



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Diseño de esquema de control robusto líder-seguidor
basado en observador para sistemas multi-agentes
LPVs bajo perturbaciones externas con aplicación en
vehículos aéreos no tripulados

presentada por

Ing. Arturo Daniel Espinosa Pedroza

como requisito para la obtención del grado de
**Maestro en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dr. Manuel Adam Medina

Codirector de tesis

Dr. Vicente Borja Jaimes

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2024.



Cuernavaca, Mor.,

No. de Oficio:

Asunto:

26/ junio/2024

DIE/088/2024

**Aceptación de documentos
de tesis**

**DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. ARTURO DANIEL ESPINOSA PEDROZA, con número de control M22CE059 de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Diseño de un esquema de control robusto líder-seguidor basado en observadores para sistemas multi-agentes LPVs bajo perturbaciones externas con aplicación en vehículos aéreos no tripulados", y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Manuel Adam Medina
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 5992003

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Vicente Borja Jaimes
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 12844185

REVISOR 1

Dr. Carlos Daniel García Beltrán
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 8699605

REVISOR 2

Dr. José Francisco Gómez Aguilar
Doctor en Física
Cédula profesional 09124781

C.p. M.T.I. Maria Elena Gomez Torres, Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Estudiante
JGM/kmq



Cuernavaca, Mor.,

No. De Oficio:

Asunto:

01/julio/2024

SAC/208/2024

Autorización de
impresión de tesis

**ARTURO DANIEL ESPINOSA PEDROZA
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Diseño de un esquema de control robusto líder-seguidor basado en observadores para sistemas multi-agentes LPVs bajo perturbaciones externas con aplicación en vehículos aéreos no tripulados”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

*Excelencia en Educación Tecnológica®
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”*


CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz

Resumen

El enfoque de esta tesis se centra en un control de consenso robusto líder-seguidor basado en observadores distribuidos, frente a perturbaciones externas, para sistemas multi-agentes LPV. Se emplea el análisis de estabilidad de Lyapunov para asegurar la existencia simultánea tanto del controlador de consenso robusto como del observador. Las condiciones para diseñar un observador y un controlador se formulan utilizando un conjunto de desigualdades matriciales lineales, teniendo en cuenta los principios delineados en el teorema de Polya, que también se aplica para gestionar permutaciones dentro de la representación politópica del sistema multi-agente LPV. Además, se aborda la robustez ante perturbaciones externas utilizando el criterio H_∞ , que optimiza el rendimiento del sistema que permite mitigar el impacto de las perturbaciones en el diseño del controlador.

La estrategia propuesta se aplicó a una flotilla de cuadricópteros, utilizando su representación q-LPV para obtener las ganancias del controlador y los observadores. La elección del modelo q-LPV para los vehículo aéreo no tripulado es de gran importancia, ya que permite capturar de manera precisa las dinámicas no lineales y las variaciones de parámetros del sistema, facilitando así un diseño de control robusto. Este enfoque es especialmente útil para sistemas aéreos, donde las condiciones de operación pueden cambiar rápidamente y las perturbaciones externas son comunes. Se demostró que el enfoque se puede aplicar a N agentes, lo que permite realizar varias formaciones y destaca su versatilidad y escalabilidad. Para evaluar la robustez ante perturbaciones, se utilizó una función aleatoria.

La eficacia de la estrategia propuesta se confirma con los resultados de las simulaciones, mostrando su capacidad para minimizar los efectos de las perturbaciones. Las simulaciones también demuestran que la flotilla de cuadricópteros puede mantener el consenso y realizar diversas formaciones a pesar de las perturbaciones, lo que muestra la aplicabilidad y robustez del enfoque en escenarios prácticos.

Abstract

The focus of this thesis is on a robust leader-follower consensus control based on distributed observers, robust against external disturbances, for LPV multi-agent systems. The Lyapunov stability analysis is employed to ensure the simultaneous existence of both the robust consensus controller and the observer. The conditions for designing an observer and a controller are formulated using a set of linear matrix inequalities, taking into consideration the principles outlined in Polya's theorem, which is also applied to manage permutations within the polytopic representation of the LPV multi-agent system. Additionally, robustness to external disturbances is addressed using the H_∞ criterion, which optimizes system performance to mitigate the impact of disturbances on the controller design.

The proposed strategy was applied to a fleet of quadcopters, using their q-LPV representation to obtain the controller and observer gains. The choice of the q-LPV model for the unmanned aerial vehicle is of great importance, as it accurately captures the nonlinear dynamics and parameter variations of the system, thereby facilitating robust control design. This approach is especially useful for aerial systems, where operating conditions can change rapidly and external disturbances are common.

It was demonstrated that the approach can be applied to N agents, allowing for various formations and highlighting its versatility and scalability. To evaluate robustness against disturbances, the random function were used.

The effectiveness of the proposed strategy is confirmed by the simulation results, showing its ability to minimize the effects of disturbances. The simulations also demonstrate that the fleet of quadcopters can maintain consensus and perform various formations despite disturbances, illustrating the applicability and robustness of the approach in practical scenarios.

Dedicatoria

A mi asesor, por su guía invaluable; a mis revisores, por sus comentarios constructivos; a mis amigos, por su apoyo incondicional; y a mi familia, por ser mi fuente de inspiración constante. Este logro es también suyo.

Agradecimientos

Quiero dar gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante este período, el cual fue esencial para culminar mis estudios con éxito. Asimismo, agradezco al CENIDET por darme la oportunidad de formar parte de su comunidad y por permitirme hacer uso de sus instalaciones para avanzar en mi desarrollo académico.

Quiero dar las gracias más sinceras a todas las personas que han contribuido a la realización de este proyecto. Especialmente, quiero agradecer al Dr. Adam Manuel Medina, mi asesor, por su guía experta, paciencia y dedicación incansable durante todo este procedimiento. Su sabiduría y orientación resultaron fundamentales para lograr este logro. También quiero agradecer a los revisores, Dr. Carlos Daniel García Beltrán y Dr. José Francisco Gómez Aguilar, por sus valiosas sugerencias y comentarios positivos que ayudaron a mejorar este trabajo.

Durante el desarrollo del tema de tesis, quiero resaltar especialmente el apoyo incondicional de Jesús Avelino e Isay Huicochea. Su aliento, sus consejos y su colaboración fueron clave para superar los desafíos y lograr las metas establecidas. Estoy eternamente agradecido por su invaluable contribución.

Estoy muy agradecido con mi familia, especialmente con mis padres y hermana, por su amor incondicional, constante apoyo y comprensión durante todos estos años de estudio. Me han dado una gran inspiración su sacrificio y aliento.

Quiero agradecer de todo corazón a mis amigos Lucero Xopo, Inri Cruz, Jesús Avelino, Isay Huicochea, Dryden Estrada, Ana Santana, Enrique Hernández, Erandi Arroyo, Víctor Salinas, Arturo García, Ismael Hernández, Oscar Brito, Ezequiel Domínguez, Laura Galicia, Irbin Carrillo y Rossel Muñoz por su amistad que ha sido una continua fuente de alegría y fortaleza.

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a cada uno de mis profesores, cuya dedicación y enseñanzas han sido fundamentales para mi preparación académica. Agradezco sinceramente al Dr. Juan Reyes, Dr. Gloria Lilia Osorio, Dr. Enrique Quintero, Dr. José Gómez, Dr. Carlos Daniel

García, Dr. Manuel Adam, Dr. Carlos Astorga, Dr. Ricardo Fabricio, Dr. Gerardo Guerrero y M.C. Laura Iveth Catalán por su invaluable contribución a mi formación.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas mencionadas y también a aquellas que, por alguna razón, no han sido nombradas aquí pero hayan formado parte de este recorrido. Su generosidad, apoyo y presencia en mi vida han hecho posible este logro.

Índice general

Índice general	V
Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	XI
Nomenclatura	XIII
1 Introducción	1
1.1 Estado del arte	3
1.1.1 Control basado en consenso de sistemas multi-agente	3
1.1.2 Sistemas multi-agentes robustos con perturbaciones	4
1.1.3 Análisis del estado del arte	5
1.2 Planteamiento del problema	7
1.3 Justificación	8
1.4 Hipótesis	8
1.5 Objetivos	9
1.5.1 Objetivo general	9
1.5.2 Objetivos específicos	9
1.6 Propuesta de solución	9
1.7 Estructura del documento	10
2 Marco Teórico	11
2.1 Sistemas multi-agentes	11
2.1.1 Algoritmo de consenso	13
2.1.2 Control de formación	14

2.2	Teoría de grafos	14
2.2.1	Ejemplos de grafos	15
2.2.2	Matriz de adyacencias y matriz Laplaciana	18
2.3	Matriz de distancias relativas del sistema multi-agente	20
2.4	Sistemas LPV	22
2.4.1	Representación de los sistemas LPV	22
2.4.2	Sistemas q-LPV	24
2.4.3	Ejemplo numérico	25
2.4.4	Teorema de Polya	28
2.5	Control basado en observador	31
2.5.1	Controlabilidad	32
2.5.2	Observabilidad	33
2.6	Control robusto	34
3	Control de seguimiento de referencia para líder virtual	35
3.1	Modelo dinámico de un cuadricóptero	35
3.1.1	Modelo lineal	38
3.1.2	Modelo simplificado	39
3.1.3	Representación q-LPV	40
3.2	Control PI de seguimiento de referencia para líder virtual	41
3.2.1	Análisis de estabilidad.	43
3.2.2	Resultados de simulación.	45
4	Diseño de un esquema de control robusto líder-seguidor basado en observador bajo perturbaciones externas	50
4.1	Descripción del sistema	50
4.2	Controlador robusto líder-seguidor basado en observador LPV	53
4.3	Análisis de estabilidad de Lyapunov	55
4.4	Resultados de simulación caso sin perturbación	58
4.5	Resultados de simulación control nominal y robusto con perturbación	65
4.6	Resultados de simulación, afectando a todos los agentes.	71

5	Conclusiones	77
5.1	Contribución	77
5.2	Conclusiones generales	77
5.3	Trabajos futuros	78
5.4	Publicaciones	78
	Bibliografía	79
A	Resumen del estado del arte	86
B	Modelos matemáticos del cuadricóptero	88
C	Resultados de simulación, distintos escenarios	94

Índice de figuras

1.1	Sistema multi-agente con líder seguidor.	7
1.2	Esquema de control robusto líder-seguidor basado en observador para sistemas multi-agentes bajo perturbaciones externas.	9
2.1	Ejemplo de una arquitectura centralizada.	12
2.2	Ejemplo de una arquitectura descentralizada.	12
2.3	Ejemplo de topología de comunicación en un sistema multi-agente.	15
2.4	Grafo indirectamente conectado.	16
2.5	Grafo árbol expandido directo.	16
2.6	Grafo fuertemente conectado.	17
2.7	Grafo balanceado y fuertemente conectado.	17
2.8	Ejemplo grafo con líder seguidor.	20
2.9	Distancias relativas para una formación de un cuadrado en el marco de referencia xy.	21
2.10	Diagrama de Venn de los sistemas dinámicos.	22
2.11	Representación del polítopo de un sistema con dos parámetros variables.	23
2.12	Diagrama de cuerpo libre de un péndulo simple.	25
2.13	Funciones de ponderación.	27
2.14	Posición del péndulo.	28
3.1	Esquema de un cuadricóptero representando las fuerzas principales que actúan en el vehículo.	36
3.2	Esquema de control PI q-LPV seguimiento de trayectoria.	42
3.3	Referencia de altitud y trayectoria del líder virtual.	47
3.4	Entradas de control del líder virtual.	48
3.5	Velocidades de cada rotor.	48

4.1	Esquema de control propuesto.	53
4.2	Topología de comunicación entre los UAVs.	59
4.3	Trayectorias de los UAVs y líder virtual en el eje Z.	60
4.4	Error de estimación.	61
4.5	Trayectorias de los UAVs.	61
4.6	Error de sincronización.	62
4.7	Distancia relativa entre los UAVs.	63
4.8	Entradas de control de los UAVs y líder virtual.	63
4.9	Velocidades angulares de cada rotor de los agentes y líder virtual.	64
4.10	Funciones de programación.	64
4.11	Señal de perturbación.	66
4.12	Señal de perturbación.	66
4.13	Error de sincronización.	67
4.14	Distancias relativas entre los UAVs.	67
4.15	Entradas de control de los UAVs y líder virtual.	68
4.16	Velocidades de cada rotor de los agentes y líder virtual.	69
4.17	Comprobación del valor γ	70
4.18	Funciones de programación.	70
4.19	Trayectorias de los UAVs hacia una formación hexagonal a 20 metros de altura.	71
4.20	Error de sincronización.	72
4.21	Distancias relativas entre los UAVs.	73
4.22	Entradas de control de los UAVs y líder virtual.	74
4.23	Velocidades de cada rotor de los agentes y líder virtual.	75
4.24	Comprobación del valor γ	76
C.1	Señal de perturbación.	94
C.2	Error de sincronización.	95
C.3	Distancias relativas entre los UAVs.	95
C.4	Entradas de control de los UAVs y líder virtual.	96
C.5	Velocidades de cada rotor de los agentes y líder virtual.	97
C.6	Funciones de programación.	98

C.7 Topología de comunicación entre agentes y líder.	99
C.8 Trayectorias de los UAVs hacia una formación hexagonal a 20 metros de altura. . .	100
C.9 Error de sincronización.	100
C.10 Distancias relativas entre los UAVs.	101
C.11 Entradas de control de los UAVs y líder virtual.	102
C.12 Velocidades de cada rotor de los agentes y líder virtual.	103
C.13 Comprobación del valor γ	104
C.14 Funciones de programación.	104

Índice de tablas

Tabla 2.1	Parámetros del péndulo y condiciones iniciales.	27
Tabla 3.1	Parámetros del cuadricóptero FlameWheel 450 (DJI-F450).	46
Tabla 4.1	Condiciones iniciales del sistema y observador.	60
Tabla A.1	Datos relevantes de los artículos consultados en el estado del arte.	87
Tabla C.2	Condiciones iniciales del sistema y observador.	98

Notación y acrónimos

Conjuntos

\mathbb{R}	Conjunto de todos los números reales.
\mathbb{R}^n	Conjunto de vectores reales de dimensión n ,
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de vectores reales de dimensión $n \times m$.

Notación referente a vectores y matrices

$P > 0$	Matriz P simétrica positiva definida.
$P < 0$	Matriz P simétrica negativa definida.
I	Matriz identidad de dimensiones apropiadas.
P^{-1}	Inversa de la matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(P) \neq 0$.
P^T	Transpuesta de la matriz P .
$\text{He}\{P\}$	Representa la matriz Hermitiana de una matriz cuadrada.
*	Denota los elementos simétricos de una matriz.
\otimes	Denota el producto Kronecker

Variables del sistema multi-agente

Símbolo	Descripción
$x_n(t)$	Vector de estados del sistema multi-agente del agente n -ésimo.
$y_n(t)$	Vector de salidas del sistema multi-agente del agente n -ésimo.
$u_n(t)$	Vector de entradas del sistema multi-agente del agente n -ésimo.
$\mathfrak{d}_{u_n}(t)$	Vector de perturbaciones externas del sistema multi-agente del agente n -ésimo.
$\hat{x}_n(t)$	Vector de estados estimados del sistema multi-agente del agente n -ésimo.
$\hat{y}_n(t)$	Vector de salidas estimadas del sistema multi-agente del agente n -ésimo.
$x_l(t)$	Vector de estados del líder virtual.
$u_l(t)$	Vector de entradas del líder virtual.
$\delta_n(t)$	Error de sincronización del líder virtual con los agentes.
$e_n(t)$	Error de estimación del agente n -ésimo.

Cuadricóptero

Símbolo	Descripción	Unidades
p_x	Posición traslacional en el eje X	m
p_y	Posición traslacional en el eje Y	m
p_z	Posición traslacional en el eje Z	m
ϕ	Ángulo de Euler que describe la rotación de un objeto alrededor de su eje longitudinal (eje X).	rad
θ	Ángulo de Euler que describe la rotación de un objeto alrededor de su eje longitudinal (eje Y).	rad
ψ	Ángulo de Euler que describe la rotación de un objeto alrededor de su eje longitudinal (eje Z)	rad
J_x	Momento de inercia sobre el eje X.	kg m ²
J_y	Momento de inercia sobre el eje Y.	kg m ²
J_z	Momento de inercia sobre el eje Z.	kg m ²
l	Longitud del brazo	m
m_s	Masa del dron.	kg
g	Constante de gravedad.	m/s ²
d	Coefficiente de arrastre.	Nm/(rad/s) ²
b	Coefficiente de empuje	N/(rad/s) ²

Acrónimos

LMI	Desigualdad Matricial Lineal.
PI	Proporcional-Integral.
LPV	Sistema Lineal de Parámetros Variantes
q-LPV	Representación quasi-Lineal de Parámetros Variables.
UAV	Vehículo Aéreo no Tribulado
BLM	Motor <i>brushless</i> (sin escobillas)
MASs	Sistemas Multi-Agentes

Capítulo 1

Introducción

Recientemente, los sistemas multi-agentes (MASs, por sus siglas en inglés *Multi-Agent Systems*) han despertado considerable interés por su eficacia en superar las capacidades de agentes individuales [1]. Dentro del marco de los MASs, un agente se conceptualiza como un sistema dinámico autónomo [2]. La investigación actual ha explorado diversas aplicaciones de los MASs en varios dominios, incluyendo la robótica [3], la gestión de la seguridad del tráfico marítimo [4], misiones de rescate [5] y la agricultura [6]. El principal desafío en los sistemas multi-agentes radica en desarrollar algoritmos de control que faciliten la cooperación entre los agentes, permitiéndoles trabajar juntos para lograr un objetivo compartido [7]. Es esencial implementar estrategias de coordinación efectivas para garantizar un comportamiento coherente y eficiente del sistema en su conjunto. Las estrategias comunes para coordinar sistemas multi-agentes son las siguientes: *Enfoques basados en consenso* [8], estas estrategias tienen como objetivo alcanzar un consenso entre todos los agentes. Esto se logra a través de interacciones locales entre agentes, donde cada uno ajusta su comportamiento para alinearse con el de los demás; *Estrategias de estructura virtual* [9], estas estrategias consideran que los agentes tienen relaciones geométricas entre sí y con un marco de referencia, aunque no hay un líder explícito, la coordinación se logra mediante la interacción entre agentes y la estructura virtual definida; *Líder-seguidor* [10], implica una forma de coordinación donde un agente, conocido como el líder, emite instrucciones o guía a otros agentes, denominados seguidores, para lograr un objetivo compartido. La coordinación de los MASs es crucial para lograr objetivos mutuos [11], tales como: *control de formación* [12], que implica el arreglo y movimiento coordinado de múltiples agentes para formar una configuración específica; *seguimiento de formación* [13], que requiere que los agentes sigan una formación predefinida mientras se mueven en un entorno dinámico,

estos objetivos requieren una coordinación eficiente entre agentes para lograr el comportamiento colectivo deseado y ejecutar eficazmente las tareas asignadas.

Recientemente, el uso en la exploración de estrategias de control para MASs, los investigadores navegan a través de un panorama marcado tanto por sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI, por sus siglas en inglés *Linear Time-Invariant*) como por sistemas lineales de parámetros variables (LPV, por sus siglas en inglés *Linear Parameter-Varying*). En [14] se centra en garantizar un consenso robusto entre vehículos aéreos no tripulados, que se modelan como un equipo de sistemas LTI, a pesar de las fallas en el intercambio de información. De manera similar, [15], aborda problemas de control de consenso cuando se enfrenta a perturbaciones desconocidas. Además, [16] introduce un control robusto de consenso basado en observador para MASs, centrándose en la robustez frente a perturbaciones externas. Alternativamente, [17], aborda sistemas multi-agentes LPV empleando control basado en observador para lograr consenso entre múltiples vehículos aéreos no tripulados de despegue y aterrizaje vertical (VTOL-UAVs), mientras que ambos trabajos emplean enfoques basados en observador y aprovechan las desigualdades matriciales lineales (LMIs, por sus siglas en inglés *Linear Matrix Inequalities*) para condiciones de diseño, [18] hace hincapié en la robustez a perturbaciones externas en MASs LTI, mientras que [17] se centra en reducir el conservadurismo en las condiciones de diseño para MASs LPV y no considera la robustez. Además, [19], trata sobre el control robusto de consenso contra fallas del actuador en MASs LPV. Además, [20] explora el control basado en observador robusto para MAS no lineales, centrándose en los siguientes temas.

Este trabajo de tesis se centra principalmente en diseñar un enfoque de control de consenso líder-seguidor utilizando sistemas multi-agentes (MASs). La viabilidad de los ganancias de control y observador politópicas dentro de una flota de MASs LPV se asegura mediante la aplicación de condiciones de LMIs. El enfoque está inspirado en trabajos previos citados como [18] y [17]. Además, se considera la utilización del complemento de Schur [21] y la relación de Young [22] para formular condiciones de LMIs, mientras que el teorema de Polya se emplea para gestionar las restricciones politópicas inherentes en los MASs LPV [23]. Además, la inclusión del criterio H_∞ tiene como objetivo mitigar los efectos de perturbaciones externas [18].

1.1. Estado del arte

En los últimos años, los sistemas multi-agentes (MASs) han atraído considerable atención debido a su potencial en comparación con el rendimiento de agentes individuales [1], las tareas asignadas a los sistemas multi-agentes son aquellas que no pueden ser cumplidas por un único agente. Dentro del marco de los sistemas multi-agentes, un agente se considera como un sistema dinámico autónomo [2]. Se han diseñado diferentes estrategias de control cooperativo para lograr misiones que requieren múltiples agentes. El objetivo del control cooperativo es controlar múltiples agentes autónomos que trabajen eficientemente, para lograr un comportamiento colectivo del grupo a través de interacciones locales entre los agentes. En esta sección, se analizó el control multi-agentes, sistemas LPV, control robusto para minimizar los efectos de perturbaciones externas y control líder-seguidor.

1.1.1. Control basado en consenso de sistemas multi-agente

Los sistemas multi-agentes con aplicaciones en UAVs, han llamado la atención de investigadores y desarrolladores de distintas partes del mundo, éstos son capaces de cumplir tareas y/o misiones de gran complejidad como lo son lanzamiento de misiles, fotografía aérea, control de formación, exploración aérea del suelo. En [24] presentan un resumen donde repasan los sistemas multi-agentes más avanzados y sus usos en la agricultura y mencionan que adaptar la aplicación de productos químicos a las demandas de los cultivos o estimar la duración óptima del riego son algunas de las posibilidades que ofrecen los sistemas multi-agentes. Por lo general se les asignan tareas que un solo agente no puede cumplir. En [25] el control cooperativo de sistemas multi-agentes denota un sistema dinámico que puede ser un vehículo terrestre/submarino, una aeronave, etc.

En [26] se desarrolló un control robusto basado en observador, aplicando una estrategia de control de formación líder-seguidor aplicado a un sistema multi-agentes LTI. Para diseñar el control se utilizó una técnica de estimación del error de seguimiento entre los agentes y el líder virtual mediante una ley de control basada en observador. La formulación de esta ley de control se centró en una optimización utilizando el criterio H_∞ , junto con un análisis de estabilidad de Lyapunov. Ilustran sus resultados mediante simulación demostrando la efectividad de su control.

En [27] presentaron un consenso basado en observadores en sistemas multi-agentes LPV, utilizaron un protocolo de ganancia programada para mejorar el rendimiento del diseño en comparación con

un enfoque no programado. Mencionan que el modelo de MAS considerado no está expuesto a perturbaciones externas, que pueden dificultar el logro de un consenso preciso.

En [17] abordan la problemática del control de consenso líder-seguidor distribuido basado en observadores para sistemas multi-agentes LPV. Mediante la teoría de Lyapunov demuestran la estabilidad del observador y controlador, logrando las condiciones de LMI para calcular las ganancias del control y el observador considerando el teorema de Polya para hacerlas menos conservadoras.

En [28] se realizó un enfoque para resolver el problema de consenso líder-seguidor en sistemas multi-agentes no lineales, que consiste en estimar la posición y velocidad de los agentes para obtener una ley de control de consenso. Se validan sistemas tanto de un solo integrador como de doble integrador, con simulaciones que respaldan el enfoque propuesto.

En [29] trabajaron el problema del consenso en sistemas multi-agentes LPV que presentan retraso temporal y tienen incertidumbres acotadas por la norma. Los resultados de simulación y las condiciones de estabilidad en bucle cerrado están incluidos. En [30] abordaron el control de formación para un grupo de cuadricópteros interconectados usando la matriz Laplaciana. Los resultados de las simulaciones demuestran que el marco de control propuesto es adecuado.

En [31] se desarrolló un enfoque para garantizar el consenso confiable y robusto frente a fallas del actuador en sistemas multi-agentes con parámetros lineales variables. Se diseñó un observador distribuido y se obtiene un protocolo de control confiable robusto utilizando optimización de LMIs para modelar las fallas del actuador. Así mismo, en [32] presentan un control basado en un observador distribuido para sistemas multi-agentes lineales generales bajo ruidos de medida y perturbaciones externas, generan condiciones suficientes en términos de desigualdades matriciales lineales para la existencia del controlador de consenso basado en el observador distribuido.

En [33] abordan el control de consenso en sistemas multi-agentes que presentan retardos en la entrada y en la comunicación, analizando estos aspectos en el dominio de la frecuencia. Cada agente en el MAS se modela como un sistema lineal de tiempo continuo con múltiples retardos en sus entradas. Para optimizar el rendimiento y la robustez del MAS, se ha diseñado un controlador H_2 .

1.1.2. Sistemas multi-agentes robustos con perturbaciones

En la práctica, el rendimiento de los sistemas multi-agentes está frecuentemente expuesto a perturbaciones externas [34]. Estas perturbaciones pueden ser de diversa índole, como ruidos en los

sensores, variaciones ambientales o interferencias imprevistas. Tales perturbaciones pueden desviar a los agentes de su objetivo de consenso, afectando la estabilidad y el desempeño del sistema. Dado que las perturbaciones externas son casi inevitables, una línea de investigación crucial es el desarrollo de métodos para el rechazo de estas perturbaciones. Esto implica diseñar estrategias de control que no solo faciliten el consenso, sino que también sean robustas ante interferencias externas, garantizando así que el sistema pueda mantener su rendimiento deseado a pesar de las adversidades. A continuación se mencionan algunos artículos que han trabajado con perturbaciones en estos sistemas.

En [16] presentaron un control de consenso robusto basado en observadores para sistemas multi-agentes sujetos a perturbaciones externas. La robustez ante perturbaciones externas se aborda mediante el criterio H_∞ . La perturbación la añaden como una adición a las velocidades del UAV. Llevan a cabo ejemplos numéricos para resolver el problema de control de formación de una flota de UAVs.

En [35] se propuso un enfoque adaptativo y robusto de consenso no lineal para sistemas multi-agentes sujetos a perturbaciones externas. Las condiciones de diseño de protocolos de consenso se obtienen mediante la aplicación de técnicas Lyapunov y criterios H_∞ , a partir de la reformulación de las no linealidades Lipschitz se demuestra la eficacia del protocolo de consenso resultante mediante simulaciones, destacando su robustez y distribución.

En [36] se presentó un protocolo de consenso líder-seguidor para sistemas multi-agentes, diseñado para hacer frente a fallas en el intercambio de información y perturbaciones externas. La principal contribución radica en el desarrollo de un control de formación robusto líder-seguidor, que emplea enfoques basados en Lyapunov y el criterio de optimización H_∞ .

1.1.3. Análisis del estado del arte

Los estudios revisados señalan un interés en aumento por los MASs, mostrando una tendencia en la investigación actual. Se están investigando sistemas que implican la interacción y coordinación de múltiples agentes autónomos en diversos campos, como la agricultura y la ingeniería de control, con el fin de brindar soluciones innovadoras y prometedoras para resolver problemas complejos. Recientemente se ha trabajado con MASs LPV y control líder-seguidor; cabe mencionar que es poco frecuente que consideren perturbaciones externas, lo que nos permite la oportunidad de trabajar con MASs LPV que consideren perturbaciones externas para crear un enfoque interesante para

el diseño de un esquema de control robusto líder-seguidor basado en observador. En cuanto a las perturbaciones, algunos autores las implementan como una adición a las velocidades del modelo dinámico de los UAVs [16] y en otro solo las añaden en la velocidad del eje Z [37].

Se identifican oportunidades para realizar trabajos de investigación en el control robusto líder-seguidor en MASs, ya que ha sido objeto de atención en la investigación reciente. Trabajos previamente citados, como el artículo de [16], han abordado la inclusión de perturbaciones externas en el sistema y han desarrollado estrategias de control robusto para mitigarlas. [27] realizó un consenso basado en observadores de ganancia programada para sistemas multi-agente LPV y [17] exploró el control líder-seguidor basado en observadores para MASs LPV utilizando el teorema de Polya que es menos conservador en comparación con [31]. Además, se han integrado metodologías avanzadas, como el complemento de Schur [21] y la relación de Young [22], para formular condiciones LMIs. La aplicación del teorema de Polya [27] y el criterio H_∞ [16] también ha sido fundamental para mitigar los efectos de las perturbaciones externas. Estas innovaciones representan avances significativos en el control de consenso, mejorando la estabilidad y robustez de los MASs.

En conclusión, trabajar en el desarrollo de sistemas multi-agentes LPV con la consideración de perturbaciones externas es crucial para agregar robustez, un elemento esencial para su desempeño óptimo en entornos reales. Estas investigaciones contribuyen significativamente al avance en el área de investigación de los sistemas multi-agentes. Además, trabajar con sistemas LPV ofrece ventajas significativas al permitir la aplicación de técnicas diseñadas para sistemas lineales. La aplicación del teorema de Polya sobre formas cuadráticas definidas representa un avance significativo en el campo, ya que permite gestionar todas las posibles combinaciones y permutaciones de la representación politópica del MAS LPV en las soluciones numéricas de las LMIs propuestas. Esta aplicación del teorema de Polya permite reducir el conservadurismo en comparación con otros trabajos. En el Anexo A, se proporciona una tabla detallada que destaca los artículos más relevantes relacionados con este estudio, donde se distingue claramente entre aquellos trabajos que abordan la consideración de perturbaciones externas y los que se centran en el control líder-seguidor. Esta distinción permite una comprensión clara de la literatura revisada y su relevancia para el enfoque propuesto en este trabajo.

1.2. Planteamiento del problema

En la actualidad, los sistemas multi-agentes han ganado gran relevancia debido a su capacidad para realizar diversas tareas de manera conjunta y eficiente. Estos sistemas son aplicados en campos como la vigilancia de áreas de interés, misiones de reconocimiento, el resguardo de fronteras, y el transporte de cargas, utilizando vehículos autónomos como los UAVs. La coordinación y cooperación entre múltiples UAVs permite alcanzar objetivos complejos que serían inalcanzables para un solo agente. Sin embargo, para que estos sistemas multi-agentes funcionen correctamente en la práctica, es crucial diseñar controles robustos que aseguren su rendimiento bajo condiciones adversas. Entre los desafíos más significativos se encuentran las perturbaciones externas, como las ráfagas de viento, que pueden afectar gravemente la estabilidad y el desempeño de los UAVs. La capacidad de los UAVs para mantener su formación y trayectoria deseadas pese a estas perturbaciones es esencial para el éxito de sus misiones, todos los agentes deben ser capaces de enviar y recibir información de sus agentes vecinos como se muestra en la Figura 1.1.

El diseño de un esquema de control robusto líder-seguidor basado en observadores se presenta como una solución prometedora para minimizar las perturbaciones del sistema. En este esquema, un UAV actúa como líder, siguiendo una trayectoria predefinida, mientras que los demás UAVs (seguidores) ajustan sus movimientos para mantener una formación específica. Este enfoque es ventajoso porque el líder guía a los seguidores, simplificando la coordinación y el control del sistema.

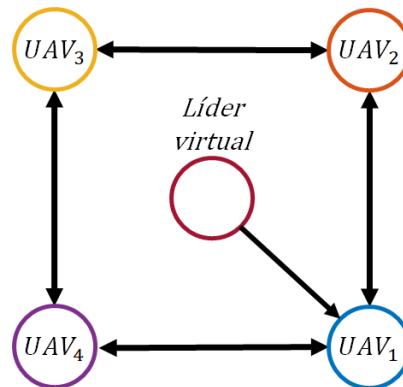


Figura 1.1. Sistema multi-agente con líder seguidor.

El uso de observadores en este contexto es fundamental para estimar variables críticas que son difíciles de medir directamente, como las velocidades traslacionales y angulares de los UAVs. Los

observadores permiten obtener estas estimaciones en tiempo real, lo que es vital para ajustar las acciones de control. Además, desarrollar una estrategia de control robusto aplicable a una flotilla de N agentes es particularmente interesante y desafiante. Este enfoque no solo mejora la capacidad del sistema para resistir perturbaciones, sino que también permite su escalabilidad y aplicabilidad en una amplia gama de escenarios y aplicaciones prácticas. La capacidad de estos sistemas para adaptarse dinámicamente a cambios en el entorno y mantener un rendimiento óptimo subraya la importancia de este trabajo en el campo de la robótica y los sistemas autónomos.

1.3. Justificación

La investigación de los sistemas multi-agentes se considera de gran interés por sus capacidades de resolver misiones y/o tareas difíciles o imposibles de resolver para un solo agente. Los esquemas de control de formación por algoritmos de consenso considerando perturbaciones externas logran la posición establecida, el trabajo de maestría de Jesus Vazquez [26], menciona que los distintos algoritmos que desarrolló alcanzan la formación cuando no se presentan perturbaciones y sólo un algoritmo tipo observador es capaz de mantener la formación en presencia de perturbaciones. La oportunidad de trabajar con sistemas multi-agentes es amplia y de gran interés, agregar al esquema de control sistemas LPV y perturbaciones externas enriquece el tema, puesto que en la literatura no hay muchos trabajos que aborden el tema de perturbaciones en multi-agentes y sistemas LPV. En aplicaciones reales los agentes serán afectados por perturbaciones ambientales como lo es el viento, éste afectara la posición de los agentes causando que no logren la formación establecida, por este motivo el tema ha desarrollar es interesante. En resumen, el desarrollo de un esquema de control robusto líder-seguidor basado en observadores para sistemas multi-agente LPVs bajo perturbaciones externas, con aplicación en UAVs, no solo aborda desafíos técnicos cruciales, sino que también abre nuevas posibilidades para el uso eficiente y seguro de estos sistemas en diversas aplicaciones de la vida real.

1.4. Hipótesis

Es posible resolver el esquema de control de formación sometido a perturbaciones para una familia de sistemas multi-agentes LPVs en vehículos aéreos no tripulados bajo un esquema distribuido de control robusto líder-seguidor basado en observadores.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Diseñar un esquema distribuido de control robusto a perturbaciones externas basado en observadores LPVs para una familia de sistemas multi-agentes LPVs con aplicaciones a vehículos aéreos no tripulados.

1.5.2. Objetivos específicos

- Diseñar un controlador para estabilizar a los sistemas multi-agentes LPV.
- Diseñar un control LPV líder-seguidor basado en observadores LPV distribuidos con aplicaciones a UAVs.
- Diseñar una estrategia robusta de control para reducir el efecto de perturbaciones externas en el equipo multi-agente.

1.6. Propuesta de solución

Para abordar la problemática del control de formación en sistemas multi-agente LPV bajo perturbaciones externas, proponemos el desarrollo de un esquema de control robusto líder-seguidor basado en observadores. Este esquema (ver Figura 1.2) permitirá la coordinación efectiva de una flotilla de UAVs para mantener formaciones prediseñadas y seguir trayectorias específicas, enfrentando perturbaciones del entorno como ráfagas de viento, y garantizando un desempeño estable y seguro.

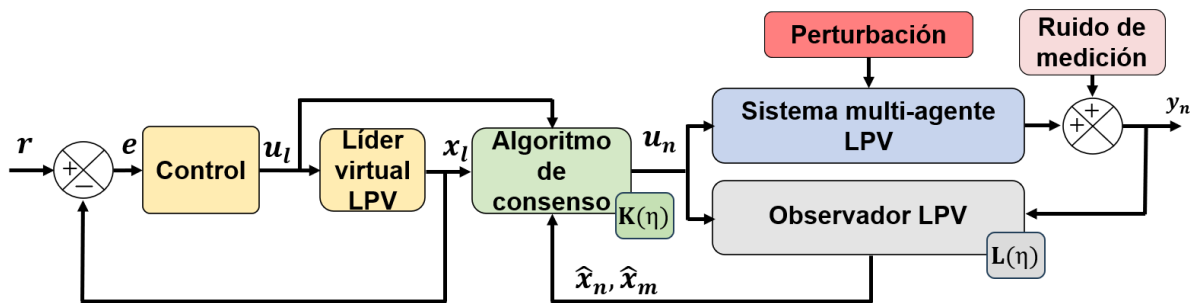


Figura 1.2. Esquema de control robusto líder-seguidor basado en observador para sistemas multi-agentes bajo perturbaciones externas.

Este esquema de control se fundamentará en la capacidad de comunicación bidireccional entre cada agente y sus vecinos, permitiendo así una coordinación efectiva y una respuesta dinámica ante cambios en el entorno operativo. Para abordar las perturbaciones externas a este tipo de sistemas, se empleará el criterio de H_∞ , con el fin de garantizar una robustez al sistema. Además, se utilizará un algoritmo de consenso para facilitar la convergencia de los agentes hacia un comportamiento colectivo deseado, como el mantenimiento de formaciones específicas. Dada la importancia del líder virtual en la coordinación de los agentes, se diseñará un controlador proporcional integral (PI) para asegurar que el líder guíe a los agentes, optimizando así la ejecución de las misiones asignadas.

1.7. Estructura del documento

Los capítulos siguientes están organizados de la siguiente manera:

En el **Capítulo 2**, se definen conceptos básicos y generales sobre: sistemas multi-agente, control de formación basado en consenso, algoritmo de consenso, teoría de grafos, sistemas LPV y q-LPV, teorema de Polya, controlabilidad, observabilidad y control robusto.

En el **Capítulo 3**, se describe el modelo dinámico no lineal de un cuadricóptero. A partir de este se obtienen el modelo lineal, el modelo simplificado y la representación q-LPV. Posteriormente se presenta el diseño de un esquema de control PI de seguimiento de trayectoria para el líder virtual. Se detalla el diseño, el cálculo, el análisis de estabilidad y la validación del controlador.

En el **Capítulo 4**, se describe el diseño de un esquema de control robusto líder-seguidor basada en un observador bajo perturbaciones externas. Se define el sistema multi-agente-observador y se presenta el diseño, cálculo, análisis de estabilidad en lazo cerrado y validación del controlador. Los resultados se validan en una flotilla de 6 cuadricópteros en diferentes escenarios.

Finalmente, en el **Capítulo 5**, se presentan las conclusiones generales del trabajo de investigación, la contribución y se proponen diversos trabajos futuros.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Sistemas multi-agentes

Los sistemas multi-agentes (MASs) son sistemas compuestos por múltiples agentes que interactúan entre sí para alcanzar objetivos comunes o individuales. Estos agentes pueden ser entidades autónomas como robots, sensores, programas de software, etc. Cada agente es capaz de comunicarse y coordinarse con los agentes vecinos [7].

Para lograr un objetivo de coordinación deseado entre agentes, se han adoptado arquitecturas centralizadas y descentralizada para diseñar controladores adecuados. Estas arquitecturas se diferencian por cómo distribuyen la información y se toman las decisiones dentro del sistema.

En una arquitectura centralizada, todos los datos y decisiones se manejan a través de un punto central (ver Figura 2.1). Esto puede permitir una coordinación más eficiente ya que todos los agentes tienen acceso a la misma información y las decisiones se pueden tomar de manera global. Sin embargo, esto también puede introducir un solo punto de falla y puede ser menos escalable a medida que el sistema crece en tamaño y complejidad.

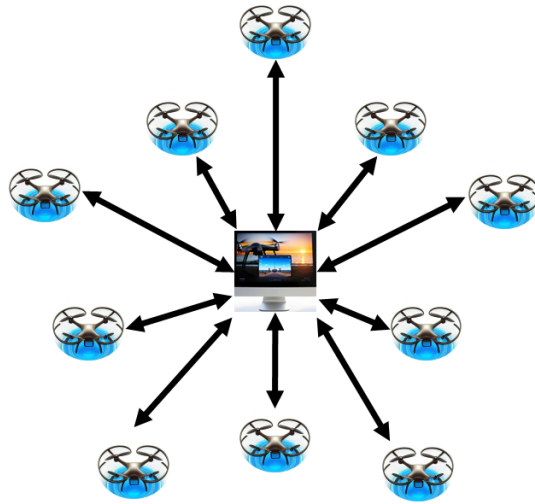


Figura 2.1. Ejemplo de una arquitectura centralizada.

Por otro lado, en una arquitectura descentralizada, la información y las decisiones se distribuyen entre los diferentes agentes en el sistema (ver Figura 2.2). Cada agente tiene su propio conjunto de datos y puede tomar decisiones basadas en su información local y en las interacciones con otros agentes. Esto puede ser más robusto frente a fallas ya que no hay un único punto de falla, y puede ser más escalable ya que cada agente puede operar de forma independiente. Sin embargo, la coordinación puede ser más difícil de lograr ya que los agentes deben comunicarse entre sí y pueden surgir problemas de sincronización y conflicto.

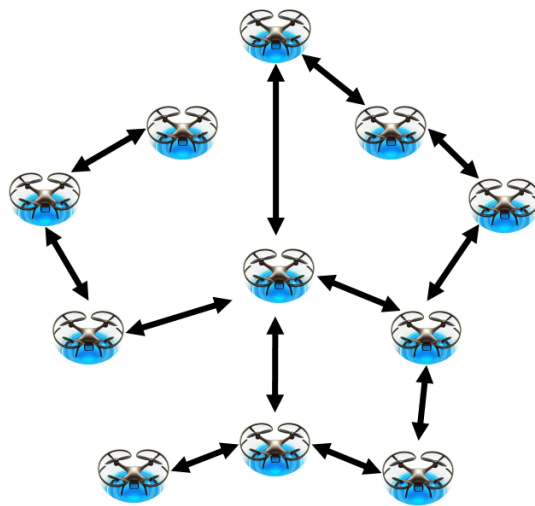


Figura 2.2. Ejemplo de una arquitectura descentralizada.

2.1.1. Algoritmo de consenso

En el control cooperativo de sistemas multi-agentes, la comunicación y la interacción son elementos clave para lograr que múltiples agentes autónomos lleguen a un consenso sobre ciertos valores importantes. Para esto, resulta fundamental utilizar algoritmos de consenso. Estos algoritmos resultan fundamentales para la sincronización de agentes en distintas aplicaciones, tales como robots autónomos, vehículos sin conductor, redes de sensores y otras más.

Consenso: Es un acuerdo al que los agentes deben llegar en conjunto interactuando por medio de una red de comunicación [7]. El consenso es un concepto clave en el control cooperativo de sistemas multi-agentes, abarcando desafíos como:

- **Control de formación:** Coordinar múltiples robots o drones para que mantengan una formación específica mientras se mueven.
- **Flocking:** Simular el comportamiento de grupos de animales, como bandadas de aves o bancos de peces, mediante reglas simples de consenso.
- **Estimación distribuida:** Compartir y combinar datos recogidos por una red de sensores para mejorar la precisión de mediciones o predicciones.

En esencia, el consenso permite que un grupo de agentes alcance un acuerdo sobre un valor común mediante la interacción y comunicación a través de sensores y redes.

Existen dos categorías principales de algoritmos de consenso:

- **Sin líder:** En este tipo de consenso, no hay un agente específico que actúe como líder. Todos los agentes son considerados iguales y contribuyen al proceso de consenso de manera equitativa. Los agentes intercambian información entre sí y actualizan sus estados basándose en las informaciones recibidas de sus vecinos.
- **Con líder:** también conocido como consenso líder-seguidor, uno o más agentes son designados como líderes y los demás como seguidores. Los líderes tienen la responsabilidad de guiar el comportamiento del grupo. Los seguidores ajustan sus estados para seguir el estado del líder o líderes, permitiendo una coordinación más estructurada.

A pesar de que los agentes pueden percibir información diversa del entorno, el objetivo del consenso es aprovechar esta información variada para llegar a una decisión común y alcanzar un objetivo compartido. Este proceso es esencial para la coordinación eficiente y la toma de decisiones en sistemas multi-agentes.

2.1.2. Control de formación

A diferencia del problema de consenso, donde los estados finales de todos los agentes convergen a un valor único, en el control de formación los estados finales de los agentes pueden ser más variados. El propósito del control de formación es estabilizar las distancias o posiciones relativas entre los agentes a valores específicos. Este tipo de control se puede dividir en dos categorías: creación de formaciones y seguimiento de formaciones.

La creación de formaciones ocurre cuando se diseña un algoritmo para que un grupo de agentes forme una figura geométrica preestablecida sin necesidad de una referencia externa. En contraste, el seguimiento de formaciones se refiere a la formación de una figura geométrica mientras se sigue una referencia externa predeterminada.

2.2. Teoría de grafos

Los sistemas multi-agentes están formados por agentes dinámicos individuales que comunican entre sí sus estados. Estos sistemas intercambian información con sus vecinos a través de una topología de comunicación específica. A continuación, en la Figura 2.3 se muestra una representación gráfica de dicha topología para un sistema multi-agente.

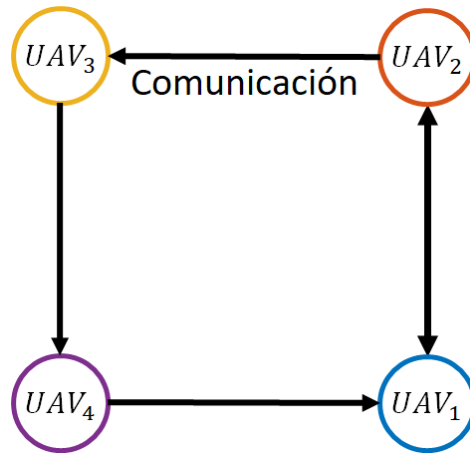


Figura 2.3. Ejemplo de topología de comunicación en un sistema multi-agente.

Para modelar estos sistemas se emplea la teoría de grafos, donde un grafo representa un grupo de nodos (agentes) y las aristas representan el flujo de información entre ellos. Un grafo dirigido G se define como un par (V, E) , donde $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ es un conjunto de nodos y $E \subseteq V \times V$ es el conjunto de aristas. Cada arista (v_i, v_j) indica que el agente v_j puede recibir información del agente v_i . En este contexto, el nodo v_i se denomina nodo padre, mientras que v_j es el nodo hijo, y v_i es un vecino de v_j . El conjunto de vecinos de v_i se denota N_i , y su tamaño se llama el grado del nodo.

2.2.1. Ejemplos de grafos

En grafos, las conexiones entre nodos o agentes son representadas por los bordes. Estas conexiones pueden ser de dos tipos: Oraciones directas e indirectas. La forma en que están conectados estos determina el flujo de información entre los agentes en la red. Una línea con una flecha denota un borde dirigido, indicando la dirección en la que se transmite la información de un agente a otro. Modelar sistemas en donde la comunicación no es recíproca requiere este tipo de borde, en el cual un agente envía información y otro la recibe, sin necesidad de responder a través del mismo canal. En cambio, una línea con flechas en ambos extremos representa un borde no dirigido. La comunicación bidireccional se indica mediante este tipo de borde, donde ambos agentes involucrados en la conexión pueden enviar y recibir información entre sí. A continuación, se describen algunos grafos.

En la Figura (2.4), muestra un grafo indirectamente conectado. Se le llama así porque todas las

conexiones en esta configuración se realizan con bordes bidireccionales. En términos más simples, es un grafo en el que puedes viajar desde cualquier nodo a cualquier otro nodo a través de una serie de aristas, independientemente de su dirección.

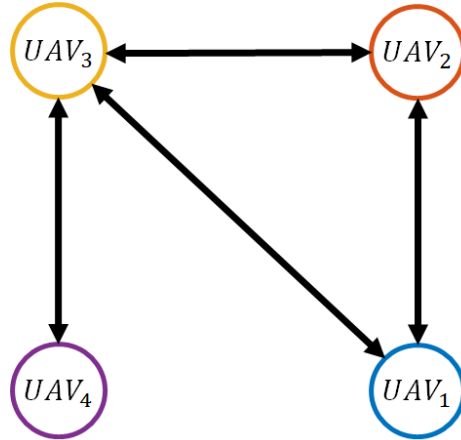


Figura 2.4. Grafo indirectamente conectado.

En la Figura 2.5, se muestra un árbol expandido directo es un tipo de grafo dirigido en el que cada nodo, excepto uno, tiene exactamente un nodo padre. Este único nodo sin un padre se denomina raíz del árbol. Además, todos los nodos están conectados directamente a través de aristas dirigidas.

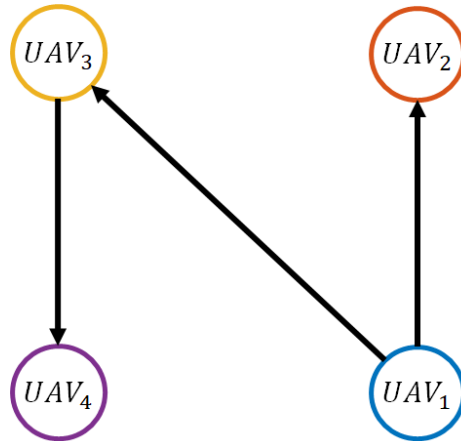


Figura 2.5. Grafo árbol expandido directo.

En este ejemplo, el nodo 1 es la raíz del árbol. Los nodos 2 y 3 son hijos del nodo 1, y el nodo 4 es un hijo del nodo 3. Cada nodo, excepto la raíz (nodo 1), tiene exactamente un nodo padre, lo que cumple con la definición de un árbol expandido directo.

En la Figura 2.6, se muestra un grafo fuertemente conectado es un tipo de grafo dirigido en el que existe un camino dirigido entre cada par de nodos. Esto significa que desde cualquier nodo del grafo es posible llegar a cualquier otro nodo siguiendo las aristas en la dirección correcta.

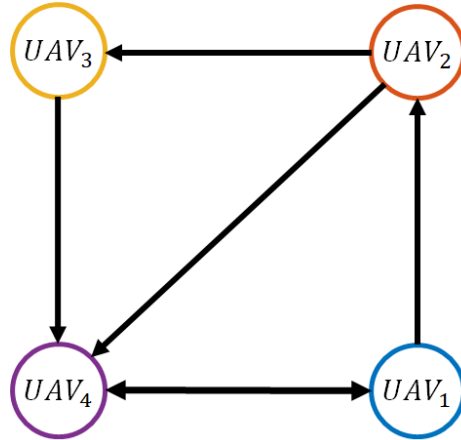


Figura 2.6. Grafo fuertemente conectado.

En la Figura 2.7, se muestra un grafo balanceado y fuertemente conectado es un tipo de grafo que posee una propiedad de equilibrio estructural y además cada par de nodos está conectado por al menos un camino dirigido.

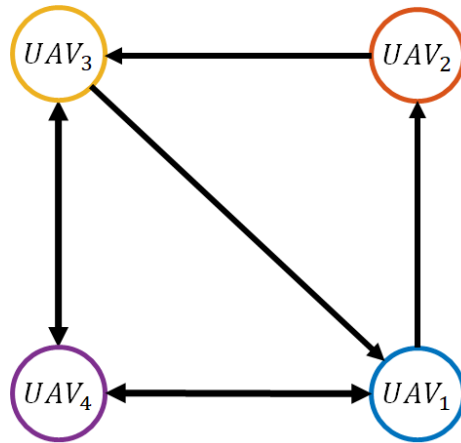


Figura 2.7. Grafo balanceado y fuertemente conectado.

Para que un grafo se considere balanceado, se debe tener en cuenta que todos los nodos o agentes en el sistema tienen el mismo número de conexiones de salida que de entrada. En el ejemplo

proporcionado, cada nodo tiene exactamente el mismo número de conexiones de salida y de entrada.

2.2.2. Matriz de adyacencias y matriz Laplaciana

La matriz de adyacencias A para un grafo se define como $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Los elementos de la matriz son $a_{ii} = 0$ para la diagonal y $a_{ij} > 0$ si existe una arista de v_i a v_j . De lo contrario, $a_{ij} = 0$.

La matriz Laplaciana L se calcula como $L_{ii} = \sum_{j \neq i}^N a_{ij}$ y $L_{ij} = -a_{ij}$ para $i \neq j$.

La matriz de adyacencias es una matriz cuadrada donde N representa el número de nodos. La diagonal principal siempre tiene ceros, y un valor positivo en a_{ij} indica que el nodo i recibe información del nodo j . En la matriz Laplaciana, la diagonal principal contiene la suma del número de conexiones de cada nodo, mientras que las entradas fuera de la diagonal son los negativos de las correspondientes entradas de la matriz de adyacencias.

La matriz Laplaciana y la matriz de adyacencias del grafo en la Figura (2.4) son:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{dirigido}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 L_{\text{dirigido}} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

La matriz Laplaciana y la matriz de adyacencias del grafo en la Figura (2.5) son:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{dirigido}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 L_{\text{dirigido}} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

La matriz Laplaciana y la matriz de adyacencias del grafo en la Figura (2.6) son:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{dirigido}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 L_{\text{dirigido}} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

La matriz Laplaciana y la matriz de adyacencias del grafo en la Figura (2.7) son:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{dirigido}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 L_{\text{dirigido}} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

La estrategia líder-seguidor es importante considerar la comunicación del líder virtual con los agentes (nodos), por lo tanto, se debe incluir al líder en la topología de comunicación. En esta configuración, uno o más agentes seguidores reciben información del estado del líder, quien, a su vez, no recibe información de los seguidores. Para asegurar la convergencia de todos los seguidores hacia el líder (conocido como consenso líder-seguidor), es crucial que el líder sea considerado como una raíz en la topología de comunicación. En los grafos fuertemente conectados y no dirigidos, los seguidores pueden seguir al líder porque existe un árbol de expansión si y solo si hay un camino dirigido de un agente a otro, como se muestra en la Figura (2.8). Esto permite que el líder transmita su información a cualquier agente del sistema.

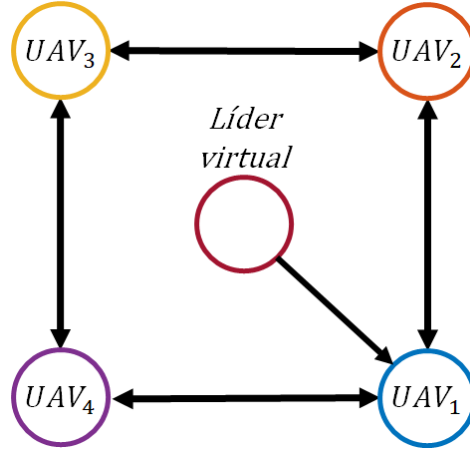


Figura 2.8. Ejemplo grafo con líder seguidor.

La matriz Λ se define como una matriz diagonal que indica la conexión del líder con los agentes. Para el grafo mostrado en la Figura 2.8:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz Λ añade la dimensión de la influencia del líder sobre el agente específico en el sistema multi-agente.

2.3. Matriz de distancias relativas del sistema multi-agente

Para conseguir el control de formación, el protocolo de consenso emplea una matriz que contiene las posiciones relativas finales del sistema. Esta matriz, conocida como H , determina la configuración deseada de los agentes al alcanzar la formación. La estructura de la matriz H se presenta de la siguiente manera:

$$H = [h_1, h_2, \dots, h_N]$$

donde cada vector h_i incluye las distancias relativas entre los agentes del sistema respecto al agente de referencia (el agente 1 o el líder). Por ejemplo, el vector h_1 se define como:

$$h_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$$

De esta forma, la matriz H para un sistema multiagente con N agentes se representa de la siguiente manera:

$$H = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_N \end{bmatrix}$$

Cada columna de la matriz H corresponde a un agente i , y cada vector h_i representa los estados deseados en la formación final, donde x_i , y_i y z_i son las posiciones en los ejes x , y y z respectivamente. Es crucial que la matriz H tenga tantas columnas como agentes en el sistema (N) y tantas filas como estados del protocolo de consenso.

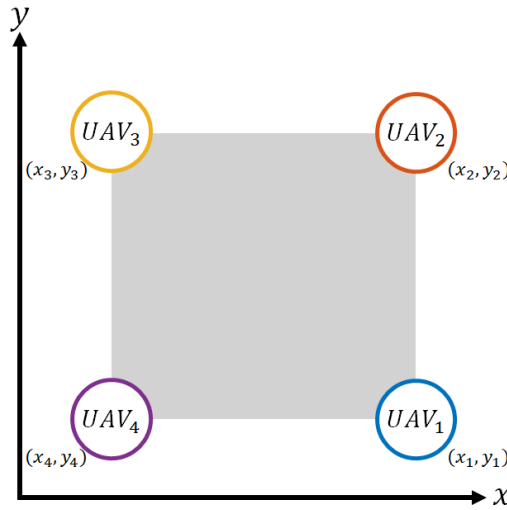


Figura 2.9. Distancias relativas para una formación de un cuadrado en el marco de referencia xy .

Para ilustrar esto con un ejemplo de una formación cuadrada de 4 agentes en el plano xy , la matriz de distancias relativas H sería:

$$H = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

En esta matriz, las primeras tres filas representan las posiciones x , y y z de cada agente, mientras que las últimas tres filas son ceros, indicando la ausencia de otros estados en el protocolo de consenso para este caso específico. Esta configuración asegura que todos los agentes alcancen la formación cuadrada deseada en el espacio tridimensional.

2.4. Sistemas LPV

Los sistemas LPV representan una generalización de los sistemas LTV, por sus siglas en inglés (Linear Time-Varying Systems), donde la diferencia principal radica en que en los sistemas LPV, la variación temporal del comportamiento dinámico puede ser expresada en términos de parámetros. Aunque los sistemas no lineales son los más comunes, según se muestra en la Figura 2.10, es posible aproximar su comportamiento utilizando un tipo específico de sistemas LPV conocidos como sistemas cuasi-LPV (q-LPV), donde el parámetro variable está relacionado con el estado [38].

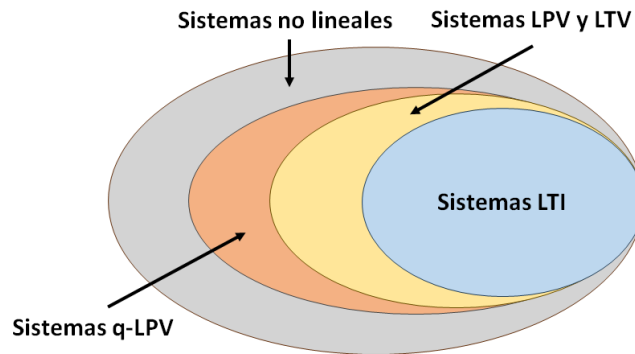


Figura 2.10. Diagrama de Venn de los sistemas dinámicos.

Los sistemas LPV se expresan:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\eta(t))x(t) + B(\eta(t))u(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ son las entradas de control y $y(t) \in \mathbb{R}^r$ son las salidas medidas. Las matrices A , B , C , D y F son conocidas y tienen dimensiones adecuadas.

2.4.1. Representación de los sistemas LPV

Esencialmente hay tres formulaciones globales para los sistemas LPV [39]:

- Formulación politópica.
- Formulación dependiente de los parámetros.
- Formulación para una transformación lineal fraccional (LFT3).

Formulación politópica Para la representación politópica de un sistema LPV, se utilizan funciones de ponderación para interpolar entre los modelos definidos en los vértices del polígono. Estas funciones de ponderación deben satisfacer las siguientes restricciones:

$$\sum_{z=1}^{\rho} \beta_z(\eta_n(t)) = 1, \quad \beta_z(\eta_n(t)) \geq 0, \quad \forall \eta_n(t) \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

El vector de parámetros $\eta(t)$ se encuentra dentro de un polígono con $\rho = 2^q$ vértices, donde q es el número de parámetros variables. Un polígono es una figura geométrica en un espacio de cualquier dimensión cuyos vértices se obtienen combinando los valores extremos de cada parámetro.

Para aclarar este concepto, consideremos un sistema con dos parámetros variables: $\eta_1(t) \in [\underline{\eta}_1, \bar{\eta}_1]$ y $\eta_2(t) \in [\underline{\eta}_2, \bar{\eta}_2]$. Esto significa que $\eta_1(t)$ y $\eta_2(t)$ pueden tomar cualquier valor dentro del rango $[\underline{\eta}_1, \bar{\eta}_1]$ y $[\underline{\eta}_2, \bar{\eta}_2]$, respectivamente.

El vector de parámetros $\eta(t)$ se mantiene dentro de un polígono cuyos vértices están formados por todas las combinaciones posibles de los valores extremos de $\eta_1(t)$ y $\eta_2(t)$. En otras palabras, los vértices del polígono serían $(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2)$, $(\underline{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$, $(\bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2)$ y $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$. La Figura 2.11 ilustra este polígono y muestra cómo el vector de parámetros $\eta(t)$ se encuentra siempre dentro de esta región definida por los valores extremos.

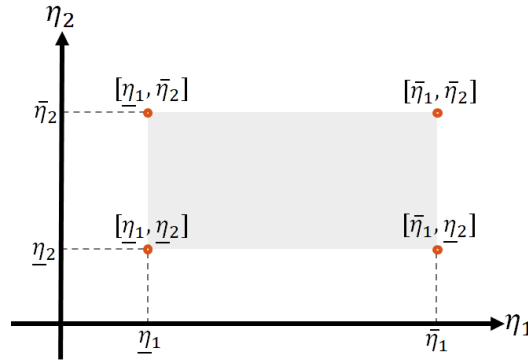


Figura 2.11. Representación del polígono de un sistema con dos parámetros variables..

Por cada término no lineal, se obtendrán 2 funciones de ponderación, mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mu_j^0 = \frac{\bar{\eta}_j - \eta_j(t)}{\bar{\eta}_j - \underline{\eta}_j}, \quad \mu_j^1 = 1 - \mu_j^0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, q. \quad (2.8)$$

Y para las funciones de programación se definen como:

$$\beta_z(\eta) = \prod_{j=1}^q \mu_j^w(\eta_j(t)), \quad (2.9)$$

donde w puede tomar valores de $\bar{\eta}_j$ o $\underline{\eta}_j$, dependiendo de la función de programación local que se considere.

Note que (2.9) puede expresarse como:

$$\beta_z(\eta) = \prod_{j=1}^q \mu_{z_j}^j(\eta_j(t)), \quad (2.10)$$

donde la representación binaria de q dígitos de $(z - 1)$ se denota por $[z_1, z_2, \dots, z_q]$. Las matrices A_z y B_z , calculadas para $z = 1, \dots, 2^q$, se derivan sustituyendo las variables de programación $\underline{\eta}_j$ o $\bar{\eta}_j$, donde $j = 1, 2, \dots, q$, en las matrices $A(\eta)$ y $B(\eta)$ en la ecuación (3.9).

$$A_z = A(\eta_1^{z_1}, \eta_2^{z_2}, \dots, \eta_n^{z_n}), \quad B_z = B(\eta_1^{z_1}, \eta_2^{z_2}, \dots, \eta_n^{z_n}), \quad (2.11)$$

donde η_j indica qué porción de la j -ésima variable de programación está involucrada en el z -ésimo sub-modelo. Considerando las funciones de programación dadas por (2.10), el sistema no lineal (2.6) se representa exactamente, sólo en el conjunto convexo, por el modelo q-LPV dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{z=1}^{\rho} \beta_z(\eta(t)) (A_z x(t) + B_z u(t)), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles, A_i , B_i y C son matrices reales conocidas, $\eta(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de q parámetros variables los cuales incluyen la dinámica de las variables de estado.

2.4.2. Sistemas q-LPV

El enfoque cuasi-Lineal o q-LPV (del inglés *Quantized LPV*) ha demostrado ser muy útil en los últimos años. Una de sus principales ventajas es la capacidad de representar la dinámica de las no linealidades del sistema a través de una interpolación de modelos lineales [38]. En un sistema q-LPV, una característica importante es que los parámetros variables pueden ser funciones del estado del sistema. Esto permite que el modelo lineal dependiente de parámetros capture la dinámica no

lineal del sistema original. Los parámetros variables se ajustan en tiempo real según el estado actual del sistema, lo que facilita el diseño y análisis de controladores para sistemas complejos y no lineales.

2.4.3. Ejemplo numérico

Considera el péndulo simple mostrado en la Figura 2.12, donde l denota la longitud de la varilla, m denota la masa del péndulo y θ el ángulo que la varilla forma con el eje vertical a través del punto de pivote.

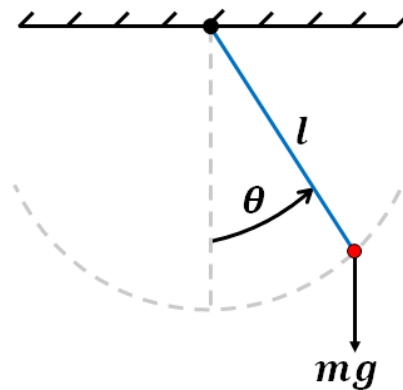


Figura 2.12. Diagrama de cuerpo libre de un péndulo simple.

Para obtener la ecuación de movimiento del péndulo, identifiquemos las fuerzas que actúan sobre el péndulo. Existe una fuerza gravitacional hacia abajo igual a $m_s g$, también hay una fuerza de fricción que se opone al movimiento, la cual asumimos que es proporcional a la velocidad del péndulo con un coeficiente de fricción k . Utilizando la segunda ley de Newton del movimiento, podemos escribir la ecuación de movimiento del péndulo como [40]:

$$ml\ddot{\theta}(t) = -mg\text{sen}(\theta(t)) - kl\dot{\theta}(t) . \quad (2.13)$$

donde m es la masa del péndulo, g es la gravedad, $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$ y θ son la aceleración, velocidad y posición angular del péndulo, respectivamente y k es el coeficiente de fricción.

Realizando un cambio de variable, considerando $x_1(t) = \theta$ y $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$

Representación del modelo en espacio de estado, se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g \sin(x_1(t))}{lx_1(t)} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Se define $\eta(t) \in \mathbb{R}^q$ como el vector de q parámetros variables que incluyen la no linealidad:

$$\eta(t) = -\frac{g \operatorname{sen}(x_1(t))}{lx_1(t)}. \quad (2.15)$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como:

$$\mu_1(\eta(t)) = \frac{\bar{\eta} - \eta(t)}{\bar{\eta} - \underline{\eta}}, \mu_2(\eta(t)) = \frac{\eta(t) - \underline{\eta}}{\bar{\eta} - \underline{\eta}}, \quad (2.16)$$

donde $\bar{\eta}$ y $\underline{\eta}$ son los límites de $\eta(t)$. Teniendo en cuenta que cada restricción debe satisfacer a cada función de ponderación.

$$\beta_i(\eta(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^{\rho} \beta_i(\eta(t)) = 1, \quad (2.17)$$

donde $\rho = q^2$ es el número de combinaciones posibles de los límites del parámetro variable.

Considerando que solo existe un parámetro variante $\eta(t)$ de tal forma que $q = 1$. Las funciones de ponderación se calculan mediante (2.10) y se obtiene:

$$\begin{aligned} \beta_1(\eta) &= \mu_0^1, \\ \beta_2(\eta) &= \mu_1^1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

El sistema del péndulo simple se puede expresar en forma de sistema q-LPV:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{z=1}^{\rho} \mu_z(\eta(t))(A_z x(t)), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \underline{\eta} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \bar{\eta} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Simulando el sistema no lineal en lazo abierto, se obtiene los límites del término no lineal:

$$\eta \in [-19.6200, 0]. \quad (2.20)$$

La simulación del sistema se realizó en *MATLAB*, se consideró un tiempo de simulación de 40 s, con un paso de integración de 0.001 s. En la Tabla (2.1), se muestran los parámetros utilizados para la simulación:

Tabla 2.1. Parámetros del péndulo y condiciones iniciales.

Parámetro	Valor	Unidades
Masa, m_s	0.5	kg
Longitud del brazo, l	0.5	m
Gravedad, g	9.81	m/s ²
Coefficiente de fricción, k	0.2	-
Condición inicial para el ángulo, θ	$\frac{\pi}{2}$	rad
Condición inicial para la velocidad angular, $\dot{\theta}$	0	rad/s

La Figura 2.13 muestra que las funciones de ponderación cumplen con las restricciones (2.17) que se definieron para construir la representación q-LPV.

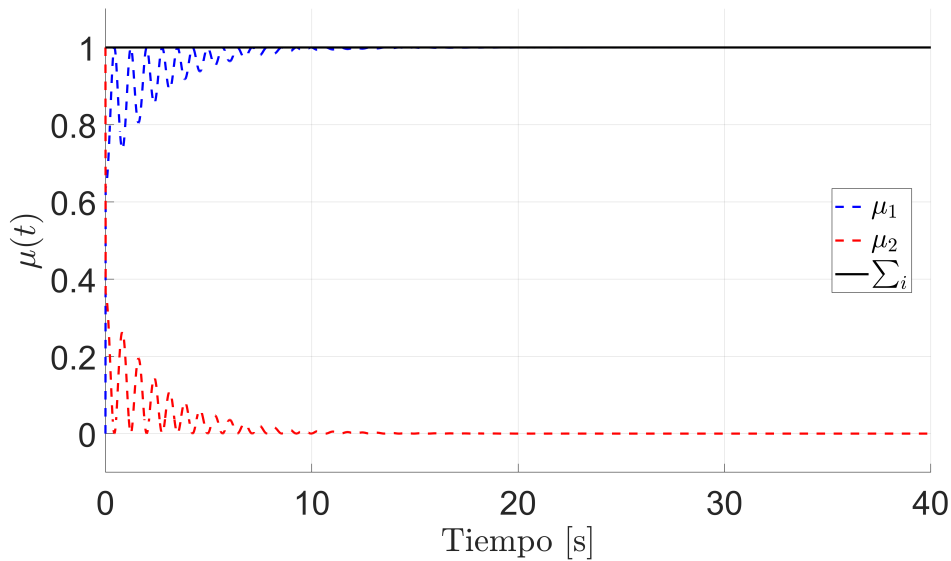


Figura 2.13. Funciones de ponderación.

Finalmente, se construyó el sistema q-LPV utilizando los modelos locales (2.19) y se comparó con el modelo no lineal (2.13).

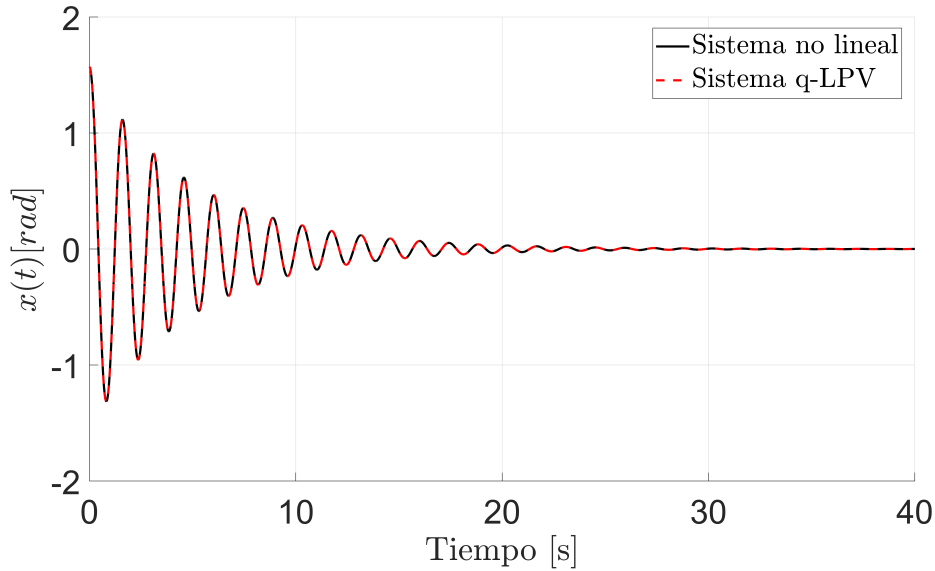


Figura 2.14. Posición del péndulo.

En la Figura 2.14 se muestra que los resultados indican que la representación del sistema q-LPV reproduce fielmente la dinámica del sistema no lineal.

2.4.4. Teorema de Polya

El Teorema de Polya, nombrado en honor al matemático George Pólya, es un resultado fundamental en teoría de números que tiene aplicaciones importantes en diversos campos, incluido el control difuso. En [41] empleo el uso del teorema a aplicaciones de control difuso sobre formas positivas, estableció condiciones necesarias y suficientes para la positividad de formas positivas. La aplicación del Teorema de Polya al control difuso permite obtener condiciones menos conservadoras para la positividad de sumas difusas, lo que tiene implicaciones significativas en términos de estabilidad y rendimiento en sistemas de control difuso. Al aumentar un parámetro de complejidad n , estas condiciones se vuelven progresivamente menos conservadoras, convergiendo hacia la exactitud asintótica. Estas condiciones son asintóticamente exactas cuando n tiende al infinito [42]. Para ejemplificar la aplicación del teorema de Polya, a continuación se desarrolla un ejemplo.

Considere el siguiente problema de diseñar la ganancia $K(\theta(t))$ del controlador por retroalimentación de estados, para el siguiente sistema LPV (tomado del ejemplo numérico 5.1 de [42]):

$$\dot{x}(t) = \sum_{z=1}^3 \beta_z (A_z x(t) + B_z u(t)), \quad (2.21)$$

donde las matrices politópicas A_z y B_z son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2-a & -7 \\ 1+a & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -7+a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1+a \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde $a > 0$ es un parámetro, cuyo valor cuantifica la diferencia entre los vértices. Es importante notar que si $a = 0$, el sistema se convertiría en un sistema LTI.

Para encontrar las ganancias de los vértices de control del (2.21), se debe resolver la siguiente LMI [42]:

$$A_i P + P A_j^T + B_j \Gamma_i + \Gamma_i^T B_j^T \geq 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N. \quad (2.23)$$

Sin embargo, esta solución tiene la desventaja de que una ganancia vértice K_i debe ser robusta respecto a todos los valores posibles de B . Al usar la LMI (2.23) para el diseño de las ganancias vértice del controlador, obtenemos:

$$\begin{aligned} A_1 P + B_1 \Gamma_1 + P A_1^T + \Gamma_1^T B_1^T &< 0, & A_1 P + B_2 \Gamma_1 + P A_1^T + \Gamma_1^T B_2^T &< 0, \\ A_1 P + B_3 \Gamma_1 + P A_1^T + \Gamma_1^T B_3^T &< 0, & A_2 P + B_1 \Gamma_2 + P A_2^T + \Gamma_2^T B_1^T &< 0, \\ A_2 P + B_2 \Gamma_2 + P A_2^T + \Gamma_2^T B_2^T &< 0, & A_2 P + B_3 \Gamma_2 + P A_2^T + \Gamma_2^T B_3^T &< 0, \\ A_3 P + B_1 \Gamma_3 + P A_3^T + \Gamma_3^T B_1^T &< 0, & A_3 P + B_2 \Gamma_3 + P A_3^T + \Gamma_3^T B_2^T &< 0, \\ A_3 P + B_3 \Gamma_3 + P A_3^T + \Gamma_3^T B_3^T &< 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $K_1 = \Gamma_1 P^{-1}$, $K_2 = \Gamma_2 P^{-1}$, $K_3 = \Gamma_3 P^{-1}$ y $K_4 = \Gamma_4 P^{-1}$ son las ganancias de los vértices de control. Al resolver (2.24) con el *software Matlab* y el *toolbox SDPT3* [43], se encuentra soluciones a las LMIs de a hasta $a = 0.48$.

Introduciendo la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_f &= \left\{ \vec{k} = [k_1, \dots, k_f]^T \in \mathbb{N}^f \mid 1 \leq k_j \leq \rho \quad \forall j = 1, \dots, f \right\}, \\ \mathbb{K}_f^+ &= \left\{ \vec{k} \in \mathbb{K}_f \mid k_j \leq k_{j+1}, j = 1, \dots, f-1 \right\}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

y donde el conjunto de permutaciones con posibles elementos repetidos del multi-índice \vec{k} se denota por $K(\vec{k}) \subset \mathbb{K}_f$.

Para un valor de $f = 2$, los conjuntos mostrados en (2.25) son expresados como:

$$\mathbb{K}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}. \quad (2.26)$$

$$\mathbb{K}_2^+ = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}. \quad (2.27)$$

Por lo tanto los conjuntos $K(\vec{k})$ son:

$$\begin{aligned} K(1, 1) &= \{(1, 1)\}, \\ K(1, 2) &= \{(1, 2), (2, 1)\}, \\ K(1, 3) &= \{(1, 3), (3, 1)\}, \\ K(2, 2) &= \{(2, 2)\}, \\ K(2, 3) &= \{(2, 3), (3, 2)\}, \\ K(3, 3) &= \{(3, 3)\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

Y las LMIs (2.23) son:

$$\begin{aligned} A_1P + B_1\Gamma_1 + PA_1^T + \Gamma_1^TB_1^T &< 0, \\ A_2P + B_2\Gamma_2 + PA_2^T + \Gamma_2^TB_2^T &< 0 \\ A_3P + B_3\Gamma_3 + PA_3^T + \Gamma_3^TB_3^T &< 0 \\ A_1P + A_3P + B_3\Gamma_1 + B_1\Gamma_3 + PA_1^T + PA_3^T + \Gamma_1^TB_3^T + \Gamma_3^TB_1^T &< 0, \\ A_1P + A_2P + B_2\Gamma_1 + B_1\Gamma_2 + PA_1^T + PA_2^T + \Gamma_1^TB_2^T + \Gamma_2^TB_1^T &< 0, \\ A_2P + A_3P + B_3\Gamma_2 + B_2\Gamma_3 + PA_2^T + PA_3^T + \Gamma_2^TB_3^T + \Gamma_3^TB_2^T &< 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Las LMIs obtenidas son menos conservadoras que las anteriores, de hecho, al resolver se encuentra soluciones de a hasta $a = 8.85$.

Para un valor de $f = 3$, los conjuntos mostrados en (2.25) son expresados como:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_3 = \{ & (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), \\ & (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (2, 3, 2), (2, 3, 3), \\ & (3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3) \}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_3^+ = \{ & (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 3), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 3), \\ & (3, 3, 3) \}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por lo tanto los conjuntos $K(\vec{k})$ son:

$$\begin{aligned}
 K(1, 1, 1) &= \{(1, 1, 1)\}, \\
 K(1, 1, 2) &= \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}, \\
 K(1, 1, 3) &= \{(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)\}, \\
 K(1, 2, 2) &= \{(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)\}, \\
 K(1, 2, 3) &= \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}, \\
 K(1, 3, 3) &= \{(1, 3, 3), (3, 1, 3), (3, 3, 1)\}, \\
 K(2, 2, 2) &= \{(2, 2, 2)\}, \\
 K(2, 2, 3) &= \{(2, 2, 3), (2, 3, 2), (3, 2, 2)\}, \\
 K(2, 3, 3) &= \{(2, 3, 3), (3, 2, 3), (3, 3, 2)\}, \\
 K(3, 3, 3) &= \{(3, 3, 3)\}.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Y las LMIs (2.23) son:

$$\begin{aligned}
 A_i P + B_i \Gamma_i + \iota &< 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
 2A_i P + A_j P + B_i \Gamma_i + B_j \Gamma_i + B_j \Gamma_j + B_i \Gamma_j + \iota &< 0, \quad (i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), \dots \\
 &\dots (3, 1), (3, 2), \\
 \sum_{i=1}^3 \left(2A_i P + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 B_i \Gamma_j \right) + \iota &< 0.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde ι indica el término inducido por simetría.

Al resolver estas LMIs, se encuentra un valor de a de hasta $a = 12.57$. Por lo tanto, podemos concluir que al aumentar el valor de f , se reduce aún más el conservadurismo. En otras palabras, al incrementar el valor de f , ampliamos el rango máximo de a para el cual se pueden encontrar soluciones. Es importante destacar que al incrementar el valor de f , también aumenta el número de LMIs que deben resolverse, lo que resulta en un mayor costo computacional.

2.5. Control basado en observador

En numerosos sistemas de control, no todos los estados del sistema pueden ser medidos directamente debido a restricciones físicas o de costos en los sensores. En estas circunstancias, se puede

emplear un observador para estimar los estados no medidos basándose en el modelo del sistema, así como en las entradas y salidas disponibles. Para implementar este tipo de control, es crucial garantizar que el sistema sea controlable y observable.

2.5.1. Controlabilidad

Controlabilidad para sistemas LTI.

Si un sistema lineal en tiempo continuo es descrito por las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^i$ es el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^o$ es el vector de salida. Para verificar la controlabilidad de un sistema LTI, una condición necesaria y suficiente es que la matriz de controlabilidad C sea de rango completo (es decir, tenga rango igual al número de estados del sistema s) [44].

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{s-1}B] \tag{2.35}$$

Donde: s es el número de estados del sistema.

Controlabilidad para sistemas LPV

Un sistema LPV tiene la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\eta)x(t) + B(\eta)u(t) \\ y(t) &= C(\eta)x(t). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Para representar un sistema LPV con una representación politópica, podemos expresar las matrices de estado $A(\eta)$ y de control $B(\eta)$ como una combinación convexa de matrices lineales, donde cada matriz está asociada con un punto dentro de la región politópica [45].

$$A(\eta) = \sum_{z=1}^{\rho} \alpha_z(\eta)A_z, \quad B(\eta) = \sum_{z=1}^{\rho} \alpha_z(\eta)B_z \tag{2.37}$$

La controlabilidad de un modelo lineal z dentro del polítopo se verifica utilizando la matriz de controlabilidad C_z , que se define como:

$$C_z = [B_z \quad A_z B_z \quad (A_z^2)B_z \quad \dots \quad (A_z^{n-1})B_z], \quad \forall_z = [1, \dots, \rho] \tag{2.38}$$

donde B_z es la matriz de control asociada con el modelo lineal z , A_z es la matriz de estado asociada con el modelo lineal z y n es el número de estados del sistema.

2.5.2. Observabilidad

La observabilidad es un concepto fundamental en el análisis y diseño de sistemas de control. Un sistema es observable en un tiempo t_0 si, estando el sistema en un estado $x(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de las salidas del sistema en un intervalo de tiempo finito. En otras palabras, la observabilidad se refiere a la capacidad de inferir el estado interno del sistema solo a partir de sus salidas observables.

Observabilidad para sistemas LTI.

Considere el sistema (2.34), este será observable sí y solo sí la matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix}$$

Si \mathcal{O} tiene rango completo el sistema es observable, es decir, el rango de \mathcal{O} es igual al número de estados del sistema [44].

Observabilidad para sistemas LPV

Para un sistema LPV con representación politópica, la observabilidad se evalúa considerando la variación de los parámetros dentro de la región politópica. En este caso, para un sistema LPV con representación politópica, la observabilidad se determina mediante la evaluación de la observabilidad en cada punto de operación dentro de la región politópica. Esto implica examinar la observabilidad de cada modelo lineal que forma parte de la representación politópica. La matriz de observabilidad \mathcal{O}_z asociada con cada modelo lineal dentro de la representación politópica se puede definir de manera similar a la matriz de observabilidad para sistemas LTI, pero teniendo en cuenta la dependencia de los parámetros. Por lo tanto, la matriz de observabilidad \mathcal{O}_z para el modelo lineal z puede expresarse como:

$$\mathcal{O}_z = \begin{bmatrix} C \\ CA_z \\ CA_z^2 \\ \vdots \\ CA_z^{s-1} \end{bmatrix}, \forall_z = [1, \dots, \rho] \quad (2.39)$$

donde C es la matriz de salida asociada con el modelo local z , A_z es la matriz de estado asociada con el modelo local z , s es el número de estados del sistema y ρ es el número total de submodelos.

2.6. Control robusto

El control robusto es una rama de la teoría del control que se ocupa del diseño de controladores capaces de mantener el desempeño del sistema en presencia de incertidumbres y perturbaciones. A diferencia de los métodos de control clásico que suponen un modelo exacto del sistema, el control robusto reconoce que siempre existen inexactitudes en el modelo y perturbaciones externas no modeladas. El control robusto se aplica en sistemas donde las características y los parámetros pueden variar de manera impredecible o donde las perturbaciones externas son inevitables, en el caso de vehículos aéreos no tripulados se presentan perturbaciones externas como lo son ráfagas de viento. Este enfoque es esencial en muchas aplicaciones industriales y de ingeniería, donde la fiabilidad y la estabilidad del sistema son críticas.

Capítulo 3

Control de seguimiento de referencia para líder virtual

En este capítulo se desarrolla un control proporcional-integral (PI) de seguimiento de trayectoria para un líder virtual, el cual actúa como referencia para el sistema multi-agente. Para diseñar el controlador q-LPV PI, se debe tener una representación q-LPV. Esta se obtiene a partir del modelo no lineal, el cual se simplifica y luego se convierte en una representación q-LPV, la cual permite diseñar las ganancias del controlador de manera efectiva, abordando las no linealidades del sistema. En primer término, se presentan los modelos matemáticos del cuadricóptero para comprender el modelo no lineal y su simplificación hacia una representación q-LPV. Posteriormente, se muestra el diseño del control de seguimiento de trayectoria.

3.1. Modelo dinámico de un cuadricóptero

En esta sección se presenta el modelado matemático de un UAV, con un enfoque particular en el cuadricóptero, caracterizado por su configuración de cuatro rotores, han ganado relevancia en una amplia variedad de aplicaciones gracias a su agilidad, estabilidad y capacidad para maniobrar en espacios reducidos. La Figura 3.1 muestra un esquema donde se pueden ver las principales fuerzas que actúan sobre el UAV. Es necesario establecer las siguientes suposiciones para obtener el modelo dinámico [46]:

Suposición 1: La estructura del cuadricóptero es rígida y simétrica, al igual que las hélices son rígidas.

Suposición 2: El centro de masa y el origen del sistema de referencia del cuerpo O_{α_2} coinciden.

Claro, aquí tienes la traducción al español del párrafo proporcionado:

La dinámica del cuadricóptero se define como [47]:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= v, \\
 m_s \dot{v} &= RF, \\
 \dot{R} &= R\hat{\Omega}, \\
 J\dot{\Omega} &= -\Omega \times J\Omega + \tau,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\xi = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ denota la posición del centro de masa del vehículo con respecto al sistema inercial α y $v = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T \in \mathbb{R}^3$ denota la velocidad del vehículo, $\Omega = [p, q, r]^T \in \mathbb{R}^3$ es la orientación del vehículo con respecto al sistema inercial α_2 y la masa total del UAV está expresada por m_s . $J = \text{diag}(J_x, J_y, J_z) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ representa la matriz de inercia alrededor del centro de masa definida por α_2 . $\tau = (\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)^T$ significa el torque generalizado en rollo, cabeceo y guiñada. R denota la matriz de rotación de α_1 a α_2 , mientras que F denota las fuerzas generadas por los motores del vehículo.

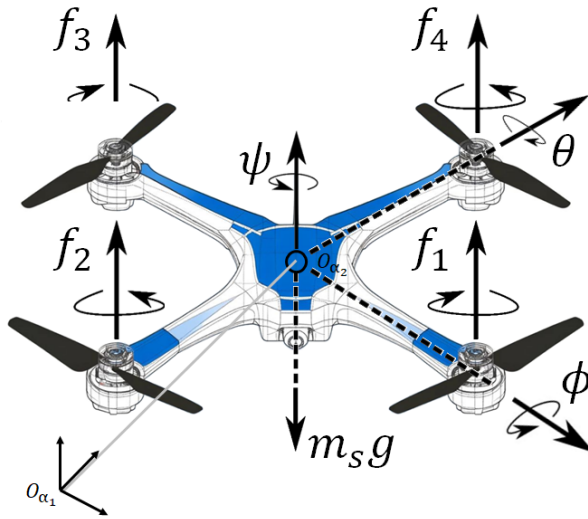


Figura 3.1. Esquema de un cuadricóptero representando las fuerzas principales que actúan en el vehículo.

El trabajo a desarrollar se consideran sistemas homogéneos (UAV con las mismas características), específicamente utilizando cuadricópteros como tipo de UAV. Se asume que todos los agentes tendrán dimensiones y dinámica idénticas. A continuación, se presentan las ecuaciones que rigen el comportamiento del UAV, las cuales están representadas por el modelo Newton-Euler [48],

teniendo en cuenta las suposiciones (1, 2) y aplicando el formalismo de Newton-Euler, la dinámica representada en la ecuación (3.1) puede formularse como [49]:

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_x &= v_x, \\
 \dot{v}_x &= (\cos(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) + \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi))\frac{1}{m_s}u_z, \\
 \dot{p}_y &= v_y, \\
 \dot{v}_y &= (\text{sen}(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\text{sen}(\phi))\frac{1}{m_s}u_z, \\
 \dot{p}_z &= v_z, \\
 \dot{v}_z &= -g + (\cos(\theta)\cos(\phi))\frac{1}{m_s}u_z, \\
 \dot{\phi} &= p + (\text{sen}(\phi)\tan(\theta))q + (\cos(\phi)\tan(\theta))r, \\
 \dot{p} &= (qr(J_y - J_z) + u_\phi)\frac{1}{J_x}, \\
 \dot{\theta} &= \cos(\phi)q - \text{sen}(\phi)r, \\
 \dot{q} &= (pr(J_z - J_x) + u_\theta)\frac{1}{J_y}, \\
 \dot{\psi} &= (\text{sen}(\phi)q + \cos(\phi)r)\frac{1}{\cos(\theta)}, \\
 \dot{r} &= (pq(J_x - J_y) + u_\psi)\frac{1}{J_z},
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde p_x , p_y y p_z denotan la posición, v_x , v_y y v_z las velocidades de traslación del vehículo, p , q y r las velocidades angulares y m_s es la masa total del vehículo. Los ángulos de Euler se expresan mediante ϕ (también conocido como *roll*), θ (también conocido como *pitch*) y ψ (también conocido como *yaw*). Los momentos de inercia se expresan mediante J_x, J_y, J_z . Las entradas del sistema para las dinámicas de actitud y traslación se definen como $u = [u_z, u_\phi, u_\theta, u_\psi]^T$. Las entradas reales del sistema son las fuerzas ascendentes generadas por cada hélice, definidas como f_1, f_2, f_3 y f_4 .

Las entradas de control pueden definirse en términos de las velocidades angulares de los rotores BLM de un UAV, por lo tanto, las entradas del sistema pueden expresarse de la siguiente manera [50]:

$$u = \Gamma\Omega^2, \tag{3.3}$$

donde $\Omega = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4]^T$ es el vector de velocidades angulares y Γ es la matriz de coeficientes

definida como:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ -bl & 0 & bl & 0 \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

donde b , d y l representan el coeficiente de empuje, el coeficiente de arrastre y la longitud del brazo del cuadricóptero, respectivamente.

Dado que u y Γ son conocidos, por lo tanto, se aísla la variable Ω y se obtiene la siguiente expresión:

$$\Omega = \sqrt{\Gamma^{-1}u}. \quad (3.5)$$

Otra forma de representar las entradas implica considerarlas como fuerzas de empuje generadas por cada motor-hélice:

$$f_i = b\Omega_i^2, \quad (3.6)$$

donde Ω_i es la velocidad angular del i -ésimo ROTOR, con $i = 1, \dots, 4$ y f_i es la fuerza de elevación generada. En este escenario, las entradas para el cuadricóptero representado en la Figura 3.1 están caracterizados por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} u_z \\ u_\phi \\ u_\theta \\ u_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

3.1.1. Modelo lineal

El modelo no lineal del cuadricóptero (3.2) se puede simplificar a una forma lineal tomando en cuenta las siguientes consideraciones [51]:

- Las variaciones de los ángulos ϕ y θ se consideran muy pequeñas, y el ángulo ψ se mantiene constante, es decir, $\psi = 0$.
- El coeficiente de arrastre es insignificante cuando se establece una velocidad de rotación baja.
- La dinámica de los ejes x e y se desacopla de la dinámica del eje z bajo condiciones de vuelo estable o en suspensión (*hover*), es decir, $u_z \approx m_s g$.
- Además, cuando los ángulos son muy pequeños, se puede utilizar la aproximación lineal donde el seno de un ángulo es aproximadamente igual al ángulo ($\text{sen}(\theta) \approx \theta$) y el coseno de un ángulo es aproximadamente uno ($\text{cos}(\theta) \approx 1$).

Con estas suposiciones, el modelo lineal del UAV se describe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde

$$A(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix},$$

donde el vector de estado se definen como: $x = [p_x, v_x, p_y, v_y, p_z, v_z, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}]$ y la matriz C se ajusta de tal manera que el vector de salida sea $y = [p_x, p_y, p_z, \phi, \theta, \psi]$.

En el apéndice **B**, se explica a detalle como se obtuvo el modelo lineal.

3.1.2. Modelo simplificado

El propósito de obtener un modelo simplificado del cuadricóptero es lograr una representación q-LPV que permita encontrar la solución de (4.16). Un modelo dinámico más simple para un cuadricóptero puede obtenerse al realizar algunas consideraciones para el sistema no lineal (3.2), de modo que cuando el vehículo está en vuelo estacionario (*hover*), la dinámica rotacional puede simplificarse considerando que $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \approx (p, q, r)$ [52]. De manera similar, al realizar una condición de vuelo estacionario durante todo el período de vuelo, $u_z \approx mg$ y haciendo la suposición de que el coeficiente de arrastre d es despreciable a bajas velocidades de rotación. El modelo no lineal (3.2) se reescribe en su forma de espacio de estados q-LPV como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\eta)x + B(\eta)u, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{3.9}$$

Donde:

$$A(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_1\eta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_2\eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_3\eta_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta_1}{m_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix},$$

donde $\eta_1 = \cos(\theta)\cos(\phi)$, $\eta_2 = \dot{\phi}$, $\eta_3 = \dot{\theta}$, $V_1 = (J_y - J_z)/J_x$, $V_2 = (J_z - J_x)/J_y$ y $V_3 = (J_x - J_y)/J_z$. Los vectores de estado se definen como: $x = [p_x, v_x, p_y, v_y, p_z, v_z, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}]$ y la matriz C se ajusta de tal manera que el vector de salida sea $y = [p_x, p_y, p_z, \phi, \theta, \psi]$. En el apéndice **B**, se explica a detalle como se obtuvo el modelo lineal.

3.1.3. Representación q-LPV

La principal ventaja del enfoque q-LPV es que permite extender las aplicaciones de herramientas de control lineal a sistemas no lineales, los cuales pueden ser representados en forma q-LPV. Las variables de programación se definen como $\eta_j \in [\bar{\eta}_j, \underline{\eta}_j]$, con $j = 1, 2, \dots, q$, donde η_j denota los elementos no constantes en (3.9), $\bar{\eta}_j$ y $\underline{\eta}_j$ representan los valores escalares máximo y mínimo de η_j , respectivamente. El número total de no linealidades se denota por q para cada término η_j se generan dos funciones de ponderación, teniendo un valor máximo y mínimo para cada η_j .

$$\mu_j^0 = \frac{\eta_j - \underline{\eta}_j}{\bar{\eta}_j - \underline{\eta}_j}, \quad \mu_j^1 = 1 - \mu_j^0. \quad (3.10)$$

Aplicando (3.10) al modelo de cuadricóptero, que tiene tres elementos no constantes. Para obtener los límites de η_1 se asume que el cuadricóptero está limitado a variar los ángulos θ y ϕ a $\pm\pi/4$ (rad), en el caso de η_2 y η_3 se asumen referencias con dinámicas lentas en los desplazamientos [53], por lo tanto los límites para cada término no lineal son: $\eta_1 \in [0.5, 1](rad)$, $\eta_2 \in [-\pi/2, \pi/2](rad/s)$ y $\eta_3 \in [-\pi/2, \pi/2](rad/s)$, las funciones de ponderación se expresan como:

$$\begin{aligned}
 \mu_1^0 &= \frac{1 - \cos \theta \cos \phi}{0.5}, & \mu_1^1 &= 1 - \mu_1^0, \\
 \mu_2^0 &= \frac{\pi - 2\dot{\phi}}{2\pi}, & \mu_2^1 &= 1 - \mu_2^0, \\
 \mu_3^0 &= \frac{\pi - 2\dot{\theta}}{2\pi}, & \mu_3^1 &= 1 - \mu_3^0.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

El modelo global está compuesto por $\rho = 2^q = 8$ submodelos, la función de programación se calcula como el producto de las funciones de ponderación correspondientes a cada modelo local como:

$$\begin{aligned}
 \beta_1(\eta) &= \mu_1^0 \mu_2^0 \mu_3^0, & \beta_2(\eta) &= \mu_1^0 \mu_2^0 \mu_3^1, & \beta_3(\eta) &= \mu_1^0 \mu_2^1 \mu_3^0, & \beta_4(\eta) &= \mu_1^0 \mu_2^1 \mu_3^1, \\
 \beta_5(\eta) &= \mu_1^1 \mu_2^0 \mu_3^0, & \beta_6(\eta) &= \mu_1^1 \mu_2^0 \mu_3^1, & \beta_7(\eta) &= \mu_1^1 \mu_2^1 \mu_3^0, & \beta_8(\eta) &= \mu_1^1 \mu_2^1 \mu_3^1.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nótese que (3.12) se puede escribir como $\beta_z(\eta) = \mu_z^1 \mu_z^2 \mu_z^3$, donde $[z_1, z_2, z_3]$ es la representación binaria de 3 dígitos de $(z - 1)$. Las matrices conocidas A_z y B_z , con $z = 1, \dots, 8$ se calculan reemplazando las variables de programación η_j^0 o η_j^1 , con $j = 1, 2, 3$, en las matrices $A(\eta)$ y $B(\eta)$ en (3.9), de manera que:

$$A_z = A(\eta_1^{z_1}, \eta_2^{z_2}, \eta_3^{z_3}), \quad B_z = B(\eta_1^{z_1}, \eta_2^{z_2}, \eta_3^{z_3}), \tag{3.13}$$

donde η_q indica qué porción de la q -ésimo variable de programación está involucrada en el z -ésimo sub-modelo. Considerando las funciones de programación dadas por (3.12), el sistema no lineal (3.9) se representa exactamente como el siguiente modelo q-LPV:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sum_{z=1}^8 \beta_z(\eta) (A_z x + B_z u), \\
 y &= Cx.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.2. Control PI de seguimiento de referencia para líder virtual

El diseño de un control PI para el líder virtual es esencial para establecer una referencia de altitud para los agentes. El esquema de control PI garantiza que el líder virtual mantenga una altitud específica, lo que sirve como referencia para el resto de los agentes en el sistema. En la Figura 3.2, se ilustra el esquema de control propuesto que se utilizó para lograr este objetivo.

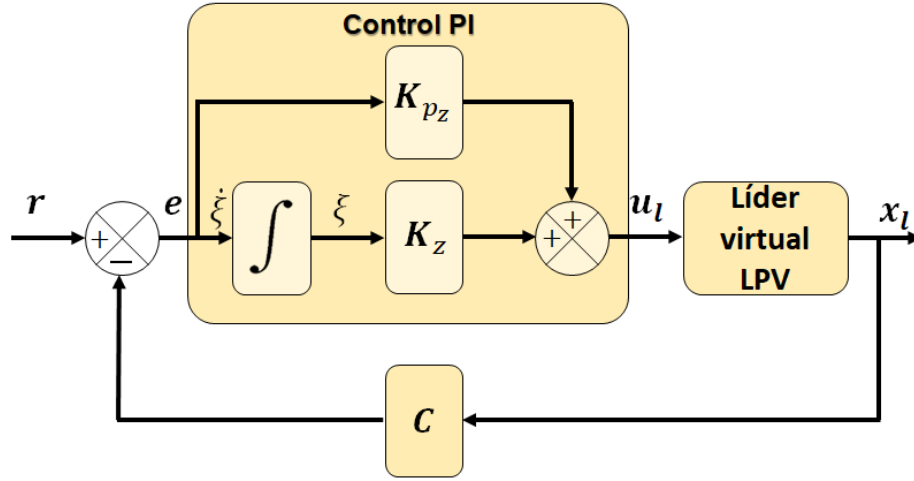


Figura 3.2. Esquema de control PI q-LPV seguimiento de trayectoria.

La referencia está dada por el siguiente vector:

$$r = [0, 0, 0, 0, z_{ref}, \dot{z}_{ref}, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \quad (3.15)$$

donde z_{ref} y \dot{z}_{ref} son las referencias para la posición y velocidad del líder virtual en el eje Z . Nótese que es esencial tener una concordancia entre las referencias de posición y velocidad.

El sistema q-LPV del líder virtual es representado por:

$$\dot{x}_l = \sum_{z=1}^8 \beta_z(\eta) (A_z x_l + B_z u_l). \quad (3.16)$$

El error del sistema en lazo cerrado se define como:

$$e = r - C x_l. \quad (3.17)$$

Se realiza un cambio de variable considerando las siguientes ecuaciones.

$$\dot{\xi} = e. \quad (3.18)$$

$$\xi = \int e. \quad (3.19)$$

El sistema en lazo cerrado, se expresa a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_l \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \sum_{z=1}^8 \beta_z(\eta) \left(\begin{bmatrix} A_z & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_l \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_z \\ 0 \end{bmatrix} u_l + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \right). \quad (3.20)$$

La ley de control u_l es:

$$u_l = K_{p_z} \dot{\xi} + K_{I_z} \xi = K_{p_z} (r - Cx_l) + K_{I_z} \xi. \quad (3.21)$$

Al sustituir (3.21) en (3.20), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_l \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \sum_{z=1}^8 \beta_z(\eta) \left(\begin{bmatrix} A_z - B_z K_{p_z} C & B_z K_{I_z} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_l \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_z K_{p_z} \\ I \end{bmatrix} r \right). \quad (3.22)$$

La estabilidad del sistema, no es afectada por el término de la referencia, por lo tanto, este término se omite en el cálculo de las ganancias del control:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_l \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \sum_{z=1}^8 \beta_z(\eta) \left(\begin{bmatrix} A_z & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_l \\ \xi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_z \\ 0 \end{bmatrix} [K_{p_z} \quad -K_{I_z}] \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_l \\ \xi \end{bmatrix} \right). \quad (3.23)$$

Se define el vector $\bar{x}_l = [x_l^T, \xi^T]^T$, se reescribe (3.23) como:

$$\dot{\bar{x}}_l = \sum_{z=1}^8 \beta_z(\eta) \left((\bar{A}_z - \bar{B}_z \bar{K}_z \bar{C}_z) \bar{x}_l \right). \quad (3.24)$$

Se considera el vector de parámetros variantes en el tiempo: $\eta(t) = [\eta_1(t)^T]^T$, se define la siguiente matriz:

$$\beta_{zw}(\eta(t)) = \text{diag}(\beta_z(\eta_1(t))\beta_w(\eta_1(t))). \quad (3.25)$$

Por lo tanto, (3.24) queda expresada por:

$$\dot{\bar{x}}_l = \sum_{z=1}^8 \sum_{w=1}^8 \beta_{zw}(\eta) \left((\bar{A}_z - \bar{B}_w \bar{K}_z \bar{C}_z) \bar{x}_l \right). \quad (3.26)$$

3.2.1. Análisis de estabilidad.

El análisis de estabilidad mediante el método de Lyapunov es una técnica utilizada para determinar la estabilidad de sistemas dinámicos. La función candidata de Lyapunov es:

$$V = \bar{x}_l^T P \bar{x}_l, \quad (3.27)$$

donde P es una matriz simétrica y $V > 0$ debe ser definida positiva.

La derivada de la función de Lyapunov debe cumplir la propiedad de ser definida negativa ($\dot{V} < 0$), para que el sistema se considere estable. La derivada de Lyapunov es:

$$\dot{V} = \dot{\bar{x}}_l^T P \bar{x}_l + \bar{x}_l^T P \dot{\bar{x}}_l < 0. \quad (3.28)$$

Sustituyendo (3.26) en (3.28):

$$\dot{V} = \bar{x}_l^T \left[\left(\bar{A}_z - \bar{B}_w K_z \bar{C} \right)^T P + P \left(\bar{A}_z - \bar{B}_w K_z \bar{C} \right) \right] \bar{x}_l < 0. \quad (3.29)$$

Nota: Se omite el término de la doble sumatoria para simplificar la redacción de las ecuaciones. Pre-multiplicando por $\bar{P} = \bar{P}^{-1}$ y post multiplicando por \bar{P}^{-1} , con el propósito de agrupar los términos desconocidos, obtenemos

$$\bar{P} \left(\bar{A}_z - \bar{B}_w \bar{K}_z \bar{C} \right)^T + \left(\bar{A}_z - \bar{B}_w K_z \bar{C} \right) \bar{P} < 0. \quad (3.30)$$

Reescribiendo (3.30), considerando $He\{M\} = M + M^T$ y realizando el siguiente cambio de variable para evitar bilinealidades $\bar{K}_z = \bar{\Gamma}_z \bar{P}^{-1} \bar{C}^{-1}$

$$He \left\{ \bar{A}_z \bar{P} - B_w \bar{\Gamma}_z \right\} < 0. \quad (3.31)$$

Aplicando el teorema de Polya a (3.31) sobre formas cuadráticas definidas en (3.29), se obtiene:

$$\sum_{\vec{\zeta} \in \mathcal{K}(k)} \left(He \left\{ \bar{A}_{\vec{\zeta}_1} \bar{P} - B_{\vec{\zeta}_2} \bar{\Gamma}_{\vec{\zeta}_1} \right\} \right) < 0. \quad (3.32)$$

Sosteniendo $\forall \vec{k} \in \mathbb{K}_f^+$ [23], donde

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_f &= \left\{ \vec{k} = [k_1, \dots, k_f]^T \in \mathbb{N}^f \mid 1 \leq k_j \leq \rho \ \forall j = 1, \dots, f \right\}, \\ \mathbb{K}_f^+ &= \left\{ \vec{k} \in \mathbb{K}_f \mid k_j \leq k_{j+1}, j = 1, \dots, f-1 \right\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

En donde el conjunto de permutaciones con posibles elementos repetidos del multi-índice \vec{k} se denota por $K(\vec{k}) \subset \mathbb{K}_f$. Entonces, las ganancias vértices del control son: $\bar{K}_z = \Gamma_z \bar{P}^{-1} \bar{C}^{-1}$, $\bar{K}_z = - \begin{bmatrix} K_{p_z} & -K_{I_z} \end{bmatrix}$

Si se selecciona un valor de $f = 2$, de los conjuntos mencionados en (3.33) y considerando que tenemos 8 sub-modelos el valor de ρ es igual a 8, se obtiene:

1. **Conjunto** \mathbb{K}_2 :

$$\mathbb{K}_2 = \left\{ \vec{k} = [k_1, k_2]^T \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq k_j \leq 8 \ \forall j = 1, 2 \right\}. \quad (3.34)$$

Esto significa que $\vec{k} = [k_1, k_2]^T$ es un vector de dos elementos, donde cada elemento k_j (con $j = 1, 2$)

es un número natural entre 1 y ρ . Dado que $\rho = 8$, el conjunto \mathbb{K}_2 será:

$$\mathbb{K}_2 = \left\{ \begin{array}{l} [1, 1]^T, [1, 2]^T, \quad [1, 3]^T, [1, 4]^T, \quad [1, 5]^T, [1, 6]^T, \quad [1, 7]^T, [1, 8]^T, \\ [2, 1]^T, [2, 2]^T, \quad [2, 3]^T, [2, 4]^T, \quad [2, 5]^T, [2, 6]^T, \quad [2, 7]^T, [2, 8]^T, \\ [3, 1]^T, [3, 2]^T, \quad [3, 3]^T, [3, 4]^T, \quad [3, 5]^T, [3, 6]^T, \quad [3, 7]^T, [3, 8]^T, \\ [4, 1]^T, [4, 2]^T, \quad [4, 3]^T, [4, 4]^T, \quad [4, 5]^T, [4, 6]^T, \quad [4, 7]^T, [4, 8]^T, \\ [5, 1]^T, [5, 2]^T, \quad [5, 3]^T, [5, 4]^T, \quad [5, 5]^T, [5, 6]^T, \quad [5, 7]^T, [5, 8]^T, \\ [6, 1]^T, [6, 2]^T, \quad [6, 3]^T, [6, 4]^T, \quad [6, 5]^T, [6, 6]^T, \quad [6, 7]^T, [6, 8]^T, \\ [7, 1]^T, [7, 2]^T, \quad [7, 3]^T, [7, 4]^T, \quad [7, 5]^T, [7, 6]^T, \quad [7, 7]^T, [7, 8]^T, \\ [8, 1]^T, [8, 2]^T, \quad [8, 3]^T, [8, 4]^T, \quad [8, 5]^T, [8, 6]^T, \quad [8, 7]^T, [8, 8]^T. \end{array} \right\}. \quad (3.35)$$

2. **Conjunto \mathbb{K}_2^+ :**

$$\mathbb{K}_2^+ = \left\{ \vec{k} \in \mathbb{K}_2 \mid k_1 \leq k_2 \right\}. \quad (3.36)$$

El conjunto \mathbb{K}_2^+ será:

$$\mathbb{K}_2^+ = \left\{ \begin{array}{l} [1, 1]^T, [1, 2]^T, \quad [1, 3]^T, [1, 4]^T, [1, 5]^T, \quad [1, 6]^T, [1, 7]^T, \quad [1, 8]^T, \\ [2, 2]^T, [2, 3]^T, \quad [2, 4]^T, [2, 5]^T, [2, 6]^T, \quad [2, 7]^T, [2, 8]^T, \quad [3, 3]^T, \\ [3, 4]^T, [3, 5]^T, \quad [3, 6]^T, [3, 7]^T, [3, 8]^T, \quad [4, 4]^T, [4, 5]^T, \quad [4, 6]^T, \\ [4, 7]^T, [4, 8]^T, \quad [5, 5]^T, [5, 6]^T, [5, 7]^T, \quad [5, 8]^T, [6, 6]^T, \quad [6, 7]^T, \\ [6, 8]^T, [7, 7]^T, \quad [7, 8]^T, [8, 8]^T \end{array} \right\}. \quad (3.37)$$

En otras palabras, cuando $f = 2$, el conjunto \mathbb{K}_2 tiene 64 elementos, mientras que \mathbb{K}_2^+ tiene todos los pares ordenados (k_1, k_2) tales que $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq 8$.

3.2.2. Resultados de simulación.

Para calcular las ganancias de control de los vértices K_{P_z} y K_{I_z} , utilizando el *software Matlab* con el *toolbox SDPT3* [43] para encontrar la solución LMI (3.32). Además, empleando las matrices A_z , B_w y C de la representación q-LPV del cuadricóptero (3.9), para dicha solución y se seleccionó un valor de $f = 2$. Una vez obtenidas las ganancias se simuló el sistema, es importante mencionar que se utilizó el modelo no lineal del cuadricóptero (3.2) para la simulación y los parámetros mostrados en la Tabla (3.1).

Los parámetros de los UAVs son descritos en la Tabla 3.1 [54].

Tabla 3.1. Parámetros del cuadricóptero FlameWheel 450 (DJI-F450).

Parámetro	Valor	Unidades
Masa del dron, m_s	0.91	kg
Longitud del brazo, l	0.225	m
Gravedad, g	9.81	m/s ²
Momento de inercia sobre x , Jx	0.0104	kg m ²
Momento de inercia sobre y , Jy	0.0104	kg m ²
Momento de inercia sobre z , Jz	0.0196	kg m ²
Coeficiente de empuje, b	8.3496×10^{-6}	N/(rad/s) ²
Coeficiente de arrastre, d	1.52×10^{-7}	Nm/(rad/s) ²

Las condiciones iniciales se consideraron 0 para los 12 estados y para el vector de referencia se consideró:

$$r = [0, 0, 0, 0, z_{ref}, \dot{z}_{ref}, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T. \quad (3.38)$$

Para la referencia de la posición se utilizó un polinomio de quinto orden con el propósito de asegurar una trayectoria suave y evitar sobreimpulso.

$$z_{ref}(t) = \begin{cases} z_0 + \left(\frac{10}{T^3}\right)(z_T - z_0)t^3 - \left(\frac{15}{T^4}\right)(z_T - z_0)t^4 + \left(\frac{6}{T^5}\right)(z_T - z_0)t^5, & 0 \leq t \leq T, \\ 20, & t > T, \end{cases} \quad (3.39)$$

donde $z_0 = 0$ m es la posición inicial del líder virtual, $z_T = 20$ m es la altitud deseada, y $T = 5$ s es el tiempo transcurrido entre z_0 y z_T . Y para la referencia de la velocidad $\dot{z}_{ref}(t)$, se deriva (3.39) y se obtiene:

$$\dot{z}_{ref}(t) = \begin{cases} \left(\frac{30}{T^3}\right)(z_T - z_0)t^2 - \left(\frac{60}{T^4}\right)(z_T - z_0)t^3 + \left(\frac{30}{T^5}\right)(z_T - z_0)t^4, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases} \quad (3.40)$$

El objetivo del líder virtual es alcanzar la altitud de 20 m y seguir la trayectoria descrita por (3.39), considerando condiciones iniciales para la velocidad y la aceleración iguales a cero con el fin de asegurar una trayectoria suave. La Figura 3.3 muestra la trayectoria del líder virtual y la referencia en el eje Z .

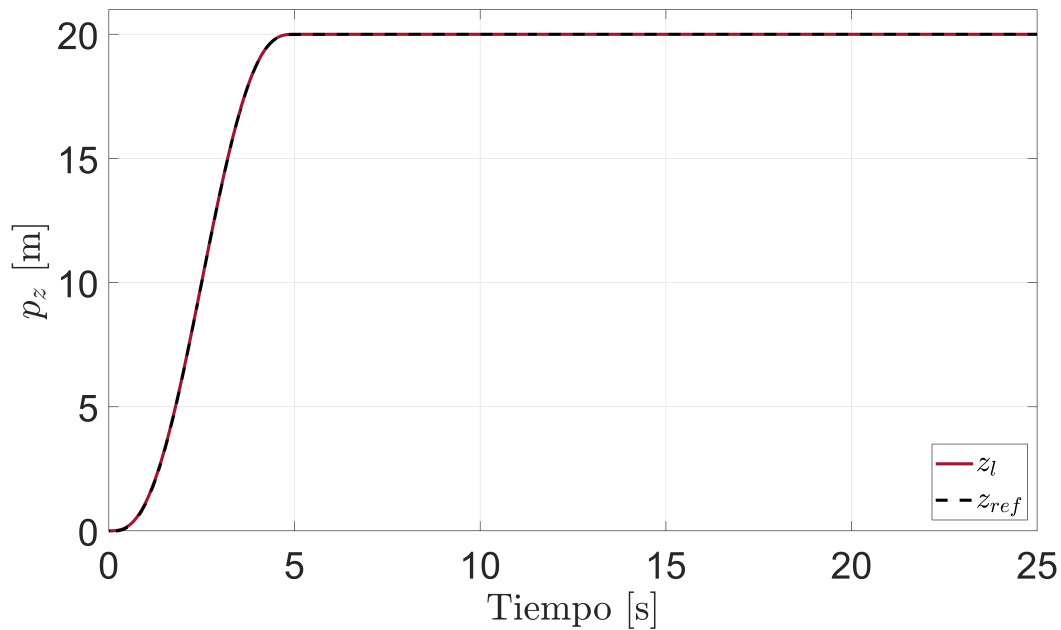


Figura 3.3. Referencia de altitud y trayectoria del líder virtual.

La fuerza de empuje generada por el cuadricóptero (líder virtual) en condiciones de *hover* puede calcularse utilizando la siguiente expresión:

$$u_z = m_s \cdot g = 0.91 \cdot 9.81 = 8.9271 \text{ N.} \quad (3.41)$$

Las entradas de control se muestran en la Figura (3.4), se observa que el empuje generado corresponde al valor anteriormente mencionado .

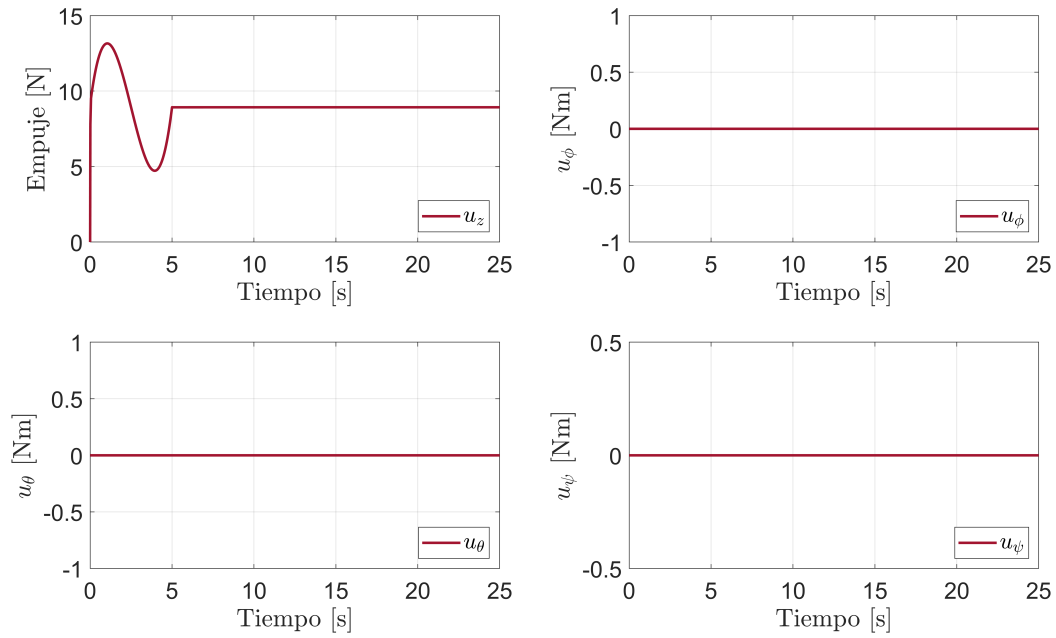


Figura 3.4. Entradas de control del líder virtual.

Las velocidades de los rotores del líder virtual se muestran en la Figura (3.5).

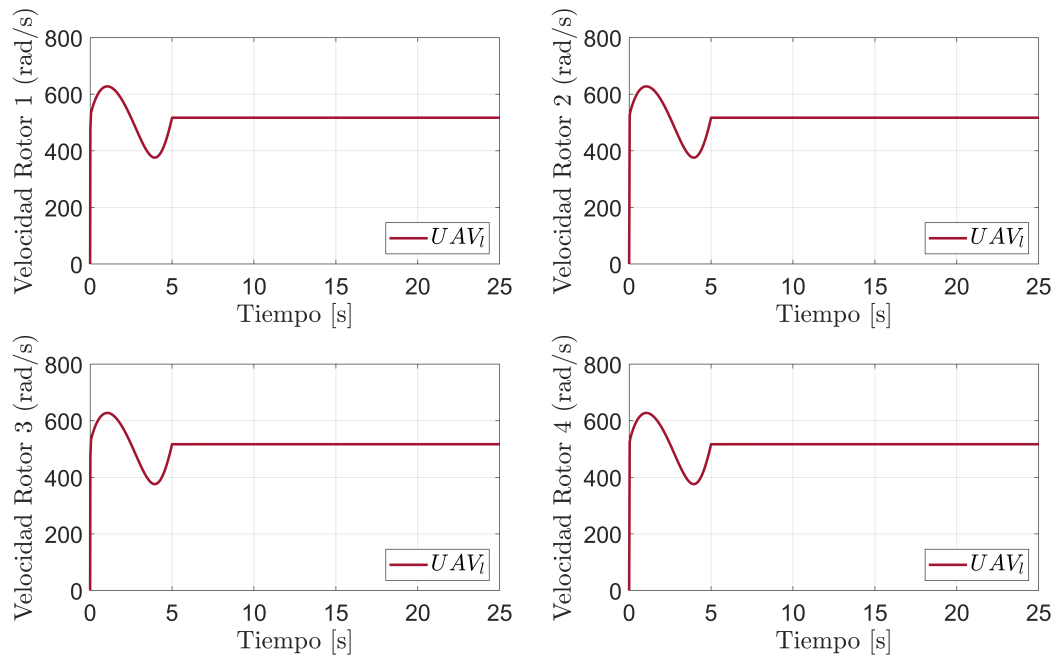


Figura 3.5. Velocidades de cada rotor.

La velocidad de *hover* es aproximadamente 517 rad/s. Es crucial comprender los valores máximos que un cuadricóptero puede generar para asegurar que los resultados sean realistas y prácticamente aplicables. A continuación, se enumeran las especificaciones principales que nos permiten calcular estos valores:

Principales especificaciones:

- Voltaje de batería: 14.8 V
- Máximo Empuje: 850 g/rotor
- Velocidad del rotor: 800 rpm/V= 11680 rpm

El empuje máximo de un rotor es aproximadamente 8.34 N. El empuje total se puede calcular multiplicando el empuje de un solo rotor por el número de rotores.

$$\text{Empuje total} = 8.34 \cdot 4 = 33.36 \text{ N} \quad (3.42)$$

La velocidad máxima es:

$$\text{Velocidad máxima} = 11680 \text{ rpm} \approx 1223 \text{ rad/s} \quad (3.43)$$

Al examinar los datos máximos del cuadricóptero, podemos notar que los resultados obtenidos en la simulación se sitúan por debajo de estos valores máximos. Por lo tanto, implementar referencias para el control como (3.39) y (3.40) resulta factible para asegurar que nuestros datos simulados se mantengan dentro de límites físicamente alcanzables.

Capítulo 4

Diseño de un esquema de control robusto líder-seguidor basado en observador bajo perturbaciones externas

4.1. Descripción del sistema

Se considera un modelo de sistema multi-agente LPV con efectos de perturbación externa:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= A(\eta_n(t))x_n(t) + B(\eta_n(t))u_n(t) + D(\eta_n(t))d_{u_n}(t), \\ y_n(t) &= C(\eta_n(t))x_n(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

Donde: n es el número de agente ($n = 1, 2, \dots, E$); E representa el número total de agentes, $x_n(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de estados, $y_n(t) \in \mathbb{R}^o$ es el vector de salidas, $u_n(t) \in \mathbb{R}^i$ es el vector de entradas y $d_{u_n}(t) \in \mathbb{R}^r$ es el vector de perturbaciones externas. Definiendo las dimensiones de cada: $A(\eta_n(t)) \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $B(\eta_n(t)) \in \mathbb{R}^{s \times i}$, $D(\eta_n(t)) \in \mathbb{R}^{s \times r}$ and $C(\eta_n(t)) \in \mathbb{R}^{o \times s}$ son las matrices del sistema LPV dependientes del vector $\eta_n(t) \in \mathbb{R}^{s\eta}$. Para expresar $A(\eta_n(t))$, $B(\eta_n(t))$ y $C(\eta_n(t))$ como una combinación convexa de ρ matrices de vértice se utiliza el método *bounding box* [55], tales que:

$$\begin{pmatrix} A(\eta_n(t)) \\ B(\eta_n(t)) \\ D(\eta_n(t)) \\ C(\eta_n(t)) \end{pmatrix} = \sum_{z=1}^{\rho} \beta_z(\eta_n(t)) \begin{pmatrix} A_z \\ B_z \\ D_z \\ C_z \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\sum_{z=1}^{\rho} \beta_z(\eta_n(t)) = 1, \quad \beta_z(\eta_n(t)) \geq 0, \quad \forall \eta_n(t) \in \mathfrak{R}. \quad (4.3)$$

Donde cada agente es considerado un sistema dinámico autónomo capaz de compartir su información de estado con agentes vecinos.

El grafo \mathcal{G} es un par ordenado $(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ que consta de una colección de nodos no vacíos \mathcal{V} y un conjunto de enlaces \mathcal{Y} subconjunto de \mathcal{V} multiplicado por \mathcal{V} . El enlace es un par ordenado de dos nodos, uno que entra al nodo j y otro que sale del nodo n . El enlace (n, m) existe en el gráfico \mathcal{G} , se dice que el nodo n es vecino del nodo m . conjunto de vecinos del nodo n . La matriz de adyacencia $\mathcal{A} = [a_{nm}] \in \mathbb{R}^{E \times E}$ asociada con el grafo \mathcal{G} se define tal que $a_{nn} = 0$, $a_{nm} > 0$ sí y sólo sí $(n, m) \in \mathcal{E}$ y de lo contrario $a_{nm} = 0$. La matriz laplaciana $\mathcal{L} = [\mathcal{L}_{nm}] \in \mathbb{R}^{E \times E}$ del grafo \mathcal{G} se define como $\mathcal{L}_{nn} = \sum_{m \neq n} a_{nm}$ y $\mathcal{L}_{nm} = -a_{nm}$, $n \neq m$.

Suposición 3: El grafo \mathcal{G} es indirecto.

El líder virtual tiene una gran importancia en las estrategias de control de formación, funciona como una referencia para el resto de los agentes en el sistema, proporcionando una guía para lograr y mantener una formación deseada. El líder virtual no es un agente físico real, sino más bien un punto de referencia virtual alrededor del cual los demás agentes ajustan su posición y orientación para mantener la formación deseada. En esencia, el líder virtual ayuda a coordinar y sincronizar los movimientos de los agentes en la formación, facilitando así el logro de los objetivos de control de formación, como mantener una distancia y orientación específicas entre los agentes. La dinámica del líder virtual LPV se describe mediante:

$$\dot{x}_l(t) = A(\eta_l(t))x_l(t) + B(\eta_l(t))u_l(t), \quad (4.4)$$

donde $x_l(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de estados y $u_l(t) \in \mathbb{R}^i$ es el vector de salidas. El consenso entre el líder y los agentes es posible sólo si $\eta_l(t) = \eta_1(t) = \dots = \eta_n(t) = \eta(t)$.

En sistemas multi-agente líder-seguidor, el error de sincronización se refiere a la diferencia entre la posición, velocidad u otro estado deseado de los seguidores y el estado real del líder. En este contexto, el líder es un agente cuyo estado es seguido o replicado por los seguidores, y el error de sincronización representa la diferencia entre el estado deseado del líder y el estado real de los seguidores, y es definido como $\delta_n(t) = x_n(t) - x_l(t)$. Entonces, la dinámica del error de sincronización

entre cada agente n y el líder virtual es la siguiente:

$$\dot{\delta}_n = A(\eta(t))\delta_n(t) + B(\eta(t))(u_n(t) - u_l(t)) + D(\eta(t))d_{u_n}(t) \quad (4.5)$$

El seguimiento del agente líder es alcanzado cuando se satisface la siguiente expresión:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_l(t)) = 0, \forall n = 1, 2, \dots, E \quad (4.6)$$

Los observadores son empleados para estimar valores de variables que no pueden ser medidos directamente o cuyas mediciones son difíciles de obtener. Su utilidad radica en la capacidad para proporcionar estimaciones precisas de estas variables basadas en información observada y en modelos matemáticos del sistema en cuestión. Se propone el siguiente observador distribuido para la estimación de estados de cada individuo del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_n(t) &= A(\eta(t))\hat{x}_n(t) + B(\eta(t))u_n(t) + L(\eta(t))(y_n(t) - \hat{y}_n(t)), \\ \hat{y}_n(t) &= C\hat{x}_n(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $\hat{x}_n(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de los estados estimados, $\hat{y}_n(t) \in \mathbb{R}^o$ es el vector de las salidas estimadas, $L(\eta(t)) \in \mathbb{R}^{s \times o}$ son las ganancias del observador LPV.

Se propone el siguiente consenso basado en observador:

$$u_n(t) = K(\eta(t)) \left(\sum_{m \in \mathcal{G}_n} a_{nm}(\hat{x}_n(t) - \hat{x}_m(t)) + \alpha_n(\hat{x}_n(t) - x_l(t)) \right) + u_l(t) \quad (4.8)$$

donde $K(\eta(t)) \in \mathbb{R}^{i \times s}$ es la ganancias del control LPV y $\hat{x}_m \in \mathbb{R}^s$ es el vector de estados estimados de cada agente vecino.

La ganancia del control $K(\eta(t))$ y la ganancia del observador $L(\eta(t))$ son expresadas en su forma politópica, como se expresa a continuación:

$$\begin{pmatrix} K(\eta_m(t)) \\ L(\eta_m(t)) \end{pmatrix} = \sum_{z=1}^{\rho} \beta_z(\eta_m(t)) \begin{pmatrix} K_z \\ L_z \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

El error de estimación es definido como: $e_n(t) = x_n(t) - \hat{x}_n(t)$, entonces, la dinámica del error estimación es:

$$\dot{e}_n(t) = A(\eta(t))e_n(t) - L(\eta(t))C(\eta(t))e_n(t) + D(\eta(t))d_{u_n}(t) \quad (4.10)$$

El objetivo principal es que el diseño de las ganancias de control vértices K_z y las ganancias del observador vértices L_z usando LMIs y calculándolos simultáneamente. Así mismo, diseñar una estrategia líder seguidor para el sistema multi-agente LPV.

4.2. Controlador robusto líder-seguidor basado en observador LPV

Para llevar a cabo un control de formación en sistemas multi-agentes, se requiere la presencia de un líder virtual, al cual es necesario aplicarle un control para poder estabilizarlo y utilizarlo como modelo de referencia para los seguidores. Este enfoque busca garantizar que el MAS alcance la formación deseada. El principal reto es diseñar un esquema de control robusto líder-seguidor para sistemas multi-agentes LPV, sujeto a perturbaciones externas y basado en un observador LPV. El esquema propuesto se muestra en la Figura 4.1.

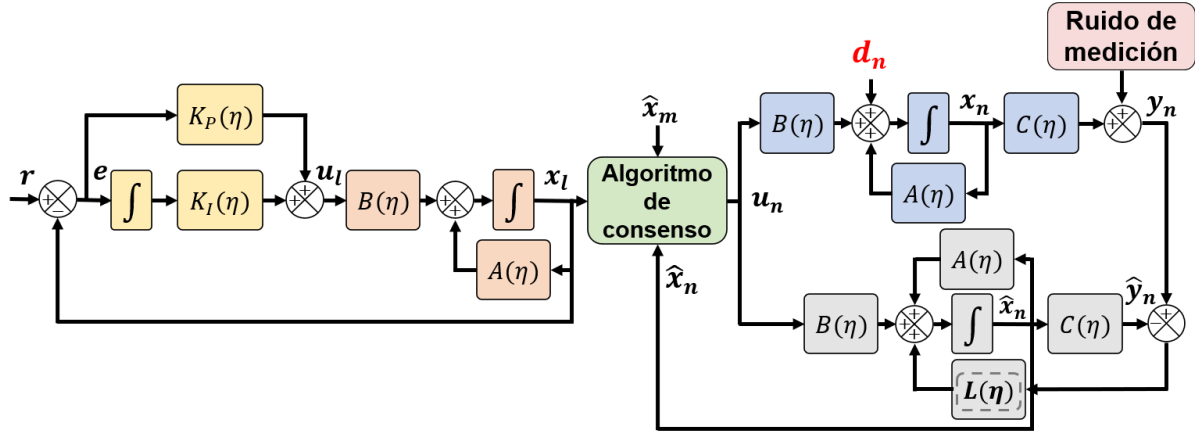


Figura 4.1. Esquema de control propuesto.

Al considerar el vector de parámetros variantes en el tiempo $\eta(t) = [\eta_1(t)^T, \eta_2(t)^T, \dots, \eta_E(t)^T]^T$, se define la siguiente matriz:

$$\beta_{nm}(\eta(t)) = \text{diag}(\beta_{n^*m}(\eta_1(t)), \dots, \beta_{n^*m}(\eta_E(t))) \quad (4.11)$$

Se definen los siguientes vectores: $e(t) = [e_1(t)^T, e_2(t)^T, \dots, e_E(t)^T]^T$, $\delta(t) = [\delta_1(t)^T, \delta_2(t)^T, \dots, \delta_E(t)^T]^T$ and $d_u(t) = [d_{u_1}(t)^T, d_{u_2}(t)^T, \dots, d_{u_E}(t)^T]^T$. El error de estimación (4.10) y el error de sincronización (4.5) son expresados de la siguiente manera aplicando el producto Kronecker:

$$\dot{e}(t) = \sum_{z=1}^{\rho} \sum_{w=1}^{\rho} [\beta_{zw}(\eta(t)) \otimes (A_z - L_z C_w)] e(t) + \beta_{zw}(\eta(t)) [I_E \otimes D_w] d_u(t) \quad (4.12)$$

$$\dot{\delta}(t) = \sum_{z=1}^{\rho} \sum_{w=1}^{\rho} \beta_{zw}(\eta(t)) [I_E \otimes A_z + \bar{\mathcal{L}} \otimes B_w K_z] \delta(t) - [\beta_{zw}(\eta(t)) \bar{\mathcal{L}} \otimes B_w K_z] + \beta_{zw}(\eta(t)) [I_G \otimes D_w] d_u(t) \quad (4.13)$$

donde $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \Lambda$, \mathcal{L} representa la matriz laplaciana y $\Lambda = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_E)$ representa la comunicación entre el líder y los agentes.

Notación: El productor Kronecker es denotado por el símbolo \otimes .

Se definen los siguientes vectores $z(t) = [\delta(t)^T, e(t)^T]^T$, entonces, se considera el sistema multi-agente LPV en lazo cerrado y es expresado como (para facilitar la notación se omite la dependencia del tiempo):

$$\dot{z} = \sum_{z=1}^{\rho} \sum_{w=1}^{\rho} \beta_{zw}(\eta) \times \begin{bmatrix} I_E \otimes A_z + \bar{\mathcal{L}} \otimes B_w K_z & -\bar{\mathcal{L}} \otimes B_w K_z \\ 0 & I_E \otimes (A_z - L_z C_w) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} I_E \otimes D_w \\ I_E \otimes D_w \end{bmatrix} d_u \quad (4.14)$$

La siguiente función candidata de Lyapunov, se expresa a continuación:

$$V(z) = \begin{bmatrix} \delta^T & e^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_G \otimes P_1 & 0 \\ 0 & I_G \otimes P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ e \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

donde $P_1 \in \mathbb{R}^{s \times s}$ y $P_2 \in \mathbb{R}^{s \times s}$ son matrices simétricas y definidas positivas. Para asegurar la existencia de un control robusto y ganancias del observador capaces de mitigar el efecto de las perturbaciones externas, se considera el criterio H_∞ como se muestra en [56]. Se propone el siguiente teorema para garantizar la existencia de un control robusto y ganancias del observador capaces de mitigar el efecto de las perturbaciones externas.

Notación. El símbolo $*$ denota los elementos simétricos de una matriz.

Teorema 1. *Considerando el sistema LPV multi-agente en lazo cerrado (4.14). El error de estimación (4.12) y error de sincronización (4.13) se ha demostrado que son exponencialmente estables mediante (4.15) para cualquier $f \in \mathbb{N}$, con $f \geq 2$, dados los eigenvalores $\lambda_j(\bar{\mathcal{L}}), \forall_j = 1, 2, \dots, G$; si existen matrices simétricas $P_1 > 0 \in \mathbb{R}^{s \times s}$ y $P_2 > 0 \in \mathbb{R}^{s \times s}$, matrices N_1, N_2, \dots, N_ρ , y M_1, M_2, \dots, M_ρ ; un escalar $\mu > 0$ y $\gamma > 0$ variable de minimización por el criterio H_∞ , tal que se cumpla la siguiente desigualdad matricial:*

$$\sum_{\bar{\zeta} \in \mathcal{K}(k)} \begin{bmatrix} \text{He} \left\{ A_{\bar{\zeta}_1} \bar{P}_1 + \lambda_m B_{\bar{\zeta}_2} N_{\bar{\zeta}_1} \right\} + I_s & 0 & D_{\bar{\zeta}_2} & -\lambda_m B_{\bar{\zeta}_2} N_{\bar{\zeta}_1} & 0 \\ * & \text{He} \{ P_2 A_{\bar{\zeta}_1} - M_{\bar{\zeta}_1} C_{\bar{\zeta}_2} \} + I_s & P_2 D_{\bar{\zeta}_2} & 0 & I_s \\ * & * & -\gamma^2 I_r & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mu^{-1} \bar{P}_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\mu \bar{P}_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.16)$$

Sosteniendo $\forall \vec{k} \in \mathbb{K}_f^+$ [23], donde:

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_f &= \left\{ \vec{k} = [k_1, \dots, k_f]^T \in \mathbb{N}^f \mid 1 \leq k_j \leq \rho \ \forall j = 1, \dots, f \right\}, \\ \mathbb{K}_f^+ &= \left\{ \vec{k} \in \mathbb{K}_f \mid k_j \leq k_{j+1}, j = 1, \dots, f-1 \right\},\end{aligned}\tag{4.17}$$

en donde el conjunto de permutaciones con posibles elementos repetidos del multi-índice \vec{k} se denota por $K(\vec{k}) \subset \mathbb{K}_f$. Entonces, las ganancias vértices del control y observador son dadas por las siguientes expresiones $K_z = N_z \bar{P}_1^{-1}$, $L_z = P_2^{-1} M_z$ respectivamente.

4.3. Análisis de estabilidad de Lyapunov

Para validar el Teorema 1 presentado anteriormente, se llevará a cabo un análisis de estabilidad utilizando el método de Lyapunov. Este enfoque no solo servirá para demostrar la aplicabilidad del teorema, sino también para garantizar la estabilidad del sistema.

Demostración. A lo largo de las trayectorias de (4.14), la derivada de la función de Lyapunov candidata viene dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(z) &= \sum_{z=1}^{\rho} \sum_{w=1}^{\rho} \beta_{zw}(\eta) \left\{ 2\delta^T (I_E \otimes P_1 A_z + \bar{\mathcal{L}} \otimes P_1 B_w K_h) \delta - 2\delta^T (\bar{\mathcal{L}} \otimes P_1 B_w K_z) e \right. \\ &\quad \left. + 2e^T (I_E \otimes P_2 (A_z - L_z C_w)) e + 2\delta^T (I_E \otimes \bar{P}_1 D_w) d_u + 2e^T (I_E \otimes P_2 D_w) d_u \right\}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Aplicando una descomposición espectral de la matriz $\bar{\mathcal{L}}$ para obtener $\bar{\mathcal{L}} = T J T^{-1}$ con una matriz invertible $T \in \mathbb{R}^{E \times E}$ y una matriz diagonal $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_E) \in \mathbb{R}^{E \times E}$ donde $\lambda_j(\bar{\mathcal{L}})$, $j = 1, 2, \dots, E$ son los eigenvalores de $\bar{\mathcal{L}}$. El cambio de coordenadas se define como $\omega = (T^{-1} \otimes I_E) \delta$, $\chi = (T^{-1} \otimes I_E) e$ y $v = (T^{-1} \otimes I_E) d_u$. La notación de la dependencia temporal de ciertas variables se omite por consideraciones de espacio. Sustituyendo las nuevas coordenadas en (4.18) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}(z) &= \sum_{z=1}^{\rho} \sum_{w=1}^{\rho} \beta_{zw}(\eta) \left\{ \sum_{m=1}^E \omega_m^T \text{He} \{ P_1 A_z + \lambda_m P_1 B_w K_z \} \omega_m - 2 \sum_{m=1}^E \omega_m^T \lambda_m P_1 B_w K_z \chi_m \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^E \chi_m^T \text{He} \{ P_2 A_z - P_2 L_z C_w \} \chi_m + 2 \sum_{m=1}^E \omega_m^T P_1 D_w v_m + 2 \sum_{m=1}^E \chi_m^T P_2 D_w v_m \right\},\end{aligned}\tag{4.19}$$

donde $\text{He}\{\mathcal{M}\} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^T$ representa la matriz Hermitiana de una matriz cuadrada. Considerando el siguiente vector $\varphi_m(t) = [\omega_m^T, \chi_m^T, v_m^T]^T$, (4.19) se puede reescribir como:

$$\dot{V}(z) = \sum_{z=1}^{\rho} \sum_{w=1}^{\rho} \beta_{zw}(\eta) \left\{ \varphi_m(t)^T \zeta_j \varphi_m(t) \right\}. \quad (4.20)$$

$$\zeta_j = \begin{bmatrix} \text{He} \{ P_1 A_z + \lambda_m P_1 B_w K_z \} & -\lambda_j P_1 B_w K_z & P_1 D_w \\ * & \text{He} \{ P_2 A_z - P_2 L_z C_w \} & P_2 D_w \\ * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

Esto corresponde a asegurar que las sumas poliédricas dobles sean negativas. Definiendo $\bar{P}_1 = P_1^{-1}$ donde \bar{P}_1 es una matriz simétrica.

$$\zeta_j = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \zeta_j \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (4.22)$$

Entonces, la expresión (4.22) puede ser reescrita como:

$$\zeta_j = \begin{bmatrix} \text{He} \{ A_z \bar{P}_1 + \lambda_m B_w K_z \bar{P}_1 \} & -\lambda_m B_w K_z & D_w \\ * & \text{He} \{ P_2 A_z - P_2 L_z C_w \} & P_2 D_w \\ * & * & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

La expresión (4.23) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) = & \sum_{z=1}^{\rho} \sum_{w=1}^{\rho} \beta_{zw}(\eta) \left\{ \sum_{m=1}^E \omega_m^T \text{He} \{ A_z \bar{P}_1 + \lambda_m B_w K_z \bar{P}_1 \} \omega_m \right. \\ & - 2 \sum_{m=1}^E \omega_m^T \lambda_m B_w K_z \chi_m + \sum_{m=1}^E \chi_m^T \text{He} \{ P_2 A_z - P_2 L_z C_w \} \chi_m \\ & \left. + 2 \sum_{m=1}^E \omega_m^T \bar{P}_1 D_w v_m + 2 \sum_{m=1}^E \chi_m^T P_2 D_w v_m \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

De acuerdo con la teoría de control robusto, como se detalla en [57], la ganancia L_2 de $d(t)$ a $z(t)$ debe ser menor o igual que γ . Por lo tanto, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\|z\|^2 \leq \gamma^2 \|d\|^2. \quad (4.25)$$

Al considerar el siguiente índice de desempeño, acorde con la ecuación (4.24), se puede expresar como:

$$J_T \leq \int_0^{\infty} \sum_{z=1}^{\rho} \sum_{w=1}^{\rho} \beta_{zw}(\eta) \left(\omega_j(t)^T \omega_j(t) + (\chi_j(t))^T \chi_j(t) - (v_j(t))^T v_j(t) + \dot{V} \right) dt. \quad (4.26)$$

Al sustituir (4.26) en (4.24), se obtiene:

$$J_T \leq \sum_{z=1}^{\rho} \sum_{w=1}^{\rho} \beta_{zw}(\eta) \left\{ \varphi_m^T \Xi_j \varphi_m \right\}, \quad (4.27)$$

donde Ξ_j se defino como:

$$\Xi_j = \begin{bmatrix} \text{He} \{ A_z \bar{P}_1 + \lambda_m B_w K_z \bar{P}_1 \} + I_s & -\lambda_j B_w K_z & D_w \\ * & \text{He} \{ P_2 A_z - P_2 L_z C_w \} + I_s & P_2 D_w \\ * & * & -\gamma^2 I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (4.28)$$

Entonces, la expresión (4.28) puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ A_z \bar{P}_1 + \lambda_m B_w K_z \bar{P}_1 \} + I_s & 0 & D_w \\ * & \text{He} \{ P_2 A_z - P_2 L_z C_w \} + I_s & P_2 D_w \\ * & * & -\gamma^2 I_r \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} -\lambda_m B_w K_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \\ 0 \end{bmatrix}^T \right\} < 0. \quad (4.29)$$

Aplicando la relación de Young (4.29), se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ A_z \bar{P}_1 + \lambda_m B_w K_z \bar{P}_1 \} & 0 & D_w \\ * & \text{He} \{ P_2 A_z - P_2 L_z C_w \} & P_2 D_w \\ * & * & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -\lambda_m B_w K_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{P}_1 \begin{bmatrix} (-\lambda_m B_w K_z)^T & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \\ 0 \end{bmatrix} \bar{P}_1^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_s & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.30)$$

donde $\mu > 0$. Aplicando el complemento de Schur, teniendo en cuenta $N_z = K_z \bar{P}_1$, $M_z = P_2 L_z$ y aplicando el teorema de Polya sobre las formas cuadráticas definidas en (4.20), se obtiene (4.16) y **Teorema 1** queda demostrado. \square

El diseño de un esquema de control líder-seguidor basado en un observador no requiere el uso del criterio H_∞ . En [17], presentan un esquema de control líder-seguidor basado en observador para sistemas multi-agente LPV sin considerar perturbaciones en su sistema (caso nominal). A continuación, se expone el teorema propuesta en esa referencia:

Teorema 2. [17] *Considerando el sistema LPV multi-agente en lazo cerrado (4.14). El error de estimación (4.12) y error de sincronización (4.13) se ha demostrado que son exponencialmente estables mediante (4.15) para cualquier $f \in \mathbb{N}$, con $f \geq 2$, dados los eigenvalores $\lambda_j(\bar{\mathcal{L}}), \forall_j = 1, 2, \dots, G$; si existen matrices simétricas $P_1 > 0 \in \mathbb{R}^{s \times s}$ y $P_2 > 0 \in \mathbb{R}^{s \times s}$, matrices N_1, N_2, \dots, N_ρ ,*

y M_1, M_2, \dots, M_ρ ; un escalar $\mu > 0$, tal que se cumpla la siguiente desigualdad matricial:

$$\sum_{\vec{\zeta} \in \mathcal{K}(k)} \begin{bmatrix} \text{He} \{ A_{\vec{\zeta}_1} \bar{P}_1 + \lambda_m B_{\vec{\zeta}_2} N_{\vec{\zeta}_1} \} & 0 & -\lambda_m B_{\vec{\zeta}_2} N_{\vec{\zeta}_1} & 0 \\ * & \text{He} \{ P_2 A_{\vec{\zeta}_1} - M_{\vec{\zeta}_1} C_{\vec{\zeta}_2} \} & 0 & I_s \\ * & * & -\mu^{-1} \bar{P}_1 & 0 \\ * & * & * & -\mu \bar{P}_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.31)$$

Sosteniendo $\forall \vec{k} \in \mathbb{K}_f^+$ [23], donde:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_f &= \{ \vec{k} = [k_1, \dots, k_f]^T \in \mathbb{N}^f \mid 1 \leq k_j \leq \rho \ \forall j = 1, \dots, f \}, \\ \mathbb{K}_f^+ &= \{ \vec{k} \in \mathbb{K}_f \mid k_j \leq k_{j+1}, j = 1, \dots, f-1 \}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

y donde el conjunto de permutaciones con posibles elementos repetidos del multi-índice \vec{k} se denota por $K(\vec{k}) \subset \mathbb{K}_f$. Entonces, las ganancias vértices del control y observador son dadas por las siguientes expresiones $K_z = N_z \bar{P}_1^{-1}$, $L_z = P_2^{-1} M_z$ respectivamente.

El Teorema 2 se utilizará para mostrar los resultados obtenidos de un control nominal bajo efectos de perturbaciones externas.

4.4. Resultados de simulación caso sin perturbación

Esta estrategia de control se aplica a una flota de seis agentes para lograr la formación de un hexágono. Para abordar el problema utilizando el control de formación de consenso, la ley de control (4.8) puede considerarse de la siguiente manera:

$$u_n = \sum_{z=1}^8 \beta_z(\eta) K_z \left[\sum_{m \in \mathcal{E}_n} a_{nm} (\hat{Y}_n - \hat{Y}_m) + \alpha_n (\hat{Y}_n - \Upsilon_l) \right] + u_l, \forall n = 1, 2, \dots, E \quad (4.33)$$

donde: $\hat{Y}_n(t) = [\hat{p}_n^T - h_n^T, \hat{v}_n^T, \hat{\omega}_n^T, \hat{\dot{\omega}}_n^T]$, es el vector de estimación de estado del UAV n -ésimo y $\Upsilon_l = [p_l^T, v_l^T, \omega_l^T, \dot{\omega}_l^T]$ es el vector de estados del líder virtual.

Nótese que: $p_n = [p_{xn}, p_{yn}, p_{zn}]$, $v_n = [v_{xn}, v_{yn}, v_{zn}]$, $\omega_n = [\omega_{xn}, \omega_{yn}, \omega_{zn}]$, $\dot{\omega}_n = [\dot{\omega}_{xn}, \dot{\omega}_{yn}, \dot{\omega}_{zn}]$ y u_n son las posiciones, velocidades traslacionales, posiciones angulares y velocidades angulares, respectivamente del agente n , $H = [h_1^T, h_2^T, \dots, h_E^T]$ contiene las distancias deseadas de cada UAV para la formación del hexágono. La matriz H se define como sigue:

$$H = \xi \cdot \begin{bmatrix} \text{sen} \left(\frac{1}{6} \pi \right) & \text{sen} \left(\frac{1}{2} \pi \right) & \text{sen} \left(\frac{5}{6} \pi \right) & \text{sen} \left(\frac{7}{6} \pi \right) & \text{sen} \left(\frac{3}{2} \pi \right) & \text{sen} \left(\frac{11}{6} \pi \right) \\ -\cos \left(\frac{1}{6} \pi \right) & -\cos \left(\frac{1}{2} \pi \right) & -\cos \left(\frac{5}{6} \pi \right) & -\cos \left(\frac{7}{6} \pi \right) & -\cos \left(\frac{3}{2} \pi \right) & -\cos \left(\frac{11}{6} \pi \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

El hexágono está inscrito en un círculo, con el líder virtual posicionado en el centro del círculo. La distancia entre el líder y cada agente se define como $\xi = 4$ m, donde ξ representa el radio del círculo.

La comunicación entre los UAVs se describe mediante una topología de comunicación (ver Figura 4.2) con la cual es posible obtener las matrices de información requeridas para obtener las variables generadas por el protocolo de consenso.

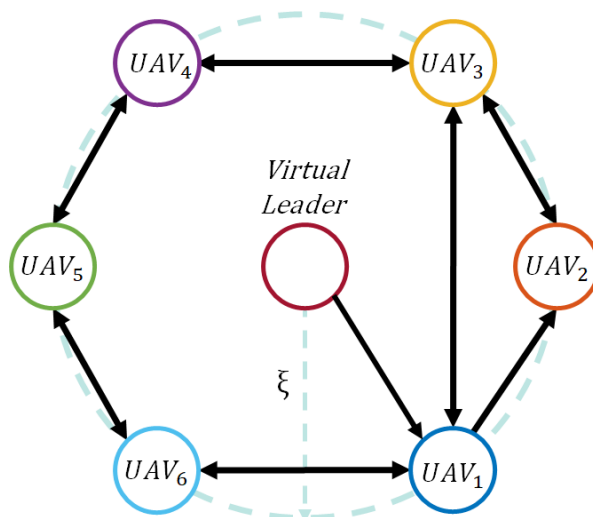


Figura 4.2. Topología de comunicación entre los UAVs.

La matriz de comunicación con el virtual se denota por $\Lambda = \text{diag}(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ y la matriz Laplaciana \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Los condiciones iniciales del sistema y del observador para cada UAV incluido el líder, se presentan en la Tabla 4.1. Las condiciones iniciales para las velocidades de traslación, ángulos y velocidades angulares se consideran cero.

Tabla 4.1. Condiciones iniciales del sistema y observador.

UAV	p_x [m]	p_y [m]	p_z [m]	\hat{p}_x [m]	\hat{p}_y [m]	\hat{p}_z [m]
1	5	-5	0	3.5	-5.5	0
2	3	-5	0	1	-7	0
3	1	-5	0	0	-6	0
4	-1	-5	0	-2.5	-6	0
5	-3	-5	0	-4	-4	0
6	-5	-5	0	-6	-4.5	0
Líder	0	0	0	-	-	-

Para calcular las ganancias de los vértices del control K_z y las ganancias de los vértices del observador L_z , utilizamos el *software Matlab* con el *toolbox SDPT3* [43] para encontrar la solución LMI (4.31) propuesta en el Teorema 2. Esto implicó el uso de la representación q-LPV del UAV (3.8). Para este caso específico, establecimos el valor de $\mu = 0.02$.

El líder virtual cumple la función de un modelo de referencia, el cual sirve como una guía o estándar que el sistema real debe seguir o imitar. En la Figura 4.3 se ilustran las trayectorias de los agentes y del líder virtual. Se nota como los agentes siguen al líder. Nótese que se utilizó las referencias mostradas en (3.39) y (3.40) y el control del líder virtual mostrados en el Capítulo anterior.

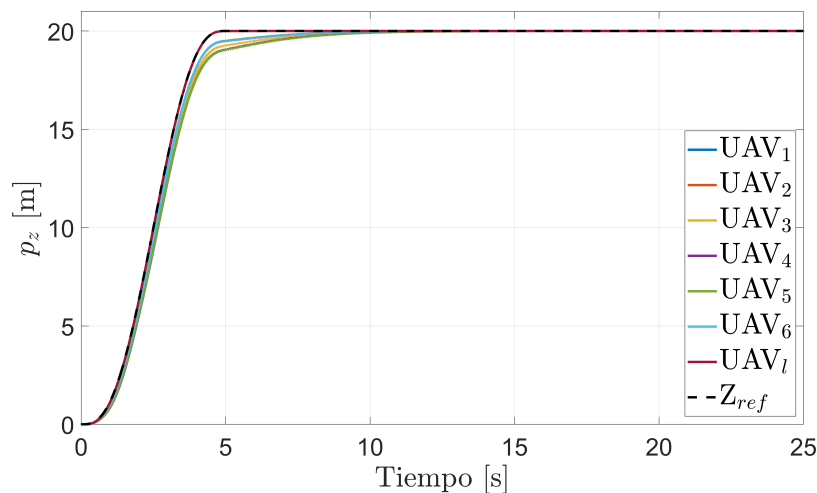


Figura 4.3. Trayectorias de los UAVs y líder virtual en el eje Z.

La convergencia de los errores de estimación de cada observador se muestran en la Figura 4.4. Se añadió ruido a los sensores utilizando una función aleatoria con una distribución normal, una des-

viación típica de 0,003 y un valor medio de cero. A pesar del ruido de los sensores, la convergencia de los observadores está garantizada.

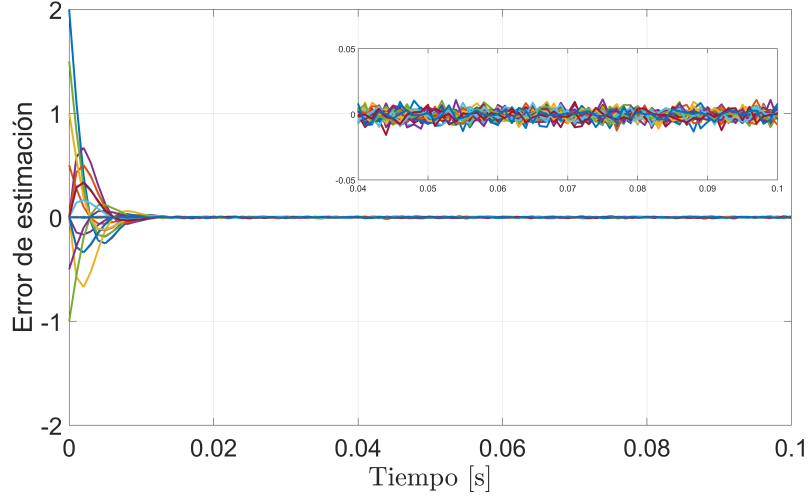


Figura 4.4. Error de estimación.

La Figura 4.5 muestra las trayectorias de los UAV. El líder se sitúa en el centro de un hexágono regular y los UAV en los vértices. Estas posiciones se alcanzan cuando los UAVs llegan a sus posiciones deseadas y al líder virtual.

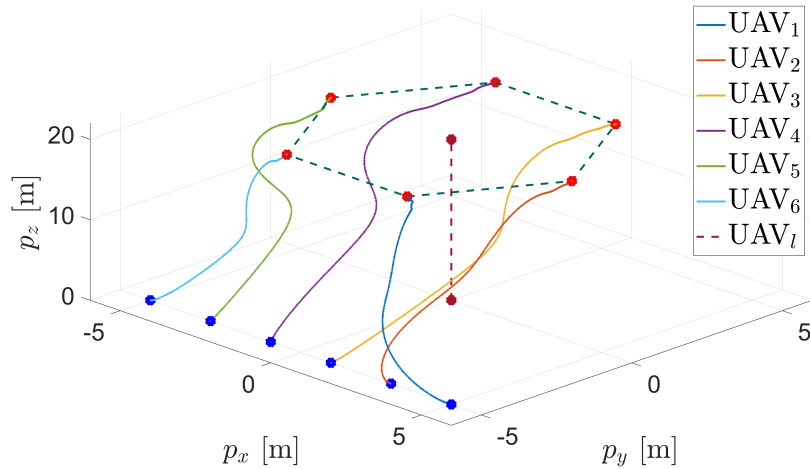


Figura 4.5. Trayectorias de los UAVs.

El error de sincronización se define como $\delta_n = \|x_n - x_l\| - \xi$. El objetivo de este error es demostrar

que los UAV sigan la trayectoria del líder, y este objetivo se satisface cuando $\delta_n = 0$. La Figura 4.6 ilustra el error de sincronización δ de cada UAV.

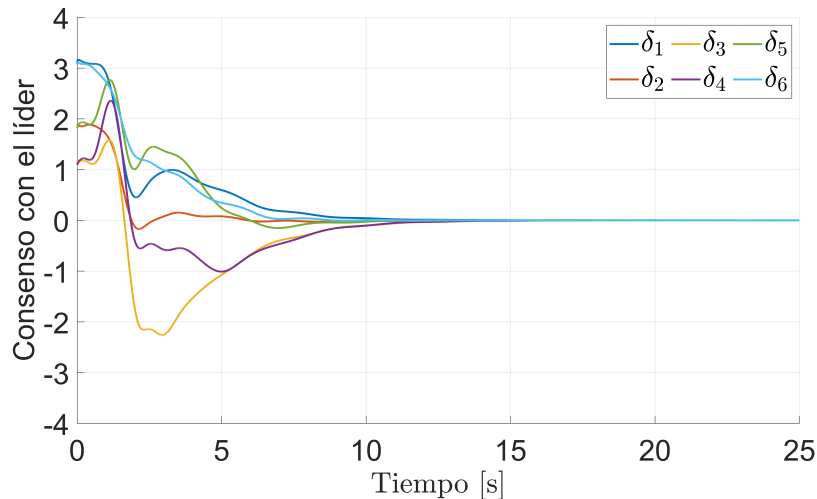


Figura 4.6. Error de sincronización.

La Figura 4.7 ilustra las distancias relativas entre los UAV. Para demostrar que se logra la formación deseada, las distancias relativas se definen como (4.36). Se considera alcanzada la formación hexagonal alrededor del líder virtual cuando $d_{n,m} = 0$.

$$d_{n,m} = \left\| ([x_n, y_n, z_n]^T - [x_m, y_m, z_m]^T) - (h_i, h_j) \right\| \quad (4.36)$$

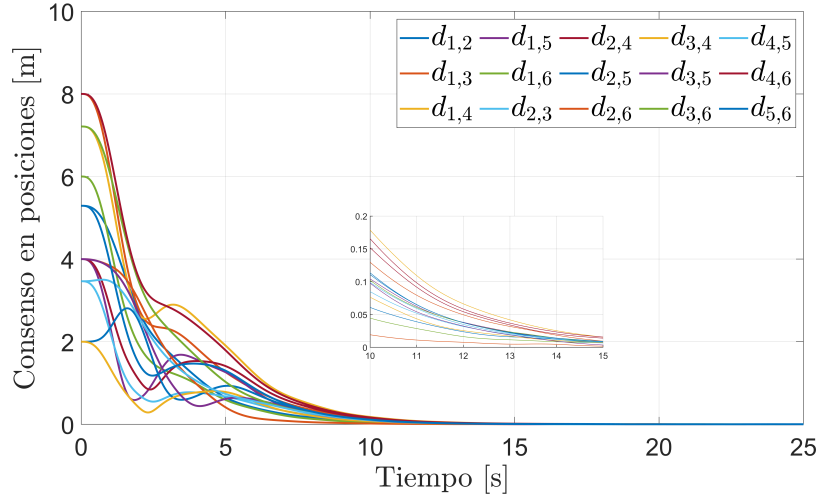


Figura 4.7. Distancia relativa entre los UAVs.

Las entradas de control (4.8) de cada UAV y del líder se muestran en la Figura 4.8.

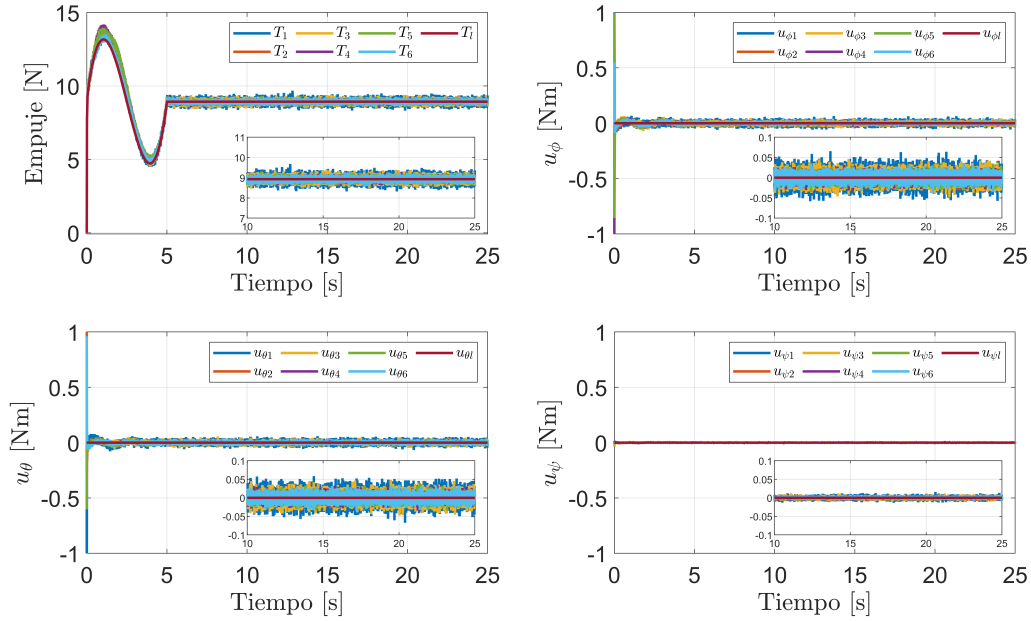


Figura 4.8. Entradas de control de los UAVs y líder virtual.

La Figura 4.9 muestra las velocidades de cada rotor de cada UAV, obtenidas a partir de (3.5).

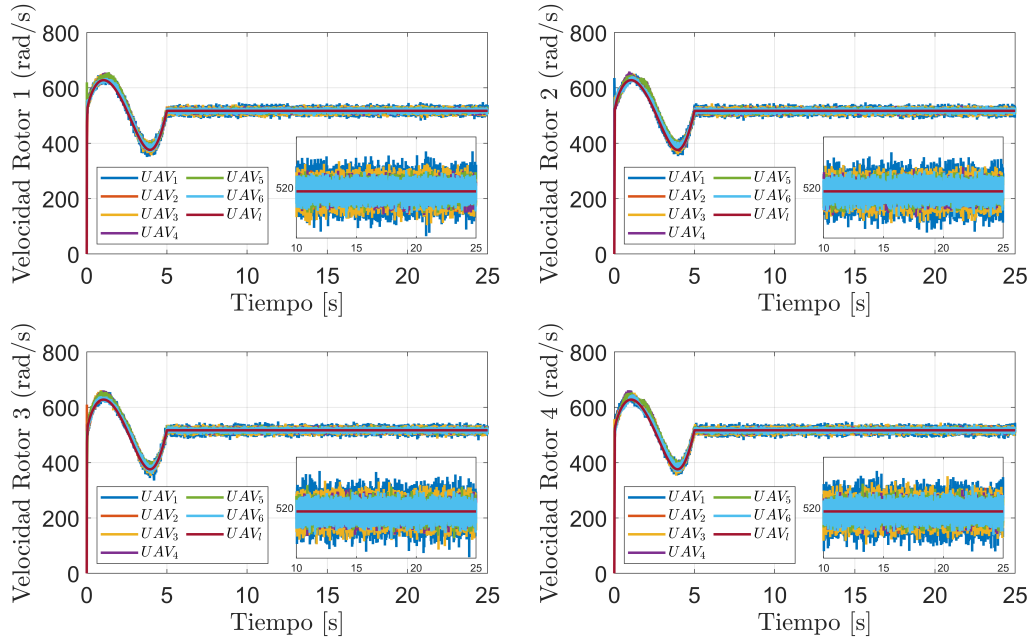


Figura 4.9. Velocidades angulares de cada rotor de los agentes y líder virtual.

En la Figura 4.10, se muestran las funciones de programación del sistema, presentadas en forma de quasi-LPV, se puede apreciar que estas cumplen con las restricciones mostradas en (4.3).

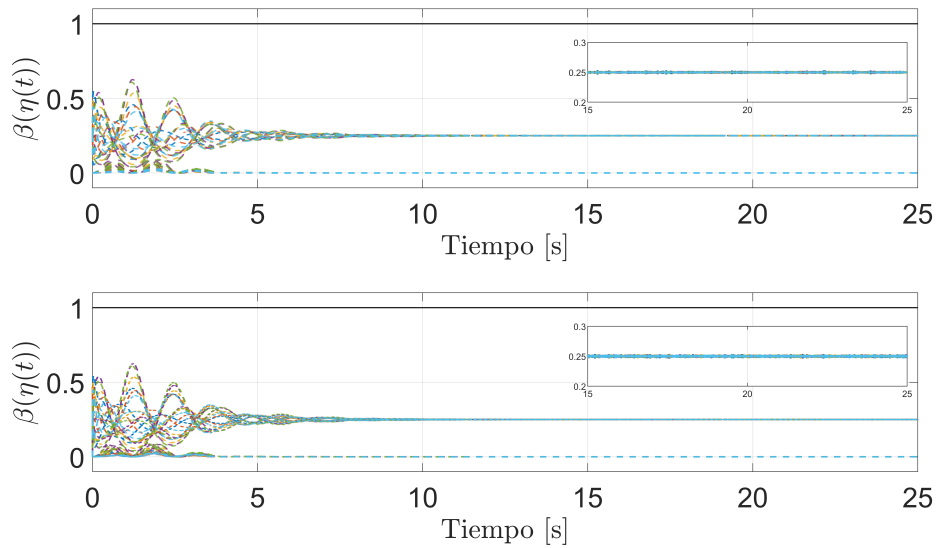


Figura 4.10. Funciones de programación.

4.5. Resultados de simulación control nominal y robusto con perturbación

Para agregar perturbaciones a las velocidades traslacionales en el modelo q-LPV del UAV (3.9), se utiliza la matriz D de la siguiente manera para encontrar la solución del Teorema 1.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (4.37)$$

Para calcular las ganancias de los vértices de control K_z y las ganancias de los vértices del observador L_z , utilizamos el *software Matlab* con el *toolbox SDPT3* [43] para encontrar la solución LMI (4.16) propuesta en el Teorema 1. Esto implicó el uso de la representación q-LPV del UAV (3.9). Para este caso específico, establecimos el valor de $\mu = 0.02$ y el valor resultante de γ es 3.46. Las perturbaciones se agregaron a las velocidades de traslación px , py , pz en el modelo dinámico (3.2) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= v_x + w_{xn}, \\ \dot{p}_y &= v_y + w_{yn}, \\ \dot{p}_z &= v_z + w_{zn}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde w_{xn} , w_{yn} y w_{zn} denotan las perturbaciones. En el tiempo $0 < t < 15$ s los valores de w_{zn}, w_{zn} y w_{zn} son cero, y para el tiempo $t \geq 15$ s los valores de la perturbación se añadieron como una función aleatoria con distribución normal, una desviación estándar de 3 y un valor medio de cero. Nótese que la perturbación se introduce una vez alcanzada la formación (ver Figura 4.11).

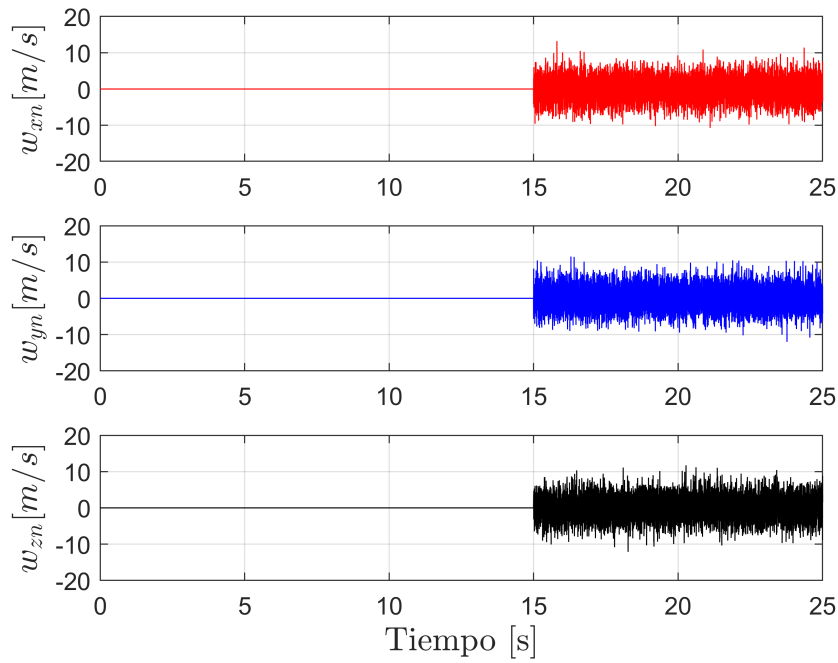


Figura 4.11. Señal de perturbación.

La Figura 4.12 ilustra las trayectorias de los UAV. El líder se encuentra en el centro de un hexágono regular, mientras que los UAV se sitúan en los vértices. Estas posiciones se alcanzan cuando los UAVs logran sus ubicaciones deseadas en relación con el líder virtual.

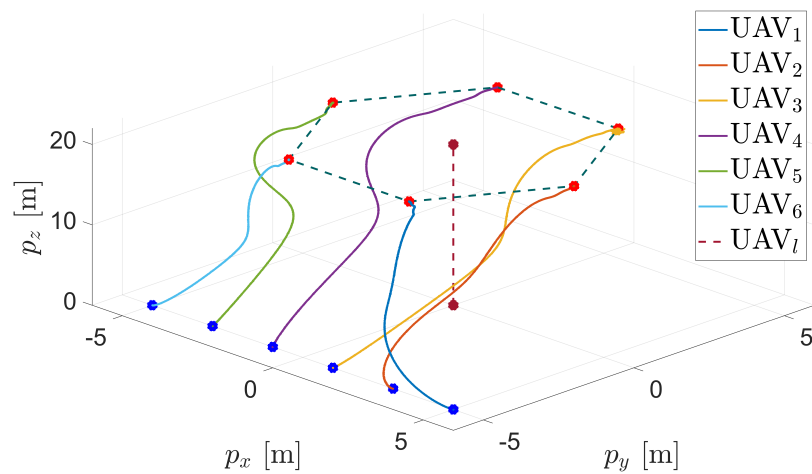


Figura 4.12. Señal de perturbación.

CAPÍTULO 4. DISEÑO DE UN ESQUEMA DE CONTROL ROBUSTO LÍDER-SEGUIDOR
BASADO EN OBSERVADOR BAJO PERTURBACIONES EXTERNAS

En 4.13 y 4.14, se observa el efecto que provoca la perturbación en el sistema multi-agente, sin embargo, la formación se conserva.

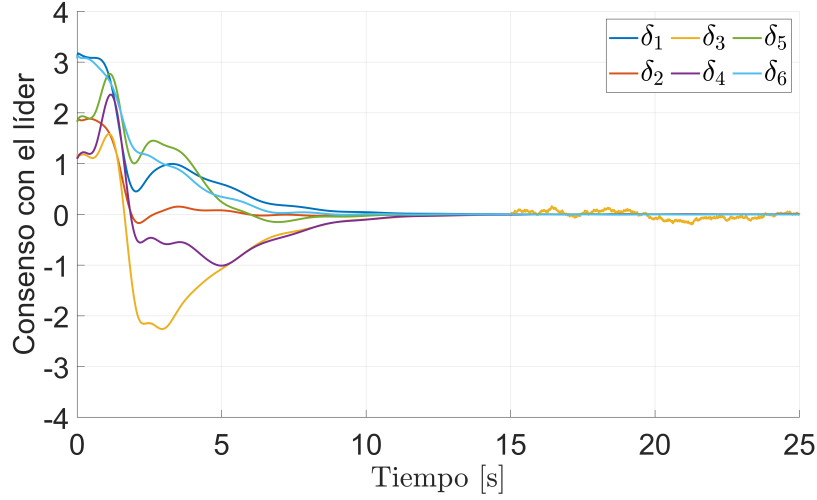


Figura 4.13. Error de sincronización.

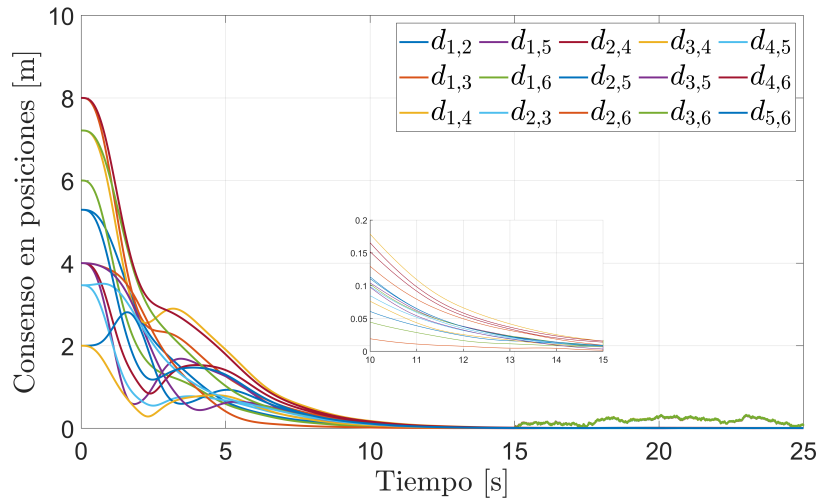


Figura 4.14. Distancias relativas entre los UAVs.

En el tiempo $t \geq 15$ s, los efectos causados por la perturbación se visualizan en las señales de control, principalmente en el empuje (ver Figura 4.15).

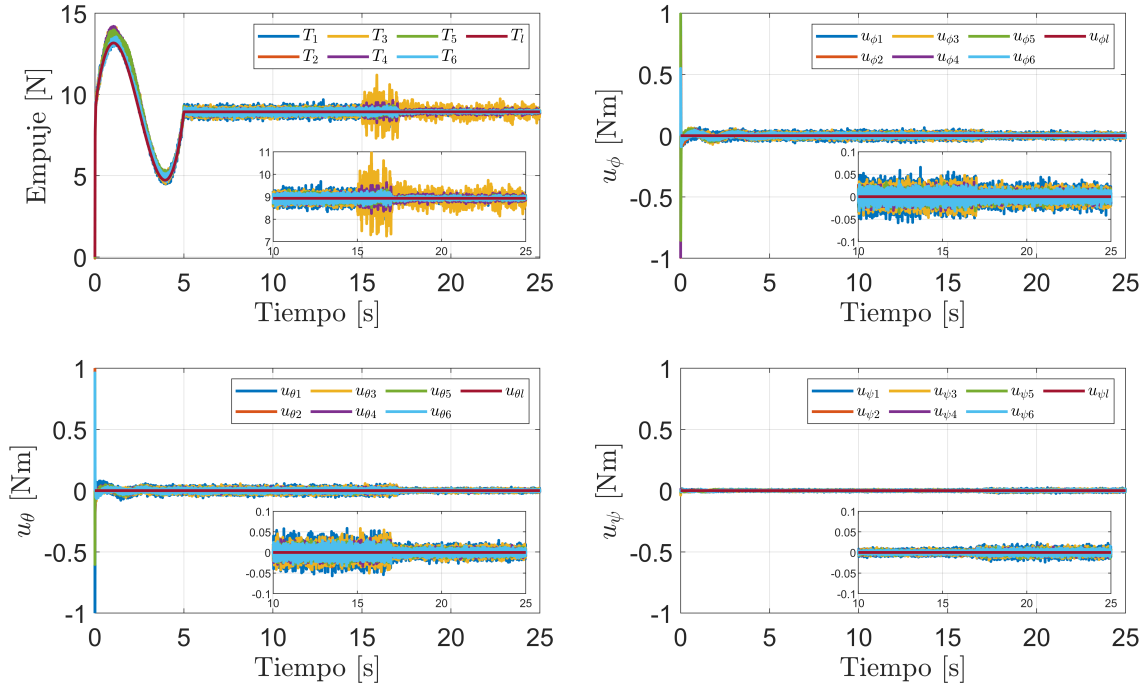


Figura 4.15. Entradas de control de los UAVs y líder virtual.

El sistema inicia con ganancias determinadas por el teorema presentado en [17] para el intervalo de tiempo $0 < t < 17$ s, es importante señalar que este teorema no considera el criterio de optimización por H_∞ . Cuando $t \geq 17$ s, se consideran las ganancias obtenidas resolviendo (4.16). Como resultado, el sistema demuestra el rechazo de la perturbación en las señales de control. A partir de $t \geq 15$ s, los efectos causados por la perturbación en el tercer UAV se hacen evidentes. En $t \geq 17$ s, se visualiza el impacto del criterio H_∞ . En consecuencia, el rechazo de la perturbación se muestra en las velocidades de los rotores del UAV 3.

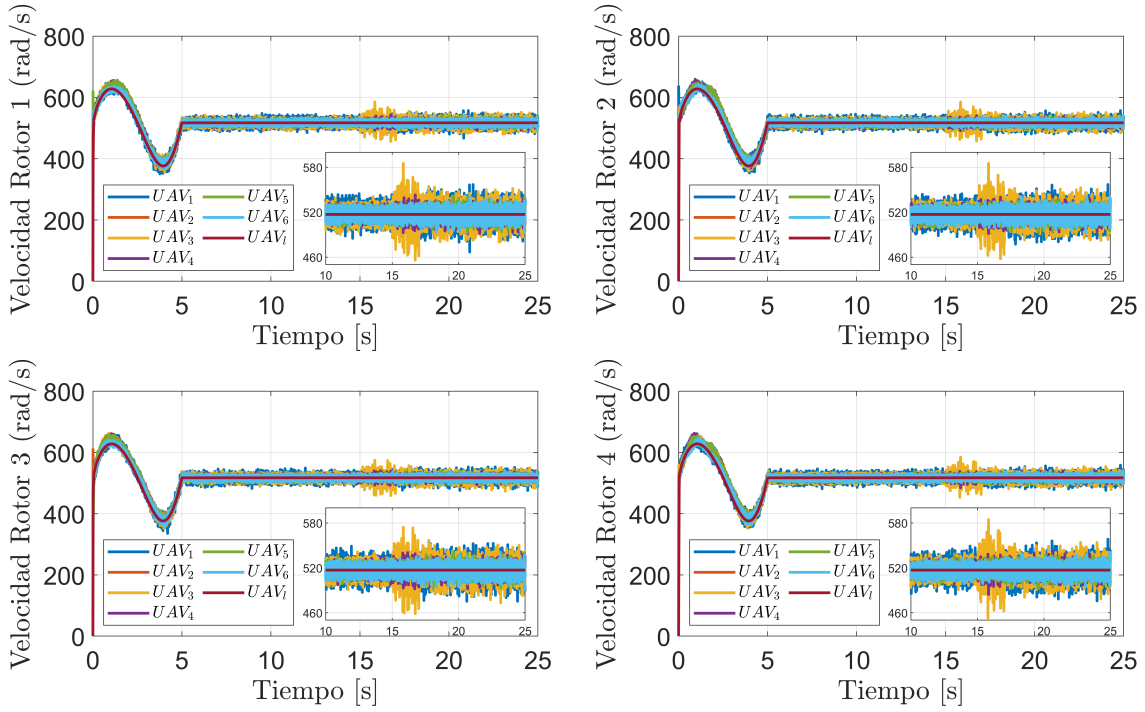


Figura 4.16. Velocidades de cada rotor de los agentes y líder virtual.

En la Figura (4.17) se confirma la validez de la condición establecida en (4.39), se cumple:

$$\|z(t)\|^2 \leq \gamma^2 \|d(t)\|^2 \quad (4.39)$$

Este resultado respalda que el parámetro γ , fue calculado computacionalmente correcto. Es importante destacar que esta condición se mantiene durante todo el seguimiento de la formación por parte del conjunto de UAVs.

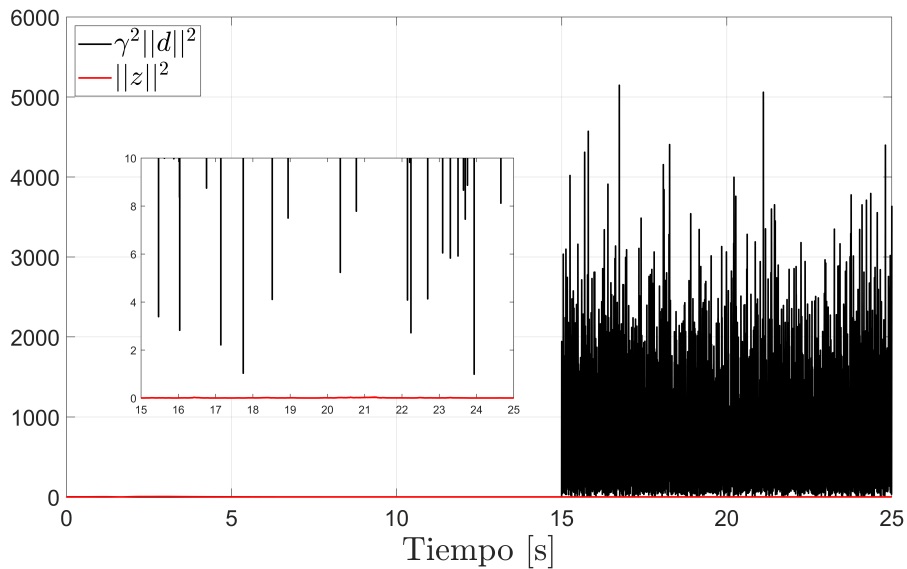


Figura 4.17. Comprobación del valor γ .

Los parámetros variantes se mantienen dentro de los límites establecidos, como se muestra en la Figura 4.18.

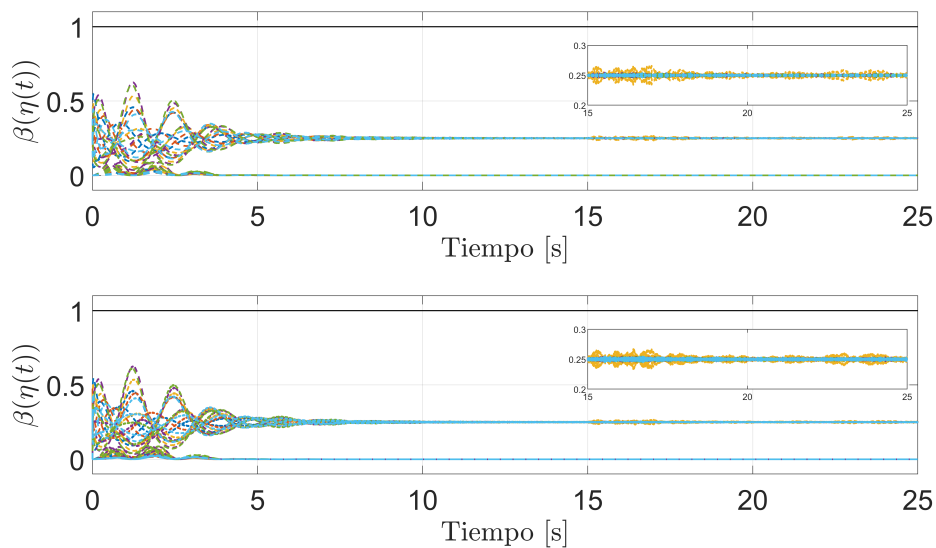


Figura 4.18. Funciones de programación.

4.6. Resultados de simulación, afectando a todos los agentes.

En esta simulación, utilizamos una señal de perturbación específica para el agente 3, la cual se muestra en la Figura 4.11. Para los demás agentes (1, 2, 4, 5 y 6), ajustamos esta perturbación aumentando o reduciendo su intensidad. Para el agente 1, la perturbación se incrementó en un 10% en comparación con la del agente 3. De manera similar, las perturbaciones para los agentes 5 y 6 también se incrementaron en un 10%. Por otro lado, para los agentes 2 y 4, la perturbación se redujo en un 10%.

La Figura 4.19 se ilustra las trayectorias tridimensionales de seis vehículos aéreos no tripulados (UAVs), etiquetados como UAV_1 , UAV_2 , UAV_3 , UAV_4 , UAV_5 y UAV_6 . Cada UAV parte desde una posición inicial, indicada por los marcadores azules, y asciende hasta alcanzar una formación hexagonal en un plano a 20 metros sobre el eje p_z , indicada por los marcadores rojos.

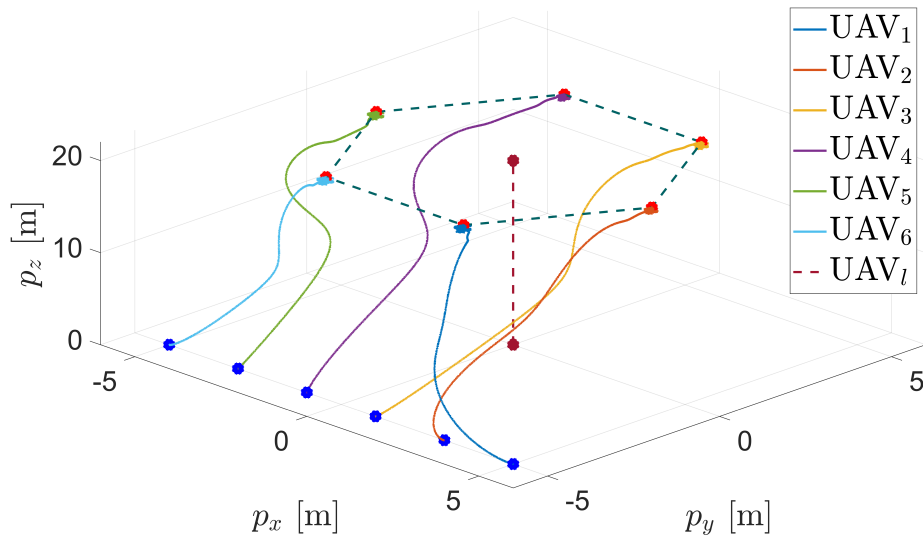


Figura 4.19. Trayectorias de los UAVs hacia una formación hexagonal a 20 metros de altura.

Las líneas punteadas en rojo oscuro representan la trayectoria del líder virtual, UAV_l , que sirve como referencia para la formación. Adicionalmente, las líneas punteadas en color cian conectan los puntos finales de los UAVs, estableciendo y manteniendo la formación hexagonal deseada.

*CAPÍTULO 4. DISEÑO DE UN ESQUEMA DE CONTROL ROBUSTO LÍDER-SEGUIDOR
BASADO EN OBSERVADOR BAJO PERTURBACIONES EXTERNAS*

La Figura 4.20 muestra el error de sincronización de los UAVs con respecto al líder virtual, denotado como δ_i para $i = 1, \dots, 6$, a lo largo del tiempo. En $t = 15$ s, se puede notar un incremento en los errores de sincronización inmediatamente después de la perturbación. Sin embargo, los errores de sincronización se reducen nuevamente hacia cero, demostrando el seguimiento del líder virtual a pesar de las perturbaciones.

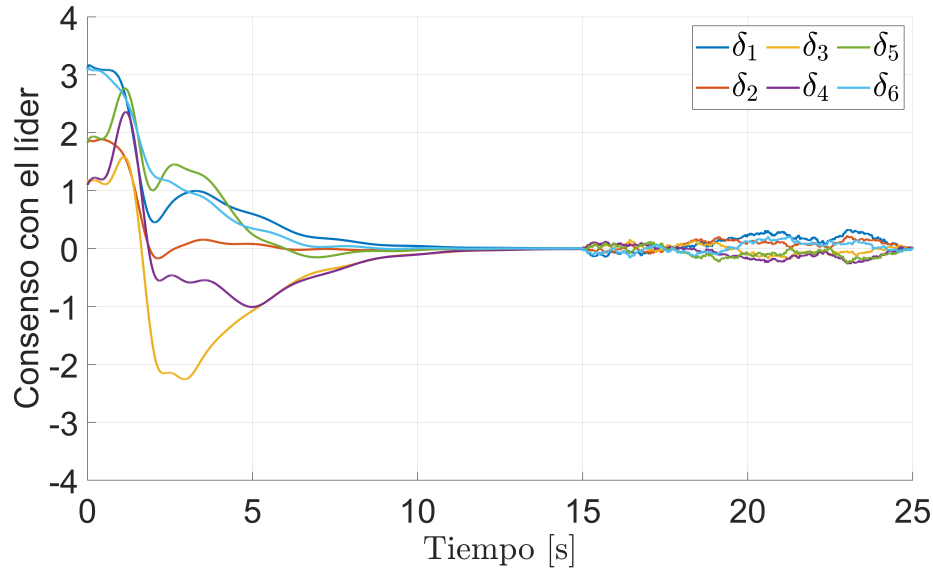


Figura 4.20. Error de sincronización.

La Figura 4.21 muestra las distancias relativas entre los agentes, denotadas como $d_{i,j}$, a lo largo del tiempo.

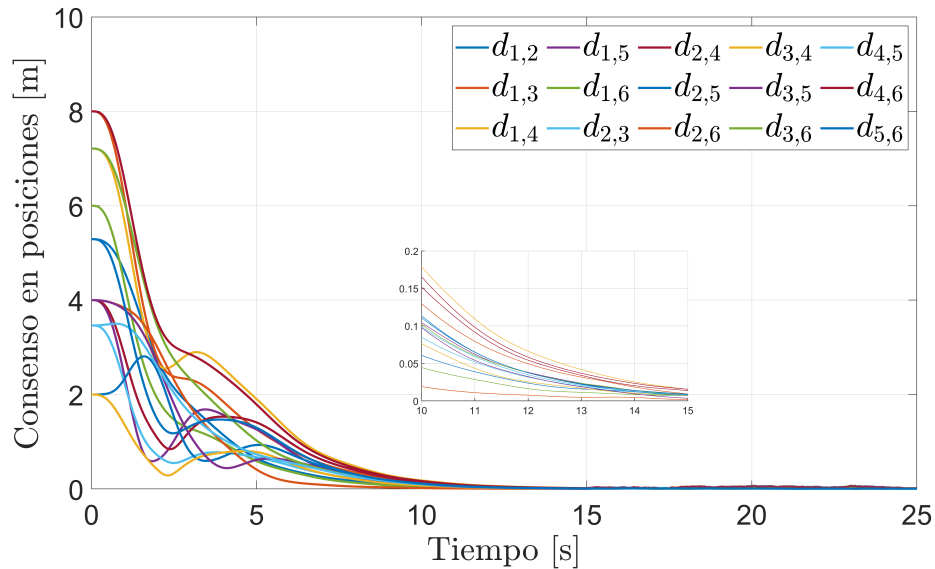


Figura 4.21. Distancias relativas entre los UAVs.

Este valor determina si la formación deseada es alcanzada por el grupo de UAVs. Como se puede notar en la figura, las distancias relativas entre los UAVs se ven afectadas por la perturbación, alejándose momentáneamente del valor cero. Sin embargo, el sistema muestra una capacidad de recuperación, ya que las distancias vuelven a acercarse a cero.

En la Figura 4.22 se observan las señales de control de los seis UAVs que conforman el hexágono y el líder virtual. Es importante señalar que, al entrar la perturbación, la ley de control del empuje incrementa significativamente y presenta mucha variación. En $t = 17$ s, cuando se realiza el cambio a ganancias robustas, se observa una reducción significativa en la variabilidad de esta ley de control.

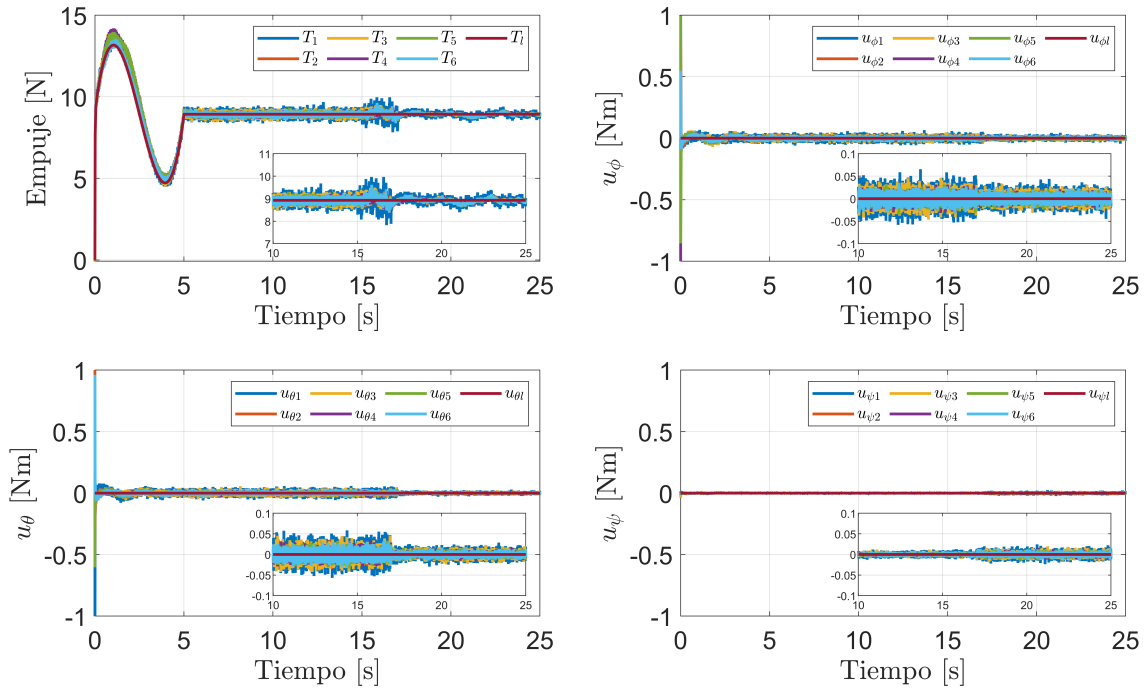


Figura 4.22. Entradas de control de los UAVs y líder virtual.

Inicialmente, se observa un incremento y una alta variabilidad en el empuje debido a la perturbación. A partir de $t = 17$ s, con el cambio a ganancias robustas, el empuje se estabiliza y reduce su variabilidad. Esto es crucial, ya que una reducción en el empuje en un dron implica menor consumo de energía y menos estrés mecánico sobre los motores y la estructura del UAV, prolongando su vida útil y mejorando su eficiencia operativa.

En la Figura 4.23 se observan las velocidades angulares de los rotores de los seis UAVs que conforman el hexágono y el líder virtual. Es importante señalar que, al entrar la perturbación, las velocidades de los rotores aumentan y presentan mucha variación. En $t = 17$ s, cuando se hace el cambio a ganancias robustas, se reduce significativamente la variabilidad en las velocidades de los rotores.

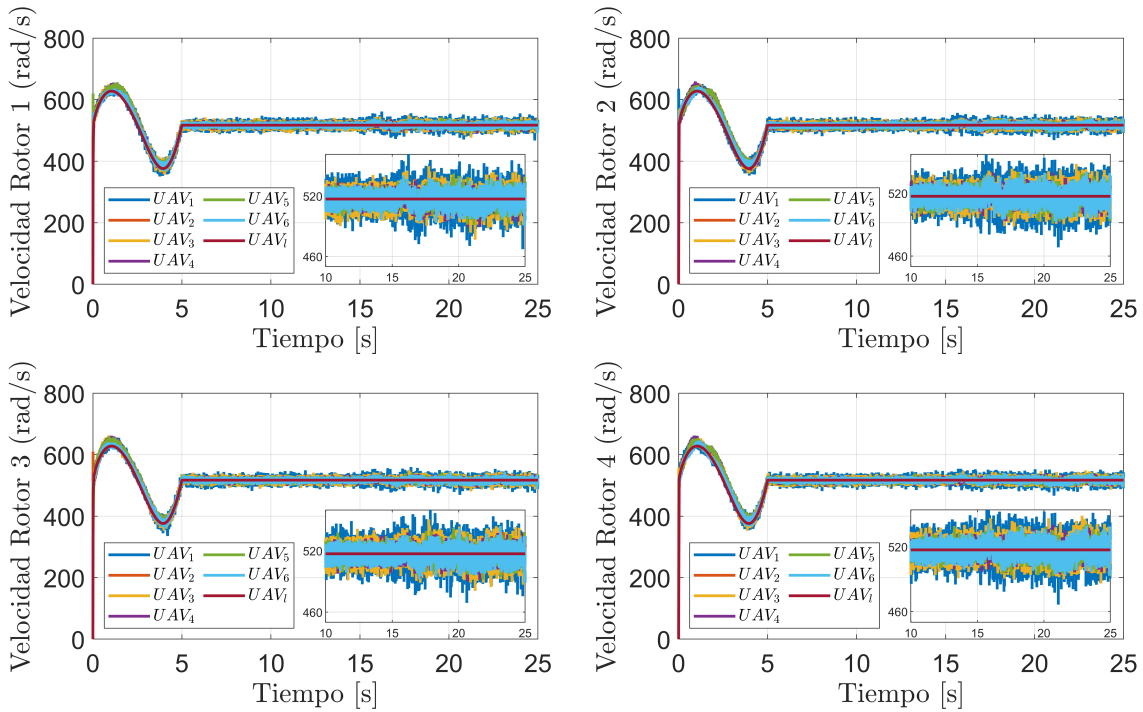


Figura 4.23. Velocidades de cada rotor de los agentes y líder virtual.

Reducir las oscilaciones de las velocidades de los rotores de los UAVs tiene algunos beneficios, principalmente en términos de eficiencia energética y reducción del desgaste mecánico, lo cual es importante para conservar el buen estado de los motores. Implementar el control robusto en estos sistemas conlleva lograr estos beneficios y mejorar el rendimiento general de los UAVs.

En la Figura (4.24) se confirma la validez de la condición establecida en (4.39), se cumple para los seis UAV's.

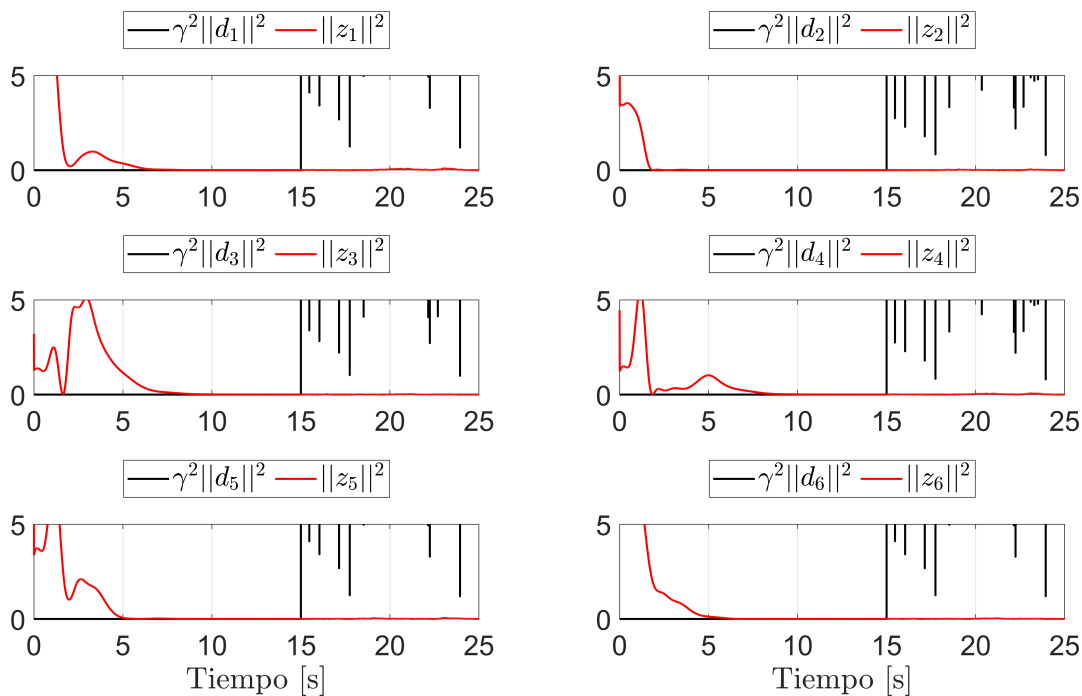


Figura 4.24. Comprobación del valor γ .

En el Anexo C, se muestran algunos otros resultados de simulación de distintos escenarios afectando a solo 3 agentes y una formación en pentágono.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Contribución

La principal aportación del tema de tesis es el diseño del esquema de control robusto líder-seguidor para sistemas multi-agentes LPV que demostró ser capaz minimizar los efectos de las perturbaciones externas en el sistema, el control es basado en observador para estimar estados del sistema.

5.2. Conclusiones generales

Los resultados demuestran la efectividad del control robusto líder-seguidor basado en observadores frente a perturbaciones externas en sistemas multi-agentes LPV propuestos. Se logró obtener las ganancias de los vértices de control para el control de seguimiento de la trayectoria del líder virtual, utilizando trayectorias suaves para asegurar resultados realistas y físicamente posibles con el dron Flame 450.

Se presentaron condiciones LMI suficientes para calcular las ganancias del controlador y del observador, lo cual fue posible gracias a la aplicación del teorema de Polya. Este enfoque es menos conservador, en contraste con los métodos tradicionales. Se llevó a cabo un análisis de estabilidad utilizando el método de Lyapunov y el criterio H_∞ para el cálculo del controlador y el observador LPV robustos, resolviendo así el problema de consenso líder-seguidor. Las señales de control y las velocidades de los rotores en los UAVs afectados mostraron que los efectos de la perturbación fueron minimizados cuando se aplicó el criterio H_∞ . Además, se evaluaron diferentes escenarios en los que la perturbación afectaba a 1 agente, a 3 agentes y a todos los agentes (6 en total) para la formación de un hexágono, y se logró la formación de un pentágono.

5.3. Trabajos futuros

Como extensión de este trabajo, se sugiere abordar la evasión de colisiones y la gestión de las restricciones de comunicación en sistemas multi-agentes. En cuanto a las restricciones de comunicación, es esencial diseñar estrategias robustas y eficientes para mantener la transmisión fiable de información entre los agentes. Además, dado que estos pueden sufrir fallas en actuadores y/o sensores, se propone desarrollar un control tolerante a fallas para sistemas multi-agentes LPV.

5.4. Publicaciones

Durante el periodo de la maestría, se logró publicar un artículo en un congreso y someter otro artículo a una revista.

Publicación en congreso

- Arturo D. Espinosa Pedroza, Jesus A. Vazquez Trejo, Manuel Adam-Medina and J. García, “*Robust Observer-Based Leader-Following Consensus Control for Multi-Agent Systems to External Disturbances*” 1er Congreso Internacional de Tecnología y Ciencia Aplicada, Cuernavaca, Morelos, 2023.

Artículo sometido a revista

- Arturo D. Espinosa Pedroza, Jesus A. Vazquez Trejo, Gerardo Ortiz-Torres, Alexis Alonso-Bastida, Vicente Borja-Jaimes, Christian Rios-Enriquez, Cesar A. Peregrino and Manuel Adam-Medina “*Leader-following Consensus Control Robust to External Disturbances for LPV Multi-agent Systems*” Asian Journal of Control, sometido en Mayo 2024.

Bibliografía

- [1] Allahyar Montazeri, Aydin Can, and Imil Hamda Imran. Chapter 3 - unmanned aerial systems: autonomy, cognition, and control. In Anis Koubaa and Ahmad Taher Azar, editors, *Unmanned Aerial Systems*, Advances in Nonlinear Dynamics and Chaos (ANDC), pages 47–80. Academic Press, 2021.
- [2] Yao Chen, Jinhua Lu, Xinghuo Yu, and David J. Hill. Multi-agent systems with dynamical topologies: Consensus and applications. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 13(3):21–34, 2013.
- [3] Anaid V Nazarova and Meixin Zhai. Distributed solution of problems in multi agent robotic systems. *Smart Electromechanical Systems: Group Interaction*, pages 107–124, 2019.
- [4] Zhe Xiao, Xiuju Fu, Liye Zhang, Loganathan Ponnambalam, and Rick Siow Mong Goh. Data-driven multi-agent system for maritime traffic safety management. In *2017 IEEE 20th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, pages 1–6, 2017.
- [5] O. Malaschuk and A. Dyumin. Intelligent multi-agent system for rescue missions. In Sergey Yu. Misyurin, Vigen Arakelian, and Arutyun I. Avetisyan, editors, *Advanced Technologies in Robotics and Intelligent Systems*, pages 89–97, Cham, 2020. Springer, Springer International Publishing.
- [6] Arman Sargolzaei, Alireza Abbaspour, and Carl Crane. *Control of Cooperative Unmanned Aerial Vehicles: Review of Applications, Challenges, and Algorithms*, pages 229–255. Springer International Publishing, 02 2020.
- [7] Zhongkui Li and Z. Duan. *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: A Consensus Region Approach*. Springer London, 12 2017.

- [8] Raffaele Carli, Graziana Cavone, Nicola Epicoco, Mario Di Ferdinando, Paolo Scarabaggio, and Mariagrazia Dotoli. Consensus-based algorithms for controlling swarms of unmanned aerial vehicles. In *International Conference on Ad-Hoc Networks and Wireless*, pages 84–99. Springer, 2020.
- [9] A Askari, Mahdi Mortazavi, and HA Talebi. Uav formation control via the virtual structure approach. *Journal of Aerospace Engineering*, 28(1):04014047, 2015.
- [10] Wei Zhu and Daizhan Cheng. Leader-following consensus of second-order agents with multiple time-varying delays. *Automatica*, 46(12):1994–1999, 2010.
- [11] Yanjiang Li and Chong Tan. A survey of the consensus for multi-agent systems. *Systems Science & Control Engineering*, 7(1):468–482, 2019.
- [12] Wei Lin. Distributed uav formation control using differential game approach. *Aerospace Science and Technology*, 35:54–62, 2014.
- [13] Xiwang Dong, Yangfan Li, Chuang Lu, Guoqiang Hu, Qingdong Li, and Zhang Ren. Time-varying formation tracking for uav swarm systems with switching directed topologies. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 30(12):3674–3685, 2018.
- [14] Juan Antonio Vazquez Trejo, Manuel Adam-Medina, Carlos Daniel Garcia-Beltran, Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, Betty yolanda lópez Zapata, Eduardo-Mael Sanchez-Coronado, and Didier Theilliol. Robust formation control based on leader-following consensus in multi-agent systems with faults in the information exchange: Application in a fleet of unmanned aerial vehicles. *IEEE Access*, 9:104940–104949, 2021.
- [15] Li Ma and Fanglai Zhu. Leader-follower consensus control of linear multi-agent systems with unknown disturbances. In *2021 IEEE 10th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS)*, pages 1279–1284, 2021.
- [16] J. A. Vazquez Trejo, M. Adam Medina, J. A. Vázquez Trejo, C. D. García Beltrán, and J. García Morales. Robust observer-based leader-following consensus for multi-agent systems. *IEEE Latin America Transactions*, 19(11):1949–1958, 2021.

- [17] Jesus A. Vazquez Trejo, Jean-Christophe Ponsart, Manuel Adam-Medina, Guillermo Valencia-Palomo, and Didier Theilliol. Distributed observer-based leader-following consensus control for LPV multi-agent systems: Application to multiple VTOL-UAVs formation control. In *International Conference on Unmanned Aircraft Systems, ICUAS 2023*, Warsaw, Poland, 06 2023.
- [18] Jesus Avelino Vazquez Trejo, Manuel Adam Medina, Juan Antonio Vázquez Trejo, Carlos Daniel García Beltrán, and Jarniel García Morales. Robust observer-based leader-following consensus for multi-agent systems. *IEEE Latin America Transactions*, 19(11):1949–1958, 2021.
- [19] Jianliang Chen, Weidong Zhang, Yong-Yan Cao, Yunze Cai, and Lixiu Yao. Observer-based consensus control against actuator faults for linear parameter-varying multi-agent systems. In *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 2832–2839, 2016.
- [20] Juan A. Vazquez Trejo, Damiano Rotondo, Manuel Adam Medina, and Didier Theilliol. Robust observer-based leader-following consensus for a class of nonlinear multi-agent systems: application to uav formation control. In *2021 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 1565–1572. IEEE, 2021.
- [21] Fuzhen Zhang. *The Schur complement and its applications*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2006.
- [22] Houria Kheloufi, Ali Zemouche, Fazia Bedouhene, and Mohamed Boutayeb. On lmi conditions to design observer-based controllers for linear systems with parameter uncertainties. *Automatica*, 49(12):3700–3704, 2013.
- [23] Damiano Rotondo, Jean-Christophe Ponsart, and Didier Theilliol. Gain-scheduled observer-based consensus for linear parameter varying multi-agent systems. *Automatica*, 135:109979, 2022.
- [24] María Eugenia Pérez Pons, Javier Parra Domínguez, Juan Manuel Corchado Rodríguez, Jorge Meira, and Maria Goreti Carvalho Marreiros. Review on the applications of multi-agent systems in agriculture. In *Proceedings of the IV Workshop on Disruptive Information and Communication Technologies for Innovation and Digital Transformation: 18th June 2021 Online*, pages 49–57. Ediciones Universidad de Salamanca, 2022.

- [25] Z. Li and Z. Duan. *Cooperative control of multi-agent systems: a consensus region approach*. CRC Press, 2015.
- [26] J. A. Vazquez Trejo. *Control de formación distribuido para una flotilla de vehículos autónomos basado en sistemas multi-agentes*. Tesis de maestría, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, Junio 2020.
- [27] Damiano Rotondo, Jean-Christophe Ponsart, and Didier Theilliol. Gain-scheduled observer-based consensus for linear parameter varying multi-agent systems. *Automatica*, 135:109979, 2022.
- [28] M. Mohammadi, M. Baradarannia, and A. Farzamnia. Leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems based on position and velocity estimations. In *2021 7th International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA)*, pages 1–7, 2021.
- [29] Mohammad Amin Moradi, Behrouz Safarinejadian, and Mohammad Hossein Shafiei. Distributed sliding mode leader-following consensus controller for uncertain time-delay linear parameter-varying multiagent systems. *Journal of Vibration and Control*, 27(17-18):2136–2151, 2021.
- [30] Daria Galkina, Stanislav Tomashevich, and Oleg Borisov. Geometry-based robust control of a multi-agent system of quadrotors. *IFAC-PapersOnLine*, 54(14):482–487, 2021. 3rd IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2021.
- [31] Jianliang Chen, Weidong Zhang, Yong-Yan Cao, and Hongjun Chu. Observer-based consensus control against actuator faults for linear parameter-varying multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 47(7):1336–1347, 2017.
- [32] Xiaolong Huang, Yangzhou Chen, and Jingyuan Zhan. Observer-based consensus control for multi-agent systems with measurement noises and external disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 32(1):344–357, 2022.
- [33] Zahoor Ahmed, Muhammad Mansoor Khan, Muhammad Abid Saeed, and Weidong Zhang. Consensus control of multi-agent systems with input and communication delay: A frequency domain perspective. *ISA Transactions*, 101:69–77, 2020.

- [34] Rui Mu, Airong Wei, Haitao Li, and Zi-Ming Wang. Event-triggered leader-following consensus for multi-agent systems with external disturbances under fixed and switching topologies. *IET Control Theory & Applications*, 14(11):1486–1496, 2020.
- [35] Ateeq ur Rehman, Muhammad Rehan, Naeem Iqbal, and Choon Ki Ahn. Lpv scheme for robust adaptive output feedback consensus of lipschitz multiagents using lipschitz nonlinear protocol. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 51(11):7040–7050, 2021.
- [36] J. A. Vazquez Trejo, M. Adam-Medina, C. D. Garcia-Beltran, G. V. Guerrero Ramírez, B. Y. López Zapata, E.-M. Sanchez-Coronado, and D. Theilliol. Robust formation control based on leader-following consensus in multi-agent systems with faults in the information exchange: Application in a fleet of unmanned aerial vehicles. *IEEE Access*, 9:104940–104949, 2021.
- [37] Sunsoo Kim, Vedang Deshpande, and Raktim Bhattacharya. H_2 optimized pid control of quad-copter platform with wind disturbance. In *2020 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 839–844, 2020.
- [38] Corentin Briat. Linear parameter-varying and time-delay systems. *Analysis, observation, filtering & control*, 3:5–7, 2014.
- [39] Corentin Briat. *Commande et Observation Robuste des Systèmes LPV Retardés*. PhD thesis, 11 2008.
- [40] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [41] Antonio Sala and Carlos Ariño. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of polya’s theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(24):2671–2686, 2007. Theme: Modelling and Control.
- [42] Damiano Rotondo, Helem Sabina Sánchez, Fatiha Nejjari, and Vicenç Puig. Análisis y diseño de sistemas lineales con parámetros variantes utilizando lmis. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 16(1):1–14, 2019.

- [43] R. Tutuncu, Kim-Chuan Toh, and Michael Todd. Sdpt3 - a matlab software package for semidefinite-quadratic-linear programming, version 3.0. 09 2001.
- [44] Nikolaos I Xiros and Pak-Cheung Edgar An. Control theory and applications. *Springer Handbook of Ocean Engineering*, pages 227–276, 2016.
- [45] Mickael Rodrigues, Didier Theilliol, Samir Aberkane, and Dominique Sauter. Fault tolerant control design for polytopic lpv systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 17(1):27–37, 2007.
- [46] Gerardo Ortiz-Torres, Pedro Castillo, Felipe D. J. Sorcia-Vázquez, Jesse Y. Rumbo-Morales, Jorge A. Brizuela-Mendoza, Javier De La Cruz-Soto, and Mario Martínez-García. Fault estimation and fault tolerant control strategies applied to vtol aerial vehicles with soft and aggressive actuator faults. *IEEE Access*, 8:10649–10661, 2020.
- [47] G. Ortiz-Torres, Pedro Castillo Garcia, and Juan Reyes-Reyes. An actuator fault tolerant control for vtol vehicles using fault estimation observers: Practical validation. 06 2018.
- [48] Iman Sadeghzadeh, Abbas Chamseddine, Didier Theilliol, and Youmin Zhang. Linear parameter varying control synthesis: State feedback versus h_∞ technique with application to quadrotor ua v. In *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 1099–1104, 2014.
- [49] Iman Sadeghzadeh, Abbas Chamseddine, Didier Theilliol, and Youmin Zhang. Linear parameter varying control synthesis: State feedback versus h_∞ technique with application to quadrotor ua v. In *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 1099–1104, 2014.
- [50] Wang Jun, Yin Xiong-Dong, and Tian Yu-Yang. Fault-tolerant control design of quadrotor uav based on cpso. In *2018 IEEE 4th International Conference on Control Science and Systems Engineering (ICCSSE)*, pages 279–283, 2018.
- [51] Abbas Chamseddine, Youmin Zhang, Camille Rabbath, Cédric Join, and Didier Theilliol. Flatness-based trajectory planning/replanning for a quadrotor unmanned aerial vehicle. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 48:2832–2848, 10 2012.

- [52] C. Hancer, K. T. Oner, E. Sirimoglu, E. Cetinsoy, and M. Unel. Robust position control of a tilt-wing quadrotor. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4908–4913, 2010.
- [53] Halim Alwi and Christopher Edwards. Sliding mode fault-tolerant control of an octorotor using linear parameter varying-based schemes. *IET Control Theory & Applications*, 9(4):618–636, 2015.
- [54] Carlos Toapanta, Jimmy Villafuerte, and Patricio J. Cruz. 3dof multi-rotor experimental testbed for teaching control systems. In *2018 IEEE Third Ecuador Technical Chapters Meeting (ETCM)*, pages 1–6, 2018.
- [55] X.-D. Sun and I. Postlethwaite. Affine lpv modelling and its use in gain-scheduled helicopter control. In *UKACC International Conference on Control '98 (Conf. Publ. No. 455)*, pages 1504–1509 vol.2, 1998.
- [56] J. Chen, W. Zhang, Y.-Y. Cao, Y. Cai, and L. Yao. Observer-based consensus control against actuator faults for linear parameter-varying multi-agent systems. *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 2832–2839, 2016.
- [57] H. Ito. Robust control for nonlinear systems with structured l2-gain bounded uncertainty. *Systems & Control Letters*, 28(3):167–172, 1996.

Apéndice A

A. Resumen del estado del arte

La información extraída de los artículos considerados más significativos en el estado del arte se recopiló y clasificó en una tabla detallada. Esta tabla proporciona una categorización exhaustiva de los datos relevantes y se puede consultar en la tabla [A.1](#). Esta organización permite una mejor comprensión y análisis de los avances en el área de estudio.

Tabla A.1. Datos relevantes de los artículos consultados en el estado del arte.

Autor, Año	Tipo de control	Tipo de sistema	Topología	Considera perturbación	Resultados
J. Chen et al. (2016)	Robusto basado en consenso	LPV	-	No	Simulación
Y. Pan et al. (2017)	Basado en consenso	Lineal	Líder seguidor	No	Simulación
D. Zhao et al. (2017)	Modos deslizantes	No lineal	Líder seguidor	No	Simulación
X. Dong et al. (2018)	Control de formación variable en el Tiempo	Lineal	Líder seguidor	No	Simulación y experimental
W. Jun et al. (2018)	Control PID	Cuadrícóptero No lineal	-	No	Simulación
C. Deng et al. (2019)	Adaptativo	Lineal	Líder-seguidor	No	Simulación
M. Rehan et at. (2019)	Basado en consenso	No lineal	Líder-seguidor	No	Simulación
Vazquez et al. (2020)	Modelo de referencia basado en observador	Lineal	Líder-seguidor	No	Simulación
C. Wang et al. (2021)	Basado en consenso	Segundo orden	Líder-seguidor	No	Simulación
Vazquez et al. (2021)	Control robusto basado en observador	No lineal	Líder-seguidor	Si	Simulación
Wei et al. (2021)	Consenso	Lineal	Líder-seguidor	Si	Simulación
Rotondo et al. (2022)	Consenso basado en observador LPV	LPV	-	No	Simulación
Vazquez et al. (2023)	Consenso basado en observador LPV	LPV	Líder-seguidor	No	Simulación

Apéndice B

B. Modelos matemáticos del cuadricóptero

En este apéndice se explica detalladamente cómo se obtuvieron los modelos del cuadricóptero: el modelo lineal y el modelo simplificado que representan su dinámica. El objetivo es brindar una comprensión clara y concisa de la derivación de estos modelos, lo que facilitará su aplicación en el estudio y diseño de controladores para el cuadricóptero.

Modelo lineal: Se obtiene mediante la linealización de las ecuaciones de movimiento alrededor de un punto de equilibrio específico. Se consideran las siguientes suposiciones:

- Las variaciones de los ángulos ϕ y θ se consideran muy pequeñas, y el ángulo ψ se mantiene constante, es decir, $\psi = 0$. Además, cuando los ángulos son muy pequeños, se puede utilizar la aproximación lineal donde el seno de un ángulo es aproximadamente igual al ángulo ($\sin(\theta) \approx \theta$) y el coseno de un ángulo es aproximadamente uno ($\cos(\theta) \approx 1$).
 - El coeficiente de arrastre es insignificante cuando se establece una velocidad de rotación baja.
 - La dinámica de los ejes x e y se desacopla de la dinámica del eje z bajo condiciones de vuelo estable o en suspensión (*hover*), es decir, $u_z \approx m_s g$.
 - La dinámica rotacional puede simplificarse considerando que $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \approx (p, q, r)$ [52]
-

Linealizando la parte traslacional alrededor de ángulos pequeños del modelo no lineal, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_x &= v_x, \\
\dot{v}_x &= (\theta) \frac{1}{m_s} (m_s g) = g\theta, \\
\dot{p}_y &= v_y, \\
\dot{v}_y &= (-\phi) \frac{1}{m_s} (m_s g) = -g\phi, \\
\dot{p}_z &= v_z, \\
\dot{v}_z &= -g + \frac{1}{m_s} (m_s g) = 0.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Simplificando las ecuaciones del modelo no lineal (3.2) de la parte rotacional $((\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \approx (p, q, r))$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \dot{\phi}, \\
\ddot{\phi} &= (\dot{\theta}\dot{\psi} (J_y - J_z) + u_\phi) \frac{1}{J_x}, \\
\dot{\theta} &= \dot{\theta}, \\
\ddot{\theta} &= (\dot{\phi}\dot{\psi} (J_z - J_x) + u_\theta) \frac{1}{J_y}, \\
\dot{\psi} &= \dot{\psi}, \\
\ddot{\psi} &= (\dot{\phi}\dot{\theta} (J_x - J_y) + u_\psi) \frac{1}{J_z},
\end{aligned} \tag{B.2}$$

El punto de equilibrio es: $x_e = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ y $u_e = [m_s g, 0, 0, 0]^T$. Utilizando las ecuaciones del modelo no lineal mostradas en 3.2. Linealizando la parte rotacional, y evaluando en el punto de equilibrio, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \dot{\phi}, \\
\dot{p} &= 0, \\
\dot{\theta} &= \dot{\theta}, \\
\dot{q} &= 0, \\
\dot{\psi} &= \dot{\psi}, \\
\dot{r} &= 0.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Entonces, la matriz A para el sistema LTI del cuadricóptero, se expresa de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

Para obtener la matriz B , tomamos las derivadas parciales de las ecuaciones de estado con respecto a las entradas de control.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial \dot{v}_x} &= (\cos(\psi) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) + \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\phi)) \frac{1}{m_s}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial \dot{v}_y} &= (\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) - \cos(\psi) \operatorname{sen}(\phi)) \frac{1}{m_s}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial \dot{v}_z} &= (\cos(\theta) \cos(\phi)) \frac{1}{m_s}, \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial \dot{p}_z} &= \frac{1}{J_x}, \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial \dot{q}_z} &= \frac{1}{J_y}, \\ \frac{\partial u_\psi}{\partial \dot{r}_z} &= \frac{1}{J_z}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Evaluando en el punto de equilibrio, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_z}{\partial \dot{v}_x} &= 0, \\
\frac{\partial u_z}{\partial \dot{v}_y} &= 0, \\
\frac{\partial u_z}{\partial \dot{v}_z} &= \frac{1}{m_s}, \\
\frac{\partial u_\phi}{\partial \dot{p}_z} &= \frac{1}{J_x}, \\
\frac{\partial u_\theta}{\partial \dot{q}_z} &= \frac{1}{J_y}, \\
\frac{\partial u_\psi}{\partial \dot{r}_z} &= \frac{1}{J_z}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

La matriz B está compuesta por las derivadas parciales de cada ecuación de estado con respecto a cada entrada de control:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix}. \tag{B.7}$$

Entonces, el sistemas no lineal, es expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\
y(t) &= Cx(t),
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Donde: El vector de estado se define como: $x = [p_x, v_x, p_y, v_y, p_z, v_z, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}]$ y la matriz C se ajusta de tal manera que el vector de salida sea $y = [p_x, p_y, p_z, \phi, \theta, \psi]$.

Modelo simplificado: Un modelo dinámico más simple para un cuadricóptero puede obtenerse al realizar algunas consideraciones para el sistema no lineal (3.2):

- Las variaciones de los ángulos ϕ y θ se consideran muy pequeñas, y el ángulo ψ se mantiene constante, es decir, $\psi = 0$.
- La dinámica de los ejes x e y se desacopla de la dinámica del eje z bajo condiciones de vuelo estable o en suspensión (*hover*), es decir, $u_z \approx m_s g$.
- La dinámica rotacional puede simplificarse considerando que $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \approx (p, q, r)$ [52].

Al aplicar las consideraciones sobre la parte traslacional anteriormente mencionadas $\phi \approx 0, \theta \approx 0$ y $\psi = 0$, esta se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_x &= v_x, \\
 \dot{v}_x &= (\theta) \frac{1}{m_s} (m_s g) = g\theta, \\
 \dot{p}_y &= v_y, \\
 \dot{v}_y &= (-\phi) \frac{1}{m_s} (m_s g) = -g\phi, \\
 \dot{p}_z &= v_z, \\
 \dot{v}_z &= -g + \frac{1}{m_s} (m_s g) = 0.
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

En el modelo simplificado de la dinámica de un cuadricóptero, se incluye un término adicional en la ecuación de la aceleración vertical \dot{v}_z para capturar la influencia de los ángulos de inclinación (θ y ϕ) en la aceleración vertical, incluso cuando la fuerza de sustentación u_z es aproximadamente $m_s g$. Cuando el cuadricóptero se inclina, la fuerza de sustentación generada por los rotores no solo actúa verticalmente para contrarrestar la gravedad, sino que también se inclina para proporcionar una componente de fuerza en la dirección del movimiento lateral o hacia adelante del cuadricóptero. Para reflejar esta influencia en el modelo simplificado, se agrega el término $\frac{1}{m_s} (\cos(\theta) \cdot \cos(\phi)) \cdot u_z$ a la ecuación de la aceleración vertical \dot{v}_z , por lo tanto:

$$\dot{v}_z = \frac{1}{m_s} (\cos(\theta) \cdot \cos(\phi)) \cdot u_z. \tag{B.10}$$

Al aplicar las consideraciones sobre la parte rotacional anteriormente mencionada $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \approx$

(p, q, r) , esta se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \dot{\phi}, \\
\ddot{\phi} &= (\dot{\theta}\dot{\psi}(J_y - J_z) + u_\phi)\frac{1}{J_x}, \\
\dot{\theta} &= \dot{\theta}, \\
\ddot{\theta} &= (\dot{\phi}\dot{\psi}(J_z - J_x) + u_\theta)\frac{1}{J_y}, \\
\dot{\psi} &= \dot{\psi}, \\
\ddot{\psi} &= (\dot{\phi}\dot{\theta}(J_x - J_y) + u_\psi)\frac{1}{J_z},
\end{aligned} \tag{B.11}$$

El modelo no lineal (3.2) se reescribe en su forma de espacio de estados q-LPV como:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A(\eta)x + B(\eta)u, \\
y &= Cx,
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Donde: x es el vector de estados, que representa las variables internas del sistema, $A(\eta)$ es la matriz de estado, que varía con respecto al parámetro η , $B(\eta)$ es la matriz de entrada, que también varía con respecto al parámetro η y u es el vector de entradas, que representa las variables de control o influencias externas aplicadas al sistema. A continuación se definen las matrices $A(\eta)$ y $B(\eta)$

$$A(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_1\eta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_2\eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_3\eta_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta_1}{m_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix},$$

Donde: $\eta_1 = \cos(\theta)\cos(\phi)$, $\eta_2 = \dot{\phi}$, $\eta_3 = \dot{\theta}$, $V_1 = (J_y - J_z)/J_x$, $V_2 = (J_z - J_x)/J_y$ y $V_3 = (J_x - J_y)/J_z$.

Apéndice C

C. Resultados de simulación, distintos escenarios

Resultados de simulación: Agentes 2,3 y 4 afectados

En esta simulación, utilizamos una señal de perturbación específica para el agente 3, la cual se muestra en la Figura 4.11. Para los demás agentes 2 y 4, ajustamos esta perturbación aumentando o reduciendo su intensidad. Para el agente 2, la perturbación se incrementó en un 10% en comparación con la del agente 3. De manera similar, las perturbaciones para los agentes 4 se incrementaron en un 10%. Para esta simulación, se utilizaron las mismas condiciones iniciales mostradas en la Tabla 4.1.

La representación gráfica presentada en la Figura C.1 ejemplifica las trayectorias seguidas por los UAVs. En esta configuración, el líder se sitúa en el centro de un hexágono regular, mientras que los UAV se distribuyen equidistantemente en los vértices del hexágono.

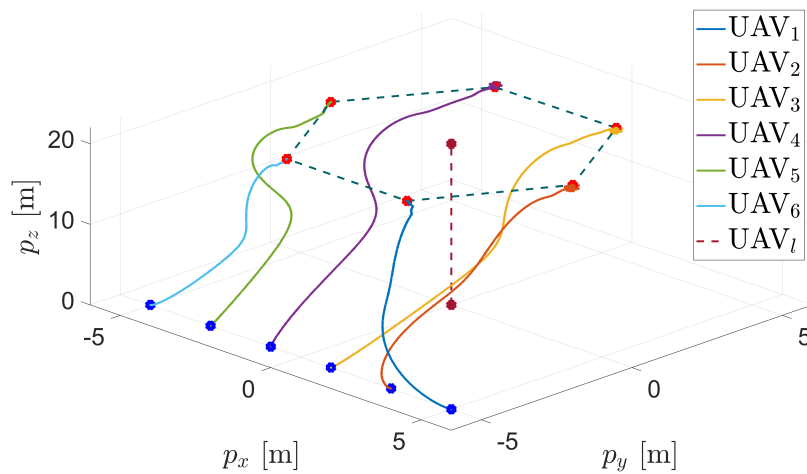


Figura C.1. Señal de perturbación.

En las Figuras C.2 y C.3, se puede apreciar claramente el impacto que causa la perturbación en el sistema multi-agente. A pesar de la perturbación externa, se destaca la notable capacidad del sistema para mantener la formación establecida previamente.

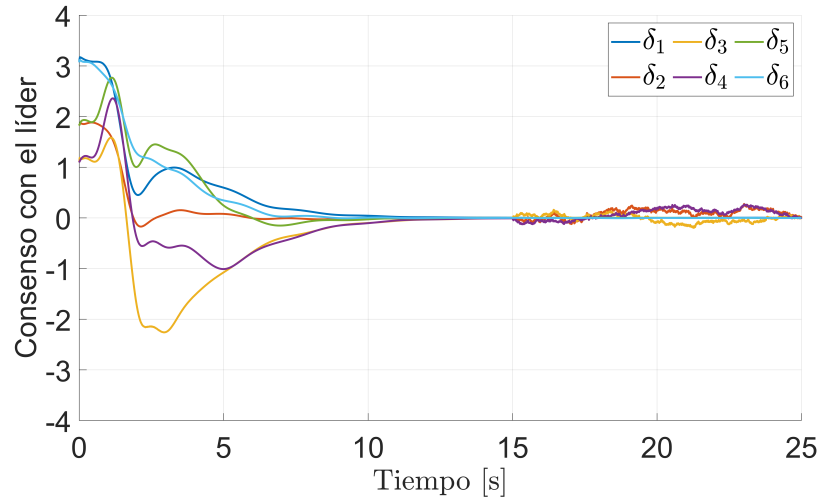


Figura C.2. Error de sincronización.

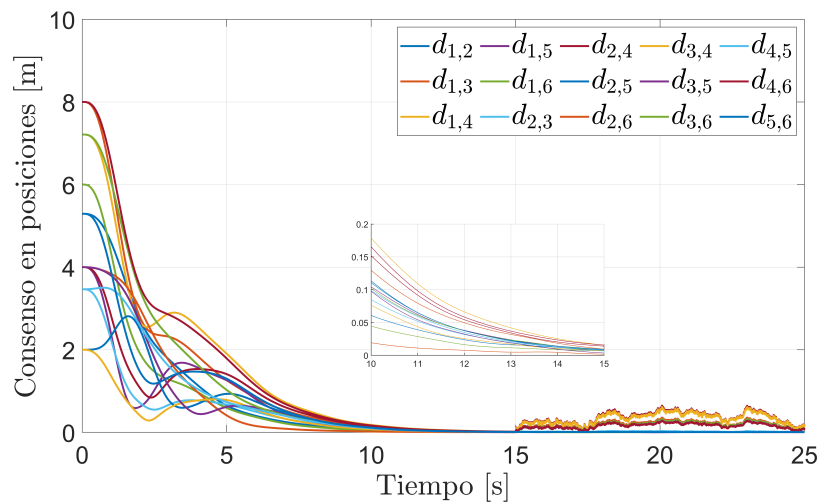


Figura C.3. Distancias relativas entre los UAVs.

A partir del tiempo $t \geq 15$ s, se evidencian los efectos generados por la perturbación en las señales de control, especialmente en el empuje. Inicialmente, el sistema opera con ganancias nominales obtenidas por medio del Teorema 2 durante el intervalo $0 < t < 17$ s. Es crucial destacar que este

teorema no considera el criterio de optimización por H_∞ . A partir de $t \geq 17$ s, las ganancias son ajustadas utilizando la resolución de (4.16). Este ajuste conlleva al sistema a exhibir una capacidad efectiva de rechazo de perturbaciones en las señales de control.

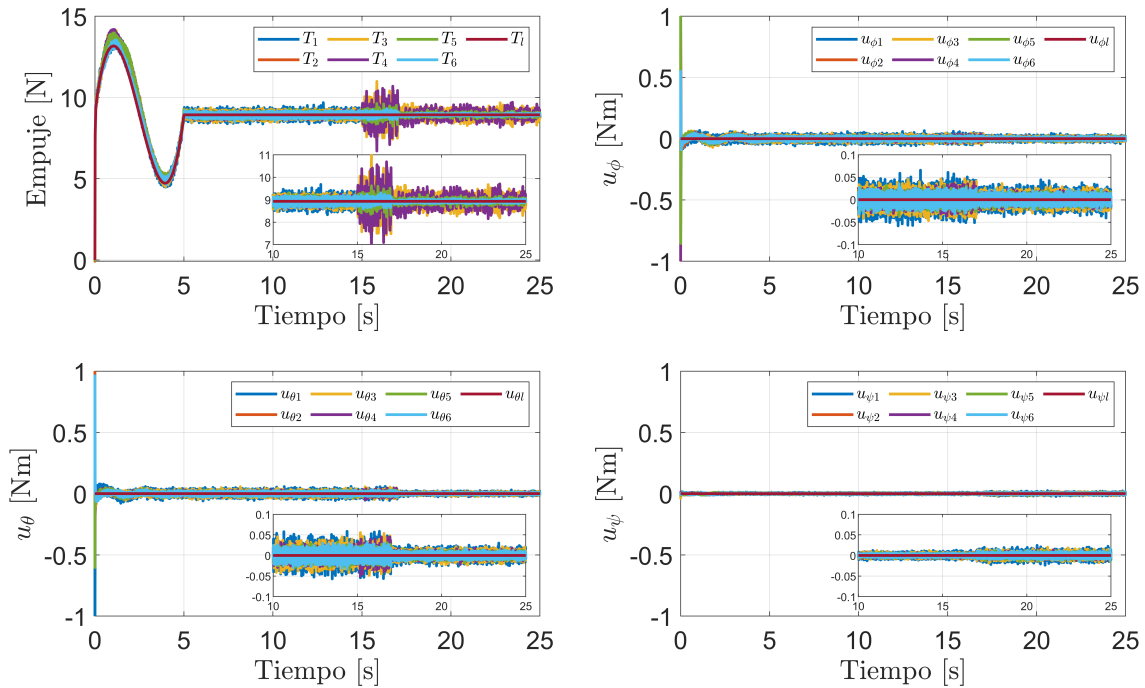


Figura C.4. Entradas de control de los UAVs y líder virtual.

A partir de $t \geq 15$ s, los efectos causados por la perturbación en los UAVs 2,3 y 4 se hacen evidentes. En $t \geq 17$ s, se visualiza el impacto del criterio H_∞ . En consecuencia, el rechazo de la perturbación se muestra en las velocidades de los rotores de los UAV 2,3 y 4.

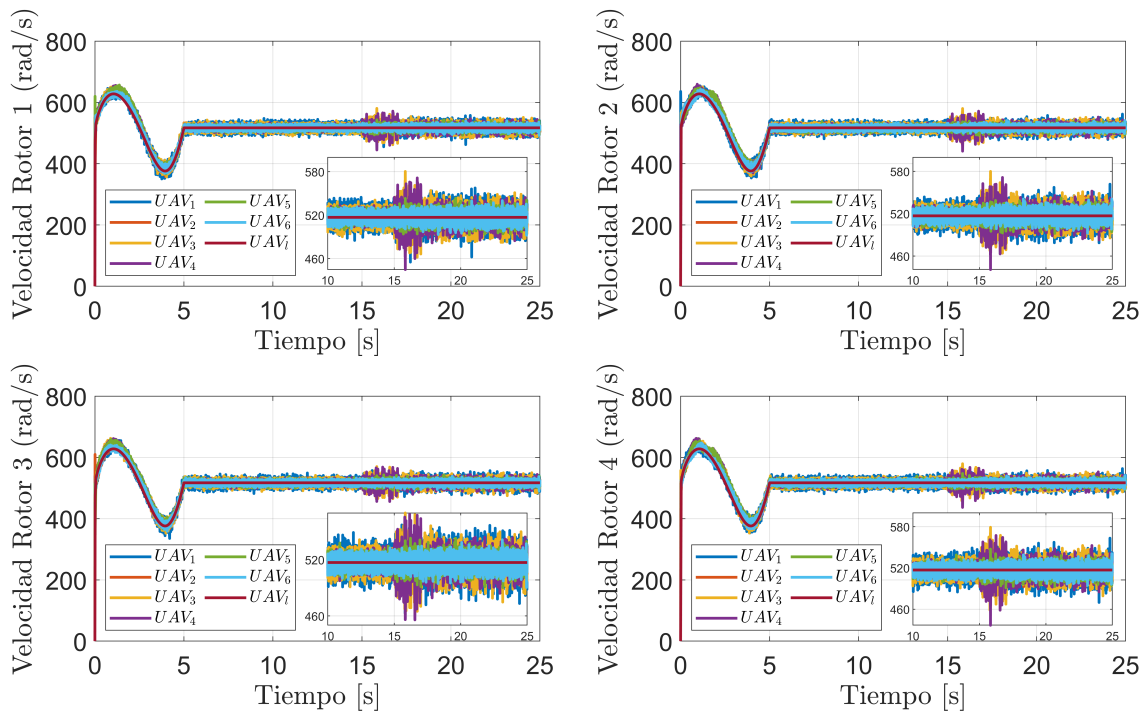


Figura C.5. Velocidades de cada rotor de los agentes y líder virtual.

Los parámetros variantes se mantienen dentro de los límites establecidos, como se muestra en la Figura C.6.

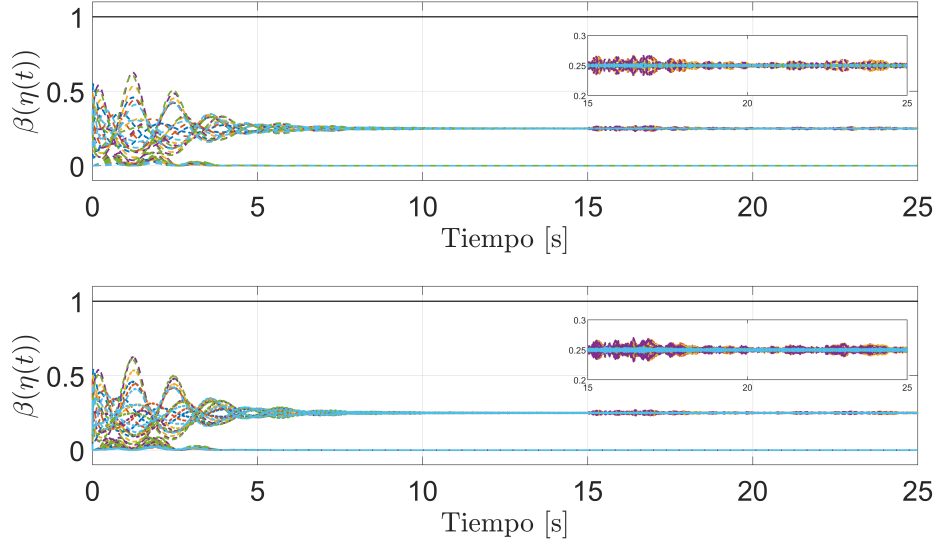


Figura C.6. Funciones de programación.

Resultados de simulación: Formación Pentágono

Las condiciones iniciales de las posiciones tanto del control y observador son presentados en la Tabla C.2, se considera velocidades traslaciones y rotacionales igual a 0, en todos los agentes y en el observador.

Tabla C.2. Condiciones iniciales del sistema y observador.

UAV	p_x [m]	p_y [m]	p_z [m]	\hat{p}_x [m]	\hat{p}_y [m]	\hat{p}_z [m]
1	6	-5	0	8	-3.5	0
2	3	-5	0	4	-7	0
3	0	-5	0	-1.5	-6	0
4	-3	-5	0	-4	-4	0
5	-6	-5	0	-8	-3	0
Líder	0	0	0	-	-	-

Se define la matriz H para realizar la formación de un pentágono:

$$H = 4 \cdot \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{1}{5}\pi\right) & \text{sen}\left(\frac{3}{5}\pi\right) & \text{sen}(\pi) & \text{sen}\left(\frac{7}{5}\pi\right) & \text{sen}\left(\frac{9}{5}\pi\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{cos}\left(\frac{1}{5}\pi\right) & \text{cos}\left(\frac{3}{5}\pi\right) & \text{cos}(\pi) & \text{cos}\left(\frac{7}{5}\pi\right) & \text{cos}\left(\frac{9}{5}\pi\right) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

Donde: El número 4 hace referencia al radio de la circunferencia inscrita en el pentágono. La comunicación con el líder virtual es denotada por $\Lambda = \text{diag}(1, 0, 0, 0, 0)$.

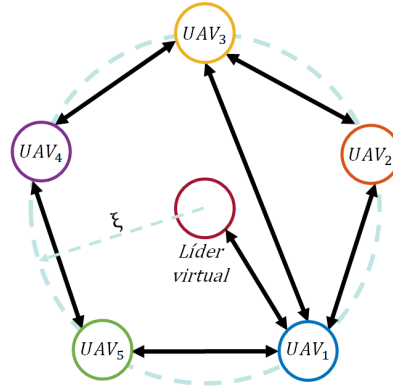


Figura C.7. Topología de comunicación entre agentes y líder.

En base a la topología de comunicación Fig. 4.2 se obtiene la matriz Laplaciana:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Para calcular las ganancias de los vértices del control K_z y las ganancias de los vértices del observador L_z , utilizamos el *software Matlab* con el *toolbox SDPT3* [43] para encontrar la solución LMI (4.31) propuesta en el Teorema 2. Esto implicó el uso de la representación q-LPV del UAV (3.8). Para este caso específico, establecimos el valor de $\mu = 0.02$. En esta simulación, utilizamos una señal de perturbación específica para el agente 3, la cual se muestra en la Figura 4.11.

La Figura C.8 muestra las trayectorias de los UAVs y del líder virtual. Se observa que logran alcanzar la formación del pentágono.

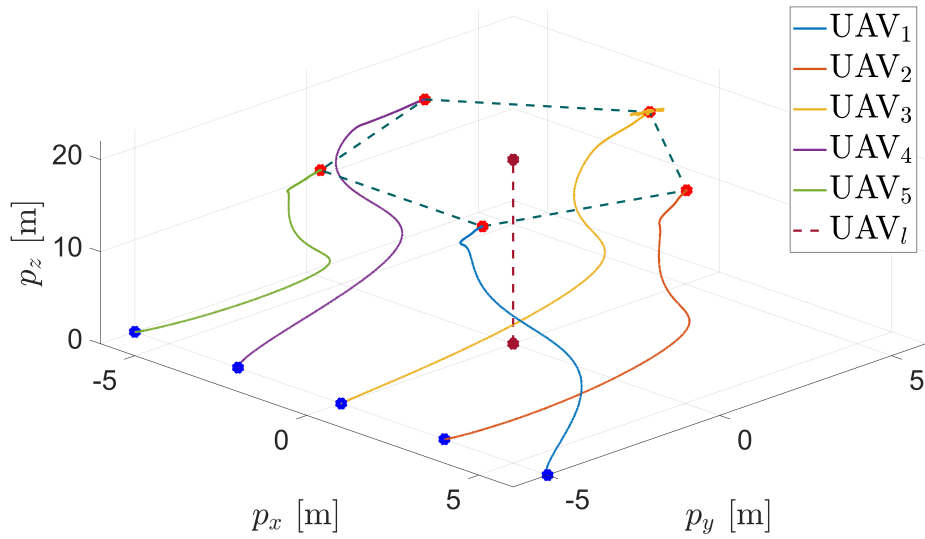


Figura C.8. Trayectorias de los UAVs hacia una formación hexagonal a 20 metros de altura.

En C.9 y C.10, muestran el consenso con el líder y consenso en posiciones, respectivamente. Se ilustra el efecto que provoca la perturbación en en el sistema multi-agente.

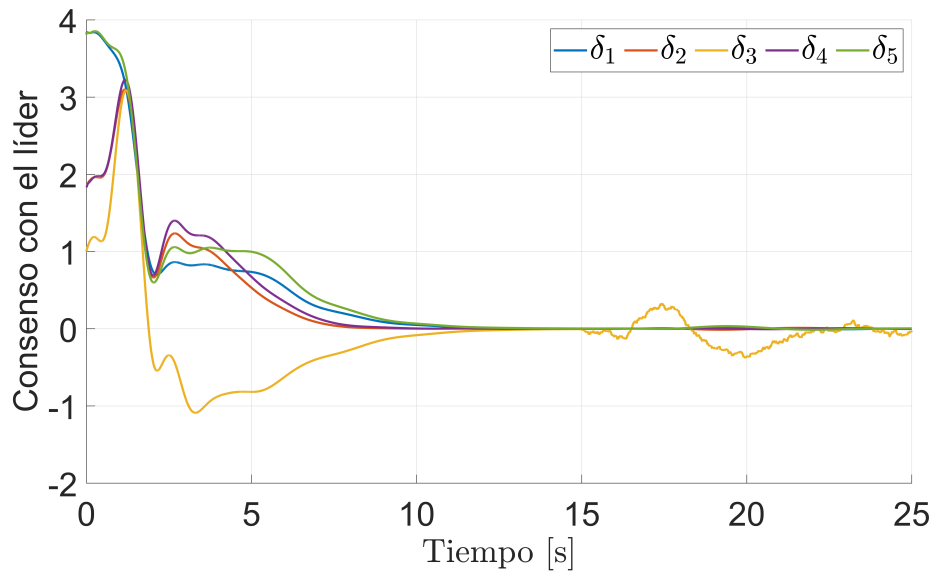


Figura C.9. Error de sincronización.

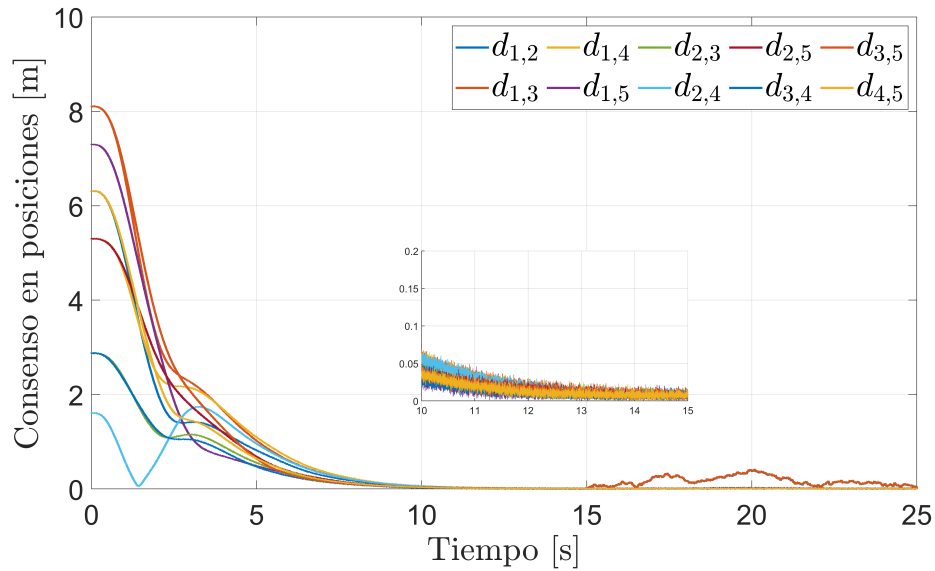


Figura C.10. Distancias relativas entre los UAVs.

En el tiempo $t \geq 15$ s, los efectos causados por la perturbación se visualizan en las señales de control, principalmente en el empuje (ver Figura C.11). En la Figura se muestran las señales de control de los UAVs. El sistema inicia con ganancias normales hasta $t < 17$ s. A partir de $t \geq 17$ s, se implementan las ganancias de control robusto. Este cambio se manifiesta en una reducción notable de las fluctuaciones en la señal de empuje, indicando una mayor estabilidad y precisión en el control del dron. Esta transición es crucial para minimizar perturbaciones y mejorar la respuesta del sistema, lo que es evidente en la suavidad y reducción de las oscilaciones del empuje después del ajuste de las ganancias.

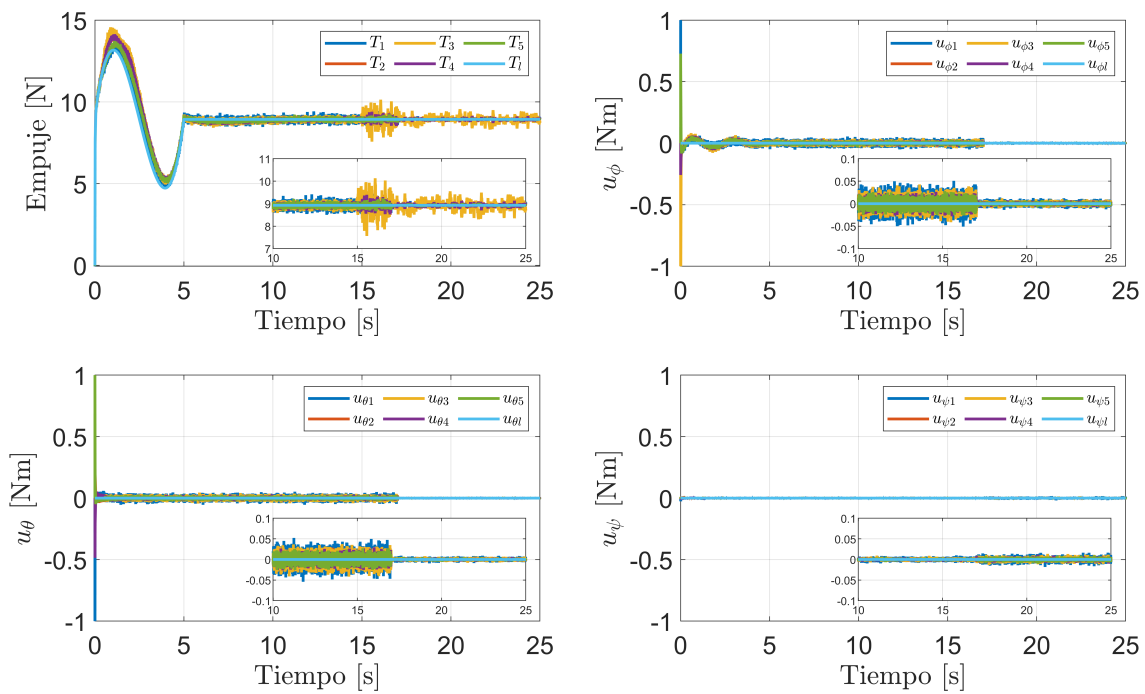


Figura C.11. Entradas de control de los UAVs y líder virtual.

En la Figura C.12, se muestra las velocidades de cada motor de los 5 agentes, se aprecia que tienen una reducción en las oscilaciones.

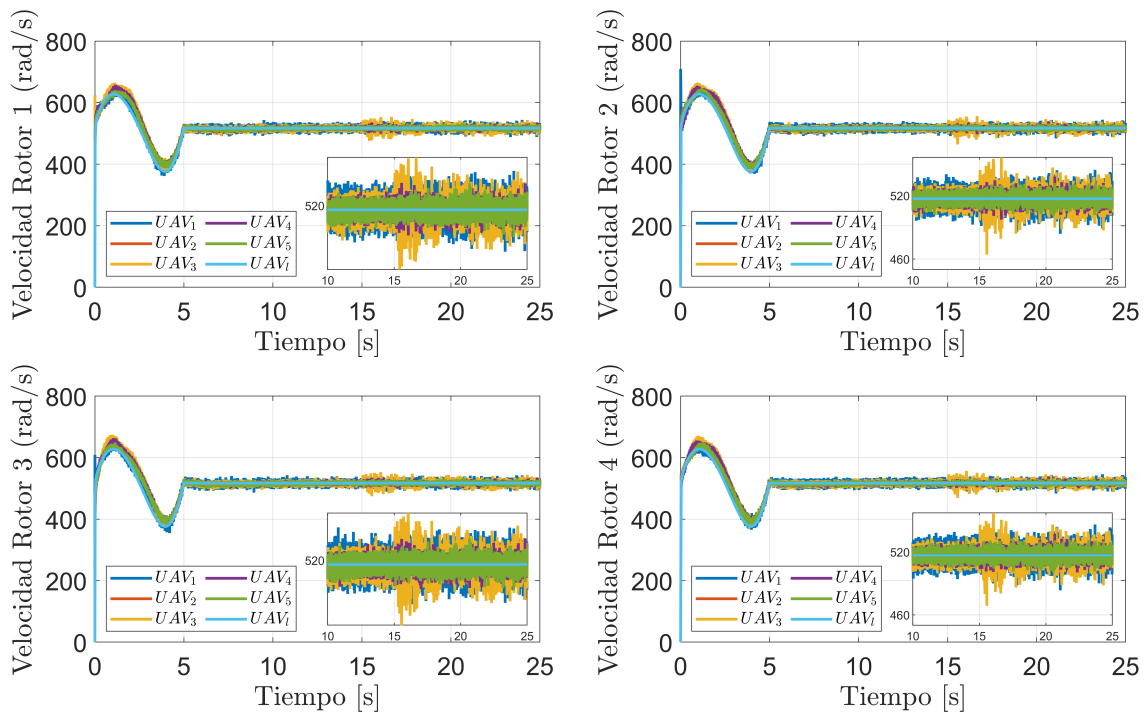


Figura C.12. Velocidades de cada rotor de los agentes y líder virtual.

En la Figura (C.13) se muestra que la condición establecida en (4.39), se cumple para los cinco UAV's.

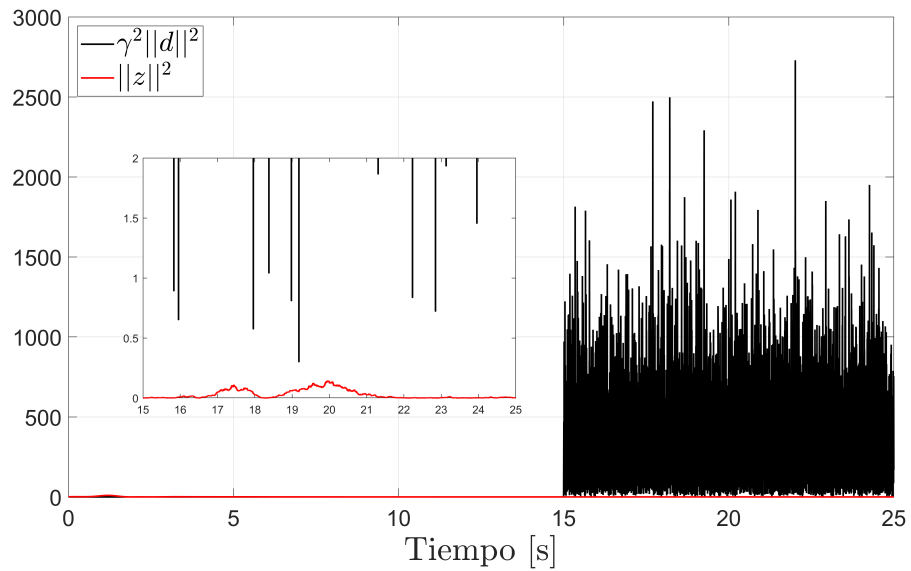


Figura C.13. Comprobación del valor γ .

Los parámetros variantes se mantienen dentro de los límites establecidos, como se muestra en la Figura C.14.

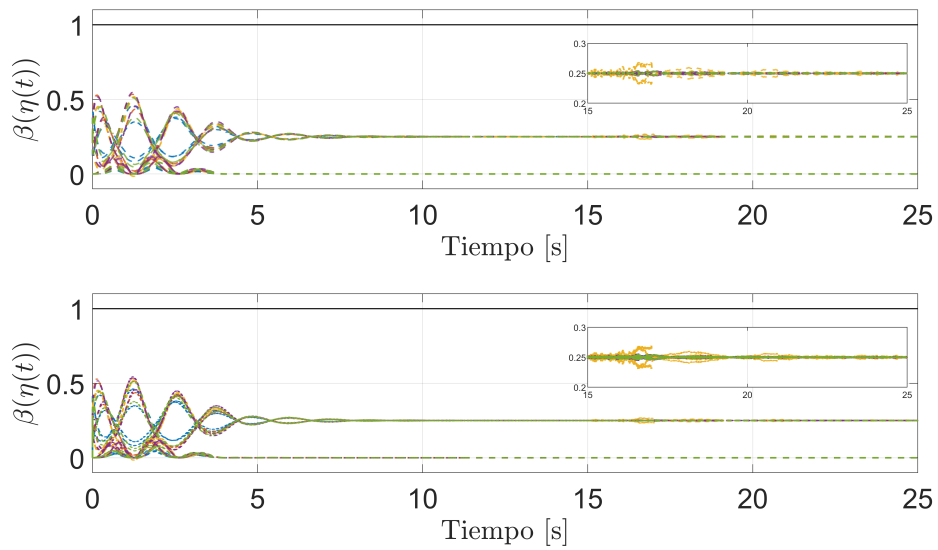


Figura C.14. Funciones de programación.