

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Subdirección Académica

Departamento de Ingeniería Electrónica

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

**Análisis Dinámico de un Sistema de Regeneradores de Energía para
Establecer Acciones de Control, Enfoque Basado en Cálculo Fraccionario**

presentada por
Ing. Ivonne Elizabeth Guerrero Ozuna

como requisito para la obtención del grado de
Maestra en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis
Dr. José Francisco Gómez Aguilar

Codirector de tesis
Dr. María Guadalupe López López

Cuernavaca, Mor., 20 de junio de 2016.

OFICIO No. DIE/130/2016
Asunto: Aceptación de documento de tesis

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

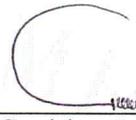
Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Ivonne Elizabeth Guerrero Ozuna** con número de control **M14CE075** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“Análisis Dinámico de un Sistema de Regeneradores de Energía para Establecer Acciones de Control, Enfoque Basado en Cálculo Fraccionario”** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

CODIRECTOR DE TESIS

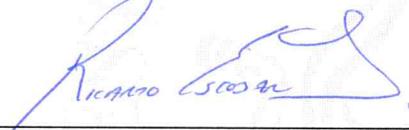


Dr. José Francisco Gómez Aguilar
Doctor en Física
Cédula profesional 9124781



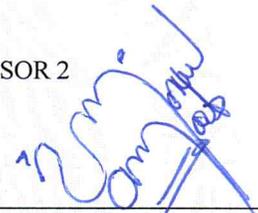
Dra. Ma. Guadalupe López López
Doctor en Ciencias en Ingeniería Química
Cédula profesional 7980045

REVISOR 1



Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 7534115

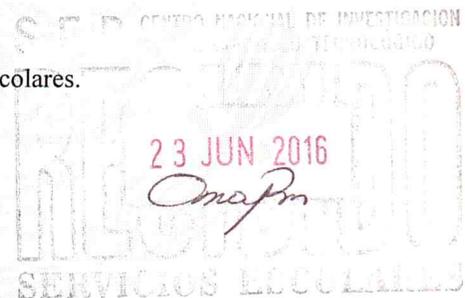
REVISOR 2



Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 2026520

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Estudiante
Expediente

CMAZ/lrr



Cuernavaca, Mor., 23 de junio de 2016
OFICIO No. SAC/227/2016

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**ING. IVONNE ELIZABETH GUERRERO OZUNA
CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Análisis Dinámico de un Sistema de Regeneradores de Energía para Establecer Acciones de Control, Enfoque Basado en Cálculo Fraccionario”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

“CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE MEXICO”



**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



SEP TecNM
CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr

Dedicatoria

Dedico este trabajo:

A **Dios**, por ponerme siempre en el lugar indicado, por permitirme alcanzar este logro tan importante en mi vida, por nunca abandonarme y hacerse presente en cada día de mi vida.

A mis padres **Juan y Guadalupe**, a quienes les debo todo lo que soy, gracias por su amor, por su comprensión, por el apoyo incondicional, por ser mi guía en los caminos de la vida, por todos aquellos consejos que siempre me dan, por su ejemplo, porque gracias a ustedes soy lo que soy, los amo con todo mi corazón.

A mi abuelitos **Juan y Elizabeth**, por todo el apoyo, por sus buenos consejos, por ser tan maravillosas personas, gracias por todo el cariño, porque desde que mi papá no está ustedes se han preocupado por mi bienestar y el de mis hermanas, gracias abuelitos los amo con todo mi corazón.

A mis hermanas **Ivette, Giovanna y Nora**, por siempre estar para mi haciéndome feliz en cada momento, por echarme porras y apoyarme cuando más lo he necesitado, las quiero mucho.

A mis tíos **Rafael, Carmen, Elizabeth, Eusebia, Estefany, Erica y Joaquín**, por sus tan acertados consejos y por siempre estar al pendiente de mí, los quiero mucho.

*”Si no puedes parar de pensar en algo,
NO PARES de trabajar para conseguirlo”.*
Anónimo

Agradecimientos

Agradezco:

A mis asesores el Dr. José Francisco Gómez Aguilar y la Dra. Ma. Guadalupe López López, gracias por su apoyo, por sus consejos, ya que sin ellos no hubiera sido posible realizar este trabajo de investigación, pero sobre todo gracias por su confianza.

A los miembros del comité revisor, al Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez y el Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez, por sus valiosos comentarios, observaciones, disponibilidad y ayuda que contribuyeron al buen desarrollo de esta investigación.

A mis profesores, Dr. Manuel Adam Medina, Dr. Juan Reyes Reyes, Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza, Dr. Jaime E. Arau Roffiel y Enrique Quintero-Marmol Márquez, por todos los conocimientos brindados, además por sus valiosos consejos y su amistad. También quiero agradecer a todo el personal administrativo, por ser personas cordiales y atentas.

A mis compañeros y amigos, Pati, Susy, Pau, Huguito, Chuy, Amy, Iris, Regalado, Citla, Iván, Cholo, Muñe, Diego, Moi, Joachin, Dilvarsito, Pancho, El campeón, Reyna, Oscar, Jashiel, Señor Mota, Maestro Stirling, Maestro Felipe, Toño, Jesse Rumbo, Chino, Eider, Luis, Lupita Salas, Daniel y los que faltan, gracias por todos los buenos y malos momentos que pasamos juntos y compartir esta experiencia.

A mis padres, por su cariño, paciencia y por todos los consejos que me han dado a lo largo de mi vida, los cuales sin duda han sido clave fundamental para mi crecimiento como persona.

A la Lic. Lorena Ruiz Ramirez, por su apoyo incondicional y por brindarme su amistad.

*AL **CENIDET** por brindarme los medios necesarios para obtener mayores conocimientos y con ello crecer profesionalmente. Además por las atenciones otorgadas de todo el personal.*

*Finalmente agradezco a **CONACYT** por el apoyo económico brindado para el desarrollo de esta tesis.*

Resumen

El objetivo principal de esta tesis, es desarrollar un modelo de ecuaciones diferenciales fraccionarias con el fin de obtener una representación alternativa, que permita tener una representación matemática generalizada lo cual permitirá describir de manera más general el regenerador de energía.

Esto se lleva a cabo partiendo de un modelo no lineal de parámetros distribuidos tomando en cuenta tres mecanismos de transferencia de calor (Número de Peclet, número Biot y número de Stanton), posteriormente mediante algunas suposiciones de modelado se llega a un modelo de parámetros concentrados que toma en cuenta solo un parámetro (Número de Stanton), A partir de este modelo se construye la representación basada en ecuaciones diferenciales de orden arbitrario.

El propósito de esto es mostrar que el modelo que solo considera un parámetro resultante cuando se presenta por medio de ecuaciones diferenciales de orden arbitrario es capaz de describir la dinámica del modelo complejo no lineal de tres parámetros.

Finalmente, con base en el análisis de la dinámica, se obtendrá un modelo generalizado, el cual permitirá establecer una propuesta de lazos de control para el regenerador de energía.

Abstract

The main objective of this thesis is to develop a model of fractional differential equations in order to obtain an alternative embodiment, that allows to have a generalized mathematical representation which would describe more generally regenerative energy.

This is done based on a nonlinear model of distributed parameters taking into account three mechanisms of heat transfer (Number of Peclet number Biot and Stanton number), then using some assumptions modeling you get to a model of lumped which takes into account only one parameter (Stanton number) from this model based on differential equations of arbitrary order representation is constructed.

The purpose of this is to show that the model only considered a resulting parameter when presented by differential equations of arbitrary order is able to describe the complex dynamics of nonlinear three-parameter model.

Finally, based on the analysis of dynamics, a generalized model, which will establish a proposed control loops for regenerative energy will be obtained.

Índice general

Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XV
Nomenclatura	XV
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema.	2
1.3. Justificación	3
1.4. Estado del arte	3
1.4.1. Método de colocación ortogonal	6
1.4.2. Número adimensional	10
1.4.2.1. Número de Peclet	10
1.4.2.2. Número de Biot	11
1.4.2.3. Número de Stanton	12
1.4.3. Descripción de un periodo de calentamiento del gas y un periodo de enfriamiento del gas	13
1.5. Objetivos.	15
1.5.1. General	15
1.5.2. Específicos	15
1.6. Hipótesis	15
1.7. Alcances	15
1.8. Metodología	16
1.9. Organización del documento	17
2. Introducción al Cálculo Fraccionario	18
2.1. Antecedentes	18
2.2. Función Gamma	19
2.3. Función de Mittag-Leffler	20
2.4. Definición de derivadas fraccionarias	21
2.4.1. Método de Adams-Bashforth-Moulton	23

3. Regenerador de energía	25
3.1. Modelado de Regeneradores de energía	26
3.2. Modelo no lineal de parámetros distribuidos	30
3.2.1. Solución de modelo no lineal de parámetros distribuidos	32
3.2.2. Simplificación del Modelo no lineal de parámetros distribuidos	34
3.3. Modelo lineal de parámetros concentrados	35
3.3.1. Solución del modelo lineal de parámetros concentrados	36
3.3.1.1. Aplicación del método de colocación ortogonal	36
4. Construcción del modelo fraccionario	42
4.1. Enfoque Riemann-Liouville (RL)	42
4.1.1. Solución numérica del enfoque de Riemann-Liouville	43
4.2. Enfoque Liouville-Caputo	46
4.2.1. Solución numérica del enfoque de Liouville-Caputo	47
5. Pruebas y resultados	50
5.1. Análisis de la dinámica fraccionaria	50
5.1.1. Comparación de modelos variando el orden de la derivada	51
5.2. Propuesta de los lazos de control	67
6. Conclusiones	74
6.1. Conclusiones	74
6.2. Trabajos futuros	76
Bibliografía	76
Anexos	81
A. Modelo del Regenerador de energía	82
A.1. Modelo del Regenerador de energía (Costa <i>et al.</i> , 2014)	82
A.1.1. Suposiciones de modelado (Sol-Carolina)	83
B. Modelo del Regenerador de energía	84
B.1. Validación de modelos	84

Índice de figuras

1.1. Periodo de calentamiento.	13
1.2. Periodo de enfriamiento.	13
1.3. Temperatura del gas y el sólido en función de x , a tiempos diferentes, (b) Temperatura en variables de proceso.	14
3.1. Regenerador de energía de lecho empacado.	26
3.2. Perfil de temperaturas del gas, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo clásico de tres parámetros. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	33
3.3. Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo clásico de tres parámetros. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	33
3.4. Temperatura a la salida tanto para el gas como para el sólido correspondiente al modelo clásico de tres parámetros. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	34
3.5. Perfil de temperaturas del gas, durante un periodo de calentamiento del gas modelo clásico de un parámetro. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	40
3.6. Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo clásico de un parámetro. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	40
3.7. Temperatura a la salida tanto para el gas como para el sólido correspondiente al modelo clásico de tres parámetros. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	41
4.1. Perfil de temperaturas del gas, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo fraccionario enfoque Riemann-Liouville. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	44
4.2. Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo clásico de un parámetro. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	45
4.3. Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo fraccionario enfoque Riemann-Liouville. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	45

4.4.	Perfil de temperaturas del gas, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo fraccionario enfoque Liouville-Caputo. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	48
4.5.	Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo fraccionario enfoque Liouville-Caputo. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	48
4.6.	Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo fraccionario enfoque Liouville-Caputo. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.	49
5.1.	Método de solución.	50
5.2.	Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1$	51
5.3.	Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,998$	52
5.4.	Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,997$	52
5.5.	Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,97$	53
5.6.	Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1$	54
5.7.	Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,998$	54
5.8.	Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,997$	55
5.9.	Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,97$	55
5.10.	Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1,014$	56
5.11.	Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1,002$	57
5.12.	Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1,014$	57
5.13.	Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1,002$	58
5.14.	Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Peclet: (a) utilizando $Pe=10$, $Bi=1/30$ y $St=10$	61
5.15.	Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Peclet: (b) utilizando $Pe=100$, $Bi=1/30$ y $St=10$	61
5.16.	Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Peclet: (c) utilizando $Pe=500$, $Bi=1/30$ y $St=10$	62
5.17.	Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Biot, para distintos ordenes fraccionarios: (a) $Pe=1000$, $Bi=1/15$ y $St=10$	63

5.18. Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Biot, para distintos ordenes fraccionarios: (b) $Pe=1000$, $Bi=1/5$ y $St=10$.	64
5.19. Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Biot, para distintos ordenes fraccionarios: (c) $Pe=1000$, $Bi=1/2$ y $St=10$	64
5.20. Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Stanton, para distintos ordenes fraccionarios: (a) $Pe=1000$, $Bi=1/30$ y $St=15$.	65
5.21. Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Stanton, para distintos ordenes fraccionarios: (b) $Pe=1000$, $Bi=1/30$ y $St=20$.	66
5.22. Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Stanton, para distintos ordenes fraccionarios: (c) $Pe=1000$, $Bi=1/30$ y $St=30$.	66
5.23. Ciclo de calentamiento y enfriamiento de un regenerador de energía.	68
5.24. Ciclo de calentamiento del gas.	70
5.25. Diagrama de lazos del control para el sistema de regeneradores de energía para ciclo de calentamiento.	72
5.26. Diagrama de lazos del control para el sistema de regeneradores de energía para ciclo de enfriamiento.	72

Índice de tablas

3.1. Algunas definiciones.	27
3.2. Definición de grupos adimensionales.	28
3.3. Parámetros del modelo de Ramachandran	32
3.4. Parámetros del modelo simplificado.	36
3.5. Condiciones iniciales y de frontera para el modelo de un parámetro	39
4.1. Condiciones iniciales y de frontera para simulación.	44
4.2. Condiciones iniciales y de frontera para simulación	47
5.1. Temperatura del gas a la salida enfoque Riemann Liouville.	58
5.2. Temperatura del sólido a la salida enfoque Riemann Liouville.	59
5.3. Temperatura del gas a la salida enfoque Liouville-Caputo.	59
5.4. Temperatura del sólido a la salida enfoque Liouville-Caputo.	59
5.5. Cálculos estadísticos de la comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Peclet.	63
5.6. Cálculos estadísticos de la comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Biot.	65
5.7. Cálculos estadísticos de la comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Stanton.	67
5.8. Modelos de parámetros distribuidos para la planta.	68
5.9. Modelos de parámetros concentrados para propósitos de control.	68
5.10. Posibles variables manipuladas y controladas del proceso.	69
5.11. Parámetros del modelo de (Costa <i>et al.</i> , 2014).	70
A.1. Parámetros del modelo de (Costa <i>et al.</i> , 2014).	83

Nomenclatura

Pe	—	Número de Peclet.
Bi	—	Número de Biot.
St	—	Número de Stanton.
T_h	—	Temperatura del gas.
T_s	—	Temperatura del sólido.
P_n	—	Polinomio de grado n .
ρ_g	—	Densidad del gas.
ρ_s	—	Densidad del sólido.
u_g	—	Velocidad del gas.
u_s	—	Velocidad del sólido.
V_x	—	Velocidad en la dirección axial.
v	—	Velocidad.
V	—	Volumen.
V_g	—	Volumen del gas.
V_b	—	Volumen del lecho.
Q	—	Calor.
q	—	Factor adimensional de almacenamiento de calor.
$C_{p,g}$	—	Calor específico del gas.
$C_{p,s}$	—	Calor específico del sólido a presión constante.
$C_{p,v}$	—	Calor específico del sólido a volumen constante.
t	—	Tiempo.
t_{ms}	—	Tiempo del modelo de un parámetro
x	—	Posición axial.
y	—	Radio de la partícula.
h	—	Coefficiente de convección.
A	—	Área de sección transversal.
a_p	—	Área superficial de la partícula externa por unidad de volumen del lecho.
A_{tr}	—	.
λ_e	—	Conductividad térmica del sólido.
λ_{ax}	—	Coefficiente de dispersión térmica.
L	—	Longitud.
∂	—	Derivada parcial.
T_{s1}	—	Temperatura en la superficie del sólido.

τ	—	Tiempo adimensional definido.
ε	—	Porosidad volumétrica.
$T_{s,0}$	—	Temperatura del inicial del sólido.
$T_{h,0}$	—	Temperatura del inicial del gas.
$T_{s,in}$	—	Temperatura de entrada del sólido.
$T_{h,in}$	—	Temperatura de entrada del gas.
T_{hc}	—	Temperatura del gas caliente.
T_{hf}	—	Temperatura del gas fría.
F_{hc}	—	Temperatura del gas caliente.
F_{hf}	—	Temperatura del gas fría.
K	—	Grados Kelvin.

Acrónimos

CF	—	Cálculo Fraccionario.
RL	—	Riemann-Liouville.
C	—	Caputo.
CO	—	Colocación Ortogonal.
tc	—	Tiempo de ciclo.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes.

Mediante modelos matemáticos podemos describir sistemas dinámicos que se encuentran relacionados de manera directa con el mundo real, esto es posible debido al uso y manejo de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, gracias a éstas se puede describir con cierto grado de exactitud el comportamiento de una gran cantidad de fenómenos físicos hasta cierto punto “idealizados”.

Recientemente se ha aplicado el Cálculo Fraccionario (CF) o de orden arbitrario a sistemas complejos, dando excelentes resultados y ayudando a obtener información más precisa de los fenómenos que nos interesan.

Los primeros indicios sobre la existencia del CF surgen en 1675, cuando Leibniz introduce la noción de derivada de orden “ n ” de una función. Fue posteriormente hasta 1695 mediante una carta de L’Hopital dirigida a Leibniz donde se mencionaba la pregunta de qué significado se le podría dar a la media derivada de una función, a la que Leibniz responde: Esta aparente paradoja permitirá en el futuro extraer interesantes consecuencias.

A partir de aquí, son varios los matemáticos que han estudiado este tema y han aportado al desarrollo de lo que hoy se conoce como CF. Entre ellos podemos destacar a Euler, Lagrange, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Grünwald, Letnikov, Holmgren, Cauchy, Hadamard, Hardy, Riesz, Weyl, etc.

Por otra parte, en las últimas cuatro décadas el concepto de CF ha evolucionado notablemente, se ha empleado con éxito en el modelado de fenómenos y sistemas físicos estudiados en multitud de campos de la ciencia y de la ingeniería.

El CF no había sido utilizado en ingeniería, debido a su complejidad y a la aparente descripción satisfactoria de los fenómenos con el cálculo de orden entero (clásico). Sin embargo debido a que este cuenta un grado de libertad adicional es capaz de descri-

bir con mayor precisión algunos comportamientos naturales relacionados con diferentes áreas de la ingeniería.

Algunas de las aplicaciones se encuentran en teoría de circuitos eléctricos (Gómez-Aguilar *et al.*, 2014), (Atangana y Nieto, 2015), (Gómez-Aguilar y Alvarado-Méndez, 2015), biofísica (Siow *et al.*, 2006), (Gómez *et al.*, 2013), sistemas mecánicos (Gómez-Aguilar *et al.*, 2016), Sistemas Térmicos y de transferencia de calor (Yang *et al.*, 2013), (Gómez *et al.*, 2015), ecuaciones diferenciales (García *et al.*, 2008), (Nirenberg, 2011), teoría de control (Romero *et al.*, 2008), (Pathak *et al.*, 2005), electromagnetismo y modelos de viscoelasticidad (Melo y Vega, 2009), (Rossikhin y Shitikova, 2004), entre otros.

1.2. Planteamiento del problema.

Generalmente estamos familiarizados con la idea de las derivadas de orden entero y usamos la notación usual

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{o} \quad Df(x), \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad \text{o} \quad D^2f(x), \quad (1.1)$$

las cuales tienen una interpretación física comúnmente conocida. En la descripción clásica de muchos fenómenos físicos lineales y no lineales se consideran ciertas dinámicas anómalas que presentan comportamientos generalmente disipativos y en su mayoría bastante complejos, tal es el caso del regenerador de energía, el cual es modelado mediante ecuaciones diferenciales parciales las cuales representan geometrías complejas y fenómenos disipativos en tres dimensiones.

Una forma de resolver el problema es considerar un modelo básico, sencillo, unidimensional, en lugar de incluir más fenómenos o dimensiones espaciales, se propone considerar derivadas de orden fraccionario; ya que los operadores fraccionarios son no locales e incorporan a la modelización los efectos de memoria y dan contribución de muchas escalas espaciales de manera natural.

Debido a esto, este tipo de ecuaciones ha asumido un papel importante para modelar la dinámica anómala de varios procesos relacionados con sistemas complejos en muchas áreas de la ciencia y de la ingeniería.

El CF a diferencia del ordinario puede representar sistemas dinámicos de orden superior y fenómenos complejos no lineales utilizando menor número de coeficientes ya que el orden arbitrario de la derivada le da un grado de libertad adicional que permite ajustarse a un comportamiento específico.

De estos comportamientos se puede obtener información de gran importancia que a simple vista se creía no existían y que pueden ayudar a analizar de una manera más

real el comportamiento del sistema.

El planteamiento principal de esta tesis es el obtener una representación alternativa de las ecuaciones dinámicas del regenerador de energía, mediante un enfoque basado en CF que permita obtener una descripción matemática que sea útil para propósitos de control.

La dinámica obtenida por el modelo de orden entero y el fraccionario permitirá establecer las diferencias que implica el utilizar el CF para este sistema en especial.

Finalmente esta representación alternativa permitirá establecer una nueva propuesta de lazos de control para el regenerador de energía.

1.3. Justificación

Con el desarrollo de esta tesis se pretende realizar el análisis dinámico de un sistema de regenerador de energía, con el fin de establecer lazos de control. Se planea utilizar el CF como herramienta de modelación y con ello obtener una representación alternativa de las ecuaciones de transferencia dinámica de un regenerador de energía y así realizar una comparación del comportamiento modelando las ecuaciones con operadores de orden entero y no entero, la comparación permitirá obtener resultados que pueden ser objeto de mejora en el desarrollo del regenerador de un motor Stirling.

Una vez declarado el inicio del proyecto, se verá que la aplicación de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario puede describir el sistema de regeneradores de energía, con una interpretación pragmática, directa, sencilla y efectiva.

1.4. Estado del arte

De acuerdo con Omaña (2007), Salazar y Chen (2014), uno de los dispositivos que hacen posible convertir el calor en energía mecánica aprovechable es el motor Stirling, el regenerador de energía es el elemento del motor Stirling que permite alcanzar mayores rendimientos, Formosa y Despesse (2010) afirman que el regenerador es un lecho empacado de un material sólido poroso, con aislamiento térmico externo, y que tiene la función de absorber y ceder calor a volumen constante del ciclo.

En Ramachandran y Duduković (1984) se muestran ecuaciones dinámicas de transferencia de calor para un regenerador de energía, el modelo describe un proceso periódico, a contracorriente y presenta la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales

(EDO) utilizando el método de triple colocación ortogonal. El modelo predice la temperatura de salida en función de varios parámetros del sistema, tales como los números de Stanton, Biot y Peclet, así como la eficiencia del regenerador.

En Finlayson (1974), el método de colocación ortogonal se utiliza para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales, es un método numérico en el cual, el sistema de ecuaciones diferenciales se discretiza seleccionando los puntos de colocación, como las raíces de polinomios ortogonales.

Respecto al CF, en la literatura se afirma que es una disciplina tan vieja como nueva, nació un ambiente meramente teórico e intuitivo y se mantuvo así hasta finales del siglo XVII, cuando pasando por los formalistas del siglo XIX se produjo una carrera vertiginosa por establecer y definir una teoría consistente de forma definitiva, para finalmente ya en la actualidad tomar parte en los avances científicos logrados por distintas disciplinas durante el siglo XX (Guía-Calderón *et al.*, 2015).

El CF es también utilizado como instrumento de modelización, en el trabajo de (Vázquez Martínez, 2004) se presenta una panorámica de los fundamentos e implicaciones para generar nuevos escenarios de modelización matemática. Las nuevas ecuaciones y funciones ofrecen un contexto natural para la modelización de fenómenos asociados a efectos no locales en el espacio y de memoria en el tiempo.

En la literatura se han introducido una gran cantidad de definiciones de derivadas fraccionarias, comúnmente llamadas, Hadamard, Erdelyi-Kober, Riemann-Liouville, Riesz, Weyl, Grünwald-Letnikov, Jumarie y Caputo como se mencionan en los trabajos de (Baleanu *et al.*, 2012), (Atangana y Secer, 2013), por otro lado, es importante mencionar que es un área en continua investigación, siendo recientemente publicadas dos nuevas definiciones de derivada fraccionaria (Caputo y Fabrizio, 2015) y (Atangana y Baleanu, 2016).

Para poder realizar un análisis dinámico basado en derivadas de orden no entero es necesario elegir una definición apropiada de derivada fraccionaria. Por ejemplo, en Diethelm (2010), el autor establece que la definición de Riemann-Liouville necesita forzosamente condiciones iniciales que son físicamente inaceptables (condiciones iniciales de orden fraccionario); por otro lado en (Diethelm *et al.*, 2005), el autor establece que la representación de Liouville-Caputo permite condiciones iniciales expresadas en términos de derivadas de orden entero con el significado físico que ya es conocido, esta definición es usada principalmente en fenómenos físicos donde la memoria tiene un papel muy importante.

Otras definiciones formales, así como algunas funciones elementales como la función de Mittag-Leffler (la cual generaliza a la función exponencial) y la transformada de Laplace se mencionan en Watson (2009), Dalir y Bashour (2010), también en estas referencias se proporciona una introducción a las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Otro de los problemas importantes que presentan las definiciones de derivada fraccionaria es la interpretación física y geométrica. En el trabajo de Podlubny (2001) se sugiere una solución a los problemas de la interpretación física y geométrica de integración y diferenciación fraccional, en específico la integración y diferenciación fraccional de Riemann-Liouville y la diferenciación fraccional de Liouville-Caputo.

El CF es una generalización del cálculo ordinario por lo tanto abre la posibilidad de extender los conceptos de derivada e integral a ordenes no enteros, con el cual se pueden estudiar algunos sistemas clásicos (péndulo, proyectil y resorte), mediante la generalización de la segunda ley de Newton, dándole un nuevo enfoque como se muestra en Ebaid (2011), Gómez-Aguilar *et al.* (2012). Otros trabajos que se pueden hallar en la literatura describen el comportamiento viscoelástico de sistemas poliméricos, propiedades mecánicas, térmicas dieléctricas y magnéticas son los de Tarasov (2011), Baleanu *et al.* (2010).

Un método común para encontrar la solución numérica es discretizando la variable espacial y resolviendo la ecuación diferencial que resulta. En García *et al.* (2008) se muestra como las ecuaciones diferenciales fraccionarias discretizadas fueron aplicadas en la descripción del fenómeno de la difusión de calor. Respecto al análisis numérico y la solución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, en su trabajo Bertrand *et al.* (2013) establece un enlace entre la diferenciación fraccionaria y la ecuación de difusión. Esta representación permite tomar en cuenta las especies de difusión anómala en las interfaces electroquímicas, obteniendo un modelado preciso de las baterías, supercondensadores y pilas de combustible.

En los análisis numéricos comúnmente se emplea la definición de Grünwald-Letnikov, en el trabajo de Rekanos y Yioultsis (2014) se describe la representación numérica de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Basándose en la definición de Grünwald-Letnikov en Coronel-Escamilla *et al.* (2015), se informa de la discretización de las ecuaciones diferenciales fraccionarias para conseguir simulaciones numéricas.

Las principales propiedades de estos métodos explícitos e implícitos relativos a la estabilidad, la convergencia y el comportamiento de error son estudiados. Otras soluciones numéricas son encontradas mediante la aplicación de métodos de colocación basados en polinomios Muntz, en Esmaeili *et al.* (2011), se presenta una técnica computacional basada en el método de colocación y polinomios Muntz para la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Una representación apropiada de la solución a través de los polinomios de Muntz reduce el tratamiento numérico para la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas. La principal ventaja del método es su precisión y la convergencia exponencial. En consecuencia, se puede obtener buenos resultados incluso mediante el uso de un pequeño número de puntos de colocación.

En (Li y Tao, 2009) mencionan que la generalización del método de Adams para

cualquier orden de derivada es llamado método de Adams-Bashforth-Moulton, y es utilizado para resolver de manera numérica una ecuación diferencial fraccionaria.

Otro trabajo se presenta en Ma *et al.* (2012), aquí se encuentra la solución numérica de un sistema económico mediante el método de Adams, se utilizan derivadas en el sentido de Liouville-Caputo. Los resultados del uso de este método muestran que es efectivo para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Estos métodos numéricos de solución son particularmente importantes debido a que las ecuaciones derivadas de nuestro estudio serán resueltas mediante alguna de estas técnicas.

1.4.1. Método de colocación ortogonal

La colocación ortogonal es una técnica eficiente para resolver ecuaciones integrales o diferenciales que describen problemas de transporte (transferencia de momento, transferencia de calor y transferencia de masa) ajustando una solución prueba en puntos seleccionados.

De acuerdo con (Villadsen y Stewart, 1967), la teoría básica puede visualizarse como sigue: considérese el modelo de un proceso V descrito por una ecuación o un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales o no lineales.

$$L_v Y = 0. \quad (1.2)$$

Con condiciones frontera o iniciales S lineales o no lineales

$$L_s Y = 0. \quad (1.3)$$

L_v y L_s definen el espacio y condiciones de la ecuación diferencial o integral a resolver, Y es la variable dependiente. Para resolver el modelo del proceso $L_v Y = 0$, se propone una solución \tilde{Y}_n que aproxima a la solución exacta, denominada función de prueba.

$$\tilde{Y}_n = Y_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i P_i(x). \quad (1.4)$$

La solución prueba es de orden de aproximación n , con parámetros A indeterminados y una combinación lineal de funciones P conocidas, llamadas polinomios ortogonales

que tienen raíces entre 0 y 1.

Entre los principales polinomios ortogonales están: Los polinomios de Legendre, polinomios de Jacobi, polinomios de Leguerre, entre otros (Álvarez, 2001), su selección depende de la geometría del sistema, en este caso se utilizarán polinomios de Legendre para hacer variaciones en el eje axial y polinomios de jacobi para discretizar la distancia radial en los sólidos (para el modelo definido en función del número de Biot).

Los parámetros \mathbf{A} son determinados en n puntos, donde se sabe que la función prueba satisface la ecuación que define el modelo del proceso, las condiciones de frontera y las condiciones iniciales.

Los puntos seleccionados son las raíces de una función, la cual es una combinación lineal de una familia de funciones ortogonales. Estos puntos, denominados puntos de colocación, minimizan el error de aproximación en la región de interés.

Varios métodos han sido propuestos para aproximar la solución, los cuales difieren entre sí por los criterios para seleccionar las funciones ortogonales P_i , las condiciones del modelo y los puntos donde se determinan los parámetros \mathbf{A} .

En una forma general, Stewart(1984) clasifica los tipos de métodos de aproximación de la solución de EDO como sigue:

A. Métodos de los residuos

- Mínimos cuadrados.
- Métodos variacionales (método de Galerkin).
- Colocación ortogonal.
- Elemento finito.

B. Métodos de diferencias finitas.

Esta estrategia es un poco más difícil de automatizar, utiliza un espaciado óptimo y representa mejor segmentos no lineales. Se localiza entre los métodos de los residuos ponderados, también conocidos como métodos de distribución del error. Hay disponibles tres estrategias: colocación interior, colocación frontera y colocación mezclada. En este trabajo será útil la estrategia de colocación interior.

Colocación interior. Esta estrategia de colocación ortogonal requiere que la solución prueba \tilde{Y}_n satisfaga idénticamente las condiciones frontera. La solución debe cumplir con las condiciones $L_V \tilde{Y}_n = 0$ y $L_S \tilde{Y}_n = 0$. Para resolver el modelo de un proceso representado por la ecuación diferencial $L_V = 0$ es posible proponer una función prueba de la forma

$$\tilde{Y}_n = Y(1) + (1 - x^2) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}_i P_i(x^2). \quad (1.5)$$

Se puede comprobar que la función prueba \tilde{Y}_n satisface las condiciones en $x^2 = 1$. Como se mencionó antes, $P_i(x^2)$ es una familia de polinomios ortogonales; \mathbf{A}_i son los coeficientes de la combinación lineal de polinomios ortogonales $P_i(x^2)$ nos proporcionan los puntos de colocación o puntos de cuadratura óptima.

Una característica importante de los polinomios ortogonales es el hecho de que una combinación lineal de una familia de polinomios ortogonales ecuación (1.6)

$$\tilde{Y}_n = Y_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i P_i(x). \quad (1.6)$$

Está en correspondencia con un polinomio de grado n con coeficientes reales de la forma

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} e_i x^i. \quad (1.7)$$

Si la función prueba es de la forma

$$\tilde{Y}_n = Y(1) + (1 - x^2) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}_i P_i(x^2),$$

entonces, una forma alternativa de describir la función prueba es la siguiente:

$$\tilde{Y}_n = \sum_{i=0}^{n+1} e_i x^{2i-2}. \quad (1.8)$$

Como podemos observar, la función prueba alternativa es un polinomio de la forma $P_i(x^2)$

$$\tilde{Y}_n = e_0 + e_1 x^2 + e_2 x^4 + \dots + e_{n+1} x^{2n}. \quad (1.9)$$

Al evaluar la función prueba alternativa ecuación (1.7) en cada punto de colocación, obtenemos:

$$\tilde{Y}_n = \sum_{i=0}^{n+1} e_i x^{2i-2} \Big|_{x_j}; \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

La cual podemos expresar en forma matricial.

$$\tilde{Y}_n = Qe, \quad (1.11)$$

donde:

$$\tilde{Y}_n = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{n-1} \end{bmatrix}; \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{2n} \\ 1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{2n} \\ \vdots & \vdots & x_j^{2i-2} & \vdots \\ 1 & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{2n} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Un punto importante es que los valores de las ordenadas y los puntos de colocación conocidos, podemos resolver para e y obtener los coeficientes de la función prueba. Estas consideración será utilizada posteriormente para reducir las formas diferenciales, de la ecuación 1.11 obtenemos.

$$e = Q^{-1}\tilde{Y}_n, \quad (1.13)$$

Q es una matriz de dimensión $[n+1, n+1]$ y sus elementos se definen como: $Q_{ji} = x_j^{2i-2}$, derivando de la forma alternativa de la función prueba y evaluando en cada punto de colocación resulta:

$$\left. \frac{d\tilde{Y}_n}{dx} \right|_{x_j} = \sum_{i=1}^{n+1} e_i \left. \frac{d(x^{2i-2})}{dx} \right|_{x_j}; \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

La cual podemos expresar en forma matricial de la siguiente forma:

$$\tilde{Y}_n = \frac{d\tilde{Y}_n}{dx} = Ce, \quad (1.15)$$

donde

$$\tilde{Y}_n = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{n-1} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & \cdots & 2nx_1^{2n+1} \\ 0 & 2x_2 & \cdots & 2nx_2^{2n+1} \\ \vdots & \vdots & (2i-1)x_j^{2i+3} & \vdots \\ 0 & 2x_n & \cdots & 2nx_n^{2n+1} \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

donde C es una matriz de dimensión $[n+1, n+1]$ y sus elementos se definen como $C_{ji} = (2i-2)x_j^{2i-3}$, sustituyendo $e = Q^{-1}\tilde{Y}_n$ en la expresión de la primera derivada 1.15, obtenemos la forma reducida de la ecuación diferencial.

$$\frac{d\tilde{Y}_n}{dx} = A\tilde{Y}_n, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{A} = CQ^{-1},$$

donde \mathbf{A} es una matriz de coeficientes reales de dimensión $[n + 1, n + 1]$ obtenida a partir de los valores de los puntos de colocación. La siguiente expresión es la forma desarrollada de la ecuación 1.17.

$$\frac{d\tilde{Y}_{nj}}{dx} = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{A}_{ji} Y(x_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

1.4.2. Número adimensional

Número adimensional es un número que no tiene unidades físicas. Los números adimensionales se definen como productos o cocientes de cantidades que sí tienen unidades de tal forma que todas éstas se simplifican. Se obtienen re-arreglando los balances de materia y/o energía de forma adimensional. Dependiendo de su valor estos números tienen un significado físico que caracteriza los sistemas.

Existen diversos números adimensionales. En el reciente trabajo se utilizan el número de Peclet, el número de Biot y el número de Stanton, los cuales se definen a continuación:

1.4.2.1. Número de Peclet

$$Pe = \frac{u_g \rho_g C_{pg} L}{\lambda_{ax}}, \quad (1.19)$$

donde:

- u_g Velocidad del gas.
- ρ_g Densidad del gas.
- C_{pg} Calor específico del gas.
- λ_{ax} Coeficiente de dispersión térmica.

El número de Peclet (Pe) relaciona la conductividad térmica, es decir, relaciona el transporte convectivo y el transporte por conducción, entonces define cuál de los dos mecanismos de transferencia de calor domina sobre el otro.

Cuando la conductividad es muy grande, el número de Pe es pequeño. Y la resistencia a la transferencia de calor por conducción es grande.

El número de Pe térmico es equivalente al producto del número de Reynolds (Re) y del número de Prandtl (Pr).

El número de Pe es una medida de la influencia de la conducción térmica axial. Si $Pe = 0$, las propiedades térmicas del gas son uniformes a lo largo del lecho empacado, estas condiciones. Si $Pe < 30$, el efecto de la conducción térmica axial es significativo y no considerarlo en el modelado produce errores significativos en la estimación de los perfiles de temperatura, especialmente para valores inferiores a 10. Si $Pe > 100$ el efecto de la conducción axial es pequeño.

1.4.2.2. Número de Biot

$$Bi = \frac{hR}{\lambda_e}, \quad (1.20)$$

donde:

- h Coeficiente de transferencia de calor por convección.
- R Radio de la partícula.
- λ_e Conductividad térmica del sólido.

El número de Biot (Bi) es utilizado para cálculos de transmisión de calor, este relaciona los mecanismos de transferencia de calor por conducción dentro de un cuerpo y por convección en la superficie de dicho cuerpo.

El mecanismo de conducción está caracterizado con λ_e , es decir la conductividad, entonces cuando la conducción es el mecanismo de transferencia de calor que predomina, $Biot$ es pequeño y esto significa que hay una buena transferencia de calor.

Cuando la convección es el mecanismo de transferencia de calor que predomina, $Biot$ es grande, la temperatura de la superficie cambia rápidamente y la distribución de la temperatura dentro del sólido no es uniforme, por lo tanto, se generan perfiles de temperatura (a lo largo del radio para un sólido esférico). En este caso, se dice que el

sólido es no isotérmico.

1.4.2.3. Número de Stanton

$$St = \frac{ha_p L}{u_g \rho_g C_{pg}}, \quad (1.21)$$

donde:

- h Coeficiente de transferencia de calor por convección.
- a_p Área superficial de la partícula externa por unidad de volumen del lecho.
- L Longitud.
- u_g Velocidad del gas.
- ρ_g Densidad del gas.
- C_{pg} Calor específico del gas.

El número de Stanton (St) mide la relación entre el calor trasferido por convección a un fluido y el flujo de calor en el lecho empacado por unidad de una diferencial de temperatura debido a la velocidad y a la capacidad calorífica del gas que atraviesa el lecho.

Se usa para caracterizar la trasferencia de calor por convección, este mecanismo es considerado uno de los más importantes en el regenerador.

Conforme el número de Stanton crece, la trasferencia de calor es más rápida y el gas absorbe más rápido el calor contenido en el sólido.

1.4.3. Descripción de un periodo de calentamiento del gas y un periodo de enfriamiento del gas

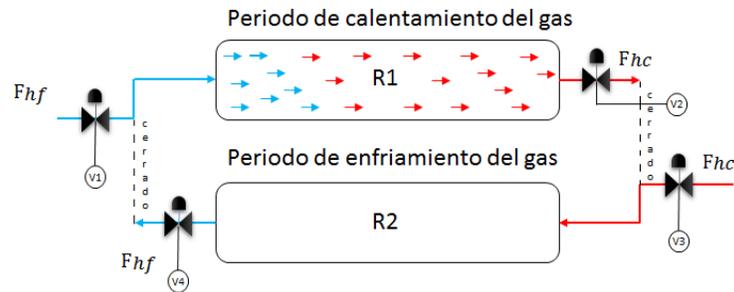


Figura 1.1: Periodo de calentamiento.

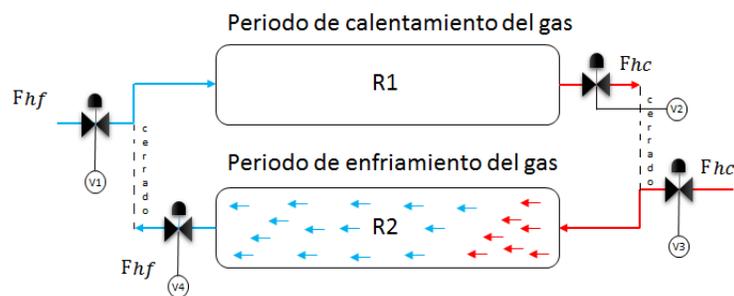


Figura 1.2: Periodo de enfriamiento.

El periodo de calentamiento tiene una duración t_c y corresponde a un medio ciclo de operación del sistema:

La válvula $V1$ permite el paso de un fluido frío, que entra a una temperatura $T_{h,in}$ constante, hacia el regenerador $R1$, mientras que la válvula $V2$ permite la salida del gas de $R1$. Inicialmente, el sólido se encuentra caliente a una temperatura $T_{s,0}$. Este sólido es un acumulador que tiene almacenada una cantidad finita de energía calorífica.

Conforme pasa el gas a través del lecho sólido, este va adquiriendo calor del sólido, es decir, va descargando al sólido de su carga térmica. El gas alcanza una temperatura cercana a la del sólido a lo largo de todo el regenerador $R1$, como se muestra en la figura (1.3). Esto se explica, considerando que hay una superficie de transferencia de calor muy grande (ya que son intercambiadores de calor compactos, es decir, en un volumen pequeño contienen una gran superficie de transferencia de calor).

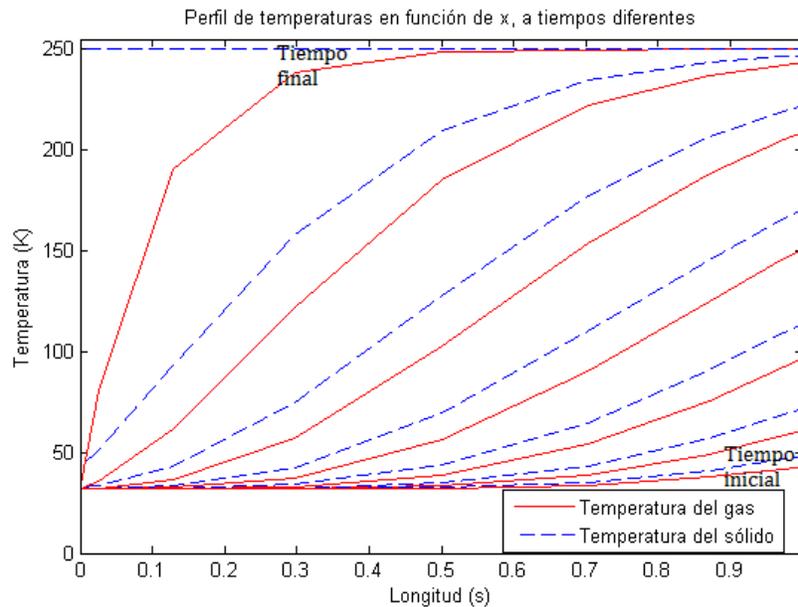


Figura 1.3: Temperatura del gas y el sólido en función de x , a tiempos diferentes, (b) Temperatura en variables de proceso.

Al inicio del periodo, la energía térmica del sólido es mayor, por lo que el gas alcanza una temperatura muy cercana a la temperatura inicial del sólido como se muestra en la figura (1.3).

Conforme pasa el tiempo, el sólido va perdiendo su carga térmica y por lo tanto la temperatura del sólido y la del gas son parecidas, pero esta va disminuyendo. Es decir, conforme avanza el tiempo, el gas sale a una temperatura más baja .

Después de mucho tiempo, el sólido ha perdido por completo su carga térmica y alcanza la temperatura fría del gas, es decir, debido a que ya no hay un gradiente de temperatura entre el gas y el sólido, ya no hay transferencia de calor y el gas sale frío.

Durante el periodo de calentamiento, el gas se calienta. Si este periodo se extiende hasta el punto de agotar la energía térmica del sólido, al final del periodo, el gas no se calienta más. Por lo tanto, la temperatura del gas durante el periodo es el promedio de la temperatura del gas a lo largo del mismo.

Si el periodo tiene una duración más corta y acaba antes de que se agote la carga térmica del sólido, la temperatura promedio del gas será más elevada que la temperatura promedio del gas con un periodo más largo.

Por lo tanto, el tiempo de calentamiento y enfriamiento, se define en función de los requerimientos del proceso y este puede ser variable. Una vez terminado el periodo de calentamiento, el lecho está totalmente frío o suficientemente frío para invertir la

operación y hacer funcionar R1 en un ciclo de enfriamiento de gas.

1.5. Objetivos.

1.5.1. General

- ✓ Proponer un modelo de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario con la finalidad de analizar la dinámica del sistema de regenerador de energía empacado con rejillas metálicas, con el fin de definir los lazos de control que permitan mejorar el desempeño del sistema.

1.5.2. Específicos

- ✓ Analizar la dinámica de las ecuaciones de transferencia dinámica del regenerador.
- ✓ Construir el modelo descrito por ecuaciones diferenciales de orden no entero para el regenerador de energía.
- ✓ Analizar la dinámica fraccionaria del sistema de regenerador de energía.
- ✓ Mostrar las diferencias del modelado utilizando cálculo fraccionario contra cálculo ordinario.
- ✓ Proponer los lazos de control para el sistema de regenerador de energía.

1.6. Hipótesis

Mediante una representación alternativa de las ecuaciones de transferencia dinámica del regenerador basada en un enfoque fraccionario es posible obtener una descripción matemática más general del sistema de regenerador de energía.

1.7. Alcances

El desarrollo de esta tesis está definido a realizar las siguientes actividades

- ✓ Revisión del análisis dinámico de las ecuaciones de transferencia dinámicas del regenerador.

- ✓ Obtención de la solución numérica de las ecuaciones de transferencia dinámicas del regenerador, mediante la utilización de los métodos de Runge Kutta y colocación ortogonal, esto únicamente para un sólo ciclo.
- ✓ Revisión de los principales conceptos de cálculo fraccionario.
- ✓ Construcción de un modelo descrito por ecuaciones diferenciales de orden no entero.
- ✓ Obtención de la solución numérica del modelo descrito por ecuaciones diferenciales fraccionarias.
- ✓ Análisis de la dinámica fraccionaria.
- ✓ Finalmente en función del análisis de la dinámica establecer un esquema de lazos de control para el sistema de regeneradores de energía.

1.8. Metodología

La metodología empleada para el desarrollo del trabajo de tesis fue la siguiente:

- a. Se realizó un estudio del estado del arte sobre las ecuaciones de transferencia dinámica del regenerador de energía, así como el método numérico propuesto para la solución de estas ecuaciones, también se realizó una revisión bibliográfica de artículos relacionados con la aplicación del cálculo fraccionario a sistemas dinámicos, así como las diferentes definiciones de derivada fraccionaria aplicada a distintos sistemas y por último una revisión de los métodos de solución para enfoques fraccionarios.
- b. Haciendo una revisión del estado del arte, se seleccionó un modelo matemático no lineal de parámetros distribuidos que en su formulación toma en cuenta tres parámetros adimensionales que dan información sobre los mecanismos de transferencia de calor en el regenerador energía (caso clásico), ante la falta de datos experimentales, este modelo es usado para evaluar el modelo fraccionario formulado en este trabajo. Además, se eligieron dos enfoques de derivada fraccionaria para ser aplicados a las ecuaciones de transferencia dinámica del regenerador y por último también se seleccionaron los métodos a utilizar para la solución numérica de las ecuaciones del regenerador y de las representaciones fraccionarias.
- c. Únicamente, se obtuvo un modelo de parámetros concentrados que en su formulación sólo toma en cuenta un sólo parámetro para definir la transferencia de calor.
- d. A partir del modelo lineal de parámetros concentrados se construye la representación basada en ecuaciones diferenciales fraccionarias, útil para propósitos de control.
- e. Posteriormente, mediante la utilización de los métodos numéricos se llega a la solución de las ecuaciones del regenerador para el caso clásico y el caso fraccionario.

- f. Se ajusta el orden del modelo fraccionario, de tal forma que se reproduzcan mejor los perfiles que predice el modelo de tres parámetros.
- g. Finalmente se propone un modelo fraccionario dinámico, útil para propósitos de control y a partir del análisis de la dinámica se propone un esquema de lazos de control para el sistema.

1.9. Organización del documento

El documento de tesis está organizado de la siguiente manera:

En el **Capítulo 2** se revisan algunas cuestiones básicas relacionadas con los conceptos del CF, como son: antecedentes, algunas de las funciones más importantes que intervienen en este tópico, principales definiciones de derivada fraccionaria y por último el método para la solución numérica de los enfoques fraccionarios.

En el **Capítulo 3** se presenta el modelo no lineal de parámetros distribuidos que toma en cuenta tres parámetros para representar los mecanismos de transferencia de calor en el regenerador (Pe , Bi y St), así como suposiciones de modelado y procedimiento para llegar al modelo lineal de un parámetro, finalmente se muestran los resultados en simulación para dichos modelos.

En el **Capítulo 4** se presenta el modelado y la solución numérica del modelo fraccionario.

En el **Capítulo 5** se muestran pruebas y resultados de la comparación de los enfoques fraccionarios contra el modelo no lineal de tres parámetros.

En el **Capítulo 6** se dan las conclusiones y se proponen los trabajos futuros.

Capítulo 2

Introducción al Cálculo Fraccionario

Este capítulo tiene como objetivo tratar algunas cuestiones básicas relacionadas con el CF como son: antecedentes, principales definiciones de derivada fraccionaria, método para la solución numérica de los enfoques fraccionarios y por último algunas de las funciones más importantes que intervienen en este tópico.

2.1. Antecedentes

El Cálculo Fraccionario (CF) es la parte del análisis matemático que generaliza las ideas del cálculo clásico y permite considerar la integración y derivación de cualquier orden, no necesariamente entero.

Esto nos proporciona un ejemplo de como se van desarrollando las teorías matemáticas, esta teoría puede ser considerada una disciplina tanto antigua como nueva. Antigua porque es una disciplina matemática de más de 300 años de antigüedad. Apareció sólo un tiempo después de que fueron publicados los primeros estudios sobre cálculo diferencial e integral, presentando la notación $d^n f(x)/dx^n$.

Los primeros indicios de un operador de este tipo datan de una carta de Bernoulli a Leibniz preguntándole acerca de la derivada de orden no entero, sin embargo, no se tiene una idea clara de cuál fue su respuesta.

Casi de manera simultánea en otra carta L'Hopital le preguntaba: ¿Qué pasaría si n fuera $1/2$? La respuesta de Leibniz fue profética: no sé lo que resultaría, pero esto conduciría a una paradoja de la que algún día se extraerán consecuencias útiles; y puede considerarse una teoría nueva porque no es hasta la década de los setenta del siglo pasado cuando ha sido objeto intensivo de conferencias especializadas, tratados y artículos académicos.

Al ser los operadores fraccionarios una generalización de los operadores ordinarios se pierden propiedades fundamentales, como son:

1. No existe una interpretación geométrica y física clara (aún no se tiene un consenso generalizado entre las diferentes interpretaciones).
2. La ley de índices ($D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$) sólo es válida para espacios de funciones muy específicas.
3. La derivada del producto de dos funciones es muy difícil de obtener.
4. La regla de la cadena no se puede aplicar de manera directa.

Hasta tiempos recientes, el CF tenía reputación de teoría matemática sin aplicaciones, de un carácter un tanto esotérico. Pero en las últimas cuatro décadas se ha empleado con éxito en el modelado de fenómenos y sistemas físicos estudiados en multitud de campos de la ciencia y de la ingeniería.

Entre ellos se pueden destacar la ciencia de materiales, la teoría del caos y los fractales, la electrónica de dispositivos, la física teórica, la mecánica, la economía, la psicología, entre otras; el CF cuenta con muchas ventajas en comparación al cálculo clásico o de orden entero pues puede representar sistemas dinámicos de orden superior y fenómenos complejos no lineales utilizando un menor número de coeficientes, esto debido a que el orden arbitrario de la derivada le da un grado de libertad adicional que permite ajustarse a un comportamiento específico; otras características importantes son que considera efectos de memoria y que es no local.

La primera definición formal fue la del matemático Matthieu Paul Laurent quien en 1984 publicó sus escritos de la teoría de la generalización de operadores no enteros contribuyendo de manera clara en el cálculo de derivadas de orden arbitrario. Su teoría, analizada en el plano complejo, fue la primera en ser aceptable para el gusto de los matemáticos modernos.

En la literatura se encuentran muchas otras definiciones de derivada fraccionaria, aquí mencionaremos tres de las más importantes, que serán útiles para esta tesis.

Es importante mencionar que es un área en continua investigación, siendo recientemente publicadas dos nuevas definiciones de derivada fraccionaria (Caputo y Fabrizio, 2015; Atangana y Baleanu, 2016).

2.2. Función Gamma

La principal aportación de la función gamma es la generalización de los factoriales $n!$ lo que permite que n se trate de un número real. Por lo tanto la función gamma es una de las más básicas e importantes.

A continuación se muestra la definición matemática

$$\Gamma(z) = \int_0^t e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (2.1)$$

Que converge en la mitad derecha del plano complejo $\Re(z) > 0$. Por lo tanto la función Gamma es continua para los números reales positivos.

La propiedad básica de la función Gamma es:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (2.2)$$

Si z es un número natural, entonces:

$$\Gamma(z + 1) = z!. \quad (2.3)$$

2.3. Función de Mittag-Leffler

Es una generalización de las funciones exponenciales que tienen importantes aplicaciones en el cálculo fraccionario.

En el libro de Podlubny (1998) podemos encontrar la definición de la función de Mittag-Leffler uniparamétrica la cual fue definida por G. M. Mittag-Leffler como

$$E_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\gamma k + 1)}. \quad (2.4)$$

donde γ es un parámetro donde $\gamma > 0$

La función de Mittag-Leffler bi-paramétrica fue introducida por Agarwal y Erdelyi en 1953-1954.

$$E_{\gamma,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\gamma k + \beta)}. \quad (2.5)$$

donde, γ y β son parámetros, donde $\gamma > 0$ y $\beta > 0$.

2.4. Definición de derivadas fraccionarias

Definición 1. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (RL).

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden γ de $f(t)$ se define como:

$${}^{\text{RL}}_0 D_t^\gamma f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (I^{n-\gamma} f(t)), \quad (2.6)$$

donde:

- n es un número natural que satisfaga $n - 1 < \gamma \leq n$.
- γ es el orden de la derivada fraccionaria. Ahora cuando $\gamma = 1$, se recupera el caso clásico.

Para la definición de Riemann-Liouville, la derivada fraccionaria de una constante es distinta de cero (De Oliveira y Machado, 2014), la representación de este enfoque es puramente matemático, es por ello que no es fácil obtener condiciones iniciales fraccionarias, pero esto no indica que no puedan utilizarse condiciones iniciales ordinarias.

Una segunda definición en tiempo discreto y que cuenta con las mismas características que la definición anterior, fue introducida por Anton Karl Grünwald en 1987, y por Aleksey Vasilievich Letnikov, esta segunda definición es conocida como:

Definición 2. Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov (GL).

Este operador se basa en la generalización de la expresión

$${}^{\text{GL}}_0 D_t^\gamma f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\gamma} \sum_{k=0}^{\frac{t-t_0}{h}} (-1)^k \binom{\gamma}{k} f(t - kh), \quad (2.7)$$

donde:

- γ es el orden de la derivada fraccionaria.
- h es el cambio de derivación relativamente pequeño en t .

- k es el paso de derivación, y

$\binom{\gamma}{k}$ son los coeficientes binomiales (Rekanos y Yioultsis, 2014).

Para obtener la solución numérica se parte de la expresión (2.7) la cual será aplicada al sistema que se quiera resolver, donde $(-1)^k \binom{\gamma}{j}$ son coeficientes binomiales $C_k^{(\gamma)} (j = 0, 1, \dots)$.

Los coeficientes binomiales actúan como factores que proporcionan estabilidad y un buen comportamiento de amortiguación del error. Para calcular los coeficientes se usa la siguiente expresión

$$c_0^{(\gamma)} = 1, \quad c_k^{(\gamma)} = \left(1 - \frac{1 + \gamma}{k}\right) c_{k-1}^{(\gamma)}. \quad (2.8)$$

A continuación la solución numérica para el modelo fraccionario está dada con la derivada fraccionaria del lado izquierdo en la forma

$${}_a^{GL}D_t^\gamma x(t) = f(x(t), t), \quad (2.9)$$

puede ser expresada en tiempo discreto $t_k = kh$

$$x(t_k) = f(x(t_k), t_x) h^\gamma = \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma)} x(t_{k-j}). \quad (2.10)$$

Ésta es comúnmente usada para simulaciones numéricas, el método de Grünwald-Letnikov es la generalización del método de Euler (Coronel-Escamilla *et al.*, 2015).

Una tercera definición de derivada fraccionaria es la definición de derivada fraccionaria de Liouville-Caputo (LC) la cual se encuentra dada en la siguiente definición (Podlubny, 1998).

Definición 3. Dada $b > 0$, $f \in L_1(0, b)$ y $0 < \gamma \leq 1$, la derivada fraccionaria de Liouville-Caputo (LC) de la función f de orden γ está dada por

$${}_0^C D_t^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} f'(s) ds, \quad t > 0, \quad (2.11)$$

donde:

- ${}_0^C D_t^\gamma$ es una derivada fraccionaria de LC respecto de t .
- γ es el orden de la derivada fraccionaria.
- $f^{(\gamma)}$ es la derivada de orden γ de $f(t)$, $\gamma \in \mathbb{N}$.
- n es un número natural que satisfaga que $n-1 < \gamma \leq n$.

Para la definición de LC, la derivada fraccionaria de una constante es igual a cero, es por ello que esta definición permite la utilización de condiciones iniciales ordinarias, lo cual es útil para obtener una interpretación física del fenómeno estudiado.

2.4.1. Método de Adams-Bashforth-Moulton

El método de Adams-Bashforth es un método multipasos, que usa la información de todos los puntos previos, y_i , y_{i-1} , y_{m+1} para calcular y_{i+1} . Esta es la principal diferencia entre los métodos de un sólo paso como: Euler, Taylor y Runge-Kutta ya que estos métodos sólo necesitan el último punto.

Hay dos tipos de métodos de Adams, el método de Adams-Bashforth y el método de Adams-Moulton. De la combinación de ambos se obtiene el método predictor-corrector de Adams-Bashforth-Moulton. La generalización de este método para cualquier orden de derivada se llama método de Adams-Bashforth-Moulton, y es utilizado para resolver de manera numérica una ecuación diferencial fraccionaria (Li y Tao, 2009).

$${}_0^C D_t^\gamma f(t) = g(t, f(t)), \quad f^k(0) = f_o^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.12)$$

donde:

- $\gamma > 0$ y ${}_0^C D_t^\gamma$ es el operador de derivada fraccionaria de Liouville-Caputo (2.11).

La ecuación 2.11 tiene sólo una solución en el intervalo $t \in [0, T]$ y esta solución satisface la siguiente integral de Volterra:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-u)^{\gamma-1} g(u, f(u)) du, \quad t < T. \quad (2.13)$$

El método de Adams para resolver la ecuación (2.13) fue estudiado por (Diethelm *et al.*, 2004) y la solución se describe a continuación como:

$$\begin{aligned} f_{i+1}^P &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{i+1}^j}{j!} f_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^i b_{j,i+1} g(t_j, f_j), \\ f_{i+1} &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{i+1}^j}{j!} f_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\sum_{j=0}^i a_{j,i+1} g(t_j, f_j) + a_{i+1,i+1} g(t_{i+1}, f_{i+1}^P) \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde:

$$a_{j,i+1} = \frac{h^\gamma}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \begin{cases} (i^{\gamma+1} - (i-\gamma)(i+1)^\gamma) & j=0, \\ ((i-j+2)^{\gamma+1} + (i-j)^{\gamma+1} - 2(i-j+1)^{\gamma+1}) & 1 \leq j \leq i, \\ 1 & j=i+1, \end{cases}$$

$$b_{j,i+1} = \frac{h^\gamma}{\gamma} ((i+1-j)^\gamma - (i-j)^\gamma), \quad j = 0, 1, 2, \dots, i.$$

Esta solución es muy útil para integración numérica de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Capítulo 3

Regenerador de energía

En este capítulo se presenta el modelo no lineal de parámetros distribuidos que toma en cuenta tres números adimensionales para definir la transferencia de calor (Pe , Bi y St), propuesto por (Ramachandran y Duduković, 1984).

Se presentan también las suposiciones de modelado, procedimiento de normalización de las ecuaciones y cada una de las definiciones adimensionales utilizadas para la obtención del modelo.

Con el fin de tener un modelo simple que permita modelar de manera más general los mecanismos de transferencia de calor, y que sea útil para aplicar el enfoque fraccionario, en esta sección se detalla el procedimiento para obtener dicho modelo.

Y por último se muestran los resultados en simulación del modelo de parámetros distribuidos (modelo complejo de tres parámetros) y el modelo de parámetros concentrados (modelo simple de un parámetro), graficando los perfiles de temperatura de un periodo de calentamiento del gas.

El **regenerador de energía**, es generalmente el componente del motor Stirling que permite alcanzar mayores rendimientos en su operación, la función de este es la clave para el desempeño eficiente de los motores Stirling. El regenerador es un intercambiador de calor compacto, en el cual se lleva a cabo una transferencia de calor gas-sólido y tiene la función de absorber y ceder calor desde y hacia un lecho formado con sólidos, a través del paso de un gas (Omaña, 2007).

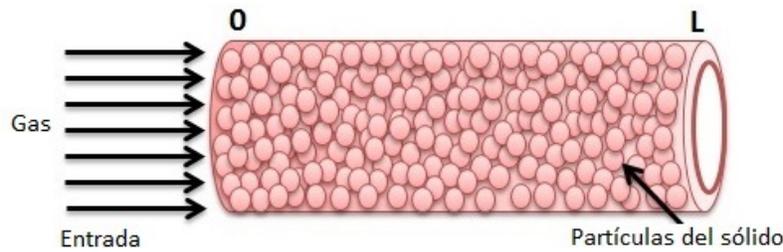


Figura 3.1: Regenerador de energía de lecho empacado.

En los regeneradores de energía se observan comportamientos no lineales, efectos derivados de diferentes mecanismos de transferencia de calor, perfiles de temperatura en diferentes direcciones; etc. Estos sistemas son modelados por ecuaciones diferenciales de parámetros distribuidos, como se muestra a continuación.

3.1. Modelado de Regeneradores de energía

Para desarrollar el modelo del Regenerador de energía se parte de la ecuación de energía para un sistema abierto no estacionario (Bird *et al.*, 2008).

A) Fase Gas

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{l} (1) \text{ Velocidad de} \\ \text{acumulación de} \\ \text{energía cinética} \\ \text{y energía interna} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{l} (2) \text{ Velocidad de entrada} \\ \text{de energía cinética} \\ \text{e interna por} \\ \text{convección} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} (2) \text{ Velocidad de salida} \\ \text{de energía cinética} \\ \text{e interna} \\ \text{por convección} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} (3) \text{ Velocidad neta} \\ \text{de adición} \\ \text{de calor por} \\ \text{conducción} \end{array} \right] \dots \\
 \dots - \left[\begin{array}{l} (4) \text{ Velocidad neta de} \\ \text{trabajo comunicado} \\ \text{por el sistema a} \\ \text{los alrededores} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} (5) \text{ Velocidad neta de} \\ \text{adición de calor al} \\ \text{sistema procedente de} \\ \text{los alrededores (sólido)} \end{array} \right], & \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Se realizan las siguientes suposiciones de modelado para la fase gas.

▪ Suposiciones de modelado fase gas

Con base en la literatura se especifican las siguientes suposiciones de modelado:

1. Los cambios de energía cinética y potencial se consideran despreciables.

2. No hay trabajo aportado al sistema o consumido por el sistema.
3. Para el sistema dinámico se consideran sólo variaciones axiales de la temperatura del gas (T_h).
4. Se supone velocidad constante.
5. Se consideran parámetros constantes.
6. No se considera la transferencia de calor entre el gas y el medio ambiente.

De la ecuación (3.1) se obtiene la forma general de la ecuación que describe la dinámica de temperatura del gas

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho_g (u_g + \frac{1}{2} v^2)}_{(1)} = \overbrace{-(\nabla \cdot \rho_g V (u_g - \frac{1}{2} v^2)) - \nabla \cdot q}_{(2)} - \underbrace{\nabla \cdot q}_{(3)} - \overbrace{(\nabla \cdot \rho_g V) - (\nabla \cdot [\tau \cdot V])}_{(4)} \pm \underbrace{Q}_{(5)},$$

Considerando las suposiciones de modelado uno, dos y cinco se llega a una forma que se muestra en (3.2):

$$\begin{aligned} \rho_g \frac{\partial u}{\partial t} &= \rho_g C_p \left(V_x \frac{\partial T_h}{\partial x} + V_y \frac{\partial T_h}{\partial y} + V_z \frac{\partial T_h}{\partial z} \right) \dots \\ &\dots - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) - hA(T_h - T_s) + Q, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde, u es la velocidad del gas, ρ_g es la densidad del gas, V_x , V_y y V_z se refiere a la velocidad en cada dirección, T_h la temperatura del gas, q_x , q_y y q_z la variación de calor en cada dirección, h es el coeficiente de convección del gas, A el área de sección transversal y Q calor procedente de los alrededores.

Tabla 3.1: Algunas definiciones.

Formula	Descripción
$V_g = LA\varepsilon$	Volumen del gas
$a_p = \frac{A}{V_b}$	Área de la superficie
$V_x = u_g$	Velocidad en la dirección axial
$V_b = \frac{V_g}{\varepsilon}$	Volumen del lecho

Posteriormente haciendo uso de las definiciones de la Tabla 3.1 y considerando suposiciones 3 y 4 se desarrolla la ecuación anterior para el flujo de gas a través de un

lecho empacado de la siguiente manera:

$$\rho C_v \frac{\partial T_h}{\partial t} = -\rho C_v V_x \frac{\partial T_h}{\partial x} + \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} + \frac{hA}{V_b} (T_h - T_s),$$

Indicando que $\frac{\partial T_h}{\partial t} = 0$, se tiene la siguiente ecuación que representa a la temperatura del gas:

$$0 = -\rho_g C_p u_g \frac{dT_h}{dx} + \lambda_{ax} \frac{d^2 T_h}{dx^2} - ha_p (T_h - T_s),$$

$$-\frac{dT_h}{dx} + \frac{\lambda_{ax}}{\rho_g C_p u_g} \frac{d^2 T_h}{dx^2} - \frac{ha_p}{\rho_g C_p u_g} (T_h - T_s) = 0. \quad (3.3)$$

A continuación se muestra la siguiente tabla con las definiciones de los grupos adimensionales que serán útiles para el adimensionamiento de las ecuaciones.

Tabla 3.2: Definición de grupos adimensionales.

Grupo	Notación	Definición
Número de Stanton	St	$\frac{ha_p L}{u_g \rho_g C_{pg}}$
Número de Biot	Bi	$\frac{hR}{\lambda_e}$
Número de Peclet	Pe	$\frac{u_g \rho_g C_{pg} L}{\lambda_{ax}}$
Tiempo adimensional modelo de tres parámetros	t_1	$\frac{t_a \lambda_e}{\rho_s C_{ps} R^2}$
Tiempo adimensional modelo de tres parámetros	t_2	$3Bit_1$

t_1 y t_2 son dos definiciones alternativas, que se pueden utilizar para representar el tiempo adimensional del modelo de tres parámetros y t_a es el tiempo real transcurrido desde el inicio del ciclo.

Definiciones de temperatura utilizadas para el adimensionamiento de las ecuaciones del regenerador

$$T_{h,in} = \frac{T_{h,in} - T_{s,0}}{T_{h,in} - T_{s,0}}, \quad (3.4)$$

$$T_{s,0} = \frac{T_{s,in} - T_{s,0}}{T_{h,in} - T_{s,0}}. \quad (3.5)$$

Adimensionando la posición axial

$$\begin{aligned}\frac{1}{L} \frac{\partial T_h}{\partial x} &= \frac{\lambda_{ax}}{\rho_g C_p u_g L^2} \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} - \frac{h a_p}{\rho_g C_p u_g} (T_h - T_{s1}), \\ \frac{\partial T_h}{\partial x} &= \frac{\lambda_{ax}}{\rho_g C_p u_g L} \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} - \frac{h a_p L}{\rho_g C_p u_g} (T_h - T_{s1}).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Finalmente se llega a la ecuación adimensional de gas

$$\frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} - \frac{\partial T_h}{\partial x} - St (T_h - T_s) = 0. \quad (3.7)$$

A) Fase sólida

Se parte de la ecuación de energía para un sólido no isotérmico.

$$\left[\begin{array}{c} \text{(1) Velocidad de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de energía} \\ \text{interna} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{(2) Velocidad neta} \\ \text{de adición} \\ \text{de calor por} \\ \text{conducción} \end{array} \right], \quad (3.8)$$

Se realizan las siguientes suposiciones de modelado para la fase sólida.

■ Suposiciones de modelado fase sólida

1. Las propiedades físicas del sólido son homogéneas a lo largo del lecho.
2. Se considera la transferencia de calor por conducción dentro del sólido con geometría esférica (lecho empacado con sólidos esféricos), con variaciones a lo largo del radio.
3. Se considera la variación de la temperatura del sólido con respecto al tiempo (dinámica).

Ecuación en la forma general

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_s (u_s) = -V \cdot q \pm Q. \quad (3.9)$$

donde t corresponde al tiempo, ρ_s a la densidad del sólido, u_s velocidad del sólido, V volumen, q es la transferencia de calor por convección y Q coeficiente de calor.

En coordenadas esféricas y tomando en cuenta que $C_{pv} = C_{ps}$ en sólidos

$$\rho_s C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} \lambda_e \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta \frac{\partial T_s}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \theta^2}, \quad (3.10)$$

C donde ρ_s es la densidad del sólido, r es el radio de la partícula, θ es el ángulo y λ_e la conductividad térmica del sólido.

Considerando la conducción únicamente en dirección axial, tenemos que:

$$\rho_s C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\lambda_e}{r^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^2 \frac{\partial T_s}{\partial r} \right). \quad (3.11)$$

Haciendo adimensional la posición a lo largo del radio tenemos que: $y = \frac{r}{R}$

$$\rho_s C_{ps} \frac{dT_s}{dt} = \frac{\lambda_e}{R^2} \frac{d}{d\frac{r}{R}} \left(\frac{r^2}{R^2} R^2 \frac{dT_s}{d\frac{r}{R}} \right), \quad (3.12)$$

$$\frac{R^2 \rho_s C_{ps}}{\lambda_e} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{y^2} \left(y^2 \frac{\partial T_s}{\partial y} \right). \quad (3.13)$$

Tomando en cuenta los datos de la Tabla. 3.2 se llega a la siguiente ecuación

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial T_s}{\partial y} \right). \quad (3.14)$$

De lo anterior se obtiene el modelo no lineal de parámetros distribuidos, también nombrado modelo no lineal de tres parámetros, como se plantea en la siguiente sección.

3.2. Modelo no lineal de parámetros distribuidos

Como modelo matemático de referencia para el regenerador de energía, se consideran las ecuaciones del regenerador que desarrollaron Ramachandran y Duduković (1984) y se muestran a continuación.

$$\frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} - \frac{\partial T_h}{\partial x} - St (T_h - T_{phs}) = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial T_{ph}}{\partial y} \right) = \frac{\partial T_{ph}}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Se mencionan las condiciones iniciales y de frontera utilizadas para dicho modelo matemático.

▪ **Condiciones iniciales:**

$$t = 0, \quad T_{ph} = T_{pho}(y, x). \quad (3.17)$$

▪ **Condiciones de frontera:**

$$x = 0, \quad \frac{1}{Pe} \frac{\partial T_h}{\partial x} = T_h - T_{h,in}, \quad (3.18)$$

$$x = 1, \quad \frac{\partial T_h}{\partial x} = 0, \quad (3.19)$$

$$y = 0, \quad \frac{\partial T_{ph}}{\partial y} = 0, \quad (3.20)$$

$$y = 1, \quad \frac{1}{Bi} \frac{\partial T_{ph}}{\partial y} = T_h - T_{phs}. \quad (3.21)$$

Estas ecuaciones describen la temperatura del gas de trabajo T_h y la temperatura del lecho sólido del regenerador T_s , incluyendo una distribución de temperaturas espacial en dos dimensiones espaciales y en el tiempo; por lo tanto, la solución del sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales del gas y del sólido, proporciona los perfiles de temperatura del sólido y del gas: $Th(x, t)$ y $Ts(x, r, t)$.

En la Tabla 3.3, se muestra la nomenclatura involucrada en las ecuaciones de transferencia dinámica del regenerador.

Tabla 3.3: Parámetros del modelo de Ramachandran

Notación	Descripción
Pe	Número de Peclet
T_h	Temperatura del gas
x	Distancia axial adimensional
St	Número de Stanton
T_h	Temperatura de la partícula
$T_{phs} = T_{ph}(x, y = 1, t)$	Temperatura de la partícula en la superficie externa
y	Distancia radial adimensional en la partícula
t	Tiempo adimensional

La solución del modelo no lineal de parámetros distribuidos se explica en la siguiente sección.

3.2.1. Solución de modelo no lineal de parámetros distribuidos

Para llegar a la solución del modelo no lineal de tres parámetros se utilizó el software Aspen Custom Modeler y se consideró la condición inicial presentada en la ecuación (3.17) y las condiciones de frontera presentadas en las ecuaciones (3.18), (3.19), (3.20) y (3.21). Cabe mencionar que la simulación se realizó para un periodo de calentamiento de gas.

Se grafica la temperatura normalizada de cero a uno y la temperatura en unidades de *Kelvin* (K), se utilizaron valores de temperatura del gas en la entrada de treinta y dos grados *Kelvin* y de doscientos cincuenta grados *kelvin* para la temperatura inicial del sólido, todo esto para un periodo de calentamiento del gas del ciclo de regeneración.

El modelo se resolvió para valores de $Pe=1000$, $Bi=1/30$ y $St=10$, a continuación se muestran gráficamente los resultados de la solución del modelo no lineal de tres parámetros para la temperatura del gas y la temperatura del sólido.

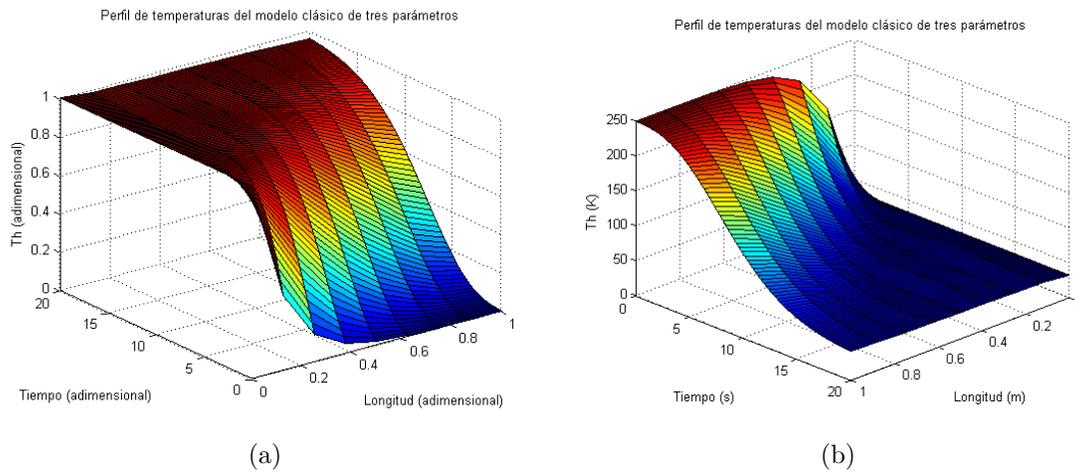


Figura 3.2: Perfil de temperaturas del gas, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo clásico de tres parámetros. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.

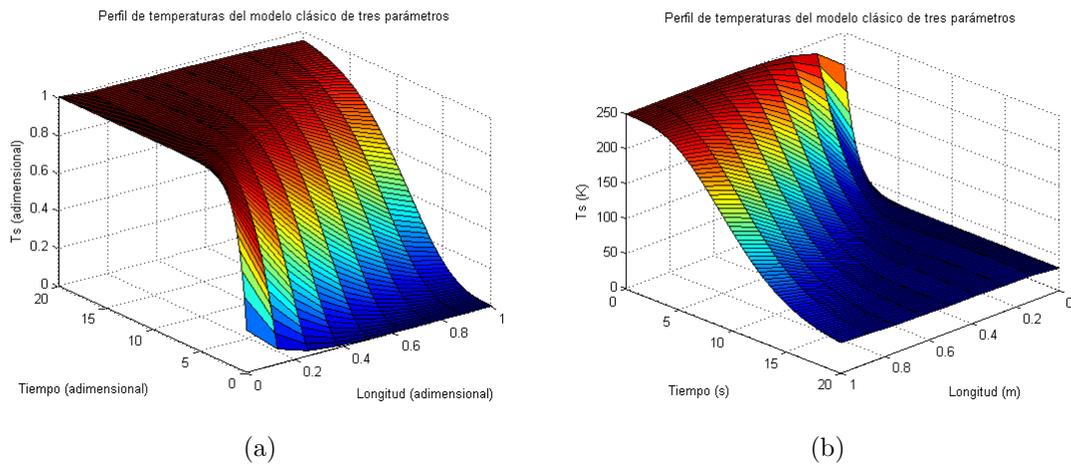


Figura 3.3: Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo clásico de tres parámetros. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.

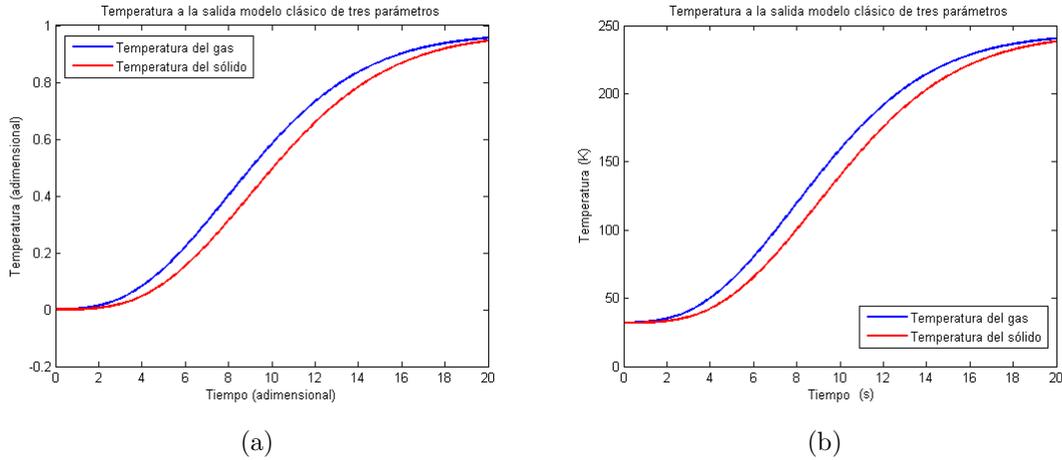


Figura 3.4: Temperatura a la salida tanto para el gas como para el sólido correspondiente al modelo clásico de tres parámetros. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.

En estas gráficas se muestran los resultados de la solución numérica de las ecuaciones dinámicas de transferencia de calor del regenerador para la fase gas y la fase sólida, mostradas en valores adimensionales y en variables de proceso. En cada una de ellas se aprecia el perfil de temperatura correspondiente a un ciclo de calentamiento del gas con respecto al tiempo y el espacio.

Con la idea de tener un modelo simple que permita modelar algunos de los mecanismos de transferencia de calor ya antes mencionados, se propone la siguiente simplificación del modelo no lineal de parámetros distribuidos que se describe en la siguiente sección. Este modelo se desarrolla con el fin de obtener una representación útil para fines de control.

3.2.2. Simplificación del Modelo no lineal de parámetros distribuidos

Se hacen las siguientes suposiciones:

Se asume que en la fase gas, la conducción es mucho menor que en la fase sólida, por lo tanto el valor de Peclet es grande, mientras que el inverso del número de Peclet, que indica resistencia térmica, es pequeño: $\frac{1}{Pe} \rightarrow 0$.

Entonces, el término de segundo orden de (3.15) tiene un efecto menor que los otros, por lo que puede despreciarse, lo que nos lleva a la siguiente ecuación simplificada para predecir el perfil de temperatura del gas.

$$\frac{dT_h}{dx} = -St (T_h - T_s). \quad (3.22)$$

Esta ecuación es válida para valores grandes de Peclet. Para valores pequeños de Pe , la predicción del modelo (3.22) difiere más de la predicción del modelo (3.15). Posteriormente, para establecer el balance de energía de la fase sólida, se consideran sólidos isotérmicos; es decir, se considera que la conducción radial en las partículas esféricas es suficientemente rápida para que el centro del sólido alcance la temperatura de la superficie instantáneamente; esto es cierto cuando Bi es pequeño. Además, se asume que las propiedades son constantes.

$$\rho_s C_{ps} \frac{dT_s}{dt} = \frac{hA\Delta T}{V_s},$$

$$\frac{hA}{(1-\varepsilon)V_b} \Delta T = \frac{ha_p}{1-\varepsilon} (T_g - T_{s1}).$$

Partiendo del balance de energía mencionado en la ecuación (3.8), entonces se realiza un acomodo de los términos involucrados y se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\rho_s C_{ps} (1-\varepsilon)}{ha_p} \frac{dT_s}{dt} = (T_g - T_{s1}),$$

donde, $\frac{\rho_s C_{ps} (1-\varepsilon)}{ha_p} = 3Bit_2 = t_{ms}$, el cual se refiere al tiempo adimensional del modelo simplificado. Entonces tenemos que la ecuación del sólido es la siguiente

$$\frac{dT_s}{dt} = T_h - T_s. \quad (3.23)$$

Es importante mencionar que este modelo es válido si, y sólo si, el número de Peclet es grande y el número de Biot pequeño.

3.3. Modelo lineal de parámetros concentrados

Como modelo matemático de un regenerador de energía se consideran las ecuaciones del regenerador descritas a continuación

$$\frac{dT_h}{dx} = -St (T_h - T_s), \quad (3.24)$$

$$\frac{dT_s}{dt} = T_h - T_s. \quad (3.25)$$

Estas ecuaciones describen los perfiles de la temperatura del gas de trabajo T_h y la temperatura del sólido T_s , con respecto al tiempo y con respecto a la dirección axial del lecho.

En la Tabla 3.4 se muestran la nomenclatura involucrada en las ecuaciones del regenerador.

Tabla 3.4: Parámetros del modelo simplificado.

Notación	Descripción
T_h	Temperatura del gas que pasa por el lecho fijo
T_s	Temperatura del sólido
St	Número de Stanton
t	Tiempo
x	Posición axial adimensional en el regenerador

3.3.1. Solución del modelo lineal de parámetros concentrados

Para obtener la solución del modelo matemático de un parámetro, primeramente se observa que en el modelo intervienen derivadas ordinarias dependientes tanto del tiempo como del espacio.

La ecuación del gas se discretiza mediante el método de colocación ortogonal. Después de la discretización, el sistema de ecuaciones acopladas describe la dinámica de la temperatura del sólido en cada uno de los puntos que resultan de la discretización del sistema. El sistema se transforma de un conjunto de dos ecuaciones diferenciales parciales, a un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias, en donde N es el número de puntos de discretización (que corresponde al número de raíces del polinomio de Legendre).

3.3.1.1. Aplicación del método de colocación ortogonal

Como ya se mencionó en el capítulo uno, el **método de colocación ortogonal** es una técnica eficiente para resolver ecuaciones integrales o diferenciales que describen

problemas de transporte (transferencia de momento, transferencia de calor y transferencia de masa) ajustando una solución prueba en puntos que corresponden a las raíces de algún polinomio ortogonal, seleccionado de acuerdo con la geometría del sistema.

Para resolver el modelo matemático de un parámetro, se utilizaron polinomios ortogonales de Legendre.

Se inicializa proponiendo una solución en forma de sumatorias dependiendo del orden de la derivada, en este caso se muestra la sumatoria para ordenes de uno y dos, donde \mathbf{A} es una matriz que aproxima derivadas de primer orden y \mathbf{B} aproxima las derivadas de segundo orden ambas en función de los puntos de colocación en x .

$$\dot{T}_s = \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} T_{hj}, \quad \frac{d^2 T_h}{dx} = \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_{ij} T_{hj}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.26)$$

Estas sumatorias en términos de los coeficientes de primera y segunda derivada son los que van a proporcionar la solución.

Una vez discretizada, \dot{T}_s se sustituye y se obtiene el siguiente modelo discretizado (3.27) ahora se tiene un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias con respecto al tiempo que dependerá de la solución en cada uno de los puntos de colocación, donde $i = 1, 2, \dots, N$. y $T_{h1} = 1$

Para $i = 1$

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{1j} T_{hj} = -St(T_{h1} - T_{s1}),$$

$$\dot{T}_s = T_h - T_s. \quad (3.27)$$

Para $i = 2$

$$\sum_{j=2}^N \mathbf{A}_{2j} T_{hj} + \mathbf{A}_{21} T_{h1} = -StT_{h2} + StT_{s2},$$

$$\dot{T}_s = T_h - T_s. \quad (3.28)$$

Para $i = N$

$$\sum_{j=2}^N A_{ij} T_{hj} + St T_{hi} = St T_{si} - A_{i1} T_{h1},$$

$$\dot{T}_s = T_h - T_s. \quad (3.29)$$

reacomodamos términos tomando en cuenta que

$$\mathbf{A}_1 = A(2 : N, 2 : N), \quad \mathbf{A}_2 = A(2 : N, 1), \quad (3.30)$$

entonces

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{T}_h + St \mathbf{T}_h = St \mathbf{T}_s - \mathbf{A}_2 T_{h1},$$

$$\dot{\mathbf{T}}_s = \mathbf{T}_h - \mathbf{T}_s,$$

$$(\mathbf{A}_1 + St) \mathbf{T}_h = St \mathbf{T}_s - \mathbf{A}_2 T_{h1}, \quad (3.31)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_s = \mathbf{T}_h - \mathbf{T}_s, \quad (3.32)$$

Por último despejamos a \mathbf{T}_h de (3.31) y se tiene una ecuación matricial (3.33) que involucra todos los puntos y que representa a la ecuación del gas.

$$T_h = St \mathbf{T}_s - \mathbf{A}_2 T_{h1} (\mathbf{A}_1 + St)^{-1}, \quad (3.33)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_s = \mathbf{T}_h - \mathbf{T}_s, \quad (3.34)$$

La cual se sustituye en (3.34), lo que resultará un sistema de ecuaciones diferenciales que involucrará vectores con todos los puntos de colocación.

$$\dot{\mathbf{T}}_s = St \mathbf{T}_s - \mathbf{A}_2 T_{h1} (\mathbf{A}_1 + St)^{-1} - \mathbf{T}_s. \quad (3.35)$$

Una vez obtenida la representación matricial del modelo del regenerador, se prosigue a realizar la simulación para obtener la solución numérica del modelo de un parámetro.

Para determinar las condiciones iniciales y de frontera del modelo de un parámetro, se utilizan las definiciones de temperatura adimensional de las ecuaciones (3.4) y (3.5).

Considerando un periodo de calentamiento del gas y que los valores de entrada, y condiciones iniciales para el periodo de calentamiento del regenerador tanto del gas como de sólido son las siguientes:

- $T_{h,in} = 0$ (Temperatura de entrada del gas).
- $T_{h,0} = 0$ (Temperatura de inicial del gas, condición de frontera).
- $T_{s,in} = 1$ (Temperatura de entrada del sólido).
- $T_{s,0} = 1$ (Temperatura de inicial del sólido, condición inicial).

Se sustituyen respectivamente estos valores y tenemos que la condición inicial para la ecuación del sólido es la siguiente:

para $t = 0$,

$$T_{s,0} = \frac{T_{s,in} - T_{s,0}}{T_{h,in} - T_{s,0}} = \frac{1 - 1}{0 - 1} = 0, \quad (3.36)$$

y la condición de frontera para la ecuación del gas es la siguiente:

para $x = 0$,

$$T_{h,in} = \frac{T_{h,in} - T_{s,0}}{T_{h,in} - T_{s,0}} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1. \quad (3.37)$$

En la Tabla (3.5) se presentan las condiciones iniciales y de frontera utilizadas para la simulación del periodo de calentamiento del gas.

Tabla 3.5: Condiciones iniciales y de frontera para el modelo de un parámetro

Condiciones iniciales	Condiciones de frontera
$T_s(x, t = 0) = 0$	$T_h(x = 0, t) = 1$

Utilizando un $St = 10$, a continuación se muestran gráficamente los resultados de la solución del modelo de un parámetro para la temperatura del gas y la temperatura del sólido a diferentes tiempos a lo largo de toda la dirección axial.

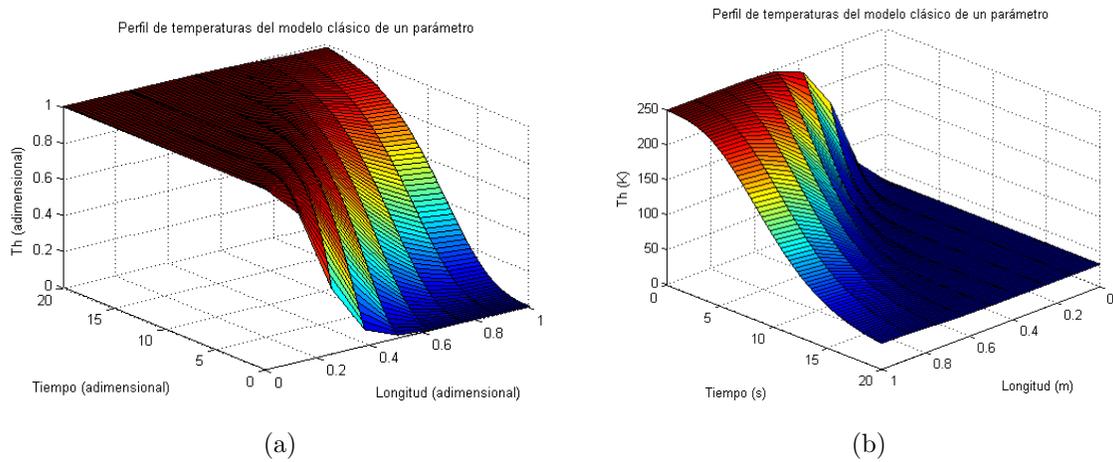


Figura 3.5: Perfil de temperaturas del gas, durante un periodo de calentamiento del gas modelo clásico de un parámetro. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.

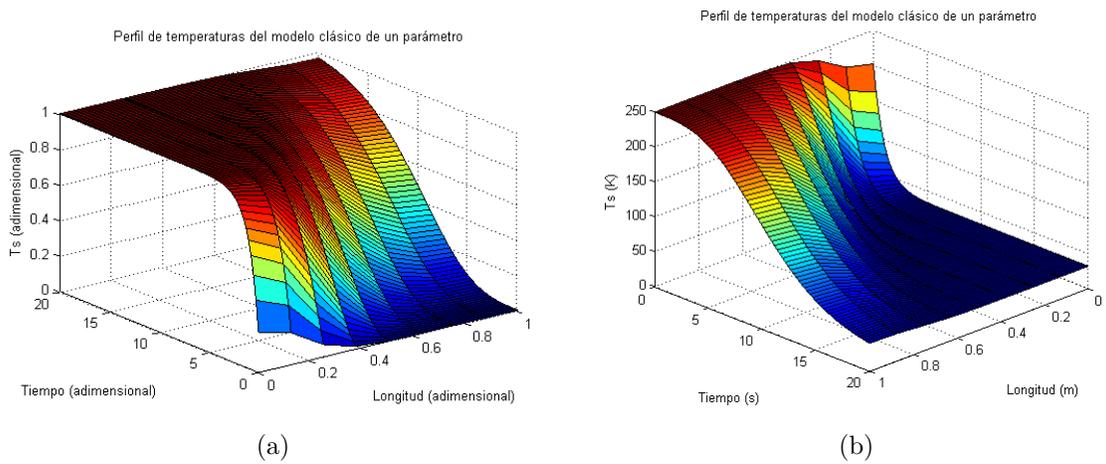
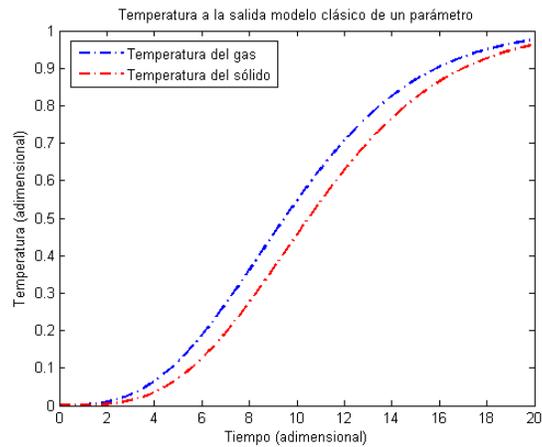
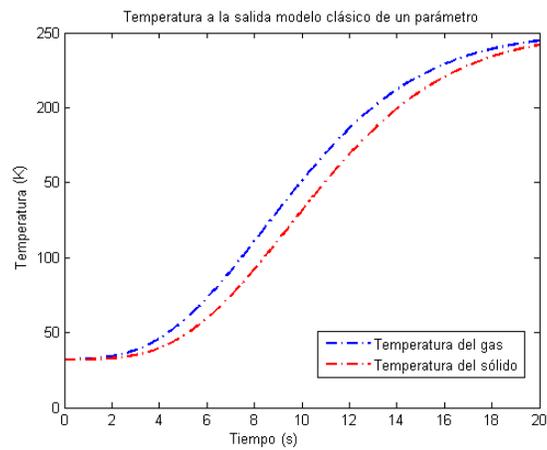


Figura 3.6: Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo clásico de un parámetro. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.



(a)



(b)

Figura 3.7: Temperatura a la salida tanto para el gas como para el sólido correspondiente al modelo clásico de tres parámetros. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.

Capítulo 4

Construcción del modelo fraccionario

Para la construcción del modelo fraccionario se hace uso de dos enfoques de derivada fraccionaria, Riemann-Liouville y Liouville-Caputo, los cuales son resueltos por dos diferentes métodos de solución numérica, la discretización de Grünwald-Letnikov y el método de Adams-Bashforth-Moulton, respectivamente.

4.1. Enfoque Riemann-Liouville (RL)

A continuación, se introduce el operador fraccional, derivada de Riemann-Liouville al modelo simplificado, donde γ es el orden de la derivada fraccionaria.

$$\begin{aligned}\frac{dT_h}{dx} &= -St(T_h - T_s), \\ {}_0^{RL}D_t^\gamma T_s &= T_h - T_s.\end{aligned}\tag{4.1}$$

La discretización de RL está dada por la aproximación de Grünwald-Letnikov

$${}_0^{GL}D_t^\gamma f(t) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{h^\gamma} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\gamma}{j} f(t - jh_a).\tag{4.2}$$

Ésta es comúnmente usada para simulaciones numéricas, el método de Grünwald-Letnikov es la generalización del método de Euler (Coronel-Escamilla *et al.*, 2015).

Para obtener la solución numérica podemos tomar la expresión (4.2) y aplicar al sistema (3.35), donde $(-1)^j \binom{\gamma}{j}$ son coeficientes binomiales $C_j^{(\gamma)} (j = 0, 1, \dots)$.

Los coeficientes binomiales actúan como factores que proporcionan estabilidad y un buen comportamiento de amortiguación del error. Para calcular los coeficientes se usa la siguiente expresión

$$c_0^{(\gamma)} = 1, \quad c_j^{(\gamma)} = \left(1 - \frac{1 + \gamma}{j}\right) c_{j-1}^{(\gamma)}. \quad (4.3)$$

A continuación, la solución numérica para el modelo fraccionario está dada con la derivada fraccionaria del lado izquierdo en la forma

$${}_a^{GL}D_t^\gamma x(t) = f(x(t), t), \quad (4.4)$$

puede ser expresada en tiempo discreto $t_k = kh$

$$x(t_k) = f(x(t_k), t_k) h^\gamma = \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma)} x(t_{k-j}). \quad (4.5)$$

Tomando la expresión (4.3) y (4.5) podemos escribir la representación matricial del modelo del regenerador de energía utilizando el enfoque de Grünwald-Letnikov

$$T_{s1}(t_k) = [T_{h1} - T_{s1}(t_{k-1})] h^\gamma = \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma)} T_{s1}(t_{k-1}),$$

$$T_s(t_k) = [((A_1 + St)^{-1}(StT_s(t_{k-1}) - A_2T_{h1})) - T_s] h^\gamma = \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma)} T_s(t_{k-1}). \quad (4.6)$$

4.1.1. Solución numérica del enfoque de Riemann-Liouville

Una vez obtenida la representación matricial del modelo fraccionario del regenerador, se prosigue a realizar la simulación para obtener la solución numérica.

Cabe mencionar que para llevar a cabo la solución numérica del modelo fraccionario para la parte temporal se utiliza la discretización de Riemann-Liouville, la cual su aproximación está dada por la derivada de Grünwald-Letnikov, y para la parte espacial se sigue utilizando el método de colocación ortogonal.

A continuación se presentan en la Tabla (4.1) las condiciones iniciales y de frontera utilizadas para la simulación del periodo de calentamiento del gas, para un $St=10$, $Bi=1/30$ y un $Pe=1000$.

Tabla 4.1: Condiciones iniciales y de frontera para simulación.

Condiciones iniciales	Condiciones de frontera
$T_s(x, t = 0) = 0$	$T_h(x = 0, t) = 1$

A continuación se presentan gráficamente los resultados de la solución del modelo enfoque Riemann-Liouville para la temperatura del gas y el sólido a diferentes tiempos y a lo largo de toda la dirección axial.

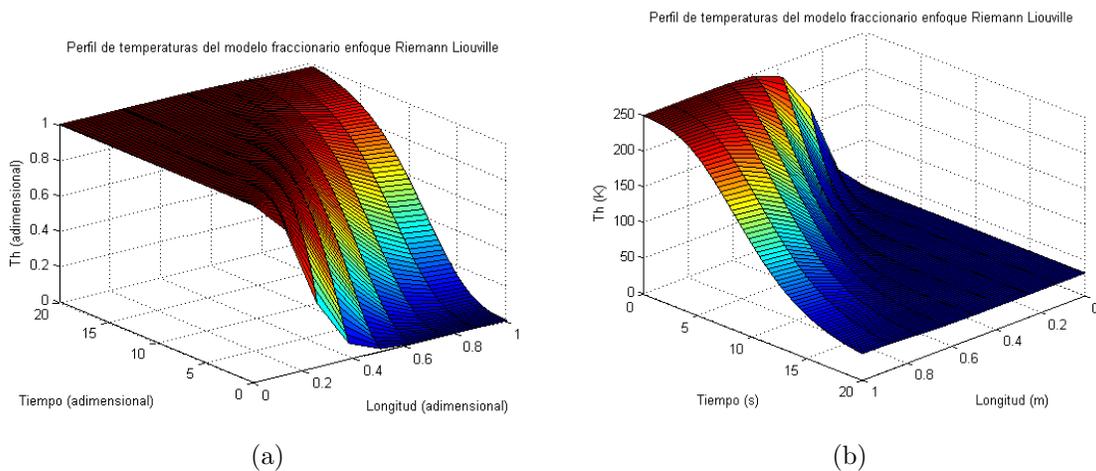


Figura 4.1: Perfil de temperaturas del gas, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo fraccionario enfoque Riemann-Liouville. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.

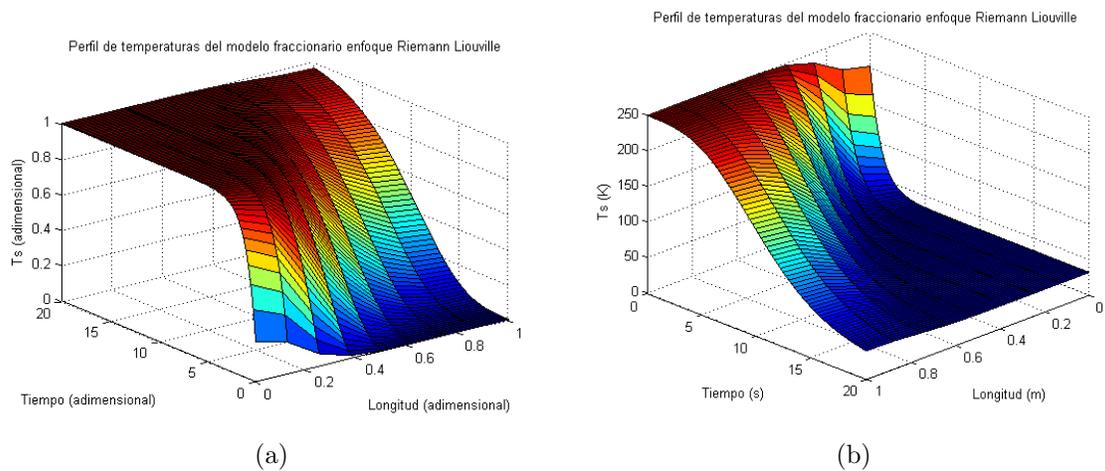


Figura 4.2: Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo clásico de un parámetro. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.

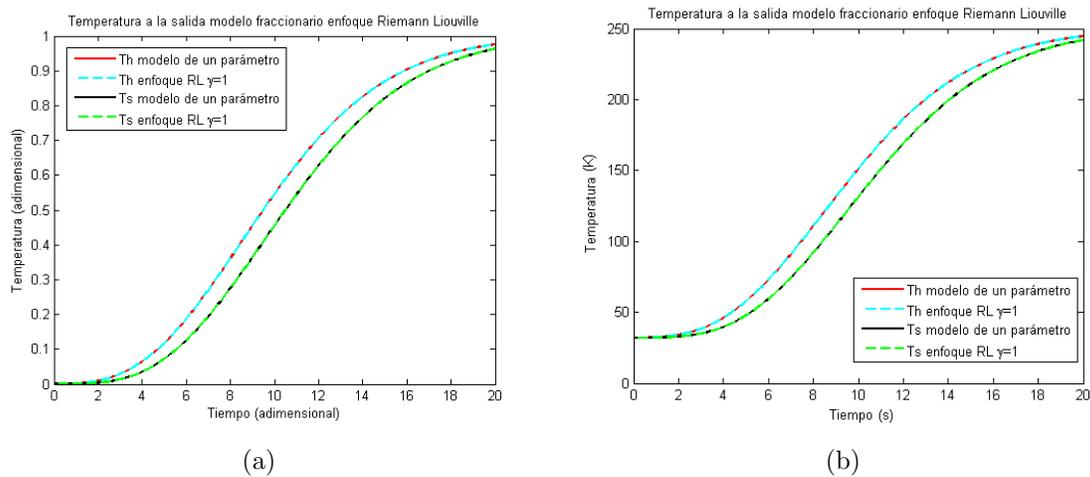


Figura 4.3: Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo fraccionario enfoque Riemann-liouville. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.

En la última figura se muestra la comparación del modelo de un parámetro con el modelo fraccionario enfoque Riemann-Liouville. El objetivo de esta simulación es comprobar que cuando $\gamma = 1$ se regresa al caso clásico.

4.2. Enfoque Liouville-Caputo

A continuación, se introduce el operador fraccional, derivada de Liouville-Caputo al modelo de un parámetro, donde γ es el orden de la derivada fraccionaria.

$$\begin{aligned} \frac{dT_h}{dx} &= -St(T_h - T_s), \\ {}_0^C D_t^\gamma T_s &= T_h - T_s. \end{aligned} \quad (4.7)$$

La solución numérica del operador de Liouville-Caputo se obtiene mediante la aplicación del método de Adams-Bashforth-Moulton, que es la generalización del método de Adams para cualquier orden de derivada y es utilizado para resolver de manera numérica una ecuación diferencial fraccionaria (Li y Tao, 2009).

$${}_0^C D_t^\gamma f(t) = g(t, f(t)), \quad f^k(0) = f_o^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.8)$$

donde: ${}_0^C D_t^\gamma$ es el operador de derivada fraccionaria de Liouville-Caputo.

El método de Adams para resolver la ecuación (4.8) se describe a continuación como:

$$\begin{aligned} f_{i+1}^P &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{i+1}^j}{j!} f_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^i b_{j,i+1} g(t_j, f_j), \\ f_{i+1} &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{i+1}^j}{j!} f_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\sum_{j=0}^i a_{j,i+1} g(t_j, f_j) + a_{i+1,i+1} g(t_{i+1}, f_{i+1}^P) \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_{j,i+1} &= \frac{h^\gamma}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \begin{cases} (i^{\gamma+1} - (i-\gamma)(i+1)^\gamma) & j=0, \\ ((i-j+2)^{\gamma+1} + (i-j)^{\gamma+1} - 2(i-j+1)^{\gamma+1}) & 1 \leq j \leq i, \\ 1 & j=i+1, \end{cases} \text{ y} \\ b_{j,i+1} &= \frac{h^\gamma}{\gamma} ((i+1-j)^\gamma - (i-j)^\gamma), \quad j = 0, 1, 2, \dots, i. \end{aligned}$$

Ahora considerando que se emplea la derivada tomando el modelo representado en la ecuación (3.35), podemos escribir finalmente la representación matricial del modelo usando el método de Adams-Basforth-Moulton.

$$\begin{aligned}
T_{s1} &= \sum_{k=0}^{n-1} T_{s1}(0)^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-u)^{\gamma-1} f_1(t, T_{s1}(u)) du, \\
T_s &= \sum_{k=0}^{n-1} T_s(0)^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-u)^{\gamma-1} f_1(t, T_s(u)) du.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

4.2.1. Solución numérica del enfoque de Liouville-Caputo

Una vez obtenida la representación matricial del modelo fraccionario del regenerador, se prosigue a realizar la simulación para obtener la solución numérica requerida.

Se menciona que en el modelo están presentes dos derivadas ordinarias, una depende del tiempo y la otra del espacio, ahora para llevar a cabo la solución numérica del modelo fraccionario para la parte temporal se utiliza el método predictivo correctivo de Adams Bashforth Moulton anteriormente mencionado.

Finalmente para encontrar la solución de la parte espacial del modelo fraccionario se sigue utilizando el método de colocación ortogonal.

A continuación se presentan en la tabla (4.2) las condiciones iniciales y de frontera utilizadas para la simulación del periodo de calentamiento del gas, para un $St=10$, $Bi=1/30$ y un $Pe=1000$.

Tabla 4.2: Condiciones iniciales y de frontera para simulación

Condiciones iniciales	Condiciones de frontera
$T_s(x, t = 0) = 0$	$T_h(x = 0, t) = 1$

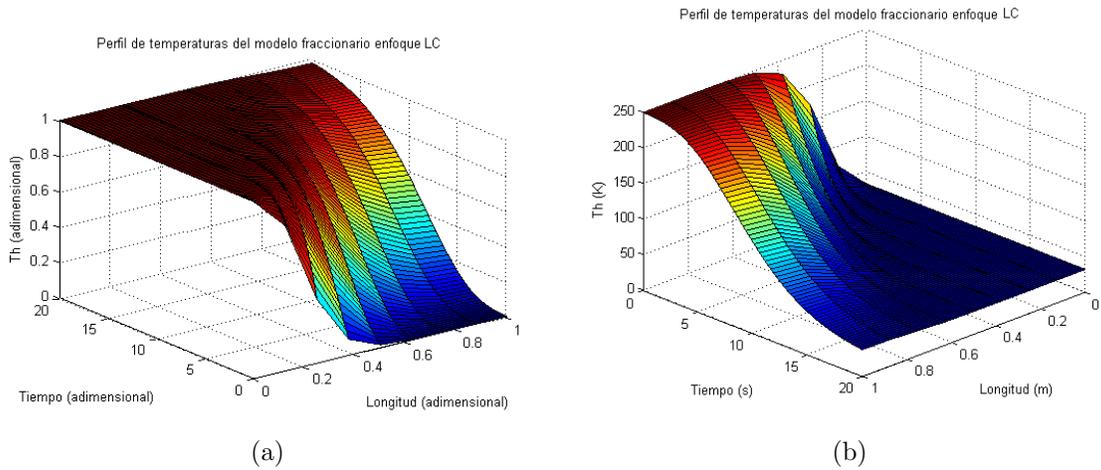


Figura 4.4: Perfil de temperaturas del gas, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo fraccionario enfoque Liouville-Caputo. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.

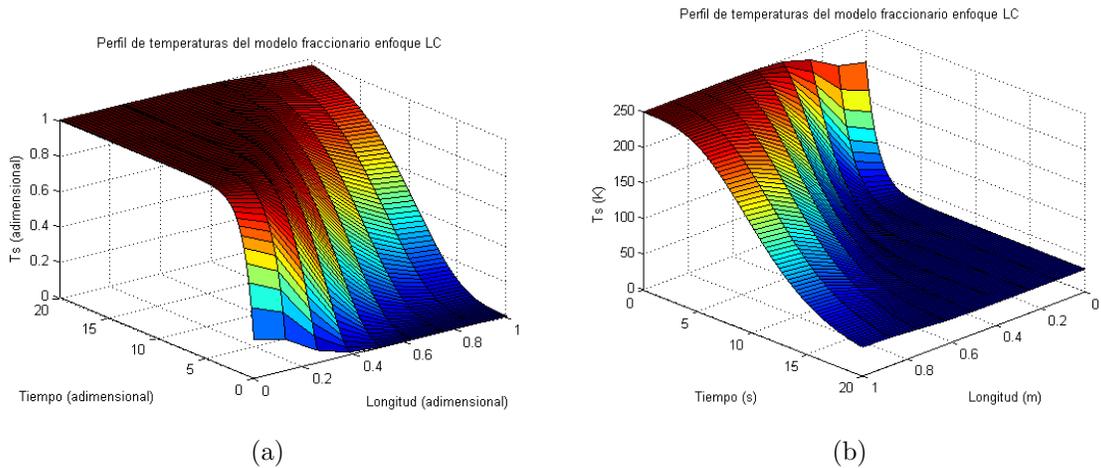
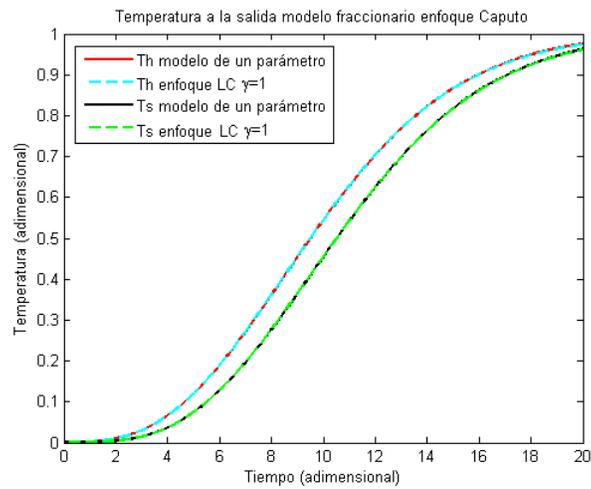
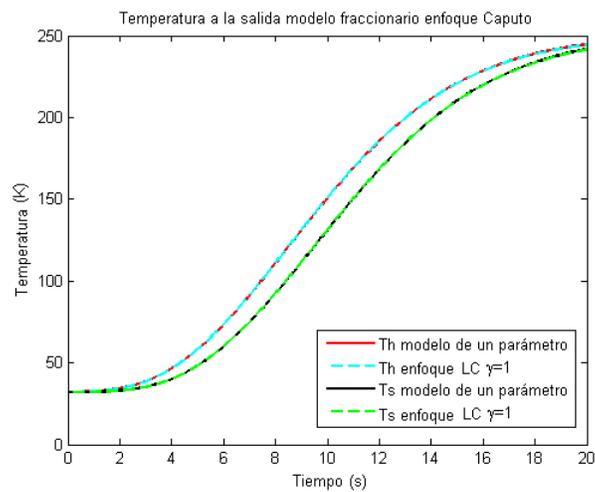


Figura 4.5: Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo fraccionario enfoque Liouville-Caputo. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.



(a)



(b)

Figura 4.6: Perfil de temperaturas del sólido, durante un periodo de calentamiento del gas correspondiente al modelo fraccionario enfoque Liouville-Caputo. (a) Temperatura adimensional, (b) Temperatura en variables de proceso.

Capítulo 5

Pruebas y resultados

En esta sección se comparan los modelos matemáticos estudiados (modelo clásico de tres parámetros y modelo clásico de un parámetro), así como los modelos fraccionarios variando el orden de las derivadas de los dos enfoques (enfoque Liouville-Caputo y Riemann-Liouville).

5.1. Análisis de la dinámica fraccionaria

El objetivo de esta simulación es mostrar que mediante un modelo de orden fraccionario es posible modelar algunos mecanismos de transferencia de calor en función de números adimensionales (Pe , Bi y St), esto será posible mediante el ajuste del orden de la derivada.

Se busca comprobar, mediante diferentes mediciones del error (porcentaje de FIT, el valor medio del error de simulación μ_t , la desviación estándar del error S_t y la raíz cuadrada del error medio al cuadrado e_{rms} , anexos B) que es posible aproximar la dinámica de un modelo complejo de tres parámetros, con un modelo de un parámetro basado en derivadas de orden fraccionario.

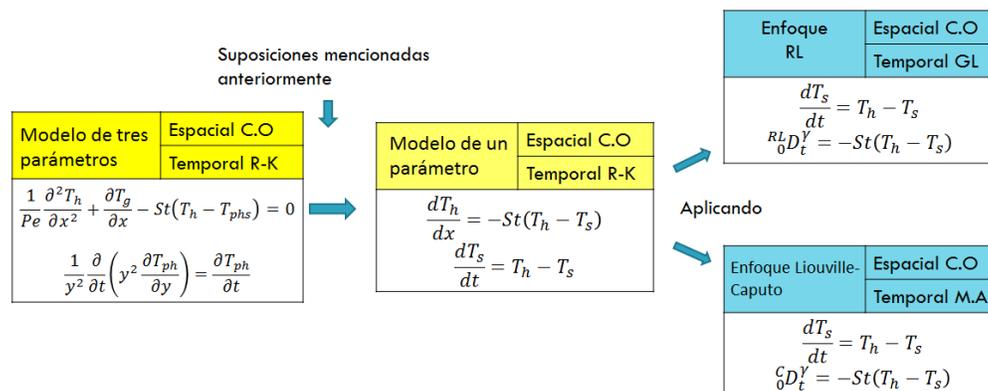


Figura 5.1: Método de solución.

5.1.1. Comparación de modelos variando el orden de la derivada

El objetivo de estas simulaciones es ajustar el orden de la derivada fraccionaria para tratar que el modelo fraccionario derivado del modelo de un parámetro represente al modelo clásico de tres parámetros. Se muestran un grupo de gráficas donde se varía el orden de la derivada fraccionaria con el enfoque de Riemann-Liouville y de Liouville-Caputo para la temperatura a la salida, del gas y del sólido.

Esta primera serie de simulaciones, se hace asumiendo $Pe=1000$ y $Bi=1/30$; bajo estas condiciones, los modelos de tres y de un parámetro se aproximan relativamente bien porque representan una situación en la cual, la conducción axial del gas puede ser despreciada y la conducción en los sólidos esféricos es suficientemente rápida para que la temperatura del centro alcance rápidamente la temperatura que hay en la superficie del sólido.

El mecanismo de transferencia de calor por convección es el único que determina la rapidez de transferencia de calor. Sin embargo, aún con estos valores de Pe y Bi , el modelo de un parámetro tiene una desviación con respecto al modelo de tres parámetros. El fin es encontrar una mejor representación mediante el modelo de orden fraccionario.

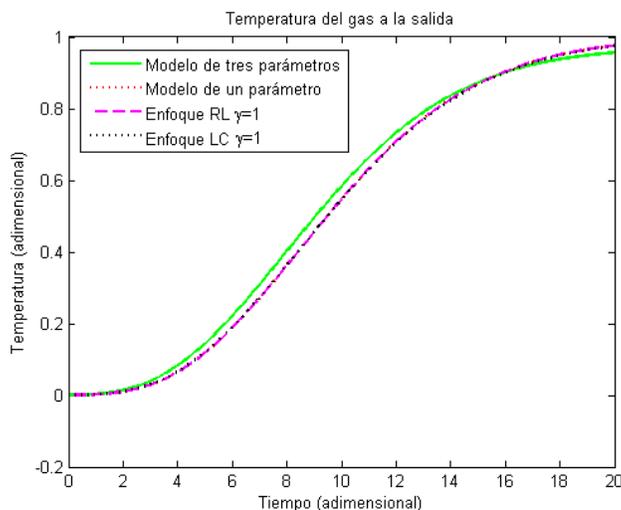


Figura 5.2: Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1$.

En la figura 5.2 podemos observar la comparación de la temperatura del gas adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros, así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 1. En este caso, el perfil de temperatura que resulta del modelo fraccionario es idéntico al perfil que resulta del modelo entero

(de un parámetro), del cual deriva. Esta observación es válida para ambos enfoques de derivadas fraccionarias.

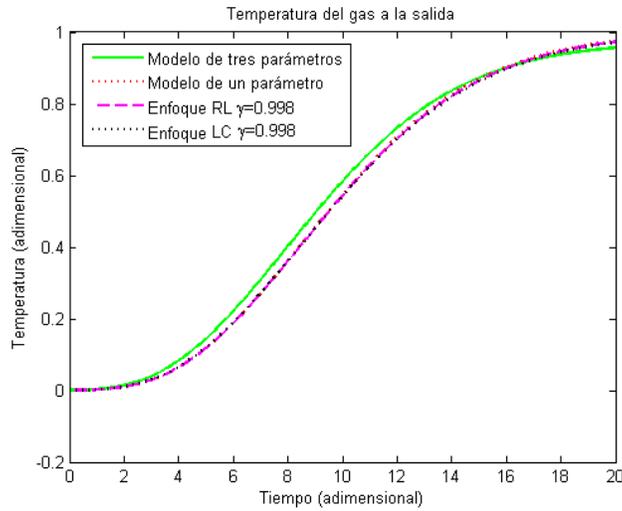


Figura 5.3: Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,998$.

En la figura 5.3 podemos observar la comparación de la temperatura del gas adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros, así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 0,998. Los dos enfoques fraccionarios tienen un desempeño muy similar para un orden de 0,998.

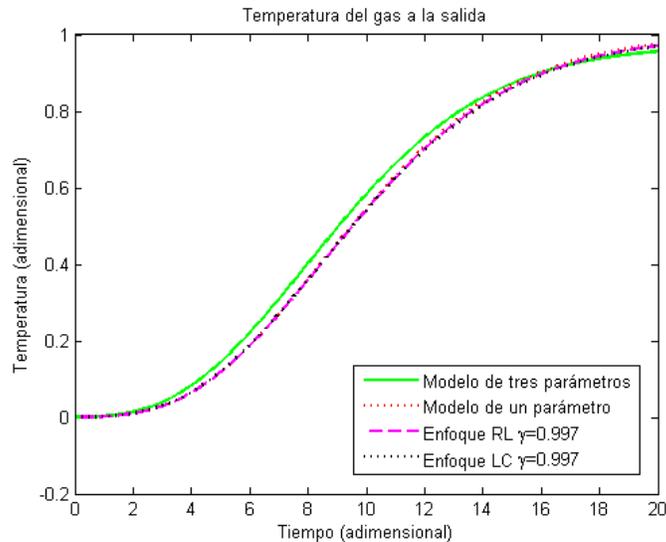


Figura 5.4: Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,997$.

En la figura 5.4 podemos observar la comparación de la temperatura del gas adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros, así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 0,997.

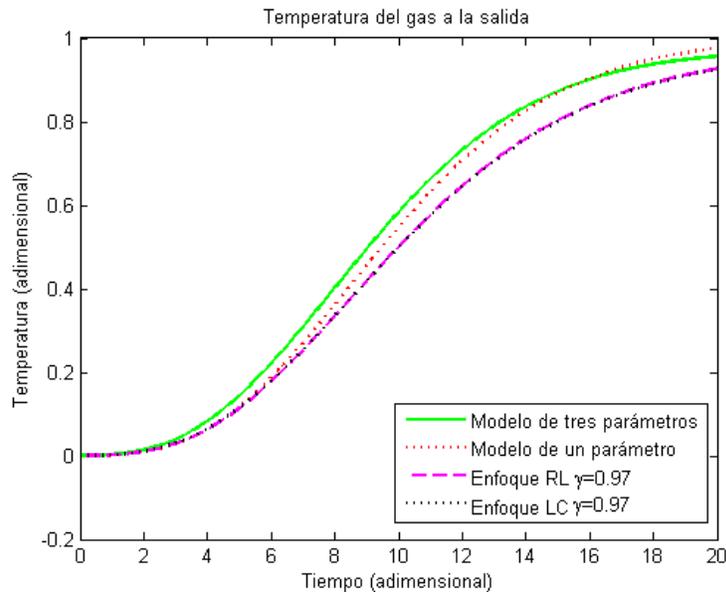


Figura 5.5: Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,97$.

En la figura 5.5 podemos observar la comparación de la temperatura del gas adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros, así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 0,97. El modelo fraccionario con los enfoques RL y LC pierde exactitud con respecto al modelo entero cuando el orden es inferior a 1.

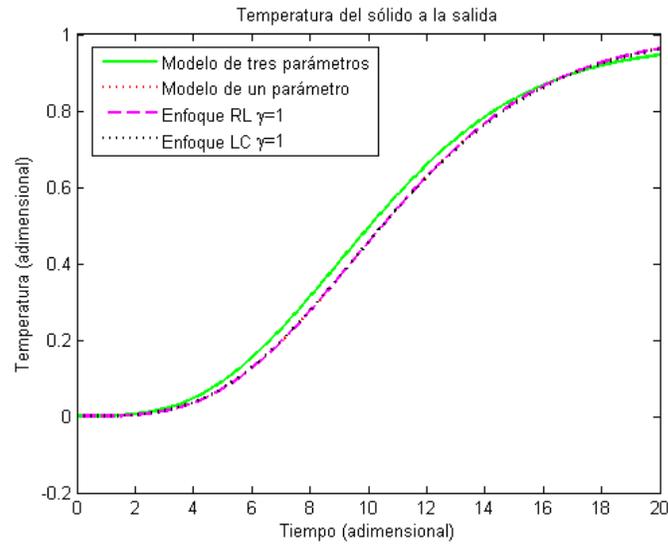


Figura 5.6: Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1$.

En la figura 5.6 podemos observar la comparación de la temperatura del sólido adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 1. Igual que ocurre con la ecuación del gas, los modelos fraccionarios predicen el mismo perfil que el modelo entero cuando $\gamma = 1$.

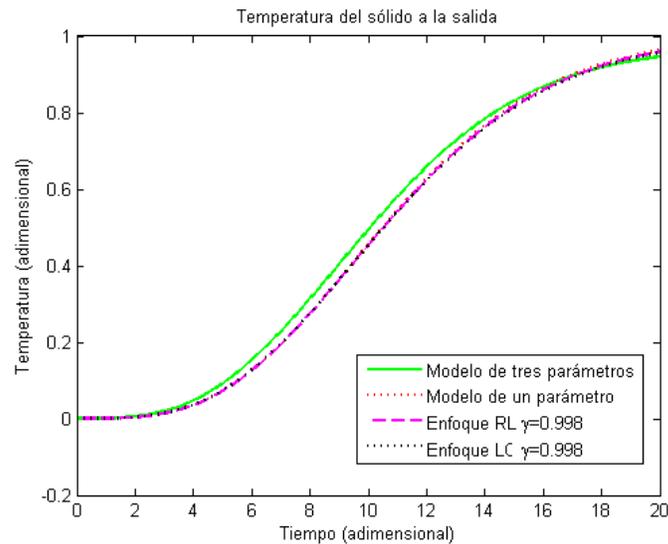


Figura 5.7: Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,998$.

En la figura 5.7 podemos observar la comparación de la temperatura del sólido

adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 0,998.

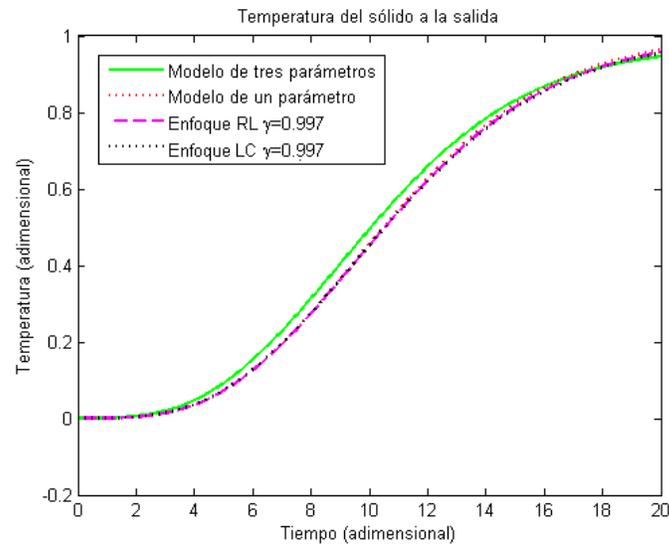


Figura 5.8: Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,997$.

En la figura 5.8 podemos observar la comparación de la temperatura del sólido adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 0,997.

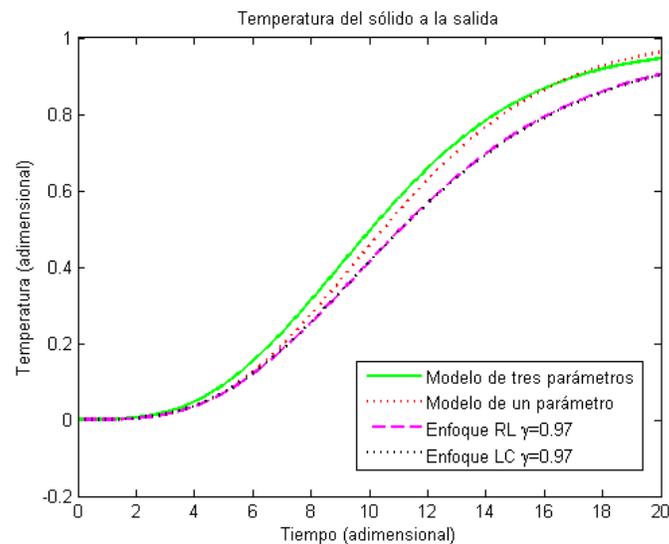


Figura 5.9: Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 0,97$.

En la figura 5.9 podemos observar la comparación de la temperatura del sólido adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 0,97.

Al igual que ocurre con la ecuación del gas, para un orden de derivada fraccionaria inferior a 1, el modelo fraccionario pierde, se aleja del modelo de referencia de tres parámetros, con relación al modelo entero de 1 parámetro.

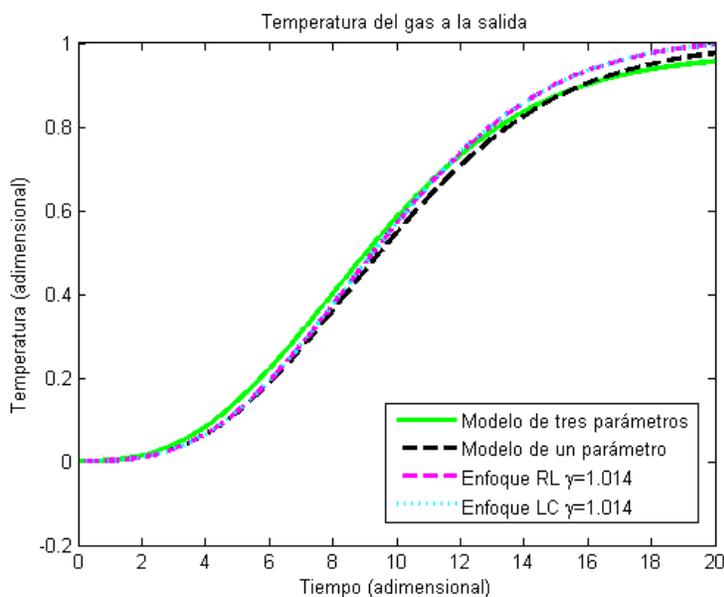


Figura 5.10: Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1,014$.

En la figura 5.10 podemos observar la comparación de la temperatura del gas adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 1,014.

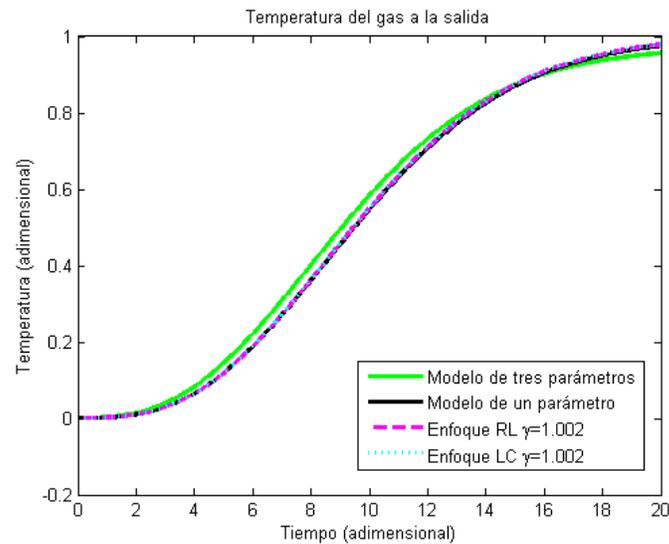


Figura 5.11: Comparación de temperaturas a la salida del gas variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1,002$.

En la figura 5.11 podemos observar la comparación de la temperatura del gas adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 1,002.

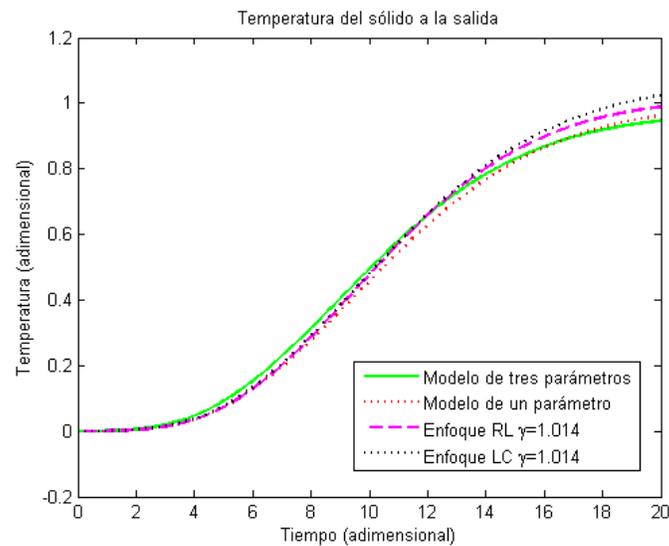


Figura 5.12: Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1,014$.

En la figura 5.12 podemos observar la comparación de la temperatura del sólido adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 1,014.

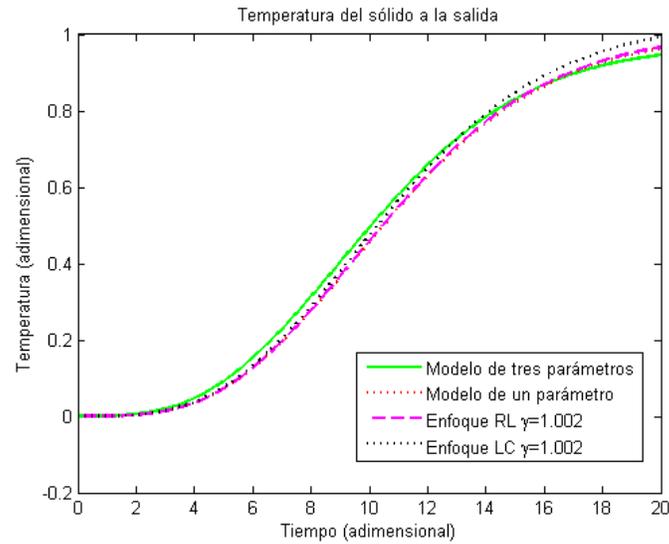


Figura 5.13: Comparación de temperaturas a la salida del sólido variando el orden de la derivada cuando $\gamma = 1,002$.

En la figura 5.13 podemos observar la comparación de la temperatura del sólido adimensional a la salida de los modelos de uno y tres parámetros así como ambos enfoques fraccionarios cuando el orden de la derivada es 1,002.

En este caso, el modelo fraccionario con ambos enfoques, mejora la predicción ya que se acerca más a la respuesta del modelo de referencia de tres parámetros.

A continuación se muestran los cálculos estadísticos para poder realizar una comparación entre ambos modelos y efectivamente comprobar que mediante la representación alternativa basada en derivadas fraccionarias es posible representar el modelo no lineal de tres parámetros, pero con un modelo menos complejo y con menor número de coeficientes.

Tabla 5.1: Temperatura del gas a la salida enfoque Riemann Liouville.

Mediciones de error	$\gamma = 1$	$\gamma = 0,998$	$\gamma = 0,997$	$\gamma = 0,97$	$\gamma = 1,014$	$\gamma = 1,002$
μ_t	0.014	0.016	0.018	0.050	-0.002	0.011
S_t	0.018	0.018	0.018	0.028	0.024	0.022
e_{rms}	0.023	0.024	0.025	0.057	0.024	0.022
FIT %	93.168	92.982	92.760	83.6417	93.129	93.6647

Tabla 5.2: Temperatura del sólido a la salida enfoque Riemann Liouville.

Mediciones de error	$\gamma = 1$	$\gamma = 0,998$	$\gamma = 0,997$	$\gamma = 0,97$	$\gamma = 1,014$	$\gamma = 1,002$
μ_t	0.014	0.016	0.018	0.051	-0.003	0.011
S_t	0.016	0.016	0.016	0.031	0.022	0.020
e_{rms}	0.021	0.023	0.024	0.059	0.022	0.020
FIT %	93.793	93.330	93.067	82.968	93.478	94.154

Tabla 5.3: Temperatura del gas a la salida enfoque Liouville-Caputo.

Mediciones de error	$\gamma = 1$	$\gamma = 0,998$	$\gamma = 0,997$	$\gamma = 0,97$	$\gamma = 1,014$	$\gamma = 1,002$
μ_t	0.015	0.017	0.018	0.051	-0.002	0.011
S_t	0.017	0.017	0.017	0.029	0.024	0.019
e_{rms}	0.023	0.025	0.025	0.058	0.024	0.022
FIT %	93.368	92.927	92.681	83.339	93.129	93.664

Tabla 5.4: Temperatura del sólido a la salida enfoque Liouville-Caputo.

Mediciones de error	$\gamma = 1$	$\gamma = 0,998$	$\gamma = 0,997$	$\gamma = 0,97$	$\gamma = 1,014$	$\gamma = 1,002$
μ_t	0.016	0.017	0.019	0.051	-0.011	-0.0004
S_t	0.016	0.015	0.016	0.032	0.031	0.021
e_{rms}	0.022	0.023	0.024	0.061	0.033	0.021
FIT %	93.373	93.243	92.950	82.626	90.571	93.847

De las pruebas realizadas podemos concluir que es posible tener una representación alternativa del modelo del regenerador de energía, descrito mediante un modelo de orden fraccionario en el sentido de Riemann-Liouville y Liouville-Caputo. La mejor predicción se logra con un orden de 1,002.

Un hecho importante de los modelos fraccionarios desarrollados, es que con un modelo básico, sencillo y unidimensional, que considera sólo un mecanismo de transferencia de calor, se es capaz de representar de manera muy aproximada a un modelo de parámetros distribuidos, que en su formulación toma en cuenta geometrías esféricas en dos dimensiones consideradas con un alto grado de complejidad, así como tres mecanismos de transferencia de calor.

Las ecuaciones fraccionarias que describen la dinámica del sistema de regenerador de energía en el sentido de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es la siguiente:

$$T_h = StT_s - A_2T_{h1} (A_1 + St)^{-1},$$

$${}^{RL}_0 D_t^{1,002} T_s = T_h - T_s. \quad (5.1)$$

y en el sentido de Liouville-Caputo

$$T_h = StT_s - A_2T_{h1} (A_1 + St)^{-1},$$

$${}^C_0 D_t^{1,002} T_s = T_h - T_s. \quad (5.2)$$

Con el fin de seguir mostrando las ventajas del modelo en derivadas fraccionarias propuesto, se realizan otras pruebas en simulación donde se propone realizar cambios en los parámetros Peclet, Biot y Stanton correspondientes al modelo no lineal de parámetros distribuidos, esto con el fin de demostrar las ventajas que el CF aporta al modelado del sistema de regeneradores de energía, aún en condiciones en las que normalmente, el modelo de un parámetro tiene un error más importante comparándolo con el modelo de tres parámetros.

Prueba 1: Se utilizó un Peclet de 10, 100 y 500, para un Stanton y Biot constantes.

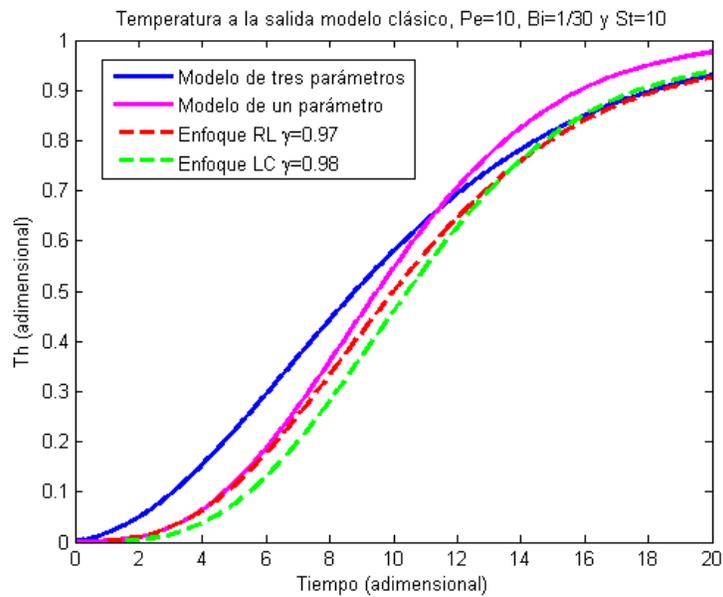


Figura 5.14: Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Peclet: (a) utilizando $Pe=10$, $Bi=1/30$ y $St=10$.

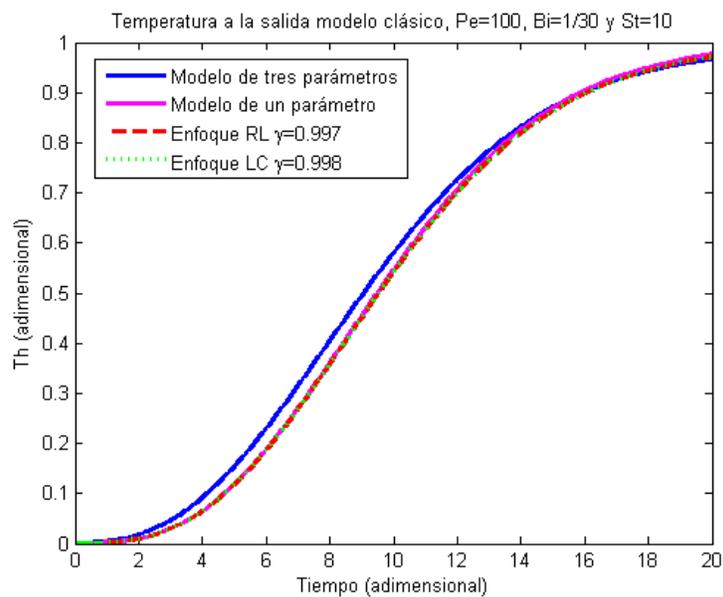


Figura 5.15: Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Peclet: (b) utilizando $Pe=100$, $Bi=1/30$ y $St=10$.

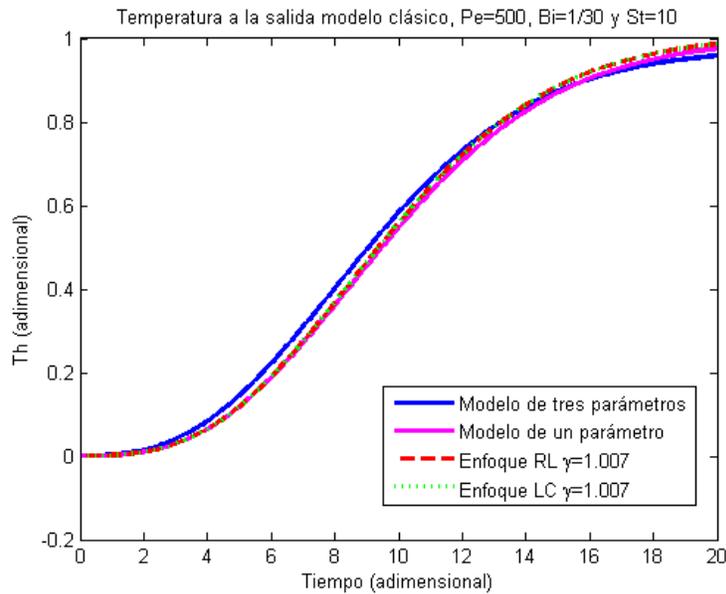


Figura 5.16: Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Peclet: (c) utilizando $Pe=500$, $Bi=1/30$ y $St=10$.

De la prueba 1, se puede concluir que para un Biot y un Stanton constantes, considerando un Peclet de 10, 100 y 500, se tiene una buena aproximación al modelo no lineal de parámetros distribuidos, esto se puede afirmar mediante los cálculos estadísticos del porcentaje de FIT, el valor medio del error de simulación μ_t , la desviación estándar del error S_t y la raíz cuadrada del error medio al cuadrado e_{rms} como se muestra a continuación, además el modelo predice bien el efecto de difusión o conducción en el gas, en un límite para Peclet entre 10 y 1000.

Como se mencionó en la sección 1.4.2, el número de Pe indica un efecto significativo de la conducción axial para el caso de $Pe=10$. Por esta razón, para este valor de Pe , el modelo entero de un parámetro tiene un error considerable, mientras que el modelo fraccionario logra mejorar la predicción, aun cuando el efecto de la conducción axial es importante y que este parámetro no está incluido en el modelo.

Tabla 5.5: Cálculos estadísticos de la comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Peclet.

	Bi=1/30. St=10								
	Pe=10			Pe=100			Pe=500		
	RL	LC	RL y LC	RL	LC	RL y LC	RL	LC	RL y LC
Orden	0.97	0.98	1	0.997	0.998	1	1.007	1.007	1
FIT%	78.272	80.272	80.382	92.556	92.370	92.947	93.525	93.966	93.358
μ_t	0.052	0.042	0.016	0.020	0.020	0.016	0.015	0.021	0.018
e_{rms}	0.067	0.067	0.061	0.026	0.026	0.024	0.022	0.020	0.021
S_t	0.041	0.041	0.059	0.016	0.017	0.018	0.017	0.006	0.018

Prueba 2: Se utilizó un Biot de 1/15, 1/5 y 1/2 para un Peclet y Stanton constantes.

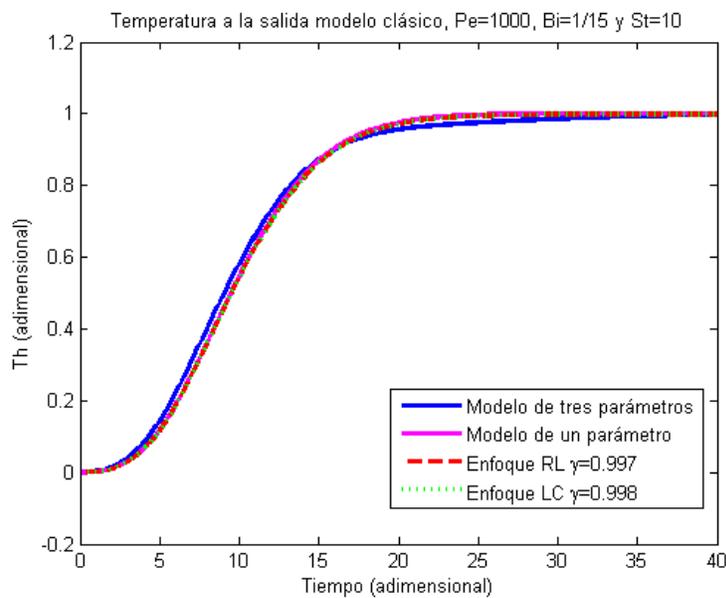


Figura 5.17: Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Biot, para distintos ordenes fraccionarios: (a) $Pe=1000$, $Bi=1/15$ y $St=10$.

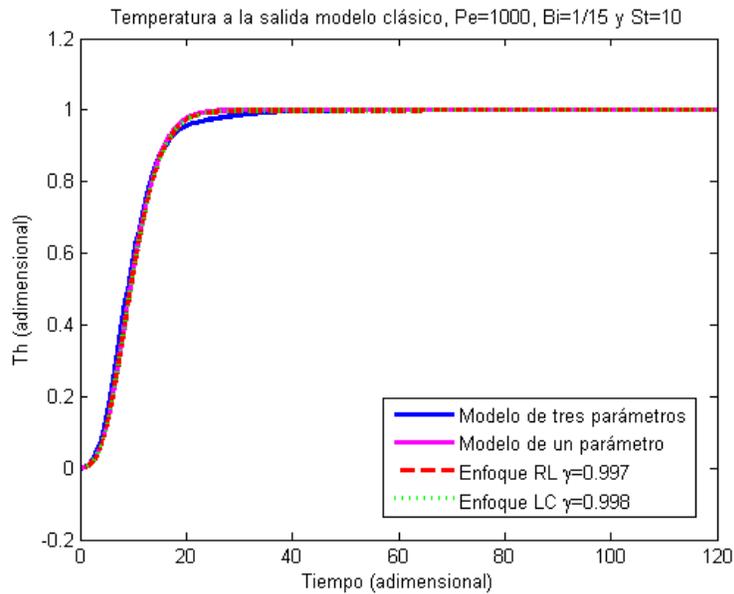


Figura 5.18: Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Biot, para distintos ordenes fraccionarios: (b) $Pe=1000$, $Bi=1/5$ y $St=10$.

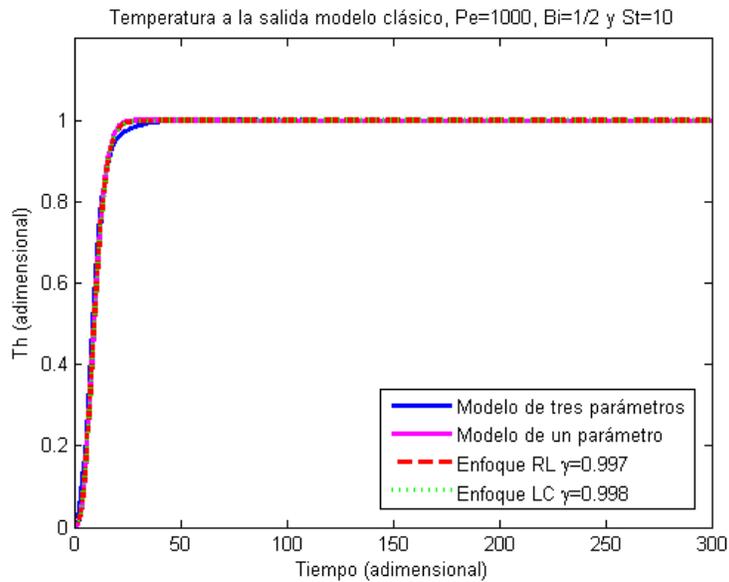


Figura 5.19: Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Biot, para distintos ordenes fraccionarios: (c) $Pe=1000$, $Bi=1/2$ y $St=10$

De la prueba 2, se puede concluir que para un Peclet y un Stanton constantes, considerando un Biot de $1/15$, $1/5$ y $1/2$, se tiene una buena aproximación al modelo clásico, esto se puede afirmar mediante los cálculos estadísticos del porcentaje de FIT, el valor medio del error de simulación μ_t , la desviación estándar del error S_t y la raíz

cuadrada del error medio al cuadrado e_{rms} como se muestra a continuación, además el modelo predice bien con un orden de 0.997 y 0.998 en un límite para Biot entre 1/30 y 1/2, sin embargo, a estos valores de Bi , la suposición de sólidos isotérmicos es válida y por lo tanto no se logra mejorar la predicción para el caso de sólidos no isotérmicos, ya que para Bi mayores, el modelo fraccionario no mejora el desempeño de predicción.

Tabla 5.6: Cálculos estadísticos de la comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Biot.

	Pe=1000. St=10								
	Bi=1/15			Bi=1/5			Bi=1/2		
	RL	LC	RL y LC	RL	LC	RL y LC	RL	LC	RL y LC
Orden	0.997	0.998	1	0.997	0.998	1	0.997	0.998	1
FIT%	94.072	94.013	93.230	94.772	94.708	93.301	94.606	94.520	93.850
μ_t	0.020	0.020	0.022	0.001	0.001	0.023	4.98×10^{-4}	6.18×10^{-4}	0.021
e_{rms}	0.020	0.020	0.017	0.012	0.012	0.016	0.008	0.008	0.015
S_t	0.003	0.003	0.014	0.012	0.012	0.014	0.008	0.008	0.013

Prueba 3: Se utilizó un Stanton de 15, 20 y 30 para un Peclet y Biot constantes.

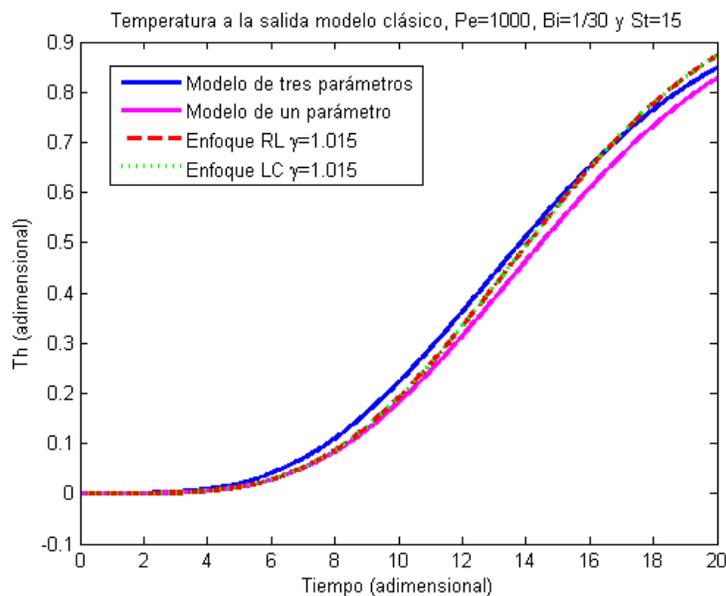


Figura 5.20: Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Stanton, para distintos ordenes fraccionarios: (a) $Pe=1000$, $Bi=1/30$ y $St=15$.

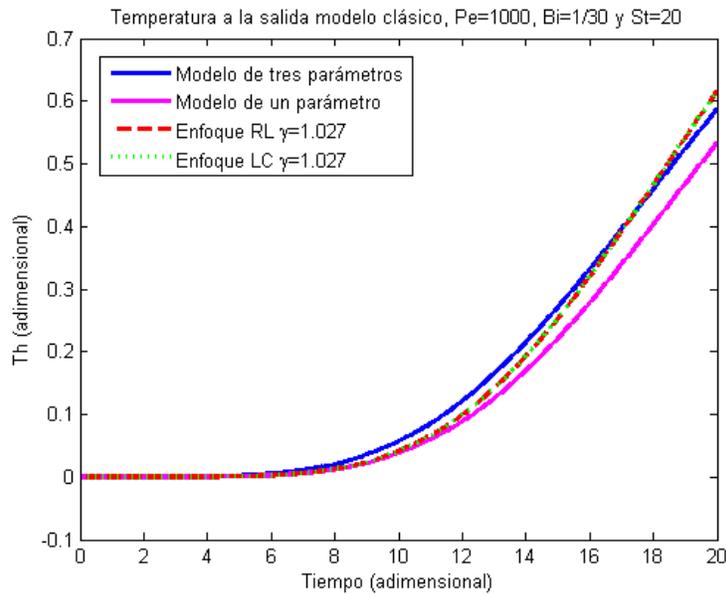


Figura 5.21: Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Stanton, para distintos ordenes fraccionarios: (b) $Pe=1000$, $Bi=1/30$ y $St=20$.

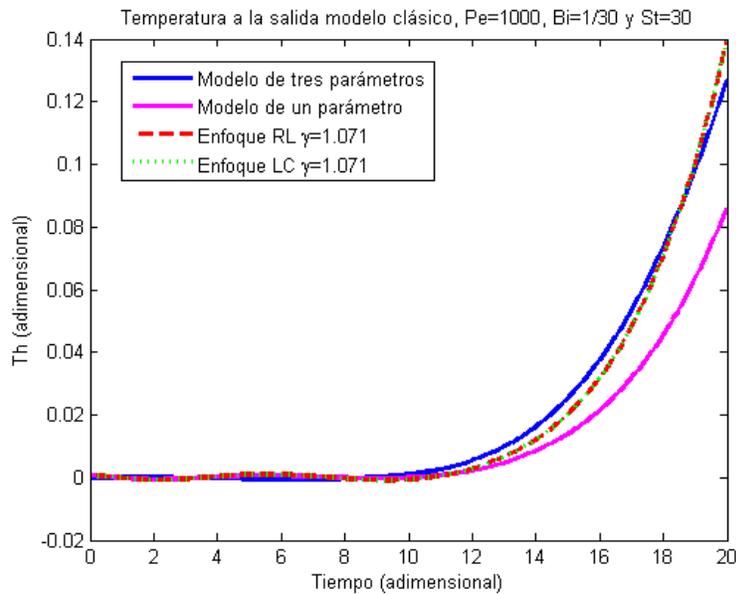


Figura 5.22: Comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Stanton, para distintos ordenes fraccionarios: (c) $Pe=1000$, $Bi=1/30$ y $St=30$.

De la prueba 3, se puede concluir que para un Pelet y un Biot constantes, considerando un Stanton de 15, 20 y 30, se tiene una buena aproximación al modelo clásico, esto se puede afirmar mediante los cálculos estadísticos del porcentaje de FIT, el valor medio del error de simulación μ_t , la desviación estándar del error S_t y la raíz cuadrada

del error medio al cuadrado e_{rms} como se muestra a continuación, además el modelo predice bien el efecto de transferencia de calor por convección en un límite para Stanton entre 10 y 30.

Conforme St aumenta, la predicción del modelo de un parámetro se aleja de la predicción del modelo de referencia de tres parámetros, mientras que el modelo fraccionario tiene un mejor desempeño.

Tabla 5.7: Cálculos estadísticos de la comparación de la temperatura del gas a la salida variando parámetro Stanton.

	Pe=1000. Bi=1/30								
	St=10			St=20			St=30		
	RL	LC	RL y LC	RL	LC	RL y LC	RL	LC	RL y LC
Orden	1.015	1.015	1	1.027	1.027	1	1.071	1.071	1
FIT%	93.849	93.849	89.067	92.650	92.650	81.522	89.79	89.79	57.310
μ_t	0.009	0.009	0.026	0.006	0.006	0.024	0.001	0.001	0.007
e_{rms}	0.018	0.018	0.032	0.013	0.013	0.033	0.003	0.003	0.013
S_t	0.015	0.015	0.018	0.011	0.011	0.022	0.003	0.003	0.011

En las Tablas (5.5) (5.6) (5.7), se coloca RL y LC en la misma columna porque representan el valor de los errores cuando $\gamma = 1$, y para ambos enfoques da el mismo resultado.

5.2. Propuesta de los lazos de control

El regenerador es un intercambiador de calor compacto, en el cual se lleva a cabo una transferencia de calor gas-sólido y tiene la función de absorber y ceder calor desde y hacia un lecho empacado con sólidos, a través del paso de un gas.

El proceso de regeneración de energía es un proceso cíclico en el cual, el estado final de un periodo o de un medio ciclo es el estado inicial del siguiente periodo. Su funcionamiento se representa en la Fig.(5.23), se operan simultáneamente dos periodos, uno de calentamiento y el otro de enfriamiento del gas, su comportamiento dinámico puede ser representado con modelos de parámetros distribuidos que sirven para propósitos de diseño, construcción, determinación de condiciones de operación, etc., como los desarrollados por (Costa *et al.* (2014), Ramachandran y Duduković (1984)), estos no son adecuados para diseñar un control, por lo tanto, se planteó un modelo de parámetros concentrados mediante el uso de un modelo simplificado e incluso fraccionario que capture las dinámicas importantes del proceso.

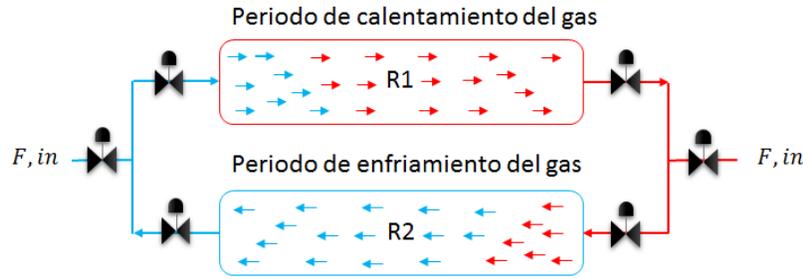


Figura 5.23: Ciclo de calentamiento y enfriamiento de un regenerador de energía.

Como posible modelo matemático de la planta se pudiera considerar un modelo no lineal de parámetros distribuidos como los mencionados en los trabajos de (Costa *et al.*, 2014) y (Ramachandran y Duduković, 1984), donde la variable de interés es la temperatura a la salida del gas para un periodo de calentamiento del ciclo de regeneración.

Tabla 5.8: Modelos de parámetros distribuidos para la planta.

Ramachandran	Sol-Carolina
Temperatura del gas	Temperatura del gas
$\frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} - \frac{\partial T_h}{\partial x} - St (T_h - T_{phs})$	$\rho c_v \frac{\partial T_g}{\partial t} + \rho u c_p \frac{\partial T_g}{\partial x} = \frac{4}{d_h} h (T_{wr} - T_g)$
Temperatura del sólido	Temperatura del sólido
$\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial T_{ph}}{\partial y} \right) = \frac{\partial T_{ph}}{\partial t}$	$\rho_r c_r \frac{\partial T_{wr}}{\partial t_s} = \frac{4}{d_h} \frac{\mathbb{1}_v}{(1-\mathbb{1}_v)} h (T_g - T_{wr})$

Como modelo matemático para propósitos de control, se propone el uso de un modelo de parámetros concentrados e inclusive un modelo fraccionario desarrollado mediante dos enfoques de derivada fraccionaria, Riemann-Liouville (RL) y Liouville-Caputo (LC), como se muestra a continuación.

Tabla 5.9: Modelos de parámetros concentrados para propósitos de control.

Modelo de un parámetro	Modelo fraccionario RL	Modelo fraccionario LC
Temperatura del gas	Temperatura del gas	Temperatura del gas
$T_h = StT_s - A_2 T_{h1} (A_1 + St)^{-1}$	$T_h = StT_s - A_2 T_{h1} (A_1 + St)^{-1}$	$T_h = StT_s - A_2 T_{h1} (A_1 + St)^{-1}$
Temperatura del sólido	Temperatura del sólido	Temperatura del sólido
$\frac{dT_s}{dt} = T_h - T_s$	${}^{RL}D_t^\gamma T_s = T_h - T_s$	${}^C D_t^\gamma T_s = T_h - T_s$

Partiendo del análisis de la dinámica del regenerador de energía, se identifican las posibles entradas y salidas del sistema.

Variables de entrada

- ✓ Temperatura de entrada del gas frío, para un ciclo de calentamiento y para el ciclo de enfriamiento.
- ✓ Flujo de alimentación para el ciclo de calentamiento y de enfriamiento.
- ✓ Tiempo de ciclo de calentamiento y del ciclo de enfriamiento.

Variables de salida

- ✓ Temperatura de salida del gas, ciclo de calentamiento.
- ✓ Temperatura de salida del gas, ciclo de enfriamiento.

Posteriormente se identifican las posibles variables manipuladas y las variables controladas

Tabla 5.10: Posibles variables manipuladas y controladas del proceso.

Variables manipuladas	Variables controladas
Flujo de alimentación	T_{hc} para ciclo de calentamiento
Tiempo de ciclo (parámetro variable)	T_{hf} para ciclo de enfriamiento

De la Tabla 5.10, se menciona que el flujo de alimentación se refiere al flujo de la temperatura del gas dependiendo que periodo del ciclo que se vaya a realizar, ahora T_{gc} es la temperatura del gas caliente y T_{gf} la temperatura del gas frío.

En la Tabla (3.3) y Tabla (5.11), se describen los parámetros involucrados en las ecuaciones que representan a los posibles modelos de la planta del proceso.

En Anexos A se presenta el modelo de (Costa *et al.*, 2014) el cual podría ser considerado como uno de los modelos de la planta.

Tabla 5.11: Parámetros del modelo de (Costa *et al.*, 2014).

Parámetros	Descripción
ρ	Densidad del gas ((kg/m^3))
ρ_r	Densidad del material del regenerador ((kg/m^3))
C_p	Calor específico del gas a presión constante ($(J/(kg/m^3))$)
C_v	Calor específico del gas a volumen constante ($(J/(kg/m^3))$)
T_g	Temperatura del gas (K)
t	Tiempo (s)
u	Velocidad del gas (m/s)
x	Coordenada longitudinal a lo largo de la longitud del regenerador (m)
d_h	Diámetro hidráulico de la matriz del regenerador (m)
h	Coefficiente convectivo de transferencia de calor ($(W/(m^2K))$)
T_{wr}	Temperatura de la matriz del regenerador (K)
C_r	Calor específico del material del regenerador ($(J/(kg/m^3))$)
ϵ_v	Porosidad volumétrica de la matriz del regenerador (Adimensional)

Otros parámetros importantes son el número de Stanton, el número de Biot y el número de Peclet, así como también el tiempo de ciclo, los cuales intervienen en el comportamiento de la temperatura.

En las figuras (1.1) y (1.2) se muestra un esquema del funcionamiento de cada periodo del ciclo de regeneración de manera separada.

Un ciclo se compone de un periodo de calentamiento y de un periodo de enfriamiento del gas. Se consideran dos corrientes provenientes de otros equipos en una planta, una corriente fría y una corriente caliente. Se requiere calentar la corriente fría y enfriar la corriente caliente. Se usan dos lechos empacados para almacenar y ceder calor, sin fuentes adicionales de energía, R1 y R2.

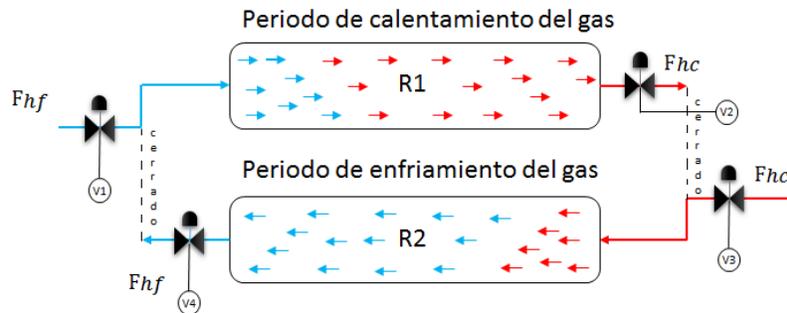


Figura 5.24: Ciclo de calentamiento del gas.

El periodo de calentamiento tiene una duración t_c y corresponde a un medio ciclo de operación del sistema:

La válvula V1 permite el paso de un fluido frío, que entra a una temperatura $T_{h, in}$ constante, hacia el regenerador R1, mientras que la válvula V2 permite la salida del gas de R1. Inicialmente, el sólido se encuentra caliente a una temperatura $T_{s, 0}$. Este sólido es un acumulador que tiene almacenada una cantidad finita de energía calorífica.

Conforme pasa el gas a través del lecho sólido, este va adquiriendo calor del sólido, es decir, va descargando al sólido de su carga térmica. El gas alcanza una temperatura cercana a la del sólido a lo largo de todo el regenerador R1.

Al inicio del periodo, la energía térmica del sólido es mayor, por lo que el gas alcanza una temperatura muy cercana a la temperatura inicial del sólido.

Conforme pasa el tiempo, el sólido va perdiendo su carga térmica y por lo tanto la temperatura del sólido y la del gas son parecidas, pero esta va disminuyendo. Es decir, conforme avanza el tiempo, el gas sale a una temperatura más baja .

Después de mucho tiempo, el sólido ha perdido por completo su carga térmica y alcanza la temperatura fría del gas, es decir, debido a que ya no hay un gradiente de temperatura entre el gas y el sólido, ya no hay transferencia de calor y el gas sale frío.

Durante el periodo de calentamiento, el gas se calienta. Si este periodo se extiende hasta el punto de agotar la energía térmica del sólido, al final del periodo, el gas no se calienta más. Por lo tanto, la temperatura del gas durante el periodo es el promedio de la temperatura del gas a lo largo del mismo.

- La corriente fría siempre entra al sistema de regeneradores a un flujo de gas frío (F_{hf}) y debe calentarse en R1 o en R2, siempre en periodos que inician con sólidos calientes.
- La corriente caliente siempre entra al sistema de regeneradores a un flujo de gas caliente (F_{hc}) y debe enfriarse en R2 o en R1, siempre en periodos que inician con sólidos fríos.
- Cuando R1 calienta al gas, la corriente va de izquierda a derecha (de acuerdo con el diagrama); cuando R1 enfría el gas, la corriente va de derecha a izquierda.
- Mientras R1 opera en periodo de calentamiento (tiempo de ciclo) de gas, R2 opera en periodo de enfriamiento del gas. Después de este tiempo (t_c), la operación de los regeneradores se invierte y R1 opera en periodo de enfriamiento de gas, mientras R2 opera en periodo de calentamiento de gas.

Cuando se completan estos dos periodos, se completa el ciclo.

Finalmente, tomando en cuenta el análisis del funcionamiento del regenerador de energía y una vez identificadas las variables de entrada, salida, variables a manipular y variables a controlar, se puede concluir que la propuesta del diagrama de los lazos de control que representa al sistema es el que se muestra en las Fig. 5.25, para el ciclo de calentamiento y la Fig. 5.26, para el ciclo de enfriamiento, donde el objetivo es controlar la temperatura de salida mediante la manipulación del flujo de alimentación o el tiempo de ciclo (Parámetro variable), según sea el caso.

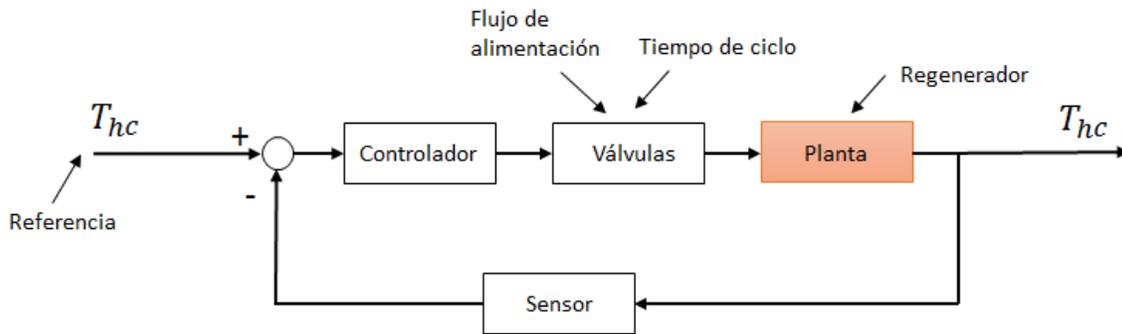


Figura 5.25: Diagrama de lazos del control para el sistema de regeneradores de energía para ciclo de calentamiento.

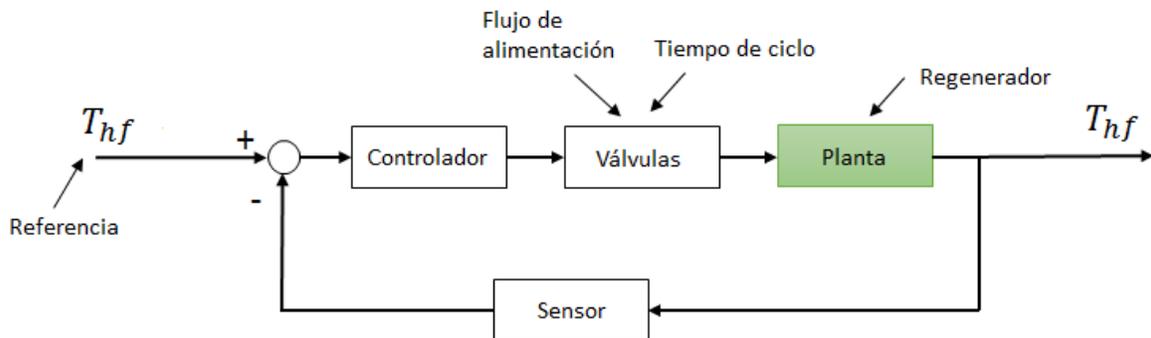


Figura 5.26: Diagrama de lazos del control para el sistema de regeneradores de energía para ciclo de enfriamiento.

Manipulación del flujo de alimentación

La manipulación del flujo de alimentación, se llevara a cabo mediante la modificación de la cantidad de flujo que pasará a través de una válvula de control. En este caso, la función del controlador es variar el porcentaje de apertura de la válvula.

Manipulación del tiempo de ciclo

La manipulación del tiempo de ciclo, se lleva a cabo mediante la asignación del tiempo de apertura de la válvula. La función del controlador es abrir o cerrar la válvula en determinados lapsos de tiempo, según lo que se requiera.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones

En esta sección se presenta las conclusiones generales del trabajo de tesis, y se mencionan algunos trabajos futuros. Las conclusiones aquí presentadas se realizaron con base en la problemática abordada.

Se estudió el modelado matemático de un sistema de regeneradores de energía. Se presentó un modelo matemático no lineal de parámetros distribuidos, el cual considera ciertas suposiciones de modelado, como modelo de comparación o referencia ante falta de datos experimentales.

Mediante un análisis de la dinámica del sistema se toman en cuenta ciertas suposiciones de modelado, lo cual permite llegar a una simplificación del modelo no lineal de parámetros distribuidos del regenerador de energía, con el fin de obtener un modelo de parámetros concentrados útil para aplicar los enfoques fraccionarios.

Se aplicaron dos enfoques de derivada fraccionaria al modelo de parámetros concentrados, lo cual nos aporta una representación alternativa basada en derivadas de orden no entero, esta representación se considera útil para fines de control.

Se obtuvieron resultados satisfactorios de las pruebas realizadas. Se puede concluir que mediante la utilización de derivadas de orden fraccionario es posible obtener una representación alternativa del modelo de regenerador de energía.

Además es importante mencionar que el modelo fraccionario se obtuvo para dos enfoques diferentes de derivada fraccionaria (Riemann-Liouville y Liouville-Caputo), este es representado con un menor número de coeficientes y cuenta también con un grado de libertad adicional que permite que este adopte comportamientos específicos.

Se obtuvo un modelo lineal de un parámetro representado en derivadas fraccionarias, capaz de describir de una forma muy cercana, a un modelo no lineal de tres parámetros,

bidimensional, y que toma en cuenta geometrías esféricas.

También se puede mencionar que se hicieron pruebas variando el número de Stanton, número de Peclet y número de Biot, y se puede concluir que el modelo fraccionario describe fielmente el comportamiento de estos parámetros, mediante la variación del orden de la derivada.

Con estos cambios se observó que cada parámetro tiene un rango en el cual la predicción se logra con error pequeño (comparada con el modelo de tres parámetros).

Por ejemplo del análisis fraccionario realizado se afirma que para valores de Peclet entre 10 y 1000 se obtuvo una buena predicción del efecto de difusión. Para valores de Biot entre $1/30$ a $1/2$, se observó que el efecto de Biot no es muy importante, y que por lo tanto, los modelos simplificados de orden entero y fraccionario se aproximan bien al modelo de tres parámetros, únicamente para valores pequeños de Biot, inferiores a $Bi=1/2$. Para valores mayores el error de predicción se incrementa. Por último se evaluó la predicción de los modelos ante diferentes valores de St . En primer lugar, se observó que al incrementar St , el modelo simplificado de orden entero tiene errores de predicción más grandes comparando con los resultados del modelo de tres parámetros. Sin embargo, se demostró que el modelo fraccionario es considerablemente mejor en un rango de St entre 10 y 30.

En resumen, el modelo de orden fraccionario funciona bien y es mejor que el de orden entero en los siguientes rangos: St entre 10 y 30, Pe mayores que 10 y Bi menores que $1/2$. Fuera de estos rangos, el modelo simplificado de orden entero y fraccionario se alejan del modelo de tres parámetros. Por lo tanto, el modelo de orden fraccionario mejora la predicción con respecto al de orden entero aproximando mejor la transferencia de calor en la fase gas y la transferencia de energía calorífica entre la fase gas y el sólido. No aporta mejoras en cuanto a la transferencia de calor en la fase sólida.

Y por último en función del análisis de la dinámica del proceso de regeneradores de energía se propuso un esquema de control.

6.2. Trabajos futuros

El CF es una herramienta útil que se encuentra en constante investigación.

- Se propone como trabajo futuro la utilización de diferentes definiciones de derivada fraccionaria para la representación del sistema de regeneradores de energía.
- Explorar ciertos aspectos relacionados con los métodos numéricos útiles para la solución de derivadas fraccionarias.
- La obtención de datos experimentales del regenerador de energía para realizar una validación del modelo fraccionario propuesto pero ahora mediante datos experimentales.
- Aplicar ciertos esquemas de control utilizando el modelo en derivadas fraccionarias propuesto.

Bibliografía

- Álvarez, R. (2001). Polinomios ortogonales: historia y aplicaciones. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 18:19–45.
- Atangana, A. y Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. *arXiv preprint arXiv:1602.03408*.
- Atangana, A. y Nieto, J. J. (2015). Numerical solution for the model of rlc circuit via the fractional derivative without singular kernel. *Advances in Mechanical Engineering*, 7(10).
- Atangana, A. y Secer, A. (2013). A note on fractional order derivatives and table of fractional derivatives of some special functions. En *Abstract and Applied Analysis*, volumen 2013. Hindawi Publishing Corporation.
- Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., y Trujillo, J. J. (2012). Models and numerical methods. *World Scientific*, 3:10–16.
- Baleanu, D., Güvenċ, Z. B., y Machado, J. T. (2010). *New trends in nanotechnology and fractional calculus applications*. Springer.
- Bertrand, N., Sabatier, J., Briat, O., y Vinassa, J.-M. (2013). An implementation solution for fractional partial differential equations. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013.
- Bird, R. B., Stewart, W. E. L., Edwin, N., Warren, E. S., y Edwin, N. L. (2008). *Fenómenos de transporte*. Número (Sirsi) i9789681863654.
- Caputo, M. y Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13.
- Coronel-Escamilla, A., Gómez-Aguilar, J., Alvarado-Méndez, E., Guerrero-Ramírez, G., y Escobar-Jiménez, R. (2015). Fractional dynamics of charged particles in magnetic fields. *International Journal of Modern Physics C*.
- Costa, S.-C., Tutar, M., Barreno, I., Esnaola, J.-A., Barrutia, H., García, D., González, M.-A., y Prieto, J.-I. (2014). Experimental and numerical flow investigation of stirling engine regenerator. *Energy*, 72:800–812.

- Dalir, M. y Bashour, M. (2010). Applications of fractional calculus. *Appl. Math. Sci*, 4(21):1021–1032.
- De Oliveira, E. C. y Machado, J. A. T. (2014). A review of definitions for fractional derivatives and integral. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer.
- Diethelm, K., Ford, N. J., y Freed, A. D. (2004). Detailed error analysis for a fractional adams method. *Numerical algorithms*, 36(1):31–52.
- Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D., y Luchko, Y. (2005). Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(6):743–773.
- Ebaid, A. (2011). Analysis of projectile motion in view of fractional calculus. *Applied Mathematical Modelling*, 35(3):1231–1239.
- Esmaeili, S., Shamsi, M., y Luchko, Y. (2011). Numerical solution of fractional differential equations with a collocation method based on müntz polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(3):918–929.
- Finlayson, B. A. (1974). Orthogonal collocation in chemical reaction engineering. *Catalysis Reviews Science and Engineering*, 10(1):69–138.
- Formosa, F. y Despesse, G. (2010). Analytical model for stirling cycle machine design. *Energy Conversion and Management*, 51(10):1855–1863.
- García, E. A., Garza, G. E. C., y Martínez, R. C. (2008). Representación de la difusión del calor mediante ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. *Ingenierías*, 11(39):3.
- Gómez, F., Morales, L., González, M., Alvarado, V., y López, G. (2015). Fractional thermal diffusion and the heat equation. *Open Physics*, 13(1).
- Gómez, F., Rosales, J., y Guía, M. (2013). Rlc electrical circuit of non-integer order. *Central European Journal of Physics*, 11(10):1361–1365.
- Gómez-Aguilar, F. y Alvarado-Méndez, E. (2015). Description of the dynamics of charged particles in electric fields: an approach using fractional calculus. En *Advanced Lasers*, pp. 147–158. Springer.
- Gómez-Aguilar, J., López-López, M., Alvarado-Martínez, V., Reyes-Reyes, J., y Adam-Medina, M. (2016). Modeling diffusive transport with a fractional derivative without singular kernel. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 447:467–481.

- Gómez-Aguilar, J., Rosales-García, J., Bernal-Alvarado, J., Córdova-Fraga, T., y Guzmán-Cabrera, R. (2012). Fractional mechanical oscillators. *Revista mexicana de física*, 58(4):348–352.
- Gómez-Aguilar, J. F., Razo-Hernández, J. R., Rosales-García, J., y Guía-Calderón, M. (2014). Circuitos eléctricos rc y lc fraccionarios. *Ingeniería, investigación y tecnología*, 15(2):311–319.
- Guía-Calderón, M., Rosales-García, J., Guzmán-Cabrera, R., González-Parada, A., y Álvarez-Jaime, J. (2015). El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. *Acta Universitaria*, 25(2):20–27.
- Li, C. y Tao, C. (2009). On the fractional adams method. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(8):1573–1588.
- Ma, S., Xu, Y., y Yue, W. (2012). Numerical solutions of a variable-order fractional financial system. *Journal of Applied Mathematics*, 2012.
- Melo, M. E. R. y Vega, J. J. M. (2009). Comportamiento viscoelástico de sistemas poliméricos y el cálculo fraccional: Propiedades mecánicas, dieléctricas y magnéticas. *Ingenierías*, 12(42):2.
- Nirenberg, L. (2011). On elliptic partial differential equations. En *Il principio di minimo e sue applicazioni alle equazioni funzionali*, pp. 1–48. Springer.
- Omaña, D. (2007). *Estudio teórico del regenerador para un Motor Stirling*. Tesis doctoral, Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional, Posgrado e Investigación Ingeniería Mecánica, Ciudad de México, 4-32 pag.
- Pathak, K., Franch, J., y Agrawal, S. K. (2005). Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. *IEEE Transactions on robotics*, 21(3):505–513.
- Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volumen 198. Academic press.
- Podlubny, I. (2001). Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *arXiv preprint math/0110241*.
- Ramachandran, P. y Duduković, M. (1984). Solution by triple collocation for periodic operation of heat regenerators. *Computers & chemical engineering*, 8(6):377–388.
- Rekanos, I. T. y Yioultsis, T. V. (2014). Approximation of grünwald–letnikov fractional derivative for fdtd modeling of cole–cole media. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 50(2):181–184.
- Romero, M., Vinagre, B. M., y Ángel, P. (2008). Gpc control of a fractional–order plant: improving stability and robustness. *constraints*, 2(2):2.

- Rossikhin, Y. A. y Shitikova, M. V. (2004). Analysis of the viscoelastic rod dynamics via models involving fractional derivatives or operators of two different orders. *The Shock and vibration digest*, 36(1):3–26.
- Salazar, J. L. y Chen, W.-L. (2014). A computational fluid dynamics study on the heat transfer characteristics of the working cycle of a β -type stirling engine. *Energy Conversion and Management*, 88:177–188.
- Siow, K. S., Britcher, L., Kumar, S., y Griesser, H. J. (2006). Plasma methods for the generation of chemically reactive surfaces for biomolecule immobilization and cell colonization-a review. *Plasma processes and polymers*, 3(6-7):392–418.
- Tarasov, V. E. (2011). *Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*. Springer Science & Business Media.
- Vázquez Martínez, L. (2004). Una panorámica del cálculo fraccionario y sus aplicaciones. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 98(1):17–25.
- Villadsen, J. y Stewart, W. (1967). Solution of boundary-value problems by orthogonal collocation. *Chemical Engineering Science*, 22(11):1483–1501.
- Watson, D. P. (2009). Fractional calculus and its applications. *A student essay, available online at <http://www.umw.edu/cas/math/students/documents/damian1.pdf>*. Accessed, pp. 05–20.
- Yang, X.-J., Baleanu, D., y Zhong, W.-P. (2013). Approximate solutions for diffusion equations on cantor space-time. *Proceedings of the Romanian Academy, Series A*, 14(2).

ANEXOS

Anexo A

Modelo del Regenerador de energía

A.1. Modelo del Regenerador de energía (Costa *et al.*, 2014)

Como segundo modelo matemático para representar al regenerador se ubican las ecuaciones de transferencia dinámica del regenerador, es decir las ecuaciones de balance de energía del gas a través del lecho y balance de energía en el sólido (rejillas) que desarrollaron Costa *et al.* (2014).

Estas ecuaciones describen el comportamiento de la temperatura del gas de trabajo (T_g) y el comportamiento de la matriz del regenerador (T_{wr}) incluyendo una distribución de temperaturas espacial en una dimensión y varios parámetros de importancia significativa.

A continuación en (A.1) y (A.2) se presentan las ecuaciones que representan al regenerador de energía:

- ✓ Balance de energía del gas a través del lecho.

$$\rho C_v \frac{\partial T_g}{\partial t} + \rho u C_p \frac{\partial T_g}{\partial x} = \frac{4}{d_h} h (T_{wr} - T_g) \quad (\text{A.1})$$

- ✓ Balance de energía en el sólido (rejillas).

$$\rho_r C_r \frac{\partial T_{wr}}{\partial t} = \frac{4}{d_h} \frac{\mathfrak{V}_v}{(1 - \mathfrak{V}_v)} h (T_g - T_{wr}) \quad (\text{A.2})$$

Tabla A.1: Parámetros del modelo de (Costa et al., 2014).

Parámetros	Descripción
ρ	Densidad del gas ((kg/m^3))
ρ_r	Densidad del material del regenerador ((kg/m^3))
C_p	Calor específico del gas a presión constante ($(J/(kg/m^3))$)
C_v	Calor específico del gas a volumen constante ($(J/(kg/m^3))$)
T_g	Temperatura del gas (K)
t	Tiempo (s)
u	Velocidad del gas (m/s)
x	Coordenada longitudinal a lo largo de la longitud del regenerador (m)
d_h	Diámetro hidráulico de la matriz del regenerador (m)
h	Coefficiente convectivo de transferencia de calor ($(W/(m^2 K))$)
T_{wr}	Temperatura de la matriz del regenerador (K)
C_r	Calor específico del material del regenerador ($(J/(kg/m^3))$)
ϵ_v	Porosidad volumétrica de la matriz del regenerador (Adimensional)

A.1.1. Suposiciones de modelado (Sol-Carolina)

Con base en la literatura se especifican las siguientes suposiciones de modelado:

1. Se señala que el flujo es uniforme a lo largo de la matriz del regenerador..
2. Los parámetros son constantes.
3. Todas las propiedades del fluido (densidad, viscosidad, calor específico, y conductividad) se asumen uniformes.
4. Todas las propiedades del sólido (densidad, calor específico) se asumen uniformes.
5. Se considera dispersión axial, con distribución de temperaturas en una sola dirección.
6. Se considera solo calor por convección, es decir solo se considera el coeficiente de calor por convección despreciando así el coeficiente de calor por conducción, en el gas y una conducción rápida en el sólido (la temperatura en el centro se iguala instantáneamente a la temperatura en la superficie).

Anexo B

Modelo del Regenerador de energía

B.1. Validación de modelos

FIT

Proviene del inglés FIT-Ajuste, se refiere a la aproximación de una señal estimada a la señal original y su medida es proporcionada en porcentaje.

$$FIT = 100 \left(1 - \frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y - promedio\|} \right) \quad (B.1)$$

donde:

- y es la salida del sistema.
- \hat{y} es la salida estimada del sistema.

El valor medio del error

$$\mu_t = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t) \quad (B.2)$$

donde:

- μ_t es el valor medio del error de simulación.
- $e(t)$ es el error de estimación $e(t) = \hat{y}(t) - y(t)$.
- N es el número de datos.

Desviación estándar del error

Permite conocer que tanto se aleja de la media del error.

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e(t) - \mu)^2} \quad (\text{B.3})$$

donde:

- S_t es la desviación estándar del error.
- μ es el valor medio del error de simulación.
- $e(t)$ es el error de estimación $e(t) = \hat{y}(t) - y(t)$.
- N es el número de datos.

La raíz cuadrada del error medio al cuadrado

Es la raíz cuadrada del promedio de los elementos al cuadrado, el error debido a la estimación de la media poblacional a partir de las medias muestrales.

$$e_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e(t))^2} \quad (\text{B.4})$$

donde:

- $e(t)$ es el error de estimación $e(t) = \hat{y}(t) - y(t)$.
- N es el número de datos.