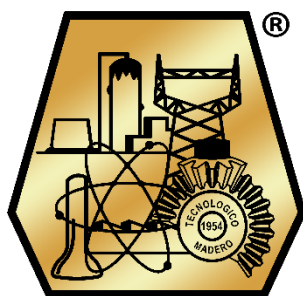


INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CIUDAD MADERO
DIVISIÓN DE ESTUDIO DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN



"POR MI PATRIA Y POR MI BIEN"

TESIS

**VISUALIZACIÓN CIENTÍFICA APLICADA EN EL ANÁLISIS DE
ALGORITMOS QUE RESUELVEN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN**

**Que para obtener el Grado de
Maestro en Ciencias de la Computación**

**Presenta
Manuel Paz Robles
CVU del CONAHCYT: G97071322**

**Directora de Tesis
Dra. Claudia Guadalupe Gómez Santillán
CVU del CONAHCYT: 50310**

**Codirector
Dr. Nelson Rangel Valdez**

Cd Madero, Tamaulipas

marzo 2025



Instituto Tecnológico de Ciudad Madero
Subdirección Académica
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Ciudad Madero, Tamaulipas, **11/Marzo/2025**

Oficio No.: U5.064/2025
Asunto: Autorización de impresión de tesis

C. MANUEL PAZ ROBLES
No. DE CONTROL G97071322
P R E S E N T E

Me es grato comunicarle que después de la revisión realizada por el Jurado designado para su Examen de Grado de Maestría en Ciencias de la Computación, se acordó autorizar la impresión de su tesis titulada:

**"VISUALIZACIÓN CIENTÍFICA APLICADA EN EL ANÁLISIS DE ALGORITMOS QUE RESUELVEN
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN"**

El Jurado está integrado por los siguientes catedráticos:

PRESIDENTA:	DRA. MARÍA LUCILA MORALES RODRÍGUEZ
SECRETARIO:	DRA. GUADALUPE CASTILLA VALDEZ
VOCAL:	DRA. CLAUDIA GUADALUPE GOMÉZ SANTILLÁN
SUPLENTE:	DR. NELSON RANGEL VALDEZ
DIRECTORA DE TESIS:	DRA. CLAUDIA GUADALUPE GOMÉZ SANTILLÁN
CO-DIRECTOR:	DR. NELSON RANGEL VALDEZ

Es muy satisfactorio para la División de Estudios de Posgrado e Investigación compartir con usted el logro de esta meta. Espero que continúe con éxito su desarrollo profesional y dedique su experiencia e inteligencia en beneficio de México.

ATENTAMENTE
Excelencia en Educación Tecnológica®
"Por mi patria y por mi bien"®

RAFAEL CASTILLO GUTIERREZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACIÓN

ccp. Archivo
RCG/MLMR/aecr



2025
Año de
La Mujer
Indígena

Av. 1° de Mayo y Sor Juana I. de la Cruz S/N Col. Los Mangos
C.P. 89440 Cd. Madero, Tam. Tel. (833) 3574820 ext. 3110
e-mail: depi_cdmadero@tecnm.mx www.tecnm.mx
www.cdmadero.tecnm.mx



Dedicatoria

A mi amada esposa Georgina, por acompañarme durante este recorrido, y a mi madre, que siempre ha creído en mí.

Agradecimientos

Primeramente, a Dios por darme las fuerzas para poder realizar la maestría. Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) actualmente Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el apoyo brindado a través de la beca 1260161, que me permitió cubrir mis gastos.

A mis directores de tesis por su gran apoyo incondicional.

Dra. Claudia Guadalupe Gómez Santillán y Dr. Nelson Rangel Valdez, ya que a pesar de sus múltiples actividades, me compartieron de su tiempo valioso para dirigirme en la realización de este trabajo. Mil gracias, estimados Doctores; Dra. Claudia y Dr. Nelson.

A mis maestros por el conocimiento transmitido, que fue de gran ayuda para realizar este trabajo.

Al Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, por brindar las condiciones para poder realizar el posgrado de la maestría en Ciencias de la Computación.

VISUALIZACIÓN CIENTÍFICA APLICADA EN EL ANÁLISIS DE ALGORITMOS QUE RESUELVEN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Manuel Paz Robles

Resumen

Los problemas de optimización de muchos objetivos involucran más de tres objetivos que tienen que ser optimizados simultáneamente; generalmente, más de dos están en conflicto. Para este tipo de problemas no hay una única solución, sino un conjunto de soluciones. Dos desafíos que se presentan al resolver estos tipos de problemas son la obtención y el análisis de las soluciones por su naturaleza multidimensional.

En el caso del análisis, se observó que los investigadores han utilizado técnicas de visualización de alta dimensionalidad, como el mapa de calor, gráfico de coordenadas paralelas, matriz de gráficos de dispersión y gráficos de radar, entre otros. Sin embargo, dichas técnicas tienen limitaciones en su interpretabilidad al momento de representar las soluciones sin un tratamiento previo. En distintos trabajos, estas limitaciones han sido aminoradas mediante la aplicación de estrategias como algoritmos de agrupación y seriación espectral, entre otros, logrando mejorar la representación visual de las soluciones para su análisis.

Este trabajo propone una Metodología para la Evaluación y Selección de Técnicas de Visualización Multiobjetivo (MESTVM), que aborda el problema de analizar un conjunto de soluciones de un problema de optimización de muchos objetivos cuando al ser representadas directamente en técnicas de visualización es difícil el análisis.

MESTVM recibe de un tomador de decisiones: un conjunto de soluciones de un problema de optimización de cuatro o más objetivos, una propiedad específica a observar, técnicas de visualización a emplear, y un conjunto de características que definen a una buena visualización, conocidas en el estado del arte como ACES (precisión, claridad, empoderamiento y concisión).

El proceso de la metodología empieza con la representación visual del conjunto de soluciones; una vez que se tienen los gráficos, se caracterizan y, posteriormente, se lleva a cabo la correlación entre las características presentes en los gráficos y las características ACES. Esta correlación es un resumen del grado en el que las características ACES son cubiertas por las técnicas de visualización para observar la propiedad específica.

Una vez que se tiene el resumen, se verifica si las técnicas son efectivas. En caso de que las técnicas resulten efectivas, se selecciona la más adecuada y el proceso termina, y en el caso de que la propiedad no sea observable en ninguno de los gráficos, se realiza una etapa de mejora, donde se selecciona una técnica de visualización específica y se aplica algún tratamiento a los datos como escalamiento, normalización, agrupamiento, ordenamiento, entre otros. En este trabajo se utilizó TOPSIS, un método que ordena las soluciones por su distancia a una solución ideal. Si en etapa de mejora no se hizo observable la propiedad deseada se exploran técnicas de visualización alternativas y se realiza una iteración.

La validación de la metodología se realizó con cuatro experimentos utilizando conjunto de soluciones del problema DTLZ1 de cuatro y seis objetivos. En el primero se realizó un análisis

de cuatro técnicas de visualización (Matriz de Gráficos de Dispersión (MGD), Mapa de Calor (MC), Gráfico de Coordenadas Paralelas (GCP), el Gráfico de Radar (GR)); en el segundo experimento se evaluaron las técnicas de visualización mediante la correlación entre los aspectos visuales de los gráficos y ACES, evaluando específicamente la precisión para observar convergencia en los gráficos; el tercer experimento validó cómo la mejora de la representación de las soluciones permite observar la propiedad deseada en un gráfico determinado; por último, en el cuarto experimento se planteó como propiedad del conjunto de soluciones observar soluciones con el mejor desempeño en un objetivo o grupos de objetivos. En este experimento se utilizó el método TOPSIS y el uso de vectores de pesos para ordenar el conjunto de soluciones antes de su representación.

Como resultado, la metodología propuesta permite evaluar las técnicas de visualización a través de las características ACES, habilitando al tomador de decisiones a seleccionar la más adecuada para observar una propiedad específica deseada y se obtuvo que la reorganización de soluciones considerando preferencias mejora la representación visual de las soluciones en problemas de optimización de alta dimensionalidad.

Las aportaciones de este trabajo son: La propuesta de la metodología MESTVM que integra características ACES como marco de evaluación de técnicas de visualización, una tabla comparativa de ventajas y desventajas de cuatro técnicas de visualización (matriz de gráficos de dispersión, mapas de calor, gráficos de coordenadas paralelas y gráficos de radar); una estrategia de preparación de datos que mejora la interpretabilidad de mapas de calor mediante escalamiento y normalización; y la validación de TOPSIS como método para organizar soluciones según preferencias del tomador de decisiones.

Este trabajo derivó en un capítulo de libro en donde se analizó la representación visual del desempeño de algoritmos con datos de hasta cuatro dimensiones, utilizando las cuatro técnicas

de visualización antes mencionadas, analizando principalmente la convergencia y diversidad de un conjunto de soluciones del problema DTLZ1 de cuatro objetivos.

SCIENTIFIC VISUALIZATION APPLIED TO ANALYSIS OF ALGORITHMS THAT SOLVE PROBLEMS OF OPTIMISATION

Manuel Paz Robles

Abstract

The optimization problems of many objectives involve more than three objectives that must be optimized simultaneously; generally, more than two are in conflict. For this type of problem, there is not a single solution, but a set of solutions. Two challenges that arise are the obtaining and analysis of solutions due to their multidimensional nature.

In the case of the analysis, it was observed that the researchers have used high-dimensional visualization techniques, such as heat mapping, parallel coordinate plot, scatter graph matrix, and radar graphs, among others. However, these techniques have limitations in their interpretability when representing solutions without prior treatment. In different works, these limitations have been reduced through the application of strategies such as clustering algorithms and spectral seriation, among others, improving the visual representation of the solutions for analysis.

This paper proposes a Methodology for the Evaluation and Selection of Multiobjective Visualization Techniques (MESTVM), which addresses the problem of analyzing a set of

solutions to a problem of optimization of many objectives when they are directly represented in visualization techniques and the analysis is difficult.

MESTVM receives from a decision maker: a set of solutions to an optimization problem of four or more objectives, a specific property to observe, visualization techniques to employ, and a set of characteristics that define good visualization, known in the state of the art as ACES (precision, clarity, empowerment, and conciseness).

The methodology process begins with the visual representation of the set of solutions; once the graphs are available, they are characterized, and then the correlation between the features present in the charts and the ACES features is carried out. This correlation is a summary of the degree to which ACES features are covered by visualization techniques to observe the specific property.

Once the summary is available, it is verified if the techniques are effective. In case the techniques are effective, the most appropriate one is selected and the process ends, and in the event that the property is not observable in any of the graphs, an improvement stage is carried out, where a specific visualization technique is selected and some treatment is applied to the data such as scaling, normalization, grouping, ordering, among others. In this work, TOPSIS was used, a method that orders solutions by their distance to an ideal solution. If the desired property was not made observable in the improvement stage, alternative visualization techniques are explored and an iteration is performed.

The validation of the methodology was carried out with four experiments using a set of solutions to the DTLZ1 problem with four and six objectives. In the first, an analysis of four visualization techniques was carried out (Scatter Graph Matrix (MGD), Heat Map (MC), Parallel Coordinate Graph (GCP), Radar Graph (GR)); in the second experiment,

visualization techniques were evaluated by correlating the visual aspects of the graphs and ACES, specifically evaluating the accuracy to observe convergence in the graphs; the third experiment validated how the improvement of the representation of the solutions allows the desired property to be observed in a given graph; Finally, in the fourth experiment, it was proposed as a property of the set of solutions to observe solutions with the best performance in an objective or groups of objectives. In this experiment, the TOPSIS method and the use of weight vectors were used to order the set of solutions before their representation.

As a result, the proposed methodology allows the evaluation of visualization techniques through ACES characteristics, enabling the decision-maker to select the most appropriate one to observe a specific desired property, and it was found that the reorganization of solutions considering preferences improves the visual representation of solutions in high-dimensional optimization problems.

The contributions of this work are: The proposal of the MESTVM methodology that integrates ACES characteristics as a framework for evaluating visualization techniques, a comparative table of advantages and disadvantages of four visualization techniques (scatter graph matrix, heat maps, parallel coordinate graphs and radar graphs); a data preparation strategy that improves the interpretability of heat maps through scaling and normalization; and the validation of TOPSIS as a method to organize solutions according to the preferences of the decision-maker.

This work resulted in a book chapter where the visual representation of the performance of algorithms with data of up to four dimensions was analyzed, using the four visualization techniques mentioned above, mainly analyzing the convergence and diversity of a set of solutions to the DTLZ1 problem of four objectives.

Índice general

Resumen	VI
Abstract	X
Índice de Tablas	XVII
Índice de Figuras	XX
1 Introducción	xxi
1.1 Objetivos de la tesis	XXIV
1.1.1 Objetivo general	XXIV
1.1.2 Objetivos particulares	XXIV
1.2 Planteamiento del problema	XXV
1.3 Hipótesis	XXV
1.4 Justificación	XXVI
1.5 Alcances y limitaciones	XXVII
1.5.1 Alcances	XXVII
1.5.2 Limitaciones	XXVII
1.6 Estado del arte	XXVII
1.7 Aportaciones del presente trabajo	XXXI
1.7.1 Actividades de Retribución Social	XXXI
1.8 Organización del documento	XXXIII
2 Marco teórico	xxxv
2.1 Optimización multiobjetivo	XXXVI

2.2	Problema de optimización multiobjetivo	XXXVII
2.3	Dominancia de Pareto	XXXVII
2.4	Conjunto óptimo de Pareto	XXXVIII
2.5	Frente de Pareto	XXXVIII
2.6	Algoritmos evolutivos	XXXIX
2.7	Visualización	XL
2.8	Visualizaciones de alta dimensión	XLI
2.8.1	Matriz de gráficos de dispersión	XLI
2.8.2	Gráfico de coordenadas paralelas	XLIII
2.8.3	Mapa de calor	XLIII
2.9	Características ACES	XLIV
2.10	TOPSIS	XLIV
2.11	Problema DTLZ1	XLVIII
2.11.1	Características problema DTLZ1	XLVIII
3	Propuesta de solución	li
4	Experimentación	lvi
4.1	Especificaciones del sistema	LVII
4.2	Instancias	LVII
4.3	Indicador de calidad	LVIII
4.4	Experimento 1: Análisis preliminar de las técnicas de visualización	LIX
4.4.1	Diseño del experimento	LIX
4.4.2	Ventajas y desventajas de las técnicas de visualización analizadas . .	LXVI
4.4.3	Conclusión	LXVI
4.5	Experimento 2: Análisis de precisión de técnicas de visualización para observar convergencia	LXVII
4.5.1	Diseño de experimento	LXVII

4.5.2	Correlaciones entre las propiedades observables en lo gráficos e indicadores para observar la característica ACES precisión	LXIX
4.6	Experimento 3: Preparación de datos para evaluar el desempeño de NSGA-III en términos de convergencia usando mapas de calor	LXXXVII
4.6.1	Diseño de experimento	LXXXVIII
4.6.2	Conclusiones	XCIII
4.7	Experimento 4: Mejora de visualización mediante TOPSIS y vectores de peso para facilitar la toma de decisiones	XCIII
4.7.1	Diseño de experimento	XCIV
4.7.2	Análisis y Resultados	.XCV
4.7.3	Conclusiones	XCIX
5	Conclusiones y trabajos futuros	c
5.1	Conclusiones	C
5.2	Trabajos futuros	CII
	Bibliografía	ciii
	Anexos	cviii
A	Obtención de conjunto de soluciones experimento 1	cix
B	Obtención de conjunto de soluciones experimento 2	cxi
C	Obtención de conjunto de soluciones experimento 3	cxiii

Índice de Tablas

Cuadro 1.1 Comparación de métodos de visualización para optimización multiobjetivo	XXX
Cuadro 2.1 Tabla de información de TOPSIS	XLV
Cuadro 4.1 Especificaciones del sistema	LVII
Cuadro 4.2 Cinco soluciones del problema DTLZ1 de cuatro objetivos	LVIII
Cuadro 4.3 Los valores máximos de hipervolumen correspondientes dos conjuntos de soluciones del problema DTLZ1 con cuatro objetivos.	LX
Cuadro 4.4 Ventajas y desventajas de técnicas de visualización en optimización multiobjetivo.	LXVI
Cuadro 4.5 Resumen del nivel de precisión para cada técnica de visualización en los tres casos: En el caso 1 se proporciona el frente de Pareto real; en el caso 2 se comparan dos algoritmos, y en el caso 3 se evalúa el rendimiento de un algoritmo y no se proporciona un punto de referencia	LXXXVI
Cuadro 4.6 Conjunto de soluciones seleccionadas	LXXXIX
Cuadro 4.7 Ejemplo de vectores del Conjunto 1 (priorizando un objetivo)	XCIV
Cuadro 4.8 Cantidad de vectores en cada conjunto de prioridades	XCv
Cuadro 1.1 Instancia del problema DTLZ1	CIX
Cuadro 1.2 Valores de los parámetros para el algoritmo NSGA-II	CX
Cuadro 1.3 Valores de los parámetros para el algoritmo MOEA/D	CX

Cuadro 2.1 Configuración del algoritmo NSGA-III para generar 30 conjuntos de soluciones con diferentes probabilidades de cruce y mutación.	CXII
Cuadro 2.2 Configuración del algoritmo MOEA/D para generar 30 conjuntos de soluciones con diferentes semillas aleatorias.	CXII
Cuadro 3.1 Configuraciones algoritmo NSGA-III	CXIV
Cuadro 3.2 Resultados del Hipervolumen para los conjuntos de soluciones	CXV

Índice de Figuras

Figura 2.1	Idea general de la optimización multiobjetivo (reproducido de (Giovanni Misitano, 2023))	XXXVI
Figura 2.2	Esquema de un algoritmo evolutivo para un problema de tres variables de decisión de números reales	XL
Figura 2.3	Matriz de gráficos de dispersión 126 soluciones de una aproximación del frente de Pareto al problema DTLZ1 de seis objetivos	XLI
Figura 2.4	Gráfico de coordenadas paralelas de una muestra de diez soluciones al problema DTLZ1 de seis objetivos	XLIII
Figura 2.5	Mapa de calor que representa 126 soluciones de una aproximación del frente de Pareto del problema DTLZ1 de seis objetivos	XLIII
Figura 3.1	MESTVM Metodología que guía un tomador de decisiones en la evaluación y selección de técnicas de visualización para observar una propiedad en el conjunto de soluciones de problemas de optimización multiobjetivo	LII
Figura 3.2	MESTVM Metodología que guía un tomador de decisiones en la evaluación y selección de técnicas de visualización para observar una propiedad en el conjunto de soluciones de problemas de optimización multiobjetivo	LV
Figura 4.1	Matriz de gráficos de dispersión de dos conjuntos soluciones del DTLZ1 con cuatro objetivos: a) Conjunto A, b) Conjunto B.	LXI
Figura 4.2	Mapa de calor de dos conjuntos de soluciones del DTLZ1 con cuatro objetivos: a) Conjunto A, b) Conjunto B.	LXII

Figura 4.3	Gráfico de coordenadas paralelas de los mejores conjuntos de soluciones para DTLZ1 con cuatro objetivos: a) Conjunto A, b) Conjunto B. . .	LXIII
Figura 4.4	Gráfico de radar de dos conjuntos de soluciones del DTLZ1 con cuatro objetivos: a) Conjunto A, b) Conjunto B.	LXIV
Figura 4.5	Matriz de gráficos de dispersión; se analiza la convergencia en el caso donde se conoce el Frente de Pareto Optimo, representado en color negro.	LXXI
Figura 4.6	Matriz de gráficos de dispersión; se analiza la convergencia en el caso donde se comparan dos algoritmos. Se estableció una ROI donde la suma los valores de los objetivos debe estar entre 0.45 y 0.55.	LXXII
Figura 4.7	Matriz de gráficos de dispersión; se analiza la convergencia de un algoritmo sin tener un punto de referencia.	LXXIII
Figura 4.8	Mapa de calor; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando se conoce el frente real.	LXXIV
Figura 4.9	Mapa de calor; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando se comparan dos algoritmos y se establece una ROI.	LXXVI
Figura 4.10	Mapa de calor; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando no se tiene un punto de referencia.	LXXVII
Figura 4.11	Mapa de calor; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando no se tiene un punto de referencia.	LXXVIII
Figura 4.12	Gráfico de coordenadas paralelas; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando se tiene el frente real.	LXXIX
Figura 4.13	Gráfico de coordenadas paralelas; se analiza la convergencia de dos algoritmos a través de una ROI.	LXXX
Figura 4.14	Gráfico de coordenadas paralelas; se analiza la convergencia de dos algoritmos a través la coincidencia visual del patrón visual al representar aproximaciones intermedias.	LXXXI

Figura 4.15 Gráfico de radar; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando se conoce el frente real.	LXXXII
Figura 4.16 Gráfico de radar; se analiza la convergencia de dos algoritmos a través de una ROI.	LXXXIII
Figura 4.17 Gráfico de radar; se analiza la convergencia de dos algoritmos a través de la estabilidad del patrón visual de los gráficos de radar de las aproximaciones intermedias.	LXXXV
Figura 4.18 Mapas de calor de cuatro conjuntos de soluciones con diferentes valores de hipervolumen sin preparación de datos	XCI
Figura 4.19 Mapas de calor de cuatro conjuntos de soluciones con diferentes valores de hipervolumen	XCII
Figura 4.20 Representación de 56 soluciones del problema DTLZ1 de seis objetivos	XCVI
Figura 4.21 Representación de las soluciones del problema DTLZ1 ordenadas por TOPSIS priorizando el objetivo 1	XCVII
Figura 4.22 Representación de las soluciones del problema DTLZ1 ordenadas por TOPSIS priorizando los objetivos 2, 3, y 5	XCVIII
Figura 4.23 Representación de las soluciones del problema DTLZ1 ordenadas por TOPSIS priorizando los objetivos 1, 2, 4, y 5	XCIX

Introducción

En muchos problemas de optimización de la vida real se tiene que optimizar más de tres objetivos simultáneamente (He & Yen, 2016), a este tipo de problemas se les conoce como problemas de optimización de muchos objetivos (MaOPs por sus siglas en inglés). Una de las dificultades inherentes de los MaOPs es la visualización del conjunto de soluciones, (Walker et al., 2013). Walker et al. argumentaron que en problemas en donde solo dos o tres objetivos están presentes, del gráfico de dispersión se puede obtener una visualización intuitiva de las soluciones en el espacio objetivo. Sin embargo, incluso entender la relación entre tres variables ya puede ser complicado cuando se representan en tres dimensiones y esta complejidad aumenta con cuatro o más dimensiones.

Los investigadores en sus trabajos han abordado la visualización de las soluciones de MaOPs, usando técnicas como los gráficos de coordenadas paralelas (GCP) (M. Li et al., 2017), mapa

de calor (MC) (Pryke et al., 2007), el gráfico de radar (GR) (Singh & Tewari, 2022), y la matriz de gráficos de dispersión (MGD) (Carr et al., 1987), para representar toda la información objetivo. Sin embargo, cada técnica tiene limitaciones específicas, las cuales son discutidas en el estado del arte. La interpretación de los GCP es a menudo difícil; debido a la superposición de las soluciones (Metsalu & Vilo, 2015), los MC son complicados de interpretar por el orden arbitrario de las soluciones (Pryke et al., 2007), la MGD puede resultar en información desordenada (Gao et al., 2019), y por último, los GR aunque útiles para identificar variables de alto o bajo puntaje, se vuelven difíciles de interpretar con la creación de cientos de polígonos (Zhen et al., 2020).

Varios investigadores han abordado las limitaciones antes mencionadas, por ejemplo Lucken et al. utilizaron una técnica de agrupamiento que se basó en la similitud de forma de soluciones, el resultado del agrupamiento se visualizó en un GCP en donde cada grupo de soluciones se pintó de un color diferente para hacer una diferenciación, Pryke et al. utilizaron un método de agrupación jerárquico para mejorar la interpretabilidad de los MC, por su lado, Walker et al. utilizaron un algoritmo de seriación espectral para colocar soluciones y objetivos similares en un MC, de Freitas et al. a través de los nodos hoja de un árbol de agregación ordenaron los objetivos en un GCP reduciendo así los cruces de líneas, haciendo más legible el gráfico.

Por su lado Kubota et al. presentaron una herramienta en la que se aplicó un mecanismo de vinculación para resaltar partes específicas en el espacio objetivo cuando un usuario seleccionaba las partes correspondientes en el espacio de búsqueda y viceversa; las técnicas de visualización empleadas fueron el gráfico de dispersión 2D y el GCP. Wang et al. redujeron la complejidad visual de la MGD usando la teoría de conjuntos aproximados, el GR fue mejorado por Duan et al. al agregar ejes auxiliares equidistantes entre los ejes principales y puntos a igual distancia del centro, logrando que el área del polígono formado fuera independiente del orden de los ejes. El gráfico resultante “Gráfico de Origami” también permitió la ponderación

de atributos y comparación por pares.

En este trabajo se propone una Metodología para la Evaluación y Selección de Técnicas de Visualización Multiobjetivo (MESTVM), con lo que se trata de resolver el problema de que un conjunto de soluciones de problemas de optimización de muchos objetivos, al ser representado en una técnica de visualización, se pueda observar una propiedad deseada por un Tomador de Decisiones (TD). La metodología recibe como entradas, un conjunto de soluciones de un problema de optimización de cuatro o más objetivos, una propiedad específica a observar, técnicas de visualización a emplear, y un conjunto de características que definen a una buena visualización, conocidas en el estado del arte como ACES (precisión, claridad, empoderamiento y concisión) (Gupta & Bagchi, 2024). De acuerdo con Gupta y Bagchi las características ACES son compartidas por una buena visualización y se toman como marco de evaluación de que la propiedad sea observada.

La correlación de los aspectos visuales presentes en los gráficos y las características ACES habilita al TD en la selección de la técnica de visualización más adecuada según la propiedad específica deseada a observar en el conjunto de soluciones. Si la propiedad no es observable en ninguno de los gráficos, se pueden tomar dos acciones: mejorar la representación realizando un tratamiento a los datos (escalamiento, normalización, agrupamiento, ordenamiento, etc.); en este trabajo se utilizó TOPSIS, un método propuesto en (Hwang & Yoon, 1981) que ordena las soluciones por su distancia a una solución ideal, o explorar otras técnicas de visualización si los tratamientos empleados no lograron hacer observable la propiedad.

1.1. OBJETIVOS DE LA TESIS

1.1.1. Objetivo general

Mejorar la representación visual de soluciones de problemas de optimización de más de tres objetivos en alguna de las técnicas de visualización como apoyo a los tomadores de decisiones.

1.1.2. Objetivos particulares

- Revisar y comparar el estado del arte de los trabajos de visualización científica aplicada a la calidad de las soluciones encontradas por algoritmos metaheurísticos, que resuelven problemas de hasta seis objetivos. Producto: tabla comparativa de los trabajos encontrados.
- Seleccionar los trabajos del estado del arte que aporten información relevante para la investigación. Producto: Tabla comparativa de ventajas y desventajas de las técnicas de visualización identificadas.
- Evaluar bajo algún criterio varias técnicas de visualización y seleccionar la más adecuada para observar una propiedad específica de las aproximaciones de problemas de alta dimensionalidad
- Aplicar un método de organización a los resultados generados por los algoritmos metaheurísticos para ser presentados mediante la(s) técnica(s) de visualización científica. Producto: Método de organización de datos.
- Desarrollar un software que integre la(s) técnica(s) de visualización(es) seleccionada(s).

Producto: software de visualización de las soluciones encontradas por los algoritmos metaheurísticos.

- Validar la(s) técnica(s) de visualización(es) con un conjunto de instancias de un problema de optimización de hasta seis objetivos. Producto: Experimentación.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dado el conjunto de soluciones $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_i\}$ de un problema de optimización con m objetivos, con $m \geq 4$. Donde cada solución s es un vector de valores objetivos $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_i\}$ con $i = 1$ hasta m , un conjunto de técnicas de visualización disponibles $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n\}$, y una propiedad P que se desea observar. Cada $g \in G$, se usa para obtener representaciones visuales de S .

Se busca una estrategia de tratamiento de datos T , y una técnica $g^* \in G$, tal que al ser aplicado T sobre los elementos $s \in S$, la representación visual de S en g^* , permita observar efectivamente la propiedad P .

1.3. HIPÓTESIS

H0: La reorganización de resultados considerando un sistema de preferencias específico no hará más clara su visualización para la toma de decisiones en problemas de optimización de alta dimensionalidad.

H1: La reorganización de resultados considerando un sistema de preferencias específico hará más clara su visualización para la toma de decisiones en problemas de optimización de alta dimensionalidad.

1.4. JUSTIFICACIÓN

Visualizar efectivamente datos de alta dimensionalidad es un desafío importante en distintos campos donde se necesita analizar y comprender conjuntos de datos con más de tres características. En el contexto específico de la optimización multiobjetivo, las técnicas de visualización como los MC, GCP, MGD y GR presentan limitaciones importantes que llevan a un detrimento de la interpretabilidad y uso práctico. Las limitaciones incluyen, entre otras:

- Orden arbitrario de soluciones, lo que no permite observar patrones
- Superposición de los elementos visuales generando complejidad visual
- Gran número de gráficos que complican la interpretabilidad.

Si bien existen en el estado del arte trabajos que han abordado estas limitaciones mediante diversas estrategias, aún se pueden realizar trabajos que mejoren la interpretabilidad de las técnicas de visualización. La importancia de aportar soluciones a esta problemática está justificada por la aplicación práctica de visualizaciones claras que faciliten la toma de decisiones informadas. TOPSIS ofrece una manera de ordenar las soluciones en base a preferencias, lo cual mejora la interpretabilidad del mapa de calor y el gráfico de coordenadas paralelas. La metodología propuesta en este trabajo permite evaluar las técnicas de visualización en su capacidad de observar propiedades en los conjuntos de soluciones a través de las características

ACES como marco de evaluación. Los beneficios esperados son una mejor comprensión de las relaciones entre objetivos, facilitar la identificación de patrones y realizar una toma de decisiones informada.

1.5. ALCANCES Y LIMITACIONES

1.5.1. Alcances

El alcance de este estudio abarca técnicas de visualización que permiten representar toda la información objetivo del conjunto de soluciones de problemas de optimización de más de tres objetivos.

1.5.2. Limitaciones

El alcance se limita a la representación visual de soluciones a problemas de optimización de hasta seis objetivos.

1.6. ESTADO DEL ARTE

En este apartado se revisan los trabajos de la literatura que tratan el desafío de representar y analizar soluciones en problemas de optimización multiobjetivo, enfocados especialmente a escenarios de alta dimensionalidad. Las investigaciones que aquí se presentan proponen

distintas estrategias para mejorar el entendimiento visual de los gráficos empleados.

Pryke et al., 2007 utilizaron un método de agrupación jerárquico para ordenar las soluciones en función de la similitud de sus valores objetivos. El objetivo principal de este ordenamiento fue mejorar la interpretabilidad del MC al agrupar soluciones con características similares, facilitando así la identificación de patrones y relaciones en los datos.

Walker et al., 2013 utilizaron un algoritmo de seriación espectral para reordenar las soluciones y los objetivos en el MC. Con la técnica empleada, los elementos similares se colocan cerca unos de otros, permitiendo identificar las compensaciones entre los objetivos y observar soluciones similares.

Kubota et al., 2014 presentaron una herramienta de visualización de optimización multiobjetivo EVOLVE. Esta herramienta se centra en la relación de las variables explicativas y las funciones objetivo. Los autores aplicaron un mecanismo de vinculación para resaltar partes específicas en el espacio de funciones objetivo cuando un usuario selecciona las partes correspondientes en el espacio de variables explicativas y viceversa. Los gráficos empleados fueron el gráfico de dispersión 2D para representar los valores de las variables explicativas y el GCP para el espacio de funciones objetivo.

de Freitas et al., 2015 propusieron una técnica llamada árboles de agregación que consiste en la agregación iterativa de objetivos que se presentan en una estructura de árbol donde se muestra qué objetivos son más armónicos y cuáles entran en conflicto. El árbol permite al tomador de decisiones qué objetivos agregar de tal manera que se pueda reducir la dimensionalidad del problema. Una vez que se tiene el árbol, este se puede utilizar para ordenar los objetivos en un GCP; el orden lo dan los nodos hoja en el árbol. Este orden reduce el cruce de líneas, haciendo más legible el gráfico.

Wang et al., 2016 mejoraron la MGD mediante la reducción de dimensionalidad usando la teoría de conjuntos aproximados para reducir la complejidad visual. Los autores agregaron una interacción punto-región mediante clics del mouse, y añadieron una dimensión virtual Z para visualizar tendencias en la toma de decisiones.

Lucken et al., 2017 utilizaron una técnica de agrupamiento que se basaba en la similitud de forma de las soluciones para identificar grupos de soluciones de un problema de optimización multiobjetivo. La técnica consiste en transformar los vectores solución originales en vectores que representan el orden de los valores objetivos; luego, un algoritmo de agrupamiento se aplica a los vectores nuevos. Los resultados se visualizaron en un GCP, en donde cada grupo de soluciones se pintó de un color diferente para hacer una distinción.

Duan et al., 2023 a partir del GR crearon un gráfico que llamaron «Gráfico de Origami» el cual agrega ejes equidistantes entre los ejes principales y puntos a igual distancia del centro del GR, haciendo que el área del polígono formado sea independiente del orden de los ejes. El gráfico, además, permite la ponderación de atributos y comparación por pares.

La tabla 1.1 muestra una comparación de los trabajos de visualización en el campo de optimización multiobjetivo destacando distintos enfoques y contribuciones. Los MC fueron utilizados por Pryke et al. aplicando agrupamiento jerárquico para agrupar soluciones similares, mientras que Walker et al. implementaron un algoritmo de seriación espectral para agrupar soluciones y objetivos similares, lo cual permitió observar las compensaciones entre los objetivos. En el caso de los GCP, Kubota et al. crearon una herramienta con enlazamiento interactivo entre variables en el espacio de búsqueda con las variables en el espacio objetivo, diferenciándose por la interactividad; de Freitas et al. utilizaron árboles de agregación para modificar el orden de los objetivos en un para reducir la complejidad visual, Von Lücken et al. incorporaron el agrupamiento por forma para transformar y agrupar soluciones. Por otro

Tabla 1.1. Comparación de métodos de visualización para optimización multiobjetivo

Autores y Año	Tipo	Método	Contribución
Pryke et al. (2007)	MC	Agrupamiento jerárquico	Visualización de patrones mediante ordenamiento por similitud entre soluciones
Walker et al. (2013)	MC	Seriación espectral	Identificación de compensaciones a través del reordenamiento de soluciones y objetivos
Kubota et al. (2014)	GCP	Enlazamiento de las variables en el espacio de búsqueda y objetivo	Desarrollo de herramienta EVOLVE
de Freitas et al. (2015)	GCP	Árboles de agregación	Reducción dimensional basada en árboles de agregación para mejorar legibilidad
Wang et al. (2016)	MGD	Teoría de conjuntos aproximados, incorporación de eje virtual Z para analizar tendencias	Reducción de complejidad visual
Von Lüken et al. (2017)	GCP	Agrupamiento por forma	Transformación y agrupamiento de soluciones basado en el orden de valores
Duan et al. (2023)	GR	Modificación de GR con la incorporación de ejes auxiliares	Nueva visualización basado en el GR con área independiente del orden de ejes
Este trabajo	MC	Orden de las soluciones aplicando método TOPSIS	Ordenamiento de soluciones por preferencias para problemas optimización de alta dimensionalidad
Nota: MC = Mapa de Calor, GCP = Gráfico de Coordenadas Paralelas, MGD = Matriz de Gráficos de Dispersión, GR = Gráfico de Radar			

lado, Wang et al. realizaron su trabajo con MGD aplicando teoría de conjuntos aproximados para reducir la complejidad visual. Duan et al. innovaron con el Gráfico de Origami, una modificación del GR que hace independiente el área del orden de los ejes. En este trabajo se retoma el MC incorporando TOPSIS para ordenar las soluciones en base a preferencias, facilitando la observación de soluciones que cumplen con dichas preferencias.

1.7. APORTACIONES DEL PRESENTE TRABAJO

- Desarrollo de la metodología MESTVM para evaluar técnicas de visualización utilizadas en optimización multiobjetivo.
- Integración de método TOPSIS como estrategia para mejorar la representación de las soluciones.
- Desarrollo de una estrategia para la preparación de datos para mejorar la interpretabilidad en el mapa de calor.
- Marco de evaluación que correlaciona aspectos visuales y las características ACES.
- Tabla comparativa de ventajas y desventajas de cuatro técnicas de visualización.
- Una publicación derivada de este trabajo: Capítulo de libro titulado *Analysis of Accuracy on Data Visualization Techniques for Multi-objective Algorithm Performance Based on Convergence and Diversity Towards the Pareto Frontier* (Paz-Robles et al., 2024)

1.7.1. Actividades de Retribución Social

Profesor de Apoyo en Taller de Programación

- **Fecha:** Septiembre - Diciembre 2023
- **Lugar:** Instituto Tecnológico De Ciudad Madero
- **Descripción:** Participación como profesor de apoyo en el taller de programación para fortalecer las habilidades lógicas y analíticas de los alumnos de licenciatura de ISC y carreras afines.

- **Impacto social:** Motivar el desarrollo de habilidades lógicas y analíticas en los estudiantes. Se fortaleció las competencias técnicas y la capacidad de resolución de problemas, fomentando un ambiente de aprendizaje colaborativo.

Taller de Graficación en Python

- **Fecha:** 25-26 Octubre 2023
- **Lugar:** Instituto Tecnológico De Ciudad Madero
- **Evento:** SEMINARIO DE COMPUTO INTELIGENTE E INGENIERÍA 2023
- **Descripción:** Impartición de taller sobre graficación en Python, abordando distintos tipos de gráficos y sus propósitos.
- **Impacto social:** Reforzar el conocimiento sobre la importancia de la visualización de datos, fortaleciendo competencias técnicas en la presentación visual de información.

Taller “Aplicaciones de la Inteligencia Artificial”

- **Fecha:** 19 Febrero 2024
- **Lugar:** Escuela Primaria Francisco Nicodemo, Ciudad Madero
- **Evento:** Día internacional de la mujer y la niña en la ciencia (COTACYT)
- **Descripción:** Plática sobre inteligencia artificial y sus aplicaciones, incluyendo dinámicas y juegos relacionados.
- **Impacto social:** Fomentar e impulsar el interés por la investigación científica en las niñas y jóvenes estudiantes.

Taller/MasterClass “Fundamentos de aprendizaje automático con Python”

- **Fecha:** 17-18 Octubre 2024
- **Lugar:** Dirección General de Universidades Tecnológicas y Politécnicas
- **Evento:** 4to. Foro Nacional de Tecnologías de la Información y Sistemas Computacionales
- **Descripción:** Introducción al aprendizaje automático, su relación con la IA y la implementación en Python.
- **Impacto social:** Fomentar el interés sobre tecnologías emergentes y desarrollar habilidades técnicas esenciales en el área académica a través de una plataforma accesible para estudiantes y profesores universitarios.

Nota: Todas las actividades fueron supervisadas por la Dra. Claudia Guadalupe Gómez Santillán.

1.8. ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

Este trabajo está organizado en siete capítulos. En el capítulo 1 se plantea, además de la introducción al tema, el problema de investigación, los objetivos, la hipótesis y la justificación del estudio y el estado del arte. En el capítulo 2 se desarrollan los conceptos fundamentales, como la optimización multiobjetivo, visualización científica, TOPSIS y las características ACES. En el capítulo 3 se describe el enfoque empleado para evaluar y mejorar las visualizaciones mediante TOPSIS. La experimentación se presenta en el capítulo 4, mientras que en el capítulo

5 se valida la hipótesis planteada. Finalmente, el capítulo 6 se resumen los hallazgos clave y se proponen líneas de investigación futuras.

Marco teórico

En este capítulo se presentan las bases teóricas y conceptuales importantes para el desarrollo de la presente investigación. Se introduce la optimización multiobjetivo, y se habla sobre los algoritmos evolutivos como estrategias empleadas para resolver esta clase de problemas. Se ven los conceptos relacionados al conjunto de soluciones obtenidas, incluyendo la optimalidad de Pareto, dominancia de Pareto, conjunto óptimo de Pareto y frente de Pareto. Se habla sobre lo que es la visualización, y más específicamente sobre las visualizaciones de alta dimensión, describiendo cuatro de las técnicas utilizadas. Se presenta el conjunto de características ACES que comparte una buena visualización, y se describe el método TOPSIS. Finalmente se detallan las instancias y características del problema de optimización DTLZ1 del cual se realizó la representación del conjunto de soluciones obtenidas.

2.1. OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

En la obra (Coello et al., 2007) se dice que los problemas de optimización multiobjetivo son aquellos en los que k funciones $f(x)$ deben optimizarse simultáneamente, en donde k es mayor a uno. Un conjunto de variables de decisión X son evaluadas por las k funciones objetivo, la Figura 2.1 da una idea de lo antes expuesto. En aplicaciones del mundo real es común encontrar este tipo de problemas. Coello et al. apuntaron en su trabajo que dar soluciones a este tipo de problemas es crucial por su gran importancia en varias áreas de la humanidad. Para tales problemas, no hay una sola solución, sino que existe un conjunto de soluciones potenciales. Los algoritmos evolutivos son estrategias que generan valores para las variables de decisión de tal manera que cuando son evaluados por las funciones objetivo, los componentes de un vector objetivo no pueden ser mejorados a la vez. Al conjunto de las variables de decisión se le conoce como el conjunto óptimo de Pareto (coP), y al correspondiente conjunto de vectores de valores objetivo se le conoce como el frente de Pareto (fP). Los conceptos de esta sección se encuentran en la obra de Coello et al. por lo que para un mejor estudio debe consultarse (Coello et al., 2007).

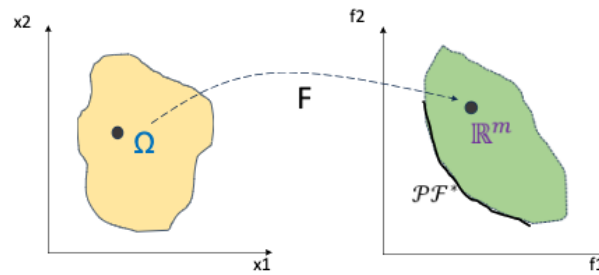


Figura 2.1: Idea general de la optimización multiobjetivo (reproducido de (Giovanni Misitano, 2023))

2.2. PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN MULTIOBJE- TIVO

Coello et al. definen un Problema de Optimización Multiobjetivo (POM) como la maximización o minimización de un vector de funciones de la forma: $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ sujeto a las siguientes restricciones: $g_i(x) \leq 0$, para $i = 1, \dots, m$ y $h_j(x) = 0$, para $j = 1, \dots, p$ donde x pertenece a un conjunto Ω . La solución de un POM minimiza o maximiza los componentes del vector $F(x)$, donde x representa un vector de n variables de decisión, es decir, $x = (x_1, \dots, x_n)$, que pertenecen a algún universo Ω . Las restricciones $g_i(x) \leq 0$ y $h_j(x) = 0$ representan limitaciones impuestas al problema. El conjunto Ω contiene todos los posibles valores de x que satisfacen las evaluaciones de $F(x)$. La manera más sencilla de ver un problema de este tipo es considerando dos objetivos, por ejemplo, supóngase que se desea fabricar un producto con la mejor calidad al menor precio; las variables de decisión serían el costo de los materiales, el tiempo de fabricación, el costo de la mano de obra, etc.; las restricciones podrían ser: no usar materiales con costos menores a un precio establecido, además de que el personal que realiza la fabricación tenga una capacitación especializada, etc.

2.3. DOMINANCIA DE PARETO

Un vector $u = (u_1, \dots, u_k)$ se dice que domina a otro vector $v = (v_1, \dots, v_k)$ (denotado por $u \preceq v$) si y solo si $\mathbf{u}$ es parcialmente menor que $\mathbf{v}$, es decir, para todo i entre 1 y k , $u_i \leq v_i$ y además existe al menos un valor para i entre 1 y k tal que $u_i < v_i$ (Coello et al., 2007). Esto se interpreta como que un vector $\mathbf{u}$ es mejor que un vector $\mathbf{v}$ en al menos un componente y no es peor que los demás. Continuando con el ejemplo de fabricación de un producto, supongamos

que se tienen dos opciones A y B en donde la opción A consta de una calidad = 8 y un costo de \$100 y la opción B tiene una calidad = 7 y un costo de \$100. Entonces la solución A es preferida sobre la opción B ya que es mejor en al menos un componente, en este caso en la calidad, y no es peor en el otro; en otras palabras, A domina a B.

2.4. CONJUNTO ÓPTIMO DE PARETO

Teniendo un POM, $F(x)$, el coP, $\mathcal{P}^*$, es definido como:

$$\mathcal{P}^* := \{x \in \Omega \mid \neg \exists x' \in \Omega, \quad F(x') \prec F(x)\}$$

Las soluciones Pareto óptimas son aquellas dentro del espacio de búsqueda, que se corresponden con los vectores objetivos que no pueden mejorarse simultáneamente (Coello et al., 2007). Continuando con el ejemplo de la fabricación de un producto sería el conjunto de valores para las variables de decisión que dan como resultado soluciones en el espacio objetivo de tal manera que ninguna es mejor que las otras.

2.5. FRENTE DE PARETO

De acuerdo con Coello et al. se le llama frente de Pareto al conjunto de soluciones óptimas Pareto en el espacio objetivo que son no dominadas (esto es que las componentes de los vectores de objetivos no son mejoradas simultáneamente). El frente de Pareto se define como:

$$\mathcal{PF}^* := \{\mathbf{u} = F(x) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{P}^*\}$$

2.6. ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Obtener el coP para algunos problemas de optimización debido a la naturaleza de la aplicación puede tener un costo computacional alto e incluso infactible (Zitzler, 2012), por ello se han ideado estrategias tales como los algoritmos evolutivos para obtener una aproximación del coP.

Un algoritmo evolutivo esquematizado en la Figura 2.2 se describió por Zitzler de la siguiente manera: es un proceso iterativo en donde inicialmente se crean soluciones de forma aleatoria con las cuales se forma un conjunto llamado población inicial, a partir de aquí se entra a un ciclo con los pasos de evaluación de las soluciones, selección, recombinación y/o mutación, este ciclo se repite cierto número de veces.

Cada ciclo terminado es conocido como *generación*, y a menudo se predefine un número máximo de generaciones como un criterio de terminación del ciclo. Sin embargo, algún otro criterio se puede establecer, por ejemplo, si se cae en un estancamiento en la población. Al término del ciclo, las mejores soluciones en la población final representan la salida del algoritmo evolutivo.

Tres algoritmos que implementa la estrategia evolutiva son: NSGA-II (Deb et al., 2002), NSGA-III (H. Li et al., 2019), y MOEA/D (Qingfu Zhang & Hui Li, 2007)

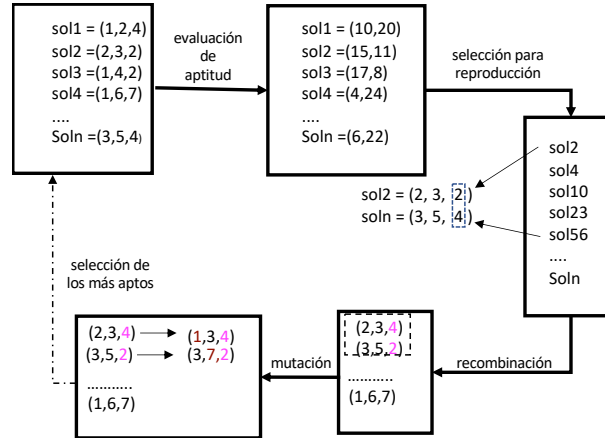


Figura 2.2: Esquema de un algoritmo evolutivo para un problema de tres variables de decisión de números reales

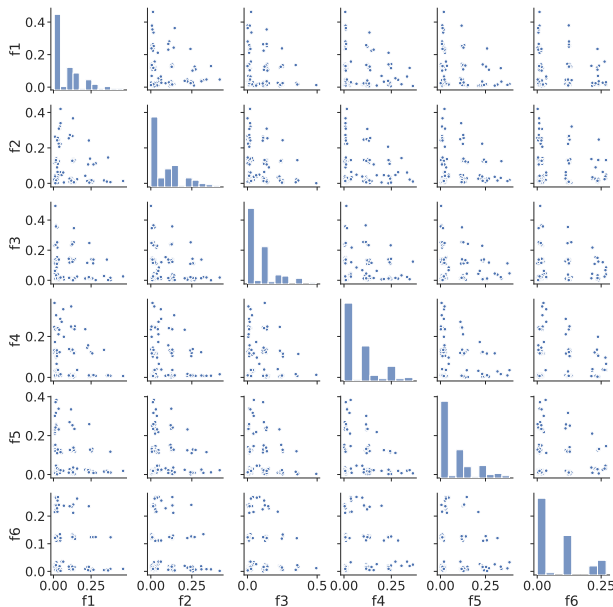
2.7. VISUALIZACIÓN

De acuerdo con McCormick et al. la visualización es un método computacional que transforma datos simbólicos en representaciones geométricas, lo que permite a los investigadores observar sus simulaciones y cálculos. En la entrevista de (Jessica Hullman, 2019) la persona entrevistada hizo la siguiente definición. “La visualización de información es una poderosa estrategia interactiva para la exploración de datos”. Hughes, quien fue entrevistado, afirmó que lo importante de la visualización de la información es la comprensión y no las imágenes. La visualización científica son técnicas para transformar la información en imágenes (Revista Digital Universitaria, 2005). La visualización científica se basa en el uso de imágenes. En palabras simples, la visualización científica consiste en la transformación de datos o información en imágenes para explicar y comunicar ideas.

2.8. VISUALIZACIONES DE ALTA DIMENSIÓN

En (Grinstein & Trutschl, 2001) se lee que la visualización es una representación visual de datos, Grinstein y Trutschl mencionan en su documento que gran cantidad de datos o parámetros pueden visualizarse en visualizaciones de alta dimensión. Los datos son transformados a una forma numérica y luego llevados a una representación gráfica, por ejemplo, la traducción a visualizaciones de datos de alta dimensión desde datos en formato tabla a una representación gráfica usando técnicas como matrices de gráficos de dispersión, diagramas de coordenadas paralelas y mapas de calor, entre otros. Las técnicas antes mencionadas fueron incluidas en la taxonomía encontrada en (Filipič & Tušar, 2018) y así como también el gráfico de radar como técnicas de visualización para la representación de las aproximaciones del frente de Pareto.

2.8.1. Matriz de gráficos de dispersión



Un matriz de gráficos de dispersión como se describe en (Carr et al., 1987) es una herramienta que representa datos de p -variables y que consiste de un arreglo $p(p-1)$ gráficos de dispersión. La matriz de gráficos de dispersión ha probado ser de utilidad en la optimización multiobjetivo. De acuerdo con Filipič y Tušar una matriz de gráficos de dispersión hace una proyección de puntos desde un conjunto de vectores de objetivos sobre un espacio elegido de menor dimensión a través de la elimina-

Figura 2.3: Matriz de gráficos de dispersión 126 soluciones de una aproximación del frente de Pareto al problema DTLZ1 de seis objetivos

ción de las otras dimensiones. Lo que resulta en una visualización de todas las posibles combinaciones de los espacios de menor dimensión, habilitando las comparaciones de pares de soluciones para cada par de objetivos. La Figura 2.3 es una matriz de gráficos de dispersión que representa 126 soluciones de una aproximación del frente de Pareto del problema DTLZ1 de seis objetivos; cada gráfico es una solución que compara un par de objetivos. En la implementación de este gráfico, la diagonal son histogramas que representan la distribución de valores para cada objetivo.

2.8.2. Gráfico de coordenadas paralelas

En (Inselberg & Dimsdale, s.f.) se describe el gráfico de coordenadas paralelas como un gráfico de coordenadas x y y que desde el eje y , N número de líneas son distribuidas equitativamente y perpendiculares al eje x . La Figura 2.4 muestra un gráfico de coordenadas paralelas donde cada solución es una polilínea formada por líneas que van desde los puntos en cada una de las líneas perpendiculares al eje x cada punto es el valor en el eje y que representa el valor de cada objetivo para una solución particular.

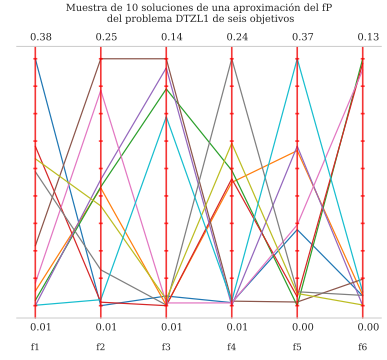


Figura 2.4: Gráfico de coordenadas paralelas de una muestra de diez soluciones al problema DTLZ1 de seis objetivos

2.8.3. Mapa de calor

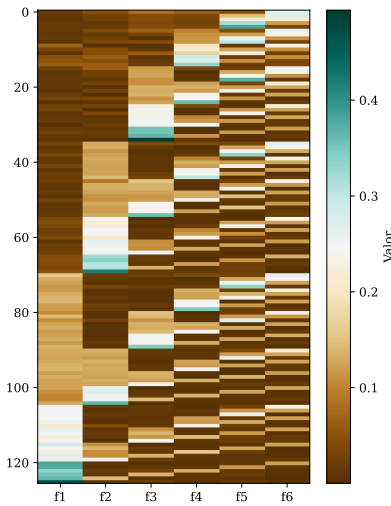


Figura 2.5: Mapa de calor que representa 126 soluciones de una aproximación del frente de Pareto del problema DTLZ1 de seis objetivos

Un mapa de calor es descrito en (Metsalu & Vilo, 2015) como un arreglo de celdas que representan valores usando un gradiente de colores. En (Pryke et al., 2007) el mapa de calor fue utilizado para mostrar soluciones de problemas multiobjetivo, en donde por cada solución hay una fila y para un parámetro u objetivo hay una columna. La Figura 2.5 es un mapa de calor que representa 126 soluciones de una aproximación del frente de Pareto del problema DTLZ1 de seis objetivos. Cada fila representa una solución y cada columna

representa un objetivo; los valores son representados por un color. En este caso, el color café oscuro representa el valor más bajo y un color verde oscuro, un valor más alto.

2.9. CARACTERÍSTICAS ACES

Para que un gráfico sea considerado como una buena visualización, debe compartir cuatro características fundamentales; estas características son conocidas como ACES (Accurate, Clear, Empowering, and Succinct)(Gupta & Bagchi, 2024). Según Gupta y Bagchi, una visualización debe ser precisa; esto es, representar fielmente las tendencias de los datos. Además, debe ser clara y fácil de entender, debe empoderar a quien utiliza el gráfico a tomar decisiones, y debe transmitir su mensaje de manera rápida y concisa.

2.10. TOPSIS

TOPSIS fue originalmente propuesto por (Hwang & Yoon, 1981) y Tzeng y Huang, 2011 lo describe de la siguiente manera: TOPSIS por sus siglas en inglés significa Técnica para el Orden de Preferencia por Similitud con la Solución Ideal. TOPSIS elige una solución que tiene la distancia euclidiana más corta a una solución ideal y la distancia euclidiana más lejana a una solución ideal negativa.

Los procedimientos descritos en (Tzeng & Huang, 2011) de TOPSIS son:

Teniendo un conjunto de alternativas $A = \{A_k | k = 1, \dots, n\}$, y un conjunto de criterios $C = \{C_j | j = 1, \dots, m\}$, donde $X = \{x_{kj} | k = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ denota el conjunto de valores de desempeño, y $W = \{w_j | j = 1, \dots, m\}$ es el conjunto de pesos, la tabla de información $I = (A, C, X, W)$ es representada por la Tabla 2.1.

donde:

- A_k : Alternativa k
- n : Número total de alternativas
- C_j : Criterio j
- m : Número total de criterios
- x_{kj} : Valor de desempeño de la alternativa k en el criterio j
- w_j : Peso asignado al criterio j

Tabla 2.1. Tabla de información de TOPSIS

Alternativas	Criterio 1	Criterio 2	...	Criterio j
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nm}
W	w_1	w_2	...	w_m

El primer paso de TOPSIS es normalizar los datos de una de las siguientes formas:

Forma 1

$$r_{kj}(x) = \frac{x_{kj}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_{kj}^2}}, \quad k = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.1)$$

Donde:

$r_{kj}(x)$ Valor normalizado del desempeño

Forma 2

Para un criterio de beneficio (más grande es mejor):

$$r_{kj}(x) = \frac{x_{kj} - x_j^-}{x_j^* - x_j^-} \quad (2.2)$$

donde $x_j^* = \max_j x_{kj}$ y $x_j^- = \min_j x_{kj}$ estableciendo x_j^* como el nivel aspirado/deseado y x_j^- como el peor nivel.

Para un criterio de costo (más pequeño es mejor):

$$r_{kj}(x) = \frac{x_j^- - x_{kj}}{x_j^- - x_j^*} \quad (2.3)$$

Después se calcula la ponderación de los valores normalizados:

$$v_{kj}(x) = w_j r_{kj}(x), \quad k = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

Donde:

$v_{kj}(x)$ Valor ponderado normalizado para la alternativa k en el criterio j

Ahora se derivan el punto ideal positivo (PIP) y el punto ideal negativo (PIN):

$$\begin{aligned} PIP = A^+ &= \{v_1^+(x), v_2^+(x), \dots, v_m^+(x)\} \\ &= \{(\max_k v_{kj}(x) | j \in J_1), (\min_k v_{kj}(x) | j \in J_2) | k = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} PIN = A^- &= \{v_1^-(x), v_2^-(x), \dots, v_m^-(x)\} \\ &= \{(\min_k v_{kj}(x) | j \in J_1), (\max_k v_{kj}(x) | j \in J_2) | k = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde J_1 y J_2 son los atributos de beneficio y costo, respectivamente.

El siguiente paso es calcular la separación entre el PIP y el PIN entre alternativas. Los valores de separación se pueden medir utilizando la distancia euclidiana:

$$D_k^* = \sqrt{\sum_{j=1}^m [v_{kj}(x) - v_j^+(x)]^2}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

$$D_k^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m [v_{kj}(x) - v_j^-(x)]^2}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

Donde:

D_k^* Distancia euclidiana de la alternativa k al PIP

D_k^- Distancia euclidiana de la alternativa k al PIN

Las similitudes con el PIP se calculan de la siguiente manera:

$$C_k^* = \frac{D_k^-}{D_k^* + D_k^-}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

donde $C_k^* \in [0, 1]$, $\forall k = 1, \dots, n$.

Donde:

C_k^* Coeficiente de proximidad relativa de la alternativa k a la solución ideal

Finalmente se ordenan los valores de (C_k^*) en orden descendente para elegir las mejores alternativas.

2.11. PROBLEMA DTLZ1

El conjunto de datos con el que se trabajó en la investigación son conjuntos de soluciones del problema DTLZ1 propuesto en (Deb et al., s.f.)

2.11.1. Características problema DTLZ1

DTLZ1 forma parte de un conjunto de problemas de prueba desarrollados en (Farina et al., 2004) y se define como:

- M : Número de objetivos.

- n : Número de variables.
- X : Vector de variables de decisión.
- $f_i(X)$: i -ésima función objetivo.
- $g(X_M)$: Función.
- k : Número de variables para $g(X_M)$.

La definición formal del problema **DTLZ1** proporcionada por Farina et al. es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f_1(X) = \frac{1}{2}x_1x_2 \dots x_{M-1}(1 + g(X_M)), \\
 &\text{Minimizar } f_2(X) = \frac{1}{2}x_1x_2 \dots (1 - x_{M-1})(1 + g(X_M)), \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{Minimizar } f_{M-1}(X) = \frac{1}{2}x_1(1 - x_2)(1 + g(X_M)), \\
 &\text{Minimizar } f_M(X) = \frac{1}{2}(1 - x_1)(1 + g(X_M)),
 \end{aligned}$$

sujeto a $0 \leq x_i \leq 1$, para $i = 1, 2, \dots, n$,

Donde:

$$g(X_M) = 100 \left[k + \sum_{x \in X_M} ((x - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x - 0.5))) \right].$$

Para $x_i^* = 0.5$ ($x_i^* \in X_M$), se conforma la solución Pareto-óptima y los valores de las funciones objetivo se encuentran en el hiperplano lineal definido por:

$$\sum_{m=1}^M f_m^* = 0.5$$

Farina et al. sugirieron que $k = 5$, y el número de variables se calcula como:

$$n = M + k - 1$$

Farina et al. declararon que el problema **DTLZ1** posee las siguientes propiedades:

1. La dificultad para converger al hiperplano.
2. El espacio de búsqueda contiene $(11^k - 1)$ frentes Pareto-óptimos locales.
3. La forma de su frente Pareto es lineal.

Propuesta de solución

Esta sección presenta la propuesta de solución, la cual es una metodología que tiene como objetivo guiar a un Tomador de Decisiones (TD) en la evaluación y selección de técnicas de visualización para observar una propiedad específica en un conjunto de soluciones de más de tres objetivos.

La Metodología para la Evaluación y Selección de Técnicas de Visualización Multiobjetivo (MESTVM) representada en la Figura 3.1 tiene tres componentes, estos son: (1) Entradas, (2) Proceso, y (3) Salidas; descrita a continuación.

El TD proporciona como entradas los cuatro elementos listados abajo:

1. Un conjunto de soluciones (S) de más de tres objetivos

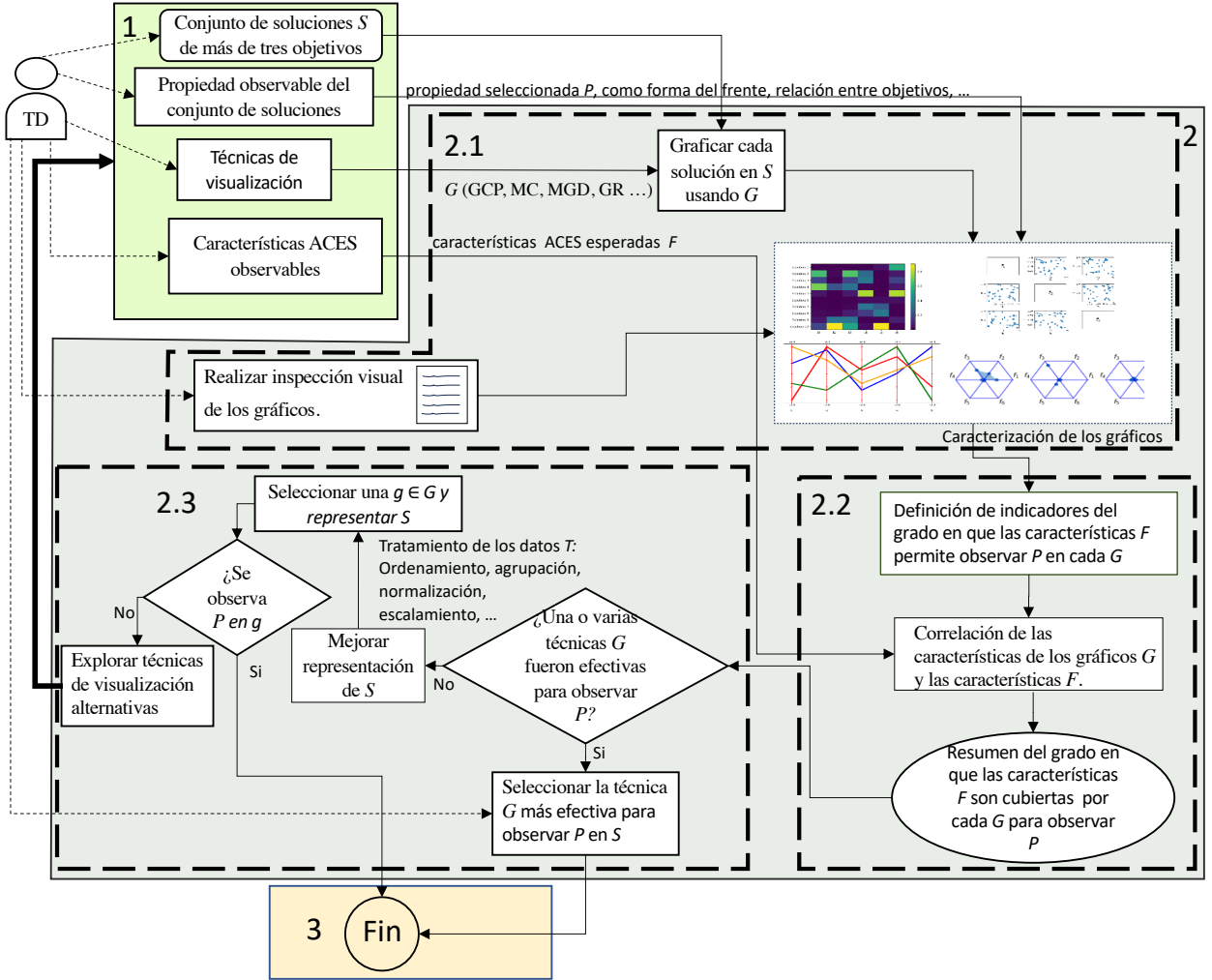


Figura 3.1: MESTVM Metodología que guía un tomador de decisiones en la evaluación y selección de técnicas de visualización para observar una propiedad en el conjunto de soluciones de problemas de optimización multiobjetivo

2. una propiedad (P) de S que desea observar; como puede ser la forma del frente de Pareto, las relaciones entre objetivos y el grado de convergencia y diversidad de las soluciones, entre otras.
3. Un conjunto de técnicas de visualización (G) elegidas por el TD por su capacidad para representar toda la información objetivo de cada solución $s \in S$.
4. Un conjunto de características que definen a una buena técnica de visualización; como las características ACES (F) descritas en la sección 2.9

Como paso preliminar de iniciar el proceso, se realiza la representación de S en cada $g \in G$, el TD realiza una inspección visual de los gráficos resultantes y se hace un análisis de las características, ventajas y desventajas de cada una de las técnicas de visualización.

(2) Proceso:

El proceso se divide en tres etapas:

(2.1) Etapa de visualización:

El proceso inicia con la representación del conjunto de soluciones, usando las técnicas seleccionadas, el tomador de decisiones realiza una inspección visual de los gráficos y realiza una caracterización de estos.

(2.2) Etapa de evaluación:

En base a las características en cada una de las técnicas de visualización, se proponen indicadores para evaluar el grado con que las características ACES permiten observar la propiedad deseada.

El TD realiza una correlación de las características de los gráficos con las características ACES, esta correlación es un resumen del grado en que las características F son cubiertas por cada G .

Del resumen obtenido se evalúa si una o más técnicas fueron efectivas para observar P en S , en caso afirmativo se selecciona la técnica más efectiva y el proceso termina. Caso contrario, se pasa a una etapa de mejora.

(2.3) Etapa de mejora:

Cuando ninguna de las técnicas fue efectiva para observar P se selecciona una técnica específica $g \in G$, y se aplican tratamientos T a los datos del conjunto de soluciones (ordenamiento, escalamiento, agrupación, normalización, etc.) y se realiza la representación en la técnica seleccionada. Se evalúa si la propiedad P es observada; en caso afirmativo, el proceso termina; caso contrario, se exploran técnicas de visualización alternativas y se itera hasta encontrar una técnica efectiva.

(3) Salida:

El proceso termina cuando se tiene una técnica de visualización en la que se puede observar la propiedad deseada por un TD de un conjunto de soluciones de más de tres objetivos.

La Figura 3.2 es la representación de la MESTVM de forma compacta e intuitiva para facilitar la comprensión del flujo del proceso. Mientras que la representación en la Figura 3.1 se detallan el proceso y sus componentes.

Esta metodología tiene como objetivo facilitar la evaluación de las técnicas de visualización utilizando las características de ACES. Al proporcionar un enfoque estandarizado, los investigadores y profesionales pueden tomar decisiones informadas sobre qué técnicas utilizar en su trabajo, lo que en última instancia conduce a visualizaciones más efectivas.

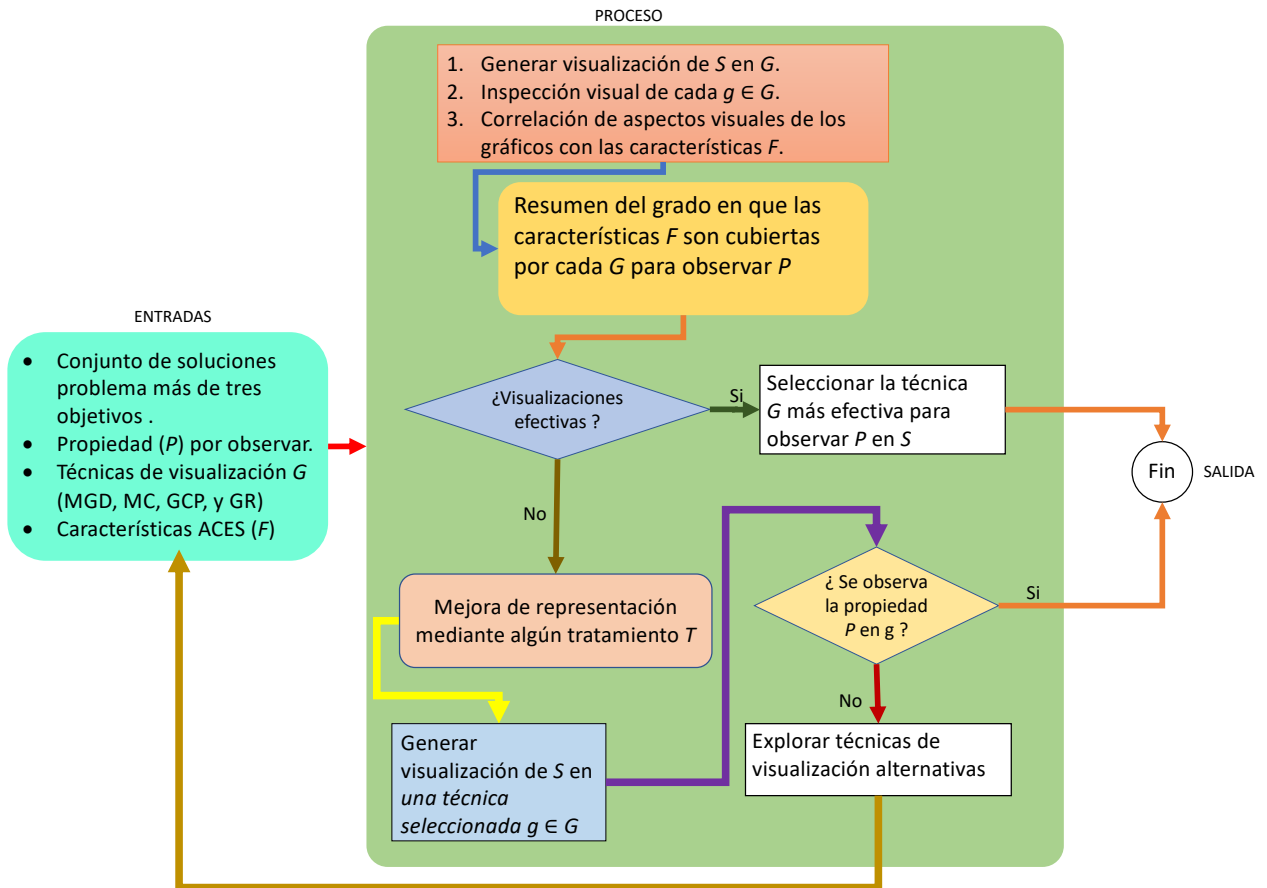


Figura 3.2: MESTVM Metodología que guía un tomador de decisiones en la evaluación y selección de técnicas de visualización para observar una propiedad en el conjunto de soluciones de problemas de optimización multiobjetivo

Experimentación

En este capítulo se presentan cuatro experimentos para validar MESTVM.

El primer experimento tuvo por objetivo realizar un análisis preliminar de cuatro técnicas de visualización (MGD, MC, GCP, y el GR) para entender sus características, sus ventajas y limitaciones.

El segundo experimento se enfocó en la evaluación de las técnicas de visualización mediante la correlación entre los elementos visuales de los gráficos y las características ACES, evaluando específicamente la precisión para observar convergencia en cada una de las técnicas.

El tercer experimento tuvo por objetivo validar que al mejorar la representación del conjunto de soluciones, se puede observar la propiedad deseada, cuando inicialmente no era observable.

En este experimento se seleccionó el mapa de calor para evaluar el desempeño del algoritmo NSGA-III en términos de convergencia.

El cuarto experimento se centró en mejorar la representación del conjunto de soluciones mediante la aplicación del método TOPSIS y vectores de pesos para facilitar la observación de las soluciones con el mejor desempeño en un objetivo o grupos de objetivos.

4.1. ESPECIFICACIONES DEL SISTEMA

Los experimentos se realizaron en un cuaderno de Google Colab (Bisong, 2019) con los recursos mostrados en la tabla 4.1. El lenguaje de programación fue Python 3 y la librería de optimización Pymoo (Blank & Deb, 2020).

Tabla 4.1. Especificaciones del sistema

Recurso	Valor
Procesador	AMD EPYC 7B12
Velocidad (MHz)	2249.998
Memoria RAM	13.61 GB
Lenguaje de programación	Python 3
Software optimización	Pymoo

4.2. INSTANCIAS

Los datos utilizados fueron conjuntos de soluciones del problema DTLZ1, el cual fue visto en la sección 2.11. En el problema DTLZ1, todos los objetivos son de minimización, esto quiere decir que se buscan valores lo más pequeños posible, pero además, la suma de los valores de los objetivos debe tener un valor de 0.5.

Una solución s de un problema DTLZ1 de m objetivos del conjunto se representa como un vector de valores objetivos $s = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_m\}$.

En la Tabla 4.2 se muestran cinco soluciones del problema DTLZ1 de cuatro objetivos ($m=4$).

Tabla 4.2. Cinco soluciones del problema DTLZ1 de cuatro objetivos

Solución	f_1	f_2	f_3	f_4
s_1	3.25×10^{-6}	2.62×10^{-4}	2.56×10^{-4}	5.06×10^{-1}
s_2	3.46×10^{-4}	7.30×10^{-2}	3.62×10^{-1}	7.25×10^{-2}
s_3	4.10×10^{-4}	2.18×10^{-1}	1.44×10^{-1}	1.45×10^{-1}
s_4	7.19×10^{-4}	4.34×10^{-1}	3.50×10^{-4}	7.33×10^{-2}
s_5	7.78×10^{-2}	7.33×10^{-2}	3.27×10^{-3}	3.57×10^{-1}

Al comparar pares de soluciones se observa que no hay una que sea mejor en todos los objetivos, por ejemplo, las soluciones s_1 y s_2 : s_1 es mejor en los objetivos f_1 , f_2 y f_3 , pero es peor en f_4 que la solución s_2 . Las soluciones s_1 y s_3 : s_1 es mejor en los objetivos f_1 , f_2 y f_3 , pero es peor en f_4 que la solución s_3 . Las soluciones s_2 y s_3 : s_2 es mejor en los objetivos f_1 , f_2 y f_4 , pero es peor en f_3 que la solución s_3 .

4.3. INDICADOR DE CALIDAD

Para la evaluación de calidad de los conjuntos de soluciones se utilizó el indicador hipervolumen. Este indicador ofrece un único valor que simultáneamente evalúa la convergencia y la diversidad de un conjunto de soluciones (Shang et al., 2021).

4.4. EXPERIMENTO 1: ANÁLISIS PRELIMINAR DE LAS TÉCNICAS DE VISUALIZACIÓN

Objetivo

Analizar las características de cuatro técnicas de visualización (matriz de gráficos de dispersión, mapa de calor, gráfico de coordenadas paralelas y gráfico de radar).

4.4.1. Diseño del experimento

Datos

Se utilizaron conjuntos de soluciones del problema DTLZ1 de cuatro objetivos; en el anexo A se detalla la obtención de los conjuntos de soluciones.

Técnicas de visualización

Las técnicas de visualización elegidas para representar los conjuntos de soluciones son:

- Matriz de gráficos de dispersión
- Mapa de calor
- Gráfico de coordenadas paralelas

- Gráfico de radar

Evaluación de desempeño

La Tabla 4.3 presenta los valores de hipervolumen para dos conjuntos de soluciones del problema DTLZ1.

Tabla 4.3. Los valores máximos de hipervolumen correspondientes dos conjuntos de soluciones del problema DTLZ1 con cuatro objetivos.

Máximo valor	
Conjunto A	Conjunto B
0.9910496983827358	0.9939190389042989

La Tabla 4.3 muestra que el valor máximo de hipervolumen es obtenido para el conjunto B. Lo anterior indica que el conjunto B tiene mejor convergencia que el conjunto A.

Visualizaciones de los conjuntos de soluciones

Matriz de gráficos de dispersión

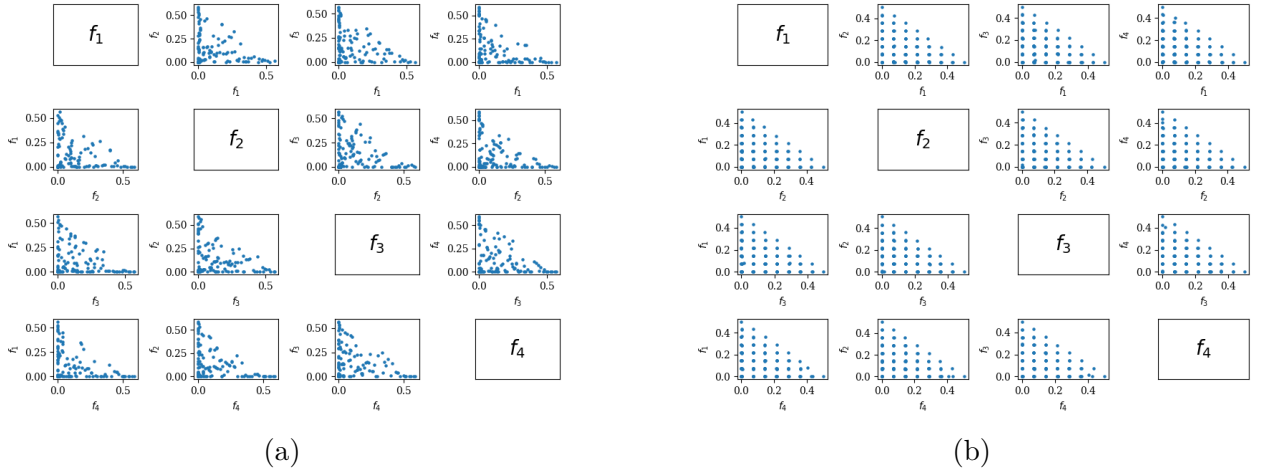


Figura 4.1: Matriz de gráficos de dispersión de dos conjuntos soluciones del DTLZ1 con cuatro objetivos: a) Conjunto A, b) Conjunto B.

Mapa de calor

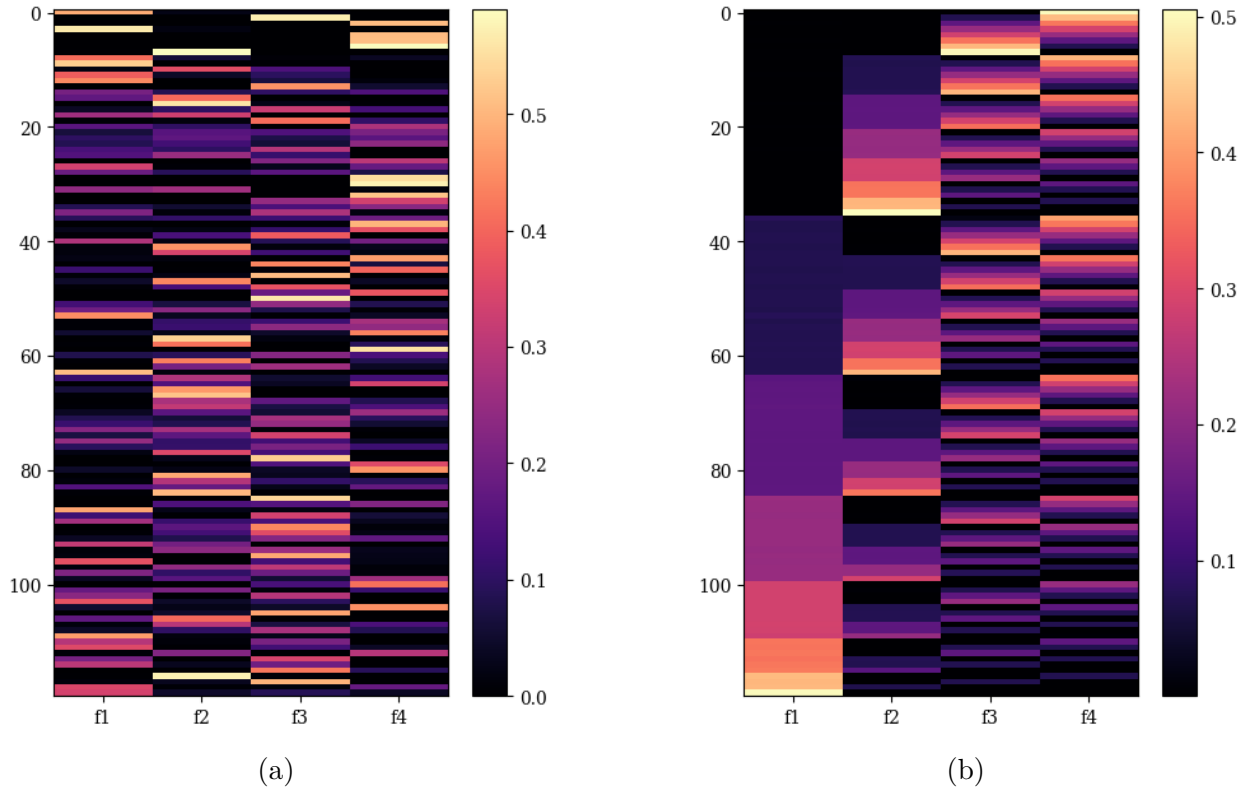


Figura 4.2: Mapa de calor de dos conjuntos de soluciones del DTLZ1 con cuatro objetivos: a) Conjunto A, b) Conjunto B.

Gráfico de coordenadas paralelas

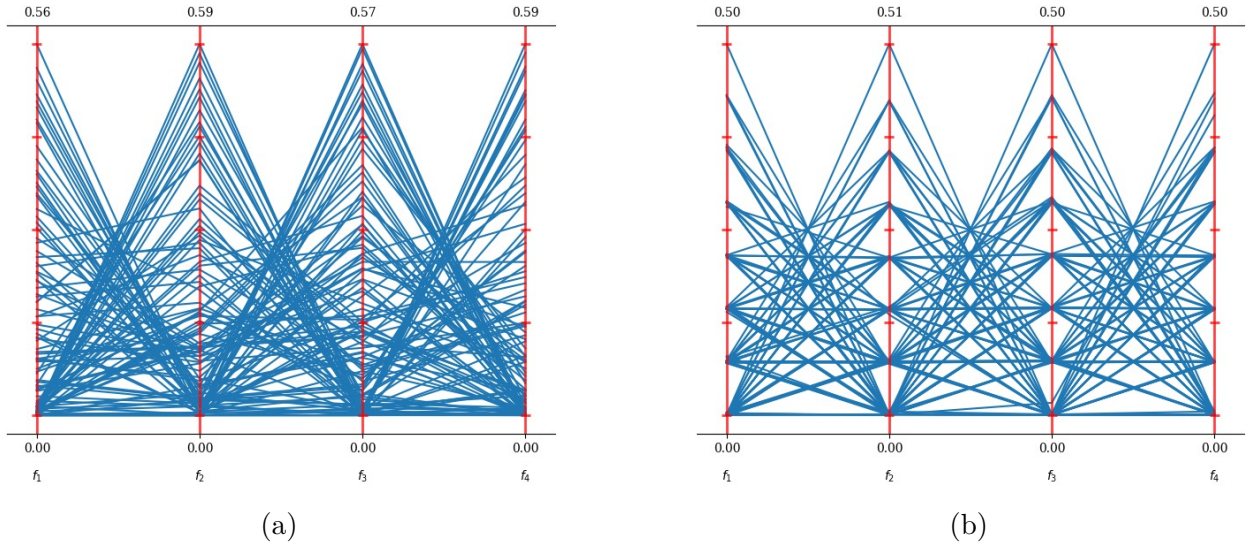


Figura 4.3: Gráfico de coordenadas paralelas de los mejores conjuntos de soluciones para DTLZ1 con cuatro objetivos: a) Conjunto A, b) Conjunto B.

Gráfico de radar

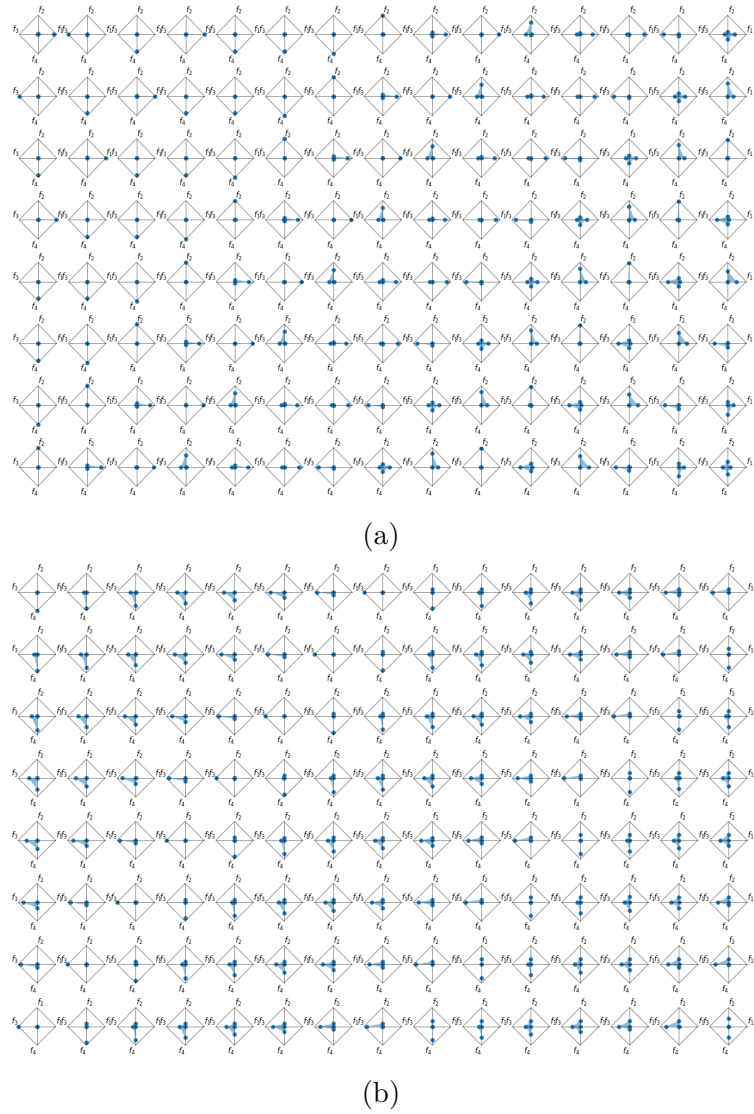


Figura 4.4: Gráfico de radar de dos conjuntos de soluciones del DTLZ1 con cuatro objetivos:
a) Conjunto A, b) Conjunto B.

Análisis de las técnicas de visualización

Matriz de gráficos de dispersión

En la MGD de la Figura 4.1 se puede observar la forma lineal del frente del conjunto de soluciones de DTLZ1; es útil para comparar pares de objetivos. Se observa la distribución de las soluciones. Sin embargo, con el incremento de objetivos se vuelve complicado el análisis y requiere más espacio al incrementar el número de gráficos. Mapa de calor

En el MC Figura 4.2, los patrones de calor revelan eficazmente la compensación entre objetivos, por lo que permiten observar valores extremos. Este gráfico no revela la forma del frente de Pareto; es difícil seleccionar soluciones.

Gráfico de coordenadas paralelas

El GCP Figura 4.3 permite observar compensaciones entre objetivos, la distribución de valores por objetivos. Las limitaciones identificadas son que la superposición de las polilíneas dificulta el análisis con muchas soluciones, no se observa la forma del frente.

Gráfico de radar

El GR Figura 4.4 es efectivo para analizar soluciones individuales; cuando se grafican las soluciones en un solo gráfico, es difícil realizar la comparación de soluciones, no representa la forma del frente de Pareto.

4.4.2. Ventajas y desventajas de las técnicas de visualización analizadas

La Tabla 4.4 es una comparación de las ventajas y desventajas de las técnicas de visualización analizadas en este trabajo.

Técnica	Ventajas	Desventajas
Matriz de diagrama de dispersión	Muestra forma lineal del frente. Útil para comparar pares de objetivos. Permite observar distribución de soluciones.	Se complica con más objetivos por incremento de gráficos. Requiere más espacio visual.
Mapa de calor	Revela compensaciones entre objetivos. Permite observar valores extremos.	No revela forma del frente de Pareto. Difícil seleccionar soluciones individuales.
Coordenadas paralelas	Muestra compensaciones entre objetivos. Permite ver distribución de valores por objetivos.	Superposición de polilíneas dificulta análisis con muchas soluciones. No muestra forma del frente.
Gráficos de radar	Efectivo para analizar soluciones individuales.	Difícil comparar soluciones en un solo gráfico. No representa forma del frente de Pareto.

Tabla 4.4. Ventajas y desventajas de técnicas de visualización en optimización multiobjetivo.

4.4.3. Conclusión

La comparación realizada de los gráficos en la subsección 4.4.2 evidencia que cada técnica de visualización tiene fortalezas particulares para analizar datos de alta dimensionalidad, pero también se observa que cada una de las técnicas presenta limitaciones particulares. La matriz de gráficos de dispersión es efectiva para observar la forma del frente y las relaciones entre pares

de objetivos; sin embargo, se vuelve compleja visualmente con el incremento de objetivos. El mapa de calor es útil para observar valores extremos, y también puede representar cada una de las soluciones y sus objetivos, pero sin un orden de las soluciones se afecta la interpretabilidad. El gráfico de coordenadas paralelas permite analizar la compensación entre múltiples objetivos y también observar la distribución de valores en cada objetivo; la inconveniencia con esta técnica es la superposición de las polilíneas. Con este experimento se obtuvo un conocimiento de cómo cada técnica representa las soluciones y cómo interpretar estas representaciones; también se identificaron sus limitaciones, con lo cual se puede abordar con estrategias para mejorarlas.

4.5. EXPERIMENTO 2: ANÁLISIS DE PRECISIÓN DE TÉCNICAS DE VISUALIZACIÓN PARA OBSERVAR CONVERGENCIA

El experimento que se presenta en esta sección tiene por objetivo responder a la pregunta: ¿Es posible validar técnicas de visualización a través de la correlación entre aspectos visuales observados en estas y las características ACES que definen a una buena técnica de visualización?

4.5.1. Diseño de experimento

El diseño del experimento consiste en el conjunto de soluciones, las propiedades observables y la medición que evalúa dichas propiedades, el establecimiento de técnicas de visualización para representar conjuntos de soluciones, las características observables esperadas de ACES,

las visualizaciones del conjunto de soluciones, la correlación entre las propiedades observables y las características de ACES, y finalmente, un análisis de dichas correlaciones.

Datos

Se utilizaron conjuntos de soluciones del problema DTLZ1 de cuatro objetivos, en el anexo B se detalla el proceso de obtención.

Propiedades observables e indicador

Las propiedades observables son los aspectos concretos y deseables que un TD particular busca visualizar en los gráficos. En este experimento, se considera el grado de convergencia de las soluciones de un problema de optimización.

De acuerdo con el trabajo (Jiang & Yang, 2016) la convergencia es una de las metas a alcanzar en la optimización multiobjetivo; un algoritmo solucionador eficiente debe minimizar la diferencia entre las soluciones candidatas y las soluciones en el frente de Pareto.

La esencia de la convergencia puede capturarse mediante el hipervolumen. Para evaluar la convergencia de los conjuntos de aproximación generados por ambos algoritmos, se utilizó el indicador de hipervolumen implementado en Pymoo para evaluar la calidad.

Técnicas de visualización y características ACES observables

Las técnicas de visualización utilizadas para representar el conjunto de soluciones son: la MGD, el MC, el GCP, y el GR analizadas en el experimento 1 4.4.

La evaluación de las técnicas de visualización se centró alrededor de características ACES observables, para este experimento la *precisión* con el cual un gráfico representa la convergencia del conjunto de soluciones.

4.5.2. Correlaciones entre las propiedades observables en lo gráficos e indicadores para observar la característica ACES precisión

La evaluación de la calidad de una técnica de visualización en particular en un contexto determinado depende mayormente del indicador elegido y las métricas, más que de la técnica de visualización en sí misma. Considerando el caso de este experimento. La convergencia de dos algoritmos es analizada. Para tal propósito, cuatro técnicas de visualización fueron elegidas. El experimento llevado a cabo derivó en la generación de conjuntos de soluciones, y lo que queda es el análisis de los resultados.

Una técnica de visualización será considerada efectiva si esta cumple con las características ACES; sin embargo, para proveer evidencia en este tópico, un indicador debe ser considerado en cuenta, un indicador el cual debería ser medido en el contexto observable de la técnica de visualización en el sentido de reconocer qué tan bien la propiedad estudiada es cubierta. Para este propósito se consideró la característica de *precisión* y la propuesta de indicadores para cada técnica de visualización que ayuden en la noción de apuntar si los conjuntos de

soluciones obtenidos tienen una convergencia total.

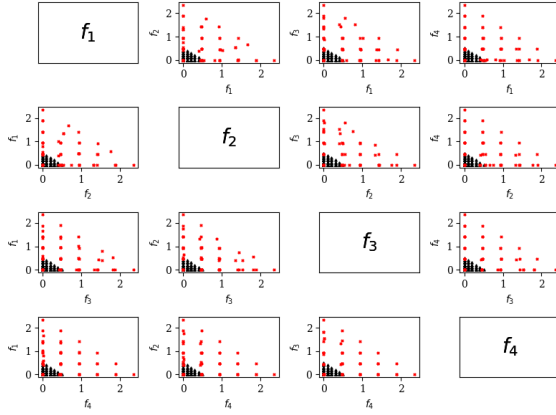
El problema derivado es la identificación de un indicador apropiado que se desprenda de los atributos observables en los gráficos. Tres casos fueron considerados para establecer los indicadores: en el caso 1, se conoce el frente de Pareto real; en el caso 2, dos algoritmos son comparados; y en el caso 3, se evalúa el desempeño de un algoritmo sin un punto de referencia.

A continuación se definen los indicadores del nivel de precisión para mostrar convergencia para cada una de las técnicas de visualización en los tres casos considerados.

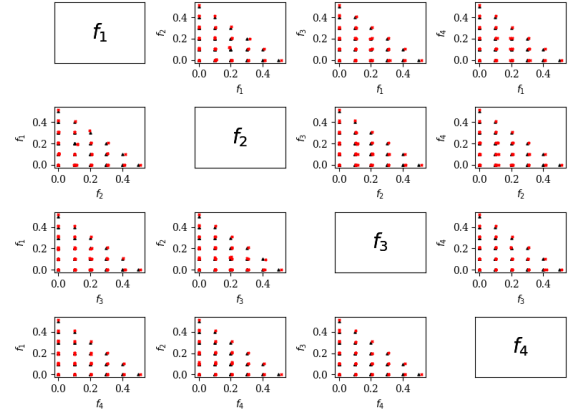
Matriz de gráficos de dispersión

Caso 1

El indicador de precisión en convergencia, donde se conoce el frente de Pareto real, podría estar dado por el número de gráficos asociados a pares de objetivos; en el que la dispersión de los puntos de datos del frente aproximado se encuentra dentro de la región de la distribución de los puntos asociados con pares de objetivos del frente real. La precisión de esta técnica tiene una *alta* precisión para observar la convergencia.



(a) en rojo se representa una aproximación del problema DTLZ1 de 4 objetivos generado por una instancia del algoritmo NSGA-III.



(b) en rojo otra aproximación con valor de hipervolumen alto, generada por una instancia diferente del algoritmo NSGA-III.

Figura 4.5: Matriz de gráficos de dispersión; se analiza la convergencia en el caso donde se conoce el Frente de Pareto Optimo, representado en color negro.

La Figura 4.5 muestra la comparación de dos aproximaciones del problema DTLZ1 de cuatro objetivos generados por el algoritmo NSGA-III con distintos valores de hipervolumen. La Figura 4.5a se compara cuando el valor de hipervolumen de la aproximación es bajo y la Figura 4.5b compara cuando el valor de hipervolumen es alto, siendo clara la coincidencia de los puntos en los gráficos de dispersión de la aproximación con los puntos del frente real. Por lo que se puede decir que la matriz de gráficos de dispersión tiene una *alta* precisión para observar convergencia cuando se conoce el frente de Pareto real y se analiza la convergencia de un algoritmo.

Caso 2

Cuando se comparan dos algoritmos, se puede establecer una región de interés, cuyos diagramas de dispersión de objetivos por pares de las soluciones de esta región de interés serían un punto de referencia. El indicador vendría dado por el número de diagramas de dispersión en los que

los puntos de los pares de objetivos de las soluciones de los frentes aproximados se acercan a los puntos de las soluciones de los pares de objetivos de la región de interés. Esta técnica tiene una precisión *media* ya que se debe observar cada uno de los diagramas de dispersión asociados a los pares de objetivos de cada uno de los frentes aproximados con la distribución de los puntos asociados a los pares de objetivos de las soluciones en la región de interés.

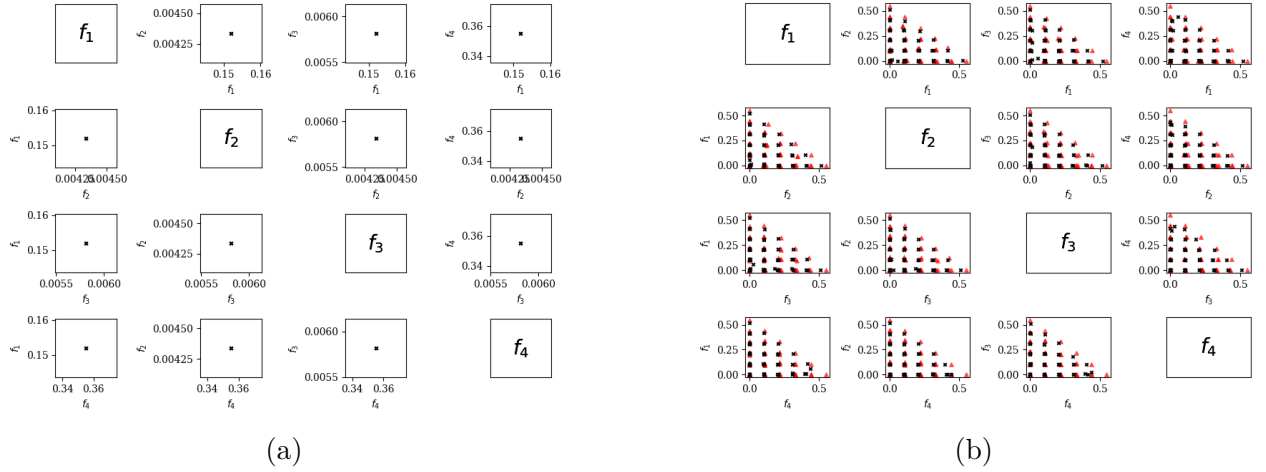


Figura 4.6: Matriz de gráficos de dispersión; se analiza la convergencia en el caso donde se comparan dos algoritmos. Se estableció una ROI donde la suma los valores de los objetivos debe estar entre 0.45 y 0.55.

La Figura 4.6 muestra la comparación de soluciones que caen dentro de una ROI previamente establecida, en el caso de la Figura 4.6a en negro se representan soluciones de una aproximación con valor de hipervolumen 0.950843740786658 que están dentro de una ROI definida del problema DTLZ1 de 4 objetivos generado por una instancia del algoritmo MOEA/D, para el caso de un conjunto de soluciones de NSGA-II con un hipervolumen de 0.857071457491926 no se tuvieron soluciones dentro de la ROI, para el caso de la Figura 4.6b en negro se representan soluciones de una aproximación con valor de hipervolumen 0.991029876050775 que están dentro de una ROI definida del problema DTLZ1 de 4 objetivos generado por una instancia del algoritmo MOEA/D, en rojo soluciones dentro de la ROI para el caso de un conjunto de soluciones de NSGA-II con un hipervolumen de 0.989754269361497. De aquí se puede concluir

que la matriz de gráficos de dispersión tiene una *alta* precisión para cuando se comparan dos algoritmos a través de una ROI.

Caso 3

Se analiza la convergencia de un solo algoritmo y no hay un punto de referencia. La convergencia puede evaluarse observando los cambios en los diagramas de dispersión de los frentes generados sucesivamente. La convergencia se puede declarar observando la estabilidad en los diagramas de dispersión asociados con los pares de objetivos de los últimos frentes generados. Con lo anterior, existe una *alta* precisión para observar la convergencia.

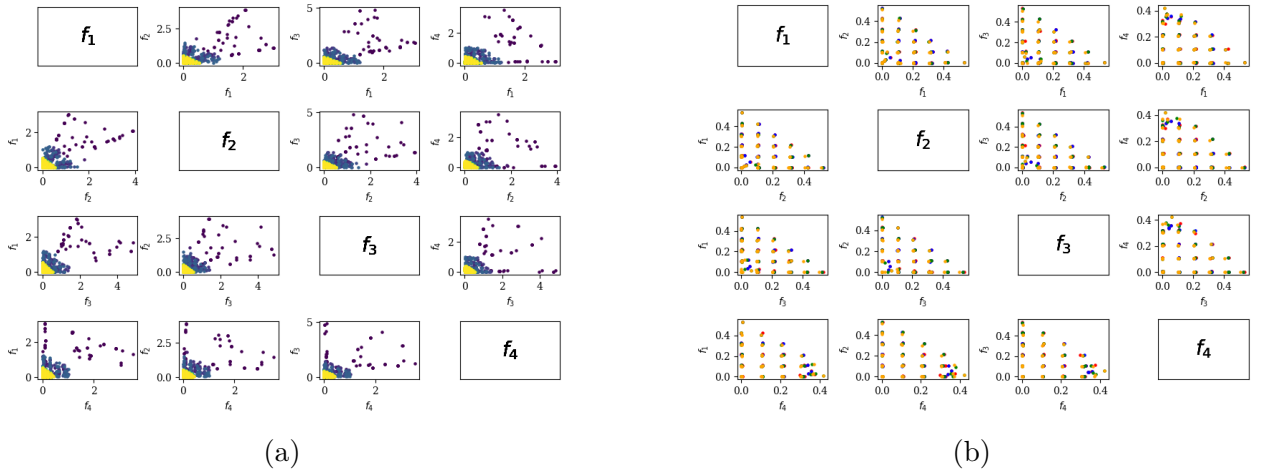


Figura 4.7: Matriz de gráficos de dispersión; se analiza la convergencia de un algoritmo sin tener un punto de referencia.

Para este experimento se ejecutó un algoritmo MOEA/D con el parámetro de número de generaciones establecido en 350 y cada 25 generaciones se guardó la aproximación intermedia obteniendo así 14 aproximaciones. La Figura 4.7a muestra las 14 aproximaciones donde se puede observar el progreso donde la peor aproximación, representada por los puntos morados, están distribuidos en el total del área de los gráficos de dispersión mientras que para la aproximación resultante representada en amarillo se observa más compacta. La Figura 4.7b

muestra la comparación para las últimas 4 aproximaciones observándose una coincidencia en la distribución de los puntos, esto se explica porque los valores de hipervolumen para estas aproximaciones son significativamente cercanos (0.9873071605847247, 0.9883840299709112, 0.9897256423631485, y 0.9904089395690645). Se puede concluir que la matriz de gráficos de dispersión tiene un nivel de precisión *alto* para observar convergencia cuando se analiza el desempeño de un algoritmo y no se tiene un punto de referencia.

Mapa de calor

Caso 1

Un indicador de precisión para mostrar la convergencia en un mapa de calor cuando el frente de Pareto real está disponible podría establecerse mediante el patrón generado en un mapa de calor del frente real, si el patrón generado en un mapa de calor del frente aproximado coincide con el del frente real se puede declarar que hubo convergencia. En este caso, la precisión puede verse afectada por la comparación de colores o diferencias en el orden de las soluciones de los dos frentes, por lo que la precisión de observar la convergencia en un mapa de calor está en discusión. Se puede declarar una precisión *media* para observar la convergencia en este caso.

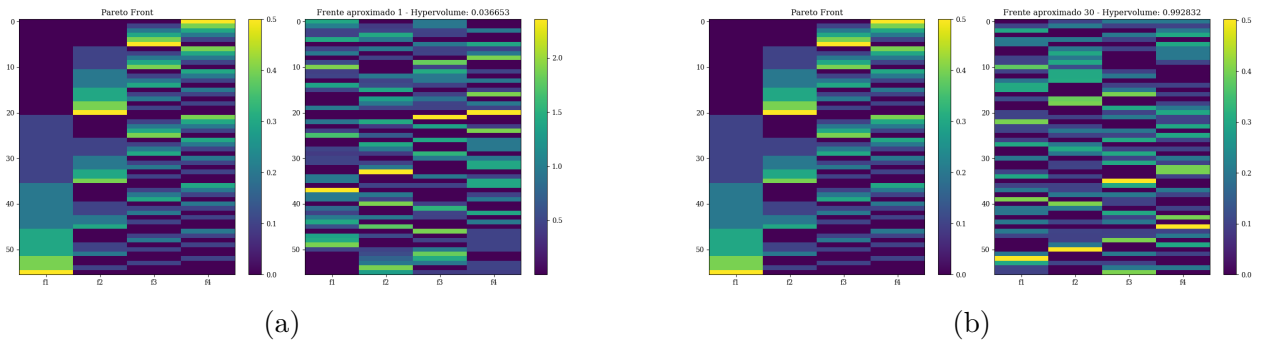


Figura 4.8: Mapa de calor; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando se conoce el frente real.

Los gráficos de la Figura 4.8 corresponden a la comparación de dos aproximaciones generados con distintas instancias del algoritmo NSGA-III, en la Figura 4.8a se compara una aproximación con valor de hipervolumen bajo (0.0366653) y la Figura 4.8a se compara una aproximación con valor de hipervolumen es alto (0.992832).

A diferencia de los gráficos de matriz de dispersión donde se pueden comparar conjuntos de soluciones sobre un mismo gráfico en el mapa de calor se vuelve una tarea muy complicada hacer un análisis de la convergencia de un algoritmo a un conociendo el frente real. La precisión es *baja*.

Caso 2 Un indicador de precisión de convergencia al comparar dos algoritmos se puede definir con una región de interés cuyo patrón de color del mapa de calor de las soluciones de esta región de interés sería el punto de referencia. Al representar las soluciones de las aproximaciones de los algoritmos que se están comparando, la convergencia estaría dada por la existencia de patrones de color como punto de referencia, sin embargo, esto se complica por la dificultad de comparar visualmente los colores, una posible forma de aliviar este problema sería con el ordenamiento de las soluciones tanto en la región de interés como las soluciones en los frentes aproximados. Esta técnica de visualización dificulta la observación precisa de la convergencia. Por las razones anteriores la precisión en observar convergencia en un mapa de calor para este caso es *baja*.

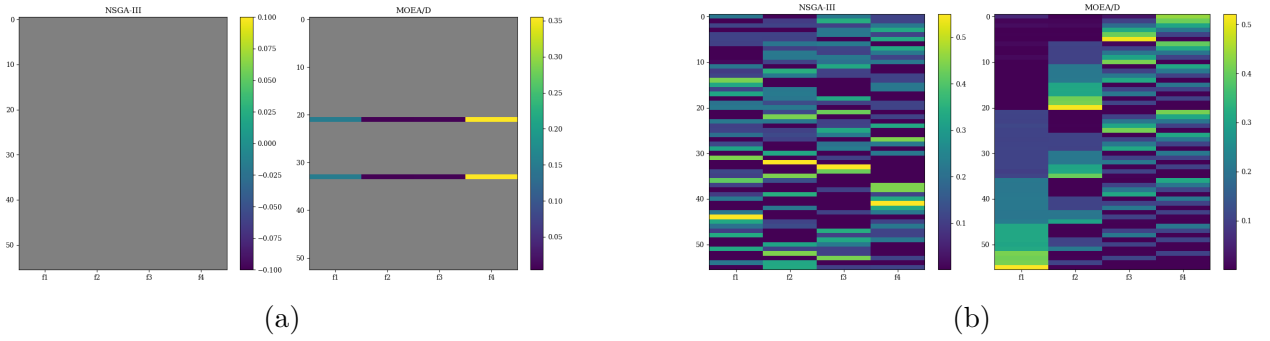


Figura 4.9: Mapa de calor; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando se comparan dos algoritmos y se establece una ROI.

La Figura 4.9 representa el análisis de la convergencia de dos algoritmos cuando a través del establecimiento de una ROI la cual es que los valores de los objetivos de cada solución debe estar entre 0.45 y 0.55. En la Figura 4.9a se compara dos aproximaciones una generada por el algoritmo NSGA-III con un valor de hipervolumen de 0.857071457491926 y otra aproximación generada por el algoritmo MOEA/D con un valor de hipervolumen de 0.950843740786658 para el caso de la aproximación de NSGA-III no se observan soluciones debido a que ninguna solución de este conjunto cumplió con la restricción de la ROI caso contrario para MOEA/D donde donde dos soluciones cumplieron. La Figura 4.9a se compara dos aproximaciones una generada por el algoritmo NSGA-III con un valor de hipervolumen de 0.989754269361497 y otra aproximación generada por el algoritmo MOEA/D con un valor de hipervolumen de 0.991029876050775; en ambos casos todas las soluciones de las dos aproximaciones cumplieron con la ROI.

El nivel de precisión del mapa de calor para analizar la convergencia de dos algoritmos a través de una ROI es *alta*.

Caso 3

Un indicador de precisión de convergencia en un mapa de calor cuando se trabaja con un algoritmo independiente será el cambio de patrón de los mapas de calor de los sucesivos frentes aproximados. La precisión de la convergencia vendría dada por la observación de la estabilidad en la distribución de colores de los últimos mapas de calor de los frentes obtenidos. Se puede afirmar que una precisión *media* para observar convergencia en este caso.

Para este experimento se ejecutó un algoritmo MOEA/D con el parámetro de numero de generaciones establecido en 350 y cada 25 generaciones se guardo la aproximación intermedia obteniendo así 14 aproximaciones.

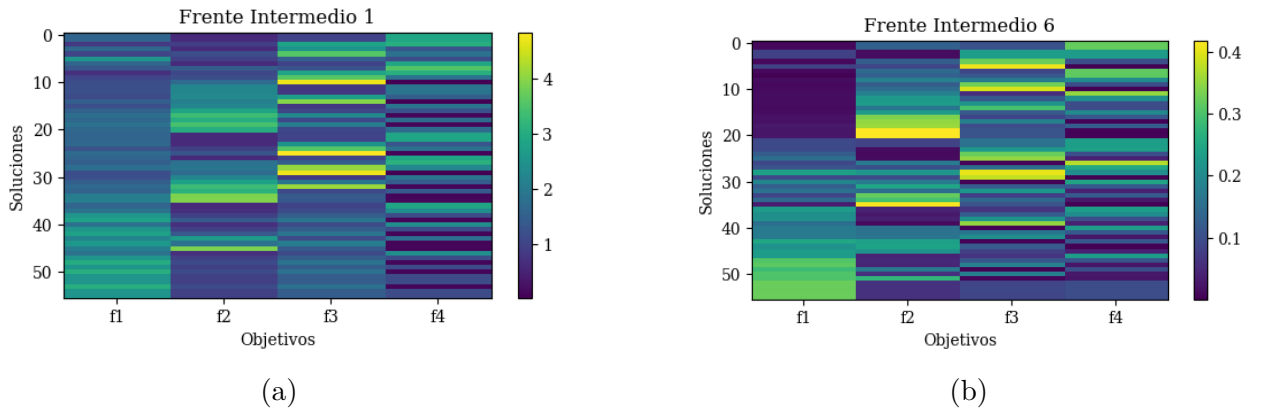


Figura 4.10: Mapa de calor; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando no se tiene un punto de referencia.

La Figura 4.10a muestra la representación de la primer aproximación intermedia y la Figura 4.10b es la representación de la sexta aproximación intermedia al comparar estos dos gráficos no se observa similitud en el patrón visual.

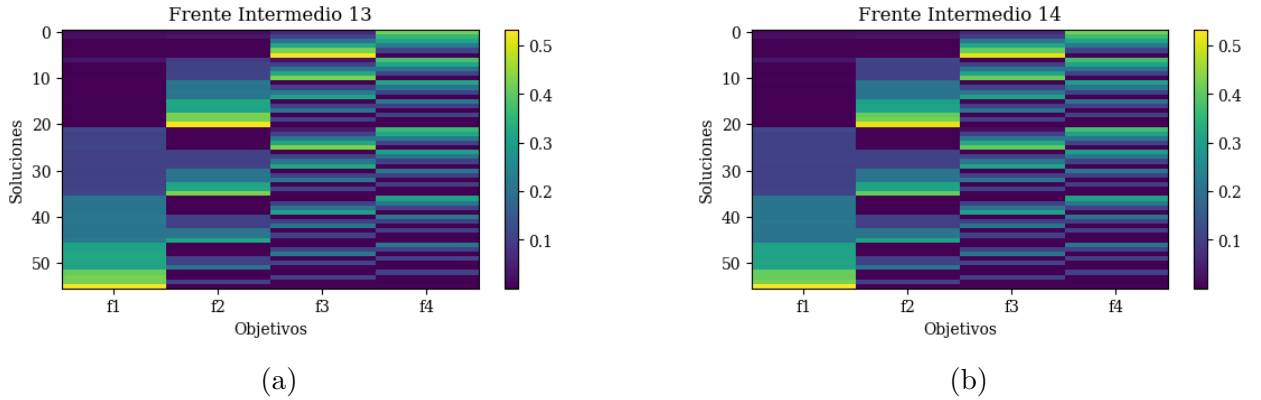


Figura 4.11: Mapa de calor; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando no se tiene un punto de referencia.

Las Figuras 4.11a y 4.11b corresponden a las dos últimas aproximaciones generadas de donde puede observar una coincidencia en el patrón visual indicando de esta manera la convergencia del algoritmo MOEA/D. La precisión para observar convergencia en un mapa de calor de un algoritmo sin tener un punto de referencia es en un mapa de calor es *media*.

Gráfico de coordenadas paralelas

Caso 1

Un indicador de precisión de la convergencia teniendo el frente de Pareto real en un gráfico de coordenadas paralelas puede ser dado por el número de polilíneas del frente aproximado que caen dentro de la región del marco formado con las polilíneas del frente de Pareto real. Esta técnica se puede declarar con *alta* precisión para observar la convergencia.

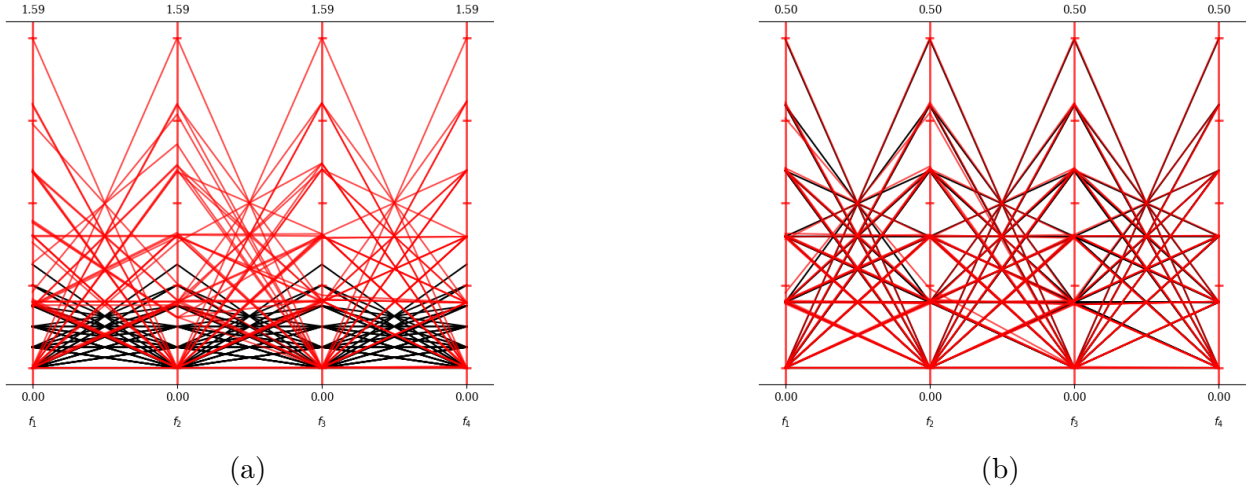


Figura 4.12: Gráfico de coordenadas paralelas; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando se tiene el frente real.

La Figura 4.12a es la comparación de una aproximación con un valor de hipervolumen bajo del problema DTLZ1 de cuatro objetivos con el frente real para el mismo problema, mientras que la Figura 4.12b es la comparación de una aproximación con un valor de hipervolumen alto del problema DTLZ1 de cuatro objetivos con el frente real para el mismo problema. Se puede observar de los gráficos en la Figura 4.12 que la técnica gráficos de coordenadas paralelas tiene una *alta* precisión para observar convergencia.

Caso 2

Al comparar dos algoritmos, se puede establecer una región de interés: la convergencia de los algoritmos se observaría si la trama formada con las polilíneas de las soluciones de los frentes aproximados coincide visualmente con la trama formada por las polilíneas de las soluciones en la región de interés. La precisión para observar la convergencia es *alta*.

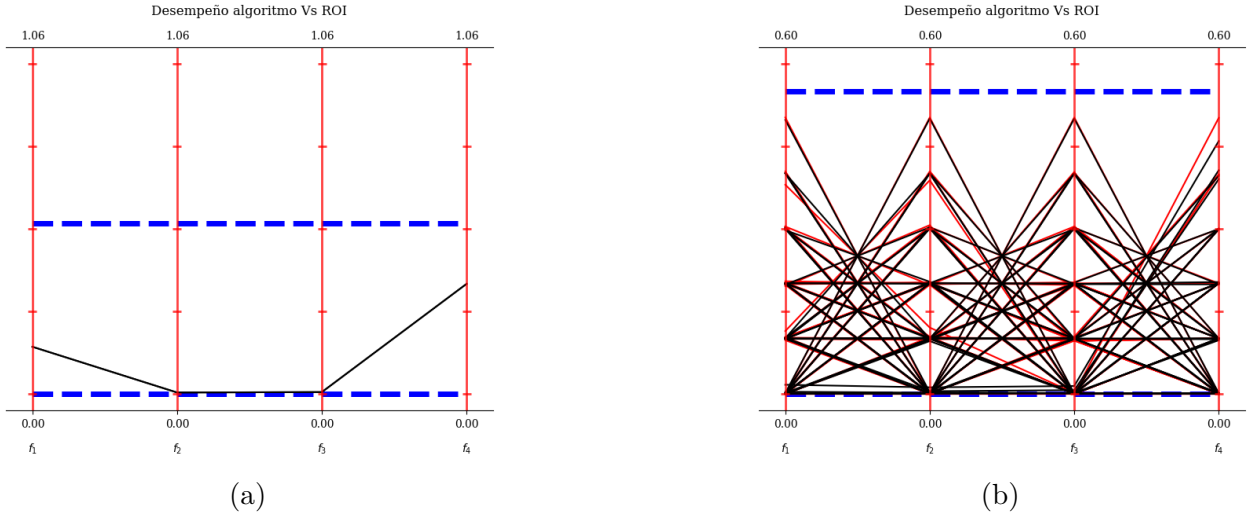


Figura 4.13: Gráfico de coordenadas paralelas; se analiza la convergencia de dos algoritmos a través de una ROI.

Para este caso se estableció una ROI donde la suma de los objetivos de las soluciones debe tener un valor entre 0.45 y 0.55.

La Figura 4.13 muestra los gráficos de coordenadas paralelas donde se analiza la convergencia de los algoritmos NSGA-III. En la Figura 4.13a se observa una polilínea que corresponde a una solución de una aproximación con un valor bajo de hipervolumen 0.950843740786658 generada por el algoritmo MOEA/D y no se observan soluciones que cumplan la ROI de la aproximación con valor de hipervolumen 0.857071457491926 generada por NSGA-III. La Figura 4.13b muestra en negro las soluciones de una aproximación con valor de hipervolumen 0.991029876050775 generada por el algoritmo MOEA/D, mientras que en rojo se representan las soluciones de una aproximación con valor de hipervolumen 0.991029876050775 generada por el algoritmo NSGA-III. Se puede observar que para ambos casos se tiene una cantidad similar de polilíneas correspondientes a las soluciones de ambas aproximaciones que cumplen la ROI. Se puede declarar que el gráfico de coordenadas paralelas tiene una *alta* precisión para observar convergencia en el caso donde se comparan dos algoritmos a través de una ROI.

Caso 3

Un indicador de la precisión de observar la convergencia en un gráfico de coordenadas paralelas cuando no hay un punto de referencia y se trabaja con un algoritmo individual sería el cambio visual en la gráfica formada por las polilíneas de los sucesivos frentes aproximados. La convergencia se declararía cuando exista estabilidad en la trama formada por las polilíneas de los últimos frentes representados. La precisión es *alta* para observar la convergencia.

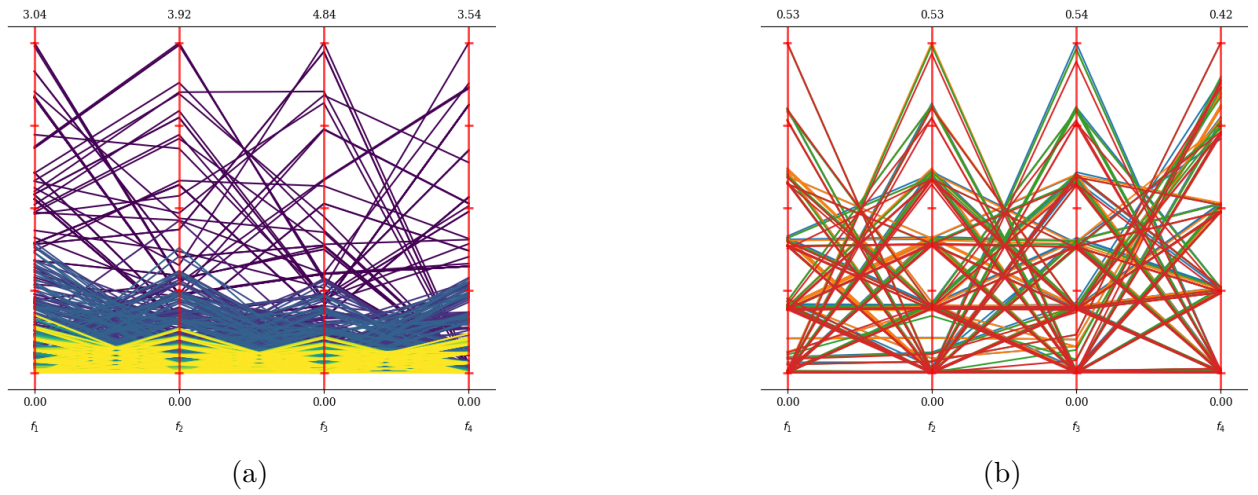


Figura 4.14: Gráfico de coordenadas paralelas; se analiza la convergencia de dos algoritmos a través la coincidencia visual del patrón visual al representar aproximaciones intermedias.

La Figura 4.14a corresponde la representación de todas las aproximaciones intermedias generadas por un algoritmo MOEA/D que hay conjuntos de polilíneas que no tienen coincidencia, en el caso de la Figura 4.14a corresponden a las dos últimas aproximaciones generadas de donde puede observar una coincidencia en el patrón visual indicando de esta manera la convergencia del algoritmo MOEA/D. La precisión para observar convergencia de un algoritmo sin tener un punto de referencia es en un gráfico de coordenadas paralelas es *alta*.

Gráfico de radar

Caso 1

El indicador de precisión para mostrar convergencia conociendo el frente de Pareto real en un gráfico de radar puede estar dado por el número de diagramas de radar del frente aproximado que caen dentro del diagrama de radar del frente de Pareto real. La precisión es *alta* para observar la convergencia.

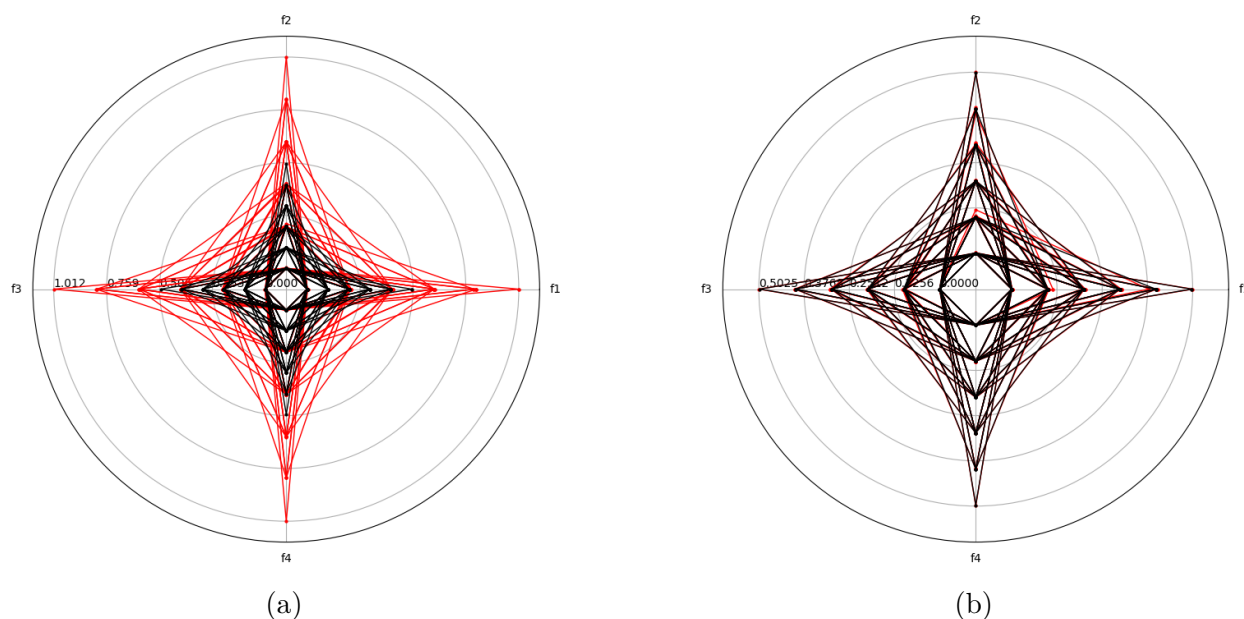


Figura 4.15: Gráfico de radar; se analiza la convergencia de un algoritmo cuando se conoce el frente real.

La Figura 4.15 muestra la comparación los gráficos de radar de dos frentes aproximados con los gráficos de radar del frente real, la Figura 4.15a muestra la comparación de una aproximación con valor de hipervolumen bajo generado por NSGA-III representado en rojo con el frente real en color negro, aquí es complicado observar si existen coincidencias de radares del frente aproximado con radares del frente real, por otro lado la Figura 4.15b muestra la comparación

de una aproximación valor de hipervolumen alto, generado por NSGA-III en rojo con el frente real en negro, en este caso se observa una coincidencia de la trama generada al representar las soluciones de la aproximación con la trama forma al representar el frente real. Se puede declarar que el gráfico de radar tiene una *alta* precisión para observar convergencia al analizar el desempeño de un algoritmo al conocer el frente real.

Caso 2

Al comparar dos algoritmos, se puede establecer una región de interés. La convergencia de los algoritmos se observaría si el gráfico de las soluciones de los frentes aproximados coincidieran visualmente con el gráfico de radar formado por las soluciones en la región de interés. La precisión para observar la convergencia es *alta*.

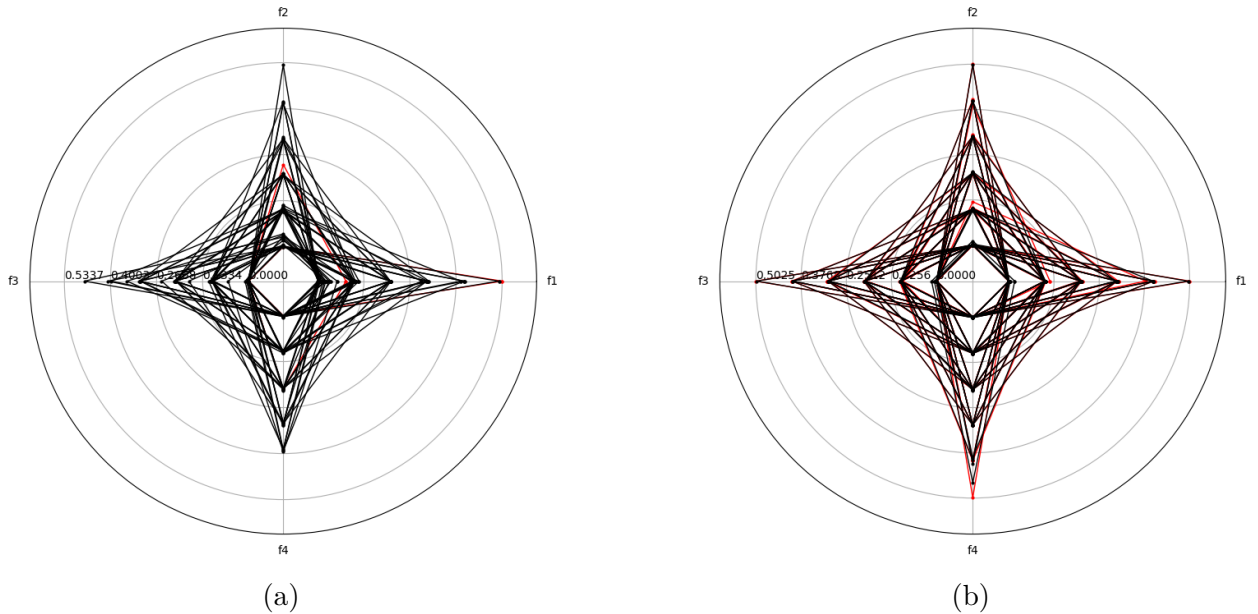


Figura 4.16: Gráfico de radar; se analiza la convergencia de dos algoritmos a través de una ROI.

Para este caso se estableció una ROI donde la suma de los objetivos de las soluciones debe

tener un valor entre 0.45 y 0.55.

La Figura 4.16 muestra los gráficos de radar donde se analiza la convergencia de los algoritmos NSGA-III, en la Figura 4.16a se observa un radar que corresponde a una solución de una aproximación con un valor bajo de hipervolumen 0.950843740786658 generada por el algoritmo MOEA/D y se observa una solución que cumple la ROI de la aproximación con valor de hipervolumen 0.857071457491926 generada por NSGA-III. La Figura 4.16b muestra en negro las soluciones de una aproximación con valor de hipervolumen 0.950843740786658 generada por el algoritmo MOEA/D mientras que en rojo se representan las soluciones de una aproximación con valor de hipervolumen 0.989754269361497 generada por el algoritmo NSGA-III se puede observar que para ambos casos se tiene una cantidad similar de radares correspondientes a las soluciones de ambas aproximaciones que cumplen la ROI. Se puede declarar que el gráfico de coordenadas radar tiene una *alta* precisión para observar convergencia en el caso donde se comparan dos algoritmos a través de una ROI.

Caso 3

Un indicador de precisión para observar la convergencia cuando no se tiene un punto de referencia y se trabaja con un algoritmo individual sería el cambio visual en la gráfica formada por las soluciones de los sucesivos frentes aproximados. La convergencia se declararía cuando exista estabilidad en la trama formada por las soluciones de los últimos frentes representados. La precisión se declara *alta* para observar la convergencia.

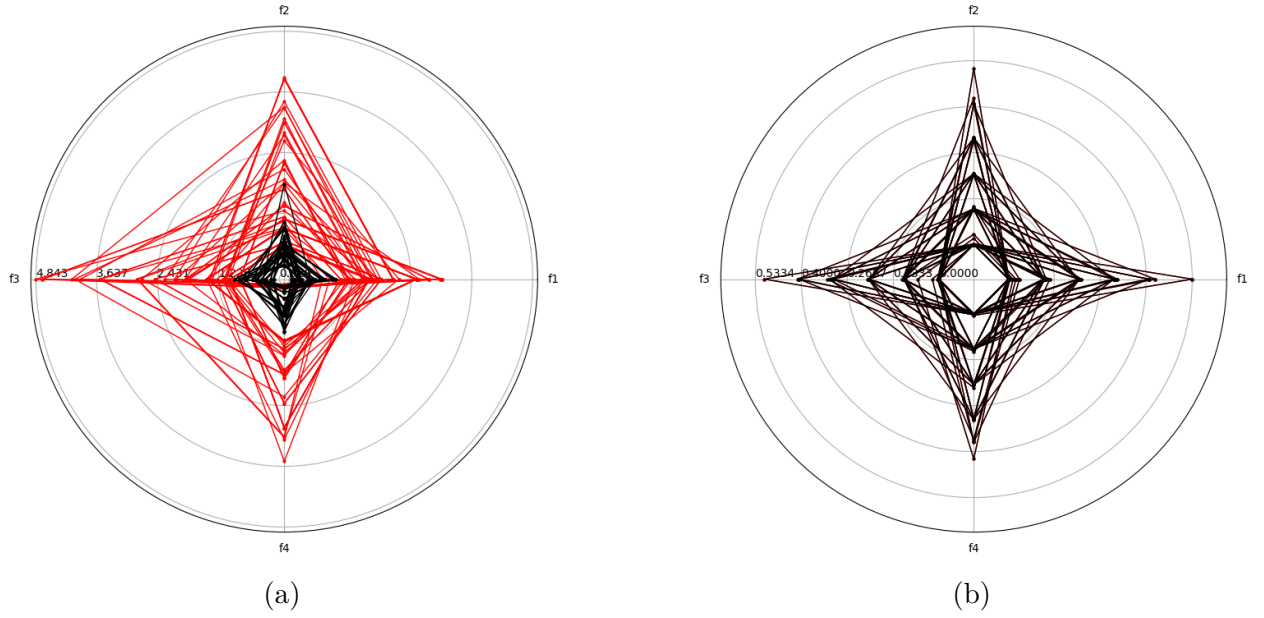


Figura 4.17: Gráfico de radar; se analiza la convergencia de dos algoritmos a través de la estabilidad del patrón visual de los gráficos de radar de las aproximaciones intermedias.

La Figura 4.17a corresponde la representación de las dos primeras aproximaciones intermedias generadas por un algoritmo MOEA/D se puede observar que los gráficos de radar no tienen coincidencia, en el caso de la Figura 4.17b corresponden a las dos últimas aproximaciones generadas de donde puede observar una coincidencia en el patrón visual indicando de esta manera la convergencia del algoritmo MOEA/D. La precisión para observar convergencia de un algoritmo sin tener un punto de referencia en un gráfico de radar es *alta*.

Análisis

La Tabla 4.5 muestra el resumen de los niveles de precisión para cada gráfico para mostrar la convergencia.

Tabla 4.5. Resumen del nivel de precisión para cada técnica de visualización en los tres casos: En el caso 1 se proporciona el frente de Pareto real; en el caso 2 se comparan dos algoritmos, y en el caso 3 se evalúa el rendimiento de un algoritmo y no se proporciona un punto de referencia

Técnica de visualización	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Matriz de gráficos de dispersión	Alta	Alta	Alta
Mapa de calor	Baja	Alta	Media
Gráfico de coordenadas paralelas	Alta	Alta	Alta
Gráfico de radar	Alta	Alta	Alta

Analizando la Tabla 4.5 se puede concluir que el gráfico de coordenadas paralelas tiene una alta precisión en la visualización de la convergencia, ya que sus elementos lo permiten. La matriz de gráficos de dispersión tiene una precisión alta para todos los casos. El gráfico de radar tiene una precisión alta en todos los casos. El mapa de calor es una técnica con baja precisión para observar la convergencia debido a la dificultad de comparar visualmente los colores para el caso 1; para el caso 2, el mapa de calor tiene un nivel de precisión alto para observar convergencia; esto es debido a que se establece una ROI y solo se grafican las soluciones que la cumplan. Continuando con el mapa de calor, tiene un nivel de precisión medio al analizar el desempeño de un algoritmo sin tener un punto de referencia, ya que se tiene que comparar el patrón visual.

Conclusiones

1. Se responde a la pregunta: ¿Es posible validar las técnicas de visualización de datos a través de la correlación entre los aspectos visuales observados en ellos y las características ACES que definen una buena técnica de visualización? Sí, es posible validar las técnicas de visualización a través de dicha correlación definiendo indicadores derivados de los elementos presentes en los gráficos.

2. Se encontró que es posible definir indicadores para evaluar una propiedad como la precisión de una técnica de visualización para mostrar un aspecto deseable como el nivel de convergencia de los algoritmos, considerando los elementos presentes en ellos.
3. La construcción de una técnica de visualización afecta a la forma en que se interpretan, ya sea debido a un orden arbitrario de las soluciones, como en un mapa de calor, o por la superposición de las polilíneas en un gráfico de coordenadas paralelas.
4. En este caso, se evaluó principalmente la precisión. Sin embargo, el resto de las características podrían evaluarse de manera similar, con aspectos visuales presentes en la técnica de visualización.

4.6. EXPERIMENTO 3: PREPARACIÓN DE DATOS PARA EVALUAR EL DESEMPEÑO DE NSGA-III EN TÉRMINOS DE CONVERGENCIA USANDO MAPAS DE CALOR

En este experimento se valida que la preparación de datos mejora la representación del conjunto de soluciones, estableciendo como propiedad a observar la convergencia en un mapa de calor, para evaluar el desempeño del algoritmo NSGA-III.

4.6.1. Diseño de experimento

Datos

Se utilizaron conjuntos de soluciones del problema DTLZ1 de seis objetivos; en el anexo C se encuentra el proceso de obtención de estos.

Objetivo

Aplicar un tratamiento de datos como mejora de la representación del conjunto de soluciones para hacer observable la propiedad de convergencia en el mapa de calor.

Propiedad observable e indicador

La propiedad observable es la convergencia del conjunto de soluciones. Como indicador se utiliza el hipervolumen.

Técnica de visualización y característica ACES observable

Se evalúa la característica ACES claridad para observar convergencia en el mapa de calor.

Preparación de los datos

Para poder observar la diferencia entre los conjuntos de soluciones en términos de convergencia, se realizaron las siguientes operaciones con los datos:

1. Se obtuvo el valor mínimo global de los treinta conjuntos de soluciones.
2. Se obtuvo el valor máximo global de los valores de los treinta conjuntos de soluciones.
3. Se utilizó una escala logarítmica debido a la diferencia entre valores en el conjunto de soluciones.
4. Se genera el mapa de calor de cada conjunto de soluciones con la escala logarítmica, con el mismo dominio de valores (valor mínimo global-valor máximo global)

Representación de los conjuntos de soluciones

Se eligen 4 conjuntos de soluciones con valores de hipervolumen muy bajo, bajo, medio y alto.

La Tabla 4.6 muestra los conjuntos seleccionados y su correspondiente valor de hipervolumen.

Tabla 4.6. Conjunto de soluciones seleccionadas

Conjunto de Solución	Hipervolumen	nivel hipervolumen
21	0.786602021154221	muy-bajo
3	0.974418249868661	bajo
2	0.998988163063702	medio
14	0.999635980074576	alto

La Figura 4.18 es la representación de los cuatro conjuntos seleccionados sin preparación de datos; como se puede observar, a pesar de tener distintos valores de hipervolumen, no existe

una diferencia visual entre los cuatro gráficos, siendo complicado evaluar el desempeño del algoritmo NSGA-III en términos de convergencia a través del mapa de calor.

La Figura 4.19 muestra la representación de los cuatro conjuntos de soluciones seleccionados por valor de hipervolumen ya con la preparación de los datos mencionados en la subsección 4.6.1.

Correlación entre las características del mapa de calor y la característica ACES claridad

Una vez que se realizó la preparación de datos en los conjuntos de soluciones, estos son representados para evaluar si se observa la convergencia, observando si en las representaciones de los conjuntos con mayor valor de hipervolumen predominan los colores asociados a valores más pequeños.

La Figura 4.19a se representa el conjunto de soluciones con el valor de hipervolumen muy bajo; en este gráfico se puede observar que en todas las columnas hay presencia de colores oscuros tanto azules como rojos, indicando valores altos para los objetivos. La Figura 4.19b es la representación del conjunto de soluciones con el valor de hipervolumen bajo; en este gráfico se puede observar que en todas las columnas hay más presencia de colores claros, sobre todo en los rojos, lo cual nos indica una mejora en la convergencia respecto al conjunto de soluciones presentado anteriormente. En la Figura 4.19c donde se representa el conjunto de soluciones con valor de hipervolumen medio, se observa la presencia de celdas con colores más claros ; por último, como era de esperarse, en la Figura 4.19d donde se representa el conjunto de soluciones con el valor de hipervolumen alto, la presencia de colores claros tanto rojos como azules es más evidente, lo cual significa valores más pequeños de los objetivos.

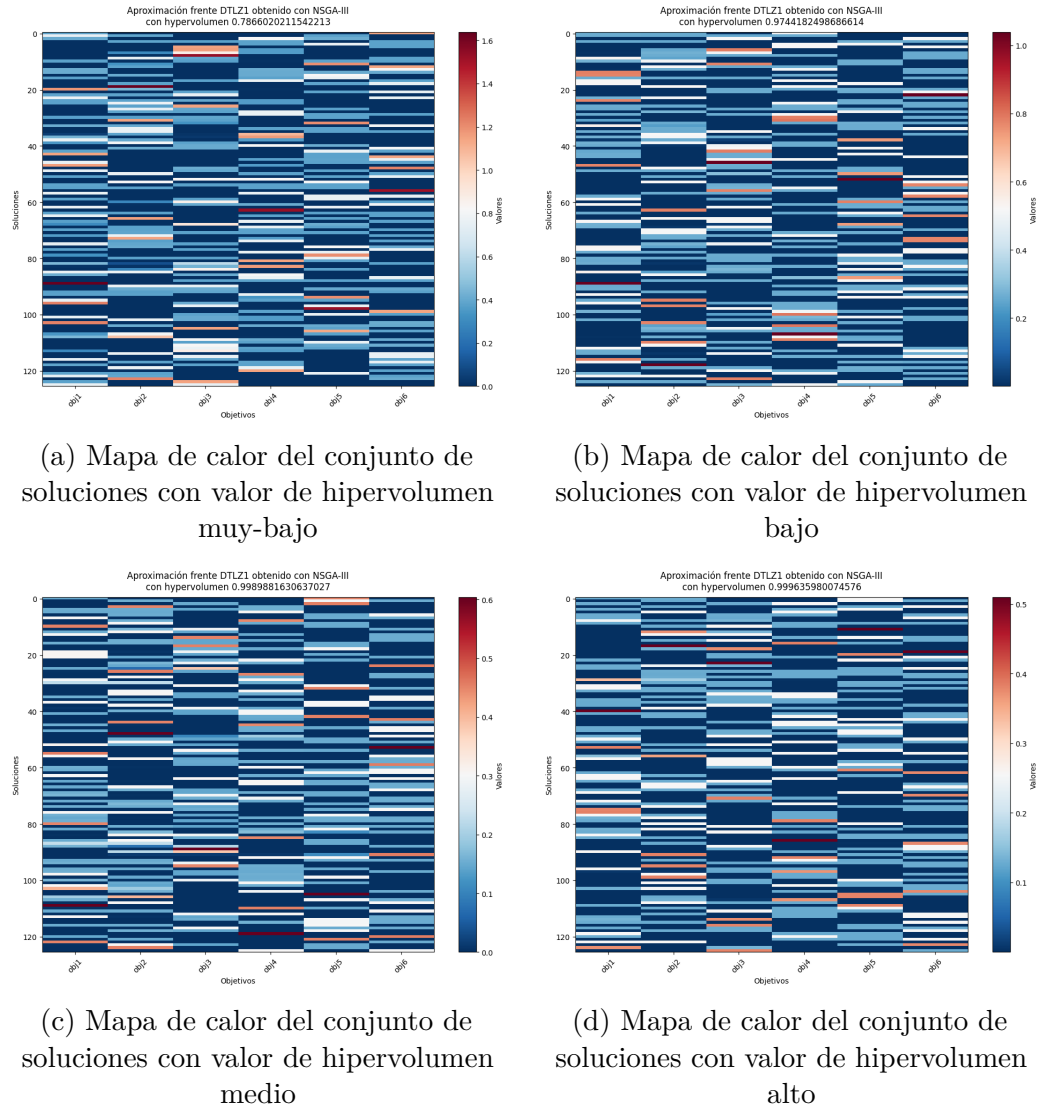


Figura 4.18: Mapas de calor de cuatro conjuntos de soluciones con diferentes valores de hipervolumen sin preparación de datos

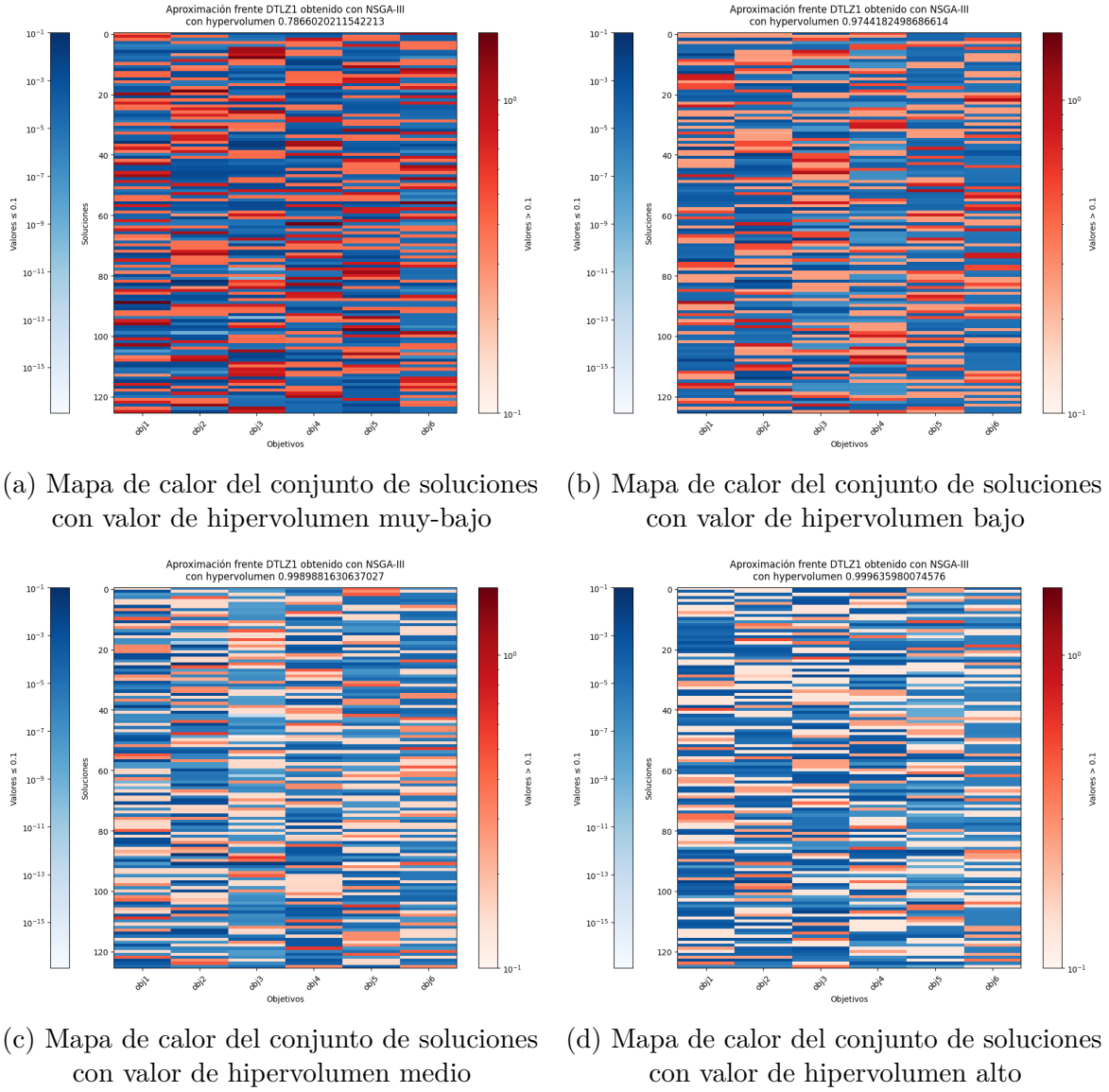


Figura 4.19: Mapas de calor de cuatro conjuntos de soluciones con diferentes valores de hipervolumen

4.6.2. Conclusiones

Se valida la metodología MESTVM demostrando cómo con una preparación de datos (escalamiento logarítmico, y normalización) mejoró la representación de las soluciones, haciendo interpretable el mapa de calor para observar convergencia. Con la preparación de los datos se logró que en el mapa de calor fuera posible observar de manera *clara* (una de las características ACES) el nivel de convergencia de diferentes conjuntos de soluciones, lo que inicialmente no era posible.

4.7. EXPERIMENTO 4: MEJORA DE VISUALIZACIÓN MEDIANTE TOPSIS Y VECTORES DE PESO PARA FACILITAR LA TOMA DE DECISIONES

El experimento tuvo por objetivo mejorar la representación del conjunto de soluciones del problema DTLZ1 aplicando el método TOPSIS que clasifica las soluciones por su distancia más cercana a una solución ideal y la distancia más lejana a una solución antiideal. Al clasificar las soluciones por el criterio antes mencionado, se busca observar las soluciones con el mejor desempeño en los objetivos definidos a través de un vector de pesos.

4.7.1. Diseño de experimento

Datos

Se utilizó un conjunto de soluciones del problema DTLZ1 de seis objetivos.

Método de ordenamiento

Las soluciones se ordenan por el valor de similitud a una solución ideal obtenido con el método **TOPSIS**; visto en la sección 2.10

Vectores de pesos

Se definieron 5 conjuntos de vectores de pesos con diferentes prioridades:

Cada conjunto contiene un número específico de vectores de pesos; resultado de la combinación de objetivos que se priorizan simultáneamente.

El siguiente ejemplo corresponde al **Conjunto 1**, en el cual se prioriza un objetivo a la vez.

Los pesos asignados a los objetivos se muestran en la Tabla 4.7:

Tabla 4.7. Ejemplo de vectores del Conjunto 1 (priorizando un objetivo)

Obj. 1	Obj. 2	Obj. 3	Obj. 4	Obj. 5	Obj. 6	Objetivos Priorizados
0.9	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	(1)
0.02	0.9	0.02	0.02	0.02	0.02	(2)
0.02	0.02	0.9	0.02	0.02	0.02	(3)
0.02	0.02	0.02	0.9	0.02	0.02	(4)
0.02	0.02	0.02	0.02	0.9	0.02	(5)
0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.9	(6)

En la Tabla 4.8 se lista cuantos vectores resultan al priorizar combinaciones de: 1 objetivo, 2 objetivos, 3 objetivos, 4 objetivos, y 5 objetivos.

Tabla 4.8. Cantidad de vectores en cada conjunto de prioridades

Conjunto	Descripción	Cantidad de Vectores
1	Prioriza un objetivo	6
2	Prioriza dos objetivos	15
3	Prioriza tres objetivos	20
4	Prioriza cuatro objetivos	15
5	Prioriza cinco objetivos	6
Total	—	62

Técnica de visualización

Se utilizó el mapa de calor para observar el desempeño de los objetivos en las soluciones.

4.7.2. Análisis y Resultados

Se presenta evidencia que la reorganización de las soluciones con el método TOPSIS mejora la representación visual de las soluciones en el mapa de calor, facilitando la toma de decisiones. Sin la organización de las soluciones, la tarea de seleccionar soluciones que cumplan criterios de preferencia sobre los objetivos es complicada; después del ordenamiento, se facilita el análisis de las compensaciones entre los objetivos.

Representación del conjunto de soluciones sin TOPSIS

Primero se muestra la representación del conjunto de 56 soluciones del problema DTLZ1 de seis objetivos en un mapa de calor en dos casos: el primer caso utilizando una escala lineal y el segundo caso utilizando dos escalas logarítmicas.

Debido a la presencia de valores de diferente orden, por ejemplo: $1e^{-01}$, $1e^{-02}$, $1e^{-32}$, $1e^{-03}$, $1e^{-04}$, $1e^{-05}$, $1e^{-06}$, $1e^{-07}$, $1e^{-08}$ y el uso de una escala lineal; en la Figura 4.20, lado izquierdo, se observa que los valores altos dominan la escala de colores; para solventar esto se utilizan dos escalas logarítmicas, una para valores menores o iguales a 0.1 y otra para valores mayores a 0.1, como es representado en la Figura 4.20 del lado derecho.

Posteriormente se muestran las representaciones de las soluciones ordenadas por TOPSIS utilizando distintos vectores de pesos.

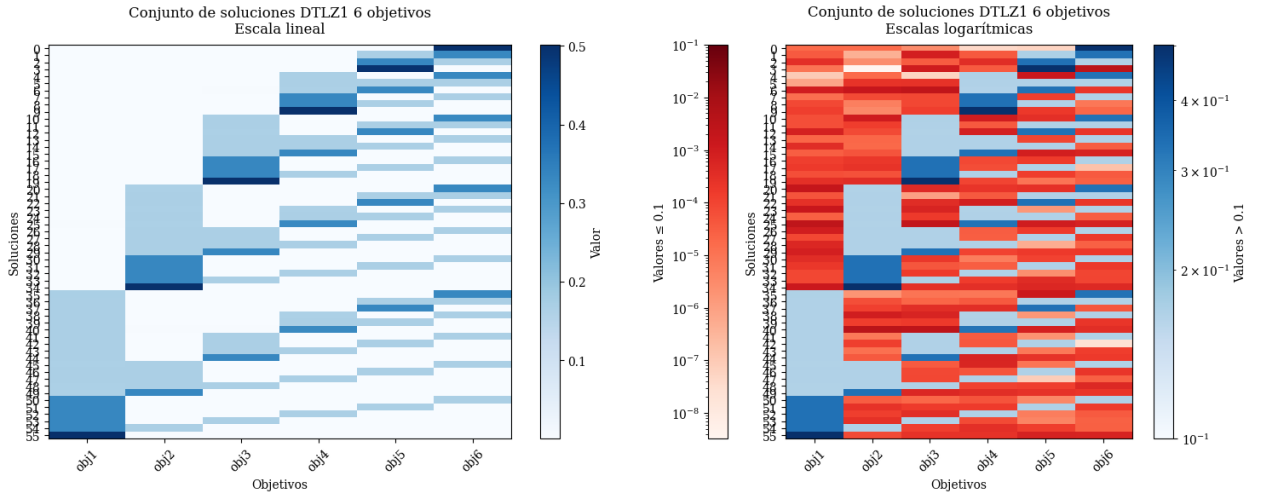


Figura 4.20: Representación de 56 soluciones del problema DTLZ1 de seis objetivos

Representación del conjunto de soluciones priorizando un objetivo

En la Figura 4.21 se da un peso de 0.9 al objetivo 1 y el resto de los objetivos se les asigna un mismo peso. De la figura se puede observar que aproximadamente la mitad de las soluciones tienen un buen desempeño en el objetivo 1, evidenciado por los colores rojos que corresponden a valores por debajo de 0.1. Con TOPSIS se ordenaron las soluciones con el mejor desempeño en el objetivo 1.

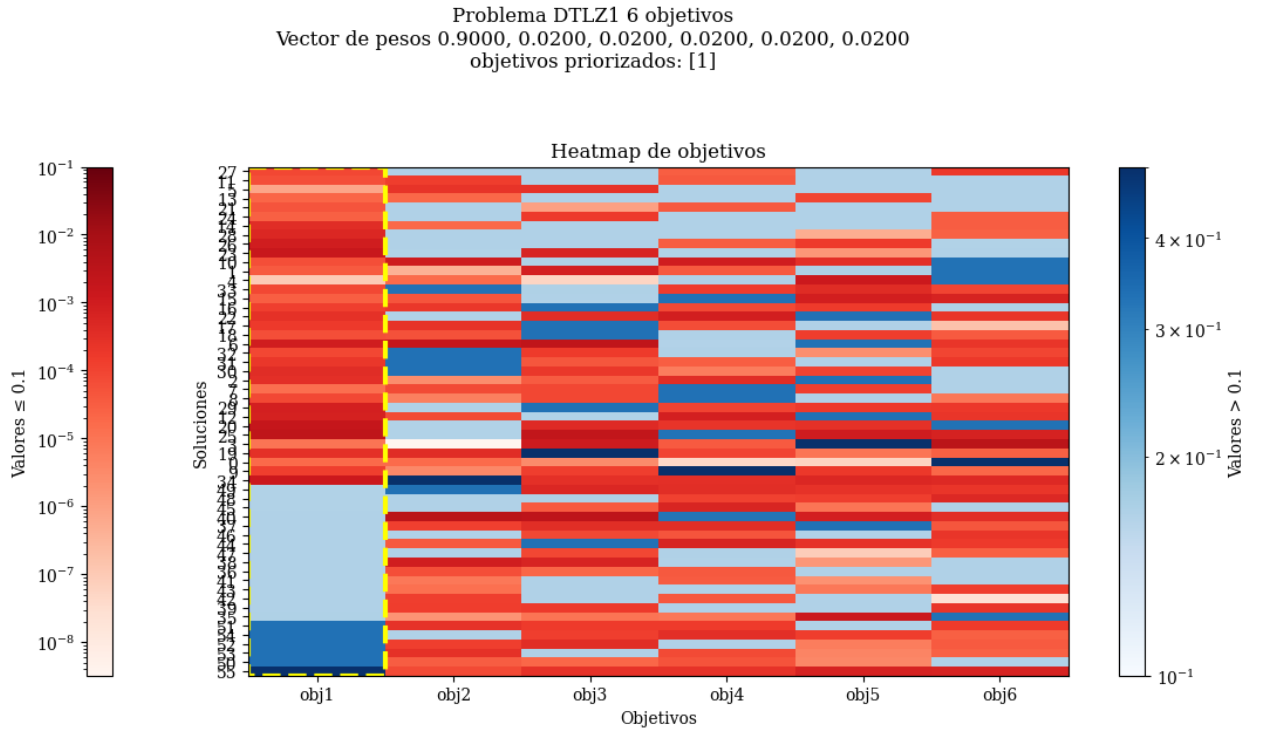


Figura 4.21: Representación de las soluciones del problema DTLZ1 ordenadas por TOPSIS priorizando el objetivo 1

Representación del conjunto de soluciones priorizando tres objetivos

En la Figura 4.22 se representa el conjunto de soluciones ordenado por TOPSIS aplicando un vector de pesos donde se priorizan los objetivos 2,3,5; como resultado de este vector de pesos, las soluciones mejor clasificadas; los objetivos 2, 3 y 5 tienen el mejor desempeño, como se puede observar en el gráfico.

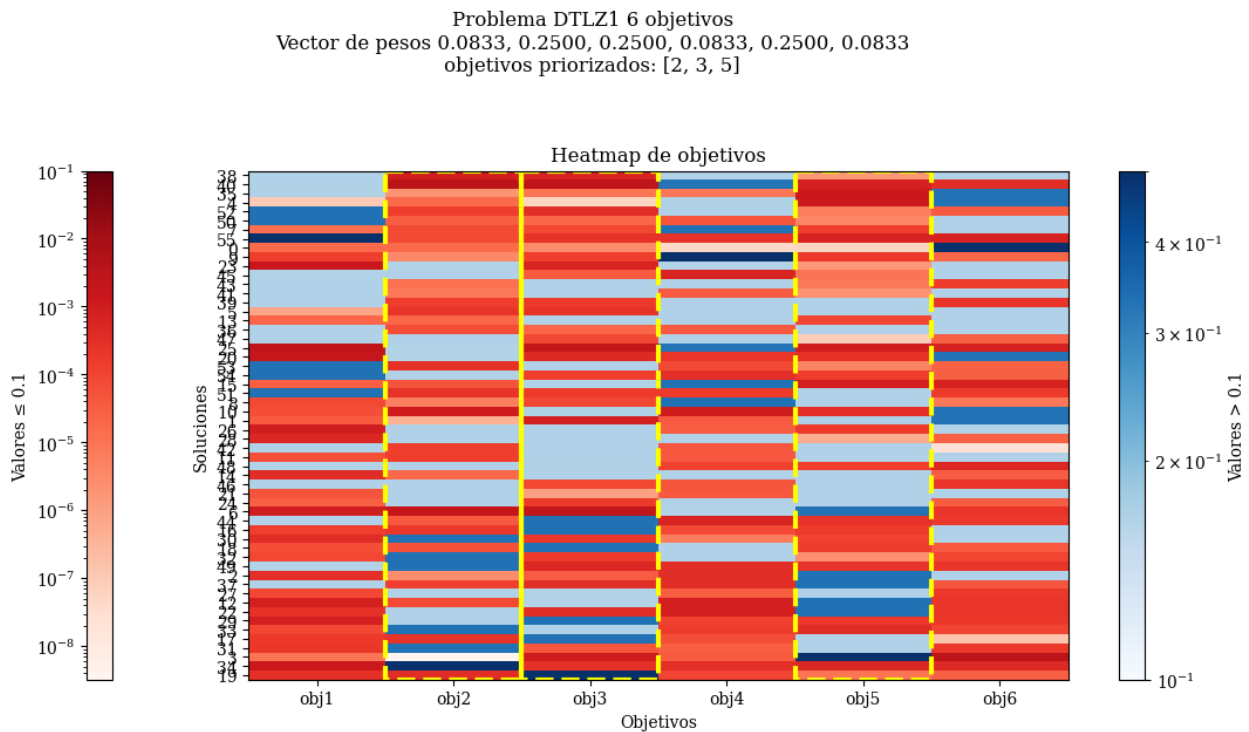


Figura 4.22: Representación de las soluciones del problema DTLZ1 ordenadas por TOPSIS priorizando los objetivos 2, 3, y 5

Representación del conjunto de soluciones priorizando cuatro objetivos

En la Figura 4.23 se representa el conjunto de soluciones ordenado por TOPSIS aplicando un vector de pesos donde se priorizan los objetivos 1,2,4,5; como resultado de este vector de pesos se observa que las soluciones mejor clasificadas son donde estos objetivos fueron priorizados,

evidenciado en el gráfico.

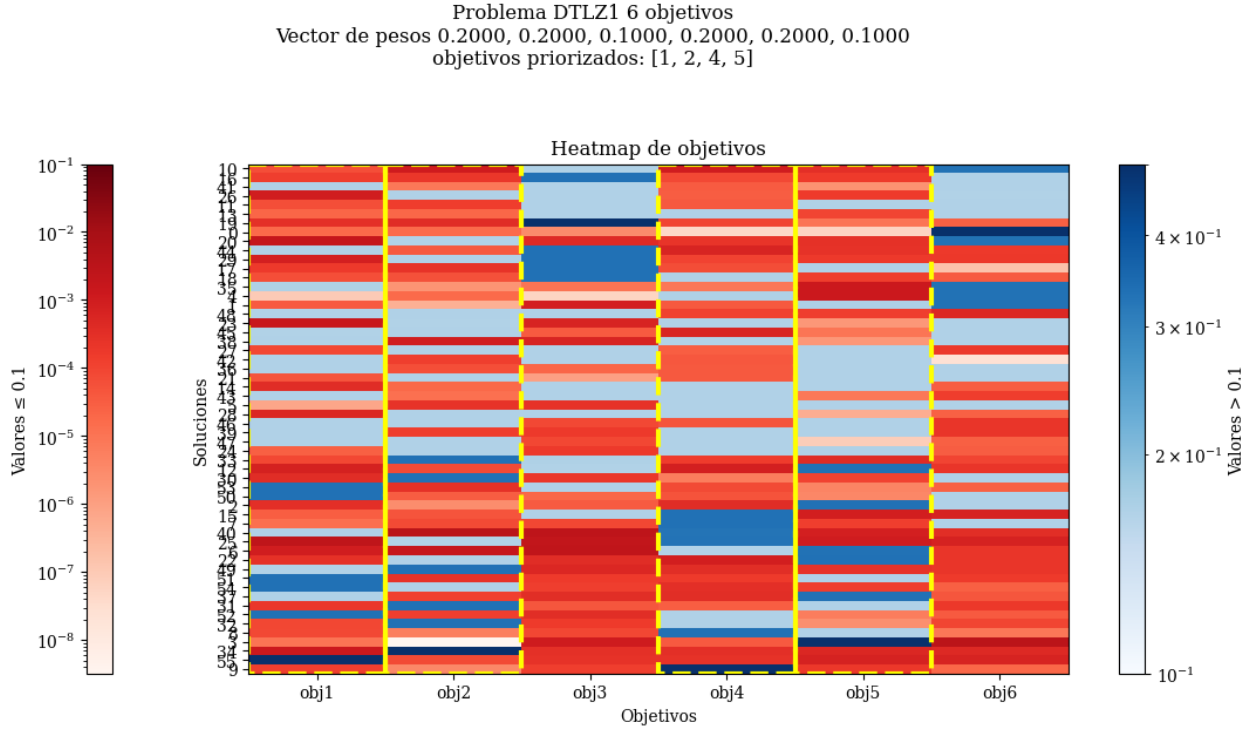


Figura 4.23: Representación de las soluciones del problema DTLZ1 ordenadas por TOPSIS priorizando los objetivos 1, 2, 4, y 5

4.7.3. Conclusiones

Se logra hacer interpretable el mapa de calor a través de utilizar TOPSIS como estrategia de ordenamiento, lo que llevo a representar de manera *clara* (una de las características ACES) las soluciones de más de tres objetivos. Lo anterior facilita a un TD, identificar soluciones con el mejor desempeño en objetivos específicos según su preferencias, lo que inicialmente era complejo observar sin el tratamiento.

Conclusiones y trabajos futuros

5.1. CONCLUSIONES

Se alcanzó el objetivo general planteado: "Mejorar la representación visual de soluciones de problemas de optimización de más de tres objetivos en alguna de las técnicas de visualización como apoyo a los tomadores de decisiones".

Para alcanzar el objetivo se propuso una metodología (MESTVM) que guía a un tomador de decisiones en la evaluación y selección de técnicas de visualización. Esta metodología tiene como marco de evaluación un conjunto de características conocidas en el estado del arte como ACES y su correlación con características visuales de las técnicas. Además, incluye una etapa en la que se aplican tratamientos a los datos para mejorar su representación cuando las

técnicas no son efectivas inicialmente.

La validación de la metodología se realizó llevando a cabo lo siguiente:

1. El análisis de cuatro técnicas de visualización (matriz de gráficos de dispersión: mapa de calor, gráfico de coordenadas paralelas, y gráfico de radar) que permitió conocer que aspectos específicos de un conjunto de soluciones de más de tres objetivos se pueden interpretar en ellas, como la forma del frente de Pareto en la MGD, valores extremos en un mapa de calor, la distribución de valores en cada uno de los objetivos en un GCP, o analizar soluciones individuales en un GR. También de este análisis se pudieron conocer las limitaciones inherentes a la forma en como son construidos los gráficos. Este conocimiento guió en que técnica utilizar para observar una propiedad específica en los conjuntos de soluciones pero también en como abordar las limitaciones para alcanzar esta meta.
2. Se estableció una correlación entre características visuales de los gráficos y las características ACES (precisión, claridad, empoderamiento y concisión) que definen a una visualización como efectiva. Para poder evaluar esta correlación, se establecieron indicadores tomando en cuenta como las características visuales de los gráficos (patrones de colores en el MC, tramas formadas por polilíneas en el GCP, regiones formadas por puntos en la MGD, tramas formadas los polígonos en un GR) permiten observar propiedades como convergencia o desempeño en objetivo específicos.
3. Se realizaron experimentos que demostraron que el tratamiento de los datos mejora la representación para observar una propiedad en el conjunto de soluciones. Por ejemplo, en un experimento usando el mapa de calor se logró observar la diferencia en convergencia de distintos conjuntos de soluciones que inicialmente no eran visibles mediante un escalamiento logarítmico y normalización de los datos. En otro experimento, se usó el

método TOPSIS como estrategia de ordenamiento para identificar en un mapa de calor las soluciones con mejor desempeño según preferencias de un tomador de decisiones.

Se confirmó la hipótesis planteada: "La reorganización de resultados considerando un sistema de preferencias específico hará más clara su visualización para la toma de decisiones en problemas de optimización de alta dimensionalidad".

5.2. TRABAJOS FUTUROS

Como trabajos futuros se propone:

- Integrar otros métodos de clasificación además de TOPSIS.
- Implementar MESTVM a un conjunto de datos reales.
- Analizar otras propiedades que se deseen observar.

Bibliografía

- Bisong, E. (2019). Google Colaboratory. En *Building Machine Learning and Deep Learning Models on Google Cloud Platform* (pp. 59-64). Apress. https://doi.org/10.1007/978-1-4842-4470-8{_}7
- Blank, J., & Deb, K. (2020). Pymoo: Multi-Objective Optimization in Python. *IEEE Access*, 8, 89497-89509. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2990567>
- Carr, D. B., Littlefield, R. J., Nicholson, W. L., & Littlefield, J. S. (1987). Scatterplot Matrix Techniques for Large N. *Journal of the American Statistical Association*, 82(398), 424-436. <https://doi.org/10.1080/01621459.1987.10478445>
- Coello, C., Van, D. A., & Lamont, G. B. (2007). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-36797-2>
- Das, I., & Dennis, J. E. (1998). Normal-Boundary Intersection: A New Method for Generating the Pareto Surface in Nonlinear Multicriteria Optimization Problems. *SIAM Journal on Optimization*, 8(3), 631-657. <https://doi.org/10.1137/S1052623496307510>
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182-197. <https://doi.org/10.1109/4235.996017>

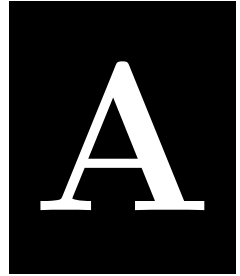
- Deb, K., Thiele, L., Laumanns, M., & Zitzler, E. (s.f.). Scalable multi-objective optimization test problems. *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. CEC'02 (Cat. No.02TH8600)*, 825-830. <https://doi.org/10.1109/CEC.2002.1007032>
- de Freitas, A. R., Fleming, P. J., & Guimarães, F. G. (2015). Aggregation Trees for visualization and dimension reduction in many-objective optimization. *Information Sciences*, 298, 288-314. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.11.044>
- Duan, R., Tong, J., Sutton, A. J., Asch, D. A., Chu, H., Schmid, C. H., & Chen, Y. (2023). Origami plot: a novel multivariate data visualization tool that improves radar chart. *Journal of Clinical Epidemiology*, 156, 85-94. <https://doi.org/10.1016/j.jclinepi.2023.02.020>
- Farina, M., Deb, K., & Amato, P. (2004). Dynamic Multiobjective Optimization Problems: Test Cases, Approximations, and Applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 8(5), 425-442. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2004.831456>
- Filipič, B., & Tušar, T. (2018). A taxonomy of methods for visualizing pareto front approximations. *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*, 649-656. <https://doi.org/10.1145/3205455.3205607>
- Gao, H., Nie, H., & Li, K. (2019). Visualisation of Pareto Front Approximation: A Short Survey and Empirical Comparisons. *2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, 1750-1757. <https://doi.org/10.1109/CEC.2019.8790298>
- Giovanni Misitano. (2023, junio). DESDEO23 Forum: Tutorial 1—General structure of DESDEO. https://desdeo.misitano.xyz/media/Tutorial_1_Structure_of_DESDEO.pdf.
- Grinstein, G., & Trutschl, M. (2001). High-Dimensional Visualizations. In: *7th Data Mining Conference-KDD 2001: San Francisco, California*.
- Gupta, P., & Bagchi, A. (2024). Data Visualization with Python. https://doi.org/10.1007/978-3-031-43725-0_{_}7

- He, Z., & Yen, G. G. (2016). Visualization and Performance Metric in Many-Objective Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 20(3), 386-402. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2015.2472283>
- Hwang, C.-L., & Yoon, K. (1981). *Multiple attribute decision making, methods and applications* (Vol. 186). Springer-Verlag.
- Inselberg, A., & Dimsdale, B. (s.f.). Parallel coordinates: a tool for visualizing multi-dimensional geometry. *Proceedings of the First IEEE Conference on Visualization: Visualization '90*, 361-378. <https://doi.org/10.1109/VISUAL.1990.146402>
- Jessica Hullman. (2019, marzo). The purpose of visualization is insight, not pictures: An interview with visualization pioneer Ben. <https://medium.com/multiple-views-visualization-research-explained/the-purpose-of-visualization-is-insight-not-pictures-an-interview-with-visualization-pioneer-ben-beb15b2d8e9b>.
- Jiang, S., & Yang, S. (2016). Convergence Versus Diversity in Multiobjective Optimization. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45823-6{_}92
- Kubota, M., Itoh, T., Obayashi, S., & Takeshima, Y. (2014). EVOLVE: A visualization tool for multi-objective optimization featuring linked view of explanatory variables and objective functions. *Proceedings of the International Conference on Information Visualisation*, 351-356. <https://doi.org/10.1109/IV.2014.43>
- Li, H., Deb, K., Zhang, Q., Suganthan, P., & Chen, L. (2019). Comparison between MOEA/D and NSGA-III on a set of novel many and multi-objective benchmark problems with challenging difficulties. *Swarm and Evolutionary Computation*, 46, 104-117. <https://doi.org/10.1016/j.swevo.2019.02.003>
- Li, M., Zhen, L., & Yao, X. (2017). How to Read Many-Objective Solution Sets in Parallel Coordinates [Educational Forum]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 12(4), 88-100. <https://doi.org/10.1109/MCI.2017.2742869>

- Lucken, C. v., Prieto, A. D. F., Vera, A. M. F., & Barán, B. (2017). Shape-based visual analysis of solutions for Multiobjective Optimization problems. *2017 XLIII Latin American Computer Conference (CLEI)*, 1-9. <https://doi.org/10.1109/CLEI.2017.8226446>
- McCormick, B. H., DeFanti, T. A., & Brown, M. D. (1987, noviembre). *Visualization in Scientific Computing* (inf. téc. N.º 6).
- Metsalu, T., & Vilo, J. (2015). ClustVis: a web tool for visualizing clustering of multivariate data using Principal Component Analysis and heatmap. *Nucleic Acids Research*, 43(W1), W566-W570. <https://doi.org/10.1093/nar/gkv468>
- Paz-Robles, M., Gomez-Santillan, C., Rangel-Valdez, N., Morales-Rodriguez, M. L., & Castillo-Valdez, G. (2024). Analysis of Accuracy on Data Visualization Techniques for Multi-objective Algorithm Performance Based on Convergence and Diversity Towards the Pareto Frontier. https://doi.org/10.1007/978-3-031-66731-2{_}10
- Pryke, A., Mostaghim, S., & Nazemi, A. (2007). *Heatmap Visualization of Population Based Multi Objective Algorithms* (inf. téc.).
- Qingfu Zhang & Hui Li. (2007). MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 11(6), 712-731. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2007.892759>
- Revista Digital Universitaria. (2005). Visualización científica. 12. <https://www.revista.unam.mx/vol.6/num12/art117/int117.htm>.
- Shang, K., Ishibuchi, H., He, L., & Pang, L. M. (2021). A Survey on the Hypervolume Indicator in Evolutionary Multiobjective Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 25(1), 1-20. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2020.3013290>
- Singh, V. K., & Tewari, V. (2022). Design of Improved 3D Radar charts for Multidimensional Data Visualization. *International Journal*, 10(12).
- Tzeng, G.-H., & Huang, J.-J. (2011, junio). *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications* (CRC Press, Ed.).

- Von Lücken, C., Barán, B., & Brizuela, C. (2014). A survey on multi-objective evolutionary algorithms for many-objective problems. *Computational Optimization and Applications*, 58(3), 707-756. <https://doi.org/10.1007/s10589-014-9644-1>
- Walker, D. J., Everson, R. M., & Fieldsend, J. E. (2013). Visualizing mutually nondominating solution sets in many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 17(2), 165-184. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2012.2225064>
- Wang, W. B., Huang, M. L., Nguyen, Q. V., Huang, W., Zhang, K., & Huang, T.-H. (2016). Enabling decision trend analysis with interactive scatter plot matrices visualization. *Journal of Visual Languages & Computing*, 33, 13-23. <https://doi.org/10.1016/j.jvlc.2015.11.002>
- Zhen, L., Li, M., Peng, D., & Yao, X. (2020). Objective reduction for visualising many-objective solution sets. *Information Sciences*, 512, 278-294. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.04.014>
- Zitzler, E. (2012, enero). Evolutionary multiobjective optimization. En *Handbook of Natural Computing* (pp. 872-904, Vol. 2-4). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-92910-9_{_}28

Anexos



Obtención de conjunto de soluciones experimento 1

En este anexo se presenta el proceso de obtención de los conjuntos de soluciones para el experimento 1.

Se utilizó el problema DTLZ1 con cuatro objetivos, cuya configuración se muestra en la tabla 1.1, en donde el número de variables se establece de acuerdo con el documento de Deb et al.

Tabla 1.1. Instancia del problema DTLZ1

Problema de prueba	Número de objetivos (M)	Número de variables ($n = M+k-1$) donde $k = 5$
DTLZ1	4	8

Cada algoritmo (NSGA-II y MOEA/D) fue ejecutado treinta veces, y se seleccionó el conjunto de soluciones con mayor valor de hipervolumen para ser representado en las técnicas de visualización. Las configuraciones de NSGA-II y MOEAD se muestran en las tablas 1.2 y 1.3

Tabla 1.2. Valores de los parámetros para el algoritmo NSGA-II

Parámetro	Valor
Tamaño de población	120 (ajustado de 300)
Generaciones	250
Operador de cruza	SBX
Probabilidad de cruce	1.0
Índice de distribución de cruza	20
Operador de mutación	Polinomial
Probabilidad de mutación	1/n
Índice de distribución de mutación	20

Tabla 1.3. Valores de los parámetros para el algoritmo MOEA/D

Parámetro	Valor
Tamaño de la población	120 (ajustado de 300)
Generaciones	250
Operador de cruce	SBX
Probabilidad de cruza	1.0
Índice de distribución de cruza	20
Operador de mutación	Polinomial
Índice de distribución de mutación	20
T	20
Generación de vectores	Método Das-Dennis (Das & Dennis, 1998)
Enfoque de descomposición	Tchebycheff

Obtención de conjunto de soluciones experimento 2

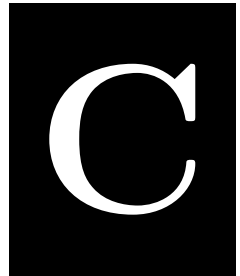
El POM seleccionado para resolver fue el DTLZ1 de cuatro objetivos. Los algoritmos utilizados para obtener los conjuntos de soluciones fueron NSGA-III y MOEA/D; las configuraciones correspondientes son listadas en las Tablas 2.1 y 2.2.

Tabla 2.1. Configuración del algoritmo NSGA-III para generar 30 conjuntos de soluciones con diferentes probabilidades de cruce y mutación.

Parámetro	Valor/Método
Tamaño de población	56
Método de cruce	Cruza uniforme
Probabilidad de cruce	{0.8, 0.9, 1.0}
Método de mutación	Mutación polinomial
Probabilidad de mutación	{0.1, 0.15, 0.2}
Número de generaciones	{500, 600, 700}
Número de particiones	5
Direcciones de referencia	das-dennis
Eliminación de duplicados	Sí

Tabla 2.2. Configuración del algoritmo MOEA/D para generar 30 conjuntos de soluciones con diferentes semillas aleatorias.

Parámetro	Valor/Método
Número de vecinos	20
Método de cruce	SBX (Simulated Binary Crossover)
Probabilidad de cruce	1.0
Índice de distribución de cruce (η_c)	20
Método de mutación	Mutación polinomial
Índice de distribución de mutación (η_m)	20
Probabilidad de apareamiento con vecinos	0.7
Número de generaciones	350
Direcciones de referencia	das-dennis
Número de puntos de referencia	56
Número de ejecuciones	30 (semillas 1-30)



Obtención de conjunto de soluciones experimento 3

En este anexo se presenta el proceso de obtención de los conjuntos de soluciones para el experimento 3.

Se generaron treinta conjuntos de soluciones del problema DTLZ1 de seis objetivos usando el algoritmo NSGA-III para resolverlo; una vez generados los conjuntos de soluciones, se calculó el valor de hipervolumen para evaluar el nivel de convergencia de cada uno de los conjuntos de soluciones.

La Tabla 3.1 muestra treinta configuraciones de parámetros del algoritmo NSGA-III con el que se resolvió el problema DTLZ1.

Tabla 3.1. Configuraciones algoritmo NSGA-III

Config.	número_vec.	prob_empare.	eta_crossover	eta_mutation	Gen.
1	15	0.8	15	15	200
2	15	0.8	15	20	150
3	15	0.6	10	15	250
4	20	0.6	15	10	250
5	15	0.6	15	15	250
6	10	0.8	20	20	200
7	10	0.6	10	15	150
8	10	0.7	20	20	250
9	15	0.8	20	10	150
10	20	0.7	20	10	250
11	20	0.8	15	20	250
12	20	0.7	15	20	150
13	15	0.6	10	20	250
14	20	0.6	15	20	150
15	10	0.6	10	20	200
16	20	0.7	10	15	250
17	10	0.7	15	20	200
18	10	0.6	15	10	150
19	15	0.6	20	10	150
20	10	0.8	15	10	150
21	10	0.6	20	20	200
22	15	0.8	10	20	150
23	20	0.7	15	10	150

Continúa en la siguiente página

Tabla 3.1 – Continúa desde la página anterior

Config.	número_vec.	prob_empare.	eta_crossover	eta_mutation	Gen.
24	10	0.6	15	20	200
25	10	0.7	15	15	250
26	20	0.6	20	15	150
27	10	0.7	20	15	250
28	10	0.6	20	15	200
29	15	0.8	15	10	250
30	20	0.7	20	10	250

Parámetros comunes del algoritmo NSGA-III utilizado:

- Tamaño población=126
- Método de cruce=Cruza Uniforme
- Método de mutación = Mutación polinomial
- Eliminación de duplicados = Verdadero

La Tabla 3.2 lista los valores de hipervolumen para cada uno de los conjuntos de soluciones obtenidos.

Tabla 3.2. Resultados del Hipervolumen para los conjuntos de soluciones

Conjunto de Soluciones	Hipervolumen
1	0.979058781311351

Continúa en la siguiente página

Tabla 3.2 – Continúa desde la página anterior

Conjunto de Solución	Hipervolumen
2	0.998988163063702
3	0.974418249868661
4	0.976883209537088
5	0.999405000038149
6	0.982601393751986
7	0.999319105536281
8	0.999628195758286
9	0.999501626718186
10	0.872168636246303
11	0.965284491871516
12	0.999595948099846
13	0.999620744842102
14	0.999635980074576
15	0.999382265986721
16	0.975541416646814
17	0.931166988520318
18	0.999566850860849
19	0.976490198810526
20	0.970839541510896
21	0.786602021154221
22	0.999557064396834
23	0.999405670411605
24	0.976692092954675

Continúa en la siguiente página

Tabla 3.2 – Continúa desde la página anterior

Conjunto de Solución	Hipervolumen
25	0.999121198256937
26	0.999471608111965
27	0.999600230276893
28	0.999628630291549
29	0.957534032694060
30	0.998062451938978