

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Subdirección Académica

Departamento de Ingeniería Mecánica

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

Bases para el Diseño Estructural de Empaques Termoformados

Presentado por

Ing. Jesús Benjamín Sánchez Hernández

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis
Dr. Arturo Abundez Pliego

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Cuernavaca, mor., 01/diciembre/2015

OFICIO No. DIM/277/2015

Asunto: Aceptación de documento de tesis

C. DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Ing. Jesús Benjamín Sánchez Hernández, con número de control M13CE053, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Bases para el diseño estructural de empaque termoformados", hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

DR. ARTURO ABUNDEZ PLIEGO
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
6801139

REVISOR 1

DR. ELADIO MARTÍNEZ RAYÓN
Doctor en Ciencias en Ing. Mecánica
8500740

REVISOR 2

DR. JORGE COLLIN OCAMPO
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
4694783

REVISOR 3

DR. JOSÉ ANTONIO ARELLANO CABRERA
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
7420198

C.p. (Lic. Guadalupe Garrido Rivera) - Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Estudiante
Expediente

Iniciales AAP/mrsr

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Cuernavaca, Mor., 3 de diciembre de 2015
OFICIO No. SAC/231/2015

Asunto: Autorización de impresión de tesis

ING. JESÚS BENJAMÍN SÁNCHEZ HERNÁNDEZ
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "**Bases para el diseño estructural de empaque termoformados**", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

"CONOCIMIENTO Y TECNOLOGÍA AL SERVICIO DE MÉXICO"

DR. VÍCTOR HUGO OLIVARES PEREGRINO
DIRECTOR



S. E. P.
CENTRO NACIONAL DE
INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
DIRECCIÓN

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr

Dedicatoria

Dedico humildemente este trabajo a Dios y a la vida que me ha dado, por la oportunidad de estudiar, tener la salud necesaria, el bienestar y las amistades que me brinda. Gracias

A mis padres Manuel Argélis Sánchez López y Lucia Liseth Hernández Gómez, por su esfuerzo en hacer de mí una mejor persona y brindarme su apoyo en todo momento. A mi hermano Pablo A. Sánchez Hernández por su paciencia y apoyo moral. A mis amistades cercanas Lucia J. López C., María Fernanda López Ramos, Dileri Juárez, Irene Gtz. M., Karen Santiago, Javier Benigno, Víctor Manuel Penagos, Luis Vázquez Sánchez. A mis abuelos Argelio Hernández Rodríguez y Daysi Gómez A. Todo lo que he logrado y lo que soy se lo debo a ustedes. Gracias

A mis compañeros y amigos que formaron parte de esta experiencia. Gracias

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico que me otorgó para la realización de mis estudios.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico por permitirme realizar mis estudios de maestría.

A mi asesor Dr. Arturo Abúndez Pliego, por brindarme su apoyo, paciencia y confianza a lo largo del desarrollo de este trabajo. Gracias por compartirme un poco de su conocimiento. Todo mi respeto y admiración.

A mi jurado Dr. Eladio Martínez Rayón, Dr. Jorge Colín Ocampo y al Dr. José A. Cabrera Arellano, por sus valiosos comentarios, sugerencias y observaciones durante la realización y revisión de este trabajo.

A los profesores que me impartieron clases Dr. Claudia Cortés, Dr. Andrés Blanco Ortega y al Dr. Dariusz Szwedowicz Wasik que contribuyeron a mi formación profesional.

A todo el personal del Cenidet, en especial a Rocío Salazar, por su amable atención y eficaz colaboración en todos los trámites administrativos.

RESUMEN

El presente trabajo muestra una metodología para la selección de espesor mínimo en blísteres con superficie esférica. Aunque existe una diversidad de métodos para termoformar polímeros las variaciones de espesor están presentes en el empaque terminado.

La metodología de selección de espesor se basa en el estudio de estructuras tipo cascarón. Porque las deformaciones en los empaques blíster son superiores a su espesor sin llegar a la deformación plástica. En estudios realizados en cascarones esféricos con grandes deflexiones se usa la teoría no lineal para analizar el comportamiento de superficies esféricas sometidas a carga puntual y normal a la superficie. Con ayuda de un software de elemento finito se realizó simulaciones de cascarones esféricos de PVC rígido, las variaciones hechas en los modelos son en el adelgazamiento del espesor en el ápice, aplicación de carga puntual en diferentes zonas de la superficie esférica, variación en el radio de curvatura y variación de espesor en distintas zonas. Como resultado se obtienen las gráficas de comportamiento de superficie esférica que permiten al diseñador seleccionar un espesor mínimo de acuerdo a la condición de carga y desplazamiento normal en la superficie esférica.

ABSTRACT

This paper presents a methodology for the selection of minimum thickness in blisters with spherical surface. Although a variety of methods for thermoforming polymers thickness variations are present in the finished packaging.

The thickness selection methodology is based on the study of shell type structures. Because the deformations in the blister packaging are superior to its thickness without plastic deformation. Studies in spherical shells with large deflections nonlinear theory is used to analyse the behaviour of spherical surfaces subject to timely and surface normal load. Using finite element simulation software spherical shells of rigid PVC is made; variations in the models are made in thinning the thickness in the apex point load application in different areas of the spherical surface, variation in the radius of curvature and thickness variation in different areas. As a result the run charts spherical surface allowing the designer to select a minimum thickness according to the load condition and simply moving around the spherical surface are obtained.

Contenido

Nomenclatura	i
Lista de figuras	iii
Lista de tablas	vii
1. 1 Objetivo	2
1. 2 Alcances y limitaciones	2
CAPÍTULO 2 ESTADO DEL ARTE	3
2. 1 Termoformado	3
2.1. 1 Polímeros termoformables	4
2.1. 2 Técnicas de calentamiento de lámina	6
2.1. 3 Equipo de termoformado y complementos	7
2.1.3. 2 Formado con aire a presión	12
2.1.3. 3 Formado mecánico	13
2. 2 Teoría y trabajos en cascarones	16
CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO	18
3. 1 Cascarones en forma de superficie de revolución y cargados simétricamente respecto a sus ejes (teoría lineal).	19
3.1. 1 Casos particulares de cascarones en la forma de superficie de revolución.	23
3.1. 2 Cascarones de resistencia constante	26
3.1. 3 Desplazamientos en cascarones cargados simétricamente teniendo la forma de superficies de revolución.	29
3.1. 4 Cascarones en la forma de superficie de revolución bajo carga asimétrica.	33
3.1. 5 Teoría de membrana de cascarones cilíndricos	35
3.1. 6 Deformaciones de cáscaras.	41
3.1. 7 Limitaciones	45
3. 2 Teoría no lineal	46

3.2. 1 Similitud de los empaques termoformados con estructuras tipo cascarón	46
3.2. 2 Ecuaciones para el cálculo de buckling	46
3.2. 3 Curvas carga-deflexión	50
CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN POR ELEMENTO FINITO, CALIBRACIÓN DE MODELO Y CASOS PROPUESTOS.	55
4. 1 Dimensiones, condición de frontera y propiedades del material en el modelo.	55
4. 2 Calibración de modelo y comparación.	56
4. 3 Casos propuestos	61
4.3. 1 Variación de espesor conservando el espesor inicial en la base.	61
4.3. 2 Variación de espesor en zonas específicas.	62
4.3. 3 Aplicación de carga en diferentes partes de la superficie del modelo.	63
4.3. 4 Superficie esférica con base cuadrada para diferentes valores de R/h .	63
4.3. 5 superficie esférica con diferente valores de R/h .	64
4.3. 6 Empaque complejo con uso de superficies esféricas	65
CAPÍTULO 5 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE SIMULACIONES POR FEM	66
5. 1 Modelo con variación de espesor conservando el espesor inicial en la base.	66
5. 2 Modelo con variación de espesor en zonas específicas.	68
5. 3 Modelo con aplicación de carga en diferentes partes de su superficie.	70
5. 4 Modelo con superficie esférica con base cuadrada para diferentes valores de R/h	72
5. 5 modelo con diferentes valores de R/h	73
5. 6 Modelo de empaque complejo	75
5. 7 Gráficas normalizadas de comportamiento obtenida de los modelos simulados	81
5. 8 Ejemplo de aplicaciones y consideraciones de diseño	85
5.8. 1 Blíster para DSS (disco de estado sólido)	85
5.8. 2 Blíster para Marcapasos	86
5.8. 3 Otro tipo de aplicaciones	86
5.8. 4 Consideraciones de diseño	87
CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	88
6. 1 Conclusiones	88
6. 2 Recomendaciones	89

Referencias	91
Apéndice A	94
Apéndice B Convergencia de malla	106
Apéndice C Superficie de radio variable	109
Apéndice D	113

Nomenclatura

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$	Componentes de la fuerza externa por unidad de área
α, θ, φ	Ángulos de posición en grados
N_φ, N_θ	Fuerzas normales por unidad de longitud
γ	densidad del material
σ	esfuerzo N/m^2
$\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\theta$	Deformaciones unitarias
ρ_0	Presión interna o densidad de material en ecuación de continuidad
D	ancho de banda de flexión
f	Fuerza puntual en N
h	Altura del ápice o espesor del cascarón en mm
θ	Angulo medido desde el ápice en grados.
β	Angulo medido desde el borde para posición de un punto en la superficie
ω, ω_n	Dirección normal a la superficie esférica y modos de <i>Buckling</i>
κ	Longitud medida desde el ápice en mm
α	Radio base del cascaron en mm o coeficiente de manufactura
u	Dirección tangencial a la superficie
M_t, M_k	Momentos sobre el plano medio del elemento diferencial
N_t, N_k	Fuerzas normales al elemento diferencial
d_φ, d_k	Diferencial radial y meridional.
Q	Carga Externa N/m^2
w_0	Desplazamiento vertical desde el ápice con dirección a su centro en mm

P_{cr}	Presión Crítica N/m^2
R	Radio de curvatura del cascarón en mm
σ_{cr}	Esfuerzo Crítico N/m^2
λ	Parámetro de clasificación de las superficies esféricas
t	Espesor del cascarón en mm
ν	Desplazamiento o Coeficiente de Poisson
ξ	Ángulo en radianes medido desde el borde hasta el ápice de la superficie esférica o desplazamiento.
P^*	Carga normalizada en términos del radio de curvatura, la carga real, módulo de Young y del espesor.
P	Carga real en N
E	Módulo de Young o de elasticidad
R	Radio de curvatura de la superficie esférica en mm
h_v	Espesor variable en mm
φ_v	Ángulo variable en radianes
φ_0	Ángulo inicial en radianes
φ_t	Ángulo final en radianes
A_i	Ángulo inicial en radianes
A_f	Ángulo final en radianes

Lista de figuras

Figura 2. 1	Proceso de formado al vacío. a) calentamiento del termoplástico, b) hoja plástica sobre el molde, c) generación de vacío al interior de la cavidad del molde [21].	8
Figura 2. 2	Proceso de formado con pre-estirado del material termoplástico. a) calentamiento del termoplástico, b) hoja plástica sobre la caja movable, c) generación de vacío en el molde y d) termoplástico con la forma del molde[20].	9
Figura 2. 3	Proceso de formado con pre-estirado del material termoplástico. a) calentamiento del termoplástico, b) hoja plástica sobre la caja movable y pre-estirado con presión, c) generación de vacío en el molde y d) termoplástico con la forma del molde[20].	9
Figura 2. 4	Proceso de formado con molde hembra y ayuda mecánica. a) calentamiento del termoplástico, b) hojas plástica sobre el plug, y c) generación de vacío en el molde [20].	10
Figura 2. 5	Proceso de formado con molde hembra. a) calentamiento del termoplástico, b) hoja plástica sobre el molde hembra, c) plug de mueve con dirección a la cavidad del molde y d) generación de vacío en el molde [20].	10
Figura 2. 6	Proceso de formado al vacío para la obtención de una forma libre [20].	11
Figura 2. 7	Proceso de formado al vacío para hojas gemelas, a) calentamiento del material termoplástico, b) sujeción de las láminas con el borde del molde, c) vacío generado en las cavidades superior e inferior del molde y d) forma final de la pieza [20].	11
Figura 2. 8	Proceso de formado por presión para la obtención de una forma libre, el equipo de formado tiene válvula de presión, elemento de sujeción para hoja plástica, sensor de posición que controla el tamaño de la burbuja [20].	12
Figura 2. 9	caja de formado para hojas de calibre grueso, se pueden obtener detalles finos y mejora la distribución de material en la piza terminada [20].	13
Figura 2. 10	Proceso de formado mecánico, la hoja se sujeta a sus extremos al ser calentada [17].	14
Figura 2. 11	a) relaciones para una pieza cilíndrica y b) relaciones de estiramiento para una pieza hembra[20].	14
Figura 3. 1	Elemento cascarón, modificado de [23].	18
Figura 3. 2	Elemento diferencial extraído de un cascarón, modificado de [23].	19
Figura 3. 3	Se observa que la resultante debida a las fuerzas a los costados es igual $N\theta r1d\phi d\theta$, modificado de [23].	20
Figura 3. 4	componente tangente al meridiano de la resultante en dirección de r_o , modificado de [23].	21
Figura 3. 5	Porción de cascarón definido por el ángulo ϕ [23].	22
Figura 3. 6	Cascarón esférico, modificado de [23].	23

Figura 3. 7 Domo con la parte superior removida y con anillo de reforzamiento, modificado de [23].	25
Figura 3. 8 Cascarón con espesor variable, modificado de [23].	28
Figura 3. 9 Elemento meridiano, el desplazamiento radial nos provoca un desplazamiento en dirección de v , modificado de [23].	29
Figura 3. 10 La proyección de los desplazamientos sobre el eje horizontal nos permite obtener la ecuación 3.45, modificado de [23].	30
Figura 3. 11 Elemento diferencial bajo carga asimétrica, modificado de [23].	33
Figura 3. 12 Porción de cascarón cilíndrico, modificado de [23].	35
Figura 3. 13 Elemento diferencial del cascarón cilíndrico, modificado de [23].	36
Figura 3. 14 Vista lateral y frontal del tubo, modificado de [23].	37
Figura 3. 15 Cascarón con sección transversal semicircular, modificada de [23].	40
Figura 3. 16 Cascarón sometido a una fuerza normal a su superficie, modificada de [26].	42
Figura 3. 17 Cascarón sometido a una fuerza normal a la superficie, modificada de [29].	44
Figura 3. 18 Sección transversal de una superficie esférica y elemento diferencial a la derecha, modificado de [29].	47
Figura 3. 19 Variación de los modos de deflexión lineal con ω_1 para distintos valores de λ [31].	48
Figura 3. 20 Curva de los primeros 4 valores de ω_n para $\lambda = 4$ y 7 [31].	49
Figura 3. 21 Curvas de carga-deflexión para distintos valores de λ y los bordes sin restringir [32].	51
Figura 3. 22 Curvas carga-deflexión, para superficies esféricas con distintos valores de λ y con los bordes libres [32].	52
Figura 3. 23 Comparación del análisis numérico de Mescall con otros investigadores y datos experimentales [32].	52
Figura 3. 24 Curvas carga-deflexión en superficies esféricas con los bordes restringidos [32].	52
Figura 3. 25 Curvas carga-deflexión para un tipo de superficie esférica, con carga distribuida alrededor del ápice [32].	52
Figura 3. 26 Curvas carga-deflexión para un tipo valor de λ , con carga distribuida alrededor del ápice [32].	53
Figura 3. 27 Curvas carga-deflexión con distintos valores de λ , con carga distribuida alrededor del ápice [32].	53
Figura 3. 28 Graficas de carga-deflexión para distintos valores de R/h , para esfera completa y para superficie esféricas (Bushnell, 1967) [33].	53
Figura 3. 29 . Esquema de la deflexión causada por la aplicación de una fuerza puntual en el ápice del cascarón esférico [35].	54
Figura 3. 30 . Curvas carga-deflexión las curvas 1 y 2, son superficies esféricas y la curva con líneas es el cascarón completo [35].	54

Figura 4. 1 Superficie esférica de prueba, sus bordes restringidos al desplazamiento.....	55
Figura 4. 2 Simulación del modelo de prueba en Ansys R15.0, los valores obtenidos se compraron con los resultados obtenidos de Bushnell y Yevkin.....	56
Figura 4. 3 Curvas carga-deflexión, comparación de los datos obtenidos por elemento finito con los trabajos obtenidos por Yevkin y Bushnell.	57
Figura 4. 4 Cascaron esférico con adelgazamiento en la parte superior (h_2) conservando el espesor inicial (h_1) en los bordes.	61
Figura 4. 5 Cascaron esférico modelado en elemento finito.	62
Figura 4. 6 Perfil de la variación de espesor en la superficie esférica, en el óvalo se marca cómo es la variación en el espesor en el material.	62
Figura 4. 7 Cascaron esférico con aplicación de una carga normal a la superficie cambiando el punto de la fuerza, el radio r de curvatura es de 60mm.	63
Figura 4. 8 Superficie esférica con base cuadrada, el radio es de 60 mm y la longitud de los lados de la base es de 84.85 mm.....	64
Figura 4. 9 Cascaron esférico modelado en elemento finito, se varió el radio de curvatura y el espesor para obtener diferentes relaciones R/h , radio de curvatura inicial es de 60 mm y espesor inicial es de 1 mm.....	64
Figura 4. 10 La aplicación de superficies esféricas en empaque más complejos depende de la habilidad del diseñador, a) vista del empaque, b) empaque mallado.	65
Figura 5. 1 Modelo con variación de espesor en el ápice.....	66
Figura 5. 2 Modelo deformado por la parte del ápice.	66
Figura 5. 3 Gráfica normalizada del comportamiento del cascarón con espesor variable.	67
Figura 5. 4 Gráfica del comportamiento del cascaron esférico con espesor variable.	67
Figura 5. 5 Cascaron con variación de espesor por zonas.	68
Figura 5. 6 Cascaron aplicándole un desplazamiento en el ápice pero con variación de espesor en diferentes puntos.	68
Figura 5. 7 Gráfica 3D Normalizada del comportamiento del cascarón con variación de espesor en diferentes zonas.....	69
Figura 5. 8 Gráfica 3D normalizada, se aprecia claramente un cambio abrupto en su capacidad de carga.....	69
Figura 5. 9 Cascaron esférico aplicándole un desplazamiento con dirección normal a su superficie en una zona distinta a su ápice.....	70
Figura 5. 10 Vista de la deformación sobre el cascarón.....	70
Figura 5. 11 Gráfica del comportamiento del cascarón al ser sometido en diferentes puntos de su superficie a un desplazamiento.	71

Figura 5. 12 Vista de la gráfica donde se aprecia el incremento de la fuerza conforme al desplazamiento.	71
Figura 5. 13 Cascarón de superficie esférica con base cuadrada sometido en su ápice a un desplazamiento.	72
Figura 5. 14 Gráfica 3D del comportamiento del cascarón esférico con base cuadrada.	72
Figura 5. 15 Gráfica 3D del cascarón esférico con base cuadra, se nota la disminución en la capacidad de carga del cascarón con forma aumenta R/h	73
Figura 5. 16 Simulación por elemento finito del comportamiento del cascarón esférico, escala en milímetros.	73
Figura 5. 17 Gráfica 3D del comportamiento de superficies esféricas para diferentes valores de R/h	74
Figura 5. 18 Gráfico 3D del comportamiento de superficies esféricas, se observa la disminución en la capacidad de carga conforme aumenta el valor de R/h	74
Figura 5. 19 Análisis por elemento finito del empaque blíster.	75
Figura 5. 20 Análisis por elemento finito del empaque quitando las superficies esféricas en la zona de botones y joystick.	75
Figura 5. 21 Análisis por elemento finito del empaque sin la protección de los botones y el joystick.	76
Figura 5. 22 Análisis por elemento finito del empaque sobre la superficie esférica central.	76
Figura 5. 23 Gráfica de la fuerza de reacción al someter al empaque a una carga.	77
Figura 5. 24 Gráfica del comportamiento del empaque sin las superficies esféricas en la zona de botones y joystick.	77
Figura 5. 25 Gráfica del comportamiento del empaque dejando los orificios en la zona de botones y joystick.	78
Figura 5. 26 Gráfica de comportamiento de la superficie esférica del empaque con forma sencilla.	78
Figura 5. 27 Conjunto de curvas de carga deflexión de los diferentes análisis del empaque.	79
Figura 5. 28 Comparación del empaque blíster con la superficie sin detalles complejos y curva en función de porcentaje de carga.	80
Figura 5. 29 Gráfica de capacidad de carga con respecto a la variación del espesor en el ápice.	81
Figura 5. 30. Gráfica de la capacidad de carga con respecto al adelgazamiento por zonas.	81
Figura 5. 31 Gráfica en respuesta a la capacidad de carga con forme se aproxima al borde.	82
Figura 5. 32 Gráfica de la curva carga-deflexión de superficie esférica con base cuadra.	82
Figura 5. 33 Gráfica de la curva carga-deflexión para la superficie esférica.	83
Figura 5. 34 Gráfica de la capacidad de carga conforme la relación R/h varía.	83
Figura 5. 35 Curva general para relaciones de Poisson de 0.2 a 0.5.	84
Figura 5. 36 Diseño de empaque tipo blíster para un disco de estado sólido y sometido a un desplazamiento, la unidad de la escala se encuentra en milímetros.	85

Figura 5. 37 Empaque blíster para marcapasos, y sometido a un desplazamiento para su análisis.....86

Figura 5. 38 Otras configuraciones sugeridas para el diseño de empaques tipo blíster con aplicación de superficie esférica.....86

Figura 6. 1 Diagrama de proceso de diseño para uso de superficie esférica en empaques termoformados.....89

Lista de tablas

Tabla 2. 1 Cronología de sucesos del termoformado [15-17].	4
Tabla 2. 2 Polímeros más utilizados para termoformado y el rango de temperatura de formado [17].	5
Tabla 2. 3 Valores ADR máximos para polímeros termoformables [19].....	15
Tabla 4. 1 Valores usados en las propiedades del material.	56
Tabla 4. 2 Energía calculada en cada método y diferencias porcentuales entre los resultados obtenidos.....	60

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

En estudios realizados por la Secretaría de Desarrollo Económico de Baja California se revela que la industria local demanda proveeduría por 11000 millones de dólares anualmente, principalmente para los sectores de electrónica, productos médicos, automotrices y aeroespaciales [1]. Dentro de las demandas, las principales se pueden resumir en empaques termoformados y sellados, moldeo de plásticos por inyección, microprocesadores y piezas metálicas de precisión, por casi 8000 millones de dólares anuales [2]. A nivel mundial se observa un comportamiento similar, y particularmente en la industria del empaque, se reportan crecimientos por encima del resto de los ramos industriales, con incremento de demanda sobre el 6.2% anualmente solo en el la industria farmacéutica, la cual específicamente se encuentra en expansión a nivel mundial con avances en procesos de manufactura, innovación tecnológica e integración, los cuales representan el impulso para el crecimiento de la industria del empaque farmacéutico a nivel global [3,4], y en ese sentido se esperan especialistas en Ingeniería de Empaque que desarrollen soluciones creativas para responder a la dinámica del mercado, tanto en diseños y formas como en materiales [5].

Este trabajo se centra en los empaques termoformados conocidos como blísteres, los cuales se componen de un termoplástico con cavidades (blísteres) y un soporte que puede ser de cartón, polímero o aluminio. El diseño del blíster se enfoca en la función protectora del producto, en el cual se debe garantizar la integridad y el valor de uso. Esta función protectora se basa en el cálculo de la resistencia del empaque a aquellas fuerzas estáticas que se presentan durante el manejo, llenado, cerrado y en el proceso de producción, así como durante el transporte, manejo y almacenamiento del producto.

Los diseñadores de empaque tienen la responsabilidad de elegir un espesor idóneo para la pieza final, para garantizar su integridad estructural y la protección del producto. El personal de empresas dedicadas al rubro del diseño de empaques termoformados, utilizan programas de cómputo para conceptualizar sus bocetos [6,7], siguiendo recomendaciones basadas en la experiencia y con información reportada en la literatura [8-12]. Sin embargo, la selección de un espesor adecuado para el empaque termoformado, no deja de ser iterativo hasta encontrar el espesor óptimo que garantice la protección del producto. Los programas para análisis estructural cobran importancia, ya que ahorran tiempo y costos en vez de realizar pruebas experimentales muy caras [12,13].

En tiempos de los romanos se usó la queratina para fabricar utensilios y fue uno de los materiales más antiguos para termoformar. Durante la segunda guerra mundial se dieron los principios del termoformado debido al desarrollo de materiales termoplásticos, actualmente

Introducción

existen nuevos copoliésteres termoformables a baja temperatura que permite ciclos de producción más cortos.

Existe una variedad de métodos para termoformar con la finalidad de mejorar la distribución de material en la pieza terminada, pues la lámina se adelgaza conforme toma la forma deseada y un modo de aproximar la variación de espesor es con el uso de las relaciones de estiramiento.

Debido a las dimensiones de un empaque blíster comparado con su espesor se puede modelar como una estructura cascarón. La teoría de la membrana o cascarón delgado permite analizar los esfuerzos radiales y meridionales pero se limita a deformaciones inferiores al espesor del cascarón. Y la teoría no lineal para cascarones esféricos las deformaciones son superiores al espesor del cascarón mejorando el análisis a una aproximación a lo real.

1. 1 Objetivo

Establecer una metodología basada en el estudio de superficie esférica. Para la determinación de espesores de lámina o película de acuerdo con las necesidades de resistencia mecánica y geometría del empaque.

1. 2 Alcances y limitaciones

Las limitaciones se deben a la enorme diversidad de formas complejas que los productos pueden tener por lo que el modelo en superficie esférica puede verse limitada. Pero está en la pericia del diseñador en usar superficies esféricas a modelos complejos. El material de uso es PVC rígido y las fuerzas actuantes son puntuales y normales a la superficie esférica.

CAPÍTULO 2 ESTADO DEL ARTE

Este capítulo contiene información de la historia del proceso de termoformado, polímeros más usados en la industria del empaque, las formas de calentamiento de lámina o película termoformable, equipos de termoformado con los complementos usados en el proceso para dar forma al polímero termoformable y los métodos de aproximar el adelgazamiento del material al termoformar.

2. 1 Termoformado

Históricamente, la queratina se considerada como uno de los primeros materiales para termoformar y fue utilizado por los romanos para fabricar utensilios para comida [14,15]. Los nativos Americanos usaron la celulosa de árbol como material termoformable para construir canoas [14, 15,16]. Los principios del termoformado se dieron con el desarrollo de materiales termoplásticos que ocurrió durante la segunda guerra mundial. Al término de la guerra, trajo consigo el rápido crecimiento de volúmenes de comercialización y el desarrollo de maquinaria capaz de ajustarse a los modernos métodos de manufactura [17]. En década de los cincuenta, los materiales termoplásticos tuvieron una enorme demanda. Los años sesentas fue el tiempo durante el cual se consolidaron las bases del proceso de termoformado y hubo mayor desarrollo en los blísteres y empaquetamiento de comida. El desarrollo de nuevos materiales como el PVC flexible también creció [14, 15, 17].

En la actualidad se han desarrollado tres familias de copoliésteres termoformables a baja temperatura, lo que significa que los ciclos de producción son más cortos [14]. Los productos que se obtienen del proceso del termoformado son diversos y la industria del empaque se ve más beneficiada por la alta productividad y costos aceptables. Otras áreas de aplicación del termoformado se encuentran en la industria automotriz, transporte, señalización y anuncios, artículos para el hogar, industria médica, agricultura, horticultura, construcción, vivienda, equipaje y equipo fotográfico. Los sucesos más relevantes en la historia del termoformado se presentan en la tabla 2.1, resumiendo con un panorama general su evolución con el tiempo desde los romanos hasta la actualidad.

Con el paso de los años, la industria del termoformado ha mejorado. Esto se debe al uso de herramientas computacionales que son programas de diseño especializado y desarrollado por empresas como Fleximation para el diseño de blísteres clínicos con el fin de proteger medicamentos. También, empresas como GoldRich Printpak Inc. Y First Choice Packaging hacen uso de las herramientas CAD/CAM/CAE para el diseño de empaques termoformados.

Tabla 2. 1 Cronología de sucesos del termoformado [15-17].

Tiempo	Suceso
27 a. C. – 476 d. C.	<ul style="list-style-type: none">• Los romanos usaron la queratina y para darle forma usaban aceite caliente.• Nativos Americanos usaron celulosa natural para fabricar canoas.
1800 - 1899	<ul style="list-style-type: none">• Hojas de nitrato de celulosa fueron termoformadas, para sonajas de bebé con intrincados detalles.• El proceso de extrusión de plásticos se comercializó.
1900 - 1959	<ul style="list-style-type: none">• Desarrollo de termoplásticos.• Se termoformó PVC rígido para refrigeradores.• Acetatos de celulosa termoformados para ventanas de avionetas.
1960 - 1999	<ul style="list-style-type: none">• Los mayores desarrollos fueron realizados en los blísteres y empaquetamiento de comida.• Se termoforma ABS para industria automotriz.• Viking Products, introdujo tereftalato de polietileno.
2000 - 2012	<ul style="list-style-type: none">• Nuevas familias de copoliésteres para termoformado a bajas temperaturas: RPET / APET, PETG / Spectart y Hoja / UltrosRenutand UltraTuftCX / PCTG.

2.1. 1 Polímeros termoformables

Los polímeros termoplásticos son adecuados para termoformado. Al ser sometidos a un calentamiento, tendrán una variación en su módulo de elasticidad, capacidad de resistencia bajo carga y dureza. Cuando los termoplásticos son calentados arriba de la temperatura de calentamiento de deflexión (Por sus siglas en Ingles H.D.T.), estos tienden a un estado ahulado y con la gravedad se deforman (Tabla 2. 2) [1, 18]. El exceso de calentamiento provoca que el material tienda a degradarse o se formen burbujas en el termoplástico.

Los polímeros termoformables pueden clasificarse de acuerdo a su espesor. Se considera como calibre delgado a las hojas cuyo espesor es menor que 0.060 in o 1.5 mm, dentro de este rango se dividen en dos categorías: Película delgada y lámina delgada.

Termoformado

Las películas delgadas se considera que el espesor es igual o menor a 0.01 in o 0.25 mm y las láminas delgadas su espesor se encuentra entre 0.01 in o 0.25mm y 0.060 in o 1.5 mm [15, 18,19]. También se encuentra la clasificación de calibre grueso en láminas o placas para termoformar, el espesor se considera de 0.120 in o 3 mm en adelante [18].

Tabla 2. 2 Polímeros más utilizados para termoformado y el rango de temperatura de formado [17].

Polímeros	Temperatura de deflexión al calor			Temperatura de termoformado		
	A 264 psi (°C)	A 66 psi (°C)	Sin carga (°C)	Temp. De la hoja (°C)	Temp. Del molde (°C)	Temp. De Ayuda (°C)
Acrílico extruido	94	98		135 – 175	65 – 75	
Acrílico cell-cast	96	110		160 -180	65 - 75	
Acetobutirato de celulosa	65 – 75	75 – 80	120 – 150	140 – 160		
Polietileno de alta densidad		60 – 80	100	145 – 190	95	170
Polipropileno	55 – 65	110 – 115	140	145 – 200		
Poliestireno	70 – 95	70 – 100	100	140 - 170	45 – 65	90
Poliestireno alto impacto	85 – 95	90 – 95	120	170 – 180	45 -65	90
SAN	100	105		220 - 230		
ABS	75 – 115	80 - 120	95	120 -180	70 – 85	90
Polivinilo de cloruro (RV.C.)	70	75	110	135 - 175	45	80

2.1. 2 Técnicas de calentamiento de lámina

Calentar de manera adecuada al polímero termoformable es importante. La mala elección de la temperatura de formado puede ocasionar piezas defectuosas y pérdidas en costos de producción.

La transferencia de calor sucede de tres formas distintas, las cuales son: conducción, convección y radiación. En la práctica las tres maneras de transferencia son concurrentes [17, 19, 20]. Cuando la transferencia de calor es por conducción, parte del cuerpo transfiere su calor a otra parte del mismo cuerpo. También, puede ocurrir por el contacto físico entre cuerpos, sin desplazamiento apreciable entre sus partículas de los cuerpos.

La transferencia de calor entre un fluido y un sólido es llamado convección. En el proceso de termoformado, la lámina calentada está expuesta al aire ambiente. Cuando el aire está quieto o en reposo la transferencia de calor por convección es baja, y si el aire es forzado a través de la lámina la energía de transferencia es mayor. El fenómeno de la transferencia de calor por radiación es el intercambio de energía electromagnética entre cuerpos que no se encuentran en contacto. En el proceso de termoformado se usan tres medios para la transmisión de calor, los cuales son:

- Contacto con gas caliente, líquido o un sólido.
- Radiación infrarroja
- Microondas

Los termoplásticos son pobres conductores de calor. Láminas con espesores gruesos necesitan de mayor tiempo de calentamiento. Por eso es necesario considerar el método de calentamiento y el tamaño del equipo [17].

El cálculo para estimar el calor requerido en una hoja, puede obtenerse de la ecuación (2. 1):

$$\text{Calor requerido} = l * a * e * \rho * (cs * \Delta t + cf) \quad (2. 1)$$

Donde l es la longitud, a es el ancho, e espesor, ρ densidad, cs calor específico, Δt diferencia de temperatura y cf calor de fusión. Con fines prácticos la transmisión de calor se realiza de 4 formas: Calentamiento por contacto, calentamiento por inmersión, calentamiento por convección y calentamiento por radiación infrarroja. Existe el calentamiento interno pero no ha tenido suficiente aplicación en el proceso de termoformado por lo costoso que es el equipo y no todos los polímeros pueden ser utilizados [17, 19, 20].

Al iniciar con temperaturas y ciclos de formado, Plastiglas™ [17] establece términos como son:

- Temperatura de desmoldeo
- Límite inferior de operación
- Temperatura normal de formado
- Límite superior de operación

Temperatura de desmoldeo, se define como la temperatura en la cual es posible retirar la pieza formada sin que sufra distorsión. También, es posible retirar la pieza a mayores temperaturas pero siempre utilizando equipo de enfriamiento. El límite inferior de operación, es la temperatura más baja a la cual es posible formar la pieza sin crear esfuerzos internos. Cuando el polímero es procesado por debajo de esta temperatura, la pieza tendrá: esfuerzos residuales, distorsiones, pérdida de brillo y craqueo. La temperatura normal de formado, es la temperatura a la cual se forma la lámina en condiciones de operación normal. La temperatura debe ser lo más uniforme sobre toda la lámina para que en los termoformados de poca profundidad puedan llevarse a cabo con la ayuda de presión o vacío. El límite superior de operación, es la temperatura en la cual el termoplástico comienza a degradarse, tornándose muy fluida e imposible de manejar, El proceso de extrucción de plásticos opera en el límite superior de temperatura y al ser superada el termoplástico se degrada con la formación de burbujas.

2.1. 3 Equipo de termoformado y complementos

Los primeros equipos para calentamiento de hojas plásticas en el proceso de termoformado, fueron los hornos de convección. A la fecha de hoy se utilizan estos equipos para diversos espesores de lámina y obtener una buena distribución de temperatura en el material. Los equipos de calentamiento por radiación infrarroja son muy rápidos, comparado con el método de inmersión en aceite o de contacto. El tiempo necesario para calentar un termoplástico con espesor de 3.0 mm se logra en un minuto a 10 watts/pulg². La radiación infrarroja para calentamiento de láminas se utiliza en periodos de tiempo muy cortos, y se debe a la absorción calorífica de la lámina que puede ocasionar que se degrade [17].

2.1.3. 1 Formado al vacío

El formado al vacío es el proceso de termoformado más versátil y con mayor uso. Es económico comparado con los equipos de formado a presión o de procesamiento mecánico. Durante el proceso de formado al vacío, el termoplástico se sujeta en un marco y se calienta hasta reblandecerlo (ver Figura 2. 1). Con el polímero aún caliente, se coloca en la cavidad del molde y se aplica vacío. La presión atmosférica empuja al termoplástico contra las paredes y contornos del molde. Las regiones de la hoja termoplástica que entran en contacto con el molde antes de adquirir la forma deseada los espesores son gruesos. Formada la pieza, se retira y se corta, para acelerar el enfriamiento se utiliza sopladores o ventiladores [17, 20,21].

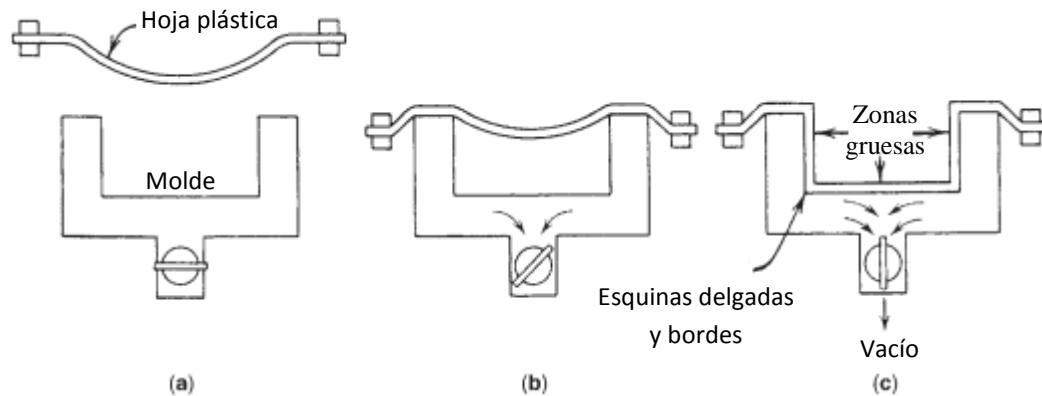


Figura 2. 1 Proceso de formado al vacío. a) calentamiento del termoplástico, b) hoja plástica sobre el molde, c) generación de vacío al interior de la cavidad del molde [21].

De manera regular, generar un vacío lo más rápido posible al interior del molde se logran piezas de mejor calidad. Al existir piezas con cavidades muy profundas o secciones intrincadas, lo conveniente es una velocidad de formado lenta. Las variables que juegan un papel importante en la distribución de material y estiramiento uniforme del termoplástico son:

- Calentamiento uniforme del termoplástico
- Temperatura del molde
- Velocidad de evacuación del aire
- Pre-estirado de la hoja

Existe una variedad de métodos para pre-estirar la hoja termoplástica. Con ellos se puede lograr una distribución más uniforme del material. Estos métodos son: molde macho – regreso brusco, molde macho – *billow plug*, molde hembra – ayuda mecánica, molde hembra – *billow snap back* y molde hembra – *billow plug assist* [15, 20-22].

Molde macho – regreso brusco. Con la hoja calentada se coloca sobre la caja de ayuda (Figura 2. 2 a). Al interior se genera el vacío, provocando un estiramiento previo del material (Figura 2. 2 b). El molde es empujado sobre la caja y con sus bordes se genera un sello (Figura 2. 2 c). Ahora, el vacío es generado en el molde provocando que el material adquiera la forma deseada (Figura 2. 2d).

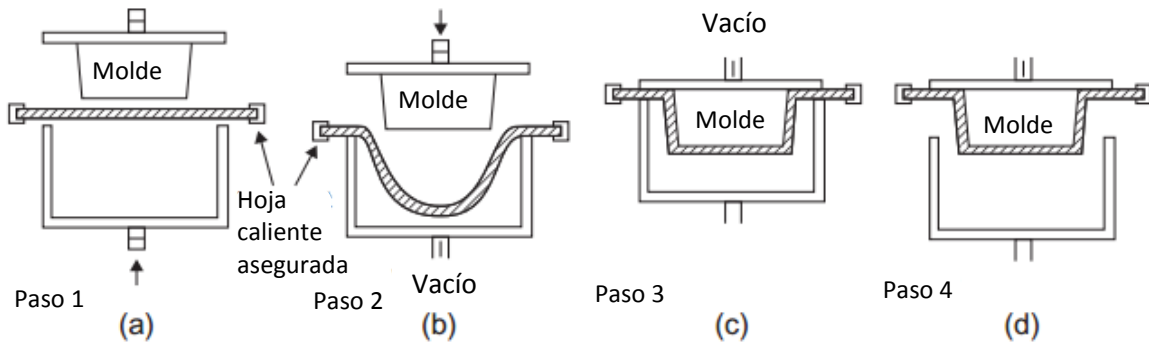


Figura 2. 2 Proceso de formado con pre-estirado del material termoplástico. a) calentamiento del termoplástico, b) hoja plástica sobre la caja móvil, c) generación de vacío en el molde y d) termoplástico con la forma del molde[20].

Molde macho – *billow plug*. Este proceso se basa en el método de regreso abrupto, con la diferencia que el pre-estirado se realiza con aire a presión, esto provoca que la hoja adquiera la forma de una burbuja fuera de la caja (Figura 2. 3 a y b). El molde entra en contacto con la burbuja y se forma un sello con el borde de la caja (Figura 2. 3 c). Al interior de la caja se deja de presurizar el aire y se genera un vacío en el molde para que el termoplástico adquiera la forma deseada (Figura 2. 3 d).

Molde hembra – ayuda mecánica. Es utilizado para formar hojas calientes en moldes hembra. El plug o la ayuda mecánica está hecho con material de transferencia de calor baja, como lo es la madera o espumas sintéticas. Con regularidad el molde se encuentra sobre el bastidor (Figura 2. 4 a). El plug se pone en contacto con la hoja empujando el material hacia la cavidad del molde (Figura 2. 4 b). Con el plug dentro de la cavidad del molde, se aplica un vacío para que la hoja adquiera la forma deseada (Figura 2. 4 c).

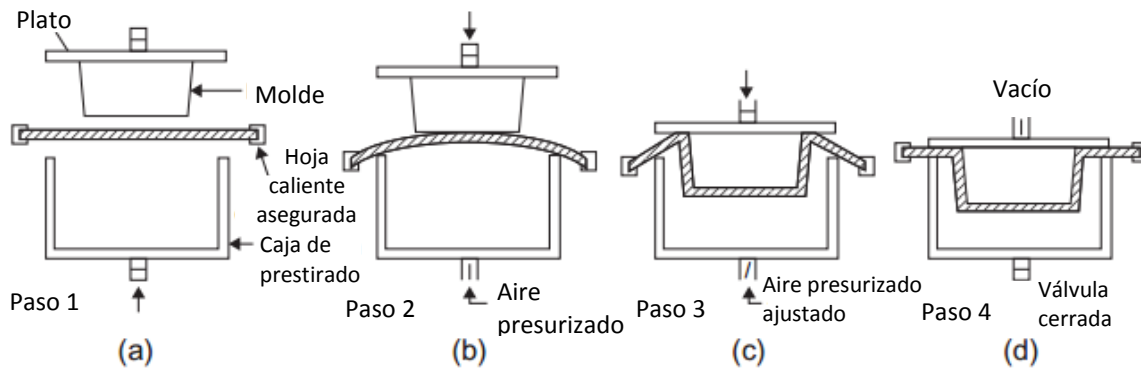


Figura 2. 3 Proceso de formado con pre-estirado del material termoplástico. a) calentamiento del termoplástico, b) hoja plástica sobre la caja móvil y pre-estirado con presión, c) generación de vacío en el molde y d) termoplástico con la forma del molde[20].

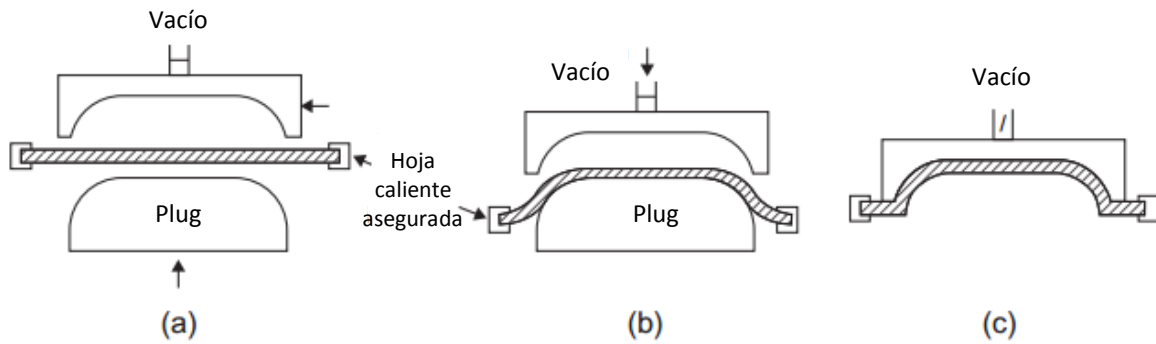


Figura 2. 4 Proceso de formado con molde hembra y ayuda mecánica. a) calentamiento del termoplástico, b) hojas plástica sobre el plug, y c) generación de vacío en el molde [20].

Molde hembra – *billow snap back*. Se usa cuando no es práctico usar solo una ayuda mecánica. La hoja es pre-estirada con aire a presión pero antes se ha calentado el material (Figura 2. 5 a y b). El plug o la ayuda mecánica se desplaza con dirección a la cavidad del molde y la presión es controlada (Figura 2. 5 c). Por último, la presión de aire es invertida y se genera un vacío en el molde para que el termoplástico adquiera la forma deseada (Figura 2. 5 d).

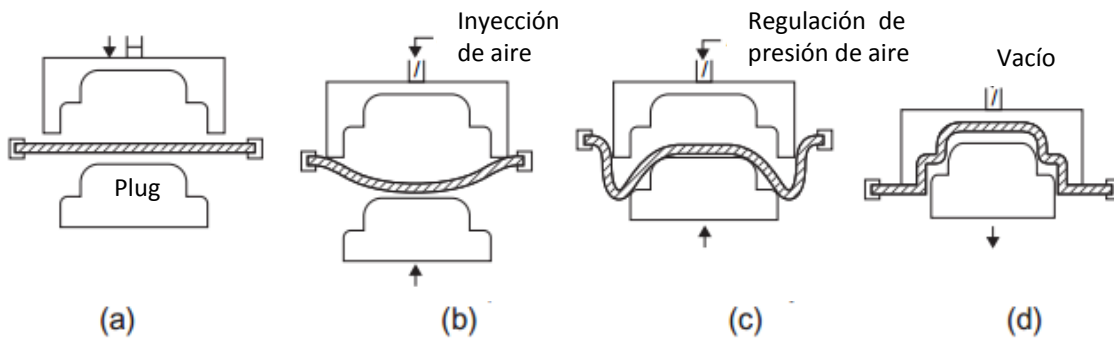


Figura 2. 5 Proceso de formado con molde hembra. a) calentamiento del termoplástico, b) hoja plástica sobre el molde hembra, c) plug de mueve con dirección a la cavidad del molde y d) generación de vacío en el molde [20].

Molde hembra – *billow plug assist*. Es la combinación de los métodos anteriores. Se considera que es una buena manera de conseguir un espesor de pared bastante uniforme en piezas grandes y profundas.

Forma-libre por vacío. Se usa cuando se requiere mejor acabo de superficie y libre de distorsiones. Calentada la lámina, ésta se traslada sobre una caja y se sujeta al marco. Luego al

Termoformado

interior de la caja se genera un vacío, el aire atmosférico fuerza al termoplástico dentro de la caja para formar una burbuja (Figura 2. 6).

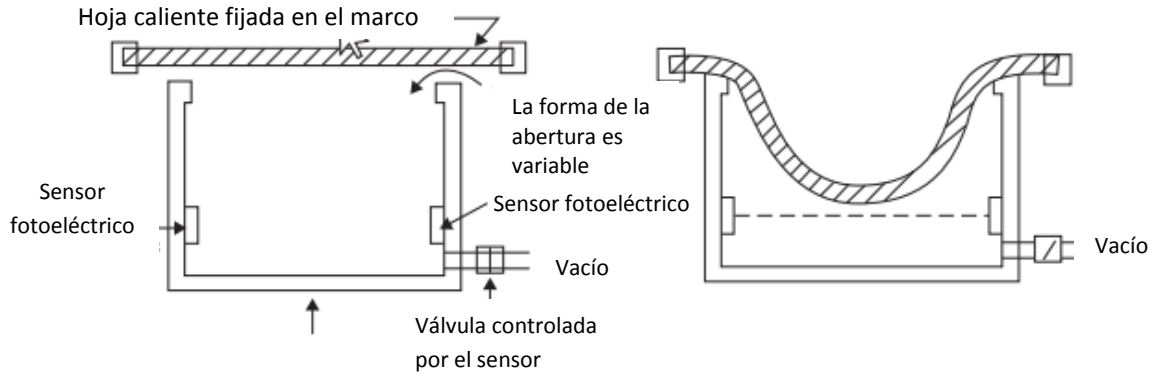


Figura 2. 6 Proceso de formado al vacío para la obtención de una forma libre [20].

Formado de hoja gemela. Se utiliza para hacer piezas huecas de pared delgada, durante el proceso dos hojas son calentadas hasta que pueden ser moldeables. Las hojas se colocan dentro de la estación de moldeó y se forma un sello en todo el perímetro del molde con el termoplástico. Luego se genera vacío en la parte superior del molde y en la inferior también, dando forma al termoplástico (Figura 2. 7).

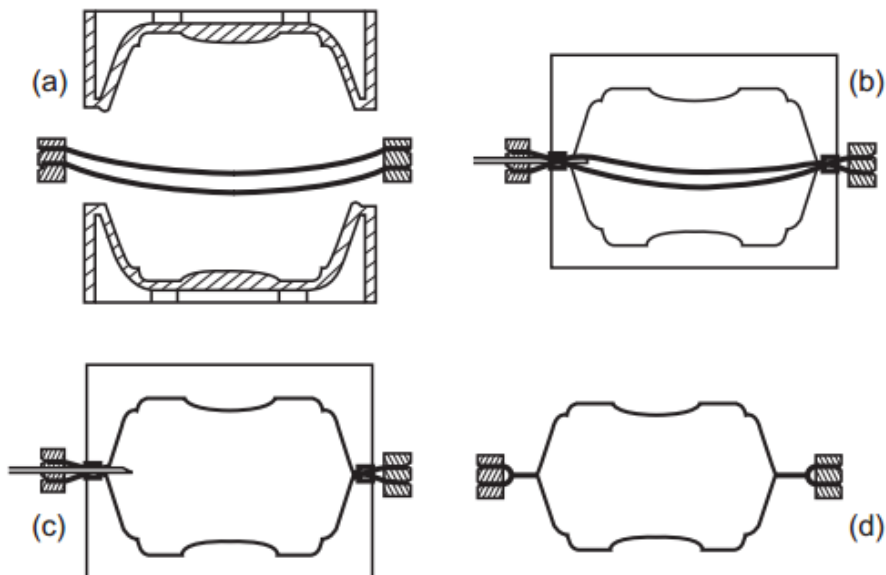


Figura 2. 7 Proceso de formado al vacío para hojas gemelas, a) calentamiento del material termoplástico, b) sujeción de las láminas con el borde del molde, c) vacío generado en las cavidades superior e inferior del molde y d) forma final de la pieza [20].

2.1.3. 2 Formado con aire a presión

El formado a presión es un proceso usado para moldear plásticos con intrincadas formas. Con la presión de formado, la hoja caliente es forzada contra un molde. Además, el aire presurizado permite formar bordes afilados, socavados o piezas con gran área de superficie. El formado a presión tiene costos bajos en herramientas y ciclos cortos de ejecución.

Existen tres tipos de formado por presión:

- Formado libre por presión
- Placa de presión o caja de formado para hojas de calibre grueso
- Caja de presión de formado para calibre fino

El formado libre por presión es el proceso en el cual la hoja plástica es calentada y sujeta en todo el perímetro de la caja de soporte, al interior se inyecta aire a presión con la cual se forma una burbuja. La presión al interior de la caja se mantiene, dejando que el termoplástico se enfríe. La distribución de material es bastante regular a excepción de la zona donde está en contacto la hoja con el marco de sujeción (Figura 2. 8).

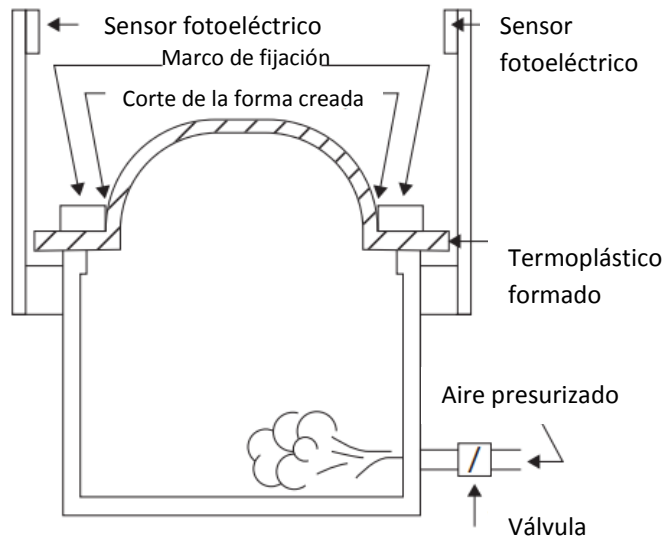


Figura 2. 8 Proceso de formado por presión para la obtención de una forma libre, el equipo de formado tiene válvula de presión, elemento de sujeción para hoja plástica, sensor de posición que controla el tamaño de la burbuja [20].

Termoformado

Placa de presión o caja de formado para hojas de calibre grueso, es usado cuando se requiere de detalles finos y texturas en la superficie de contacto del molde. Mejora la distribución de material y las tensiones residuales son menores. Las presiones de operación normales son de 50 a 60 psi, pero en piezas grandes se utiliza hasta 150 psi de presión (Figura 2. 9). Caja de presión de formado para calibre fino, es similar como la placa de presión o el proceso de formado en caja, alto volumen de formado es corrido con presión asistida. El tiempo del ciclo de formado es controlado por el tiempo requerido para el enfriamiento del molde después del formado. La ventaja que tiene éste método es el mejor contacto entre la hoja y el molde, como resultado mejores detalles se pueden diseñar.

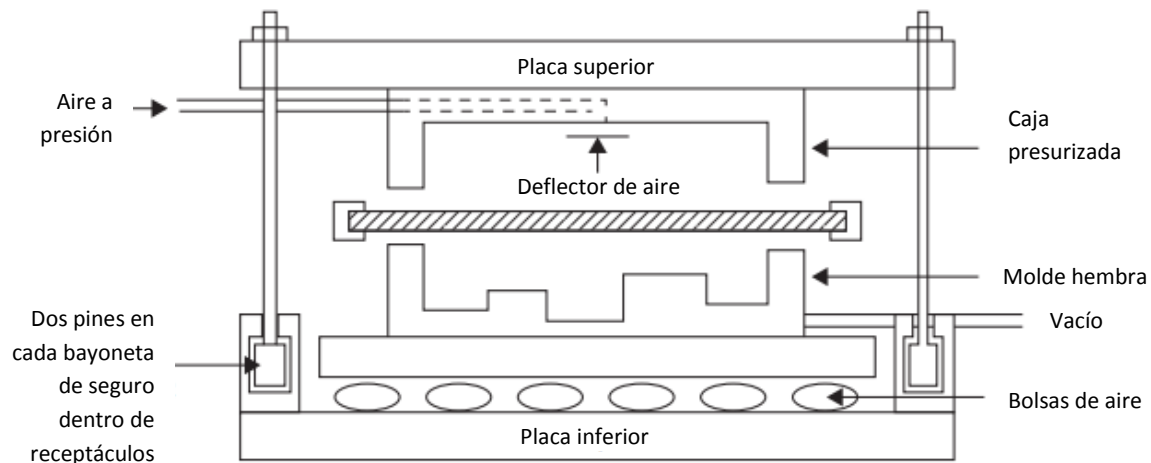


Figura 2. 9 caja de formado para hojas de calibre grueso, se pueden obtener detalles finos y mejora la distribución de material en la piza terminada [20].

2.1.3. 3 Formado mecánico

El formado mecánico más sencillo es el formado bidimensional. Consiste en calentar una hoja termoplástica sobre un molde con curvas suaves, la gravedad es suficiente para darle forma (Figura 2. 10). Los extremos de la hoja calentada se sujeta para mantener la forma una vez empiece a enfriarse el termoplástico [17]. El proceso de formado mecánico molde macho-hembra es utilizado para piezas más complejas. El termoplástico es calentado y puesto entre dos moldes opuestos entre sí (macho-hembra). Al unirse los moldes forzarán a la hoja plástica a tomar la forma del espacio creado entre ambos moldes. Con regularidad se utilizan equipos mecánicos para hacer el cierre de los moldes y obtener una media o alta producción.

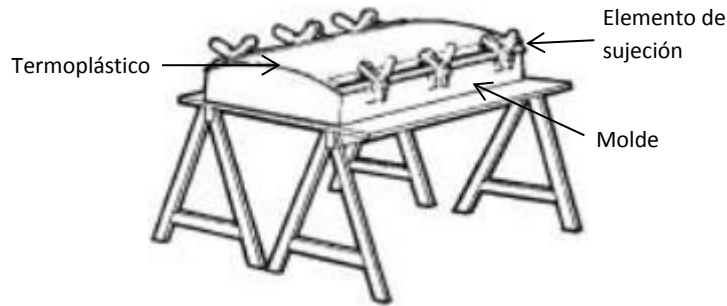


Figura 2. 10 Proceso de formado mecánico, la hoja se sujeta a sus extremos al ser calentada [17].

2.1. 4 Reducción de espesor

En el proceso de termoformado, una hoja plástica o lámina es estirada bajo presión o vacío. Como resultado el espesor de la hoja cambia. La reducción de espesor se mide por tres diferentes relaciones de estiramiento (*draw ratios*) [15, 18-20, 22]:

- Relación de estiramiento de área (ADR)
- Relación de estiramiento lineal (LDR)
- Relación de altura - dimensión (HDR)

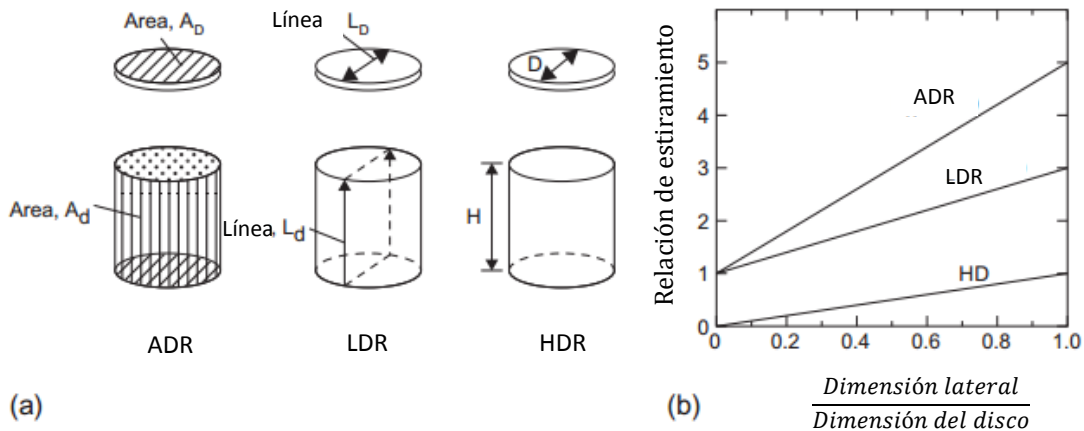


Figura 2. 11 a) relaciones para una pieza cilíndrica y b) relaciones de estiramiento para una pieza hembra[20].

Cada relación de estiramiento (ver Figura 2. 11) tiene ventajas y solo es una representación numérica del adelgazamiento de la hoja. Por lo tanto, puede ser una herramienta para comparar diseños y procesos.

Termoformado

Razón de estiramiento de área (ADR)

La ADR predice la capacidad del termoplástico para estirarse cuando una fuerza es aplicada y se define como la razón del área formada entre el área de la hoja usada para formar. Tiene un valor numérico mayor que uno [20], ver ecuación (2. 2).

$$ADR = \frac{\textit{Área de la seccion formada}}{\textit{Área de la hoja usada para formar la pieza}} = 1 \quad (2. 2)$$

Los valores máximos de ADR y temperaturas de trabajo para plásticos con mayor uso se muestran en la tabla 2.3.

Relación de estiramiento lineal (LDR)

La relación de estiramiento lineal, evalúa el alargamiento plástico en la dirección máxima de estirado bajo condiciones de formado. Para obtener la LDR, una línea recta se dibuja sobre el termoplástico antes de formarlo y después de procesar el polímero se compara con la longitud de la misma línea después del formado [20], ver ecuación (2. 3).

$$LDR = \frac{\textit{Longitud de la línea en la parte formada}}{\textit{Longitud de la línea antes del formado}} \quad (2. 3)$$

Relación de altura – dimensión (HDR)

Es la relación de la altura medida de la parte formada a la dimensión máxima a través de la apertura del molde [20], ver ecuación (2. 4).

$$HDR = \frac{\textit{altura medida de la pieza formada}}{\textit{dimensión máxima a través de la abertura del molde en el borde}} \quad (2. 4)$$

Tabla 2. 3 Valores ADR máximos para polímeros termoformables [19]

Polímero	Máximo ADR	Temperatura máxima en °C
PS	8.0	123
ABS	5.5	165
PMMA	3.4	155
PVC Rígido	4.3	125
PVC Flexible	4.2	110
LDPE	6.0	140
HDPE	6.5	165
PP	7.5	175

2. 2 Teoría y trabajos en cascarones

El análisis de esfuerzo en cascarones esféricos fue abordado por Timoshenko [23-25], Landau y Lifshitz [26] entre otros [27-29]. Quienes mostraron el uso de la teoría de la membrana o cascarón delgado. Ugural y Fenster [30] también describieron el desarrollo de la teoría de cascarones y las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el comportamiento de la estructura cascarón. La teoría de la membrana supone que las fuerzas actuantes sobre el cascarón esférico o de revolución se distribuyen sobre toda la superficie y los momentos flexionantes actuantes en la superficie media del cascarón son despreciables comparado con las fuerzas de compresión y de tensión sobre la superficie de la estructura. También, se considera que las deformaciones radiales y meridionales son menores al espesor del cascarón. Para un análisis más realista del comportamiento de una estructura cascarón la teoría de la membrana se ve limitada y para deformaciones superiores al espesor del cascarón se necesita de la teoría no lineal para superficies esféricas.

El desplazamiento finito y *buckling* de superficies esféricas fue investigado de manera teórica y experimental por Kaplan [31]. Su modelo analítico fue resuelto con ecuaciones que describen el comportamiento de superficies esféricas las cuales involucran esfuerzos longitudinales, momentos y fuerza cortante en términos de la carga exterior. Más tarde, Mescall [32] obtuvo curvas de comportamiento de cascarones sometidos a carga puntual y distribuida, aplicada en el ápice con borde restringido y libre.

El cálculo de la carga de *buckling* en cascarones esféricos sin endurecer bajo presión externa, fue abordado por Ventsel y Krauthammer [27], quienes proponen ecuaciones para calcular la carga considerando factores dependientes de la calidad de la manufactura. Al mismo tiempo en la investigación de Shilkrut [33] sobre estabilidad de cascarones no lineales con aplicación en superficies esféricas, menciona las curvas carga-deflexión obtenidas por Mescall y Bushnell [34]. Esta investigación incluye estudios de cascarones esféricos con imperfecciones y la forma en que afecta la estabilidad estructural.

Posteriormente Yevkin [35] publicó un método asintótico que obtiene con el uso de las ecuaciones de Reissner, que describen el comportamiento de la deformación axisimétrica. Con este método se consiguen diagramas de carga-desplazamiento para cascarones isotrópicos y ortotrópicos, sujetos a grandes deformaciones con carga puntual aplicada en el ápice de la superficie esférica.

Huston y Josephs [36] sugieren una ecuación con base a los estudios de Von Karman y Tsien para el cálculo de la carga crítica de la presión de colapso en un límite de buckling elástico, porque se ajusta de forma favorable a datos experimentales.

Los efectos de compresibilidad de *buckling* no lineal en un cascarón esférico de poliuretano, fue estudiado por Bülent y Faruk [37]. Mencionan que el problema es no lineal y

la solución de forma cerrada (ecuaciones algebraicas) no es posible, por lo tanto, el uso de métodos numéricos es necesario. Las ecuaciones que gobiernan el problema fueron convertidas a ecuaciones de diferencias algebraicas por medio de diferencias finitas y las ecuaciones obtenidas se resolvieron de forma numérica con el método de Newton-Raphson.

Peter y Zhou [38] propusieron un factor de reducción de carga de *buckling*, por que la teoría clásica sobreestima el valor de la carga crítica. Posteriormente, Peter, Ali y Fan [39] desarrollaron una fórmula empírica usando la analogía de cascarones en superficie combada de doble capa.

Peter [40] calculó la carga de *buckling* para superficies esféricas, basándose en el teorema de trabajo y energía e incluyendo un análisis de la influencia de las imperfecciones en los cascarones esféricos en su capacidad de carga de *buckling*.

Xiao, Dan y Cheng [41] publicaron una solución en perturbación para valores límite de flexión axisimétrica de un cascarón esférico profundo, el método desarrollado se deriva de las ecuaciones de Reissner. La solución obtenida es del tipo asintótico y comparan los resultados con la solución numérica en *Ansys*.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

La teoría del cascarón delgado o membrana se aplica en estructuras, cuyo su espesor es muy pequeño comparada con el resto de sus dimensiones, en las cuales dos simplificaciones a menudo son admisibles.

- La Teoría de la membrana
- La Teoría de flexión simplificada

La elección de una teoría en el análisis de una estructura de cascarón delgado o membrana es el comportamiento estructural, el tipo de cascarón, y la escala de ésta. Las condiciones en el material con el que esté construida la membrana deben ser homogéneo, isotrópico y linealmente elástico. Con la teoría de la membrana el sistema se comporta de acuerdo a la teoría de pequeñas deflexiones, el cual es esencial, requiere que bajo cargas los cambios de geometría no alteren el equilibrio estático. La validez para esta teoría es que el desplazamiento radial y meridional del cascarón es pequeño comparado con su espesor. El espesor de un cascarón delgado o membrana se denota por h y siempre se considerará pequeño en comparación con su radio de curvatura, ver Figura 3. 1 [42].

Para considerarse dentro de la teoría de la membrana aquella estructura deberá cumplir la desigualdad $\frac{h}{r} \leq \frac{1}{20}$ [27].

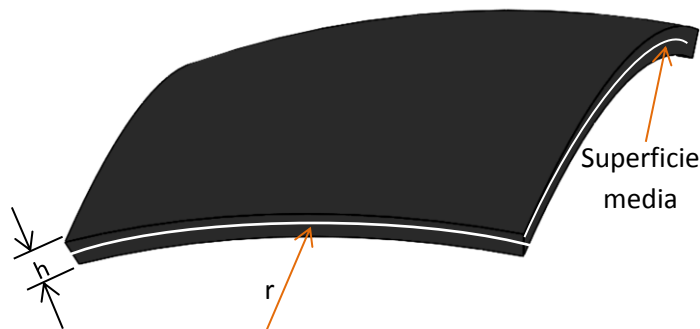


Figura 3. 1 Elemento cascarón, modificado de [23].

La superficie bisectante de la membrana se conoce como superficie media, y se especifica su forma, con su espesor h en cada punto, así el cascarón queda definido geoméricamente como se muestra en la Figura 3. 1. La teoría de la membrana se basa en la suposición de inflexión o corte transversal en el cascarón y solamente se les considera cuando están en el plano principal. En muchos cascarones delgados se provee una base razonable para el diseño de la estructura, excepto en los bordes o frontera donde el cascarón es soportado o rigidizado [42].

3. 1 Cascarones en forma de superficie de revolución y cargados simétricamente respecto a sus ejes (teoría lineal).

Un elemento de un cascarón es acotado por dos meridianos adyacentes y dos círculos paralelos. La posición de un meridiano se denota por el ángulo θ ; y la posición de un círculo paralelo es definida por el ángulo ϕ , hecho por la normal a la superficie y el eje de rotación. Los correspondientes radios de curvatura son definidos por r_1 y r_2 , respectivamente. El radio del círculo paralelo es r_o , de modo que la longitud de los lados del elemento coinciden en O, como se ve en la figura 2, siendo estos $r_1 d\phi$ y $r_o d\theta = r_2 \text{sen}(\phi) d\theta$, y el área de la superficie del elemento es $r_1 r_2 \text{sen}(\phi) d\phi d\theta$. Asumiendo una deformación y carga simétrica puede concluirse que no habrá fuerzas cortantes actuando en los lados del elemento. Las magnitudes de las fuerzas normales por unidad de longitud se encuentran denotadas por N_ϕ y N_θ como se muestra en la Figura 3. 2. La magnitud de carga externa, que actúa en el plano meridiano, en el caso de simetría se resuelve en dos componentes Y y Z paralelo a las coordenadas axiales. Multiplicando estos componente con el área $r_1 r_2 \sin \phi d\phi d\theta$, obtenemos las componentes de carga externa actuando en el elemento [23, 26, 27, 30].

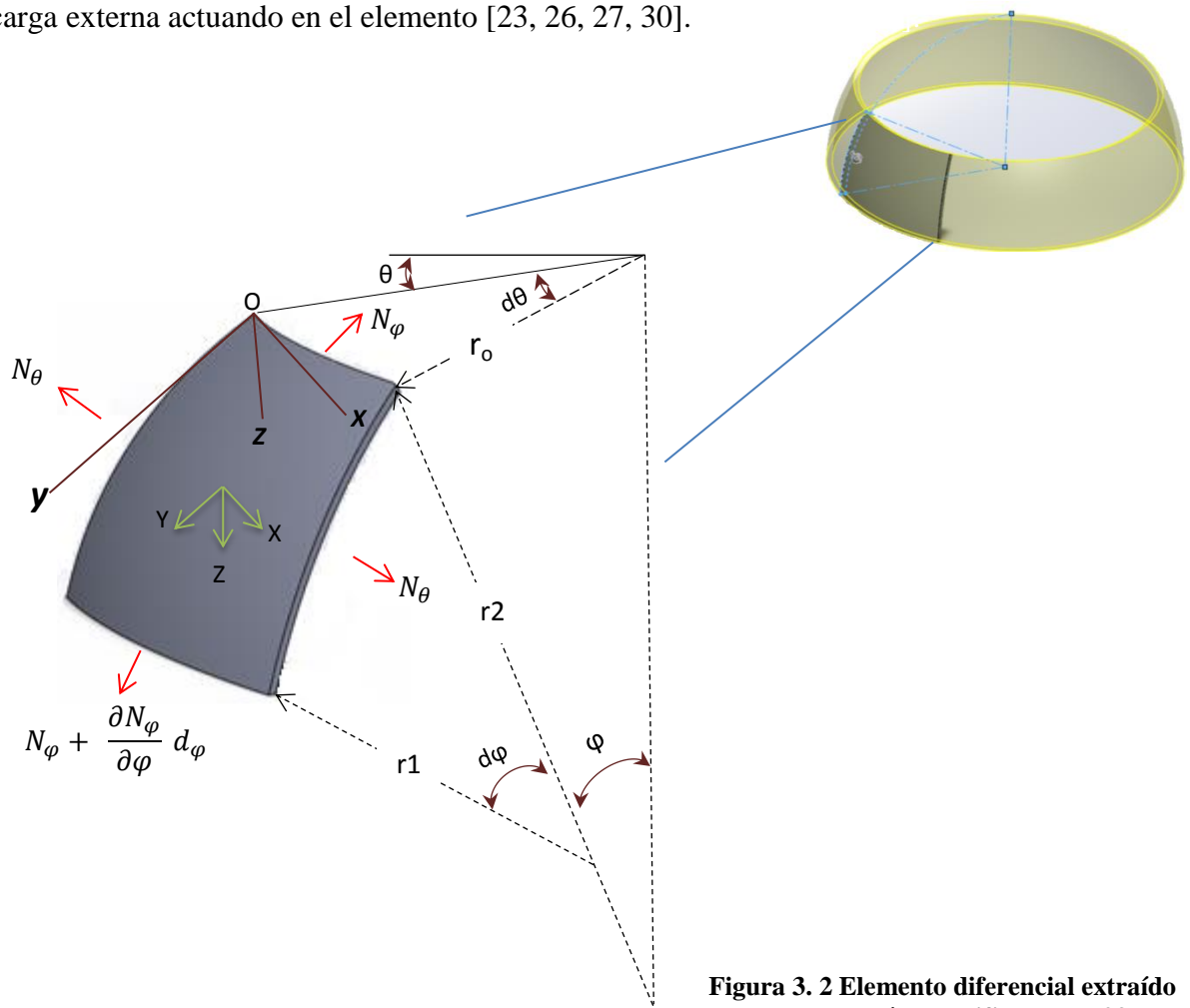


Figura 3. 2 Elemento diferencial extraído de un cascarón, modificado de [23].

Teoría de cascarón delgado

Escribiendo las ecuaciones de equilibrio del elemento diferencial, comenzando con las fuerzas en dirección tangente a la superficie. La fuerza actuante en la parte superior del elemento es:

$$-N_{\varphi} r_o d\theta = -N_{\varphi} r_2 \text{Sen}\varphi d\theta \quad (3.1)$$

La fuerza que actúa en la parte inferior del elemento es:

$$F_1 = \left(N_{\varphi} + \frac{dN_{\varphi}}{d\varphi} d\varphi \right) \left(r_o + \frac{dr_o}{d\varphi} d\varphi \right) d\theta \quad (3.2)$$

Desarrollando

$$F_1 = N_{\varphi} r_o d\theta + N_{\varphi} \frac{dr_o}{d\varphi} d\varphi d\theta + r_o \frac{dN_{\varphi}}{d\varphi} d\varphi d\theta + \left(\frac{dN_{\varphi}}{d\varphi} d\varphi \right) \left(\frac{dr_o}{d\varphi} d\varphi \right) d\theta \quad (3.3)$$

Reduciendo

$$F_1 = N_{\varphi} r_o d\theta + N_{\varphi} \frac{dr_o}{d\varphi} d\varphi d\theta + r_o \frac{dN_{\varphi}}{d\varphi} d\varphi d\theta = N_{\varphi} r_o d\theta + \frac{dN_{\varphi} r_o}{d\varphi} d\varphi d\theta \quad (3.4)$$

La componente de fuerza externa en la misma dirección y , es:

$$F_y = Y r_1 r_o d\varphi d\theta \quad (3.5)$$

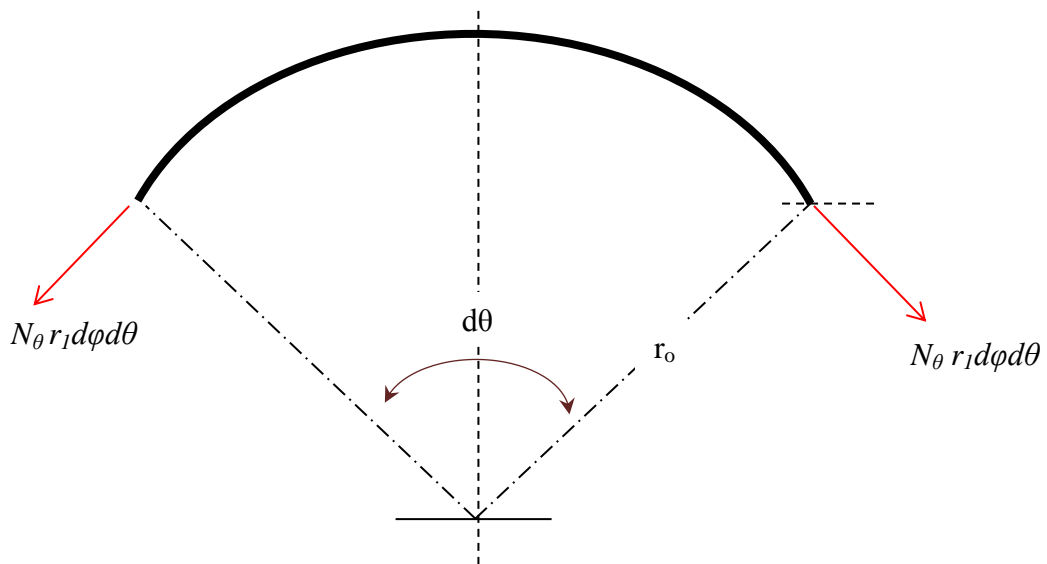


Figura 3.3 . Se observa que la resultante debida a las fuerzas a los costados es igual $N_{\varphi} r_1 d\varphi d\theta$, modificado de [23].

Teoría de cascarón delgado

Las fuerzas que actúan a los costados del elemento diferencial son igual a $N_{\theta}r_1d\varphi$, y en dirección al radio del círculo existe una resultante (Figura 3. 3). La componente de esta fuerza (Figura 3. 4) en dirección Z es igual a:

$$F_2 = -N_{\theta}r_1 \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (3.6)$$

La ecuación de equilibrio en dirección tangente al meridiano es:

$$\frac{d(N\varphi r_o)}{d\varphi} - N_{\varphi}r_1 \cos \varphi + Yr_1r_o = 0 \quad (3.7)$$

La siguiente ecuación de equilibrio se obtiene de la proyección de las fuerzas sumadas en dirección de Z , estas fuerzas son las que actúan en la parte superior e inferior del elemento, siendo igual a:

$$F_3 = N\varphi r_o d\varphi d\theta \quad (3.8)$$

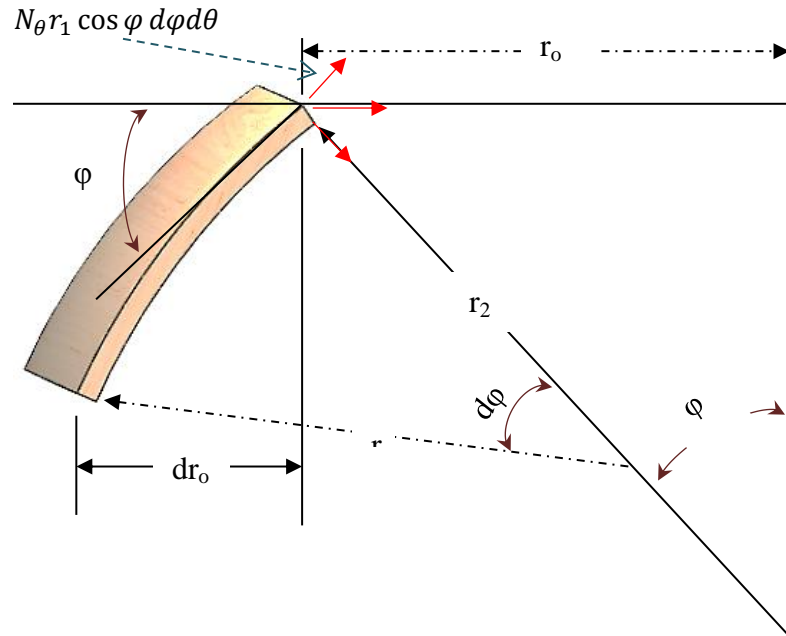


Figura 3. 4 componente tangente al meridiano de la resultante en dirección de r_o , modificado de [23].

Las fuerzas en los costados del elemento tienen una resultante en dirección al radio del círculo paralelo, de ella obtenemos una componente en dirección Z de magnitud:

$$F_4 = N_{\theta}r_1 \sin \varphi d\varphi d\theta \quad (3.9)$$

La carga externa actuante sobre el elemento tiene una componente en la misma dirección, siendo:

$$F_z = Zr_1r_0d\varphi d\theta \quad (3.10)$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos la segunda ecuación de equilibrio con dirección en **Z**:

$$N\varphi r_0 + N_\theta r_1 \sin \varphi + Zr_1r_0 = 0 \quad (3.11)$$

Las fuerzas $N\varphi$ y N_θ pueden calcularse en cada caso particular, esto si se dan los radios r_0 y r_1 y las componentes de fuerza externa están dadas.

Es posible considerar el equilibrio de la porción del cascarón en el círculo paralelo definido por el ángulo ϕ (Figura 3. 5). La resultante sobre la porción de cascarón está dada por R , la ecuación de equilibrio es:

$$2\pi r_0 N_\varphi \sin \varphi + R = 0 \quad (3.12)$$

Ahora la ecuación 10 se divide por $r_0 r_1$, de lo cual se obtiene:

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -z \quad (3.13)$$

Si de la ecuación 11 obtenemos N_φ , se puede obtener N_θ de la ecuación (3. 13).

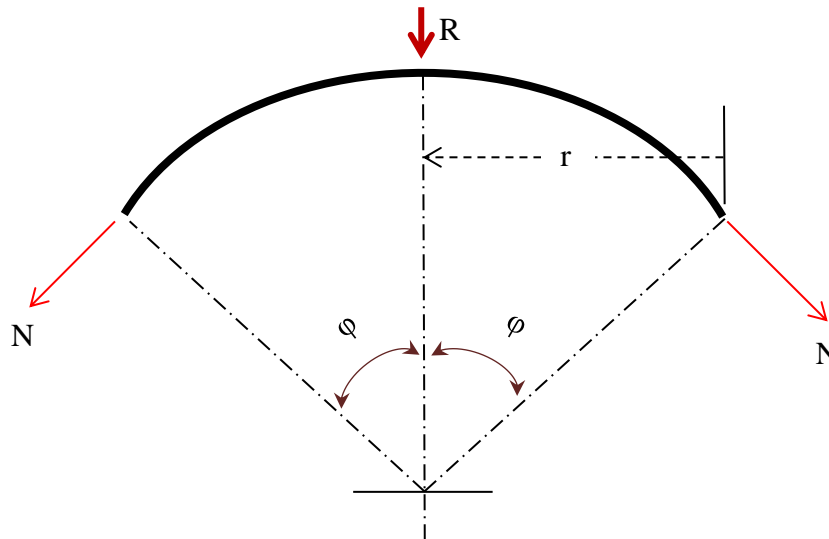


Figura 3. 5 Porción de cascarón definido por el ángulo ϕ [23].

3.1. 1 Casos particulares de cascarones en la forma de superficie de revolución.

Domo esférico. Asumiendo que un cascarón esférico (Figura 3. 6). Se encuentra sometido a la acción de su propio peso, la magnitud de esta fuerza está dada por unidad de área, constante e igual a “q”. Si la magnitud del radio de la esfera es “a”, por lo tanto $r_o = a \text{ sen } (\phi)$. La resultante R se obtiene de la integral en 13, se observa que a^2 y q son constantes, realizando las operaciones pertinentes en la ecuación (3. 14) se obtiene a R.

$$R = 2\pi \int_0^\phi a^2 q \sin \phi \, d\phi = 2\pi a^2 q (1 - \cos \phi) \quad (3. 14)$$

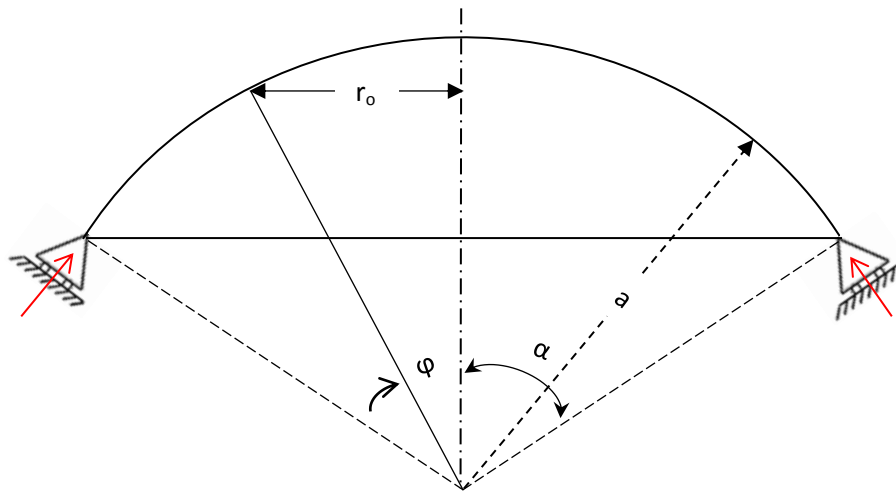


Figura 3. 6 Cascarón esférico, modificado de [23].

De la ecuación (3. 12) se obtiene:

$$N_\phi = - \frac{R}{2\pi r_o \sin \phi} \quad (3. 15)$$

Se Sustituye R de la ecuación (3. 14) en (3. 15), se recuerda que $r_o = a \text{ sen } (\phi)$, por lo tanto

$$N_\phi = - \frac{qa(1 - \cos \phi)}{\sin \phi^2} \quad (3. 16)$$

El lado derecho de la ecuación (3. 16) se multiplica por su conjugado para simplificar la expresión, por lo tanto:

$$N_{\phi} = - \frac{aq}{(1 + \cos \phi)} \quad (3.17)$$

En dirección normal a la superficie del cascarón se obtiene una componente en dirección en Z, siendo:

$$Z = q \cos \phi \quad (3.18)$$

Sustituyendo Z de la ecuación (3.18) en la ecuación (3.13), y se considera que $r_1 \approx r_2$, obtenemos:

$$N_{\theta} = aq \left[\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right] \quad (3.19)$$

N_{ϕ} Se mantiene negativo a lo largo de los meridianos porque se encuentra a compresión y decrece conforme ϕ crece.

Cuando $\phi = 0$ de la ecuación (3.17), se obtiene

$$N_{\phi} = -(aq)/2 \quad (3.20)$$

Para $\phi = \pi/2$, se obtiene

$$N_{\phi} = -aq \quad (3.21)$$

También para N_{θ} hay fuerzas negativas y son para ángulos pequeños de ϕ , si de la ecuación (3.19) N_{θ} se iguala a cero, y se resuelve para ϕ

$$\left[\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right] = 0 \quad (3.22)$$

$$\cos \phi^2 + \cos \phi - 1 = 0 \quad (3.23)$$

$$\phi = 51^{\circ}, 50' \quad (3.24)$$

El valor que se obtiene en la ecuación (3.24), indica que para ángulos superiores de $51^{\circ}, 50'$ estarán presentes esfuerzos de tensión en dirección perpendicular a los meridianos. Debido que N_{θ} será una fuerza de compresión, y como consecuencia tendrá un componente perpendicular a los meridianos.

Teoría de cascarón delgado

Regularmente una porción de cascarón se remueve en la parte superior, como se observa en la Figura 3. 7, y se coloca un anillo de reforzamiento para soportar la estructura superior. Si $2\varphi_0$ es el ángulo en la abertura y P la carga vertical por unidad de longitud del anillo de reforzamiento, la resultante R correspondiente al ángulo φ es

$$R = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} a^2 q \sin \varphi d\varphi + 2\pi P a \sin \varphi_0 \quad (3.25)$$

Resolviendo la ecuación (3. 25) y usando las ecuaciones (3. 12) y (3. 13), se obtienen las ecuaciones que definen a N_ϕ y N_θ , siendo estas:

$$N_\varphi = -aq \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\sin \varphi^2} - \frac{P \sin \varphi_0}{\sin \varphi^2} \quad (3.26)$$

$$N_\theta = aq \left(\frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\sin \varphi^2} - \cos \varphi \right) + \frac{P \sin \varphi_0}{\sin \varphi^2} \quad (3.27)$$

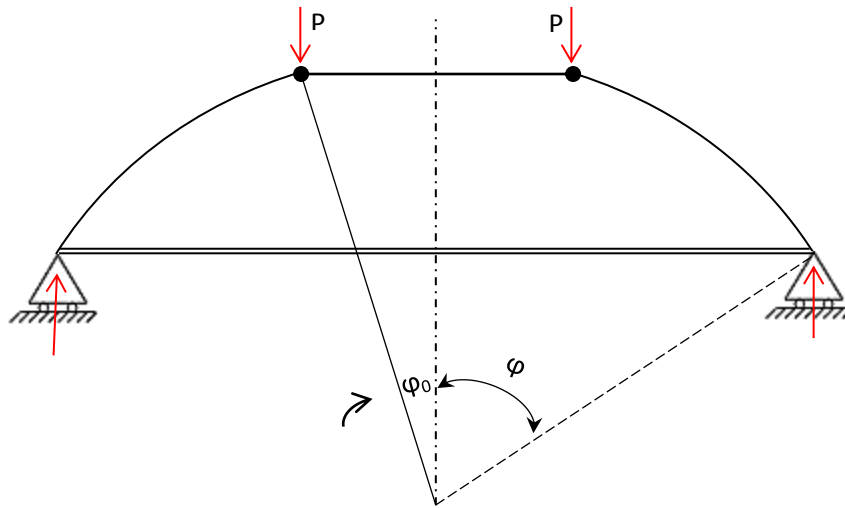


Figura 3. 7 Domo con la parte superior removida y con anillo de reforzamiento, modificado de [23].

3.1. 2 Cascarones de resistencia constante

Como ejemplo de un cascarón de resistencia constante, consideremos un domo de espesor no uniforme soportando su propio peso. El peso del cascarón por unidad de área de la superficie media es γh , siendo γ el peso específico, las componentes del peso a lo largo de los ejes coordenados son:

$$Y = \gamma h \sin \varphi \quad (3. 28)$$

$$Z = \gamma h \cos \varphi \quad (3. 29)$$

En el caso de un cascarón de resistencia constante la forma de los meridianos se determina de modo que los esfuerzos de compresión son constantes e igual a σ en todas las direcciones de la superficie media, de modo que:

$$N_\varphi = N_\theta = -\sigma h \quad (3. 30)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3. 13) y (3. 29) en (3. 30) se obtiene:

$$\sigma h \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \gamma h \cos \varphi \quad (3. 31)$$

Si sustituimos $r_2 = r_o \sin \varphi$ en (3. 31) y resolvemos para r_1 , se tendrá:

$$r_1 = \frac{r_o}{\frac{\gamma}{\sigma} r_o \cos \varphi - \sin \varphi} \quad (3. 32)$$

De la Figura 3. 4, se deduce que:

$$r_1 d\varphi = \frac{dr_o}{\cos \varphi} \quad (3. 33)$$

Sustituyendo la ecuación (3. 33) en (3. 32), resulta la siguiente ecuación

$$\frac{dr_o}{d\varphi} = \frac{r_o \cos \varphi}{\frac{\gamma}{\sigma} r_o \cos \varphi - \sin \varphi} \quad (3. 34)$$

En la parte superior del domo, donde $\sigma = 0$, el lado de la ecuación (3. 34) queda indefinida. Para quitar esta dificultad se usa la ecuación (3. 31). Dadas las condiciones de simetría en la parte superior, $r_1 = r_2$ y se concluye que:

$$\frac{2\sigma h}{r_2} = \gamma h \cos \varphi \quad (3.35)$$

Sustituyendo la condición de $\sigma = 0$ en la ecuación (3.35)

$$\frac{2\sigma}{r_2} = \gamma \quad (3.36)$$

Resolviendo para r_2 , resulta lo siguiente

$$r_1 = r_2 = \frac{2\sigma}{\gamma} \quad (3.37)$$

Ahora

$$dr_o = r_1 d\varphi = \frac{2\sigma}{\gamma} d\varphi \quad (3.38)$$

Por lo tanto para la parte superior del domo se obtiene:

$$\frac{dr_o}{d\varphi} = \frac{2\sigma}{\gamma} \quad (3.39)$$

Con las ecuaciones (3.34) y (3.39) se obtiene la forma del meridiano, iniciando en la parte superior del domo y calculando para cada incremento $\Delta\varphi$ del ángulo φ , correspondiente a cada incremento Δr_o del radio r_o , la integración de estas ecuaciones es numérica.

Para encontrar la variación del espesor del cascarón, se utilizan las ecuaciones (3.28) y (3.30), que se sustituyen en la ecuación (3.7), se recuerda que σ es constante por lo tanto se obtiene

$$\frac{d(-\sigma h)r_o}{d\varphi} - (-\sigma h)r_1 \cos \varphi + \gamma h \sin \varphi r_1 r_o = 0 \quad (3.40)$$

Reduciendo la ecuación 39, resulta en:

$$-\frac{d(hr_o)}{d\varphi} + hr_1 \cos \varphi + \frac{\gamma h}{\sigma} \sin \varphi r_1 r_o = 0 \quad (3.41)$$

Al sustituir la ecuación (3. 32) en (3. 41), se obtiene:

$$\frac{d(hr_o)}{d\varphi} = hr_o \left(\frac{\cos \varphi + \frac{\gamma r_o}{\sigma} \sin \varphi}{\frac{\gamma r_o}{\sigma} \cos \varphi - \sin \varphi} \right) \quad (3. 42)$$

Ahora para $\sigma = 0$ de la ecuación (3. 41) se obtiene

$$\frac{d(hr_o)}{d\varphi} \approx hr_1 = h \frac{dr_o}{d\varphi} \quad (3. 43)$$

De la ecuación (3. 43) para el primer incremento Δr_o y del ángulo ϕ , cualquier valor constante para h puede tomarse.

Para otro punto del meridiano, su espesor se encuentra por integración numérica de la ecuación (3. 42), en la Figura 3. 8 la resultante de cada punto es representada. Se nota que la condición $N_\varphi = N_\theta = -\sigma h$ se mantiene. La ecuación (3. 42) no solo define la forma de la superficie media del domo, sino que define la ley de variación del espesor del domo a lo largo del meridiano.

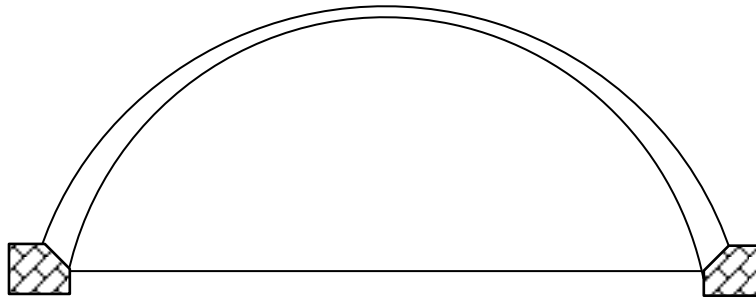


Figura 3. 8 Cascarón con espesor variable, modificado de [23].

3.1. 3 Desplazamientos en cascarones cargados simétricamente teniendo la forma de superficies de revolución.

En el caso de deformación simétrica de un cascarón, un pequeño desplazamiento en un punto puede resolverse en dos componentes: v en dirección a la tangente del meridiano y ω en dirección normal de la superficie media. Considerando el elemento AB del meridiano (ver Figura 3. 9), se observa que el incremento de la longitud del elemento debido a los desplazamientos tangenciales v y $v + \frac{dv}{d\varphi} d\varphi$ de sus extremos es igual a $\frac{dv}{d\varphi} d\varphi$, ya que el desplazamiento radial ω de los puntos A y B de la longitud del elemento decrece por una cantidad $\omega d\varphi$ [23].

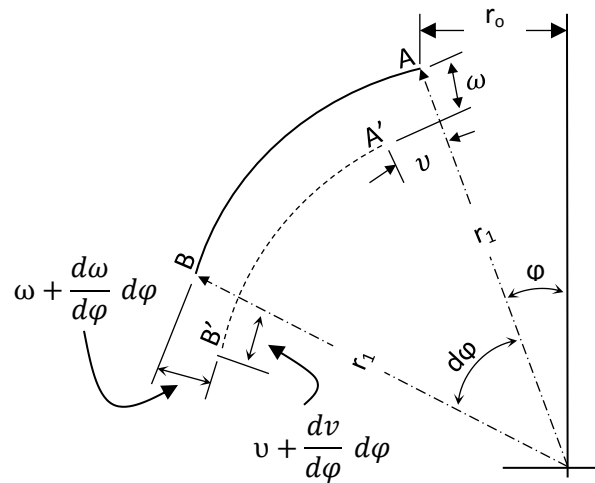


Figura 3. 9 Elemento meridiano, el desplazamiento radial nos provoca un desplazamiento en dirección de v , modificado de [23] .

El cambio en la longitud del elemento se obtiene de la diferencia de los desplazamientos radiales de los puntos A y B, en la cual se desprecia una pequeña cantidad de orden superior. Por lo tanto, el cambio total de longitud del elemento debida a su deformación es:

$$\Delta l_{AB} = \frac{dv}{d\varphi} d\varphi - \omega d\varphi \tag{3. 44}$$

Dividiendo la ecuación (3. 44) por la longitud inicial $r_1 d\varphi$ del elemento, se obtiene la deformación unitaria del cascarón en la dirección meridional:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{\omega}{r_1} \quad (3.45)$$

Tomando parte de un círculo paralelo, puede verse en la Figura 3. 10 que, debido a los desplazamientos v y ω el radio r_o del círculo incrementa por la cantidad

$$\Delta r_o = v \cos \varphi - \omega \sin \varphi \quad (3.46)$$

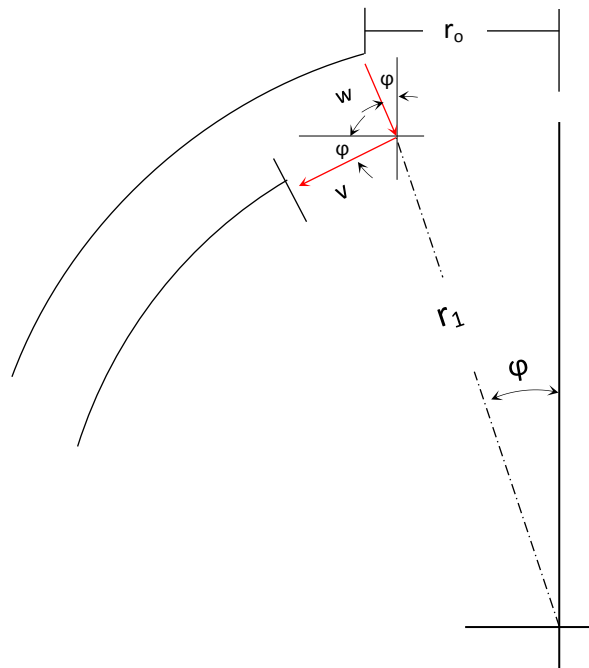


Figura 3. 10 La proyección de los desplazamientos sobre el eje horizontal nos permite obtener la ecuación 3.45, modificado de [23].

La circunferencia del círculo paralelo incrementa en la misma proporción como su radio, por lo tanto:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_o} (v \cos \varphi - \omega \sin \varphi) \quad (3.47)$$

Si sustituimos $r_o = r_2 \sin \varphi$ en la ecuación (3. 47), obtenemos

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{v}{r_2} \cot \varphi - \frac{\omega}{r_2} \quad (3.48)$$

Ahora se elimina ω de las ecuaciones (3.45) y (3.48), para obtener la ecuación diferencial de v , de esta forma se consigue la ecuación (3.51):

$$\omega = \frac{dv}{d\varphi} - \varepsilon_{\varphi} r_1 \quad (3.49)$$

$$\omega = v \cot \varphi - r_2 \varepsilon_{\theta} \quad (3.50)$$

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot \varphi = r_1 \varepsilon_{\varphi} - r_2 \varepsilon_{\theta} \quad (3.51)$$

Las componentes de deformación ε_{φ} y ε_{θ} pueden expresarse en términos de las fuerzas N_{φ} y N_{θ} , aplicando la ley de Hooke, esto resulta en:

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{Eh} (N_{\varphi} - \nu N_{\theta}) \quad (3.52)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{Eh} (N_{\theta} - \nu N_{\varphi}) \quad (3.53)$$

Nota: ν = coeficiente de Poisson.

Sustituyendo las ecuaciones (3.52) y (3.53) en la ecuación (3.51), se obtiene:

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot \varphi = \frac{1}{Eh} (N_{\varphi}(r_1 + \nu r_2) - N_{\theta}(r_2 + \nu r_1)) \quad (3.54)$$

En cada caso particular las fuerzas N_{φ} y N_{θ} pueden ser encontradas a partir de las condiciones de carga, y el desplazamiento v podrá obtenerse por integración de la ecuación diferencial (3.54). Ahora se expresa el lado derecho de la ecuación por $f(\varphi)$, por lo tanto:

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot \varphi = f(\varphi) \quad (3.55)$$

Ahora se busca la solución general a la ecuación (3.55), la diferencial del lado izquierdo de la ecuación se desprecia y al realizar las operaciones pertinentes, se obtiene:

$$[-v \cot \varphi = f(\varphi)] \left(\frac{d\varphi}{\sin \varphi} \right) \quad (3.56)$$

$$-v \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi^2} d\varphi = \frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi \quad (3.57)$$

$$-v \int \sin \varphi^{-2} \cos \varphi = \int \frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi \quad (3.58)$$

$$\frac{v}{\sin \varphi} = \int \frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi + C \quad (3.59)$$

$$v = \sin \varphi \left[\int \frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi + C \right] \quad (3.60)$$

La ecuación (3.60) es la solución general a la ecuación (3.55), y la constante de integración C se determinada por las condiciones en los apoyos.

Ahora, se toma como ejemplo un cascarón esférico de espesor constante cargando su propio peso (Figura 3.6). En tal caso $r_1 = r_2 = a$, N_φ y N_θ son dadas por las ecuaciones (3.17) y (3.19), por lo tanto la ecuación (3.54) se convierte en:

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot \varphi = \frac{a^2(1+\nu)}{Eh} \left(\cos \varphi - \frac{2}{1+\cos \varphi} \right) \quad (3.61)$$

La solución general a la ecuación (3.61) es:

$$v = \frac{a^2 q(1+\nu)}{Eh} \left[\sin \varphi \log(1+\cos \varphi) - \frac{\sin \varphi}{1+\cos \varphi} \right] + \sin \varphi C \quad (3.62)$$

La constante C será determinada de la condición en la cual $\varphi = \alpha$ y el desplazamiento v es cero, de estas condiciones resulta:

$$C = \frac{\alpha^2 q (1 + \nu)}{Eh} \left[\frac{1}{1 + \cos \alpha} - \log(1 + \cos \alpha) \right] \quad (3.63)$$

La obtención del desplazamiento en v se logra por sustitución de (3.63) en (3.62).

El desplazamiento ω es fácil de encontrar de la ecuación (3.48) sin usar la solución de (3.62), por la sustitución de la ecuación (3.53).

3.1.4 Cascarones en la forma de superficie de revolución bajo carga asimétrica.

Se considera el corte de un elemento cascarón por dos meridianos adyacentes y dos círculos paralelos (ver Figura 3.11). Para el caso general no solamente las fuerzas normales N_φ y N_θ sino también las fuerzas cortantes $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ actuara a los lados del elemento [23].

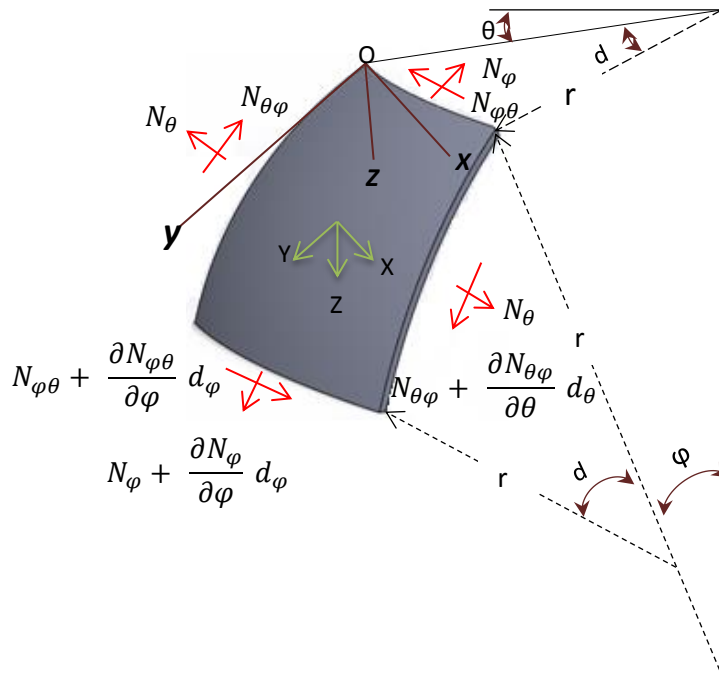


Figura 3.11 Elemento diferencial bajo carga asimétrica, modificado de [23].

Teoría de cascarón delgado

Se realiza la suma de las proyecciones de todas las fuerzas actuantes en el elemento en la dirección y , además se agrega la fuerza cortante, cuya ecuación es:

$$f_{sy} = \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} r_1 d\theta d\varphi \quad (3.64)$$

La cual representa la diferencia en las fuerzas cortantes actuando en los lados laterales del elemento diferencial.

Por lo tanto, en lugar de la ecuación (3.7), se tiene:

$$\frac{d(N\varphi r_o)}{d\varphi} + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} r_1 - N_{\varphi} r_1 \cos \varphi + Y r_1 r_o = 0 \quad (3.65)$$

Ahora considerando las fuerzas en la dirección x , se debe incluir la diferencia de las fuerzas cortantes actuando arriba y debajo del elemento diferencial, con esto se obtiene la expresión:

$$N_{\varphi\theta} \frac{dr_o}{d\varphi} d\varphi d\theta + \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} r_o d\varphi d\theta = \frac{\partial (r_o N_{\varphi\theta})}{\partial \varphi} d\varphi d\theta \quad (3.66)$$

Se observa que la fuerza:

$$f_{\theta} = \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} r_1 d\theta d\varphi \quad (3.67)$$

Es debida a la variación de la fuerza N_{θ} , y la fuerza:

$$f_{\theta\varphi} = N_{\theta\varphi} r_1 \cos \varphi d\theta d\varphi \quad (3.68)$$

Es debido a los pequeños ángulos $\cos \varphi d\theta$ entre las fuerzas cortantes a los lados laterales del elemento. La componente en x , de la carga externa actuante en el elemento es:

$$f_x = \chi r_o r_1 d\theta d\varphi \quad (3.69)$$

Realizando una suma de todas las fuerzas en dirección en x , se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial(r_o N_{\varphi\theta})}{\partial\varphi} + \frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} r_1 + N_{\theta\varphi} r_1 \cos\varphi + \chi r_o r_1 = 0 \quad (3.70)$$

La tercera ecuación de equilibrio se obtiene por la proyección de fuerzas en el eje z , sólo la proyección de fuerzas cortantes en este eje desaparece, ésta ecuación se ajusta con la ecuación (3.13) la cual fue derivada para carga simétrica. El problema de la determinación de esfuerzos de membrana bajo carga asimétrica se reduce a la solución de las ecuaciones (3.65), (3.70) y (3.13) para valores dados de las componentes X , Y y Z de la intensidad de carga externa.

3.1.5 Teoría de membrana de cascarones cilíndricos

El análisis de un cascarón cilíndrico (ver Figura 3.12), se asume que el generador del cascarón es horizontal y paralelo al eje x . Un elemento es cortado del cascarón por dos generadores adyacentes y dos secciones transversales perpendiculares al eje x , y su posición está definida por la coordenada x y el ángulo ϕ . Las fuerzas actuantes en los costados del elemento diferencial se muestran en la Figura 3.13.

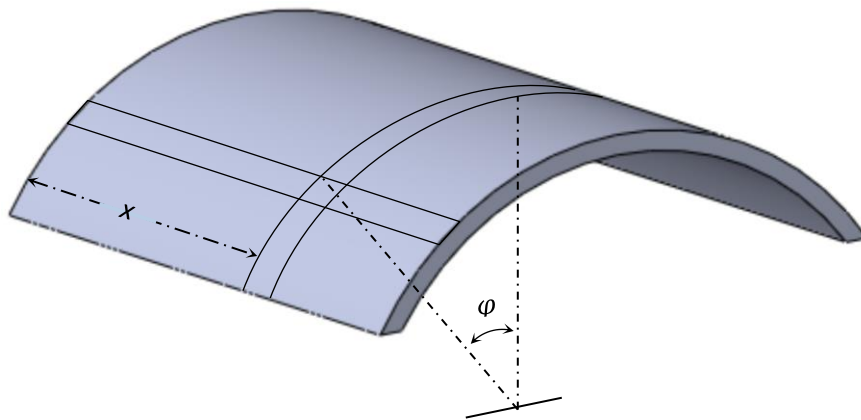


Figura 3.12 Porción de cascarón cilíndrico, modificado de [23].

En adición, una carga será distribuida sobre la superficie del elemento, la intensidad de las componentes de ésta carga se denota por \mathbf{X} , \mathbf{Y} y \mathbf{Z} (Figura 3.13).

Se considera en equilibrio estático del elemento y las componentes de fuerzas actuantes en dirección x , que permite obtener la ecuación:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} r d\varphi dx + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi dx + X r d\varphi dx = 0 \quad (3.71)$$

De forma similar, las fuerzas en dirección tangente a la normal de la sección transversal del elemento diferencial (Figura 3. 13), en dirección y, dará la correspondiente ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi dx + Y r d\varphi dx = 0 \quad (3.72)$$

De la suma de fuerzas actuantes en dirección normal a la superficie del cascaron, en dirección z, se obtiene la ecuación:

$$N_\varphi d\varphi dx + Z r d\varphi dx = 0 \quad (3.73)$$

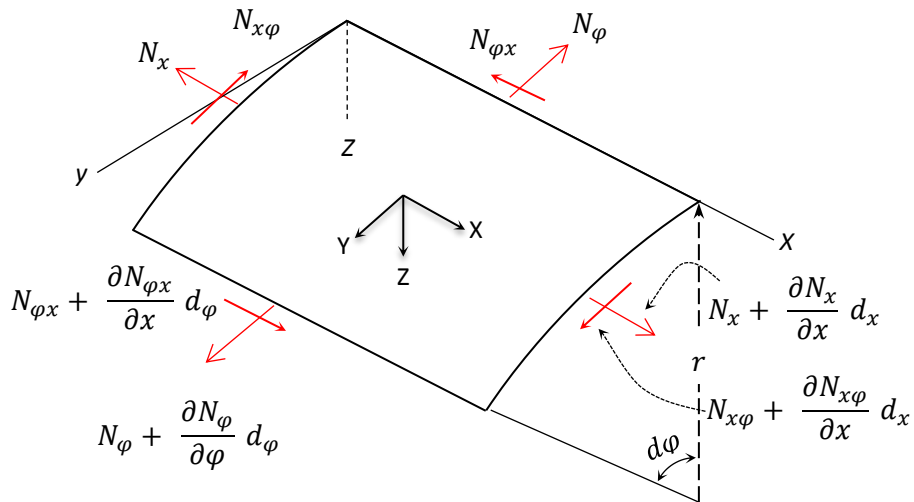


Figura 3. 13 Elemento diferencial del cascarón cilíndrico, modificado de [23].

Al simplificar las ecuaciones (3. 71), (3. 72) y (3. 73) pueden ser representadas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} = -X \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} = -Y \quad (3.75)$$

$$N_\varphi = -Zr \quad (3.76)$$

En cada caso particular, se encuentra el valor de N_φ . El cual se sustituye en la ecuación (3.75), obtenemos $N_{x\varphi}$ por integración. A continuación se usa el valor de $N_{x\varphi}$ en la ecuación (3.74) para encontrar el valor N_x por integración.

Ejemplo de aplicación de las ecuaciones (3.74), (3.75) y (3.76).

Se considera un tubo circular y horizontal, lleno con un líquido y soportado en sus extremos, como se muestra en la Figura 3.14.

Se denota ρ_o como la presión interna en el eje del tubo, la presión en cualquier punto del tubo es $\rho_o - \gamma a \cos \varphi$, por lo tanto:

$$X = Y = 0 \quad (3.77)$$

$$Z = -\rho_o + \gamma a \cos \varphi \quad (3.78)$$

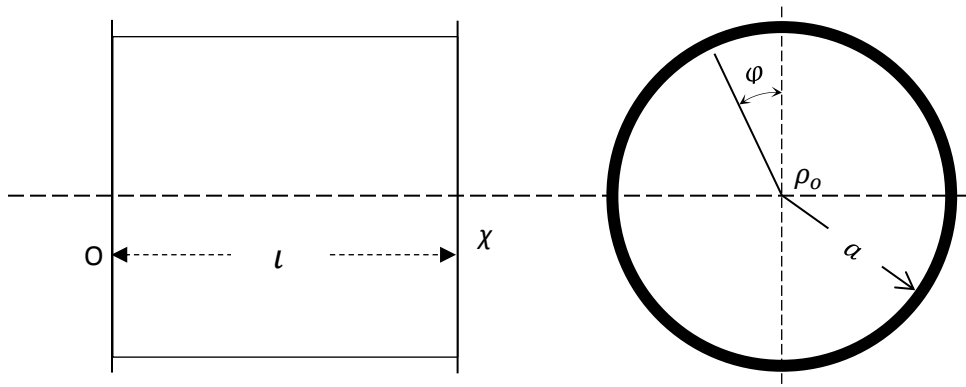


Figura 3.14 Vista lateral y frontal del tubo, modificado de [23].

Sustituyendo (3. 76) en (3. 78), se obtiene:

$$N_{\varphi} = \rho_o a - \gamma a^2 \cos \varphi \quad (3. 79)$$

Al realizar las operaciones correspondientes con las ecuaciones (3. 75) y (3. 74), además el uso de la ecuación (3. 79), se obtienen las ecuaciones:

$$N_{x\varphi} = - \int \gamma a \sin \varphi dx + C_1(\varphi) = - \gamma a x \sin \varphi + C_1(\varphi) \quad (3. 80)$$

$$N_x = \int \gamma \cos \varphi x dx - \frac{1}{a} \int \frac{dC_1(\varphi)}{d\varphi} + C_2(\varphi) \quad (3. 81)$$

$$N_x = \gamma \frac{x^2}{2} \cos \varphi - \frac{x}{a} \frac{dC_1(\varphi)}{d\varphi} + C_2(\varphi) \quad (3. 82)$$

Las funciones $C_1(\varphi)$ y $C_2(\varphi)$ deben ser determinadas a partir de las condiciones en los bordes. Se asumirá que no hay fuerzas N_x en los extremos del tubo, Luego:

$$[N_{(x)}]_{x=0} = 0 ; [N_{(x)}]_{x=l} = 0 \quad (3. 83)$$

Satisfaciendo las condiciones anteriores, se obtiene:

$$C_2(\varphi) = 0 \quad (3. 84)$$

$$C_1(\varphi) = \frac{\alpha \gamma l}{2} \sin \varphi + C \quad (3. 85)$$

Se observa que en la expresión (3. 80) la constante C representa las fuerzas $N_{x\varphi}$ uniformemente distribuidas alrededor del borde en el tubo, como sería el caso cuando el tubo está sujeto a torsión. Si no hay torque aplicado debemos tomar $C = 0$.

Por lo tanto la solución de las ecuaciones (3. 74), (3. 75) y (3. 76) para este ejemplo, son:

$$N_{\varphi} = \rho_0 a - \gamma a^2 \cos \varphi \quad (3.86)$$

$$N_{x\varphi} = \gamma a \left(\frac{l}{2} - x \right) \sin \varphi \quad (3.87)$$

$$N_x = -\frac{\gamma}{2} x(l-x) \cos \varphi \quad (3.88)$$

Se observa que $N_{x\varphi}$ y N_x son proporcionales respectivamente, para las fuerzas cortantes y al momento de flexión de una viga cargada uniformemente en toda l puede ser obtenida aplicando fórmulas de vigas, con el tubo soportando una carga distribuida con magnitud $\pi a^2 \gamma$ por unidad de longitud.

Una sección de cascarón cilíndrico como se muestra en la Figura 3. 15, algunas veces se usa como revestimiento de varios tipos de estructuras, estos cascarones son usualmente soportados únicamente en los extremos, mientras que los bordes AB y CD se encuentran libres. El cálculo de esfuerzos de membrana para tales cascarones puede obtenerse usando las ecuaciones (3. 74), (3. 75) y (3. 76). Como ejemplo el cascarón con sección transversal semicircular se encuentra soportando su propio peso, que se asume esta uniformemente distribuido sobre la superficie del cascarón. Para tales casos se obtiene:

$$X = 0 ; Y = \rho \sin \varphi ; Z = \rho \cos \varphi \quad (3.89)$$

De la ecuación (3. 76), se obtiene:

$$N_{\varphi} = -\rho a \cos \varphi \quad (3.90)$$

En un análisis detallado se observa que N_{φ} desaparece en los bordes AB y CD. Esta condición será satisfecha si alguna otra curva se toma en lugar de un semicírculo, proporcionando $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ en los bordes. Al sustituir la ecuación (3. 90) en la ecuación (3. 75), se encuentra:

$$N_{x\varphi} = -2\rho x \sin \varphi + C_1(\varphi) \quad (3.91)$$

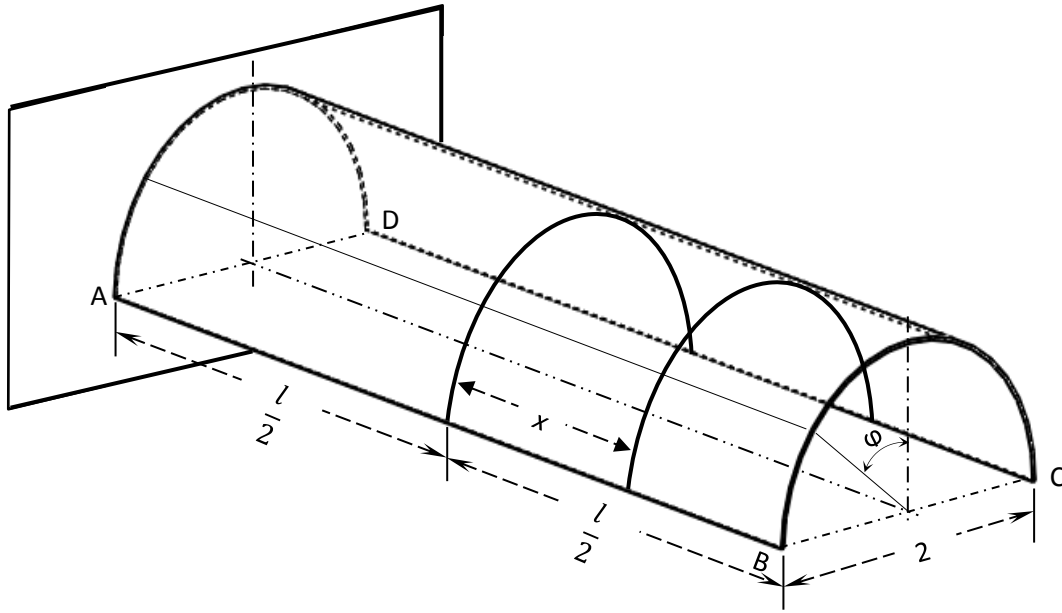


Figura 3. 15 Cascarón con sección transversal semicircular, modificada de [23].

Colocando el origen de las coordenadas en medio de la longitud del tubo y asumiendo las mismas condiciones de frontera en ambos extremos del mismo elemento, se obtiene que $x = \pm \frac{l}{2}$ del tubo. Puede determinarse por simetría que $C_1(\varphi) = 0$, por lo tanto:

$$N_{x\varphi} = -2\rho x \sin \varphi \quad (3.92)$$

Se observa que ésta solución no se anula a lo largo de los bordes AB y CD como debería para bordes libres. En aplicaciones estructurales, sin embargo, los bordes son usualmente reforzados longitudinalmente por miembros suficientemente fuertes para resistir la tensión producida por la fuerza cortante de (3.92).

Sustituyendo la expresión (3.92) en la ecuación (3.74), se obtiene:

$$N_x = \frac{\rho x^2}{a} \cos \varphi + C_2(\varphi) \quad (3.93)$$

Si los extremos del cascarón son soportados en tal manera que las reacciones actúan en los extremos de planos de las secciones transversales, las fuerzas N_x deben desaparecer en los extremos. Por lo tanto:

$$C_2(\varphi) = -\frac{(\rho l^2 \cos \varphi)}{4a} \quad (3.94)$$

Ahora (3.94) se sustituye en (3.93) y reduciendo términos, se encuentra:

$$N_x = -\frac{\rho \cos \varphi}{4a}(l^2 - 4x^2) \quad (3.95)$$

Las ecuaciones (3.90), (3.92) y (3.95) representan la solución para nuestro caso particular (Figura 3.15) satisfaciendo las condiciones en los extremos y también una de las condiciones a lo largo en los bordes AB y CD. La segunda condición concerniente a las fuerzas cortantes $N_{x\varphi}$, no podrá ser satisfecha usando esfuerzos de membrana solamente. En aplicaciones prácticas se asume que las fuerzas $N_{x\varphi}$ serán tomadas por los miembros longitudinales que refuerzan los bordes. Se espera que esta suposición será satisfactoria en los casos en que la longitud del cascaron no es larga, es decir $l \leq 2a$, y que la teoría de la membrana dará una imagen aproximada de la distribución de esfuerzos en cada caso.

Para cascarones largos una solución satisfactoria puede obtenerse únicamente considerando flexión así como esfuerzos de membrana.

3.1.6 Deformaciones de cáscaras.

Landau y Lifshitz [26] definen la energía de flexión pura como $Eh^3 \frac{\xi^2}{R^4}$, donde h es el espesor del material, R el radio de curvatura del elemento curvado y ξ la deflexión o el desplazamiento de los puntos del plano original sin deformar. Si la deformación de la cáscara va acompañada de una dilatación, las tensiones correspondientes son generalmente grandes comparadas con las tensiones de la flexión y puede presidir de ellas.

El caso de un cascarón que se encuentra sometido a fuerzas concentradas y estas a su vez con un sentido normal a la superficie, se requiere un estudio especial. Si las fuerzas que actúan sobre el cascarón son suficientemente grandes, son capaces de producir convexidades o concavidades que hace variar su forma (ver Figura 3.16).

Para este análisis considere una cáscara convexa la cual se encuentra sometida a una fuerza f concentrada y con sentido normal a la superficie (ver Figura 3.16). Se supone una porción de cascarón de radio R , la concavidad producida en la porción de cáscara tendrá la forma de un segmento esférico, similar a su forma original.

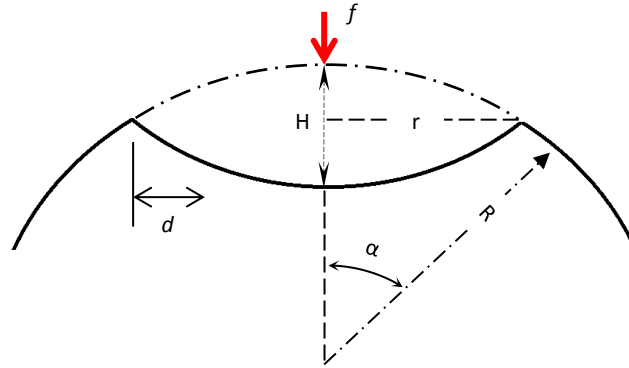


Figura 3. 16 Cascarón sometido a una fuerza normal a su superficie, modificada de [26].

Ahora el problema será determinar las dimensiones de la concavidad en función de la magnitud de la fuerza f . Cerca del borde donde inicia la concavidad, la flexión de la cáscara es relativamente grande y es una zona estrecha, esta zona es llamada banda de flexión y es designada por un ancho d , en la cual la energía elástica se concentra en su mayoría. Para calcular esta energía, se supondrá que $r \ll R$; por lo tanto el ángulo $\alpha \ll 1$ (Figura 3. 16).

Ahora $r = R \sin \alpha \sim R\alpha$, siendo la profundidad de la concavidad $H = 2R(1 - \cos \alpha) \sim R\alpha^2$. Se le llamará ξ el desplazamiento de los puntos de la cáscara en la banda de flexión. Se procede a encontrar las energías de flexión a lo largo de un meridiano y de dilatación a lo largo de un paralelo, siendo estas

$$\psi_1 = Eh^3 \frac{\xi^2}{d^4} \quad (3.96)$$

$$\psi_2 = Eh \frac{\xi^2}{R^2} \quad (3.97)$$

El cálculo del desplazamiento se determina de manera geométrica, la dirección del meridiano varia sobre el ancho d , un ángulo α y $\xi \sim \alpha d \sim d \frac{r}{R}$ ahora esto es sustituido en las ecuación (3. 96) y (3. 97) ambas también multiplicada por el área de la banda de flexión ($\sim rd$), de lo cual se obtiene

$$\psi_3 = \frac{Eh^3r^3}{R^2d} \quad (3.98)$$

$$\psi_4 = \frac{Ehd^3r^3}{R^4} \quad (3.99)$$

Ahora igualando las ecuaciones (3.98) y (3.99), se encuentra:

$$d \sim \sqrt{hR} \quad (3.100)$$

Sumando ambas energías el total es $\psi_t \sim E r^3 \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$ de otra forma:

$$\psi_t = k * E h^{5/2} \left(\frac{H^{3/2}}{R}\right) \quad (3.101)$$

Donde $K = 1.2(1 - \sigma^2)^{-3/4}$, σ es el módulo de Poisson.

Esto resulta del razonamiento que se supuso $d \ll r$, por lo tanto la expresión (3.101) es válida al cumplir la condición:

$$\frac{Rh}{r^2} \ll 1 \quad (3.102)$$

Al derivar la expresión (3.101) e igualándola a f , obtenemos la dependencia buscada de la profundidad H y la fuerza aplicada, por lo tanto:

$$H \sim \frac{f^2 R^2}{E^2 h^5} \quad (3.103)$$

Si ahora se supone que la deformación en el cascarón fuera realizada por una presión externa y uniforme ρ , el trabajo realizado sería igual a $\rho \Delta v$, donde $\Delta v \sim Hr^2 \sim H^2 R$, que sería el volumen que varía de la cáscara cuando se hunde. Por lo tanto igualar a cero la derivada respecto de H de la energía libre total (diferencia entre la ecuación (3.101) y este trabajo), se obtiene la expresión:

$$H \sim \frac{h^5 E^2}{R^4 \rho^2} \quad (3. 104)$$

Se observa en la ecuación (3. 104) que el valor de H crece cuando ρ disminuye, con lo que se entiende que el estado deformado es inestable. El valor estimado de H con la expresión (3. 104) corresponde al equilibrio inestable para ρ dada. Para concavidades con valores más grande de H aumenta espontáneamente.

Es posible estimar un valor crítico de la carga externa por encima del cual crece espontáneamente cualquier pequeña variación de la forma del cascarón. De la ecuación (3. 104) estimamos un valor de ρ en la cual $H \sim h$, por lo tanto:

$$\rho_{crítico} \sim \frac{Eh^2}{R^2} \quad (3. 105)$$

Con la ecuación (3. 105) estimamos el $\rho_{crítico}$ en la cual si es superada la deformación en la cáscara tendrá una variación espontánea.

Un estudio más detallado en deformación de cascarones dada una fuerza normal a su superficie, fue realizado por Pogorelov [29] que muestra una ecuación con la que estima la concavidad formada sobre el cascarón (Figura 3. 17), además corrobora su análisis teórico con un estudio experimental. Dicha ecuación es:

$$2h = \frac{R^2 f^2}{9\pi^2 C^2 E^2 \delta^2} \quad (3. 106)$$

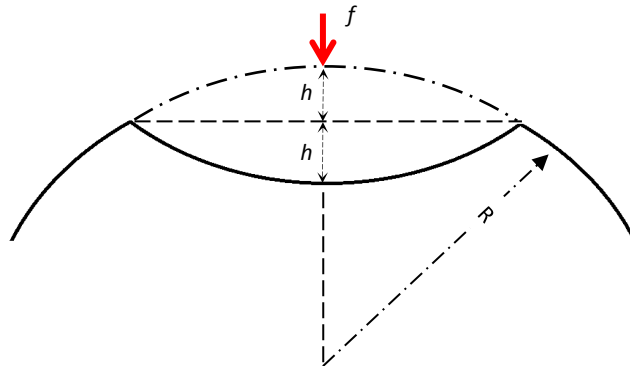


Figura 3. 17 Cascarón sometido a una fuerza normal a la superficie, modificada de [29].

Donde la profundidad de la concavidad se define por $2h$, δ representa el espesor del cascarón, C es una constante calculada por las condiciones de frontera y E es el módulo de elasticidad del material.

El cálculo de la constante C se obtiene con la ecuación (3. 107):

$$C = \frac{J_{min}}{12^{3/4}(1 - \nu^2)} \quad (3. 107)$$

3.1. 7 Limitaciones

Las limitaciones que presenta la teoría lineal para poder modelar un empaque blíster se menciona a continuación

- En la teoría lineal las deformaciones que ocurren en el cascarón son menores a su espesor.
- Considera que todas las fuerzas se distribuyen sobre toda la superficie y que los momentos flexionantes son depreciables o muy pequeños comparados con las fuerzas meridionales y radiales.
- Modelar un empaque blíster con esta teoría no es muy realista, ya que este tipo de envase sufre grandes deformaciones comparadas con su espesor pero sin que ocurra deformación plástica.
- Los modelos de carga en su mayoría son del tipo distribuida sobre toda la superficie y en un empaque de manera regular ocurre de forma puntual.
- El modelo de carga puntual se limita a deflexiones muy pequeñas.

El uso de la teoría lineal se detalla con ejemplos en el apéndice A pero se limita a deformaciones muy pequeñas, esfuerzos ideales y cargas distribuidas que no ocurren con normalidad.

3. 2 Teoría no lineal

El estudio de cascarones con grandes deflexiones, requiere de la teoría no lineal de flexión y *buckling*, que permite obtener una mejor aproximación en las deformaciones de estructuras tipo cascarón, las cuales al encontrarse sometidas a una carga puntual la flexión que ocurre es relativamente grande comparada con su espesor, sin la necesidad que el material con el que se encuentre fabricada la estructura presente deformación plástica.

3.2. 1 Similitud de los empaques termoformados con estructuras tipo cascarón

Los trabajos realizados con respecto a estructuras tipo cascarón no se limita al uso exclusivo de un material, pues dejan expresado el módulo de elasticidad, varios de los investigadores mencionados en la sección 2. 2 Teoría y trabajos en cascarones, proponen ecuaciones del tipo empírica o factores de reducción de carga en las cuales consideran las propiedades geométricas de la superficie esférica y del material.

Por otro lado, los empaques tipo blíster, regularmente se construyen con polímeros termoformable, como lo son: PVC rígido, ABS, polipropileno [1, 43]. El espesor del empaque con respecto a sus otras dimensiones como el largo y ancho es muy pequeño, también sus bordes siempre se encuentran restringidos al estar unidos a una base hecha del mismo polímero, metal o cartón. Además los blísteres están sujetos a deformaciones relativamente grandes comparados con su espesor sin llegar a la deformación plástica. Por lo tanto es posible modelar un empaque tipo blíster como una estructura tipo cascarón, con uso de superficies esféricas para modelos de empaque.

3.2. 2 Ecuaciones para el cálculo de buckling

En el cálculo de la carga de buckling se parte de las ecuaciones de equilibrio, al tomar un elemento diferencial extraído de un cascarón esférico (Figura 3. 18). Las ecuaciones (3. 108), (3. 109) y (3. 110) son obtenidas del análisis estático, éstas involucran los esfuerzos longitudinales, momentos y la fuerza cortante en términos de la carga exterior q . Ahora el conjunto de ecuaciones se transforma a una forma adimensional, con el uso del conjunto de variables, ver variables en (3. 111) [31].

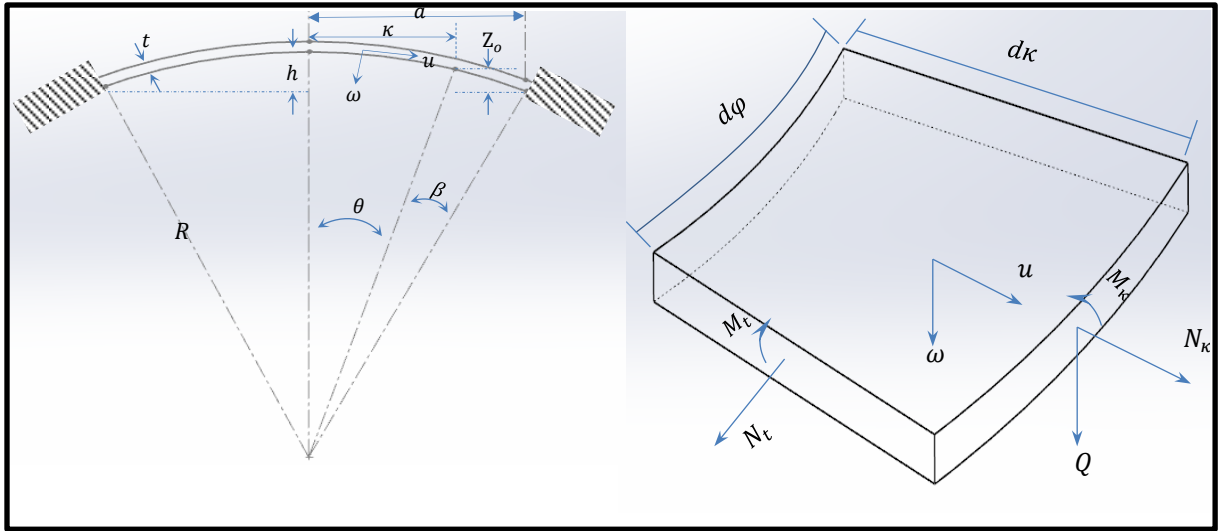


Figura 3. 18 Sección transversal de una superficie esférica y elemento diferencial a la derecha, modificado de [29].

$$\Sigma F = 0;$$

$$\frac{d}{dk}(\kappa N_k) - N_t = 0 \quad (3.108)$$

$$\kappa \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{d}{dk} (k^2 N_k) + \frac{1}{2} E_t \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^2 + E_t \frac{k}{R} \frac{d\omega}{dk} = 0 \quad (3.109)$$

$$D \frac{d}{dk} \left\{ \frac{1}{k} \frac{d}{dk} \left(k \frac{d\omega}{dk} \right) \right\} = N_k \left(\frac{k}{R} + \frac{d\omega}{dk} \right) + \frac{1}{2} qk \quad (3.110)$$

$$x = \frac{k}{\alpha} \quad W = \frac{\omega}{t} \quad K^2 = 12(1 - k^2) \quad S_k = \frac{\alpha^2}{Et^3} N_k \quad (3.111)$$

$$S_t = \frac{\alpha^2}{Et^3} N_t \quad P = \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\frac{\alpha}{t} \right)^4 q \quad \lambda^2 = \frac{K\alpha^2}{Rt}$$

Sustituyendo el conjunto de variables en las ecuaciones (3. 110), (3. 109), y (3. 108), se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x^2 S_k) \right\} + \frac{1}{2x} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{K} \frac{dW}{dx} = 0 \quad (3. 112)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dW}{dx} \right) \right\} - K \left(\lambda^2 + \frac{K}{x} \frac{dW}{dx} \right) S_k = 6P \quad (3. 113)$$

$$S_t = \frac{d}{dx} (x S_k) \quad (3. 114)$$

La solución de las ecuaciones (3. 112), (3. 113) y (3. 114), se realiza en términos de la deflexión en el centro $W(0) = w_0$, usando como parámetro y expandiendo todas las variables en potencia de $W(0)$. Para la obtención de una solución particular se recurre al uso de series de potencia, en términos de diferencias finitas y aplicando de manera adecuada las condiciones de frontera se obtienen un nuevo conjunto de ecuaciones que son resueltas con el método de Crout para solución de ecuaciones simultaneas [31].

Los modos de deflexión de las superficies esféricas clasificadas por el factor λ se ilustran en la Figura 3. 19 y la Figura 3. 20.

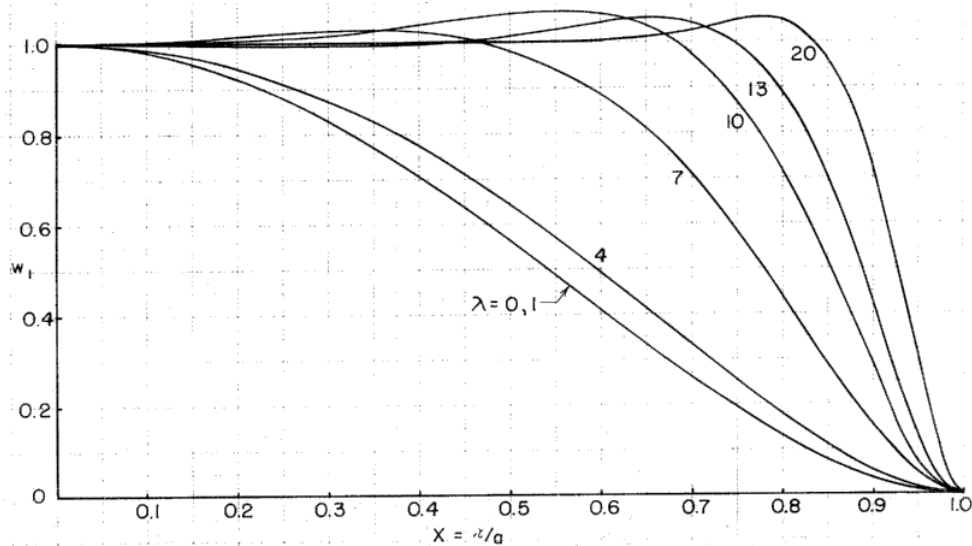


Figura 3. 19 Variación de los modos de deflexión lineal con w_1 para distintos valores de λ [31].

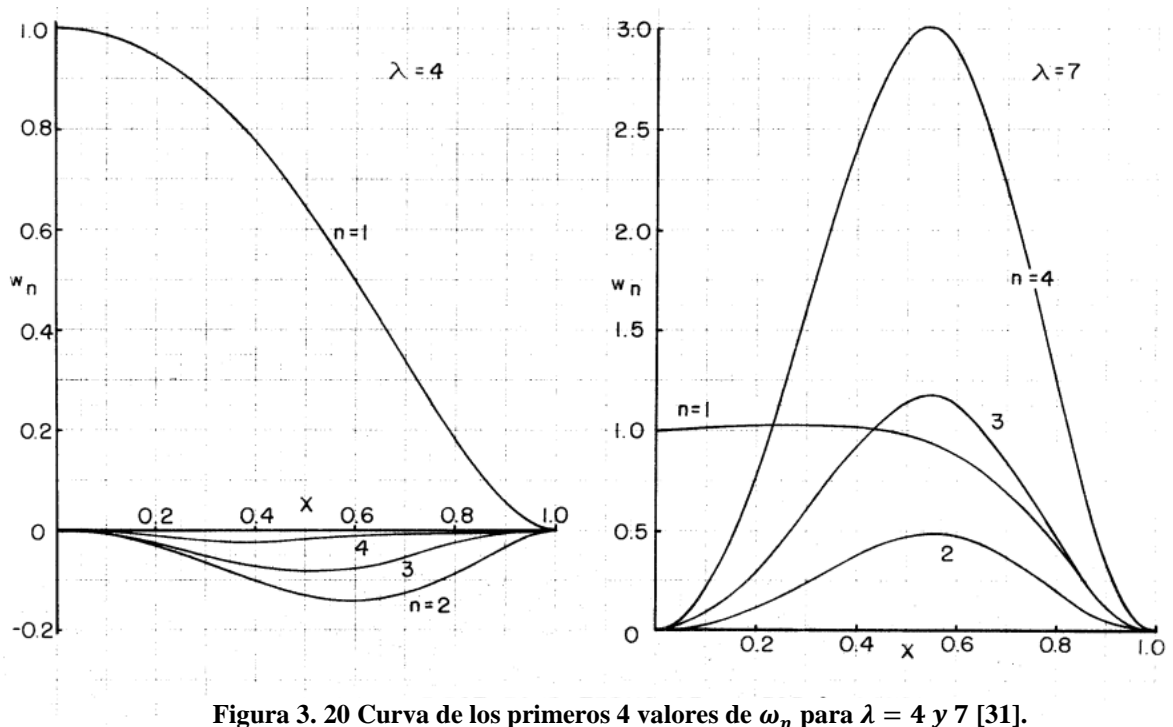


Figura 3. 20 Curva de los primeros 4 valores de ω_n para $\lambda = 4$ y 7 [31].

En la literatura se encuentran ecuaciones para encontrar la carga crítica y esfuerzo crítico, cuando un cascarón esférico se encuentra sometido bajo presión externa [27]. Estas ecuaciones son:

$$P_{cr} = \frac{Eh^2}{R^2} \quad (3.115)$$

$$\sigma_{cr} = \alpha \frac{Eh}{2R} \quad (3.116)$$

Donde el coeficiente α para cascarones manufacturados con alta calidad y con relaciones de $250 \leq \frac{R}{h} \leq 800$, es determinado con la siguiente ecuación:

$$\alpha = \frac{1}{2.36} \sqrt[8]{\left(\frac{100h}{R}\right)^3} \quad (3.117)$$

Para el rango $250 \leq \frac{R}{h}$, se recomienda $\alpha = 0.3$. Cuando el cascarón no es bien manufacturado, y las imperfecciones iniciales son comparables con el espesor, el coeficiente α es reducido aproximadamente por 1.5 o 2. La siguiente ecuación empírica para determinar el esfuerzo y la carga crítica es:

$$\sigma_{cr} = 0.125 \frac{Eh}{R} \quad (3.118)$$

$$P_{cr} = 0.25 \frac{Eh^2}{R^2} \quad (3.119)$$

Cuando no exista suficiente información experimental para obtener un diseño basado estadísticamente permisible a una carga de pandeo, las recomendaciones de diseño están basadas en el comportamiento admisible de una estructura cascarón. En general, esto implica factores de reducción empíricos para disminuir la carga crítica teórica [27].

En la literatura sobre teoría de cascarones pueden encontrarse más ecuaciones en la que autores como Wai-Fah, Eric M. [43] o Huston y Josephs [36], basan sus ecuaciones para carga de buckling con factores de reducción además de mencionar que sus ecuaciones se ajustan de forma favorable a datos experimentales.

3.2.3 Curvas carga-deflexión

Las curvas carga-deflexión, permite una mejor aproximación en el comportamiento del cascarón tipo esférico al encontrarse sometido a una carga, para su obtención investigadores como Mescall [31], desarrollaron una solución numérica de ecuaciones no lineales que gobiernan la deformación asimétrica finita de cascarones de revolución, basado en las ecuaciones de Eric Reissner. En particular, esta solución se extiende dentro del rango de post-buckling. Las estimaciones de carga crítica hechas en base a las curvas (ver Figura 3. 21 y Figura 3. 22) son bastantes aceptables con las observaciones experimentales, ver Figura 3. 23.

Las curvas obtenidas del análisis numérico de Mescall fueron muy bien aceptadas con las mediciones experimentales de Evan-Iwanowski. En la Figura 3. 21 puede observarse que ocurre un fenómeno donde las curvas cruzan el eje de deformaciones, este fenómeno es llamado snap-through, donde la forma esférica se invierte formándose una concavidad. Y el efecto contrario se le llama snap-back, donde el casarón regresa a su forma esférica.

La clasificación de las curvas es dado por el parámetro λ^2 que involucra a ν , definida como el coeficiente de Poisson, ξ como el ángulo medido desde el borde hasta el ápice de la superficie esférica, R como el radio del plano medio de la superficie y h se define como el espesor del cascaron. La carga P^* es una carga normalizada, y es directamente proporcional a la carga real P y por a el radio del cascarón, e inversamente proporcional al producto del módulo de elasticidad por el espesor h al cubo.

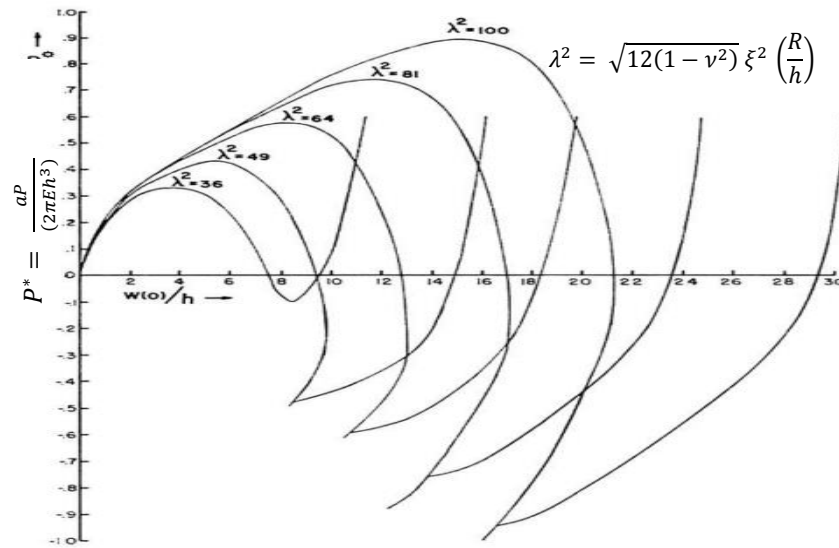


Figura 3. 21 Curvas de carga-deflexión para distintos valores de lambda y los bordes sin restringir [32].

El eje horizontal en la figuras Figura 3. 21 y Figura 3. 22, se representa el desplazamiento que se encuentra normalizado con respecto al espesor del cascarón, $W(0)$ es el desplazamiento vertical desde el ápice de la superficie con dirección al centro del radio de curvatura de la superficie esférica.

El comportamiento de superficies esféricas se ven influenciado por su borde restringido, se observan curvas para distintos valores de λ , ver Figura 3. 25. Los estudios de Mescall lo llevaron a obtener otro tipo de caso, en la cual una carga distribuida alrededor del ápice de un cascarón esférico provoca que la curva carga-deflexión cambie, Ver Figura 3. 24, Figura 3. 25, Figura 3. 26 y Figura 3. 27.

Alex Yevkin [35] desarrolló un nuevo método del tipo asintótico para grandes deflexiones en cascarones esféricos, en el que considera un material de tipo ortotrópico; para su obtención se basó en las ecuaciones de equilibrio de Reissner, y un módulo de Poisson que puede ser elegido entre 0 y 0.5 para generar la curva de carga-deflexión (para su ilustración refiérase a la Figura 3. 29 y Figura 3. 30). Además con este nuevo método desarrolló un software en la cual introduciendo los datos de las dimensiones del cascarón, módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson, calcula la curva carga-deflexión del cascarón sometido a una carga puntual en el ápice.

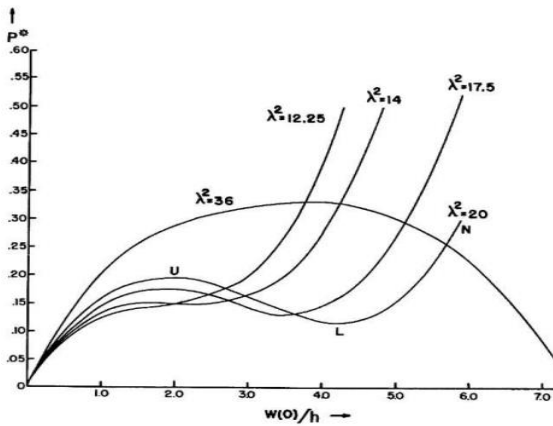


Figura 3. 22 Curvas carga-deflexión, para superficies esféricas con distintos valores de lambda y con los bordes libres [32].

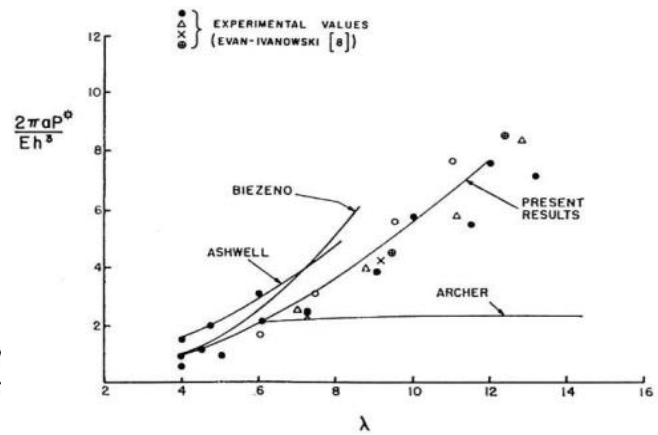


Figura 3. 23 Comparación del análisis numérico de Mescall con otros investigadores y datos experimentales [32].

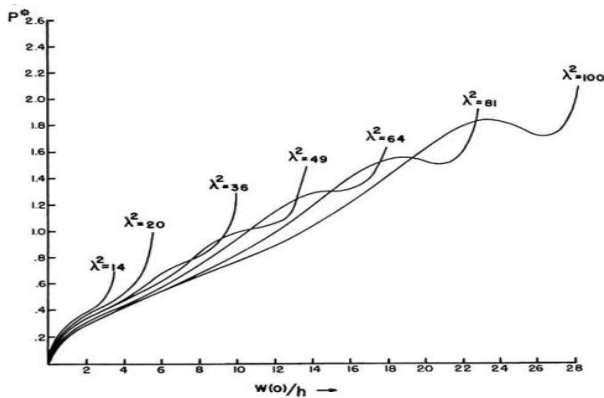


Figura 3. 24 Curvas carga-deflexión en superficies esféricas con los bordes restringidos [32].

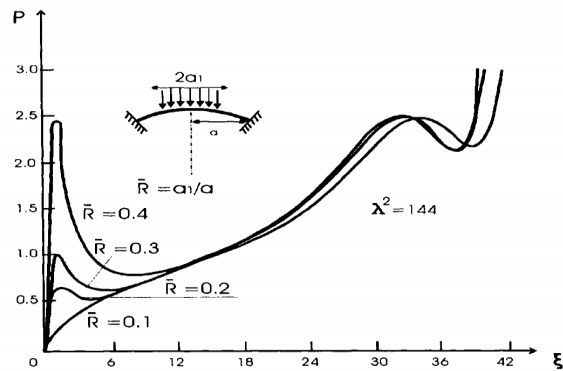


Figura 3. 25 Curvas carga-deflexión para un tipo de superficie esférica, con carga distribuida alrededor del ápice [32].

El investigador Bushnell (1967), también publicó estudios relacionados con las superficies esféricas (ver Figura 3. 28). Notó que en relaciones de R/h muy grandes las superficies esféricas se comportaban de forma más elástica.

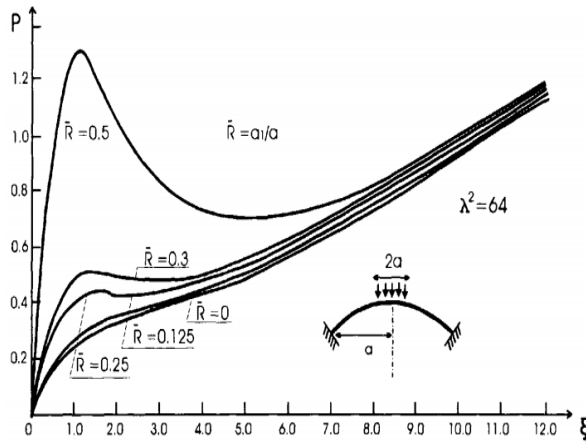


Figura 3. 26 Curvas carga-deflexión para un tipo valor de λ , con carga distribuida alrededor del ápice [32].

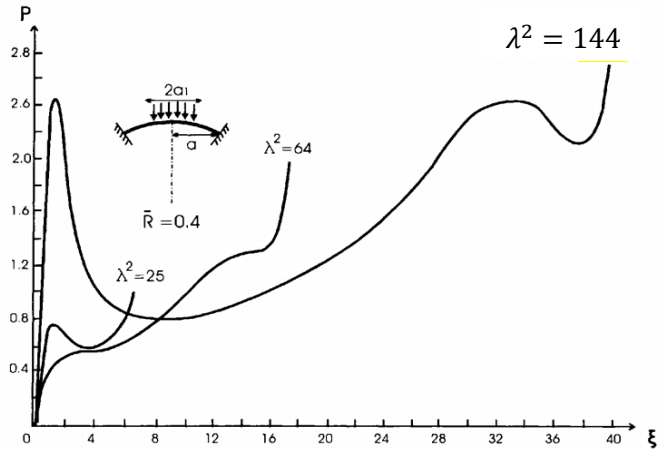


Figura 3. 27 Curvas carga-deflexión con distintos valores de λ , con carga distribuida alrededor del ápice [32].

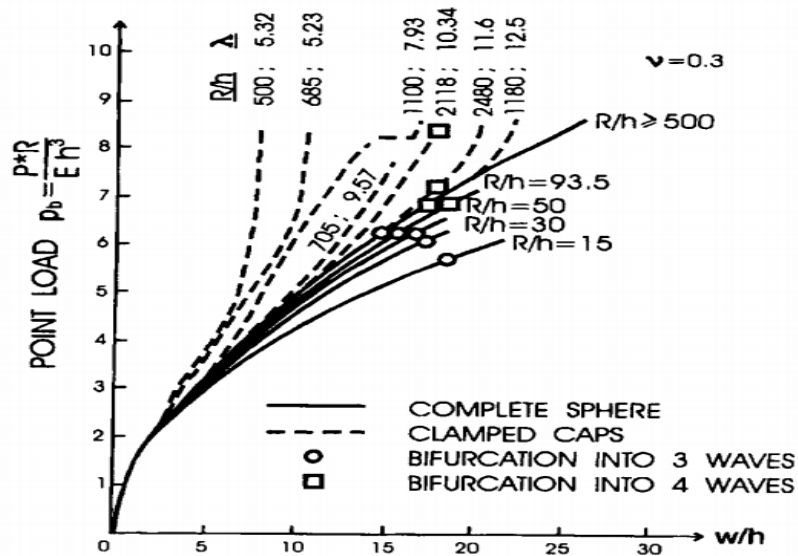


Figura 3. 28 Graficas de carga-deflexión para distintos valores de R/h , para esfera completa y para superficie esféricas (Bushnell, 1967) [33].

En la Figura 3. 30, los círculos y las cruces son los resultados obtenidos por elemento finito, usado para comparar el método asintótico, las curvas 1 y 2 son curvas de superficies esféricas, la curva con guiones es de un cascarón completo, H representa la altura de la superficie esférica.

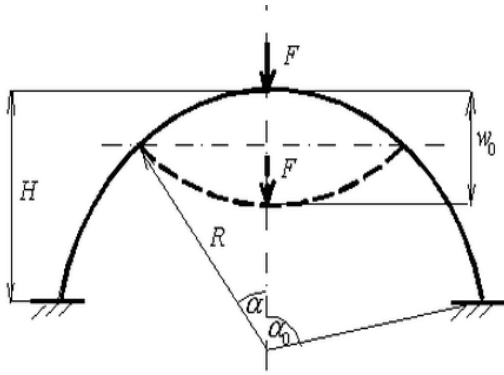


Figura 3. 29 . Esquema de la deflexión causada por la aplicación de una fuerza puntual en el ápice del cascarón esférico [35].

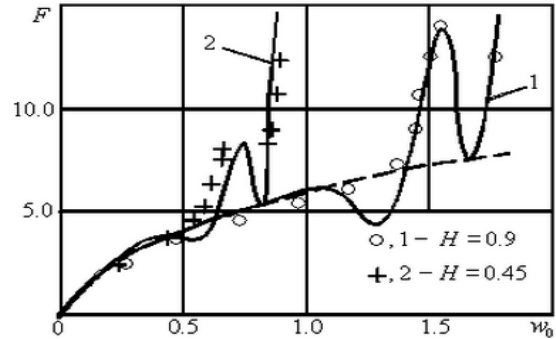


Figura 3. 30 . Curvas carga-deflexión las curvas 1 y 2, son superficies esféricas y la curva con líneas es el cascarón completo [35].

La formulación del método asintótico para la obtención de las curvas en la Figura 3. 30 se derivó de las ecuaciones de Reissner E. (1950) [35] considerando la relación del espesor del cascarón con el radio de curvatura como un parámetro y se basa en el límite asintótico de ecuaciones tridimensionales de teoría de la elasticidad con respecto al mismo parámetro. En la comparación del método asintótico con elemento finito se usó un material isotrópico.

La teoría no lineal para cascarones esféricos no considera la variación de espesor y en el proceso de termoformado descrito en el capítulo dos muestra diversos métodos con la finalidad de mejorar la distribución de material pero no hay total uniformidad en el espesor de la pieza terminada.

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN POR ELEMENTO FINITO, CALIBRACIÓN DE MODELO Y CASOS PROPUESTOS.

La comparación de un modelo por elemento finito con los resultados de otros modelos es el contenido de este capítulo. Además, se menciona las dimensiones del modelo y las propiedades del material usado en la simulación.

Con el concepto de trabajo y energía se calcula la energía bajo la curva tanto de la simulación como con los métodos de comparación.

4. 1 Dimensiones, condición de frontera y propiedades del material en el modelo.

Para el análisis de estructuras tipo cascarón, se construyó un modelo con superficie esférica y se simuló en Ansys R15.0 a manera de calibración se comparó con lo que obtuvo Evkin y Bushnell. Por lo tanto se procedió a modelar un cascarón esférico con radio de curvatura igual a 100 mm y un espesor de 0.5 mm (Figura 4. 1). El tamaño de los elementos en la malla es de 2 mm y del tipo de elemento usado es Shell187 (Ansys R15.0).

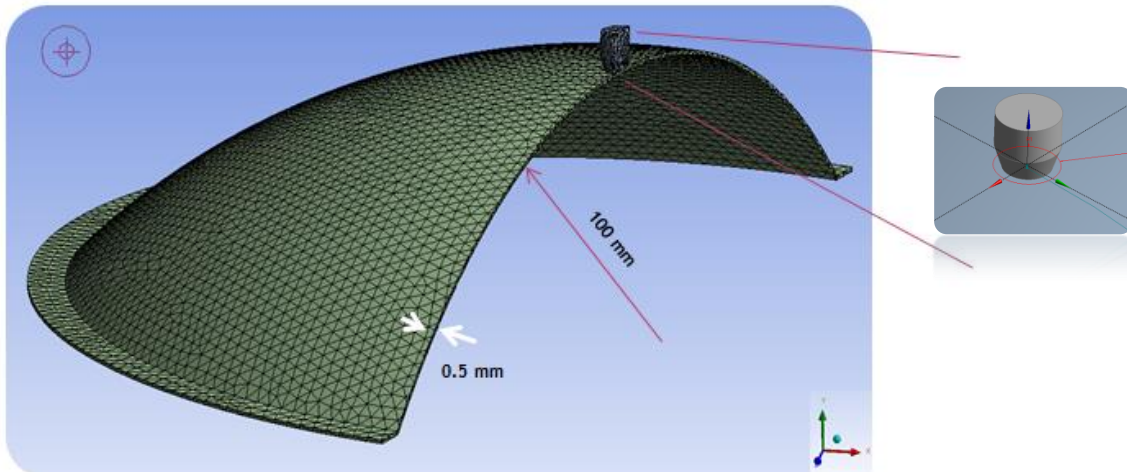


Figura 4. 1 Superficie esférica de prueba, sus bordes restringidos al desplazamiento.

Se buscó obtener la curva carga-deflexión del modelo, para ello se simuló que el cascarón esférico es deformado en un punto sobre el ápice con dirección normal a la superficie, en el modelo no se consideró fricción, las zonas de contacto del pin y del cascarón se le restringió de cualquier deslizamiento que pueda existir. Las curvas de carga-desplazamiento obtenidas por Mescall, Bushnell, Evkin y en la investigación de Shilkrut, no mencionan que la fricción intervenga en el comportamiento del cascarón o modifique su curva

de comportamiento al encontrarse sometido a una fuerza puntual o carga distribuida alrededor del ápice. El Dr. Evkin compara su método de manera experimental al usar un pin para introducir una carga a la superficie esférica de prueba, obteniendo resultados aceptables con lo experimental y lo numérico, sin mencionar que la fricción modifique la curva de comportamiento del cascarón esférico.

El material que se seleccionó es acero estructural (ver Tabla 4. 1), en pruebas experimentales y en los modelos usados por los investigadores antes mencionados a excepción de Evkin [35], tuvieron enfoque a metales, sin embargo generalizaron sus curvas para distintos materiales.

Tabla 4. 1 Valores usados en las propiedades del material.

Acero estructural	
Módulo de elasticidad	200 GPa.
Coefficiente de Poisson	0.3

4. 2 Calibración de modelo y comparación.

El modelado numérico se realizó conforme al análisis experimental de Evkin [35]. La simulación se realizó en el programa de elemento finito Ansys R15.0 (Figura 4. 2).

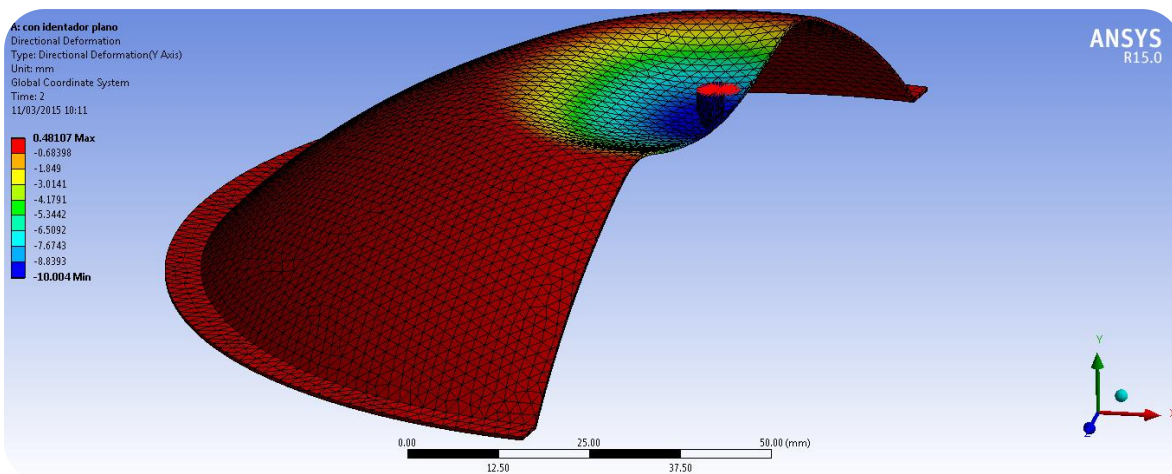


Figura 4. 2 Simulación del modelo de prueba en Ansys R15.0, los valores obtenidos se compraron con los resultados obtenidos de Bushnell y Yevkin.

Con los datos obtenidos por elemento finito se procesaron obteniendo la curva carga-deflexión, luego se comparó con los trabajos de Evkin y Bushnell (Figura 4. 3).

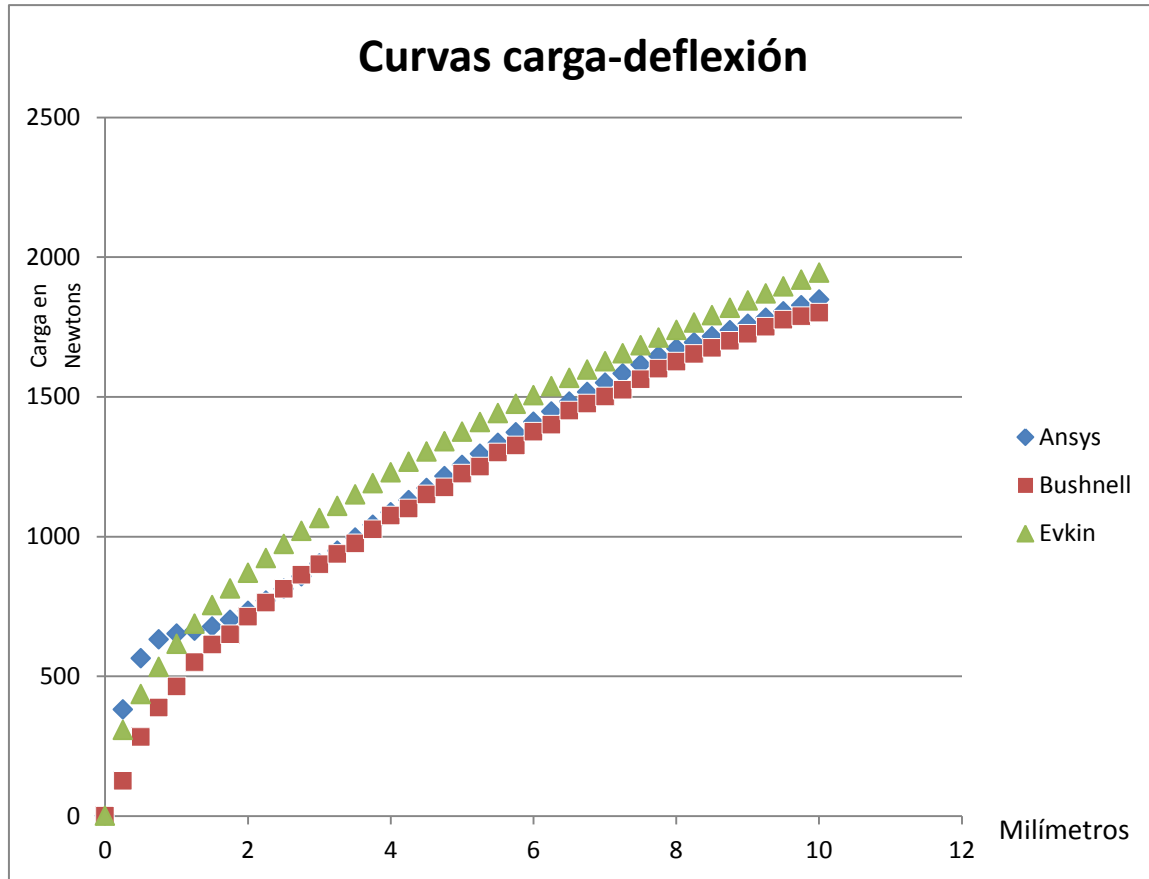


Figura 4. 3 Curvas carga-deflexión, comparación de los datos obtenidos por elemento finito con los trabajos obtenidos por Yevkin y Bushnell.

AL compararse los resultados obtenidos de la simulación por elemento finito con los trabajos de Yevkin y Bushnell, se aproximaron las curvas de comportamiento con ecuaciones polinómicas, luego se realizó el cálculo de área bajo la curva para comparar en términos de energía (ecuaciones (4. 1), (4. 2), (4. 4), (4. 6)).

Los resultados obtenidos de integrar las ecuaciones se concentran en la Tabla 4. 2 y las diferencias porcentuales también se muestran. Puede observarse una diferencia entre Bushnell y Yevkin, se atribuye a Yevkin consideró en el desarrollo de su método materiales isotrópicos y ortotrópicos y Bushnell no, por lo tanto es más conservador que Yevkin. En cambio los

datos obtenidos por elemento finito, se conserva en un punto intermedio, que permite concluir que la simulación se realizó de manera correcta.

Ansys 15.0

$$\int D'_1(x) = k_1 \int_0^{1.25} x^3 dx - k_2 \int_0^{1.25} x^2 dx + k_3 \int_0^{1.25} x dx + k_4 \int_0^{1.25} dx \quad (4.1)$$

Donde

$$k_1 = 671.64 ; k_2 = 1973.1 ; k_3 = 1946.5 ; k_4 = 1.587$$

Son los coeficientes de la función polinómica en (4. 1), que aproximan a la curva obtenidos por regresión lineal. De la misma forma se procede con la ecuación (4. 2).

$$\int D'_2(x) = k_1 \int_{1.25}^{10} x^4 dx - k_2 \int_{1.25}^{10} x^3 dx + k_3 \int_{1.25}^{10} x^2 dx + k_4 \int_{1.25}^{10} x dx + k_5 \int_{1.25}^{10} dx \quad (4.2)$$

Donde

$$k_1 = 0.2166 ; k_2 = 5.847 ; k_3 = 47.42 ; k_4 = 24.319 ; k_5 = 542.8$$

Son los coeficientes de la función polinómica en la ecuación (4. 2).

Por lo tanto, la energía total es:

$$\psi = \int D'_1(x) + \int D'_2(x) \quad (4.3)$$
$$\psi = 12095.778 \text{ N} * \text{mm}$$

Bushnell

$$\int D'_1(x) = -k_1 \int_0^{10} x^6 dx + k_2 \int_0^{10} x^5 dx - k_3 \int_0^{10} x^4 dx + k_4 \int_0^{10} x^3 dx - k_5 \int_0^{10} x^2 dx + k_6 \int_0^{10} x dx - k_7 \int_0^{10} dx \quad (4.4)$$

Donde

$$k_1 = 0.0399 ; k_2 = 1.3362; k_3 = 17.527; k_4 = 114.44 ; k_5 = 396.84 ; k_6 = 868.75 ; \\ k_7 = 54.043$$

Son los coeficientes de la función polinómica en la ecuación (4. 4). Por lo tanto, la energía total

$$\psi = \int D'_1(x) \\ \psi = 11585.138 \text{ N} * \text{mm} \quad (4.5)$$

Evkin

$$\int D'_1(x) = -k_1 \int_0^{10} x^6 dx + k_2 \int_0^{10} x^5 dx - k_3 \int_0^{10} x^4 dx + k_4 \int_0^{10} x^3 dx - k_5 \int_0^{10} x^2 dx + k_6 \int_0^{10} x dx - k_7 \int_0^{10} dx \quad (4.6)$$

Donde

$$k_1 = 0.018 ; k_2 = 0.6361 ; k_3 = 8.9779 ; k_4 = 64.25 ; k_5 = 248.91 ; k_6 = 664.84 ; \\ k_7 = 6.3575$$

Son los coeficientes de la función polinómica de la ecuación (4. 6). Por lo tanto, la energía total

$$\psi = \int D'_1(x) \\ \psi = 12965.720 \text{ N} * \text{mm} \quad (4.7)$$

Tabla 4. 2 Energía calculada en cada método y diferencias porcentuales entre los resultados obtenidos.

Yevkin	12.966 Nm
Ansys Workbench	12.096 Nm
Bushnell	11.585 Nm
Diferencia porcentual	
Yevkin - Ansys Workbench	6.7 %
Ansys Workbench - Bushnell	4.2 %

Las energías obtenidas de integrar las funciones polinómicas (Tabla 4. 2), son el trabajo necesario para lograr la deformación en el cascarón esférico. Analizar los resultados bajo el concepto de trabajo y energía, facilita la comparación de los datos obtenidos.

4.3 Casos propuestos

Para definir el espesor en un empaque se necesita entender el comportamiento de los cascarones esféricos y obtener la curva carga-deflexión generalizada. En el proceso de termoformado, el material más utilizado es el PVC rígido pero no se ha encontrado información relacionada al diseño de blíster desde el punto de vista estructural, el enfoque del diseño solo apunta en la apariencia. A los modelos propuestos se les realizó una convergencia de malla que se detalla en el apéndice B.

4.3.1 Variación de espesor conservando el espesor inicial en la base.

Analizar el comportamiento del cascarón esférico haciendo variaciones de espesor en el ápice para obtener el comportamiento al estar sometido a una carga puntual es de interés, los trabajos relacionados a cascarones esféricos son de espesor constante, regularmente esto no sucede en el termoformado de polímeros, como se vio en el capítulo 2 el material tiende adelgazar cuando adquiere la forma del molde o se pre-estira para mejorar uniformidad en el espesor.

Se pretende conservar el espesor en los bordes y variar el espesor en parte superior, dando un efecto de adelgazamiento en el cascarón, como se muestra en la Figura 4. 4. Con regularidad la hoja termoplástica se adelgaza en zonas con mayor profundidad o detalles intrincados.

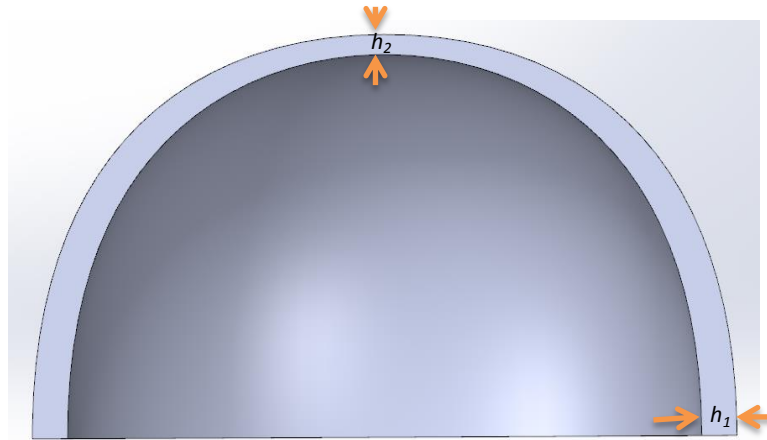


Figura 4. 4 Cascaron esférico con adelgazamiento en la parte superior (h_2) conservando el espesor inicial (h_1) en los bordes.

Para el análisis se genera el modelo en elemento finito (Figura 4. 5), previo a las simulaciones se realizó la convergencia de malla, en el apéndice B se detalla. El material seleccionado para éste caso es PVC rígido.

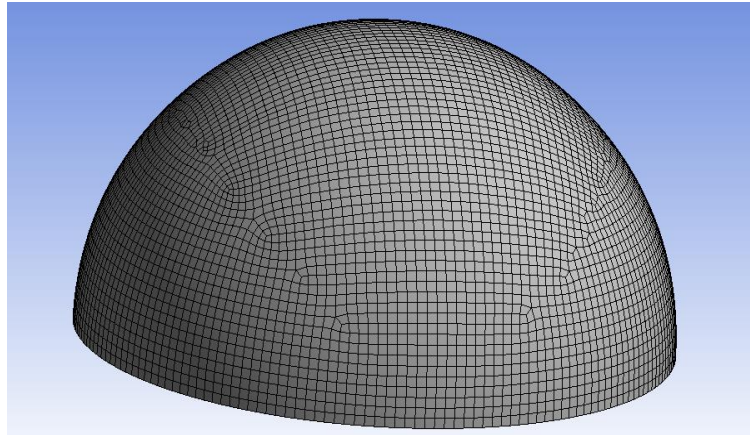


Figura 4. 5 Cascarón esférico modelado en elemento finito.

4.3. 2 Variación de espesor en zonas específicas.

Introducir variaciones en el espesor [15] para analizar el comportamiento del cascarón al estar sometido a una carga en el ápice, es de interés. Siempre que ocurren defectos en la elaboración de empaques importa conocer en qué medida afecta al empaque (Figura 4. 6).

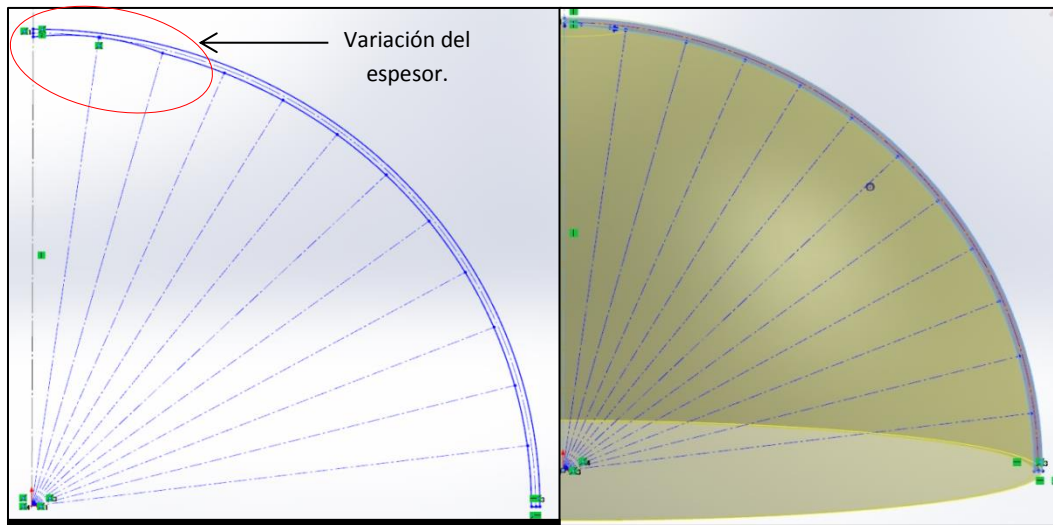


Figura 4. 6 Perfil de la variación de espesor en la superficie esférica, en el óvalo se marca cómo es la variación en el espesor en el material.

En el modelo propuesto, la posición del adelgazamiento inicial será en el ápice y con incrementos de 7.5 grados con respecto a la vertical se situará la variación de espesor hasta el borde. La reducción del espesor es del 50%, una variación superior significaría un empaque de mala calidad.

4.3.3 Aplicación de carga en diferentes partes de la superficie del modelo.

En el transporte de los productos, las cargas que interactúen sobre el empaque no serán exclusivas de la zona del ápice, sino pueden ser en cualquier región que actúen. Conocer el comportamiento en diferentes puntos del empaque es de importancia, en la literatura no se ha encontrado algo referente.

En el modelo por elemento finito se consideró que el análisis comienza con la aplicación de una carga a 45° con respecto al ápice, y con incrementos de 5° con dirección al borde se aplicó la carga para analizar las deformaciones y la fuerza de reacción, pero manteniendo un mismo espesor h de 1 mm en toda la superficie esférica (Figura 4. 7).

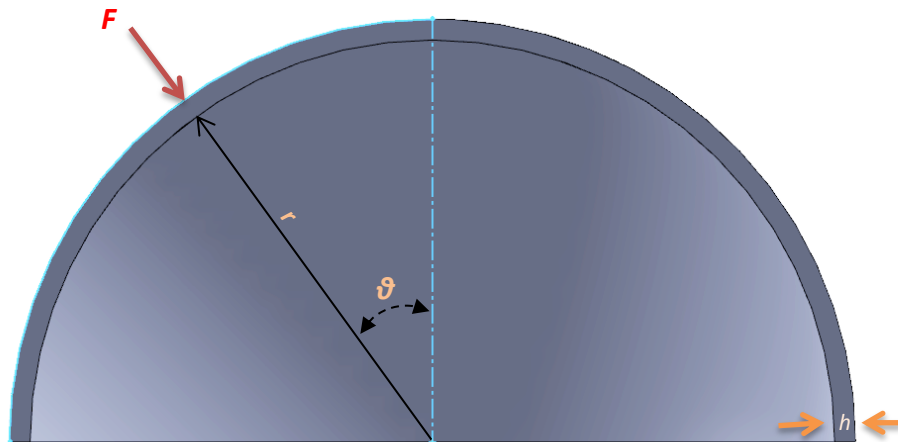


Figura 4. 7 Cascarón esférico con aplicación de una carga normal a la superficie cambiando el punto de la fuerza, el radio r de curvatura es de 60mm.

4.3.4 Superficie esférica con base cuadrada para diferentes valores de R/h .

Una base con forma redonda en un empaque no es común, una base cuadrada o rectangular tiene usos prácticos. Analizar la influencia de una base cuadrada en el comportamiento de la superficie esférica es de interés.

Un modelo por elemento finito se propone para el análisis y obtener la curva carga-deflexión generalizada (Figura 4. 8).

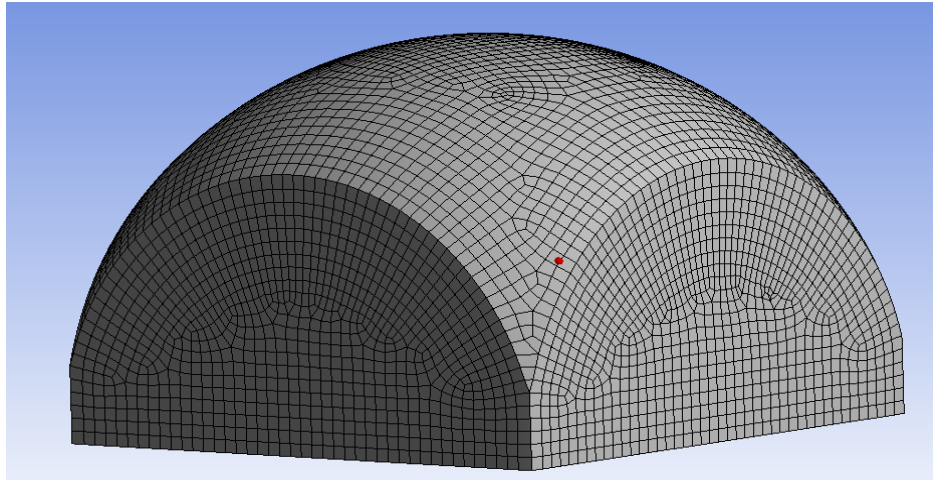


Figura 4. 8 Superficie esférica con base cuadrada, el radio es de 60 mm y la longitud de los lados de la base es de 84.85 mm

4.3. 5 superficie esférica con diferente valores de R/h .

En el análisis del comportamiento de la superficie esférica variando su relación R/h , es de interés para saber cómo disminuye la capacidad de carga. En el programa de elemento finito se cambia los radios de curvatura y el espesor para realizar las simulaciones y obtener una gráfica del comportamiento que pueda tener el cascarón al estar sometida a una carga puntual y normal en el ápice (Figura 4. 9). El rango de relaciones R/h es de 30 hasta 150.

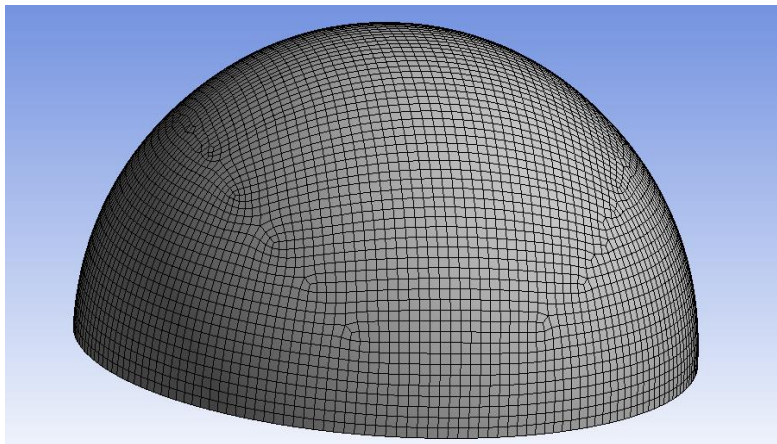


Figura 4. 9 Cascarón esférico modelado en elemento finito, se varió el radio de curvatura y el espesor para obtener diferentes relaciones R/h , radio de curvatura inicial es de 60 mm y espesor inicial es de 1 mm

4.3. 6 Empaque complejo con uso de superficies esféricas

Se pretende lograr configuraciones más complejas y analizar el comportamiento bajo carga externa para simplificar la tarea del diseñador al momento de elegir el espesor adecuado. Como modelo complejo se diseñó un empaque para control de videojuego con uso de superficies esféricas (Figura 4. 10), las dimensiones se tomaron del fabricante Microsoft© en la página de soporte técnico, el espesor del empaque es de 0.5 mm y la fuerza es aplicada normal a su superficie esférica mayor, las relaciones de R/h de las superficies en la zona de botones y joystick son menores que a la superficie mayor. Los costados con regularidad son más rígidos a la flexión que las superficies esféricas, en el proceso de termoformado las superficies cercanas al borde del molde el espesor es superior.

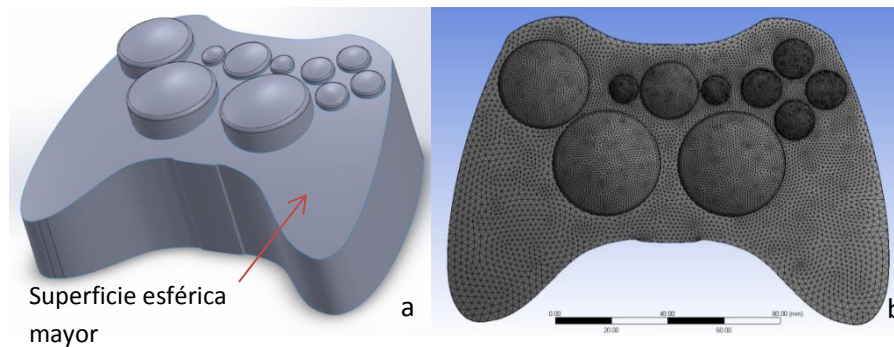


Figura 4. 10 La aplicación de superficies esféricas en empaque más complejos depende de la habilidad del diseñador, a) vista del empaque, b) empaque mallado.

El uso de superficies esféricas a empaque termoformados depende de la habilidad del diseñador para crear bosquejos que se adapten de la mejor manera a los productos. Para el empaque complejo el material seleccionado es PVC rígido, la convergencia de malla se detalla en el apéndice B.

CAPÍTULO 5 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE SIMULACIONES POR FEM

Este capítulo contiene gráficas del comportamiento de las superficies esféricas y su aplicación a empaques. El material es PVC rígido y sus propiedades introducidas al programa de elemento finito Ansys R15.0 son: el Módulo de elasticidad igual a 2500 MPa, coeficiente de Poisson de 0.38 y con peso específico de 1.42 g/cm^3 , la convergencia de malla en los modelos se detalla en el apéndice B y se menciona el tipo de elemento seleccionado para las simulaciones.

5.1 Modelo con variación de espesor conservando el espesor inicial en la base.

Se inicia con los espesores h_1 y h_2 ambos iguales en un principio hasta culminar con $h_2 = 0.1 * h_1$, en la Figura 5. 1 se detalla las zonas con los espesores.

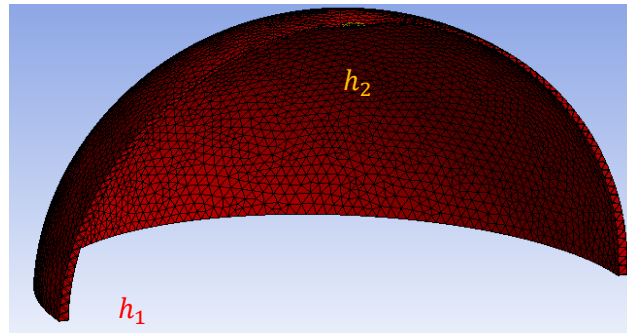


Figura 5. 1 Modelo con variación de espesor en el ápice.

Al modelo se somete a un desplazamiento de 10 mm en el ápice con dirección normal a la superficie, esto se repite hasta llegar a un décimo del espesor h_1 , con decrementos de 0.05 mm (ver Figura 5. 2).

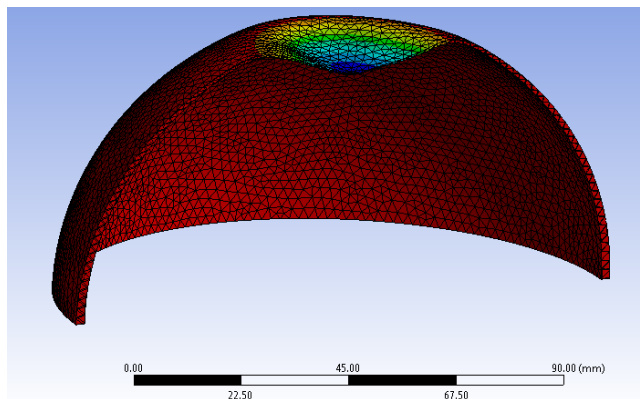


Figura 5. 2 Modelo deformado por la parte del ápice.

Los datos obtenidos por elemento finito son procesados en Matlab, que permite generar la gráfica en 3D. En la Figura 5.3 se muestra uno de los ejes horizontales, que representa en término de porcentaje el espesor h_2 con respecto de h_1 , sobre el eje vertical, la fuerza P^* es la fuerza normalizada en términos de la carga real P , el radio de curvatura R , el módulo de elasticidad E y el espesor h que para este caso es h_1 . La Figura 5.3 muestra la influencia de la variación de espesor en la capacidad de carga del cascarón.

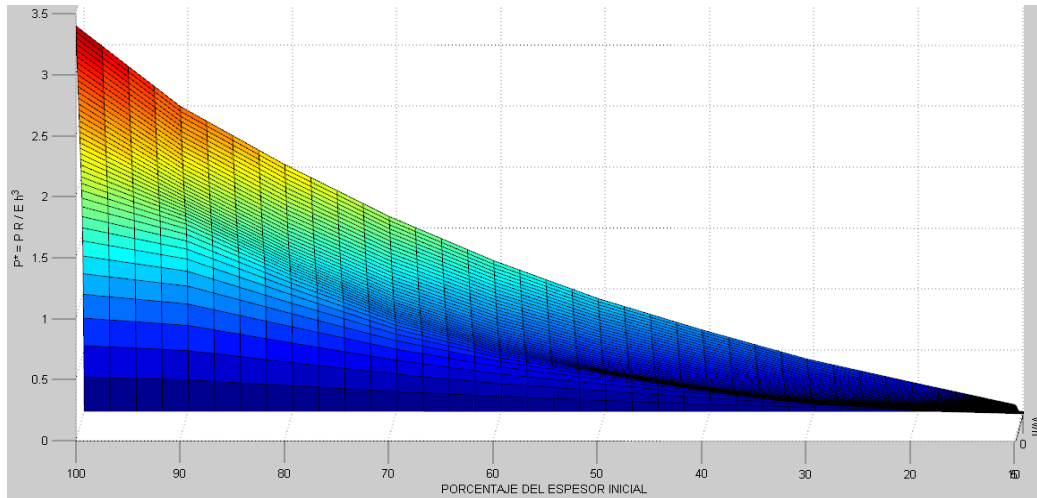


Figura 5.3 Gráfica normalizada del comportamiento del cascarón con espesor variable.

Sobre el segundo eje horizontal se representa el desplazamiento w con respecto al espesor h inicial o de referencia (Figura 5.4).

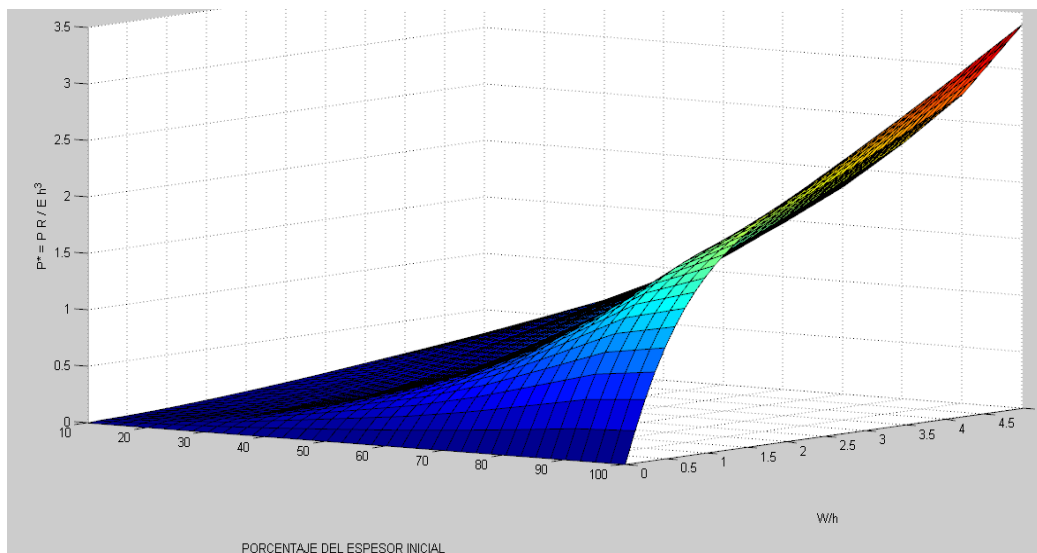


Figura 5.4 Gráfica del comportamiento del cascarón esférico con espesor variable.

5.2 Modelo con variación de espesor en zonas específicas.

La variación del espesor se simuló cada 7.5° en sentido anti-horario desde el ápice hasta el borde, el adelgazamiento propuesto es del 50% con respecto al espesor inicial. En la Figura 5.5 se muestra el cascaron esférico deformándose.

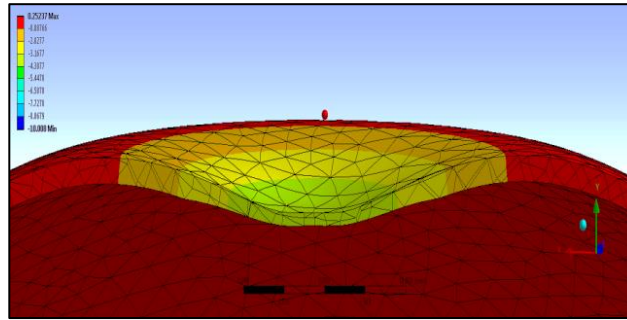


Figura 5.5 Cascaron con variación de espesor por zonas.

Las simulaciones se realizaron, siguiendo la misma aplicación de un desplazamiento en el ápice al cascarón esférico pero cambiando la zona de variación del espesor (ver Figura 5.6), los datos obtenidos se procesaron para obtener la gráfica del comportamiento del cascarón esférico.

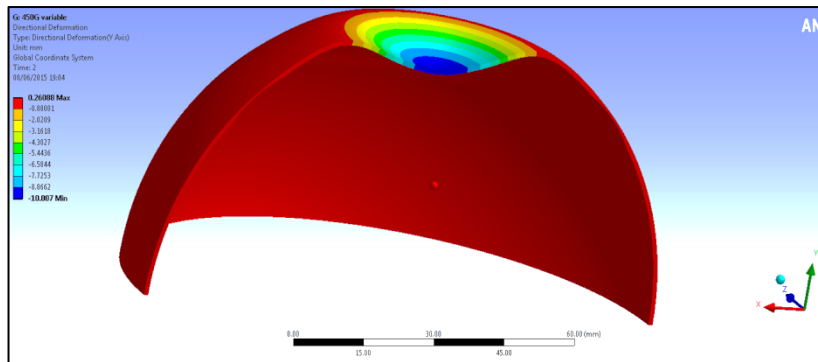


Figura 5.6 Cascaron aplicándole un desplazamiento en el ápice pero con variación de espesor en diferentes puntos.

Los datos obtenidos por elemento finito se procesan en Matlab, obteniendo una gráfica 3D normalizada (Figura 5.7) del comportamiento del cascarón esférico. El eje horizontal a mano izquierda muestra el desplazamiento con respecto al espesor, y el segundo eje horizontal

a mano derecha indica la posición en grados de la variación del espesor tomando como referencia el ápice en dirección al borde. Se observa la influencia de la variación del espesor en la capacidad de carga del cascarón dependiendo de la ubicación del adelgazamiento.

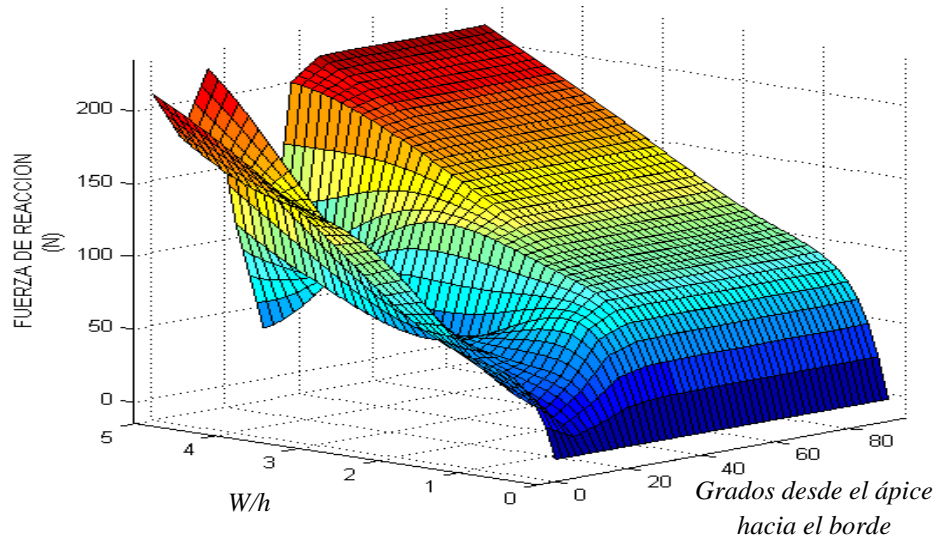


Figura 5. 7 Gráfica 3D Normalizada del comportamiento del cascarón con variación de espesor en diferentes zonas.

En la Figura 5. 8, se aprecia el cambio abrupto en la capacidad del cascarón en soportar una carga, el punto más bajo ocurre al encontrarse la variación a 30 grados del ápice con dirección al borde.

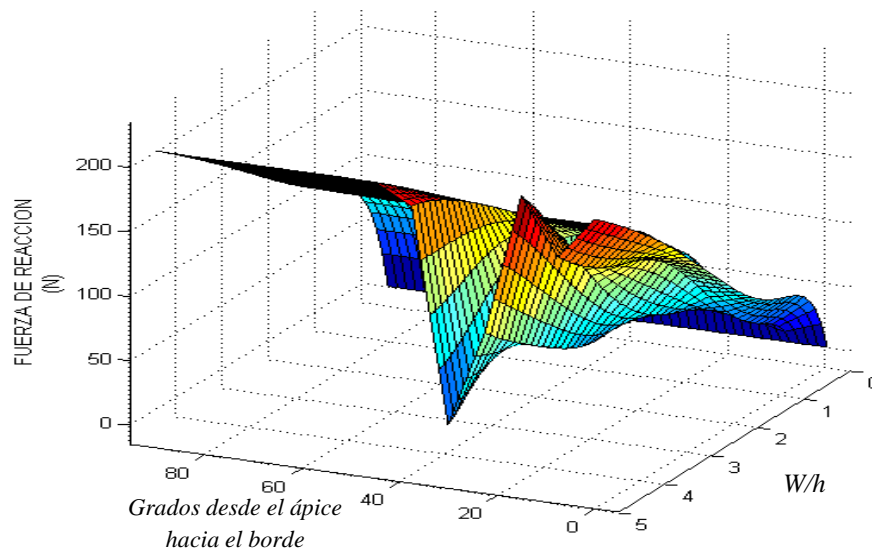


Figura 5. 8 Gráfica 3D normalizada, se aprecia claramente un cambio abrupto en su capacidad de carga.

5.3 Modelo con aplicación de carga en diferentes partes de su superficie.

En el modelo se realizó la aplicación de un desplazamiento en diferentes puntos de la superficie esférica iniciando a 45° con referencia al borde y aproximándose con decremento de 5° (ver Figura 5.9 y Figura 5.10), los datos obtenidos de las simulaciones se procesaron y se obtuvo la gráfica del comportamiento del cascarón esférico (ver Figura 5.11 y Figura 5.12). Las cargas a las que se encuentran sometidos los empaques no ocurren normalmente en regiones cercanas al ápice, pueden presentarse en distintas regiones de la superficie. De la información que se obtiene de la simulación se analiza el comportamiento del cascarón en regiones alejadas del ápice.

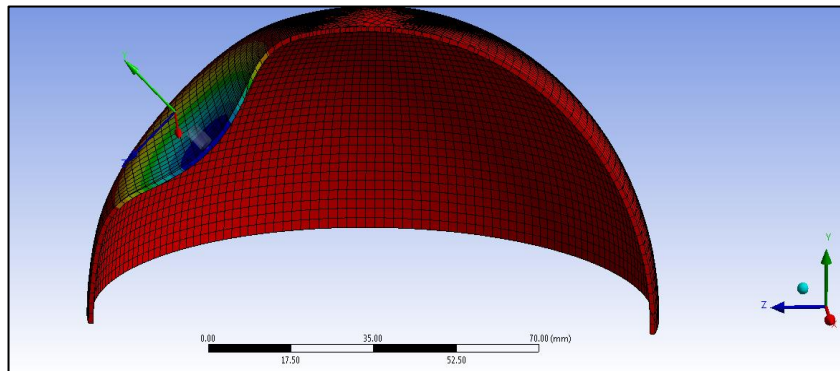


Figura 5.9 Cascarón esférico aplicándole un desplazamiento con dirección normal a su superficie en una zona distinta a su ápice.

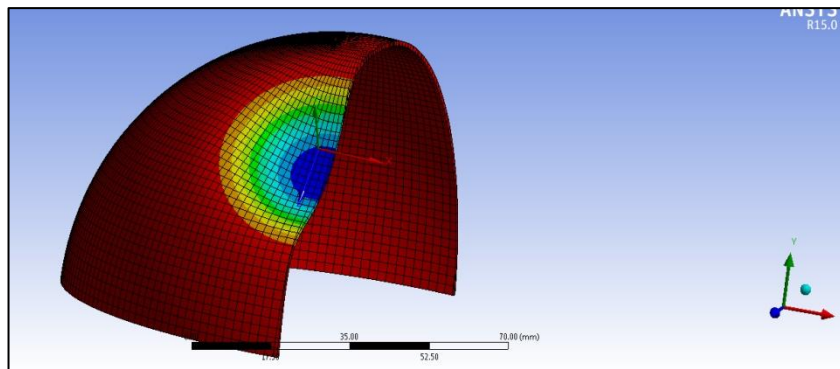


Figura 5.10 Vista de la deformación sobre el cascarón.

La gráfica (Figura 5.11 y Figura 5.12) constan de un eje horizontal que representa el desplazamiento normal a la superficie con respecto al espesor inicial, y el segundo eje muestra la posición donde se realizó el desplazamiento, el eje vertical muestra la carga P^* que se

encuentra normalizada en términos del radio de curvatura R , el módulo de elasticidad E y el espesor del cascarón h (ver Figura 5. 11).

En la Figura 5. 12 se nota el incremento abrupto de la carga P^* normalizada conforme se aproxima al borde del cascarón el desplazamiento inducido en el modelo. Se aprecia que mientras que ocurra alguna deflexión sobre la superficie del cascarón alejada de los bordes o no muy cercanos a los bordes no ocurre algún incremento en la capacidad de carga del cascarón. En la situación de tener un espesor menor en regiones cercanas al borde, esta información permite analizar si el empaque tiene un comportamiento aceptable bajo carga.

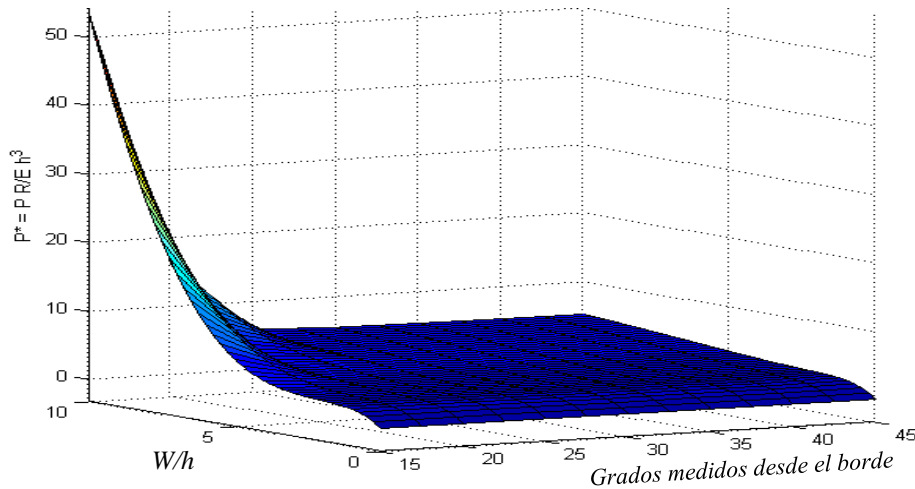


Figura 5. 11 Gráfica del comportamiento del cascarón al ser sometido en diferentes puntos de su superficie a un desplazamiento.

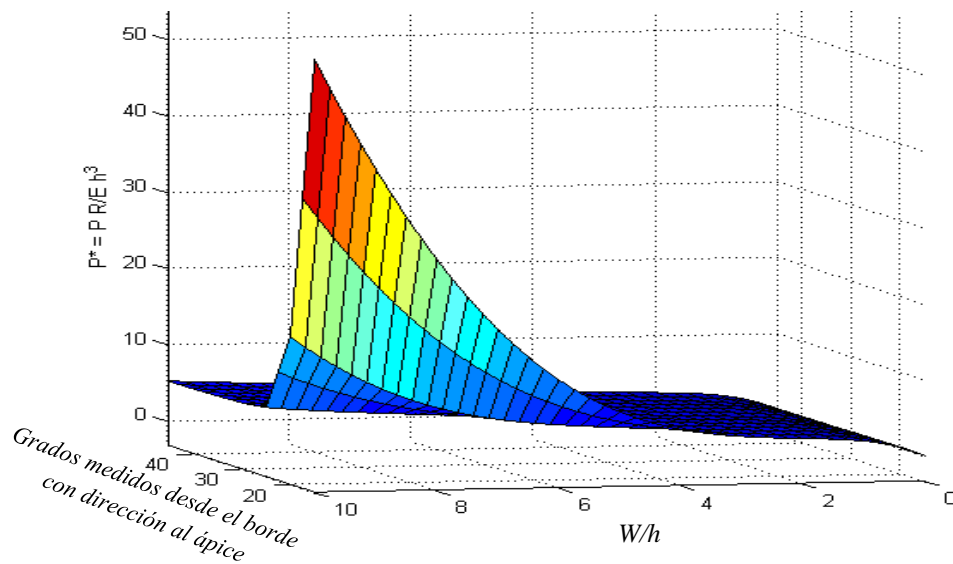


Figura 5. 12 Vista de la gráfica donde se aprecia el incremento de la fuerza conforme al desplazamiento.

5. 4 Modelo con superficie esférica con base cuadrada para diferentes valores de R/h

Las relaciones de R/h se realizaron en el rango de 30 a 300, los datos obtenidos se procesaron para obtener la gráfica normalizada del comportamiento del cascarón (ver Figura 5. 14). El modelo de la Figura 5. 13 muestra la aplicación del desplazamiento en la zona del ápice del cascarón. Con esto se pretende analizar la influencia de la base cuadrada en la superficie esférica.

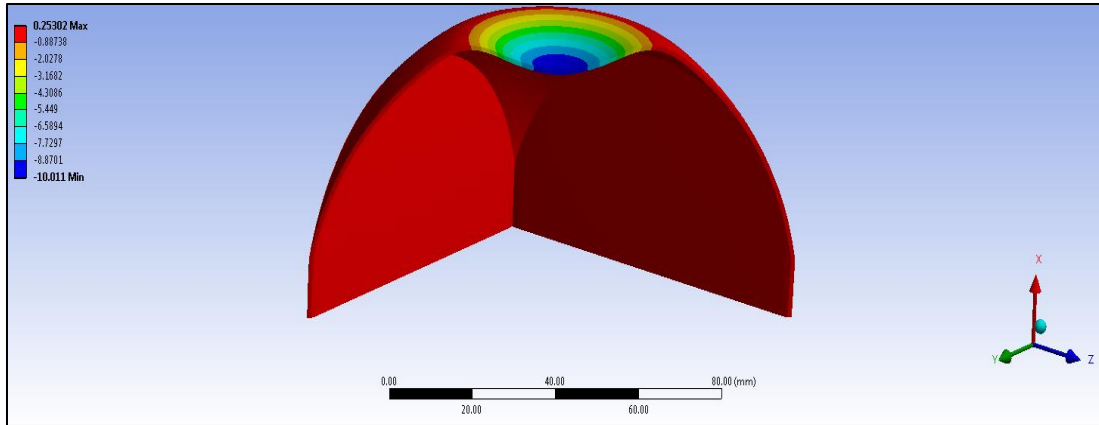


Figura 5. 13 Cascarón de superficie esférica con base cuadrada sometido en su ápice a un desplazamiento.

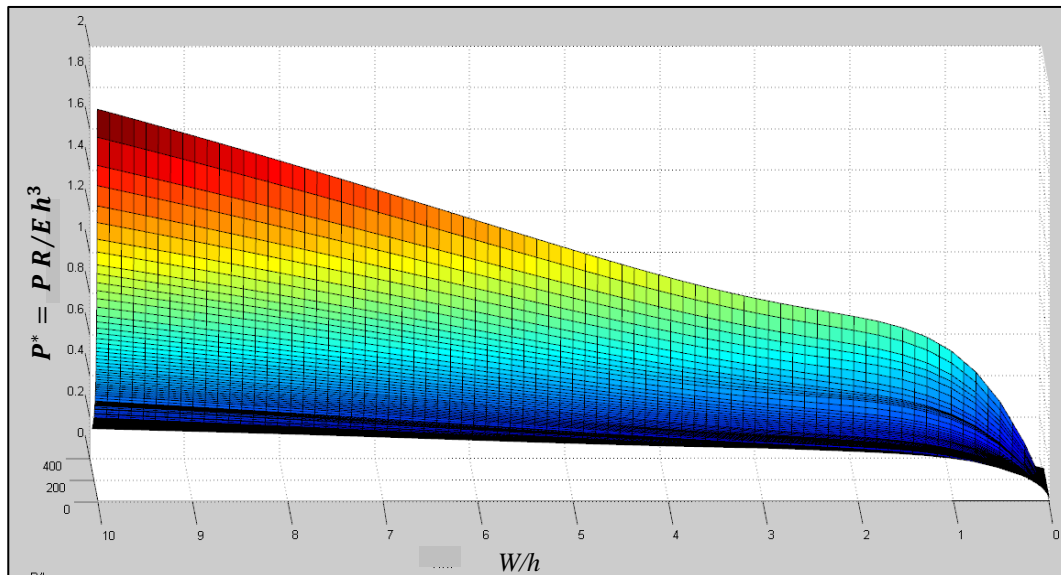


Figura 5. 14 Gráfica 3D del comportamiento del cascarón esférico con base cuadrada.

La gráfica obtenida, consta de un eje horizontal que representa el desplazamiento normal a la superficie del ápice con respecto al espesor h del cascarón, y el segundo eje muestra la relación R/h que se encuentra en el rango de 30 a 300 (ver Figura 5. 15).

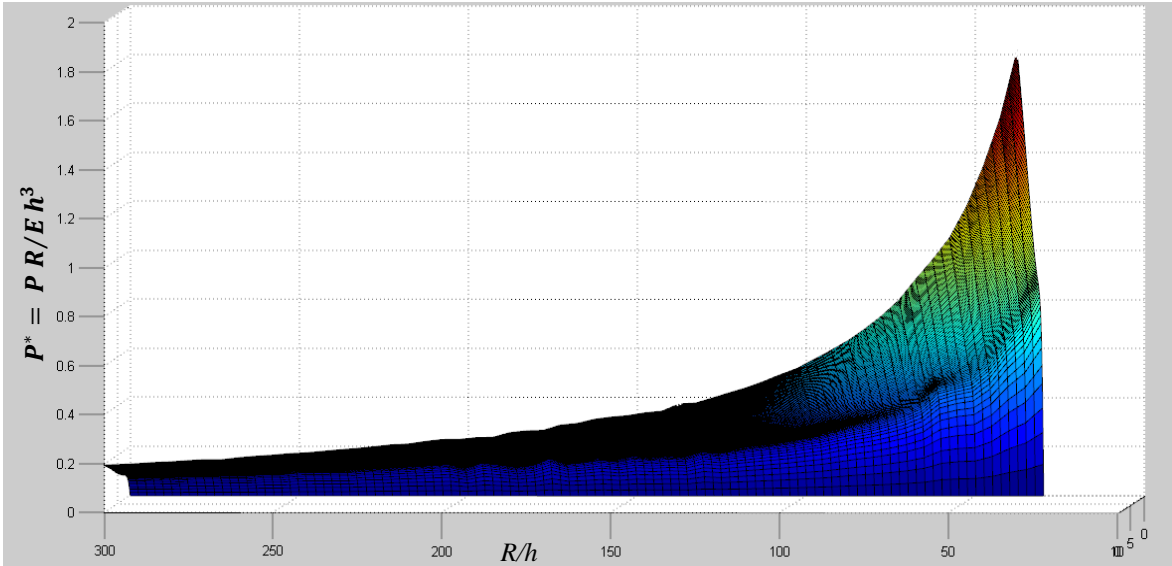


Figura 5. 15 Gráfica 3D del cascarón esférico con base cuadrada, se nota la disminución en la capacidad de carga del cascarón con forma aumenta R/h .

5. 5 modelo con diferentes valores de R/h

De modo similar al caso anterior se obtuvieron los datos de las simulaciones por elemento finito (Figura 5. 16), y se procesó para obtener la gráfica del comportamiento del cascarón esférico para diferentes valores de R/h (ver Figura 5. 17 y Figura 5. 18). La gráfica obtenida los ejes horizontales se representa la relación R/h que ve desde 30 hasta 300, el segundo eje muestra el desplazamiento con dirección normal a la superficie pero en términos del espesor.

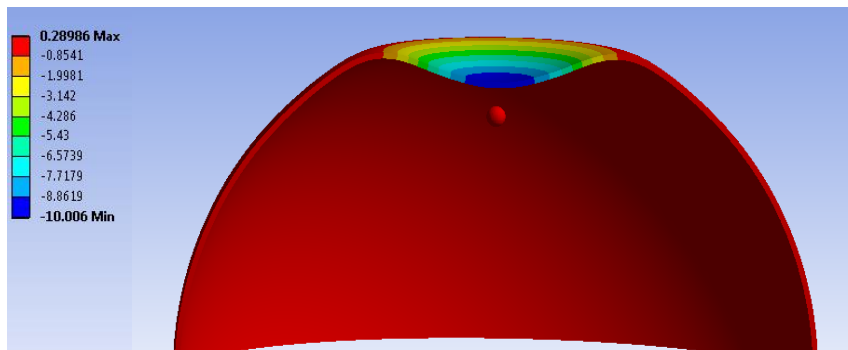


Figura 5. 16 Simulación por elemento finito del comportamiento del cascarón esférico, escala en milímetros.

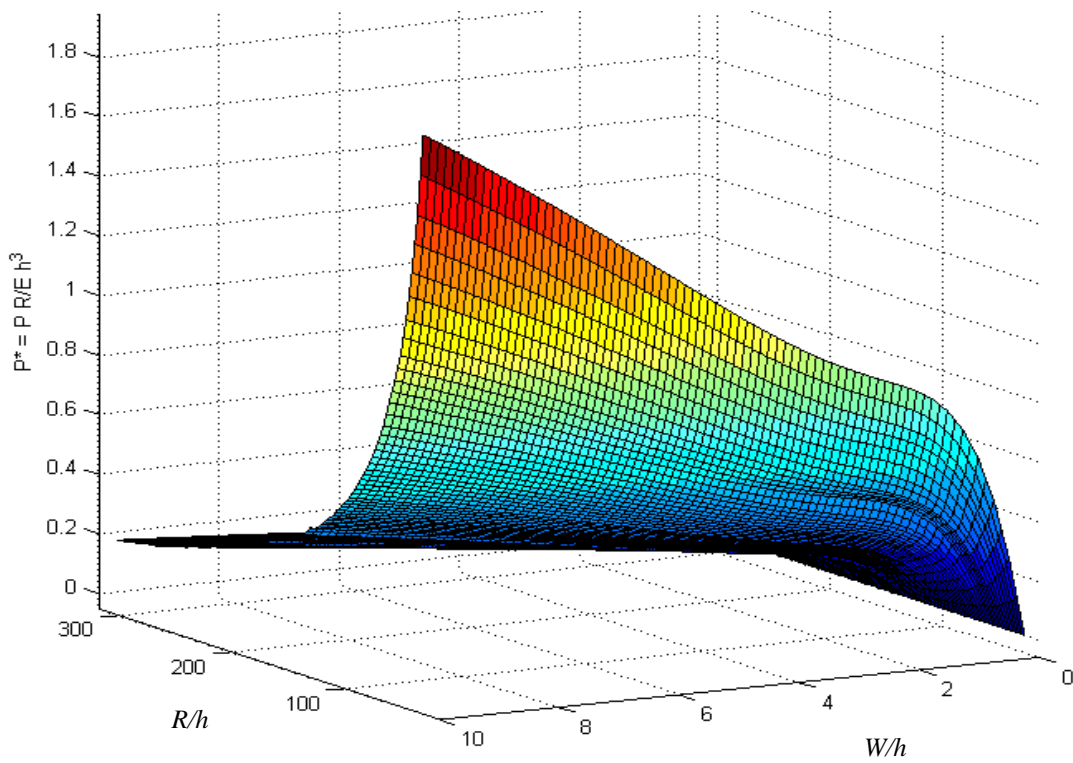


Figura 5. 17 Gráfica 3D del comportamiento de superficies esféricas para diferentes valores de R/h .

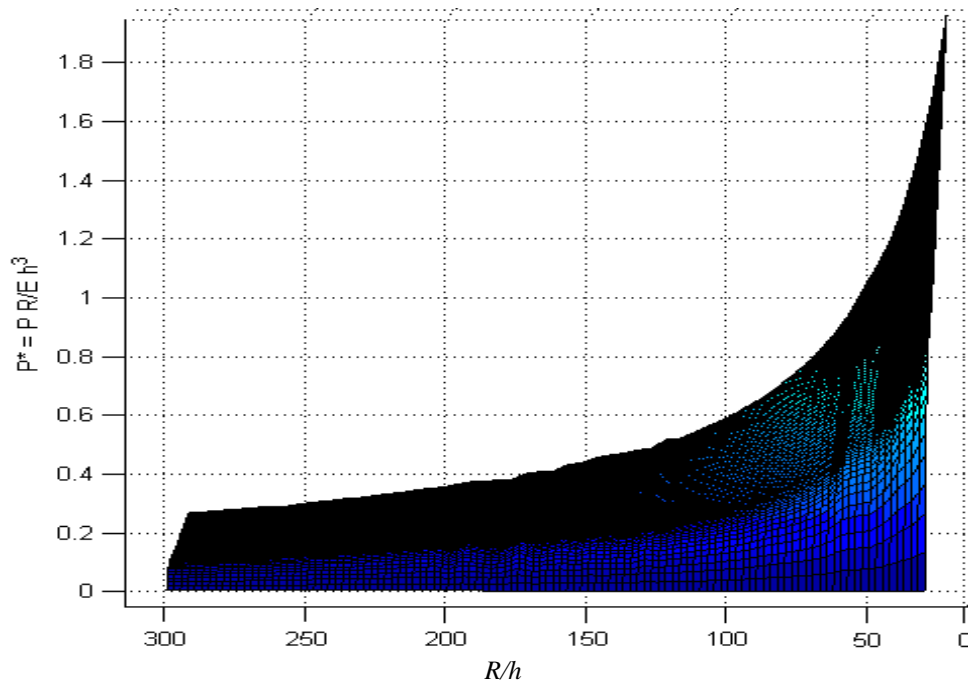


Figura 5. 18 Gráfico 3D del comportamiento de superficies esféricas, se observa la disminución en la capacidad de carga conforme aumenta el valor de R/h .

5. 6 Modelo de empaque complejo

Como referencia a un caso complejo, se diseñó un empaque para un control de videojuegos comercial utilizando superficies esféricas (Figura 5. 19). Se realizó simulaciones para obtener datos del comportamiento del empaque, el espesor es de 0.5 mm, la convergencia de malla se detalla en el apéndice B.

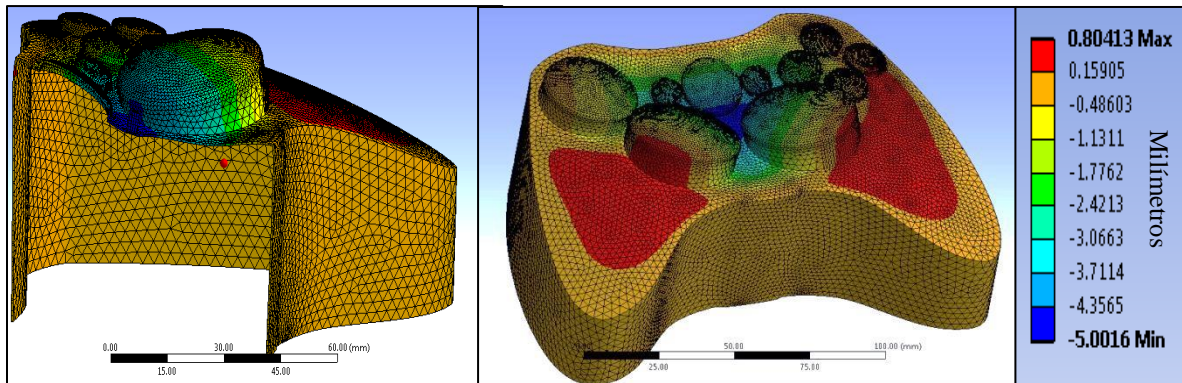


Figura 5. 19 Análisis por elemento finito del empaque blíster.

Se obtuvo información del comportamiento del empaque al probar distintas configuraciones las cuales consistió en retirar las partes complejas, iniciando con las superficies esféricas pequeñas que son de los botones y el joystick (Figura 5. 20), después se dejó agujeros sobre la superficie del empaque (Figura 5. 21). En la última prueba se dejó la superficie esférica libre (Figura 5. 22).

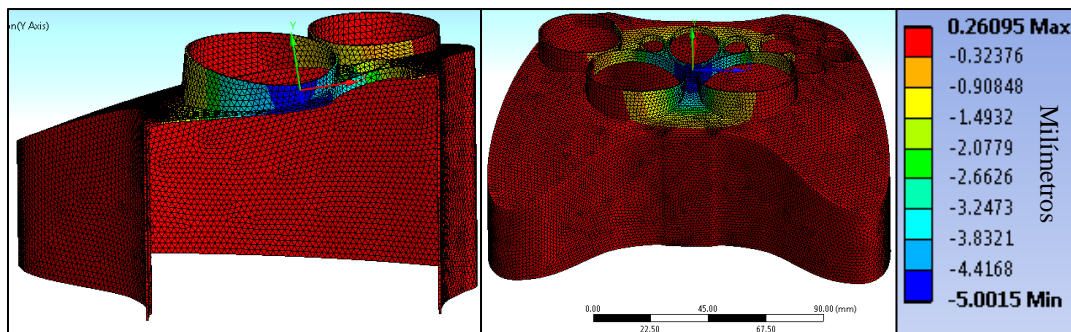


Figura 5. 20 Análisis por elemento finito del empaque quitando las superficies esféricas en la zona de botones y joystick.

La zona donde se aplicó la carga es la más alejada de los bordes y que presentó menor capacidad de fuerza reacción ante la carga.

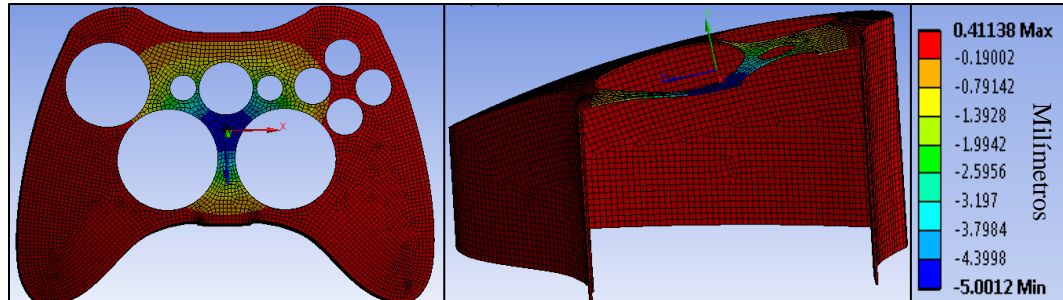


Figura 5. 21 Análisis por elemento finito del empaque sin la protección de los botones y el joystick.

Con el fin de obtener más información del modelo de empaque, se simuló como una sola superficie esférica sometida a una carga hasta invertir la concavidad de la superficie (Figura 5. 22).

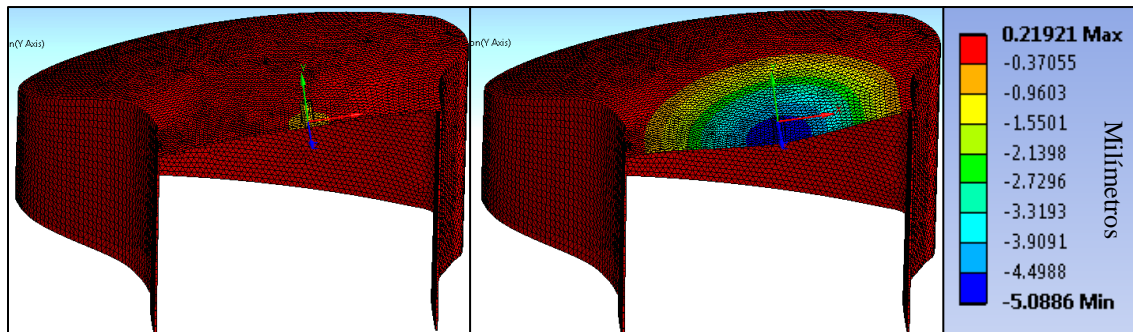


Figura 5. 22 Análisis por elemento finito del empaque sobre la superficie esférica central.

De la simulación mostrada en la Figura 5. 19 se obtiene la curva carga deflexión del empaque que se muestra en la Figura 5. 23.

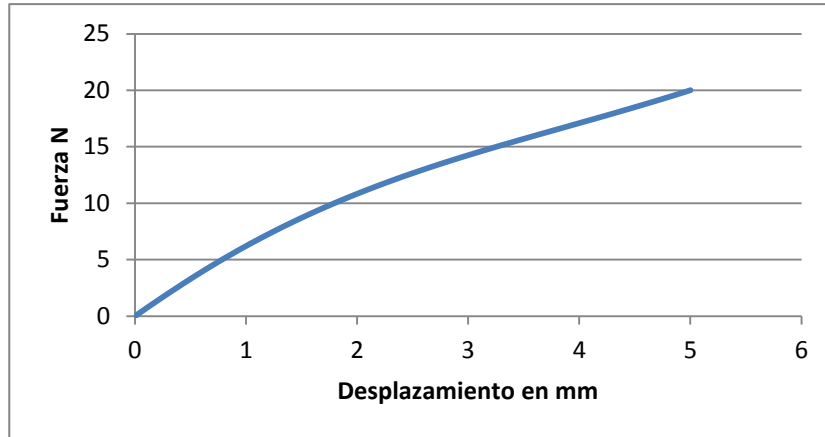


Figura 5. 23 Gráfica de la fuerza de reacción al someter al empaque a una carga.

La curva carga deflexión mostrada en la Figura 5. 24 se obtuvo de la simulación realizada en el empaque sin las superficies esféricas pequeñas que protegen los botones y el *joystick* en el control de videojuegos.

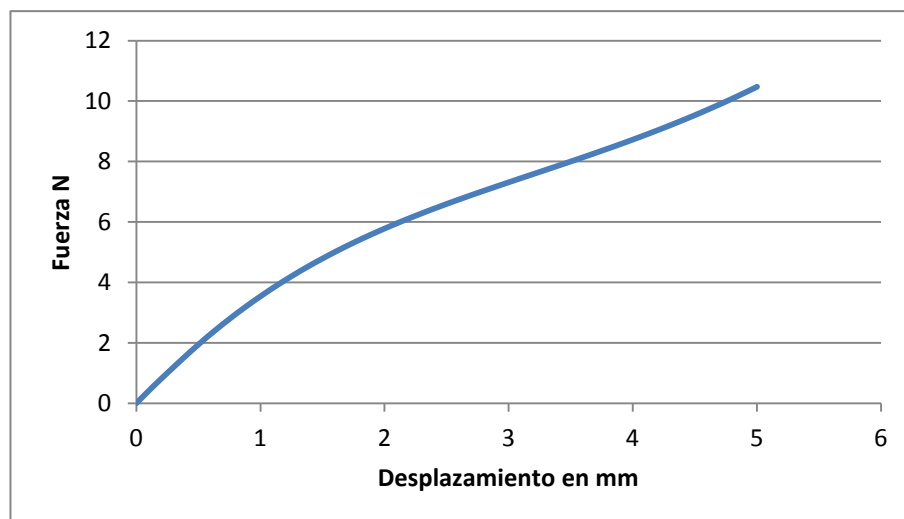


Figura 5. 24 Gráfica del comportamiento del empaque sin las superficies esféricas en la zona de botones y joystick.

De la simulación del empaque blíster dejando los orificios sobre la superficie cascarón (Figura 5. 21), se obtiene la curva carga-deflexión mostrada en la Figura 5. 25.

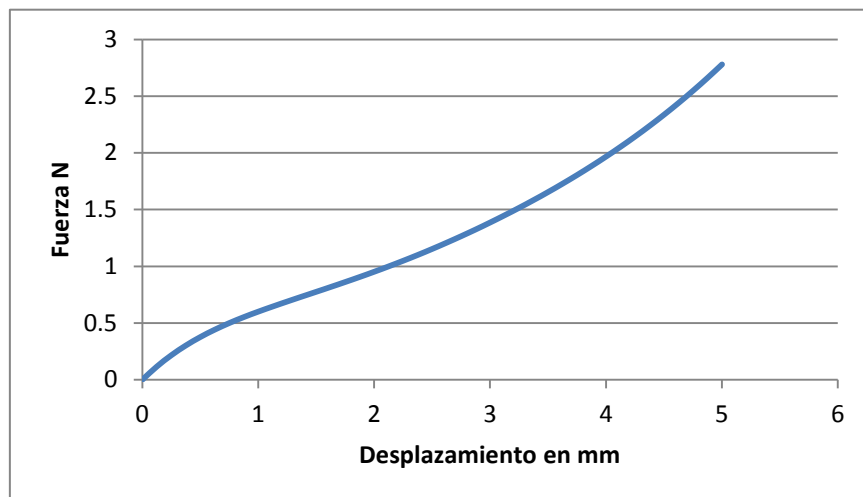


Figura 5. 25 Gráfica del comportamiento del empaque dejando los orificios en la zona de botones y joystick.

Por último se obtuvo la curva carga deflexión del empaque (Figura 5. 26), con solo una superficie esférica como protección (Figura 5. 22).

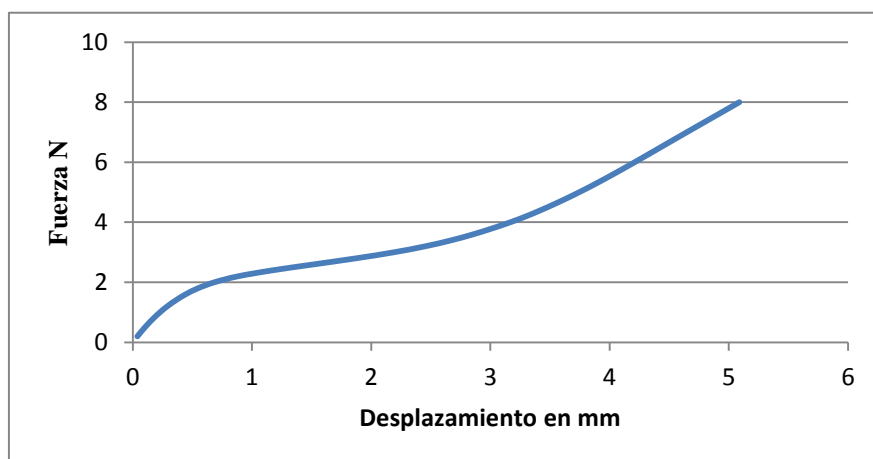


Figura 5. 26 Gráfica de comportamiento de la superficie esférica del empaque con forma sencilla

El conjunto de curvas obtenidas de las simulaciones hechas al empaque se muestran en la Figura 5. 27. Haciendo una comparativa entre todas se observa que entre más complejo es el empaque mayor es la capacidad de carga.

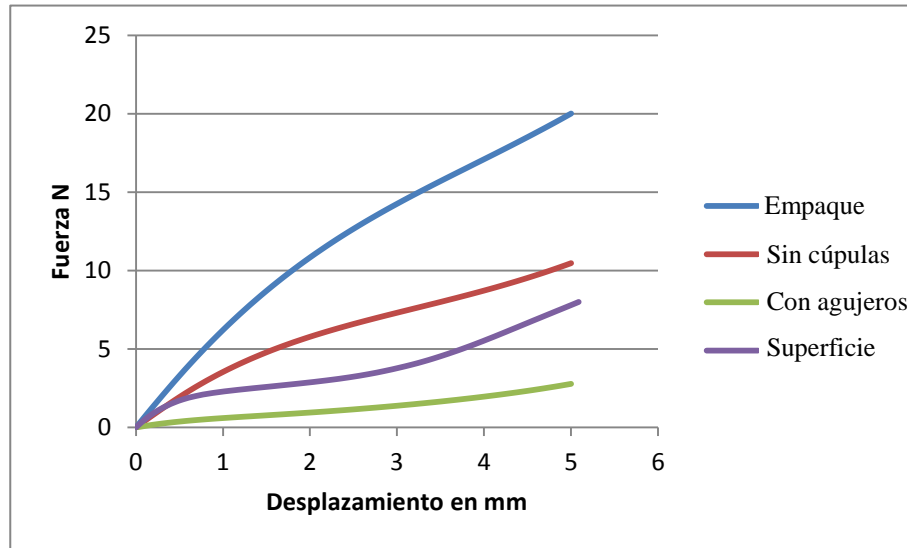


Figura 5. 27 Conjunto de curvas de carga deflexión de los diferentes análisis del empaque

Al realizar una comparativa entre las curvas de carga deflexión del empaque completo con la superficie esférica (Figura 5. 28), se observa que la capacidad de carga aumenta de manera significativa. La curva de color verde muestra el porcentaje del incremento en la capacidad de carga con referencia a la superficie esférica. Además, se observa en la curva del porcentaje un decremento conforme el desplazamiento continúa, pues se debe a que el empaque y la superficie esférica han invertido su concavidad, perdiendo su función protectora.

Los detalles complejos sobre la superficie esférica ayudan a distribuir la fuerza que se aplica, proporcionando mayor rigidez a la flexión. La capacidad de carga incrementa cuando la fuerza es distribuida sobre la superficie esférica, esto se aprecia en las curvas de Mescall presentes en el capítulo 3 con el análisis de la teoría no lineal.

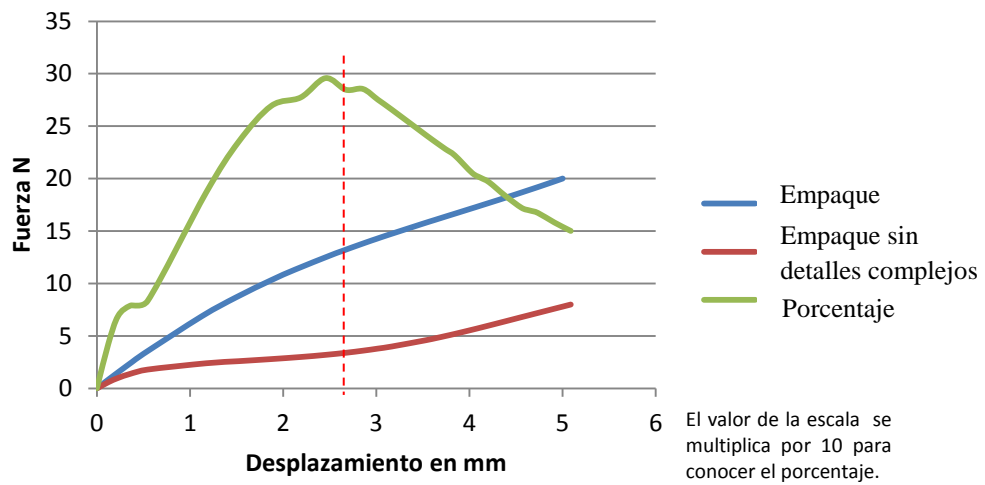


Figura 5. 28 Comparación del empaque blíster con la superficie sin detalles complejos y curva en función de porcentaje de carga.

5.7 Gráficas normalizadas de comportamiento obtenida de los modelos simulados

Del análisis de los datos obtenidos por elemento finito se obtuvo la gráfica normalizada del comportamiento de la capacidad de carga conforme se adelgaza el espesor en la parte del ápice del cascarón tipo esférico (Figura 5. 29). El espesor en el borde se mantuvo constante.

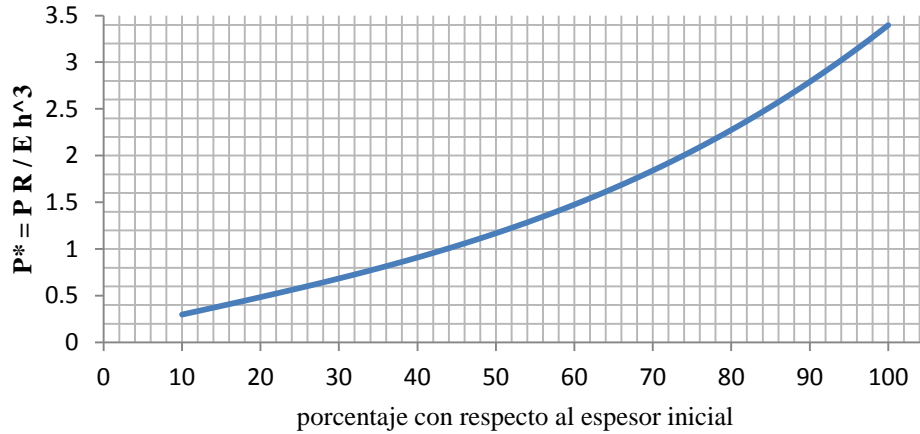


Figura 5. 29 Gráfica de capacidad de carga con respecto a la variación del espesor en el ápice.

En las simulaciones realizadas, se obtuvo la gráfica de la capacidad de carga aplicada en el ápice influenciada por la variación de espesor en zonas. El cambio abrupto en respuesta a una carga en el cascarón esférico se encontró en una región aproximada de 30° con respecto al ápice o punto de aplicación de la carga (Figura 5. 30).

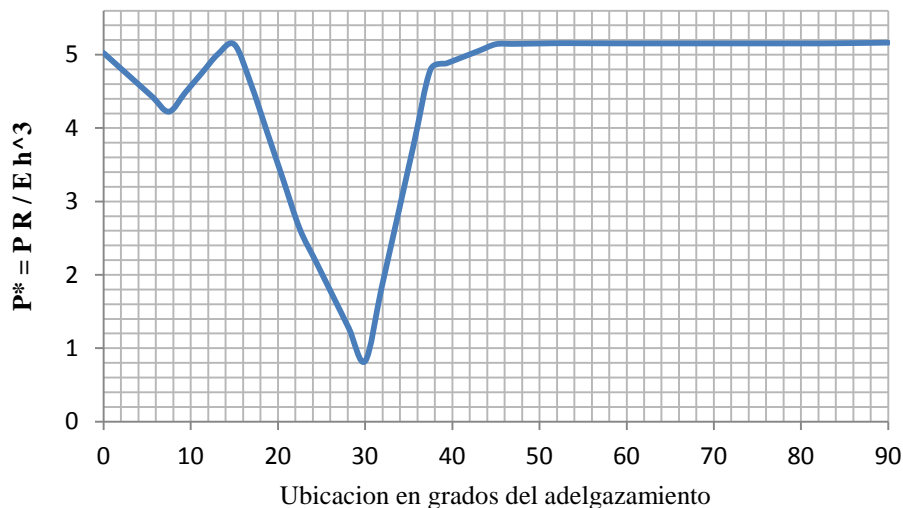


Figura 5. 30. Gráfica de la capacidad de carga con respecto al adelgazamiento por zonas.

En la aplicación de carga en distinto puntos de la superficie esférica se obtuvo la gráfica de comportamiento en respuesta al punto de aplicación acercándose al borde del cascarón. Se nota que conforme se aproxima al borde la carga necesaria para producir la deformación se incrementa (Figura 5. 31).

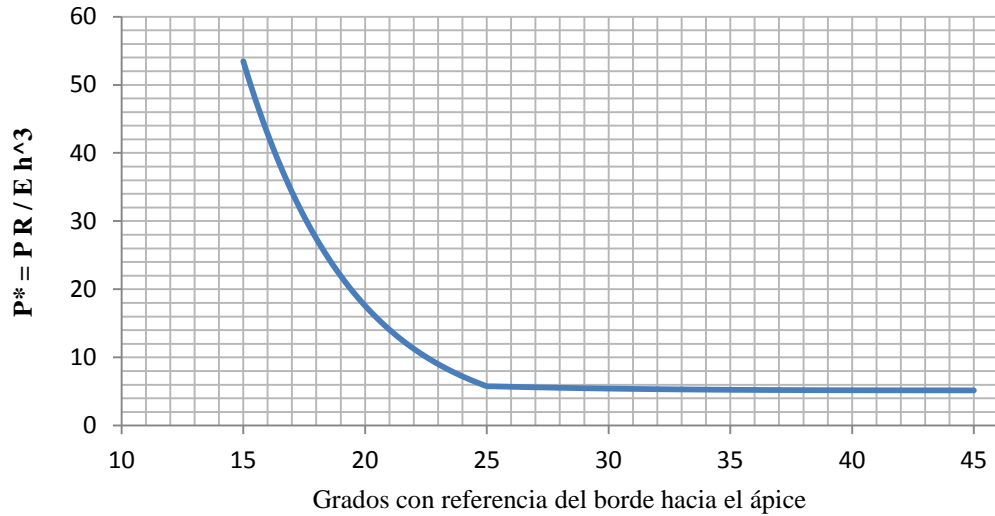


Figura 5. 31 Gráfica en respuesta a la capacidad de carga con forme se aproxima al borde.

Se obtuvo la curva carga-deflexión normalizada para cascarones de superficie esférica con base cuadrada pero con la aplicación de la carga en el ápice (Figura 5. 32).

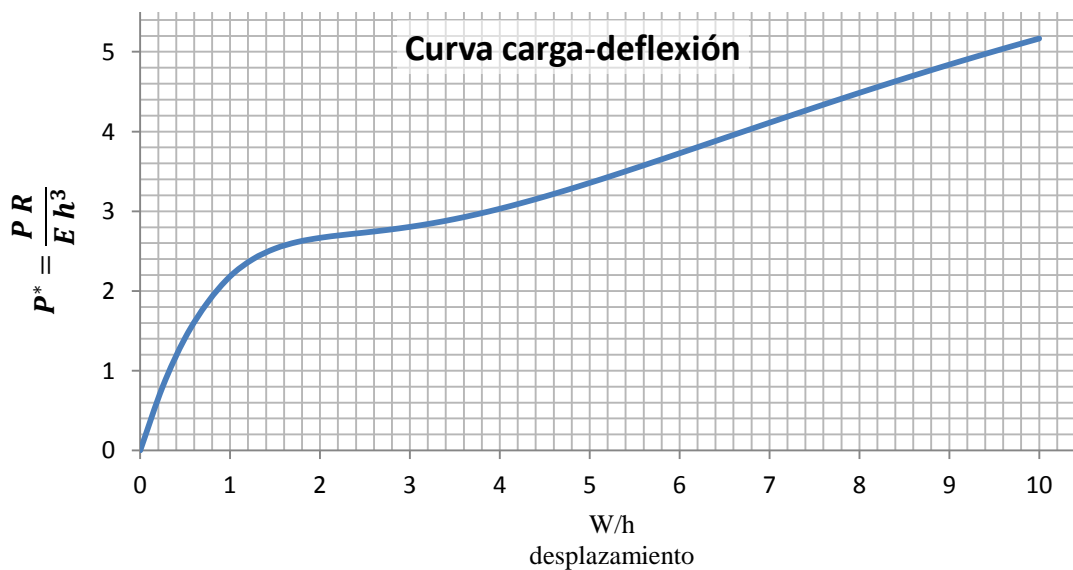


Figura 5. 32 Gráfica de la curva carga-deflexión de superficie esférica con base cuadrada.

La curva carga-deflexión se obtuvo de los datos arrojados del modelo por elemento finito, considerando que el material es PVC rígido (Figura 5. 33).

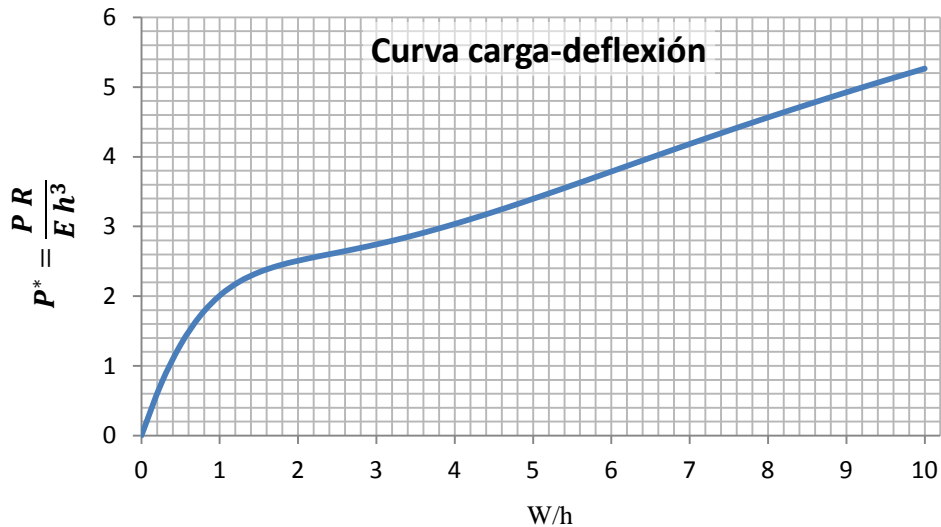


Figura 5. 33 Gráfica de la curva carga-deflexión para la superficie esférica.

Del análisis de la información obtenida por elemento finito en diversos modelos con las variaciones del radio y conservando un mismo espesor para la superficie esférica, se encontró una disminución de la capacidad de carga conforme aumenta la relación R/h , con ello se generó la gráfica de comportamiento de la carga con respecto a la disminución del espesor (Figura 5. 34).

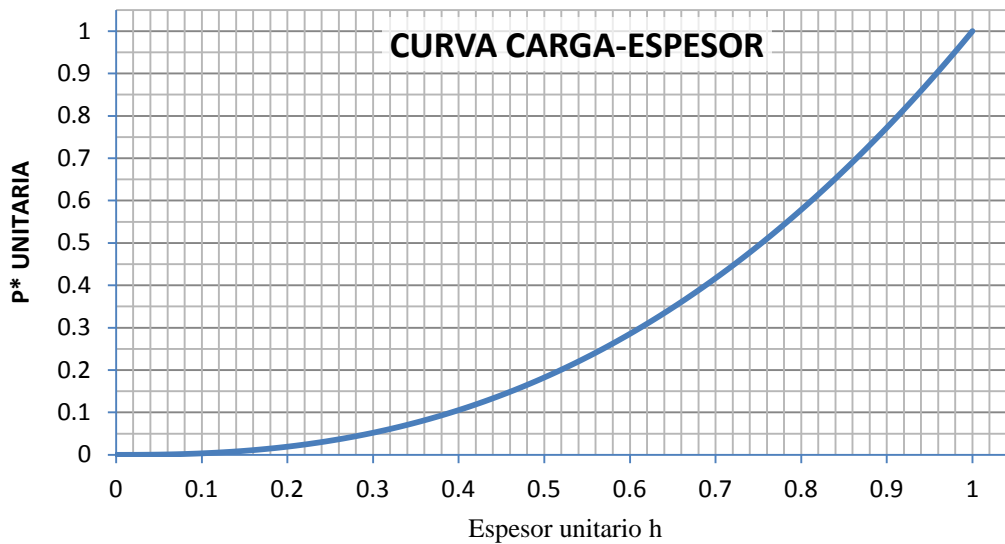


Figura 5. 34 Gráfica de la capacidad de carga conforme la relación R/h varía.

Las gráficas normalizadas obtenidas se enfocaron a un solo material, siendo el PVC rígido de mayor uso en el proceso de termoformado. La industria del empaque emplea distintos termoplásticos y cada material tiene distinto módulo de elasticidad y relación de Poisson. Con el uso del mismo modelo de superficie esférica usada en las simulaciones se obtuvo una gráfica normalizada para distintos materiales que tengan una relación de Poisson $0.2 \leq \nu \leq 0.5$ (Figura 5. 35).

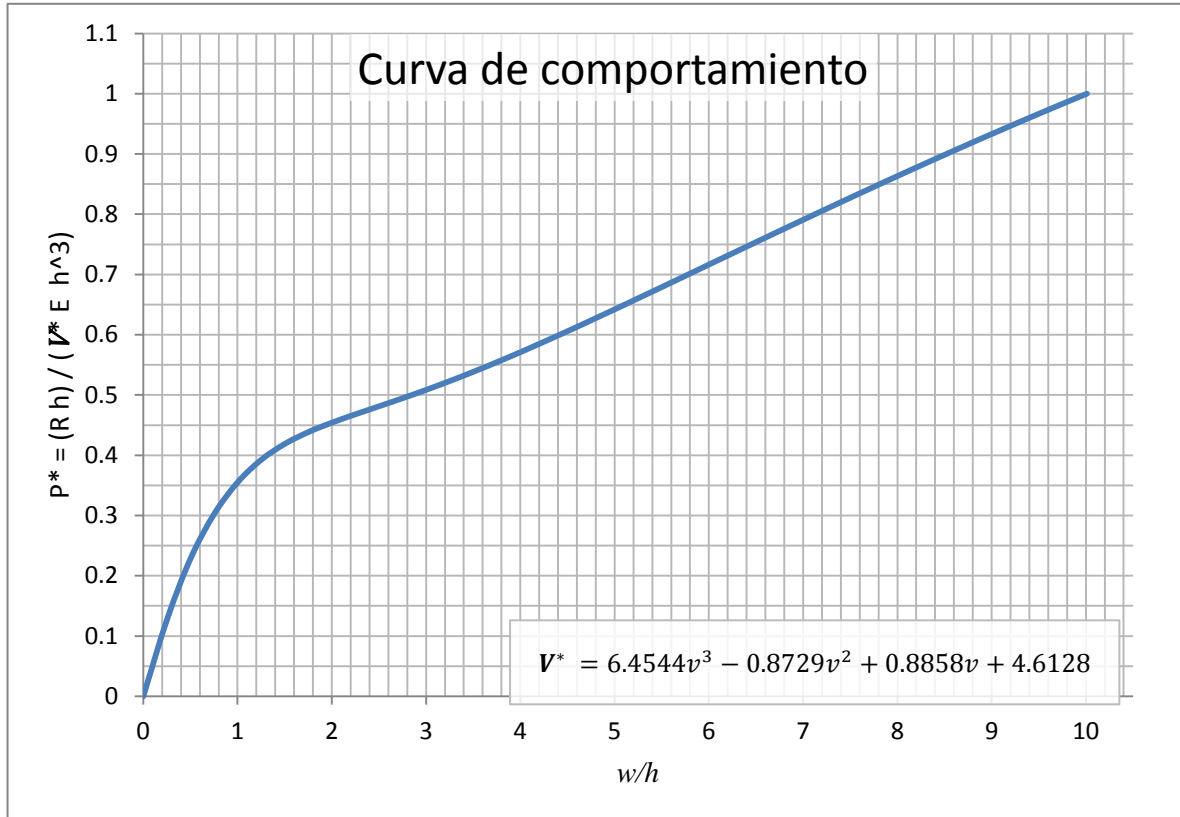


Figura 5. 35 Curva general para relaciones de Poisson de 0.2 a 0.5.

Con el uso de las gráficas normalizadas de la Figura 5. 33 y Figura 5. 34, se obtuvo una tabla con valores de la fuerza de reacción de acuerdo con el desplazamiento y radio de curvatura. Esta tabla se encuentra en el apéndice D y facilita al diseñador la selección de un espesor. Además, se anexa la curva carga deflexión para una superficie con perfil tipo elíptico y una tabla para determinar la carga de acuerdo con el desplazamiento normal a la superficie de radio variable.

5.8 Ejemplo de aplicaciones y consideraciones de diseño

La implementación de las superficies esféricas al diseño de empaques tipo blíster es de interés en este estudio. Por lo tanto se tomó 2 productos como ejemplo sencillo del uso de las gráficas normalizadas.

5.8.1 Blíster para DSS (disco de estado sólido)

Se tomó un disco de estado sólido con dimensiones 100*69.85*7 mm, con una masa de 68 gr. Las condiciones de transporte son necesarias. En este ejemplo se consideró que el transporte es terrestre y por tren con exposición de aceleraciones igual a 4g [44], por lo tanto la fuerza a que pueda experimentar el empaque es de 2.7 N, y su limitante en el desplazamiento normal a la superficie esférica es de 2.5 mm. Para definir el mínimo espesor adecuado se usa la gráfica de la curva carga-deflexión (Figura 5. 32), considerando como espesor inicial 0.5 mm, se encuentra la fuerza capaz de soportar y como excede, se busca en la gráfica carga-espesor (Figura 5. 34) el espesor mínimo, esto se realiza dividiendo la fuerza de 2.7N entre la fuerza de reacción hallada en la curva de la Figura 5. 32, luego se encuentra el punto de intersección con la curva y en el eje horizontal se encuentra la proporción del espesor adecuado con respecto a 0.5 mm

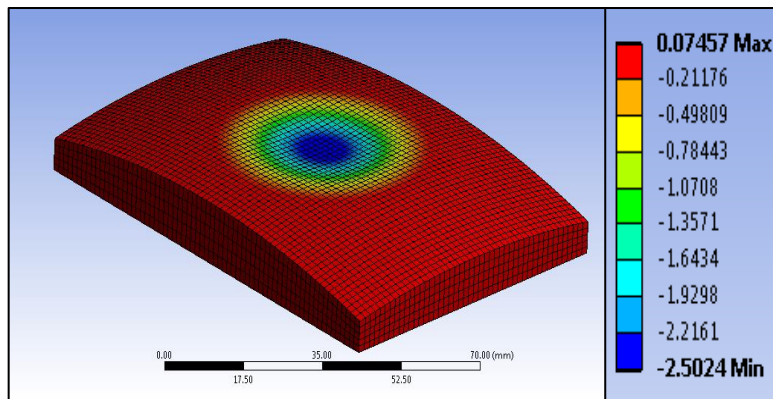


Figura 5. 36 Diseño de empaque tipo blíster para un disco de estado sólido y sometido a un desplazamiento, la unidad de la escala se encuentra en milímetros.

De lo obtenido de las gráficas se compara con un modelo de elemento finito (Figura 5. 36). El espesor encontrado por el método gráfico es de 0.39 mm, ya que la proporción encontrada es 0.78 del espesor inicial. En la simulación se obtuvo una fuerza de 2.787 N para generar el desplazamiento de 2.5 mm con un espesor de 0.39 mm, por lo tanto la diferencia es de 3.22%.

5.8. 2 Blíster para Marcapasos

Como ejemplo de empaque a un producto médico, se buscó un marcapasos y sus dimensiones son $40.2 * 42.9 * 7.5$ mm, y su masa de 21.5 gr. El proceso es el mismo como el ejemplo del DSS, se supuso que el transporte es por tren lo cual está expuesto a aceleraciones de 4g. Por lo tanto el empaque (Figura 5. 37) debe resistir una fuerza de 0.84 N, con un desplazamiento de 2 mm como condición de diseño. Se aproximó con un espesor inicial de 0.5 mm

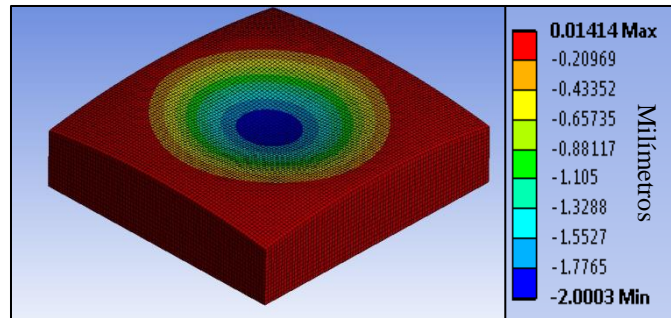


Figura 5. 37 Empaque blíster para marcapasos, y sometido a un desplazamiento para su análisis.

El espesor encontrado con las curvas de la Figura 5. 32 y la Figura 5. 34 es de 0.23 mm y en la simulación se encontró que con el mismo espesor se obtuvo una fuerza de reacción de 0.87 N. Comparando la diferencia fue de 3.5%, como caso práctico es aceptable.

5.8. 3 Otro tipo de aplicaciones

Se presenta más ejemplos de las formas que se pueden diseñar usando superficies tipo esférica, las gráficas normalizada permiten entender el comportamiento de éstas y definir un espesor adecuado a las condiciones que se encontrará en su transporte (Figura 5. 38).

La forma de aplicación de las superficies esféricas depende en gran medida de la visualización del diseñador de empaques.

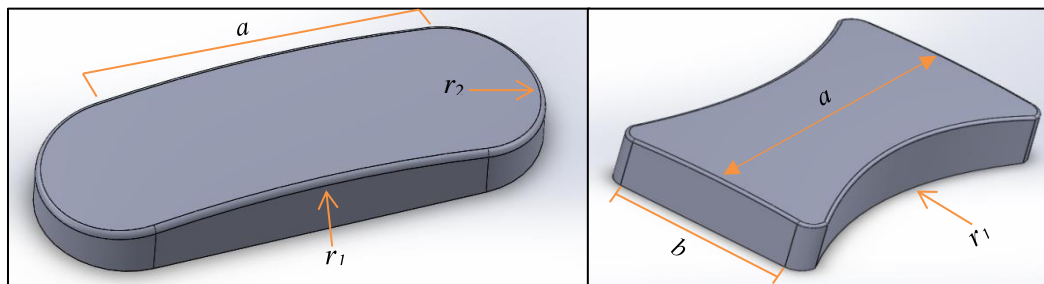


Figura 5. 38 Otras configuraciones sugeridas para el diseño de empaques tipo blíster con aplicación de superficie esférica.

5.8. 4 Consideraciones de diseño

El tipo de envase diseñado es un envase primario que va en contacto con el producto. La función del empaque es permitir la manipulación, almacenamiento y transportación del producto [34, 38, 40, 46].

Los aspectos que se consideran al diseñar un envase son [34, 38]:

- a) Análisis del producto
- b) Sistema de almacenamiento
- c) Sistema de transportación

a) Análisis del producto

Consiste en analizar las características del producto como son: el costo, peso, volumen, capacidad de carga, estructura rígida o deformable con poco peso, fragilidad, puntos críticos del producto como partes eléctricas o partes salientes frágiles, etc.

b) Sistema de almacenamiento

Principal función de un envase es proteger al producto durante la estiba y el almacenamiento, por lo que se considera el volumen del producto, tipo de almacén, forma de estiba, etc.

c) Sistema de transportación

Forma en que será transportado el producto define en gran medida el diseño del envase. Las consideraciones que se hacen son: el tipo de sistema de transporte que se utilizará, cargas unitarias o a granel, tiempo de trayecto, condiciones de humedad, etc.

Los empaques tipo blíster se considera para productos ligeros que brinda un elemento de exhibición. También, se necesita analizar si el producto es posible envasarlo en un empaque termoformado, pues existe otras formas de empaquetar y proteger al producto.

Los costos para empaquetar un producto es un aspecto muy importante, debe existir un equilibrio entre el costo del empaque y el nivel del daño. En la práctica se considera que el costo de un buen empaque debe ser del 30% del costo total [10].

CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se mencionan las conclusiones y recomendaciones, que se llegó de analizar la información obtenida de las simulaciones por elemento finito. Además, se presenta un diagrama a seguir para el diseño de empaques con uso de superficie esférica.

6.1 Conclusiones

- Las variaciones de espesor ocurren en el proceso de termoformado. La gráfica en la Figura 5. 29 permite al diseñador conocer cómo afecta la variación de espesor en la capacidad de carga de la superficie esférica.
- Considerar el adelgazamiento por zonas permite al diseñador decidir si un empaque cumple con los requisitos necesarios para proteger un producto.
- La respuesta en la capacidad de carga cercana a los bordes es superior que en cualquier región alejada, y en el caso de tener un adelgazamiento en esta región se tendrá la certeza que no tendrá gran influencia en la capacidad de carga del cascarón.
- Se obtuvo la curva de comportamiento de la superficie esférica con base cuadrada y comparada con una base totalmente redonda la pendiente entre ambas curvas varía solo en desplazamientos igual a dos veces el espesor.
- La curva carga-deflexión del cascarón esférico permite conocer su comportamiento bajo carga puntual.
- La gráfica de la Figura 5. 34 muestra como disminuye la capacidad de carga de la superficie esférica conforme la relación R/h aumenta, manteniendo constante el radio de curvatura y disminuyendo el espesor.
- La complejidad de la forma del empaque permite que la capacidad de carga aumente, siempre y cuando no se invierta la concavidad de la superficie.

6. 2 Recomendaciones

- Al diseñar un empaque con el uso de superficies esféricas, se debe considerar la profundidad o altura de la superficie. Con el motivo de evitar que la concavidad se invierta y el empaque entre en un estado de *buckling*.
- La selección de un espesor se considera como el mínimo necesario para soportar la carga para el cual se diseña el empaque. Pues las variaciones de espesor en el proceso de termoformado son complejas y determinarlas implica el uso de modelos como el Ogden con curvas de primer, segundo y tercer grado, o un modelo que implique la visco-elasticidad del material como el modelo K-BKZ [15] usado en programas de elemento finito especializados en proceso de termoformado.
- Un empaque sencillo permite reducir costos de manufactura y su análisis estructural se simplifica. Por eso un análisis previo del diseño permite determinar la forma más económica de producir el envase.
- En la actualidad el diseñador debe ser consciente del medio ambiente, la selección de materiales ecológicos o nobles con la naturaleza debe considerarse.

Para aplicar superficies esféricas en empaques se recomienda al diseñador seguir este sencillo diagrama como metodología (Figura 6. 1).

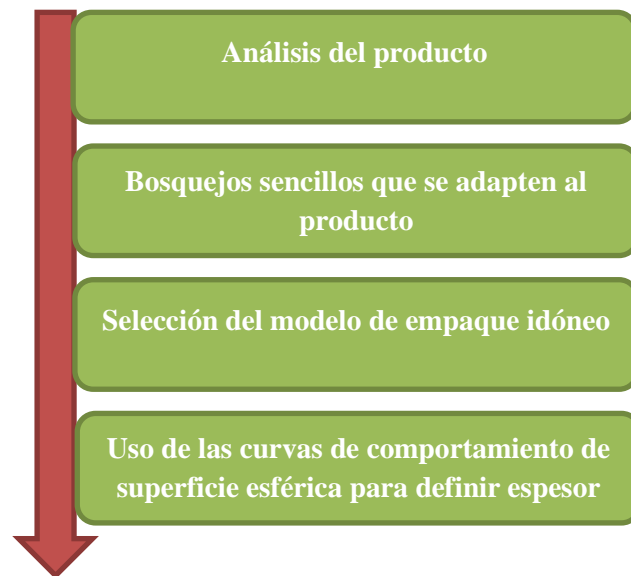


Figura 6. 1 Diagrama de proceso de diseño para uso de superficie esférica en empaques termoformados.

Conclusiones y recomendaciones

El análisis del producto se considera clave, pues se toma la decisión de envasar o no al producto en un empaque tipo blíster. En el capítulo 5 del apartado de consideraciones de diseño se mencionó de forma general el análisis que se requiere para el diseño de empaques, para mayor referencia el Instituto Mexicano de Profesionales en Envase y Embalaje (IMPEE)[34, 46], tienen establecido todo lo concerniente al análisis del producto y pruebas de laboratorio normalizadas para someter los empaques.

Los bosquejos dependen de la habilidad del diseñador para visualizar las formas de aplicación de superficies esféricas a modelos de empaques que propongan. La sencillez de los modelos favorece al costo de producción y mejor distribución de espesor en el empaque, por eso la selección del modelo idóneo define la complejidad del proceso de termoformado (capítulo 2), los costos de producción y la calidad del empaque terminado.

El uso de las gráficas de comportamiento de superficie esférica ayuda al diseñador de empaque elegir el espesor mínimo adecuado, la complejidad del proceso de termoformado dificulta el control del espesor. Con las técnicas de formado de termoplásticos del capítulo 2, mejora la distribución de espesor pero no garantiza la uniformidad del material en la pieza terminada.

En el apéndice C se muestra las curvas de comportamiento de superficie con radio variable o perfil tipo elíptico, se detalla el uso con un ejemplo y el manejo de la tabla con valores dependiendo las relaciones entre radios que se maneje en el diseño. Se anexa en el apéndice D una tabla con valores para diferentes relaciones R/h de superficie esférica y la fuerza de reacción dependiendo del desplazamiento que genere la carga puntual.

Referencias

- [1] Secretaría de Economía, “Oportunidades de Negocio en el sector industrial de Tijuana,” Tijuana, 2012.
- [2] El Economista, “Demanda de Proveeduría Industrial,” 2013.
- [3] P. C.J, S. T, P. J, P. P, and T. P, “Pharmaceutical Packaging,” vol. 1, no. 3, 2012.
- [4] BBC Research, “Thermoformed Plastics : Global Markets,” vol. 7215, 2014.
- [5] R. Pilchik, “Pharmaceutical Blister Packaging, Part II: Machinery and Assembly, Pharmaceutical Technology,” 12th ed., vol. 24, New York, 2000.
- [6] F. Ag, “Trialpack Designer 2,” 2015. [Online]. Available: <http://www.fleximatiom.com>.
- [7] Goldrich Printpack, “Diseño estructural de empaques,” 2015. [Online]. Available: <http://www.goldpack.com>.
- [8] K. Perez, *Empaques y embalajes*, 1° ed. México: RED TERCER MILENIO S. C., 2012.
- [9] “Guía de envases y embalaje.” Ministerio de Comercio Exterior y Turismo, Lima - Peru, p. 51, 2009.
- [10] J. A. R. Tarango, *Manual de fórmulas y tablas de envase y embalaje*, Primera ed. México D.F.: IMPEE, 2009.
- [11] INTI, “Envases y Embalajes, Cuadernillo para unidades de producción.” INTI, Buenos Aires, Argentina, p. 23, 2012.
- [12] P. Navarro, M. Garcia-Romeu, J. Alcaraz, E. de la Cruz, B. Ferreira, and M. Hortal, *Guía práctica de diseño de envases y embalajes para la distribución de productos*. Valencia: ITENE, 2007.
- [13] F. Choice, “Diseño y analisis de empaques,” 2015. [Online]. Available: <http://www.firstchoicepackaging.com>.
- [14] S. A. Ashter, *Thermoforming of Single and Multilayer Laminates*. 2014.
- [15] J. L. Throne, *Technology of Thermoforming*, 1° ed. Hanser, 1996.
- [16] S. A. Ashter, “Introduction to Thermoforming,” *Thermoforming of Single and Multilayer Laminates*, pp. 1–12, 2014.

- [17] Plastiglas de Mexico, *Manual Técnico: Termoformado*. 2009.
- [18] T. 101, “General Concepts in Thermoforming,” *IEEE Softw.*, vol. 17–26, p. 44, 2007.
- [19] J. L. Throne, *Understanding Thermoforming*, 2° ed. 2008.
- [20] S. A. Ashter, *Thermoforming of Single and Multilayer Laminates, New Developments*. 2014.
- [21] K. L. (Ed. . Yam, *Encyclopedia of Packaging Technology*, 3° ed. 2009.
- [22] L. M. Boser, “THERMOFORMING MANUAL and TROUBLE-SHOOTING GUIDE.” p. 129, 2006.
- [23] S. Timoshenko and J. Gere, *Theory of elastic stability*, Second Edi. 1985.
- [24] S. Timoshenko, *Resistencia De Materiales Tomo 2*, Segunda Ed. 1957.
- [25] S. Brodetsky, *Theory of Plates and Shells*, Second Edi., vol. 148, no. 3760. 1941.
- [26] L. Landau and E. Lifshitz, *Teoria de la elasticidad*, Primera Ed., vol. 7. Moscú: Reverté S.A., 1969.
- [27] E. Ventsel, T. Krauthammer, and E. Carrera, *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*, vol. 55, no. 4. Pnnsylvania, 2001.
- [28] C. R. Calladine, *Theory Of Shell Structure*, First. Cambridge University Press, 2007.
- [29] A. V. Pogorelov, *Bending of Surfaces and Stability of Shells*, First Edit., vol. 72. American Mathematical Society, 1988.
- [30] A. Ugural, C. and S. K. Fenster, *ADVANCED MECHANICS OF MATERIALS AND APPLIED ELASTICITY*, Fifth Edit. 2012.
- [31] A. Kaplan, “Finite Deflections And Buckling Of Slightly Curved Beams And Shallow Spherical Shells Under Lateral Loads,” California Institute of Technology, 1954.
- [32] J. F. Mescall, “Large Deflections of Spherical Shells Under Concentrated Loads,” *J. Appl. Mech.*, vol. 32, no. 4, p. 936, 1965.
- [33] D. Shilkrut, *Stability of Nonlinear Shells On the Example of spherical Shell*, 2002nd ed., vol. 48. Florida: Elsevier Science, 2002.

- [34] D. Bushnell, “Nonlinear axisymmetric behaviour of shells of revolution,” vol. 5, no. 3, pp. 432–439, 1967.
- [35] A. Y. Evkin, “Large Deflections Of Deep Orthotropic Spherical Shells Under Radial Concentrated Load: Asymptotic Solution,” vol. 42, pp. 1173–1186, 2005.
- [36] R. Huston and H. Josephs, *Practical Stress Analysis in Engineering Design*, 3° ed. 2008.
- [37] B. Yildirim and R. F. Yukseler, “Effect of Compressibility on Nonlinear Buckling of Simply Supported Polyurethane Spherical Shells Subjected to an Apical Load,” *J. Elastomers Plast.*, vol. 43, no. 2, pp. 167–187, 2011.
- [38] P. N. Khakina and H. Zhou, “A Reduction Factor for Buckling Load of Spherical Cap Shells,” *Res. J. Appl. Sci. Eng. Technol.*, vol. 3, no. 12, pp. 1437–1440, 2011.
- [39] M. I. Ali, P. N. Khakina, and F. Fan, “Approximate critical load of cambered double-layered grids by shell analogies,” *Res. J. Appl. Sci. Eng. Technol.*, vol. 4, no. 15, pp. 2291–2295, 2012.
- [40] P. N. Khakina, “Buckling Load of Thin Spherical Shells Based on the Theorem of Work and Energy,” *Int. J. Eng. Technol.*, vol. 5, no. 3, pp. 392–394, 2013.
- [41] R. Xiao, D. Dan, and W. Cheng, “On Perturbation Solutions for Axisymmetric Bending Boundary Values of a Deep Thin Spherical Shell,” *Math. PROBLMES Eng.*, p. 13, 2014.
- [42] E. Zenteno Aquino, “Análisis del estado de esfuerzo tesis,” Instituto Politécnico Nacional, 2000.
- [43] C. Wai-Fah and E. M. Lui, *Handbook of structural engineering*. 2005.
- [44] Hapag-Lloyd AG, “Embalaje para contenedor.” Hamburgo - Alemania, p. 48, 2010.
- [45] R. D. Cook and W. C. Young, *ADVANCED MECHANICS OF MATERIALS*, Second Edi. 1999.
- [46] J. A. R. Tarango, *Manual de Ingeniería y Diseño de Envase y Embalaje*, Décima. México D.F.: IMPEE, 2015.

Apéndice A

Modelos con teoría lineal

Esfuerzo en cúpula

Los esfuerzos en una cúpula, son definidas en dos tipos: los esfuerzos meridionales y radiales ver Figura A. 1. Las ecuaciones para su análisis son:

$$N_{\varphi} = - \frac{aq}{(1 + \cos \varphi)} \quad (3.17)$$

$$N_{\theta} = aq \left[\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right] \quad (3.19)$$

N_{φ} y N_{θ} son las fuerzas por unidad de longitud, siendo éstas la meridional y radial respectivamente.

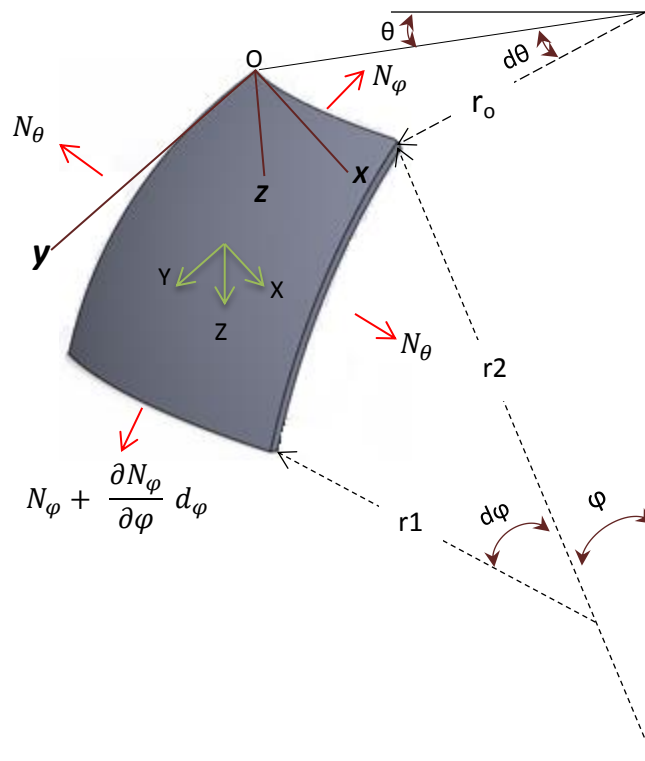


Figura A. 1 Elemento diferencial extraído de un cascarón, también mostrado en el capítulo 3.

Se realizó un análisis de esfuerzo usando las ecuaciones (3. 17) y (3. 19), y con la ayuda de un programa de cómputo se generó el código y se obtuvo graficas del comportamiento de los esfuerzos meridionales y radiales (Figura A. 2). La condición de carga q fue simétrica y distribuida por toda su superficie, el radio a utilizado es de 0.1 m, el ángulo φ se le asignó el rango de valores desde 0 hasta 1.57 rad y el espesor h del cascarón utilizado es de 1 mm.

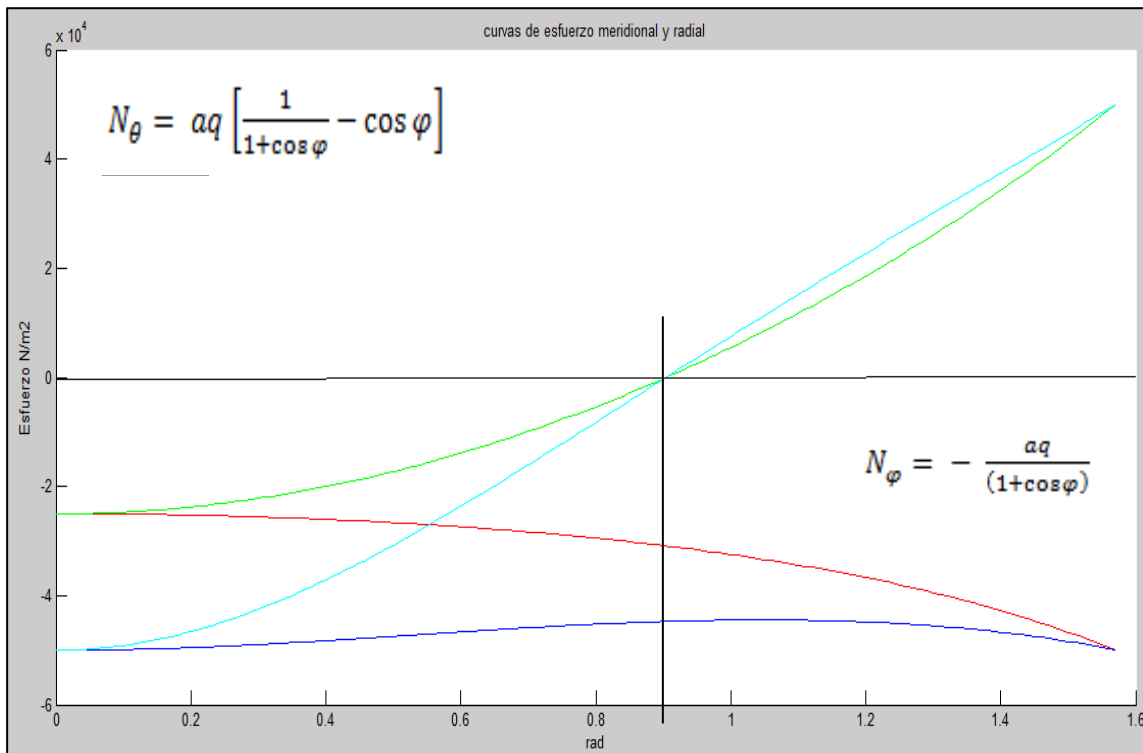


Figura A. 2 Comportamiento de los esfuerzos meridionales y radiales en cúpulas de espesor constante y variable

Las líneas de color cian y verde, nos muestran el comportamiento de los esfuerzos radiales, la diferencia entre ambas, radica que para la curva en color cian, se usó una variación de espesor lineal h_v con valor inicial de 1 mm en el borde y 0.5 mm de espesor en el ápice de la cúpula, en la curva en color verde se conservó constante su espesor. De forma similar para las curvas de esfuerzo meridional, la línea de color rojo se mantuvo un espesor constante y para la línea color azul se usó un espesor variable.

Los diagramas obtenidos de los esfuerzos meridionales se muestran a continuación (Figura A. 3 y Figura A. 4).

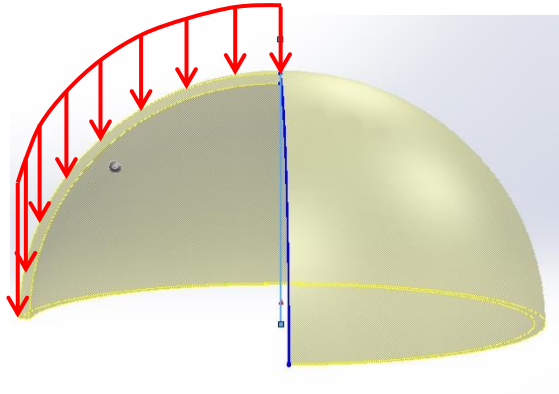


Figura A. 3 Diagrama de esfuerzo meridional en cúpula con espesor constante

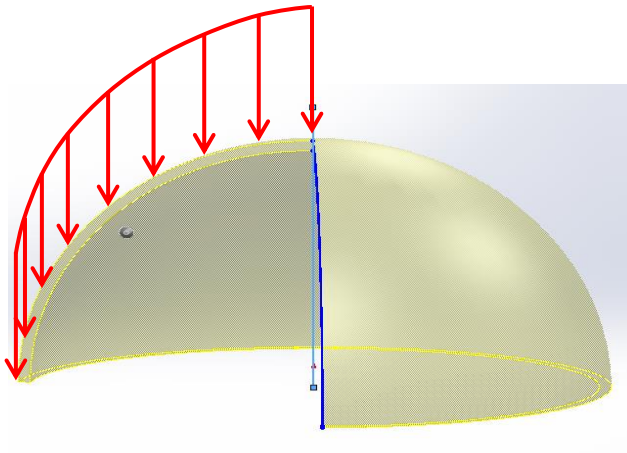


Figura A. 4 Diagrama de esfuerzo meridional en cúpula con espesor variable

Los diagramas de esfuerzo radial se muestran en la Figura A. 5 y Figura A. 6.

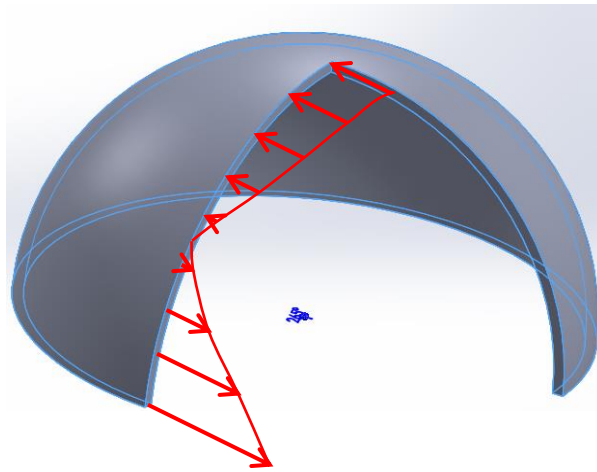


Figura A. 5 Diagrama de esfuerzo radial en cúpula con espesor constante

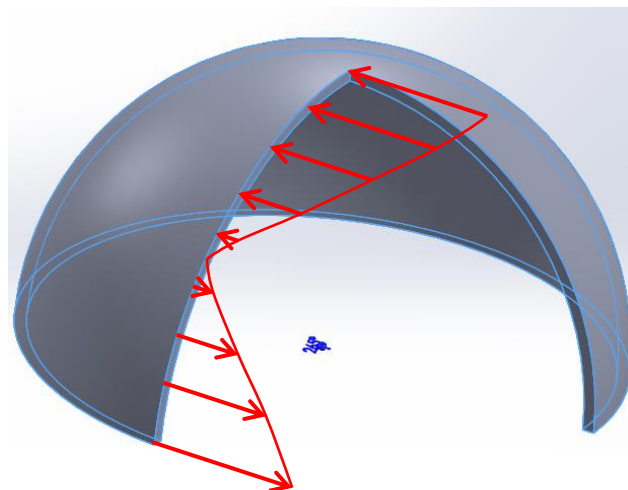


Figura A. 6 Diagrama de esfuerzo radial en cúpula con espesor variable

Esfuerzo en cúpula con claro por la parte superior.

La forma de este tipo de cascarón se muestra en la Figura A. 7. Para su análisis se consideró una carga distribuida q en toda su superficie y una carga distribuida P en la abertura, el ángulo de abertura del claro es de 15° y el ángulo φ que define al cascarón es de 90° .

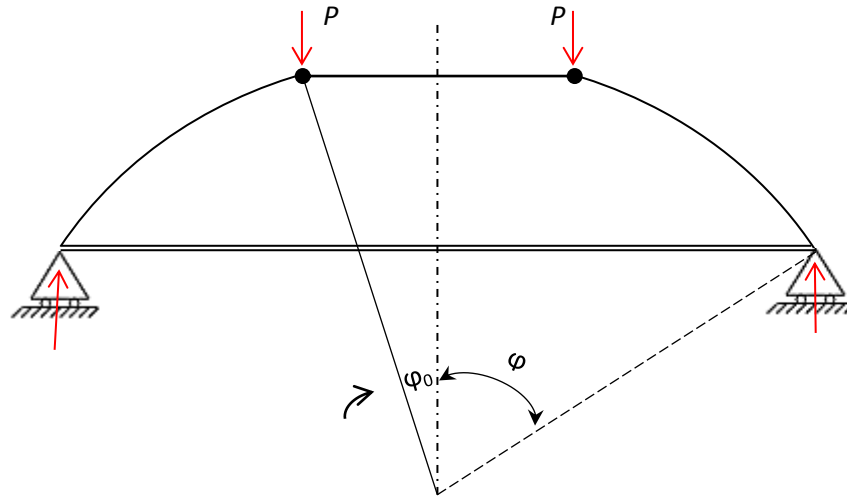


Figura A. 7 Cascarón con claro en su parte superior, mostrado en el capítulo 3.

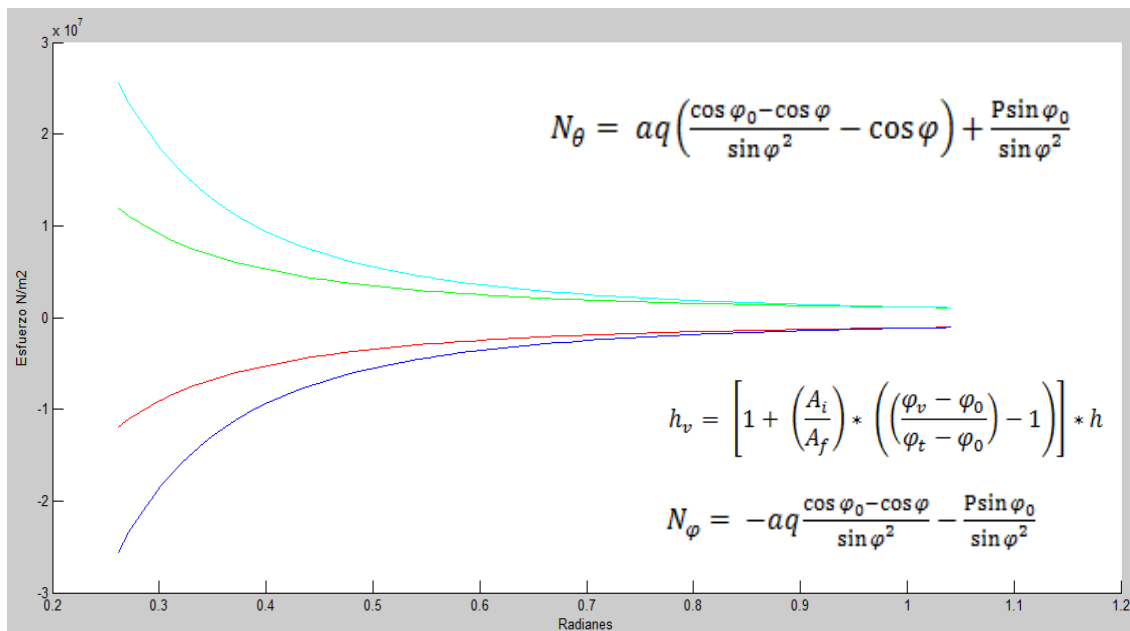


Figura A. 8 Comportamiento de los esfuerzos meridionales y radiales.

El comportamiento de los esfuerzos radiales N_θ se observa que nunca se encontraran a compresión (Figura A. 8), siendo sus curvas respectivas de color cian y verde, la diferencia que una de ellas tenga valores superiores de esfuerzo es debida a que se usó un espesor variable h_v y en la otra se conservó contante el espesor. De forma similar en las curvas de esfuerzos meridional N_φ , la curva de color azul se usó un espesor variable h_v en la cual se obtuvo los esfuerzos de compresión superior a la curva de esfuerzo en color rojo, en la cual se usó un espesor constante.

Los diagramas obtenidos de los esfuerzos meridionales son los siguientes (Figura A. 9 y Figura A. 10):

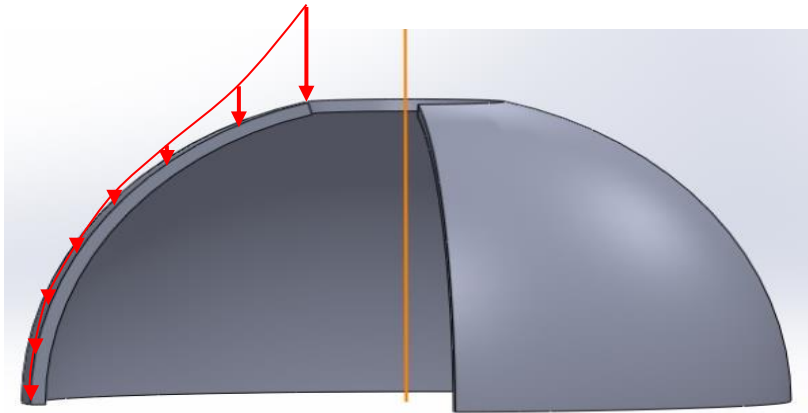


Figura A. 9 Diagrama de esfuerzo meridional en cúpula con claro espesor constante de 1 mm

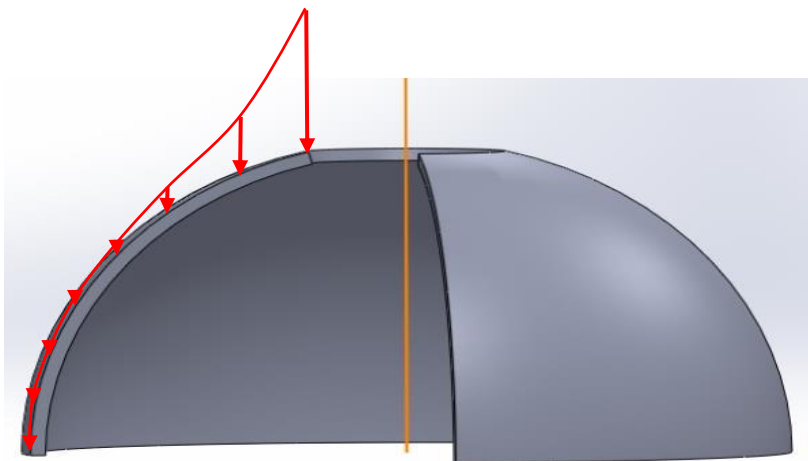


Figura A. 10 Diagrama de esfuerzo meridional en cúpula con claro espesor variable, en el borde 1 mm de espesor y en el claro con 0.5 mm

Los diagramas de los esfuerzos radiales se muestran en la Figura A. 11 y Figura A. 12.

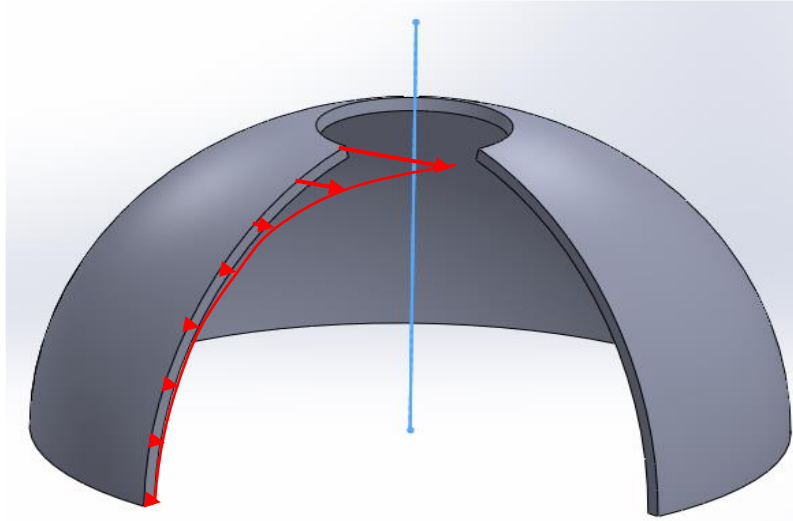


Figura A. 11 Diagrama de esfuerzo radial en cúpula con claro con espesor constante de 1 mm

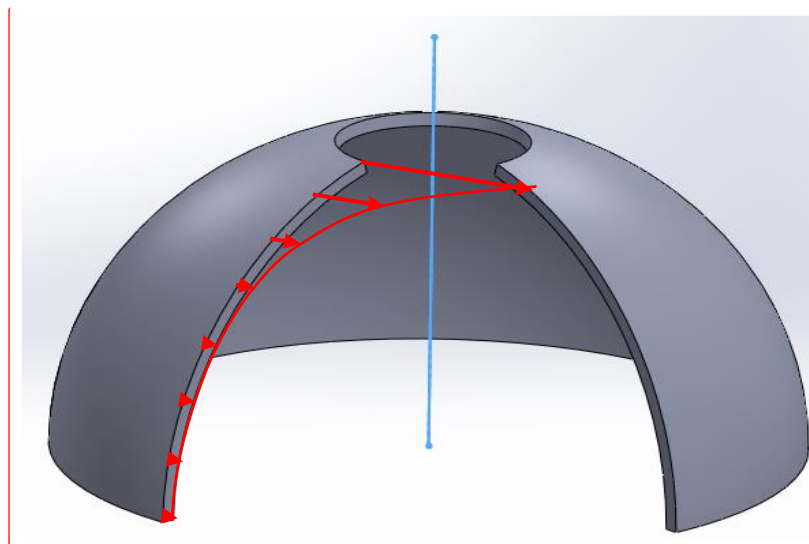


Figura A. 12 Diagrama de esfuerzo radial en cúpula con claro y espesor variable, en el borde 1 mm de espesor y en el claro con 0.5 mm

Análisis de esfuerzo en cascarón tipo cilíndrico

El análisis de esfuerzo en un cascarón cilíndrico se consideró una carga distribuida en toda su superficie y espesor constante. La forma en que como actúan las fuerzas longitudinales y radiales se muestran en la Figura A. 13. Siendo N_x la fuerza longitudinal, N_φ la fuerza radial, $N_{x\varphi}$ y $N_{\varphi x}$ las fuerzas cortantes por unidad de longitud, pero regularmente estas fuerzas actúan en la base de la estructura.

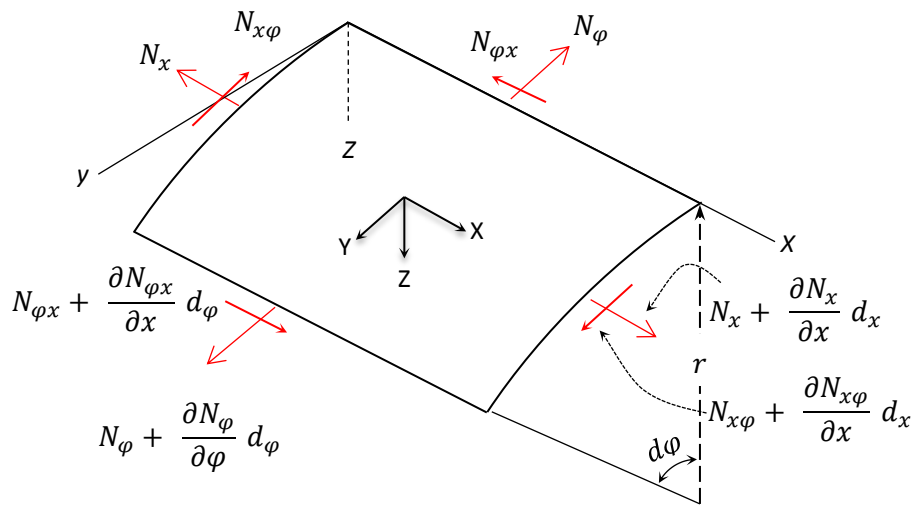


Figura A. 13 Elemento diferencial del cascarón cilíndrico del capítulo 3.

Las ecuaciones que definen los esfuerzos mencionados con anterioridad son:

$$N_\varphi = - \rho a \cos \varphi \tag{3. 90}$$

$$N_x = - \frac{\rho \cos \varphi}{4a} (l^2 - 4x^2) \tag{3. 95}$$

La grafica obtenida para los esfuerzos longitudinales, resulta en un plano en el espacio, siendo sus variables la longitud del elemento medida desde el centro y la posición definida por el ángulo φ , la Figura A. 14 ilustra el comportamiento de los esfuerzos longitudinales.

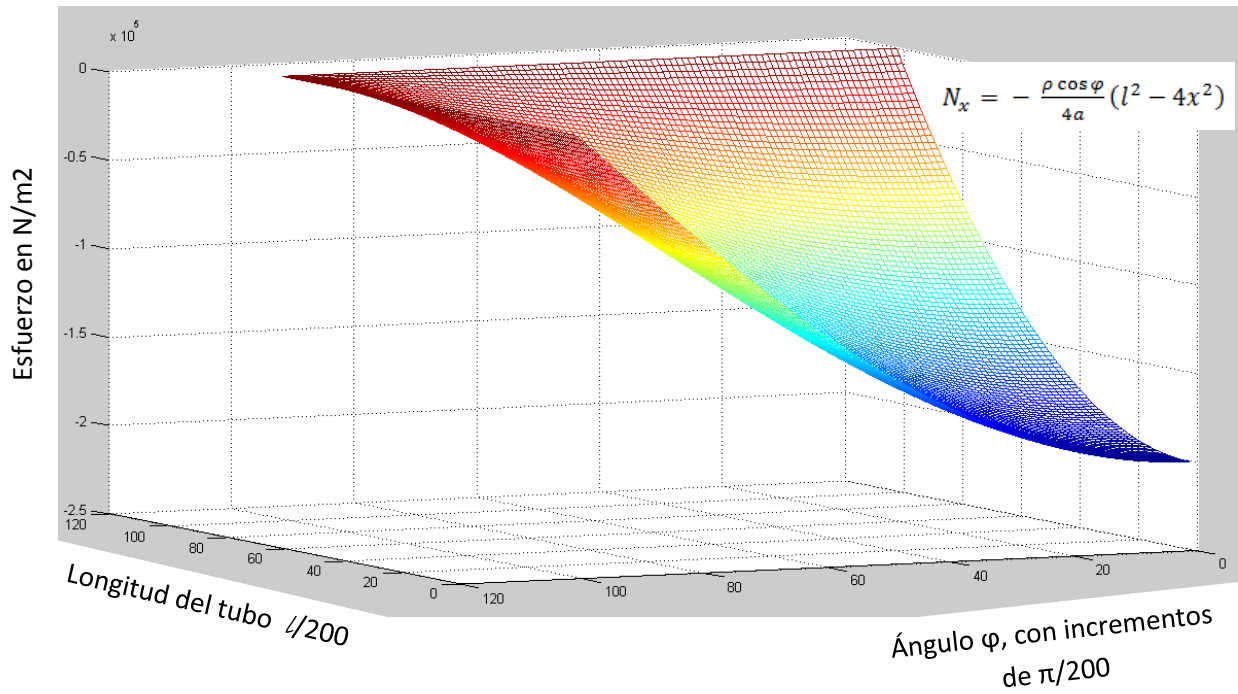


Figura A. 14 Plano en el espacio que ilustra el comportamiento de los esfuerzos longitudinales.

Los esfuerzos longitudinales se mantienen a compresión, en la Figura A. 14 se ilustra su comportamiento a lo largo del cascarón y en cualquier ángulo φ definido entre 0° y 90° . La longitud l considerada es de 200 mm y el radio r de 100 mm.

Los diagramas obtenidos del esfuerzo longitudinal en el cascarón cilíndrico se muestran en la Figura A. 15 y la Figura A. 17.

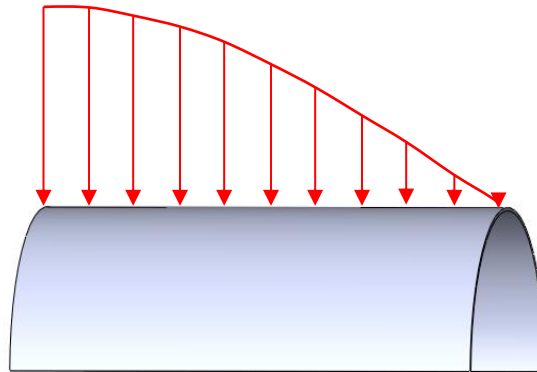


Figura A. 15 Comportamiento del esfuerzo longitudinal a lo largo de la sección cilíndrica

Las flechas en la Figura A. 15 no representan la dirección del esfuerzo sino la magnitud a lo largo del tubo con referencia desde el centro del tubo o $l/2$ de longitud del tubo. Los esfuerzos longitudinales varían con forma se aproximan al borde como se muestra en la Figura A. 16.

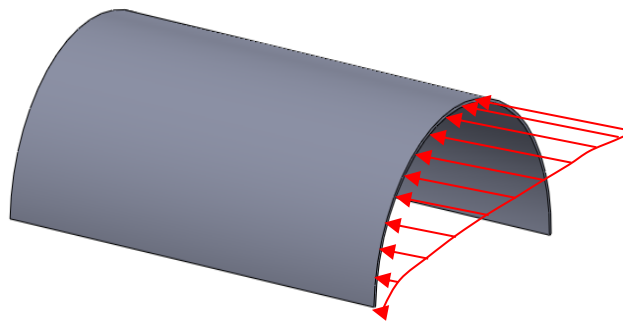


Figura A. 17 Comportamiento del esfuerzo longitudinal desde el ápice hasta el borde del cilindro

El esfuerzos radial en la estructura tipo cascarón cilíndrico tienen un comportamiento como se muestra en la Figura A. 18 y en la Figura A. 19 se muestra el comportamiento del esfuerzo meridional.

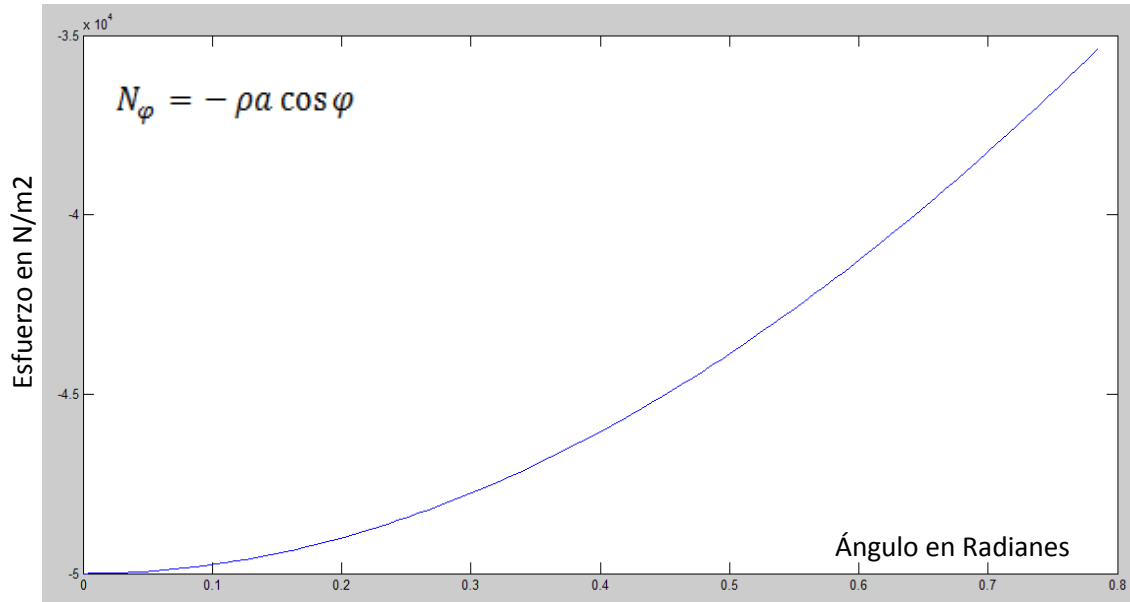


Figura A. 18 Comportamiento del esfuerzo radial en la estructura cilíndrica.

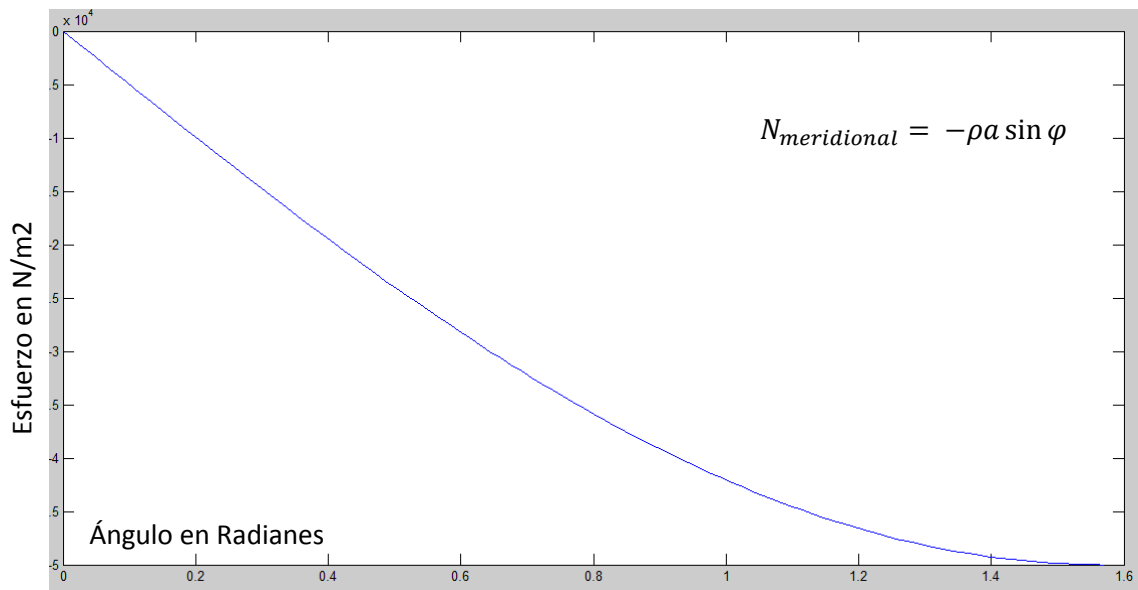


Figura A. 19 Grafica de esfuerzo meridional en el cascarón cilíndrico

Los diagramas obtenidos de los esfuerzos radial y meridional se muestran en la Figura A. 20 y Figura A. 21.

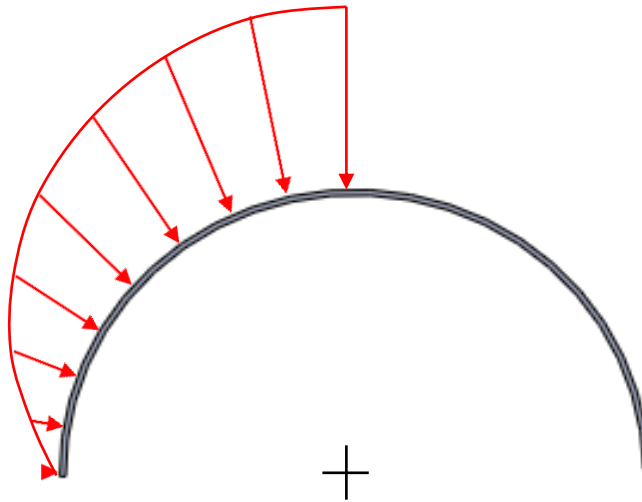


Figura A. 20 Esfuerzo radial en la sección transversal del cascarón cilíndrico

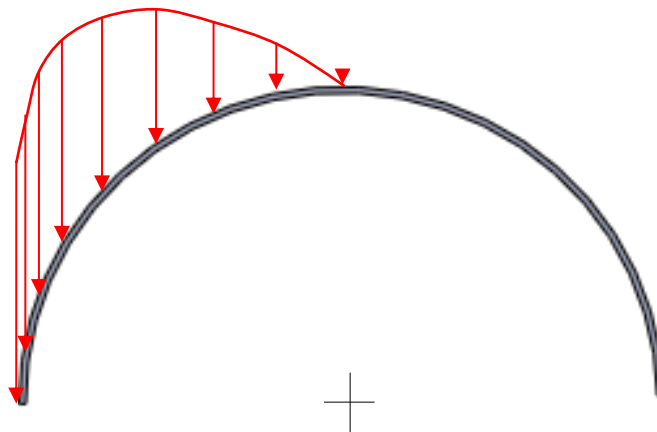


Figura A. 21 Esfuerzo meridional en sección transversal del cascarón cilíndrico

Apéndice B Convergencia de malla Superficie esférica

La selección de la malla adecuada se realizó al probar distintas densidades de mallado, con tamaño máximo de 5 mm hasta 1 mm (Figura B. 1). Se consideró el tiempo de solución del modelo, las dimensiones del cascarón esférico es de radio igual a 60 mm y un espesor de 1 mm (Figura B. 2). El tipo de elemento seleccionado en el programa Ansys R15.0 es elementos tipo Shell-181.

Se observa que la menor variación ocurre con tamaño de elemento de 2 mm como máximo, y con elementos de 1 mm el tiempo requerido es de 13 minutos más con respecto al de 2 mm, con una variación del 0.81%.

Por lo tanto, las simulaciones realizadas fueron con un tamaño de elemento de 2 mm con propiedades de elementos tipo Shell-181.

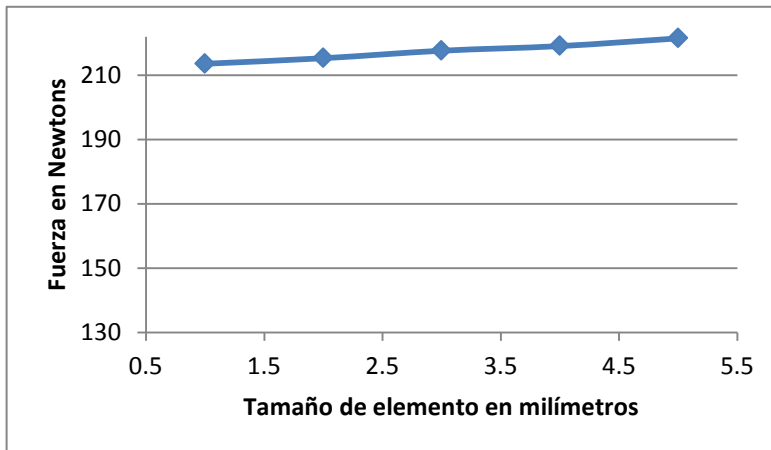


Figura B. 1 Gráfica de la convergencia de malla a superficie esférica

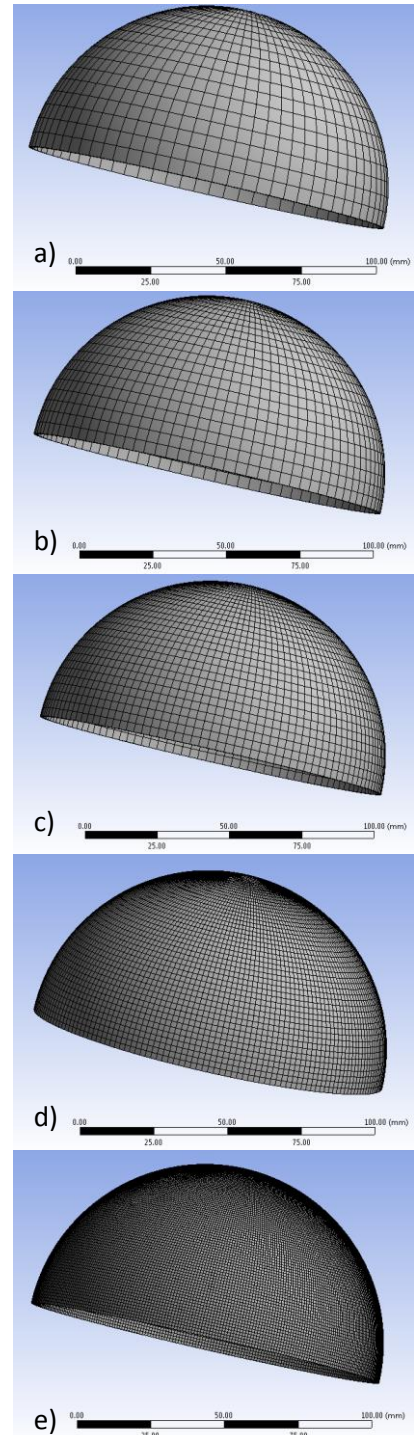


Figura B. 2 Superficie esférica con diferentes tamaños de malla, a) mallado grueso y e) mallado fino

Superficie esférica base cuadrada

La selección de la malla adecuada se realizó al probar distintas densidades de mallado, con tamaño máximo de 5 mm hasta 1 mm (Figura B. 3). Se consideró el tiempo de solución del modelo, las dimensiones del cascarón esférico es de radio igual a 60 mm y un espesor de 1 mm, la base es un cuadrado inscrito en una circunferencia de 60 mm (Figura B. 4). El tipo de elemento seleccionado en el programa Ansys R15.0 es elementos tipo Shell-181.

Se observa que la menor variación ocurre con tamaño de elemento de 2 mm como máximo, y con elementos de 1 mm el tiempo requerido es de 11 minutos más que con elementos de 2 mm, con una variación del 0.85%.

Por lo tanto, las simulaciones realizadas fueron con un tamaño de elemento de 2 mm con propiedades de elementos tipo Shell-181.

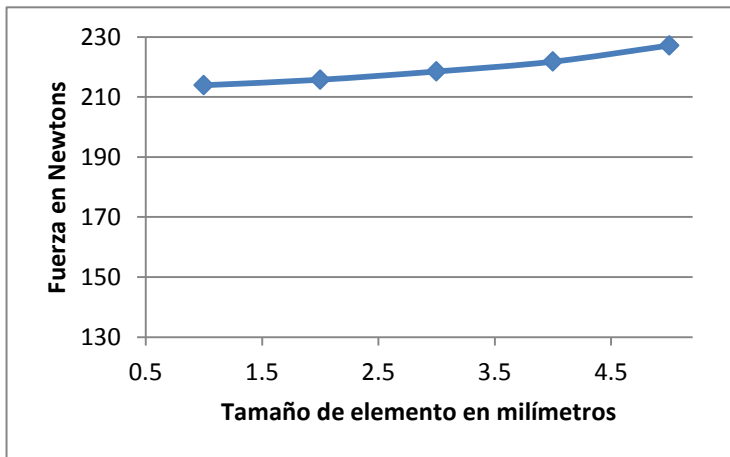


Figura B. 3 gráfica de convergencia de malla a superficie esférica con base cuadrada

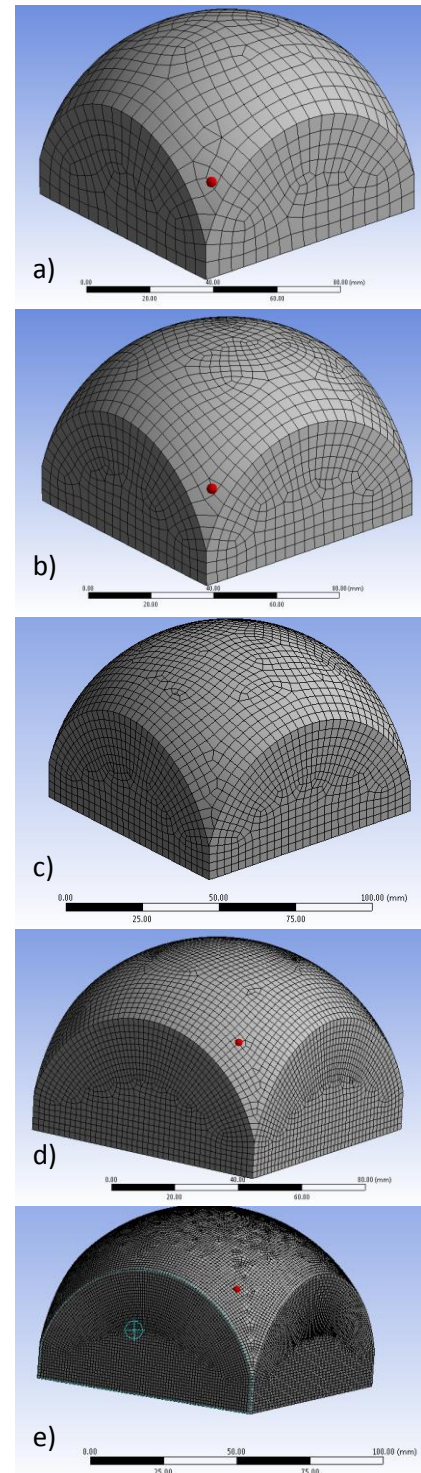


Figura B. 4 Superficies esféricas con base cuadrada y diferentes mallados.

Control de Video Juego

La selección de la malla adecuada se realizó al probar distintas densidades de mallado, con tamaño máximo de 5 mm hasta 1.5 mm (Figura B. 5). Se consideró el tiempo de solución del modelo, el empaque se construyó con uso de superficies esféricas y las dimensiones que el proveedor de controles Microsoft© da en su página web de soporte técnico, el espesor usado es de 0.5 mm (Figura B. 6). El tipo de elemento seleccionado en el programa Ansys R15.0 es elementos tipo Shell-181.

Se observa que la menor variación ocurre con elementos de tamaño máximo de 3 mm con mínimo de 0.6 mm (Figura B. 5), y con elementos de 1.5 mm máximo, el tiempo requerido es de 19 minutos más con respecto a elementos de 3 mm como máximo, con una variación del 1.38%.

Por lo tanto, las simulaciones realizadas fueron con un tamaño de elemento de 3 mm con propiedades de elementos tipo Shell-181.

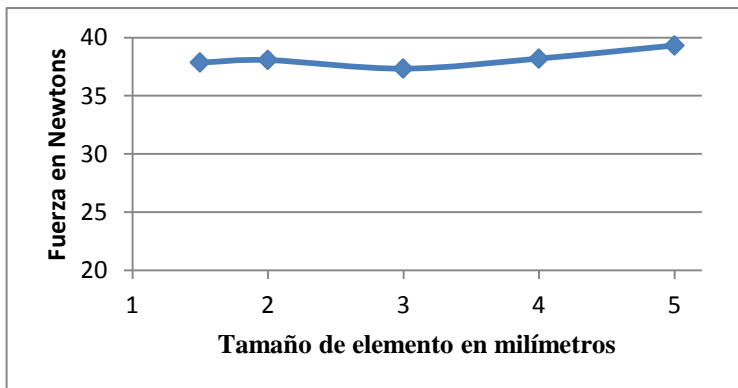


Figura B. 5 Grafica de convergencia de malla del empaque para control de video juego.

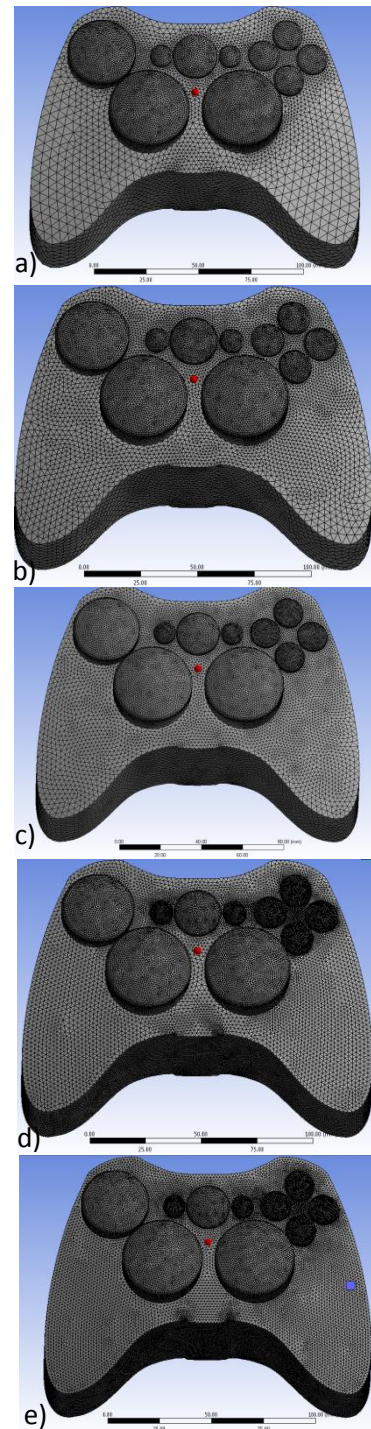


Figura B. 6 Empaque para control de video juego con diferentes mallados

Apéndice C Superficie de radio variable

Se consideró analizar el comportamiento de superficie con radio variable o con perfil tipo elíptico cuando la superficie es sometida a una carga puntual sobre su ápice. Para clasificarla se utiliza la relación A/B que es un valor entre radios, donde A es el radio menor y B el radio mayor (Figura C. 1). Además, se considera un rango de valores A/B que va desde 0.9 hasta 0.2.

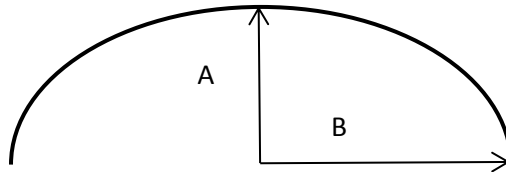


Figura C. 1 Superficie con perfil de radio variable, donde A representa el radio menor y B el radio mayor.

La Curva de comportamiento de la superficie de radio variable es muy similar a la curva carga-deflexión de la superficie esférica (Figura C. 2), el material seleccionando es PVC rígido.

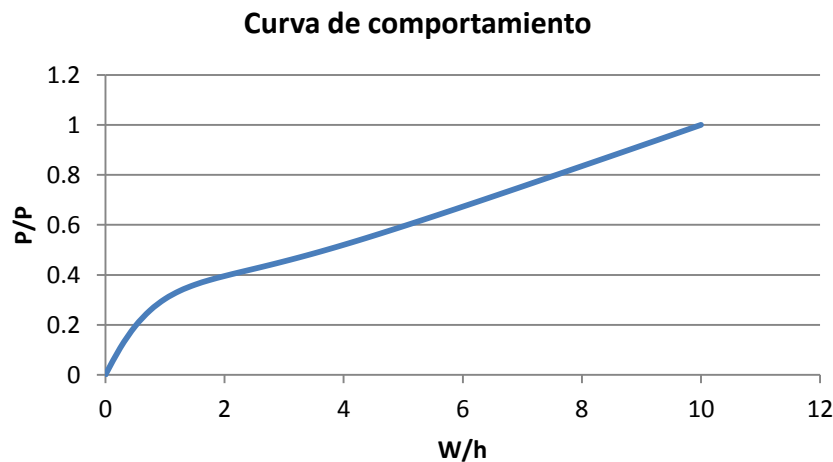


Figura C. 2 Curva de comportamiento normalizada, el eje horizontal representa el desplazamiento normal a la superficie y el eje vertical la fuerza de reacción unitaria.

La curva carga deflexión obtenida para la relación $A/B = 0.9$ se muestra en la Figura C. 3. Se aprecia que el comportamiento es similar a la curva de comportamiento de una superficie esférica. La curva de la Figura C. 3 se encuentra normalizada, el eje vertical la carga P^* se encuentra en términos de la carga real P , el radio mayor B , el módulo de elasticidad E y el espesor h , sobre el eje vertical el desplazamiento w se representa en términos del espesor h .

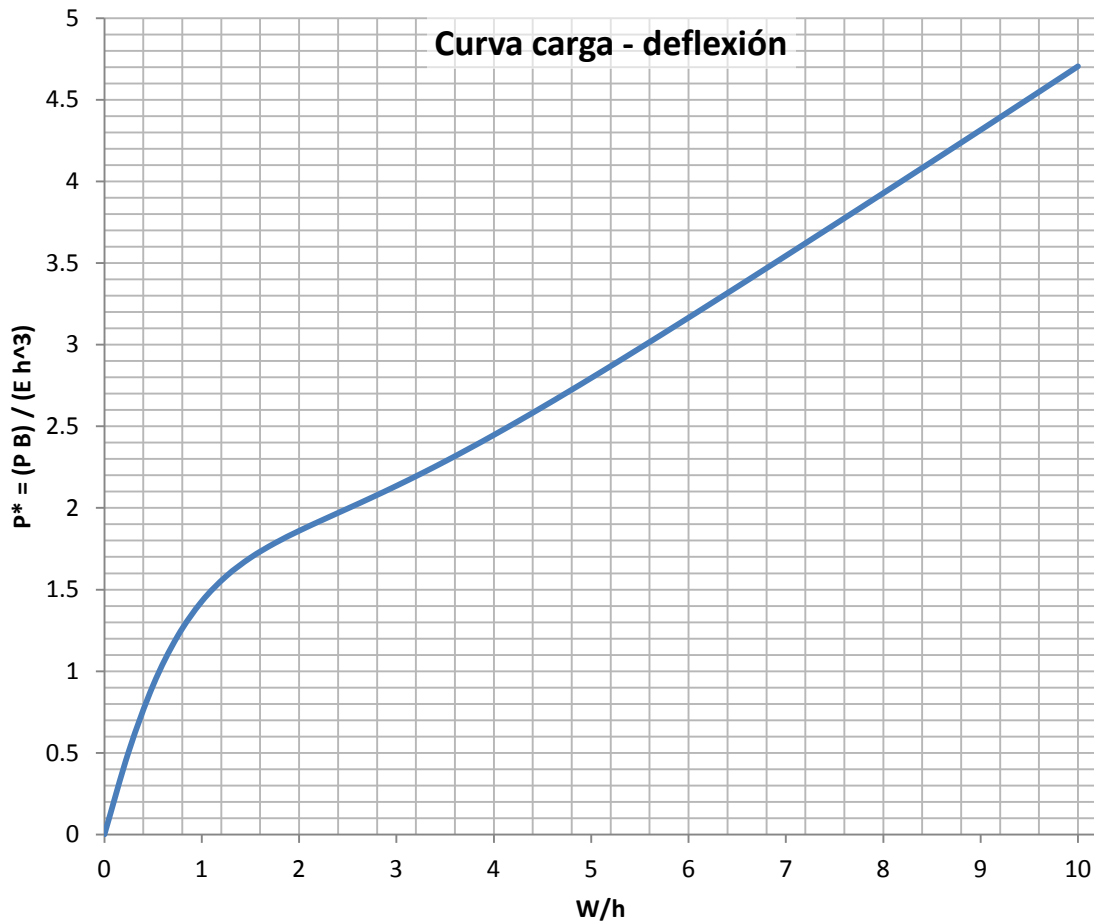


Figura C. 3 Curva carga-deflexión para una relación de radios $A/B = 0.9$, el eje horizontal representa el desplazamiento normalizado con respecto al espesor h y el eje vertical representa la fuerza de reacción P^* .

Apéndice

Las relaciones A/B hacen cambiar la capacidad de carga en la superficie de radio variable, para obtener los valores de la fuerza de reacción de forma sencilla se concentra los coeficientes C y k (Tabla C. 1) con las ecuaciones de acuerdo al desplazamiento w/h que se requiera. La variable x representa el valor de las relaciones A/B y se considera un rango con valores de 0.9 hasta 0.2

Tabla C. 1 Coeficientes y ecuaciones para obtener la fuerza de reacción P^*

0.5 w/h	1 w/h	1.5 w/h	2 w/h	2.5 w/h	3 w/h	3.5 w/h	4 w/h	4.5 w/h	5 w/h	
C	1.2029	1.8598	2.1738	2.3463	2.5	2.6193	2.7532	2.9006	3.0578	3.2198
k	1.0915	1.0755	1.050	1.0252	-0.011	0.0139	0.0383	0.0631	0.08871	0.1162
$P^* = cx^k$					$P^* = cx + k$					
5.5 w/h	6 w/h	6.5 w/h	7 w/h	7.5 w/h	8 w/h	8.5 w/h	9 w/h	9.5 w/h	10 w/h	
C	3.3831	3.5446	3.7023	3.8544	3.9998	4.138	4.268	4.3894	4.5019	4.6049
K	0.1459	0.1785	0.2141	0.2532	0.2959	0.3425	0.3932	0.4483	0.508	0.5725
$P^* = cx + k$										

El valor P^* que se obtiene de sustituir los coeficientes C y k en las ecuaciones mostradas en la Tabla C. 1, es un valor normalizado en términos de la carga real P , el radio mayor B , el módulo de elasticidad E y el espesor h ($P^* = PB/Eh^3$).

El modo de empleo de la Tabla C. 1 es sencillo:

1. Se calcula la relación A/B
2. Se estima un valor en el espesor h que puede comenzar con 1 mm
3. Seleccionar el desplazamiento admisible para la superficie
4. Sustituir los coeficientes en la ecuación de acuerdo al desplazamiento considerando el valor de la relación A/B en x
5. Al conocer P^* se calcula el valor P que es la fuerza de reacción en Newtons

Al conocer la fuerza de reacción P y ésta excede la carga a la cual se expondrá el empaque, puede reducirse el espesor que beneficia en el ahorro de energía y materia prima en la fabricación del blíster. Para ello se obtuvo la curva de comportamiento en la capacidad de carga reduciendo el espesor en la superficie como se muestra en la Figura C. 4.

El uso de la curva de la Figura C. 4 ayuda a encontrar la capacidad de carga conforme se disminuye el espesor inicial. A manera de ejemplo, al conocer la carga que estará expuesto el empaque se divide entre la fuerza de reacción obtenida con ayuda de la Tabla C. 1, el valor de la relación es menor a 1, luego sobre el eje vertical de la Figura C. 4 se localiza el valor de la

relación entre las fuerzas, pero se busca la intersección con la curva y sobre el eje horizontal se encontrara el coeficiente con el cual se multiplica el espesor inicial.

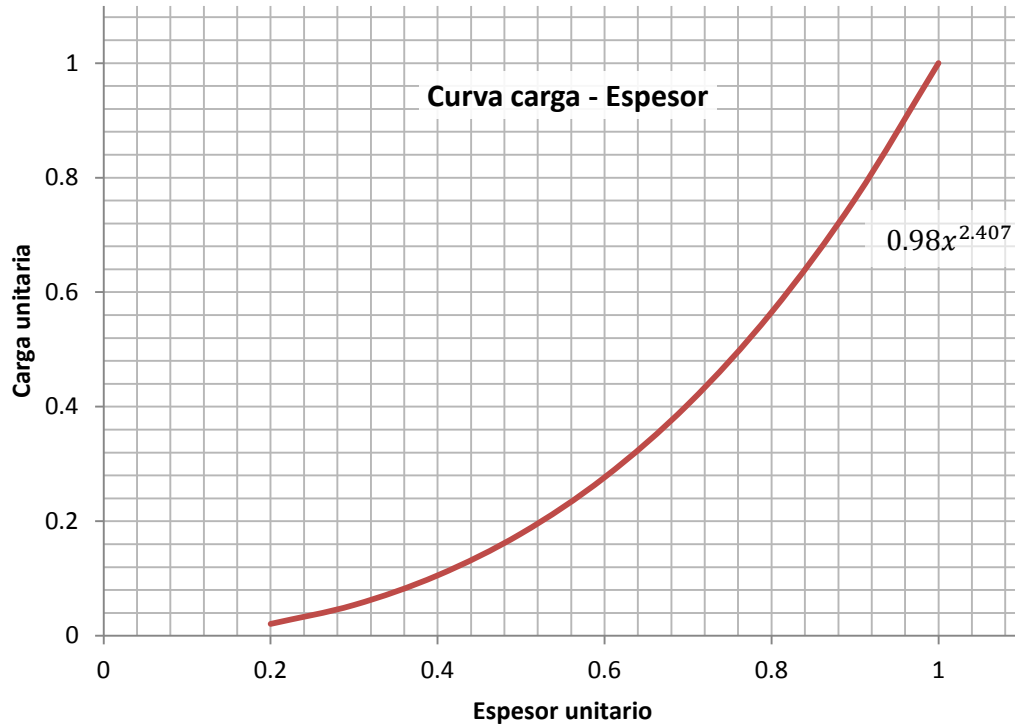


Figura C. 4 Curva de comportamiento en la capacidad de carga variando el espesor en la superficie de radio variable.

La información de este apéndice es útil solo para PVC rígido, un material con similar relación de Poisson y densidad puede utilizarse pero no es recomendable.

Apéndice D

Tabla con valores de carga desplazamiento para diferentes relaciones R/h

Material PVC - Espesor 1 mm

Desplazamiento en milímetros	10	526.542	263.271	175.514	131.636	105.308	87.757	75.2203	65.8178	58.5047	52.6542	47.8675	43.8785
	9	492.468	246.234	164.156	123.117	98.4936	82.078	70.3526	61.5585	54.7187	49.2468	44.7698	41.039
	8	456.45	228.225	152.15	114.113	91.29	76.075	65.2071	57.0563	50.7167	45.645	41.4955	38.0375
	7	418.35	209.175	139.45	104.588	83.67	69.725	59.7643	52.2938	46.4833	41.835	38.0318	34.8625
	6	378.834	189.417	126.278	94.7085	75.7668	63.139	54.1191	47.3543	42.0927	37.8834	34.4395	31.5695
	5	339.642	169.821	113.214	84.9105	67.9284	56.607	48.5203	42.4553	37.738	33.9642	30.8765	28.3035
	4	303.648	151.824	101.216	75.912	60.7296	50.608	43.3783	37.956	33.7387	30.3648	27.6044	25.304
	3	274.272	137.136	91.424	68.568	54.8544	45.712	39.1817	34.284	30.4747	27.4272	24.9338	22.856
	2	250.878	125.439	83.626	62.7195	50.1756	41.813	35.8397	31.3598	27.8753	25.0878	22.8071	20.9065
	1	200.856	100.428	66.952	50.214	40.1712	33.476	28.6937	25.107	22.3173	20.0856	18.2596	16.738
	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300

Radio en milímetros

En el caso de usar un espesor menor a un milímetro conservando el radio de curvatura, eleve al cuadrado el espesor y multiplique por el valor de interés. Ejemplo:

- Radio de curvatura 100 mm
- Desplazamiento 3 mm

La fuerza de reacción que se encuentra en la tabla es 68.568 N pero el espesor es de 1 mm, para hallar la nueva fuerza de reacción conservando las condiciones del radio de curvatura y desplazamiento se eleva al cuadrado el valor del nuevo espesor, si fuera un espesor de 0.5 mm el procedimiento es el siguiente:

$$Fuerza\ de\ reacción = 68.568 * 0.5^2$$

$$Fuerza\ de\ reacción = 17.142\ N$$