

# **Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico**

**Subdirección Académica**

**Departamento de Ingeniería Electrónica**

## **TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS**

**Control MPC para procesos multivariables en serie**

Presentado por

**Ing. Susana Haydee Sainz García**

Como requisito para la obtención del grado de

**Maestra en Ciencias en Ingeniería Electrónica**

Director de tesis

**Dra. Ma. Guadalupe López López**

Codirector de tesis

**Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez**



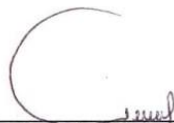
Cuernavaca, Mor., 20 de junio de 2016.

OFICIO No. DIE/0128/2016  
Asunto: Aceptación de documento de tesis

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial de la **C. Susana Haydee Sainz García** con número de control **M14CE033** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“Control MPC para Procesos Multivariados en Serie”** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS



Dra. Ma. Guadalupe López López  
Doctora en Ciencias en Ingeniería Química  
Cédula profesional 7980045

CODIRECTOR DE TESIS



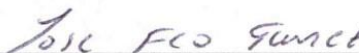
Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 8031070

REVISOR 1



Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo  
Doctora en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 7363023

REVISOR 2



Dr. José Francisco Gómez Aguilar  
Doctor en Física  
Cédula profesional 9124781

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Estudiante  
Expediente

CMAZ/rr



Cuernavaca, Mor., 21 de junio de 2016  
OFICIO No. SAC/217/2016

**Asunto:** Autorización de impresión de tesis

**ING. SUSANA HAYDEE SAINZ GARCÍA**  
**CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA**  
**PRESENTE**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "**Control MPC para proceso multivariables en serie**", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

"CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE MEXICO"



**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



**SEP TecNM**  
**CENTRO NACIONAL**  
**DE INVESTIGACIÓN**  
**Y DESARROLLO**  
**TECNOLÓGICO**  
**SUBDIRECCIÓN**  
**ACADÉMICA**

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Expediente

GVGR/mcr



# Dedicatoria

## ***A mis padres***

*Sin importar las críticas no han dejado de apoyarme desde el principio.*

## ***A mis hermanitos***

*Siempre serán mis hermanitos, mi motivo de risas, preocupación y la alegría más grande de mi vida.*

## ***A ti***

*Que aún no crees que sea posible que estés culminando este logro profesional, a ti que tienes dudas sobre lo que te falta por vivir. A ti te dedico esta tesis para que te des cuenta de que paso a paso vas cumpliendo tus retos. ¡Va por ti!*





# Agradecimientos

*Agradezco:*

*A Dios, porque a pesar de mi postura no me abandona.*

*A mis padres **Alejandrina** y **Agustín**, por el apoyo que siempre me han dado en cada etapa de mi vida, por sus palabras de aliento cuando más hicieron falta, por su amor y confianza. Por ser una guía en mi desarrollo personal, por sus enseñanzas y consejos.*

*A mis hermanos **Esthefany**, **Agustín** y **Alberto**, por ser la fuerza que me impulsa a ser mejor cada día y a continuar a pesar de la adversidad o de lo complicado que sea el reto. Por esperar siempre lo mejor de mí y creer en mí más de lo que yo pueda creer.*

*A mis asesores de tesis la Dra. Ma. Guadalupe López López y el Dr. Víctor M. Alvarado Martínez, por su paciencia, apoyo y consejo, ya que sin ellos no hubiera sido posible haber realizado este trabajo de investigación, pero sobre todo gracias por su amistad y confianza.*

*A los miembros del comité revisor, el Dr. Enrique Quintero-Mármol Márquez, el Dr. Alejandro Rodríguez Palacios, la Dra. Gloria L. Osorio Gordillo y el Dr. José Francisco Gómez Aguilar por sus valiosos comentarios, observaciones, disponibilidad y ayuda que contribuyeron al buen desarrollo de esta tesis.*

*Agradezco también a mis profesores de Cenidet, por su ayuda dentro y fuera del aula. Al Dr. Juan Reyes por siempre tener un espacio en su agenda para brindarme asesoría.*

*A mis amigos Montse, Jesús, Didhier y Joachin, por empezar esta aventura juntos y porque a pesar de todo nuestra amistad continua, ¡los quiero!*

*A mis amigos en Acayucan, Yaline, Carla, Erick, Francisco que aún con la distancia no dejaron de apoyarme y echarme porras.*

*A mis amigos de Cenidet: Carlos, Ivonne, Hugo, Emmanuel. Y a mis compañeros: Adriana, Jashiel, Moisés, Jesse, Mota, Citlali, Amairani, Paty, Saúl, Oscar, Adrián, Diego, Cesar, Schacht, Alan, Marcos y Leonardo. Gracias a todos por su ayuda y amistad brindada.*

# Resumen

Un sistema multivariable siempre representa un reto en teoría de control debido a las interacciones que existen entre las variables del proceso. En esta tesis se aborda un tipo específico de procesos multivariables, los procesos multivariables en serie. En la industria es común encontrar procesos que consisten de unidades interconectadas en serie, estas pueden ser de un mismo tipo o de diferente tipo.

El caso en el que se aplica la teoría estudiada es un *sistema de tres reactores continuos de tanque agitado no isotérmicos, conectados en serie*. Este proceso tiene como objetivo operacional llevar a cabo una reacción exotérmica de primer orden consumiendo al reactivo  $A$ , manteniendo una operación isotérmica y una concentración de salida cercana a su valor nominal, aun ante la presencia de perturbaciones.

Se presentan estructuras de modelado y control generales para procesos multivariables en serie: un control por lazo local; un control prealimentado con retroalimentación, en el cual, el control prealimentado es diseñado para disminuir las perturbaciones ocasionadas en una unidad del proceso, por las unidades anteriores a esta; y un control predictivo multivariable basado en modelo, con el cual se trata el problema de control multivariable. Los resultados de las etapas de diseño, implementación y evaluación del desempeño de las diferentes estructuras de control se presentan con apoyo de simulaciones numéricas, para el sistema en estudio de reactores en serie.



# Abstract

Multivariable systems represent a challenge in control theory due to the interactions existing between their associated variables. In this thesis, the aim is to study a specific type of multivariable processes: processes in series. In the industry, processes consisting of serial interconnected units are common, these units can be of the same type or different types.

The case for which the studied theory is applied is a process composed of three continuous stirred tank reactors (CSTR) connected in series. The operational objective of this process is to carry out a first order exothermic reaction, which consumes the reagent A, while the reactors operate in isothermal conditions and the output concentration is near to its nominal value, even under disturbances.

Linear models and general control structures for multivariable serial processes are presented: a local control; then a feedforward control with a feedback control, for which the feedforward control reduces the disturbances generated on one specific unit, by the previous units; finally, a model based multivariable predictive control is designed to treat the process control as a multivariable control problem. The results obtained for the stages of designing, implementing and evaluating the performance of the controllers, are presented with the aid of numerical simulations of the studied serial reactor system.



# Contenido

|   |    |
|---|----|
| Lista de Figuras.....   | IV |
| Lista de Tablas.....  | V  |
| Nomenclatura.....   | VI |
| 1 Introducción.....   | 8  |
| 1.1 Planteamiento del problema.....                               | 9  |
| 1.2 Objetivos.....  | 10 |
| 1.2.1 Objetivo General.....                                       | 10 |
| 1.2.2 Objetivos particulares.....                                 | 10 |
| 1.3 Justificación.....  | 10 |
| 1.4 Alcances.....   | 11 |
| 1.5 Estado del arte.....  | 12 |
| 1.5.1 Proceso en serie.....                                       | 12 |
| 1.5.2 Control a procesos multivariables.....                      | 13 |
| 1.5.3 Control MPC aplicado a procesos multivariables.....         | 14 |
| 1.5.4 Control a Reactores continuos de tanque agitado (CSTR)..... | 16 |
| 1.6 Organización del documento.....                               | 17 |
| 2 Marco Teórico.....  | 18 |
| 2.1 Proceso en serie.....   | 18 |
| 2.2 Modelo no lineal para procesos en serie.....                  | 18 |
| 2.3 Modelo lineal para procesos en serie.....                     | 19 |
| 2.3.1 Modelo lineal en espacio de estados.....                    | 19 |
| 2.3.2 Modelo lineal en función de transferencia.....              | 23 |
| 2.4 Estructuras de control para procesos multivariables.....      | 25 |
| 2.4.1 Control lazo local $K_i, i(s)$ .....                        | 27 |
| 2.4.2 Control prealimentado.....                                  | 28 |
| 2.4.3 Control prealimentado con retroalimentación.....            | 29 |
| 2.5 Control Predictivo basado en modelo.....                      | 30 |
| 2.5.1 Formulación básica.....                                     | 31 |
| 2.5.2 Problema de control predictivo con restricciones.....       | 37 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 3     | Sistema de tres reactores continuos de tanque agitado no isotérmicos, conectados en serie ..... | 42  |
| 3.1   | Modelo No lineal .....  | 43  |
| 3.1   | Modelo lineal sistema de tres CSTRs isotérmicos en serie.....                                   | 47  |
| 3.1.1 | Modelo en espacio de estados .....  | 47  |
| 3.1.2 | Modelo lineal en función de transferencia .....   | 50  |
| 3.2   | Múltiples puntos de equilibrio .....  | 51  |
| 3.3   | Análisis de estabilidad sistema de tres CSTRs isotérmicos en serie .....                        | 55  |
| 4     | Diseño e Implementación de controladores .....  | 58  |
| 4.1   | Control de lazo local.....  | 58  |
| 4.2   | Control prealimentado con retroalimentación.....  | 60  |
| 4.3   | Control predictivo multivariable basado en modelo.....  | 62  |
| 4.3.1 | Parámetros del MPC .....  | 63  |
| 4.3.2 | Matrices de ponderación $Q$ y $R$ .....   | 64  |
| 4.3.3 | Restricciones en $u(k + i)$ .....   | 65  |
| 4.4   | Pruebas en simulación.....  | 65  |
| 5     | Conclusiones.....   | 87  |
| 5.1   | Conclusiones generales .....  | 87  |
| 5.2   | Trabajos Futuros .....  | 89  |
|       | Bibliografía .....  | 91  |
|       | Anexos .....  | 97  |
|       | Anexo A. Modelo no lineal para tres CSTRs en serie no isotérmicos .....                         | 97  |
|       | Anexo B. Modelo en espacio de estados caso de estudio .....                                     | 98  |
|       | Anexo C. Modelo en función de transferencia.....  | 104 |
|       | Anexo D. Control.....   | 106 |
|       | Anexo E. Obtención del modelo en función de transferencia para $n$ unidades                     | 109 |



# Lista de Figuras

---

|   |     |
|---|-----|
| Figura 2.1 Estructura de procesos en serie.....   | 18  |
| Figura 2.2 Estructura de modelo de un proceso en serie.....   | 25  |
| Figura 2.3 Estructura de control por lazo local. ....   | 28  |
| Figura 2.4 Estructura de control Bloque triangular inferior. ....   | 30  |
| Figura 2.5 Estructura de controlador con restricciones. ....  | 40  |
| Figura 3.1 Sistema de tres CSTRs en serie. ....   | 42  |
| Figura 3.2 Calor generado y Calor removido (CSTR 1). ....   | 53  |
| Figura 3.3 Valor de $Ca, i$ para los tres reactores en el punto de equilibrio deseado de Temperatura..... | 55  |
| Figura 3.4 Lugar de las raíces CSTR 1. ....   | 56  |
| Figura 3.5 Lugar de las raíces CSTR 2. ....   | 57  |
| Figura 3.6 Lugar de las raíces CSTR 3. ....   | 57  |
| Figura 4.1 Estructura de control Bloque triangular inferior caso de estudio. ....                         | 60  |
| Figura 4.2 Temperaturas de salida. Decremento en temperatura de $T_{ch0, 1}$ .....                        | 67  |
| Figura 4.3 señales de control de los 3CSTR. Decremento en $T_{ch0, 1}$ .....                              | 67  |
| Figura 4.4 Concentraciones de salida. Decremento en $T_{ch0, 1}$ .....                                    | 67  |
| Figura 4.5 Temperaturas de salida. Perturbación en $T_{ch0, 1}$ .....                                     | 69  |
| Figura 4.6 Señales de control. Perturbación en $T_{ch0, i}$ .....   | 70  |
| Figura 4.7 Concentración de salida. Perturbación en $T_{ch0, 1}$ .....                                    | 71  |
| Figura 4.8 Temperaturas de salida. Perturbación en $T_{ch0, i}$ .....                                     | 72  |
| Figura 4.9 Señal de control, flujo de chaqueta en cada reactor. ....                                      | 72  |
| Figura 4.10 Concentración de salida en cada reactor. Perturbación en $T_{ch0, i}$ .....                   | 73  |
| Figura 4.11 Temperaturas de salida. Perturbación +5% en $Ca0$ . ....                                      | 75  |
| Figura 4.12 Concentraciones de salida. Perturbación +5% $Ca0$ .....                                       | 76  |
| Figura 4.13 Señales de control. Perturbación +5% $Ca0$ . ....   | 76  |
| Figura 4.14 Temperaturas de salida. Perturbación -5% $Ca0$ . ....   | 78  |
| Figura 4.15 Concentraciones de salida. Perturbación -5% $Ca0$ . ....                                      | 78  |
| Figura 4.16 Señales de control. Perturbación -5% $Ca0$ . ....   | 79  |
| Figura 4.17 Temperaturas de salida. Cambio de referencia. ....  | 81  |
| Figura 4.18 Señal de control. Cambio de referencia a Temperaturas de reactor. .                           | 81  |
| Figura.4.19 Temperaturas de salida, saturación en control Lazo local y BTI. ....                          | 82  |
| Figura 4.20 Concentraciones de salida. Cambio de referencia .....   | 83  |
| Figura 4.21 Señales de control. Cambio de referencia. ....  | 83  |
| Figura A.0.1 Sintonización del controladorK22. Sisotool.....  | 107 |
| Figura A. 0.2 Sintonización del controlador K33.....  | 108 |

# Lista de Tablas

---

|   |    |
|---|----|
| Tabla 2.1 Dimensión de matrices y vectores usados en el cálculo de predicción y entrada óptima. ....          | 37 |
| Tabla 3.1 Variables del sistema de tres CSTRs en serie. ....  | 45 |
| Tabla 3.2 Valores de variables de estados y parámetros en estado estable del sistema de 3-CSTRs en serie..... | 46 |
| Tabla 3.3 Valores de variables de estado y parámetros en estado estable CSTRs isotérmico.....                 | 46 |
| Tabla 3.4 Matriz de estados A. Sistema de tres CSTRs en serie.....  | 48 |
| Tabla 3.5 Matriz de entradas B. Sistema de 3CSTRs en serie. ....  | 49 |
| Tabla 3.6 Matriz de salidas C. Sistema de 3CSTRs en serie.....  | 49 |
| Tabla 4.1 Ganancia de controladores PID Lazo local. ....  | 60 |
| Tabla 4.2 Restricciones en señal de control.....  | 65 |
| Tabla 4.3 Comparación entre controladores. Incremento en $T_{ch0,1}$ .....                                    | 68 |
| Tabla 4.4 Comparación de controladores. Perturbación en $T_{ch0,i}$ .....                                     | 71 |
| Tabla 4.5 Comparación de controladores Perturbación en $T_{ch0,i}$ .....                                      | 73 |
| Tabla 4.6 Comparación de controladores. $\mathbf{Ca0} +5\%$ .....   | 77 |
| Tabla 4.7 Comparación de controladores. Perturbación $-5\%$ en $\mathbf{Ca0}$ . ....                          | 79 |

# Nomenclatura

---

## Mayúsculas

|            |  |
|------------|--|
| $A$        | Matriz de estados  |
| $B$        | Matriz de entradas   |
| $C$        | Matriz de salidas  |
| $E$        | Matriz de perturbaciones   |
| $A_d$      | Matriz de estados en tiempo discreto                             |
| $B_d$      | Matriz de entradas en tiempo discreto                            |
| $C_d$      | Matriz de salidas en tiempo discreto                             |
| $C_{a0}$   | Concentración de entrada   |
| $C_{a,i}$  | Concentración de salida en el reactor $i$                        |
| $G(s)$     | Matriz de funciones de transferencia con respecto a las entradas |
| $G_d(s)$   | Función de transferencia con respecto a las perturbaciones       |
| $E_A$      | Energía de activación del componente de la reacción              |
| $E_R$      | Matriz de restricciones en $\Delta u(k)$                         |
| $F_R$      | Matriz de restricciones en $u(k)$                                |
| $G_R$      | Matriz de restricciones en salidas $y(k)$                        |
| $H_p$      | Horizonte de predicción  |
| $H_u$      | Horizonte de control   |
| $K(s)$     | Matriz de controladores para procesos multivariables             |
| $Q$        | Matriz de ponderación del error de seguimiento                   |
| $R$        | Constante universal de los gases ideales                         |
| $R$        | Matriz de ponderación de entradas                                |
| $T_0$      | Temperatura de entrada   |
| $T_i$      | Temperatura de salida del reactor $i$                            |
| $T_{ch,i}$ | Temperatura de salida en chaqueta del reactor $i$                |
| $V(k)$     | Función costo  |

|          |                     |
|----------|---------------------|
| $V$      | Volumen de reactor  |
| $V_{ch}$ | Volumen de chaqueta |

### **Minúsculas**

|       |  |
|-------|--|
| $x$   | Vector de estados en variables de desviación |
| $x_p$ | Vector de estados en variable de proceso     |
| $u_i$ | Entrada de la $i$ –ésima unidad              |
| $y$   | Vector de salidas del sistema                |
| $d_i$ | Vector de perturbaciones                     |
| $k$   | Instante de tiempo                           |

### **Acrónimos**

CSTR – *Continuous Stirred Tank*. Reactor continuo de tanque agitado.

MIMO – *Multiple input Multiple Output* . Múltiples entradas múltiples salidas.

MPC – *Model Predictive Control*. Control Predictivo basado en Modelo.

PID – *Proportional Integral Derivative*. Proporcional –Integral-Derivativo.

# 1 Introducción

---

Los procesos industriales son en su mayoría multivariantes y tienen múltiples interacciones. La ingeniería de control de procesos es indispensable para tareas de automatización y supervisión de estos. Los procesos están constituidos por operaciones básicas, necesarias para la transformación de materiales. El sistema de control permite una operación más fiable y sencilla al encargarse de obtener condiciones de operación estables y corregir toda desviación que se pueda producir con respecto a los valores nominales.

Los métodos de control clásico pueden tener problemas para manejar sistemas multivariantes, sobre todo cuando hay un alto grado de interacción entre las variables. Una forma común de abordar el control de sistemas multivariantes es descomponiendo al sistema en un conjunto de sistemas SISO que pueden ser tratados como lazos independientes. El control multivariable permite desarrollar esquemas de control cuando las interacciones entre variables y entre los diferentes lazos de control son significativas. Un tipo particular de sistemas multivariantes son los procesos en serie, los cuales están formados por unidades conectadas una después de otra, los estados de cada unidad dependen de los estados, las entradas y las perturbaciones de la misma unidad y de los estados de las unidades anteriores, pero no de los estados de las siguientes unidades.

En el presente trabajo de investigación se utiliza la metodología desarrollada en [1] para definir estructuras generales de modelado y control de procesos multivariantes en serie. Además, se desarrolla un control predictivo basado en modelo (MPC) para procesos multivariantes en serie. El MPC se ha utilizado para controlar plantas químicas y es aceptado como una herramienta importante en aplicaciones de procesos industriales. Las estructuras de modelado y de control para procesos en serie se prueban en un sistema de tres reactores continuos de tanque agitado en serie (CSTR, por sus siglas en inglés) y se hace una comparación del desempeño de los diferentes controladores diseñados. La simulación del sistema se hace usando el modelo de un reactor de tanque agitado no isotérmico,

en operación continua, y se asume un control ideal de nivel. En este trabajo, el propósito principal del control del sistema es mantener una operación isotérmica ante cambios en las entradas que pueden desviar la temperatura de operación de las unidades. De manera indirecta, se logra mantener la concentración del reactante consumido en una reacción de primer orden, en niveles cercanos al valor nominal.

El control de este tipo de reactores es bastante estudiado en ingeniería de procesos, como parte importante de plantas completas y también en el área de control de procesos. Un CSTR es un sistema no lineal que puede presentar múltiples estados de equilibrio e inestabilidades que dificultan su control, por esta razón, esta planta ha sido muy utilizada para probar diferentes técnicas de control, ante diferentes objetivos de control y abordando diferentes problemas y retos que implica el comportamiento dinámico de estos equipos. Por las razones mencionadas se ha seleccionado este tipo de proceso, pero considerando un arreglo de tres unidades.

## 1.1 Planteamiento del problema

Los procesos en la industria presentan dinámicas con comportamientos no lineales, interacciones entre variables, retardos, relaciones de recirculación o de retroalimentación de una unidad de proceso a otra, entre otras características que dificultan el análisis matemático y en gran medida el diseño del sistema de control. No sólo es importante saber lo que ocurre al interior del proceso, las variables externas pueden llegar a tener gran influencia en un proceso perturbándolo y modificando las salidas.

En esta tesis se aborda la problemática de control de procesos multivariables de un tipo específico, los procesos en serie. Debido a las características de estos procesos es posible desarrollar de manera generalizada el modelado matemático, y obtener una estructura de modelo lineal, general y útil para el diseño del control para este tipo de sistemas. Debido a que el control predictivo ha sido de interés en la industria química, se busca explorar la aplicación del control predictivo basado en modelo MPC multivariable (por sus siglas en inglés *Model Predictive Control*) para un caso de estudio de procesos multivariables en serie y analizar su desempeño,

utilidad y ventajas en comparación con esquemas de control clásicos. El desempeño se compara en términos del ITSE (por sus siglas en inglés, Integral of Time Multiply Squared Error) y del IAE (por sus siglas en inglés, Integral Absolute Error), tiempos de establecimiento, esfuerzos de control y se prueba ante diferentes perturbaciones.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo General

Definir estructuras de modelado y control para procesos multivariables en serie y desarrollar un control predictivo multivariable basado en modelo para un caso de estudio.

### 1.2.2 Objetivos particulares

- Hacer el desarrollo analítico para obtener estructuras de modelado y de control para el caso de sistemas multivariables en serie, con base en la metodología de Skogestad.
- Obtener un modelo matemático para un sistema multivariable en serie.
- Diseñar esquemas de control con enfoque clásico (lazo local PID y combinación de control prealimentado y control por retroalimentación).
- Diseñar un esquema de control MPC multivariable para el caso de estudio seleccionado, que cumpla con el propósito de control del proceso ante perturbaciones.

## 1.3 Justificación

Se busca usar una técnica de control probada y ampliamente aceptada para desarrollo de controladores de procesos químicos, y aplicarla a procesos multivariables en serie, de los cuales es posible obtener una estructura general de modelos lineales que facilita el cálculo de un controlador multivariable.

El control PID es ampliamente usado en la industria química. Cuando se usan técnicas adecuadas de sintonización el desempeño de los controladores PID es muy

ventajoso para este tipo de sistemas, aun cuando se diseñan estructuras con lazos de control descentralizados en sistemas multivariables.

Sin embargo, para sistemas complejos (no lineales, inestables, con interacciones importantes, etc.), los controladores PID pueden no ser suficientes para contrarrestar los efectos de perturbaciones o cambios en el sistema. La obtención de una estructura de control MPC multivariable para procesos en serie permite aplicar una técnica de control centralizada (MIMO), con la cual, las interacciones entre los procesos son manejadas y todas las acciones de control están disponibles para contrarrestar el efecto de disturbios o perturbaciones provocadas por unidades de proceso anteriores o del proceso mismo en cualquiera de las variables controladas.

El interés es demostrar las ventajas de un control MPC multivariable para un sistema de reactores en serie con relación al tradicional PID. En particular, se ha seleccionado el caso de reactores en serie porque el control de este tipo de reactores es un problema recurrente en ingeniería de procesos y en el área de control de procesos. Un CSTR puede presentar múltiples estados de equilibrio e inestabilidades que dificultan su control, por esta razón, esta planta es útil para probar diferentes técnicas de control, abordar diferentes problemas que implica el comportamiento dinámico no lineal de estos equipos y en el caso de este trabajo, se piensa que es posible demostrar las ventajas del control multivariable de procesos ante cambios en el sistema o perturbaciones en las entradas.

## 1.4 Alcances

- Estructura de modelo de procesos en serie para un caso de estudio.
- Diseño de un controlador predictivo basado en modelo multivariable para un proceso en serie en estudio.
- Pruebas en simulación de controladores.
- Comparación de control clásico contra el controlador predictivo multivariable desarrollado.



## 1.5 Estado del arte

### 1.5.1 Proceso en serie

En la industria de procesos es muy común encontrar procesos multivariantes, procesos interconectados, procesos con múltiples interacciones de variables o sin interacción de variables. Una estructura de proceso que implica un conjunto de sistemas de un mismo tipo o diferente conectados uno tras otro, es común y es tratada en el área de control de procesos; a este tipo de procesos se les conoce como procesos en serie.

Existen dos categorías de sistemas en serie, *sin interacción* y *con interacción*. Los sistemas sin interacción son aquellos en los que no existe influencia de las propiedades de un proceso en el proceso anterior, en los sistemas en serie con interacción sucede lo contrario, las interacciones pueden ocurrir e influenciar la salida del proceso actual con la salida del proceso anterior y posterior [2].

En ocasiones estos tipos de sistemas en serie son llamados como sin carga (*nonloading*) y con carga (*loading*), sin interacción y con interacción respectivamente [3]. En [1] se describe a los procesos en serie como aquellos en los que no existen interacciones con todos los subsistemas del proceso, únicamente existe interacción con las unidades anteriores.

En un proceso en serie la salida de una unidad se convierte en entrada de la siguiente unidad, los efectos de cambio que ocurran en las variables de una unidad de proceso se propagaran en las unidades siguientes con diferentes velocidades pero de forma paralela [4]. Los polos de un proceso en serie pueden ser determinados a partir de los polos de las funciones de transferencia de cada subsistema o unidad de proceso [5].

Algunas aplicaciones industriales de reactores en serie han sido reportadas, por ejemplo, en [6] y [7]. El primer estudio se refiere al diseño y modelado de reactores de polimerización para producir polietileno de baja densidad; se estudian diferentes configuraciones y concluyen que un sistema de cuatro reactores en serie

tiene un desempeño comparable con el de un reactor tubular. El segundo estudio se refiere al diseño y modelado de reactores en serie para la hidrogenación de benceno con el fin de producir ciclohexano, usando catalizadores de Ru-CO-B/ZrO<sub>2</sub> (Rutenio - Monóxido de Carbono - Boro/ Dióxido de Zirconio). La operación en serie favorece la actividad catalítica y la selectividad del catalizador. En el trabajo de [8] se presentó un estudio sobre la síntesis y optimización de redes de CSTRs. Los autores propusieron una red de cinco reactores en serie para aplicaciones de nitruración de compuestos aromáticos y remarcaron el interés en otras aplicaciones industriales, por ejemplo, la eliminación de H<sub>2</sub>S (Ácido sulfhídrico) and CO de gas obtenido del cracking de hidrocarburos (purificación de gas).

En los trabajos descritos se muestra el interés de la operación de las unidades en serie, pero su alcance queda en el análisis de diseño y desempeño de los procesos y no se trata el problema de control, pero si se hace énfasis en la importancia de las condiciones de operación, las cuales solo se pueden mantener con un control adecuado.

## 1.5.2 Control a procesos multivariables

La interacción entre variables en un proceso es una característica de los procesos multivariables, ya que una entrada puede afectar más de una variable de salida del proceso. En un proceso en serie donde no solamente son relevantes las interacciones en el subsistema sino también con otros subsistemas. Por lo que el control que se aplique a estos procesos debe de ser un control multivariable que tenga en cuenta esas interacciones.

En la industria y en teoría de control estas interacciones son despreciadas para desarrollar los sistemas de control y se aborda con controladores independientes para tratar al sistema como si estuviera compuesto solo de unidades monovariables, es decir, tratan generalmente el problema de control de procesos multivariables de manera desacoplada [9,10]. Manejando una estructura de control descentralizado, comúnmente se usa la técnica de control PID. Algunos ejemplos de trabajos en los que se trató el control de procesos químicos multivariables de manera desacoplada y utilizando control PID son los siguientes [11,12,13,14,15].

En [16] se presentó un problema de procesos multivariable para el cual se aplicó un control por desacoplo utilizando dos lazos de control, el primero para regulación de nivel y el segundo para regular temperatura, se utilizan 5 diferentes técnicas para sintonizar los controladores PID. En ocasiones este tipo de controladores son insuficientes para rechazar perturbaciones, tratar con sistemas inestables y sobre todo para poder compensar las pérdidas de información al desprestigiar la interacción con las unidades de proceso. Otra forma de tratar estos procesos multivariables es realizar control centralizado con diversas redes de desacoplo, en [17] se aplicó esta estrategia de control a un sistema multivariable, un aerogenerador de velocidad variable, sin embargo es necesario incorporar saturaciones al sistema para evitar el deterioro que se produce en el equipo.

En los procesos en serie multivariables estas interacciones pueden ser fuertes ya que la salida de una unidad de proceso o subsistema, se convierte en la entrada del siguiente, lo cual hace que los controladores que desprestigian esas interacciones resulten insuficientes para tratar con el problema de control multivariable. Un controlador multivariable usa dos principios una acción de prealimentado (*feedforward*) para contrarrestar las interacciones entre variables en el proceso o con otros procesos interconectados así como una corrección de retroalimentación (*feedback*) basada principalmente en mediciones de la salida [18].

### 1.5.3 Control MPC aplicado a procesos multivariables

Una forma de solucionar esto es utilizar un controlador multivariable a todo el sistema en serie, uno de los controladores más populares y capaces de abordar esta problemática de sistemas multivariables en serie es el control MPC. El control predictivo basado en modelo (MPC) se ha desarrollado considerablemente en las últimas décadas, tanto en la industria como en la comunidad de investigación, esto se debe a que el control MPC permite acciones de optimización mediante la definición de una función costo. Comúnmente se optimiza el error de desviación de salida con respecto a la referencia y la variación de las entradas; además, el control predictivo basado en modelo puede ser utilizado para procesos que tienen tiempos muertos, procesos multivariables, aprovecha referencias futuras cuando están

disponibles e introduce de una manera natural la acción de control en adelanto para compensar perturbaciones medibles [19,20,21,22].

La aplicación del control MPC es útil para manejar de una forma directa problemas de control de tipo multivariable, dado que MPC es un enfoque basado en optimización, en el cual se deben ajustar varios parámetros apropiadamente, estos son el horizonte de predicción, el horizonte de control así como también las matrices de penalización incluidas en la función costo [23,24,25]. En [20] se controló un sistema de tanques acoplados, con dos entradas y dos salidas mediante un control MPC multivariable para regular nivel de líquido, demostrando que el controlador MPC rechazó perturbaciones y fue robusto ante errores de modelo. En [26] se diseñó un control MPC para un sistema multivariable dando como resultado una buena regulación de las variables de interés y rechazo de perturbaciones sin alterar la dinámica del sistema.

En [1] se presentó un proceso multivariable en serie para la Neutralización de pH, se realizó control predictivo y se comparó con controladores clásicos. En el trabajo de [14] se realizó una comparación entre controlador PI descentralizado y un MPC multivariable mediante simulación a una unidad de recuperación de gas (GRU, por sus siglas en inglés) la cual consiste en tres columnas de destilación operando en serie: un desetanizador<sup>1</sup>, un despropanizador<sup>2</sup> y un desbutanizador<sup>3</sup>, el objetivo de control es mantener el nivel en el fondo de la primera columna es ahí donde se lleva a cabo el proceso de GRU. Se diseñaron tres controladores MPC multivariable con tres diferentes estrategias; el primer controlador MPC es utilizado en la primera columna para un control indirecto de nivel, el segundo controlador MPC es usado para mover el valor de referencia del controlador PI para el control de nivel y el tercer controlador MPC es para controlar el nivel directamente manipulando el flujo. El control MPC fue capaz de ajustar múltiples variables manipuladas de forma simultánea, gracias a esto el control MPC resultó en un

---

<sup>1</sup> Columna de destilación fraccionada que se utiliza para separar el etano del etileno y de los C<sub>3</sub>.

<sup>2</sup> Columna de fraccionamiento para separar el propano y los componentes más ligeros de los hidrocarburos más pesados.

<sup>3</sup> Columna de destilación fraccionada que se utiliza para separar el butano del gas natural durante el proceso de refinación.

beneficio económico significativo (un ahorro de energía del 6%) y un mejor desempeño (no presentó offset) comparado con el control descentralizado con PI.

En [27] se diseña con control multivariable MPC para una columna de destilación con tres entradas y tres salidas, manipulando el drenaje superior, el drenaje lateral y el reflujo de fondo, se pretende controlar la composición de salida del extremo superior, las composiciones laterales y la temperatura de reflujo de fondo, en este trabajo se utilizaron restricciones buscando evitar respuestas inversas, reducir oscilaciones y regular las salidas. En [28] se diseñó un control predictivo multivariable se diseña un control predictivo multivariable de  $2 \times 2$  para controlar una columna de destilación dónde el objetivo de control es obtener la composición deseada a la salida, también en [29] utilizó un control predictivo multivariable para controlar tres tanques conectados en cascada con interacción el objetivo de controles mantener el nivel en los tanques: la aplicación de estos controladores se realizó en simulación donde se notó la ventaja del control MPC ante el rechazo de perturbaciones.

#### 1.5.4 Control a Reactores continuos de tanque agitado (CSTR)

Un reactor continuo de tanque agitado (CSTR) tiene un rol significativo en los procesos químicos. En un CSTR el calor es añadido o removido por una diferencia de temperaturas ente el fluido de la chaqueta y el fluido del reactor [30]. El control de temperatura en un CSTR ha sido un tema bastante abordado en teoría de control debido a que es un sistema no lineal complejo y que habitualmente tiene amplios rangos de operación [31]. En [32] se diseñó un controlador PID adaptable para controlar la temperatura en un CSTR y obtener la concentración deseada a la salida, la implementación de este controlador en simulación obtuvo desempeños satisfactorios. En [33] se controla un CSTR en un enfoque multivariable para controlar concentración y temperatura de salida de reactor diseñando un controlador PID multi-lazo sintonizado mediante el método de modelo interno de control (IMC, por sus siglas en inglés).

## 1.6 Organización del documento

El documento de tesis está compuesto por 5 capítulos. En el segundo capítulo se introduce a la definición de procesos en serie y se describe la metodología para la obtención de los modelos lineales en función espacio de estados y en función de transferencia para sistemas en serie, también se describen las estructuras de control para procesos en serie. Se presenta también la metodología para el diseño de un control predictivo basado en modelo con restricciones.

En el capítulo tres se presenta el caso de estudio de la investigación, se reportan análisis en régimen permanente y en dinámico, y la estructura de modelo lineal de proceso en serie de este sistema.

En el capítulo 4 se detalla el diseño y prueba de los controladores diseñados aplicados al caso de estudio para evaluar el desempeño antes distintas perturbaciones y se realizan comparaciones entre controladores.

En el capítulo cinco se dan las conclusiones resaltando algunos aspectos importantes de los resultados del trabajo de investigación y se presentan trabajos futuros.

Por último, se reportan las referencias consultadas para la elaboración del documento y los anexos.

## 2 Marco Teórico

### 2.1 Proceso en serie

Un proceso en serie consiste de una sucesión de unidades de un mismo tipo o de tipos diferentes, que interactúan entre sí de la siguiente manera: los estados de una unidad tienen influencia en los estados de unidades siguientes, pero no viceversa. Aquellos procesos con recirculaciones de materia o energía, no se considera proceso en serie.

Un proceso en serie se muestra en la Figura 2.1, en estos sistemas, los estados en cada unidad dependen de los estados de la unidad misma ( $x_i$ ), la salida de la unidad anterior ( $y_{i-1}$ ), y las variables exógenas ( $u_i, d_i$ ) en la unidad.

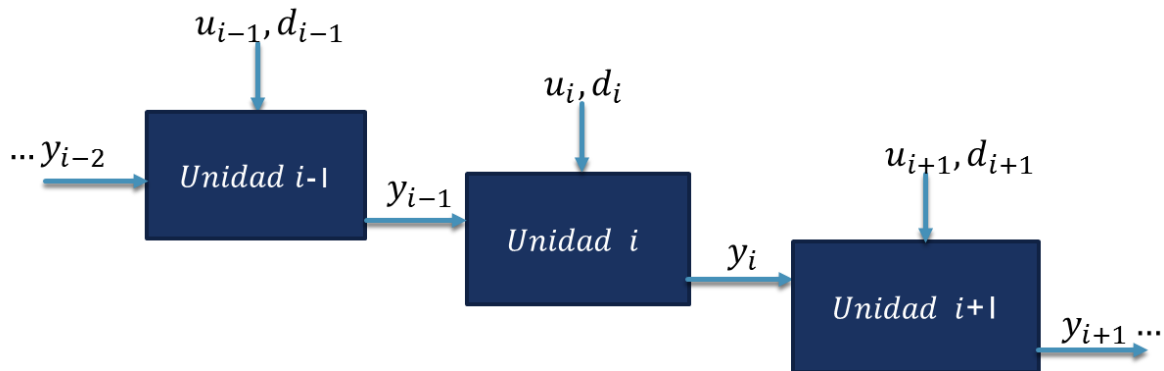


Figura 2.1 Estructura de procesos en serie.

### 2.2 Modelo no lineal para procesos en serie

Generalizando para sistemas no lineales y con base en la definición de procesos en serie (Figura 2.1) el modelo no lineal para la unidad  $i$  esta dado de la forma siguiente

$$\frac{d}{dt} x_i = f(x_i, x_{i-1}, u_i, d_i), \quad (2.1)$$

donde

$i$ :  $i$ -ésima unidad;  $i = 1, 2, \dots, n$

$x_i$ : vector de estados de la unidad  $i$

$x_{i-1}$ : vector de estados de la unidad  $i-1$

$u_i$  : vector de entradas de la unidad  $i$

$d_i$  : vector de perturbaciones de la unidad  $i$

Se define las salidas de la unidad  $i$  como una función de estados de esta unidad

$$y_i = g_i(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.2)$$

En este modelo,  $n$  es el número de unidades;  $x_i \in \mathbb{R}^{n_e}$  es el vector de  $n_e$  variables de estado de la unidad  $i$ ;  $y_i \in \mathbb{R}^{n_s}$  es un vector de  $n_s$  variables de salida de la unidad  $i$ ;  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  es un vector de  $n_u$  variables de entrada de la unidad  $i$ ,  $d_i \in \mathbb{R}^{n_d}$  es un vector de  $n_d$  perturbaciones en la unidad  $i$ , además  $f_i$  y  $g_i$  son vectores de  $n_e$  y  $n_s$  funciones no lineales de la unidad  $i$ , respectivamente.

## 2.3 Modelo lineal para procesos en serie

### 2.3.1 Modelo lineal en espacio de estados

Las ecuaciones del modelo no lineal (2.1) y (2.2) son linealizadas alrededor de un punto de operación mediante la serie truncada de Taylor. Como resultado, se obtiene un modelo lineal que se aproxima al modelo no lineal alrededor de un punto de equilibrio, las variables de estado representan desviaciones del punto de equilibrio como sigue

$$\frac{d}{dt} x_i = f_i(x_i, x_{i-1}, u_i, d_i) \approx A_{i,i-1} x_{i-1} + A_{i,i} x_i + B_i u_i + E_i d_i, \quad (2.3)$$

$$y_i = C_i x_i. \quad (2.4)$$

Donde las matrices  $A_{i,j}$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  y  $E_i$  son matrices Jacobianas evaluadas en el punto de operación nominal (o punto de equilibrio), las cuales se definen a continuación

$$A_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j \in [i, i-1], \quad B_i = \frac{\partial f_i}{\partial u_i}, \quad C_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad E_i = \frac{\partial f_i}{\partial d_i}, \quad (2.5)$$



con  $i = \text{número de unidad } (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ,  
 $j = \text{vector de estados}$ ,

$A_{i,j}$  : matriz de estados de la unidad  $i$ , asociada al vector de estados  $x_j$ .

$B_i$ : matriz de entradas de la unidad  $i$ .

$C_i$ : matriz de salidas de la unidad  $i$ .

$E_i$ : matriz de perturbaciones en la unidad  $i$ .

La obtención del modelo lineal en espacio de estados para  $n$  unidades se obtiene de la siguiente forma

| <i>Unidad</i> | <i>Modelo Lineal</i>  |
|---------------|---|
| 1             | $\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, u_1, d_1) \approx A_{11}x_1 + B_1u_1 + E_1d_1,$                             |
| 2             | $\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2, x_1, u_2, d_2) \approx A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u_2 + E_2d_2,$            |
| 3             | $\frac{dx_3}{dt} = f_3(x_3, x_2, u_3, d_3) \approx A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + B_3u_3 + E_3d_3,$            |
| ⋮             | ⋮   |
| $n$           | $\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_n, x_{n-1}, u_n, d_n) \approx A_{n,n-1}x_{n-1} + A_{nn}x_n + B_nu_n + E_nd_n,$ |

| <i>Unidad</i> | <i>Salidas</i>  |
|---------------|-----------------|
| 1             | $y_1 = C_1x_1,$ |
| 2             | $y_2 = C_2x_2,$ |
| 3             | $y_3 = C_3x_3,$ |
| ⋮             | ⋮               |
| $n$           | $y_n = C_nx_n,$ |

La representación en espacio de estados de todo el proceso en serie de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.6)$$

$$y(t) = Cx(t) + Ed(t). \quad (2.7)$$

Mediante los elementos matriciales obtenidos con el procedimiento de linealización anterior. Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $E$  que representan al proceso en serie (generalizando para un proceso con  $n$  unidades) se representan en la forma siguiente

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & A_{n-r,n-r-1} & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

donde cada elemento  $A_{i,j}$  es una matriz, estas matrices de estados corresponden la unidad  $i$  e introducen la dependencia de los estados de la unidad  $i-1$ .

Así, para la unidad 1, los estados de esta unidad se calculan en función de la matriz de estados que se relaciona con los estados de la unidad 1 ( $A_{1,1}$ ). Para la unidad 2, los estados se calculan en función de la matriz de estados que relaciona los estados de la unidad 1 ( $A_{2,1}$ ), pero también en función de la matriz de estados que relaciona los estados de la unidad 2 ( $A_{2,2}$ ). Para la unidad 3, los estados se calculan en función de la matriz de estados que relaciona los estados de la unidad 2 ( $A_{3,2}$ ), pero también en función de la matriz de estados que relaciona los estados de la unidad 3 ( $A_{3,3}$ ), y así sucesivamente.

Los elementos de la diagonal introducen la dependencia de cada unidad, y para cada unidad, también se considera la influencia de las unidades anteriores, por esto hay dos matrices en cada fila de la matriz general  $A$  del proceso en serie.

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & B_3 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_n \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & C_3 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_n \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & E_3 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E_n \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

donde el vector de estados  $x_p = \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  está compuesto por los vectores de estado de

cada unidad del proceso en serie. El vector de estados  $x$  dado en variables de desviación, considere el subíndice  $ss$  como referencia al estado estable, queda

$$x = \begin{bmatrix} x_{i-1} - x_{i-1,ss} \\ x_i - x_{i,ss} \\ \vdots \\ x_n - x_{n,ss} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

De manera análoga el vector de entradas queda

$$u = [u_1 - u_{1,ss} \quad u_2 - u_{2,ss} \quad u_3 - u_{3,ss} \quad \cdots \quad u_n - u_{n,ss}]. \quad (2.13)$$

Con lo anterior se obtiene un modelo con la forma de espacio de estados de las ecuaciones (2.6)-(2.7), donde  $A \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_e \times l}$  y  $C \in \mathbb{R}^{m \times n_e}$ ,  $n_e$  es el número de estados,  $m$  es el número de salidas controladas y  $l$  es el número de entradas.

Al igual que la matriz de estados del proceso en serie,  $B$ ,  $C$  y  $E$  también contienen elementos definidos como matrices. Además, los elementos de  $x$ ,  $u$  y  $y$ , son

vectores, es decir, cada elemento corresponde a los estados, entradas y salidas de cada unidad.

### 2.3.2 Modelo lineal en función de transferencia

La obtención del modelo lineal en función de transferencia de un proceso en serie se obtiene aplicando transformada de Laplace a las ecuaciones (2.3) y (2.4) e insertando de manera recursiva las variables de unidades de proceso anterior, se obtiene

$$y(s) = G(s)u(s) + G_d(s)d(s). \quad (2.14)$$

En la ecuación (2.14) se define el vector de salida  $y(s)$  como todas las salidas del sistema en serie, a  $u(s)$  como todas las entradas y a  $d(s)$  como todas las perturbaciones. Definimos  $M_i = (sI - A_{i,i})^{-1}$ . Para el desarrollo a detalle del procedimiento para  $n$  unidades ver Anexo E.

Formando así la matriz  $G(s)$

$$G(s) = \begin{bmatrix} C_1 M_1 B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_2 M_2 A_{2,1} M_1 B_1 & C_2 M_2 B_2 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ C_n M_n \prod_{r=1}^{n-1} [A_{n-r+1, n-r} M_{n-r}] B_1 & C_n M_n \prod_{r=1}^{n-2} [A_{n-r+1, n-r} M_{n-r}] B_n & \dots & \dots & C_n M_n B_n \end{bmatrix},$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ G_{n,1} & G_{n,2} & \dots & \dots & G_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

donde, al igual que en el modelo en el espacio de estados, cada elemento de la función de transferencia del proceso en serie es una matriz. Como se puede observar en (2.4), la estructura del modelo en función de transferencia es una matriz triangular formada por matrices de funciones de transferencia.

Los elementos arriba de la diagonal son ceros porque no hay interacción de la unidad  $i$  con las unidades siguientes, en cambio, la diagonal inferior es diferente a cero porque se consideran las interacciones con las unidades anteriores.

La obtención de la matriz  $G_d(s)$  es idéntica a  $G(s)$  excepto que para  $G_d(s)$ , la matriz  $B_i$  es remplazada por  $E_i$  (las perturbaciones de cada unidad son asumidas independientes). La matriz  $G_d(s)$  es

$$G_d(s) = \begin{bmatrix} C_1 M_1 E_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 M_2 A_{2,1} M_1 E_1 & C_2 M_2 E_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ C_n M_n \prod_{r=1}^{n-1} [A_{n-r+1, n-r} M_{n-r}] E_1 & C_n M_n \prod_{r=1}^{n-2} [A_{n-r+1, n-r} M_{n-r}] E_n & \cdots & \cdots & C_n M_n E_n \end{bmatrix},$$

$$G_d(s) = \begin{bmatrix} G_{d,1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_{d,2,1} & G_{d,2,2} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ G_{d,n,1} & G_{d,n,2} & \cdots & \cdots & G_{d,n,n} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

De acuerdo con la forma de las matrices de función de transferencia (2.15) y (2.16), es decir, que son matrices de bloque triangular inferior, podemos deducir las siguientes propiedades:

- El vector de estados de una unidad de proceso no es influenciado por las entradas de control y perturbaciones de las unidades siguientes.
- La estabilidad en lazo abierto del proceso total se conoce por la estabilidad en cada unidad de los elementos en  $G(s)$  y  $G_d(s)$ , y está dada por los productos de  $M_i = (sI - A_{i,i})^{-1} \forall i \in [i=1, 2, \dots, n]$ .

El modelo nominal de la unidad  $i$  en función de transferencia puede ser expresado como se muestra en la Figura 2.2, en esta estructura se toman en cuenta las perturbaciones provocadas por la unidad anterior.

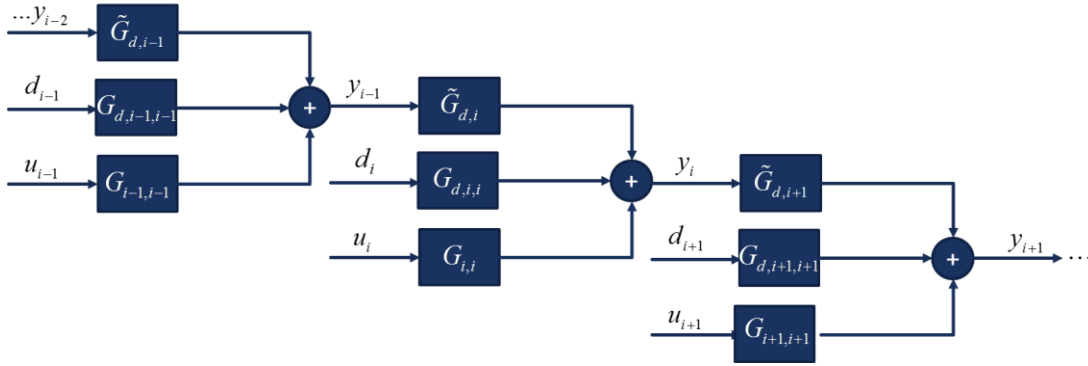


Figura 2.2 Estructura de modelo de un proceso en serie.

Por lo que ahora el modelo nominal en función de transferencia para la unidad  $i$  puede ser expresado por

$$y_i = G_{i,i}u_i + \tilde{G}_{d,i}y_{i-1} + G_{d,i,i}d_i, \quad (2.17)$$

donde  $\tilde{G}_{d,i}(s)$  es la función de transferencia de las “perturbaciones” debido a variaciones en la unidad  $i-1$  a la salida  $y_i$ ,

$$\tilde{G}_{d,i}(s) \triangleq G_{i,i-1}G_{i-1,i-1}^{-1}. \quad (2.18)$$

En este capítulo se presentaron las estructuras de modelado para procesos en serie. Este tipo de sistemas son multi-unidades y consecuentemente, multivariables. El modelo general en función de transferencia para sistemas en serie es útil para el diseño de controladores. En la sección siguiente se presentan algunas estructuras generales para el control de sistemas multivariables, que resultan adecuadas para procesos en serie. El diseño de los controladores necesarios para implementar estas estructuras o configuraciones de control, tiene como base los modelos presentados en las secciones 2.3.1 y 2.3.2.

## 2.4 Estructuras de control para procesos multivariables

Una vez explicado el concepto de proceso en serie, y después de definir la estructura general del modelo lineal en función de transferencia para este tipo de sistemas

(sección (2.15)), en esta sección se presentan algunas estructuras de control para los procesos multivariables en serie.

Partiendo de la forma general de control de un proceso multivariable, se explican las características de los distintos elementos que componen el control. Asumimos que las referencias son constantes, y que queremos controlar todas las salidas mediante una ley de control de retroalimentación de salida como sigue

$$u(s) = K(s)[r - y(s)], \quad (2.19)$$

donde  $r_i$  es la referencia deseada y  $K(s)$  es el controlador formado por las ganancias en lazo cerrado para el proceso multivariable.  $K(s)$  es una matriz con las mismas dimensiones que la matriz  $G(s)$

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{1,1}(s) & K_{1,2}(s) & \dots & K_{1,n}(s) \\ K_{2,1}(s) & K_{2,2}(s) & \dots & K_{2,n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n,1}(s) & K_{n,2}(s) & \dots & K_{n,n}(s) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Para describir los elementos del controlador, se distinguen los siguientes tres grupos:

#### **Elementos en la diagonal ( $K_{i,i}$ ):**

Los elementos en la diagonal son los que componen al control por desacoplo o control local. En esta estructura control solo las entradas en una unidad son utilizadas para controlar las salidas de la misma unidad. Las interacciones entre los lazos de control se consideran nulas.

#### **Elementos por encima de la diagonal ( $K_{i,j}, i < j$ ):**

Estos elementos representan una retroalimentación de las salidas de las unidades siguientes. Cuando un retardo efectivo a través de la unidad es largo, estos bloques parecen ineficaces ya que la retroalimentación local de la unidad siempre será más rápida. En el caso particular de procesos en serie, estos elementos serán iguales a

cero, ya que en este tipo de procesos no existe esa interacción con unidades siguientes, ni recirculaciones, por lo que estos lazos de control no se necesitan.

**Elementos debajo de la diagonal ( $K_{i,j}, i > j$ ):**

A través de estos elementos, se representa la influencia de la salida de la unidad anterior en la unidad actual. Esta influencia se debe a que las unidades anteriores actúan como perturbaciones para las unidades siguientes. Este bloque de control tiene elementos que pueden considerarse como elementos “prealimentados (o control *feedforward*)”.

**2.4.1 Control lazo local  $K_{i,i}(s)$**

El control de lazo local es bastante común, donde las entradas de una unidad son usadas para controlar las salidas de la misma unidad, también es conocido como controlador por desacoplo. La ley de control por retroalimentación para este control local es la siguiente

*Control local:* 
$$u_i = K_{i,i}(s)[r_i - y_i], \tag{2.21}$$

Considerando como ejemplo un proceso en serie con tres unidades ( $n = 3$ ), La función de transferencia del sistema en lazo cerrado está dada por

$$L = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{22}K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33}K_{33} \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

De la ecuación (2.22),  $L$  representa el modelo en lazo cerrado del sistema con controlador. La estructura de este controlador por lazo local (para tres unidades) se muestra en la Figura 2.3, se puede apreciar que en esta estructura no se realiza ninguna acción de control para disminuir las perturbaciones ocasionadas por las unidades anteriores, únicamente se controla la salida de cada unidad con la entrada de la misma, es por ello que este controlador es de lazo local, se consideran sistemas monovariantes y se desprecian las interacciones entre unidades.



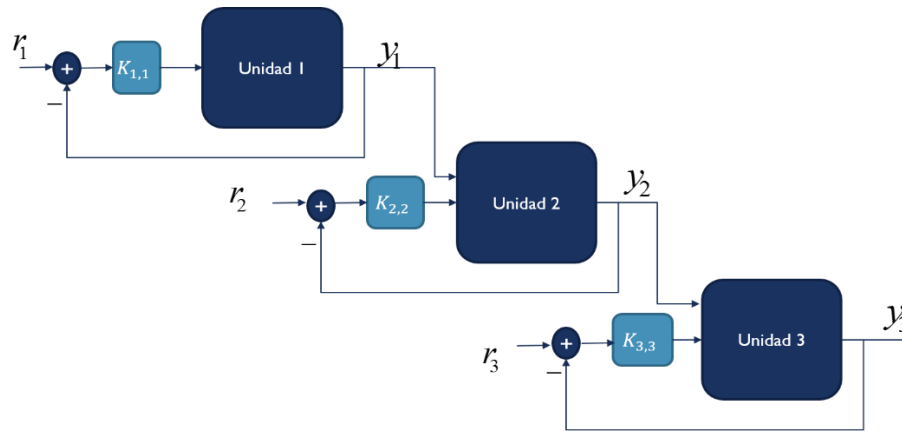


Figura 2.3 Estructura de control por lazo local.

## 2.4.2 Control prealimentado

El uso de las mediciones en las unidades anteriores en el control de una unidad es denotado como control en adelanto (*feedforward*):

$$\text{Feedforward } (i > j) \quad u_i = K_{i,j}(s)y_j. \quad (2.23)$$

De las ecuaciones(2.17) y (2.18) el control nominal perfecto se obtiene seleccionando

$$K_{i,i-1} = -G_{i,i}^{-1}\tilde{G}_{d,i}, \quad (2.24)$$

$$K_{i,i-1} = \dots = K_{i,1} = 0. \quad (2.25)$$

La razón por la que se hace la igualación a cero en (2.25) es que las perturbaciones son eliminadas por (2.24). Si (2.24) no es realizable, por ejemplo, si es no causal, puede ser modificada:

$$K_{i,i-1,-} = -G_{i,i,-}^{-1}\tilde{G}_{d,i}, \quad (2.26)$$

donde el subíndice menos (-) indica que retardos negativos y otros elementos no causales de los controladores se han eliminado. Cuando (2.24) no se puede realizar, el control prealimentado o feedforward de las unidades  $i-2, i-3, \dots$ , puede ser útil. Por

ejemplo, si es causal, el siguiente controlador feedforward de la unidad  $i - 2$  elimina el error de control que permanece después de  $K_{i,i-1,-}$ :

$$K_{i,i-2} = -G_{i,i,-}^{-1} (I - G_{i,i} G_{i,i,-}^{-1}) \tilde{G}_{d,i} (I - G_{i-1,i-1} G_{i-1,i-1,-}^{-1}) \tilde{G}_{d,i-1}. \quad (2.27)$$

### 2.4.3 Control prealimentado con retroalimentación

Es el resultado de combinar el control de lazo local y prealimentado de las unidades anteriores

$$\text{Control local } (i = j): \quad u_i = K_{i,i}(s)y_i, \quad (2.21)$$

$$\text{Prealimentado } (i > j): \quad u_i = K_{i,j}(s)y_j, \quad (2.23)$$

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{1,1}(s) & 0 & 0 & 0 \\ K_{2,1}(s) & K_{2,2}(s) & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ K_{n,n-r} & K_{n,n-2} & K_{n,n-1} & K_{n,n}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

El lazo de función de transferencia se convierte, para ( $n = 3$ ) en:

$$L = \begin{bmatrix} G_{1,1} & 0 & 0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & 0 \\ G_{3,1} & G_{3,2} & G_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,1} & 0 & 0 \\ K_{2,1} & K_{2,2} & 0 \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$= \begin{bmatrix} G_{1,1}K_{1,1} & 0 & 0 \\ G_{2,1}K_{1,1} + G_{2,2}K_{2,1} & G_{2,2}K_{2,2} & 0 \\ G_{3,1}K_{1,1} + G_{3,2}K_{2,1} + G_{3,3}K_{3,1} & G_{3,2}K_{2,2} + G_{3,3}K_{3,2} & G_{3,3}K_{3,3} \end{bmatrix}.$$

En la estructura para el controlador de bloque triangular inferior (BTI por la estructura de bloque triangular inferior que presenta (2.28)), las perturbaciones producidas por unidades anteriores de proceso tratan de ser disminuidas también por el control prealimentado. Nótese que en este controlador, al ser tomadas en cuenta las interacciones con las unidades anteriores, el sistema deja de ser visto como un

conjunto de unidades independientes lo que conduce a un control multivariable o control MIMO (Múltiples Entradas- Múltiples Salidas) (Figura 2.4).

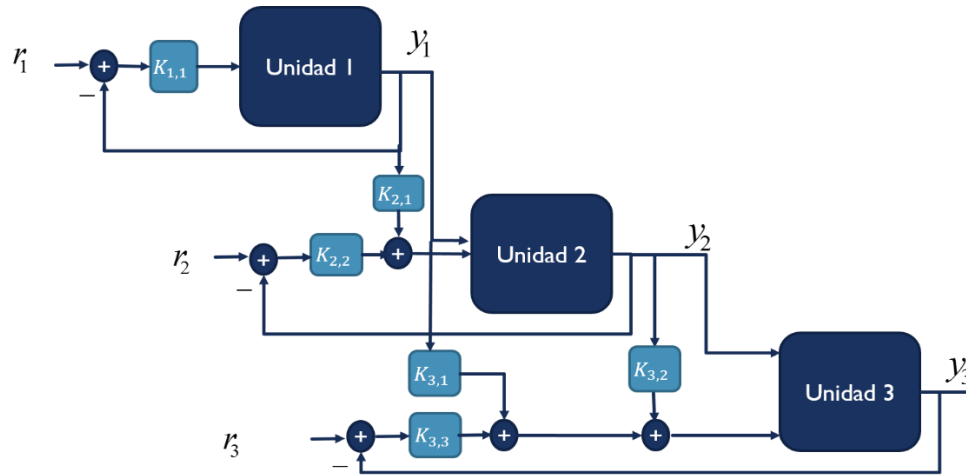


Figura 2.4 Estructura de control Bloque triangular inferior.

## 2.5 Control Predictivo basado en modelo

El control predictivo basado en modelo (MPC) o control por horizonte deslizante fue desarrollado en torno a ciertas ideas comunes que aparecieron a finales de los años 70's, entre ellas:

- Uso de un modelo para predecir la salida del proceso en futuros instantes de tiempo (horizonte de predicción).
- Cálculo de las señales de control minimizando una cierta función objetivo.
- Es capaz de manejar restricciones en velocidad de respuesta del actuador, en la acción del actuador y en las salidas controladas.

Estas son algunas razones por las cuales MPC es a menudo citado como una de las más populares técnicas avanzadas para aplicaciones de procesos industriales [34]. El control MPC se enmarca dentro de los controladores óptimos. El criterio a optimizar, o función costo, está relacionado con el comportamiento futuro del sistema. Este comportamiento futuro se predice por medio de un modelo dinámico lineal denominado modelo de predicción. El intervalo de tiempo futuro que se considera en la predicción y optimización se denomina horizonte de predicción [29].

En el problema de optimización que implica el control predictivo, la variable de decisión es la entrada del sistema. El control MPC es normalmente un control por retroalimentación, sin embargo, la aplicación de la entrada óptima sobre el sistema define aparentemente un control en lazo abierto, es decir se conecta la señal de entrada directamente con el sistema, pero mediante la técnica de horizonte deslizante, la entrada óptima es recalculada una y otra vez, proporcionando al sistema de control una retroalimentación de la salida.

La técnica de horizonte deslizante consiste en aplicar la entrada obtenida de la predicción y la optimización, solo durante un instante de tiempo. Después de dicho instante, se realiza un muestreo del estado del sistema y se resuelve nuevamente el problema de optimización. De ésta manera el horizonte de predicción se va deslizando a lo largo del tiempo.

### 2.5.1 Formulación básica

Para la formulación del control predictivo se usa un modelo de la planta lineal e invariante en el tiempo, una función costo cuadrática y las restricciones se dan en forma de desigualdades lineales. Además, se asume que la función costo no penaliza los valores particulares del vector de entrada  $u(k)$ , solamente cambios en el vector de entrada  $\Delta u(k)$  [35]. Los principales conceptos que intervienen en el control predictivo son los siguientes [36]:

#### 2.5.1.1 Modelo de predicción

Es el modelo matemático que describe el comportamiento del sistema. Se utiliza para predecir el comportamiento futuro de la planta, a partir del tiempo actual sobre el horizonte de predicción futuro. En esta tesis se consideran modelos lineales en espacio de estados en tiempo discreto [37] de la forma siguiente

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (2.30)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (2.31)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_e \times l}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n_e}$  es un vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^l$  es un vector de entradas,  $y \in \mathbb{R}^m$  es un vector de salidas medibles y todas controladas. Dado que las salidas serán los estados del sistema, la matriz  $C = I \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$ . El índice  $k$  denota el instante de tiempo. Para procesos en serie el modelo en espacio de estados que se usa es el que se presenta en la sección 2.3.1 ((2.8)-(2.10)).

### 2.5.1.2 Función costo

Es una función que indica el criterio a optimizar y es definida positiva. Se denota como  $V(k)$  y penaliza las desviaciones de las salidas controladas predichas  $\hat{y}(k+i|k)$  de una trayectoria de referencia  $r(k+i|k)$ , así como los cambios en el vector de entrada  $\Delta \hat{u}(k+i|k)$ . La función costo se define como

$$V(k) = \sum_{i=H_w}^{H_p} \left\| \hat{y}(k+i|k) - r(k+i|k) \right\|_{\mathbf{Q}(i)}^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \left\| \Delta \hat{u}(k+i|k) \right\|_{\mathbf{R}(i)}^2, \quad (2.32)$$

donde  $z^T \mathbf{Q} z$  y  $p^T \mathbf{R} p$  reciben el nombre de formas cuadráticas y se escriben como  $\|z\|_{\mathbf{Q}}^2$  y  $\|p\|_{\mathbf{R}}^2$  respectivamente, donde  $z$  y  $p$  son vectores, y  $\mathbf{Q}(i)$  y  $\mathbf{R}(i)$  son matrices cuadradas, simétricas y definidas positivas. El horizonte de predicción tiene una longitud  $H_p$  pero no necesariamente se empieza a penalizar las desviaciones de  $r$  inmediatamente (si  $H_w > 1$ ), porque puede existir algún retardo entre la aplicación de la entrada y la aparición de algún efecto.  $H_u$  es el horizonte de control, se asume que  $H_u \leq H_p$ , y que  $\Delta \hat{u}(k+i|k) = 0$  para  $i \geq H_u$ , así que  $\hat{u}(k+i|k) = \hat{u}(k+H_u-1|k)$  para toda  $i \geq H_u$ .

La función costo implica que el vector de error  $\hat{y}(k+i|k) - r(k+i|k)$  es penalizado en cada punto del horizonte de predicción por la matriz  $\mathbf{Q}(i)$ , siendo éste el caso más común. Sin embargo, es posible penalizar el error solo en algunos

instantes de tiempo, haciendo  $Q(i)=0$  para algunos valores de  $i$ . También es posible penalizar diferentes elementos del vector de error, ajustando elementos de la matriz  $Q(i)$  a 0. Por lo tanto, puede ser  $Q(i) \geq 0$  y no necesariamente  $Q(i) > 0$ . Lo mismo ocurre para las penalizaciones aplicadas al vector de entradas, es decir,  $R(i) \geq 0$  ya que en algunos casos puede no penalizarse cambios en la señal de control.

### 2.5.1.3 Restricciones

Las restricciones indican los límites dentro de los cuales debe ocurrir la evolución del sistema, estos límites son definidos ya sea por límites físicos del sistema o por motivos de seguridad. Deben de establecerse de la siguiente manera

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u(k) \leq \Delta u_{\max}, \quad (2.33)$$

$$u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max} \quad (2.34)$$

$$y_{\min} \leq y(k) \leq y_{\max} \quad (2.35)$$

Para el diseño de control predictivo se pueden establecer restricciones para la velocidad de respuesta del actuador (2.33), para el rango del actuador (2.34) y restricciones para las variables controladas (2.35).

### 2.5.1.4 Predicción

Para resolver un problema de control predictivo, existe una forma para calcular los valores predichos de las variables controladas  $\hat{y}(k+i|k)$  a partir de la medición del estado actual del sistema  $x(k|k)$ , la última entrada  $u(k-1)$  y los cambios en la entrada  $\Delta \hat{u}(k+i|k)$ . La forma en que se hacen las predicciones tiene un gran efecto en el rendimiento del sistema en lazo cerrado.

Para el desarrollo de la estrategia de predicción se asume que todo el vector de estados es medido, esto es  $x(k) = y(k)$  y entonces  $C = I$ . También se asume que no existe perturbación o ruido de medición en el sistema. De esta manera la predicción del estado del sistema se hace iterando el modelo (2.30)-(2.31) como sigue

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_u|k) \\ \hat{x}(k+H_u+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ A^{H_u} \\ A^{H_u+1} \\ \vdots \\ A^{H_p} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} A^i B \\ \sum_{i=0}^{H_u} A^i B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B \end{bmatrix} u(k-1) + \dots$$

$\Psi \qquad \qquad \qquad \Upsilon$

$$\dots + \begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ AB+B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} A^i B & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{H_u} A^i B & \dots & AB+B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B & \dots & \sum_{i=0}^{H_p-H_u} A^i B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+H_u-1|k) \end{bmatrix}.$$

$\Theta$  (2.36)

Las predicciones de las salidas controladas  $\hat{y}$  se obtienen de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+1|k) &= C\hat{x}(k+1|k), \\ \hat{y}(k+2|k) &= C\hat{x}(k+2|k), \\ &\vdots \\ \hat{y}(k+H_p|k) &= C\hat{x}(k+H_p|k),\end{aligned}\tag{2.37}$$

o de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) \end{bmatrix}.\tag{2.38}$$

Para el caso de control predictivo con restricciones, la función costo sigue siendo la misma que se presentó en (2.32), pudiendo ser expresada de la siguiente manera:

$$V(k) = \|\Theta\Delta U(k) - \varepsilon(k)\|_Q^2 + \|\Delta U(k)\|_R^2,\tag{2.39}$$

$$V(k) = [\Delta U(k)^T \Theta^T - \varepsilon(k)^T] \mathbf{Q} [\Delta U(k) \Theta - \varepsilon(k)] + \Delta U(k)^T \mathbf{R} \Delta U(k),\tag{2.40}$$

$$V(k) = \varepsilon(k)^T \mathbf{Q} \varepsilon(k) - 2\Delta U(k)^T \Theta^T \mathbf{Q} \varepsilon(k) + \Delta U(k)^T [\Theta^T \mathbf{Q} \Theta + \mathbf{R}] \Delta U(k),\tag{2.41}$$

con 
$$\mathbf{G} = 2\Theta^T \mathbf{Q} \varepsilon(k),\tag{2.42}$$

$$\mathbf{H} = \Theta^T \mathbf{Q} \Theta + \mathbf{R}.\tag{2.43}$$

donde

$$Y(k) = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+H_w|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+H_p|k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}(k) = \begin{bmatrix} \hat{r}(k+H_w|k) \\ \vdots \\ \hat{r}(k+H_p|k) \end{bmatrix}, \quad \Delta U(k) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+H_u-1|k) \end{bmatrix}.\tag{2.44}$$



Y las matrices de ponderación  $\mathcal{Q}$  y  $R$  están dadas por

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}(H_w) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}(H_w+1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{Q}(H_p) \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$R = \begin{bmatrix} R(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R(H_u-1) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Retomando (2.36) y (2.38),  $Y(k)$  tiene la forma siguiente

$$Y(k) = \hat{x}(k) = \Psi x(k) + \Upsilon u(k-1) + \Theta \Delta U(k) \quad (2.47)$$

Donde  $\Psi, \Upsilon$  y  $\Theta$  son matrices de dimensiones apropiadas definidas en (2.36).

Se define también

$$\mathcal{E}(k) = T(k) - \Psi x(k) - \Upsilon u(k-1) \quad (2.48)$$

La ecuación (2.48) puede ser vista como el “error de seguimiento”, en el sentido que es la diferencia entre la trayectoria de referencia y la respuesta libre del sistema, es decir, la respuesta que ocurriría sobre el horizonte de predicción si no se hicieran cambios en la entrada. Las dimensiones de las matrices y vectores usados en la predicción y el cálculo de las entradas óptimas se presentan en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Dimensión de matrices y vectores usados en el cálculo de predicción y entrada óptima.

| Matriz  | Dimensión   |
|---|---|
| $\mathcal{Q}$   | $\left[ m \times (H_p - H_w + 1), m \times (H_p - H_w + 1) \right]$ |
| $\mathbf{R}$  | $\left[ l \times H_u, l \times H_u \right]$                         |
| $\Psi$  | $\left[ m \times (H_p - H_w + 1), n \right]$                        |
| $\Upsilon$  | $\left[ m \times (H_p - H_w + 1), l \right]$                        |
| $\Theta$  | $\left[ m \times (H_p - H_w + 1), l \times H_u \right]$             |
| $\mathcal{E}$   | $\left[ m \times (H_p - H_w + 1), 1 \right]$                        |
| $\mathbf{G}$  | $\left[ l \times H_u, 1 \right]$                                    |
| $\mathbf{H}$  | $\left[ l \times H_u, l \times H_u \right]$                         |
| Con $l$ entradas, $n_e$ estados y $m$ salidas controladas |   |

## 2.5.2 Problema de control predictivo con restricciones

En (2.33)-(2.35) se presentó la forma de las restricciones que se pueden reescribir como sigue

$$E_R \begin{bmatrix} \Delta U(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (2.49)$$

$$F_R \begin{bmatrix} U(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (2.50)$$

$$G_R \begin{bmatrix} Y(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (2.51)$$

donde  $\Delta U(k) = \left[ \Delta \hat{u}(k|k)^T, \dots, \Delta \hat{u}(k|k)^T \right]^T$  y  $U(k) = \left[ \hat{u}(k|k)^T, \dots, \hat{u}(k+H_u|k)^T \right]^T$ .

Las matrices  $E_R$ ,  $F_R$  y  $G_R$  son matrices de dimensiones adecuadas basadas en los horizontes de predicción y control, así como el número de entradas y salidas controladas. Las restricciones definidas en ((2.33)-(2.35)) de la sección 2.5.1.3, se

reescriben en la forma presentada en ((2.49)-(2.51)), el lado izquierdo es un vector que termina con un elemento igual a 1. Este rearrreglo se hace para que las restricciones puedan ser expresadas como una desigualdad menor o igual con cero, debido a que se trata de un problema de optimización en el que se minimiza la función costo, en nuestro caso la función costo sirve para obtener las entradas optimas del sistema. Siendo desigualdades expresadas como menor o igual a cero, la solución del problema a optimizar se encuentra acotada dentro de una región.

Para dar solución al problema de optimización en el control predictivo es necesario expresar estas restricciones en función de  $\Delta U(k)$ . La ecuación (2.49) ya se encuentra en términos de  $\Delta U(k)$  por lo que se deja igual. Para (2.50) la matriz  $F_R$  tiene a forma siguiente

$$F_R = [F_{R,1}, F_{R,2}, \dots, F_{R,H_u}, f] \quad (2.52)$$

donde cada  $F_{R,i}$  es de dimensión  $H_u \times l$  y  $f$  es un vector de dimensión de  $H_u \times l$ , reescribiendo a (2.50) como

$$\sum_{i=1}^{H_u} F_{R,i} \hat{u}(k+i-1|k) + f \leq 0 \quad (2.53)$$

Además, ya que

$$\hat{u}(k+i-1|k) = u(k-1) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta \hat{u}(k+j|k) \quad (2.54)$$

Se puede escribir (2.50) como

$$F_R \Delta U(k) \leq -F_{R,1} u(k-1) - f \quad (2.55)$$

Para (2.51) sustituimos  $Y(k)$  (ec. (2.47)) y nos queda

$$G_R \begin{bmatrix} \Psi x(k) + \Upsilon u(k-1) + \Theta \Delta U(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.56)$$

Ahora haciendo  $G_R = [\Gamma, g]$ , donde  $g$  es la última columna de  $G$ , entonces

$$\Gamma \Theta \Delta U(k) \leq -\Gamma [\Psi x(k) + \Upsilon u(k-1)] - g \quad (2.57)$$

Y así (2.57) está en función de  $\Delta U(k)$ . Por último (2.49) puede reescribirse como

$$W \Delta U(k) \leq w \quad (2.58)$$

Entonces las restricciones (2.49)-(2.51) se transforman a

$$F_R \Delta U(k) \leq -F_{R,1} u(k-1) - f \quad (2.59)$$

$$\Gamma \Theta \Delta U(k) \leq -\Gamma [\Psi x(k) + \Upsilon u(k-1)] - g \quad (2.60)$$

$$W \Delta U(k) \leq w \quad (2.61)$$

Las matrices  $\Gamma, W, E, F, G$  tienen dimensiones adecuadas. Finalmente se pueden reescribir las desigualdades (2.59), (2.60) y (2.61) en una sola desigualdad matricial como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} F_R \\ \Gamma \Theta \\ W \end{bmatrix} \Delta U(k) \leq \begin{bmatrix} -F_{R,1} u(k-1) - f \\ -\Gamma [\Psi x(k) + \Upsilon u(k-1)] - g \\ w \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

En esta tesis, solo se utiliza la restricción en las entradas, por lo que la forma de la desigualdad matricial con la que se trabajó es

$$[F_R] \Delta U(k) \leq [-F_{R,1} u(k-1) - f]. \quad (2.63)$$

Después se resuelve el siguiente problema de optimización con restricciones

$$\text{minimizar } \Delta U(k)^T \mathbf{H} \Delta U(k) - \mathbf{G}^T \Delta U(k). \quad (2.64)$$

Sujeto a las restricciones de la desigualdad (2.62), con las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  definidas anteriormente (ecuaciones (2.42) y (2.43)). La solución de (2.64) genera el vector de entrada de control óptimo,  $\Delta U(k)$  para el controlador predictivo con

restricciones. Para solucionar la ecuación (2.64) es notorio que tiene la forma cuadrática conocida

$$\min_{\theta} \frac{1}{2} \theta^T \Phi \theta + \phi^T \theta, \quad (2.65)$$

Sujeto a

$$\Omega \theta \leq \omega, \quad (2.66)$$

donde  $\Omega = F_R$ ,  $\theta = \Delta U$  y  $\omega = -F_{R,1}u(k-1) - f$ .

La expresión (2.64) representa un problema de optimización conocido como *Programación Cuadrática* (QP por sus siglas en inglés) y existen algoritmos estándar para su solución. Para resolver el problema de optimización se utilizó la función de Matlab *quadprog*. Ya que  $H \geq 0$ , el problema QP es *convexo*, lo que garantiza la solución del problema de optimización y permite estimar cuanto tiempo tomará su solución. A causa de las restricciones, el control se vuelve no lineal debido a que el bloque "OPTIMIZADOR" calcula una función no lineal de sus entradas, es decir, las restricciones representadas por desigualdades. La estructura que se presenta en la Figura 2.5 es la correspondiente al controlador predictivo con restricciones, siendo  $T(k)$  las referencias del sistema.

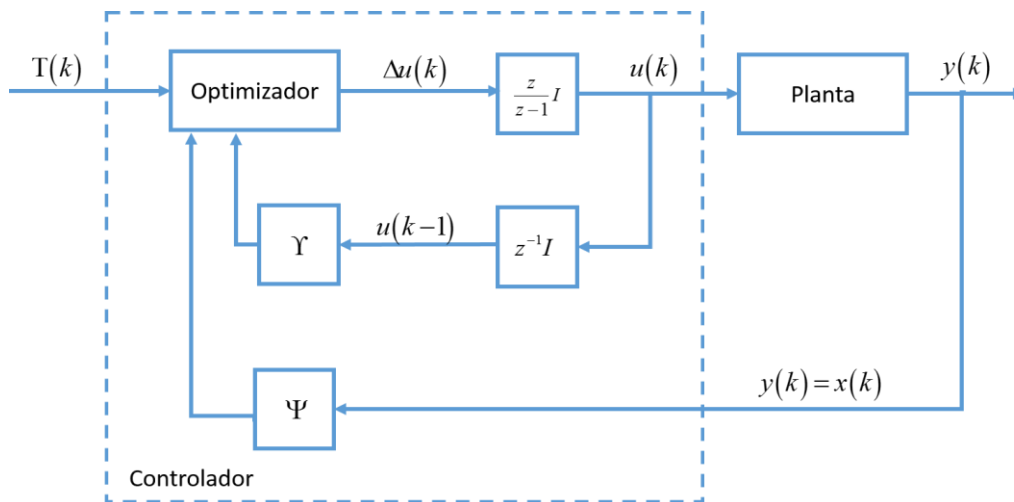


Figura 2.5 Estructura de controlador con restricciones.

En este capítulo se han mostrado las estructuras generales de modelado y control que pueden ser usadas para sistemas multivariables en serie. También se presentaron los aspectos principales del control predictivo básico basado en modelo y del control predictivo con restricciones. Las nociones explicadas se aplicaron a un caso de estudio de proceso en serie. El problema, el desarrollo del modelo, el diseño de controladores y los resultados obtenidos se presentan en los siguientes capítulos.

### 3 Sistema de tres reactores continuos de tanque agitado no isotérmicos, conectados en serie

Una reacción exotérmica irreversible  $A \xrightarrow{k_i} B$  se lleva a cabo en 3 Reactores Continuos de Tanque Agitado (CSTR, por sus siglas en inglés), las tres unidades están conectadas en serie. El sistema se muestra en la Figura 3.1, se asume que el líquido en los tanques está perfectamente mezclado, lo que permite considerar propiedades físicas homogéneas y constantes (densidades, capacidades caloríficas, coeficientes de transferencia de calor). En cada reactor se lleva a cabo una reacción exotérmica (que libera calor), irreversible (en la cual hay consumo del reactante A, pero no producción de A), y de primer orden. Los datos numéricos para este caso de estudio fueron tomados de [38].

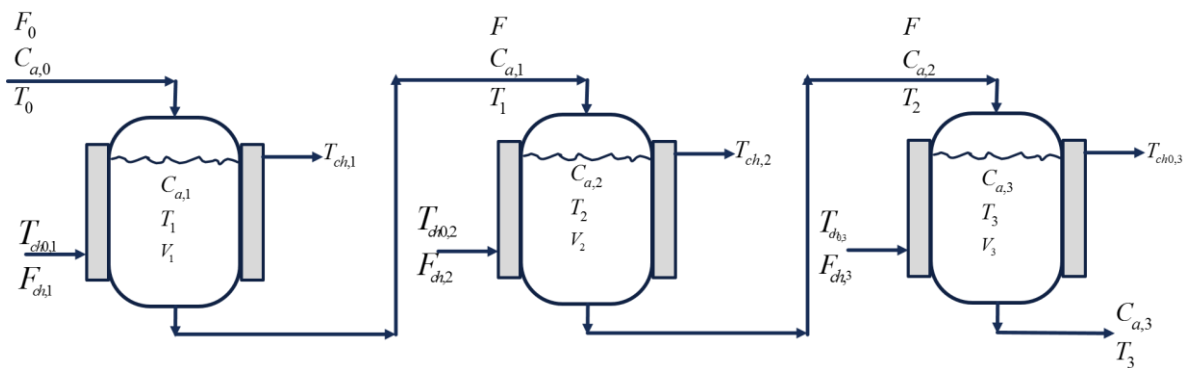


Figura 3.1 Sistema de tres CSTRs en serie.

donde

$F_0 = F$ : flujo de entrada en la unidad  $i$ ,  $\frac{m^3}{s}$

$C_{a,0}$ : Concentración de entrada en la unidad  $i$ ,  $\frac{kmol}{m^3}$

$V_i$ : volumen en la unidad  $i$ ,  $m^3$

$V_{ch}$ : volumen de chaqueta en la unidad  $i$ ,  $m^3$

$C_{a,i}$ : Concentración de A en la unidad  $i$ ,  $\frac{kmol}{m^3}$

$T_0$ : Temperatura de entrada en la unidad  $i$ ,  $K$

$T_i$ : Temperatura en la unidad  $i$ ,  $K$

$T_{ch0,i}$ : Temperatura de entrada en chaqueta en la unidad  $i$ ,  $K$

$F_{ch,i}$ : Flujo de chaqueta en la unidad,  $m^3/s$

$T_{ch,i}$ : Temperatura en chaqueta en la unidad  $i$ , K

La corriente de alimentación  $F_0, T_0$  y  $C_{a,0}$ , entra en el primer reactor, las corrientes de salida del reactor 1 ( $C_{a,1}, T_1$  y  $F$ ) y 2 ( $C_{a,2}, T_2$  y  $F$ ) se vuelven entradas para los reactores 2 y 3, respectivamente. El producto final es la corriente de salida del tercer reactor, la cual tiene una concentración  $C_{a,3}$ .

Se requiere una operación isotérmica del proceso, es decir, que los tres reactores operen a la misma temperatura ( $T_1 = T_2 = T_3$ ) y que esta se mantenga constante durante toda la operación, de tal forma que la concentración de salida en cada reactor permanezca en el valor nominal o cercano a este. Para remover el calor de la reacción, una chaqueta de enfriamiento rodea a cada CSTR y a través de esta circula un fluido de enfriamiento con un flujo volumétrico  $F_{ch,i}$  y con una temperatura de entrada de  $T_{ch0,i}$  con  $i = 1, 2, 3$ .

### 3.1 Modelo No lineal

El modelado se hace bajo la suposición de que las pérdidas de calor son insignificantes y que el volumen de reactor se mantiene constante (con control de nivel *ideal*), por lo tanto, el volumen de la chaqueta es constante ( $\frac{dV}{dt} = 0$ ).

Hay 3 estados en cada unidad de proceso de CSTRs: la concentración de compuesto  $A$  en el reactor  $i$   $C_{a,i}$ , la temperatura del reactor  $i$ ,  $T_i$ , y la temperatura de salida en la chaqueta de la unidad  $i$ ,  $T_{ch,i}$ . El modelo no lineal para el sistema en serie se obtiene estableciendo los balances de materia global (3.1.a) y por componente (3.1.b), los balances de energía en cada reactor (3.1.c) y en las chaquetas (3.1.d), y se muestra a continuación:



$$F_i = F_0 \quad (3.1.a)$$

$$\frac{dC_{a,i}}{dt} = \frac{F_i C_{a,0}}{V_i} - \frac{F_i C_{a,i}}{V_i} - k_i C_{a,i} \quad (3.1.b)$$

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{F_i T_0}{V_i} - \frac{F_i T_i}{V_i} - \frac{\lambda k_i C_{a,i}}{\rho C_p} - \frac{UA_H}{V_i \rho C_p} (T_i - T_{ch,0,i}) \quad (3.1.c) \quad (3.1)$$

$$\frac{dT_{ch,i}}{dt} = \frac{F_{ch,i} (T_{ch0,i} - T_{0,i})}{V_{ch}} + \frac{UA_H}{\rho_{ch} V_{ch} C_{ch}} (T_i - T_{ch0,i}) \quad (3.1.d)$$

con

$$k_i = \alpha \exp\left(-\frac{E_A}{RT_i}\right) \quad \text{con } i = 1, 2, 3$$

$\alpha$ : factor preexponencial.

$E_A$ : Energía de activación.

$R$ : constante universal de los gases.

$\lambda$ : calor de reacción.

$A_H$ : Área de transferencia de calor.

$\rho$ : densidad del fluido en el reactor.

$\rho_{ch}$ : densidad del fluido de enfriamiento.

$V_{ch}$ : Volumen de chaqueta.

$U$ : coeficiente global de transferencia de calor.

$C_{ch}$ : Capacidad calorífica en el fluido de enfriamiento.

$C$ : capacidad calorífica en el reactor.

En la Tabla 3.1 se definen las variables que designan los estados, entradas, salidas y perturbaciones del sistema de 3 CSTRs en serie, estas variables están dadas como variables de desviación, es decir, el estado es la variable del proceso menos la variable en el punto de equilibrio (régimen permanente) [2]. El subíndice  $ss$  representa el valor en régimen permanente de la variable,  $x_i \in \mathbb{R}^{n_{ei}}$  es el vector de variables de estado en la unidad  $i$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^{n_{si}}$  es un vector de variables de salida de la unidad  $i$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^{n_{ui}}$  es un vector de variables de entrada de la unidad  $i$ ,  $d_i \in \mathbb{R}^{n_{di}}$  es un vector de perturbaciones en la unidad  $i$ .

En la Tabla 3.2 se muestran los valores de las variables en régimen permanente, estos valores definen las condiciones nominales del proceso. También se proporcionan los parámetros del sistema y las variables de entrada: concentración, flujo y temperatura del fluido que entra al primer reactor, así como la temperatura del fluido que circula por las chaquetas de enfriamiento de los 3 reactores.

En la Tabla 3.3 se muestran los datos de dimensionamiento y condiciones de operación de un solo reactor. La operación en serie es ventajosa con relación a la operación de un solo reactor, debido a que, bajo las mismas condiciones de flujo, temperatura y concentración en la corriente de alimentación, el volumen total requerido para obtener la concentración deseada del producto es considerablemente menor para el sistema de 3 tanques en serie.

Tabla 3.1 Variables del sistema de tres CSTRs en serie.

| Unidad<br>$i = 1, 2, 3$ | Variables de estado<br>$x_i$   | Variables de entrada<br>$u_i$    | Variables de salida<br>$y_i$ | Variables de Perturbación<br>$d_i$   |
|-------------------------|--|----------------------------------|------------------------------|--|
| <b>1</b>                | $x_1 = \begin{bmatrix} C_{a,1} - C_{a,1,ss} \\ T_1 - T_{1,ss} \\ T_{ch,1} - T_{ch,1,ss} \end{bmatrix}$ | $u_1 = [F_{j,1} - F_{j,1,ss}]$   | $y_1 = [T_1 - T_{1,ss}]$     | $d_1 = \begin{bmatrix} F_o - F_{o,ss} \\ F_{ch} - F_{ch,ss} \\ T_o - T_{o,ss} \\ C_{a_0} - C_{a_0,ss} \\ T_{ch_0} - T_{ch_0,ss} \end{bmatrix}$ |
| <b>2</b>                | $x_2 = \begin{bmatrix} C_{a,2} - C_{a,2,ss} \\ T_2 - T_{2,ss} \\ T_{ch,2} - T_{ch,2,ss} \end{bmatrix}$ | $u_2 = [F_{ch,2} - F_{ch,2,ss}]$ | $y_2 = [T_2 - T_{2,ss}]$     | $d_2 = \begin{bmatrix} C_{a,1} - C_{a,1,ss} \\ T_1 - T_{1,ss} \\ T_{ch0,2} - T_{ch0,2,ss} \end{bmatrix}$                                       |
| <b>3</b>                | $x_3 = \begin{bmatrix} C_{a,3} - C_{a,3,ss} \\ T_3 - T_{3,ss} \\ T_{ch,3} - T_{ch,3,ss} \end{bmatrix}$ | $u_3 = [F_{ch,3} - F_{ch,3,ss}]$ | $y_3 = [T_3 - T_{3,ss}]$     | $d_3 = \begin{bmatrix} C_{a,2} - C_{a,2,ss} \\ T_2 - T_{2,ss} \\ T_{ch_0,3} - T_{ch_0,3,ss} \end{bmatrix}$                                     |

Tabla 3.2 Valores de variables de estados y parámetros en estado estable del sistema de 3-CSTRs en serie.

| Valores de variables de estados y parámetros en estado estable del sistema de 3-CSTRs en serie                          |   |   |   |
|---|---|---|---|
| Valores en estado estable:  |   |   |   |
| Valores de entrada:<br>$C_{a_0} = 8.01 \text{ kmol} / \text{m}^3$ , $F_0 = 4.377 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$ |   | $T_o = 294 \text{ K}$                             | $T_{ch0,1} = 294 \text{ K}$<br>$T_{ch0,2} = 294 \text{ K}$<br>$T_{ch0,3} = 294 \text{ K}$ |
| Valores en régimen permanente en cada unidad (condiciones nominales):   |   |   |   |
| $T_{ch,1} \approx 300 \text{ K}$  | $F_{ch,1} = 0.0452 \text{ m}^3 / \text{s}$                | $C_{a,1} \cong 2.1692 \text{ kmol} / \text{m}^3$  | $T_1 = 350 \text{ K}$   |
| $T_{ch,2} \approx 329 \text{ K}$  | $F_{ch,2} = 0.0033 \text{ m}^3 / \text{s}$                | $C_{a,2} \cong 0.588 \text{ kmol} / \text{m}^3$   | $T_2 = 350 \text{ K}$   |
| $T_{ch,3} \approx 344 \text{ K}$  | $F_{ch,3} = 6.1975 \times 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{s}$ | $C_{a,3} \cong 0.1591 \text{ kmol} / \text{m}^3$  | $T_3 = 350 \text{ K}$   |
| Parámetros:   |   |   |   |
| Factor preexponencial $\alpha$  | $20.75 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$                        | Calor de reacción $\lambda$                       | $-69.71 \times 10^6 \text{ J/kmol}$   |
| Energía de activación $E$   | $69.71 \times 10^6 \text{ J/kmol}$                        | Coefficiente global de transferencia de calor $U$ | $851 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$   |
| Densidad del fluido en el reactor $\rho$  | $801 \text{ kg} / \text{m}^3$                             | Área de transferencia de calor $A_H$              | $27.5 \text{ m}^2$  |
| Densidad del fluido de enfriamiento $\rho_j$  | $1000 \text{ kg} / \text{m}^3$                            | Volumen en chaqueta $V_j$                         | $1.225 \text{ m}^3$   |
| Capacidad calorífica en el reactor $C_p$  | $3137 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$                   | Volumen de reactor $V_i$                          | $14.4 \text{ m}^3$  |
| Capacidad calorífica del fluido de enfriamiento $c_j$   | $4183 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$                   | Constante universal de los gases $R$              | $8314 \text{ J} / \text{kmol K}$  |

Tabla 3.3 Valores de variables de estado y parámetros en estado estable CSTRs isotérmico.

| Valores de variables de estados y parámetros para operación de un CSTR isotérmico       |   |  |   |
|---|---|--|---|
| Valores en estado estable:  |   |  |   |
| Valores de entrada:<br>$C_{a,0} = 8.01 \text{ kmol} / \text{m}^3$ $T_0 = 294 \text{ K}$ |   | $T_{ch0} = 294 \text{ K}$<br>$F_0 = 4.377 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$ |   |
| Valores en régimen permanente:  |   |  |   |
| $T_j = 339 \text{ K}$ $F_{ch} = 9.4522 \text{ m}^3 / \text{s}$                          |   | $C_a = 0.1602 \text{ kmol} / \text{m}^3$ $T = 350 \text{ K}$                     |   |
| Parámetros:   |   |  |   |
| Factor preexponencial $\alpha$  | $20.75 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$          | Capacidad calorífica del refrigerante $c_j$                                      | $4183 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |
| Energía de activación $E$   | $69.71 \times 10^6 \text{ J} / \text{kmol}$ | Calor de reacción $\lambda$  | $-69.71 \times 10^6 \text{ J/kmol}$     |
| Densidades del proceso $\rho$   | $801 \text{ kg} / \text{m}^3$               | Coefficiente global de transferencia de calor $U$                                | $851 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$   |
| Densidad del refrigerante $\rho_j$  | $1000 \text{ kg} / \text{m}^3$              | Área de transferencia de calor $A_H$   | $190 \text{ m}^2$                       |
| Capacidad calorífica del proceso $C_p$  | $3137 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$     | Volumen de reactor $V$   | $262 \text{ m}^3$                       |
|   |   | Volumen en chaqueta $V_j$  | $63.3491 \text{ m}^3$                   |

El volumen del sistema de los 3-CSTRs ( $43.20m^3$ ) en serie representa una reducción del 83% con relación al volumen ocupado por el sistema de un solo tanque ( $262m^3$ ).

Para llevar a cabo la reacción en un solo reactor se requiere mayor energía de agitación, comparada con la energía que necesita el sistema de tres reactores en serie. El mezclado en un solo reactor es más difícil y costoso, por lo tanto, también es más difícil lograr una distribución uniforme de temperatura y de concentración. Por otro lado, para el proceso de tres reactores en serie, el tamaño de los reactores permite lograr un mejor mezclado y una mejor distribución de temperatura y de concentración. Entonces, estas ventajas operacionales justifican la elección de un sistema de reactores en serie contra la opción de operar un solo reactor.

Es común que los reactores operen de manera isotérmica, porque de esta manera es posible obtener una concentración de salida en el valor deseado o con variaciones mínimas.

En ocasiones, la variable de concentración no está disponible porque es difícil medir la concentración o la composición en línea, por lo que el control de temperatura es suficiente para indirectamente mantener en un rango acotado la concentración de salida.

## 3.1 Modelo lineal sistema de tres CSTRs isotérmicos en serie

### 3.1.1 Modelo en espacio de estados

Para obtener el modelo lineal del sistema de tres CSTRs en serie, las ecuaciones del modelo no lineal (3.1) son linealizadas alrededor de un punto de operación mediante la serie truncada de Taylor. En la sección 2.3.1 se presenta la metodología para obtener el modelo lineal en espacio de estados para un proceso en serie, para el sistema en serie con tres unidades se obtiene un modelo lineal de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A_{11}x_1 + B_1u_1 + E_1d_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u_2 + E_2d_2, \quad (3.2) \\ \frac{dx_3}{dt} &= A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + B_3u_3 + E_3d_3 \end{aligned}$$

donde las matrices  $A_{i,j}$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  y  $E_i$  son matrices Jacobianas evaluadas en el punto de operación nominal

$$A_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}; \quad j = i, i-1 \quad B_i = \frac{\partial f_i}{\partial u_i}, \quad C_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad E_i = \frac{\partial f_i}{\partial d_i},$$

con  $i = \text{número de unidad } (i=1,2,3)$ ,  $j = \text{vector de estados}$ .

El punto de operación corresponde a los estados obtenidos con las entradas definidas en la Tabla 3.2 (condiciones nominales). Se obtiene un modelo lineal en espacio de estados y es usado para diseñar los diferentes controladores del sistema.

La matriz de estados del modelo en espacio de estados para el sistema de tres CSTRs en serie (Tabla 3.4) tiene la forma que se muestra en la sección 2.3.1, la matriz de entradas tiene la forma indicada en la Tabla 3.5, y la matriz de salida es la que se muestra en la Tabla 3.6.

**Tabla 3.4 Matriz de estados A. Sistema de tres CSTRs en serie.**

| Unidad   | Vector de estados $x_1$   | Vector de estados $x_2$   | Vector de estados $x_3$   |
|----------|---|---|---|
| <b>1</b> | $A_{1,1} = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -1.1 & -0.12 & 0 \\ 2.27 & 2.4 & 0.64 \\ 0 & 4.5 & -41.4 \end{bmatrix}$ |   |   |
| <b>2</b> | $A_{2,1} = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.304 & 0 & 0 \\ 0 & 0.304 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$              | $A_{2,2} = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -1.1 & -0.03 & 0 \\ 22.7 & -0.03 & 0.6 \\ 0 & 4.5 & -7.2 \end{bmatrix}$ |   |
| <b>3</b> |   | $A_{3,2} = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.304 & 0 & 0 \\ 0 & 0.304 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$              | $A_{3,3} = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -1.1 & -0.009 & 0 \\ 22.7 & -0.7 & 0.6 \\ 0 & 4.5 & -5 \end{bmatrix}$ |

Tabla 3.5 Matriz de entradas B. Sistema de 3CSTRs en serie.

| Unidad | Vector de entradas $u_1$                                | Vector de entradas $u_2$                                 | Vector de entradas $u_3$                                 |
|--------|---|--|--|
| 1      | $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.0329 \end{bmatrix}$ |  |  |
| 2      |   | $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -28.8794 \end{bmatrix}$ |  |
| 3      |   |  | $B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -41.1553 \end{bmatrix}$ |

Tabla 3.6 Matriz de salidas C. Sistema de 3CSTRs en serie.

| Unidad | Vector de salidas $y_1$ | Vector de salidas $y_2$ | Vector de salidas $y_3$ |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1      | $C_1 = [0 \ 1 \ 0]$     |                         |                         |
| 2      |                         | $C_1 = [0 \ 1 \ 0]$     |                         |
| 3      |                         |                         | $C_1 = [0 \ 1 \ 0]$     |

La representación en espacio de estados tiene la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.3)$$

$$y = Cx(t) + Ed(t), \quad (3.4)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

donde el vector de estados  $x_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  está compuesto por el vector de estados de la

unidad  $x_1, x_2$  y  $x_3$ . El vector de estados  $x$  dado en variables de desviación (Tabla 3.1) es

$$x = \begin{bmatrix} x_1 - x_{1,ss} \\ x_2 - x_{2,ss} \\ x_3 - x_{3,ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{a,1} - C_{a,1,ss} \\ T_1 - T_{1,ss} \\ T_{j,1} - T_{j,1,ss} \\ C_{a,2} - C_{a,2,ss} \\ T_2 - T_{2,ss} \\ T_{j,2} - T_{j,2,ss} \\ C_{a,3} - C_{a,3,ss} \\ T_3 - T_{3,ss} \\ T_{j,3} - T_{j,3,ss} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Lo mismo ocurre con el vector de entradas

$$u = \begin{bmatrix} u_1 - u_{1,ss} & u_2 - u_{2,ss} & u_3 - u_{3,ss} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Las matrices simbólicas  $A, B, C$  y  $E$  del modelo en espacio de estados para los CSTRs en serie se reportan en el Anexo B.

### 3.1.2 Modelo lineal en función de transferencia

Se aplica transformada de Laplace al modelo lineal en espacio de estados (3.3) para obtener el modelo en función de transferencia  $Y(s) = G(s)u(s) + G_d(s)d(s)$  obteniendo la estructura característica de un proceso en serie (véase sección 2.3.2).

Se forma la matriz  $G(s)$  como sigue:

Matriz  $G(s)$

$$G(s) = \begin{bmatrix} C_1 M_1 B_1 & 0 & 0 \\ C_2 M_2 A_{2,1} M_1 B_1 & C_2 M_2 B_2 & 0 \\ C_3 M_3 A_{3,2} M_2 A_{2,1} M_1 B_1 & C_3 M_3 A_{3,2} M_2 B_2 & C_3 M_3 B_3 \end{bmatrix},$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{1,1} & 0 & 0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & 0 \\ G_{3,1} & G_{3,2} & G_{3,3} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

donde las matrices  $A_{1,1}, A_{2,1}, A_{2,2}, A_{3,2}, A_{3,3}, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2$  y  $C_3$  son las que se reportan en la sección 3.1.1 y definiendo

$$M_i = (sI - A_{i,i})^{-1}. \quad (3.12)$$

Para obtener la matriz de perturbaciones  $G_d(s)$ , se sigue el mismo procedimiento, pero sustituyendo la matriz  $B_i$  por  $E_i$ . Las funciones de transferencia con respecto a las entradas obtenidas para el sistema de 3 CSTRs se reportan en el Anexo C.

## 3.2 Múltiples puntos de equilibrio

Es posible obtener información sobre la dinámica de un reactor químico mediante un análisis en régimen permanente. En [39] se describe el análisis en régimen permanente de un reactor utilizando el modelo no lineal de un CSTR no isotérmico (3.1). Es común que los reactores químicos presenten dificultades de control, especialmente cuando las reacciones son exotérmicas y la velocidad de reacción es alta. Si la velocidad de producción de calor es superior a la de eliminación de calor, el reactor se calienta hasta un punto en que el fenómeno es irreversible. Estas condiciones reflejan posibles comportamientos inestables. El diagrama de Van Heerden consiste en comparar gráficamente el calor producido y el eliminado en cada uno de los posibles puntos de equilibrio, y permite determinar la estabilidad del reactor.



En primer lugar, este análisis permite saber si existe uno o más puntos de equilibrio en un reactor. Cuando hay más de un punto de equilibrio, al fenómeno se le conoce como múltiples puntos de equilibrio, y se debe a que los reactores tienen un comportamiento no lineal.

Usando el modelo estático no lineal del primer reactor ( $\frac{dC_{ai}}{dt} = 0$ ,  $\frac{dT_i}{dt} = 0$ ) definido en (3.14) y (3.15), y asumiendo una serie de valores para  $T_1$  se puede graficar el calor generado por la reacción  $Q_G$  y el calor removido por la chaqueta y el fluido a través del reactor  $Q_R$ . Las curvas obtenidas corresponden a la variación del calor generado y del calor removido con respecto a la temperatura  $T_1$ . La temperatura o las temperaturas a las cuales se intersectan las curvas de  $Q_G$  y  $Q_R$  son los puntos de equilibrio del sistema, en esos puntos existe la solución del modelo en régimen permanente.

$$0 = \frac{FC_{a,0}}{V_1} - \frac{FC_{a,1}}{V_1} - \alpha \exp^{\frac{-E_A}{RT_1}} C_{a,1}, \quad (3.13)$$

$$0 = \frac{FT_0}{V_1} - \frac{FT_1}{V_1} - \frac{\lambda \alpha \exp^{\frac{-E_A}{RT_1}} C_{a,1}}{\rho C_p} - \frac{UA_H}{V_1 \rho C_p} (T_1 - T_{ch0,1}). \quad (3.14)$$

Ahora se define la “generación de calor”, el término  $Q_G$  de la ecuación (3.14)

$$Q_G = -\lambda V_1 C_{a,1} \alpha \exp^{\frac{-E_A}{RT_1}}. \quad (3.15)$$

La generación de calor  $Q_G$  depende de la temperatura  $T_1$  y de la concentración del reactante  $C_{a,i}$  (3.15),  $Q_G$  aumenta con el incremento de la temperatura de reacción (Figura 3.2). A temperaturas elevadas, la conversión es mayor, por lo tanto, la concentración de  $A$  disminuye. Por otro lado, el término  $\left\langle \alpha \exp^{\frac{-E}{RT_1}} \right\rangle$  se incrementa conforme  $T_1$  aumenta. El efecto global de las dos variables hace que  $Q_G$  se

incrementa conforme aumenta la temperatura (Figura 3.2). El “calor removido” se obtiene como sigue

$$Q_R = \frac{F}{V_1}(T_1 - T_0) + \frac{UA_H}{\rho V_1 C_p}(T_1 - T_{ch,1}). \quad (3.16)$$

El término  $\left\langle \frac{F}{V_1}(T_1 - T_0) \right\rangle$  corresponde a la energía del fluido a través del reactor desde la alimentación hasta la salida, el segundo término es la velocidad del calor removido por la transferencia de calor a la chaqueta de enfriamiento. Si la temperatura de alimentación es más baja que la temperatura del reactor  $T_1$ , la corriente de alimentación tiende a ser más fría que el reactor.

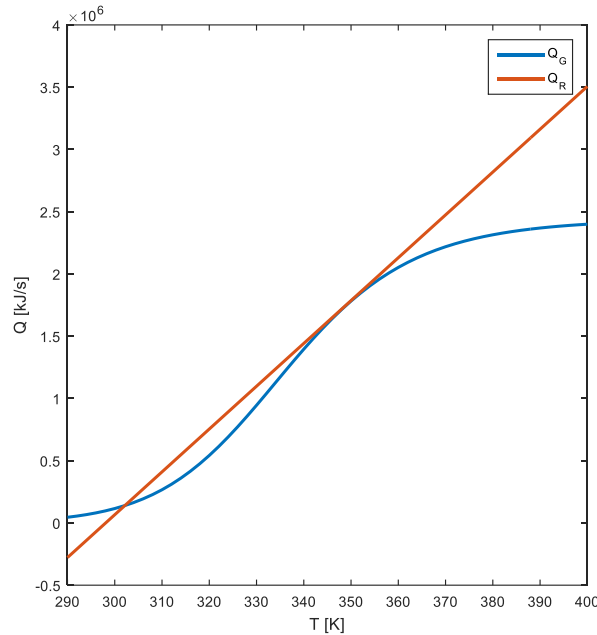


Figura 3.2 Calor generado y Calor removido (CSTR 1).

Si  $T_0$ ,  $U$ ,  $A$ ,  $F$ ,  $C_p$ ,  $\rho$  y  $T_j$  son todos constantes, entonces  $Q_R$  es una función lineal de la temperatura. Con esto podemos definir

$$Q_G - Q_R = 0. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, una temperatura en la cual las curvas de  $Q_G$  y  $Q_R$  se intersectan es la solución en régimen permanente. Sin embargo, de acuerdo con la Figura 3.2,

se presentan dos intersecciones entre  $Q_G$  y  $Q_R$ , esto significa que hay dos puntos de equilibrio a las condiciones de alimentación dadas. A 300 K, el punto de equilibrio es estable, pero la conversión es baja y por lo tanto no se desea llegar a esta condición. Entre ambos puntos de equilibrio, el calor generado  $Q_G$  es inferior al removido  $Q_R$ , por lo que el reactor no puede funcionar continuamente de manera estable, así que el reactor evoluciona hacia el punto de operación de baja conversión. Por otro lado, la temperatura en la cual se requiere operar al primer CSTR es de 350 K, pero este punto parece inestable porque una pequeña perturbación provoca que el reactor evolucione al punto de baja conversión que está en una región más estable. Se realizaron algunas simulaciones en lazo abierto que verificaron este comportamiento.

De la ecuación (3.13) el comportamiento de la concentración con respecto a la temperatura del reactor  $C_{a,i}(T)$ , está dada por

$$C_{a,i} = \frac{FC_{a0}}{F + V\alpha \exp^{-E/RT_i}} \quad (3.18)$$

A bajas temperaturas  $C_{a,i}$  se aproxima a  $C_{a,0}$  debido a que la velocidad de reacción es pequeña. A medida que aumenta la temperatura, la velocidad de reacción aumenta. Esto causa que  $C_{a,i}$  se aproxime a cero. Lo que indica que la mayoría del reactante (componente A) es consumido y existe un pequeño residuo en el reactor. Este comportamiento se puede apreciar mejor en la Figura 3.3 donde se muestran las concentraciones requeridas para los tres reactores.

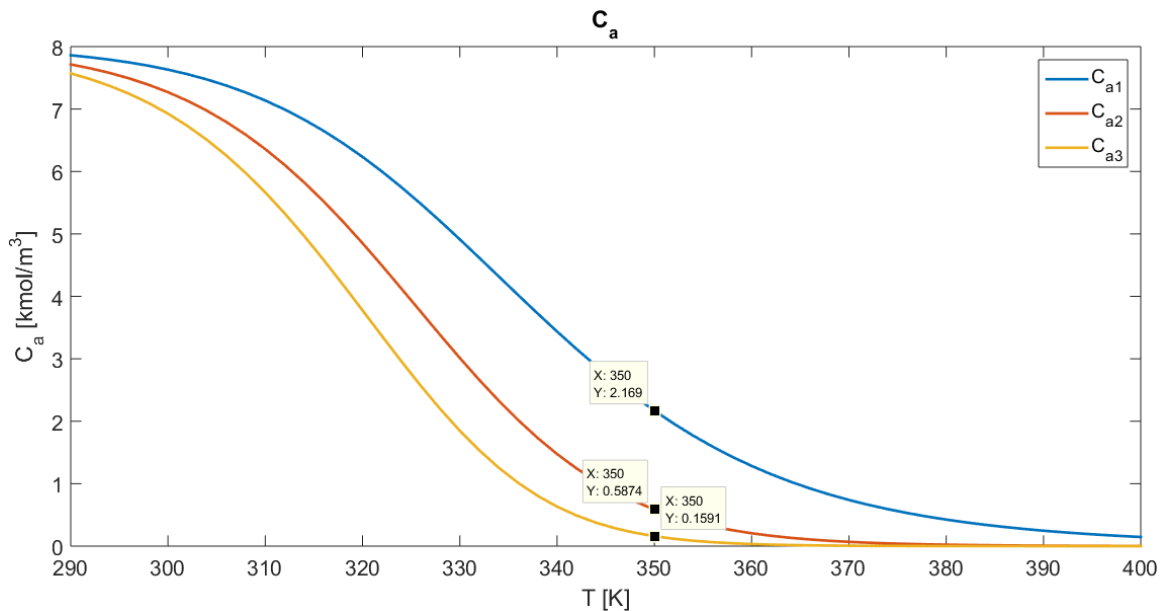


Figura 3.3 Valor de  $C_{a,i}$  para los tres reactores en el punto de equilibrio deseado de Temperatura.

La situación de inestabilidad del punto de equilibrio deseado puede corregirse incorporando al reactor un controlador que corrija las desviaciones debidas a que el sistema tiende a los puntos de equilibrio del sistema, esto es especialmente necesario cuando es más conveniente o simplemente requerido, trabajar en zonas cercanas a las del punto inestable. Antes de diseñar el controlador se hace un análisis de estabilidad para este reactor.

### 3.3 Análisis de estabilidad sistema de tres CSTRs isotérmicos en serie

El análisis de estabilidad para los tres reactores se realizó mediante el lugar de las raíces de las funciones de transferencia  $G_{i,i}(s)$  obtenidas para cada CSTR (presentados en la sección 2.3.2). Realizando un análisis de estabilidad usando la técnica del lugar de las raíces para las tres unidades del proceso, se determinó que el primer reactor es inestable.

Tomando el polinomio característico (polinomio del denominador de la función de transferencia) de  $G_{1,1}(s)$

$$s^3 + 0.04018s^2 - 5.676 \times 10^{-5}s - 1.556 \times 10^{-9} . \quad (3.19)$$

Obtenemos las raíces del polinomio característico, las cuales son llamadas también como *polos*. La naturaleza de las raíces del denominador son las que determinan el patrón de la respuesta temporal a una dada señal de entrada y nos permite un conocimiento sobre la dinámica del sistema. Los polos que definen la dinámica del primer CSTR son

$$\begin{aligned} p_1 &= -0.0415 \\ p_2 &= 0.0014 \\ p_3 &= -2.6901 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

De los polos del primer CSTR uno de ellos es positivo lo que indica que el sistema presenta inestabilidad. Se grafica el lugar de las raíces para el primer reactor, la Figura 3.4 muestra el lugar de las raíces de la primera unidad, uno de los polos del sistema se encuentra en el semiplano derecho, lo cual indica que el sistema presenta inestabilidad [40].

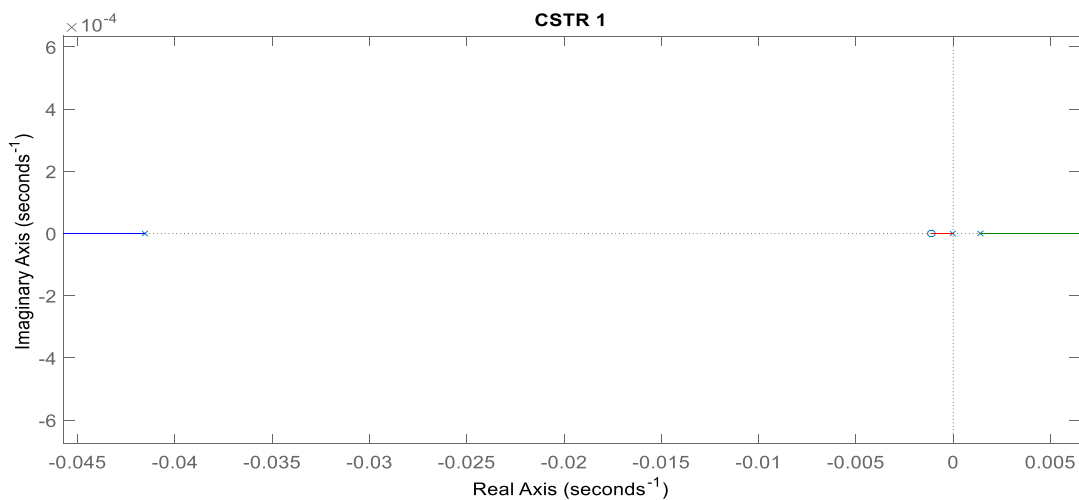


Figura 3.4 Lugar de las raíces CSTR 1.

Se realizó el mismo análisis para los reactores dos y tres a partir de las raíces del polinomio característico de la función de transferencia. En las Figura 3.5 y Figura 3.6 se presenta el lugar de las raíces para los reactores 2 y 3 respectivamente.

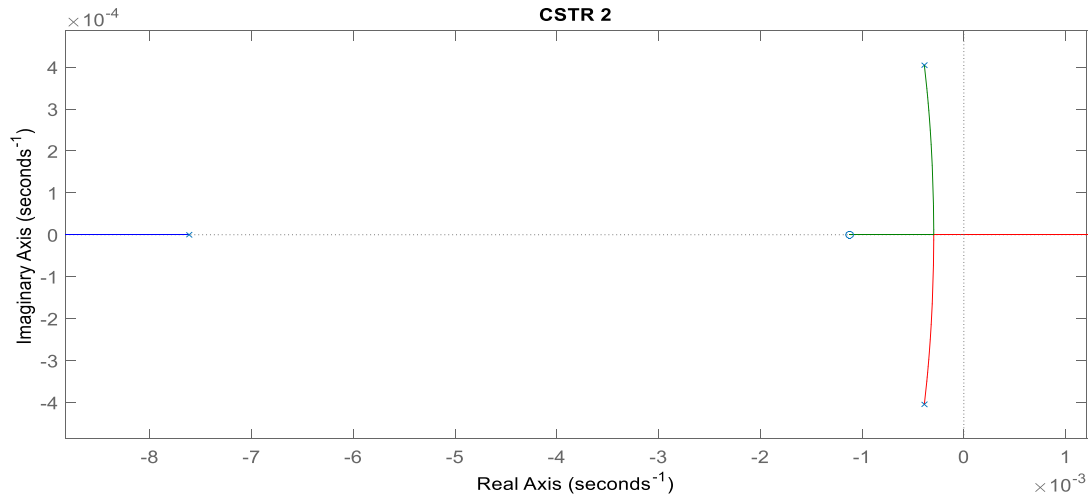


Figura 3.5 Lugar de las raíces CSTR 2.

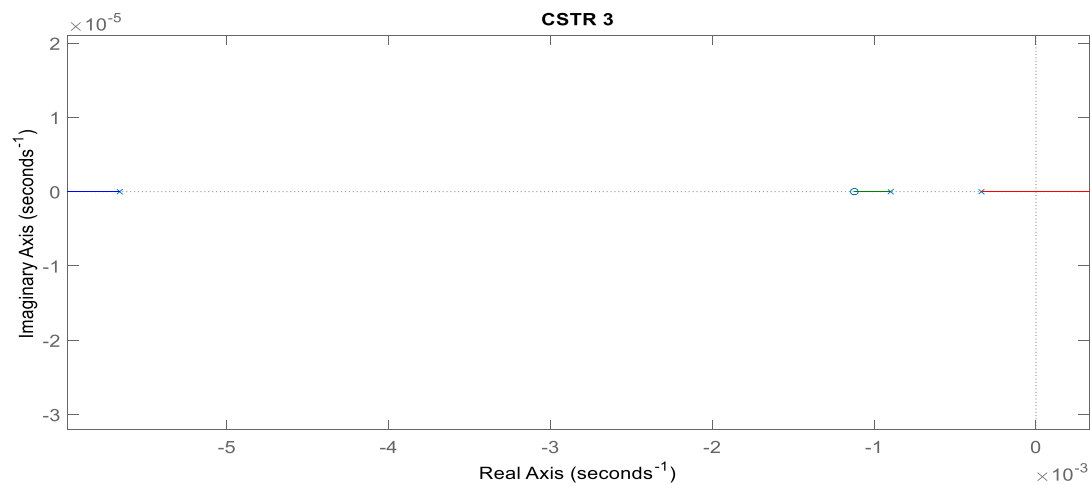


Figura 3.6 Lugar de las raíces CSTR 3.

En los reactores dos y tres no existe una condición de inestabilidad, debido a que todos los polos del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo, es decir, se encuentran en la región estable.

Con base en el análisis de múltiples puntos de equilibrio en la sección 3.2 se determinó que el primer reactor tiene dos puntos de equilibrio, de los cuales el punto más cercano a la temperatura de entrada resulta ser más estable, en cambio, con el análisis de lugar de las raíces se determinó que el segundo punto correspondiente a la temperatura deseada de operación (350 K) es inestable. La inestabilidad del primer reactor es un problema a tratar con el control del sistema.

## 4 Diseño e Implementación de controladores

En la sección 2.4 se presentaron las estructuras de control para procesos en serie. En este capítulo se muestra el diseño de los controladores por lazo local, prealimentado, prealimentado con retroalimentación y el controlador predictivo multivariable basado en modelo diseñado en esta tesis. Estos controladores son implementados mediante simulación en el caso de estudio de tres CSTRs.

El objetivo de control es mantener una operación isotérmica en los 3 CSTRs, es decir, mantener las temperaturas  $T_1, T_2$  y  $T_3$  en el valor nominal de operación de  $350\text{ K}$  y garantizar la concentración de la corriente de salida de cada reactor con variaciones mínimas, es decir, lo más cercano al valor nominal. Como variables manipuladas se usan los flujos de los fluidos de enfriamiento de los 3 CSTR  $F_{ch,i}$  con  $i = 1, 2, 3$ .

### 4.1 Control de lazo local

Los controladores fueron obtenidos a partir del modelo lineal para posteriormente ser probados usando el modelo no lineal como planta. El objetivo de control es mantener operación isotérmica mediante la regulación de las temperaturas de cada reactor y de esta manera controlar indirectamente la concentración de salida cercano al valor nominal. El controlador del sistema de tres reactores en serie es un controlador de lazo local, con retroalimentación de salida, que tiene la forma descrita en la sección 2.4.1. Los tres controladores PID desacoplados sirven para regular la temperatura de cada reactor, manipulando el flujo de las chaquetas de enfriamiento. La estructura de cada controlador se define de acuerdo con [39]:

$$PID_{(s)} = K_c \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \frac{\tau_D s + 1}{(\tau_D/20)s + 1} \quad (4.1)$$

Con base en el análisis del lugar de las raíces para el primer CSTR se determinó que este es inestable. Esta condición de inestabilidad no fue posible de tratar con controladores PID sintonizados mediante respuesta al escalón, por lo que fue necesario diseñar estos controladores PID mediante colocación de polos.

El controlador del primer reactor se diseña para garantizar estabilidad, colocando los polos de la planta en lazo cerrado en la vecindad de la región estable. La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es

$$1 + G_{11(s)}PID_{(s)} = 1 + \frac{-0.003255s - 3.654 \times 10^{-6}}{s^3 + 0.04018s^2 - 5.676 \times 10^{-5}s - 1.556 \times 10^{-9}} K_c \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \frac{\tau_D s + 1}{(\tau_D/20)s + 1}. \quad (4.2)$$

Se propuso un polinomio ((A.39), Anexo D) que garantiza que los polos de la planta estén en el lado izquierdo del plano complejo y la operación estable en lazo cerrado. Se calcularon las ganancias del controlador PID. Para el controlador de la unidad 2,  $K_{2,2}$  se buscó satisfacer los siguientes requerimientos: lograr un tiempo de establecimiento rápido, menor a 100 *segundos*; conseguir un tiempo de levantamiento lo más pequeño posible, y un sobretiro menor al 35%.

El controlador  $K_{3,3}$  para el tercer lazo se diseñó para cumplir el requisito de que la respuesta tuviera un tiempo de asentamiento menor a los 50 *segundos*, la sintonización se realizó con Matlab® Sisotool.

Las ganancias de los controladores se presentan en la Tabla 4.1, para ver a detalle el desarrollo de los controladores, véase anexo D. Los controladores obtenidos fueron los siguientes

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{1,1} = -0.1156 \frac{13.8083s+1}{13.8083s} \frac{140.9542s+1}{(140.9542/20)s+1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{2,2} = -0.09825 \frac{131.7937s+1}{131.7937s} \frac{125.039s+1}{(125.039/20)s+1} & 0 \\ 0 & 0 & K_{3,3} = -3.088 \frac{s+2.9231}{s} \frac{26.3114s+1}{(26.3114/20)s+1} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$



Tabla 4.1 Ganancia de controladores PID Lazo local.

| Controlador | Ganancia $K_c$          | Ganancia $T_I$ | Ganancia $T_D$ |
|-------------|-------------------------|----------------|----------------|
| $K_{1,1}$   | $-11.56 \times 10^{-2}$ | 13.80          | 140.95         |
| $K_{2,2}$   | -0.09                   | 131.79         | 125.03         |
| $K_{3,3}$   | -3.08                   | 2.92           | 26.31          |

## 4.2 Control prealimentado con retroalimentación

El controlador prealimentado con retroalimentación como se explicó en la sección 2.4.3 es el resultado de combinar el control por retroalimentación de lazo local dado en la ecuación (2.21) y el controlador prealimentado (2.23). La estructura para el control prealimentado con retroalimentación o *Control BTI* (por la estructura de Bloque Triangular Inferior) para el sistema de tres CSTRs en serie es la que muestra en la Figura 4.1. Con los controladores de prealimentado este controlador adquiere una estructura de control multivariable ya que no solo se trata de controlar a la unidad con el lazo local, sino que se trata de disminuir las perturbaciones provocadas por los reactores uno y dos a la salida del tercer reactor.

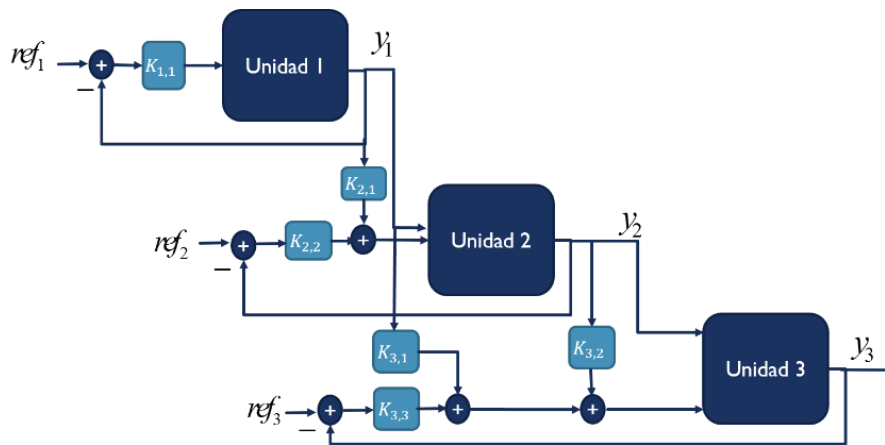


Figura 4.1 Estructura de control Bloque triangular inferior caso de estudio.

Se calcularon los controladores prealimentados para el sistema de tres CSTRs en serie  $K_{21}$ ,  $K_{32}$  y  $K_{31}$ . Los controladores obtenidos son los siguientes

$$K(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{2,1} = K_{2,1,1} + K_{2,1,2} + K_{2,1,3} & 0 & 0 \\ K_{3,1} = 0 & K_{3,2} = K_{3,2,1} + K_{3,2,2} + K_{3,2,3} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

con

$$K_{2,1,1} = \frac{9.894 \times 10^{-7} s^{15} + 1.055 \times 10^{-7} s^{14} + 3.827 \times 10^{-9} s^{13} + 5.6 \times 10^{-11} s^{12} + 3.576 \times 10^{-13} s^{11} + 7.735 \times 10^{-16} s^{10}}{6.08 \times 10^{-5} s^{14} + 6.043 \times 10^{-6} s^{13} + 1.916 \times 10^{-7} s^{12} + 2.073 \times 10^{-9} s^{11} + 7.594 \times 10^{-12} s^{10}}, \quad (4.5)$$

$$K_{2,1,2} = \frac{-9.99 \times 10^{-19} s^9 - 3.98 \times 10^{-21} s^8 + 4.369 \times 10^{-25} s^7 + 3.179 \times 10^{-27} s^6 + 2.356 \times 10^{-30} s^5}{7.845 \times 10^{-16} s^9 - 2.386 \times 10^{-17} s^8 - 2.575 \times 10^{-20} s^7 + 4.413 \times 10^{-24} s^6 + 2.64 \times 10^{-26} s^5}, \quad (4.6)$$

$$K_{2,1,3} = \frac{-7.425 \times 10^{-35} s^4 - 5.13 \times 10^{-37} s^3 - 2.327 \times 10^{-40} s^2 - 1.142 \times 10^{-44} s - 1.487 \times 10^{-49}}{2.281 \times 10^{-29} s^4 + 9.38 \times 10^{-33} s^3 + 1.925 \times 10^{-36} s^2 + 8.491 \times 10^{-41} s + 1.062 \times 10^{-45}}, \quad (4.7)$$

$$K_{3,2,1} = \frac{5.677 \times 10^{-6} s^{15} + 2.151 \times 10^{-7} s^{14} + 3.746 \times 10^{-9} s^{13} + 3.135 \times 10^{-11} s^{12} + 1.742 \times 10^{-13} s^{11} + 6.248 \times 10^{-16} s^{10}}{0.0004972 s^{14} + 1.632 \times 10^{-5} s^{13} + 2.22 \times 10^{-7} s^{12} + 1.633 \times 10^{-9} s^{11} + 7.14 \times 10^{-12} s^{10}}, \quad (4.8)$$

$$K_{3,2,2} = \frac{1.489 \times 10^{-18} s^9 + 2.427 \times 10^{-21} s^8 + 2.782 \times 10^{-24} s^7 + 2.294 \times 10^{-27} s^6 + 1.374 \times 10^{-30} s^5}{1.994 \times 10^{-14} s^9 + 3.698 \times 10^{-17} s^8 + 4.77 \times 10^{-20} s^7 + 4.402 \times 10^{-23} s^6 + 2.95 \times 10^{-26} s^5}, \quad (4.9)$$

$$K_{3,2,3} = \frac{5.957 \times 10^{-34} s^4 + 1.823 \times 10^{-37} s^3 + 3.73 \times 10^{-41} s^2 + 4.556 \times 10^{-45} s + 2.2492 \times 10^{-49}}{1.434 \times 10^{-29} s^4 + 4.95 \times 10^{-33} s^3 + 1.156 \times 10^{-36} s^2 + 1.637 \times 10^{-40} s + 1.057 \times 10^{-44}}. \quad (4.10)$$

El controlador prealimentado con retroalimentación queda de la siguiente forma

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{1,1}(s) & 0 & 0 \\ K_{2,1}(s) & K_{2,2}(s) & 0 \\ K_{3,1}(s) & K_{3,2}(s) & K_{3,3}(s) \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

## 4.3 Control predictivo multivariable basado en modelo

Se diseña un control predictivo basado en modelo multivariable para tres CSTRs en serie. El objetivo de control es regular la temperatura en cada reactor a 350 K para mantener la operación isotérmica manipulando el flujo de fluido de enfriamiento en la chaqueta de cada reactor.

Como se explicó en la sección 2.5.1, se requiere un modelo en tiempo discreto para diseñar el controlador predictivo; por lo tanto, se realizó la discretización del modelo en espacio de estados del sistema de tres CSTR isotérmicos en serie utilizando la función *c2d* de Matlab®, definiendo un tiempo de muestreo de  $T_s = 5\text{seg}$  (para control de procesos es común definir  $T_s > 1\text{seg}$  [41]) y un retenedor de orden cero. Entonces el sistema en tiempo discreto es el siguiente

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k), \quad (4.12)$$

$$y(k) = C_d x(k). \quad (4.13)$$

Con

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.9940 & -0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1139 & 1.0118 & 0.0029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0012 & 0.0207 & 0.8127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0019 & 0 & 0 & 0.9940 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1140 & 0.0019 & 0 & 0 & 1.0118 & 0.0032 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0013 & 0 & 0 & 0 & 0.0226 & 0.9645 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0022 & 0 & 0 & 0.9981 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 0.0019 & 0 & 0.1132 & 0.9961 & 0.0032 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0013 & 0.0225 & 0.9750 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.0382 & 0 & 0 \\ -22.7267 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2316 & 0 \\ 0 & -141.8203 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0001 & -0.3295 \\ 0 & 0 & -203.1910 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$C_d = I^{9 \times 9}. \quad (4.16)$$

Con lo anterior se obtiene un modelo con la forma matemática de las ecuaciones (2.30)-(2.31) donde  $A_d \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$ ,  $B_d \in \mathbb{R}^{n_e \times l}$  y  $C_d \in \mathbb{R}^{m \times n_e}$ ,  $n_e$  es el número de estados,  $m$  es el número de salidas controladas y  $l$  es el número de entradas, el subíndice  $d$  es para denotar que el modelo está en tiempo discreto.

### 4.3.1 Parámetros del MPC

Para diseñar el controlador se realizaron simulaciones dinámicas y se analizaron algunas características del proceso como apoyo para determinar los parámetros del controlador. Se estableció un horizonte de predicción  $H_p = 10$  porque un horizonte de predicción más grande no aporta un beneficio mayor y el costo computacional aumenta. El horizonte de control es  $H_u = 5$  debido a que, para un valor de horizonte de control mayor, la señal de control presenta un comportamiento de oscilación, lo cual es un inconveniente como ley de control. Por ejemplo, para  $H_p = 15$  y  $H_u = 8$  la señal de control oscila y tiene sobretiros grandes más allá del triple del flujo nominal. En simulación se sabe que el efecto de las entradas se refleja inmediatamente en las salidas del sistema, por lo que se requiere la acción de control se realice desde el principio por lo que el parámetro  $H_w = 1$ .

### 4.3.2 Matrices de ponderación $Q$ y $R$

$$Q(k+i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

En la matriz  $Q$  se penalizan solo los cambios en las salidas controladas con respecto a la referencia, es decir, la temperatura de las corrientes de salida de los CSTRs.  $Q(2,2)$  con valor de 10 corresponde a la temperatura del primer reactor, así donde se desea que sea más estricto el controlador, debido a la inestabilidad del primer reactor y que se desea operar en un punto de equilibrio no tan estable, el error de seguimiento en esta salida se restringe para mantener el error lo más cercano a cero y manejar los inconvenientes de inestabilidad del primer reactor, mientras que para las siguientes salidas controladas no es tan grande la penalización por ser estables.

$$R(k+i) = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Los primeros dos valores de la matriz  $R$  se seleccionaron como se indica en (4.18), ya que con ellos se da libertad para obtener una señal de control más rápida, es aquí donde se realiza un esfuerzo de control mayor. En cambio, al tercer valor  $R(3,3)$  obtiene un comportamiento suave en la señal de control, evitando acciones violentas y respuestas abruptas debido a que mientras más grande sea el valor en la matriz  $R$  menor será el cambio en la señal de control en cada instante de tiempo.

### 4.3.3 Restricciones en $u(k + i)$

Las restricciones de las señales de control en variables de desviación fueron determinadas en función de los flujos nominales en la chaqueta,  $F_{ch,i}$   $i = 1,2,3$  en cada reactor (Tabla 3.2).

Tabla 4.2 Restricciones en señal de control.

| Restricciones en variable de desviación                                 | Restricciones en variables de proceso                |
|---|--|
| $-0.0452 \leq u_1(k+1) \leq 0.15 \text{ m}^3 / \text{s}$                | $0 \leq u_1(k+1) \leq 0.1952 \text{ m}^3 / \text{s}$ |
| $-0.0033 \leq u_2(k+1) \leq 0.15 \text{ m}^3 / \text{s}$                | $0 \leq u_2(k+1) \leq 0.1533 \text{ m}^3 / \text{s}$ |
| $-6.1975 \times 10^{-4} \leq u_3(k+1) \leq 0.15 \text{ m}^3 / \text{s}$ | $0 \leq u_2(k+1) \leq 0.1506 \text{ m}^3 / \text{s}$ |

En la Tabla 4.2 se muestran las restricciones para las señales de control del proceso, es decir los flujos en la chaqueta de enfriamiento de cada reactor, en la columna de la izquierda están las restricciones dadas en variables de desviación, debido a que el controlador MPC trabaja con variables de desviación.

La columna de la derecha contiene los valores en variables de proceso, el límite inferior de flujo en cualquiera de las tres chaquetas de enfriamiento es cero y los límites superiores han sido definidos con un valor de aproximadamente 4 veces el valor nominal del flujo de chaqueta en el primer reactor [42].

## 4.4 Pruebas en simulación

En esta sección se proporcionan los resultados de las pruebas hechas a los controladores del sistema de 3 CSTRs en serie. En primer lugar se prueba el control de lazo local, después el controlador prealimentado con retroalimentación o *Control BTI* (por la estructura de Bloque Triangular Inferior(2.28)), finalmente se prueba el controlador MPC multivariable. Las referencias de los controladores (lazo local, prealimentado con retroalimentación y MPC multivariable) son igual a cero, esta referencia está en variable de desviación. Las simulaciones fueron hechas en Matlab Simulink.

En primer lugar, se realizaron pruebas ante perturbaciones en las temperaturas de las corrientes que pasan por las chaquetas de enfriamiento,  $T_{ch0,1}$ ,  $T_{ch0,2}$  y  $T_{ch0,3}$ . El desempeño de los controladores es evaluado comparando los índices de desempeño ITSE e IAE; estos índices se calculan considerando las señales durante el transitorio. Otros índices de desempeño son el tiempo de establecimiento, el sobretiro máximo y el esfuerzo de control máximo.

### **Pruebas ante perturbaciones en las temperaturas de los fluidos de enfriamiento $T_{ch0,i}$**

La siguiente prueba que se realizó consistió en inducir un incremento de la temperatura de entrada en la chaqueta del primer reactor, de  $20.85\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $24.85\text{ }^{\circ}\text{C}$  (una diferencia de  $4\text{ K}$  o  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ )  $T_{ch0,1}$  a los  $16\text{ min}$  de simulación.

En la Figura 4.2 se observa el cambio de temperatura en los tres tanques ( $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ ): la temperatura del reactor disminuye un poco, sin embargo, se retoma el valor nominal deseado en poco tiempo en el caso de los controladores por lazo local y bloque triangular inferior, en cambio el controlador MPC mantiene todo el tiempo el valor de la temperatura en el reactor 1, a pesar de la perturbación.

Los cambios en las señales de control se muestran en la Figura 4.3. El esfuerzo de control es mayor en el reactor 1 debido a que la perturbación se realizó en este. Después, las señales de control 2 y 3 cambian en menor grado con relación a su valor nominal

## Capítulo 4. Diseño e Implementación de controladores

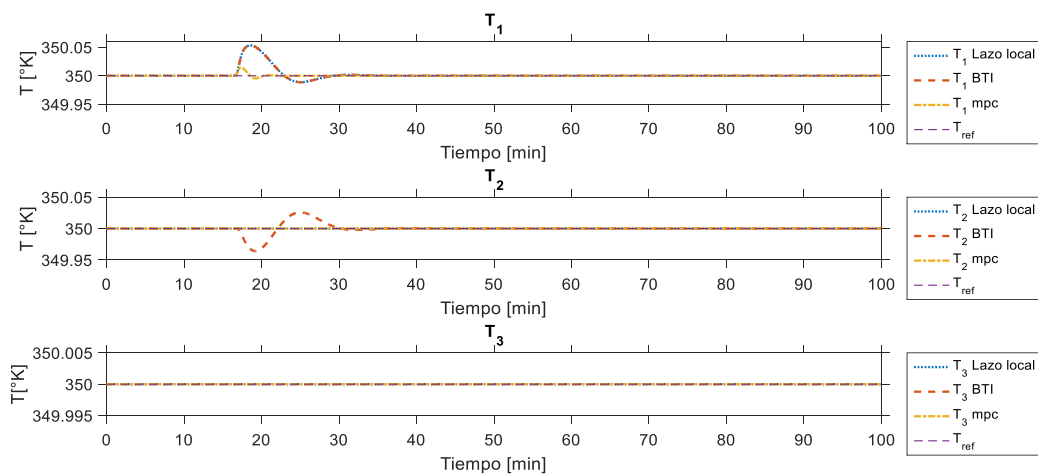


Figura 4.2 Temperaturas de salida. Decremento en temperatura de  $T_{ch0,1}$

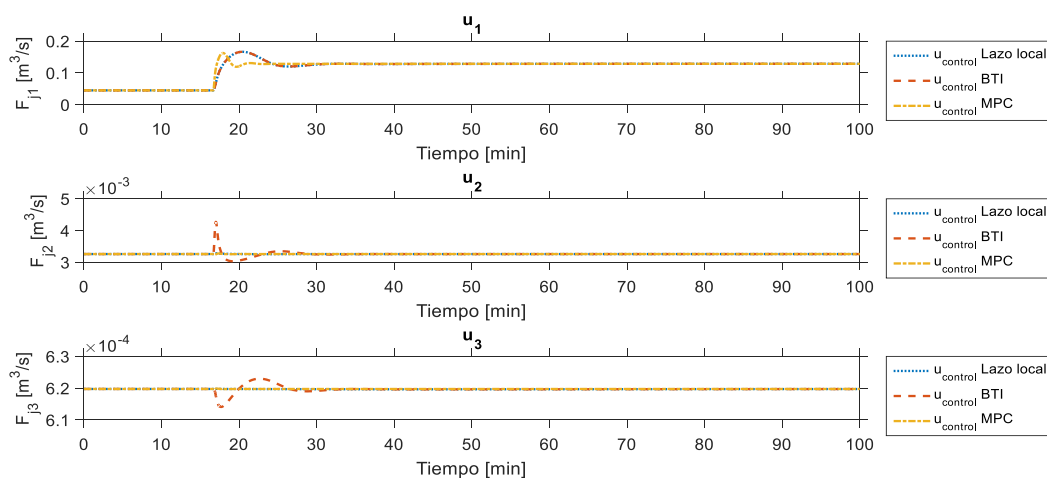


Figura 4.3 señales de control de los 3CSTR. Decremento en  $T_{ch0,1}$

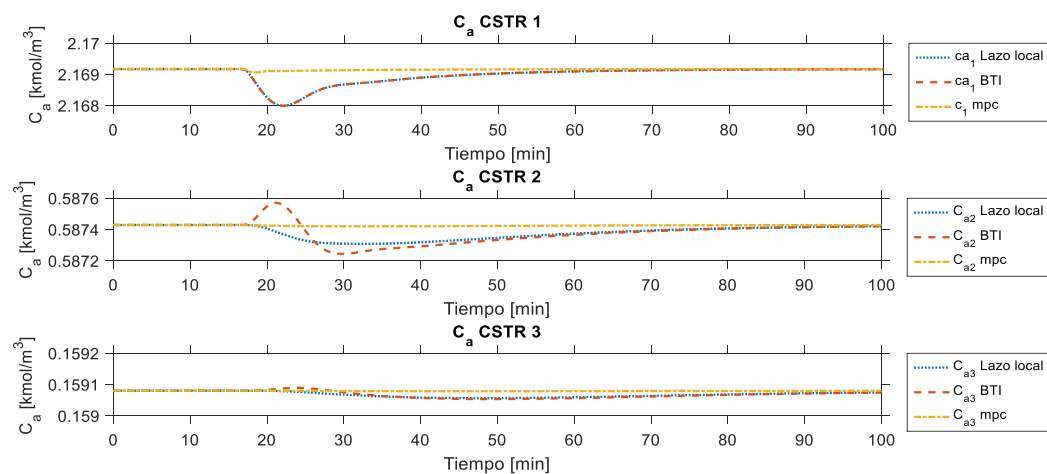


Figura 4.4 Concentraciones de salida. Decremento en  $T_{ch0,1}$



Debido a los pequeños cambios presentados en la temperatura del reactor 1, la concentración de salida del tanque varía un poco (Figura 4.4), consecuentemente, el segundo y tercer reactor muestran una pequeña variación para las señales controladas por lazo local y BTI, mientras que para el MPC el cambio es muy pequeño.

Tabla 4.3 Comparación entre controladores. Incremento en  $T_{ch0,1}$

| Controlador | Tiempo de establecimiento [min] |                          |                         | Señal de control $u$ máxima [ $m^3/s$ ] |        |                          | Sobretiro + del valor nominal [ $^{\circ}K$ ] |                       |                         |
|-------------|---------------------------------|--------------------------|-------------------------|---|--------|--------------------------|---|-----------------------|-------------------------|
|             | LL                              | BTI                      | MPC                     | LL                                      | BTI    | MPC                      | LL  | BTI                   | MPC                     |
| $T_1$       | 16.6                            | 25.8                     | 6.6                     | 0.166                                   | 0.197  | 0.162                    | 0.053   | 0.053                 | 0.014                   |
| $T_2$       | 26.6                            | 20                       | 6.6                     | 0.0032                                  | 0.0037 | 0.0032                   | $4.86 \times 10^{-5}$                         | 0.025                 | $0.194 \times 10^{-3}$  |
| $T_3$       | 50                              | 33                       | 33                      | $6.197 \times 10^{-4}$                  | 0.001  | $6.1986 \times 10^{-10}$ | $5.079 \times 10^{-10}$                       | 0.6933                | $0.2531 \times 10^{-6}$ |
|             | <b>ITSE</b>                     |                          |                         |   |        |                          | <b>IAE</b>                                    |                       |                         |
|             | LL                              | BTI                      | MPC                     |   |        |                          | LL  | BTI                   | MPC                     |
| $T_1$       | 0.515                           | 0.338                    | 0.011                   |   |        |                          | 1.48  | 1.21                  | 8.8                     |
| $T_2$       | 0.517                           | 0.3325                   | 0.2037                  |   |        |                          | $1.6 \times 10^{-2}$                          | 6.6                   | 0.28                    |
| $T_3$       | $3.85 \times 10^{-7}$           | $1.2097 \times 10^{-10}$ | $3.709 \times 10^{-12}$ |   |        |                          | $2.09 \times 10^{-2}$                         | $1.02 \times 10^{-2}$ | $7.66 \times 10^{-2}$   |

En la Tabla 4.3 se compara el desempeño de los controladores considerando los criterios antes citados: sobretiro, tiempo de establecimiento, el esfuerzo de control máximo y los índices de desempeño ITSE e IAE; estos índices se calculan durante el transitorio (ocurre en el tiempo 16.66 min a 37.5 min) en esta perturbación.

El controlador MPC es el control que menor esfuerzo de control requiere para lograr mantener regulada la temperatura en cada reactor y presenta menos sobretiro en las temperaturas de los reactores uno y dos. El controlador BTI necesita mayor esfuerzo de control y en los primeros reactores presenta un sobretiro mayor, sin embargo, todos los controladores cumplen con el objetivo de control y presentan concentraciones de salida cercanas al valor nominal.

La siguiente perturbación consistió en provocar un cambio de  $+4 K$ , pero ahora en las temperaturas del fluido de enfriamiento circulando por las chaquetas de los tres reactores. Se provoca el cambio de  $4 K$  en la temperatura  $T_{ch0,1}$  a los  $16 min$ ,  $T_{ch0,2}$  se varía a los  $33 min$  y por último la temperatura en la entrada de la chaqueta del reactor 3  $T_{ch0,3}$  se varía a los  $66 min$  de simulación. Las variables controladas son las que se muestran a continuación

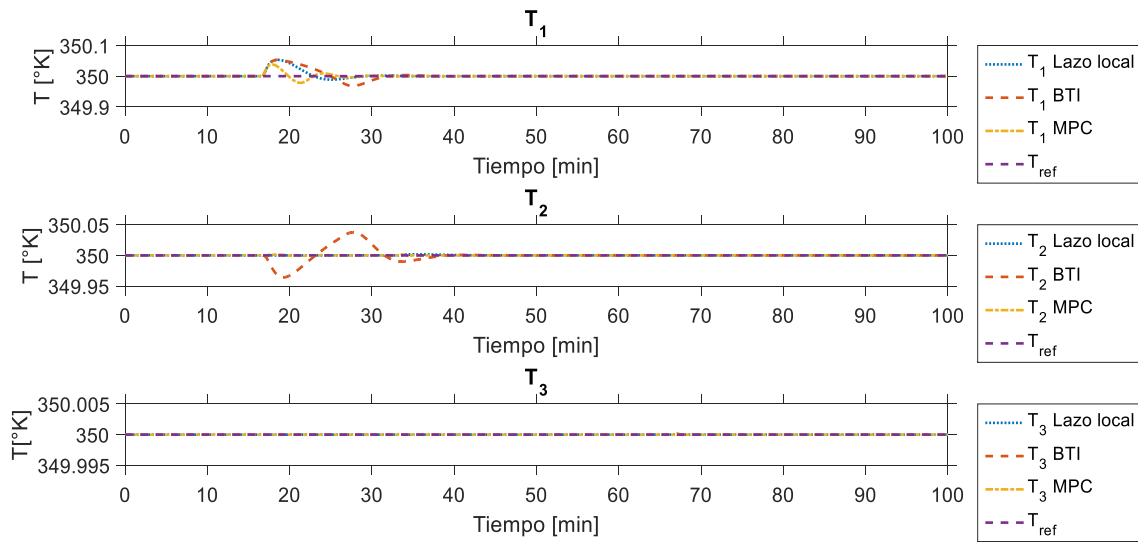


Figura 4.5 Temperaturas de salida. Perturbación en  $T_{ch0,1}$

Las temperaturas en los reactores 1 y 2 muestran variaciones sin embargo se retoma el valor de régimen permanente en poco tiempo con los controladores de lazo local y el controlador prealimentado-retroalimentación, mientras que el controlador MPC en los 3 reactores logra mantener durante todo el tiempo la temperatura en el valor deseado (Figura 4.5).

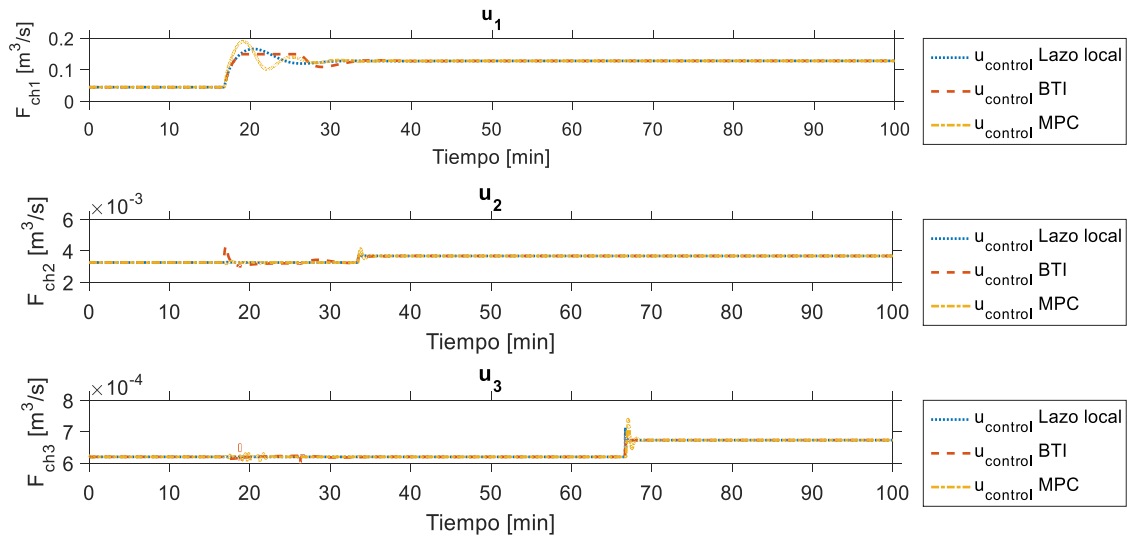


Figura 4.6 Señales de control. Perturbación en  $T_{ch0,i}$

En la Figura 4.6 se muestra que a los diferentes tiempos en los que se realizaron las perturbaciones, la acción de control se inicia. A causa del incremento de temperatura en entrada a la chaqueta se requiere que los flujos de entrada en la chaqueta sean más grandes para que se siga manteniendo la función de la chaqueta y esta logre disipar el calor generado por la reacción en los reactores.

En la Figura 4.7 las salidas de concentración sufren menos variaciones con el controlador MPC, no se mueven de su valor de régimen permanente, mientras que las respuestas con los controladores de lazo local y BTI por un cierto tiempo no logran compensar esas perturbaciones y debido a los cambios en temperatura de salida, la concentración varía también aunque en este caso sí se logra mantener la concentración en su valor nominal pese a las perturbaciones de temperatura.

Los criterios ITSE e IAE se calcularon para la temperatura en lo que ocurre el transitorio aproximadamente de  $16.6 \text{ min}$  a  $33 \text{ min}$ ,  $T_2$  de  $16.6 \text{ min}$  a  $50 \text{ min}$  y por último el transitorio para la temperatura  $T_3$  ocurre de  $66.66 \text{ min}$  a  $70 \text{ min}$ . Los tiempos de establecimiento son iguales para las diferentes señales controladas, aunque el control MPC para los reactores dos y tres tiene esfuerzos de control más pequeños, es decir, las magnitudes de la señal de control son más pequeñas que las de los controladores por lazo local y BTI (Tabla 4.4).

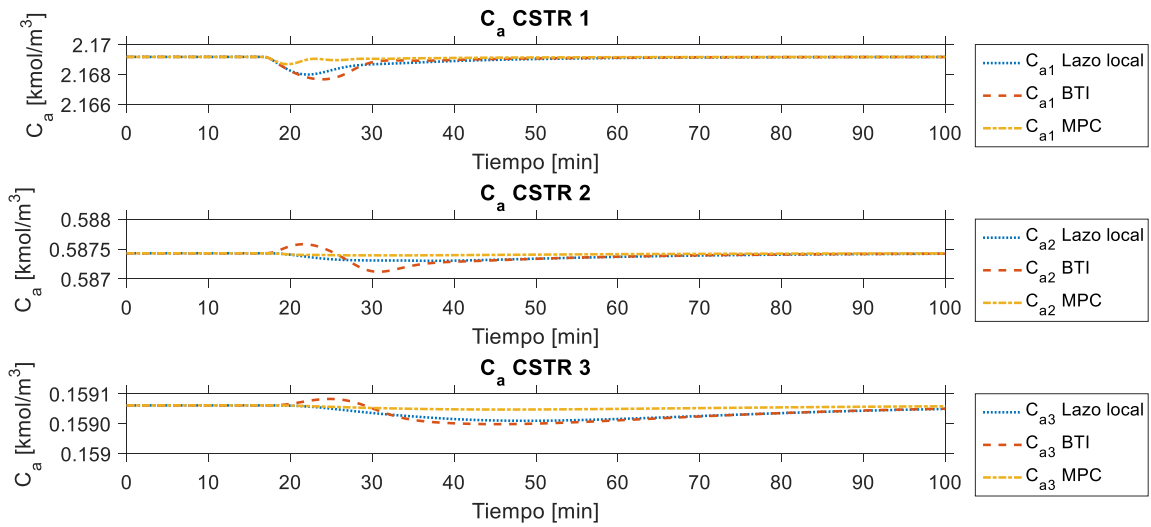


Figura 4.7 Concentración de salida. Perturbación en  $T_{ch0,1}$

Tabla 4.4 Comparación de controladores. Perturbación en  $T_{ch0,i}$ .

| Controlador | Tiempo de establecimiento [min] |                       |                       | Señal de control $u$ máxima [ $m^3/s$ ] |       |                        | Sobretiro + del valor nominal [ $^{\circ}K$ ] |                       |                       |
|-------------|---------------------------------|-----------------------|-----------------------|---|-------|------------------------|---|-----------------------|-----------------------|
|             | LL                              | BTI                   | MPC                   | LL                                      | BTI   | MPC                    | LL  | BTI                   | MPC                   |
| $T_1$       | 16.6                            | 16.6                  | 16.6                  | 0.167                                   | 0.167 | 0.1896                 | 0.053   | 0.053                 | 0.037                 |
| $T_2$       | 33.3                            | 33.3                  | 33.3                  | $3.788 \times 10^{-3}$                  | 0.007 | 0.0041                 | 0.0016  | 0.0257                | 0.0012                |
| $T_3$       | 3.3                             | 3.3                   | 3.3                   | $7.127 \times 10^{-4}$                  | 0.003 | $7.388 \times 10^{-4}$ | $0.358 \times 10^{-10}$                       | $0.48 \times 10^{-7}$ | 0.0002                |
|             | <b>ITSE</b>                     |                       |                       |   |       |                        | <b>IAE</b>                                    |                       |                       |
|             | <b>LL</b>                       | <b>BTI</b>            | <b>MPC</b>            |   |       |                        | <b>LL</b>                                     | <b>BTI</b>            | <b>MPC</b>            |
| $T_1$       | 0.516                           | 0.516                 | 0.164                 |   |       |                        | 1.48  | 1.449                 | 0.88                  |
| $T_2$       | $6.2 \times 10^{-4}$            | 0.33                  | $1.85 \times 10^{-4}$ |   |       |                        | 0.557   | 1.422                 | 0.319                 |
| $T_3$       | $4.762 \times 10^{-11}$         | $1.52 \times 10^{-4}$ | $3.02 \times 10^{-6}$ |   |       |                        | $4.33 \times 10^{-4}$                         | $1.61 \times 10^{-4}$ | $9.17 \times 10^{-4}$ |

La siguiente prueba fue provocar un cambio de  $+4K$  en las temperaturas de entrada de chaqueta de los reactores 1 y 2 y disminuyendo la temperatura de entrada en la chaqueta del reactor 3 en  $4K$ . La temperatura  $T_{ch0,1}$  se varía a los 16 min,  $T_{ch0,2}$  se varía a los 33 min y por último  $T_{ch0,3}$  se varía a los 66 min de simulación.

Las variaciones de las variables controladas, las temperaturas de salida de cada reactor son las que se muestran en la Figura 4.8 los cambios grandes en

temperatura se producen en los reactores 1 y 2, mientras que en el tercer reactor estos cambios son pequeños, los tres controladores logran cumplir con el objetivo de control que es mantener una operación isotérmica, sin embargo, el que muestra menor variación es el control MPC multivariable.

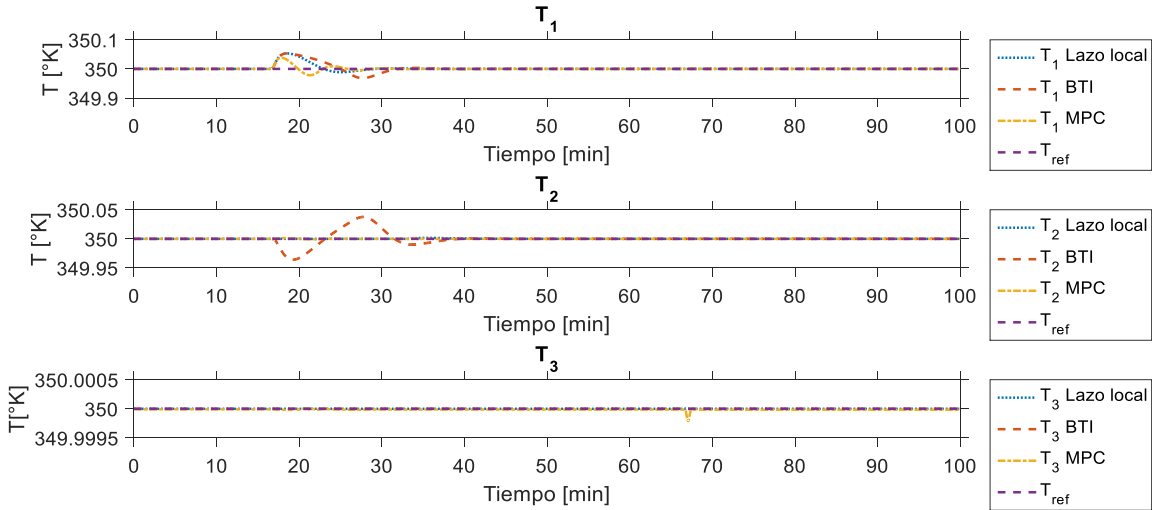


Figura 4.8 Temperaturas de salida. Perturbación en  $T_{ch0,i}$

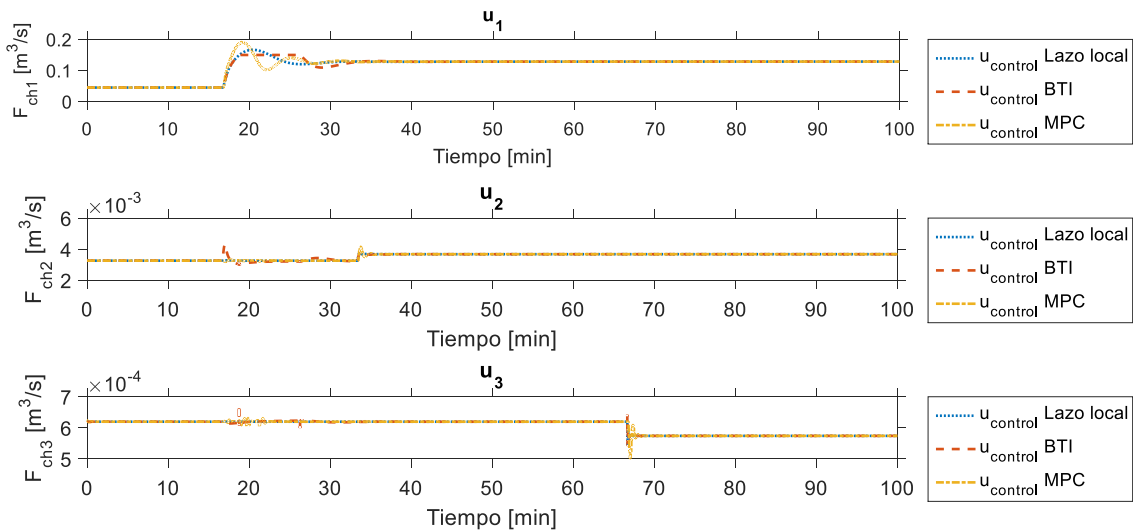


Figura 4.9 Señal de control, flujo de chaqueta en cada reactor.

Los cambios en las señales de control de los primeros dos reactores muestran el comportamiento previsto, ya que estos tienden a aumentar después de que se produce la perturbación debido a que al tener una temperatura mayor a la nominal en la chaqueta de enfriamiento el flujo debe de aumentar para que se logre cumplir el enfriamiento de los reactores, en cambio en el tercer reactor este flujo disminuye

del valor nominal ya que al tener una temperatura en el fluido de enfriamiento no es necesario suministrar tanto flujo al ser una temperatura menor facilita el proceso de enfriamiento del reactor (Figura 4.9).

Al mantener las temperaturas de salida con una variación mínima para mantener la operación isotérmica, las concentraciones de salida no sufren variaciones grandes, el tiempo en el que no se encuentran en su valor nominal es el tiempo que tarda la temperatura para tomar de nuevo el valor nominal de operación por lo que es así como se logra mantener la concentración de salida en cada reactor entre los rangos permitidos y con variaciones mínimas (Figura 4.10).

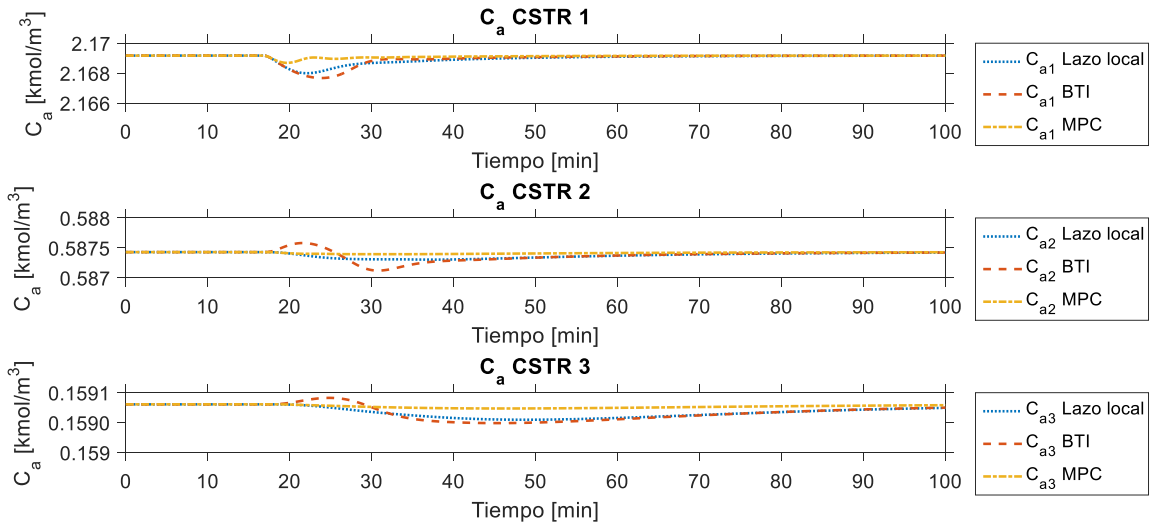


Figura 4.10 Concentración de salida en cada reactor. Perturbación en  $T_{ch0,i}$ .

Tabla 4.5 Comparación de controladores Perturbación en  $T_{ch0,i}$ .

| Controlador | Tiempo de establecimiento [min] |                       |                        | Señal de control $u$ máxima [ $m^3/s$ ] |                       |                        | Valor máximo de Temperatura [ $^{\circ}K$ ] (+ del nominal) |        |        |
|-------------|---------------------------------|-----------------------|------------------------|---|-----------------------|------------------------|---|--------|--------|
|             | LL                              | BTI                   | MPC                    | LL                                      | BTI                   | MPC                    | LL  | BTI    | MPC    |
| $T_1$       | 16.6                            | 16.6                  | 16.6                   | 0.166                                   | 0.166                 | 0.189                  | 0.0532  | 0.0532 | 0.3691 |
| $T_2$       | 38                              | 29                    | 20                     | 0.0037                                  | 0.0035                | 0.0033                 | 0.00141   | -0.999 | 0.0011 |
| $T_3$       | 3.3                             | 3.3                   | 2.5                    | $6.196 \times 10^{-4}$                  | $6.62 \times 10^{-4}$ | $6.197 \times 10^{-4}$ | $-0.352 \times 10^{-10}$                                    | -0.1   | -0.1   |
|             | <b>ITSE</b>                     |                       |                        |   |                       |                        | <b>IAE</b>  |        |        |
|             | <b>LL</b>                       | <b>BTI</b>            | <b>MPC</b>             | <b>LL</b>                               | <b>BTI</b>            | <b>MPC</b>             |   |        |        |
| $T_1$       | 0.5163                          | 0.52                  | 0.163                  | 1.49                                    | 1.48                  | 0.88                   |   |        |        |
| $T_2$       | $6.2 \times 10^{-4}$            | 0.3289                | $1.849 \times 10^{-4}$ | 0.557                                   | 1.422                 | 0.317                  |   |        |        |
| $T_3$       | $3.5 \times 10^{-11}$           | $2.14 \times 10^{10}$ | $4 \times 10^{-4}$     | $5.081 \times 10^{-3}$                  | $1.5 \times 10^{-4}$  | $5.58 \times 10^{-3}$  |   |        |        |

El control MPC es el que usa valores de señal de control más pequeñas en los reactores 2 y 3, así como un tiempo de establecimiento menor para los reactores dos y tres. La medición de los índices de desempeño se realizó durante el transitorio en los tres reactores (16.6 min a 66 min). Los sobretiros de la temperatura en el tercer reactor son negativas debido a que la temperatura tiende a decaer al inducir en la chaqueta un fluido más frío que el valor nominal (Tabla 4.5).

En general, el control tolera las variaciones en la temperatura del fluido de enfriamiento y las concentraciones se mantienen en sus valores de referencia. Se probaron cambios de  $\pm 4^{\circ}C$ , que puede considerarse como una perturbación razonable en la temperatura del fluido de enfriamiento, aun así, tanto el control PID como el MPC multivariable sufren cambios mínimos en las variables de temperatura y concentración de los tres reactores.

#### Pruebas ante perturbación en $C_{a,0}$

La siguiente prueba consiste en realizar un cambio en la concentración de alimentación del proceso  $C_{a,0}$  con un incremento del 5%, este cambio se realizó a los 16.6 min de simulación. La Figura 4.11 muestra las respuestas de las variables controladas, para los tres tanques, se consigue atenuar perfectamente esta

perturbación en la temperatura de operación, el controlador que produce menos variación en la temperatura es el MPC multivariable.

En la Figura 4.12 se aprecia el efecto ocasionado por la perturbación de entrada, como se mencionó en una sección anterior, un cambio en la concentración de entrada produce un efecto directo en la concentración de salida, aun cuando la temperatura tenga una regulación perfecta. Sin embargo, la concentración de salida se mantiene en un rango de valores aceptables, siempre que el control de temperatura sea bueno.

Esto se debe a que la velocidad de reacción se ve afectada directamente por la concentración de entrada. En estas condiciones no es posible garantizar que la concentración se mantenga en su condición nominal, pero sí que su valor permanezca alrededor del valor deseado. Este problema ocurre independientemente del desempeño del control de temperatura y de la técnica de control usada.

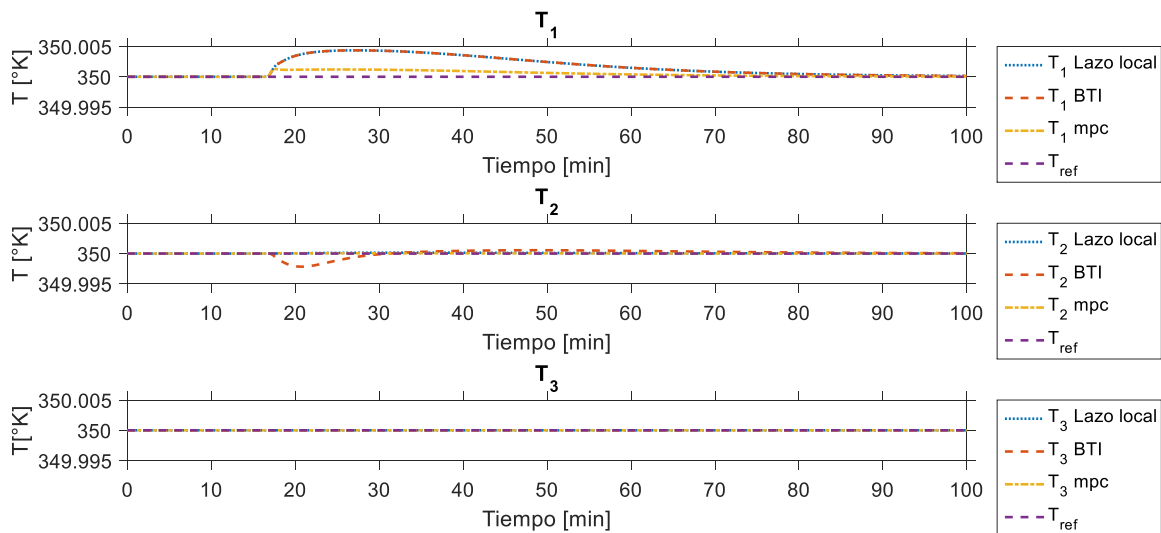


Figura 4.11 Temperaturas de salida. Perturbación +5% en  $C_{a0}$ .



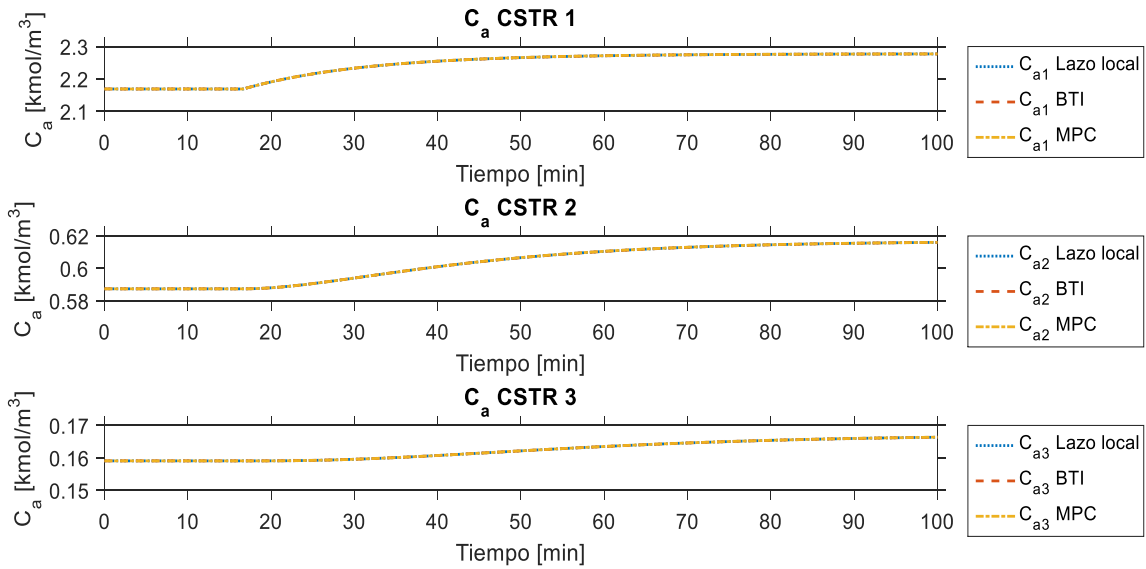


Figura 4.12 Concentraciones de salida. Perturbación +5%  $C_{a0}$ .

En la Figura 4.13 se muestran las señales de control correspondientes a esta perturbación, las cuales, al existir una variación de concentración de salida toman el valor correspondiente para mantener la temperatura de salida de los reactores en el valor deseado.

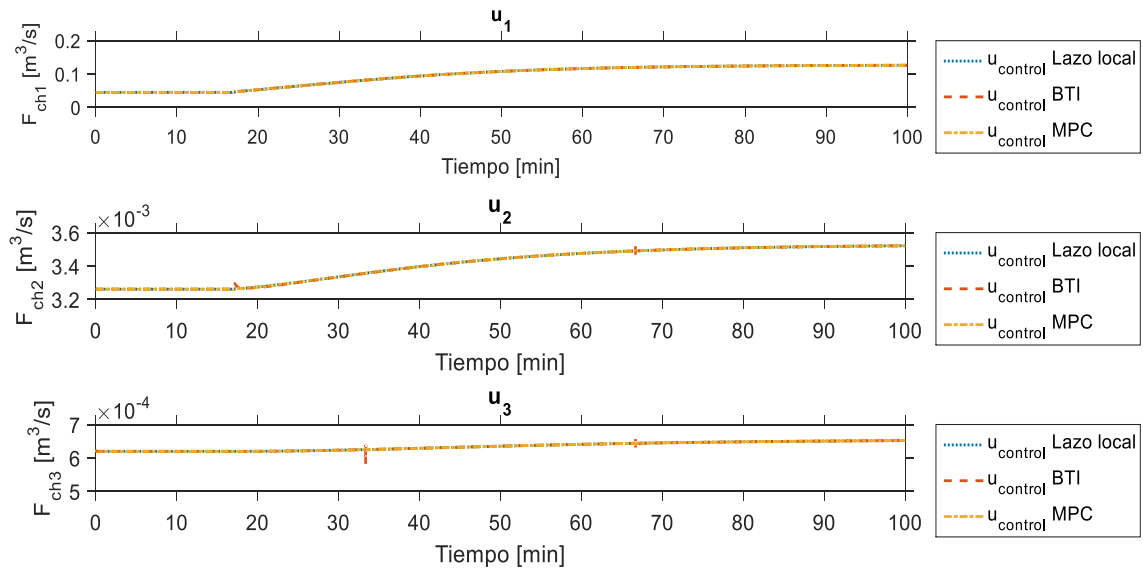


Figura 4.13 Señales de control. Perturbación +5%  $C_{a0}$ .

Tabla 4.6 Comparación de controladores.  $C_{a0} +5\%$ .

| Controlador | Tiempo de establecimiento [min] |      |                      | Señal de control $u$ máxima [ $m^3/s$ ] |                       |                       | Valor máximo de Temperatura [ $^{\circ}K$ ] |                       |        |
|-------------|---------------------------------|------|----------------------|---|-----------------------|-----------------------|---|-----------------------|--------|
|             | LL                              | BTI  | MPC                  | LL                                      | BTI                   | MPC                   | LL  | BTI                   | MPC    |
| $T_1$       | 83.3                            | 83.3 | 83.3                 | 0.127                                   | 0.1265                | 0.126                 | 0.0044                                      | 0.0043                | 0.0012 |
| $T_2$       | 83.3                            | 83.3 | 83.3                 | $3.55 \times 10^{-3}$                   | $3.53 \times 10^{-3}$ | $3.52 \times 10^{-3}$ | 0.0001                                      | 0.0006                | 0.0001 |
| $T_3$       | 83.3                            | 83.3 | 83.3                 | $6.55 \times 10^{-5}$                   | $8 \times 10^{-4}$    | $6.5 \times 10^{-4}$  | 0   | 0                     | 0      |
|             | ITSE                            |      |                      |   |                       |                       | IAE   |                       |        |
|             | LL                              |      | BTI                  | MPC                                     |                       | LL                    | BTI   | MPC                   |        |
| $T_1$       | 0.03                            |      | 0.03                 | $2.1 \times 10^{-3}$                    |                       | 12.6                  | 9.68  | 2.7                   |        |
| $T_2$       | $3.5 \times 10^{-5}$            |      | $20 \times 10^{-4}$  | $4.5 \times 10^{-4}$                    |                       | 4.82                  | 2.18  | $1.22 \times 10^{-2}$ |        |
| $T_3$       | $2.5 \times 10^{-13}$           |      | $20 \times 10^{-11}$ | $3.16 \times 10^{-8}$                   |                       | $7.9 \times 10^{-2}$  | $1.32 \times 10^{-2}$                       | $4.1 \times 10^{-2}$  |        |

Esta perturbación modifica la dinámica del sistema debido a que la velocidad de reacción se ve afectada, por lo que se tienen tiempos de establecimiento para cualquiera de las temperaturas, los valores del ITSE son pequeños para cualquiera de los controladores (calculados durante el tiempo que dura el transitorio, aproximadamente 83.3 min), todos cumplen con mantener una operación isotérmica e incluso los valores de los esfuerzos de controla máximo son parecidos y no existen sobretiros grandes (Tabla 4.6).

La siguiente prueba se realizó para un decremento de la concentración de entrada  $C_{a,0}$  del 5% de su valor nominal a los 16.6 min de simulación, como era de esperarse se produjo el mismo tipo de efecto que al aumentar la concentración dada la relación directa de  $C_{a,0}$  con la  $C_{a,i}$ , es decir, los valores de concentración de salida en los 3 reactores cambiaron como se puede ver en la Figura 4.15, a pesar de que se mantenga la operación isotérmica del sistema (Figura 4.14).

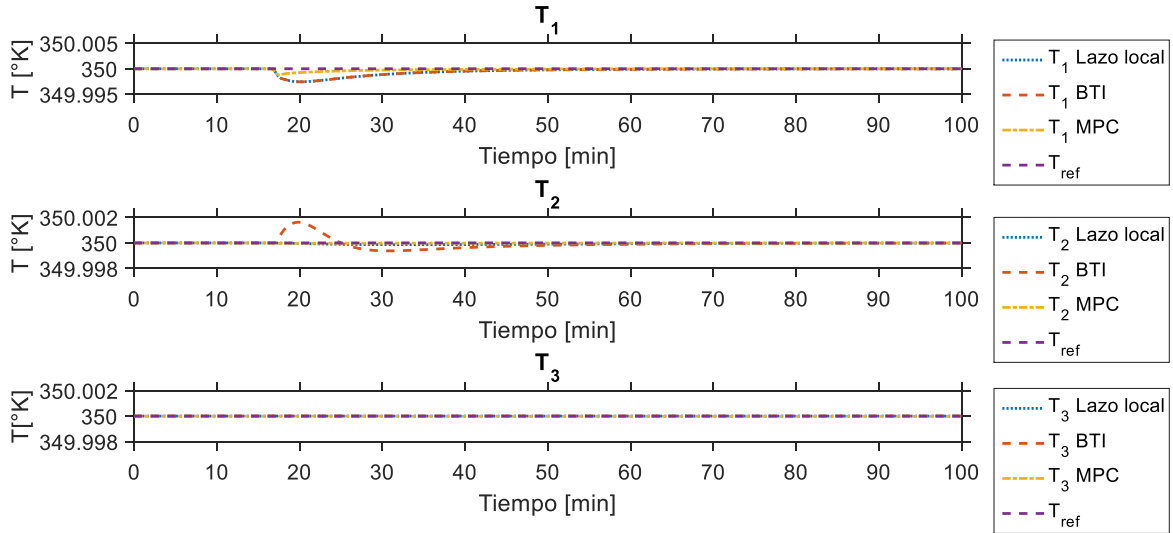


Figura 4.14 Temperaturas de salida. Perturbación  $-5\% C_{a0}$ .

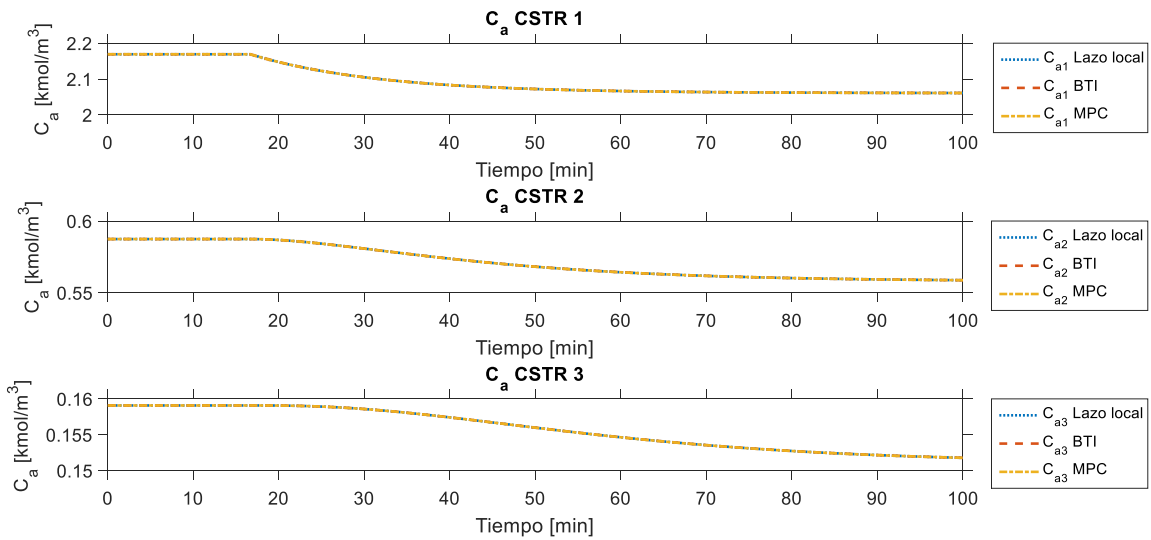


Figura 4.15 Concentraciones de salida. Perturbación  $-5\% C_{a0}$ .

Las señales de control para compensar los cambios en la temperatura debidos a la perturbación realizan decrementos de la concentración de alimentación, ver la Figura 4.16.

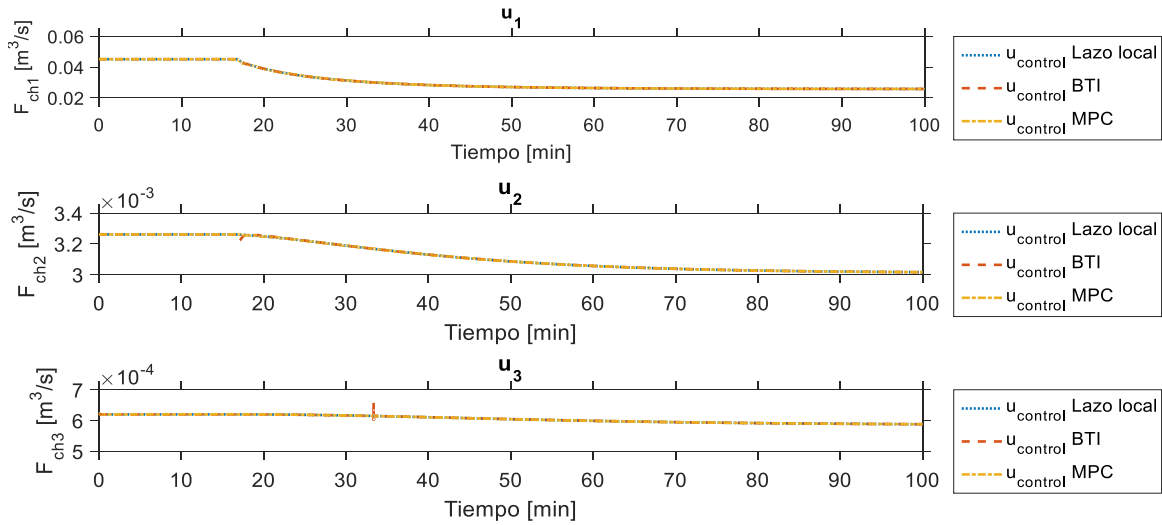


Figura 4.16 Señales de control. Perturbación  $-5\%C_{a0}$ .

Los datos de la Tabla 4.7 fueron calculados en el tiempo del transitorio este tiempo fue de  $16.6 \text{ min}$  a  $100 \text{ min}$ , teniendo una duración de  $83.3 \text{ min}$  aproximadamente, esto debido a que en las temperaturas del reactor 1 y 2 era más fuerte el efecto de la perturbación, por lo que esta se logró disminuir después de  $83 \text{ min}$ , aunque no eran cambios realmente significativos.

Tabla 4.7 Comparación de controladores. Perturbación  $-5\%$  en  $C_{a0}$ .

| Controlador | Tiempo de establecimiento [min] |                        |                       | Señal de control $u$ máxima [ $m^3/s$ ] |                         |                         | Sobretiro + del valor nominal [ $^{\circ}K$ ] |         |         |
|-------------|---------------------------------|------------------------|-----------------------|---|-------------------------|-------------------------|---|---------|---------|
|             | LL                              | BTI                    | MPC                   | LL                                      | BTI                     | MPC                     | LL  | BTI     | MPC     |
| $T_1$       | 50                              | 50                     | 50                    | 0.0452                                  | 0.0452                  | 0.0452                  | -0.9975                                       | -0.9974 | -0.9989 |
| $T_2$       | 83.3                            | 50                     | 66.6                  | 0.033                                   | 0.033                   | 0.033                   | -0.999  | 0.0015  | 0       |
| $T_3$       | 83.3                            | 83.3                   | 33.3                  | $6.1975 \times 10^{-4}$                 | $6.1975 \times 10^{-4}$ | $6.1975 \times 10^{-4}$ | 0   | 0       | 0       |
|             | <b>ITSE</b>                     |                        |                       | <b>IAE</b>                              |                         |                         |   |         |         |
|             | <b>LL</b>                       | <b>BTI</b>             | <b>MPC</b>            | <b>LL</b>                               | <b>BTI</b>              | <b>MPC</b>              |   |         |         |
| $T_1$       | $3.45 \times 10^{-3}$           | $3.45 \times 10^{-3}$  | $2.8 \times 10^{-4}$  | 1.85                                    | 2.31                    | 0.646                   |   |         |         |
| $T_2$       | $2.7 \times 10^{-5}$            | $8.5 \times 10^{-4}$   | $6.15 \times 10^{-7}$ | 2.15                                    | 1.24                    | $5.8510^{-2}$           |   |         |         |
| $T_3$       | $2.2 \times 10^{-13}$           | $1.78 \times 10^{-10}$ | $1.8 \times 10^{-6}$  | 2.5                                     | $1.1 \times 10^{-4}$    | $9.65 \times 10^{-2}$   |   |         |         |

Se tiene sobretiros negativos debido a que la temperatura tiende a descender ante el cambio de concentración. El esfuerzo máximo que se tiene en la señal de

control es el valor nominal, debido a la perturbación los flujos de este sistema tienden a disminuir.

Como se mencionó antes, el efecto provocado en la concentración de salida de los reactores, por los cambios en la concentración de entrada es un problema que ocurre independientemente del desempeño del control de temperatura, e independientemente de la técnica de control usada. Dependiendo de los objetivos operacionales, se puede elegir realizar control de temperatura en el proceso, o realizar control directo de composición. Ambos objetivos permiten cumplir los requerimientos de seguridad, después, dependiendo de los requerimientos de producción y de operación se elige entre mantener una operación isotérmica, a una temperatura constante, o se da prioridad a la regulación de concentración.

Para lograr este último objetivo de control se requiere cambiar la temperatura de operación, o bien, se requiere medir directamente la concentración (variable que normalmente no está disponible), y agregar en una corriente de materia adicional que permita modificar la concentración en el reactor, pero en este caso es necesario también un control de nivel.

### **Pruebas de los controladores ante cambios de referencia en $T_i$ .**

Con el fin de probar los controladores ante cambios en la referencia, se hace una simulación con un cambio de referencia a los 10 *min* en el control de temperatura del sistema. El cambio que se realiza consiste en reducir la temperatura nominal 5 *K* (corresponde a cambiar de 76.85°C a 71.85°C).

En una prueba inicial se observó que todos los controladores logran hacer que las salidas controladas lleguen a la nueva referencia (Figura 4.17); sin embargo es importante mencionar que los controladores PID de lazo local y BTI llegan al nuevo valor de referencia, pero esto se consigue llevando las magnitudes de la variable manipulada a valores muy grandes, más allá de lo razonable para la física del sistema (Figura 4.18). En cambio, el controlador MPC logra mantener la temperatura en cada reactor en el valor de referencia manejando como entradas de

control las que se encuentran dentro de los límites fijados por las restricciones (Tabla 4.2).

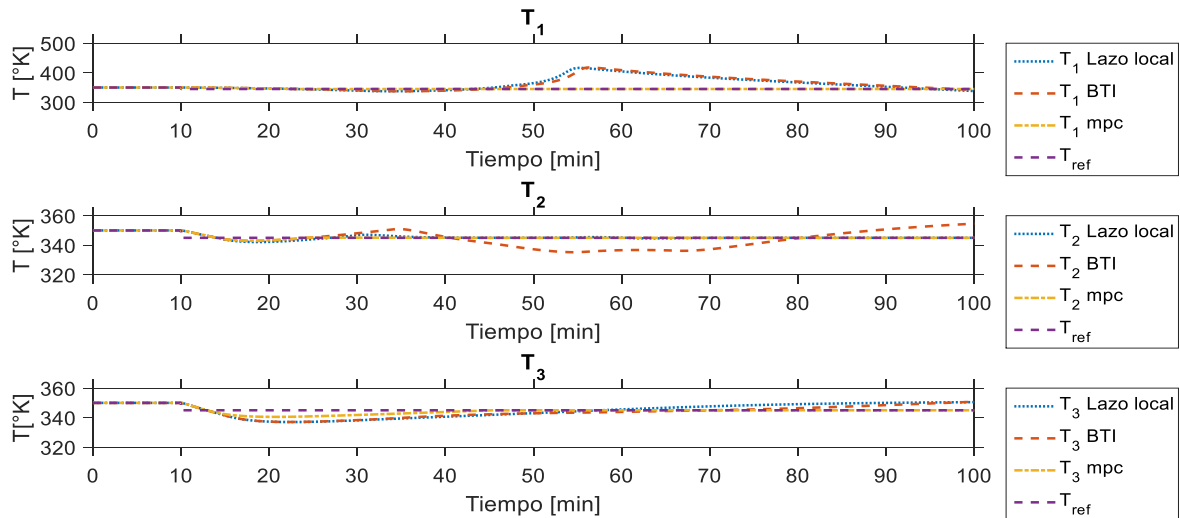


Figura 4.17 Temperaturas de salida. Cambio de referencia.

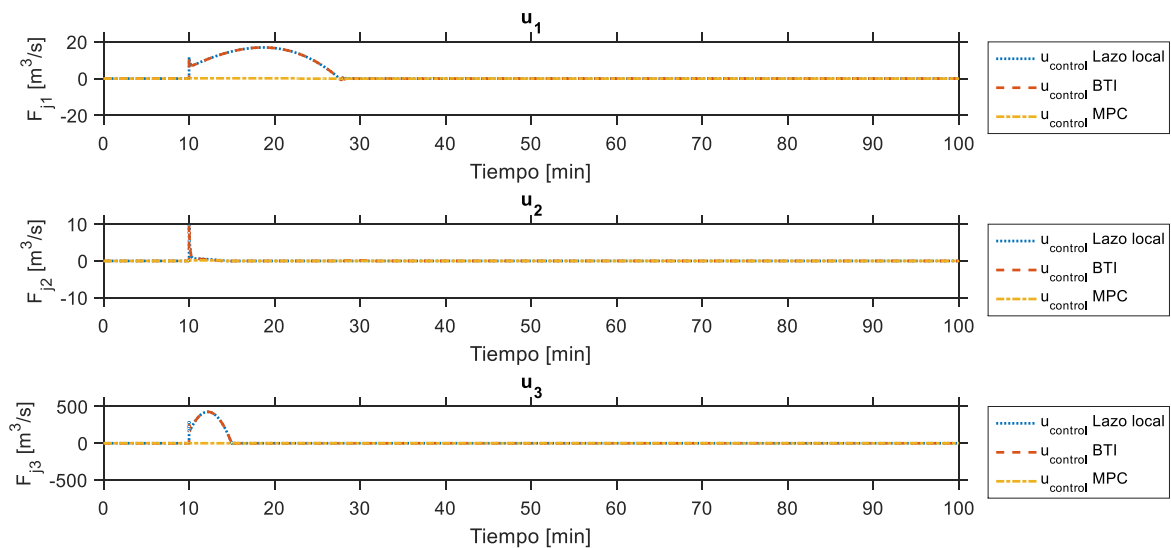


Figura 4.18 Señal de control. Cambio de referencia a Temperaturas de reactor.

En una segunda prueba, las señales de control fueron saturadas para los controladores PID de lazo local y BTI, la saturación se hizo considerando rangos adecuados para la operación del proceso. Como resultado se observó que restringir la señal de control en los controladores de lazo local y BTI no es suficiente para que el sistema llegue al nuevo punto de operación Figura.4.19 que se solicita. En las Figura 4.19 a 4.21 se muestran simulaciones hasta 100 min, pero incluso después

de 500 *min* de simulación, el sistema no llega a la referencia, además la presenta oscilaciones de en las temperaturas y concentraciones de todos los reactores.

Para cambios de referencia estos controladores las estructuras usando PID no son útiles, esto es debido a que fueron diseñados para operar en una región por lo que hacer el cambio de referencia provoca que el sistema se mueva a otro punto de operación inestable, y aun cuando los controladores fueron calculados por colocación de polos, no pueden trabajar en esa nueva región de inestabilidad. Por otro lado, la concentración cambia considerablemente en los dos primeros reactores, pero los cambios se atenúan un poco en el tercer reactor.

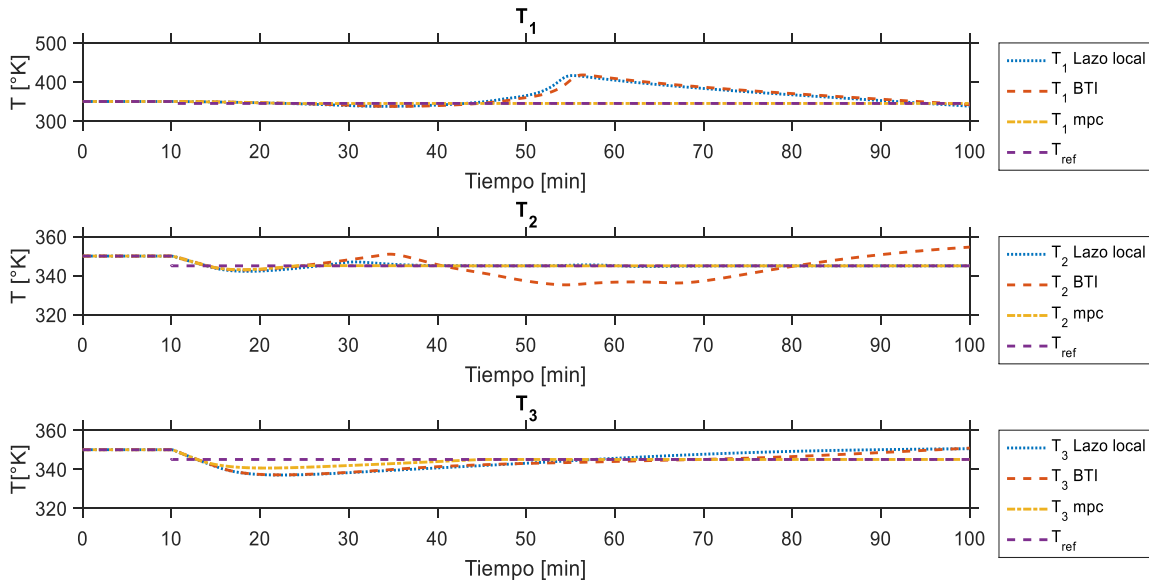


Figura.4.19 Temperaturas de salida, saturación en control Lazo local y BTI.

Es importante remarcar que el cambio en la referencia de temperatura de los reactores, implica también un cambio de referencia en la concentración de los tres reactores. El nuevo punto de operación se define con los siguientes valores de concentración

$$C_{a,1} \approx 2.76 \text{ kmol} / \text{m}^3$$

$$C_{a,2} \approx 0.95 \text{ kmol} / \text{m}^3$$

$$C_{a,3} \approx 0.32 \text{ kmol} / \text{m}^3$$

Ante el cambio de referencia la concentración se mantiene en el nuevo valor de referencia con ayuda del control MPC multivariable (Figura 4.20).

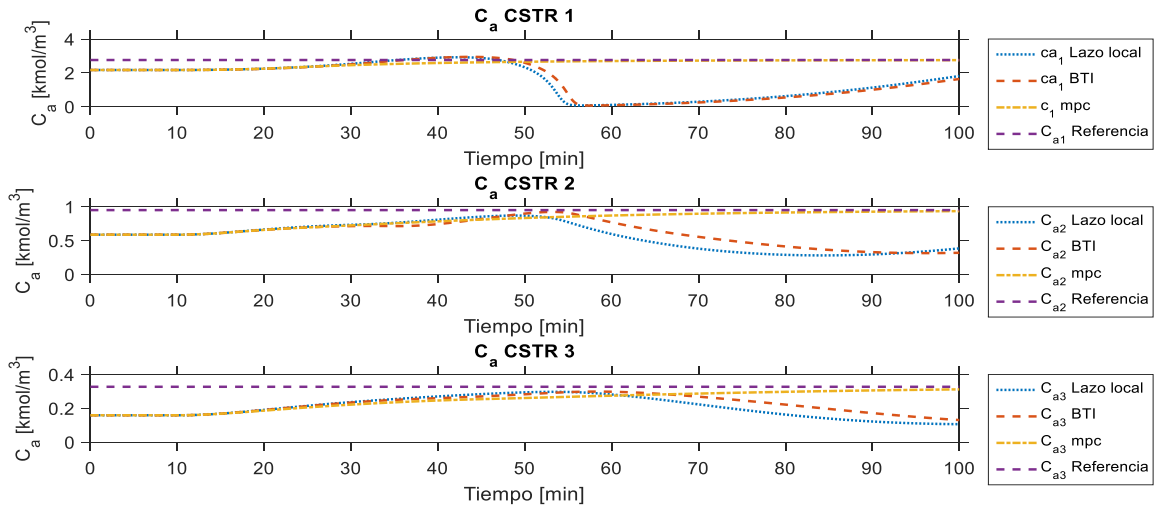


Figura 4.20 Concentraciones de salida. Cambio de referencia

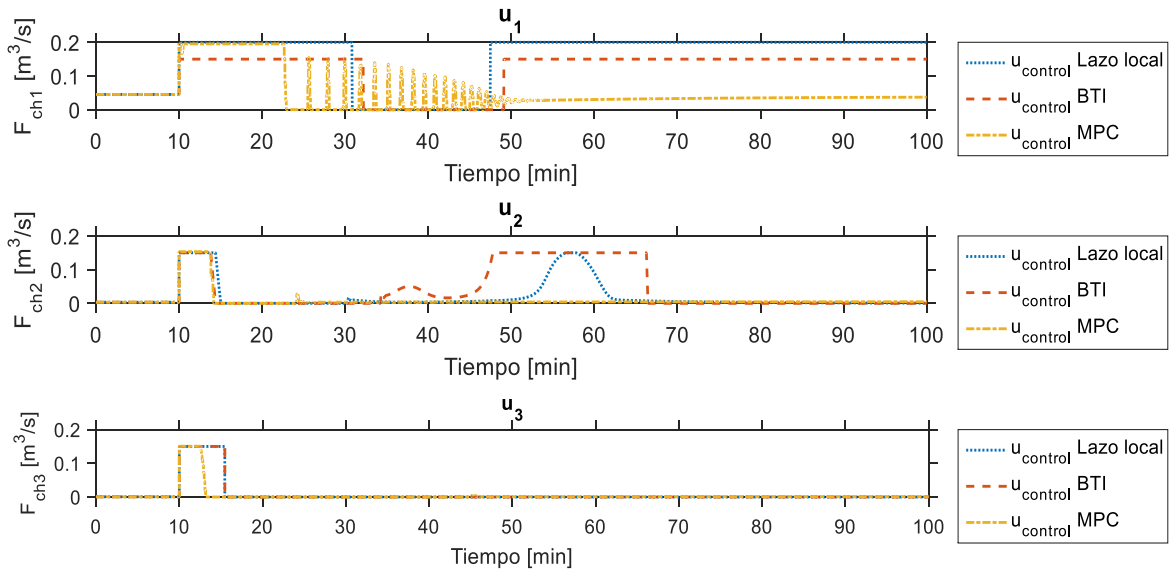


Figura 4.21 Señales de control. Cambio de referencia.

Restringiendo las señales de control de los controladores de lazo local y BTI el sistema no alcanza la nueva la referencia, en cambio el control MPC logra mantener la señal de control dentro de la restricción por lo que se logró mantener una operación isotérmica en el sistema en serie y manteniendo la concentración de salida de cada reactor (Figura 4.21).



De las perturbaciones presentadas para probar el desempeño de los controladores se puede resumir lo siguiente:

- Perturbaciones en la alimentación de concentración  $C_{a0}$

Se consideraron cambios pequeños debido a que se afecta la velocidad de reacción. Los cambios permisibles por operación y control que se consideraron fueron de  $\pm 5\% C_{a0}$ , lo que corresponde a variar la concentración de alimentación  $7.6095 \leq C_{a0} \leq 8.4105 \text{ kmol} / \text{m}^3$ . El esquema de control logra un control perfecto de temperatura, pero la concentración de salida varía de manera importante ante pequeñas perturbaciones en la concentración de la corriente de alimentación. Si es esencial mantener concentraciones muy cercanas a las nominales, es conveniente hacer un control de concentración moviendo las referencias de temperatura, lo cual pudiera ser difícil usando el esquema de controladores PID y BTI diseñados. Por el contrario, esto es posible lograrlo con el controlador MPC ya que su desempeño fue adecuado ante perturbaciones y ante cambios en la referencia.

- Perturbaciones en temperaturas de entrada en fluido de enfriamiento  $T_{ch0,i}$

Solo muestran simulaciones ante incrementos y decrementos de 4 K en cualquiera de las temperaturas de entrada del fluido de enfriamiento, por considerar esta una desviación posible debida a cambios ambientales o similares en la temperatura del fluido de enfriamiento. Ante estos cambios, todos los esquemas de control tienen un desempeño similar y en todos los casos es adecuado, ya que, para cambios de temperatura de 4 K en la entrada, se logran mantener las temperaturas de salida con variaciones menores a 0.1 K. Es importante mencionar que los flujos nominales del fluido de enfriamiento son pequeños y que, para lograr el desempeño adecuado, cambian hasta el triple de su valor nominal, pero el sistema puede tolerar cambios un poco mayores.

- Cambios de referencia en la temperatura de operación del sistema  $T_i$ .

Únicamente el controlador predictivo toleró el cambio de referencia que se probó, lo que indica que el controlador MPC permite que los reactores en serie puedan operar sin problemas en diferentes puntos de equilibrio, mientras que esto no es posible con los esquemas clásicos PID.

El resultado anterior permite suponer que es posible implementar un control directo de concentración, manipulando la temperatura de operación de los reactores. En un esquema así, los objetivos de control son diferentes porque ya no se tendría una operación isotérmica, y por lo tanto el diseño del controlador también debe hacerse bajo consideraciones diferentes, pero los resultados muestran que es posible. En el caso del control directo de composición, es importante restringir fuertemente las variaciones de temperatura para no provocar cambios que calienten al reactor hasta un punto en que el incremento de temperatura irreversible.



## 5 Conclusiones

---

### 5.1 Conclusiones generales

Se planteó desarrollo analítico para obtener una estructura de modelo lineal en espacio de estados y en función de transferencia para procesos en serie. Se propusieron con estos modelos, estructuras de control para este tipo de sistemas. El sistema de estudio es un proceso de tres CSTRs en serie. El objetivo principal de control es lograr una operación isotérmica y mantener la concentración cerca de las condiciones nominales. Se diseñaron 4 controladores: un control por lazo local en el que se desprecian las perturbaciones entre subsistemas; un control prealimentado diseñado para disminuir las perturbaciones ocasionadas por unidades de proceso anteriores; un control prealimentado con retroalimentación y un controlador predictivo multivariable  $3 \times 3$  basado en modelo.

El control por lazo local funciona bien para el sistema, las temperaturas controladas oscilan en un rango tolerable. Las variaciones más grandes en la temperatura de los reactores ocurren cuando se realizan perturbaciones en las temperaturas de entrada del fluido de enfriamiento que circula por las chaquetas de los reactores; sin embargo, la concentración alcanza rápidamente el valor de referencia, lo que no ocurre cuando hay cambios en la composición de la corriente de alimentación, pero esta se mantiene en valores cercanos a los nominales cuando la perturbación es pequeña. El control por lazo local no fue suficientemente bueno en ante pruebas de cambio de referencia.

El controlador de bloque triangular inferior (prealimentado con retroalimentación) está diseñado para amortiguar las perturbaciones ocasionadas por las unidades anteriores, pero para el sistema de reactores en serie esa ventaja no pudo ser apreciada debido a que la dinámica de estos controladores de prealimentado fue opacada por la dinámica de los controladores de retroalimentación diseñados para el control de lazo local, debido a que se realizó una colocación de polos para los lazos locales.

Una de las ventajas del controlador predictivo basado en modelo es la facilidad que tiene para trabajar con el caso de sistemas multivariables y se puede utilizar para controlar una gran variedad de procesos con dinámicas simples o incluso sistemas inestables por mencionar algunos. El sistema de reactores en serie en estudio consta de tres reactores, de los cuales el primero es inestable y no es posible sintonizar un controlador PID de manera clásica a partir de una respuesta al escalón. Como ya se mencionó, fue necesario hacer una colocación de polos para lograr controlar el primer reactor con comportamiento inestable. El control predictivo, en cambio, toleró sin problemas la dinámica inestable del primer reactor. Además, el controlador MPC toleró sin problemas los cambios de referencia.

La técnica de control MPC fue fácil de implementar debido a que no existió la necesidad de realizar una estabilización del primer reactor, por lo que con la variación de los horizontes de predicción y control y con las restricciones de la señal de control se logró obtener un controlador predictivo multivariable  $3 \times 3$  con desempeño satisfactorio para controlar el sistema de CSTRs en serie. Se cumplieron los objetivos de control, logrando, por un lado, la operación isotérmica de los reactores al mantener la temperatura de operación en un valor de  $350\text{ K}$ ; y por otro lado, conservando en un rango razonablemente adecuado la concentración a la salida de cada reactor, y sobre todo de la tercera unidad que define la conversión final del reactante  $A$ .

En general, todos los controladores toleran bien las perturbaciones en la temperatura del fluido de enfriamiento, cambios en la concentración de alimentación, salvo que, en este último caso, las perturbaciones en la concentración de alimentación al proceso modificaban a la concentración de salida pese a que la temperatura de cada reactor era regulada en el valor nominal. Si se requiere mantener la concentración de salida en los reactores muy cercana a la referencia, los cambios que se toleran son de variaciones de alrededor 5% en la concentración de entrada. Cambios mayores, provocarían desviaciones mayores en la conversión (concentración de salida). Debido a que el MPC soporta cambios en la referencia,

es posible modificar el esquema de control imponiendo cambios de referencia para controlar concentración.

En cambio, ante perturbaciones en las temperaturas de entrada de chaqueta, la concentración se mantuvo en su valor nominal y solo reflejó pequeños cambios en el lapso de tiempo en el que la temperatura variaba antes de alcanzar la referencia, y volviendo a sus condiciones nominales en cuanto la temperatura mantenía su valor nominal.

Ante cambios de referencia el controlador consigue llevar las variables controladas (temperatura de cada reactor) al nuevo valor de referencia haciendo variar los flujos de la chaqueta de enfriamiento de cada reactor dentro de las restricciones que se establecieron, mientras que los controladores de lazo local y BTI fueron incapaces de manejar dicho cambio de referencia, esto ocurre porque fueron diseñados para trabajar en una región específica entonces hacer el cambio de referencia implica mover la región de operación.

En el caso de la sintonización del controlador MPC, es decir la selección de los valores para los parámetros de horizonte de predicción y de control, se notó que con valores mayores a  $H_u = 5$  la respuesta del sistema era oscilatoria. Además, utilizar un horizonte de control más grande al seleccionado producía un costo computacional elevado en las simulaciones realizadas. La matriz de ponderación  $Q$  tuvo menos influencia en su desempeño.

## 5.2 Trabajos Futuros

Es posible reducir el costo computacional en la resolución del problema de optimización buscando mejorar la configuración del control óptimo con restricciones QP. [43]. Una mejora a los esquemas de control propuestos consiste en realizar un controlador predictivo para un seguimiento de referencia, en el cual, conociendo anticipadamente los cambios de referencia, se tenga como objetivo principal la predicción de las acciones de control antes de que los cambios de referencia deseada sean hechos. Una mejora en el algoritmo de control predictivo en este

sentido fue propuesta en [44]. El aprovechar este trabajo facilitaría el control de concentración.

## Bibliografía

---

- [1] A. Faanes y S. Skogestad, «Controller design for serial processes», *J. Process Control*, vol. 15, n.º 3, pp. 259-271, abr. 2005.
- [2] B. W. Bequette, *PROCESS DYNAMICS: Modeling, Analysis, and Simulation*, 2nd edició. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ, 1998.
- [3] T. E. Marlin, *Process control: Designing processes and control systems for dynamic performance*, Segunda. New York: McGraw-Hill, 1996.
- [4] J. Morud y S. Skogestad, «Dynamic behaviour of integrated plants», *Z Proc. Cont*, vol. 6, n.º 23, 1996.
- [5] J. Morud, S. Skogestad, y M. Beach, «The dynamic behavior of cascade processes with application to distillation columns», *AIChE Annu. Meet.*, vol. 189b, 1995.
- [6] N. Yaghini y P. D. Iedema, «Predicting molecular weight distribution by deterministic modeling and Monte Carlo simulations of radical polymerization with branching and scission allowing for multiradicals and gelation in various reactor configurations», *Chem. Eng. Sci.*, vol. 130, pp. 310-318, 2015.
- [7] H. Sun, S. Li, Y. Zhang, H. Jiang, L. Qu, y S. Liu, «Selective hydrogenation of benzene to cyclohexene in continuous reaction device with two reaction reactors in serie over Ru - Co - B / ZrO<sub>2</sub> catalysts», *Chinese J. Catal.*, vol. 34, n.º 8, pp. 1482-1488, 2013.
- [8] A. R. J. Esparta, T. Obertopp, y E. D. Gilles, «Synthesis of isothermal fluid-fluid two-phase CSTR networks», vol. 22, n.º 98, 1998.
- [9] Q.-G. Wang y Y. Yang, «Transfer function matrix approach to decoupling problem with stability», *Syst. Control Lett.*, vol. 47, n.º 2, pp. 103-110, oct. 2002.
- [10] F. Morilla, J. Garrido, y F. Vázquez, «Control Multivariable por Desacoplo»,



## Bibliografía

- Rev. Iberoam. Automática e Informática Ind. RIAI*, vol. 10, n.º 1, pp. 3-17, ene. 2013.
- [11] J. C. Calderon, «Control de procesos multivariables mediante un sistema de control distribuido modificado», Universidad Nacional de Colombia, 2007.
- [12] J. Garrido, F. Vázquez, y F. Morilla, «Diseño de Sistemas de Control Multivariable por Desacoplo con Controladores PID», Escuela Técnica superior de ingeniería informática, Madrid, España, 2012.
- [13] Q. Xiong, W.-J. Cai, y M.-J. He, «Equivalent transfer function method for PI/PID controller design of MIMO processes», *J. Process Control*, vol. 17, n.º 8, pp. 665-673, sep. 2007.
- [14] H. Huang y J. B. Riggs, «Comparison of PI and MPC for control of a gas recovery unit», *J. Process Control*, vol. 12, n.º 1, pp. 163-173, ene. 2002.
- [15] Q. Xiong y W.-J. Cai, «Effective transfer function method for decentralized control system design of multi-input multi-output processes», *J. Process Control*, vol. 16, n.º 8, pp. 773-784, sep. 2006.
- [16] E. Cornieles, M. Saad, G. Gauthier, y H. Saliyah-Hassane, «Modeling and simulation of a multivariable process control», en *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2006, vol. 4, n.º May 2016, pp. 2700-2705.
- [17] M. E. González, F. Vázquez, y F. Morilla, «Control Multivariable Centralizado con Desacoplo para Aerogeneradores de Velocidad Variable», *Rev. Iberoam. Automática e Informática Ind. RIAI*, vol. 7, n.º 4, pp. 53-64, 2010.
- [18] A. Faanes, «Controllability Analysis for Process and Control System», 2003.
- [19] R. G. Martín, «Control Multivariable Predictivo. Casos y cosas prácticas», *Automática e Instrumentación*, pp. 42-48, 2004.
- [20] M. Essahafi, «Model Predictive Control (MPC) Applied To Coupled Tank Liquid Level System». Cornell University Library, pp. 1-6, 2014.

## Bibliografía

- [21] E. F. Camacho y C. Bordons, «Control Predictivo: Pasado, Presente y Futuro», *Rev. Iberoam. Automática e Informática Ind.*, vol. 1, n.º 3, pp. 5-28, 2004.
- [22] M. Morari, «Advances in model-based predictive control», D. Clarke, Ed. New York: Oxford University Press, 1994, p. 535.
- [23] F. D. J. Sorcia-Vázquez, C. D. Garcia-Beltran, G. Valencia Palomo, G. Guerrero Ramírez, M. Adam-Medina, y V. M. Alvarado Martínez, «Control Predictivo Distribuido Óptimo Aplicado al Control de Nivel de un Proceso de Cuatro Tanques Acoplados», *RIAI - Rev. Iberoam. Autom. e Inform. Ind.*, vol. 12, n.º 4, pp. 365-375, 2015.
- [24] G. Shah y S. Engell, «Tuning MPC for desired closed-loop performance for MIMO systems», *Proc. 2011 Am. Control Conf.*, pp. 4404-4409, jun. 2011.
- [25] E. M. B. Aske, S. Skogestad, y S. Strand, «Implementation of MPC on a Deethanizer at Karstø Gas Plant», *2008 Annu. Meet.*, n.º Mv, 2008.
- [26] M. F. Pastora Vega, «Diseño Integrado De Procesos De Depuración De Aguas Utilizando Control Predictivo Basado En Modelos», *Rev. Iberoam. Autom. e Inform. Ind.*, vol. 3, n.º 4, pp. 88-98, 2006.
- [27] J. L. Guzmán, M. Berenguel, y S. Dormido Bencomo, «MIMO-GPCIT. Herramienta Interactiva de Control Predictivo Generalizado para Sistemas Multivariables con Restricciones», *Rev. Iberoam. Automática e Informática Ind.*, vol. 1, pp. 57-68, 2004.
- [28] M. Abu-Ayyad y R. Dubay, «MIMO extended predictive control-implementation and robust stability analysis.», *ISA Trans.*, vol. 45, n.º 4, pp. 545-561, 2006.
- [29] L. Orihuela, T. Álamo, D. Muñoz, y F. Rubio, «Algoritmo de minimización para control predictivo con restricciones», en *XXIX Jornadas de Automática*, 2008, n.º March.
- [30] H. Ebadi Kalhoodashti, «Concentration Control of CSTR using NNAPC», *Int. J. Comput. Appl.*, vol. 26, n.º 6, pp. 34-38, 2011.

## Bibliografía

- [31] C. van Heerden, «The Character of the Stationary State of Exothermic Processes», *Chem. Eng. Sci.*, vol. 8, n.º 1-2, pp. 133-145, 1958.
- [32] K. Prabhu y V. M. Bhaskaran, «Controller Design for Continuous Stirred Tank Reactor Using Adaptive Control», *Res. J. Appl. Sci.*, vol. 9, n.º 8, pp. 489-495, 2014.
- [33] M. Manimozhi y R. Meenakshi, «Multiloop IMC-Based PID Controller for CSTR Process», en *Proceedings of the International Conference on Soft Computing Systems*, 2016, pp. 615-625.
- [34] L. Whang, *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. London: Springer, 2009.
- [35] E. F. Camacho y C. Bordons, *Model Predictive Control*. Springer, 1998.
- [36] J. M. Maciejowski, *Predictive control with constraints*, Prentice H. Harlow, England: Prentice Hall, 2002.
- [37] E. S. Meadows, K. R. Muske, y J. B. Rawlings, «Implementable model predictive control in the state space», en *Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95*, 1995, vol. 5, n.º 2, pp. 3699-3703.
- [38] W. L. Luyben, *Chemical Reactor Design and Control*. New Jersey: AIChE, 2007.
- [39] W. L. Luyben, *Process modeling simulation and control for chemical engineers*, Second edi. McGraw-Hill international editions, 1996.
- [40] C. Chen, *Analog And Digital Control System Design: Transfer-Functions, State-space and algebraic methods*, vol. 4. Saunders Collage, 1993.
- [41] A. Bemporad, M. Morari, y N. L. Ricker, «Model Predictive Control Toolbox™ Getting Started Guide», 2012.
- [42] W. L. Luyben, *Plantwide Dynamic Simulators in Chemical Processing and Control*. CRC Press, 2002.

## Bibliografía

- [43] R. Qi, H. Mei, C. Chen, y F. Qian, «A fast MPC algorithm reducing computation burden o MIMO», *Chinese J. Chem. Eng.*, vol. 23, n.º 12, pp. 2087-2091, 2015.
- [44] A. Ferramosca, J. K. Gruber, D. Limon, y E. F. Camacho, «Control predictivo para seguimiento de sistemas no lineales. Aplicación a una planta piloto», *RIAI - Rev. Iberoam. Autom. e Inform. Ind.*, vol. 10, n.º 1, pp. 18-29, 2013.

## *Bibliografia*

## Anexos

### Anexo A. Modelo no lineal para tres CSTRs en serie no isotérmicos

Para los 3 CSTR en serie se tiene el siguiente modelo no lineal:

Para tanque 1

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_{A,1}}{dt} &= \frac{FC_{A0}}{V_1} - \frac{FC_{A,1}}{V_1} - k_1 C_{A,1} \\
 \frac{dT_1}{dt} &= \frac{FT_o}{V_1} - \frac{FT_1}{V_1} - \frac{\lambda k_1 C_A}{\rho C_p} - \frac{UA_H}{V_1 \rho C_p} (T_1 - T_{ch,1}) \\
 \frac{dT_{ch,1}}{dt} &= \frac{F_{ch}(T_{ch0} - T_{ch,1})}{V_{ch}} + \frac{UA_H}{\rho_{ch} V_{ch} C_{ch}} (T_1 - T_{ch,1})
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Para tanque 2

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_{A,2}}{dt} &= \frac{F_1 C_{A,1}}{V_2} - \frac{F_2 C_{A,2}}{V_2} - k_2 C_{A,2} \\
 \frac{dT_2}{dt} &= \frac{F_1 T_1}{V_2} - \frac{F_2 T_2}{V_2} - \frac{\lambda k_2 C_{A,2}}{\rho C_p} - \frac{UA_H}{V_2 \rho C_p} (T_2 - T_{ch,2}) \\
 \frac{dT_{ch,2}}{dt} &= \frac{F_{ch}(T_{ch0,2} - T_{ch,2})}{V_{ch}} + \frac{UA_H}{\rho_{ch} V_{ch} C_{ch}} (T_2 - T_{ch,2})
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Para tanque 3

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_{A,3}}{dt} &= \frac{FC_{A,2}}{V_3} - \frac{FC_{A,3}}{V_3} - k_3 C_{A,3} \\
 \frac{dT_3}{dt} &= \frac{FT_2}{V_3} - \frac{F_3 T_3}{V_3} - \frac{\lambda k_3 C_{A,3}}{\rho C_p} - \frac{UA_H}{V_3 \rho C_p} (T_3 - T_{ch,3}) \\
 \frac{dT_{ch,3}}{dt} &= \frac{F_{ch}(T_{ch0,3} - T_{j,3})}{V_{ch}} + \frac{UA_H}{\rho_{ch} V_{ch} C_{ch}} (T_3 - T_{ch,3})
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

## Anexo B. Modelo en espacio de estados caso de estudio

Matrices simbólicas del modelo en espacio de estados

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} -\alpha e^{-\frac{E}{RT_1}} - \frac{F_1}{V_1} & -\frac{C_{a,1} E \alpha e^{-\frac{E}{RT_1}}}{RT_1^2} & 0 \\ -\frac{\lambda \alpha e^{-\frac{E}{RT_1}}}{\rho C p} - \frac{F_1}{V_1} - \frac{A_H U}{\rho C p V_1} - \frac{C_{a,1} E \lambda \alpha e^{-\frac{E}{RT_1}}}{\rho C p RT_1^2} & \frac{A_H U}{\rho C p V_1} & \\ 0 & \frac{A_H U}{\rho_j C p_j V_{j,1}} & -\frac{F_{j,1}}{V_{j,1}} - \frac{A_H U}{\rho_j C p_j V_{j,1}} \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} -\alpha e^{-\frac{E}{RT_2}} - \frac{F_2}{V_2} & -\frac{C_{a,2} E \alpha e^{-\frac{E}{RT_2}}}{RT_2^2} & 0 \\ -\frac{\lambda \alpha e^{-\frac{E}{RT_2}}}{\rho C p} - \frac{F_2}{V_2} - \frac{A_H U}{\rho C p V_2} - \frac{C_{a,2} E \lambda \alpha e^{-\frac{E}{RT_2}}}{\rho C p RT_2^2} & \frac{A_H U}{\rho C p V_2} & \\ 0 & \frac{A_H U}{\rho_j C p_j V_{j,2}} & -\frac{F_{j,2}}{V_{j,2}} - \frac{A_H U}{\rho_j C p_j V_{j,2}} \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

$$A_{2,1} = \begin{bmatrix} \frac{F_2}{V_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

$$A_{3,3} = \begin{bmatrix} -\alpha e^{-\frac{E}{RT_3}} - \frac{F_3}{V_3} & -\frac{C_{a,3} E \alpha e^{-\frac{E}{RT_3}}}{RT_3^2} & 0 \\ -\frac{\lambda \alpha e^{-\frac{E}{RT_3}}}{\rho C_p} - \frac{F_3}{V_3} - \frac{A_H U}{\rho C_p V_3} - \frac{C_{a,3} E \lambda \alpha e^{-\frac{E}{RT_3}}}{\rho C_p RT_3^2} & \frac{A_H U}{\rho C_p V_3} & \\ 0 & \frac{A_H U}{\rho_j C_p V_{j,3}} & -\frac{F_{j,3}}{V_{j,3}} - \frac{A_H U}{\rho_j C_p V_{j,3}} \end{bmatrix}$$

$$(A.7) \quad A_{3,2} = \begin{bmatrix} \frac{F_2}{V_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.8)$$

Matriz de entradas modelo en espacio de estados

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-(T_{j,1} - T_{j,0})}{V_j} \end{bmatrix} \quad (A.9)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-(T_{j,2} - T_{j,0,2})}{V_{j,2}} \end{bmatrix} \quad (A.10)$$



$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-(T_{j,3} - T_{j0,3})}{V_{j,3}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Matriz de salidas en espacio de estados

$$C_1 = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (\text{A.12})$$

$$C_2 = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (\text{A.13})$$

$$C_3 = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (\text{A.14})$$

Matriz de perturbaciones

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{C_{a,o}}{V_1} & \frac{C_{a,1}}{V_1} & 0 & 0 & \frac{F_1}{V_1} & 0 \\ \frac{T_o}{V_1} & \frac{T_1}{V_1} & 0 & \frac{F_1}{V_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(T_{j,1} - T_{j0})}{V_{j,1}} & 0 & 0 & \frac{F_{j,1}}{V_{j,1}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} \frac{F_2}{V_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_{j,2}}{V_{j,2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} \frac{F}{V} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F}{V} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Valores numéricos de las matrices de espacio de estado presentadas en la sección 3.1.1

Matriz de estados  $A$

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} -0.001122412719541 & -0.000121517113649 & 0 \\ 0.022706099071455 & 0.002420474976381 & 0.000646774258950 \\ 0 & 0.004567076651363 & -0.041482839835741 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$A_{2,1} = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.303958333333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.303958333333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Anexos

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} -0.001122412719541 & -0.000032907805385 & 0 \\ 0.022706099071455 & -0.000037782644325 & 0.000646774258950 \\ 0 & 0.004567076651363 & -0.007229387327921 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$A_{3,2} = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.303958333333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.303958333333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$A_{3,3} = \begin{bmatrix} -0.001122412719541 & -0.000008911696655 & 0 \\ 0.022706099071455 & -0.000703498451252 & 0.000646774258950 \\ 0 & 0.004567076651363 & -0.005072998518031 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.0329 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -28.8794 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -41.1553 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Matriz de salidas está formada por

$$C_1 = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (\text{A.26})$$

$$C_2 = [0 \ 1 \ 0] \quad (A.27)$$

$$C_3 = [0 \ 1 \ 0] \quad (A.28)$$

Matriz de Perturbaciones está formada por

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.405613055164000 & 0 & 0 & 0.000303958333333 & 0 \\ -3.888888888888886 & 0 & 0.000303958333333 & 0 & 0 \\ 0 & -5.032940072236558 & 0 & 0 & 0.036915763184377 \end{bmatrix} \quad (A.29)$$

$$E_2 = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.303958333333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.303958333333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.002662310676558 \end{bmatrix} \quad (A.30)$$

$$E_3 = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.303958333333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.303958333333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.505918367346939 \end{bmatrix} \quad (A.31)$$

## Anexo C. Modelo en función de transferencia

$$G_{11}(s) = \frac{-0.003255s - 3.654 \times 10^{-6}}{s^3 + 0.04018s^2 - 5.676 \times 10^{-5}s - 1.556 \times 10^{-9}} \quad (\text{A.32})$$

$$G_{21}(s) = \frac{-9.894 \times 10^{-7}s^9 - 5.744 \times 10^{-8}s^8 - 7.535 \times 10^{-10}s^7 - 3.161 \times 10^{-12}s^6 - 1.277 \times 10^{-15}s^5}{s^{12} + 0.09715s^{11} + 0.002933s^{10} + 2.739 \times 10^{-5}s^9 + 5.971 \times 10^{-8}s^8 - 1.557 \times 10^{-10}s^7 - 1.182 \times 10^{-13}s^6} + \dots \quad (\text{A.33})$$

$$+ \frac{9.033 \times 10^{-18}s^4 + 2.888 \times 10^{-21}s^3 - 7.415 \times 10^{-25}s^2 - 1.506 \times 10^{-27}s - 3.994 \times 10^{-32}}{3.793 \times 10^{-17}s^5 + 1.364 \times 10^{-19}s^4 + 8.029 \times 10^{-23}s^3 + 2.318 \times 10^{-26}s^2 + 1.084 \times 10^{-30}s + 1.387 \times 10^{-35}}$$

$$G_{22}(s) = \frac{-0.01868s - 2.096 \times 10^{-5}}{s^3 + 0.00839s^2 + 6.223 \times 10^{-6}s + 2.393 \times 10^{-9}} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned}
 G_{3,1}(s) = & \frac{-3.007 \times 10^{-10} s^{26} - 3.059 \times 10^{-11} s^{25} - 1.241 \times 10^{-12} s^{24} - 2.814 \times 10^{-14} s^{23} - 4.074 \times 10^{-16} s^{22} - 4.018 \times 10^{-18} s^{21} - 2.787 \times 10^{-20} s^{20}}{s^{30} + 0.1415 s^{29} + 0.008104 s^{28} + 0.0002507 s^{27} + 4.8 \times 10^{-6} s^{26} + 6.119 \times 10^{-8} s^{25} + 5.407 \times 10^{-10} s^{24}} + \dots \\
 & + \frac{-1.374 \times 10^{-22} s^{19} - 4.778 \times 10^{-25} s^{18} - 1.128 \times 10^{-27} s^{17} - 1.609 \times 10^{-30} s^{16} - 6.569 \times 10^{-34} s^{15} + 2.469 \times 10^{-35} s^{14}}{+3.373 \times 10^{-12} s^{23} + 1.487 \times 10^{-14} s^{22} + 4.531 \times 10^{-17} s^{21} + 8.904 \times 10^{-10} s^{20} + 8.422 \times 10^{-23} s^{19} - 7.513 \times 10^{-18} s^{18}} + \dots \\
 & + \frac{6.072 \times 10^{-39} s^{13} + 6.89 \times 10^{-42} s^{12} + 3.737 \times 10^{-45} s^{12} - 9.612 \times 10^{-49} s^{10} - 3.903 \times 10^{-51} s^9 - 4.055 \times 10^{-54} s^8}{-3.993 \times 10^{-28} s^{17} - 6.702 \times 10^{-31} s^{16} - 5.743 \times 10^{-34} s^{15} - 4.186 \times 10^{-38} s^{14} + 6.263 \times 10^{-40} s^{13} + 1.03 \times 10^{-42} s^{12}} + \dots \\
 & + \frac{-2.653 \times 10^{-57} s^7 - 1.231 \times 10^{-60} s^6 - 4.163 \times 10^{-65} s^5 - 1.016 \times 10^{-67} s^4 - 1.72 \times 10^{-71} s^3 - 1.853 \times 10^{-75} s^2}{+1.016 \times 10^{-45} s^{11} + 7.276 \times 10^{-49} s^{10} + 4.002 \times 10^{-52} s^9 + 1.724 \times 10^{-55} s^8 + 5.824 \times 10^{-59} s^7 + 1.527 \times 10^{-62} s^6} + \dots \\
 & + \frac{-1.055 \times 10^{-79} s - 1.783 \times 10^{-84}}{3.032 \times 10^{-66} s^5 + 4.376 \times 10^{-70} s^4 + 4.282 \times 10^{-74} s^3 + 2.507 \times 10^{-78} s^2 + 6.923 \times 10^{-83} s + 6.899 \times 10^{-88}}
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
 G_{32} = & \frac{-5.677 \times 10^{-6} s^9 - 1.283 \times 10^{-7} s^8 - 1.108 \times 10^{-9} s^7 - 4.629 \times 10^{-12} s^6 - 9.983 \times 10^{-15} s^5 - 1.17 \times 10^{-17} s^4}{s^{12} + 0.03058 s^{11} + 0.0003765 s^{10} + 2.4 \times 10^{-6} s^9 + 8.562 \times 10^{-9} s^8 + 1.786 \times 10^{-11} s^7} + \dots \\
 & + \frac{-7.95 \times 10^{-21} s^3 - 3.2 \times 10^{-24} s^2 - 6.933 \times 10^{-28} s - 6.065 \times 10^{-32}}{2.35e - 14 s^6 + 2.068 \times 10^{-17} s^5 + 1.251 \times 10^{-20} s^4 + 5.189 \times 10^{-29} s^3 + 1.42 \times 10^{-27} s^2 + 2.313 \times 10^{-31} s + 1.688 \times 10^{-35}}
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$G_{33} = \frac{-0.02662 s - 2.988 \times 10^{-5}}{s^3 + 0.006899 s^2 + 7.301 \times 10^{-6} s + 1.717 \times 10^{-9}} \tag{A.37}$$

## Anexo D. Control

### Anexo Control Lazo Local

Ecuación característica del sistema con un controlador PID en lazo cerrado, presentada en la sección 0.

$$\begin{aligned}
 & s^5 + \left( \frac{20}{T_D} + 0.04018 \right) s^4 + \left( \frac{0.8036}{T_D} - 0.0651K_c - 5.676 \times 10^{-5} \right) s^3 + \dots \\
 & + \left( -7.308 \times 10^{-5} K_c - \frac{1.1352 \times 10^{-2}}{T_D} - 0.0651 \frac{K_c}{T_D} - 0.0651 \frac{K_c}{T_I} - 1.556 \times 10^{-9} \right) s^2 + \dots \quad (A.38) \\
 & + \left( -\frac{3.112 \times 10^{-8}}{T_D} - 7.308 \times 10^{-5} \frac{K_c}{T_I} - 7.308 \times 10^{-5} \frac{K_c}{T_D} - 0.0651 \frac{K_c}{T_I T_D} \right) s - 7.308 \times 10^{-5} \frac{K_c}{T_I T_D}
 \end{aligned}$$

Se propone un polinomio característico que contenga polos en el lado izquierdo del plano complejo

$$s^5 + 0.18207s^4 + 1.3171 \times 10^{-2} s^3 + 4.7299 \times 10^{-4} s^2 + 8.43 \times 10^{-6} s + 5.9643 \times 10^{-8} \quad (A.39)$$

Igualando polinomios

$$\begin{bmatrix} s^5 & s^4 & s^3 & s^2 & s^1 & s^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \left( \frac{20}{T_D} + 0.04018 \right) \\ \left( \frac{0.8036}{T_D} - 0.0651K_c - 5.676 \times 10^{-5} \right) \\ \left( -7.308 \times 10^{-5} K_c - \frac{1.1352 \times 10^{-2}}{T_D} - 0.0651 \frac{K_c}{T_D} - 0.0651 \frac{K_c}{T_I} - 1.556 \times 10^{-9} \right) \\ \left( -\frac{3.112 \times 10^{-8}}{T_D} - 7.308 \times 10^{-5} \frac{K_c}{T_I} - 7.308 \times 10^{-5} \frac{K_c}{T_D} - 0.0651 \frac{K_c}{T_I T_D} \right) \\ 7.308 \times 10^{-5} \frac{K_c}{T_I T_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.18207 \\ 1.3171 \times 10^{-2} \\ 4.7299 \times 10^{-4} \\ 8.43 \times 10^{-6} \\ 5.9643 \times 10^{-8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^5 & s^4 & s^3 & s^2 & s^1 & s^0 \end{bmatrix}$$

Con la anterior se procede a calcular las ganancias del controlador  $K_{1,1}$

$$\frac{20}{T_D} + 0.04018 = 0.18207 \Rightarrow T_D = 20 / (0.18207 - 0.04018) \therefore T_D = 140.9542$$

$$\frac{0.8036}{T_D} - 0.0651K_c - 5.676 \times 10^{-5} = 1.3171 \times 10^{-2} \therefore K_c = -0.1156162795$$

$$(-0.7308 \times 10^{-5} K_c) - \frac{0.11352e-1}{140.9542603} - \frac{((0.651e-1)(K_c))}{T_I - 0.1556e-8} = 0.47299 \times 10^{-3}$$

$$\therefore T_I = 13.80830789$$

Se muestra la sintonización de este controlador.

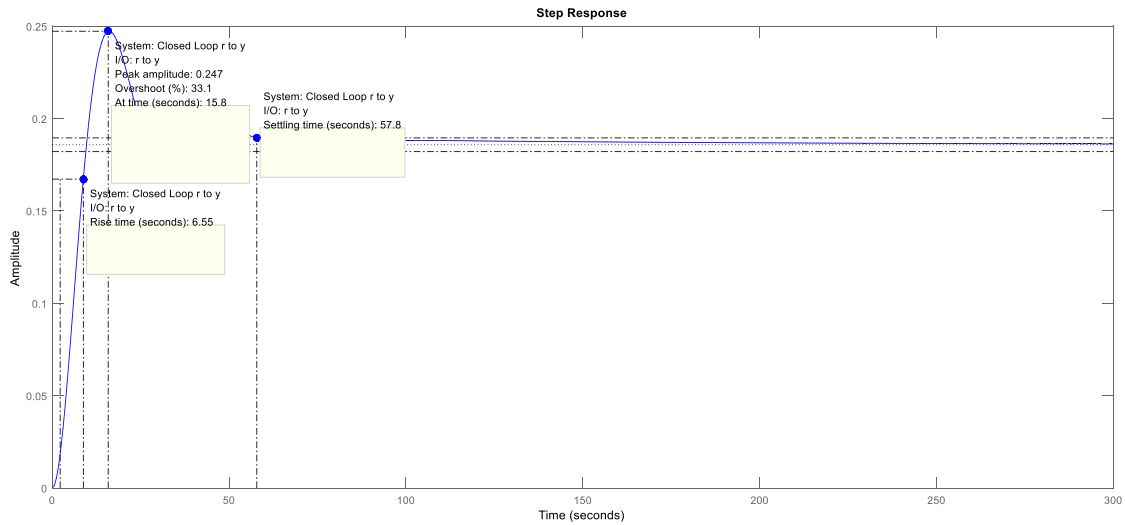


Figura A.0.1 Sintonización del controladorK22. Sisotool

Polinomio dado para el controlador  $K_{2,2}$ ,

$$s^5 + 0.16834s^4 + 7.7443e-03s^3 + 5.6709e-05s^2 + 1.1484e-07s + 6.9285e-12$$

Se realizó la igualación de polinomios y se obtuvieron las ganancias siguientes

$$K_{c2} = -.09825033026$$

$$T_{I2} = 131.7937564$$

$$T_{D2} = 125.0390747$$



La Figura A. 0.2 se muestra la sintonización en Sisotool para la obtención del controlador

$K_{33}$ .

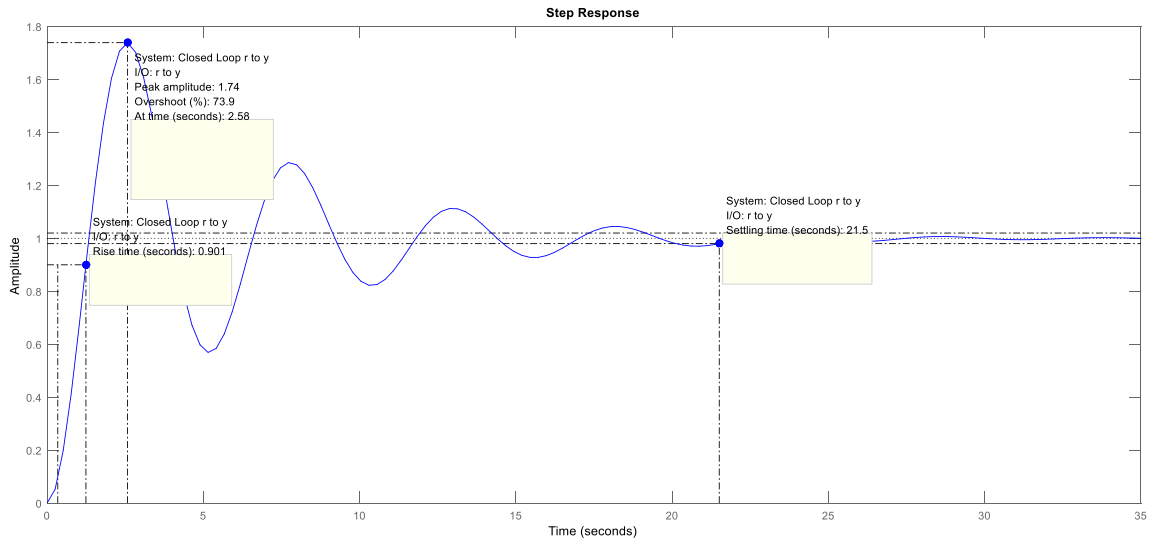


Figura A. 0.2 Sintonización del controlador K33

Ganancias del controlador  $K_{3,3}$

$$K_{c,3} = -3.087994145$$

$$T_{D,3} = 26.31436988$$

$$T_{I,3} = 2.923137356$$

## Anexo E. Obtención del modelo en función de transferencia para $n$ unidades

Obtención del modelo en función de transferencia para  $n$  unidades (sección 2.3.2) como se muestra a continuación

*unidad*

$G(s)$

1

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx_1}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{A_{11}x_1 + B_1u_1\}$$

$$sX_1(s) = A_{11}X_1(s) + B_1U(s)$$

$$X_1(s) = (sI - A_{11})^{-1} B_1U_1(s)$$

$$(sI - A_{11})X_1(s) = B_1U_1(s)$$

- $X_1(s) = (sI - A_{11})^{-1} B_1U_1(s)$

$$\mathcal{L}\{y_1\} = \mathcal{L}\{C_1x_1\},$$

$$Y_1(s) = C_1X_1(s),$$

Sustituyendo  $X_1(s)$ ,

$$Y_1(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1} B_1U_1(s),$$

- $G_{11} = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = C_1M_1B_1.$

2

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx_2}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2U_2\},$$

$$sX_2(s) = A_{21}X_1(s) + A_{22}X_2(s) + B_2U_2(s),$$

$$(sI - A_{22})X_2(s) = A_{21}X_1(s) + B_2U_2(s),$$

$$X_2(s) = (sI - A_{22})^{-1}A_{21}X_1(s) + (sI - A_{22})^{-1}B_2U_2(s).$$

Con  $M_2 = (sI - A_{22})^{-1}$ ,

y sustituyendo  $X_1(s)$ ,

se tiene

- $X_2(s) = M_2A_{21}M_1B_1(s) + M_2B_2U_2(s),$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = \mathcal{L}\{C_2x_2\},$$

$$Y_2(s) = C_2 X_2(s),$$

Sustituyendo  $X_2(s)$ ,

$$Y_2(s) = C_2 (M_2 A_{21} M_1 B_1 U_1(s) + M_2 B_2 U_2(s)),$$

$$Y_2(s) = C_2 M_2 A_{21} M_1 B_1 U_1(s) + C_2 M_2 B_2 U_2(s),$$

- $G_{21}(s) + G_{22}(s) = \frac{Y_{21}(s)}{U_1(s)} + \frac{Y_{22}(s)}{U_2(s)},$

$$G_{21}(s) = C_2 M_2 A_{21} M_1 B_1,$$

$$G_{22}(s) = C_2 M_2 B_2.$$

3

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx_3}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + B_3u_3\},$$

$$sX_3(s) = A_{32}X_2(s) + A_{33}X_3(s) + B_3U_3(s),$$

$$(sI - A_{33})X_3(s) = A_{32}X_2(s) + B_3U_3(s),$$

$$X_3(s) = (sI - A_{33})^{-1}A_{32}X_2(s) + (sI - A_{33})^{-1}B_3U_3(s).$$

Con  $M_3 = (sI - A_{33})^{-1}$ ,

y sustituyendo  $X_2(s)$ ,

se tiene

$$X_3(s) = M_3 A_{32} (M_2 A_{21} M_1 B_1 U_1(s) + M_2 B_2 U_2(s)) + M_3 B_3 U_3(s),$$

$$\mathcal{L}\{y_3\} = \mathcal{L}\{C_3 x_3\},$$

$$Y_3(s) = C_3 X_3(s),$$

Sustituyendo  $X_3(s)$

$$Y_3(s) = C_3 M_3 A_{32} (M_2 A_{21} M_1 B_1 U_1(s) + M_2 B_2 U_2(s)) + M_3 B_3 U_3(s),$$

$$Y_3(s) = C_3 M_3 A_{32} M_2 A_{21} M_1 B_1 U_1(s) +$$

$$C_3 M_3 A_{32} M_2 B_2 U_2(s) + C_3 M_3 B_3 U_3(s)$$

- $G_{31}(s) + G_{32}(s) + G_{33}(s) = \frac{Y_{31}(s)}{U_1(s)} + \frac{Y_{32}(s)}{U_2(s)} + \frac{Y_{33}(s)}{U_3(s)},$

$$G_{31}(s) = \frac{Y_{31}(s)}{U_1(s)} = C_3 M_3 A_{32} M_2 A_{21} M_1 B_1,$$

$$G_{32}(s) = \frac{Y_{32}(s)}{U_2(s)} = C_3 M_3 A_{32} M_2 B_2,$$

$$G_{33}(s) = \frac{Y_{33}(s)}{U_3(s)} = C_3 M_3 B_3.$$

⋮

⋮

$n$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx_n}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{A_{n,n-1}x_{n-1} + A_{n,n}x_n + B_n u_n\},$$

$$sX_n(s) = A_{n,n-1}X_{n-1}(s) + A_{n,n}X_n(s) + B_n U_n(s),$$

$$(sI - A_{n,n})X_n(s) = A_{n,n-1}X_{n-1}(s) + B_n U_n(s),$$

$$X_n(s) = (sI - A_{n,n})^{-1}A_{n,n-1}X_{n-1}(s) + (sI - A_{n,n})^{-1}B_n U_n(s).$$

Con  $M_n = (sI - A_{n,n})^{-1}$ ,

y sustituyendo  $X_{n-1}(s)$ ,

se tiene

$$X_n(s) = M_n A_{n,n-1} \left( M_{n-1} A_{n-1,n-1} M_{n-1} B_1 U_1(s) + M_{n-1} B_2 U_2(s) \right) + \dots +$$

$$M_n B_n U_n(s),$$

$$\mathcal{L}\{y_n\} = \mathcal{L}\{C_n x_n\},$$

$$Y_n(s) = C_n X_n(s),$$

$$Y_n(s) = C_n M_n A_{n-1,n-1} X_n(s) + M_n B_n U_n(s).$$

Sustituyendo  $X_n(s)$

$$Y_n(s) = C_n M_n \prod_{r=1}^{n-1} [A_{n-r+1,n-r} M_{n-r}] B_1 + C_n M_n \prod_{r=1}^{n-2} [A_{n-r+1,n-r} M_{n-r}] B_1$$

$$+ \dots + C_n M_n B_n,$$

- $G_{n1}(s) + G_{n2}(s) + \dots + G_{nn}(s) = \frac{Y_{n1}(s)}{U_1(s)} + \frac{Y_{n2}(s)}{U_2(s)} + \dots + \frac{Y_{nn}(s)}{U_n(s)},$

$$G_{n1}(s) = \frac{Y_{n1}(s)}{U_1(s)} = C_n M_n \prod_{r=1}^{n-1} [A_{n-r+1,n-r} M_{n-r}] B_1,$$

$$G_{n2}(s) = \frac{Y_{n2}(s)}{U_2(s)} = C_n M_n \prod_{r=1}^{n-2} [A_{n-r+1,n-r} M_{n-r}] B_2,$$

$$G_{nn}(s) = \frac{Y_{nn}(s)}{U_n(s)} = C_n M_n B_n.$$