



Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Instituto Tecnológico de La Laguna
División de Estudios de Posgrado e Investigación

“Estudio de Observadores para un Avión de Ala Fija”

POR

M.C. Ricardo Pavel Parada Morado

CVU: 168880

TESIS

PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE DOCTOR(A) EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTOR(A) DE TESIS
Dr. Alejandro Enrique Dzul López

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (04)-TDCIE – 2025

Torreón, Coahuila, México.
abril, 2025



Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Instituto Tecnológico de La Laguna
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Torreón, Coahuila, 28/abril/2025
Circular No. DEPI/681
Asunto: Se autoriza Impresión de Tesis

**C. RICARDO PAVEL PARADA MORADO
CANDIDATO(A) AL GRADO DE DOCTOR(A)
EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA
PRESENTE.-**

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

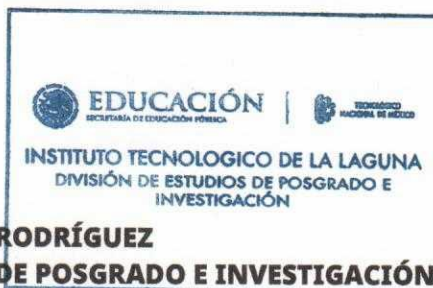
"ESTUDIO DE OBSERVADORES PARA UN AVIÓN DE ALA FIJA"

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con el número de registro **RIITEC (04) -TDCIE-2025**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE

*Excelencia en Educación Tecnológica®
Educación Tecnológica, Fuente de Innovación*

**C. RAMÓN HUMBERTO SANDOVAL RODRÍGUEZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**



c.c.p. Expediente
RHSR/GSL/*mjsl



2025
Año de
La Mujer
Indígena

Boulevard Revolución y Avenida Instituto
Tecnológico de La Laguna C.P. 27000 Torreón,
Coahuila. Tel. 8717051313
e-mail: difusión@lalaguna.tecnm.mx tecnm.mx
www.lalaguna.tecnm.mx





Instituto Tecnológico de La Laguna
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Torreón, Coah., 28/abril/2025
ASUNTO: Autorización de Impresión

C. RAMÓN HUMBERTO SANDOVAL RODRÍGUEZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

"Estudio de Observadores para un avión de ala fija

Desarrollo por el **C. Ricardo Pavel Parada Morado**, con número de control D99130146, habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
Educación Tecnológica, Fuente de Innovación


Dr. Alejandro Enrique Dzul López
Director(a) de Tesis


Dr. Miguel Ángel Llana Leal
Comité Tutorial


Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila
Comité Tutorial


Dr. Edmundo Javier Ollervides Vázquez
Comité Tutorial


Dr. Arturo Tadeo Espinoza Fraire
Comité Tutorial Externo



2025
Año de
La Mujer
Indígena

Boulevard Revolución y Avenida Instituto
Tecnológico de La Laguna C.P. 27000 Torreón,
Coahuila. Tel. 8717051313
e-mail: difusión@lalaguna.tecnm.mx tecnm.mx
www.lalaguna.tecnm.mx



Dedicado a mi familia
Madre, Papá, hermanas.
Mi hermosa esposa,
y mis amadas hijas.

Agradecimientos

A todas las personas que me han motivado, presionado e incluso retado a terminar este trabajo.

A mi esposa y mis hijas por permitirme el tiempo dedicado a este trabajo.

A mis padres y mis hermanas por su paciencia y consejo.

A mi asesor el Dr. Alejandro Enrique Dzul López por su paciencia, consejo y motivación, que siempre ha estado para apoyarme y que sin su ayuda este trabajo no se habría logrado.

Al Dr. Víctor Santibáñez, al Dr. Miguel Ángel Llama, al Dr. Javier Ollervides, por sus consejos, apoyo y tiempo que pusieron en pulir este trabajo.

Al Dr. Tadeo Espinoza, que siempre me apoyó, aconsejó y me ayudó a mejorar mi trabajo.

A mis buenos amigos Dr. Guillermo Salas, Dr. Gerardo Castrejón, Dra. Olga Luévano y al Ing. Daniel Pérez, que siempre me presionaron y aconsejaron para terminar.

Al CONACYT, por la beca que me concedió e hizo posible mis estudios de doctorado, y al Tecnológico Nacional de México por el apoyo en proyectos de investigación.

Resumen

La robótica móvil presenta retos particulares debido a las restricciones que están frecuentemente asociadas con los sistemas embebidos, en este tipo de robots. Los requisitos de potencia de cómputo y precisión de los sensores deben equilibrarse con la capacidad máxima de carga en el caso de los vehículos aéreos no tripulados. En este contexto, los sensores normalmente utilizados no proporcionan ciertas mediciones de interés (estados del sistema) que son utilizadas en un algoritmo de control, y es por ello que se proponen observadores de estados como algoritmos particularmente adecuados para estimar dichas variables.

En el presente documento, se detalla el diseño y la implementación de observadores de estado con el objetivo de estimar los ángulos de cabeceo, alabeo y guiñada, así como las velocidades angulares de un vehículo aéreo no tripulado de ala fija. Esto se lleva a cabo bajo un modelo desacoplado y reducido, aplicado en experimentos de vuelo real. Para el control desacoplado de la altitud, guiñada y alabeo del avión, se implementaron dos leyes de control: una ley de control Proporcional-Derivativo (PD) y una ley de control Backstepping. Este enfoque permite la verificación experimental de la viabilidad de emplear los datos estimados en línea por los observadores para el control de vuelo, lo cual contribuye significativamente a mejorar la robustez del control y la seguridad durante el vuelo. Adicionalmente, se lleva a cabo un análisis comparativo para evaluar el desempeño de los observadores implementados.

Palabras clave: Observador de estados, observador de Luenberger, observador por modos deslizantes, observador no lineal de estado extendido, Backstepping, vehículo aéreo no tripulado de ala fija.

Abstract

Mobile robotics presents particular challenges due to the constraints often associated with the embedded systems used in these types of robots. The computing power requirements and sensor accuracy must be balanced with the maximum payload capacity of unmanned aerial vehicles. In this context, commonly used sensors do not provide all the required measurements (related to certain states) needed for the control algorithm. Therefore, state observers are proposed as efficient algorithms particularly suitable for estimating such variables in mobile robotic systems.

This document details the design and implementation of state observers aimed for estimating pitch, roll, and yaw angles, as well as the angular velocities of a fixed-wing unmanned aerial vehicle. This is achieved by using a decoupled and reduced model, applied in real flight experiments. For the decoupled control of the aircraft's altitude, yaw, and roll, two control laws were implemented: a Proportional-Derivative (PD) control law and a Backstepping control law. This approach allows experimental verification of using online estimated data from the observers for flight control purposes, significantly contributing to improved control robustness and flight safety. Additionally, a comparative analysis is carried out to evaluate the performance of the implemented observers.

Keywords: State observer, Luenberger observer, sliding mode observer, nonlinear extended state observer, Backstepping, decoupled-reduced model, fixed-wing unmanned aerial vehicles.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos de la tesis	2
1.1.1. Objetivo general	2
1.1.2. Objetivos específicos	2
1.1.3. Estructura del documento	2
2. Marco teórico	3
2.1. Antecedentes	3
2.2. Controlabilidad	5
2.2.1. Controlabilidad completa del estado en un sistema de tiempo continuo .	5
2.2.2. Alternativa para la condición de controlabilidad completa	7
2.2.3. Controlabilidad de la salida	8
2.2.4. Estabilizabilidad	9
2.3. Observabilidad	9
2.3.1. Observabilidad completa de sistemas en tiempo continuo	10
2.3.2. Forma alternativa de la condición para observabilidad completa	11
2.3.3. Principio de dualidad	13
2.3.4. Detectabilidad	14
2.4. Observadores de estado	14
2.4.1. Observador de estado	14
2.4.2. Observador de estado de orden completo	15
2.4.3. Problema dual	16
2.4.4. Condición necesaria y suficiente para la observación del estado	17
2.4.5. Obtención de la matriz de ganancia del observador de estado $\mathbf{K}_e$ por el método de transformación	18
2.4.6. Obtención de la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$ por el método de sustitución directa	18
2.4.7. Obtención de la matriz de ganancia del observador de estado por la Fórmula de Ackerman	19
2.4.8. Sugerencias sobre la selección de la mejor matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$	20

2.4.9. Efectos de agregar el observador de estado sobre el sistema en lazo cerrado	21
2.4.10. Función de transferencia del controlador basado en observador	22
2.4.11. Observador de orden mínimo	23
2.4.12. Observador de orden mínimo con realimentación de estado observado y sistema de control	29
2.4.13. Función de transferencia del controlador y el observador de orden mínimo	29
3. Modelado dinámico de un UAV de ala fija	31
3.1. Superficies de control de un avión	31
3.2. Modelo dinámico de guiñada	32
3.3. Modelo dinámico de alabeo	35
3.4. Modelo dinámico de cabeceo	36
4. Observadores de estados	39
4.1. Observador por modos deslizantes	39
4.1.1. Superficie deslizante	40
4.1.2. Efecto cortadura y parche de deslizamiento	41
4.1.3. Amortiguamiento del sistema	42
4.2. Observador no lineal de estado extendido	43
4.3. Observador Backstepping	45
4.4. Simulaciones	53
4.4.1. Ley de control PD	54
4.4.2. Ley de control Backstepping	54
4.4.3. Simulaciones del movimiento de alabeo con ley de control PD	55
4.4.4. Simulaciones del movimiento de guiñada con ley de control PD	58
4.4.5. Simulaciones del movimiento de altura con ley de control PD	60
4.4.6. Simulaciones del movimiento de alabeo con ley de control Backstepping	63
4.4.7. Simulaciones del movimiento de guiñada con ley de control Backstepping	65
4.4.8. Simulaciones del movimiento de altura con ley de control Backstepping	68
5. Resultados experimentales	72
5.1. Plataforma	72
5.2. Observador de Luenberger y ley de control PD	76
5.2.1. Movimiento de cabeceo	77
5.2.2. Movimiento de alabeo	81
5.2.3. Movimiento de guiñada	83
5.3. SMO y ley de control PD	85
5.3.1. Movimiento de cabeceo	85
5.3.2. Movimiento de alabeo	86
5.3.3. Movimiento de guiñada	90
5.4. NESO y ley de control PD	91

5.4.1.	Movimiento de cabeceo	92
5.4.2.	Movimiento de alabeo	94
5.4.3.	Movimiento de guiñada	94
5.5.	SMO y ley de control	99
5.5.1.	Movimiento de cabeceo	99
5.5.2.	Movimiento de alabeo	101
5.5.3.	Movimiento de guiñada	103
5.6.	NESO y ley de control Backstepping	105
5.6.1.	Movimiento de cabeceo	105
5.6.2.	Movimiento de alabeo	108
5.6.3.	Movimiento de guiñada	110
5.7.	Índice de desempeño	112
6.	Conclusiones	113
6.1.	Trabajo futuro	114
6.2.	Publicaciones derivadas de este trabajo	115

Índice de figuras

2.1. Diagrama de bloques del observador de estado de orden completo y el sistema, en el caso de que la entrada u y la salida y se consideran como escalares.	15
2.2. Sistema de control realimentado con estado observado	21
2.3. Representación en diagramas de bloques el sistema controlador-observador . .	23
2.4. Sistema de control realimentado con estado observado con un observador de orden mínimo.	24
2.5. Sistema con realimentación de estado observado en el que se utiliza el observador de orden mínimo	27
3.1. Variables de las superficies de control	31
3.2. Dinámica del movimiento de guiñada del UAV de ala fija.	32
3.3. Dinámica del movimiento de alabeo del UAV de ala fija	35
3.4. Dinámica del movimiento de cabeceo del UAV de ala fija.	37
4.1. Sistema de segundo orden con entrada conmutada	42
4.2. Trayectorias del plano de fase.	43
4.3. Alcanzando el efecto de amortiguamiento	44
4.4. Estimación de ángulo de alabeo para los tres observadores de estado.	56
4.5. Estimación de velocidad angular de alabeo para los tres observadores de estado. .	56
4.6. Error de estimación de ángulo de alabeo para los tres observadores de estado. .	56
4.7. Error de estimación de velocidad angular de alabeo para los tres observadores de estado.	57
4.8. Estado extendido para el movimiento de alabeo.	57
4.9. Señal de control PD para el movimiento de alabeo.	57
4.10. Estimación de ángulo de guiñada para los tres observadores de estado.	58
4.11. Estimación de velocidad angular de guiñada para los tres observadores de estado. .	58
4.12. Error de estimación de ángulo de guiñada para los tres observadores de estado. .	59
4.13. Error de estimación de velocidad angular de guiñada para los tres observadores de estado.	59
4.14. Estado extendido para el movimiento de guiñada.	59
4.15. Señal de control PD para el movimiento de guiñada.	60

4.16. Estimación de ángulo de cabeceo para los tres observadores de estado.	60
4.17. Estimación de velocidad angular de cabeceo para los tres observadores de estado.	61
4.18. Error de estimación de ángulo de cabeceo para los tres observadores de estado.	61
4.19. Error de estimación de velocidad angular de cabeceo para los tres observadores de estado.	61
4.20. Estado extendido para el movimiento de cabeceo.	62
4.21. Simulación del movimiento de altura con control PD para los tres observadores.	62
4.22. Señal de control PD para el movimiento de cabeceo.	62
4.23. Estimación de ángulo de alabeo para los tres observadores de estado.	63
4.24. Estimación de velocidad angular de alabeo para los tres observadores de estado.	63
4.25. Error de estimación de ángulo de alabeo para los tres observadores de estado. .	64
4.26. Error de estimación de velocidad angular de alabeo para los tres observadores de estado.	64
4.27. Estado extendido para el movimiento de alabeo.	64
4.28. Señal de control para el movimiento de alabeo.	65
4.29. Estimación de ángulo de guiñada para los tres observadores de estado.	65
4.30. Estimación de velocidad angular de guiñada para los tres observadores de estado.	66
4.31. Error de estimación de ángulo de guiñada para los tres observadores de estado.	66
4.32. Error de estimación de velocidad angular de guiñada para los tres observadores de estado.	66
4.33. Estado extendido para el movimiento de guiñada.	67
4.34. Señal de control Backstepping para el movimiento de guiñada.	67
4.35. Estimación de ángulo de cabeceo para los tres observadores de estado.	68
4.36. Estimación de velocidad angular de cabeceo para los tres observadores de estado.	68
4.37. Error de estimación de ángulo de cabeceo para los tres observadores de estado.	69
4.38. Error de estimación de velocidad angular de cabeceo para los tres observadores de estado.	69
4.39. Estado extendido para el movimiento de cabeceo.	69
4.40. Simulación del movimiento de altura con control Backstepping para los tres observadores.	70
4.41. Señal de control Backstepping para el movimiento de cabeceo.	70
5.1. Avión de aeromodelismo <i>T-28 Trojan</i>	73
5.2. Central inercial Microbotics MIDG II.	73
5.3. Módulo Xbee serie <i>XBee-PRO S2B</i>	74
5.4. Altímetro MS5607 de <i>Parallax Inc.</i>	74
5.5. Microcontrolador <i>Propeller P8X32A</i>	74
5.6. Tarjeta de desarrollo del microprocesador <i>Rabbit 6000</i>	75
5.7. Tarjeta complementaria para <i>Rabbit 6000</i>	75
5.8. Circuito impreso de tarjeta complementaria para <i>Rabbit 6000</i>	75
5.9. Radio control transmisor y receptor <i>Futaba T7C</i>	76
5.10. Transformación lineal	77
5.11. Sistema embebido montado en el avión	77

5.12. Gráfica del experimento de ángulo de cabeceo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	78
5.13. Gráfica del experimento de velocidad de cabeceo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	78
5.14. Gráfica del error de estimación del ángulo de cabeceo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	79
5.15. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de cabeceo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	79
5.16. Gráfica del experimento de medida de altura aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	79
5.17. Gráfica de señal de control aplicando el observador de Luenberger y la ley de control PD para el ángulo de cabeceo.	80
5.18. Gráfica del experimento del ángulo de alabeo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	81
5.19. Gráfica del experimento de velocidad de alabeo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	81
5.20. Gráfica del error de estimación del ángulo de alabeo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	82
5.21. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de alabeo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	82
5.22. Gráfica de la señal de control aplicando el observador de Luenberger y la ley de control PD para el ángulo de alabeo.	82
5.23. Gráfica del experimento de ángulo de guiñada aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	83
5.24. Gráfica del experimento de velocidad angular de guiñada aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	83
5.25. Gráfica del error estimación de ángulo de guiñada aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	84
5.26. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de guiñada aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.	84
5.27. Gráfica de señal de control aplicando el observador de Luenberger y la ley de control PD para el ángulo de guiñada.	84
5.28. Gráfica del experimento de ángulo de cabeceo aplicando SMO y ley de control PD.	85
5.29. Gráfica del experimento de velocidad angular de cabeceo aplicando el SMO y ley de control PD.	85
5.30. Gráfica del error de estimación de ángulo de cabeceo aplicando el SMO y ley de control PD.	86
5.31. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de cabeceo aplicando el SMO y ley de control PD.	86
5.32. Gráfica del experimento de medida de altura aplicando el SMO y ley de control PD.	87
5.33. Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control PD para el ángulo de cabeceo.	87

5.34. Gráfica del experimento de ángulo de alabeo aplicando SMO y ley de control PD.	88
5.35. Gráfica del experimento de velocidad angular de alabeo aplicando el SMO y ley de control PD.	88
5.36. Gráfica del error de estimación de ángulo de alabeo aplicando el SMO y ley de control PD.	88
5.37. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de alabeo aplicando el SMO y ley de control PD.	89
5.38. Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control PD para el ángulo de alabeo.	89
5.39. Gráfica del experimento de ángulo de guiñada aplicando SMO y ley de control PD.	90
5.40. Gráfica del experimento de velocidad angular de guiñada aplicando el SMO y ley de control PD.	90
5.41. Gráfica del error de estimación de ángulo de guiñada aplicando el SMO y ley de control PD.	91
5.42. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de guiñada aplicando el SMO y ley de control PD.	91
5.43. Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control PD para el ángulo de guiñada.	92
5.44. Gráfica del experimento de ángulo de cabeceo aplicando NESO y ley de control PD.	92
5.45. Gráfica del experimento de velocidad angular de cabeceo aplicando el NESO y ley de control PD.	93
5.46. Gráfica del error de estimación de ángulo de cabeceo aplicando el NESO y ley de control PD.	93
5.47. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de cabeceo aplicando el NESO y ley de control PD.	93
5.48. Gráfica del experimento de la medida de altura aplicando el NESO y ley de control PD.	94
5.49. Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control PD para el ángulo de cabeceo.	94
5.50. Gráfica del experimento de ángulo de alabeo aplicando NESO y ley de control PD.	95
5.51. Gráfica del experimento de velocidad angular de alabeo aplicando el NESO y ley de control PD.	95
5.52. Gráfica del error de estimación de ángulo de alabeo aplicando el NESO y ley de control PD.	95
5.53. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de alabeo aplicando el NESO y ley de control PD.	96
5.54. Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control PD para el ángulo de alabeo.	96
5.55. Gráfica del experimento de ángulo de guiñada aplicando NESO y ley de control PD.	97

5.56. Gráfica del experimento de velocidad de guiñada aplicando el NESO y ley de control PD.	97
5.57. Gráfica del error estimación de ángulo de guiñada aplicando el NESO y ley de control PD.	98
5.58. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de guiñada aplicando el NESO y ley de control PD.	98
5.59. Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control PD para el ángulo de guiñada.	98
5.60. Gráfica del experimento de ángulo de cabeceo aplicando SMO y ley de control Backstepping.	99
5.61. Gráfica del experimento de velocidad de cabeceo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.	99
5.62. Gráfica del error estimación de ángulo de cabeceo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.	100
5.63. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de cabeceo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.	100
5.64. Gráfica del experimento de medida de altura aplicando el SMO y ley de control Backstepping.	100
5.65. Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control Backstepping para el ángulo de cabeceo.	101
5.66. Gráfica del experimento de ángulo de alabeo aplicando SMO y ley de control Backstepping.	101
5.67. Gráfica del experimento de velocidad angular de alabeo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.	102
5.68. Gráfica del error de estimación de ángulo de alabeo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.	102
5.69. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de alabeo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.	102
5.70. Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control Backstepping para el ángulo de alabeo.	103
5.71. Gráfica del experimento de ángulo de guiñada aplicando SMO y ley de control Backstepping.	103
5.72. Gráfica del experimento de velocidad angular de guiñada aplicando el SMO y ley de control Backstepping.	104
5.73. Gráfica del error de estimación de ángulo de guiñada aplicando el SMO y ley de control Backstepping.	104
5.74. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de guiñada aplicando el SMO y ley de control Backstepping.	104
5.75. Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control Backstepping para el ángulo de guiñada.	105
5.76. Gráfica del experimento de ángulo de cabeceo aplicando NESO y ley de control Backstepping.	105
5.77. Gráfica del experimento de velocidad angular de cabeceo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.	106

5.78. Gráfica del error de estimación de ángulo de cabeceo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.	106
5.79. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de cabeceo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.	107
5.80. Gráfica del experimento de medida de altura aplicando el NESO y ley de control Backstepping.	107
5.81. Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control Backstepping para el ángulo de cabeceo.	107
5.82. Gráfica del experimento de ángulo de alabeo aplicando NESO y ley de control Backstepping.	108
5.83. Gráfica del experimento de velocidad angular de alabeo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.	108
5.84. Gráfica del error de estimación de ángulo de alabeo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.	109
5.85. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de alabeo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.	109
5.86. Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control Backstepping para el ángulo de alabeo.	109
5.87. Gráfica del experimento de ángulo de guiñada aplicando NESO y ley de control Backstepping.	110
5.88. Gráfica del experimento de velocidad angular de guiñada aplicando el NESO y ley de control Backstepping.	110
5.89. Gráfica del error estimación de ángulo de guiñada aplicando el NESO y ley de control Backstepping.	111
5.90. Gráfica del error de estimación de velocidad angular de guiñada aplicando el NESO y ley de control Backstepping.	111
5.91. Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control Backstepping para el ángulo de guiñada.	111

Introducción

A partir del trabajo de D. Luenberger [1], los observadores de estado han confirmado ser valiosos tanto en la regulación de sistemas como en detección e identificación de fallas en sistemas dinámicos. La mayoría de los diseños de observadores de estados se basan en el modelo matemático de la planta, lo que hace que las perturbaciones, las no linealidades, y las incertidumbres dinámicas sean desafíos importantes en las aplicaciones prácticas. Por esta razón, el desarrollo de observadores robustos y de alto rendimiento sigue siendo un área de gran interés científico, con continuas innovaciones en sus diseños. Los Observadores por Modos Deslizantes (SMO, por sus siglas en inglés de Sliding Mode Observer) han mostrado mejoras significativas en la robustez frente a diversas perturbaciones e incertidumbres del sistema. Este tipo de observador de estados fue presentado por primera vez por Slotine *et al.* [2] y Utkin [3]. En [4], esta aplicación robusta se utilizó para la identificación de fallas en sistemas no lineales, mientras que en [5] se empleó para un control robusto de seguimiento. Un tipo innovador de observador, conocido como Observador No Lineal de Estado Extendido (NESO, por sus siglas en inglés de Nonlinear Extended State Observers) fue propuesto en [6]. Este diseño es, en gran medida, independiente del modelo matemático de la planta, lo que le confiere una robustez inherente. Estos observadores han probado y verificado su utilidad en problemas industriales de control [7, 8, 9].

En este trabajo de tesis se realiza una comparación del funcionamiento y de las características de estos observadores, mismos que son aplicados al modelo dinámico de un UAV (Unmanned Aerial Vehicle) de ala fija. Estos vehículos, en los últimos años, han incrementado su participación en aplicaciones civiles, por ejemplo: vigilancia en zonas de desastre, tareas de vigilancia, fotografía, inspección de infraestructura en lugares de difícil acceso, localización de víctimas, entre otras [10]. El principal criterio para la comparación se rige en la diferencia entre el estado medido y el estimado, denominado como error de seguimiento del estado estimado, evaluando tanto su comportamiento en estado estacionario como durante el transitorio, y también en la robustez debida a las incertidumbres y/o perturbaciones del modelo de la planta.

1.1. Objetivos de la tesis

1.1.1. Objetivo general

Estudiar y diseñar observadores de estado aplicados a un vehículo aéreo no tripulado de ala fija para la estimación de los estados que definan su postura, así como validarlos experimentalmente.

1.1.2. Objetivos específicos

- Estudiar los observadores de estado existentes en la literatura.
- Realizar simulaciones de los observadores existentes en la literatura utilizando el modelo matemático para un vehículo aéreo no tripulado de ala fija.
- Implementar los observadores de este estudio en una plataforma física.
- Publicar los resultados en congresos y revistas de prestigio.

1.1.3. Estructura del documento

La estructura del presente trabajo de tesis está definida de la siguiente forma:

El capítulo 2 presenta el marco teórico que proporciona la referencia para el entendimiento de este trabajo.

El capítulo 3 detalla el modelo aerodinámico del vehículo aéreo en relación a los estados, que definen su postura, como lo son los ángulos de guiñada, alabeo y cabeceo que son utilizados en las simulaciones e implementación de los observadores estudiados.

Los observadores estudiados en este trabajo, aplicados a la dinámica desacoplada del vehículo aéreo, se presentan en el capítulo 4, y el cual incluye los resultados obtenidos de sus simulaciones.

El capítulo 5 presenta los resultados experimentales al implementar los observadores de estado, aplicados en dos diferentes leyes de control sobre la dinámica desacoplada de un vehículo aéreo no tripulado de ala fija.

El capítulo 6 es el último de este trabajo, y en él, se da cuenta de las conclusiones así como propuestas de trabajo futuro y un listado de las publicaciones desarrolladas durante esta tesis.

Marco teórico

2.1. Antecedentes

Los sistemas de control son utilizados para regular una gran variedad de máquinas, productos y procesos. Entre las variables a controlar se encuentran el movimiento, temperatura, flujo de líquidos o de calor, presión, tensión, corriente, entre otras. La mayoría de las variables de control son tomadas de las medidas de sensores. De hecho, la teoría de control frecuentemente asume la disponibilidad de señales de control exactas para la realimentación. Desafortunadamente, dicha suposición no siempre es cierta. Los sensores físicos tienen deficiencias que pueden degradar un sistema de control.

Entre los problemas que presentan los sensores, se tienen: su alto costo respecto al sistema que se desea controlar; el cableado asociado a los sensores, reduciendo su confiabilidad; en algunas situaciones, las señales son poco prácticas o inaccesibles de medir, por ejemplo, en ambientes hostiles; los sensores generalmente inducen errores significativos tales como ruido estocástico, errores cíclicos, y capacidad de respuesta limitada.

Por otro lado, los observadores pueden ser utilizados para aumentar o sustituir sensores en un sistema de control. Los observadores son algoritmos que combinan señales de sensores con otras variables conocidas del sistema de control para producir señales observadas. En algunos casos, estas señales pueden ser más precisas, menos costosas y más confiables que las señales de los sensores.

En los problemas prácticos de control, no es posible evitar incluir incertidumbre en parámetros y perturbaciones externas debido al error de modelado, error de mediciones, aproximaciones de linealización, etc. Por lo tanto, es aconsejable el diseño de un observador robusto, el cual pueda garantizar exactitud de estimación de estados entre los estados dinámicos del sistema y la observación de la presencia de incertidumbres.

Debido a lo anterior, el problema de diseño de observadores de estado robustos, para sistemas dinámicos con incertidumbres significativas, está recibiendo una atención considerable de muchos investigadores, y algunos enfoques de diseño de observadores de estado robusto se han desarrollado en los últimos años. En [15], por ejemplo, se propone una clase de observador de estado robusto para sistemas dinámicos con incertidumbres no lineales, sometido a no linealidades acotadas e incertidumbres, mediante el empleo de técnicas relacionadas a la teoría de

sistemas de estructura variable. Sin embargo, el observador de estado robusto continuo que se propone en [15] no puede garantizar la convergencia asintótica del error de observación entre la estimación de estado del observador y el estado verdadero.

En [16], una mejora del observador de estado robusto es presentado para sistemas dinámicos no lineales con incertidumbre, el cual puede garantizar la convergencia exponencial del error del observador.

En [17], mediante la utilización de las soluciones de la ecuación algebraica de Riccati, se desarrolla un esquema de observador de estado robusto para sistemas dinámicos lineales con perturbaciones, el cual puede garantizar que el error del observador tienda a cero si completa algunas condiciones, que en [18] se muestran satisfechas.

Por otra parte, a excepción de incertidumbres importantes, los retardos de tiempo a menudo se encuentran en varios sistemas de ingeniería a controlar, tales como procesos químicos, hidráulicos, sistemas de rodamientos de molinos, sistemas económicos, etcétera, y la existencia de retardos es frecuentemente una fuente de inestabilidad. Por lo tanto, el ejercicio de diseñar observadores de estado para sistemas dinámicos con retardo de tiempo, también está recibiendo una considerable atención por muchos investigadores, y se han desarrollado algunos enfoques para el diseño de observadores (ver, por ejemplo, [19]-[23] y sus referencias).

En [24], es propuesto un observador de estado de sistemas lineales con retardo de tiempo, y algunas condiciones suficientes se derivan empleando el método de desigualdades lineales matriciales (LMI). Por otra parte, en [25], los resultados obtenidos en [24] son ampliados a sistemas lineales en tiempo discreto y considerando retardos.

En [26], el problema de diseño de observadores de orden reducido es también considerado para sistemas lineales neutros con retardo de tiempo, y basándose en las desigualdades lineales matriciales así como la formulación de la matriz de igualdad lineal, se derivan algunas condiciones de estabilidad independientes a los retardos.

En [27], se presenta un método mediante el cual algunos observadores de estado con retardo de orden reducido se construyen para sistemas lineales con entradas desconocidas.

En [28], por el método de modos deslizantes, se considera el problema de diseño de observadores de estado para sistemas lineales con retado de tiempo variable. Sin embargo, el retardo de tiempo, o sus límites, se asumen ambos como conocidos, y tales retardos o límites son utilizados para construir algunos tipos de observadores de estado (ver por ejemplo [24]-[27]). De hecho, en la literatura de control de sistemas con retardo de tiempo, las condiciones que incluyen variables de estado con retardo, generalmente asumen estados lineales o estados lineales normalmente acotados (ver por ejemplo [30] y [31] y sus referencias).

Cabe señalar que para los sistemas dinámicos con incertidumbres, el límite superior del vector normal en la incertidumbre generalmente se supone conocido, y tal límite es empleado

para construir algún tipo de observador de estado robusto (ver por ejemplo [15]-[17] para sistemas sin retardo de tiempo o [24] para sistemas con retardo de tiempo). Sin embargo, en cierto número de problemas prácticos de control, tales límites pueden ser desconocidos o ser parcialmente conocidos. En algunos casos, también puede ser difícil evaluar su límite superior. Por lo tanto, para tal clase de sistemas dinámicos con incertidumbres, cuyos límites de incertidumbre se conocen parcialmente, un esquema adaptable debe introducirse para actualizar esos límites desconocidos para la construcción de algunos observadores de estado robustos. En general, tal observador es llamado, observador de estado robusto adaptable.

En [32], se considera el problema de diseño del observador de estado robusto adaptable, para una clase de sistema dinámico no lineal con incertidumbre y con retardo de estados perturbados. Con el observador de estado robusto adaptable propuesto en [32], se muestra que el error de estado estimado puede converger asintóticamente a cero en presencia de incertidumbres significativas, incluyendo retardo de tiempo.

2.2. Controlabilidad

Se considera que un sistema es controlable en el instante t_0 si es posible desplazarlo desde cualquier punto de partida $\mathbf{x}(t_0)$ hacia cualquier otro estado, utilizando un vector de control sin restricciones, en un lapso de tiempo infinito [11].

Kalman fue el primero en introducir los conceptos de controlabilidad y observabilidad que son fundamentales para el diseño de sistemas de control en el espacio de estados. Incluso, estas condiciones de controlabilidad y observabilidad ayudan a determinar si es que se puede encontrar una solución plena, o completa, para el diseño de un sistema de control. Si un sistema no es controlable, cabe la posibilidad de que no exista una solución para este problema. A pesar de que la mayoría de los sistemas físicos se declaren controlables y observables, los modelos matemáticos correspondientes pueden no tener estas propiedades. En tales casos, es crucial identificar cuales son las condiciones bajo las cuales los sistemas sean controlables y observables.

2.2.1. Controlabilidad completa del estado en un sistema de tiempo continuo

Considérese el sistema en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}$ es la señal de control, $\mathbf{A}$ es una matriz ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$) y $\mathbf{B}$ es un vector ($\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$). Un sistema que esté descrito por (2.1) se considera controlable en $t = t_0$ en caso de que sea posible realizar el diseño de una señal de control sin restricciones que pueda transferir cualquier estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Si todos los estados del sistema pueden ser controlados de esta manera, el sistema se denomina completamente controlable [11].

A continuación, se determinará la condición para la controlabilidad completa del estado. Sin perder generalidad, se asume que el estado final $x(t_1)$, es el origen en el espacio de estados y que el tiempo inicial es cero, es decir, $t_0 = 0$ [11].

La solución de la ecuación (2.1) puede escribirse como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau.$$

Si se aplica la definición vista anteriormente de controlabilidad completa del estado, se obtiene

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0} = e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau,$$

donde $t_1 > t_0$, o bien

$$\mathbf{x}(0) = - \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} u(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Tomando en cuenta $e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \mathbf{A} + \alpha_2(t) \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t) \mathbf{A}^{m-1}$, entonces

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) \mathbf{A}^k, \quad (2.3)$$

y al sustituir (2.3) en (2.2), se obtiene

$$\mathbf{x}(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Si se define

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k,$$

entonces (2.4) cambia a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \beta_k, \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dots \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En caso de que el sistema sea completamente controlable, se puede decir que para cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$, (2.5) debe cumplirse. Esto implica que, el rango de la matriz resultante, de dimensiones $n \times n$, tiene que ser completo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Esto significa que el resultado que se obtiene se extiende hasta al caso en el que $\mathbf{u}$, que es el vector de control es de dimensión r . Ya que el sistema se describe por la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

donde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ es un vector, entonces se demuestra que la condición buscada para la controlabilidad completa del estado va a depender de que la matriz de dimensiones $n \times nr$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

tenga que ser de rango n , lo que quiere decir, que contiene n vectores columna que son linealmente independientes. La matriz anterior se conoce típicamente como la *matriz de controlabilidad*.

2.2.2. Alternativa para la condición de controlabilidad completa

Considérese el siguiente sistema, definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ es el vector de control, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Si los valores propios de $\mathbf{A}$ (λ_i) son diferentes entre ellos, indica que es probable hallar una matriz de transformación $\mathbf{P}$, de forma

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Note que, si los (λ_i) de $\mathbf{A}$ son distintos entre ellos, los vectores propios de $\mathbf{A}$, también lo serán, pero el caso contrario no será así [11]. Es importante mencionar que cada columna de $\mathbf{P}$ es un vector propio de la matriz $\mathbf{A}$ con valor de λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) asociado. Si se establece que

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}, \quad (2.7)$$

al realizar la sustitución de (2.7) en (2.6), después de las respectivas operaciones, se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Definiendo

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{F} = (f_{ij})$$

la ecuación (2.8) se reescribe como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + \cdots + f_{1r}u_r. \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + \cdots + f_{2r}u_r. \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \lambda_n z_n + f_{n1}u_1 + f_{n2}u_2 + \cdots + f_{nr}u_r. \end{aligned}$$

Para el caso en el que todos los elementos de alguna de las filas de la matriz $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ sean cero, entonces la variable de estado que le corresponda no puede ser controlada por ninguna de las entradas u_i . Por lo tanto, la condición para que el estado sea completamente controlable se establece como sigue: si los autovectores de la matriz $\mathbf{A}$ son distintos, el sistema será completamente controlable si y sólo si ninguna del total de las filas de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ tenga todos los elementos nulos. Es crucial apuntar que, para aplicar la condición de controlabilidad completa del estado, es necesario la diagonalización de la matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ de (2.8).

Para el caso en el que la matriz $\mathbf{A}$, de (2.6), no tenga autovectores distintos, ésta no se podrá diagonalizar. En este caso, $\mathbf{A}$ se convierte en la forma canónica de Jordan. Por ejemplo, si $\mathbf{A}$ tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_6, \dots, \lambda_n$ y además tiene $n - 3$ autovectores que son distintos, la forma canónica de Jordan, de la matriz $\mathbf{A}$, es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & \lambda_4 & 1 & & \\ & & & 0 & \lambda_4 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_6 \end{bmatrix}.$$

Las submatrices cuadradas, ubicadas en la diagonal principal, son conocidas como bloques de Jordan. Supongamos que se obtiene una matriz de transformación $\mathbf{S}$ de manera que

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{z}. \quad (2.9)$$

Por lo que la sustitución de (2.9) en (2.6) da

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{z} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}, \\ &= \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

La condición para lograr la controlabilidad del estado de forma completa para el sistema descrito en (2.6), se formula de la siguiente manera: el sistema es controlable si y sólo si: (a) en la ecuación (2.10), no hay dos bloques de Jordan en la matriz $\mathbf{J}$ que compartan los mismos valores propios; (b) en la matriz $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}$, los elementos de cualquier fila que coincidan con la última fila de cada bloque de Jordan no presentan todos los valores nulos, y (c) los elementos de cada fila de la matriz $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}$ asociados a diferentes valores propios no son todos nulos.

2.2.3. Controlabilidad de la salida

En la implementación práctica de un sistema de control, puede surgir la necesidad de manejar la salida y no el estado del sistema. Tener controlabilidad total o completa del estado no es necesariamente un requisito para controlar la salida del sistema, ni garantiza su eficacia. Por consiguiente, resulta beneficioso establecer, de forma independiente, la noción de controlabilidad completa de la salida [11].

Considerando el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad (2.12)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ es el vector de control, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salidas, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ es una matriz, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz, y $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ es una matriz.

Se dice que el sistema descrito mediante (2.11) y (2.12) es completamente controlable, en términos de salida, si se puede construir un vector de control sin restricciones $\mathbf{u}$ que transfiera cualquier salida inicial $\mathbf{y}(t_0)$ a cualquier salida final $\mathbf{y}(t_i)$ en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Se puede demostrar que la condición para controlabilidad completa de la salida es la siguiente: el sistema descrito por (2.11) y (2.12) es completamente controlable en términos de la salida si y sólo si la matriz de dimensión $m \times (n+1)r$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

es de rango completo m . Observe que la presencia del término $\mathbf{D}\mathbf{u}$ en (2.12) siempre ayuda a establecer la controlabilidad de la salida.

2.2.4. Estabilizabilidad

Cuando los modos no controlables de un sistema son estables, y los modos inestables son controlables, se denomina que el sistema es estabilizable, aunque sea parcialmente controlable. Por ejemplo, considere el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

el cual no es de estado controlable. El sistema presenta un modo no controlable asociado con el valor propio -1 . Sin embargo, el modo asociado con el valor propio 1 es controlable. Con una realimentación adecuada, es posible estabilizar el sistema, lo que implica que el sistema es estabilizable.

2.3. Observabilidad

En esta sección, se examinará la observabilidad de los sistemas lineales. Se considera el sistema lineal no forzado que se describe a través de las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz, y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz. Se considera completamente observable si $\mathbf{x}(t_0)$ puede determinarse

observando $\mathbf{y}(t)$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. En otras palabras, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado eventualmente influyen en cada componente del vector de salida. La observabilidad resulta útil para abordar problemas de reconstrucción de variables de estado no medibles a partir de variables medibles en el menor tiempo posible. En esta sección, se consideran exclusivamente sistemas lineales e invariantes en el tiempo, asumiendo, sin pérdida de generalidad, que $t_0 = 0$.

En la práctica, el concepto de observabilidad es crucial porque, uno de los desafíos del control mediante realimentación del estado es que algunas variables, también de estado, no son accesibles para la medición directa. Esto hace necesario estimar las variables de estado no medibles para generar las señales de control. En la sección 2.4 se demostrará que estas estimaciones de las variables de estado son posibles únicamente si el sistema es completamente observable.

Al analizar las condiciones de observabilidad, se examina el sistema sin excitación, tal como se describe en las ecuaciones (2.14) y (2.15). La razón de esto es la siguiente, si el sistema se describe mediante

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

además, $\mathbf{y}(t)$ es

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u},$$

Dado que las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son conocidas, al igual que $\mathbf{u}(t)$, se considera que los dos últimos términos del segundo miembro de esta última ecuación son conocidos. De manera que, se pueden restar del valor observado de $\mathbf{y}(t)$, y, a fin de investigar una condición necesaria y suficiente para observabilidad completa, es suficiente considerar el sistema descrito mediante las ecuaciones (2.14) y (2.15) [11].

2.3.1. Observabilidad completa de sistemas en tiempo continuo

Sea el sistema descrito mediante (2.14) y (2.15). El vector de salida $\mathbf{y}(t)$ es

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0).$$

De la ecuación

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1},$$

se obtiene que

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k,$$

donde el valor de n es el grado del polinomio característico. Note que la ecuación anterior, con m sustituido por n , se puede deducir a partir del polinomio característico.

Por tanto, se obtiene

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0),$$

o bien

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_0(t) \mathbf{C} \mathbf{x}(0) + \alpha_1(t) \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t) \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}(0). \quad (2.16)$$

Así, si el sistema es completamente observable, dada la salida $\mathbf{y}(t)$ durante un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$, $\mathbf{x}(0)$ se determina únicamente mediante (2.16). De lo anterior se observa que esto requiere que el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix},$$

sea n .

De lo anterior, se puede expresar la condición para determinar la observabilidad completa del modo siguiente. Sea el sistema descrito por (2.14) y (2.15), se declara completamente observable si y sólo si la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \vdots & \mathbf{A}^* \mathbf{C}^* & \vdots & \dots & \vdots & (\mathbf{A}^*)^{n-1} \mathbf{C}^* \end{bmatrix},$$

es de rango n , o tiene n vectores columna linealmente independientes y, $\mathbf{C}^*$ y $\mathbf{A}^*$ son matrices transpuestas conjugadas. La matriz anterior, se denomina *matriz de observabilidad* [11].

2.3.2. Forma alternativa de la condición para observabilidad completa

Sea el sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}. \quad (2.18)$$

Tomando en cuenta que la matriz de transformación $\mathbf{P}$ transforma a la matriz $\mathbf{A}$ en forma diagonal a través de la siguiente operación:

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{D},$$

donde la matriz $\mathbf{D}$ es diagonal. Si se define

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{z},$$

entonces, (2.17) y (2.18) se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{z}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}.\end{aligned}$$

Así que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}(0),$$

o bien

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{z}(0) = \mathbf{C}\mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} z_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} z_2(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} z_n(0) \end{bmatrix}.$$

La completa observabilidad del sistema se establece si ninguna columna de la matriz $\mathbf{C}\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ consiste únicamente de elementos cero. Lo anterior debido a que, si la columna i -ésima de $\mathbf{C}\mathbf{P}$ está formada únicamente por ceros, $z_i(0)$, que es la variable de estado, no contribuirá a la ecuación de salida y , por lo tanto, no puede ser determinada a partir de la observación de $\mathbf{y}(t)$. En tal caso, $\mathbf{x}(0)$, que está relacionada con $\mathbf{z}(0)$ a través de la matriz $\mathbf{P}$ no singular, no puede ser determinado. Es importante recordar que esta prueba sólo se aplica si la matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ está en forma diagonal.

En el caso de que la matriz $\mathbf{A}$ no pueda ser transformada en una matriz diagonal, mediante una matriz de transformación $\mathbf{S}$ adecuada, existe la posibilidad de llevar $\mathbf{A}$ a su forma canónica de Jordan:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{J}.$$

Sea

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{z},$$

en este caso, (2.17) y (2.18) se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{z} = \mathbf{J}\mathbf{z} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{z},\end{aligned}$$

así que,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{z}(0).$$

Para determinar si el sistema es completamente observable, se deben cumplir tres condiciones clave: (a) no deben existir dos bloques de Jordan en la matriz $\mathbf{J}$ asociados con los mismos valores propios; (b) las columnas de la matriz $\mathbf{C}\mathbf{S}$ que correspondan a la primera fila de cada bloque de Jordan no deben consistir en elementos cero; (c) las columnas de la matriz $\mathbf{C}\mathbf{S}$ que correspondan a diferentes valores propios no deben estar formados únicamente por elementos cero.

2.3.3. Principio de dualidad

A continuación, se examinará la conexión entre controlabilidad y observabilidad. Se presentará el principio de dualidad, propuesto por Kalman, para resaltar las analogías notables entre controlabilidad y observabilidad.

Sea S_1 el sistema descrito tal que

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}$$

donde el vector de estado es $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, el vector de control es $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$, el vector de salidas es $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son matrices.

Considérese además a S_2 como el sistema dual definido por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*\mathbf{v}, \\ \mathbf{n} &= \mathbf{B}^*\mathbf{z},\end{aligned}$$

donde el vector de estado es $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, el vector de control es $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, el vector de salidas es $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^r$, la matriz transpuesta conjugada de $\mathbf{A}$ es $\mathbf{A}^*$, la matriz transpuesta conjugada de $\mathbf{B}$ es $\mathbf{B}^*$, y $\mathbf{C}^*$ es la matriz transpuesta conjugada de $\mathbf{C}$. El principio de dualidad establece que el sistema S_1 es completamente controlable (observable) de los estados si y sólo si el sistema S_2 es completamente observable (controlable) de los estados.

Para verificar este principio, se establecen las condiciones necesarias y suficientes para controlabilidad y observabilidad completas de los estados de los sistemas S_1 y S_2 . Para el sistema definido como S_1 :

1. Es necesario considerar como una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado que el rango de la matriz $n \times nr$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

sea n .

2. Es necesario considerar como una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa del sistema que el rango de la matriz $n \times nm$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* & \dots & (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^* \end{bmatrix},$$

sea n .

Para el sistema definido como S_2 :

1. Es necesario considerar como una condición necesaria y suficiente para controlabilidad completa del estado que el rango de la matriz $n \times nm$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* & \dots & (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^* \end{bmatrix},$$

sea n .

2. Es necesario considerar como una condición necesaria y suficiente para observabilidad completa que el rango de la matriz $n \times nr$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

sea n .

Comparando estas condiciones, la validez de este principio es evidente. A partir de él, la observabilidad de un sistema específico se puede confirmar al demostrar la controlabilidad del estado de su sistema dual [11].

2.3.4. Detectabilidad

En el caso de un sistema parcialmente observable, se considera detectable si los modos no observables son estables y los modos observables son inestables. Es importante destacar que el concepto de detectabilidad es dual al concepto de estabilizabilidad, [11].

2.4. Observadores de estado

En diseño de sistemas de control mediante el método de asignación de polos, se asume que todas las variables de estado están disponibles para su realimentación. No obstante, en la práctica, no todas las variables de estado son accesibles para esta realimentación directa, lo que hace necesario estimar aquellas variables de estado que no se pueden medir directamente. Se conoce comúnmente como *observación* a la estimación de variables de estado no medibles. Se llaman *observadores de estado*, o simplemente *observador*, al dispositivo o programa de computadora que estima u observa las variables de estado. Si el observador de estado puede captar todas las variables de estado del sistema, independientemente de si algunas están disponibles por medición directa, se le llama *observador de estado de orden completo*. En algunas situaciones, un observador de este tipo no es necesario, ya que sólo se requiere estimar las variables de estado que no se pueden medir, pero no de aquellas que ya se están midiendo directamente. Por ejemplo, como las variables de salida son observables y están linealmente relacionadas con las variables de estado, no es necesario observar todas las variables de estado, sino únicamente las $n - m$ variables de estado, donde n es la dimensión del vector de estado y m es la dimensión del vector de salida [11].

Un observador de estados que estima menos de n variables, se conoce como *observador de estado de orden reducido* o, simplemente, un *observador de orden reducido*. Si el observador de estado de orden reducido tiene el orden mínimo posible, se llama *observador de estado de orden mínimo* u *observador de orden mínimo*. En esta sección se estudiarán tanto el observador de estado de orden completo como el de orden mínimo [11].

2.4.1. Observador de estado

Un observador de estado deduce las variables de estado utilizando las mediciones de las variables de salida y de control. Por ello, el concepto de observabilidad presentado en la Sec-

ción 2.3 es crucial. Como se demostrará más adelante, los observadores de estado sólo pueden ser diseñados si la condición de observabilidad se satisface.

A partir de aquí, para el estudio relacionado a los observadores de estado, se utilizará la notación $\hat{x}$ para representar el vector de estado observado. En numerosos casos prácticos, este vector de estado observado, $\hat{x}$, se utiliza en la realimentación del estado para generar el vector de control deseado.

Para el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.19)$$

$$y = Cx \quad (2.20)$$

el algoritmo de observador de estados es un subsistema empleado para reconstruir el vector de estado de la planta o sistema. El modelo matemático, de dicho algoritmo de observación, es en principio el mismo que el de la planta, excepto que éste incluye un término adicional en el que se tiene el error de estimación con el fin de compensar las diferencias comunes en las matrices A y B , y también la falta del error inicial. El error de observación, o de estimación, es el resultado de la diferencia entre la salida medida y la salida estimada. El error inicial de estimación se consigue de la diferencia entre el valor del estado inicial y el estado estimado inicial. En base a lo anterior, se define el algoritmo matemático del observador como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x}), \\ &= (A - K_eC)\hat{x} + Bu + K_ey, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde el estado estimado es $\hat{x}$ y la salida estimada es $C\hat{x}$. Las entradas al modelo del observador son la salida y y la entrada de la señal de control u . La matriz de ganancias K_e , que se llama matriz de ganancia del observador, es una matriz que ayuda con ponderación al término de corrección, es decir, la diferencia entre la salida medida del sistema y y la salida estimada $C\hat{x}$. Esta matriz contribuye a corregir de forma continua la salida del modelo y mejora el comportamiento del algoritmo de observación. La Figura 2.1 es una representación en un diagrama de bloques del algoritmo del observador de estado de orden completo.



Figura 2.1: Diagrama de bloques del observador de estado de orden completo y el sistema, en el caso de que la entrada u y la salida y se consideran como escalares.

2.4.2. Observador de estado de orden completo

El observador de estado que a continuación se analizará, es del mismo orden al del sistema que quedó definido en (2.19) y (2.20), y que el modelo del observador definido por (2.21).

La ecuación de error del observador se obtiene de la resta de (2.21) con (2.19).

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_e(\mathbf{C} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}).\end{aligned}\quad (2.22)$$

La diferencia entre $\mathbf{x}$ y $\hat{\mathbf{x}}$ define el vector de error $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}.$$

Entonces, (2.22) puede reescribirse como

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}. \quad (2.23)$$

De (2.23), se puede deducir que la dinámica del vector de error está influenciada por los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$. Si la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ es estable, el vector de error tenderá a cero, independientemente del vector de error inicial $\mathbf{e}(0)$. En otras palabras, $\hat{\mathbf{x}}(t)$ convergerá a $\mathbf{x}(t)$ sin importar los valores iniciales de $\mathbf{x}(0)$ y $\hat{\mathbf{x}}(0)$. Si se seleccionan los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ de manera que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable, y lo suficientemente rápido, entonces cualquier vector de error convergerá a 0 (el origen) con una velocidad adecuada.

Si el sistema es completamente observable, es posible elegir una matriz $\mathbf{K}_e$ tal que la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ tenga valores propios deseados. En otras palabras, se puede diseñar la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$, para obtener la configuración deseada de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ [11].

2.4.3. Problema dual

El diseño de observador de orden completo consiste en determinar la matriz de ganancias del observador, $\mathbf{K}_e$, de manera que la dinámica de error, definida por (2.23), sea asintóticamente estable y tenga una velocidad de respuesta adecuada. La estabilidad asintótica, y la velocidad de respuesta de la dinámica de error, están determinadas por los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$. Por lo tanto, el diseño del observador de orden completo implica seleccionar los valores de la matriz $\mathbf{K}_e$ para que $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ tenga los valores propios deseados, Por lo que el problema es equivalente al de la asignación de polos. De hecho, ambos problemas son matemáticamente similares, y es por eso que a esa propiedad se le conoce como dualidad [11].

Ahora, considere el sistema definido mediante

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}$$

donde a la hora de diseñar el observador de estado de orden completo, se resuelve también el problema dual, lo que implica encontrar la solución del problema de asignación de polos para el sistema dual:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*v, \\ n &= \mathbf{B}\mathbf{z},\end{aligned}$$

asumiendo que la señal de control v es

$$v = -\mathbf{K}\mathbf{z}.$$

Para el caso en que el sistema dual es de estado completamente controlable, se puede determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado $\mathbf{K}$ de tal manera que la matriz $\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}$ tenga los valores propios deseados.

Si los valores propios deseados de la matriz del observador de estado son $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, entonces, al tomar los mismos μ_i (con $i = 1, 2, \dots, n$), como los valores propios deseados de la matriz de ganancias de realimentación del estado del sistema dual, se logra obtener

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n).$$

Si se considera que los valores característicos de $\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}$ sean iguales a los de $\mathbf{A} - \mathbf{K}^*\mathbf{C}$, se obtiene

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})| = |s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}^*\mathbf{C})|.$$

Comparando el polinomio característico $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}^*\mathbf{C})|$ con el polinomio característico $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})|$, para el sistema observado, se llega a que $\mathbf{K}_e$ y $\mathbf{K}^*$ son la misma matriz, de manera que

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*.$$

Por lo tanto, si se emplea la matriz $\mathbf{K}$, obtenida mediante el método de asignación de polos en el sistema dual, $\mathbf{K}_e$ que es la matriz de ganancias del observador para el sistema original se calcula mediante la relación $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$ [11].

2.4.4. Condición necesaria y suficiente para la observación del estado

Anteriormente, se señaló que la condición necesaria y suficiente para determinar $\mathbf{K}_e$, que es la matriz de ganancias del observador para los valores propios deseados de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$, es que el sistema dual del sistema original

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*v$$

se requiere que sea de estado completamente controlable. La condición necesaria para que el estado sea completamente controlable, es que la siguiente matriz, formada del sistema dual,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* & \cdots & (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^* \end{bmatrix},$$

sea de rango n . De forma tal que, la condición para una observabilidad completa del sistema original está definida mediante (2.19) y (2.20). Esto quiere decir que una condición necesaria y suficiente para la observación del estado del sistema definido por las ecuaciones (2.19) y (2.20) es que dicho sistema sea completamente observable.

Una vez que se han elegido los valores propios deseados (o la adecuada ecuación característica), es posible diseñar el observador de estados de orden completo, siempre y cuando la planta sea completamente observable. Los valores propios deseados de la ecuación característica deben ser seleccionados de manera que el algoritmo del observador de estado responda por

lo menos de dos a cinco veces más rápido que el sistema considerado en lazo cerrado. Como se ha mencionado anteriormente, la ecuación para el algoritmo del observador de estado de orden completo es

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_e C) \hat{x} + Bu + K_e y. \quad (2.24)$$

Es importante notar que, hasta este punto, se ha asumido que las matrices A , B y C en el observador son exactamente iguales a las del sistema físico. Sin embargo, si hay discrepancias en estas matrices, entre las del sistema físico o planta, y del observador, la dinámica del error del observador no estará expresada por (2.23). Esto implica que el error no podrá converger a cero tal como se ha supuesto inicialmente. Por lo tanto, es necesario ajustar la matriz K_e de manera que el observador sea estable y que el error permanezca aceptablemente pequeño cuando existan pequeñas discrepancias en el modelo [11].

2.4.5. Obtención de la matriz de ganancia del observador de estado K_e por el método de transformación

Si se aplica el mismo método utilizado para deducir la ecuación de la matriz de ganancia de realimentación del estado K , se llega a la siguiente ecuación [11] :

$$K_e = Q \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (WN^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

donde $K_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es una matriz.

$$Q = (WN^*)^{-1},$$

además,

$$N = \begin{bmatrix} C^* & A^* C^* & \dots & (A^*)^{n-1} C^* \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4.6. Obtención de la matriz de ganancias del observador de estado K_e por el método de sustitución directa

Al igual que en el caso de la asignación de polos, cuando el sistema es de orden bajo, a menudo es más práctico sustituir directamente la matriz K_e dentro del polinomio característico deseado. Por ejemplo, partiendo de un vector x de dimensión 3, se puede expresar la matriz de

ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ como

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ k_{e3} \end{bmatrix}.$$

Al sustituir la matriz $\mathbf{K}_e$ en el polinomio característico deseado, se llega a:

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3).$$

Al igualar los coeficientes de las potencias de s en ambos lados de la ecuación anterior, se pueden calcular los valores de k_{e1} , k_{e2} y k_{e3} . Este método resulta ser conveniente cuando $n = 1, 2$, o 3 , siendo n la dimensión del vector de estado $\mathbf{x}$. No obstante, aunque se puede aplicar este enfoque cuando $n = 4, 5, 6, \dots$, etc., los cálculos implicados pueden volverse extremadamente tediosos.

Otra forma de calcular la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$ es mediante la fórmula de Ackerman [11].

2.4.7. Obtención de la matriz de ganancia del observador de estado por la Fórmula de Ackerman

Definiendo el sistema como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (2.26)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (2.27)$$

La aplicación de la fórmula de Ackerman para la asignación de polos, del sistema definido por (2.26), se plantea como:

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \left[\mathbf{B} \ : \ \mathbf{AB} \ : \ \dots \ : \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right]^{-1} \phi(\mathbf{A}).$$

Si se considera el caso del sistema dual, de forma que (2.26) y (2.27), quede representado como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*v, \\ n &= \mathbf{B}^*\mathbf{z}, \end{aligned}$$

el cual cambia la ecuación de la fórmula de Ackerman a la siguiente forma

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \left[\mathbf{C}^* \ : \ \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \ : \ \dots \ : \ (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^* \right]^{-1} \phi(\mathbf{A}^*). \quad (2.28)$$

Como se mencionó anteriormente, $\mathbf{K}_e$ o matriz de ganancias del observador de estado, se obtiene por medio de la matriz $\mathbf{K}^*$, donde la matriz de ganancias del observador de estado se

define por (2.28). De esta manera,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^* = \phi(\mathbf{A}^*)^* \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

donde $\phi(s)$, es el polinomio característico deseado para el observador de estado, o también

$$\phi(s)t = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n),$$

donde los valores propios deseados son $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Entonces, a la ecuación (2.29) se le conoce como fórmula de Ackerman y se utilizará para la obtención de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ [11].

2.4.8. Sugerencias sobre la selección de la mejor matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$

De acuerdo con la Figura 2.1, se evidencia que la señal de realimentación, mediante la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$, actúa como una corrección al modelo de la planta para compensar las incógnitas presentes en ella. Si hay factores desconocidos relevantes, entonces la señal de realimentación, a través de la matriz $\mathbf{K}_e$, debe ser considerablemente grande. No obstante, cuando la señal de salida se ve significativamente contaminada por perturbaciones y ruido en la medición, la salida y no es fiable y la señal de realimentación a través de la matriz $\mathbf{K}_e$ debería ser considerablemente pequeña. Al determinar la matriz $\mathbf{K}_e$, es crucial examinar minuciosamente los efectos de las perturbaciones y el ruido, presentes en la salida y [11].

Es necesario tener siempre presente, que la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ depende de la ecuación característica deseada:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = 0.$$

La selección de un conjunto de valores propios $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, no es una elección única. Como norma general, los polos del observador deben ser de dos a cinco veces más rápidos que los polos del controlador, lo que garantiza una rápida convergencia del error de observación (error de estimación) hacia a cero. Esto implica que el error de estimación del observador disminuye de dos a cinco veces más rápido que el vector de estado $\mathbf{x}$. Esta disminución más rápida del error del observador, en comparación con la dinámica deseada, permite que los polos del controlador dominen la respuesta del sistema.

Es crucial tener en cuenta que, si el ruido del sensor es significativo, es posible seleccionar los polos del observador para que sean más lentos que dos veces los polos del controlador. Esto resulta en un ancho de banda del sistema más reducido y una atenuación del ruido. En esta situación, la respuesta del sistema estará significativamente más influenciada por los polos del observador. Si los polos del observador están ubicados hacia la derecha de los polos del controlador en el semiplano izquierdo de s , entonces la respuesta del sistema estará significativamente más influenciada por los polos del observador en lugar de los polos del controlador.

En el diseño de un observador de estado, resulta útil determinar varias matrices de ganancias del observador K_e utilizando diferentes ecuaciones características deseadas. Para cada una de estas matrices K_e , es necesario llevar a cabo pruebas de simulación para evaluar el comportamiento del sistema resultante. De esta manera, se puede seleccionar la mejor matriz K_e , basándose en el comportamiento general del sistema. En muchos casos prácticos, la selección de la mejor K_e implica encontrar un equilibrio entre una respuesta rápida y sensibilidad a las perturbaciones y el ruido.

2.4.9. Efectos de agregar el observador de estado sobre el sistema en lazo cerrado

En el proceso de diseño por asignación de polos, se parte del supuesto de que el estado $\mathbf{x}(t)$ está disponible para su realimentación. Sin embargo, en situaciones prácticas, este estado puede no estar directamente medible. Por lo tanto, se hace necesario diseñar un observador que estime este estado, utilizando el estado observado $\hat{\mathbf{x}}(t)$ para la realimentación, tal como se muestra en la Figura 2.2. Por consiguiente, el proceso de diseño se convierte en un procedimiento de dos etapas: en primer lugar, se determina la matriz de ganancias de realimentación $\mathbf{K}$, que produce la ecuación característica deseada, y en segundo lugar, se determina la matriz de las ganancias del observador K_e para obtener la ecuación característica deseada del observador.

A continuación, se analizan los efectos del uso del estado observado $\hat{\mathbf{x}}(t)$ en lugar del estado real $\mathbf{x}(t)$ en la ecuación característica de un sistema en lazo cerrado. Considérese el sistema de estado completamente controlable y observable definido mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Para el control, utilizando realimentación del estado, basado en el estado observado $\hat{\mathbf{x}}$:

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}.$$

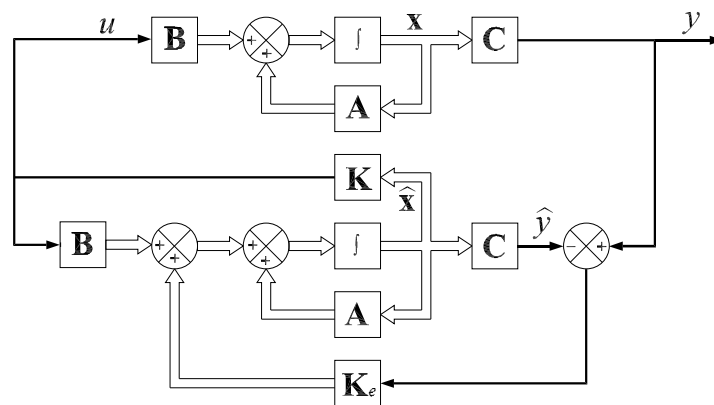


Figura 2.2: Sistema de control realimentado con estado observado

Con este tipo de control, la ecuación de estado resulta en

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BK}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}). \quad (2.30)$$

Recordando que anteriormente se definió la diferencia entre el estado real $\mathbf{x}(t)$ y el estado observado $\hat{\mathbf{x}}(t)$, como el error $\mathbf{e}(t)$:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t),$$

por lo que, la sustitución del vector de error $\mathbf{e}(t)$ en (2.30) da

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BK}\mathbf{e}. \quad (2.31)$$

Obsérvese que la ecuación que describe el error del observador está dada por (2.23):

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}, \quad (2.32)$$

de esta forma, en conjunto con (2.31), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

La ecuación (2.33) describe la dinámica del sistema de control utilizando la realimentación del estado observado. La ecuación característica, en este caso, para el sistema es

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{vmatrix} = 0,$$

o bien

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0.$$

Es importante destacar que los polos en lazo cerrado del sistema de control, cuando se emplea la realimentación del estado observado, comprenden tanto los polos generados exclusivamente por el diseño mediante asignación de polos, como aquellos generados únicamente por el diseño del observador. Esto indica que los procesos de diseño mediante asignación de polos, y el diseño del observador, son independientes entre sí. Por lo tanto, se llevan a cabo de manera separada y luego se combinan para establecer el sistema de control mediante la realimentación del estado observado. Note que, si el orden de la planta del sistema físico es n , entonces el observador, al utilizar un algoritmo de observador de estado de orden completo, también tendrá un orden n . En consecuencia, la ecuación característica resultante para el sistema completo en lazo cerrado tendrá un orden de $2n$ [11].

2.4.10. Función de transferencia del controlador basado en observador

Definiendo al sistema como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Si suponemos que el sistema es completamente observable y que se utiliza el control mediante realimentación del estado observado $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$. En este caso, las ecuaciones para el observado se expresan como:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e y, \quad (2.34)$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}, \quad (2.35)$$

donde (2.34) es resultado de sustituir $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$ en (2.30). Si se considera la transformada de Laplace de (2.34), suponiendo condiciones iniciales nulas, y resolviendo para $\hat{\mathbf{X}}(s)$, se obtiene

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1} + \mathbf{K}_e Y(s).$$

Sustituyendo $\hat{\mathbf{X}}(s)$ en la transformada de Laplace de (2.35), se llega a

$$U(s) = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{K}_e Y(s), \quad (2.36)$$

entonces, la función de transferencia $U(s)/Y(s)$ se puede definir como

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{K}_e. \quad (2.37)$$

La Figura 2.3 muestra la representación del sistema anterior en diagrama de bloques. Es importante notar que, la función de transferencia (2.37) hará las funciones de controlador para el sistema. Por tal razón, se llamará a ésta: función de transferencia del controlador basado en observador, o también de manera más simple: función de transferencia del controlador-observador.

Obsérvese ahora que la matriz del controlador-observador

$$\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK},$$

puede ser o no estable, no importando que, $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ y $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ se escojan estables. Incluso, en algunas situaciones, la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK}$ puede o no ser estable.

2.4.11. Observador de orden mínimo

Los observadores presentados hasta ahora están diseñados para reconstruir todas las variables de estado. Sin embargo, en la práctica, algunas de las variables pueden medirse con precisión. Por lo tanto, no es necesario estimar todas aquellas variables de estado que pueden ser medidas de manera precisa.



Figura 2.3: Representación en diagramas de bloques el sistema controlador-observador

Considere un vector de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y un vector de salida medible $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Dado que las m variables de salida son combinaciones lineales de las variables de estado, no es necesario estimar las m variables de estado que pueden medirse directamente. En cambio, sólo es necesario estimar las $n - m$ variables de estado restantes. Por lo tanto, el observador de orden reducido se convierte en observador orden $(n - m)$. Un observador de orden $(n - m)$ -ésimo, se denomina observador de orden mínimo. En la Figura 2.4 se presenta el diagrama a bloques de un observador de orden mínimo.

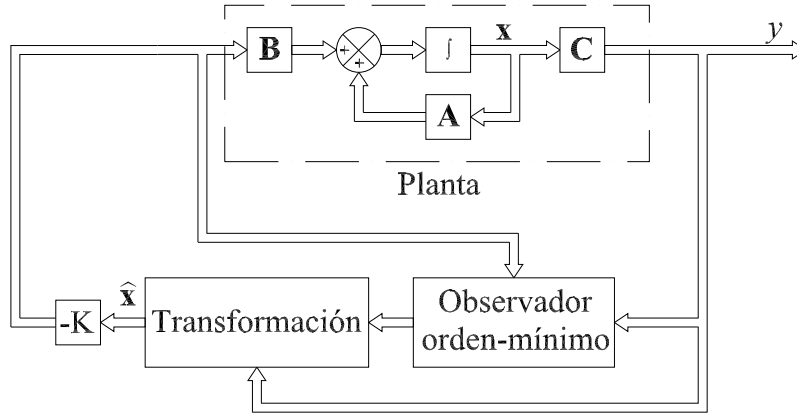


Figura 2.4: Sistema de control realimentado con estado observado con un observador de orden mínimo.

No obstante, es importante tener en cuenta que, si las mediciones de las variables de salida contienen un ruido significativo, y son relativamente imprecisas, la utilización de un observador de orden completo puede proporcionar un mejor comportamiento del sistema.

Para explicar la idea fundamental del observador de orden mínimo, sin introducir complicaciones matemáticas innecesarias, se abordará el caso en que la salida es un escalar (o sea, cuando $m = 1$) y se derivará la ecuación de estado correspondiente al observador de orden mínimo. Si el sistema se define como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (2.38)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (2.39)$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de estado y se divide en dos partes: la parte escalar x_a y $\mathbf{x}_b$ que es un vector de dimensión $(n - 1)$. Ahora, x_a que es la variable de estado, es igual a la salida y de tal forma que se puede medir directamente, y la parte no medible del vector de estado es definido ahora como $\mathbf{x}_b$. De esta manera, la partición del estado con las ecuaciones de salida se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} u, \quad (2.40)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

donde los componentes se definen como $A_{aa} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}_{ab} \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$, $\mathbf{A}_{ba} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$, $\mathbf{A}_{bb} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $B_a \in \mathbb{R}$, y $\mathbf{B}_b \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ es una matriz de orden $(n-1) \times 1$. A partir de (2.40), la ecuación del observador de estado que es medible es

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b + B_a u,$$

o también

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b. \quad (2.42)$$

Donde los términos del lado izquierdo de la ecuación (2.42) son medibles. Observe que la ecuación (2.42) actúa como la ecuación de salida. En el diseño del observador de orden mínimo, se considera que el lado izquierdo de (2.42) contiene valores conocidos. Así que, (2.42) establece una relación entre las cantidades medibles y las no medibles del estado.

A partir de (2.40), la parte de la ecuación que no es medible del observador de estado se define como

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u. \quad (2.43)$$

Si consideramos que los términos $\mathbf{A}_{ba}x_a$ y $\mathbf{B}_b u$ tienen valores conocidos, entonces (2.43) describe la dinámica de la parte del estado que no es medida.

Se presentará a continuación un método para diseñar un observador de orden mínimo. Este procedimiento de diseño se simplifica considerablemente al emplear la técnica desarrollada para el diseño del observador de estado de orden completo.

Considerando para el observador de orden completo que la ecuación de estado es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

y que para el observador de orden mínimo la ecuación de estado es

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u,$$

además, la ecuación de salida para el observador de orden completo definida como

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

ahora, se sabe que la ecuación que describe al observador de orden mínimo es

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u.$$

En seguida, se presenta el diseño del observador de orden mínimo. En primer lugar, nótese que la ecuación del observador de orden completo se derivó a partir de (2.21), lo cual quiere decir que

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y. \quad (2.44)$$

Se realizan las sustituciones definidas en la Tabla 2.1, en la ecuación (2.44), de esta manera se obtiene

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \hat{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e (\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u), \quad (2.45)$$

donde $\mathbf{K}_e \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ es la matriz de ganancias del observador de estados. En la ecuación (2.45), se nota que para estimar $\hat{\mathbf{x}}_b$ se requiere la derivada de x_a . Sin embargo, esto presenta una dificultad, ya que la diferenciación amplifica el ruido. Si x_a , que es igual a y , tiene ruido, entonces el uso de $\dot{x}_a$ es no aceptable. Para superar esta dificultad, se elimina $\dot{x}_a$ de la siguiente manera. Primero, reescribimos (2.45) como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e \dot{x}_a &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \hat{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}) y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a) u, \\ &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) (\hat{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y) \\ &\quad + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}] y \\ &\quad + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a) u.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Se define

$$\mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e y = \mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e x_a = \eta,$$

y

$$\hat{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y = \hat{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e x_a = \hat{\eta}.\tag{2.47}$$

Por lo que, (2.46) es

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}} &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \hat{\eta} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{K}_e \\ &\quad + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}] y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a) u.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Si se define también

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}, \\ \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a,\end{aligned}$$

entonces, la ecuación (2.48) queda como

$$\dot{\hat{\eta}} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\eta} + \hat{\mathbf{B}} y + \hat{\mathbf{F}} u.\tag{2.49}$$

Tabla 2.1: Tabla comparativa de la ecuación del observador de orden completo vs observador de estado de orden mínimo.

Observador de estado de orden completo	Observador de estado de orden mínimo
$\hat{\mathbf{x}}$	$\hat{\mathbf{x}}_b$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}_{bb}$
$\mathbf{B}u$	$\mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u$
y	$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u$
$\mathbf{C}$	$\mathbf{A}_{ab}$
$\mathbf{K}_e$ (matriz $n \times 1$)	$\mathbf{K}_e$ [matriz $(n-1) \times 1$]

La ecuación (2.49), junto con (2.47), definen la composición el observador de orden mínimo como:

$$\begin{aligned} y &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} x_a \\ \hat{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} [\hat{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y] + \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{K}_e \end{bmatrix} y, \end{aligned}$$

donde el vector transpuesto de ceros, $\mathbf{0}$, es de dimensión $\mathbb{R}^{n-1}$. Si se establece que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \hat{0} \\ \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \hat{1} \\ \mathbf{K}_e \end{bmatrix},$$

entonces, el vector de estados estimados $\hat{\mathbf{x}}$, se puede escribir en términos de $\hat{\eta}$ e y de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\eta} + \hat{\mathbf{D}}y. \quad (2.50)$$

La ecuación (2.50) da pie a la transformación de términos $\hat{\eta}$ a $\hat{\mathbf{x}}$. En la Figura 2.5 se muestra el diagrama de bloques del sistema de control realimentado con estado observado $\hat{\mathbf{x}}$, con el observador de orden mínimo, basado en (2.38), (2.39), (2.49), (2.50) y la señal de control $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$.

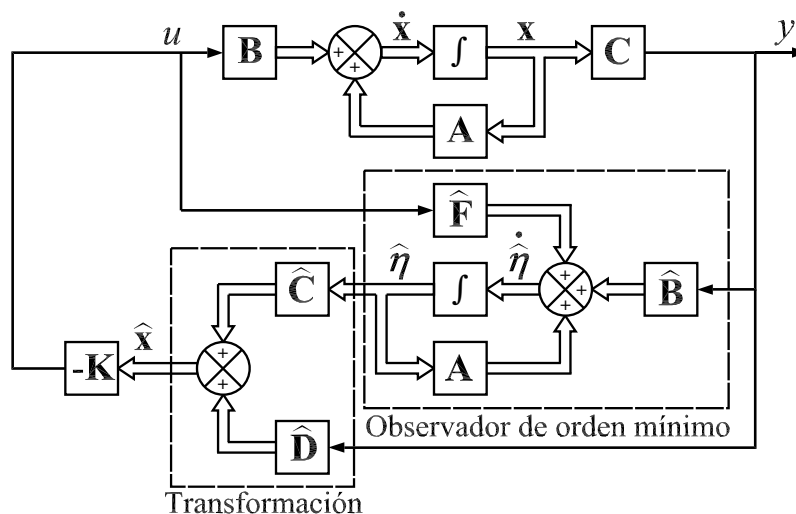


Figura 2.5: Sistema con realimentación de estado observado en el que se utiliza el observador de orden mínimo

Ahora, se obtendrá la ecuación del error del observador, usando a (2.42) y a (2.45), lo que provoca el cambio a

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \hat{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba} x_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} \mathbf{x}_b. \quad (2.51)$$

Si se resta (2.51) de (2.43), se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}_b - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_e = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) (\mathbf{x}_b - \hat{\mathbf{x}}_b), \quad (2.52)$$

entonces

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_b - \hat{\mathbf{x}}_e = \boldsymbol{\eta} - \hat{\boldsymbol{\eta}},$$

por lo tanto, (2.52) queda como

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{e}, \quad (2.53)$$

la ecuación de error para el observador de orden mínimo, donde $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{(n-1)}$. La dinámica del error puede ser seleccionada según sea necesario, utilizando la técnica desarrollada para el observador de estado de orden completo, siempre y cuando el rango de la matriz definida por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix},$$

sea $n-1$. Esta es la condición de observabilidad completa que se aplica al observador de estado de orden mínimo.

Para el observador de estado de orden mínimo, la ecuación característica se deriva de (2.53) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_{n-1}), \\ &= s^{n-1} + \hat{\alpha}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2} s + \hat{\alpha}_{n-1} = 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde los valores propios deseados para el observador de orden mínimo se definen como $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$. Para la matriz del ganancias del observador, $\mathbf{K}_e$, primero se eligen los valores propios deseados para el observador de orden mínimo, colocando las raíces de la ecuación característica (2.54) en las posiciones deseadas. Luego, se aplica el procedimiento adaptado del observador de orden completo. Por ejemplo, si se desea utilizar la forma para determinar la matriz de ganancias $\mathbf{K}_e$ obtenida mediante (2.25), es necesario realizar modificaciones para adaptarla a

$$\mathbf{K}_e = \hat{Q} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} = (\hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{N}}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

donde $\mathbf{K}_e \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ y

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}} &= [\mathbf{A}_{ab}^* \quad \mathbf{A}_{bb}^* \mathbf{A}_{ab}^* \quad \cdots \quad (\mathbf{A}_{bb}^*)^{n-2} \mathbf{A}_{ab}^*] \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \\ \hat{\mathbf{W}} &= \begin{bmatrix} \hat{a}_{n-2} & \hat{a}_{n-3} & \cdots & \hat{a}_1 & 1 \\ \hat{a}_{n-3} & \hat{a}_{n-4} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}. \end{aligned}$$

Note que los coeficientes $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{n-2}$, en la ecuación característica, son útiles para la ecuación de estado

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb}| = s^{n-1} + \hat{a}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{a}_{n-2} s + \hat{a}_{n-1} = 0.$$

También, se utiliza la metodología de la fórmula de Ackerman obtenida de (2.29), y se adapta ahora de la siguiente forma

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-3} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

donde

$$\phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^{n-1} + \hat{\alpha}_1 \mathbf{A}_{bb}^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2} \mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_{n-1} \mathbf{I}.$$

2.4.12. Observador de orden mínimo con realimentación de estado observado y sistema de control

Para un sistema de control con realimentación de estado observado, donde se aplica un observador de estado de orden completo, se ha establecido que los polos en lazo cerrado del sistema están determinados únicamente por los polos asignados deliberadamente, y aquellos derivados del diseño del observador. Por consiguiente, los procesos de asignación de polos y diseño del observador son independientes entre sí [11].

Para el sistema de control con realimentación de estado observado y el uso de un observador de orden mínimo, se llega a la misma conclusión. La ecuación característica del sistema puede expresarse como

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}| = 0. \quad (2.57)$$

Los polos en lazo cerrado del sistema de control con realimentación de estado observado, ahora utilizando un observador de orden mínimo, contienen tanto los polos asociados a la asignación de polos, es decir, los valores propios de la matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$, como los polos del observador de orden mínimo en el lazo cerrado (los valores propios de la matriz $(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})$). Por consiguiente, los procesos de asignación de polos y diseño del observador de orden mínimo son igualmente independientes entre sí.

2.4.13. Función de transferencia del controlador y el observador de orden mínimo

Volviendo a la ecuación del observador de orden mínimo, según la expresión (2.48),

$$\dot{\hat{\eta}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \hat{\eta} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}] y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a) u,$$

se define $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{F}}$, de la misma forma a la del caso en el que se dedujo de (2.49), o sea

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}, \\ \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a. \end{aligned}$$

Se define el observador de orden mínimo de las tres siguientes ecuaciones:

$$\dot{\hat{\eta}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\eta} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}u, \quad (2.58)$$

$$\hat{\eta} = \hat{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y, \quad (2.59)$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}. \quad (2.60)$$

La ecuación (2.60), se puede volver a escribir, pero ahora como

$$\begin{aligned} u &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = -\begin{bmatrix} K_a & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \hat{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = -K_a y - \mathbf{K}_b \hat{\mathbf{x}}_b, \\ &= -\mathbf{K}_b \hat{\eta} - (K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e) y, \end{aligned} \quad (2.61)$$

y al sustituir (2.61) en (2.58), se llega a

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}} &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\eta} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}[-\mathbf{K}_b \hat{\eta} - (K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e) y], \\ &= (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b) \hat{\eta} + [\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e)] y. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Si se considera que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b, \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e), \\ \tilde{\mathbf{C}} &= -\mathbf{K}_b, \\ \tilde{D} &= -(K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e), \end{aligned}$$

entonces, (2.62) y (2.61), se deducen como

$$\dot{\hat{\eta}} = \tilde{\mathbf{A}}\hat{\eta} + \tilde{\mathbf{B}}y, \quad (2.63)$$

$$u = \tilde{\mathbf{C}}\hat{\eta} + \tilde{D}y. \quad (2.64)$$

De (2.63) y (2.64), se define al controlador en base a un observador de orden mínimo. Considerando u como la salida del sistema y $-y$ como la entrada del mismo, $U(s)$ se vuelve a escribir como

$$\begin{aligned} U(s) &= \left[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D} \right] Y(s), \\ &= -\left[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D} \right] [-Y(s)]. \end{aligned}$$

Como la entrada al controlador realimentada por el observador es $-Y(s)$, y no $Y(s)$, se define la función de transferencia del controlador realimentado por el observador como

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = -\left[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D} \right]. \quad (2.65)$$

Modelado dinámico de un UAV de ala fija

Con el fin de obtener las ecuaciones del modelo, y omitiendo cualquier estructura flexible del UAV de ala fija, se considera al vehículo como un cuerpo rígido. Además, tampoco se tomará en cuenta la curvatura de la tierra, la cual se considerará plana, bajo la suposición de que el UAV de ala fija sólo volará distancias cortas. Con las consideraciones anteriores, se obtiene el modelo mediante la aplicación de las leyes del movimiento de Newton.

3.1. Superficies de control de un avión

Las variables a controlar de un avión son: la energía del motor o propulsor, y las superficies primarias de control que serán denotadas con la variable δ . Estas superficies de control realizan la función de desviar el flujo de aire y en consecuencia producen las fuerzas y momentos aerodinámicos.

En un avión, con una configuración tradicional, como el de este trabajo, se tiene el motor propulsor y el ángulo de cabeceo controlado por la variable δ_e , el ángulo de alabeo es controlado por la variable δ_a , así como el ángulo de la guiñada que es controlado por la variable δ_r . Estas variables son las que controlan a los elevadores, alerones y estabilizador vertical comúnmente llamado *rudder*, respectivamente como se aprecia en la Figura 3.1 [42].

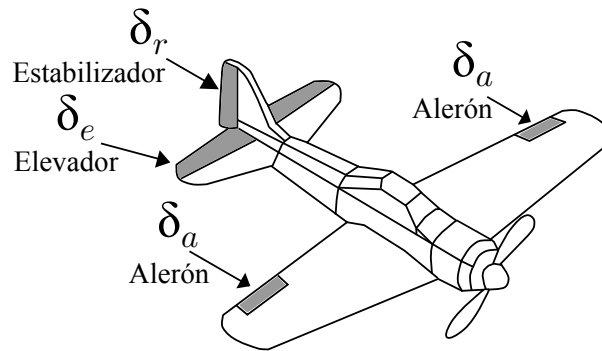


Figura 3.1: Variables de las superficies de control

3.2. Modelo dinámico de guiñada

La dinámica lateral genera el movimiento de alabeo e induce al mismo tiempo un movimiento de guiñada (y viceversa), por lo que existe un acoplamiento natural entre las rotaciones alrededor de los ejes de alabeo y guiñada [13]. En este trabajo de investigación, se ha considerado que existe un desacoplamiento de los movimientos de alabeo y guiñada [12]. Por lo tanto, cada movimiento se puede controlar de forma independiente. Además, tampoco se tomaron en cuenta los efectos del empuje del motor [13]. En la Figura 3.2 se ve representado el movimiento de guiñada.

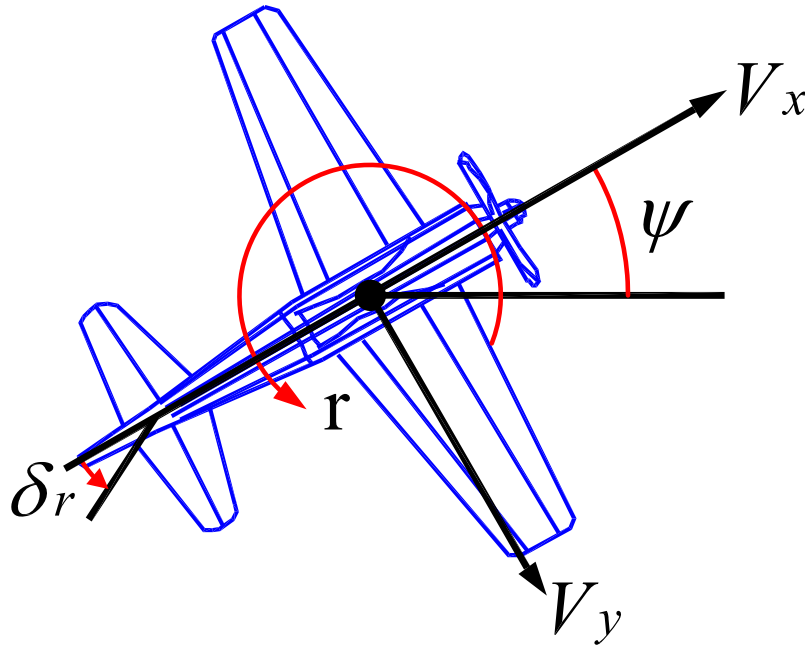


Figura 3.2: Dinámica del movimiento de guiñada del UAV de ala fija.

Las ecuaciones utilizadas para describir el movimiento de guiñada [13] son:

$$\dot{\psi} = r, \quad (3.1)$$

$$\dot{r} = \frac{N}{I_{zz}}, \quad (3.2)$$

$$\dot{V}_y = \frac{F_y}{m} - rV_x, \quad (3.3)$$

$$\dot{V}_x = \frac{F_x}{m} + rV_y, \quad (3.4)$$

donde:

ψ = Ángulo de guiñada

r = Velocidad angular de guiñada

N = Momento debido a guiñada

I_{zz} = Momento de inercia en el eje z

V_y = Velocidad longitudinal en el eje y

V_x = Velocidad longitudinal en el eje x

F_y = Componente de fuerza lateral resultante sobre el eje y

F_x = Componente de fuerza lateral resultante sobre el eje x

m = Masa total de la aeronave

Con fines de facilitar el diseño de un controlador, (3.3) se reescribe como

$$\dot{r} = N_r r + N_{\delta r} \delta_r, \quad (3.5)$$

siendo

$$N_r = \frac{\rho V_0 S b^2}{4 I_z} C_{Nr}, \quad \text{y} \quad N_{\delta r} = \frac{\rho V_0^2 S b}{2 I_z} C_{N\delta},$$

y donde:

δ_r = Entrada de control

ρ = Densidad del aire

V_0 = Velocidad relativa de vuelo

S = Área del ala

b = Longitud de envergadura

I_z = Componente de inercia en el eje z

$C_{Nr}, C_{N\delta}$ = Coeficientes aerodinámicos

Para este trabajo, considérese un cambio de variables para facilitar el análisis del sistema, de tal forma que $\psi = x_1$, $r = x_2$, $\delta_r = u$, $N_r = g_1$ y $N_{\delta r} = g_2$, por lo que el sistema queda

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.6)$$

$$\dot{x}_2 = g_1 x_2 + g_2 u, \quad (3.7)$$

$$y = x_1. \quad (3.8)$$

Escribiendo ahora el sistema en forma matricial, entonces

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

El sistema puede ser entonces definido mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema está representado con el formato visto en el Capítulo 2, por lo tanto, se aplica la condición de controlabilidad, dada por la ecuación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

para comprobar que el sistema es controlable. Los cálculos correspondientes son

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & g_2 \\ g_2 & g_1 g_2 \end{bmatrix}, \\ \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & g_2 \\ g_2 & g_1 g_2 \end{bmatrix} &= 2. \end{aligned}$$

Puede comprobarse que el rango de la matriz de controlabilidad es prácticamente igual al orden sistema, que es 2, por lo que se concluye que el sistema es controlable. A continuación, se aplica la condición de observabilidad dada por la ecuación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \dots \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix},$$

cuyo desarrollo es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= 2. \end{aligned}$$

Con lo anterior, se demuestra también que el sistema es observable, debido a que el rango de la matriz de observabilidad es igual al orden del sistema, o sea, $n = 2$.

3.3. Modelo dinámico de alabeo

El movimiento de alabeo se ve representado en la Figura 3.3. Las ecuaciones que describen

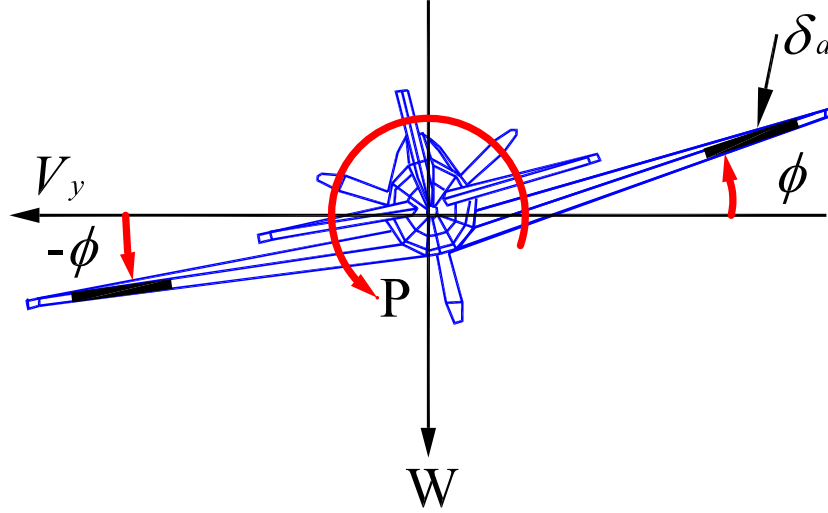


Figura 3.3: Dinámica del movimiento de alabeo del UAV de ala fija

la dinámica del movimiento de alabeo [13] son las siguientes

$$\dot{\phi} = p, \quad (3.9)$$

$$\dot{p} = \frac{\bar{L}}{I_{xx}}, \quad (3.10)$$

$$\dot{V}_y = \frac{F_y}{m} + pV_x, \quad (3.11)$$

$$\dot{V}_x = \frac{F_x}{m} - pV_y, \quad (3.12)$$

donde:

ϕ = Ángulo de alabeo

p = Velocidad angular de alabeo

$\bar{L}$ = Momento debido a alabeo

I_{xx} = Momento de inercia en el eje x

V_y = Velocidad longitudinal en el eje y

V_x = Velocidad longitudinal en el eje x

F_y = Componente de fuerza lateral resultante sobre el eje y

F_x = Componente de fuerza lateral resultante sobre el eje x

m = Masa total de la aeronave

Se reescribe la ecuación (3.10) con fines de diseño, como

$$\dot{p} = L_p p + L_{\delta_a} \delta_a, \quad (3.13)$$

con

$$L_p = \frac{\rho V_0 S b^2}{4 I_x} C_{lp}, \quad y \quad L_{\delta a} = \frac{\rho V_0^2 S b}{2 I_x} C_{L\delta},$$

y donde:

δ_a = Entrada de control

ρ = Densidad del aire

V_0 = Velocidad relativa de vuelo

S = Área del ala

b = Longitud de envergadura

I_x = Componente de inercia en el eje x

$C_{lp}, C_{L\delta}$ = Coeficientes aerodinámicos

Al igual que en el modelado de guiñada, se realiza un cambio de variables para facilitar el análisis, de tal manera que considerando $\phi = x_1$, $p = x_2$, $\delta_a = u$, $L_p = g_1$ y $L_{\delta a} = g_2$, el sistema queda

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.14)$$

$$\dot{x}_2 = g_1 x_2 + g_2 u, \quad (3.15)$$

$$y = x_1. \quad (3.16)$$

Note que con el cambio de variable representado en (3.14)-(3.16), el sistema posee la misma estructura que el modelo dinámico de guiñada, representado por las ecuaciones (3.6)-(3.8). Por lo anterior, se puede considerar que la dinámica de alabeo que se plantea en este apartado es controlable y observable.

3.4. Modelo dinámico de cabeceo

Los parámetros relacionados con el modelo dinámico de cabeceo se muestran en la figura 3.4. Estos parámetros permiten analizar el movimiento de la parte delantera de un avión [14], en particular el control de altitud. El modelo matemático utilizado para esta dinámica [13], es el siguiente:

$$\dot{\theta} = q, \quad (3.17)$$

$$\dot{q} = \frac{M}{I_{yy}}, \quad (3.18)$$

$$\dot{h} = V \sin \theta, \quad (3.19)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{m} (-D + T \cos \alpha - mg \sin \gamma), \quad (3.20)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{mV} (L + T \sin \alpha - mg \sin \gamma), \quad (3.21)$$

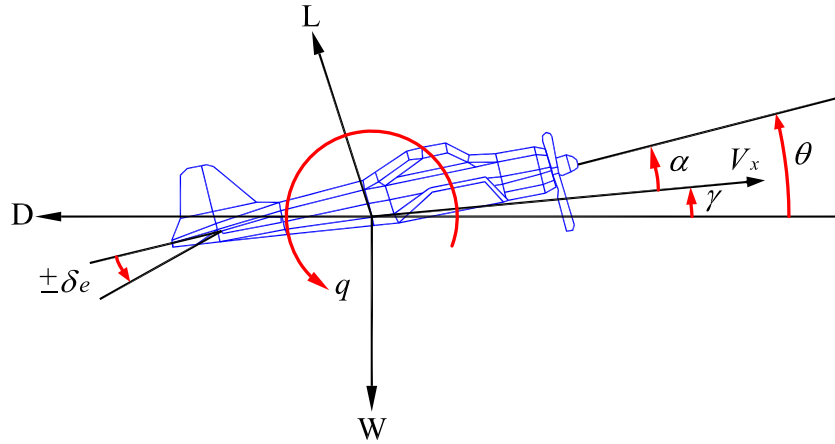


Figura 3.4: Dinámica del movimiento de cabeceo del UAV de ala fija.

donde:

θ = Ángulo de cabeceo

q = Velocidad angular de cabeceo

M = Momento debido a cabeceo

I_{yy} = Momento de inercia en el eje y

h = Altura del avión

V = Velocidad del avión

D = Fuerza de arrastre

T = Fuerza de empuje del motor

α = Ángulo de ataque

γ = Ángulo de incidencia del viento

g = Constante de gravedad

m = Masa total de la aeronave

La ecuación (3.18) puede reescribirse de la siguiente forma

$$\dot{q} = M_q q + M_{\delta_e} \delta_e, \quad (3.22)$$

siendo:

$$M_q = \frac{\rho V_0 S \bar{c}^2}{4 I_z} C_{lp}, \quad \text{y} \quad M_{\delta_e} = \frac{\rho V_0^2 S \bar{c}}{2 I_z} C_{L\delta},$$

donde el resto de los parámetros se describen a continuación:

δ_e = Entrada de control

ρ = Densidad del aire

V_0 = Velocidad relativa de vuelo

S = Área del ala

$\bar{c}$ = Respuesta de la cuerda del ala

I_z = Componente de inercia en el eje z

$C_{Mq}, C_{M\delta}$ = Coeficientes aerodinámicos

Al igual que en los movimientos de guiñada y alabeo, se realiza un cambio de variables considerando $\theta = x_1$, $q = x_2$, $\delta_e = u$, $M_q = g_1$ y $M_{\delta_e} = g_2$, con lo cual el sistema resulta en

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.23)$$

$$\dot{x}_2 = g_1 x_2 + g_2 u, \quad (3.24)$$

$$y = x_1. \quad (3.25)$$

De la misma manera que el modelado de los dos movimientos previos, el sistema descrito por (3.23)-(3.25) puede considerarse como controlable y observable.

Observadores de estados

En este capítulo, se presentan los resultados en simulación de los observadores aplicados a la dinámica desacoplada de un vehículo aéreo.

4.1. Observador por modos deslizantes

Los controladores por modos deslizantes han demostrado tener excelente robustez y buenas propiedades de funcionamiento para problemas de seguimiento en sistemas no lineales. El método de modos deslizantes, mejora la robustez sobre un rango de incertidumbres y perturbaciones del sistema [2].

Las nociones de superficie deslizante habían sido investigadas principalmente en la literatura Soviética donde se utilizaron para estabilizar algunos sistemas no lineales. A pesar de que teóricamente cuenta con excelentes propiedades de robustez frente a incertidumbres paramétricas, el control clásico por modos deslizantes presenta varios inconvenientes importantes que limitan seriamente su aplicación práctica. En particular, implica un gran costo computacional de control además del *chattering*. El *chattering* es, en general, ampliamente indeseable en la práctica, ya que implica una gran actividad del control, además, puede excitar dinámicas de alta frecuencia que no necesariamente se toman en cuenta durante el modelado, tales como resonantes modos estructurales, retardos no considerados en el actuador, o defectos en el muestreo [2].

Los observadores por modos deslizantes (SMO por sus siglas en inglés para Sliding Mode Observer) que, por su naturaleza incluyen términos de conmutación, ha demostrado tener propiedades prometedoras en presencia de errores en el modelado y/o el ruido del sensor.

Los observadores por modos deslizantes ofrecen ventajas similares a las de los controladores por modos deslizantes, en particular la robustez inherente a la incertidumbre y la fácil aplicación a clases importantes de sistemas no lineales. Además, contrario al caso de diseño de controladores, en cuestión de *chattering*, el diseño de observadores por modos deslizantes sólo está ligado a implicaciones numéricas más que a limitaciones mecánicas [2].

4.1.1. Superficie deslizante

Considérese el sistema dinámico, tal como el presentado en [2] el cual posee la siguiente forma:

$$\dot{x}^{(n)}(t) = f(\mathbf{x}; t) + b(\mathbf{x}; t)u(t) + d(t), \quad (4.1)$$

donde $u(t)$ es la entrada de control escalar, x es la salida de interés escalar, y el vector $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$ son los estados. En (4.1), la función $f(\mathbf{x}; t)$ (en general no lineal) no se conoce con exactitud, pero la *parte no conocida* $|\Delta f|$ de $f(\mathbf{x}; t)$ *está acotada superiormente por una función continua conocida de x y t* ; de forma similar, las ganancias de control $b(\mathbf{x}; t)$ no se conocen exactamente, pero se conoce su signo, que es acotada, y es una función continua de $\mathbf{x}$ y t . Ambas, $f(\mathbf{x}; t)$ y $b(\mathbf{x}; t)$, se asumen que son continuas en $\mathbf{x}$. La perturbación $d(t)$ es desconocida, pero acotada en valor absoluto por una función conocida continua en el tiempo. El problema de control consiste en obtener el estado $\mathbf{x}$, para *seguir un estado específico* $\mathbf{x}_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]^T$, *en presencia de falta de precisión en el modelo sobre $f(\mathbf{x}; t)$ y $b(\mathbf{x}; t)$, y de las perturbaciones $d(t)$* . Para que esto se pueda realizar en el tiempo $t = 0$, usando una ley de control finita u , se propone:

$$\tilde{\mathbf{x}}|_{t=0} = 0, \quad (4.2)$$

donde $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \dots, \tilde{x}^{(n-1)}]^T$ es el vector de error de seguimiento; esta suposición se analizará más adelante. En [2] se define una *superficie deslizante variante en el tiempo* $s(t)$ en el espacio de estado $\mathbb{R}^n$ como $s(\mathbf{x}; t) = 0$, con

$$s(\mathbf{x}; t) := \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}, \quad (4.3)$$

donde λ es una constante positiva. Dada la condición inicial (4.2), *el problema de seguimiento* $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_d$ *es equivalente al de permanencia sobre la superficie $s(t)$ para todo $t > 0$* , de hecho $s \equiv 0$ representa una ecuación diferencial lineal cuya única solución es $\tilde{x} \equiv 0$, dando la condición inicial (4.2). Ahora, una condición suficiente para tal invariancia positiva de $s(t)$ es la elección de la ley de control u de (4.1), de tal manera que fuera de $s(t)$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2(\mathbf{x}; t) \leq -\eta |s|, \quad (4.4)$$

donde η es una constante positiva. La desigualdad (4.4) obliga a las trayectorias a apuntar hacia la superficie $s(t)$ y se refiere como la *condición de deslizamiento*.

La idea detrás de (4.3) y (4.4) es la de conseguir el buen comportamiento de la función del error de seguimiento, s , de acuerdo a (4.3), y entonces seleccionar la realimentación de la ley de control u en (4.1), tal que s^2 siga siendo una función de Lyapunov del sistema en lazo cerrado *a pesar de la presencia de imprecisión en el modelo y de perturbaciones*. Además, satisfaciendo (4.3) se garantiza que si la condición (4.2) no se cumple exactamente, *i. e.* si $\mathbf{x}|_{t=0}$ está actualmente fuera de $\mathbf{x}_d|_{t=0}$, la superficie $s(t)$, sin embargo, se alcanzará en un tiempo finito inferior a $|s(\mathbf{x}(0); 0)|/\eta$, mientras que la definición (4.3) garantiza que $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. La ley de control que satisface (4.4), sin embargo, tiene que ser *discontinua*

a través de la superficie deslizante, lo que conduce en la práctica a pequeñas oscilaciones llamadas como chattering.

El problema obvio, explotando similarmente el comportamiento deslizante en el diseño de *observadores*, en lugar de controladores, es precisamente que el total de los estados no están disponibles para medirlos, y por lo tanto, una definición de superficie deslizante análoga a (4.3) no es adecuada. Alguna intuición puede ser desarrollada para abordar esta dificultad mediante la consideración simple de dinámica de segundo orden.

4.1.2. Efecto cortadura y parche de deslizamiento

Vamos a considerar la generación de comportamiento de deslizamiento en un sistema de segundo orden a través de la conmutación de la entrada, de acuerdo con el valor de un único componente de estado, en lugar de una combinación lineal de ambos componentes, como en (4.3). El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \operatorname{sgn}(x_1),\end{aligned}$$

donde k_2 es una constante positiva, y $\operatorname{sgn}(\cdot)$ es la función signo, claramente no muestra un comportamiento deslizante. En su lugar, consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - k_1 \operatorname{sgn}(x_1), \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \operatorname{sgn}(x_1),\end{aligned}$$

donde k_1 y k_2 son constantes positivas. El correspondiente plano de fase se muestra en la Figura 4.2 el cual puede ser construido de la Figura 4.1, al cambiar la trayectoria sobre el semiplano derecho, por la cantidad k_1 , y similarmente cambiar la trayectoria sobre el semiplano izquierdo por $-k_1$. Este efecto cortadura genera el comportamiento deslizante en la región

$$|x_2| \leq k_1, \quad (4.5)$$

que nos referiremos como el *parche deslizante*.

Detallando el análisis, la condición

$$\frac{d}{dt}(x_1)^2 < 0$$

se satisface si la condición (4.5) se mantiene, y la cual define el parche de deslizamiento. La dinámica sobre el parche de deslizamiento en sí puede ser derivado del concepto de la definición de Filippov, que formaliza la siguiente intuición de ingeniería: la dinámica sobre el parche sólo puede ser una combinación convexa (*i. e.*, un promedio) de la dinámica de cada lado de la superficie de discontinuidad:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \gamma(x_2 + k_1) + (1 - \gamma)(x_2 - k_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \gamma k_1 + (1 - \gamma)(-k_1),\end{aligned}$$

en el valor de γ , y por lo tanto, la dinámica resultante, por lo que se determina la invarianza de la superficie como:

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = -(k_2/k_1)x_2.$$

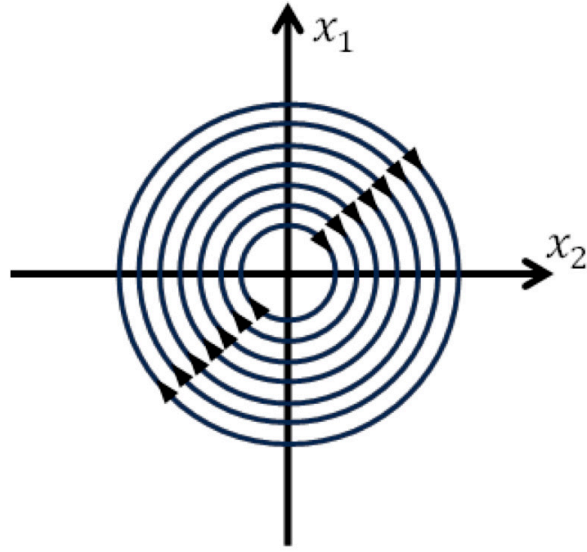


Figura 4.1: Sistema de segundo orden con entrada conmutada

Así, x_2 decrece exponencialmente a 0 después de alcanzar la superficie deslizante, con una constante de tiempo k_1/k_2 . Además, se puede demostrar que todas las trayectorias empiezan sobre el eje x_2 y buscan la superficie en un tiempo $|x_2(t=0)|/(k_1k_2)$. Actualmente, el deslizamiento se puede garantizar desde el tiempo $t=0$ haciendo a k_1 y k_2 variantes en el tiempo, con

$$\begin{aligned} k_2/k_1 &\geq a, \\ k_1 &> |x_2(t=0)|e^{-at}, \end{aligned}$$

donde $a = a(t)$ es cualquier función definida positiva en el tiempo.

4.1.3. Amortiguamiento del sistema

Ahora, considérese el siguiente sistema [2]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha_1 x_1 + x_2 - k_1 \operatorname{sgn}(x_1), \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 x_1 - k_2 \operatorname{sgn}(x_1). \end{aligned}$$

Repitiendo el análisis previo, la condición de deslizamiento se comprueba en la región extendida

$$\begin{aligned} x_2 &\leq k_1 + \alpha_1 x_1 && \text{si } x_1 > 0 \\ x_2 &\geq -k_1 + \alpha_1 x_1 && \text{si } x_1 < 0 \end{aligned}$$

como se ilustra en la Figura 4.3. Entonces, la suma del término de amortiguamiento en $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ aumenta la región de atracción directa. Además, el valor de $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ sólo afecta la captura de fase, pero no la dinámica sobre el parche en sí, la cual se mantiene sin cambios:

$$\dot{x}_2 = -(k_2/k_1) x_2.$$

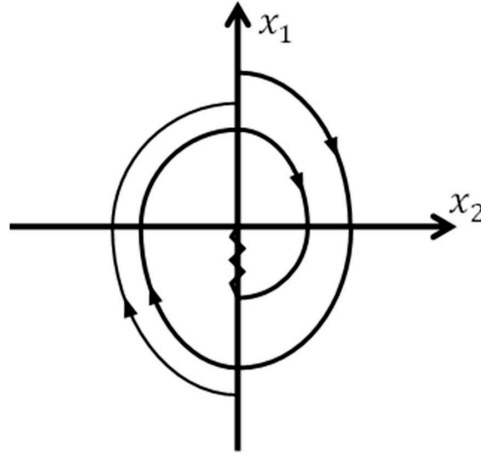


Figura 4.2: Trayectorias del plano de fase.

De [2], se tiene que para el sistema:

$$\ddot{x} = f, \quad (4.6)$$

donde f es una función no lineal con incertidumbre del estado x , se puede utilizar un observador con estructura de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -\alpha_1 \tilde{x}_1 + \hat{x}_2 - k_1 \text{sgn}(\hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\alpha_2 \tilde{x}_1 + \hat{f} - k_2 \text{sgn}(\hat{x}_1), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $\tilde{x}_1 = \hat{x}_1 - x_1$, y las constantes α_j son elegidas como un observador de Luenberger a fin de colocar los polos del sistema linealizado en las posiciones deseadas, y k_1 y k_2 son constantes positivas.

Para este trabajo, $\hat{x}_1$ corresponderá a los valores estimados para los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada, y $\hat{x}_2$ serán los valores estimados de las velocidades angulares de los estados mencionados.

4.2. Observador no lineal de estado extendido

En [6], se propone un observador de estados para el sistema

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}, w) + b_0 u, \quad (4.8)$$

donde f representa una función desconocida y denota la dinámica de la planta, donde generalmente se considera como no lineal; w , una perturbación de entrada desconocida, u es la señal de control, b_0 es una constante que se asume conocida, y y es la salida medida. En ecuaciones

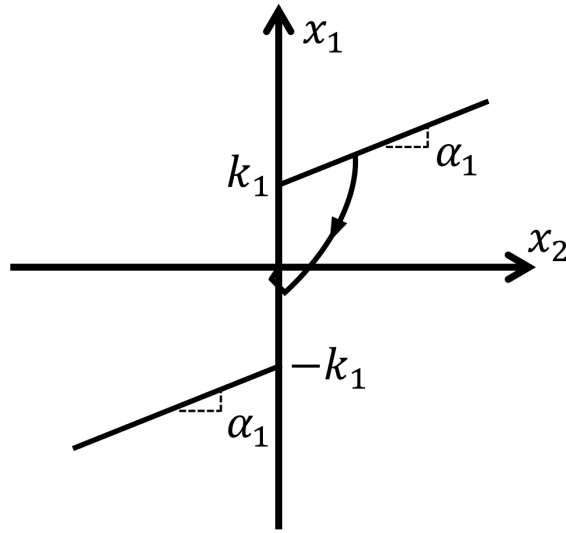


Figura 4.3: Alcanzando el efecto de amortiguamiento

de estado, si define el sistema como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + b_0 u, \\ \dot{x}_3 &= h, \\ y &= x_1,\end{aligned}\tag{4.9}$$

donde $f(y, \dot{y}, w)$ puede ser tratada como otro estado, x_3 .

Del sistema anterior, tanto $f(y, \dot{y}, w)$, como su derivada $\dot{h} = \dot{f}(y, \dot{y}, w)$, se asumen desconocidas. Sin embargo, haciendo a $f(y, \dot{y}, w)$ un estado, ahora éste puede ser estimado. Para lograr lo anterior en [6] se propone el siguiente observador no lineal

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 + \beta_1 g_1(e), \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \beta_2 g_2(e) + b_0 u, \\ \dot{z}_3 &= \beta_3 g_3(e),\end{aligned}\tag{4.10}$$

donde $e = y - z_1$, y z_3 es el estimado de la función incertidumbre $f(\cdot)$. $g_i(\cdot)$ es una función de ganancia exponencial modificada.

La función $g_i(\cdot)$ está definida por

$$g_i(e, \alpha_i, \delta) = \begin{cases} |e|^{\alpha_i} \text{sgn}(e), & |e| > \delta \\ \frac{e}{\delta^{1-\alpha_i}}, & |e| \leq \delta \end{cases}, \quad \delta > 0\tag{4.11}$$

donde α se elige entre 0 y 1, permitiendo a $g_i(\cdot)$ tener una alta ganancia cuando el error es pequeño. δ es un número pequeño usado para limitar la ganancia en la vecindad de origen.

Para este trabajo, aplicando el modelo dinámico del UAV de ala fija del capítulo 3, $\dot{z}_1$ y $\dot{z}_2$, de (4.10), representan los estados estimados para posiciones y velocidades angulares, mientras $\dot{z}_3$ representa el estado extendido del Observador no lineal del estado extendido (NESO por sus siglas en inglés para Nonlinear Extended State Observer), para cada movimiento.

4.3. Observador Backstepping

A continuación, se presenta una propuesta de observador por Backstepping, aplicado al modelo dinámico del UAV del capítulo 3.

Se tiene el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.12)$$

$$\dot{x}_2 = c_1 x_2 + c_2 u, \quad (4.13)$$

y el observador de Luenberger de orden completo

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1 (x_1 - \hat{x}_1), \quad (4.14)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = c_1 \hat{x}_2 + c_2 u + k_2 (x_1 - \hat{x}_1), \quad (4.15)$$

y con

$$\hat{y} = \hat{x}_1. \quad (4.16)$$

Se introduce el error de seguimiento como

$$z_d = \begin{bmatrix} y_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix}, \quad \hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \dot{\hat{y}} \end{bmatrix}, \quad z = z_d - \hat{z},$$

y el error de estimación como

$$\tilde{x} = x - \hat{x},$$

donde y_d es la trayectoria deseada dos veces diferenciable. Se tiene entonces que

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (4.17)$$

$$\dot{\hat{y}} = \dot{\hat{x}} = \hat{x}_2 + k_1 (x_1 - \hat{x}_1), \quad (4.18)$$

$$\ddot{\hat{y}} = \dot{\hat{x}}_2 + k_1 (\dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1), \quad (4.19)$$

$$\ddot{\hat{y}} = c_1 \hat{x}_2 + c_2 u + k_2 (x_1 - \hat{x}_1) + k_1 (x_2 - \hat{x}_2 - k_1 (x_1 - \hat{x}_1)), \quad (4.20)$$

$$\ddot{\hat{y}} = c_1 \hat{x}_2 + c_2 u + k_2 \tilde{x}_1 + k_1 \tilde{x}_2 - k_1^2 \tilde{x}_1, \quad (4.21)$$

$$\ddot{\hat{y}} = c_1 \hat{x}_2 + c_2 u + (k_2 - k_1^2) \tilde{x}_1 + k_1 \tilde{x}_2, \quad (4.22)$$

ahora, el sistema queda como

$$z_1 = y_d - \hat{y}, \quad (4.23)$$

$$z_1 = z_d - \hat{z}_1, \quad (4.24)$$

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_d - \dot{\hat{z}}_1, \quad (4.25)$$

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_d - \dot{\hat{z}}_2, \quad (4.26)$$

y para z_2 :

$$z_2 = \dot{y} - \dot{\hat{y}}, \quad (4.27)$$

$$\dot{z}_2 = \ddot{y} - \ddot{\hat{y}}, \quad (4.28)$$

$$\dot{z}_2 = \ddot{z}_d - c_1 x_2 - c_2 u - (k_2 - k_1^2) \tilde{x}_1 - k_1 \tilde{x}_2, \quad (4.29)$$

mientras que para z_3 :

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_d - \hat{z}_2, \quad (4.30)$$

$$\dot{z}_2 = \ddot{z}_d - c_1 x_2 - c_2 u - (k_2 - k_1^2) \tilde{x}_1 - k_1 \tilde{x}_2. \quad (4.31)$$

Utilizando la técnica de Backstepping, se define la primera función de almacenamiento:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} z_1^2, \quad (4.32)$$

cuya derivada es

$$\dot{V}_1(z) = z_1 \dot{z}_1 = z_1 (\dot{z}_d - \hat{z}_2), \quad (4.33)$$

y tomando a $\hat{z}_2$ como entrada de control virtual, entonces se puede proponer que

$$\hat{z}_2 = b_1 z_1 + \dot{z}_d, \quad (4.34)$$

por lo que al sustituirla en $\dot{V}_1(z)$:

$$\dot{V}_1(z) = z_1 (\dot{z}_d - (b_1 z_1 + \dot{z}_d)), \quad (4.35)$$

$$= z_1 (\dot{z}_d - b_1 z_1 - \dot{z}_d), \quad (4.36)$$

$$= -b_1 z_1^2, \quad (4.37)$$

pero $\hat{z}_2$ es un estado, por lo que se propone

$$\hat{z}_{2u} = b_1 z_1 + \dot{z}_d = \alpha(z), \quad (4.38)$$

por lo tanto, considerando un nuevo sistema de coordenadas:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \alpha(z) - \hat{z}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

donde

$$\zeta_1 = z_1, \quad (4.40)$$

$$\dot{\zeta}_1 = \dot{z}_1, \quad (4.41)$$

$$= \dot{z}_d - \hat{z}_2, \quad (4.42)$$

$$= \dot{z}_d - \alpha(z) + \zeta_2, \quad (4.43)$$

$$= \dot{z}_d - b_1 z_1 - \dot{z}_d + \zeta_2, \quad (4.44)$$

$$= \zeta_2 - b_1 \zeta_1, \quad (4.45)$$

y

$$\zeta_2 = \alpha(z) - \hat{z}_2, \quad (4.46)$$

$$= b_1 \zeta_1 + \dot{z}_d - \hat{z}_2, \quad (4.47)$$

$$\dot{\zeta}_2 = b_1 \dot{\zeta}_1 + \ddot{z}_d - \dot{\hat{z}}_2, \quad (4.48)$$

$$= b_1 (\zeta_2 - b_1 \zeta_1) + \ddot{z}_d - c_1 \hat{x}_2 - c_2 u - (k_2 - k_1^2) \tilde{x}_1 - k_1 \tilde{x}_2. \quad (4.49)$$

Ahora, defínase la segunda función de almacenamiento como

$$V_2(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta_1^2 + \frac{1}{2}\zeta_2^2, \quad (4.50)$$

cuya derivada es

$$\dot{V}_2(\zeta) = \zeta_1 \dot{\zeta}_1 + \zeta_2 \dot{\zeta}_2, \quad (4.51)$$

$$= \zeta_1 (\zeta_2 - b_1 \zeta_1) \zeta_2 (b_1 (\zeta_2 - b_1 \zeta_1) + \ddot{z}_d - c_1 \hat{x}_2 - c_2 u - (k_2 - k_1^2) \tilde{x}_1 - k_1 \tilde{x}_2), \quad (4.52)$$

$$= -b_1 \zeta_1^2 + \zeta_2 (\zeta_1 + b_1 (\zeta_2 - b_1 \zeta_1) + \ddot{z}_d - c_1 \hat{x}_2 - c_2 u - (k_2 - k_1^2) \tilde{x}_1 - k_1 \tilde{x}_2). \quad (4.53)$$

Dado que en esta etapa se encuentra la entrada real del sistema, entonces se propone

$$c_2 u = b_2 \zeta_2 + \zeta_1 + b_1 (\zeta_2 - b_1 \zeta_1) + \ddot{z}_d - c_1 \hat{x}_2 - (k_2 - k_1^2) \tilde{x}_1, \quad (4.54)$$

por lo que queda

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\zeta) &= -b_1 \zeta_1^2 + \zeta_2 (\zeta_1 + b_1 (\zeta_2 - b_1 \zeta_1) + \ddot{z}_d - c_1 \hat{x}_2 \\ &\quad - (b_2 \zeta_2 + \zeta_1 + b_1 (\zeta_2 - b_1 \zeta_1) + \ddot{z}_d - c_1 \hat{x}_2 - (k_2 - k_1^2) \tilde{x}_1) \\ &\quad - (k_2 - k_1^2) \tilde{x}_1 - k_1 \tilde{x}_2), \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\dot{V}_2(\zeta) = -b_1 \zeta_1^2 - b_2 \zeta_2^2 - k_1 \zeta_2 \tilde{x}_2. \quad (4.56)$$

Como se indica en [39], se busca una matriz $P_0 = P_0^T > 0$, y una matriz $Q_0 = Q_0^T > 0$, que satisfagan la ecuación de Lyapunov

$$(A - KC)^T P_0 + P_0 (A - KC) = -Q_0, \quad (4.57)$$

con lo cual el error de estimación es exponencialmente estable, con las propiedades de la función de Lyapunov siguientes:

$$\begin{aligned} V_0(\tilde{x}) &= \tilde{x}^T P_0 \tilde{x} > 0, \quad \|\tilde{x}\| \neq 0 \\ \frac{d}{dt} V_0 &= -\tilde{x}^T Q_0 \tilde{x} < 0, \quad \|\tilde{x}\| \neq 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por lo que se propone

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

Ahora, se deduce la matriz P_0 según (4.57). Se sabe que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0].$$

Se sustituye lo anterior en la (4.57) de manera que

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0] \right)^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0] \right) &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} \right) &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & g_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & g_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

$$\begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 1 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & g_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

$$\begin{bmatrix} -k_1 P_{11} - k_2 P_{21} & -k_1 P_{12} - k_2 P_{22} \\ P_{11} + g_1 P_{21} & P_{12} + g_1 P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_1 P_{11} - k_2 P_{12} & P_{11} + g_1 P_{12} \\ -k_1 P_{21} - k_2 P_{22} & P_{21} + g_1 P_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$

$$\begin{bmatrix} -2k_1 P_{11} - k_2 (P_{12} + P_{21}) & P_{11} + P_{12} (g_1 - k_1) - k_2 P_{22} \\ P_{11} + P_{21} (g_1 - k_1) - k_2 P_{22} & 2g_1 P_{22} + P_{21} + P_{12} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

Por lo que se tiene

$$-2k_1 P_{11} - k_2 (P_{12} + P_{21}) = -1, \quad (4.64)$$

$$P_{11} + P_{12} (g_1 - k_1) - k_2 P_{22} = 0, \quad (4.65)$$

$$P_{11} + P_{21} (g_1 - k_1) - k_2 P_{22} = 0, \quad (4.66)$$

$$2g_1 P_{22} + P_{21} + P_{12} = -1. \quad (4.67)$$

Despejando P_{11} de (4.65):

$$P_{11} = k_2 P_{22} - P_{12} (g_1 - k_1), \quad (4.68)$$

y al sustituir (4.68) en (4.66), se tiene

$$\begin{aligned} k_2 P_{22} - P_{12} (g_1 - k_1) + P_{12} (g_1 - k_1) - k_2 P_{22} &= 0, \\ P_{21} (g_1 - k_1) &= P_{12} (g_1 - k_1), \\ P_{21} &= P_{12}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Ahora, sustituyendo (4.69) en (4.67) se tiene que

$$\begin{aligned} 2g_1 P_{22} + P_{12} + P_{12} &= -1, \\ 2g_1 P_{22} &= -1 - 2P_{12}, \\ P_{22} &= - \left(\frac{1 + 2P_{12}}{2g_1} \right). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Por otro lado, al sustituir (4.70) en (4.68):

$$\begin{aligned} P_{11} &= -k_2 \left(\frac{1 + 2P_{12}}{2g_1} \right) - P_{12} (g_1 - k_1), \\ P_{11} &= -\frac{k_2}{2g_1} - \frac{2k_2 P_{12}}{2g_1} - P_{12} (g_1 - k_1), \\ P_{11} &= -\frac{k_2}{2g_1} - \frac{k_2}{g_1} - P_{12} (g_1 - k_1), \\ P_{11} &= -\frac{k_2}{2g_1} - P_{12} \left(\frac{k_2}{g_1} + (g_1 - k_1) \right). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Sustituyendo (4.71) en (4.64):

$$\begin{aligned}
2k_1 \left(\frac{k_2}{2g_1} + P_{12} \left(\frac{k_2}{g_1} + (g_1 - k_1) \right) \right) - 2k_2 P_{12} &= -1, \\
\frac{k_1 k_2}{g_1} + 2P_{12} \left(\frac{k_1 k_2}{g_1} + k_1 (g_1 - k_1) \right) - 2k_2 P_{12} &= -1, \\
2P_{12} \left(\frac{k_1 k_2}{g_1} + k_1 (g_1 - k_1) - k_2 \right) &= -1 - \frac{k_1 k_2}{g_1}, \\
2P_{12} \left(\frac{k_1 k_2 + k_1 (g_1 - k_1) g_1 - k_2 g_1}{g_1} \right) &= \frac{-g_1 - k_1 g_2}{g_1}, \\
2P_{12} (k_1 k_2 + k_1 (g_1 - k_1) g_1 - k_1 g_1) &= -g_1 - k_1 k_2, \\
P_{21} &= \frac{-g_1 - k_1 k_2}{2 (k_1 k_2 + k_1 (g_1 - k_1) g_1 - k_2 g_1)}, \\
P_{12} = P_{21} &= \frac{g_1 + k_1 k_2}{2 (g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)},
\end{aligned}$$

y reemplazando a P_{12} en (4.70):

$$\begin{aligned}
P_{22} &= -\frac{1}{2g_1} - \frac{1}{g_1} P_{12}, \\
&= -\frac{1}{2g_1} - \frac{1}{g_1} \left(\frac{g_1 + k_1 k_2}{2 (g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)} \right), \\
&= -\frac{1}{2g_1} \left(1 + \frac{g_1 + k_1 k_2}{(g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)} \right), \\
&= -\frac{1}{2g_1} \left(\frac{(g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)}{(g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)} + \frac{g_1 + k_1 k_2}{(g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)} \right), \\
&= -\frac{1}{2g_1} \left(\frac{-k_1 k_2 - (g_1 - k_1) g_1 k_1 + g_1 k_2}{(g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)} + \frac{g_1 + k_1 k_2}{(g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)} \right), \\
&= -\frac{1}{2g_1} \left(\frac{-k_1 k_2 - (g_1 - k_1) g_1 k_1 + g_1 k_2 + g_1 + k_1 k_2}{(g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)} \right), \\
&= -\frac{1}{2g_1} \left(\frac{g_1 (- (g_1 - k_1) k_1 + k_2 + 1)}{(g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)} \right), \\
&= \frac{(g_1 - k_1) k_1 - k_2 - 1}{2 (g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)}.
\end{aligned}$$

En seguida, se sustituye P_{12} y P_{22} en (4.68):

$$\begin{aligned}
P_{11} &= k_2 \left(\frac{(g_1 - k_1) k_1 - k_2 - 1}{2 (g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)} \right) - \left(\frac{g_1 + k_1 k_2}{2 (g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)} \right) (g_1 - k_1), \\
&= \frac{g_1 k_1 k_2 - k_1^2 k_2 - k_2^2 - k_2 - g_1^2 + g_1 k_1 - g_1 k_1 k_2 + k_1^2 k_2}{2 (g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)}, \\
&= \frac{-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2}{2 (g_1 - k_1) (k_2 - g_1 k_1)}.
\end{aligned}$$

Por lo que la matriz P_0 queda como

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} & \frac{g_1 + k_1 k_2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ \frac{g_1 + k_1 k_2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} & \frac{(g_1 - k_1)k_1 - k_2 - 1}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Para que $P_0 > 0$, entonces $P_{11} > 0$ y $|P_0| > 0$, así

$$P_{11} = \frac{-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} > 0, \quad (4.73)$$

por lo que P_{11} será positivo si se considera que $k_1, k_2 > 0$ y que $g_1 < 0$.

Ahora, para $|P_0| > 0$:

$$|P_0| = \frac{(-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2)((g_1 - k_1)k_1 - k_2 - 1) - (g_1 + k_1 k_2)^2}{4(g_1 - k_1)^2(k_2 - g_1 k_1)^2} > 0. \quad (4.74)$$

Es sencillo notar que el denominador es positivo, por lo que queda demostrar que

$$\begin{aligned} (-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2)((g_1 - k_1)k_1 - k_2 - 1) - (g_1 + k_1 k_2)^2 &> 0, \\ (-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2)(g_1 k_1 - k_2 - k_2 - 1) - g_1^2 - 2g_1 k_1 k_2 - k_1^2 k_2^2 &> 0, \\ -g_1 k_1 k_2^2 + k_1^2 k_2^2 + k_2^3 + k_2^2 - 4g_1 k_1 k_2 + k_1^2 k_2 + k_2^2 + k_2 + g_1^2 k_1^2 & \\ -g_1 k_1^3 - g_1 k_1 - g_1^3 k_1 + g_1^2 k_1^2 + g_1^2 k_2 &> 0, \\ k_2(k_2^2 + k_1^2 + 2k_2 - 2g_1 k_1 + g_1^2 + 1) - g_1 k_1(k_2^2 + k_1^2 + 2k_2 - 2g_1 k_1 + g_1^2 + 1) &> 0, \\ (k_2 - g_1 k_1)(k_2^2 + k_1^2 + 2k_2 - 2g_1 k_1 + g_1^2 + 1) &> 0. \end{aligned}$$

El segundo término es positivo por las mismas consideraciones hechas a P_{11} , por lo que

$$\begin{aligned} k_2 - g_1 k_1 &> 0, \\ k_2 &> g_1 k_1, \\ g_1 &< \frac{k_2}{k_1}. \end{aligned}$$

Se concluye que, para que P_0 sea definida positiva, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $g_1 < 0$ y $g_1 < \frac{k_2}{k_1}$. Ahora, se comprobará que si $V(\tilde{x}) = \beta \tilde{x}^T P_0 \tilde{x} > 0$, entonces $\dot{V}(\tilde{x}) = -\beta \tilde{x}^T Q_0 \tilde{x}$, donde β es una constante de diseño:

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}) &= \beta \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} & \frac{g_1 + k_1 k_2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ \frac{g_1 + k_1 k_2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} & \frac{(g_1 - k_1)k_1 - k_2 - 1}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \\ V(\tilde{x}) &= \beta \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2)\tilde{x}_1}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} & \frac{(g_1 + k_1 k_2)\tilde{x}_2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ \frac{(g_1 + k_1 k_2)\tilde{x}_1}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} & \frac{((g_1 - k_1)k_1 - k_2 - 1)\tilde{x}_2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \end{bmatrix}, \\ V(\tilde{x}) &= \beta \left[\frac{(-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2)\tilde{x}_1^2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} + \frac{(g_1 + k_1 k_2)\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(g_1 + k_1 k_2)\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} + \frac{((g_1 - k_1)k_1 - k_2 - 1)\tilde{x}_2^2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right], \end{aligned}$$

$$V(\tilde{x}) = \beta \frac{(-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2) \tilde{x}_1^2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} + \beta \frac{(g_1 + k_1 k_2) \tilde{x}_1 \tilde{x}_2}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ + \beta \frac{((g_1 - k_1) k_1 - k_2 - 1) \tilde{x}_2^2}{2(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)}.$$

Calculando ahora la derivada de $V(\tilde{x})$:

$$\dot{V}(\tilde{x}) = \beta \frac{(-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2) \tilde{x}_1 \dot{\tilde{x}}_1}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} + \beta \frac{(g_1 + k_1 k_2) (\tilde{x}_1 \dot{\tilde{x}}_2 + \tilde{x}_2 \dot{\tilde{x}}_1)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ + \beta \frac{((g_1 - k_1) k_1 - k_2 - 1) \tilde{x}_2 \dot{\tilde{x}}_2}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)},$$

se sabe que:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= x_2 - \hat{x}_2 - k_1 \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 - k_1 \tilde{x}_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= g_1 x_2 + g_2 u - g_1 \hat{x}_2 - g_2 u - k_2 \tilde{x}_1 = g_1 \tilde{x}_2 - k_2 \tilde{x}_1, \end{aligned}$$

y sustituyendo en $\dot{V}(\tilde{x})$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}) &= \beta \frac{(-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2) \tilde{x}_1 (\tilde{x}_2 - k_1 \tilde{x}_1)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ &\quad + \beta \frac{(g_1 + k_1 k_2) (\tilde{x}_1 (g_1 \tilde{x}_2 - k_2 \tilde{x}_1) + \tilde{x}_2 (\tilde{x}_2 - k_1 \tilde{x}_1))}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ &\quad + \beta \frac{((g_1 - k_1) k_1 - k_2 - 1) \tilde{x}_2 (g_1 \tilde{x}_2 - k_2 \tilde{x}_1)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)}, \\ &= -\beta k_1 \frac{(-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2) \tilde{x}_1^2}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ &\quad + \beta \frac{(-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2) \tilde{x}_1 \tilde{x}_2}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ &\quad + \beta \frac{(g_1 + k_1 k_2) (g_1 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - k_2 \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - k_1 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ &\quad + \beta g_1 \frac{((g_1 - k_1) k_1 - k_2 - 1) \tilde{x}_2^2}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\ &\quad - \beta k_2 \frac{((g_1 - k_1) k_1 - k_2 - 1) \tilde{x}_1 \tilde{x}_2}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)}, \\ &= \beta \tilde{x}_1^2 \left(-k_1 \frac{(-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} - k_2 \frac{(g_1 + k_1 k_2)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right) \\ &\quad + \beta \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \left(\frac{(-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} + \frac{(g_1 + k_1 k_2)(g_1 - k_1)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right. \\ &\quad \left. - k_2 \frac{((g_1 - k_1) k_1 - k_2 - 1)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right) \\ &\quad + \beta \tilde{x}_2^2 \left(\frac{(g_1 + k_1 k_2)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} + g_1 \frac{((g_1 - k_1) k_1 - k_2 - 1)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{x}) &= \beta \tilde{x}_1^2 \left(\frac{k_1 k_2^2 + k_1 k_2 - g_1 k_1^2 + g_1^2 k_1 - g_1 k_2 - k_1 k_2^2}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right) \\
&\quad + \beta \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \left(\frac{-k_2^2 - k_2 + g_1 k_1 - g_1^2 + g_1^2 - g_1 k_1}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right) \\
&\quad + \frac{g_1 k_1 k_2 - k_1^2 k_2 - g_1 k_1 k_2 + k_1^2 k_2 + k_2^2 + k_2}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \\
&\quad + \beta \tilde{x}_2^2 \left(\frac{g_1 + k_1 k_2 + g_1^2 k_1 - g_1 k_1^2 - g_1 k_2 - g_1}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right), \\
&= \beta \tilde{x}_1^2 \left(-\frac{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right) \\
&\quad + \beta \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \left(\frac{0}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right) \\
&\quad + \beta \tilde{x}_2^2 \left(-\frac{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)}{(g_1 - k_1)(k_2 - g_1 k_1)} \right), \\
\dot{V}(\tilde{x}) &= -\beta \tilde{x}_1^2 - \beta \tilde{x}_2^2.
\end{aligned}$$

La función candidata de Lyapunov queda entonces definida como

$$V_L(\zeta, \tilde{x}) = V_2(\zeta) + \beta \tilde{x}^T P_0 \tilde{x} \quad \text{con } \beta > 0 \quad (4.75)$$

donde su derivada está dada por

$$\dot{V}_L(\zeta, \tilde{x}) = -b_1 \zeta_1^2 - b_2 \zeta_2^2 - k_1 \zeta_2 \tilde{x}_2 - \beta \tilde{x}_1^2 - \beta \tilde{x}_2^2. \quad (4.76)$$

Reescribiéndola en forma matricial, se tiene

$$\dot{V}_L(\zeta, \tilde{x}) = - \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \frac{k_1}{2} \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \frac{k_1}{2} & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.77)$$

si

$$M_V = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \frac{k_1}{2} \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \frac{k_1}{2} & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

entonces M_V debe ser definida positiva ($M_V > 0$) para que $\dot{V}_L(\zeta, \tilde{x}) < 0$; por diseño, se sabe que $b_1, b_2, k_1, \beta > 0$, para que $M_V > 0$, entonces $|M_V| > 0$; realizando el cálculo, se tiene que

$$\begin{aligned}
|M_V| &= b_1 \left(b_2 \beta^2 + \frac{k_1}{2} \left(-\frac{k_1 \beta}{2} \right) \right) > 0, \\
b_1 b_2 \beta^2 - \frac{k_1^2 \beta b_1}{4} &> 0, \\
\beta &> \frac{k_1^2}{4b_2}.
\end{aligned} \quad (4.79)$$

4.4. Simulaciones

A continuación, se presentan los resultados de simulaciones de los observadores Luenberger, modos deslizantes y no lineal de estado extendido. Las simulaciones se llevaron a cabo en lazo cerrado utilizando dos leyes de control diferentes. La ley de control Proporcional-Derivativa fue la primera en ser considerada en las simulaciones, y posteriormente se eligió una ley de control Backstepping, con intención de comparar el desempeño, al menos en simulación. Para ambas leyes de control, se buscará alcanzar las posiciones angulares deseadas, a través de la regulación angular de los actuadores que correspondan a cada movimiento.

Los parámetros relacionados con las ganancias del observador Luenberger se muestran en la Tabla 4.1, mientras que la Tabla 4.2 están los valores de los parámetros del observador con SMO. La Tabla 4.3 muestra los valores de las ganancias $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ utilizados en las simulaciones para NESO.

Tabla 4.1: Valores de los parámetros de simulación y experimentación con observador de Luenberger.

Luenberger	Guiñada	Alabeo	Cabeceo
k_1	50	50	50
k_2	1880	3080	3550

Tabla 4.2: Valores de los parámetros de simulación y experimentación con SMO

SMO	Guiñada	Alabeo	Altura
$k_1 (\circ \cdot s^{-1})$	0.001	0.05	0.05
$k_2 (\circ \cdot s^{-2})$	0.005	0.005	0.005
$\alpha_1 (s^{-1})$	40	42	50
$\alpha_2 (s^{-2})$	2250	2200	3400

Tabla 4.3: Valores de los parámetros de simulación y experimentación con NESO

NESO	Guiñada	Alabeo	Altura
α_1	1	1	1
α_2	0.75	0.75	0.75
α_3	0.5	0.5	0.5
$\beta_1 (s^{-1})$	65	75	18
$\beta_2 (s^{-2})$	1880	2980	2380
$\beta_3 (s^{-3})$	2250	2200	3400

4.4.1. Ley de control PD

Con el fin de probar y analizar el comportamiento de los tres observadores, se decidió utilizar un simple control Proporcional-Derivativo (PD). Ya que los tres observadores obtienen la estimación de todos los estados del sistema, serán los estados estimados los que realimentarán la ley de control PD, que se sabe utiliza la posición y la velocidad del sistema para la regulación. Con los estados estimados realimentando la ley de control PD, se comprueba la eficiencia de los observadores.

En el caso de la ley de control para el movimiento de cabeceo, se decidió controlar la altura del UAV, por lo que el error en la realimentación se define como $e_h = h_d - h$. Este error denota la diferencia entre la altura deseada h_d y la altura medida h . Debido a que el control de altura está relacionado con el movimiento de cabeceo, se propone $\theta_d = \arctan(e_h/l)$, donde θ_d es el ángulo de cabeceo deseado que depende del error de altura. La señal de control PD está dada por

$$u = k_{pj}(e_j) + k_{vj}(\dot{e}_j), \quad (4.80)$$

donde k_{pj} y k_{vj} son las ganancias de control relacionadas a la ley de control PD [11], [40]. El parámetro j denota θ , ψ y ϕ , según sea el error de la ley de control para cada movimiento, por ejemplo, para la altura es $e_\theta = \theta_d - \hat{\theta}$.

Para los movimientos de guiñada y alabeo, se utiliza la estructura general del control PD de la ecuación (4.80), considerando las ecuaciones de error como $e_\psi = \psi_d - \hat{\psi}$ y $e_\phi = \phi_d - \hat{\phi}$ respectivamente, donde ψ_d y ϕ_d denotan los ángulos deseados de guiñada y alabeo, $\hat{\psi}$ y $\hat{\phi}$ son obtenidos de los observadores Luenberger, SMO o NESO según sea el caso.

Por otra parte, para la dinámica del control de altura, se tiene $\dot{e}_\theta = \dot{\theta}_d - \dot{\hat{\theta}} = \dot{\theta}_d - \dot{\hat{q}}$, donde $\dot{\hat{q}}$ se obtiene de los observadores Luenberger, SMO o NESO según sea el caso. De manera similar, se utiliza la dinámica anterior para los movimientos de guiñada y alabeo.

4.4.2. Ley de control Backstepping

Considerando la forma más general del sistema de control Backstepping, reportado en [41], se tiene:

$$\dot{x}_1 = f_b(x_1) + g_b(x_1)x_2, \quad (4.81)$$

$$\dot{x}_2 = f_a(x_1, x_2) + g_a(x_1, x_2)u, \quad (4.82)$$

donde f_b , g_b , f_a y g_a son funciones conocidas, con $f_b : D \rightarrow \mathbb{R}$, y $g_b : D \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en el dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene $x_1 = 0$ y $f_b(0) = 0$. Si $g_a(x_1, x_2) \neq 0$ sobre el dominio de interés, la entrada queda:

$$u = \frac{1}{g_a(x_1, x_2)}(u_a - f_a(x_1, x_2)), \quad (4.83)$$

donde (4.82) se reduce al integrador $\dot{x}_2 = u_a$. Si una ley de control de realimentación de estados estabiliza a $\xi(\eta)$, y existe una función de Lyapunov $V(\eta)$ tal que las condiciones de los lemas de Backstepping propuestos en [41] se satisfacen para (4.81), entonces (4.83) es una ley de control de realimentación de estados para estabilizar el sistema (4.81)-(4.82). De acuerdo con los observadores vistos en este trabajo, los cuales son de segundo orden, se establece que para el

Tabla 4.4: Valores de los parámetros de simulación y experimentales de las ganancias de las leyes de control y coeficientes aerodinámicos.

Backstepping	Guiñada	Alabeo	Altura
k_p	18	18	5
k_v	12	12	2.5
$k_{1\sigma} \text{ (s}^{-1}\text{)}$	0.1	0.1	0.1
$k_{2\sigma} \text{ (s}^{-1}\text{)}$	0.5	0.25	0.5
$k_{3\sigma} \text{ (s}^{-2}\text{)}$	2.0	2.0	4.0
$c_{1\sigma} \text{ (s}^{-1}\text{)}$	-0.3289	-0.3083	-2.27
$c_{2\sigma} \text{ (s}^{-2}\text{)}$	0.4198	0.3748	-2.7022

modelo desacoplado del avión: $f_b = 0$ y $g_b = 1$, lo cual satisface especialmente que $f_b(0) = 0$. En la Tabla 4.4 se observan los parámetros de simulación y experimentales para las ganancias de la ley de control Backstepping y los coeficientes aerodinámicos de cada movimiento.

4.4.3. Simulaciones del movimiento de alabeo con ley de control PD

Es importante mencionar, que tanto en el caso del movimiento de alabeo como en el de guiñada, las simulaciones parten de un error de 10 grados, ya que el ángulo deseado para los dos movimientos es de cero grados. En general, las simulaciones tienen una duración de diez segundos.

En la Figura 4.4 se muestran los resultados de simulación para el movimiento de alabeo de los tres observadores de estados: de Luenberger, modos deslizantes y no lineal de estado extendido. Los tres observadores utilizan una ley de control PD, ya que, para esta simulación, la estimación del observador de Luenberger y la del SMO son casi iguales, razón por la cual a simple vista aparenta haber sólo dos señales distintas, en lugar de tres en esta Figura.

En la Figura 4.5 se muestran los resultados de simulación para la velocidad angular de alabeo de los tres observadores de estado. Al igual que en la Figura 4.4, donde los ángulos estimados son muy parecidos, las velocidades estimadas para el observador de Luenberger y SMO son muy parecidas, más no iguales. Las Figuras 4.6 y 4.7 muestran los errores de ángulo y de velocidad angular, respectivamente, de los tres observadores de estado con la ley de control PD. Se observa que tanto para el SMO como para el NESO, el efecto de sierra se presenta durante el primer segundo de la simulación debido a su naturaleza deslizante. El resultado de simulación para el estado extendido del observador NESO, en el caso del movimiento de alabeo con la ley de control PD se presenta en la Figura 4.8.

La Figura 4.9 muestra la señal de control Proporcional-Derivativo (PD) de la simulación para el movimiento de alabeo.

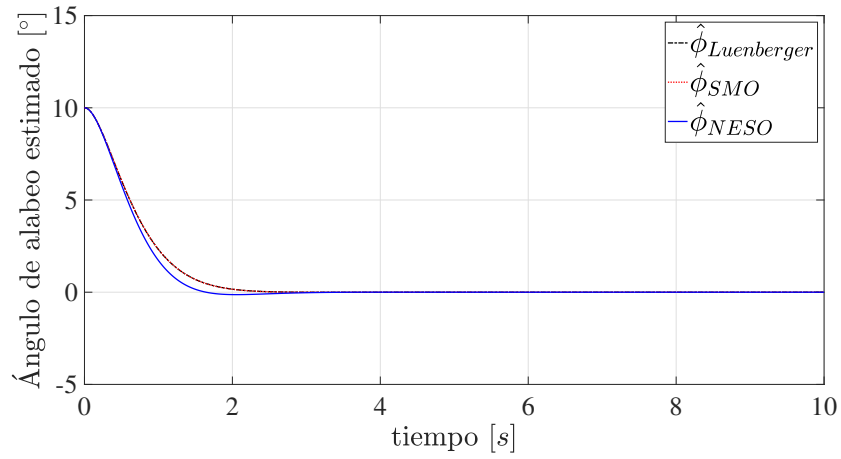


Figura 4.4: Estimación de ángulo de alabeo para los tres observadores de estado.

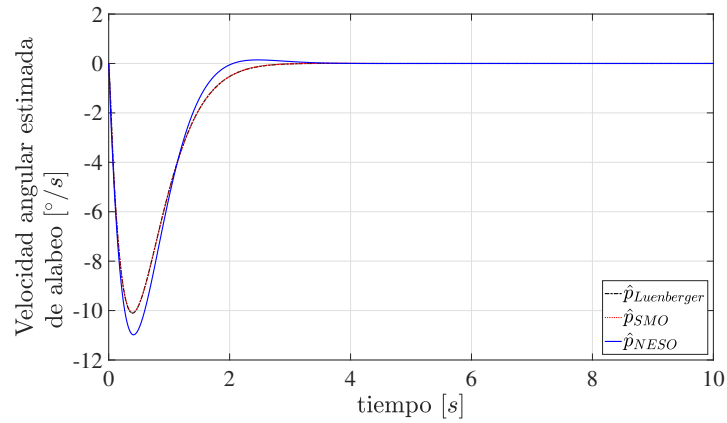


Figura 4.5: Estimación de velocidad angular de alabeo para los tres observadores de estado.

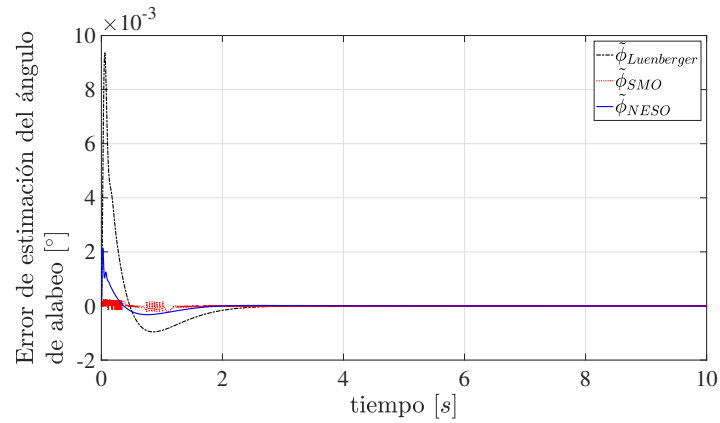


Figura 4.6: Error de estimación de ángulo de alabeo para los tres observadores de estado.

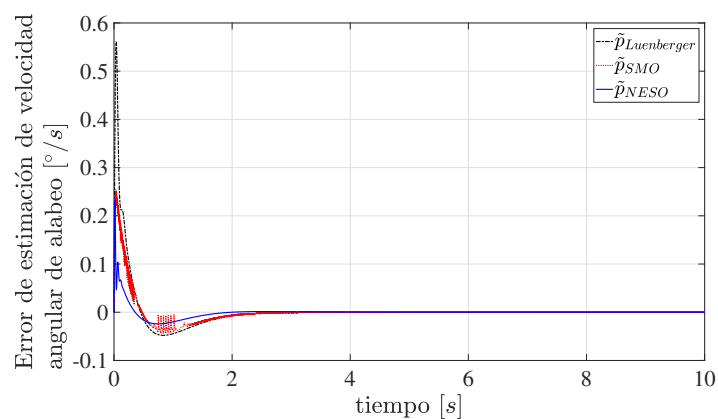


Figura 4.7: Error de estimación de velocidad angular de alabeo para los tres observadores de estado.

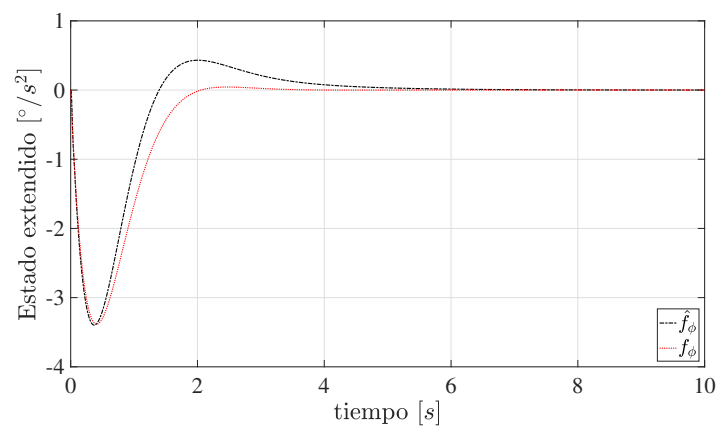


Figura 4.8: Estado extendido para el movimiento de alabeo.

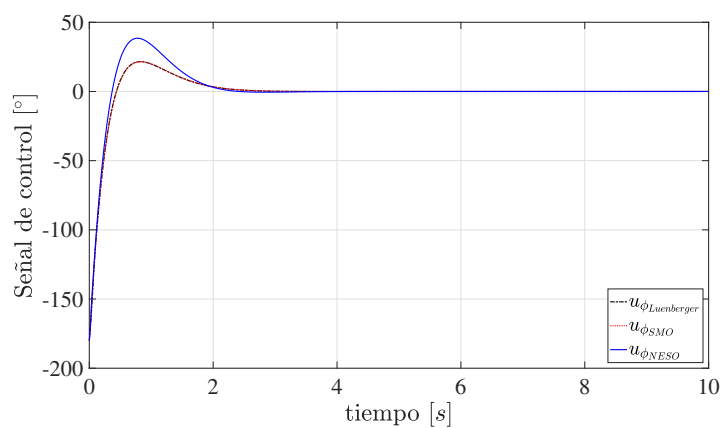


Figura 4.9: Señal de control PD para el movimiento de alabeo.

4.4.4. Simulaciones del movimiento de guiñada con ley de control PD

A continuación, se presentan los resultados de simulación para el movimiento de guiñada con la ley de control PD. En la Figura 4.10 se pueden apreciar los resultados de los tres observadores de estados para el ángulo de guiñada. Es importante aclarar que, para esta simulación, la estimación del observador de Luenberger y la del SMO son muy parecidas, por lo que pareciera haber sólo dos señales distintas, en lugar de tres en la Figura, al igual que en la subsección anterior.

En la Figura 4.11 se presentan los resultados de los tres observadores para velocidad angular de guiñada. Mientras que, en las Figuras 4.12 y 4.13 se presentan los resultados de simulación de los errores de posición angular y velocidad angular, respectivamente. El resultado de simulación para el estado extendido del observador NESO, para el movimiento de guiñada, se puede observar en la Figura 4.14.

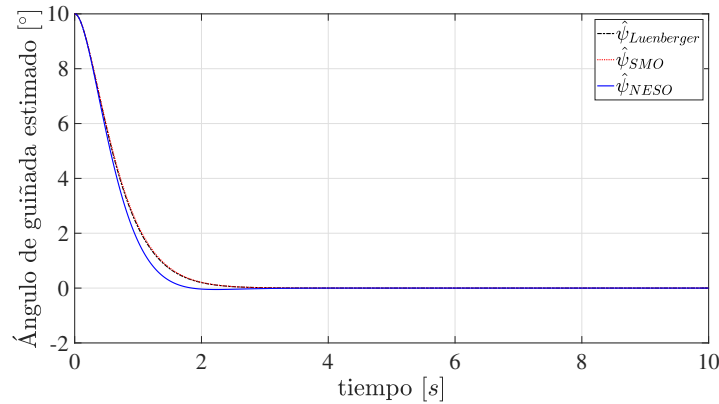


Figura 4.10: Estimación de ángulo de guiñada para los tres observadores de estado.

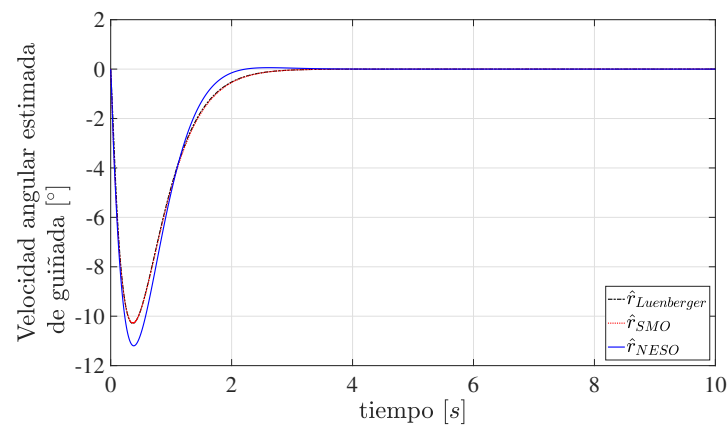


Figura 4.11: Estimación de velocidad angular de guiñada para los tres observadores de estado.

La señal de control PD para el movimiento de guiñada se muestra en la figura 4.15.

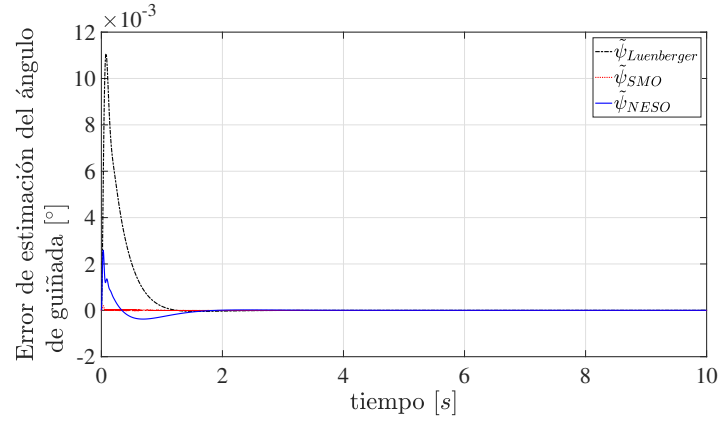


Figura 4.12: Error de estimación de ángulo de guiñada para los tres observadores de estado.

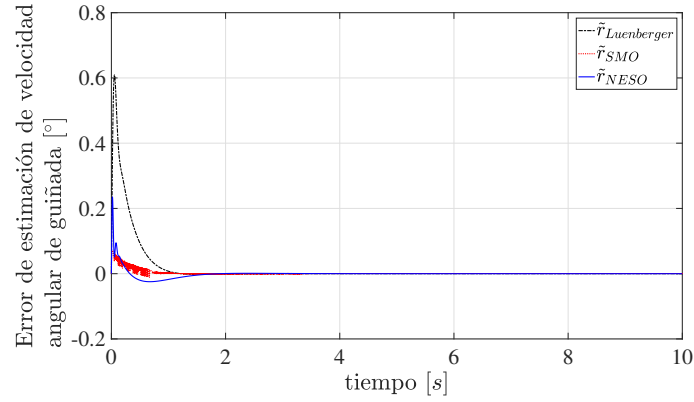


Figura 4.13: Error de estimación de velocidad angular de guiñada para los tres observadores de estado.

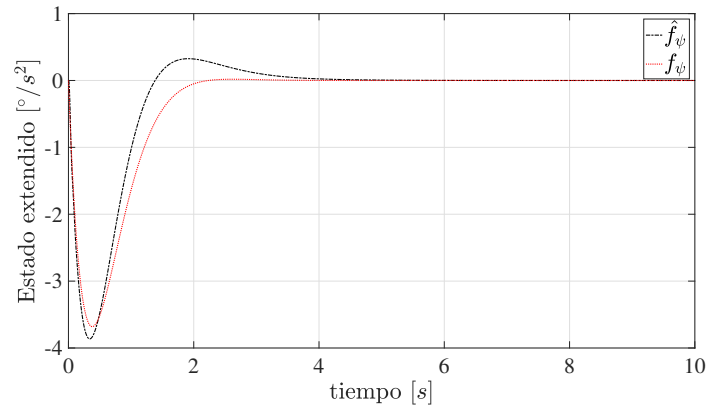


Figura 4.14: Estado extendido para el movimiento de guiñada.

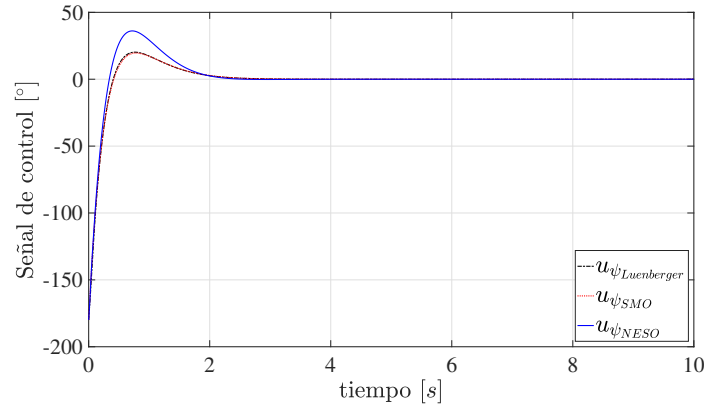


Figura 4.15: Señal de control PD para el movimiento de guiñada.

4.4.5. Simulaciones del movimiento de altura con ley de control PD

En esta subsección se muestran los resultados de simulación para el control de altura realimentado con los estados estimados por los tres observadores presentados en este trabajo. En la Figura 4.16 se aprecian los resultados de simulación para el movimiento de cabeceo de los tres observadores. Los resultados de simulación para la velocidad angular de cabeceo de los tres observadores se presentan en la Figura 4.17. Las Figuras 4.18 y 4.19 muestran los resultados de simulación de los errores de estimación de ángulo de cabeceo y velocidad angular de cabeceo, respectivamente. El estado extendido del observador NESO aplicado al movimiento de altura se muestra en la Figura 4.20.

Para la simulación del movimiento de altura, con el control PD realimentado con los estados estimados por los observados de estado, se propuso que la dinámica partiera de cero (teniendo en cuenta que el UAV está a cierta altura al inicio de la simulación) y que la altura deseada fuera 5 metros. Los resultados se observan en la Figura 4.21. La señal de control para el movimiento de altura con ley de control PD se muestra en la Figura 4.22.

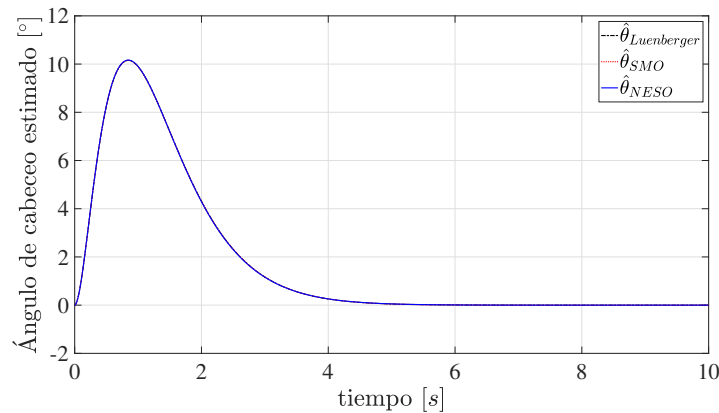


Figura 4.16: Estimación de ángulo de cabeceo para los tres observadores de estado.

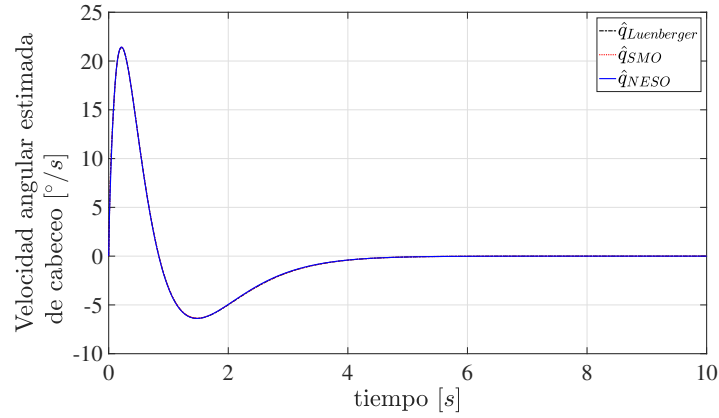


Figura 4.17: Estimación de velocidad angular de cabeceo para los tres observadores de estado.

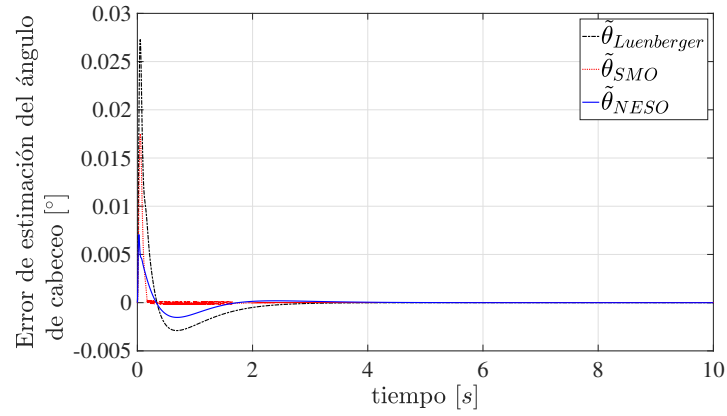


Figura 4.18: Error de estimación de ángulo de cabeceo para los tres observadores de estado.

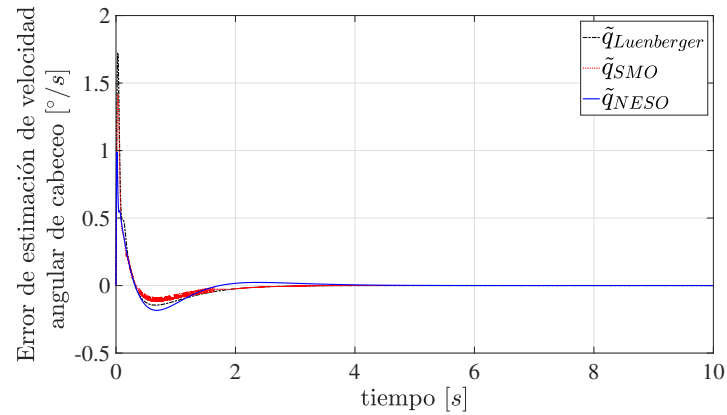


Figura 4.19: Error de estimación de velocidad angular de cabeceo para los tres observadores de estado.

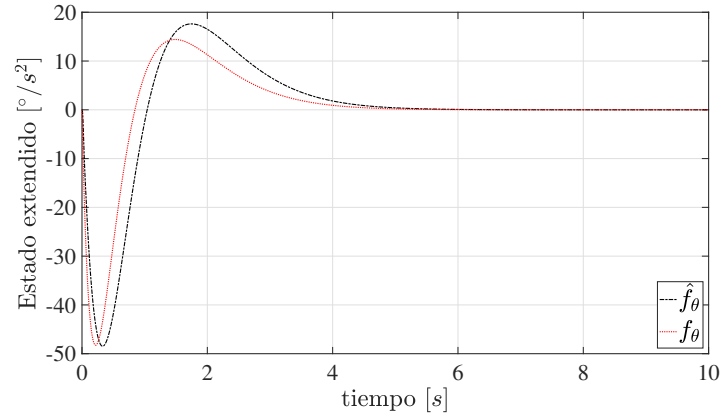


Figura 4.20: Estado extendido para el movimiento de cabeceo.

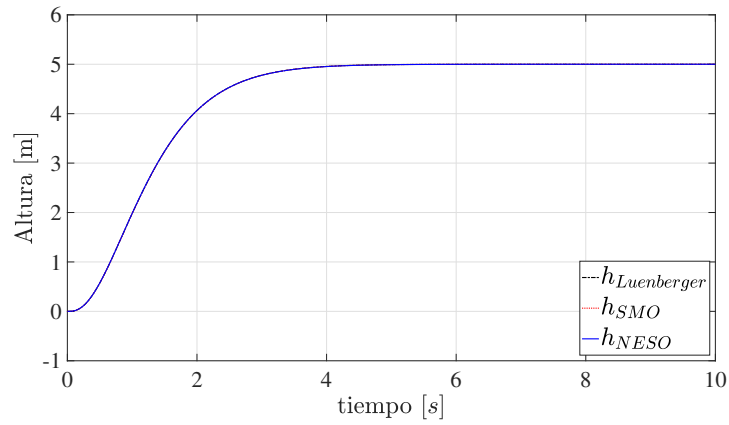


Figura 4.21: Simulación del movimiento de altura con control PD para los tres observadores.

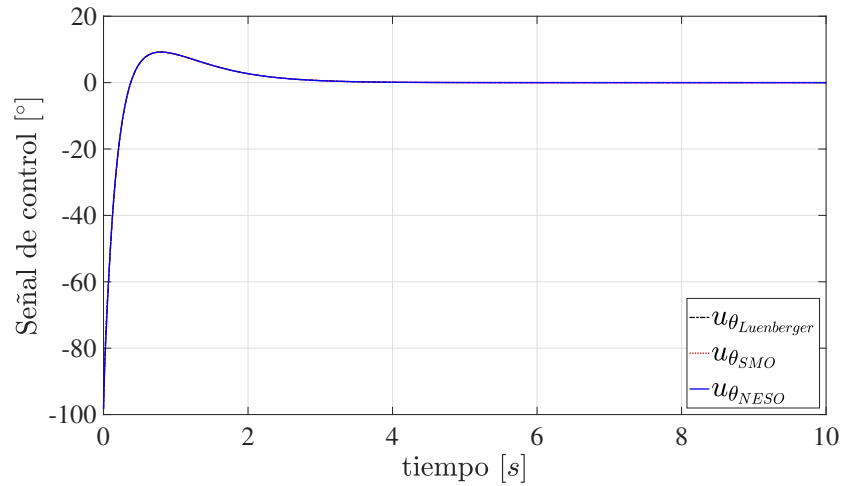


Figura 4.22: Señal de control PD para el movimiento de cabeceo.

4.4.6. Simulaciones del movimiento de alabeo con ley de control Backstepping

En las Figuras 4.23 y 4.24 se muestran los resultados de simulación de tres observadores de estados: de Luenberger, modos deslizantes y no lineal de estado extendido que realimentan a la ley de control Backstepping para el ángulo de alabeo y velocidad angular de alabeo, respectivamente.

Las Figuras 4.25 y 4.26 muestran los resultados de simulación de los errores de estimación de ángulo de alabeo y velocidad angular de alabeo, respectivamente, con ley de control Backstepping.

El estado extendido del observador NESO aplicado al movimiento de alabeo con ley de control Backstepping se muestra en la Figura 4.27.

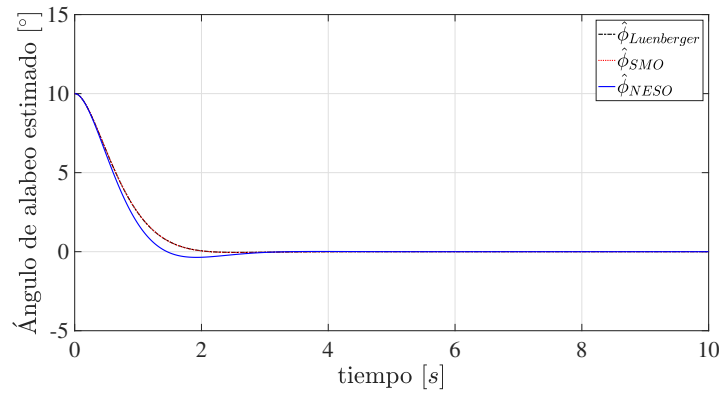


Figura 4.23: Estimación de ángulo de alabeo para los tres observadores de estado.

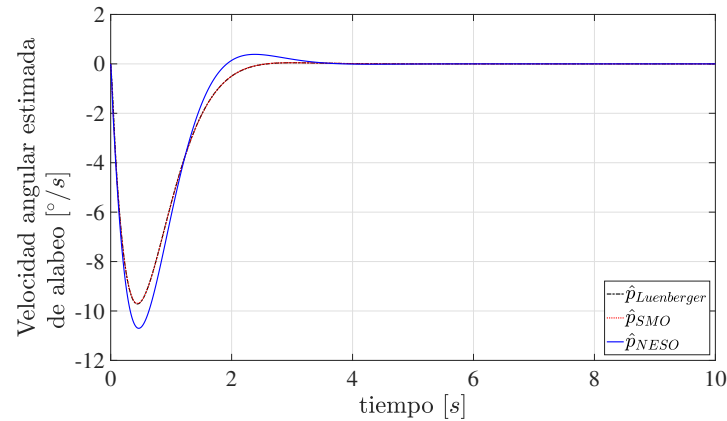


Figura 4.24: Estimación de velocidad angular de alabeo para los tres observadores de estado.

En la Figura 4.28 se puede observar el resultado de simulación de la señal de control Backstepping aplicada a los tres observadores estudiados.

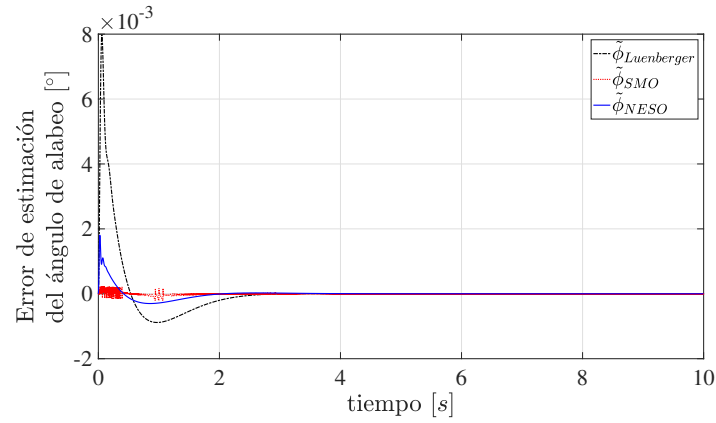


Figura 4.25: Error de estimación de ángulo de alabeo para los tres observadores de estado.

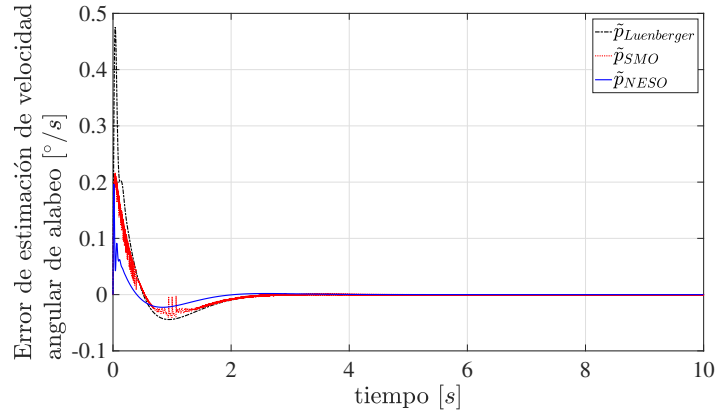


Figura 4.26: Error de estimación de velocidad angular de alabeo para los tres observadores de estado.

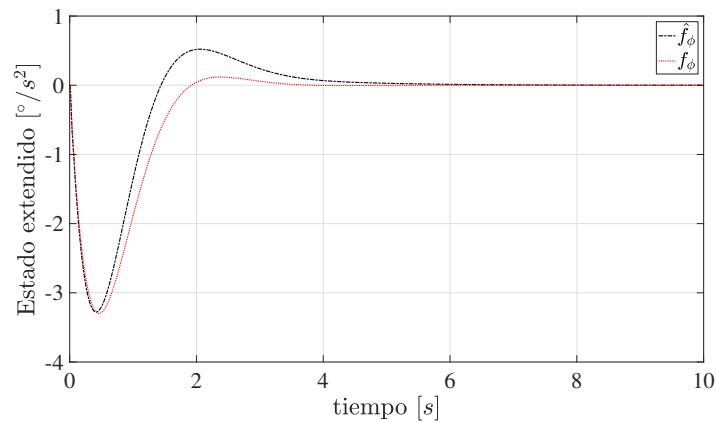


Figura 4.27: Estado extendido para el movimiento de alabeo.

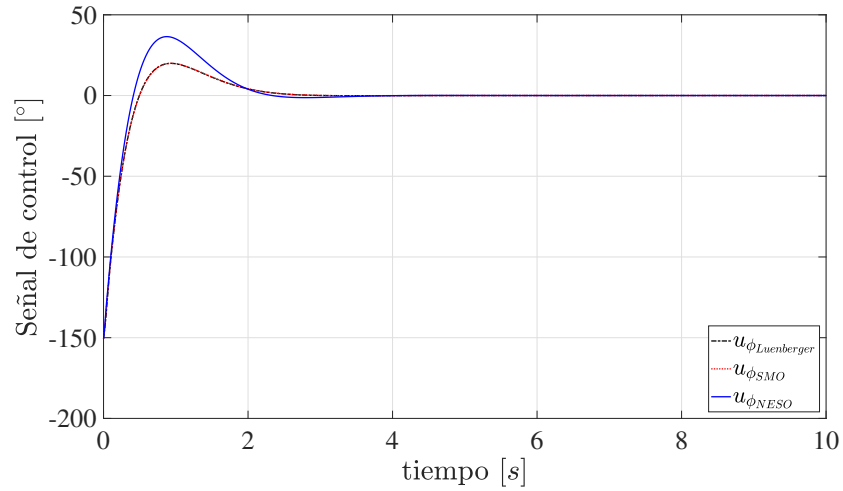


Figura 4.28: Señal de control para el movimiento de alabeo.

4.4.7. Simulaciones del movimiento de guiñada con ley de control Backstepping

En las Figuras 4.29 y 4.30 se observan los resultados de simulación para el ángulo de guiñada y velocidad angular de guiñada, respectivamente, para los tres observadores y ley de control Backstepping. En las Figuras 4.31 y 4.32 se muestran las gráficas de simulación de los errores estimados de los tres observadores. La Figura 4.33 muestra la estimación del estado extendido en simulación con la dinámica de guiñada y la ley de control Backstepping. La señal de control Backstepping para el movimiento de guiñada se muestra en la figura 4.34.

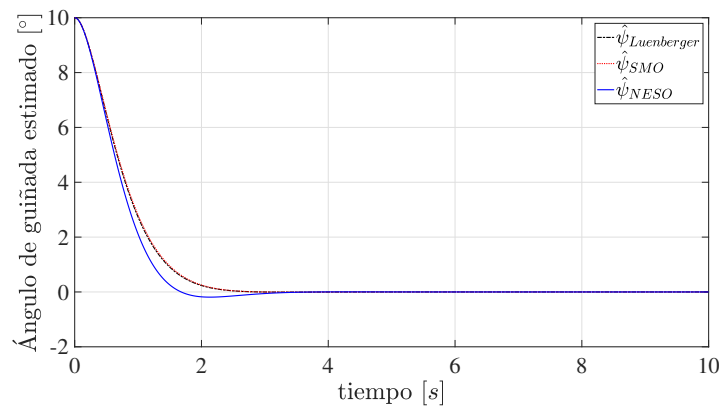


Figura 4.29: Estimación de ángulo de guiñada para los tres observadores de estado.

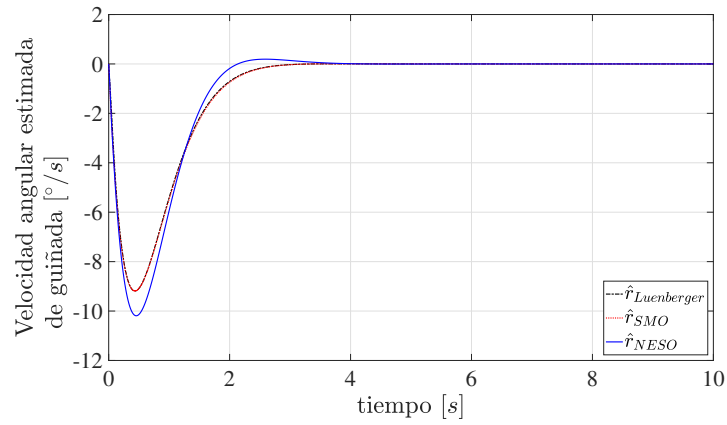


Figura 4.30: Estimación de velocidad angular de guiñada para los tres observadores de estado.

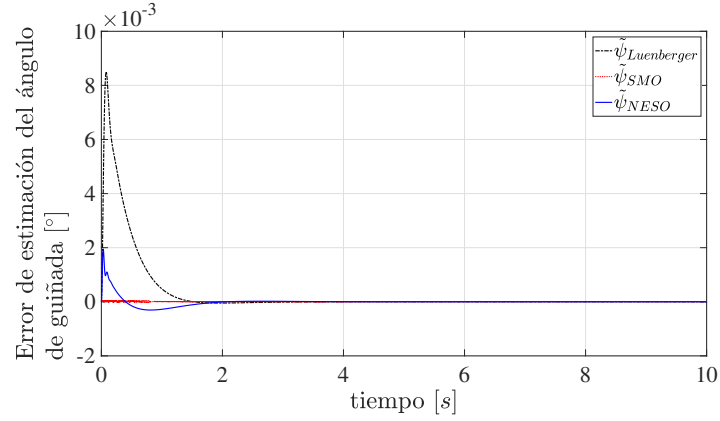


Figura 4.31: Error de estimación de ángulo de guiñada para los tres observadores de estado.

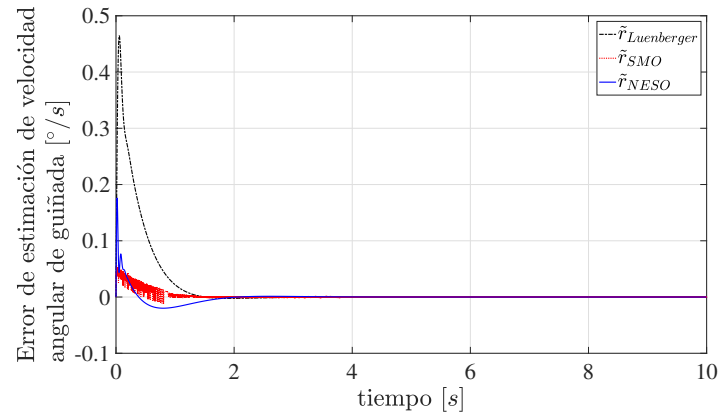


Figura 4.32: Error de estimación de velocidad angular de guiñada para los tres observadores de estado.

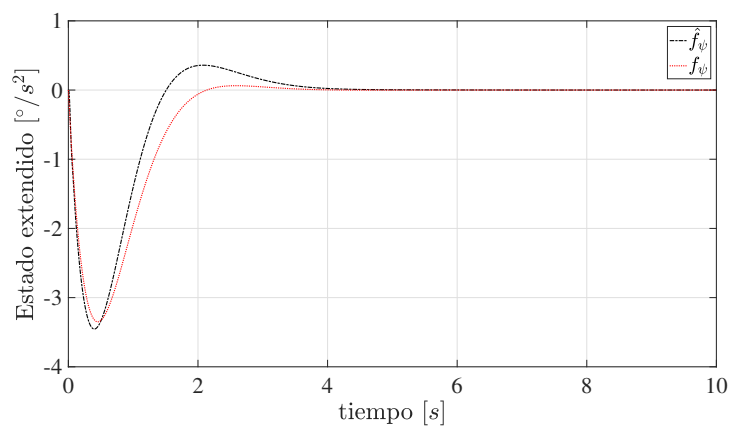


Figura 4.33: Estado extendido para el movimiento de guiñada.

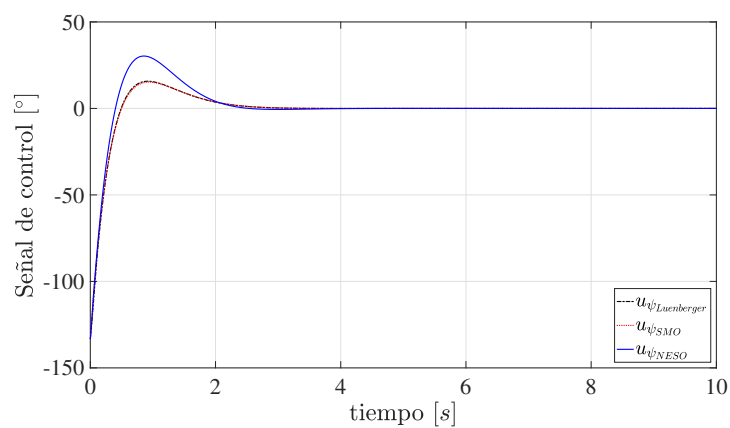


Figura 4.34: Señal de control Backstepping para el movimiento de guiñada.

4.4.8. Simulaciones del movimiento de altura con ley de control Backstepping

Obsérvese en la Figura 4.35 el resultado de simulación de altura para los tres observadores y la ley de control Backstepping. En este caso, los resultados de simulación para los tres observadores son casi iguales, de tal forma que a simple vista pareciera que hay una única señal en la gráfica. Esto se debe al esfuerzo por lograr la mejor sintonización de los observadores por medio de las ganancias.

En las Figuras 4.35 y 4.36 se observan los resultados de simulación para el ángulo de guiñada y velocidad angular de guiñada, respectivamente, ambos para los tres observadores y ley de control Backstepping. En las Figuras 4.37 y 4.38 se muestran las gráficas de simulación de los errores estimados de los tres observadores con ley de control Backstepping. La Figura 4.39 muestra la estimación del estado extendido en simulación con la dinámica de guiñada y la ley de control Backstepping. La señal de control Backstepping para la altura deseada se muestra en la Figura 4.41.

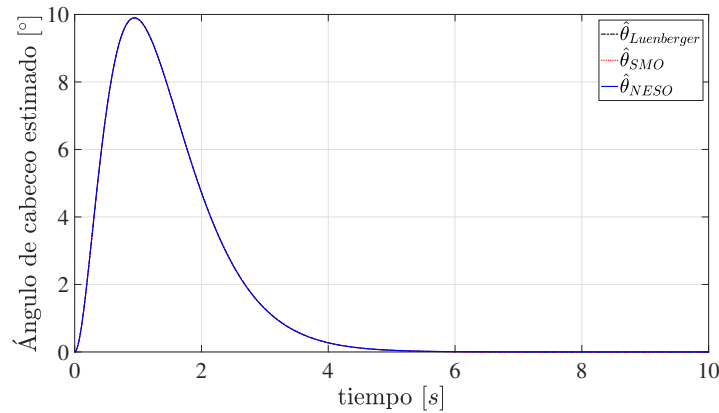


Figura 4.35: Estimación de ángulo de cabeceo para los tres observadores de estado.

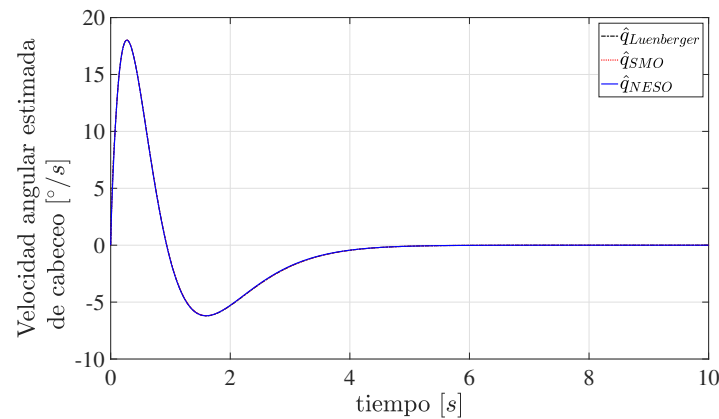


Figura 4.36: Estimación de velocidad angular de cabeceo para los tres observadores de estado.

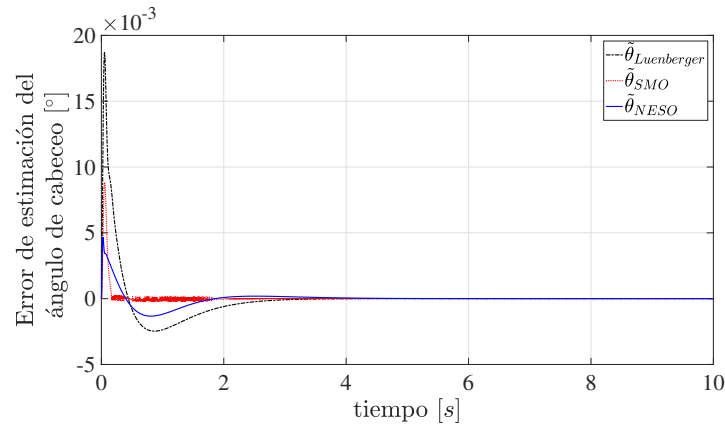


Figura 4.37: Error de estimación de ángulo de cabeceo para los tres observadores de estado.

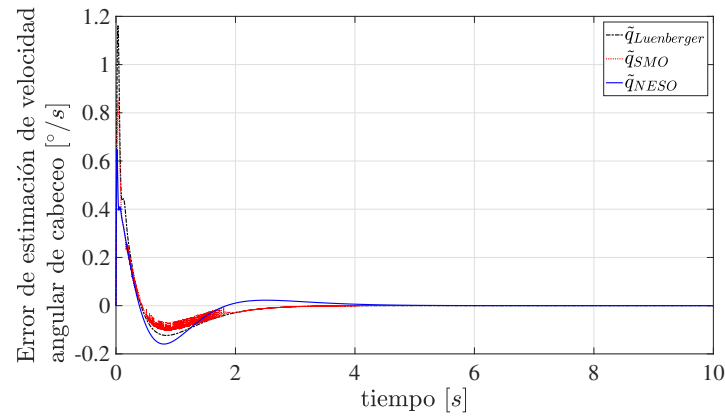


Figura 4.38: Error de estimación de velocidad angular de cabeceo para los tres observadores de estado.

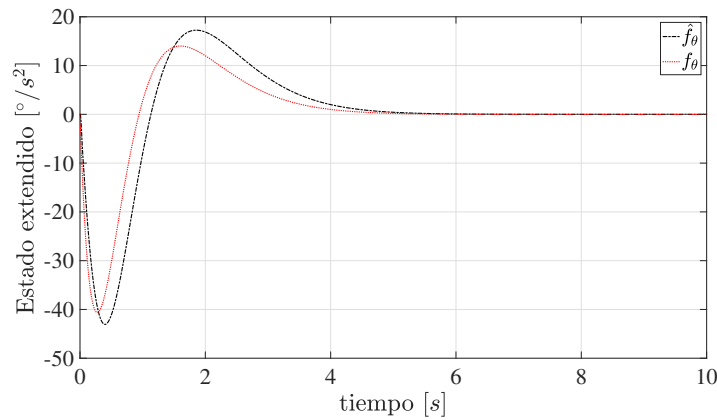


Figura 4.39: Estado extendido para el movimiento de cabeceo.

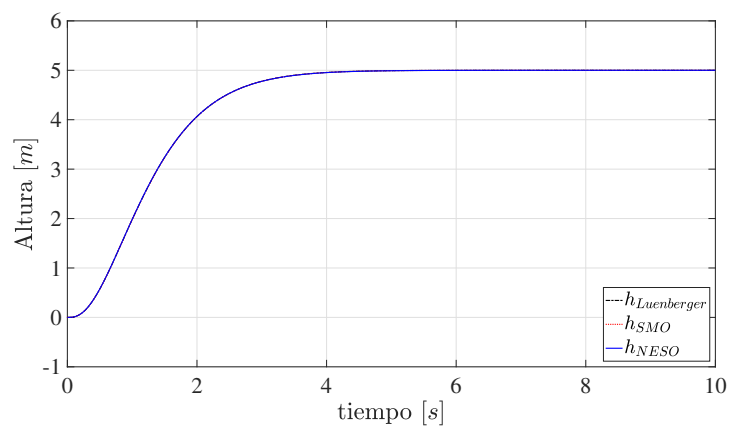


Figura 4.40: Simulación del movimiento de altura con control Backstepping para los tres observadores.

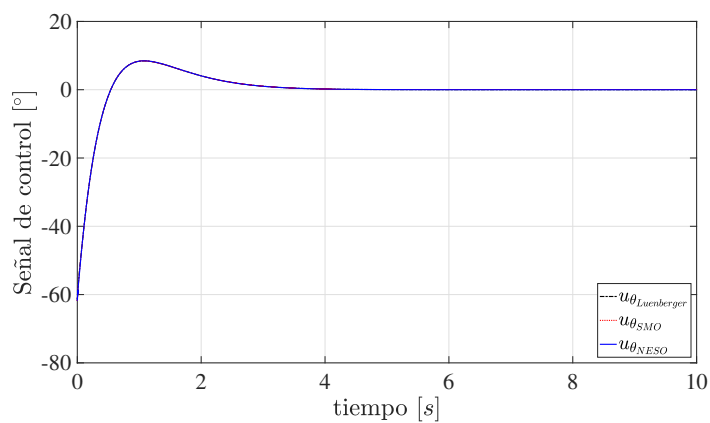


Figura 4.41: Señal de control Backstepping para el movimiento de cabeceo.

Para finalizar este capítulo, se considera necesario hacer algunas aclaraciones. En lo que respecta a los resultados de simulación mostrados en las Figuras 4.4, 4.10 y 4.16, para los ángulos estimados con la ley de control PD, y en las Figuras 4.23, 4.29 y 4.35, para aquellos con la ley de control Backstepping, éstas buscan reportar los resultados de estimación angular en un entorno ideal, lo que permite una comparación entre algoritmos de estimación que al momento de graficar aparentan ser iguales. Sin embargo, en las gráficas de error de estimación angular (Figuras 4.6, 4.12 y 4.18, para ley de control PD y las Figuras 4.25, 4.31 y 4.37, para la ley de control Backstepping), se observan las discrepancias entre algoritmos, aunque se consideran errores de estimación muy pequeños en magnitud.

En el caso de las velocidades angulares para los tres movimientos y las dos leyes de control, pasa lo mismo a la hora de graficar los resultados de las simulaciones, que a pesar de ser tres algoritmos de estimación diferentes para cada movimiento, las Figuras aparentan reportar sólo un resultado, y a menos que se pueda hacer un acercamiento a la Figura, será difícil reconocer las tres señales simuladas. Pero en las Figuras que reportan los errores de estimación de velocidad angular (Figuras 4.7, 4.13, 4.19, 4.26, 4.32 y 4.38) se puede identificar fácilmente la señal de error de estimación de velocidad angular para cada movimiento en cada ley de control.

Resultados experimentales

En este Capítulo se presentan los resultados de los experimentos de este trabajo, que incluyen tres observadores de estados aplicados al control de un vehículo aéreo no tripulado tipo avión de ala fija, a través de dos leyes de control (PD y Backstepping), en los movimientos de guiñada, alabeo y cabeceo.

Cabe señalar que, el objetivo de este trabajo, es la estimación de los estados, mismos que son utilizados para realimentar las leyes de control, sin embargo, aquí no se analiza el desempeño de las leyes de control, sino el de los algoritmos de observación.

Los experimentos se realizaron utilizando las ganancias reportadas en las Tablas 4.2 y 4.3 que indican las ganancias para los observadores, y la Tabla 4.4 para las ganancias de las leyes de control y coeficientes aerodinámicos.

Es necesario mencionar que la sintonización de las ganancias, tanto de los observadores como de las leyes de control, fueron definidas a prueba y error, siendo éste un arduo trabajo durante el desarrollo de esta investigación. Sin embargo, no se descarta la posibilidad de mejorar los resultados ya sea con algún algoritmo que ayude a su definición o continuando con el mismo método. Lo mismo se puede afirmar para los coeficientes aerodinámicos.

Para la implementación de los observadores de estados estudiados, se trabajó en el desarrollo de una plataforma experimental ya reportada en el trabajo de [42]. Sin embargo, en seguida se proporciona una descripción de dicha plataforma.

5.1. Plataforma

Para el desarrollo de la plataforma experimental, o avión no tripulado, se adquirió un modelo de aeromodelismo, el cual corresponde a un avión a escala *T-28 Trojan* (ver Figura 5.1). Los parámetros del avión [43], se muestran en la Tabla 5.1.

El avión no tripulado tiene instalada una unidad de medición inercial, también conocida como central inercial, la cual proporciona las medidas de los ángulos de Euler y las velocidades angulares del avión. La central inercial utilizada es la Microbotics MIDG II [44] (ver la Figura 5.2). Esta central inercial es alimentada con 9V de corriente directa.

Para la telemetría, se utilizaron los módulos Xbee de la serie *XBee-PRO S2B* [50] (ver

Parámetro	Valor
Envergadura	1.118 [m]
Fuselaje	0.914 [m]
Área del ala	0.09 [m ²]
Peso aproximado	1.5 [kg]
Actuadores	Alerón, elevador, estabilizador, motor frontal

Tabla 5.1: Parámetros del avión de aeromodelismo *T-28 Trojan*.

la Figura 5.3). Estos módulos tienen un alcance de 1.5 km y son alimentados con 3.3V de corriente directa [46].

El avión tiene montado en una de sus alas un altímetro MS5607 [47] (Figura 5.4), el cual

Figura 5.1: Avión de aeromodelismo *T-28 Trojan*.

Figura 5.2: Central inercial Microbotics MIDG II.



Figura 5.3: Módulo Xbee serie *Xbee-PRO S2B*.

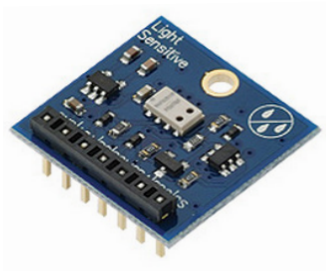


Figura 5.4: Altímetro MS5607 de *Parallax Inc.*

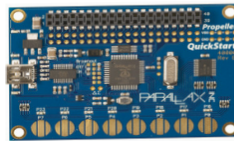


Figura 5.5: Microcontrolador *Propeller P8X32A*.

está conectado a un microcontrolador *Propeller* [48] (Figura 5.5), ambos desarrollados por *Parallax Inc.* El microcontrolador es utilizado exclusivamente para leer los datos provenientes del altímetro, y posteriormente el microcontrolador envía los datos al microprocesador *Rabbit* (mostrado en la Figura 5.6). El protocolo de comunicación entre el altímetro y el microcontrolador es I^2C , mientras que el protocolo de comunicación entre el microcontrolador y el microprocesador es el RS232. El sensor de altura y el altímetro se alimentan con 5V de corriente directa.

En la Figura 5.6, se muestra la tarjeta de desarrollo para el microprocesador *Rabbit 6000* [49]. Esta tarjeta es la unidad central de procesamiento de las leyes de control. Además, tiene la tarea de enviar las señales de control a los actuadores que mueven las superficies del avión.

Para realizar la comunicación vía RS232, mandar las señales de control a los actuadores, y leer las señales del receptor Futaba mostrado en la Figura 5.9, se construyó una tarjeta que

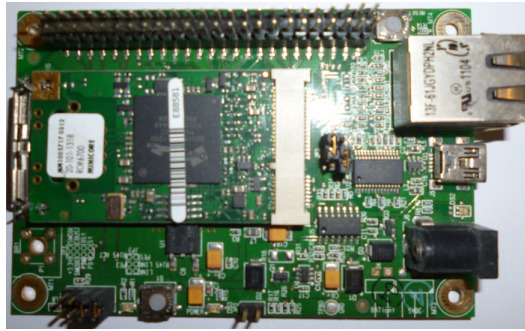


Figura 5.6: Tarjeta de desarrollo del microprocesador *Rabbit 6000*.

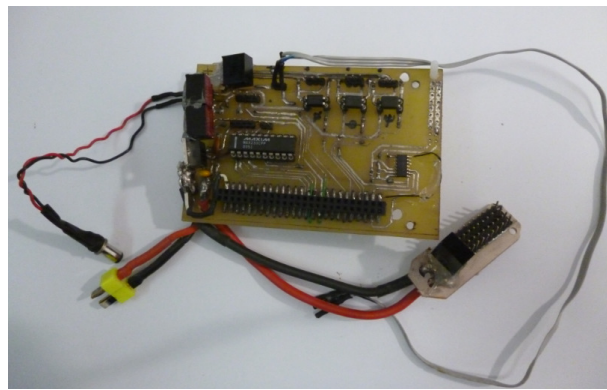


Figura 5.7: Tarjeta complementaria para *Rabbit 6000*.

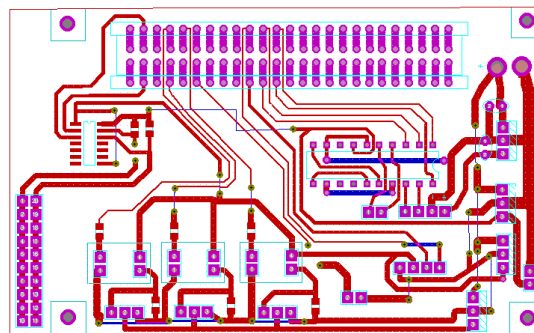


Figura 5.8: Circuito impreso de tarjeta complementaria para *Rabbit 6000*.

complementa a la tarjeta de desarrollo del microprocesador *Rabbit 6000*, esta tarjeta se muestra en la Figura 5.7. La Figura 5.8, muestra el circuito impreso de la tarjeta complementaria mostrada en la Figura 5.7.

Para pilotar esta plataforma tipo avión se utiliza un radio control *Futaba T7C* (transmisor y receptor); este dispositivo se muestra en la Figura 5.9. Con éste se mandan las señales para que



Figura 5.9: Radio control transmisor y receptor *Futaba T7C*.

los actuadores trabajen en lazo abierto, además de permitir la acción de despegue y aterrizaje [45]. Con este mismo radio control, se manda la señal de modo automático del avión, esto es, se activa la acción de control, y en ese momento el piloto automático gobierna el avión. El receptor del radio Futaba se alimenta con 5V de corriente directa, mientras que el radio transmisor se alimenta con una pila de 9.6V de corriente directa.

Antes de enviar la señal obtenida por el controlador hacia los actuadores, se aplica una transformación lineal para que la señal de control esté dentro de los valores permitidos por los actuadores y así deflexionar las superficies de control del avión de forma adecuada; la transformación está dada por la ecuación lineal:

$$y = mx + b, \quad (5.1)$$

donde m representa la pendiente, x es la variable, y el valor de b determina el punto donde la recta corta el eje Y . En la Figura 5.10 se muestra la recta usada para realizar la transformación en el caso del prototipo del avión. El valor de ± 200 cuentas del ciclo de trabajo del PWM del microprocesador, permite que las superficies de control se muevan a su valor máximo y mínimo, el cual es de $\pm 20^\circ$ (desviación de la superficie de control). Así, el valor obtenido en la variable y de la ecuación (5.1) es la señal enviada a los actuadores de las superficies de control.

En la Figura 5.11, se observa el sistema electrónico ya montado en el avión.

5.2. Observador de Luenberger aplicado a un UAV de ala fija con ley de control PD

En seguida se presentan las gráficas con los resultados experimentales del Observador de Luenberger para las tres dinámicas de movimiento en orientación del vehículo aéreo no tripulado.

Para todos los resultados experimentales, reportados en este Capítulo 5, el valor del tiempo que se lee en el eje horizontal, corresponde al momento en que se activó el modo automático en forma remota desde tierra y el tiempo que duró activo hasta el momento que el piloto vuelve a tomar el control de la plataforma. En específico, para el movimiento de cabeceo, en el que se busca controlar la altura, al momento en que se activa el modo automático se considera la altura actual de la plataforma como la deseada para que la ley de control la mantenga.

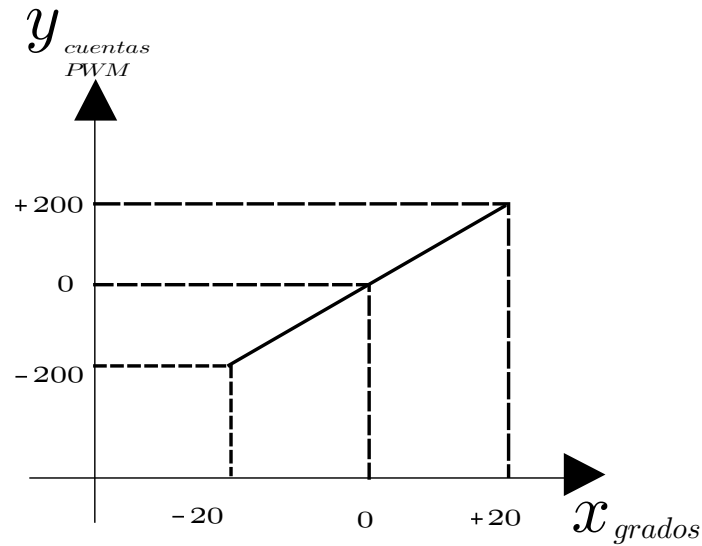


Figura 5.10: Transformación lineal



Figura 5.11: Sistema embebido montado en el avión

5.2.1. Movimiento de cabeceo

Las Figuras 5.12 y 5.13 muestran los resultados experimentales del Observador de Luenberger y ley de control PD para el ángulo de cabeceo y velocidad angular de cabeceo, respectivamente. Para este experimento, el ángulo medido (θ) y el ángulo estimado ($\hat{\theta}$), mostrados en la Figura 5.12, son tan parecidos que parecen uno solo en la gráfica. En las Figuras 5.14 y 5.15 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular. En la Figura 5.16 se observa el resultado experimental del control de altura y en la Figura 5.17 la señal de control del mismo experimento.

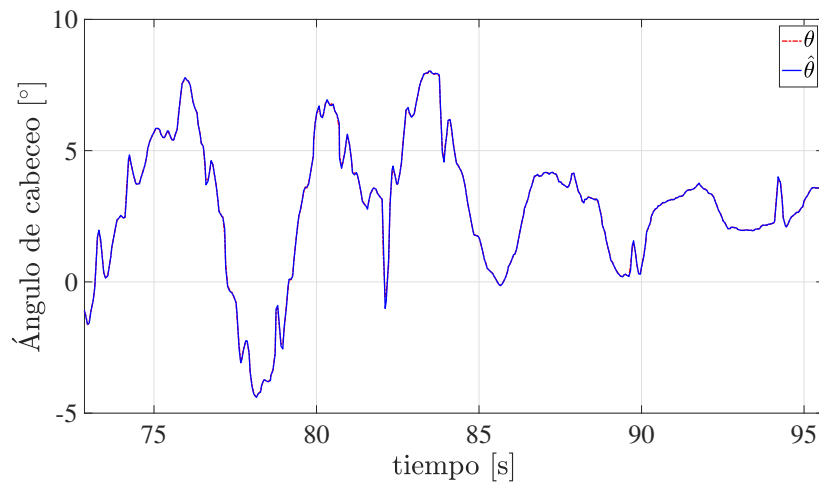


Figura 5.12: Gráfica del experimento de ángulo de cabeceo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

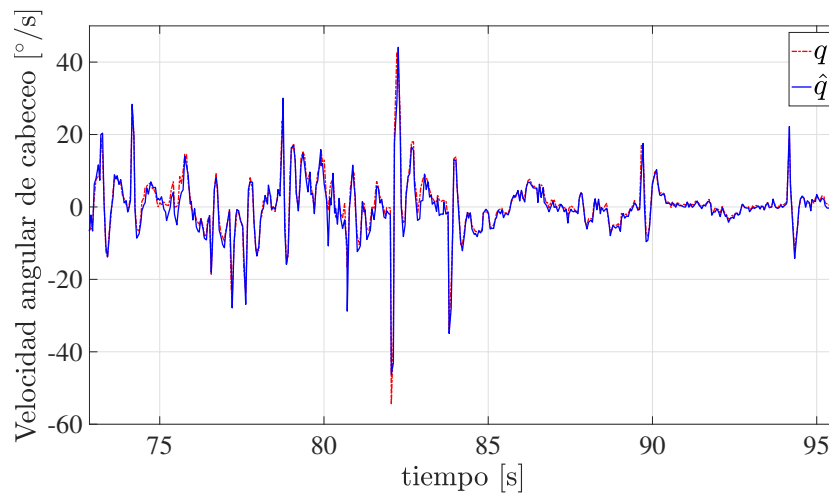


Figura 5.13: Gráfica del experimento de velocidad de cabeceo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

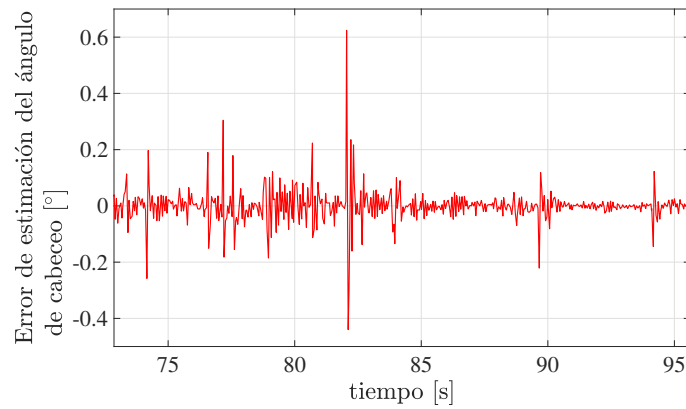


Figura 5.14: Gráfica del error de estimación del ángulo de cabeceo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

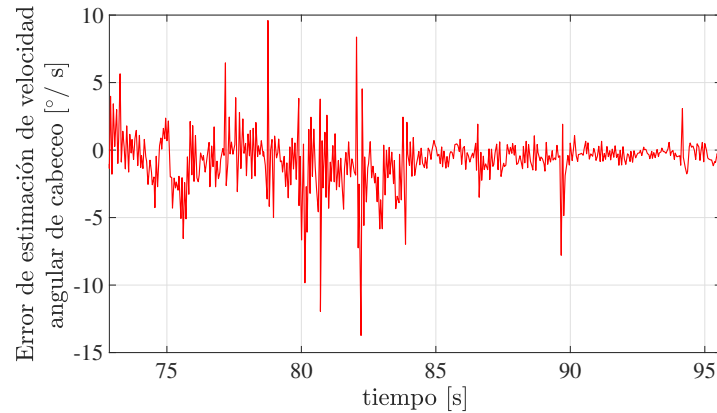


Figura 5.15: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de cabeceo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

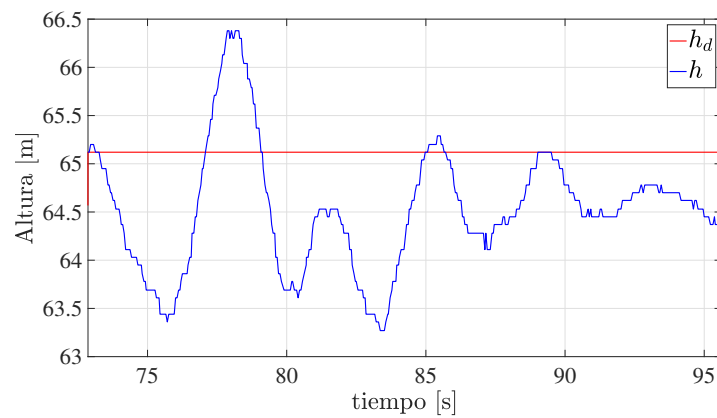


Figura 5.16: Gráfica del experimento de medida de altura aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

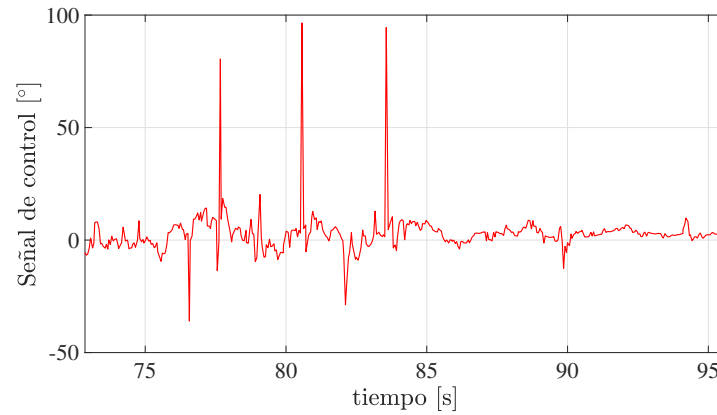


Figura 5.17: Gráfica de señal de control aplicando el observador de Luenberger y la ley de control PD para el ángulo de cabeceo.

5.2.2. Movimiento de alabeo

Las Figuras 5.18 y 5.19 muestran los resultados experimentales del Observador de Luenberger y ley de control PD para el ángulo de alabeo y velocidad angular de alabeo, respectivamente, que al igual que en las simulaciones reportadas, el ángulo deseado para el control es cero. En cuanto a este experimento, el ángulo medido (ϕ) y el ángulo estimado ($\hat{\phi}$), son tan parecidos que parece una sola señal. En las Figuras 5.20 y 5.21, se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, y en la Figura 5.22 se muestra la señal de control del mismo experimento.

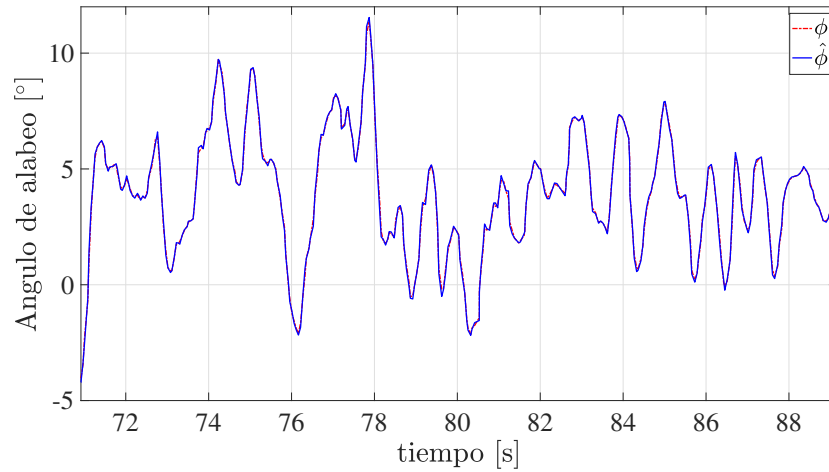


Figura 5.18: Gráfica del experimento del ángulo de alabeo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

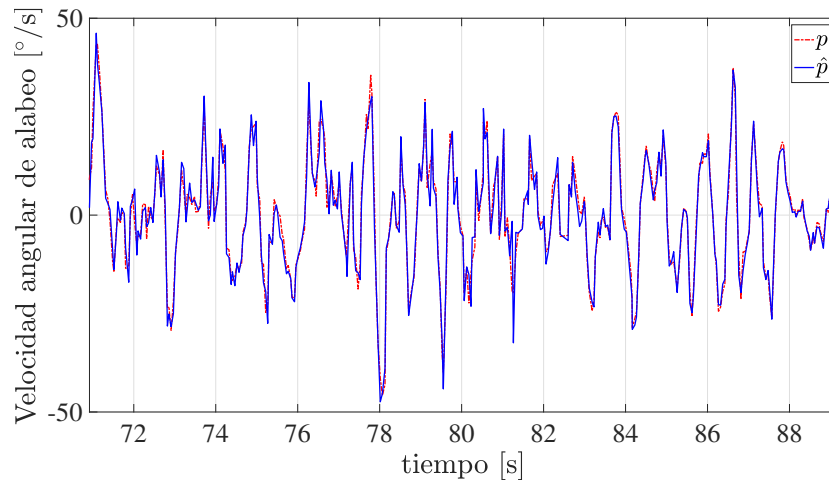


Figura 5.19: Gráfica del experimento de velocidad de alabeo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

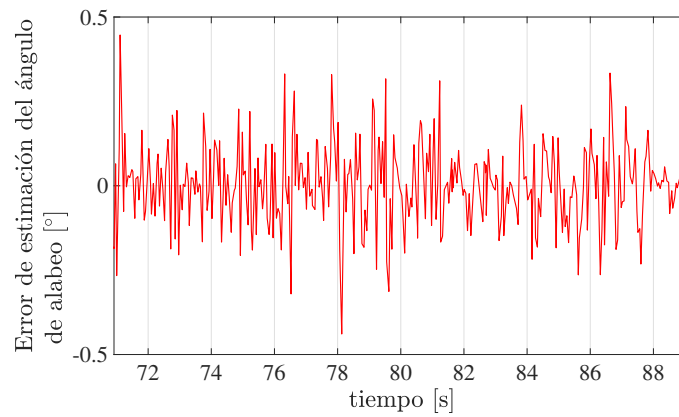


Figura 5.20: Gráfica del error de estimación del ángulo de alabeo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

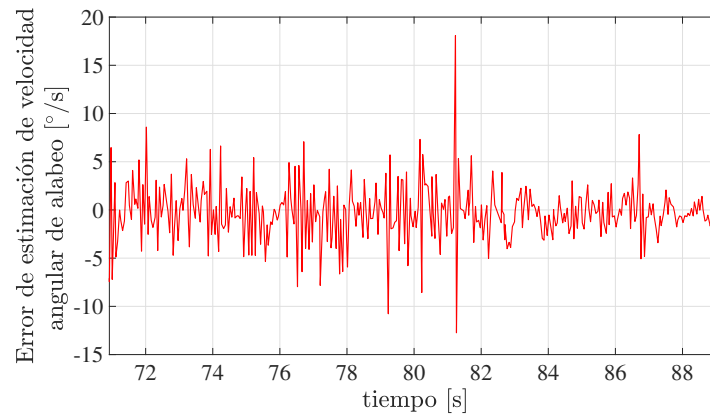


Figura 5.21: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de alabeo aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

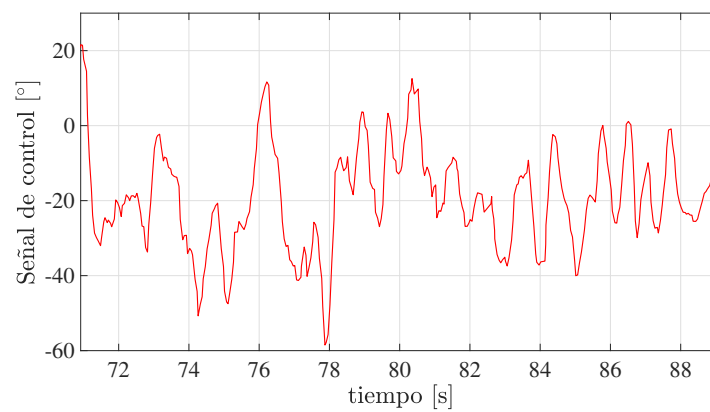


Figura 5.22: Gráfica de la señal de control aplicando el observador de Luenberger y la ley de control PD para el ángulo de alabeo.

5.2.3. Movimiento de guiñada

Las Figuras 5.23 y 5.24 muestran los resultados experimentales del Observador de Luenberger y ley de control PD para el ángulo de guiñada y velocidad angular de guiñada, respectivamente. Vale la pena mencionar que el ángulo medido (ψ) y el estimado de guiñada ($\hat{\psi}$) están empalmados, debido al gran parecido de sus valores durante el experimento. En las Figuras 5.25 y 5.26 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, mientras que en la Figura 5.27 se observa la señal de control del mismo experimento.

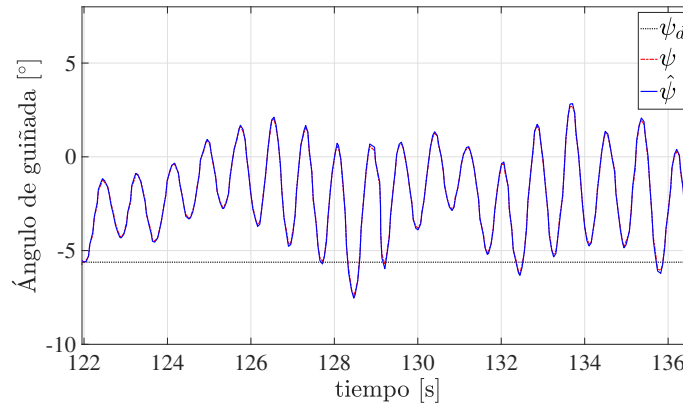


Figura 5.23: Gráfica del experimento de ángulo de guiñada aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

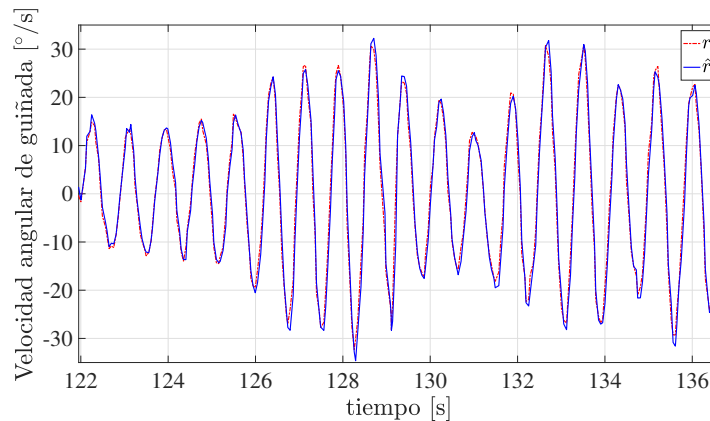


Figura 5.24: Gráfica del experimento de velocidad angular de guiñada aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

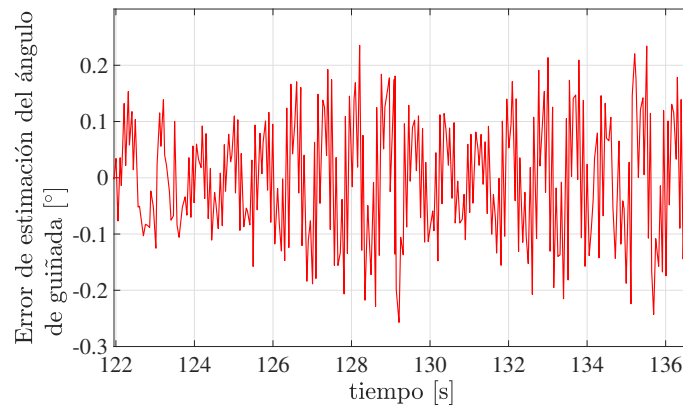


Figura 5.25: Gráfica del error estimación de ángulo de guiñada aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

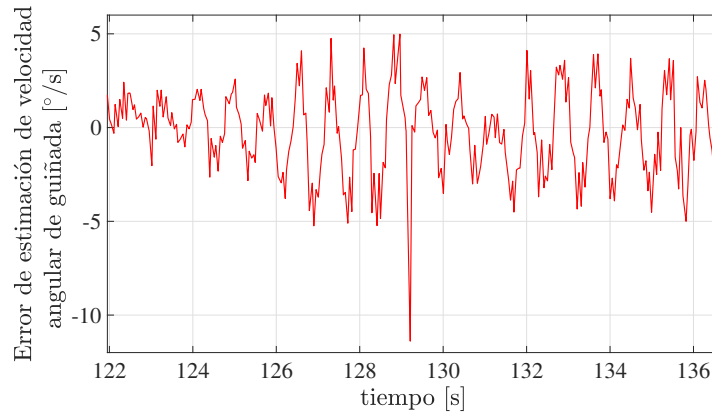


Figura 5.26: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de guiñada aplicando el observador de Luenberger y ley de control PD.

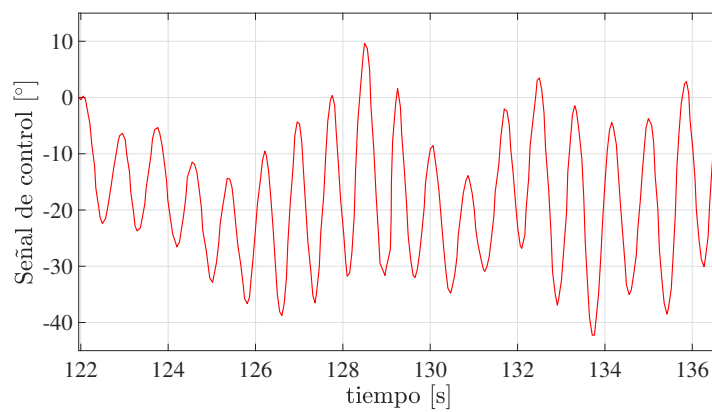


Figura 5.27: Gráfica de señal de control aplicando el observador de Luenberger y la ley de control PD para el ángulo de guiñada.

5.3. SMO aplicado a un UAV de ala fija con ley de control PD

A continuación, se presentan las gráficas con los resultados experimentales del Observador por Modos Deslizantes (SMO) para las tres dinámicas de movimiento en orientación del vehículo aéreo no tripulado.

5.3.1. Movimiento de cabeceo

En la Figura 5.28 se puede observar que el ángulo medido (θ) y el estimado ($\hat{\theta}$) son tan parecidos que quedan empalmados. La Figura 5.29 muestra el resultado experimental de velocidad angular de cabeceo. En las Figuras 5.30 y 5.31, se presentan los errores de estimación de ángulo y velocidad angular; en la Figura 5.32 se observa el resultado experimental del control de altura, y en la Figura 5.33 la señal de control del mismo experimento.

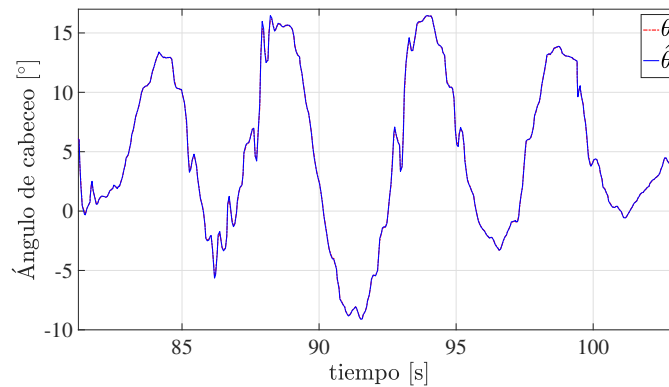


Figura 5.28: Gráfica del experimento de ángulo de cabeceo aplicando SMO y ley de control PD.

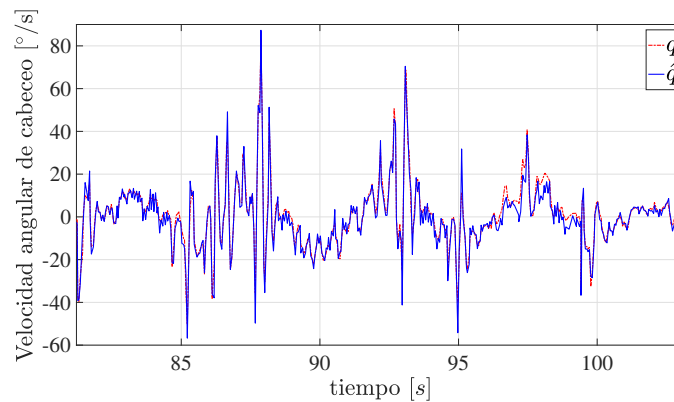


Figura 5.29: Gráfica del experimento de velocidad angular de cabeceo aplicando el SMO y ley de control PD.

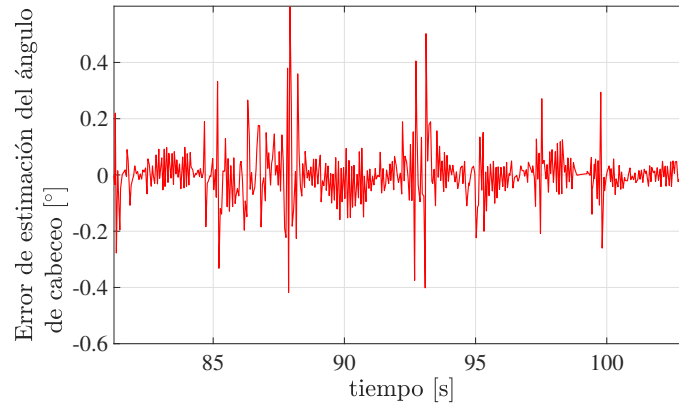


Figura 5.30: Gráfica del error de estimación de ángulo de cabeceo aplicando el SMO y ley de control PD.

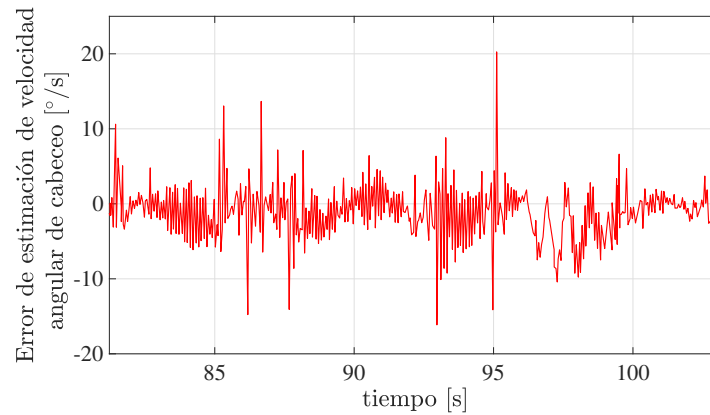


Figura 5.31: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de cabeceo aplicando el SMO y ley de control PD.

5.3.2. Movimiento de alabeo

Las Figuras 5.34 y 5.35 muestran los resultados experimentales del SMO y ley de control PD para el ángulo de alabeo y velocidad angular de alabeo, respectivamente. En las Figuras 5.36 y 5.37 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, y en la Figura 5.38 se observa la señal de control relacionada a este experimento.

Se considera importante comentar que uno de los objetivos de este trabajo es la implementación de algoritmos de observación de estados, por lo que es deseable que el estado medido (θ, ϕ, ψ) sea lo más parecido al estado estimado ($\hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{\psi}$). Es por esa razón que en las Figuras donde se reportan los ángulos medidos y estimados da la impresión que sólo se gráfica una de las dos señales, y es necesario un acercamiento considerable a la gráfica para observar las diferencias. Sin embargo, también se reportan las gráficas de los errores de estimación angular, que dan evidencia de que aunque son parecidas no son iguales. Lo mismo puede pasar con las velocidades angulares medidas (q, p, r) y las estimadas ($\hat{q}, \hat{p}, \hat{r}$), que en algunos casos son tan

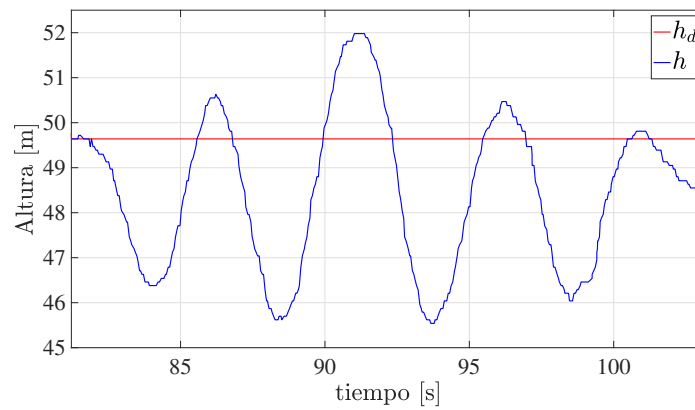


Figura 5.32: Gráfica del experimento de medida de altura aplicando el SMO y ley de control PD.

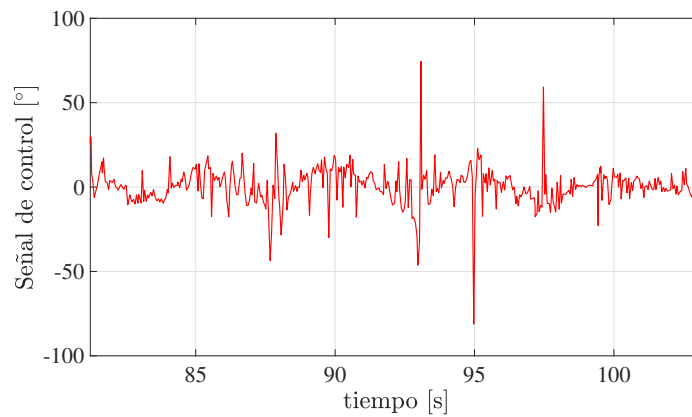


Figura 5.33: Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control PD para el ángulo de cabeceo.

parecidas que se tiene que revisar la gráfica de error de estimación de velocidad angular, en cada caso, para comprobar si hay diferencia. Lo anterior, tiene relevancia en todo el capítulo de Resultados experimentales. También, se incluye al final de este capítulo una tabla con los errores normalizados para cada experimento.

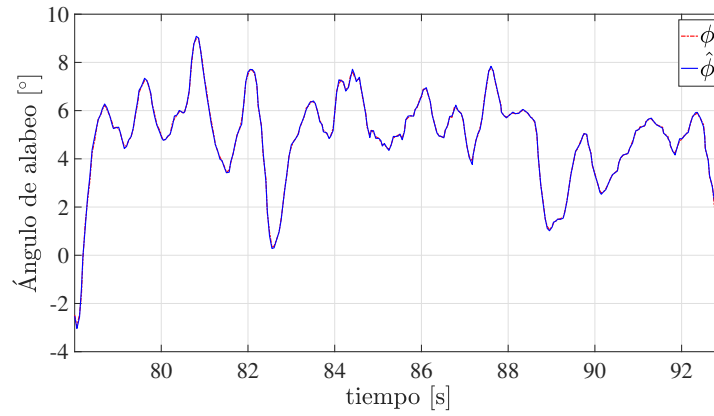


Figura 5.34: Gráfica del experimento de ángulo de alabeo aplicando SMO y ley de control PD.

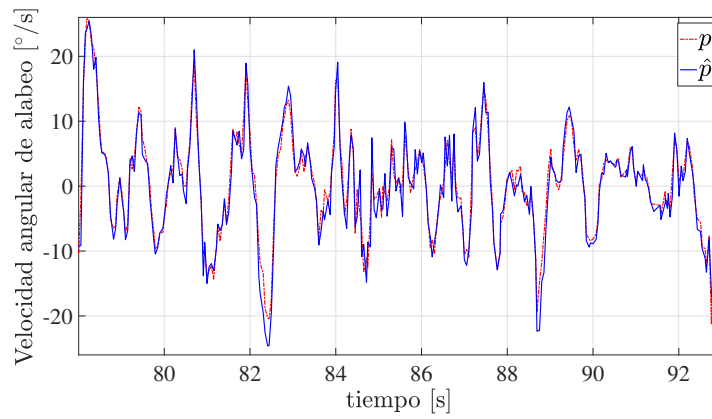


Figura 5.35: Gráfica del experimento de velocidad angular de alabeo aplicando el SMO y ley de control PD.

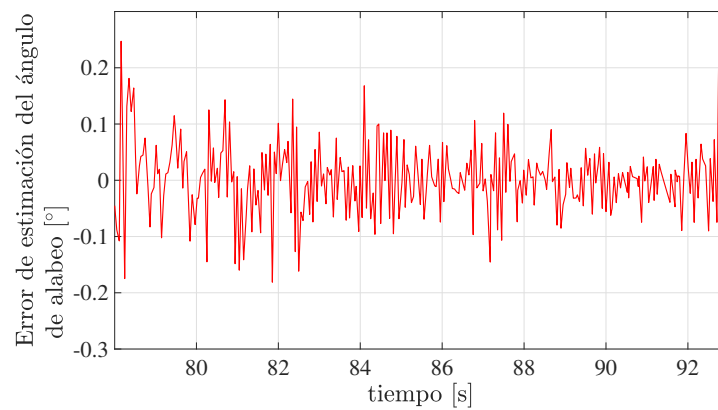


Figura 5.36: Gráfica del error de estimación de ángulo de alabeo aplicando el SMO y ley de control PD.

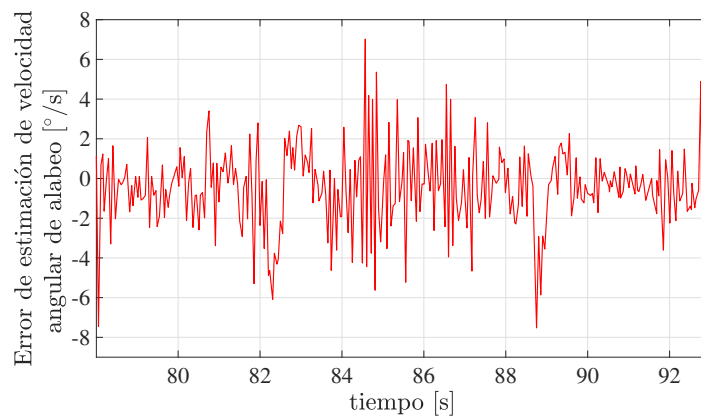


Figura 5.37: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de alabeo aplicando el SMO y ley de control PD.

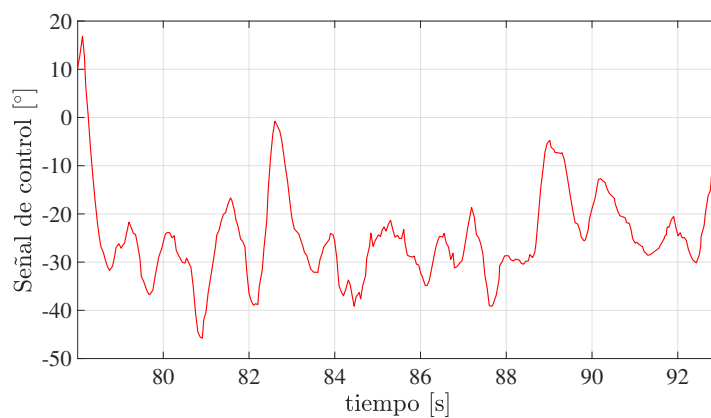


Figura 5.38: Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control PD para el ángulo de alabeo.

5.3.3. Movimiento de guiñada

Las Figuras 5.39 y 5.40 muestran los resultados experimentales del SMO y ley de control PD para el ángulo de guiñada y velocidad angular de guiñada, respectivamente. En las Figuras 5.41 y 5.42 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, y en la Figura 5.43 se observa el comportamiento de la señal de control de este experimento.

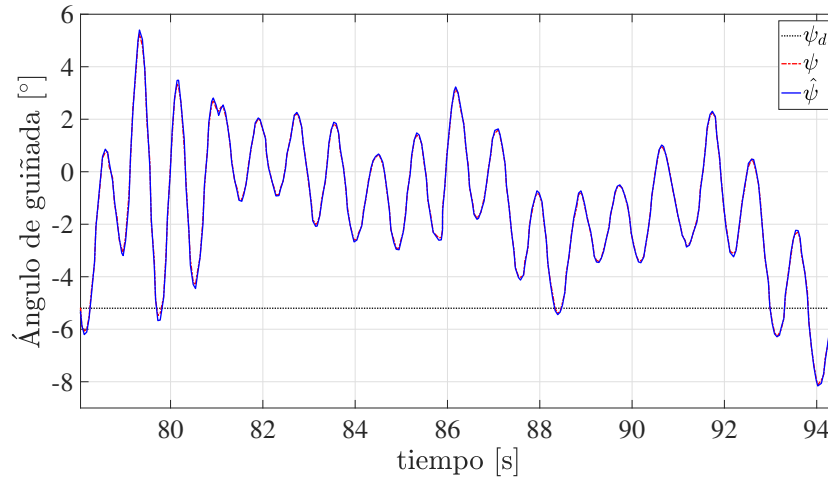


Figura 5.39: Gráfica del experimento de ángulo de guiñada aplicando SMO y ley de control PD.

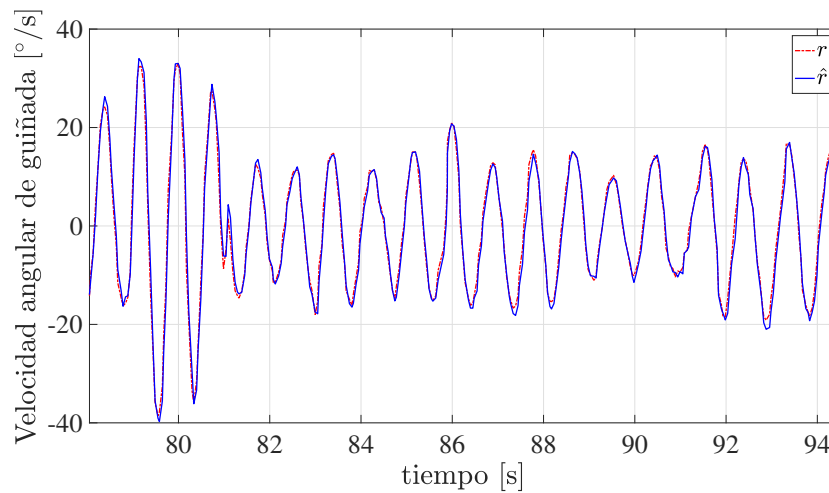


Figura 5.40: Gráfica del experimento de velocidad angular de guiñada aplicando el SMO y ley de control PD.

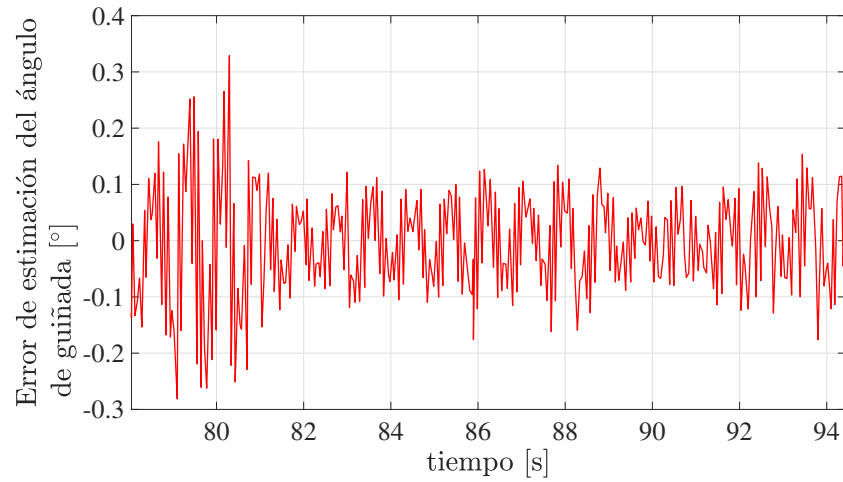


Figura 5.41: Gráfica del error de estimación de ángulo de guiñada aplicando el SMO y ley de control PD.

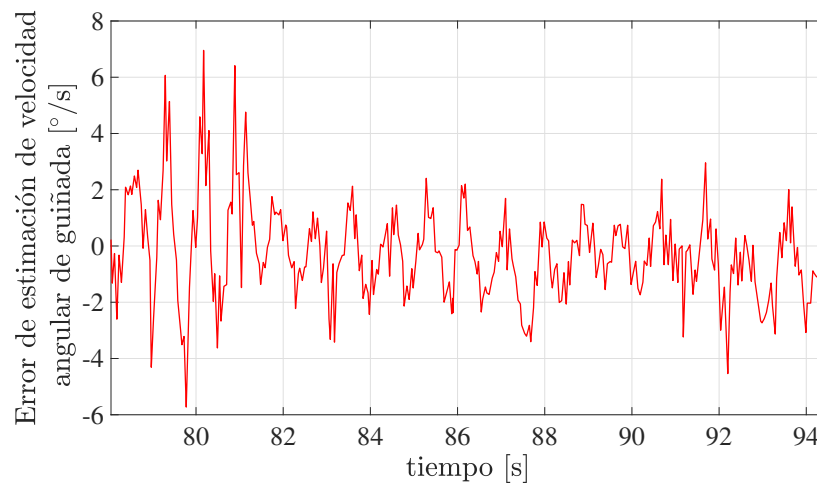


Figura 5.42: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de guiñada aplicando el SMO y ley de control PD.

5.4. NESO aplicado a un UAV de ala fija con ley de control PD

En seguida se presentan las gráficas con los resultados experimentales del Observador No Lineal de Estado Extendido (Nolinear Extended State Observer, NESO) para las tres dinámicas de movimiento en orientación del vehículo aéreo no tripulado.

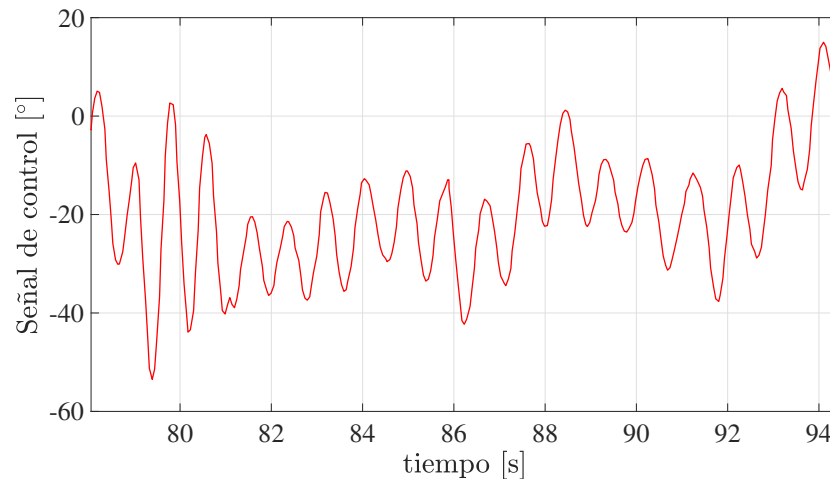


Figura 5.43: Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control PD para el ángulo de guiñada.

5.4.1. Movimiento de cabeceo

Las Figuras 5.44 y 5.45 muestran los resultados experimentales del NESO y ley de control PD para el ángulo de cabeceo y velocidad angular de cabeceo, respectivamente. En las Figuras 5.46 y 5.47 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, en la Figura 5.48 se observa el resultado experimental del control de altura, y en la Figura 5.49 la señal de control del mismo experimento.

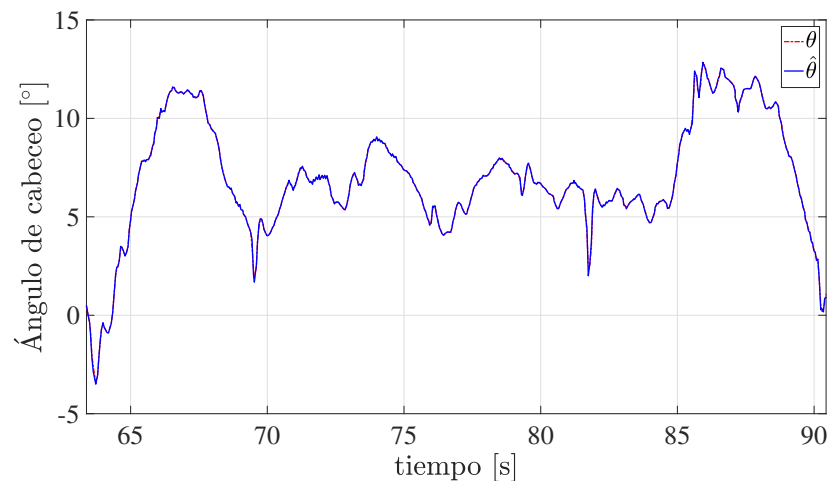


Figura 5.44: Gráfica del experimento de ángulo de cabeceo aplicando NESO y ley de control PD.

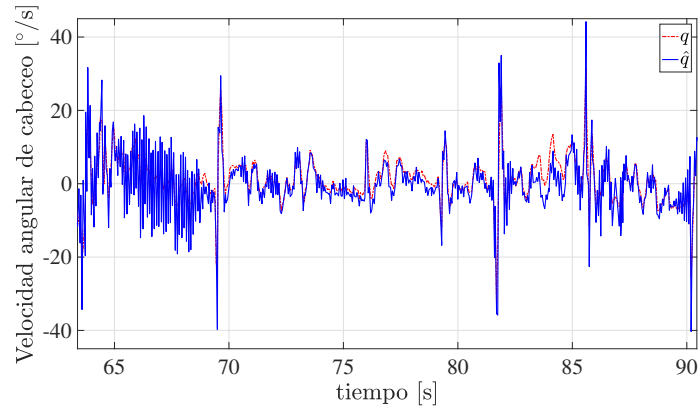


Figura 5.45: Gráfica del experimento de velocidad angular de cabeceo aplicando el NESO y ley de control PD.

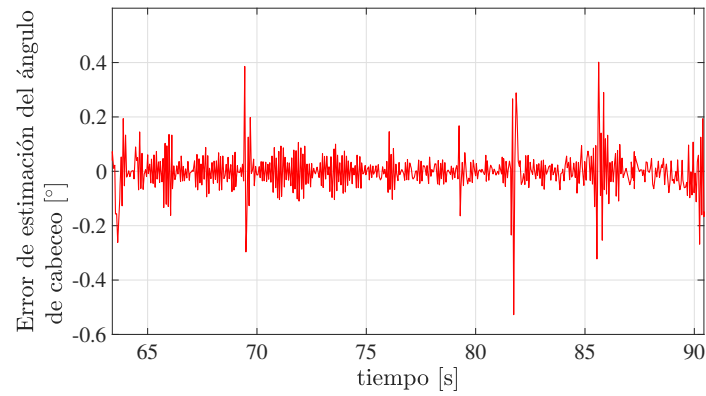


Figura 5.46: Gráfica del error de estimación de ángulo de cabeceo aplicando el NESO y ley de control PD.

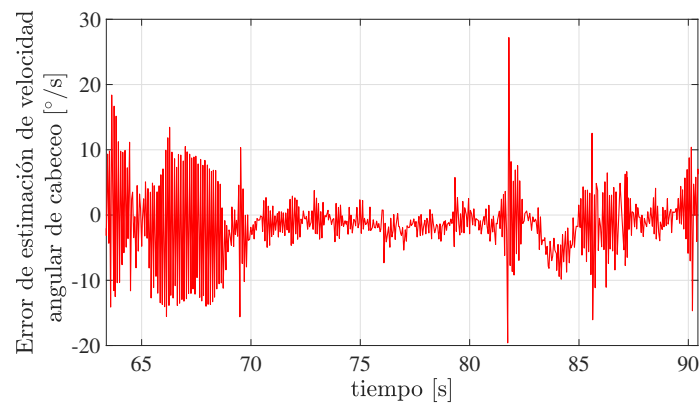


Figura 5.47: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de cabeceo aplicando el NESO y ley de control PD.

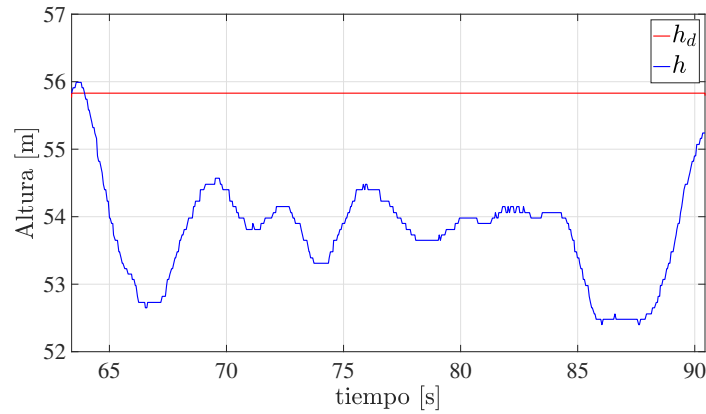


Figura 5.48: Gráfica del experimento de la medida de altura aplicando el NESO y ley de control PD.

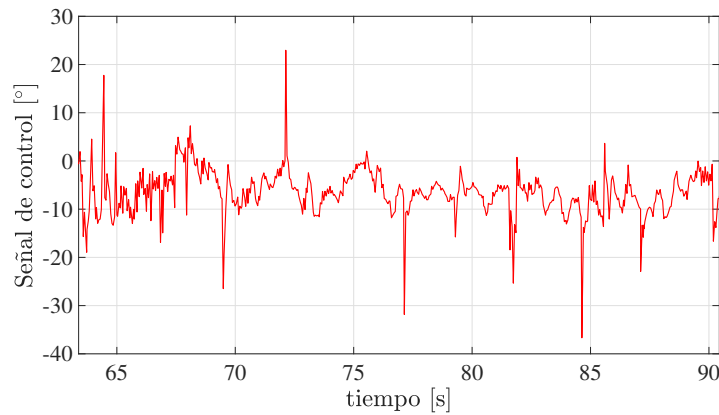


Figura 5.49: Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control PD para el ángulo de cabeceo.

5.4.2. Movimiento de alabeo

Las Figuras 5.50 y 5.51 muestran los resultados experimentales del NESO y ley de control PD para el ángulo de alabeo y velocidad angular de alabeo, respectivamente. En las Figuras 5.52 y 5.53 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, mientras que en la Figura 5.54 se observa la señal de control del experimento.

5.4.3. Movimiento de guiñada

Las Figuras 5.55 y 5.56 muestran los resultados experimentales del NESO y ley de control PD para el ángulo de guiñada y velocidad angular de guiñada, respectivamente. En las Figuras 5.57 y 5.58 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, y en la Figura 5.59 puede apreciarse la señal de control del experimento.

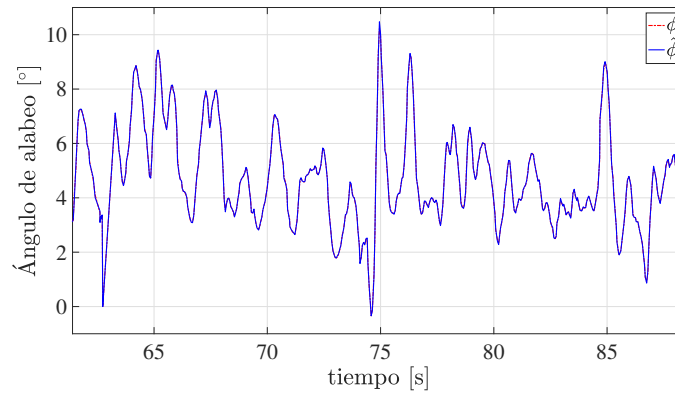


Figura 5.50: Gráfica del experimento de ángulo de alabeo aplicando NESO y ley de control PD.

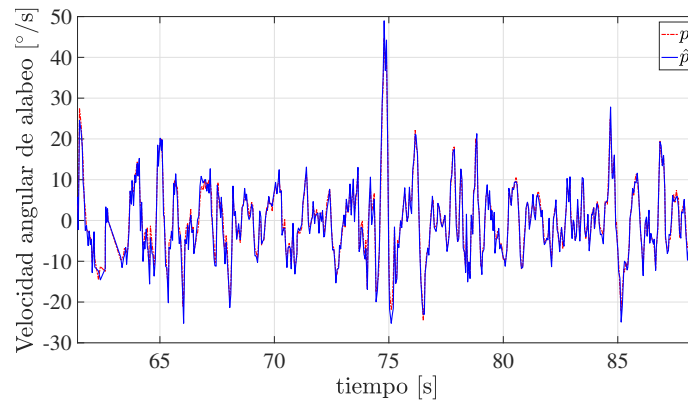


Figura 5.51: Gráfica del experimento de velocidad angular de alabeo aplicando el NESO y ley de control PD.

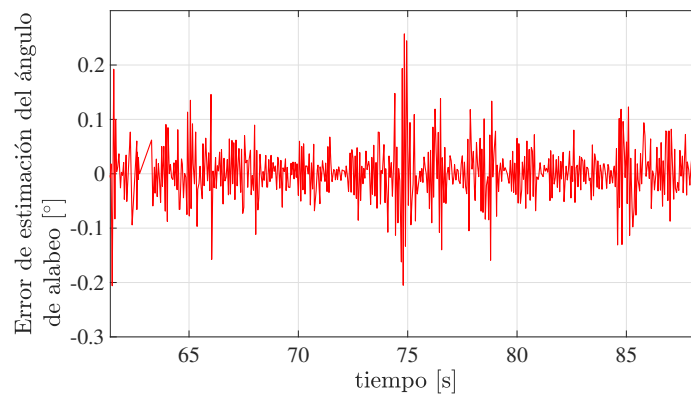


Figura 5.52: Gráfica del error de estimación de ángulo de alabeo aplicando el NESO y ley de control PD.

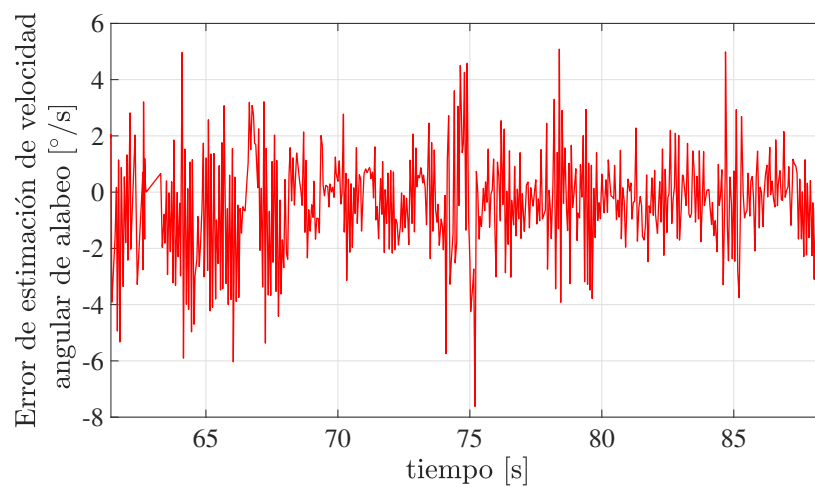


Figura 5.53: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de alabeo aplicando el NESO y ley de control PD.

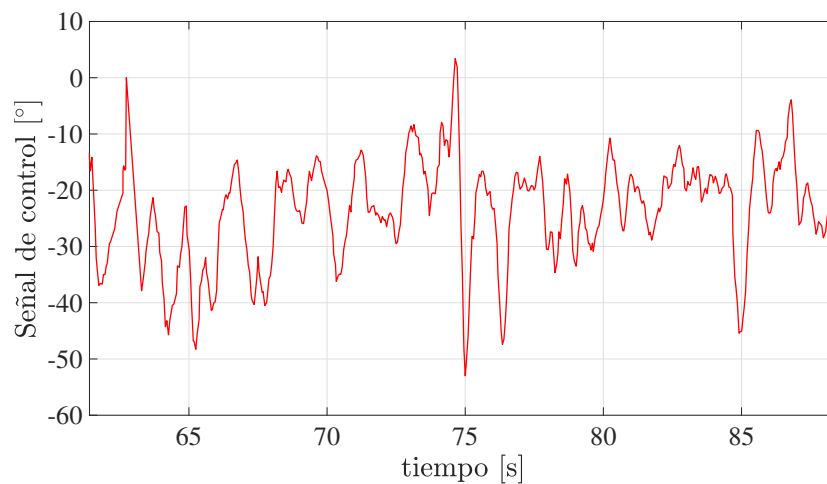


Figura 5.54: Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control PD para el ángulo de alabeo.

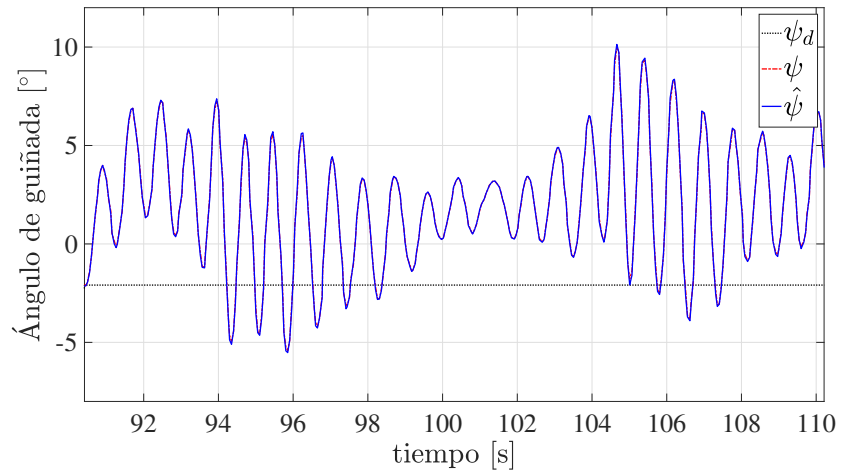


Figura 5.55: Gráfica del experimento de ángulo de guiñada aplicando NESO y ley de control PD.

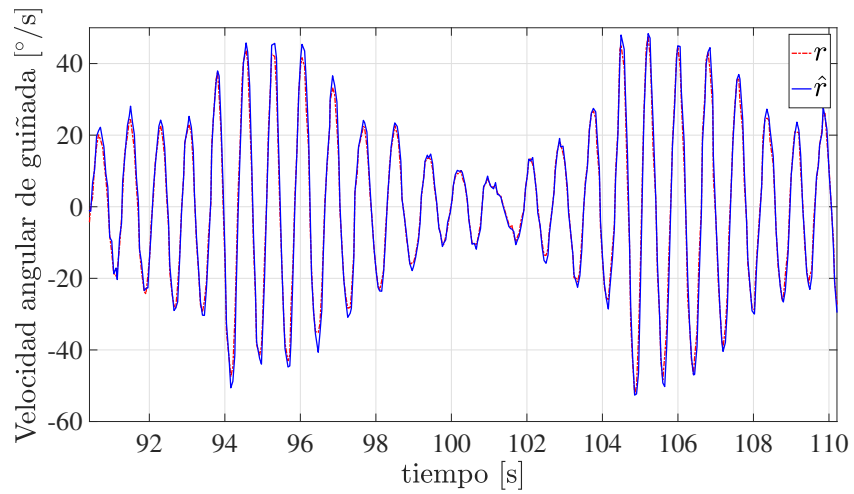


Figura 5.56: Gráfica del experimento de velocidad de guiñada aplicando el NESO y ley de control PD.

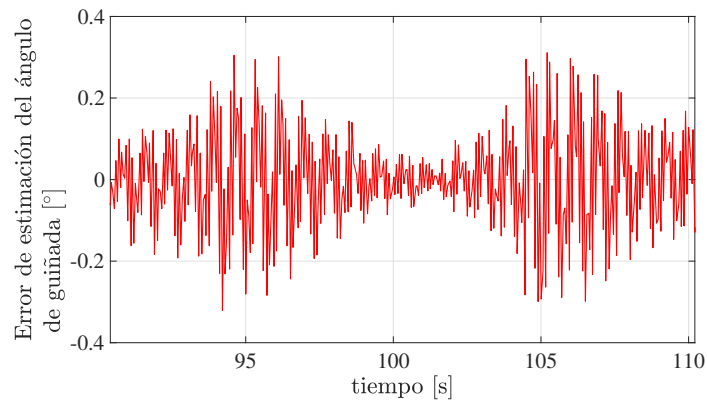


Figura 5.57: Gráfica del error estimación de ángulo de guiñada aplicando el NESO y ley de control PD.

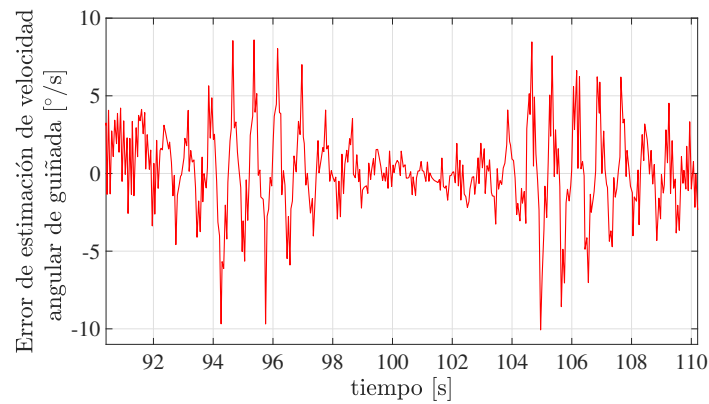


Figura 5.58: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de guiñada aplicando el NESO y ley de control PD.

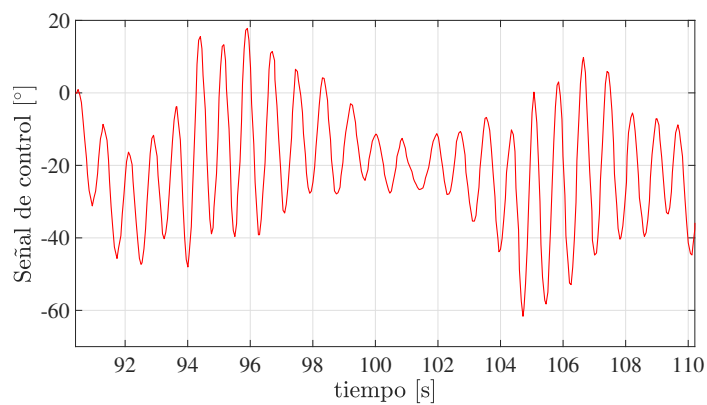


Figura 5.59: Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control PD para el ángulo de guiñada.

5.5. SMO aplicado a un UAV de ala fija con ley de control Backstepping

A continuación, se presentan las gráficas con los resultados experimentales del Observador por Modos Deslizantes (SMO) para las tres dinámicas de movimiento en orientación del vehículo aéreo no tripulado y ley de control Backstepping.

5.5.1. Movimiento de cabeceo

Las Figuras 5.60 y 5.61 muestran los resultados experimentales del SMO y ley de control Backstepping para el ángulo de cabeceo y velocidad angular de cabeceo, respectivamente. En las Figuras 5.62 y 5.63 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, y en la Figura 5.64 se observa el resultado experimental del control de altura, y en la Figura 5.65 se observa la señal de control de este experimento.

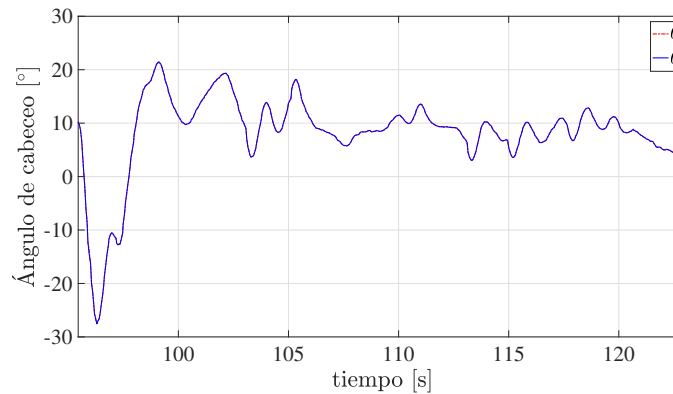


Figura 5.60: Gráfica del experimento de ángulo de cabeceo aplicando SMO y ley de control Backstepping.

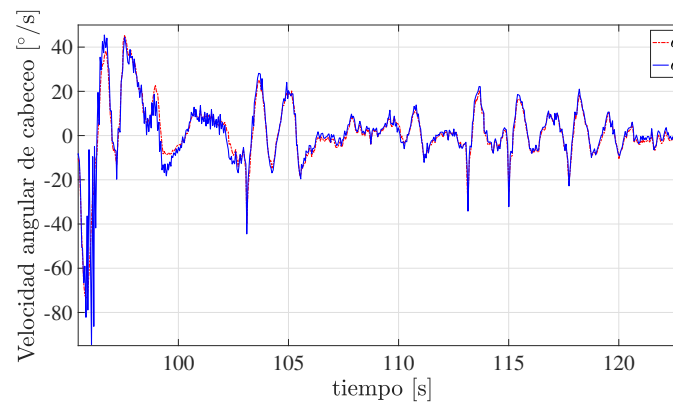


Figura 5.61: Gráfica del experimento de velocidad de cabeceo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.

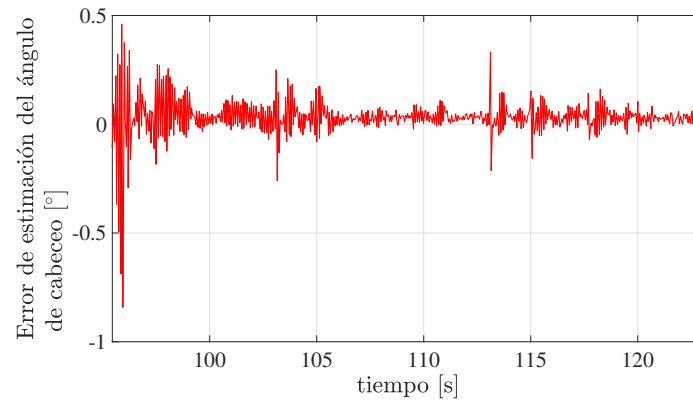


Figura 5.62: Gráfica del error estimación de ángulo de cabeceo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.

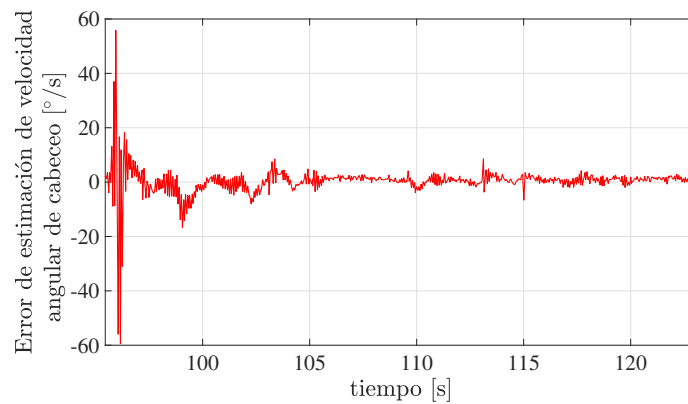


Figura 5.63: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de cabeceo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.

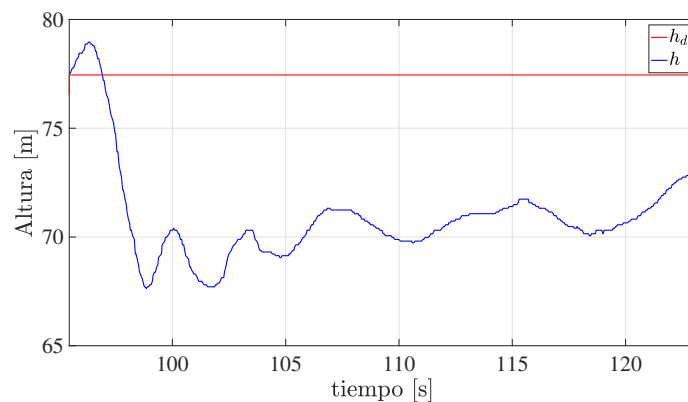


Figura 5.64: Gráfica del experimento de medida de altura aplicando el SMO y ley de control Backstepping.

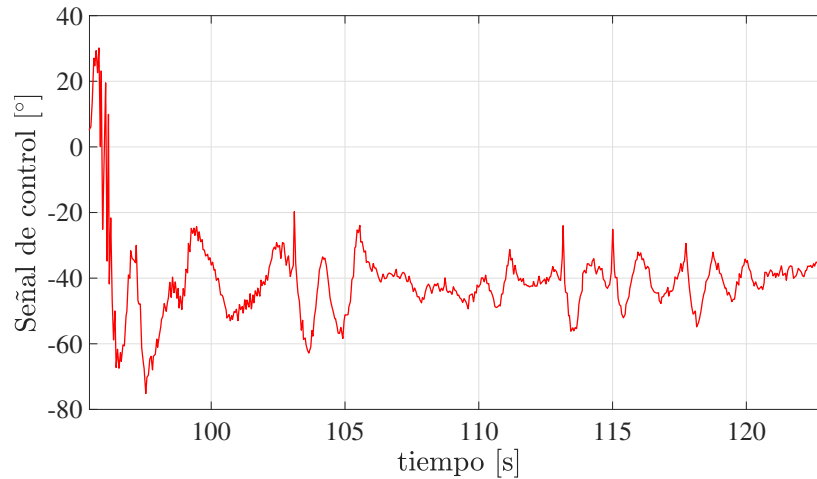


Figura 5.65: Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control Backstepping para el ángulo de cabeceo.

5.5.2. Movimiento de alabeo

Las Figuras 5.66 y 5.67 muestran los resultados experimentales del SMO y ley de control Backstepping para el ángulo de alabeo y velocidad angular de alabeo, respectivamente. En las figuras 5.68 y 5.69 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, y en la Figura 5.70 se muestre el comportamiento de la señal de control de este experimento.

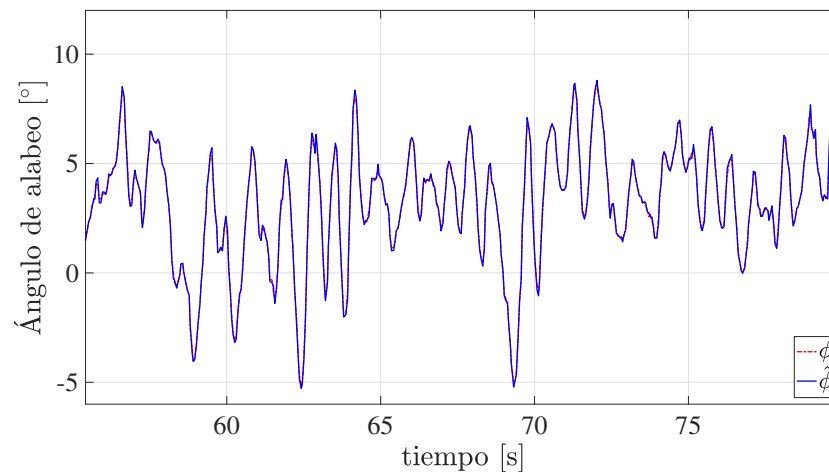


Figura 5.66: Gráfica del experimento de ángulo de alabeo aplicando SMO y ley de control Backstepping.

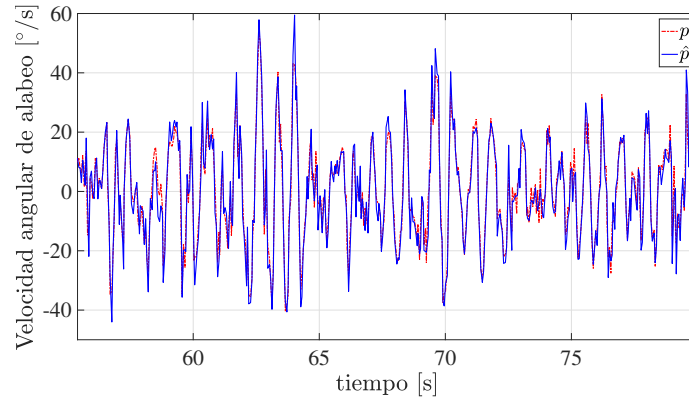


Figura 5.67: Gráfica del experimento de velocidad angular de alabeo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.

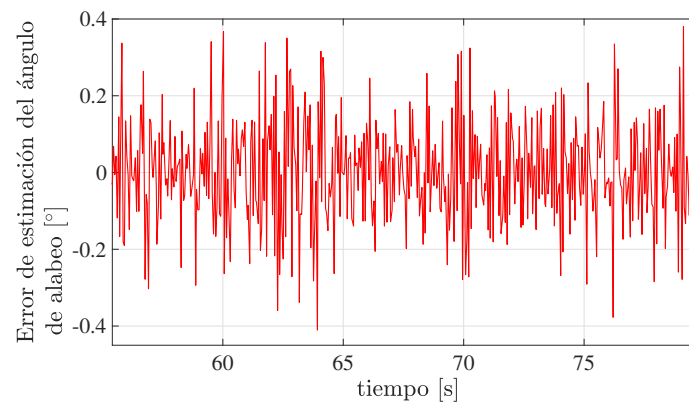


Figura 5.68: Gráfica del error de estimación de ángulo de alabeo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.

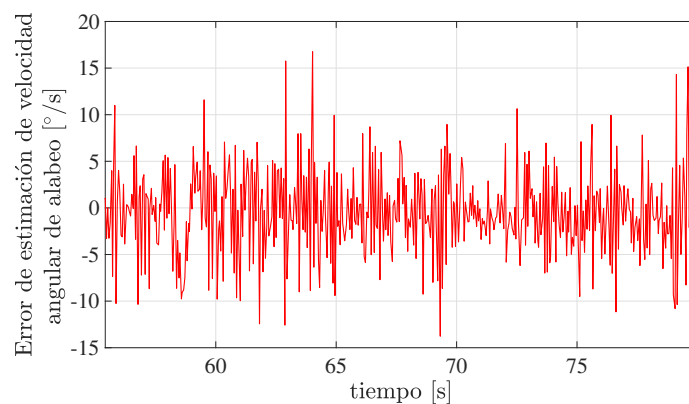


Figura 5.69: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de alabeo aplicando el SMO y ley de control Backstepping.

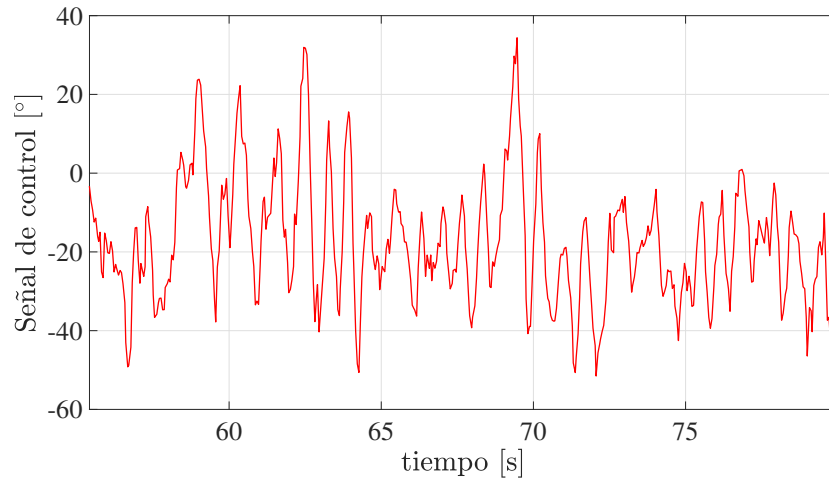


Figura 5.70: Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control Backstepping para el ángulo de alabeo.

5.5.3. Movimiento de guiñada

Las figuras 5.71 y 5.72 muestran los resultados experimentales del SMO y ley de control Backstepping para el ángulo de guiñada y velocidad angular de guiñada, respectivamente. En las Figuras 5.73 y 5.74 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, y en la Figura 5.75 se observa el comportamiento de la señal de control de este experimento.

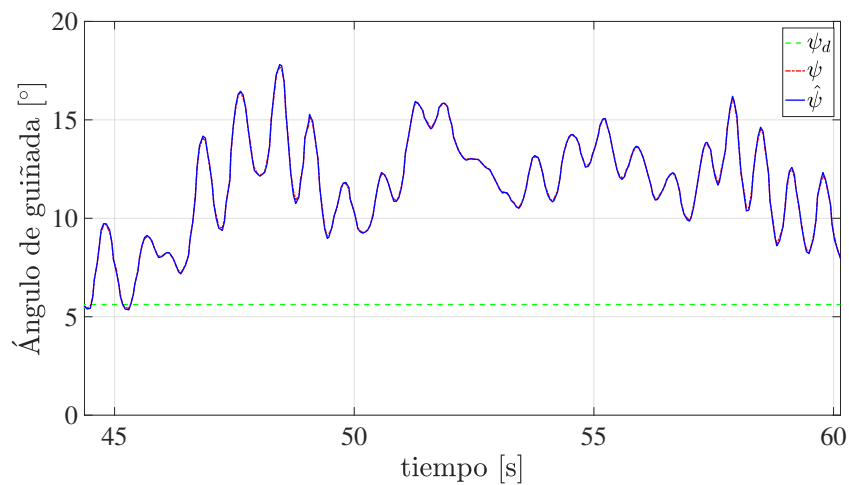


Figura 5.71: Gráfica del experimento de ángulo de guiñada aplicando SMO y ley de control Backstepping.

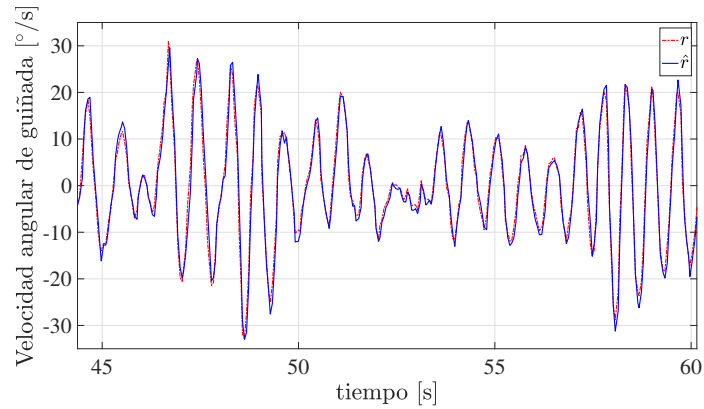


Figura 5.72: Gráfica del experimento de velocidad angular de guiñada aplicando el SMO y ley de control Backstepping.

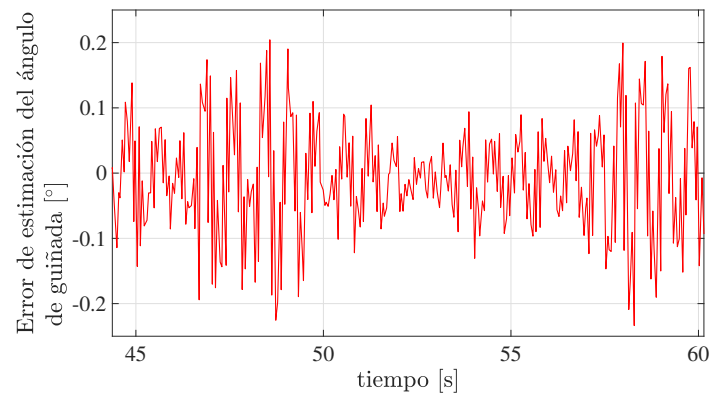


Figura 5.73: Gráfica del error de estimación de ángulo de guiñada aplicando el SMO y ley de control Backstepping.

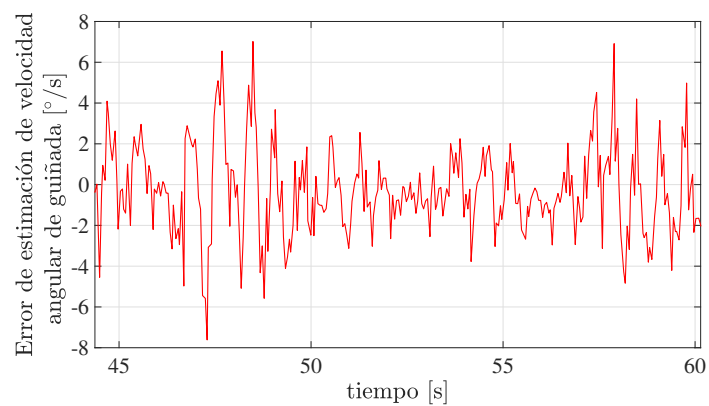


Figura 5.74: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de guiñada aplicando el SMO y ley de control Backstepping.

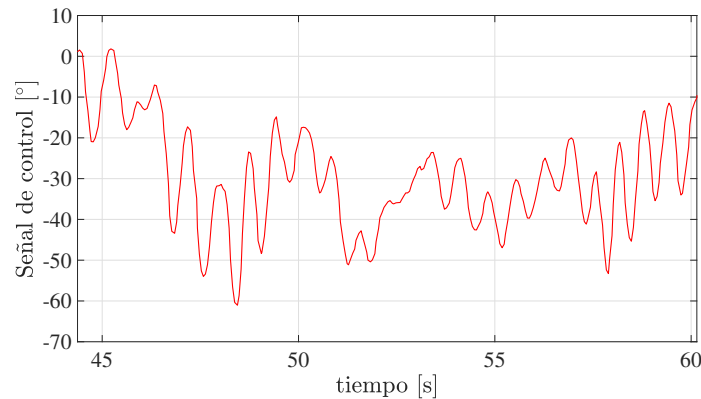


Figura 5.75: Gráfica de señal de control aplicando el SMO y la ley de control Backstepping para el ángulo de guiñada.

5.6. NESO aplicado a un UAV de ala fija con ley de control Backstepping

En seguida se presentan las gráficas con los resultados experimentales del No Lineal de Estado Extendido (NESO) para las tres dinámicas de movimiento en actitud del vehículo aéreo no tripulado y ley de control Backstepping.

5.6.1. Movimiento de cabeceo

Las Figuras 5.76 y 5.77 muestran los resultados experimentales del NESO y ley de control Backstepping para el ángulo de cabeceo y velocidad angular de cabeceo, respectivamente. En las Figuras 5.78 y 5.79 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, y en la Figura 5.80 se observa el resultado experimental del control de altura, y en la Figura 5.81 se observa el comportamiento de la señal de control de este experimento.

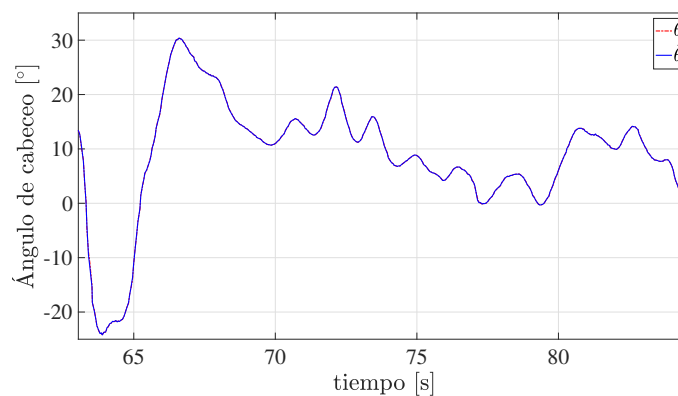


Figura 5.76: Gráfica del experimento de ángulo de cabeceo aplicando NESO y ley de control Backstepping.

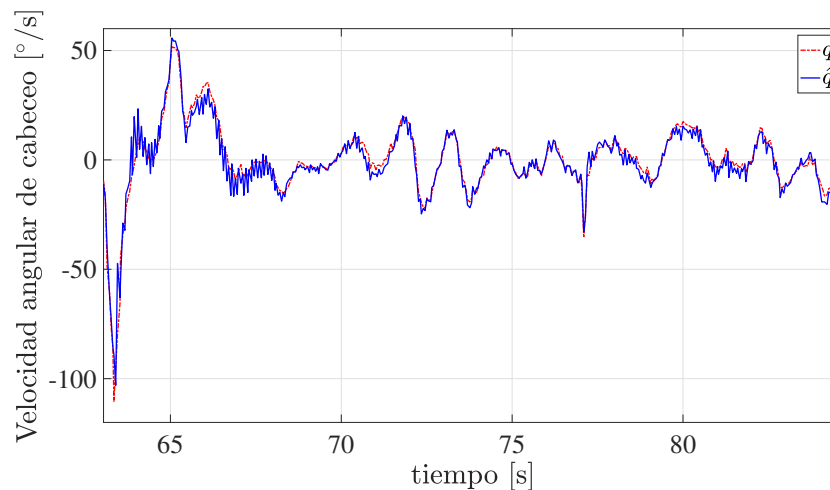


Figura 5.77: Gráfica del experimento de velocidad angular de cabeceo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.

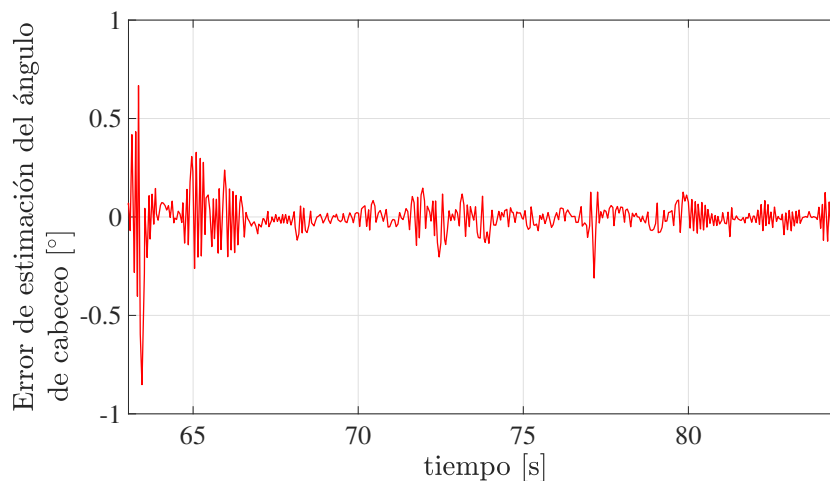


Figura 5.78: Gráfica del error de estimación de ángulo de cabeceo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.

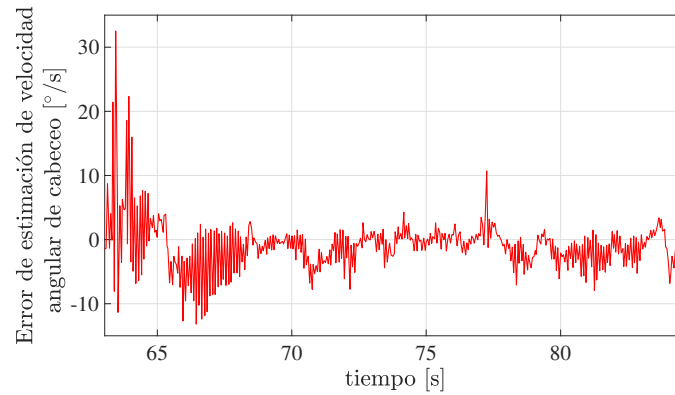


Figura 5.79: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de cabeceo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.

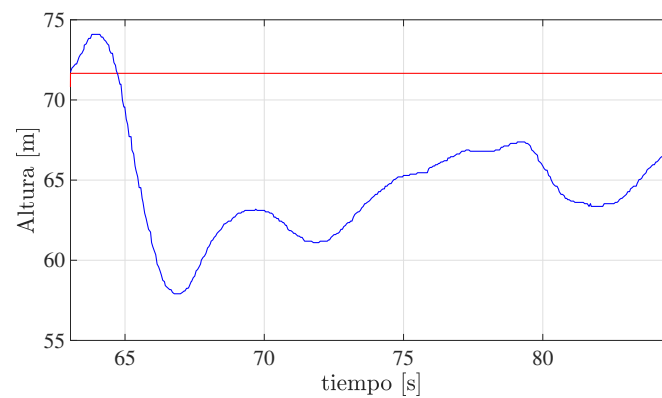


Figura 5.80: Gráfica del experimento de medida de altura aplicando el NESO y ley de control Backstepping.

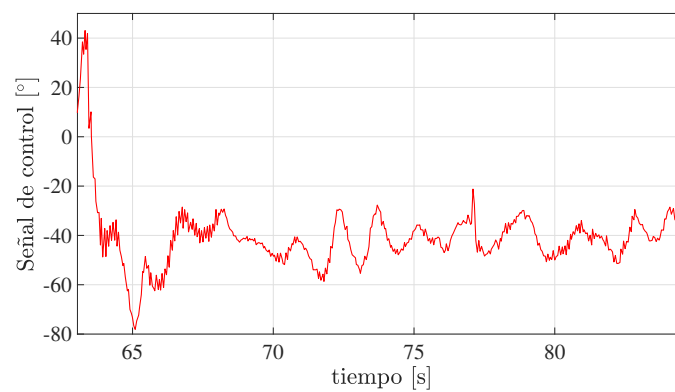


Figura 5.81: Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control Backstepping para el ángulo de cabeceo.

5.6.2. Movimiento de alabeo

Las Figuras 5.82 y 5.83 muestran los resultados experimentales del NESO y ley de control Backstepping para el ángulo de alabeo y velocidad angular de alabeo, respectivamente. En las Figuras 5.84 y 5.85 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, y en la Figura 5.86 se observa el comportamiento de la señal de control de este experimento.

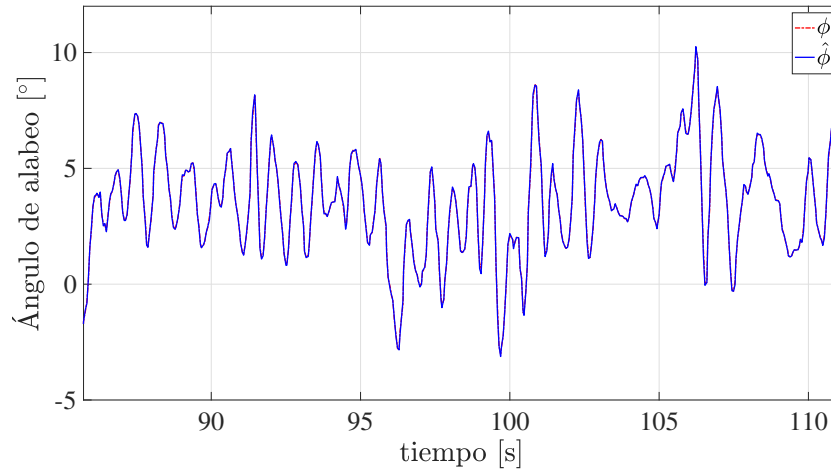


Figura 5.82: Gráfica del experimento de ángulo de alabeo aplicando NESO y ley de control Backstepping.

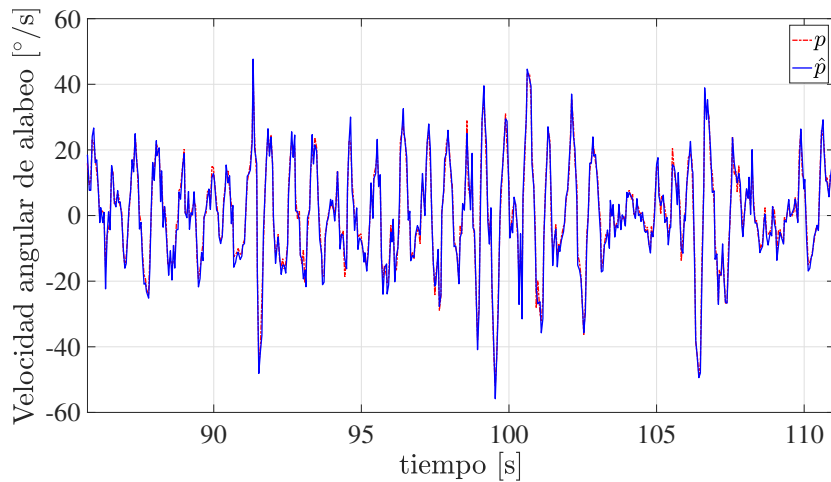


Figura 5.83: Gráfica del experimento de velocidad angular de alabeo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.

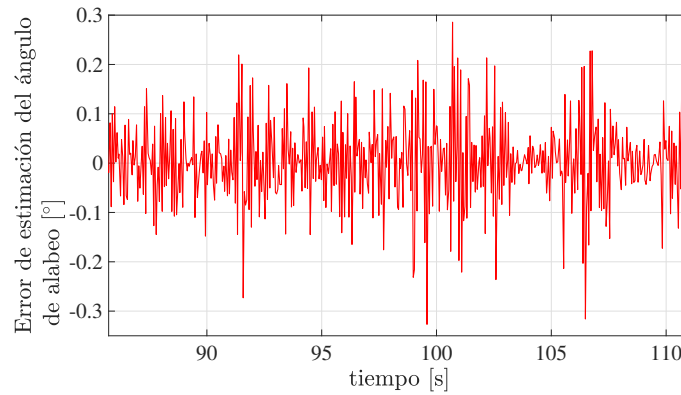


Figura 5.84: Gráfica del error de estimación de ángulo de alabeo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.

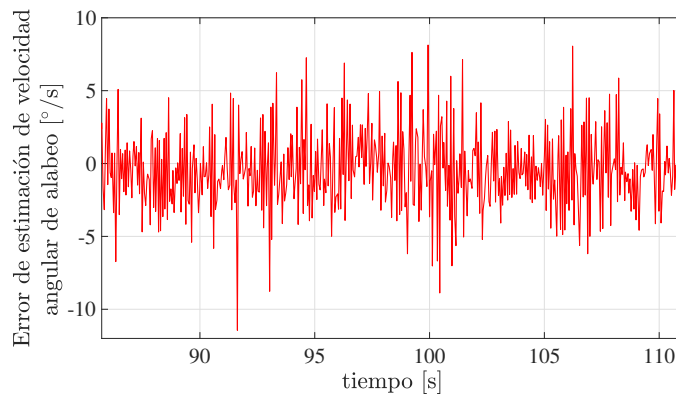


Figura 5.85: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de alabeo aplicando el NESO y ley de control Backstepping.

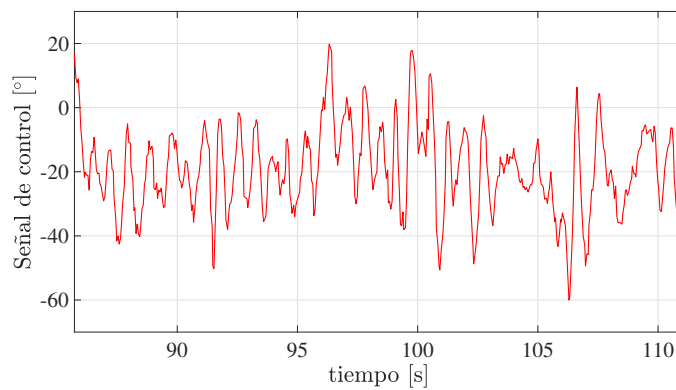


Figura 5.86: Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control Backstepping para el ángulo de alabeo.

5.6.3. Movimiento de guiñada

Las Figuras 5.87 y 5.88 muestran los resultados experimentales del NESO y ley de control Backstepping para el ángulo de guiñada y velocidad angular de guiñada, respectivamente. En las Figuras 5.89 y 5.90 se muestran los errores de estimación de ángulo y velocidad angular, y en la Figura 5.91 se observa el comportamiento de la señal de control de este experimento.

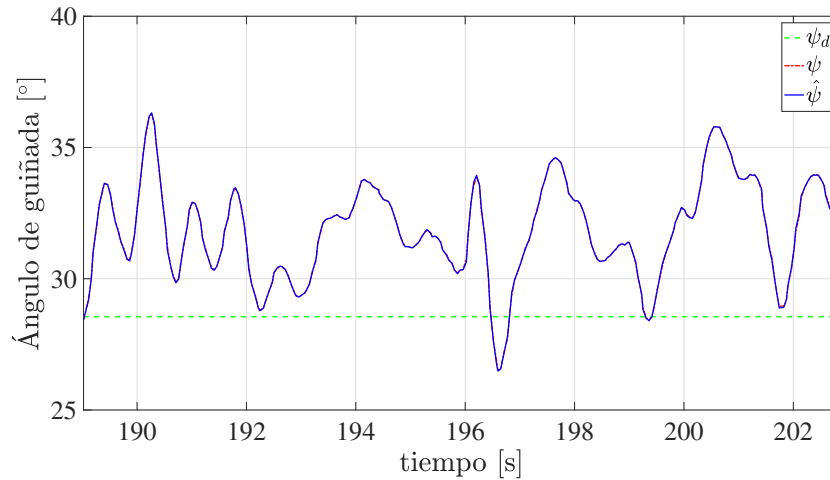


Figura 5.87: Gráfica del experimento de ángulo de guiñada aplicando NESO y ley de control Backstepping.

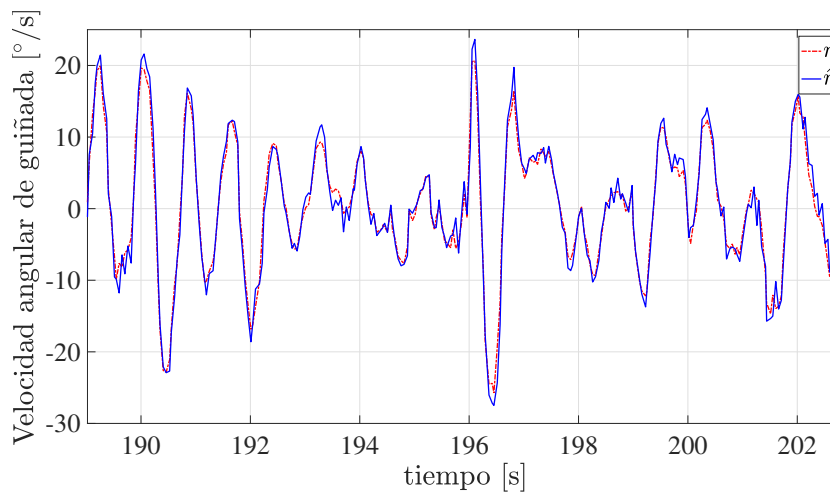


Figura 5.88: Gráfica del experimento de velocidad angular de guiñada aplicando el NESO y ley de control Backstepping.

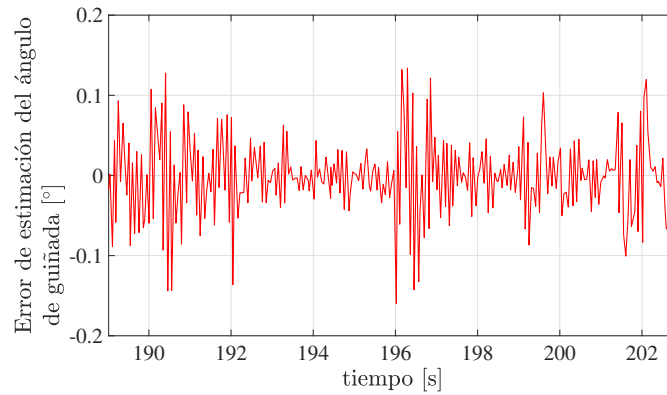


Figura 5.89: Gráfica del error estimación de ángulo de guiñada aplicando el NESO y ley de control Backstepping.

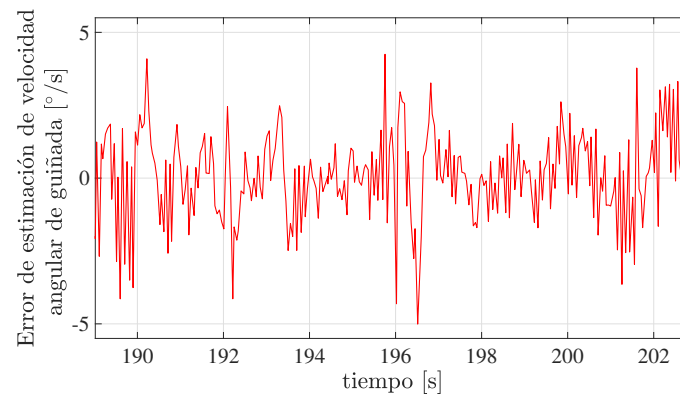


Figura 5.90: Gráfica del error de estimación de velocidad angular de guiñada aplicando el NESO y ley de control Backstepping.

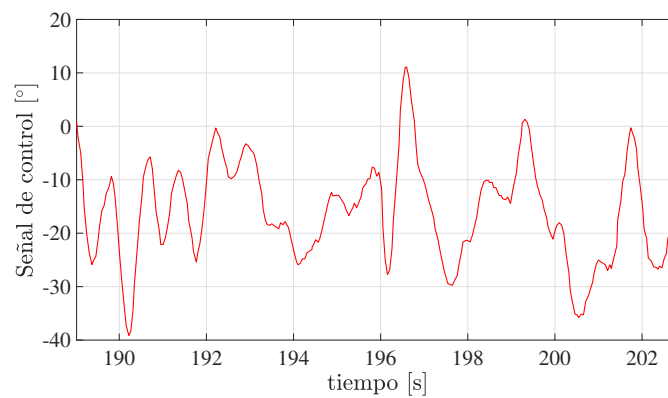


Figura 5.91: Gráfica de señal de control aplicando el NESO y la ley de control Backstepping para el ángulo de guiñada.

5.7. Índice de desempeño

La Tabla 5.2 muestra las normas calculadas de los errores de estimación para las dos leyes de control y los observadores de estados, dichas normas se obtienen con la siguiente función:

$$\|\tilde{x}_i\| = \|x_i - \hat{x}_i\| = \sqrt{\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T (x_i - \hat{x}_i)^2 dt}, \quad (5.2)$$

y fueron calculadas para cada movimiento. En el caso del movimiento de guiñada, x_1 y x_2 se refieren a $x_1 = \psi$ y $x_2 = r$, es decir, el ángulo de guiñada y la velocidad del ángulo de guiñada respectivamente, por lo que la ecuación (5.2) definida para este movimiento queda como $\|\psi - \hat{\psi}\|$ y $\|r - \hat{r}\|$. El mismo análisis se hizo para los movimientos de alabeo y cabeceo.

Tabla 5.2: Tabla de las normas de los errores de estimación de todos los experimentos

Control	Observador	$\ \tilde{\theta}\ [^\circ]$	$\ \tilde{q}\ [^\circ/\text{seg}]$	$\ \tilde{\phi}\ [^\circ]$	$\ \tilde{p}\ [^\circ/\text{seg}]$	$\ \tilde{\psi}\ [^\circ]$	$\ \tilde{r}\ [^\circ/\text{seg}]$
PD	Luenberger	0.0638	2.1592	0.1183	2.9535	0.1102	2.2610
	SMO	0.0977	3.8484	0.0650	2.1717	0.0954	1.6894
	NESO	0.0754	5.7636	0.0539	1.8340	0.1257	2.6941
Backstepping	SMO	0.0971	5.6682	0.1364	4.5663	0.0853	2.1451
	NESO	0.1049	4.3003	0.0858	2.7920	0.0492	1.5168

De la Tabla 5.2 destacan los experimentos de ley de control PD con observador de Luenberger para cabeceo y NESO para alabeo, como los de menor error en los respectivos movimientos, y la ley de control Backstepping y NESO para guiñada como el de menor error. Sin embargo, en general se pueden considerar errores aceptables ya que durante las pruebas se utilizaron los estados estimados para realimentar las leyes de control, logrando un desempeño considerado como bueno, dado que la plataforma permaneció en un vuelo controlado estable durante el tiempo del experimento. Se considera que no se puede hacer una comparativa de desempeño de los observadores de estado respecto a control, basada sólo en las normas de los errores, ya que cada experimento fue realizado bajo condiciones de vuelo diferentes, por ejemplo, de clima, de orientación, de altura, entre otras. Pero está claro que el objetivo de la implementación se considera exitoso.

Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo se estudiaron diferentes observadores de estados, tanto lineales como no lineales, con la intención de implementarlos en un vehículo aéreo no tripulado de ala fija. Los estados que fueron estimados a través de dichos observadores, se utilizaron en la realimentación de señales de la ley de control con el fin de realizar vuelos autónomos de un vehículo aéreo no tripulado. Los observadores de estados fueron implementados en un avión de aeromodelismo conocido como *T-28 Trojan*.

Los observadores de estados estudiados en este trabajo son: Observador de Luenberger, Observador por Modos Deslizantes (SMO) y Observador No Lineal de Estado Extendido (NE-SO). Las leyes de control que se aplicaron en las realimentaciones de estados estimados son: Ley de control Proporcional-Derivativa (PD) y ley de control por Backstepping.

Se realizaron las simulaciones de los observadores de estados ya mencionados en el software Matlab, con la finalidad de demostrar que los algoritmos utilizados cumplieran con las características de estimación necesarias para las realimentaciones de los estados en las leyes de control para los movimientos en guiñada, alabeo y cabeceo.

Los resultados de las simulaciones fueron satisfactorios dado que se cumplieron los objetivos de estimación de estados, tanto en lazo abierto como en lazo cerrado. En lo que se refiere a los observadores de estado en lazo cerrado, las simulaciones muestran que se alcanzan los objetivos de control para los tres movimientos de la dinámica del vehículo aéreo, incluidos los tres observadores de este trabajo.

Los observadores de este estudio tienen características distintas, sin embargo, en los resultados de las simulaciones para los tres movimientos y las dos leyes de control, los observadores demuestran tener un desempeño muy parecido. Es importante no perder de vista sus respectivas características al momento de la implementación en una plataforma real.

Posteriormente, se implementaron los algoritmos de los observadores de este estudio en un vehículo de aeromodelismo, por medio de un sistema electrónico embebido.

En lo que se refiere a los resultados experimentales, fue de mucha ayuda su implementación en la plataforma en la que ya se había comprobado el desempeño de las leyes de control [42], por lo que sólo se requería concentrarse en los algoritmos de los observadores. Además, se considera importante recordar que, para los experimentos, se utilizaron los mismos valores de ganancias de las leyes de control, de los observadores y coeficientes aerodinámicos que en

las simulaciones reportadas en este trabajo, sin embargo, debido a dinámicas no modeladas, su desacoplamiento en tiempo real, perturbaciones del viento, entre otras cosas, los resultados experimentales para los estados estimados no son tan buenos, hablando de las normas de error, como los de las simulaciones.

En el caso de los experimentos con los observadores de estado y la ley de control PD, la Tabla 5.2 muestra valores muy parecidos. Sin embargo, los tres observadores demostraron ser funcionales en su implementación, sin perder de vista que dos de los observadores (SMO y NESO) son no lineales y el observador de Luenberger es lineal. Además, el NESO no toma en cuenta el modelo dinámico en su algoritmo.

En lo referente a la ley de control por Backstepping, las pruebas experimentales sólo fueron implementadas en dos algoritmos de observación (SMO y NESO). Para estas pruebas experimentales no se modificaron las ganancias de los observadores, utilizando las mismas ganancias que las pruebas experimentales con la ley de control PD. Sin embargo, se considera que no variaron mucho los errores de estimación, manteniéndose en los rangos bajos reportados.

Es importante hacer notar que no se podría hacer una comparación directa de los experimentos debido a que fueron realizados de manera independiente y bajo condiciones climáticas y temporales distintas.

En lo que se refiere a los objetivos de control, a pesar de que este trabajo no busca la comprobación de las leyes de control utilizadas, los resultados experimentales de la implementación de los observadores demuestran alcanzar los objetivos de los diferentes movimientos, es decir, ángulo deseado de 0 grados para los movimientos de alabeo. Para el ángulo deseado del movimiento de guiñada se buscó que la activación del control autónomo se realizara cuando la lectura de dicho ángulo estuviera cerca de 0 grados, ya que el sensor hace un cambio brusco de lectura cuando está cerca de 180° o -180° y esto ocasiona grandes variaciones en la salida de control. Para los experimentos de movimiento de cabeceo, lo que se buscó fue controlar la altura del vehículo aéreo, para lo cual se voló a una altura muy considerable, y se activó el modo de control autónomo con la intención de tener tiempo de recuperar el vehículo, en caso de que circunstancias ajenas al control, perturbaran de forma excesiva a la plataforma y que por accidente se perdiera en el vuelo.

6.1. Trabajo futuro

Como propuesta de trabajo futuro, se plantea la posibilidad de estudiar los observadores por modos deslizantes de orden superior y su aplicación con leyes de control adaptables, así como el análisis de estabilidad de leyes de control realimentadas por estados estimados mediante los observadores de estado.

Además, se planea trabajar con modelos dinámicos acoplados y seguimiento de trayectorias, a través de rutas definidas en el sistema embebido.

6.2. Publicaciones derivadas de este trabajo

- Linear controllers implementation for a fixed-wing MAV. T. Espinoza, R. Parada, A. Dzul, and R. Lozano. 2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS) May 27-30, 2014. Orlando, FL, USA.
- Nonlinear observers applied to fixed-wing UAVs. P. Parada, T. Espinoza, A. Dzul. 2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS) May 27-30, 2014. Orlando, FL, USA.
- Performance analysis of nonlinear observers applied to the fixed-wing unmanned aerial vehicles flight under decoupled-reduced model. Ricardo P Parada, A Tadeo Espinoza, Alejandro E Dzul and Francisco G Salas. International Journal of Micro Air Vehicles 2017, Vol. 9(2) 111 - 123. <https://doi.org/10.1177/1756829317702673>

Bibliografía

- [1] D. Luenberger. "Observers for multivariable systems". *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 11, pp. 190-197, April 1966.
- [2] J. J. E. Slotine, J. K. Hendick, and E. A. Misawa. "On sliding observers for nonlinear systems". *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 109, pp. 245-252, 1987.
- [3] V. I. Utkin. *Sliding-modes in control optimization*. Book, Springer-Verlag, 1992.
- [4] R. Sreedhar, B. Fernandez, and G. Y. Masada. "Robust fault detection in nonlinear systems using sliding-mode observers". *Proceedings of IEEE Conference on Control Applications*, pp 13 - 16, Vancouver, BC., September, 1992.
- [5] F. J. J. Hermans and M. B. Zarrop. "Sliding-mode observers for robust sensor monitoring". *Proceedings of 13th IFAC World Congress*, pp. 211-216, San Francisco, USA, 1996.
- [6] J. Han. "A class of extended state observers for uncertain systems". *Control and Decision*, vol.10, No.1, pp: 85-88, 1995. (In Chinese)
- [7] Y. Hou, Z. Gao, F. Jiang, and B.T. Boulter. "Active disturbance rejection control for web tension regulation". *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4974-4979, Orlando, Florida USA, December, 2001.
- [8] Z. Gao, S. Hu, and F. Jiang. "A novel motion control design approach based on active disturbance rejection". *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4877-4882, Orlando, Florida USA, December, 2001.
- [9] W. Wang, and Z. Gao. "A Comparison Study of Advanced State Observer Design Techniques". *American Control Conference*, vol. 6, 4590 - 4595, Denver, Colorado, USA, December, 2003.
- [10] J. Guerrero and R. Lozano, "Flight Formation Control". *Ed. Wiley*, ISBN: 184-82-1323-9, 2012.

- [11] K. Ogata. "Ingeniería de control moderna". *Pearson Educación*, Quinta edición, 2010.
- [12] M. V. Cook, "Flight Dynamics Principles", Second edition, *Ed. Elsevier*, ISBN: 978-0-7506-6927-6, 2007.
- [13] D. Mclean, "Automatic Flight Control Systems", *Ed. Prentice hall International*, ISBN: 0-13-054008-0, 1990.
- [14] O. Harkegard and S. T. Glad, "A design for Flight Path Angle Control", *In proceedings of the 39th Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 12-15 Dic, Page(s):3570 - 3575 vol.4, 2000.
- [15] B. L. Walcoll y S. H. Zack, "State observation of nonlinear uncertain dynamical systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 32, no. 2, pp. 166-170, Feb 1987.
- [16] D. M. Dawson, Z. Qu, y J. C. Carroll, "On the state observation and output feedback problems for nonlinear uncertain dynamic systems", *Syst. Control Lett.*, vol. 18, pp. 217-222, 1992.
- [17] D. W. Gu y F W. Poon, "A robust state observer scheme", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 46, no. 12, pp. 1958-1963, Dic. 2001.
- [18] M. Boutayeb y M. Darouach, "Comments on 'A robust state observer scheme' ", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 48, no. 7, pp. 1292-1294, Jul. 2003.
- [19] A.E.Pearson y Y.A.Fiagbedzi "An observer for time lag systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 34, no. 7, pp. 775-777, Jul. 1989.
- [20] J.Leyva-Ramos y A.E.Pearson, "An asymptotic modal observer for linear autonomous time lag systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 40, no. 7, pp. 1291-1294, Jul. 1995.
- [21] H. Trinh y M. Aldeen, "Comments on 'An asymptotic modal observer for linear autonomous time lag systems' ", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 42, no. 5, pp. 742-745, May 1997.
- [22] H.Trinh, "Linear functional state observer for time-delay systems", *Int. J. Control*, vol. 72, pp. 1642-1658, 1999.
- [23] H. H. Choi y M. J. Chung, "Robust observer-based controller design for linear uncertain time-Delay systems", *Automatica*, vol. 33, pp. 1749-1752, 1997.
- [24] M. Darouach, "Linear functional observers for systems with delays in state variables", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 46, no. 5, pp. 491-496, Mar. 2001.
- [25] M. Darouach, "Linear functional observers for systems with delays in state variables: The discrete-Time case", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 50, no. 2, pp. 228-233, Feb. 2005.

- [26] M. Darouach, "Reduced-order observers for linear neutral delay systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 50, no. 9, pp. 1407-1413, Sep. 2005.
- [27] S. Sundaram y C. N. Hadjicostis, "Delayed observers for linear systems with unknown inputs", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 52, no. 2, pp. 334-339, Feb. 2007.
- [28] A. Seuret, T. Floquet, J. P. Richard, y S. K. Spurgeon, "A sliding mode observer for linear systems with unknown time varying delay", in *Proc. 2007 American Control Conf.*, New York, Jul. 2007, pp. 4558-4563.
- [29] Y. H. Chen, "Adaptive robust observers for non-Linear uncertain systems", *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 21, pp. 803-814, 1990.
- [30] H. Wu, "Adaptive stabilizing state feedback controllers of uncertain dynamical systems with multiple time delays", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 45, no. 9, pp. 1697-1701, Sep. 2000.
- [31] H. Wu, "Decentralized adaptive robust control for a class of large scale systems including delayed state perturbations in the interconnections", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 47, no. 10, pp. 1745-1751, Oct. 2002.
- [32] H. Wu, "Adaptive Robust State Observers for a Class of Uncertain Nonlinear Dynamical Systems With Delayed State Perturbations", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 54, no. 6, pp. 1407-1412, Jun. 2009.
- [33] C-T. Chen, "Linear Systems Theory and Design", Oxford University Press, Inc., September 1998.
- [34] H. Sira-Ramírez, S. K. Spurgeon, A. S. I. Zinober, "Sliding Mode Observer-Controller Design", Workshop on ROBUST CONTROL VIA VARIABLE STRUCTURE AND LYAPUNOV TECHNIQUES (VSLT94), Benevento, Italy, September 7-9, 1994.
- [35] T. Floquet, C. Edwards, S. K. Spurgeon, "On sliding mode observers for systems with unknown inputs", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Volume 21, Issue 8-9, pages 638-656, October-November 2007
- [36] J. Deleon, I. Souleiman, A. Glumineau, y G. Schireier, "On Nonlinear Equivalence and Observer", *KYBERNETIKA*, vol 37, no. 5, pp. 521-546, 2001.
- [37] Nicolas Bouton, Roland Lenain, Benoit Thuilot, and Philippe Martinet, "A Tire Stiffness Backstepping Observer Dedicated to All-Terrain Vehicle Rollover Prevention", *Advanced Robotics*, Vol. 22, pp. 1267 - 1285, 2008
- [38] R. Trabelsi, A. Khedher, M. F. Mimouni, F. M'Sahli, "An Adaptive Backstepping Observer for on-line resistance application", *International Journal of Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering*, Vol. 4, No. 1, pp. 1246-1267, July 2010.

- [39] A. Robertsson, R. Johansson, “Observer Backstepping and Control Desing Linear Systems”, Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida USA, pp. 4592-4593, December 1998.
- [40] V. Santibanez, R. Kelly and M. A. Llama, “Global asymptotic stability of a tracking sectorial fuzzy controller for robot manipulators”, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part B: Cybernetics*, vol.34, no.1, pp.710-718, 2004.
- [41] K. Khalil, “Nonlinear Systems”, *Prentice Hall*, New Jersey, U.S.A., 2002.
- [42] A. T. Espinoza “Diseño de controladores para un vehículo aéreo tipo avión” *Tesis doctoral* Instituto Tecnológico de la Laguna. Diciembre 2015.
- [43] <http://www.horizonhobby.com/>,
última revision: 10 de Noviembre del 2015.
- [44] <http://www.microboticsinc.com/>,
última revision: 10 de Noviembre del 2015.
- [45] <http://www.futabarc.com/systems/futk7000.html>,
última revision: 09 de Noviembre del 2015.
- [46] <http://www.digi.com/support/productdetail>,
última revision: 09 de Noviembre del 2015.
- [47] <https://www.parallax.com/product/29124>,
última revision: 09 de Noviembre del 2015.
- [48] <https://www.parallax.com/product/40000>,
última revision: 09 de Noviembre del 2015.
- [49] <http://www.digi.com/support/productdetail>,
última revision: 09 de Noviembre del 2015.
- [50] <http://www.digi.com/support/productdetail?pid=4549&type=documentation>,
última modificación: 29 de Septiembre del 2015.