



Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Instituto Tecnológico de Costa Grande

Apuntes de Matemáticas aplicadas a la administración

Elaborado en el semestre sabático enero-julio 2025

Eric Rafael Méndez Márquez

Departamento de Ciencias Básicas, TecNM Campus Costa Grande

Asignatura

Matemáticas aplicadas a la administración LAD-1027

Carrera

Licenciatura en administración

19 de julio de 2025



2025
Año de
La Mujer
Indígena

Manzana 30, Lote 1, Col. El Limón. C.P. 40880
Zihuatanejo, Gro. Tel. 01 (755) 554 48 51 y 01 (755)
554 48 52 E-mail: dir_costagrande@tecnm.mx
www.costagrande.tecnm.mx



Contribución académica

Es importante que el Tecnológico Nacional de México cuente con apuntes de las materias que integran las diferentes retículas para facilitar al docente con herramientas y material didáctico al momento de impartir éstas.

El beneficio principal de tener apuntes de cada materia, revisados y avalados por las Academias es que los conocimientos que se imparten se estandarizarán a todo el Sistema lo cual supone una garantía de un nivel de educación de calidad y competitividad. El desarrollo e implementación de material educativo, llámese apuntes, así como sus complementos educacionales deben suscribirse en la actualidad al desarrollo no sólo del contexto local sino considerando también los retos nacionales e internacionales que demanda el sistema laboral. Otro beneficio al tener apuntes de las materias que conforman las diferentes retículas de las carreras que ofrece en Tecnológico Nacional de México es la medición de los impactos de los procesos de autoevaluación y acreditación de los programas de estudio, así como el análisis de los modelos de evaluación.

Los apuntes de Matemáticas aplicadas a la administración, aporta al perfil del Licenciado en Administración de Empresas las bases para desarrollar posteriormente la capacidad de aplicar los conocimientos modernos de la gestión de negocios a las fases del proceso administrativo para la optimización de recursos y el manejo de los cambios organizacionales

Índice

Tema 1 Funciones matemáticas y ecuaciones lineales	10
1.1 Definición	10
1.2 Dominio y rango restringidos	14
1.3 Funciones multivariadas básicas	19
1.4 Representaciones gráficas de funciones matemáticas	20
1.5 Formula pendiente intersección	34
1.6 Determinación de la ecuación de una línea recta	37
1.6.1 Pendiente e intersección	37
1.6.2 Pendiente y un punto	38
1.6.3 Dos puntos	40
1.6.4 Aplicaciones a modelos de oferta y demanda	41
Actividades de aprendizaje	45
Tema 2 Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de ecuaciones lineales	46
2.1 Funciones lineales	46
2.2 Modelos de equilibrio	46
2.2.1 Modelo de punto de equilibrio aplicado a la producción	47
2.2.2 Modelo gráfico de punto de equilibrio	52
2.2.3 Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad	54
2.2.4 Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir	57
2.3 Sistemas de ecuaciones lineales	59
2.3.1 Métodos de eliminación suma y resta Sistemas de ecuaciones de 2x2 y 3x3	60

2.3.2 Método de eliminación Gaussiana de sistemas 2×2 , 3×3	
solución única	68
2.3.3 Aplicaciones a modelos económico- administrativos	72
Actividades de aprendizaje	79
Tema 3 Álgebra matricial	80
3.1 Introducción a las matrices	80
3.2 Tipos especiales de matrices	82
3.3 Operaciones con matrices	84
3.4 Introducción a los determinantes. Solución de un determinante de 2×2 , 3×3 por método de columnas aumentadas y cofactores	91
3.5 Propiedades de los determinantes	95
3.6 Solución de la inversa de una matriz	97
3.7 Aplicaciones a modelos de insumo producto	102
Actividades de aprendizaje	107
Tema 4 Diferenciación y Aplicaciones	108
4.1 Límites y continuidad	108
4.2 Derivadas algebraicas con fórmulas	116
4.3 Derivadas de n-ésimo orden	119
4.4 Derivadas parciales básicas	120
4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada	122
4.6 Aplicaciones a ingresos, costos y utilidades	127
4.7 Análisis marginal	133
Actividades de aprendizaje	142
Tema 5 Integración y aplicaciones	143

5.1 Concepto de antiderivada	143
5.2 Reglas de integración directas	145
5.3 Integral definida	151
5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas .	155
Actividades de aprendizaje	159
Referencias	160
Instrumentación didáctica completa	161

Índice de figuras

Figura 1. Intervalo $[-3, \infty)$.	17
Figura 2. Función $V(p) = 24000 - 4000p$	21
Figura 3. Función $f(x) = 5$	22
Figura 4. Función $f(x) = 2x + 5$	23
Figura 5. Función $C(q) = 8q + 360000$	24
Figura 6. Función $f(x) = 3x^2 - 20x + 100$	25
Figura 7. Función $q(p) = p^2 - 70p + 1225$	26
Figura 8. Función $f(x) = \frac{1}{x}$	28
Figura 9. Función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$	29
Figura 10. Coordenadas de a ordenada al origen de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$	29
Figura 11. Raíz de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$	30
Figura 12. Función $C(q) = \frac{20000}{q} + 0.5q + 50000$	31
Figura 13. Función $C(q) = \frac{20000}{q} + 0.5q + 50000$, con $q > 0$	31
Figura 14. Función $f(x) = 2^x$	32
Figura 15. Función $f(x) = \log x$	33
Figura 16. Ecuación $y = 4 - \frac{1}{2}x$	36
Figura 17. Funciones $I(x) = 60x$ y $C(x) = 25x + 500000$	53
Figura 18. Punto de equilibrio entre la Utilidad y el Costo	53
Figura 19. Punto de intersección o solución del sistema	64
Figura 20. Función $f(x) = \frac{1}{x-1}$	111

Figura 21. Función $f(x) = x^2$	122
Figura 22. Función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 3$ mostrando los extremos	126
Figura 23. Análisis marginal gráfico: maximización de la utilidad	141
Figura 24. Representación gráfica de la integral definida	151
Figura 25. Representación gráfica de la integral definida $\int_1^3 x^2 dx$	153

Índice de tablas

Tabla 1. Parejas ordenadas de la función $V(p) = 24000 - 4000p$	20
Tabla 2. Parejas ordenadas de la función $f(x) = 5$	22
Tabla 3. Parejas ordenadas de la función $f(x) = 2x + 5$	23
Tabla 4. Parejas ordenadas de la función $C(q) = 8q + 360000$	24
Tabla 5. Parejas ordenadas de la función $f(x) = 3x^2 - 20x + 100$	25
Tabla 6. Parejas ordenadas de la función $f(x) = \frac{1}{x}$	27
Tabla 7. Parejas ordenadas de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$	29
Tabla 8. Parejas ordenadas de la función $f(x) = 2^x$	32
Tabla 9. Parejas ordenadas de la función $f(x) = \log x$	33
Tabla 10. Ejemplos de ecuaciones lineales	34
Tabla 11. Parejas ordenadas de la función $y = 4 - \frac{1}{2}x$	35
Tabla 12. Pares ordenados de la función $f(x) = x^2$ cuando x se aproxima a 2	109
Tabla 13. Pares ordenados de la función $f(x) = x^2$ cuando x se aproxima a 2	110
Tabla 14. Pares ordenados de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ cuando x se aproxima a 1	111
Tabla 15. Pares ordenados de la función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$	112
Tabla 16. Pares ordenados de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$	113
Tabla 17. Pares ordenados de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$	115
Tabla 18. Pares ordenados de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$	115

Introducción

En un entorno empresarial cada vez más competitivo y cambiante, la toma de decisiones eficientes y fundamentadas se ha convertido en un elemento clave para el éxito organizacional. En este contexto, las Matemáticas Aplicadas a la Administración se presentan como una herramienta fundamental que permite analizar datos, optimizar recursos, prever escenarios y diseñar estrategias con base en métodos cuantitativos. Lejos de ser una disciplina abstracta, las matemáticas aplicadas ofrecen soluciones concretas a problemas reales que enfrentan las empresas en áreas como finanzas, producción, logística, mercadotecnia y recursos humanos.

Este conjunto de técnicas y modelos matemáticos proporciona a los administradores una base lógica y estructurada para interpretar información, resolver problemas y tomar decisiones racionales. Entre los temas más relevantes que se abordan en esta asignatura se encuentran el álgebra lineal, funciones, así como el cálculo tanto diferencial como integral.

La aplicación de estos conceptos no solo mejora la eficiencia operativa, sino que también fortalece la capacidad analítica y estratégica del administrador. Por ello, el estudio de las matemáticas aplicadas se convierte en una competencia esencial dentro de la formación profesional, al permitir vincular los números con la realidad organizacional.

El presente documento reúne apuntes clave de la materia, organizados de forma clara y didáctica, con el fin de facilitar su comprensión y aplicación. Cada sección está orientada a destacar la utilidad práctica de los métodos matemáticos en contextos administrativos concretos, fomentando así un aprendizaje significativo y funcional.

Tema 1 Funciones matemáticas y ecuaciones lineales.

Competencias

Específicas:

Aplica las funciones matemáticas en la solución de problemas para representarla gráficamente.

Genéricas:

Conocimientos básicos de la carrera.

Habilidades básicas del manejo de la computación.

Habilidades de gestión de información.

Solución de problemas.

Toma de decisiones.

Trabajo en equipo.

Habilidades interpersonales.

Compromiso ético.

Capacidad de aplicar los conocimientos en las prácticas.

Habilidades de investigación.

Habilidad para trabajar en forma autónoma.

Búsqueda del logro

1.1 Definición

La noción de función es fundamental en el estudio de las matemáticas. No es sólo una ecuación o algún espacio geométrico, sino que tienen la capacidad de expresar y representar modelos matemáticos de gran utilidad para resolver problemas de la vida real. Podemos decir que, según Budnick (2007) una función es la regla matemática que toma un dato y lo transforma en otro. Es decir, si la función

se puede visualizar como un dispositivo de entrada/salida, el dato que ingresa a la función se maneja de acuerdo con la regla matemática definida la cual nos da un dato de salida.

Ejemplo 1.1

Consideremos la ecuación $y = 2x + 1$. Esta regla toma un valor de entrada para la x , y la ecuación produce un valor de salida y que representa el doble del valor de entrada aumentado en una unidad. Suponiendo que $x = 3$, entonces el valor que corresponde a y es $2(3) + 1 = 7$

La ecuación es la regla que toma al 3 y lo transforma en 7.

Es importante destacar que para cada dato de entrada existe un sólo dato de salida

La notación matemática nos permite reescribir la ecuación anterior sustituyendo la y por $f(x)$ quedándonos $y = f(x)$ en donde se expresa una relación funcional entre las variables x y y .

Esta ecuación se puede expresar verbalmente como “ y es igual a f de x ” o “ y es una función de x ”. Si bien x asume valores arbitrarios, $f(x)$ asume los valores dependiendo de la regla matemática razón por la cual x se le conoce como variable independiente mientras que a y o, más bien, $f(x)$ se le conoce como variable dependiente o valor de la función en x .

Entonces, para el ejemplo 1 tendríamos que si $x = 3$, $y = f(3) = 7$. Esto es, el valor de la función en 3 es 7.

Ejemplo 1.2

$$\begin{aligned} \text{Si } x = a + 7 \quad \text{entonces} \quad f(a + 7) &= 2(a + 7) + 1 \\ &= 2a + 2(7) + 1 \\ &= 2a + 14 + 1 \\ &= 2a + 15 \end{aligned}$$

Aunado a la idea anterior, existen otras formas de entender lo que una función es. Aguirre Márquez et al. (2010) la establece como una regla de correspondencia que se aplica entre los elementos de dos conjuntos dados, A y B. Dicha regla asocia a cada elemento del conjunto **A** un único elemento del conjunto **B**. De este modo se genera una colección de pares ordenados en donde se cumple la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen a dicha colección, se tiene que $b = c$. Lo anterior significa que en una función no pueden generarse dos pares ordenados con el mismo primer elemento.

Ejemplo 1.3

De los siguientes conjuntos de pares ordenados, defina cuáles son funciones y cuáles no.

$$\mathbf{M} = \{(1, 5), (2, 3), (8, 10), (9, 11)\}$$

$$\mathbf{N} = \{(-2, 1), (-2, 5), (0, 0), (1, 3)\}$$

$$\mathbf{P} = \{(1, 5), (3, 5), (5, 5), (7, 5)\}$$

$$\mathbf{R} = \{(1, 5), (1, 6), (1, 8), (1, 10)\}$$

Solución.

Los conjuntos **M** y **P** son funciones porque el primer elemento de cada uno de los pares ordenados no se repite. Observemos que en el conjunto **P** el segundo elemento es constante, pero eso no está en contra de la noción de función descrita líneas arriba.

En el conjunto **N** el elemento -2 aparece dos veces como primer elemento, lo cual es una doble asociación y no única como lo sugiere la idea de función.

En el conjunto **R**, el primer elemento aparece en los cuatro pares ordenados.

Ejemplo 1.4

Supongamos que tenemos un conjunto de números $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ y la regla

que hace corresponder a cada uno de esos elementos su inverso multiplicativo o recíproco.

Entonces, los pares ordenados generados serían

$$(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), (4, \frac{1}{4})$$

Como 0 no tiene recíproco, queda fuera de toda asociación. No obstante, el conjunto anterior cumple con la noción de función.

La regla que asigna a un número real su recíproco, es una función.

Ejemplo 1.5

Si aplicamos la regla que hace corresponder a un número positivo su raíz cuadrada, obtendremos pares ordenados como los siguientes:

$$(1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), \dots$$

Los cuales claramente no cumplen con la noción de función ya que cada número positivo tiene dos raíces cuadradas: una positiva, llamada raíz principal, y una negativa.

Pongamos el caso del 4: 2 es la raíz principal ya que $2 \times 2 = 4$. Pero -2×-2 también es igual 4, así que 4 tiene dos asignaciones y, por lo tanto, aparecerá dos veces en primer lugar.

Ejemplo 1.6

Una empresa contrata a un vendedor con un sueldo fijo de \$1500.00 más comisión de \$150.00 por cada artículo vendido. Expresar el salario semanal en pesos.

Solución.

Primero debemos establecer el tipo de datos que están relacionados en el salario semanal:

x = Número de unidades vendidas cada semana

y = Salario semanal en pesos

Esta relación la podemos escribir como una ecuación $y = f(x)$ donde f es el nombre

de la función del salario. Entonces la regla de correspondencia queda

$$y = f(x) = 150x + 1500$$

Si el vendedor logra colocar 20 artículos en la semana, entonces su salario sería

$$f(20) = 150(20) + 1500 = 3000 + 1500 = \$4500.00$$

Ejemplo 1.7

En la delegación local de tránsito de una comunidad se planea comprar un auto para utilizarlo como patrulla. Se ha estimado un precio de compra de \$ 280 000.00 más costos generales operativos de \$ 10.00 por kilómetro recorrido.

- ¿Cuál es la función matemática que expresa el Costo total C por la compra y operación del automóvil en función de los x kilómetros recorridos?
- ¿Cuáles serían los costos totales estimados si el automóvil se conduce 50000 km?

Solución.

- Expresamos la función de Costo total como una función del número x de kilómetros conducidos, es decir el Costo total es una función del número de kilómetros conducidos, por lo que expresamos
- Si $x = 50000$ km, obtenemos

$$C = 10(50000) + 2800000$$

$$C = 500000 + 280000$$

$$C = \$ 780\,000.00$$

1.2 Dominio y rango restringidos

Existen varias maneras de establecer estas nociones, pero acorde a Budnick (2007) el dominio de una función es el conjunto de todos los valores de entrada

posibles los cuales son, en este caso, números reales. Esto implica que el dominio es el conjunto de valores reales que la variable independiente puede tomar y para los cuales se define y es real la variable dependiente. Lo anterior es fundamental ya que es posible que al asignarle ciertos valores a x no exista algún valor para $f(x)$. Dicho de otra forma, el dominio de una función es el conjunto de valores de x para los cuales la función nos devuelve un resultado numérico.

Ejemplo 1.8

Supongamos que se define la función que relaciona cada número real con su recíproco

Recordando las propiedades de los números reales tenemos que si a es un número real, entonces su recíproco se define como $1/a$. Esto nos lleva a:

$$f(x) = 1/x$$

Como no está definida la división entre 0, entonces x puede tomar cualquier valor real excepto el mismo 0.

Por lo tanto, se deduce que el dominio de la función $f(x) = 1/x$ está dado por todos los números reales excepto 0. Matemáticamente se dice que x debe ser distinto a 0 y escribimos

$$x \neq 0$$

Entonces, el dominio de la función $f(x) = 1/x$ está dado por los valores reales distintos a 0 puede denotarse como

$$D_f: x \neq 0$$

El resultado anterior nos indica que 0 no tiene recíproco por lo que no es recíproco de ningún otro número. El rango o conjunto de valores de salida excluye también al 0.

Entonces tenemos que:

$$R_f: f(x) \neq 0$$

Ejemplo 1.9

Definir el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Solución.

La división entre 0 no está definida así que el denominador debe ser distinto a 0. En este caso específico $x - 1$ debe ser distinto a 0

$$x - 1 \neq 0$$

Usando las propiedades de los números reales observamos que

$$x \neq 1$$

El dominio de la función son todos los valores reales excepto el 1.

$$D_f: x \neq 1$$

Una división sólo puede dar como resultado 0 si el numerador puede ser igual a 0, pero 1 no es igual a cero por lo que el rango de la función esta dado por:

$$R_f: f(x) \neq 0$$

Ejemplo 1.10

Dada la función $f(x) = \sqrt{x+3}$, definir su dominio.

Solución.

En el conjunto de números reales no está definida la función de raíz cuadrada para números negativos, así que $x + 3$ sólo puede ser positivo o 0, es decir, no negativo. Matemáticamente esto se expresa

$$x + 3 \geq 0$$

Esto es, $x + 3$ es mayor o igual que 0, por lo que debemos resolver la desigualdad

$$x + 3 \geq 0$$

$$x \geq -3$$

El dominio de la función está dado por los números mayores o iguales que 3. Esto nos lleva a necesitar una forma más clara e expresión que incluye a la recta numérica o de modo simplificado se suele emplear la notación de intervalos $[-3, \infty)$.

Figura 1

Intervalo $[-3, \infty)$



En los párrafos anteriores se establecieron las nociones de dominio y rango desde un punto de vista matemático. Sin embargo, en un sentido práctico es posible que aun cuando una función tenga sentido para un conjunto de números reales, en la práctica no lo tenga. De este modo, tanto el dominio como el rango de una función deben ajustarse para cada caso en particular.

Ejemplo 1.11

Supongamos que se adquiere un equipo de cómputo por un valor de \$ 24 000.00 y que cada año que pasa el valor se va depreciando a razón de \$ 4 000.00. Es posible establecer una función de depreciación que nos muestre el valor residual del equipo por cada año que transcurra.

Tendremos, entonces, que el valor residual del equipo de cómputo V es una función de los años transcurridos p

$$V(p) = 24000 - 4000p$$

El valor de p será un número entero no negativo dado que indica años de servicio desde 0 hasta 6, mientras que $V(p)$ tomará valores positivos mayores o iguales a 0 y 24000

que es el precio de compra.

Al momento de la compra han transcurrido 0 años por lo que el valor residual sigue siendo el valor de compra, \$ 24 000.00

$$V(0) = 24000 - 4000(0)$$

$$V(0) = 24000 - 0$$

$$V(0) = 24000$$

Para cuando hayan transcurrido 6 años el valor residual será de

$$V(6) = 24000 - 4000(6)$$

$$V(6) = 24000 - 24000$$

$$V(6) = 0$$

Valores negativos para p no tienen sentido porque no podemos manejar años transcurridos con signo negativo o mayores 6 años que es cuando el equipo pierde todo valor. Entonces p toma valores desde 0 hasta 6, $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Igualmente, los valores de $V(p)$ no pueden ser mayores a \$ 24 000.00 que es el valor de compra ni menores a \$ 0.00 ya que el valor del equipo no puede ser negativo. Así $V(p) = 0, 1, 2, \dots, 24000$.

El dominio y el rango de una función en las matemáticas aplicadas a la administración suelen restringirse para que la función sea válida dentro del contexto en el cual se va a utilizar.

Ejemplo 1.12

Retomando el ejemplo 6, donde se estableció la función del Salario semanal de un vendedor

$$y = f(x) = 150x + 1500$$

Tenemos que x sólo toma valores enteros no negativos, es decir $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ porque no tiene sentido decir que se han vendido, por ejemplo, -10 artículos, mientras que el valor de y va desde 1500 en adelante dado que el sueldo fijo aunque no venda es de \$ 1500.00. Por cada artículo vendido su salario se incrementará de \$ 150.00 en \$ 150.00

1.3 Funciones multivariadas básicas

Es posible suponer que pueda existir más de una variable independiente y extender la noción de función con más de dos variables. En este caso podemos decir que se tiene una función multivariada.

Ejemplo 1.13

El salario base de un vendedor es de \$1200.00 mensuales más comisiones. Por cada unidad vendida del producto 1 le corresponde \$ 50.00 de comisión. Por cada unidad vendida del producto 2 le corresponden \$ 80.00 y por cada unidad vendida del producto 3 \$60.00.

Si S es el salario semanal del vendedor y p_1, p_2 y p_3 denotan la cantidad de unidades de cada artículo, respectivamente ¿Cuál sería el salario semanal del vendedor si vende 20, 35 y 15 unidades de los productos respectivos?

Solución.

Si extendemos la notación a varias variables, podríamos escribir la función de la forma siguiente

$$\begin{aligned} S(p_1, p_2, p_3) &= 50 p_1 + 80 p_2 + 60 p_3 + 1200 \\ S(20, 35, 15) &= 50(20) + 80(35) + 60(15) + 1200 \\ &= 1000 + 2800 + 900 + 1200 \\ &= 5900 \end{aligned}$$

El salario semanal sería de \$ 5900.00.

1.4 Representaciones gráficas de funciones matemáticas

En el ámbito algebraico, estudiaremos las funciones polinomiales del tipo constante, lineal y cuadrática junto con las funciones racionales básicas y funciones de raíz cuadrada. Entre las funciones trascendentes estudiaremos las funciones exponenciales y logarítmicas básicas.

Cuando se ingresa un valor numérico a una función, se genera un valor de salida los cuales se pueden agrupar en pares ordenados que se pueden ubicar en una posición específica dentro del plano cartesiano. Una colección de pares ordenados nos dará una sucesión de puntos en el plano cartesiano que se pueden unir generando un espacio geométrico al cual llamamos gráfica de la función.

Ejemplo 1.14

Retomando la situación del ejemplo 11 en donde se tiene una función de depreciación dada por

$$V(p) = 24000 - 4000p$$

Dado que p representa el número de años de servicio de un equipo de cómputo, entonces podemos generar los pares ordenados y mostrarlos en la siguiente tabla

Tabla 1

Parejas ordenadas de la función $V(p) = 24000 - 4000p$

p	$V(p)$
0	24000
1	20000
2	16000
3	12000
4	8000
5	4000
6	0

Cada par ordenado contiene la información de los años de servicio y el valor residual del equipo de cómputo, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 2

Función $V(p) = 24000 - 4000p$



Funciones polinomiales.

Las funciones polinomiales que estudiaremos son: la función constante, la función lineal y la función cuadrática.

Función constante.

Es una función de la forma $f(x) = c$ en donde c es una constante real y x es cualquier número real. Entonces, a todo valor de x se le hace corresponder el número c .

Ejemplo 1.15

Sea $f(x) = 5$, entonces tenemos una función que a todo número real x lo asocia con el número 5. Por lo que los pares ordenados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 2

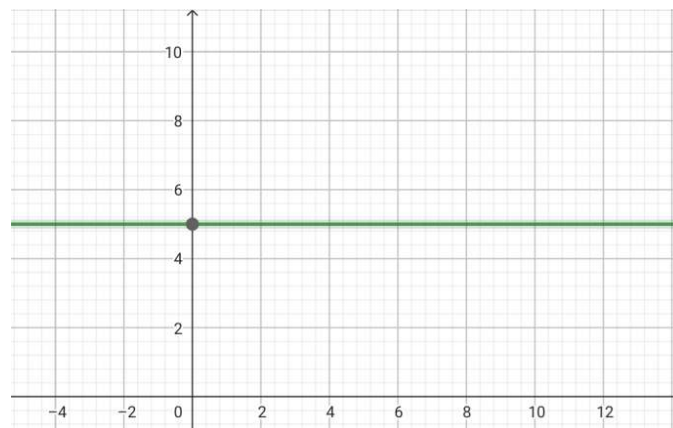
Parejas ordenadas de la función $f(x) = 5$

x	$f(x)$
-3	5
-2	5
-1	5
0	5
1	5
2	5
3	5

Y la gráfica resultante se muestra en la figura 3.

Figura 3

Función $f(x) = 5$



Observemos que es una línea horizontal, paralela al eje X ya que al tener a $f(x)$ siempre igual a 5 la altura de los puntos es la misma.

Función lineal.

Una función lineal tiene la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes reales y $m \neq 0$.

Ejemplo 1.16

La función $f(x) = 2x + 5$ es una función lineal con $m = 2$ y $b = 5$

Al sustituir algunos valores en la función, podemos obtener la siguiente tabla

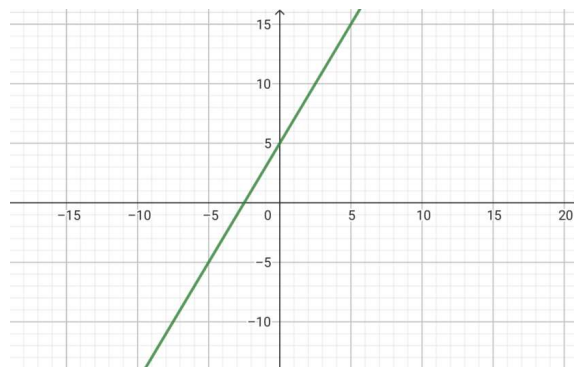
Tabla 3

Parejas ordenadas de la función $f(x) = 2x + 5$

x	$f(x)$
-3	-1
-2	1
-1	3
0	5
1	7
2	9
3	11

Figura 4

Función $f(x) = 2x + 5$



Ejemplo 1.17

En el área económica-administrativa existen numerosos ejemplos de funciones lineales. Una de las más importantes es la función de costos totales.

Supongamos que para producir un artículo se necesita una inversión inicial de \$ 360 000.00 y que después de un análisis de costos realizado por despacho de contadores se estima que el costo para producir un artículo es de \$ 80.00, entonces podemos establecer una función de costos totales.

La función de costos totales se define como:

$$\text{Costos totales} = \text{Costos variables} + \text{Costos fijos}$$

Entonces, si q es el número de unidades a producir, tenemos que:

$$C(q) = 8q + 360000$$

Una de las características o propiedades de una función lineal es que el incremento en el valor de la función es constante, es decir, si q aumenta su valor de 1 en 1, $C(q)$ aumenta su valor de 80 en 80. Observemos la siguiente tabla que se obtiene al sustituir los valores propuestos para q en la función:

Tabla 4

Parejas ordenadas de la función $C(q) = 8q + 360000$

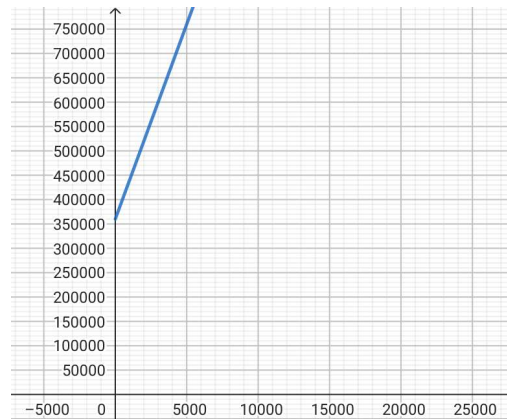
q	$C(q)$
0	360000
1	360080
2	360160
3	360240
4	360320
5	360400
6	360480

Si $x = 10000$, los costos totales serían de

$$\begin{aligned} C(10000) &= 80(10000) + 360000 = 800000 + 360000 \\ &= 1160000 \end{aligned}$$

Figura 5

Función $C(q) = 8q + 360000$



Se nota una recta ascendente ya que al aumentar la producción es claro que aumentan los costos.

Función cuadrática.

Se llama así porque la variable independiente está elevada al cuadrado. Una función cuadrática es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ en donde a , b y c son constantes reales y $a \neq 0$.

Ejemplo 1.18

La función $f(x) = 3x^2 - 20x + 100$ es una función cuadrática con $a = 3$, $b = -20$ y $c = 100$.

Al sustituir algunos valores en la función podemos obtener la siguiente tabla de pares ordenados

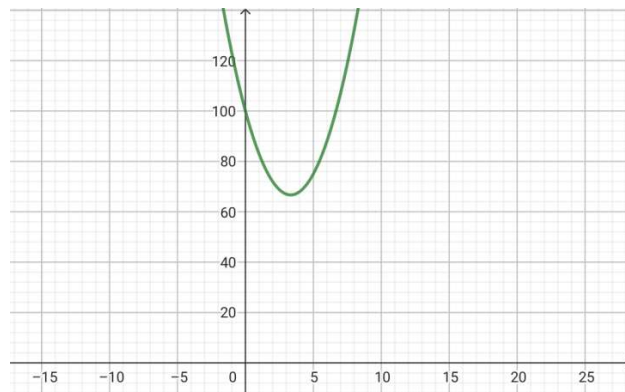
Tabla 5

Parejas ordenadas de la función $f(x) = 3x^2 - 20x + 100$

x	$f(x)$
-3	187
-2	152
-1	123
0	100
1	83
2	72
3	67

Figura 6

Función $f(x) = 3x^2 - 20x + 100$



Ejemplo 1.19

Una función de demanda es una función que expresa la forma en que varía la cantidad demandada de un artículo de acuerdo con el precio que se cobra en la venta de éste.

Supongamos que, para un producto determinado, la función de demanda está dada por

$$q(p) = p^2 - 70p + 1225$$

donde $q(p)$ es el número de unidades demandadas y p es el precio unitario de cada pieza.

Si el artículo se vende en $p = 10$ pesos se espera una demanda de

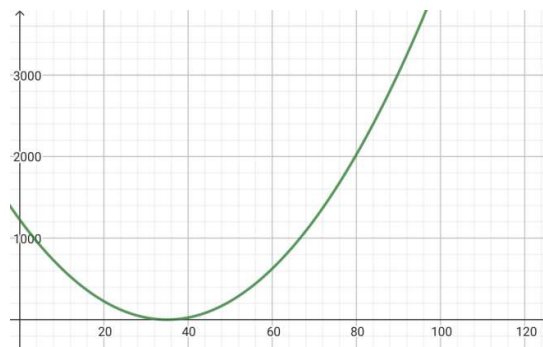
$$\begin{aligned} q(10) &= 10^2 - 70(10) + 1225 \\ &= 100 - 700 + 1125 \\ &= 625 \text{ unidades} \end{aligned}$$

A un precio de $p = 30$ pesos se espera una demanda de

$$\begin{aligned} q(30) &= 30^2 - 70(30) + 1225 \\ &= 900 - 2100 + 1125 \\ &= 25 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Figura 7

Función $q(p) = p^2 - 70p + 1225$



Resulta evidente que no podemos tomar la porción de gráfica en donde los valores de p sean negativos ya que el precio siempre será un valor positivo.

Función racional.

Es posible establecer el cociente de dos funciones polinomiales. A la función resultante se le llama función racional. Se define como:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo 1.20

La función racional básica se define como el inverso multiplicativo de un número real x

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Resulta obvio que x debe ser distinto a 0 para que la división pueda realizarse. Incluso dado que para que una fracción sea igual a 0, el numerador debe ser igual a 0. En este caso, el numerador es 1 el cual, evidentemente, es distinto a 0. Por lo tanto, $f(x)$ no puede ser igual a 0.

Dándole valores a x , podemos generar la siguiente tabla

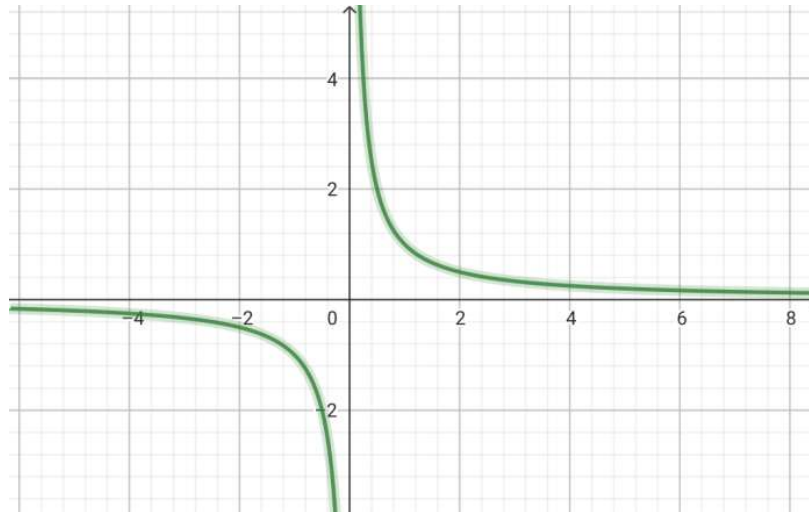
Tabla 6

Parejas ordenadas de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

x	$f(x)$
-3	-0.333
-2	-0.5
-1	-1
0	indefinido
1	1
2	0.5
3	0.333

Figura 8

Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$



Ejemplo 1.21

Tabular valores para x en la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ y trazar su gráfica.

Solución.

$x^2 - 4$ debe ser diferente a 0. Necesitamos resolver $x^2 - 4 \neq 0$.

$$x^2 - 4 \neq 0$$

Factorizando

$$(x - 2)(x + 2) \neq 0$$

Cada factor se resuelve por separado

$$x - 2 \neq 0 \quad x + 2 \neq 0$$

$$x \neq 2 \quad x \neq -2$$

Tabulando valores distintos a -2 y 2 obtenemos

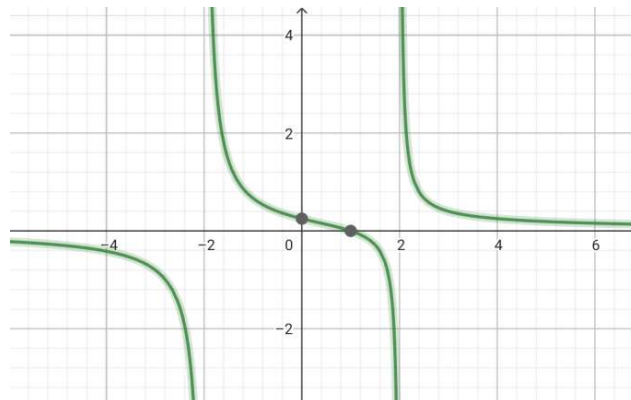
Tabla 7

Parejas ordenadas de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

x	$f(x)$
-3	-0.8
-2.5	-1.5556
-1	0.6667
0	0.25
1	0
2.5	0.6667
3	0.4

Figura 9

Gráfica de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$



Usando GeoGebra® se muestran puntos importantes como los que se aprecian en la gráfica anterior. Si se pulsan se muestra información importante:

Figura 10

Coordenadas de la ordenada al origen de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

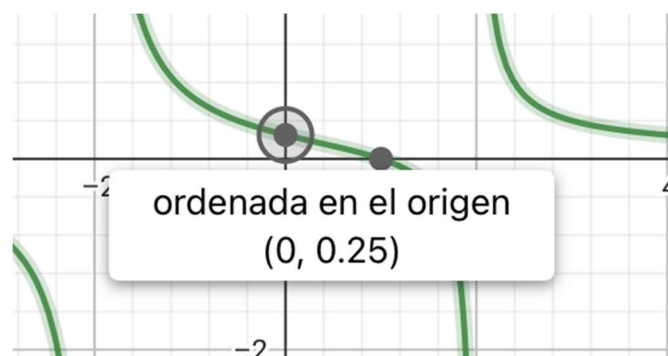
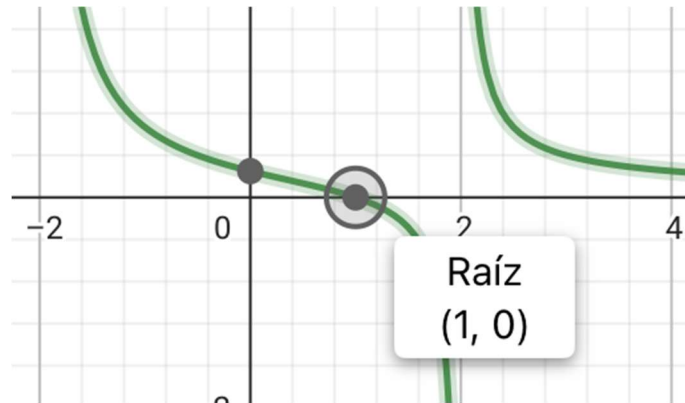


Figura 11

Raíz de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

**Ejemplo 1.22**

En una empresa se ha estimado que los costos anuales por la compra y mantenimiento de sus productos están dados por la función

$$C(q) = \frac{20000}{q} + 0.5q + 50000$$

Donde q es el número de unidades de cada pedido comprado a sus proveedores.

- ¿Cuál sería el costo anual si el tamaño del pedido es igual a 2000 unidades?
- Trace la gráfica y analice si existe un dominio restringido.

Solución.

- En primer lugar, sustituimos $q = 20000$ en la función

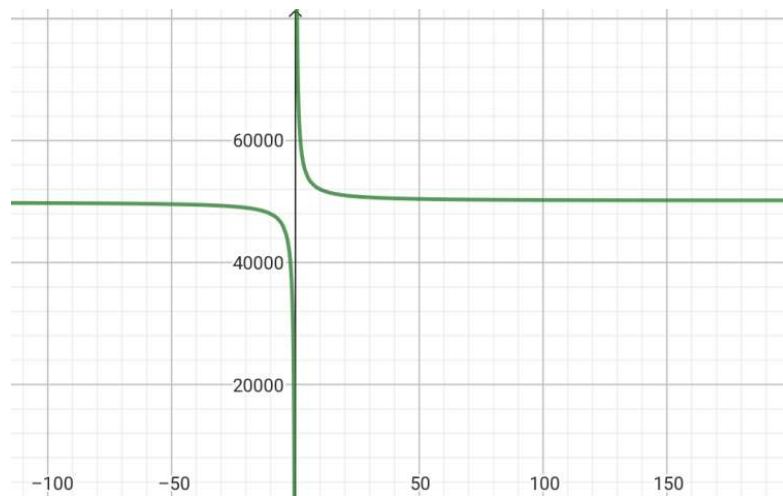
$$\begin{aligned} C(2000) &= \frac{20000}{2000} + 0.5(2000) + 50000 \\ &= 10 + 1000 + 50000 \\ &= 51010 \end{aligned}$$

La respuesta es \$51 000.00

- Usando GeoGebra® obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 12:

Figura 12

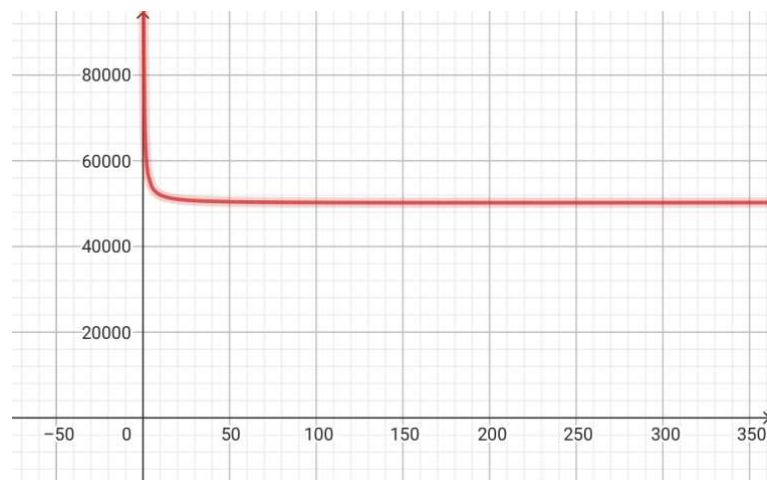
$$\text{Función } C(q) = \frac{20000}{q} + 0.5q + 50000$$



En donde se puede apreciar que q no puede asumir el valor de 0. Más aún, haciendo un análisis de la situación, q no puede asumir valores negativos tampoco dado que el número de unidades adquiridas no puede ser negativo. Entonces la gráfica correspondiente excluye lo que queda a la izquierda de $q = 0$.

Figura 13

$$\text{Función } C(q) = \frac{20000}{q} + 0.5q + 50000, \text{ con } q > 0$$



Función exponencial y logarítmica.

Este tipo de funciones aparecen en varias aplicaciones matemáticas dentro del área económica–administrativa.

Una función exponencial es de la forma $f(x) = a^x$ en donde a , llamada base, es un número real positivo distinto a 1. Esto es a no puede ser negativo, 0 o 1.

Ejemplo 1.23

Sea la función $f(x) = 2^x$ una función exponencial de base 2. Si le damos valores a x , tabulamos y graficamos los pares ordenados obtenidos, tendremos la tabla siguiente.

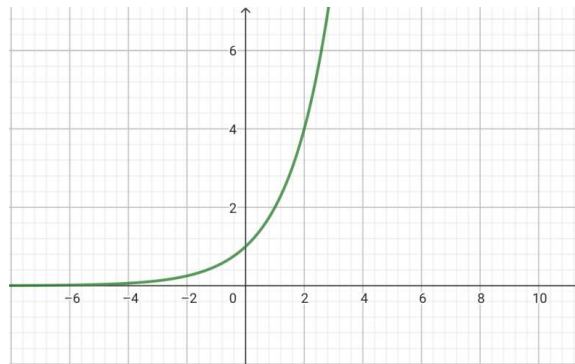
Tabla 8

Parejas ordenadas de la función $f(x) = 2^x$

x	$f(x)$
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4

Figura 14

Función $f(x) = 2^x$



Aunque parezca que la gráfica toca el eje X por el lado izquierdo, lo cierto es que eso se debe más a una limitación física de la pantalla y no lo que en realidad sucede. 2^x en realidad es positivo siempre, así que la gráfica se extiende hasta $-\infty$ sin tocar el eje X.

Una función logarítmica se define como $f(x) = \log_a x$ en donde comúnmente la base a suele ser 10, en cuyo caso solo se escribe $f(x) = \log x$, o una base e conocida como la base de los logaritmos naturales con $e \approx 2.718282$ por lo que la función se rescribe como $f(x) = \ln x$.

Ejemplo 1.24

Sea la función $f(x) = \log x$, donde x sólo admite valores positivos. Si le asignamos valores a x y tabulamos obtenemos la siguiente tabla:

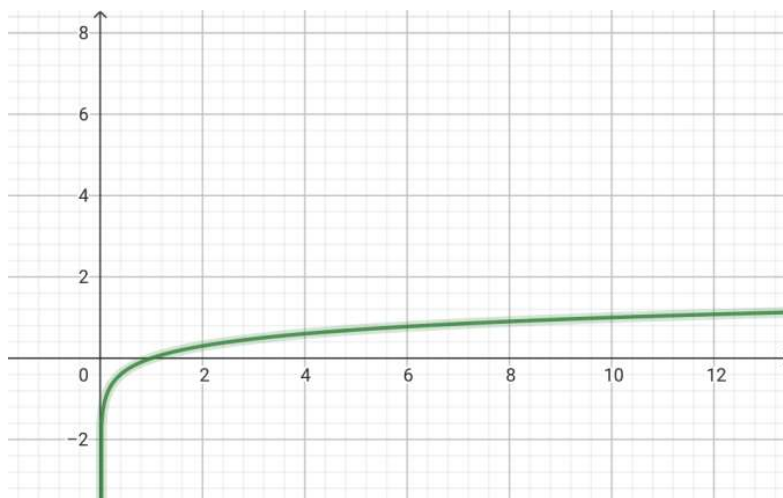
Tabla 9

Parejas ordenadas de la función $f(x) = \log x$

x	$f(x)$
0.25	-0.6
0.5	-0.3
0.75	-0.13
1	0
2	0.3
5	0.7
10	1

Figura 15

Función $f(x) = \log x$



1.5 Fórmula pendiente intersección.

En el estudio de las matemáticas aplicadas a la administración, uno de los temas fundamentales es el de la recta, como espacio geométrico, junto con sus propiedades y formas de encontrar su ecuación.

Esto nos lleva a analizar, de forma inicial, su concepto geométrico, que incluye el concepto de pendiente, el cual nos lleva a situarla en el plano cartesiano por lo que rápidamente se incorporan conceptos como el de intersección y el de intercepción.

Una ecuación lineal con dos variables es una ecuación donde se relacionan dos variables x y y , que tiene la forma general

$$Ax + By + C = 0$$

donde A , B y C son constantes y A y B no pueden ser ambas iguales a 0.

A las ecuaciones lineales también se les conoce como ecuaciones de primer grado ya que los exponentes de las variables son iguales a 1.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones lineales

Tabla 10

Ejemplos de ecuaciones lineales.

Ecuación	Parámetros de la ecuación		
	A	B	C
$2x + 5y = 8$	2	5	-8
$-3x + 8y - 6$	-3	8	-6
$2x/3 = 34$	2/3	0	-34
$0.5y = 2$	0	0.5	-2
$\sqrt{2}x + 5y + 8$	$\sqrt{2}$	5	8

Dada una ecuación lineal, existe un conjunto llamado conjunto solución formado por todos los pares ordenados (x, y) que hacen verdadera la ecuación, es decir que dan una igualdad. Generalmente estos se obtienen despejando la variable y , dándole valores

arbitrarios a x y realizando las operaciones involucradas.

Ejemplo 1.25

Sea la ecuación lineal $3x + 6y = 24$. Encontrar cuatro pares ordenados que pertenezcan al conjunto solución. Encontrar la solución general.

Solución.

Despejando y obtenemos

$$3x + 6y = 24$$

$$6y = 24 - 3x$$

$$y = (24 - 3x)/6$$

$$y = 24/6 - 3x/6$$

$$y = 4 - x/2$$

la cual se puede describir como

$$y = 4 - \frac{1}{2}x$$

Tabulando algunos valores para x obtenemos la siguiente tabla con pares ordenados específicos que forman parte del conjunto solución

Tabla 11

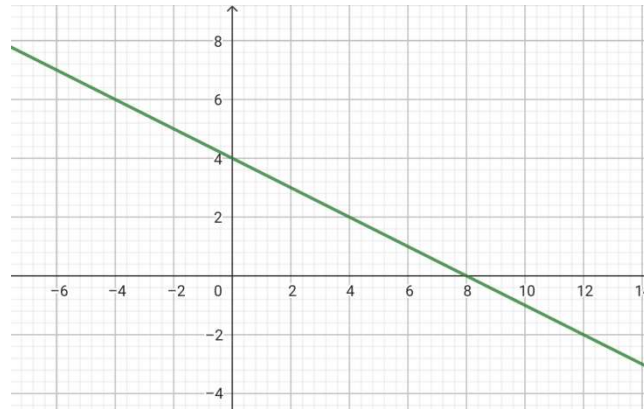
Parejas ordenadas de la función $y = 4 - \frac{1}{2}x$

x	y
-3	5.5
-2	5
-1	4.5
0	4
1	3.5
2	3
3	2.5

La forma general es $(x, 4 - \frac{1}{2}x)$. La gráfica se observa en la figura 16.

Figura 16

Ecuación $y = 4 - \frac{1}{2}x$



Cada punto de la recta trazada en realidad es un par ordenado $(x, 4 - \frac{1}{2}x)$ que forma parte del conjunto solución de la ecuación lineal. Podemos decir también, que cada par ordenado es una solución particular de dicha ecuación.

Como se ha podido observar, la forma general de una ecuación lineal se puede llevar a una forma simplificada

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax + C$$

$$y = -\frac{A}{B} - \frac{C}{B}$$

Si cambiamos $-\frac{A}{B}$ por m y $-\frac{C}{B}$ por b , obtenemos la forma simplificada

$$y = mx + b$$

donde m es la razón de cambio de la variable y con respecto al cambio en la variable x y que se conoce también como la pendiente de la recta. A b se le conoce como ordenada al origen y es el punto de intercepción de la recta con el eje Y.

Los puntos de intercepción son los puntos en los ejes X y Y por donde pasa la

gráfica de una ecuación.

En resumen, la pendiente m de la recta está dada por $-\frac{A}{B}$, mientras que la intercepción con el eje Y u ordenada al origen b está dada por $-\frac{C}{B}$.

Ejemplo 1.26

Encontrar la pendiente e intercepción con el eje Y de la ecuación $-5x + y + 3 = 0$

Solución.

$A = -5$, $B = 1$ y $C = 3$, por lo tanto

$$m = -\frac{-5}{1} = 5$$

$$b = -\frac{3}{1} = -3$$

Por lo que la forma simplificada sería $y = 5x - 3$

1.6 Determinación de la ecuación de una línea recta

Existen varias formas de encontrar la ecuación de una línea recta bastante útiles dentro de las matemáticas aplicadas a la administración:

- a) Conociendo la pendiente y la intercepción con el eje Y
- b) Conociendo la pendiente y un punto.
- c) Conociendo dos puntos-

1.6.1 Pendiente e intersección

Es la forma más fácil porque los valores están directos.

Ejemplo 1.27

Encontrar la ecuación de una recta si la pendiente es 5 y la intercepción con el eje Y es $(0, 10)$.

Solución.

Tenemos que $m = 5$ y que $b = 10$, por lo tanto, la ecuación buscada es

$$y = mx + b$$

$$y = 5x + 10$$

Ejemplo 1.28

El precio de un equipo de cómputo al momento de la compra es de \$ 35000.00 pesos y se estima que se deprecia \$5000.00 cada año de uso. Encontrar la ecuación que describa la depreciación anual de dicho equipo.

Solución.

Al momento de la compra se contabiliza como año 0 y la razón de cambio en el valor del equipo es de una pérdida de \$5000.00 cada año, por lo que tenemos los datos siguientes:

$$(0, 35000) \text{ y } m = -5000$$

Entonces la ecuación buscada es

$$y = -5000x + 35000$$

Al haber transcurrido $x = 3$ años, el valor del equipo sería de

$$y = -5000(3) + 35000$$

$$y = -15000 + 35000$$

$$y = 20000 \text{ pesos}$$

1.6.2 Pendiente y un punto

En este caso, conocemos el valor de la pendiente y un par ordenado cualquiera que pertenece a la recta.

Ejemplo 1.29

Encontrar la ecuación de una recta si la pendiente es -4 y que pasa por el punto dado por las coordenadas $(8, -10)$.

Solución.

En la forma simplificada $y = mx + b$ sustituimos $m = -4$, $x = 8$ y $y = -10$

$$y = mx + b$$

$$y = -4x + b$$

$$-10 = -4(8) + b$$

$$-10 = -32 + b$$

Despejando b

$$b = -10 + 32$$

$$b = 22$$

Así que la ecuación buscada es

$$y = -4x + 22$$

Ejemplo 1.30

Un vendedor tiene una comisión semanal de \$ 200.00 por cada artículo vendido. Si la semana pasada recibió un salario semanal de \$ 4500.00 al vender 8 artículos. Encontrar la ecuación que describa su salario semanal.

Solución.

La comisión por artículo vendido es $m = 200$, $x = 8$ artículos y $y = 4500$, por lo que

$$y = mx + b$$

$$y = 200x + b$$

$$4500 = 200(8) + b$$

$$4500 = 1600 + b$$

Despejando b

$$b = 4500 - 1600$$

$$b = 2900$$

Así que la ecuación buscada es

$$y = 200x + 2900$$

lo cual nos indica, además, que su sueldo base es de \$2900.00 semanales.

1.6.3 Dos puntos

Si conocemos dos pares ordenados $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ que pertenezcan a la línea recta, es posible encontrar la ecuación de la recta usando las siguientes fórmulas:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ que es la fórmula de la pendiente}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ llamada forma punto pendiente}$$

Ejemplo 1.31

Al momento de la compra un activo cuesta \$ 48000.00. 6 años después, su valor es de \$6000.00. Encontrar la ecuación lineal que describa la depreciación de dicho activo.

Solución.

Si x = años de uso y y = valor del activo, entonces tenemos dos pares ordenados de valores:

$$A(0, 48000) \text{ y } B(6, 6000)$$

Entonces la depreciación anual es

$$\begin{aligned} m &= \frac{6000 - 48000}{6 - 0} \\ &= \frac{-42000}{6} \\ &= -7000 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la forma punto pendiente podremos obtener la ecuación buscada:

$$y - 48000 = -7000(x - 0)$$

$$y - 48000 = -7000x$$

$$y = -7000x + 48000$$

1.6.4 Aplicaciones a modelos de oferta y demanda

Según plantea Haeussler et al. (2008) para cada nivel de precio de un producto es posible encontrar una cantidad correspondiente de dicho producto que los consumidores demandarán, es decir, comprarán por un cierto periodo de tiempo. Es regla común considerar que, a mayor precio, la cantidad demandada es menor y, por el contrario, si el precio unitario baja es posible que el número de unidades demandadas aumente. Si el precio está dado por p y el número de unidades demandadas está dado por q , entonces una ecuación que relacione a ambas se le llama ecuación de demanda, donde el número de unidades es la variable independiente mientras que el precio unitario sería la variable dependiente y la ecuación sería de la forma $q = D(p)$.

Por otro lado, si en respuesta a los precios del mercado se decide comercializar un cierto número de unidades del producto, entonces la ecuación se denomina ecuación de oferta y sería de la forma $q = S(p)$.

Ejemplo 1.32

Supongamos que la demanda semanal de un producto es de 100 unidades cuando el precio unitario sea de \$1160.00 y de 200 unidades con el precio de \$1020.00. Determinar una ecuación de oferta asumiendo un comportamiento lineal.

Solución.

Los datos que tenemos son de la forma (p, q) , entonces tenemos los siguientes pares ordenados:

$$A(1160, 100) \text{ y } B(1020, 200)$$

Sustituyendo en las fórmulas de la pendiente y forma punto pendiente obtenemos

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{200 - 100}{1020 - 1160} \\
 &= \frac{100}{-140} \\
 &= -\frac{5}{7} \approx -0.714286 \\
 q - 100 &= -\frac{5}{7}(p - 1160) \\
 q - 100 &= -\frac{5}{7}p + \frac{5800}{7} \\
 q &= -\frac{5}{7}p + \frac{5800}{7} + 100 \\
 q = D(p) &= -\frac{5}{7}p + \frac{6500}{7} \\
 q = D(p) &\approx -0.714286p + 928.57
 \end{aligned}$$

Esta ecuación nos indica que por cada 7 pesos que se aumenta al precio, la demanda disminuye en 5 unidades. Esto es, si $p = 7$, porque el denominador de m es 7, entonces

$$mp = -\frac{5}{7} * 7 = -5$$

Ejercicio 1.33

Un fabricante de refrigeradores producirá 3000 unidades cuando el precio sea de \$18800.00 y 2000 unidades si el precio es de \$14800.00. Asumiendo que el precio p y la cantidad producida q tienen una relación lineal, encuentre la ecuación de oferta.

Solución.

Al igual que el ejercicio 32, tenemos dos pares ordenados, pero ahora de la forma (p, q) en donde el número de unidades a ofertarse dependerá del precio en el mercado.

$$A(18800, 3000) \text{ y } B(14800, 2000)$$

Sustituyendo en las fórmulas de la pendiente y forma punto pendiente obtenemos

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{2000 - 3000}{14800 - 18800} \\
 &= \frac{-1000}{-4000} \\
 &= \frac{1}{4} \\
 q - 3000 &= \frac{1}{4}(p - 18800) \\
 q - 3000 &= \frac{1}{4}p - 4700 \\
 q &= \frac{1}{4}p - 4700 + 3000 \\
 q = S(p) &= \frac{1}{4}p - 1700
 \end{aligned}$$

Esto nos indica que por cada cuatro pesos que aumenta el precio del artículo, el productor pondrá a la venta un artículo más. Esto es, si $p = 4$ porque el denominador de m es 4, entonces

$$mp = \frac{1}{4} * 4 = 1$$

Observemos que mientras en la ecuación de demanda la pendiente o razón de cambio es negativa, porque a mayor precio la demanda disminuye, en la ecuación de oferta sucede lo contrario.

A medida que el precio aumenta, la cantidad de producto ofertado también aumentará, por lo que la pendiente o razón de cambio será positiva.

Ejercicio 1.34

Un fabricante de tenis colocará en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio sea de \$3500.00 el par y de 35 (miles de pares) cuando el precio sea de \$3000.00. Encontrar la ecuación de oferta suponiendo una relación lineal entre el precio y la oferta.

Solución.

Tenemos dos pares ordenados, pero ahora de la forma (p, q) en donde el número de unidades a ofertarse dependerá del precio en el mercado.

$$A (3500, 50) \text{ y } B (3000, 30)$$

Hay que hacer notar que cada unidad de q equivale a mil pares de tenis. Así que si $q = 50$ en realidad son 50000 pares de tenis

Sustituyendo en las fórmulas de la pendiente y forma punto pendiente obtenemos

$$m = \frac{30 - 50}{3000 - 3500}$$

$$= \frac{-20}{-500}$$

$$= \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$$

$$q - 50 = \frac{1}{25}(p - 3500)$$

$$q - 50 = \frac{1}{25}p - 140$$

$$q = \frac{1}{25}p - 140 + 50$$

$$q = S(p) = \frac{1}{25}p - 90$$

Esto nos indica que por cada 25 pesos que aumenta el precio del artículo, el productor pondrá a la venta 1000 pares más de tenis. Esto es, si $p = 25$ porque el denominador de m es 25, entonces

$$mp = \frac{1}{25} * 25 = 1 \text{ (en miles de pares)}$$

Actividades de aprendizaje

- a) Investigar el significado de funciones, dominio y rango y elaborar un mapa conceptual.
- b) Realizar ejercicios en equipos en los cuales se apliquen los conceptos de dominio y rango restringidos.
- c) Realizar ejercicios en equipos en los cuales efectué una combinación de funciones.
- d) Resolver y graficar problemas donde aplique la fórmula de la pendiente/intersección.
- e) Determinar y analizar la ecuación de la línea recta aplicada a la oferta, demanda, depreciación y pronósticos.

Tema 2 Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

Competencias

Específicas:

Soluciona y aplica los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones en problemas de punto de equilibrio y equilibrio de mercado.

Genéricas:

Solución de problemas.

Toma de decisiones.

Trabajo en equipo.

Habilidades interpersonales.

2.1 Funciones lineales

Como ya se estudió en el apartado 1.4 del capítulo anterior, una función lineal tiene la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes reales y $m \neq 0$.

En este capítulo aplicaremos las funciones lineales en situaciones relacionadas con los llamados *Modelos de equilibrio* que incluyen el estudio analítico y gráfico del punto de equilibrio asociado a la producción, así como desde el punto de vista más práctico denominado *Contribución al costo fijo y a la utilidad*, que son temas íntimamente involucrados con las matemáticas aplicadas a la administración.

2.2 Modelos de equilibrio

Dentro del modelo de punto de equilibrio se tienen que definir previamente algunas funciones de interés tanto administrativo como económico que son requisitos previos y que conforman todo un proceso de producción o de elección entre la compra de artículos de dos o más proveedores.

2.2.1 Modelos de punto de equilibrio aplicado a la producción

Es requisito previo definir funciones básicas como las funciones de costos totales, ingresos y utilidad totales ya que son los elementos matemáticos y técnicos involucrados en este tipo de modelos.

Funciones lineales de costo.

De acuerdo con Budnick (2007) se sabe que “las empresas están interesadas en los costos porque reflejan el dinero que sale de la empresa. Esos flujos de dinero están dirigidos a los pagos en salarios, compra de materias primas, provisiones, renta de equipos o bienes inmuebles, aire acondicionado, calefacción, servicios generales y demás costos asociados tanto a la producción como a mantener funcionando a la empresa”.

El *costo total*, se define en base a dos componentes: *costo variable total* y *costo fijo total*. En términos matemáticos escribimos:

$$C(x) = \text{costo fijo total} + \text{costo variable total}$$

En donde x representa el número de unidades producidas.

Ejemplo 2.1

Una empresa que produce un único producto se interesa en determinar la función que expresa el costo total anual $y = C(x)$ como una función del número x de unidades producidas. Los contadores, después de haber realizado un análisis de costos, determinan los gastos fijos anuales son de \$100 000.00 mientras que los costos por concepto de adquisición de materia prima por cada unidad producida son de \$ 110.00 y que los costos de trabajo por unidad son de \$ 30.00 en el departamento de ensamble, \$ 15.00 en el área de acabado y de \$ 25.00 en el departamento de empaque y distribución.

Entonces, la función de costos totales anuales está dada por:

$$y = C(x) = \text{costo variable total} + \text{costo fijo total}$$

Como los costos variables totales dependen tanto de la materia prima y los costos del trabajo entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} y &= \text{costo total de la materia prima} + \text{costo total del trabajo} + \text{costo fijo total} \\ &= 110x + (30x + 15x + 25x) + 100000 \\ C(x) &= 180x + 100000 \end{aligned}$$

El 180 representa el costo por la producción de cada una de las unidades, es decir es el costo de producción unitario. Entonces por cada unidad extra producida el costo e incrementa de \$ 180 en \$ 180.00.

Funciones lineales de ingreso.

El ingreso es el dinero que fluye hacia una empresa por concepto de venta de productos o por la prestación de servicios. Básicamente está dado por el precio unitario del producto multiplicado por el número de unidades vendidas:

$$\text{Ingreso total} = (\text{Precio})(\text{Unidades vendidas})$$

$$I(x) = px$$

Ejemplo 2.2

Tomando como referencia el ejemplo 2.1 podríamos decir que si el costo variable de producir una unidad es de \$ 180.00 entonces el precio podría estar arriba de ese costo. Supongamos que la empresa decide vender cada unidad en \$ 250.00, entonces la función de ingresos totales sería:

$$I(x) = 250x$$

Si la empresa vende 50 000 unidades de su producto entonces el ingreso total sería

$$I(50000) = 250(50000) = 12\,500\,000$$

Doce millones y medio de pesos

Funciones lineales de utilidad.

Se definen básicamente como la diferencia entre los ingresos y los costos totales.

Expresado en forma de ecuación tenemos:

$$\text{Utilidad total} = \text{Ingreso total} - \text{Costos totales}$$

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

Ejemplo 2.3

Tomando como referencia los ejemplos 2.1 y 2.2 tendríamos que la utilidad total estaría dada por:

$$U(x) = 250x - (180x + 100000)$$

$$U(x) = 250x - 180x - 100000$$

$$U(x) = 70x - 100000$$

Esto implica que iniciamos con una pérdida de \$ 100,000.00 que de algún modo es necesario ir remontando con las ventas. Aunado a lo anterior podemos ver que $70x$ nos indica que tenemos una ganancia de 70 pesos por cada artículo producido y vendido.

Es necesario observar que las utilidades totales no representan las ganancias netas de la empresa porque no incluyen posibles gastos extraordinarios no relacionados con los costos de producción tales como multas o pagos por demandas, entre otros.

El modelo de punto de equilibrio aplicado a la producción entonces, está dirigido a encontrar cuál es el punto de producción en donde los costos igualan a los ingresos para establecer el número de unidades que hay que producir y vender a fin de recuperar los costos fijos que representan el adeudo inicial necesario para poder estar en condiciones de iniciar la producción.

Ejemplo 2.4

Encontrar el punto de equilibrio relacionado con los ejemplos 2.1 y 2.2

Solución.

Dado que el punto de equilibrio se encuentra cuando los costos totales igualan a los ingresos totales tendríamos que:

$$C(x) = I(x)$$

$$180x + 100000 = 250x$$

$$100000 = 250x - 180x$$

$$100000 = 70x$$

$$x = 100000/70$$

$$x = 1428.57$$

Esto significa que una vez que se produzcan y vendan 1428 unidades a \$ 70.00 cada una, se habría recuperado el costo fijo inicial de \$ 100,000.00.

Es decir, al ir ingresando de \$ 70.00 en \$ 70.00 por concepto de ventas se tiene que al vender la unidad 1429 se habrían recuperado los \$ 100,000.00 de costo fijo inicial ya que

$$70(1429) = 100030$$

A partir de ahí, cada \$ 70.00 que ingresa forma parte de la utilidad o ganancia. No obstante, lo anterior, el modelo de punto de equilibrio también puede definirse en términos de la utilidad.

El punto de equilibrio se encuentra cuando la utilidad total es igual a 0.

$$U(x) = 0$$

Esto significa que $I(x) - C(x) = 0$, lo cual se da siempre que $C(x) = I(x)$

Si $U(x) = 0$, entonces

$$250x - 180x - 100000 = 0$$

Llevándonos a

$$70x = 100000$$

$$x = 100000/70$$

$$x = 1428.57$$

$$x \approx 1429 \text{ unidades}$$

El punto de equilibrio aplicado a la producción está dado por el número de unidades que deben producirse y venderse para recuperar el costo fijo definido al inicio del proceso de producción.

Ejemplo 2.5

Una compañía fabrica un producto que vende en \$ 60.00 la unidad. Después de un análisis de costos, los contadores estiman que los costos variables de producción por unidad son \$25.00 con un costo fijo anual de \$ 500,000.00. Si x representa el número de unidades producidas y vendidas durante un año:

- Escriba la función lineal del costo total anual.
- Escriba la función lineal de ingreso total.
- Escriba la función lineal de la utilidad total.
- ¿Cuál es la utilidad anual si se producen y venden 10 000 unidades durante el año?
- ¿Qué nivel de producción se requiere para obtener el punto de equilibrio o utilidad cero?

Solución.

- $C(x)$ = Costo variable total + Costo fijo anual

$$C(x) = 25x + 500000$$

- $I(x) = 60x$

- $U(x) = I(x) - C(x) = 60x - (25x + 500000)$

$$U(x) = 60x - 25x - 500000$$

$$U(x) = 35x - 500000$$

$$d) \quad U(10000) = 35(10000) - 500000 = 350000 - 500000 = -150000$$

Es decir, hay una pérdida de \$ 150,000.00

e) El punto de equilibrio está dado por:

$$U(x) = 35x - 500000$$

$$0 = 35x - 500000$$

$$35x = 500000$$

$$x = 500000/35$$

$$x = 14285.7 \text{ es decir } 14286 \text{ unidades}$$

En el ejemplo anterior puede verse que el punto de equilibrio, que es el número de unidades producidas y vendidas para recuperar los costos fijos iniciales o tener una utilidad 0 está dado por:

$$x = \text{Costo fijo total} / \text{utilidad unitaria}$$

La utilidad unitaria está dada por la diferencia entre el precio de venta por unidad y el costo por producir esa unidad (costo variable).

2.2.2 Modelo gráfico de punto de equilibrio

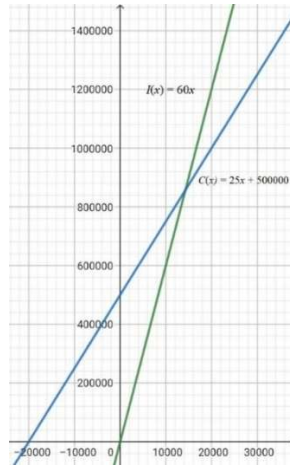
Este método consiste en graficar tanto la función de Costos totales como la de Ingresos totales y ubicar el punto de intersección de ambas gráficas. Es un método intuitivo y que facilita la ubicación del punto de equilibrio a la vez que nos proporciona el Costo total de llegar a dicho punto.

Ejemplo 2.6

Considerando los datos del ejemplo 2.5 tendríamos las siguientes gráficas:

Figura 17

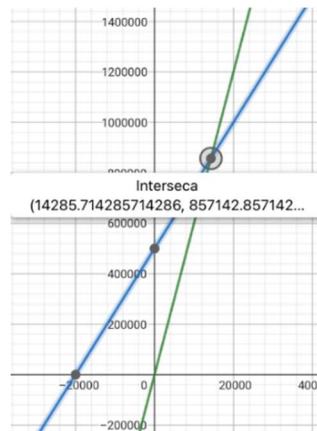
Funciones $I(x) = 60x$ y $C(x) = 25x + 500000$



Al tocar las gráficas en la aplicación, se muestran las coordenadas del punto de intersección en donde el valor de x es el valor de unidades para lograr la utilidad 0 y el valor de y es el costo total de producir ese número de unidades que es igual al ingreso total por vender ese mismo número de unidades.

Figura 18

Punto de equilibrio entre la Utilidad y el Costo



En la gráfica anterior se muestra que el número de unidades producidas y vendidas para lograr el punto de equilibrio de $14285.71 \approx 14286$ y que el costo de producirlas es de

\$ 857,142.86. El ingreso por venderlas sería también de \$ 857,142.86, dándonos una utilidad de 0.

2.2.3 *Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad*

Este método está basado en el método de punto de equilibrio, pero es mucho más simple porque sólo considera la utilidad unitaria o margen de utilidad, definida como la diferencia entre el ingreso por unidad vendida menos el costo variable por unidad producida, como la base de la medición.

La idea es comparar el costo fijo de producción entre la utilidad unitaria a fin de determinar cuántas unidades del producto deben producirse y venderse a fin de recuperar el costo fijo invertido de forma inicial.

El margen de utilidad se expresa como la diferencia entre el precio de venta, p , y el costo variable por unidad, v :

$$\text{Margen de utilidad} = p - v$$

Al margen de utilidad también se le llama Contribución al costo fijo y la utilidad.

Entonces, el punto de equilibrio, o mejor aún, el Nivel de producción del punto de equilibrio es el cociente del costo fijo dividido entre el margen de utilidad o contribución al costo fijo, CF, y a la utilidad:

$$\text{Nivel de producción del punto de equilibrio} = \frac{CF}{p-v}$$

Ejemplo 2.7

Supongamos que el costo variable de producir un artículo es de \$ 25.00 y el costo fijo anual se estima en \$ 450,000.00. Obviamente para que haya utilidad el precio de venta debe ser mayor a los \$ 25.00 que cuesta producirlo. Entre mayor sea

la diferencia, el nivel de producción para llegar al punto de equilibrio se logra más rápidamente.

Supongamos que el precio de venta será de \$ 75.00 la unidad, entonces:

a) El margen de utilidad será de

$$p - v = 75 - 25 = 50$$

Lo cual nos indica que la ganancia por unidad es de \$ 50.00

b) El costo fijo es de

$$CF = 450000$$

c) Finalmente el Nivel de producción del punto de equilibrio está dado por:

$$\frac{CF}{p-v} = \frac{450000}{50} = 9000 \text{ unidades}$$

El costo total por producir 9000 unidades es $25(9000) + 450000 = 675000$ pesos

El ingreso total por vender esas 9000 unidades es $75(9000) = 675000$ pesos

Esto nos indica que se tiene una utilidad 0 lo cual es el punto de equilibrio.

Vale la pena agregar que para lograr el punto de equilibrio no sólo se necesitan los \$ 450,000.00 para iniciar la producción sino con al menos \$ 275,000.00 más a fin de contar con dinero suficiente para afrontar los costos hasta llegar al punto de equilibrio. En realidad se necesita tener un capital mayor para continuar con la producción, pero eso ya no nos compete aquí.

Ejemplo 2.8

Un negocio de lavado de autos se vende en \$ 300,000.00 y se estima que los costos variables por lavado de cada auto son del orden de \$ 15.00. El precio por lavado se establece en \$ 65.00 ¿Cuántos automóviles se deben lavar a fin de recuperar el precio de compra que es de \$ 300,000.00?

Solución.

El costo fijo es el precio de compra, entonces $CF = 300000$, el ingreso unitario es $p = 65$ y el costo variable es $v = 15$, por lo que

$$\frac{CF}{p-v} = \frac{300000}{65-15} = \frac{300000}{50} = 6000 \text{ autos}$$

Ejemplo 2.9

Una organización de beneficencia va a realizar su reunión anual y están en negociaciones con un hotel. Dicha organización cobrará a cada participante, por 3 días, una tarifa de \$ 10,000.00 que incluye el registro, habitación, todos los alimentos y propinas. De esa cuota, se destinarán por concepto de membresía anual un total de \$ 2,500.00. El hotel cobrará \$ 500,000.00 por el uso de salas de juntas, salón de baile e instalaciones recreativas más \$ 5,900.00 por participante. ¿Cuántos participantes deben asistir para que la organización recupere los \$ 500,000.00?

Solución.

En este caso es necesario dividir los \$ 500,000.00 entre la contribución por persona:

Contribución por participante = Tarifa de registro – cargo del hotel – membresía

$$\text{Contribución por participante} = 10000 - 5900 - 2500 = 1600$$

Esto es lo que queda libre para la organización

$$\begin{aligned} \text{Punto de equilibrio} &= \frac{CF}{\text{contribución}} \\ &= \frac{500000}{1600} = 312.5 \end{aligned}$$

Con 313 personas se recupera el cobro del hotel y la organización alcanza el punto de equilibrio. Si se registran más participantes, entonces tendrían una utilidad de \$ 1600.00 por cada uno.

2.2.4 Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir

Este tipo de modelos van enfocados a tomar la decisión de si se produce un artículo o se compra. Es común que, en muchos procesos de manufactura, algunos componentes se compren a compañías que los producen ya sea porque sale más económicos, porque no se dispone de áreas propicias para la construcción de plantas de producción, entre otro tipo de factores. Si existe la oportunidad de decidir, entonces este tipo de análisis puede ser útil.

Ejemplo 2.10

Supongamos que un fabricante compra componentes a un proveedor con un costo de \$ 190.00 la unidad. Después de análisis de costos se estima que para producirlos se necesita de una inversión inicial de \$ 1'200,000.00 y destinar \$ 140.00 para producir cada unidad.

- Determinar la cantidad de unidades en donde los costos de producción son iguales a los costos de compra.
- ¿Cuál es la alternativa de costo mínimo si se requieren 45000 unidades? ¿Cuál es el costo mínimo?
- Si el número de unidades requeridas del componente está cerca del punto de equilibrio ¿qué factores podrían influir en la decisión final de producir o comprar?

Solución.

- La ecuación de costos por compra está dada por

$$C_1 = 190x$$

La ecuación de costos por producción está dada por

$$C_2 = 140x + 1200000$$

Igualando ambos costos tenemos

$$190x = 140x + 1200000$$

Despejando x

$$190x - 140x = 1200000$$

$$50x = 1200000$$

$$x = 1200000/50 = 24000 \text{ unidades}$$

Producir o comprar 24000 unidades tiene el mismo costo

b) Sustituyendo 45000 en ambas ecuaciones obtenemos

$$C_1 = 190x = 190 (45000)$$

$$= 8550000$$

$$C_2 = 140x + 1200000 = 140(45000) + 1200000$$

$$= 6300000 + 1200000$$

$$7500000$$

Es claro que la alternativa 2 nos da el costo mínimo y se recomienda producir porque el ahorro es considerable. El costo mínimo para 45000 componentes es de \$ 7'500,000.00,

c) Aquí se necesita analizar lo que sucede si el número de componentes requerido es cercano a las 24000 unidades, tanto si son menos o más. Para entenderlo podríamos preguntarnos qué decisión tomar si, por ejemplo, se necesitan entre 23000 y 25000 unidades.

Para $x = 23000$ tendríamos lo siguiente:

$$C_1 = 190x = 190 (23000)$$

$$= 4370000$$

$$C_2 = 140x + 1200000 = 140(23000) + 1200000$$

$$= 3220000 + 1200000$$

$$= 4420000$$

La alternativa 1 es menor por lo que se recomienda comprar.

Para $x = 25000$ tendríamos

$$C_1 = 190x = 190(25000)$$

$$= 4750000$$

$$C_2 = 140x + 1200000 = 140(25000) + 1200000$$

$$= 3500000 + 1200000$$

$$= 4700000$$

La alternativa 2, que es la producir, da el costo mínimo, sin embargo, el ahorro no es significativo. Por ahorrar $4750000 - 4700000 = 50000$ se tendrían que contraer compromisos asociados con la contratación de personal, compra e instalación de maquinaria y equipos que podría retrasar la producción esfumando el ahorro estimado.

Antes de decidir, es importante considerar otro tipo de factores y a forma en que podrían afectar el proceso final de producción.

2.3 Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales, de acuerdo con Budnick (2007) es un conjunto de dos o más ecuaciones de lineales. Para caracterizar un sistema de este tipo se suele hacer referencia a sus dimensiones y decimos que tenemos un sistema de m ecuaciones lineales con n variables o incógnitas ya que el objetivo es determinar el valor de las variables que hacen verdaderas a las m ecuaciones de forma simultánea. Para abreviar se suele decir que se tiene un sistema de m por n o, más concretamente, $m \times n$.

A continuación, estudiaremos algunos métodos usados en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.3.1 *Métodos de eliminación suma y resta. Sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3*

El objetivo de estos métodos es el de sumar ecuaciones a fin de eliminar una variable y de esta forma obtener una ecuación lineal con una sola incógnita, la cual tiene solución única. Conociendo el valor de una incógnita resulta muy fácil encontrar el valor de las restantes.

Sistemas 2×2 .

Están conformados por dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo 2.11

Supongamos que tenemos el siguiente sistema:

$$3x + 2y = 1$$

$$-5x - 3y = -1$$

Si sumamos ambas ecuaciones obtenemos $-2x - y = 0$ la cual es una ecuación lineal de dos incógnitas aún, la cual tiene un número infinito de soluciones razón por la cual debemos realizar un paso previo a la suma de ecuaciones.

Si a la primera ecuación se le resta la segunda obtenemos $8x + 5y = 2$, que al igual que el caso anterior, no nos ayuda en nada.

Lo que tenemos que hacer es que los coeficientes de una de las dos incógnitas sean simétricos para al sumarse, o restarse, nos de 0 y de esta forma esa incógnita se elimine.

Lo más fácil es multiplicar cruzado los coeficientes, por ejemplo, para eliminar x hacemos lo siguiente:

$$5) \quad 3x + 2y = 1$$

$$3) \quad -5x - 3y = -1$$

Como los coeficientes de x son de signos contrarios, lo único que hay que

tomar son los valores absolutos de los coeficientes. Al multiplicar obtenemos:

$$15x + 10y = 5$$

$$-15x - 9y = -3$$

Al sumar ambas ecuaciones obtenemos

$$15x - 15x = 0x$$

$$10y - 9y = y$$

$$5 - 3 = 2$$

Escribiendo como ecuación:

$$0x + y = 2$$

Simplificando obtenemos:

$$y = 2$$

Sustituyendo el resultado anterior en cualquiera de las dos ecuaciones nos dará el valor de x :

$$3x + 2(2) = 1$$

$$3x + 4 = 1$$

$$3x = 1 - 4$$

$$3x = -3$$

$$x = -3/3$$

$$x = -1$$

La solución del sistema es el par ordenado $(x, y) = (-1, 2)$

Comprobamos sustituyendo en ambas ecuaciones:

$$3x + 2y = 1$$

$$3(-1) + 2(2) = 1$$

$$-3 + 4 = 1$$

$$1 = 1$$

$$-5x - 3y = -1$$

$$-5(-1) - 3(2) = -1$$

$$5 - 6 = -1$$

$$-1 = -1$$

Observemos que en ambos casos se dan proposiciones verdaderas lo que nos confirma que el par obtenido es la solución del sistema.

Ejemplo 2.12

Resolver el siguiente sistema:

$$10x - 5y = 35$$

$$8x - 12y = 52$$

Multiplicado cruzado los coeficientes, por ejemplo para eliminar x hacemos lo siguiente:

$$-8) \quad 10x - 5y = 35$$

$$10) \quad 8x - 12y = 52$$

Como los coeficientes de x son del mismo signo uno de ellos debe tomar el signo contrario, así que multiplicamos la primera ecuación por el simétrico de 8 y la segunda por 10. Al multiplicar obtenemos:

$$-80x + 40y = -280$$

$$80x - 120y = 520$$

Al sumar ambas ecuaciones obtenemos

$$-80x + 80x = 0x$$

$$40y - 120y = -80y$$

$$-280 + 520 = 240$$

Escribiendo como ecuación:

$$0x - 80y = 240$$

Simplificando obtenemos:

$$y = 240/-80$$

$$y = -3$$

Sustituyendo el resultado anterior en cualquiera de las dos ecuaciones nos dará el valor de x :

$$10x - 5y = 35$$

$$10x - 5(-3) = 35$$

$$10x + 15 = 35$$

$$10x = 35 - 15$$

$$10x = 20$$

$$x = 20/10$$

$$x = 2$$

La solución del sistema es el par ordenado $(x, y) = (2, -3)$

Comprobamos sustituyendo en ambas ecuaciones:

$$\rightarrow 10x - 5y = 35$$

$$10(2) - 5(-3) = 35$$

$$20 + 15 = 35$$

$$35 = 35$$

$$\rightarrow 8x - 12y = 52$$

$$8(2) - 12(-3) = 52$$

$$16 + 36 = 52$$

$$52 = 52$$

Observemos que en ambos casos se dan proposiciones verdaderas lo que nos confirma que el par obtenido es la solución del sistema.

También es posible resolver este tipo de sistemas usando un graficador.

Ejemplo 2.13

Resolver el siguiente sistema:

$$2x + 4y = 20$$

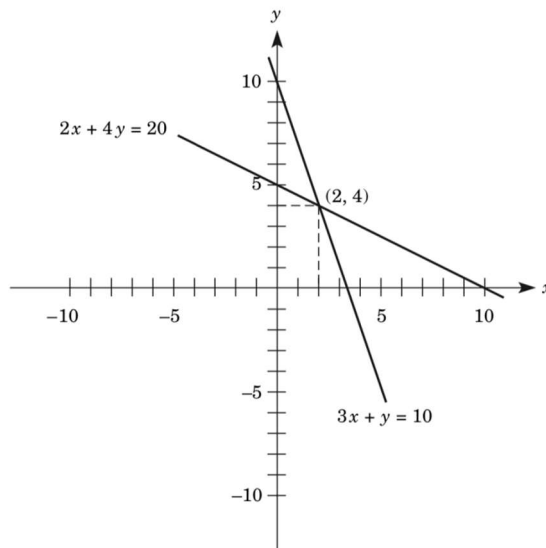
$$3x + y = 10$$

Solución.

Al graficar las ecuaciones buscamos las coordenadas del punto de intersección, que es el lugar geométrico en donde ambas rectas se cruzan:

Figura 19

Punto de intersección o solución del sistema



Nota: La gráfica representa la solución del sistema de ecuaciones lineales del ejemplo 2.13.

Tomado de *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*.

(Budnick, 2007, p. 93)

En este caso, la solución del sistema está dada por $x = 2$ y $y = 4$, que es el punto de intersección de ambas rectas.

Sistemas 3×3 .

Están conformados por tres ecuaciones con tres incógnitas.

Ejemplo 2.14

Resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$4x - y + 3z = -1$$

$$-2x + 2y - 5z = -2$$

$$-x + 4y - 7z = -1$$

Solución.

Despejamos una incógnita de cualquiera de las tres ecuaciones. Normalmente seleccionamos la que sea más fácil de despejar. Por ejemplo la primera tiene la y con coeficiente igual a -1 , mientras que la tercera tiene el mismo coeficiente para la x . Tener 1 como coeficiente facilita la labor al evitar las fracciones.

Despejemos y en la primera ecuación:

$$4x - y + 3z = -1$$

$4x$ y $3z$ que están sumando, pasan restando

$$-y = -1 - 4x - 3z$$

Multiplicando por -1 ambos lados de la ecuación obtenemos

$$(-1) \quad -y = -1 - 4x - 3z \quad (-1)$$

$$y = 1 + 4x + 3z$$

Sustituimos la ecuación anterior en la segunda y tercera ecuaciones

$$-2x + 2y - 5z = -2$$

$$-2x + 2(1 + 4x + 3z) - 5z = -2$$

$$-2x + 2 + 8x + 6z - 5z = -2$$

El 2 que está sumando pasa restando y simplificamos términos semejantes

$$-2x + 8x + 6z - 5z = -2 - 2$$

$$6x + z = -4$$

Hacemos lo mismo con la tercera ecuación

$$-x + 4y - 7z = -1$$

$$-x + 4(1 + 4x + 3z) - 7z = -1$$

$$-x + 4 + 16x + 12z - 7z = -1$$

$$16x - x + 12z - 7z = -1 - 4$$

$$15x + 5z = -5$$

Entonces obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$6x + z = -4$$

$$15x + 5z = -5$$

Que se resuelve como lo vimos en los ejemplos anteriores. Multiplicamos los coeficientes de z cambiando el signo de uno de ellos a fin de poder realizar la eliminación por suma-resta

$$5) \quad 6x + z = -4$$

$$-1) \quad 15x + 5z = -5$$

Esto nos da

$$30x + 5z = -20$$

$$-15x - 28z = 5$$

Sumando ambas ecuaciones

$$30x - 15x = 15x$$

$$5z - 5z = 0z$$

$$-20 + 5 = -15$$

Obtenemos la ecuación

$$15x + 0z = -15$$

15 que multiplica a x pasa dividiendo y obtenemos

$$x = -15/15$$

$$x = -1$$

Ahora sustituimos 1 en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores para obtener el valor de z .

Tomando la primera

$$6x + z = -4$$

$$6(-1) + z = -4$$

$$-6 + z = -4$$

-6 pasa con signo contrario

$$z = -4 + 6$$

$$z = 2$$

Y finalmente sustituimos ambos valores en la ecuación que se despejó al inicio del ejercicio

$$-y = -1 - 4x - 3z$$

$$y = 1 + 4x + 3z$$

$$y = 1 + 4(-1) + 3(2)$$

$$y = 1 - 4 + 6$$

$$y = 3$$

La solución del sistema es la tripleta ordenada $(x, y, z) = (-1, 3, 2)$

2.3.2 Método de eliminación Gaussiana de sistemas 2×2 , 3×3 solución única

La eliminación gaussiana, también llamado método de Gauss, básicamente trabaja con simétricos y recíprocos para ir eliminando las incógnitas mediante un proceso sistemático sumamente fácil.

Un sistema de la forma

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

Se lleva a la forma

$$x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$

$$0x + y + a_{23}z = c_2$$

$$0x + 0y + z = c_3$$

De donde se obtiene el sistema

$$x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$

$$y + a_{23}z = c_2$$

$$z = c_3$$

El valor de z se sustituye en la segunda ecuación para obtener el valor de y y ambos valores se sustituyen en la primera ecuación para obtener el valor de x .

Ejemplo 2.15

Resolver el siguiente sistema usando el método de Gauss.

$$4x - y + 3z = -1$$

$$-2x + 2y - 5z = -2$$

$$-x + 4y - 7z = -1$$

Solución.

Primera transformación del sistema.

Paso 1. Convertir el coeficiente $a_{11} = 4$ en 1

Usamos la propiedad de los números reales que dice que todo número real, excepto 0,

multiplicado por su recíproco da 1, es decir $a_{11} \frac{1}{a_{11}} = 1$.

Por lo tanto, el 4 que es el coeficiente de x en la primera ecuación se multiplica por $\frac{1}{4}$ a fin de que nos de 1. Como multiplicar toda la ecuación por un número no altera a la ecuación, entonces multiplicamos la ecuación 1 por $\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 4x - y + 3z = -1 \\ \quad \quad \quad *1/4 \\ \hline x - \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z = -\frac{1}{4} \end{array}$$

Esta ecuación, que es la primera transformación de la ecuación 1, es la que vamos a utilizar para sumarla a las dos ecuaciones restantes y poder eliminar la incógnita x de ellas.

Paso 2. Convertir $a_{21} = -2$ en 0

Usamos la propiedad de los números reales que dice que la suma de simétricos da 0, es

decir $a_{21} + (-a_{21}) = a_{21} - a_{21} = 0$.

El procedimiento es el siguiente: buscamos un número se multiplique por la primera transformación de la ecuación 1, $x - \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z = -\frac{1}{4}$.

El resultado se sumará a la ecuación 2 a fin de eliminar la x . Entonces buscamos un número que multiplicado por el 1 de la x y sumado a -2 nos de 0, así que 2 es el número buscado

$$\begin{array}{r} x - \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z = -\frac{1}{4} \\ \quad \quad \quad *2 \\ \hline 2x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = -\frac{1}{2} \\ \\ -2x + 2y - 5z = -2 \\ \hline 0x + \frac{3}{2}y - \frac{7}{2}z = -\frac{5}{2} \end{array}$$

$\frac{3}{2}y - \frac{7}{2}z = -\frac{5}{2}$ es la primera transformación de la ecuación 2 y como se aprecia, la x

ya no está.

Paso 3. Convertir $a_{31} = -1$ en 0

El número buscado es el simétrico de -1 que es 1. Así que la primera transformación de la ecuación 1 se multiplica por 1, lo cual la deja igual, y el resultado se suma con la tercera ecuación.

$$\begin{array}{r}
 x - \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z = -\frac{1}{4} \\
 \quad \quad \quad *1 \\
 \hline
 x - \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z = -\frac{1}{4} \\
 \\
 \begin{array}{r}
 -x + 4y - 7z = -1 \\
 \hline
 0x + \frac{15}{4}y - \frac{25}{4}z = -\frac{5}{4}
 \end{array}
 \end{array}$$

$\frac{15}{4}y - \frac{25}{4}z = -\frac{5}{4}$ es la primera transformación de la ecuación 3.

El sistema ahora nos queda de la forma

$$x - \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{2}y - \frac{7}{2}z = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{15}{4}y - \frac{25}{4}z = -\frac{5}{4}$$

Ahora el proceso se repite pero iniciamos con la ecuación 2 a fin de dejar la y con coeficiente 1 y eliminar las y de las ecuaciones 1 y 3.

Segunda transformación del sistema.

Paso 4. Convertir el coeficiente $a_{22} = \frac{3}{2}$ en 1.

Multiplicamos la segunda ecuación por el recíproco de $\frac{3}{2}$ el cual es $\frac{2}{3}$ ya que

$$\frac{3}{2} * \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1$$

Entonces multiplicamos la segunda ecuación por $\frac{2}{3}$

$$\begin{array}{r}
 \frac{3}{2}y - \frac{7}{2}z = -\frac{5}{2} \\
 \quad \quad \quad * \frac{2}{3} \\
 \hline
 y - \frac{7}{3}z = -\frac{5}{3}
 \end{array}$$

$y - \frac{7}{3}z = -\frac{5}{3}$ es la segunda transformación de la ecuación 2. Esta ecuación se sumará a

la primera y tercera ecuaciones a fin de eliminar la incógnita y en ellas.

Paso 5. Convertir $a_{32} = 15/4$ en 0.

El número buscado es el simétrico de $15/4$ que es $-15/4$

$$\begin{array}{r}
 y - 7/3 z = -5/3 \\
 \quad \quad \quad * -15/4 \\
 \hline
 -15/4 y + 35/4 z = 25/4 \\
 \\
 15/4 y - 25/4 z = -5/4 \\
 \hline
 0y + 5/2 z = 5
 \end{array}$$

La ecuación resultante es

$$5/2 z = 5$$

$$z = 5(2/5)$$

$$z = 10/5$$

$$z = 2$$

Entonces el sistema queda

$$x - 1/4 y + 3/4 z = -1/4$$

$$y + 7/3 z = -5/3$$

$$z = 2$$

Sustituyendo $z = -2$ en la segunda ecuación obtenemos

$$y + 7/3 z = -5/3$$

$$y + 7/3(-2) = -5/3$$

$$y - 14/3 = -5/3$$

$$y = -5/3 + 14/3$$

$$y = 9/3 = 3$$

Finalmente sustituimos $y = 3$ y $z = 2$ en la primera ecuación

$$x - 1/4 y + 3/4 z = -1/4$$

$$x - 1/4(3) + 3/4(2) = -1/4$$

$$x - 3/4 + 3/2 = -1/4$$

$$x = -1/4 + 3/4 - 3/2$$

$$x = -4/4 = -1$$

La solución del sistema es la tripleta ordenada $(x, y, z) = (-1, 3, 2)$

2.3.3 Aplicaciones a modelos económico-administrativos

Veamos algunos ejemplos de aplicación en donde se utilizan sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 2.14

La ecuación de Costos totales para producir un número x de unidades de cierto producto está dada por $C(x) = 250x + 1500000$ y la ecuación de ingreso es $I(x) = 500x$. Encontrar el punto de equilibrio usando sistema de ecuaciones de dos incógnitas.

Solución.

El sistema está dado por

$$y = 250x + 1500000$$

$$y = 500x$$

Como las y tienen el mismo coeficiente, entonces multiplicamos una ecuación por -1

$$y = 250x + 1500000$$

$$-1) \quad y = 500x$$

Y obtenemos

$$y = 250x + 1500000$$

$$-y = -500x$$

Ordenando las incógnitas en el lado izquierdo

$$y - 250x = 1500000$$

$$-y + 500x = 0$$

Sumando las ecuaciones

$$y - y = 0y$$

$$-250x + 500x = 250x$$

$$1500000 - 0 = 1500000$$

La ecuación resultante es

$$250x + 0y = 1500000$$

Despejando x

$$250x = 1500000$$

$$x = 1500000/250 = 6000 \text{ unidades}$$

Al sustituir $x = 6000$ en ambas ecuaciones tenemos:

$$y = 250x + 1500000$$

$$y = 250(6000) + 1500000$$

$$y = 1500000 + 1500000$$

$$y = 3000000$$

$$y = 500x$$

$$y = 500(6000)$$

$$y = 3000000$$

Esto significa que producir 6000 unidades costaría \$ 3'000,000.00 y vender esas 6000 unidades daría un ingreso de \$ 3'000,000.00 por lo que el punto de equilibrio es (6000, 3000000)

Ahora bien, comprobemos el sistema:

$$3000000 = 250(6000) + 1500000$$

$$3000000 = 1500000 + 1500000$$

$$3000000 = 3000000$$

$$y = 500x$$

$$3000000 = 500(6000)$$

$$3000000 = 3000000$$

Ejemplo 2.15

Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 600 litros de una solución de ácido al 25%. Tiene disponibles soluciones al 35% y al 15%

¿Cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?

Solución.

Sean x y y , respectivamente, el número de litros de las soluciones al 30% y al 15% que deben mezclarse, entonces

$$x + y = 500 \text{ litros de solución}$$

Una solución al 25% de ácido contiene 25% de ácido puro y 75% de agua destilada. Si estamos hablando de litros, entonces cada litro tiene $250 \text{ ml} = 0.25 \text{ l}$ de ácido por lo que la segunda ecuación queda

$$0.3x + 0.15y = 0.25 (500)$$

$$0.3x + 0.15y = 125 \text{ litros de ácido puro}$$

El sistema queda

$$x + y = 500$$

$$0.3x + 0.15y = 125$$

Utilizando el método de suma resta, multiplicamos cruzados los coeficientes de x notando que ambos son del mismo signo por lo que en una ecuación usaremos

el simétrico:

$$-0.3) \quad x + y = 500$$

$$1) \quad 0.3x + 0.15y = 125$$

Por lo que el sistema queda

$$-0.3x - 0.3y = -150$$

$$0.3x + 0.15y = 125$$

Sumando ambas ecuaciones

$$-0.3x + 0.3x = 0x$$

$$-0.3y + 0.15y = -0.15y$$

$$-150 + 125 = -25$$

La ecuación resultante está dada por

$$0x - 0.15y = -25$$

Despejando y

$$-0.15y = -25$$

$$y = -25/-0.15$$

$$y \approx 166.67 \text{ litros de solución al 15\%}$$

Sustituyendo $y \approx 166.67$ en la primera ecuación obtenemos

$$x + 166.67 = 500$$

$$x = 500 - 166.67$$

$$x = 333.33 \text{ litros de solución al 30\%}$$

La comprobación se deja de ejercicio.

Ejemplo 2.17

Un productor de café se interesa en la mezcla de tres tipos distintos de granos de

café para obtener una mezcla final. Los tres granos tienen un costo de \$ 24.00, \$ 32.00 y \$ 28.00 la libra, respectivamente. Uno de los objetivos que producir 40,000 libras de la mezcla y para ello cuenta con un presupuesto de \$ 1'152,000.00. La única restricción es que la cantidad usada del grano 2 debe ser el doble de la del grano 1 a fin de evitar un sabor amargo.

Determinar si existe una combinación de los tres tipos de grano que produzca una mezcla final de 40,000 libras, que cueste \$ 1'152,000.00 y que satisfaga la restricción en los granos 1 y 2.

Solución.

Se definen las incógnitas que son

x = libras del grano 1

y = libras del grano 2

z = libras del grano 3

Entonces podemos establecer las ecuaciones por cada una de las condiciones impuestas

El total de libras es de 40000

$$x + y + z = 40000$$

Los costos por las libras de cada grano

$$24x + 32y + 28z = 1152000$$

Las libras del grano 2 deben ser el doble de las del grano 1

$$y = 2x$$

Por lo que ya tenemos nuestro sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$x + y + z = 40000$$

$$24x + 32y + 28z = 1152000$$

$$y = 2x$$

En este ejemplo, ya tenemos una incógnita despejada así que solamente sustituimos el valor de y en las dos primeras ecuaciones, obteniendo

$$x + 2x + z = 40000$$

$$24x + 32(2x) + 28z = 1152000$$

Simplificando

$$3x + z = 40000$$

$$24x + 64x + 28z = 1152000$$

Nos lleva al sistema

$$3x + z = 40000$$

$$88x + 28z = 1152000$$

Vamos a eliminar z porque es la más fácil

$$-28) \quad 3x + z = 40000$$

$$1) \quad 88x + 28z = 1152000$$

Nos da

$$-84x - 28z = -1120000$$

$$88x + 28z = 1152000$$

Sumando ambas ecuaciones

$$-84x + 88x = 4x$$

$$-28z + 28z = 0z$$

$$-1120000 + 1152000 = 32000$$

Y obtenemos la ecuación

$$4x + 0z = 32000$$

Que nos lleva a

$$x = 32000/4$$

$$x = 8000 \text{ libras}$$

Sustituyendo en $3x + z = 40000$ obtenemos

$$3(8000) + z = 40000$$

$$24000 + z = 40000$$

$$z = 40000 - 24000$$

$$z = 16000$$

Finalmente sustituyendo en la ecuación despejada $y = 2x$

$$y = 2(8000)$$

$$y = 16000$$

La solución contempla 8000 libras del grano 1, 16000 libras del grano 2 y 16000 libras del grano 3. La suma nos da 40000 libras de mezcla.

Ahora bien, los costos son

$$\begin{aligned} 24(8000) + 32(16000) + 28(16000) &= 192000 + 512000 + 44800 \\ &= 1152000 \end{aligned}$$

Y finalmente $y = 16000$ libras de granos es el doble de $x = 8000$ libras de grano 1.

Actividades de aprendizaje

- a) Consultar previo a clase los conceptos de funciones lineales, ingreso, costo, utilidad, depreciación y punto de equilibrio, elaborar un reporte.
- b) Formular funciones en donde estén implícitos los ingresos, costos, la utilidad y la depreciación.
- c) Crear y resolver modelos de punto de equilibrio, partiendo de la actividad anterior.
- d) Graficar el punto de equilibrio.
- e) Resolver sistemas de ecuaciones, utilizando los métodos de suma y resta, eliminación y Gauss Jordán, aplicar el modelo en casos prácticos del área.

Tema 3 Álgebra matricial

Competencias

Específicas:

Aplica la notación de una matriz para la representación matricial de datos, sus operaciones matemáticas y soluciona problemas de sistemas de ecuaciones aplicando para resolver casos del área económica administrativa.

Genéricas:

Solución de problemas.

Toma de decisiones.

Trabajo en equipo.

Habilidades interpersonales.

3.1 Introducción a las matrices

De acuerdo con Budnick (2007) una matriz es un arreglo rectangular de elementos. En nuestro caso, esos elementos serán números reales y la ubicación de cada elemento estará dada por el número de fila y de columna que ocupe.

Ejemplo 3.1

Supongamos las calificaciones de cinco alumnos en un semestre. Es posible mostrar la información anterior en forma de lista o en forma matricial:

		Prueba				
		1	2	3	4	5
Estudiante	1	75	80	78	92	88
	2	91	95	99	89	90
	3	77	78	85	82	76
	4	59	65	75	78	80
	5	55	90	98	95	80

Esta matriz contiene el total de las calificaciones dispuestas en cinco filas y cinco columnas, en donde cada fila corresponde al nombre de cada uno de los estudiantes y cada columna corresponde a la calificación obtenida en cada una de las cinco pruebas.

La forma generalizada de una matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

representada por m filas y n columnas. EL tamaño de una matriz se define en base al número de filas y columnas, por lo que decimos que A una matriz de tamaño $m \times n$. La matriz del ejercicio 3.1 es una matriz de tamaño 5×5 .

Los subíndices indican la ubicación de cada elemento, entonces a_{ij} denota al elemento que está en la fila i , columna j .

Ejemplo 3.2

Veamos la matriz mostrada en el ejemplo 3.1

		Prueba				
		1	2	3	4	5
Estudiante	1	75	80	78	92	88
	2	91	95	99	89	90
	3	77	78	85	82	76
	4	59	65	75	78	80
	5	55	90	98	95	80

El elemento a_{14} es el número de la primera fila y la cuarta columna. Entonces $a_{14} = 92$.

El elemento a_{43} es el número de la cuarta fila y la tercera columna. Entonces $a_{43} = 75$.

El elemento a_{51} es el número de la quinta fila y la primera columna. Entonces $a_{51} = 55$.

Los nombres de las matrices se definen con letras mayúsculas y los elementos con letras minúsculas con subíndices.

El tamaño u orden de la matriz se indican por el número de filas y de columnas que la conforman $m \times n$.

Ejemplo 3.3

Determinar el tamaño de las siguientes matrices y decir de qué tamaño son.

1 $A = [8, 2, 5, -6]$	2 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -8 & 10 & 5 \end{bmatrix}$
3 $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ 4 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$	4 $D = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Solución.

1 A es de tamaño 1 x 4	2 B es de tamaño 2 x 3
3 C es de tamaño 4 x 2	4 D es de tamaño 2 x 2

3.2 Tipos especiales de matrices

De acuerdo con el tamaño o a los datos que contenga la matriz, puede denominarse de una forma especial.

Vectores.

Un vector es una matriz con una sola fila o columna. Por ejemplo, una lista de personas puede considerarse un vector columna o la lista de calificaciones de un estudiante puede considerarse un vector fila.

Un vector fila es una matriz que sólo tiene una fila. Su tamaño es $1 \times n$ y su forma general está dada por:

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

Un vector columna es una matriz con una sola columna. Su tamaño es $m \times 1$ y su forma general es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada.

Es aquélla que tiene el mismo número de filas de que columnas. Su tamaño se define como $n \times n$ o simplemente matriz cuadrada de orden n .

Ejemplo 3.4

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2 o 2×2

$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & \sqrt{5} \\ \frac{3}{4} & -6 & 8 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3 o 3×3

Matriz transpuesta.

Es aquélla en donde las filas se convierten en columnas.

Ejemplo 3.5

Si $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & \sqrt{5} \\ \frac{3}{4} & -6 & 8 \end{bmatrix}$ entonces la transpuesta de A, denotada A^T , es la matriz

$A^T = \begin{bmatrix} 8 & -5 & \frac{3}{4} \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & \sqrt{5} & 8 \end{bmatrix}$ en donde la fila 1 se convirtió en la columna 1, la fila 2 se convirtió en

la columna 2 y la fila 3 se convirtió en la columna 3.

Si a_{ij} es un elemento de la matriz A, entonces al transponer la matriz los elementos cambian a a_{ji} .

Matriz identidad o matriz unitaria.

Aquellos elementos cuyo número de renglón es igual al número de columna, es decir $i = j$, se les llama diagonal principal. Son los elementos que ocupan las posiciones

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}.$$

Cuando una matriz tiene que los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1 y los demás elementos son iguales a 0, tenemos la matriz identidad.

Ejemplo 3.6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ es una matriz identidad de orden 2 o } 2 \times 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ es una matriz cuadrada de orden 3 o } 3 \times 3$$

3.3 Operaciones con matrices

Dado que las matrices son estructuras matemáticas, es posible realizar cierto tipo de operaciones con ellas bajo ciertas restricciones. En este apartado estudiaremos la suma, resta, la multiplicación de una matriz por un escalar, el producto punto entre vectores y la multiplicación de matrices.

Suma de matrices.

Dos matrices se pueden sumar sí y sólo si son del mismo tamaño. Esto es porque se suman los elementos correspondientes, es decir, los que ocupan las mismas posiciones en cada una de las matrices. Por ejemplo, a_{11} con b_{11} , a_{12} con b_{12} , y así sucesivamente.

Ejemplo 3.7

$$\text{Sean las matrices } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \text{ entonces la suma está definida}$$

porque ambas matrices son de tamaño 2×2 .

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 + 1 & 3 + 4 \\ 2 + 5 & 1 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse, ningún elemento queda libre, todos los elementos

de ambas matrices tienen su respectiva pareja.

Ejemplo 3.8

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, entonces la suma no puede realizarse dado que A es

una matriz 2×2 y B es una matriz 2×3 .

Si hiciéramos el intento de sumarlas tendríamos

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + 3 & 9 + 5 \\ 1 + 0 & 6 + 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Observemos que los elementos b_{31} y b_{32} no tienen con quien sumar dado que los elementos correspondientes a_{31} y a_{32} no están presentes en la matriz A.

Ejemplo 3.9

Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 7 & -8 & -4 \\ -2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$, entonces la suma está definida

porque ambas matrices son de tamaño 3×3 .

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 5 + 2 & -3 + 6 & 8 + 3 \\ -1 + 7 & 3 - 8 & 0 - 4 \\ 4 - 2 & 2 + 9 & -4 + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 3 & 11 \\ 6 & -5 & -4 \\ 2 & 11 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Producto de una matriz por un escalar.

Un escalar es una forma de llamar a todo número real que multiplica a un vector a una matriz. El producto de un escalar por una matriz se realiza multiplicando el escalar por cada uno de los elementos de la matriz. Un escalar se suele representar con una letra griega minúscula como α o β .

Ejemplo 3.10

Sean $\alpha = 3$ y $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, entonces el producto se realiza de la siguiente

forma:

$$\alpha A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(9) \\ 3(1) & 3(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 27 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.11

Sean $\alpha = -4$ y $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, entonces el producto se realiza de la siguiente forma:

$$\alpha A = -4 \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4(-3) & -4(5) \\ -4(2) & -4(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -20 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.12

Sean $\alpha = -1$ y $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, entonces el producto se realiza de la siguiente

forma:

$$\alpha A = -1 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(4) & -(-2) \\ -(-5) & -(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

A la matriz resultante $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ se le llama inverso aditivo de $A =$

$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ porque al sumarse dan una matriz nula, llamada así porque todos sus

elementos son iguales a 0 y se le denota $-A$.

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 4 & 2 - 2 \\ 5 - 5 & -1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esto ya podemos definir la resta de matrices.

Resta de matrices.

Si a una matriz A le queremos restar una matriz B , lo que hacemos en realidad es sumarle a la matriz A el inverso aditivo de B , que es $-B$.

$$A - B = A + (-B)$$

Ejemplo 3.13

$$\text{Sean } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 7 & -8 & -4 \\ -2 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \text{ entonces la resta está definida}$$

porque ambas matrices son de tamaño 3 x 3.

Primero encontramos a $-B$:

$$\begin{aligned} -B &= - \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 7 & -8 & -4 \\ -2 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2) & -(6) & -(3) \\ -(7) & -(-8) & -(-4) \\ -(-2) & -(9) & -(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -7 & 8 & 4 \\ 2 & -9 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A - B &= A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -7 & 8 & 4 \\ 2 & -9 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5-2 & -3-6 & 8-3 \\ -1-7 & 3+8 & 0+4 \\ 4+2 & 2-9 & -4-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -9 & 5 \\ -8 & 11 & 4 \\ 6 & -7 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Producto punto.

Es un producto definido especialmente para vectores. Al igual que la suma de matrices, en donde se suman los elementos correspondientes, el producto punto entre vectores se realiza mediante la suma de los productos de los elementos correspondientes de cada vector, por lo que no puede quedar un elemento sin multiplicar.

Ejemplo 3.14

Sean $A = [5 \quad 8 \quad 3]$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$, entonces el producto punto está dado por:

$$A \cdot B = (5)(2) + (8)(10) + (3)(-5) = 10 + 80 - 15$$

$$A \cdot B = 75$$

El producto punto da como resultado un número real.

Este producto se puede realizar porque A tiene 3 columnas y B tiene 3 filas, entonces ningún elemento se queda sin multiplicar.

Ejemplo 3.15

Sean $A = [-1 \quad 9]$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, entonces el producto punto no puede realizarse porque A

tienen dos columnas y B tiene 3 filas.

$$A \cdot B = (-1)(3) + (9)(6) + (\quad)(4)$$

El producto punto no está definido.

Producto de matrices.

El producto de matrices, AB , da como resultado una matriz cuyos elementos se obtienen al realizar todos los productos punto entre cada una de las filas de A y cada una de las columnas de B. Cabe observar que cada fila de la matriz A o cada columna de la matriz B se puede ver como un vector fila o vector columna, respectivamente.

Ejemplo 3.16

Encontrar el producto AB , si $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Solución.

A es una matriz 3×2 , es decir tiene 3 filas y 2 columnas mientras que B es una matriz 2×3 con 2 filas y 3 columnas. Los productos punto se realizarán entre las filas de A y las columnas de B, sin embargo, para determinar si la operación se puede efectuar comparamos las columnas de A con las filas de B a fin de que sean iguales. La multiplicación se puede realizar porque el número de columnas de A (2) es igual al número de filas de B (2).

Llamaremos c_{ij} al producto punto de la fila i de la matriz A y la columna j de la matriz B.

Primera fila de A por primera columna de B

$$c_{11} = [5 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = (5)(-3) + (3)(1) = -15 + 3 = -12$$

Primera fila de A por segunda columna de B

$$c_{12} = [5 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = (5)(6) + (3)(0) = 30 + 0 = 30$$

Primera fila de A por tercera columna de B

$$c_{13} = [5 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = (5)(-4) + (3)(-1) = -20 - 3 = -23$$

Segunda fila de A por primera columna de B

$$c_{21} = [2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = (2)(-3) + (1)(1) = -6 + 1 = -5$$

Segunda fila de A por segunda columna de B

$$c_{22} = [2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = (2)(6) + (1)(0) = 12 + 0 = 12$$

Segunda fila de A por tercera columna de B

$$c_{23} = [2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = (2)(-4) + (1)(-1) = -8 - 1 = -9$$

Tercera fila de A por primera columna de B

$$c_{31} = [-4 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = (-4)(-3) + (-2)(1) = 12 - 2 = 10$$

Tercera fila de A por segunda columna de B

$$c_{32} = [-4 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = (-4)(6) + (-2)(0) = -24 + 0 = -24$$

Tercera fila de A por tercera columna de B

$$c_{33} = [-4 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = (-4)(-4) + (-2)(-1) = 16 + 2 = 18$$

Colocando los resultados anteriores en sus respectivas posiciones obtenemos

la matriz producto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 30 & -23 \\ -5 & 12 & -9 \\ 10 & -24 & 18 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.17

$$\text{Encontrar el producto AB, si } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Solución.

A es una matriz 2x3, es decir tiene 2 filas y 3 columnas mientras que B es una matriz 3x2 con 3 filas y 2 columnas. La multiplicación se puede realizar porque el número de columnas de A (3) es igual al número de filas de B (3).

Primera fila de A por primera columna de B

$$c_{11} = [1 \quad -4 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = (1)(2) + (-4)(3) + (5)(5) = 2 - 12 + 25 = 15$$

Primera fila de A por segunda columna de B

$$c_{12} = [1 \quad -4 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = (1)(3) + (-4)(-1) + (5)(8) = 3 + 4 + 40 = 47$$

Segunda fila de A por primera columna de B

$$c_{21} = [2 \quad 6 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = (2)(2) + (6)(3) + (-1)(5) = 4 + 18 - 5 = 17$$

Segunda fila de A por segunda columna de B

$$c_{22} = [2 \quad 6 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = (2)(3) + (6)(-1) + (-1)(8) = 6 - 6 - 8 = -8$$

Colocando los resultados anteriores en sus respectivas posiciones obtenemos la matriz producto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 47 \\ 17 & -8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.18

$$\text{Encontrar el producto } AB, \text{ si } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Solución.

A es una matriz 2x2, es decir tiene 2 filas y 2 columnas mientras que B es una matriz 3x2 con 3 filas y 2 columnas. La multiplicación no se puede realizar porque el número de columnas de A (2) no es igual al número de filas de B (3).

Si quisiéramos multiplicar la primera fila de A por la primera columna de B tendríamos $(1)(2) + (4)(3) + () (5)$

Por lo que la multiplicación no está definida, es decir, no está contemplada en la definición de multiplicación de matrices y por ende no se puede realizar.

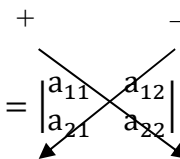
3.4 Introducción a los determinantes. Solución de un determinante 2x2, 3x3 por método de columnas aumentadas y cofactores

El concepto de determinante es fundamental en el álgebra matricial. Según Budnick (2007) si una matriz A es cuadrada, los elementos de dicha matriz se pueden combinar para

calcular un único número real asociado a dicha matriz llamado determinante. El nombre lo recibe porque dicho número determina si una matriz cuadrada tiene inversa o no. El determinante de A se denota $\det A$ o $|A|$.

Solución de un determinante 2×2 .

Si A es una matriz 2×2 entonces el determinante se calcula mediante la diferencia de productos diagonales cruzados:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ entonces } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$


Ejemplo 3.18

$$\text{Encontrar el determinante de } A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (3)(6) - (5)(2) = 18 - 10 = 8$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (-3)(0) = -2 + 0 = -2$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(4) - (-10)(8) = -8 + 80 = 72$$

Solución de un determinante 3×3 por método de columnas aumentadas

Aunque hay varias formas de encontrar el determinante de una matriz 3×3 , existe un método de productos diagonales llamado método de columnas aumentadas.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ entonces copiamos las dos primeras columnas al final de la tercera}$$

y realizamos productos diagonales de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccccc} & & & + & + & + & \\ & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & & & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & & & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Como puede apreciarse, los productos diagonales de izquierda a derecha se les antepone el signo (+) mientras que a los productos diagonales invertidos, de derecha a izquierda se les antepone el signo (-).

Ejemplo 3.19

$$\text{Encontrar el determinante de } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Solución.

Copiamos las dos primeras columnas al final y realizamos los productos diagonales.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccccc} & & & + & + & + & \\ & & & -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ & & & -4 & 4 & 7 & -4 & 4 \\ & & & 1 & 3 & -5 & 1 & 3 \end{array}$$

$$= (-1)(4)(-5) + (3)(7)(1) + (2)(-4)(3) - (2)(4)(1) - (-1)(7)(3) - (3)(-4)(-5)$$

$$= 20 + 21 - 24 - 8 + 21 - 60$$

$$= 62 - 92 = -30$$

Cofactores.

Es posible ahorrar esfuerzo al calcular del determinante de una matriz 3x3 a través del método de cofactores. En este método, primero se encuentran las matrices menores M_{ij} , llamadas así porque la fila i y la columna j de A se eliminan generando una matriz con una fila y una columna menos que las que contiene A .

A la matriz M_{ij} se le calcula el determinante. Si la suma $i + j$ es par, el determinante del

menor M_{ij} conserva su signo, sin embargo, si la suma $i + j$ es impar, entonces el determinante de M_{ij} cambia su signo.

El cofactor se define como

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

El determinante de A se define como

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Donde a_{1j} es elemento de la primera fila de A y A_{1j} es el cofactor asociado a la primera fila.

Ejemplo 3.20

$$\text{Encontrar el determinante de } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Solución.

Los elementos de la primera fila de A son $a_{11} = -1$, $a_{12} = 3$ y $a_{13} = 2$.

Vamos a encontrar los cofactores asociados A_{11} , A_{12} y A_{13} .

Para encontrar A_{11} , necesitamos M_{11}

M_{11} es la matriz que resulta de eliminar la primera fila y columna de A

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Entonces, el cofactor sería

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} |M_{11}| = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1[(4)(-5) - (7)(3)] \\ &= -20 - 21 = -41 \end{aligned}$$

Para encontrar A_{12} , necesitamos M_{12}

M_{12} es la matriz que resulta de eliminar la primera fila y la segunda columna de A

$$M_{12} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Entonces, el cofactor sería

$$\begin{aligned} A_{12} &= (-1)^{1+2} |M_{12}| = (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1[(-4)(-5) - (7)(1)] \\ &= -1(20 - 7) = -1(13) \\ &= -13 \end{aligned}$$

Para encontrar A_{13} , necesitamos M_{13}

M_{13} es la matriz que resulta de eliminar la primera fila y la segunda columna de A

$$M_{13} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces, el cofactor sería

$$\begin{aligned} A_{13} &= (-1)^{1+3} |M_{13}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1[(-4)(3) - (4)(1)] \\ &= -12 - 4 \\ &= -16 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -1(41) + 3(-13) + 2(-16) \\ &= -41 - 39 - 16 \\ &= -96 \end{aligned}$$

3.5 Propiedades de los determinantes

Las principales propiedades de los determinantes son:

1. El determinante de una matriz y el de su transpuesta son iguales
2. Si la matriz tiene una fila o una columna en la que todos sus elementos son cero, entonces $|A|=0$
3. Si la matriz tiene dos filas o dos columnas iguales, entonces su determinante también es cero $|A|=0$

4. Si intercambiamos el orden de dos filas, el determinante cambia de signo.

Ejemplo 3.21

Como ya vimos en el ejemplo 3.19

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

Entonces la transpuesta de A, que se obtiene al colocar las filas como columnas,

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -5 \end{bmatrix} \text{ tiene el mismo determinante. Se deja como actividad.}$$

Si intercambiamos una fila por otra o una columna por otra, el determinante cambia de signo, esto es si

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

entonces, si intercambiamos la primera fila con la segunda

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 30$$

La verificación se deja como actividad de clase.

Ejemplo 3.22

Verificar que

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 3.23

Verificar que

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.6 Solución a la inversa de una matriz

En los números reales si un número a multiplicado por un número b nos da como resultado 1, entonces se dice que a y b son inversos multiplicativos.

Sea a un número real, entonces su inverso multiplicativo es $1/a$ dado que:

$$a \frac{1}{a} = 1 \text{ para todo número real } a \text{ distinto de } 0.$$

Se deduce que 0 no tiene inverso multiplicativo ni es inverso multiplicativo de otro número real. En el caso del álgebra matricial, si una matriz cuadrada B que multiplica a una matriz cuadrada A , del mismo tamaño, nos da como resultado una matriz unitaria, decimos que B es la inversa de A y se denota A^{-1} .

Ejemplo 3.22

$$\text{Mostrar } B = \begin{bmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \text{ es la inversa de } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución.

Hagamos la multiplicación AB realizando el producto punto entre cada fila de A y cada columna de B .

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \text{ debe ser igual a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primera fila de A por primera columna de B

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/10 \\ -2/5 \end{bmatrix} = (2)(3/10) + (-1)(-2/5) = 3/5 + 2/5 = 5/5 = 1$$

Primera fila de A por segunda columna de B

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/10 \\ 1/5 \end{bmatrix} = (2)(1/10) + (-1)(1/5) = 2/5 - 2/5 = 0$$

Segunda fila de A por primera columna de B

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/10 \\ -2/5 \end{bmatrix} = (4)(3/10) + (3)(-2/5) = 6/5 - 6/5 = 0$$

Segunda fila de A por segunda columna de B

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/10 \\ 1/5 \end{bmatrix} = (4)(1/10) + (3)(1/5) = 2/5 + 3/5 = 5/5 = 1$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ que es la matriz unitaria, o matriz identidad, de orden 2}$$

Utilizando el cálculo de determinantes, vamos a encontrar la inversa de una matriz cuadrada a través del método de la matriz adjunta, el cual involucra a los cofactores en una matriz llamada matriz adjunta.

La adjunta de A, $\text{adj } A$, es la matriz transpuesta de cofactores de A.

La inversa de una matriz se define como el producto del recíproco del determinante multiplicado por la matriz adjunta:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

Lo que tenemos que encontrar primero son todos los cofactores asociados a

la matriz A, escribir a matriz de cofactores y luego la adjunta se obtiene al transponer las filas de la matriz de cofactores escribiéndolas como columnas.

Ejemplo 3.23

Encontrar la inversa de $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución

Buscamos los cofactores de A:

Recordemos que $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$

La matriz menor M_{11} se obtiene eliminando la fila 1 y la columna 1 de A

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = (-1)^2 |5| = 1(5) = 5$$

La matriz menor M_{12} se obtiene eliminando la fila 1 y la columna 2 de A

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = (-1)^3 |2| = -1(2) = -2$$

La matriz menor M_{21} se obtiene eliminando la fila 2 y la columna 1 de A

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = (-1)^3 |4| = -1(4) = -4$$

La matriz menor M_{22} se obtiene eliminando la fila 2 y la columna 2 de A

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = (-1)^4 |2| = 1(-1) = -1$$

La matriz de cofactores es $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

La matriz adjunta de A es $\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ la cual se obtiene al escribir las filas en columnas.

El determinante de A, calculado mediante la diferencia de productos cruzados, es:

$$|A| = (-1)(5) - (4)(2) = -5 - 8 = -13$$

Si la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/13 & 4/13 \\ 2/13 & 1/13 \end{bmatrix}$$

Comprobación.

$$\begin{bmatrix} -5/13 & 4/13 \\ 2/13 & 1/13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \text{ debe ser igual a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primera fila de A por la primera columna de la inversa de A

$$c_{11} = (-1)(-5/13) + (4)(2/13) = 5/13 + 8/13 = 13/13 = 1$$

Primer fila de A por la segunda columna de la inversa de A

$$c_{12} = (-1)(4/13) + (4)(1/13) = -4/13 + 4/13 = 0$$

Segunda fila de A por la primera columna de la inversa de A

$$c_{21} = (2)(-5/13) + (5)(2/13) = -10/13 + 10/13 = 0$$

Segunda fila de A por la segunda columna de la inversa de A

$$c_{22} = (2)(4/13) + (5)(1/13) = 8/13 + 5/13 = 13/13 = 1$$

Ejemplo 3.24

$$\text{Encontrar la inversa de } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & -10 & 11 \\ 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución.

Buscamos los cofactores de A:

$$\text{Recordemos que } A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

La matriz menor M_{11} se obtiene eliminando la fila 1 y la columna 1 de A

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (-1)^2 \begin{vmatrix} -10 & 11 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1[(-10)(3) - (11)(-2)] = -30 + 22 = -8$$

La matriz menor M_{12} se obtiene eliminando la fila 1 y la columna 2 de A

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{11}| = (-1)^3 \begin{vmatrix} -5 & 11 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = -1[(-5)(3) - (11)(14)] = -(-15 - 154) = -(-169) = 169$$

La matriz menor M_{13} se obtiene eliminando la fila 1 y la columna 3 de A

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 14 & -2 \end{vmatrix} = 1[(-5)(-2) - (-10)(14)] = 10 + 140 = 150$$

La matriz menor M_{21} se obtiene eliminando la fila 2 y la columna 1 de A

$$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1[(-1)(3) - (3)(-2)] = -(-3 + 6) = -(3) = -3$$

La matriz menor M_{22} se obtiene eliminando la fila 2 y la columna 2 de A

$$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 1[(2)(3) - (3)(14)] = 6 - 42 = -36$$

La matriz menor M_{23} se obtiene eliminando la fila 2 y la columna 3 de A

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 14 & -2 \end{vmatrix} = -1[(2)(-2) - (-1)(14)] = -(-4 + 14) = -(10) = -10$$

La matriz menor M_{31} se obtiene eliminando la fila 3 y la columna 1 de A

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -10 & 11 \end{vmatrix} = 1[(-1)(11) - (3)(-10)] = -11 + 30 = 19$$

La matriz menor M_{32} se obtiene eliminando la fila 3 y la columna 2 de A

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 11 \end{vmatrix} = -1[(2)(11) - (3)(-5)] = -(22 + 15) = -(37) = -37$$

La matriz menor M_{33} se obtiene eliminando la fila 3 y la columna 3 de A

$$A_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 1[(2)(-10) - (-1)(-5)] = -20 - 5 = -25$$

La matriz de cofactores es $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 169 & 150 \\ -3 & -36 & -10 \\ 19 & -37 & -25 \end{bmatrix}$

La matriz adjunta de A es $\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 19 \\ 169 & -36 & -37 \\ 150 & -10 & -25 \end{bmatrix}$ la cual se

obtiene al escribir las filas en columnas.

El determinante de A, calculado mediante el método de menores y cofactores, es:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = (2)(-8) + (-1)(169) + (3)(150) \\ &= -16 - 169 + 450 = 450 - 175 = 265 \end{aligned}$$

Si la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

Entonces

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{265} \begin{bmatrix} -8 & -3 & 19 \\ 169 & -36 & -37 \\ 150 & -10 & -25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8/265 & -3/265 & 19/265 \\ 169/265 & -36/265 & -37/265 \\ 30/53 & -2/53 & -5/53 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La comprobación se deja como ejercicio.

$$\begin{bmatrix} -8/265 & -3/265 & 19/265 \\ 169/265 & -36/265 & -37/265 \\ 30/53 & -2/53 & -5/53 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & -10 & 11 \\ 14 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.7 Aplicaciones a modelos de insumo producto

Un ganador del Premio Nobel, Wassily Leontief, es más conocido por su

modelo de insumos–producción de una economía. Una suposición del modelo es que se consumirá cualquier cosa que se produzca. Según Budnick (2007) la demanda de la producción de una industria puede venir de dos fuentes: 1) demanda de industrias diferentes y 2) demanda de fuentes distintas a las industriales. Para ilustrar esto, considere el sector de energía. Las compañías de electricidad generan energía que: 1) es necesaria para operar sus propias plantas; 2) es necesaria para abastecer a otras industrias sus necesidades eléctricas, y 3) es necesaria para otros consumidores, como nosotros.

Los dos primeros de éstos son ejemplos de *demanda interindustrial* y la última es *demanda no industrial*. Normalmente, el objetivo del análisis insumos–producción es determinar cuánto se debe producir para que ambos tipos de demanda se satisfagan con exactitud. Es decir ¿cuánto se debe producir para equilibrar la oferta y la demanda? .

Acorde a Budnick (2007) la demanda interindustrial se resume con frecuencia como una matriz de insumos–producción o tecnológica.

Ejemplo 3.25

Basado en Budnick (2007) supongamos la siguiente matriz A de tamaño 3x3:

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Usuario} \\
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{Proveedor} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|ccc|} \hline 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ \hline \end{array} = A
 \end{array}$$

Vamos a asumir que la producción (salida) de una industria se mide en dólares.

Si a_{ij} representa la cantidad de producción de la industria i requerida para producir un dólar de salía de la industria j . Esta matriz representa una situación de tres industrias.

El elemento $a_{11} = 0.3$ sugiere que por cada dólar de producción de la industria 1, 30 % de este valor es aportado por la industria 1.

El elemento $a_{12} = 0.3$ sugiere que por cada dólar de producción de la industria 2, 30 % de este valor es aportado por la industria 1.

El elemento $a_{13} = 0.2$ sugiere que por cada dólar de producción de la industria 3, 20 % de este valor es aportado por la industria 1.

El elemento $a_{21} = 0.1$ sugiere que por cada dólar de producción de la industria 1, 10 % de este valor es aportado por la industria 2.

El elemento $a_{31} = 0.2$ sugiere que por cada dólar de producción de la industria 1, 20 % de este valor es aportado por la industria 3. Y así sucesivamente.

Supongamos ahora que x_j es igual a la producción de la industria j (en dólares) y que d_j es la demanda no industrial (en dólares) para la producción de la industria j . Entonces, se pueden formular un sistema de ecuaciones que al resolverse determinarían los niveles de producción x_j en que la oferta total y la demanda estarían en equilibrio.

Las ecuaciones de este sistema sería de la forma:

Producción de la industria = demanda interindustrial + demanda no industrial

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + d_1$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + d_2$$

$$\vdots$$

Para nuestro ejemplo, tendríamos que:

$$x_1 = 0.3x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + d_1$$

$$x_2 = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + d_2$$

$$x_3 = 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 + d_3$$

Que es la forma resultante del sistema matricial

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{D}$$

Donde $\mathbf{X}$ es el vector de producción, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. $\mathbf{A}$ es la matriz de insumos–producción o

tecnológica, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{D}$ es el vector de demanda no industrial, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar la matriz $\mathbf{A}$ por el vector $\mathbf{X}$ y sumarle el vector $\mathbf{D}$ es que obtenemos el sistema de ecuaciones propuesto líneas arriba:

$$x_1 = 0.3x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + d_1$$

$$x_2 = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + d_2$$

$$x_3 = 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 + d_3$$

A fin de resolver el sistema, lo describimos de la siguiente forma:

$$-0.3x_1 - 0.3x_2 + 0.2x_3 + x_1 = d_1$$

$$-0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 + x_2 = d_2$$

$$-0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.4x_3 + x_3 = d_3$$

Y simplificamos por suma resta de términos semejantes:

$$-0.3x_1 + x_1 - 0.3x_2 + 0.2x_3 = d_1$$

$$-0.1x_1 - 0.2x_2 + x_2 - 0.3x_3 = d_2$$

$$-0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.4x_3 + x_3 = d_3$$

Obteniendo:

$$0.7x_1 - 0.3x_2 + 0.2x_3 = d_1$$

$$-0.1x_1 + 0.8x_2 - 0.3x_3 = d_2$$

$$-0.2x_1 - 0.1x_2 + 0.6x_3 = d_3$$

El cual se puede resolver de la forma preferida.

El resultado del sistema es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 177\,550\,000 \\ 127\,370\,000 \\ 180\,410\,000 \end{bmatrix}$$

La industria 1 debería producir \$ 177'530,000.00 de salida; la industria 2, \$127'370,000.00 y la industria 3, \$ 180'410,000.00.

Si calculamos los porcentajes respectivos tendríamos:

$$a_{11} = 0.3(177\,550\,000) = 53\,259\,000 \text{ o } 53.259 \text{ millones de dólares}$$

$$a_{12} = 0.3(127\,370\,000) = 38\,211\,000 \text{ o } 38.211 \text{ millones de dólares}$$

$$a_{13} = 0.2(180\,410\,000) = 36\,082\,000 \text{ o } 36.082 \text{ millones de dólares}$$

$$a_{21} = 0.3(177\,550\,000) = 17\,753\,000 \text{ o } 17.753 \text{ millones de dólares}$$

$$a_{22} = 0.3(127\,370\,000) = 25\,474\,000 \text{ o } 25.474 \text{ millones de dólares}$$

$$a_{23} = 0.3(180\,410\,000) = 54\,123\,000 \text{ o } 54.123 \text{ millones de dólares}$$

$$a_{31} = 0.3(177\,550\,000) = 35\,506\,000 \text{ o } 35.506 \text{ millones de dólares}$$

$$a_{32} = 0.3(127\,370\,000) = 12\,737\,000 \text{ o } 12.737 \text{ millones de dólares}$$

$$a_{33} = 0.3(180\,410\,000) = 72\,164\,000 \text{ o } 72.164 \text{ millones de dólares}$$

Por lo que la matriz de insumos-producción original, en millones de dólares, queda:

		Usuario		
		1	2	3
Proveedor	1	53.259	38.211	36.082
	2	17.753	25.474	54.123
	3	35.506	12.737	72.164

Actividades de aprendizaje

- a) Investigar las matrices, identificando los diversos tipos especiales.
- b) Realizar ejercicios en equipos en los cuales se efectúe operaciones matriciales.
- c) Resolver ejercicios con el método de columnas aumentadas y cofactores para sistemas 2×2 y 3×3 , así como la inversa de una matriz mediante el método de eliminación y cofactores. Resolver sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3 utilizando el método de la inversa y Cramer.
- d) Investigar datos de INEGI, del Banco de México y de otras instituciones, en donde identifique la aplicación de modelos matriciales en el manejo de sus datos.
- e) Aplicar matrices para resolver casos prácticos del área económica administrativa.

Tema 4 Diferenciación y aplicaciones.

Competencias

Específicas:

Comprende los conceptos de límite y continuidad para la solución de problemas relativos a tasa promedio de cambio e incrementos y aplica reglas de diferenciación de máximos y mínimos como la metodología de aplicación a ingresos, costos y utilidad.

Genéricas:

Solución de problemas.

Toma de decisiones.

Trabajo en equipo.

Habilidades interpersonales.

4.1 Límites y continuidad

La diferenciación se centra en el estudio de las razones de cambio que puede presentar una variable de estudio con respecto a otra. El problema fundamental de acuerdo con Budnick (2007) es que dada la gráfica de una función y un punto $P(x, f(x))$ ubicado en dicha gráfica ¿cuál será la pendiente de la recta tangente que pasa por dicho punto? Responder esta pregunta es, como se va a estudiar en este tema, es equivalente a medir los cambios que se registran en los valores de la función dado un cambio dado en los valores de x .

A fin de responder dicha pregunta, es necesario apoyarnos en el concepto de límite y en el de continuidad, los cuales son fundamentales para construir el conocimiento necesario para comprender y utilizar la diferenciación o, también llamada, derivación.

Es común querer determinar el valor límite de una función a medida que la variable independiente se aproxima a un valor real específico. Si ese valor de la función existe

entonces recibe el nombre de Límite de una función. Se denota

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Esta expresión se lee “El límite de una función cuando x se aproxima al valor a es igual a L ”

Ejemplo 4.1

Sea la función $f(x) = x^2$ y sea $x = 2$. Entonces el valor de la función en 2 es

$f(2) = 2^2 = 4$. Por lo tanto, el punto P tiene coordenadas (2, 4). La pregunta es ¿A qué valor se aproxima $f(x)$ si x toma valores cada vez más cercanos a 2?

Para contestar esta pregunta, haremos una tabla de valores asignando valores a x cada vez más cercanos, pero sin ser igual a, 2. Notemos que la función tiene como dominio a todos los números reales.

Tabla 12

Pares ordenados de la función $f(x) = x^2$ cuando x se aproxima a 2

x	$f(x) = x^2$
1.9	3.61
1.99	3.9601
1.999	3.99001
2	
2.001	4.004001
2.01	4.0401
2.1	4.41

A fin de expresar en la misma magnitud los valores de x , se completan las cifras decimales a seis posiciones:

Tabla 13

Pares ordenados de la función $f(x) = x^2$ cuando x se aproxima a 2

x	$f(x) = x^2$
1.9	3.610000
1.99	3.960100
1.999	3.990010
2	
2.001	4.004001
2.01	4.040100
2.1	4.410000

Nota: Las flechas indican la secuencia de asignaciones de los valores de x .

Las flechas nos muestran cómo vamos a analizar la información., dado que nos indican la aproximación de los valores de x al 2.

Como se puede observar en la tabla, los valores de la función se van aproximando a 4, que es el valor de la función en $x = 2$.

Ejemplo 4.2

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Es una función racional cuyo denominador debe ser distinto de cero, es decir

$$x - 1 \neq 0$$

por lo que al despejar x obtenemos que

$$x \neq 1$$

Si $x = 1$, existe una indefinición.

$$f(1) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$$

Sin embargo, podemos intentar descubrir si existe algún valor al que se aproxime $f(x)$ cuando x se aproxime a 1.

Tabla 14

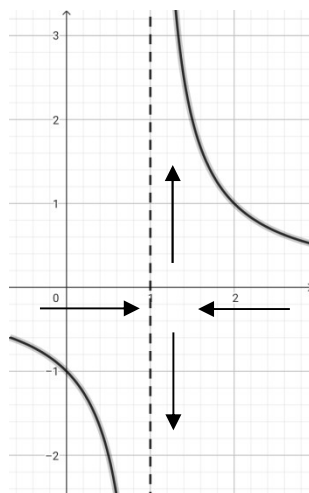
Pares ordenados de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ cuando x se aproxima a 1

x	$f(x) = \frac{1}{x-1}$
0.9	-10
0.99	-100
0.999	-1000
1	
1.001	1000
1.01	100
1.1	10

Conforme x se aproxima a 1 por la izquierda, $f(x)$ va alejándose del origen con dirección a $-\infty$. Por otro lado, cuando el valor de x se aproxima a 1 por el lado derecho el valor de la función $f(x)$ se aleja del origen con dirección a ∞ . Entonces observamos que el valor de la función no se aproxima a ningún valor específico. Analicemos la siguiente gráfica

Figura 20

Función $f(x) = \frac{1}{x-1}$



A la izquierda de $x = 1$, la gráfica se dirige “hacia abajo” mientras que por el lado

derecho la gráfica se dirige “hacia arriba” Concluimos que no existe límite para la función cuando x se aproxima a 1. Sin embargo, el límite puede existir para cualquier otro valor dado de x .

Mostrar que el límite de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ es 1 cuando x se aproxima a 2.

Ejemplo 4.3

Sea la función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$. Es una función racional cuyo denominador debe ser distinto de cero, es decir

$$x - 3 \neq 0$$

por lo que al despejar x obtenemos que

$$x \neq 3$$

Si $x = 3$, existe una indefinición.

$$f(1) = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{9 - 9}{0} = \frac{0}{0}$$

Sin embargo, podemos intentar descubrir si existe algún valor al que se aproxime $f(x)$ cuando x se aproxime a 3.

Tabla 15

Pares ordenados de la función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

x	$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
3	
3.001	6.001
3.01	6.01
3.1	6.1

A pesar de la indefinición, podemos observar que el valor de la función $f(x)$ se aproxima a 6. Entonces podemos decir que el límite de $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ cuando x se aproxima a 3 es 6.

Escribamos

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Ejemplo 4.4

Sea la función $f(x) = \sqrt{x+2}$. Es una función racional cuyo dominio está dado por todos los valores de x que hacen a $x+2$ un valor no negativo.

Esto es

$$x + 2 \geq 0$$

Despejando x obtenemos

$$x \geq -2$$

-2 es un valor permitido para la función ya que $f(-2) = \sqrt{-2+2} = \sqrt{0} = 0$

Entonces la función tiene sentido para valores a partir del -2 hacia la derecha.

Veamos que sucede cuando el valor de x lo aproximamos a -2

Tabla 16

Pares ordenados de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$

x	$f(x) = \sqrt{x+2}$
-2.1	No definido
-2.01	No definido
-2.001	No definido
-2	
-1.999	0.031623
-1.99	0.2
-1.9	0.31623

Los valores a la izquierda de -2 están fuera de dominio, por tal razón no nos devuelven un valor real. Si la función no acepta un valor real dado entonces decimos que el valor de la función $f(x)$ es no definido, o no está definido.

A pesar de que por la derecha de -2 hay una aproximación a 0, por el lado izquierdo no existen valores para $f(x)$ y concluimos que el límite no existe aun cuando el valor de la función en -2 sí está definido como se mostró anteriormente.

Ahora bien, el concepto de límite de una función nos lleva directamente al concepto de continuidad de una función, el cual es fundamental para el desarrollo del cálculo diferencial e integral.

Se dice que una función es continua en un punto $x = a$, si cumple con los tres puntos siguientes:

1. La función está definida en a , es decir si $f(a)$ es un número real, lo cual implica que a pertenece al dominio de la función.

2. El límite de la función cuando x se aproxima a a existe, es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

3. $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, es decir que los valores encontrados para el punto 1 y 2 son iguales.

Ejemplo 4.5

Sea la función $f(x) = \sqrt{x+2}$. Determinar si es continua en $x = -2$.

Solución.

1. $f(-2) = \sqrt{-2+2} = \sqrt{0} = 0$. $f(-2)$ sí está definida, es 0.

2. Revisando la tabla del ejemplo 4.3 observamos lo siguiente

Tabla 17

Pares ordenados de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$

x	$f(x) = \sqrt{x+2}$
– 2.1	No definido
– 2.01	No definido
– 2.001	No definido
– 2	
– 1.999	0.031623
– 1.99	0.2
– 1.9	0.31623

3. Dado que $f(-2) = 0$ pero el límite no existe, entonces el punto 3 no se cumple.

$f(x) = \sqrt{x+2}$ no es continua en $x = 2$. Sin embargo, sí es continua en cualquier otro valor real que pertenezca al dominio de la función.

Ejemplo 4.6

Sea la función $f(x) = \sqrt{x+2}$. Determinar si es continua en $x = 2$.

Solución.

1. $f(2) = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$. $f(2)$ sí está definida, es 2.
2. Revisando la tabla del ejemplo 4.3 observamos lo siguiente

Tabla 18

Pares ordenados de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$

x	$f(x) = \sqrt{x+2}$
1.9	1.97484
1.99	1.9974984
1.999	1.999749984
2	
2.001	2.0002499
2.01	2.0024984
2.1	2.024846

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+2} = 2$$

3. Dado que $f(2) = 2$ y $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+2} = 2$, entonces decimos que la función es continua cuando $x = 2$.

Ejemplo 4.7

Sea la función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$. En el ejemplo 4.3 se mostró que:

1. $f(1) = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{0} = \frac{0}{0}$. El valor de la función en $x = 1$ no está definido.

Entonces no tiene caso proseguir con el análisis al no cumplirse el primer punto.

$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ no es continua en $x = 1$, aunque sí lo es para cualquier otro valor real.

4.2 Derivadas algebraicas con fórmulas

La derivada de una función es una herramienta poderosa que se utiliza en la mayoría de las áreas científicas y tecnológicas en donde se busca medir la variación de una variable dependiente con respecto a la variación de una variable independiente. Digamos que queremos medir la variación en la demanda de un artículo con respecto a la variación en el precio unitario. Entonces la derivada nos permite realizar esa medición y poder utilizar en resultado para análisis enfocados a mantener una demanda adecuada por parte de los compradores.

Afortunadamente el cálculo de la derivada de una función puede simplificarse utilizando fórmulas que los matemáticos han deducido a través de los años.

Fórmulas para determinar la derivada de una función algebraica

$$1) \frac{d}{dx} c = 0$$

$$2) \frac{d}{dx} x = 1$$

$$3) \frac{d}{dx} cv = c \frac{d}{dx} v$$

$$4) \frac{d(u+v-w)}{dx} = \frac{d}{dx} u + \frac{d}{dx} v - \frac{d}{dx} w$$

$$5) \frac{d}{dx} x^n = n \frac{d}{dx} x^{n-1}$$

$$6) \frac{d}{dx} v^n = n \frac{d}{dx} v^{n-1} \frac{d}{dx} v$$

$$7) \frac{d}{dx} uv = u \frac{d}{dx} v + v \frac{d}{dx} u$$

$$8) \frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{v \frac{d}{dx} u - u \frac{d}{dx} v}{v^2}$$

$$9) \frac{d}{dx} \frac{c}{v} = -\frac{c}{v^2} \frac{d}{dx} v$$

$$10) \frac{d}{dx} \frac{v}{c} = \frac{\frac{d}{dx} v}{c}$$

Ejemplo 4.8

Derivar las siguientes funciones usando las fórmulas

$$1) f(x) = 5$$

$$2) f(x) = 2x$$

$$3) f(x) = 3x - 1$$

$$4) f(x) = x^2 + 5x + 8$$

$$5) f(x) = (4x - 1)^3$$

$$6) f(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$$

$$7) f(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$8) f(x) = x^3(2x + 1)^2$$

$$9) f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$10) f(x) = \frac{1-x^2}{3}$$

Solución.

$$1) \frac{d}{dx} 5 = 0, \text{ dado que } f(x) = 5 \text{ es una función constante.}$$

$$2) \frac{d}{dx} 2x = 2 \frac{d}{dx} x = 2(1) = 2$$

$$3) \frac{d}{dx} (3x - 1) = \frac{d}{dx} 3x - \frac{d}{dx} 1 = 3 \frac{d}{dx} x - 0 = 3(1) = 3$$

$$4) \frac{d}{dx} (x^2 + 5x + 8) = \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} 5x + \frac{d}{dx} 8 = 2x^{2-1} + 5(1) + 0 = 2x + 5$$

$$5) \frac{d}{dx} (4x - 1)^3 = 3 \frac{d}{dx} (4x - 1)^{3-1} \frac{d}{dx} (4x - 1) = 3(4x - 1)^2(4) = 12(4x - 1)^2$$

$$6) \frac{d}{dx} \sqrt[3]{2x-1} = \frac{d}{dx} (2x-1)^{1/3} = \frac{1}{3} (2x-1)^{1/3-1} \frac{d}{dx} (2x-1) \\ = \frac{1}{3} (2x-1)^{-2/3} (2) = \frac{2}{3} (2x-1)^{-2/3}$$

$$7) \frac{d}{dx} \frac{2}{x^2} = \frac{d}{dx} 2x^{-2} = -2 \frac{d}{dx} 2x^{-2-1} = -2(2) \frac{d}{dx} x^{-3} = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$$

$$8) \frac{d}{dx} x^3(2x+1)^2 = x^3 \frac{d}{dx} (2x+1)^2 + (2x+1)^2 \frac{d}{dx} x^3 \\ = x^3(2)(2x+1)^{2-1} \frac{d}{dx} (2x+1) + (2x+1)^2(3)x^{3-1} \\ = 2x^3(2x+1)(2) + 3(2x+1)^2x^2 \\ = 4x^3(2x+1) + 3x^2(2x+1)^2$$

Factorizando factor común:

$$= x^2(2x+1)[4x+3(2x+1)] = x^2(2x+1)[4x+6x+3] \\ = x^2(2x+1)(10x+3)$$

$$9) \frac{d}{dx} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x[(x^2+1)-(x^2-1)]}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x(2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$10) \frac{d}{dx} \frac{1-x^2}{3} = \frac{\frac{d}{dx}(1-x^2)}{3} = \frac{0-2x}{3} = -\frac{2x}{3}$$

4.3 Derivadas de n -ésimo orden

Es posible volver a derivar una función derivada mientras no se reduzca a 0.

Entonces podríamos hablar de una primer derivada, una segunda derivada, una tercer derivada y así sucesivamente. De modo general, se le conoce como la n -ésima derivada.

La primer derivada suele denotarse como $f'(x)$, segunda derivada se denota como $f''(x)$, la tercera como $f'''(x)$, sin embargo, de modo general podemos escribirla como

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n x}{dx^n}$$

Ejemplo 4.9

Encontrar la segunda derivada de $f(x) = (4x - 1)^3$

Solución.

Como se vio en el ejemplo 4.8, la primer derivada de $f(x) = (4x - 1)^3$ es

$$\frac{d}{dx} (4x - 1)^3 = 3 \frac{d}{dx} (4x - 1)^{3-1} \frac{d}{dx} (4x - 1) = 3(4x - 1)^2(4) = 12(4x - 1)^2$$

Entonces, escribimos $f'(x) = 12(4x - 1)^2$ para indicar que tenemos la primer derivada.

La segunda derivada se define como $f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx} 12(4x - 1)^2$

Resolviendo:

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} (4x - 1)^3 = \frac{d}{dx} 12(4x - 1)^2$$

$$\begin{aligned}
&= 12 \frac{d}{dx} (4x - 1)^2 \\
&= 12(2) \frac{d}{dx} (4x - 1)^{2-1} \frac{d}{dx} (4x - 1) = 24(4x - 1)(4) \\
&= 96(4x - 1)
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.10

Encontrar la tercera derivada de $f(x) = \frac{2}{x^2}$

Solución.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{2}{x^2} = \frac{d}{dx} 2x^{-2} = -2 \frac{d}{dx} 2x^{-2-1} = -2(2) \frac{d}{dx} x^{-3} = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3} \\
f''(x) &= \frac{d}{dx} -\frac{4}{x^3} = \frac{d}{dx} -4x^{-3} = -4 \frac{d}{dx} (-3)x^{-3-1} = -4(-3) \frac{d}{dx} x^{-4} = 12x^{-4} = \frac{12}{x^4} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{d}{dx} \frac{12}{x^4} = \frac{d}{dx} 12x^{-4} = 12 \frac{d}{dx} (-4)x^{-4-1} = 12(-4) \frac{d}{dx} x^{-5} = -48x^{-5} = -\frac{48}{x^5}
\end{aligned}$$

4.4 Derivadas parciales básicas

Cuando una función tiene más de una variable independiente, es posible derivar con respecto a una sola mientras las demás permanecen constantes. Con el fin de saber con respecto de que variable se está derivando se usa la notación

siguiente: $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$.

Ejemplo 4.11

Sea la función $f(x, y) = 2x^2y + 3xy^2$. Encontrar la derivada parcial con respecto de x .

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} (2x^2y + 3xy^2) &= 2y \frac{d}{dx} x^2 + 3y^2 \frac{d}{dx} x \\
&= 2y(2x) + 3y^2(1) \\
&= 4xy + 3y^2
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.12

Sea la función $f(x, y) = 2x^2y + 3xy^2$. Encontrar la derivada parcial con respecto de y .

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + 3xy^2) &= 2x^2 \frac{d}{dy}y + 3x \frac{d}{dy}y^2 \\ &= 2x^2(1) + 3x(2y) \\ &= 2x^2 + 6xy\end{aligned}$$

Al derivar, por ejemplo, $\frac{d}{dy}y^2$ se procede de la misma forma que si fuera $\frac{d}{dx}x^2$.

Ejemplo 4.13

Supongamos que una empresa tiene una función de beneficio $B(x, y)$ que depende de dos productos:

- x cantidad producida del producto A
- y cantidad producida del producto B

La función de beneficio está dada por $B(x, y) = 50x + 40y - 0.5x^2 - 0.25y^2 - 0.3xy$

Calcular las derivadas parciales de B con respecto a x y y para analizar cómo cambia el beneficio al cambiar la producción de cada producto.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(50x + 40y - 0.5x^2 - 0.25y^2 - 0.3xy) \\ &= 50 - x - 0.3y\end{aligned}$$

Si un término no contiene x , se considera constante y su derivada es 0.

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(50x + 40y - 0.5x^2 - 0.25y^2 - 0.3xy)$$

$$= 40 - 0.5y - 0.3x$$

Si un término no contiene y , se considera constante y su derivada es 0

Supongamos que actualmente se producen 20 unidades de A y 30 de B.

Entonces:

$$\frac{\partial B}{\partial x} \big|_{x=20, y=30} = 50 - (20) - 0.3(30) = 21$$

Esto significa que aumentar en una unidad la producción del producto A (manteniendo B constante) aumentaría el beneficio en aproximadamente 21 pesos.

$$\frac{\partial B}{\partial y} \big|_{x=20, y=30} = 40 - 0.5(30) - 0.3(20) = 19$$

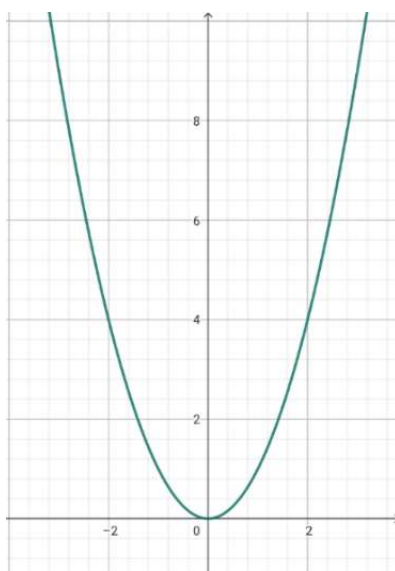
Esto significa que aumentar en una unidad la producción del producto B (manteniendo A constante) aumentaría el beneficio en aproximadamente 19 pesos.

4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada (a máximos y mínimos)

Supongamos la función $f(x) = x^2$ cuya grafica es la figura 21

Figura 21

Función $f(x) = x^2$



Como se puede observar, a la izquierda de $x = 0$ la gráfica es descendente o decreciente. A la derecha de $x = 0$, la gráfica se vuelve ascendente o creciente. Esto crea una forma geométrica llamada concavidad, que en este caso abre hacia arriba. Como la dirección de la gráfica cambia en el punto donde $x = 0$, a ese punto se le llama punto crítico o extremo. Como la concavidad abre hacia arriba, al punto crítico se le llama *mínimo*.

Con la derivada, es posible determinar dicho extremo o punto crítico y además si es un mínimo o, en su caso, un máximo, cuando la concavidad abre hacia abajo.

Visualmente, como se puede apreciar en la figura 19, es fácil determinar si es un mínimo o si es un máximo.

Existen criterios para definir lo anterior.

Criterio de la segunda derivada

1) Un punto crítico está dado cuando $f'(x) = 0$. Igualamos la primer derivada con 0 y buscamos las raíces de la ecuación, es decir, los valores de x que hace la primer derivada sea igual a 0.

2) Encontramos la segunda derivada $f''(x)$ y sustituimos los valores de x encontrados en el paso anterior:

Si $f''(x) < 0$, entonces el punto es un máximo

Si $f''(x) > 0$, entonces el punto es un mínimo

Si $f''(x) = 0$, entonces es un punto de inflexión. Ni máximo, ni mínimo.

En una gráfica creciente o decreciente, el punto de inflexión mantiene la dirección.

Vamos a ilustrar un ejemplo de uso de las derivadas para determinar el punto crítico y si es mínimo o máximo, utilizando la función $f(x) = x^2$, cuya gráfica se muestra en la figura 21.

Ejemplo 4.14

Dada la función $f(x) = x^2$, encontrar el punto crítico, sus coordenadas y si es un máximo o un mínimo.

Solución.

1) Obtenemos la primera derivada

$$f'(x) = \frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

Igualamos con 0

$$2x = 0$$

$$x = 0/2$$

$$x = 0$$

El punto crítico se da cuando $x = 0$. Al sustituir el valor anterior en la función, obtendremos las coordenadas de dicho punto crítico.

$$f(0) = 0^2 = 0$$

El punto crítico tiene coordenadas $(0, 0)$.

2) Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} x^2 = \frac{d}{dx} 2x = 2$$

Como 2 es positivo, es decir, $2 > 0$ entonces deducimos que $(0, 0)$ es un mínimo. Si observamos la gráfica, veremos que no hay puntos por debajo de $(0, 0)$, por lo que decimos que es un *mínimo absoluto*.

Ejemplo 4.15

Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 3$, encontrar el punto crítico, sus coordenadas y si es un máximo o un mínimo.

Solución.

1) Obtenemos la primera derivada

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 3 \right) = x^2 - 5x + 6$$

Igualamos con 0

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Factorizando

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$(x - 3) = 0 \text{ o } (x - 2) = 0$$

Despejando

$$(x - 3) = 0 \quad (x - 2) = 0$$

$$x = 3 \quad x = 2$$

Hay dos puntos críticos. Uno cuando $x = 2$ y el otro cuando $x = 3$. Al sustituir ambos valores en la función, obtendremos las coordenadas de dichos puntos críticos.

$$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{5}{2}(2)^2 + 6(2) - 3 = \frac{8}{3} - 10 + 12 - 3 = \frac{5}{3} \approx 1.667$$

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{5}{2}(3)^2 + 6(3) - 3 = 9 - \frac{45}{2} + 18 - 3 = \frac{3}{2} = 1.5$$

Los puntos críticos tienen coordenadas $(2, \frac{5}{3})$ y $(3, \frac{3}{2})$

2) Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x - 3 \right) = \frac{d}{dx} (x^2 - 5x - 6) = 2x - 5$$

Sustituimos $x = 2$ en la segunda derivada:

$$f''(2) = 2(2) - 5 = 4 - 5 = -1$$

$$-1 < 0$$

Entonces $(2, \frac{5}{3})$ es un máximo.

Sustituimos $x = 3$ en la segunda derivada:

$$f''(3) = 2(3) - 5 = 6 - 5 = 1$$

$$1 > 0$$

Entonces $(3, \frac{3}{2})$ es un mínimo.

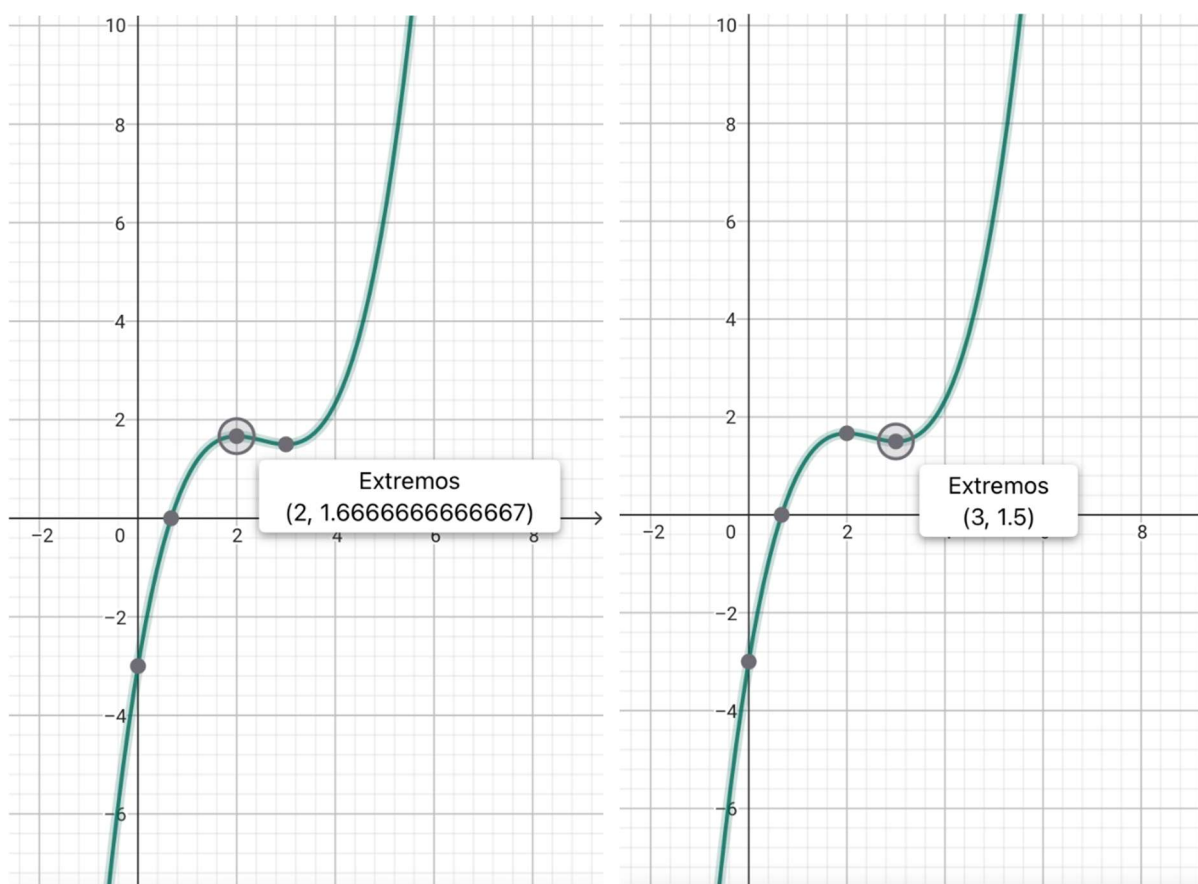
Ejemplo 4.16

Trazar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 3$ y ubicar los puntos críticos.

Solución.

Figura 22

Función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 3$ mostrando los extremos o puntos críticos



Como se aprecia en la gráfica, existen puntos por debajo de $(3, \frac{3}{2})$ y por arriba de $(2, \frac{5}{3})$ por lo que ambos son extremos relativos. $(2, \frac{5}{3})$ es un *máximo relativo* y $(3, \frac{3}{2})$ es un mínimo relativo.

4.6 Aplicaciones a ingresos, costos y utilidades

Aplicaciones de ingreso.

Las aplicaciones para ingresos van dirigidas en la maximización de estos. Es decir, buscar la forma de tener el máximo posible de ingresos en una operación dada. Recordemos que el ingreso es el dinero que entra en una organización por la venta de sus productos o prestación de servicios. Entonces, el ingreso depende del número de productos vendidos o servicios prestados y del precio unitario de los mismos:

$$\text{Ingreso} = \text{precio unitario} \times \text{número de unidades vendidas}$$

Se asume que el precio permanece constante independientemente del número de unidades vendidas.

Ejemplo 4.17

La demanda de un producto I (expresado en miles de pesos) que cierta compañía vende varía de acuerdo con el precio p (en pesos) que se le dé al producto. Supongamos que la empresa define al ingreso total anual dado por la función:

$$I(p) = -50p^2 + 500p$$

- a) Determinas el precio que debería cobrarse con objeto de maximizar el ingreso.
- b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total anual que debería esperarse?

Solución.

- a) Aplicamos el criterio de la segunda derivada:

- i) Buscamos la primer derivada de $I(p) = -50p^2 + 500p$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dp} I(p) &= \frac{d}{dp} (-50p^2 + 500p) \\
 &= -50 \frac{d}{dp} p^2 + 500 \frac{d}{dp} p \\
 &= -50(2)p^{2-1} + 500(1) \\
 &= -100p + 500
 \end{aligned}$$

ii) Igualamos con cero el resultado anterior

$$\begin{aligned}
 -100p + 500 &= 0 \\
 -100p &= -500 \\
 p &= -500/-100 \\
 p &= 5 \text{ pesos}
 \end{aligned}$$

iii) Evaluamos la función para encontrar las coordenadas del punto crítico:

$$\begin{aligned}
 I(5) &= -50(5)^2 + 500(5) \\
 I(5) &= -50(25) + 2500 \\
 I(5) &= -1250 + 2500
 \end{aligned}$$

$$I(5) = 1250 \text{ miles de pesos, es decir } \$ 1'250,000.00$$

iv) Obtenemos la segunda derivada

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dp^2} (-50p^2 + 500p) &= \frac{d}{dp} (-100p + 500) \\
 &= -100 \frac{d}{dp} p + \frac{d}{dp} 500 \\
 &= -100(1) + 0 \\
 &= -100
 \end{aligned}$$

Como $-100 < 0$, entonces el punto crítico es un máximo, si cada unidad se vende en \$ 5.00 entonces el ingreso máximo sería de \$ 1'250,000.00.

Aplicaciones de costo.

Las aplicaciones para costos van dirigidas en la minimización de estos. Es decir, buscar la forma de tener el gasto mínimo posible en una operación de producción dada. Recordemos que el costo es el dinero que se gasta en una organización por la producción de sus productos o prestación de servicios.

Entonces, el costo total depende del costo fijo y de los costos variables:

$$\text{Costo total} = \text{Costos variables} + \text{costos fijos}$$

Ejemplo 4.18

Supongamos que en una empresa se define el costo total $C(q)$ de la producción de q unidades de cierto producto a través de la función:

$$C(q) = 100000 + 1500q + 0.2q^2$$

donde $C(q)$ es el costo total expresado en pesos. Determinar cuántas unidades q deben producirse a fin de minimizar el *costo promedio por unidad*.

Solución.

El costo promedio se determina dividiendo el costo total $C(q)$ entre el número q de unidades producidas:

$$\overline{C(q)} = \frac{C(q)}{q}$$

$$\overline{C(q)} = \frac{100000 + 1500q + 0.2q^2}{q}$$

$$\overline{C(q)} = \frac{100000}{q} + 1500 + 0.2q$$

i) Buscamos la primer derivada de $\overline{C(q)} = \frac{100000}{q} + 1500 + 0.2q$

$$\frac{d}{dq} \overline{C(q)} = \frac{d}{dq} \left(\frac{100000}{q} + 1500 + 0.2q \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 100000 \frac{d}{dq} q^{-1} + \frac{d}{dq} 1500 + 0.2 \frac{d}{dq} q \\
&= 100000(-1)q^{-1-1} + 0 + 0.2(1) \\
&= -100000q^{-2} + 0.2 \\
&= \frac{-100000}{q^2} + 0.2
\end{aligned}$$

ii) Igualamos con cero el resultado anterior

$$\frac{-100000}{q^2} + 0.2 = 0$$

$$\frac{-100000}{q^2} = -0.2$$

$$\frac{-100000}{-0.2} = q^2$$

$$q^2 = 500000$$

$$q = \pm\sqrt{500000}$$

$$q \approx \pm 707.11 \text{ unidades}$$

Como el valor negativo no tiene sentido, dado que no podemos producir -707.11 unidades, tomamos sólo el valor positivo.

iii) Evaluamos la función para encontrar las coordenadas del punto crítico:

$$\text{de } \overline{C(q)} = \frac{100000}{707.11} + 1500 + 0.2(701.11)$$

$$\overline{C(q)} = \frac{100000}{707.11} + 1500 + 0.2(701.11)$$

$$\overline{C(q)} = 1782.84 \text{ pesos en promedio por unidad producida}$$

iv) Obtenemos la segunda derivada

$$\frac{d^2}{dq^2} \left(\frac{100000}{q} + 1500 + 0.2q \right) = \frac{d}{dq} \left(\frac{-100000}{q^2} + 0.2 \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -100000 \frac{d}{dq} q^{-2} + \frac{d}{dq} 0.2 \\
 &= 100000(-2)q^{-2-1} + 0 \\
 &= 200000q^{-3} \\
 &= \frac{200000}{q^3}
 \end{aligned}$$

iv) Evaluamos la segunda derivada con $q = 707.11$

$$\begin{aligned}
 C''(q) &= \frac{200000}{(707.11)^3} \\
 C''(q) &= 0.00056
 \end{aligned}$$

Como $0.00056 > 0$, entonces el punto crítico es un mínimo. Si se producen 707.11 unidades, el costo promedio por unidad es el más bajo posible: \$ 1782.84 pesos en promedio por unidad producida.

Obviamente, o se producen 707 o se producen 708, dado que no se contemplan fracciones de unidades. El valor más cercano a 707.11 es 707 unidades producidas.

Aplicaciones de utilidad.

Las aplicaciones para utilidades totales van dirigidas en la maximización de estas. Es decir, buscar la forma de tener la utilidad máxima posible en una operación de producción y venta dada. Recordemos que la utilidad total es la ganancia neta que obtiene una empresa como resultado de su actividad económica, ya sea por la producción de sus productos o prestación de servicios.

Entonces, utilidad total es la diferencia entre el ingreso y los costos totales

$$\text{Utilidad total} = \text{ingresos totales} - \text{costos totales}$$

Ejemplo 4.19

Una importante compañía que vende cosméticos y productos de belleza casa por

casa, estimó que en una región geográfica dada, la utilidad anual U , expresada en cientos de dólares, es una función del número de representantes de ventas x , asignados a esa región.

Estimaron la siguiente función:

$$U(x) = -12.5x^2 + 1375x - 1500$$

a) ¿Qué número de representantes producirá la utilidad máxima?

b) ¿Cuál sería la utilidad máxima esperada?

Solución.

a) La derivada de la función de utilidad es

$$U'(x) = -12.5 \frac{d}{dx} x^2 + 1375 \frac{d}{dx} x - \frac{d}{dx} 1500$$

$$U'(x) = -12.5(2)x^{2-1} + 1375(1) - 0$$

$$U'(x) = -25x + 1375$$

Igualando con 0

$$-25x + 1375 = 0$$

$$-25x = -1375$$

$$x = -1375/-25$$

$$x = 55 \text{ representantes}$$

Buscamos la segunda derivada

$$U''(x) = -25 \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 1375$$

$$U''(x) = -25(1) + 0$$

$$U''(x) = -25$$

Como $-25 < 0$, tenemos un máximo en $x = 55$

b) La utilidad máxima esperada sería

$$U(55) = -12.5(55)^2 + 1375(55) - 1500$$

$$U(55) = -37812.5 + 75625 - 1500$$

$$U(55) = 36312.5 \text{ en cientos de dólares}$$

Entonces, con 55 representantes se esperaría una utilidad máxima de 3'631,250.00 dólares

4.7 Análisis marginal

Es otra forma de calcular el punto de maximización de la utilidad. Si una empresa produce un determinado número de unidades al año, el análisis marginal se ocupa del efecto que se refleja en la utilidad si se produce y se vende *una* unidad más.

Para que este método pueda aplicarse a la maximización de la utilidad, se deben cumplir dos condiciones:

- a) Se deben identificar por separado las funciones de ingreso y costo total.
- b) Las funciones de ingreso y costos deben formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas.

Ingreso marginal.

Es el ingreso adicional que se obtiene al vender una unidad más de un producto o servicio. Si una unidad se vende a un precio constante, el ingreso marginal será siempre igual al precio.

Para una función $I(q)$ de ingreso total, el ingreso marginal está dado por su derivada. Es decir, $I'(q)$ representa el ingreso marginal, que es la razón de cambio en el ingreso total con respecto a un cambio unitario en el número de unidades vendidas.

Ejemplo 4.20

Supongamos que un producto se vende a \$ 50.00 la unidad. Entonces la función de

ingreso está dada por

$$I(q) = 50q$$

La venta de cualquier unidad adicional siempre ingresará \$ 50.00 sin importar el nivel de producción de los q artículos. Ya que

$$I'(q) = \frac{d}{dq} 50q$$

$$I'(q) = 50 \frac{d}{dq} q$$

$$I'(q) = 50(1) = 50$$

Ejemplo 4.21

El área administrativa contable de una empresa que produce paneles solares ha estimado, según Budnick (2007) que la demanda anual de paneles dependerá del precio al que se venden. La función de demanda está dada por

$$q = 100000 - 200p$$

donde q es el número de unidades demandadas al año y p representa el precio, en dólares.

Los estudios del área de diseño muestran que el costo total de la producción de q unidades está estimado por la función

$$C(q) = 150000 + 100q + 0.003q^2$$

Formule la función de ingreso.

Solución.

La función de ingreso está dada por

$$I(q) = pq$$

Tomamos la ecuación de demanda y despejamos p

$$q = 100000 - 200p$$

$$200p = 100000 - q$$

$$p = (100000 - q)/200$$

$$p = 500 - 0.005q$$

Sustituimos en la ecuación general de ingreso

$$I(q) = pq$$

$$I(q) = (500 - 0.005q)q$$

$$I(q) = 500q - 0.005q^2$$

Como el ingreso no es constante porque el precio depende de la demanda, entonces determinamos la derivada a fin de poder calcular el ingreso marginal

$$I'(q) = \frac{d}{dq}(500q - 0.005q^2)$$

$$I'(q) = 500 \frac{d}{dq} q - 0.005 \frac{d}{dq} q^2$$

$$I'(q) = 500(1) - 0.005(2)q^{2-1}$$

$$I'(q) = 500 - 0.01q$$

Por ejemplo, Si el nivel de producción es de $q = 100$ unidades, el ingreso total sería de

$$I(100) = 500(100) - 0.005(100)^2$$

$$I(100) = 50000 - 0.005(10000)$$

$$I(100) = 50000 - 50$$

$$I(100) = 49950$$

Y el ingreso marginal por vender una pieza adicional, es decir, $100 + 1$, sería

$$I'(100) = 500 - 0.01(100)$$

$$I'(100) = 500 - 1$$

$$I'(100) = 499$$

Lo anterior nos muestra que, si se vende el panel 101, el ingreso total estimado sería de

$$I(q) = 49950 + 499$$

$$I(q) = 50449$$

Costo Marginal.

Es el costo adicional que se tiene al producir y vender una unidad adicional de un producto o servicio. Si el costo es lineal, es decir, si el nivel de producción no modifica el costo, esto es, si producir 100 unidades o producir 1000 unidades nos lleva al mismo costo unitario, entonces el costo marginal es el mismo. Por ejemplo, si el costo de producir 100 unidades es de \$ 500.00 o producir 1000 unidades es de \$ 5000.00, el costo unitario sería el mismo (\$ 5.00 la unidad), entonces producir una unidad adicional saldría en los mismos \$ 5.00.

Para una función $C(q)$ de costo total, el costo marginal está dado por su derivada. Es decir, $C'(q)$ representa el costo marginal, que es la razón de cambio instantánea en el costo total con respecto a un cambio unitario en el número de unidades producidas.

Ejemplo 4.22

Supongamos que el costo de producir un artículo está dado por la función

$$C(q) = 50000 + 5q$$

donde el costo fijo es de \$ 50000.00 y el costo variable es de \$ 5.00 por cada unidad.

Entonces el costo marginal sería

$$C'(q) = \frac{d}{dq} (50000 + 5q)$$

$$C'(q) = \frac{d}{dq} 50000 + 5 \frac{d}{dq} q$$

$$C'(q) = 0 + 5(1)$$

$$C'(q) = 5$$

Esto es, no importa cuantas unidades se produzcan, cada unidad adicional costará lo mismo: \$ 5.00

Ejemplo 4.23

Supongamos que la producción de ciertas piezas para computadoras de alto desempeño, tengan la siguiente función de costos

$$C(q) = 150000 + 100q + 0.003q^2$$

Entonces, la función de costo marginal está dada por

$$C'(q) = \frac{d}{dq} (150000 + 100q + 0.003q^2)$$

$$C'(q) = \frac{d}{dq} 150000 + 100 \frac{d}{dq} q + 0.003 \frac{d}{dq} q^2$$

$$C'(q) = 0 + 100(1) + 0.003(2)q$$

$$C'(q) = 100 + 0.006q$$

Supongamos que el nivel de producción es de $q = 100$ unidades, entonces el costo total sería de

$$C(100) = 150000 + 100(100) + 0.003(100)^2$$

$$C(100) = 150000 + 10000 + 0.003(10000)$$

$$C(100) = 160030$$

El costo marginal por producir la pieza 101 sería de

$$C'(101) = 100 + 0.006(100)$$

$$C'(101) = 100 + 0.6$$

$$C'(101) = 100.06$$

El costo total estimado de producir $100 + 1$ unidades sería

$$C = 160030 + 100.06$$

$$C = 160130.06$$

Análisis de la utilidad marginal.

Este análisis se ocupa para determinar si se produce y vende una unidad adicional.

Si el ingreso adicional (IM) conseguido con la venta de la siguiente unidad sea mayor al costo de producirla y venderla (CM), habrá una utilidad neta aumentando la utilidad total.

Sin embargo, si el ingreso adicional (IM) es menor al costo de producirla y venderla (CM), entonces habrá una pérdida neta y disminuirá la utilidad total.

Si $IM > CM$ entonces se producirá la unidad adicional

Si $IM < CM$ no se producirá la unidad adicional.

En diversas situaciones de producción, el ingreso marginal rebasa al costo marginal en niveles bajos de producción. Sin embargo, a medida que el nivel de producción va aumentando, la cantidad en que el ingreso marginal excede al costo marginal va decayendo hasta que el ingreso marginal es igual al costo marginal ($IM = CM$). Mas allá de este punto, cuando $IM < CM$, la utilidad disminuye al incrementarse la producción. Esto es, no siempre producir más va a darnos más utilidades porque el costo de producción puede incrementarse más.

Así, si es posible determinar el punto de producción en el cual el ingreso marginal es igual a costo marginal para la última unidad producida y vendida, la utilidad total será la máxima. Este nivel de producción que maximiza la utilidad puede identificarse mediante la ecuación

$$IM = CM$$

Expresado en términos de derivadas, lo anterior, llamado criterio de maximización de la utilidad nos lleva a

$$I'(q) = C'(q)$$

Como ya se definió previamente, la función de utilidad total es la diferencia de la función de ingreso total menos la función de costo total

$$U(q) = I(q) - C(q)$$

y esto nos lleva a que

$$I(q) = C(q)$$

Aplicando derivada a ambos lados de la ecuación es que llegamos al resultado

$$I'(q) - C'(q) < 0$$

Ahora bien, siguiendo el criterio de la segunda derivada, la maximización de la utilidad sería cuando la segunda derivada de la función de utilidad sea negativa.

$$U''(q) < 0$$

Pero si

$$U''(q) = I''(q) - C''(q)$$

Entonces tenemos que

$$I''(q) - C''(q) < 0$$

Y esto es posible siempre que

$$I''(q) < C''(q)$$

Al resultado anterior se le conoce como condición suficiente para la maximización de la utilidad.

Ejemplo 4.24

Tomemos como referencia el ejemplo 4.21, donde $I(q) = 500q - 0.005q^2$ y $C(q) = 150000 + 100q + 0.003q^2$. Realizar el análisis de utilidad marginal.

Solución.

Obtenemos las derivadas

$$I'(q) = 500 - 0.01q$$

$$C'(q) = 100 + 0.006q$$

Igualando

$$I'(q) = C'(q)$$

$$500 - 0.01q = 100 + 0.006q$$

$$-0.01q - 0.006q = 100 - 500$$

$$-0.016q = -400$$

$$q = -500/-0.016$$

$$q = 25000 \text{ unidades}$$

Obtenemos la segunda derivada

$$I''(q) = -0.01$$

$$C''(q) = 0.006$$

Utilizando el criterio de la condición suficiente para la maximización de la utilidad

$$I'(q) < C''(q)$$

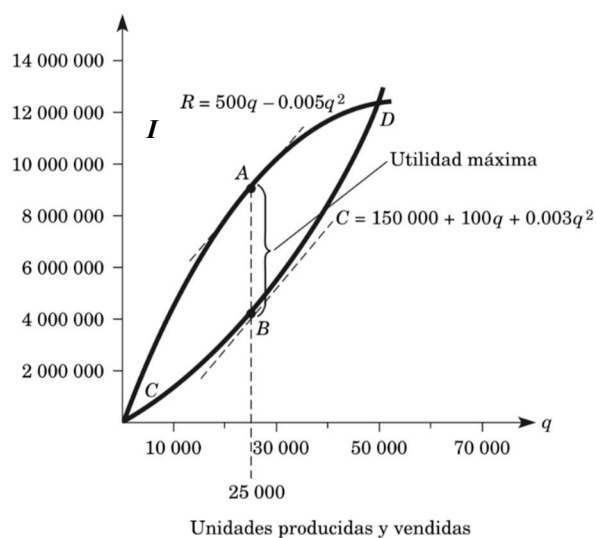
$$-0.01 < 0.006$$

deducimos que existe una maximización de la utilidad cuando $q = 25000$ unidades.

En conclusión, no deben producirse más de 25000 unidades.

Figura 23

Análisis marginal gráfico: maximización de la utilidad



Nota: El gráfico representa el punto de intersección de las funciones de ingreso y costo del ejemplo 4.24, donde se muestra la utilidad máxima. Tomado de *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*. (Budnick, 2007, p. 828)

Actividades de aprendizaje

- a) Aplicar propiedades de los límites y continuidad para resolver problemas.
- b) Aplicar propiedades de tasa de cambio para resolver problemas.
- c) Aplicar las fórmulas básicas de diferenciación para resolver ejercicios.
- d) Aplicar las derivadas algebraicas para la obtención de las derivadas parciales algebraicas. Identificar y determinar los puntos críticos de una ecuación.
- e) Utilizar la aproximación marginal a la maximización de utilidades a través del criterio de la primera y segunda derivada en casos del área.

Tema 5 Integración y aplicaciones

Competencias

Específicas:

Aplica las reglas de integración para resolver problemas de integrales definidas en la aplicación de inconvenientes relativos a área económico y administrativo.

Genéricas:

Solución de problemas.

Toma de decisiones.

Trabajo en equipo.

Habilidades interpersonales.

5.1 Concepto de antiderivada

De acuerdo con Haeussler et al. (2008) una antiderivada de una función f es una función cuya derivada es precisamente f . Esto es, dada una función f , si F es una función tal que

$$F'(x) = f(x)$$

entonces a F se le llama antiderivada de f .

Ejemplo 5.1

Se sabe que la derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. Para obtener ese resultado, primero el exponente 2 pasa multiplicando a la variable y luego al exponente se le resta una unidad de acuerdo con la fórmula de derivación de potencias de x

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

Para regresar de $f'(x) = 2x$ a $f(x) = x^2$ realizamos el procedimiento invertido, primero al exponente le sumamos 1 y posteriormente dividimos entre el valor que resulte de

esa suma

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

lo que nos lleva a

$$2 \frac{x^{1+1}}{1+1} = 2 \frac{x^2}{2} = x^2$$

Ahora bien, si renombramos las funciones como $f(x) = 2x$ y $F(x) = x^2$, entonces vemos que como

$$F'(x) = \frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

decimos que $F(x) = x^2$ es la antiderivada de $f(x) = 2x$. La antiderivada es la función originaria de donde se derivó $f(x) = 2x$.

Ejemplo 5.2

Encontrar las derivadas de

$$f_1(x) = x^2 + 8$$

$$f_2(x) = x^2 - 5$$

$$f_3(x) = x^2 + 3$$

$$f_4(x) = x^2 - 1$$

Solución.

Si nos damos cuenta, la única diferencia que hay entre todas las funciones del ejemplo es el valor de la constante. Estamos hablando de una familia de funciones representada de modo general por $f(x) = x^2 + C$, donde C es un valor real cualquiera. Como la derivada de una constante es 0, entonces las funciones de una misma familia tienen la misma derivada.

$$f'_1 = f'_2 = f'_3 = f'_4 = 2x$$

Al intentar encontrar la antiderivada de una función nosotros no tenemos forma de saber cuál era el valor de la constante original, por lo que al escribir la antiderivada usamos la letra C . Escribimos entonces

$F(x) = x^2 + C$ es la antiderivada de $f(x) = 2x$, ya que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x + 0 = 2x$$

Debido a que no siempre es posible revertir los pasos realizados mediante la derivación, se desarrollaron fórmulas especiales para poder encontrar las antiderivadas de cada función.

A la antiderivada también se le llama integral indefinida, la cual se expresa mediante una S estilizada $\int$

$$F'(x) = \int f(x)dx$$

Estas antiderivadas o integrales indefinidas, se pueden encontrar a través de fórmulas o reglas conocidas.

5.2 Reglas de integración directas

También llamadas integrales inmediatas. Las más utilizadas en el ámbito económico-administrativo son:

$$1) \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$$

$$2) \int a du = a \int du$$

$$3) \int dx = x + C$$

$$4) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$5) \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$6) \int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

$$7) \int \frac{du}{u} = \int u^{-1} du = \ln|u| + C$$

$$8) \int e^x dx = e^x + C$$

$$9) \int e^u du = e^u + C$$

$$10) \int a^x du = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$11) \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

Ejemplo 5.3

Encontrar la antiderivada o integral indefinida de las siguientes funciones

$$1) \int 5 dx$$

$$2) \int 2x dx$$

$$3) \int (3x - 1) dx$$

$$4) \int x^2 dx$$

$$5) \int (2x^2 + 6x - 1) dx$$

$$6) \int 2^x dx$$

$$7) \int e^x dx$$

$$8) \int \frac{dx}{x^2} dx$$

$$9) \int \left(\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$10) \int (2x - 3)^2 dx$$

Solución.

$$1) \int 5 dx = 5 \int dx = 5(x) = 5x + C$$

$$2) \int 2x dx = 2 \int x dx = 2 \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{2x^2}{2} = x^2 + C$$

$$3) \int (3x - 1)dx = 3 \int x dx - \int dx = 3 \frac{x^{1+1}}{1+1} - x = \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

$$4) \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$5) \int (2x^2 + 6x - 1)dx = 2 \int x^2 dx + 6 \int x dx - \int dx \\ = 2 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 6 \frac{x^{1+1}}{1+1} - x = \frac{2}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - x = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - x + C$$

$$6) \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln} + C$$

$$7) \int e^x dx = e^x + C$$

$$8) \int \frac{dx}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$9) \int \left(\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx = 4 \int x^{-1} dx + 2 \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx = 4 \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + 2 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{x^{-3+1}}{-3+1} \\ = 4 \ln|x| + 2 \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} = 4 \ln|x| - 2x^{-1} + \frac{x^{-2}}{2} \\ = 4 \ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$$

10) Desarrollamos el binomio al cuadrado e integramos término por término

$$\int (2x - 3)^2 dx = \int [(2x)^2 + 2(2x)(-3) + (-3)^2] dx \\ = 4 \int x^2 dx - \int 12x dx + 9 \int dx = 4 \frac{x^{2+1}}{2+1} - 12 \frac{x^{1+1}}{1+1} + 9x \\ = \frac{4}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 9x = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x + C$$

Ejemplo 5.4

Encontrar la antiderivada o integral indefinida de las siguientes funciones

$$1) \int (2x - 1)^2 dx$$

$$2) \int \int (2x - 1)^{10} dx$$

Solución

1) Desarrollamos el binomio al cuadrado e integramos término por término

$$\begin{aligned}
\int (2x - 1)^2 dx &= \int [(2x)^2 + 2(2x)(-1) + (-1)^2] dx \\
&= 4 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 1 \int dx = 4 \frac{x^{2+1}}{2+1} - 4 \frac{x^{1+1}}{1+1} + x \\
&= \frac{4}{3} x^3 - \frac{4}{2} x^2 + x = \frac{4}{3} x^3 - 2x^2 + x + C
\end{aligned}$$

2) Aunque podríamos desarrollar el binomio a la décima potencia, el procedimiento sería

algo largo. Aquí recurrimos a la regla $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

Si $\int (2x - 1)^{10} dx$, entonces $u = 2x - 1$ y du es el diferencial de u .

El diferencial de una función está dado por el producto de la derivada de la función y dx

$$du = \frac{du}{dx} dx$$

Entonces derivamos u

$$\frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} (2x + 1) = 2 \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 1 = 2(1) + 0 = 2$$

El diferencial de u es

$$du = \frac{du}{dx} dx = \frac{d}{dx} (2x + 1) dx = 2dx$$

Entonces, completamos el diferencial con el factor 2

$$\int u^n du = \int (2x - 1)^{10} 2dx$$

Sin embargo, al adicionar el factor 2 para completar el diferencial, alteramos la función original por lo que para retornar a ella multiplicamos por $\frac{1}{2}$ ya que $2 \frac{1}{2} = 1$ y toda función multiplicada por 1 queda igual.

Balanceando la integral obtenemos

$$\frac{1}{2} \int (2x - 1)^{10} 2dx = \frac{1}{2} \int u^{10} du$$

Aplicando la regla llegamos a

$$\frac{1}{2} \int u^{10} du = \frac{1}{2} \frac{u^{10+1}}{10+1} = \frac{1}{2} \frac{u^{11}}{11} = \frac{u^{11}}{22} = \frac{1}{22} u^{11}$$

Pero como $u = 2x - 1$, el resultado es

$$\int (2x - 1)^{10} dx = \frac{1}{22} (2x - 1)^{11} + C$$

Esto es importante porque una función cuya variable x está multiplicada por alguno valor diferente a 1 o forma parte de una expresión que involucra operaciones con otros términos y está elevada a un exponente necesita ajustar el valor del diferencial de u , de otro modo el resultado sería erróneo.

Ejemplo 5.5

Encontrar la antiderivada o integral indefinida de las siguientes funciones

1) $f(x) = e^x$

2) $f(x) = e^{2x}$

3) $f(x) = e^{3x}$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$

5) $f(x) = \frac{1}{4x+9}$

6) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

7) $f(x) = \frac{1}{(3x+1)^3}$

Solución

1) $\int e^x dx = e^x + C$

2) $f(x) = e^{2x}$

Sea $u = 2x$, entonces $du = \frac{d}{dx} e^{2x} dx = e^{2x} \frac{d}{dx} 2x dx = e^{2x} (2dx)$

Por lo que completamos el diferencial

$$\begin{aligned}\int e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int e^{2x} 2 dx = \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{2x} + C\end{aligned}$$

$$3) f(x) = e^{3x}$$

$$\text{Sea } u = 3x, \text{ entonces } du = \frac{d}{dx} e^{3x} dx = e^{3x} \frac{d}{dx} 3x dx = e^{3x} (3 dx)$$

Por lo que completamos el diferencial

$$\begin{aligned}\int e^{3x} dx &= \frac{1}{3} \int e^{3x} 3 dx = \frac{1}{3} \int e^u du \\ &= \frac{1}{3} e^u = \frac{1}{3} e^{3x} + C\end{aligned}$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

$$5) \int \frac{1}{4x+9} dx = \int (4x+9)^{-1} dx$$

$$\text{Sea } u = 4x+9, \text{ entonces } du = \frac{d}{dx} (4x+9) dx$$

$$= \left(4 \frac{d}{dx} x - \frac{d}{dx} 9 \right) dx = (4 - 0) dx = 4 dx$$

Por lo que completamos el diferencial

$$= \frac{1}{4} \int (4x+9)^{-1} 4 dx = \frac{1}{4} \int u^{-1} du = \frac{1}{4} \ln|4x+9| + C$$

$$6) \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -2 \frac{x^{-2-1}}{-2-1} = -2 \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{2}{3} x^{-3} = \frac{2}{3x^3} + C$$

$$7) \int \frac{1}{(3x+1)^3} dx = \int (3x+1)^{-3} dx$$

$$\text{Sea } u = 3x+1, \text{ entonces } du = \frac{d}{dx} (3x+1) dx$$

$$= \left(3 \frac{d}{dx} x - \frac{d}{dx} 1 \right) dx = (3 - 0) dx = 3 dx$$

Por lo que completamos el diferencial

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \int (3x + 1)^{-3} 3 dx = \frac{1}{3} \int u^{-3} du = \frac{1}{3} \frac{u^{-3+1}}{-3+1} \\
 &= \frac{u^{-2}}{3(-4)} = \frac{u^{-2}}{-12} = -\frac{1}{12u^2}
 \end{aligned}$$

Como $u = 3x - 1$, sustituimos y obtenemos

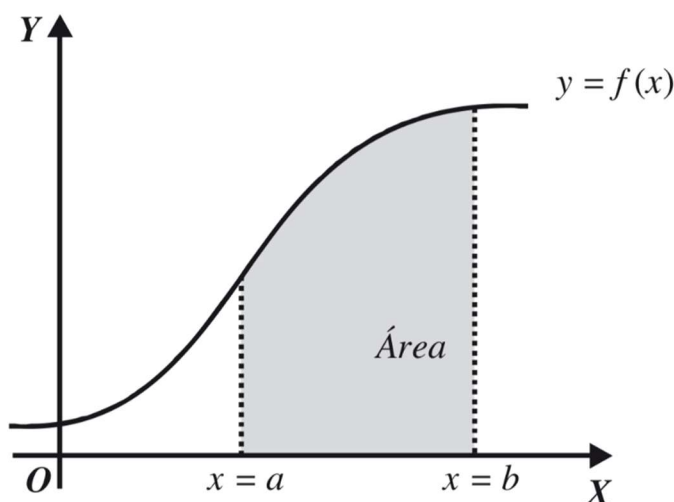
$$= -\frac{1}{12(3x - 1)^2} + C$$

5.3 Integral definida

De acuerdo con Aguirre Márquez et al. (2010) la integral definida representa el área delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ con el eje X en el intervalo dado $[a, b]$ siempre que la función esté definida en todo el intervalo referido. En la siguiente figura podemos visualizarlo.

Figura 24

Representación gráfica de la integral definida



Nota: El gráfico representa el área delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ con el eje X en el intervalo dado $[a, b]$. Tomado de *Matemáticas simplificadas*. (Aguilar, 2009, p. 1391)

La integral indefinida se denota como

$$\int_a^b f(x) dx$$

Si $F(x)$ es la antiderivada o integral indefinida de $f(x)$, entonces $F(b)$ es la antiderivada evaluada en b y $F(a)$ es la antiderivada evaluada en a . Entonces tenemos que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Esto quiere decir:

- Obtener primero la integral indefinida de $f(x)$ denotada como $F(x)$
- Evaluar $F(x)$ con b y con a . Esto es, obtener $F(b)$ y $F(a)$.
- Realizar la diferencia $F(b) - F(a)$

Veamos el siguiente ejemplo para ilustrar el proceso de obtención de una integral definida.

Ejemplo 5.6

Encontrar la integral definida de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 3]$.

Solución

$$\text{a) } F(x) = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$$

$$\text{b) } F(b) = F(3) = \frac{3^3}{3} = \frac{27}{3} = 9 \quad F(a) = F(1) = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$$

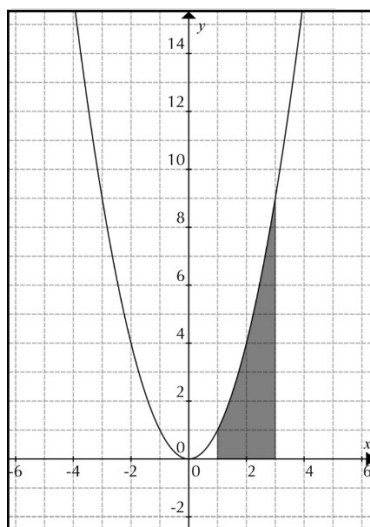
$$\text{c) } F(b) - F(a) = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \left[\frac{3^3}{3} \right] - \left[\frac{1^3}{3} \right] = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8.\overline{6} \approx 8.6667$$

Como el resultado representa un área, entonces el resultado se expresa en unidades cúbicas:

$$\int_1^3 x^2 dx = 8.\overline{6} \approx 8.6667 \text{ u}^3$$

Figura 25

Representación gráfica de la integral definida $\int_1^3 x^2 dx$



En lo sucesivo y especialmente para problemas de aplicación, no necesitamos trazar el área en cada uno de ellos. En los problemas del ámbito económico-administrativo nos basta con obtener el resultado numérico y darle la interpretación correcta.

Ejemplo 5.7

Evaluar las siguientes integrales definidas

1) $\int_{-1}^2 5 dx$

2) $\int_{-2}^4 2x dx$

3) $\int_0^2 (2x^2 + 6x - 1) dx$

4) $\int_{-1}^3 2^x dx$

5) $\int_0^3 e^x dx$

Solución

Tomando como referencia el ejemplo 5.3 tenemos que

$$1) \int_{-1}^2 5 \, dx$$

$$\int 5 \, dx = 5x + c$$

$$\int_{-1}^2 5 \, dx = 5x \Big|_{-1}^2 = 5(2) - 5(-1) = 10 + 5 = 15$$

$$2) \int_{-2}^4 2x \, dx$$

$$\int 2x \, dx = x^2 + c$$

$$\int_{-2}^4 2x \, dx = x^2 \Big|_{-2}^4 = 4^2 - (-2)^2 = 16 - 4 = 12$$

$$3) \int_0^2 (2x^2 + 6x - 1) \, dx$$

$$\int (2x^2 + 6x - 1) \, dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - x + C$$

$$\int_0^2 (2x^2 + 6x - 1) \, dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - x \right) \Big|_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{3}(2)^3 + 3(2)^2 - (2) \right] - \left[\frac{2}{3}(0)^3 + 3(0)^2 - (0) \right]$$

$$= \frac{16}{3} + 12 - 2 - 0 - 0 + 0 = \frac{46}{3}$$

$$4) \int_{-1}^3 2^x \, dx$$

$$\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

$$\int_{-1}^3 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{-1}^3 = \frac{2^3}{\ln 2} - \frac{2^{-1}}{\ln 2} = \frac{8}{\ln 2} - \frac{0.5}{\ln 2} \approx 11.54156 - 0.72135 \approx 10.82021$$

$$5) \int_0^3 e^x \, dx$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int_0^3 e^x \, dx = e^x \Big|_0^3 = e^3 - e^0 \approx 20.08554 - 1 = 19.08554$$

5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas

En este apartado vamos a retomar el estudio de marginales pero ahora apoyándonos con el uso de integrales. En la unidad anterior se vio que una función como la de costos marginales se obtiene derivando una función de costos totales. Lo mismo sucede con las funciones de ingresos y utilidad marginales. En este caso, si conocemos las funciones marginales, a través del uso de integrales podemos encontrar las funciones de costos totales, ingresos totales y utilidades totales originales.

A continuación vamos a estudiar diferentes ejemplos de aplicaciones del cálculo integral dentro del ámbito de las matemáticas aplicadas a la administración.

Ejemplo 5.8

Supongamos que el precio de venta de un producto es de \$ 25.00 independiente del volumen de producción y de venta. Entonces, el ingreso marginal $IM = 25$, porque por cada venta adicional de una unidad ingresará \$ 10.00 a la empresa. Si q es el número de unidades vendidas tendremos entonces que

$$I = \int 25 \, dx = 25 \int dx = 25x + c$$

como función de ingresos totales. Ahora bien, para poder entender mejor esta idea, supongamos que queremos evaluar el ingreso total de vender 1500 unidades de dicho producto, entonces usamos la integral definida

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{3000} 25 \, dx = 25 \int_0^{3000} dx = 25(x|_0^{3000}) \\ &= 25(3000 - 0) = 25(3000) = 75000 \text{ pesos} \end{aligned}$$

Con esto podemos ver que aunque sólo dispongamos de la función de ingresos marginales, es posible calcular los ingresos totales para un número de unidades por vender.

Ejemplo 5.9

Determinar el ingreso total si se incrementan las ventas de 3000 a 4000 unidades.

Solución.

Aplicamos la integral definida en el rango dado y obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_{3000}^{4000} 25 \, dx = 25 \int_{3000}^{4000} dx = 25(x|_{3000}^{4000}) \\ &= 25(4000 - 3000) = 25(1000) = 25000 \text{ pesos} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.10

Acorde con Budnick (2007) un fabricante de autos estima que la tasa anual de gastos $r(t)$ para dar mantenimiento a uno de sus modelos está dado por

$$r(t) = 100 + 10t^2$$

donde t es la edad en años del automóvil y $r(t)$ se mide en dólares por año. Por ejemplo, al año de haberse adquirido, los gastos por mantenimiento se harán a una tasa de

$$r(1) = 100 + 10(1)^2 = 100 + 10 = 110 \text{ por año}$$

Cuando tenga tres años de uso el mantenimiento estaría realizándose a una tasa de

$$r(3) = 100 + 10(3)^2 = 100 + 10(9) = 100 + 90 = 190 \text{ por año}$$

Parece razonable suponer que por cada año más que el automóvil esté en uso mayor serán los gastos de mantenimiento. Podríamos ir calculando año tras año o hacerlo para intervalos definidos. Por ejemplo, la tasa de mantenimiento por los primeros seis años sería

$$\begin{aligned} \int_0^6 (100 + 10t^2) \, dt &= 100 \int_0^6 dt + 10 \int_0^6 t^2 \, dt = 100(t|_0^6) + \frac{10}{3}(t^3|_0^6) \\ &= 100(6 - 0) + \frac{10}{3}(6^3 - 0^3) = 100(6) + \frac{10}{3}(216) \\ &= 600 + 720 = 1320 \text{ por año} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.11

Acorde con Budnick (2007) el banco de sangre de un hospital ha emprendido una campaña de donación de sangre para reponer su inventario. Se ha hecho un estudio y se estima que la gente donará sangre a una tasa de $d(t)$ litros por día, donde

$$d(t) = 500e^{-0.4t}$$

donde t es la duración de la campaña en días. Si el objetivo es alcanzar los 1000 litros de sangre ¿en cuántos días se lograría el objetivo?

Solución.

El banco de sangre alcanzará su meta cuando

$$\int_0^t 500e^{-0.4t} dt = 1000$$

$$\int_0^t 500e^{-0.4t} dt = 1000$$

Como $u = -0.4t$, entonces $du = \frac{d}{dx} - 0.4t dt = -0.4$ completamos el diferencial

$$-\frac{1}{0.4} \int_0^n 500e^{-0.4t} (-0.4) dt = 1000$$

$$-\frac{500}{0.4} \int_0^n e^{-0.4t} (-0.4) dt = 1000$$

$$-1250 \int_0^n e^u du = 1000$$

$$-1250(e^u \Big|_0^n) = 1000$$

Pero $u = -0.4t$ por lo que realizamos la sustitución y evaluamos

$$-1250(e^{-0.4t} \Big|_0^n) = 1000$$

$$-1250(e^{-0.4n} - e^{-0.4(0)}) = 1000$$

$$-1250e^{-0.4n} - 1250(-1) = 1000$$

$$-1250e^{-0.4n} + 1250 = 1000$$

$$-1250e^{-0.4n} = 1000 - 1250$$

$$-1250e^{-0.4n} = -250$$

$$e^{-0.4n} = \frac{-250}{-1250} = 0.2$$

Aplicando logaritmo natural a ambos lados

$$\ln e^{-0.4n} = \ln 0.2$$

$$-0.4n = \ln 0.2$$

$$n \approx \frac{-1.6094}{-0.4}$$

$$n \approx 4.0235 \text{ días}$$

El banco de sangre del hospital alcanzaría la meta durante el quinto día dado que el resultado es mayor a 4 días.

Actividades de aprendizaje

- a) Consultar el concepto de antiderivada y las reglas de integración básicas.
- b) Resolver ejercicios sobre reglas de integración básicas.
- c) Realizar ejercicios en equipos para diferenciar entre una integral definida y una indefinida. Resolver en equipo ejercicios de integral definidas.
- d) Aplicar las integrales definidas a problemas del área económica administrativas

Referencias

- Aguilar Márquez, A., Bravo Vázquez, F., Gallegos Ruiz, H. A., Cerón Villegas, M., Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. CONAMAT. Pearson Educación de México, S. A. de C. V.
- Budnick, F. S. (2007). *Matemáticas aplicadas para la administración, economía y ciencias sociales*. McGraw/Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V.
- Haeussler, Jr., E. F., Paul R. S., Wood, R. J. (2008). *Matemáticas para administración y economía*. Pearson Educación de México, S. A. de C. V.

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 161 de 190

**Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de la Costa Grande**

Subdirección Académica

Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Periodo ENERO – JULIO 2025

Nombre de la asignatura: **Matemáticas aplicadas a la Administración**

Plan de estudios: **LADM-2010-234**

Clave de asignatura: **LAD-1027**

Horas teoría – horas prácticas – créditos: **2-3-5**

1. Caracterización de la asignatura

Esta asignatura aporta al perfil del Licenciado en Administración:

- Aplicar los conocimientos modernos de la gestión de negocios a las fases del proceso administrativo para la optimización de recursos y el manejo de los cambios organizacionales.
- Crear y desarrollar proyectos sustentables aplicando herramientas administrativas y métodos de investigación de vanguardia, con un enfoque estratégico, multicultural y humanista.

Esta asignatura se ubica en el primer semestre de la carrera y se estructura en tres momentos: primero un recorrido sobre los antecedentes de las funciones matemáticas y su aplicación, en el segundo momento los modelos de oferta,

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 162 de 190

demanda y la tasa marginal y un tercer momento, el estudio del área bajo las gráficas de ingreso marginal, de la línea de demanda y oferta, etc.

2. Intención didáctica

Considerando que el Licenciado en Administración tenga una base sólida sobre aspectos matemáticos, se plantea que el estudiante conozca los antecedentes, así como los principales modelos lineales y sus representaciones gráficas para el apoyo en la aplicación a los modelos de oferta y demanda, analizando el concepto de ingreso, costo, punto de equilibrio, equilibrio en el mercado, así como la solución de sistemas de ecuaciones para su aplicación en los conceptos anteriores.

La aplicación de matrices y cálculo diferencial como un principio a la programación administrativa en el análisis insumo-producto, ya que en el análisis matemático en Administración y Economía trata frecuentemente de cambios.

El análisis marginal es quizá la aplicación más directa del Cálculo en las ciencias administrativas y económicas; la relación de cambio marginal, o sea, la variación en el margen se expresa analíticamente como la primera derivada.

En la Economía y la Administración puede utilizarse la integración para establecer la función de costo total cuando se da la función de costo marginal; para establecer la función de ingreso total cuando se conoce la función de ingreso marginal; etc.

Esta asignatura es el inicio de la aplicación de los modelos matemáticos en los conceptos económicos, así como en una cadena de asignaturas que proporcionan los conocimientos, habilidades y actitudes que propicien el desarrollo del Licenciado en Administración.

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 163 de 190

3. Competencia de la asignatura

Analizar y aplicar los criterios matemáticos como funciones lineales, sistemas de ecuaciones, matrices, cálculo diferencial e integral para mejorar el análisis de las técnicas cuantitativas aplicadas a modelos económicos administrativos.

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 164 de 190

4. Análisis por competencias específicas

Competencia No.: **1** Descripción: Aplicar las funciones matemáticas en la solución de problemas y representarlas gráficamente.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
1.1 Definición 1.2 Dominio y rango restringidos 1.3 Funciones multivariadas básicas 1.4 Representaciones gráficas de funciones matemáticas 1.5 Formula pendiente intersección 1.6 Determinación de la ecuación de una línea recta	• Consultar el significado de funciones, dominio y rango. • Realizar ejercicios en equipos en los cuales se apliquen los conceptos de dominio y rango restringidos. • Realizar ejercicios en equipos en los cuales efectué una combinación de funciones. • Resolver y graficar problemas donde aplique la formula de la pendiente/intersección.	• Propiciar, en el estudiante, el desarrollo de actividades intelectuales de inducción-deducción y análisis-síntesis, las cuales lo encaminan hacia la investigación, la aplicación de conocimientos y la solución de problemas. • Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes. • Propiciar el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los contenidos de la asignatura. • Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio argumentado de ideas, la reflexión, la integración y la colaboración entre los estudiantes. • Llevar a cabo actividades prácticas que promuevan el desarrollo de habilidades para la experimentación, tales como: observación, identificación manejo y control	Competencias instrumentales. ▪ Capacidad de análisis y síntesis. ▪ Capacidad de organizar y planificar. ▪ Conocimientos generales básicos. ▪ Conocimientos básicos de la carrera. ▪ Comunicación oral y escrita en su propia lengua. ▪ Conocimiento de una segunda lengua. ▪ Habilidades básicas de manejo de la computadora. ▪ Habilidades de gestión de información (habilidad para buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas). ▪ Solución de problemas.	9-6

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 165 de 190

1.6.1 Pendiente e intersección 1.6.2 Pendiente y un punto 1.6.3 Dos puntos 1.6.4 Aplicaciones a modelos de oferta y demanda	• Determinar y analizar la ecuación de la línea recta aplicada a la oferta, demanda, depreciación y pronósticos.	de de variables y datos relevantes, planteamiento de hipótesis, de trabajo en equipo. • Desarrollar actividades de aprendizaje que propicien la aplicación de los conceptos, modelos y metodologías que se van aprendiendo en el desarrollo de la asignatura. • Propiciar el uso adecuado de conceptos, y de terminología científico-tecnológica. • Proponer problemas que permitan al estudiante la integración de contenidos de la asignatura y entre distintas asignaturas, para su análisis y solución. • Relacionar los contenidos de la asignatura con el cuidado del medio ambiente; así como con las prácticas de una ingeniería con enfoque sustentable. • Observar y analizar fenómenos y problemáticas propias del campo ocupacional. • Relacionar los contenidos de esta asignatura con las demás del plan de estudios para desarrollar una visión interdisciplinaria en el estudiante.	• Toma de decisiones. Competencias interpersonales. • Capacidad crítica y autocrítica. • Trabajo en equipo. • Habilidades interpersonales. • Capacidad de trabajar en equipo interdisciplinario. • Capacidad de comunicarse con profesionales de otras áreas. • Apreciación de la diversidad y multiculturalidad. • Habilidad para trabajar en un ambiente laboral. • Compromiso ético. Competencias sistémicas. • Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica. • Habilidades de investigación. • Capacidad de aprender. • Capacidad de adaptarse a nuevas situaciones. • Capacidad de generar nuevas ideas (creatividad). • Liderazgo. • Conocimiento de culturas y costumbres de otros países. • Habilidad para trabajar en forma autónoma.	
---	---	---	--	--

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 166 de 190

			• Capacidad para diseñar y gestionar proyectos. • Iniciativa y espíritu emprendedor. • Preocupación por la calidad. • Búsqueda del logro.	
--	--	--	--	--

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Se adapta a situaciones y contextos complejos.	3%
B. Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas.	10%
C. Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase.	50%
D. Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico.	10%
E. Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje.	24%
F. Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada.	3%

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 167 de 190

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple al menos cinco de los indicadores de alcance.	95-100
	Notable	Cumple cuatro de los indicadores definidos en desempeño excelente.	85-94
	Bueno	Cumple tres de los indicadores definidos en desempeño excelente.	75-84
	Suficiente	Cumple dos de los indicadores definidos en desempeño excelente.	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	NA

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 168 de 190

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance						Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	F	
Solución de problemas (Entrega de prácticas)	37	3			10	24		Rúbrica y apuntes
Mapa conceptual	13		10				3	Rúbrica
Evaluación del conocimiento (Examen)	50			50				Examen
	Total	3	10	50	10	24	3	

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 169 de 190

Competencia No.: **2** Descripción: Solucionar y aplicar los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones en problemas de punto de equilibrio y equilibrio en el mercado.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
2.1 Funciones lineales 2.2 Modelos de equilibrio 2.2.1 Modelo de punto de equilibrio aplicado a la producción 2.2.2 Modelo gráfico de punto de equilibrio. 2.2.3 Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad.	• Consultar previo a clase los conceptos de funciones lineales, ingreso, costo, utilidad, depreciación y punto de equilibrio. • Formular funciones en donde estén implícitos los ingresos, costos, la utilidad y la depreciación. • Crear y resolver modelos de punto de equilibrio, partiendo de la actividad anterior.	• Propiciar, en el estudiante, el desarrollo de actividades intelectuales de inducción-deducción y análisis-síntesis, las cuales lo encaminan hacia la investigación, la aplicación de conocimientos y la solución de problemas. • Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes. • Propiciar el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los contenidos de la asignatura. • Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio argumentado de ideas, la reflexión, la integración y la colaboración entre los estudiantes. • Llevar a cabo actividades prácticas que promuevan el desarrollo de habilidades para	Competencias instrumentales. ▪ Capacidad de análisis y síntesis. ▪ Capacidad de organizar y planificar. ▪ Conocimientos generales básicos. ▪ Conocimientos básicos de la carrera. ▪ Comunicación oral y escrita en su propia lengua. ▪ Conocimiento de una segunda lengua. ▪ Habilidades básicas de manejo de la computadora. ▪ Habilidades de gestión de información (habilidad para buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas).	9-6



Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias

Código: ITCG-AC-PO-003-02

Revisión: 0

Referencia a la Norma ISO 9001:2015

8.1, 8.2.2, 8.5.1

Página 170 de 190

2.2.4 Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir 2.3 Sistemas de ecuaciones lineales 2.3.1 Sistemas de ecuaciones de 2x2 y 3x3. Métodos de eliminación suma y resta. 2.3.2 Método de eliminación Gaussiana de sistemas 2x2, 3x3 solución única. 2.3.3 Aplicaciones	• Graficar el punto de equilibrio. • Resolver sistemas de ecuaciones, utilizando los métodos de suma y resta, eliminación y Gauss Jordán, aplicar el modelo en casos prácticos del área.	la experimentación, tales como: observación, identificación manejo y control de de variables y datos relevantes, planteamiento de hipótesis, de trabajo en equipo. • Desarrollar actividades de aprendizaje que propicien la aplicación de los conceptos, modelos y metodologías que se van aprendiendo en el desarrollo de la asignatura. • Propiciar el uso adecuado de conceptos, y de terminología científico-tecnológica. • Proponer problemas que permitan al estudiante la integración de contenidos de la asignatura y entre distintas asignaturas, para su análisis y solución. • Relacionar los contenidos de la asignatura con el cuidado del medio ambiente; así como con las prácticas de una ingeniería con enfoque sustentable. • Observar y analizar fenómenos y problemáticas propias del campo ocupacional. • Relacionar los contenidos de esta asignatura con las demás del plan de estudios para desarrollar una visión interdisciplinaria en el estudiante.	▪ Solución de problemas. ▪ Toma de decisiones. Competencias interpersonales. • Capacidad crítica y autocrítica. • Trabajo en equipo. • Habilidades interpersonales. • Capacidad de trabajar en equipo interdisciplinario. • Capacidad de comunicarse con profesionales de otras áreas. • Apreciación de la diversidad y multiculturalidad. • Habilidad para trabajar en un ambiente laboral. • Compromiso ético. Competencias sistémicas. • Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica. • Habilidades de investigación. • Capacidad de aprender. • Capacidad de adaptarse a nuevas situaciones. • Capacidad de generar nuevas ideas (creatividad). • Liderazgo. • Conocimiento de culturas y costumbres de otros países.	
---	---	--	---	--

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 171 de 190

			• Habilidad para trabajar en forma autónoma. • Capacidad para diseñar y gestionar proyectos. • Iniciativa y espíritu emprendedor. • Preocupación por la calidad. • Búsqueda del logro.	
--	--	--	--	--

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Se adapta a situaciones y contextos complejos.	3%
B. Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas.	10%
C. Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase.	50%
D. Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico.	10%
E. Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje.	24%
F. Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada.	3%

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 172 de 190

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple al menos cinco de los indicadores de alcance	95-100
	Notable	Cumple cuatro de los indicadores definidos en desempeño excelente..	85-94
	Bueno	Cumple tres de los indicadores definidos en desempeño excelente.	75-84
	Suficiente	Cumple dos de los indicadores definidos en desempeño excelente.	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	NA

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 173 de 190

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance						Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	F	
Solución de problemas (Entrega de prácticas)	37	3			10	24		Rúbrica y apuntes
Trabajo de investigación	13		10				3	Rúbrica
Evaluación del conocimiento (Examen)	50			50				Examen
	Total	3	10	50	10	24	3	

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 174 de 190

Competencia No.: **3** Descripción: Aplicar la notación de una matriz para la representación matricial de datos, sus operaciones matemáticas y solucionar problemas de sistemas de ecuaciones aplicando para resolver casos del área económica administrativa.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
3.1 Introducción a las matrices 3.2 Tipos especiales de matrices 3.3 Operaciones con matrices 3.4 Introducción a los determinantes. Solución de un determinante de 2x2, 3x3 por método de columnas aumentadas y cofactores 3.5 Propiedades de los determinantes	- Investigar las matrices, identificando los diversos tipos especiales. - Realizar ejercicios en equipos en los cuales se efectúe operaciones matriciales. - Resolver ejercicios con el método de columnas aumentadas y cofactores para sistemas 2 x 2 y 3 x 3, así como la inversa de una matriz mediante el método de eliminación y cofactores. - Resolver sistemas de ecuaciones de	- Propiciar, en el estudiante, el desarrollo de actividades intelectuales de inducción-deducción y análisis-síntesis, las cuales lo encaminan hacia la investigación, la aplicación de conocimientos y la solución de problemas. - Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes. - Propiciar el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los contenidos de la asignatura. - Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio argumentado de ideas, la reflexión, la integración y la colaboración entre los estudiantes. - Llevar a cabo actividades prácticas que promuevan el desarrollo de habilidades para la experimentación, tales como: observación, identificación manejo y control	Competencias instrumentales. - Capacidad de análisis y síntesis. - Capacidad de organizar y planificar. - Conocimientos generales básicos. - Conocimientos básicos de la carrera. - Comunicación oral y escrita en su propia lengua. - Conocimiento de una segunda lengua. - Habilidades básicas de manejo de la computadora. - Habilidades de gestión de información (habilidad para buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas). - Solución de problemas. - Toma de decisiones.	9-6

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 175 de 190

3.6 Solución de la inversa de una matriz	2 x 2 y 3 x 3 utilizando el método de la inversa y Cramer. - Investigar datos de INEGI, del Banco de México y de otras instituciones, en donde identifique la aplicación de modelos matriciales en el manejo de sus datos. - Aplicar matrices para resolver casos prácticos del área económica administrativa.	de de variables y datos relevantes, planteamiento de hipótesis, de trabajo en equipo. - Desarrollar actividades de aprendizaje que propicien la aplicación de los conceptos, modelos y metodologías que se van aprendiendo en el desarrollo de la asignatura. - Propiciar el uso adecuado de conceptos, y de terminología científico-tecnológica. - Proponer problemas que permitan al estudiante la integración de contenidos de la asignatura y entre distintas asignaturas, para su análisis y solución. - Relacionar los contenidos de la asignatura con el cuidado del medio ambiente; así como con las prácticas de una ingeniería con enfoque sustentable. - Observar y analizar fenómenos y problemáticas propias del campo ocupacional. - Relacionar los contenidos de esta asignatura con las demás del plan de estudios para desarrollar una visión interdisciplinaria en el estudiante.	Competencias interpersonales. - Capacidad crítica y autocrítica. - Trabajo en equipo. - Habilidades interpersonales. - Capacidad de trabajar en equipo interdisciplinario. - Capacidad de comunicarse con profesionales de otras áreas. - Apreciación de la diversidad y multiculturalidad. - Habilidad para trabajar en un ambiente laboral. - Compromiso ético. Competencias sistémicas. - Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica. - Habilidades de investigación. - Capacidad de aprender. - Capacidad de adaptarse a nuevas situaciones. - Capacidad de generar nuevas ideas (creatividad). - Liderazgo. - Conocimiento de culturas y costumbres de otros países. - Habilidad para trabajar en forma autónoma. - Capacidad para diseñar y gestionar proyectos.	
--	--	---	--	--

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 176 de 190

			• Iniciativa y espíritu emprendedor. • Preocupación por la calidad. • Búsqueda del logro	
--	--	--	--	--

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Se adapta a situaciones y contextos complejos.	3%
B. Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas.	10%
C. Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase.	50%
D. Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico.	10%
E. Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje.	24%
F. Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada.	3%

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 177 de 190

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple al menos cinco de los indicadores de alcance	95-100
	Notable	Cumple cuatro de los indicadores definidos en desempeño excelente..	85-94
	Bueno	Cumple tres de los indicadores definidos en desempeño excelente.	75-84
	Suficiente	Cumple dos de los indicadores definidos en desempeño excelente.	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	NA

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 178 de 190

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance						Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	F	
Solución de problemas (Entrega de prácticas)	37	3			10	24		Rúbrica y apuntes
Trabajo de investigación	13		10				3	Rúbrica
Evaluación del conocimiento (Examen)	50			50				Examen
	Total	3	10	50	10	24	3	

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 179 de 190

Competencia No.: **4** Descripción: Comprender los conceptos de límite y continuidad para la solución de problemas relativos a tasa promedio de cambio e incrementos y aplicar las reglas de diferenciación a problemas de máximos y mínimos como la metodología en la aplicación a ingresos, costos y utilidad.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
4.1 Límites y continuidad 4.2 Derivadas algebraicas con fórmulas 4.3 Derivada de n-ésimo orden 4.4 Derivadas parciales básicas 4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada (a máximos y mínimos). 4.6 Aplicaciones a ingresos costos y utilidades	• Aplicar propiedades de los límites y continuidad para resolver problemas. • Aplicar propiedades de tasa de cambio para resolver problemas. • Aplicar las formulas básicas de diferenciación para resolver ejercicios. • Aplicar las derivadas algebraicas para la obtención de las derivadas parciales algebraicas. • Identificar y determinar los puntos críticos de una ecuación.	• Propiciar, en el estudiante, el desarrollo de actividades intelectuales de inducción-deducción y análisis-síntesis, las cuales lo encaminan hacia la investigación, la aplicación de conocimientos y la solución de problemas. • Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes. • Propiciar el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los contenidos de la asignatura. • Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio argumentado de ideas, la reflexión, la integración y la colaboración entre los estudiantes. • Llevar a cabo actividades prácticas que promuevan el desarrollo de habilidades para la experimentación, tales como: observación, identificación manejo y control	Competencias instrumentales. ▪ Capacidad de análisis y síntesis. ▪ Capacidad de organizar y planificar. ▪ Conocimientos generales básicos. ▪ Conocimientos básicos de la carrera. ▪ Comunicación oral y escrita en su propia lengua. ▪ Conocimiento de una segunda lengua. ▪ Habilidades básicas de manejo de la computadora. ▪ Habilidades de gestión de información (habilidad para buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas. ▪ Solución de problemas. ▪ Toma de decisiones.	15-10

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 180 de 190

4.7 Análisis marginal	• Utilizar la aproximación marginal a la maximización de utilidades a través del criterio de la primera y segunda derivada en casos del área.	de de variables y datos relevantes, planteamiento de hipótesis, de trabajo en equipo. • Desarrollar actividades de aprendizaje que propicien la aplicación de los conceptos, modelos y metodologías que se van aprendiendo en el desarrollo de la asignatura. • Propiciar el uso adecuado de conceptos, y de terminología científico-tecnológica. • Proponer problemas que permitan al estudiante la integración de contenidos de la asignatura y entre distintas asignaturas, para su análisis y solución. • Relacionar los contenidos de la asignatura con el cuidado del medio ambiente; así como con las prácticas de una ingeniería con enfoque sustentable. • Observar y analizar fenómenos y problemáticas propias del campo ocupacional. • Relacionar los contenidos de esta asignatura con las demás del plan de estudios para desarrollar una visión interdisciplinaria en el estudiante.	Competencias interpersonales. • Capacidad crítica y autocrítica. • Trabajo en equipo. • Habilidades interpersonales. • Capacidad de trabajar en equipo interdisciplinario. • Capacidad de comunicarse con profesionales de otras áreas. • Apreciación de la diversidad y multiculturalidad. • Habilidad para trabajar en un ambiente laboral. • Compromiso ético. Competencias sistémicas. • Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica. • Habilidades de investigación. • Capacidad de aprender. • Capacidad de adaptarse a nuevas situaciones. • Capacidad de generar nuevas ideas (creatividad). • Liderazgo. • Conocimiento de culturas y costumbres de otros países. • Habilidad para trabajar en forma autónoma. • Capacidad para diseñar y gestionar proyectos.	
-----------------------	---	---	--	--

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 181 de 190

			• Iniciativa y espíritu emprendedor. • Preocupación por la calidad. • Búsqueda del logro.	
--	--	--	---	--

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Se adapta a situaciones y contextos complejos.	3%
B. Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas.	10%
C. Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase.	50%
D. Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico.	10%
E. Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje.	24%
F. Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada.	3%

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 182 de 190

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple al menos cinco de los indicadores de alcance	95-100
	Notable	Cumple cuatro de los indicadores definidos en desempeño excelente..	85-94
	Bueno	Cumple tres de los indicadores definidos en desempeño excelente.	75-84
	Suficiente	Cumple dos de los indicadores definidos en desempeño excelente.	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	NA

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 183 de 190

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance						Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	F	
Solución de problemas (Entrega de prácticas)	37	3			10	24		Rúbrica y apuntes
Trabajo de investigación	13		10				3	Rúbrica
Evaluación del conocimiento (Examen)	50			50				Examen
	Total	3	10	50	10	24	3	

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 184 de 190

Competencia No.: **5** Descripción: Aplicar las reglas de integración para resolver problemas de integrales definidas en la aplicación de problemas relativos a área económico y administrativo.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
5.1 Concepto de antiderivada 5.2 Reglas de integración directas 5.3 Integral definida 5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas	• Consultar el concepto de antiderivada y las reglas de integración básicas. • Resolver ejercicios sobre reglas de integración básicas. • Realizar ejercicios en equipos para diferenciar entre una integral definida y una indefinida. • Resolver en equipo ejercicios de integral definidas. • Aplicar las integrales definidas a problemas del área económica administrativas	• Propiciar, en el estudiante, el desarrollo de actividades intelectuales de inducción-deducción y análisis-síntesis, las cuales lo encaminan hacia la investigación, la aplicación de conocimientos y la solución de problemas. • Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes. • Propiciar el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los contenidos de la asignatura. • Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio argumentado de ideas, la reflexión, la integración y la colaboración entre los estudiantes. • Llevar a cabo actividades prácticas que promuevan el desarrollo de habilidades para la experimentación, tales como: observación, identificación manejo y control de de variables y datos relevantes,	Competencias instrumentales. ▪ Capacidad de análisis y síntesis. ▪ Capacidad de organizar y planificar. ▪ Conocimientos generales básicos. ▪ Conocimientos básicos de la carrera. ▪ Comunicación oral y escrita en su propia lengua. ▪ Conocimiento de una segunda lengua. ▪ Habilidades básicas de manejo de la computadora. ▪ Habilidades de gestión de información (habilidad para buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas. ▪ Solución de problemas. ▪ Toma de decisiones.	6-4

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 185 de 190

		planteamiento de hipótesis, de trabajo en equipo. • Desarrollar actividades de aprendizaje que propicien la aplicación de los conceptos, modelos y metodologías que se van aprendiendo en el desarrollo de la asignatura. • Propiciar el uso adecuado de conceptos, y de terminología científico-tecnológica. • Proponer problemas que permitan al estudiante la integración de contenidos de la asignatura y entre distintas asignaturas, para su análisis y solución. • Relacionar los contenidos de la asignatura con el cuidado del medio ambiente; así como con las prácticas de una ingeniería con enfoque sustentable. • Observar y analizar fenómenos y problemáticas propias del campo ocupacional. • Relacionar los contenidos de esta asignatura con las demás del plan de estudios para desarrollar una visión interdisciplinaria en el estudiante.	Competencias interpersonales. • Capacidad crítica y autocrítica. • Trabajo en equipo. • Habilidades interpersonales. • Capacidad de trabajar en equipo interdisciplinario. • Capacidad de comunicarse con profesionales de otras áreas. • Apreciación de la diversidad y multiculturalidad. • Habilidad para trabajar en un ambiente laboral. • Compromiso ético. Competencias sistémicas. • Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica. • Habilidades de investigación. • Capacidad de aprender. • Capacidad de adaptarse a nuevas situaciones. • Capacidad de generar nuevas ideas (creatividad). • Liderazgo. • Conocimiento de culturas y costumbres de otros países. • Habilidad para trabajar en forma autónoma. • Capacidad para diseñar y gestionar proyectos.	
--	--	---	--	--

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 186 de 190

			• Iniciativa y espíritu emprendedor. • Preocupación por la calidad. • Búsqueda del logro.	
--	--	--	---	--

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Se adapta a situaciones y contextos complejos.	3%
B. Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas.	10%
C. Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase.	50%
D. Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico.	10%
E. Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje.	24%
F. Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada.	3%

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 187 de 190

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple al menos cinco de los indicadores de alcance	95-100
	Notable	Cumple cuatro de los indicadores definidos en desempeño excelente..	85-94
	Bueno	Cumple tres de los indicadores definidos en desempeño excelente.	75-84
	Suficiente	Cumple dos de los indicadores definidos en desempeño excelente.	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	NA

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 188 de 190

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance						Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	F	
Solución de problemas (Entrega de prácticas)	37	3			10	24		Rúbrica y apuntes
Trabajo de investigación	13		10				3	Rúbrica
Evaluación del conocimiento (Examen)	50			50				Examen
	Total	3	10	50	10	24	3	

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 189 de 190

5. Fuentes de información y apoyos didácticos

Fuentes de información:

Apoyos didácticos:

1. Jean E. Weber. Matemáticas Para Administración y Economía, 4ª ed. Oxford University Press México, S. A. de C.V., 1984. 2. Frank S. Budnick. Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales. Editorial: McGrawHill. 3. Arya. Matemáticas aplicadas a la administración y economía. Editorial: Iberoamericana. 4. Draper J.E. Matemáticas para administración y economía. Editorial: Harla. 5. Ernest-Haeussler Jr. Richar S. Paul. Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida. Editorial: Prentice Hall. 6 Mizrahi-Sullivan. Matemáticas finitas con aplicaciones a la administración y economía. Editorial: Limusa-Wiley. 7 Software: Mathcad, Drive 6	Video proyector Laptop Software de simulación Pintarrón y marcadores
--	--

	Instrumentación Didáctica para la formación y desarrollo de Competencias		Código: ITCG-AC-PO-003-02
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2015	8.1, 8.2.2, 8.5.1	Página 190 de 190

6.- Calendarización de evaluación en semanas (6):

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
TP	ED EF1	EF1	EF1	ES1 EF1	EF2	EF2	ES2 EF3	EF3	ES3 EF4	EF4	EF4	EF4	ES4 EF5	EF5	EF5	ES5		
TR																		
SD																		

TP=tiempo planeado

TR=tiempo real

SD=seguimiento departamental

ED=evaluación diagnóstica

EF n =evaluación formativa (competencia específica n)

ES=evaluación sumativa

Fecha de elaboración: 19 de enero 2025

ERIC RAFAEL MENDEZ MARQUEZ

Docente

MARIA DE LOURDES FIERRO MONTALVO

Encargada del Departamento de Ciencias Básicas