por brindarme las bases necesarias y apoyarme para ingresar a la maestría.*

---

# Capítulo 1

## Introducción

Actualmente, existen personas que presentan problemas de movilidad en las extremidades superiores y en algunos casos es necesaria la rehabilitación para recuperar dicha movilidad. Estadísticamente hablando, se calcula que entre 5.7 y 6.7% de la población mexicana presenta discapacidad, de la cual entre el 11.1 y 18.1% es a nivel motor de miembro superior [8, 9, 10].

Una de las enfermedades que provoca la falta de movimiento son las enfermedades cerebrovasculares (EVC) que puede llegar a producir discapacidades temporales, permanentes o incluso puede provocar la muerte si no se atiende a tiempo. Las EVC ocurren cuando se reduce o interrumpe el flujo de sangre que se dirige al cerebro debido a que una de las arterias se bloquea o se rompe, impidiendo el correcto funcionamiento del tejido cerebral debido a la falta de oxígeno y nutrientes, provocando a su vez la muerte de las neuronas [3]. Existen dos tipos de evento cerebrovascular que son los eventos hemorrágicos e isquémicos; donde el evento hemorrágico sucede cuando uno de los vasos sanguíneos en el cerebro se rompe, mientras que en el evento isquémico ocurre cuando un coágulo de sangre bloquea uno de los vasos sanguíneos del cerebro.

El Instituto de Neurología, Neurocirugía y Enfermedad Cerebrovascular (INNE-CeV) considera que la enfermedad cerebrovascular de tipo isquémica es una de las principales causas de discapacidad cognitiva y/o motora [3, 11]. En la tabla 1.1 se observan las principales causas de las EVC.

La Organización mundial de accidentes cerebrovasculares (WSO por sus siglas en inglés *World Stroke Organization*) establece que 1 de cada 4 personas tendrá un accidente cerebrovascular [12]. Alrededor de 80 millones de pacientes en todo el mundo han sobrevivido a dicha enfermedad y 14 millones de personas la sufren cada año, siendo esta enfermedad una de las principales causas de discapacidad y muerte en el mundo. La WSO, estimó que en el año 2020, 14.5 millones de personas sufrieron de un ataque cerebrovascular [13]. En los registros hospitalarios del Sistema Nacional de Información en Salud (SINAIS) se tiene que en el 2015 se registraron 21,045 pacientes con esta enfermedad, del cual el 97% tenían una edad entre los 20 y 80 años [14]. De acuerdo a las estadísticas de defunciones registradas de enero a junio 2021 por parte del INEGI, establece que las EVC son la novena causa de muerte en hombres y la

**Tabla 1.1:** Los factores de riesgo de las EVC [3].

No modificables	Contribuyentes	Tratables
Edad avanzada	Alcoholismo	Presión arterial alta
Género	Tabaquismo	Diabetes
Antecedentes personales o familiares de EVC.	Inactividad física	Niveles de colesterol elevados
	Obesidad	Fibrilación auricular
	Uso de drogas ilegales	Infección por COVID-19
	Terapias hormonales	Apnea obstructiva del sueño

quinta causa de muerte en mujeres, provocando que sea a nivel nacional de manera general la séptima causa de muerte con un total de 18,843 difusiones [15].

Es importante tratar esta enfermedad en un plazo de 24 horas para reducir al mínimo el daño cerebral y después de un tratamiento de urgencia o procedimiento quirúrgico, se procede a la rehabilitación de los músculos dañados con la ayuda de un fisioterapeuta para que el paciente vuelva a tener una vida independiente [3, 11]. Para facilitar la rehabilitación, se tienen diversas opciones, entre las que se encuentran los exoesqueletos, los cuales, auxilian al fisioterapeuta en el proceso de rehabilitación de los pacientes que carecen de movilidad de las extremidades superiores o inferiores debido a las EVC. Los exoesqueletos son estructuras mecánicas externas al cuerpo humano que se adaptan a la extremidad o extremidades de la persona, esto en cuestión del área médica se emplean en la rehabilitación o pueden ser empleados en las industrias para poder soportar cargas pesadas. A continuación se presentan los antecedentes de dichos sistemas.

## 1.1. Antecedentes

En el mundo se busca crear nuevas tecnologías que aporten un beneficio en las personas y a través de los años se han desarrollado exoesqueletos para mejorar la productividad en la industria o la calidad de vida de las personas.

Un exoesqueleto es una estructura en su mayoría mecánica que se coloca como ropa sobre el cuerpo humano, como se describe en el término inglés “wearable robots”, que sirven como soporte y son utilizados en el ejército o para mejorar la funcionalidad motora de alguna extremidad del cuerpo, estos generalmente son empleados en el área médica de rehabilitación. Estas estructuras pueden ser activas o pasivas; donde los exoesqueletos activos contienen actuadores encargados de realizar los movimientos, mientras que los pasivos realizan movimiento mediante elementos elásticos que



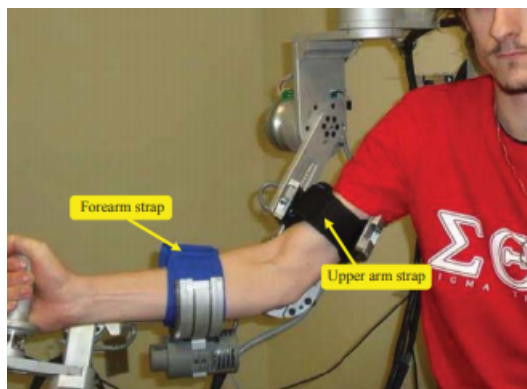
permiten almacenar la energía y liberarla para generar el movimiento [16].

Una de las principales causas del uso de los exoesqueletos en el área de rehabilitación es debido a las enfermedades neurológicas que afectan al sistema nervioso, provocando discapacidad con carácter progresivo o severo. Algunas de las principales enfermedades neurológicas en donde la rehabilitación juega un papel importante son enfermedades cerebrovasculares, esclerosis múltiple, lesión medular, parálisis cerebral, traumatismo craneoencefálico, enfermedad de Parkinson [17].

En el desarrollo de los exoesqueletos se emplean tecnologías como actuadores, fuentes de energía y sensores para realizar la medición de las variables bioeléctricas, como las señales para medir la actividad cerebral (electroencefalografía, EEG) y la actividad muscular (electromiografía, EMG), además se emplean sensores para medir las variables biomecánicas que permiten realizar la medición de las variables cinéticas (par de torsión, presión y fuerza) y las variables cinemáticas (aceleración, velocidad y la posición) [17].

### 1.1.1. Exoesqueletos desarrollados para hombro

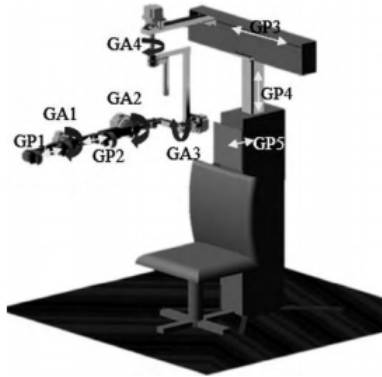
Mohammad y colaboradores (2012) realizaron el diseño, modelado y control de un exoesqueleto denominado MARSE-5. Este fue diseñado para proporcionar rehabilitación pasiva de manera efectiva en personas con discapacidad física con déficit de movimiento de las extremidades superiores (hombro, codo y antebrazo) y para esto se aplicó un control por modos deslizantes no lineal [18].



**Figura 1.1:** El exoesqueleto MARSE-5 cuenta con dos correas, una ubicada en el antebrazo y otra en el brazo para sujetarlo y evitar movimientos involuntarios.

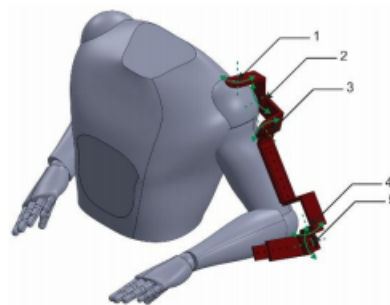
En 2015, Ayala-Lozano y colaboradores, del Instituto Politécnico Nacional (IPN) diseñaron un exoesqueleto de miembro superior con 4 grados de libertad para la rehabilitación activa y pasiva. Este exoesqueleto se basó en el método BLITZ QFD [19] para gestionar la calidad de acuerdo a la necesidad del usuario. Para este diseño se establecieron 5 casos de estudio cuasi-estático los cuales fueron análisis estructural

del antebrazo, análisis estructural del brazo, análisis estructural del hombro, análisis sección superior y análisis de ejes de transmisión, ver Figura 1.2 . Este diseño de exoesqueleto se basó en la antropometría de la población mexicana [20].



**Figura 1.2:** Exoesqueleto con 4 GDL.

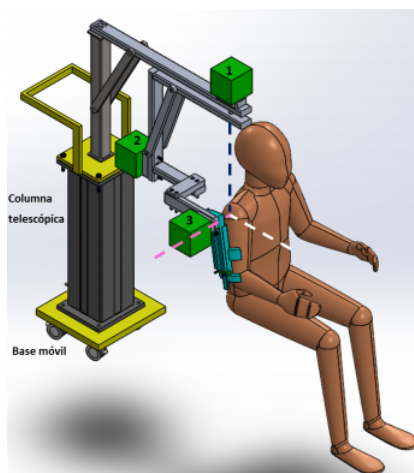
López-Camacho F. y colaboradores (2016) desarrollaron un exoesqueleto de miembro superior de 5 grados de libertad para la rehabilitación de hombro y codo [21]. Para el diseño de este exoesqueleto se tomaron como muestra las medidas antropométricas de la población mexicana de una edad 19 a 24 años. El diseño y análisis de esta estructura fue mediante del software Solidworks® tomando el aluminio 1060 como material base para los análisis y obtención de los códigos G y M (Lenguaje de programación de bajo nivel) para la fabricación de cada pieza en una máquina CNC (control numérico por computadora), ver Figura 1.3.



**Figura 1.3:** En la imagen se representan la ubicación de los 5 grados de libertad de este exoesqueleto (3 GDL en el hombro y 2 en el codo).

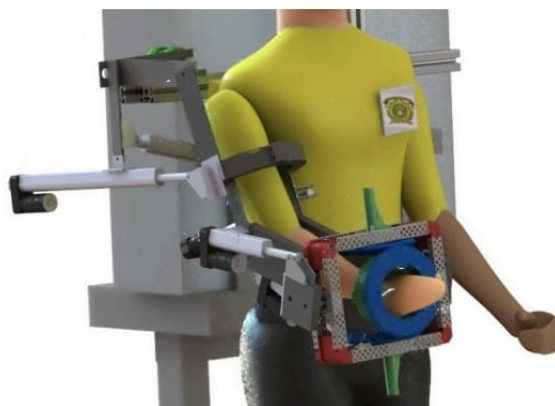
Sosa-Méndez D. y colaboradores (2016) desarrollaron un diseño de un exoesqueleto con 3 grados de libertad para el hombro con enfoque en la rehabilitación de la población adulta mexicana [22]. Su diseño es validado cinemáticamente mediante la utilización de los softwares Matlab® y Adams para comprobar que los rangos

de cada movimiento cumplan con las necesidades requeridas en la rehabilitación. Solidworks® fue utilizado para la realización del análisis por elemento finito de la estructura mecánica del exoesqueleto, ver Figura 1.4.



**Figura 1.4:** En la figura se enumera la ubicación de cada grado de libertad del exoesqueleto.

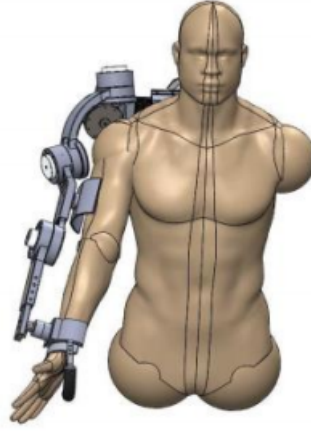
Cruz-Martínez, G. M. y colaboradores (2017), realizaron un exoesqueleto para miembro superior de 7 grados de libertad para la rehabilitación pasiva [23]. Se basaron en cuatro casos de rehabilitación dónde el paciente es capaz de recuperar la movilidad de sus extremidades, estos casos son serie de ejercicios excluyentes por articulación, ejercicios con carga aparente, activación de la memoria de músculo a través de seguimiento de trayectorias y emulación de rueda de hombro o timón, ver Figura 1.5.



**Figura 1.5:** Exoesqueleto con 7 GDL.

Amín y colaboradores (2017) realizaron un diseño de un exoesqueleto con 8 grados de libertad [24]. Este diseño es compacto y liviano para miembro superior para el uso

de rehabilitación en personas que sufrieron un accidente cerebrovascular, ver Figura 1.6.



**Figura 1.6:** Exoesqueleto con 8 GDL.

### 1.1.2. Exoesqueletos comerciales

La empresa Chattanooga desarrolló el exoesqueleto “ARTROMOT-S4” que cuenta con 3 motores para la realización de los movimientos del hombro, aducción y abducción, rotación interna y externa, extensión y flexión con brazo extendido o flexionado [25]. Tal y como se muestra en la Figura 1.7, este exoesqueleto es controlado manualmente mediante una pantalla táctil en donde se ajustan los parámetros deseados.



**Figura 1.7:** Exoesqueleto desarrollado por la empresa Chattanooga.

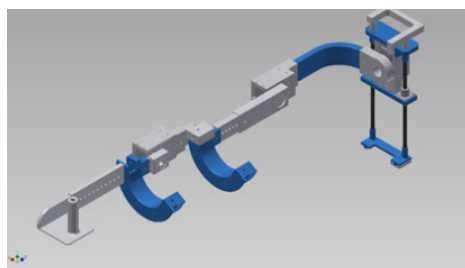
Por otro lado, la empresa Hocoma desarrolló el exoesqueleto “Armeo®Power” con enfoque a la rehabilitación en etapa temprana del brazo y manos [26]. Este dispo-

sitivo permite realizar ejercicios con un alto número de repeticiones, lo que le permite mejorar en la memoria corporal del brazo, ver Figura 1.8.



**Figura 1.8:** Exoesqueleto desarrollado por la empresa Hocoma.

La empresa Aura desarrolló el exoesqueleto “Orte” con enfoque a la rehabilitación del hombro o codo en lesiones. Este dispositivo permite recabar información de datos cinemáticos en tiempo real durante los ejercicios, lo que le permite obtener gráficas acerca del avance del paciente en sus terapias, la Figura 1.9 muestra el sistema [27].



**Figura 1.9:** Exoesqueleto desarrollado por la empresa Orte.

Se puede observar que existen numerosos sistemas de exoesqueletos, tanto a nivel de desarrollo como a nivel comercial. Sin embargo, la demanda que existe de estos sistemas cada vez aumenta, aunado a la problemática del costo que conlleva adquirir uno y el mantenimiento que conlleva tener uno.

## 1.2. Planteamiento del problema

En la rehabilitación motora, existe una alta demanda y la población con EVC va en aumento cada año, como lo menciona la WSO [12]. La rehabilitación tradicional se realiza con fisioterapeutas, pero estos no se dan abasto, por lo que actualmente se buscan alternativas para cubrir la demanda.

Una de las opciones viables es el uso de los exoesqueletos, estos pueden proporcionar rehabilitación intensiva a largo plazo, y sirven de apoyo a los fisioterapeutas.

No solamente para llevar a cabo los ejercicios de rehabilitación, sino que además para llevar un seguimiento de la recuperación de los movimientos y fuerza, esto debido a los sensores con los que cuentan estos sistemas.

Comercialmente, se encuentran exoesqueletos para miembro superior como el Artromot-S4, Armeo® Power, Orte, Armeo® Senso, Flsiotek y Jace S600, en promedio tienen un costo de adquisición mayor a medio millón de pesos mexicanos, sin considerar los gastos de mantenimiento. Sin embargo, la opción comercial no considera las medidas antropométricas de la población mexicana.

Por tal motivo, en este trabajo se propone el diseño y modelado de un exoesqueleto de hombro enfocado a la población mexicana, de tal manera que resulte fácil de maniobrar por el fisioterapeuta, se ajuste a las longitudes del brazo de cada paciente, se adapte a la fisioterapia cuando se requiera que el paciente esté en posición de pie o sentado.

Además, que sea fácil de transportar y que la mayoría de su estructura mecánica sea basada en impresión 3D para que resulte económico a comparación de los exoesqueletos que existen en el mercado. Este exoesqueleto contará con 3 grados de libertad (GDL) en el hombro que son flexión-extensión, aducción-abducción y rotación interna-externa, tomando en cuenta que los movimientos de estos tres GDL se desplazan en el centro de la articulación glenohumeral (se muestra en la Figura 2.3). Además, se propone que se añada un grado de libertad extra ubicado en la parte del codo para la realización del movimiento de flexión-extensión que permitirá mejorar las sesiones de rehabilitación. Para el funcionamiento cuenta con uso de sensores biomecánicos o bioeléctricos que en conjunto con algoritmos de control permita medir los avances de la persona durante la fisioterapia en un determinado tiempo.

### 1.3. Hipótesis

Es posible diseñar un exoesqueleto de hombro considerando materiales de impresión 3D, capaz de adaptarse al 90 % de la población mexicana mayor a 18 años para auxiliar a los fisioterapeutas durante la rehabilitación, ya sea sentado o de pie en personas que sufrieron una enfermedad cerebrovascular.

### 1.4. Objetivo general

Diseñar un exoesqueleto para la población mexicana para la rehabilitación de hombro basándose en la biomecánica del mismo, considerando impresión 3D para su manufactura y que permita la realización de movimientos sentado o de pie.

#### 1.4.1. Objetivos específicos

- Estudiar la biomecánica del hombro.

- Investigar qué estudios antropométricos existen sobre el hombro para la población mexicana y obtener las medidas del mismo.
- Diseñar un prototipo contemplando la biomecánica del hombro y tomando en cuenta las medidas antropométricas de la población mexicana.
- Verificación del diseño mecánico mediante el análisis de elemento finito.
- Obtener el modelo cinemático del exoesqueleto.
- Realizar la simulación del modelo cinemático mediante el uso del software adecuado.
- Obtener los cálculos del modelado dinámico del exoesqueleto.

## 1.5. Estructura de la tesis

La estructura de este trabajo de tesis está ordenada de la siguiente forma:

- En el capítulo 2, se presenta el marco teórico, dónde se desarrollan los temas de la biomecánica del hombro, ergonomía enfocada a la población mexicana y se presentan las diferentes fases de la rehabilitación.
- En el capítulo 3, se presentan el modelo matemático, cinemático y dinámico, del exoesqueleto que nos permitirán saber la posición en todo momento del exoesqueleto.
- El capítulo 4 presenta los dispositivos a utilizar para que el exoesqueleto logre ajustarse con facilidad a las alturas deseadas y además se presentan los materiales a utilizar para el desarrollo del diseño.
- Finalmente, el capítulo 5 presenta los resultados del diseño generado, así como la verificación del mismo por el análisis de elemento finito, además se presentan los modelos matemáticos y la simulación cinemática, para cerrar en el capítulo 6 se presentan las conclusiones y recomendaciones para el trabajo a futuro.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Biomecánica

En este capítulo se presentan el análisis de la biomecánica del cuerpo humano, denotando el funcionamiento del hombro y antebrazo, con el fin de desarrollar de manera adecuada un exoesqueleto de hombro. La biomecánica, sub disciplina de la kinesiólogía, estudia el movimiento de los seres vivos realizando el análisis y comprensión de los mismos mediante la mecánica [28, 1, 16]. Existen 3 áreas principales para la biomecánica, cuerpos rígidos, fluidos y cuerpo deformable [28].

- **Mecánica de cuerpos rígidos:** estudia el equilibrio y movimiento de los objetos rígidos ignorando las deformaciones. Dichas deformaciones son tan pequeñas que se pueden omitir).
- **Mecánica del cuerpo deformable:** estudia cómo se distribuyen las fuerzas internas de un material para examinar cómo estas fuerzas estimulan el crecimiento o causan daño.
- **Mecánica de fluidos:** estudia las fuerzas que se generan en los fluidos, ya sea en líquidos o gases. Ejemplos de la aplicación de la mecánica de fluidos en la biomecánica, es en el estudio de válvulas cardíacas, sistemas de inyección menos dolorosas, problemas de circulación y respiración, etc.

La biomecánica se puede dividir en tres áreas de investigación, estudios experimentales, análisis de modelos e investigación aplicada [29].

- En los **estudios experimentales** se determinan las propiedades mecánicas de los materiales biológicos, incluyendo los huesos, músculos, tendones, ligamentos, piel, cartílago y la sangre como un todo o por separado como partes que lo constituyen [29].
- El **análisis de modelos** se apoya en los estudios teóricos basándose en los resultados experimentales para lograr predecir el efecto de factores operacionales sin tener que recurrir a los experimentos de laboratorio [29].



- La investigación aplicada hace uso de los conocimientos científicos para beneficio de los seres humanos [29].

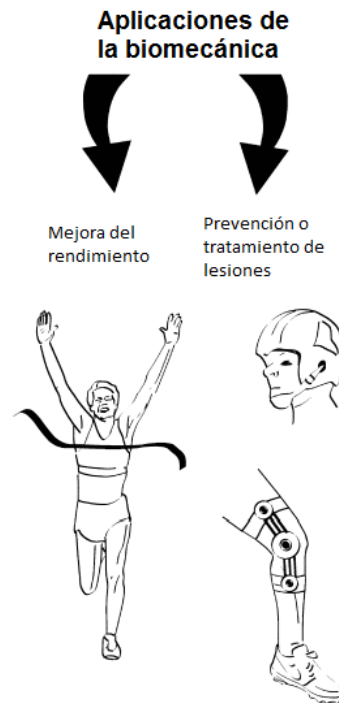
El estudio experimental y la investigación aplicada tienen la ventaja de utilizar los conocimientos teóricos y llevarlos a cabo en una aplicación específica en el área biomédica. Los ingenieros y terapeutas ocupacionales utilizan los estudios biomecánicos, ver Figura 2.1, para prescribir ejercicios de rehabilitación o desarrollar dispositivos biomédicos de asistencia u ortesis [28]. A continuación se menciona la clasificación de las aplicaciones de la biomecánica.

### 2.1.1. Aplicaciones de la biomecánica

Las aplicaciones de la biomecánica en el área biomédica se clasifican en dos áreas principales, la mejora del rendimiento a nivel motor y la prevención o tratamiento de lesiones, las cuales se describen a continuación:

- **Mejora del rendimiento:** esta área provee de información clave sobre los patrones de movimiento, los dispositivos de entrenamiento y los ejercicios más efectivos. Esto se realiza involucrando factores anatómicos, capacidades fisiológicas, habilidades psicológicas / cognitivas y habilidades neuromusculares, para mejorar los avances de los programas de ejercicio y acondicionamiento (prevención o tratamiento de lesiones) [28].
- **Prevención o tratamiento de lesiones:** esta área permite prevenir o tratar lesiones al proveer información sobre las propiedades mecánicas de los tejidos, cargas mecánicas que se efectúan durante el movimiento, terapias preventivas y terapias de rehabilitación.

En cada una de las aplicaciones, el enfoque biomecánico en el análisis del movimiento puede ser cualitativo o cuantitativo. El análisis cualitativo se basa en la observación y descripción del movimiento para decidir cómo mejorar los movimientos y prevenir o remediar lesiones, mientras que en el análisis cuantitativo se mide algún aspecto del movimiento [28, 16]. Además, en el análisis cualitativo de los movimientos de los seres humanos se aplican los siguientes 9 principios biomecánicos: Rango de Movimiento, Fuerza-Movimiento, Inercia, Fuerza-Tiempo, Interacción Segmental, Coordinación Continua, Equilibrio, Proyección Óptima y Giro [28]. Para describir y explicar los movimientos es necesario conocer los planos y ejes anatómicos, los cuales son 3 y se describen a continuación.



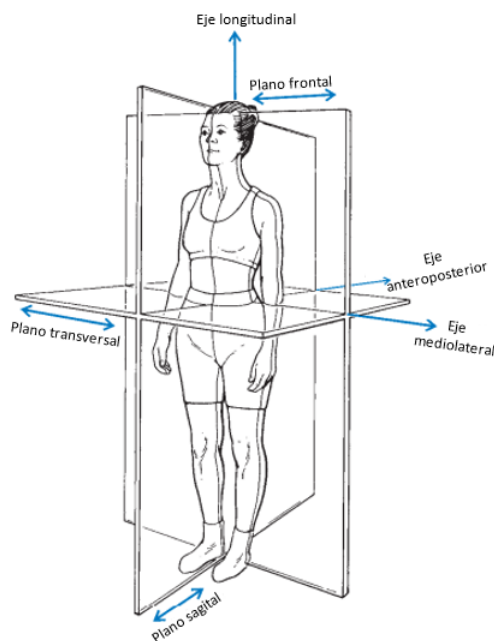
**Figura 2.1:** Representación de las dos principales aplicaciones de la biomecánica.

### 2.1.2. Planos y ejes anatómicos

Los planos son superficies planas bidimensionales que se colocan a través del cuerpo en ángulos rectos entre sí, provocando que se crucen en el centro de masa del cuerpo. Mientras que los ejes son líneas imaginarias alrededor de las cuales gira un cuerpo, ver Figura 2.2. El movimiento en un plano siempre se realiza alrededor de un eje de rotación que es perpendicular al plano. Los planos y ejes son los siguientes [1]:

- **El plano sagital**, también llamado plano lateral, divide el cuerpo en dos partes: derecha e izquierda. Los movimientos que se originan en este plano ocurren alrededor del eje medio lateral.
- **El plano frontal**, denominado también plano coronal, divide el cuerpo en dos mitades: anterior (frontal) y posterior. Los movimientos que ocurren en este plano se originan en el eje anteroposterior.
- **El plano transversal**, también conocido como plano horizontal, divide el cuerpo en dos partes: superior e inferior. Los movimientos que ocurren en este plano ocurren alrededor de un eje longitudinal.

La extremidad superior está constituida por tres segmentos que son brazo (región entre el hombro y el codo), el antebrazo y la mano. Estos están unidos mediante tres articulaciones, la del hombro, el codo y la muñeca [16]. En este trabajo de tesis nos enfocamos en el hombro, por lo que a continuación se describe anatómicamente.



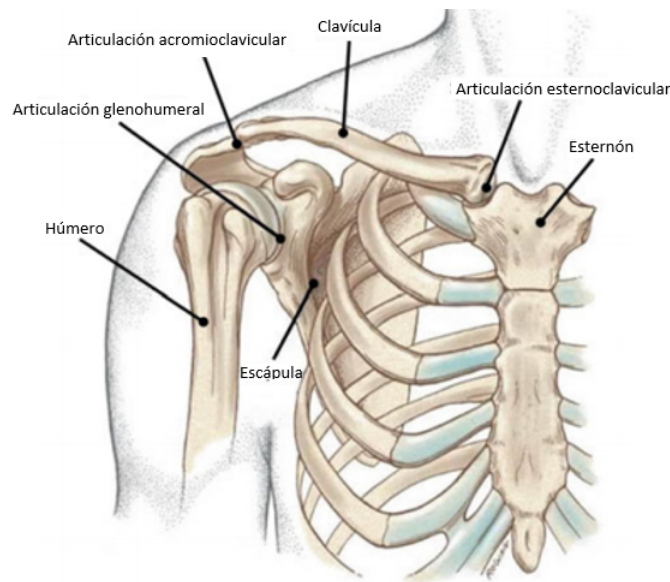
**Figura 2.2:** Planos y ejes de rotación en el cuerpo humano. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement" [1].

### 2.1.3. Huesos del hombro

La articulación del hombro se conforma por la clavícula, la escápula y el húmero, esta articulación es una de las más complejas del esqueleto humano y es un mecanismo que cuenta con tres uniones, la glenohumeral, la esternoclavicular y la acromioclavicular [1]. En la Figura 2.3 se pueden apreciar los huesos que forman del hombro.

- **La articulación glenohumeral** está formada por la articulación entre la cabeza del húmero y la fosa glenoidea de la escápula. Siendo esta conexión entre estos dos huesos relativamente pequeña debido a la poca profundidad de la fosa glenoidea.
- **La articulación esternoclavicular** articula el extremo medial de la clavícula sobre el manubrio en la parte superior del esternón.
- **La articulación acromioclavicular** está formada por la articulación entre el acromion de la escápula y el extremo distal de la clavícula.

Los movimientos del húmero implican los movimientos simultáneos de las articulaciones glenohumeral, acromioclavicular y esternoclavicular. Dichos movimientos se encuentran delimitados y se denominan rangos de movimiento del hombro. En seguida se describen cada uno de los movimientos del hombro y los ángulos que alcanzan.

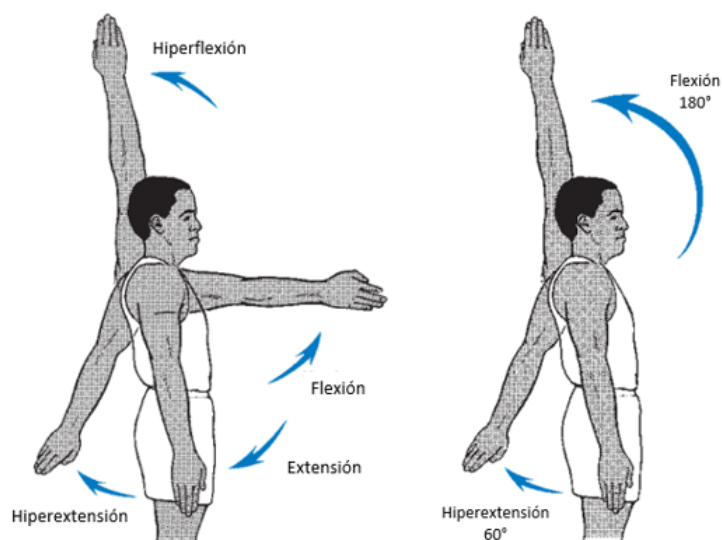


**Figura 2.3:** Anatomía del hombro humano. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement"[1].

#### 2.1.4. Movimientos y rangos del hombro

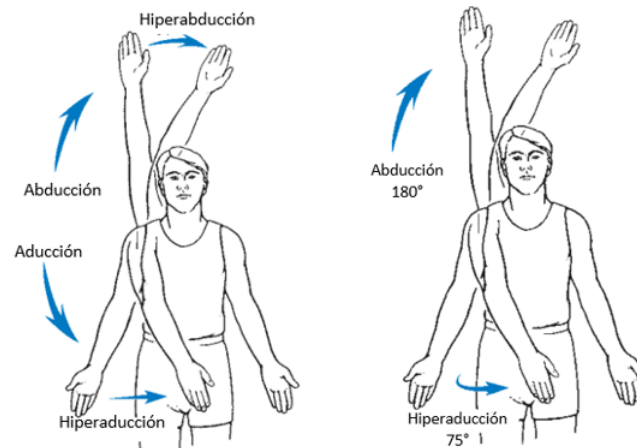
El hombro es una de las articulaciones más móviles del cuerpo humano, posee tres grados de libertad (GDL), lo que le permite orientarse con relación a los tres planos anatómicos con sus respectivos ejes. Este miembro posee seis movimientos básicos que ocurren en diferentes combinaciones en las articulaciones del hombro. Estos seis movimientos son flexión, extensión, abducción, aducción, rotación interna y rotación externa [1, 16].

- **La flexión** ocurre a lo largo del plano sagital y es un movimiento que disminuye el ángulo entre los huesos o partes del cuerpo. El brazo tiene un rango de movimiento desde aproximadamente  $165^\circ$  a  $180^\circ$  de flexión, además una persona puede realizar hiperflexión si el movimiento de flexión va más allá del rango normal de  $180^\circ$  (Figura 2.4). Sin embargo, el rango de flexión puede llegar a limitarse si la articulación del hombro también se rota externamente, entonces con la articulación en máxima rotación externa, el brazo alcanzara flexionarse únicamente  $30^\circ$ .
- **La extensión**, al igual que la flexión, ocurre en el plano sagital y este es un movimiento que aumenta el ángulo entre los huesos de la extremidad en una articulación a medida que vuelve a la posición cero o de referencia. Sin embargo, una persona puede realizar hiperextensión a medida que el movimiento de extensión continúa más allá de la posición cero, hasta aproximadamente  $30^\circ$  a  $60^\circ$  de hiperextensión, ver Figura 2.4.

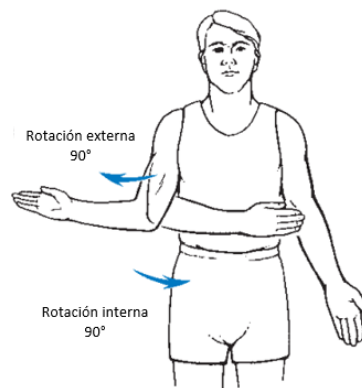


**Figura 2.4:** Movimiento de flexión y extensión considerado como 1 GDL. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement"[1].

- **La abducción** ocurre en el plano frontal y es un movimiento que se aleja de la línea media del cuerpo o del segmento. El brazo en abducción tiene un rango de movimiento desde aproximadamente  $150^\circ$  a  $180^\circ$ . Además, una persona puede realizar hiperabducción si el movimiento del brazo se mueve más de  $180^\circ$  desde el costado hasta pasar la cabeza, ver Figura 2.5. Sin embargo, el rango de movimiento de abducción puede llegar a limitarse si la articulación del hombro también se rota internamente, entonces si la articulación se gira internamente al máximo, el brazo lograra solo  $60^\circ$  de abducción.
- **La aducción**, a diferencia de la abducción, es un movimiento de retorno del segmento hacia la línea media del cuerpo o posición cero. Sin embargo, una persona puede realizar hiperaducción a medida que el movimiento del brazo continúa más allá de la posición cero, de modo que la extremidad cruza el cuerpo hasta aproximadamente  $75^\circ$  de hiperaducción, ver Figura 2.5.
- **La rotación interna** o rotación medial ocurre en un plano transversal alrededor de un eje longitudinal. Esta rotación se refiere al movimiento de un segmento alrededor de un eje vertical que atraviesa el segmento, de modo que la superficie anterior del segmento se mueve hacia la línea media del cuerpo, mientras que la superficie posterior se aleja de la línea media. El brazo puede alcanzar un rango de movimiento en rotación interna entre  $60^\circ$  y  $90^\circ$ , ver Figura 2.6.
- **La rotación externa** o rotación lateral ocurre en el plano transversal alrededor del eje longitudinal. Esta rotación es el movimiento en el que la superficie anterior se aleja de la línea media y la superficie posterior del segmento se mueve hacia la línea media. El brazo alcanza un rango de movimiento de  $90^\circ$  en rotación externa, ver Figura 2.6.



**Figura 2.5:** Movimiento de abducción y aducción considerado como 1 GDL. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement" [1].



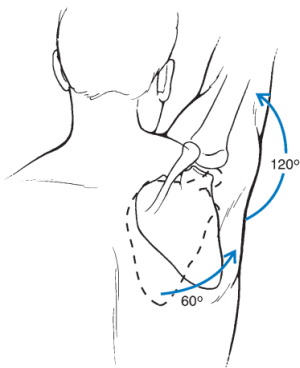
**Figura 2.6:** Movimiento de rotación externa e interna considerado como 1 GDL. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement" [1].

Cada vez que se requiere que el brazo realice los movimientos de abducción o flexión, se tiene lugar a los movimientos escapulares y claviculares. La escápula debe girar en dirección hacia arriba para permitir el movimiento de flexión y abducción completas en la articulación del hombro. La clavícula debe elevarse y girar en dirección hacia arriba para permitir el movimiento escapular. En los primeros  $30^\circ$  de abducción o los primeros  $45^\circ$  a  $60^\circ$  de flexión, la escápula se acerca o se aleja de la columna vertebral para buscar una posición de estabilidad en el tórax. Una vez obtenida la estabilidad, la escápula se mueve lateral, anterior y superior en los movimientos descritos como rotación hacia arriba o abducción. La clavícula gira posteriormente, se eleva y se propaga a medida que el brazo realiza el movimiento de flexión o abducción [1].

En las primeras etapas de abducción o flexión los movimientos se llevan a cabo principalmente en la articulación glenohumeral.

Una vez pasando los  $30^\circ$  de abducción o de  $45^\circ$  a  $60^\circ$  de flexión, la relación en-

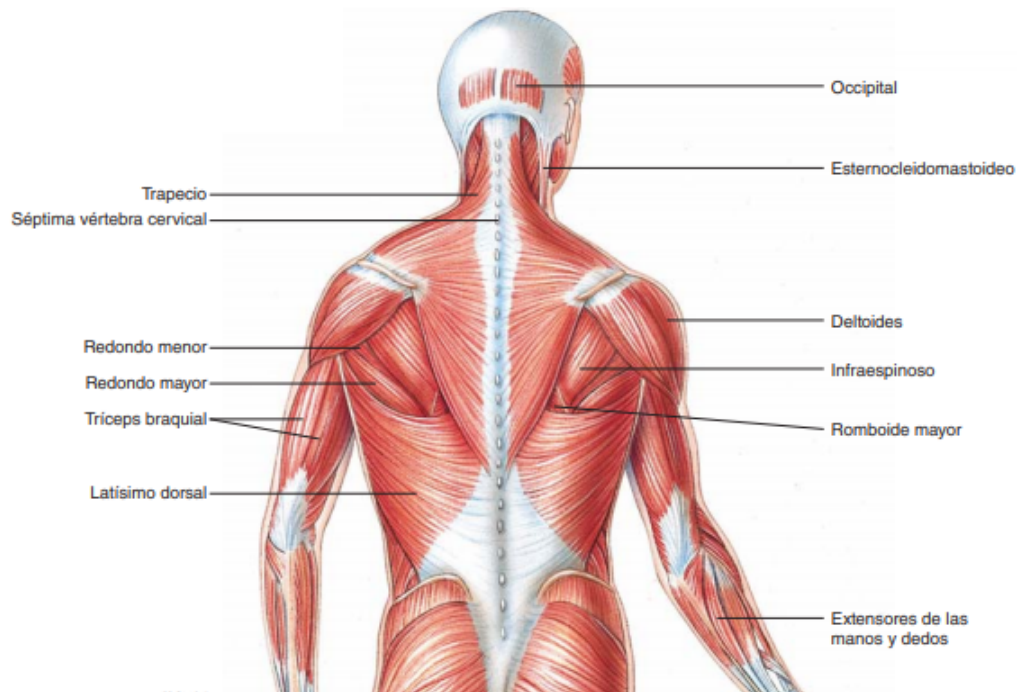
tre los movimientos glenohumeral-escapular es de 5:4. Entonces, para el rango total de movimiento a través de  $180^\circ$  de abducción o flexión, la relación de movimiento glenohumeral a escapular es 2:1; así, el rango de movimiento de  $180^\circ$  se produce mediante  $120^\circ$  de movimiento glenohumeral y  $60^\circ$  de movimiento escapular (Figura 2.7). La relación de trabajo entre la escápula y el humero se conoce como ritmo escapulo-humeral [1], para la generación de estos movimientos están involucrados los huesos y los músculos.



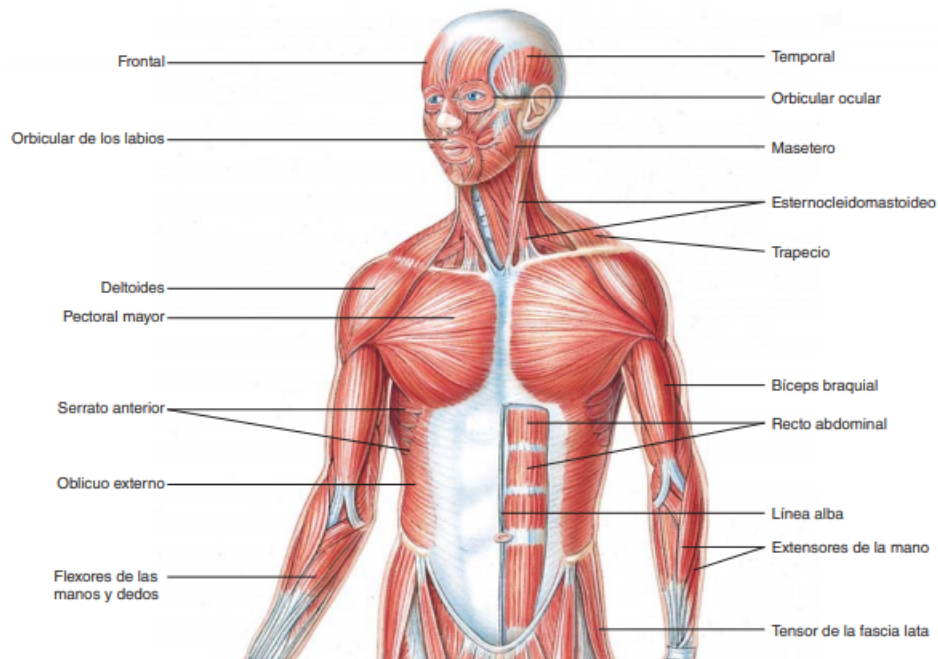
**Figura 2.7:** Relación de movimiento glenohumeral a escapular. Imagen tomada del libro "Biomechanical basis of human movement" [1].

### 2.1.5. Músculos que ocasionan el movimiento del hombro

Los músculos son los principales contribuyentes para generar el movimiento humano y realizan una variedad de funciones diferentes para mantener una posición, para bajar o subir una parte del cuerpo, para ralentizar algún segmento que se mueve rápidamente y para generar una gran velocidad en el cuerpo o en un objeto que se impulsa en el aire. Un músculo solamente tiene la capacidad de tirar y crear un movimiento porque cruza una articulación [1]. La gran parte de los músculos que provocan el movimiento del húmero, ocasionando el movimiento del hombro, se originan en los huesos de la cintura escapular, ver Figuras 2.8 y 2.9. En la Tabla 2.1 se enlistan los músculos que provocan que el húmero se mueva y las funciones que realizan al mover el hombro que son flexión-extensión, abducción-aducción y rotación, para la generación de estos movimientos se involucra la activación neuromuscular.



**Figura 2.8:** Miembro superior: músculos superficiales (vista posterior). Imagen tomada del libro "Fundamentos de anatomía y fisiología." [2].



**Figura 2.9:** Miembro superior: músculos superficiales (vista anterior). Imagen tomada del libro "Fundamentos de anatomía y fisiología." [2].



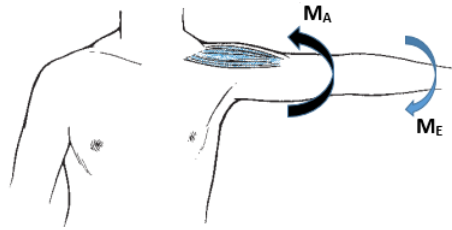
**Tabla 2.1:** Músculos que provocan el movimiento del humero [2]

Músculos	Origen	Inserción	Función
Coracobraquial	Escápula	Húmero	Flexiona, aduce el brazo
Pectoral mayor	Clavícula; Seis costillas superiores y esternón	Húmero	Flexiona, aduce y rota el brazo medialmente
Redondo mayor	Escápula	Húmero	Aduce, extiende y rota el brazo medialmente
Redondo menos	Escápula	Húmero	Rota el brazo lateralmente y aduce
Deltoides	Clavícula, escápula,	Húmero	Abduce el brazo
Supraespinoso	Escápula	Húmero	Abduce el brazo
Infraespinoso	Escápula	Húmero	Rota el húmero hacia el exterior
Dorsal ancho (Latísimo dorsal)	Seis torácicas inferiores; vértebras lumbares; sacro, íleo, cuatro costillas inferiores	Húmero	Extiende, aduce, rota el brazo medialmente, mueve el hombro hacia abajo y hacia arriba

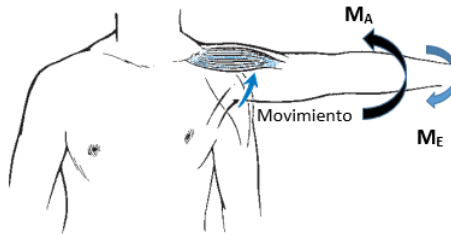
### 2.1.6. Acciones musculares

Las acciones musculares son la activación neuromuscular de los músculos que contribuyen a los movimientos o permiten estabilizar el sistema músculo-esquelético. Los músculos tienen tres acciones principales que son el resultado de los componentes activos y pasivos de la tensión muscular. Dichas acciones son isométrica, concéntrica y excéntrica. Sin embargo, estas acciones musculares no se utilizan de forma aislada, sino combinada, se basan en el equilibrio de las fuerzas y momentos de torsión que se presentan en el instante del movimiento [28, 1].

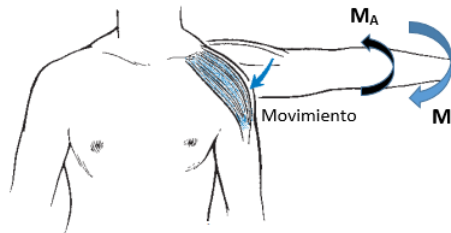
- La acción muscular isométrica se genera cuando el músculo se somete a un momento de torsión externo que es exactamente igual al momento de torsión generado por el músculo, es decir, cuando la tensión muscular que se generó al realizar un movimiento no crea ningún cambio en la posición de la articulación.
- La acción muscular concéntrica provoca un cambio de posición cuando el músculo se somete a un momento de torsión externo menor que al momento de torsión generado por el músculo, ocasionando un acortamiento muscular.
- La acción muscular excéntrica ocasiona un cambio de posición debido a que se genera cuando el músculo se somete a un momento de torsión externo mayor que al momento de torsión generado por el músculo, ocasionando que el músculo se alargue.



**Figura 2.10:** Acción muscular isométrica: el momento de torsión en la abducción ( $M_A$ ) es exactamente igual al momento de torsión externo ( $M_E$ ).



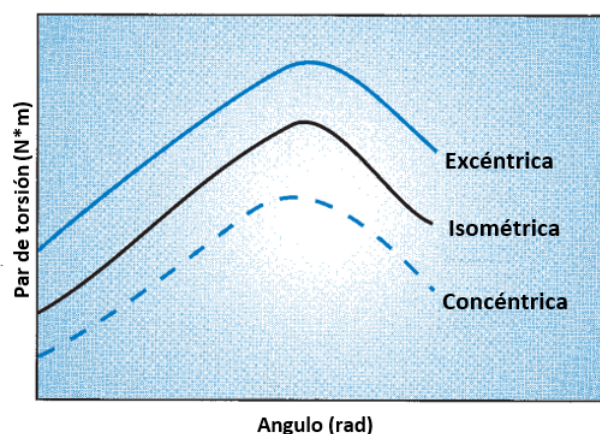
**Figura 2.11:** Acción muscular concéntrica: el momento de torsión en la abducción ( $M_A$ ) es mayor al momento de torsión externo ( $M_E$ ).



**Figura 2.12:** Acción muscular excéntrica: el momento de torsión en la aducción ( $M_A$ ) es menor al momento de torsión externo ( $M_E$ ).

Estas tres acciones musculares se utilizan de manera combinada, sin embargo, son muy diferentes en términos de producción de fuerza. En la figura 2.15 se presentan los torques de manera hipotética para cada una de las acciones musculares, en donde la acción muscular que genera mayor cantidad de torques en un rango de movimiento dado es la excéntrica, mientras que la acción muscular concéntrica es la que genera un menor torque [1].

Habitualmente, las acciones musculares isométricas se utilizan para estabilizar alguna parte del cuerpo, mientras que las acciones musculares concéntricas y excéntricas se utilizan secuencialmente para maximizar el rendimiento muscular. Estas acciones musculares se consideran en programas de ejercicio para personas no acondicionadas o programas de rehabilitación y se comienza con ejercicios excéntricos y luego conduce a ejercicios isométricos, seguidos de ejercicios concéntricos que puedan resultar beneficioso en el aumento de la fuerza o en la rehabilitación de una extremidad del cuerpo [1].

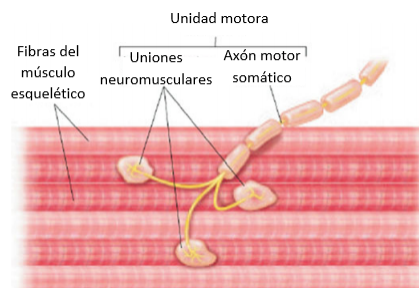


**Figura 2.13:** Comparación de acciones musculares isométricas, concéntricas y excéntricas.

En el área de la rehabilitación, el monitoreo constante sobre la fuerza que gana el paciente es fundamental, siendo la electromiografía una herramienta muy útil para la medición de fuerza en el músculo.

### 2.1.7. Electromiografía

La electromiografía (EMG) se emplea para medir la actividad eléctrica en los músculos, proporcionando información sobre el control de los movimientos voluntarios y reflexivos. Las señales de control del músculo esquelético se conocen como potenciales de acción y son impulsos eléctricos que se generan en el cerebro. Estas señales se propagan por medio de los sistemas nerviosos central y periférico y se transmiten por los axones de las neuronas motoras donde llegan a una sinapsis especializada denominada unión neuromuscular, donde los potenciales de acción cruzan el límite de la neurona motora muscular a la fibra muscular y estimulan la contracción, ver Figura 2.14 [30].



**Figura 2.14:** La unión neuromuscular.

Las señales electromiográficas se obtienen mediante la utilización de electrodos fijos o de superficie. Los electrodos fijos son de tipo invasivo debido a que pueden ser

una aguja o un alambre fino para colocarse directamente en los músculos pequeños o profundos. Los electrodos de superficie son de tipo no invasivo colocándose sobre los músculos superficiales, tomando en cuenta que, para obtener una buena señal eléctrica en este tipo de electrodos, la piel en donde se coloquen debe estar completamente rasurada y desinfectada, generalmente con alcohol de curación. En este tipo de electrodos se colocan en una disposición bipolar o monopolar. En el modo monopolar se coloca un electrodo directamente sobre el músculo y el segundo electrodo se coloca sobre un sitio eléctricamente neutro, mientras que en los electrodos bipolares se colocan dos electrodos sobre el músculo a una distancia aproximada de entre 1.5 a 2.5 cm, y el tercer electrodo pasa sobre un sitio eléctricamente neutro [1].

Las aplicaciones de la electromiografía son:

- Relación fuerza muscular-electromiografía: En la acción muscular isométrica, la relación entre la fuerza muscular y la actividad EMG es relativamente lineal. Sin embargo, para las acciones musculares concéntricas y excéntricas, la relación entre la fuerza muscular y la actividad EMG son controvertidas [1].
- Fatiga muscular: Cuando una unidad motora se fatiga, el contenido de frecuencia y la amplitud de la señal EMG cambian. Entonces la señal en el dominio de la frecuencia se desplaza hacia el extremo inferior de la escala de frecuencia y la amplitud aumenta. Los cambios en el dominio de la frecuencia se pueden recuperar después de un descanso [1].
- Análisis clínico de la marcha: Los análisis de marcha regularmente implican señales electromiografías para lograr determinar el grupo de músculos que se utilizan en una fase particular del ciclo de marcha. Usualmente, esta señal EMG sin procesar o rectificadas se usa para determinar cuándo los músculos están activos y cuándo están inactivos [1].
- Control basado en señales EMG por medio de una interfaz neuromuscular: Una manera de aprovechar los beneficios de la señal EMG es mediante una interfaz neuromuscular con la función de obtener y procesar las señales electromiográficas en un par de torsión articular previsto o en la posición de la articulación o extremidad de interés. Las entradas a la interfaz son las señales EMG de la articulación y la salida es el par de torsión o la posición de la extremidad asociada intencionado por el usuario, que luego puede ser utilizado por un controlador para operar un exoesqueleto, prótesis o dispositivo de movilidad [30].

Las señales EMG se han utilizado en ergonomía, para investigar los efectos de la postura sentada, el movimiento de los brazos y las manos sobre la actividad de los músculos del cuello y los hombros de los trabajadores de líneas de montaje de productos electrónicos [1].

La ergonomía juega un papel muy importante para la salud y bienestar de las personas con el fin de reducir accidentes.

## 2.2. Ergonomía

La ergonomía es una ciencia multidisciplinaria conformada por los factores humanos (antropometría y biomecánica), productividad y el entorno con los factores físicos, ambientales. Teniendo como propósito buscar la adaptación de los objetos y el entorno a las personas de manera que, la combinación resultante sea de manera segura, confortable y capaz de optimizar la eficiencia de la acción humana [31, 32].

Algunos de los objetivos de la ergonomía son los siguientes [32]:

- Controlar el entorno del puesto de trabajo.
- Detectar los riesgos de fatiga física y mental.
- Salud y Seguridad.
- Productividad y eficacia.
- Fiabilidad y calidad.
- Satisfacción en el trabajo y desarrollo personal.

Para un uso apropiado de la ergonomía en el diseño se deben tomar en cuenta factores como el área de trabajo, materiales y las medidas antropométricas de la población.

### 2.2.1. Antropometría

La antropometría se encarga de estudiar las proporciones y dimensiones físicas del cuerpo humano, la variabilidad antropométrica de un grupo de personas es una constante en las diferentes fases de desarrollo de las personas, determinados factores como; la herencia genética, el sexo, la edad, las condiciones socioeconómicas, la ocupación y las generaciones, se representa por medio de la curva estadística de distribución normal o por medio de tabulaciones de los datos obtenidos, que nos permite identificar los datos de las personas con menores dimensiones (percentil 5) y los valores de las personas con mayores dimensiones (percentil 95) [31, 33].

Para realizar las mediciones de las dimensiones y proporciones físicas se emplean instrumentos como: antropómetro, goniómetro, calibrador de piel plegada, orbitómetro, carta de colores para ojos, báscula, escalas métricas, calibrador de deslizamiento, cinta métrica, tabla osteométrica, compas, entre otros instrumentos [31].

Las dimensiones del cuerpo humano necesarias para el diseño del puesto de trabajo son [32]:

- Las dimensiones estructurales o estáticas: son las dimensiones obtenidas en personas estáticas en posiciones fijas y normalizadas, por ejemplo: sentados o de pie, que sirven para establecer las separaciones entre el cuerpo y lo que lo rodea.

- Las dimensiones funcionales o dinámicas: son las dimensiones obtenidas a partir del movimiento asociado alguna actividad.

Para la adecuación antropométrica se consideran las dimensiones críticas del espacio de trabajo, las cuales se adaptan al 90 % de la población [31, 33].

### 2.2.2. Espacio del trabajo

La forma adecuada de intentar solucionar un problema es diseñar para un extremo u otro de la población (percentil 95 o 100) más una tolerancia para asegurar en los casos extremos, sin embargo, es recomendable hacer ajustable el espacio de trabajo, debido a que las longitudes de las personas varían, también las situaciones de trabajo y las tareas. Para evaluar los espacios de trabajo se tiene que definir los movimientos involucrados con las tareas a realizar, así como obtener las dimensiones para lograr el alcanzar objetivo [33].

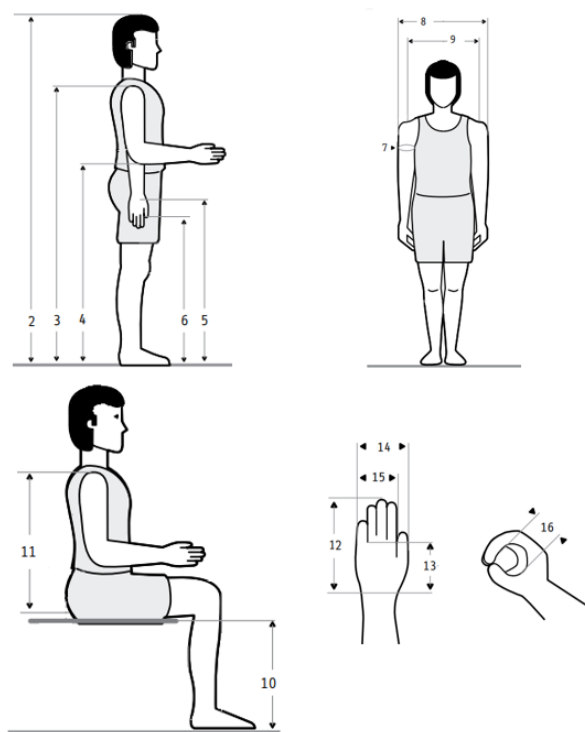
Los principios a considerar al momento de diseñar o evaluar el espacio de trabajo son [33]:

- Altura de la cabeza: se considera la altura de las personas más altas.
- Altura de hombros: Se colocan los controles entre la altura de la cintura y los hombros.
- Altura de codo: Se ajusta la superficie de trabajo normal seguidamente debajo de la altura del codo, pero para un trabajo preciso, se levanta la superficie arriba de la altura del codo y se proporciona descanso para los antebrazos.
- Alcances de brazo: se consideran a las personas bajas de estatura al momento de sacar o alcanzar algún objeto colocado en la parte superior y se consideran a las personas altas al momento de alcanzar objetos colocados en la parte inferior.
- Altura del nudillo: se mantienen las actividades de levantamiento entre la altura de los nudillos y los hombros.
- Longitud de pierna: se consideran a las personas con piernas largas para proporcionar holgura y para las personas de piernas cortas se proporciona ajuste de la altura del asiento o apoya pies.
- Tamaño de la mano: se consideran a las personas de manos pequeñas para el diseño de mangos o asideras y a las personas de manos grandes para aberturas y accesos.
- Masa corporal: se considera a los más grandes.

Al momento de realizar un diseño, además de los principios, se deben tomar en cuenta las medidas antropométricas de la población seleccionada, ya que estas medidas varían según la región del mundo (algunas se representan en la Figura 2.15).

### 2.2.3. Dimensiones antropométricas de población mexicana

La población mexicana tiene dimensiones que difieren a las europeas o estadounidenses, por ello, estudios recientes como el realizado por la Universidad de Guadalajara, donde se obtuvieron datos de 8,228 sujetos en un rango de edad de 2 a 85 años, permiten tener medidas que pueden ser usadas para el diseño de dispositivos como los exoesqueletos. En este estudio se seleccionaron 50 dimensiones que se consideran como básicas de acuerdo al criterio de los autores de la investigación y para la definición de las dimensiones y el método para medir se basó en la “Técnica Antropométrica estandarizada” (Hertzberg H. T. E., 1968) [33]. En las Tablas 2.2 y 2.3 se presentan las medidas necesarias del miembro superior, de mujeres y hombres, respectivamente, para el diseño del exoesqueleto.



**Figura 2.15:** Representación de las dimensiones obtenidas para el diseño del exoesqueleto.

Para el diseño del exoesqueleto se consideraron los parámetros inerciales y los datos estadísticos de extremo a extremos, es decir, de las personas de menores dimensiones (percentil 5) y de las personas con mayores dimensiones (percentil 95) que se encuentran en un rango de edad de 18 a 90 años, para que el exoesqueleto se logre ajustar a las longitudes del brazo de cada paciente. Debido a que las dimensiones del cuerpo son numerosas.

**Tabla 2.2:** Medidas antropométricas de la población femenina.

Núm.	Dimensiones (cm)	Extremos	
	Percentiles	5 %	95 %
1	Peso (kg)	44.1	88
2	Estatura (m)	1.398	1.658
3	Altura hombro	113.8	138
4	Altura codo flexionado	84.9	104.4
5	Altura muñeca	67.7	84
6	Altura nudillo	59.6	76.9
7	Perímetro brazo	22.6	35.2
8	Anchura máx. cuerpo	42.8	57.8
9	Diámetro máx. bideltoideo	37.2	52.1
10	Altura poplítea	32.5	40.6
11	Altura hombro sentado	46.5	59.1
12	Longitud de la mano	15.7	18.5
13	Longitud palma mano	8.9	10
14	Anchura palma mano	7.1	8.2
15	Espesor mano	2.3	3.5
16	Diámetro empuñadura	3.6	5

**Tabla 2.3:** Medidas antropométricas de la población Masculina.

Núm.	Dimensiones (cm)	Extremos	
	Percentiles	5 %	95 %
1	Peso (kg)	46.2	97.3
2	Estatura (m)	1.519	1.78
3	Altura hombro	123.8	147.7
4	Altura codo flexionado	92.3	104.6
5	Altura muñeca	73.9	91.9
6	Altura nudillo	65.2	80
7	Perímetro brazo	22.3	32.4
8	Anchura máx. cuerpo	43.9	59.6
9	Diámetro máx. bideltoideo	40.6	54.4
10	Altura poplítea	37.2	45.3
11	Altura hombro sentado	50.7	63.8
12	Longitud de la mano	16.5	18.5
13	Longitud palma mano	9.5	10.5
14	Anchura palma mano	7.9	8.2
15	Espesor mano	2.4	3.5
16	Diámetro empuñadura	3.8	5



### 2.2.4. Parámetros inerciales

Los parámetros inerciales son el conjunto de los pesos segmentados como proporción del peso corporal total y la localización del centro de masa. Para la obtención de estos parámetros se han citado trabajos como de Braune y Fischer (1889), Dempster (1955) y Clauser y col. (1969). En las Tablas 2.4 y 2.5 se muestran las comparaciones generales de los valores obtenidos por los distintos investigadores [34].

Los datos obtenidos por Braune y Fischer se basaron en las mediciones de 3 cadáveres, las estaturas fueron de 1.69 m., 1.68 m. y 1.67 m., los pesos fueron 75.11 kg, 55.70 kg y 60.73 kg., respectivamente. Mientras que los datos obtenidos por Dempster se basaron en las mediciones de 8 cadáveres masculinos para ser desmembrados. Los cadáveres comprendían un rango de edad de entre los 52 y 83 años, con una estatura de 1.553 m. a 1.866 m. y con un peso ente los 49.55 kg. a 72.34 kg.[34].

Para el caso de Clauser, McConville y Young, su propósito fue transferir los hallazgos de las interrelaciones en cadáveres a personas vivas. Se basaron en las mediciones de 13 cadáveres masculinos cada uno en 14 segmentos y determinaron el peso, volumen y centro de masa de cada segmento y obtuvieron suficiente dato de los cadáveres para describir la longitud, circunferencia y amplitud o profundidad de cada segmento. Las relaciones entre el tamaño del segmento y su peso, volumen y la ubicación de su centro de masa formaron la base para estimar los parámetros de las poblaciones vivas [34].

**Tabla 2.4:** Porcentajes de segmentos corporales determinados por distintos investigadores.

Segmento	Braune y Fischer (1889)	Dempster (1955)	Dempster (1955) <sup>1</sup>	Clauser y Col. (1969)
<b>Muestras</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>13</b>
Cabeza	7	7.9	8.1	7.3
Tronco	46.1	48.6	49.7	50.7
Brazo	3.3	2.7	2.8	2.6
Antebrazo	2.1	1.6	1.6	1.6
Mano	0.8	0.6	0.6	0.7
Miembro superior	6.2	4.9	5	4.9
Antebrazo y mano	2.9	2.2	2.2	2.3
Muslo	10.7	9.7	9.9	10.3
Pierna	4.8	4.5	4.6	4.3
Pie	1.7	1.4	1.4	1.5
Miembro Inferior	17.2	15.7	16.1	16.1
Pierna y pie	6.5	6	6.1	5.8
Suma	100	100	100	100

<sup>1</sup>Valores ajustados

**Tabla 2.5:** Porcentajes de centros de gravedad propuestos por distintos investigadores.

Segmento	Braune y Fischer (1889)	Demster (1955)	Clauser y Col. (1969)
Todo el cuerpo	-	-	41.2
cabeza	-	43.3	46.6
Tronco	-	-	38
Brazo	47	43.6	51.3
Antebrazo	42.1	43	39
Mano	-	49.4	48
Miembro superior	-	-	41.3
Antebrazo y mano	47.2	67.7	62.6
Muslo	44	43.3	37.2
pierna	42	43.3	37.1
pie	44.4	42.9	44.9
Miembro inferior	-	43.3	38.2
Pierna y pie	52.4	43.7	47.5

## 2.3. Rehabilitación

La rehabilitación motora se clasifica en dos tipos, la activa y la pasiva. En la rehabilitación activa, la persona afectada es la encargada de mover cada extremidad bajo la asesoría de un fisioterapeuta, mientras que en el caso de la pasiva, el fisioterapeuta es el encargado de mover las extremidades del paciente hasta que este pueda recuperar la movilidad de las extremidades [20].

Las enfermedades cerebrovasculares (EVC) son unas de las principales causas de muerte o discapacidad cognitiva y/o motora. Las personas que sobreviven a esta enfermedad presentan discapacidad que se define de acuerdo a la clasificación internacional del funcionamiento, de la discapacidad y de la salud como un término genérico [35]. Las personas que fueron afectadas por esta enfermedad presentan secuelas que provocan deficiencia motora y sensoria, derivando a una hemiplejía de gravedad media, siendo frecuente que los pacientes presenten espasticidad que es un trastorno motor que ocasiona que los músculos se contraigan causando rigidez y acortamiento lo cual impide realizar actividades funcionales. En los problemas que presentan las personas con secuelas de EVC se encuentran la hemiparesia, disfagia, la ataxia cerebelosa, disartria, parálisis facial y el daño cognitivo, [35]

De acuerdo a la organización mundial de la salud (OMS), se establece que la rehabilitación es una parte esencial de la cobertura sanitaria universal. Además, es un componente fundamental para conseguir el objetivo de promover y garantizar una vida sana para todas las personas. Debido a que la rehabilitación consiste en un proceso que permite a las personas con alguna discapacidad alcanzar y mantener un

nivel óptimo de desempeño físico, intelectual, sensorial, psicológico y social [36].

La rehabilitación consta de tres fases, comienza por la fase aguda, seguida de la fase subaguda que es el tiempo máximo de recuperación y puede llegar a una fase tardía o estabilización que tiene el objetivo de reincorporar al paciente en su vida cotidiana [37].

### 2.3.1. Fase aguda

Esta fase se desarrolla en centros especializados en patologías cerebrovasculares agudas, bajo supervisión de neurólogos. Los dos principales objetivos en esta fase son:

- Diagnóstico, prevención y tratamiento prematuro de complicaciones provocadas por la enfermedad (EVC) o por consecuencia del síndrome de inmovilización.
- Realizar un pronóstico funcional para identificar los factores sociales, biomédicos y psicológicos previos y después de sufrir la EVC que pudiera afectar la recuperación del paciente.

Los principios con los que se rigen los objetivos mencionados para el kinesiólogo se basan en un adecuado posicionamiento del paciente en la cama, con el uso de órtesis que faciliten la alineación de los segmentos corporales, en la movilización prematura de manera pasiva o activa según el grado de compromiso motor y en la kinesiterapia respiratoria. Mientras que los principios para el equipo multidisciplinario se basan en los cuidados básicos de la piel, la evaluación de la deglución para definir vía segura de alimentos y tener una adecuada administración de fármacos.

### 2.3.2. Fase subaguda

Cuando un paciente sobrevive a la fase aguda se encuentra neurológicamente estable, en algunos casos el 10 % de los pacientes quedan con secuelas leves, evitando que necesiten una rehabilitación. Por el contrario, otro 10 % de los pacientes quedan con grandes secuelas, por lo que se aplica una rehabilitación funcional para prevenir complicaciones. El restante, es decir, el 80 % tiene una pérdida neurológica, por lo que necesitan una rehabilitación activa.

Para ingresar a una rehabilitación funcional activa se deben tomar en cuenta ciertas condiciones como una condición neurológica estable con déficits significativos en al menos algunas áreas (movimiento, cuidado personal, comunicación, control de esfínteres, deglución), capacidad de seguir instrucciones y soportar terapia física.

Cuando el paciente ingresa a esta fase del tratamiento tiene como objetivo recuperar la mayor parte de las capacidades perdidas de manera funcional. Para esto se trabajan partes específicas en la rehabilitación como mejorar la movilidad de la extremidad superior, manejo de disfagia, intervención en áreas cognitivas y perceptivas, manejo de trastornos emocionales y comunicacionales [37].

Para los pacientes que tienen secuelas del ACV se han aplicado terapias de inducción-constricción, programas de estiramientos en la musculatura espástica, programas

de fortalecimiento muscular en miembros de manera isométrica, concéntrica o excéntrica [38]. Además de lo ya antes mencionado, existen métodos de rehabilitación física [39]:

- **Técnica de Bobath** o del Neurodesarrollo: tienen como objetivo aumentar la fuerza muscular combinando la inhibición motora patológica (reflejos iniciales y espásticos) con técnicas que facilitan el enderezamiento o la elevación de la respuesta. El paciente adquiere un sentido cinético normal de los movimientos básicos y se vuelve espontáneo debido a su repetición.
- **Método de Kabat** o de Facilitación Neuromuscular Propioceptiva: intenta inducir o mantener el movimiento voluntario a través de estímulos simultáneos y sincronizados. Se basa en la aplicación de patrones de movimiento de facilitación espinal y radial (utiliza agonistas para beneficiar a los músculos más débiles) junto con otras técnicas de facilitación (máxima resistencia, reflejo al estirar, flexión, etc.)
- **Método de Perfetti** o Ejercicio Terapéutico Cognoscitivo: se basa en las habilidades neuromotoras y en las habilidades motoras (enfatisa la importancia de programar el movimiento con estímulos táctiles y motores, independientemente de la vista), el punto de partida de la rehabilitación motora debe ser ante todo restaurar la sensibilidad y de especial importancia para la mano.
- **Método de Brunnström**: este aprovecha el movimiento sinérgico utilizando los estímulos entrantes para provocar reflejos para inducir el movimiento y luego ejerce un control voluntario sobre él. En las primeras etapas utilizará la sinergia por sí solo, en las etapas posteriores será más similar a los métodos descritos anteriormente.
- **Método de Vojta**: facilita los reflejos de tracción para diferentes partes del cuerpo como una respuesta positiva a los estímulos sensoriales de presión, tacto, tensión y acción muscular contra la resistencia a la fuerza. A menudo se usa en niños.

Actualmente, se está optando por el uso de tecnologías en la rehabilitación, tales como el uso de interfaces cerebro-máquina o exoesqueletos, debido a que estas han demostrado la eficacia en la rehabilitación física [40]:

- **Interfaces, cerebro-máquinas**: se utiliza principalmente en personas paralizadas, que utilizan la actividad cerebral para controlar dispositivos externos que ayudan a mover las extremidades superiores, lo que permite que las personas interactúen con el entorno.
- **Exoesqueletos**: es una estructura mayormente mecánica que se coloca sobre las extremidades del cuerpo humano para incrementar la fuerza, velocidad y rendimiento, demostrando eficacia probada en relación con el uso en las extremidades superiores.

### 2.3.3. Fase tardía o de estabilización

En esta última fase el equipo de rehabilitación realiza un diagnóstico del entorno social y familiar del paciente con la finalidad de potenciarla y activarla. Esta red debe ser identificada desde etapas tempranas, permitiendo definir el destino post-alta del paciente para que se logre reincorporarse al ambiente laboral. En esta etapa se busca cumplir 3 objetivos:

1. Reincorporación al medio social, familiar y eventualmente al medio laboral.
2. Mantener los logros funcionales que se obtuvieron en la fase anterior.
3. Evitar la recurrencia de la EVC.

En esta última fase se da por terminada la rehabilitación del paciente, pero si el paciente persiste con discapacidad debe ser evaluado periódicamente por el rehabilitador y en caso de presentarse complicaciones puede justificar el reingreso a tratamiento de rehabilitación multidisciplinario de un paciente con EVC en etapa crónica, así como el retroceso de las funcionalidades alcanzadas.

# Capítulo 3

## Modelo matemático

Para conocer los elementos mecánicos controlados automáticamente se requiere la posición, orientación, velocidad y pares de salida, se requiere contar con un modelo matemático, el cual incluye el modelo cinemático y el dinámico. En este capítulo se presenta la teoría que involucra el modelado matemático para un robot articular.

### 3.1. Modelado cinemático

El modelo cinemático permite conocer el vector, pose, posición y orientación, así como la velocidad del robot. Para empezar se definen algunos conceptos previos al modelo cinemático como lo son la cinemática, posteriormente la definición de eslabones y articulaciones y los ángulos de Euler.

#### 3.1.1. Cinemática

La cinemática se define como la rama de la mecánica que se ocupa de la descripción del movimiento de los cuerpos como la posición, la velocidad y la aceleración, sin embargo, ésta no considera las fuerzas que se requieren para realizar el movimiento. Al momento de hacer referencia a mecanismos de articulación de múltiples cuerpos, como en el caso de los robots, y más específicamente a los exoesqueletos, la cinemática se refiere al análisis de los movimientos de cada eslabón del exoesqueleto en relación con un marco de referencia y en relación con [16, 41] una descripción analítica del movimiento en función del tiempo y la relación no lineal entre la posición y orientación del efector final del robot y la configuración del robot.

La cinemática de robots está relacionada con el establecimiento de varios sistemas de coordenadas para representar la posición y orientación de los eslabones. En el análisis de posición se emplea la cinemática directa y la inversa, ver Figura 3.1. En la **cinemática directa** se conoce la posición de las articulaciones y se requiere conocer la posición y orientación del efector final. En la **cinemática inversa** se conoce la posición de la última articulación del robot (efector final) y se requiere conocer los ángulos de cada una de las articulaciones del robot. La **cinemática diferencial**

se emplea para obtener la velocidad y la aceleración entre sistemas de coordenadas [42, 43].

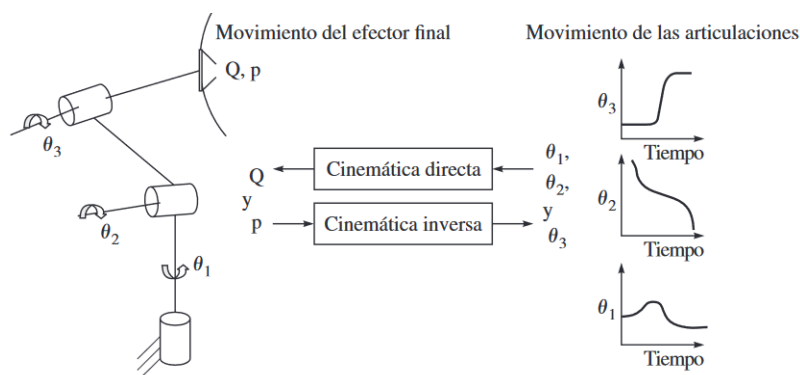


Figura 3.1: Cinemática directa e inversa.

### 3.1.2. Eslabones y articulaciones

Los robots manipuladores están compuestos por eslabones, los cuales son cuerpos rígidos individuales que se conectan entre ellos mediante articulaciones. Cuando se conecta se producen restricciones físicas para el movimiento relativo entre cada eslabón, esto a su vez forman una cadena cinemática. Las articulaciones más comunes son prismática, rotacional, cilíndrica, esférica y planar [42, 43].

- **Articulación prismática (P):** permite un movimiento relativo lineal entre dos eslabones.

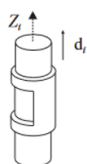
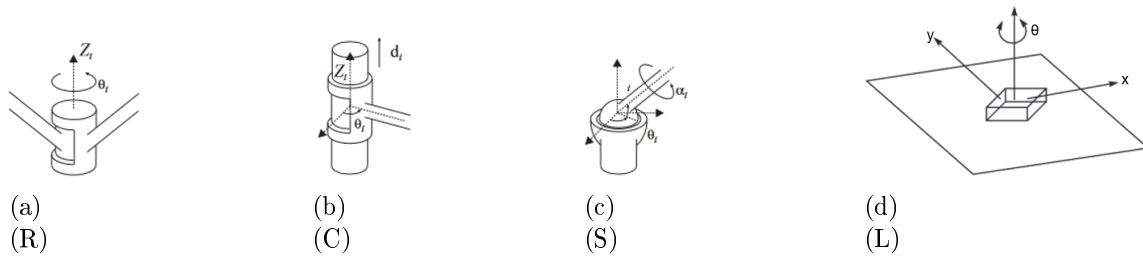


Figura 3.2: Articulación prismática (P).

- **Articulación rotacional o revoluta (R):** permite la rotación relativa entre dos eslabones.
- **Articulación cilíndrica (C):** permite el traslado y la rotación de manera independiente alrededor del eje de la articulación.
- **Articulación esférica (S):** permite que uno de sus eslabones gire libremente en todas las direcciones sobre el centro de una esfera, pero no permite realizar un traslado relativo.
- **Articulación planar (L):** permite realizar dos desplazamientos a lo largo de dos ejes independientes y una rotación alrededor del eje perpendicular al plano.

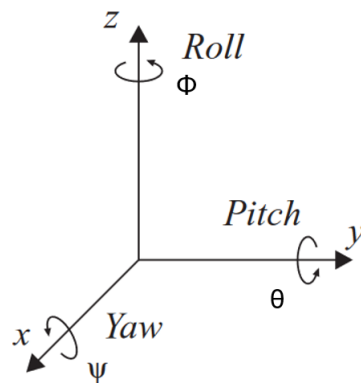


**Figura 3.3:** Articulaciones: a) revoluta, b) planar, c) cilíndrica y d) planar.

Las articulaciones más comunes en los robots manipulables y exoesqueletos suelen ser revolutas o prismáticas.

### 3.1.3. Ángulos de Euler y transformación homogénea

La orientación del robot se puede determinar por medio de matrices de transformación homogénea, cuaterniones o ángulos de Euler. En este caso, un método común para especificar una matriz de rotación  $R$  en términos de tres cantidades independientes es usar los llamados ángulos de Euler. En la Figura 3.4 se muestran los ángulos de Euler, son rotaciones que se conocen como balanceo (Roll  $\phi$ ) que indica una rotación de un ángulo  $\phi$  sobre el eje  $z$ , cabeceo (Pitch  $\theta$ ) representa una rotación de un ángulo  $\theta \in [0, \pi]$  sobre el eje  $x$  y guiñada (Yaw  $\psi$ ) es una rotación de un ángulo  $\psi$  sobre el nuevo eje  $z$  [42, 16].

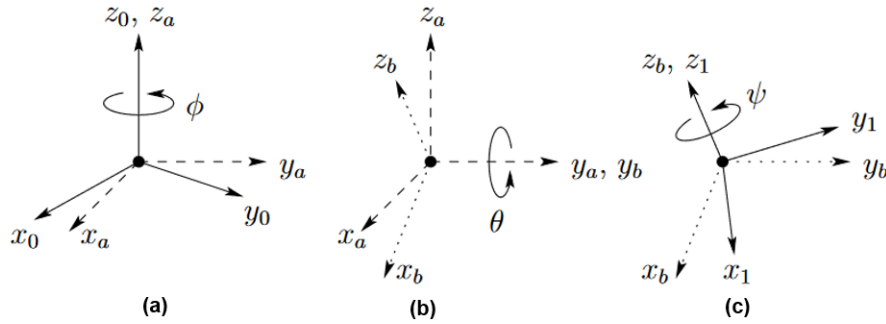


**Figura 3.4:** Ángulos de Euler.

En la Figura 3.5 (a) se observa el marco de referencia  $o_a x_a y_a z_a$  que representa el marco de coordenadas después de la rotación por  $\phi$ , en (b) se observa el marco  $o_b x_b y_b z_b$  que representa el nuevo marco de coordenadas después de la rotación por  $\theta$ , y (c) se muestra el marco,  $o_1 x_1 y_1 z_1$  este representa el marco final, después de la rotación por  $\psi$ . De esta manera, la ubicación del eje de cada rotación sucesiva depende de las rotaciones anteriores, por lo que el orden de las rotaciones debe acompañar a los tres



ángulos para definir la orientación [42].



**Figura 3.5:** Representación de la orientación de los ángulos de Euler.

En robótica, es común describir la posición y orientación de forma compacta basada en la traslación y rotación del marco de coordenadas. Una matriz de rotación,  $R$ , es una matriz de transformación que cuando se multiplica por un vector tiene el efecto de cambiar la dirección del vector, pero no su magnitud. Una rotación es una transformación ortonormal, la rotación opuesta es representada por la transpuesta de la matriz original,  $R^{-1} = R^T$ . Las matrices de rotación se pueden multiplicar para representar el efecto de una serie de rotaciones combinadas. La expresión general para una matriz de rotación es la siguiente [16]:

$$R = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = [n \quad s \quad a] \quad (3.1)$$

En donde,  $n$ ,  $s$  o  $a$  son los vectores unitarios del sistema rotado en el marco de referencia original,  $n = (n_x, n_y, n_z)^T$  es un vector que representa la dirección de  $x_1$  en el sistema  $o_0x_0y_0z_0$ ,  $s = (s_x, s_y, s_z)^T$  representa la dirección de  $y_1$ , y  $a = (a_x, a_y, a_z)^T$  representa la dirección de  $z_1$  [42].

Las coordenadas homogéneas expresan combinaciones de rotaciones y traslaciones en una forma compacta. Estas coordenadas se utilizan para representar puntos en un espacio de  $n$  dimensiones,  $d(x, y, z)$ . Utilizando el concepto de coordenadas homogéneas, entonces la matriz de transformación homogénea,  $H$ , describe una rotación  $R$  seguida de una traslación  $d$ , se define de la siguiente manera [16]:

$$H = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & d_x \\ n_y & s_y & a_y & d_y \\ n_z & s_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

En donde, a diferencia de la ecuación 3.1, el vector  $d = (d_x, d_y, d_z)^T$  representa el vector desde el origen  $o_0$  hasta el origen  $o_1$  expresado en el marco  $o_0x_0y_0z_0$ ,  $0$  denota el vector fila  $(0,0,0)$ . La transformación homogénea más general toma la siguiente forma:

$$H = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & d_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matriz de rotación} & \text{Vector de orientación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalar} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.1.4. Cinemática directa

El objetivo de la cinemática directa es encontrar la orientación y posición del efector final con respecto a la base establecida y esto para una cadena cinemática abierta se obtiene encontrando una matriz de transformación homogénea de dimensión 4x4 que relacione el desplazamiento espacial del marco de referencia del efecto final con el marco de referencia base. Para encontrar la solución a la cinemática directa de un robot suele usarse la metodología de Denavit-Hartenberg (D-H) que establece un algoritmo para establecer de forma sistemática un sistema de coordenadas para cada elemento de una cadena articulada. En esta convención, cada transformación homogénea  $A_i$  se representa como un producto de cuatro transformaciones, tal y como se muestra a continuación [42, 16]:

$$\begin{aligned} A_i &= Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde los 4 parámetros del eslabón  $i$  se conocen comúnmente como parámetros de D-H y se definen como [42]:

- $a_i$  = distancia a lo largo de  $x_i$  desde  $o_i$  hasta la intersección de los ejes  $x_i$  y  $x_{i-1}$ .

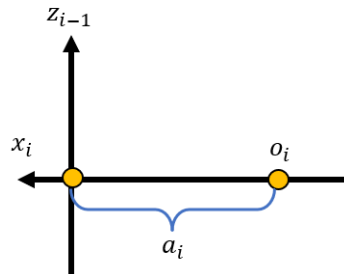
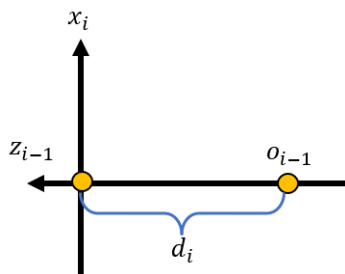


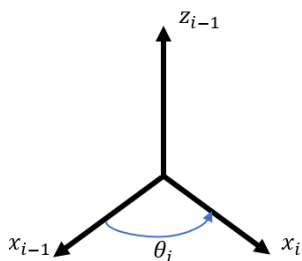
Figura 3.6: Parámetro  $a_i$ .

- $d_i$  = distancia a lo largo de  $z_{i1}$  desde  $o_{i1}$  hasta la intersección de los ejes  $x_i$  y  $z_{i1}$ .



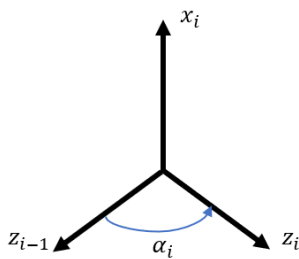
**Figura 3.7:** Parámetro  $d_i$ .

- $\theta_i$  = ángulo de la articulación del eje  $x_{i1}$  al eje  $x_i$  respecto del eje  $z_{i1}$ .



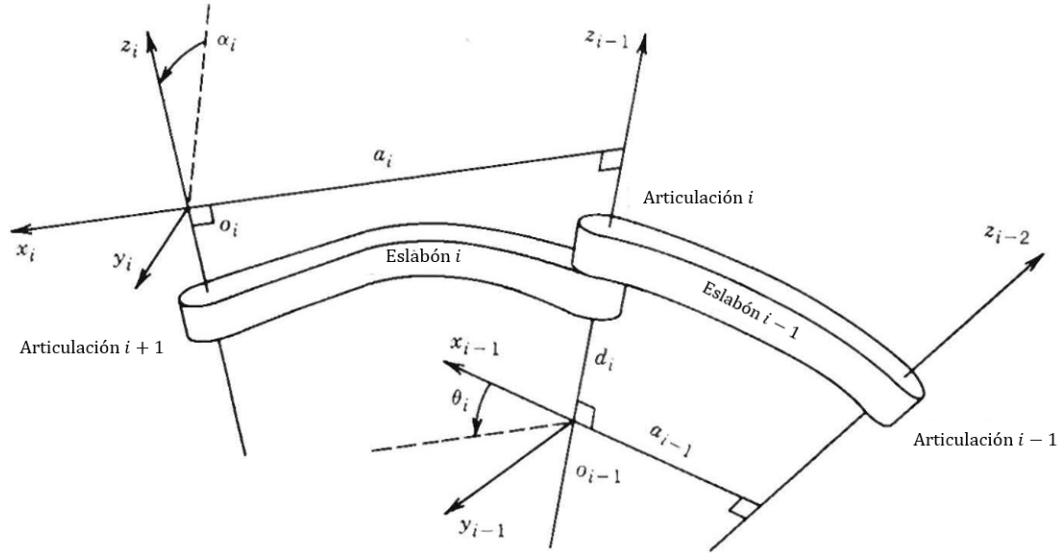
**Figura 3.8:** Parámetro  $\theta_i$ .

- $\alpha_i$  = ángulo de separación del eje  $z_{i-1}$  al eje  $z_i$  respecto del eje  $x_i$ .



**Figura 3.9:** Parámetro  $\alpha_i$ .

En la Figura 3.10 se ejemplifican los 4 parámetros del eslabón  $i$ .



**Figura 3.10:** Parámetros de Denavit-Hartenber.

La matriz  $A_i$  no es constante, sino que varía a medida que cambia la configuración del robot. Es decir,  $A_i$  es una función de una única variable denominada  $q_i$  [42].

$$A_i = A_i(q_i) \quad (3.5)$$

Donde si  $q_i$  es igual a  $\theta_i$  la articulación  $i$  es giratoria o si  $q_i$  es igual a  $d_i$  la articulación  $i$  es prismática.

Siguiendo el enfoque D-H, tanto la posición como la orientación del efector final se pueden calcular como una función de la configuración del robot  $q$ . Dado que la matriz de transformación  $T_{i-1}^i$  representa una transformación con respecto al  $(i-1)$ th sistema de coordenadas, la matriz de transformación homogénea correspondiente a la combinación de transformaciones impuestas por las uniones sucesivas puede derivarse por medio de [42]:

$$H = T_n^0 = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n) \quad (3.6)$$

Para aplicar la metodología D-H se deben cumplir los siguientes criterios:

- El eje  $x_i$  es perpendicular al eje  $z_{i-1}$
- El eje  $x_i$  intersecarse al eje  $z_{i-1}$

Una vez que se cumplen los dos criterios anteriores, se procede a seguir los siguientes pasos para la obtención de la tabla de parámetros [42].

1. Localizar y etiquetar los ejes de las articulaciones de  $z_0, \dots, z_{n-1}$ .

2. Establecer la base de las coordenadas como el conjunto del origen en el eje  $z_0$ . Los ejes  $x_0$  y  $y_0$  son seleccionados convencionalmente con la regla de la mano derecha.
3. Localizar el origen  $o_i$  donde la normal común es  $z_i$  e  $z_{i-1}$  intersecarse en  $z_i$ . Si  $z_i$  intersecarse ha  $z_{i-1}$  localizado en  $o_i$ . Si  $z_i$  y  $z_{i-1}$  son paralelos, luego localiza  $o_i$  en cualquier posición conveniente a lo largo de  $z_i$ .
4. Establecer  $x_i$  a lo largo de la normal entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$  de  $o_i$ , o en la dirección de la normal del plano  $z_{i-1}$ - $z_i$ , si  $z_i$  y  $z_{i-1}$  se intersecarse.
5. Establecer  $y_i$  con la regla de la mano derecha.
6. Establecer la herramienta final  $o_n x_n y_n z_n$  asumiendo que la  $n$ -ésima articulación es rotacional. El conjunto  $k_n = a$ , a lo largo de la dirección  $z_{n-1}$ . Seguidamente, establecer el origen  $o_n$  convencionalmente al largo de  $z_n$ , preferentemente, al centro de la herramienta que el manipulador puede llegar. El conjunto  $j_n = s$ , en la dirección de la herramienta, y el conjunto  $i_n = n$  como  $s \times a$ .
7. Crear una tabla de los parámetros  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$ .
8. Formar las matrices de transformación homogénea  $A_i$  sustituyendo los parámetros anteriores.
9. Calcular la matriz de transformación homogénea, la forma  $T_n^0 = A_1 \cdots A_n$ , dada en la posición y la orientación expresada en la coordenada base.

### 3.1.5. Cinemática directa del brazo utilizando D-H

Basado en la metodología de Denavit-Hartenberg se propuso un modelo con 9 gdl del brazo humano para hacer frente al movimiento de la escápula, dicho modelo incluye la articulación esternoclavicular en la cadena cinemática. Al diseñar un robot o exoesqueleto de miembro superior se debe tomar en cuenta la cinemática humana, teniendo en cuenta esto se asume un modelo de 7 gdl para el miembro superior [16]:

1. 3 gdl en el hombro
2. 2 gdl en el codo
3. 2 gdl en la muñeca

Lo primero que realizaron fue determinar los marcos de coordenadas según la metodología de D-H para el miembro superior. Para permitir un marco base común para ambos brazos, el sistema de coordenadas base  $x_0, y_0, z_0$  y fueron delimitadas en el cuerpo entre los hombros. Luego, en uno de los brazos, se ubicaron tres marcos, correspondientes a tres gdl, en el centro de la articulación del hombro [16].

1. Rotación interna-externa,  $X_1, Y_1, Z_1$ ;

2. Aducción-abducción,  $X_2, Y_2, Z_2$ ;
3. Flexión-extensión,  $X_3, Y_3, Z_3$ .

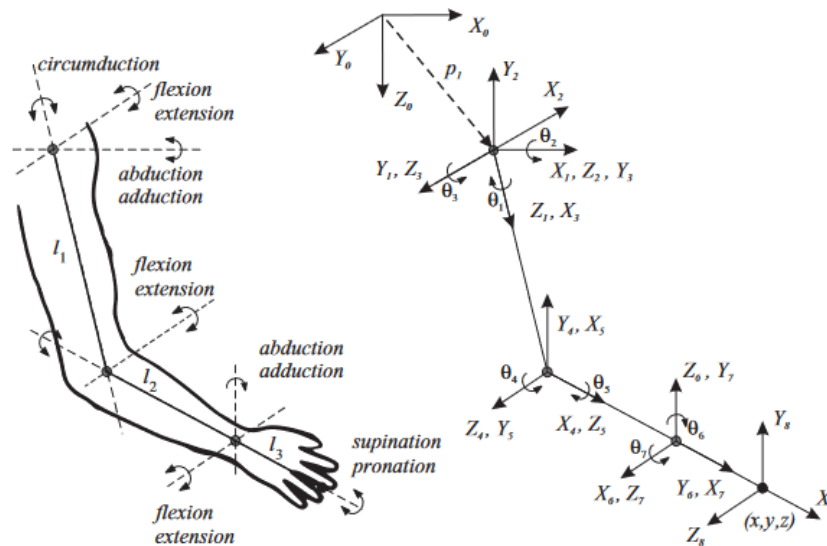
En la articulación del codo hay dos marcos correspondientes a las siguientes rotaciones:

1. flexión-extensión,  $X_4, Y_4, Z_4$ ;
2. supinación-pronación,  $X_5, Y_5, Z_5$ .

El movimiento en la muñeca es descrito por otros dos marcos:

1. aducción-abducción,  $X_6, Y_6, Z_6$ ;
2. flexión-extensión,  $X_7, Y_7, Z_7$ .

Por último, el marco del efector final se ubica en la punta de los dedos  $X_8, Y_8, Z_8$  (Figura 3.11)



**Figura 3.11:** Sistemas de Coordenadas del brazo.

La rotación de un marco con respecto al anterior en la cadena cinemática corresponde a un gdl fisiológico, en caso del hombro existen diversos marcos de referencia con el mismo origen. Esto equivale a considerar una cadena cinemática en la que algunos de los eslabones tienen una longitud igual a cero. Estos se llaman enlaces virtuales; por ejemplo, los enlaces entre  $X_1, Y_1, Z_1$  y  $X_2, Y_2, Z_2$  entre  $X_2, Y_2, Z_2$  y  $X_3, Y_3, Z_3$  hay enlaces virtuales en el hombro [16].

Para completar la descripción es necesario definir los parámetros D-H. Estos son presentados en la Tabla 3.1 y dependen de los parámetros antropométricos del cuerpo humano.

**Tabla 3.1:** Sistemas de Coordenadas del brazo.

Articulación	Movimiento ( $\beta_i$ )	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
Base	0	0	$a_0$	$d_0$	0
Hombro	(-90) Rotación externa e interna (+90)	-90	0	0	$\beta_1 + 90$
Hombro	(-180) Abducción y aducción (+50)	90	0	0	$\beta_2 + 90$
Hombro	(-180) Flexión y extensión (+80)	0	$l_1$	0	$\beta_3 + 90$
Codo	(-10) Flexión y extensión (+145)	90	0	0	$\beta_4 + 90$
Codo	(-90) Pronación y Supinación (+90)	90	0	$l_2$	$\beta_5 + 90$
Muñeca	(-90) Flexión y extensión (+70)	90	0	0	$\beta_6 + 90$
Muñeca	(-15) Abducción y aducción (+40)	0	$l_3$	0	$\beta_7 + 90$

### 3.1.6. Cinemática inversa

La cinemática inversa para un robot de cadena cinemática abierta consiste en determinar los valores de las posiciones de las articulaciones dada la posición y orientación del efector final en relación con la base y los valores de todos los parámetros. Para cinemática inversa de los sistemas, puede ser descrita con base en dos clases de soluciones: las soluciones numéricas y las soluciones de forma cerrada (geométrica y algebraica). Debido a su naturaleza iterativa, las soluciones numéricas son generalmente más lentas que la solución de forma cerrada, por ende en este tema de tesis se utiliza la solución de forma cerrada utilizando el método algebraico [41, 44].

Los métodos algebraicos implican identificar las ecuaciones significativas que contienen las variables conjuntas y manipularlas en una forma soluble. Una estrategia común es la reducción a una ecuación trascendental en una sola variable como [44]:

$$C_1 \cos \theta_i + C_2 \sin \theta_i + C_3 = 0 \quad (3.7)$$

Donde  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son constantes. La solución a tal ecuación es:

$$\theta_1 = 2 \tan^{-1} \left( \frac{C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - C_3^2 + C_1^2}}{C_1 - C_3} \right) \quad (3.8)$$

También una técnica dentro de la solución algebraica es haciendo un nuevo planteamiento de la ecuación 3.2, es decir, para obtener el valor del primer ángulo se pone la dependencia en  $q_1$  del lado izquierdo de la ecuación de forma inversa  $A_1$ , la ecuación quedaría como [41]:

$$(A_1)^{-1} T_n^0 = A_2 A_3 \cdots A_n \quad (3.9)$$

Esta técnica de multiplicar cada lado de una ecuación de transformadas por una inversa de acuerdo a la cantidad de ángulos que se requieran conocer, se utiliza con frecuencia para aprovechar la separación de las variables en la búsqueda de una ecuación que pueda resolverse.

### 3.1.7. Cinemática diferencial

La cinemática es una rama de la física que describe el movimiento de los cuerpos sólidos sin tener en cuenta su causa subyacente (fuerza) y se limita principalmente al estudio de las órbitas en función del tiempo.

El Jacobiano es una matriz que se puede considerar como la versión vectorial de la derivada ordinaria de una función escalar. Este modelo diferencial es una de las cantidades más importantes en el análisis y control del movimiento de los robots [42].

La matriz Jacobiana se compone de una matriz de 6xn y se utiliza para determinar la transformación entre las velocidades de las articulaciones: la velocidad lineal y angular de cualquier punto del manipulador.

$$J_0^n = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

#### Velocidad angular

La velocidad angular total del efector final,  $\omega_0^n$ , en el marco base, se determina mediante la siguiente ecuación [42].

$$\omega_0^n = \rho_1 \dot{q}_1 k + \rho_2 \dot{q}_2 R_0^1 k + \dots + \rho_n \dot{q}_n R_0^{n-1} k = \sum_{i=1}^n \rho_i \dot{q}_i z_{i-1} \quad (3.11)$$

en donde:

$$z_{i-1} = R_0^{i-1} k$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ es el vector de coordenadas unitarias}$$

$$z_0 = k = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$\rho = 1$ , si es una articulación revoluta

$\rho = 0$ , si es una articulación prismática

La mitad inferior del Jacobiano ( $J_\omega$ ), en la ecuación 3.14 está dado como:

$$J_\omega = [\rho_1 z_0 \ \dots \ \rho_n z_{n-1}] \quad (3.12)$$

#### Velocidad lineal

La velocidad lineal del efector final es simplemente  $\dot{d}_0^n$ . Por la regla de la cadena para la diferenciación.

$$\dot{d}_0^n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (3.13)$$



Así vemos que la  $i$ -ésima columna de  $J_v$  es simplemente  $\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i}$ . Además, la expresión es solo la velocidad lineal del efector final que resultaría si  $\dot{q}_i$  es igual a uno y los otros  $\dot{q}_i$  son cero.

La  $i$ -ésima columna de la matriz Jacobiana corresponde a la  $i$ -ésima articulación del robot manipulador, y toma una de dos formas dependiendo de si la  $i$ -ésima articulación es prismática o de revolución, es decir:

$$J_v \left\{ \begin{array}{l} [z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1})] \\ [z_{i-1}] \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

## 3.2. Dinámica

La dinámica se encarga de estudiar los objetos en movimiento y la causa del movimiento, por ejemplo, las fuerzas. En robots articulados, la dinámica analiza el movimiento en la configuración en el espacio de trabajo en función de las fuerzas internas (ejemplo, par en cada articulación) y fuerzas externas (fuerza de interacción con el entorno) [16].

Como en el caso de la cinemática, se pueden identificar dos instancias de la relación entre fuerza y movimiento: el problema de la dinámica directa y el problema de la dinámica inversa.

El modelo dinámico directo de un robot expresa la evolución de las coordenadas articulares y de trabajo en función de la fuerza y el par involucrados. La dinámica directa de un robot se expresa de la siguiente manera[16]:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= f(F, T) \\ \dot{r} &= \int \ddot{r} dt \\ r &= \int \dot{r} dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

El modelo dinámico inverso describe las fuerzas y los pares como función de la evolución de las coordenadas conjuntas en el tiempo y se puede expresar de la siguiente manera:

$$F = g(r, \dot{r}, \ddot{r}) \quad (3.16)$$

La mecánica de Newtoniana y Lagrangiana es usada para derivar el modelo dinámico de un robot. La mecánica Newton-Euler: se basa en la descripción de la mecánica de manera vectorial y la Lagrange-Euler se basa en funciones escalares. Las ecuaciones de movimiento describen el comportamiento de un sistema en función del tiempo, (ecuación de Euler-Lagrange).

Un robot es un mecanismo multicuerpo articulado y cada articulación limita el movimiento relativo de los enlaces articulados inmediatos (holonómica), cuando la restricción depende únicamente de las coordenadas del sistema y del tiempo. No depende de la velocidad o cantidad de movimiento del sistema y, en consecuencia, puede expresarse matemáticamente por:

$$f(r_1, r_2, \dots, r_n, t) = 0 \quad (3.17)$$

donde  $r_i$  es el conjunto de coordenadas que describen la posición en cada enlace y  $t$  es el tiempo.

Las ecuaciones de Lagrange para un sistema escleronómico holonómico están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \forall i = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

donde  $q$  es un vector de coordenadas generalizadas, con un conjunto mínimo de coordenadas para determinar completamente la posición del enlace de cada robot y  $\tau_i$  son las fuerzas generalizadas,  $L$  es la función lagrangiana del robot y se puede derivar de la energía cinética (T) y potencial del robot (V):  $L = T - V$ .

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (3.19)$$

De manera matricial, la ecuación n, y se describe de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + \mathbf{K}(q) = \tau(n) \quad (3.20)$$

donde  $q$  es el vector de coordenadas articulares,  $\dot{q}$  es el vector de velocidad y  $\ddot{q}$  es el vector de aceleración, las tres son funciones en el tiempo.  $M(q)$  es una matriz inercial cuadrada representa el efecto de aceleración en conjunto con el par generado ( $\tau$ ),  $C(q, \dot{q})$  es el vector centrífugo y la fuerza de Coriolis,  $K(q)$  este es un vector de fuerza relacionado con la gravedad. Esta ecuación representa la dinámica de la cadena de eslabones descrita en las coordenadas del espacio articular [16].

# Capítulo 4

## Sistema mecatrónico

Los exoesqueletos están compuestos por una parte, mecánica y otra parte electrónica. Un exoesqueleto está compuesto por estructuras de tipo activas y pasivas, las cuales a su vez, contienen actuadores, sensores, motores, enconders, etc., los cuales se encargan de realizar los movimientos.

### 4.1. Sensores empleados en los exoesqueletos

- Encoders: son sensores electromecánicos que miden el movimiento absoluto o relativo. Los encoders relativos (también llamados incrementales) generalmente consisten en receptores ópticos que generan pulsos eléctricos cuando detectan cambios en la luz causados por el movimiento angular del disco óptico. Los encoders absolutos generan un código digital único para cada posición en el eje y pueden ser ópticos, mecánicos, magnéticos o de fibra óptica. Pueden ser lineales o rotativos. Son comunes en aplicaciones robóticas portátiles, por ejemplo, en diseños de exoesqueletos diseñados para rehabilitación de rodilla, codo y muñeca, se utilizan dos tipos de sensores de posición y velocidad [17].
- Electrogoniómetros: son instrumentos de precisión que se utiliza para medir el ángulo de las articulaciones, que puede realizarse con potenciómetros o galgas extensométricas. El electrogoniómetro flexible consiste en un resorte flexible entre dos varillas de plástico en ambos extremos. El resorte consiste en un conjunto de galgas extensométricas cuya resistencia cambia en proporción al cambio de ángulo [17].
- Sistemas Microelectromecánicos (MEMS): los acelerómetros MEMS suelen ser sensores piezo resistivos. Estos sensores consisten en una masa suspendida de resorte unidimensional. Su principio de funcionamiento incluye detectar la fuerza inercial generada por la aceleración o desaceleración de la masa de prueba. El acelerómetro mide dos componentes, un componente se debe a la gravedad y el otro componente corresponde al movimiento del sensor. El giroscopio MEMS se basa en la vibración de masa y se utiliza para medir la velocidad angular. La

configuración general consta de dos masas que vibran y se mueven en direcciones opuestas. Puede medir la fuerza del campo magnético. Algunos magnetómetros (efecto Hall) funcionan detectando la fuerza de Lorentz, que se basa en el movimiento mecánico de la estructura MEMS causado por la fuerza de Lorentz aplicada al conductor de corriente en presencia de un campo magnético [17].

- Galgas extensométricas: detectan la fuerza estática. Consiste en una rejilla fina de metal o semiconductor adherida a la superficie del componente. Las galgas extensométricas a menudo aparecen en robots portátiles, por ejemplo, para caracterizar la fuerza de interacción, en la terapia de rehabilitación y en el proceso de implementación de sensores de fuerza para extraer información de interacción física humano-máquina para controlar exoesqueletos [17].
- Sensores piezoeléctricos: estos sensores generan campos eléctricos cuando se deforman mecánicamente y viceversa. Se pueden utilizar para detectar completamente la aceleración y sólo están disponibles para la detección de fuerza dinámica, porque el voltaje generado por el material deformado disminuye rápidamente con la fuerza aplicada. Por tanto, la desventaja más significativa de este tipo de sensor es que no puede responder a cargas estáticas [17].
- Sensores de actividad muscular (EMG) y cerebral (EEG): se pueden usar electrodos de superficie o intramusculares (generalmente en pares (bipolares)) para obtener señales EMG para estudiar el movimiento de los músculos. La amplitud y el ancho de banda de la señal EMG no solo dependen de la fuente electrofisiológica y de la distancia del electrodo, sino también del tipo y tamaño del electrodo utilizado y de la distancia entre los electrodos, [17].

### **Tipos de electrodos**

El electrodo de superficie se adhiere a la piel del segmento muscular en estudio. Los electrodos de superficie se utilizan para estudiar la actividad de todos los músculos de la superficie. La distancia entre los electrodos determina el posicionamiento o el volumen de recepción del tejido, cuanto menor es la distancia, mayor es la selectividad del posicionamiento. El electrodo de superficie suele estar ranurado y la pasta de electrodos llena la cavidad para lograr un mayor contacto con la piel y reducir la impedancia del electrodo. Los electrodos disponibles comercialmente pueden ser desechables, como los electrodos de electrocardiograma (ECG), o pueden reutilizarse con un protector de plástico y cuellos adhesivos en ambos lados. Para la parte activa del electrodo, el diámetro varía de 2 a 10 mm. Debido a sus características de estabilidad y reducción de ruido, siempre se utilizan electrodos de plata-cloruro de plata (Ag-Ag Cl) con pasta de cloruro [17].

Para la adquisición de EEG, el electrodo más utilizado es Ag / AgCl con un contacto húmedo típico. La amplitud de la señal de EEG es muy débil (mucho más baja en comparación con EMG) y es susceptible a la contaminación acústica de

fuentes externas e internas. En el EEG, la actividad de fondo del cerebro también se puede percibir como ruido. Dado que algunas características de ruido pueden ser muy similares a las de la señal deseada, esto hace que la señal sea más difícil de procesar y clasificar. La amplitud de la señal recogida en el EEG generalmente se estima en alrededor de 100V. La frecuencia en el análisis clásico se considera entre 0 y 40 Hz. Sin embargo, los estudios de la literatura han demostrado que hay una actividad significativa entre 0 y alrededor de 250 Hz [17].

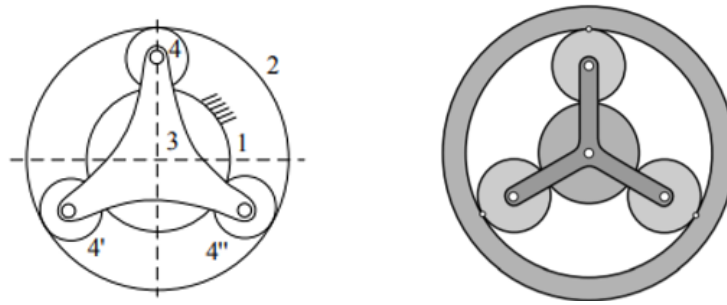
Actualmente, existe una variedad de exoesqueleto, algunos de uso comercial y otras se encuentran en desarrollo e investigación por centros de investigación o universidades. La importancia de elegir el material adecuado influye en un funcionamiento óptimo del diseño, el cual debe cubrir las necesidades del usuario final. En este caso, el exoesqueleto está enfocado a la rehabilitación de hombro, por lo que debe tener la suficiente fuerza y resistencia para utilizarlo en la población mexicana, adaptándose a las medidas antropométricas y factores externos de la población. En el capítulo cinco se abordan los materiales implementados para el diseño del exoesqueleto como son los reductores, motores, columna telescópica y materiales de la impresión 3D.

## 4.2. Mecanismos

Los mecanismos transmiten el movimiento de los motores hacia los eslabones. Para incrementar la fuerza o par y disminuir la velocidad en los mecanismos, se utilizan las transmisiones, que son engranajes que pueden tener diversas configuraciones, entre las que encontramos los reductores. En particular, los reductores epicicloidales, han resultado útiles en las aplicaciones robóticas por su tamaño compacto y su fácil manufactura en impresión 3D.

### 4.2.1. Reductor epicicloidal

Los reductores son sistemas que consisten en trenes de engranes que se adaptan a toda clase de mecanismos o máquinas. Estos se conectan en la flecha de salida del motor y dependiendo de las combinaciones de engranes que se realicen se puede cambiar la velocidad o el par de torsión, es decir, se puede aumentar el par de torsión y este a su vez provocará que disminuya su velocidad o viceversa, esto para obtener el movimiento deseado en los elementos del robot. En la Figura 4.1 se representa un reductor epicicloidal con tres satélites en donde: el engrane 1 suele denominarse planetario. El engrane con el número 2 se conoce como corona, con el número 3 se representa el portasatélites conocido también como brazo que soporta a los 3 engranes representados con el número 4 [45, 46].



**Figura 4.1:** Reductor epicicloidal con tres satélites.

Los reductores epicicloidales o trenes planetarios son aquellos en los que el eje de uno o de varios engranes son móviles [45]. Dependiendo de la configuración para establecer el engrane fijo y el engrane impulsor será que se tenga mayor par de torsión o mayor velocidad, tal como se muestra en la Tabla 4.4 [45, 47].

**Tabla 4.1:** Combinación de los componentes del reductor epicicloidal.

Componente de retención	Componente de accionamiento	Componente conducido	Observación	Fórmula de relación de transmisión
Corona	Planetario	Portasatélites	Máxima multiplicación de par de torsión	$i = \frac{Z_C + Z_P}{Z_P}$
Corona	Portasatélites	Planetario	Máxima reducción de par de torsión	$i = \frac{Z_P}{Z_C + Z_P}$
Portasatélites	Planetario	Corona	Disminución de velocidad con inversión de giro	$i = -\frac{Z_C}{Z_P}$
Portasatélites	Corona	Planetario	Multiplicación de velocidad con inversión de giro	$i = -\frac{Z_P}{Z_C}$
Planetario	Corona	Portasatélites	Multiplicación de par de torsión	$i = \frac{Z_C + Z_P}{Z_C}$
Planetario	Portasatélites	Corona	Reducción de par de torsión	$i = \frac{Z_C}{Z_C + Z_P}$

$Z_C$ =Número de dientes del engrane corona y  $Z_P$ =Número de dientes del engrane planetario

### 4.2.2. Motores

Un motor es la parte sistemática de una máquina permitiendo generar un movimiento rotacional para obtener mayor velocidad o un alto par de torsión, esto es ideal para mecanismos que requieren un movimiento de entrada rotatoria continua [46]. En el mercado existe una gran variedad de motores ejemplo motor DC, motor AC, servomotores y motores a paso.

Cada uno de los motores tienen características únicas con la finalidad de adaptarse a las necesidades del proyecto, diseño y trabajo que se quiera realizar. Para el diseño del exoesqueleto se emplearán los motores dynamixel de la marca MX-64, debido a que se cumplen las características necesarias para el funcionamiento del exoesqueleto como son la respuesta rápida por lazo cerrado, control de posición preciso, posiciones fijas contra una carga, control PID, comunicación de alta velocidad, etc. Además, este actuador cuenta con un motor DC integrado + controlador + driver + sensor + Red en un servo módulo de DC [48, 49].

Especificaciones del motor:

- Control de posición, de 360 grados, sin zonas muertas
- 4.096 resoluciones precisas en 0,088 grados
- Control de velocidad en modo giro sin fin
- Comunicación nivel TTL
- Control de par mediante detección de corriente

### 4.2.3. Columna telescópica

Para cubrir las necesidades que implican las diversas medidas que tiene la población mexicana, se optó por utilizar una columna telescópica, la cual permite ajustar la altura del exoesqueleto, siendo la columna telescópica de la serie TLC la seleccionada, esto por aprobación médica según la norma EN/IEC 60601-1 y UL 60601-1, además dispone de 2 o 3 secciones telescópicas. Estas columnas proporcionan una alta capacidad de fuerza de tracción y reduce de manera significativa los niveles de ruido [4].

**Tabla 4.2:** Datos técnicos [4].

Datos	TLC 12ZWDS
Carga nominal de empuje	4 000 N
Carga nominal de tracción	4 000 N
Versión columna elevable	3 secciones
Carrera máx.	255 mm a 700 mm
Voltaje	120 V o 230 V
Corriente	10 A
Tipo de protección	IP 20 o 30

### 4.3. Materiales

La selección de material para el sistema debe considerar el pesos del sistema total, la facilidad de manufactura, el mantenimiento del sistema y que además soporte los esfuerzos durante las sesiones de rehabilitación.

#### 4.3.1. Material para la estructura del exoesqueleto

La propuesta para desarrollar la estructura del exoesqueleto es mediante la impresión 3D esto por las ventajas que tiene en cuanto a otros materiales (aluminio, acero, etc.) como la ligereza del material, la facilidad y factibilidad de manufacturar las piezas, etc., para la impresión del exoesqueleto se seleccionaron 2 filamentos el ABS y el PLA, seleccionando el ABS como material de impresión, [5].

- ABS (Acilonitrilo-Butadieno-Estireno): Las propiedades con las que cuenta el filamento aportan características distintas: el acrolonitrilo rigidez, resistencia a ataques químicos, dureza y estabilidad a las altas temperaturas; el butadieno, tenacidad a la temperatura cuando esta es especialmente baja y resistencia a impacto; y el estireno, resistencia mecánica, rigidez y brillo.

**Tabla 4.3:** Datos técnicos [5].

Datos	ABS	Método de prueba
Densidad del material	1.04 g/cm <sup>3</sup>	ISO 1183
Resistencia a la tracción	32 a 39 MPA	ISO 527
Módulo de flexión	1900 MPa	ISO 178
Resistencia al impacto Izod	24 kJ/m <sup>2</sup>	ISO 180-1A
Resistencia al impacto Charpy	25 kJ/m <sup>2</sup>	ISO 75-A
Temperatura de distorsión térmica	81 °C	ISO 179



### 4.3.2. Material para la base del exoesqueleto

El exoesqueleto contará con dos bases, una fija y una móvil, la base fija está empotrada en la columna telescópica y se encarga de sostener el exoesqueleto. La parte móvil se encarga de sostener la estructura completa que implica el exoesqueleto, esto con la finalidad de facilitar el traslado de la estructura, ambas bases estarán hechas de aluminio.

- Aluminio aleación 6061: Es una aleación que contiene como principales elementos aluminio, magnesio y silicio. Esta aleación además posee una alta resistencia a la corrosión, buena resistencia mecánica y buena capacidad de deformación, tomando en cuenta que la resistencia mecánica y a la corrosión mejoran con el proceso de templado [6].

**Tabla 4.4:** Datos técnicos [6].

Datos	Aluminio 6061
Densidad del material	2.70 g/cm <sup>3</sup>
Fuerza de Tensión	310 MPa
Límite elástico	276 MPa
Módulo de elasticidad	68.9 GPa

# Capítulo 5

## Resultados

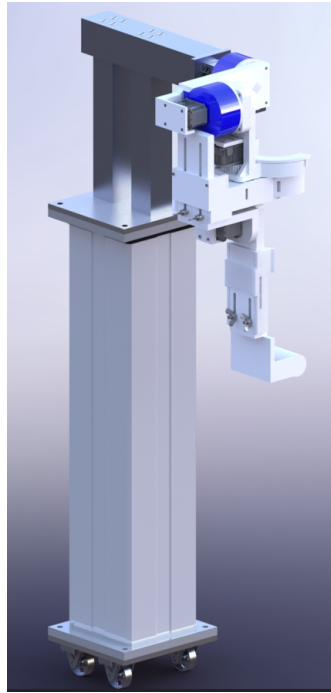
En este capítulo se presentan los resultados de la propuesta para el diseño y modelado matemático de un exoesqueleto de miembro superior. Se consideraron las medidas antropométricas de la población mexicana mayor de 18 años, además el diseño considera una plataforma móvil, una columna telescópica, eslabones adaptables y reductores de tipo epicicloidal en los actuadores, ver Figura 5.1. Los reductores se caracterizan porque ofrecen una alta conversión de potencia en comparación con otros y son compactos. La estructura se diseñó para manufactura usando material ABS a través de impresión 3D, lo cual tendrá una reducción en costos de producción en piezas y mantenimiento. El diseño cuenta con los 3 movimientos rotacionales del hombro (abducción-aducción, flexión-extensión y rotación interna-externa), y un movimiento rotacional del codo (flexión-extensión).

### 5.1. Diseño mecánico

Para realizar el diseño se estableció una comparativa de las métricas, ver Tabla 5.1 que tienen los dispositivos comerciales en comparación al diseño propuesto para rehabilitación de miembro superior para destacar las diferencias que existen.

#### Dimensiones del exoesqueleto

Para las dimensiones del diseño se utilizó la información obtenida en las Tablas 2.2 y 2.3, utilizando los datos estadísticos de extremo a extremo, es decir, se tomaron las dimensiones menores (percentil 5) correspondiente a la población femenina y de las personas con mayores dimensiones (percentil 95) correspondientes a la población masculina, con la finalidad de que el exoesqueleto se logre ajustar al 90 % de la población mexicana, obteniendo de esta manera la Tabla 5.2 como base para obtener las dimensiones requeridas para el exoesqueleto



**Figura 5.1:** Resultado del diseño propuesto. El sistema cuenta con una columna telescópica que conecta al exoesqueleto de hombro con el suelo. Esta columna permite una práctica transportación del sistema.

### **Materiales**

Para el diseño mecánico se considera los materiales mostrados en la Tabla 5.3 que en resumen, son una plataforma móvil fabricada de acero, una columna telescópica, una base de aluminio en donde se montaran la estructura del exoesqueleto fabricado a base de la tecnología de impresión 3D con material ABS. Esto permitirá obtener una reducción significativa en costos de producción en piezas y mantenimiento en comparación de los exoesqueletos comerciales.

**Tabla 5.1:** Comparativa entre los exoesqueletos utilizando las métricas [7].

metrica	Dispositivos						
	Armeo power	ARTROMOT-S4	ORTE	Armeo-Senso	Flsiotek	Jace S600	Propuesto
Ángulo flexión y extensión del hombro [°]	40°-120°	110°-0°-10°	P	P	Flexion=0°-180°	-30°-0°-100°	50°-180°
Ángulo aducción y abducción hombro [°]	-169°-50°	-30°-0°-160°	Flexión	Flexión	0°-180°	40°-110°	0°-130°
Ángulo rotación interna-externa hombro [°]	0°-90°	90°-0°-90°	P	P	90°-0°-90°	60°-0°-70°	-90°-0°-90°
Ángulo flexión y extensión codo [°]	0°-100°	0°-30°-160°	P	P	NP	NE	0°-90°
Longitud del brazo [cm]	25-34	NE	P	P	NP	20-32	23-44
Altura al hombro del paciente [cm]	85-125	120-210	P	P	NE	70-45	47-148
Edad de paciente	Adultos	Adultos	Adultos	Adultos	NE	Adultos	Adultos
Mecanismos de transporte	Móvil	Móvil	Móvil	Móvil	Móvil	Móvil	Móvil
Postura del paciente durante la terapia	Sentado y supino	Sentado y supino	Sentado y supino	Sentado y supino	Sentado y supino (abducción y rotación)	Sentado	Sentado y de pie
Peso del paciente	135kg	175 kg	NE	NE	NE	NE	44.1-97.3

P=Permitido, NP= No permitido, NE=No especificado

**Tabla 5.2:** Dimensiones del exoesqueleto.

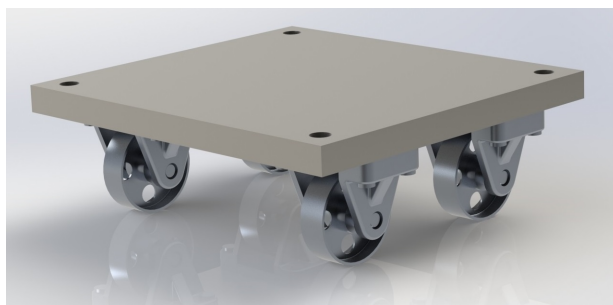
Núm.	Dimensiones (cm)	Extremos	
	Percentiles	5 %	95 %
1	Peso (kg)	44.1	97.3
2	Estatura (m)	1.398	1.78
3	Altura hombro	113.8	147.7
4	Altura codo flexionado	84.9	104.6
5	Altura muñeca	67.7	91.9
6	Altura nudillo	59.6	80
7	Perímetro brazo	22.6	32.4
8	Anchura máx. cuerpo	42.8	59.6
9	Diámetro máx. bideltoides	37.2	54.4
10	Altura poplíteo	32.5	45.3
11	Altura hombro sentado	46.5	63.8
12	Longitud de la mano	15.7	18.5
13	Longitud palma mano	8.9	10.5
14	Anchura palma mano	7.1	8.2
15	Espesor mano	2.3	3.5
16	Diámetro empuñadura	3.6	5

**Tabla 5.3:** Materiales del exoesqueleto

	Materiales	Dimensiones
1	Placa de aluminio 6061	$\frac{3''}{8}$ de 20cmx20cm
1	Placa de aluminio	$\frac{3''}{8}$ de 20cmx20cm
2	Barra cuadrada de aluminio 6061	2" de 30cm
1	Barra cuadrada de aluminio 6061	$2\frac{1''}{2}$ de 30cm
20	Tornillo avellanado con cabeza plana	M8X80mm
4	Tornillo con cabeza plana	M8X80mm
4	Tuercas	M8
1	Barra redonda de aluminio 6061	$\frac{3''}{8}$ de 215mm
4	Tornillos	M2.5X20mm
18	Tuercas	M2.5
12	Tornillos	M2.5X50mm
4	Tornillos	M6X60mm
4	Tuercas mariposa	M6
4	Llantas	
	Filamento ABS	
	2 Reductores (ABS)	
	Banda elástica	

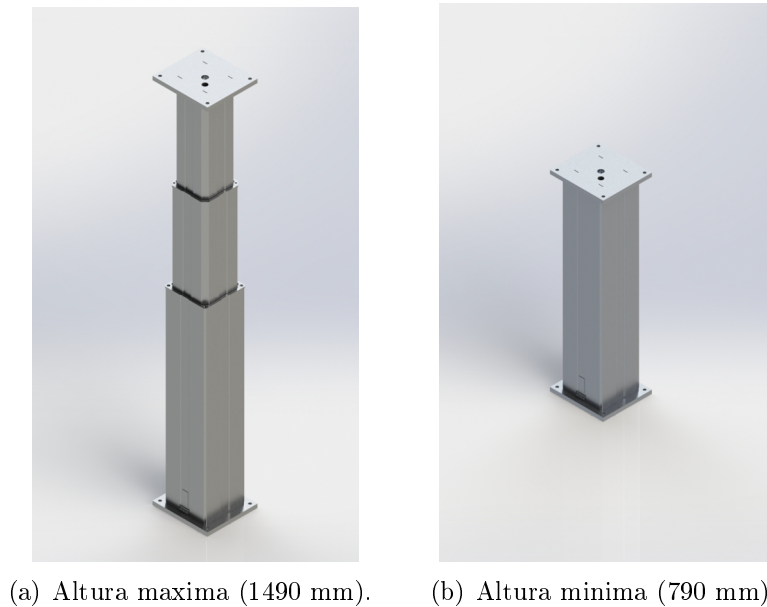
### Base móvil

Para facilitar el desplazamiento del exoesqueleto, de un lugar a otro dentro del centro de rehabilitación, se propuso el diseño de una estructura con una base móvil de 4 ruedas (Figura 5.2), la cual se fija en la parte inferior de la base de la columna telescópica mediante pernos.

**Figura 5.2:** Base móvil.

### Columna telescópica

Este diseño cuenta con la capacidad de adaptarse a una columna telescópica comercial modelo TLC 12ZWAS (Figura 5.3) con la finalidad de ajustarse a la altura del hombro del paciente cuando se requieran realizar fisioterapias en posición de pie o sentado. La columna se adapta a la base del exoesqueleto mediante pernos para evitar que sufra desplazamientos innecesarios.



**Figura 5.3:** Columna telescópica TLC 12ZWDS.

### Reductor epicicloidal

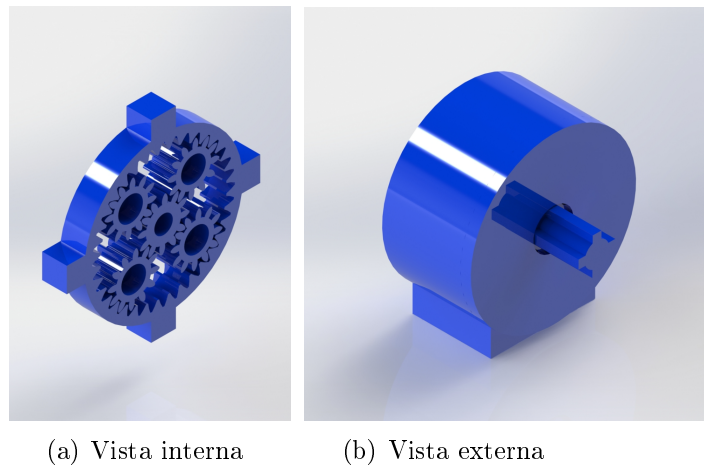
Para el diseño de los reductores de tipo epicicloidal se consideró la situación más crítica durante los movimientos de rehabilitación, que es cuando se requiere ejercer mayor esfuerzo, siendo este durante el movimiento de flexión a  $90^\circ$ . Para lograr dicho movimiento el reductor cuenta con una relación 13.17:1. En la Figura 5.4 se observa el reductor y para su manufactura se consideró en impresión 3D (ABS), siendo capaces de adaptarse al rotor del motor para aumentar el par de torsión a 79 Nm cuando reciba el motor una alimentación de 12 V y por ende provocando la disminución de la velocidad a 4.7 RMP (configuración de la primera fila de la Tabla 4.4).

### Ajuste de la longitud del brazo

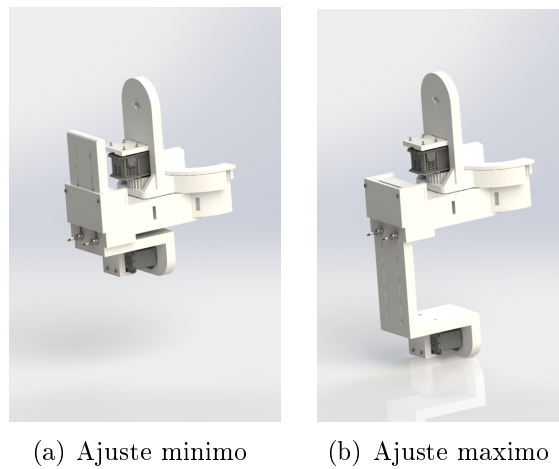
Para esta sección el exoesqueleto se acopla al brazo del paciente mediante bandas elásticas y se ajusta la longitud del brazo de manera manual de acuerdo a las dimensiones de cada paciente por medio de tuercas de tipo mariposa, en donde el rango mínimo es de 23 cm y máximo de 44 cm (Figura 5.5).

### Ajuste de la longitud del antebrazo

Para esta sección el exoesqueleto se acopla al antebrazo del paciente mediante bandas elásticas y se ajusta la longitud del antebrazo de manera manual de acuerdo a las dimensiones de cada paciente por medio de tuercas de tipo mariposa. La longitud del antebrazo se considera desde el codo hasta la altura de los nudillos, en donde el rango mínimo es de 23 cm y máximo de 26 cm (Figura 5.6).



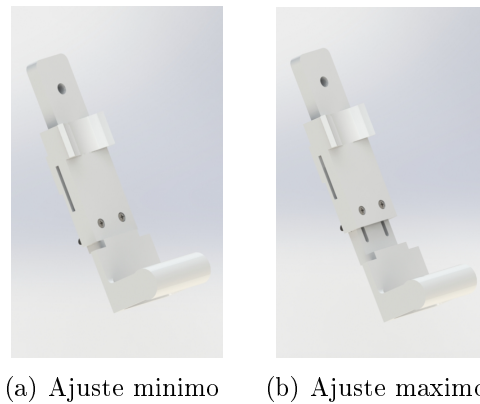
**Figura 5.4:** Reductor epicycloidal con relación 13.17:1



**Figura 5.5:** Ajuste de la longitud del brazo.

### 5.1.1. Análisis de elemento finito

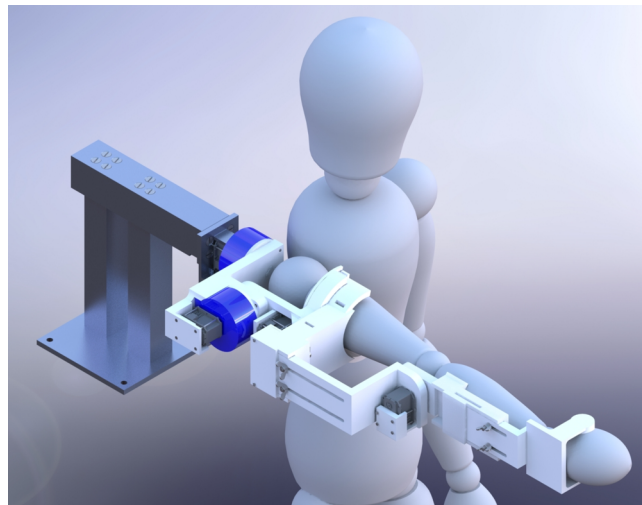
El análisis de elemento finito, o también conocido como método de elementos finitos, se usa en el contexto de los desplazamientos y teorías de fallo como indicador de un buen diseño para materiales dúctiles. Para este análisis se emplea la herramienta de simulación del software de SolidWorks® implementando un análisis estático que permite validar el diseño, siendo una técnica numérica que resuelve un conjunto de ecuaciones diferenciales, permitiendo conocer las deformaciones, tensiones y desplazamiento en una pieza o ensamble según las fuerzas, materiales y restricciones aplicadas. Este método se basa en dividir el modelo matemático (tipo de análisis, materiales, soportes y cargas que se aplican en la pieza), en elementos finitos mediante el proceso de mallado, de esta manera se aplican nodos a los soportes y cargas individualizados



**Figura 5.6:** Ajuste de la longitud del antebrazo.

de la malla. Después de crear el modelo de elementos finitos, se usa un solver numérico que contiene SolidWorks® para obtener los resultados [50].

Antes de comenzar el análisis de elemento finito, en la Figura 5.7 se observa que el exoesqueleto se posiciona en la situación crítica, que es cuando se requiere mayor par de torsión y eso sucede cuando el brazo se sitúa a una flexión de 90° considerando una longitud máxima de hombro a los nudillos de 0.7 m.



**Figura 5.7:** Exoesqueleto en la posición de mayor esfuerzo (Flexión 90°).

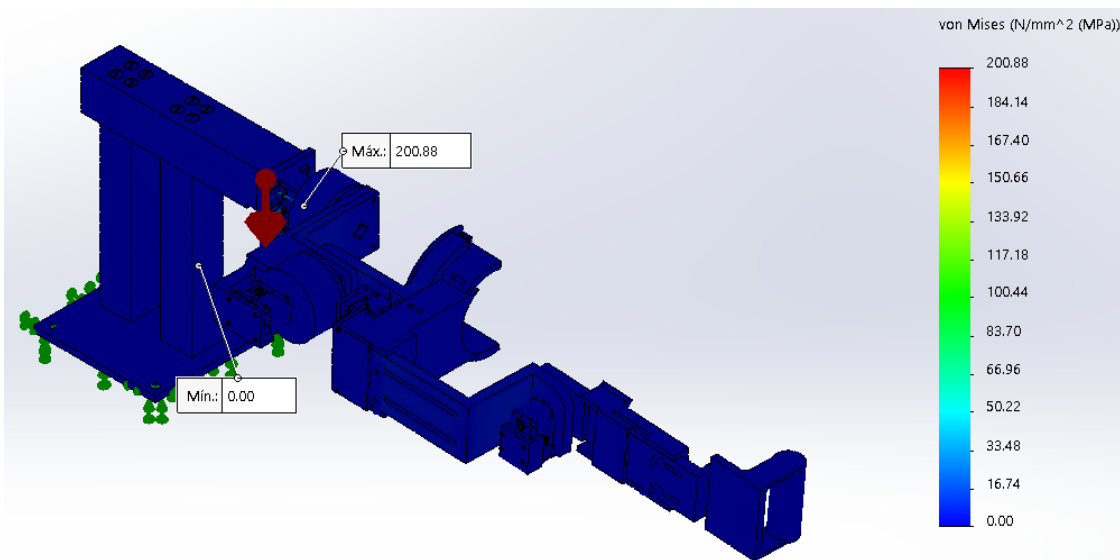
Las propiedades, que se consideran para realizar el análisis de elemento finito, son:

- Tipo de análisis: estático
- Cargas externas aplicadas:  $9.81 \frac{m}{s^2}$  y 5 kg (es el peso máximo del brazo de acuerdo a la Tabla 2.4 por Dempster, considerando a una persona de 100 kg)
- Sujeción por geometría fija en la base del exoesqueleto.



- Tipo de malla: sólida de 4 puntos Jacobianos
- El trazado de calidad de malla es mediante elementos cuadráticos de alto orden
- Tamaño máximo de elemento de la malla: 4.50817 mm
- Tamaño mínimo del elemento de la malla: 0.901633 mm
- Número total de nodos: 2398348
- Número total de elementos: 1622870

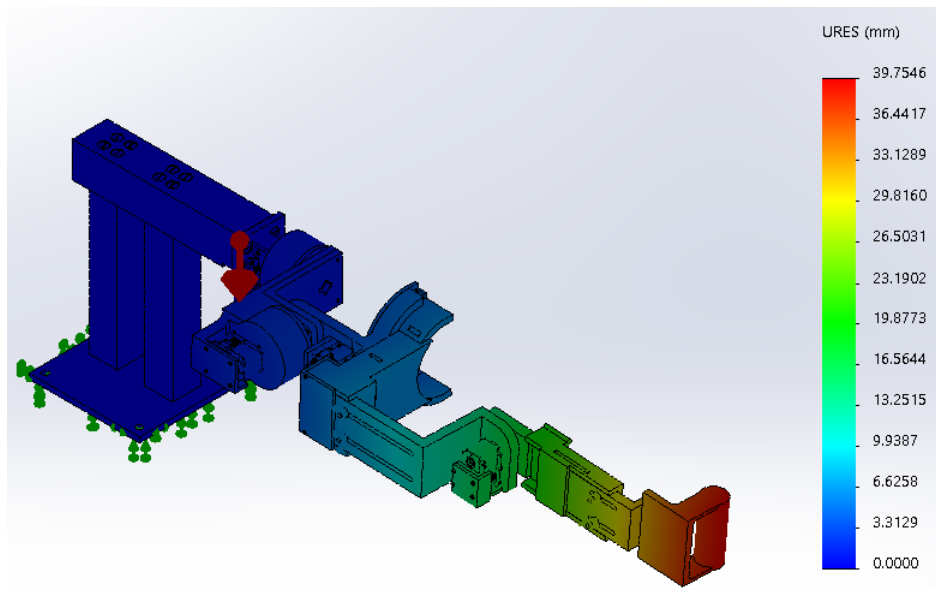
En los siguientes análisis se valida el diseño mecánico lo cual hace factible la construcción del exoesqueleto. En la Figura 5.8 se observan las tensiones de Von Mises teniendo como tensión máxima de  $200.88 \text{ N/mm}^2$  en el soporte del reductor para el movimiento de abducción-aducción y como valor mínimo se encuentra en el eslabón encargado de realizar el movimiento de rotación siendo un valor tan pequeño que lo considera como cero.



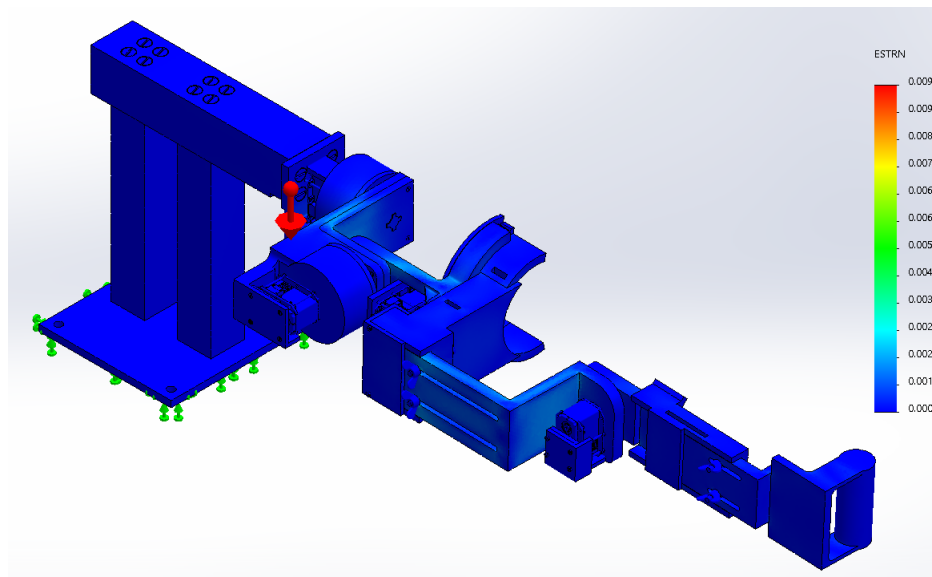
**Figura 5.8:** Tensiones de Von Mises en donde el color azul representa el esfuerzo mínimo, mientras que el color rojo indica el esfuerzo máximo.

En la Figura 5.9 se representan los desplazamientos resultantes, teniendo como valor máximo de 39.75 mm ubicado en el eslabón final (efector final) del exoesqueleto, mientras que el valor mínimo se encuentra en el soporte, siendo un valor tan pequeño que lo considera como cero. Estos desplazamientos son sin considerar la resistencia que se generaría al agregarle el brazo del paciente que ocasionaría que el desplazamiento sea menor.

En la Figura 5.10 se representan la deformación unitaria teniendo como valor máximo 0.009 ubicados en el movimiento de abducción-aducción, mientras que en el movimiento de flexión-extensión del codo se encuentra valor mínimo de cero.



**Figura 5.9:** Representa los desplazamientos resultantes que sufre la estructura en cm.



**Figura 5.10:** Representa la deformación unitaria en la estructura

## 5.2. Modelo cinemático directo

Para el análisis cinemático se consideraron las 4 articulaciones del exoesqueleto de tipo rotacional. En la Tabla 5.4 se muestran los parámetros para poder calcular la posición del efector final, en donde  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  son valores que varían de acuerdo a la longitud del brazo y antebrazo del paciente y en la Figura 5.11 se representa la ubicación de los marcos de referencia.

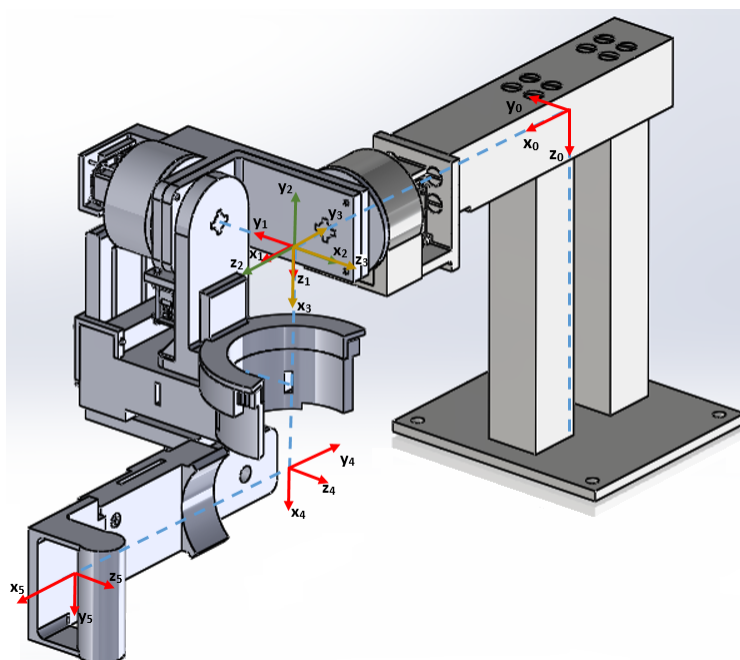


Figura 5.11: Sistemas de Coordenadas del exoesqueleto.

Tabla 5.4: Parámetros D-H del exoesqueleto

Articulación	Color <sup>1</sup>	Movimiento	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	Rojo	Base (fijo)	0	$a_1$	0	0
2	Rojo	Rotación externa-interna	$-90^\circ$	0	0	$90^\circ + \theta_1$
3	Verde	Abducción-aducción	$-90^\circ$	0	0	$90^\circ + \theta_2$
4	Amarillo	Flexión-extensión	0	$a_2$	0	$90^\circ + \theta_3$
5	Rojo	Flexión-extensión	0	$a_3$	0	$\theta_4$

Las matrices de transformación homogéneas correspondientes a los parámetros establecidos de la Tabla 5.4 son:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>Representa el color de los ejes de referencia ubicado en la Figura 5.11

$$A_3 = \begin{bmatrix} -s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ c\theta_2 & 0 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -s\theta_3 & -c\theta_3 & 0 & -a_2s\theta_3 \\ c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2c\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3c\theta_4 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & a_3s\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

En donde las funciones seno y coseno se abrevian como  $s\theta$  y  $c\theta$

La solución cinemática directa a partir de sus matrices de transformación homogénea  $T_0^5$  es:

$$H_0^5 = A_1A_2A_3A_4A_5 = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & d_x \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & d_y \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$R_{1,1} = c\theta_1c\theta_3c\theta_4 - c\theta_1s\theta_3s\theta_4 - c\theta_3s\theta_1s\theta_2s\theta_4 - c\theta_4s\theta_1s\theta_2s\theta_3$$

$$R_{1,2} = s\theta_1s\theta_2s\theta_3s\theta_4 - c\theta_1c\theta_4s\theta_3 - c\theta_3c\theta_4s\theta_1s\theta_2 - c\theta_1c\theta_3s\theta_4$$

$$R_{1,3} = c\theta_2s\theta_1$$

$$R_{2,1} = c\theta_3c\theta_4s\theta_1 - s\theta_1s\theta_3s\theta_4 + c\theta_1c\theta_3s\theta_2s\theta_4 + c\theta_1c\theta_4s\theta_2s\theta_3$$

$$R_{2,2} = c\theta_1c\theta_3c\theta_4s\theta_2 - c\theta_4s\theta_1s\theta_3 - c\theta_3s\theta_1s\theta_4 - c\theta_1s\theta_2s\theta_3s\theta_4$$

$$R_{2,3} = -c\theta_1c\theta_2$$

$$R_{3,1} = s(\theta_3 + \theta_4)c\theta_2$$

$$R_{3,2} = c(\theta_3 + \theta_4)c\theta_2$$

$$R_{3,3} = s\theta_2$$

$$d_x = a_1 + a_2c\theta_1c\theta_3 + a_3c\theta_1c\theta_3c\theta_4 - a_3c\theta_1s\theta_3s\theta_4 - a_2s\theta_1s\theta_2s\theta_3 - a_3c\theta_3s\theta_1s\theta_2s\theta_4 - a_3c\theta_4s\theta_1s\theta_2s\theta_3$$

$$d_y = a_2c\theta_3s\theta_1 + a_3c\theta_3c\theta_4s\theta_1 + a_2c\theta_1s\theta_2s\theta_3 - a_3s\theta_1s\theta_3s\theta_4 + a_3c\theta_1c\theta_3s\theta_2s\theta_4 + a_3c\theta_1c\theta_4s\theta_2s\theta_3$$

$$d_z = c\theta_2(a_3s(\theta_3 + \theta_4) + a_2s\theta_3)$$

### 5.3. Modelo cinemático inverso

Para el análisis cinemático inverso se empleó el método algebraico para determinar la orientación del exoesqueleto de tipo rotacional. Para esto se toma como base la matriz homogénea que se obtuvo en la cinemática directa en su forma de la ecuación 3.2 y posteriormente se obtienen sus matrices inversas, como se desarrolla a continuación:

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$A_4^{-1} = \begin{bmatrix} -s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & -a_2 \\ -c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

1. Obtener  $\theta_1$

$$A_2^{-1}A_1^{-1}H_0^5 = A_3A_4A_5 \quad (5.11)$$

$$\begin{bmatrix} n_y c\theta_1 - n_x s\theta_1 & s_y c\theta_1 - s_x s\theta_1 & a_y c\theta_1 - a_x s\theta_1 & p_y c\theta_1 - p_x s\theta_1 + a_1 s\theta_1 \\ -n_z & -s_z & -a_z & -p_z \\ -n_x c\theta_1 - n_y s\theta_1 & -s_x c\theta_1 - s_y s\theta_1 & -a_x c\theta_1 - a_y s\theta_1 & -a_1 c\theta_1 - p_y s\theta_1 - p_x c\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} s(\theta_3 + \theta_4)s\theta_2 & c(\theta_3 + \theta_4)s\theta_2 & -c\theta_2 & s\theta_2(a_3s(\theta_3 + \theta_4) + a_2s\theta_3) \\ -s(\theta_3 + \theta_4)c\theta_2 & -c(\theta_3 + \theta_4)c\theta_2 & -s\theta_2 & -c\theta_2(a_3s(\theta_3 + \theta_4) + a_2s\theta_3) \\ -c(\theta_3 + \theta_4) & s(\theta_3 + \theta_4) & 0 & -a_3c(\theta_3 + \theta_4) - a_2c\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se toman los valores de los elementos en las posiciones (3,3) de ambos lados de la igualdad

$$-a_x c\theta_1 - a_y s\theta_1 = 0 \quad (5.12)$$

Por lo tanto, se obtiene  $\theta_1$ :

$$\theta_1 = -\tan^{-1}\left(\frac{a_x}{a_y}\right) \quad (5.13)$$

2. Obtener  $\theta_2$ 

$$A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}H_0^5 = A_4A_5 \quad (5.14)$$

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & d_x \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & d_y \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s(\theta_3 + \theta_4) & -c(\theta_3 + \theta_4) & 0 & -a_3s(\theta_3 + \theta_4) - a_2s\theta_3 \\ c(\theta_3 + \theta_4) & -s(\theta_3 + \theta_4) & 0 & a_3c(\theta_3 + \theta_4) + a_2c\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{1,1} = n_x s\theta_1 s\theta_2 - n_y c\theta_1 s\theta_2 - n_z c\theta_2$$

$$R_{1,2} = s_x s\theta_1 s\theta_2 - s_y c\theta_1 s\theta_2 - s_z c\theta_2$$

$$R_{1,3} = a_x s\theta_1 s\theta_2 - a_y c\theta_1 s\theta_2 - a_z c\theta_2$$

$$R_{1,4} = p_x s\theta_1 s\theta_2 - p_y c\theta_1 s\theta_2 - p_z c\theta_2 - a_1 s\theta_1 s\theta_2$$

$$R_{2,1} = n_x c\theta_1 + n_y s\theta_1$$

$$R_{2,2} = s_x c\theta_1 + s_y s\theta_1$$

$$R_{2,3} = a_x c\theta_1 + a_y s\theta_1$$

$$R_{2,4} = p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 - a_1 c\theta_1$$

$$R_{3,1} = n_z s\theta_2 - n_y c\theta_1 c\theta_2 + n_x c\theta_2 s\theta_1$$

$$R_{3,2} = s_z s\theta_2 - s_y c\theta_1 c\theta_2 + s_x c\theta_2 s\theta_1$$

$$R_{3,3} = a_z s\theta_2 - a_y c\theta_1 c\theta_2 + a_x c\theta_2 s\theta_1$$

$$R_{3,4} = p_z s\theta_2 - p_y c\theta_1 c\theta_2 + p_x c\theta_2 s\theta_1 - a_1 c\theta_2 s\theta_1$$

Se toman los valores de los elementos en las posiciones (1,3) de ambos lados de la igualación:

$$a_x s\theta_1 s\theta_2 - a_y c\theta_1 s\theta_2 - a_z c\theta_2 = 0 \quad (5.15)$$

Por lo tanto, se obtiene  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{a_z}{a_x s\theta_1 - a_y c\theta_1}\right) \quad (5.16)$$

3. Obtener  $\theta_3$ 

$$A_4^{-1}A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}H_0^5 = A_5 \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & M_{1,4} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3c\theta_4 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & a_3s\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_{1,1} &= n_x c\theta_1 c\theta_3 + n_y c\theta_3 s\theta_1 + n_z c\theta_2 s\theta_3 + n_y c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - n_x s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
M_{1,2} &= s_x c\theta_1 c\theta_3 + s_y c\theta_3 s\theta_1 + s_z c\theta_2 s\theta_3 + s_y c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s_x s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
M_{1,3} &= a_x c\theta_1 c\theta_3 + a_y c\theta_3 s\theta_1 + a_z c\theta_2 s\theta_3 + a_y c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - a_x s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
M_{1,4} &= p_x c\theta_1 c\theta_3 - a_2 + p_y c\theta_3 s\theta_1 + p_z c\theta_2 s\theta_3 - a_1 c\theta_1 c\theta_3 + p_y c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - p_x s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + \\
&\quad a_1 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
M_{2,1} &= n_z c\theta_2 c\theta_3 - n_x c\theta_1 s\theta_3 - n_y s\theta_1 s\theta_3 + n_y c\theta_1 c\theta_3 s\theta_2 - n_x c\theta_3 s\theta_1 s\theta_2 \\
M_{2,2} &= s_z c\theta_2 c\theta_3 - s_x c\theta_1 s\theta_3 - s_y s\theta_1 s\theta_3 + s_y c\theta_1 c\theta_3 s\theta_2 - s_x c\theta_3 s\theta_1 s\theta_2 \\
M_{2,3} &= a_z c\theta_2 c\theta_3 - a_x c\theta_1 s\theta_3 - a_y s\theta_1 s\theta_3 + a_y c\theta_1 c\theta_3 s\theta_2 - a_x c\theta_3 s\theta_1 s\theta_2 \\
M_{2,4} &= p_z c\theta_2 c\theta_3 - p_x c\theta_1 s\theta_3 - p_y s\theta_1 s\theta_3 + a_1 c\theta_1 s\theta_3 + p_y c\theta_1 c\theta_3 s\theta_2 - p_x c\theta_3 s\theta_1 s\theta_2 + \\
&\quad a_1 c\theta_3 s\theta_1 s\theta_2 \\
M_{3,1} &= n_z s\theta_2 - n_y c\theta_1 c\theta_2 + n_x c\theta_2 s\theta_1 \\
M_{3,2} &= s_z s\theta_2 - s_y c\theta_1 c\theta_2 + s_x c\theta_2 s\theta_1 \\
M_{3,3} &= a_z s\theta_2 - a_y c\theta_1 c\theta_2 + a_x c\theta_2 s\theta_1 \\
M_{3,4} &= p_z s\theta_2 - p_y c\theta_1 c\theta_2 + p_x c\theta_2 s\theta_1 - a_1 c\theta_2 s\theta_1
\end{aligned}$$

Se toman los valores de los elementos en las posiciones (1,3) de ambos lados de la igualdad

$$a_x c\theta_1 c\theta_3 + a_y c\theta_3 s\theta_1 + a_z c\theta_2 s\theta_3 + a_y c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - a_x s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 = 0 \quad (5.18)$$

Por lo tanto, se obtiene  $\theta_3$ :

$$\theta_3 = -\tan^{-1}\left(\frac{a_x c\theta_1 + a_y s\theta_1}{a_z c\theta_2 + a_y c\theta_1 s\theta_2 - a_x s\theta_1 s\theta_2}\right) \quad (5.19)$$

4. Obtener  $\theta_4$ , se utiliza la ecuación 5.17 y se toma los valores de los elementos en las posiciones (1,1) de ambos lados de la igualdad

$$n_x c\theta_1 c\theta_3 + n_y c\theta_3 s\theta_1 + n_z c\theta_2 s\theta_3 + n_y c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - n_x s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 = c\theta_4 \quad (5.20)$$

Por lo tanto, se obtiene  $\theta_4$ :

$$\theta_4 = \cos^{-1}(n_x c\theta_1 c\theta_3 + n_y c\theta_3 s\theta_1 + n_z c\theta_2 s\theta_3 + n_y c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - n_x s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3) \quad (5.21)$$

## 5.4. Cinemática diferencial

La cinemática diferencial nos permite describir el movimiento de los cuerpos sólidos sin tener en cuenta su causa subyacente (fuerza) y se limita principalmente al estudio de las órbitas en función del tiempo, es decir, nos permite saber la velocidad lineal y angular del exoesqueleto.

## Velocidad lineal

Para obtener la velocidad lineal del efector final se desarrolla la ecuación 3.13 que es por la regla de la cadena para la diferenciación, como se desarrolla a continuación:

$$J_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial d_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial d_x}{\partial \theta_3} & \frac{\partial d_x}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial d_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial d_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial d_y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial d_y}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial d_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial d_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial d_z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial d_z}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

En donde los valores  $d_x, d_y$  y  $d_z$  son los valores obtenidos en la ecuación D.1, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_x}{\partial \theta_1} &= a3 * s(\theta_1) * s(\theta_3) * s(\theta_4) - a3 * c(\theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_1) - a2 * c(\theta_1) * s(\theta_2) * s(\theta_3) - \\ &\quad a2 * c(\theta_3) * s(\theta_1) - a3 * c(\theta_1) * c(\theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) - a3 * c(\theta_1) * c(\theta_4) * s(\theta_2) * s(\theta_3) \\ \frac{\partial d_y}{\partial \theta_1} &= a2 * c(\theta_1) * c(\theta_3) + a3 * c(\theta_1) * c(\theta_3) * c(\theta_4) - a3 * c(\theta_1) * s(\theta_3) * s(\theta_4) - \\ &\quad a2 * s(\theta_1) * s(\theta_2) * s(\theta_3) - a3 * c(\theta_3) * s(\theta_1) * s(\theta_2) * s(\theta_4) a3 * c(\theta_4) * s(\theta_1) * s(\theta_2) * s(\theta_3) \\ \frac{\partial d_z}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{\partial d_x}{\partial \theta_2} &= -a2 * c(\theta_2) * s(\theta_1) * s(\theta_3) - a3 * c(\theta_2) * c(\theta_3) * s(\theta_1) * s(\theta_4) - \\ &\quad a3 * c(\theta_2) * c(\theta_4) * s(\theta_1) * s(\theta_3) \\ \frac{\partial d_y}{\partial \theta_2} &= a2 * c(\theta_1) * c(\theta_2) * s(\theta_3) + a3 * c(\theta_1) * c(\theta_2) * c(\theta_3) * s(\theta_4) + \\ &\quad a3 * c(\theta_1) * c(\theta_2) * c(\theta_4) * s(\theta_3) \\ \frac{\partial d_z}{\partial \theta_2} &= -s(\theta_2) * (a3 * s(\theta_3 + \theta_4) + a2 * s(\theta_3)) \\ \frac{\partial d_x}{\partial \theta_3} &= a3 * s(\theta_1) * s(\theta_2) * s(\theta_3) * s(\theta_4) - a3 * c(\theta_1) * c(\theta_3) * s(\theta_4) - a3 * c(\theta_1) * c(\theta_4) * s(\theta_3) - \\ &\quad a2 * c(\theta_3) * s(\theta_1) * s(\theta_2) - a3 * c(\theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_1) * s(\theta_2) - a2 * c(\theta_1) * s(\theta_3) \\ \frac{\partial d_y}{\partial \theta_3} &= a2 * c(\theta_1) * c(\theta_3) * s(\theta_2) - a2 * s(\theta_1) * s(\theta_3) - a3 * c(\theta_3) * s(\theta_1) * s(\theta_4) - \\ &\quad a3 * c(\theta_4) * s(\theta_1) * s(\theta_3) + a3 * c(\theta_1) * c(\theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) - a3 * c(\theta_1) * s(\theta_2) * \\ &\quad s(\theta_3) * s(\theta_4) \\ \frac{\partial d_z}{\partial \theta_3} &= c(\theta_2) * (a3 * c(\theta_3 + \theta_4) + a2 * c(\theta_3)) \\ \frac{\partial d_x}{\partial \theta_4} &= a3 * s(\theta_1) * s(\theta_2) * s(\theta_3) * s(\theta_4) - a3 * c(\theta_1) * c(\theta_4) * s(\theta_3) - \\ &\quad a3 * c(\theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_1) * s(\theta_2) - a3 * c(\theta_1) * c(\theta_3) * s(\theta_4) \\ \frac{\partial d_y}{\partial \theta_4} &= a3 * c(\theta_1) * c(\theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) - a3 * c(\theta_4) * s(\theta_1) * s(\theta_3) - \\ &\quad a3 * c(\theta_3) * s(\theta_1) * s(\theta_4) - a3 * c(\theta_1) * s(\theta_2) * s(\theta_3) * s(\theta_4) \\ \frac{\partial d_z}{\partial \theta_4} &= a3 * c(\theta_3 + \theta_4) * c(\theta_2) \end{aligned}$$

## Velocidad angular

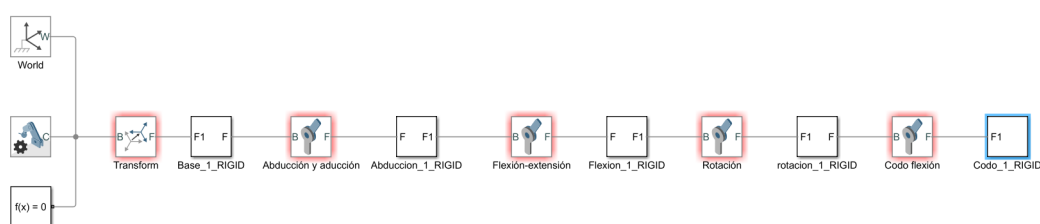
Para obtener la velocidad angular total del efector final se desarrolla la ecuación 3.12, en donde los valores de la variable  $z_{i-1}$  de la ecuación se obtienen de los datos obtenidos en las matrices de rotación de cada matriz homogénea ( $A_i$ ) de la cinemática directa, por lo tanto, se obtiene:

$$J_\omega = \begin{bmatrix} \rho_1 z_0 & \cdots & \rho_n z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c\theta_1 & c\theta_2 s\theta_1 \\ 0 & 0 & -s\theta_1 & -c\theta_1 c\theta_2 \\ 1 & 1 & 0 & s\theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$



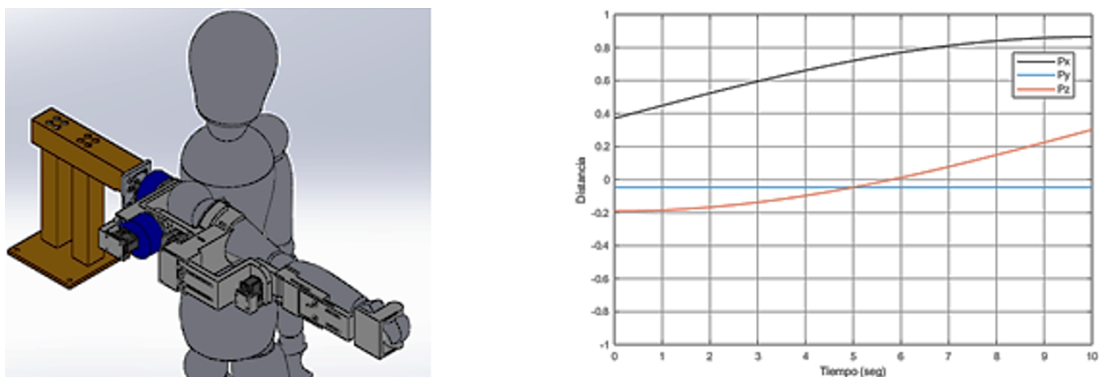
## 5.5. Simulación del modelo cinemático

Para la validación del modelo cinemático del exoesqueleto propuesto, se realizaron simulaciones empleando el software Matlab® que contiene un complemento que permite crear modelos de sistemas físicos de SolidWorks® dentro del entorno de simulink, para esto se configuraron las articulaciones del exoesqueleto y se programa cada articulación de acuerdo a los cálculos obtenidos previamente para poder comprobar de manera independiente cada movimiento de las articulaciones con respecto al tiempo y además conocer la posición del efector final. En la Figura 5.12 se observa la configuración inicial del exoesqueleto en simulink en donde se representan las cuatro articulaciones de tipo rotacional.



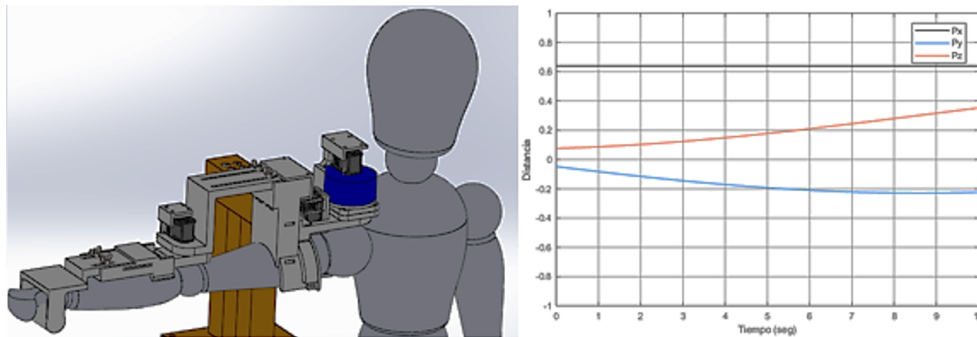
**Figura 5.12:** Representación de las cuatro articulaciones del exoesqueleto en simulink.

En la Figura 5.13 se observa la posición final del exoesqueleto al realizar una flexión de  $90^\circ$  y en la gráfica se representa el desplazamiento que se sigue partiendo desde la posición anatómica hasta alcanzar los  $90^\circ$  de movimiento a lo largo de 10 segundos en donde, la línea azul es la posición en y, la línea negra es la posición en x y la línea roja es la posición en z. Para lograr este movimiento en la ecuación D.1 se consideran los siguientes parámetros:  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $\theta_3 = 90^\circ$ ,  $\theta_4 = 0$ .



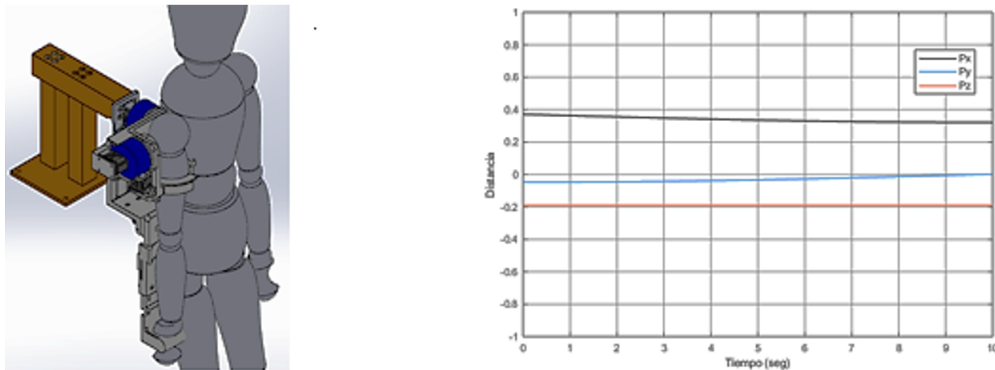
**Figura 5.13:** Movimiento de flexión a  $90^\circ$ , en donde el eje horizontal representa el tiempo en segundos y el eje vertical la distancia recorrida en metros.

En la Figura 5.14 se muestra en la parte derecha la posición del exoesqueleto al realizar una abducción a  $90^\circ$ , mientras que en la parte derecha se visualiza una gráfica que representa el desplazamiento que siguió el efector final partiendo desde la posición anatómica hasta alcanzar los  $90^\circ$  de movimiento en 10 segundos. Para lograr este movimiento en la ecuación D.1 se consideran los siguientes parámetros:  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 90^\circ$ ,  $\theta_3 = 0$ ,  $\theta_4 = 0$ .



**Figura 5.14:** Movimiento de abducción a  $90^\circ$ , en donde el eje horizontal representa el tiempo en segundos y el eje vertical la distancia recorrida en metros.

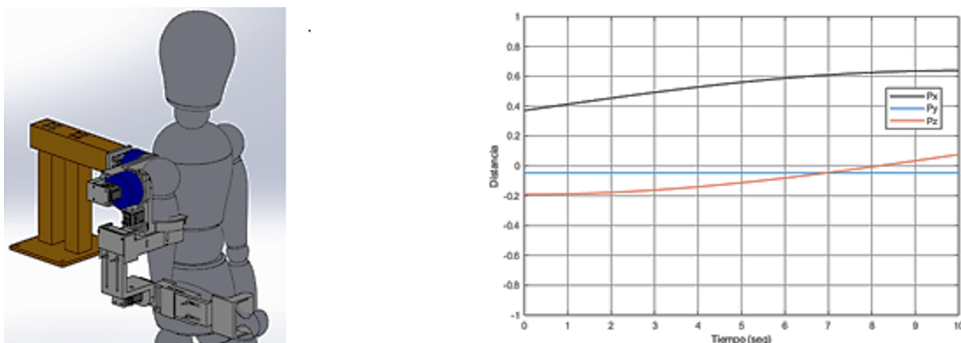
En la Figura 5.15 se visualiza en la parte derecha la posición final del exoesqueleto al realizar una rotación interna a  $90^\circ$ , y en la parte derecha se observa su gráfica que representa el desplazamiento que siguió el efector final partiendo desde la posición anatómica hasta alcanzar los  $90^\circ$  de movimiento en 10 segundos. Para lograr este movimiento en la ecuación D.1 se consideran los siguientes parámetros:  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $\theta_3 = 0$ ,  $\theta_4 = 0$



**Figura 5.15:** Movimiento de rotación interna a  $90^\circ$ , en donde el eje horizontal representa el tiempo en segundos y el eje vertical la distancia recorrida en metros.

En la Figura 5.16 se muestra en la parte derecha la posición del exoesqueleto al realizar una abducción a  $90^\circ$ , mientras que en la parte derecha se visualiza una gráfica que representa el desplazamiento que siguió el efector final partiendo desde la posición anatómica hasta alcanzar los  $90^\circ$  de movimiento en 10 segundos. Para lograr

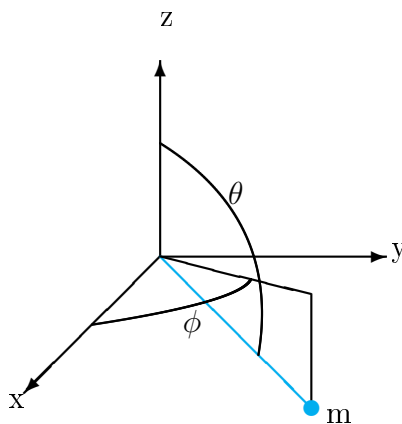
este movimiento en la ecuación D.1 se consideran los siguientes parámetros:  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $\theta_3 = 0$ ,  $\theta_4 = 90^\circ$



**Figura 5.16:** Movimiento de flexión del codo a  $90^\circ$ , en donde el eje horizontal representa el tiempo en segundos y el eje vertical la distancia recorrida en metros.

## 5.6. Modelo dinámico

El análisis dinámico se consideró por medio del análisis de péndulo esférico debido a que en la articulación glenohumeral (Figura 2.3) es una articulación esférica porque es donde se localizan los tres movimientos del hombro actuando como un péndulo esférico. En la siguiente imagen se representa de manera gráfica el péndulo esférico con respecto a los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$  y  $m$  como la masa del brazo.



Para el análisis de la articulación se realiza mediante la ecuación 3.18 de Lagrange, pero previamente se transforman las coordenadas esféricas a cartesianas para poder obtener las velocidades y posteriormente obtener la función de Lagrange 3.19.

Las coordenadas esféricas a cartesianas son:

$$X_1 = l \cos \phi \sin \theta \quad Y_1 = l \sin \phi \sin \theta \quad Z_1 = l \cos \theta \quad (5.24)$$

Las velocidades con respecto a cada una de las coordenadas son:

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - l\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi \quad (5.25)$$

$$\dot{y} = l\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + l\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi \quad (5.26)$$

$$\dot{z} = -l\dot{\theta}\sin\theta \quad (5.27)$$

Se emplea la función de Lagrange 3.19 con los valores previamente calculados, como se desarrolla a continuación:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m((l\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - l\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)^2 + (l\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + l\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)^2 + (-l\dot{\theta}\sin\theta)^2) - mgl\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta - mgl\cos\theta \quad (5.28)$$

La ecuación de movimiento con respecto a  $\theta$  utilizando las ecuaciones 5.28 y la ecuación de Lagrange 3.18:

$$\frac{d(m l^2 \dot{\theta})}{dt} - m l^2 \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta - m g l \sin\theta = 0 \quad (5.29)$$

La ecuación de movimiento con respecto a  $\phi$  utilizando las ecuaciones 5.28 y la ecuación de Lagrange 3.18:

$$\frac{d(m l^2 \dot{\phi} \sin^2\theta)}{dt} = 0 \quad (5.30)$$

Para describir la dinámica de cadena de los eslabones en las coordenadas del espacio articular, se representa por medio de la ecuación 3.20, tal como se muestran en el apéndice C en donde se indica la matriz de inercia, la matriz de Coriolis y el vector de gravedad.

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo a futuro

### 6.1. Conclusiones

En este trabajo se comprueba que la hipótesis es aceptada porque si fue posible diseñar un exoesqueleto de hombro para la rehabilitación motora de pacientes mexicanos con ECV durante las etapas donde se requiera tener al paciente en posición de pie o sentado.

En donde la única limitante en el diseño se presenta en el movimiento de abducción, esto debido a que en la parte del hombro se ubican los motores y para evitar que topen los motores con el rostro del paciente, se limitó su movilidad a un ángulo máximo de  $130^\circ$ , es decir, no se logra alcanzar el rango máximo de movimiento ( $180^\circ$ ).

En particular, para el movimiento de la articulación del codo, únicamente se contempló un rango de movimiento entre  $90^\circ$  y  $145^\circ$ ; sin embargo, al ser un diseño para pacientes con ECV no requiere que los rangos de movimiento sean largos como el de los sujetos sanos. Por otro lado, la estructura del diseño, a nivel mecánico, contempla un soporte para el brazo completo, lo que ayuda a reducir movimientos involuntarios por parte del paciente durante las sesiones de rehabilitación.

Además, al considerarse materiales de impresión 3D, los costos de fabricación se minimizan a comparación de emplear la manufactura convencional por medio de tornos y/o fresadoras y además se demuestra que si es viable la obtención de un diseño seguro al obtener un factor de seguridad mayor de 1.

### 6.2. Trabajo a futuro

Actualmente, el exoesqueleto se encuentra en la fase de simulación del modelado dinámico, pero con la finalidad de seguir dando seguimiento al tema de tesis, se propone algunos puntos para mejorar el proyecto:

- Aplicar las señales electromiográficas
- Implementar diversas leyes de control en donde permita disminuir la fuerza ejercida por el exoesqueleto en la medida en que aumenta la paciente.

- Realizar el diseño electrónico de tal manera que no interfiera con el movimiento mecánico.
- Programar una interfaz amigable que le permita al fisioterapeuta programar rutinas.
- Realizar el diseño en físico implementando todo lo mencionado anteriormente.
- Realizar pruebas en pacientes sanos para posteriormente hacer pruebas en sujetos con dicha enfermedad.

# Apéndice A

## Electromiograma (EMG)

Se realizó un prototipo de electromiograma utilizando amplificadores operacionales, con ello se realizó la adquisición de señales EMG utilizando el software Matlab®. la finalidad de este prototipo es emplearlo más adelante en el exoesqueleto como sensor de actividad muscular.

# Electromyogram (EMG) construction using op amps

Edgar Giovany Ibarra Zea

División de Estudios de Posgrado, Instituto Tecnológico de Nuevo León  
Maestría en Ingeniería

**Abstract**—Operational amplifiers are applied for the design of electrical circuits in areas such as biomedical for signal acquisition. Therefore, this article will present the configurations required for the construction of an electromyogram (EMG) using operational amplifiers to subsequently perform the acquisition of signals through the use of Matlab software.

**Index Terms**—Operational Amplifier, Electromyogram.

## I. INTRODUCTION

The human body generates electrical signals called biopotentials, these signals are acquired and interpreted by medical measurement equipment. Wherein, the uptake of electrical signals produced by the muscles during a muscle contraction is known as electromyography (EMG). EMG is used, in the field of medicine, and consists of the acquisition, recording, and analysis of the electrical activity generated in nerves and muscles through the use of electrodes,[1]

The typical amplitude of EMG signals is 100 mV and it has a bandwidth of 1 kHz due to the low electrical potential they have, they must be amplified in order to be processed or recorded,[1]

Some biopotential amplifiers use three electrodes: two electrodes placed in the middle and the end of the biceps, and the third-placed on the bony part the elbow for reference how we can see in Fig.1,[2]



Fig. 1. Positions for electrode placement.

In this work, the design of the electromyogram is carried out in six stages: signal acquisition, amplification, filtering, rectification, smoothing, inverting.[3]

For the acquisition of the signals, the Arduino development board is used and with this, an interface is created with Matlab to visualize and interpret the signals.

## II. MATERIALS

For this work, the following material was used

- 3 Op-Amp UA741
- 3 Op-Amp TL072
- Linear power supply  $\pm 12$
- Arduino One
- Software Matlab
- 3 Electrodes SEN-12969
- 2 Diode 1N4148
- 3 Alligator cables (Substitute for EMG Cables)
- Resistances:

Quantity	Type	Capacity
2	Resistor	1 M $\Omega$
3	Resistor	150 K $\Omega$
2	Resistor	87 K $\Omega$
4	Resistor	47 K $\Omega$
2	Resistor	27 K $\Omega$
6	Resistor	10 K $\Omega$
1	Resistor	3.3 K $\Omega$
1	Resistor	1 K $\Omega$
1	Trimmer	20 K $\Omega$

- Capacitor:

Quantity	Type	Capacity
1	Electrolytic	1 $\mu$ F
2	Tantalum	1 $\mu$ F
1	Ceramic	0.01 $\mu$ F

## III. METHODS

*A. Stage 1 circuit: signal acquisition implemented with 3 UA741 as an instrumentation amplifier.*

For the first stage, the design of an instrumentation amplifier is implemented using a UA741 array for signal acquisition.

Fig. 2 shows the first stage of the EMG consisting of a differential operational amplifier, commonly known as an instrumentation amplifier.

This first stage allows you to capture the difference in electrical signals that trigger muscle contractions and amplify them to a higher level.



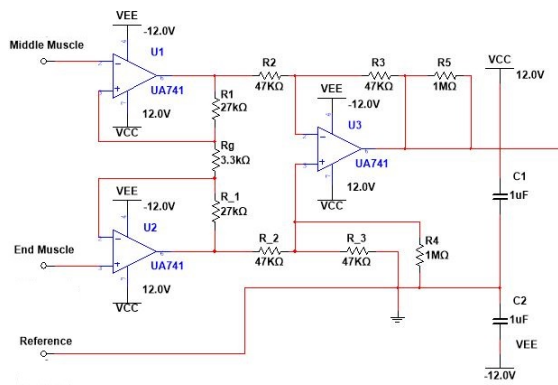


Fig. 2. Stage 1 circuit: Signal acquisition.

**B. Stage 2: Amplification.**

The second stage is responsible for amplifying the input signal with the reverse configuration with a gain of 15.

The signal must be amplified again, that is why in Fig. 3 the amplification stage is shown, for which the OP-AMP TL072 was used.

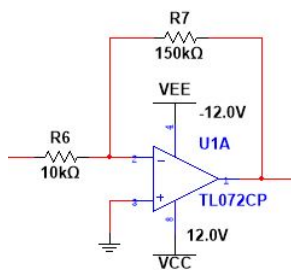


Fig. 3. Stage 2 circuit: Amplification using the non-inverting configuration.

**C. Stage 3: Filtering.**

When a desired signal is amplified, there are "parasitic" signals that only distort the information that is really wanted to be recovered. To avoid this, the signal is filtered with a high pass filter. Fig. 4 shows the circuit for this stage.

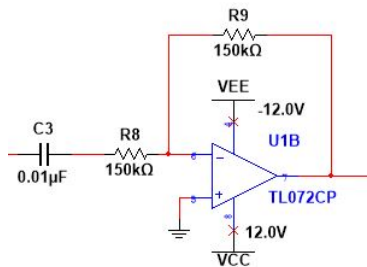


Fig. 4. Stage 3 circuit: Filtering using high pass filter with the non-inverting configuration.

**D. Stage 4: Rectification.**

For this stage of it was decided to use a precision rectifier because it is essential that the voltage levels are only positive in order to convert the signal to a digital level how show in Fig. 5 That is why the Arduino development board only supports positive levels to be able to convert them to digital data through its ADC converter.

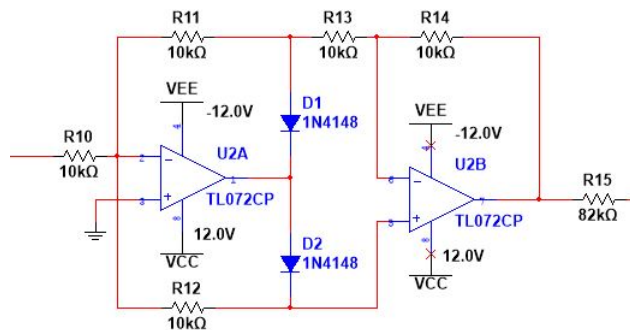


Fig. 5. Stage 4 circuit: Filtering.

**E. Stage 5: Smoothing.**

In this stage 5, the signal is filtered in order to discriminate the high frequencies, thus obtaining only information on the low frequencies. For this reason, a low-pass filter with a cutoff frequency of 1.975 Hz was used. This in order that, with each flexion or muscular activity, the voltage produced by the muscle increases and when there is no muscular activity, the average voltage remains close to zero.

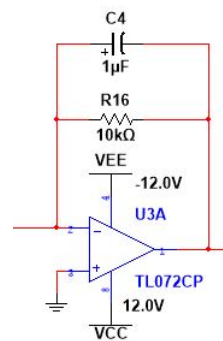


Fig. 6. Stage 5 circuit: Filtering low pass setup using an RC circuit.

**F. Stage 6: Smoothing.**

In this last stage of the circuit, the inverter amplifier configuration is used, with an adjustable gain of 20KΩ. At this stage, voltage variations of up to 5v can be obtained. Through the output shown by the last amplifier, the signal can be acquired through Arduino and interpreted through the use of Matlab.

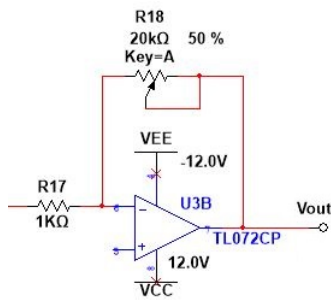


Fig. 7. Stage 6 circuit: Inverter configuration with adjustable gain.

### G. Data acquisition using Matlab and Arduino

To acquire the signals, the Arduino development board is used and through its serial port the signals are sent to Matlab to visualize and interpret the signals using the following Matlab code.

```

clc
close all
clear all

ar = arduino('COM3');
Fs= 30;
N =90;
y =zeros(N,1); %Entrada%
w =zeros(N,1); %Salida%
t=linspace(0,(N-1)/Fs,N);
l1=line(nan,nan,'Color','r','LineWidth',2);
l2=line(nan,nan,'Color','b','LineWidth',2);
ylim([0 3.5])
xlim([0.5 (N-1)/Fs])
grid
Stop =1;
uicontrol('Style','Pushbutton','String','Parar',
,... 'Callback','Stop_=0;')
tic
while Stop
    if toc > 1/Fs
        tic
        y(1:end-1)=y(2:end);
        w(2:end-1)=w(2.5:end);
        y(end)= ar . analogRead(0)*5/1023;
        w(end)= ar . analogRead(1)*5/1023;
        set(l1,'XData',t,'YData',y)
        set(l2,'XData',t,'YData',w)
        drawnow
    end
end
end

```

## IV. RESULTS

Below are the results obtained from the implementation of the electrical circuit of an EMG using two electrodes for data collection and one for reference.

In Fig. 8 shows the electromyogram circuit.

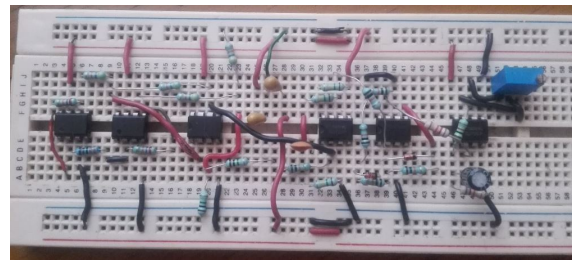


Fig. 8. Electromyogram electrical circuit.

In Fig. 9 shows the electrical circuit armed with the op-amps power connections and the electrode connections represented by the alligator cables.

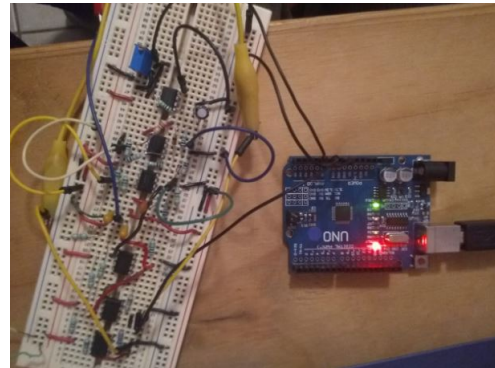


Fig. 9. Electromyogram electrical circuit with its power connections.

In Fig. 10 the connection of the three electrodes is represented: two electrodes placed in the middle part and the final part of the biceps, and the third placed in the bony part of the elbow as a reference.

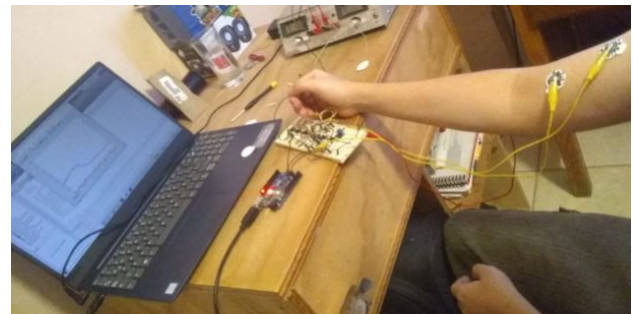


Fig. 10. Electrode connection.

In Fig. 11 shows the graph obtained by Matlab when the arm is at rest, as shown in figure 10. Where the input signal is represented by the red line and the output signal is represented by the blue line.

It is observed that when there is no muscle activity, the average voltage remains close to zero.

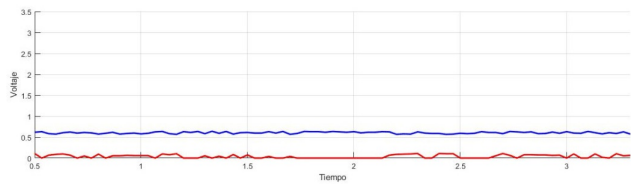


Fig. 11. Graph obtained when muscle is at rest.

In the Fig. 12 is represented a activity muscular, by performing a flexing movement.



Fig. 12. Representation of activity muscular.

In Fig. 13 shows the graph obtained when flexing muscle activity is being performed, as shown in figure 12. The graph shows that the output voltage increases to 2V as the movement is carried out and then the muscle tension is kept constant.

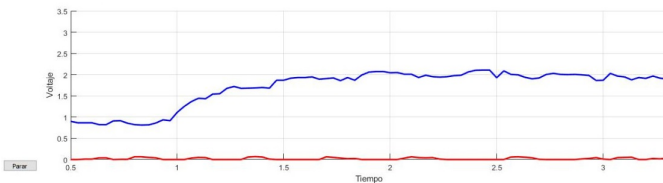


Fig. 13. Graph obtained when doing muscle activity.

Fig. 14 represents the graph when the muscular activity of the person's arm varies, to the point of keeping it at rest.

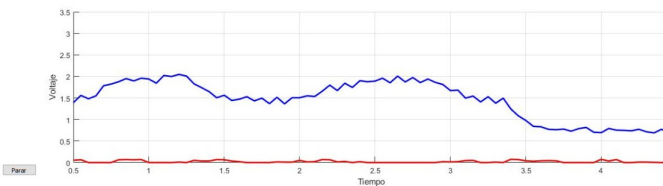


Fig. 14. Graphical representation when muscle activity varies.

## V. CONCLUSION

Developing an EMG requires basic knowledge of op-amps. For this EMG to be more accurate and to reduce unwanted signals such as noise, the use of the built-in INA106 is recommended. The EMG can be applied in the medical field to

measure the level of progress in the rehabilitation of damaged limbs, this derived from an accident or disease thanks to the fact that the EMG has the ability to pick up the electrical signals produced by the muscles.

## REFERENCES

- 1 García, A. M., *Estudio técnico de configuraciones operacionales para el diseño de etapas de amplificación para el registro de biopotenciales.* "Universidad politécnica de Cartagena", 2013.
- 2 Kin Ching Wonk, K. Z., *Muscle activity monitor*, 2016.
- 3 Tighe, M., "Prosthetic oss," url <https://prostheticoss.wordpress.com/2015/03/19/emg-success/>, 2015.

# Apéndice B

## Artículo de congreso

### Memorias del XLIV Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica (CNIB)

Se realizó una publicación de congreso en la Sociedad Mexicana de Ingeniería

Ibarra-Zea, E., Martínez Peón, D. C., Sosa Méndez, D. (2021). Diseño y Modelado Cinemático de Exoesqueleto de Hombro para Paciente con Enfermedad Cerebrovascular. *Memorias Del Congreso Nacional De Ingeniería Biomédica*, 8(1), 201–204. Retrieved from <https://memoriascnib.mx/index.php/memorias/article/view/859>

# Diseño y Modelado Cinemático de Exoesqueleto de Hombro para Pacientes con Enfermedad Cerebrovascular

E. G. Ibarra Zea<sup>1</sup>, D. C. Martínez Peon<sup>2\*</sup>, D. Sosa Mendez<sup>3</sup>

<sup>1</sup>División de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Tecnológico de Nuevo León, Guadalupe, México.

<sup>2</sup>Departamento de Eléctrica/Electrónica, Instituto Tecnológico de Nuevo León, Guadalupe, México.

<sup>3</sup>Departamento de Electromecánica, Instituto Tecnológico Superior de Poza Rica, Poza Rica, México.

\* [dulce.mp@nuevoleon.tecnm.mx](mailto:dulce.mp@nuevoleon.tecnm.mx)

**Abstract**— This paper presents the design of an exoskeleton to assist physiotherapists in the motor rehabilitation of the shoulder for the Mexican population over the age of 18, and in particular for people that have been suffering a stroke. This exoskeleton can perform the three basic movements of the shoulder (abduction-adduction, flexion-extension, and internal-external rotation) and is considered an extra movement in the part of the elbow that is flexion-extension, and epicyclic gearing in each link to reduce space and increment torque. The finite element analysis is presented for the verification of the materials selected in the design. In addition, direct kinematic modeling using Denavit-Hartenberg is presented and MATLAB® software is used to check the movements of each joint.

**Palabras clave**— Enfermedad Cerebrovascular, Exoesqueleto de hombro, Rehabilitación motora.

## I. INTRODUCCIÓN

En México se estima que 4.9 % de la población presenta discapacidad, de las cuales 11.1% presenta limitación (discapacidad motora) [1-2], y aunque no se cuentan con estadísticas por miembro, como lo es en el caso de España que en su último conteo se registró que el 29.5% de su población con discapacidad, esta es motora de miembro superior, [3]. El Instituto de Neurología, Neurocirugía y Enfermedad Cerebrovascular (INNECeV) considera que la enfermedad vascular cerebral (EVC) es una de las principales causas de discapacidad cognitiva y/o motora, [4]. Las EVC ocurren cuando el flujo de sangre que se dirige al cerebro se reduce o interrumpe debido al bloqueo o rotura de una de las arterias, lo que impide el funcionamiento normal del tejido cerebral por falta de oxígeno y nutrientes, provocando la muerte de las neuronas [5]. La Organización Mundial de Accidentes Cerebrovasculares (WSO por sus siglas en inglés *World Stroke Organization*) establece que 1 de cada 4 personas mayores de 25 años son afectadas por las EVC, y ante la presencia del virus COVID-19 aumentó dicho el riesgo, actualmente las personas mayores a 25 años las más vulnerables a recibir un infarto cerebrovascular [6]. Las personas sobrevivientes a esta enfermedad presentan deficiencias sensoriales y motoras, de las cuales es frecuente encontrar espasticidad, el cual es un trastorno que provoca que los músculos se contraigan provocando rigidez y acortamiento, lo cual interfiere con la movilidad de las

extremidades. Se recomienda que el paciente entre a un proceso de rehabilitación (cognitiva y/o motora, dependiendo de la afectación) para recuperar las habilidades e integrarse lo mejor posible a sus labores y mejorar su calidad de vida, [7-8].

En el caso de la rehabilitación motora, existe una alta demanda y la población con esta enfermedad va en aumento cada año. La rehabilitación tradicional se realiza con fisioterapeutas, pero actualmente se buscan alternativas para cubrir la demanda, entre las opciones se encuentran los exoesqueletos, estos pueden proporcionar rehabilitación intensiva a largo plazo, y sirven de apoyo a los fisioterapeutas, [9]. Comercialmente podemos encontrar exoesqueletos para miembro superior como el Artromot-S4, Armeo® Power, Orte, Armeo®Senso, Flsiotek y Jace S600, los cuales en promedio tienen un costo de adquisición mayor a medio millón de pesos mexicanos, sin considerar los gastos de mantenimiento.

En este trabajo se propone el diseño de un exoesqueleto de miembro superior que considere las medidas antropométricas de la población mexicana mayor de 18 años, el diseño considera eslabones adaptables y reductores epicicloidales planetarios en los actuadores, estos reductores se caracterizan porque ofrecen una alta conversión de potencia en comparación con otros y son compactos. La estructura se propone realizarla usando PLA a través de impresión 3D (peso aproximado 13.7kg), lo cual tendrá una reducción en costos de producción en piezas y mantenimiento. El diseño cuenta con los 3 movimientos rotacionales del hombro (abducción-aducción, flexión-extensión y rotación interna-externa), y un movimiento rotacional del codo (flexión-extensión), considerando los rangos de movimiento promedio del 80% para cada uno de ellos.

## II. METODOLOGÍA

Para el diseño se utilizó una base de datos con las medidas antropométricas de la población mexicana, se modeló el diseño propuesto mediante la metodología convencional de Denavit-Hartenberg (DH), finalmente se realizó el análisis de esfuerzos y se calculó el factor de seguridad.

### A. Medidas antropométricas

La población mexicana tiene dimensiones que difieren a las europeas o americanas, por ello, un estudio realizado por



la Universidad de Guadalajara muestra datos de 8,228 sujetos

TABLA I COMPARATIVA ENTRE LOS ESQUELETOS UTILIZANDO LAS MÉTRICAS, [15]

Dispositivo	Armeo power	ARTROMOT-S4	ORTE	Armeo®Senso	Flsiotek	Jace S600	Propuesto
Métrica							
Ángulo flexión y extensión del hombro [°]	40°-120°	110°-0°-10°	P	P	Flexion= 0°-180°	-30°-0°-100°	50°-180°
Ángulo aducción y abducción hombro [°]	-169°-50° (abd)	0°-30°-160°	Flexión	Flexión	0°-180° (abd)	40°-110°	0°-130°
Ángulo rotación interna-externa hombro [°]	0°-90°	90°-0°-90°	P	P	90°-0°-90°	60°-0°-70	-90°-0°-90°
Ángulo flexión y extensión codo	0°-100°	0°-30°-160	P	P	NP	NE	0°-90°
Longitud del brazo [cm]	25-34	NE	P	P	NP	20-32	28-44
Altura al hombro del paciente [cm]	85-125	120-210	P	P	NE	70-45	47-148
Edad de paciente	Adultos	Adultos	Adultos	Adultos	NE	Adultos	Adultos
Mecanismos de transporte	Móvil	Móvil	Móvil	Móvil	Móvil	Móvil	Móvil
Postura del paciente durante la terapia	Sentado y supino	Sentado y supino	Sentado y supino	Sentado y supino	Sentado y supino (abducción y rotación)	Sentado	Sentado y de pie
Peso del paciente	135kg	175 kg	NE	NE	NE	Ne	44.1-97.3

P=Permitido, NP= No permitido, NE=No especificado

en un rango de edad de 2 a 85 años, para la obtención de las medidas antropométricas utilizaron la metodología “Técnica antropométrica estandarizada” [11]. A partir de dicho estudio se obtuvieron las medidas antropométricas necesarias para el diseño del exoesqueleto, se usaron los datos de los percentiles 5 a 95 de las personas de 18-85 años, logrando ajustar el dispositivo al 90% de las longitudes de la población analizada. En Tabla I se muestra una comparativa de las métricas que tienen los dispositivos comerciales en comparación al diseño propuesto [15] y en la Tabla II se presentan el resumen de las medidas obtenidas para miembro superior, de mujeres y hombres mexicanos.

TABLA II  
MEDIDAS ANTROPOMÉTRICAS DE LA POBLACIÓN MEXICANA [11]

Dimensiones (cm)	Percentil 5%	Percentil 95%
Peso (kg)	44.1	97.3
Estatura (m)	1.3	1.7
Altura hombro	113.8	147.7
Altura nudillo	59.6	80
Altura hombro sentado	46.5	63.8
Longitud de la mano	15.7	18.5
Diámetro empuñadura	3.6	5

#### A. Diseño mecánico del exoesqueleto

Para la realización del diseño se consideraron las medidas antropométricas presentadas en la Tabla II, se tomaron en cuenta los rangos de movimiento del brazo tal como se muestra en la Tabla III donde se compara el rango del movimiento del brazo en una persona sana [14] con respecto a los ángulos de movimiento propuesto que logrará realizar el exoesqueleto sin que la estructura logre lastimar el hombro. Este diseño cuenta con la capacidad de adaptarse a una columna telescópica comercial modelo TLC 12ZWAS por medio de la base del exoesqueleto con la finalidad de

que pueda ser ajustada a la altura de los pacientes (sentado o de pie).

TABLA III  
RANGOS DE MOVIMIENTO DE HOMBRO Y DE EXOESQUELETO

Movimientos	Ángulos de movimiento en una persona sana	Ángulos de movimiento del exoesqueleto (propuesto)
Flexión-Extensión del hombro	-50° a 180°	-50° a 180°
Abducción-Aducción del hombro	0° a 180°	0° a 130°
Rotación del hombro	-90° a 90°	-90° a 90°
Flexión-Extensión del codo	0° a 145°	0° a 90°

Los reductores con los que cuenta el diseño propuesto son sistemas que consisten en trenes de engranajes que se adaptan a toda clase de mecanismos o maquinas dónde el par motor sé distribuye sobre las ruedas dentadas; debido a esto no es necesario establecer sincronización alguna y las marchas se pueden cambiar sin interrupción de la transmisión de fuerza.

#### B. Cinemática

Sé usó la metodología DH para el cálculo de la posición del robot (cinemática directa) debido a que el exoesqueleto es considerado como un robot manipulador de cadena abierta. Esta metodología permite que el usuario conozca la posición del efector final a partir de los movimientos de cada articulación por medio de la matriz de transformación homogénea [12].

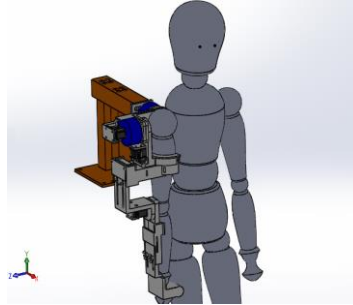
#### C. Análisis de Elementos Finitos (FEA)

El análisis de elemento finito se usa en el contexto de los desplazamientos y teorías de fallo como indicador de un buen diseño para materiales dúctiles, para esto se utilizó la herramienta de *SolidWorks® Simulation* la cual permite realizar la validación del diseño, este método es una técnica

numérica que resuelve un conjunto de ecuaciones diferenciales para calcular las deformaciones, tensiones y desplazamientos de una pieza o ensamble, de acuerdo a las fuerzas, materiales y restricciones aplicadas [13].

### III. RESULTADOS

La propuesta del diseño del exoesqueleto se muestra en la Fig. 1 junto con un maniquí que representaría a la persona en posición de reposo o posición anatómica, [10]. La estructura representada de color café es la base del exoesqueleto de aluminio aleación 6061, esta base se adapta a la columna telescópica modelo TLC 12ZWAS, el resto de la estructura mecánica es mediante impresión 3D con material filamento PLA, esto reduce los costos de producción en piezas complejas, ofrece una alta calidad y el peso final de la estructura es menor comparado con



materiales metálicos.

Fig. 1. Representación del diseño en SolidWorks® cuando el paciente se encuentre en posición de reposo o posición anatómica.

Respecto a los actuadores, se consideran cuatro servomotores (Dynamixel MX-64) que ofrecen un par de 6 Nm a 12V, adaptándose a las necesidades de diseño (reductores, controladores, drives y red). Considerando como situación crítica cuando el brazo se sitúa a una flexión de 90° con longitud de 0.7 m se requiere un par de 63 Nm, para ello en la flecha de salida del motor se conecta un reductor epicicloidial con relación 13:1 y un peso de 200 gramos, lo cual permite que estos reductores alcancen un par de 79 NM y sus revoluciones por minuto (RPM) será de 4.7.

Para la validación del diseño se realizó una simulación en SolidWorks® donde se consideran los siguientes parámetros; una longitud máxima de 0.7 m para el exoesqueleto (longitud máxima del miembro superior) y una fuerza de 49.05 N (5% del peso de una persona de 100 kg). Además, se empleó una malla sólida a 4 puntos con un tamaño máximo de elemento de 4.50817 mm y mínimo de 0.901633 mm para el análisis estático de Von Misses.

En la Fig. 2 se observan los esfuerzos de Von Mises considerando un material plástico PLA, el cual tiene una densidad de 1.2 g/cm<sup>3</sup> y un módulo de flexión de 3000 MPa, en el estudio se obtiene como resultado el esfuerzo máximo de 184.58 N/mm<sup>2</sup> (MPa) ubicado en la base del primer motor y de acuerdo con los resultados de

SolidWorks® obtenidos en el análisis de elemento finito, se tiene un factor de seguridad mínimo de 1.4.

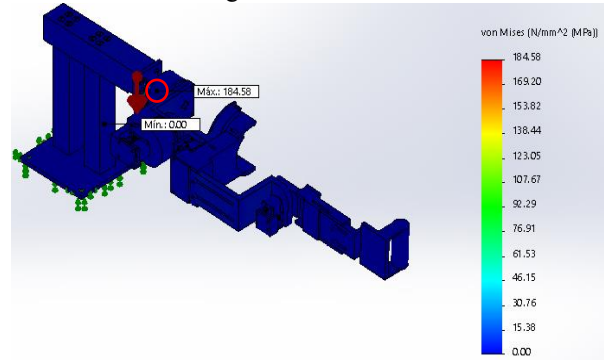


Fig 2. Esfuerzos de Von Mises en donde el color azul representa el esfuerzo mínimo mientras que el color rojo indica el esfuerzo máximo, dónde se señala mediante un círculo rojo la ubicación del esfuerzo máximo.

### D. Cinemática

Para el analisis cinemático directo, se consideraron las 4 articulaciones del exoesqueleto de tipo rotacional. En la Tabla IV se muestran los parámetros para poder calcular la posición del efector final, en donde  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  son valores variables (longitudes) de acuerdo a la longitud del brazo del paciente y en la Fig. 3 se representa la ubicación de los marcos de referencia.

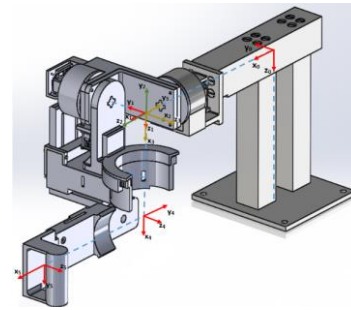


Fig. 3. Marcos de referencia en color rojo correspondientes a cada articulación del exoesqueleto de hombro.

TABLA IV  
PARÁMETROS DE DENAVIT-HARTENBERG DEL EXOSQUELETO

Articulación	Movimiento	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	Base (fijo)	0	$a_1$	0	0
2	Rotación externa e interna	-90	0	0	$\theta_1$
3	Abducción y aducción	-90	0	0	$\theta_2$
4	Flexión y extensión	0	$a_2$	0	$\theta_3$
5	Flexión y extensión	0	$a_3$	0	$\theta_3$

### E. Simulación

Se realizaron simulaciones en el software MATLAB® mediante Simulink® y Simscape™, para la validación del análisis cinemático del exoesqueleto propuesto, a partir de la posición mostrada en la Fig. 1, considerando la posición anatómica de reposo y los parámetros de la Tabla IV.

En la matriz (1) se presenta el resultado de la transformación homogénea durante el movimiento de flexión a 90°, y la Fig. 4 representa la simulación del movimiento y la posición del efector final:  $p_x = 0.82 m$ ,  $p_y = 0$  y  $p_z = 0.36 m$ .

$$T_0^5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{232}{280} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{79}{215} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

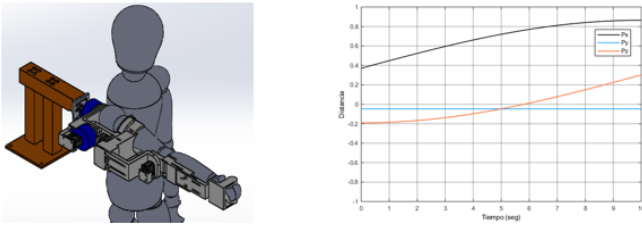


Fig. 4. Vista isométrica del movimiento de flexión a 90°

#### IV. DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso el diseño de un exoesqueleto de miembro superior (hombro) considerando las medidas antropométricas de la población mexicana mayor de 18 años. El diseño cuenta con una limitación en el movimiento de abducción (130°) este no logra alcanzar el máximo rango de movimiento (180°). Para el movimiento del codo se contempla únicamente un rango de movimiento de 90° de los 145° permitidos, esto, aunque pareciera ser una desventaja, al ser un diseño enfocado a pacientes con EVC no se requiere que los rangos de movimiento sean los de un sujeto sano, al contrario están limitados, y más aún, al inicio de la rehabilitación, [16]. Adicional a esto, la estructura del diseño contempla un soporte para todo el brazo que ayuda a reducir los movimientos involuntarios del paciente durante el proceso de rehabilitación. El material seleccionado para la construcción es de bajo costo y se demostró que es factible para la obtención de un diseño seguro al ser su factor de seguridad mayor de 1. Los reductores de tipo epicicloidal pueden ser manufacturados con impresión 3D (PLA) y se adaptan en el rotor del motor para aumentar el par y disminuir la velocidad del movimiento, permitiendo realizar los movimientos de abducción-aducción y flexión-extensión del hombro que son los que presentan un mayor par de torsión. Actualmente el exoesqueleto se encuentra en la fase del modelado dinámico, para posteriormente la implementación de un control automático adecuado para rehabilitación y considerando la espasticidad de los pacientes la cual puede ser representada como un modelo biomecánico interactuando con un sistema mecánico como en [17].

#### RECONOCIMIENTO

Agradecemos al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca de maestría otorgada bajo el CVU No. 1009157.

#### REFERENCIAS

- [1] Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), "En México somos 126 014 024 habitantes: censo de población y vivienda 2020", Consultado el 23 de marzo de 2021, Del sitio web: [https://www.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/boletines/2021/EstSociodemo/ResultCenso2020\\_Nal.pdf](https://www.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/boletines/2021/EstSociodemo/ResultCenso2020_Nal.pdf)
- [2] Instituto Nacional de Estadística y Geografía, "Censo de Población y Vivienda 2020," Consultado el 23 de marzo de 2021, Del sitio web: [https://www.inegi.org.mx/contenidos/programas/ccpv/2020/doc/Censo2020\\_Resultados\\_complementarios\\_EUM.pdf](https://www.inegi.org.mx/contenidos/programas/ccpv/2020/doc/Censo2020_Resultados_complementarios_EUM.pdf)
- [3] Instituto Nacional de Estadística, "Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud, 1999. Avance de Resultados," Consultado el 3 de septiembre de 2021, Del sitio web: <https://www.ine.es/prodyser/pubweb/discapa/discotodo.pdf>
- [4] Instituto de Neurología, Neurocirugía y Enfermedad Cerebrovascular, "Terapia Endovascular Neurológica de Enfermedades Vasculares Cerebrales," Consultado el 24 de marzo de 2021, Del sitio web: <https://www.innecev.com/serviciosneurocirugia>
- [5] Asociación Nacional Contra el Infarto Cerebral, A.C. "¿Qué es STROKE?," Consultado el 24 de marzo de 2021, Del sitio web: <https://ancic.org.mx/que-es-stroke/>
- [6] World Stroke Organization, "Annual Report 2020," Consultado el 10 de julio de 2021, Del sitio web: [https://www.world-stroke.org/assets/downloads/WSO\\_Annual\\_Report\\_2020\\_online.pdf](https://www.world-stroke.org/assets/downloads/WSO_Annual_Report_2020_online.pdf)
- [7] Instituto Mexicano del Seguro Social, "Enfermedad Vascular Cerebral," Consultado el 10 de julio de 2021, Del sitio web: <http://www.imss.gob.mx/salud-en-linea/enfermedad-vascular-cerebral>
- [8] Mayo Clinic, "Rehabilitación de accidente cerebrovascular: Qué esperar mientras te recuperas," Consultado el 24 de marzo de 2021, Del sitio web: <https://www.mayoclinic.org/es-es/diseases-conditions/stroke/in-depth/stroke-rehabilitation/art-20045172>
- [9] Xie, S. Advanced robotics for medical rehabilitation. Springer Tracts in Advanced Robotics, 2016, 108(1), 357.
- [10] Guía para la Evaluación Clínica de Dispositivos Médicos. Centro Nacional de Excelencia Tecnológica en Salud, 2017. Consultado el 4 de septiembre de 2021, Del sitio web: [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/397361/ETES\\_GuiaEvalClinicaDM\\_17\\_SPC\\_13\\_12\\_17.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/397361/ETES_GuiaEvalClinicaDM_17_SPC_13_12_17.pdf)
- [11] Chaurand RA, León LRP, Muñoz ELG. Dimensiones antropométricas de población latinoamericana. Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de Arte, Arquitectura y Diseño, División de Tecnología y Procesos, Departamento de Producción y Desarrollo, Centro de Investigaciones en Ergonomía, 2001.
- [12] Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. Robot modeling and control, Wiley, 1989
- [13] Kurowski, P. (2015). Thermal analysis with Solidworks Simulation 2015 and Flow Simulation 2015. SDC publications
- [14] José L Pons. Wearable robots: biomechatronic exoskeletons. John Wiley & Sons, 2008.
- [15] Sosa D., Arias M. & Lugo E. (2017). Diseño de un prototipo de exoesqueleto para rehabilitación del hombro. Revista mexicana de ingeniería biomédica, vol. 38 no. 1, pp. 330-342, DOI: [dx.doi.org/10.17488/RMIB.38.1.29](https://doi.org/10.17488/RMIB.38.1.29)
- [16] Rocon, E. and José L. Pons. "Introduction: Exoskeletons in rehabilitation robotics: Tremor suppression". Vol. 69. Springer, 2011.
- [17] D. Martínez-Peon, E. Olguín-Díaz, A. Muñoz-Vázquez, P. Cruz Francisco, and D. Sosa Méndez, "Modeling and control of exoskeleton for wrist and forearm rehabilitation," Biomedical Signal Processing and Control, vol. 70, p. 103022, 2021. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1746809421006194>

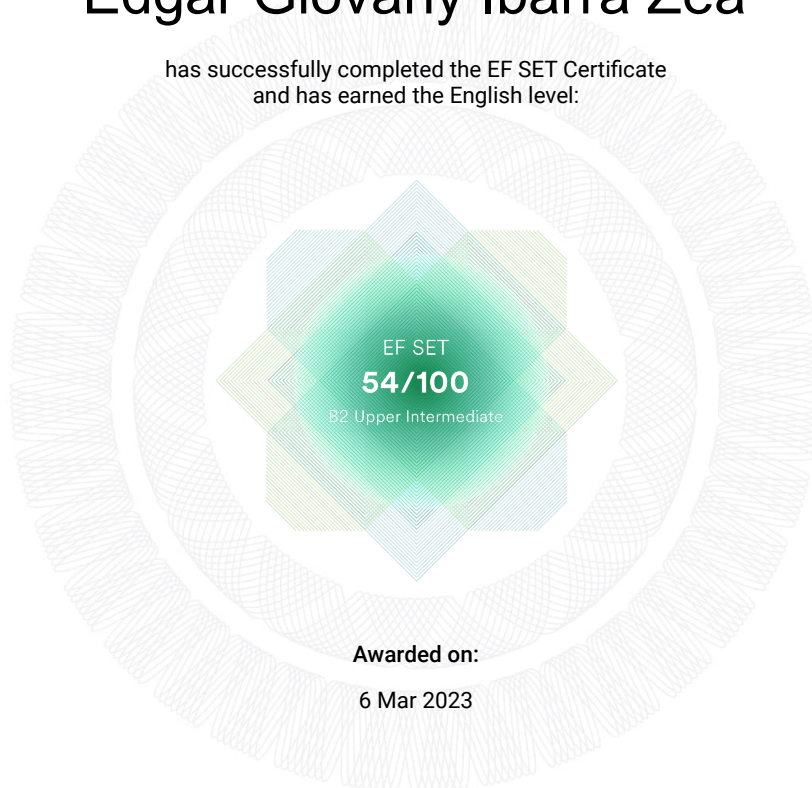


## Apéndice C

### Certificado de idioma inglés

# Edgar Giovany Ibarra Zea

has successfully completed the EF SET Certificate  
and has earned the English level:



**Awarded on:**

6 Mar 2023

## Understanding the results

EFSET	1-30	31-40	41-50	<b>51-60</b>	61-70	71-100
CEFR	A1 Beginner	A2 Elementary	B1 Intermediate	<b>B2 Upper Intermediate</b>	C1 Advanced	C2 Proficient

Your level of English is **54/100** on the EF SET score scale and **B2 Upper Intermediate** according to the Common European Framework of Reference (CEFR). This score is calculated as an average of your reading and listening scores



### Listening Section

**48/100** B1 Intermediate

You understand most of what you hear in English on television, radio or the internet; your English vocabulary allows you to comprehend job-related language and most of what people say about feelings and events.

- Can deal with most situations likely to arise whilst travelling in an area where the language is spoken.
- Can understand the main points of clear standard speech on familiar matters regularly encountered in work, school, leisure, etc.



### Reading Section

**59/100** B2 Upper Intermediate

You comprehend articles on many subjects and you can follow arguments and disagreements in most cases; you understand a variety of specialized written texts.

- Can understand the main ideas of complex text on both concrete and abstract topics, including technical discussions in his/her field of specialization.
- Can read articles and reports concerned with contemporary problems in which the writers adopt particular attitudes or viewpoints.

# English test score converter

English test scores and levels are difficult to compare between tests and leveling systems because each one is so unique. The table below gives you a rough idea of how a score range on one test or level system would translate to another. Officially, there is no way to convert one test score to another or a test score to a level system, so if you need an IELTS score of 8.5 for example, you will have to take the IELTS. If you take two different tests, you may find that you do better on one than the other, even though your English skills haven't changed. This is due to many factors including test design, testing conditions, and quite simply, luck.

	Beginner	Elementary	Intermediate	Upper Intermediate	Advanced	Proficient
IELTS	2.0	3.0	3.5-4.5	5.0-6.0	6.5-7.5	8.0-9.0
TOEIC Listening & Reading	60-105	110-270	275-395	400-485	490-495	
EF SET	0-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-100
TOEFL iBT			42-71	72-94	95-120	
Cambridge	YLE	KET pass	PET pass	FCE pass	CAE pass	CPE pass
CEFR	A1	A2	B1	B2	C1	C2
ILR	0	1	1+	2	3	4
ACTFL	Novice	Intermediate	Advanced Low	Advanced Mid	Advanced High	Superior
CLB	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12

# Apéndice D

## Cálculos modelado

### D.1. Matriz de inercias

$$M = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & R_{1,4} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & R_{2,4} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & R_{3,4} \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

A continuación se muestran los valores de la matriz de inercia de la ecuación (D.1).

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= (81 * m_1 * c(\theta_1)^2) / 4 + (m_1^2 * u^2) / 12 + (81 * m_1 * s(\theta_1)^2) / 4 + m_4 * (l_2 * c(\theta_4) * (s(\theta_1) * \\ & s(\theta_3) + c(\theta_1) * c(\theta_2) * c(\theta_3)) - 6 * s(\theta_4) * (c(\theta_3) * s(\theta_1) - c(\theta_1) * c(\theta_2) * s(\theta_3)) - 6 * \\ & c(\theta_4) * (s(\theta_1) * s(\theta_3) + c(\theta_1) * c(\theta_2) * c(\theta_3)) + l_2 * s(\theta_4) * (c(\theta_3) * s(\theta_1) - c(\theta_1) * \\ & c(\theta_2) * s(\theta_3)) + l_1 * s(\theta_1) * s(\theta_3) + l_1 * c(\theta_1) * c(\theta_2) * c(\theta_3))^2 + m_4 * (6 * c(\theta_4) * \\ & (c(\theta_1) * s(\theta_3) - c(\theta_2) * c(\theta_3) * s(\theta_1)) + 6 * s(\theta_4) * (c(\theta_1) * c(\theta_3) + c(\theta_2) * s(\theta_1) * s(\theta_3)) - \\ & l_2 * c(\theta_4) * (c(\theta_1) * s(\theta_3) - c(\theta_2) * c(\theta_3) * s(\theta_1)) - l_2 * s(\theta_4) * (c(\theta_1) * c(\theta_3) + \\ & c(\theta_2) * s(\theta_1) * s(\theta_3)) - l_1 * c(\theta_1) * s(\theta_3) + l_1 * c(\theta_2) * c(\theta_3) * s(\theta_1))^2 + (49 * m_2 * \\ & c(\theta_1)^2 * c(\theta_2)^2) / 4 + (m_2^2 * u^2 * c(\theta_2)^2) / 12 + (49 * m_2 * c(\theta_2)^2 * s(\theta_1)^2) / 4 + (m_4^2 * u^2 * \\ & (s(\theta_3 + \theta_4)^2 * s(\theta_2)^2 - s(\theta_2)^2 + 1)) / 12 + m_3 * (s(\theta_1) * s(\theta_3) + c(\theta_1) * c(\theta_2) * \\ & c(\theta_3))^2 * (l_1 - 5)^2 + m_3 * (c(\theta_1) * s(\theta_3) - c(\theta_2) * c(\theta_3) * s(\theta_1))^2 * (l_1 - 5)^2 + \\ & (m_3^2 * u^2 * (s(\theta_2)^2 * s(\theta_3)^2 - s(\theta_2)^2 + 1)) / 12 \\ R_{1,2} &= 5 * l_1 * m_3 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) - (m_3^2 * u * c(\theta_2)) / 12 - (m_4^2 * u * c(\theta_2)) / 12 - \\ & (25 * m_3 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 - 18 * m_4 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - 18 * \\ & m_4 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) - (m_2^2 * u * c(\theta_2)) / 12 - (l_1^2 * m_3 * s(2 * \theta_3) * \\ & s(\theta_2)) / 2 - (l_1^2 * m_4 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 + 6 * l_1 * m_4 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) + \\ & 6 * l_1 * m_4 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) + 6 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + \\ & 6 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) - (l_2^2 * m_4 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * \\ & s(\theta_2)) / 2 - (l_2^2 * m_4 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 - l_1 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_3) * \\ & s(\theta_2) * s(\theta_4) - l_1 * l_2 * m_4 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) \\ R_{1,3} &= -(c(\theta_2) * (12 * l_1^2 * m_3 + 12 * l_1^2 * m_4 + 24 * c(\theta_4) * l_1 * l_2 * m_4 - 120 * l_1 * m_3 - \\ & 144 * c(\theta_4) * l_1 * m_4 + 12 * l_2^2 * m_4 - 144 * l_2 * m_4 + u * m_3^2 + 300 * m_3 + u * \\ & m_4^2 + 432 * m_4)) / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{1,4} &= -(m_4 * c(\theta_2) * (m_4 * u - 144 * l_2 - 72 * l_1 * c(\theta_4) + 12 * l_2^2 + 12 * l_1 * l_2 * c(\theta_4) + 432)) / 12 \\
R_{2,1} &= 5 * l_1 * m_3 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) - (m_3^2 * u * c(\theta_2)) / 12 - (m_4^2 * u * c(\theta_2)) / 12 - \\
&\quad (25 * m_3 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 - 18 * m_4 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - 18 * m_4 * \\
&\quad c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) - (m_2^2 * u * c(\theta_2)) / 12 - (l_1^2 * m_3 * s(2 * \theta_3) * \\
&\quad s(\theta_2)) / 2 - (l_1^2 * m_4 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 + 6 * l_1 * m_4 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) + 6 * \\
&\quad l_1 * m_4 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) + 6 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + \\
&\quad 6 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) - (l_2^2 * m_4 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * \\
&\quad s(\theta_2)) / 2 - (l_2^2 * m_4 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 - l_1 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_3) * \\
&\quad s(\theta_2) * s(\theta_4) - l_1 * l_2 * m_4 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) \\
R_{2,2} &= (49 * m_2) / 4 + (25 * m_3) / 2 + 18 * m_4 + (25 * m_3 * c(2 * \theta_3)) / 2 + 18 * m_4 * \\
&\quad c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) - 5 * l_1 * m_3 - 6 * l_2 * m_4 + (l_1^2 * m_3) / 2 + (l_1^2 * m_4) / 2 + \\
&\quad (l_2^2 * m_4) / 2 + m_2^2 / 12 + m_3^2 / 12 + m_4^2 / 12 - 6 * l_1 * m_4 * c(\theta_4) - 6 * l_1 * m_4 * \\
&\quad c(2 * \theta_3 + \theta_4) - 5 * l_1 * m_3 * c(2 * \theta_3) - 6 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + \\
&\quad (l_1^2 * m_3 * c(2 * \theta_3)) / 2 + (l_1^2 * m_4 * c(2 * \theta_3)) / 2 + (l_2^2 * m_4 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4)) / 2 + \\
&\quad l_1 * l_2 * m_4 * c(\theta_4) + l_1 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_3 + \theta_4) \\
R_{2,3} &= m_3^2 / 12 + m_4^2 / 12 \\
R_{2,4} &= m_4^2 / 12 \\
R_{3,1} &= -(c(\theta_2) * (12 * l_1^2 * m_3 + 12 * l_1^2 * m_4 + 24 * c(\theta_4) * l_1 * l_2 * m_4 - 120 * l_1 * m_3 - 144 * c(\theta_4) * \\
&\quad l_1 * m_4 + 12 * l_2^2 * m_4 - 144 * l_2 * m_4 + u * m_3^2 + 300 * m_3 + u * m_4^2 + 432 * m_4)) / 12 \\
R_{3,2} &= m_3^2 / 12 + m_4^2 / 12 \\
R_{3,3} &= l_1^2 * m_3 + l_1^2 * m_4 + 2 * c(\theta_4) * l_1 * l_2 * m_4 - 10 * l_1 * m_3 - 12 * c(\theta_4) * l_1 * m_4 + \\
&\quad l_2^2 * m_4 - 12 * l_2 * m_4 + m_3^2 / 12 + 25 * m_3 + m_4^2 / 12 + 36 * m_4 \\
R_{3,4} &= (m_4 * (m_4 - 144 * l_2 - 72 * l_1 * c(\theta_4) + 12 * l_2^2 + 12 * l_1 * l_2 * c(\theta_4) + 432)) / 12 \\
R_{3,4} &= (m_4 * (m_4 - 144 * l_2 - 72 * l_1 * c(\theta_4) + 12 * l_2^2 + 12 * l_1 * l_2 * c(\theta_4) + 432)) / 12 \\
R_{4,1} &= -(m_4 * c(\theta_2) * (m_4 * u - 144 * l_2 - 72 * l_1 * c(\theta_4) + 12 * l_2^2 + 12 * l_1 * l_2 * c(\theta_4) + 432)) / 12 \\
R_{4,2} &= m_4^2 / 12 \\
R_{4,3} &= (m_4 * (m_4 - 144 * l_2 - 72 * l_1 * c(\theta_4) + 12 * l_2^2 + 12 * l_1 * l_2 * c(\theta_4) + 432)) / 12 \\
R_{4,4} &= (m_4 * (12 * l_2^2 - 144 * l_2 + m_4 + 432)) / 12
\end{aligned}$$

Ver apéndice C para cada uno de los elementos de la matriz de inercia.

## D.2. Matriz de Coriolis

$$C = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & R_{1,4} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & R_{2,4} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & R_{3,4} \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} \end{bmatrix} \quad (D.2)$$

A continuación se muestran los valores de la matriz de Coriolis de la ecuación (D.2).  $R_{1,1} =$

$$(25 * m_3 * qp3 * s(2 * \theta_3)) / 4 - (25 * m_3 * qp2 * s(2 * \theta_2)) / 4 - 9 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_2) - (49 * m_2 * qp2 * s(2 * \theta_2)) / 8 - (l_1^2 * m_3 * qp2 * s(2 * \theta_2)) / 4 - (l_1^2 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_2)) / 4 + (l_1^2 * m_3 * qp3 * s(2 * \theta_3)) / 4 - (l_2^2 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_2)) / 4 + (l_1^2 * m_4 * qp3 * s(2 * \theta_3)) / 4 + (9 * l_1 * m_4 * qp4 * s(\theta_4)) / 2 -$$

$$\begin{aligned}
& (25*m_3*qp2*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_2))/4 - (25*m_3*qp3*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3))/4 + 9*m_4*qp3*c(2* \\
& \theta_3)*s(2*\theta_4) + 9*m_4*qp3*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3) + 9*m_4*qp4*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) + 9*m_4*qp4*c(2* \\
& \theta_4)*s(2*\theta_3) - (m_2^2*qp2*u^2*s(2*\theta_2))/24 - (m_3^2*qp2*u^2*s(2*\theta_2))/48 - (m_4^2*qp2*u^2*s(2* \\
& \theta_2))/48 + (m_3^2*qp3*u^2*s(2*\theta_3))/48 + (5*l_1*m_3*qp2*s(2*\theta_2))/2 - (5*l_1*m_3*qp3*s(2* \\
& \theta_3))/2 + 3*l_2*m_4*qp2*s(2*\theta_2) + 9*m_4*qp2*s(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) + (5*l_1*m_3*qp2* \\
& c(2*\theta_3)*s(2*\theta_2))/2 + (5*l_1*m_3*qp3*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3))/2 - 3*l_2*m_4*qp3*c(2*\theta_3)*s(2* \\
& \theta_4) - 3*l_2*m_4*qp3*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3) - 3*l_2*m_4*qp4*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) - 3*l_2*m_4*qp4* \\
& c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3) - (l_1^2*m_3*qp2*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_2))/4 - (l_1^2*m_3*qp3*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3))/4 - \\
& (l_1^2*m_4*qp2*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_2))/4 - (l_1^2*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3))/4 + (l_2^2*m_4*qp3*c(2* \\
& \theta_3)*s(2*\theta_4))/4 + (l_2^2*m_4*qp3*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3))/4 + (l_2^2*m_4*qp4*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4))/4 + \\
& (l_2^2*m_4*qp4*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3))/4 + 3*l_1*m_4*qp2*s(2*\theta_2)*c(\theta_4) - 3*l_1*m_4*qp3*c(2*\theta_3)* \\
& s(\theta_4) - 3*l_1*m_4*qp3*s(2*\theta_3)*c(\theta_4) + (3*l_1*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*s(\theta_4))/2 - (3*l_1*m_4*qp4* \\
& c(2*\theta_3)*s(\theta_4))/2 - (3*l_1*m_4*qp4*s(2*\theta_3)*c(\theta_4))/2 - 9*m_4*qp2*c(2*\theta_3)*c(2*\theta_4)*s(2* \\
& \theta_2) - 9*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) - 9*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3) - 9* \\
& m_4*qp4*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) - 9*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3) - (m_3^2*qp2*u^2* \\
& c(2*\theta_3)*s(2*\theta_2))/48 - (m_3^2*qp3*u^2*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3))/48 + (m_4^2*qp3*u^2*c(2*\theta_3)*s(2* \\
& \theta_4))/48 + (m_4^2*qp3*u^2*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3))/48 + (m_4^2*qp4*u^2*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4))/48 + (m_4^2* \\
& qp4*u^2*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3))/48 - (3*l_1*l_2*m_4*qp4*s(\theta_4))/4 - 3*l_1*m_4*qp2*s(2*\theta_2)*s(2* \\
& \theta_3)*s(\theta_4) - (m_4^2*qp2*u^2*c(2*\theta_3)*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_2))/48 - (m_4^2*qp3*u^2*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)* \\
& s(2*\theta_4))/48 - (m_4^2*qp3*u^2*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3))/48 - (m_4^2*qp4*u^2*c(2*\theta_2)*c(2* \\
& \theta_3)*s(2*\theta_4))/48 - (m_4^2*qp4*u^2*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3))/48 - (l_1*l_2*m_4*qp2*s(2* \\
& \theta_2)*c(\theta_4))/2 + (l_1*l_2*m_4*qp3*c(2*\theta_3)*s(\theta_4))/2 + (l_1*l_2*m_4*qp3*s(2*\theta_3)*c(\theta_4))/2 - \\
& (l_1*l_2*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*s(\theta_4))/4 + (l_1*l_2*m_4*qp4*c(2*\theta_3)*s(\theta_4))/4 + (l_1*l_2*m_4*qp4* \\
& s(2*\theta_3)*c(\theta_4))/4 + (m_4^2*qp2*u^2*s(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*s(2*\theta_4))/48 + 3*l_2*m_4*qp2*c(2*\theta_3)* \\
& c(2*\theta_4)*s(2*\theta_2) + 3*l_2*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) + 3*l_2*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*c(2* \\
& \theta_4)*s(2*\theta_3) + 3*l_2*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) + 3*l_2*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_4)* \\
& s(2*\theta_3) - 3*l_2*m_4*qp2*s(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) - (l_2^2*m_4*qp2*c(2*\theta_3)*c(2*\theta_4)*s(2* \\
& \theta_2))/4 - (l_2^2*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4))/4 - (l_2^2*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_4)*s(2* \\
& \theta_3))/4 - (l_2^2*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4))/4 - (l_2^2*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_4)*s(2* \\
& \theta_3))/4 + (l_2^2*m_4*qp2*s(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*s(2*\theta_4))/4 + 3*l_1*m_4*qp2*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_2)* \\
& c(\theta_4) + 3*l_1*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(\theta_4) + 3*l_1*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*c(\theta_4) + \\
& (3*l_1*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(\theta_4))/2 + (3*l_1*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*c(\theta_4))/2 - \\
& (l_1*l_2*m_4*qp2*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_2)*c(\theta_4))/2 - (l_1*l_2*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(\theta_4))/2 - \\
& (l_1*l_2*m_4*qp3*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*c(\theta_4))/2 - (l_1*l_2*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(\theta_4))/4 - \\
& (l_1*l_2*m_4*qp4*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*c(\theta_4))/4 + (l_1*l_2*m_4*qp2*s(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*s(\theta_4))/2
\end{aligned}$$

$$R_{1,2} =$$

$$\begin{aligned}
& (25*m_3*qp3*s(\theta_2))/2 + 18*m_4*qp3*s(\theta_2) + 18*m_4*qp4*s(\theta_2) - (49*m_2*qp1*s(2* \\
& \theta_2))/8 - (25*m_3*qp1*s(2*\theta_2))/4 - 9*m_4*qp1*s(2*\theta_2) - (l_1^2*m_3*qp1*s(2*\theta_2))/4 - (l_1^2* \\
& m_4*qp1*s(2*\theta_2))/4 - (l_2^2*m_4*qp1*s(2*\theta_2))/4 - (25*m_3*qp2*s(2*\theta_3)*c(\theta_2))/2 - (25* \\
& m_3*qp3*c(2*\theta_3)*s(\theta_2))/2 - 5*l_1*m_3*qp3*s(\theta_2) - 6*l_2*m_4*qp3*s(\theta_2) - 6*l_2*m_4*qp4* \\
& s(\theta_2) - (25*m_3*qp1*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_2))/4 - (m_2^2*qp1*u^2*s(2*\theta_2))/24 - (m_3^2*qp1*u^2*s(2*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \theta_2)) / 48 - (m_4^2 * qp1 * u^2 * s(2 * \theta_2)) / 48 + (5 * l_1 * m_3 * qp1 * s(2 * \theta_2)) / 2 + 3 * l_2 * m_4 * qp1 * s(2 * \\
& \theta_2) + (l_1^2 * m_3 * qp3 * s(\theta_2)) / 2 + (l_1^2 * m_4 * qp3 * s(\theta_2)) / 2 + (l_2^2 * m_4 * qp3 * s(\theta_2)) / 2 + (l_2^2 * m_4 * qp4 * \\
& s(\theta_2)) / 2 + (m_2^2 * qp2 * u * s(\theta_2)) / 12 + (m_3^2 * qp2 * u * s(\theta_2)) / 12 + (m_3^2 * qp3 * u * s(\theta_2)) / 24 + (m_4^2 * \\
& qp2 * u * s(\theta_2)) / 12 + (m_4^2 * qp3 * u * s(\theta_2)) / 24 + (m_4^2 * qp4 * u * s(\theta_2)) / 24 + 9 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * \\
& s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) + (5 * l_1 * m_3 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_2)) / 2 - (l_1^2 * m_3 * qp2 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_2)) / 2 - \\
& (l_1^2 * m_3 * qp3 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 - (l_1^2 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_2)) / 2 - (l_1^2 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * \\
& s(\theta_2)) / 2 - 6 * l_1 * m_4 * qp3 * c(\theta_4) * s(\theta_2) - 3 * l_1 * m_4 * qp4 * c(\theta_4) * s(\theta_2) - (l_1^2 * m_3 * qp1 * c(2 * \theta_3) * \\
& s(2 * \theta_2)) / 4 - (l_1^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_2)) / 4 - 18 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * c(\theta_2) - \\
& 18 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) * c(\theta_2) - 18 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - 18 * m_4 * qp4 * \\
& c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + 18 * m_4 * qp3 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + 18 * m_4 * qp4 * s(2 * \theta_3) * \\
& s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + 5 * l_1 * m_3 * qp2 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_2) + 5 * l_1 * m_3 * qp3 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2) + 3 * l_1 * m_4 * \\
& qp1 * s(2 * \theta_2) * c(\theta_4) - 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_2) - (m_3^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \\
& \theta_2)) / 48 - 3 * l_1 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * s(\theta_4) - 6 * l_2 * m_4 * qp3 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - \\
& 6 * l_2 * m_4 * qp4 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_2)) / 48 - \\
& (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * c(\theta_4)) / 2 + (m_4^2 * qp1 * u^2 * s(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4)) / 48 + 3 * l_2 * \\
& m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_2) - (l_2^2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * c(\theta_2)) / 2 - (l_2^2 * m_4 * \\
& qp2 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) * c(\theta_2)) / 2 - (l_2^2 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2)) / 2 - (l_2^2 * m_4 * qp4 * \\
& c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2)) / 2 - 3 * l_2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) + (l_2^2 * m_4 * qp3 * s(2 * \\
& \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + (l_2^2 * m_4 * qp4 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + 6 * l_1 * m_4 * qp2 * c(2 * \\
& \theta_3) * c(\theta_2) * s(\theta_4) + 6 * l_1 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_2) * c(\theta_4) + 6 * l_1 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * \\
& s(\theta_2) + 3 * l_1 * m_4 * qp4 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) - (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_2)) / 4 - \\
& 6 * l_1 * m_4 * qp3 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) - 3 * l_1 * m_4 * qp4 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) + l_1 * l_2 * m_4 * \\
& qp3 * c(\theta_4) * s(\theta_2) + (l_1 * l_2 * m_4 * qp4 * c(\theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + (l_2^2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * s(2 * \\
& \theta_4)) / 4 + 3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_2) * c(\theta_4) + 6 * l_2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * c(\theta_2) + \\
& 6 * l_2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) * c(\theta_2) + 6 * l_2 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + 6 * l_2 * m_4 * \\
& qp4 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_2) * s(\theta_4) - l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * s(2 * \\
& \theta_3) * c(\theta_2) * c(\theta_4) - l_1 * l_2 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) - (l_1 * l_2 * m_4 * qp4 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * \\
& s(\theta_2)) / 2 + l_1 * l_2 * m_4 * qp3 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) + (l_1 * l_2 * m_4 * qp4 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4)) / 2 - \\
& (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_2) * c(\theta_4)) / 2 + (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * s(\theta_4)) / 2
\end{aligned}$$

$$R_{1,3} =$$

$$\begin{aligned}
& (25 * m_3 * qp2 * s(\theta_2)) / 2 + 18 * m_4 * qp2 * s(\theta_2) + (25 * m_3 * qp1 * s(2 * \theta_3)) / 4 + (l_1^2 * m_3 * qp1 * \\
& s(2 * \theta_3)) / 4 + (l_1^2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_3)) / 4 - (25 * m_3 * qp2 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 - 5 * l_1 * m_3 * qp2 * \\
& s(\theta_2) - 6 * l_2 * m_4 * qp2 * s(\theta_2) - (25 * m_3 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3)) / 4 + 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * \\
& s(2 * \theta_4) + 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) + (m_3^2 * qp1 * u^2 * s(2 * \theta_3)) / 48 - (5 * l_1 * m_3 * qp1 * s(2 * \\
& \theta_3)) / 2 + (l_1^2 * m_3 * qp2 * s(\theta_2)) / 2 + (l_1^2 * m_4 * qp2 * s(\theta_2)) / 2 + (l_2^2 * m_4 * qp2 * s(\theta_2)) / 2 + (m_3^2 * \\
& qp2 * u * s(\theta_2)) / 24 + (m_4^2 * qp2 * u * s(\theta_2)) / 24 + (5 * l_1 * m_3 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3)) / 2 - 3 * \\
& l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) - 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) - (l_1^2 * m_3 * qp2 * c(2 * \theta_3) * \\
& s(\theta_2)) / 2 - (l_1^2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 - 6 * l_1 * m_4 * qp2 * c(\theta_4) * s(\theta_2) - 6 * l_1 * m_4 * qp4 * \\
& c(\theta_2) * s(\theta_4) - (l_1^2 * m_3 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3)) / 4 - (l_1^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3)) / 4 + (l_2^2 * \\
& m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4)) / 4 + (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3)) / 4 - 18 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * \\
& c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + 18 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + 5 * l_1 * m_3 * qp2 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2) - 3 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4) - 3 * l_1 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4) - 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * \\
& s(2 * \theta_4) - 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) - (m_3^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3)) / 48 + \\
& (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4)) / 48 + (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3)) / 48 - 6 * l_2 * m_4 * \\
& qp2 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4)) / 48 - (m_4^2 * qp1 * \\
& u^2 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3)) / 48 + (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4)) / 2 + (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * \\
& s(2 * \theta_3) * c(\theta_4)) / 2 + 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) + 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * \\
& c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) - (l_2^2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + (l_2^2 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \\
& \theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + 6 * l_1 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) - (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * \\
& s(2 * \theta_4)) / 4 - (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3)) / 4 - 6 * l_1 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * \\
& s(\theta_4) + l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * c(\theta_4) * s(\theta_2) + l_1 * l_2 * m_4 * qp4 * c(\theta_2) * s(\theta_4) + 3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \\
& \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4) + 3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4) + 6 * l_2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \\
& \theta_4) * s(\theta_2) - l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) + l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) - \\
& (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4)) / 2 - (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4)) / 2
\end{aligned}$$

$$R_{1,4} =$$

$$\begin{aligned}
& 18 * m_4 * qp2 * s(\theta_2) + (9 * l_1 * m_4 * qp1 * s(\theta_4)) / 2 - 6 * l_2 * m_4 * qp2 * s(\theta_2) + 9 * m_4 * qp1 * \\
& c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) + 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) + (l_2^2 * m_4 * qp2 * s(\theta_2)) / 2 + (m_4^2 * qp2 * u * \\
& s(\theta_2)) / 24 - 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) - 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) - 3 * l_1 * \\
& m_4 * qp2 * c(\theta_4) * s(\theta_2) - 6 * l_1 * m_4 * qp3 * c(\theta_2) * s(\theta_4) - 6 * l_1 * m_4 * qp4 * c(\theta_2) * s(\theta_4) + (l_2^2 * m_4 * \\
& qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4)) / 4 + (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3)) / 4 - 18 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \\
& \theta_4) * s(\theta_2) + 18 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + (3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(\theta_4)) / 2 - \\
& (3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4)) / 2 - (3 * l_1 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4)) / 2 - 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \\
& \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) - 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) + (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_3) * \\
& s(2 * \theta_4)) / 48 + (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3)) / 48 - (3 * l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * s(\theta_4)) / 4 - 6 * l_2 * \\
& m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4)) / 48 - (m_4^2 * \\
& qp1 * u^2 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3)) / 48 - (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(\theta_4)) / 4 + (l_1 * l_2 * m_4 * \\
& qp1 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4)) / 4 + (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4)) / 4 + 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \\
& \theta_3) * s(2 * \theta_4) + 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) - (l_2^2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * \\
& s(\theta_2)) / 2 + (l_2^2 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + 3 * l_1 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) - \\
& (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4)) / 4 - (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3)) / 4 - \\
& 3 * l_1 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) + (l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * c(\theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + l_1 * l_2 * m_4 * qp3 * \\
& c(\theta_2) * s(\theta_4) + l_1 * l_2 * m_4 * qp4 * c(\theta_2) * s(\theta_4) + (3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4)) / 2 + \\
& (3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4)) / 2 + 6 * l_2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - \\
& (l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + (l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4)) / 2 - \\
& (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4)) / 4 - (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4)) / 4
\end{aligned}$$

$$R_{2,1} =$$

$$\begin{aligned}
& (49 * m_2 * qp1 * s(2 * \theta_2)) / 8 - 18 * m_4 * qp3 * s(\theta_2) - 18 * m_4 * qp4 * s(\theta_2) - (25 * m_3 * qp3 * \\
& s(\theta_2)) / 2 + (25 * m_3 * qp1 * s(2 * \theta_2)) / 4 + 9 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) + (l_1^2 * m_3 * qp1 * s(2 * \theta_2)) / 4 + \\
& (l_1^2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2)) / 4 + (l_2^2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2)) / 4 - (25 * m_3 * qp3 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 + \\
& 5 * l_1 * m_3 * qp3 * s(\theta_2) + 6 * l_2 * m_4 * qp3 * s(\theta_2) + 6 * l_2 * m_4 * qp4 * s(\theta_2) + (25 * m_3 * qp1 * c(2 *
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \theta_3) * s(2 * \theta_2)) / 4 + (m_2^2 * qp1 * u^2 * s(2 * \theta_2)) / 24 + (m_3^2 * qp1 * u^2 * s(2 * \theta_2)) / 48 + (m_4^2 * qp1 * \\
& u^2 * s(2 * \theta_2)) / 48 - (5 * l_1 * m_3 * qp1 * s(2 * \theta_2)) / 2 - 3 * l_2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) - (l_1^2 * m_3 * qp3 * \\
& s(\theta_2)) / 2 - (l_1^2 * m_4 * qp3 * s(\theta_2)) / 2 - (l_2^2 * m_4 * qp3 * s(\theta_2)) / 2 - (l_2^2 * m_4 * qp4 * s(\theta_2)) / 2 - (m_3^2 * \\
& qp3 * u * s(\theta_2)) / 24 - (m_4^2 * qp3 * u * s(\theta_2)) / 24 - (m_4^2 * qp4 * u * s(\theta_2)) / 24 - 9 * m_4 * qp1 * s(2 * \\
& \theta_2) * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) - (5 * l_1 * m_3 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_2)) / 2 - (l_1^2 * m_3 * qp3 * c(2 * \theta_3) * \\
& s(\theta_2)) / 2 - (l_1^2 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2)) / 2 + 6 * l_1 * m_4 * qp3 * c(\theta_4) * s(\theta_2) + 3 * l_1 * m_4 * qp4 * \\
& c(\theta_4) * s(\theta_2) + (l_1^2 * m_3 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_2)) / 4 + (l_1^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_2)) / 4 - 18 * \\
& m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - 18 * m_4 * qp4 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + 18 * m_4 * qp3 * \\
& s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + 18 * m_4 * qp4 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + 5 * l_1 * m_3 * qp3 * c(2 * \theta_3) * \\
& s(\theta_2) - 3 * l_1 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * c(\theta_4) + 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_2) + (m_3^2 * qp1 * \\
& u^2 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_2)) / 48 + 3 * l_1 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * s(\theta_4) - 6 * l_2 * m_4 * qp3 * s(2 * \\
& \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - 6 * l_2 * m_4 * qp4 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_3) * \\
& c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_2)) / 48 + (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * c(\theta_4)) / 2 - (m_4^2 * qp1 * u^2 * s(2 * \theta_2) * s(2 * \\
& \theta_3) * s(2 * \theta_4)) / 48 - 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_2) - (l_2^2 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \\
& \theta_4) * s(\theta_2)) / 2 - (l_2^2 * m_4 * qp4 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + 3 * l_2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * s(2 * \\
& \theta_3) * s(2 * \theta_4) + (l_2^2 * m_4 * qp3 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + (l_2^2 * m_4 * qp4 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * \\
& s(\theta_2)) / 2 + 6 * l_1 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) + 3 * l_1 * m_4 * qp4 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) + \\
& (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_2)) / 4 - 6 * l_1 * m_4 * qp3 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) - 3 * \\
& l_1 * m_4 * qp4 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) - l_1 * l_2 * m_4 * qp3 * c(\theta_4) * s(\theta_2) - (l_1 * l_2 * m_4 * qp4 * c(\theta_4) * \\
& s(\theta_2)) / 2 - (l_2^2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4)) / 4 - 3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \\
& \theta_2) * c(\theta_4) + 6 * l_2 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + 6 * l_2 * m_4 * qp4 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * \\
& s(\theta_2) - l_1 * l_2 * m_4 * qp3 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) - (l_1 * l_2 * m_4 * qp4 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2)) / 2 + \\
& l_1 * l_2 * m_4 * qp3 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) + (l_1 * l_2 * m_4 * qp4 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4)) / 2 + (l_1 * \\
& l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_2) * c(\theta_4)) / 2 - (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * s(\theta_4)) / 2
\end{aligned}$$

$$R_{2,2} =$$

$$\begin{aligned}
& -qp3 * ((25 * m_3 * s(2 * \theta_3)) / 2 + 18 * m_4 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + (l_2^2 * m_4 * s(2 * \theta_3 + 2 * \\
& \theta_4)) / 2 - 6 * l_1 * m_4 * s(2 * \theta_3 + \theta_4) - 5 * l_1 * m_3 * s(2 * \theta_3) - 6 * l_2 * m_4 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + \\
& (l_1^2 * m_3 * s(2 * \theta_3)) / 2 + (l_1^2 * m_4 * s(2 * \theta_3)) / 2 + l_1 * l_2 * m_4 * s(2 * \theta_3 + \theta_4)) - (m_4 * qp4 * \\
& (l_2 - 6) * (l_2 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) - 6 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + l_1 * s(\theta_4) + l_1 * s(2 * \theta_3 + \theta_4))) / 2
\end{aligned}$$

$$R_{2,3} =$$

$$\begin{aligned}
& -qp2 * ((25 * m_3 * s(2 * \theta_3)) / 2 + 18 * m_4 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + (l_2^2 * m_4 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4)) / 2 - \\
& 6 * l_1 * m_4 * s(2 * \theta_3 + \theta_4) - 5 * l_1 * m_3 * s(2 * \theta_3) - 6 * l_2 * m_4 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + (l_1^2 * m_3 * s(2 * \\
& \theta_3)) / 2 + (l_1^2 * m_4 * s(2 * \theta_3)) / 2 + l_1 * l_2 * m_4 * s(2 * \theta_3 + \theta_4)) - (qp1 * s(\theta_2) * (300 * m_3 + 432 * \\
& m_4 + 300 * m_3 * c(2 * \theta_3) + 432 * m_4 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) - 120 * l_1 * m_3 - 144 * l_2 * m_4 + 12 * l_1^2 * m_3 + \\
& 12 * l_1^2 * m_4 + 12 * l_2^2 * m_4 + m_3^2 * u + m_4^2 * u - 144 * l_1 * m_4 * c(\theta_4) - 144 * l_1 * m_4 * c(2 * \theta_3 + \theta_4) - \\
& 120 * l_1 * m_3 * c(2 * \theta_3) - 144 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + 12 * l_1^2 * m_3 * c(2 * \theta_3) + 12 * l_1^2 * m_4 * c(2 * \\
& \theta_3) + 12 * l_2^2 * m_4 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + 24 * l_1 * l_2 * m_4 * c(\theta_4) + 24 * l_1 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_3 + \theta_4))) / 24
\end{aligned}$$

$$R_{2,4} =$$

$$-(m_4 * qp2 * (l_2 - 6) * (l_2 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) - 6 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + l_1 * s(\theta_4) + l_1 * s(2 * \theta_3 + \theta_4)))/2 - (m_4 * qp1 * s(\theta_2) * (432 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) - 144 * l_2 - 144 * l_2 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + m_4 * u + 12 * l_2^2 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) - 72 * l_1 * c(\theta_4) + 12 * l_2^2 - 72 * l_1 * c(2 * \theta_3 + \theta_4) + 12 * l_1 * l_2 * c(\theta_4) + 12 * l_1 * l_2 * c(2 * \theta_3 + \theta_4) + 432))/24$$

$$R_{3,1} =$$

$$(25 * m_3 * qp2 * s(\theta_2))/2 + 18 * m_4 * qp2 * s(\theta_2) - (25 * m_3 * qp1 * s(2 * \theta_3))/4 - (l_1^2 * m_3 * qp1 * s(2 * \theta_3))/4 - (l_1^2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_3))/4 + (25 * m_3 * qp2 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2))/2 - 5 * l_1 * m_3 * qp2 * s(\theta_2) - 6 * l_2 * m_4 * qp2 * s(\theta_2) + (25 * m_3 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3))/4 - 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) - 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) - (m_3^2 * qp1 * u^2 * s(2 * \theta_3))/48 + (5 * l_1 * m_3 * qp1 * s(2 * \theta_3))/2 + (l_1^2 * m_3 * qp2 * s(\theta_2))/2 + (l_1^2 * m_4 * qp2 * s(\theta_2))/2 + (l_2^2 * m_4 * qp2 * s(\theta_2))/2 + (m_3^2 * qp2 * u * s(\theta_2))/24 + (m_4^2 * qp2 * u * s(\theta_2))/24 - (5 * l_1 * m_3 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3))/2 + 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) + 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) + (l_1^2 * m_3 * qp2 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2))/2 + (l_1^2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2))/2 - 6 * l_1 * m_4 * qp2 * c(\theta_4) * s(\theta_2) - 6 * l_1 * m_4 * qp4 * c(\theta_2) * s(\theta_4) + (l_1^2 * m_3 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3))/4 + (l_1^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3))/4 - (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4))/4 - (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3))/4 + 18 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - 18 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) - 5 * l_1 * m_3 * qp2 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_2) + 3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4) + 3 * l_1 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4) + 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) + 9 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) + (m_3^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3))/48 - (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4))/48 - (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3))/48 + 6 * l_2 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4))/48 + (m_4^2 * qp1 * u^2 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3))/48 - (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4))/2 - (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4))/2 - 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) - 3 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3) + (l_2^2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2))/2 - (l_2^2 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4) * s(\theta_2))/2 - 6 * l_1 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) + (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(2 * \theta_4))/4 + (l_2^2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_4) * s(2 * \theta_3))/4 + 6 * l_1 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) + l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * c(\theta_4) * s(\theta_2) + l_1 * l_2 * m_4 * qp4 * c(\theta_2) * s(\theta_4) - 3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4) - 3 * l_1 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4) - 6 * l_2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(2 * \theta_4) * s(\theta_2) + l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * c(2 * \theta_3) * c(\theta_4) * s(\theta_2) - l_1 * l_2 * m_4 * qp2 * s(2 * \theta_3) * s(\theta_2) * s(\theta_4) + (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * c(2 * \theta_3) * s(\theta_4))/2 + (l_1 * l_2 * m_4 * qp1 * c(2 * \theta_2) * s(2 * \theta_3) * c(\theta_4))/2$$

$$R_{3,2} =$$

$$qp2 * ((25 * m_3 * s(2 * \theta_3))/2 + 18 * m_4 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + (l_2^2 * m_4 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4))/2 - 6 * l_1 * m_4 * s(2 * \theta_3 + \theta_4) - 5 * l_1 * m_3 * s(2 * \theta_3) - 6 * l_2 * m_4 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + (l_1^2 * m_3 * s(2 * \theta_3))/2 + (l_1^2 * m_4 * s(2 * \theta_3))/2 + l_1 * l_2 * m_4 * s(2 * \theta_3 + \theta_4)) + (qp1 * s(\theta_2) * (300 * m_3 + 432 * m_4 + 300 * m_3 * c(2 * \theta_3) + 432 * m_4 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) - 120 * l_1 * m_3 - 144 * l_2 * m_4 + 12 * l_1^2 * m_3 + 12 * l_1^2 * m_4 + 12 * l_2^2 * m_4 + m_3^2 * u + m_4^2 * u - 144 * l_1 * m_4 * c(\theta_4) - 144 * l_1 * m_4 * c(2 * \theta_3 + \theta_4) - 120 * l_1 * m_3 * c(2 * \theta_3) - 144 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + 12 * l_1^2 * m_3 * c(2 * \theta_3) + 12 * l_1^2 * m_4 * c(2 * \theta_3) + 12 * l_2^2 * m_4 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + 24 * l_1 * l_2 * m_4 * c(\theta_4) + 24 * l_1 * l_2 * m_4 * c(2 * \theta_3 + \theta_4)))/24$$

$$R_{3,3} = -l_1 * m_4 * qp4 * s(\theta_4) * (l_2 - 6)$$

$$R_{3,4} = -l_1 * m_4 * s(\theta_4) * (l_2 - 6) * (qp3 + qp4 - qp1 * c(\theta_2))$$

$$R_{4,1} =$$

$$\begin{aligned} & 18*m_4*qp2*s(\theta_2) - (9*l_1*m_4*qp1*s(\theta_4))/2 - 6*l_2*m_4*qp2*s(\theta_2) - 9*m_4*qp1* \\ & c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) - 9*m_4*qp1*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3) + (l_2^2*m_4*qp2*s(\theta_2))/2 + (m_4^2*qp2*u* \\ & s(\theta_2))/24 + 3*l_2*m_4*qp1*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) + 3*l_2*m_4*qp1*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3) - 3*l_1*m_4* \\ & qp2*c(\theta_4)*s(\theta_2) + 6*l_1*m_4*qp3*c(\theta_2)*s(\theta_4) - (l_2^2*m_4*qp1*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4))/4 - (l_2^2*m_4* \\ & qp1*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3))/4 + 18*m_4*qp2*c(2*\theta_3)*c(2*\theta_4)*s(\theta_2) - 18*m_4*qp2*s(2*\theta_3)* \\ & s(2*\theta_4)*s(\theta_2) - (3*l_1*m_4*qp1*c(2*\theta_2)*s(\theta_4))/2 + (3*l_1*m_4*qp1*c(2*\theta_3)*s(\theta_4))/2 + (3* \\ & l_1*m_4*qp1*s(2*\theta_3)*c(\theta_4))/2 + 9*m_4*qp1*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) + 9*m_4*qp1*c(2* \\ & \theta_2)*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3) - (m_4^2*qp1*u^2*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4))/48 - (m_4^2*qp1*u^2*c(2*\theta_4)*s(2* \\ & \theta_3))/48 + (3*l_1*l_2*m_4*qp1*s(\theta_4))/4 + 6*l_2*m_4*qp2*s(2*\theta_3)*s(2*\theta_4)*s(\theta_2) + (m_4^2*qp1* \\ & u^2*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4))/48 + (m_4^2*qp1*u^2*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3))/48 + (l_1*l_2* \\ & m_4*qp1*c(2*\theta_2)*s(\theta_4))/4 - (l_1*l_2*m_4*qp1*c(2*\theta_3)*s(\theta_4))/4 - (l_1*l_2*m_4*qp1*s(2*\theta_3)* \\ & c(\theta_4))/4 - 3*l_2*m_4*qp1*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4) - 3*l_2*m_4*qp1*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_4)*s(2* \\ & \theta_3) + (l_2^2*m_4*qp2*c(2*\theta_3)*c(2*\theta_4)*s(\theta_2))/2 - (l_2^2*m_4*qp2*s(2*\theta_3)*s(2*\theta_4)*s(\theta_2))/2 - \\ & 3*l_1*m_4*qp2*c(2*\theta_3)*c(\theta_4)*s(\theta_2) + (l_2^2*m_4*qp1*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(2*\theta_4))/4 + (l_2^2*m_4* \\ & qp1*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_4)*s(2*\theta_3))/4 + 3*l_1*m_4*qp2*s(2*\theta_3)*s(\theta_2)*s(\theta_4) + (l_1*l_2*m_4*qp2* \\ & c(\theta_4)*s(\theta_2))/2 - l_1*l_2*m_4*qp3*c(\theta_2)*s(\theta_4) - (3*l_1*m_4*qp1*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(\theta_4))/2 - \\ & (3*l_1*m_4*qp1*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*c(\theta_4))/2 - 6*l_2*m_4*qp2*c(2*\theta_3)*c(2*\theta_4)*s(\theta_2) + \\ & (l_1*l_2*m_4*qp2*c(2*\theta_3)*c(\theta_4)*s(\theta_2))/2 - (l_1*l_2*m_4*qp2*s(2*\theta_3)*s(\theta_2)*s(\theta_4))/2 + \\ & (l_1*l_2*m_4*qp1*c(2*\theta_2)*c(2*\theta_3)*s(\theta_4))/4 + (l_1*l_2*m_4*qp1*c(2*\theta_2)*s(2*\theta_3)*c(\theta_4))/4 \end{aligned}$$

$$R_{4,2} =$$

$$\begin{aligned} & (m_4 * qp2 * (l_2 - 6) * (l_2 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) - 6 * s(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + l_1 * s(\theta_4) + \\ & l_1 * s(2 * \theta_3 + \theta_4)))/2 + (m_4 * qp1 * s(\theta_2) * (432 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) - 144 * l_2 - 144 * l_2 * \\ & c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) + m_4 * u + 12 * l_2^2 * c(2 * \theta_3 + 2 * \theta_4) - 72 * l_1 * c(\theta_4) + 12 * l_2^2 - 72 * \\ & l_1 * c(2 * \theta_3 + \theta_4) + 12 * l_1 * l_2 * c(\theta_4) + 12 * l_1 * l_2 * c(2 * \theta_3 + \theta_4) + 432))/24 \end{aligned}$$

$$R_{4,3} = l_1 * m_4 * s(\theta_4) * (qp3 - qp1 * c(\theta_2)) * (l_2 - 6)$$

$$R_{4,4} = 0$$

### D.3. Vector de gravedad

$$K = \begin{bmatrix} R_{1,1} \\ R_{2,1} \\ R_{3,1} \\ R_{4,1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

A continuación se muestran los valores del vector gravedad de la ecuación (D.3).

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= (981 * m_4 * (l_2 * c(\theta_4) * (s(\theta_1) * s(\theta_3) + c(\theta_1) * c(\theta_2) * c(\theta_3)) - 6 * s(\theta_4) * \\ &\quad (c(\theta_3) * s(\theta_1) - c(\theta_1) * c(\theta_2) * s(\theta_3)) - 6 * c(\theta_4) * (s(\theta_1) * s(\theta_3) + c(\theta_1) * c(\theta_2) * \\ &\quad c(\theta_3)) + l_2 * s(\theta_4) * (c(\theta_3) * s(\theta_1) - c(\theta_1) * c(\theta_2) * s(\theta_3)) + l_1 * s(\theta_1) * s(\theta_3) + l_1 * c(\theta_1) * \\ &\quad c(\theta_2) * c(\theta_3)))/100 - (8829 * m_1 * c(\theta_1))/200 - (6867 * m_2 * c(\theta_1) * c(\theta_2))/200 + \\ &\quad (981 * m_3 * (s(\theta_1) * s(\theta_3) + c(\theta_1) * c(\theta_2) * c(\theta_3)) * (l_1 - 5))/100 \\ R_{2,1} &= (981 * s(\theta_1) * s(\theta_2) * (7 * m_2 + 12 * m_4 * c(\theta_3 + \theta_4) + 10 * m_3 * c(\theta_3) - 2 * \\ &\quad l_1 * m_3 * c(\theta_3) - 2 * l_1 * m_4 * c(\theta_3) - 2 * l_2 * m_4 * c(\theta_3 + \theta_4)))/200 \\ R_{3,1} &= -(981 * m_4 * (6 * s(\theta_4) * (c(\theta_1) * s(\theta_3) - c(\theta_2) * c(\theta_3) * s(\theta_1)) - 6 * c(\theta_4) * \\ &\quad (c(\theta_1) * c(\theta_3) + c(\theta_2) * s(\theta_1) * s(\theta_3)) + l_2 * c(\theta_4) * (c(\theta_1) * c(\theta_3) + \\ &\quad c(\theta_2) * s(\theta_1) * s(\theta_3)) - l_2 * s(\theta_4) * (c(\theta_1) * s(\theta_3) - c(\theta_2) * c(\theta_3) * s(\theta_1)) + l_1 * \\ &\quad c(\theta_1) * c(\theta_3) + l_1 * c(\theta_2) * s(\theta_1) * s(\theta_3)))/100 - (981 * m_3 * (c(\theta_1) * c(\theta_3) + \\ &\quad c(\theta_2) * s(\theta_1) * s(\theta_3)) * (l_1 - 5))/100 \\ R_{4,1} &= -(981 * m_4 * (l_2 - 6) * (c(\theta_1) * c(\theta_3) * c(\theta_4) - c(\theta_1) * s(\theta_3) * s(\theta_4) + \\ &\quad (c(\theta_2) * c(\theta_3) * s(\theta_1) * s(\theta_4) + c(\theta_2) * c(\theta_4) * s(\theta_1) * s(\theta_3)))/100 \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] Joseph. Hamill. *Biomechanical basis of human movement*. Wolters kluwer, 2014.
- [2] Donald Rizzo. *Fundamentos de anatomía y fisiología* . Cengage Learning, 2011.
- [3] mayo clinic. “accidente cerebrovascular”, 2020.
- [4] (S/f). Ewellix.com, (s/f). Extraído de la 7<sup>a</sup> edición del Manual de publicación de APA.
- [5] (S/f-b). Addimen.com, (s/f). Extraído de la 7<sup>a</sup> edición del Manual de publicación de APA.
- [6] Gabrian Team. Aluminio 6061: Conozca sus propiedades y usos, 2019. Extraído de la 7<sup>a</sup> edición del Manual de publicación de APA.
- [7] Edgar Ibarra-Zea, Dulce Citlalli Martínez Peón, and Deira Sosa Méndez. Diseño y modelado cinemático de exoesqueleto de hombro para paciente con enfermedad cerebrovascular. *Memorias del Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica*, 8(1):201–204, Nov. 2021.
- [8] Instituto Nacional de Estadística y Geografía. “estadísticas a propósito del día internacional de las personas con discapacidad (3 de diciembre)”, 2019.
- [9] Instituto Nacional de Estadística y Geografía. En México somos 126 014 024 habitantes: Censo de población y vivienda 2020, 2021.
- [10] Instituto Nacional de Estadística y Geografía. Estadísticas a propósito del día internacional de las personas con discapacidad (datos nacionales), 2021.
- [11] Neurocirugía y Enfermedad Cerebrovascular Instituto de Neurología. “terapia endovascularneuroológica de enfermedades vasculares cerebrales”, 2021.
- [12] WSO. World stroke organization. <https://www.world-stroke.org>, 2020 (consulta Mayo 11, 2022).
- [13] Organización Mundial de la Salud. Annual report 2020. En línea. <https://www.world-stroke.org/assets/downloads/WSOAnnualReport2020online.pdf> [Consulta : julio2021].

- 
- [14] MARLENNE RODRÍGUEZ SALGADO. Mortalidad intrahospitalaria por enfermedades cerebrovasculares en las principales instituciones públicas de salud de México. *Boletín CONAMED-OPS*, 14:7–10, 2019.
- [15] Instituto Nacional de Estadística y Geografía. Estadística de defunciones registradas de enero a junio de 2021 (preliminar), 2022.
- [16] José L Pons. *Wearable robots: biomechatronic exoskeletons*. John Wiley & Sons, 2008.
- [17] Barney Francis LeVeau, Marian Williams, and Herbert R Lissner. *Exoesqueletos Robóticos para Rehabilitación y Asistencia de Pacientes con Daño Neurológico*. Saunders, 2017.
- [18] Mohammad Habibur Rahman, Thierry Kittel-Ouimet, Maarouf Saad, Jean-Pierre Kenné, and Philippe S Archambault. Development and control of a robotic exoskeleton for shoulder, elbow and forearm movement assistance. *Applied Bionics and Biomechanics*, 9(3):275–292, 2012.
- [19] QFD. Quality function deployment. [http://www.qfdi.org/what\\_is\\_qfd/blitz\\_qfd.html](http://www.qfdi.org/what_is_qfd/blitz_qfd.html), 2021 (consulta Mayo 11, 2022).
- [20] Juan Francisco Ayala-Lozano, Guillermo Urriolagoitia-Sosa, Beatriz Romero-Angeles, Torres-San Miguel, Christopher René, Luis Antonio Aguilar-Pérez, and Guillermo Manuel Urriolagoitia-Calderón. Diseño mecánico de un exoesqueleto para rehabilitación de miembro superior. *Revista Colombiana de Biotecnología*, 17(1):79–90, 2015.
- [21] Fabián López Camacho, Luis Serna Hernández, Juan Olguín Camacho, Rogelio PORTILLO-VÉLEZ, Luis URÍAS, J VÁZQUEZ-SANTACRUZ, and N FLETES. Desarrollo de un exoesqueleto para la rehabilitación de miembros superiores. *Revista de Tecnología e Innovación*, 3(7):1–12, 2016.
- [22] D Sosa-Méndez, M y Arias-Montiel, and E Lugo-González. Diseño de un prototipo de exoesqueleto para rehabilitación del hombro. *Revista mexicana de ingeniería biomédica*, 38(1):330–342, 2017.
- [23] GM Cruz-Martínez, AH Vilchis-González, LA Zúñiga-Avilés, JC Ávila-Vilchis, and AI Hernández-Sánchez. Diseño de exoesqueleto con base en cuatro casos de estudio de rehabilitación de miembro superior. *Revista mexicana de ingeniería biomédica*, 39(1):81–94, 2018.
- [24] Amin Zeiaee, Rana Soltani-Zarrin, Reza Langari, and Reza Tafreshi. Design and kinematic analysis of a novel upper limb exoskeleton for rehabilitation of stroke patients. In *2017 International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR)*, pages 759–764. IEEE, 2017.

- [25] medical expo. Artromotor de hombro artromot-s4. En línea. <https://www.medicalexpo.es/prod/chattanooga-international/product-96097-928819.html> [Consulta: Noviembre 2019].
- [26] hocoma. armeo-power. En línea. <https://www.hocoma.com/us/solutions/armeopower/> [Consulta: Noviembre 2019].
- [27] Aura. Orte. En línea. <https://aurarobotix.com/es/productos/orte/> [Consulta: Noviembre 2019].
- [28] Duane Knudson. *Fundamentals of biomechanics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [29] Margareta Nordin and Victor Hirsch Frankel. *Basic biomechanics of the musculoskeletal system*. Lippincott Williams & Wilkins, 2001.
- [30] Shane Xie et al. Advanced robotics for medical rehabilitation. *Springer tracts in advanced robotics*, 108(1):357, 2016.
- [31] Alberto Cruz and Andrés Garnica. *Ergonomía aplicada*. Ecoe Ediciones, 2011.
- [32] Manuel Bestratén Bellovi. *Ergonomía*. Instituto Nacional de Seguridad e Higiene en el Trabajo, 2004.
- [33] Rosalío Ávila Chaurand, Lilia R Prado León, and Elvia L González Muñoz. *Dimensiones antropométricas de población latinoamericana*. Universidad de Guadalajara, CUAAD, 2007.
- [34] Barney Francis LeVeau, Marian Williams, and Herbert R Lissner. *Williams & Lissner's biomechanics of human motion*. Saunders, 1992.
- [35] Hugh Markus. Stroke: causes and clinical features. *Medicine*, 44(9):515–520, 2016.
- [36] Organización Mundial de la Salud. Rehabilitación. En línea. <https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/rehabilitation>[Consulta: Noviembre 2021].
- [37] Álvaro Moyano. El accidente cerebrovascular desde la mirada del rehabilitador. *Rev Hosp Clín Univ Chile*, 21:348–55, 2010.
- [38] R PS Van Peppen, Gert Kwakkel, Sharon Wood-Dauphinee, H JM Hendriks, Ph J Van der Wees, and Joost Dekker. The impact of physical therapy on functional outcomes after stroke: what's the evidence? *Clinical rehabilitation*, 18(8):833–862, 2004.
- [39] Ángel Arias Cuadrado. Rehabilitación del acv: evaluación, pronóstico y tratamiento. *Galicia Clínica*, 70(3):25–40, 2009.

- [40] Ho Shing Lo and Sheng Quan Xie. Exoskeleton robots for upper-limb rehabilitation: State of the art and future prospects. *Medical engineering & physics*, 34(3):261–268, 2012.
- [41] John J Craig. Robótica, tercera edición., 2006.
- [42] Mark W Spong and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2004.
- [43] Saha Subir Kumar. Introducción a la robótica, 2010.
- [44] Bruno Siciliano, Oussama Khatib, and Torsten Kröger. *Springer handbook of robotics*, volume 200. Springer, 2008.
- [45] Alejo Avello-Iturriagaitia. Teoría de máquinas. 2014.
- [46] Robert L Norton. *Diseño de maquinaria*. McGraw-Hill, 1995.
- [47] EDUARDO ÁGUEDA CASADO, TOMÁS GÓMEZ MORALES, and JOSÉ MARTÍN NAVARRO. *Sistemas de transmisión de fuerzas y trenes de rodaje*. Editorial Paraninfo, 2012.
- [48] A. Wilson. Dynamixel mx-64t. robotis, (s/f). Extraído de la 7<sup>a</sup> edición del Manual de publicación de APA.
- [49] DYNAMIXEL MX-64T . Dynamixel mx-64t. (sobrepedido), (s/f). Extraído de la 7<sup>a</sup> edición del Manual de publicación de APA.
- [50] Paul Kurowski. *Thermal analysis with Solidworks Simulation 2015 and Flow Simulation 2015*. SDC publications, 2015.