



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MEXICO



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE LA PAZ
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

CONTROL POR MOLDEO DE ENERGÍA DE UNA CLASE DE SISTEMAS MECÁNICOS CON PERTURBACIONES

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

PRESENTA:

Samir Alejandro Cota Beltrán

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Jesús Alberto Sandoval Galarza

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela

LA PAZ, BAJA CALIFORNIA SUR, MÉXICO, AGOSTO 2024.



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de La Paz
División de Estudios de Posgrado e Investigación

La Paz, B.C.S., **12/ AGOSTO /2024**

DEPI/151/2024

ASUNTO: Autorización de impresión

**C. SAMIR ALEJANDRO COTA BELTRÁN,
ESTUDIANTE DE LA MAESTRÍA EN
SISTEMAS COMPUTACIONALES,
P R E S E N T E .**

Con base en el dictamen de aprobación emitido por el Comité Tutorial de la Tesis denominada: **“CONTROL POR MOLDEO DE ENERGÍA DE UNA CLASE DE SISTEMAS MECÁNICOS CON PERTURBACIONES”**, mediante la opción de tesis (Proyectos de Investigación), entregado por usted para su análisis, le informamos que se **AUTORIZA** la impresión.

ATENTAMENTE
Excelencia en Educación Tecnológica

**JUDITH GUADALUPE MARTÍNEZ TIRADO,
JEFA DE LA DIV. DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INV.**

c.c.p. Depto. de Servicios Escolares
c.c.p. Archivo.



JGMT/icl*



Esplanada de los Tecnólogos de B.C.S. #4720, Col. 8 de octubre 1ra Sección, C.P. 23080, La Paz,
B.C.S. Tel. (612) 12 1-04-24 e-mail: depi_paz@tecnm.mx | www.lapaz.tecnm.mx



DICTAMEN DEL COMITÉ TUTORIAL

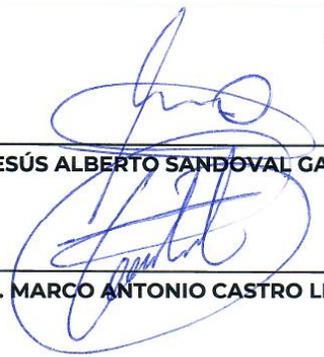
La Paz, B.C.S., **05/AGOSTO/ 2024**

**JUDITH GUADALUPE MARTÍNEZ TIRADO,
JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACIÓN,
P R E S E N T E.**

Por medio del presente, enviamos a usted dictamen del Comité Tutorial de tesis para la obtención del grado de Maestro, con los siguientes datos generales:

No. de Control M22310006	Nombre SAMIR ALEJANDRO COTA BELTRÁN
Maestría en:	SISTEMAS COMPUTACIONALES
Título de la tesis: CONTROL POR MOLDEO DE ENERGÍA DE UNA CLASE DE SISTEMAS MECÁNICOS CON PERTURBACIONES	
DICTAMEN: Se autoriza el trabajo de investigación, en virtud de que realizó las correcciones correspondientes conforme a las observaciones planteadas por este Comité Tutorial.	

**Atentamente.
El Comité Tutorial**



DR. JESÚS ALBERTO SANDOVAL GALARZA



DR. CÉSAR HIGUERA VERDUGO



DR. MARCO ANTONIO CASTRO LIERA



DR. SAÚL MARTÍNEZ DÍAZ

c.c.p. Coordinador de la Maestría.
c.c.p. Departamento de Servicios Escolares.
c.c.p. Estudiante.

ITLP-DEPI-RTT-08

Rev.1



Escuela de Posgrado de B.C.S. 4720, Col. 8 de octubre 1ra Sección, C.P. 23080, La Paz,
B.C.S. Tel. (612) 12 1-04-24 e-mail: depi_paz@tecnm.mx | www.lapaz.tecnm.mx



Dedicatoria

Deseo dedicar este trabajo de manera general, a todas las personas que forman parte importante de mi vida y que han creído en mí, (tal es el caso de mi abuela, mi madre, mi padre, mi hermana, mi tía Mitzu, mis familiares de Santiago, mi tío Chuy, mi tía Sonia, aunque ya no se encuentre con nosotros, a mi abuelo Jose Manuel, una persona que siempre llevo en mi corazón) y a mis amistades.

Quisiera dedicar este trabajo de manera especial a mi tío, José Isaías Cota Ruiz. Su influencia en mi vida ha sido inigualable en todo el sentido de la palabra. A lo largo de los años, él ha sido mucho más que un mentor; ha sido un faro de sabiduría y una fuente constante de inspiración. Sus enseñanzas han marcado el rumbo de mi existencia, guiándome a través de lecciones de vida que siempre recordaré. Con su ejemplo, me ha mostrado el verdadero significado de la dedicación y la superación, y me ha impulsado a aspirar siempre a lo mejor de mí mismo. Aunque intentara describir con palabras el impacto que ha tenido en mi vida, siento que siempre me faltaría algo para captar la magnitud de su importancia. Por ello, con sincero agradecimiento y admiración, dedico este trabajo a él.

Quisiera dedicar también este trabajo con todo el mérito al Dr. Jesús Alberto Sandoval Galarza, mi director de tesis. Por su infinita paciencia y orientación, así como su constante apoyo para ayudarme a mejorar en cada etapa del proceso.

Agradecimientos

Quiero empezar expresando mi profundo agradecimiento a mi madre América Beltrán Marruffo, quien siempre ha estado a mi lado en cada momento, brindándome su apoyo incondicional. Su presencia constante y su apoyo en cada una de mis decisiones han sido fundamentales para mí. Su amor y aliento han sido una fuente inagotable de fortaleza y confianza, y no puedo expresar con palabras cuánto valoro todo lo que ha hecho por mí.

De igual manera, expreso mi más sincero agradecimiento a mi abuela Aurora Rosalva Ruiz Cota. Desde mi niñez, has estado a mi lado, ofreciendo tu amor y apoyo incondicional en cada etapa de mi vida. Tus conversaciones siempre han sido un refugio de sabiduría y consuelo, y tus palabras de aliento han sido una luz en mis momentos más difíciles. Gracias por tu paciencia, tu comprensión y por siempre animarme a seguir adelante, incluso cuando las circunstancias parecían desalentadoras. Tu presencia ha sido una fuente constante de fortaleza y motivación para mí, y estoy profundamente agradecido por todo lo que has hecho y continúas haciendo en mi vida.

Deseo expresar mi agradecimiento a mi padre, Jorge Samir Cota Ruiz, por todos los consejos y conversaciones que hemos compartido a lo largo de los años. Gracias a ti, he comprendido el verdadero significado de ayudar a los demás sin esperar nada a cambio. Valoro profundamente todas las experiencias que hemos vivido juntos, ya que han sido fundamentales para mi crecimiento personal. Estoy verdaderamente agradecido por todo lo que has hecho por mí y espero que siempre disfrutes de buena salud y encuentres paz y armonía en tu vida, tanto con tus amigos como con tu familia.

Quiero dedicar un agradecimiento muy especial a mi tía Mitzu Arlette Cota Ruiz y a mi tío Ulises Omar Winkler Aguilar por su constante interés en mi progreso, preguntándome en numerosas ocasiones: “¿Cómo vas con la maestría?” Valoro mucho su interés y apoyo. Quisiera hacer una mención especial para mi tía Mitzu, quien me enseñó que las palabras son una herramienta

poderosa en este mundo. Gracias a ella, comprendí la importancia de levantarse y perseverar a pesar de las dificultades. Agradezco profundamente todo lo que has hecho por mí y por mi familia. Siempre estaré agradecido.

Agradezco a mi tía, Sonia Evangelina Cota Gastelum, por mostrarme la belleza de la docencia y cómo el conocimiento puede trascender y formar parte de algo más grande entre los estudiantes. Valoro mucho todas las risas y consejos que me has brindado, a sí también el apoyo que le has brindado a mí y a mi familia. Muchas gracias.

Agradezco a mi hermana Andrea Sarai Cota Beltrán por mostrarme que siempre es posible mejorar, sin importar las circunstancias. Tu dedicación y esfuerzo constante han sido una inspiración para mí. Espero que pronto podamos compartir risas nuevamente, siempre me encuentro velando por tu bienestar y felicidad.

Agradezco a mis familiares de Santiago, especialmente a mis tíos Víctor Beltrán Marruffo y Narda Sánchez, por siempre recibirme en su hogar. Gracias por ofrecerme refugio en momentos de vulnerabilidad y por ser personas verdaderamente excepcionales, espero siempre gocen de buena salud y siempre estén en compañía de sus seres queridos, hago una mención especial a mis primos por siempre compartir momentos de risa y brindarme recuerdos inolvidables de mi infancia. En particular, quiero agradecer a mi primo José de Jesús Beltrán Sánchez por sus historias y anécdotas siempre divertidas y memorables.

A mi sobrino Jorge Alexis Cota Beltrán, le estoy agradecido por llegar a mi vida. El simple motivo de su existencia me hace querer ser mejor en cada etapa de mi vida. Anhele alcanzar la madurez y la sabiduría necesaria para ser tu apoyo en los momentos más significativos de tu vida. Eres mi motivo para seguir creciendo

Quiero expresar mi agradecimiento especial a mis queridas amigas, especialmente a mi mejor amiga, Alejandra Villalobos. Tu constante presencia, apoyo incondicional e inspiración han sido un faro en los momentos más oscuros de mi vida. Valoro enormemente la fortuna de tenerte en mi vida, y valoro profundamente el tipo de persona que eres. También quiero rendir homenaje a mi amiga Marlenne García (Lenne), por su amabilidad sincera y la facilidad con la que conversamos. Tu presencia es un verdadero regalo, y estoy convencido de que, si todos fueran como tú, el mundo sería mejor. Agradezco a ambas por ser parte fundamental de mi vida; mi gratitud hacia ustedes es infinita. Espero que siempre podamos compartir nuevas aventuras. Las quiero mucho.

Quiero dedicar un agradecimiento especial a mis amigos más cercanos, comenzando por mi amigo de mayor antigüedad, César Guadalupe Mendivil Guerrero. Tu constante motivación para que me superara, nuestras profundas conversaciones y tu disposición a escucharme en momentos de dificultad han sido un refugio invaluable. Aprecio profundamente tu amistad y el apoyo incondicional que siempre me has brindado. Eres una persona a quien admiro y respeto profundamente. Gracias por todo lo que has hecho por mí. Asimismo, mi gratitud va para mi querido amigo Carlos Manuel Núñez López. Agradezco tu ejemplo constante, las lecciones de ajedrez que compartimos, y todas las salidas y risas que hemos vivido juntos. Tu influencia ha sido fundamental en mi crecimiento personal, y valoro inmensamente cada momento que hemos compartido. Gracias por ser un amigo tan excepcional.

Les agradezco al Dr. Cesar Higuera Verdugo y al Dr. Marco Antonio Castro Liera, por siempre brindarme apoyo y por poner el ambiente en el laboratorio con sus pláticas y por siempre hacerme reír por sus comentarios, y principalmente por su excelente calidad como docentes.

Agradezco a la MSC. Iliana Castro Liera por siempre brindarme ayuda pronta y positiva, por siempre recibirme con una sonrisa e interesarse por mi avance, por su gran calidez humana y por siempre brindarme palabras sabias en los momentos precisos.

Le agradezco al Dr. Saúl Martínez Díaz, por sus comentarios positivos y su paciencia a la hora de enseñar.

Agradezco al Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela por sus valiosas y objetivas observaciones en cada etapa de este trabajo. Su interés y enfoque positivo en mis avances han sido muy apreciados. Muchas gracias.

Agradezco enormemente al Dr. Jesús Alberto Sandoval Galarza, por brindarme sus sabias opiniones y consejos, por siempre ser claro y directo, y por hacerme ver el mundo de la investigación con un enfoque completamente diferente. Principalmente por mostrarme que los errores no tienen por qué definirme, que siempre puedo aspirar a hacerlo mejor, y que el esfuerzo y la disciplina son factores importantes que me beneficiaran en cualquier aspecto de mi vida, ya sea personal o profesional.

Finalmente, pero no menos importante, quiero expresar mi agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt) por otorgarme una beca que facilitó el desarrollo de este posgrado.

Resumen

En este trabajo se presenta el diseño de un controlador robusto por el método de moldeo de energía para la regulación de posición, con el fin de amortiguar la presencia de perturbaciones constantes en sistemas mecánicos. Específicamente, se diseñó un esquema de control donde la perturbación influye únicamente en la dinámica de la articulación actuada. La perturbación constante es estimada mediante el uso de un observador no lineal, el cual desempeña un papel crucial que será notable a lo largo de este trabajo, el análisis de estabilidad de este enfoque se apoya en la teoría de Lyapunov. A lo largo de esta tesis se proponen tres sistemas mecánicos como casos particulares. Estos incluyen el servomotor SRV02 de la marca Quanser, que es un sistema completamente actuado en el cual se llevaron a cabo experimentos en tiempo real. También se seleccionaron el péndulo con rueda inercial y el carro-péndulo como sistemas subactuados, en los cuales se realizaron simulaciones numéricas. Esto se hizo con el fin de corroborar el desempeño del controlador en presencia de perturbaciones constantes desconocidas.

Abstract

This paper presents the design of a robust controller using the energy shaping method for position regulation, aimed at damping the presence of constant disturbances in mechanical systems. Specifically, a control scheme was designed where the disturbance influences only the dynamics of the actuated joint. The constant disturbance is estimated using a nonlinear observer, which plays a crucial role that will be highlighted throughout this work. The stability analysis of this approach is supported by Lyapunov theory. Throughout this thesis, three mechanical systems are proposed as particular cases. These include the Quanser SRV02 servomotor, which is a fully actuated system where real-time experiments were conducted. The inertial wheel pendulum and the cart-pole were also selected as underactuated systems, for which numerical simulations were performed. This was done to verify the controller's performance in the presence of unknown constant disturbances.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Descripción del problema	2
1.3. Objetivos	2
1.3.1. Objetivo general	2
1.3.2. Objetivos específicos	3
1.4. Justificación	3
1.5. Alcance y limitaciones	3
2. Marco teórico	4
2.1. Control robusto por moldeo de energía	4
2.2. Modelo de sistemas mecánicos subactuados afectados por perturbaciones constantes	5
2.2.1. Sistema hamiltoniano de lazo cerrado deseado	5
2.2.2. Formulación del problema de control	7
2.2.3. Observador no lineal	8
2.2.4. Ley de control	9
2.3. Regulación de posición de una clase de sistemas mecánicos subactuados bajo perturbaciones constantes	12
2.4. Análisis de estabilidad	12
3. Servo Quanser SRV02	14
3.1. Modelo dinámico	15

3.2. Observador no lineal	18
3.3. Diseño del control robusto	19
3.4. Análisis de estabilidad	20
3.5. Resultados experimentales	21
3.5.1. Ley de control en términos del voltaje	22
3.5.2. SRV02: Análisis del péndulo sin observador no lineal y sin perturbación δ	24
3.5.3. SRV02: Análisis del péndulo con observador no lineal y sin perturbación δ	25
3.5.4. SRV02: Análisis del péndulo sin observador no lineal y con perturbación δ	26
3.5.5. SRV02: Análisis del péndulo con observador no lineal y con perturbación δ	27
3.5.6. Comparación entre la perturbación δ y la estimación del observador no lineal	28
4. Péndulo con rueda inercial	29
4.1. Modelo dinámico	30
4.2. Diseño del control robusto	31
4.3. Análisis de estabilidad	33
4.4. Resultados de simulaciones numéricas	36
4.4.1. Péndulo con rueda inercial sin observador y sin perturbación δ	38
4.4.2. Péndulo con rueda inercial con observador y sin perturbación δ	39
4.4.3. Péndulo con rueda inercial sin observador y con perturbación δ	40
4.4.4. Péndulo con rueda inercial con observador y con perturbación δ	41
4.4.5. Comparación entre la perturbación δ y la estimación del observador no lineal en el péndulo con rueda inercial	42
5. Carro-péndulo	43
5.1. Modelo dinámico	44
5.2. Linealización parcial	44
5.3. Diseño del control robusto	46
5.4. Análisis de estabilidad	49

5.5. Resultados de simulaciones numéricas	53
5.5.1. Carro-péndulo sin observador y sin perturbación δ	55
5.5.2. Carro-péndulo con observador y sin perturbación δ	56
5.5.3. Comparativa de la entrada de control del carro-péndulo con y sin observador	57
5.5.4. Carro-péndulo sin observador y con perturbación δ	58
5.5.5. Carro-péndulo con observador y con perturbación δ	59
5.5.6. Carro-péndulo entrada de control con y sin observador con una perturba- ción constante δ	60
5.5.7. Comparación entre la perturbación δ y la estimación del observador no lineal del carro-péndulo	61
6. Conclusiones	62
Bibliografía	63
A. Diagramas de simulink para los sistemas subactuados	67
A.1. Diagramas para el péndulo con rueda inercial	68
A.2. Diagramas para el carro-péndulo	70
B. Desarrollo de $\dot{\mathcal{V}}_L$ para los casos subactuados	72
B.1. $\dot{\mathcal{V}}_L$ para el péndulo con rueda inercial	73
B.2. $\dot{\mathcal{V}}_L$ para el carro-péndulo	75
C. Cálculos de la ley de control	77
C.1. Desarrollo de elementos para el observador para el péndulo con rueda inercial . .	78
C.2. Desarrollo de elementos del observador no lineal para el carro-péndulo	83
D. Códigos de Matlab	87
D.1. Parámetros para el péndulo con rueda inercial	88
D.2. Parámetros para el carro-péndulo	90

Índice de figuras

3.1. Equipo utilizado para las pruebas experimentales del Servomotor Quanser SRV02	14
3.2. Diagrama del sistema SRV02	15
3.3. Evolución temporal de la posición $q(t)$ y entrada de control $u(t)$	24
3.4. Evolución temporal de la posición $q(t)$ y entrada de control $u(t)$ al implementar el observador no lineal $\hat{\delta}$	25
3.5. Evolución temporal de la posición $q(t)$ y entrada de control $u(t)$ al implementar la perturbación $\delta = 0.4[\text{Nm}]$	26
3.6. Evolución temporal de la posición $q(t)$ y entrada de control $u(t)$ al implementar la perturbación $\delta = 0.4[\text{Nm}]$ y el observador no lineal	27
3.7. Comparación entre la estimación del observador no lineal y la perturbación δ	28
4.1. Diagrama del péndulo con rueda inercial.	29
4.2. Respuestas de la evolución temporal de la posición y entrada de control	38
4.3. Respuestas de la evolución de posición y entrada de control	39
4.4. Respuestas de la evolución de posición y entrada de control	40
4.5. Respuestas de la evolución de posición y entrada de control	41
4.6. Comparación entre la estimación del observador $\hat{\delta}(t)$ y la perturbación δ	42
5.1. Diagrama esquemático del carro péndulo.	43
5.2. Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo	55
5.3. Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo	56
5.4. Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo	57

5.5. Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo	58
5.6. Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo	59
5.7. Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo	60
5.8. Comparación entre la estimación del observador no lineal y la perturbación δ . .	61
A.1. Diagrama de bloques del péndulo con rueda inercial	68
A.2. Planta del péndulo con rueda inercial vista en (4.4)	68
A.3. Controlador $u(t)$ del péndulo con rueda inercial vista en (4.16)	69
A.4. Diagrama de bloques de $\dot{\gamma}$ del péndulo con rueda inercial	69
A.5. Diagrama de bloques del carro-péndulo	70
A.6. Planta del carro-péndulo vista en (5.8)	70
A.7. Controlador del carro-péndulo vista en (5.29)	71
A.8. Diagrama de bloques de $\hat{\delta}$ del carro-péndulo vista en (5.30)	71

Índice de tablas

3.1. Parámetros del Servomotor SRV02	21
3.2. Valores de las ganancias del Servomotor SRV02	21
3.3. Valor de la perturbación	22
3.4. Descripción de los parámetros del motor CC	22
4.1. Parámetros del péndulo con rueda inercial	30
4.2. Parámetros del péndulo con rueda inercial	37
4.3. Valores de las ganancias del péndulo con rueda inercial	37
4.4. Valor de la perturbación aplicada	37
5.1. Parámetros para el carro-péndulo	54
5.2. Ganancias para el controlador y el observador no lineal del carro-péndulo	54
5.3. Valor de la perturbación aplicada	54

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas mecánicos han sido objeto de investigación debido a las continuas innovaciones en diseño y técnicas de control, orientadas a optimizar su eficiencia y rendimiento operativo. Existen trabajos que han abordado de manera detallada el estudio de sistemas mecánicos, como por ejemplo [1], [2], [3], [4], [5], [6], por mencionar algunos. Los sistemas mecánicos pueden clasificarse en dos categorías principales en función de su actuación: sistemas totalmente actuados y sistemas subactuados. En los sistemas totalmente actuados, cada grado de libertad del sistema puede ser controlado directamente mediante actuadores, estos mismos normalmente son seleccionados para el diseño de controladores, debido a su simplicidad dinámica, por lo cual, estos sistemas han sido casos de interés en diversas investigaciones como [7], [8], [9], [10], [11], [12]. Por otro lado, los sistemas subactuados presentan un número menor de actuadores en comparación con el número de grados de libertad del sistema. Esto introduce desafíos adicionales en el diseño de controladores, ya que no todos los estados del sistema pueden ser controlados de manera independiente, no obstante, estos sistemas han sido el foco principal de numerosas investigaciones, como por ejemplo en [13], [14] [15], [16], [17], [18], [19], [20]. En el extenso campo de la investigación de sistemas mecánicos, surge como una problemática resaltable la presencia de perturbaciones al momento de realizar experimentos en tiempo real. Esto ocurre porque al diseñar controladores, a menudo se realiza bajo condiciones ideales, lo que implica la posibilidad de ignorar variables que podrían afectar el rendimiento del sistema.

1.1. Antecedentes

La capacidad de los sistemas de control para amortiguar o adaptarse a estas perturbaciones es crucial para mantener un desempeño óptimo. Esto mismo ha impulsado el desarrollo de estra-

tegrías avanzadas de control que no solo presente un buen desempeño ante perturbaciones, sino que también optimicen la robustez y la fiabilidad del sistema. Algunos trabajos donde el enfoque principal fue el diseño de control robusto considerando perturbaciones son los siguientes [21], [22], [23], [24], [25], [26]. Existen diferentes métodos para el diseño de controladores robustos, siendo uno de estos un principal punto de apoyo para el desarrollo del presente trabajo es el moldeo de energía, en lo que respecta a trabajos actuales se pueden destacar los siguientes [27], [28], [29], [30].

En el ámbito de los sistemas de control, las perturbaciones representan variaciones no deseadas que afectan el comportamiento del sistema. Estas perturbaciones pueden surgir de diversas fuentes externas o internas, tales como cambios en las condiciones ambientales, fluctuaciones en las características del sistema, o interferencias electromagnéticas, etc. Existen diferentes investigaciones que han abordado estrategias para poder estimar perturbaciones, una de ellas se realiza mediante la implementación de arreglos matemáticos conocidos como observadores no lineales, se pueden mencionar trabajos como [27] y [31], siendo este último la inspiración para el desarrollo de este trabajo.

1.2. Descripción del problema

Las perturbaciones son un aspecto crucial a tener en cuenta en el diseño de controladores para sistemas mecánicos, ya que su presencia afecta directamente el rendimiento del sistema. Por tal motivo, se busca incluir este criterio en el diseño de un controlador. Pese a que hay diferentes métodos de control que permiten el diseño de controladores robustos a perturbaciones, recientemente se presentó un control por moldeo de energía para sistemas robóticos completamente actuados [31]. Sin embargo, el problema de interés en esta tesis es que ese esquema de control no es posible aplicarlo al control de sistemas mecánicos subactuados.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Desarrollar un esquema de diseño de control robusto por moldeo de energía que trate con perturbaciones constantes en sistemas mecánicos.

1.3.2. Objetivos específicos

- Validar el desempeño del controlador propuesto a través de simulaciones y experimentos.
- Realizar pruebas experimentales considerando perturbaciones constantes del controlador robusto propuesto aplicado a un sistema mecánicos completamente actuado.
- Realizar simulaciones considerando perturbaciones constantes del controlador robusto propuesto aplicado a sistemas mecánicos subactuados.

1.4. Justificación

La importancia de este enfoque radica en varios aspectos clave. En primer lugar, el desarrollo de controladores robustos destinados a amortiguar perturbaciones constantes en sistemas mecánicos contribuye significativamente a mejorar su desempeño, lo cual es relevante en entornos donde las condiciones operativas pueden estar sujetas a cambios inesperados. Además, el uso del observador no lineal nos permite amortiguar la perturbación, mejorar la regulación de posición, y mediante las manipulaciones adecuadas podemos conocer la estimación de la perturbación desconocida.

1.5. Alcance y limitaciones

Como alcance, se ha ampliado el control de moldeo de energía para abarcar sistemas de control con perturbaciones; sin embargo, la limitación residió en la escasez de sistemas mecánicos disponibles para validar experimentalmente el controlador propuesto.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Control robusto por moldeo de energía

La formulación comienza con una descripción hamiltoniana de la clase de sistemas mecánicos subactuados a controlar, donde el hamiltoniano es la suma de la energía cinética más la energía potencial de un sistema mecánico subactuado de n articulaciones [14]

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ son los vectores de posiciones y momentos generalizados, respectivamente, $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T > 0$) es la matriz de inercia. Una propiedad sobre la función escalar de energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ del sistema subactuado debido a la fuerza gravitatoria es que esta función es al menos una vez diferenciable con respecto a \mathbf{q} . Recordemos que en la formulación hamiltoniana el momento \mathbf{p} se define como

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.2)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de velocidades generalizadas.

2.2. Modelo de sistemas mecánicos subactuados afectados por perturbaciones constantes

La dinámica de un sistema mecánico subactuado sin fricción viscosa afectada por perturbaciones externas se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ G(\mathbf{q})[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}] \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La matriz $G(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $\text{rango}(G(\mathbf{q})) = m$ donde m ($n > m \geq 1$) es el número de articulaciones activas (actuadas), $(n - m)$ es el número de articulaciones pasivas (no actuadas). La notación $(\cdot)_{n \times n}$ denota una matriz $n \times n$, con $I_{n \times n}$ como matriz identidad y $0_{n \times n}$ la matriz de ceros, $\mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n$ es el vector $n \times 1$ de ceros, $\nabla_{(\cdot)} = \frac{\partial}{\partial(\cdot)}$ es el operador de gradiente de columna, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control de par/fuerza proporcionadas por actuadores ideales sin memoria, y $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^m$ es una perturbación constante de par desconocida que afecta sólo a las uniones activas (actuadas). La clase de sistemas mecánicos subactuados afectados por perturbaciones consideradas en este trabajo está modelada por (2.3).

2.2.1. Sistema hamiltoniano de lazo cerrado deseado

Inspirado por (2.1) y (2.2), la función escalar

$$\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T M_a(\mathbf{q}_a)^{-1} \mathbf{p}_a + \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) \quad (2.4)$$

se denomina hamiltoniano deseado, donde $M_a(\mathbf{q}_a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una función matricial simétrica, definida positiva y diferenciable para todo $\mathbf{q}_a \in \Omega$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Además, se supone que $\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a)$ es una función definida localmente positiva y continuamente diferenciable con un punto mínimo aislado en $\mathbf{q}_a = \mathbf{0}_n$, que a su vez es un punto crítico de $\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a)$. Se introduce la siguiente transformación de coordenadas:

$$\mathbf{q}_a = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\phi}(t), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{p}_a = M_a(\mathbf{q}_a) \dot{\mathbf{q}}_a, \quad (2.6)$$

siendo $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{p}_a \in \mathbb{R}^n$ los vectores de posiciones generalizadas y momentos. Además, los vectores $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})$ y $\boldsymbol{\phi}(t)$ tienen la estructura

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) = \left[\alpha_1(\mathbf{q}), \alpha_2(\mathbf{q}), \dots, \alpha_n(\mathbf{q}) \right]^T, \quad (2.7)$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \left[\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t) \right]^T, \quad (2.8)$$

respectivamente. Las funciones $\alpha_i(\mathbf{q})$ son continuamente diferenciables con respecto a \mathbf{q} , para $i = 1, \dots, n$, elegidas para asegurar ese rango($W(\mathbf{q})$) = n , para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, tal que $W(\mathbf{q})^{-1}$ exista, donde $W(\mathbf{q})$ es la matriz jacobiana del vector $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})$, es decir,

$$W(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.9)$$

Además, las funciones $\phi_i(t)$ se asumen que son dos veces diferenciables. De (2.5), se deduce que

$$\dot{\mathbf{q}}_a = W(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \dot{\boldsymbol{\phi}}(t). \quad (2.10)$$

Al sustituir $\dot{\mathbf{q}}_a$ de (2.10) en (2.6), y $\dot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p}$ de (2.2), produce

$$\mathbf{p}_a = T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})\mathbf{p} - M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\boldsymbol{\phi}}(t), \quad (2.11)$$

$$T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}) = M_a(\mathbf{q}_a)W(\mathbf{q})M(\mathbf{q})^{-1} \quad (2.12)$$

con rango($T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})$) = n . Con el fin de tratar la entrada de perturbación de par $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^m$, se introduce la siguiente definición inspirada en [31],

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \hat{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\delta}, \quad (2.13)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\delta}} \in \mathbb{R}^m$ es la perturbación estimada, que se calcula mediante un observador no lineal que se mostrará más adelante. Además, una función escalar se define convenientemente como

$$\mathcal{S}_a(\boldsymbol{\xi}_a) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_a^T \boldsymbol{\xi}_a \quad (2.14)$$

siendo $\boldsymbol{\xi}_a \in \mathbb{R}^n$ un vector apropiado dado por

$$\boldsymbol{\xi}_a = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\delta}} \\ \mathbf{0}_{n-m} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

La matriz de inyección de amortiguación $\mathcal{D}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz semidefinida positiva simétrica. Para simplificar, de ahora en adelante se denotará:

$$\begin{aligned} M &= M(\mathbf{q}), & M_a &= M_a(\mathbf{q}_a), & H &= H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \\ \mathcal{U} &= \mathcal{U}(\mathbf{q}), & \mathcal{H}_a &= \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a), & \mathcal{U}_a &= \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a), \\ T_a &= T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}), & \mathcal{D}_a &= \mathcal{D}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a), & \mathcal{S}_a &= \mathcal{S}_a(\boldsymbol{\xi}_a), \\ W &= W(\mathbf{q}), & G^\perp &= G^\perp(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

2.2.2. Formulación del problema de control

El problema de control consiste en diseñar una entrada de control \mathbf{u} en (2.3) tal que se obtenga el siguiente sistema de lazo cerrado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \boldsymbol{\xi}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & -\mathcal{D}_a & -\mathcal{A} \\ 0_{n \times n} & \mathcal{A}^T & -\mathcal{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a \\ \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a \\ \nabla_{\boldsymbol{\xi}_a} \mathcal{S}_a \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

donde \mathcal{H}_a es una función diferenciable cuya estructura fue definida en (2.4), y ϵ_o es una constante estrictamente positiva apropiada. Las matrices \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen dimensión $n \times n$, ambas definidas de la siguiente manera

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} T_a G & \vdots & 0_{n \times (n-m)} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \epsilon_o G^T W M^{-1} G & \vdots & 0_{n \times (n-m)} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

Comentario 1. Dado que hemos considerado las perturbaciones solo en las m articulaciones actuadas (donde están presentes las entradas de control), el vector observador $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ debe ser de dimensión $m < n$. Por lo tanto, para reescribir (2.16) como una descripción de tipo hamiltoniano con dimensión $2n + m$, se necesitan las matrices \mathcal{A} y \mathcal{B} que se han definido convenientemente en (2.17) y (2.18) respectivamente. De (2.16), podemos verificar que las últimas $n - m$ filas de $\dot{\boldsymbol{\xi}}_a$ son cero. Como ejemplo de notación mostrada en (2.17), sean $n = 2$ y $m = 1$, con matrices arbitrarias

$$T_a = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Entonces, obtenemos

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} T_a G & \vdots & 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ b_4 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A}^T = \begin{bmatrix} b_2 & b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El mismo proceso se aplica para (2.18).

Al tener en cuenta (2.17)-(2.18) en (2.16) y simplificar (2.16), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \tilde{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{p_a} \mathcal{H}_a \\ -\nabla_{q_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{p_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\boldsymbol{\delta}} \\ G^T T_a^T \nabla_{p_a} \mathcal{H}_a - \epsilon_0 G^T W M^{-1} G \tilde{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Observe que (2.19) es un sistema no autónomo porque la variable \mathbf{q} aparece en el lado derecho de la matriz M , y de la definición de (2.5), da como resultado que $\mathbf{q}(t)$ es una función variable en el tiempo para cualquier función arbitraria de tiempo variable $\phi(t)$. Para perturbaciones constantes, el origen del espacio de estados $[\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{p}_a^T \ \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T]^T = \mathbf{0}_{2n+m}$ es un punto de equilibrio aislado del sistema de lazo cerrado deseado.

2.2.3. Observador no lineal

A continuación, introducimos la definición de $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ de (2.13) como

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = G^T [\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a)] \quad (2.20)$$

es decir, $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ depende de funciones vectoriales $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$. De la derivada temporal de (2.13) se obtiene

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}} = \dot{\boldsymbol{\delta}}. \quad (2.21)$$

Usando la definición (2.20) y reemplazando en la segunda fila (2.16), que se obtiene de (2.21)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\delta}} &= G^T [\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\nabla_{p_a} \boldsymbol{\beta}] \dot{\mathbf{p}}_a], \\ &= G^T \left[\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\nabla_{p_a} \boldsymbol{\beta}] \left[-\nabla_{q_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{p_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\boldsymbol{\delta}} \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

La selección de $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ y $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a)$ son cruciales para el análisis de estabilidad del sistema de lazo cerrado, ya sea (2.19). A continuación, para obtener la tercera fila de (2.19) de (2.22), la derivada temporal

de la función vectorial $\boldsymbol{\gamma}$ debe satisfacer

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\nabla_{\mathbf{p}_a} \boldsymbol{\beta}] [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a] + M^{-1} W \mathbf{p}_a. \quad (2.23)$$

Sustituyendo (2.23) en (2.22), obtenemos:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = G^T \left[M^{-1} W \mathbf{p}_a - [\nabla_{\mathbf{p}_a} \boldsymbol{\beta}] T_a G \tilde{\boldsymbol{\delta}} \right] \quad (2.24)$$

Finalmente, la función vectorial $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a)$ está definida por

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a) = \epsilon_0 \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = \epsilon_0 M_a^{-1} \mathbf{p}_a. \quad (2.25)$$

Sustituyendo (2.25) en (2.24) y reorganizando, se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = G^T M^{-1} W \mathbf{p}_a - \epsilon_0 G^T W M^{-1} G \tilde{\boldsymbol{\delta}} \quad (2.26)$$

Entonces (2.26) corresponde a la tercera fila de (2.19).

A continuación, una matriz que juega un papel importante en la ley de control del diseño es el aniquilador izquierdo de rango completo de $G(\mathbf{q})$, definido como $G^\perp(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$, tal que,

$$G^\perp(\mathbf{q})G(\mathbf{q}) = 0_{(n-m) \times m} \quad (2.27)$$

2.2.4. Ley de control

La ley de control que resuelve el problema de control formulado en la Sección 2.2.2 se presenta a continuación:

Proposición 1. *Considere el modelo dinámico (2.3) con (2.1) y (2.2). Donde M_a , \mathcal{U}_a y $\boldsymbol{\phi}(t)$ sean soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP)*

$$G^\perp \left[\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - T_a^{-1} [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a] - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) + M_a \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) \right] = \mathbf{0}_{n-m}, \quad (2.28)$$

luego, el sistema de circuito cerrado deseado (2.19) se logra mediante la ley de control de retroalimentación

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{es} + \mathbf{u}_{di} - \hat{\boldsymbol{\delta}}, \quad (2.29)$$

donde

$$\mathbf{u}_{es} = [G^T G]^{-1} G^T \left[\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - T_a^{-1} \left[\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \dot{T}_a \mathbf{p} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t) \right] \right], \quad (2.30)$$

$$\mathbf{u}_{di} = - [G^T G]^{-1} G^T \left[T_a^{-1} \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a \right], \quad (2.31)$$

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = G^T [\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a)], \quad (2.32)$$

siendo \mathbf{u}_{es} y \mathbf{u}_{di} las acciones de control llamadas conformación de energía e inyección de amortiguación, respectivamente, y $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ es el vector de perturbación estimado, donde $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ se calcula a partir de (2.23) y $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a)$ se ha definido en (2.25).

Demostración. La derivada temporal de \mathbf{p}_a en (5.49) produce

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{T}_a \mathbf{p} + T_a \dot{\mathbf{p}} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t). \quad (2.33)$$

Sustituyendo \mathbf{p} de (2.2) en (2.33) resulta

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{T}_a \mathbf{p} + T_a [-\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + G[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}]] - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t), \quad (2.34)$$

Igualando $\dot{\mathbf{p}}_a$ de (2.33) con (2.19) obtenemos

$$T_a [-\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + G[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}]] = -\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\boldsymbol{\delta}} - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\phi}(t) + M_a \ddot{\phi}(t) \quad (2.35)$$

la cual puede ser escrita como

$$G[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}] = -T_a^{-1} \left[\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a + T_a G \tilde{\boldsymbol{\delta}} - T_a G \tilde{\boldsymbol{\delta}} + \dot{T}_a \mathbf{p} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t) \right] + \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} \quad (2.36)$$

Multiplicando ambos lados por la ecuación (2.36) por la matriz invertible $\begin{bmatrix} G^\perp \\ G^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, resulta

$$\begin{bmatrix} G^\perp \\ G^T \end{bmatrix} G[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}] = \begin{bmatrix} G^\perp \\ G^T \end{bmatrix} \left[-T_a^{-1} \left[\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\boldsymbol{\delta}} - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\phi}(t) + M_a \ddot{\phi}(t) \right] + \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} \right]. \quad (2.37)$$

y algunos cálculos conducen a la PDE definida en (2.28):

$$G^\perp \left[\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - T_a^{-1} \left[\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\phi}(t) + M_a \ddot{\phi}(t) \right] \right] = \mathbf{0}_{n-m}, \quad (2.38)$$

y la ley de control (2.29), eso es,

$$\mathbf{u} = [G^T G]^{-1} G^T \left[\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - T_a^{-1} \left[\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) + M_a \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) \right] \right] - \tilde{\boldsymbol{\delta}}. \quad (2.39)$$

Así, la ley de control (2.39) está compuesta por M_a , \mathcal{U}_a y $\boldsymbol{\phi}(t)$ soluciones de (2.38). Sin embargo, a primera vista, no es obvio obtener directamente la segunda fila en (2.19) simplemente sustituyendo (2.39) en (2.3). La razón se basa en la matriz G , porque no es invertible. Por lo tanto, es necesario desarrollar (2.37) y encontrar soluciones en (2.38) tales que (2.39) sea válida, para lo cual se requiere que (ver (2.33) y (2.35)):

$$\dot{\mathbf{p}}_a = -\nabla_{\mathbf{q}_a} H_a - D_a \nabla_{\mathbf{p}_a} H_a - T_a G \tilde{\boldsymbol{\delta}}. \quad (2.40)$$

A continuación, de (2.4), se puede obtener

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a &= \nabla_{\mathbf{p}_a} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T M_a^{-1} \mathbf{p}_a + \mathcal{U}_a \right), \\ &= M_a^{-1} \mathbf{p}_a. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De la definición $\mathbf{p}_a = M_a \dot{\mathbf{q}}_a$ en (2.6), entonces \mathbf{p}_a al sustituirlo en (2.41) resulta

$$\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = \dot{\mathbf{q}}_a. \quad (2.42)$$

Finalmente, concluimos que (2.40) y (2.42) corresponden a las dos primeras filas de (2.19), y la tercera fila de (2.19) fue demostrada previamente en (2.26). Esto completa la prueba de la Proposición 1. \square

Comentario 2. *En general, una o ambas soluciones M_a y \mathcal{U}_a en (2.28), su propiedad de positividad es local, de modo que el análisis se limita solo a la estabilidad asintótica local. Finalmente, aunque resolver el conjunto de EDP en (2.28) es todo un desafío, los capítulos 4 y 5 muestra dos ejemplos donde es posible tener una solución.*

Comentario 3. *Una forma alternativa de evitar resolver el conjunto de PDE en (2.28) es obtener las condiciones de equivalencia entre nuestro enfoque de modelado energético propuesto y la metodología IDA-PBC publicada en [14]. Específicamente, un controlador IDA-PBC se puede escribir de manera equivalente como la suma de \mathbf{u}_{es} más \mathbf{u}_{di} que se muestra en (2.30)-(2.31). Esta equivalencia está más allá del alcance del presente trabajo y puede abordarse como trabajo futuro.*

2.3. Regulación de posición de una clase de sistemas mecánicos subactuados bajo perturbaciones constantes

Consideremos el modelo de sistema mecánico subactuado (2.3) afectado por un vector de entradas de perturbación constante desconocida δ . Sean $\alpha(\mathbf{q}) = K\mathbf{q}$ y $\phi(t) = K\mathbf{q}_d$ las variables seleccionadas, donde K es una matriz constante diagonal y \mathbf{q}_d es el vector de posiciones constantes deseadas. El objetivo de control es conseguir que las posiciones conjuntas del sistema mecánico subactuado \mathbf{q} sigan asintóticamente las trayectorias de posición deseadas \mathbf{q}_d , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d] = \mathbf{0}_n, \quad (2.43)$$

para cualquier configuración inicial $(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$ del sistema mecánico subactuado cerca del equilibrio deseado.

Por otro lado, como criterio de diseño en este trabajo existe el interés de lograr lo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{\delta}(t) - \delta] = \mathbf{0}_m. \quad (2.44)$$

2.4. Análisis de estabilidad

A continuación, se presenta un enfoque basado en el análisis de estabilidad para garantizar la estabilidad asintótica en el origen, siguiendo los pasos del teorema de Barbashin-Krasovskii. Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\mathcal{V}_L = \mathcal{H}_a + \mathcal{S}_a, \quad (2.45)$$

donde \mathcal{H}_a se encuentra definida en (2.4) y \mathcal{S}_a se obtiene al desarrollar (2.14) como se muestra a continuación

$$\mathcal{S}_a = \frac{1}{2} \tilde{\delta}^T \tilde{\delta}. \quad (2.46)$$

Al aplicar la derivada temporal a lo largo de (2.19), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_L &= \dot{\mathcal{H}}_a + \dot{\mathcal{S}}_a, \\ &= [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a]^T \dot{\mathbf{q}}_a + [\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a]^T \dot{\mathbf{p}}_a + \tilde{\delta}^T \dot{\tilde{\delta}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Remplazando los elementos correspondientes de (2.19) en (2.47), el desarrollo para $\dot{\mathcal{V}}_L$ es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{V}}_L &= [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a]^T \dot{\mathbf{q}}_a + [\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a]^T \dot{\mathbf{p}}_a + \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\delta}}}, \\
&= \cancel{[\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a]^T [\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a]}^{\textcircled{1}} + [\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a]^T \left[\cancel{-\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a}^{\textcircled{1}} - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{T}_a^T G \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\textcircled{2}} \right] \\
&\quad + \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T \left[\cancel{G^T \mathcal{T}_a^T \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a}^{\textcircled{2}} - \epsilon_0 G^T W M^{-1} G \tilde{\boldsymbol{\delta}} \right], \\
&= [\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a]^T [-\mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a] + \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T [-\epsilon_0 G^T W M^{-1} G \tilde{\boldsymbol{\delta}}]. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

desarrollamos la expresión vista en (2.48) considerando (2.41), por lo tanto, $\dot{\mathcal{V}}_L$ se define como:

$$\dot{\mathcal{V}}_L = -\mathbf{p}_a^T M_a^{-1} \mathcal{D}_a M_a^{-1} \mathbf{p}_a - \epsilon_0 \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T G^T W M^{-1} G \tilde{\boldsymbol{\delta}}. \tag{2.49}$$

con esto podemos apreciar que (2.49) es una función semidefinida negativa, cumpliendo así con los criterios establecidos por la teoría de Lyapunov. Debido a que no se puede desarrollar (2.49) de tal forma que se obtenga una única expresión que aplique para todos los sistemas presentados a lo largo de este trabajo, para garantizar estabilidad asintótica se tendrá que desarrollar (2.49) para cada caso particular.

Capítulo 3

Servo Quanser SRV02

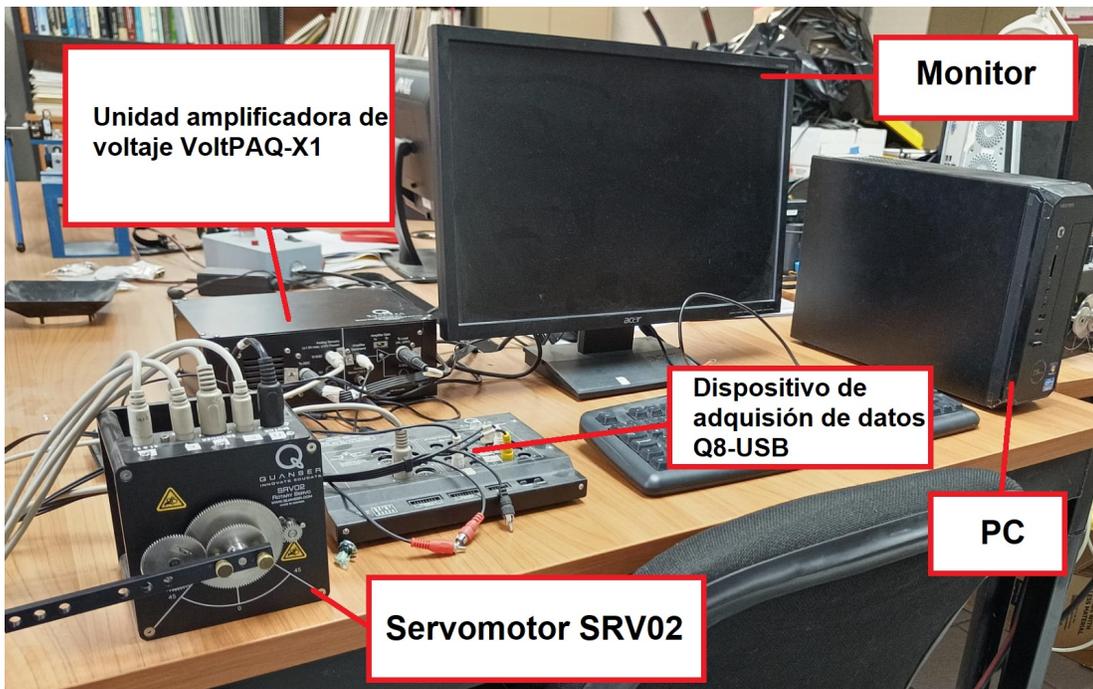


Figura 3.1: Equipo utilizado para las pruebas experimentales del Servomotor Quanser SRV02

Para aplicar la metodología mencionada anteriormente en el capítulo 2, se utilizó un sistema completamente actuado debido a su simplicidad por tener un solo grado de libertad; específicamente, se empleó el servo motor SRV02 de Quanser. En el ámbito del control de sistemas dinámicos, es fundamental poder comprender y manipular el comportamiento de sistemas físicos complejos. En este contexto, el Quanser SRV02, mostrado en la (3.1), emerge como una herramienta invaluable al proporcionar una plataforma versátil y precisa para la experimentación y el aprendizaje en el campo del control en tiempo real.

Este sistema ofrece la oportunidad de explorar los principios fundamentales de la dinámica de

sistemas oscilantes en un entorno controlado y repetible. Al manipular variables como la longitud de la cuerda y la masa del péndulo, los usuarios pueden estudiar cómo diversos parámetros afectan el movimiento y la estabilidad del péndulo.

Para comprender mejor la dinámica del sistema estudiado, se presenta el siguiente diagrama de cuerpo libre.

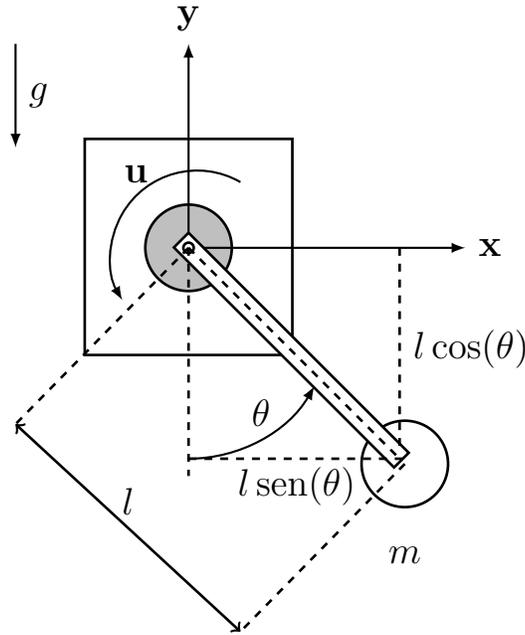


Figura 3.2: Diagrama del sistema SRV02

3.1. Modelo dinámico

La dinámica de los sistemas mecánicos puede ser descrita mediante la suma de su energía potencial y energía cinética. Esta expresión matemática se denomina hamiltoniano, como se vio en la ecuación (2.1) en el capítulo 2. Para el caso del sistema completamente actuado mostrado en la Figura 3.2, se realizará un análisis detallado para obtener el modelo dinámico en la formulación hamiltoniana. Cabe aclarar que en los siguientes sistemas que se abarcaran en este trabajo tendrá un ligero cambio en el enfoque para obtener dicho modelo dinámico en la formulación hamiltoniana.

A partir de la Figura 3.2 podemos expresar las siguientes coordenadas generalizadas.

$$q = \theta, \dot{q} = \dot{\theta} \quad (3.1)$$

donde q y \dot{q} son los vectores de posición y velocidad respectivamente. Para poder desarrollar la dinámica de este sistema en términos de su energía cinética y potencial, es necesario conocer de primera instancia las posiciones de los centros de masas y sus respectivas velocidades, estas mismas pueden ser descritas como $\mathbf{d}_c \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{V}_c \in \mathbb{R}^3$ respectivamente, las cuales cuentan con la siguiente estructura:

$$\mathbf{d}_c = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{V}_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.3)$$

Para este caso $z_m = 0$ y $\dot{z}_m = 0$ de (3.2) y (3.3) respectivamente, esto debido a que el desplazamiento del péndulo es únicamente en 2 dimensiones. Ahora, con lo visto en la Figura 3.2 podemos determinar las posiciones de los centros de masa, las cuales se expresan como:

$$x_m = l \sin(\theta), \quad (3.4)$$

$$y_m = l \cos(\theta). \quad (3.5)$$

A partir las posiciones de los centros de masa expresados en (3.4) y (3.5) podemos obtener las velocidades de estos mismos, lo cual nos queda

$$\dot{x}_m = l \cos(\theta)\dot{\theta}, \quad (3.6)$$

$$\dot{y}_m = l \sin(\theta)\dot{\theta}. \quad (3.7)$$

La energía cinética y energía potencial pueden ser descritas mediante las siguientes ecuaciones.

$$E_c = \frac{1}{2}m\|\mathbf{V}_c\|^2, \quad (3.8)$$

$$E_p = m\vec{g}^T \mathbf{d}_c. \quad (3.9)$$

donde $\vec{g}^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de fuerza gravitacional, expresado como,

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.10)$$

y $\|\mathbf{V}_c\|^2$ es la norma al cuadrado del vector de velocidades del centro de masas, la cual puede expresarse como:

$$\|\mathbf{V}_c\|^2 = \mathbf{V}_c^T \mathbf{V}_c. \quad (3.11)$$

por lo tanto (3.8) puede reescribirse como:

$$E_c = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_c^T \mathbf{V}_c. \quad (3.12)$$

Ahora se procede a desarrollar (3.12) y (3.9) considerando lo anteriormente visto. La energía cinética se desarrolla como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m \mathbf{V}_c^T \mathbf{V}_c, \\ &= \frac{1}{2} m \begin{bmatrix} l \cos(\theta) \dot{\theta} & l \operatorname{sen}(\theta) \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \cos(\theta) \dot{\theta} \\ l \operatorname{sen}(\theta) \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} m \left(l \cos(\theta) \dot{\theta} \right)^2 + \left(l \operatorname{sen}(\theta) \dot{\theta} \right)^2, \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \left(\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) \right), \end{aligned}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2. \quad (3.13)$$

siguiendo con la energía potencial vista en (3.9) el desarrollo es el siguiente

$$\begin{aligned} E_p &= m \vec{g}^T \mathbf{d}_c, \\ &= m \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \operatorname{sen}(\theta) \\ -l \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &= m [-gl \cos(\theta)], \end{aligned}$$

$$E_p = -mgl \cos(\theta). \quad (3.14)$$

Entonces, aplicando lo visto en (2.2) y (3.1) en los resultados obtenidos de las ecuaciones (3.13) y (3.14), podemos expresar la energía cinética y potencial en términos de la posición y cantidad de momento \mathbf{q} y \mathbf{p} , lo cual nos quedaría como

$$E_c = \frac{p^2}{2ml^2}, \quad (3.15)$$

$$E_p = -mgl \cos(q). \quad (3.16)$$

En este punto, podemos desarrollar la expresión vista en (2.1) y para expresar la dinámica del péndulo mediante la formulación hamiltoniana, como se muestra a continuación.

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2ml} - mgl \cos(q). \quad (3.17)$$

La expresión (3.17) es un elemento fundamental para poder obtener el modelo dinámico. Como siguiente paso, se desarrolla lo visto en (2.3) para el caso totalmente actuado, como se muestra a continuación.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q \mathcal{H}(q, p) \\ \nabla_p \mathcal{H}(q, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u + \delta]. \quad (3.18)$$

Por último, considerando (3.17) calculamos los gradientes correspondientes de (3.18), lo cual nos conduce al siguiente modelo dinámico.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{ml^2} \\ -mgl \sin(q) + u + \delta \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

3.2. Observador no lineal

El observador no lineal es un elemento crucial para el desarrollo de este trabajo, ya que, será el responsable de estimar el valor de la perturbación δ y amortiguar sus efectos. La estructura de dicho elemento fue plasmada previamente en el capítulo 2 en la ecuación (2.20). Ahora, desarrollamos el elemento $\dot{\gamma}$ visto en (2.23) siendo γ solución de este elemento. A partir de

(2.23) y considerando (2.25) se desarrolla de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma} &= [\nabla_{p_a} [\epsilon_0 M_a^{-1} p_a]] [\nabla_{q_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{p_a} \mathcal{H}_a] + M^{-1} W p_a, \\
&= [\epsilon_0 M_a^{-1}] [\nabla_{q_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{p_a} \mathcal{H}_a] + M^{-1} W p_a, \\
&= \epsilon_0 [M_a^{-1} \nabla_{q_a} \mathcal{H}_a + M_a^{-1} \mathcal{D}_a \nabla_{p_a} \mathcal{H}_a] + M^{-1} W p_a.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

con \mathcal{H}_a definida anteriormente en (2.4). donde M_a para el caso totalmente actuado corresponde a un valor estrictamente positivo, $M = ml^2$ definida anteriormente en (3.19), $W = 1$, $\mathcal{D}_a = k_v$ y $\mathcal{U}_a(q_a) = \frac{1}{2} k_p q_a^2$ para este caso particular, al ser un equipo totalmente actuado, es decir, donde el número de actuadores es igual al número de grados de libertad $m = n$, por lo tanto, \mathcal{H}_a se puede reescribir como:

$$\mathcal{H}_a(q_a, p_a) = \frac{1}{2} M_a^{-1} p_a^2 + \frac{1}{2} k_p q_a^2. \tag{3.21}$$

desarrollando (3.20), y considerando (3.21) la estructura de $\dot{\gamma}$ queda:

$$\dot{\gamma} = \epsilon_0 [M_a^{-1} k_p q_a + M_a^{-1} k_v M_a^{-1} p_a] + M^{-1} p_a. \tag{3.22}$$

3.3. Diseño del control robusto

A partir de (2.39), podemos desarrollar la ley de control para este sistema, esto mismo considerando que $G = 1$ (ya que nuestro sistema de estudio está conformado por un actuador y cuenta con un solo grado de libertad), $\alpha(q) = q$, $\phi(t) = q_d$ donde q_d es una constante, por lo tanto, $\dot{\phi}(t) = 0$, entonces (2.39) se reescribe como:

$$\mathbf{u} = \nabla_q \mathcal{H} - T_a^{-1} [\nabla_{q_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{p_a} \mathcal{H}_a] - \hat{\delta}. \tag{3.23}$$

considerando que $T_a = M_a M^{-1}$ y $D_a = k_v$, se desarrolla (3.23) como se muestra a continuación

$$u = -mgl \operatorname{sen}(q) - M_a M^{-1} [k_p q_a + k_v M_a^{-1} p_a] - \hat{\delta}. \tag{3.24}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{\delta} &= G^T [\gamma + \epsilon_0 M_a^{-1} p_a], \\
\dot{\gamma} &= \epsilon_0 [M_a^{-1} k_p q_a + M_a^{-1} k_v M_a^{-1} p_a] + M^{-1} p_a.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

3.4. Análisis de estabilidad

Sustituimos la ley de control vista en (3.24)-(3.22) en (2.3) considerando el cambio de coordenadas visto en (2.5) y (2.6), por lo tanto, el sistema en lazo cerrado es el siguiente.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_a \\ p_a \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_a^{-1} p_a \\ -k_p q_a - k_v M_a^{-1} p_a - M_a M^{-1} \tilde{\delta} \\ M_a M^{-1} M_a^{-1} p_a - \epsilon_0 M^{-1} \tilde{\delta} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Se puede comprobar que el origen es el único punto de equilibrio de interés, definido como:

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} q_a & p_a & \tilde{\delta} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}. \quad (3.27)$$

Considerando lo visto en la Sección 2.4, se desarrolla el análisis de estabilidad correspondiente para garantizar estabilidad asintótica localmente, siendo el origen como un punto de equilibrio de interés. Retomando la función candidata de Lyapunov vista en (2.45)

$$\mathcal{V}_L = \mathcal{H}_a + \mathcal{S}_a,$$

donde \mathcal{S}_a vista en (2.46) para este caso particular se expresa como:

$$\mathcal{S}_a = \frac{1}{2} \tilde{\delta}^2. \quad (3.28)$$

Transformando $\dot{\mathcal{V}}_L$ de (2.49) considerando que $G = 1$ y $W = 1$ y que tanto p_a como $\tilde{\delta}$ son valores escalares, se obtiene que:

$$\dot{\mathcal{V}}_L = -k_v M_a^{-2} p_a^2 - \epsilon_0 M^{-1} \tilde{\delta}^2. \quad (3.29)$$

siguiendo los pasos del teorema de Barbashin-Krasovskii, se evalúa $\dot{\mathcal{V}}_L = 0$, por lo tanto (3.29) queda

$$-k_v M_a^{-2} p_a^2 - \epsilon_0 M^{-1} \tilde{\delta}^2 = 0. \quad (3.30)$$

Nótese que $\dot{\mathcal{V}}_L = 0$ de (3.30) solo se cumple si

$$p_a = 0, \quad (3.31)$$

$$\tilde{\delta} = 0. \quad (3.32)$$

Ahora, sustituyendo (3.31) y (3.32) en la malla en lazo cerrado vista en (3.26), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_a \\ p_a \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_p q_a \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Al analizar la ecuación (3.33) se puede apreciar que $\dot{p}_a = -k_p q_a$, considerando (3.31) podemos demostrar que para asegurar estabilidad asintótica localmente, se debe tener $q_a = 0$ ya que $p_a = 0$, por lo tanto, $\dot{p}_a = 0$, lo cual garantiza estabilidad asintótica en un sentido local, donde el origen es el único punto de equilibrio.

3.5. Resultados experimentales

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos a través de las pruebas experimentales realizadas con el sistema Servo Quanser SRV02. Utilizando la herramienta MatLab y simulink se realizaron los diagramas correspondientes al modelo dinámico visto en (3.19), la ley de control (3.24) y el observador no lineal (3.25). Los parámetros, las ganancias y la perturbación aplicada se encuentran en las tablas 3.1-3.3.

Parámetro	Valor [Unidad]
m	0.038 [kg]
l	0.1525 [m]
g	9.81 [m/s ²]
J_m	3.90×10^{-7} [kg · m ²]
R_a	2.6 [Ω]
K_a	7.68×10^{-3} [Nm/A]
K_b	7.68×10^{-3} [Vs/rad]
r	70

Tabla 3.1: Parámetros del Servomotor SRV02

Ganancias	Valor
k_p	15
k_v	2.65
M_a	0.05
ϵ_0	0.40

Tabla 3.2: Valores de las ganancias del Servomotor SRV02

Perturbación	Valor [Unidad]
δ	0.4 [Nm]

Tabla 3.3: Valor de la perturbación

El método de integración utilizado para esta serie de experimentos fue ODE23, con un error de tolerancia de 1×10^{-3} , el tiempo de experimento fue de 15[s] y la perturbación $\delta = 0.4$ [Nm] fue aplicada a los 7 [s] del experimento. A continuación se muestran los resultados obtenidos.

3.5.1. Ley de control en términos del voltaje

Para poder expresar la ley de control $u(t)$, afectada por una perturbación de par δ , en términos del voltaje, nos basamos en el desarrollo realizado en [32]. Del cual se puede extraer lo siguiente

$$\frac{K_a}{rR_a}v = J_m\ddot{q} + \frac{K_aK_b}{R_a}\dot{q} + \frac{\tau}{r^2} \quad (3.34)$$

Las constantes vista en (3.34) se encuentran descritas en la tabla 3.4 que se muestra a continuación

Símbolo	Descripción	Unidad
J_m	Inercia del rotor	$kg \cdot m^2$
R_a	Resistencia de armadura	Ω
K_a	Constante motor-par	Nm/A
K_b	Constante de contrareacción electromotriz	Vs/rad
r	Relación de reducción de engranes (en general $r \gg 1$)	

Tabla 3.4: Descripción de los parámetros del motor CC

El desarrollo visto en (3.34), fue realizando utilizando la formulación lagrangiana, en donde \dot{q} y \ddot{q} representan la velocidad y aceleración respectivamente. Donde para este caso particular τ se describe como

$$\tau = u + \delta. \quad (3.35)$$

Por lo tanto, (3.34) se reescribe como

$$\frac{K_a}{rR_a}v = J_m\ddot{q} + \frac{K_aK_b}{R_a}\dot{q} + \frac{u + \delta}{r^2} \quad (3.36)$$

o en su equivalencia en términos del vector de estados $\begin{bmatrix} \dot{q} & \ddot{q} \end{bmatrix}^T$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{J_m} \left[\frac{K_a}{rR_a} v - \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} - \frac{u + \delta}{r^2} \right] \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Por lo cual, del trabajo de [32] para un robot manipulador de n grados de libertad sin considerar fricción viscosa, puede ser representado con la siguiente ecuación

$$M(q)\ddot{q} + g(q) = u + \delta \quad (3.38)$$

Para trasladar este desarrollo a la formulación hamiltoniana, retomamos lo anteriormente visto en (2.2) y aplicamos la derivada temporal, lo cual nos queda

$$\dot{p} = M(q)\ddot{q} \quad (3.39)$$

Aplicando (3.39) en la segunda fila de (3.37), obtenemos

$$\dot{p} = \frac{M(q)}{J_m} \left[\frac{K_a}{rR_a} v - \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} - \frac{u + \delta}{r^2} \right] \quad (3.40)$$

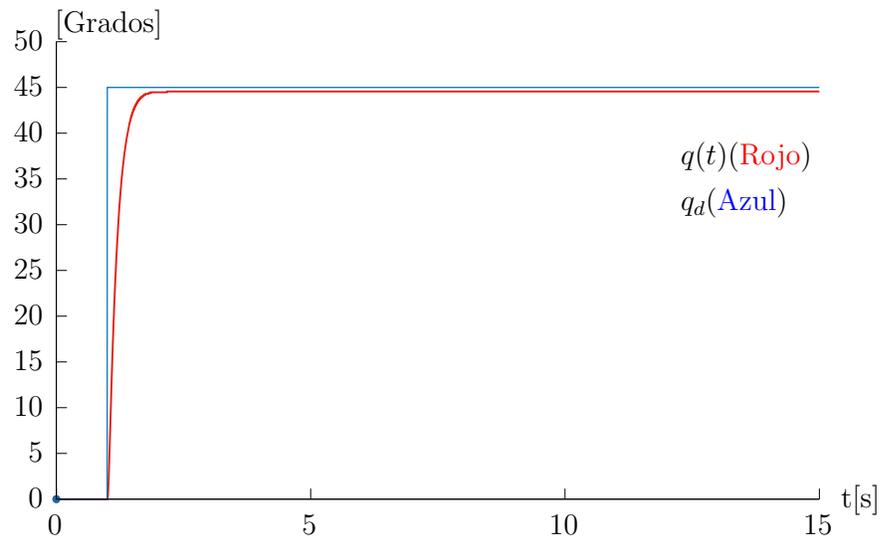
Sustituyendo (3.39) en (3.38), obtenemos que

$$\dot{p} + g(q) = u + \delta \quad (3.41)$$

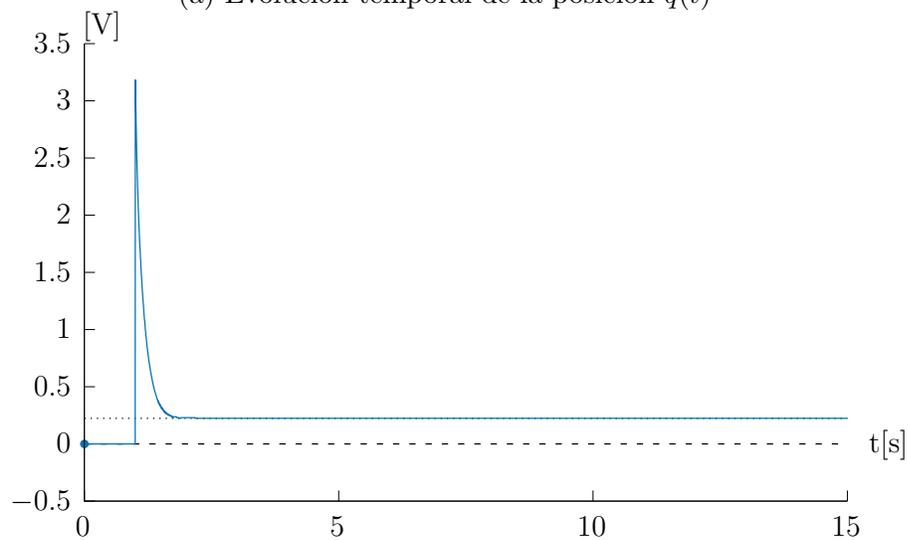
Despejando v de (3.40) considerando (3.41), nuestra ley de control en términos del voltaje queda como

$$v = \frac{rR_a}{K_a} \left[\frac{J_m}{M(q)} [u + \delta - g(q)] + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{u + \delta}{r^2} \right] \quad (3.42)$$

3.5.2. SRV02: Análisis del péndulo sin observador no lineal y sin perturbación δ



(a) Evolución temporal de la posición $q(t)$



(b) Entrada de control $u(t)$

Figura 3.3: Evolución temporal de la posición $q(t)$ y entrada de control $u(t)$

En la Figura 3.3 en la gráfica (3.3a) se observa cómo se logra el objetivo de control definido en (2.43). Esto se debe a que la evolución temporal de $q(t)$ (apreciada en rojo) converge hacia la posición deseada q_d . En la gráfica (3.3b) vemos el comportamiento de la entrada de control $u(t)$ definida previamente en (3.24). Después de recibir un impulso inicial de voltaje en el segundo 1, este valor se estabiliza con el tiempo en un valor constante, indicando que se ha alcanzado la posición correspondiente.

3.5.3. SRV02: Análisis del péndulo con observador no lineal y sin perturbación δ

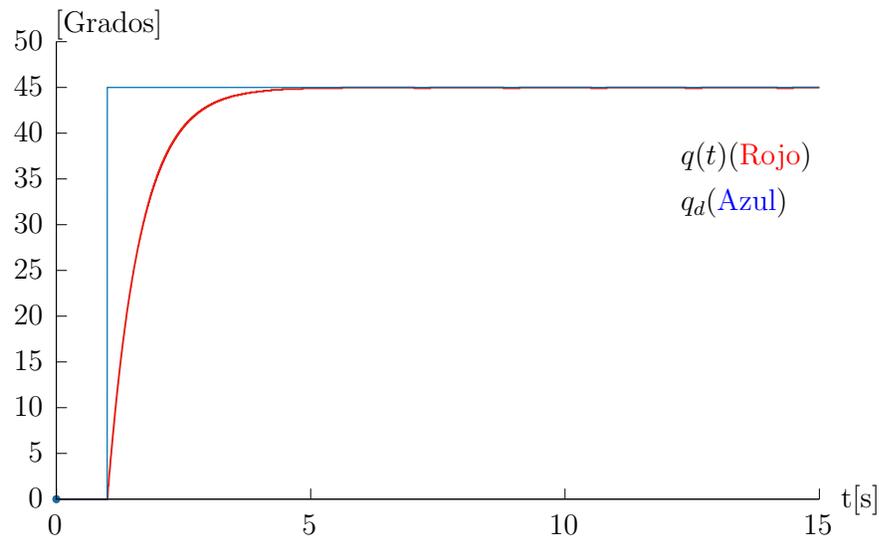
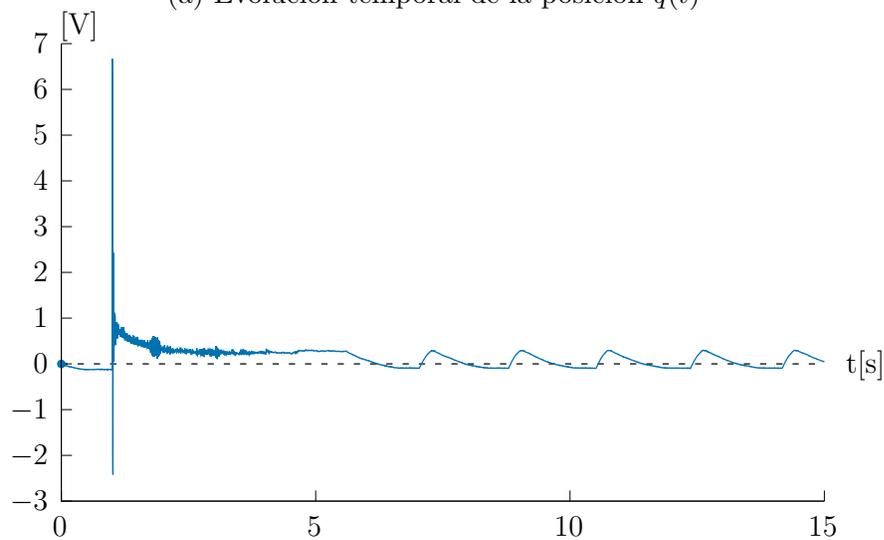
(a) Evolución temporal de la posición $q(t)$ (b) Entrada de control $u(t)$ de (3.24)

Figura 3.4: Evolución temporal de la posición $q(t)$ y entrada de control $u(t)$ al implementar el observador no lineal $\hat{\delta}$

La Figura 3.4 ilustra la evolución temporal de $q(t)$ y la entrada de control $u(t)$ al añadir el observador no lineal $\hat{\delta}$ visto en (3.25). Se observa que la gráfica (3.4a) muestra un mejor rendimiento al alcanzar el objetivo de control descrito en (2.43) en comparación a la gráfica vista en (3.3a). En la gráfica (3.4b) la entrada de control no se estabiliza en un valor constante, sino que oscila cerca de cero. Esto implica que la posición $q(t)$ oscila alrededor de la posición deseada q_d para cumplir con el objetivo de control.

3.5.4. SRV02: Análisis del péndulo sin observador no lineal y con perturbación δ

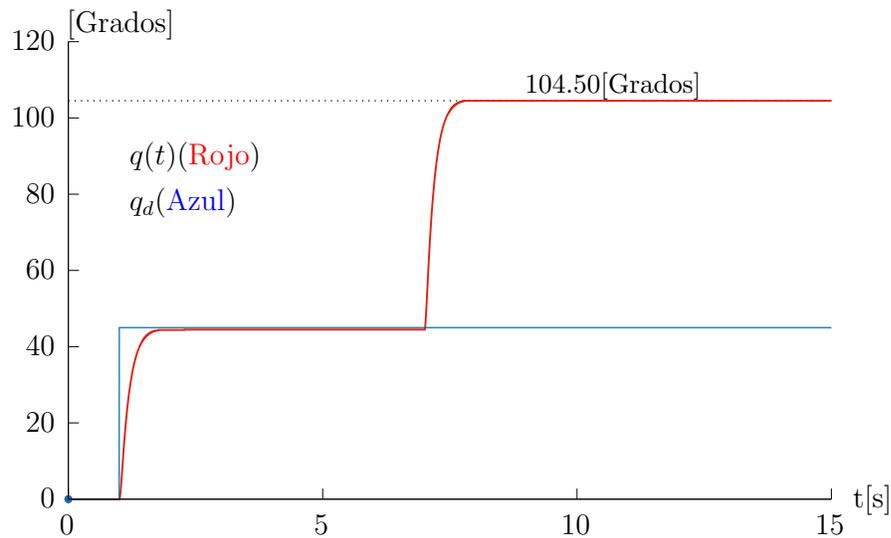
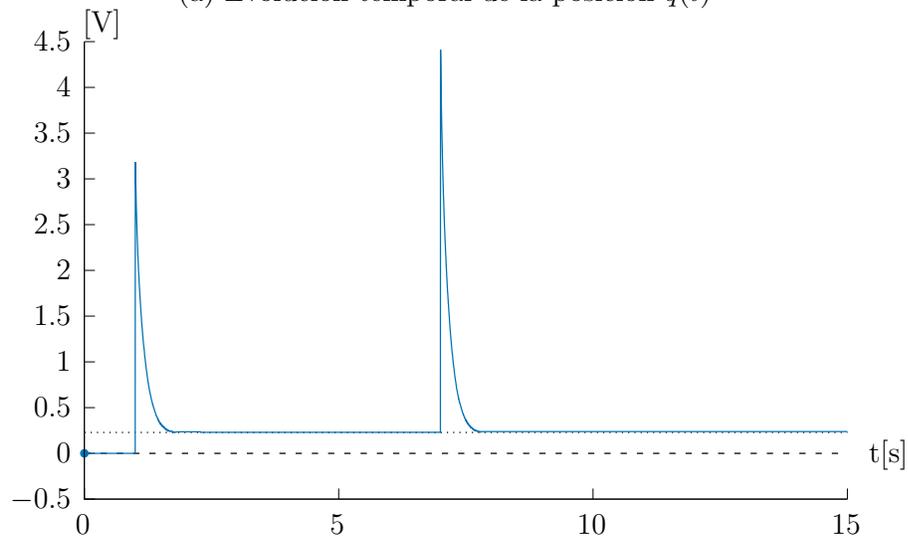
(a) Evolución temporal de la posición $q(t)$ (b) Entrada de control $u(t)$ de (3.24)

Figura 3.5: Evolución temporal de la posición $q(t)$ y entrada de control $u(t)$ al implementar la perturbación $\delta = 0.4[\text{Nm}]$

La Figura 3.5 ilustra los efectos adversos de una perturbación constante. En la gráfica (3.5a) nos muestra como la presencia de la perturbación constante δ impide el cumplimiento del objetivo de control establecido en (2.43) debido a que la perturbación causa una marcada discrepancia entre $q(t)$ y la posición deseada q_d . La entrada de control representada en la gráfica (3.5b) muestra un segundo impulso causado por la perturbación constante, seguido por una estabilización del voltaje en un valor constante.

3.5.5. SRV02: Análisis del péndulo con observador no lineal y con perturbación δ

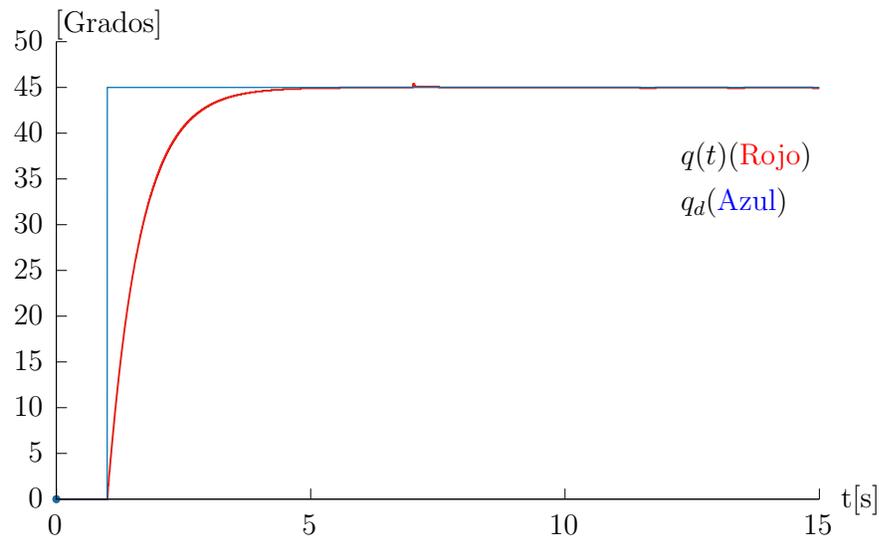
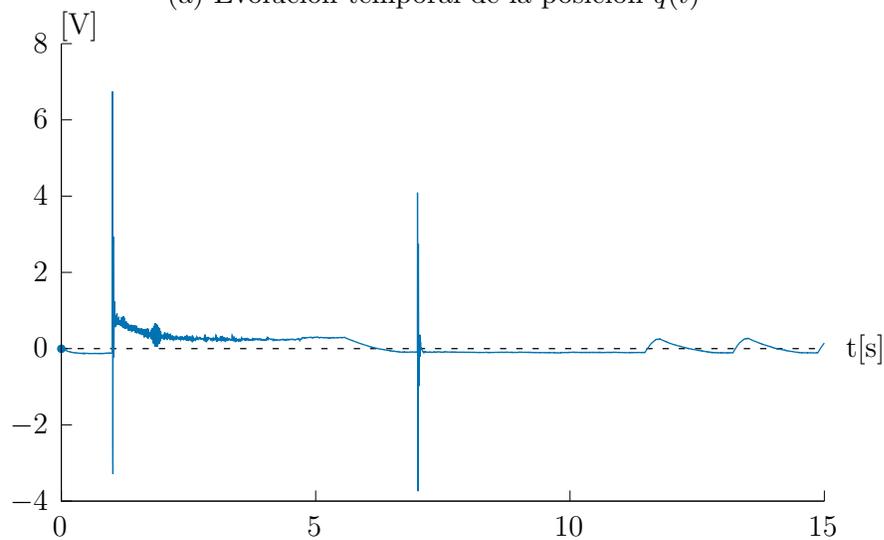
(a) Evolución temporal de la posición $q(t)$ (b) Entrada de control $u(t)$ de (3.24)

Figura 3.6: Evolución temporal de la posición $q(t)$ y entrada de control $u(t)$ al implementar la perturbación $\delta = 0.4[\text{Nm}]$ y el observador no lineal

Podemos observar en la Figura (3.6) que al aplicar el observador no lineal aún en presencia de la perturbación constante se logra cumplir el objetivo de control (2.43), al observar la gráfica (3.6a) vemos que la perturbación es casi imperceptible y en comparación a la gráfica (3.5a). La entrada de control en la gráfica (3.6b) presenta un ligero sobre impulso al agregar la perturbación para posteriormente oscilar entre valores cercanos al cero.

3.5.6. Comparación entre la perturbación δ y la estimación del observador no lineal

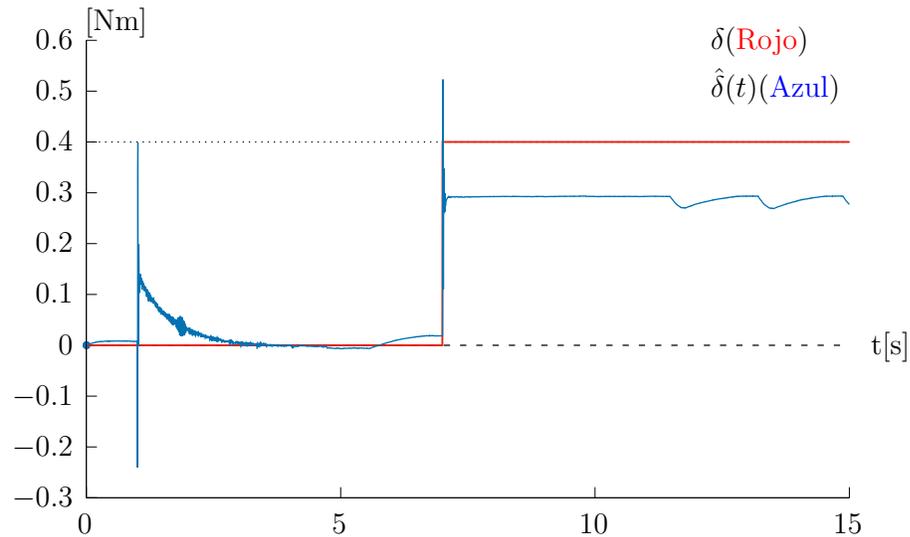


Figura 3.7: Comparación entre la estimación del observador no lineal y la perturbación δ

La Figura 3.7 es una comparación entre la perturbación δ y la estimación $\hat{\delta}$ siendo esta misma la gráfica mostrada en azul. Vemos que la gráfica azul correspondiente al observador no lineal intenta estimar el valor de la perturbación, pero este mismo presenta una ligera discrepancia considerando el criterio de diseño establecido en (2.44), aunque no se consideraron fuerzas como la fricción viscosa, o la relación de engranes en el desarrollo de la dinámica del sistema, esto no impidió amortiguar la presencia de la perturbación en el sistema. La respuesta obtenida aún se mantiene dentro de un margen aceptable.

Capítulo 4

Péndulo con rueda inercial

El péndulo de rueda de inercial accionado por par es un sistema mecánico subactuado el cual ha sido objeto de estudio en diferentes trabajos, tales como [33], [29], [34], y [35]. Este sistema consiste en una varilla de péndulo rígida sin fricción física con un disco simétrico (rueda) unido al extremo final, que es libre de girar (gracias a un accionador de par ideal) alrededor de un eje paralelo al eje de rotación de la varilla del péndulo, a continuación se muestra el diagrama correspondiente al péndulo con rueda inercial como se aprecia en la Figura 4.1.

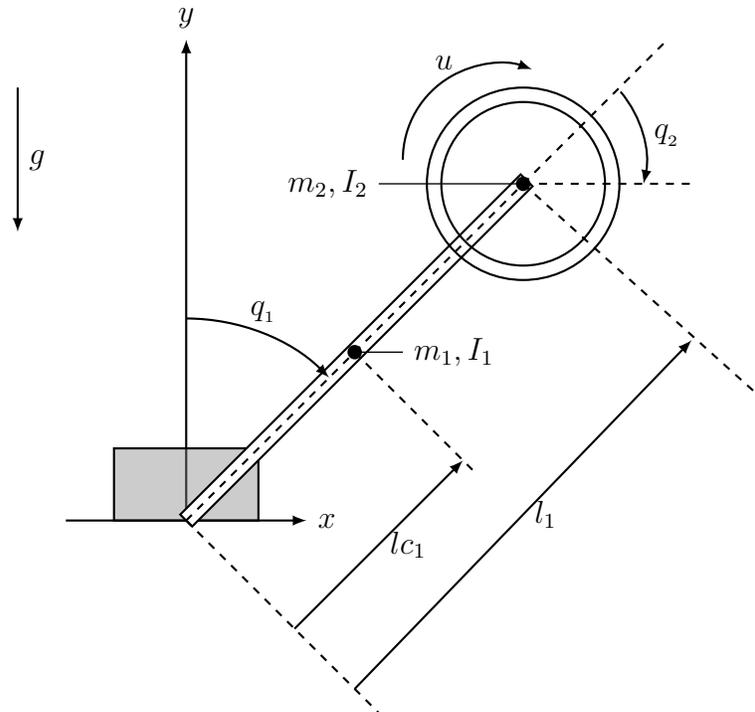


Figura 4.1: Diagrama del péndulo con rueda inercial.

4.1. Modelo dinámico

El hamiltoniano es la suma de la función de energía cinética más la función de energía potencial del sistema y para el péndulo con rueda inercial está dado por [14]

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{[a_1 p_1^2 - 2a_2 p_1 p_2 + a_3 p_2^2]}{2 [\det [M]]} + m_3 [\cos(q_1) - 1], \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$ y $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T$ son los vectores de posiciones generalizadas y momentos, respectivamente. La matriz de inercia M viene dada por

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

y la función de energía potencial está dada por

$$\mathcal{U}(q_1, q_2) = m_3 [\cos(q_1) - 1]. \quad (4.3)$$

siendo $a_1 = I_1 + I_2$, $a_2 = I_2$, $a_3 = I_2$, $m_3 \triangleq g(m_1 l_{c1} + m_2 l)$, donde se considera que $(I_1 + I_2) \gg (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l^2)$ tal como se hizo en [14]. De la Figura 4.1, q_1 y q_2 son las posiciones articulares del péndulo y la rueda, respectivamente, y u es la entrada de par de control que actúa en la rueda. Se asume ambas articulaciones sin fricción. La Tabla 4.1 muestra el significado del resto de parámetros.

Notación	Unidad	Descripción
l_1	m	Longitud del péndulo
l_{c1}	m	Distancia del centro de masa del péndulo
m_1	kg	Masa del péndulo
m_2	kg	Masa del disco
I_1	kg·m ²	Momento de inercia del péndulo
I_2	kg·m ²	Momento de inercia del disco
g	m/s ²	Aceleración de la gravedad

Tabla 4.1: Parámetros del péndulo con rueda inercial

El modelo dinámico del péndulo de rueda de inercial accionado por par sin fricción viscosa, es

expresando de manera compacta como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{[a_3 p_1 - a_2 p_2]}{\det[M]} \\ \frac{[-a_2 p_1 + a_1 p_2]}{\det[M]} \\ m_3 \operatorname{sen}(q_1) \\ u + \delta \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

donde u es el par de entrada de control y δ es una perturbación constante desconocida.

4.2. Diseño del control robusto

Considere el modelo (4.4) con $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Sean $\alpha(\mathbf{q}) = K \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ y $\phi(t) = K \begin{bmatrix} q_{d1} & q_{d2} \end{bmatrix}^T$ las variables seleccionadas, donde $W = K = \operatorname{diag}\{k_1, k_2\}$ y $\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} q_{d1} & q_{d2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ es el vector de posiciones deseadas. Nótese que el término $\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}$ visto en (2.38) puede expresarse como $\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}$ dado que \mathcal{H} cuenta con la estructura vista en (4.1) donde la energía potencial \mathcal{U} es el único elemento que depende de \mathbf{q} . Por tanto, si definimos \mathcal{D}_a como

$$\mathcal{D}_a = T_a G k_v G^T T_a^T, \quad (4.5)$$

donde T_a se define a continuación como:

$$T_a = M_a W M^{-1} \quad (4.6)$$

con M definida anteriormente en (4.2), y la representación de las matrices M_a y W son las siguientes

$$M_a = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$W = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Entonces, podemos reescribir (2.38) de la siguiente manera

$$G^\perp [\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U} - T_a^{-1} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a] = \mathbf{0}_{n-m}, \quad (4.9)$$

donde $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, tal que al desarrollar (4.9) se obtiene

$$[d_3 - d_2] \nabla_{q_{a_1}} \mathcal{U}_a + [d_1 - d_2] \nabla_{q_{a_2}} \mathcal{U}_a = -m_3 \text{sen}(q_1). \quad (4.10)$$

Para simplificar la ecuación diferencial parcial se seleccionó $k_1 = a_1$ y $k_2 = a_2$. La energía potencial deseada \mathcal{U}_a es obtenida a partir del trabajo de [36], donde la \mathcal{U}_a que satisface la EDP mostrada en (4.10) fue la siguiente:

$$\mathcal{U}_a = \frac{a_1 m_3 \det[\mathbf{M}_a]}{[d_3 - d_2]} \cos\left(\frac{q_{a_1}}{a_1} + q_{d_1}\right) + \Phi(z(q_a)), \quad (4.11)$$

donde

$$z(q_a) = q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}, \quad (4.12)$$

con $\gamma_2 = \frac{(d_1 - d_2)}{(d_3 - d_2)}$ y siendo $\Phi(z(q_a))$ es una función arbitraria, por lo tanto la energía potencial deseada \mathcal{U}_a se reescribe como:

$$\mathcal{U}_a = \frac{a_1 m_3 \det[\mathbf{M}_a]}{[d_3 - d_2]} \cos\left(\frac{q_{a_1}}{a_1} + q_{d_1}\right) + \frac{k_p}{2} [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}]^2. \quad (4.13)$$

los elementos d_i son seleccionados a partir a las siguientes desigualdades

$$d_1 > d_3, \quad d_2 > d_3, \quad (4.14)$$

$$d_1 d_3 - d_2^2 > 0. \quad (4.15)$$

Considerando lo anterior, la entrada de control \mathbf{u} vista en (2.39) para este caso particular, queda

$$u = \tilde{k}_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}] - \tilde{k}_v [-p_{a_1} + p_{a_2}] - \alpha_3 \text{sen}\left(\frac{q_{a_1}}{a_1} + q_{d_1}\right) - \hat{\delta}, \quad (4.16)$$

$$\hat{\delta} = \gamma + \epsilon_0 \dot{q}_{a_2}, \quad (4.17)$$

$$\dot{\gamma} = \epsilon_0 [s_2 + w_2] + \sigma_2. \quad (4.18)$$

con

$$s_2 = [\gamma_3 \text{sen}(q_{a_1}) + k_p \gamma_2 [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}]] \frac{d_2}{\det[\mathbf{M}_a]} + k_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}] \frac{d_1}{\det[\mathbf{M}_a]}, \quad (4.19)$$

$$w_2 = k_v \left[p_{a_2} \left[\frac{k_2 a_1}{\det[\mathbf{M}]} \right]^2 - \frac{p_{a_1}}{\det[\mathbf{M}]} [k_1 k_2 a_1 a_2] \right], \quad (4.20)$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{\det[\mathbf{M}]} [p_{a_1} a_2 k_1 - p_{a_2} a_1 k_2]. \quad (4.21)$$

donde las ganancias de (4.16) están definidas como

$$\tilde{k}_p = \frac{k_p}{\det[\mathbf{M}_a]} \left[\left[-\frac{a_2}{a_1}d_3 + \frac{a_3}{a_2}d_2 \right] + \gamma_2 \left[\frac{a_2}{a_1}d_3 - \frac{a_3}{a_2}d_2 \right] \right], \quad (4.22)$$

$$\tilde{k}_v = \frac{k_v a_1 a_2}{\det[\mathbf{M}]}, \quad (4.23)$$

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{[d_3 - d_2]} \left[-\frac{a_2}{a_1}d_3 + \frac{a_3}{a_2}d_2 \right]. \quad (4.24)$$

4.3. Análisis de estabilidad

Inspirado en el trabajo de [37], se sustituye (4.16)-(4.17) en (2.3) y retomando el cambio de coordenadas visto en (2.5) y (2.6), se obtiene el sistema en lazo cerrado es el siguiente

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{a_1} \\ q_{a_2} \\ p_{a_1} \\ p_{a_2} \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det[\mathbf{M}_a]} [d_3 p_{a_1} - d_2 p_{a_2}] \\ \frac{1}{\det[\mathbf{M}_a]} [-d_2 p_{a_1} + d_1 p_{a_2}] \\ \frac{m_3 \det[\mathbf{M}_a]}{[d_3 - d_2]} \text{sen} \left(\frac{q_{a_1}}{a_1} + q_{d_1} \right) + \gamma_2 k_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}] - \frac{k_v [d_1 - d_2]}{\det[\mathbf{M}]} [-p_{a_1} + p_{a_2}] - b_2 \tilde{\delta} \\ -k_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}] - \frac{k_v [d_1 - d_2]}{\det[\mathbf{M}]} [-p_{a_1} + p_{a_2}] - b_4 \tilde{\delta} \\ \frac{1}{\det[\mathbf{M}_a]} [-a_2 k_1 p_{a_1} + a_1 k_2 p_{a_2}] - \epsilon_0 \frac{a_1 k_2}{\det[\mathbf{M}_a]} \tilde{\delta} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Se puede comprobar que el origen es un equilibrio aislado de (4.25). Dado por

$$\mathcal{E} = \left\{ \left[q_{a_1} \quad q_{a_2} \quad p_{a_1} \quad p_{a_2} \quad \tilde{\delta} \right]^T = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \right\}. \quad (4.26)$$

Enseguida, es conveniente definir $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^5$ como

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 : |q_{a_1}| < \frac{a_1 \pi}{2}, |q_{a_2}| < \gamma_2 a_1 \pi \right\} \quad (4.27)$$

Entonces, el único equilibrio en \mathcal{B} es el origen de los espacios de estado. Ahora, introducimos un desarrollo inspirado en el análisis de estabilidad presentado en [36] para asegurar estabilidad asintótica del origen, que se basa en el teorema de Barbashin-Krasovskii's. Retomando la función candidata de Lyapunov de (2.45):

$$\mathcal{V}_L = \mathcal{H}_a + \mathcal{S}_a,$$

donde \mathcal{H}_a se encuentra definida en (2.4) y \mathcal{S}_a se obtiene al desarrollar (2.14), la cual queda de la siguiente forma

$$\mathcal{S}_a = \frac{1}{2}\tilde{\delta}^2. \quad (4.28)$$

donde al desarrollar $\dot{\mathcal{V}}_L$ expresada en la ecuación (2.49) para el sistema péndulo con rueda inercial, se obtiene que

$$\dot{\mathcal{V}}_L = -k_v \left[\frac{a_1 a_2 [-p_{a_1} + p_{a_2}]}{\det [M]} \right]^2 - \epsilon_0 \frac{a_1 a_2}{\det [M_a]} \tilde{\delta}^2. \quad (4.29)$$

Comentario 4. La expresión vista en (4.29) correspondiente a $\dot{\mathcal{V}}_L$ para el sistema péndulo con rueda inercial, se encuentra desarrollada con detalle en el Apéndice B.1.

la cual es una función semidefinida negativa, tal que se concluye que el origen es un equilibrio estable.

Continuando con los pasos requeridos por el teorema de Barbashin-Krasovskii's e inspirado en [37], definimos el conjunto \mathcal{S} donde $\dot{\mathcal{V}}_L = 0$ como

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} \in \mathcal{B} : -k_v \left[\frac{a_1 a_2 [-p_{a_1} + p_{a_2}]}{\det [M]} \right]^2 - \epsilon_0 \frac{a_1 a_2}{\det [M_a]} \tilde{\delta}^2 = 0 \right\} \quad (4.30)$$

Nótese que $\dot{\mathcal{V}}_L = 0$ en (4.30) se cumple si y solo si

$$-p_{a_1} + p_{a_2} = 0, \quad (4.31)$$

$$\tilde{\delta} = 0. \quad (4.32)$$

Entonces, el siguiente paso es demostrar que ninguna solución puede permanecer idénticamente en \mathcal{S} , salvo la solución trivial, es decir, $\begin{bmatrix} q_{a_1} & q_{a_2} & p_{a_1} & p_{a_2} & \tilde{\delta} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Esto equivale a demostrar que el mayor conjunto invariante en \mathcal{S} es esta solución trivial. Con este fin, recordamos que un conjunto invariante dentro del conjunto \mathcal{S} debe cumplir

$$-\dot{p}_{a_1} + \dot{p}_{a_2} = 0$$

Además, de acuerdo con la definición (2.6), la ecuación dentro de (4.30) puede reescribirse como

$$\dot{q}_{a_2} - \gamma_2 \dot{q}_{a_1} = 0. \quad (4.33)$$

entonces, integrando la ecuación anterior, se obtiene

$$\int_0^t [\dot{q}_{a_2}(\sigma) - \gamma_2 \dot{q}_{a_1}(\sigma)] d\sigma = 0,$$

$$[q_{a_2}(t) - \gamma_2 q_{a_1}(t)] - \kappa = 0,$$

donde a partir de (4.12), nos queda

$$z(q_{a_1}, q_{a_2}) = \kappa. \quad (4.34)$$

Para simplificar nuestro análisis, considerando (4.30), (4.31), (4.32) y (4.34) en (4.25), reducimos el sistema de lazo cerrado (4.25) como se muestra

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{a_1} \\ q_{a_2} \\ p_{a_1} \\ p_{a_2} \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{[d_3 - d_2] p_{a_2}}{\det[M_a]} \\ \frac{[d_1 - d_2] p_{a_2}}{\det[M_a]} \\ \frac{m_3 \det[M_a]}{[d_3 - d_2]} \operatorname{sen} \left(\frac{q_{a_1}}{a_1} + q_{d_1} \right) - \gamma_2 k_p \kappa \\ -k_p \kappa \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

De (4.35), se aprecia que $\dot{p}_{a_2} = -k_p \kappa$, integrando así respecto al tiempo es posible llegar al siguiente resultado

$$p_{a_2} = -k_p \kappa t + \mathcal{C}_1, \quad (4.36)$$

donde \mathcal{C}_1 es una constante arbitraria. Anteriormente se demostró que el origen es un equilibrio estable, entonces las trayectorias pueden garantizar que permanezca dentro de cualquier bola especificada centrada en el origen, por lo tanto dentro de esta región (bola especificada centrada en el origen) $p_{a_2}(t)$ está acotada (no puede crecer indefinidamente con respecto al tiempo), entonces $\kappa = 0$ y esto implica que $p_{a_2} = \mathcal{C}_1$ y $\dot{p}_{a_2} = 0$ de (4.36) y (4.35), respectivamente; de (4.35) significa que la variable p_{a_2} permanece constante. Considerando el resultado anterior en (4.35) se obtiene

$$\frac{m_3 \det[M_a]}{[d_3 - d_2]} \operatorname{sen} \left(\frac{q_{a_1}}{a_1} + q_{d_1} \right) = 0 \quad (4.37)$$

cuya única solución es $q_{a_1} = 0$ para $q_{a_1} \in \left(-\frac{a_1 \pi}{2}, \frac{a_1 \pi}{2}\right)$. Reemplazando $q_{a_1} = 0$ y $\kappa = 0$ en (4.34) resulta $q_{a_2} = 0$, lo que implica a su vez que $\dot{q}_{a_1} = \dot{q}_{a_2} = 0$, y a su vez $p_{a_1} = p_{a_2} = 0$. Esto significa que el origen $\begin{bmatrix} q_{a_1} & q_{a_2} & p_{a_1} & p_{a_2} & \tilde{\delta} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ es el máximo conjunto invariante en

el conjunto \mathcal{S} . Entonces, por el teorema de Barbashin-Krasovskii's concluimos que el origen es un equilibrio asintóticamente estable localmente y, por tanto, el objetivo de control (2.43) se cumple localmente.

4.4. Resultados de simulaciones numéricas

Mediante el uso de las herramientas MatLab y Simulink se realizaron los diagramas correspondientes a las expresiones vistas anteriormente, siendo estas, el modelo dinámico expresado en (4.4), la entrada de control $u(t)$ de (4.16) y el observador no lineal $\hat{\delta}$ de (4.17). Los parámetros correspondientes al sistema péndulo con rueda inercial utilizados en estas simulaciones fueron recabados del trabajo de [38], mientras que todas las ganancias del controlador y el observador no lineal fueron seleccionadas convenientemente después de una sintonía de prueba y error hasta obtener el mejor desempeño posible. Los parámetros, las ganancias seleccionadas y la perturbación aplicada se encuentran enlistadas en las tablas 4.2 - 4.4.

La configuración inicial de la planta fue: $\left[q_1(0) \quad q_2(0) \quad p_1(0) \quad p_2(0) \quad \tilde{\delta}(0) \right]^T = \left[27^\circ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$. Las ganancias d_1 , d_2 y d_3 cumplen con las desigualdades (4.14)-(4.15). Se aplicó una perturbación $\delta = 45$ [Nm] en la respuesta en estado estacionario del péndulo con rueda inercial a los 10 [s]. La ganancia del observador con la que se obtuvo un mejor desempeño fue $\epsilon_0 = 0.55$. El método de integración utilizado para esta serie de simulación fue ODE23, con un error de tolerancia de 1×10^{-3} .

Parámetro	Valor [Unidad]
I_1	0.1 kg·m ²
I_2	0.2 kg·m ²
g	9.81 [m/s ²]
a_1	0.3 kg·m ²
a_2	0.2 kg·m ²
a_3	0.2 kg·m ²

Tabla 4.2: Parámetros del péndulo con rueda inercial

Ganancias	Valor
k_p	1
k_v	1.6
k_1	0.3
k_2	0.2
d_1	5
d_2	2
d_3	1
ϵ_0	0.55

Tabla 4.3: Valores de las ganancias del péndulo con rueda inercial

Perturbación	Valor [Unidad]
δ	45 [Nm]

Tabla 4.4: Valor de la perturbación aplicada

4.4.1. Péndulo con rueda inercial sin observador y sin perturbación

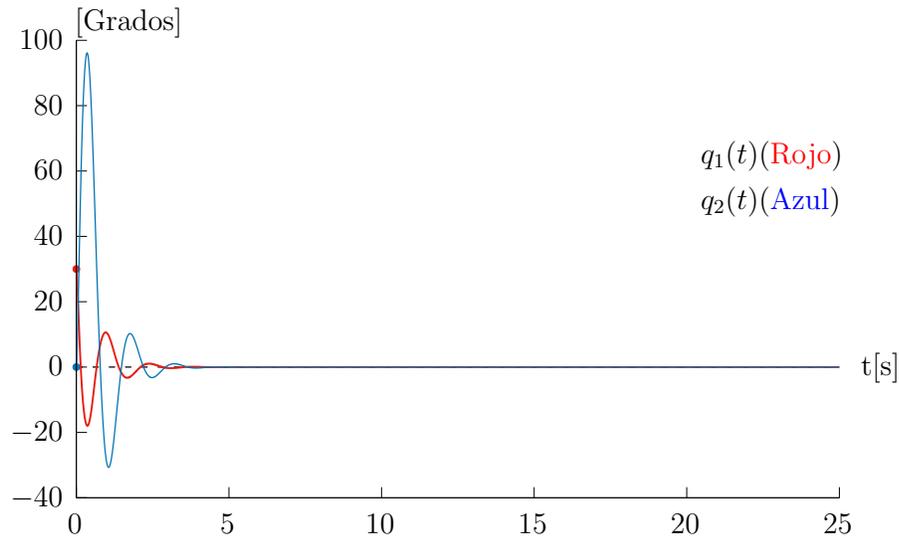
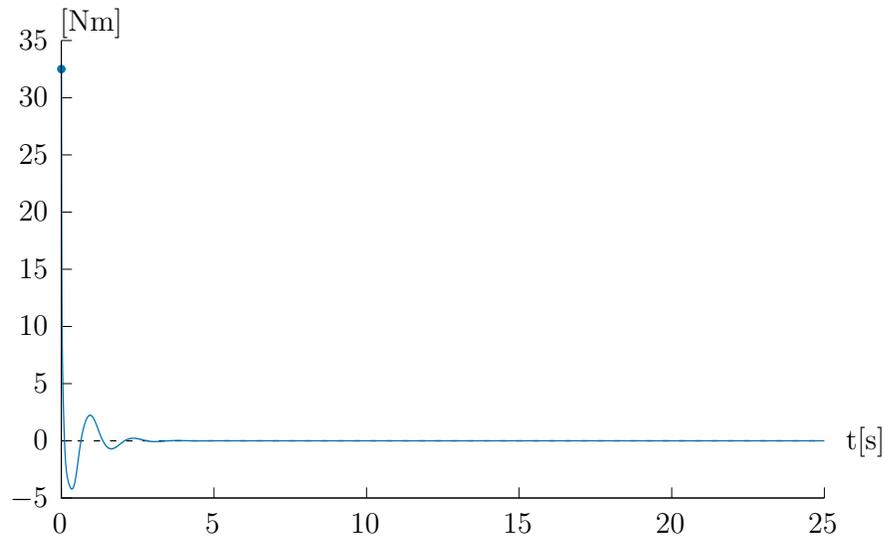
 δ (a) Evolución temporal de las posiciones $q_1(t)$ (péndulo) y $q_2(t)$ (rueda)(b) Entrada de control $u(t)$ de (4.16)

Figura 4.2: Respuestas de la evolución temporal de la posición y entrada de control

La Figura 4.2 nos muestra una respuesta satisfactoria del controlador diseñado, donde se aprecia que la evolución temporal de $q_1(t)$ del péndulo y $q_2(t)$ de la rueda cumplen el objetivo de control plasmado en (2.43).

4.4.2. Péndulo con rueda inercial con observador y sin perturbación

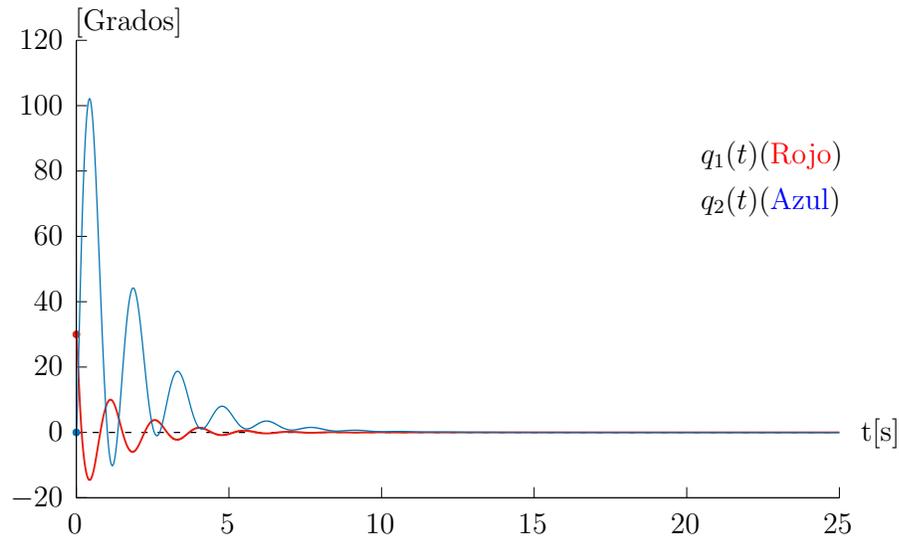
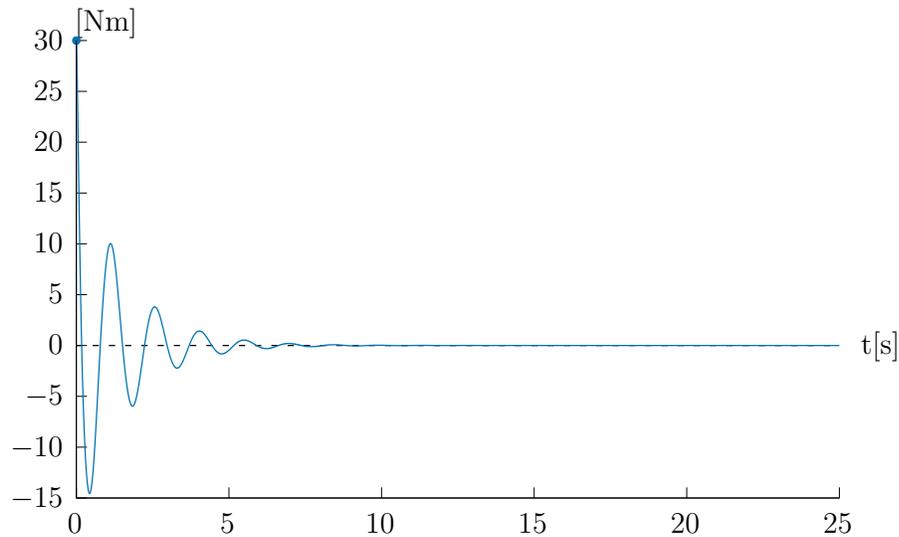
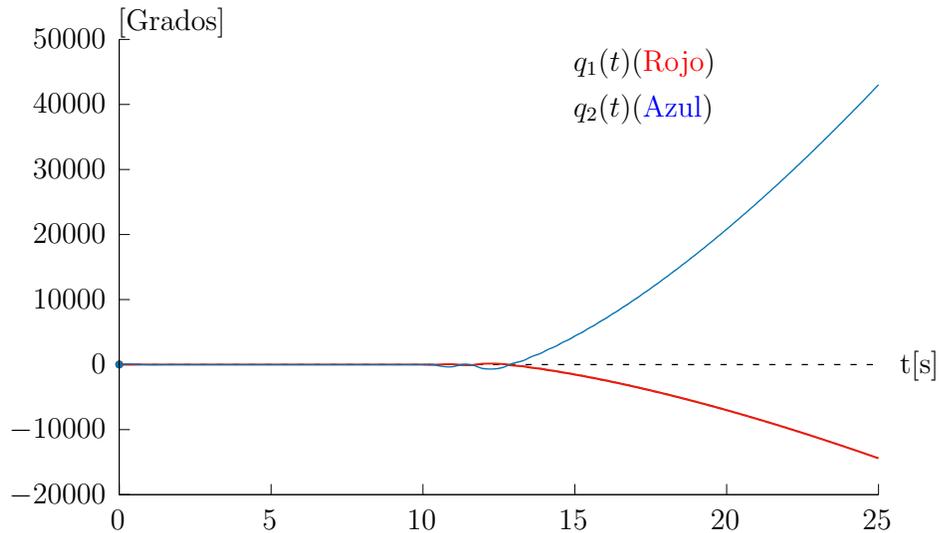
 δ (a) Evolución temporal de las posiciones $q_1(t)$ (péndulo) y $q_2(t)$ (rueda)(b) Entrada de control $u(t)$ de (4.16)

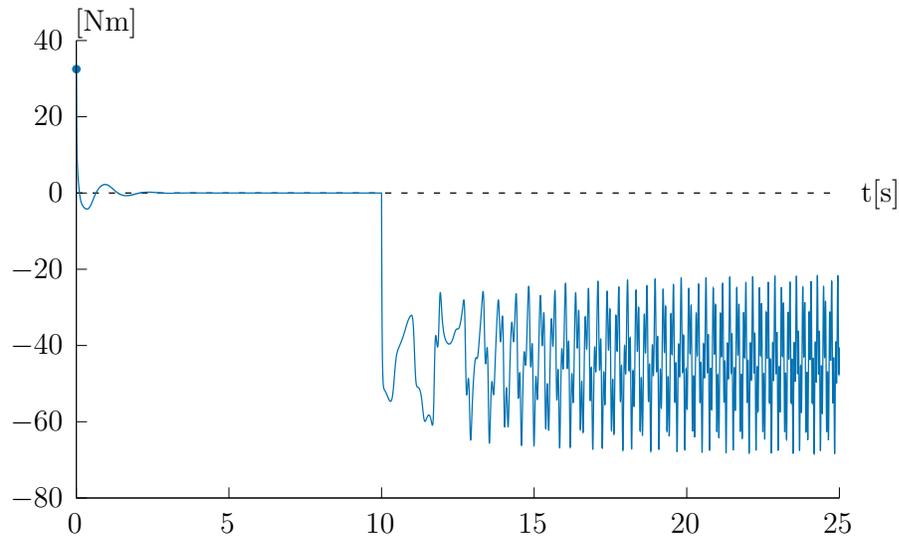
Figura 4.3: Respuestas de la evolución de posición y entrada de control

Podemos notar que en la Figura 4.3 al agregar el observador no lineal mostrado en (4.17) tenemos un cambio considerable en las evoluciones temporales esbozadas en la gráfica (4.3a) del péndulo y la rueda, demorando más en alcanzar el punto de equilibrio, así como también en la entrada de control.

4.4.3. Péndulo con rueda inercial sin observador y con perturbación δ



(a) Evolución temporal de las posiciones $q_1(t)$ (péndulo) y $q_2(t)$ (rueda)

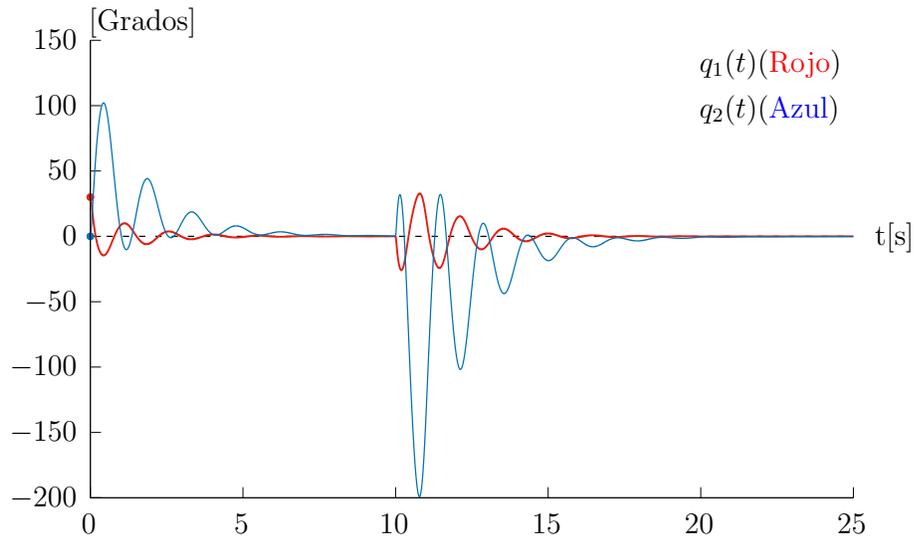


(b) Entrada de control $u(t)$ de (4.16)

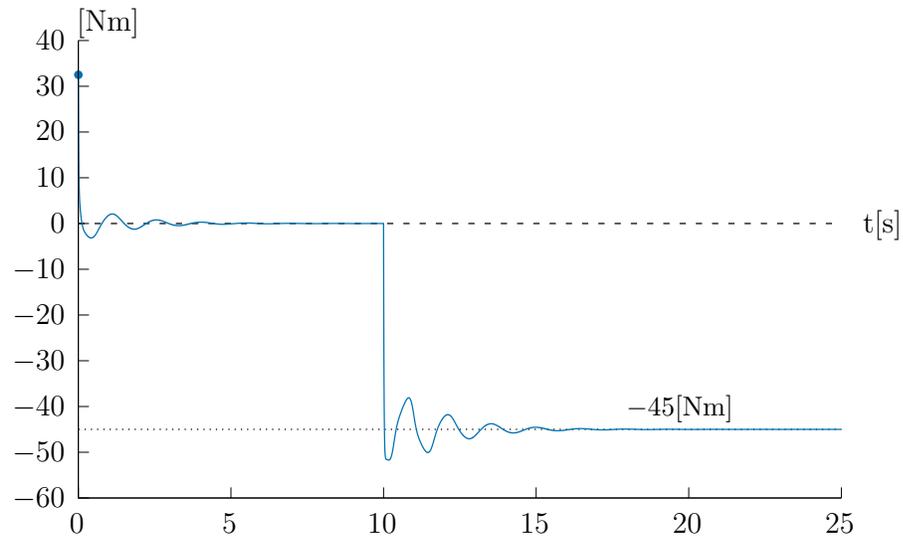
Figura 4.4: Respuestas de la evolución de posición y entrada de control

Al aplicar la perturbación constante al péndulo con rueda inercial como se muestra en la Figura 4.4 sin la presencia del observador no lineal podemos ver como las evoluciones temporales se alejan del punto de equilibrio, y por consecuencia evitando que se cumpla el objetivo de control (2.43). Mientras que la entrada de control como se aprecia en la gráfica (4.4b) después de aplicar la perturbación se encuentra oscilando entre valores cercanos a la magnitud de la perturbación pero con signo contrario.

4.4.4. Péndulo con rueda inercial con observador y con perturbación δ



(a) Evolución temporal de las posiciones $q_1(t)$ (péndulo) y $q_2(t)$ (rueda)



(b) Entrada de control $u(t)$ de (4.16)

Figura 4.5: Respuestas de la evolución de posición y entrada de control

La Figura 4.5 muestra que al implementar el observador no lineal, aún en presencia de la perturbación se logra cumplir el objetivo de control (2.43), podemos apreciar en la gráfica (4.5a) que las posiciones del péndulo y la rueda muestran un ligero disturbio para posteriormente asentarse en el origen siendo este el único punto de equilibrio. La entrada de control de la gráfica (4.5b) vemos como se desvanece el valor de la perturbación constante, dando a entender que el controlador logra estimar dicha perturbación y la atenúa.

4.4.5. Comparación entre la perturbación δ y la estimación del observador no lineal en el péndulo con rueda inercial

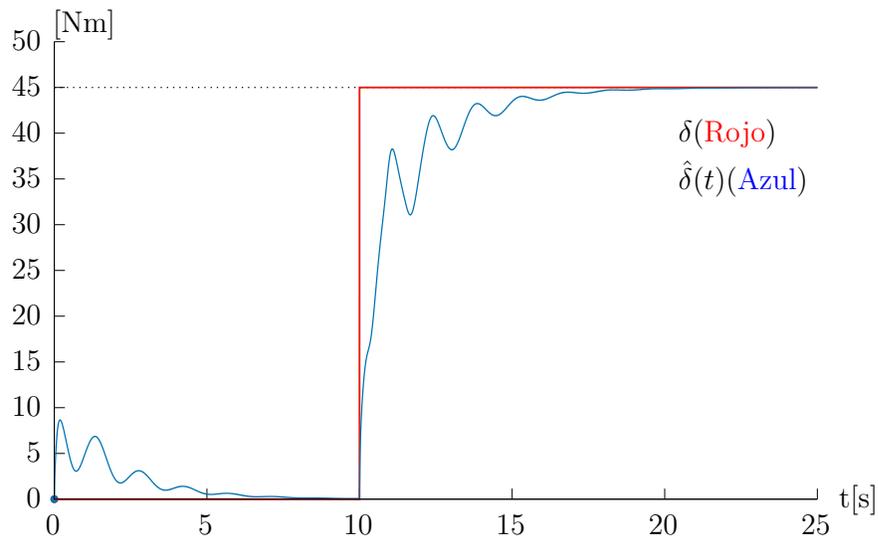


Figura 4.6: Comparación entre la estimación del observador $\hat{\delta}(t)$ y la perturbación δ

Para fines de comparación, en la Figura 4.6 se muestra la estimación del observador no lineal $\hat{\delta}(t)$ de (4.17) en contraste con la perturbación δ . Es perceptible que el observador no lineal consigue una estimación efectiva de la perturbación constante, por lo tanto, el criterio de diseño establecido en (2.44) se cumple de manera satisfactoria.

Capítulo 5

Carro-péndulo

El carro péndulo es un mecanismo subactuado constituido por un carro que se desliza sobre una superficie plana con un poste fijado mediante un pivote sin fricción sobre el carro (véase la Fig. 5.1). Este mecanismo ha sido mencionado en trabajos como [38], [39], [40], [41]. Este mecanismo es subactuado porque tiene dos grados de libertad, la rotación q_1 del poste y el desplazamiento horizontal q_2 del carro y solo tiene un actuador, la fuerza externa F aplicada al carro.

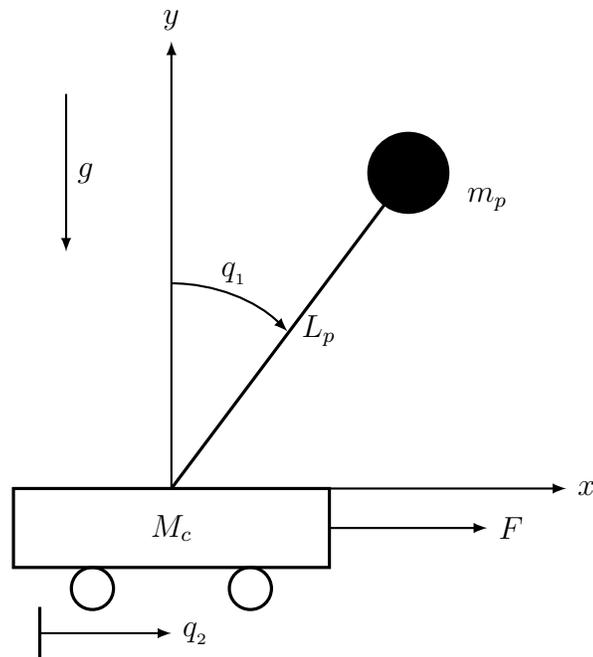


Figura 5.1: Diagrama esquemático del carro péndulo.

5.1. Modelo dinámico

En ausencia de rozamiento, un modelo dinámico del sistema carro péndulo queda de la siguiente forma

$$m_p l_p^2 \ddot{q}_1 + m_p l_p \cos(q_1) \ddot{q}_2 - m_p g l_p \sin(q_1) = 0, \quad (5.1)$$

$$m_p l_p \cos(q_2) \ddot{q}_1 + [M_c + m_p] \ddot{q}_2 - m_p l_p \sin(q_1) \dot{q}_1^2 = F, \quad (5.2)$$

donde M_c denota la masa del carro, l_p es la longitud del péndulo y m_p su masa, $F \in \mathbb{R}$ es la entrada de control de fuerza, y g es la aceleración de la gravedad.

El modelo dinámico del carro péndulo puede ser expresado en términos de las ecuaciones de Euler-Lagrange, como se muestra a continuación

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \frac{[\gamma \omega \sin(q_1) - \beta \cos(q_1) [u + \delta + \beta \sin(q_1) \dot{q}_1^2]]}{\det[M(q)]} \\ \frac{[\alpha [u + \delta + \beta \sin(q_1) \dot{q}_1^2] - \beta \omega \cos(q_1) \sin(q_1)]}{\det[M(q)]} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

donde

$$M(q) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \cos(q_1) \\ \beta \cos(q_1) & \gamma \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

con $\alpha = m_p l_p^2$, $\beta = m_p l_p$, $\gamma = M_c + m_p$, y $\omega = m_p g l_p$.

Para poder desarrollar este caso particular utilizando la metodología vista en capítulo 2, necesitamos implementar el siguiente método.

5.2. Linealización parcial

La linealización parcial cuenta con dos ingredientes principales: el diseño del controlador se ha desarrollado en términos de la posición \mathbf{q} y el momento \mathbf{p} (formulación hamiltoniana), y la matriz de inercia M del modelo de la planta (2.3) se supone que es una matriz constante (véase más adelante (2.1)). Sin embargo, el modelo de la planta (5.3) está escrito en términos de la posición conjunta \mathbf{q} y la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ (formulación lagrangiana), y su matriz de inercia

de la planta $M(\mathbf{q})$ no es una matriz constante. Por lo tanto, para aplicar nuestra propuesta es necesario cumplir la siguiente petición: La solicitud anterior puede cumplirse de la siguiente manera. En primer lugar, utilizamos una transformación adecuada sobre el modelo de planta junto con la linealización por realimentación parcial mediante la entrada de control u . Para ello, aplicamos el método de linealización de realimentación parcial descrito por [42] sobre el modelo dinámico de la planta, que da como resultado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \frac{\omega}{\alpha} \sin(q_1) - \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_1) \hat{v} \\ \hat{v} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

con

$$\hat{v} = v + \frac{\alpha \delta}{\det[M]}. \quad (5.6)$$

donde δ es una perturbación constante desconocida. Con la entrada de control expresada como:

$$u = \left[\frac{\det[M]}{\alpha} \right] v + \underbrace{\frac{\beta \omega}{\alpha} \sin(q_1) \cos(q_1) - \beta \sin(q_1) \dot{q}_1^2}_{\sigma}, \quad (5.7)$$

donde v es una entrada de control “auxiliar” y $\det[M] = \alpha\gamma - \beta^2 \cos^2(q_1)$.

En segundo lugar, el modelo dinámico reducido (5.5) logrado con la linealización por realimentación parcial puede escribirse a través de la estructura hamiltoniana (2.3). Teniendo esto en cuenta, el modelo (5.5) puede expresarse en una formulación hamiltoniana en términos del vector de estado $[q_1 \ q_2 \ p_1 \ p_2]^T$ como se muestra a continuación:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{p_1} H \\ \nabla_{p_2} H \\ -\nabla_{q_1} \mathcal{U} - \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_1) \hat{v} \\ -\nabla_{q_2} \mathcal{U} + \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \frac{\omega}{\alpha} \sin(q_1) - \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_1) \hat{v} \\ \hat{v} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

donde el hamiltoniano está dado por

$$\begin{aligned} H(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}(q_1), \\ &= \frac{1}{2} [p_1^2 + p_2^2] + \frac{\omega}{\alpha} \cos(q_1) \end{aligned} \quad (5.9)$$

y el momento $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T$ definido en (2.2) resulta

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = M\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

con las matrices de “inercia” y “distribución” relacionadas con el modelo dinámico (5.5), dadas por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G(q_1) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} \cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

así como la nueva función de “energía potencial” definida en (5.9), tomada de (5.5):

$$\mathcal{U}(q_1) = \frac{\omega}{\alpha} \cos(q_1). \quad (5.12)$$

5.3. Diseño del control robusto

Considere el modelo (5.8) con $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Sean $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) = K \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ y $\boldsymbol{\phi}(t) = K \begin{bmatrix} q_{d1} & q_{d2} \end{bmatrix}^T$ las variables seleccionadas, donde $K = \mathbf{I}_{n \times n}$ y $\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} q_{d1} & q_{d2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ es el vector de posiciones deseadas. Nótese que el término $\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}$ visto en (2.38) puede expresarse como $\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}$ dado que \mathcal{H} cuenta con la estructura vista en (5.9) donde la energía potencial \mathcal{U} es el único elemento que depende de \mathbf{q} . Por tanto, si definimos \mathcal{D}_a como

$$\mathcal{D}_a(q_{a1}) = k_v M_a G(q_{a1}) G^T(q_{a1}) M_a, \quad (5.13)$$

entonces podemos reescribir (2.38) de la siguiente manera

$$G^\perp [\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U} - T_a^{-1} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a] = \mathbf{0}_{n-m}, \quad (5.14)$$

Comenzamos el diseño de la ley de control v fijando la matriz constante M_a como se muestra a continuación:

$$M_a = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

donde las constantes d_j deben seleccionarse adecuadamente para garantizar que M_a sea una matriz definida positiva, es decir, $d_1 > 0$ y $\det[M_a] = d_1 d_3 - d_2^2 > 0$. El siguiente paso es elegir la siguiente matriz:

$$G^\perp(q_1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_1) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

que asegura la propiedad de las matrices $G^\perp(q_1)G(q_1) = 0$. Reemplazando (5.12), (5.16) en (5.14) nos da la siguiente ecuación diferencial parcial (EDP).

$$c_1 \frac{\partial \mathcal{U}_a}{\partial q_{a_1}} + c_2 \frac{\partial \mathcal{U}_a}{\partial q_{a_2}} = -\det[M_a] \omega \sin(q_{a_1}), \quad (5.17)$$

donde

$$c_1 = \left[d_3 - d_2 \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a_1}) \right],$$

$$c_2 = \left[d_1 \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a_1}) - d_2 \right].$$

A partir del trabajo [38] la solución para la EDP mostrada en (5.17) se obtuvo utilizando el lenguaje simbólico de Matlab, la cual quedó de la siguiente manera:

$$\mathcal{U}_a(q_{a_1}, q_{a_2}) = -\frac{\det[M_a] \omega}{d_2 \beta} \ln \left(\frac{d_2 \beta \cos(q_{a_1}) - d_3 \alpha}{d_2 \beta - d_3 \alpha} \right) + \frac{1}{2} k_p z^2(q_{a_1}, q_{a_2}) \quad (5.18)$$

siendo k_p una constante arbitraria, una selección adecuada de las constantes d_2 y d_3 asegura $[d_2 \beta \cos(q_{a_1}) - d_3 \alpha] > 0$ y $[d_2 \beta - d_3 \alpha] > 0$, y la función $z(q_{a_1}, q_{a_2})$ está dado por

$$z(q_{a_1}, q_{a_2}) = \frac{d_1}{d_2} q_{a_1} + \mu_1 \operatorname{arctanh} \left(\mu_2 \tan \left(\frac{q_{a_1}}{2} \right) \right) + q_{a_2}, \quad (5.19)$$

donde μ_1 y μ_2 con constantes estrictamente positivas, definidas como:

$$\mu_1 = \frac{2 \det[M_a] \alpha}{d_2 \sqrt{d_2^2 \beta^2 - d_3^2 \alpha^2}}, \quad (5.20)$$

$$\mu_2 = \frac{d_2 \beta + d_3 \alpha}{\sqrt{d_2^2 \beta^2 - d_3^2 \alpha^2}}. \quad (5.21)$$

Se puede comprobar que la función de energía potencial deseada $\mathcal{U}_a(q_{a_1}, q_{a_2})$ en (5.18) es continua y diferenciable, la cual tiene un mínimo en $[q_{a_1} \ q_{a_2}]^T = [0 \ 0]^T$ y también es definida positiva cumpliendo las siguientes desigualdades:

$$k_p > 0, \quad (5.22)$$

$$d_2 \beta > d_3 \alpha, \quad (5.23)$$

para todo $|q_{a_1}| < \epsilon < \frac{\pi}{2}$, donde

$$\epsilon = a \cos\left(\frac{d_3\alpha}{d_2\beta}\right) \quad (5.24)$$

Además, a partir de (5.18) el gradiente de la función de energía potencial deseada $\mathcal{U}_a(q_{a_1}, q_{a_2})$ viene dado por

$$\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a(q_{a_1}, q_{a_2}) = \begin{bmatrix} \phi_1(q_{a_1}) + k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \phi_2(q_{a_1}) \\ k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

con $z(q_{a_1}, q_{a_2})$ definida en (5.19) y las variables $\phi_i(q_{a_1})$ en (5.25) están dadas por:

$$\phi_1(q_{a_1}) = \frac{\det[\mathbf{M}_a] \omega \sin(q_{a_1})}{d_2\beta \cos(q_{a_1}) - d_3\alpha}, \quad (5.26)$$

$$\phi_2(q_{a_1}) = \frac{d_1\beta \cos(q_{a_1}) - d_2\alpha}{d_2\beta \cos(q_{a_1}) - d_3\alpha}. \quad (5.27)$$

A partir de [31] desarrollamos la estructura de la ley de control considerando la presencia del observador no lineal y tomando en cuenta lo anteriormente visto en (2.29), (5.5) y (5.6), como se muestra a continuación

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{es} + \mathbf{v}_{di} - \frac{\alpha \hat{\delta}}{\det[\mathbf{M}]}. \quad (5.28)$$

Entonces, considerando lo anterior, la entrada de control vista en (5.28) para este caso particular, queda

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & \frac{\left[-\frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a_1})\right] \left[\det[\mathbf{M}_a] \nabla_{q_{a_1}} \mathcal{U} - d_3 \nabla_{q_{a_1}} \mathcal{U}_a + d_2 \nabla_{q_{a_2}} \mathcal{U}_a\right]}{\det[\mathbf{M}_a] \left[1 + \left[\frac{\beta \cos(q_{a_1})}{\alpha}\right]^2\right]} + \frac{d_2 \nabla_{q_{a_1}} \mathcal{U}_a - d_1 \nabla_{q_{a_2}} \mathcal{U}_a}{\det[\mathbf{M}_a] \left[1 + \left[\frac{\beta \cos(q_{a_1})}{\alpha}\right]^2\right]} \\ & - k_v \left[p_{a_2} - \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a_1}) p_{a_1}\right] - \frac{\alpha \hat{\delta}}{\det[\mathbf{M}]}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\hat{\delta} = \gamma + \epsilon_0 [\Omega \dot{q}_{a_1} + \dot{q}_{a_2}], \quad (5.30)$$

$$\dot{\gamma} = \Omega [\epsilon_0 [r_1 + \rho_1] + p_{a_1}] + \epsilon_0 [r_2 + \rho_2] + p_{a_2}, \quad (5.31)$$

con las variables definidas como

$$r_1 = [\phi_1(q_{a_1}) + k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \phi_2(q_{a_1})] \frac{d_3}{\det[M_a]} - [k_p z(q_{a_1}, q_{a_2})] \frac{d_2}{\det[M_a]}, \quad (5.32)$$

$$r_2 = -[\phi_1(q_{a_1}) + k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \phi_2(q_{a_1})] \frac{d_2}{\det[M_a]} + [k_p z(q_{a_1}, q_{a_2})] \frac{d_1}{\det[M_a]}, \quad (5.33)$$

$$\rho_1 = k_v [\Omega^2 p_{a_1} + \Omega p_{a_2}], \quad (5.34)$$

$$\rho_2 = k_v [\Omega p_{a_1} + p_{a_2}], \quad (5.35)$$

$$\Omega = -\frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a_1}). \quad (5.36)$$

5.4. Análisis de estabilidad

Para obtener la dinámica de lazo cerrado, en términos de (2.5) y (2.6), sustituimos la acción de control v de (5.29) en (5.8) y después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{a_1} \\ q_{a_2} \\ p_{a_1} \\ p_{a_2} \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_3 p_{a_1} - d_2 p_{a_2}}{\det[M_a]} \\ \frac{d_1 p_{a_1} - d_2 p_{a_2}}{\det[M_a]} \\ -\phi_1(q_{a_1}) - k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \phi_2(q_{a_1}) - \mathcal{Y}_1 - [d_1 \Omega + d_2] \tilde{\delta} \\ -\mathcal{Y}_2 - [d_2 \Omega + d_3] \tilde{\delta} \\ p_{a_1} \Omega + p_{a_2} - \epsilon_0 [\Omega^2 + 1] \tilde{\delta} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

donde Ω definida en (5.32) y las \mathcal{Y}_i se definen de la siguiente forma

$$\mathcal{Y}_1 = k_v \left[-\beta \cos(q_{a_1}) \left[\frac{d_2 \alpha - d_1 \beta \cos(q_{a_1})}{\alpha^2} \right] p_{a_1} + \frac{d_2 \alpha - d_1 \beta \cos(q_{a_1})}{\alpha} p_{a_2} \right] - k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}), \quad (5.38)$$

$$\mathcal{Y}_2 = k_v \left[-\beta \cos(q_{a_1}) \left[\frac{d_2 \beta \cos(q_{a_1}) - d_3 \alpha}{\alpha^2} \right] p_{a_1} + \frac{d_2 \beta \cos(q_{a_1}) - d_3 \alpha}{\alpha} p_{a_2} \right]. \quad (5.39)$$

se puede comprobar que el origen es el único equilibrio (5.37) es

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} q_{a_1} \\ q_{a_2} \\ p_{a_1} \\ p_{a_2} \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

considerando el objetivo de control definido en (2.43) se considera el origen como un equilibrio de interés, eso es, $[\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{p}_a^T \ \tilde{\delta}]^T = [0_2^T \ 0_2^T \ 0]^T$. Por conveniencia, se define

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 : q_{a1} \in (-\epsilon, \epsilon) \right\} \quad (5.40)$$

donde $\epsilon < \frac{\pi}{2}$, con ϵ definido en (5.24), entonces el origen es el único equilibrio en \mathcal{B}_2 para los espacios de estados. La función escalar vista en (2.4) con M_a y \mathcal{U}_a definida en (5.15), (5.18) y (5.19), respectivamente, juegan un rol importante: Primero, con esta función se obtiene el sistema de lazo cerrado visto en (5.37), y segundo, esta calificada como función de Lyapunov para demostrar la estabilidad del equilibrio deseado $[\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{p}_a^T \ \tilde{\delta}]^T = [0_2^T \ 0_2^T \ 0]^T$. Dado que el sistema de lazo cerrado (5.37) es autónomo, la estabilidad puede realizarse utilizando el método directo de Lyapunov y el Teorema de Barbashin-Krasovskii.

A continuación, se presenta el procedimiento realizado en [38] para asegurar el objetivo de control (2.43). Como función de Lyapunov para analizar (5.37), consideramos \mathcal{H}_a dada por (2.4) con M_a y \mathcal{U}_a de (5.15) y (5.18), respectivamente. Ahora, recordando lo visto anteriormente en (2.45) retomamos la función candidata de Lyapunov.

$$\mathcal{V}_L = \mathcal{H}_a + \mathcal{S}_a.$$

donde \mathcal{H}_a se encuentra definida en (2.4), y \mathcal{S}_a definida en (2.46), donde para este caso se define como

$$\mathcal{S}_a = \frac{1}{2} \tilde{\delta}^2.$$

Desarrollando $\dot{\mathcal{V}}_L$ de (2.49) para el sistema carro-péndulo, obtenemos que

$$\dot{\mathcal{V}}_L = -k_v [p_{a1} \Omega + p_{a2}]^2 - \epsilon_0 [\Omega^2 + 1] \tilde{\delta}^2. \quad (5.41)$$

donde $\Omega = -\frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a1})$.

Comentario 5. La expresión de $\dot{\mathcal{V}}_L$ vista en (5.41) para el sistema carro-péndulo se encuentra desarrollada con detalle en el Apéndice B.2.

Siguiendo los pasos solicitados por el teorema de Barbashin-Krasovskii e inspirado en [37],

definimos el conjunto S donde $\dot{\mathcal{V}}_L = 0$, como se muestra a continuación

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} \in \mathcal{B} : \dot{\mathcal{H}}_a + \dot{\mathcal{S}}_a = 0 \right\},$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} \in \mathcal{B} : -k_v [p_{a1}\Omega + p_{a2}]^2 - \epsilon_0 [\Omega^2 + 1] \tilde{\delta}^2 = 0 \right\}. \quad (5.42)$$

para que $\dot{\mathcal{V}}_L = 0$ de (5.42) debe cumplir lo siguiente

$$p_{a1}\Omega + p_{a2} = 0, \quad (5.43)$$

$$\tilde{\delta} = 0. \quad (5.44)$$

Entonces, considerado lo anterior es importante subrayar que el conjunto invariante dentro del conjunto S debe cumplir con:

$$\frac{d}{dt} (p_{a1}\Omega + p_{a2}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(p_{a2} - \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a1}) p_{a1} \right) = 0,$$

$$\dot{p}_{a1} + \frac{\beta}{\alpha} [\text{sen}(q_{a1}) \dot{q}_{a1} p_{a1} - \cos(q_{a1}) \dot{p}_{a1}] = 0. \quad (5.45)$$

Además, de acuerdo con la definición (2.6), la ecuación en (5.42) puede reescribirse como

$$\dot{q}_{a2} - \frac{[d_2 - d_1 \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a1})]}{[d_3 - d_2 \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a1})]} \dot{q}_{a1} = 0.$$

entonces, integrando la ecuación anterior, se obtiene

$$\int_0^t \left[\dot{q}_{a2}(\sigma) - \frac{[d_2 - d_1 \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a1})]}{[d_3 - d_2 \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a1})]} \dot{q}_{a1}(\sigma) \right] d\sigma = 0,$$

$$q_{a2} + \frac{d_1}{d_2} q_{a1} + \mu_1 \text{arctanh} \left(\mu_2 \tan \left(\frac{q_{a1}}{2} \right) \right) - \kappa = 0,$$

$$z(q_{a_1}, q_{a_2}) - \kappa = 0. \quad (5.46)$$

esto es cierto ya que las trayectorias del sistema de lazo cerrado (5.37) en el conjunto S satisfacen

$$\frac{d}{dt} (z(q_{a_1}, q_{a_2}) - \kappa) = p_{a_2} - \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a_1}) p_{a_1} = 0. \quad (5.47)$$

Para simplificar nuestro análisis, considerando (5.42), (5.44), y (5.46) en (5.37), podemos reescribir el sistema en lazo cerrado (5.37) como se muestra

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{a_1} \\ q_{a_2} \\ p_{a_1} \\ p_{a_2} \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{d_3\alpha - d_2\beta \cos(q_{a_1})}{\alpha} \right] \frac{p_{a_1}}{\det[M_a]} \\ - \left[\frac{d_2\alpha - d_1\beta \cos(q_{a_1})}{\alpha} \right] \frac{p_{a_1}}{\det[M_a]} \\ -\phi_1(q_{a_1}) - k_p \kappa \phi_2(q_{a_1}) \\ -k_p \kappa \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

A partir de (5.48), observe que $\dot{p}_{a_2} = -k_p \kappa$, por lo que integrando respecto al tiempo es posible obtener

$$p_{a_2} = -k_p \kappa t + C_1, \quad (5.49)$$

donde C_1 es una constante arbitraria. Como se ha demostrado anteriormente el origen es un punto de equilibrio estable, entonces las trayectorias $\left[q_{a_1}(t) \ q_{a_2}(t) \ p_{a_1}(t) \ p_{a_2}(t) \ \tilde{\delta}(t) \right]^T$ del sistema de lazo cerrado (5.37) partiendo suficientemente cerca del origen, se puede garantizar que las trayectorias permanezcan dentro de cualquier (bola especificada centrada en el origen) $p_{a_2}(t)$ está acotada (no puede crecer indefinidamente con respecto al tiempo), entonces $\kappa = 0$ y ésta implica $p_{a_2} = C_1$ y $\dot{p}_{a_2} = 0$ de (5.48) y (5.49), respectivamente, de (5.49) significa que la variable p_{a_2} permanece constante. Considerando el resultado anterior en (5.45) se obtiene

$$\text{sen}(q_{a_1}) \dot{q}_{a_1} p_{a_1} - \cos(q_{a_1}) \dot{p}_{a_1} = 0 \quad (5.50)$$

y sustituyendo \dot{q}_{a_1} y \dot{p}_{a_1} de (5.48) junto con $\kappa = 0$ se obtiene

$$\text{sen}(q_{a_1}) \left[\frac{d_3\alpha - d_2\beta \cos(q_{a_1})}{\alpha} \right] \frac{p_{a_1}^2}{\det[M_a]} + \cos(q_{a_1}) \phi_1(q_{a_1}) = 0, \quad (5.51)$$

$$-\text{sen}(q_{a_1}) \left[\left[\frac{d_2\beta \cos(q_{a_1}) - d_3\alpha}{\alpha} \right] \frac{p_{a_1}^2}{\det[M_a]} \right] - \text{sen} \left[\frac{\det[M_a] \omega \cos(q_{a_1})}{d_2\beta \cos(q_{a_1}) - d_3\alpha} \right] = 0. \quad (5.52)$$

cuya única solución es $q_{a_1} = 0$ para $q_{a_1} \in (-\epsilon, \epsilon)$, porque el par de sumandos dentro de los

paréntesis son estrictamente positivos en este q_{a_1} , rango, una vez que por diseño hemos elegido $d_2\beta > d_3\alpha$ y $\epsilon < \frac{\pi}{2}$ de acuerdo con (5.24). Sustituyendo $q_{a_1} = 0$ y $\kappa = 0$ en (5.46) resulta $q_{a_2} = 0$, lo que implica $\dot{q}_{a_1} = \dot{q}_{a_2} = 0$, y a su vez se obtiene $p_{a_1} = p_{a_2} = 0$. Esto significa que el punto de equilibrio en el origen $\begin{bmatrix} q_{a_1} & q_{a_2} & p_{a_1} & p_{a_2} & \tilde{\delta} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ es el conjunto invariante más grande dentro del conjunto S . Entonces, por el teorema de Barbashin-Krasovskii concluimos que este punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable y el objetivo de control (2.43) está asegurado en un sentido local.

5.5. Resultados de simulaciones numéricas

Se utilizaron MatLab y Simulink para crear los diagramas que representan las expresiones mencionadas anteriormente: el modelo dinámico descrito en (5.8), la entrada de control $v(t)$ de (5.29) y el observador no lineal de (5.30). Los siguientes parámetros establecidos para esta serie de simulaciones fueron recabados a partir del trabajo de [38], La configuración de la plana inicial fue: $\begin{bmatrix} q_1(0) & q_2(0) & p_1(0) & p_2(0) & \tilde{\delta}(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 10^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. La ganancia del observador seleccionada fue $\epsilon_0 = 3$, se introdujo una perturbación constante $\delta = 5[\text{N}]$ la cual se aplicó a los 10[s] de la simulación. El método de integración utilizado para esta serie de simulaciones fue el ODE23, con un error de tolerancia de 1×10^{-3} . Los parámetros, las ganancias y la perturbación aplicada se encuentran en las tablas 5.1-5.3.

Parámetro	Valor [Unidad]
M_c	0.25 [kg]
m_p	0.127 [kg]
l_p	0.156 [m]

Tabla 5.1: Parámetros para el carro-péndulo

Parámetro	Valor
k_p	12
k_v	0.3
d_1	1
d_2	2
d_3	5
ϵ_0	3

Tabla 5.2: Ganancias para el controlador y el observador no lineal del carro-péndulo

Perturbación	Valor [Unidad]
δ	5 [N]

Tabla 5.3: Valor de la perturbación aplicada

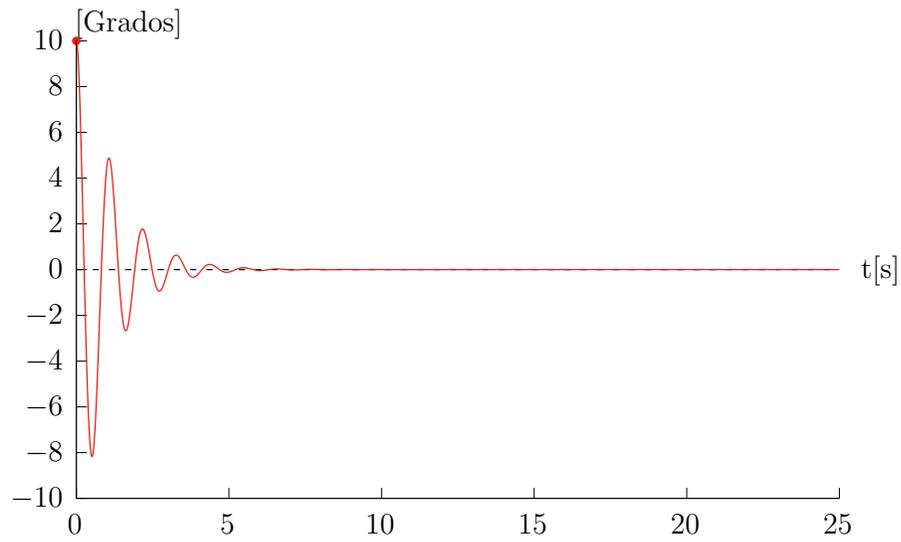
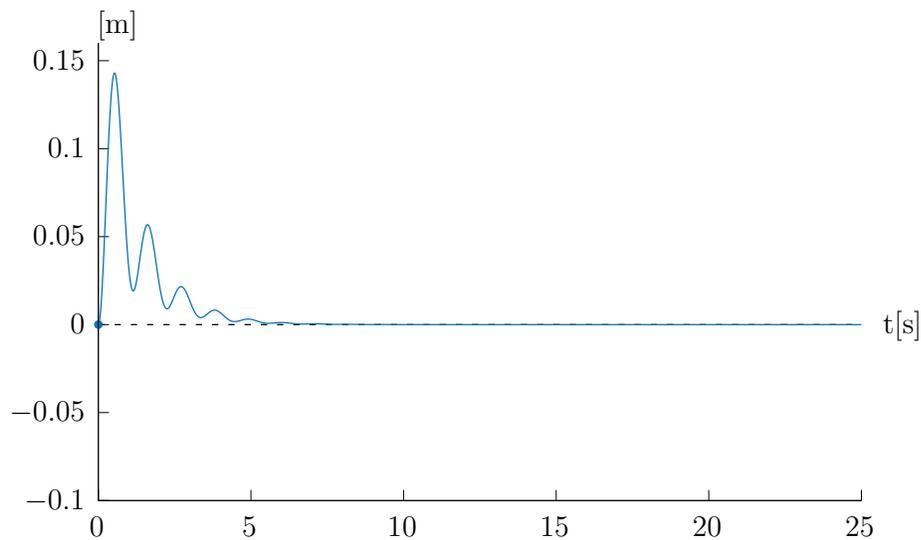
5.5.1. Carro-péndulo sin observador y sin perturbación δ (a) Evolución temporal del péndulo $q_1(t)$ (b) Evolución temporal del carro $q_2(t)$

Figura 5.2: Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo

La Figura 5.2 nos muestra la evolución temporal de $q_1(t)$ correspondiente al péndulo y $q_2(t)$ correspondiente al carro, observamos que el objetivo de control de (2.43) se cumple satisfactoriamente ya que ambas posiciones se asientan en el origen el cual fue definido anteriormente en la sección 5.4 como único punto de equilibrio.

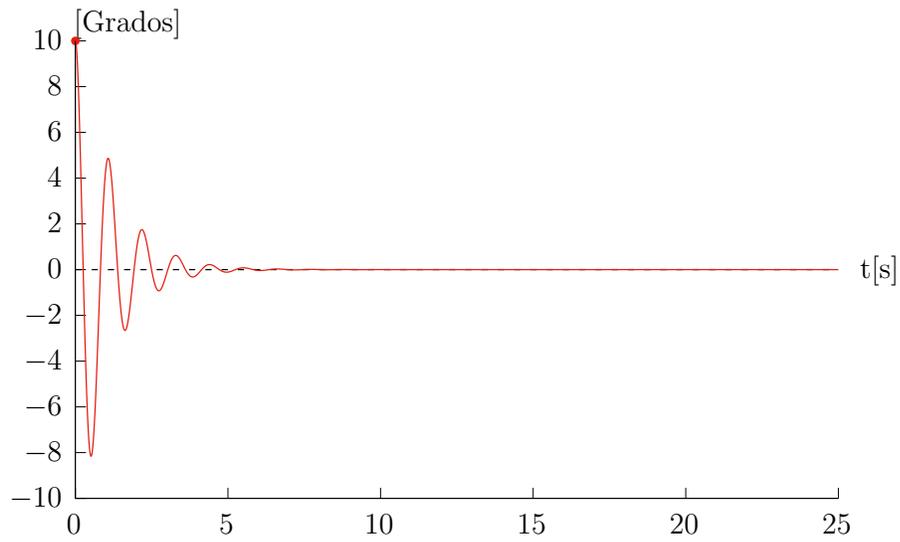
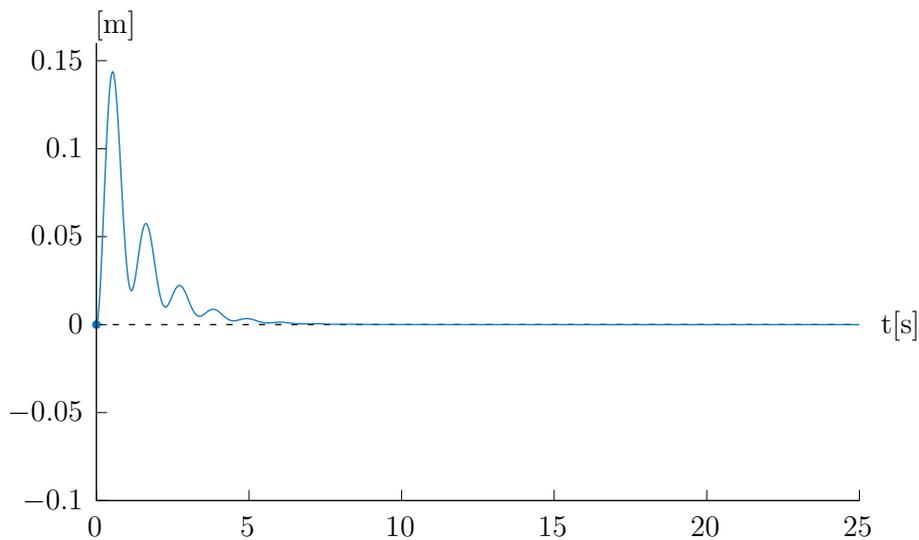
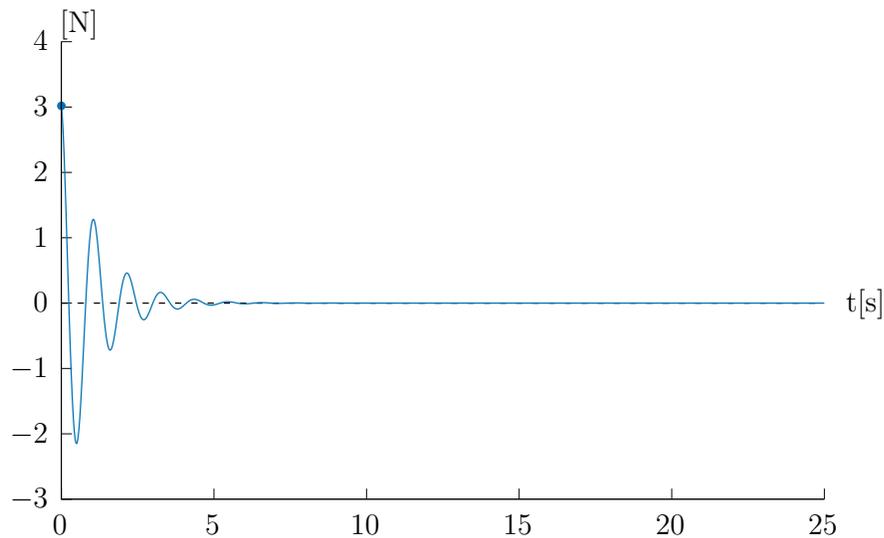
5.5.2. Carro-péndulo con observador y sin perturbación δ (a) Evolución temporal del péndulo $q_1(t)$ (b) Evolución temporal del carro $q_2(t)$

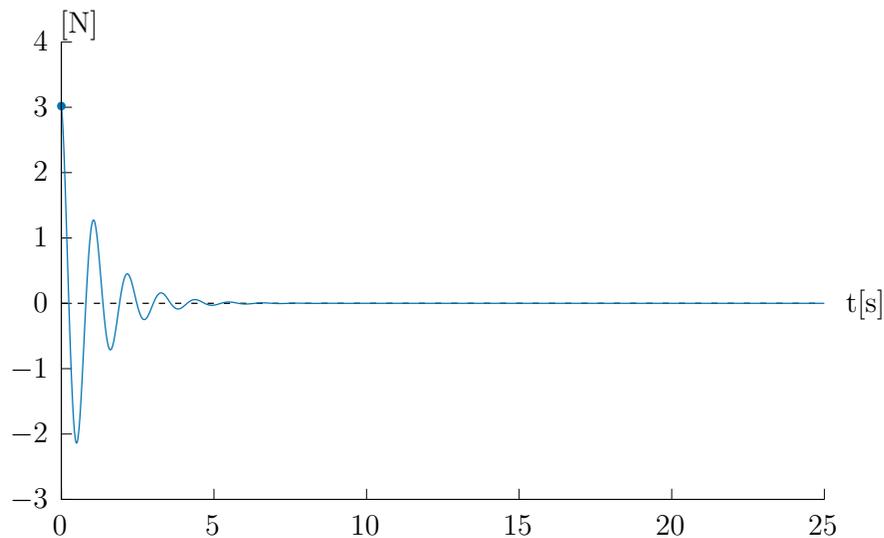
Figura 5.3: Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo

En la Figura 5.3 se ha incorporado el observador no lineal. Observamos que, en contraste con las gráficas de la Figura 5.2, no se presentan cambios considerables que afecten las respuestas de $q_1(t)$ y $q_2(t)$.

5.5.3. Comparativa de la entrada de control del carro-péndulo con y sin observador



(a) Entrada de control $F(t)$ sin observador



(b) Entrada de control $F(t)$ con observador

Figura 5.4: Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo

En la Figura 5.4 podemos apreciar una comparación entre la entrada de control al con y sin la presencia del observador no lineal, se puede notar que no hay una diferencia considerable entre ambas respuestas.

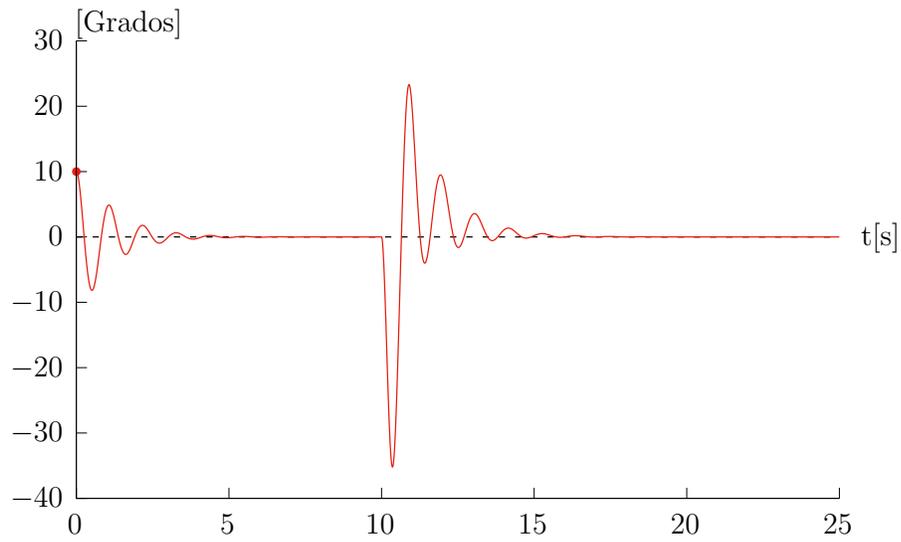
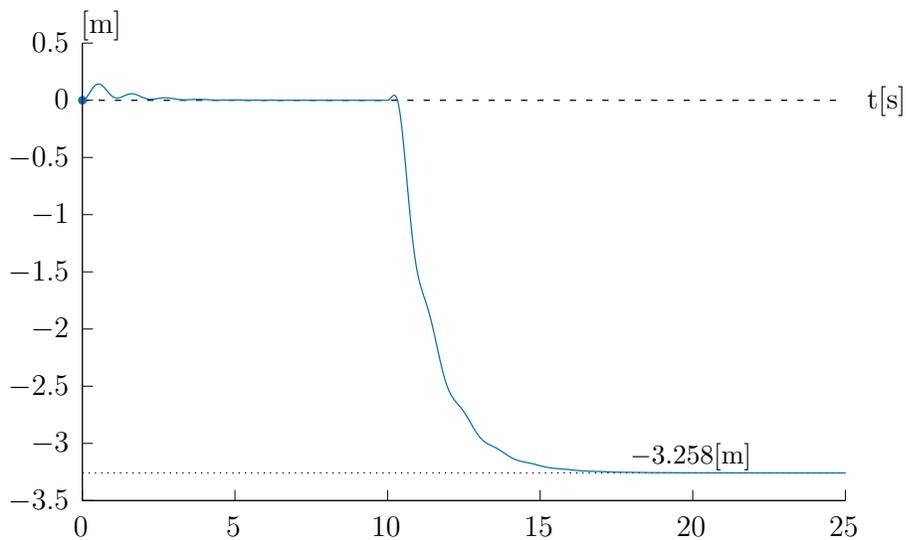
5.5.4. Carro-péndulo sin observador y con perturbación δ (a) Evolución temporal del péndulo $q_1(t)$ (b) Evolución temporal del carro $q_2(t)$

Figura 5.5: Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo

Al aplicar la perturbación constante en el sistema carro-péndulo como lo muestra la Figura 5.5, vemos un aumento en la respuesta del péndulo expresada en la gráfica (5.5a) y en el carro podemos ver como se aleja del punto de equilibrio y se establece en un valor fijo como lo muestra la gráfica (5.5b), esto es indicativo que el carro tuvo que desplazarse esa distancia para poder regular la posición del péndulo pero a su vez se aleja del punto de equilibrio establecido.

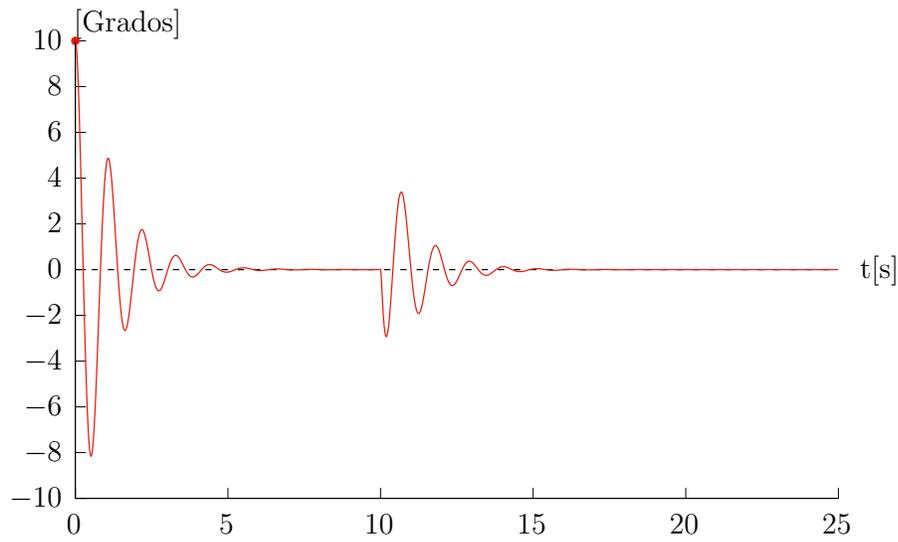
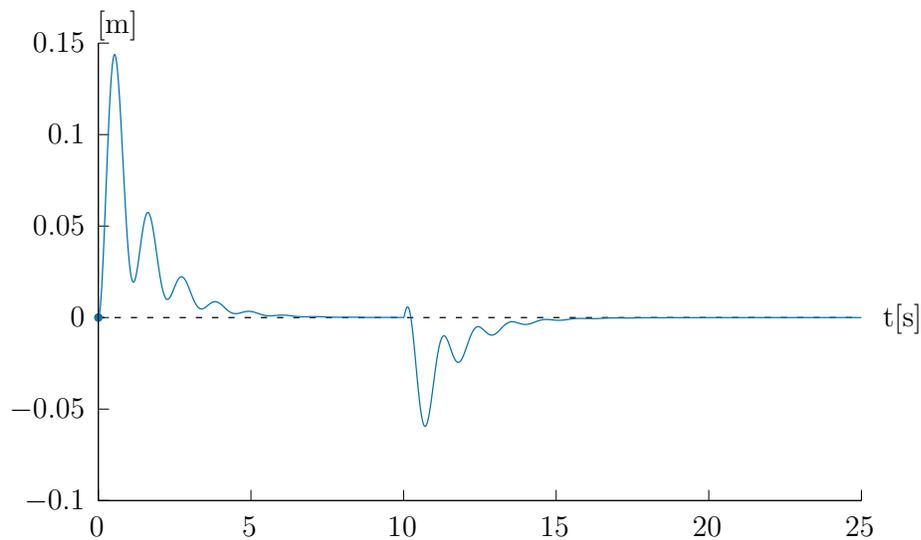
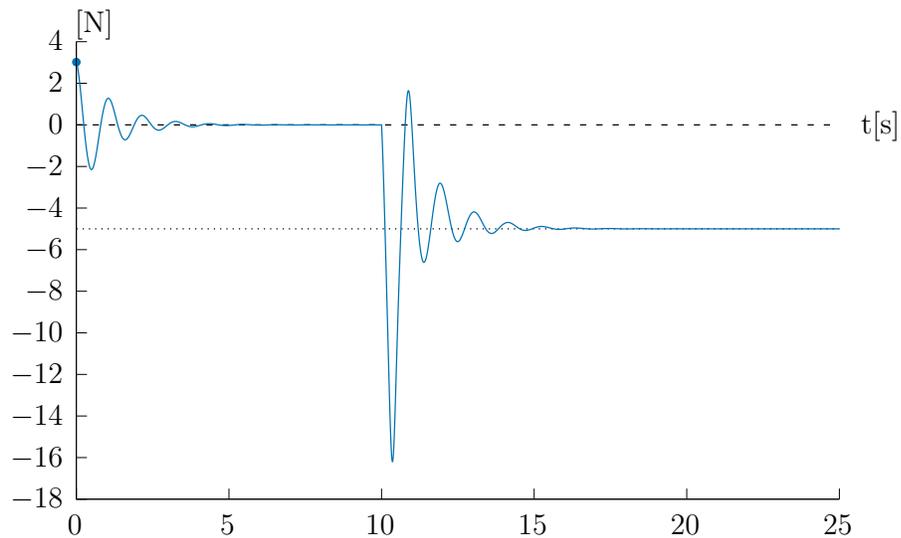
5.5.5. Carro-péndulo con observador y con perturbación δ (a) Evolución temporal del péndulo $q_1(t)$ (b) Evolución temporal del carro $q_2(t)$

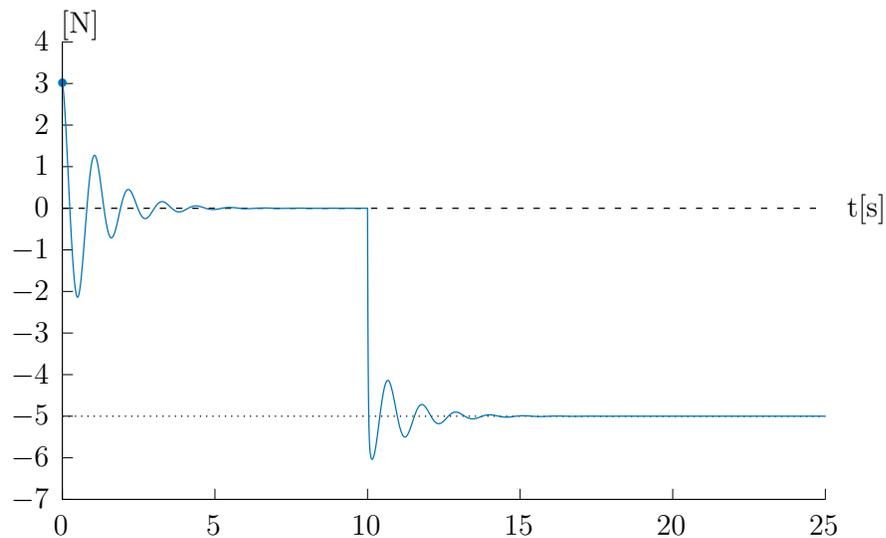
Figura 5.6: Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo

Al implementar el observador no lineal en presencia de la perturbación constante como lo muestra la Figura 5.6 vemos una mejor respuesta por parte de las posiciones y resalta que el carro, como se muestra en la gráfica (5.6b), logra regular la posición del péndulo y a su vez se mantiene en el punto de equilibrio establecido. Lo cual es indicativo de que el observador no lineal plasmado en (5.30) logra estimar la perturbación y amortiguar sus efectos.

5.5.6. Carro-péndulo entrada de control con y sin observador con una perturbación constante δ



(a) Entrada de control $F(t)$ sin observador



(b) Entrada de control $F(t)$ con observador

Figura 5.7: Evoluciones temporales correspondientes al carro-péndulo

La Figura 5.7 se muestra a modo de comparación entre la entrada de control con y sin el observador no lineal, se puede resaltar que al agregar el observador no lineal la entrada de control presenta un menor sobre impulso para lograr estimar la perturbación constante tal como se muestra en las gráficas (5.7a) y (5.7b).

5.5.7. Comparación entre la perturbación δ y la estimación del observador no lineal del carro-péndulo

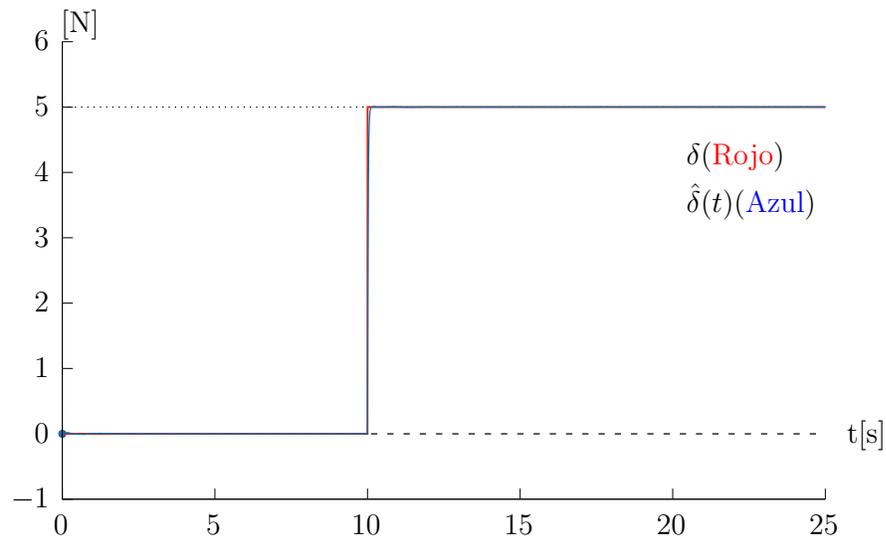


Figura 5.8: Comparación entre la estimación del observador no lineal y la perturbación δ

Como nos muestra la Figura 5.8 vemos que la estimación del observador no lineal es casi idéntica a la perturbación constante, lo cual nos indica que el criterio de diseño visto en (2.44) se cumple de manera satisfactoria.

Capítulo 6

Conclusiones

Se ha presentado un esquema de diseño de control robusto por modelo de energía para perturbaciones constantes en sistemas mecánicos. La evidencia mostrada en el experimento en tiempo real y las simulaciones numéricas resalta cómo se logran cumplir tanto del objetivo de control como el criterio de diseño establecido.

Durante las pruebas experimentales realizadas en el Servomotor SRV02 y las simulaciones numéricas de los sistemas subactuados, se observaron resultados satisfactorios. Se logra apreciar que con la aplicación del observador no lineal se ha mejorado de manera significativa la robustez del controlador en presencia de perturbaciones constantes. Esto se debe a la capacidad del observador no lineal para estimar de manera precisa las perturbaciones y compensarlas, lo que permite al sistema mantener un desempeño óptimo. Además, el enfoque basado en el modelo de energía ha demostrado ser efectivo en la gestión de la energía del sistema, contribuyendo a la estabilidad y eficiencia del controlador diseñado.

Además, de esta tesis han surgido dos artículos científicos que han sido sometidos a revisión, estos mismos son “*Robust control joint position regulation of the inertial wheel pendulum affected by constant torque disturbance*”, y “*Control robusto para regulación de posición del sistema carro-péndulo afectado por perturbaciones constantes*”.

Bibliografía

- [1] A. M. Bloch y N. H. McClamroch, “Control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints,” en *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 1989, pp. 201-205.
- [2] J.-N. Juang y M. Q. Phan, *Identification and control of mechanical systems*. Cambridge University Press, 2001.
- [3] F. Bullo y A. D. Lewis, *Geometric control of mechanical systems: modeling, analysis, and design for simple mechanical control systems*. Springer, 2019, vol. 49.
- [4] W. He, S. S. Ge, B. V. E. How e Y. S. Choo, *Dynamics and control of mechanical systems in offshore engineering*. Springer, 2014.
- [5] D. E. Koditschek, “The control of natural motion in mechanical systems,” 1991.
- [6] A. Tornambe, “Modeling and control of impact in mechanical systems: Theory and experimental results,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, n.º 2, pp. 294-309, 1999.
- [7] F. Bullo y R. M. Murray, “Tracking for fully actuated mechanical systems: a geometric framework,” *Automatica*, vol. 35, n.º 1, pp. 17-34, 1999.
- [8] N. A. Chaturvedi, A. M. Bloch y N. H. McClamroch, “Global stabilization of a fully actuated mechanical system on a Riemannian manifold including control saturation effects,” en *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 2006, pp. 6116-6121.
- [9] R. Reyes-Báez, A. van der Schaft y B. Jayawardhana, “Virtual contractivity-based control of fully-actuated mechanical systems in the port-Hamiltonian framework,” *Automatica*, vol. 141, pp. 110-275, 2022.
- [10] J. Acosta, E. Panteley y R. Ortega, “A new strict lyapunov function for fully-actuated mechanical systems controlled by ida-pbc,” en *2009 IEEE Control Applications,(CCA) & Intelligent Control,(ISIC)*, IEEE, 2009, pp. 519-524.

- [11] M. Sassano y A. Astolfi, “Dynamic disturbance attenuation and approximate optimal control for fully actuated mechanical systems,” en *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, IEEE, 2011, pp. 894-899.
- [12] B. Convens, K. Merckaert, M. M. Nicotra, R. Naldi y E. Garone, “Control of fully actuated unmanned aerial vehicles with actuator saturation,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, n.º 1, pp. 12715-12720, 2017.
- [13] N. P. I. Aneke, “Control of underactuated mechanical systems,” 2003.
- [14] R. Ortega, M. W. Spong, F. Gomez-Estern y G. Blankenstein, “Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment,” *IEEE transactions on automatic control*, vol. 47, n.º 8, pp. 1218-1233, 2002.
- [15] J. Moreno-Valenzuela y C. Aguilar-Avelar, *Motion control of underactuated mechanical systems*. Springer, 2018, vol. 1.
- [16] M. W. Spong, “Underactuated mechanical systems,” en *Control problems in robotics and automation*, Springer, 2005, pp. 135-150.
- [17] A. Choukchou-Braham, B. Cherki, M. Djemai y K. Busawon, *Analysis and control of underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [18] R. M. Murray, “Nonlinear control of mechanical systems: A Lagrangian perspective,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 28, n.º 14, pp. 349-360, 1995.
- [19] J. Grizzle, C. H. Moog y C. Chevallereau, “Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, n.º 5, pp. 559-576, 2005.
- [20] W. Blajer y K. Kołodziejczyk, “Control of underactuated mechanical systems with servo-constraints,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 50, pp. 781-791, 2007.
- [21] A. Donaire, J. G. Romero, R. Ortega, B. Siciliano y M. Crespo, “Robust IDA-PBC for underactuated mechanical systems subject to matched disturbances,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, n.º 6, pp. 1000-1016, 2017.
- [22] M. Aminsafae y M. H. Shafiei, “A robust approach to stabilization of 2-DOF underactuated mechanical systems,” *Robotica*, vol. 38, n.º 12, pp. 2221-2238, 2020.
- [23] A. Perrusquia y W. Yu, “Robust control under worst-case uncertainty for unknown nonlinear systems using modified reinforcement learning,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 30, n.º 7, pp. 2920-2936, 2020.

- [24] A. Giusti, S. B. Liu y M. Althoff, “Interval-arithmetic-based robust control of fully actuated mechanical systems,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 30, n.º 4, pp. 1525-1537, 2021.
- [25] L. Xu y B. Yao, “Adaptive robust control of mechanical systems with non-linear dynamic friction compensation,” *International Journal of control*, vol. 81, n.º 2, pp. 167-176, 2008.
- [26] B. Yao, *Adaptive robust control of nonlinear systems with application to control of mechanical systems*. University of California, Berkeley, 1996.
- [27] W.-H. Chen, “Disturbance observer based control for nonlinear systems,” *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, vol. 9, n.º 4, pp. 706-710, 2004.
- [28] J. G. Romero, A. Donaire y R. Ortega, “Robust energy shaping control of mechanical systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 62, n.º 9, pp. 770-780, 2013.
- [29] S. Delgado y P. Kotyczka, “Energy shaping for position and speed control of a wheeled inverted pendulum in reduced space,” *Automatica*, vol. 74, pp. 222-229, 2016.
- [30] G. Viola, R. Ortega, R. Banavar, J. Á. Acosta y A. Astolfi, “Total energy shaping control of mechanical systems: simplifying the matching equations via coordinate changes,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, n.º 6, pp. 1093-1099, 2007.
- [31] J. Sandoval, L. Cervantes-Perez, V. Santibáñez, J. Moreno-Valenzuela y R. Kelly, “A GES joint position trajectory tracking smooth controller of torque-driven robot manipulators affected by disturbances,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 34, n.º 2, pp. 1032-1053, 2024.
- [32] D. A. P. Berrelleza, “Aplicación de técnicas de optimización heurística Multi-Objetivo a la sintonía de reguladores para sistemas mecatrónicos,” Instituto Tecnológico de La Paz, 2021.
- [33] S Afkhami, M. Yazdanpanah y P. Maralani, “Stabilization of inertia wheel pendulum using output feedback back-stepping,” en *Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications, 2003. CCA 2003.*, IEEE, vol. 2, 2003, pp. 977-982.
- [34] D. J. Block, K. J. Åström y M. W. Spong, *The reaction wheel pendulum*. Morgan & Claypool Publishers, 2007.
- [35] V. Santibanez, R. Kelly y J. Sandoval, “Control of the inertia wheel pendulum by bounded torques,” en *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 2005, pp. 8266-8270.
- [36] J. Sandoval, R. Kelly, V. Santibáñez y J. M. Valenzuela, “A speed regulator for a torque-driven inertia wheel pendulum,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, n.º 2, pp. 6293-6298, 2020.

- [37] I. Gandarilla, V. Santibáñez, J. Sandoval y J. G. Romero, “PID passivity-based control laws for joint position regulation of a self-balancing robot,” *Control Engineering Practice*, vol. 116, 2021.
- [38] J. Sandoval, R. Kelly y V. Santibáñez, “A speed regulator for a force-driven cart-pole system,” *International Journal of Systems Science*, vol. 53, n.º 2, pp. 412-430, 2022.
- [39] C. A. Manrique Escobar, C. M. Pappalardo y D. Guida, “A parametric study of a deep reinforcement learning control system applied to the swing-up problem of the cart-pole,” *Applied Sciences*, vol. 10, n.º 24, pp. 9013, 2020.
- [40] L. Ovalle, H. Ríos y M. Llama, “Robust output-feedback control for the cart–pole system: a coupled super-twisting sliding-mode approach,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 13, n.º 2, pp. 269-278, 2019.
- [41] H. Yu, Y. Liu y T. Yang, “Closed-loop tracking control of a pendulum-driven cart-pole underactuated system,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 222, n.º 2, pp. 109-125, 2008.
- [42] M. W. Spong, “Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems,” vol. 1, pp. 314-321, 1994.

Apéndice A

Diagramas de simulink para los sistemas subactuados

A.1. Diagramas para el péndulo con rueda inercial

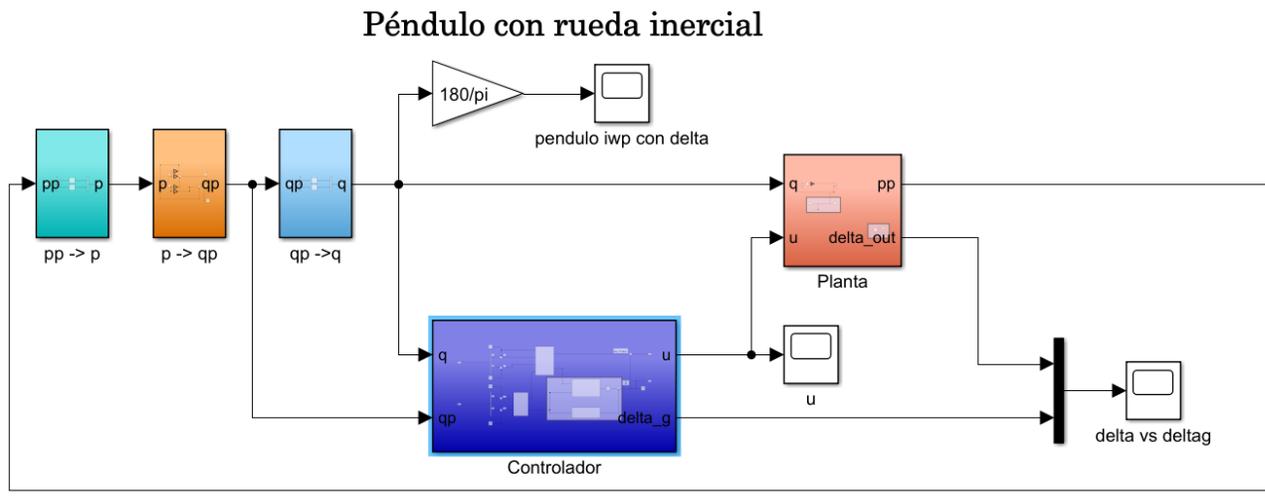


Figura A.1: Diagrama de bloques del péndulo con rueda inercial

La Figura A.1 nos muestra la estructura del diagrama de bloques utilizado para simular el comportamiento del péndulo con rueda inercial, esto mismo, considerando todo lo anteriormente visto en el capítulo 4.

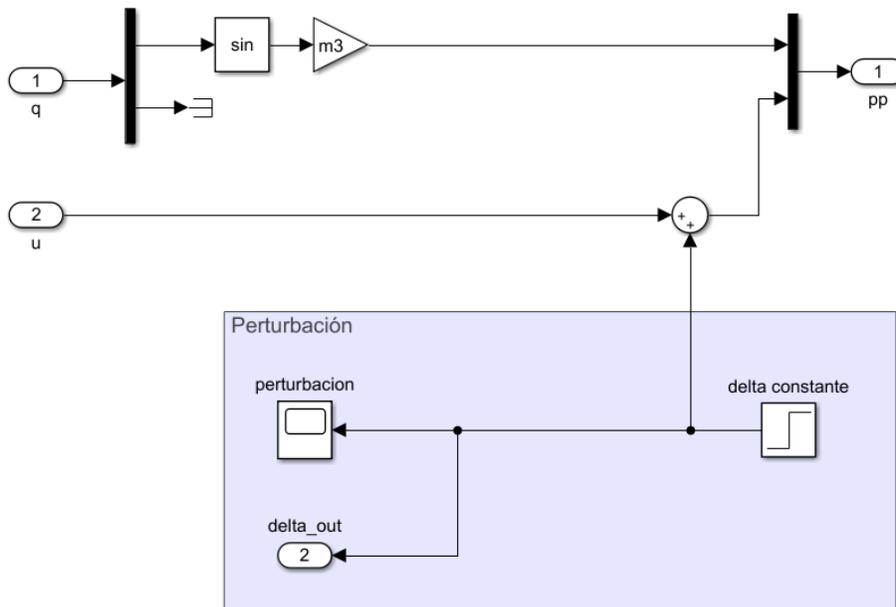


Figura A.2: Planta del péndulo con rueda inercial vista en (4.4)

Podemos apreciar en la Figura A.2 nos muestra como se expresa la planta o modelo dinámico visto en (4.4).

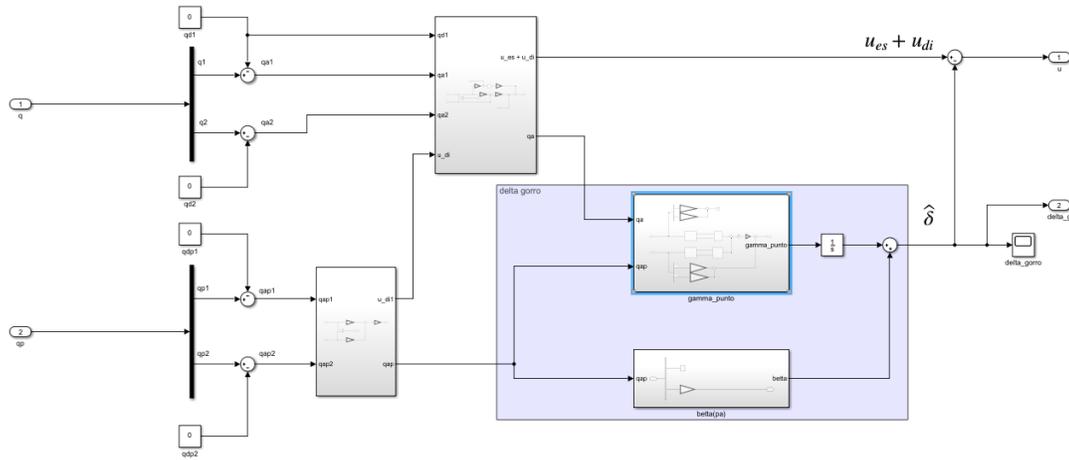


Figura A.3: Controlador $u(t)$ del péndulo con rueda inercial vista en (4.16)

La Figura A.3 nos muestra el diagrama de bloques correspondiente a la entrada de control $u(t)$ de (4.16).

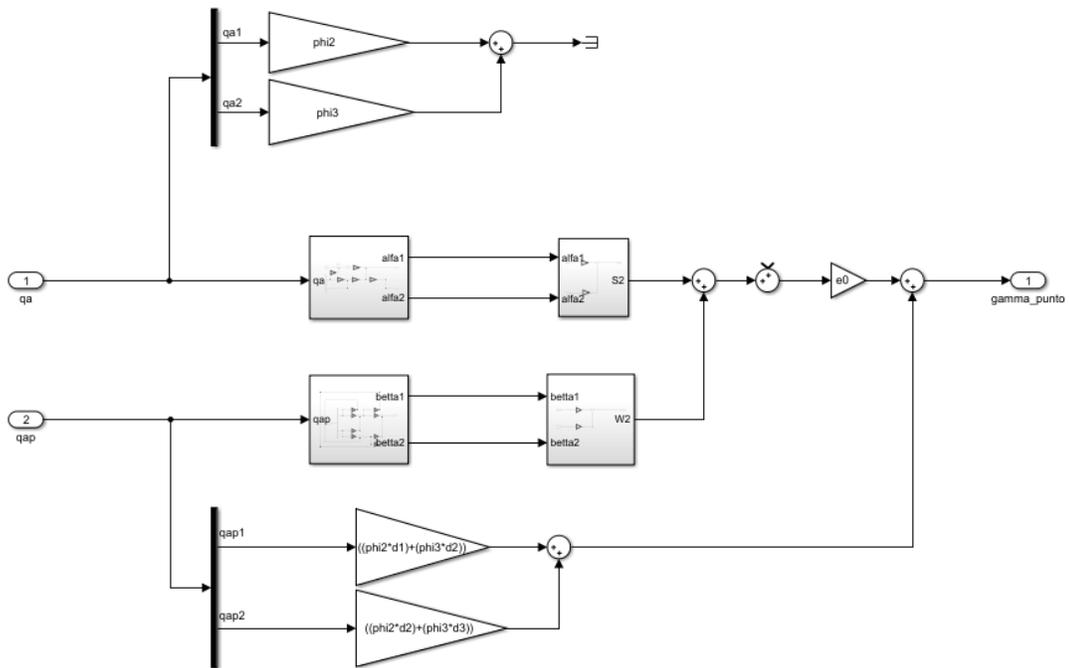


Figura A.4: Diagrama de bloques de $\dot{\gamma}$ del péndulo con rueda inercial

La Figura A.4 nos muestra el diagrama de bloques correspondiente a $\dot{\gamma}$ visto en (4.18)

A.2. Diagramas para el carro-péndulo

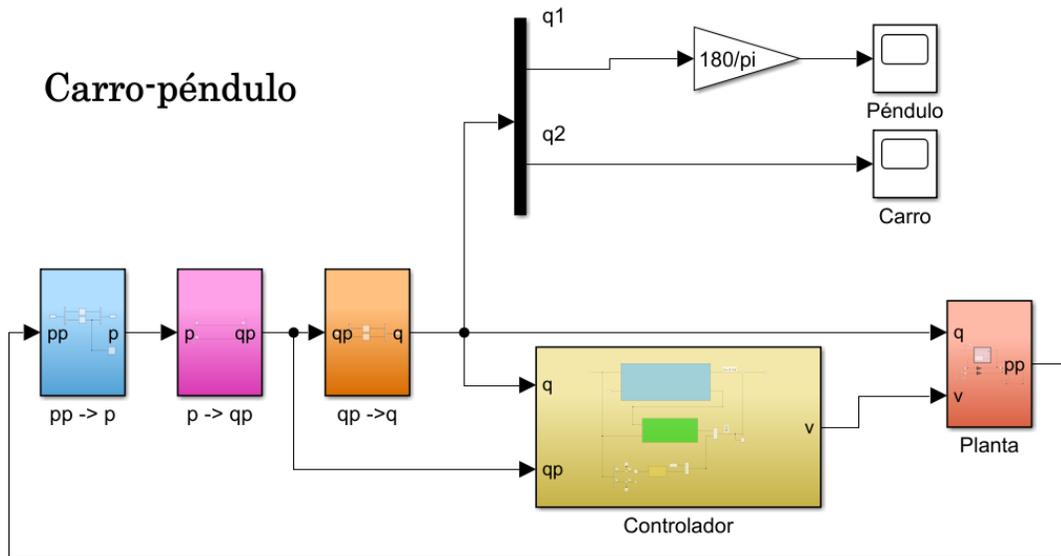


Figura A.5: Diagrama de bloques del carro-péndulo

Podemos apreciar en Figura A.5 el diagrama de bloques correspondiente al sistema carro-péndulo, en donde, se encuentran todos los elementos desarrollados anteriormente en el capítulo 5.

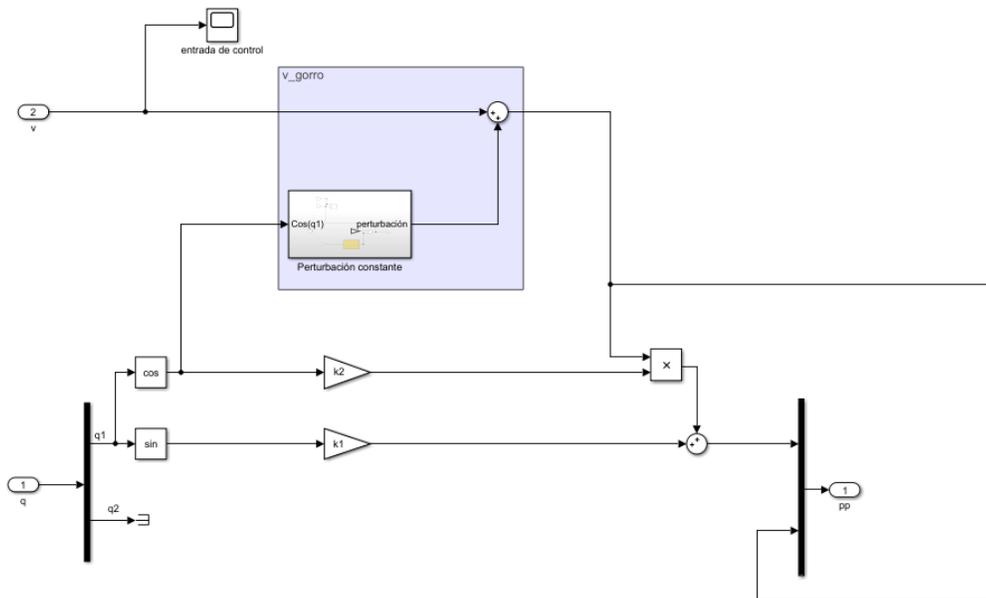


Figura A.6: Planta del carro-péndulo vista en (5.8)

La Figura A.6 nos muestra el diagrama de bloques correspondiente a la planta vista en (5.8).

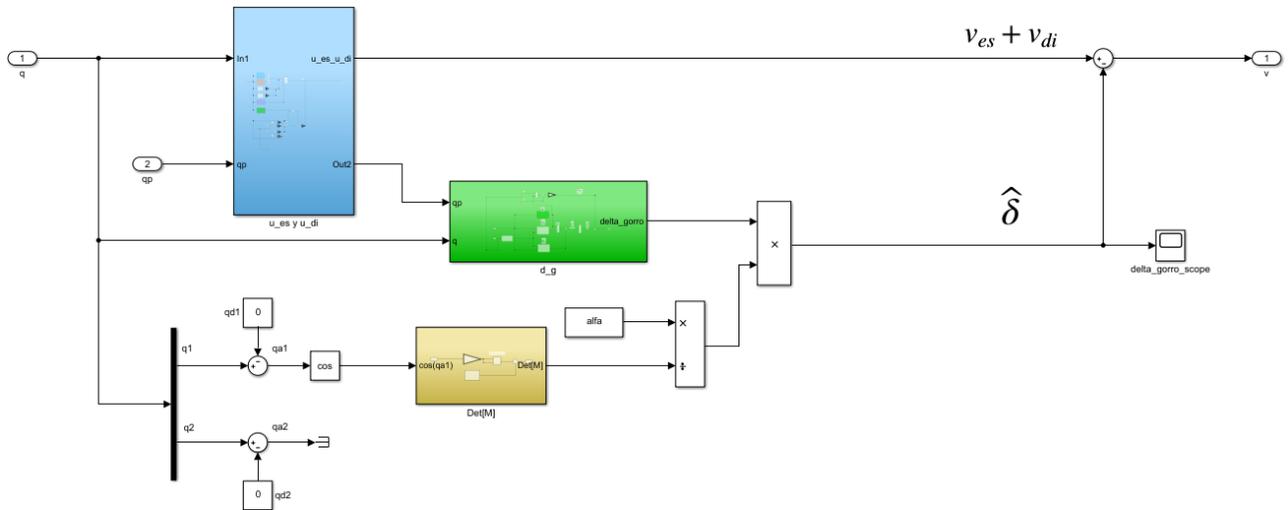


Figura A.7: Controlador del carro-péndulo vista en (5.29)

El diagrama de bloques y sus subsistemas correspondientes al controlador $v(t)$ visto en (5.29), se encuentran plasmados a modo de ilustración en la Figura A.7.

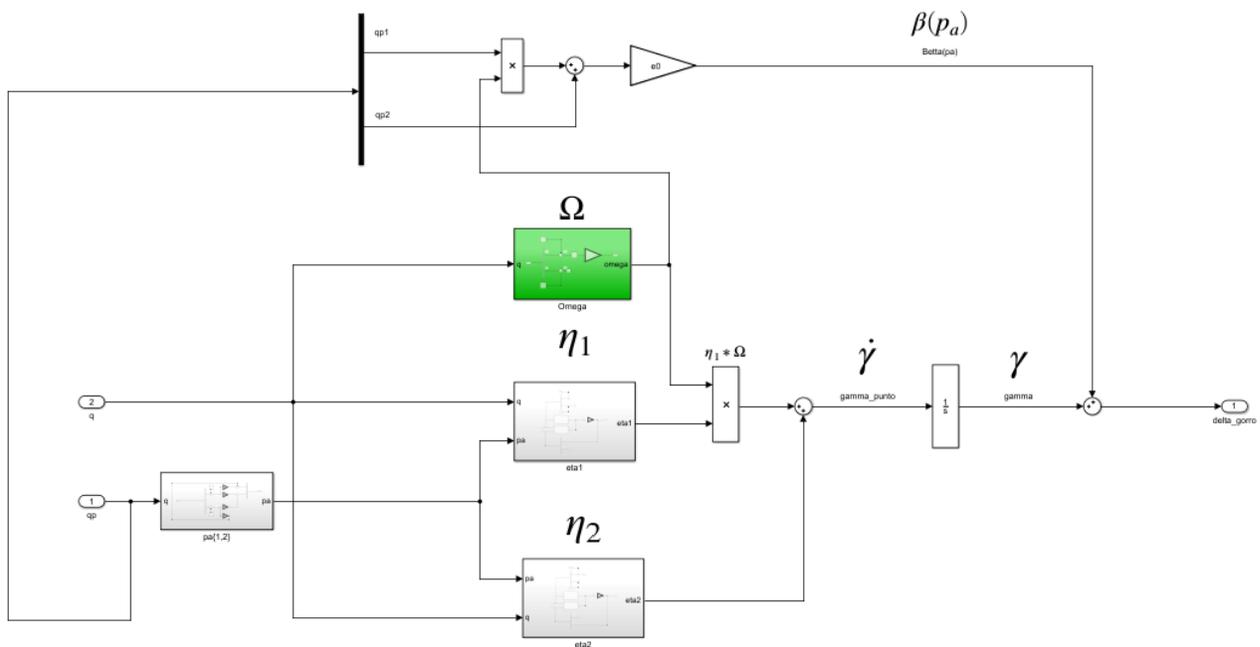


Figura A.8: Diagrama de bloques de $\hat{\delta}$ del carro-péndulo vista en (5.30)

La Figura A.8 nos muestra los diagramas de bloques y subsistemas correspondientes a la estructura de $\hat{\delta}$ vista en (5.30).

Apéndice B

Desarrollo de $\dot{\mathcal{V}}_L$ para los casos
subactuados

Los procedimientos que se presentan en este apéndice corresponden a la expresión vista en (2.49), donde $\dot{\mathcal{V}}_L$ se desarrolla para los casos particulares del péndulo con rueda inercial y carro-péndulo como se muestra a continuación.

B.1. $\dot{\mathcal{V}}_L$ para el péndulo con rueda inercial

Retomando (2.49) como:

$$\dot{\mathcal{V}}_L = -\mathbf{p}_a^T M_a^{-1} \mathcal{D}_a M_a^{-1} \mathbf{p}_a - \epsilon_0 \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T G^T W M^{-1} G \tilde{\boldsymbol{\delta}}. \quad (\text{B.1})$$

Ahora, desarrollamos (B.1) para el sistema péndulo con rueda inercial.

Retomando \mathcal{D}_a de (4.5)

$$\mathcal{D}_a = T_a G k_v G^T T_a^T \quad (\text{B.2})$$

donde

$$T_a = M_a W M^{-1} \quad (\text{B.3})$$

con Sustituyendo (B.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_L &= -\mathbf{p}_a^T \cancel{M_a^{-1}} \cancel{M_a} W M^{-1} G k_v G^T M^{-1} W \cancel{M_a} \cancel{M_a^{-1}} \mathbf{p}_a - \epsilon_0 \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T G^T W M^{-1} G \tilde{\boldsymbol{\delta}}, \\ &= \underbrace{-k_v \mathbf{p}_a^T W M^{-1} G G^T M^{-1} W \mathbf{p}_a}_{\dot{H}_a} - \underbrace{\epsilon_0 \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T G^T W M^{-1} G \tilde{\boldsymbol{\delta}}}_{\dot{S}_a}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Recuperando las definiciones de las matrices M y W vistas en (4.2) y (4.8), donde por simplicidad definimos M^{-1} como:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\det[M]} & -\frac{a_2}{\det[M]} \\ -\frac{a_2}{\det[M]} & \frac{a_3}{\det[M]} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

A continuación, se desarrollan los elementos $\dot{\mathcal{H}}_a$ y $\dot{\mathcal{S}}_a$ mencionados en (B.4).

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{H}}_a &= -k_v \mathbf{p}_a^T W M^{-1} G G^T M^{-1} W \mathbf{p}_a, \\
 &= -k_v \begin{bmatrix} p_{a_1} & p_{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\
 &= -k_v \begin{bmatrix} k_1 p_{a_1} \phi_1 + k_2 p_{a_2} \phi_2 & k_1 p_{a_1} \phi_2 + k_2 p_{a_2} \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\
 &= -k_v \begin{bmatrix} 0 & k_1 p_{a_1} \phi_2 + k_2 p_{a_2} \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\
 &= -k_v \begin{bmatrix} \phi_2 [k_1 p_{a_1} \phi_2 + p_{a_2} \phi_3] & \phi_3 [k_1 p_{a_1} \phi_2 + p_{a_2} \phi_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\
 &= -k_v \begin{bmatrix} \phi_2 k_1 [k_1 p_{a_1} \phi_2 + k_2 p_{a_2} \phi_3] & \phi_3 k_2 [k_1 p_{a_1} \phi_2 + k_2 p_{a_2} \phi_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\
 &= -k_v [\phi_2 k_1 [k_1 p_{a_1} \phi_2 + k_2 p_{a_2} \phi_3] + \phi_3 k_2 [k_1 p_{a_1} \phi_2 + k_2 p_{a_2} \phi_3]], \\
 &= -k_v [p_{a_1}^2 k_1^2 \phi_2^2 + 2\phi_2 \phi_3 k_1 k_2 p_{a_1} p_{a_2} + p_{a_2}^2 k_2^2 \phi_3^2], \\
 &= -k_v [p_{a_1} k_1 \phi_2 + p_{a_2} k_2 \phi_3]^2. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

Considerando que $k_1 = a_1$, $k_2 = a_2$, y desarrollando los terminos vistos en la simplificación (B.5), (B.6) se reescribe como me muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{H}}_a &= -k_v \left[-\frac{p_{a_1} a_1 a_2}{\det[\mathbf{M}]} + \frac{p_{a_2} a_2 a_1}{\det[\mathbf{M}]} \right]^2, \\
 &= -k_v \left[\frac{a_1 a_2 [-p_{a_1} + p_{a_2}]}{\det[\mathbf{M}]} \right]^2. \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

Ahora, continuamos con el desarrollo de $\dot{\mathcal{S}}_a$ de (B.4).

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{S}}_a &= \epsilon_0 \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T G^T W M^{-1} G \tilde{\boldsymbol{\delta}}, \\
 &= \epsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\delta}^2, \\
 &= \epsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\delta}^2, \\
 &= \epsilon_0 \begin{bmatrix} k_2 \phi_2 & k_2 \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\delta}^2, \\
 &= \epsilon_0 k_2 \phi_3 \tilde{\delta}^2.
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

A partir de la simplificación (B.5) y con $k_2 = a_2$, obtenemos que

$$\dot{\mathcal{S}}_a = -\epsilon_0 \frac{a_1 a_2}{\det[M_a]} \tilde{\delta}^2 \tag{B.9}$$

por lo tanto, la expresión vista en (B.1) queda

$$\dot{\mathcal{V}}_L = -k_v \left[\frac{a_1 a_2 [-p_{a_1} + p_{a_2}]}{\det[M]} \right]^2 - \epsilon_0 \frac{a_1 a_2}{\det[M_a]} \tilde{\delta}^2. \tag{B.10}$$

donde (B.10) corresponde a (4.29).

B.2. $\dot{\mathcal{V}}_L$ para el carro-péndulo

Para el carro-péndulo las matrices M y W son la identidad, con $T_a = M_a$, se define \mathcal{D}_a como:

$$\mathcal{D}_a = M_a G k_v G^T M_a \tag{B.11}$$

con $G = \begin{bmatrix} \Omega & 1 \end{bmatrix}^T$, donde $\Omega = -\frac{\beta}{\alpha} \cos(q_1)$. Entonces \mathcal{V}_L de (2.49) queda;

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{V}}_L &= -\mathbf{p}_a^T M_a^{-1} \mathcal{D}_a M_a^{-1} \mathbf{p}_a - \epsilon_0 \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T G^T W M^{-1} G \tilde{\boldsymbol{\delta}}, \\
 &= \underbrace{-k_v \mathbf{p}_a^T G G^T \mathbf{p}_a}_{\dot{\mathcal{H}}_a} - \underbrace{\epsilon_0 \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T G^T G \tilde{\boldsymbol{\delta}}}_{\dot{\mathcal{S}}_a}.
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Desarrollando $\dot{\mathcal{H}}_a$ de (B.12), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{H}}_a &= -k_v \mathbf{p}_a^T G G^T \mathbf{p}_a, \\
 &= -k_v \begin{bmatrix} p_{a_1} & p_{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\
 &= -k_v \begin{bmatrix} p_{a_1} \Omega + p_{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\
 &= -k_v \begin{bmatrix} \Omega [p_{a_1} \Omega + p_{a_2}] & [p_{a_1} \Omega + p_{a_2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\
 &= -k_v [p_{a_1} \Omega [p_{a_1} \Omega + p_{a_2}] + p_{a_2} [p_{a_1} \Omega + p_{a_2}]], \\
 &= -k_v [p_{a_1}^2 \Omega^2 + 2p_{a_1} p_{a_2} \Omega + p_{a_2}^2], \\
 &= -k_v [p_{a_1} \Omega + p_{a_2}]^2.
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Desarrollando \mathcal{S}_a de (B.12), queda

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_a &= -\epsilon_0 \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T G^T G \tilde{\boldsymbol{\delta}}, \\
 &= -\epsilon_0 \begin{bmatrix} \Omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\delta}}^2, \\
 &= -\epsilon_0 [\Omega^2 + 1] \tilde{\boldsymbol{\delta}}^2.
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Por lo tanto, $\dot{\mathcal{V}}_L$ de (2.49) para el carro-péndulo nos queda de la siguiente forma

$$\dot{\mathcal{V}}_L = -k_v [p_{a_1} \Omega + p_{a_2}]^2 - \epsilon_0 [\Omega^2 + 1] \tilde{\boldsymbol{\delta}}^2. \tag{B.15}$$

donde (B.15) corresponde a (5.41)

Apéndice C

Cálculos de la ley de control

C.1. Desarrollo de elementos para el observador para el péndulo con rueda inercial

$$\gamma = G^T \left[\epsilon_0 \left[\underbrace{M_a^{-1} \nabla_{q_a} H_a}_{E_1} + \underbrace{M_a^{-1} D_a \nabla_{p_a} H_a}_{E_2} \right] + \underbrace{M^{-1} W p_a}_{E_3} \right], \quad (\text{C.1})$$

Desarrollando el gradiente de H_a con respecto a q_a , queda

$$\nabla_{q_a} H_a = \begin{bmatrix} \nabla_{q_{a_1}} H_a \\ \nabla_{q_{a_2}} H_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_3 \text{sen}(q_{a_1}) - k_p \gamma_2 [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}] \\ k_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}] \end{bmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

Introduciendo α_1 y α_2 como:

$$\alpha_1 = -\gamma_3 \text{sen}(q_{a_1}) - k_p \gamma_2 [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}], \quad (\text{C.3})$$

$$\alpha_2 = k_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}], \quad (\text{C.4})$$

desarrollando el gradiente de H_a con respecto a p_a , queda

$$\nabla_{p_a} H_a = \begin{bmatrix} \nabla_{p_{a_1}} H_a \\ \nabla_{p_{a_2}} H_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{a_1} v_1 + p_{a_2} v_2 \\ p_{a_1} v_2 + p_{a_2} v_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

para simplificar el vector expresado al desarrollar $\nabla_{p_a} H_a$, se definen los siguientes vectores

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{a_1} v_1 + p_{a_2} v_2 \\ p_{a_1} v_2 + p_{a_2} v_3 \end{bmatrix}$$

donde v_1, v_2 y v_3 son elementos de M_a^{-1} , como se muestra a continuación

$$M_a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d_3}{\det[M_a]} & -\frac{d_2}{\det[M_a]} \\ -\frac{d_2}{\det[M_a]} & \frac{d_1}{\det[M_a]} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{d_3}{\det [M_a]}, \\ v_2 &= -\frac{d_2}{\det [M_a]}, \\ v_3 &= \frac{d_1}{\det [M_a]}, \end{aligned}$$

donde

$$\det [M_a] = d_1 d_3 - d_2^2.$$

Ahora procedemos a desarrollar los elementos seleccionados en (C.1).

Desarrollando E_1 :

$$E_1 = M_a^{-1} \nabla_{q_a} H_a = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

para simplificar los elementos presentes en el vector E_1 , se definen las siguientes constantes

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \\ s_2 &= \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Desarrollando el elemento D_a de E_2 :

Si $D_a = TGk_v G^T T^T = k_v \left[\underbrace{M_a K M^{-1} G G^T M^{-1} K M_a}_{l_1} \right]$, entonces:

$$D_a = k_v \left[\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \phi_2 [d_1 k_1 \phi_2 + d_2 k_2 \phi_3] & k_2 \phi_3 [d_1 k_1 \phi_2 + d_2 k_2 \phi_3] \\ k_1 \phi_2 [d_2 k_1 \phi_2 + d_3 k_2 \phi_3] & k_2 \phi_3 [d_2 k_1 \phi_2 + d_3 k_2 \phi_3] \end{bmatrix}}_{l_1} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix} \right],$$

por simplicidad los elementos presenten la matriz l_1 se definiran como las siguientes constantes

$$\begin{aligned} n_1 &= k_1 \phi_2 [d_1 k_1 \phi_2 + d_2 k_2 \phi_3], \\ n_2 &= k_2 \phi_3 [d_1 k_1 \phi_2 + d_2 k_2 \phi_3], \\ n_3 &= k_1 \phi_2 [d_2 k_1 \phi_2 + d_3 k_2 \phi_3], \\ n_4 &= k_2 \phi_3 [d_2 k_1 \phi_2 + d_3 k_2 \phi_3], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$D_a = k_v \left[\begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix} \right] = \underbrace{\begin{bmatrix} k_v [n_1 d_1 + n_2 d_2] & k_v [n_1 d_2 + n_2 d_3] \\ k_v [n_3 d_1 + n_4 d_2] & k_v [n_3 d_2 + n_4 d_3] \end{bmatrix}}_{l_2},$$

por simplicidad los elementos presenten la matriz l_2 se definiran como las siguientes constantes

$$\begin{aligned} z_1 &= k_v [n_1 d_1 + n_2 d_2], \\ z_2 &= k_v [n_1 d_2 + n_2 d_3], \\ z_3 &= k_v [n_3 d_1 + n_4 d_2], \\ z_4 &= k_v [n_3 d_2 + n_4 d_3], \end{aligned}$$

por lo tanto, el resultado de desarrollo D_a , queda

$$D_a = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

Desarrollando E_2 :

$$\begin{aligned}
 E_2 &= M_a^{-1} D_a \nabla_{p_a} H_a \\
 &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} \beta_1 [z_1 v_1 + z_3 v_2] + \beta_2 [z_2 v_1 + z_4 v_2] \\ \beta_1 [z_1 v_2 + z_3 v_3] + \beta_2 [z_2 v_2 + z_4 v_3] \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

por simplicidad los elementos en el vector E_2 se expresaran utilizando las siguientes constantes

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \beta_1 [z_1 v_1 + z_3 v_2] + \beta_2 [z_2 v_1 + z_4 v_2], \\
 w_2 &= \beta_1 [z_1 v_2 + z_3 v_3] + \beta_2 [z_2 v_2 + z_4 v_3],
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E_2 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \tag{C.10}$$

Desarrollando E_3

$$E_3 = M^{-1} W p_a,$$

con $W = K$, siendo K una matriz diagonal

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} \phi_1 k_1 & \phi_2 k_2 \\ \phi_2 k_1 & \phi_3 k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} p_{a_1} \phi_1 k_1 + p_{a_2} \phi_2 k_2 \\ p_{a_1} \phi_2 k_1 + p_{a_2} \phi_3 k_2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Para simplificar lo mostrado en el vector E_3 , se utilizaran las siguientes constantes

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= p_{a_1} \phi_1 k_1 + p_{a_2} \phi_2 k_2, \\
 \sigma_2 &= p_{a_1} \phi_2 k_1 + p_{a_2} \phi_3 k_2,
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E_3 = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

El elemento plasmado en (C.1) se reescribe como:

$$\dot{\gamma} = G^T \begin{bmatrix} \epsilon_0 [s_1 + w_1] + \sigma_1 \\ \epsilon_0 [s_2 + w_2] + \sigma_2 \end{bmatrix} \triangleq G^T \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.12})$$

entonces

$$\dot{\gamma} = G^T \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = h_2,$$

por lo tanto, (C.1) para el péndulo con rueda inercial queda de la siguiente forma:

$$\dot{\gamma} = \epsilon_0 [s_2 + w_2] + \sigma_2. \quad (\text{C.13})$$

donde

$$\begin{aligned} s_2 &= [\gamma_3 \operatorname{sen}(q_{a_1}) + k_p \gamma_2 [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}]] \frac{d_2}{\det[M_a]} + [k_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}]] \frac{d_1}{\det[M_a]}, \\ w_2 &= \beta_1 [z_1 v_2 + z_3 v_3] + \beta_2 [z_2 v_2 + z_3 v_3], \\ \sigma_2 &= -\frac{1}{\det[M]} [p_{a_1} a_2 k_1 - p_{a_2} a_1 k_2]. \end{aligned}$$

C.2. Desarrollo de elementos del observador no lineal para el carro-péndulo

A partir de la estructura vista en (C.1) desarrollamos los elementos señalados para el caso del Carro-Péndulo, como se muestra a continuación.

$$\dot{\gamma} = G^T \left[\epsilon_0 \left[\underbrace{M_a^{-1} \nabla_{q_a} H_a}_{E_1} + \underbrace{M_a^{-1} D_a \nabla_{p_a} H_a}_{E_2} \right] + \underbrace{M^{-1} W p_a}_{E_3} \right],$$

Desarrollando el gradiente de H_a con respecto a q_a , queda:

$$\nabla_{q_a} H_a = \begin{bmatrix} \nabla_{q_{a_1}} \mathcal{U}_a \\ \nabla_{q_{a_2}} \mathcal{U}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(q_{a_1}) + k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \phi_2(q_{a_1}) \\ k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \end{bmatrix}$$

donde se introducen los siguientes vectores con la intención de simplificar los cálculos más adelante.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(q_{a_1}) + k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \phi_2(q_{a_1}) \\ k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

desarrollando el gradiente de H_a con respecto a p_a , queda

$$\nabla_{p_a} H_a = \begin{bmatrix} \nabla_{p_{a_1}} H_a \\ \nabla_{p_{a_2}} H_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{a_1} v_1 + p_{a_2} v_2 \\ p_{a_1} v_2 + p_{a_2} v_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

para simplificar el vector expresado al desarrollar $\nabla_{p_a} H_a$, se definen los siguientes vectores

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{a_1} v_1 + p_{a_2} v_2 \\ p_{a_1} v_2 + p_{a_2} v_3 \end{bmatrix}$$

donde v_1, v_2 y v_3 son elementos de M_a^{-1} , como se muestra a continuación

$$M_a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d_3}{\det[M_a]} & -\frac{d_2}{\det[M_a]} \\ -\frac{d_2}{\det[M_a]} & \frac{d_1}{\det[M_a]} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.16})$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{d_3}{\det [M_a]}, \\ v_2 &= -\frac{d_2}{\det [M_a]}, \\ v_3 &= \frac{d_1}{\det [M_a]}, \end{aligned}$$

donde

$$\det [M_a] = d_1 d_3 - d_2^2$$

Ahora procedemos a desarrollar los elementos seleccionados en (C.1).

Desarrollando E_1 :

$$E_1 = M_a^{-1} \nabla_{q_a} H_a = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

para simplificar los elementos presentes en el vector E_1 , se define lo siguiente, donde

$$\begin{aligned} r_1 &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \\ r_2 &= \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.18})$$

Desarrollando el elemento D_a de E_2 :

Si $E_2 = M_a^{-1} D_a \nabla_{\mathbf{p}_a} H_a = M_a^{-1} D_a M_a^{-1} p_a$, desarrollando obtenemos que $E_2 = k_v G G^T p_a$, donde

$G = \begin{bmatrix} \Omega & 1 \end{bmatrix}^T$, siendo $\Omega = -\frac{\beta}{\alpha} \cos(q_1)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} E_2 &= k_v G G^T p_a, \\ &= k_v \begin{bmatrix} \Omega \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} k_v [\Omega^2 p_{a_1} + \Omega p_{a_2}] \\ k_v [\Omega p_{a_1} + p_{a_2}] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

entonces

$$E_2 = \begin{bmatrix} k_v [\Omega^2 p_{a_1} + \Omega p_{a_2}] \\ k_v [\Omega p_{a_1} + p_{a_2}] \end{bmatrix},$$

por lo tanto, definimos E_2 de la siguiente forma

$$E_2 = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Para el desarrollo de E_3 se hace mención que tanto la matriz de inercial M es igual a la matriz identidad al igual que la matriz W , entonces

$$E_3 = p_a = \begin{bmatrix} p_{a_1} \\ p_{a_2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

Entonces, a partir de lo anterior podemos reescribir para el caso del carro péndulo la estructura vista en (C.1) de la siguiente forma:

$$\dot{\gamma} = G^T \begin{bmatrix} \epsilon_0 [r_1 + \rho_1] + p_{a_1} \\ \epsilon_0 [r_2 + \rho_2] + p_{a_2} \end{bmatrix} \triangleq G^T \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.21})$$

recordando que $G = \begin{bmatrix} \Omega & 1 \end{bmatrix}^T$, (C.21) queda:

$$G^T \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \Omega \eta_1 + \eta_2. \quad (\text{C.22})$$

por lo tanto, (C.1) para el carro péndulo queda:

$$\dot{\gamma} = \Omega [\epsilon_0 [r_1 + \rho_1] + p_{a_1}] + \epsilon_0 [r_2 + \rho_2] + p_{a_2}. \quad (\text{C.23})$$

donde

$$\begin{aligned}
 r_1 &= [\phi_1(q_{a_1}) + k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \phi_2(q_{a_1})] \frac{d_3}{\det[M_a]} - [k_p z(q_{a_1}, q_{a_2})] \frac{d_2}{\det[M_a]}, \\
 r_2 &= -[\phi_1(q_{a_1}) + k_p z(q_{a_1}, q_{a_2}) \phi_2(q_{a_1})] \frac{d_2}{\det[M_a]} + [k_p z(q_{a_1}, q_{a_2})] \frac{d_1}{\det[M_a]}, \\
 \rho_1 &= k_v [\Omega^2 p_{a_1} + \Omega p_{a_2}], \\
 \rho_2 &= k_v [\Omega p_{a_1} + p_{a_2}].
 \end{aligned}$$

Apéndice D

Códigos de Matlab

D.1. Parámetros para el péndulo con rueda inercial

```

clc; clear; close all;
%-----
%Péndulo con rueda inercial  Parámetros principales
%-----
%Matriz de inercia (M)
m3 = 10;
I1 = 0.1;
I2 = 0.2;
a1 = I1+I2;
a2 = I2;
a3 = I2;
Dm = a1*a3-(a2)^2; %Determinante de M
g = 9.81;
% M inversa-----
phi1 = a3/Dm;
phi2 = -a2/Dm;
phi3 = a1/Dm;
%Matriz deseada (Ma)-----
d1 = 5;
d2 = 2;
d3 = 1;
Dma = d1*d3 - (d2)^2; %Determinante de Ma
%Ma inversa-----
v1 = d3/Dma;
v2 = -d2/Dma;
v3 = d1/Dma;
%Ganancias para el IWP-----
k1 = a1;
k2 = a2;
kp = 1;
kv = 1.6;
e0 = 0.55;
%-----
%Simplificaciones para el iwp
%-----
%Elementos de Ta^-1-----

```

```

c1 = ((v1*a1)/k1)+((v2*a2)/k2);
c2 = ((v2*a1)/k1)+((v3*a2)/k2);
c3 = ((v1*a2)/k1)+((v2*a3)/k2);
c4 = ((v2*a2)/k1)+((v3*a3)/k2);
gamma2 = ((d1*a2/k2)-(d2*a1/k1))/((d3*a1/k1) - (d2*a2/k2));
gamma3 = (-m3)/((d3*a1/k1) - (d2*a2/k2)); ;
E1 = (((-d3*a2)/(a1))+((d2*a3)/(a2)));
E2 = (((d2*a2)/(a1))-((d1*a3)/(a2)));
kp_tilde = (kp/Dma)*((E1)+ (gamma2)*(E2));
kv_tilde = (kv*a1*a2)/(Dm);
alfa3 = ((m3)/((d3*a1/k1) - (d2*a2/k2)))*(E1);
D1 = (d1-d2);
D2 = (d2-d3);
%-----
%Simplificaciones del observador
%-----
%W inversa o  $K\{\text{diag}\}^{-1}$ -----
W1 = k2/(k1*k2);
W2 = k1/(k1*k2);
%n{1,2,3,4}-----
n1 = (k1*phi2)*(((d1*k1*phi2)+(d2*k2*phi3)));
n2 = (k2*phi3)*(((d1*k1*phi2)+(d2*k2*phi3)));
n3 = (k1*phi2)*(((d2*k1*phi2)+(d3*k2*phi3)));
n4 = (k2*phi3)*(((d2*k1*phi2)+(d3*k2*phi3)));
%z{1,2,3,4}-----
z1 = kv*(((n1*d1)+(n2*d2)));
z2 = kv*(((n1*d2)+(n2*d3)));
z3 = kv*(((n3*d1)+(n4*d2)));
z4 = kv*(((n3*d2)+(n4*d3)));
%w{1,2,3,4}-----
w1 = ((v1*z1)+(v2*z3));
w2 = ((v1*z2)+(v2*z4));
w3 = ((v2*z1)+(v3*z3));
w4 = ((v2*z2)+(v3*z4));

```

D.2. Parámetros para el carro-péndulo

```

clc; clear; close all;
%Parametros para el carro péndulo
Mc = 0.25; %kg
mp = 0.127; %kg
lp = 0.156; %m
Jm = 1.7893*10^-5; %kg m^2
Ra = 2.60; %Ohms
km = 7.68*10^-3;%V s/rad
kt = 7.68*10^-3; %Nm / A
Keq = 0.1860; %Nm^2/V
Beq = 0.10; %Nms
b = 0.0175; %m
nm = 0.90;
lambda = 70;
Jeq = lambda * Jm;
%Gravedad-----
g = 9.81;
%Matriz deseada-----
d1 = 1;
d2 = 2;
d3 = 5;
Dma = d3*d1 - (d2)^2;
%Simplificaciones-----
alfa = mp*lp^2;
betta = mp*lp;
gamma = Mc + mp; %+ (Jeq/b^2)
delta = mp*g*lp;
D1 =(sqrt((d2^2)*(betta^2)-((d3^2)*(alfa^2))));
M1 = (2*Dma*alfa)/(d2*D1);
M2 = ((d2*betta)+(d3*alfa))/(D1);
k1 = delta/alfa;
k2 = -betta/alfa;
%Ganancias-----
kp = 12;
kv = 0.3;
e0 = 3;

```

```
%-----Parametros del observador-----  
v1 = d3/Dma;  
v2 = -d2/Dma;  
v3 = d1/Dma;  
alfa1 = fv1*v1;  
alfa2 = fv2*v2;  
alfa3 = fv1*v2;  
alfa4 = fv2*v3;
```