



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Doctorado

Diseño de Observadores Adaptables para la
Estimación de Parámetros en Sistemas No Lineales
Lipschitz

presentada por

MC. Pedro Eusebio Alvarado Méndez

como requisito para la obtención del grado de

**Doctor en Ciencias de Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Codirector de tesis

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo

Cuernavaca, Morelos, México. Septiembre de 2024.

 <small>Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico</small>	ACEPTACIÓN DE IMPRESIÓN DEL DOCUMENTO DE TESIS DOCTORAL	Código: CENIDET-AC-006-D20
		Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2008 7.1, 7.2.1, 7.5.1, 7.6, 8.1, 8.2.4	Página 1 de 1

Cuernavaca, Mor., a 12 de agosto de 2024

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
 Subdirector Académico
 Presente

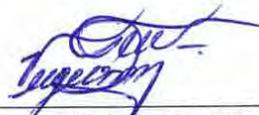
At'n: Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez
 Presidente del Claustro Doctoral
 del Departamento De Ing. Electrónica

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial del estudiante **M.C. PEDRO EUSEBIO ALVARADO MÉNDEZ** manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado **"DISEÑO DE OBSERVADORES ADAPTABLES PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN SISTEMAS NO LINEALES LIPSCHITZ"**, realizado bajo la dirección del **Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza** y la codirección de la **Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo**, el trabajo se **ACEPTA** para proceder a su impresión.

ATENTAMENTE



Dr. Rodolfo Amalio Vargas Méndez
 CENIDET



Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez
 CENIDET



Dr. Juan Reyes Reyes
 CENIDET



Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
 CENIDET



Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
 CENIDET

c.c.p: M.T.I Maria Elena Gómez Torres/ jefa del Departamento de Servicios Escolares.
 c.c.p: Dr. Jarniel García Morales / jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica.
 c.c.p: Expediente.



Cuernavaca, Mor.,
No. De Oficio:
Asunto:

03/septiembre/2024
SAC/301/2024
Autorización de
impresión de tesis

**PEDRO EUSEBIO ALVARADO MÉNDEZ
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“DISEÑO DE OBSERVADORES ADAPTABLES PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN SISTEMAS NO LINEALES LIPSCHITZ”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”



**CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



Dedicatoria

Apolinar Alvarado Castillo Apolinar Alvarado Castillo † y María del Socorro Méndez López †.

Este logro que hoy celebro no habría sido posible sin su amor, apoyo incondicional y guía a lo largo de mi vida. Aunque ya no estén físicamente conmigo, su presencia y enseñanzas han sido la luz que me ha guiado en este camino hacia la culminación de mi tesis. Cada página escrita lleva impreso su amor y dedicación, y cada logro alcanzado es un tributo a su inquebrantable espíritu y sacrificio.

María López de la Paz †.

A mi abuela, que partió de este mundo pero cuyo amor sigue presente en mi corazón. Aunque no puedo abrazarla en este momento, sé que su sabiduría, fortaleza y cariño me acompañarán siempre. Le dedico esta tesis con todo mi amor, agradecida por cada momento que compartimos. Con mucho cariño, su corazón arrugado.

Agradezco profundamente todo lo que han hecho por mí, desde el primer día hasta este momento tan especial. Esta tesis es también su legado, pues cada paso dado ha sido en honor a ustedes y a su memoria.

Con mucho amor Pedro Eusebio Alvarado Méndez.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por haberme permitido terminar satisfactoriamente este trabajo.

A mis padres Apolinar Alvarado Castillo † y María del Socorro Méndez López †, por el inmenso amor que me han otorgado, su cariño, sus sabios consejos a lo largo de mi vida, por apoyarme incondicionalmente en todo momento, y por inculcarme los valores esenciales para avanzar y alcanzar mis metas. A pesar de las adversidades, me enseñaron a seguir adelante. Son mi mayor ejemplo en la vida, y la bandera sigue más alta que nunca. Agradezco profundamente sus enseñanzas y su amor eterno, los cuales perduran en mi corazón y guían cada paso que doy. A pesar de su ausencia física, su legado y sus enseñanzas viven en mi corazón, dándome la fuerza para seguir adelante. Siempre llevaré con orgullo todo lo que me dieron y prometo honrar su memoria en cada momento de mi vida.

A mi abuelita María López de la Paz †, por cuidarme desde que era pequeño, por amarme profundamente y estar siempre a mi lado, por iluminar mi día con tu sonrisa y por todo tu cariño. Tu amor y dedicación han sido una bendición en mi vida, y estoy eternamente agradecido por todo lo que has hecho por mí.

A mis hermanos Jesús Manuel y Ángel Alvarado Méndez, quiero expresarles mi más sincero agradecimiento por motivarme y apoyarme en todo momento. Su constante ánimo y respaldo fueron fundamentales para alcanzar este logro. Gracias por traerme alegría y ser mis compañeros de vida. Sé que siempre podemos contar el uno con el otro, y eso me llena de gratitud y fortaleza. Su apoyo incondicional ha sido una fuente de inspiración, y este logro es tan suyo como mío. Agradezco cada palabra de aliento y cada momento compartido en este viaje.

A mi tía Beatriz Méndez López, quien ha sido una guía constante y un pilar fundamental de apoyo. Gracias por brindarme tu amor y cuidado, por aconsejarme en cada paso del camino. Tu presencia en mi vida ha sido crucial para alcanzar este logro, y siempre llevaré contigo la gratitud y el cariño por todo lo que has hecho por mí.

A mi tía Yolanda de la Cruz López, quiero expresarte mi profundo agradecimiento por todo el cariño, apoyo y respaldo que me has brindado. Tu aliento constante y tu compañía han sido fundamentales en cada paso del camino hacia este logro.

A mi tío Carlos Alberto Méndez López, quiero agradecerte sinceramente por tu constante apoyo, tu cariño y las enseñanzas que me has brindado. Tu apoyo significó mucho para mí.

A mi sobrina Maria Fernanda Alvarado Alcántara, su llegada ha traído una inmensa alegría a mi vida, siendo una fuente constante de motivación. La esperanza y el amor que irradias me inspiran a seguir adelante y a luchar por un futuro mejor. Gracias por recordarme la importancia de perseverar y por ser un motivo de felicidad en cada paso de este camino.

A mis amigos José Mateo, Eduardo Santiago, Laura Covarrubias, Diana Pool y Lenin Patraca, quiero agradecerles de corazón por su apoyo incondicional, por animarme y confiar en mí. Su constante impulso me ha motivado a seguir adelante, y aunque la distancia nos separe en ocasiones, sé que nuestra amistad perdurará siempre.

A mis asesores Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza y Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo, quiero expresar mi profundo agradecimiento por haberme orientado en este proceso, por sus enseñanzas, apoyo constante y amistad. Gracias por creer en mí, por sus valiosos consejos, conocimientos y contribuciones fundamentales en cada etapa de este trabajo de tesis y en momentos difíciles. Vuestra confianza fue crucial para mi desarrollo académico y personal.

A la Dra. Adriana Aguilera González, por su apoyo y seguimiento a lo largo de mi estancia y por orientarme en todo este proceso, por sus enseñanzas y amistad.

A mis revisores el Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, el Dr. Juan Reyes Reyes y Dr. Rodolfo Vargas Méndez, por sus valiosos consejos y observaciones realizadas para obtener mejores resultados de este trabajo de tesis. Agradezco especialmente su amistad y apoyo constante en todo momento.

A mis compañeros y amigos del CENIDET, especialmente Felipe Ramírez, Elizabeth Cavita, Eduardo Durán, gracias por hacer agradable mi estancia, por su amistad sincera. A pesar de su amistad, ustedes son como una familia para mí. Gracias por motivarme a perseverar y por todo el camino recorrido juntos. Cuídense mucho, espero encontrarnos de nuevo pronto.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para la realización de mi doctorado, así como por proporcionarme la oportunidad de avanzar en mi desarrollo profesional.

Finalmente, agradezco al Tecnológico Nacional de México y al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por recibirme y proporcionarme las herramientas y habilidades necesarias para mi formación académica.

Resumen

Se expone en esta disertación el análisis y creación de observadores adaptables para sistemas no lineales.

Un sistema no lineal Lipschitz es una clase de sistemas no lineales que satisface la propiedad de existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales. Es decir, supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Si el sistema satisface el Teorema de Existencia y Unicidad, entonces significa que el sistema tiene una solución y que esta solución es única. Este teorema se debe al matemático alemán Rudolf Lipschitz. Por lo tanto, todos los sistemas de ecuaciones diferenciales que satisfacen el teorema anterior se conocen como sistemas Lipschitz.

Uno de los mayores desafíos en la teoría de control es la identificación de las variables de estado de un sistema a partir de sus entradas y salidas. Este problema puede dividirse en dos categorías dependiendo del momento en que se requiere estimar el estado en relación con el intervalo de tiempo en que se registran las entradas y salidas del sistema. Del mismo modo a veces no es posible conocer algunos parámetros que sin ellos no podemos conocer el comportamiento de los sistemas.

Un problema que se plantea para el diseño de observadores es el modelado y el conocimiento de los valores precisos de los parámetros del sistema. Existen diferentes sistemas cuyos parámetros pueden cambiar con el tiempo (envejecimiento, desgaste) o que algún parámetro del sistema no puede ser conocido. En aquellos sistemas en los que existe una incertidumbre de sistema o alteración de los parámetros, provoca una problemática para la estimación de estados cuyo resultado son ser inexacto al no considerar las perturbaciones que se presenten.

A través de este trabajo se desarrolla el diseño de observadores Lipschitz no lineales adaptativos, con el fin de conocer los parámetros desconocidos, y así visualizar el comportamiento dinámico de los estados, aplicado a diferentes escenarios donde se presentan perturbaciones externas tanto en los estados como en las salidas del sistema. Con el fin de estimar, monitorizar y diagnosticar diferentes sistemas no lineales Lipschitz, disimulando las interferencias del sistema mediante el criterio \mathcal{H}_∞ . El observador tiene una estructura no lineal, que consiste en un observador adaptativo \mathcal{H}_∞ que nos ayudará a estimar el parámetro desconocido para monitorizar el funcionamiento del sistema, atenuando la entrada desconocida y consiguiendo así la insensibilidad del observador. Basándonos en la teoría de estabilidad de Lyapunov, se realiza el análisis de estabilidad, donde se asegura una condición ideal para la estabilidad del observador obteniendo sus ganancias mediante LMI, satisfaciendo el cumplimiento del criterio \mathcal{H}_∞ .

Abstract

This dissertation presents the analysis and creation of adaptive observers for nonlinear systems.

A Lipschitz nonlinear system is a class of nonlinear systems that satisfies the property of existence and uniqueness of the solution of a system of differential equations. That is, suppose we have a system of ordinary differential equations. If the system satisfies the Existence and Uniqueness Theorem, then it means that the system has a solution and that this solution is unique. This theorem is due to the German mathematician Rudolf Lipschitz. Therefore, all systems of differential equations that satisfy the above theorem are known as Lipschitz systems.

One of the main problems of control theory is the estimation of the state variables of a system from its input and output functions. The problem of estimating the states of a system can be subdivided into two categories depending on the instant of time at which the estimated state is needed with respect to the time period over which the inputs and outputs of the system are measured. In the same way it is sometimes not possible to know some parameters that without them we cannot know the behavior of the systems.

A problem that arises for the design of observers is modeling and knowing the precise values of the system parameters. There are different systems whose parameters may change over time (aging, wear) or that some system parameter cannot be known. In those systems where there is a modeling uncertainty or variation in the parameters, it causes a problem for the estimation of the states whose result can be inaccurate if we do not take into account these considerations.

Through this work the design of adaptive nonlinear Lipschitz observers is developed, in order to know the unknown parameters, and thus visualize the dynamic behavior of the states, applied to different scenarios where external disturbances are presented both in the states and outputs of the system. In order to estimate, monitor and diagnose different Lipschitz nonlinear systems, dissimulating the system interferences by means of the \mathcal{H}_∞ criterion.

The observer has a nonlinear structure, featuring an adaptive observer \mathcal{H}_∞ that assists in estimating the unidentified parameter to oversee system operation, attenuating the unknown input and thereby achieving observer insensitivity. Utilizing Lyapunov stability theory, stability analysis is conducted, ensuring an ideal stability condition for the observer by determining its gains via LMIs, while meeting the \mathcal{H}_∞ criterion for performance.

Publicaciones

Artículo publicado

- P.-E. Alvarado-Mendez, C.-M. Astorga-Zaragoza, G.-L. Osorio-Gordillo, A. Aguilera-González, R.-A. Vargas-Méndez and J. Reyes-Reyes. " \mathcal{H}_∞ State and Parameter Estimation for Lipschitz Nonlinear Systems". Mathematical and Computational Applications, 04 de Julio 2024, 29(4), 51.

Artículos de conferencia

- P.-E. Alvarado-Mendez, C.-M. Astorga-Zaragoza, O. Hernandez-Gonzalez, G.-L. Osorio-Gordillo, F. Ramirez-Rasgado. " \mathcal{H}_∞ Adaptive Observer for Nonlinear Systems with Uncertainies". Congreso Nacional de Control Automático, 13 – 15 de Octubre, 2021. Guanajuato, Guanajuato, México.
- P.-E. Alvarado-Mendez, C.-M. Astorga-Zaragoza, O. Hernandez-Gonzalez, G.-L. Osorio-Gordillo, F. Ramirez-Rasgado. " \mathcal{H}_∞ adaptive observer for nonlinear systems with disturbed output". Congreso Nacional de Control Automático, 12 – 14 de Octubre, 2022. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
- P.-E. Alvarado-Mendez, C.-M. Astorga-Zaragoza, A. Aguilera- González, G.-L. Osorio-Gordillo, J. Reyes-Reyes. Estimation of multiple unknown parameters using adaptive observers for Lipschitz nonlinear systems. Congreso Nacional de Control Automático, 25 – 27 de Octubre, 2023. Acapulco, Guerrero, México.

Índice general

Índice de tablas	IX
Índice de figuras	X
Nomenclatura	XII
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Objetivo	3
1.2.1. Objetivo general	3
1.2.2. Objetivos específicos	3
1.3. Justificación	3
1.4. Hipótesis	4
1.5. Estado del arte	4
1.5.1. Observadores para sistemas no lineales	4
1.5.2. Observadores adaptables	5
1.5.3. Observadores \mathcal{H}_∞	6
1.5.4. Conclusión	7
1.6. Alcance	9
1.7. Organización del documento	9
2. Generalidades sobre los sistemas no lineales y observadores	10
2.1. Sistemas no lineales	10
2.1.1. Existencia y unicidad	12
2.1.2. Condición Lipschitz	12
2.2. Observadores	15
2.2.1. Observadores para sistema no lineales	15
2.2.2. Regiones LMI	17
2.3. Observadores de estado para sistemas no lineales Lipschitz	18
2.3.1. Dinámica de error estimada se obtiene de la siguiente manera:	19
3. Observadores adaptables	20
3.1. Observador adaptable basado en el criterio \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz.	24
3.1.1. Demostración del Teorema 2	25
3.2. Observador adaptable basado en enfoque \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz con salida perturbada.	27
3.2.1. Prueba del Teorema 3	28

3.3. Observador adaptable basado en enfoque \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz con presencia de perturbaciones en los estados y en la salida del sistema.	30
3.3.1. Demostración del Teorema 4	31
3.4. Observador adaptable para sistemas no lineales Lipschitz con el fin de estimar múltiples parámetros desconocidos.	35
3.4.1. Demostración del Teorema 5	36
3.5. Observador adaptable \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz con presencia de incertidumbres en los estados del sistema.	39
3.5.1. Diseño del observador adaptable H_∞	41
4. Resultados	44
4.1. Suspensión semiactiva magnetoreológico	44
4.1.1. Espacio de estados no lineal	45
4.1.2. Simulación del modelo matemático de una suspensión semiactiva magnetoreológico	46
4.2. Respuesta del observador adaptable 3.1 Lipschitz aplicado a una suspensión semiactiva de un cuarto de vehículo	50
4.3. Respuesta del observador adaptable Lipschitz 3.4 aplicado a una suspensión semiactiva de un cuarto de vehículo	55
4.4. Respuesta del observador adaptable Lipschitz 3.5 aplicado a una suspensión semiactiva de un cuarto de vehículo ante presencia de perturbaciones	62
4.5. Intercambiador de calor	69
4.5.1. Simulación del modelo matemático del intercambiador de calor	70
4.6. Respuesta del observador adaptable Lipschitz 3.1 aplicado a un intercambiador de calor .	72
4.7. Respuesta del observador adaptable Lipschitz 3.2 aplicado a un intercambiador de calor con presencia de perturbación en la salida	76
4.8. Respuesta del observador adaptable Lipschitz aplicado a un intercambiador de calor 3.5 ante presencia de perturbaciones	80
5. Conclusión	86
Bibliografía	88

Índice de tablas

1.1. Tabla de estado del arte	8
4.1. Lista de variables del modelo.	45
4.2. Lista de variables del modelo.	69
4.3. Tabla de parámetros.	72

Índice de figuras

1.1. Observador adaptable	2
2.1. Condiciones Lipschitz	13
4.1. Diagrama de una suspensión semiactiva	44
4.2. Posición del perfil de suelo	47
4.3. Posición del chasis del sistema al aplicarse un perfil de suelo.	48
4.4. Velocidad del chasis del sistema al aplicarse un perfil de suelo.	48
4.5. Posición del neumático del sistema al aplicarse un perfil de suelo.	49
4.6. Velocidad del neumático del sistema al aplicarse un perfil de suelo.	49
4.7. Posición vertical del pistón	50
4.8. Perfil de suelo	51
4.9. Rigidez de la llanta	53
4.10. Posición del chasis z_u vs \hat{x}_1	54
4.11. Posición del neumático z_{us} vs \hat{x}_2	54
4.12. Deflexión del amortiguador y_3 vs \hat{z}_{def}	55
4.13. Perfil de suelo	56
4.14. Rigidez del chasis	59
4.15. Rigidez de la llanta	60
4.16. Posición del chasis z_u vs \hat{x}_1	60
4.17. Posición del neumático z_{us} vs \hat{x}_2	61
4.18. Deflexión del amortiguador z_{def} vs \hat{z}_{def}	61
4.19. Perfil de suelo	62
4.20. Perturbación en el actuador η	63
4.21. Rigidez de la llanta	66
4.22. Posición del chasis x_1 vs \hat{x}_1	67
4.23. Posición del neumático x_3 vs \hat{x}_2	67
4.24. Deflexión del amortiguador z_{def} vs \hat{z}_{def}	68
4.25. Temperaturas de salida	71
4.26. Coeficiente de transferencia de calor	74
4.27. Temperatura del agua fría x_1 vs \hat{x}_1	74
4.28. Temperatura del agua caliente x_2 vs \hat{x}_2	75
4.29. Comparación entre la salida disponible $y(t)$ y la no disponible $\bar{y}(t)$ del sistema, temperatura de agua caliente.	78
4.30. Valor de $\eta(t)$	78
4.31. Coeficiente de transferencia de calor	79
4.32. Temperatura del agua fría x_1 vs \hat{x}_1	79
4.33. Temperatura del agua caliente x_2 vs \hat{x}_2	80

4.34. Perturbación η	83
4.35. Coeficiente de transferencia de calor	83
4.36. Temperatura del agua fría x_1 vs \hat{x}_1	84
4.37. Temperatura del agua caliente x_2 vs \hat{x}_2	84

Nomenclatura

Letras mayúsculas

L	Ganancia del observador
K	Ganancia del observador
A	Matriz de dimensiones apropiadas

Letras minúsculas

t	Tiempo
$u(t)$	Vector de las entradas
$x(t)$	Vector de las variables de estado
$y(t)$	Vector de las variables de salida
$e(t)$	error de estimación

Letras griegas

α	Función globalmente Lipschitz
β	Función globalmente Lipschitz
γ	Constante Lipschitz
Γ	Ganancia del observador
θ	Parámetro desconocido

Marcas diacríticas

\cdot	Derivada respecto al tiempo
$\hat{}$	Estimado

Caracteres especiales

\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
$\ \cdot\ $	Norma euclidiana
$\ a\ $	Norma de una constante

Abreviaturas

FDD	Detección y diagnóstico de fallas
MR	Magnetoreológico
LPV	Lineales con parámetros variables
LMI	Desigualdad matricial lineal
GDO	Observador dinámico generalizado
SMO	Observadores de modo deslizante
UAV	Vehículo aéreo no tripulado

Capítulo 1

Introducción

El problema del diseño de observadores para sistemas no lineales que satisfacen la condición Lipschitz ha sido objeto de constante investigación. Los observadores para dichos sistemas fueron inicialmente considerados por Thau (1973), quien proporcionó un criterio suficiente para asegurar la estabilidad asintótica del error de observación. Motivados por las aportaciones de Thau, diversos autores han llevado a cabo estudios sobre el diseño de observadores para sistemas no lineales Lipschitz empleando diferentes métodos (Zemouche et al., 2017), (Zemouche et al., 2016b), (Shaheen et al., 2020). Por ejemplo, Zemouche et al. (2017), aborda el problema del diseño de observadores robustos para sistemas no lineales Lipschitz con incertidumbres. Los autores proponen un procedimiento de diseño nuevo basado en desigualdades matriciales lineales (LMIs) y discute su aplicación en la estabilización mediante observadores. En otro trabajo, Zemouche et al. (2016b) propone un diseño de observadores basado en el criterio H_∞ para sistemas no lineales Lipschitz, utilizando condiciones mejoradas de desigualdades matriciales lineales (LMIs).

En el contexto de los sistemas no lineales, existen numerosos trabajos que han tratado la observación, el control y la detección de fallas para diferentes tipos de sistemas no lineales Lipschitz, sin embargo, el enfoque de estimación de parámetros para este tipo de sistemas con fines de monitorización no ha sido abordado en su totalidad.

La monitorización de procesos está normalmente orientada a la verificación del comportamiento de algunas variables de estado importantes del proceso. Sin embargo, hay fallas que no pueden detectarse, causando daños al sistema. Esta es una de las razones por las que todavía se requieren operadores humanos para la supervisión de procesos.

La aparición de perturbaciones generalmente provoca cambios en los parámetros del proceso o en las variables de estado del proceso, dependiendo del tipo de perturbación. Estos cambios pueden generar modificaciones en las salidas medibles, que corresponden al comportamiento del proceso. Mediante este procedimiento basado en modelos, es posible atenuar y detectar la presencia de diversas perturbaciones utilizando algunos sensores virtuales robustos.

1.1. Planteamiento del problema

Cuando se desea diseñar un algoritmo de control u observador basado en modelo, es importante conocer los parámetros del sistema. Algunos sistemas pueden cambiar sus parámetros con el tiempo (envejecimiento, funcionamiento) o el parámetro no puede ser fácilmente conocido. Por ejemplo, el coeficiente de fricción de un péndulo, la constante de amortiguamiento de un amortiguador. Este tipo de incertidumbre en los parámetros genera dificultades para el diseño de estos algoritmos.

Una alternativa de solución para resolver este problema, es el diseño de observadores adaptables. Un observador adaptable es aquel que estima de manera simultánea tanto los estados como los parámetros, basándose en la medición de las entradas y salidas del sistema. (Ver la Fig. 1.1)

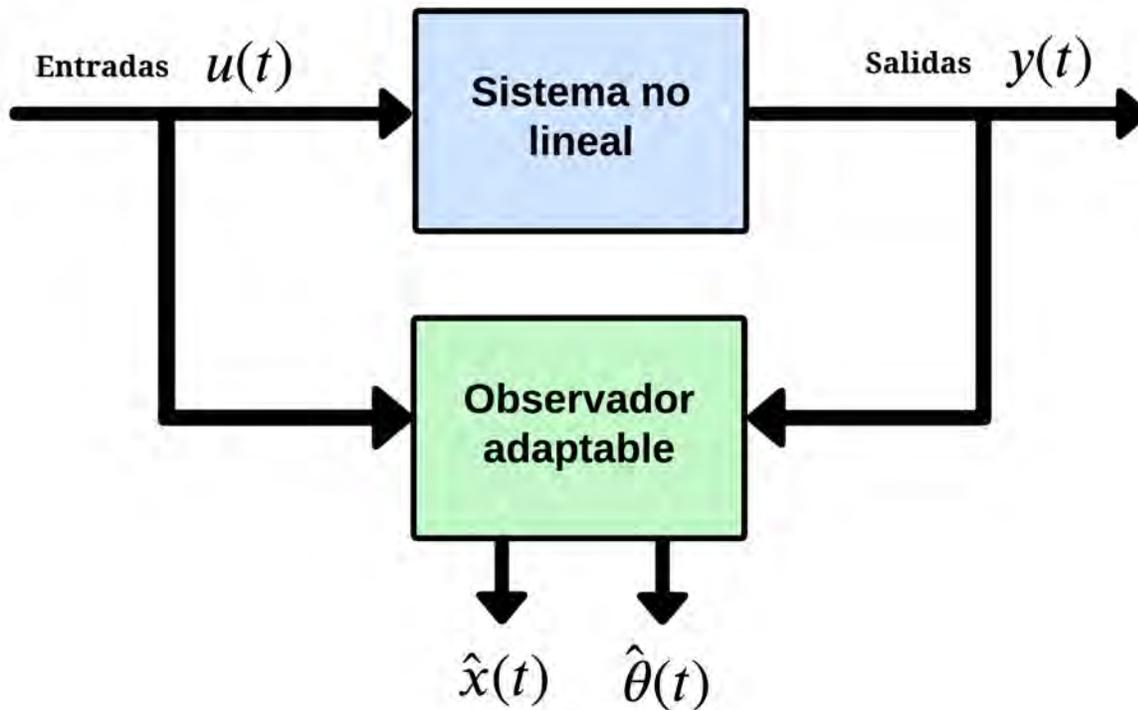


Figura 1.1: Observador adaptable

Una característica importante de resaltar de estos observadores es su capacidad de estimar parámetros que muchas veces son vistos como inciertos o desconocidos. Los cuales pueden ser constantes o variables en el tiempo.

Aunque existen una gran cantidad de trabajos acerca de la observación, el control y la detección de fallas de sistemas lineales y no lineales, existen aun trabajos pendientes por explorar en lo que respecta a la supervisión de sistemas no lineales con parámetros desconocidos.

La supervisión de procesos suele tener por objeto garantizar el correcto funcionamiento de un sistema mediante la medición o estimación de variables de estado importantes. Sin embargo, los métodos tradicionales de control pueden fallar a la hora de detectar ciertas fallas, especialmente en sistemas no lineales en los que la relación entre variables puede ser compleja.

Las técnicas de estimación de parámetros podrían desempeñar un papel crucial a la hora de resolver este problema, actualizando continuamente los parámetros del modelo en función de los datos observados y aumentando así la precisión de los sistemas de vigilancia. Al estimar con precisión los parámetros del sistema, es posible predecir su comportamiento dinámico y detectar anomalías o fallas de manera oportuna.

La integración de enfoques de estimación de parámetros en los sistemas de supervisión de procesos podría reducir la dependencia de operadores humanos para la detección de fallas, lo que daría lugar a procesos de

supervisión más fiables y automatizados. Esto, a su vez, podría mejorar la seguridad, eficiencia y fiabilidad del sistema en diversas aplicaciones industriales. La investigación y el desarrollo en este campo podrían contribuir significativamente al avance de la supervisión y el control de procesos.

Existen varios trabajos que se han ocupado de la observación, la monitorización, la detección de fallas ante la presencia de perturbaciones para distintos tipos de sistemas no lineales de tipo Lipschitz. Sin embargo, el enfoque de estimación de parámetros para estos sistemas no lineales de tipo Lipschitz con fines de monitorización ha sido escasamente abordado.

1.2. Objetivo

1.2.1. Objetivo general

Diseñar observadores para la estimación de parámetros variables en sistemas no lineales Lipschitz, con el fin de supervisar el funcionamiento de procesos no lineales con incertidumbres en el modelo.

1.2.2. Objetivos específicos

- Diseñar un observador adaptable para sistemas no lineales Lipschitz.
- Diseñar un observador adaptable para sistemas no lineales Lipschitz con perturbaciones.
- Diseñar un observador para la estimación simultánea de estados y parámetros para sistemas no lineales Lipschitz con perturbaciones.
- Aplicar los observadores a dos caso de estudio: una suspensión semiactiva y un intercambiador de calor.

1.3. Justificación

La estimación de estados ha sido un campo de investigación muy activo debido a sus importantes aplicaciones en las distintas áreas de la ciencia y la ingeniería, como el procesamiento de señales e imágenes, el seguimiento y la navegación, las comunicaciones seguras, el diseño de controles con realimentación de salida, etc. A diferencia de los sistemas lineales, la estimación del estado de los sistemas no lineales es un problema difícil porque no se dispone de un procedimiento sistemático para diseñar observadores no lineales. Se han realizado esfuerzos considerables para desarrollar métodos de diseño de observadores para sistemas no lineales Chen et al. (2015).

Como se mencionó anteriormente, una de las alternativas para la estimación de parámetros desconocidos (constantes o variables) de un sistema, es el diseño de observadores adaptables.

Con la aplicación de los observadores adaptables se puede lograr la estimación de parámetros desconocidos que pueden ser una herramienta útil en el diagnóstico de fallas.

El problema de la estimación conjunta de estados no medibles y parámetros en sistemas lineales y no lineales con observadores adaptables, ha motivado numerosos trabajos, para control adaptable, o recientemente detección y aislamiento de fallas en sistemas dinámicos Farza et al. (2009, 2018).

Este trabajo de tesis está orientado en sistemas no lineales Lipschitz, ya que este tipo de no linealidad está presente en una gran cantidad de aplicaciones reales y se ha demostrado ampliamente su aplicabilidad. Es por ello que el interés de esta tesis es contribuir en el diseño de observadores adaptables Lipschitz con incertidumbres paramétricas y afectado por perturbaciones.

1.4. Hipótesis

Es posible diseñar un observador adaptable capaz de estimar los estados y parámetros en presencia de incertidumbres en sistemas no lineales Lipschitz, con fines de supervisión.

1.5. Estado del arte

Se realiza una búsqueda bibliográfica sobre los diversos temas trascendentes de la tesis. Se analizan las tendencias actuales y se plantean posibles desarrollos futuros. Esta revisión no solo enriquece el conocimiento previo, sino que también señala posibles áreas futuras de los observadores y los sistemas no lineales.

1.5.1. Observadores para sistemas no lineales

En la teoría de control, existe una clase de sistemas dinámicos no lineales cuyas funciones que representan las dinámicas no lineales satisfacen la condición de Lipschitz. Esta clase de sistemas permite modelar una amplia gama de sistemas físicos y por tal motivo una de las áreas de interés en el campo del análisis y control de sistemas no lineales, es el diseño de algoritmos de observación, control y detección de fallas en sistemas tipo Lipschitz (Ahmad and Rehan, 2016). La teoría de control de sistemas no lineales ha experimentado una vigorosa expansión, creciendo rápidamente en artículos y libros de textos científicos uno de ellos son: (Isidori, 2014), (Krstic et al., 1995), (Khalil, 1996), (Sepulchre et al., 2012), (Sastry, 2013), (Van der Schaft and Van Der Schaft, 2000), entre otros.

El problema de diseño de observadores para sistemas no lineales que satisfacen la condición de Lipschitz ha sido un tema de constante investigación. Thau fue el primero en considerar observadores para este tipo de sistemas (Thau, 1973) quien ofreció una condición suficiente para asegurar la estabilidad asintótica del error de observación. Inspirados por el trabajo de Thau, varios investigadores han llevado a cabo estudios sobre el diseño de observadores para sistemas Lipschitz, empleando diferentes enfoques (Shaheen et al., 2020), (Zemouche et al., 2016a), (Zemouche et al., 2016b), (Rajamani, 1998), (Zhu and Han, 2002), (Abbaszadeh and Marquez, 2006), entre otros.

Un observador es un sistema dinámico que puede estimar estados del sistema, si se cumplen las condiciones de observabilidad. Sus primeros diseños fueron para sistemas lineales invariables en el tiempo. El modo de solución se dividía en dos etapas: primero, se realizaba la estimación de parámetros a partir de la parametrización y el filtrado del sistema. Luego, se aplicaba un observador adaptable y, utilizando los parámetros obtenidos, se estimaban los estados del sistema mediante un observador tipo Luenberger (Carroll and Lindorff, 1973), (Ioannou and Sun, 2012), (Zeitz, 1987), (Ciccarella et al., 1993).

Los sistemas no lineales Lipschitz, son una clase de sistemas que cumplen con la condición de existencia y unicidad de las soluciones, también conocida como condición de Lipschitz. Uno de los primeros trabajos en este campo fue realizado por Rajamani and Hedrick (1995). En Besançon (2000), se analiza los dos enfoques de diseño mencionados y se agrupan los sistemas considerados dentro de una clase de sistemas no

lineales en una forma de observación adaptable. El observador diseñado presenta una convergencia asintótica y, al igual que los sistemas considerados, la entrada debe cumplir con el requisito de ser regularmente persistente. Otra corriente importante de diseño incluye los observadores de alta ganancia Gauthier et al. (1992).

Diferentes trabajos donde se utilizan las funciones Lipschitz (Wang et al., 2011), (Ekramian et al., 2013), (Gauthier et al., 1992), (Zemouche et al., 2016a), (Miao and Li, 2017) (Hu, 2006) y donde los autores diseñan diferentes tipos de observadores (orden completo, orden reducido, alta ganancia, generalizado, ya sea sistemas continuos o discretos) donde consideran las condiciones Lipschitz, realizando su análisis de estabilidad y calculando la constante de Lipschitz para el funcionamiento de dichos observadores.

En el trabajo de Zemouche et al. (2017) se propone el diseño de un observador robusto basado en la estabilidad, a través sistemas inciertos de LMIs, desarrollan una técnica basada en LMI para resolver la parte lineal y los sistemas no lineales Lipschitz. Una de sus características son el uso de una nueva descomposición de la matriz, la concesión de grados adicionales de libertad en el diseño del observador y las ganancias de retroalimentación del controlador, la eliminación de toda necesidad de utilizar las limitaciones de igualdad y la incertidumbre en la matriz de entrada.

Algunos de los sistemas no lineales Lipschitz son válidos con una pequeña constante de Lipschitz. Existen ocasiones cuando las constantes de Lipschitz deben ser grandes o se hacen grandes al presentarse una falla en su implementación. Es ahí donde gracias a Hu (2006) denomina las funciones Lipschitz unilaterales, donde se establece el diseño de observadores, que pueden aplicarse para la mayoría de los sistemas no lineales Lipschitz, garantizando la estabilidad en las constantes de Lipschitz. Gracias a este descubrimiento más autores empezaron a trabajar con los sistemas no lineales Lipschitz unilaterales entre ellos: (Hu, 2008), (Jmal et al., 2017), (Coutinho et al., 2019), (Nguyen et al., 2019), (Shaheen et al., 2020).

El éxito de estos observadores se debe a la facilidad para ajustar su ganancia en el término de corrección, además de contar con un error de estimación que converge exponencialmente. Algunas aplicaciones específicas se pueden encontrar en (Févotte et al., 1998), (Targui et al., 2002) y (Garimella and Yao, 2003).

1.5.2. Observadores adaptables

Uno de los primeros observadores adaptables fue diseñado para sistemas lineales por Luders and Narendra (1973), donde se observa el estado e identifica simultáneamente todos los parámetros de un sistema lineal con una sola entrada y una sola salida.

Hay una amplia literatura que aborda los sistemas adaptables con parámetros desconocidos y el problema de la estimación de estados en presencia de parámetros desconocidos Dochain and Perrier (2002), Zhang (2002), Besançon (2007). La solución a este problema se ha planteado desde la aplicación de diversos enfoques de diseño. Actualmente, algunos de los enfoques principales para el diseño de observadores son: el enfoque de Lyapunov Aboky et al. (2002) y el enfoque geométrico Marino and Tomei (1996).

El trabajo de Besançon (2000) se presenta un modelo de espacio de estados, cuyo problema surge cuando la salida medida no coincide con el estado completo y se complica al no conocer algunos de los parámetros del modelo, del cual presenta una solución al problema del cual se propone una "forma de observador adaptable". Esta metodología resalta las propiedades que facilitan una estimación asintótica del estado a pesar de los parámetros desconocidos, junto con características adicionales que permiten la estimación de

dichos parámetros.

En Garimella and Yao (2003), se reporta el diseño de un observador adaptable que considera las incertidumbres en el modelado. Este observador estima estados desconocidos y parámetros constantes en una clase de sistemas no lineales caracterizados por su forma paramétrica de retroalimentación. Se demuestra que el observador adaptable es robusto y posee una propiedad estable de entrada-estado. Esencialmente, para la estimación en línea se utilizan ciertas condiciones de persistencia regular de señales, logrando así una estimación más robusta de los parámetros y una mayor precisión en la estimación de los estados.

En Yu et al. (2003), los autores abordan el problema del diseño de un observador adaptable para sistemas no lineales que pueden ser transformados en un sistema lineal afín a los parámetros mediante una transformación de entrada dependiente de la salida. Una vez que el sistema no lineal se convierte en un sistema lineal afín en los parámetros, se pueden aplicar diversas técnicas de diseño de observadores adaptables para sistemas lineales Carroll and Lindorff (1973).

En Farza et al. (2018) los autores analizan el modelo de diseño del observador se elabora a partir de la dinámica del sistema de estado aumentado con la dinámica de los parámetros desconocidos. Proponen un observador adaptable cuya ganancia se determina resolviendo una ecuación diferencial de Lyapunov, asegurando su convergencia exponencial bajo condiciones adecuadas de excitación persistente, que cumplen con las hipótesis clásicas para el diseño de observadores de estado de alta ganancia.

Además, demuestran que las ecuaciones del observador pueden ponerse bajo una forma adaptable, destacando así su versatilidad para incluir varios observadores adaptables disponibles. Las principales etapas del diseño del observador y sus propiedades de convergencia se ilustran mediante un problema típico que involucra un motor de inducción donde uno apunta a estimar la velocidad mecánica, el par de carga y los flujos del rotor, así como la inductancia y la resistencia del rotor a partir de las mediciones de las corrientes estatísticas.

En Ahmed-Ali et al. (2019) los autores diseñan un nuevo observador adaptable de datos de muestra para estos sistemas y se demuestra que son exponencialmente convergentes en condiciones específicas de excitación persistente que aseguren la observabilidad del sistema y la identificabilidad. El nuevo observador implica un predictor de salida entre muestras que es diferente de los en los observadores existentes y presenta trayectorias continuas del estado y estimaciones de parámetros.

Algunas de las aplicaciones de los observadores adaptables para sistemas no lineales Lipschitz para la estimación son: fermentadores Perrier et al. (2000), reactores de polimerización Astorga et al. (2002), coeficiente de transferencia de calor global de un intercambiador de calor Astorga-Zaragoza et al. (2007), columna de destilación Torres et al. (2013), motor de inducción Farza et al. (2018), reactores nucleares Dong et al. (2019), rigidez del neumático de una suspensión semiactiva Alvarado-Méndez et al. (2019), entre otros.

1.5.3. Observadores \mathcal{H}_∞

En Raoufi et al. (2010) los autores presentan un diseño de observadores de modo deslizantes (SMO) \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz considerando entradas desconocidas, determinando su estabilidad por medio de Lyapunov y obteniendo las ganancias por medio de LMI. Logrando atenuar las perturbaciones y reconstruir la falla desconocida por medio de un controlador de modo deslizante de orden reducido.

En Osorio-Gordillo et al. (2015) los autores consideran el diseño de observadores \mathcal{H}_∞ para sistemas descriptivos, con el objetivo de que el error de estimación dinámica resultante sea estable, dicha solución lo obtienen por medio de LMI, logrando estar los estados y la entrada desconocida, aplicándolo a un ejemplo numérico.

En Gasmi et al. (2018) los autores diseñan un controlador \mathcal{H}_∞ basado en observadores para sistemas discretos no lineales de forma Lipschitz, desarrollando una nueva condición de LMI, asegurando la convergencia asintótica \mathcal{H}_∞ del controlador, mostrando su eficiencia por medio de ejemplos numéricos y comparándolos con otros diseños.

En Ren (2020) la autora propone un observador \mathcal{H}_∞ robusto con el objetivo de estimar la falla y los estados del sistema, aplicándolo a un cuadricóptero. La falla se aplica en el actuador, que presenta perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. El observador logra estimar los estados y la falla simultáneamente, satisfaciendo el rendimiento \mathcal{H}_∞ a través de las LMI.

En Xia et al. (2020) Los autores proponen un observador adaptable \mathcal{H}_∞ , donde abordan la estimación de fallas en los sistemas de navegación y la dinámica del chasis de un vehículo terrestre, empleando una estrategia de optimización convexa en sistemas descriptivo. Logran estimar las ganancias adecuadas del observador y, finalmente, obtienen resultados estimando las fallas que se presentan en el GPS y los estados del vehículo.

1.5.4. Conclusión

Una vez revisado y analizado la literatura, es notorio que el diseño de observadores para sistemas no lineales ha sido ampliamente estudiado, después los observadores para sistemas no lineales Lipschitz se siguen trabajando, uno de los diseños de observadores que enfocan estas características son los observadores adaptables, ya que gracias a su estructura permite estimar parámetros desconocidos del sistema, logrando así conocer sus estados sin importar el número de salidas, en distintos escenarios. En la Tabla 1.1 se muestra una comparativa de la aplicación de estos observadores. Un aporte importante en este trabajo de tesis es la aplicación del criterio \mathcal{H}_∞ , logrando atenuar el impacto de las perturbaciones en la estimación conjunta de estados y parámetros.

Tabla 1.1: Tabla de estado del arte

Sistemas no lineales Lipschitz			
Autor(es)	Observador	Estimación	Aplicación
(Thau, 1973)	Sistemas no lineales	Estados	Académica
(Hu, 2008)	Onesided Lipschitz	Estados	Académica
(Zemouche et al., 2016b)	LPV	Estados	Neurona
(Zemouche et al., 2017)	Robusto	Estados Parámetros	Académica
(Miao and Li, 2017)	Orden completo Orden Reducido	Estados	Numérico
(Gasmi et al., 2018)	H_∞	Estados con perturbaciones	Numérico
(Shaheen et al., 2020)	Generalizado	Estados Parámetros	Numérico
Observadores adaptables			
(Luders and Narendra, 1973)	Sistemas lineales SISO	Estados	Académica
(Besançon, 2000)	SNL Lipschitz	Estados	Académica
(Ekramian et al., 2013)	SNL Lipschitz	Estados Parámetros	Académica
(Farza et al., 2018)	Alta ganancia MIMO	Estados Parámetros	Motor
(Pérez-Estrada et al., 2019)	LPV LMI	Estados Parámetros	Académica
(Ahmed-Ali et al., 2019)	Datos muestreados	Estados Parámetros	Académica
(Xia et al., 2020)	SNL	Estados Parámetros	Vehículo
Observador H_∞			
(Raoufi et al., 2010)	SMO	Estados Fallas	Numérico
(Osorio-Gordillo et al., 2015)	Sistemas descriptivos	Estados Entrada desconocida	Numérico
(Gasmi et al., 2018)	Sistemas discretos Lipschitz	Estados	Numérico
(Ren, 2020)	SNL	Estados Fallas	UAV
(Xia et al., 2020)	Adaptable	Estados Fallas	Vehículo

1.6. Alcance

- Analizar sistemas no lineales Lipschitz.
- Considerar parámetros desconocidos constantes en el tiempo.
- Simular diferentes escenarios de perturbaciones considerando casos físicos.
- Validar del observador propuesto utilizando datos experimentales.
- Implementar la metodología propuesta mediante simulación.

1.7. Organización del documento

Los capítulos que siguen están organizados de la manera siguiente

En el **Capítulo 2** se muestran nociones esenciales sobre los sistemas no lineales y los observadores.

En el **Capítulo 3** se muestra los diseños y los análisis de diferentes observadores adaptables propuestos.

En el **Capítulo 4** se muestran los resultados de los observadores diseñados, aplicados a dos casos de estudios diferentes una suspensión semiactiva y un intercambiador de calor.

En el **Capítulo 5** se muestran las conclusiones de este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Generalidades sobre los sistemas no lineales y observadores

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos acerca de los tipos de sistemas no lineales y los observadores para este tipo de sistemas. En la sección 2.1 se presentan los conceptos relacionados con los sistemas no lineales, así como algunas de sus propiedades importantes, entre ellas, una que es fundamental para el desarrollo de algoritmos de observación: la condición de existencia y unicidad de las soluciones, también conocida como propiedad Lipschitz en honor al matemático alemán Rudolph Lipschitz quien planteó un teorema para determinar si un sistema de ecuaciones diferenciales tiene solución y además si esta solución es única. En la sección 2.2 se presenta el marco teórico sobre los observadores para sistemas lineales y no lineales, así las condiciones necesarias para su diseño.

2.1. Sistemas no lineales

En este trabajo de investigación se parte del estudio de sistemas no lineales, los cuales representan en su mayoría a los sistemas físicos que se encuentran en la naturaleza, por ejemplo, equilibrios múltiples, corrimiento de frecuencias, sistemas de comando de vuelo, manipuladores de robot, sistemas automatizados, entre otros.

Un sistema no lineal es aquel que no cumple con el principio de superposición Khalil and Grizzle (2002). Un ejemplo general se muestra en la Ec. (2.1), donde las no linealidades se clasifican como naturales (que son propias del sistema) o las artificiales (que son provocadas por el diseñador), algunos ejemplos son: funciones trigonométricas, potencias, funciones de saturación, entre otros. La forma más general de representar un sistema no lineal es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde el estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles. La función $f(x, u)$ es un campo vectorial

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{pmatrix}$$

y la función $h(x, u)$ representa cómo las salidas medibles están relacionadas con los estados y entradas del sistema.

Tipos de sistemas no lineales:

A continuación, se describe una breve clasificación de sistemas no lineales.

- Sistemas afines al control con múltiples entradas:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t)g_i(t) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

- Sistemas afines al estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(u(t))x(t) + B(u(t)) \\ y(t) &= C(u(t))x(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

- Sistemas bilineales:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)D_i x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

- Sistemas lineales variables en el tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

- Sistemas lineales constantes:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Observabilidad, universalidad y persistencia

La función principal de un observador es estimar los estados del sistema. Para llevar acabo dicha estimación, es necesario conocer las funciones de entrada y salida de un intervalo de tiempo $[0, t]$, con $t > 0$, que permitan distinguir cualquier par de estados iniciales Fossard and Normand-Cyrot (2012).

Podemos mencionar varios conceptos relacionados como los son:

- La observabilidad del sistema está relacionada con la existencia de una entrada que, para cada par de estados iniciales existan dos trayectorias distintas. En otras palabras, el sistema de la Ec. (2.1) es observable con respecto a las condiciones iniciales, si no admite ningún par indistinguible, es decir que

cualquier estado es indistinguible de x_0 .

- La **universalidad** de una entrada significa la posibilidad, para esta entrada dada, de distinguir todos los pares de puntos iniciales.
- La **persistencia regular** de una entrada es una propiedad necesaria para construir un observador.
- La **indistinguibilidad** en un sistema se relaciona al considerar que dado un par de condiciones iniciales diferentes (x_0, x'_0) sean indistinguibles, es decir, si se cumple lo siguiente:

$$\forall u \in \mathcal{U}, \forall t \geq 0, h(\mathcal{X}_u(t, x_0)) = h(\mathcal{X}_u(t, x'_0)) \quad (2.7)$$

si son condiciones iniciales diferentes y toman la misma trayectoria los dos estados son indistinguibles.

Al existir no linealidades en los sistemas, se presentan diferentes fenómenos. Algunos ejemplos son los siguientes Khalil and Grizzle (2002):

- *Escape de tiempo finito*: Se produce cuando el estado de un sistema no lineal tiende al infinito en un tiempo finito.
- *Múltiples equilibrios aislados*: Un sistema no lineal tiene varios puntos de estabilidad, a los cuales cualquier estado puede converger de acuerdo a su estado inicial propuesto.
- *Ciclos límites*: Un sistema no lineal puede mostrar y conservar sus oscilaciones sostenidas de acuerdo a su amplitud y frecuencias constantes, sin importar la condición inicial.
- *Múltiples modos de comportamiento*: En los sistemas no lineales pueden exhibir diferentes comportamientos de acuerdo al sistema ya sea que este siendo excitado o no. Asimismo, responden a cambios en la amplitud o frecuencia de la señal excitada.
- *Caos*: Un sistema no lineal puede presentar un comportamiento caótico. En este tipo de sistemas, las trayectorias de las variables de estado son distintas para cada condición inicial distinta. Los sistemas caóticos son estables pero las trayectorias no tienden a permanecer fijas en un punto de equilibrio.

2.1.1. Existencia y unicidad

La condición de continuidad de $f(x(t))$ garantiza la existencia pero no la unicidad de la solución y aunque exista una solución, no hay garantía que ésta exista todo el tiempo.

La restricción principal para este propósito es la condición Lipschitz en donde $f(x(t))$ satisface la desigualdad para todo (t, x) y (t, y) en algún vecindario de (t_0, x_0) .

2.1.2. Condición Lipschitz

Se dice que una función es Lipschitz en $x(t)$, si ésta satisface la Ec. (2.8), donde la constante positiva α es llamada constante de Lipschitz y se usan los términos localmente o globalmente para indicar el dominio sobre el cual se cumple la desigualdad.

$$\|f(x(t)) - f(y(t))\| \leq \alpha \|x(t) - y(t)\| \tag{2.8}$$

Para el caso en donde f depende solo de x , una función $f(x(t))$ se dice que es localmente Lipschitz en un dominio (en un conjunto abierto y conectado) $D \subset \mathbb{R}^n$ si cada punto $x_0 \in D$ hay una vecindad alrededor de ζ dada como $D_\zeta(x_0(t)) \subset D$ y una constante α_0 tal que para todo $x(t), y(t) \in D_\zeta(x_0(t))$ Ec.(2.9).

$$\|f(x(t)) - f(y(t))\| \leq \alpha_0 \|x(t) - y(t)\| \tag{2.9}$$

Se dice que es globalmente Lipschitz si es Lipschitz en \mathbb{R}^n . La misma terminología se extiende a una función $f(t,x)$, siempre y cuando la condición de Lipschitz se conserve de manera uniforme en t para todas las t en un periodo de tiempo determinado Fig. 2.1.

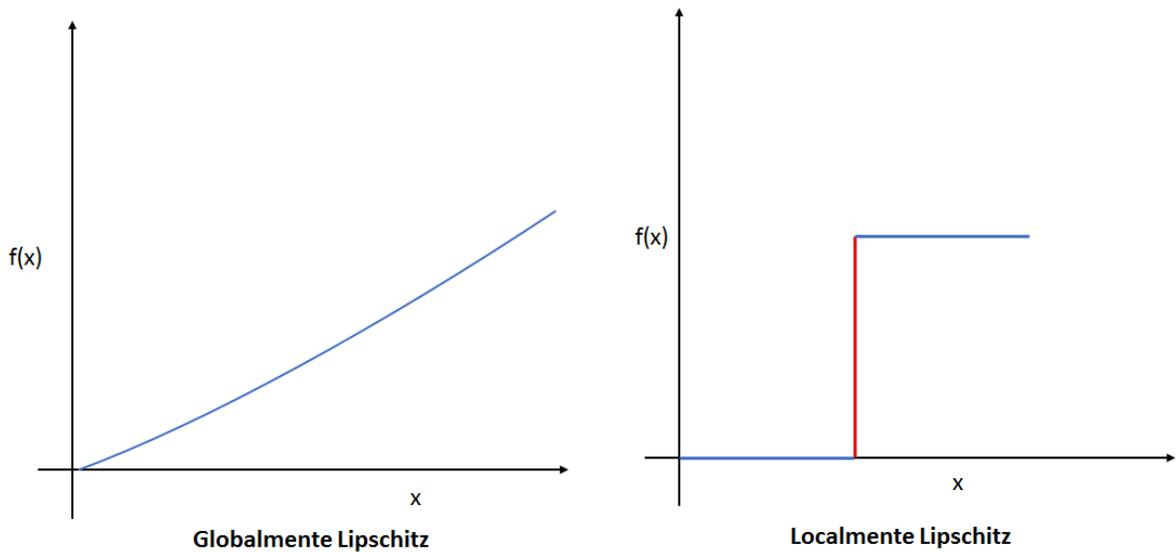


Figura 2.1: Condiciones Lipschitz

Cualquier función discontinua no es localmente Lipschitz en el punto de la discontinuidad.

Ejemplo:

Teniendo las funciones $(f(x(t), \theta(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), \theta(t), u(t)))$ y $(x(t) - \hat{x}(t))$, obtenemos aproximadamente una pendiente de solución.

Trabajando en un conjunto \mathbb{R}^2 se obtiene la trayectoria (norma Euclidiana) de los dos puntos.

$$\alpha = \|\bar{x}(t) - \bar{f}(x)\| \tag{2.10}$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= (x(t) - \hat{x}(t)); \\ \bar{f}(x) &= (f(x(t), \theta(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), \theta(t), u(t))) \end{aligned}$$

obteniendo la trayectoria:

$$\alpha = \sqrt{(x(t) - \hat{x}(t))^2 + (f(x(t), \theta(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), \theta(t), u(t)))^2}. \quad (2.11)$$

Finalmente queda representado de la siguiente manera:

$$\frac{\|f(x(t), \theta(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), \theta(t), u(t))\|}{\|x(t) - \hat{x}(t)\|} \leq \alpha \quad (2.12)$$

donde α representa el valor de la constante de Lipschitz.

Ejemplo: Considerando la siguiente función $f(x)$ definida como:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1x_2 \\ x_2 - x_1x_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

es continuamente diferenciable en \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, es localmente Lipschitz en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, no es globalmente Lipschitz porque:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

no es uniformemente acotada en \mathbb{R}^2 . En cualquier conjunto compacto de \mathbb{R}^2 , f es Lipschitz. Supongamos que queremos calcular una constante de Lipschitz sobre el conjunto convexo:

$$W = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq a_1, |x_2| \leq a_2\}$$

Usando en Ec. (2.14) $\|\cdot\|_\infty$ para vectores \mathbb{R}^2 y la norma matricial inducida para matrices, se tiene:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\infty = \max \{ | -1 + x_2 | + |x_1|, |x_2| + |1 - x_1| \}$$

Todo punto en W satisface:

$$\begin{aligned} | -1 + x_2 | + |x_1| &\leq 1 + a_2 + a_1 \\ |x_2| + |1 - x_1| &\leq a_2 + 1 + a_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\infty \leq 1 + a_2 + a_1$$

y una constante de Lipschitz es entonces $\alpha = 1 + a_2 + a_1$.

Es importante mencionar que la elección de la norma en \mathbb{R}^2 no afecta la propiedad de Lipschitz de una función pero si el valor de la constante de Lipschitz.

2.2. Observadores

Un observador es un sistema dinámico que tiene la capacidad de reconstruir o estimar los estados y/o variables de interés de un proceso o sistema, partiendo de las mediciones físicas de las entradas u y salidas y de este mismo Besançon (2007).

En la detección de fallas, los observadores de estados han sido aliados muy importantes, ya que funcionan como supervisores del funcionamiento de los sistemas Frank and Keller (1980).

Los observadores son útiles para diferentes fines, como lo son la estimación de variables no medibles, detección de fallas, estimación de parámetros, etc.

2.2.1. Observadores para sistema no lineales

La función del observador es estimar los estados de un sistema no lineal, considerando las entradas y salidas del sistema dado. Los observadores funcionan tanto para sistemas lineales y no lineales, siempre y cuando cumplan con el criterio de observabilidad Gauthier et al. (1992). Tomando en cuenta el sistema no lineal Ec.(2.1), se propone el siguiente observador Ec. (2.15):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t), u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= h(\hat{x}(t), u(t))\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde el estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas externas conocidas, y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles, $\hat{x}(t)$ es el vector de estados estimados, $\hat{y}(t)$ es el vector de salidas estimadas y L es la ganancia del observador.

En el diseño de observadores para sistemas no lineales se distinguen dos tipos importantes de sistemas:

- **Sistemas uniformemente observables:** En estos casos, la observabilidad no depende de la entrada del sistema.
- **Sistemas no uniformemente observables:** En estos casos, la observabilidad depende de la entrada, lo que puede llevar a que el sistema pierda su observabilidad en ciertos casos.

Observabilidad

Se menciona que un sistema es observable si no existen pares de estados indistinguibles. La observabilidad no garantiza que algunos estados puedan ser indistinguibles en ciertas situaciones. Esto implica que, en general, la observabilidad no es suficiente para diseñar un observador y que es necesario considerar el problema de las entradas Gauthier and Kupka (1994).

Para determinar si un sistema es observable depende de la salida, para eso se forma una matriz de transformación Ec. (2.16) partiendo de la Ec. (2.1):

$$Obs(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

después se obtiene el Jacobiano de $Obs(x)$:

$$\sigma = \frac{\partial Obs(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial obs_1}{\partial x_1} & \frac{\partial obs_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial obs_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial obs_2}{\partial x_1} & \frac{\partial obs_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial obs_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial obs_n}{\partial x_1} & \frac{\partial obs_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial obs_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

si el rango de la matriz de σ es n alrededor de un punto x_0 , se puede construir el observador para estimar el valor de los estados en la vecindad de x_0 , pero no se puede asegurar que el sistema sea observable para todos los valores de x .

El sistema Ec. (2.1) es observable con respecto a las condiciones iniciales, si no posee pares de estados que no se puedan distinguir entre sí. Sin embargo, la observabilidad no descarta la posibilidad de que existan algunos estados que sean indistinguibles. Esto implica que, en general, la observabilidad por sí sola no es suficiente para diseñar un observador, y es necesario tener en cuenta el problema de las entradas.

La derivada de Lie para un sistema no lineal es $L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)$. La derivada de Lie es una derivación en el álgebra de funciones diferenciales sobre una variedad M .

Si el rango de la matriz de observabilidad, mostrada en la Ec. (2.16), es de rango completo el sistema es observable. Esto solo es valido cuando la matriz de observabilidad no se encuentra en función de la entrada. Con esto, se asegura que el sistema es observable para cualquier entrada. Es decir, considerando que la matriz de observabilidad mostrada en la ecuación (2.16), se asume que las entradas satisfacen $u(t) \in U, \forall t \geq 0$, y que las funciones $f(x)$ y $h(x)$ son funciones lineales de grado n , la matriz de observabilidad es equivalente a la de los sistemas lineales.

Síntesis de observadores para sistemas no lineales.

Considérese el sistema Ec. (2.1), un posible observador para este sistema está dado por la siguiente ecuación:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (2.18)$$

donde $\hat{x}(t)$ y $\hat{y}(t)$ representan las estimaciones de $x(t)$ y $y(t)$ proporcionadas por el observador de estados. La salida estimada se define como:

$$\hat{y}(t) = h(\hat{x}(t)) \quad (2.19)$$

donde K es la ganancia del observador. Esta ganancia puede ser constante o variable según el enfoque utilizado.

El diseño de la matriz de ganancia K se fundamenta en una versión linealizada de la dinámica del error de observación, obtenida mediante la expansión en serie de Taylor de un modelo en espacio de estados alrededor de algún punto de equilibrio. Si definimos el error de observación como:

$$\varepsilon(t) = \|\hat{x}(t) - x(t)\| \quad (2.20)$$

la dinámica del error de observación es:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = f(\hat{x}(t) + \varepsilon(t), u(t)) - f(x(t), u(t)) - K(h(\hat{x}(t) + \varepsilon(t)) - h(x(t))) \quad (2.21)$$

Si se considera una linealización de la ecuación (2.21), donde $\varepsilon = 0$, se obtiene:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = A\hat{x}(t) - KC\hat{x}(t)\varepsilon(t) \quad (2.22)$$

donde A y C son respectivamente iguales a:

$$A = \frac{\partial f(\hat{x}(t))}{\partial \hat{x}(t)}, \quad C = \frac{\partial h(\hat{x}(t))}{\partial \hat{x}(t)}.$$

2.2.2. Regiones LMI

Las regiones LMI nos ayudan determinar los criterios del desempeño dinámico del sistema, donde podemos ubicar los polos y determinar el comportamiento del sistema, así como el amortiguamiento y el tiempo de respuesta, considerando la siguiente Ec. 2.23:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.23)$$

donde se quiere diseñar un observador, de la siguiente manera:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu(t) + L(y(t) - Cx(t)). \quad (2.24)$$

El error de estimación se denota por $e(t)$ y esta dado por la siguiente ecuación:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t). \quad (2.25)$$

Derivando con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (2.26)$$

Ahora, se procede a sustituir en la ecuación anterior, la dinámica de $\dot{x}(t)$ y $\dot{\hat{x}}(t)$ dada por las ecuaciones (2.23) y (2.24), respectivamente. Obteniendo:

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t). \quad (2.27)$$

Ahora, se procede a demostrar que la dinámica del error es estable y convergerá a cero. Para esto, se propone la siguiente función de Lyapunov con $P > 0$:

$$V = e^T P e \quad (2.28)$$

cuya derivada es:

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \quad (2.29)$$

$$\dot{V} = e^T (A - LC)^T P e + e^T P (A - LC) e \quad (2.30)$$

$$\dot{V} = e^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] e \quad (2.31)$$

Por lo tanto:

$$A^T P - C^T L^T P + PA - PLC < 0 \quad (2.32)$$

las matrices a determinar son P y L . Sin embargo, se tiene una bilinealidad y no es posible proponer una LMI para solucionar esta desigualdad. Por lo tanto, se considera $S = PL$, quedando:

$$A^T P - C^T S^T + PA - SC < 0 \quad (2.33)$$

De forma que la desigualdad Ec. (2.33) queda:

$$\begin{bmatrix} P & A^T P - C^T S^T \\ PA - SC & P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.34)$$

Por lo tanto, la ecuación dinámica del error (2.27) es estable (que todas las trayectorias convergen a cero) si y solo si existe una matriz $P = P^T > 0$, positiva definida, y además la LMI (por sus siglas en inglés: linear matrix inequality) (2.34) es definida negativa. La ganancia del observador es $L = P^{-1}S$.

2.3. Observadores de estado para sistemas no lineales Lipschitz

Considere la clase de sistemas no lineales Lipschitz descritos por Trinh and Fernando (2011):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + f(x, u) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde la función no lineal $f(x, u) \in \mathbb{R}^n$ tiene una constante de Lipschitz γ , con respecto a su primer argumento x , es decir,

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\| \quad (2.36)$$

γ es un escalar real positivo.

Considere el siguiente observador de orden completo para el sistema (2.35):

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + f(\hat{x}, u) + L(y(t) - X\hat{x}(t)) \quad (2.37)$$

donde $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es la matriz de ganancia del observador, que se determina de acuerdo con el siguiente Teorema 1.

Teorema 1. *Considere el sistema no lineal Lipschitz (2.35), donde el observador de estados de orden completo está dado por (2.37). La estimación $\hat{x}(t)$ convergerá asintóticamente a $x(t)$ siempre que exista una matriz definida positiva $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, una matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y un escalar positivo δ tal que se cumpla la siguiente LMI:*

$$\begin{bmatrix} A^T Q + QA - GC - C^T G^T + \gamma^2 \delta I_n & Q \\ Q & -\delta I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (2.38)$$

La matriz de ganancia del observador L está dada por $L = Q^{-1}G$

2.3.1. Dinámica de error estimada se obtiene de la siguiente manera:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)e(t) + (f(x, u) - f(\hat{x}, u)) \quad (2.39)$$

Considerando la siguiente función de Lyapunov.

$$V(e) = e^T(t)Qe(t) \quad (2.40)$$

donde $Q = Q^T > 0$ es una matriz definida positiva. La derivada con respecto al tiempo de $V(e)$ es:

$$\dot{V}(e) = e^T(t)(A^T Q + QA - QLC - C^T L^T Q)e(t) + e^T(t)Q\tilde{f} + \tilde{f}^T Qe(t) \quad (2.41)$$

donde para simplificar la expresión $(f(x, u) - f(\hat{x}, u))$ se ha utilizado \tilde{f} . Luego partiendo de la Ec. (2.36) se obtiene: $\tilde{f}^T \tilde{f} \leq \gamma^2 e^T(t)e(t)$. Por lo tanto para cualquier escalar positivo δ , siempre se cumple lo siguiente:

$$\delta \gamma^2 e^T(t)e(t) - \delta \tilde{f}^T \tilde{f} \geq 0. \quad (2.42)$$

Por lo tanto, de (2.42) y (2.41), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T(t)\tilde{A}e(t) + e^T(t)Q\tilde{f} + \tilde{f}^T Qe(t) + \delta \gamma^2 e^T(t)e(t) - \delta \tilde{f}^T \tilde{f} \\ &= \begin{bmatrix} e^T(t) & \tilde{f}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} + \gamma^2 \delta I_n & Q \\ Q & -\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde $\tilde{A} = (A^T Q + QA - QLC - C^T L^T Q)$.

Para garantizar que el error $e(t)$ converja asintóticamente a cero, es suficiente que se cumpla lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} + \gamma^2 \delta I_n & Q \\ Q & -\delta I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (2.44)$$

Si $G = QL$, la desigualdad matricial anterior se convierte en la LMI definida en (2.38). Esto completa la prueba del teorema 1.

Capítulo 3

Observadores adaptables

El observador adaptable tiene la función de estimar un conjunto de parámetros y los estados de un sistema determinado. Existen diversos trabajos dedicados al diseño de observadores adaptables considerando parámetros desconocidos en las ecuaciones de estados o en las de salida, considerando estados medibles y no medibles. Esta metodología resalta las características que posibilitan una estimación asintótica del estado incluso con parámetros desconocidos, junto con otras propiedades adicionales que facilitan dicha estimación.

Los observadores adaptables son herramientas fundamentales tanto para la estimación de parámetros desconocidos como para la estimación de estados no observables en los modelos. Uno de los primeros usos de los observadores adaptables se aplicó a los sistemas lineales a principios de 1970 Luders and Narendra (1973).

Los observadores adaptables son de gran importancia y tienen numerosas aplicaciones en el campo del control, incluyendo el diagnóstico y la detección de fallas en operaciones de procesos. En el diagnóstico de fallas mediante observadores, se considera que estos son una similitud del sistema, y de tal manera, en condiciones normales, la diferencia entre la salida del sistema y la del observador debería ser nula. Sin embargo, en caso de que ocurra una falla, esta diferencia sería diferente de cero, permitiendo así detectar la falla en el sistema. Además, en el ámbito de los procesos, hay parámetros variables que afectan la estimación de estados mediante observadores convencionales. Por lo tanto, es necesario estimar estos parámetros del sistema, tarea que puede llevarse a cabo mediante observadores adaptables.

Observador adaptable para una clase de sistemas no lineales Lipschitz

Considere el siguiente sistema no lineal dado por la Ec. (3.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(\theta, x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles y $\theta \in \mathbb{R}^q$ es el vector de parámetros desconocidos (más adelante, la variación anormal de estos parámetros).

Besançon (2000) propone el diseño de un observador adaptable considerando el modelo dinámico de un sistema no lineal Ec. (3.2) en donde $\alpha(y(t), \zeta(t), u(t), t)$ es una función donde no interactúa el parámetro,

$\beta(y(t), \zeta(t), u(t), t)$ es la función donde interactúa el parámetro y $\zeta(t)$ son los estados no medibles.

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \alpha(y(t), \zeta(t), u(t), t) + \beta(y(t), \zeta(t), u(t), t)\theta(t) \\ \dot{\zeta}(t) &= Z(y(t), \zeta(t), u(t), t)\end{aligned}\quad (3.2)$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}^m$ son las entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ salida medida, $\theta(t) \in \mathbb{R}^q$ es el parámetro desconocido y $\zeta(t) \in \mathbb{R}^r$ son los estados no medibles.

Para cumplir con la condición y que el sistema no lineal se considere adaptable se deben cumplir las siguientes especificaciones:

- (1) El vector de $y(t)$ deben ser salidas medibles.
- (2) Todos los vectores de estados medibles deben ser observables; aquellos que no lo son deben ser detectables.
- (3) Que las funciones α y β cumplan con la condición globalmente Lipschitz.

Se obtiene la siguiente forma del observador adaptable Ec. (3.3):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}(t) &= \alpha(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) + \beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)\hat{\theta}(t) - k_y(\hat{y}(t) - y(t)); \quad k_y > 0, \\ \dot{\hat{\zeta}}(t) &= Z(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t), \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= -k_\theta \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)(\hat{y}(t) - y(t)), \quad k_\theta > 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}^m$ son las entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ salida medida, $\theta(t) \in \mathbb{R}^q$ es el parámetro desconocido, $\hat{\zeta}(t) \in \mathbb{R}^r$ son los estados estimados no medibles, k_y y k_θ son la ganancia de corrección del error del estado y la ganancia de corrección del parámetro respectivamente. Para una mejor implementación se propone que $k_\theta > k_y$, ya que de esta manera el error del parámetro se reduce mientras la señal estimada converge hacia la señal medida.

Análisis de estabilidad

Las ecuaciones del error de estimación de $y(t)$, $\zeta(t)$ y $\theta(t)$ son dadas como:

$$e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad (3.4)$$

$$e_\zeta(t) = \hat{\zeta}(t) - \zeta(t) \quad (3.5)$$

$$e_\theta(t) = \hat{\theta}(t) - \theta(t) \quad (3.6)$$

donde la dinámica del error de estimación (3.4), (3.5) y (3.6) son:

$$\dot{e}_y(t) = \dot{\hat{y}}(t) - \dot{y}(t) \quad (3.7)$$

$$\dot{e}_\zeta(t) = \dot{\hat{\zeta}}(t) - \dot{\zeta}(t) \quad (3.8)$$

$$\dot{e}_\theta(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) - \dot{\theta}(t) \quad (3.9)$$

sustituyendo $\dot{\hat{y}}(t)$ y $\dot{y}(t)$ en (3.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_y(t) &= \alpha(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) + \beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)\hat{\theta}(t) - k_y(\hat{y}(t) - y(t)) - \\
 &\quad [\alpha(y(t), \zeta(t), u(t), t) + \beta(y(t), \zeta(t), u(t), t)\theta(t)] \\
 &= \alpha(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) + \beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)(\hat{\theta}(t) + \theta(t)) - k_y(\hat{y}(t) - y(t)) - \\
 &\quad [\alpha(y(t), \zeta(t), u(t), t) + \beta(y(t), \zeta(t), u(t), t)\theta(t)] \\
 &= \alpha(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - \alpha(y(t), \zeta(t), u(t), t) + \\
 &\quad (\beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - \beta(y(t), \zeta(t), u(t), t))\theta(t) + \\
 &\quad (\beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)\hat{\theta} - k_y(\hat{y}(t) - y(t)) \\
 &= \alpha(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - \alpha(y(t), \zeta(t), u(t), t) + \\
 &\quad [\beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - \beta(y(t), \zeta(t), u(t), t)]\theta(t) + \\
 &\quad (\beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_\theta - k_y e_y(t)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

sustituyendo $\dot{\hat{\zeta}}(t)$ y $\dot{\zeta}(t)$ en (3.8) se obtiene:

$$\dot{e}_\zeta(t) = Z(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - Z(y(t), \zeta(t), u(t), t) \tag{3.11}$$

considerando que $\theta(t)$ es un parámetro constante $\dot{\theta}(t) = 0$, sustituyendo $\dot{\hat{\theta}}(t)$ en (3.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_\theta(t) &= -k_\theta \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)(\hat{y}(t) - y(t)) \\
 &= -k_\theta \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_y(t)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

se propone la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$V_e(t, e_y(t), e_\zeta(t), e_\theta(t)) := \frac{\varepsilon}{2} e_y^T(t) e_y(t) + V(t, e_\zeta(t)) + \frac{\varepsilon}{2k_\theta} e_\theta^T(t) e_\theta(t) \tag{3.13}$$

cuya derivada resulta como:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_e(t, e_y(t), e_\zeta(t), e_\theta(t)) &\leq \frac{\varepsilon}{2} [e_y^T(t) \dot{e}_y(t) + \dot{e}_y^T(t) e_y(t)] + \dot{V}(t, e_\zeta(t)) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon}{2k_\theta} [e_\theta^T(t) \dot{e}_\theta(t) + \dot{e}_\theta^T(t) e_\theta(t)]
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

sustituyendo los valores de (3.10), (3.11) y (3.12) en (3.14), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_e(t, e_y(t), e_\zeta(t), e_\theta(t)) &\leq \frac{\varepsilon}{2} (e_y^T(t) [\alpha(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - \alpha(y(t), \zeta(t), u(t), t) + \\
 &\quad [\beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - \beta(y(t), \zeta(t), u(t), t)]\theta(t) + \\
 &\quad \beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_\theta - k_y e_y(t)] + [\alpha^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - \alpha^T(y(t), \zeta(t), u(t), t) + \\
 &\quad \theta^T(t) [\beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - \beta^T(y(t), \zeta(t), u(t), t)] + \\
 &\quad e_\theta^T(t) \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - e_y^T(t) k_y^T] e_y(t)) + \dot{V}(t, e_\zeta(t)) + \\
 &\quad \frac{\varepsilon}{2k_\theta} [-e_\theta^T(t) k_\theta \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) e_y(t) - (e_y^T(t) k_\theta \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) e_\theta(t))]
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

considerando que:

$$\|\alpha(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - \alpha(y(t), \zeta(t), u(t), t)\| \leq \gamma_\alpha \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} \quad (3.16)$$

$$\|\beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - \beta(y(t), \zeta(t), u(t), t)\| \leq \gamma_\beta \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} \quad (3.17)$$

$$\dot{V}(t, e_\zeta(t)) \leq \frac{\partial V}{\partial t}(t, e_\zeta(t)) + \frac{\partial V}{\partial e_\zeta(t)}(Z(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - Z(y(t), \zeta(t), u(t), t)) \leq -\kappa(e_\zeta(t)) \quad (3.18)$$

Se sustituye las desigualdades (3.16), (3.17) y (3.18) en (3.15) obteniendo:

$$\begin{aligned} \dot{V}_e(t, e_y(t), e_\zeta(t), e_\theta(t)) \leq & \frac{\varepsilon}{2}(e_y^T(t)[\gamma_\alpha \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} + (\gamma_\beta \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))})\theta(t) + \\ & \beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_\theta - k_y e_y(t)] + [\gamma_\alpha \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} + \\ & \theta^T(t)\gamma_\beta \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} + e_\theta^T(t)\beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) - e_y^T(t)k_y^T]e_y(t) - \\ & \kappa(e_\zeta(t)) + \frac{\varepsilon}{2k_\theta}[-e_\theta^T(t)k_\theta \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_y(t) - \\ & e_y^T(t)k_\theta \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_\theta(t)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

simplificando la desigualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_e(t, e_y(t), e_\zeta(t), e_\theta(t)) \leq & \frac{\varepsilon}{2}[e_y^T(t)\gamma_\alpha \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} + e_y^T(t)\gamma_\beta \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))}\theta(t) + \\ & e_y^T(t)\beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_\theta - e_y^T(t)k_y e_y(t) + \\ & \gamma_\alpha \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))}e_y(t) + \theta^T \gamma_\beta \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))}e_y(t) + \\ & e_\theta^T(t)\beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_y(t) - e_y^T k_y^T e_y] - \\ & \kappa(e_\zeta(t)) + \frac{\varepsilon}{2k_\theta}[-e_\theta^T(t)k_\theta \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_y(t) - \\ & e_y^T k_\theta \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_\theta(t)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

reduciendo los términos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_e(t, e_y(t), e_\zeta(t), e_\theta(t)) \leq & \frac{\varepsilon}{2}[2(e_y(t)\gamma_\alpha \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} + e_y(t)\gamma_\beta \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))}\theta(t) + \\ & e_y^T(t)\beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_\theta - k_y \|e_y(t)\|^2)] - \\ & \kappa(e_\zeta(t)) + \frac{\varepsilon}{2k_\theta}[-2k_\theta(e_y^T k_\theta \beta^T(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t)e_\theta(t))] \end{aligned} \quad (3.21)$$

para así obtener:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_e(t, e_y(t), e_\zeta(t), e_\theta(t)) &\leq \varepsilon [e_y(t) \gamma_\alpha \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} + e_y(t) \gamma_\beta \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} \theta(t) + \\
 &\quad e_y^T(t) \beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) e_\theta - k_y \|e_y(t)\|^2] - \\
 &\quad \kappa(e_\zeta(t)) + \varepsilon [e_y^T k_\theta \beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) e_\theta(t)] \\
 \dot{V}_e(t, e_y(t), e_\zeta(t), e_\theta(t)) &\leq \varepsilon e_y(t) \gamma_\alpha \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} + \varepsilon e_y(t) \gamma_\beta \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} \theta(t) + \\
 &\quad \varepsilon e_y^T(t) \beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) e_\theta - \varepsilon k_y \|e_y(t)\|^2 - \\
 &\quad \kappa(e_\zeta(t)) - \varepsilon e_y^T k_\theta \beta(y(t), \hat{\zeta}(t), u(t), t) e_\theta(t)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

finalmente se consigue la derivada de Lyapunov:

$$\dot{V}_e(t, e_y(t), e_\zeta(t), e_\theta(t)) \leq \varepsilon [\gamma_\alpha + \gamma_\beta \theta(t)] e_y(t) \sqrt{\kappa(e_\zeta(t))} - \varepsilon k_y \|e_y(t)\|^2 - \kappa(e_\zeta(t)) \tag{3.23}$$

Considerando que $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $\gamma_\alpha > 0$, $\gamma_\beta > 0$, $k_y > 0$, $k_\theta > 0$ se obtiene la LMI resultante, satisfaciendo la condición Lipschitz, asegurando que el observador logre estimar el parámetro desconocido.

3.1. Observador adaptable basado en el criterio \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz.

Objetivo: El objetivo de este observador es la estimación conjunta del parámetro desconocido y los estados del sistema, aplicando el criterio de \mathcal{H}_∞ para atenuar el impacto de las perturbaciones en la estimación.

Considerando los sistemas no lineales presentados en Ekramian et al. (2013) y Nemati et al. (2019), se presenta siguiente un sistema no lineal:

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\Phi(x, \theta, u) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) \tag{3.25}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $\theta(t) \in \mathbb{R}^q$ son los vectores de estado y parámetro a estimar, respectivamente, $\Psi(y, u) \in \mathbb{R}^n$ es una función que relaciona las salidas con las entradas del sistema. Φ_1 y Φ_2 son las constantes de Lipschitz. Los vectores $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representan las variables de entrada y salida respectivamente. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son matrices de dimensiones apropiadas.

El observador adaptable propuesto para el sistema anterior tiene la siguiente forma:

$$\text{OBS} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\Phi_2(x, u)\hat{\theta}(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \Phi_2^T H(Cx(t) - C\hat{x}(t)), \text{ donde } \Gamma > 0, \end{cases} \tag{3.26}$$

siendo $\hat{x}(t)$ y $\hat{\theta}(t)$ las estimaciones de los vectores de estado y parámetro. Las matrices L y H son las ganancias del observador y deben seleccionarse para garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados a los reales. El observador dado por las ecuaciones (3.26), se emplea para estimar simultáneamente las variables de estado y los parámetros desconocidos $\theta(t)$, siempre y cuando la función

$\Phi(x(t), \theta(t), u(t), t)$ sea Lipschitz.

Tomando en cuenta lo anterior, se presenta el siguiente teorema para el diseño de un observador para la estimación conjunta de estados y parámetros del sistema (3.24).

Teorema 2. *Considere el sistema no lineal (3.24), donde las funciones no lineales Φ_1 y Φ_2 satisfacen la condición Lipschitz. Entonces, si existe una matriz $P = P^T > 0$, una matriz R y una matriz $Q > 0$, tal que satisfagan la siguiente LMI:*

$$\begin{bmatrix} PA - SC + A^T P - C^T S^T + C^T C + R & 0 & P \\ 0 & -\bar{\beta}I & 0 \\ P & 0 & Q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.27)$$

entonces, el estado del observador adaptable H_∞ (3.26) convergerá exponencialmente a una región sujeta a la condición H_∞ .

3.1.1. Demostración del Teorema 2

Los errores de observación se definen como:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad e_\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t) \quad (3.28)$$

$$r(t) = C e_x(t) \quad (3.29)$$

Las dinámicas de $e_x(t)$ y $e_\theta(t)$ son:

$$\dot{e}_x(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (3.30)$$

$$\dot{e}_\theta(t) = \dot{\theta}(t) - \dot{\hat{\theta}}(t) \quad (3.31)$$

Sustituyendo (3.24) y (3.26) en (3.30), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= Ax(t) + B\Phi_2\theta(t) + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) \\ &\quad - A\hat{x}(t) - B\Phi_2\hat{\theta}(t) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)e_x(t) + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) \\ &\quad + B\Phi_2e_\theta(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Considerando que $\theta(t)$ se mantiene constante en θ_0 , se tiene que $\dot{\theta}(t) = 0$, sustituyendo en (3.31), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\theta(t) &= \dot{\theta}(t) - \dot{\hat{\theta}}(t) = 0 - \Gamma\Phi_2^T B H [(Cx(t) - C\hat{x}(t))] \\ \dot{e}_\theta(t) &= -\Gamma\Phi_2^T B H C e_x(t). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Aplicando el criterio H_∞ para reducir la perturbación, donde β es el factor de atenuación.

$$\dot{V}(t) + r^T(t)r(t) \leq \beta^2 \eta^T(t)\eta(t) \quad (3.34)$$

Se propone la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$V(t) = e_x^T(t)P e_x(t) + e_\theta^T(t)\Gamma^{-1} e_\theta(t), \quad P > 0, \Gamma^{-1} > 0 \quad (3.35)$$

La derivada de la función de Lyapunov es:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= e_x^T(t)P\dot{e}_x(t) + \dot{e}_x^T(t)Pe_x(t) + e_\theta^T(t)\Gamma^{-1}\dot{e}_\theta(t) + \dot{e}_\theta^T(t)\Gamma^{-1}e_\theta(t) \\
 \dot{V}(t) &= e_x^T(t)P[(A - LC)e_x(t) + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) \\
 &\quad + B\Phi_2e_\theta(t)] + [(A - LC)e_x(t) + (\Phi_1(x, u) \\
 &\quad - \Phi_1(\hat{x}, u)) + B\Phi_2e_\theta(t)]^T Pe_x(t) \\
 &\quad + e_\theta^T(t)\Gamma^{-1}[-\Gamma B\Phi_2^T HCe_x(t)] \\
 &\quad + [-\Gamma B\Phi_2^T HCe_x(t)]^T \Gamma^{-1}e_\theta(t)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= e_x^T(t)P\dot{e}_x(t) + \dot{e}_x^T(t)Pe_x(t) + e_\theta^T(t)\Gamma^{-1}\dot{e}_\theta(t) + \dot{e}_\theta^T(t)\Gamma^{-1}e_\theta(t) \\
 &= e_x^T(t)P(A - LC)e_x(t) + e_x^T(t)Pe_{\Phi_1} \\
 &\quad + e_x^T(t)PB\Phi_2e_\theta(t) + e_x^T(t)(A - LC)^T Pe_x(t) \\
 &\quad + e_{\Phi_1}^T Pe_x(t) + e_\theta^T(t)\Phi_2^T B^T Pe_x(t) \\
 &\quad - e_\theta^T(t)\Phi_2^T HCe_x(t) - e_x^T(t)C^T H^T \Phi_2e_\theta
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Observe que si se satisface la igualdad $B^T PC^\perp = 0$, esto implica que existe una matriz H , tal que $B^T P = HC$ Ekramian et al. (2013). Con esta consideración, la desigualdad anterior se simplifica quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= e_x^T(t)P(A - LC)e_x(t) + e_x^T(t)Pe_{\Phi_1} \\
 &\quad + e_x^T(t)(A - LC)^T Pe_x(t) + e_{\Phi_1}^T Pe_x(t)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Considerando que $r = Ce_x(t)$, y reemplazando $\dot{V}(t)$ en la Ec. (3.34), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 &= e_x^T(t)P(A - LC)e_x(t) + e_x^T(t)Pe_{\Phi_1} \\
 &\quad + e_x^T(t)(A - LC)^T Pe_x(t) + e_{\Phi_1}^T Pe_x(t) \\
 &\quad + e_x^T(t)C^T Ce_x(t) - \beta^2 \eta(t)^T \eta(t) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Basándose en la condición de Lipschitz generalizada: $e_{\Phi_1}^T Qe_{\Phi_1} \leq e_x^T R e_x$, propuesto en Ekramian et al. (2011), donde Q y R son matrices simétricas positivas definidas, se obtiene:

$$e_x^T(t)[P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C]e_x(t) - \beta^2 \eta^T(t)\eta(t) + e_{\Phi_1}^T Pe_x(t) + e_x^T(t)Pe_{\Phi_1} \leq 0 \tag{3.40}$$

Se obtiene:

$$e_x^T[P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C + PQ^{-1}P + R]e_x - \beta^2 \eta^T \eta \leq 0 \tag{3.41}$$

Se simplifica Ekramian et al. (2013):

$$\begin{aligned}
 e_{\Phi_1}^T Pe_x + e_x^T Pe_{\Phi_1} &= 2e_x^T Pe_{\Phi_1} \\
 &= e_x^T PQ^{-1}Pe_x + e_{\Phi_1}^T Qe_{\Phi_1}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Se ordena de forma matricial y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} e_x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}^T \zeta \begin{bmatrix} e_x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.43}$$

donde:

$$\zeta = \begin{bmatrix} P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C + PQ^{-1}P + R & 0 \\ 0 & -\beta^2 I \end{bmatrix}$$

Finalmente se obtiene la LMI resultante, simplificando el siguiente término $S = PL$, logrando:

$$\begin{bmatrix} PA - SC + A^T P - C^T S^T + C^T C + PQ^{-1}P + R & 0 \\ 0 & -\beta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

Ahora, aplicando el complemento de Schur, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} PA - SC + A^T P - C^T S^T + R & 0 & P \\ 0 & -\beta^2 I & 0 \\ P & 0 & Q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.45)$$

Al existir un elemento al cuadrado, se simplifica $\beta^2 = \bar{\beta}$, para que sea una LMI, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} PA - SC + A^T P - C^T S^T + R & 0 & P \\ 0 & -\bar{\beta} I & 0 \\ P & 0 & Q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.46)$$

Considerando el criterio de H_∞ , se asegura que el ruido y la perturbación están acotadas. Resolviendo la LMI se obtiene la ganancia del observador $L = P^{-1}S$. ■

3.2. Observador adaptable basado en enfoque \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz con salida perturbada.

Objetivo: El objetivo es diseñar un observador adaptable para un sistema no lineal que presenta perturbaciones en los sensores. El observador debe ser capaz de estimar el parámetro desconocido del sistema no lineal con el fin de detectar anomalías y analizar el comportamiento de los estados del sistema, aplicando el criterio de \mathcal{H}_∞ .

La Ec. (3.47) del sistema no lineal pueden escribirse en la siguiente forma:

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) \\ y(t) = Cx(t) + G\eta(t) \end{cases} \quad (3.47)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $\theta(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de parámetros. Los vectores $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representan las variables de entrada y salida respectivamente y $\eta(t) \in \mathbb{R}^r$ representa una perturbación acotada. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $G \in \mathbb{R}^{n \times r}$ son matrices de dimensiones apropiadas.

Las funciones no lineales $\Phi_1(x, u)$ y $\Phi_2(x, u)$ son Lipschitz con respecto a las variables de estado. En consecuencia para un valor acotado de θ , la función no lineal $\Phi(x, \theta, u) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta$ satisface la condición de Lipschitz:

$$\|\Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u)\| \leq \alpha \|x - \hat{x}\| \quad (3.48)$$

siendo α la constante Lipschitz.

El observador adaptable para el sistema anterior tiene la siguiente forma:

$$\text{OBS} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\Phi_2(x, u)\hat{\theta}(t) \\ \quad - L(y - C\hat{x}) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma\Phi_2^T H(Cx(t) - C\hat{x}(t)), \text{ donde } \Gamma > 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

siendo $\hat{x}(t)$ y $\hat{\theta}(t)$ las estimaciones del vector de estados y del vector de parámetros. Las matrices L y H son las ganancias necesarias del observador adaptable y deben escogerse con el fin de garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados. El observador dado por la Ec. (3.49), se emplea para estimar simultáneamente las variables de estado $x(t)$ y los parámetros desconocidos $\theta(t)$, siempre y cuando la función $\Phi(x(t), \theta(t), u(t), t)$ cumpla con la condición Lipschitz.

Teorema 3. *Considere el sistema no lineal (3.47), donde la función no lineal $\Phi(x(t), \theta(t), u(t), t)$ satisface la condición Lipschitz y la función desconocida $\eta(t)$ es acotada. Por lo tanto, si existe una matriz $P = P^T > 0$, una matriz R y una matriz $Q > 0$, tal que satisfagan la siguiente LMI:*

$$\begin{bmatrix} PA - SC + A^T P - C^T S^T + R & -SG & C^T + P \\ -G^T S^T & -\beta I & G^T \\ C + P & G & Q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.50)$$

entonces, el estado del observador adaptable (3.49) convergerá exponencialmente a una región sujeta a la condición H_∞ asegurando su estabilidad.

3.2.1. Prueba del Teorema 3

Los errores de observación se definen como:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.51)$$

$$e_\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t) \quad (3.52)$$

$$r(t) = Ce_x(t) + G\eta(t) \quad (3.53)$$

Las dinámicas de $e_x(t)$ y $e_\theta(t)$ son:

$$\dot{e}_x(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (3.54)$$

$$\dot{e}_\theta(t) = \dot{\theta}(t) - \dot{\hat{\theta}}(t) \quad (3.55)$$

Sustituyendo las Ecs. (3.47) y (3.49) en (3.54), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= Ax(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2\theta(t) \\ &\quad - [A\hat{x}(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\Phi_2\hat{\theta}(t) + LC(x(t) - \hat{x}(t)) + LG\eta(t)] \\ &= Ax(t) + B\Phi_2\theta(t) + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) \\ &\quad - A\hat{x}(t) - B\Phi_2\hat{\theta}(t) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) - LG\eta(t) \\ \dot{e}_x(t) &= (A - LC)e_x(t) + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) + B\Phi_2e_\theta(t) - LG\eta(t) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Considerando que $\theta(t)$ se mantiene constante en θ_0 , se tiene que $\dot{\theta}(t) = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\dot{e}_\theta(t) &= \dot{\theta}(t) - \hat{\theta}(t) = 0 - \Gamma\Phi_2^T H[(Cx(t) - C\hat{x}(t))] \\ \dot{e}_\theta(t) &= -\Gamma\Phi_2^T H C e_x(t)\end{aligned}\quad (3.57)$$

Aplicando el criterio H_∞ , donde β es el factor de atenuación.

$$\dot{V}(t) + r^T(t)r(t) \leq \beta^2 \eta^T(t)\eta(t) \quad (3.58)$$

Para demostrar que el sistema es estable y el error de observación convergerá a una región acotada se propone la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$V(t) = e_x^T(t)P e_x(t) + e_\theta^T(t)\Gamma^{-1}e_\theta(t), \quad P > 0, \Gamma^{-1} > 0 \quad (3.59)$$

La derivada de la función de Lyapunov es:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= e_x^T(t)P\dot{e}_x(t) + \dot{e}_x^T(t)P e_x(t) + e_\theta^T(t)\Gamma^{-1}\dot{e}_\theta(t) + \dot{e}_\theta^T(t)\Gamma^{-1}e_\theta(t) \\ &= e_x^T(t)P(A - LC)e_x(t) + e_x^T(t)P e_{\Phi_1} - e_x^T(t)PLG\eta(t) \\ &\quad + e_x^T(t)PB\Phi_2 e_\theta(t) + e_x^T(t)(A - LC)^T P e_x(t) \\ &\quad + e_{\Phi_1}^T P e_x(t) - \eta^T(t)(LG)^T P e_x(t) + e_\theta^T(t)\Phi_2^T B^T P e_x(t) \\ &\quad - e_\theta^T(t)\Phi_2^T H C e_x(t) - e_x^T(t)C^T H^T \Phi_2 e_\theta(t)\end{aligned}\quad (3.60)$$

Observe que si se satisface la igualdad $B^T P C^\perp = 0$, esto implica que existe una matriz H , tal que $B^T P = HC$ Ekramian et al. (2013). Con esta consideración, la desigualdad anterior se simplifica quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= e_x^T(t)P(A - LC)e_x(t) + e_x^T(t)P e_{\Phi_1} - e_x^T(t)P(LG)\eta(t) \\ &\quad + e_x^T(t)(A - LC)^T P e_x(t) + e_{\Phi_1}^T P e_x(t) - \eta^T(t)(LG)^T P e_x(t)\end{aligned}\quad (3.61)$$

Considerando que $r(t)$ como se muestra en la Ec. (3.53), y reemplazando $\dot{V}(t)$ en la Ec. (3.58), esta queda:

$$\begin{aligned}&e_x^T(t)P(A - LC)e_x(t) + e_x^T(t)P e_{\Phi_1} - e_x^T(t)P(LG)\eta(t) \\ &\quad + e_x^T(t)(A - LC)^T P e_x(t) + e_{\Phi_1}^T P e_x(t) - \eta^T(t)(LG)^T P e_x(t) \\ &\quad + e_x^T(t)C^T C e_x(t) + e_x^T(t)C^T G\eta(t) + \eta^T(t)G^T C e_x(t) \\ &\quad + \eta^T(t)G^T G\eta(t) - \beta^2 \eta^T(t)\eta(t) \leq 0\end{aligned}\quad (3.62)$$

Basándose en la condición de Lipschitz generalizada: $e_{\Phi_1}^T Q e_{\Phi_1} \leq e_x^T R e_x$, propuesto en Ekramian et al. (2011), donde Q y R son matrices simétricas positivas definidas, se obtiene:

$$\begin{aligned}&e_x^T(t)[P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C]e_x(t) - e_x^T(t)P(LG)\eta(t) \\ &\quad \eta^T(t)[G^T G - \beta^2]\eta(t) - \eta^T(t)(LG)^T P e_x(t) + e_{\Phi_1}^T P e_x(t) + e_x^T(t)P e_{\Phi_1} \\ &\quad e_x^T(t)C^T G\eta(t) + \eta^T(t)G^T C e_x(t) \leq 0\end{aligned}\quad (3.63)$$

Se simplifica Ekramian et al. (2013):

$$\begin{aligned}e_{\Phi_1}^T P e_x + e_x^T P e_{\Phi_1} &= 2e_x^T P e_{\Phi_1} \\ &= e_x^T P Q^{-1} P e_x + e_{\Phi_1}^T Q e_{\Phi_1}\end{aligned}\quad (3.64)$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & e_x^T(t)[P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C + PQ^{-1}P + R]e_x(t) \\
 & + \eta^T(t)[G^T G - \beta^2]\eta(t) - e_x^T(t)P(LG)\eta(t) \\
 & - \eta^T(t)(LG)^T P e_x(t) + e_x^T(t)C^T G \eta(t) + \eta^T(t)G^T C e_x(t) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Se ordena de forma matricial y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} e_x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}^T \delta \begin{bmatrix} e_x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.66}$$

donde:

$$\delta = \begin{bmatrix} P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C + PQ^{-1}P + R & P(-LG) + C^T G \\ -(LG)^T P + G^T C & G^T G - \beta^2 I \end{bmatrix}$$

Finalmente se obtiene la LMI resultante, simplificando el siguiente término $S = PL$, logrando:

$$\begin{bmatrix} PA - SC + A^T P - C^T S^T + C^T C + PQ^{-1}P + R & -SG + C^T G \\ -G^T S^T + G^T C & G^T G - \beta^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.67}$$

Ahora, aplicando el complemento de Schur, con el fin de evaluar la estabilidad del sistema, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} PA - SC + A^T P - C^T S^T + R & -SG & C^T + P \\ -G^T S^T & -\beta^2 I & G^T \\ C + P & G & Q \end{bmatrix} < 0 \tag{3.68}$$

Al existir un elemento al cuadrado, se simplifica $\beta^2 = \bar{\beta}$, para que sea una LMI, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} PA - SC + A^T P - C^T S^T + R & -SG & C^T + P \\ -G^T S^T & -\bar{\beta} I & G^T \\ C + P & G & Q \end{bmatrix} < 0 \tag{3.69}$$

Considerando el criterio de H_∞ , se asegura que el ruido y la perturbación están acotadas. Resolviendo la LMI se obtiene la ganancia del observador $L = P^{-1}S$. ■

3.3. Observador adaptable basado en enfoque \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz con presencia de perturbaciones en los estados y en la salida del sistema.

Objetivo: El objetivo es diseñar un observador adaptable para un sistema no lineal, del cual se presenta un sistema no lineal donde se hacen presentes perturbaciones en los estados y en la salida, de tal manera el observador debe ser capaz de estimar el parámetro desconocido del sistema no lineal con el fin de detectar anomalías en el sistema, y detectar el comportamiento de los estados del mismo, aplicando el criterio de \mathcal{H}_∞ para obtener las ganancias del observador.

Se tiene el siguiente sistema no lineal Lipschitz:

$$\mathcal{S}\mathcal{Y}\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) + Rw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Gw(t) \end{cases} \tag{3.70}$$

$$w(t) = \begin{cases} \eta(t) \\ d(t) \end{cases} \quad (3.71)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $\theta(t) \in \mathbb{R}^q$ son los vectores de estados y parámetros a estimar, respectivamente. Los vectores $u \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representan las variables de entrada y salida respectivamente ; $w(t) \in \mathbb{R}^r$ representa el vector de incertidumbres y perturbaciones que afectan al sistema. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times r}$ y $G \in \mathbb{R}^{n \times r}$ son matrices de dimensiones apropiadas.

Las funciones no lineales $\Phi_1(x, u)$ y $\Phi_2(x, u)$ son Lipschitz con respecto a las variables de estado. En consecuencia para un valor acotado de θ , la función no lineal $\Phi(x, \theta, u) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta$ satisface la condición de Lipschitz:

$$\|\Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u)\| \leq \alpha \|x - \hat{x}\| \quad (3.72)$$

siendo α la constante Lipschitz.

El observador adaptable propuesto para el sistema anterior tiene la siguiente forma:

$$OBS : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta}(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma BK(y - C\hat{x}(t)), \text{ donde } \Gamma > 0, \end{cases} \quad (3.73)$$

siendo $\hat{x}(t)$ y $\hat{\theta}(t)$ las estimaciones del vector de estados y del vector de parámetros. Las matrices L y K son las ganancias necesarias del observador adaptable y deben escogerse con el fin de garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados, siempre y cuando la función Φ_1 y Φ_2 cumpla con la condición Lipschitz. Considerando lo anterior, se propone el siguiente teorema:

Teorema 4. *Considere el sistema no lineal (3.70), donde la función no lineal $\Phi(x(t), \theta(t), u(t), t)$ satisface la condición Lipschitz y la función desconocida $w(t)$ es acotada. Por lo tanto, si existe una matriz $P = P^T > 0$, una matriz E y una matriz $Q > 0$, tal que satisfagan la siguiente LMI:*

$$\begin{bmatrix} P(A + LC) + (A^T + C^T L^T)P + PQ^{-1}P + E + C^T C & PB - B^T K^T C & PR + PLG + C^T G \\ B^T P - BKC & 0 & BKG \\ R^T P + G^T L^T P + G^T C & -B^T K^T G^T & -\beta^2 I + G^T G \end{bmatrix} < 0 \quad (3.74)$$

entonces, el estado del observador adaptable (3.73) convergerá exponencialmente a una región sujeta a la condición H_∞ asegurando su estabilidad.

3.3.1. Demostración del Teorema 4

Las ecuaciones del error de estimación de $x(t)$ y $\theta(t)$ son dadas como:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.75)$$

$$e_\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t) \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} r(t) &= y(t) - \hat{y}(t) = Cx(t) + Gw(t) - C\hat{x}(t) = C(x(t) - \hat{x}(t)) + Gw(t) \\ r(t) &= Ce_x(t) + Gw(t) \end{aligned} \quad (3.77)$$

donde la dinámica del error de estimación (3.75) y (3.76) son:

$$\dot{e}_x(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (3.78)$$

$$\dot{e}_\theta(t) = \dot{\theta}(t) - \dot{\hat{\theta}}(t) \quad (3.79)$$

Sustituyendo $\dot{x}(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ en las (3.78) y (3.79) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_x(t) &= Ax(t) + \Psi(u) + \Phi_1(x) + B\theta(t) + Rw(t) \\
 &\quad - [A\hat{x}(t) + \Psi(u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\hat{\theta}(t) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) - LGw(t)] \\
 &= Ax(t) + B\theta(t) + Rw(t) + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) - A\hat{x}(t) - B\hat{\theta}(t) + LC(x(t) - \hat{x}(t)) + LGw(t) \\
 &= (A + LC)(x(t) - \hat{x}(t)) + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) + Rw(t) + B(\theta(t) - \hat{\theta}(t)) + LGw(t) \\
 &= B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta(t) + (A + LC)e_x(t) + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta}(t) \\
 &\quad + Rw(t) + LDw(t) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta(t)
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

considerando que $\theta(t)$ se mantiene constante en θ_0 , se tiene que $\dot{\theta}(t) = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_\theta(t) &= -\Gamma BK[(Cx(t) + Gw(t)) - C\hat{x}(t)] \\
 \dot{e}_\theta(t) &= -\Gamma BKCe_x(t) - \Gamma BK Gw(t)
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Aplicando el criterio H_∞ donde el β es el factor de atenuación, se tiene

$$\dot{V}(t) + r^T(t)r(t) \leq \beta^2 w^T(t)w(t). \tag{3.82}$$

Se propone la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= e_x^T(t)Pe_x(t) + e_\theta^T(t)\Gamma^{-1}e_\theta(t) \\
 &\quad \text{con } P > 0 \text{ y } \Gamma^{-1} > 0
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

derivando con respecto al tiempo, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= e_x^T(t)P\dot{e}_x(t) + \dot{e}_x^T(t)Pe_x(t) + e_\theta^T(t)\Gamma^{-1}\dot{e}_\theta(t) + \dot{e}_\theta^T(t)\Gamma^{-1}e_\theta(t) \\
 &= e_x^T(t)P[(A + LC)e_x(t) + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) + Rw(t) + Be_\theta(t) + LGw(t)] \\
 &\quad + [(A + LC)e_x(t) + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) + Rw(t) + Be_\theta(t) + LGw(t)]^T Pe_x(t) \\
 &\quad + e_\theta^T(t)\Gamma^{-1}[-\Gamma BKCe_x(t) - \Gamma BK Gw(t)] + [-\Gamma BKCe_x(t) - \Gamma BK Gw(t)]^T \Gamma^{-1}e_\theta(t)
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= e_x^T(t)P(A + LC)e_x(t) + e_x^T(t)Pe_{\Phi_1}(x, u) + e_x^T(t)PRw(t) \\
 &\quad + e_x^T(t)PBe_\theta(t) + e_x^T(t)PLGw(t) + e_x^T(t)(A + LC)^T Pe_x(t) \\
 &\quad + e_{\Phi_1}(x, u)^T Pe_x(t) + Rw^T(t)Pe_x(t) + e_\theta^T(t)B^T Pe_x(t) + w^T(t)(LG)^T Pe_x(t) \\
 &\quad - e_\theta^T(t)BKCe_x(t) - e_\theta^T(t)BK Gw(t) - e_x^T(t)B^T K^T Ce_\theta(t) - w^T(t)B^T K^T G^T e_\theta(t)
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Se considera que $B^T PC^\perp = 0$, esto implica que existe una matriz K , tal que $B^T P = KC$ y que $\dot{e}_\theta(t) = -\hat{\theta}(t)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= e_x^T(t)[(A + LC)^T P + P(A + LC)]e_x(t) + 2e_x^T(t)Pe_{\Phi_1}(x, u) \\
 &\quad + e_x^T(t)[PR + PLG]w(t) + e_x^T(t)[PB - B^T K^T C]e_\theta(t) \\
 &\quad + w^T(t)[R^T P + (LG)^T P]e_x(t) + e_\theta^T(t)[B^T P - BKC]e_x(t) \\
 &\quad - e_\theta^T(t)BK Gw - w^T(t)B^T K^T G^T e_\theta(t)
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= e_x^T(t)[(A + LC)^T P + P(A + LC)]e_x(t) + 2e_x^T P Q^{-1/2} Q^{1/2} e_{\Phi_1}(x, u) \\
 &\quad + e_x^T[PR + PLG]w + e_x^T[PB - B^T K^T C]e_\theta \\
 &\quad + w^T[R^T P + (LG)^T P]e_x + e_\theta^T[B^T P - BKC]e_x \\
 &\quad - e_\theta^T BK Gw - w^T B^T K^T G^T e_\theta
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Se procede como lo presentado en Ekramian et al. (2013):

$$\begin{aligned} e_{\Phi_1}^T P e_x + e_x^T P e_{\Phi_1} &= 2e_x^T P e_{\Phi_1} \\ &= e_x^T P Q^{-1} P e_x + e_{\Phi_1}^T Q e_{\Phi_1} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Y se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_x^T(t)[(A + LC)^T P + P(A + LC) + PQ^{-1}P]e_x(t) + e_{\Phi_1}^T Q e_{\Phi_1} \\ &+ e_x^T(t)[PR + PLG]w(t) + e_x^T(t)[PB - B^T K^T C]e_{\theta}(t) \\ &+ w^T(t)[R^T P + (LG)^T P]e_x(t) + e_{\theta}^T(t)[B^T P - BKC]e_x(t) \\ &- e_{\theta}^T(t)BK G w(t) - w^T(t)B^T K^T G^T e_{\theta}(t) \end{aligned} \quad (3.89)$$

basándose en la condición de Lipschitz generalizada: $e_{\Phi_1}^T Q e_{\Phi_1} \leq e_x^T E e_x$, propuesto en Ekramian et al. (2011), donde Q y E son matrices simétricas positivas definidas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_x^T(t)[(A + LC)^T P + P(A + LC) + PQ^{-1}P + E]e_x(t) \\ &+ e_x^T(t)[PR + PLG]w(t) + e_x^T(t)[PB - B^T K^T C]e_{\theta}(t) \\ &+ w^T(t)[R^T P + (LG)^T P]e_x(t) + e_{\theta}^T(t)[B^T P - BKC]e_x(t) \\ &- e_{\theta}^T(t)BK G w(t) - w^T(t)B^T K^T G^T e_{\theta}(t) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Se ordena $\dot{V}(t)$ de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} e_x^T(t) \\ e_{\theta}^T(t) \\ w^T(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(A + LC) + (A^T + C^T L^T)P + PQ^{-1}P + E & PB - B^T K^T C & PR + PLG \\ B^T P - BKC & 0 & BK G \\ R^T P + G^T L^T P & -B^T K^T G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_{\theta}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.91)$$

Se sustituye (3.77) en En. (3.82) y obtenemos:

$$\begin{aligned} r^T(t)r(t) &\leq \beta^2 w^T(t)w(t) \\ (e_x^T(t)C^T + w^T(t)G^T)(C e_x(t) + G w(t)) &\leq \beta^2 w^T(t)w(t) \\ e_x^T(t)C^T C e_x(t) + e_x^T(t)C^T G w(t) + w^T(t)G^T C e_x(t) + w^T(t)G^T G w(t) - \beta^2 w^T(t)w(t) &< 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

Se ordena de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} e_x^T(t) \\ e_{\theta}^T(t) \\ w^T(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C^T C & 0 & C^T G \\ 0 & 0 & 0 \\ G^T C & 0 & -\beta^2 I + G^T G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_{\theta}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.93)$$

Se sustituyen las matrices de la Ec. (3.91) y Ec. (3.93) en Ec. (3.94) y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} e_x^T(t) \\ e_\theta^T(t) \\ w^T(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(A+LC) + (A^T + C^T L^T)P + PQ^{-1}P + E + C^T C & PB - B^T K^T C & PR + PLG + C^T G \\ B^T P - BKC & 0 & BKG \\ R^T P + G^T L^T P + G^T C & -B^T K^T G^T & -\beta^2 I + G^T G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.94)$$

Cumpliendo con la condición H_∞ , donde la perturbación debe estar acotada. Se resuelve la LMI y se obtienen las ganancias K y L . ■

3.4. Observador adaptable para sistemas no lineales Lipschitz con el fin de estimar múltiples parámetros desconocidos.

Objetivo: El objetivo es diseñar un observador adaptable para un sistema no lineal, que sea capaz de estimar más de un parámetro desconocido, con el fin de monitorear el funcionamiento del sistema logrando estimar los estados, aplicando el criterio de \mathcal{H}_∞ .

Se considera una clase de sistemas no lineales Lipschitz descritos por:

$$\mathcal{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \Psi(y, u) + \Phi(x, \theta, u) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.95)$$

con:

$$\Phi(x, \theta, u) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) \quad (3.96)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $\theta(t) \in \mathbb{R}^q$ son los estados y el vector de parámetros desconocidos. Los vectores $u \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representan las variables de entrada y salida del sistema. $\Phi(x, \theta, u)$ es una constante Lipschitz, $\Psi(y, u)$ es una no linealidad. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son las matrices de dimensiones apropiadas. Las funciones no lineales $\Phi_1(x, u)$ y $\Phi_2(x, u)$ son Lipschitz con respecto a las variables de estado. En consecuencia para un valor acotado de θ , la función no lineal $\Phi(x, \theta, u) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta$ satisface la condición de Lipschitz:

$$\|\Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u)\| \leq \gamma \|x - \hat{x}\| \quad (3.97)$$

siendo γ la constante Lipschitz.

El observador adaptable propuesto para el sistema representado por las Ecs. (3.95) y (3.96) con los parámetros desconocidos $\theta(t)$ tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{OBS} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta}(t) \\ \quad + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma\Phi_2^T H(y - C\hat{x}(t)), \text{ donde } \Gamma > 0, \end{cases} \quad (3.98)$$

donde $\hat{x}(t)$ y $\hat{\theta}(t)$ son las estimaciones de los estados y parámetros respectivamente, Γ es un vector definido positivo. Las matrices L y H son las ganancias del observador y deben seleccionarse de tal manera que se garantice la convergencia de los estados y parámetros estimados. El observador dado por la Ec. (3.98), es capaz de estimar simultáneamente las variables de estado $x(t)$ y los parámetros desconocidos $\theta(t)$, siempre que la función dada por la Ec. (3.97) sea Lipschitz.

Los errores de observación se definen como:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.99)$$

$$e_\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t) \quad (3.100)$$

$$r(t) = Ce_x(t) \quad (3.101)$$

Se aplica el criterio H_∞ , donde β es el factor de atenuación y r se muestra en la Ec. (3.101), obtenemos:

$$\dot{V}(t) + r^T(t)r(t) \leq \beta^2 \eta^T(t)\eta(t) \quad (3.102)$$

Cumpliendo las condiciones, se establece el siguiente teorema:

Teorema 5. *Para la Ec. (3.95), con $(\Phi_1; \Phi_2)$ satisfaciendo la condición de Lipschitz, el observador dado por la Ec. (3.98), converge exponencialmente si existen las matrices $P > 0$, $R > 0$ y $Q > 0$ sean simétricas definidas positivas; y si se puede elegir $L = P^{-1}Z$ para garantizar que se satisfaga el LMI siguiente:*

$$\begin{bmatrix} PA - ZC + A^T P - C^T Z^T + R & P & C^T \\ P & -\bar{\beta}I & 0 \\ C & 0 & Q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.103)$$

Por lo tanto, el estado del observador adaptable Ec. (3.98) convergerá exponencialmente a una región sujeta al criterio H_∞ (3.102).

3.4.1. Demostración del Teorema 5

Las dinámicas de (3.99) y (3.100) son:

$$\dot{e}_x(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (3.104)$$

$$\dot{e}_\theta(t) = \dot{\theta}(t) - \dot{\hat{\theta}}(t) \quad (3.105)$$

Sustituyendo a las Ecs. (3.95) y (3.98) en la Ec. (3.104), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= Ax(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) \\ &\quad - [A\hat{x}(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta}(t) + L(y(t) - C\hat{x})(t)] \\ \dot{e}_x(t) &= Ax(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) \\ &\quad - A\hat{x}(t) - \Psi(y, u) - \Phi_1(\hat{x}, u) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta}(t) - L(y(t) - C\hat{x})(t)] \\ \dot{e}_x(t) &= B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta(t) + Ax(t) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) + \Psi(y, u) \\ &\quad + \Phi_1(x, u) - A\hat{x}(t) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta}(t) - \Psi(y, u) \\ &\quad - \Phi_1(\hat{x}, u) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta(t) \\ &= (A - LC)e_x(t) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) - \Phi_1(\hat{x}, u) \\ &\quad - B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta(t) + B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta(t) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta}(t) \\ &= (A - LC)e_x(t) + \Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u) \\ &\quad + B\Phi_2(\hat{x}, u)e_\theta(t) \end{aligned} \quad (3.106)$$

Se obtiene:

$$\dot{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t) + e_\Phi + B\Phi_2(\hat{x}, u)e_\theta(t) \quad (3.107)$$

donde:

$$e_\Phi = \Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u) \quad (3.108)$$

Se considera que $\theta(t)$ permanece constante en $\theta(0)$, tenemos que $\dot{\theta}(t) = 0$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\theta(t) &= \dot{\theta}(t) - \dot{\hat{\theta}}(t) = 0 - \Gamma \Phi_2(\hat{x}, u)^T H [Cx(t) - C\hat{x}(t)] \\ \dot{e}_\theta(t) &= -\Gamma \Phi_2(\hat{x}, u)^T H C e_x(t) \end{aligned} \quad (3.109)$$

Se propone la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$V(t) = e_x^T(t) P e_x(t) + e_\theta^T(t) \Gamma^{-1} e_\theta(t), \quad P > 0, \Gamma^{-1} > 0 \quad (3.110)$$

Se sustituye los valores de las Ecs. (3.107) y (3.109) en Ec. (3.110) y se deriva con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_x^T(t) P \dot{e}_x(t) + \dot{e}_x^T(t) P e_x(t) + e_\theta^T(t) \Gamma^{-1} \dot{e}_\theta(t) + \dot{e}_\theta^T(t) \Gamma^{-1} e_\theta(t) \\ &= e_x^T(t) P [(A - LC)e_x(t) + e_\Phi + B\Phi_2(\hat{x}, u)e_\theta(t)] \\ &\quad + [(A - LC)e_x(t) + e_\Phi + B\Phi_2(\hat{x}, u)e_\theta(t)]^T P e_x(t) \\ &\quad + e_\theta^T(t) \Gamma^{-1} [-\Gamma \Phi_2(\hat{x}, u)^T H C e_x(t)] \\ &\quad + [-\Gamma \Phi_2(\hat{x}, u)^T H C e_x(t)]^T \Gamma^{-1} e_\theta(t) \\ &= e_x^T(t) P (A - LC) e_x(t) + e_x^T(t) P e_\Phi \\ &\quad + e_x^T(t) P B \Phi_2(\hat{x}, u) e_\theta(t) + e_x^T(t) (A - LC)^T P e_x(t) \\ &\quad + e_\Phi^T P e_x(t) + e_\theta(t) B^T \Phi_2(\hat{x}, u)^T P e_x(t) \\ &\quad - e_\theta^T(t) \Phi_2(\hat{x}, u)^T H C e_x(t) - e_x^T(t) \Phi_2(\hat{x}, u) H^T C e_\theta(t) \end{aligned} \quad (3.111)$$

Se simplifica Ekramian et al. (2013):

$$\begin{aligned} e_{\Phi_1}^T P e_x + e_x^T P e_{\Phi_1} &= 2e_x^T P e_{\Phi_1} \\ &= e_x^T P Q^{-1} P e_x + e_{\Phi_1}^T Q e_{\Phi_1} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Considerando que si se cumple la igualdad $B^T P C = 0$, esto implica que existe una matriz H , tal que $B^T P = H C$ Ekramian et al. (2013). Con esta consideración, la desigualdad anterior se simplifica a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_x^T(t) P (A - LC) e_x(t) + e_x^T(t) P e_\Phi \\ &\quad + e_x^T(t) (A - LC)^T P e_x(t) + e_\Phi^T P e_x(t) \\ &= e_x^T(t) [(A - LC)^T P + P (A - LC)] e_x(t) + 2e_x^T(t) P e_\Phi \end{aligned} \quad (3.113)$$

Considerando que r en la Ec. (3.101), y reemplazando \dot{V} en la Ec. (3.102), se obtiene:

$$\begin{aligned} &e_x^T(t) P (A - LC) e_x(t) + e_x^T(t) P e_\Phi \\ &\quad + e_x^T(t) (A - LC)^T P e_x(t) + e_\Phi^T P e_x(t) \\ &e_x^T(t) [(A - LC)^T P + P (A - LC)] e_x(t) + 2e_x^T(t) P e_\Phi \\ &\quad + e_x^T(t) C^T C e_x(t) - \beta^2 \eta^T(t) \eta(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Con base en la condición de Lipschitz generalizada: $e_{\Phi}^T Q e_{\Phi} \leq e_x^T R e_x$, propuesta por Ekramian et al. (2011), donde Q y R son matrices simétricas definidas positivas, obtenemos:

$$\begin{aligned} e_x^T(t) [P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C + PQ^{-1}P + R] e_x(t) \\ - \beta^2 \eta^T(t) \eta(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.115)$$

La desigualdad anterior se ordena de forma matricial y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} e_x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}^T \aleph \begin{bmatrix} e_x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.116)$$

donde:

$$\aleph = \begin{bmatrix} P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C + PQ^{-1}P + R & P \\ P & -\beta^2 I \end{bmatrix}$$

Finalmente, la LMI resultante se obtiene simplificando el siguiente término $Z = PL$, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} PA - ZC + A^T P - C^T Z^T + C^T C + R & P \\ P & -\beta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.117)$$

Ahora, aplicando el complemento de Schur, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} PA - ZC + A^T P - C^T Z^T + R & P & C^T \\ P & -\beta^2 I & 0 \\ C & 0 & Q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.118)$$

Al existir un elemento al cuadrado, se simplifica $\beta^2 = \bar{\beta}$, para que sea una LMI, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} PA - ZC + A^T P Z C^T Z^T + R & P & C^T \\ P & -\bar{\beta} I & 0 \\ C & 0 & Q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.119)$$

Resolviendo la LMI se obtienen las ganancias del observador L y H , las cuales permiten la correcta estimación de los parámetros desconocidos y los estados. ■

3.5. Observador adaptable \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz con presencia de incertidumbres en los estados del sistema.

Objetivo: El objetivo es diseñar un observador adaptable \mathcal{H}_∞ para un sistema no lineal Lipschitz, del cual se presenta un sistema no lineal donde se hacen presentes incertidumbres en los estados, de tal manera el observador debe ser capaz de estimar el parámetro desconocido y los estados del sistema no lineal con el fin de detectar anomalías en el sistema, y atenuar las perturbaciones que se presenten en el mismo.

Se considera una clase de sistemas no lineales Lipschitz descritos por:

$$\text{SYS} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \Psi(y, u) + \Phi(x, \theta, u) + N\eta(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.120)$$

con:

$$\Phi(x, \theta, u) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) \quad (3.121)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\theta(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de parámetros desconocidos, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema, $\eta(t) \in \mathbb{R}^r$ es un vector de incertidumbre acotado; $\Phi(x, \theta, u) \in \mathbb{R}^n$ es una función no lineal que depende de los estados $x(t)$, parámetros desconocidos $\theta(t)$ y entradas $u(t)$. Esta función se puede descomponer como se muestra en la Ec. (3.121). $\Psi(y, u) \in \mathbb{R}^n$ es una función no lineal que depende de las salidas y las entradas. Finalmente $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $N \in \mathbb{R}^{n \times l}$ son matrices constantes de dimensiones apropiadas.

Suposición 1. Se supone que las entradas $u(t)$, las salidas $y(t)$, el vector de parámetros $\theta(t)$ y la perturbación $\eta(t)$ están acotadas.

Suposición 2. Se supone que la condición Lipschitz $\Phi(x, \theta, u)$ definida en la Ec. (3.121) satisface la condición de Lipschitz con respecto a las variables de estado para valores acotados de $u(t)$ y $\theta(t)$, es decir:

$$\|\Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u)\| \leq \gamma \|x - \hat{x}\| \quad (3.122)$$

donde γ es la constante de Lipschitz de la función Φ .

Como se describió anteriormente, la función no lineal $\Phi(x, \theta, u)$ se puede descomponer en dos términos: $\Phi_1(x, u)$ y $B\Phi_2(x, u)\theta(t)$, donde el segundo término es afín al vector de parámetros $\theta(t)$.

Lema 1. Xu (2002) Dejar \mathcal{M} y \mathcal{N} sean dos matrices constantes de dimensiones apropiadas. Entonces, la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{M}^T \mathcal{N} + \mathcal{N}^T \mathcal{M} \leq \alpha \mathcal{M}^T \mathcal{M} + \frac{1}{\alpha} \mathcal{N}^T \mathcal{N}$$

es válida para cualquier escalar $\alpha > 0$.

Considere ahora el siguiente observador no lineal adaptable

$$\text{OBS} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \Psi(y, u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta}(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \Phi_2^T(\hat{x}, u)H(y(t) - C\hat{x}(t)), \text{ donde } \Gamma > 0, \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.123)$$

donde $\hat{x}(t)$ es la estimación del vector de estado, $\hat{\theta}(t)$ es el vector de estimación de parámetros, $\Gamma \in \mathbb{R}^{q \times q}$ es una matriz definida positiva. Las matrices L y H deben seleccionarse de tal manera que se garantice

la convergencia del observador.

Considere los siguientes errores

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.124)$$

$$e_\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t) \quad (3.125)$$

donde $e_x(t)$ representa el error de estimación del estado y $e_\theta(t)$ representa el error de estimación del parámetro.

La derivada de la Ec. (3.124) es

$$\dot{e}_x(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned} &= Ax + \Psi(y, u) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta + N\eta - \\ &A\hat{x} - \Psi(y, u) - \Phi_1(\hat{x}, u) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta} - L(y - C\hat{x}) \end{aligned} \quad (3.127)$$

Sumando y restando el término $B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t) + &\boxed{\Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) - \Phi_1(\hat{x}, u) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta(t)} + \\ &B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta(t) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta}(t) + N\eta(t) \end{aligned} \quad (3.128)$$

Teniendo en cuenta la contraprestación marcada en un recuadro como

$$e_\Phi(t) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta(t) - \Phi_1(\hat{x}, u) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta(t) \quad (3.129)$$

$$= \Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u) \quad (3.130)$$

Ec. (3.128) se convierte en

$$\dot{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t) + e_\Phi(t) + B\Phi_2(\hat{x}, u)e_\theta(t) + N\eta(t). \quad (3.131)$$

Al considerar que $\theta(t)$ es un parámetro constante, es decir $\dot{\theta}(t) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\theta(t) &= \dot{\theta}(t) - \dot{\hat{\theta}}(t) \\ &= -\Gamma\Phi_2(\hat{x}, u)^T H C e_x(t) \end{aligned} \quad (3.132)$$

Considerando la condición de Lipschitz de la Ec. (3.122), presentado en Ekramian et al. (2011), se propone una condición que asegura la estabilidad del observador:

$$e_\Phi^T(t) Q e_\Phi(t) \leq e_x^T(t) R e_x(t) \quad (3.133)$$

donde Q y R son dos matrices simétricas definidas positivas.

Ecs. (3.131) y (3.132) se escriben en forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_\theta(t) \end{bmatrix}}_{\delta(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - LC & B\Phi_2(\hat{x}, u) \\ -\Gamma\Phi_2(\hat{x}, u)^T HC & 0_q \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix}}_{\delta(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{q \times n} \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} e_\Phi(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} N \\ 0_{q \times l} \end{bmatrix}}_{\mathbb{N}} \eta(t) \quad (3.134)$$

y de la ecuación. (3.120) y la ecuación. (3.123) se obtiene

$$\begin{aligned} r(t) &= Cx(t) - C\hat{x}(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0_{p \times q} \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix}}_{\delta(t)} \end{aligned} \quad (3.135)$$

donde $r(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ es la estimación del error de salida.

Una de las problemáticas al proponer un observador adaptable para sistemas no lineales Lipschitz, descritos en las ecuaciones (3.120) y (3.123), es la estimación simultánea de las variables de proceso $x(t)$ y del vector de parámetros $\theta(t)$. En el peor de los casos, se busca minimizar el error de estimación, especialmente en presencia de perturbaciones acotadas $\eta(t)$, es decir:

1. para $\eta(t) = 0$, los errores $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ y $e_\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t)$ converge asintóticamente a cero.
2. para $\eta \neq 0$ resolvemos el mín $\sup_{\eta \in \mathcal{L}_2 - \{0\}} \frac{\|r(t)\|_{\mathcal{L}_2}}{\|\eta(t)\|_{\mathcal{L}_2}}$.

3.5.1. Diseño del observador adaptable H_∞

El siguiente teorema da las condiciones suficientes para la Ec. (3.134) sea estable y $\|r(t)\|_{\mathcal{L}_2} < \lambda \|\eta(t)\|_{\mathcal{L}_2}$ para $\eta(t) \neq 0$.

Estabilidad del observador

El siguiente teorema da las condiciones para la estabilidad en un conjunto de LMI.

Teorema 6. *Existe un observador que tiene la forma dada en la Ec. (3.123) para el sistema no lineal (3.120) tal que el error dinámico de la Ec. (3.134) es estable y $\|r(t)\|_{\mathcal{L}_2} < \beta \|\eta(t)\|_{\mathcal{L}_2}$, si existen matrices definidas positivas P , R , Q y un escalar positivo β tal que se satisface el siguiente LMI*

$$\begin{bmatrix} PA - SC + A^T P - C^T S^T + C^T C + R & PN & P \\ N^T P & -\beta I_{n \times l} & 0_n \\ P & 0_{n \times l} & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.136)$$

donde la ganancia del observador L se resuelve como $L = P^{-1}S$, y la matriz del observador H se obtiene como $H = B^T P C^{-1}$.

Demostración. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t) = \delta^T(t) X \delta(t) > 0 \quad (3.137)$$

donde

$$X = \begin{bmatrix} P & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & \Gamma^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.138)$$

la derivada de $V(t)$ a lo largo de la solución de (3.134) está dada por

$$\dot{V}(t) = \dot{\delta}(t)^T X \delta(t) + \delta(t)^T X \dot{\delta}(t) \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} &= \delta^T(t)(\mathbb{A}^T X + X \mathbb{A})\delta(t) + \delta^T(t)X \mathbb{N} \eta(t) + \eta^T(t) \mathbb{N}^T X \delta(t) + \\ &\quad \delta^T(t)X \mathbb{B} e_{\Phi}(t) + e_{\Phi}^T(t) \mathbb{B} X \delta(t) \end{aligned} \quad (3.140)$$

reemplazando las matrices \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{N} de la Ec. (3.134) y X de la Ec. (3.138) entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_x^T(t)P(A - LC)e_x(t) + e_x^T(t)Pe_{\Phi}(t) + e_x^T(t)PB\Phi_2(\hat{x}, u)e_{\theta} + e_x^T(t)PN\eta(t) + \\ &\quad e_x^T(t)(A - LC)^T Pe_x(t) + e_{\Phi}^T(t)Pe_x(t) + e_{\theta}^T(t)\Phi_2(\hat{x}, u)^T B^T Pe_x(t) + \\ &\quad \eta^T(t)N^T Pe_x(t) - e_{\theta}^T(t)\Phi_2(\hat{x}, u)^T H C e_x(t) - e_x^T(t)C^T H^T \Phi_2(\hat{x}, u)e_{\theta}(t) \end{aligned} \quad (3.141)$$

Tenga en cuenta que si se satisface la igualdad $B^T P C^{\perp} = 0$, esto implica que existen matrices H y L , tales que $B^T P = H C$ Ekramian et al. (2013), donde C^{\perp} representa la proyección ortogonal sobre $null(C)$. Con esta consideración, la desigualdad anterior se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_x^T(t)P(A - LC)e_x(t) + e_x^T(t)Pe_{\Phi}(t) + e_x^T(t)PN\eta(t) + e_x^T(t)(A - LC)^T Pe_x(t) + \\ &\quad e_{\Phi}^T(t)Pe_x(t) + \eta^T(t)N^T Pe_x(t) \\ &= e_x^T(t)[(A - LC)^T P + P(A - LC)]e_x(t) + 2e_x^T(t)Pe_{\Phi}(t) + \\ &\quad e_x^T(t)PN\eta(t) + \eta^T(t)N^T Pe_x(t) \end{aligned} \quad (3.142)$$

Existe un escalar $\beta > 0$ tal que

$$\dot{V}(t) < \beta^2 \eta^T(t)\eta(t) - r^T(t)r(t) \quad (3.143)$$

integrando los dos lados de esta desigualdad se tiene

$$\int_0^{\infty} \dot{V}(\tau) d\tau < \int_0^{\infty} \beta^2 \eta^T(\tau)\eta(\tau) d\tau - \int_0^{\infty} r^T(\tau)r(\tau) d\tau$$

o equivalente $V(\infty) - V(0) < \beta^2 \|\eta(t)\|_2^2 - \|r(t)\|_2^2$. En condiciones iniciales cero, se obtiene

$$V(\infty) < \beta^2 \|\eta(t)\|_2^2 - \|r(t)\|_2^2$$

lo que conduce a $\|r(t)\|_2^2 < \beta^2 \|\eta(t)\|_2^2$. De la Ec. (3.143) se deduce que

$$\dot{V}(t) + r^T(t)r(t) - \beta^2 \eta^T(t)\eta(t) < 0 \quad (3.144)$$

Al reemplazar $\dot{V}(t)$ de la Ec. (3.142), y $r(t)$ de la Ec. (3.135) se obtiene

$$\begin{aligned} &e_x^T(t)[(A - LC)^T P + P(A - LC)]e_x(t) + \boxed{2e_x^T(t)Pe_{\Phi}(t)} \\ &+ e_x^T(t)PN\eta(t) + \eta^T(t)N^T Pe_x(t) + e_x^T(t)C^T C e_x(t) - \beta^2 \eta^T(t)\eta(t) < 0 \end{aligned} \quad (3.145)$$

Aplicando la siguiente equivalencia en el término enmarcado se obtiene

$$2e_x^T(t)Pe_\Phi(t) = 2e_x^T(t)PQ^{-1/2}Q^{1/2}e_\Phi(t) \quad (3.146)$$

Usando el Lema 1 podemos obtener la siguiente desigualdad de la Ec. (3.146):

$$2e_x^T(t)PQ^{-1/2}Q^{1/2}e_\Phi(t) \leq e_x^T(t)PQ^{-1}Pe_x(t) + \boxed{e_\Phi^T(t)Qe_\Phi(t)} \quad (3.147)$$

Ahora, usando la condición dada en la Ec. (3.133) en la expresión enmarcada, se obtiene la siguiente desigualdad de (3.145)

$$\begin{aligned} & e_x^T(t)[(A - LC)^T P + P(A - LC)]e_x(t) + e_x^T(t)PQ^{-1}Pe_x(t) + e_x^T(t)Re_x(t) \\ & + e_x^T(t)PN(t)\eta(t) + \eta^T(t)N^T Pe_x(t) + e_x^T(t)C^T Ce_x(t) - \beta^2 \eta^T(t)\eta(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.148)$$

Se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} e_x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}^T \Omega \begin{bmatrix} e_x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.149)$$

donde:

$$\Omega = \begin{bmatrix} P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C + PQ^{-1}P + R & PN & \\ & N^T P & -\beta^2 I_{n \times n} \\ & P & Q \end{bmatrix}.$$

Si $\Omega \leq 0$, se verifica el rendimiento del índice dado en (3.144). Utilizando el complemento de Schur se obtiene

$$\Omega = \begin{bmatrix} P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C + R & PN & P \\ & N^T P & -\bar{\beta} I_{n \times n} & 0_n \\ & P & 0_{n \times n} & Q \end{bmatrix} \leq 0$$

donde $\bar{\beta} = \beta^2$. Simplificando el siguiente término $S = PL$, se obtiene

$$\Omega = \begin{bmatrix} PA - SC + A^T P - C^T S^T + C^T C + R & PN & P \\ & N^T P & -\bar{\beta} I_{n \times n} & 0_n \\ & P & 0_{n \times n} & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.150)$$

Al resolver el LMI (3.150), las ganancias del observador L y H se puede obtener fácilmente como se indica en el teorema.

□

Capítulo 4

Resultados

Para la validación de los diseños de observadores adaptables, se trabajó con los siguientes sistemas físicos que cumplen con las condiciones Lipschitz.

4.1. Suspensión semiactiva magnetoreológico

Se presenta el modelo clásico de una suspensión semiactiva de un cuarto de automóvil, el cual corresponde a la parte frontal izquierda de un automóvil, que se muestra de la siguiente manera Fig. 4.1.

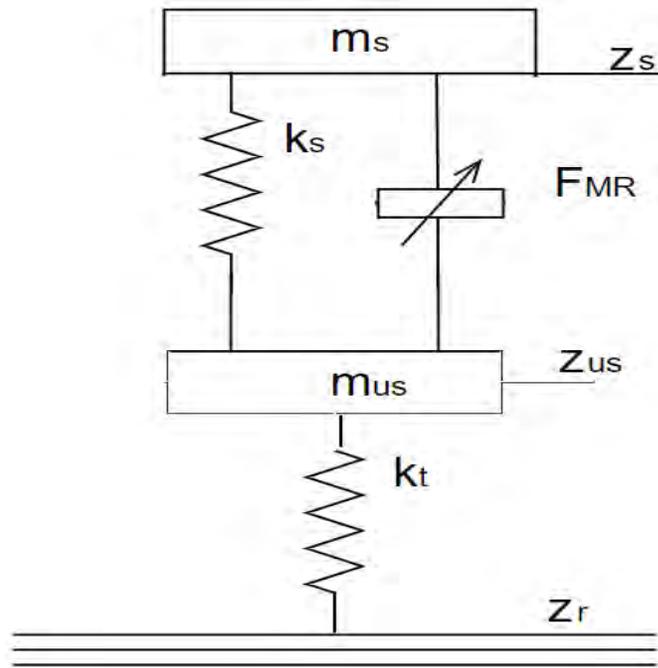


Figura 4.1: Diagrama de una suspensión semiactiva

En este sistema el amortiguamiento está formado por un amortiguador Magnetoreológico (MR), el modelo matemático que lo describe es dado por Guo et al. (2006) y se representa matemáticamente en las Ecs. (4.1) y (4.2).

$$m_s \ddot{z}_s(t) = -k_s(z_s(t) - z_{us}(t)) - F_{MR}(t) \quad (4.1)$$

$$m_{us} \ddot{z}_{us}(t) = k_s(z_s(t) - z_{us}(t)) - k_t(z_{us}(t) - z_r(t)) + F_{MR}(t) \quad (4.2)$$

La descripción del comportamiento dinámico de la fuerza de amortiguamiento semiactiva (F_{MR}) de un amortiguador magnetoreológico, con la inclusión de una señal de manipulación (corriente eléctrica) se representa de la siguiente forma:

$$F_{MR}(t) = Ifc\rho(t) + b_1\dot{z}_{def}(t) + b_2z_{def}(t), \quad (4.3)$$

donde $\rho(t)$ es la parte no lineal que representa la histéresis de la fuerza proporcionada por el amortiguador magnetoreológico Tudón-Martínez et al. (2016) que se describe de la siguiente forma:

$$\rho(t) = \tanh(a_1\dot{z}_{def} + a_2z_{def}). \quad (4.4)$$

Sustituyendo la Ec. (4.3) en el sistema conformado por las Ecs. (4.1) y (4.2) y considerando $z_{def} = z_s - z_{us}$ se obtiene el siguiente modelo:

$$m_s\ddot{z}_s = -k_s(z_s - z_{us}) - Ifc\rho - b_1\dot{z}_{def} - b_2z_{def} \quad (4.5)$$

$$m_{us}\ddot{z}_{us} = k_s(z_s - z_{us}) - k_t(z_{us} - z_r) + Ifc\rho + b_1\dot{z}_{def} + b_2z_{def} \quad (4.6)$$

La nomenclatura de los parámetros y variables del modelo se describe en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Lista de variables del modelo.

Variable	Descripción	Valor	Unidades
ρ	Histéresis del amortiguador		
a_1, a_2	Zona pre-esfuerzo de F_{MR}	37.8, 22.15	$(Ns)/m$
b_1, b_2	Zona post-esfuerzo de F_{MR}	2830.86, -7897.21	$(Ns)/m$
f_c	Fuerza del amortiguador MR	600.95	N/A
F_{MR}	Fuerza del amortiguador MR		N
I	Corriente eléctrica		mA
k_s	Coefficiente de rigidez del resorte	86378	N/m
k_t	Coefficiente de rigidez de la llanta	260000	N/m
m_s, m_{us}	Masa suspendida y no suspendida	470 , 110	kg
z_{def}	Posición vertical del pistón		m
\dot{z}_{def}	Velocidad vertical del pistón		m/s
z_r	Perfil del suelo		m
z_s, z_{us}	Desplazamiento vertical de m_s, m_{us}		m
\dot{z}_s, \dot{z}_{us}	Velocidad vertical de m_s, m_{us}		m/s
$\ddot{z}_s, \ddot{z}_{us}$	Aceleración vertical de m_s, m_{us}		m^2/s

4.1.1. Espacio de estados no lineal

Considerando el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} x_1 = z_s & x_3 = z_{us} \\ x_2 = \dot{z}_s = \dot{x}_1 & x_4 = \dot{z}_{us} = \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 = \ddot{z}_s & \dot{x}_4 = \ddot{z}_{us} \end{cases} \quad (4.7)$$

el modelo de las Ecs. (4.1) y (4.2) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m_s \ddot{x}_2 &= -k_s(x_1 - x_3) - F_{MR}; \\ m_{us} \ddot{x}_4 &= k_s(x_1 - x_3) - k_t(x_3 - z_r) + F_{MR}; \end{aligned} \quad (4.8)$$

El modelo dado por las Ecs. (4.8) se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{b_2 + k_s}{m_s} x_1(t) - \frac{b_1}{m_s} x_2(t) + \frac{b_2 + k_s}{m_s} x_3(t) \\ &\quad + \frac{b_1}{m_s} x_4(t) - \frac{f_c \rho}{m_s} I(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{b_2 + k_s}{m_{us}} x_1(t) + \frac{b_1}{m_{us}} x_2(t) - \frac{b_2 + k_s + k_t}{m_{us}} x_3(t) \\ &\quad - \frac{b_1}{m_{us}} x_4(t) + \frac{f_c \rho}{m_{us}} I(t) + \frac{k_t}{m_{us}} z_r(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Los vectores de estados, de salida y de entrada son: $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$, $y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t)]^T$, $u(t) = [\eta(t) \ I(t) \ z_r(t)]^T$, donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son la posición vertical del chasis y la velocidad vertical del chasis; $x_3(t)$ y $x_4(t)$ son la posición vertical de los neumáticos y la velocidad vertical de los neumáticos, $y_1(t)$ es la posición vertical del chasis; $y_2(t)$ es la posición vertical del neumático y $y_3(t)$ es la posición vertical del amortiguador, $z_r(t)$ es el perfil de la carretera.

Reescribiendo en espacio de estados tomando en cuenta la Ec. (4.9), obtenemos el siguiente sistema, considerando el cambio de variable (4.7):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b_1}{m_s} & -\frac{b_2+k_s}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} & \frac{b_2+k_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{b_1}{m_{us}} & \frac{b_2+k_s}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{b_2+k_s+k_t}{m_{us}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f_c \rho}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_c \rho}{m_{us}} \end{bmatrix} I + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{z_r - x_3}{m_{us}} \right] k_t \quad (4.10)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

4.1.2. Simulación del modelo matemático de una suspensión semiactiva magnetoreológica

Objetivo: Analizar el comportamiento dinámico en el tiempo de una suspensión.

En esta simulación se analiza el impacto de una suspensión semiactiva en un cuarto del vehículo, examinando su comportamiento horizontal cuando interactúa con las entradas. Durante la primera parte de la simulación, el vehículo se desplaza sobre un perfil recto. Luego, encuentra dos topes de 10 cm de altura cada uno. Finalmente, vuelve a desplazarse sobre un perfil recto hasta el fin de la simulación, como se muestra en la Fig. 4.2.

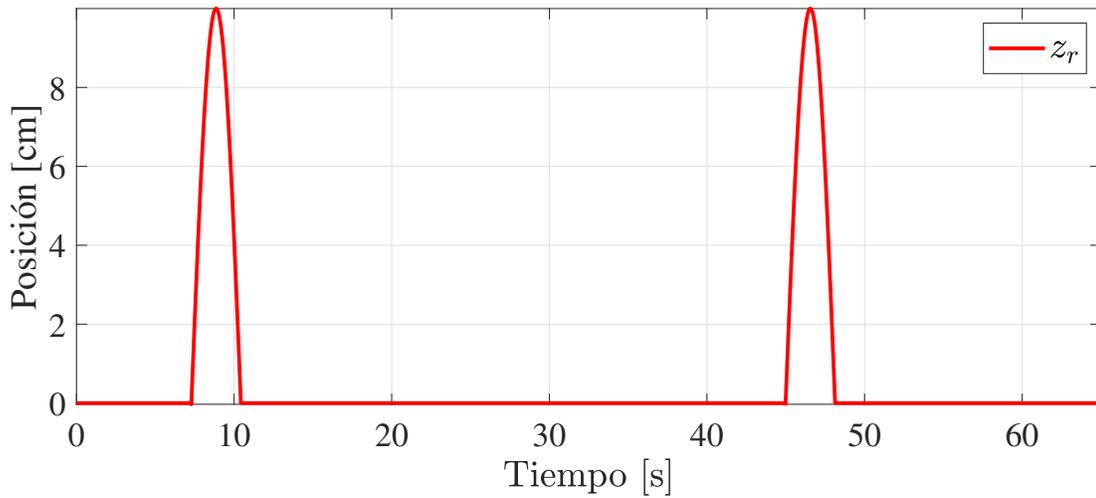


Figura 4.2: Posición del perfil de suelo

Para producir la simulación del modelo de la suspensión semiactiva presentado en las Ecs. (4.10) y (4.11). Se desarrolló su comportamiento por medio de la herramienta de MATLAB 2018b, donde se proponen las siguientes condiciones iniciales del sistema: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $x_4(0) = 0$, con un tiempo de simulación de 65 segundos, resolviendo por el método de Euler con un paso de integración de 0.005 s. Las respuestas de la simulación se muestran las Figs. 4.3-4.7.

Al sustituir los valores de los parámetros 4.1, en nuestro sistema de suspensión semiactiva de un cuarto de vehículo Ec. (4.9), obtenemos los siguientes valores de las matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -167 & 6 & 167 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 25.7 & 713.5 & -25.7 & -3168 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.557 \\ 0 \\ 2.3798 \end{bmatrix};$$

$$I(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 8 \\ 2 & t \geq 8 \end{cases}$$

En la Fig. 4.3 se muestra cómo se comporta verticalmente el chasis al estar en contacto con el perfil del suelo. Durante el primer segundo de la simulación, sigue la trayectoria del perfil. En el segundo 8 pasa por el primer tope, donde se observan ligeras ondulaciones debido a la rigidez del resorte. El sistema se desfasa respecto al perfil del suelo debido al tiempo que necesita para compensar la fuerza de

amortiguamiento requerida, posteriormente continua con su trayectoria recta, hasta llegar al segundo 45 donde vuelve a encontrar otro tope ocasionando el mismo comportamiento. En el segundo 50, cuando el perfil termina, se nota que el sistema no se estabiliza en un punto hasta llegar al segundo 55. manteniendo su comportamiento recto hasta que finaliza la simulación.

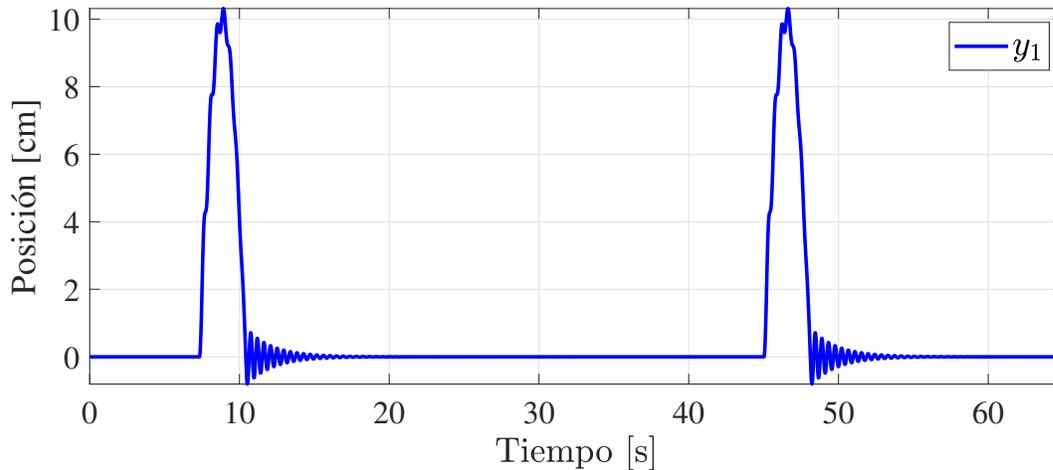


Figura 4.3: Posición del chasis del sistema al aplicarse un perfil de suelo.

En la Fig. 4.4 se ilustra el comportamiento de la velocidad del desplazamiento vertical del chasis x_2 . Se puede observar que al entrar en contacto con el tope, alcanza una velocidad máxima de 20 cm/seg . Esta velocidad va disminuyendo a medida que el perfil del recorrido avanza, resultando en una velocidad negativa. Al final del perfil, se nota que el sistema no se detiene de inmediato debido a la inercia del vehículo. Después de unos segundos, el sistema se estabiliza con el perfil del suelo y la velocidad se mantiene en cero.

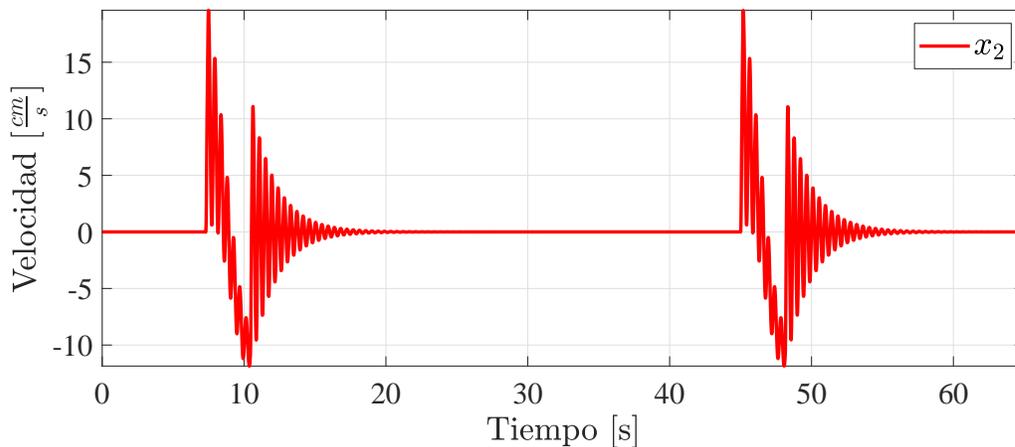


Figura 4.4: Velocidad del chasis del sistema al aplicarse un perfil de suelo.

En la Fig. 4.5 se muestra cómo se comporta verticalmente el neumático al estar en contacto con el perfil del suelo. Durante el primer segundo de la simulación, sigue la trayectoria del perfil. En el segundo 8 pasa por el primer tope, donde se observan ligeras oscilaciones debido a la rigidez del resorte, una vez que pase el tope continua con su trayectoria recta, hasta llegar al segundo 45 donde vuelve a topar con otro tope ocasionando el mismo comportamiento. En el segundo 50, cuando el perfil termina, se nota que el sistema no se estabiliza en un punto hasta llegar al segundo 55. manteniendo su comportamiento recto hasta que finaliza la simulación.

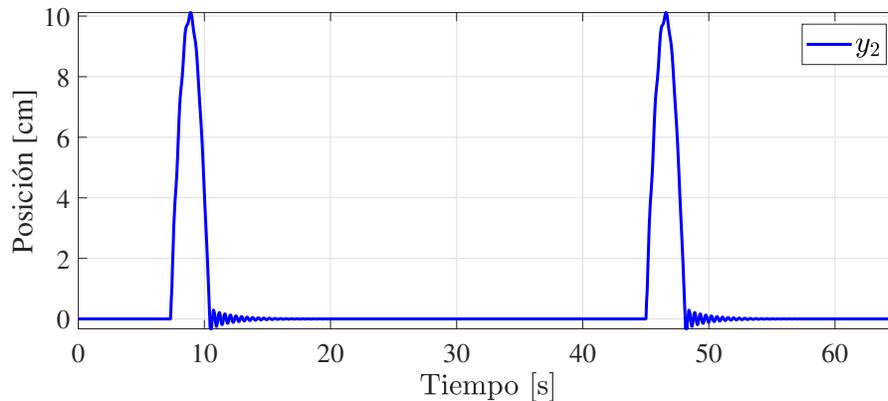


Figura 4.5: Posición del neumático del sistema al aplicarse un perfil de suelo.

En la Fig. 4.6 se ilustra el comportamiento de la velocidad del desplazamiento vertical del neumático (x_4). Se puede observar que al entrar en contacto con el tope, alcanza una velocidad máxima de 15.2 cm/seg . Esta velocidad va disminuyendo a medida que el perfil del recorrido avanza, resultando en una velocidad negativa. Al final del perfil, se nota que el sistema no se detiene de inmediato debido a la inercia del vehículo. Después de unos segundos, el sistema se estabiliza con el perfil del suelo y la velocidad se mantiene en cero.

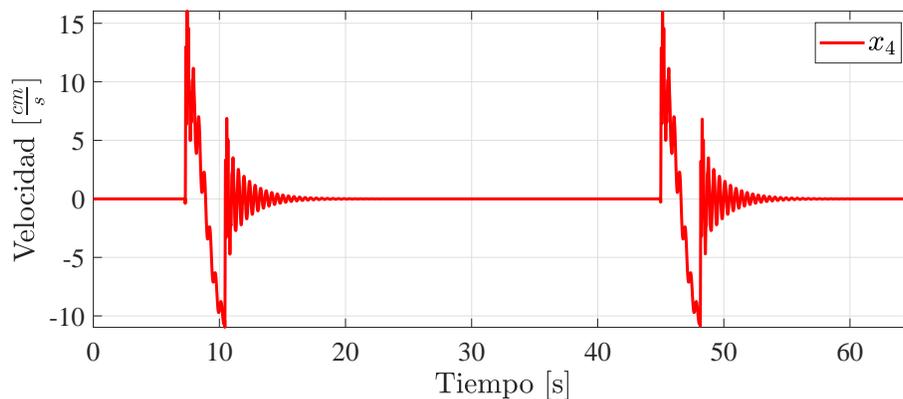


Figura 4.6: Velocidad del neumático del sistema al aplicarse un perfil de suelo.

Conociendo las posiciones del chasis y del neumático se puede calcular la posición vertical del amortiguador (como se ve en la Fig. 4.7). Donde se observa cómo se va comportando el pistón al presentarse el perfil de suelo.

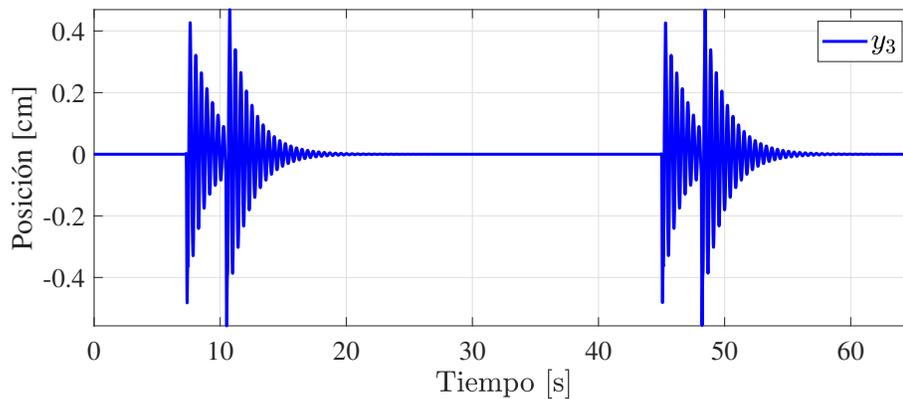


Figura 4.7: Posición vertical del pistón

4.2. Respuesta del observador adaptable 3.1 Lipschitz aplicado a una suspensión semiactiva de un cuarto de vehículo

Objetivo: Simular el comportamiento de una suspensión con el fin de estimar el parámetro desconocido y los estados del sistema.

Considerando el caso de estudio de una suspensión semiactiva Ecs (4.1) y (4.2), tenemos que estimar un parámetro desconocido k_t , para lograr monitorear el comportamiento del sistema, para eso utilizaremos el observador 3.1, donde ajustaremos nuestro sistema en su forma adaptable Ec. (3.24).

La simulación se implementó en el programa MATLAB/Simulink 2018b, con un tiempo de simulación de 15 segundos, el método de resolución fue el de Euler con un paso de integración de 5ms, tomando en cuenta los valores de los parámetros (4.1). Las condiciones iniciales del sistema y del observador fueron: $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ y $\hat{x}(0) = [0.1, 0.1, 0.1, 0.1]^T$.

Se considera un perfil de suelo donde el vehículo inicia su recorrido para después pasar por dos topes consecutivos, como pueden ver en Fig. 4.8.

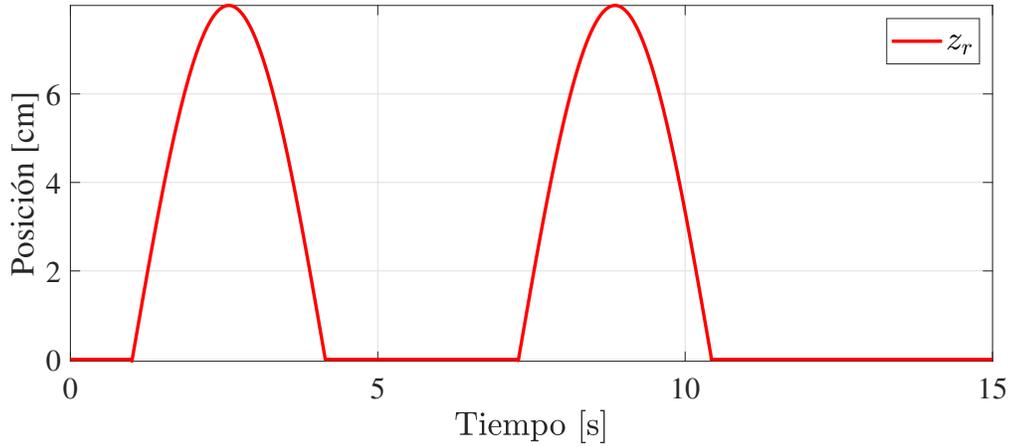


Figura 4.8: Perfil de suelo

Las entradas del sistema $I(t)$ se define como:

$$I(t) = \begin{cases} 0 \text{ [A]} & 0 \leq t < 0.5 \\ 2 \text{ [A]} & t \geq 0.5 \end{cases}$$

Sustituyendo las Ecs. (4.9) en su forma adaptable Ec. (3.24) y sustituyendo los parámetros 4.1, se diseñó el observador adaptable Ecs. (3.26), una vez obteniendo nuestro observador, encontraremos las ganancias adecuadas L y H , y así lograremos estimar el parámetro desconocido $\hat{\theta}(t) = k_t$ y a su vez lograr la estimación de las variables de estado del sistema a pesar del parámetro desconocido.

Para diseñar el observador del sistema (4.9), es necesario verificar que la función $\Phi(x, \theta, u, t)$ cumpla con la condición de Lipschitz. Esto implica que las funciones $\Phi_1(x(t), u(t))$ y $\Phi_2(x(t), u(t))$ deben ser Lipschitz. Para comprobar esto, se calcula la norma de sus Jacobianos, obteniendo:

$$\frac{\partial \Phi_1(x(t), u(t))}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_{us}} \end{bmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi_1(x(t), u(t))}{\partial x} \right\|_1 = 0 \quad \left\| \frac{\partial \Phi_2(x(t), u(t))}{\partial x} \right\|_1 = \frac{1}{110}$$

Debido a que la norma del Jacobiano con respecto al vector de estados $x(t)$ de $\Phi_1(x, u)$ y $\Phi_2(x, u, t)$, son acotadas, el sistema (4.9) es Lipschitz.

Considerando que el parámetro a estimar es el coeficiente de rigidez del resorte $k_t(t)$, para el sistema (4.12) es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6.0231 & -166.9787 & 6.0231 & 166.9787 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 25.7351 & 713.4545 & -25.7351 & -713.4545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -0.557 \\ 0 \\ 2.3798 \end{bmatrix} I(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{z_r - x_3(t)}{110} \right] \hat{\theta}(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

entonces el observador (4.14) y (4.15):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6.0231 & -166.9787 & 6.0231 & 166.9787 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 25.7351 & 713.4545 & -25.7351 & -713.4545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.557 \\ 0 \\ 2.3798 \end{bmatrix} I(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{z_r(t) - \hat{x}_3(t)}{110} \right] \hat{\theta}(t) + L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \left[\frac{z_r(t) - \hat{x}_3(t)}{m_{us}} \right]^T H \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.15)$$

donde:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} I(t) \\ z_r(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6.0231 & -166.9787 & 6.0231 & 166.9787 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 25.7351 & 713.4545 & -25.7351 & -713.4545 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Psi(u, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.557 \\ 0 \\ 2.3798 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2(x, u, t) = \left[\frac{0-x_4(t)}{m_{us}} \right] \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices L y H son las ganancias del observador y deben seleccionarse para garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados a los reales.

El único requisito para elegir la ganancia $\Gamma > 0$ es que debe ser un escalar positivo. En este caso se elige $\Gamma = 30$, debido a que este valor permite un tiempo de convergencia adecuado del observador. Mientras mayor sea el valor de Γ , menor es el tiempo de convergencia, pero a la vez se incrementa la sensibilidad del observador al ruido de medición.

La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en el Teorema 2 con el Toolbox YALMIP para MATLAB, con la cual se obtienen las siguientes matrices:

$$L = \begin{bmatrix} -36.0828 & 43.6414 & -134.1128 \\ 23.9826 & -10.1124 & -26.9517 \\ 252.2604 & -225.6410 & 456.9801 \\ 15.4096 & -7.3653 & -21.7135 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$H = \begin{bmatrix} -1.3453 & -1.2802 & -0.0651 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

En base a las Ecs. (4.12), (4.14) y (4.15), se estima el coeficiente de rigidez de la llanta " $k_t(t)$ ", considerando el perfil de suelo Fig. 4.8, obteniendo el siguiente resultado. En la Fig. 4.9 se muestra la estimación del coeficiente de rigidez de la llanta $k_t(t)$.

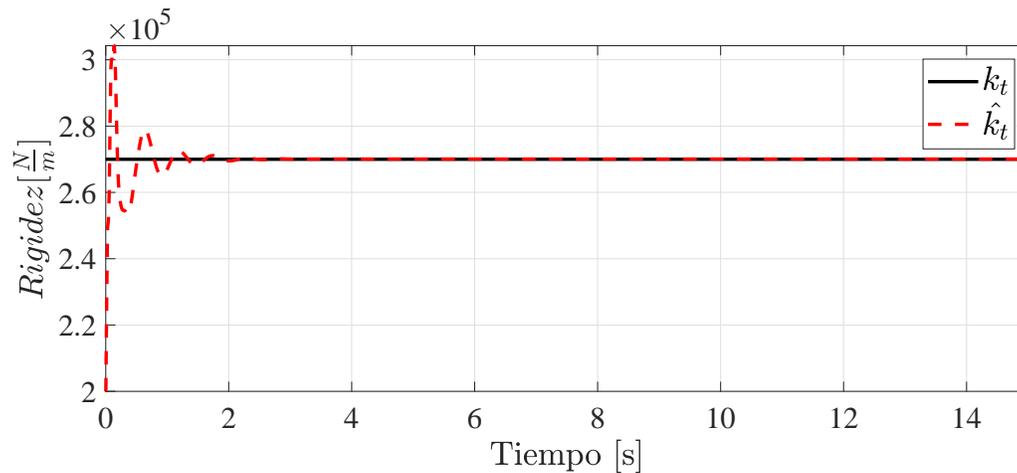


Figura 4.9: Rigidez de la llanta

En las Figs. 4.10 y 4.11 se observa las estimaciones de la posición del chasis y de la llanta, por parte del observador, comparándola con la posición del chasis y del neumático z_u y z_{us} . Se observa la convergencia de las dos señales, donde el error de estimación se va reduciendo a lo largo del tiempo.

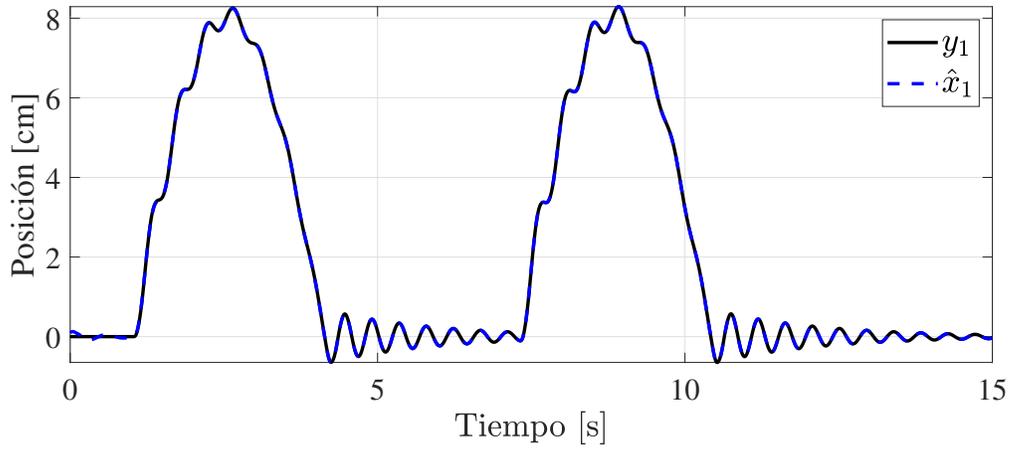


Figura 4.10: Posición del chasis z_u vs \hat{x}_1

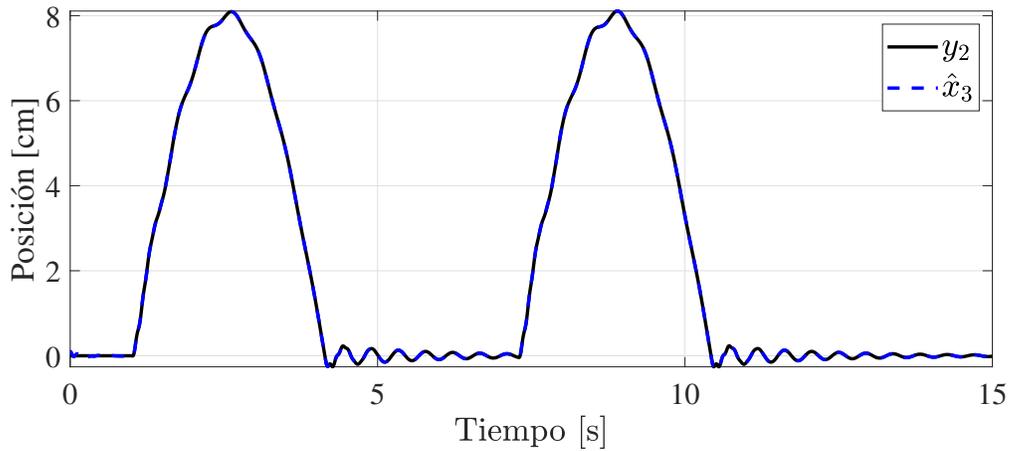


Figura 4.11: Posición del neumático z_{us} vs \hat{x}_2

Una vez que se estimaron los estados Figs. 4.10 y 4.11, el observador converge correctamente con el estado, siguiendo su comportamiento a través del tiempo, una vez conociendo el comportamiento de sus dos posiciones x_1 y x_2 , estimamos el comportamiento del pistón al pasar los topes y_3 , obteniendo el siguiente resultado Fig. 4.12.

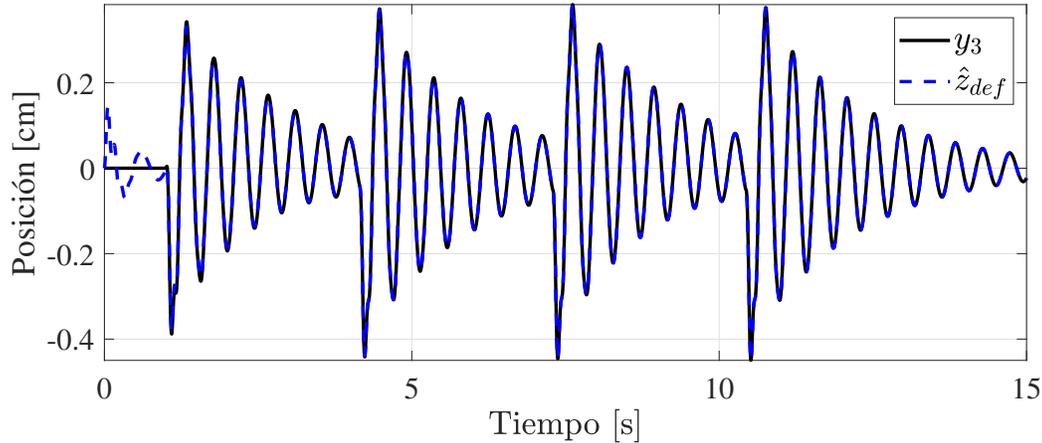


Figura 4.12: Deflexión del amortiguador y_3 vs \hat{z}_{def}

Se diseñó un observador adaptable para sistemas no lineales Lipschitz que permite estimar tanto un parámetro desconocido como el estado del sistema utilizando el criterio \mathcal{H}_∞ . Este observador fue implementado para la supervisión de una suspensión semiactiva, basándose en las mediciones de las posiciones. El observador estima el coeficiente de rigidez de la llanta k_t con el propósito de monitorear la presión del neumático. Así, la supervisión de este parámetro puede servir para evaluar el estado de deterioro de la suspensión (en este caso, la presión del neumático) a través del comportamiento del amortiguador. Se evaluó el rendimiento del observador mediante simulaciones, logrando estimar tanto las posiciones del vehículo como la rigidez del neumático.

4.3. Respuesta del observador adaptable Lipschitz 3.4 aplicado a una suspensión semiactiva de un cuarto de vehículo

Objetivo: Estimar múltiples parámetros desconocidos por medio del diseño de un observador adaptable utilizando el criterio H_∞ , donde se logra estimar los estados de los sistemas y el vector de los parámetros desconocidos convergiendo al valor real. Dicho observador es para un sistema no lineal Lipschitz, y se aplica al caso de estudio de una suspensión semiactiva, con el fin de estimar los parámetros desconocidos (la rigidez del neumático y la rigidez del chasis).

Considerando el caso de estudio de una suspensión semiactiva Ecs (4.1) y (4.2), tenemos que estimar los parámetros desconocidos k_s y k_t , para lograr monitorear el comportamiento del sistema, para eso utilizaremos el observador 3.4, donde ajustaremos nuestro sistema en su forma adaptable Ec. (3.95).

La simulación se implementó en el programa MATLAB/Simulink 2018b, con un tiempo de simulación de 75 segundos, el método de resolución fue el de Euler con un paso de integración de 1ms, tomando en cuenta los valores de los parámetros (4.1). Las condiciones iniciales del sistema y del observador fueron: $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ y $\hat{x}(0) = [1, 2, 1.5, 3]^T$.

Se propone un perfil de carretera que inicia un camino recto donde luego pasa por dos topes y finalmente continúa con su camino (z_r) como se muestra en la Fig. 4.13. Este perfil de suelo se considera como una entrada z_r .

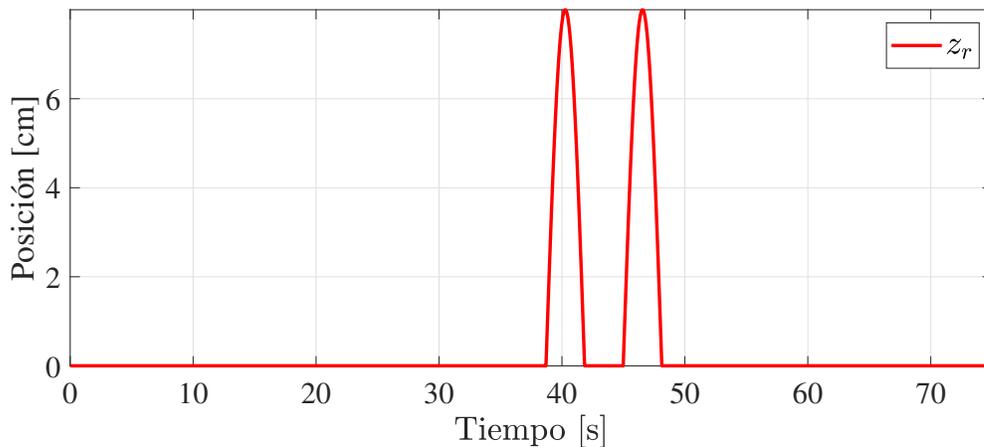


Figura 4.13: Perfil de suelo

Las entradas del sistema $I(t)$ se define como:

$$I(t) = \begin{cases} 0 \text{ [A]} & 0 \leq t < 0.5 \\ 2 \text{ [A]} & t \geq 0.5 \end{cases}$$

Sustituyendo las Ecs. (4.9) en su forma adaptable Ec. (3.95) y sustituyendo los parámetros 4.1, se diseñó el observador adaptable Ecs. (3.98), una vez obteniendo nuestro observador, encontraremos las ganancias adecuadas L y H , y así lograremos estimar los parámetros desconocidos, donde se consideran dos parámetros desconocidos que forman el vector θ , donde $\theta_1 = k_s$ es el coeficiente de rigidez del chasis y $\theta_2 = k_t$ es el coeficiente de rigidez del neumático y a su vez lograr la estimación de las variables de estado del sistema.

Para diseñar el observador del sistema (4.9), es necesario verificar que la función $\Phi(x, \theta, u, t)$ cumpla con la condición de Lipschitz. Esto implica que la función $\Phi(x(t), u(t))$ debe ser Lipschitz. Para comprobar esto, se calcula la norma de sus Jacobianos, obteniendo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi(x,u)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{x_1-x_3}{m_{us}} & \frac{z_r-x_3}{m_{us}} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial\Phi(x,u)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_{us}} \end{bmatrix} \\ \left\| \frac{\partial\Phi(x,u)}{\partial x} \right\|_1 &= \frac{1}{m_{us}}\end{aligned}$$

Debido a que la norma del Jacobiano con respecto al vector de estados $x(t)$ de $\Phi(x,u)$, son acotadas, entonces el sistema (4.9) es Lipschitz.

Reescribiendo las Ecs. (4.1), en la forma del sistema adaptable Ec. (3.95), donde se consideran dos parámetros desconocidos que forman el vector $\theta(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b_1}{m_s} & -\frac{b_2}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{b_1}{m_{us}} & \frac{b_2}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{b_2}{m_{us}} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f_{c\rho}}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_{c\rho}}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} I(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{x_1(t)-x_3(t)}{m_{us}} & \frac{z_r(t)-x_3(t)}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Phi(x,u)} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}}_{\theta(t)}\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}\quad (4.19)$$

El observador adaptable para dicho sistema es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\dot{x}}_1(t) \\ \hat{\dot{x}}_2(t) \\ \hat{\dot{x}}_3(t) \\ \hat{\dot{x}}_4(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\dot{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b_1}{m_s} & -\frac{b_2}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{b_1}{m_{us}} & \frac{b_2}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{b_2}{m_{us}} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f_c \rho}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_c \rho}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} I(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{470} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\hat{x}_1(t) - \hat{x}_3(t)}{110} & \frac{z_r(t) - \hat{x}_3(t)}{110} \end{bmatrix}}_{\Phi(x,u)} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(t) \\ \hat{\theta}_2(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\theta}(t)} + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (4.20)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\hat{x}_1(t)}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\hat{x}_1(t) - \hat{x}_3(t)}{m_{us}} & \frac{z_r(t) - \hat{x}_3(t)}{m_{us}} \end{bmatrix}^T H(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (4.21)$$

Sustituyendo los valores de los parámetros 4.1 en las Ecs. (4.18), (4.20) y (4.21) obtenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2830.86}{470} & \frac{7897.21}{470} & \frac{2830.86}{470} & -\frac{7897.21}{470} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2830.86}{110} & -\frac{7897.21}{110} & -\frac{2830.86}{110} & \frac{7897.21}{110} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{600.95\rho}{470} \\ 0 \\ \frac{600.95\rho}{110} \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} I(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{x_1(t) - x_3(t)}{m_{us}} & \frac{z_r(t) - x_3(t)}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Phi(x,u)} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}}_{\theta(t)} \quad (4.22)$$

Y para el observador adaptable se obtiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\hat{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2830.86}{470} & \frac{7897.21}{470} & \frac{2830.86}{470} & -\frac{7897.21}{470} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2830.86}{110} & -\frac{7897.21}{110} & -\frac{2830.86}{110} & \frac{7897.21}{110} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{600.95\rho}{470} \\ 0 \\ \frac{600.95\rho}{110} \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} I(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{470} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\hat{x}_1(t) - \hat{x}_3(t)}{110} & \frac{z_r(t) - \hat{x}_3(t)}{110} \end{bmatrix}}_{\Phi(x,u)} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(t) \\ \hat{\theta}_2(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\theta}(t)} + L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.23)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\hat{x}_1(t)}{470} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\hat{x}_1(t) - \hat{x}_3(t)}{110} & \frac{z_r(t) - \hat{x}_3(t)}{110} \end{bmatrix}^T H \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.24)$$

Las matrices L y H son las ganancias del observador y deben seleccionarse para garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados a los reales.

El único requisito para elegir la ganancia $\Gamma > 0$ es que debe ser un escalar positivo. En este caso se elige $\Gamma = 30$, debido a que este valor permite un tiempo de convergencia adecuado del observador. Mientras mayor sea el valor de Γ , menor es el tiempo de convergencia, pero a la vez se incrementa la sensibilidad del observador al ruido de medición.

La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en el Teorema 5 con el Toolbox YALMIP para MATLAB, con la cual se obtienen las siguientes matrices:

$$L = \begin{bmatrix} 6.1077 & -5.6950 & -36.3961 \\ 33.3006 & 68.4376 & -41.8431 \\ 177.2995 & -178.0433 & -452.6916 \\ 68.4376 & -200.8580 & -315.7305 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$H = \begin{bmatrix} -0.1002 & -0.0017 & -0.0985 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1400 & 0.1371 & -0.2771 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

En base a las Ecs. (4.22), (4.23) y (4.24), se estiman el vector de $\theta(t)$, obteniendo el coeficiente de rigidez del resorte $k_s(t)$ y el coeficiente de rigidez de la llanta " $k_t(t)$ ", considerando el perfil de suelo Fig. 4.13, obteniendo el siguiente resultado.

En la Fig. 4.14 se muestra la estimación del coeficiente de rigidez del chasis $k_s(t)$.

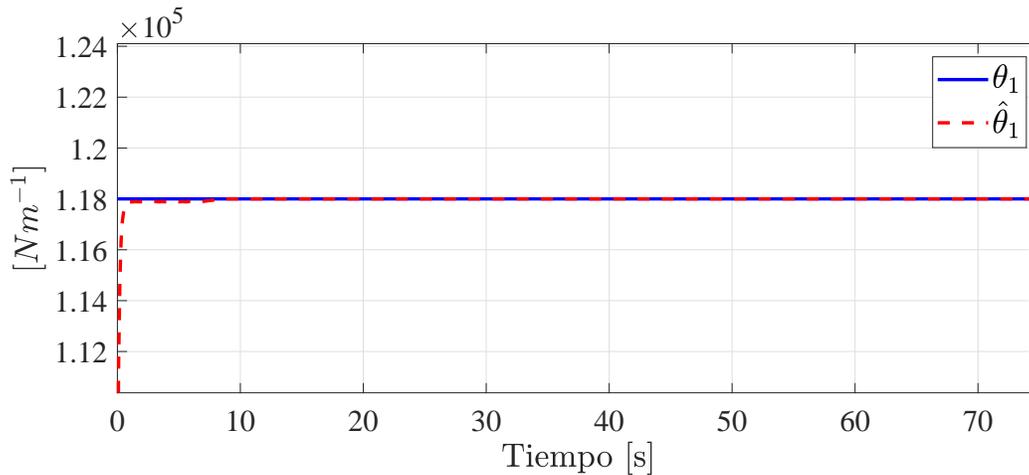


Figura 4.14: Rigidez del chasis

En la Fig. 4.15 se muestra la estimación del coeficiente de rigidez de la llanta $k_t(t)$.

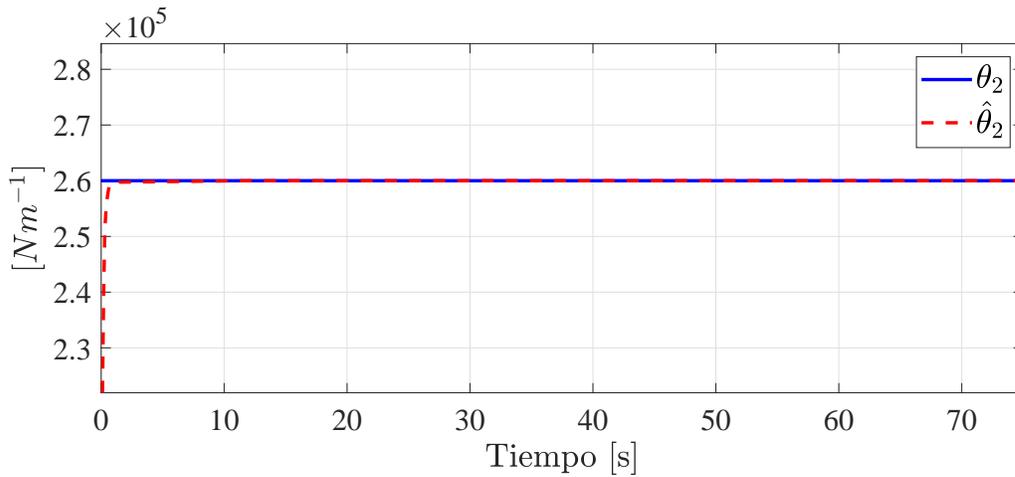


Figura 4.15: Rigidez de la llanta

Una vez que los datos del sistema están disponibles, se ejecuta la simulación estimando los parámetros desconocidos. Como se muestra en la Fig. 4.14, se observa que $\hat{\theta}_1$ logra estimar el valor del coeficiente de rigidez del chasis $k_s = 118,000Nm^{-1}$ y en la Fig. 4.15, se observa que $\hat{\theta}_2$ logra estimar el valor del coeficiente de rigidez de la rueda $k_t = 260,000Nm^{-1}$, convergiendo adecuadamente en el tiempo.

Una vez estimado los parámetros k_s y k_t , el observador es capaz de estimar la posición del chasis x_1 donde se observa como se ve afectada al momento de pasar los topes en la Fig. 4.16, se compara la señal x_1 con la \hat{x}_1 estimada, afectando la comodidad y seguridad de los pasajeros al pasar los topes del camino. Se observa la convergencia de las señales, donde el error de estimación se va reduciendo a lo largo del tiempo.

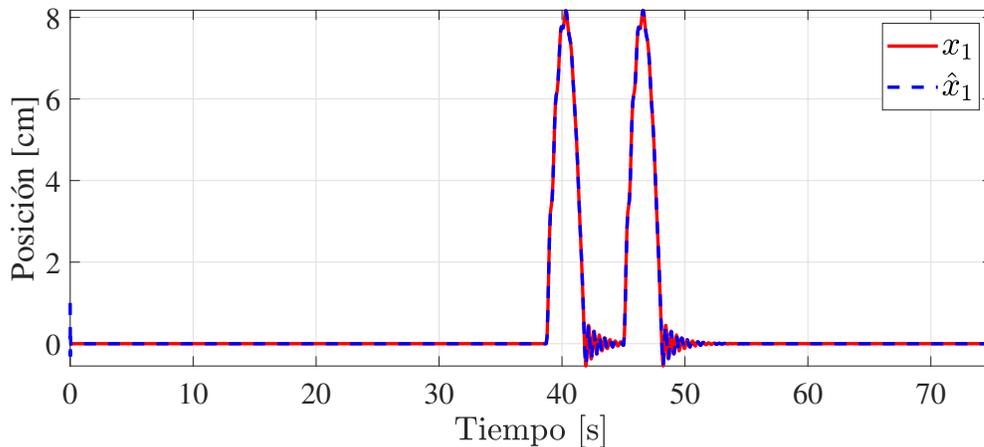


Figura 4.16: Posición del chasis z_u vs \hat{x}_1

En la Fig. 4.17, se muestra la posición de la llanta x_3 con la \hat{x}_3 estimada, logrando converger a la señal real.

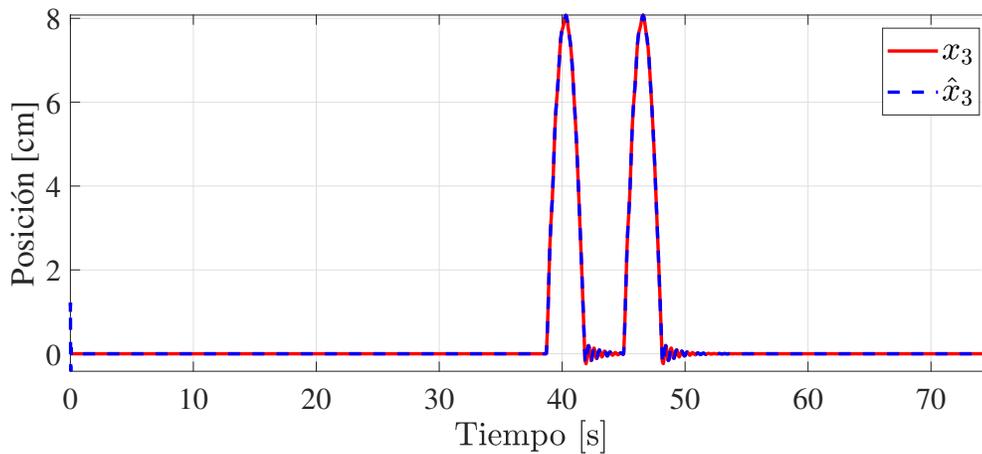


Figura 4.17: Posición del neumático z_{us} vs \hat{x}_2

Una vez que se estimaron los estados, el observador converge correctamente con el estado, siguiendo su comportamiento a través del tiempo y una vez obtenidas las dos posiciones observamos el comportamiento del pistón del amortiguador y_3 al pasar por el perfil del suelo, donde se muestra que al momento que pasa por los topes presenta unas oscilaciones, provocando un desgaste en el amortiguador, se visualiza que el observador converge a la salida como se muestra en la Fig. 4.18.

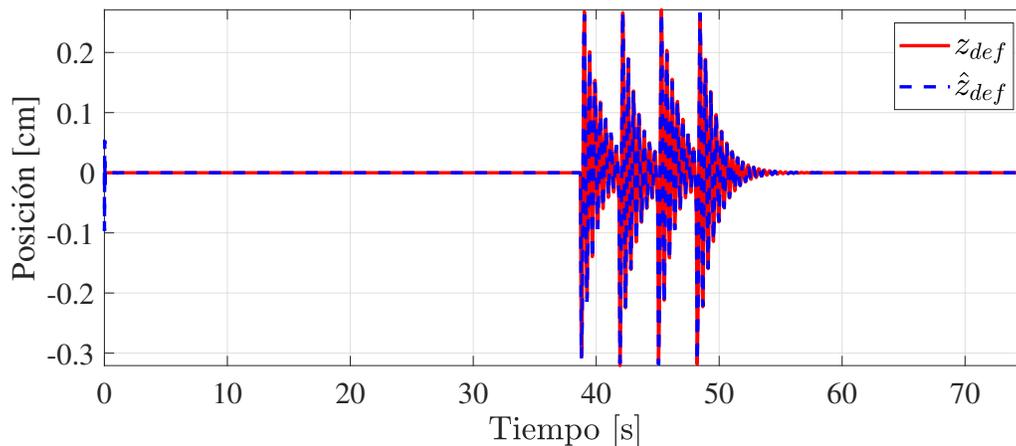


Figura 4.18: Deflexión del amortiguador z_{def} vs \hat{z}_{def}

Se diseñó de un observador adaptable utilizando el criterio \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz. Alcanzando a comprobar su funcionamiento aplicándolo a una suspensión semiactiva. Donde se logró estimar los dos parámetros desconocidos y al mismo tiempo los estados con el fin de monitorear el desgaste del automóvil. El desempeño del observador fue evaluado mediante simulaciones, demostrando la estimación correcta de las posiciones del vehículo, la rigidez del neumático y del chasis, así como también la posición del pistón del amortiguador.

4.4. Respuesta del observador adaptable Lipschitz 3.5 aplicado a una suspensión semiactiva de un cuarto de vehículo ante presencia de perturbaciones

Objetivo: Es estimar el parámetro desconocido por medio del diseño de un observador adaptable H_∞ , donde se logra estimar los estados de los sistemas y se estima el vector de los parámetros desconocidos convergiendo al valor real ante la presencia de perturbaciones. Dicho observador es para un sistema no lineal Lipschitz, y se aplica al caso de estudio de una suspensión semiactiva con el fin de estimar la rigidez del neumático y supervisar su funcionamiento ante presencia de perturbaciones en el sistema.

Considerando el caso de estudio de una suspensión semiactiva Ecs (4.1) y (4.2), de tal manera tenemos que estimar el parámetro desconocido k_t , para lograr supervisar el comportamiento del sistema ante la presencia de perturbaciones, donde ajustaremos nuestro sistema en su forma adaptable Ec. (3.120) y utilizaremos el observador Ec. (3.123).

La simulación se implementó en el programa MATLAB/Simulink 2018b, con un tiempo de simulación de 65 segundos, el método de resolución fue el de Euler con un paso de integración de 1ms, tomando en cuenta los valores de los parámetros (4.1). Las condiciones iniciales del sistema y del observador fueron: $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ y $\hat{x}(0) = [0.1, 0.1, 0.1, 0.1]^T$.

Se propone un perfil de carretera que inicia un camino recto donde luego pasa por dos topes y finalmente continúa con su camino (z_r) como se muestra en la Fig. 4.19. Este perfil de suelo se considera como una entrada z_r .

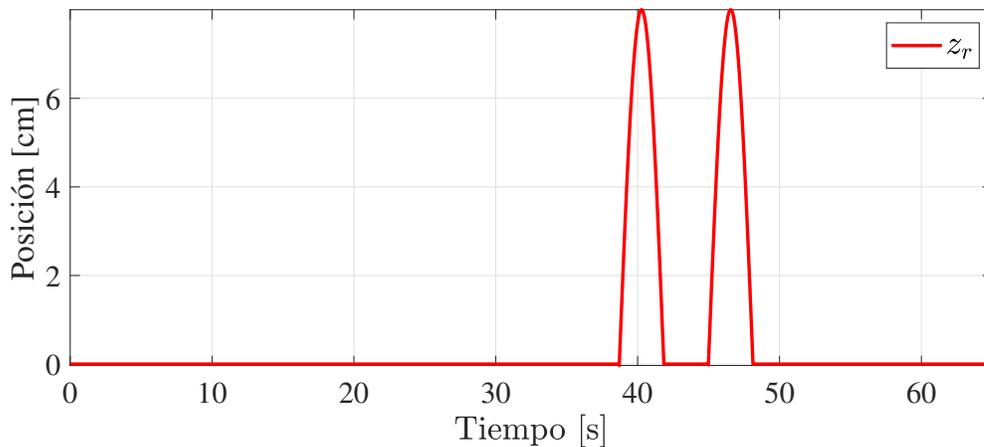


Figura 4.19: Perfil de suelo

Las entradas del sistema $I(t)$ se define como:

$$I(t) = \begin{cases} 0 \text{ [A]} & 0 \leq t < 0.5 \\ 2 \text{ [A]} & t \geq 0.5 \end{cases}$$

El sistema tiene una perturbación en el actuador $\eta(t)$. El perfil de perturbación, que se muestra en la Fig. 4.20, corresponde a alrededor del 15% del rango operativo del amortiguador, afectando así la comodidad y seguridad de los pasajeros. Esta perturbación influye progresivamente en la posición del pistón del amortiguador, disminuyendo su capacidad para amortiguar las oscilaciones del vehículo derivadas de las irregularidades de la carretera.

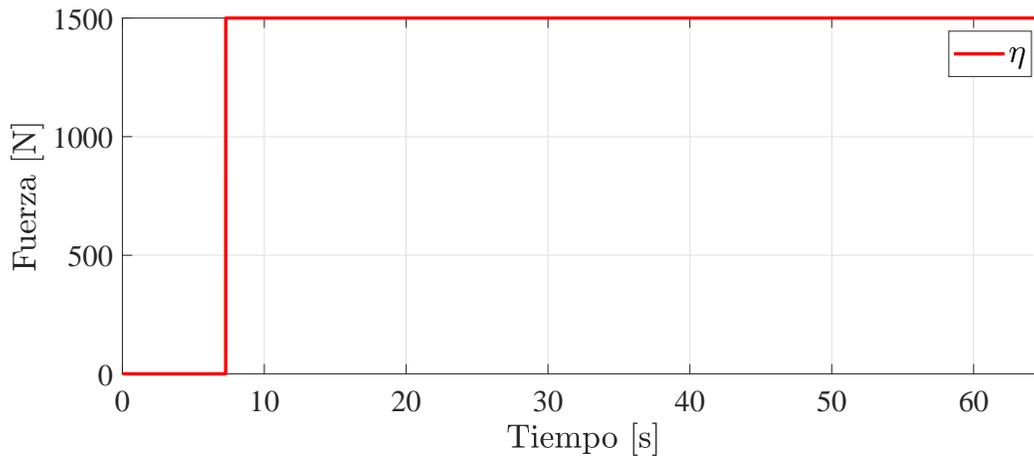


Figura 4.20: Perturbación en el actuador η

Sustituyendo las Ecs. (4.9) en su forma adaptable Ec. (3.120) sustituyendo los parámetros 4.1, y se diseñó el observador adaptable Ecs. (3.123), una vez obteniendo nuestro observador, encontraremos las ganancias adecuadas L y H , y así lograremos estimar los parámetros desconocidos, donde se considera el parámetro desconocido k_t que es el coeficiente de rigidez del neumático y a su vez lograr la estimación de las variables de estado del sistema, atenuando la perturbación.

Para diseñar el observador del sistema (4.9), es necesario verificar que la función $\Phi(x, \theta, u, t)$ cumpla con la condición de Lipschitz. Esto implica que las funciones $\Phi_1(x(t), u(t))$ y $\Phi_2(x(t), u(t))$ deben ser Lipschitz. La función no lineal $\Phi(x, u)$ satisface la condición de Lipschitz con respecto a las variables de estado Besançon (2000). La constante de Lipschitz γ se calcula de la siguiente manera:

$$\gamma = \left\| \frac{\partial \Phi(x, u)}{\partial x} \right\|_1 = \frac{1}{m_{us}}$$

Por lo tanto, el observador (3.123) se utiliza para estimar simultáneamente las variables de estado y el parámetro desconocido θ .

Reescribiendo las Ecs. (4.1), en la forma del sistema adaptable Ec. (3.121), donde se consideran el parámetro desconocido que forman el vector $\theta(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{b_2 + k_s}{m_s} & -\frac{b_1}{m_s} & \frac{b_2 + k_s}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{b_2 + k_s}{m_{us}} & \frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{b_2 + k_s}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \\
 &\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f_{c\rho}}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_{c\rho}}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} I(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} z_r(t) - x_3(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}}_{\Phi(x,u)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m_s} \\ 0 \\ 1 \\ m_{us} \end{bmatrix}}_N \eta(t) \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

A completar como en el caso anterior:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{b_2 + k_s}{m_s} & -\frac{b_1}{m_s} & \frac{b_2 + k_s}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{b_2 + k_s}{m_{us}} & \frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{b_2 + k_s}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f_{c\rho}}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_{c\rho}}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} I(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} z_r(t) - x_3(t) \\ \hat{\theta} \end{bmatrix}}_{\Phi_2(\hat{x},\theta,u)} + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \left[\frac{z_r(t) - \hat{x}_3(t)}{m_{us}} \right]^T H(y(t) - C\hat{x}(t)) \tag{4.30}$$

Sustituyendo los valores de los parámetros 4.1 en las Ecs. (4.27), (4.29) y (4.30) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6.0231 & -166.9787 & 6.0231 & 166.9787 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 25.7351 & 713.4545 & -25.7351 & -713.4545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.557 \\ 0 \\ 2.3798 \end{bmatrix} I(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{z_r(t) - x_3(t)}{110} \right] \hat{\theta}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{470} \\ 0 \\ \frac{1}{110} \end{bmatrix} \eta(t) \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Observador adaptable:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6.0231 & -166.9787 & 6.0231 & 166.9787 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 25.7351 & 713.4545 & -25.7351 & -713.4545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.557 \\ 0 \\ 2.3798 \end{bmatrix} I(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{z_r(t) - x_3(t)}{110} \right] \hat{\theta}(t) + L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.33)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \left[\frac{z_r(t) - \hat{x}_3(t)}{m_{us}} \right]^T H \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.34)$$

Las matrices L y H son las ganancias del observador y deben seleccionarse para garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados a los reales.

El único requisito para elegir la ganancia $\Gamma > 0$ es que debe ser un escalar positivo. En este caso se elige $\Gamma = 125$, debido a que este valor permite un tiempo de convergencia adecuado del observador. Mientras mayor sea el valor de Γ , menor es el tiempo de convergencia, pero a la vez se incrementa la sensibilidad del observador al ruido de medición.

La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en el Teorema 6 con el Toolbox YALMIP para MATLAB, con la cual se obtienen las siguientes matrices:

$$L = \begin{bmatrix} -0.9627 & -0.9677 & 0.0050 \\ 1.3959 & -1.0688 & 2.4647 \\ -0.6003 & -0.5931 & -0.0072 \\ -1.0688 & 1.3799 & -2.4487 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$H = \begin{bmatrix} -0.3696 & -0.3708 & 0.0012 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

En base a las Ecs. (4.31), (4.33) y (4.34), se estiman el vector de $\theta(t)$, obteniendo el coeficiente de rigidez del resorte $k_s(t)$, considerando el perfil de suelo Fig. 4.19, obteniendo el siguiente resultado.

Como se muestra en la Fig. 4.21, el parámetro desconocido $\theta = k_t$ se estima adecuadamente con la convergencia temporal adecuada.

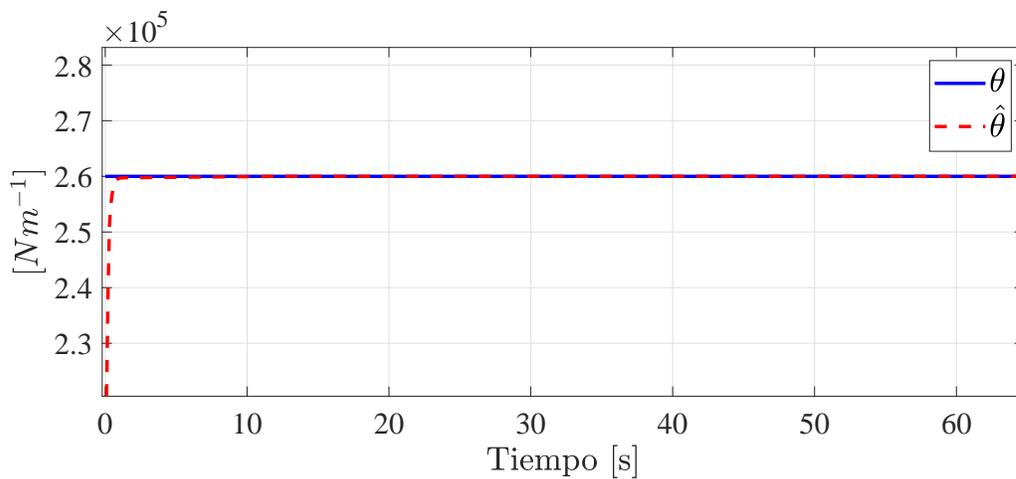


Figura 4.21: Rigidez de la llanta

Una vez que los datos del sistema están disponibles, se ejecuta la simulación estimando del parámetro desconocido. Como se muestra en la Fig. 4.21, se observa que $\hat{\theta}$ logra estimar el valor del coeficiente de rigidez de la rueda $k_t = 260,000Nm^{-1}$, convergiendo adecuadamente en el tiempo.

Una vez estimado el parámetro k_t , el observador es capaz de estimar la posición del chasis x_1 y su valor estimado \hat{x}_1 (Fig. 4.22). El efecto de la perturbación η se observa en $t = 8s$. Esto perjudica la comodidad y seguridad de los pasajeros. El observador atenúa el efecto de la perturbación minimizando la oscilación de \hat{x}_1 . Se puede observar que la perturbación provoca una alteración en el comportamiento del amortiguador cuando el vehículo pasa por el perfil de suelo Fig.4.19.

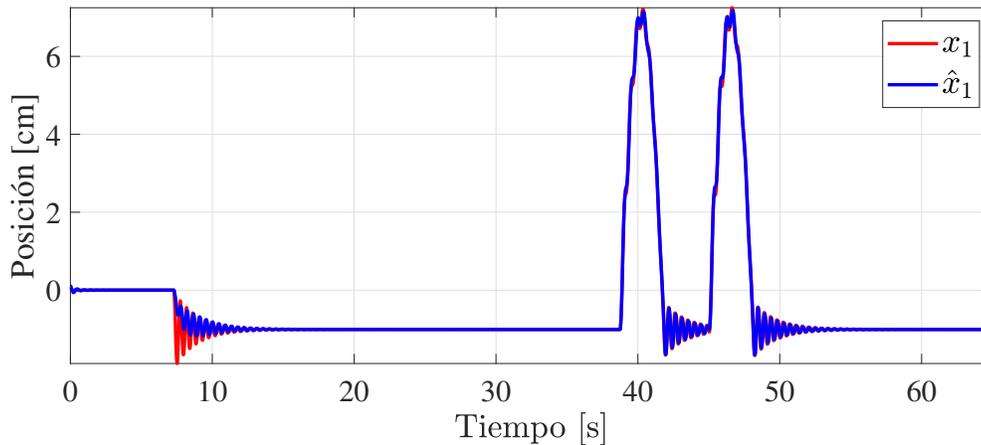


Figura 4.22: Posición del chasis x_1 vs \hat{x}_1

La posición del neumático x_3 y su valor estimado \hat{x}_3 se muestran en la Fig. 4.23. Se puede observar que el efecto de la perturbación $\eta(t)$ sobre el amortiguador provoca oscilaciones, que obligan al neumático a seguir la trayectoria sobre los badenes de la carretera. Una vez más, el observador atenúa la oscilación de \hat{x}_3 obteniendo una estimación adecuada de la salida a pesar de la presencia de la perturbación.

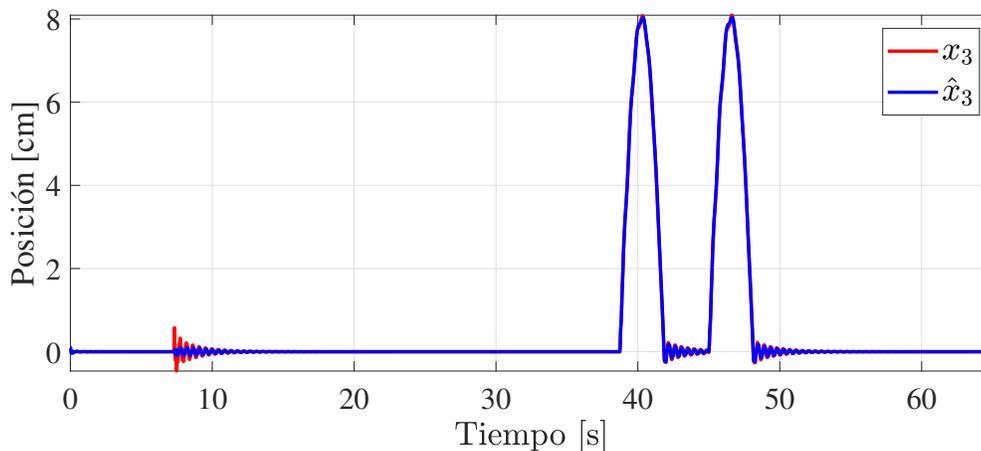


Figura 4.23: Posición del neumático x_3 vs \hat{x}_2

Conociendo las posiciones del chasis y del neumático se puede calcular la posición vertical del amortiguador y_3 (como se ve en la Fig. 4.24). Se puede observar el efecto de la perturbación sobre el actuador cuando el neumático transita por el perfil de la carretera. Esto nos permite atenuar la perturbación en nuestro observador, con el fin de mejorar la estabilidad, la precisión, la robustez, detectar anomalías y optimizar

el rendimiento general del sistema.

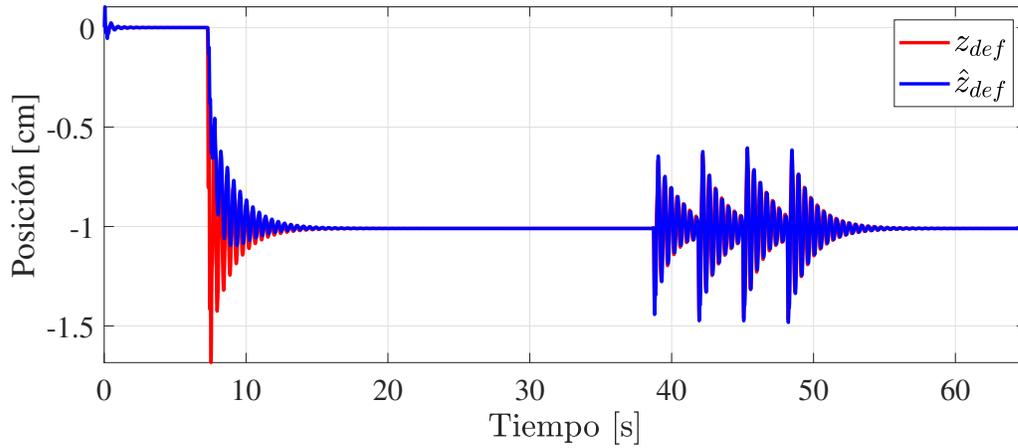


Figura 4.24: Deflexión del amortiguador z_{def} vs \hat{z}_{def}

El comportamiento de la suspensión se ve afectado por la perturbación η . Cuanto mayor es la fuerza que perturba el amortiguador, mayor es su deformación. El observador estima el coeficiente de rigidez del neumático k_t para controlar el deterioro del neumático y consigue atenuar la perturbación.

4.5. Intercambiador de calor

Se presenta el modelo de un intercambiador de calor, aplicado para la estimación del parámetro de coeficiente de transferencia de calor propuesto por Astorga-Zaragoza et al. (2007). Al detectar este parámetro se puede monitorear en qué momento el intercambiador de calor necesita un mantenimiento preventivo o correctivo.

$$\dot{T}_{co}(t) = \frac{2}{V_c} [v_c(T_{ci} - T_{co}(t)) + \frac{UA}{C_{pc}\rho_c} \Delta T(t)] \quad (4.37)$$

$$\dot{T}_{ho}(t) = \frac{2}{V_h} [v_h(T_{hi} - T_{ho}(t)) - \frac{UA}{C_{ph}\rho_h} \Delta T(t)] \quad (4.38)$$

Donde:

$$\Delta T(t) = \frac{(T_{ho}(t) - T_{ci}(t)) - (T_{hi}(t) - T_{co}(t))}{\ln\left(\frac{T_{ho}(t) - T_{ci}(t)}{T_{hi}(t) - T_{co}(t)}\right)}$$

Expresándolo en espacio de estados tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{co}(t) \\ \dot{T}_{ho}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2v_c}{V_c} & 0 \\ 0 & -\frac{2v_h}{V_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{co}(t) \\ T_{ho}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2v_c}{V_c} T_{ci}(t) \\ \frac{2v_h}{V_h} T_{hi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2A}{V_c C_{pc} \rho_c} \\ -\frac{2A}{V_h C_{ph} \rho_h} \end{bmatrix} [\Delta T(t)] U \quad (4.39)$$

Teniendo las siguientes salidas:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{co}(t) \\ T_{ho}(t) \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

La nomenclatura de los parámetros y variables del modelo se describe en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Lista de variables del modelo.

Variable	Descripción	Valor	Unidades
T_{ci}	Temperatura de entrada en el lado frío	298	K
T_{hi}	Temperaturas de entrada en el lado caliente	338	K
T_{co}	Temperatura de salida en el lado frío		K
T_{ho}	Temperaturas de salida en el lado caliente		K
U	Coefficiente de transferencia de calor	1049.4	$J/(m^2 K s)$
A	Área de superficie de transferencia de calor	0.633	m^2
C_{pc}	Calor específico en el lado frío	1910	$J/(kgK)$
C_{ph}	Calor específico en el lado caliente	1590	$J/(kgK)$
ρ_c	Densidad del flujo frío	1000	kg/m^3
ρ_h	Densidad del flujo caliente	1000	kg/m^3
V_c	Volumen en el lado frío	6.05×10^{-3}	m^3
V_h	Volumen en el lado caliente	3.2×10^{-3}	m^3
v_c	Caudal en el lado frío	3.15×10^{-4}	m^3/s
v_h	Caudal en el lado caliente	1.9×10^{-4}	m^3/s

Realizando un cambio de variable:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{co} \\ T_{ho} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{ci} \\ T_{hi} \end{bmatrix}$$

Obtenemos el siguiente espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2v_c}{V_c} & 0 \\ 0 & -\frac{2v_h}{V_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2v_c}{V_c} u_1(t) \\ \frac{2v_h}{V_h} u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2A}{V_c C_{pc} \rho_c} \\ -\frac{2A}{V_h C_{ph} \rho_h} \end{bmatrix} [\Delta T(t)] U \quad (4.41)$$

Teniendo las siguientes salidas:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Donde:

$$\Delta T(t) = \frac{(x_2(t) - u_1(t)) - (u_2(t) - x_1(t))}{\ln\left(\frac{x_2(t) - u_1(t)}{u_2(t) - x_1(t)}\right)}$$

Los vectores de estados, los vectores de salida y de entrada son: $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$, $y(t) = [y_1(t)]$, $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$, donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las temperaturas de salida en el lado frío y lado caliente, $y_1(t)$ es la temperatura de salida en el lado frío, $u_1(t)$ es la temperatura de entrada en el lado frío y $u_2(t)$ es la temperatura de entrada en el lado caliente.

4.5.1. Simulación del modelo matemático del intercambiador de calor

Objetivo: Analizar el comportamiento dinámico en el tiempo de un intercambiador de calor.

En esta simulación se analiza el comportamiento de dos fluidos con temperaturas distintas que pasan por un intercambiador de calor de manera indirecta por lo cual nunca se mezclan, produciendo una convección de calor, para después pasar a una conducción de calor y finalmente regresar a una convección de calor, con el objetivo de producir una transferencia de calor entre ambos fluidos y obtener los cambios de temperatura de cada uno.

Para producir la simulación del modelo del intercambiador de calor presentado en las Ecs. (4.41). Se simuló su comportamiento por medio de la herramienta de MATLAB 2018b, donde se utilizaron las siguientes condiciones iniciales del sistema: $x_1(0) = 306.82$, $x_2(0) = 325.38$, con un tiempo de simulación de 80 segundos, resolviendo por el método de Euler con un paso de integración de 0.25 s. Sustituyendo los valores de nuestros parámetros 4.2, en nuestro sistema.

La respuesta de la simulación se muestran en la Fig. 4.25, donde se observa los estados del sistema, temperatura de agua fría x_1 y agua caliente x_2 .

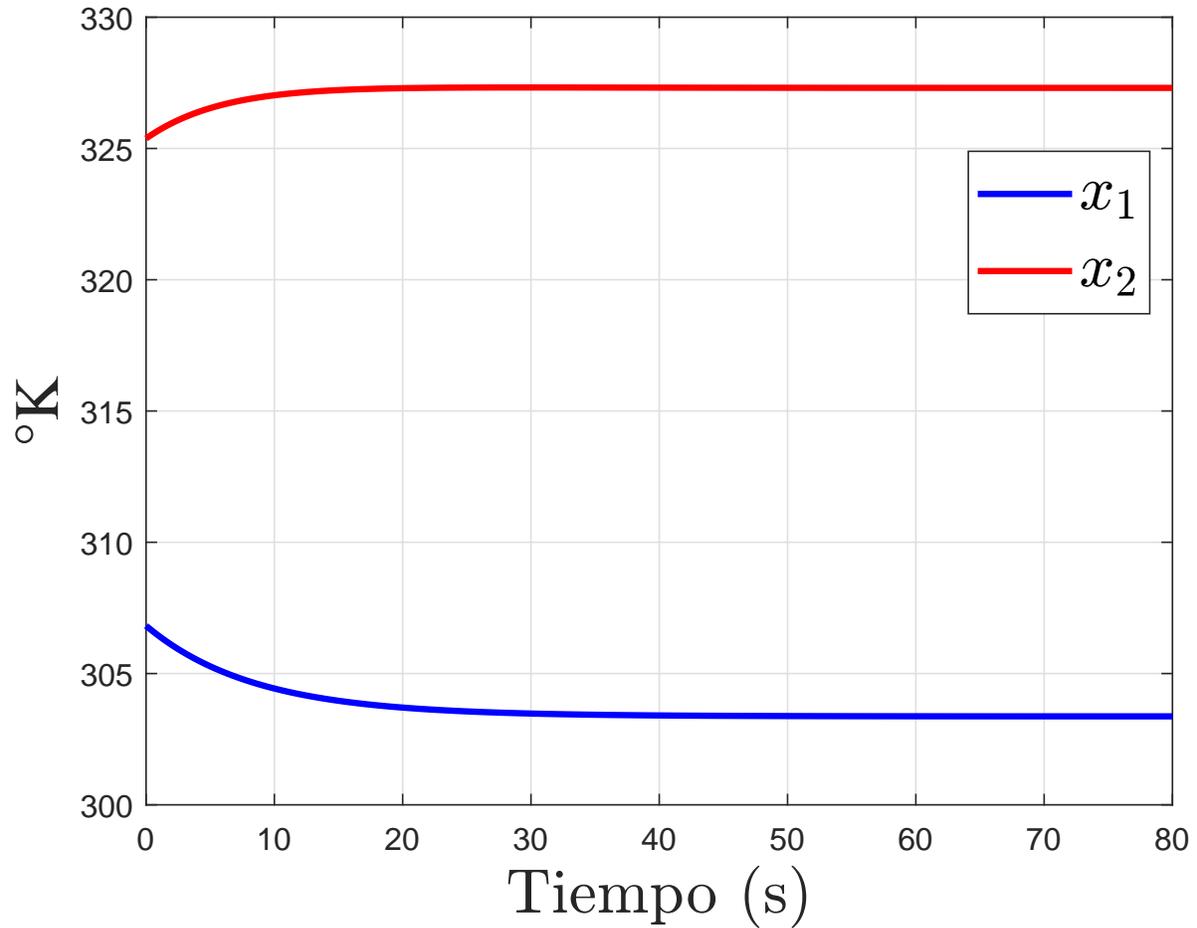


Figura 4.25: Temperaturas de salida

4.6. Respuesta del observador adaptable Lipschitz 3.1 aplicado a un intercambiador de calor

Objetivo: Simular el comportamiento de un intercambiador de calor con el fin de estimar el parámetro desconocido y los estados del sistema.

Considerando el caso de estudio de un intercambiador de calor Ecs. (4.39) y (4.40), tenemos que estimar un parámetro desconocido $\theta(t) = U(t)$, para lograr monitorear es el coeficiente de transferencia de calor y el comportamiento del sistema, donde ajustaremos nuestro sistema en su forma adaptable Ec. (3.24) y utilizaremos el observador Ec. (3.26).

La simulación se implementó en el programa MATLAB/Simulink 2018b, con un tiempo de simulación de 100 segundos, el método de resolución fue el de Euler con un paso de integración de 25ms, tomando en cuenta los valores de los parámetros 4.3. Las condiciones iniciales del sistema y del observador fueron: $x(0) = [360, 500]^T$ y $\hat{x}(0) = [180, 275]^T$, donde u_1 es la temperatura de entrada del agua fría, u_2 es la temperatura de entrada del agua caliente.

Tabla 4.3: Tabla de parámetros.

Constante	Valor	Constante	Valor
T_{ci}	$301.5^\circ K$	T_{hi}	$343.1^\circ K$
A	$14 \times 10^{-3} m^2$	U	$1049.4 J/m^2 \circ K s$
C_{ph}	$4174 J/kg \circ K$	C_{pc}	$4174 J/kg \circ K$
ρ_c	$991.8 kg/m^3$	ρ_h	$983.3 kg/m^3$
V_c	$135 \times 10^{-6} m^3$	V_h	$15.51 \times 10^{-6} m^3$
v_c	$6.67 \times 10^{-6} m^3/s$	v_h	$1.33 \times 10^{-5} m^3/s$

Sustituyendo las Ecs. (4.41) en su forma adaptable Ec. (3.24) y conociendo la salida del sistema Ec. (4.42) y sustituyendo los parámetros 4.3, se diseñó el observador adaptable Ecs. (3.26), una vez obteniendo nuestro observador, encontraremos las ganancias adecuadas L y H , y así lograremos estimar el parámetro desconocido $\hat{\theta}(t)$ y a su vez lograr la estimación de las variables de estado del sistema a pesar del parámetro desconocido.

Para diseñar el observador del sistema (4.41), es necesario verificar que la función $\Phi(x, \theta, u, t)$ cumpla con la condición de Lipschitz. Esto implica que las funciones $\Phi_1(x(t), u(t))$ y $\Phi_2(x(t), u(t))$ deben ser Lipschitz. Para comprobar esto, se calcula la norma de sus Jacobianos, obteniendo:

$$\frac{\partial \Phi_1(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1.35 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \Phi_2(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 567.04 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi_1(x, u)}{\partial x} \right\|_1 = 1.35 \quad \left\| \frac{\partial \Phi_2(x, u)}{\partial x} \right\|_1 = 567.04$$

Debido a que la norma del Jacobiano con respecto al vector de estados $x(t)$ de $\Phi_1(x, u)$ y $\Phi_2(x, u, t)$, son acotadas, entonces es posible concluir que el sistema (4.41) es Lipschitz.

Considerando que el parámetro desconocido a estimar es el coeficiente de transferencia de calor $U(t)$, entonces el sistema es (4.43) y el observador (4.46) y (4.47) es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2v_c}{V_c} & 0 \\ 0 & -\frac{2v_h}{V_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2v_c}{V_c} u_1(t) \\ \frac{2v_h}{V_h} u_2(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{2A}{V_c C_{pc} \rho_c} \\ -\frac{2A}{V_h C_{ph} \rho_h} \end{bmatrix} [\Delta T(t)] \theta(t) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Teniendo la siguiente salida:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Sustituyendo los parámetros por los valores indicados en la Tabla 4.3, se obtiene:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -0.1041 & 0 \\ 0 & -0.1187 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 31.0314 u_1(t) \\ 40.1375 u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1.35 x_2(t) \\ 0.52 u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_1(x,u)} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1096 \\ -0.2488 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 567.04 x_1(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_2(x,u)} \underbrace{\theta(t)}_{U(t)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Por lo tanto, el observador adaptable queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\hat{x}}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -0.1041 & 0 \\ 0 & -0.1187 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 31.0314 u_1(t) \\ 40.1375 u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 1.35 x_2(t) \\ 0.52 u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_1(\hat{x},u)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1096 \\ -0.2488 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 567.04 x_1(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_2(\hat{x},\theta,u)} \hat{\theta}(t) + L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma [47.37284]^T H \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.47)$$

Las matrices L y H son las ganancias del observador y deben seleccionarse para garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados a los reales.

El único requisito para elegir la ganancia $\Gamma > 0$ es que debe ser un escalar positivo. En este caso se elige $\Gamma = 15$, debido a que este valor permite un tiempo de convergencia adecuado del observador. Mientras mayor sea el valor de Γ , menor es el tiempo de convergencia, pero a la vez se incrementa la sensibilidad del observador al ruido de medición.

La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en el Teorema 2 con el Toolbox YALMIP para MATLAB, con la cual se obtienen las siguientes matrices:

$$L = \begin{bmatrix} 0.0989 & 1.5113 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.178 & 0.21 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

En base a las Ecs. (4.45), (4.46) y (4.47), se estima el parámetro desconocido se muestra en la Fig. 4.26 se observa que el observador tarda 30 segundos en estimar el valor del coeficiente de transferencia de calor $U = 1049.4 J/m^2 K s$.

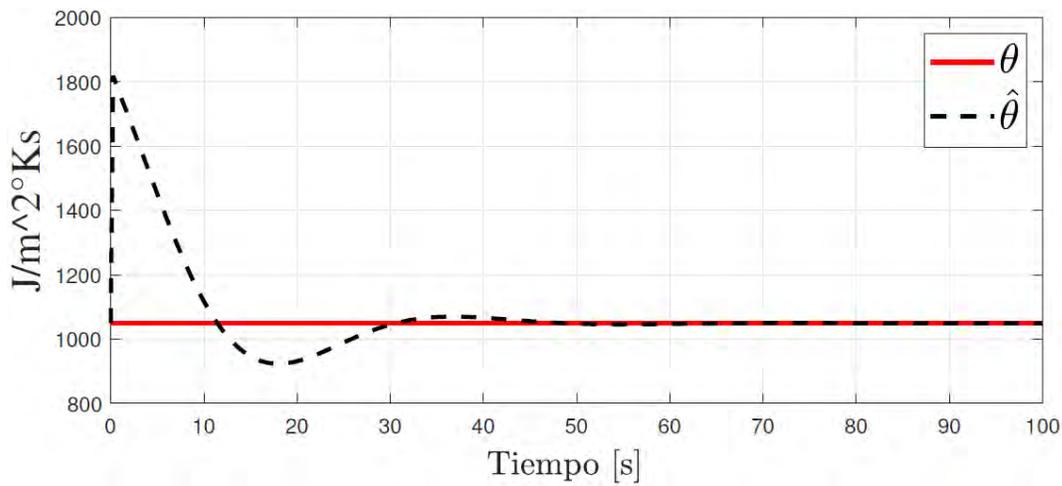


Figura 4.26: Coeficiente de transferencia de calor

Una vez estimado el parámetro $U(t)$, el observador puede estimar la temperatura del agua fría $y_1(t)$ donde se observa que en el segundo 30. Como se muestra en la Fig. 4.27, la señal $x_1(t)$ se compara con la observada $\hat{x}_1(t)$

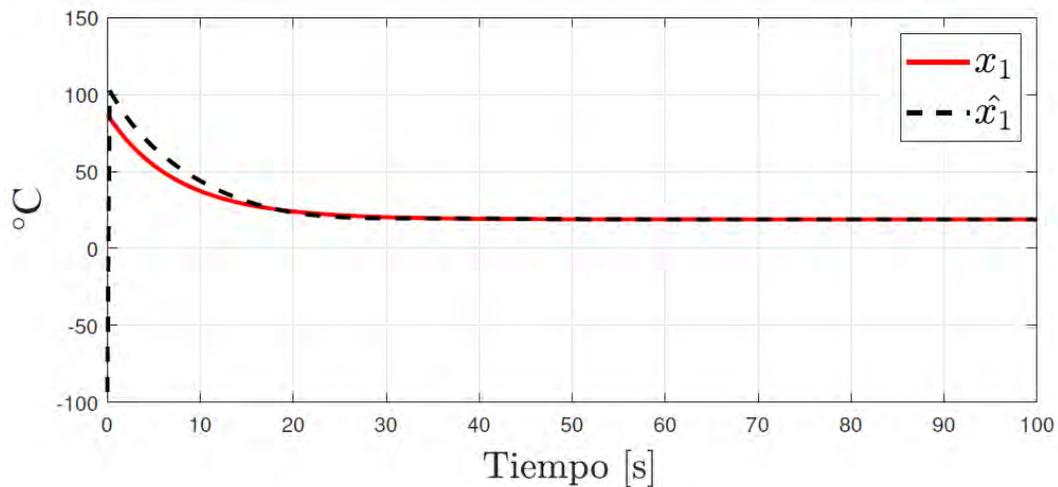


Figura 4.27: Temperatura del agua fría x_1 vs \hat{x}_1

A pesar de no conocer la temperatura de salida del agua caliente $x_2(t)$ del sistema, el observador es capaz de estimarla correctamente $\hat{x}_2(t)$, logrando converger en el segundo 20 como se muestra en la Fig. 4.28.

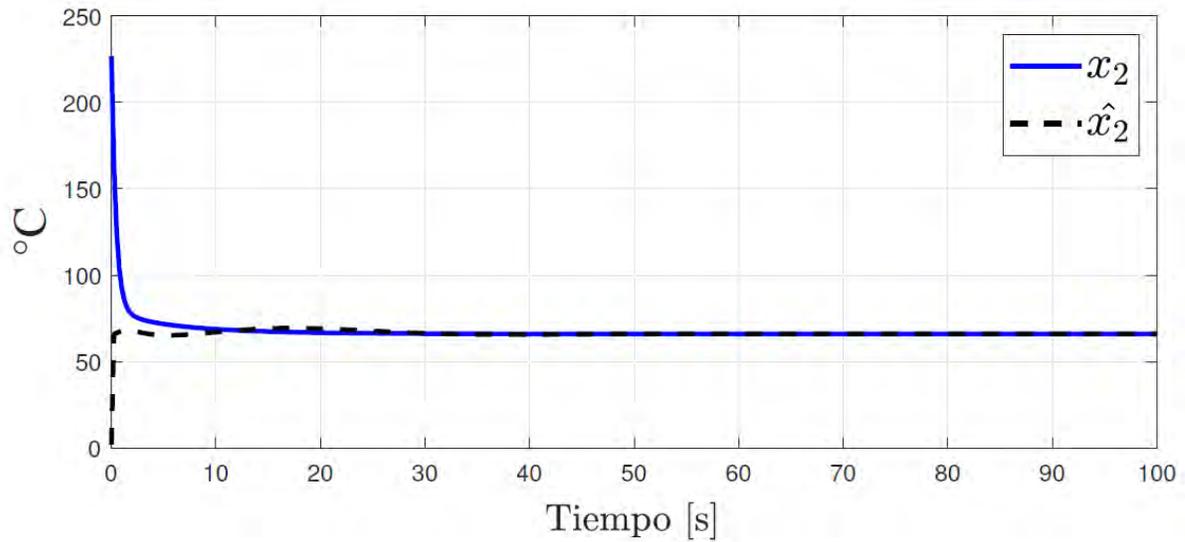


Figura 4.28: Temperatura del agua caliente x_2 vs \hat{x}_2

El observador propuesto es capaz de estimar simultáneamente estados y parámetros desconocidos, se demostró que el observador es capaz de estimar las temperaturas de salida, incluso sin conocer todas las salidas reales del sistema. Se demostró que el observador propuesto es útil para sistemas no lineales siempre que cumplan las condiciones de Lipschitz.

4.7. Respuesta del observador adaptable Lipschitz 3.2 aplicado a un intercambiador de calor con presencia de perturbación en la salida

Objetivo: Simular el comportamiento de un intercambiador de calor con el fin de estimar el parámetro desconocido y los estados del sistema ante la presencia de una perturbación en los sensores.

Considerando el caso de estudio de un intercambiador de calor en las Ecs. (4.39) y (4.40), de tal manera tenemos que estimar un parámetro desconocido $\theta(t) = U(t)$, para lograr monitorear el coeficiente de transferencia de calor y el comportamiento del sistema, donde ajustaremos nuestro sistema en su forma adaptable Ec. (3.47) y utilizaremos el observador Ec. (3.48).

La simulación se implementó en el programa MATLAB/Simulink 2018b, con un tiempo de simulación de 300 segundos, el método de resolución fue el de Euler con un paso de integración de 1.5ms, tomando en cuenta los valores de los parámetros (4.2). Las condiciones iniciales del sistema y del observador fueron: $x(0) = [150, 500]^T$ y $\hat{x}(0) = [356, 150]^T$, donde u_1 es la temperatura de entrada del agua fría, u_2 es la temperatura de entrada del agua caliente.

Sustituyendo las Ecs. (4.41) en su forma adaptable Ec. (3.47) y conociendo la salida del sistema Ec. (4.42) y sustituyendo los parámetros 4.2, se diseñó el observador adaptable Ecs. (3.48), una vez obteniendo nuestro observador, encontraremos las ganancias adecuadas L y H , y así lograremos estimar el parámetro desconocido $\hat{\theta}(t)$ y a su vez lograr la estimación de las variables de estado del sistema a pesar del parámetro desconocido, en presencia de una perturbación en la salida del sistema.

Para diseñar el observador del sistema (4.41), es necesario verificar que la función $\Phi(x, \theta, u, t)$ cumpla con la condición de Lipschitz. Esto implica que las funciones $\Phi_1(x(t), u(t))$ y $\Phi_2(x(t), u(t))$ deben ser Lipschitz. Para comprobar esto, se calcula la norma de sus Jacobianos, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(x, u)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 31.0314 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{\partial \Phi_2(x, u)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 40.1375 & 0 \end{bmatrix} \\ \left\| \frac{\partial \Phi_1(x, u)}{\partial x} \right\|_1 &= 31.0314 & \left\| \frac{\partial \Phi_2(x, u)}{\partial x} \right\|_1 &= 40.1375 \end{aligned}$$

Debido a que las normas del Jacobiano con respecto al vector de estados $x(t)$ de $\Phi_1(x, u)$ y $\Phi_2(x, u, t)$, son acotadas, entonces el sistema (4.41) es Lipschitz.

Considerando que el parámetro a estimar es el coeficiente de transferencia de calor $U(t)$, entonces el observador (4.53) y (4.54) para el sistema (4.52) es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2v_c}{V_c} & 0 \\ 0 & -\frac{2v_h}{V_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2v_c}{V_c} u_1(t) \\ \frac{2v_h}{V_h} u_2(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{2A}{V_c C_{pc} \rho_c} \\ -\frac{2A}{V_h C_{ph} \rho_h} \end{bmatrix} [\Delta T(t)] \theta(t) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Teniendo la siguiente salida:

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_G \underbrace{10 \text{sen}(t)}_{\eta(t)} \quad (4.51)$$

Sustituyendo los parámetros se tiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.1041 & 0 \\ 0 & -0.1187 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 31.0314u_1(t) \\ 40.1375u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1.35x_2(t) \\ 0.52u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_1(x,u)} \quad (4.52)$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1096 \\ -0.2488 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 567.04x_1(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_2(x,u)} \underbrace{\theta(t)}_{U(t)}$$

Por lo tanto, el observador adaptable queda de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\hat{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.1041 & 0 \\ 0 & -0.1187 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 31.0314u_1(t) \\ 40.1375u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 1.35x_2(t) \\ 0.52u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_1(\hat{x},u)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1096 \\ -0.2488 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 567.04x_1(t) \\ \hat{\theta}(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_2(\hat{x},\theta,u)} + L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.53)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \begin{bmatrix} 47.37284 \end{bmatrix}^T H \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.54)$$

Las matrices L y H son las ganancias del observador y deben seleccionarse para garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados a los reales.

El único requisito para elegir la ganancia $\Gamma > 0$ es que debe ser un escalar positivo. En este caso se elige $\Gamma = 10$, debido a que este valor permite un tiempo de convergencia adecuado del observador. Mientras mayor sea el valor de Γ , menor es el tiempo de convergencia, pero a la vez se incrementa la sensibilidad del observador al ruido de medición.

La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en el Teorema 3 con el Toolbox YALMIP para MATLAB, con la cual se obtienen las siguientes matrices:

$$L = \begin{bmatrix} 0.3952 & -0.3951 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.0375 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

En la figura 4.29 se muestra una comparativa entre la señal ideal del sistema $\bar{y}(t)$, la cual no presenta perturbación y la salida real del sistema $y(t)$ que presenta perturbaciones.

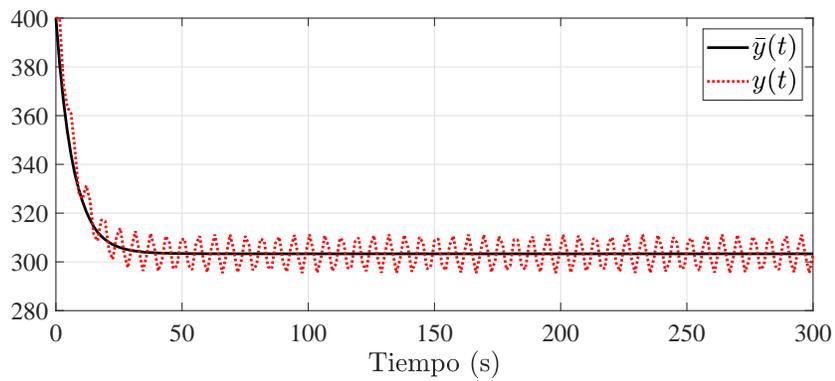


Figura 4.29: Comparación entre la salida disponible $y(t)$ y la no disponible $\bar{y}(t)$ del sistema, temperatura de agua caliente.

En la Fig. 4.30 se presenta una perturbación dada $\eta(t) = 10 \sin(t)$ que afecta la salida del sistema.

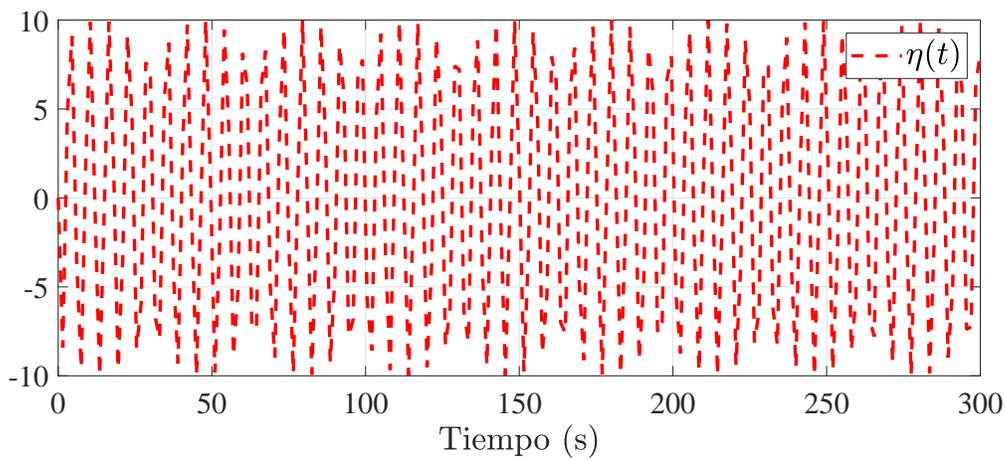


Figura 4.30: Valor de $\eta(t)$

En base a las Ecs. (4.52), (4.53) y (4.54), se estima el parámetro desconocido el cual se muestra en la Fig. 4.31 se muestra que el observador tarda 60 segundos en estimar el valor del coeficiente de transferencia de calor $U = 160 J/m^2 K s$.

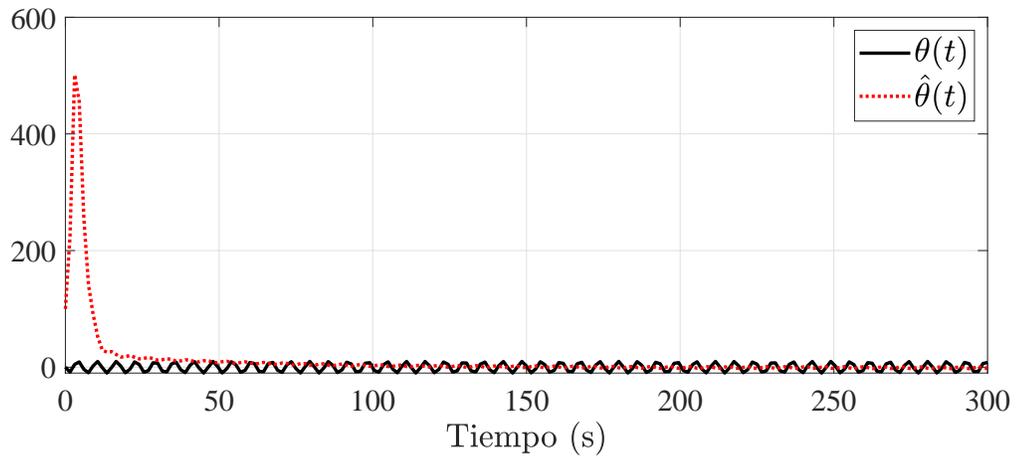


Figura 4.31: Coeficiente de transferencia de calor

Una vez estimado el parámetro $U(t)$, el observador puede estimar la temperatura del agua fría $y_1(t)$ donde se observa que en el segundo 25, a pesar de la presencia de la perturbación el observador logra estimar los estados del sistema, conociendo la temperaturas de salida del agua fría y caliente. Como se muestra en la Fig. 4.32, la señal $x_1(t)$ se compara con la observada $\hat{x}_1(t)$

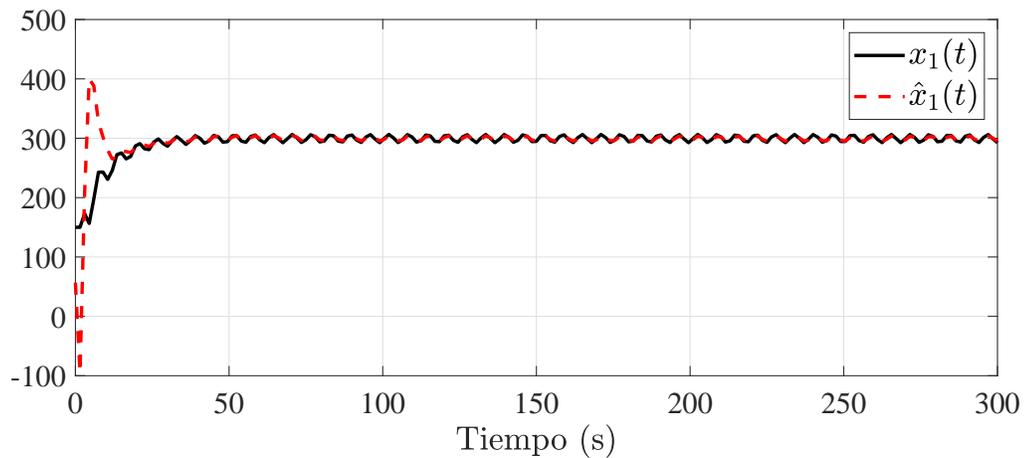


Figura 4.32: Temperatura del agua fría x_1 vs \hat{x}_1

A pesar de no conocer la temperatura de salida del agua caliente $x_2(t)$ del sistema, el observador es capaz de estimarla correctamente $\hat{x}_2(t)$, logrando converger en el segundo 50 como se muestra en la Fig. 4.33.

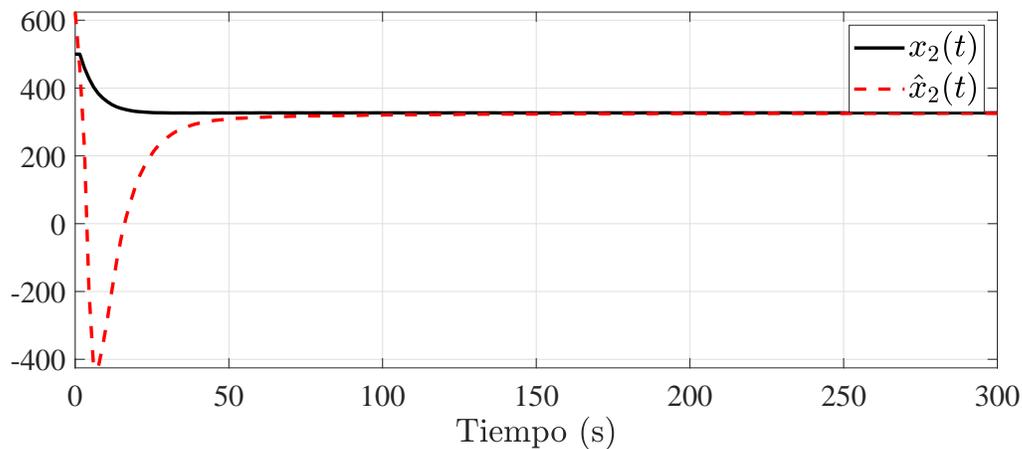


Figura 4.33: Temperatura del agua caliente x_2 vs \hat{x}_2

Una vez simulado el intercambiador de calor, considerando la perturbación en la salida, el observador logra estimar los estados del sistema, a pesar de solo conocer un estado en la salida, en la Fig. 4.32 se compara el estado real del sistema $x_1(t)$ con la señal estimada $\hat{x}_1(t)$, obteniendo una convergencia adecuada siguiendo su trayectoria a través del tiempo. De igual manera en la Fig. 4.33 a pesar de no conocer dicha salida, el observador logra estimar $\hat{x}_2(t)$, el comportamiento real del sistema $x_2(t)$, obteniendo una convergencia a través del tiempo, la cual queda acotada en una región aproximada del origen, cumpliendo la condición \mathcal{H}_∞ con lo que queda demostrado el Teorema 3.

4.8. Respuesta del observador adaptable Lipschitz aplicado a un intercambiador de calor 3.5 ante presencia de perturbaciones

Objetivo: Estimar el parámetro desconocido por medio del diseño de un observador adaptable H_∞ , donde se logra estimar los estados de los sistemas y se estima el vector de los parámetros desconocidos convergiendo al valor real ante la presencia de perturbaciones. Dicho observador es para un sistema no lineal Lipschitz, y se aplica al caso de estudio de un intercambiador de calor con el fin de estimar el coeficiente de transferencia de calor y supervisar su funcionamiento ante presencia de perturbaciones en el sistema.

Considerando el caso de estudio de un intercambiador de calor Ecs. (4.39) y (4.40), tenemos que estimar el parámetro desconocido $\theta(t) = U(t)$, para lograr supervisar el comportamiento del sistema ante la presencia de perturbaciones, para eso utilizaremos el observador 3.5, donde ajustaremos nuestro sistema en su forma adaptable Ec. (3.120) y utilizaremos el observador Ec. (3.123).

La simulación se implementó en el programa MATLAB/Simulink 2018b, con un tiempo de simulación de 180 segundos, el método de resolución fue el de Euler con un paso de integración de 25ms, tomando en cuenta los valores de los parámetros 4.2. Las condiciones iniciales del sistema y del observador fueron: $x(0) = [2500, 350]^T$ y $\hat{x}(0) = [310.82, 380.38]^T$, donde u_1 es la temperatura de entrada del agua fría, u_2 es la temperatura de entrada del agua caliente.

Sustituyendo las Ecs. (4.41) en su forma adaptable Ec. (3.120) y conociendo la salida del sistema Ec. (4.42) y sustituyendo los parámetros 4.1, y se diseñó el observador adaptable Ecs. (3.123), una vez obteniendo nuestro observador, se atenúa la perturbación y encontraremos las ganancias adecuadas L y H , y así lograremos estimar el parámetro desconocido $\hat{\theta}(t)$ y a su vez lograr la estimación de las variables de estado del sistema a pesar del parámetro desconocido.

Para diseñar el observador del sistema (4.41), es necesario verificar que la función $\Phi(x, \theta, u, t)$ cumpla con la condición de Lipschitz. Esto implica que las funciones $\Phi_1(x(t), u(t))$ y $\Phi_2(x(t), u(t))$ deben ser Lipschitz. Para comprobar esto, se calcula la norma de sus Jacobianos, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(x, u)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1.35 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{\partial \Phi_2(x, u)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 567.04 & 0 \end{bmatrix} \\ \left\| \frac{\partial \Phi_1(x, u)}{\partial x} \right\|_1 &= 1.35 & \left\| \frac{\partial \Phi_2(x, u)}{\partial x} \right\|_1 &= 567.04 \end{aligned}$$

Debido a que las normas del Jacobiano con respecto al vector de estados $x(t)$ de $\Phi_1(x, u)$ y $\Phi_2(x, u, t)$, son acotadas, entonces el sistema (4.41) es Lipschitz.

Considerando que el parámetro a estimar es el coeficiente de transferencia de calor $U(t)$, y la perturbación es $\eta(t)$, entonces el observador (4.57) y (4.58) para el sistema (4.60) es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2v_c}{V_c} & 0 \\ 0 & -\frac{2v_h}{V_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2v_c}{V_c} u_1(t) \\ \frac{2v_h}{V_h} u_2(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{2A}{V_c C_{pc} \rho_c} \\ -\frac{2A}{V_h C_{ph} \rho_h} \end{bmatrix} [\Delta T(t)] \theta(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \eta(t) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Teniendo la siguiente salida:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Sustituyendo los parámetros obtenemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -0.1041 & 0 \\ 0 & -0.1187 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 31.0314 u_1(t) \\ 40.1375 u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Psi(y, u)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1.35 x_2(t) \\ 0.52 u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_1(x, u)} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1096 \\ -0.2488 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 567.04 x_1(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_2(x, u)} \underbrace{\theta(t)}_{U(t)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \eta(t) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Quedando el observador de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2v_c}{V_c} & 0 \\ 0 & -\frac{2v_h}{V_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2v_c}{V_c} u_1(t) \\ \frac{2v_h}{V_h} u_2(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{2A}{V_c C_{pc} \rho_c} \\ -\frac{2A}{V_h C_{ph} \rho_h} \end{bmatrix} [\Delta T(t)] \hat{\theta}(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \left[\Delta T(t) \right]^T H(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (4.61)$$

Sustituyendo los valores de los parámetros obtenemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -0.1041 & 0 \\ 0 & -0.1187 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 31.0314u_1(t) \\ 40.1375u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 1.35x_2(t) \\ 0.52u_2(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_1(\hat{x},u)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1096 \\ -0.2488 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 567.04x_1(t) \end{bmatrix}}_{\Phi_2(\hat{x},\theta,u)} \hat{\theta}(t) + L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \left[47.37284 \right]^T H \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.63)$$

Las matrices L y H son las ganancias del observador y deben seleccionarse para garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados a los reales.

El único requisito para elegir la ganancia $\Gamma > 0$ es que debe ser un escalar positivo. En este caso se elige $\Gamma = 18$, debido a que este valor permite un tiempo de convergencia adecuado del observador. Mientras mayor sea el valor de Γ , menor es el tiempo de convergencia, pero a la vez se incrementa la sensibilidad del observador al ruido de medición.

La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en el Teorema 6 con el Toolbox YALMIP para MATLAB, con la cual se obtienen las siguientes matrices:

$$L = \begin{bmatrix} 0.0989 & 1.5113 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.178 & 0.21 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$\eta(t)$ representa una perturbación que se presenta en el flujo de agua fría ocasionada por la acumulación de óxido presente en la tubería del intercambiador, provocando pérdida de presión, provocando con el tiempo una ruptura o fugas de agua.

Por lo cual se genera una perturbación que se hace presente desde el segundo 35 hasta el segundo 60 como se muestra en la Fig. 4.34 en forma de escalón.

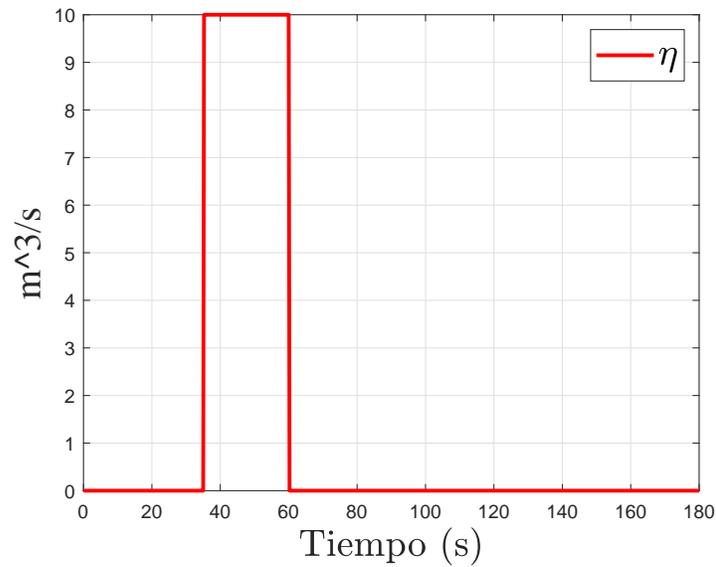


Figura 4.34: Perturbación η

En base a las Ecs. (4.59), (4.62) y (4.63), se estima el parámetro desconocido se muestra en la Fig. 4.35 se observa que $\hat{\theta}(t)$ tarda 60 segundos en estimar el valor del coeficiente de transferencia de calor $U = 1049.4 \text{ J}/\text{m}^2 \text{ K s}$.

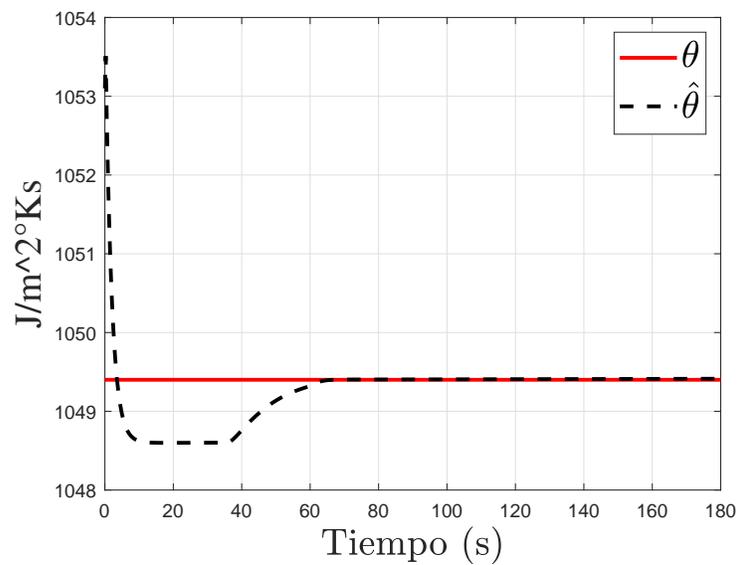


Figura 4.35: Coeficiente de transferencia de calor

Una vez estimado el parámetro $U(t)$, el observador puede estimar la temperatura del agua fría $x_1(t)$ donde se visualiza que el criterio H_∞ logra atenuar la perturbación producida, logrando tener una mejor lectura de su comportamiento, como se muestra en la Fig. 4.36, la señal $x_1(t)$ se compara con la observada $\hat{x}_1(t)$

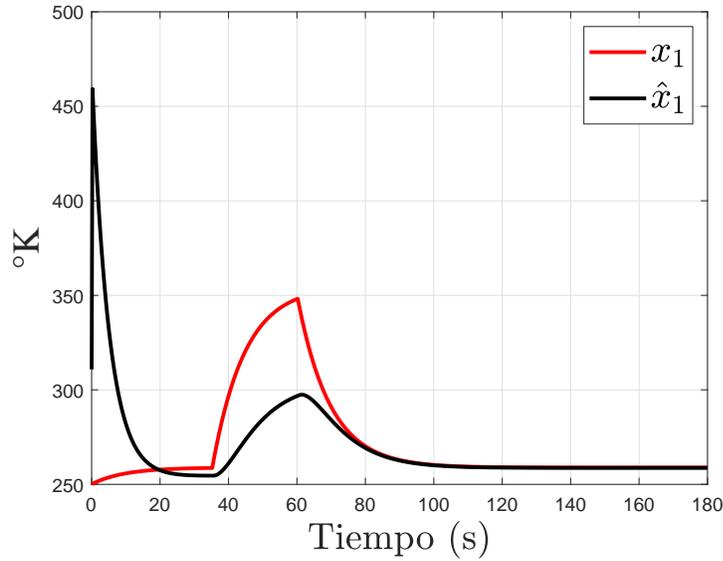


Figura 4.36: Temperatura del agua fría x_1 vs \hat{x}_1

A pesar de no conocer la temperatura de salida del agua caliente $x_2(t)$ del sistema, el observador es capaz de estimarla correctamente $\hat{x}_2(t)$, logrando converger, como se muestra en la Fig. 4.37.

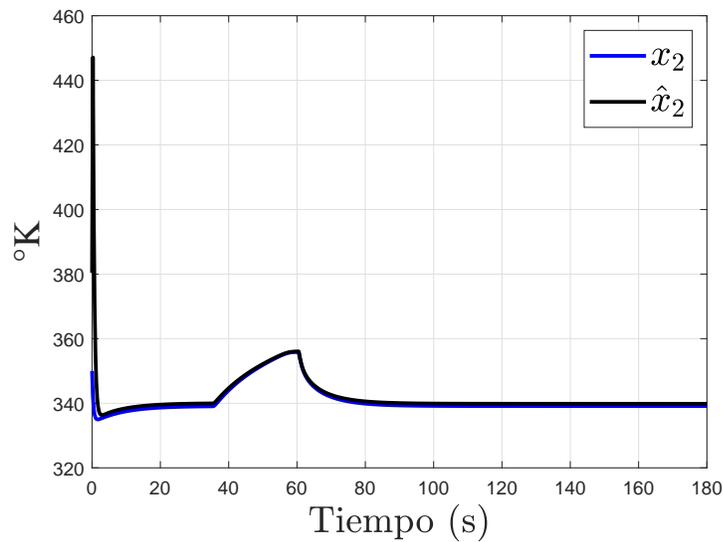


Figura 4.37: Temperatura del agua caliente x_2 vs \hat{x}_2

El rendimiento del intercambiador de calor se ve afectado por la perturbación $\eta(t)$ ya que al aumentar la oxidación en la tubería, podría llegar al punto en que ya no permita el paso del agua, provocando

una fuga o fractura de la tubería. El desempeño del observador fue evaluado mediante la realización de simulaciones. Se demostró que el observador es capaz de estimar las temperaturas de salida, incluso en presencia de perturbaciones.

Capítulo 5

Conclusión

En este trabajo de tesis se abordó el diseño de observadores adaptables para sistemas no lineales tipo Lipschitz. Los sistemas no lineales, están presentes en diversas áreas, como la física, las matemáticas, la química, la biología, la ingeniería, entre otras. Ya que modelan dinámicas complejas que acercan a las representaciones matemáticas con los fenómenos físicos. Dentro de los sistemas no lineales existe una clase particular, los cuales se distinguen por la propiedad de Lipschitz, la cual asegura que el comportamiento del sistema sea moderadamente sensible a los cambios en las entradas y en las condiciones iniciales. Esta propiedad impide que dichos sistemas varíen demasiado rápido en respuesta a pequeños cambios en las condiciones, lo que garantiza la estabilidad del sistema. Siempre y cuando cumpla con las condiciones Lipschitz que garantiza la existencia y unicidad de las ecuaciones.

Durante este trabajo de tesis se estudió el comportamiento de los sistemas adaptables, los cuales cambian su comportamiento o parámetro en respuesta a cambios en su entorno o a las condiciones de operación, logrando ajustarse a cualquier escenario, gracias a ello, se diseñó un observador adaptable con el fin de ajustar sus parámetros en respuesta a los cambios en el sistema o en la señal de medición. Logrando mejorar la estimación del estado del sistema a pesar de las incertidumbres o cambios en el sistema.

Se presentan dos casos de estudio: el primero se trata de una suspensión semiactiva de un cuarto de vehículo, donde se debe estimar el coeficiente de rigidez k_t , ante la presencia de perturbaciones, logrando supervisar su rendimiento a lo largo del tiempo a pesar de la presencia de la perturbación (cargamento de más, llanta pinchada), y el segundo caso de estudio es un intercambiador de calor, donde se estima el coeficiente de transferencia de calor ante la presencia de perturbaciones (oxidación en la tubería, atascamiento) logrando monitorear su rendimiento a lo largo del tiempo.

Se diseñó de un observador adaptable con enfoque \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales con incertidumbres, donde se logra la estimación de un parámetro desconocido y los estados del sistema a pesar de las perturbaciones presentes en los sensores. Dicho diseño se aplicó a un intercambiador de calor que logra estimar completamente el vector de estado a partir de una sola salida disponible, sin necesidad de información adicional.

Se diseñó de un observador adaptable con enfoque \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales Lipschitz. Se comprobó su funcionamiento aplicándolo a una suspensión semiactiva. Se logró estimar los dos parámetros desconocidos y al mismo tiempo los estados con el fin de monitorear la suspensión del automóvil. El desempeño del observador fue evaluado mediante simulaciones, demostrando la estimación correcta de las posiciones del vehículo, la rigidez del neumático y del chasis, así como también la posición del pistón del amortiguador. Se comprobó que el observador adaptable puede estimar varios parámetros, siempre y cuando cumpla con las condiciones Lipschitz, y se obtengan las ganancias adecuadas.

Se logró el diseño de un observador adaptable con enfoque \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales con incertidumbres, donde se logra la estimación de un parámetro desconocido y el estado del sistema a pesar de las perturbaciones presentes. Este observador se aplicó para la supervisión del deterioro de una suspensión semiactiva, basándose en las mediciones de las posiciones. El observador estima el coeficiente de rigidez de la llanta k_t con el fin de supervisar la disminución de la presión del neumático. Por lo tanto, la supervisión de este parámetro, podría utilizarse para verificar el estado de deterioro en que se encuentra la suspensión (en este caso, la presión del neumático). Se evaluó el desempeño del observador en simulación, logrando estimar las posiciones del vehículo y la rigidez del neumático en presencia de perturbaciones.

Se presenta un observador adaptable \mathcal{H}_∞ para procesos que pueden ser modelados como sistemas no lineales Lipschitz. Las condiciones propuestas bajo una restricción de pasividad se emplean para tratar con sistemas no lineales con ciertos parámetros desconocidos. El observador propuesto es capaz de estimar simultáneamente estados y parámetros desconocidos, incluso en presencia de perturbaciones. La principal ventaja del observador es que puede aplicarse a una clase más amplia de sistemas con parámetros desconocidos. Además, al incorporar los criterios en el diseño, el observador demuestra una mayor resiliencia frente a perturbaciones no deseadas, mientras garantiza un rendimiento robusto. A diferencia de los observadores de alta ganancia, el proceso de diseño del observador no requiere una transformación de coordenadas, lo que simplifica la implementación y reduce la complejidad. Se utiliza una suspensión semi-activa de automóvil para probar el rendimiento del observador propuesto. Gracias al enfoque \mathcal{H}_∞ , se puede atenuar el efecto de perturbaciones o entradas desconocidas, lo que permite un mejor monitoreo de los sistemas. Se ha demostrado la simplicidad de calcular las ganancias del observador, eliminando la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales adicionales, generalmente asociadas con los observadores de Kalman. Es bien sabido que los observadores de Kalman (o filtros como se presentan en Chen et al. (2016) y Gong et al. (2019)) requieren ecuaciones diferenciales adicionales para calcular recursivamente la ganancia del observador, incorporando la matriz de covarianza predicha para estimar la precisión de las estimaciones de estado (Zhao and Mili (2018)). En contraste, el observador propuesto emplea ganancias del observador de valor fijo, que se calculan una vez, de forma fuera de línea, resolviendo las LMIs proporcionadas en el Teorema. Los resultados de la simulación demuestran la efectividad del enfoque propuesto al tratar con un sistema práctico.

Gracias a este trabajo de tesis, se publicaron 3 artículos en congresos y 1 artículo en una revista JCR.

Como trabajo futuro, se espera aplicar el enfoque \mathcal{H}_∞ a la salida para supervisar la operación de sistemas dinámicos en presencia de perturbaciones de los sensores. Este enfoque tiene como objetivo ampliar el alcance y abordar escenarios más realistas aplicados a la implementación.

Bibliografía

- Abbaszadeh, M. and Marquez, H. J. (2006). A robust observer design method for continuous-time lipschitz nonlinear systems. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3795–3800. IEEE.
- Aboky, C., Sallet, G., and Vivalda, J.-C. (2002). Observers for lipschitz non-linear systems. *International Journal of control*, 75(3):204–212.
- Ahmad, S. and Rehan, M. (2016). On observer-based control of one-sided lipschitz systems. *Journal of the Franklin Institute*, 353(4):903–916.
- Ahmed-Ali, T., Tiels, K., Schoukens, M., and Giri, F. (2019). Sampled-data adaptive observer for state-affine systems with uncertain output equation. *Automatica*, 103:96–105.
- Alvarado-Méndez, P., Zaragoza, C. A., Gordillo, G. O., Ramirez, G. G., Menéndez, R. M., and Márquez, E. Q.-M. (2019). Monitoreo de una suspensión semiactiva a través de un observador adaptable. *Asociación Mexicana de Control Automático*.
- Astorga, C.-M., Othman, N., Othman, S., Hammouri, H., and McKenna, T.-F. (2002). Nonlinear continuous–discrete observers: application to emulsion polymerization reactors. *Control Engineering Practice*, 10(1):3–13.
- Astorga-Zaragoza, C.-M., Zavala-Río, A., Alvarado, V., Méndez, R.-M., and Reyes-Reyes, J. (2007). Performance monitoring of heat exchangers via adaptive observers. *Measurement*, 40(4):392–405.
- Besançon, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & Control Letters*, 41(4):271–280.
- Besançon, G. (2007). *Nonlinear observers and applications*, volume 363. Springer.
- Carroll, R. and Lindorff, D. (1973). An adaptive observer for single-input single-output linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(5):428–435.
- Chen, C., Sun, F., Xiong, R., and He, H. (2016). A novel dual h infinity filters based battery parameter and state estimation approach for electric vehicles application. *Energy Procedia*, 103:375–380.
- Chen, W.-H., Yang, W., and Zheng, W. X. (2015). Adaptive impulsive observers for nonlinear systems: revisited. *Automatica*, 61:232–240.
- Ciccarella, G., Dalla Mora, M., and Germani, A. (1993). A luenberger-like observer for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 57(3):537–556.
- Coutinho, D., Schons, S., Couto, L. D., and Kinnaert, M. (2019). Robust observer design for discrete-time locally one-sided lipschitz systems. *European Journal of Control*.

- Dochain, D. and Perrier, M. (2002). A state observer for (bio) processes with uncertain kinetics. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No. CH37301)*, volume 4, pages 2873–2878. IEEE.
- Dong, Z., Liu, M., Guo, Z., Huang, X., Zhang, Y., and Zhang, Z. (2019). Adaptive state-observer for monitoring flexible nuclear reactors. *Energy*, 171:893–909.
- Ekramian, M., Hosseinnia, S., and Sheikholeslam, F. (2011). Observer design for non-linear systems based on a generalised lipschitz condition. *IET control theory & applications*, 5(16):1813–1818.
- Ekramian, M., Sheikholeslam, F., Hosseinnia, S., and Yazdanpanah, M.-J. (2013). Adaptive state observer for lipschitz nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 62(4):319–323.
- Farza, M., M’Saad, M., Maatoug, T., and Kamoun, M. (2009). Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45(10):2292–2299.
- Farza, M., M’saad, M., Menard, T., Ltaief, A., and Maatoug, T. (2018). Adaptive observer design for a class of nonlinear systems. application to speed sensorless induction motor. *Automatica*, 90:239–247.
- Févotte, G., McKenna, T., Othman, S., and Hammouri, H. (1998). Non-linear tracking of glass transition temperatures for free radical emulsion copolymers. *Chemical Engineering Science*, 53(4):773–786.
- Fossard, A. J. and Normand-Cyrot, D. (2012). *Nonlinear systems: Modeling and estimation*. Springer Science & Business Media.
- Frank, P. and Keller, L. (1980). Sensitivity discriminating observer design for instrument failure detection. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, (4):460–467.
- Garimella, P. and Yao, B. (2003). Nonlinear adaptive robust observer design for a class of nonlinear systems. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003.*, volume 5, pages 4391–4396. IEEE.
- Gasmi, N., Boutayeb, M., Thabet, A., and Aoun, M. (2018). Enhanced lmi conditions for observer-based \mathcal{H}_∞ stabilization of lipschitz discrete-time systems. *European Journal of Control*, 44:80–89.
- Gauthier, J.-P., Hammouri, H., and Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):875–880.
- Gauthier, J.-P. and Kupka, I. A. (1994). Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM journal on control and optimization*, 32(4):975–994.
- Gong, X., Suh, J., and Lin, C. (2019). A novel method for identifying inertial parameters of electric vehicles based on the dual h infinity filter. *Vehicle System Dynamics*.
- Guo, S., Yang, S., and Pan, C. (2006). Dynamic modeling of magnetorheological damper behaviors. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 17(1):3–14.
- Hu, G.-D. (2006). Observers for one-sided lipschitz non-linear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 23(4):395–401.
- Hu, G.-D. (2008). A note on observer for one-sided lipschitz non-linear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 25(3):297–303.
- Ioannou, P. A. and Sun, J. (2012). *Robust adaptive control*. Courier Corporation.

- Isidori, A. (2014). *Nonlinear Control Systems Design 1989: Selected Papers from the IFAC Symposium, Capri, Italy, 14-16 June 1989*. Elsevier.
- Jmal, A., Naifar, O., and Derbel, N. (2017). Unknown input observer design for fractional-order one-sided lipschitz systems. In *2017 14th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD)*, pages 65–69. IEEE.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. 1996. Macmillan, London, UK.
- Khalil, H. K. and Grizzle, J. W. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- Krstic, M., Kokotovic, P. V., and Kanellakopoulos, I. (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, Inc.
- Luders, G. and Narendra, K. (1973). An adaptive observer and identifier for a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(5):496–499.
- Marino, R. and Tomei, P. (1996). *Nonlinear control design: geometric, adaptive and robust*. Prentice Hall International (UK) Ltd.
- Miao, X.-F. and Li, L.-S. (2017). Observers design for a class of lipschitz discrete-time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 34(1):1–13.
- Nemati, F., Hamami, S. M. S., and Zemouche, A. (2019). A nonlinear observer-based approach to fault detection, isolation and estimation for satellite formation flight application. *Automatica*, 107:474–482.
- Nguyen, C. M., Pathirana, P. N., and Trinh, H. (2019). Robust observer and observer-based control designs for discrete one-sided lipschitz systems subject to uncertainties and disturbances. *Applied Mathematics and Computation*, 353:42–53.
- Osorio-Gordillo, G.-L., Darouach, M., and Astorga-Zaragoza, C.-M. (2015). \mathcal{H}_∞ dynamical observers design for linear descriptor systems. application to state and unknown input estimation. *European Journal of Control*, 26:35–43.
- Pérez-Estrada, A.-J., Osorio-Gordillo, G.-L., Darouach, M., and Alma, M. (2019). Adaptive observer design for lpv systems. *IFAC-PapersOnLine*, 52(28):140–145.
- Perrier, M., De Azevedo, S. F., Ferreira, E., and Dochain, D. (2000). Tuning of observer-based estimators: theory and application to the on-line estimation of kinetic parameters. *Control Engineering Practice*, 8(4):377–388.
- Rajamani, R. (1998). Observers for lipschitz nonlinear systems. *IEEE transactions on Automatic Control*, 43(3):397–401.
- Rajamani, R. and Hedrick, J. K. (1995). Adaptive observers for active automotive suspensions: theory and experiment. *IEEE Transactions on control systems technology*, 3(1):86–93.
- Raoufi, R., Marquez, H., and Zinober, A. (2010). \mathcal{H}_∞ sliding mode observers for uncertain nonlinear lipschitz systems with fault estimation synthesis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(16):1785–1801.
- Ren, X.-L. (2020). Observer design for actuator failure of a quadrotor. *IEEE Access*, 8.

- Sastry, S. (2013). *Nonlinear systems: analysis, stability, and control*, volume 10. Springer Science & Business Media.
- Sepulchre, R., Jankovic, M., and Kokotovic, P. V. (2012). *Constructive nonlinear control*. Springer Science & Business Media.
- Shaheen, B., Nazir, M. S., Rehan, M., and Ahmad, S. (2020). Robust generalized observer design for uncertain one-sided lipschitz systems. *Applied Mathematics and Computation*, 365:124588.
- Targui, B., Farza, M., and Hammouri, H. (2002). Constant-gain observer for a class of multi-output nonlinear systems. *Applied Mathematics Letters*, 15(6):709–720.
- Thau, F. (1973). Observing the state of non-linear dynamic systems. *International journal of control*, 17(3):471–479.
- Torres, G. O., Escobar, R., Medina, M. A., Coronado, E. S., Zaragoza, C. A., Peregrino, V. O., and Anguiano, A. T. (2013). Detección y diagnóstico de fallas en sensores aplicado a una columna de destilación mediante un observador adaptable.
- Trinh, H. and Fernando, T. (2011). *Functional observers for dynamical systems*, volume 420. Springer Science & Business Media.
- Tudón-Martínez, J.-C., Varrier, S., Morales-Menéndez, R., and Sename, O. (2016). Control tolerante a fallas en una suspensión automotriz semi-activa. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 13(1):56–66.
- Van der Schaft, A. J. and Van Der Schaft, A. (2000). *L2–gain and passivity techniques in nonlinear control*, volume 2. Springer.
- Wang, H., Dong, Y., and Qin, W. (2011). Adaptive observer design for a class of lipschitz nonlinear systems. In *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*, pages 665–669. IEEE.
- Xia, L., Cong, J., Xu, X., Gao, Y., and Zhang, S. (2020). H-infinity adaptive observer enhancements for vehicle chassis dynamics-based navigation sensor fault construction. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 17(2):1–17.
- Xu, S. (2002). Robust h_∞ filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with state delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(12):1853–1859.
- Yu, K. T., Jo, N. H., and Seo, J. H. (2003). Nonlinear adaptive observer for a parameter affine linearizable system. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475)*, volume 2, pages 1711–1716. IEEE.
- Zeitz, M. (1987). The extended luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 9(2):149–156.
- Zemouche, A., Rajamani, R., Boukroune, B., Rafaralahy, H., and Zasadzinski, M. (2016a). \mathcal{H}_∞ circle criterion observer design for lipschitz nonlinear systems with enhanced lmi conditions. In *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 131–136. IEEE.
- Zemouche, A., Rajamani, R., Kheloufi, H., and Bedouhene, F. (2017). Robust observer-based stabilization of lipschitz nonlinear uncertain systems via lmis-discussions and new design procedure. *International journal of robust and nonlinear control*, 27(11):1915–1939.

- Zemouche, A., Rajamani, R., Trinh, H., and Zasadzinski, M. (2016b). A new lmi based \mathcal{H}_∞ observer design method for lipschitz nonlinear systems. In *2016 European Control Conference (ECC)*, pages 2011–2016. IEEE.
- Zhang, Q. (2002). Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (mimo) linear time-varying systems. *IEEE transactions on automatic control*, 47(3):525–529.
- Zhao, J. and Mili, L. (2018). A decentralized h-infinity unscented kalman filter for dynamic state estimation against uncertainties. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 10(5):4870–4880.
- Zhu, F. and Han, Z. (2002). A note on observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 47(10):1751–1754.