



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE HUAUCHINANGO

MAESTRÍA EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

**“Desarrollo de una aplicación, para dispositivos
móviles que ayuda al proceso de enseñanza-
aprendizaje del álgebra básica del nivel medio
superior, por medio de Algesquares”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

P R E S E N T A

F A R I D C O R T É S V E L A Z Q U E Z

M 1 9 3 1 5 0 0 5

Director de Tesis:
Dr. Gregorio Castillo Quiroz

HUAUCHINANGO, PUE. DICIEMBRE DE 2021

MAESTRÍA EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la ciudad de Huauchinango, Puebla, siendo las **11:00** horas del día **08 de febrero de 2022** se reunieron los miembros del Comité Sinodal designado por el H. Consejo de Posgrado de la Maestría en Tecnologías de la Información del Instituto Tecnológico Superior de Huauchinango, para examinar y evaluar la tesis de grado titulada:

“DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN, PARA DISPOSITIVOS MÓVILES QUE AYUDA AL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA BÁSICA DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR, POR MEDIO DE ALGESQUARES”

Presentada por el (la) alumno (a):

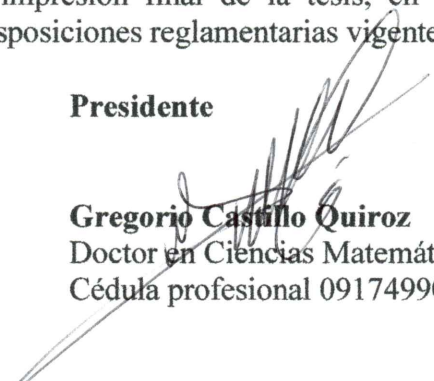
FARID CORTÉS VELÁZQUEZ, con número de control M19315005

Aspirante al grado de:

MAESTRO EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

Después de intercambiar opiniones los miembros de la comisión manifestaron la aprobación e impresión final de la tesis, en virtud que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

Presidente



Gregorio Castillo Quiroz
Doctor en Ciencias Matemáticas
Cédula profesional 09174990

Secretario



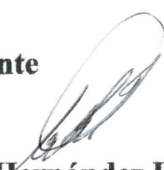
Manuel Cruz Luna
Maestro en Sistemas Computacionales
Cédula profesional 8257588

Vocal



Hugo Hernández Cabrera
Maestro en Sistemas Computacionales
Cédula profesional 8157886

Suplente



Aldo Hernández Luna
Maestro en Ingeniería
Cédula profesional 11606723

Sello de la institución



SECCIÓN: SUBDIRECCIÓN DE POSGRADO
E INVESTIGACIÓN
OFICIO: SPeI/034/2022
ASUNTO: AUTORIZACIÓN DE
IMPRESIÓN DEFINITIVA DE
TESIS

Huauchinango, Pue., 28 de febrero de 2022

ING. FARID CORTÉS VELÁZQUEZ
ESTUDIANTE DE LA MAESTRÍA EN TECNOLOGÍAS
DE LA INFORMACIÓN
P R E S E N T E:

Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el jurado designado para que Usted obtenga el grado de **MAESTRO EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN**, ha informado a esta Subdirección de Posgrado e Investigación, su aceptación para la impresión Definitiva de su trabajo de tesis, en el cual lleva por título:

**“DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN, PARA DISPOSITIVOS MÓVILES QUE
AYUDA AL PROCESO DE ESEÑANZA-APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA BÁSICA
DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR, POR MEDIO DE ALGESQUARES”**

Por lo anterior se autoriza la impresión de su trabajo, esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales.

ATENTAMENTE



C. FERNANDO GONZÁLEZ CRUZ
SUBDIRECTOR DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



INSTITUTO TECNOLÓGICO
SUPERIOR DE HUAUCHINANGO
SUBDIRECCIÓN DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Resumen

Algesquares es un método innovador basado en las baldosas algebraicas, creadas por Caleb Gattegno, quien fue uno de los educadores matemáticos más prolíficos e influyentes del siglo XX. Una de sus ideas más radicales era que los niños pequeños podían aprender álgebra. Los niños no solo eran capaces de aprender álgebra temprana, sino que debían aprender álgebra antes que aritmética. De acuerdo al método creado por Gattegno, Algesquares busca una experiencia de los educandos más dinámica, en vez de una enseñanza de álgebra, basada en el método tradicional.

El presente trabajo tuvo como objetivo presentar el diseño de una aplicación que funcione como una herramienta de enseñanza para estudiantes y profesores en temas de Álgebra Básica, mediante un tablero con fichas de colores, que resuelven temas incluidos en el plan de estudios de la asignatura de álgebra para nivel medio superior. Siendo las matemáticas una ciencia que se estudia a nivel mundial, se busca que Algesquares rebase la barrera del idioma, traduciendo la aplicación en distintos idiomas o lenguas.

Los estudiantes serán protagonistas de su propio aprendizaje y tendrán un papel más activo dentro y fuera del salón de clases, obteniendo puntos a través de la resolución de ejercicios algebraicos interactivos, subiendo de nivel y dificultad. Algesquares, busca captar la atención del alumno, motivarlos e interesarlos, fomentando a los educandos a ser autodidactas, avanzando en la aplicación de forma gradual, construyendo un aprendizaje significativo en los estudiantes, desarrollando competencias, conocimientos y habilidades matemáticas, para continuar su formación escolar.

Abstract

Algesquares is an innovative method based on the algebraic tiles, created by Caleb Gattegno, who was one of the most prolific and influential math educators of the 20th century. One of his most radical ideas was that young children could learn algebra. Not only children were capable of learning algebra early, they had to learn algebra before arithmetic. According to the method created by Gattegno, Algesquares look for more dynamic student experience, instead of an algebra teaching, based on the traditional method.

The present work aimed to present the design of an application that functions as a teaching tool for students and teachers in Basic Algebra topics, through a board with colored cards, which solve topics included in the curriculum of the subject of algebra for upper secondary level. Since mathematics is a science that is studied worldwide, Algesquares is expected to overcome the language barrier, translating the application into different languages or dialects.

Students will be protagonists of their own learning and they will have a more active role inside and outside the classroom, obtaining points through the resolution of interactive algebraic exercises, increasing the level and difficulty. Algesquares, seeks to capture the student's attention, motivate and interest them, encouraging students to be self-taught, progressing in the application gradually and adapting to the rhythm of each one of them, building meaningful learning in students, developing skills, knowledge and mathematical skills, to continue their school education.

Dedicatoria

Dedico esta tesis a Dios, que me ha permitido llegar hasta donde estoy.

A mis padres, quienes me han apoyado todo este tiempo y han sido mi pilar más fuerte en la vida.

A mis maestros, que sin su conocimiento no hubiera podido realizar este proyecto.

A los sinodales, quienes estudiaron mi tesis y la aprobaron.

A todos los que me apoyaron para escribir y concluir esta tesis.

Agradecimientos.

Al Instituto Tecnológico Superior de Huauchinango, por haber solventado el pago de mi artículo científico en el Congreso Internacional Interdisciplinario de Energías Renovables, Mantenimiento Industrial, Mecatrónica e Informática., CIERMMI 2021.

A la maestría en Tecnologías de la Información, por darnos la oportunidad de continuar estudiando el posgrado y especializarnos en un área de nuestra carrera, formando parte de la primera generación de la maestría en TI.

Al comité tutorial, por su orientación y consejo, que sin ellos me hubiera sido muy difícil terminar mi proyecto de tesis.

Índice

Capítulo I. Introducción.	1
1.1 Planteamiento y delimitación del problema.....	1
1.2 Objetivo General.	2
1.3 Objetivos Específicos.	2
1.4 Justificación.	3
1.5 Hipótesis general.....	7
1.6 Motivación para elaborar la investigación.	7
1.7 Organización de la tesis.	8
1.8 Publicaciones que sustentan el trabajo de investigación.....	8
1.8.1 Artículo Científico (RITI).	8
1.8.2 Artículo Científico (CIERMMI).....	9
1.8.3 Video-ponencia CIERMMI.....	10
1.8.3 Convenio.....	11
Capítulo II. Estado del arte.	13
2.1 Baldosas algebraicas.	13
2.2 Algeblocks.....	15
2.3 Caja de Polinomios.	17
2.4 Algebra Tiles.....	20
Capítulo III. Metodología.	21
3.1 Suma y resta de términos semejantes.	22
3.2 Suma y resta de fracciones algebraicas.....	26
3.3 Multiplicación de binomios.....	30
3.4 División algebraica.	39
3.5 Binomio al Cuadrado.....	45
3.6 Binomios conjugados.	54
3.7 Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.....	62
3.8 Factorización de una diferencia de cuadrados.	70
3.9 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$	79
3.10 Desarrollo de Software	89
3.10.1 Modelo en Cascada	89
3.10.2 Fase: Análisis.	95
3.10.3 Fase: Diseño.	98
Capítulo IV. Análisis de resultados y discusión	119
4.1 Trabajando con Algesquares.....	119
4.3 Logotipo.....	128
4.3 Implementación y pruebas del prototipo de Algesquares en dispositivos Android.....	129
4.3.1 Multiplicación - Nivel Básico	130
4.3.2 Multiplicación - Nivel Intermedio.	132

4.3.3 Multiplicación - Nivel Avanzado.	133
4.3.4 Multiplicación – Ejercicios de refuerzo.	134
4.4 Comparación de Algesquares contra otros métodos similares.	136
<i>Conclusiones</i>	138
<i>Propuestas, recomendaciones y trabajos futuros</i>	139
<i>Referencias bibliográficas</i>	141

Índice de figuras

<i>Figura 1.1 Porcentaje de la población de 15 años y más (según nivel educativo).</i>	<i>4</i>
<i>Figura 1.2 Captura de pantalla del artículo enviado a la revista RITI.</i>	<i>9</i>
<i>Figura 1.3 Captura de pantalla de la constancia por la participación para el artículo de investigación para CIERMMI.....</i>	<i>10</i>
<i>Figura 1.4 Captura de pantalla de la constancia por la participación con la video ponencia para el congreso CIERMMI 2021.....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 1.5 Captura de pantalla de una fracción del convenio entre el ITSH y el Bachillerato General “Ignacio Manuel Altamirano” C.C.T. 21EBH0556W.</i>	<i>12</i>
<i>Figura 2.1 Material de Algeblocks.</i>	<i>15</i>
<i>Figura 2.2 Herramienta digital de la caja de polinomios.....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 2.3 Tablero con fichas de la caja de polinomios.</i>	<i>18</i>
<i>Figura 2.4 Prototipo de la aplicación para Android de Algeblocks.....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 2.5 Aplicación de Algebra Tiles para Android.....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 3.1 Proceso de desarrollo del Modelo en Cascada.....</i>	<i>90</i>
<i>Figura 3.2 Logotipo de Algesquares.....</i>	<i>99</i>
<i>Figura 3.3 Pantallas del diseño de la interfaz.</i>	<i>105</i>
<i>Figura 3.4 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación.....</i>	<i>106</i>
<i>Figura 3.5 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Básico.</i>	<i>106</i>
<i>Figura 3.6 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Básico.</i>	<i>107</i>
<i>Figura 3.7 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Básico.</i>	<i>107</i>
<i>Figura 3.8 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Básico.</i>	<i>108</i>
<i>Figura 3.9 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Intermedio. .</i>	<i>109</i>
<i>Figura 3.10 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Intermedio.</i>	<i>110</i>
<i>Figura 3.11 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Intermedio.</i>	<i>110</i>
<i>Figura 3.12 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Avanzado. .</i>	<i>111</i>
<i>Figura 3.13 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Ejercicios de refuerzo.</i>	<i>112</i>
<i>Figura 3.14 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Básico.</i>	<i>113</i>
<i>Figura 3.15 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Básico.</i>	<i>113</i>
<i>Figura 3.16 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Básico.</i>	<i>114</i>
<i>Figura 3.17 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Básico.</i>	<i>114</i>
<i>Figura 3.18 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Básico.</i>	<i>115</i>
<i>Figura 3.19 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Intermedio. .</i>	<i>115</i>

Figura 3.20 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Intermedio..	116
Figura 3.21 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Intermedio..	116
Figura 3.22 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Avanzado....	117
Figura 3.23 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Avanzado....	118
Figura 4.1 Feria de Proyectos de Bachilleratos Generales Zona 001 - 2015.....	119
Figura 4.2 Material didáctico de madera de Algesquares.	120
Figura 4.3 Ejercicios resueltos con material didáctico de Algesquares.....	121
Figura 4.4 Logotipo Algesquares.	129
Figura 4.5 Especificaciones del Huawei P30 Pro.....	129
Figura 4.6 Especificaciones del Google Pixel 1.	130
Figura 4.7 Configuración del emulador de Android Studio.	130
Figura 4.8 Inicio de la app y selección de temas.....	131
Figura 4.9 Multiplicación - Nivel Básico.	131
Figura 4.10 Multiplicación - Nivel Básico.	132
Figura 4.11 Multiplicación - Nivel Básico.	132
Figura 4.12 Multiplicación - Nivel Intermedio.	133
Figura 4.13 Multiplicación - Nivel Intermedio.	133
Figura 4.14 Multiplicación - Nivel Avanzado.....	134
Figura 4.15 Multiplicación - Nivel Avanzado.....	134
Figura 4.16 Multiplicación – Ejercicios de refuerzo.	135

Índice de tablas

<i>Tabla 3.1 Tabla de equivalencia de fichas de Algesquares y términos algebraicos. ...</i>	<i>21</i>
<i>Tabla 3.2 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>22</i>
<i>Tabla 3.3 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>22</i>
<i>Tabla 3.4 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>22</i>
<i>Tabla 3.5 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>23</i>
<i>Tabla 3.6 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>23</i>
<i>Tabla 3.7 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>23</i>
<i>Tabla 3.8 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>24</i>
<i>Tabla 3.9 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>24</i>
<i>Tabla 3.10 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>24</i>
<i>Tabla 3.11 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>24</i>
<i>Tabla 3.12 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>25</i>
<i>Tabla 3.13 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>25</i>
<i>Tabla 3.14 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>25</i>
<i>Tabla 3.15 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>26</i>
<i>Tabla 3.16 Suma y resta de términos semejantes.</i>	<i>26</i>
<i>Tabla 3.17 Suma y resta de fracciones algebraicas.</i>	<i>26</i>
<i>Tabla 3.18 Suma y resta de fracciones algebraicas.</i>	<i>27</i>
<i>Tabla 3.19 Suma y resta de fracciones algebraicas.</i>	<i>27</i>
<i>Tabla 3.20 Suma y resta de fracciones algebraicas.</i>	<i>28</i>
<i>Tabla 3.21 Suma y resta de fracciones algebraicas.</i>	<i>28</i>
<i>Tabla 3.22 Suma y resta de fracciones algebraicas.</i>	<i>28</i>
<i>Tabla 3.23 Suma y resta de fracciones algebraicas.</i>	<i>29</i>
<i>Tabla 3.24 Suma y resta de fracciones algebraicas.</i>	<i>29</i>
<i>Tabla 3.25 Suma y resta de fracciones algebraicas.</i>	<i>29</i>
<i>Tabla 3.26 Suma y resta de fracciones algebraicas.</i>	<i>30</i>
<i>Tabla 3.27 Multiplicación de binomios.</i>	<i>30</i>
<i>Tabla 3.28 Multiplicación de binomios.</i>	<i>31</i>
<i>Tabla 3.29 Multiplicación de binomios.</i>	<i>31</i>
<i>Tabla 3.30 Tabla para subir de rango las fichas.</i>	<i>31</i>
<i>Tabla 3.31 Multiplicación de binomios.</i>	<i>32</i>

Tabla 3.32 Multiplicación de binomios.	32
Tabla 3.33 Multiplicación de binomios.	33
Tabla 3.34 Multiplicación de binomios.	33
Tabla 3.35 Multiplicación de binomios.	33
Tabla 3.36 Multiplicación de binomios.	34
Tabla 3.37 Multiplicación de binomios.	34
Tabla 3.38 Multiplicación de binomios.	35
Tabla 3.39 Multiplicación de binomios.	35
Tabla 3.40 Multiplicación de binomios.	36
Tabla 3.41 Multiplicación de binomios.	36
Tabla 3.42 Multiplicación de binomios.	37
Tabla 3.43 Multiplicación de binomios.	37
Tabla 3.44 Multiplicación de binomios.	37
Tabla 3.45 Multiplicación de binomios.	38
Tabla 3.46 Multiplicación de binomios.	38
Tabla 3.47 Multiplicación de binomios.	39
Tabla 3.48 División algebraica.	39
Tabla 3.49 División algebraica.	40
Tabla 3.50 División algebraica.	40
Tabla 3.51 División algebraica.	40
Tabla 3.53 División algebraica.	41
Tabla 3.54 División algebraica.	41
Tabla 3.55 División algebraica.	41
Tabla 3.56 División algebraica.	42
Tabla 3.57 División algebraica.	42
Tabla 3.58 División algebraica.	42
Tabla 3.59 División algebraica.	43
Tabla 3.60 División algebraica.	43
Tabla 3.61 División algebraica.	44
Tabla 3.62 División algebraica.	44
Tabla 3.63 División algebraica.	44
Tabla 3.64 División algebraica.	45
Tabla 3.65 División algebraica.	45
Tabla 3.66 Binomio al cuadrado.	46

Tabla 3.67 Binomio al cuadrado.....	46
Tabla 3.68 Binomio al cuadrado.....	46
Tabla 3.69 Binomio al cuadrado.....	47
Tabla 3.70 Binomio al cuadrado.....	47
Tabla 3.71 Binomio al cuadrado.....	47
Tabla 3.72 Binomio al cuadrado.....	48
Tabla 3.73 Binomio al cuadrado.....	48
Tabla 3.74 Binomio al cuadrado.....	48
Tabla 3.75 Binomio al cuadrado.....	49
Tabla 3.76 Binomio al cuadrado.....	49
Tabla 3.77 Binomio al cuadrado.....	50
Tabla 3.78 Binomio al cuadrado.....	50
Tabla 3.79 Binomio al cuadrado.....	50
Tabla 3.80 Binomio al cuadrado.....	51
Tabla 3.81 Binomio al cuadrado.....	51
Tabla 3.82 Binomio al cuadrado.....	52
Tabla 3.83 Binomio al cuadrado.....	52
Tabla 3.84 Binomio al cuadrado.....	53
Tabla 3.85 Binomio al cuadrado.....	53
Tabla 3.86 Binomio al cuadrado.....	53
Tabla 3.87 Binomios conjugados.....	54
Tabla 3.88 Binomios conjugados.....	54
Tabla 3.89 Binomios conjugados.....	55
Tabla 3.90 Binomios conjugados.....	55
Tabla 3.91 Binomios conjugados.....	56
Tabla 3.92 Binomios conjugados.....	56
Tabla 3.93 Binomios conjugados.....	56
Tabla 3.94 Binomios conjugados.....	57
Tabla 3.95 Binomios conjugados.....	57
Tabla 3.96 Binomios conjugados.....	57
Tabla 3.97 Binomios conjugados.....	58
Tabla 3.98 Binomios conjugados.....	58
Tabla 3.99 Binomios conjugados.....	59
Tabla 3.100 Binomios conjugados.....	59

Tabla 3.101 Binomios conjugados.	60
Tabla 3.102 Binomios conjugados.	60
Tabla 3.103 Binomios conjugados.	60
Tabla 3.104 Binomios conjugados.	61
Tabla 3.105 Binomios conjugados.	61
Tabla 3.106 Binomios conjugados.	62
Tabla 3.107 Binomios conjugados.	62
Tabla 3.108 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	63
Tabla 3.109 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	63
Tabla 3.110 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	63
Tabla 3.111 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	64
Tabla 3.112 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	64
Tabla 3.113 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	65
Tabla 3.114 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	65
Tabla 3.115 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	65
Tabla 3.116 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	66
Tabla 3.117 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	66
Tabla 3.118 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	66
Tabla 3.119 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	67
Tabla 3.120 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	67
Tabla 3.121 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	67
Tabla 3.122 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	68
Tabla 3.123 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	68
Tabla 3.124 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	68
Tabla 3.125 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	69
Tabla 3.126 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	69
Tabla 3.127 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	69
Tabla 3.128 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.	70
Tabla 3.129 Factorización de una diferencia de cuadrados.	70
Tabla 3.130 Factorización de una diferencia de cuadrados.	71
Tabla 3.131 Factorización de una diferencia de cuadrados.	71
Tabla 3.132 Factorización de una diferencia de cuadrados.	71
Tabla 3.133 Factorización de una diferencia de cuadrados.	72
Tabla 3.134 Factorización de una diferencia de cuadrados.	72

Tabla 3.135 Factorización de una diferencia de cuadrados.	73
Tabla 3.136 Factorización de una diferencia de cuadrados.	73
Tabla 3.137 Factorización de una diferencia de cuadrados.	73
Tabla 3.138 Factorización de una diferencia de cuadrados.	74
Tabla 3.139 Factorización de una diferencia de cuadrados.	74
Tabla 3.140 Factorización de una diferencia de cuadrados.	74
Tabla 3.141 Factorización de una diferencia de cuadrados.	75
Tabla 3.142 Factorización de una diferencia de cuadrados.	75
Tabla 3.143 Factorización de una diferencia de cuadrados.	75
Tabla 3.144 Factorización de una diferencia de cuadrados.	76
Tabla 3.145 Factorización de una diferencia de cuadrados.	76
Tabla 3.146 Factorización de una diferencia de cuadrados.	76
Tabla 3.147 Factorización de una diferencia de cuadrados.	77
Tabla 3.148 Factorización de una diferencia de cuadrados.	77
Tabla 3.149 Factorización de una diferencia de cuadrados.	77
Tabla 3.150 Factorización de una diferencia de cuadrados.	78
Tabla 3.151 Factorización de una diferencia de cuadrados.	78
Tabla 3.152 Factorización de una diferencia de cuadrados.	78
Tabla 3.153 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	79
Tabla 3.154 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	79
Tabla 3.155 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	80
Tabla 3.156 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	80
Tabla 3.157 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	81
Tabla 3.158 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	81
Tabla 3.159 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	82
Tabla 3.160 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	83
Tabla 3.161 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	83
Tabla 3.162 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	84
Tabla 3.163 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	84
Tabla 3.164 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	84
Tabla 3.165 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	85
Tabla 3.166 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	86
Tabla 3.167 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	86
Tabla 3.168 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.	87

Tabla 3.169 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.....	87
Tabla 3.170 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.....	87
Tabla 3.171 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.....	88
Tabla 3.172 Pros y contras del Modelo en Cascada.....	93
Tabla 4.1 Tabla comparativa del método Algesquares con métodos similares.....	136

Índice de gráficas.

<i>Gráfico 3.1 Pregunta 1 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.</i>	<i>100</i>
<i>Gráfico 3.2 Pregunta 2 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.</i>	<i>101</i>
<i>Gráfico 3.3 Pregunta 3 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.</i>	<i>101</i>
<i>Gráfico 3.4 Pregunta 4 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.</i>	<i>102</i>
<i>Gráfico 3.5 Pregunta 5 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.</i>	<i>103</i>
<i>Gráfico 3.6 Pregunta 6 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.</i>	<i>104</i>
<i>Gráfica 4.1 Medición de tiempos de distintas maneras de aprender álgebra básica.</i>	<i>122</i>
<i>Gráfica 4.2 Comparación del índice de reprobación en el estudio de álgebra básica.</i>	<i>123</i>
<i>Gráfica 4.3 Resultados de la encuesta realizada acerca de la experiencia de las distintas formas de aprendizaje de álgebra básica.</i>	<i>125</i>
<i>Gráfica 4.4 Resultados de la encuesta realizada acerca del uso de las TIC en el campo disciplinar de Matemáticas.</i>	<i>128</i>

Capítulo I. Introducción.

El uso de Algesquares está orientado al estudio de varios temas de Álgebra Básica que pertenecen al Programa de Estudios de Educación Media Superior en México. Por medio de Algesquares, se pueden representar, a través de fichas en formas de cuadrados de colores, operaciones básicas con monomios y polinomios de primer y segundo grado, como la suma, resta, multiplicación y división de términos algebraicos, desarrollo de productos notables, factorización y resolución de ecuaciones cuadráticas. Cada procedimiento se desarrolla de manera distinta, realizando agrupaciones y organizando secuencias concretas con las fichas, teniendo en cuenta su color y símbolo asignado.

Si el estudiante ha aprendido Álgebra de la forma tradicional, le servirá como base para aprender este nuevo método. Una vez que entienda la forma de trabajo de Algesquares, no tendrá problemas en entender cada uno de los temas. En caso de que el estudiante no tenga conocimientos previos de la asignatura, puede que le resulte mucho más sencillo adaptarse a este método, pues como Caleb Gattegno creía, se debe aprender estudiar Álgebra antes de estudiar Aritmética. De cualquier modo, ya sea que conozcan o no el método tradicional, los jóvenes estarán entusiasmados y motivados en aprender por medio de Algesquares.

1.1 Planteamiento y delimitación del problema.

El Nuevo Modelo Educativo presentado en marzo de 2017, modelo que se deriva de la Reforma Educativa, promueve el uso y acceso a las Tecnologías de la Información y la Comunicación, así como el desarrollo de aprendizajes clave, es decir aquellos que contribuyen al desarrollo integral de los estudiantes que les permiten aprender a lo largo de la vida [1]. Se busca que los educandos aprendan a través de procesos cognitivos y no únicamente de memorización; además, es ideal que tanto el docente como los estudiantes utilicen herramientas digitales dentro y fuera del salón de clase, que fomenten un aprendizaje significativo.

Uno de los rasgos que marca el nuevo perfil del egresado de la Educación Media Superior es la gestión de la información, la cual menciona que el estudiante “Evalúa y aplica información utilizando estrategias de búsqueda, organización y procesamiento de la misma, para la resolución de problemas en todos los ámbitos de su vida, mediante la

utilización de diversas herramientas a su alcance. Utiliza las tecnologías de la información y la comunicación para intercambiar ideas, generar procesos, modelos y simulaciones, de acuerdo con sus necesidades de aprendizaje e innovación”. Es por lo anterior que se busca el uso de las TICS como herramienta para el aprendizaje [2,3].

Este proyecto surge de las necesidades antes mencionadas, que indica el Nuevo Modelo Educativo. Se decidió el desarrollo de la aplicación para dispositivos móviles, ya que los estudiantes podrán aprender temas de Álgebra de forma dinámica y creativa; el docente, a través de esta herramienta, podrá llevar el registro y avance de todos sus alumnos/as, tomando en cuenta las prioridades del Nuevo Modelo Educativo y el nuevo perfil del egresado de Educación Media Superior.

1.2 Objetivo General.

Diseñar una aplicación para dispositivos móviles que funcione como herramienta digital de apoyo, para el proceso de enseñanza-aprendizaje de álgebra básica de nivel medio superior.

1.3 Objetivos Específicos.

- Contribuir al aprendizaje del estudiante en asignaturas relacionadas con álgebra básica.
- Funcionar como guía y apoyo para el/la alumno/a dentro y fuera del salón de clases, fomentando en los educandos, el autoaprendizaje.
- Facilitar la tarea al docente para la enseñanza de diversos temas de álgebra, correspondientes al plan de estudios del nuevo modelo educativo.
- Registrar, controlar y supervisar individual y grupalmente el desempeño de los estudiantes.
- Fomentar la creatividad en los estudiantes, haciéndolos protagonistas de su propio aprendizaje por medio de un método de enseñanza novedoso y entretenido.

1.4 Justificación.

El Bachillerato Ignacio Manuel Altamirano con C.C.T:21EBH0556W perteneciente a la Zona: 001 y CORDE: R1 Huauchinango, fue fundado en el ciclo escolar 2003 – 2004, se ubica en la comunidad de San Lorenzo, Xicotepec, Puebla., con domicilio en Calle: Camino a los Limones S/N, Barrio La Pahua, en la actualidad cuenta con una matrícula de 59 alumnos, planta docente de 4 profesores, 2 apoyos administrativos y un directivo.

La mayor parte de los alumnos del bachillerato, son aportados por la secundaria “Niños Héroes de Chapultepec” de la misma comunidad, el resto del alumnado, hablando en promedio por inscripciones anuales, es del 25 % de otras comunidades como: Jalapilla, Las Pilas y Teteloloya, que comparten las características del clima, economía y costumbres.

La comunidad de San Lorenzo, se localiza a 16 kilómetros al sur de la ciudad de Xicotepec, Puebla. Dentro de todos los pueblos del municipio, ocupa el número 8 en cuanto al número de habitantes. San Lorenzo ofrece un clima cálido – húmedo, el cual propicia ser una tierra altamente fértil, por ello, en su mayoría es gente agricultora de café, planta de ornato y frutas de temporada.

En el tema de educación, sólo el 23% de las personas han terminado el nivel secundaria. Según estudios realizados en 2020, el 12.24% de la población es analfabeta, teniendo una población indígena del 20.46% del total y un 6.21% que habla una lengua indígena [39].

De acuerdo con la Encuesta Intercensal, que fue levantada en 2015 por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) el porcentaje de población de 6 a 14 años que asisten a la escuela ha aumentado. Sin embargo, los números entre las entidades del país no son homogéneos.

Los estados que presentan las cifras más bajas de jóvenes en las escuelas – entre 93% y 95.9% - son Chihuahua, Jalisco, Colima, Michoacán, Guanajuato, Guerrero, Puebla, Veracruz, Oaxaca, Chiapas y Campeche.

Los estados que presentan una población de entre 6 y 14 años mayor al 97% en las escuelas son Baja California Sur, Sinaloa, Nuevo León, San Luis Potosí, Querétaro, Hidalgo, Estado de México, Ciudad de México y Yucatán [4,5].

En la Figura 1.1 se muestra la población en México de 15 años o más, junto con el nivel educativo cursado hasta el año 2020.

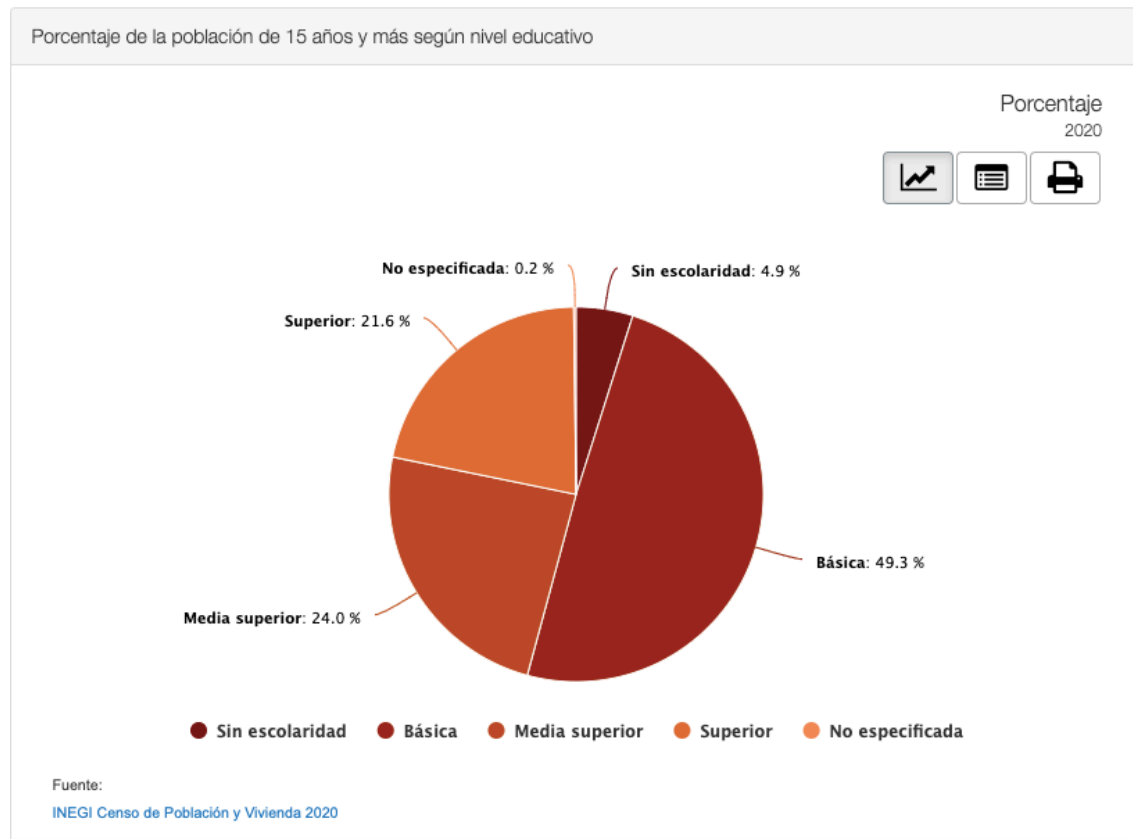


Figura 1.1 Porcentaje de la población de 15 años y más (según nivel educativo).

Fuente: INEGI Censo de Población y Vivienda 2020.

Además del acceso a la educación, un tema recurrente es la calidad de la educación que se imparte en México, al respecto, la OCDE (de la cual México es miembro desde 1994), tiene el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) con el objetivo de analizar los conocimientos y habilidades que los alumnos adquieren y que son necesarios para su participación en la sociedad [6].

Además de evaluar habilidades de lectura, matemáticas y ciencia, la prueba PISA también califica la capacidad de trabajar en equipo, y ni México u otro país de Latinoamérica figuran entre los 20 primeros lugares de países que mejor resuelven los problemas en conjunto [4,7].

La OCDE evaluó a un total de 1 millón 480,904 estudiantes mexicanos de 15 años. Sólo 1% de los estudiantes mexicanos mostró habilidades avanzadas en lectura, en donde pudieron comprender textos largos [11].

Si bien México ha aumentado la matrícula de sus estudiantes con el pasar de los años, se mantiene en los niveles más bajos en términos de aprendizaje en las áreas de matemáticas, ciencias y lectura, de acuerdo con los resultados de la prueba PISA 2018 divulgados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

Según el estudio, que evalúa las competencias de los estudiantes en las ramas referidas, y cuyos resultados se divulgarán hoy a nivel mundial, México obtuvo un rendimiento de 420 puntos en lectura, 409 en matemáticas y 419 en ciencias. En los mismos rubros el promedio de la OCDE se ubicó en 487, 489 y 489 respectivamente, por lo que México se ubicó por debajo del promedio [9-13].

En comparación con la última prueba PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos) del 2015, el rendimiento promedio de los estudiantes mexicanos de 15 años de edad, que son los evaluados en la prueba de la OCDE, bajó tres puntos en lectura, subió uno en matemáticas y subió tres en ciencias [9-13].

No obstante, de acuerdo con la metodología de la prueba, los cambios presentados en el puntaje para México no son significativos para permitir observar una mejora o un deterioro. El desempeño promedio se ha mantenido estable en lectura, matemáticas y ciencias, a lo largo de la mayor parte de la participación de México en PISA (desde el año 2000)”, indicó el análisis sobre nuestro país [9-13].

En este sentido, la OCDE evaluó a un total de 1 millón 480,904 estudiantes mexicanos de 15 años, los cuales representan 66% de la población total de dicha edad.

De ese universo, el estudio PISA 2018 identificó que la mayoría, 55% de los estudiantes, pudo identificar al leer un texto de longitud moderada ideas básicas “y pueden reflexionar sobre el propósito y la forma de los textos cuando se les indica explícitamente que lo hagan” [11].

En contraparte, sólo 1% de los estudiantes mexicanos mostró habilidades avanzadas en lectura en donde “pudieron comprender textos largos, tratar conceptos que son abstractos

o contra intuitivos, y establecer distinciones entre hechos y opiniones, basadas en claves implícitas relacionadas con el contenido o la fuente de la información. En 20 sistemas educativos, incluidos los de 15 países de la OCDE, más de 10% de los estudiantes de 15 años mostraron un rendimiento superior”, indicó el análisis [8, 13].

En cuanto a matemáticas, el análisis de indicó que 44% de los estudiantes analizados obtuvo un nivel mínimo de competencias en el área “por ejemplo, comparar la distancia total de dos rutas alternativas o convertir los precios en una moneda diferente”, mientras que sólo 1% de los estudiantes obtuvo resultados comparables con los estudiantes de China y Corea, los mejores evaluados en la prueba [14-16].

Mientras que en Ciencias, la OCDE destacó que “casi ningún estudiante demostró alta competencia” lo que significa que un estudiante puede “aplicar de manera creativa y autónoma su conocimiento de la ciencia en una amplia variedad de situaciones, incluidas situaciones desconocidas” [14-16].

Por otra parte, la OCDE destacó el crecimiento de la matrícula de estudiantes en México ya que, según el organismo, entre el 2003 y el 2018 el país sumó a unos 400,000 estudiantes a la población total de jóvenes de 15 años elegibles para participar en PISA [14-16].

Al observar los resultados obtenidos por los 36 miembros de la OCDE, además de Colombia, que se encuentra en proceso de adhesión, México se ubicó en los últimos tres lugares del ranking de habilidades [14-16].

La educación es el pasaporte al futuro y no sólo para cada una de las personas a nivel individual, sino también para la sociedad en conjunto. La educación es un activo estratégico fundamental para el crecimiento social y económico [4, 17].

En los países de la OCDE 83% de las personas con titulación universitaria tienen un empleo, en comparación con 55% de las personas que poseen sólo un diploma de educación secundaria. Los ingresos de por vida también aumentan con cada nivel educativo obtenido [4, 17].

La educación tiene un impacto indirecto sobre la felicidad pues es un medio para mejorar los ingresos. Dado que hay una relación entre mejores ingresos y felicidad, se ha

demostrado que a más años de estudios se aumenta la posibilidad de ser contratado, se mejora la seguridad en el trabajo y existen mayores posibilidades de promoción [4, 17].

Actualmente hay solo dos aplicaciones en la Playstore, que utilizan fichas similares a las de Algesquares. Sin embargo, ninguna de ellas está completa, pues no incluye todos los elementos que pretende tener la aplicación que se diseñará en este trabajo. El estudiante necesita una herramienta que funcione tanto para resolver ejercicios algebraicos como una guía para quien la utilice, que lo acompañe paso a paso en el proceso de aprendizaje, que lleve un registro de su avance, que proponga retos nuevos y suba de dificultad de acuerdo al nivel que adquiera el estudiante, promoviendo el autoaprendizaje. A su vez, que sea una herramienta para el docente en el proceso de enseñanza, que lleve el control individual y grupal, facilitando la localización de áreas de oportunidad en sus educandos y una retroalimentación efectiva, logrando una evaluación formativa.

1.5 Hipótesis general.

Se plantea culminar y hacer entrega del diseño de una aplicación para smartphone, con todas las herramientas necesarias para la realización de distintas operaciones algebraicas, marcadas en el plan de estudios de asignaturas que involucran álgebra básica en el nivel medio superior, que brindaran al docente y a los estudiantes un desarrollo dinámico y creativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

1.6 Motivación para elaborar la investigación.

El desarrollo de este proyecto tiene como alcance los siguientes puntos.

- Adquirir un aprendizaje significativo en el estudiante.
- Desarrollo de habilidades en el uso de tecnologías de información.
- Reducir el índice de reprobación en el campo disciplinar de matemáticas.
- Reducir el estrés que provoca en los estudiantes el estudio de las matemáticas.
- Detección de áreas de oportunidad en los estudiantes para la oportuna intervención docente.

1.7 Organización de la tesis.

A continuación, se describe el contenido de los capítulos que conforman este trabajo:

En el **Capítulo I: Introducción**, se hace una breve descripción de las características principales del proyecto.

En el **Capítulo II: Marco Teórico**, se presentan las definiciones y bases teóricas sobre las que se fundamenta el proyecto desarrollado.

En el **Capítulo III: Metodología**, se explican cada uno de los pasos que se siguieron para la creación y desarrollo del método de Algesqueres, los temas que involucra y el diseño de la aplicación móvil.

En el **Capítulo IV: Análisis de Resultados**, se analizan los resultados obtenidos para determinar si se cumplió el objetivo trazado.

1.8 Publicaciones que sustentan el trabajo de investigación.

1.8.1 Artículo Científico (RITI).

RITI (Revista de Investigación en Tecnologías de la Información), es un esfuerzo conjunto de investigadores y profesores de Universidades Iberoamericanas con sede en Barcelona, España. Es una revista bianual (semestral) creada para la publicación de artículos técnicos e inéditos sobre informática, ciencias de la computación y sus aplicaciones. Es una revista con difusión internacional a través de la Internet; dirigida a estudiantes, docentes, investigadores y profesionales de todas las áreas que apliquen las tecnologías de la información en Matemáticas, Ingenierías, Administración, Educación, Ciencias Sociales, etc. Por este medio se dan a conocer resultados totales y parciales de investigación, así como experiencias y reflexiones académicas [18].

En el mes de febrero del año 2021 se mandó un artículo científico explicando la metodología de Algesqueres para resolver distintos temas de álgebra (Véase Figura 1.2).

El 20 de mayo del 2021, la revista RITI aprobó el artículo y desde entonces, se encuentra disponible en su página web para consulta [38].:

<https://www.riti.es/ojs2018/inicio/index.php/riti/article/view/341/pdf>



Figura 1.2 Captura de pantalla del artículo enviado a la revista RITI.

Fuente: <https://www.riti.es/ojs2018/inicio/index.php/riti/article/view/341/pdf>

1.8.2 Artículo Científico (CIERMMI).

El objetivo principal de CIERMMI (Congreso Internacional Interdisciplinario de Energías Renovables, Mantenimiento Industrial, Mecatrónica e Informática) es Establecer un espacio de discusión y reflexión en temas relacionados con las áreas de energías renovables, mantenimiento industrial, mecatrónica, informática y educación entre otras áreas afines, promover la conformación, consolidación de los cuerpos académicos y redes de investigación, mediante la publicación en revistas indizadas de los trabajos de investigación, desarrollados por los profesores-investigadores, estudiantes de licenciatura, maestría, doctorado y posdoctorado de las instituciones de educación superior de nuestro país y allende nuestras fronteras [19].

El artículo fue aprobado en el mes de Octubre del presente año, para su publicación en la revista científica del Congreso Internacional Interdisciplinario de Energías Renovables, Mantenimiento Industrial, Mecatrónica e Informática., CIERMMI 2021 (Véase Figura 1.3).



Figura 1.3 Captura de pantalla de la constancia por la participación para el artículo de investigación para CIERMMI.

Fuente: www.ciermmi.gvn.mx

1.8.3 Video-ponencia CIERMMI.

Se expuso una video-ponencia presentando el contenido del artículo científico enviado, para la sexta edición del congreso CIERMMI 2021, realizado los días 27, 28 y 29 de Octubre, a través del canal del congreso (Véase Figura 1.4)



Figura 1.4 Captura de pantalla de la constancia por la participación con la video ponencia para el congreso CIERMMI 2021.

Fuente: www.ciermmi.gvn.mx

1.8.3 Convenio.

Se elaboró un convenio entre el Instituto Tecnológico Superior de Huauchinango y el Bachillerato General “Ignacio Manuel Altamirano” (Véase Figura 1.5), que tiene por objetivo fijar las bases y antecedentes para la cooperación interinstitucional, a través de la Maestría en Tecnologías de la Información con el objetivo que estudiantes o docentes del núcleo académico de la Maestría realicen estancias y/o estadias de investigación respectivamente para el desarrollo de proyectos de tesis, mediante la cual se pudieran generar posibles productos como: prototipos, desarrollos o paquetes tecnológicos, publicaciones, etc.

CONVENIO ESPECÍFICO DE COOPERACIÓN QUE CELEBRAN POR UNA PARTE EL INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE HUAUCHINANGO, A QUIEN EN LO SUCESIVO SE DESIGNARÁ COMO "EL INSTITUTO", REPRESENTADO EN ESTE ACTO POR EL ING. ARMANDO TORRES CRUZ EN SU CARÁCTER DE ENCARGADO DE DESPACHO DE DIRECCIÓN GENERAL Y POR LA OTRA PARTE EL BACHILLERATO IGNACIO MANUEL ALTAMIRANO AL QUE EN LO SUCESIVO SE LE DENOMINARÁ "EL BACHILLERATO" REPRESENTADO EN ESTE ACTO POR EL PROFR. MACARIO TOVAR SANTOS EN SU CARÁCTER DE RESPONSABLE DE LA DIRECCIÓN, SUJETÁNDOSE AMBAS PARTES AL TENOR DE LAS SIGUIENTES:

DECLARACIONES

I - Declara "EL INSTITUTO":

- a) Que es un Organismo Público Descentralizado del Gobierno del Estado de Puebla, con personalidad jurídica y patrimonios propios, tal como lo disponen los artículos 49, 50, 51, 58 y 59 de la Ley Orgánica de la Administración Pública y 9 de la Ley de Entidades Paraestatales, ambas del Estado de Puebla; así como del artículo 1 del Decreto del Honorable Congreso del Estado Libre y Soberano de Puebla, que crea a "EL INSTITUTO", publicado en el Periódico Oficial del Estado el 21 de agosto de 2000 y sus reformas publicadas el 17 de diciembre del 2001 y el 17 de marzo de 2015, con reconocimiento de validez oficial de la Secretaría de Educación Pública clave 21EIT0012S y Registro Federal de Contribuyentes ITS000821H6A.
- b) Que el ING. ARMANDO TORRES CRUZ, es el ENCARGADO DE DESPACHO DE DIRECCIÓN GENERAL de "EL INSTITUTO", acredita su personalidad jurídica para firmar el presente convenio, con fundamento en los artículos 17, 44, 58 y 59 de la Ley Orgánica de la Administración Pública del Estado de Puebla; 12 y 15 de la Ley de entidades Paraestatales del Estado de Puebla y 13 del Decreto del H. Congreso del Estado, que crea el Instituto Tecnológico Superior de Huauchinango y mediante el acuerdo número ITSH-SE-II-02/17-09-2020 de la Honorable Junta Directiva de "EL INSTITUTO" emitido en el Acta de la II Sesión Extraordinaria de fecha 17 de septiembre de 2020 y que las facultades con las que comparece no le han sido revocadas, modificadas ni limitadas en forma alguna hasta la fecha.
- c) Que el ING. ARMANDO TORRES CRUZ, tiene facultades suficientes para firmar este Convenio en términos de lo señalado en el Artículo 13 fracciones I, II, III, VII Y XIX, del decreto que crea "EL INSTITUTO".
- d) Que sus objetivos son: ofrecer educación tecnológica de tipo superior; realizar investigación científica y tecnológica; contribuir a ampliar la cobertura de servicios educativos de tipo superior en las áreas de la ciencia y tecnología; desarrollar programas de apoyo técnico; promover la cultura científica, tecnológica y humanística; y vincular los aprendizajes científicos y tecnológicos con los sectores público, social y privado.
- e) Que para el cumplimiento de sus objetivos, "EL INSTITUTO" podrá, en términos del Artículo 4 fracción IX, X y XV de su Decreto de Creación, promover y desarrollar programas de intercambio académico y colaboración profesional, con organismos e instituciones educativas, culturales y científicas nacionales e internacionales, y desarrollar proyectos y programas de investigación científica y tecnológica e inducir su vinculación con el Sector Productivo.

Figura 1.5 Captura de pantalla de una fracción del convenio entre el ITSH y el Bachillerato General "Ignacio Manuel Altamirano" C.C.T. 21EBH0556W.

Fuente: <http://mti.huauchinango.tecnm.mx/>

Capítulo II. Estado del arte.

En este capítulo se introducen una serie de conceptos preliminares para comprender a detalle el procedimiento utilizado en Algesquares para resolver distintas operaciones algebraicas, basado en el método de Caleb Gattegno.

2.1 Baldosas algebraicas.

Las baldosas algebraicas son manipuladores matemáticos que permiten a los estudiantes comprender mejor las formas de pensamiento algebraico y los conceptos de álgebra. Se ha demostrado que estos mosaicos proporcionan modelos concretos para los estudiantes de introducción al álgebra de la escuela primaria, secundaria, preparatoria y universitaria. Las piezas, son fichas cuadradas y rectangulares o fichas que representan números y variables. Por ejemplo, se pueden usar mosaicos cuadrados para representar números. Cada ficha cuadrada es igual a uno.

Fue inventado y popularizado en la década de 1950 por el matemático inglés Caleb Gattegno. Y cuando los estudiantes trabajan juntos usando geoboards, tienen la oportunidad de mejorar las habilidades de comunicación, compartir ideas y usar vocabulario matemático. [20-22].

En la historia de los bloques de base diez, el nombre de Caleb Gattegno no puede ignorarse. De hecho, según “Icons of Mathematics: An Exploration of 20 Key Images” de Claudi Alsina y Roger Nelson, Gattegno fue uno de “los educadores matemáticos más prolíficos e influyentes del siglo XX”. En matemáticas, es mejor conocido por popularizar Cuisenaire Rods y su innovador plan de estudios de matemáticas “Visible and Tangible Math”.

Gattegno no se propuso enseñar matemáticas a los niños, pero sugirió que nuestro objetivo final debería ser crear matemáticos. Una de sus ideas más radicales era que los niños pequeños podían aprender álgebra. Los niños no solo eran capaces de aprender álgebra temprana, sino que debían aprender álgebra antes que aritmética [20-22].

“El álgebra, al igual que la aritmética, tiene una base completamente perceptiva. De hecho, la sugerencia de C. Gattegno de que el álgebra debe enseñarse antes de que la aritmética es psicológicamente sólida. La percepción se basa en gran medida en relaciones más que en valores absolutos, y las generalidades preceden a los particulares en la experiencia sensorial. Los palitos de Cuisenaire de colores representan relaciones entre cantidades; su longitud absoluta es irrelevante y fácilmente transpuesta". Rudolph Arnheim, Pensamiento visual.

Es esta comprensión innata del mundo lo que hace que sea tan fácil enseñar álgebra antes que aritmética a los niños en las edades más tempranas. Los niños pequeños conocen el "pajarito" mucho antes de conocer al arrendajo común, el gorrión, el carbonero o el cardenal. Las generalidades de los particulares son cómo aprenden los niños. Sin la distracción de los números, los conceptos matemáticos se captan fácilmente [20-22].

La cita anterior es del Dr. Ian Benson, quien dirige The Early Algebra Project, que ha ejecutado programas piloto en todo el Reino Unido en los últimos 5 años. Han descubierto que un uso cuidadoso de Cuisenaire-Gattegno por parte de profesores competentes reduce a la mitad el tiempo que lleva dominar las matemáticas primarias. Los niños no solo pudieron obtener las respuestas correctas, sino que adquirieron fluidez en el uso del lenguaje matemático y pudieron articular conceptos matemáticos en sus propias composiciones. Ese fue precisamente el objetivo de Caleb Gattegno.

Es la introducción del álgebra antes que la aritmética lo que permite el tipo de trabajo que los niños de Goutard realizaban regularmente en un corto período de tiempo. Las varillas Cuisenaire no se utilizan como una herramienta de cálculo para "llegar a la respuesta correcta", sino como una forma de presentar lo que se puede generalizar sobre los números y sus operaciones. Los niños aprenden las reglas de manipulación de los símbolos matemáticos sin tener que contar con su memoria a corto plazo para las operaciones matemáticas básicas [20-22].

Cuisenaire Rods encontró una creciente popularidad en la década de 1950-1970. Pero en la década de 1980, su uso comenzó a disminuir. Del trabajo de Ian Benson, profesor de la Universidad de Stanford y de la Universidad de Kingston, se desprende que uno de los factores que contribuyen al declive en el uso del método Cuisenaire-Gattegno es la falta

general de comprensión matemática entre los profesores. Esto parece coincidir con las mismas observaciones de Lipping Ma. Caroline Ainsworth describe su iniciación en el método Cuisenaire-Gattegno trabajando ella misma a través de todos los libros de texto de Gattegno [20-22].

2.2 Algeblocks.

Algeblocks, es una herramienta importantísima para el aprendizaje de conceptos un tanto abstractos, con una aplicación directa en la etapa inicial del aprendizaje del álgebra, así como temas más complejos, por ejemplo:

- Las operaciones básicas con números enteros.
- Factorización de polinomios.
- Traducción de expresiones lingüísticas a expresiones matemáticas.
- Resolución de ecuaciones lineales.

Los Algeblocks (Véase Figura 2.1) son un conjunto de prismas cuadrangulares con 10 tipos de piezas distintas, que representan la unidad, dos variables diferentes (x e y) con las que podemos expresar polinomios, y todas las combinaciones posibles de términos con esas variables hasta grado 3. Surgieron a finales de la década de los 90 (Dreyfous, 1996) y se utilizan sobre todo en EEUU y América Latina, sin embargo, apenas son conocidos en España. Pueden considerarse una generalización de los Bloques Multibase de Dienes (Dienes, 1971) [23-25].

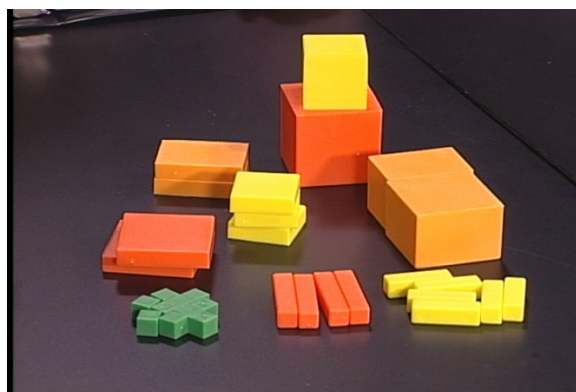


Figura 2.1 Material de Algeblocks.

Fuente: <https://edumate.wordpress.com/2007/02/27/los-algeblocks/>

Al intentar expresar cantidades desconocidas, introducimos el uso de expresiones algebraicas, que representaremos de forma concreta mediante los algeblocks (Imagen 3). Se trata de un conjunto de prismas cuadrangulares con 10 tipos de piezas distintas.

El paso a la expresión de una variable (o cantidad desconocida) se hace natural si el alumno ha trabajado previamente con las regletas y/o los bloques multibase, pues al tratar de determinar la longitud de la barra amarilla, el alumno observa que se encuentra entre 3cm y 4cm, por lo que no se corresponde con ninguna regleta ni puede expresarse con cubos unidad. Lo mismo ocurre con la barra roja, y a partir de ahí, se interpretan las demás piezas. La única pieza común con las regletas y los bloques multibase es el cubo unidad. [23-25].

Los algeblocks facilitan el desarrollo del pensamiento algebraico, la comprensión de áreas y volúmenes, y permiten operar con polinomios de una o dos variables hasta grado 3.

Existen diversos estudios que afirman que este material facilita el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación secundaria. En (McClung, 1998) se seleccionó un grupo de 24 estudiantes de Álgebra I con los que se trabajaron únicamente polinomios durante 9 semanas; mientras que en (Hernández, 2010) se trabajó con un grupo de 25 alumnos de segundo curso de secundaria durante un curso académico completo. En ambos casos se comprobó, mediante un pre-test y un post-test, en comparación con un grupo de control, que las puntuaciones de los alumnos mejoraban considerablemente tras el trabajo con los algeblocks.

En (Rivera, 2008) se comparan los resultados de una clase de Álgebra I de 34 estudiantes que ha trabajado durante un curso académico con los algeblocks, con otras clases pertenecientes a la misma escuela (aunque impartidas por diferente profesorado), siendo los resultados de los alumnos que trabajaron con el material, en cuanto a operaciones con polinomios, factorización de polinomios o resolución de ecuaciones cuadráticas, muy superiores a los del resto de alumnos [23-25].

2.3 Caja de Polinomios.

La Caja de Polinomios (Figura 2.2) es una herramienta didáctica resultado del trabajo colectivo de profesores, del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, Colombia, y sus orígenes se remontan a los trabajos de Euclides, de Tabit ibn Qurra alHarani, de Pierre de Fermat y Renato Descartes. Es un material didáctico con esencia lúdica que estimula varias esferas de la inteligencia, como la lógico matemática y la corporal cinestésica. Sumar, restar, multiplicar, dividir, factorizar polinomios, se convierten en algoritmos divertidos que plasman el conocimiento en saberes significativos y derivan en procedimientos de mayor riqueza que al tratarlos en forma tradicional. Es un método para motivar e ilustrar a los participantes en su uso como una alternativa de enseñanza para los procesos operatorios descritos anteriormente, así como reconocer que contribuye al desarrollo cognitivo, dinamizando los procesos de aprendizaje de las Matemáticas en diferentes grados de la Educación básica y que su aplicación depende de la creatividad docente, y su grado de interés en la planeación y desarrollo de estrategias sirviendo de mediador de los conceptos desde lo concreto hasta lo simbólico y lo puramente abstracto y formal [26-28].



Figura 2.2 Herramienta digital de la caja de polinomios.

Fuente: <https://es.calameo.com/read/003362062440572f3a23d>

La caja de polinomios es una herramienta didáctica que se puede utilizar para la enseñanza de diferentes conceptos de las matemáticas escolares, lo cual invitaría a pensar que la construcción corresponde únicamente a fabricantes especialistas, sin embargo, para llevar a cabo esta investigación fueron los estudiantes quienes aportaron

los materiales y, lo más importante, quienes construyeron sus propias cajas de polinomios, bajo la supervisión del docente del área.

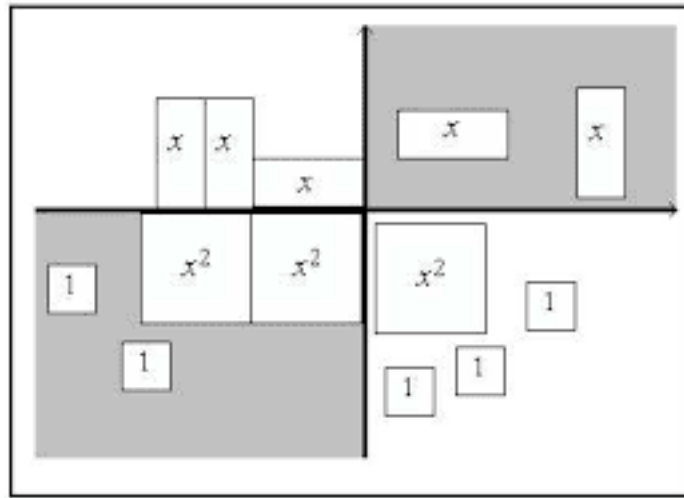


Figura 2.3 Tablero con fichas de la caja de polinomios.

Fuente: <https://sites.google.com/site/lacajadepolinomios/>

El tablero corresponde a una región rectangular que emula al plano cartesiano, por lo cual está dividido en cuatro subregiones por dos segmentos de recta perpendiculares, que unen los puntos medios de los lados. Como se observa en la ilustración 2.3, se nombra cada una de las subregiones similar a los cuadrantes del plano, así mismo se le asignan los signos. El cuadrante superior derecho será el primer cuadrante y tendrá signo positivo, el superior izquierdo será el segundo cuadrante con signo negativo, el inferior izquierdo será el tercer cuadrante con signo positivo y el inferior derecho será el cuarto cuadrante y tendrá signo negativo. Esta asignación de los signos tiene el mismo fundamento de los signos de los cuadrantes del plano, es decir, en el tablero de la caja de polinomios también consideraremos ejes coordenados. La intersección de los segmentos será el origen, el segmento comprendido entre el origen y el punto medio de la altura derecha del tablero representará medidas positivas y el de la izquierda, medidas negativas. De igual manera, el segmento que va del origen al punto medio de la base representará medidas negativas y el que va del origen a la base superior representará medidas positivas.

Se trabaja como polinomios de segundo grado con una sola variable y coeficientes enteros. La escritura de polinomios se diferencia según la operación que se pretenda realizar en el tablero [26-28].

Los signos de los cuadrantes permiten representar los signos de los coeficientes, mientras que la cantidad de fichas dispuesta en el tablero representa justamente el valor absoluto del coeficiente, es decir, el polinomio tiene diversas formas de representarse en el tablero. Una de ellas sería ubicando dos fichas en el segundo cuadrante; tres fichas en el primer cuadrante y finalmente una ficha en el cuarto cuadrante.

Un concepto fundamental que se utilizará se denomina **cero**, que matemáticamente hace referencia a la propiedad invertible de la adición de números reales. La caja de polinomios permite representar por medio de las fichas esta propiedad tan esencial de la operación de adición de una manera muy fácil de entender, pues dos fichas de igual peso algebraico ubicadas en cuadrantes de signos opuestos son opuestas, por lo cual su suma será un cero, y por esto es posible representar en el tablero un cero de múltiples formas [26-28].

En 2016, se presenta el prototipo para sistemas Android (aún no disponible en la Playstore) de Algeblocks, por parte de la Universidad Gerardo Barrios en San Miguel, el Salvador. Algeblock una aplicación para móviles con sistema operativo Android su finalidad es el aprendizaje de las operaciones algebraicas básicas como suma, resta de expresiones polinomiales, el cual se basó en la metodología tradicional de enseñanza/aprendizaje y aprovechamiento de las TIC (Véase Figura 2.4).

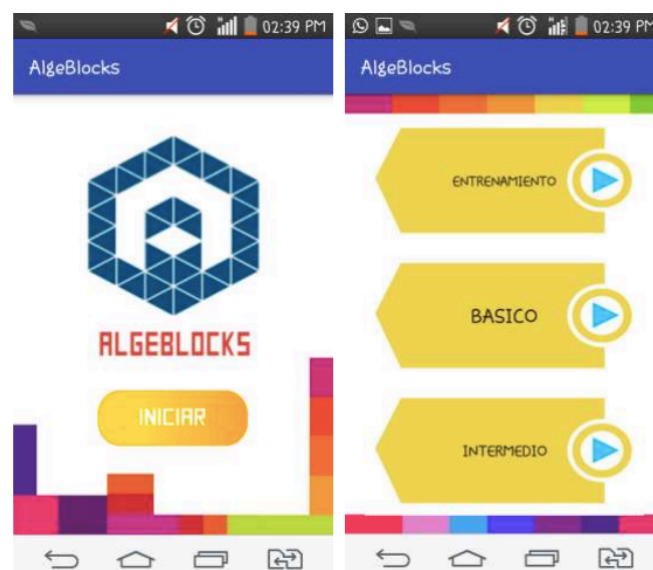


Figura 2.4 Prototipo de la aplicación para Android de Algeblocks.

Fuente: <https://acortar.link/O1Qh1w>

2.4 Algebra Tiles.

La herramienta Álgebra Tiles Tool es un manipulador virtual similar a los mosaicos de Algebra y Enteros físicos comúnmente disponibles en las aulas. Los mosaicos que representan 1, x , x^2 , y , y^2 y xy junto con sus opuestos se pueden arrastrar al espacio de trabajo desde el panel de selección desplazable a la izquierda. Una vez en el espacio de trabajo, se pueden mover, copiar, reorientar o negar individualmente o en grupos. Los mosaicos se pueden configurar para que coincidan con los colores de conjuntos físicos comunes. A diferencia de los mosaicos físicos, el valor de X-Y se pueden ajustar. La herramienta virtual también contiene segmentos de línea 1, x e y .

Existe una aplicación, lanzada en mayo del 2019, para los Sistemas Operativos Android e iOS. La herramienta Algebra Tiles (Figura 2.5) es un manipulador virtual similar a los mosaicos físicos de Algebra y Enteros comúnmente disponibles en las aulas. Los mosaicos que representan 1, x , x^2 , y , y^2 y xy junto con sus opuestos se pueden arrastrar al espacio de trabajo desde el panel de selección desplazable de la izquierda. Una vez en el espacio de trabajo, se pueden mover, copiar, reorientar o negar individualmente o en grupos. Los mosaicos se pueden configurar para que coincidan con los colores de conjuntos físicos comunes. A diferencia de los mosaicos físicos, el valor de X-Y se puede ajustar [29-31].

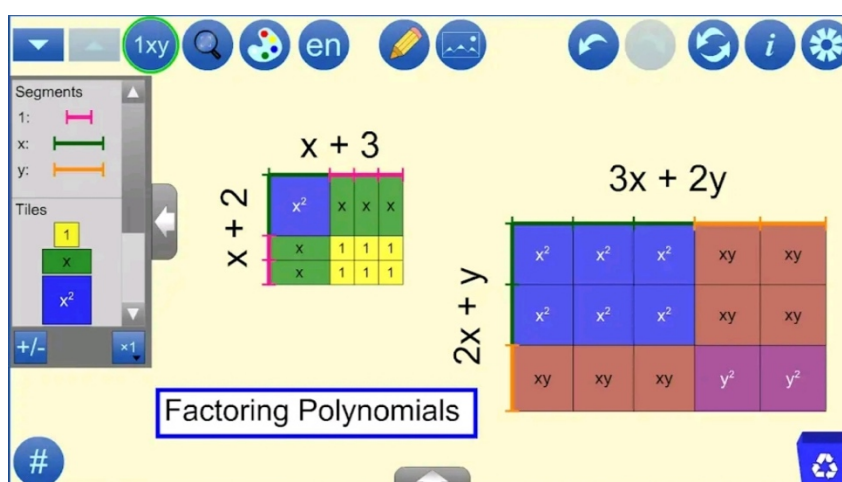


Figura 2.5 Aplicación de Algebra Tiles para Android.

Fuente: <https://play.google.com/store/apps/details?id=air.ca.mathclips.algebratiles&hl=es&gl=US>

Capítulo III. Metodología.

Teniendo en cuenta que Algesquares estudia varios temas del Álgebra básica que se encuentran dentro del programa de estudios de nivel medio superior, los conocimientos previos que deben tener los estudiantes para poder trabajar con este nuevo método de enseñanza son las operaciones básicas en aritmética: suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces.

Cada color de las fichas de Algesquares representa un término que puede ser una variable cuadrática, lineal o bien, un término independiente. Cada color tiene dos fichas, una positiva y otra del mismo color, pero con signo negativo representando a su inverso aditivo (Véase la tabla 3.1).

Roja		x^2
Roja negativa		$-x^2$
Azul		x
Azul negativo		$-x$
Amarillo		c
Amarillo negativo		$-c$

Tabla 3.1 Tabla de equivalencia de fichas de Algesquares y términos algebraicos.

Los coeficientes de cada término determinan el número de fichas que se pondrán en el tablero y el exponente de la variable determina el color de cada una.

3.1 Suma y resta de términos semejantes.

Reducir términos semejantes significa sumar o restar los coeficientes numéricos en una expresión algebraica, que tengan el mismo factor literal.

Para desarrollar un ejercicio de este tipo, se suman o restan los coeficientes numéricos y se conserva el factor literal.

Ejemplo 1: $x^2 - 2x + 3 - 2x^2 + 1 =$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 3.2).

Tabla 3.2 Suma y resta de términos semejantes.

Paso 2: Si hay fichas del mismo color (aunque distinto signo) se colocan en la misma columna (Véase Tabla 3.3).

Tabla 3.3 Suma y resta de términos semejantes.

Paso 3: Si existen dos fichas del mismo color con signo distinto, se eliminan. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.4).

Tabla 3.4 Suma y resta de términos semejantes.

Paso 4: Reacomodar las fichas a la parte superior de la columna, en caso de ser necesario (Véase Tabla 3.5).

-	-	
	-	

Tabla 3.5 Suma y resta de términos semejantes.

Paso 5: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.6).

-	-	
	-	

$$R = -x^2 - 2x + 4$$

Tabla 3.6 Suma y resta de términos semejantes.

Ejemplo 2: $2x^2 - 3x + 1 + 2x^2 + 5x - 5 =$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. Los coeficientes de cada término determinan el número de fichas y el exponente de la variable determina el color. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 3.7).

	-			-	
	-			-	
	-			-	
				-	
				-	

Tabla 3.7 Suma y resta de términos semejantes.

Paso 2: Si hay fichas del mismo color (aunque distinto signo) se colocan en la misma columna (Véase Tabla 3.8).

	-	
	-	-
	-	-
		-
		-

Tabla 3.8 Suma y resta de términos semejantes.

Paso 3: Si existen dos fichas del mismo color con signo distinto, se eliminan. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.9).

		-
		-
		-
		-

Tabla 3.9 Suma y resta de términos semejantes.

Paso 4: Reacomodar las fichas a la parte superior de la columna, en caso de ser necesario (Véase Tabla 3.10).

		-
		-
		-
		-

Tabla 3.10 Suma y resta de términos semejantes.

Paso 5: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.11).

		-
		-
		-
		-

$$R = 4x^2 + 2x - 4$$

Tabla 3.11 Suma y resta de términos semejantes.

Ejemplo 3: $x^2 + 2x + 2 - x^2 - 2x - 2 =$

Tabla 3.15 Suma y resta de términos semejantes.

Paso 5: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.16).

$$R = 0$$

Tabla 3.16 Suma y resta de términos semejantes.

3.2 Suma y resta de fracciones algebraicas.

En matemática diremos que la simplificación o reducción de fracciones es la acción de dividirse el numerador y el denominador de una fracción por otro mismo número con el fin de obtener otra fracción equivalente, cuyo cociente tenga el mismo valor numérico.

Ejemplo 1: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 =$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. Los coeficientes de cada término determinan el número de fichas y el exponente de la variable determina el color. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 3.17).

Tabla 3.17 Suma y resta de fracciones algebraicas.

Paso 2: Si hay fichas del mismo color (aunque distinto signo) se colocan en la misma columna (Véase Tabla 3.18).

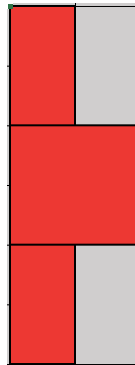


Tabla 3.18 Suma y resta de fracciones algebraicas.

Paso 3: Si existen dos fichas del mismo color con signo distinto, se eliminan. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.19).

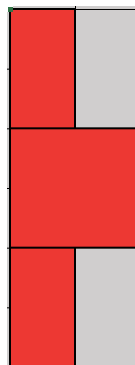


Tabla 3.19 Suma y resta de fracciones algebraicas.

Paso 4: Unir dos o más fracciones para que formen fichas completas, si se presenta algún caso (Véase Tabla 3.20).



Tabla 3.20 Suma y resta de fracciones algebraicas.

Paso 5: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.21).



$$R = 2x^2$$

Tabla 3.21 Suma y resta de fracciones algebraicas.

Ejemplo 2: $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}x =$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. Los coeficientes de cada término determinan el número de fichas y el exponente de la variable determina el color. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 3.22).

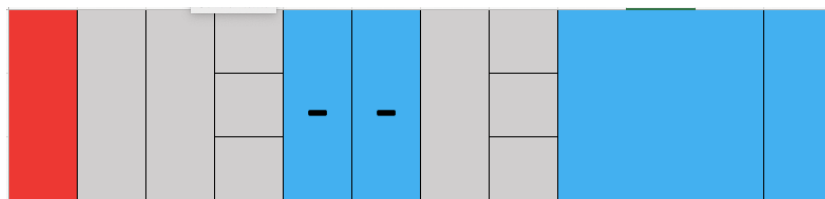


Tabla 3.22 Suma y resta de fracciones algebraicas.

Paso 2: Si hay fichas del mismo color (aunque distinto signo) se colocan en la misma columna (Véase Tabla 3.23).

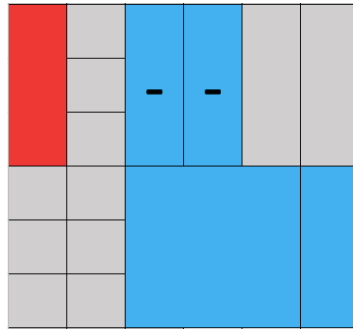


Tabla 3.23 Suma y resta de fracciones algebraicas.

Paso 3: Si existen dos fichas del mismo color con signo distinto, se eliminan. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.24).

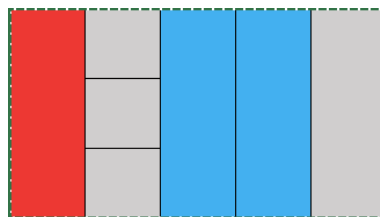


Tabla 3.24 Suma y resta de fracciones algebraicas.

Paso 4: Unir dos o más fracciones para que formen fichas completas, si se presenta algún caso (Véase Tabla 3.25).

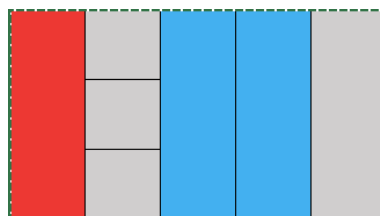
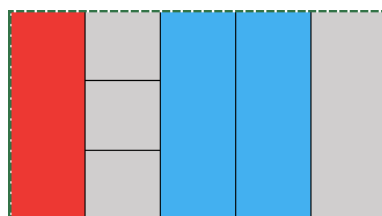


Tabla 3.25 Suma y resta de fracciones algebraicas.

Paso 5: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.26).



$$R = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$$

Tabla 3.26 Suma y resta de fracciones algebraicas.

3.3 Multiplicación de binomios.

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio. Se suman los monomios del mismo grado. Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

Ejemplo 1: $(2x - 3)(x + 4) =$

Paso 1: El primer miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera columna del tablero y el segundo miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera fila del tablero. El primer cuadro (de color azul) siempre se va a compartir, tanto en la columna como en la fila (Véase Tabla 3.27).



Tabla 3.27 Multiplicación de binomios.

Paso 2: Si entre todas las fichas azules no se forma una figura cuadrangular o rectangular, completar la figura con fichas del mismo color. Si no hay necesidad de formar la figura, pasar al siguiente paso (Véase Tabla 3.28).

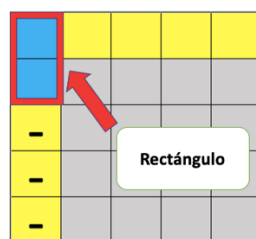


Tabla 3.28 Multiplicación de binomios.

Paso 3: Completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera columna de fichas amarillas, que tenga el mismo número de columnas que la figura azul. Una vez hecho esto, completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera fila de fichas amarillas, que tenga el mismo número de filas que la figura azul (Véase Tabla 3.29).



Tabla 3.29 Multiplicación de binomios.

Paso 4: Subir todas las fichas de rango de acuerdo a la Tabla 3.30:

Color		Sube de rango a:	
Azul		Rojo	
Amarillo		Azul	
Amarillo negativo		Azul negativo	

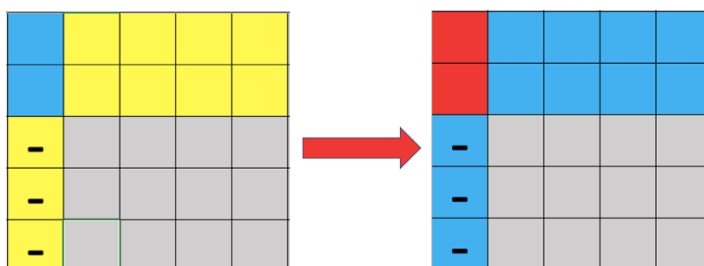


Tabla 3.30 Tabla para subir de rango las fichas.

Paso 5: Completar la nueva figura, formando un rectángulo o un cuadrado, rellenando los espacios de color gris. El color de ficha que se utiliza está basado en la siguiente combinación (Véase Tabla 3.31).

1. Si existen dos figuras azules del mismo signo, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas (sin signo).
2. Si existen dos figuras azules de signos distintos, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas con signo negativo.

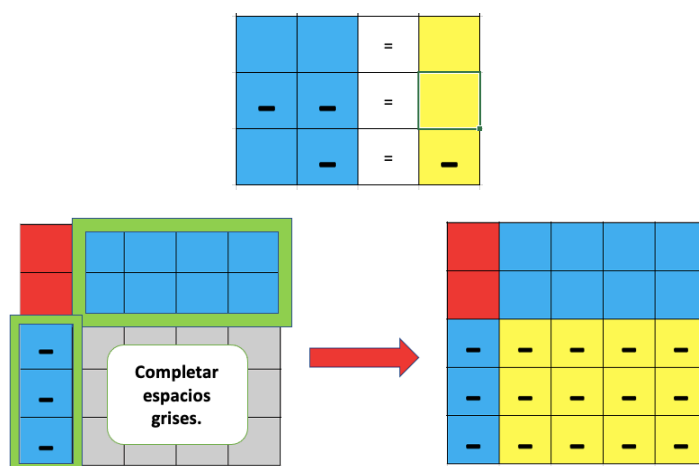


Tabla 3.31 Multiplicación de binomios.

Paso 6: Por cada ficha azul positiva se elimina una ficha azul negativa. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.32).

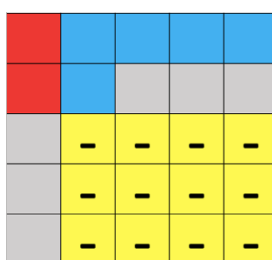


Tabla 3.32 Multiplicación de binomios.

Paso 7: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.33).

$$R = 2x^2 + 5x - 12$$

Tabla 3.33 Multiplicación de binomios.

Ejemplo 2: $(x + 5)(x - 4) =$

Paso 1: El primer miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera columna del tablero y el segundo miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera fila del tablero. El primer cuadro (de color azul) siempre se va a compartir, tanto en la columna como en la fila (Véase Tabla 3.34).

Tabla 3.34 Multiplicación de binomios.

Paso 2: Si entre todas las fichas azules no se forma una figura cuadrangular o rectangular, completar la figura con fichas del mismo color. Si no hay necesidad de formar la figura, pasar al siguiente paso (Véase Tabla 3.35).

Tabla 3.35 Multiplicación de binomios.

Paso 3: Completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera columna de fichas amarillas, que tenga el mismo número de columnas que la figura azul. Una vez hecho esto, completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera fila de fichas amarillas, que tenga el mismo número de filas que la figura azul (Véase Tabla 3.36).



Tabla 3.36 Multiplicación de binomios.

Paso 4: Subir todas las fichas de rango de acuerdo a la Tabla 3.37:

Color		Sube de rango a:	
Azul		Rojo	
Amarillo		Azul	
Amarillo negativo		Azul negativo	

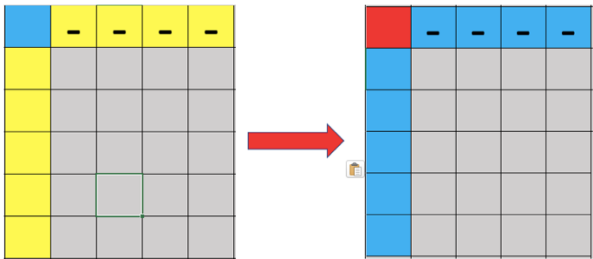


Tabla 3.37 Multiplicación de binomios.

Paso 5: Completar la nueva figura, formando un rectángulo o un cuadrado, rellenando los espacios de color gris. El color de ficha que se utiliza está basado en la siguiente combinación (Véase Tabla 3.38).

- | | | | |
|---|---|---|---|
| | | = | |
| - | - | = | |
| | - | = | - |



	-	-	-	-
	-	-	-	-
	-	-	-	-
	-	-	-	-
	-	-	-	-

35

	-	-	-	-
	-	-	-	-
	-	-	-	-
	-	-	-	-
	-	-	-	-

$$R = x^2 + x - 20$$

Tabla 3.40 Multiplicación de binomios.

Ejemplo 3: $(4 + 2x)(7x + 3) =$

En este caso, debemos asegurarnos que el término con x que está dentro de los paréntesis siempre se encuentre antes que el número independiente:

$$(2x + 4)(7x + 3) =$$

Paso 1: El primer miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera columna del tablero y el segundo miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera fila del tablero. El primer cuadro (de color azul) siempre se va a compartir, tanto en la columna como en la fila (Véase Tabla 3.41).

Comparto
ficha azul.

Tabla 3.41 Multiplicación de binomios.

Paso 2: Si entre todas las fichas azules no se forma una figura cuadrangular o rectangular, completar la figura con fichas del mismo color. Si no hay necesidad de formar la figura, pasar al siguiente paso (Véase Tabla 3.42).



Tabla 3.42 Multiplicación de binomios.

Paso 3: Completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera columna de fichas amarillas, que tenga el mismo número de columnas que la figura azul. Una vez hecho esto, completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera fila de fichas amarillas, que tenga el mismo número de filas que la figura azul (Véase Tabla 3.43).

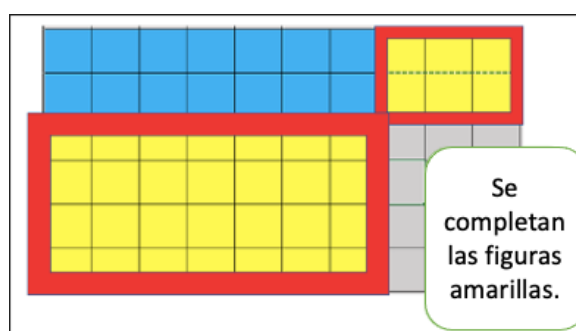


Tabla 3.43 Multiplicación de binomios.

Paso 4: Subir todas las fichas de rango de acuerdo a la Tabla 3.44:

Color		Sube de rango a:	
Azul		Rojo	
Amarillo		Azul	
Amarillo negativo		Azul negativo	



Tabla 3.44 Multiplicación de binomios.

Paso 5: Completar la nueva figura, formando un rectángulo o un cuadrado, rellenando los espacios de color gris. El color de ficha que se utiliza está basado en la siguiente combinación (Véase Tabla 3.45).

1. Si existen dos figuras azules del mismo signo, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas (sin signo).
2. Si existen dos figuras azules de signos distintos, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas con signo negativo.

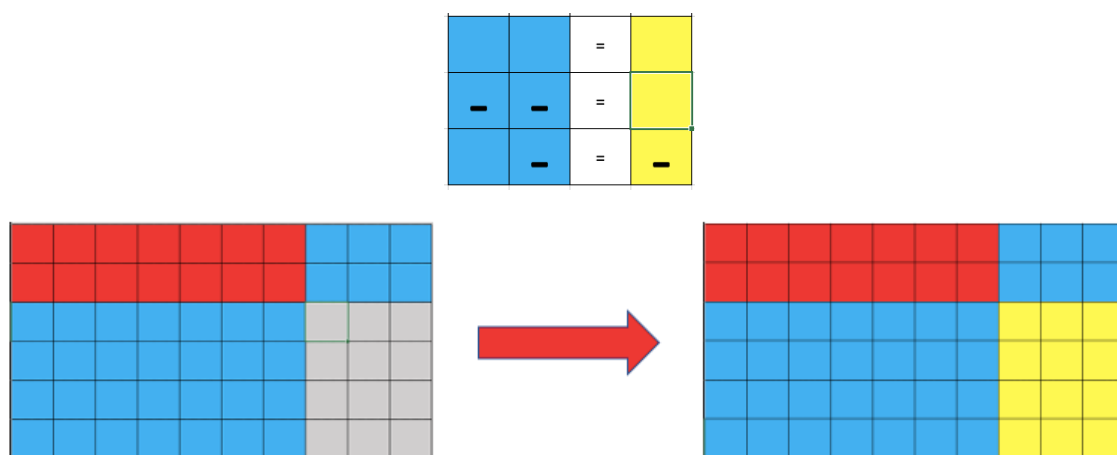


Tabla 3.45 Multiplicación de binomios.

Paso 6: Por cada ficha azul positiva se elimina una ficha azul negativa. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.46).

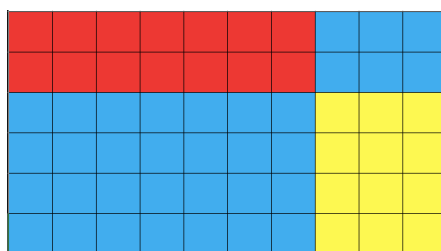


Tabla 3.46 Multiplicación de binomios.

Paso 7: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.47).

$$R = 14x^2 + 34x + 12$$

Tabla 3.47 Multiplicación de binomios.

3.4 División algebraica.

La división algebraica es una operación entre dos expresiones algebraicas llamadas dividendo y divisor para obtener otra expresión llamado cociente por medio de un algoritmo.

Como estamos trabajando con polinomios, debemos tener en cuenta un punto importante: el mayor exponente de algún término del dividendo debe ser mayor o igual al mayor exponente de algún término del divisor.

El dividendo es igual al divisor por el cociente, mas el residuo. De aquí se puede extraer dos tipos de división.

Ejemplo 1: $\frac{9x^2-6x}{3x} =$

Paso 1: Se acomodan las fichas del dividendo en el tablero, cada término es separado en columnas distintas. En otro lugar del tablero (distanciado del dividendo) se hace lo mismo con el divisor (Véase Tabla 3.48).

Tabla 3.48 División algebraica.

					-	-
					-	-
					-	-
					-	-

Tabla 3.49 División algebraica.

Tabla 3.50 División algebraica.

Tabla 3.50 División algebraica.

A continuación, la guía para poder dividir los colores correctamente (Véase Tabla 3.51).

Tabla 3.51 División algebraica.

			-	-			
--	--	--	---	---	--	--	--

40

Tabla 3.52 División algebraica.

Paso 5: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.53).

			-	-
--	--	--	---	---

$$R = 3x - 2$$

Tabla 3.53 División algebraica.

Ejemplo 2: $\frac{7x^2-4x}{-2x} =$

Paso 1: Se acomodan las fichas del dividendo en el tablero, cada término es separado en columnas distintas. En otro lugar del tablero (distanciado del dividendo) se hace lo mismo con el divisor (Véase Tabla 3.54).

	-		-
	-		-
	-		
	-		

Tabla 3.54 División algebraica.

Paso 2: Se toma la primera columna del dividendo y si es posible, se reparte en partes iguales a cada ficha del divisor (en caso de sobrar alguna, se pone aparte). Se repite este paso con cada columna del dividendo (Véase Tabla 3.55).

-				-	-
-				-	-

Tabla 3.55 División algebraica.

Paso 3: Se borran las filas sobrantes excepto la primera. Tampoco se debe borrar el residuo (si es que existe) (Véase Tabla 3.56).

-				-	-

Tabla 3.56 División algebraica.

Paso 4: En orden de izquierda a derecha, a partir de la segunda ficha en adelante, se dividen cada ficha entre la primera. Una vez divididos, se elimina la primera ficha de izquierda a derecha.

A continuación, la guía para poder dividir los colores correctamente (Véase Tabla 3.57):

	/		=	
-	/	-	=	
	/	-	=	-
-	/		=	-
	/		=	
-	/	-	=	
	/	-	=	-
-	/		=	-

Tabla 3.57 División algebraica.

Quedando de la siguiente forma (Véase Tabla 3.58):

-	-	-		

Tabla 3.58 División algebraica.

Paso 5: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.59).

-	-	-		

$R = -3x + 2$. Residuo: x^2

Tabla 3.59 División algebraica.

Ejemplo 3: $\frac{13x^2+5x}{4x} =$

Paso 1: Se acomodan las fichas del dividendo en el tablero, cada término es separado en columnas distintas. En otro lugar del tablero (distanciado del dividendo) se hace lo mismo con el divisor (Véase Tabla 3.60).

[illegible]

Tabla 3.60 División algebraica.

Paso 2: Se toma la primera columna del dividendo y si es posible, se reparte en partes iguales a cada ficha del divisor (en caso de sobrar alguna, se pone aparte). Se repite este paso con cada columna del dividendo (Véase Tabla 3.61).

Tabla 3.61 División algebraica.

Paso 3: Se borran las filas sobrantes excepto la primera. Tampoco se debe borrar el residuo (si es que existe) (Véase Tabla 3.62).

Tabla 3.62 División algebraica.

Paso 4: En orden de izquierda a derecha, a partir de la segunda ficha en adelante, se dividen cada ficha entre la primera. Una vez divididos, se elimina la primera ficha de izquierda a derecha.

A continuación, la guía para poder dividir los colores correctamente (Véase Tabla 3.63):

	/		=	
-	/	-	=	
	/	-	=	-
-	/		=	-
	/		=	
-	/	-	=	
	/	-	=	-
-	/		=	-

Tabla 3.63 División algebraica.

Quedando de la siguiente forma (Véase Tabla 3.64):

Tabla 3.64 División algebraica.

Paso 5: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.65).

$$R = -3x + 1. \text{ Residuo: } x^2 + x$$

Tabla 3.65 División algebraica.

3.5 Binomio al Cuadrado.

Un binomio al cuadrado es una ecuación o expresión algebraica con dos términos los cuales están elevados al cuadrado.

Un binomio al cuadrado (suma) es igual es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado segundo.

Ejemplo 1: $(2x + 2)^2$

Este binomio también se puede expresar de la siguiente forma:

$$(2x + 2)(2x + 2)$$

Paso 1: El primer miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera columna del tablero y el segundo miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera fila del tablero. El primer cuadro (de color azul) siempre se va a compartir, tanto en la columna como en la fila (Véase Tabla 3.66).

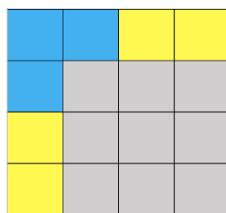


Tabla 3.66 Binomio al cuadrado.

Paso 2: Si entre todas las fichas azules no se forma una figura cuadrangular o rectangular, completar la figura con fichas del mismo color. Si no hay necesidad de formar la figura, pasar al siguiente paso (Véase Tabla 3.67).

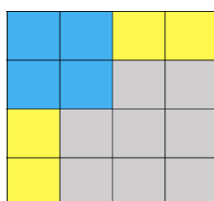


Tabla 3.67 Binomio al cuadrado.

Paso 3: Completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera columna de fichas amarillas, que tenga el mismo número de columnas que la figura azul. Una vez hecho esto, completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera fila de fichas amarillas, que tenga el mismo número de filas que la figura azul (Véase Tabla 3.68).

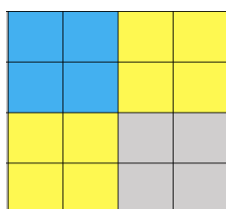


Tabla 3.68 Binomio al cuadrado.

Paso 4: Subir todas las fichas de rango de acuerdo a la Tabla 3.69:

Color		Sube de rango a:	
Azul		Rojo	
Amarillo		Azul	

Amarillo negativo				Azul negativo			
-------------------	--	---	--	---------------	--	---	--

Tabla 3.69 Binomio al cuadrado.

Paso 5: Completar la nueva figura, formando un rectángulo o un cuadrado, rellenando los espacios de color gris. El color de ficha que se utiliza está basado en la siguiente combinación (Véase Tabla 3.70).

1. Si existen dos figuras azules del mismo signo, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas (sin signo).
2. Si existen dos figuras azules de signos distintos, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas con signo negativo.

Tabla 3.70 Binomio al cuadrado.

Paso 6: Por cada ficha azul positiva se elimina una ficha azul negativa. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.71).

Tabla 3.71 Binomio al cuadrado.

Paso 7: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.72).

$$R = 4x^2 + 8x + 4$$

Tabla 3.72 Binomio al cuadrado.

Ejemplo 2: $(x - 4)^2$

Este binomio también se puede expresar de la siguiente forma:

$$(x - 4)(x - 4)$$

Paso 1: El primer miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera columna del tablero y el segundo miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera fila del tablero. El primer cuadro (de color azul) siempre se va a compartir, tanto en la columna como en la fila (Véase Tabla 3.73).

Tabla 3.73 Binomio al cuadrado.

Paso 2: Si entre todas las fichas azules no se forma una figura cuadrangular o rectangular, completar la figura con fichas del mismo color. Si no hay necesidad de formar la figura, pasar al siguiente paso (Véase Tabla 3.74).

Tabla 3.74 Binomio al cuadrado.

Paso 3: Completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera columna de fichas amarillas, que tenga el mismo número de columnas que la figura azul. Una vez hecho esto, completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera fila de fichas amarillas, que tenga el mismo número de filas que la figura azul (Véase Tabla 3.75).

Tabla 3.75 Binomio al cuadrado.

Paso 4: Subir todas las fichas de rango de acuerdo a la Tabla 3.76:

Color		Sube de rango a:	
Azul		Rojo	
Amarillo		Azul	
Amarillo negativo		Azul negativo	

Tabla 3.76 Binomio al cuadrado.

Paso 5: Completar la nueva figura, formando un rectángulo o un cuadrado, rellenando los espacios de color gris. El color de ficha que se utiliza está basado en la siguiente combinación (Véase Tabla 3.77).

1. Si existen dos figuras azules del mismo signo, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas (sin signo).

2. Si existen dos figuras azules de signos distintos, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas con signo negativo.

		=	
-	-	=	
	-	=	-

	-	-	-	-
-				
-				
-				
-				

Tabla 3.77 Binomio al cuadrado.

Paso 6: Por cada ficha azul positiva se elimina una ficha azul negativa. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.78).

	-	-	-	-
-				
-				
-				
-				

Tabla 3.78 Binomio al cuadrado.

Paso 7: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.79).

	-	-	-	-
-				
-				
-				
-				

$$R = x^2 - 8x + 16$$

Tabla 3.79 Binomio al cuadrado.

Ejemplo 3: $(3x + 5)^2$

Este binomio también se puede expresar de la siguiente forma:

$$(3x + 5)(3x + 5)$$

Paso 1: El primer miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera columna del tablero y el segundo miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera fila del tablero. El primer cuadro (de color azul) siempre se va a compartir, tanto en la columna como en la fila (Véase Tabla 3.80).

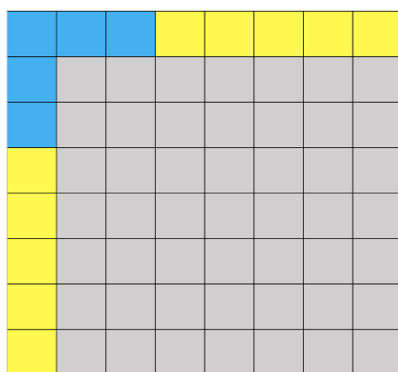


Tabla 3.80 Binomio al cuadrado.

Paso 2: Si entre todas las fichas azules no se forma una figura cuadrangular o rectangular, completar la figura con fichas del mismo color. Si no hay necesidad de formar la figura, pasar al siguiente paso (Véase Tabla 3.81).

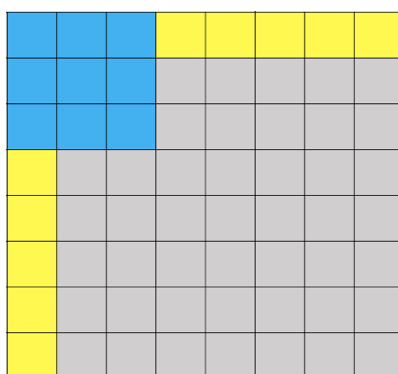


Tabla 3.81 Binomio al cuadrado.

Paso 3: Completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera columna de fichas amarillas, que tenga el mismo número de columnas que la figura azul. Una vez hecho esto, completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera fila de fichas amarillas, que tenga el mismo número de filas que la figura azul (Véase Tabla 3.82).

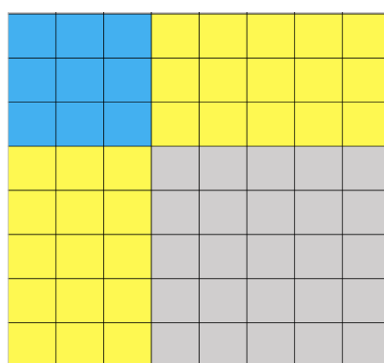


Tabla 3.82 Binomio al cuadrado.

Paso 4: Subir todas las fichas de rango de acuerdo a la Tabla 3.83:

Color		Sube de rango a:	
Azul		Rojo	
Amarillo		Azul	
Amarillo negativo		Azul negativo	

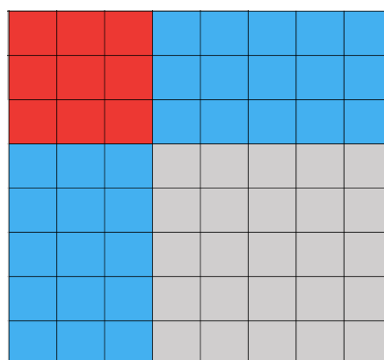
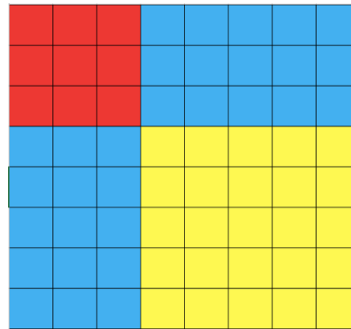


Tabla 3.83 Binomio al cuadrado.

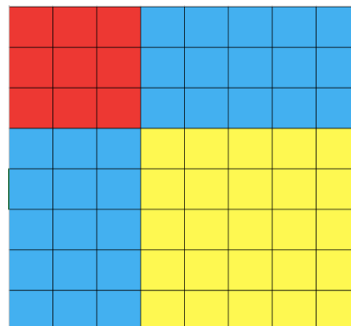
Paso 5: Completar la nueva figura, formando un rectángulo o un cuadrado, rellenando los espacios de color gris. El color de ficha que se utiliza está basado en la siguiente combinación (Véase Tabla 3.84).

1. Si existen dos figuras azules del mismo signo, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas (sin signo).

- | | | | |
|---|---|---|---|
| | | = | |
| - | - | = | |
| | - | = | - |



Paso 6: Por cada ficha azul positiva se elimina una ficha azul negativa. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.85).



Paso 7: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.86).

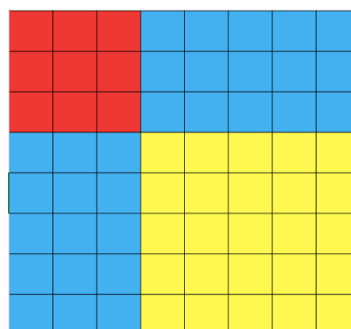


Tabla 3.86 Binomio al cuadrado.

3.6 Binomios conjugados.

El binomio conjugado de uno dado, es otro binomio que se diferencia únicamente por el signo de uno de los términos. Para resolver los binomios deben ser exactamente iguales con la única diferencia que el signo es diferente, uno es positivo y el otro es negativo.

Ejemplo 1: $(2x - 1)(2x + 1)$

Paso 1: El primer miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera columna del tablero y el segundo miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera fila del tablero. El primer cuadro (de color azul) siempre se va a compartir, tanto en la columna como en la fila (Véase Tabla 3.87).

Tabla 3.87 Binomios conjugados.

Paso 2: Si entre todas las fichas azules no se forma una figura cuadrangular o rectangular, completar la figura con fichas del mismo color. Si no hay necesidad de formar la figura, pasar al siguiente paso (Véase Tabla 3.88).

Tabla 3.88 Binomios conjugados.

Paso 3: Completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera columna de fichas amarillas, que tenga el mismo número de columnas que la figura azul. Una vez hecho esto, completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera fila de fichas amarillas, que tenga el mismo número de filas que la figura azul (Véase Tabla 3.89).

-	-	

Tabla 3.89 Binomios conjugados.

Paso 4: Subir todas las fichas de rango de acuerdo a la Tabla 3.90:

Color	Sube de rango a:		
Azul			
Amarillo			
Amarillo negativo			

-	-	

Tabla 3.90 Binomios conjugados.

Paso 5: Completar la nueva figura, formando un rectángulo o un cuadrado, rellenando los espacios de color gris. El color de ficha que se utiliza está basado en la siguiente combinación (Véase Tabla 3.91):

1. Si existen dos figuras azules del mismo signo, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas (sin signo).
2. Si existen dos figuras azules de signos distintos, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas con signo negativo.

		=	
-	-	=	
	-	=	-

-	-	-

Tabla 3.91 Binomios conjugados.

Paso 6: Por cada ficha azul positiva se elimina una ficha azul negativa. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.92).

		-

Tabla 3.92 Binomios conjugados.

Paso 7: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.93).

		-

$$R = 4x^2 - 1$$

Tabla 3.93 Binomios conjugados.

Ejemplo 2: $(3x - 3)(3x + 3)$

Paso 1: El primer miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera columna del tablero y el segundo miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera fila del tablero. El primer cuadro (de color azul) siempre se va a compartir, tanto en la columna como en la fila (Véase Tabla 3.94).

-					
-					
-					

Tabla 3.94 Binomios conjugados.

Paso 2: Si entre todas las fichas azules no se forma una figura cuadrangular o rectangular, completar la figura con fichas del mismo color. Si no hay necesidad de formar la figura, pasar al siguiente paso (Véase Tabla 3.95).

-					
-					
-					

Tabla 3.95 Binomios conjugados.

Paso 3: Completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera columna de fichas amarillas, que tenga el mismo número de columnas que la figura azul. Una vez hecho esto, completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera fila de fichas amarillas, que tenga el mismo número de filas que la figura azul (Véase Tabla 3.96).

-	-	-			
-	-	-			
-	-	-			

Tabla 3.96 Binomios conjugados.

Paso 4: Subir todas las fichas de rango de acuerdo a la Tabla 3.97:

Paso 6: Por cada ficha azul positiva se elimina una ficha azul negativa. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.99).

Red	Red	Red	Gray	Gray	Gray
Red	Red	Red	Gray	Gray	Gray
Red	Red	Red	Gray	Gray	Gray
Gray	Gray	Gray	Yellow	Yellow	Yellow
Gray	Gray	Gray	Yellow	Yellow	Yellow
Gray	Gray	Gray	Yellow	Yellow	Yellow

Tabla 3.99 Binomios conjugados.

Paso 7: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.100).

			-	-	-
			-	-	-
			-	-	-

$$R = 9x^2 - 9$$

Tabla 3.100 Binomios conjugados.

Ejemplo 3: $(x + 3)(x - 3)$

Paso 1: El primer miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera columna del tablero y el segundo miembro de la expresión algebraica se acomoda en la primera fila del tablero. El primer cuadro (de color azul) siempre se va a compartir, tanto en la columna como en la fila (Véase Tabla 3.101).

Tabla 3.101 Binomios conjugados.

Paso 2: Si entre todas las fichas azules no se forma una figura cuadrangular o rectangular, completar la figura con fichas del mismo color. Si no hay necesidad de formar la figura, pasar al siguiente paso (Véase Tabla 3.102).

Tabla 3.102 Binomios conjugados.

Paso 3: Completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera columna de fichas amarillas, que tenga el mismo número de columnas que la figura azul. Una vez hecho esto, completar un nuevo rectángulo o cuadrado, con la primera fila de fichas amarillas, que tenga el mismo número de filas que la figura azul (Véase Tabla 3.103).

Tabla 3.103 Binomios conjugados.

Paso 4: Subir todas las fichas de rango de acuerdo a la Tabla 3.104:

Color		Sube de rango a:	
Azul		Rojo	
Amarillo		Azul	
Amarillo negativo		Azul negativo	

Tabla 3.104 Binomios conjugados.

Paso 5: Completar la nueva figura, formando un rectángulo o un cuadrado, rellenando los espacios de color gris. El color de ficha que se utiliza está basado en la siguiente combinación (Véase Tabla 3.105):

1. Si existen dos figuras azules del mismo signo, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas (sin signo).
2. Si existen dos figuras azules de signos distintos, se rellenan los espacios grises con fichas amarillas con signo negativo.

		=	
		=	
		=	

Tabla 3.105 Binomios conjugados.

Paso 6: Por cada ficha azul positiva se elimina una ficha azul negativa. En caso de no cumplirse esta condición, ir al siguiente paso (Véase Tabla 3.106).

	-	-	-
	-	-	-
	-	-	-

Tabla 3.106 Binomios conjugados.

Paso 7: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.107).

	-	-	-
	-	-	-
	-	-	-

$$R = x^2 - 9$$

Tabla 3.107 Binomios conjugados.

3.7 Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

En matemáticas la factorización es una técnica que consiste en la descomposición en factores de una expresión algebraica (que puede ser un número, una suma o resta, una matriz, un polinomio, etc.) en forma de producto. Existen distintos métodos de factorización, dependiendo de los objetos matemáticos estudiados; el objetivo es simplificar una expresión o reescribirla en términos de «bloques fundamentales», que reciben el nombre de factores, como por ejemplo un número en números primos, o un polinomio en polinomios irreducibles.

Si se tiene al trinomio $a^2+2ab+b^2$ se identifican los dos términos que son cuadrados perfectos $a^2=a$, $b^2=b$ el tercer término corresponde al doble producto de las raíces de los dos anteriores $2ab$ Por lo tanto $a^2+2ab+b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo 1: $x^2 - 6x + 9$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 3.108).

Tabla 3.108 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 2: Con todas las fichas rojas se forma un cuadrado, en caso de ser una sola ficha se pone únicamente la ficha roja (Véase Tabla 3.109).

Tabla 3.109 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 3: Se reparten las fichas azules en partes iguales en dos grupos. Un grupo cubre las columnas de las fichas rojas y otro grupo, cubre las filas de las fichas rojas (Véase Tabla 3.110).

Tabla 3.110 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 4: Si se hizo correctamente el paso 3, las fichas amarillas alcanzan perfectamente para completar el cuadrado, rellenando los espacios grises. En caso de que sobren o falten fichas amarillas al completar el cuadrado, regresar al paso 3 y acomodar nuevamente las fichas azules (Véase Tabla 3.111).

Tabla 3.111 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 5: Dejar únicamente la primera fila y la primera columna de la figura formada, eliminando las demás fichas (Véase Tabla 3.112).

Tabla 3.112 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 6: De acuerdo a la Tabla 3.113, bajar de rango las fichas que quedaron:

Color		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo		Amarillo negativo	

Paso 2: Con todas las fichas rojas se forma un cuadrado, en caso de ser una sola ficha se pone únicamente la ficha roja (Véase Tabla 3.116).

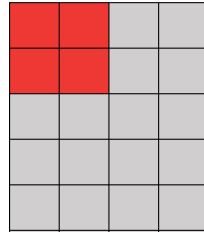


Tabla 3.116 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 3: Se reparten las fichas azules en partes iguales en dos grupos. Un grupo cubre las columnas de las fichas rojas y otro grupo, cubre las filas de las fichas rojas (Véase Tabla 3.117).

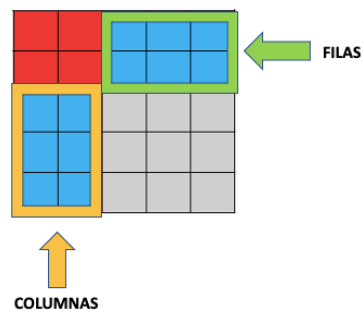


Tabla 3.117 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 4: Si se hizo correctamente el paso 3, las fichas amarillas alcanzan perfectamente para completar el cuadrado, rellenando los espacios grises. En caso de que sobren o falten fichas amarillas al completar el cuadrado, regresar al paso 3 y acomodar nuevamente las fichas azules (Véase Tabla 3.118).

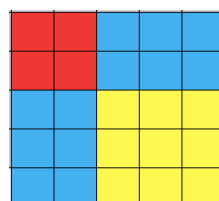


Tabla 3.118 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 5: Dejar únicamente la primera fila y la primera columna de la figura formada, eliminando las demás fichas (Véase Tabla 3.119).

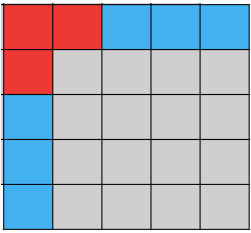


Tabla 3.119 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 6: De acuerdo a la Tabla 3.120, bajar de rango las fichas que quedaron:

Color		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo		Amarillo negativo	

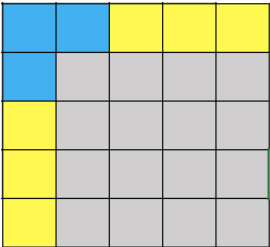
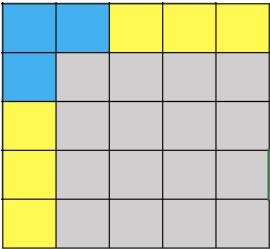


Tabla 3.120 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 7: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.121).



$$R = (2x + 3)(2x + 3) = (2x + 3)^2$$

Tabla 3.121 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Ejemplo 3: $9x^2 - 6x + 1$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 3.122).

	-	
	-	
	-	
	-	
	-	
	-	

Tabla 3.122 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 2: Con todas las fichas rojas se forma un cuadrado, en caso de ser una sola ficha se pone únicamente la ficha roja (Véase Tabla 3.123).

Tabla 3.123 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 3: Se reparten las fichas azules en partes iguales en dos grupos. Un grupo cubre las columnas de las fichas rojas y otro grupo, cubre las filas de las fichas rojas (Véase Tabla 3.124).

Tabla 3.124 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 4: Si se hizo correctamente el paso 3, las fichas amarillas alcanzan perfectamente para completar el cuadrado, rellenando los espacios grises. En caso de que sobren o falten fichas amarillas al completar el cuadrado, regresar al paso 3 y acomodar nuevamente las fichas azules (Véase Tabla 3.125).

Tabla 3.125 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 5: Dejar únicamente la primera fila y la primera columna de la figura formada, eliminando las demás fichas (Véase Tabla 3.126).

Tabla 3.126 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 6: De acuerdo a la Tabla 3.127, bajar de rango las fichas que quedaron:

Color		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo		Amarillo negativo	

Tabla 3.127 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Paso 7: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.128).

			-
-			

$$R = (3x - 1)(3x - 1) = (3x - 1)^2$$

Tabla 3.128 Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

3.8 Factorización de una diferencia de cuadrados.

La factorización de una diferencia de cuadrados está formada por una ecuación con dos términos: uno positivo y el otro, negativo. Ambos deben de ser raíces cuadradas exactas. Y lo que se hace es realizar una resta entre ellos. De ahí el nombre de factorización por diferencia de cuadrados.

Ejemplo 1: $4x^2 - 9$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 3.129).

	-
	-
	-
	-
	-
	-
	-
	-
	-

Tabla 3.129 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 2: Con todas las fichas rojas se forma un cuadrado, en caso de ser una sola ficha se pone únicamente la ficha roja (Véase Tabla 3.130).

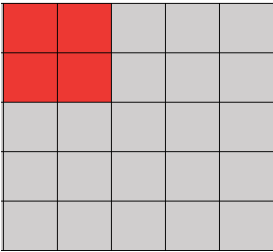


Tabla 3.130 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 3: A partir de la esquina inferior derecha del cuadrado rojo, se forma un cuadrado azul con todas las fichas azules (Véase Tabla 3.131).

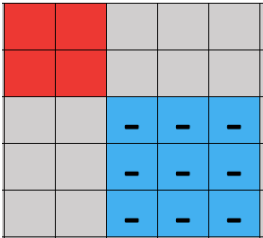


Tabla 3.131 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 4: Las fichas azules se bajan de rango a fichas amarillas, de acuerdo a la Tabla 3.132:

Color		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo		Amarillo negativo	

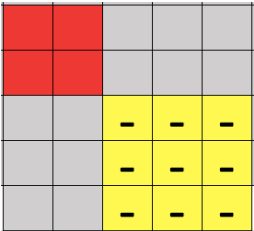


Tabla 3.132 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 5: Se completa el cuadrado llenando los dos bloques de espacios grises, uno de ellos con fichas azules y otro más, con fichas azules negativas (Véase Tabla 3.133).

Tabla 3.133 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 6: Dejar únicamente la primera fila y la primera columna de la figura formada, eliminando las demás fichas (Véase Tabla 3.134).

Tabla 3.134 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 7: De acuerdo a la Tabla 3.135, bajar de rango las fichas que quedaron:

Color		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo		Amarillo negativo	

		-	-	-

Tabla 3.135 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 8: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.136).

		-	-	-

$$R = (2x + 3)(2x - 3)$$

Tabla 3.136 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 2: $x^2 - 4$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 3.137).

	-
	-
	-
	-

Tabla 3.137 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 2: Con todas las fichas rojas se forma un cuadrado, en caso de ser una sola ficha se pone únicamente la ficha roja (Véase Tabla 3.138).

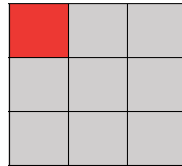


Tabla 3.138 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 3: A partir de la esquina inferior derecha del cuadrado rojo, se forma un cuadrado azul con todas las fichas azules (Véase Tabla 3.139).

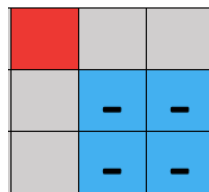


Tabla 3.139 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 4: Las fichas azules se bajan de rango a fichas amarillas, de acuerdo a la Tabla 3.140:

Color		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo		Amarillo negativo	

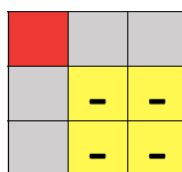


Tabla 3.140 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 5: Se completa el cuadrado llenando los dos bloques de espacios grises, uno de ellos con fichas azules y otro más, con fichas azules negativas (Véase Tabla 3.141).

	-	-
	-	-
	-	-

Tabla 3.141 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 6: Dejar únicamente la primera fila y la primera columna de la figura formada, eliminando las demás fichas (Véase Tabla 3.142).

	-	-

Tabla 3.142 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 7: De acuerdo a la Tabla 3.143, bajar de rango a:

Color		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo	-	Amarillo negativo	-

	-	-

Tabla 3.143 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 8: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.144).

$$R = (x + 2)(x - 2)$$

Tabla 3.144 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 3: $9x^2 - 1$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 3.145).

Tabla 3.145 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 2: Con todas las fichas rojas se forma un cuadrado, en caso de ser una sola ficha se pone únicamente la ficha roja (Véase Tabla 3.146).

Tabla 3.146 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 3: A partir de la esquina inferior derecha del cuadrado rojo, se forma un cuadrado azul con todas las fichas azules (Véase Tabla 3.147).

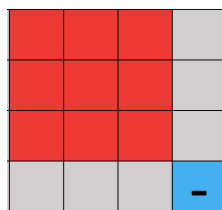


Tabla 3.147 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 4: Las fichas azules se bajan de rango a fichas amarillas, de acuerdo a la Tabla 3.148:

Color		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo		Amarillo negativo	

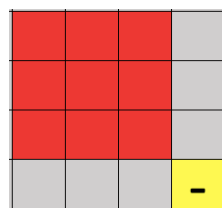


Tabla 3.148 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 5: Se completa el cuadrado llenando los dos bloques de espacios grises, uno de ellos con fichas azules y otro más, con fichas azules negativas (Véase Tabla 3.149).

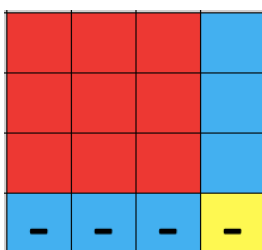


Tabla 3.149 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 6: Dejar únicamente la primera fila y la primera columna de la figura formada, eliminando las demás fichas (Véase Tabla 3.150).

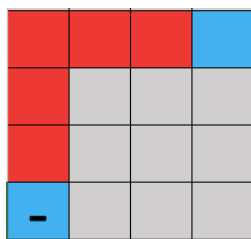


Tabla 3.150 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 7: De acuerdo a la Tabla 3.151, bajar de rango las fichas que quedaron:

Color		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo		Amarillo negativo	

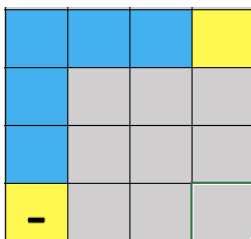
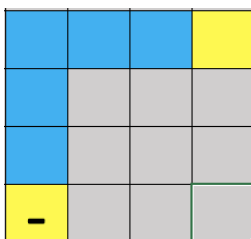


Tabla 3.151 Factorización de una diferencia de cuadrados.

Paso 8: Guiándose con la tabla de equivalencia, interpretar el resultado final con las fichas restantes (Véase Tabla 3.152).



$$R = (3x - 1)(3x + 1)$$

Tabla 3.152 Factorización de una diferencia de cuadrados.

3.9 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$

Es una expresión algebraica que consta de dos miembros separados por un signo de igualdad. Uno o ambos miembros de la ecuación debe tener al menos una variable o letra, llamada incógnita. ... Resolver una ecuación es hallar los valores de x que la satisfacen a través de técnicas matemáticas variadas.

Una ecuación algebraica consta de tres partes: primer miembro de la ecuación, segundo miembro de la ecuación y el signo igual, por lo que anexaremos una ficha de color gris para representar este signo (Véase Tabla 3.153).

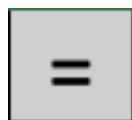


Tabla 3.153 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Ejemplo 1: $x^2 + 4x = 8$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 154).

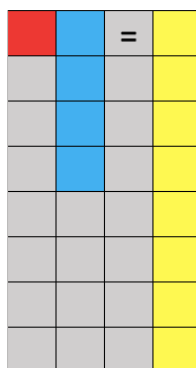


Tabla 3.154 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 2: Se distribuyen las fichas azules tanto debajo como a la derecha de las fichas rojas, formando dos rectángulos del mismo tamaño, que a su vez están formados por el mismo número de fichas azules (Véase Tabla 3.155).

[illegible]

Tabla 3.155 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 3: Completar el primer miembro de la ecuación (todas las fichas que están a la izquierda del signo igual) con fichas amarillas (adicionales a las que ya tenemos) hasta formar un cuadrado formado por las fichas rojas y azules que ya se tienen, más las amarillas que se van a agregar. Contamos el número de fichas que agregamos del lado izquierdo y agregamos la misma cantidad del lado derecho, segundo miembro de la ecuación (Véase Tabla 3.156).

[illegible]

Tabla 3.156 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 4: Del lado derecho del signo igual puede que queden fichas amarillas positivas y negativas. En caso de suceder esto, eliminar la misma cantidad de fichas positivas y negativas, solo del lado derecho del signo igual (Véase Tabla 3.157).

[illegible]

Tabla 3.160 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 2: Se distribuyen las fichas azules tanto debajo como a la derecha de las fichas rojas, formando dos rectángulos del mismo tamaño, que a su vez están formados por el mismo número de fichas azules (Véase Tabla 3.161).

Tabla 3.161 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 3: Completar el primer miembro de la ecuación (todas las fichas que están a la izquierda del signo igual) con fichas amarillas (adicionales a las que ya tenemos) hasta formar un cuadrado formado por las fichas rojas y azules que ya se tienen, más las amarillas que se van a agregar. Contamos el número de fichas que agregamos del lado izquierdo y agregamos la misma cantidad del lado derecho, segundo miembro de la ecuación (Véase Tabla 3.162).

Paso 6: Bajamos de rango a todas las fichas que están al lado izquierdo del signo igual, siguiendo la Tabla 3.165:

Color:		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo		Amarillo negativo	

						=	
							
							
							
							
							
							
							
							

Tabla 3.165 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 7: Interpretamos el resultado de la figura anterior por medio de la tabla de equivalencia y nos queda:

$$(2x + 3)(2x + 3) = 9$$

Que también se puede representar como:

$$(2x + 3)^2 = 9$$

Paso 8: Utilizando la regla para despejar una incógnita, se despeja la variable.

$$\sqrt{(2x + 3)^2} = \pm\sqrt{9}$$

$$(2x + 3) = \pm 3$$

$$2x + 3 - 3 = \pm 3 - 3$$

$$2x = \pm 3 - 3$$

$$x_1 = \frac{3 - 3}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$x_2 = \frac{-3 - 3}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = -3$$

Ejemplo 3: $9x^2 - 6x = 5$

Paso 1: Se acomodan las fichas en el tablero de acuerdo al color correspondiente. A cada término algebraico le corresponde una columna (Véase Tabla 3.166).

	-	=	
-			
-			
-			
-			
-			
-			

Tabla 3.166 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 2: Se distribuyen las fichas azules tanto debajo como a la derecha de las fichas rojas, formando dos rectángulos del mismo tamaño, que a su vez están formados por el mismo número de fichas azules (Véase Tabla 3.167).

			-	=	
			-		
			-		
-	-	-			

Tabla 3.167 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 3: Completar el primer miembro de la ecuación (todas las fichas que están a la izquierda del signo igual) con fichas amarillas (adicionales a las que ya tenemos) hasta formar un cuadrado formado por las fichas rojas y azules que ya se tienen, más las amarillas que se van a agregar. Contamos el número de fichas que agregamos del lado

izquierdo y agregamos la misma cantidad del lado derecho, segundo miembro de la ecuación (Véase Tabla 3.168).

			-	=		
			-			
			-			
-	-	-				

Tabla 3.168 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 4: Del lado derecho del signo igual puede que queden fichas amarillas positivas y negativas. En caso de suceder esto, eliminar la misma cantidad de fichas positivas y negativas, solo del lado derecho del signo igual (Véase Tabla 3.169).

			-	=		
			-			
			-			
-	-	-				

Tabla 3.169 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 5: Retiramos las fichas amarillas que agregamos del lado izquierdo del signo igual, en el paso 3 (Véase Tabla 3.170).

			-	=	
-					

Tabla 3.170 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 6: Bajamos de rango a todas las fichas que están al lado izquierdo del signo igual, siguiendo la Tabla 3.171:

Color:		Baja de rango a:	
Rojo		Azul	
Azul		Amarillo	
Azul negativo		Amarillo negativo	

Tabla 3.171 Ecuaciones cuadráticas de tipo $x^2 + bx = c$.

Paso 7: Interpretamos el resultado de la figura anterior por medio de la tabla de equivalencia y nos queda:

$$(3x - 1)(3x - 1) = 6$$

Que también se puede representar como:

$$(3x - 1)^2 = 6$$

Paso 8: Utilizando la regla para despejar una incógnita, se despeja la variable.

$$\sqrt{(3x - 1)^2} = \pm\sqrt{6}$$

$$(3x - 1) = \pm\sqrt{6}$$

$$2x + 1 - 1 = \pm\sqrt{6} - 1$$

$$2x = \pm\sqrt{6} - 1$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{6} - 1}{2}$$

3.10 Desarrollo de Software

3.10.1 Modelo en Cascada

El desarrollo en cascada (en inglés, waterfall model) es un **procedimiento lineal** que se caracteriza por dividir los procesos de desarrollo en sucesivas fases de proyecto. Al contrario que en los modelos iterativos, cada una de estas fases se ejecuta tan solo una vez. Los resultados de cada una de las fases sirven como hipótesis de partida para la siguiente. El modelo cascada se utiliza, especialmente, en el desarrollo de software.

El desarrollo del modelo se atribuye al teórico de la informática Winston W. Royce. Sin embargo, Royce no es el inventor de este modelo. Muy al contrario, en su ensayo de 1970 titulado *Managing the Development of Large Software Systems*, el teórico presenta una **reflexión crítica acerca de los procedimientos lineales**. A modo de alternativa, Royce presenta un modelo iterativo incremental en el que cada una de las fases se basa en la anterior y verifica los resultados de esta [33-37].

Royce propone un modelo compuesto por siete fases que se ha de ejecutar en diversas vueltas (iteraciones):

1. Requisitos de sistema.
2. Requisitos de software.
3. Análisis.
4. Diseño.
5. Implementación.
6. Prueba.
7. Servicio.

El procedimiento popularmente conocido como modelo cascada, se basa en las fases definidas por Royce, pero solo prevé una iteración.

En el ensayo publicado por Royce, el término no aparece en ningún momento.

En la práctica, se aplican diversas versiones del modelo. Los más habituales son los modelos que dividen los procesos de desarrollo en cinco fases. En ocasiones, las fases 1,

2 y 3 definidas por Royce se integran en una sola fase de proyecto a modo de análisis de los requisitos.

Análisis: planificación, análisis y especificación de los requisitos.

Diseño: diseño y especificación del sistema.

Implementación: programación y pruebas unitarias.

Verificación: integración de sistemas, pruebas de sistema y de integración.

Mantenimiento: entrega, mantenimiento y mejora. [33-37].

La siguiente imagen explica por qué el procedimiento lineal se denomina metodología en cascada (Véase Figura 3.1).

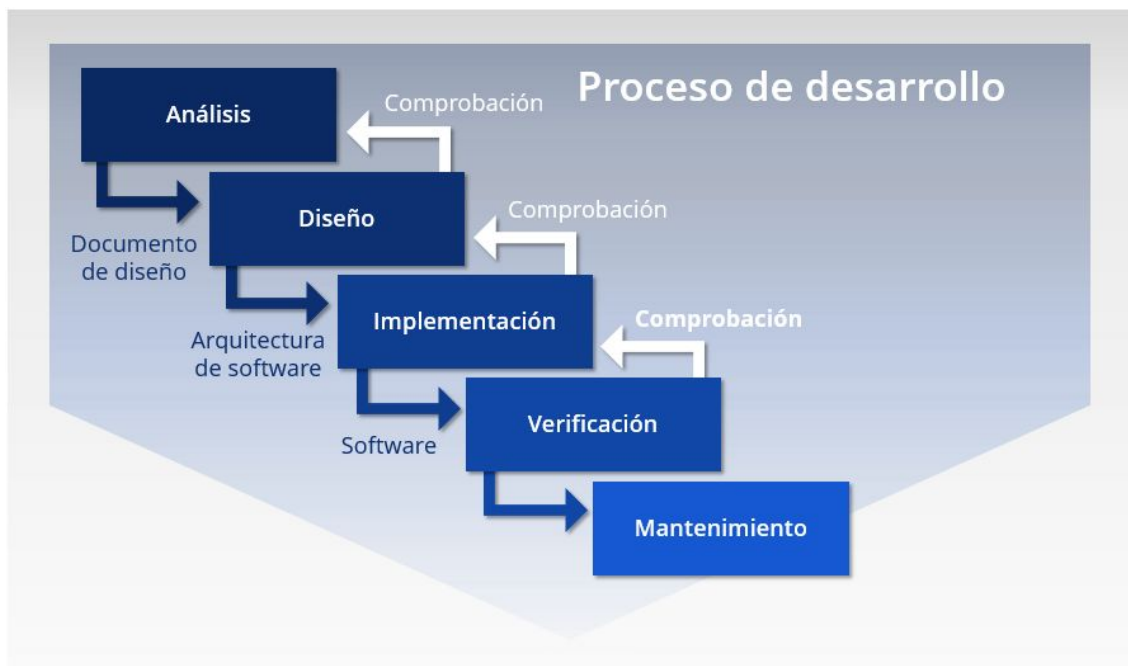


Figura 3.1 Proceso de desarrollo del Modelo en Cascada.

Fuente: <https://www.ionos.mx/digitalguide/paginas-web/desarrollo-web/el-modelo-en-cascada/>

El modelo en cascada de cinco niveles, basado en las propuestas de Winston W. Royce, divide los procesos de desarrollo en las siguientes fases de proyecto: análisis, diseño, implementación, verificación y mantenimiento. El gráfico incluye una de las ampliaciones del modelo planteadas por Royce: la verificación de los resultados de cada una de las fases tomando en consideración las exigencias y especificaciones formuladas en el paso anterior.

En las ampliaciones de la metodología en cascada se añaden funciones iterativas al modelo básico como, por ejemplo, los saltos hacia atrás, que permiten comparar los resultados de cada una de las fases con las hipótesis obtenidas en la fase anterior, de modo que se puedan verificar.

En este modelo, las diferentes fases de un proceso de desarrollo se suceden una detrás de otra como en una cascada. Cada una de las fases concluye con un resultado provisional (hito) como, por ejemplo, un catálogo de requisitos en forma de pliego de condiciones, la especificación de una arquitectura de software o una aplicación a nivel alfa o beta. [33-37].

Análisis.

Todo proyecto de software comienza con una fase de análisis que incluye un estudio de viabilidad y una definición de los requisitos. En el estudio de viabilidad se evalúan los costes, la rentabilidad y la factibilidad del proyecto de software. El estudio de viabilidad da como resultado un pliego de condiciones (una descripción general de los requisitos), un plan y una estimación financiera del proyecto, así como una propuesta para el cliente, si fuera necesario.

A continuación, se realiza una definición detallada de los requisitos, incluyendo un análisis de la situación de salida y un concepto. Mientras que los análisis de salida se encargan de describir la problemática en sí, el concepto ha de definir qué funciones y características debe ofrecer el producto de software para cumplir con las correspondientes exigencias. La definición de los requisitos da como resultado un pliego de condiciones, una descripción detallada de cómo se han de cumplir los requisitos del proyecto, así como un plan para la prueba de aceptación, entre otros.

Por último, la primera fase del modelo cascada incluye un análisis de la definición de los requisitos en el que los problemas complejos se dividen en pequeñas tareas secundarias y se elaboran las correspondientes estrategias de resolución [33-37].

Diseño.

La fase de diseño sirve para formular una solución específica en base a las exigencias, tareas y estrategias definidas en la fase anterior. En esta fase, los desarrolladores de software se encargan de diseñar la arquitectura de software, así como un plan de diseño

detallado del mismo, centrándose en componentes concretos, como interfaces, entornos de trabajo o bibliotecas. La fase de diseño da como resultado un borrador preliminar con el plan de diseño del software, así como planes de prueba para los diferentes componentes [33-37].

Implementación.

La arquitectura de software concebida en la fase de diseño se ejecuta en la fase de implementación, en la que se incluye la programación del software, la búsqueda de errores y las pruebas unitarias. En la fase de implementación, el proyecto de software se traduce al correspondiente lenguaje de programación. Los diversos componentes se desarrollan por separado, se comprueban a través de las pruebas unitarias y se integran poco a poco en el producto final. La fase de implementación da como resultado un producto de software que se comprueba por primera vez como producto final en la siguiente fase (prueba alfa) [33-37].

Prueba.

La fase de prueba incluye la integración del software en el entorno seleccionado. Por norma general, los productos de software se envían en primer lugar a los usuarios finales seleccionados en versión beta (pruebas beta). Las pruebas de aceptación desarrolladas en la fase de análisis permiten determinar si el software cumple con las exigencias definidas con anterioridad. Aquellos productos de software que superan con éxito las pruebas beta están listos para su lanzamiento [33-37].

Servicio.

Una vez que la fase de prueba ha concluido con éxito, se autoriza la aplicación productiva del software. La última fase del modelo en cascada incluye la entrega, el mantenimiento y la mejora del software [33-37].

Pros y contras:

Esta metodología permite estructurar la organización de forma clara en aquellos proyectos de desarrollo en los que las diversas fases de proyecto se diferencian claramente entre sí. Como cada una de las fases concluye con un hito, el proceso de desarrollo es muy fácil de comprender. El punto clave del modelo reside en la documentación de todos

y cada uno de los pasos de proceso. Los conocimientos adquiridos se registran en pliegos de requisitos o borradores preliminares [33-37].

En teoría, el desarrollo en cascada pretende crear los requisitos previos para una ejecución rápida y rentable de los proyectos a través de una cuidada planificación previa. Sin embargo, la utilización del modelo en la práctica es controvertida. Por una parte, en el desarrollo de software las fases de proyecto no suelen estar claramente diferenciadas entre sí. Es precisamente en los proyectos de software más complejos donde los desarrolladores se suelen enfrentar al hecho de que los diversos componentes de una misma aplicación se encuentran en diferentes fases de desarrollo al mismo tiempo. Por otra parte, la secuencia lineal del modelo cascada no suele coincidir con la realidad [33-37].

En sentido estricto, el modelo en cascada no prevé la realización de ajustes a lo largo del proyecto. Sin embargo, un proyecto de software en el que todos los detalles del desarrollo se definieran al comienzo, solo podría concluir con éxito si desde el principio se invirtiera una gran cantidad de tiempo y dinero en análisis y diseño. A todo esto, se añade que los proyectos de software de más envergadura se suelen prolongar durante varios años y, de no adaptarse a los avances más actuales, obtendrían resultados que ya estarían obsoletos en el momento de su aplicación (Véase Tabla 3.172) [33-37].

Ventajas	Inconvenientes
✓ Una estructura sencilla gracias a unas fases de proyecto claramente diferenciadas.	✗ Por norma general, los proyectos más complejos o de varios niveles no permiten su división en fases de proyecto claramente diferenciadas.
✓ Buena documentación del proceso de desarrollo a través de unos hitos bien definidos.	✗ Poco margen para realizar ajustes a lo largo del proyecto debido a un cambio en las exigencias.
✓ Los costes y la carga de trabajo se pueden estimar al comenzar el proyecto.	✗ El usuario final no se integra en el proceso de producción hasta que no termina la programación.
✓ Aquellos proyectos que se estructuran en base al modelo en cascada se pueden representar cronológicamente de forma sencilla.	✗ En ocasiones, los fallos solo se detectan una vez finalizado el proceso de desarrollo.

Tabla 3.172 Pros y contras del Modelo en Cascada.

Fuente: <https://www.ionos.mx/digitalguide/paginas-web/desarrollo-web/el-modelo-en-cascada/>

La metodología en cascada se suele emplear, especialmente, en aquellos proyectos cuyos requisitos y procesos se pueden describir de forma precisa durante la fase de planificación, en los que cabe suponer que las hipótesis no van a sufrir una gran variación durante el transcurso del proyecto. Los procedimientos estrictamente lineales se adaptan, así, especialmente bien a proyectos de software pequeños, sencillos y claramente estructurados. A esta misma conclusión llegó Royce en los años 1970. Por este motivo,

la alternativa al procedimiento lineal que propuso, y que más tarde se conocería como modelo cascada, incluía tres ampliaciones principales [33-37]:

Según Royce, los resultados de cada una de las fases de proyecto se deben comparar y verificar inmediatamente con los documentos elaborados previamente. Es decir, inmediatamente después de desarrollar un módulo, por ejemplo, se debería garantizar que este cumple con las exigencias definidas con anterioridad sin esperar a que concluya el proceso de desarrollo.

Según Royce, el modelo se debería ejecutar en, al menos, dos ocasiones: primero para elaborar un prototipo y, a continuación, para desarrollar el producto de software en sí. [33-37].

La tercera ampliación del modelo en cascada propuesta por Royce en su ensayo es una medida que, a día de hoy, se ha convertido en un procedimiento estándar en el desarrollo de productos: la inclusión del usuario final en el proceso de producción. Royce propone incluir al usuario en tres momentos diferentes del proceso de desarrollo de software: durante la planificación del software en la fase de análisis, entre el diseño del software y su implementación y en la fase de prueba que precede al lanzamiento del software [33-37].

Procedimientos alternativos al modelo en cascada

Debido a la secuencia estrictamente lineal de las fases sucesivas de proyecto, el modelo en cascada se adaptaría, en el mejor de los casos, a proyectos de software de poca envergadura. Por el contrario, los procesos complejos de varios niveles serían difícilmente representables con este modelo. Por este motivo, con el paso del tiempo han ido surgiendo enfoques alternativos.

Mientras que algunos modelos, como el modelo en espiral o el modelo en V, se consideran una evolución del modelo cascada clásico, algunos métodos, como la programación extrema, el desarrollo ágil de software o el desarrollo iterativo, se centran en un enfoque completamente diferente y suelen permitir una adaptación a los cambios más recientes o a las exigencias más actuales [33-37].

Este primer prototipo de la aplicación que se presenta al término de la maestría, aún no es la versión final de la app, siendo esta versión el primer hito del proyecto; es por ello,

que para esta fase de desarrollo, se optó por la metodología de cascada. Para los siguientes hitos y considerando que es un proyecto bastante robusto, en caso de que se quiera dar continuidad, se podría optar por la metodología de espiral, la cual es recomendada para proyectos más grandes, pues permite la construcción de más prototipos en cualquier etapa de evolución del proyecto. Siendo esto último una gran ventaja para tener varios prototipos de Algesquares, cumpliendo poco a poco todos los objetivos planteados inicialmente.

3.10.2 Fase: Análisis.

La tecnología puede ser vista como una herramienta de fácil incorporación al aula, al respecto, Wenger, Mc Dermott y Snyder (2002) argumentan los siguientes puntos:

- Las tecnologías de la información y comunicación (TIC) proporcionan la oportunidad de mostrar los contenidos de una asignatura en distintos formatos.
- El uso de las TIC en al aula motiva e involucra a los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Las TIC proveen a maestros y alumnos la oportunidad de comunicarse entre sí de manera sincrónica y asincrónica, facilitando dicha comunicación, incluso a través de la distancia.

Incluso cuando el uso de dispositivos móviles puede llevarse a cabo en el aula y bajo esquemas de aprendizaje presenciales, al involucrar herramientas tecnológicas al proceso educativo, se hace posible aprovechar la mayoría de las cualidades que permite la formación a distancia, con la ventaja de tener el respaldo y apoyo de una estrategia presencial en el salón de clases [33-37].

Android Studio

Android Studio es el entorno de desarrollo integrado (IDE) oficial para el desarrollo de apps para Android y está basado en IntelliJ IDEA. Además del potente editor de códigos y las herramientas para desarrolladores de IntelliJ, Android Studio ofrece incluso más funciones que aumentan tu productividad cuando desarrollas apps para Android, como las siguientes:

- Un sistema de compilación flexible basado en Gradle.

- Un emulador rápido y cargado de funciones.
- Un entorno unificado donde puedes desarrollar para todos los dispositivos Android.
- Aplicación de cambios para insertar cambios de código y recursos a la app en ejecución sin reiniciarla.
- Integración con GitHub y plantillas de código para ayudarte a compilar funciones de apps comunes y también importar código de muestra.
- Variedad de marcos de trabajo y herramientas de prueba.
- Herramientas de Lint para identificar problemas de rendimiento, usabilidad y compatibilidad de versiones, entre otros
- Compatibilidad con C++ y NDK.
- Compatibilidad integrada con Google Cloud Platform, que facilita la integración con Google Cloud Messaging y App Engine.

Público objetivo y perfiles de usuario.

Este proyecto está enfocado al sector educativo, específicamente a la asignatura de Álgebra Básica para la Educación Media Superior. Sin embargo, siendo Álgebra una herramienta fundamental utilizada frecuentemente en distintas ramas de las Matemáticas, la aplicación se puede utilizar como herramienta de apoyo en cualquiera de estas asignaturas. Puede ser usado por:

- Estudiantes (de 14 a 17 años de edad): como material de apoyo en el aprendizaje de distintos temas y conceptos básicos de álgebra básica.
- Docentes de matemáticas: como herramienta de enseñanza, registro, control y medición del desempeño de los estudiantes.

Considerando que la mayoría del público a quien va dirigido, a la zona en la que se encuentra ubicada la escuela, el nivel socio-económico de los estudiantes, al tipo de smartphone que manejan y el sistema operativo que predomina, se decidió desarrollar una aplicación en Android Studio para dispositivos que trabajen con versiones de Android 4.2 o superiores.

Análisis de requerimientos.

En esta parte, se establecen con detalle las funciones, servicios y restricciones operativas del sistema.

Requerimientos Funcionales:

- Guiar al usuario a resolver ejercicios algebraicos por medio de Algesquares. La aplicación debe funcionar como guía de aprendizaje para el estudiante, para que se familiarice con el nuevo procedimiento y por medio de Algesquares, resuelva todo tipo de operaciones algebraicas, incrementando su nivel de dificultad gradualmente hasta dominar el método.
- El tipo de ejercicios que se pueden resolver por medio de Algesquares son: suma y resta de términos semejantes, multiplicación de binomios, división de binomios, productos notables (binomio al cuadrado y binomios conjugados), factorización (trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados), ecuaciones cuadráticas de tipo: $ax^2 + bx = c$.
- Otorgar automáticamente puntos al usuario por cada ejercicio realizado, dependiendo del nivel de dificultad y el tipo de ejercicio resuelto. El usuario podrá visualizar en la app su avance personal.
- Contar con un apartado para el docente que lleve el registro del avance individual y grupal de sus estudiantes, niveles cursados y puntos obtenidos.
- En el nivel básico y nivel intermedio, la app mostrará avisos en forma de guía para el usuario, de manera que pueda resolver de una forma sencilla los ejercicios. Para el nivel avanzado, estos avisos serán escasos y la libertad del usuario al elegir las fichas o a realizar ciertos procesos, será mayor.
- Por el tipo de matrices bidimensionales que maneja la app, no es posible realizar operaciones como binomios al cubo pues se requieren figuras tridimensionales para poder realizar la operación.
- Para comodidad del usuario en la manipulación de los elementos en pantalla, se realizó una encuesta del número de fichas máximo para trabajar con Algesquares y la mayoría optó por una matriz de 6x6. Debido a lo anterior, la aplicación tendrá reactivos diseñados para trabajar con un máximo de 36 fichas.

Requerimientos no Funcionales:

Los requisitos que no especifican el comportamiento del sistema son:

- Rendimiento: La aplicación debe desempeñar su función de una manera fluida. La experiencia del usuario debe ser agradable para atraer la atención de los estudiantes.

- Disponibilidad: La aplicación debe estar disponible en la tienda Play Store. Debido a que en la comunidad donde está situado el bachillerato hay varios problemas de conexión, la aplicación debe funcionar sin conexión a Internet.
- Usabilidad: Cualquier alumno con conocimientos básicos de aritmética, debe ser capaz de utilizar Algesquares, sin ningún tipo de restricción.
- Estabilidad: Si un error llega a aparecer durante la ejecución de la aplicación, ésta deberá ser capaz de manejarlo, registrar y notificar el error a sus desarrolladores.
- Mantenimiento: Se deberá dar mantenimiento y brindar nuevas actualizaciones con el objetivo de mejorar el rendimiento y la usabilidad de la app.
- Interfaz: Debe ser clara, intuitiva y llamativa para el usuario. No hay que olvidar que el público objetivo principal son jóvenes de 14-17 años que cursan el nivel medio superior.
- Integración. La aplicación debe de integrarse con todo el sistema operativo de Android.
- Optimización. Cuidar los procesos sueltos que consuman la batería, pues éste debe ser adecuado. Asegurarse que el tiempo de ejecución sea mínimo reduciendo a su vez, los tiempos de respuesta.

Requerimientos para el desarrollo:

Se articula el uso de diferentes programas y herramientas con las que se desarrolló la aplicación:

- Android Studio 4.2.1
- Adobe Illustrator 2015.
- PowerPoint.

3.10.3 Fase: Diseño.

Hay varios métodos que se basan en las fichas de Caleb Gattegno que se pueden adaptar a una aplicación para celular. Sin embargo, Algesquares fue elegida como base para la aplicación debido a que siendo una app para smartphone, se necesita aprovechar el espacio reducido en pantalla, siendo Algesquares la mejor opción debido a que cuenta con fichas pequeñas y cuadradas de un solo tamaño; métodos como las baldosas algebraicas, Algeblocks o la caja de polinomios utilizan un tamaño de ficha por cada tipo de dato, lo que resultaría en un mayor espacio en pantalla.

Otro motivo por el que se eligió Algesquares para el desarrollo de la app, es que es un método único para la resolución de ejercicios de álgebra básica, pensado y creado por mi para la primera Feria de Proyectos 2016, de Bachilleratos Generales de la Zona 001, en Puebla. Este proyecto fue retomado durante la Maestría en Tecnologías de la Información en el Instituto Tecnológico Superior de Huauchinango, haciéndolo un proyecto más robusto y complejo, gracias a la ayuda y asesoría del Doctor Gregorio Castillo Quiroz.

Logotipo.

El logotipo de la aplicación fue realizado en Illustrator 2015 y se tomaron en cuenta varios elementos para su diseño (Véase Figura 3.2).

- Fichas de colores. Algesquares no realiza ningún procedimiento algebraico con el método escolar tradicional. En vez de ello, utiliza fichas de colores por lo que son significativas en el proceso de aprendizaje del estudiante.
- Colores básicos. Hay tres colores distintivos para las fichas: rojo, azul y amarillo; estos se relacionan con distintos términos matemáticos. Se consideraron estos colores como referencia a los colores primarios.
- Simbología utilizada. Dentro de las fichas del logotipo se pueden visualizar símbolos y letras relacionadas con términos matemáticos.
- Color neutro. El color gris utilizado en las letras de Algesquares fue por dos motivos: uno de ellos, para no saturar de color el logotipo y dos, para dar mayor atractivo visual a las fichas de colores.
- Opinión profesional. Se tomó en consideración la opinión y guía de un diseñador gráfico para la realización del logotipo.



Figura 3.2 Logotipo de Algesquares.

Interfaz de la aplicación.

Se elaboró una encuesta para determinar algunas cuestiones de diseño de la aplicación y se eligió a tres tipos distintos de usuarios:

1. Expertos en Tecnologías de la Información.
2. Docentes en Educación Media Superior.
3. Estudiantes de Media Superior.

A continuación, las preguntas de la encuesta realizada con la gráfica correspondiente que contiene las respuestas concentradas de los tres tipos de usuarios:

1. Selecciona una o más opciones que te gusten del logotipo de la aplicación de Algesquares (Véase Gráfico 3.1).

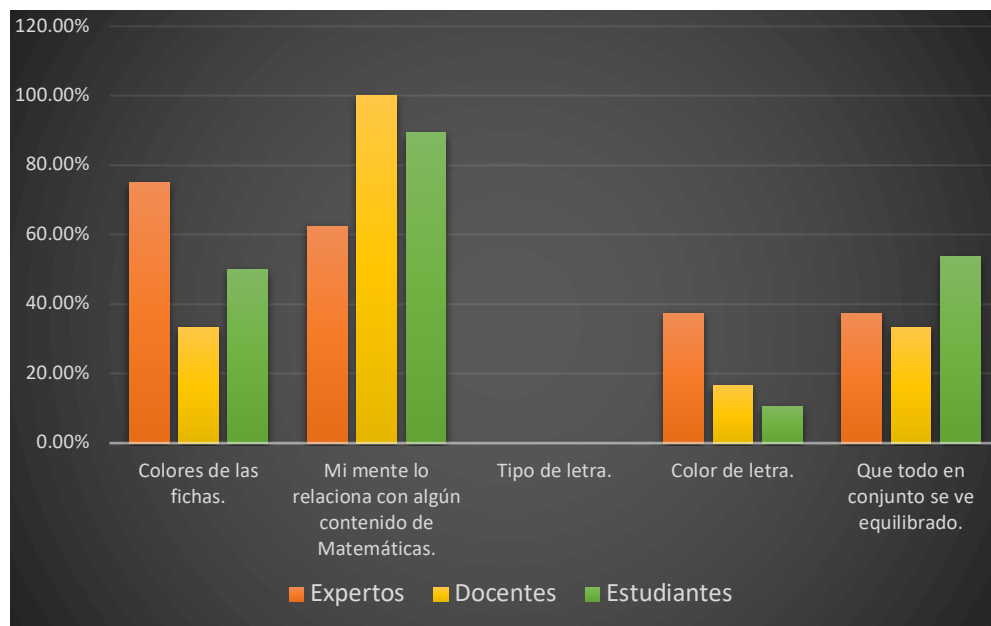


Gráfico 3.1 Pregunta 1 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.

2. Selecciona alguna opción que cambiarías del logotipo (Véase Gráfico 3.2).

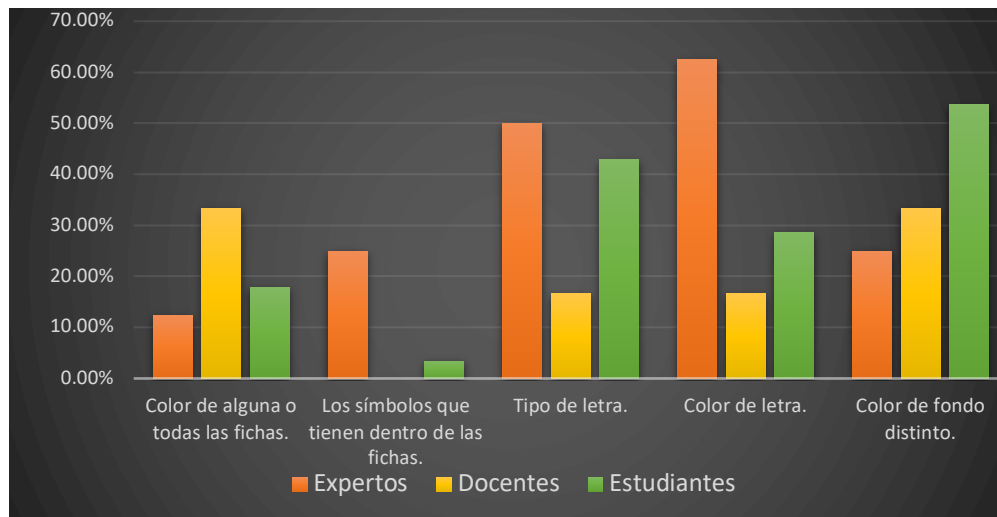


Gráfico 3.2 Pregunta 2 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.

3. Los colores de Algesquares son una variación de los colores primarios (rojo, azul y amarillo). La Opción 1 tiene los colores que actualmente utiliza la aplicación, ¿Te gustan esos colores o prefieres alguna otra opción? Toma en cuenta que si se realiza alguna modificación, también los colores del logotipo tendrían que ser modificados (Véase Gráfico 3.3).

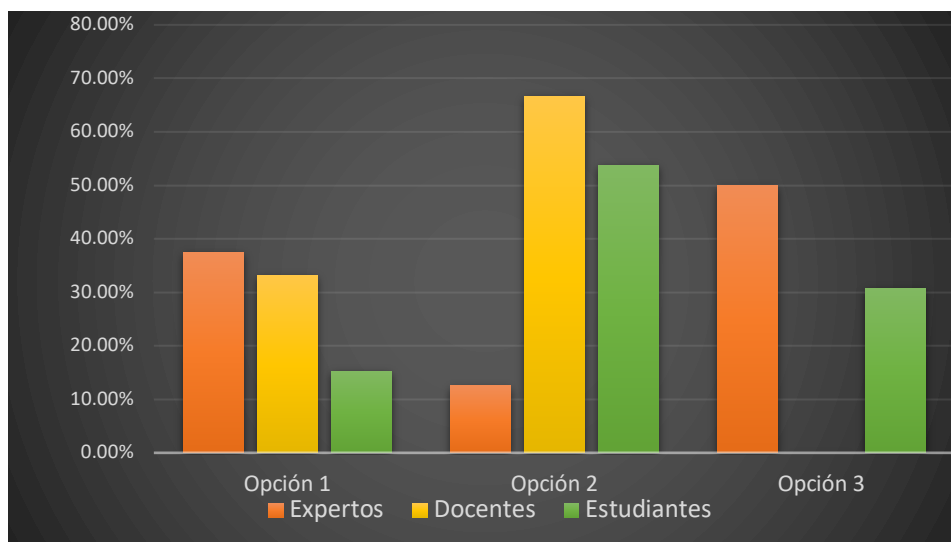


Gráfico 3.3 Pregunta 3 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.

4. Los temas que abarca Algesquares son 8 en total, los cuales aparecen para elegir en tu pantalla del celular. ¿Te parece correcta la forma en la que se presentan los temas o prefieres que se muestren solo algunos y que deslices tu dedo para que se muestre el resto (con el fin de que no se sature la pantalla)? (Véase Gráfico 3.4).

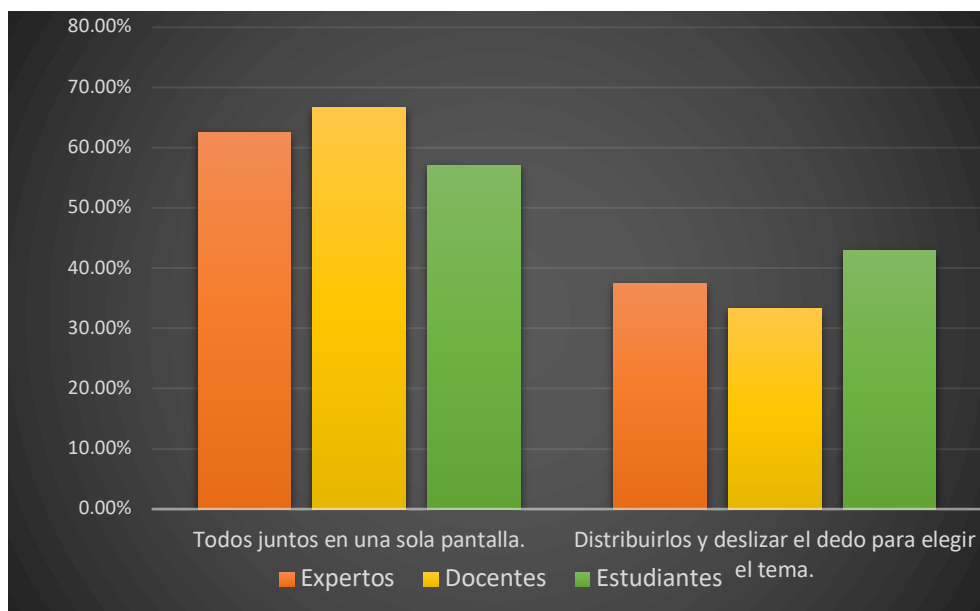


Gráfico 3.4 Pregunta 4 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.

5. En todo momento la aplicación se encontrará jugando con los colores característicos de Algesquares (rojo, azul y amarillo) cómo, por ejemplo, en los menús, en los textos

de apoyo, etc., con la finalidad de que el usuario se adapte fácilmente a estos colores. ¿Te parece bien esta idea? (Véase Gráfico 3.5).

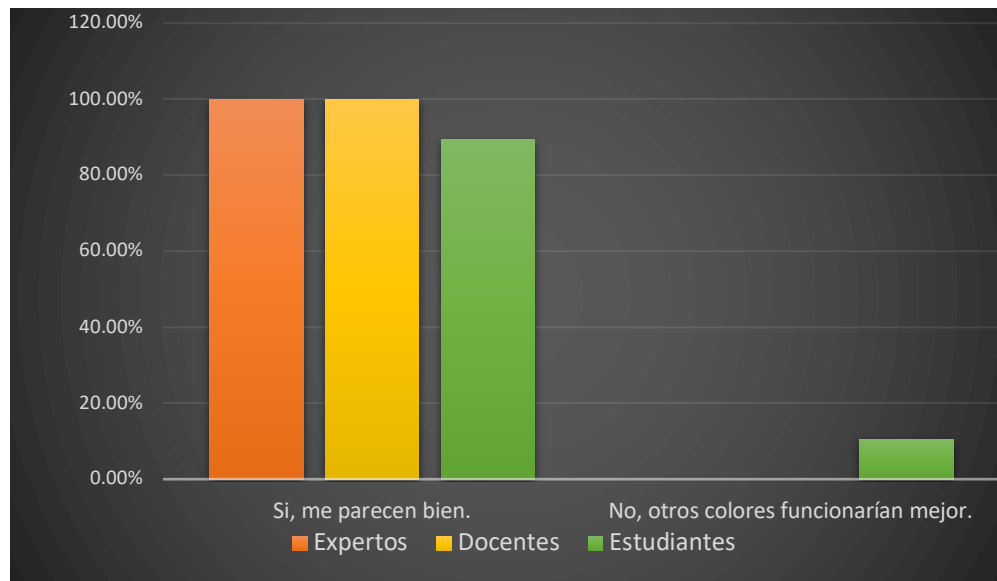
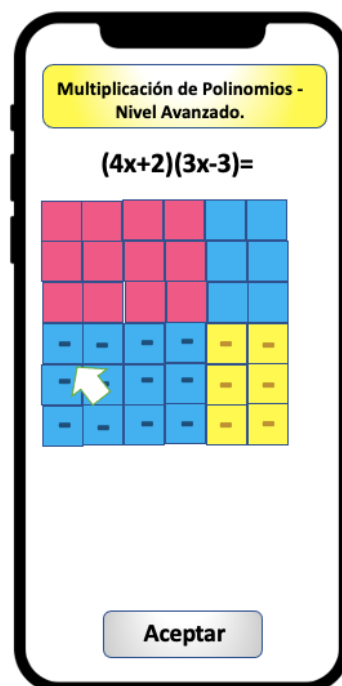


Gráfico 3.5 Pregunta 5 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.

- La aplicación aún está en desarrollo, por lo que no se puede mostrar un avance, pero considerando la saturación de elementos en pantalla y la comodidad del usuario al trabajar con dichos elementos, se tiene pensado trabajar máximo con 36 fichas en pantalla. Este es un ejemplo de un ejercicio que utiliza el máximo de fichas, ¿qué opinas al respecto? (Véase Gráfico 3.6).



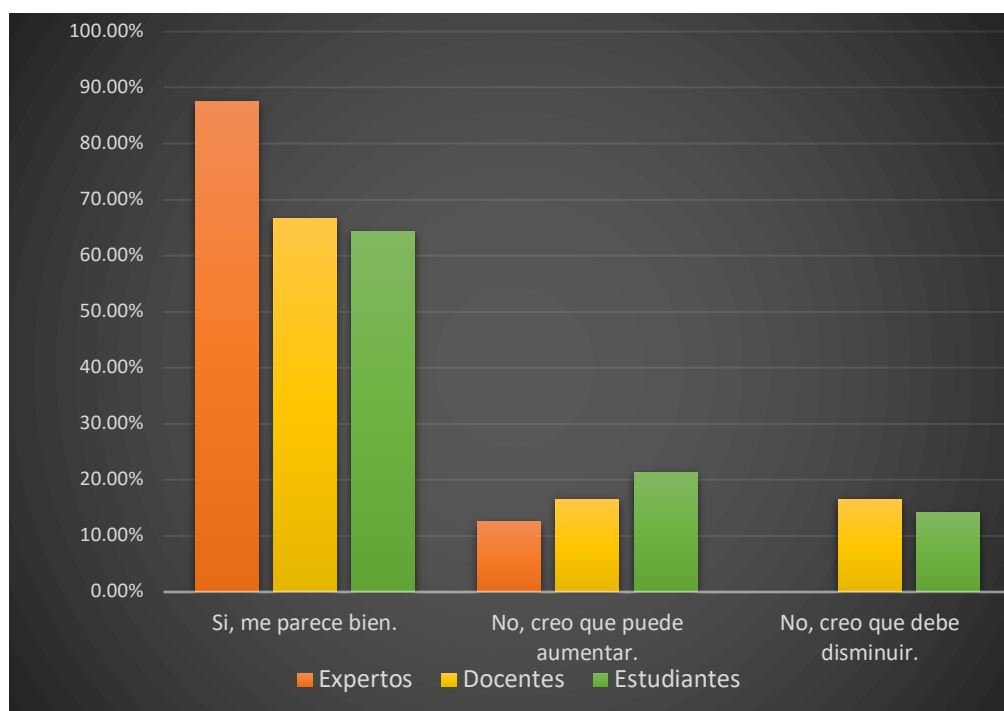


Gráfico 3.6 Pregunta 6 de la encuesta acerca del diseño de la interfaz.

A pesar que hubo cierta discrepancia en las respuestas de la encuesta, no hubo cambios importantes que realizar en el diseño, pues desde un principio se buscó la opción de trabajar el logotipo con un experto en diseño gráfico, quien valoró todos los elementos importantes que debería llevar el logo, el color de cada ficha, el tipo de letra y los elementos utilizados en él. Finalmente, los tres tipos de usuarios a quienes se realizó la encuesta, en general estuvieron satisfechos con el resultado.

Pantallas de resolución de ejercicios

Para el diseño de la interfaz, por cuestiones de tiempo y recursos, se consideraron dos de los temas que abarca Algesquares: la Multiplicación de Polinomios y la Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto. Se eligieron estos temas debido a que ambos son muy completos y pueden servir como referencia para el desarrollo de otros temas como, por ejemplo: el Binomio al Cuadrado y Binomios conjugados.

Cada tema está compuesto por cuatro niveles: Básico, Intermedio, Avanzado y Ejercicios de Refuerzo. La diferencia entre cada nivel es la dificultad del mismo, así como los tips

o sugerencias que pueden aparecer en pantalla mientras el usuario resuelve el ejercicio. El nivel de “Ejercicios de refuerzo” es donde el usuario podrá ingresar sus propios ejercicios para resolverlos por medio de Algesquares.

A continuación, se muestra paso a paso, como trabaja la aplicación desde que el usuario la ejecuta en su smartphone y avanza a través de los cuatro niveles de dificultad con los que cuenta el tema de “Multiplicación de Binomios”:

Al inicio de la aplicación aparecerá el logo de Algesquares que tarda un tiempo aproximado de 4 segundos y después cambia a la pantalla de inicio con una breve explicación de lo que hace la App. Dentro de esta pantalla, hay un botón “Saltar” para que el usuario pueda ingresar al menú principal (Véase Figura 3.3).



Figura 3.3 Pantallas del diseño de la interfaz.

En el Menú Principal, el usuario podrá elegir cualquiera de los 8 temas del contenido de Algesquares. Dentro de cada tema, hay un submenú con un nivel básico, intermedio y avanzado (Véase Figura 3.4).



Figura 3.4 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación.

Multiplicación - Nivel Básico.

El nivel Básico de Multiplicación es el más sencillo y mediante éste, el usuario empezará a familiarizarse con el nuevo método. Todos los ejercicios que se encuentran en este nivel, tienen un nivel de dificultad mínimo, además de que la aplicación guía al usuario paso a paso durante toda la resolución del ejercicio, mostrando tips en pantalla y sugerencias, para una mejor comprensión del método.

A continuación, la aplicación muestra una pantalla solicitando al usuario que ingrese el número correcto de fichas y el signo de cada término de los binomios (Véase Figura 3.5).

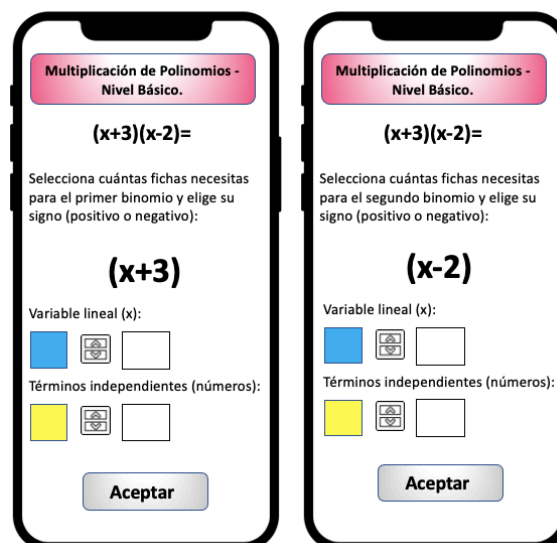


Figura 3.5 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Básico.

En caso de existir algún error al momento de que el usuario elija el número de fichas, aparecerá un mensaje de error, indicando que se debe introducir el número correcto para poder avanzar (Véase Figura 3.6).



Figura 3.6 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Básico.

Una vez que el usuario ingrese el número correcto de fichas, la aplicación en automático creará en pantalla una matriz con el número de fichas solicitado, donde se tendrán que seguir las instrucciones en pantalla, para llegar a la solución correcta (Véase Figura 3.7).

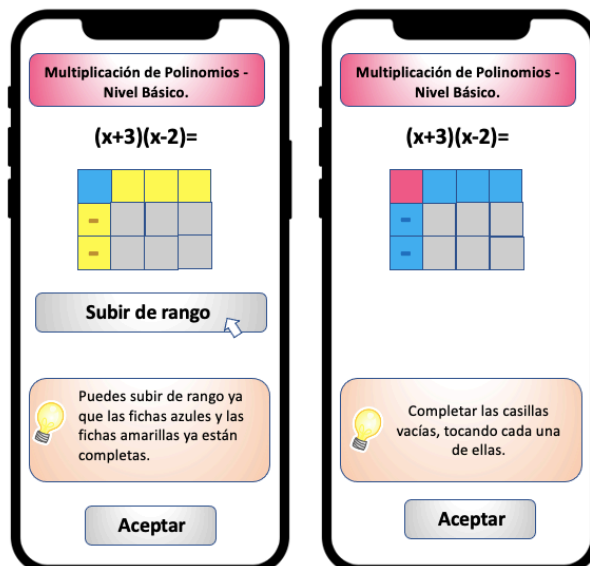


Figura 3.7 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Básico.

Una vez que el usuario haya seguido los pasos correctamente, deberá contar el número de fichas restantes para que la aplicación le muestre el resultado final (Véase Figura 3.8).

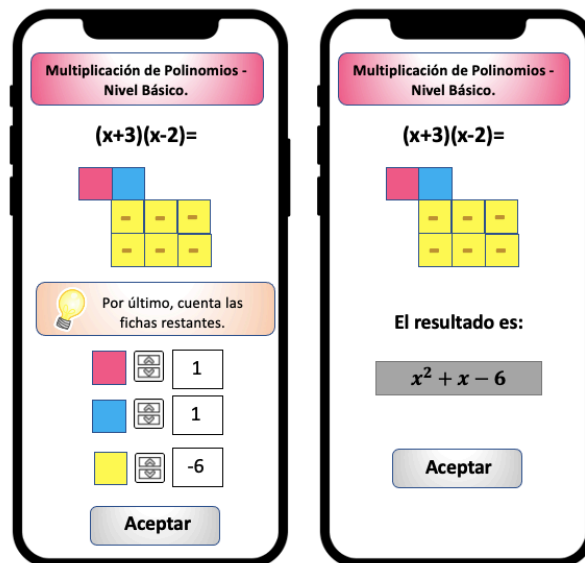


Figura 3.8 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Básico.

Multiplicación - Nivel Intermedio.

El nivel intermedio cuenta con ejercicios de dificultad media. La aplicación continúa guiando al usuario mediante tips y sugerencias en pantalla; sin embargo, debido a que los coeficientes de cada término de los binomios incrementan, también aumenta el número de fichas que manipula el usuario en pantalla, elevando así la dificultad (Véase Figura 3.9)

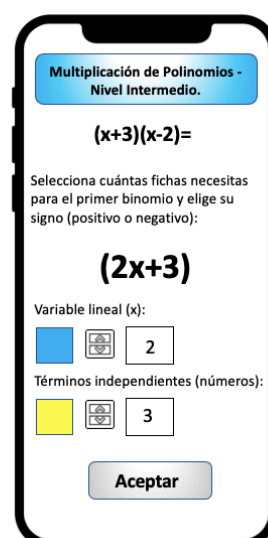
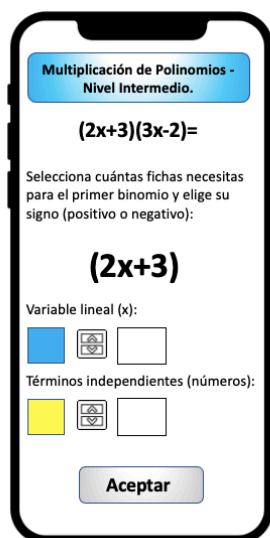
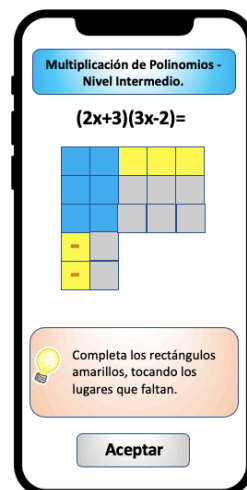
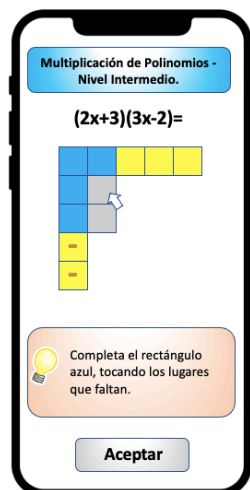


Figura 3.9 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Intermedio.

Siguiendo el método de multiplicación que se explica anteriormente en este documento (pág. 36), dependiendo de la dificultad del ejercicio, hay pasos que pueden omitirse en el nivel básico pero que deben completarse en el nivel intermedio. Por ejemplo, el llenar el área de fichas azules y/o amarillas, antes de subir de rango (Véase Figura 3.10).



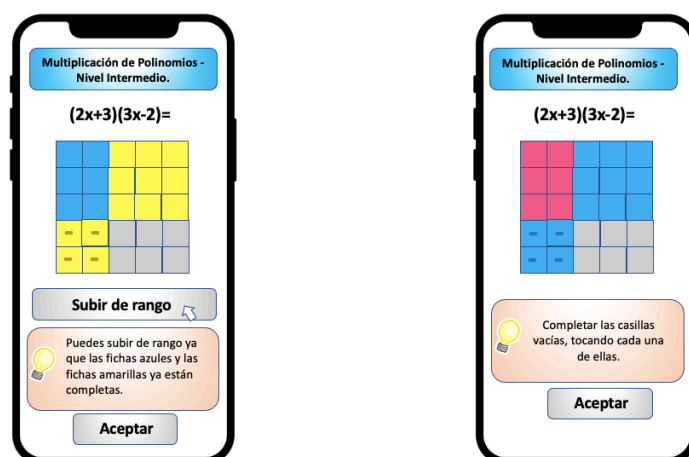


Figura 3.10 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Intermedio.

Como se muestra en pantalla, las fichas manipuladas en el nivel intermedio incrementan, teniendo un máximo recomendado de 36 (6x6), tomando en cuenta las opiniones registradas en la encuesta de diseño de la aplicación (Véase Figura 3.11).

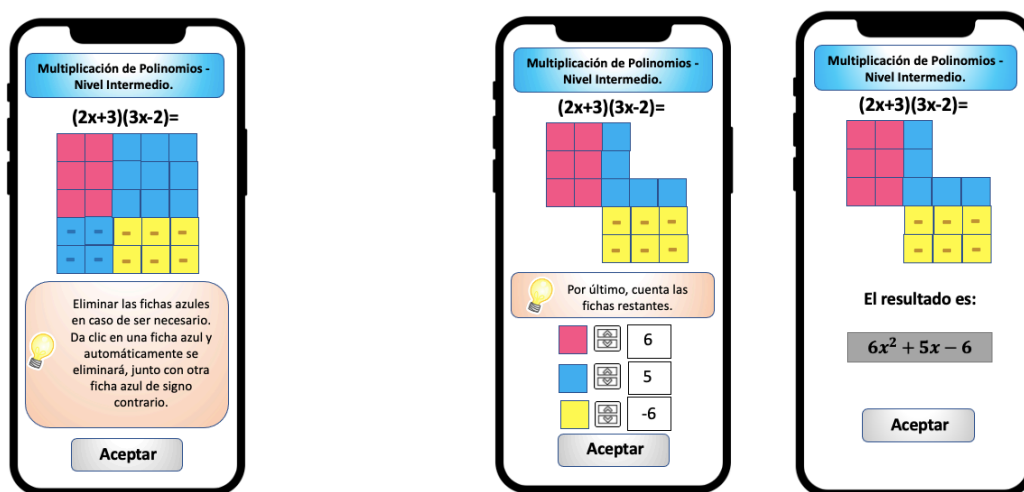


Figura 3.11 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Intermedio.

Multiplicación - Nivel Avanzado.

En este nivel, el usuario tendrá una mayor libertad para resolver el ejercicio, los tips y sugerencias en pantalla disminuirán considerablemente explicando únicamente lo necesario. El usuario será libre de elegir el color y signo de ficha, mientras que Algesquares mostrará avisos en caso de que exista algún error en el llenado de la multiplicación (Véase Figura 3.12).



Figura 3.12 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Nivel Avanzado.

Multiplicación - Ejercicios de refuerzo.

Este nivel es para que el usuario sea libre de introducir sus propios ejercicios para resolverlos con el método de Algesquares (Véase Figura 3.13).

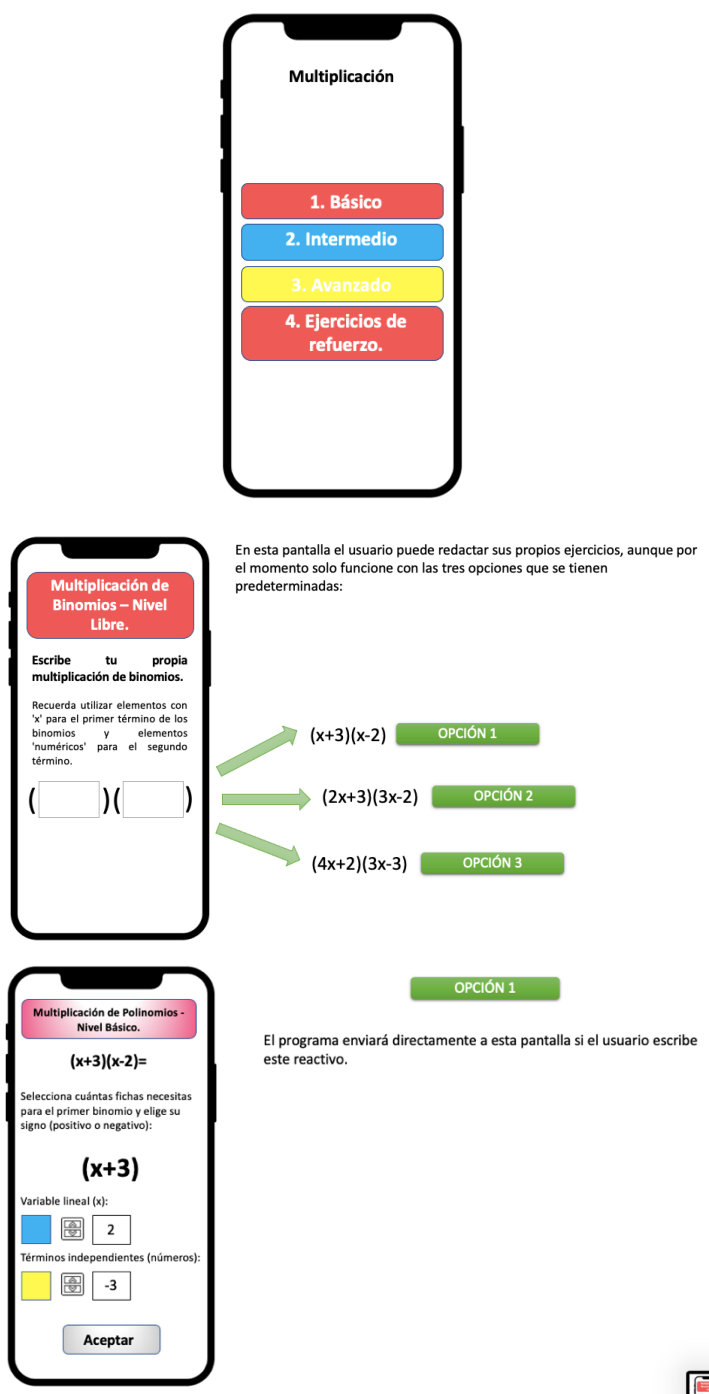


Figura 3.13 Pantallas del diseño de la interfaz – Multiplicación – Ejercicios de refuerzo.

Factorización T.C.P. - Nivel Básico.

Al igual que la multiplicación, este nivel es el más fácil de los tres y la aplicación constantemente mandará mensajes para guiar al usuario. Al inicio aparece el trinomio

cuadrado perfecto que se debe factorizar y solicita al usuario el número de fichas (Véase Figura 3.14).

Factorización: TCP Nivel Básico.

Factorizar el siguiente Trinomio Cuadrado Perfecto:

$$x^2 + 2x + 1 =$$

Selecciona cuántas fichas necesitas para construir el trinomio y elige su signo (positivo o negativo):

Variable cuadrática (x^2):

Variable lineal (x):

Términos independientes (números):

Aceptar

Figura 3.14 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Básico.

Una vez ingresado el número de fichas, se creará automáticamente una matriz con el total de fichas (en color gris) y el usuario tendrá que acomodarlas en el sitio correcto. Primero empezará con las de color rojo, luego las de color azul y finalmente las amarillas (Véase Figura 3.15).

Factorización: TCP Nivel Básico.

$$x^2 + 2x + 1 =$$

Variable cuadrática (x^2):

Variable lineal (x):

Términos independientes (números):

Aceptar

Todas las fichas rojas (x^2) debes acomodarlas en la parte superior izquierda del recuadro gris, formando un cuadrado rojo.

La mitad de las fichas azules (x) debes acomodarlas debajo de las fichas rojas, la otra mitad van acomodadas del lado derecho de las mismas fichas rojas. Si lo hiciste correctamente tendrás dos nuevas áreas iguales azules.

La mitad de las fichas azules (x) debes acomodarlas debajo de las fichas rojas, la otra mitad van acomodadas del lado derecho de las mismas fichas rojas. Si lo hiciste correctamente tendrás dos nuevas áreas iguales azules.

Por último acomoda las fichas amarillas (números) en los lugares grises que quedaron vacíos en la parte inferior derecha. Si lo hiciste correctamente tendrás una nueva área cuadrada de color amarillo.

Figura 3.15 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Básico.

En caso de que el alumno toque una ficha gris que no corresponda a la que debe acomodar, la ficha no cambiará de color ni el contador tampoco disminuirá. Además, aparecerá un

mensaje de error que diga: “Lee nuevamente la instrucción para acomodar las fichas en el lugar correcto.” (Véase Figura 3.16).



Figura 3.16 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Básico.

Una vez acomodadas todas las fichas, aparecerá el botón bajar de rango, el cuál cambia de color en automático todas las fichas de la matriz, de acuerdo a la tabla (Véase Figura 3.17).

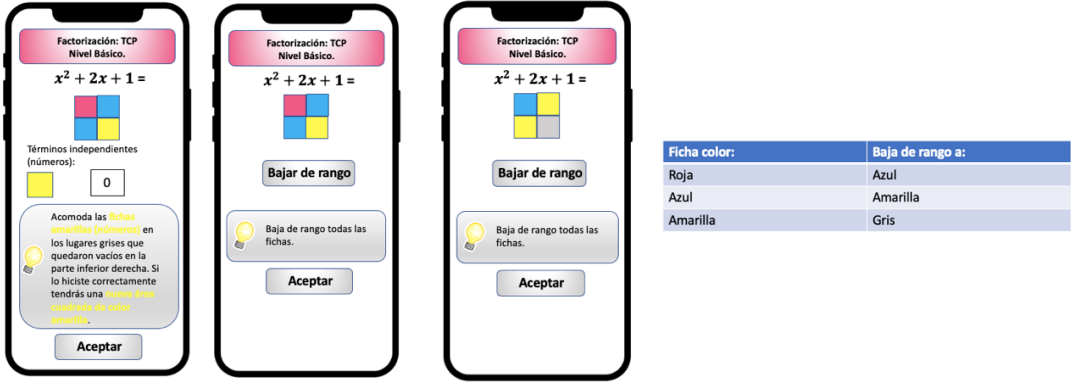


Figura 3.17 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Básico.

Finalmente, el usuario cuenta el número de fichas restantes en la primera fila o primera columna y los ingresa en la app para que le entregue el resultado (Véase Figura 3.18).

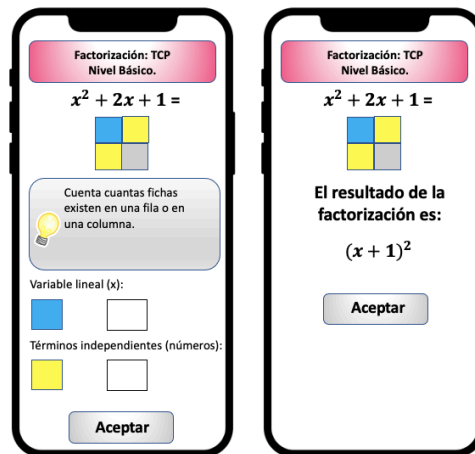


Figura 3.18 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Básico.

Factorización T.C.P. - Nivel Intermedio.

El nivel intermedio es parecido al nivel básico, la diferencia es que la dificultad de los ejercicios aumenta. Sin embargo, el método es el mismo y los tips que manda la aplicación siguen apareciendo (Véase Figura 3.19).

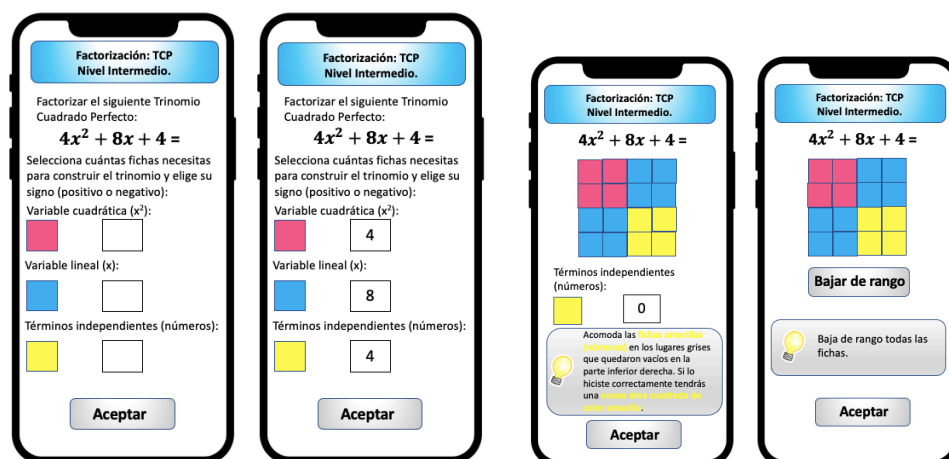


Figura 3.19 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Intermedio.

Otra diferencia es que después de bajar de rango, el usuario tendrá que seguir eliminando fichas hasta dejar la primera columna y la primera fila libre. En caso de tratar de eliminar una ficha incorrecta, la aplicación mandará un mensaje al usuario para que realice la corrección correspondiente (Véase Figura 3.20).

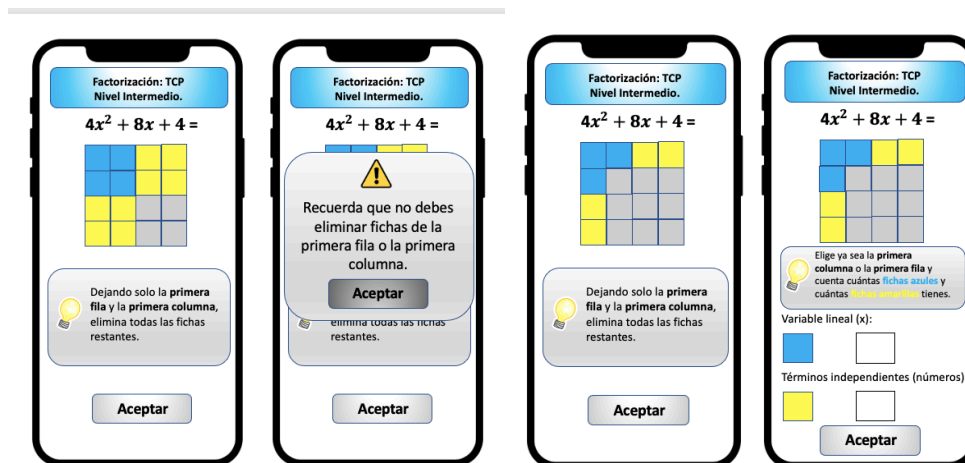


Figura 3.20 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Intermedio.

Finalmente, se cuentan las fichas de la primera fila o columna restantes (Véase Figura 3.21).

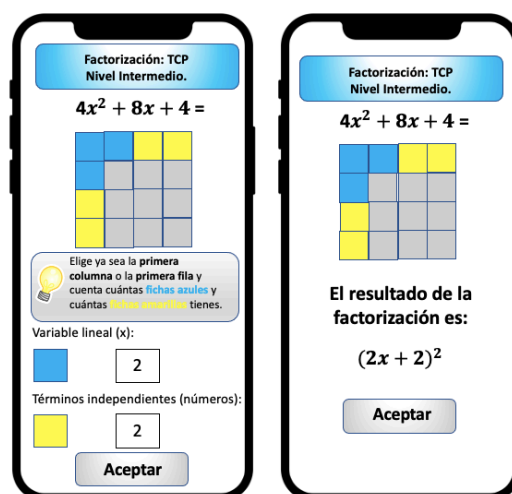


Figura 3.21 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Intermedio.

Factorización T.C.P. - Nivel Avanzado.

Este nivel le permite mayor libertad al usuario, por lo que la app no lo guiará esta vez. El usuario después de determinar el número de fichas y crear la matriz, puede acomodarlas con completa libertad, incluso puede escoger el color de fichas a utilizar. Además, existirá un contador para cada color, que irá decrementando conforme el usuario vaya acomodando las fichas. En caso de que el contador llegue a cero y se quiera seguir utilizando el mismo color, la aplicación mostrará un mensaje indicando que se debe cambiar de color, pues las fichas se han agotado.

En la misma pantalla, se encuentra un botón de “Borrar”, que le permite al usuario borrar todas las fichas acomodadas y regresar el contador con los valores iniciales. Este botón es de utilidad, en caso de que el usuario se equivoque al momento de acomodar las fichas, pues le permite volver a empezar, sin necesidad de regresar al menú principal.

En caso de terminar con todas las fichas y que hayan sido mal acomodadas, la app mostrará un mensaje sugiriendo regresar a los niveles anteriores para aprender bien el método y regresar al Avanzado. De igual forma, el usuario cuenta con el botón de “Borrar” para comenzar de nuevo (Véase Figura 3.22).



Figura 3.22 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Avanzado.

Una vez que las fichas fueron acomodadas correctamente, los pasos siguientes son similares a los niveles anteriores, habrá que bajar de rango las fichas, eliminar las sobrantes y contar cuantas quedaron al final (Véase Figura 3.23).

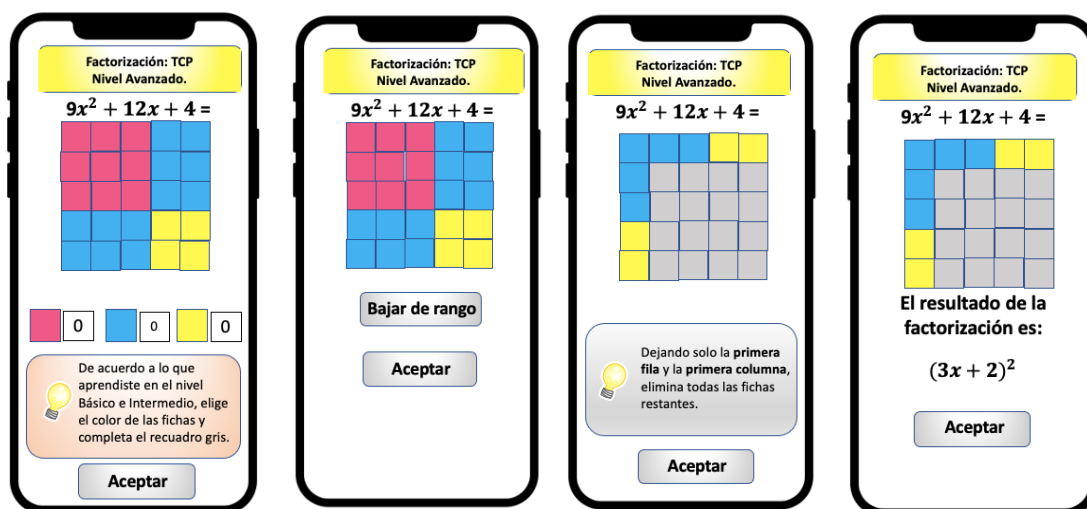


Figura 3.23 Pantallas del diseño de la interfaz – Factorización – Nivel Avanzado.

Con este último nivel, queda terminado el diseño de la Interfaz de dos de los temas de Algesquares. Más adelante, se tiene la opción de incluir los temas faltantes, además de un conjunto de ejercicios para resolver, por cada nivel de dificultad.

Capítulo IV. Análisis de resultados y discusión

4.1 Trabajando con Algesquares.

En el año 2015, se creó la primera versión de Algesquares en el Bachillerato “Ignacio Manuel Altamirano” C.C.T. 21EBH0556W, donde actualmente laboro y se presentó en la Feria de Proyectos de Bachilleratos Generales 2015 de la Zona 01 (Véase Figura 4.1). En ese momento las fichas únicamente eran tres: roja, azul y amarilla (todas positivas), tenían forma cúbica, incluían 5 de los 8 temas que ahora tiene y debido a que las fichas eran solo positivas, la cantidad de ejercicios que podían resolverse se reducían considerablemente.

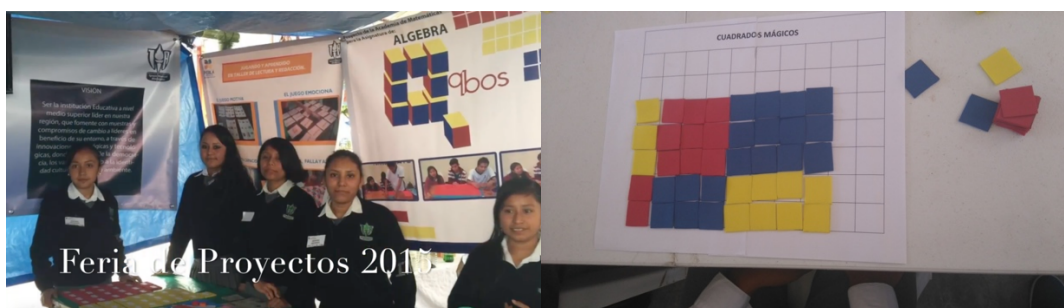


Figura 4.1 Feria de Proyectos de Bachilleratos Generales Zona 001 - 2015.

Antes del desarrollo de la aplicación, los estudiantes del Bachillerato “Ignacio Manuel Altamirano” C.C.T. 21EBH0556W, habían trabajado con el mismo método, pero con material físico (Véase Figura 4.2); ya sea elaborando el material por su cuenta o con fichas hechas de madera de 1.5cm x 1.5cm de largo. Tanto la aplicación como el material físico tienen sus ventajas y desventajas, por ejemplo, la aplicación sería un problema para aquellos estudiantes que no cuentan con un dispositivo inteligente para trabajar; mientras que, el material físico no muestra los tips y sugerencias que muestra la aplicación, por lo tanto, el estudiante tendría que conocer el método o bien, apoyarse del docente para trabajar.

La ventaja que tienen ambos es que, uno es complemento del otro y viceversa. Es decir, para cualquier persona que quiera trabajar con Algesquares, sería ideal tener ambas versiones. Por lo tanto, ambos productos podrían comercializarse en un futuro.

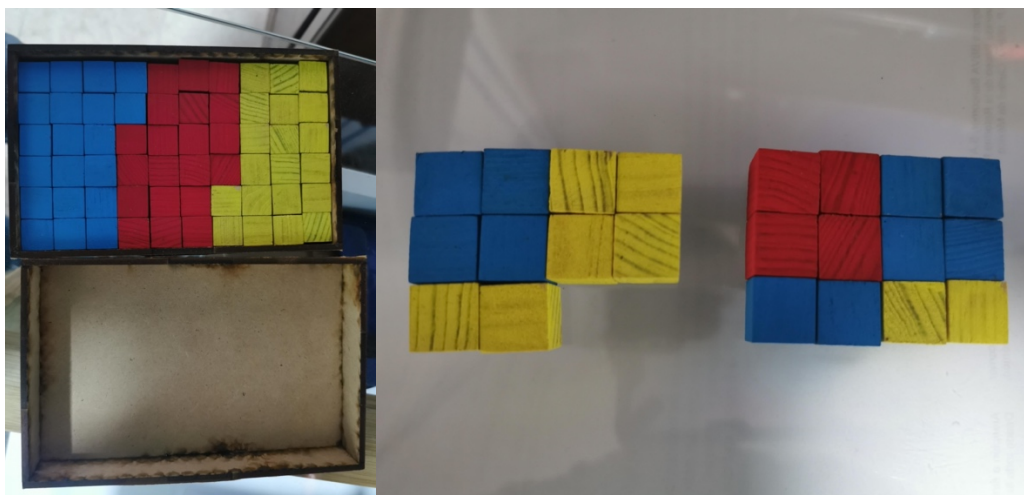


Figura 4.2 Material didáctico de madera de Algesquares.

Durante el desarrollo de la tesis, el proyecto fue creciendo, haciendo algunas modificaciones al método inicial e incluyendo varios temas de álgebra básica que no se tenían en un principio. Debido a que se realizaron cambios importantes en Algesquares, se decidió probar el nuevo método con los estudiantes. A causa de la pandemia, no ha habido clases presenciales desde marzo del año pasado, por lo que se les pidió a los estudiantes que construyeran su propio material para trabajar. Mediante asesorías a distancia, los alumnos estuvieron resolviendo ejercicios con el nuevo método. Finalmente, se realizó una encuesta para conocer su opinión, al trabajar con Algesquares.

A continuación, se muestran imágenes de algunos ejercicios que resolvieron con el material físico que construyeron los estudiantes (Véase Figura 4.3):

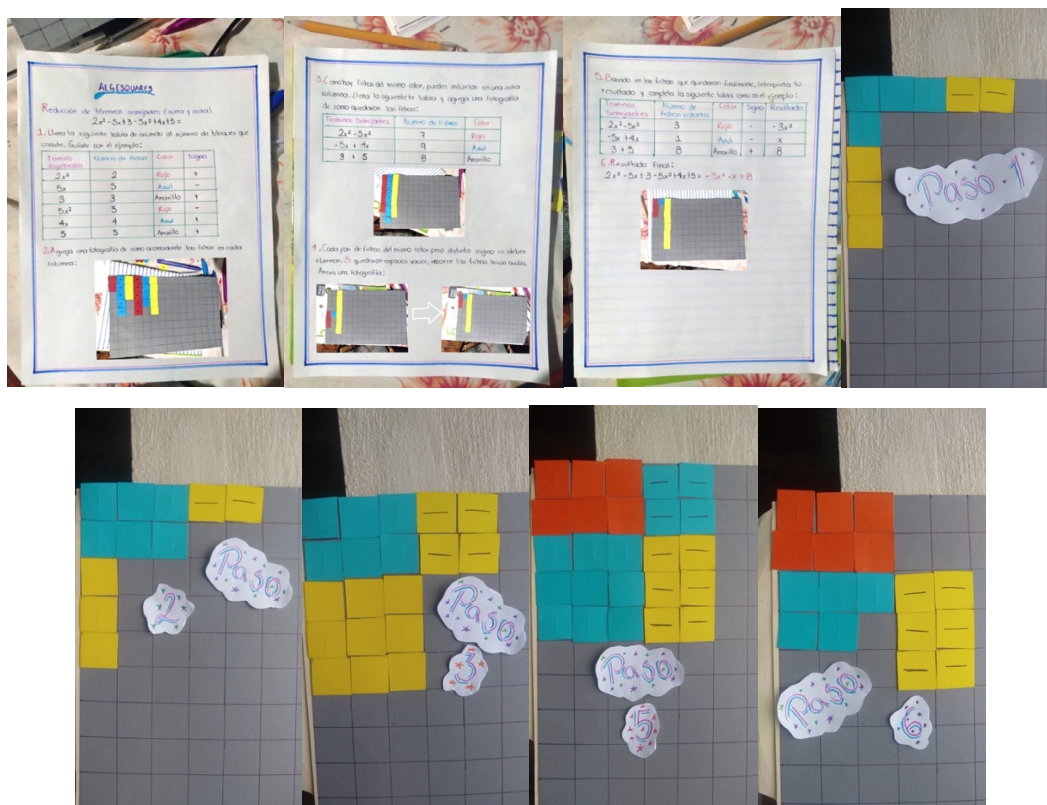


Figura 4.3 Ejercicios resueltos con material didáctico de Algesquares.

4.2 Estudio de usabilidad.

El grupo de 1er año del semestre A Ago-Dic 2021 del Bachillerato General “Ignacio Manuel Altamirano”, fue dividido en dos partes. La primera mitad trabajó temas de álgebra con el método tradicional y la otra mitad trabajó los mismos temas con el material físico y con la aplicación de Algesquares.

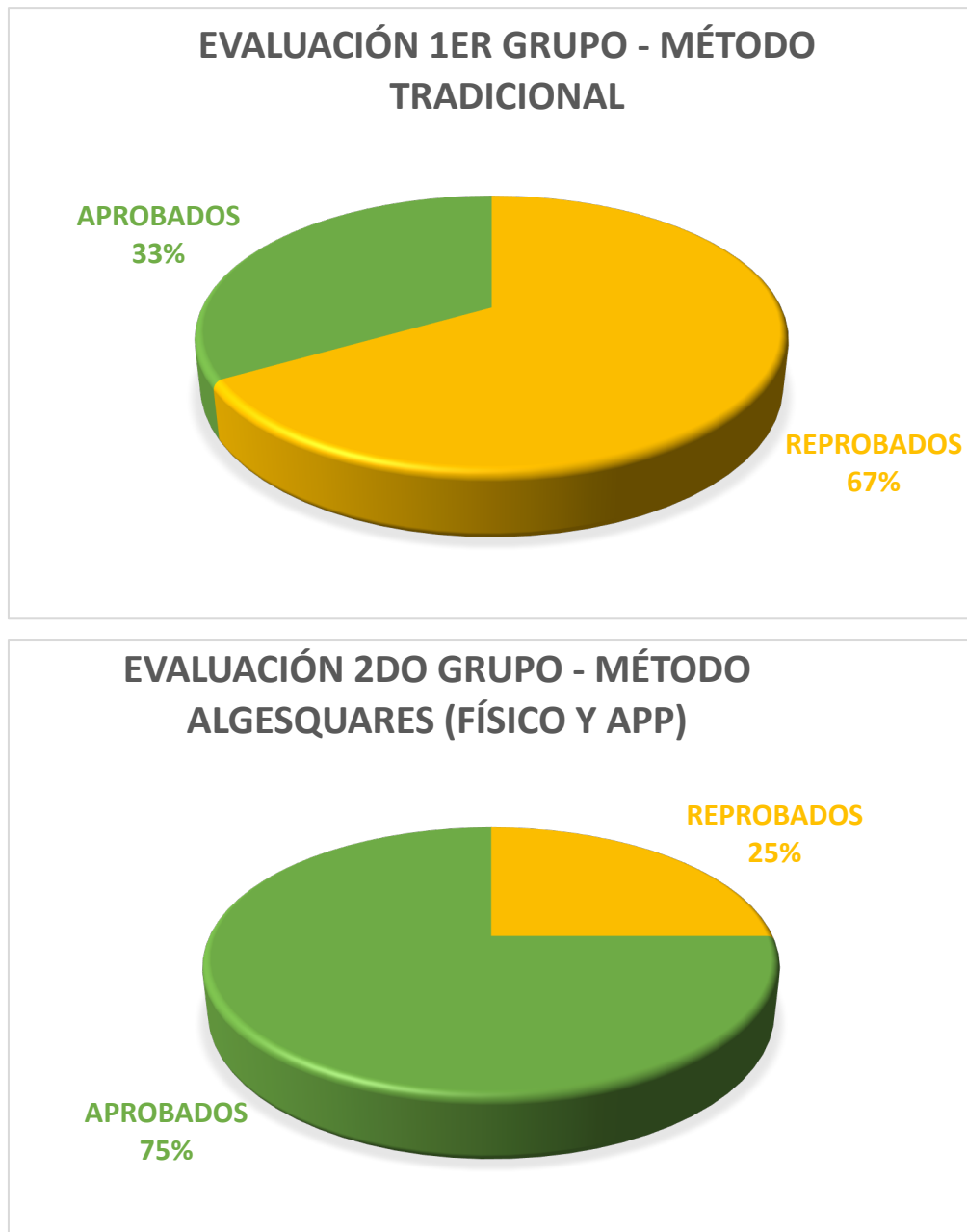
Se realizó una comparación de los tiempos promedios en que los estudiantes resolvían los ejercicios de los distintos temas de Álgebra, los ejercicios fueron divididos de acuerdo a su nivel de dificultad en tres niveles, tal como los clasifica la aplicación (básico, intermedio y avanzado). A continuación se muestran los resultados:



Gráfica 4.1 Medición de tiempos de distintas maneras de aprender álgebra básica.

Como se observa en el gráfico anterior (Gráfica 4.1), el tiempo menor de los alumnos para la resolución de ejercicios algebraicos es por medio de la aplicación de Algesquares, en segundo lugar se encuentra el trabajo realizado con el material físico y por último, el método tradicional.

Se realizó una evaluación a todos los alumnos del primer semestre, del Bloque I y del bloque II de la asignatura de “Pensamiento Matemático I”, los cuales abarcan los temas vistos por Algesquares. Se realizó una comparación del desempeño de los estudiantes, basado en las calificaciones obtenidas en el grupo en ambos bloques (Véase gráfica 4.2):

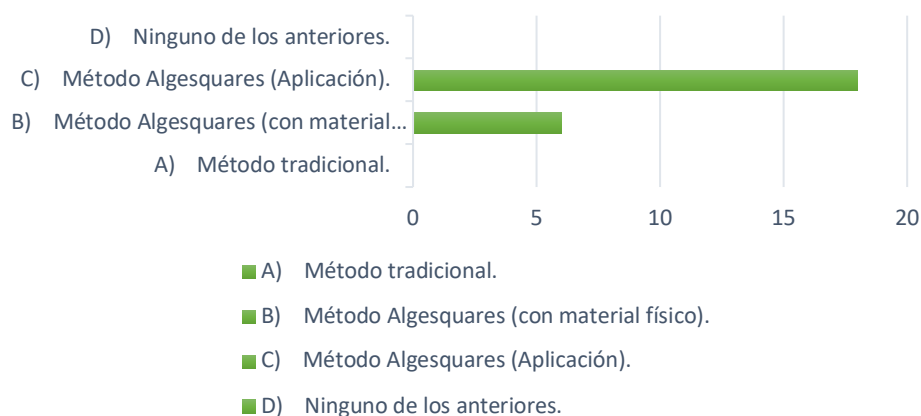


Gráfica 4.2 Comparación del índice de reprobación en el estudio de álgebra básica.

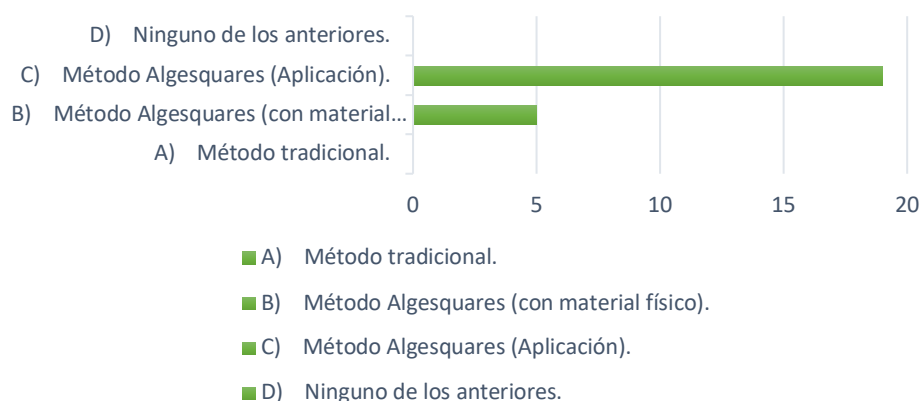
Claramente se nota una diferencia al comparar ambas gráficas, con una diferencia a favor del método Algesquares de un 42% menos que el tradicional, en el porcentaje de reprobación.

Una vez realizado el estudio, el grupo que trabajó con Algesquares, dio asesorías entre pares de cómo trabajar con este método al grupo que había trabajado con el método tradicional. Finalmente se realizó una encuesta de satisfacción a ambos grupos comparando su experiencia con los métodos trabajados (Véase Gráfica 4.3):

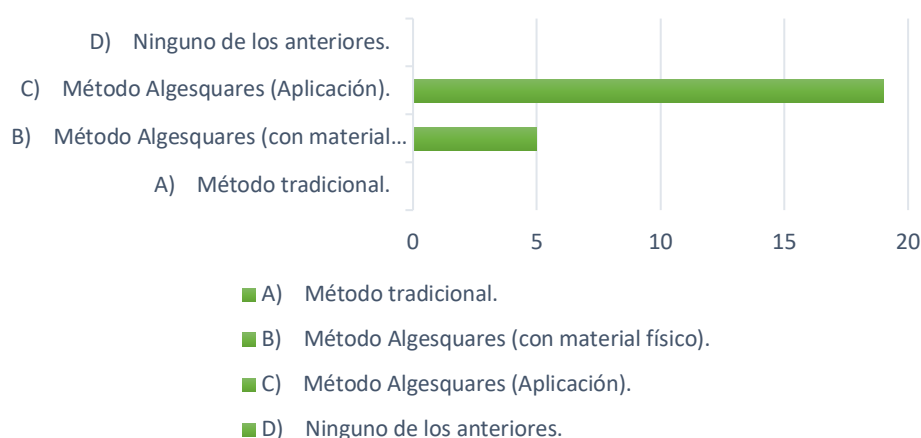
1. ¿Cuál es el método preferido para aprender operaciones algebraicas?

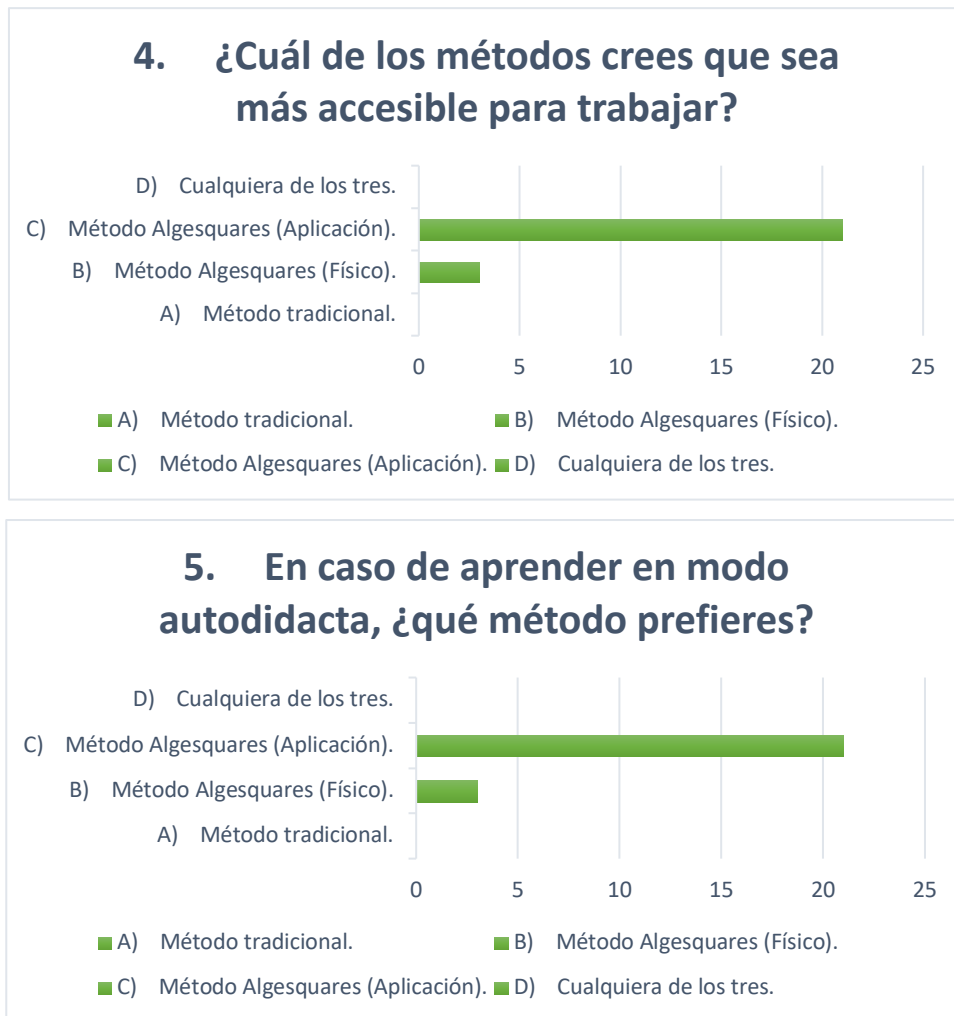


2. ¿Cuál es el método que más se te facilitó en aprender?



3. Después de haber practicado con los tres métodos, ¿en cuál tuviste menos errores?



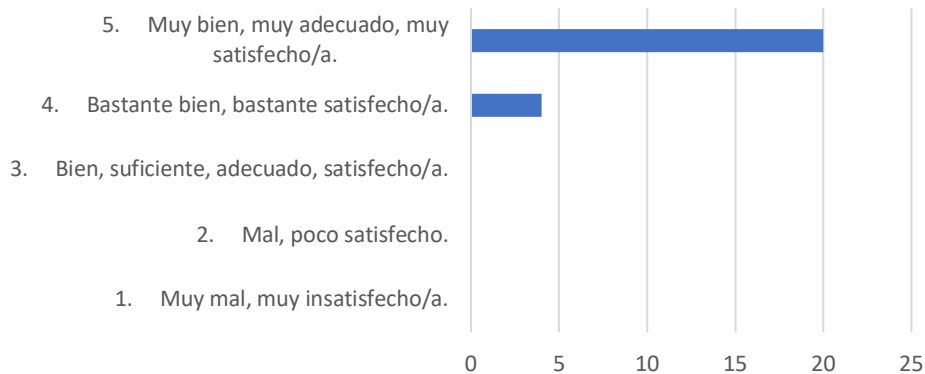


Gráfica 4.3 Resultados de la encuesta realizada acerca de la experiencia de las distintas formas de aprendizaje de álgebra básica.

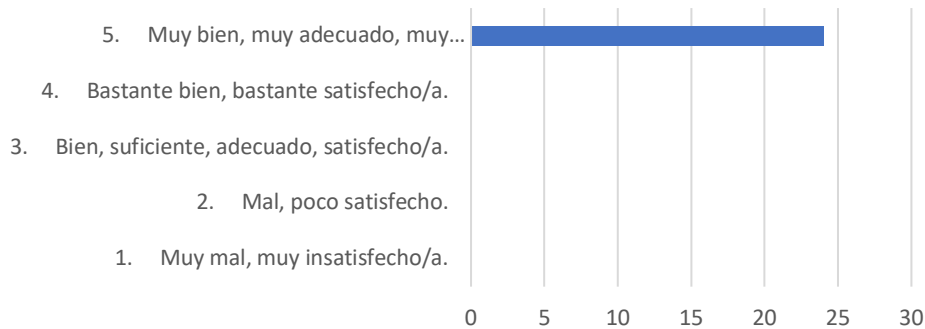
El 100% de los estudiantes se mostraron entusiasmados en trabajar con Algesquares, algunos cuantos prefirieron el material físico y la mayoría optó por trabajar desde la app. Hallaron el método fácil de comprender, concluyeron que podrían trabajar de forma autodidacta con él e incluso lo recomendaron a otras personas para aprender de forma distinta el Álgebra Básica.

Finalmente, se realizó una encuesta para saber la opinión de los estudiantes de la incorporación de tics en asignaturas relacionadas con el campo disciplinar de Matemáticas (Véase Gráfica 4.4):

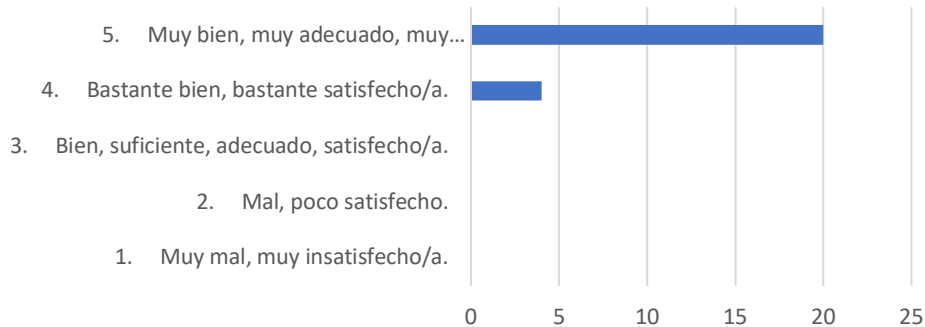
¿Qué tan adecuado te parece que el docente utilice TIC relacionadas con matemáticas, para la enseñanza-aprendizaje de álgebra?

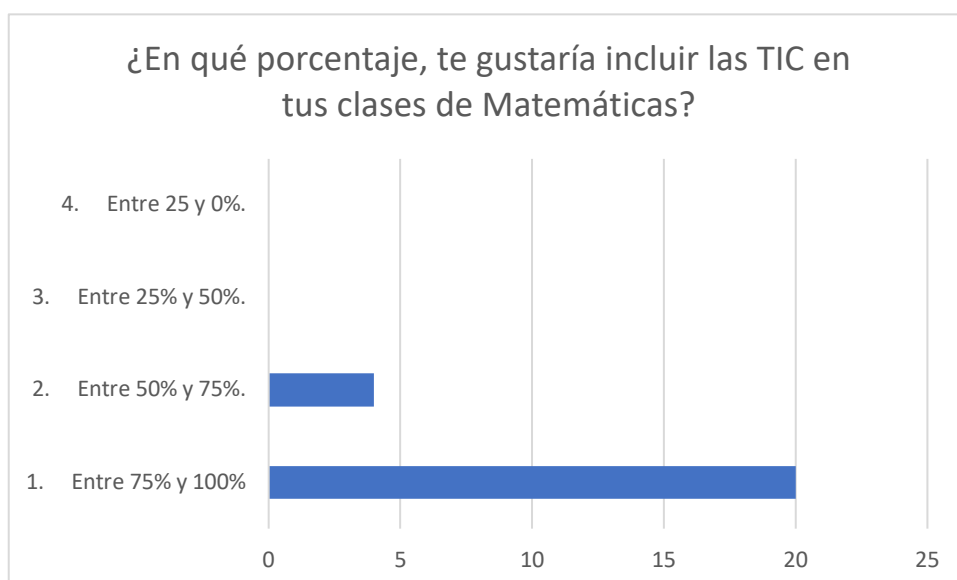
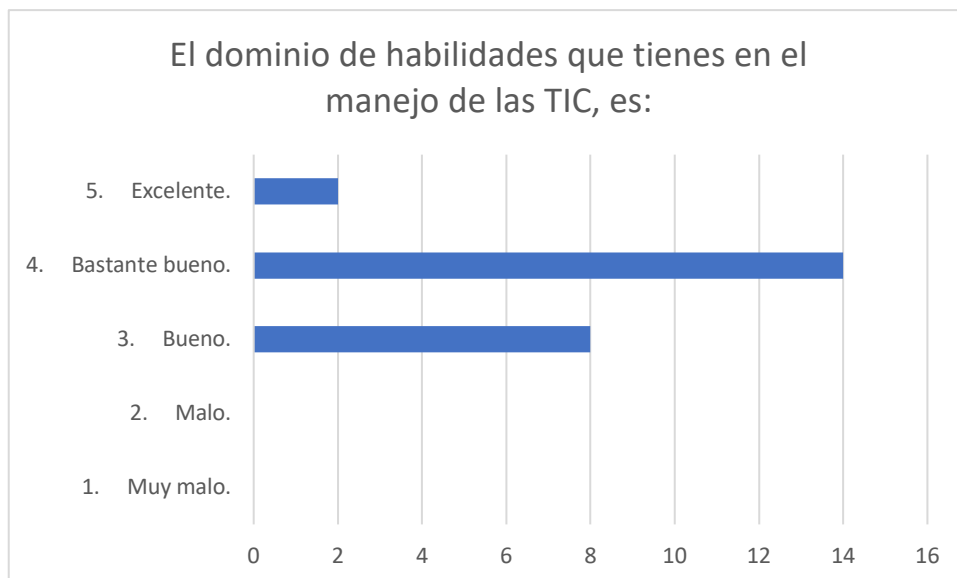


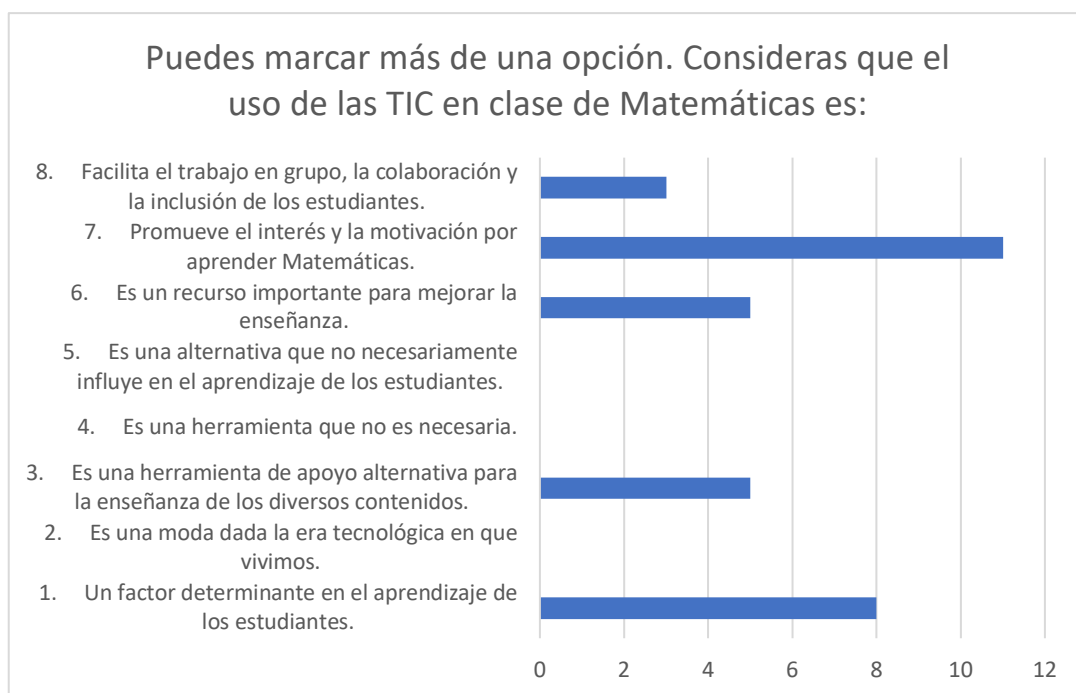
¿Qué tan adecuado te parece practicar con TIC temas de matemáticas en tu casa, en vez de llevarte ejercicios de tu libro o libreta como tarea?



De las dos aplicaciones con las que trabajaste (Algesquares y DragonBox+), ¿cómo fue tu experiencia al trabajar con ellas y la forma en que te ayudaron a comprender los temas de álgebra?







Gráfica 4.4 Resultados de la encuesta realizada acerca del uso de las TIC en el campo disciplinar de Matemáticas.

De acuerdo a los resultados en las encuestas, se ve una clara preferencia de los estudiantes en incorporar las TIC en el campo disciplinar de Matemáticas pues consideran importante su inclusión para facilitar el trabajo y la colaboración grupal, así como el aumento de interés por aprender Matemáticas.

4.3 Logotipo.

La importancia del logotipo, en su concepto más amplio, es la forma visual, rápida y casi inmediata de imprimir en la memoria del público la marca o la imagen corporativa de la marca. El logotipo para la Imagen corporativa es como el eslogan para la publicidad.

Como uno de los logros de este proyecto de tesis, se ha diseñado el logotipo de la aplicación, que lleva elementos relacionados a la metodología de Algesquares como el uso de fichas de colores, símbolos matemáticos y el uso de “x” y “y”, que frecuentemente son utilizadas como variables en la asignatura de álgebra. (Véase Figura 4.4).



Figura 4.4 Logotipo Algesquares.

4.3 Implementación y pruebas del prototipo de Algesquares en dispositivos Android.

La implementación y pruebas de la aplicación fueron realizadas en dos dispositivos, uno físico y uno emulado desde Android Studio, ambos con distintas características, dimensiones y versiones de Sistemas Operativos. A continuación, se presentan las especificaciones de ambos:

Huawei P30 Pro – Versión Física (Véase Figura 4.5)

Características principales

📱 Pantalla: 6.47", 1080 x 2340 pixels	📷 Cámara: Cuádruple, 40MP+20MP+8MP+TOF
🔌 Procesador: Kirin 980 2.6GHz	🔋 Batería: 4200 mAh
⚙️ RAM: 6GB/8GB	📄 OS: Android 9.0
💾 Almacenamiento: 128/256/512GB	📏 Perfil: 8.4 mm
📦 Expansión: NM	⚖️ Peso: 192 g
	💰 Precio: ~ 1000 EUR

Figura 4.5 Especificaciones del Huawei P30 Pro.

Fuente: <https://www.smart-gsm.com/moviles/>

La versión de Android que traía por default es la 9.0. Sin embargo, se había actualizado a la versión 10 cuando se probó la aplicación.

Google Pixel 1 – Emulador (Véase Figura 4.6)

Características principales

 Pantalla: 5", 1080 x 1920 pixels	 Cámara: 12.3 MP
 Procesador: Snapdragon 821 2.15GHz	 Batería: 2770 mAh
 RAM: 4GB	 OS: Android 7.1
 Almacenamiento: 32GB/128GB	 Perfil: 8.5 mm
 Expansión: sin microSD	 Peso: 143 g

Figura 4.6 Especificaciones del Google Pixel 1.

Fuente: <https://www.smart-gsm.com/moviles/>

La emulación del Google Pixel 1 se realizó desde Android Studio, eligiendo Android 7.0 como su sistema operativo (Véase Figura 4.7). Como en algunas ocasiones, de acuerdo al tamaño y resolución de pantalla, la app puede visualizarse de forma diferente en los dispositivos, se decidió probar con distintos tamaños de pantalla y resoluciones.

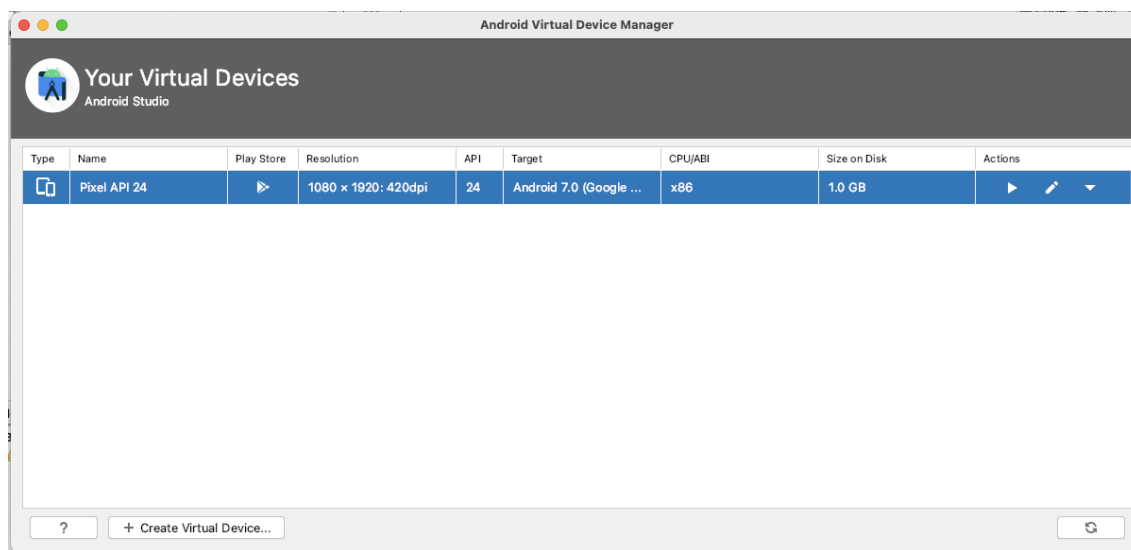


Figura 4.7 Configuración del emulador de Android Studio.

4.3.1 Multiplicación - Nivel Básico

Una vez instalada la aplicación, se da inicio desde el Menú de Aplicaciones del smartphone, donde aparece el logotipo de Algesquares por unos segundos y la leyenda de bienvenida. Dando clic en “Saltar”, aparece el Menú de selección de temas (Véase Figura 4.8).

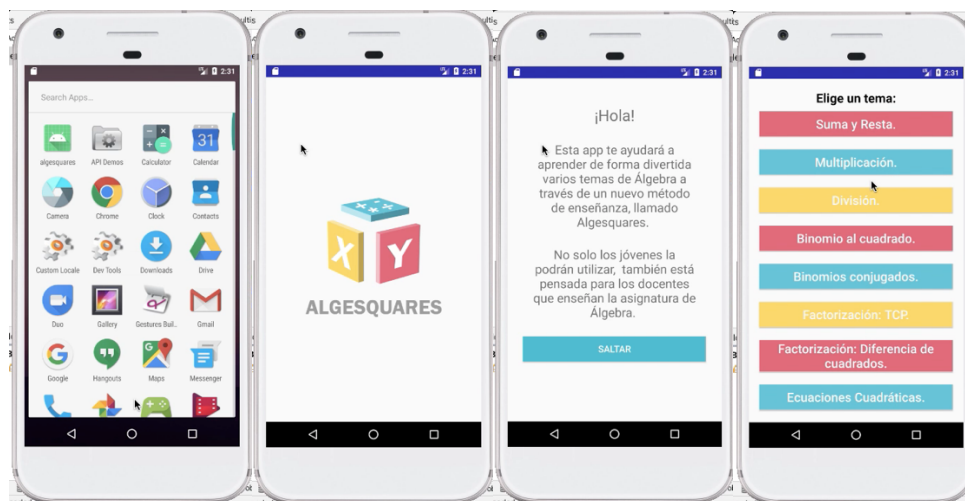


Figura 4.8 Inicio de la app y selección de temas.

Al elegir el tema de “Multiplicación”, se debe escoger un nivel de dificultad, en este caso se escoge el nivel “Básico”. Automáticamente, se visualiza el ejercicio solicitando el número de fichas para jugar y un mensaje guía, en caso de que el usuario elija mal el número de fichas (Véase Figura 4.9).

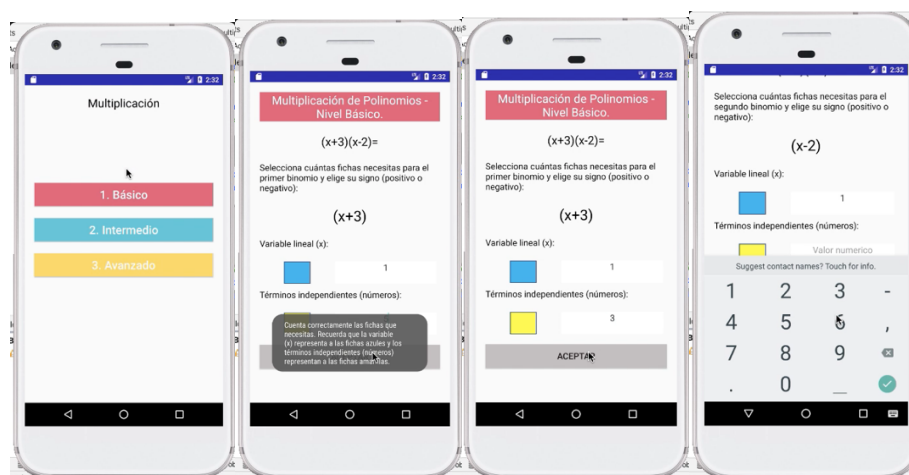


Figura 4.9 Multiplicación - Nivel Básico.

Al completar el número de fichas, se genera la matriz donde el usuario debe subir de rango, completar la matriz con fichas faltantes y eliminar las sobrantes (términos semejantes) (Véase Figura 4.10).

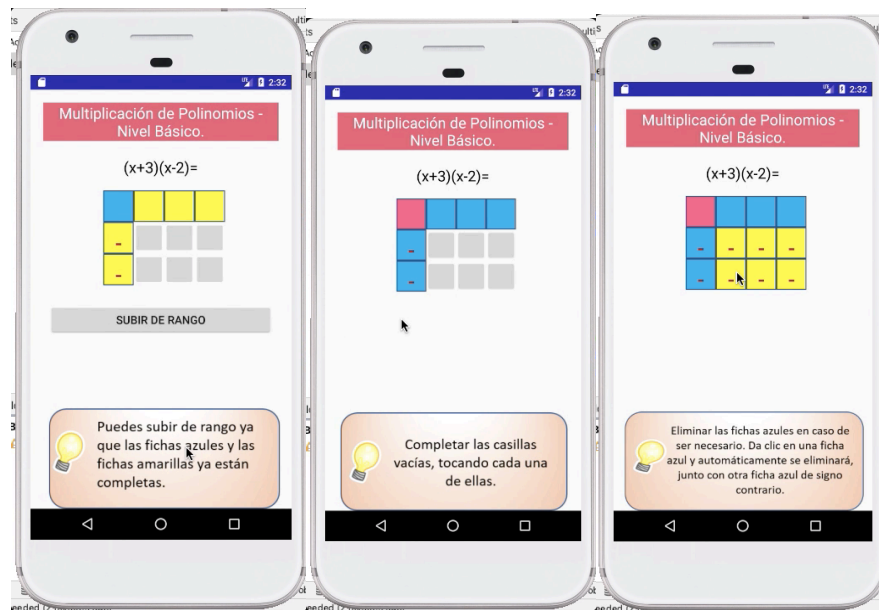


Figura 4.10 Multiplicación - Nivel Básico.

Una vez eliminadas las fichas sobrantes, se procede a contar el número de fichas para mostrar el resultado final. En caso de que el usuario introduzca un número incorrecto, nuevamente aparecerá un mensaje guía, permitiendo hacer la corrección (Véase Figura 4.11).



Figura 4.11 Multiplicación - Nivel Básico.

4.3.2 Multiplicación - Nivel Intermedio.

El nivel Intermedio juega con un número mayor de fichas, así que antes de “Subir de rango”, se deben completar las figuras azules, luego las amarillas y al final, se sube el rango para cambiar de color las fichas (Véase Figura 4.12).



Figura 4.12 Multiplicación - Nivel Intermedio.

Una vez subido el rango, se realiza el mismo procedimiento que en el nivel básico. Si se realizan los pasos correctamente, la app entregará el resultado final (Véase Figura 4.13).



Figura 4.13 Multiplicación - Nivel Intermedio.

4.3.3 Multiplicación - Nivel Avanzado.

En el nivel Avanzado, se piden las fichas y cuando se forma la matriz, el usuario es libre de utilizar la ficha del color y el signo que elija, puede ir llenando los espacios vacíos y habrá algunos mensajes guía, en caso de tener alguna equivocación (Véase Figura 4.14).



Figura 4.14 Multiplicación - Nivel Avanzado.

Una vez que se llena la matriz correctamente, el usuario sigue los pasos similares a los niveles anteriores hasta llegar al resultado final (Véase Figura 4.15).



Figura 4.15 Multiplicación - Nivel Avanzado.

4.3.4 Multiplicación – Ejercicios de refuerzo.

A continuación, se presentan las pantallas del nivel donde el usuario puede crear sus propios ejercicios (Véase Figura 4.16):



Figura 4.16 Multiplicación – Ejercicios de refuerzo.

4.4 Comparación de Algesquares contra otros métodos similares.

A continuación, se presenta un cuadro comparativo de los métodos que se basan en las fichas de Caleb Gattegno y el método presentado en este proyecto (Véase Tabla 4.1), Algesquares, enumerando las características más representativas de cada uno:

Sistema:	Algebra Tiles	Algeblocks	Caja de Polinomios	Algesquares
Año de Creación	1950's	1996	2003	2016
Realiza operaciones básicas	Si	Si	Si	Si
Factorización y productos notables	Si	Si	Si	Si
Ecuaciones lineales con una incógnita	Si	Si	No	Si
Ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2+bx=c$	Si	Si	No	Si
Trabaja con coeficientes fraccionarios	No	Si	No	Si
Utiliza fichas del mismo tamaño	No	No	No	Si
Cuenta con app o software	Playstore	En desarrollo	En desarrollo	En desarrollo
Guía de aprendizaje para el alumno	No	No	No	Si
Control y supervisión de grupos para el docente	No	No	No	Si

Tabla 4.1 Tabla comparativa del método Algesquares con métodos similares.

Existen otros métodos similares a Algesquares, sin embargo, no son iguales, es por ello que se resaltan los siguientes puntos:

- No todos los métodos cubren todos los temas que incluye Algesquares. Hay algunos que no se enfocan en la materia de álgebra, sino en alguna otra rama de las matemáticas como Aritmética.

- Hasta ahora solo las fichas algebraicas cuentan con material físico y una aplicación para smartphones, como se pretende lograr con Algesquares.
- La aplicación de Fichas algebraicas incluye únicamente una calculadora para realizar las operaciones, mientras que Algesquares está pensado para ser una guía virtual para la enseñanza-aprendizaje de Álgebra Básica.

Como se menciona en el punto anterior, se pretende que la Algesquares funcione como guía de Enseñanza-Aprendizaje de Álgebra Básica. Esto quiere decir que la aplicación debe:

- “Llevar de la mano” al estudiante en la resolución de los ejercicios, por medio de consejos y avisos que aparecen en pantalla.
- Incluir niveles en forma de tutorial para que el usuario se familiarice con el nuevo método.
- Lograr un aprendizaje gradual por medio de distintos niveles de dificultad.
- Detectando errores en el procedimiento, alertando al usuario y guiarlo de forma correcta.

“Incidencia del uso de Algebblocks en el aprendizaje de la factorización de polinomios en tercero básico” de Carlos Manuel de Jesús Gutiérrez Reyes y “Desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de algebblocks” de Norma Angélica Hernández Espejel y Edgar Oliver Cardoso Espinosa, son trabajos de tesis que apoyan métodos similares al utilizado en este proyecto. Una ventaja de Algesquares es que utiliza fichas pequeñas de tamaño único, a diferencia de otros métodos que ocupan fichas de distintos tamaños.

La ventaja de utilizar el mismo tamaño, hace más práctico el método que los demás, pues en caso de utilizar el material físico, es más fácil de manipular y transportar dentro y fuera del salón de clases. En el caso de la aplicación, al ser fichas iguales y de menor tamaño, puede tener más elementos en pantalla; al tener más elementos en pantalla, permite realizar una gran cantidad de ejercicios de álgebra básica, en una pantalla promedio de smartphone.

Conclusiones

Algesquares es un método que ha evolucionado hasta convertirse en un método robusto que abarca muchos de los contenidos específicos comprendidos relacionados con el álgebra en el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior. Empezó como un material de apoyo para el aula de clases con temas y ejercicios limitados; después, durante el periodo de la Maestría en Tecnologías de la Información, se agregaron más temas con una variedad de ejercicios, contando con 3 niveles de dificultad, se desarrolló el método para ocho temas de álgebra básica, se validó con los alumnos del Bachillerato General “Ignacio Manuel Altamirano”, con docentes de educación media superior y con expertos en el tema, y finalmente, se realizó el prototipo de la aplicación con las pruebas correspondientes. Como se planeó inicialmente, el docente ahora podrá incorporar el método de enseñanza dentro de la planeación de clase e incorporar el uso de las TIC por medio del uso de la aplicación, teniendo como resultado una comunidad, no solo física, sino de aprendizaje, ahora que la pandemia ha cambiado nuestra forma de enseñanza.

Actualmente, la educación a distancia se ha convertido en algo muy común para todos, ha ido mejorando con el transcurso de los años y mejorará aún más. Así que necesitará de recursos tecnológicos y aplicaciones como Algesquares, para lograr un aprendizaje significativo y un desarrollo efectivo de competencias, en los estudiantes de educación media superior.

Propuestas, recomendaciones y trabajos futuros

Como parte de las mejoras, se deben terminar los nueve temas incluidos en la app de Algesquares, pues actualmente se tiene la interfaz gráfica de dos de ellos y la programación de uno de los temas. Además, se pueden incluir más ejercicios por nivel, incrementar la capacidad de fichas en pantalla y aumentar la complejidad de los ejercicios.

Otro aspecto mejorable sería el diseño del modo “Docente”, donde se lleva el registro individual y grupal de los estudiantes. Así, el profesor puede evaluar el desempeño diario de sus alumnos y tener una supervisión constante del grupo, detectar áreas de mejora y logros individuales y grupales.

Actualmente el método está enfocado en la materia de álgebra, pero puede hacerse más robusto si se incluyen otras ramas de las Matemáticas que pueden trabajar con las fichas de Algesquares, como Aritmética y Geometría Plana, cubriendo al menos 3 asignaturas que se estudian en el nivel medio superior.

Una de las principales razones de realizar la aplicación en Android fue el público al que va dirigido. Sin embargo, como mejora, en un futuro se puede considerar la adaptación de la app a IOS, como sistema operativo alternativo, así como la migración de la app a PC, considerando que el tamaño de la pantalla es mayor y se pueden trabajar con ejercicios más complicados y manipular más elementos en pantalla.

El contenido de temas que maneja Algesquares fue diseñado en base al programa de estudios de Bachilleratos Generales a nivel nacional. No obstante, dichos temas son comunes en muchos países, no solo de habla hispana; así que otra mejora a futuro, podría ser que la aplicación esté disponible para su descarga, en varios idiomas. La importancia de los pueblos originarios para México, puede ser aplicable a la difusión de la aplicación en México dentro del país, traduciendo la app al Náhuatl (como segundo idioma oficial del país) u otras lenguas importantes como por ejemplo: Maya, Tzeltal, Tzotzil o el Mixteco.

Por último, una de las mejoras del proyecto, que puede marcar la diferencia entre éste y sus competidores en el mercado, sería la inclusión de un asistente virtual que resuelva cualquier duda del estudiante, las 24 horas del día. Uno de los objetivos principales del proyecto es el autoaprendizaje de los usuarios, para que puedan trabajar con la aplicación sin necesidad de la presencia del docente, así que el asistente virtual sería una excelente opción para apoyar al usuario, en caso de que el docente no se encuentre disponible en ese momento. Ahora que México y demás países, se enfrentan a una pandemia mundial, el asistente virtual es un recurso vital en la enseñanza de las matemáticas en la educación a distancia.

Referencias bibliográficas

- [1] SEGOB - Secretaría de Gobernación. (2017, 28 junio). DOF - Diario Oficial de la Federación. MODELO Educativo para la Educación Obligatoria. http://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5488338&fecha=28/06/2017
- [2] Bachillerato General por Competencias. (2015, abril). Trayectoria de Aprendizaje Especializante Programa de Unidad de Aprendizaje. Taller integrador de diseño y TICS. http://www.sems.udg.mx/sites/default/files/BGC/TaesActualizadas/6_TALLER_INTEGRADOR_DE_DISEÑO_Y_TICS.pdf
- [3] Bachillerato General por Competencias. (2015a, marzo). Segundo Ciclo Tecnologías de la Información II. [sems.udg.mx. https://www.sems.udg.mx/sites/default/files/BGC/tecnologias_de_la_informacion_ii.pdf](https://www.sems.udg.mx/sites/default/files/BGC/tecnologias_de_la_informacion_ii.pdf)
- [4] INEGI. (2020, 29 enero). La educación en México según datos del INEGI. Prepa UP. <https://blog.up.edu.mx/prepaup/educacion-en-mexico-datos-inegi>
- [5] Educalia. (2020, 1 octubre). Más estudios, más ingresos. Educalia Centro de Formación. <https://educaliamex.com/mas-estudios-mas-ingresos/>
- [6] Cortez, P. G. H. (s. f.). La Educación en México. Scribd. Recuperado 14 de agosto de 2021, de <https://es.scribd.com/document/488178619/La-Educacion-en-Mexico>
- [7] National University College-Caguas. (s. f.). Actividad Económica: México. Course Hero. Recuperado 14 de agosto de 2021, de <https://www.coursehero.com/file/101475002/Foro-41-SOSCO1020docx/>
- [8] Héctor Molina 03 de diciembre de 2019, 10:00, Horas, H. M. P. D. M. P., Horas, H. R. P., Horas, H. A. P., Horas, H. A. P., Pérez, M., D., Social, I. M. D. S., D., & D. (2019, 4 diciembre). Prueba PISA 2018: México mantiene los mismos bajos niveles en aprendizaje. El Economista. <https://www.eleconomista.com.mx/politica/Prueba-PISA-2018-Mexico-mantiene-los-mismos-bajos-niveles-en-aprendizaje--20191203-0048.html>
- [9] Aguilar, E. A. (2019, 3 diciembre). ¿Qué es la prueba PISA que los estudiantes mexicanos “reprobaron”? UnoTV. <https://www.unotv.com/noticias/portal/nacional/detalle/que-es-la-prueba-pisa-que-los-estudiantes-mexicanos-reprobaron-136963/>
- [10] Comisión Nacional de los Derechos Humanos. (2020, 15 mayo). Boletín semanal de la Secretaría Ejecutiva. CNDH. <https://www.cndh.org.mx/sites/default/files/documentos/2020-06/PG487.pdf>
- [11] Manuel, P. S. (2021, 11 agosto). PRUEBA PISA 2018: SISTEMA EDUCATIVO DE MÉXICO REPROBADO. PressReader. <https://www.pressreader.com/mexico/el-diario-de-delicias/20210811/281569473790179>

- [12] Urbeconómica. (2019, 4 diciembre). Revela PISA bajo desempeño de estudiantes de México. <https://www.urbeconomica.com.mx/empresarios/universidades/23866-revela-pisa-bajo-desempeno-de-estudiantes-de-mexico>
- [13] Daniel, Camila, Markus, S. D. M. S. (2019). Programa para la evaluación Internacional de alumnos PISA 2018 - Resultados. OCDE. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf?forcedefault=true
- [14] Leyva, J. A. (2019, 3 diciembre). Reprobados los estudiantes mexicanos en matemáticas, ciencias y lectura. Agenda Setting Diario. <https://agendasettingdiario.com/news/reprobados-los-estudiantes-mexicanos-en-matematicas-ciencias-y-lectura/>
- [15] Flores Guerrero, M. V. (2020, 10 enero). Just a moment. . . La Jornada Zacatecas. <https://ljz.mx/2020/01/10/la-educacion-y-el-magisterio/>
- [16] Molina, H. (2019, 3 diciembre). Pálido punto de luz. Pálido de Luz. <http://palido.deluz.mx/articulos/5174>
- [17] Baqueiro, L. R. (2020, 10 julio). La misión Zen. Libertad Bajo Palabra. <https://libertadbajopalabra.com/2020/07/09/la-mision-zen/>
- [18] RITI. (s. f.). Revista de Investigación en Tecnologías de la Información. RITI España. Recuperado 16 de agosto de 2021, de <https://www.riti.es/ojs2018/inicio/index.php/riti/index>
- [19] Diaz, M. (s. f.). CIERQUERÉTARO CIERMMI 2021. CIERQUERETARO. Recuperado 16 de agosto de 2021, de <https://www.cierqueretaro.org.mx/>
- [20] Ordóñez-Ortega, O., Gualdrón-Pinto, E., & Amaya-Franky, G. (2019). Pensamiento variacional mediado con baldosas algebraicas y manipuladores virtuales. *Rev.investig.desarro.innov.*, 9 (2), 347-362. doi: 10.19053/20278306.v9.n2.2019.9180
- [21] El cuadrado mágico. (s. f.). Baldosas algebraicas. Kit Individual. Recuperado 16 de agosto de 2021, de <https://www.elcuadradomagico.es/inicio/395-baldosas-funciones-kit-individual.html>
- [22] EducaMadrid. (s. f.). Representando polinomios con baldosas | Mediateca de EducaMadrid. Mediateca. Recuperado 16 de agosto de 2021, de <https://mediateca.educa.madrid.org/video/37qmeh6ivqb54h74>
- [23] Educalia. (2020, 1 octubre). Más estudios, más ingresos. Educalia Centro de Formación. <https://educaliamx.com/mas-estudios-mas-ingresos/>
- [24] Blanco, Rocío; Solares, Cristina. “Bloques multibase, Algeblocks y otros recursos para tocar las Matemáticas en Primaria y Secundaria”. VIII CIBEM Libro de resúmenes. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas FESPM. ISBN: 978-84-945722-2-7. (2017)

- [25] Hernández Espejel, N.A. “Desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de los algeblocks en alumnos de segundo grado de Educación Secundaria”. Tesis Doctoral. (2010)
- [26] Soto ÁGreda, Mosquera López, O. F. S. (2007). La caja de polinomios. Congreso Iberoamericano de Educación Matemática., 1(978–84-945722-3-4). <http://funes.uniandes.edu.co/22111/1/Soto2017La.pdf>
- [27] Soto, F., Mosquera, S. & Gómez, C. (2005). La Caja de Polinomios. Matemáticas, Enseñanza Universitaria, 15, 83-97. Escuela Regional de Matemáticas. Universidad del Valle. Colombia.
- [28] Díaz, L. E. Y. (2017). Dialnet-LaCajaDePolinomiosYElMetodoTradicional-6138935. Scribd. <https://es.scribd.com/document/407533145/Dialnet-LaCajaDePolinomiosYElMetodoTradicional-6138935>
- [29] APK Download. (2019, 20 mayo). Algebra Tiles by mathies APK Descargar para Windows - La última versión 1.0.1. Algebra Tiles by mathies. <https://apkdownloadforwindows.com/es/app/air.ca.mathclips.algebratiles/>
- [30] Thornton, G.J. (1995). Algebra Tiles and Learning Styles [Tesis de maestría, Simon Fraser University]. <https://core.ac.uk/download/pdf/56370919.pdf>
- [31] Castro, S. (2017). Algebra Tiles Effect on Mathematical Achievement of Students with Learning Disabilities [Tesis de maestría, California State Univ California State University, Monter, Monterey Bay]. https://digitalcommons.csumb.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1113&context=caps_thes_all
- [32] National University College-Caguas. (s. f.). Actividad Económica: México. Course Hero. Recuperado 14 de agosto de 2021, de <https://www.coursehero.com/file/101475002/Foro-41-SOSCO1020docx/>
- [33] Digital Guide IONOS. (2021, 30 julio). El modelo en cascada: desarrollo secuencial de software. IONOS Digitalguide. <https://www.ionos.es/digitalguide/paginas-web/desarrollo-web/el-modelo-en-cascada/>
- [34] Peale, N. V. (s. f.). Ciclo de vida clásico o en cascada. StuDocu. Recuperado 17 de agosto de 2021, de <https://www.studocu.com/gt/document/universidad-mariano-galvez-de-guatemala/analisis-de-sistemas/ciclo-de-vida-clasico-o-en-cascada/7105059>
- [35] CourseHero. (s.f.). 4.3.1. WATERFALL (CASCADA). <https://www.coursehero.com/>. Recuperado 16 de agosto de 2021, de <https://www.coursehero.com/file/77544318/431-WATERFALL-CASCADAdocx/>
- [36] Developers. (s. f.). Introducción a Android Studio | Desarrolladores de Android. Android Developers. Recuperado 17 de agosto de 2021, de <https://developer.android.com/studio/intro?hl=es-419>

- [37] Zambrano-Pilay, E., Vélez-Vélez, L., & Almeida-Zambrano, E. (2020). Desarrollo e implementación de aplicación móvil para la difusión de publicaciones de la Editorial ULEAM. *Revista Científica INGENIAR: Ingeniería, Tecnología e Investigación*, 3(5), 13–24. <https://doi.org/10.46296/ig.v3i5.0012>
- [38] Cortés Velazquez, F., Castillo Quiroz, G., Cruz Luna, M., & Hernández Cabrera, H. (2021). Diseño de una app como herramienta de apoyo para la enseñanza-aprendizaje del álgebra básica. *Revista de Investigación en Tecnologías de la Información: RITI*, 9(18), 62-76
- [39] México PueblosAmerica. (s. f.). San Lorenzo (Puebla) Xicotepec | PueblosAmerica. [mexico.PueblosAmerica.com](https://mexico.pueblosamerica.com). Recuperado 13 de diciembre de 2021, de <https://mexico.pueblosamerica.com/i/san-lorenzo-71/>