

	Titulación	Código: ITS LP-SAC-PG-010-05
		Revisión: 2
	Formato de Liberación del Proyecto para la Titulación Integral.	Página 1 de 1

Soledad de Graciano Sánchez, S.L.P. a, 20/02/2025

ASUNTO: Liberación de Proyecto
para la Titulación Integral

C. MARIO CÉSAR PLANCARTE RODRÍGUEZ
JEFE DE LA DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
P R E S E N T E.

Por este medio le informo que ha sido liberado el siguiente proyecto para la Titulación Integral:

Nombre del Egresado:	GÁMEZ MONTANTE ARTURO YAZKIN
Carrera:	INGENIERÍA MECÁNICA
No. De Control:	17181248
Nombre del Proyecto:	SIMULACIÓN NÚMERICA DE PRUEBAS DE TENSIÓN EN PROBETAS DE ALEACIÓN DE ALUMINIO 6061 A TEMPERATURAS POR DEBAJO DE SU PUNTO DE RECRISTALIZACIÓN
Producto:	TESIS

Agradezco de antemano su valioso apoyo en esta importante actividad para la formación profesional de nuestros egresados.

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN TECNOLÓGICA
ATENTAMENTE

INSTITUTO TECNOLÓGICO
DE SAN LUIS POTOSÍ

JAVIER VLADÍMIR RODRÍGUEZ AVALOS

Nombre y Firma del Jefe de Departamento Académico

PEDRO DE JESÚS GARCÍA ZUGASTI

Nombre y Firma del asesor del Proyecto

c.c.p. Expediente

P-SAC-PG-010-05

Rev.2

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN LUIS POTOSÍ



OPCIÓN

TITULACIÓN INTEGRAL CON PRODUCTO: TESIS

“Simulación numérica de pruebas de tensión en probetas de aleación de aluminio 6061 a temperaturas por debajo de su punto de recristalización”

Para obtener el título de:

INGENIERO MECÁNICO

Presenta:

ARTURO YAZKIN GÁMEZ MONTANTE

Agradecimientos

A MI FAMILIA

Los que no han descubierto su verdadera riqueza son mendigos aun cuando tengan gran riqueza material, tengo la bendición de haber descubierto la mía a tan temprana edad, mi querida familia, mi mamá Juana Ma. Montante Morales y a mi papá Martin Gámez Jasso, a los que le agradezco infinitamente por hacerme el hombre que soy, a mis hermanos Iván Martin Gamez Montante y a Karim Mizraim Gámez Montante, gracias por ser mi ejemplo a seguir y por transmitirme sus ganas de aprender.

A MIS PROFESORES

Sin lugar a dudas hay maestros los cuales dejan huellas en nosotros que aprenden con nosotros, nos transmiten ese amor por su materia y nos hacen cuestionarnos, todas esas y más virtudes gracias.

Muchas gracias Mtro. Gabriel Granja, por siempre confiar en mí y hacerme creer en mí mismo.

Dr. Pedro Zugasti, un honor haber trabajado con usted, sus enseñanzas, consejos y confianza, realmente estoy muy agradecido por todo su apoyo.

Mtro. Enrique Vázquez, por compartir conmigo sus conocimientos y la confianza entregada.

A MIS AMIGOS

Gracias a todos mis amigos por todo el apoyo, la camaradería, gracias por estar a mi lado, escucharme, el consuelo que me brindan, los consejos, por ayudar a sobrellevar mis errores y por ayudarme a aprender de ellos.

Índice

Capítulo 1. Introducción.....	1
1.1 Introducción.....	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Planteamiento del problema	4
1.4. Justificación.....	5
1.5. Objetivos	6
1.5.1. Objetivo general.....	6
1.5.2. Objetivos específicos	6
1.6. Alcances.....	7
1.7. Limitaciones	7
1.8. Hipótesis	7
Capítulo 2. Marco teórico	8
2.1. Maquina universal de pruebas mecánicas.....	8
2.2. Probeta de ensayo de tracción	9
2.2.1. Métodos estándar para ensayo de tracción en materiales metálicos.....	11
2.3. Ensayo de tracción	11
2.3.1. Diagrama esfuerzo-deformación	12
2.3.2. Propiedades obtenidas en una prueba de tracción	14
2.4. Análisis de elementos finitos	17
2.4.1. Geometrías del elemento.....	19
2.4.2. Método de elemento finito.....	21
2.4.3. Aplicación de la carga.....	22
2.4.4. Técnicas de modelado	23
2.4.5. Proceso de solución del elemento finito	24
Capítulo 3. Desarrollo.....	35
3.1. Cálculo de elemento puntual lineal	35
3.2. Calculo de elemento viga	39
3.3. Modelado de probetas.....	51
3.4. Calculo de modulo elástico y limite elástico.....	51
3.5. Simulación Solidworks®	54
3.5.1. Declaración de nuevo material en Solidworks®	54
3.5.2. Análisis Solidworks®	55
3.5.3. Control de unidades.....	56
3.6. Simulación COMSOL Multiphysics®	57

3.6.1. Nuevo estudio de tensión.....	57
3.6.2. Importación de dibujos.....	57
3.6.3. Declaración de nuevo material.....	58
3.6.4. Análisis en COMSOL Multiphysics®	59
3.6.5. Control de unidades.....	60
Capítulo 4. Resultados	60
4.1. Resultados obtenidos en cálculos de propiedades mecánicas a aleaciones de aluminio 6061.....	60
4.2. Resultados obtenidos en Solidworks®	62
4.3. Resultados obtenidos en COMSOL Multiphysics®	64
Capítulo 5. Conclusiones	66
Competencias desarrolladas y/o aplicadas	67
Bibliografía.....	69

Capítulo 1. Introducción

1.1 Introducción

En los últimos años el sector industrial ha exigido una mayor sustentabilidad debido a la provocación de fuertes problemas ambientales, incluyendo la reducción de consumo de combustible y sus emisiones, así mismo se ha buscado incrementar el uso de materiales reciclados. Por lo tanto, la industria automotriz está examinando las propiedades de nuevos materiales así como sus procesos de fabricación, para reducir el peso de componentes, y a la vez aumentar su resistencia y seguridad de los vehículos. Al disminuir el peso de los automóviles se logra reducir el consumo de combustible y sus emisiones.

La característica del aluminio de presentar una alta resistencia a la corrosión y una alta tasa de reciclaje conduce a una creciente demanda de las aleaciones de aluminio concentradas principalmente para vehículos ligeros [1]. Las aleaciones de aluminio con tratamiento térmico presentan una ventaja en comparación a las aleaciones de aluminio no tratables térmicamente.

Sin embargo, las aleaciones de aluminio exhiben una baja conformabilidad y recuperación del material que no es despreciable en los procesos de conformado a temperatura ambiente. Una temperatura tibia, por debajo de la temperatura de recristalización del material, aumenta la capacidad de la lámina de metal para ser deformada de manera deseable con baja recuperación elástica [2].

Las propiedades de los materiales pueden ser estudiadas de dos formas; Creando una serie de probetas físicamente (lo cual suele ser poco costoso), o bien realizar simulaciones por computadora mediante dibujos CAD y análisis de elemento finito. Los componentes mecánicos en forma de vigas, barras simples, etc., se analizan con bastante facilidad por medio de métodos básicos de la mecánica que proporcionan soluciones aproximadas. Sin embargo, los componentes reales rara vez son tan sencillos, y el diseñador se ve forzado a realizar aproximaciones menos eficaces mediante soluciones cercanas, experimentación o métodos numéricos [3].

Existe un gran número de técnicas numéricas que se emplean en aplicaciones de ingeniería para las cuales la computadora digital es sumamente útil. En diseño mecánico, en el cual se utiliza de manera considerable el software de diseño asistido por computadora (CAD), el método de análisis que se integra perfectamente con el CAD es el análisis de elemento finito (FEA, por sus siglas en inglés).

Existe una diversidad de paquetes de software comerciales de FEA que se encuentran disponibles, tal como COMSOL Multiphysics, ANSYS, NASTRAN, etcétera.

La investigación sobre este tema tiene una gran relevancia para la obtención de nueva información de los materiales a explorar en la industria y se ha centrado en:

- a) Introducción al elemento finito
- b) El modelado en software CAD [4]
- c) Adición de materiales personalizados en Software FEA
- d) La caracterización y modelado del comportamiento mecánico a temperaturas tibias

1.2. Antecedentes

El análisis de elemento finito (Finite Element Analysis, FEA) es una técnica utilizada en ingeniería para analizar y predecir el comportamiento de estructuras y sistemas sometidos a cargas y esfuerzos. El método se basa en la división del objeto de estudio en pequeñas secciones conocidas como elementos finitos, y se utiliza para predecir el comportamiento de la estructura bajo diferentes condiciones de carga y temperatura.

El FEA tiene sus raíces en la teoría de la elasticidad, una rama de la mecánica de sólidos que se ocupa del estudio del comportamiento elástico de los materiales sometidos a deformaciones. La teoría de la elasticidad fue desarrollada por el matemático y físico alemán Carl Friedrich Gauss a principios del siglo XIX, y fue luego perfeccionada por el físico francés Augustin-Louis Cauchy y el matemático británico Sir William Thomson (conocido como Lord Kelvin).

El FEA como lo conocemos hoy en día fue desarrollado en la década de 1950 por

los ingenieros civiles ingleses Brian D. Haliday y William Prager, quienes utilizaron el método para analizar el comportamiento de estructuras sometidas a cargas. Desde entonces, el FEA ha sido ampliamente utilizado en una variedad de campos, incluyendo la ingeniería civil, mecánica, aeroespacial y de materiales.

El análisis de elemento finito se comenzó a utilizar en software de computadora a mediados de la década de 1960, con la introducción de los primeros programas de FEA en mainframes. En la década de 1970, con el surgimiento de las computadoras personales y la disponibilidad de software de FEA más accesible y fácil de usar, el método comenzó a ser utilizado de manera más amplia en la industria.

En la actualidad, hay una gran variedad de software de FEA disponibles en el mercado, que van desde programas gratuitos y de código abierto hasta sofisticados programas comerciales utilizados por empresas de ingeniería y otras industrias. Estos programas de FEA suelen incluir herramientas de modelado y análisis, así como opciones de visualización y presentación de resultados.

El FEA permite analizar el comportamiento de estructuras y sistemas sometidos a diferentes condiciones de carga y temperatura, por lo que es posible utilizar el método para realizar análisis termodinámicos.

En el FEA, se pueden realizar análisis térmicos para predecir el comportamiento térmico de una estructura sometida a diferentes condiciones de temperatura. Esto puede ser útil para evaluar el comportamiento de una estructura en situaciones de cambio de temperatura, como cuando se somete a una estructura a altas temperaturas durante un incendio, o cuando se somete a una estructura a temperaturas extremas durante el funcionamiento.

El FEA también se puede utilizar para realizar análisis termodinámicos más complejos, como el análisis de la transferencia de calor en sistemas de intercambio de calor. Estos análisis pueden ser útiles para optimizar la eficiencia energética de sistemas térmicos y mejorar su rendimiento.

El trabajo en tibio se ha utilizado durante siglos en diferentes culturas y épocas. En

la antigüedad, se utilizaban fuegos de leña y forjas para calentar las piezas de metal y luego se aplicaba la técnica de trabajo adecuada para darle forma. Con el tiempo, se desarrollaron herramientas y máquinas más sofisticadas para facilitar y agilizar el proceso de trabajo en tibio.

El trabajo en tibio se refiere a un proceso de calentamiento de piezas metálicas para poder darle forma, ya sea mediante la aplicación de presión o golpes. Este proceso se utiliza en la industria metalúrgica y de la construcción para fabricar piezas con diferentes formas y tamaños.

El trabajo en tibio se puede realizar mediante diversas técnicas, como el martillado, el estirado, el forjado y el extrusado. Cada una de estas técnicas requiere una temperatura específica para que la pieza se vuelva suficientemente maleable para poder ser trabajada.

En la actualidad, el trabajo en tibio sigue siendo una técnica muy utilizada en la industria metalúrgica y de la construcción, y se ha vuelto más preciso y eficiente gracias a la utilización de tecnología de punta y procesos automatizados.

1.3. Planteamiento del problema

San Luis Potosí es una región importante en términos económicos en México, según el Banco de México, el PIB de San Luis Potosí en 2019 fue de \$146 mil millones de pesos mexicanos, lo que representa aproximadamente el 1,6% del PIB total del país. Su economía se ha desarrollado en torno a la industria manufacturera y la exportación.

Algunas de las actividades económicas más importantes en la región incluyen:

Industria automotriz: San Luis Potosí es un importante centro de producción de bienes de capital y componentes para la industria automotriz. Muchas empresas multinacionales tienen operaciones en la región.

Fabricación de maquinaria y equipo de construcción: San Luis Potosí cuenta con una amplia variedad de empresas dedicadas a la fabricación de maquinaria y equipo de construcción, como grúas, palas mecánicas y equipo de compactación.

Industria metal-mecánica: San Luis Potosí es un importante centro de producción

de piezas de maquinaria y productos de metal para la construcción.

Procesamiento de alimentos: San Luis Potosí cuenta con una amplia variedad de empresas dedicadas al procesamiento de alimentos, como la producción de aceite de maíz, harinas y alimentos para animales.

La industria metal-mecánica en San Luis Potosí es un sector importante de la economía de la región. La ciudad de San Luis Potosí es conocida por ser un importante centro de producción de bienes de capital y componentes para la industria automotriz, así como también es un importante centro de producción de maquinaria y equipo de construcción.

Debido a que a nivel regional San Luis Potosí cuenta con un gran número de Industrias en el sector metal-mecánico, muchos de los procesos industriales de formado de metal se basan en rolado y estampado. Actualmente, dichos procesos se llevan a cabo con trabajo en frío. El presente trabajo, pretende contribuir con un método alterno experimental de calentamiento para la caracterización del aluminio 6061 a altas temperaturas por debajo del punto de recrystalización. El estudio se justifica por la elevada demanda en los procesos de formado en lámina. La incidencia de los resultados radica en la eficiencia de los procesos reduciendo así los consumos energéticos de los procesos.

1.4. Justificación

Actualmente, la búsqueda de nuevos procesos de fabricación en la industria ha ido incorporando el trabajo en tibio, un proceso que ronda entre la temperatura del punto de recrystalización, pero sin llegar a ella, esto debido a la necesidad de reducir los costes de energía que se puede consumir, calentando demasiado los metales sobrepasando dicho punto de recrystalización o bien usando demasiada fuerza para estampar, extrudir, doblar láminas de metal, esto sin añadirle alguna temperatura. El trabajo en tibio pretende usar las mismas técnicas de fabricación, pero, calentando un poco el metal para hacerlo más blando y no someterlo a tanta fuerza, reduciendo y llegando a un equilibrio tanto de energía, como de fuerza y por

consecuencia se contribuye a reducir las emisiones de gases contaminantes asociadas a los procesos de fabricación.

La realización de este trabajo sirve para ampliar la base de datos de curvas esfuerzo-deformación ingenieril del aluminio 6061 a altas temperaturas por debajo de su punto de recristalización. Además de contribuir a la comunidad con el método para ampliar dicho catalogo en algunos Softwares de Análisis de Elemento Finito (Solidworks, COMSOL Multiphysics).

El obtener curvas esfuerzo-deformación ingenieril a distintos rangos de temperaturas por debajo de la recristalización ayuda a los diseñadores e investigadores a mejorar los cálculos de los diseños, con las cuales se puedan realizar simulaciones virtuales (con programas de computadora basados en el Método del Elemento Finito) más cercanas a los procesos reales, y utilizar materiales de menor costo cuyas propiedades se mejoran por el incremento de temperatura.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Por medio de la simulación de análisis de elemento finito, poder observar cuán alejados están de la realidad los datos obtenidos del software, así mismo añadiendo múltiples factores de temperatura pudiendo observar el comportamiento de las probetas de aluminio 6061 con temperaturas por debajo del punto de recristalización.

1.5.2. Objetivos específicos

Además de usar softwares de simulación, se busca hacer de esta una guía para aprender el uso de los softwares.

- Conseguir la creación de materiales personalizados en ambos softwares con propiedades obtenidas de pruebas de tensión reales.

1.6. Alcances

Los resultados de este trabajo son de elevada utilidad para confiar en los softwares y sus bases de datos de curvas de esfuerzo-deformación ingenieril con dependencia de la temperatura. Que cualquiera pueda adentrarse a este ramo de la ingeniería mecánica y obtenga respuesta a sus inquietudes.

1.7. Limitaciones

- La máquina de pruebas original es un modelo antiguo de aproximadamente 50 años, la cual utiliza papel milimétrico para generar las curvas esfuerzo. La precisión de la máquina de pruebas no se conoce con exactitud.
- El tamaño de muestra de las probetas de aluminio 6061 está limitado por los precios de maquinado.
- La computadora usada para simular tiene limitaciones de procesamiento por lo que el mapeado en las probetas son predeterminadas, por lo que no se puede llegar a generar una maya extremadamente fina, esto hace perder milésimas de precisión.
- El rango de temperatura durante la prueba de tensión es variable debido a que es un método experimental. La variación de la temperatura depende del tiempo de montaje y del tiempo de la prueba de tensión. Por lo tanto esta misma limitación en los datos se mira hacia el software usado.

1.8. Hipótesis

La simulación por computadora es un método confiable con el cual podemos encontrar la temperatura óptima para poder trabajar el aluminio 6061 a mayor temperatura determinando así el esfuerzo y la ductilidad como función de la temperatura.

Capítulo 2. Marco teórico

2.1. Máquina universal de pruebas mecánicas

Una máquina universal de pruebas mecánicas es un dispositivo utilizado para evaluar la resistencia y el rendimiento de diferentes materiales y componentes mecánicos. Esta máquina puede aplicar una amplia variedad de fuerzas y cargas a una muestra, y medir la respuesta de la muestra a esas cargas.

Las máquinas universales de pruebas mecánicas son comúnmente utilizadas en la industria para probar componentes de maquinaria, estructuras de construcción, materiales de ingeniería y otros productos. Esto se hace para asegurar que estos componentes y materiales cumplan con los requisitos de calidad y rendimiento establecidos.

Existen diferentes tipos de máquinas universales de pruebas mecánicas, cada una diseñada para evaluar un conjunto específico de propiedades mecánicas. Algunos ejemplos incluyen máquinas de tracción, máquinas de compresión y máquinas de flexión. También hay máquinas universales de pruebas mecánicas que pueden evaluar propiedades como la dureza, la resistencia a la fatiga y la resistencia a la fractura.

Para llevar a cabo una prueba con una máquina universal de pruebas mecánicas, se coloca la muestra en el dispositivo y se aplican las cargas y fuerzas específicas. La máquina registra entonces la respuesta de la muestra a esas cargas y fuerzas, que pueden incluir deformaciones, cambios en la temperatura y otros fenómenos. Los resultados de la prueba se comparan con los límites especificados para determinar si la muestra cumple con los requisitos de calidad y rendimiento [5].

En resumen, las máquinas universales de pruebas mecánicas (Figura 2.1) son herramientas esenciales en la industria para garantizar la calidad y el rendimiento de los materiales y componentes mecánicos.



Figura 2.1: Máquina universal de ensayo de tracción [6].

2.2. Probeta de ensayo de tracción

Para estos ensayos se utilizan trozos de material llamados **"probetas"** o **"muestras"**.

Una probeta del material es un trozo de material con dimensiones normalizadas para realizar ensayos, como el de tracción. Estas dimensiones normalizadas son la longitud de la probeta y el área de su sección transversal.

Se coloca y agarra por sus extremos la probeta entre dos accesorios llamados "agarres" o "mordazas" que sujetan la probeta en la máquina del ensayo (al principio y al final puedes ver la imagen de alguna máquina de tracción). Normalmente la probeta se coloca en vertical.

La figura 2.2 Muestra la forma y medidas recomendadas en una probeta ASTM

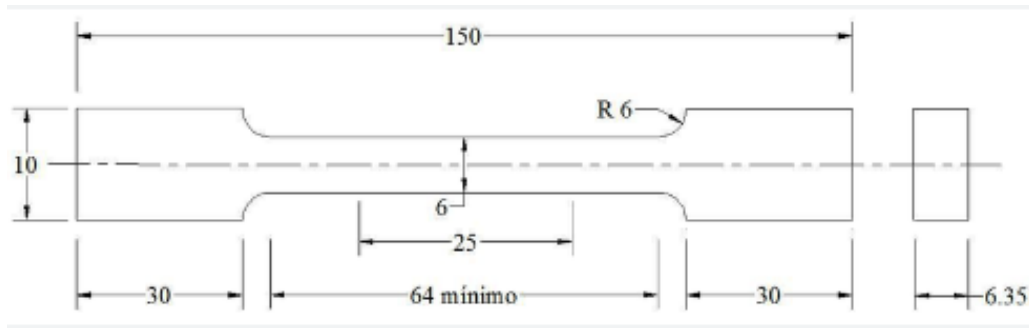


Figura 2.2: Probeta típica de tensión (Probeta de tracción uniaxial ASTM) [6]

Las distancias entre los extremos de la sección del medidor y los hombros deben ser lo suficientemente grandes, como para que los extremos no limiten la deformación dentro de la sección calibrada. Mientras que la longitud del medidor debe ser superior en relación a su diámetro, para evitar que el rango de esfuerzo sea más complejo que la tensión simple.

La figura 2.3 muestra algunas formas de sujeción que existen

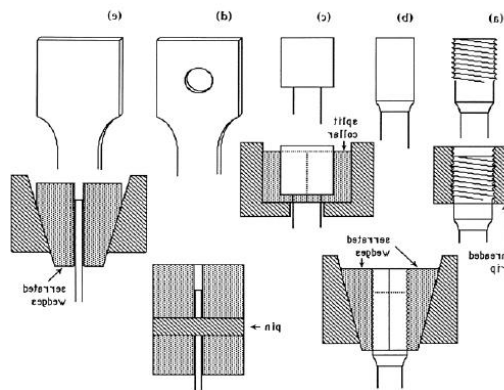


Figura 2.3: Sistemas para sujeción de probetas. Para especímenes redondos, estos incluyen agarres roscados (a), cuñas dentadas (b) y, para especímenes con extremos a tope, collares divididos limitados por un collar sólido (c). Las muestras de lámina pueden sujetarse con pasadores (d) o cuñas dentadas (e).

La consideración más importante en la selección de un método de sujeción es asegurar que la muestra pueda mantenerse sin deslizamiento a la carga máxima o falla en la sección de agarre y evitar la flexión.

2.2.1. Métodos estándar para ensayo de tracción en materiales metálicos

Estrictamente hablando, esta ASTM contiene dos estándares, por lo que la norma ASTM E8 debe distinguirse de la norma ASTM E8M. Mientras que la norma **ASTM E8 indica las unidades en pulgadas y libras, la ASTM E8M utiliza unidades del SI** [6]. Según esto, los valores característicos determinados con un sistema de unidades no son exactamente iguales a los determinados con el otro. En la práctica, sin embargo, no suele ser un problema, porque no se cambia entre las unidades al determinar y comparar valores característicos.

La norma proporciona información importante para la preparación de la probeta, cuyo objetivo es garantizar que la extracción de la probeta del producto y la posterior producción de la probeta no tengan ningún efecto en el material que pueda afectar los resultados del ensayo de tracción.

2.3. Ensayo de tracción

Primero se realizan mediciones geométricas del área de la sección transversal inicial de la probeta, A_0 y de la longitud calibrada L_0 . Después, se utiliza una máquina de ensayos como la que aparece en la Figura 2.4 para estirar la probeta a una velocidad lenta y constante hasta que el proceso lo indique. La máquina está diseñada para mantener este estiramiento uniforme.

La prueba inicia cuando se comienza a aplicar una fuerza exterior por uno de los extremos de la probeta a una velocidad lenta y constante. El otro extremo de la probeta permanece fijado al agarre, aunque en alguna máquina se hace fuerza sobre la probeta por los dos extremos.

Todo cuerpo al soportar una fuerza aplicada trata de deformarse en el sentido de aplicación de la fuerza [7].

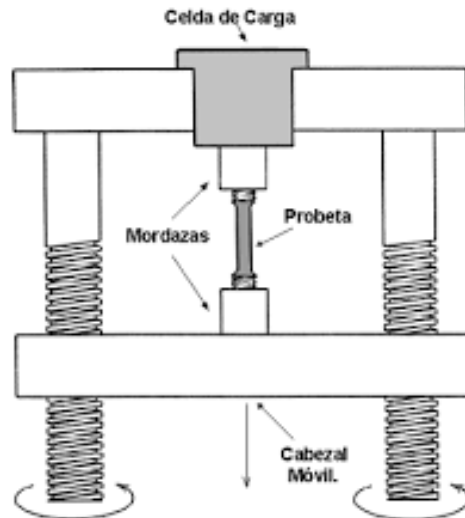


Figura 2.4: Grafico de una máquina de ensayo de tracción [8].

En el caso del ensayo de tracción, la fuerza se aplica en dirección del eje de ella y por eso se denomina axial. La probeta se alargará en dirección de su longitud y se encogerá en el sentido o plano perpendicular.

Según vamos aplicando cada vez más fuerza sobre la probeta, la probeta llegará un momento que empezará a estirarse, disminuyendo su sección y aumentando su longitud.

Si se sigue aplicando cada vez más fuerza externa, llegará un momento que **la probeta rompe**. Este momento se llama el momento de la **fractura**.

Por este motivo se dice que el ensayo de tracción es un ensayo destructivo, la pieza se rompe y ya no sirve.

Durante el ensayo se van anotando los datos de fuerza (también llamada carga) y estiramiento de la probeta.

La fuerza se mide con una carga aplicada a una escala y la deformación se mide con un extensómetro o medidor de deformación.

2.3.1. Diagrama esfuerzo-deformación

Para obtener el diagrama de esfuerzo-deformación de un material, comúnmente se lleva a cabo un ensayo o prueba de tensión sobre una probeta del material.

El área de la sección transversal de la probeta se ha determinado exactamente y se han hecho dos marcas de calibración, en dicha porción a una separación de L_0 . La distancia L_0 se conoce como la longitud base de la probeta.

La probeta se coloca en la máquina de ensayo, que se usa para aplicar una carga centrada P . Al aumentar la carga P , también se incrementa la distancia L entre las dos marcas base de la probeta. La distancia L se mide con un indicador de carátula, y el alargamiento ($\delta=L-L_0$) se registra para cada valor de P .

Para cada par de lecturas P y δ , el esfuerzo σ se calcula dividiendo P entre el área original de la sección transversal A_0 del espécimen. Mientras que para la deformación unitaria se obtiene dividiendo el alargamiento δ entre la distancia original L_0 tomando de referencia las dos marcas base de la probeta. Puede ahora obtenerse el diagrama de esfuerzo-deformación graficando ϵ como la abscisa y σ como la ordenada [9]. La figura 2.5 Muestra una Curva esfuerzo-deformación ilustrada para su mayor entendimiento.

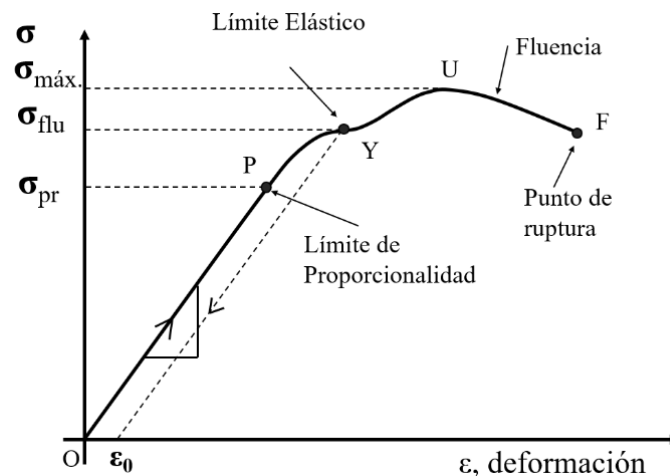


Figura 2.5: Curva esfuerzo-deformación ilustrada [8].

2.3.2. Propiedades obtenidas en una prueba de tracción

- **Módulo de elasticidad.** En la primera parte del ensayo de tensión el metal se deforma elásticamente. En otras palabras, si se elimina la carga sobre la muestra, ésta volverá a su longitud inicial. Para metales, la máxima deformación elástica es usualmente menor al 0.5% de la longitud original. En general, los metales y las aleaciones muestran una relación lineal entre la tensión y la deformación en la región elástica. El comportamiento anterior se describe mediante la ley de Hooke, mediante la expresión mostrada a continuación.

$$E = \sigma \epsilon \quad (2.1)$$

Donde:

E es el módulo de elasticidad o módulo de Young

σ es el esfuerzo

ϵ es la deformación

El módulo de elasticidad está relacionado con la fuerza de enlace entre átomos de un metal o aleación. Los metales con módulo elástico alto son relativamente rígidos y no se deforman fácilmente [10]. La Tabla 2.1 muestra los módulos de elasticidad de algunos materiales.

Tabla 2.1: Valores típicos a temperatura ambiente de constantes elásticas para materiales isotrópicos [11].

Material	Modulus of Elasticity, 10 ⁶ psi (GPa)	Shear Modulus, 10 ⁶ psi (GPa)	Poisson's Ratio
Aluminum alloys	10.5 (72.4)	4.0 (27.5)	0.31
Copper	16.0 (110)	6.0 (41.4)	0.33
Steel (plain carbon and low-alloy)	29.0 (200)	11.0 (75.8)	0.33
Stainless steel (18-8)	28.0 (193)	9.5 (65.6)	0.28
Titanium	17.0 (117)	6.5 (44.8)	0.31
Tungsten	58.0 (400)	22.8 (157)	0.27

- **Límite elástico.** Se define mediante la intersección de la curva tensión-deformación con una línea recta paralela al tramo elástico, que pase por el

punto de deformación del 0.2%. Es una indicación apropiada del inicio de la deformación plástica [12]. La Figura 2.6 muestra un ejemplo de donde se localiza el límite elástico en una curva tensión-deformación.

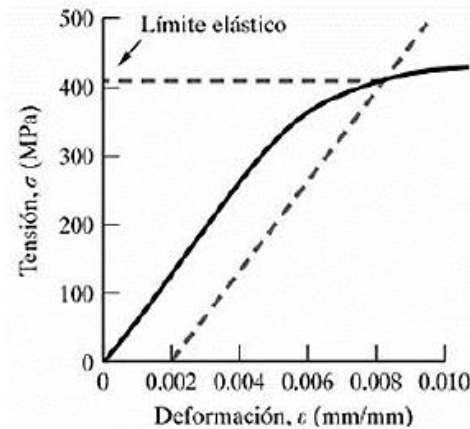


Figura 2.6: Límite Elástico, desviación 0.2% [12].

- Resistencia a la máxima tensión.** La resistencia a la máxima tensión es la tensión máxima alcanzada en la curva de tensión-deformación. Si la muestra desarrolla un decremento localizado en su sección, la tensión decrecerá al aumentar la deformación hasta que ocurra la fractura puesto que la tensión se determina usando la sección inicial de la muestra. A mayor ductilidad del metal, mayor será el decremento en la tensión después de la tensión máxima. La resistencia máxima a la tensión de un metal se determina dibujando una línea horizontal desde el punto máximo de la curva tensión-deformación hasta el eje de tensiones. La tensión identificada por la intersección se denomina resistencia máxima a la tensión [10].
- Razón de Poisson.** Relaciona la deformación elástica longitudinal producida por un esfuerzo de tensión o de compresión con la deformación lateral que ocurre de manera simultánea. La ecuación 2.2 representa la razón de Poisson.

$$\nu = \frac{-\epsilon_{\text{lateral}}}{\epsilon_{\text{longitudinal}}} \quad (2.2)$$

Donde:

ν = razón de Poisson

$\epsilon_{lateral}$ = deformación elástica lateral

$\epsilon_{longitudinal}$ = la deformación elástica longitudinal

- **Ductilidad.** Es la habilidad de un material a deformarse de manera permanente sin romperse cuando se aplica una fuerza. Existen dos medidas comunes de ductilidad, la primera es midiendo el porcentaje de elongación que cuantifica la deformación plástica, y la segunda es medir la ductilidad mediante el cambio porcentual en el área de la sección transversal [8].
- **Porcentaje de elongación.** Es la cantidad de elongación que presenta una muestra bajo tensión durante un ensayo y proporciona un valor de ductilidad en un metal. La ductilidad de los metales comúnmente se expresa como un porcentaje de la elongación, comenzando con una longitud de calibración. En general, a mayor ductilidad mayor será el porcentaje de la elongación. El porcentaje de elongación de una muestra después de la fractura puede obtenerse mediante la muestra fracturada y la muestra original. El porcentaje de elongación en la fractura es de importancia en ingeniería no sólo como una medida de la ductilidad, si no también es un índice de la calidad del metal. La ecuación 2.3 se utiliza para calcular el porcentaje de elongación.

$$\% \text{ elongación} = \frac{L-L_0}{L_0} \times 100\% \quad (2.3)$$

Donde:

L_0 es la longitud entre las marcas de calibración en la muestra antes del ensayo

L es la longitud final de las marcas de calibración después del ensayo

- **Porcentaje de reducción de área.** La ductilidad de un metal o aleación puede también expresarse en términos de la reducción del área. Utilizando la medida de los diámetros inicial y final, puede determinarse el porcentaje de reducción en el área a partir de la siguiente expresión a partir de la ecuación 2.4.

$$\% \text{ reducción en área} = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \times 100\% \quad (2.4)$$

Donde:

A_0 = área inicial de la sección a fracturar

A_f = área fracturada después de la prueba

2.4. Análisis de elementos finitos

El análisis de componentes reales es un tanto complicado, por lo que se acude a la utilización de aproximaciones menos eficaces como lo son; métodos numéricos o experimentación.

La computadora puede ser muy útil pues existe una gran variedad de técnicas numéricas que se emplean en aplicaciones de ingeniería.

El diseño asistido por computadora (CAD) y el método de análisis de elemento finito (FEA, por sus siglas en inglés) se consideran una herramienta de suma importancia en el diseño mecánico, ya que se integran perfectamente. La teoría y aplicaciones matemáticas son inmensas.

Existe una diversidad de paquetes de software comerciales de FEA que se encuentran disponibles, tal como ANSYS, CATIA, Comsol Multiphysics, etcétera [13].

La figura 2.6 muestra un modelo de elemento finito de una probeta que fue elaborada para estudiar los efectos de la tensión sobre el Aluminio 6061 a altas

temperaturas manteniéndose por debajo de su punto de recristalización el cual ronda los 400 y los 700 °C.

Existe una gran cantidad de aplicaciones del FEA tales como análisis estático y dinámico, lineal y no lineal, de esfuerzo y de deflexión; transferencia de calor (que se puede combinar con el análisis de esfuerzo y de deflexión para proporcionar esfuerzos y deflexiones térmicamente inducidos); acústica; electrostática y magnetismo (que se puede combinar con transferencia de calor); dinámica de fluidos; análisis de tuberías y física múltiple.

Para entrar en contexto nuestro mundo como lo conocemos es un medio continuo pues nos componemos de tres dimensiones, al ser continuos necesitamos ser definidos por infinitos grados de libertad como lo son las mallas generadas por los sistemas FEA [13].

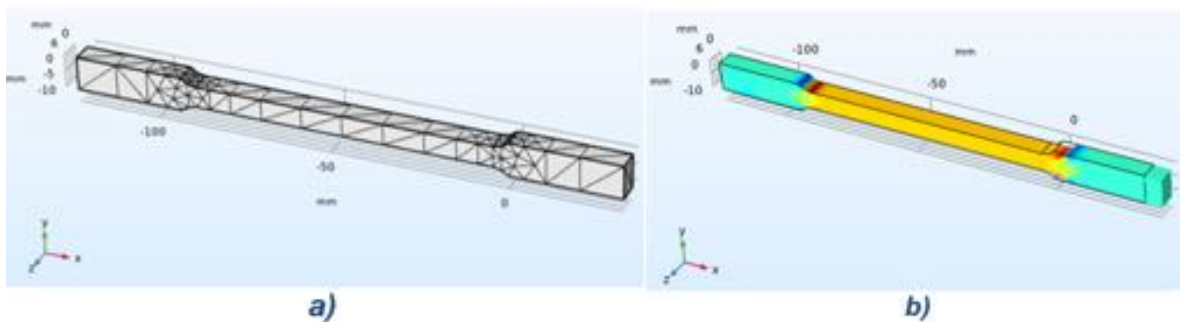


Figura 2.7: Modelo de probeta empleando software de elemento finito Comsol Multiphysics. a) Modelo enmallado; b) contornos de esfuerzo. Elaborado por medios propios.

El FEA divide (“discretiza”), la estructura en pequeñas subestructuras (elementos) de tipo elástico, bien definidas pero finitas. Al emplear funciones polinomiales, en conjunto con operaciones matriciales, el comportamiento elástico continuo de cada elemento se desarrolla en términos del material y las propiedades geométricas del elemento. Las cargas se aplican dentro del elemento (gravedad, dinámica, térmica, etc.), en la superficie del elemento o en los *nodos* del mismo. Estos nodos son las entidades fundamentales de gobierno del elemento, en la medida en que en el nodo se conecta un elemento con los otros, se establecen, al final, las propiedades elásticas de los mismos, se asignan las condiciones de frontera y, por último, se aplican las fuerzas (de contacto o cuerpo) [14].

Un nodo posee *grados de libertad* (dof, por sus siglas en inglés). Los grados de libertad son los movimientos independientes de rotación y traslación que pueden existir en un nodo. Como máximo, un nodo puede tener tres grados de libertad rotacionales y tres trasnacionales. Una vez que cada nodo dentro de la estructura está definido *localmente* en forma matricial, entonces los elementos se ensamblan (unen) *globalmente* a través de sus nodos en común (dof's) en una matriz global del sistema. Las cargas aplicadas y las condiciones de frontera se especifican y mediante operaciones matriciales se determinan los valores de todos los grados de libertad de desplazamiento desconocidos. Una vez que se ha realizado este procedimiento, es algo simple hacer uso de estos desplazamientos para determinar las tensiones y esfuerzos por medio de las ecuaciones constitutivas de elasticidad [14].

2.4.1. Geometrías del elemento

Se utilizan muchas formas geométricas de elementos en el análisis del elemento finito para aplicaciones específicas. Los diversos elementos que emplean los códigos de software comercial FEA de propósito general constituyen lo que se conoce como la *biblioteca de elementos* del código. Los elementos pueden ubicarse en las siguientes categorías: *elementos de línea*, *elementos de superficie*, *elementos sólidos* y *elementos de propósito específico*.

Las tablas 2.2 y 2.3 nos proporcionan algunos, pero no todos, los tipos de elementos disponibles para el análisis de elemento finito de problemas estructurales, así como las aplicaciones específicas para tal geometría. No todos los elementos soportan todos los grados de libertad [15].

Tabla 2.2: Tipos de elementos bidimensionales [15].

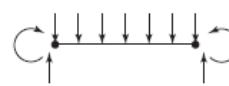
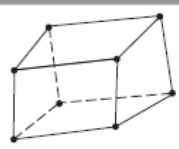
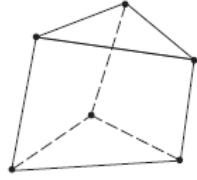
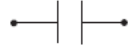
Tipo de elemento	Ninguno	Forma	Número de nodos	Aplicaciones
Línea	Puntal		2	Barra con extremos articulados en tensión o compresión
	Viga		2	Flexión
	Armazón		2	Axial, torsional o de flexión Con o sin rigidez de carga
Superficie	Cuadrilátero de 4 nodos		4	Esfuerzo o deformación plana, simétrico con respecto a un eje, panel a cortante, placa plana delgada en flexión
	Cuadrilátero de 8 nodos		8	Esfuerzo o deformación plana, placa plana o cascarón en flexión
	Triangular de 3 nodos		3	Esfuerzo o deformación plana, simétrico con respecto a un eje, panel a cortante, placa plana delgada en flexión. Preferible cuadriláteros donde sea posible. Usado para transiciones de cuadriláteros
	Triangular de 6 nodos		6	Esfuerzo o deformación plana, simétrico con respecto a un eje, placa plana o cascarón en flexión. Preferible cuadriláteros donde sea posible. Usado para transiciones de cuadriláteros

Tabla 2.3: Tipos de elementos tridimensionales y especiales [15].

Tipo de elemento	Ninguno	Forma	Número de nodos	Aplicaciones
Sólido [†]	Hexagonal de 8 nodos (paralelepípedo o ladrillo)		8	Sólido, placa gruesa
	Pentagonal de 6 nodos (cuña)		6	Sólido, placa gruesa. Usado para transiciones
	Tetraedro de 4 nodos (tetra)		4	Sólido, placa gruesa. Usado para transiciones
Propósito especial	Brecha		2	Desplazamientos libres para espacios pre-establecidos
	Gancho, conexión		2	Desplazamientos libres para espacios pre-establecidos
	Rígido		Variable	Restricción rígida entre nodos

Estos elementos también se encuentran disponibles con nodos intermedios.

2.4.2. Método de elemento finito

El desarrollo moderno del método de elemento finito comenzó en la década de 1940, en el campo de la mecánica estructural con el trabajo de Hrennikoff, McHenry y Newmark, quienes emplearon una red o rejilla de elementos lineales (varillas y vigas) para solucionar esfuerzos en sólidos continuos. En 1943, a partir de un artículo de 1941, Courant sugirió una interpolación polinomial por pasos sobre regiones triangulares como el método para modelar problemas de torsión. Con el advenimiento de las computadoras digitales en la década de 1950, esta propuesta se pudo llevar a la práctica por los ingenieros para escribir y resolver las ecuaciones de rigidez en forma matricial. Un artículo clásico de Turner, Clough, Martin y Topp, que se publicó en 1956, presentaba las ecuaciones matriciales de rigidez de los puntales, vigas y otros elementos. La expresión *elemento finito* se atribuye primero a Clough [16].

Con base en estos primeros antecedentes, se han realizado una gran cantidad de esfuerzos para desarrollar el método del elemento finito en el área de las formulaciones de los elementos, así como en la instrumentación computacional del proceso de solución completo.

Puesto que el método del elemento finito es una técnica numérica que convierte el dominio de una estructura continua en valores discretos, los errores son inevitables. Estos errores son:

1. Errores computacionales. Estos errores se ocasionan por los redondeos en las ecuaciones quedando un margen de error en las simulaciones.

2. Errores de conversión discreta. Se ocasionan por lo fino de la malla, entre más fina más exactitud tendrá el cálculo.

Para apreciar un ejemplo de errores de conversión a valores discretos, considere la estructura de la placa delgada, de grosor o espesor constante, que se ilustra en la figura 2.8a). La figura 2.8b) muestra un modelo de elemento finito de la estructura en el cual se emplean elementos triangulares simples de esfuerzo plano con tres nodos [16].

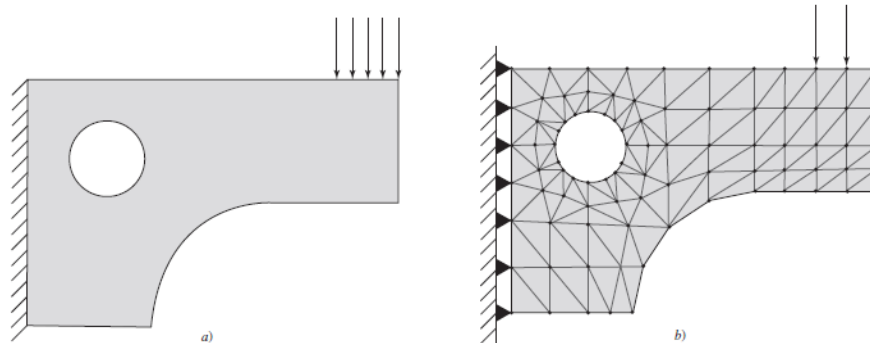


Figura 2.8: Problema estructural tipo viga. a) Modelo idealizado; b) modelo de elementos finitos [16].

Los resultados predichos por este modelo serán en extremo deficientes, pues en el área del agujero tiene más nodos por lo que será muy bueno el resultado en esa parte pero en la parte rectangular de la derecha será deficiente por el menor número de nodos en la malla. Los resultados pueden mejorarse si se aumenta de manera significativa el número de elementos (mediante el incremento de la densidad de la malla).

2.4.3. Aplicación de la carga

Existen dos formas básicas de especificar cargas en una estructura: nodal y por carga de elementos.

No obstante, la carga de elementos finalmente se aplica a los nodos empleando cargas nodales equivalentes. Un aspecto de la aplicación de cargas se relaciona con el **principio de Saint-Venant**.

“Si no se tiene interés acerca de los esfuerzos cercanos a los puntos de aplicación de carga, no es necesario intentar distribuir la carga de manera muy precisa”.

La fuerza neta y/o momento puede aplicarse a un solo nodo, siempre que el elemento soporte los grados de libertad asociados con la fuerza y/o el momento en el nodo. Sin embargo, *el analista no debe sorprenderse, o preocuparse, cuando*

revise los resultados y los esfuerzos en la vecindad del punto de aplicación de la carga y encuentre que son muy grandes. Los momentos concentrados pueden aplicarse a los nodos de vigas y la mayoría de los elementos de placas. No obstante, los momentos concentrados no pueden aplicarse a elementos de puntales, planos elásticos bidimensionales, axiales simétricos o de ladrillos, pues no soportan grados de libertad rotacionales. Un momento puro se puede aplicar a estos elementos solamente mediante el empleo de fuerzas en la forma de un par. Mediante la mecánica de la estática se puede generar un par empleando dos o más fuerzas que actúen en un plano donde la fuerza neta de las mismas sea igual a cero. El momento neto de las fuerzas es un vector perpendicular al plano y es la sumatoria de los momentos de las fuerzas que se toman en cualquier punto común.

Las cargas de elementos incluyen cargas estáticas debidas a la gravedad (peso), efectos térmicos, cargas superficiales tales como la presión hidrostática y uniforme, y cargas dinámicas debidas a aceleración constante y rotación en estado estacionario (aceleración centrífuga).

Como se estableció con anterioridad, las cargas de elementos se convierten por medio de software en las cargas nodales equivalentes y al final se tratan como cargas concentradas que se aplican a los nodos.

2.4.4. Técnicas de modelado

Con los actuales paquetes de CAD y generadores automáticos de mallas, es una tarea cómoda crear un modelo sólido y mallar el volumen con elementos finitos. Con las velocidades de computación actuales y con sobrada memoria de trabajo computacional, es muy fácil crear un modelo con números extremadamente grandes de elementos y nodos. Las técnicas antiguas de modelado de elemento finito parecen pasadas de moda e innecesarias. No obstante, puede gastarse mucho tiempo de manera innecesaria en un modelo sumamente complejo cuando uno mucho más sencillo funcionaría. El modelo complejo puede incluso no proporcionar una solución precisa, mientras que un modelo más simple lo hará.

2.4.5. Proceso de solución del elemento finito

2.4.5.1. Método elemento puntual lineal

Un elemento de puntal es una barra con carga en tensión o compresión y es de área transversal constante A , longitud l y módulo elástico E . El elemento de puntal básico tiene dos nodos, y en un problema unidimensional, cada nodo tendrá solamente un grado de libertad. Un elemento de puntal puede modelarse como un resorte lineal simple con un índice de elasticidad, dado por la ecuación (4-4) como

$$k = \frac{AE}{l} \quad (2.5)$$

Considere un elemento de resorte (e) con índice de elasticidad k_e , con nodos i y j , como se muestra en la figura 2.9. Los nodos y elementos se encuentran numerados. Así, para evitar confusión con respecto a lo que corresponde cada número, los elementos estarán numerados entre paréntesis. Bajo el supuesto de que todas las fuerzas f y desplazamientos u que se dirigen hacia la derecha son positivos, las fuerzas de cada nodo pueden escribirse como

$$\begin{aligned} f_{i,e} &= k_e(u_i - u_j) = k_e u_i - k_e u_j \\ f_{j,e} &= k_e(u_j - u_i) = -k_e u_i + k_e u_j \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las dos ecuaciones se expresan en forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} f_{i,e} \\ f_{j,e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

A continuación, considere un sistema de dos resortes como se ilustra en la figura 2.10a). En ella se han numerado tanto los nodos como los elementos. También se

han etiquetado las fuerzas en cada nodo [17]. No obstante, estas fuerzas son las fuerzas totales externas en cada nodo, F_1 , F_2 y F_3 . Si se dibujan diagramas de cuerpo libre por separado se revelarán las fuerzas internas como se muestra en la figura 2.10b).

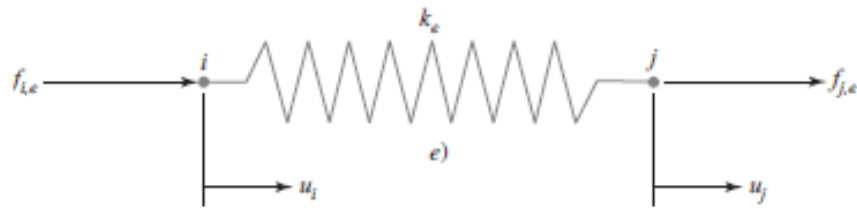


Figura 2.9: Elementos de resorte simple [17].

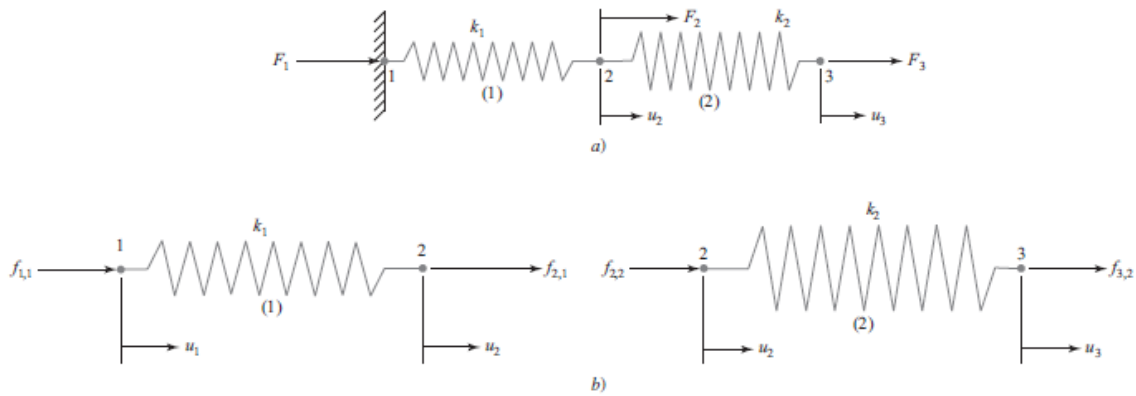


Figura 2.10: Sistema de resortes de dos elementos. a) Modelo del sistema; b) diagramas de cuerpo libre por separado [17].

Utilizando la ecuación (2.9) para cada resorte se obtiene

$$\text{Elemento 1} \quad \begin{Bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.8-a)$$

$$\text{Elemento 2} \quad \begin{Bmatrix} f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.8-b)$$

La fuerza total en cada nodo es la fuerza externa, $F_1 = f_{1,1}$, $F_2 = f_{2,1} + f_{2,2}$ y $F_3 = f_{3,2}$.

Combinando las dos matrices en términos de las fuerzas externas se tiene que

$$\begin{Bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} + f_{2,2} \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Si se conoce el desplazamiento de un nodo, entonces la fuerza en él será desconocida.

Por ejemplo, en la figura 2.10a), el desplazamiento del nodo 1 en la pared es cero, de modo que F_1 es la fuerza de reacción desconocida (observe, hasta este punto, que no se aplicó una solución estática del sistema). Si no se conoce el desplazamiento de un nodo, entonces se conoce la fuerza. Por ejemplo, en la figura 2.10a), los desplazamientos en los nodos 2 y 3 son desconocidos, y las fuerzas F_2 y F_3 están por ser especificadas. Para ver cómo se instrumenta el residuo del proceso de solución, considere el ejemplo siguiente [17].

2.4.5.2. Método matricial de rigidez para elementos de viga

En el análisis de elementos finitos, una viga es una estructura lineal que se utiliza para resistir cargas transversales, como cargas horizontales o verticales. Las vigas son estructuras comunes en edificios, puentes, torres, entre otros.

Generalmente los problemas de estructuras se presentan de la siguiente manera:

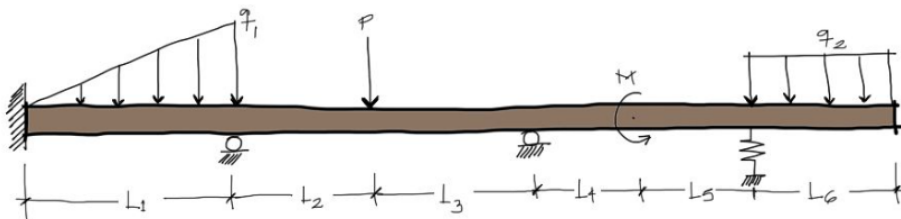


Figura 2.11: Problema de estructuras [18].

Cuando necesitamos resolver un problema de vigas por el método de rigidez, debemos dividir la viga arriba en varias partes de longitud finita. Estas divisiones deberán localizarse en puntos donde exista:

- Un cambio en el tipo de carga distribuida
- Comienzo o fin de carga distribuida
- Una carga puntual
- Un momento de Par
- Un apoyo móvil, fijo o empotrado
- Un resorte
- Un extremo de voladizo

Cada uno de los tramos divididos, denotados por las longitudes L_1 , L_2 , L_3 , etc, tendrá propiedades que estarán en base a su longitud L , su módulo de elasticidad E , e inercia I . Además cada uno de estos tramos tendrá en los extremos un nudo con dos grados de libertad.

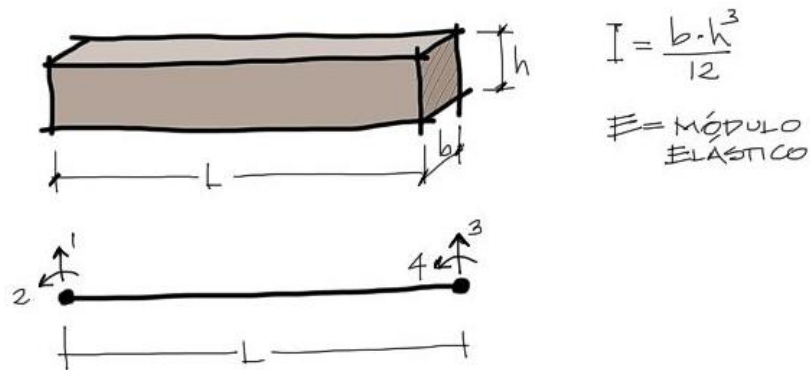


Figura 2.12: Ejemplo de viga con un solo elemento y su respectivo diagrama de cuerpo libre [18].

Todas estas propiedades se condensan en una **MATRIZ DE RIGIDEZ** cuadrada que relaciona los desplazamientos del tramo con las fuerzas externas de ese tramo de viga.

$$\begin{bmatrix}
 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\
 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\
 -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\
 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1 \\
 M_2 \\
 F_3 \\
 M_4
 \end{Bmatrix}$$

Figura 2.13: Identificación del sentido de fuerzas y momentos mediante la relación: $[K_{elem}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}$.

Arriba se ven los desplazamientos y giros del tramo de viga. U_1 y U_3 denotan los desplazamientos verticales (digamos en metros). U_2 y U_4 representan los giros del tramo de la viga en radianes. La matriz de rigidez cuadrada con las propiedades de E , I , L multiplicada por estos desplazamientos da como resultado las fuerzas en los extremos de la viga siguientes:

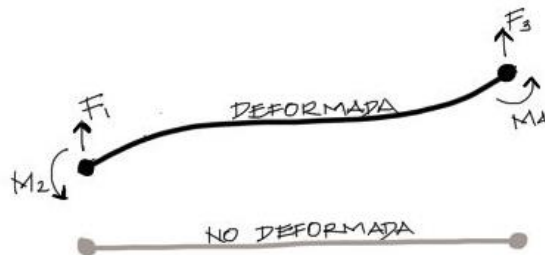


Figura 2.14: Ilustración de la deformación [18].

De toda la fórmula de arriba, la mayoría de las veces se maneja la matriz de rigidez suelta (2.10) para luego ensamblarla dentro de una matriz de rigidez global que represente la relación de deformaciones y fuerzas externas y cargas en toda la estructura.

$$[K_{elem}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La matriz de rigidez global dependerá de cuantos elementos tenga la viga, agregándose de la siguiente manera en la fórmula 2.11.

$$[K_{GLOBAL}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(l_1)^3} & \frac{6EI}{(l_1)^2} & -\frac{12EI}{(l_1)^3} & \frac{6EI}{(l_1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{(l_1)^2} & \frac{4EI}{l_1} & -\frac{6EI}{(l_1)^2} & \frac{2EI}{l_1} & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{(l_1)^3} & -\frac{6EI}{(l_1)^2} & \left(\frac{12EI}{(l_1)^3} + \frac{12EI}{(l_2)^3}\right) & \left(-\frac{6EI}{(l_1)^2} + \frac{6EI}{(l_2)^2}\right) & -\frac{12EI}{(l_2)^3} & \frac{6EI}{(l_2)^2} \\ \frac{6EI}{(l_1)^2} & \frac{2EI}{l_1} & \left(-\frac{6EI}{(l_1)^2} + \frac{6EI}{(l_2)^2}\right) & \left(\frac{4EI}{l_1} + \frac{4EI}{l_2}\right) & -\frac{6EI}{(l_2)^2} & \frac{2EI}{l_2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{(l_2)^3} & -\frac{6EI}{(l_2)^2} & \frac{12EI}{(l_2)^3} & -\frac{6EI}{(l_2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{(l_2)^2} & \frac{2EI}{l_2} & -\frac{6EI}{(l_2)^2} & \frac{4EI}{l_2} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Donde:

EI = Rigidez elemento

l_1 = Longitud elemento 1

l_2 = Longitud elemento 2

El método se utiliza cuando terminamos de analizar los desplazamientos en los nudos de una viga resuelta por el método de elementos finitos o de rigidez.

En el método de elementos finitos es conveniente colocar nudos en los extremos de la viga, en los apoyos, donde existan cargas puntuales, y en todo sector donde aparezca un cambio brusco en el tipo de carga.

Por tanto en un ejercicio típico de viga se podrán tener varios elementos de barra separados por nudos, como en el ejemplo del link mencionado anteriormente.

Resuelto el ejercicio se tendrán el desplazamiento vertical y el giro para cada nudo.

Mediante este método se podrá encontrar el diagrama de momento flector o cortante de cada barra entre dos nudos. Se deberá repetir el procedimiento para cada barra entre dos nudos de la viga.

El tramo de viga debe tener los siguientes datos:

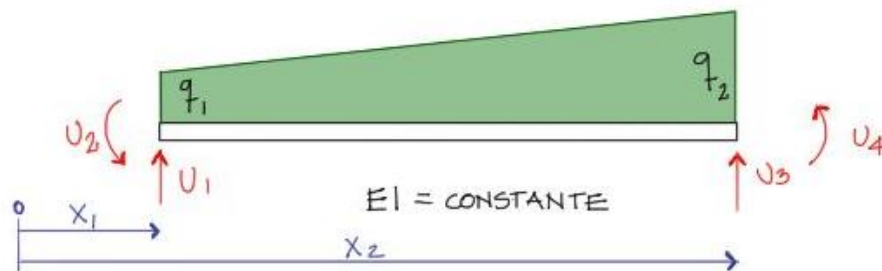


Ilustración 2.15: Datos de elemento viga [18].

- u_1 = desplazamiento vertical en el extremo izquierdo
- u_2 = giro en el extremo izquierdo positivo anti horario
- u_3 = desplazamiento vertical en el extremo derecho
- u_4 = giro en el extremo derecho positivo anti horario
- x_1 = coordenada del nudo izquierdo de la barra
- x_2 = coordenada del nudo derecho de la barra
- q_1 = valor de la carga distribuida en el extremo izquierdo de la barra
- q_2 = valor de la carga distribuida en el extremo derecho de la barra
- ** q_1 Y q_2 representan la carga distribuida positiva hacia abajo
- EI = rigidez del tramo

Se debe tener en cuenta que la carga distribuida mostrada representa el caso más general de cargas distribuidas. A partir de esta configuración se pueden generar cargas distribuidas de distinto tipo.

Lo primero que debemos hacer es conocer la **ecuación de la carga distribuida** a partir de las cargas q_1 Y q_2 en los extremos. Para eso nos ayudamos de la teoría de geometría analítica donde encontramos los coeficientes A y B de la ecuación de la recta genérica mostrada:

$$q(x) = Ax + B \quad A = ? \quad B = ? \quad (2.12)$$

En base a las coordenadas mostradas se forma un sistema de ecuaciones a partir del cual podemos encontrar los coeficientes A y B de la ecuación de la recta.

$$\text{Cuándo: } \left. \begin{array}{l} x = x_1 \rightarrow q = q_1 \\ x = x_2 \rightarrow q = q_2 \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

$$\text{Se forma el sistema de ecuaciones: } \begin{cases} q_1 = Ax_1 + B \\ q_2 = Ax_2 + B \end{cases}$$

Despejando B de la primera ecuación y reemplazando la en la segunda podemos obtener los valores de A y B cómo se muestra:

Resolviendo A y B:

$$A = \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \quad B = q_1 - \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} x_1 \quad (2.14)$$

Entonces la ecuación de la carga es:

$$q(x) = \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} x + \left(q_1 - \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} x_1 \right) \quad (2.12)$$

En la ecuación mostrada se reemplazaron además los valores de A y B dentro de la ecuación de la recta.

Partimos de la ecuación de la elástica de la viga para encontrar los diagramas de cortante y de momento flector.

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = -q(x) \quad (2.15)$$

Se sabe de la teoría que al integrar esta ecuación 4 veces podemos encontrar todos los datos del cortante, momento flector, pendiente y deflexión de La viga:

Reemplazando $q(x)$

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = -Ax - B \quad (2.16)$$

Integrando 4 veces

$$EI \frac{d^3 u}{dx^3} = -A \frac{x^2}{2} - Bx + C_1$$

$$EI \frac{d^2 u}{dx^2} = -A \frac{x^3}{6} - B \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI \frac{du}{dx} = -A \frac{x^4}{24} - B \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI u = -A \frac{x^5}{120} - B \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

De las anteriores ecuaciones la tercera derivada de la deflexión representa el cortante de la viga y la segunda derivada representa el momento flector [18].

Acto seguido se reemplazan las condiciones de contorno en las ecuaciones mostradas. En este caso las condiciones de contorno son los desplazamientos y giros en los extremos de la barra estudiada. En el extremo izquierdo para la coordenada x_1 se tienen las condiciones de contorno de desplazamiento u_1 y de

giro u_2 . Una cosa similar sucede en el extremo derecho como se muestra a continuación:

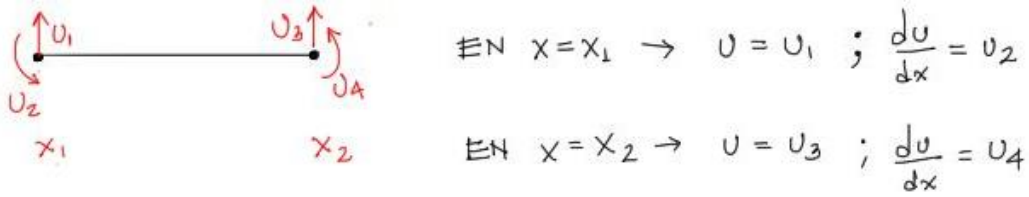


Figura 2.16: Condiciones de contorno

Ahora se reemplaza las condiciones de contorno dentro de las ecuaciones integradas de la elástica (tercera y cuarta ecuación) para obtener el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas [18]. Las incógnitas en este caso son las 4 constantes de integración C_1, C_2, C_3, C_4 .

$$\begin{aligned}
 EI U_1 &= -A \frac{x^5}{120} - B \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \\
 EI U_2 &= -A \frac{x^4}{24} - B \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\
 EI U_3 &= -A \frac{x^3}{6} - B \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \\
 EI U_4 &= -A \frac{x^2}{2} - B x + C_1
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Hacemos los términos independientes llevándolos todos al extremo izquierdo de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 EI U_1 + A \frac{x^5}{120} + B \frac{x^4}{24} &= C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \\
 EI U_2 + A \frac{x^4}{24} + B \frac{x^3}{6} &= C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3
 \end{aligned}$$

$$EI U_3 + A \frac{x^3}{6} + B \frac{x^2}{2} = C_1 x + C_2$$

$$EI U_4 + A \frac{x^2}{2} + Bx = C_1$$

Ahora finalmente convertimos el sistema de ecuaciones a un arreglo matricial que puede resolverse por cualquier método numérico:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^3}{6} & \frac{x_1^2}{2} & x_1 & 0 \\ \frac{x_1^2}{2} & x_1 & 1 & 0 \\ \frac{x_2^3}{6} & \frac{x_2^2}{2} & x_2 & 1 \\ \frac{x_2^2}{2} & x_2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} EI U_1 + A \frac{x^5}{120} + B \frac{x^4}{24} \\ EI U_2 + A \frac{x^4}{24} + B \frac{x^3}{6} \\ EI U_3 + A \frac{x^3}{6} + B \frac{x^2}{2} \\ EI U_4 + A \frac{x^2}{2} + Bx \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

De las soluciones de este sistema de ecuaciones C_1, C_2, C_3, C_4 se pueden conocer y a las ecuaciones de cortante y momento flector para el tramo estudiado:

$$V(x) = EI \frac{d^3 u}{dx^3} = -A \frac{x^2}{2} - Bx + C_1 \quad (2.19)$$

$$M(x) = EI \frac{d^2 u}{dx^2} = -A \frac{x^3}{6} - B \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (2.20)$$

Se debe repetir el mismo procedimiento para todos los tramos que existan dentro de la viga [18].

Capítulo 3. Desarrollo

En este capítulo se muestra el método usado para llevar a cabo el presente trabajo. En primer lugar se resolvieron algunos problemas con diferentes métodos los cuales son método puntual lineal y método matricial de rigidez para la resolución de vigas. Partiendo con el ejemplo 19-1 del libro Shigley's Mechanical Engineering Design, el cual en seguida se explicara con mayor detalle al ejemplo, con la finalidad de que no quede la menor duda en cada procedimiento y razonamiento.

Con estos ejemplos de introducción al elemento finito se da una idea de lo mucho que nos facilita el estudio los softwares FEA pues, si bien el análisis de este tipo de elementos bidimensionales es muy tedioso, internamente el software hace esto mismo pero trabajando con modelos 3D por lo tanto los cálculos aumentan exponencialmente, pudiendo calcular los esfuerzos y deformaciones, en cuestión de minutos. Teniendo la opción de volver la malla más fina o más gruesa, esto afectando a la exactitud.

3.1. Cálculo de elemento puntual lineal

Considere al eje escalonado que se muestra en la figura 2.9. Las áreas de las secciones AB y BC son 0.100 in^2 y 0.150 in^2 , respectivamente. Las longitudes de las secciones AB y BC y son 10 y 12, respectivamente. Una fuerza $F = 1000 \text{ lbf}$ se aplica a B.

Al inicio existe un espacio de $\epsilon = 0.002 \text{ in}$ entre el extremo C y la pared rígida de la derecha. Determine las reacciones de la pared, las fuerzas internas en los miembros, así como la deflexión del punto B.

Sea $E = 10 \text{ Mpsi}$ y suponga que el extremo C alcanza la pared. Verifique la validez del supuesto.

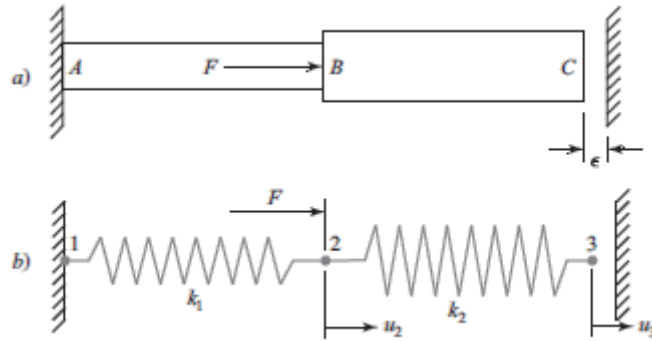


Figura 3.1: a) Eje escalonado, b) modelo de resortes

Solución El eje escalonado se modela por medio del sistema de dos resortes de la figura 2.11b) donde sustituimos en la ecuación 2.5 para poder obtener k_1 y k_2 .

Datos:

$$F_2 = 1000 \text{ lbf}$$

$$A_{AB} = 0.100 \text{ in}^2$$

$$L_{AB} = 10 \text{ in}$$

$$A_{BC} = 0.150 \text{ in}^2$$

$$L_{BC} = 12 \text{ in}$$

$$E = 10 \text{ Mpsi} = 10 \times 10^6 \text{ psi} = 10 \times 10^6 \frac{\text{lbf}}{\text{in}^2}$$

$$k_1 = \left(\frac{A_{AB} E}{L_{AB}} \right)_{AB} = \frac{0.100 \text{ in}^2 * 10 \times 10^6 \frac{\text{lbf}}{\text{in}^2}}{10} = 1 \times 10^5 \frac{\text{lbf}}{\text{in}} \quad (2.5)$$

$$k_2 = \left(\frac{A_{BC} E}{L_{BC}} \right)_{BC} = \frac{0.150 \text{ in}^2 * 10 \times 10^6 \text{ psi}}{12} = 1.25 \times 10^5 \frac{\text{lbf}}{\text{in}} \quad (2.5)$$

Debido a que u_1 esta pegado a la pared es $u_1 = 0$ y la F está en el punto 2 entonces $F_2 = 1000 \text{ lbf}$ y u_3 es igual ha $\epsilon = 0.002 \text{ in}$, pues es la máxima distancia que podría desplazarse el punto C debido a la pared que interfiere.

Se hace uso de la ecuación 2.9

Datos:

$$F_2 = 1000 \text{ lbf}$$

$$k_1 = 1 \times 10^5 \frac{\text{lbf}}{\text{in}}$$

$$k_2 = 1.25 \times 10^5 \frac{\text{lbf}}{\text{in}}$$

$$u_1 = 0$$

$$u_3 = 0.002 \text{ in}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^5 & -1 \times 10^5 & 0 \\ -1 \times 10^5 & (1 \times 10^5 + 1.25 \times 10^5) & -1.25 \times 10^5 \\ 0 & -1.25 \times 10^5 & 1.25 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0.002 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Simplificamos la ecuación sacando de la matriz los términos semejantes en este caso 10^5 .

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & (1 + 1.25) & -1.25 \\ 0 & -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0.002 \end{Bmatrix}$$

Resolvemos la fila dos para identificar el valor del único desplazamiento desconocido u_2 .

$$\begin{aligned} 1000 &= 10^5 [-1(0) + 2.25u_2 - 1.25(0.002)] \\ \frac{1000}{10^5} + 1.25 \frac{\text{lbf}}{\text{in}} (0.002 \text{ in}) &= 2.25 \frac{\text{lbf}}{\text{in}} u_2 \\ \frac{\frac{1000 \text{ lbf}}{10^5} + 1.25 \frac{\text{lbf}}{\text{in}} (0.002 \text{ in})}{2.25 \frac{\text{lbf}}{\text{in}}} &= u_2 \end{aligned}$$

Respuesta

$$u_B = u_2 = 5.556 \times 10^{-3} \text{ in}$$

Una vez conociendo el u_2 podemos obtener el valor de F_1 y F_2 , sustituyendo y resolviendo la ecuación 2.9.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ 1000 \\ F_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & (1 + 1.25) & -1.25 \\ 0 & -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 5.556 \times 10^{-3} \\ 0.002 \end{Bmatrix}$$

$$F_1 = 10^5 \left[1 \frac{lbf}{in} (0) - 1 \frac{lbf}{in} (5.556 \times 10^{-3} in) + 0 (0.002 in) \right]$$

$$F_1 = 10^5 \left[-1 \frac{lbf}{in} (5.556 \times 10^{-3} in) \right]$$

Respuesta $F_1 = -555.6 \text{ lbf}$

$$F_3 = 10^5 \left[0(0) - 1.25 \frac{lbf}{in} (5.556 \times 10^{-3} in) + 1.25 \frac{lbf}{in} (0.002 in) \right]$$

$$F_3 = 10^5 \left[-1.25 \frac{lbf}{in} (5.556 \times 10^{-3} in) + 1.25 \frac{lbf}{in} (0.002 in) \right]$$

Respuesta $F_3 = -444.4 \text{ lbf}$

Debido a que F_3 es negativa, esto también verifica que el extremo C alcanza la pared. Observe que $F_1 + F_3 = -555.6 - 444.4 = -1000 \text{ lbf}$, lo que equilibra la fuerza aplicada (sin ecuaciones de estática necesarias).

En el caso de las fuerzas internas, es necesario regresar a las ecuaciones individuales (locales). De la ecuación 2.8-a.

$$\begin{Bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 5.556(10^{-3}) \end{Bmatrix}$$

Respuesta $= \begin{Bmatrix} -555.6 \\ 555.6 \end{Bmatrix} \text{ lbf}$

Puesto que $f_{1,1}$ se dirige hacia la izquierda y $f_{2,1}$ hacia la derecha, el elemento se encuentra en **tensión**, con una fuerza de 555.6 lbf .

Si se desea conocer el esfuerzo en la sección AB, es simplemente:

$$\sigma_{AB} = \frac{f_{2,1}}{A_{AB}} = \frac{555.6 \text{ lbf}}{0.100 \text{ in}^2} = 5556 \text{ psi}$$

En el caso del elemento BC, de la ecuación 2.8-b.

$$\begin{Bmatrix} f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1.25 & -1.25 \\ -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5.556(10^{-3}) \\ 0.002 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Respuesta} = \begin{Bmatrix} 444.4 \\ -444.4 \end{Bmatrix} \text{ lbf}$$

Puesto que $f_{2,2}$ se dirige hacia la derecha y $f_{3,2}$ hacia la izquierda, el elemento se encuentra a **compresión**, con una fuerza de 444.4 lbf. Si se desea conocer el esfuerzo en la sección BC, es simplemente

$$\sigma_{BC} = \frac{-f_{2,2}}{A_{BC}} = \frac{-444.4}{0.150 \text{ in}^2} = -2962.67 \text{ psi}$$

3.2. Calculo de elemento viga

Dada la siguiente viga con una rigidez de $3000 \text{ kNm}^2 (EI)$ se pide encontrar las reacciones en apoyos, desplazamientos y giros en los nudos de la viga:

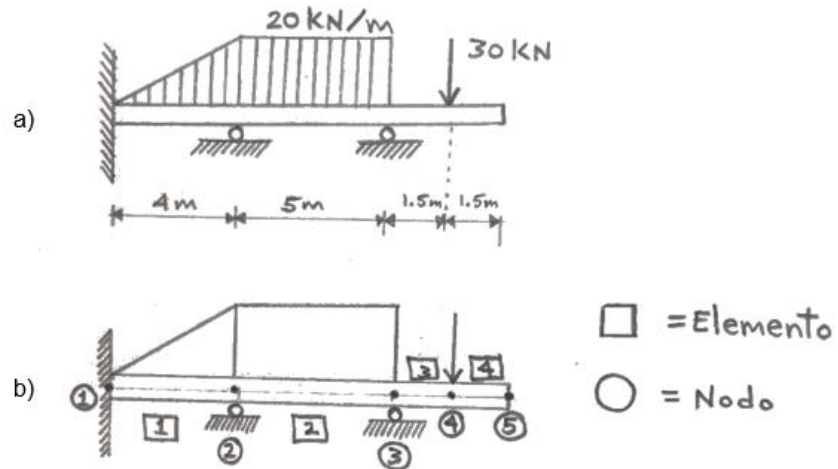


Figura 3.2: a) Viga con carga distribuida triangular y rectangular, junta a una carga puntual. b) Viga clasificada,

Solución

- Se debe enumerar cada grado de libertad, cada nodo y cada elemento.
- Se coloca un nodo en cada punto donde existe un cambio en el tipo de carga (Apoyos, cambios de sección transversal o donde exista una carga puntual).
- Se asignan dos grados de libertad por nodo; desplazamiento vertical, giro.

Tabla 3.1: Se reúnen los datos que proporciona la figura 2.18 donde

Datos	Rigidez (EI)	Longitud (L)
Elemento 1	3000 kNm^2	4 m
Elemento 2	3000 kNm^2	5 m
Elemento 3	3000 kNm^2	1.5 m
Elemento 4	3000 kNm^2	1.5 m

Con los anteriores supuestos se generan las $[K_{elemento}]$ de cada elemento, teniendo los siguientes.

$$[K_{e1}] = \begin{bmatrix} \frac{12(3000)}{(4)^3} & \frac{6(3000)}{(4)^2} & -\frac{12(3000)}{(4)} & \frac{6(3000)}{(4)^2} \\ \frac{6(3000)}{(4)^2} & \frac{4(3000)}{(4)} & -\frac{6(3000)}{(4)^2} & \frac{2(3000)}{(4)} \\ -\frac{12(3000)}{(4)^3} & -\frac{6(3000)}{(4)^2} & \frac{12(3000)}{(4)^3} & -\frac{6(3000)}{(4)^2} \\ \frac{6(3000)}{(4)^2} & \frac{2(3000)}{(4)} & -\frac{6(3000)}{(4)^2} & \frac{4(3000)}{(4)} \end{bmatrix} =$$

$$[K_{e1}] = \begin{bmatrix} 562.5 & 1125 & -562.5 & 1125 \\ 1125 & 3000 & -1125 & 1500 \\ -562.5 & -1125 & 562.5 & -1125 \\ 1125 & 1500 & -1125 & 3000 \end{bmatrix}$$

Igualmente se sustituyen los respectivos datos de los demás elementos en sus matrices.

$$[K_{e2}] = \begin{bmatrix} 288 & 720 & -288 & 720 \\ 720 & 2400 & -720 & 1200 \\ -288 & -720 & 288 & -720 \\ 720 & 1200 & -720 & 2400 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e3}] = \begin{bmatrix} 10666.7 & 8000 & -10666.7 & 8000 \\ 8000 & 8000 & -8000 & 4000 \\ -10666.7 & -8000 & 10666.7 & -8000 \\ 8000 & 4000 & -8000 & 8000 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e4}] = \begin{bmatrix} 10666.7 & 8000 & -10666 & 8000 \\ 8000 & 8000 & -8000 & 4000 \\ -10666.7 & -8000 & 10666.7 & -8000 \\ 8000 & 4000 & -8000 & 8000 \end{bmatrix}$$

Teniendo las cuatro matrices de cada elemento se genera la $[K_{GLOBAL}]$, al tener 4 elementos la $[K_{GLOBAL}]$ será una matriz de 10x10 la cual estará representada en la figura 2.19.

$$[K_{GLOBAL}] =$$

1	562.5	1125	-562.5	1125	0	0	0	0	0	0
2	1125	3000	-1125	1500	0	0	0	0	0	0
3	-562.5	-1125	562.5 +288	1125 -720	-288	720	0	0	0	0
4	1125	1500	1125 -720	3000 -2400	-720	1200	0	0	0	0
5	0	0	-288	-720	288 +10666.7	-720 +8000	-10666.7	8000	0	0
6	0	0	720	1200	-720 +8000	2400 +8000	-8000	4000	0	0
7	0	0	0	0	-10666.7	-8000	-10666.7	-8000	-10666.7	8000
8	0	0	0	0	8000	4000	-8000	8000	-8000	4000
9	0	0	0	0	0	0	-10666.7	-8000	10666.7	-8000
10	0	0	0	0	0	0	8000	4000	-8000	8000
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Figura 3.3: Matriz 10x10 $[K_{GLOBAL}]$ 4 elementos

Se separa la carga triangular de la carga rectangular para calcular cómodamente sus reacciones y momentos.

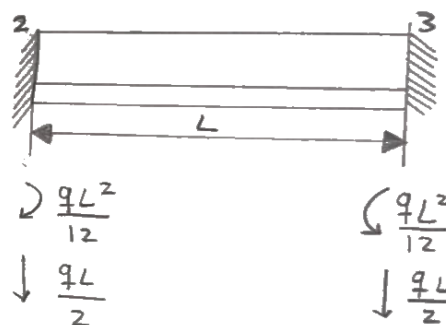
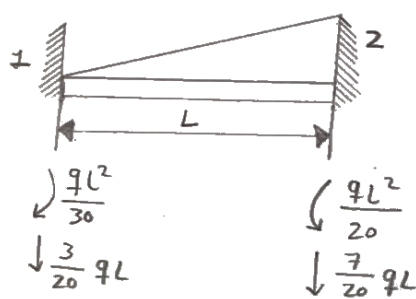


Figura 3.4: Cargas separadas con las reacciones de cada nodo y las respectivas fórmulas para calcularlos

Las reacciones se calculan y se colocan en el diagrama de la figura

Reacciones nodo 1 $\curvearrowleft \frac{(20)(4)}{30} = 10.667$ $\downarrow \frac{3}{20} (20)(4) = 12$	Reacciones nodo 2 $\curvearrowleft \frac{20(5)^2}{12} = 41.667$ $\downarrow \frac{20(5)}{2} = 50$
Reacciones nodo 2 $\curvearrowleft \frac{(20)(4)^2}{20} = 16$ $\downarrow \frac{7}{20} (20)(4) = 28$	Reacciones nodo 3 $\curvearrowleft \frac{20(5)^2}{12} = 41.667$ $\downarrow \frac{20(5)}{2} = 50$

Figura 3.5: Reacciones de las cargas triangular y rectangular

Se colocan en un diagrama mediante ese diagrama se podrán saber los valores de las reacciones.

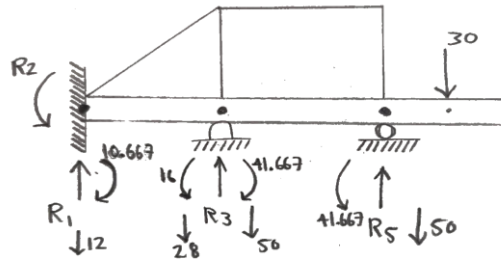


Figura 3.6: Diagrama del problema con todas sus reacciones

Usando la figura 2.22 se obtiene la matriz de las cargas, donde:

$$\begin{Bmatrix} R_1 - 12 \\ R_2 - 10.667 \\ R_3 - 28 - 50 \\ 16 - 41.667 \\ R_5 - 50 \\ 41.667 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Posteriormente se cancelaran varias columnas y filas pues al sustituir $[K_{GLOBAL}]$ en la fórmula 2.9 la cual nos dice que:

$$[K_{GLOBAL}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 - 12 \\ R_2 - 10.667 \\ R_3 - 28 - 50 \\ 16 - 41.667 \\ R_5 - 50 \\ 41.667 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A continuación figura 2.23 ilustrando la cancelación de las filas y columnas 1, 2, 3, 5; respectivamente.

Los desplazamientos (u), son igual a 0 pues al haber apoyos no hay desplazamiento vertical.

$$\begin{bmatrix} 562.5 & 1125 & -562.5 & 1125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1125 & 3000 & -1125 & 1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -562.5 & -1125 & 850.5 & -405 & -288 & 720 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1125 & 1500 & -405 & 5400 & -720 & 1200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -288 & -720 & 10954.7 & 7280 & -10666.7 & 8000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 720 & 1200 & 7280 & 10400 & -8000 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10666.7 & -8000 & 21333.33 & 0 & -10666.7 & 8000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8000 & 4000 & 0 & 16000 & -8000 & 4000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10666.7 & -8000 & 10666.7 & -8000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8000 & 4000 & -8000 & 8000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 - 12 \\ R_2 - 10.667 \\ R_3 - 28 - 50 \\ 16 - 41.667 \\ R_5 - 50 \\ 41.667 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Figura 3.7: Matriz K_{GLOBAL} (Las filas y columnas subrayadas son las que serán canceladas pues el desplazamiento es 0).

Queda la $[K_{GLOBAL}]$ reducida junto con los desplazamientos y cargas

$$\begin{bmatrix} 5400 & 1200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1200 & 10400 & -8000 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & -8000 & 21333.33 & 0 & -10666.7 & 8000 \\ 0 & 4000 & 0 & -8000 & 10666.7 & -8000 \\ 0 & 0 & -10666.7 & -8000 & 10666.7 & -8000 \\ 0 & 0 & 8000 & 4000 & -8000 & 8000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25.667 \\ 41.667 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esta ecuación se traduce como la siguiente

$$[K_{GLOBAL_{reducido}}][u]_{reducido} = [F]$$

Se despeja $[K_{GLOBAL_{reducido}}]$ de la ecuación para dejar solos los desplazamientos (u).

$$[u]_{reducido} = [K_{GLOBAL_{reducido}}]^{-1}[F]$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} u_4 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & 1200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1200 & 10400 & -8000 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & -8000 & 21333.33 & 0 & -10666.7 & 8000 \\ 0 & 4000 & 0 & -8000 & 10666.7 & -8000 \\ 0 & 0 & -10666.7 & -8000 & 10666.7 & -8000 \\ 0 & 0 & 8000 & 4000 & -8000 & 8000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -25.667 \\ 41.667 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la matriz podremos conocer el valor de cada desplazamiento (u), se puede hacer uso de algún software para la solución de matrices.

$$u_4 = -0.005 \text{ [rad]}$$

$$u_6 = 0.001111 \text{ [rad]}$$

$$u_7 = -0.009583 \text{ [m]}$$

$$u_8 = -0.010139 \text{ [rad]}$$

$$u_9 = -0.024791 \text{ [m]}$$

$$u_{10} = -0.010139 \text{ [rad]}$$

Ahora los desplazamientos pueden ser sustituidos en la ecuación 2.9 para conocer los valores de las reacciones R_1, R_2, R_3 y R_5

$$\begin{bmatrix} 562.5 & 1125 & -562.5 & 1125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1125 & 3000 & -1125 & 1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -562.5 & -1125 & 850.5 & -405 & -288 & 720 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1125 & 1500 & -405 & 5400 & -720 & 1200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -288 & -720 & 10954.7 & 7280 & -10666.7 & 8000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 720 & 1200 & 7280 & 10400 & -8000 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10666.7 & -8000 & 21333.33 & 0 & -10666.7 & 8000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8000 & 4000 & 0 & 16000 & -8000 & 4000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10666.7 & -8000 & 10666.7 & -8000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8000 & 4000 & -8000 & 8000 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.005 \\ 0 \\ 0.001111 \\ -0.009583 \\ -0.010139 \\ -0.02491 \\ -0.010139 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 - 12 \\ R_2 - 10.667 \\ R_3 - 28 - 50 \\ 16 - 41.667 \\ R_5 - 50 \\ 41.667 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Figura 3.8: Matriz global lista para resolver (Se puede usar un software para la resolución matricial).

Del producto de $[K_{GLOBAL_{reducido}}] * [u]_{reducido}$ se obtienen los siguientes resultados.

1. $1125(-0.005) = -5.62512 \text{ [N]}$
2. $1500(-0.005) = -7.5 \text{ [N]}$
3. $-405(-0.005) + 720(0.001111) = 2.82 \text{ [N]}$
4. $5400(-0.005) + 1200(0.001111) = -25.667 \text{ [N]}$
5. $-720(-0.005) + 7280(0.001111) - 10666.7(-0.009583) + 8000(-0.010139) = 32.7994 \text{ [N]}$
6. $1200(-0.005) + 10400(0.001111) - 8000(-0.009583) + 8000(-0.010139) = 41.667 \text{ [N]}$
7. $-8000(-0.005) + 21333.33(0.001111) - 10666.7(-0.024791) + 8000(-0.010139) = -30 \text{ [N]}$

$$\begin{Bmatrix} -5.62512 \\ -7.5 \\ 2.82 \\ -25.667 \\ 32.7994 \\ 41.667 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [N] = \begin{Bmatrix} R_1 - 12 \\ R_2 - 10.667 \\ R_3 - 28 - 50 \\ 16 - 41.667 \\ R_5 - 50 \\ 41.667 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Una vez despejada se obtienen

- $R_1 = 12 - 5.62512 = 6.37488 \text{ [N]}$
- $R_2 = 10.667 - 7.5 = 3.167 \text{ [kNm]}$
- $R_3 = 78 + 2.82 = 80.82 \text{ [N]}$
- $R_5 = 50 + 32.7994 = 82.7994 \text{ [N]}$

Las reacciones en los apoyos se representan en el diagrama de la siguiente forma

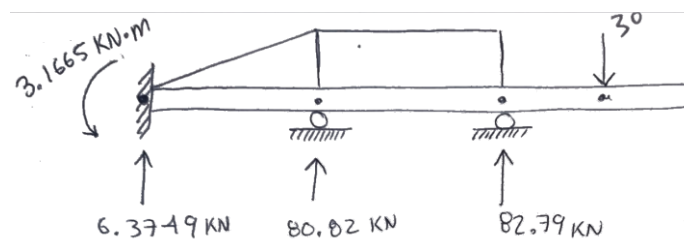


Figura 3.9: Reacciones en nodos

Lo que se ha hecho hasta ahora es meramente para conocer los desplazamientos en el problema, ahora se hace uso de las formulas derivadas de la elástica, apoyándose de la figura 2.18 en la que se muestran las dimensiones de cada elemento, esto con el fin de calcular las ecuaciones 2.19 y 2.20, en cada tramo (elemento).

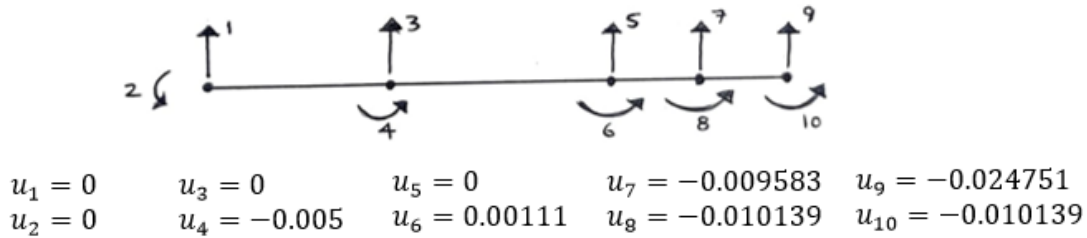


Figura 3.10: Desplazamientos de cada nodo.

Hasta este punto todos los datos del problema son conocidos, todos, a excepción de las constantes de integración, C_1, C_2, C_3, C_4 .

Para cada tramo de la viga se necesita calcular las constantes de integración y con ellas conocer el momento y esfuerzo cortante en dicho nodo.

Tramo 1

Se debe considerar que $x_1 = 0 [m], x_2 = 4 [m], EI = 3000 [kNm^2]$,

$u_1 = 0 [m], u_2 = 0 [m], u_3 = 0 [m], u_4 = -0.005 [m], q_1 = 0 [kN]$ y $q_2 = 20 [kN]$

Donde

$$A = \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} = \frac{20 - 0}{4 - 0}$$

$$A = 5$$

$$B = q_1 - \left(\frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right) x_1 = 0 - \left(\frac{20 - 0}{4 - 0} \right) (0)$$

$$B = 0$$

Como $A = 5$ y $B = 0$, tenemos

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(0)^3}{6} & \frac{(0)^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{(0)^2}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{(4)^3}{6} & \frac{(4)^2}{2} & 4 & 1 \\ \frac{(4)^2}{6} & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 3000(0) + 5 \frac{0^5}{120} + 0 \frac{0^4}{24} \\ 3000(0) + 5 \frac{0^4}{24} + 0 \frac{0^3}{6} \\ 3000(0) + 5 \frac{4^5}{120} + 0 \frac{4^4}{24} \\ 3000(-0.005) + 5 \frac{4^4}{24} + 0 \frac{4^3}{6} \end{Bmatrix}$$

O bien,

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10.667 & 8 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 42.667 \\ 38.333 \end{Bmatrix}$$

resultado

$$\begin{Bmatrix} C_1 = 6.375 \\ C_2 = -3.167 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

En cuanto al momento y esfuerzo cortante, es necesario hacer uso de las ecuaciones 2.19 y 2.20.

$$V(x) = -(5) \frac{x^2}{2} + 6.375$$

$$M(x) = -(5) \frac{x^3}{6} + 6.375x - 3.167$$

Tramo 2

Considerando que $x_1 = 4 [m]$, $x_2 = 5 [m]$, $EI = 3000 [kNm^2]$, $u_3 = 0 [m]$,

$u_4 = -0.005 [m]$, $u_5 = 0 [m]$, $u_6 = 0.001111 [m]$, $q_1 = 20 [kN]$ y $q_2 = 20 [kN]$

Donde

$$A = \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} = \frac{20 - 20}{5 - 4} = 0$$

$$B = q_1 - \left(\frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right) x_1 = 20 - \left(\frac{20 - 20}{5 - 4} \right) (4) = 20$$

Como $A = 0$ y $B = 20$, tenemos

resultado

$$\begin{cases} C_1 = 127.20 \\ C_2 = -375.8 \\ C_3 = 655.93 \\ C_4 = 904.80 \end{cases}$$

Momento y esfuerzo cortante nodo 2

$$V(x) = -20x + 127.20$$

$$M(x) = -20 \frac{x^2}{2} + 127.20x - 375.8$$

Tramo 3

Considerando que $x_1 = 9$ [m], $x_2 = 10.5$ [m], $EI = 3000$ [kNm²], $u_5 = 0$ [m], $u_6 = 0.001111$ [m], $u_7 = -0.009583$ [m], $u_8 = -0.010139$ [m], $q_1 = 0$ [kN] y $q_2 = 0$ [kN].

Donde

$$A = \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 0}{10.5 - 9} = 0$$

$$B = q_1 - \left(\frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right) x_1 = 0 - \left(\frac{0 - 0}{10.5 - 9} \right) (9) = 0$$

Como $A = 0$ y $B = 0$, tenemos

resultado

$$\begin{cases} C_1 = 29.99 \\ C_2 = -314.94 \\ C_3 = 1623.08 \\ C_4 = -5496.69 \end{cases}$$

Momento y esfuerzo cortante nodo 3

$$V(x) = 29.99$$

$$M(x) = 29.99x - 314.94$$

Tramo 4

Considerando que $x_1 = 10.5 [m]$, $x_2 = 12 [m]$, $EI = 3000 [kNm^2]$,
 $u_7 = -0.009593 [m]$, $u_8 = -0.010139 [m]$, $u_9 = -0.02451 [m]$,
 $u_{10} = -0.010139 [m]$, $q_1 = 0 [kN]$ y $q_2 = 0 [kN]$.

Donde

$$A = \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 0}{12 - 10.5} = 0$$

$$B = q_1 - \left(\frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right) x_1 = 0 - \left(\frac{0 - 0}{12 - 10.5} \right) (10.5) = 0$$

Como $A = 0$ y $B = 0$, tenemos

resultado

$$\begin{cases} C_1 = -0.00533 \\ C_2 = 0.060 \\ C_3 = -30.753 \\ C_4 = 291.879 \end{cases}$$

Momento y esfuerzo cortante nodo 4

$$V(x) = -0.00533$$

$$M(x) = -0.00533x + 0.060$$

3.3. Modelado de probetas

Principalmente con las medidas de cada probeta usadas en [20], se modelaron en el software Solidworks ©.

Cada una de las 15 probetas tiene una medida diferente, pero conservando la forma de la probeta rectangular, así mismo dentro de sus tolerancias geométricas.

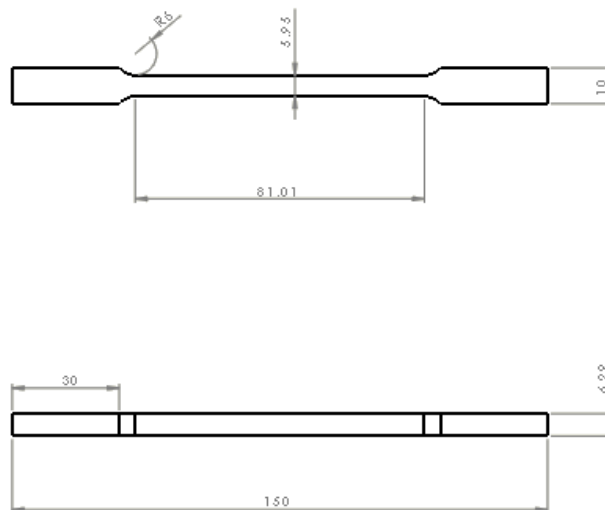


Figura 3.11: Dimensiones de probeta acotado en mm (probeta 3) [20].

3.4. Calculo de modulo elástico y limite elástico

Principalmente una vez ya modeladas, cada probeta calentada a una temperatura distinta tiene propiedades mecánicas diferentes debido a este cambio de temperatura.

Contemplando el cambio de propiedades, se generara un nuevo material, seleccionando el tipo de modelo como Plasticidad – von Mises por lo que es necesario conocer el **modulo elástico**, coeficiente de Poisson, límite de tracción (esfuerzo Max.), **limite elástico** y los datos de esfuerzos vs deformaciones.

Puesto que se cuenta con todos los anteriores mencionados a excepción del límite elástico ni el módulo elástico, usando un software para manipulación de datos y gráficas (Origin), se conocerá el límite elástico usando la gráfica de esfuerzo deformación del material.

Al tener tantos datos inicialmente, el Origin nos ayuda a reducir los datos (se hace la reducción porque Solidworks solo acepta máximo 200 datos para la creación de la curva esfuerzo-deformación).

La principal zona de la gráfica que asciende y después va tornándose curva es la que llamamos zona elástica, la zona elástica se aproxima a una recta con el software para conocer el modulo elástico.

De la aproximación nos interesara la tabla generada en la gráfica figura 2.28, dicha tabla nos proporciona el modulo elástico que vendrá con el nombre de **Slope**, así mismo la intercepción (**intercept**).

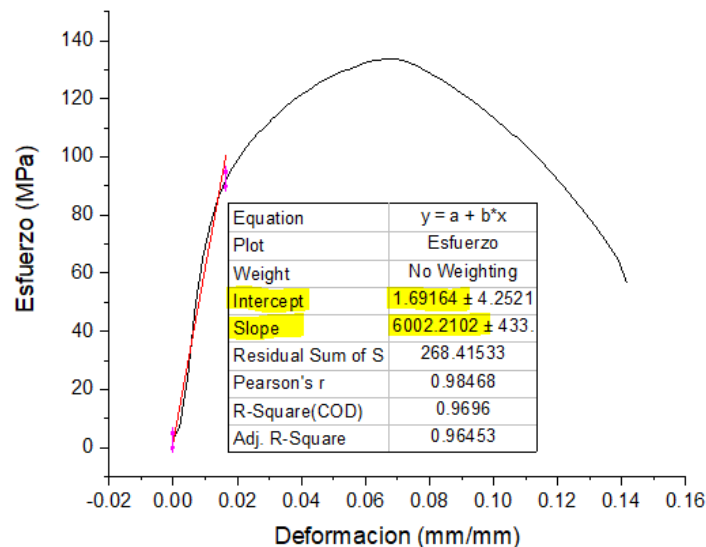


Figura 3.12: Curva esfuerzo deformación de aluminio 6061 a $T=237^{\circ}\text{C}$, modulo elástico e intercepción conocidas.

Con estos datos es posible descubrir el límite elástico del material, es decir, el límite de cedencia en donde la deformación elástica pasa a ser deformación plástica.

La ecuación de la intersección afecta a toda la columna de las deformaciones, por lo que generando una nueva columna y declarando la función de esta columna con la ecuación 2.21.

$$Y = b(x - 0.002) + a \quad (2.21)$$

Donde

$b = \text{Modulo elastico}$ $x = \text{columna deformacion}$

$a = \text{interseccion}$ $0.2\% = 0.002$

La ecuación al graficarse se representara como una línea recta que toca con un solo punto de la gráfica esfuerzo deformación, esta intersección será el limite elástico, ahora solo resta conocer el valor identificando valores con la herramienta del software, siendo el valor que nos interesa el representado por Y.

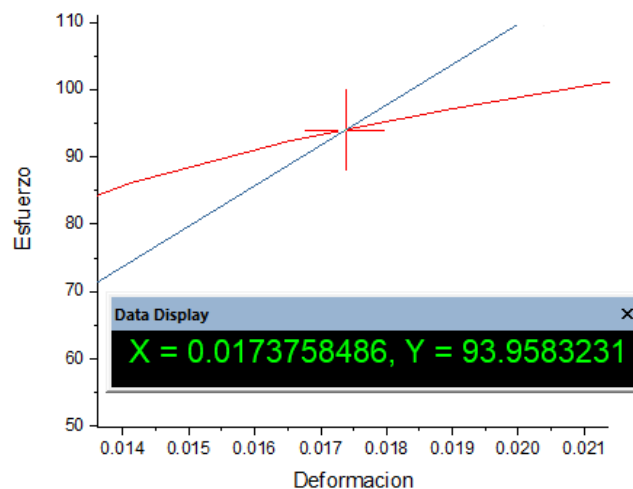


Figura 3.13: Limite elástico de aluminio 6061 T237°C.

3.5. Simulación Solidworks®

3.5.1. Declaración de nuevo material en Solidworks®

Con todas las propiedades reunidas del material se procede a introducir en el apartado llamado *material nuevo*, seleccionando el tipo de modelo como *von-Mises*.

Propiedad	Valor	Unidades
Módulo elástico	6002.21	N/mm ²
Coefficiente de Poisson	0.33	N/D
Límite de tracción	134.12	N/mm ²
Límite elástico	93.96	N/mm ²
Módulo tangente		N/mm ²
Coefficiente de expansión térmica		/K
Densidad de masa	1020	kg/m ³
Factor de endurecimiento		N/D

Figura 3.14: Forma de introducir los datos de un nuevo material (Ej. Material probeta 3).

En cuanto a la curva esfuerzo deformación, los datos reducidos los pegamos directamente en la tabla vacía que surge al oprimir en *Crear curva Esfuerzo-Tensión*. La curva se agrega para que el material tenga una base de datos que le sirven como límites a la hora de un análisis.

Tipo: Curva de Tensión-Deformación unitaria

Nota: Se requieren datos reales de la curva tensión-deformación unitaria para la formulación de grandes deformaciones unitarias.

Datos de tabla

Unidades: N/D N/mm²

Puntos	A	B
1	0	0
2	5.76923e-005	0.397501781
3	0.00025	0.238501068
4	0.0005	0.556502493
5	0.00075	1.9875089
6	0.000980769	3.2595146
7	0.001230769	4.69052101
8	0.001461538	5.64452529

Origen:

Archivo Ver Guardar

Figura 3.15: Declaración de material con curva esfuerzo-deformación en software Solidworks.

3.5.2. Análisis Solidworks®

Una vez declarado el material se puede poner a prueba la probeta a la simulación de prueba de tensión, para realizarla se selecciona el complemento **Simulation** del software, seguido de elegir el tipo de estudio que se realizara, en nuestro caso se escoge un análisis *Non lineal* ya que este análisis considera el comportamiento tenso-deformacional de los materiales y la no linealidad geométrica, descartando de manera directa el principio de superposición.

La metodología para llevar a cabo el análisis es la siguiente:

- Seleccionar la opción *geometría fija* para restringir la probeta, simulando ser una mordaza de las pruebas de tensión.
- Seleccionar la opción *Sujeciones avanzadas*, de esta forma el estudio no crea fallas por grandes desplazamientos, se necesita introducir el desplazamiento de la probeta junto con una geometría de referencia seleccionando la arista que coloque a la probeta en tensión.

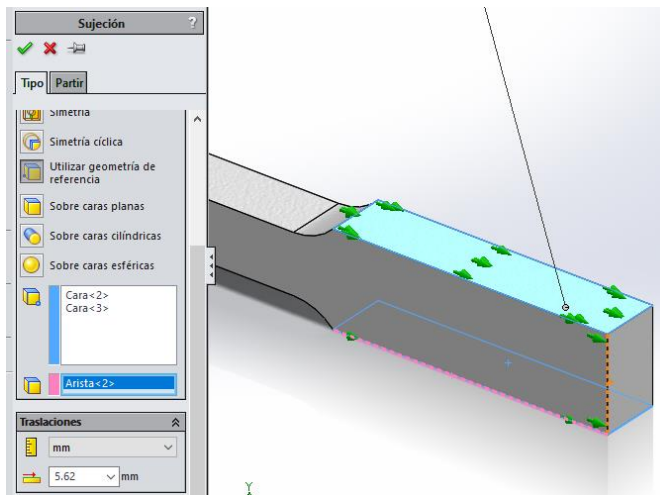


Figura 3.16: Sujeción avanzada

- Seleccionar *Crear malla* para poder realizar el análisis se recomienda usar como mínimo la malla predeterminada, al hacerla más fina se usara más recursos de la computadora y el resultado no variara tanto.

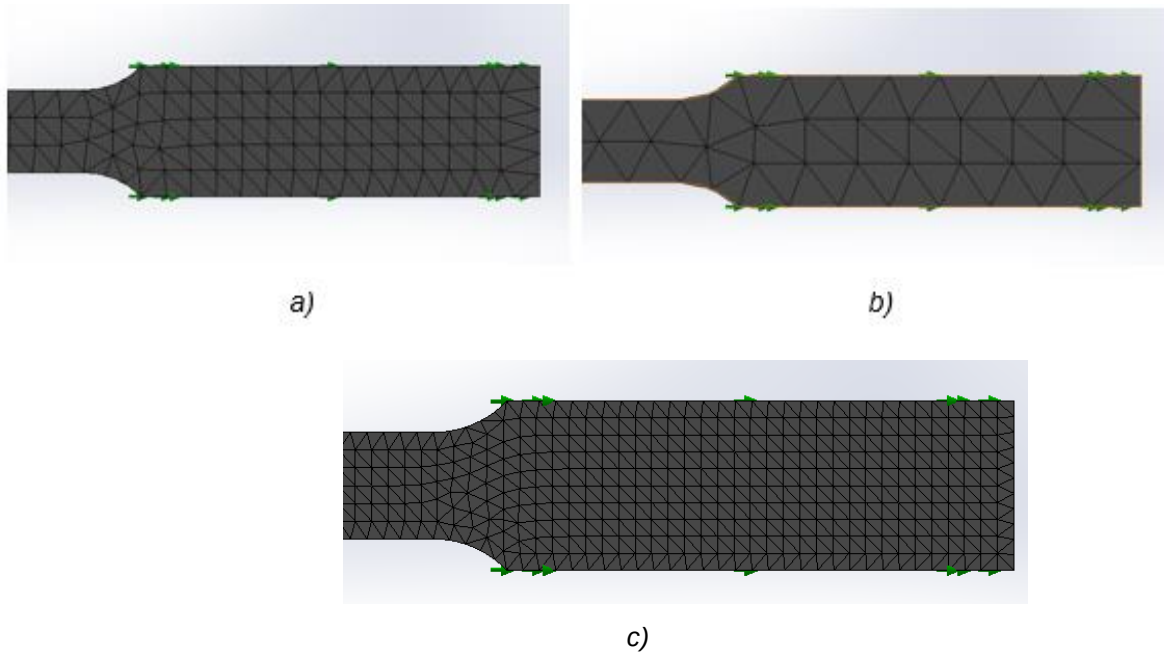


Figura 3.17: a) malla predeterminada, b) malla gruesa, c) malla fina

- Ejecutar el análisis, el análisis se efectúa en unos minutos, una vez finalizado el informe presentara tres modelos con grafica de colores que representaran las tensiones, deformaciones y deformaciones unitarias.
- Elegir del menú de opciones *identificar valores* y seleccionar el cuerpo de la probeta para saber el valor en la parte deseada (sección central de menor anchura en la probeta).

3.5.3. Control de unidades

Los resultados del análisis no son muy familiares en cuanto a sus unidades, por lo que es de suma importancia el ordenarlos para que sea mucho más fácil la interpretación.

Los pasos para modificar las unidades y formato de números son los siguientes:

- Seleccionar **opciones de gráfico**.
- En la sección *Posición/Formato* escoger el formato de número como **flotante**.
- Seleccionar en el menú de configuración la opción **Definición**.
- Ubicado en Definición cambiar las unidades predeterminadas de N/m^2 a MPa.

3.6. Simulación COMSOL Multiphysics®

COMSOL Multiphysics® es una herramienta de modelado y análisis para prototipaje virtual de fenómenos físicos. COMSOL Multiphysics puede modelar virtualmente cualquier fenómeno físico que un ingeniero o científico pueda describir con ecuaciones diferenciales parciales (PDE), incluyendo transferencia de calor, movimiento de fluidos, electromagnetismo y mecánica estructural, soportando la integración de problemas de diferentes campos - Multifísica.

3.6.1. Nuevo estudio de tensión

Los pasos para generar un nuevo estudio en COMSOL, son los siguientes:

- Acudir al *asistente de modelo*.
- Seleccionar dimensión del espacio como *3D*.
- Seleccionar física como mecánica estructural y agregar la física de *mecánica de sólidos*.
- Añadir estudio como estudio general *estacionario*.

3.6.2. Importación de dibujos

Los pasos a seguir para importar dibujos hechos en otro software CAD a COMSOL son los siguientes:

- Crear un modelo un nuevo estudio de tensión.
- Seleccionar *Geometría* de las opciones de *Home*.
- Seleccionar la opción *importar*.
- Buscar el dibujo a importar con la opción *Navegador*.
- Cambiar las unidades de longitud por las del documento CAD.
- Seleccionar *importar* para modelarse automáticamente en el software.

3.6.3. Declaración de nuevo material

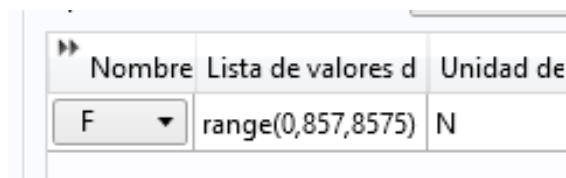
Los pasos para declarar un nuevo material en COMSOL son los siguientes:

- Ubicarse en el menú *Materiales*.
- Seleccionar en *Material en blanco*.
- Elegir *Propiedades de grupo definido por el usuario*, esta opción libera la opción de interpolación.
- Se agregaran tres propiedades; Modulo de Young (módulo de elasticidad), coeficiente de Poisson, Densidad.
- Escoger la opción *interpolación*.
- Ingresar datos de la curva esfuerzo-deformación en t y $f(t)$ respectivamente.
- *Crear gráfico*.
- Cambiar el nombre predeterminado de *Material 1* por el nombre personalizado del material.
- Agregar a *Materiales*.

3.6.4. Análisis en COMSOL Multiphysics®

La metodología para llevar a cabo el análisis es la siguiente:

- Ubicarse en el menú *Física*
- Declarar la fuerza necesaria en la opción Parámetros (fuerza máxima que resistió la probeta en el estudio [20]).
- Elegir la opción *Contorno* y seleccionar la opción *Restricción fija* en un extremo de la probeta para sujetarla.
- Añadir una *Carga de contorno* en el extremo opuesto al de la Restricción fija, ingresando la variable de la fuerza declarada, el tipo de carga se escogerá como Fuerza total (N) y la magnitud de la fuerza será en dirección positiva al eje z.
- Seleccionar *Malla 1* e iniciar el mallado con la opción *Construir todo*.
- Elegir en *Paso 1: Estacionario* se abre el apéndice de *Extensiones del estudio* y se activa la opción barrido auxiliar, el barrido auxiliar sirve para poder ver cómo va afectando la fuerza a través del tiempo. Se necesita ingresar en la lista de valores de parámetros el rango en el que se incrementara la fuerza. Solo se deben ingresar 3 valores en el paréntesis y deben ir en el orden establecido de 0 a la fuerza máxima al medio de estos dos valores el 10% de la fuerza máxima.



Nombre	Lista de valores d	Unidad de
F	range(0,857,8575)	N

Figura 3.18: Forma de ingresar lista de valores.

- Iniciar el análisis, se demora varios minutos y el producto final se podrá tocar en la superficie por default para identificar los esfuerzos en la zona deseada.

3.6.5. Control de unidades

Los pasos para controlar las unidades son los siguientes:

- Principalmente se puede modificar en el menú de opciones de *Tensión (solid)* la barra de colores, mostrando el valor máximo y mínimo, así mismo se debe seleccionar la opción de mostrar unidades.
- Seleccionar el apéndice *Superficie 1* del análisis de Tensión.
- En el anterior menú de Superficie 1 se debe elegir las unidades en MPa.
- La barra de colores se actualizara al seleccionar la parte de *Grafico*.

Capítulo 4. Resultados

En el presente apartado se muestran los resultados obtenidos en ambos softwares, así como también los resultados de los cálculos de propiedades mecánicas.

4.1. Resultados obtenidos en cálculos de propiedades mecánicas a aleaciones de aluminio 6061

En la Tabla 4.1. Se puede observar tanto los Módulos elásticos de cada material como sus límites elásticos.

Tabla 4.1. Propiedades mecánicas obtenidas en programa informático patentado para gráficos científicos interactivos y análisis de datos.

Aleación aluminio 6061			
No. Probeta	Temperatura (°C)	Modulo elástico (MPa)	Limite elástico (MPa)
1	22	5164.534	191.71
2	23	5069.673	198.81
3	237	6002.2102	93.958
4	237	3051.8683	131.723
5	225	3139.235	129.856
6	243	4674.874	188.381
7	196	4736.05	192.112
8	300	5287.845	70.250
9	292	2930.06	46.934
10	275	5422.69	65.184
11	24.5	4409.01	196.73
12	24.5	4423.18	200.268
13	330	3531.32	43.5
14	319	4831.9	64.38
15	319	6367.04	36.246

Si bien hay algunas probetas que comparten una temperatura, hay que tener en cuenta que cada probeta tiene variaciones en sus medidas, así como las cargas a las que fueron sometidas, por lo que debido a esos detalles el modulo elástico y limite elástico es único en cada probeta.

4.2. Resultados obtenidos en Solidworks®

Con la finalidad de comparar cuantas discrepancias se encuentran en el análisis simulado contra los datos de pruebas de tensión [20], en la Tabla 4.2. Se pueden contemplar los valores reales y los valores simulados en los esfuerzos máximos (σ_{max}). Las variables involucradas se describen a continuación.

σ_{MR} es el esfuerzo máximo real, obtenido en prueba de tensión real [20].

σ_{MSS} es el esfuerzo máximo simulado en Solidworks®

Tabla 4.2. Resultados obtenidos mediante simulación Solidworks®

No. Probeta	$\sigma_{MR} (N/mm^2)$	$\sigma_{MSS} (N/mm^2)$
1	221.48	215.47
2	226.36	226.37
3	134.11	135.902
4	167.40	159.22
5	171.16	171.15
6	219.08	218.616
7	222.07	229.709
8	127.07	129.910
9	104.20	80.181
10	136.73	139.218
11	227.58	219.927
12	229.37	225.515
13	110.496	110.489
14	122.12	117.247
15	109.217	109.705

El propósito de la simulación es conocer que tanto podemos confiar en los softwares, los resultados fueron un tanto errados en algunas probetas, por lo que para estar más seguros de nuestros resultados y para poder conocer que tan satisfactorios fueron se obtuvo en la Tabla 4.3 la incerteza de los valores calculando su error experimental mejor conocido como valor absoluto así como el error relativo porcentual ($E_r \%$) este último se utiliza como criterio de calidad de un resultado fijándose por convención que si su valor es menor que el 1% el resultado experimental es *muy bueno*, en cambio si el valor se encuentra en el intervalo del 5% al 10% el resultado es *acceptable*, mientras que si el error relativo es superior al 10% el resultado es *poco confiable* [21].

Tabla 4.3. Precisión del estudio en Solidworks®

No. Probeta	ERROR ABSOLUTO	ERROR RELATIVO (%)
1	6.01	2.713563301
2	0.01	0.004417742
3	1.792	1.336216539
4	8.18	4.886499403
5	0.01	0.005842487
6	0.464	0.211794778
7	7.639	3.439906336
8	2.84	2.234988589
9	24.019	23.05086372
10	2.488	1.819644555
11	7.653	3.36277353
12	3.855	1.680690587
13	0.007	0.006335071
14	4.873	3.990337373
15	0.488	0.446816887

Se puede notar las variaciones que se presentan y la fiabilidad de dicho programa, considerando los valores del error el error relativo porcentual máximo y mínimo de 23.05 y 0.0044 % respectivamente, dado que el error relativo porcentual es mayor al 10 % se considera como *poco confiable*, pero si

llegásemos a omitir el valor máximo de 24.05, los demás valores no rebasan el 10 %, por lo tanto los resultados serían aceptables y se consideraría la posibilidad de que la simulación a la probeta con el mayor valor sea un error sistemático, teniendo que repetir la simulación de la probeta 9.

4.3. Resultados obtenidos en COMSOL Multiphysics®

De la misma forma se compararan los resultados obtenidos en el software más sofisticado especializado en la solución de este tipo de análisis. Las variables involucradas se describen a continuación.

σ_{MR} Es el esfuerzo máximo real, obtenido en prueba de tensión real [20].

σ_{MSC} Es el esfuerzo máximo simulado en COMSOL Multiphysics®

Tabla 4.4. Resultados obtenidos mediante simulación COMSOL Multiphysics®

No. Probeta	$\sigma_{MR} (N/mm^2)$	$\sigma_{MSC} (N/mm^2)$
1	221.48	221.13
2	226.36	226.37
3	134.11	134.12
4	167.40	167.40
5	171.16	171.15
6	219.08	219.08
7	222.07	222.04
8	127.07	127.34
9	104.20	104.20
10	136.73	136.739

11	227.58	227.58
12	229.37	229.37
13	110.496	110.50
14	122.12	122.12
15	109.217	109.22

La simulación sin lugar a duda es un método imprescindible hoy en día, pues ayuda a anticipar las soluciones, mejorando y optimizando los procesos actuales.

Los valores de este estudio necesitan ser puestos a prueba de la misma forma que en el estudio anterior concentrando los valores en la Tabla 4.5 con el mismo criterio de calidad fijándose por convención que si su valor es menor que el 1% el resultado experimental es *muy bueno*, en cambio si el valor se encuentra en el intervalo del 5% al 10% el resultado es *aceptable*, mientras que si el error relativo porcentual es superior al 10% el resultado es *poco confiable* [21].

Calculando la precisión del estudio obtenemos los resultados de la Tabla 4.5.

Tabla 4.5. Precisión del estudio en COMSOL Multiphysics®

No. Probeta	ERROR ABSOLUTO	ERROR RELATIVO (%)
1	0.35	0.158027813
2	0.01	0.004417742
3	0.01	0.007456566
4	0	0
5	0.01	0.005842487
6	0	0
7	0.03	0.013509254
8	0.27	0.21248131
9	0	0
10	0.009	0.006582316
11	0	0
12	0	0
13	0.004	0.003620041
14	0	0
15	0.003	0.002746825

Podemos notar una mejoría en los resultados, considerando los valores del error relativo porcentual máximo y mínimo de 0.21 y 0 % respectivamente, dado que el error relativo porcentual es menor al 1 % se consideran los resultados como muy buenos.

Capítulo 5. Conclusiones

Se modelaron Quince probetas para analizarlas en dos programas de simulación Solidworks y COMSOL Multiphysics, agregando en ambos programas nuestros propios materiales, todo esto con la finalidad de poner a prueba la veracidad de sus resultados comparados con los resultados reales hechos en una prueba de tensión con una maquina universal de pruebas de tensión [20].

La interfaz del primer software es muy amigable por lo que cualquiera podría iniciar simulando en él, la cantidad de datos solicitada ya viene establecida por lo que no se presenta problema a la hora de declarar propiedades a los materiales, al momento de llevar a cabo las simulaciones los resultados obtenidos en su mayoría fueron aceptables por estar en el rango del 1 al 5 % y en un caso se consideró poco confiable por estar arriba del 10 % [21]. No se logró mantener los resultados en los parámetros deseados este software es aceptable, pero no destaca por su desempeño al simular del segundo Software, pero si destaca en cuanto a su gran accesibilidad, lo cual lo hace una buena opción si se busca tener una magnitud de referencia de algún problema, teniendo en cuenta su pequeña incerteza.

En cuanto a COMSOL Multiphysics, en cuanto a su interfaz se notara de inmediato lo poco intuitiva que es, si se busca hacer piezas muy elaboradas se recomienda prescindir de la opción de modelado que este software nos ofrece y optar por importar piezas dibujadas en el software CAD de su preferencia, este software presenta una biblioteca de materiales enorme, con materiales a diferentes temperaturas, al elegir declarar tu propio material se presenta un inconveniente pues prácticamente es un material en blanco y se deberá buscar de propiedad en propiedad, por lo que, con tantas opciones se puede agregar propiedades

innecesarias, cabe decir que tiene sus semejanzas con el primer programa por lo que te resultara familiar en algunas partes, al realizar las simulaciones los resultados fueron muy satisfactorios, se encontraron en un rango de error relativo porcentual de 0.21 a 0 % por lo que se consideran muy buenos por estar abajo del 1 % según el criterio de calidad [21].

Este software es altamente recomendado para este tipo de análisis, su fidelidad a los valores reales [20], por otro lado hay que considerar lo poco intuitivo que es dificultando el modelado de nuevos elementos.

Ambos software de análisis de elemento finito, Solidworks Simulation y COMSOL Multiphysics, tienen sus fortalezas y debilidades. La elección depende de los requisitos específicos de cada proyecto y del usuario.

Solidworks Simulation es una herramienta integral de simulación y diseño que es fácil de usar y se integra bien con el software de diseño mecánico Solidworks.

Por otro lado, COMSOL Multiphysics es una plataforma más potente y versátil que ofrece una amplia gama de opciones de modelado y simulación en una variedad de campos, incluyendo eléctrico, mecánico, químico y de ondas. Es adecuado para aplicaciones más complejas y tiene una comunidad de usuarios y una biblioteca de modelos en línea más grandes.

En resumen, si se requiere una solución integral y fácil de usar para aplicaciones simples de análisis de estructuras y de fluidos, Solidworks Simulation es una buena opción. Si se requiere una plataforma más potente y versátil para aplicaciones más complejas, COMSOL Multiphysics es una mejor opción.

Competencias desarrolladas y/o aplicadas

Competencias instrumentales

- Capacidad de análisis y síntesis.
- Capacidad de organizar y planificar.
- Comunicación oral y escrita en su propia lengua.

- Conocimiento de una segunda lengua.
- Habilidad de gestión de información.
- Toma de decisiones.

Competencias interpersonales

- Capacidad crítica y auto crítica.
- Trabajo en equipo.
- Capacidad de trabajar en equipo interdisciplinario.
- Capacidad de comunicarse con profesionales de otras áreas.
- Habilidad para trabajar en un ambiente laboral.
- Manejo y practica de los valores así como el respeto la biodiversidad

Competencias sistémicas

- Capacidad de modelación.
- Capacidad de aplicar los conocimientos a la práctica.
- Habilidades de investigación.
- Capacidad de adaptarse a nuevas situaciones.
- Capacidad de generar nuevas ideas.
- Capacidad para diseñar y gestionar proyectos.
- Búsqueda del logro

Bibliografía

- [1] M. Vrolijk, D. Lorenz, H. Porzner y H. Martin, «Supporting lightweight design: virtual modeling of hot stamping», de *17th International Conference on Sheet Metal, SHEMET17*, Chicago, IL, 2017.
- [2] J. Hirsch, «Aluminium in innovative light-weight car design, » *Mater Trans*, nº 52, p. 818–824, 2011.
- [3] R. Nisbett, B. G. y J. Keith, «the designer is forced to make less efficient approximations using close solutions,», *Shigley's Mechanical Engineering Design*, nº19, p. 920, 2010.
- [4] C. V. Dávila, P. de J. G. Zugasti. *Dibujo y Diseño con Solidworks*, Cuarta edición, García S.A., 2018.
- [5] J. Davis, *Tensile Testing*, ASM International, 2004.
- [6] K. Cierocki, C. «<https://www.zwickroell.com>, » Zwick Roell GmbH &Co., 2022. [En línea]. Available: <https://www.zwickroell.com/es/sectores/metales/normas-para-metales/ensayo-de-traccion-en-metales-astm-e8/>
- [7] R. C. Hibbeler, *Mecánica de materiales* 8va edición, Prentice Hall, Inc., 2011.
- [8] D. R. Askeland, *Ciencia e ingeniería de los materiales*, 3ra edición, International Thomson Editores, 1998.
- [9] E. R. J. J. T. D. D. F. M. Ferdinand P. Beer, *Mecánica de Materiales* 5a edición, The McGraw-Hill Companies, 2010.
- [10] J. H. William Smith, *Foundations of Materials Science and Engineering*, sixth edition, McGraw-Hill Education, 2019
- [11] G. Dieter, *Mechanical Metallurgy*, 3ra ed., McGraw-Hill, 1986.
- [12] J. F. Shackelford, *Introducción a la ciencia de los materiales para ingenieros*, 6ta edición, Pearson Education, Inc, 2005.
- [13] R. Nisbett, B. G. y J. Keith, *Shigley's Mechanical Engineering Design*. Ninth edition, The McGraw-Hill Companies, Inc., 2011.

- [14] R. Nisbett, B. G. y J. Keith, « These nodes are the fundamental governing entities of the element, », Shigley's Mechanical Engineering Design, n°19, p. 920-921, 2011.
- [15] R. Nisbett, B. G. y J. Keith, «FEM software codes have what is known as the library of code elements, », Shigley's Mechanical Engineering Design, n°19, p. 923-924, 2011.
- [16] R. Nisbett, B. G. y J. Keith, « These nodes are the fundamental governing entities of the element, », Shigley's Mechanical Engineering Design, n°19, p. 922-923, 2011.
- [17] R. Nisbett, B. G. y J. Keith, « The basic strut element has two nodes, and in a one-dimensional problem, », Shigley's Mechanical Engineering Design, n°19, p. 924-925, 2011.
- [18] M. Pardo, «<https://marcelopardo.com>», Marcelo Pardo Ingeniería, 2021. [En línea]. Available: <https://marcelopardo.com/matriz-de-rigidez-de-viga/#:~:text=La%20matriz%20de%20rigidez,con%20dos%20grados%20de%20libertad>.
- [19] DASAULT SYSTEMES, «<https://help.solidworks.com>», Ayuda de Solidworks, 2017. [En línea]. Available: https://help.solidworks.com/2017/spanish/solidworks/cosmosxpresshelp/t_assigning_material.htm#
- [20] J. Compeán, «Estudio experimental de esfuerzo-deformación como función de la temperatura en probetas de aleación de aluminio 6061», Tesis, 2021.
- [21] M. S. Graciela Lecumberry, Análisis y comunicación de datos experimentales, El proceso de medición, 1ra Edición, Universidad Nacional de Rio Cuarto, 2005.