

SEP

SES

TecNM

---

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA**

**“MÉTODOS ANALÍTICOS PARA RUTEO Y REDES  
DE DISTRIBUCIÓN LOGÍSTICA”**

**TITULACIÓN INTEGRAL:  
TESIS PROFESIONAL**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO EN LOGÍSTICA**

**PRESENTA:  
URIEL JOBSAN BESAREZ CERVANTES  
No. CONTROL:  
11280746**

**ASESORA:  
DRA. ANDREA TORRES TOLEDO**

METEPEC, ESTADO DE MÉXICO, FEBRERO DE 2019



**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA

Instituto Tecnológico de Toluca

Metepec, Edo. de México., **15/ENERO/2019**  
INGENIERÍA INDUSTRIAL  
I.I.350.55.2019

**ING. MIGUEL ÁNGEL TERRAZAS MAGAÑA**  
**JEFE DE LA DIV. DE ESTUDIOS PROFESIONALES**  
**PRESENTE**

Por este medio le informo a usted, que ha sido liberado el siguiente proyecto para la Titulación Integral:

|                     |                                                                 |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Nombre del Egresado | URIEL JOBSAN BESAREZ CERVANTES                                  |
| Carrera             | INGENIERIA EN LOGÍSTICA                                         |
| No. de control      | 11280746                                                        |
| Nombre del proyecto | MÉTODOS ANALÍTICOS PARA RUTEO Y REDES DE DISTRIBUCIÓN LOGÍSTICA |
| Producto            | TESIS PROFESIONAL                                               |

Agradezco de antemano su valioso apoyo en esta importante actividad para la formación profesional de nuestros egresados.

**A T E N T A M E N T E**  
*"Educación, integridad y ciencia"*

**M. EN A. LUIS TOMÁS AVALOS LÓPEZ**  
**JEFE DEL DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL**



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA  
TECNOLOGICO NACIONAL DE MÉXICO  
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA  
DEPARTAMENTO DE  
INGENIERÍA INDUSTRIAL

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA  
**RECIBIDO**  
8  
HORA *15/01/2019*  
OFICINA DE APOYO A LA TITULACIÓN

**DRA. ANDREA TORRES TOLEDO**  
ASESORA

**ING. MARÍA DEL ROSARIO LARA DELFÍN**  
REVISORA

**DR. MARCO ANTONIO GÓMEZ VÉLEZ**  
REVISOR

LTAL\*wgp



Av. Tecnológico S/N, Col. Agrícola Bellavista, C.P. 52149,  
Metepec, Estado de México. Tels. Dirección (01722) 208 7209, Subd. Académica 208 7207,  
Subd. de Planeación 208 7206, Subd. Administrativa 208 7208, Conmut. 208 72 00  
e-mail: info@toluca.tecnm.mx, www.toluca.tecnm.mx





**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Toluca

Metepec, Méx., a 22 de enero de 2019.

DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ASUNTO: Se Autoriza Impresión de Trabajo Profesional

**C. URIEL JOBSAN BESAREZ CERVANTES**  
PASANTE DE LA CARRERA DE  
INGENIERÍA EN LOGÍSTICA.

De acuerdo con el Reglamento de Titulación del Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica, dependiente de la Subsecretaría de Educación Superior de la Secretaría de Educación Pública y habiendo cumplido con todas las indicaciones que la Comisión Revisora realizó, con respecto a su trabajo profesional en la **OPCIÓN TITULACION INTEGRAL: TESIS PROFESIONAL**, con el tema denominado: **"MÉTODOS ANALÍTICOS PARA RUTEO Y REDES DE DISTRIBUCIÓN LOGÍSTICA."** La División de Estudios Profesionales concede su autorización para que proceda la impresión del mismo.

**A T E N T A M E N T E**

"Educación, Integridad y Ciencia"



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA  
TECNOLÓGICO NACIONAL  
DE MÉXICO  
ING. MIGUEL ÁNGEL TERRAZAS MAGAÑA  
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES.  
DIVISIÓN DE  
ESTUDIOS PROFESIONALES

MATM\*mpjl\*  
C.c.p. Expediente



Av. Tecnológico S/N, Col. Agrícola Bellavista, C.P. 52149,  
Metepec, Estado de México. Tels. Dirección (01722) 208 7205, Subd. Académica 208 7207,  
Subd. de Planeación 208 7206, Subd. Administrativa 208 7208, Comut. 208 72 00  
e-mail: info@toluca.tecnm.mx, www.toluca.tecnm.mx



## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrea, y haberme dado salud y sabiduría para lograr mis objetivos, además de su infinito amor.

A mis padres: Rebeca y José, en especial a mi mamá por apoyarme en todo momento, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida.

A mis hermanos: Abisai y Daniel por haberme apoyado en todo momento y por sus consejos.

A mi asesora de tesis: Dra. Andrea Torres por su apoyo que me brindó y por haberme compartido conmigo sus conocimientos.

A todos mis profesores por haber compartido conmigo sus conocimientos y experiencias.

Al Instituto Tecnológico de Toluca por haberme abierto sus puertas y por formarme para ser un profesionista de excelencia.

## **RESUMEN**

El presente trabajo explica el concepto, la formulación matemática y un caso de aplicación del Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) y sus variantes como uno de los problemas más difíciles de optimización en la logística y la administración de la cadena de suministro, entre los problemas de programación y diseño de rutas para las flotas de vehículos. Se presentan las metodologías para la resolución de problemas de ruteo con énfasis al VRP y sus extensiones, que son los métodos de Investigación de Operaciones que abarcan la Programación Lineal y Entera, las Técnicas Heurísticas y los Procedimientos Metaheurísticos, los cuales han sido desarrollados para modelar redes de distribución y se han tomado de base para desarrollar sistemas informáticos para planificar los procesos de entrega y recolección. Se aborda la simulación para solucionar e interpretar casos de aplicación VRP, porque este proceso permite predecir el comportamiento de los sistemas de distribución bajo diversas situaciones reales o previsibles y ofrece la capacidad de poder analizar las posibles alternativas a la optimización de los problemas de ruteo.

## ÍNDICE

|                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| INTRODUCCIÓN.....                                                         | 1   |
| CAPÍTULO I. MODELOS ANALÍTICOS PARA RUTEO .....                           | 10  |
| 1.1 Problema de Ruteo de Vehículos (VRP).....                             | 12  |
| 1.2 Problema de Ruteo de Vehículos con Restricciones de Carga.....        | 16  |
| 1.3 Problema de Ruteo de Vehículos con Recolección y Entrega (VRPPD)..... | 33  |
| 1.4 Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo (VRPTW).....    | 41  |
| 1.5 Problema de Ruteo de Vehículos con Viajes Múltiples (VRPMT) .....     | 45  |
| 1.6 Problema de Ruteo de Vehículos Abierto (OVRP).....                    | 52  |
| CAPÍTULO II. MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA PROBLEMAS DE RUTEO .....            | 59  |
| 2.1 Métodos exactos .....                                                 | 59  |
| 2.2 Métodos Heurísticos.....                                              | 65  |
| 2.3 Métodos Metaheurísticos .....                                         | 69  |
| CAPÍTULO III. SIMULACIÓN PARA PROBLEMAS DE RUTEO .....                    | 81  |
| 3.1 Ejemplo de aplicación VRP .....                                       | 82  |
| 3.2 Ejemplo de aplicación CVRP .....                                      | 92  |
| 3.3 Ejemplo de aplicación DCVRP .....                                     | 107 |
| 3.4 Ejemplo de aplicación VRPPD .....                                     | 118 |
| 3.5 Ejemplo de aplicación VRPTW .....                                     | 131 |
| 3.6 Ejemplo de aplicación VRPMT .....                                     | 142 |
| 3.7 Ejemplo de aplicación OVRP.....                                       | 159 |
| RESULTADOS .....                                                          | 173 |
| CONCLUSIONES .....                                                        | 175 |
| RECOMENDACIONES.....                                                      | 176 |
| REFERENCIAS .....                                                         | 177 |

## ÍNDICE DE TABLAS

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabla 1.1. Clientes y demandas para el VRP .....                                | 15  |
| Tabla 1.2. Clientes y demandas para el CVRP .....                               | 30  |
| Tabla 1.3. Clientes y demandas para el DCVRP.....                               | 33  |
| Tabla 1.4. Clientes y demandas para el VRPPD .....                              | 40  |
| Tabla 1.5. Clientes y demandas para el VRPTW .....                              | 44  |
| Tabla 1.6. Clientes y demandas para el VRPMT .....                              | 50  |
| Tabla 1.7. Clientes y demandas para el OVRP .....                               | 56  |
| Tabla 2.1. Clasificación de los metaheurísticos según la solución obtenida..... | 70  |
| Tabla 3.1. Coordenadas UTM del VRP .....                                        | 84  |
| Tabla 3.2. Coordenadas polares para el VRP .....                                | 87  |
| Tabla 3.3. Coordenadas polares de menor a mayor del VRP .....                   | 88  |
| Tabla 3.4. Ruteo para el VRP .....                                              | 91  |
| Tabla 3.5. Coordenadas UTM para el DCVRP .....                                  | 108 |
| Tabla 3.6. Distancias en kilómetros para el DCVRP .....                         | 109 |
| Tabla 3.7. Primera solución para el DCVRP .....                                 | 110 |
| Tabla 3.8. Ahorros para el DCVRP .....                                          | 111 |
| Tabla 3.9. Ahorros de mayor a menor para el DCVRP.....                          | 112 |
| Tabla 3.10. Segunda solución para el DCVRP.....                                 | 113 |
| Tabla 3.11. Tercera solución para el DCVRP .....                                | 113 |
| Tabla 3.12. Cuarta solución para el DCVRP .....                                 | 114 |
| Tabla 3.13. Quinta solución para el DCVRP .....                                 | 115 |
| Tabla 3.14. Ruteo para el DCVRP .....                                           | 115 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1.1. Grafo G del Problema de Ruteo de Vehículos .....                       | 14  |
| Figura 1.2. Ruta factible y no factible para el 2L-CVRP .....                      | 21  |
| Figura 1.3. Ejemplo del 3L-CVRP .....                                              | 24  |
| Figura 1.4. Posible carga tridimensional para el vehículo 1 de la figura 1.3 ..... | 24  |
| Figura 2.1. Tabla de programación dinámica .....                                   | 65  |
| Figura 3.1. Pantalla de las distancias en kilómetros para el VRP .....             | 86  |
| Figura 3.2. Pantalla de las coordenadas de los nodos VRP .....                     | 89  |
| Figura 3.3. Pantalla de la segmentación de los nodos VRP .....                     | 89  |
| Figura 3.4. Pantalla del ruteo para el VRP .....                                   | 90  |
| Figura 3.5. Pantalla de las restricciones para el CVRP .....                       | 95  |
| Figura 3.6. Pantalla de las direcciones y demandas para el CVRP .....              | 96  |
| Figura 3.7. Pantalla de las latitudes y longitudes para el CVRP .....              | 97  |
| Figura 3.8. Pantalla de la relación de nodos para el CVRP .....                    | 98  |
| Figura 3.9. Pantalla de las distancias y tiempos para el CVRP .....                | 99  |
| Figura 3.10. Pantalla de los vehículos para el CVRP .....                          | 99  |
| Figura 3.11. Pantalla de los valores de solución para el CVRP .....                | 100 |
| Figura 3.12. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el CVRP .....     | 101 |
| Figura 3.13. Pantalla de la ruta 1 para el CVRP .....                              | 101 |
| Figura 3.14. Pantalla de la ruta 2 para el CVRP .....                              | 102 |
| Figura 3.15. Pantalla de la ruta 3 para el CVRP .....                              | 102 |
| Figura 3.16. Pantalla de la ruta 4 para el CVRP .....                              | 102 |
| Figura 3.17. Pantalla de la ruta 5 para el CVRP .....                              | 103 |
| Figura 3.18. Pantalla de la ruta 6 para el CVRP .....                              | 103 |
| Figura 3.19. Pantalla de la ruta 7 para el CVRP .....                              | 103 |
| Figura 3.20. Pantalla de la ruta 8 para el CVRP .....                              | 103 |
| Figura 3.21. Pantalla de la ruta 9 para el CVRP .....                              | 104 |
| Figura 3.22. Pantalla de la ruta 10 para el CVRP .....                             | 104 |
| Figura 3.23. Pantalla de la ruta 11 para el CVRP .....                             | 104 |
| Figura 3.24. Pantalla de la ruta 12 para el CVRP .....                             | 104 |
| Figura 3.25. Pantalla del ruteo para el CVRP .....                                 | 105 |
| Figura 3.26. Pantalla de las coordenadas de los nodos DCVRP .....                  | 116 |
| Figura 3.27. Pantalla del ruteo para el DCVRP .....                                | 116 |

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 3.28. Pantalla de las restricciones para el VRPPD .....                  | 120 |
| Figura 3.29. Pantalla de las direcciones y demandas para el VRPPD .....         | 121 |
| Figura 3.30. Pantalla de las latitudes y longitudes para el VRPPD.....          | 122 |
| Figura 3.31. Pantalla de la relación de nodos para el VRPPD .....               | 123 |
| Figura 3.32. Pantalla de las distancias y tiempos para el VRPPD.....            | 124 |
| Figura 3.33. Pantalla de los vehículos para el VRPPD.....                       | 124 |
| Figura 3.34. Pantalla de los valores de solución para el VRPPD .....            | 125 |
| Figura 3.35. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el VRPPD ..... | 126 |
| Figura 3.36. Pantalla de la ruta 1 para el VRPPD .....                          | 126 |
| Figura 3.37. Pantalla de la ruta 2 para el VRPP .....                           | 127 |
| Figura 3.38. Pantalla de la ruta 3 para el VRPPD .....                          | 127 |
| Figura 3.39. Pantalla de la ruta 4 para el VRPP .....                           | 127 |
| Figura 3.40. Pantalla de la ruta 5 para el VRPPD .....                          | 127 |
| Figura 3.41. Pantalla de la ruta 6 para el VRPPD .....                          | 128 |
| Figura 3.42. Pantalla de la ruta 7 para el VRPPD .....                          | 128 |
| Figura 3.43. Pantalla de la ruta 8 para el VRPPD .....                          | 128 |
| Figura 3.44. Pantalla de la ruta 9 para el VRPPD .....                          | 128 |
| Figura 3.45. Pantalla de la ruta 10 para el VRPPD .....                         | 129 |
| Figura 3.46. Pantalla del ruteo para el VRPPD .....                             | 129 |
| Figura 3.47. Pantalla de las restricciones para el VRPTW .....                  | 134 |
| Figura 3.48. Pantalla de las direcciones y demandas para el VRPTW .....         | 135 |
| Figura 3.49. Pantalla de las latitudes y longitudes para el VRPTW .....         | 135 |
| Figura 3.50. Pantalla de la relación de nodos para el VRPTW .....               | 136 |
| Figura 3.51. Pantalla de las distancias y tiempos para el VRPTW .....           | 136 |
| Figura 3.52. Pantalla de los vehículos para el VRPTW .....                      | 137 |
| Figura 3.53. Pantalla de los valores de solución para el VRPTW.....             | 137 |
| Figura 3.54. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el VRPTW ..... | 138 |
| Figura 3.55. Pantalla de la ruta 1 para el VRPTW.....                           | 138 |
| Figura 3.56. Pantalla de la ruta 2 para el VRPTW.....                           | 139 |
| Figura 3.57. Pantalla de la ruta 3 para el VRPTW.....                           | 139 |
| Figura 3.58. Pantalla de la ruta 4 para el VRPTW.....                           | 139 |
| Figura 3.59. Pantalla de la ruta 5 para el VRPTW.....                           | 139 |
| Figura 3.60. Pantalla de la ruta 6 para el VRPTW.....                           | 140 |
| Figura 3.61. Pantalla del ruteo para el VRPTW.....                              | 140 |

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 3.62. Pantalla de las restricciones para el VRPMT1.....                  | 145 |
| Figura 3.63. Pantalla de las direcciones y demandas para el VRPMT1 .....        | 146 |
| Figura 3.64. Pantalla de las latitudes y longitudes para el VRPMT1 .....        | 147 |
| Figura 3.65. Pantalla de la relación de nodos para el VRPMT1 .....              | 147 |
| Figura 3.66. Pantalla de las distancias y tiempos para el VRPMT1.....           | 148 |
| Figura 3.67. Pantalla de los vehículos para el VRPMT1 .....                     | 148 |
| Figura 3.68. Pantalla de los valores de solución para el VRPMT1 .....           | 149 |
| Figura 3.69. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el VRPMT1..... | 149 |
| Figura 3.70. Pantalla de la ruta 1 para el VRPMT1 .....                         | 150 |
| Figura 3.71. Pantalla de la ruta 2 para el VRPMT1 .....                         | 150 |
| Figura 3.72. Pantalla del ruteo para el VRPMT1 .....                            | 151 |
| Figura 3.73. Pantalla de las restricciones para el VRPMT2.....                  | 152 |
| Figura 3.74. Pantalla de las direcciones y demandas para el VRPMT2 .....        | 153 |
| Figura 3.75. Pantalla de las latitudes y longitudes para el VRPMT2 .....        | 153 |
| Figura 3.76. Pantalla de la relación de nodos para el VRPMT2 .....              | 154 |
| Figura 3.77. Pantalla de las distancias y tiempos para el VRPMT2.....           | 154 |
| Figura 3.78. Pantalla de los vehículos para el VRPMT2 .....                     | 155 |
| Figura 3.79. Pantalla de los valores de solución para el VRPMT2 .....           | 155 |
| Figura 3.80. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el VRPMT2..... | 156 |
| Figura 3.81. Pantalla de la ruta 1 para el VRPMT2 .....                         | 156 |
| Figura 3.82. Pantalla de la ruta 2 para el VRPMT2 .....                         | 157 |
| Figura 3.83. Pantalla del ruteo para el VRPMT2 .....                            | 157 |
| Figura 3.84. Pantalla de las restricciones para el OVRP .....                   | 162 |
| Figura 3.85. Pantalla de las direcciones y demandas para el OVRP.....           | 163 |
| Figura 3.86. Pantalla de las latitudes y longitudes para el OVRP .....          | 164 |
| Figura 3.87. Pantalla de la relación de nodos para el OVRP.....                 | 165 |
| Figura 3.88. Pantalla de las distancias y tiempos para el OVRP .....            | 166 |
| Figura 3.89. Pantalla de los vehículos para el OVRP.....                        | 167 |
| Figura 3.90. Pantalla de los valores de solución para el OVRP .....             | 167 |
| Figura 3.91. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el OVRP .....  | 168 |
| Figura 3.92. Pantalla de la ruta 1 para el OVRP .....                           | 168 |
| Figura 3.93. Pantalla de la ruta 2 para el OVRP .....                           | 169 |
| Figura 3.94. Pantalla de la ruta 3 para el OVRP .....                           | 169 |
| Figura 3.95. Pantalla de la ruta 4 para el OVRP .....                           | 169 |

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| Figura 3.96. Pantalla de la ruta 5 para el OVRP ..... | 170 |
| Figura 3.97. Pantalla del ruteo para el OVRP .....    | 170 |

## INTRODUCCIÓN

La presente tesis tiene por objeto realizar un análisis de los diferentes modelos teórico matemáticos que han sido desarrollados para modelar redes de distribución logística. La importancia de esta investigación de métodos analíticos de ruteo para los profesionistas y especialistas de la ingeniería en logística y transporte, influyen en sus capacidades analíticas ya que deben atender la distribución de productos y bienes, gestionar los factores que inciden en los sistemas de transporte, e implementar proyectos enfocados a la optimización de la programación y diseño de rutas para las flotas de vehículos que tienen a su disposición.

En la actualidad, la distribución física representa para las empresas un porcentaje alto en sus costos logísticos, ya que siguen diseñando de manera empírica sus sistemas de distribución. En la planeación de rutas existe una gran variedad de soluciones que pueden ser evaluadas antes de encontrar la mejor, y que esto, sólo puede lograrse con la aplicación de técnicas avanzadas de modelación. Se han desarrollado sistemas informáticos de ruteo basados en modelos matemáticos utilizados para establecer rutas óptimas de las flotas de transporte y para atender cualquier cantidad de clientes dispersos en un área geográfica. Por este motivo es fundamental el conocimiento de las principales características de los diferentes modelos para ruteo.

En el capítulo I se explica el concepto, la formulación matemática y el planteamiento de un ejemplo de aplicación del Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) y sus variantes siguientes: Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados (CVRP) donde los medios de transporte tienen una restricción de capacidad de carga, Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados con Restricción de Distancia (DCVRP) donde se impone la capacidad del vehículo y la limitación de distancia, Problema de Ruteo de Vehículos con Recolección y Entrega (VRPPD) en este caso los transportes deben recolectar y entregar productos en cantidades específicas para cada cliente visitado, Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo (VRPTW) este problema plantea que cada cliente tiene que ser atendido de manera obligada dentro de un cierto horario específico, Problema de Ruteo de Vehículos con Viajes Múltiples (VRPMT) donde los vehículos pueden hacer más de una ruta y el Problema de Ruteo de Vehículos

Abierto (OVRP) se refiere cuando el vehículo no regresa al almacén de origen y se dirige a otro sitio para cargar productos.

En el capítulo II se presentan las metodologías para la resolución de problemas de ruteo, las cuales se dividen en tres principales: los métodos exactos son procesos para encontrar la mejor solución posible a un problema de optimización; los métodos heurísticos abarcan procedimientos que tratan de descubrir una solución factible muy buena, pero no necesariamente una solución óptima; y los métodos metaheurísticos son técnicas para diseñar estrategias heurísticas de solución que se ajustan a un tipo particular de problema.

En el capítulo III se ofrece la solución e interpretación de los ejemplos de aplicación planteados en el primer capítulo , mediante la simulación de Problemas de Ruteo de Vehículos a través de: la plantilla de mapas GeoHack desarrollada por la Fundación Wikipedia, para conseguir las coordenadas de los almacenes y los clientes; el programa AutoCAD® comercializado por la empresa Autodesk Inc., para obtener coordenadas polares; Microsoft Excel® distribuido por Microsoft Corporation, para graficar coordenadas y obtener distancias entre puntos, y el vrp\_solver\_v1.05 desarrollado por el Dr. Günes Erdogan para la representación, la solución y la visualización de los resultados de rutas para problemas VRP.

## ANTECEDENTES

El Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) se refiere a un modelo matemático difícil de optimización y poco aplicado a redes logísticas, el cual consiste en determinar un conjunto de rutas eficientes para una flota de vehículos que parten de uno o más almacenes para satisfacer la demanda de varios clientes dispersos geográficamente.

En México se encuentra el trabajo de Sánchez (2015) quien explica que el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) es un problema altamente combinatorio por lo que la búsqueda de la solución óptima se vuelve un problema desafiante, para encontrar una solución óptima, requiere de algoritmos que consumen un tiempo de cómputo elevado. El VRP está dentro de los problemas en los que un aumento en el número de nodos del grafo (clientes o puntos de paso) supone un aumento exponencial del tiempo de ejecución, y rápidamente sobrepasa las capacidades de cálculo de los ordenadores más potentes. López (2015) menciona que el objetivo de su investigación es estudiar y proponer nuevas formulaciones lineales para el Problema de Ruteo de Vehículos con restricciones adicionales de sincronización; la primera de ellas es la formulación de modelos para el Problema de Vehículos Sincronizado (SVRP) y la segunda consiste en un análisis comparativo de los modelos propuestos y de los existentes en la literatura.

En Colombia se halla la investigación de Niño (2017) de la Universidad Industrial de Santander, quien explica el Problema de Ruteo de Vehículos de dos escalones (2E-CVRP) en el cual se extiende la búsqueda de rutas que minimicen el costo asociado al transporte de los vehículos, para dos escalones; el primero de ellos que conecta la carga desde un depósito central hasta su consolidación en depósitos intermedios denominados satélites; y el segundo que enlaza la carga de los satélites con el cliente final, para satisfacer de esta forma su demanda. Sarmiento (2014) propone que el Problema de Ruteo de Vehículos está bajo un enfoque multi-objetivo, en el cual se incorpora además de la minimización de la distancia, el balance de carga como objetivo de optimización, donde se evidencia que el balance de carga es un objetivo que se ha estudiado poco y en la mayoría de los trabajos analizados se ha considerado el balance de carga desde la perspectiva de la longitud de las rutas.

En la Universidad Mohammed V de Marruecos, Ayadi & Benadada (2013) proponen un modelo matemático para el Problema de Ruteo de Vehículos con Viajes Múltiples (VRPM), este problema es una variante del problema de ruteo de vehículos donde los vehículos se les permiten tomar más de una ruta durante la jornada laboral. Una restricción del tamaño de la flota se utiliza con el fin de atender la demanda de los clientes. Por lo tanto, los vehículos podrían superar el horizonte de tiempo. El objetivo es optimizar tanto las horas extraordinarias y el costo máximo de ruteo.

En la Universidad de Vilnius en Lituania, Vaira (2014) explica que el Problema de Ruteo de Vehículos atrae mucha atención debido al creciente interés en diversas soluciones y tecnologías geográficas, así como su uso en logística y transporte; es por eso que se pueden encontrar muchas investigaciones sobre diferentes enfoques heurísticos para la solución del VRP, donde se analizan situaciones y restricciones específicas.

Walker (2015) de la Universidad de Nottingham en Reino Unido, propone que a través de la provisión de datos y herramientas de alta calidad para una hiper-heurística, se pueden lograr mejores resultados. Se proporciona una definición que describe los componentes de un dominio de problema para las hiperheurísticas; y sobre la base de esta definición, se presenta un dominio para el Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo.

## **Definición del problema**

Actualmente en los problemas de programación y diseño de rutas para las flotas de vehículos son ricos en variedad en el número y tipo de restricciones que pueden aplicarse, entre ellos destaca el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) y sus variantes como modelos en el diseño de rutas de transporte, desde aquellos sencillos hasta mucho más complejos que hoy en día son materia de investigación.

En cuanto a los métodos matemáticos de solución para el VRP y sus variantes destacan los métodos exactos, heurísticos y metaheurísticos, los cuales han sido desarrollados para modelar redes de distribución logística y se han tomado de base para desarrollar sofisticados sistemas informáticos para planificar la distribución. La importancia de la planeación de ruteo que enfrentan diariamente los operadores logísticos, dentro de la operación logística de las empresas, están todas las decisiones que se tienen que tomar a fin de utilizar las flotas de vehículos de la manera más eficiente posible.

En México existe poca investigación del modelo VRP y sus extensiones, ya que la mayoría de las empresas en sus procesos de entrega y reparto no utilizan modelos matemáticos para el diseño de rutas, sino que éstas se apoyan principalmente en la experiencia; además no se enfocan a minimizar los costos y las distancias recorridas, o maximizar el uso de la capacidad de los vehículos, ya que se enfocan a efectuar la distribución física cumpliendo con las restricciones operativas que se tengan.

Por lo cual nos lleva a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son y en qué consisten los principales modelos de investigación de operaciones aplicados a las redes de distribución logística?

## **Objetivo general**

Realizar un análisis de los diferentes modelos teórico matemáticos que han sido desarrollados para modelar redes de distribución logística.

## **Objetivos específicos**

1. Realizar el análisis y caracterización del modelo VRP (Problema de Ruteo de Vehículos).
2. Hacer el análisis y caracterización del modelo CVRP (Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados).
3. Proceder el análisis y caracterización del modelo DCVRP (Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados con Restricción de Distancia).
4. Desarrollar el análisis y caracterización del modelo VRPPD (Problema de Ruteo de Vehículos con Recolección y Entrega).
5. Efectuar el análisis y caracterización del modelo VRPTW (Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo).
6. Elaborar el análisis y caracterización del modelo VRPMT (Problema de Ruteo de Vehículos con Viajes Múltiples).
7. Ejecutar el análisis y caracterización del modelo OVRP (Problema de Ruteo de Vehículos Abierto).

## **Hipótesis**

Dado que es una investigación de tipo cualitativa, no se plantea una hipótesis como tal, en este caso se formulan los siguientes supuestos:

1. El Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) destaca de los problemas de programación y diseño de rutas que son ricos en variedad en el número de restricciones.
2. El Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) aparece como un área importante de investigación en la logística.
3. El Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) es uno de los problemas más difíciles de optimización.
4. Existe una gama de variantes de Problemas de Ruteo de Vehículos (VRP) con restricciones únicas.
5. Los modelos de investigación de operaciones son aplicados para modelar redes de distribución.
6. Las Técnicas Heurísticas y Metaheurísticas son utilizadas para la resolución de problemas de redes de distribución logística.
7. La Teoría de Grafos es una herramienta para la solución del Problema de Ruteo de Vehículos (VRP).

## **Justificación**

Con la presente investigación se desea beneficiar al sector transporte, a los investigadores de modelización y optimización de redes de transporte, a los especialistas de la logística de distribución y a los profesionistas de ingeniería en logística y transporte; realizando un análisis de los diferentes modelos teórico matemáticos que han sido desarrollados para modelar redes de distribución logística, logrando la optimización del transporte y mejorar la programación de rutas para minimizar los tiempos de recibo y de entrega, satisfaciendo al cliente y minimizando los costos de transporte.

Este trabajo pretende apoyar a la investigación en aplicaciones de modelos de optimización de redes, en los cuales se generaran diferentes alternativas de soluciones a problemas de vehículos con métodos teóricos matemáticos.

Al realizar el análisis y caracterización de los modelos teórico matemáticos para modelar redes de distribución logística, los resultados que se obtengan a través de estos modelos se colocaran a disposición de los investigadores y se podrá generar pruebas en el sector industrial y de servicios.

## **Alcances**

Esta investigación tiene un alcance descriptivo de corte cualitativo, ya que se hará un análisis de los diferentes modelos teórico matemáticos que han sido desarrollados para modelar redes de distribución logística.

Dentro de los modelos aplicados a la planeación de rutas se va a analizar el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) y sus variantes siguientes: Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados (CVRP), Problema de Ruteo de Vehículos con limitaciones de Carga de dos Dimensiones (2L-CVRP), Problema de Ruteo de Vehículos con limitaciones de Carga de tres Dimensiones (3L-CVRP), Problema de Ruteo de Vehículos con LIFO, Problema de Ruteo de Camiones y Remolques (TTRP), Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados con Restricción de Distancia (DCVRP), Problema de Ruteo de Vehículos con Recolección y Entrega (VRPPD), Problema de Ruteo de Vehículos con viajes de regreso (VRPB), Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo (VRPTW), Problema de Ruteo de Vehículos con Viajes Múltiples (VRPMT) y Problema de Ruteo de Vehículos Abierto (OVRP).

En cuanto a los métodos de solución para los modelos del VRP y sus variantes destacan los métodos exactos, métodos heurísticos y métodos metaheurísticos con un enfoque de optimización. En la resolución de los problemas de ruteo planteados se utilizarán programas informáticos.

## **Limitaciones**

Esta investigación no va a abarcar las extensiones de los modelos siguientes: VRPPD, VRPB, VRPTW, VRPMT y OVRP de un amplio conjunto de problemas personalizados que hoy en día siguen siendo materia de investigación. Se desarrollan ejemplos teóricos para la simulación de problemas de ruteo.

## **CAPÍTULO I. MODELOS ANALÍTICOS PARA RUTEO**

El Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) es uno de los problemas más difíciles de optimización en logística y en la administración de la cadena de suministro, ya que consiste en la creación de rutas eficientes. Toth & Vigo (2014) explican que este problema trata de determinar el conjunto óptimo de rutas a realizar por una flota de vehículos para servir a un conjunto determinado de clientes, y es uno de los más importantes y estudiado problemas de optimización combinatoria.

Han transcurrido más de 40 años desde que Dantzig & Ramser (como se citó en Toth & Vigo, 2014) introdujeron el problema en 1959. Ellos describieron una aplicación en el mundo real en relación con la entrega de la gasolina a la estación de servicio y propusieron la primera formulación de la programación matemática y enfoque algorítmico. Unos años más tarde en 1964, Clarke & Wright (como se citó en Toth & Vigo, 2014) aportaron una propuesta de algoritmo voraz que mejoraba la aproximación algorítmica de Dantzig y Ramser. Después de estos dos trabajos iniciales, se propusieron cientos de modelos y algoritmos para la solución óptima y aproximada de las diferentes versiones del VRP.

En la denominación del Problema de Ruteo de Vehículos (VRP), Rodríguez (2010) explica que realmente se engloba todo un amplio conjunto de variantes y personalizaciones de problemas. Desde aquellos más sencillos hasta algunos mucho más complejos que incluso hoy en día son materia de investigación.

Caicedo et al (2010) plantean que la Teoría de Grafos es una herramienta para la solución de Problemas de Ruteo de Vehículos (VRP), y ocupa hoy en día un lugar muy importante entre los conocimientos básicos que deben adquirir las personas que se dedican al estudio de las ciencias de la computación, las matemáticas aplicadas, la teoría de la optimización y la planeación estratégica. Además la Teoría de Grafos puede servir para el modelamiento de sistemas, la simulación, la estructura de datos y el análisis y diseño de algoritmos.

Los grafos se presentan con frecuencia en la vida real, tal es el caso de una red de carreteras que enlace un cierto grupo de ciudades; aquí los nodos de la red o ciudades representan los vértices del grafo, las carreteras que unen las ciudades representan los arcos o aristas; así a cada arco se asocia una información tal como la distancia entre ciudades, consumo de gasolina y costo de mantenimiento.

Los conceptos básicos de la Teoría de Grafos son:

Un grafo  $G$  consta de un conjunto de vértices o nodos  $V$  y un conjunto de arcos  $A$ , cada uno de los cuales une un vértice con otro:  $G = (V, A) = (N, A)$ .

Los arcos que unen los nodos también se llaman aristas del grafo y se representan por medio de un par de elementos  $(v_i, v_j)$ , donde los elementos son los nodos que une el arco. Los nodos de un grafo se pueden usar para representar los objetos y los arcos para representar relaciones entre esos objetos.

Si en un grafo los arcos tienen una dirección, el grafo se llama grafo dirigido u orientado. En un grafo orientado cada arco se representa por medio de un par ordenado  $(v_i, v_j)$  donde el primer elemento es el nodo origen o fuente y el segundo es el nodo destino de ese arco, por lo tanto se puede decir que el arco va desde  $v_i$  hasta  $v_j$  y que  $v_j$  es adyacente a  $v_i$ . Un grafo orientado también se llama un dígrafo. Si los arcos del grafo no indican una dirección, el grafo es no dirigido y en cada arco se puede representar nombrando los nodos que lo forman sin importar el orden es decir:  $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$ .

El número de nodos de un grafo se llama orden del grafo y se denota como:  $\text{ord}(G) = |N(G)| = N$ . El número de aristas o arcos es  $|A(G)| = A = \text{talla de } G = e(G)$ .

Una trayectoria  $T$  en un grafo es una secuencia de nodos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tal que  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)$  son arcos. Cuando los vértices de una trayectoria son todos distintos,

excepto posiblemente el primero y el último, la trayectoria se define como una trayectoria simple. Una trayectoria que comienza y termina en el mismo nodo se llama un ciclo o circuito.

En el punto de la optimización de redes, Taha (2012) describe que una red consiste en una serie de nodos enlazados con arcos (o ramas). La notación para describir una red es  $(N, A)$  donde  $N$  es el conjunto de nodos y  $A$  es el conjunto de arcos. Cada red se asocia algún tipo de flujo. En general, el flujo en una red está limitado por la capacidad de sus arcos, que pueden ser finitos o infinitos. Se dice que un arco es dirigido u orientado si permite un flujo positivo en una dirección, y flujo cero en la dirección opuesta. Una red dirigida tiene todos sus arcos dirigidos. Una ruta es una sucesión de arcos distintos que unen dos nodos pasando por otros nodos, independientemente de la dirección de flujo en cada arco. Una ruta forma un ciclo si conecta un nodo consigo mismo, pasando por otros nodos. Una red conectada es aquella en que cada dos nodos distintos están enlazados al menos por una ruta.

## **1.1 Problema de Ruteo de Vehículos (VRP)**

Los componentes fundamentales del Problema de Ruteo de Vehículos (VRP), Farahani et al (2011) definen que son la red de carreteras, los clientes, los depósitos, los vehículos y los conductores. Para hacer diferentes versiones de VRP, diferentes limitaciones y situaciones pueden ser impuestas a cada componente, y cada uno de ellos se puede suponer para lograr los objetivos particulares. En resumen, la solución del VRP determina a un conjunto de rutas que comienzan y terminan en su propio depósito, cada una realizada por un solo vehículo de una manera que minimice el costo de transporte global y cumpla con las demandas de los clientes y las restricciones operativas.

Una definición genérica del Problema de Ruteo de Vehículos (VRP), Toth & Vigo (2014) lo plantean como aquel plan para determinar un conjunto de rutas de vehículos para realizar todas (o algunas) solicitudes de transporte, con la flota de transportes a un costo mínimo; en particular, decidir qué medio de transporte se encarga de que solicitudes y en que secuencia, para que todas las rutas de camiones puedan realizarse factiblemente.

El Problema de Ruteo de Vehículos (VRP), Duarte (2007) lo define que consiste en obtener el conjunto de rutas más cortas posibles utilizando un conjunto de transportes lo más pequeño posible tal que, partiendo de un almacén y regresando sucesivamente a él, abastecen a una serie de clientes distribuidos geográficamente, teniendo en cuenta que cada camion tiene una capacidad máxima propia y la cantidad de producto demandada por los clientes es diferente.

Por su parte Golden et al (2008) explican que el Problema de Ruteo de Vehículos es determinar un conjunto de rutas de vehículos de menor costo, de tal manera que:

- Cada vértice, aparte del depósito, es visitado exactamente una vez por un vehículo exactamente para atender la demanda.
- Todas las rutas de vehículos inician y terminan en el depósito.
- La demanda total de cada ruta no exceda la capacidad del vehículo.

A veces, un costo fijo es asociado con cada vehículo. El objetivo es entonces dirigido a minimizar una suma ponderada de los costos fijos y los gastos de viaje. Una restricción de distancia o tiempo máximo puede considerarse también, además de la restricción de capacidad, para cada ruta del vehículo.

### 1.1.1 Planteamiento del modelo VRP

Duarte (2007) plantea en términos de teoría de grafos al VRP clásico como, sea  $G$  un grafo donde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  es el conjunto de vértices y  $A = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V, i \neq j\}$  es el conjunto de arcos. El vértice  $v_0$  representa el depósito, donde tiene su base una flota de  $m$  vehículos idénticos de capacidad  $Q$ , y los vértices restantes  $V' = V \setminus \{v_0\}$  representan la localización de los clientes. Se define una matriz de costos  $C = \{c_{ij}\}$  no negativa que satisface que  $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$ . Se dice que el problema es simétrico cuando  $c_{ij} = c_{ji} \forall (v_i, v_j) \in A$ . En este caso, se suele sustituir  $A$  por el vector de aristas  $E = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ . Se asume que  $m \in [\bar{m}, \underline{m}]$  con  $\underline{m} = 1$  y  $\bar{m} = n - 1$ . El valor de  $m$  puede ser una variable o una constante,

dependiendo de la aplicación. A cada vértice se le asocia una cantidad  $q_i$  que representa la cantidad de producto que demanda. El VRP consiste en determinar un conjunto de  $m$  de rutas con costo total mínimo, comenzando y terminando en el depósito  $v_0$ , tal que cada vértice  $v_i \in V'$  se visite exactamente una vez por un vehículo y la cantidad total de producto repartido en cada ruta no exceda la capacidad  $Q$  del vehículo que sirve la ruta.

En la figura 1.1 se representa un Problema de Ruteo de Vehículos en un grafo  $G$ . Las líneas gruesas representan una posible solución al problema dado, por las rutas  $m_1 = [v_0, v_2, v_3, v_1, v_0]$ ,  $m_2 = [v_0, v_4, v_7, v_5, v_0]$  y  $m_3 = [v_0, v_6, v_8, v_9, v_0]$ .

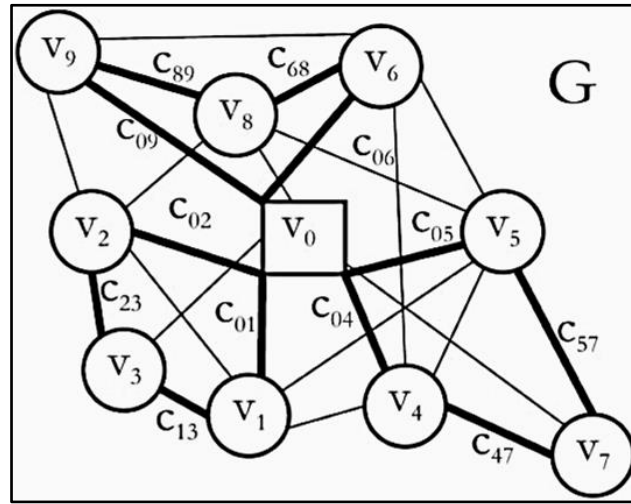


Figura 1.1. Grafo  $G$  del Problema de Ruteo de Vehículos

Se define una solución al VRP como un conjunto de  $m$  rutas,  $s = \{R_1, \dots, R_m\}$ , donde cada  $R_k = (v_0, v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_0)$  es un conjunto ordenado que representa vertices consecutivos en la ruta  $K$ . De modo que el VRP puede formularse matemáticamente de la siguiente manera:

$$VRP = \begin{cases} \min: \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} c_{\pi^k(i)} \pi^k(i+1) & (1.1) \\ \text{s. a.,} \\ \sum_{i=1}^{n_k} q_{\pi^k(i)} \leq Q_k \quad \forall k \in [1, m] & (1.2) \\ \sum_{k=1}^m n_k \leq n & (1.3) \end{cases}$$

### 1.1.2 Ejemplo de aplicación VRP

La empresa OneD posee un almacén central en la ciudad de Toluca en el que mantiene mercancía para 20 farmacias en el Estado de México. Los pedidos del día martes a suministrar por el almacén a los clientes de la zona se reflejan en la tabla 1.1. En este día hay que entregar una demanda total de 868 paquetes. La flota de vehículos que posee la empresa es de 8 camiones con una capacidad de 200 paquetes cada uno. El precio de un litro de combustible es de \$ 20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L.

*Tabla 1.1. Clientes y demandas para el VRP*

| Nombre     | Localidad                                 | Demanda | ID |
|------------|-------------------------------------------|---------|----|
| almacén    | Toluca, Estado de México                  | 0       | 0  |
| cliente 1  | Cuautitlán, Estado de México              | 47      | 1  |
| cliente 2  | Ixtapan de la Sal, Estado de México       | 55      | 2  |
| cliente 3  | Almoloya de Juárez, Estado de México      | 33      | 3  |
| cliente 4  | Huehuetoca, Estado de México              | 41      | 4  |
| cliente 5  | Ixtapan del Oro, Estado de México         | 39      | 5  |
| cliente 6  | Aculco, Estado de México                  | 36      | 6  |
| cliente 7  | Jilotepec, Estado de México               | 40      | 7  |
| cliente 8  | Malinalco, Estado de México               | 57      | 8  |
| cliente 9  | Calimaya, Estado de México                | 59      | 9  |
| cliente 10 | San Felipe del Progreso, Estado de México | 33      | 10 |
| cliente 11 | Tecámac, Estado de México                 | 45      | 11 |
| cliente 12 | Tultepec, Estado de México                | 42      | 12 |
| cliente 13 | Zinacantepec, Estado de México            | 41      | 13 |
| cliente 14 | Mexicaltzingo, Estado de México           | 41      | 14 |
| cliente 15 | Tonanitla, Estado de México               | 52      | 15 |
| cliente 16 | Otzolotepec, Estado de México             | 42      | 16 |
| cliente 17 | Temoaya, Estado de México                 | 46      | 17 |
| cliente 18 | Tejupilco, Estado de México               | 50      | 18 |
| cliente 19 | Acambay, Estado de México                 | 39      | 19 |
| cliente 20 | Lerma, Estado de México                   | 30      | 20 |

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.1 es organizar rutas para entregar las cargas demandadas a cada uno de los clientes, partiendo de la ciudad de Toluca, el objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga y se obtenga un resultado para las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuántas rutas se obtienen del proceso de distribución?
- b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

La resolución de este problema se presenta en el capítulo III con el método de Barridos, además se ofrece la interpretación del caso mediante una simulación de problemas de ruteo de vehículos.

## 1.2 Problema de Ruteo de Vehículos con Restricciones de Carga

Toth & Vigo (2014) explican que un aspecto clave a considerar en la definición de diversas variantes VRP es el tipo de restricciones que determinan si es o no una ruta factible. Común a estas restricciones llamadas intra-ruta (también llamadas restricciones locales) es que se pueden comprobar una vez que se conoce una ruta individual (la secuencia de vértices), independientemente de lo que son las otras rutas.

Las limitaciones de capacidad, tal como se presenta para el CVRP, pertenecen al más simple tipo de limitaciones, ya que se pueden escribir como un límite global de un recurso que se consume en cada vértice del vehículo alcance:

$$\sum_{i \in V} q_i y_{ik} \leq Q \quad \forall k \in K \quad (1.4)$$

En lugar de (1.4), varias limitaciones con sus correspondientes coeficientes  $q_1$  y  $Q$  se deben añadir al modelo. Las limitaciones de carga más complejas ocurren cuando tanto los embarques y los compartimentos de carga se describen ya sea por cantidades de 2 dimensiones o 3 dimensiones. En estas variantes del VRP, se combinan los problemas de embalaje multidimensional y los VRPs.

### **1.2.1 Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados (CVRP)**

El Problema de Ruteo de Vehículos (CVRP), Toth & Vigo (2014) definen que este problema es un VRP clásico en el que los vehículos de la flota tienen una capacidad determinada e igual para todos ellos. El objetivo es el mismo pero debemos añadir la restricción de la capacidad: la suma de las demandas de las ciudades que se visitan en cada ruta no puede exceder la capacidad del vehículo.

Rodríguez (2010) plantea que el Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados (CVRP), trata de determinar los recorridos de  $K$  vehículos de capacidad  $c_k$  que partiendo de un origen común deben pasar por un conjunto de lugares de interés (clientes) para recoger o distribuir mercancías según una demanda  $d_i$ , y volver de nuevo al origen de manera que la distancia total recorrida (el costo o el tiempo empleado) por el conjunto de vehículos sea mínima. En el tipo de problema más sencillo no se tiene en cuenta el horario de entrega o recogida en cada lugar de interés (ventanas horarias).

#### **1.2.1.1 Planteamiento del modelo CVRP**

Toth & Vigo (2014) formulan el CVRP como: Sea  $G = (V, A)$  un grafo donde  $V = \{0, \dots, n\}$  es el conjunto de vértices, o clientes, con el depósito ubicado en el vértice 0, y  $A$  es el conjunto de arcos que los unen. Para cada arco  $(i, j), i \neq j$ , existe un costo no negativo asociado  $c_{ij}$  que suele ser interpretado como el costo o el tiempo en el que se incurre al viajar de  $i$  a  $j$ . Generalmente, el uso de arcos de la forma  $(i, i)$  no está permitido lo que se suele imponer

fijando  $c_{ii} = \infty \forall i \in V$ . Además, a cada cliente  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) se le asocia una demanda no negativa  $d_i$  que le debe ser entregada. Al depósito se le asigna una demanda ficticia  $d_0 = 0$ . Dado un conjunto  $S \subseteq V$ , se define  $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$  como la demanda total del conjunto. Un conjunto de  $K$  vehículos iguales, todos con la misma capacidad  $C$ , está disponible en el depósito. Para asegurar la viabilidad, se asume que  $d_i \leq C$  y que  $K$  no es más pequeño que  $K_{min}$ . El valor de  $K_{min}$  se determina a través del problema de cubicación (Problema de Embalaje) asociado al CVRP.

Rodríguez (2010) explica que a partir de este problema básico aparecen todo un conjunto de extensiones o particularizaciones. Por ejemplo, la función objetivo podría ser:

- Minimizar el número total de vehículos (o conductores) requeridos para dar servicio a todos los clientes.
- Minimizar los costos fijos asociados con el uso de los vehículos (o los conductores).
- Minimizar el costo total de transporte (costo fijo más variable de la ruta).
- Balancear las rutas, por tiempo de viaje o carga de vehículo.
- Minimizar las penalizaciones asociadas para un servicio parcial a los clientes.

A continuación se muestra el modelo completo del problema:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} \sum_{k=1}^K x_{ij} \quad (1.5)$$

y está sujeto a las restricciones:

$$\sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (1.6)$$

$$\sum_{k=1}^K y_{0k} = K \quad (1.7)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ijk} = \sum_{j \in V} x_{jik} = y_{ik} \quad \forall i \in V, k = 1 \dots K \quad (1.8)$$

$$\sum_{i \in V} d_i y_{ik} \leq c_k \quad \forall k = 1 \dots K \quad (1.9)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ijk} \geq y_{hk} \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, h \in S, k = 1 \dots K \quad (1.10)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V, k = 1 \dots K \quad (1.11)$$

$$y_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V, k = 1 \dots K \quad (1.12)$$

Para un conjunto  $i, j$  de nodos del grafo, se expresa la función objetivo (1.5) que intentará minimizar el costo total de todos los arcos recorridos en la solución. La variable binaria  $x_{ijk}$  indica si el vehículo  $k$  tendrá una ruta utilizando el arco  $i, j$ . Mientras, la variable binaria  $y_{ik}$  indica si el nodo  $i$  con demanda  $d_i$  será atendido por el vehículo  $k$  con capacidad  $c_k$ . Las restricciones (1.6)-(1.8) imponen que cada cliente sea visitado una vez, que  $K$  vehículos abandonen el depósito y que el mismo número de vehículos entren y salgan de cada cliente, respectivamente. Las ecuaciones (1.9) son las restricciones de capacidad de los vehículos y (1.10) son las restricciones de rotura de sub-circuito.

### 1.2.2 Problema de Ruteo de Vehículos con limitaciones de Carga de dos Dimensiones (2L-CVRP)

En el Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados con limitaciones de Carga de 2 Dimensiones (2L-CVRP), Iori et al (como se citó en Toth & Vigo, 2014) describen que los envíos son elementos rectangulares que tienen que estar asignados factiblemente a un compartimiento rectangular. Por otra parte, los artículos enviados al mismo cliente deben llegar con el mismo vehículo (restricción de la agrupación del artículo), y los artículos pueden o no pueden ser rotados (restricción de la orientación del artículo). Cuando la entrega de un artículo, no hay artículos de clientes entregados más adelante a lo largo de la ruta podrán determinar, ni siquiera parcialmente, en el área rectangular entre ese artículo y la puerta del vehículo. Esto es una restricción de carga secuencial. Como en el CVRP, una restricción de capacidad con respecto al peso (Kg) debe tenerse en cuenta también.

Iori et al (2007) explican que en el 2L-CVRP todos los vehículos son idénticos, tienen una capacidad de peso conocido y una sola superficie de carga rectangular que se puede acceder sólo desde un lado. La demanda de cada cliente se define por un conjunto de elementos rectangulares con determinado tamaño, la orientación y el peso. Todos los elementos de un

cliente determinado deben ser asignados a un solo vehículo. También supone que la descarga de los elementos de un cliente no debe ser bloqueada por elementos de los clientes a visitar más tarde a lo largo de la ruta. En lo que sigue, estos dos últimos requisitos serán referidos como la agrupación del artículo y las limitaciones de carga secuencial, respectivamente.

El 2L-CVRP se puede definir de la siguiente manera. Dado un grafo completo no dirigido  $G = (V, E)$ , en la que  $V$  define el conjunto de  $n + 1$  vértices correspondientes al depósito (vértice 0) y a los clientes (vértices 1, ...,  $n$ ). Para cada arista  $e \in E$  el costo asociado de viaje  $c_e$  se define. En lo que sigue, un dado borde  $e$  puede ser también representado por sus vértices de punto final  $\{i, j\}$ . Un conjunto de  $K$  vehículos idénticos está disponible en el almacén. Cada vehículo tiene una capacidad de peso  $D$  y una superficie de carga rectangular, que es accesible desde un solo lado para la carga y las operaciones de descarga, cuya anchura y altura son iguales a  $W$  y  $H$ , respectivamente. También se denota por  $A = WH$  el área total de la superficie de carga. Cada cliente  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) se asocia con un conjunto de  $m_i$  elementos rectangulares, cuyo peso total es igual a  $d_i$ , y teniendo cada uno la anchura y la altura específica igual a  $w_{i\ell}$  y  $h_{i\ell}$ , ( $\ell = 1, \dots, m_i$ ), respectivamente. Cada artículo será denotado por un par de índices  $(i, \ell)$ . Además, se denota por  $a_i = \sum_{\ell=1}^{m_i} w_{i\ell} h_{i\ell}$  el área total de los elementos del cliente  $i$ . Por último, permite  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  indicar el número total de elementos. Se supone que todos los datos de entrada anteriores son números enteros positivos.

La carga de los elementos de un vehículo está sujeta a las siguientes limitaciones específicas:

a) Agrupación de artículo

Todos los artículos de un cliente determinado deben cargarse en el mismo vehículo. Por lo tanto, para cada cliente  $i$ , suponemos que  $d_i \leq D$  y existe una posible carga de dos dimensiones de la  $m_i$  artículos en una sola superficie del vehículo ( $i = 1, \dots, n$ ).

b) Orientación de artículo

Los artículos que tienen una orientación fija (es decir, no se pueden girar) deben ser cargados con sus lados paralelos a los lados de la superficie de carga (es decir, se requiere una carga ortogonal).

### c) Carga secuencial

Las operaciones de descarga en el sitio de los clientes se realizan a través de un solo lado del vehículo y no pueden dar lugar a una transposición de carga en el vehículo o desplazamientos laterales del elemento a descargar. Por lo tanto, cuando la descarga de los artículos de un cliente, no hay ningún elemento perteneciente a los clientes entregados más tarde a lo largo de la ruta puede ser movido o bloquear la eliminación de los elementos del cliente actual. En otras palabras, no se permite el movimiento lateral de los elementos en el interior del vehículo cuando se entrega a un cliente.

El costo de una ruta factible es la suma de los costos de desplazamiento de los bordes necesarios para visitar a los clientes en la secuencia especificada, comenzando y terminando en el depósito. El 2L-CVRP consiste en encontrar  $K$  rutas viables con un costo total mínimo. En la figura 1.2 se ilustran dos secuencias diferentes asociados con el mismo subconjunto de clientes  $S = \{1, 2, 3\}$ , dónde cada cliente tiene un solo elemento y los tamaños de los artículos y de la superficie de carga son proporcionales.

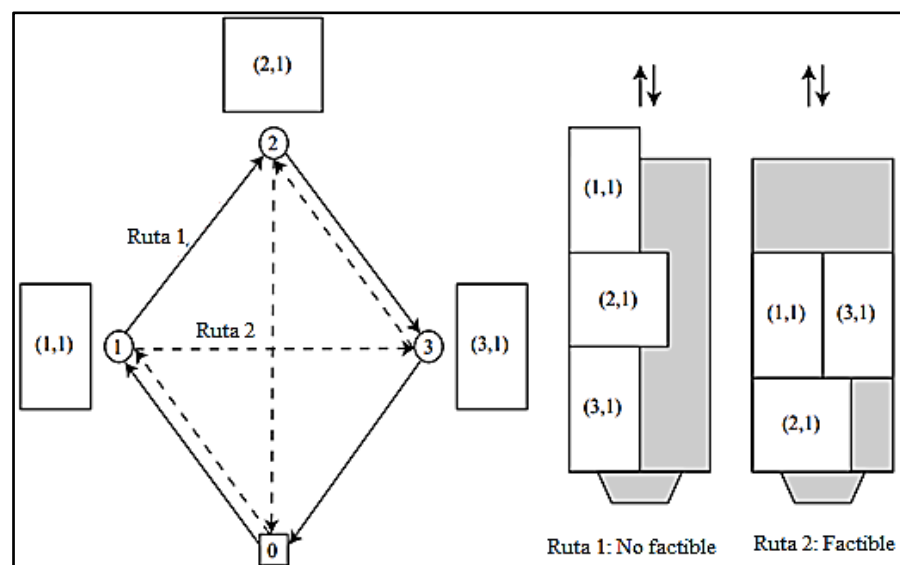


Figura 1.2. Ruta factible y no factible para el 2L-CVRP

### 1.2.2.1 Planteamiento del modelo 2L-CVRP

La formulación de este problema, Iori et al (2007) explican que está dada por un subconjunto de clientes  $S$ , denotada por  $\delta(S)$  el conjunto de bordes con un punto final en  $S$  y el otro en  $V \setminus S$ . Como es habitual,  $\delta(i)$  se utiliza en lugar de  $\delta(\{i\})$ . Por otra parte, dado una ruta factible  $(S, \sigma)$  se denota por  $E(S, \sigma)$  el conjunto de aristas en tal ruta. Más precisamente  $E(S, \sigma) = \{(0, \sigma(1)), (\sigma(1), \sigma(2)), \dots, (\sigma(|S|), 0)\}$ . Por último, dado un subconjunto de clientes  $S$  se denota por  $\Sigma(S)$  la colección de secuencias  $\sigma$  tal que  $(S, \sigma)$  es una ruta factible.

Para modelar el 2L-CVRP se adapta el modelo de flujo clásico de dos índices de vehículo para el CVRP. Se utiliza una variable binaria  $z_e$  para cada  $e \in E$ , que toma el valor 1 si y sólo si un vehículo se desplaza a lo largo de la arista  $e$  en una ruta factible. La formulación resultante es:

$$\text{minimizar } \sum_{e \in E} c_e z_e \quad (1.13)$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} z_e = 2 \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (1.14)$$

$$\sum_{e \in \delta(0)} z_e = 2K \quad (1.15)$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} z_e \geq 2r(S) \quad S \subseteq V \setminus \{0\}, S \neq \emptyset \quad (1.16)$$

$$\sum_{e \in E(S, \sigma)} z_e \leq |S| - 1 \quad (S, \sigma), \sigma \notin \Sigma(S) \quad (1.17)$$

$$z_e \in \{0, 1\} \quad e \in E \setminus \delta(0) \quad (1.18)$$

$$z_e \in \{0, 1, 2\} \quad e \in \delta(0) \quad (1.19)$$

Las restricciones (1.14) y (1.15) imponen requisitos de grado en los vértices de los clientes, y en el depósito, respectivamente. La restricción (1.16), conocido como las limitaciones de la capacidad de corte, imponen tanto la conectividad solución y la viabilidad. En estas limitaciones,  $r(S)$  es el número mínimo de vehículos que son necesarios para servir a los clientes en conjunto  $S$ , y sin considerar la secuencia real en el que se visitan. La restricción

(1.17), conocida como restricciones de ruta no factibles, consideran los requisitos de secuencia de carga. Por último, las restricciones (1.18) y (1.19) imponen que las variables asociadas a la aristas que conectan dos clientes son binarios, y que la conexión de los clientes al depósito también puede tener valor de dos (lo que representa una ruta de un solo cliente).

### **1.2.3 Problema de Ruteo de Vehículos con limitaciones de Carga de tres Dimensiones (3L-CVRP)**

El Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados con limitaciones de Carga de 3 Dimensiones (3L-CVRP), Gendreau et al (como se citó en Toth & Vigo, 2014) explican que se introducen restricciones operativas adicionales para asegurar la estabilidad de las cajas apiladas, el transporte seguro de cajas frágiles, y la fácil descarga de cajas en las ubicaciones del cliente. En el Pallet-Packing VRP (PPVRP), Zachariadis et al (como se citó en Toth & Vigo, 2014) plantean que los envíos son cajas de 3 dimensiones que tienen que ser apilados sobre pallets factiblemente antes de que se carguen en los vehículos.

Gendreau et al (2006) exponen que un cargador debe definir las rutas de su flota de vehículos para enviar mercancías, cada una compuesta de una caja rectangular de tamaño y peso dado, a un número de clientes, al tiempo que minimiza el total de costos de viaje. Todos los bienes requeridos por un cliente deben ser colocados en el mismo vehículo. Todos los vehículos tienen el mismo espacio de carga en tres dimensiones y la misma capacidad de peso.

La solución del problema exige la determinación, para cada vehículo, de un conjunto de bienes cuyo peso total no supere la capacidad de peso del vehículo y de un embalaje viable de las mercancías en la espacio de carga. En otras palabras, cada vehículo requiere la solución de un problema de embalaje tridimensional, que consiste en la búsqueda de un embalaje no superposicionado de un conjunto de cajas rectangulares en un recipiente rectangular. Se supone que las cajas se pueden girar por 90° grados en el plano horizontal, mientras que las rotaciones al revés no se les permiten. La figura 1.3 representa una solución de a un problema simple con dos vehículos y cinco clientes.

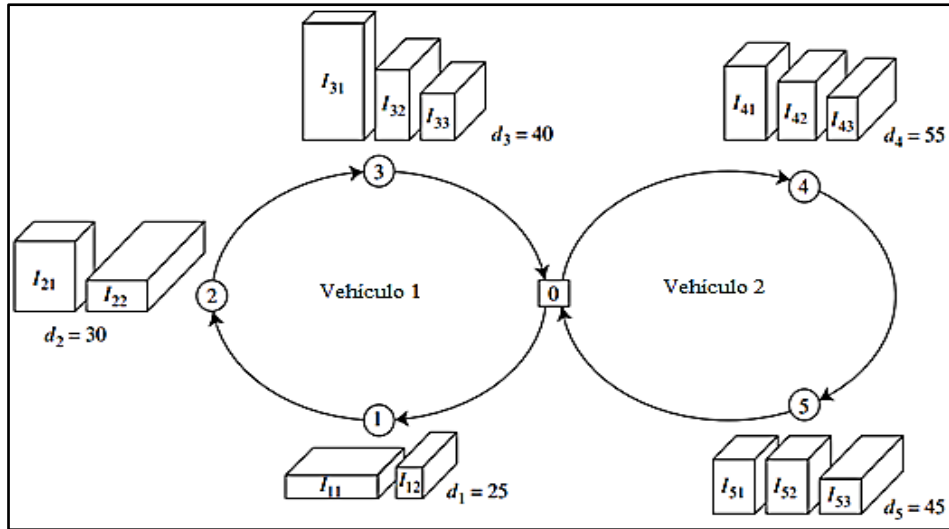


Figura 1.3. Ejemplo del 3L-CVRP

Además de las limitaciones de peso y el embalaje, otras restricciones operativas se encuentran a menudo en aplicaciones del mundo real. Si algunos de los bienes son frágiles, se puede solicitar que ningún elemento no frágil sea colocado en la parte superior de uno frágil. Además, cuando se apilan las cajas, se debe garantizar que la superficie de soporte es lo suficientemente grande para garantizar la estabilidad de la carga. Finalmente, se solicita con frecuencia que la carga de cada vehículo permita una descarga fácil; es decir, debe ser posible descargar los bienes solicitados por un cliente sin cambiar los bienes solicitados por otros clientes. Un ejemplo de carga tridimensional para el vehículo 1 de la figura 1.3 se muestra en la figura 1.4, donde se supone que el vehículo se descarga en la dirección del eje  $z$ .

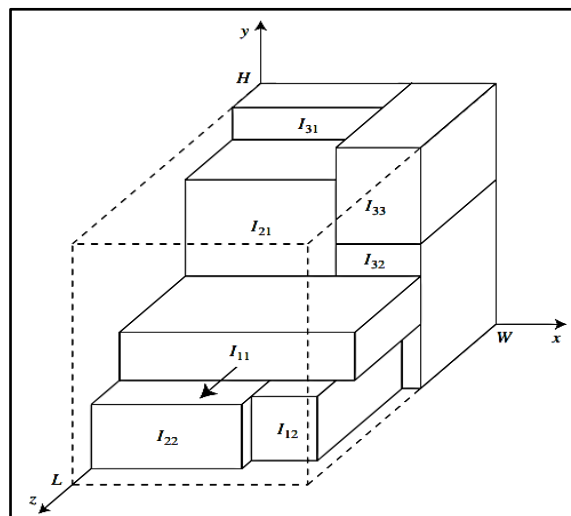


Figura 1.4. Posible carga tridimensional para el vehículo 1 de la Figura 1.3

### 1.2.3.1 Planteamiento del modelo 3L-CVRP

La descripción de este problema, Gendreau et al (2006) definen que está dada por  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  un conjunto de  $n + 1$  vértices correspondientes a un depósito (vértice 0) y  $n$  clientes (vértices  $1, \dots, n$ ), y  $E$  un conjunto de aristas  $(i, j)$  conectando todos los pares de vértices. Sea  $G = (V, E)$  el grafo inducido y denotar por  $c_{ij}$  el costo de borde  $(i, j)$ . Sea  $v$  el número de vehículos idénticos disponibles. Cada vehículo tiene una capacidad de peso  $D$  y un espacio de carga rectangular tridimensional definido por el ancho  $W$ , altura  $H$ , y longitud  $L$ . Se denota por  $S = W * H * L$  la disposición de espacio de carga rectangular. Cada cliente  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) requiere un conjunto de  $m_i$  artículos tridimensionales  $I_{ik}$  ( $k = 1, \dots, m_i$ ) que tiene una anchura  $w_{ik}$ , altura  $h_{ik}$ , y longitud  $l_{ik}$ , cuyo peso total es  $d_i$ . Sea  $s_i = \sum_{k=1}^{m_i} w_{ik}h_{ik}l_{ik}$  denota la cantidad total de espacio necesario por cada cliente  $i$ . Los artículos tienen una orientación fija con respecto a la altura, pero se pueden girar por  $90^\circ$  en el  $w - l$  plano. Además, cada elemento  $I_{ik}$  tiene una fragilidad  $f_{ik}$  ( $i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m_i$ ), igual a 1 si  $I_{ik}$  es frágil y 0 en caso contrario: Ningún artículo no frágil puede ser colocado sobre un elemento frágil, aunque los artículos frágiles pueden ser apilados. Cuando un elemento  $I_{ik}$  se coloca sobre otros artículos, es necesario evaluar el área correspondiente de apoyo. Sea  $\bar{h}$  la altura a la que la parte inferior de  $I_{ik}$  se coloca y  $\bar{A}$  (zona de soporte) el área total de la parte inferior de  $I_{ik}$  que se encuentra en los artículos cuya parte superior es a la altura  $\bar{h}$ ; la colocación es factible sólo si la zona de apoyo es nada menos que un porcentaje umbral determinado  $\alpha$  de la base del artículo, es decir, si  $\bar{A} \geq \alpha w_{ik}l_{ik}$  (tenga en cuenta que la restricción siempre se satisface para  $h = 0$ ).

Finalmente, la carga de cada vehículo debe obedecer a la siguiente política LIFO. Cuando el cliente  $i$  es visitado, debe ser posible descargar todos los artículos  $I_{ik}$  de su demanda a través de una secuencia de movimientos consecutivos (uno por artículo) paralela hasta el borde  $L$ . En otras palabras, no hay ningún elemento demandado por un cliente que es visitado más tarde puede ser colocado sobre  $I_{ik}$  o entre  $I_{ik}$  y la parte trasera del vehículo.

El 3L-CVRP consiste en encontrar un conjunto en la mayoría  $v$  rutas (uno por vehículo), cada una incluyendo el depósito, de tal manera que las siguientes condiciones son satisfechas:

- a) Cada cliente es atendido exactamente por un vehículo.
- b) Ningún vehículo lleva un peso total superior a su capacidad.
- c) Para cada vehículo existe una carga de tres dimensiones factible de todos los elementos demandados por todos los clientes atendidos, satisfaciendo las restricciones en:
  - c.1) Orientación vertical fija.
  - c.2) Fragilidad.
  - c.3) Zona de apoyo.
  - c.4) Política LIFO.
- d) La longitud total de los bordes incluidos en las rutas es un mínimo.

El espacio de carga de un vehículo está representado en el ortante positivo de un sistema de coordenadas cartesiano, con el borde  $W$ , el borde  $H$ , y el borde  $L$  respectivamente paralela al eje  $x$ , el eje  $y$ , y el eje  $z$ . La parte trasera del vehículo es el rectángulo  $W \times H$  en la coordenada  $(0, 0, L)$  (ver Figura 1.4). La posición de un artículo  $I_{ik}$  en un patrón de carga está dada por las coordenadas  $(x_{ik}, y_{ik}, z_{ik})$  de su parte inferior izquierda esquina posterior en la Figura 1.4.

#### **1.2.4 Problema de Ruteo de Vehículos con LIFO**

Toth & Vigo (2014) explican que las restricciones de carga Último en Entrar-Primero en Salir (LIFO) significan que, teniendo en cuenta todos los envíos que se encuentran actualmente a bordo de un vehículo, uno debe entregar el envío que se tomó más recientemente. La carga LIFO está diseñado para reducir los tiempos de carga y descarga a un mínimo porque para los vehículos que se cargan de un lado muy pocos reordenamientos necesitan ocurrir. Cordeau et al (como se citó en Toth & Vigo, 2014) plantean que las limitaciones de carga LIFO se consideraron principalmente en el contexto de ruteo de un solo vehículo.

#### **1.2.5 Problema de Ruteo de Camiones y Remolques (TTRP)**

El Problema de Ruteo de Camiones y Remolques (TTRP), Toth & Vigo (2014) explican que hay vehículos autónomos y no autónomos, donde este último necesita ser tirado para trasladarse de un lugar a otro y puede ser desemparejado para llegar a lugares inaccesibles.

El Problema de Ruteo de Camión y Remolque (TTRP), Chao (como se citó en Toth & Vigo, 2014) considera una flota con al menos dos grupos de vehículos: Camiones Individuales (ST), es decir, vehículos normales sin remolque, y Combinaciones de Camión y Remolque (TTC). Mientras que un TTC es atractivo debido a la mayor capacidad general, existen condiciones sitio-dependencia indicando que algunos clientes son accesibles por un TTC. Si no hay suficiente espacio de maniobra en la ubicación de un cliente es una razón típica para este tipo de inaccesibilidad. Clientes inaccesibles por TTC son llamados clientes de camión. Todos los demás son clientes regulares. Por lo tanto, son posibles tres tipos de rutas:

a) Una ruta ST es realizada por un ST y visita a cualquier tipo de cliente.

b) Una ruta TTC pura se lleva a cabo por un TTC y visita a sólo clientes habituales.

c) Una ruta TTC mixta también se realiza por una TTC pero visita tanto el camión y clientes habituales. Aquí, el TTC viaja en una ruta principal entre los clientes regulares. Para llegar a los clientes de camiones, el camión realiza uno o varios subviajes, donde el remolque se desacopla primero en un cliente regular, y el camión regresa al mismo lugar al final del subviaje antes de continuar la ruta principal con el remolque acoplado. Tenga en cuenta que la demanda recogida en un subviaje de camión debe encajar en el ST. Sólo en clientes regulares puede el camión transferir todos o parte de su carga en el remolque de modo que la capacidad conjunta del TTC se pueda utilizar.

#### **1.2.5.1 Planteamiento del modelo TTRP**

El Problema de Ruteo Camión y Remolque (TTRP), Scheuerer (2006) lo define en un grafo  $G = (V, A)$ , con el conjunto de vértices  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  y el conjunto de arcos  $A = \{(v_i, v_j): v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ . El vértice  $v_0$  representa el depósito donde  $m$  camiones y  $b$  remolques ( $b \leq m$ ) son basados. Los camiones y remolques se consideran homogéneos con capacidad

$K$  y  $R$ , respectivamente. Un camión más un remolque se llama un vehículo completo, y un vehículo sin remolque se llama un camión puro. Cada vértice de  $V \setminus \{v_0\}$  corresponde a un cliente  $v_i$  con una demanda no negativa  $q_i$  y un tipo de cliente  $t_i$ . El TTRP considera dos formas de tipos de clientes: un cliente que es accesible con o sin remolque se llama un cliente de vehículo (VC) y uno que sólo se puede acceder sin remolque se llama un cliente camión (TC).

Si sólo los clientes TC están presentes, el problema podría ser resuelto como un normal VRP, dejando de lado el uso de remolques. Por el contrario, si sólo los clientes VC están presentes, el problema podría ser resuelto también como un VRP (con vehículos heterogéneos si  $b < m$ ), ya que no hay la necesidad de desacoplar los remolques. Sin embargo, en situaciones de la vida real, los dos tipos de clientes pueden salir. Por ejemplo, considere los clientes TC en cualquier área de una montaña o en el centro de una ciudad o donde el acceso está restringido debido a la falta de un punto de inflexión para el vehículo con un remolque asignado. Este hecho hace que sea necesario considerar la posibilidad de desacoplar un remolque completo de su vehículo en un lugar de estacionamiento. En este caso un vehículo completo puede comenzar desde el depósito con el remolque asignado, atender a los clientes VC solamente.

El objetivo del TTRP consiste en encontrar rutas de tal manera que los costos totales de viaje se reducen al mínimo. Por lo tanto una matriz de costos  $C = (c_{ij})$  está asociada con el conjunto de arcos, lo que representa el tiempo de viaje no negativo o distancias de  $v_i$  a  $v_j$ . De este modo, el TTRP incluye además el problema de encontrar el número óptimo de subviajes y la ubicación de las plazas de aparcamiento para rutas de vehículo completo.

### **1.2.6 Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados con Restricción de Distancia (DCVRP)**

La longitud de ruta, Toth & Vigo (2014) exponen que es otro tipo simple de restricciones que resultan de los límites globales que limitan el consumo de un recurso consumido en arcos o aristas. La adición de las limitaciones de distancia para el CVRP produce el Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados con Restricción de Distancia (DCVRP). En lo que sigue, se asume

que  $t_{ij} > 0$  es la distancia entre el vértice  $i$  y el vértice  $j$  para todo  $(i, j) \in A$ . Si  $L > 0$  es un límite superior determinado de la longitud de una ruta, las limitaciones de distancia son:

$$\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ijk} \leq L \quad \forall k \in K \quad (1.20)$$

No sólo los límites en la distancia espacial se pueden modelar, pero también las restricciones pueden estar en la duración de la ruta (con tiempos de viaje  $t_{ij}$ ), sobre los costos de ruteo, o sobre el número de conexiones con una cierta propiedad (con indicadores  $t_{ij} \in \{0, 1\}$ ). Farahani et al (2011), describen que el DCVRP es una variante del CVRP en el que se imponen tanto la capacidad del vehículo y las limitaciones de distancia máxima. En este tipo de problemas, cada longitud de recorrido no debe exceder la cantidad de antes.

#### 1.2.6.1 Planteamiento del modelo DCVRP

Así se presenta el modelo DCVRP simétrico de Laporte et al (como se citó en Farahani et al, 2011).

Supuestos del modelo: Se imponen restricciones de distancia.

Modelo de entrada:  $r'(S)$  dado un subconjunto  $S$  de los vértices de clientes, la cantidad  $r'(S)$  representa el número mínimo de vehículos necesarios para servir a todos los clientes en  $S$ .

Modelo de salida:  $x_{ij} = 1$  si el arco  $(i, j) \in A$  pertenece a la solución óptima y 0 en caso contrario.

Función objetivo y sus restricciones:

$$\text{minimizar} \sum_{i \in V / \{n\}} \sum_{j > i} c_{ij} x_{ij} \quad (1.21)$$

$$\sum_{h < i} x_{hi} + \sum_{j > i} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in V / \{0\} \quad (1.22)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} x_{0j} = 2K \quad (1.23)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j > i \\ j \in S}} x_{ij} \leq |S| - r'(S) \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, S \neq \emptyset \quad (1.24)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V \setminus \{0\}, i < j \quad (1.25)$$

$$x_{0j} \in \{0, 1, 2\} \quad \forall j \in V \setminus \{0\} \quad (1.26)$$

Las restricciones (1.22) y (1.23) son las limitaciones de grado. La desigualdad (ecuación (1.24)) impone la conectividad de la solución, la capacidad del vehículo y los requisitos de longitud máxima de ruta obligando a un número suficiente de aristas para dejar a cada subconjunto de vehículos.

### 1.2.7 Ejemplo de aplicación CVRP

Una empresa de productos alimenticios tiene su almacén de producto terminado en la ciudad de Querétaro. Para el día jueves tiene que satisfacer la demanda de sus clientes de Querétaro, Puebla y Michoacán que se presentan en la tabla 1.2. Su flota de vehículos que dispone para llevar a cabo la distribución de los pedidos está conformada por 12 transportes los cuales se dividen en: 5 camiones de 32 toneladas, 3 camiones de 30 toneladas y 4 camiones de 28 toneladas, todos con capacidad de carga útil. La hora de partida de los camiones es a las 8:00 horas, el límite del tiempo de manejo es a las 23:00 horas, el límite de tiempo de trabajo es de 23:30 horas, el límite de distancia es de 1500 kilómetros, el precio del combustible es de \$20.5 y el rendimiento del vehículo es de 2 Km/L.

*Tabla 1.2. Clientes y demandas para el CVRP*

| Nombre    | Localidad                      | Demanda | ID |
|-----------|--------------------------------|---------|----|
| almacén   | Querétaro, Querétaro           | 0       | 0  |
| cliente 1 | Tequisquiapan, Querétaro       | 12      | 1  |
| cliente 2 | Pinal de Amoles, Querétaro     | 15      | 2  |
| cliente 3 | Ezequiel Montes, Querétaro     | 8       | 3  |
| cliente 4 | Tolimán, Querétaro             | 11      | 4  |
| cliente 5 | Cadereyta de Montes, Querétaro | 16      | 5  |

Tabla 1.2. Clientes y demandas para el CVRP (continuación)

|            |                            |    |    |
|------------|----------------------------|----|----|
| cliente 6  | Arroyo Seco, Querétaro     | 14 | 6  |
| cliente 7  | Jalpan de Serra, Querétaro | 13 | 7  |
| cliente 8  | Corregidora, Querétaro     | 20 | 8  |
| cliente 9  | Huimilpan, Querétaro       | 22 | 9  |
| cliente 10 | Pedro Escobedo, Querétaro  | 19 | 10 |
| cliente 11 | Zacatlán, Puebla           | 5  | 11 |
| cliente 12 | Tulcingo, Puebla           | 7  | 12 |
| cliente 13 | Pantepec, Puebla           | 5  | 13 |
| cliente 14 | Acajete, Puebla            | 3  | 14 |
| cliente 15 | Caltepec, Puebla           | 9  | 15 |
| cliente 16 | Zoquiapan, Puebla          | 5  | 16 |
| cliente 17 | Quecholac, Puebla          | 8  | 17 |
| cliente 18 | Nopalucan, Puebla          | 16 | 18 |
| cliente 19 | Mixtla, Puebla             | 15 | 19 |
| cliente 20 | Olintla, Puebla            | 10 | 20 |
| cliente 21 | Buenavista, Michoacán      | 20 | 21 |
| cliente 22 | Jiquilpan, Michoacán       | 8  | 22 |
| cliente 23 | Maravatío, Michoacán       | 7  | 23 |
| cliente 24 | Ocampo, Michoacán          | 9  | 24 |
| cliente 25 | Contepec, Michoacán        | 13 | 25 |
| cliente 26 | Pátzcuaro, Michoacán       | 15 | 26 |
| cliente 27 | Morelia, Michoacán         | 4  | 27 |
| cliente 28 | Acuitzio, Michoacán        | 8  | 28 |
| cliente 29 | Zamora, Michoacán          | 19 | 29 |
| cliente 30 | Quiroga, Michoacán         | 14 | 30 |

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.2 es diseñar rutas para satisfacer los pedidos de los clientes y el objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga y se resuelvan las preguntas siguientes:

- ¿Cuántas rutas resultan de la distribución de productos alimenticios?
- ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?

- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?
- f) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de manejo?
- g) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de manejo?

La resolución y la interpretación de este problema se presenta en el capítulo III con el uso del libro de Excel vrp\_solver\_v1.05.

### **1.2.8 Ejemplo de aplicación DCVRP**

Un invernadero que cosecha limones se encuentra ubicado en Querétaro, el cual debe satisfacer los pedidos de diferentes centrales de abastos que se presentan en la tabla 1.3. Su flota de vehículos está conformada por 6 camiones de 8 toneladas de capacidad de carga útil. El límite de distancia para recorrer es de 400 kilómetros, el precio del combustible es de \$20.5 y el rendimiento del vehículo es de 2 Km/L.

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.3 es diseñar rutas para satisfacer los pedidos de cada central de abastos, el objetivo es que la flota de vehículos maximice el límite de distancia a recorrer y se resuelvan las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuántas rutas resultan de la distribución de limones?
- b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?
- e) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- f) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

*Tabla 1.3. Clientes y demandas para el DCVRP*

| Nombre     | Localidad               | Demanda | ID |
|------------|-------------------------|---------|----|
| Almacén    | Querétaro, México       | 0       | 0  |
| Cliente 1  | Salamanca, México       | 2.5     | 1  |
| Cliente 2  | Celaya, México          | 1.5     | 2  |
| Cliente 3  | Guanajuato, México      | 2       | 3  |
| Cliente 4  | Irapuato, México        | 3       | 4  |
| Cliente 5  | León, México            | 3.5     | 5  |
| Cliente 6  | Morelia, México         | 3       | 6  |
| Cliente 7  | Toluca, México          | 4       | 7  |
| Cliente 8  | San Luis Potosí, México | 4.5     | 8  |
| Cliente 9  | Lerma, México           | 2.5     | 9  |
| Cliente 10 | Metepec, México         | 2       | 10 |

La resolución y la interpretación de este problema se presentan en el capítulo III con el método de Ahorros.

### **1.3 Problema de Ruteo de Vehículos con Recolección y Entrega (VRPPD)**

El Problema de Ruteo de Vehículos con Recolección y Entrega (VRPPD), Ortiz et al (2012) definen que es un VRP en el que se contempla la posibilidad de que los clientes devuelven unos productos. Así que en el VRPPD es necesario tener en cuenta que los productos que los clientes devuelven al vehículo de entrega deben caber en él. Esta restricción hace más difícil el problema de planificación y puede llevar a la mala utilización de las capacidades de los vehículos, el aumento de las distancias de viaje o la necesidad de más vehículos.

Por lo tanto, se suele examinar situaciones restringidas donde todas las demandas de entrega comienzan a partir del depósito y todas las demandas de recolección serán devueltas al depósito, por lo que no hay intercambios de bienes entre los clientes. Otra alternativa es relajar la restricción de que todos los clientes tienen que ser visitado exactamente una vez. Otra

simplificación habitual es considerar que cada vehículo debe entregar todos los productos antes de recoger cualquier mercancía.

El objetivo es minimizar la flota de vehículos y la suma del tiempo de recorrido, con la restricción de que el vehículo debe tener suficiente capacidad para el transporte de los productos a ser entregados y los que recogen a los clientes para devolverlos al depósito. La principal limitante es que los clientes pueden devolver algunos bienes al depósito.

En este problema, Stadtler et al (2012) explican que los clientes se asocian tanto con recogida y entrega. Se supone que la entrega se realiza antes de la recolección, tal que la carga de un vehículo al llegar a una ubicación se define como la carga total menos la demanda para las entregas más la demanda de recolecciones.

### **1.3.1 Planteamiento del modelo VRPPD**

Así se presenta el modelo lineal entero del VRPPD por Hoff, Gribkovskaia, Laporte y Lokketangen (como se citó en Farahani et al, 2011).

Supuestos del modelo:

- Hay  $n$  clientes;  $i$  representa dos vértices  $i$  y  $n + i$ . Esto significa que el vértice  $i$  se utiliza para realizar una entrega y el vértice  $i + n$  se utiliza para realizar una recolección.
- $p_i = d_{i+n}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Visitar  $i$ ,  $i + n$  en la sucesión por el mismo vehículo es, de hecho, realizar una operación simultánea de recolección y entrega en el cliente  $i$ . De lo contrario, las dos operaciones se realizan por separado por el mismo vehículo o por dos vehículos diferentes.

Modelo de entradas:

$\bar{c}_{ij}$ : Costo.

$u_{ik}$ : Un límite superior en la demanda total de recolección acumulada en el vehículo  $k$  al salir del vértice  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n; k = 1, \dots, m$ ).

$v_{ik}$ : Un límite superior en la demanda total de entrega restante en el vehículo  $k$  al salir del vértice  $i$ .

$q_{ij}$ : La distancia entre el cliente  $i$  y  $j$ .

$d_i$ : La demanda del cliente  $i$ .

$p_i$ : El suministro del cliente  $i$ .

$D$ : La distancia máxima que pueden cubrir los vehículos en un recorrido.

$C$ : La capacidad máxima de un vehículo.

Modelo de salidas:

$x_{ijk}$ : es 1 si el vehículo  $k$  viaja directamente del vértice  $i$  al vértice  $j$  ( $i, j = 0, \dots, 2n, i \neq j, k = 1, 2, \dots, m$ ) y 0 si no.

$Y_{ik}$ : es 1 si el vehículo  $k$  realiza una entrega en el vértice  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m$ ).

$Z_{ik}$ : es 1 si el vehículo  $k$  realiza una recolección en el vértice  $i$  ( $i = 1 + n, \dots, 2n, k = 1, 2, \dots, m$ ).

Función objetivo y sus restricciones:

$$\text{minimizar } \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} \bar{c}_{ij} x_{ijk} \quad (1.27)$$

$$\sum_{j=0}^{2n} x_{0jk} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.28)$$

$$\sum_{j=0}^{2n} x_{ijk} = \sum_{j=0}^{2n} x_{jik} \quad (i = 0, \dots, 2n; k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.29)$$

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{2n} x_{ijk} = 1 \quad (i = 0, \dots, 2n) \quad (1.30)$$

$$u_{0k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.31)$$

$$v_{0k} = \sum_{i=1}^n d_i y_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.32)$$

$$0 \leq u_{ik} + v_{ik} \leq Q_k \quad (i = 0, \dots, 2n; k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.33)$$

$$u_{jk} \geq u_{ik} + p_j z_{jk} - (1 - x_{ijk}) Q_k \quad (i = 0, \dots, 2n; j = 1, \dots, 2n; k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.34)$$

$$v_{jk} \geq v_{ik} - d_j y_{jk} - (1 - x_{ijk}) Q_k \quad (i = 0, \dots, 2n; j = 1, \dots, 2n; k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.35)$$

$$x_{ijk} \leq y_{ik} + z_{ik} \quad (i = 1, \dots, 2n; j = 0, \dots, 2n; k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.36)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad (i, j = 0, \dots, 2n; i \neq j; k = 1, \dots, m) \quad (1.37)$$

$$y_{ijk} \in \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m) \quad (1.38)$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad (i = n + 1, \dots, 2n; k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.39)$$

La función objetivo (1.27) es minimizar el costo del viaje. La restricción (1.28) implica que  $m$  vehículos salen del depósito. La restricción (1.29) asegura que el flujo entrante en cada vértice del cliente es igual al flujo saliente y que el mismo vehículo entra y sale del vértice. La restricción (1.30) significa que cada vértice es visitado exactamente una vez, y las limitaciones (1.31) y (1.32) se utilizan para inicializar las exigencias de recolección y entrega en los vehículos. La restricción (1.33) garantiza que la carga del vehículo nunca excede la capacidad del vehículo. Las desigualdades (ecuaciones (1.34 y 1.35)) controlan los límites superiores de las cantidades demandadas de recolección y entrega en el vehículo al salir de cada vértice. La restricción (1.36) establece que si un vehículo no realiza ninguna entrega y recolección en el vértice  $i$ , entonces él no viaja a lo largo de cualquier arco  $(i, j)$ . Debido a la restricción (1.30) obliga a cada vértice a ser visitado por exactamente un vehículo, existe necesariamente un índice  $k$ , para que ambos lados de la ecuación (1.36) sean iguales a 1. Las restricciones (1.31-1.35) aseguran de que las variables  $u_{ik}$  y  $v_{ik}$  no sean negativos.

### 1.3.2 Problema de Ruteo de Vehículos con viajes de regreso (VRPB)

El Problema de Ruteo de Vehículos con trayectos de retorno (VRPB), también conocido como el problema de trayecto en línea y trayecto de retorno, Toth & Vigo (2014) explican que es una extensión del VRP Capacitado (CVRP) en el que el conjunto de clientes se reparte en dos subconjuntos. El primero contiene a los clientes trayecto en línea, cada uno requiere una determinada cantidad de producto que se entregará. El segundo subconjunto contiene a los clientes trayecto de retorno, donde se debe recoger una cantidad determinada.

Esta partición de cliente es muy frecuente en situaciones prácticas, como por ejemplo en la industria de comestibles, donde los supermercados y tiendas son trayecto en línea y el contexto de la recolección significa un ahorro en términos de los costos de transporte visitando a los clientes trayecto de retorno en rutas de distribución.

Más precisamente, el VRPB puede ser indicado como el problema de determinar un conjunto de rutas de vehículos visitando a todos los clientes tales que (a) cada vehículo realiza una ruta; (b) cada ruta comienza y termina en el depósito; (c) para cada ruta la carga total asociada con clientes trayecto en línea y trayecto de retorno no supere, por separado, la capacidad del vehículo; (d) en cada ruta los clientes trayecto de retorno, en su caso, son visitados después de todos los clientes trayecto en línea; (e) la distancia total recorrida por los vehículos se reduce al mínimo. La restricción de precedencia (d) está prácticamente motivada por el hecho de que a menudo los vehículos son carga trasera. Por lo tanto, el cambio de carga a bordo requerido por una mezcla de recolección y distribución es difícil, o imposible, para llevar a cabo en las ubicaciones del cliente. Otra razón práctica es que, en muchas aplicaciones, los clientes trayecto en línea tienen una prioridad mayor de servicio que los clientes trayecto de retorno.

Tenga en cuenta que las rutas de vehículos mixtos, que visitan a clientes trayecto en línea y trayecto de retorno, están orientadas implícitamente debido a la restricción de precedencia (d). En general, el VRPB denota la versión simétrica del problema, en el que los costos de viaje entre cada par de los clientes son iguales en ambas direcciones.

#### **1.3.3.1 Planteamiento del modelo VRPB**

Así se presenta la formulación de Toth & Vigo (como se citó en Farahani et al, 2011) del VRPB como un problema asimétrico.

Supuestos del modelo:

- La suma de las demandas de los vértices trayecto en línea y trayecto de retorno visitadas por un circuito no supere por separado el vehículo capacidad  $C$ .
- En cada circuito, los vértices trayecto en línea preceden a los vértices trayecto de retorno, en su caso.

Modelo de entradas:

$L = \{1, \dots, n\}$ : Subconjunto del cliente trayecto en línea.

$B = \{n + 1, \dots, n + m\}$ : Subconjunto del cliente trayecto de retorno.

$F = L \cup B$

$C_{ij}$ : El costo no negativo asociado con cada arco  $(i, j) \in A$

$L_0 = L \cup \{0\}$

$B_0 = B \cup \{0\}$

$\bar{G} = (\bar{V}, \bar{A})$ : Un grafo dirigido obtenido de  $G$  definido por  $\bar{V} = V$ .

$\bar{A} = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

$A_1 = \{(i, j) \in A : i \in L_0, j \in L\}$

$A_2 = \{(i, j) \in A : i \in B, j \in B_0\}$

$A_3 = \{(i, j) \in A : i \in L, j \in B_0\}$

Modelo de salidas:  $x_{ij} = 1$  si y solo si el arco  $(i, j)$  es en la solución óptima y 0 en caso contrario.

Función objetivo y sus restricciones:

$$\text{minimizar } \sum_{(i,j) \in \bar{A}} c_{ij} x_{ij} \quad (1.40)$$

$$\sum_{i \in \bar{V}_j^-} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \bar{V} / \{0\} \quad (1.41)$$

$$\sum_{i \in \bar{V}_i^+} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \bar{V} / \{0\} \quad (1.42)$$

$$\sum_{i \in \bar{V}_0^-} x_{i0} = K \quad (1.43)$$

$$\sum_{i \in V_0^+} x_{0j} = K \quad (1.44)$$

$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in V_j^- / S} x_{ij} \geq r(S) \quad \forall S \in F \quad (1.45)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in V_i^+ / S} x_{ij} \geq r(S) \quad \forall S \in F \quad (1.46)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \bar{A} \quad (1.47)$$

La función objetivo minimiza el costo total. Las ecuaciones (1.41-1.44) imponen restricciones grado de entrada y grado de salida para el cliente y los vértices del depósito, respectivamente. Las restricciones (1.45) y (1.46) son CCCs e imponen la conectividad y las limitaciones de capacidad. Debido a las limitaciones de grado, para cualquier  $S$  dada, el lado izquierdo de las ecuaciones (1.45) y (1.46) son iguales. Por lo tanto, si se impone la restricción (1.45), la restricción (1.46) es redundante y viceversa.

### 1.3.3 Ejemplo de aplicación VRPPD

Una empresa de logística inversa dedicada a la recolección de pallets de madera tiene su almacén de materia prima en Toluca, la cual tiene que recolectar los suministros a los clientes ubicados en la Ciudad de México y en el Estado de México como se presenta en la tabla 1.4, con una restricción de tipo recolección.

Su flota de vehículos está conformada por 10 camiones para 192 pallets de capacidad de carga útil. El tiempo de inicio de trabajo es a las 6:00 horas, el límite de tiempo de manejo es a las 20:00 horas, el límite de tiempo de trabajo es de 20:00 horas y el límite de distancia es de 300 kilómetros. El precio de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L.

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.4 es diseñar rutas para satisfacer los suministros de la empresa y el objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga y el límite de distancia a recorrer, y se resuelvan las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuántas rutas se necesitan para la recolección de todos los pallets?
- b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?
- f) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?
- g) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?
- h) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad del límite de distancia para cada ruta?
- i) ¿Qué camión llega primero al almacén?
- j) ¿Qué camión llega al final al almacén?

*Tabla 1.4. Clientes y suministros para el VRPPD*

| Nombre     | Localidad                    | Suministro | ID |
|------------|------------------------------|------------|----|
| almacén    | Toluca, Estado de México     | 0          | 0  |
| cliente 1  | Álvaro Obregón, CDMX         | 50         | 1  |
| cliente 2  | Cuauhtémoc, CDMX             | 76         | 2  |
| cliente 3  | Iztapalapa, CDMX             | 93         | 3  |
| cliente 4  | Azcapotzalco, CDMX           | 82         | 4  |
| cliente 5  | Miguel Hidalgo, CDMX         | 85         | 5  |
| cliente 6  | Gustavo A. Madero, CDMX      | 35         | 6  |
| cliente 7  | Tláhuac, CDMX                | 40         | 7  |
| cliente 8  | La Magdalena Contreras, CDMX | 58         | 8  |
| cliente 9  | Benito Juárez, CDMX          | 74         | 9  |
| cliente 10 | Milpa Alta, CDMX             | 53         | 10 |
| cliente 11 | Iztacalco, CDMX              | 100        | 11 |
| cliente 12 | Tlalpan, CDMX                | 71         | 12 |
| cliente 13 | Cuajimalpa de Morelos, CDMX  | 92         | 13 |
| cliente 14 | Venustiano Carranza, CDMX    | 65         | 14 |
| cliente 15 | Xochimilco, CDMX             | 49         | 15 |

*Tabla 1.4. Clientes y suministros para el VRPPD (continuación)*

|            |                                       |     |    |
|------------|---------------------------------------|-----|----|
| cliente 16 | Coyoacán, CDMX                        | 45  | 16 |
| cliente 17 | Texcoco, Estado de México             | 100 | 17 |
| cliente 18 | Chalco, Estado de México              | 44  | 18 |
| cliente 19 | Naucalpan de Juárez, Estado de México | 67  | 19 |
| cliente 20 | Zumpango, Estado de México            | 95  | 20 |
| cliente 21 | Tultitlán, Estado de México           | 86  | 21 |
| cliente 22 | Cuautitlán Izcalli, Estado de México  | 50  | 22 |
| cliente 23 | Ixtapaluca, Estado de México          | 99  | 23 |
| cliente 24 | Ocoyoacac, Estado de México           | 69  | 24 |
| cliente 25 | Tlalnepantla, Estado de México        | 56  | 25 |

La resolución y la interpretación de este problema se presenta en el capítulo III con el uso del libro de Excel vrp\_solver\_v1.05.

#### **1.4 Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo (VRPTW)**

El Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo (VRPTW), Robuste & Galván (2005) definen que consiste en un número de vehículos de capacidad finita que visitan clientes dispersos, con demanda y periodo de tiempo de recepción predeterminado desde un solo origen. El Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo (VRPTW), Toth & Vigo (2014) explican que es la extensión del Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados (CVRP) donde el servicio a cada cliente debe empezar dentro de un intervalo de tiempo asociado, llamado una ventana de tiempo.

La ventana de tiempo puede ser dura o blanda. En el caso de la ventana de tiempo dura, un vehículo que llega demasiado pronto a un cliente debe esperar hasta que el cliente este listo para comenzar el servicio. En general, esperar antes de iniciar una ventana de tiempo no incurre en ningún costo. En el caso de la ventana de tiempo blanda, cada ventana de tiempo

puede ser violada salvo un costo de penalización. Las ventanas de tiempo pueden ser unilaterales, por ejemplo, como la última hora para la entrega.

Las ventanas de tiempo ocurren naturalmente en los problemas que enfrentan las organizaciones empresariales que trabajan en horarios flexibles. Los problemas específicos con ventanas de tiempo dura incluyen servicio de patrulla de seguridad, entregas bancarias, envíos postales, recolección de residuos industriales, entrega de comestibles, ruteo de autobus escolar y distribución de periodicos urbana. Entre los problemas de la ventana de tiempo blanda, los problemas de marcar un viaje constituyen un ejemplo importante.

En la literatura existente sobre el VRPTW, el número de vehículos disponibles para servir a los clientes generalmente se considera ilimitado y la función objetivo depende de la naturaleza del método de solución elegido. Para los métodos exactos el objetivo es minimizar la distancia total recorrida. Para la heurística el objetivo principal es reducir al mínimo el número de vehículos utilizados y el secundario para minimizar la distancia total recorrida. Puede haber excepciones a esta afirmación general.

#### **1.4.1 Planteamiento del modelo VRPTW**

El VRPTW, Toth & Vigo (2014) lo plantean en el grafo dirigido  $G = (V, A)$ , donde el depósito está representado por los dos vértices 0 y  $n + 1$ , referidos como los vértices fuente y hundido, respectivamente. Donde  $N = V \setminus \{0, n + 1\}$  es el conjunto de vértices del cliente. Todas las rutas de vehículo factibles corresponden a las rutas primarias fuente-hundido en  $G$ . Lo contrario es, sin embargo, no necesariamente verdadero; es decir, algunas rutas primarias fuente-hundido en  $G$  pueden no representar rutas factibles porque vulneran las ventanas de tiempo o la capacidad del vehículo. Para simplificar la notación, cero demandas y cero tiempos de servicio se definen vértices 0 y  $n + 1$ , es decir,  $q_0 = q_{n+1} = s_0 = s_{n+1} = 0$ .

Además, una ventana de tiempo se asocia con ellos, es decir,  $[a_0, b_0] = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ , donde  $a_0$  y  $b_0$  son la primera hora de salida posible del depósito y la ultima hora de llegada posible

en el depósito, respectivamente. El VRPTW puede formularse como el siguiente modelo de flujo de red multiservicio con ventana de tiempo y restricción de capacidad:

$$\text{minimizar } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk} \quad (1.48)$$

$$\text{s. t. } \sum_{k \in K} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in N, \quad (1.49)$$

$$\sum_{j \in \delta^+(0)} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K, \quad (1.50)$$

$$\sum_{i \in \delta^-(j)} x_{ijk} - \sum_{i \in \delta^+(j)} x_{jik} = 0 \quad \forall k \in K, j \in N, \quad (1.51)$$

$$\sum_{i \in \delta^-(n+1)} x_{i,n+1,k} = 1 \quad \forall k \in K, \quad (1.52)$$

$$x_{ijk}(T_{ik} + s_i + t_{ij} - T_{jk}) \leq 0 \quad \forall k \in K, (i,j) \in A, \quad (1.53)$$

$$a_i \leq T_{ik} \leq b_i \quad \forall k \in K, i \in V, \quad (1.54)$$

$$\sum_{i \in N} q_i \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ijk} \leq Q \quad \forall k \in K, \quad (1.55)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A. \quad (1.56)$$

La función objetivo (1.48) tiene por objeto minimizar el costo total. Las restricciones (1.49) aseguran que cada cliente es asignado a exactamente una ruta. Siguiendo, las restricciones (1.50)-(1.52) definen una ruta fuente-hundido en  $G$  para cada vehículo  $k$ . Adicionalmente, las restricciones (1.53), (1.54) y (1.55) garantizan la viabilidad del calendario con respecto a las ventanas de tiempo y la capacidad del vehículo, respectivamente. Tenga en cuenta que, para un dado  $k$ , el valor de  $T_{ik}$  tiene sentido siempre que el cliente  $i$  no es visitado por un vehículo  $k$ . Por último, las variables del flujo de arco están sujetas a requisitos binarios (1.56).

#### 1.4.2 Ejemplo de aplicación VRPTW

Una empresa que produce harina de trigo se encuentra ubicada en Querétaro, Querétaro. Esta debe satisfacer las demandas de los centros comerciales y cumplir con el lapso de tiempo para entrega que fijan los clientes como se muestra en la tabla 1.5, de lo contrario le imponen

una multa. La flota de vehículos que dispone la empresa es de 6 camiones para 8 toneladas de capacidad de carga útil.

La hora de salida del almacén para los transportes es a las 5:00 horas, el límite de tiempo de manejo es a las 23:59 horas, el límite de tiempo de trabajo es de 23:59 horas y el límite de distancia para recorrer es de 900 kilómetros. El precio de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L. El problema a resolver con los datos de la tabla 1.5 es diseñar rutas para satisfacer las demandas de los centros comerciales, el objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga, el límite de distancia y cumpla con los lapsos de tiempo para entrega, y se resuelvan las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuántas rutas se necesitan para satisfacer la demanda de los centros comerciales?
- b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?
- f) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?
- g) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?
- h) ¿Qué camión llega primero al almacén?
- i) ¿Qué camión llega al final al almacén?
- j) ¿Cuál es el tiempo de trabajo para cada ruta?
- k) ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?

*Tabla 1.5. Clientes y demandas para el VRPTW*

| Nombre    | Localidad                      | Ventana de tiempo |       | Tiempo de servicio | Demanda | ID |
|-----------|--------------------------------|-------------------|-------|--------------------|---------|----|
|           |                                | Inicio            | Fin   |                    |         |    |
| almacén   | Querétaro, Querétaro           | 05:00             | 23:59 | 00:30              | 0       | 0  |
| cliente 1 | Huimilpan, Querétaro           | 06:10             | 23:59 | 00:20              | 3       | 1  |
| cliente 2 | San Joaquín, Querétaro         | 07:15             | 23:59 | 00:20              | 2       | 2  |
| cliente 3 | Cadereyta de Montes, Querétaro | 08:05             | 23:59 | 00:20              | 1.5     | 3  |

*Tabla 1.5. Clientes y demandas para el VRPTW (continuación)*

|            |                                        |       |       |       |     |    |
|------------|----------------------------------------|-------|-------|-------|-----|----|
| cliente 4  | Jalpan de Serra,<br>Querétaro          | 09:20 | 23:59 | 00:20 | 3.5 | 4  |
| cliente 5  | Pedro Escobedo,<br>Querétaro           | 10:10 | 23:59 | 00:20 | 4   | 5  |
| cliente 6  | Tequisquiapan,<br>Querétaro            | 11:05 | 23:59 | 00:20 | 5   | 6  |
| cliente 7  | Peñamiller, Querétaro                  | 12:20 | 23:59 | 00:20 | 2.5 | 7  |
| cliente 8  | El Marqués, Querétaro                  | 13:05 | 23:59 | 00:20 | 3   | 8  |
| cliente 9  | Tolimán, Querétaro                     | 14:20 | 23:59 | 00:20 | 2   | 9  |
| cliente 10 | Ezequiel Montes,<br>Querétaro          | 15:10 | 23:59 | 00:20 | 4   | 10 |
| cliente 11 | Aguascalientes,<br>Aguascalientes      | 16:05 | 23:59 | 00:20 | 1.5 | 11 |
| cliente 12 | Calvillo, Aguascalientes               | 17:20 | 23:59 | 00:20 | 1.5 | 12 |
| cliente 13 | Tepezalá,<br>Aguascalientes            | 18:15 | 23:59 | 00:20 | 2   | 13 |
| cliente 14 | Pabellón de Arteaga,<br>Aguascalientes | 19:10 | 23:59 | 00:20 | 3.5 | 14 |
| cliente 15 | El Llano,<br>Aguascalientes            | 20:00 | 23:59 | 00:20 | 3   | 15 |

La resolución y la interpretación de este problema se presenta en el capítulo III con el uso del libro de Excel vrp\_solver\_v1.05.

### **1.5 Problema de Ruteo de Vehículos con Viajes Múltiples (VRPMT)**

Toth & Vigo (2014) aclaran que el VRP con Múltiple Uso de Vehículos (VRPM) también se conoce como el VRP con Múltiples Viajes (MTVRP) y recientemente atrajo a nuevos esfuerzos de investigación en el contexto de aplicaciones del mundo real y de la logística de la ciudad.

El VRP con Múltiple Uso de Vehículos (VRPM), Golden et al (2008) explican que en los problemas de ruteo vehículos estándar, se asume implícitamente que cada vehículo sirve una sola ruta. En algunos casos, sin embargo, podría ser posible o incluso necesario para asignar el vehículo a varias rutas. Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando la capacidad del vehículo es relativamente pequeña. En este caso, se requieren frecuentes regresos al depósito para cargar o descargar el vehículo.

En el Problema de Ruteo de Vehículos con Viajes Múltiples (VRPMT), Ferrucci (2013) plantea que los vehículos pueden volver al depósito durante el horizonte de planificación y establecer otro viaje después. Tales retornos intermedios al depósito son útiles si se consideran problemas de distribución en la que la carga de todas las solicitudes asignadas a un vehículo su recorrido excede su capacidad. Por lo tanto, el vehículo puede reponer su capacidad y continuar para dar servicio a otras solicitudes. Además, la decisión de programación del vehículo puede ser relevante, por ejemplo, para determinar cuándo establecer el próximo viaje del vehículo.

El Múltiple Uso de Vehículos, Toth & Vigo (2014) plantean que el supuesto estándar para muchas variantes VRP es que cada vehículo realiza sólo una ruta sobre el horizonte de planificación  $T$ . En el VRP con Múltiple Uso de Vehículos (VRPM), Taillard et al (como se citó en Toth & Vigo, 2014) explican que los vehículos pueden realizar varias rutas. Dado algunas rutas, con duraciones de  $T_1, T_2, \dots, T_p$ , un solo vehículo puede realizarlas si sostiene  $T_1 + T_2 + \dots + T_p \leq T$ .

En particular, si la capacidad del vehículo  $Q$  es relativamente pequeña u otras restricciones imponen un reducido número de servicios por ruta, las soluciones viables con una flota limitada de tamaño  $|K|$  sólo se pueden lograr cuando los vehículos son reutilizados. Tenga en cuenta que el ruteo con flota ilimitada primero y posteriormente empaquetado las rutas resultantes en el horizonte de planificación generalmente produce soluciones subóptimas al VRPM. En algunos casos, las horas extras para los conductores se permiten con una multa.

### 1.5.1 Planteamiento del modelo VRPMT

Olivera & Viera (2007) explican que un grafo dirigido  $G = (V, E)$  donde  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  es el conjunto de nodos y  $E \subseteq V \times V$  es el conjunto de arcos. El nodo 0 representa un depósito y los nodos  $i \in V \setminus \{0\}$  representan clientes. Cada cliente  $i$  tiene asociada una demanda  $d_i$ . Si  $(i, j) \in E$ , es posible viajar directamente desde  $i$  hasta  $j$  a un costo  $c_{ij}$  y en un tiempo  $t_{ij}$ . Se dispone de una flota  $K = \{1, \dots, m\}$  de  $m$  vehículos idénticos (la flota es homogénea). Cada vehículo tiene una capacidad  $Q$ . Existe un horizonte de tiempo  $T$  que indica la duración del período de planificación.

Se supone que  $Q$ ,  $d_i$  y  $T$  son enteros positivos y que  $G$  es fuertemente conexo. También se considera que  $t_{ij} = \lambda c_{ij} \forall (i, j) \in E$  para cierto  $\lambda > 0$ , lo cual resulta razonable en la práctica pues los costos de viaje suelen considerar principalmente el gasto de combustible y son proporcionales al tiempo de utilización de los vehículos.

Una ruta es un ciclo simple en  $G$  que comienza y termina en el depósito y será denotada como  $r = (v_0, \dots, v_{n(r)+1})$ , donde  $v_0 = v_{n(r)+1} = 0$  y  $(v_i, v_{i+1}) \in E \forall i \in 0 \dots n(r)$ . Para cada ruta  $r$ ,  $n(r)$  representa la cantidad de clientes que visita. La demanda cubierta por una ruta, su costo y su duración están dadas, respectivamente, por:

$$d(r) = \sum_{i=1}^{n(r)} d_{v_i}, c(r) = \sum_{i=0}^{n(r)} c_{v_i, v_{i+1}} \text{ y } t(r) = \sum_{i=0}^{n(r)} t_{v_i, v_{i+1}} \quad (1.57)$$

En algunos casos se utilizará  $c_r$  y  $t_r$  para denotar el costo y la duración de una ruta.

El Problema de Ruteo de Vehículos con Viajes Múltiples (VRPMT) consiste en determinar un conjunto de rutas junto con una asignación de cada ruta a un vehículo, de modo que el costo total de las rutas sea mínimo y se satisfagan las siguientes restricciones:

a) Cubrimiento: cada cliente debe ser visitado por exactamente una ruta.

b) Capacidad: la demanda de los clientes en la misma ruta no debe exceder la capacidad del vehículo que la recorre.

c) Horas extras: cada vehículo debe poder recorrer las rutas que tiene asignadas dentro del periodo de planificación.

Una solución para el problema es una secuencia de conjuntos de rutas:

$$s = (R_1(s), \dots, R_m(s)) \quad (1.58)$$

donde el conjunto  $R_k(s)$  está formado por las rutas asignadas al vehículo  $k$ . El conjunto de rutas de la solución es:

$$R(s) = \bigcup_{k \in K} R_k(s) \quad (1.59)$$

En los casos en que no haya ambigüedades, se denotará una solución simplemente como  $s = (R_1, \dots, R_m)$ . El costo de una solución es la suma de los costos de cada ruta:

$$f(s) = \sum_{r \in R(s)} c(r) \quad (1.60)$$

Dado un vehículo  $k$  denotamos como  $t_k(s)$  a la duración total de las rutas que tiene asignadas:

$$t_k(s) = \sum_{r \in R_k(s)} t(r) \quad (1.61)$$

Las restricciones del problema pueden ser escritas utilizando esta notación como:

$$(i) \forall i \in V \setminus \{0\}, \exists! r = (v_0, \dots, i, \dots, v_{n(r)+1}) \in R(s),$$

$$(ii) d(r) \leq Q \forall r \in R(s),$$

$$(iii) t_k(s) \leq T \forall k \in K.$$

Sea  $S$  el conjunto que contiene a todas las rutas cuya demanda no supera  $Q$ , es decir, que respetan la restricción de capacidad. Para cada  $r \in S$  se define  $a_{ir}$  indicando si la ruta  $r$  visita al cliente  $i$  ( $a_{ir} = 1$ ) o no ( $a_{ir} = 0$ ). El VRPMT puede ser formulado de la siguiente manera:

$$\text{minimizar } \sum_{k \in K} \sum_{r \in S} c_r x_r^k \quad (1.62)$$

$$\text{s. a. } \sum_{k \in K} \sum_{r \in S} a_{ir} x_r^k = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (1.63)$$

$$\sum_{r \in S} t_r x_r^k \leq T \quad \forall k \in K \quad (1.64)$$

$$x_r^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, \forall r \in S \quad (1.65)$$

Si  $x_r^k = 1$ , entonces la ruta  $r$  es parte de la solución y es asignada al vehículo  $k$  (es decir,  $r \in R_k(s)$ ). Si  $x_r^k = 0 \forall k \in K$ , entonces  $r$  no forma parte de la solución. La función objetivo (1.62) establece que se debe minimizar el costo total. El hecho de que cada cliente deba pertenecer a exactamente una ruta se impone en (1.63) y las restricciones de horas extras se establecen en (1.64).

### 1.5.2 Ejemplo de aplicación VRPMT

La casa del oso es un establecimiento que vende paquetes de hilos ubicado en la calle Francisco I. Madero #34 en Xonacatlán, el cual abastece de materia prima a los productores de peluche. El día martes debe satisfacer las demandas de los clientes con una limitación de tiempo de servicio que se presentan en la tabla 1.6. La tienda solo tiene a su disposición dos vehículos con capacidades de carga útil de 180 y 150 paquetes. La restricción que se impone es asignar a los transportes realizar varias rutas dentro del horizonte de tiempo.

La hora de salida del establecimiento para los transportes es a las 7:00 horas, el límite de tiempo de manejo es a las 21:00 horas, el límite de tiempo de trabajo es de 20:00 horas y el límite de distancia para recorrer es de 400 kilómetros. El precio de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L.

*Tabla 1.6. Clientes y demandas para el VRPMT*

| Direcciones                                                                      | Tiempo de servicio | Demanda | ID |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------|----|
| Calle Francisco Ignacio Madero 34, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX | 00:20              | 0       | 0  |
| Calle 5 de Mayo 20, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX                | 00:10              | 30      | 1  |
| Calle 5 de Febrero 10, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX             | 00:10              | 32      | 2  |
| Calle 16 de Septiembre 30, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX         | 00:10              | 25      | 3  |
| Calle 20 de Noviembre 33, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX          | 00:10              | 38      | 4  |
| Calle Felipe Carrillo Puerto 97, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX   | 00:10              | 36      | 5  |
| Calle José María Morelos 17, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX       | 00:10              | 38      | 6  |
| Calle 5 de Febrero 90, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX             | 00:10              | 35      | 7  |
| Calle Francisco Sarabia 26, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX        | 00:10              | 28      | 8  |
| Calle Durango 5, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX                   | 00:10              | 15      | 9  |
| Calle Ramos Millán 6, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX              | 00:10              | 10      | 10 |
| Calle Durango 16, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX                  | 00:10              | 40      | 11 |
| Calle Vicente Guerrero 7, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX          | 00:10              | 35      | 12 |
| Calle 16 de Septiembre 15, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX         | 00:10              | 30      | 13 |
| Calle Francisco Ignacio Madero 18, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX | 00:10              | 39      | 14 |

*Tabla 1.6. Clientes y demandas para el VRPMT (continuación)*

|                                                                          |       |    |    |
|--------------------------------------------------------------------------|-------|----|----|
| Calle Vicente Guerrero 34, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX | 00:10 | 37 | 15 |
| Calle 20 de Noviembre 5, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX   | 00:10 | 25 | 16 |
| Calle Miguel Hidalgo 16, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX   | 00:10 | 30 | 17 |
| Calle Vicente Guerrero 29, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX | 00:10 | 19 | 18 |
| Calle Miguel Hidalgo 40, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX   | 00:10 | 37 | 19 |
| Calle 20 de Noviembre 13, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX  | 00:10 | 26 | 20 |

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.6 es diseñar rutas para satisfacer las demandas de los clientes, el objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga, el límite de distancia y que los transportes realicen varias rutas dentro del horizonte de tiempo, y se resuelvan las preguntas siguientes:

- ¿Cuántas rutas se necesitan para satisfacer la demanda de los clientes?
- ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?
- ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?
- ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?
- ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?
- ¿Cuál es el tiempo de trabajo para cada ruta?
- ¿Qué camión llega primero al almacén?
- ¿Qué camión llega al último al almacén?

La resolución y la interpretación de este problema se presenta en el capítulo III con el uso del libro de Excel vrp\_solver\_v1.05.

## **1.6 Problema de Ruteo de Vehículos Abierto (OVRP)**

El Problema de Ruteo de Vehículos Abierto (OVRP), Onieva et al (2015) lo especifican que es un tipo del Problema de Ruteo de Vehículos clásico (VRP) en el que los vehículos no necesariamente regresan al depósito inicial después de dar el servicio a los clientes. El OVRP se aplica en casos donde la empresa no cuenta con los vehículos requeridos o no hay suficientes vehículos en la empresa para distribuir el producto entre los clientes. En ambos casos, la empresa alquilará un número de vehículos, y cuando estos vehículos llevan a cabo sus tareas, no regresan al depósito inicial. Este es uno de los problemas de clase 3PL.

El OVRP consiste en encontrar una de las mejores rutas para un conjunto de vehículos que deben ofrecer servicios a un conjunto de clientes. Cada ruta en OVRP incluye una secuencia de clientes que comienza en el depósito inicial y termina en uno de los clientes. Las limitaciones habituales del OVRP son que todos los vehículos deben tener la misma capacidad, y cada cliente debe ser visitado por solamente un vehículo para recibir el servicio requerido. Las solicitudes totales de todos los clientes en una ruta no deben superar la capacidad total de los vehículos. En algunos problemas, el límite de tiempo se considera junto con el límite de distancia que cubre la ruta específica: la distancia recorrida y el tiempo del recorrido consumido del vehículo por la ruta no debe exceder los límites permisibles. Reducción del número de vehículos, disminuir la distancia recorrida en las rutas, y reduciendo el tiempo de viaje se encuentran entre los principales propósitos de resolver este problema.

El Problema de Ruteo de Vehículos Abierto (OVRP), Di Gaspero et al (2013) explican que es una modificación pequeña pero relevante prácticamente del estándar Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados (CVRP), en el que cada ruta comienza en el depósito y termina en el último cliente atendido. Por ejemplo, los modelos de fijación de precios para el uso de vehículos externos o servicios de transporte subcontratado conducen a una estructura de costos donde los costos sólo se contabilizan desde el depósito hasta el último cliente atendido.

### 1.6.1 Planteamiento del modelo OVRP

Onieva et al (2015) explican que en el OVRP,  $n$  se toma para ser el número de clientes,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto de  $n$  clientes y  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  el conjunto de clientes y el punto de partida, donde 0 representa el punto de partida,  $q_i$  la demanda del cliente  $i \in V - \{0\}$  y  $Q$  es la capacidad de cada vehículo. Se supone que  $K$  es el número máximo de vehículos disponibles y  $c_{ij}$  el costo de la secuencia de los clientes de  $i$  a  $j$  y a una escala equivalente a los ajustes apropiados. Por otra parte, el costo  $w_k$  se considera para cada viaje del vehículo  $k$ . Por lo tanto, el OVRP implicará encontrar el número mínimo de vehículos requeridos y determinar una ruta para cada vehículo de manera que se cumplan todas las peticiones del cliente y cada cliente es visitado exactamente por un vehículo y el vehículo no exceda su capacidad. La modelación matemática del OVRP requiere dos grupos de variables, el primer grupo para modelar una secuencia en la que los clientes son visitados por vehículos y se define como sigue:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{si el cliente } i \text{ precede al cliente } j \text{ visitado por un vehículo } k \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (1.66)$$

El segundo grupo de variables ( $z_k$ ) es una variable binaria y definida en:

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{si el vehículo } k \text{ es activo} \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (1.67)$$

Si los mismos servicios de vehículos al menos un cliente, se considera activo. El uso de los parámetros y variables consideradas, se puede expresar el problema OVRP de esta manera:

$$\text{minimizar } \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij}^k + \sum_{k=1}^K w_k z_k \quad (1.68)$$

Sujeto a

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (1.69)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (1.70)$$

$$x_{ij}^k \leq z_k, \quad \forall k = 1, \dots, K, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (1.71)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{iu}^k - \sum_{j=1}^n x_{uj}^k = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K, \forall u = 1, 2, \dots, n \quad (1.72)$$

$$\sum_{(i,j) \in S \times S} x_{ij}^k \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq V: 1 \leq |S| \leq n, k \quad (1.73)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j \left( \sum_{i=0}^n x_{ij}^k \right) \leq Q, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K \quad (1.74)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j}^k \leq 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K \quad (1.75)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i0}^k \leq 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K \quad (1.76)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K, \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n \quad (1.77)$$

$$z_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K \quad (1.78)$$

La función objetivo en (1.68) va a crear un equilibrio entre los costos de viaje y el vehículo. La ecuación (1.69) representa la conectividad de todas las rutas tomadas por todos los vehículos después de que también se mueven desde el punto inicial y el costo de la primera parte de cada ruta. Las ecuaciones (1.70) y (1.71) garantizan la llegada y salida de exactamente un coche a/de cada cliente. La ecuación (1.71) se relaciona con las variables  $x$  y  $z$  e indican que todos los clientes reciben servicios de vehículos activos. La ecuación (1.72) exhibe la continuidad de cada ruta y la (1.73) el identificador de los subviajes. La desigualdad en (1.74) muestra la capacidad máxima del vehículo, y las desigualdades en (1.75) y (1.76) indican que sólo un vehículo debe iniciar su recorrido desde el punto de partida para dar servicio a una secuencia de clientes y que ninguno de los vehículos regresa al punto de partida. Las ecuaciones (1.77) y (1.78) son las definiciones de las variables  $x$  y  $z$  para cada vehículo  $k$ .

Existen algunas limitaciones en el problema: (a) todos los vehículos deben ser de la misma capacidad; (b) el tiempo de viaje para cada vehículo debe ser menor que el tiempo límite considerado; (c) la suma de las solicitudes de los clientes en cada ruta debe ser menor que la capacidad del vehículo asignado a la ruta; (d) cada cliente es visitado sólo una vez y por uno solo de los vehículos para su solicitud de ser satisfecho. En pocas palabras, el propósito del OVRP es reducir el número de vehículos para dar servicio a los clientes y para disminuir la distancia de viaje y el tiempo de los vehículos en las rutas.

### 1.6.1.1 Requisitos y limitaciones del OVRP

Los requisitos del Problema de Ruteo de Vehículos Abierto (OVRP), Di Gaspero et al (2013) define que son los siguientes:

- a) Un depósito con la información de ubicación (es decir, coordenadas).
- b) Una lista de  $N$  clientes con información de ubicación e información de la demanda (tamaño de la demanda de los clientes y el tiempo de servicio relacionados con el cliente).
- c) Una matriz de la distancia del tamaño  $(N + 1) * (N + 1)$  con información sobre la distancia del viaje más corto entre todas las ubicaciones.
- d) Una flota de vehículos de tamaño homogéneos con capacidad limitada.

Las limitaciones del Problema de Ruteo de Vehículos Abierto (OVRP), Di Gaspero et al (2013) explica que son las siguientes:

Limitaciones estructurales:

- Una ruta del vehículo es una secuencia de localizaciones.
- Cada ruta del vehículo tiene que empezar en el depósito. Entonces, únicamente se mueve directo a las ubicaciones de los clientes utilizando la distancia más corta.
- Un plan de ruta es un conjunto de rutas de vehículos, en el que cada cliente tiene que ser servido exactamente una vez.

Limitaciones de capacidad:

- La suma de las demandas de los clientes en cada ruta del vehículo no exceda el límite de capacidad.
- Cada demanda de un cliente debe ser menor o igual al límite de la capacidad del tipo de vehículo utilizado.

Limitaciones de longitud de la ruta o tiempo de operación:

- La longitud de la ruta de una ruta de vehículo se define como la suma de la distancia de desplazamiento entre las localizaciones adyacentes de la ruta.
- El tiempo de operación de una ruta de vehículo se define como la suma de la longitud de la ruta y el tiempo de servicio a los clientes atendidos.
- El tiempo de operación de cada vehículo no exceda el límite de tiempo de operación.

Función objetivo: El objetivo general es encontrar un plan de ruta válida para que la longitud total del recorrido sea mínima.

### 1.6.2 Ejemplo de aplicación OVRP

Una empresa que produce chocolates está ubicada en Colima, la cual debe distribuir sus paquetes de producto, para ello contrata un servicio de distribución para poder satisfacer las demandas de los clientes que se presentan en la tabla 1.7. La fábrica impone que los vehículos no regresan al almacén después de dar el servicio a los clientes.

La empresa que ofrece el servicio de distribución tiene a su disposición una flota de: 3 camiones con una capacidad de 250 paquetes de chocolates y 2 camiones con una capacidad de 200 paquetes de producto. La hora de salida de la fábrica es a las 6:00 horas, el límite de tiempo de manejo es a las 22:00 horas, el límite de tiempo de trabajo es de 20:00 horas y el límite de distancia a recorrer es de 650 kilómetros. El precio de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L.

*Tabla 1.7. Clientes y demandas para el OVRP*

| Nombre    | Localidad          | Demanda | ID |
|-----------|--------------------|---------|----|
| almacén   | Colima, Colima     | 0       | 0  |
| cliente 1 | Manzanillo, Colima | 20      | 1  |
| cliente 2 | Comala, Colima     | 11      | 2  |
| cliente 3 | Minatitlán, Colima | 30      | 3  |
| cliente 4 | Armería, Colima    | 42      | 4  |

*Tabla 1.7. Clientes y demandas para el OVRP (continuación)*

|            |                                      |    |    |
|------------|--------------------------------------|----|----|
| cliente 5  | Coquimatlán, Colima                  | 51 | 5  |
| cliente 6  | Tecomán, Colima                      | 35 | 6  |
| cliente 7  | Ixtlahuacán, Colima                  | 29 | 7  |
| cliente 8  | Villa de Álvarez, Colima             | 80 | 8  |
| cliente 9  | Cuauhtémoc, Colima                   | 52 | 9  |
| cliente 10 | Celaya, Guanajuato                   | 10 | 10 |
| cliente 11 | Salvatierra, Guanajuato              | 75 | 11 |
| cliente 12 | Abasolo, Guanajuato                  | 42 | 12 |
| cliente 13 | Irapuato, Guanajuato                 | 29 | 13 |
| cliente 14 | León, Guanajuato                     | 15 | 14 |
| cliente 15 | Comonfort, Guanajuato                | 17 | 15 |
| cliente 16 | Acámbaro, Guanajuato                 | 24 | 16 |
| cliente 17 | San Felipe, Guanajuato               | 79 | 17 |
| cliente 18 | Pueblo Nuevo, Guanajuato             | 70 | 18 |
| cliente 19 | Coroneo, Guanajuato                  | 51 | 19 |
| cliente 20 | Guanajuato, Guanajuato               | 8  | 20 |
| cliente 21 | San Francisco del Rincón, Guanajuato | 14 | 21 |
| cliente 22 | Santa Catarina, Guanajuato           | 9  | 22 |
| cliente 23 | San Miguel de Allende, Guanajuato    | 21 | 23 |
| cliente 24 | Silao de la Victoria, Guanajuato     | 35 | 24 |
| cliente 25 | Tarimoro, Guanajuato                 | 37 | 25 |
| cliente 26 | Moroleón, Guanajuato                 | 40 | 26 |
| cliente 27 | Uriangato, Guanajuato                | 50 | 27 |
| cliente 28 | Santiago Maravatío, Guanajuato       | 33 | 28 |
| cliente 29 | Salamanca, Guanajuato                | 81 | 29 |
| cliente 30 | Huanímaro, Guanajuato                | 9  | 30 |

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.7 es diseñar rutas para satisfacer las demandas de los clientes, el objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga, el límite de distancia y cumpla que los camiones no regresen a la fábrica de chocolates, y se resuelvan las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuántas rutas se necesitan para satisfacer la demanda de los clientes?
- b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?
- f) ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?
- g) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?
- h) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?
- i) ¿Qué camión termina primero su ruta?
- j) ¿Qué camión termina al último su ruta?

La resolución y la interpretación de este problema se presenta en el capítulo III con el uso del libro de Excel vrp\_solver\_v1.05.

## CAPÍTULO II. MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA PROBLEMAS DE RUTEO

Duarte (2010) define que el concepto de optimización se concibe como el proceso de intentar encontrar la mejor solución posible a un problema de optimización, generalmente en un tiempo limitado.

Se puede decir que un problema de optimización es simplemente un problema en el que hay varias (en general muchas) posibles soluciones y alguna forma clara de comparación entre ellas, de manera que éste existe si y sólo si se dispone un conjunto de soluciones candidatas diferentes que pueden ser comparadas. Desde un punto de vista matemático, un problema de optimización  $P$  se puede formular como una 3 tupla  $P = (f, SS, F)$ , definida como sigue:

$$P = \begin{cases} \text{opt: } f(x) & \text{Función Objetivo} \\ \text{s.a.,} & \\ x \in F \subset SS & \text{Restricciones} \end{cases}$$

donde  $f$  es la función a optimizar (maximizar o minimizar),  $F$  es el conjunto de soluciones factibles y  $SS$  es el espacio de soluciones.

Las metodologías para la resolución de Problemas de Ruteo de Vehículos se dividen en tres principales: métodos exactos, métodos heurísticos y métodos metaheurísticos.

### 2.1 Métodos Exactos

Un problema de Programación Lineal Entera (PLE), Winston (2005) explica que es un problema de programación lineal (PL) en el cual se requiere que algunas variables o todas sean enteros no negativos. La estrategia de los algoritmos de PLE, Taha (2012) describe que implica los siguientes tres pasos:

Paso 1. Desahogue el espacio de soluciones del PLE al eliminar la restricción entera en todas las variables enteras y reemplazar cualquier variable binaria y con el intervalo continuo  $0 \leq y \leq 1$ . El resultado del desahogo es una programación lineal.

Paso 2. Resuelva la PL, e identifique su óptimo continuo.

Paso 3. Comenzando desde el punto óptimo continuo, agregue restricciones especiales que modifiquen iterativamente el espacio de soluciones de PL de modo que finalmente dé un punto extremo óptimo que satisfaga los requerimientos enteros.

### **2.1.1 Método de ramificación y acotación**

La técnica de ramificación y acotamiento, Winston (2005) define que es un método que encuentra la solución óptima de un PE mediante la enumeración exhaustiva de los puntos en una región factible de un sub problema.

Lieberman & Hillier (2010) explican que la idea básica en la que se apoya la técnica de ramificación y acotamiento es divide y conquistarás. Como es demasiado complicado resolver en forma directa el problema original “grande”, se divide en sub problemas cada vez más pequeños hasta que éstos se puedan vencer. La división (ramificación) se hace mediante una partición del conjunto completo de soluciones factibles en subconjuntos más pequeños. En parte, la conquista (sondeo) se hace mediante el acotamiento de la mejor solución del subconjunto para después descartar los subconjuntos cuya cota indique que no es posible que contenga una solución óptima para el problema original.

#### **2.1.1.1 Algoritmo de ramificación y acotamiento**

El método de ramificación y acotamiento, Taha (2012) lo resume de la siguiente manera:

Considere un problema de maximización. Establezca una cota inferior inicial  $z = -\infty$  para el valor objetivo óptimo de la PLE y establezca  $i = 0$ .

Paso 1. (Examen a fondo/acotamiento). Seleccione PL<sub>i</sub>, el siguiente sub problema a ser examinado. Resuelva PL<sub>i</sub>, y trate de examinarlo a fondo utilizando una de estas tres condiciones:

- (a) El valor  $z$  óptimo de PL<sub>i</sub> no puede dar un valor objetivo mejor que la cota inferior actual.
- (b) PL<sub>i</sub> da por resultado una solución entera factible mejor que la cota inferior actual.
- (c) PL<sub>i</sub> no tiene ninguna solución factible.

Surgirán dos casos:

- (a) Si PL<sub>i</sub> se examina a fondo y se determina una solución mejor, actualice la cota inferior. Si todos los sub problemas han sido examinados a fondo, deténgase; la cota inferior da la solución óptima (si no existe una cota inferior finita, el problema no tiene ninguna solución factible). De otro modo, establezca  $i = i + 1$ , y repita el paso 1.
- (b) Si PL<sub>i</sub> no se ha examinado a fondo, proceda al paso 2 para ramificación.

Paso 2. (Ramificación). Seleccione una de las variables enteras  $x_j$ , cuyo valor óptimo  $x_j$  en la solución de PL<sub>i</sub> no es entero. Cree los dos subproblemas de PL correspondientes a  $x_j \leq [x_j]$  y  $x_j \geq [x_j] + 1$ . Establezca  $i = i + 1$ , y proceda el paso 1.

El algoritmo de ramificación y acotamiento puede ampliarse a problemas combinados (en los que sólo algunas de las variables son enteras). Nunca se selecciona una variable continua como variable de ramificación. Un sub problema factible proporciona una nueva cota del valor objetivo si los valores de las variables discretas son enteros con un valor objetivo mejorado.

### **2.1.2 Método de plano de corte**

Un plano cortante (o corte) de un problema de PLE, Lieberman & Hillier (2010) explican que es una nueva restricción funcional que reduce la región factible del relajamiento de PL sin eliminar soluciones factibles del problema de PLE original. Taha (2012) explica que como en el algoritmo de ramificación y acotamiento, el algoritmo de plano de corte también se inicia en

la solución óptima continua. Se agregan restricciones especiales (llamadas cortes) al espacio de soluciones para que produzcan un punto extremo óptimo entero.

#### **2.1.2.1 Algoritmo de plano de corte**

El método del plano de corte, Winston (2005) especifica lo siguiente:

Paso 1. Encuentre el tablero óptimo para la relajación de la programación lineal. Si todas las variables de la solución óptima asumen valores enteros, entonces ha encontrado una solución óptima para el PLE; en caso contrario, siga con el paso 2.

Paso 2. Elija una restricción en el tablero óptimo de la relajación del PL cuyo lado derecho tiene la parte fraccionaria más cercana a  $\frac{1}{2}$ . Esta restricción se usa para generar un corte.

Paso 2a. En el caso de la restricción identificada en el paso 2, escriba su lado derecho y cada coeficiente de las variables en la forma  $[x] + f$ , donde  $0 \leq f < 1$ .

Paso 2b. Vuelve a escribir la restricción usada para generar el corte como: Todos los términos con coeficiente entero = todos los términos con coeficiente fraccionario. Entonces el corte es: Todos los términos con coeficiente fraccionario  $\leq 0$ .

Paso 3. Encuentre la solución óptima para la relajación del PL, con el corte como una restricción adicional, mediante el algoritmo simplex dual. Si todas las variables asumen valores enteros en la solución óptima, ha encontrado una solución óptima para el PLE. En caso contrario, escoja la restricción cuyo lado derecho tenga la fracción mayor cercana a  $\frac{1}{2}$  y úsela para generar otro corte, el cual se suma al tablero. Continúe con este proceso hasta que obtenga una solución en la cual todas las variables sean enteros. Ésta será una solución óptima para el PLE.

### **21.3 Programación dinámica**

Se han propuesto también algoritmos basados en la Programación Dinámica (PD), los cuales aceleran los cálculos mediante la relajación del espacio de estados.

La idea principal de la Programación Dinámica (PD), Taha (2012) explica que es descomponer el problema en subproblemas (más manejables). Los cálculos se realizan entonces recursivamente donde la solución óptima de un subproblema se utiliza como dato de entrada al siguiente problema. La solución para todo el problema está disponible cuando se soluciona el último subproblema. La forma en que se realizan los cálculos recursivos depende de cómo se descomponga el problema original. En particular, normalmente los subproblemas están vinculados por restricciones comunes. La factibilidad de estas restricciones comunes se mantiene en todas las iteraciones.

#### **2.1.3.1 Características de los problemas de programación dinámica**

Lieberman & Hillier (2010) presentan las ocho características que distinguen a los problemas de programación dinámica de la siguiente manera:

- a) El problema se puede dividir en etapas, cada una de las cuales requiere de una política de decisión.
- b) Cada etapa tiene cierto número de estados asociados con su inicio. En general, los estados son las distintas condiciones posibles en las que se puede encontrar el sistema en cada etapa del problema. El número de estados puede ser finito o infinito.
- c) El efecto de la política de decisión en cada etapa es transformar el estado actual en un estado asociado con el inicio de la siguiente etapa, quizá según una distribución de probabilidad.
- d) El procedimiento de solución está diseñado para encontrar una política óptima para manejar el problema completo, es decir, una receta para elaborar la política de decisión óptima para cada etapa en cada uno de los estados posibles.

e) Dado el estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en etapas anteriores. Por tanto, la decisión inmediata óptima depende sólo del estado actual y no de cómo se llegó ahí. Éste es el principio de optimalidad de la programación dinámica.

f) El procedimiento de solución comienza cuando se determina la política óptima para la última etapa. La política óptima para la última etapa prescribe la política óptima de decisión para cada estado posible en esa etapa.

g) Se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para la etapa  $n$ , dada la política óptima para la etapa  $n + 1$ . La forma precisa de la relación recursiva difiere de un problema a otro de programación dinámica, pero se usará una notación análoga, como se resume a continuación:

$N$  = número de etapas.

$n$  = etiqueta de la etapa actual ( $n = 1, 2, \dots, N$ ).

$s_n$  = estado actual de la etapa  $n$ .

$x_n$  = variable de decisión de la etapa  $n$ .

$x_n^*$  = valor óptimo de  $x_n$  (dado  $s_n$ ).

$f_n(s_n, x_n)$  = contribución de los estados  $n, n + 1, \dots, N$  a la función objetivo si el sistema se encuentra en el estado  $s_n$  en la etapa  $n$ , la decisión inmediata es  $x_n$ , y en adelante se toman decisiones óptimas.

$$f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*)$$

La relación recursiva siempre tendrá la forma:

$$f_n^*(s_n) = \max \{f_n(s_n, x_n^*)\} \text{ o}$$

$$f_n^*(s_n) = \min \{f_n(s_n, x_n^*)\}$$

donde  $f_n(s_n, x_n)$  se escribe en términos de  $s_n, x_n, f_{n+1}^*(s_{n+1})$  y talvez alguna medida de la contribución inmediata de  $x_n$  a la función objetivo. Lo que hace que la expresión de  $f_n^*(s_n)$  sea una relación recursiva es la inclusión de  $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ , en el lado derecho, de manera que  $f_n^*(s_n)$  está definida en términos de  $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ .

h) Cuando se usa esta relación recursiva, el procedimiento de solución comienza al final y se mueve hacia atrás etapa por etapa para encontrar cada vez la política óptima para esa etapa hasta que encuentra la política óptima desde la etapa inicial. Esta política óptima lleva de inmediato a una solución óptima para el problema completo, es decir,  $x_1^*$  para el estado inicial  $s_1$ , después  $x_2^*$  para el estado  $s_2$  que resulta, luego  $x_3^*$  para el estado  $s_3$  que se obtiene, y así sucesivamente hasta  $x_N^*$  para el estado  $s_N$  resultante.

Para todos los problemas de programación dinámica, se obtiene una tabla como se muestra en la figura 2.1 para cada etapa ( $n = N, N - 1, \dots, 1$ ).

| $s_n$ | $x_n$ | $f_n(s_n, x_n)$ | $f_n^*(s_n)$ | $x_n^*$ |
|-------|-------|-----------------|--------------|---------|
|       |       |                 |              |         |
|       |       |                 |              |         |

Figura 2.1. Tabla de programación dinámica

Cuando se obtiene esta tabla de la etapa inicial ( $n = 1$ ), el problema queda resuelto.

## 2.2 Métodos Heurísticos

Duarte (2010) explica que para la mayoría de problemas de interés no se conoce un algoritmo exacto con complejidad polinómica que encuentre la solución óptima a dicho problema. Además, la cardinalidad del espacio de búsqueda suele ser enorme, lo cual hace generalmente inviable el uso de algoritmos exactos, fundamentalmente porque la cantidad de tiempo que se necesitaría para encontrar una solución es completamente inaceptable. Debido a estos dos motivos, se deben utilizar métodos aproximados o heurísticas que permitan obtener una solución de calidad en un tiempo razonable a estos problemas. El término heurística proviene del vocablo griego *heuriskien* que podría traducirse como encontrar, descubrir o hallar.

El método heurístico, Lieberman & Hillier (2010) lo definen como el procedimiento que trata de descubrir una solución factible muy buena, pero no necesariamente una solución óptima, para

el problema específico bajo consideración. No puede darse una garantía acerca de la calidad de la solución que se obtiene, pero un método heurístico bien diseñado puede proporcionar una solución que al menos está cerca de ser óptima (o concluir que no existen tales soluciones).

Entre los algoritmos heurísticos para resolver problemas de ruteo destacan tres principales que son los siguientes: Algoritmo de Clarke y Wright, Algoritmo de Gillett y Miller y el Algoritmo de Fisher y Jaikumar, los cuales se presentan a continuación.

### **2.2.1 Algoritmo de Clarke y Wright o Método de los Ahorros**

Este algoritmo, también conocido de los “ahorros”, Robuste & Galván (2005) explican que es uno de los más conocidos y antiguos. Su filosofía consiste en conectar todos los clientes de a pares con el almacén y calcular los ahorros obtenidos en costo de transporte; clasificar las alternativas de unión por ahorros decrecientes; adoptar la alternativa de unión de máximo ahorros y que a la vez sea consistente con el número de vehículos y sus capacidades, y proseguir iterando hasta que no exista mejora.

Es factible que este algoritmo deje clientes sin asignar a una ruta particular, o bien produzca rutas circulares, y se ha comprobado su inoperancia para algunos casos concretos.

#### **2.2.1.1 Construcción de rutas mediante el Algoritmo heurístico de Clarke y Wright**

Larson y Odoni (como se citó en Robuste & Galván, 2005) presentan la filosofía del Algoritmo de Clarke y Wright de la siguiente manera:

Paso 1. Calcular los ahorros  $s(ij) = c(D, i) + (Dj) - c(ij)$  para todos los pares de clientes  $i$  y  $j$ . En este caso  $D$  representa el depósito.

Paso 2. Ordenar los ahorros obtenidos en orden decreciente.

Paso 3. Empezando por el mayor ahorro buscar el primer arco factible que pueda usarse para expandir uno de los extremos de la ruta de construcción.

Paso 4. Si la ruta no puede extenderse más, se termina y comienza una nueva repitiendo el tercer paso.

Paso 5. Repetir los pasos 3° y 4° hasta que no se puedan escoger más arcos.

### **2.2.2 Algoritmo de Gillett y Miller o Método de Barridos**

El algoritmo de Gillett y Miller o el Método de Barridos, Robuste & Galván (2005) plantean que este algoritmo pertenece al grupo de algoritmos de dos fases consistentes en agrupar primero y diseñar las rutas luego.

Este algoritmo asume que son conocidas las coordenadas polares  $(r, \theta_i)$  de todos los puntos que deben ser visitados y que el depósito puede ser adoptado como el origen de éstas ( $r_i = 0$ ). La ruta se inicia con la unión del depósito a un punto arbitrario y los restantes puntos de ésta son determinados en términos de incrementos de ángulo de barrido.

La dirección de la unión de los dos primeros se puede considerar como el ángulo  $\theta_i = 0$ . La ruta cubre tantos puntos de demanda como la capacidad del vehículo ( $C_k$ ) permita, por lo tanto, el primer punto que no pueda ser incluido será el comienzo de la próxima ruta. El proceso se completa cuando todos los puntos del sistema han sido barridos, o sea, que pertenecen a alguna ruta. Conocido el grupo de puntos que forman parte de una ruta, se puede usar el algoritmo del Problema del Agente Viajero (TSP) para realizar el orden de visita de los puntos.

La mayor desventaja de este algoritmo es que genera las rutas a partir de los nodos determinados por el barrido. Esto puede traer problemas en los casos en que las rutas tengan

una restricción de tiempo y/o longitud, ya que muchas veces el grupo de nodos elegidos por el barrido la superan. La solución proporcionada por este algoritmo no es óptima y depende enormemente del cliente escogido para empezar a barrer y del orden en el cual se asignan los vehículos. De hecho, en ciertos casos la aplicación de este algoritmo no es ni siquiera recomendable.

#### **2.2.2.1 Construcción de rutas mediante el Algoritmo de Gillett y Miller**

Robuste & Galván (2005) presentan la filosofía del Algoritmo de Gillett y Miller de la siguiente forma:

Paso 1. Tomar un vehículo  $k$  que aún no haya sido utilizado.

Paso 2. Empezando por el cliente  $i$  que aún no haya sido asignado a ninguna ruta y posea menor ángulo  $\theta_i$ , incluir los siguientes  $i + 1$ ,  $i + 2$ , en la ruta  $k$  mientras no se supere la capacidad  $C_k$  del vehículo.

Paso 3. Si se han cubierto todos los puntos o bien se han utilizado todos los vehículos, proceder con el cuarto paso. En caso contrario, volver al primer paso.

Paso 4. Conectar los puntos dentro de cada sector circular empezando y finalizando en el almacén.

#### **2.2.3 Algoritmo de Fisher y Jaikumar**

Robuste & Galván (2005) explican que este algoritmo busca en determinar unas semillas, una para cada vehículo, a partir de las cuales se han de formar las rutas. La solución final tiene una dependencia directa respecto a cómo se han escogido esas semillas que generan las rutas.

##### **2.2.3.1 Construcción de rutas mediante el Algoritmo de Fisher y Jaikumar**

Robuste & Galván (2005) presentan la filosofía del algoritmo de Fisher y Jaikumar de la siguiente manera:

Paso 1. Escoger  $m$  clientes para ser semillas de rutas y asignar un vehículo a cada una de ellas.

Paso 2. Para cada cliente  $i$  y ruta  $k$ , calcular un costo de inserción  $d_{ik}$  relativo a la semilla de la ruta.

Paso 3. Resolver el siguiente problema de asignación generalizada: *Minimizar*  $Z = \sum_i \sum_k d_{ik} y_{ik}$ .

Paso 4. Conectar los puntos dentro de cada ruta definida por  $y_{ik}$ .

## 2.3 Métodos Metaheurísticos

El término Metaheurística o Meta-heurística fue acuñado por F. Glover en el año de 1986 (como se citó en Duarte, 2010). Etimológicamente, deriva de la composición de dos palabras con origen griego, que son “meta” y “heurística”, que podría traducirse como: más allá de o en nivel superior. Con este termino, Glover pretendía definir un procedimiento maestro de alto nivel que guía y modifica otras heurísticas para explorar soluciones más allá de la simple optimalidad local.

Una de las definiciones más descriptivas es la presentada por Kelly et al (como se citó en Duarte, 2010) que se puede enunciar del siguiente modo: las metaheurísticas son una clase de métodos aproximados que están diseñados para resolver problemas difíciles de optimización combinatoria en los que los heurísticos clásicos no son efectivos. Las metaheurísticas proporcionan un marco general para crear nuevos algoritmos híbridos combinando diferentes conceptos derivados de la inteligencia artificial, la evolución biológica y los mecanismos estadísticos.

Una metaheurística, Lieberman & Hillier (2010) definen que es un método de solución general que proporciona tanto una estructura general como criterios estratégicos para desarrollar un método heurístico específico que se ajuste a un tipo particular de problema. La metaheurística se ha convertido en una de las técnicas más importantes del paquete de herramientas que utilizan los profesionales de la investigación de operaciones.

Robuste & Galván (2005) comentan que el nombre de los metaheurísticos está generalmente dado por el tipo de búsqueda, y entre ellos se puede citar al Recocido Simulado, la Búsqueda Tabú y los Algoritmos Genéticos. En la tabla 2.1 se explica la clasificación de los métodos metaheurísticos.

*Tabla 2.1. Clasificación de los metaheurísticos según la solución obtenida*

| Grupo              | Descripción                                                                                                                                              | Ejemplo                                                                   |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Optimización local | Éstos se pueden denominar tradicionales y busca un óptimo local, es decir, una solución en cuyo entorno no exista ninguna solución mejor que ella misma. | Algoritmo Exhaustivo de Descenso (AED)<br>Algoritmos Greedy               |
| Cuesta arriba      | Éstos pueden escapar de los óptimos locales, mediante la adopción de soluciones que pueden ser peores que la preferible o incumbente.                    | Recocido Simulado (RS)<br>Búsqueda tabú (BT)<br>Algoritmos Genéticos (AG) |

### **2.3.1 Búsqueda Tabú**

El algoritmo de Búsqueda Tabú (BT), Taha (2012) expone que cuando la búsqueda se queda atrapada en un óptimo local, la Búsqueda Tabú selecciona el siguiente movimiento de búsqueda (posiblemente inferior) de una manera que prohíbe temporalmente, volver a examinar las soluciones anteriores. El instrumento principal para alcanzar este resultado es la lista tabú que “recuerda” los movimientos de la búsqueda anterior y los deshabilita durante un periodo de tenencia especificada. Cuando un movimiento tabú completa su tenencia, se elimina de la lista tabú y se hace disponible para futuros movimientos.

Los siguientes refinamientos pueden ser efectivos para mejorar la calidad de la solución final:

a) Criterio de aspiración

El diseño de la Búsqueda Tabú imposibilita los movimientos que aparecen en la lista tabú. Sin embargo, ocurre una excepción cuando un movimiento imposibilitado conduce a una solución mejorada.

b) Intensificación y diversificación

Por lo general se aplican dos estrategias adicionales, llamadas intensificación y diversificación, cuando una cadena de iteraciones sucesivas no produce mejoras. La intensificación demanda un examen más completo de los puntos de solución cercanos, y la diversificación intenta desplazar la búsqueda a regiones de solución no exploradas. Una forma de implementar estas estrategias es controlando el tamaño de la lista tabú. Una lista tabú más corta aumenta el tamaño permisible del conjunto de vecindades y por consiguiente intensifica la búsqueda a puntos que queden cerca de la mejor solución. Una lista tabú más larga hace lo contrario puesto que deja escapar de un punto óptimo local al permitir explorar regiones “remotas”.

Robuste & Galván (2005) determinan que el procedimiento denominado Búsqueda Tabú es un método inicialmente determinista, que tiene la capacidad de escapar de los óptimos locales. En este último se compara la mejor vecina con la solución en curso y la primera sustituye a la segunda sólo si es mejor. Para que no se detenga, lo que se hace es que la mejor vecina sustituya a la solución en curso incondicionalmente, es decir, tanto si es mejor que la solución en curso como si no lo es. Esta única condición podría presentar el inconveniente de que aparezca como solución en curso una que lo haya sido en una iteración anterior y que, por lo tanto, el algoritmo recorra, una y otra vez, una cierta sucesión de soluciones en curso. Para evitar esto se debe incluir algún mecanismo que impida la reiteración: el más sencillo es la confección de una lista de soluciones prohibidas.

Se dice que una solución es tabú si está incluida o posee alguna propiedad incluida en una lista (denominada tabú). Dicha lista generalmente contiene reglas tabú (propiedades o transformaciones) que corresponden a las soluciones que se desean evitar y no las soluciones mismas (consumiría mucha memoria, mucho tiempo, y sería muy poco restrictiva). Conceptualmente la lista tabú es una lista circular: si su longitud es de  $L$  reglas, se llena en las  $L$  primeras iteraciones y en cada nueva iteración la regla tabú correspondiente sustituye a la más antigua. Esta lista puede considerarse como un instrumento para materializar la memoria a corto plazo, pero también se puede hacer intervenir la memoria a mediano y largo plazo.

No se deben perder de vista los conceptos de intensificación y diversificación. El primero consiste en intensificar la búsqueda de soluciones con determinadas características, y el segundo, interesa si el algoritmo se estanca en un cierto tipo de soluciones o no progresa en el valor de la solución preferible.

### **2.3.1.1 Algoritmo de Búsqueda Tabú**

El algoritmo de Búsqueda Tabú, Taha (2012) lo resume en los siguientes pasos:

Paso 0. Seleccione una solución de inicio  $s_0 \in S$ . Inicie la lista tabú  $L_0 = \emptyset$ , y seleccione un esquema para especificar el tamaño de la lista tabú. Establezca  $k = 0$ .

Paso 1. Determine la vecindad factible  $N(s_k)$  que excluya miembros (inferiores) de la lista tabú  $L_k$ .

Paso 2. Seleccione el siguiente movimiento  $s_{k+1}$  a partir de  $N(s_k)$  (o de  $L_k$ , si proporciona una mejor solución), y actualice la lista tabú  $L_{k+1}$ .

Paso 3. Si se llega a una condición de terminación, deténgase. Si no, establezca  $k = k + 1$  y vaya al paso 1.

### 2.3.2 Recocido Simulado

El algoritmo de Recocido Simulado (RS), Taha (2012) explica que escapa del atrapamiento en un óptimo local utilizando una condición de probabilidad que acepta o rechaza un movimiento inferior (siempre se acepta un mejor movimiento). La idea de determinar la probabilidad de aceptación del siguiente movimiento de búsqueda se explica como sigue:

Suponga que el problema de optimización se da como:

$$\text{Maximizar o minimizar } z = F(s), s \in S.$$

A medida que la cantidad de iteraciones se incrementa, el recocido simulado busca una determinación más selectiva de estrategias de solución utilizando un parámetro ajustable  $T$ , llamado temperatura, es decir, se hace progresivamente más pequeño de acuerdo con un programa de temperatura. Un programa de  $I$  elementos para  $T$  suele definirse como  $[T = T_i, i = 0, 1, \dots, I]$ . Cada  $T_i$  solicita un número específico de iteraciones de aceptación consecutivas,  $t$ . Dado que  $s_0$  es la estrategia de inicio de la búsqueda,  $T_i$  se calcula típicamente como:

$$T_0 = r_0 F(s_0), 0 < r_0 < 1,$$

$$T_i = r_i T_{i-1}, 0 < r_i < 1, i = 1, 2, \dots, I.$$

Defina  $s_a$  como la última estrategia de solución aceptada. En la iteración  $k$ , la probabilidad de aceptar una estrategia cercana como el siguiente movimiento de búsqueda,  $s_{k+1}$ , se calcula como:

$$P\{\text{aceptar } s_{k+1} | s_{k+1} \in N(s_k)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } F(s_{k+1}) \text{ no es peor que } F(s_a) \\ e^{-\frac{|F(s) - F(s_{k+1})|}{T}}, & \text{si en caso contrario} \end{cases}$$

La fórmula dice que el siguiente movimiento de búsqueda,  $s_{k+1}$ , se acepta si  $F(s_{k+1})$  no es peor que  $F(s_a)$ . De lo contrario,  $F(s_{k+1})$  es una solución inferior y  $s_{k+1}$  se acepta sólo si  $R_k \leq e^{-\frac{|F(s) - F(s_{k+1})|}{T}}$ , donde  $R_k$  es un número aleatorio (0,1). Si  $s_{k+1}$  se rechaza, se intenta una estrategia de solución diferente con  $N(s_a)$ . Observe que el programa de temperatura reduce la probabilidad de aceptación a medida que la cantidad de iteraciones aumenta haciendo a  $T_i$  cada vez más pequeña.

Robuste & Galván (2005) especifican que el Recocido Simulado es un método probabilístico que construye nuevas configuraciones aleatoriamente y las somete a reglas de probabilidad para aceptación, evitando de esta manera la caída en óptimos locales. El proceso termina después de un cierto número de iteraciones y tiene como objetivo obtener soluciones cercanas al óptimo global en problemas de optimización combinatoria compleja.

Este método pertenece a la familia de probabilísticos de cuesta arriba, porque genera nuevas configuraciones aleatorias y permite la aceptación de éstas, aun con costos superiores a la última aceptada (para evitar los extremos locales).

El Recocido Simulado se basa en la analogía con el recocido de los metales y consiste en calentar a alta temperatura el sistema que se intenta optimizar, para luego disminuir la temperatura muy lentamente, hasta que ya no ocurren cambios en el sistema. La variación de temperatura en el proceso físico se produce de forma continua, mientras que en el Recocido Simulado sólo puede hacerse escalonadamente.

Se ha demostrado que dadas ciertas condiciones éste converge asintóticamente al óptimo global con probabilidad uno. La demostración de este resultado se basa en el hecho de que el Recocido Simulado puede considerarse como un algoritmo que continuamente intenta transformar la configuración actual en una de sus configuraciones vecinas. Este mecanismo puede ser fácilmente descrito por medio de una cadena no estacionaria de Markov o una secuencia de cadenas homogéneas de Markov.

### **2.3.2.1 Algoritmo de Recocido Simulado**

El algoritmo de Recocido Simulado, Taha (2012) lo resumen en los siguientes pasos:

Paso 0. Seleccione una solución de inicio  $s_0 \in S$ . Establezca  $k = 0, p = 0, e i = 0$ .

Paso 1. Genere la cercanía  $N(s_k)$  y establezca la temperatura  $T = T_i$ .

Paso 2. Determine la solución  $s_{k+1}$  al azar desde  $N(s_k)$ . Si  $s_{k+1}$  no es peor que la solución última aceptada o si  $R < P$  {acepte  $s_{k+1}$ }, luego acepte  $s_{k+1}$ , establezca  $p = p + 1$ , y vaya al paso 3. De lo contrario, rechace  $s_{k+1}$  y establezca  $N(s_{k+1}) = N(s_k)$ . Establezca  $k = k + 1$ , y vaya al paso 1.

Paso 3. Si se llega a una condición de terminación, deténgase. De lo contrario, establezca  $k = k + 1$ . Si  $p = t$ , entonces establezca  $i = i + 1$ . Vaya al paso 1.

### 2.3.3 Algoritmos Genéticos

El Algoritmo Genético (AG), Taha (2012) describe que imita el proceso de evolución biológica de “sobrevivencia del más apto”. Cada solución factible de un problema se considera como un cromosoma codificado por un conjunto de genes. Los códigos genéticos más comunes son el binario (0,1) y el numérico (0, 1, 2,..., n).

Por ejemplo, los cromosomas de una sola variable cuyos valores factibles son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 pueden ser representados por los códigos binarios (0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 1010, 0110, 1110 y 0001). Los cromosomas para un problema de dos variables  $(x_1, x_2)$  con  $x_1 = \{0, 1\}$  y  $x_2 = \{0, 1, 2, 3\}$  pueden representarse por medio de los códigos numéricos (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2) y (1,3). Los códigos numéricos de múltiples variables también pueden representarse como códigos binarios. Por ejemplo, el código binario de  $(x_1, x_2) = (0, 3)$  es (000, 110).

Un conjunto de  $N$  soluciones factibles se conoce como población con  $N$  cromosomas. La aptitud de un cromosoma se mide en términos de una función objetivo apropiada. Un cromosoma más apto da un mejor valor a la función objetivo.

La idea general del Algoritmo Genético es seleccionar dos padres a partir de una población. Los genes de los dos padres se cruzan entonces y (posiblemente) mutan para producir dos hijos. La descendencia reemplaza a los dos cromosomas más débiles (menos aptos) en la población, y el proceso de seleccionar nuevos padres se repite.

La implementación real del Algoritmo Genético requiere detalles adicionales del problema específico. Asimismo, las reglas para seleccionar padres y crear hijos pueden variar. Por ejemplo, los padres pueden ser seleccionados totalmente al azar de una población, o se pueden componer de los dos cromosomas más aptos.

Hay varios métodos para implementar el cruce genético los cuales son:

- a) Cruce uniforme. En esta regla, los genes comunes se aplican a ambos hijos. Los genes restantes de un hijo se determinan al azar, mientras que el otro hijo obtiene el gen complemento.
- b) Cruce de un punto. Los genes de los padres  $P1$  y  $P2$  se dividen al azar en el mismo punto y luego se intercambian; es decir,  $P1 = (P11, P12)$  y  $P2 = (P21, P22)$  producen los cromosomas hijos como  $C1 = \{P11, P22\}$  y  $C2 = \{P21, P12\}$ .
- c) Cruce de múltiples puntos. Esta regla amplía el cruce de un punto a múltiples puntos aleatorios. Por ejemplo, en un cruce de dos puntos,  $P1 = (P11, P12, P13)$  y  $P2 = (P21, P22, P23)$  producen  $C1 = (P11, P22, P13)$  y  $C2 = (P21, P12, P23)$ .

Robuste & Galván (2005) abordan que el Algoritmo Genético su punto de partida es la teoría de la evolución de las especies de Darwin. Si se adopta un procedimiento que dadas dos soluciones genere sucesoras que conservan las mejores características de las mismas, la calidad de las soluciones se mantendrá en las generaciones posteriores.

El proceso de selección para determinar las soluciones del conjunto que tendrán descendencia, puede ser por medio de azar puro, elección de los mejores, hacer intervenir cada individuo un cierto número de veces o bien el azar, pero con mayor probabilidad para las

soluciones de buena calidad. Los procedimientos de cruce deben asegurar que las mejores características se mantengan en las soluciones sucesorias. También se suelen realizar mutaciones para fomentar la diversidad. Después de haber incrementado la población se debe reducir a un tamaño conveniente, eligiendo un cierto número de soluciones mediante procesos idénticos a los de selección (proceso de regeneración).

### **2.3.3.1 Algoritmo Genético**

El Algoritmo Genético, Taha (2012) lo resume en los siguientes pasos:

Paso 0:

- (a) Genere una población aleatoria  $X$  de  $N$  cromosomas factibles.
- (b) Para cada cromosoma  $s$  en la población seleccionada, evalúe su aptitud asociada. Registre  $s^*$  como la mejor solución disponible hasta ahora.
- (c) Codifique cada cromosoma mediante una representación binaria o numérica.

Paso 1:

- (a) Seleccione dos cromosomas padres de la población  $X$ .
- (b) Cruce los genes padre para crear dos hijos.
- (c) Mute los genes hijo al azar.
- (d) Si las soluciones resultantes son no factibles, repita el paso 1 hasta lograr la factibilidad. Si no, reemplace los dos padres más débiles con los nuevos hijos para formar una nueva población  $X$  y actualice  $s^*$ . Vaya al paso 2.

Paso 2. Si se llega a una condición de terminación, deténgase:  $s^*$  es la mejor solución disponible. De lo contrario, repita el paso 1.

### **2.3.4 Algoritmos Greedy**

Los Algoritmos Greedy, Robuste & Galván (2005) detallan que se caracterizan por el hecho de que las decisiones parciales que van configurando la solución son inamovibles una vez

adoptadas. Aunque en la mayoría de ellos la regla mediante la que se toman las decisiones es bastante simple, no existe ninguna limitación para la complejidad de las mismas. Las decisiones parciales pueden ser adoptadas de acuerdo con unos valores que se calculan al principio del algoritmo y no se modifican a lo largo del mismo (regla de carácter estático), o con valores calculados en cada iteración, teniendo en cuenta las decisiones ya adoptadas y la información disponible en el momento de realizar la iteración (regla de carácter dinámico). Estos algoritmos deterministas proporcionan, dadas unas reglas de resolución de empates, una solución única para cada juego de datos y no pueden sacar partido de la disponibilidad de tiempo adicional para los cálculos. Estas últimas consideraciones conducen a la idea de introducir el azar en los Algoritmos Greedy, y han dado lugar a los denominados algoritmos GRASP (Procedimiento de Búsqueda Greedy Aleatorizado y Adaptivo).

El término adaptativo se refiere al carácter dinámico que presenta la regla de adopción de las decisiones parciales (característica no esencial). Lo que sí es específico de los GRASP en la utilización del azar, la estructura general de tales algoritmos es la misma que la de los Algoritmos Greedy deterministas, pero en cada iteración la decisión parcial se adopta eligiendo al azar una de las que figuran en una lista de decisiones candidatas. La intervención del azar en las ejecuciones sucesivas de este algoritmo hace que pueda proporcionar soluciones distintas y que la calidad del resultado sea monótonamente creciente con relación al tiempo disponible.

### **2.3.5 Algoritmo Exhaustivo de Descenso**

Las versiones tradicionales del Algoritmo Exhaustivo de Descenso (AED) son deterministas y conducen a un óptimo local que se podría considerar asociado a la solución de partida. Robuste & Galván (2005) comentan que este algoritmo consiste en determinar, en cada iteración, la mejor vecina de la solución en curso: si esta mejor vecina es mejor que la solución en curso, pasa a ser la solución en curso de la iteración siguiente: sino, se ha alcanzado un óptimo local y termina la ejecución del algoritmo.

El Algoritmo Exhaustivo de Descenso suele llegar a la convergencia bastante rápidamente debido a que en cada iteración el valor de la solución preferible mejora en una cantidad finita y, por consiguiente, en muchos problemas el número de iteraciones hasta alcanzar el óptimo se puede incluso acotar a priori. Este algoritmo casi siempre aprovecha el tiempo de cálculo que consume, ya que en cada iteración o mejor o se detiene (con vecindarios de tamaño razonable, el Algoritmo Exhaustivo de Descenso suele obtener mejoras apreciables en poco tiempo). Puede utilizarse de forma iterativa, como sub algoritmo para obtener el óptimo local a partir de soluciones de un algoritmo más general.

Si el número de elementos del vecindario es muy elevado se puede sustituir la exploración exhaustiva de los mismos por la de una muestra de un cierto número de elementos (fijo o que guarde alguna relación con el tamaño del vecindario, si éste no es constante). Las posibilidades de exploración se pueden ampliar admitiendo como una nueva solución en curso, una vecina cuyo valor sea igual a la solución actual, pero se debería establecer una lista prohibida (tabú) para evitar una repetición indefinida de soluciones en curso de valor idéntico.

Otra variable de este tipo de algoritmo es el Algoritmo No Exhaustivo de Descenso (ANED), y en él generalmente no se explora todo el vecindario puesto que se van generando soluciones vecinas hasta obtener una que sea mejor que la solución en curso, en cuyo caso la sustituye inmediatamente. Según algunos autores, con este enfoque la convergencia suele ser más rápida que la del Algoritmo Exhaustivo de Descenso, pero la calidad de la solución inferior.

### **2.3.6 Algoritmo de Colonias de Hormigas**

Los Algoritmos de Colonias de Hormigas (ACO), Robuste & Galván (2005) explican que son modelos inspirados en el comportamiento de las colonias de hormigas reales. Estos animales, casi ciegos, son capaces de seguir la ruta más corta en su camino de ida y vuelta entre la colonia y una fuente de abastecimiento, debido a que pueden transmitirse información gracias a que cada una de ellas, al desplazarse, va dejando un rastro de feromona a lo largo del camino seguido. Así, mientras una hormiga aislada se mueve de forma aleatoria, los agentes de la colonia detectan el rastro de feromona dejado por otras hormigas y tienden a seguirlo. A

su vez, van dejando su propia hormona a lo largo del recorrido y, por tanto, lo hacen más atractivo, puesto que se ha reforzado el rastro.

Los Algoritmos de Colonias de Hormigas son procesos iterativos donde en cada iteración se introduce una colonia de  $m$  hormigas y cada una de éstas construye una solución al problema. Las soluciones construidas (por cada hormiga) se hacen mediante reglas probabilísticas, guiándose por un rastro de feromona artificial y una información calculada a priori de manera heurística. Cuando todas las hormigas han construido una solución se debe actualizar la feromona en cada arco y, tras ésta, puede comenzarse una nueva iteración.

### **CAPÍTULO III. SIMULACIÓN PARA PROBLEMAS DE RUTEO**

La solución analítica para problemas de ruteo reales es muy compleja porque existen diversas situaciones imprevisibles en el sistema de distribución, además que la incertidumbre es un factor siempre presente al momento de planificar las operaciones de entrega y recolección, tales como: la hora de llegada de los vehículos al centro de distribución, el tiempo que tarda un camión en ser cargado o descargado, el tiempo que tarda un operario en preparar un pedido para su despacho, entre otros.

Es por ello que la simulación se ha convertido en una alternativa para resolver interrogantes logísticas que son complicadas o imposibles de explicar, porque permite predecir el comportamiento de los sistemas de ruteo bajo diversas situaciones reales o previsibles y proporciona la capacidad de poder analizar las posibles alternativas a la optimización del problema de ruteo, sin tener que alterar físicamente el mismo. Las herramientas para el VRP se basan no sólo en los métodos para el modelado y resolución, sino también en varias técnicas y tecnologías que se utilizan para proporcionar la información necesaria y los recursos computacionales que las sustentan. En la presente investigación se realiza el análisis de la simulación del método de Barrido y del método de Ahorros, y se utiliza el simulador `vrp_solver_v1.05`.

Un proceso de simulación para los problemas de ruteo de vehículos es el siguiente: primero se hace el uso de la plantilla de mapas GeoHack desarrollada por la Fundación Wikipedia, para conseguir las coordenadas de los almacenes y los clientes; después se usa el programa AutoCAD® comercializado por la empresa Autodesk Inc., para obtener las coordenadas polares, si es el caso; posteriormente se utiliza Microsoft Excel® distribuido por Microsoft Corporation, para graficar las coordenadas obtenidas y obtener distancias entre puntos, y finalmente se analizan las figuras de ruteo e interpretan las rutas obtenidas.

El libro de Microsoft Excel® `vrp_solver_v1.05` desarrollado por el Dr. Erdogan (2013) quien explica que es una plataforma unificada de fuente abierta para la representación, la solución y la visualización de los resultados del Problema de Ruteo de Vehículos (VRP); donde se unifica

Microsoft Excel, un Sistema de Información Geográfica (SIG) público y metaheurísticas. Puede resolver VRP con un límite de 200 clientes. Sin una plataforma unificada, cada VRP debe abordarse por su cuenta. La mayoría de los académicos desarrollan algoritmos de solución en C++. La distancia y tiempo de conducción de datos tienen que ser recuperados de un Sistema de Información Geográfica (SIG), que requiere una inversión. Los resultados de los algoritmos se suelen representar como un único valor. No es sencillo encontrar manualmente una solución de un VRP, mucho menos para calcular su costo o para visualizarlo. Por lo tanto, la construcción de una plataforma unificada para las fuentes de datos, algoritmos de solución y la representación visual de los resultados es un problema en sí mismo.

Esta plataforma utiliza tres funciones de los sistemas SIG públicas que son: (a) Geocodificación es la función que convierte y da dirección en los valores de latitud y longitud correspondientes. (b) Llegar es la función que devuelve la distancia y la conducción de tiempo entre dos puntos, además de las direcciones. Finalmente, (c) mapas estáticos es la función que devuelve los archivos de imagen, que se definen por su punto central, el nivel de zoom, y su tamaño. Los principales sistemas SIG públicos en este punto son Bing Maps y Google Maps, ambos ofrecen un servicio gratuito limitado y servicios extendidos para los suscriptores.

A continuación se presenta la solución e interpretación de los siete ejemplos de aplicación planteados en el primer capítulo.

### **3.1 Ejemplo de aplicación VRP**

Retomando el ejemplo VRP del subtema 1.1.3 donde la empresa OneD posee un almacén central en la ciudad de Toluca en el que mantiene mercancía para 20 farmacias en el Estado de México. Los pedidos del día martes a suministrar por el almacén a los clientes de la zona se reflejan en la tabla 1.1. En este día hay que entregar una demanda total de 868 paquetes.

La flota de vehículos que posee la empresa es de 8 camiones con una capacidad de 200 paquetes cada uno. El precio de un litro de combustible es de \$ 20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L.

*Tabla 1.1. Clientes y demandas del VRP*

| Nombre     | Localidad                                 | Demanda | ID |
|------------|-------------------------------------------|---------|----|
| Almacén    | Toluca, Estado de México                  | 0       | 0  |
| cliente 1  | Cuautitlán, Estado de México              | 47      | 1  |
| cliente 2  | Ixtapan de la Sal, Estado de México       | 55      | 2  |
| cliente 3  | Almoloya de Juárez, Estado de México      | 33      | 3  |
| cliente 4  | Huehuetoca, Estado de México              | 41      | 4  |
| cliente 5  | Ixtapan del Oro, Estado de México         | 39      | 5  |
| cliente 6  | Aculco, Estado de México                  | 36      | 6  |
| cliente 7  | Jilotepec, Estado de México               | 40      | 7  |
| cliente 8  | Malinalco, Estado de México               | 57      | 8  |
| cliente 9  | Calimaya, Estado de México                | 59      | 9  |
| cliente 10 | San Felipe del Progreso, Estado de México | 33      | 10 |
| cliente 11 | Tecámac, Estado de México                 | 45      | 11 |
| cliente 12 | Tultepec, Estado de México                | 42      | 12 |
| cliente 13 | Zinacantepec, Estado de México            | 41      | 13 |
| cliente 14 | Mexicaltzingo, Estado de México           | 41      | 14 |
| cliente 15 | Tonanitla, Estado de México               | 52      | 15 |
| cliente 16 | Otzolotepec, Estado de México             | 42      | 16 |
| cliente 17 | Temoaya, Estado de México                 | 46      | 17 |
| cliente 18 | Tejupilco, Estado de México               | 50      | 18 |
| cliente 19 | Acambay, Estado de México                 | 39      | 19 |
| cliente 20 | Lerma, Estado de México                   | 30      | 20 |

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.1 es organizar rutas para entregar las cargas demandadas a cada uno de los clientes, partiendo de la ciudad de Toluca, el objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga y se obtenga un resultado para las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuántas rutas se obtienen del proceso de distribución?
- b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

La resolución de este ejemplo de aplicación se soluciona con el método de Barridos que a continuación se presenta:

Paso 1. Obtener las coordenadas geográficas del almacén y los clientes.

Dada las ubicaciones del almacén y de los 20 clientes en la tabla 1.1, se utiliza la plantilla GeoHack para obtener las coordenadas Universal Transversal de Mercator (UTM) las cuales se expresan en metros, cada coordenada está compuesta por 2 grupos de cifras de 6 o 7 números, el primero corresponde al eje “y” y el segundo al eje “x”. En la tabla 3.1 se representan los nodos con las coordenadas “x” y “y” para el ejemplo VRP.

*Tabla 3.1 Coordenadas UTM del VRP*

| Nombre    | Localidad                            | ID | UTM               | coordenada<br>“x” | coordenada<br>“y” |
|-----------|--------------------------------------|----|-------------------|-------------------|-------------------|
| almacén   | Toluca, Estado de México             | 0  | 2133291<br>431298 | 431298            | 2133291           |
| cliente 1 | Cuautitlán, Estado de México         | 1  | 2174636<br>481219 | 481219            | 2174636           |
| cliente 2 | Ixtapan de la Sal, Estado de México  | 2  | 2082525<br>428007 | 428007            | 2082525           |
| cliente 3 | Almoloya de Juárez, Estado de México | 3  | 2141578<br>419485 | 419485            | 2141578           |
| cliente 4 | Huehuetoca, Estado de México         | 4  | 2193143<br>478708 | 478708            | 2193143           |
| cliente 5 | Ixtapan del Oro, Estado de México    | 5  | 2130232<br>367293 | 367293            | 2130232           |

Tabla 3.1 Coordenadas UTM del VRP (continuación)

|            |                                           |    |                   |        |         |
|------------|-------------------------------------------|----|-------------------|--------|---------|
| cliente 6  | Aculco, Estado de México                  | 6  | 2222765<br>412882 | 412882 | 2222765 |
| cliente 7  | Jilotepec, Estado de México               | 7  | 2206252<br>444251 | 444251 | 2206252 |
| cliente 8  | Malinalco, Estado de México               | 8  | 2095370<br>447359 | 447359 | 2095370 |
| cliente 9  | Calimaya, Estado de México                | 9  | 2118738<br>435099 | 435099 | 2118738 |
| cliente 10 | San Felipe del Progreso, Estado de México | 10 | 2180407<br>400445 | 400445 | 2180407 |
| cliente 11 | Tecámac, Estado de México                 | 11 | 2178284<br>503493 | 503493 | 2178284 |
| cliente 12 | Tultepec, Estado de México                | 12 | 2176629<br>486578 | 486578 | 2176629 |
| cliente 13 | Zinacantepec, Estado de México            | 13 | 2132526<br>422772 | 422772 | 2132526 |
| cliente 14 | Mexicaltzingo, Estado de México           | 14 | 2124075<br>438418 | 438418 | 2124075 |
| cliente 15 | Tonanitla, Estado de México               | 15 | 2176963<br>494352 | 494352 | 2176963 |
| cliente 16 | Otzolotepec, Estado de México             | 16 | 2053779<br>684682 | 441446 | 2148717 |
| cliente 17 | Temoaya, Estado de México                 | 17 | 2152787<br>437728 | 437728 | 2152787 |
| cliente 18 | Tejupilco, Estado de México               | 18 | 2090804<br>378596 | 378596 | 2090804 |
| cliente 19 | Acambay, Estado de México                 | 19 | 2206651<br>411673 | 411673 | 2206651 |
| cliente 20 | Lerma, Estado de México                   | 20 | 2019752<br>450672 | 446210 | 2132411 |

Paso 2. Sacar las distancias en kilómetros entre el almacén y los clientes.

Para obtener las distancias entre los nodos que representan el almacén y lo clientes se usa la fórmula de la distancia en Microsoft Excel®:

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.1)$$

Para obtener las distancias en kilómetros de cada nodo se dividen entre 1000, ya que las coordenadas UTM se expresan en metros.

En la figura 3.1 se muestran todos los resultados obtenidos de las operaciones realizadas.

| d  | 0 | 1    | 2     | 3    | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13   | 14    | 15    | 16   | 17   | 18    | 19    | 20   |
|----|---|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|------|------|-------|-------|------|
| 0  | 0 | 64.8 | 50.9  | 14.4 | 76.4  | 64.1  | 91.3  | 74.1  | 41.2  | 15.0  | 56.3  | 85.1  | 70.2  | 8.6  | 11.6  | 76.7  | 18.5 | 20.5 | 67.7  | 75.9  | 14.9 |
| 1  |   | 0.0  | 106.4 | 70.0 | 18.7  | 122.3 | 83.6  | 48.6  | 86.2  | 72.5  | 81.0  | 22.6  | 5.7   | 72.0 | 66.2  | 13.3  | 47.5 | 48.7 | 132.5 | 76.6  | 54.9 |
| 2  |   |      | 0.0   | 59.7 | 121.7 | 77.2  | 141.1 | 124.8 | 23.2  | 36.9  | 101.7 | 121.9 | 110.8 | 50.3 | 42.8  | 115.4 | 67.5 | 70.9 | 50.1  | 125.2 | 53.1 |
| 3  |   |      |       | 0.0  | 78.5  | 53.4  | 81.5  | 69.3  | 54.0  | 27.7  | 43.2  | 91.7  | 75.7  | 9.6  | 25.8  | 82.8  | 23.1 | 21.4 | 65.2  | 65.5  | 28.3 |
| 4  |   |      |       |      | 0.0   | 127.9 | 72.2  | 36.9  | 102.7 | 86.2  | 79.3  | 28.9  | 18.3  | 82.5 | 80.0  | 22.5  | 58.0 | 57.5 | 143.2 | 68.4  | 68.9 |
| 5  |   |      |       |      |       | 0.0   | 103.2 | 108.2 | 87.3  | 68.8  | 60.1  | 144.4 | 128.0 | 55.5 | 71.4  | 135.4 | 76.4 | 74.0 | 41.0  | 88.4  | 78.9 |
| 6  |   |      |       |      |       |       | 0.0   | 35.4  | 132.0 | 106.4 | 44.1  | 100.9 | 86.9  | 90.8 | 101.9 | 93.5  | 79.4 | 74.3 | 136.3 | 16.2  | 96.3 |
| 7  |   |      |       |      |       |       |       | 0.0   | 110.9 | 88.0  | 50.9  | 65.5  | 51.7  | 76.8 | 82.4  | 58.0  | 57.6 | 53.9 | 132.8 | 32.6  | 73.9 |
| 8  |   |      |       |      |       |       |       |       | 0.0   | 26.4  | 97.1  | 100.1 | 90.2  | 44.6 | 30.1  | 94.2  | 53.7 | 58.2 | 68.9  | 116.9 | 37.1 |
| 9  |   |      |       |      |       |       |       |       |       | 0.0   | 70.7  | 90.7  | 77.5  | 18.5 | 6.3   | 83.1  | 30.6 | 34.2 | 63.0  | 91.0  | 17.6 |
| 10 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       | 0.0   | 103.1 | 86.2  | 52.8 | 67.9  | 94.0  | 51.8 | 46.4 | 92.2  | 28.5  | 66.3 |
| 11 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       |       | 0.0   | 17.0  | 92.8 | 84.7  | 9.2   | 68.7 | 70.5 | 152.5 | 96.1  | 73.4 |
| 12 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       |       |       | 0.0   | 77.6 | 71.3  | 7.8   | 53.1 | 54.4 | 137.9 | 80.7  | 59.9 |
| 13 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0.0  | 17.8  | 84.3  | 24.7 | 25.2 | 60.8  | 75.0  | 23.4 |
| 14 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      | 0.0   | 77.0  | 24.8 | 28.7 | 68.5  | 86.8  | 11.4 |
| 15 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       | 0.0   | 60.0 | 61.6 | 144.3 | 87.8  | 65.6 |
| 16 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |       | 0.0  | 5.5  | 85.5  | 65.1  | 17.0 |
| 17 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |       |      | 0.0  | 85.7  | 59.8  | 22.1 |
| 18 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |       |      |      | 0.0   | 120.5 | 79.4 |
| 19 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |       |      |      |       | 0.0   | 81.9 |
| 20 |   |      |       |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |       |      |      |       |       | 0.0  |

*Figura 3.1. Pantalla de las distancias en kilómetros para el VRP*

Paso 3. Conseguir las coordenadas polares del almacén y los clientes.

Para este proceso se utiliza AutoCAD®, primero las coordenadas “x” y “y” se grafican en el programa, después se traza una línea base con el nodo del almacén para representar el radio base, posteriormente se traza una recta para unir a cada uno de los clientes con el objetivo de conocer el ángulo entre el radio base y el nodo de cada cliente.

En la tabla 3.2 se muestran el radio de cada cliente que es igual a las distancias de la figura 3.1, los ángulos de cada nodo que forman con el radio base y las coordenadas polares.

*Tabla 3.2 Coordenadas polares para el VRP*

| ID | Radio | Ángulo | Coordenada polar |
|----|-------|--------|------------------|
| 0  | 0     | 0°     | (0, 0°)          |
| 1  | 64.8  | 40°    | (64.8, 40°)      |
| 2  | 50.9  | 266°   | (50.9, 266°)     |
| 3  | 14.4  | 145°   | (14.4, 145°)     |
| 4  | 76.4  | 52°    | (76.4, 52°)      |
| 5  | 64.1  | 183°   | (64.1, 183°)     |
| 6  | 91.3  | 102°   | (91.3, 102°)     |
| 7  | 74.1  | 80°    | (74.1, 80°)      |
| 8  | 41.2  | 293°   | (41.2, 293°)     |
| 9  | 15    | 285°   | (15, 285°)       |
| 10 | 56.3  | 123°   | (56.3, 123°)     |
| 11 | 85.1  | 32°    | (85.1, 32°)      |
| 12 | 70.2  | 38°    | (70.2, 38°)      |
| 13 | 8.6   | 185°   | (8.6, 185°)      |
| 14 | 11.6  | 308°   | (11.6, 308°)     |
| 15 | 76.7  | 35°    | (76.7, 35°)      |
| 16 | 18.5  | 57°    | (18.5, 57°)      |
| 17 | 20.5  | 72°    | (20.5, 72°)      |
| 18 | 67.7  | 219°   | (67.7, 219°)     |
| 19 | 75.9  | 105°   | (75.9, 105°)     |
| 20 | 14.9  | 357°   | (14.9, 357°)     |

Paso 4. Ordenar de menor a mayor las coordenadas polares del almacén y los clientes.

Con las coordenadas polares obtenidas en la tabla 3.2, se ordenan de menor a mayor con base al ángulo como se muestra en la tabla 3.3.

*Tabla 3.3 Coordenadas  
polares de menor a mayor  
del VRP*

| ID | Coordenada<br>polar |
|----|---------------------|
| 0  | (0, 0°)             |
| 11 | (85.1, 32°)         |
| 15 | (76.7, 35°)         |
| 12 | (70.2, 38°)         |
| 1  | (64.8, 40°)         |
| 4  | (76.4, 52°)         |
| 16 | (18.5, 57°)         |
| 17 | (20.5, 72°)         |
| 7  | (74.1, 80°)         |
| 6  | (91.3, 102°)        |
| 19 | (75.9, 105°)        |
| 10 | (56.3, 123°)        |
| 3  | (14.4, 145°)        |
| 5  | (64.1, 183°)        |
| 13 | (8.6, 185°)         |
| 18 | (67.7, 219°)        |
| 2  | (50.9, 266°)        |
| 9  | (15, 285°)          |
| 8  | (41.2, 293°)        |
| 14 | (11.6, 308°)        |
| 20 | (14.9, 357°)        |

Paso 5. Graficar los nodos que representan el almacén y los clientes.

Para graficar los nodos se utiliza Microsoft Excel® con base a las coordenadas “x” y “y” del almacén y de los clientes, como se muestra en la figura 3.2.

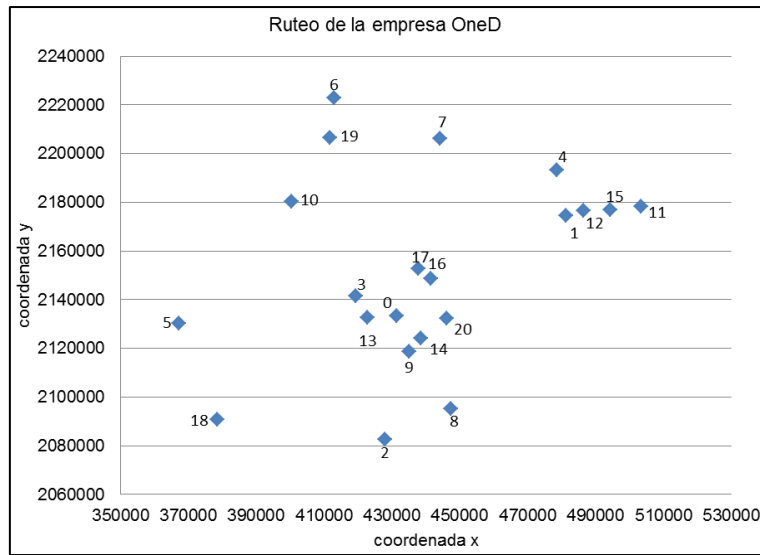


Figura 3.2. Pantalla de las coordenadas de los nodos VRP

Paso 6. Segmentar a los clientes.

Para segmentar a los clientes, primero se dibuja una línea recta de  $0^\circ$  con respecto al nodo 0, después se realiza el análisis de las demandas de los nodos de menor a mayor ángulo mientras no se supere la capacidad del vehículo, dibujar otro limite cuando el vehículo 1 cumpla la restricción de capacidad, así sucesivamente hasta que llegue al último nodo, como se demuestra en la figura 3.3.

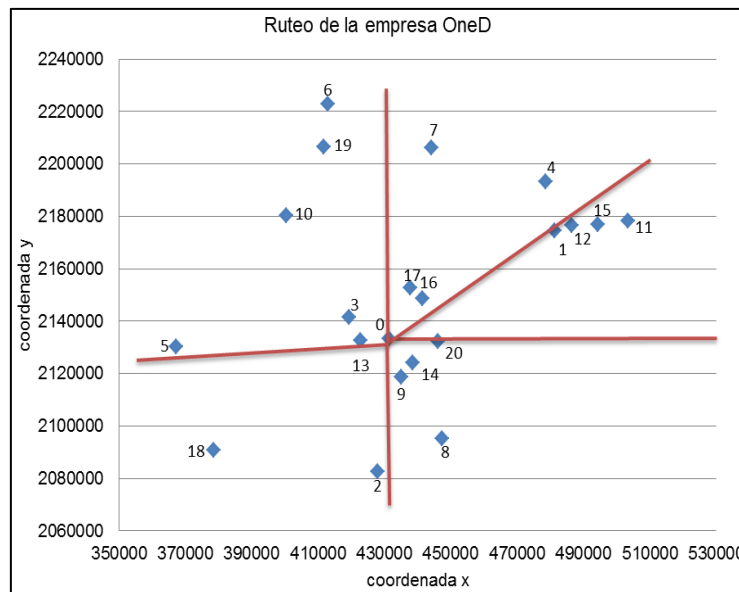


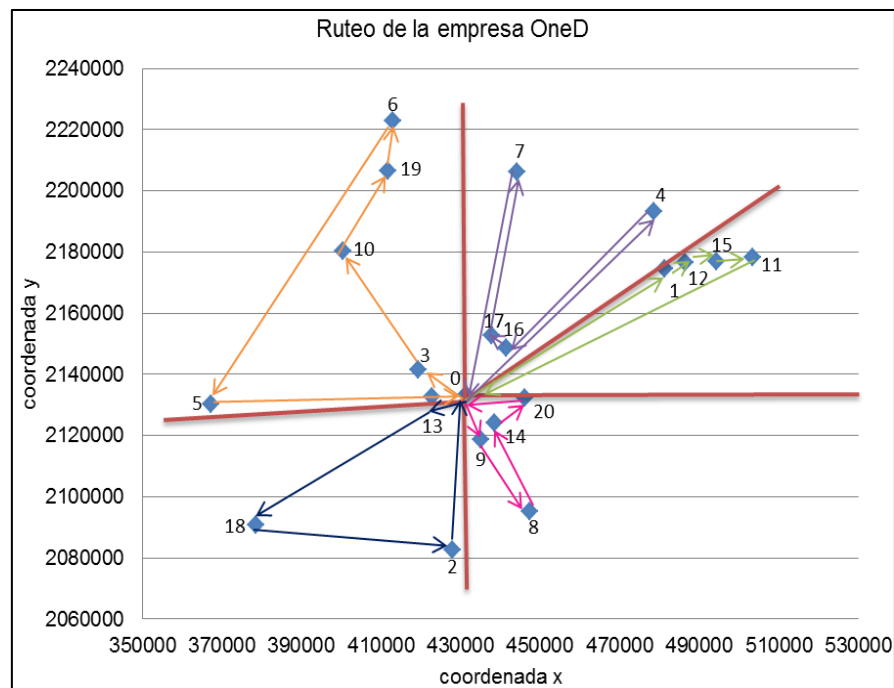
Figura 3.3. Pantalla de la segmentación de los nodos VRP

La segmentación de clientes queda como:

- (a) 11-15-12-1
- (b) 4-16-17-7
- (c) 6-19-10-3-5
- (d) 13-18-2
- (e) 9-8-14-20

Paso 7. Enlazar los nodos para resolver el VRP.

Ya conocido el grupo de nodos que forman parte de una ruta, se conectan los puntos dentro de cada sector empezando y finalizando en el almacén, ya sea uniendo los ángulos de menor a mayor de los clientes o empleando el algoritmo del Problema del Agente Viajero (TSP) y seleccionar la ruta con la distancia menor, como se demuestra en la figura 3.4.



*Figura 3.4. Pantalla del ruteo para el VRP*

Paso 8. Interpretación.

Con el método de Barridos se obtienen 5 rutas para satisfacer la demanda de los clientes, como se explica en la tabla 3.4.

*Tabla 3.4. Ruteo para el VRP*

| Ruta                                                                                 | Vehículo | Nodos           | Capacidad (paquetes) | Kilómetros |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------------|----------------------|------------|
| f1  | g1       | 0-1-12-15-11-0  | 186                  | 172.6      |
| f2  | g2       | 0-4-16-17-7-0   | 169                  | 267.9      |
| f3  | g3       | 0-3-10-19-6-5-0 | 180                  | 269.6      |
| f4  | g4       | 0-13-18-2-0     | 146                  | 170.4      |
| f5  | g5       | 0-9-8-14-20-0   | 187                  | 113.8      |

Paso 9. Solución a los objetivos del caso VRP.

a) ¿Cuántas rutas se obtienen del proceso de distribución?

Respuesta: 5 rutas.

b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?

Respuesta:

f1: Toluca – Cuautitlán – Tultepec – Tonanitla – Tecámac – Toluca.

f2: Toluca – Huehuetoca – Otzolotepec – Temoaya – Jilotepec – Toluca.

f3: Toluca - Almoloya de Juárez - San Felipe del Progreso – Acambay – Aculco - Ixtapan del Oro – Toluca.

f4: Toluca – Zinacantepec – Tejupilco - Ixtapan de la Sal –Toluca.

f5: Toluca – Calimaya – Malinalco – Mexicaltzingo – Lerma –Toluca.

c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga de los vehículos para cada ruta obtenida?

Respuesta: El vehículo g1 utiliza el 93% de su capacidad de carga, el vehículo g2 el 84.5%, el vehículo g3 el 90%, el vehículo g4 el 73% y el vehículo g5 el 93.5%.

d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?

Respuesta: Para el ruteo de la empresa OneD se tiene un recorrido total de 994.3 kilómetros.

e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

Respuesta: Dado que el costo de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L. La ruta f1 tiene un costo de \$1,769.15, para la ruta f2 es de \$2,745.98, para la ruta f3 es de \$2,763.4, para ruta f4 es de \$1,746.6 y para la ruta f5 es de \$1,166.45.

### 3.2 Ejemplo de aplicación CVRP

Reanudando con el ejemplo CVRP del subtema 1.2.7 donde una empresa de productos alimenticios tiene su almacén de producto terminado en la ciudad de Querétaro. Para el día jueves tiene que satisfacer la demanda de sus clientes de Querétaro, Puebla y Michoacán que se presentan en la tabla 1.2. Su flota de vehículos que dispone para llevar a cabo la distribución de los pedidos está conformada por 12 transportes los cuales se dividen en: 5 camiones de 32 toneladas, 3 camiones de 30 toneladas y 4 camiones de 28 toneladas, todos con capacidad de carga útil.

La hora de partida de los camiones es a las 8:00 horas, el límite del tiempo de manejo es a las 23:00 horas, el límite de tiempo de trabajo es de 23:30 horas, el límite de distancia es de 1500 kilómetros, el precio del combustible es de \$20.5 y el rendimiento del vehículo es de 2 Km/L.

*Tabla 1.2. Clientes y demandas para el CVRP*

| Nombre    | Localidad                      | Demanda | ID |
|-----------|--------------------------------|---------|----|
| almacén   | Querétaro, Querétaro           | 0       | 0  |
| cliente 1 | Tequisquiapan, Querétaro       | 12      | 1  |
| cliente 2 | Pinal de Amoles, Querétaro     | 15      | 2  |
| cliente 3 | Ezequiel Montes, Querétaro     | 8       | 3  |
| cliente 4 | Tolimán, Querétaro             | 11      | 4  |
| cliente 5 | Cadereyta de Montes, Querétaro | 16      | 5  |
| cliente 6 | Arroyo Seco, Querétaro         | 14      | 6  |

*Tabla 1.2. Clientes y demandas para el CVRP (continuación)*

|            |                            |    |    |
|------------|----------------------------|----|----|
| cliente 7  | Jalpan de Serra, Querétaro | 13 | 7  |
| cliente 8  | Corregidora, Querétaro     | 20 | 8  |
| cliente 9  | Huimilpan, Querétaro       | 22 | 9  |
| cliente 10 | Pedro Escobedo, Querétaro  | 19 | 10 |
| cliente 11 | Zacatlán, Puebla           | 5  | 11 |
| cliente 12 | Tulcingo, Puebla           | 7  | 12 |
| cliente 13 | Pantepec, Puebla           | 5  | 13 |
| cliente 14 | Acajete, Puebla            | 3  | 14 |
| cliente 15 | Caltepec, Puebla           | 9  | 15 |
| cliente 16 | Zoquiapan, Puebla          | 5  | 16 |
| cliente 17 | Quecholac, Puebla          | 8  | 17 |
| cliente 18 | Nopalucan, Puebla          | 16 | 18 |
| cliente 19 | Mixtla, Puebla             | 15 | 19 |
| cliente 20 | Olintla, Puebla            | 10 | 20 |
| cliente 21 | Buenavista, Michoacán      | 20 | 21 |
| cliente 22 | Jiquilpan, Michoacán       | 8  | 22 |
| cliente 23 | Maravatío, Michoacán       | 7  | 23 |
| cliente 24 | Ocampo, Michoacán          | 9  | 24 |
| cliente 25 | Contepec, Michoacán        | 13 | 25 |
| cliente 26 | Pátzcuaro, Michoacán       | 15 | 26 |
| cliente 27 | Morelia, Michoacán         | 4  | 27 |
| cliente 28 | Acuitzio, Michoacán        | 8  | 28 |
| cliente 29 | Zamora, Michoacán          | 19 | 29 |
| cliente 30 | Quiroga, Michoacán         | 14 | 30 |

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.2 es diseñar rutas para satisfacer los pedidos de los clientes. El objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga y se resuelvan las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuántas rutas resultan de la distribución de productos alimenticios?
- b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?

- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?
- f) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de manejo?
- g) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de manejo?

La resolución de este ejemplo de aplicación se soluciona con el libro de Excel *vrp\_solver\_v1.05* que a continuación se presenta:

Paso 1. Tener una clave de acceso a Microsoft® Bing Maps.

Primero se registra un usuario a Bing Maps para que esta página de Mapeo Web nos proporcione una clave para su base de datos SIG, posteriormente dicha clave se ingresa en la casilla *Licencia SIG* en la primera hoja de trabajo del libro de Excel VRP-solver y finalmente se guarda el libro.

Paso 2. Registrar las restricciones del problema en la hoja de consola del VRP-solver.

Primero se abre el libro de Excel *vrp\_solver*, después en la primera hoja de trabajo llamada *Consola VRP-solver* se registra la información del problema que son los valores como: el número de clientes.

Las limitaciones que son: Entrega, el número de tipos de vehículos, los vehículos regresan al almacén, el tiempo de trabajo inicial, el límite de tiempo de manejo, el límite de tiempo de trabajo y el límite de distancia, en las casillas de la columna *Valores* como se muestra en la figura 3.5.

| Sequence                          | Parameter                          | Value        | Remarks                                                                                                 |
|-----------------------------------|------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>0.Optional - GIS License</b>   | Bing Maps Key                      | Ah6dXOU2G3:  | You can get a free key at <a href="https://www.bingmapsportal.com/">https://www.bingmapsportal.com/</a> |
| <b>1.Locations</b>                | Number of customers                | 30           | [10,200]                                                                                                |
|                                   | Pickup / Delivery?                 | Delivery     |                                                                                                         |
| <b>2.Distances</b>                | Distance / duration computation    | Bing Maps    | The distance unit is km for 'Geodesic Approximation' and 'Bing Maps'                                    |
|                                   | Bing Maps route type               | Fastest      | Recommendation: use Fastest                                                                             |
|                                   | Average vehicle speed              | 70           | Not used for the 'Bing Maps' option                                                                     |
| <b>3.Vehicles</b>                 | Number of vehicle types            | 3            | Heterogeneous VRP if greater than 1                                                                     |
| <b>4.Solution</b>                 | All vehicles must be used?         | No           | Flexible fleet / fleet mix if 'No'                                                                      |
|                                   | Vehicles must return to the depot? | Yes          | Open VRP if no return                                                                                   |
|                                   | Time window type                   | Hard         |                                                                                                         |
|                                   | Work start time                    | 08:00        | [00:00,23:59]                                                                                           |
|                                   | Driving time limit                 | 23:00        |                                                                                                         |
|                                   | Working time limit                 | 23:30        |                                                                                                         |
|                                   | Distance limit                     | 1500         | Positive                                                                                                |
| <b>5.Optional - Visualization</b> | Visualization background           | Bing Maps    |                                                                                                         |
|                                   | Location labels                    | Location IDs |                                                                                                         |
| <b>6.Solver</b>                   | Warm start?                        | Yes          |                                                                                                         |
|                                   | CPU time limit (seconds)           | 60           | Recommendation: At least 60 seconds.                                                                    |
|                                   | LNS minimum removal rate           | 10%          | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                   | LNS maximum removal rate           | 40%          | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                   | LNS candidate list size            | 2            | [1, 5]                                                                                                  |
|                                   | Random number seed                 | 123456789    | [1,2147483647]                                                                                          |

*Figura 3.5. Pantalla de las restricciones para el CVRP*

Al culminar el registro se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *1.1 Establecer ubicaciones en la hoja de trabajo* para continuar con el proceso de solución.

Paso 3. Registrar la dirección del almacén y los clientes con su respectiva demanda.

En la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se registra la dirección del almacén y los clientes de acuerdo a su ID de la tabla 1.2 en la columna de *Direcciones*, además se registra el pedido de cada cliente en la columna *Demanda* como se presenta en la figura 3.6.

| Location ID    | Name | Address                        | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Demand | Profit |
|----------------|------|--------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| 0 Depot        |      | Querétaro, Querétaro           |              |               | 00:00             | 23:59           | Starting location | 0:00         | 0      | 0      |
| 1 Customer 1   |      | Tequisquiapan, Querétaro       |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 12     | 0      |
| 2 Customer 2   |      | Pinal de Amoles, Querétaro     |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 15     | 0      |
| 3 Customer 3   |      | Ezequiel Montes, Querétaro     |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 8      | 0      |
| 4 Customer 4   |      | Tolimán, Querétaro             |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 11     | 0      |
| 5 Customer 5   |      | Cadereyta de Montes, Querétaro |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 16     | 0      |
| 6 Customer 6   |      | Arroyo Seco, Querétaro         |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 14     | 0      |
| 7 Customer 7   |      | Jalpan de Serra, Querétaro     |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 13     | 0      |
| 8 Customer 8   |      | Corregidora, Querétaro         |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 20     | 0      |
| 9 Customer 9   |      | Huimilpan, Querétaro           |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 22     | 0      |
| 10 Customer 10 |      | Pedro Escobedo, Querétaro      |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 19     | 0      |
| 11 Customer 11 |      | Zacatlán, Puebla               |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 5      | 0      |
| 12 Customer 12 |      | Tulcingo, Puebla               |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 7      | 0      |
| 13 Customer 13 |      | Pantepec, Puebla               |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 5      | 0      |
| 14 Customer 14 |      | Acajete, Puebla                |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 3      | 0      |
| 15 Customer 15 |      | Caltepec, Puebla               |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 9      | 0      |
| 16 Customer 16 |      | Zoquiapan, Puebla              |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 5      | 0      |
| 17 Customer 17 |      | Quecholac, Puebla              |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 8      | 0      |
| 18 Customer 18 |      | Nopalucan, Puebla              |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 16     | 0      |
| 19 Customer 19 |      | Mixtla, Puebla                 |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 15     | 0      |
| 20 Customer 20 |      | Olintla, Puebla                |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 10     | 0      |
| 21 Customer 21 |      | Buenavista, Michoacán          |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 20     | 0      |
| 22 Customer 22 |      | Jiquilpan, Michoacán           |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 8      | 0      |
| 23 Customer 23 |      | Maravatío, Michoacán           |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 7      | 0      |
| 24 Customer 24 |      | Ocampo, Michoacán              |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 9      | 0      |
| 25 Customer 25 |      | Contepec, Michoacán            |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 13     | 0      |
| 26 Customer 26 |      | Pátzcuaro, Michoacán           |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 15     | 0      |
| 27 Customer 27 |      | Morelia, Michoacán             |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 4      | 0      |
| 28 Customer 28 |      | Acuitzio, Michoacán            |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 8      | 0      |
| 29 Customer 29 |      | Zamora, Michoacán              |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 19     | 0      |
| 30 Customer 30 |      | Quiroga, Michoacán             |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 14     | 0      |

*Figura 3.6. Pantalla de las direcciones y demandas para el CVRP*

Paso 4. Generar la latitud y longitud del almacén y los clientes.

Estando en la hoja de trabajo llamada 1. *Ubicaciones* se va a la pestaña complementos y se da click en 1.2 *Opcional-Registrar Latitud/Longitud usando las direcciones* para generar la latitud (y) y longitud (x) del almacén y de cada cliente como se presenta en la figura 3.7.

| Location ID | Name        | Address                        | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Demand | Profit |
|-------------|-------------|--------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| 0           | Depot       | Querétaro, Querétaro           | 20.5921001   | -100.3960037  | 00:00             | 23:59           | Starting location | 0:00         | 0      | 0      |
| 1           | Customer 1  | Tequisquiapan, Querétaro       | 20.5181007   | -99.9039001   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 12     | 0      |
| 2           | Customer 2  | Pinal de Amoles, Querétaro     | 21.1350098   | -99.6268005   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 15     | 0      |
| 3           | Customer 3  | Ezequiel Montes, Querétaro     | 20.6636600   | -99.8967209   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 8      | 0      |
| 4           | Customer 4  | Tolimán, Querétaro             | 20.9088898   | -99.9296722   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 11     | 0      |
| 5           | Customer 5  | Cadereyta de Montes, Querétaro | 20.7008991   | -99.8131027   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 16     | 0      |
| 6           | Customer 6  | Arroyo Seco, Querétaro         | 21.5450001   | -99.6904984   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 14     | 0      |
| 7           | Customer 7  | Jalpan de Serra, Querétaro     | 21.2175903   | -99.4759293   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 13     | 0      |
| 8           | Customer 8  | Corregidora, Querétaro         | 20.5398197   | -100.4317703  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 20     | 0      |
| 9           | Customer 9  | Huimilpan, Querétaro           | 20.3855801   | -100.2714767  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 22     | 0      |
| 10          | Customer 10 | Pedro Escobedo, Querétaro      | 20.5009708   | -100.1392212  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 19     | 0      |
| 11          | Customer 11 | Zacatlán, Puebla               | 19.9322605   | -97.9593887   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 5      | 0      |
| 12          | Customer 12 | Tulcingo, Puebla               | 18.0432205   | -98.4397507   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 7      | 0      |
| 13          | Customer 13 | Pantepec, Puebla               | 20.5216198   | -97.9386520   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 5      | 0      |
| 14          | Customer 14 | Acajete, Puebla                | 19.1128292   | -97.9431381   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 3      | 0      |
| 15          | Customer 15 | Caltepec, Puebla               | 18.1839008   | -97.4793015   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 9      | 0      |
| 16          | Customer 16 | Zoquiapan, Puebla              | 20.0065632   | -97.5946960   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 5      | 0      |
| 17          | Customer 17 | Quecholac, Puebla              | 18.9603062   | -97.6638641   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 8      | 0      |
| 18          | Customer 18 | Nopalucan, Puebla              | 19.2152004   | -97.8221283   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 16     | 0      |
| 19          | Customer 19 | Mixtla, Puebla                 | 18.9023991   | -97.8919983   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 15     | 0      |
| 20          | Customer 20 | Olintla, Puebla                | 20.1025009   | -97.6862030   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 10     | 0      |
| 21          | Customer 21 | Buenavista, Michoacán          | 19.6999931   | -101.1725159  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 20     | 0      |
| 22          | Customer 22 | Jiquilpan, Michoacán           | 19.9923096   | -102.7173920  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 8      | 0      |
| 23          | Customer 23 | Maravatío, Michoacán           | 19.8968792   | -100.4216232  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 7      | 0      |
| 24          | Customer 24 | Ocampo, Michoacán              | 19.2046223   | -101.8782806  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 9      | 0      |
| 25          | Customer 25 | Contepec, Michoacán            | 19.9554996   | -100.1660004  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 13     | 0      |
| 26          | Customer 26 | Pátzcuaro, Michoacán           | 19.4938202   | -101.6021805  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 15     | 0      |
| 27          | Customer 27 | Morelia, Michoacán             | 19.7029209   | -101.1936493  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 4      | 0      |
| 28          | Customer 28 | Acuitzio, Michoacán            | 19.5127106   | -101.3371429  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 8      | 0      |
| 29          | Customer 29 | Zamora, Michoacán              | 19.9890499   | -102.2824097  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 19     | 0      |
| 30          | Customer 30 | Quiroga, Michoacán             | 19.6654797   | -101.5245132  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 14     | 0      |

*Figura 3.7. Pantalla de las latitudes y longitudes para el CVRP*

Al culminar el proceso de generación de latitudes y longitudes, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.1 Establecer distancias en la hoja de trabajo* para generar la tabla de relación de distancia y tiempos entre los nodos como se presenta en la figura 3.8.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 2  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 3  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 4  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 5  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 6  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 7  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 8  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 9  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 10 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 11 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 12 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 13 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 14 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 15 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 16 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 17 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 18 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 19 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 20 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 21 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 22 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 23 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 24 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 25 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 26 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 27 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 28 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 29 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 30 | 0.00     | 0:00     |

*Figura 3.8. Pantalla de la relación de nodos para el CVRP*

Paso 5. Generar las distancias y duraciones entre nodos.

Estando en la hoja de trabajo 2. *Distancias* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.2 Opcional-Llenar distancias en la hoja de trabajo* para generar las distancias y duraciones entre el almacén y los clientes como se presenta en la figura 3.9.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 77.34    | 1:06     |
| Depot | Customer 2  | 154.03   | 3:00     |
| Depot | Customer 3  | 65.39    | 1:06     |
| Depot | Customer 4  | 87.74    | 1:32     |
| Depot | Customer 5  | 77.41    | 1:21     |
| Depot | Customer 6  | 242.29   | 4:51     |
| Depot | Customer 7  | 193.70   | 3:59     |
| Depot | Customer 8  | 8.86     | 0:16     |
| Depot | Customer 9  | 36.13    | 0:52     |
| Depot | Customer 10 | 34.35    | 0:31     |
| Depot | Customer 11 | 349.89   | 6:26     |
| Depot | Customer 12 | 513.39   | 7:48     |
| Depot | Customer 13 | 404.68   | 9:34     |
| Depot | Customer 14 | 383.25   | 5:23     |
| Depot | Customer 15 | 536.32   | 9:06     |
| Depot | Customer 16 | 443.56   | 8:33     |
| Depot | Customer 17 | 429.86   | 6:03     |
| Depot | Customer 18 | 398.38   | 5:55     |
| Depot | Customer 19 | 408.30   | 5:59     |
| Depot | Customer 20 | 445.90   | 10:26    |
| Depot | Customer 21 | 185.97   | 3:25     |
| Depot | Customer 22 | 313.71   | 5:05     |
| Depot | Customer 23 | 117.06   | 2:22     |
| Depot | Customer 24 | 307.93   | 6:57     |
| Depot | Customer 25 | 104.26   | 2:13     |
| Depot | Customer 26 | 239.47   | 4:08     |
| Depot | Customer 27 | 182.73   | 3:17     |
| Depot | Customer 28 | 199.77   | 3:37     |
| Depot | Customer 29 | 266.51   | 4:14     |
| Depot | Customer 30 | 212.00   | 3:56     |

*Figura 3.9. Pantalla de las distancias y tiempos para el CVRP*

Al culminar el proceso de generación de distancias y tiempos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *3. Establecer vehículos en la hoja de trabajo*.

Paso 6. Especificaciones del tipo de vehículos.

Estando en la hoja de trabajo llamada *3. Vehículos* se registran las especificaciones de la flota de transportes con que dispone la empresa y se anexa los costos como se presenta en la figura 3.10.

| Vehicle type ID | Type name | Capacity | Fixed cost per trip | Cost per unit distance | Number available |
|-----------------|-----------|----------|---------------------|------------------------|------------------|
| 1               | A         | 32       | 11                  | 7.1                    | 5                |
| 2               | B         | 30       | 11                  | 7.1                    | 3                |
| 3               | C         | 28       | 11                  | 7.1                    | 4                |

*Figura 3.10. Pantalla de los vehículos para el CVRP*

Al finalizar el registro de los vehículos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 4. *Establecer solución en la hoja de trabajo* para visualizar la tabla de valores de solución para el problema como se muestra en la figura 3.11.

|            |               |          |           |             |              |         |           |              |
|------------|---------------|----------|-----------|-------------|--------------|---------|-----------|--------------|
| Vehicle:   | A 1           | Stops:   | 0         | Net profit: | 0.00         |         |           |              |
| Stop count | Location name | Distance | Delivered | Profit      | Driving time | Arrival | Departure | Working time |
| 0          | Depot         | 0.00     | 0         | 0           | 0:00         | 08:00   | 08:00     | 0:00         |
| 1          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 2          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 3          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 4          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 5          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 6          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 7          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 8          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 9          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 10         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 11         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 12         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 13         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 14         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 15         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 16         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 17         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 18         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 19         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 20         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 21         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 22         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 23         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 24         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 25         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 26         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 27         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 28         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 29         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 30         |               |          |           |             |              |         |           |              |

*Figura 3.11. Pantalla de los valores de solución para el CVRP*

Paso 7. Generar la representación de nodos y rutas.

En la hoja de trabajo llamada 4. *Solución* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 5. *Opcional-establecer imagen en la hoja de trabajo* para generar el mapa de ubicación del almacén y los clientes con la ruta de los vehículos como se presenta en la figura 3.12.

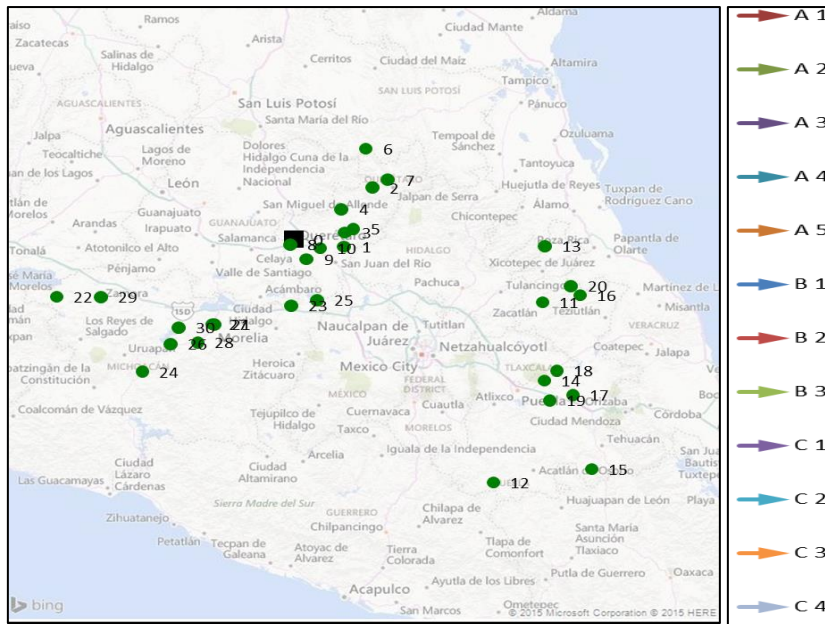


Figura 3.12. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el CVRP

Al finalizar la imagen de los nodos y rutas, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *6.1 Participar la hoja de cálculo VRP-solver* para generar la ruta que cada vehículo debe realizar.

Paso 8. Asignación de rutas para cada vehículo y representación del ruteo.

Por último, la solución del ruteo de la empresa se presenta detalladamente en la hoja de trabajo *4. Solución* como se presenta a continuación:

El vehículo A1 realiza la ruta A1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-29-25-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.13

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |  |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|--|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 1</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-4736.05</b> |                  |                     |  |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |  |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |  |
| 1                 | Customer 29          | 266.51          | 19               | 4:14                | 12:14           | 12:14            | 4:14                |  |
| 2                 | Customer 25          | 560.24          | 32               | 8:19                | 16:19           | 16:19            | 8:19                |  |
| 3                 | Depot                | 665.50          | 32               | 10:33               | 18:33           | 18:33            | 10:33               |  |

Figura 3.13. Pantalla de la ruta 1 para el CVRP

El vehículo A2 realiza la ruta A2.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-19-17-15-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.14.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 2</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-7803.46</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 19          | 408.30          | 15               | 5:59                | 13:59           | 13:59            | 5:59                |
| 2                 | Customer 17          | 440.57          | 23               | 6:55                | 14:55           | 14:55            | 6:55                |
| 3                 | Customer 15          | 565.76          | 32               | 10:31               | 18:31           | 18:31            | 10:31               |
| 4                 | Depot                | 1097.53         | 32               | 20:06               | 04:06           | 04:06            | 20:06               |

*Figura 3.14. Pantalla de la ruta 2 para el CVRP*

El vehículo A3 realiza la ruta A3.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-27-1-2-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.15.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 3</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-4693.21</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 27          | 182.73          | 4                | 3:17                | 11:17           | 11:17            | 3:17                |
| 2                 | Customer 1           | 387.60          | 16               | 7:37                | 15:37           | 15:37            | 7:37                |
| 3                 | Customer 2           | 508.21          | 31               | 10:11               | 18:11           | 18:11            | 10:11               |
| 4                 | Depot                | 659.47          | 31               | 13:13               | 21:13           | 21:13            | 13:13               |

*Figura 3.15. Pantalla de la ruta 3 para el CVRP*

El vehículo A4 realiza la ruta A4.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-11-5-4-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.16.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 4</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-5706.86</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 11          | 349.89          | 5                | 6:26                | 14:26           | 14:26            | 6:26                |
| 2                 | Customer 5           | 662.69          | 21               | 12:43               | 20:43           | 20:43            | 12:43               |
| 3                 | Customer 4           | 717.27          | 32               | 13:47               | 21:47           | 21:47            | 13:47               |
| 4                 | Depot                | 802.23          | 32               | 15:20               | 23:20           | 23:20            | 15:20               |

*Figura 3.16. Pantalla de la ruta 4 para el CVRP*

El vehículo A5 realiza la ruta A5.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-24-26-28-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.17.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 5</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-4512.60</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 24          | 307.93          | 9                | 6:57                | 14:57           | 14:57            | 6:57                |
| 2                 | Customer 26          | 392.18          | 24               | 10:06               | 18:06           | 18:06            | 10:06               |
| 3                 | Customer 28          | 433.28          | 32               | 10:50               | 18:50           | 18:50            | 10:50               |
| 4                 | Depot                | 634.03          | 32               | 14:25               | 22:25           | 22:25            | 14:25               |

*Figura 3.17. Pantalla de la ruta 5 para el CVRP*

El vehículo B1 realiza la ruta B1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-10-20-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.18.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>B 1</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-6420.40</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 10          | 34.35           | 19               | 0:31                | 08:31           | 08:31            | 0:31                |
| 2                 | Customer 20          | 459.56          | 29               | 9:13                | 17:13           | 17:13            | 9:13                |
| 3                 | Depot                | 902.73          | 29               | 19:43               | 03:43           | 03:43            | 19:43               |

*Figura 3.18. Pantalla de la ruta 6 para el CVRP*

El vehículo B2 realiza la ruta B2.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-30-22-3-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.19.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>B 2</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-5781.19</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 30          | 212.00          | 14               | 3:56                | 11:56           | 11:56            | 3:56                |
| 2                 | Customer 22          | 376.11          | 22               | 6:59                | 14:59           | 14:59            | 6:59                |
| 3                 | Customer 3           | 750.03          | 30               | 12:56               | 20:56           | 20:56            | 12:56               |
| 4                 | Depot                | 812.70          | 30               | 14:02               | 22:02           | 22:02            | 14:02               |

*Figura 3.19. Pantalla de la ruta 7 para el CVRP*

El vehículo B3 realiza la ruta B3.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-12-18-14-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.20.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>B 3</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-8117.85</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 12          | 513.39          | 7                | 7:48                | 15:48           | 15:48            | 7:48                |
| 2                 | Customer 18          | 737.76          | 23               | 12:00               | 20:00           | 20:00            | 12:00               |
| 3                 | Customer 14          | 757.33          | 26               | 12:26               | 20:26           | 20:26            | 12:26               |
| 4                 | Depot                | 1141.81         | 26               | 18:12               | 02:12           | 02:12            | 18:12               |

*Figura 3.20. Pantalla de la ruta 8 para el CVRP*

El vehículo C1 realiza la ruta C1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-8-13-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.21.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>C 1</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-5814.41</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 8           | 8.86            | 20               | 0:16                | 08:16           | 08:16            | 0:16                |
| 2                 | Customer 13          | 415.63          | 25               | 9:50                | 17:50           | 17:50            | 9:50                |
| 3                 | Depot                | 817.38          | 25               | 19:27               | 03:27           | 03:27            | 19:27               |

*Figura 3.21. Pantalla de la ruta 9 para el CVRP*

El vehículo C2 realiza la ruta C2.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-9-16-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.22.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>C 2</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-6423.12</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 9           | 36.13           | 22               | 0:52                | 08:52           | 08:52            | 0:52                |
| 2                 | Customer 16          | 462.32          | 27               | 8:20                | 16:20           | 16:20            | 8:20                |
| 3                 | Depot                | 903.12          | 27               | 16:57               | 00:57           | 00:57            | 16:57               |

*Figura 3.22. Pantalla de la ruta 10 para el CVRP*

El vehículo C3 realiza la ruta C3.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-7-6-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.23.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>C 3</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-3430.81</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 7           | 193.70          | 13               | 3:59                | 11:59           | 11:59            | 3:59                |
| 2                 | Customer 6           | 242.42          | 27               | 4:53                | 12:53           | 12:53            | 4:53                |
| 3                 | Depot                | 481.66          | 27               | 9:44                | 17:44           | 17:44            | 9:44                |

*Figura 3.23. Pantalla de la ruta 11 para el CVRP*

El vehículo C4 realiza la ruta C4.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-23-21-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.24.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>C 4</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-2835.54</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:00           | 08:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 23          | 117.06          | 7                | 2:22                | 10:22           | 10:22            | 2:22                |
| 2                 | Customer 21          | 212.00          | 27               | 4:30                | 12:30           | 12:30            | 4:30                |
| 3                 | Depot                | 397.82          | 27               | 7:56                | 15:56           | 15:56            | 7:56                |

*Figura 3.24. Pantalla de la ruta 12 para el CVRP*

El análisis del ruteo se presenta detalladamente en la hoja de trabajo 5. *Visualización* como se presenta en la figura 3.25, donde los vehículos realizan una ruta específica para satisfacer las demandas de los clientes partiendo del almacén.

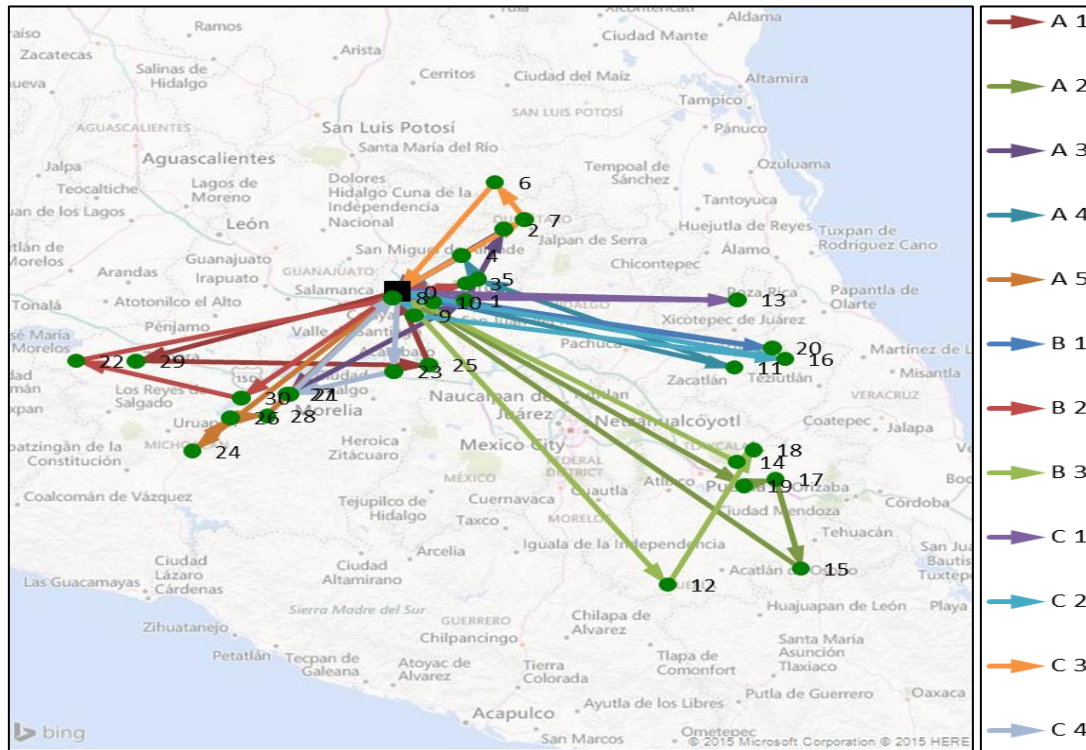


Figura 3.25. Pantalla del ruteo para el CVRP

Paso 9. Solución a los objetivos del caso CVRP.

a) ¿Cuántas rutas resultan de la distribución de productos alimenticios?

Respuesta: 12 rutas.

b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?

Respuesta:

A1.1: Querétaro – Zamora – Contepec – Querétaro.

A2.1: Querétaro – Mixtla – Quecholac – Caltepec – Querétaro.

A3.1: Querétaro – Morelia – Tequisquiapan - Pinal de Amoles – Querétaro.

A4.1: Querétaro – Zacatlán - Cadereyta de Montes – Tolimán – Querétaro.

A5.1: Querétaro – Ocampo – Pátzcuaro – Acuitzio – Querétaro.  
 B1.1: Querétaro - Pedro Escobedo – Olintla – Querétaro.  
 B2.1: Querétaro – Quiroga – Jiquilpan - Ezequiel Montes – Querétaro.  
 B3.1: Querétaro – Tulcingo – Nopalucan – Acajete – Querétaro.  
 C1.1: Querétaro – Corregidora – Pantepec – Querétaro.  
 C2.1: Querétaro – Huimilpan – Zoquiapan – Querétaro.  
 C3.1: Querétaro - Jalpan de Serra - Arroyo Seco – Querétaro.  
 C4.1: Querétaro – Maravatío – Buenavista – Querétaro.

c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?

Respuesta: Para el camión A1= 100%, A2= 100%, A3= 96.9%, A4= 100%, A5= 100%, B1= 96.7%, B2= 100%, B3= 86.7%, C1= 89.3%, C2= 96.4%, C3= 96.4% y C4= 96.4%

d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?

Respuesta:  $665.5 + 1097.53 + 659.47 + 802.23 + 634.03 + 902.73 + 812.7 + 1141.81 + 817.38 + 903.12 + 481.66 + 397.82 = 9316$  kilómetros

e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

Respuesta: Dado que el costo de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L. La ruta A1.1= \$6,821.4, A2.1= \$11,249.7, A3.1= \$6,759.6, A4.1= \$8,222.9, A5.1= \$6,498.8, B1.1= \$9,252.9, B2.1= \$8,330.2, B3.1= \$11,703.5, C1.1= \$8,378.1, C2.1= \$9,256.9, C3.1= \$4,937.1 y C4.1= \$4,077.7

f) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de manejo?

Respuesta: La ruta C4.1= Querétaro – Maravatío – Buenavista - Querétaro con 07:56 horas.

g) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de manejo?

Respuesta: La ruta A2.1= Querétaro – Mixtla – Quecholac – Caltepec - Querétaro con 20:06 horas.

### 3.3 Ejemplo de aplicación DCVRP

Volviendo con el ejemplo DCVRP del subtema 1.2.8 donde un invernadero que cosecha limones se encuentra ubicado en Querétaro, el cual debe satisfacer los pedidos de diferentes centrales de abasto que se presentan en la tabla 1.3.

Su flota de vehículos está conformada por 6 camiones de 8 toneladas de capacidad de carga útil. El límite de distancia para recorrer es de 400 kilómetros, el precio del combustible es de \$20.5 y el rendimiento del vehículo es de 2 Km/L.

*Tabla 1.3. Clientes y demandas para el DCVRP*

| Nombre     | Localidad               | Demanda | ID |
|------------|-------------------------|---------|----|
| Almacén    | Querétaro, México       | 0       | 0  |
| Cliente 1  | Salamanca, México       | 2.5     | 1  |
| Cliente 2  | Celaya, México          | 1.5     | 2  |
| Cliente 3  | Guanajuato, México      | 2       | 3  |
| Cliente 4  | Irapuato, México        | 3       | 4  |
| Cliente 5  | León, México            | 3.5     | 5  |
| Cliente 6  | Morelia, México         | 3       | 6  |
| Cliente 7  | Toluca, México          | 4       | 7  |
| Cliente 8  | San Luis Potosí, México | 4.5     | 8  |
| Cliente 9  | Lerma, México           | 2.5     | 9  |
| Cliente 10 | Metepec, México         | 2       | 10 |

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.3 es diseñar rutas para satisfacer los pedidos de cada central de abastos, el objetivo es que la flota de vehículos maximice el límite de distancia a recorrer y se resuelvan las preguntas siguientes:

- ¿Cuántas rutas resultan de la distribución de limones?
- ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?

- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?
- e) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- f) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

La resolución de este ejemplo de aplicación se soluciona con el método de Ahorros que a continuación se presenta:

Paso 1. Obtener las coordenadas geográficas del almacén y los clientes.

Dada las ubicaciones del almacén y de los 10 clientes en la tabla 1.3, se utiliza la plantilla GeoHack para obtener las coordenadas Universal Transversal de Mercator (UTM) las cuales se expresan en metros, cada coordenada está compuesta por 2 grupos de cifras de 6 o 7 números, el primero corresponde al eje “y” y el segundo al eje “x”. En la tabla 3.5 se representan los nodos con las coordenadas “x” y “y” para el ejemplo DCVRP.

*Tabla 3.5. Coordenadas UTM para el DCVRP*

| Nombre     | Localidad               | ID | UTM            | coordenada<br>x | coordenada<br>y |
|------------|-------------------------|----|----------------|-----------------|-----------------|
| almacén    | Querétaro, México       | 0  | 2277174 355338 | 355338          | 2277174         |
| cliente 1  | Salamanca, México       | 1  | 2276134 270956 | 270956          | 2276134         |
| cliente 2  | Celaya, México          | 2  | 2271061 310760 | 310760          | 2271061         |
| cliente 3  | Guanajuato, México      | 3  | 2325772 265450 | 265450          | 2325772         |
| cliente 4  | Irapuato, México        | 4  | 2287857 255450 | 255450          | 2287857         |
| cliente 5  | León, México            | 5  | 2337746 221560 | 221560          | 2337746         |
| cliente 6  | Morelia, México         | 6  | 2187328 270596 | 270596          | 2187328         |
| cliente 7  | Toluca, México          | 7  | 2133291 431298 | 431298          | 2133291         |
| cliente 8  | San Luis Potosí, México | 8  | 2450723 296324 | 296324          | 2450723         |
| cliente 9  | Lerma, México           | 9  | 2132411 446210 | 446210          | 2132411         |
| cliente 10 | Metepec, México         | 10 | 2128599 436944 | 436944          | 2128599         |

Paso 2. Sacar las distancias en kilómetros entre el almacén y los clientes.

Para obtener las distancias entre los nodos que representan el almacén y los clientes se usa la fórmula de la distancia en Microsoft Excel®:

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.2)$$

Para obtener las distancias en kilómetros de cada nodo se dividen entre 1000, ya que las coordenadas UTM se expresan en metros.

En la tabla 3.6 se muestran todos los resultados obtenidos de las operaciones realizadas.

*Tabla 3.6. Distancias en kilómetros para el DCVRP*

| d  | 0 | 1    | 2    | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|----|---|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0  | 0 | 84.4 | 45.0 | 102.2 | 100.5 | 146.9 | 123.5 | 162.7 | 183.3 | 170.9 | 169.5 |
| 1  |   | 0.0  | 40.1 | 49.9  | 19.4  | 79.0  | 88.8  | 214.7 | 176.4 | 226.7 | 222.1 |
| 2  |   |      | 0.0  | 71.0  | 57.8  | 183.1 | 92.9  | 183.1 | 180.2 | 193.8 | 190.3 |
| 3  |   |      |      | 0.0   | 39.2  | 45.5  | 138.5 | 254.1 | 128.7 | 264.7 | 261.3 |
| 4  |   |      |      |       | 0.0   | 60.3  | 101.7 | 234.1 | 167.9 | 246.1 | 301.0 |
| 5  |   |      |      |       |       | 0.0   | 158.2 | 292.9 | 135.5 | 304.4 | 300.2 |
| 6  |   |      |      |       |       |       | 0.0   | 169.5 | 264.6 | 184.0 | 176.4 |
| 7  |   |      |      |       |       |       |       | 0.0   | 344.9 | 14.9  | 7.3   |
| 8  |   |      |      |       |       |       |       |       | 0.0   | 351.8 | 351.5 |
| 9  |   |      |      |       |       |       |       |       |       | 0.0   | 10.0  |
| 10 |   |      |      |       |       |       |       |       |       |       | 0.0   |

Paso 3. Generar las primeras rutas.

De la tabla de distancias se obtienen los datos de las primeras rutas, todas saliendo de Querétaro y visitando un solo destino, como se muestra en la tabla 3.7.

*Tabla 3.7. Primera solución para el  
DCVRP*

| Ruta             | Nodos  | Kilómetros |
|------------------|--------|------------|
| 1                | 0-1-0  | 168.8      |
| 2                | 0-2-0  | 90         |
| 3                | 0-3-0  | 204.4      |
| 4                | 0-4-0  | 201        |
| 5                | 0-5-0  | 293.8      |
| 6                | 0-6-0  | 247        |
| 7                | 0-7-0  | 325.4      |
| 8                | 0-8-0  | 366.6      |
| 9                | 0-9-0  | 341.8      |
| 10               | 0-10-0 | 339        |
| Total kilómetros |        | 2577.8     |
| Total vehículos  |        | 10         |

En la primera solución se tiene un recorrido de 2577.8 kilómetros y requiere 10 vehículos.

Paso 4. Calcular los ahorros.

Teniendo la tabla de distancias, se calculan los ahorros potenciales entre localidades, como se presenta en la tabla 3.8.

*Tabla 3.8. Ahorros para el DCVRP*

| Arco | Ahorro | Arco | Ahorro |
|------|--------|------|--------|
| 1-2  | 40.1   | 3-10 | 261.3  |
| 1-3  | 49.9   | 4-5  | 60.3   |
| 1-4  | 19.4   | 4-6  | 101.7  |
| 1-5  | 79.0   | 4-7  | 234.1  |
| 1-6  | 88.8   | 4-8  | 167.9  |
| 1-7  | 214.7  | 4-9  | 246.1  |
| 1-8  | 176.4  | 4-10 | 301.0  |
| 1-9  | 226.7  | 5-6  | 158.2  |
| 1-10 | 222.1  | 5-7  | 292.9  |
| 2-3  | 71.0   | 5-8  | 135.5  |
| 2-4  | 57.8   | 5-9  | 304.4  |
| 2-5  | 183.1  | 5-10 | 300.2  |
| 2-6  | 92.9   | 6-7  | 169.5  |
| 2-7  | 183.1  | 6-8  | 264.6  |
| 2-8  | 180.2  | 6-9  | 184.0  |
| 2-9  | 193.8  | 6-10 | 176.4  |
| 2-10 | 190.3  | 7-8  | 344.9  |
| 3-4  | 39.2   | 7-9  | 14.9   |
| 3-5  | 45.5   | 7-10 | 7.3    |
| 3-6  | 138.5  | 8-9  | 351.8  |
| 3-7  | 254.1  | 8-10 | 351.5  |
| 3-8  | 128.7  | 9-10 | 10.0   |
| 3-9  | 264.7  |      |        |

Paso 5. Ordenar de mayor a menor los ahorros.

La lista de ahorros de la tabla 3.8 se ordena de mayor a menor como se presenta en la tabla 3.9.

*Tabla 3.9. Ahorros de mayor a menor para el DCVRP*

| Arco | Ahorro | Arco | Ahorro |
|------|--------|------|--------|
| 8-9  | 351.8  | 6-10 | 176.4  |
| 8-10 | 351.5  | 6-7  | 169.5  |
| 7-8  | 344.9  | 4-8  | 167.9  |
| 5-9  | 304.4  | 5-6  | 158.2  |
| 4-10 | 301.0  | 3-6  | 138.5  |
| 5-10 | 300.2  | 5-8  | 135.5  |
| 5-7  | 292.9  | 3-8  | 128.7  |
| 3-9  | 264.7  | 4-6  | 101.7  |
| 6-8  | 264.6  | 2-6  | 92.9   |
| 3-10 | 261.3  | 1-6  | 88.8   |
| 3-7  | 254.1  | 1-5  | 79.0   |
| 4-9  | 246.1  | 2-3  | 71.0   |
| 4-7  | 234.1  | 4-5  | 60.3   |
| 1-9  | 226.7  | 2-4  | 57.8   |
| 1-10 | 222.1  | 1-3  | 49.9   |
| 1-7  | 214.7  | 3-5  | 45.5   |
| 2-9  | 193.8  | 1-2  | 40.1   |
| 2-10 | 190.3  | 3-4  | 39.2   |
| 6-9  | 184.0  | 1-4  | 19.4   |
| 2-5  | 183.1  | 7-9  | 14.9   |
| 2-7  | 183.1  | 9-10 | 10.0   |
| 2-8  | 180.2  | 7-10 | 7.3    |
| 1-8  | 176.4  |      |        |

Paso 6. Analizar los arcos de la lista de ahorros.

El primer arco que se analiza es el 8-9, que genera la ruta: 0-8-9-0 con una distancia acumulada de  $183.3 + 351.8 + 170.9 = 706$  kilómetros y una demanda a cubrir de  $4.5 + 2.5 = 7$ . Esta ruta no es factible, ya que no respeta el límite distancia (400 Km).

Prosiguiendo el análisis con el resto de arcos de la lista, se van construyendo las rutas que conformarán la solución final.

Se analiza el arco 4-6, que genera la ruta 0-4-6-0 con una distancia acumulada de  $100.5 + 101.7 + 123.5 = 325.7$  Km y una demanda a cubrir de  $3 + 3 = 6$ , esta ruta es factible como se presenta en la tabla 3.10.

*Tabla 3.10 Segunda solución para el  
DCVRP*

| Ruta             | Nodos   | Kilómetros |
|------------------|---------|------------|
| 1                | 0-1-0   | 168.8      |
| 2                | 0-2-0   | 90         |
| 3                | 0-3-0   | 204.4      |
| 4                | 0-4-6-0 | 325.7      |
| 5                | 0-5-0   | 293.8      |
| 6                | 0-7-0   | 325.4      |
| 7                | 0-8-0   | 366.6      |
| 8                | 0-9-0   | 341.8      |
| 9                | 0-10-0  | 339        |
| Total kilómetros |         | 2455.5     |
| Total vehículos  |         | 9          |

En la segunda solución se tiene un recorrido de 2455.5 kilómetros y requiere 9 vehículos. El siguiente arco analizado 2-6, que la combinarse con la ruta 0-4-6-0 previamente analizada genera la ruta 0-4-6-2-0, con una distancia acumulada de:  $100.5 + 101.7 + 92.9 + 45 = 340.1$  Km y una demanda a cubrir de  $3 + 3 + 1.5 = 7.5$ , esta ruta es factible como se presenta en la tabla 3.11.

*Tabla 3.11. Tercera solución para el  
DCVRP*

| Ruta             | Nodos     | Kilómetros |
|------------------|-----------|------------|
| 1                | 0-1-0     | 168.8      |
| 2                | 0-4-6-2-0 | 340.1      |
| 3                | 0-3-0     | 204.4      |
| 4                | 0-5-0     | 293.8      |
| 5                | 0-7-0     | 325.4      |
| 6                | 0-8-0     | 366.6      |
| 7                | 0-9-0     | 341.8      |
| 8                | 0-10-0    | 339        |
| Total kilómetros |           | 2379.9     |
| Total vehículos  |           | 8          |

En la tercera solución se tiene un recorrido de 2379.9 kilómetros y requiere 8 vehículos.

El siguiente arco analizado es el 1-6, que al combinarse con la ruta 0-4-6-2-0 previamente analizada genera la ruta 0-4-1-6-2-0, con una distancia acumulada de:  $100.5 + 19.4 + 88.8 + 92.9 + 45 = 346.6$  Km con una demanda aculada de  $3 + 2.5 + 3 + 1.5 = 10$ , esta ruta excede la capacidad del vehículo, por lo que se rechaza.

El siguiente arco es el 1-5, que genera la ruta 0-1-5-0 con una distancia acumulada de:  $84.4 + 79 + 146.9 = 310.3$  Km y una demanda a cubrir de  $2.5 + 3.5 = 6$ , esta ruta es factible como se presenta en la tabla 3.12.

*Tabla 3.12. Cuarta solución para el  
DCVRP*

| Ruta             | Nodos     | Kilómetros |
|------------------|-----------|------------|
| 1                | 0-1-5-0   | 310.3      |
| 2                | 0-4-6-2-0 | 340.1      |
| 3                | 0-3-0     | 204.4      |
| 4                | 0-7-0     | 325.4      |
| 5                | 0-8-0     | 366.6      |
| 6                | 0-9-0     | 341.8      |
| 7                | 0-10-0    | 339        |
| Total kilómetros |           | 2227.6     |
| Total vehículos  |           | 7          |

En la cuarta solución se tiene un recorrido de 2227.6 kilómetros y requiere 7 vehículos.

El siguiente arco factible analizado es 3-5, que al combinarse con la ruta 0-1-5-0 previamente analizada genera la ruta 0-3-5-1-0, con una distancia acumulada de:  $102.2 + 45.5 + 79 + 84.4 = 311.1$  Km y una demanda a cubrir de:  $2 + 3.5 + 2.5 = 8$ , esta ruta es factible como se presenta en la tabla 3.13.

*Tabla 3.13. Quinta solución para el  
DCVRP*

| Ruta             | Nodos     | Kilómetros |
|------------------|-----------|------------|
| 1                | 0-3-5-1-0 | 311.1      |
| 2                | 0-4-6-2-0 | 340.1      |
| 3                | 0-7-0     | 325.4      |
| 4                | 0-8-0     | 366.6      |
| 5                | 0-9-0     | 341.8      |
| 6                | 0-10-0    | 339        |
| Total kilómetros |           | 2024       |
| Total vehículos  |           | 6          |

En la quinta solución se tiene un recorrido de 2024 kilómetros y requiere 6 vehículos.

El siguiente arco factible es el 7-10, que genera la ruta 0-7-10 con una distancia acumulada de:  $162.7 + 7.3 + 169.5 = 339.5$  Km una demanda a cubrir de:  $4 + 2 = 6$ , esta ruta es factible.

Luego de concluir el proceso de análisis, las rutas resultantes se presentan en la tabla 3.14.

*Tabla 3.14. Ruteo para el DCVRP*

| Ruta             | Nodos     | Toneladas | Kilómetros |
|------------------|-----------|-----------|------------|
| A1               | 0-3-5-1-0 | 8         | 311.1      |
| A2               | 0-4-6-2-0 | 7.5       | 340.1      |
| A3               | 0-7-10-0  | 6         | 339.5      |
| A4               | 0-8-0     | 4.5       | 366.6      |
| A5               | 0-9-0     | 2.5       | 341.8      |
| Total Kilómetros |           |           | 1699.1     |
| Total vehículos  |           |           | 5          |

La solución final del método de Ahorros consiste en 5 rutas que acumulan un total de 1699.1 kilómetros recorridos y el uso de 5 vehículos, respetando en todas las rutas las restricciones de no recorrer más de 400 Km y de no llevar más de 8 toneladas de carga.

Paso 7. Graficar los nodos que representan el almacén y los clientes.

Para graficar los nodos se utiliza Microsoft Excel® con base a las coordenadas “x” y “y” del almacén y de los clientes, como se muestra en la figura 3.26.

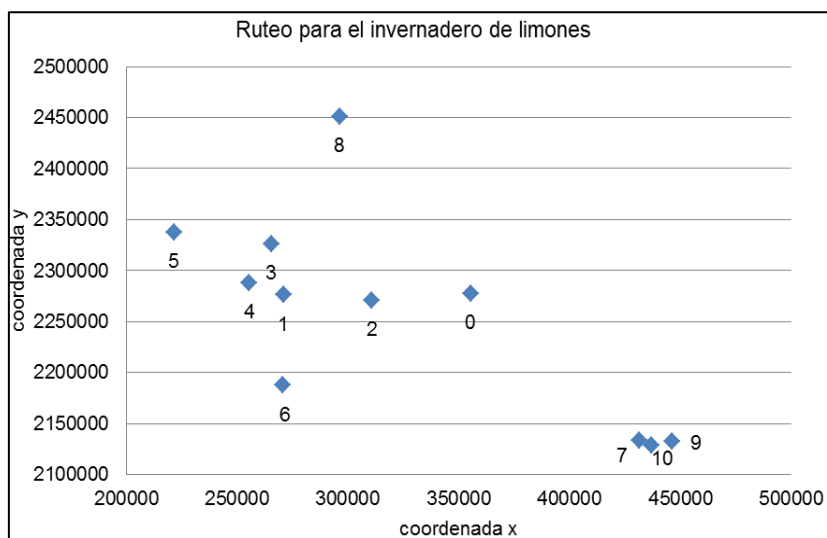


Figura 3.26. Pantalla de las coordenadas de los nodos DCVRP

Paso 8. Enlazar los nodos para resolver el DCVRP.

Dada la representación gráfica hecha en Microsoft Excel® como se muestra en la figura 3.26, se trazan flechas para dibujar las rutas de la tabla 3.14 y así poder visualizar el ruteo DCVRP como se presenta en la figura 3.27.

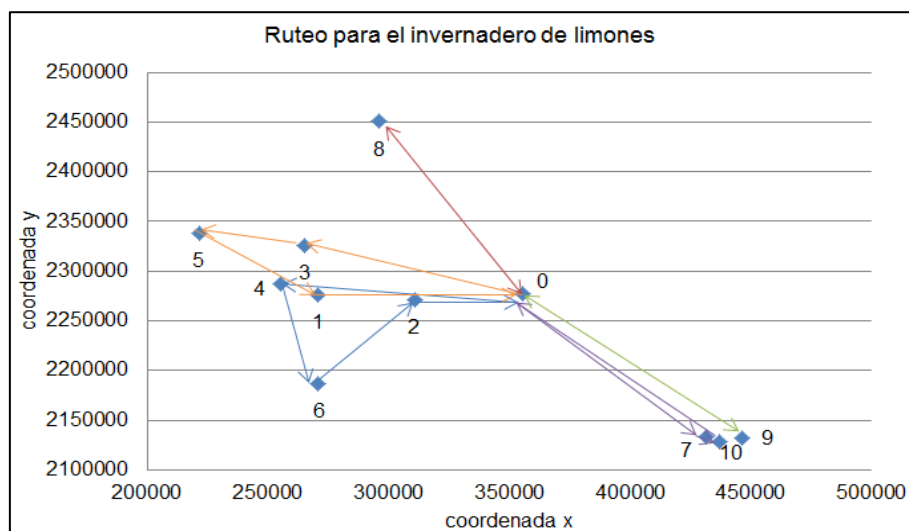


Figura 3.27. Pantalla del ruteo para el DCVRP

Paso 9. Solución a los objetivos DCVRP.

a) ¿Cuántas rutas resultan de la distribución de limones?

Respuesta: 5 rutas.

b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?

Respuesta:

Ruta A1: Querétaro – Guanajuato – León – Salamanca – Querétaro.

Ruta A2: Querétaro – Irapuato – Morelia – Celaya – Querétaro.

Ruta A3: Querétaro – Toluca – Metepec – Querétaro.

Ruta A4: Querétaro - San Luis Potosí – Querétaro.

Ruta A5: Querétaro – Lerma – Querétaro.

c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?

Respuesta: Para la ruta A1= 100%, A2= 93.8 %, A3= 75 %, A4= 56.3 % y A5= 31.3 %

d) ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?

Respuesta: Para la ruta A1= 77.8%, A2= 85 %, A3= 84.9 %, A4= 91.7 % y A5= 85.5 %

e) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?

Respuesta:  $311.1 + 340.1 + 339.5 + 366.6 + 341.8 = 1699.1$  kilómetros.

f) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

Respuesta: Dado que el costo de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L. Para la ruta A1= \$3,188.8, A2= \$3,486.0, A3= \$3,479.9, A4= \$3,757.6 y A5= \$3,503.4.

### 3.4 Ejemplo de aplicación VRPPD

Retomando el ejemplo VRRPD del subtema 1.3.3 donde una empresa de logística inversa dedicada a la recolección de pallets de madera tiene su almacén de materia prima en Toluca, la cual tiene que recolectar los suministros a los clientes ubicados en la Ciudad de México y en el Estado de México como se presenta en la tabla 1.4, con una restricción de tipo recolección.

Su flota de vehículos está conformada por 10 camiones para 192 pallets de capacidad de carga útil. El tiempo de inicio de trabajo es a las 6:00 horas, el límite de tiempo de manejo es a las 20:00 horas, el límite de tiempo de trabajo es de 20:00 horas y el límite de distancia es de 300 kilómetros. El precio de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L.

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.4 es diseñar rutas para satisfacer los suministros de la empresa.

El objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga y el límite de distancia a recorrer, y se resuelvan las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuántas rutas se necesitan para la recolección de todos los pallets?
- b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?
- f) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?
- g) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?
- h) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad del límite de distancia para cada ruta?
- i) ¿Qué camión llega primero al almacén?
- j) ¿Qué camión llega al final al almacén?

*Tabla 1.4. Clientes y suministros para el VRPPD*

| Nombre     | Localidad                             | Suministro | ID |
|------------|---------------------------------------|------------|----|
| Almacén    | Toluca, Estado de México              | 0          | 0  |
| cliente 1  | Álvaro Obregón, CDMX                  | 50         | 1  |
| cliente 2  | Cuauhtémoc, CDMX                      | 76         | 2  |
| cliente 3  | Iztapalapa, CDMX                      | 93         | 3  |
| cliente 4  | Azcapotzalco, CDMX                    | 82         | 4  |
| cliente 5  | Miguel Hidalgo, CDMX                  | 85         | 5  |
| cliente 6  | Gustavo A. Madero, CDMX               | 35         | 6  |
| cliente 7  | Tláhuac, CDMX                         | 40         | 7  |
| cliente 8  | La Magdalena Contreras, CDMX          | 58         | 8  |
| cliente 9  | Benito Juárez, CDMX                   | 74         | 9  |
| cliente 10 | Milpa Alta, CDMX                      | 53         | 10 |
| cliente 11 | Iztacalco, CDMX                       | 100        | 11 |
| cliente 12 | Tlalpan, CDMX                         | 71         | 12 |
| cliente 13 | Cuajimalpa de Morelos, CDMX           | 92         | 13 |
| cliente 14 | Venustiano Carranza, CDMX             | 65         | 14 |
| cliente 15 | Xochimilco, CDMX                      | 49         | 15 |
| cliente 16 | Coyoacán, CDMX                        | 45         | 16 |
| cliente 17 | Texcoco, Estado de México             | 100        | 17 |
| cliente 18 | Chalco, Estado de México              | 44         | 18 |
| cliente 19 | Naucalpan de Juárez, Estado de México | 67         | 19 |
| cliente 20 | Zumpango, Estado de México            | 95         | 20 |
| cliente 21 | Tultitlán, Estado de México           | 86         | 21 |
| cliente 22 | Cuautitlán Izcalli, Estado de México  | 50         | 22 |
| cliente 23 | Ixtapaluca, Estado de México          | 99         | 23 |
| cliente 24 | Ocoyoacac, Estado de México           | 69         | 24 |
| cliente 25 | Tlalnepantla, Estado de México        | 56         | 25 |

La resolución de este ejemplo de aplicación se soluciona con el libro de Excel *vrp\_solver\_v1.05* que a continuación se presenta:

Paso 1. Tener una clave de acceso a Microsoft® Bing Maps.

Primero se registra un usuario a Bing Maps para que esta página de Mapeo Web nos proporcione una clave para su base de datos SIG, posteriormente dicha clave se ingresa en la casilla *Licencia SIG* en la primera hoja de trabajo del libro de Excel VRP-solver y finalmente se guarda el libro.

Paso 2. Registrar las restricciones del problema en la hoja de consola del VRP-solver.

Primero se abre el libro de Excel *vrp\_solver*, después en la primera hoja de trabajo llamada *Consola VRP-solver* se registra la información del problema que son los valores como: el número de clientes, y las limitaciones que son: Recolección, el número de tipos de vehículos, los vehículos regresan al almacén, el tiempo de trabajo inicial, el límite de tiempo de manejo, el límite de tiempo de trabajo y el límite de distancia, en las casillas de la columna *Valores* como se muestra en la figura 3.28.

| Sequence                          | Parameter                          | Value        | Remarks                                                                                                 |
|-----------------------------------|------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>0.Optional - GIS License</b>   | Bing Maps Key                      | Ah6dXOU2G315 | You can get a free key at <a href="https://www.bingmapsportal.com/">https://www.bingmapsportal.com/</a> |
| <b>1.Locations</b>                | Number of customers                | 25           | [10,200]                                                                                                |
|                                   | Pickup / Delivery?                 | Pickup       |                                                                                                         |
| <b>2.Distances</b>                | Distance / duration computation    | Bing Maps    | The distance unit is km for 'Geodesic Approximation' and 'Bing Maps'                                    |
|                                   | Bing Maps route type               | Fastest      | Recommendation: use Fastest                                                                             |
|                                   | Average vehicle speed              | 70           | Not used for the 'Bing Maps' option                                                                     |
| <b>3.Vehicles</b>                 | Number of vehicle types            | 1            | Heterogeneous VRP if greater than 1                                                                     |
| <b>4.Solution</b>                 | All vehicles must be used?         | No           | Flexible fleet / fleet mix if 'No'                                                                      |
|                                   | Vehicles must return to the depot? | Yes          | Open VRP if no return                                                                                   |
|                                   | Time window type                   | Hard         |                                                                                                         |
|                                   | Work start time                    | 06:00        | [00:00,23:59]                                                                                           |
|                                   | Driving time limit                 | 20:00        |                                                                                                         |
|                                   | Working time limit                 | 20:00        |                                                                                                         |
|                                   | Distance limit                     | 300          | Positive                                                                                                |
| <b>5.Optional - Visualization</b> | Visualization background           | Bing Maps    |                                                                                                         |
|                                   | Location labels                    | Location IDs |                                                                                                         |
| <b>6.Solver</b>                   | Warm start?                        | Yes          |                                                                                                         |
|                                   | CPU time limit (seconds)           | 60           | Recommendation: At least 60 seconds.                                                                    |
|                                   | LNS minimum removal rate           | 10%          | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                   | LNS maximum removal rate           | 40%          | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                   | LNS candidate list size            | 2            | [1, 5]                                                                                                  |
|                                   | Random number seed                 | 123456789    | [1,2147483647]                                                                                          |

*Figura 3.28. Pantalla de las restricciones para el VRPPD*

Al culminar el registro se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *1.1 Establecer ubicaciones en la hoja de trabajo* para continuar con el proceso de solución.

Paso 3. Registrar la dirección del almacén y los clientes con su respectiva demanda.

En la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se registra la dirección del almacén y los clientes de acuerdo a su ID de la tabla 1.2 en la columna de *Direcciones*, además se registra el pedido de cada cliente en la columna *Suministro* como se presenta en la figura 3.29.

| Location ID | Name        | Address                               | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Supply | Profit |
|-------------|-------------|---------------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| 0           | Depot       | Toluca, Estado de México              |              |               | 00:00             | 23:59           | Starting location | 0:00         | 0      | 0      |
| 1           | Customer 1  | Álvaro Obregón, DF                    |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 50     | 0      |
| 2           | Customer 2  | Cuauhtémoc, DF                        |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 76     | 0      |
| 3           | Customer 3  | Iztapalapa, DF                        |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 93     | 0      |
| 4           | Customer 4  | Azcapotzalco, DF                      |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 82     | 0      |
| 5           | Customer 5  | Miguel Hidalgo, DF                    |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 85     | 0      |
| 6           | Customer 6  | Gustavo A. Madero, DF                 |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 35     | 0      |
| 7           | Customer 7  | Tláhuac, DF                           |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 40     | 0      |
| 8           | Customer 8  | La Magdalena Contreras, DF            |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 58     | 0      |
| 9           | Customer 9  | Benito Juárez, DF                     |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 74     | 0      |
| 10          | Customer 10 | Milpa Alta, DF                        |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 53     | 0      |
| 11          | Customer 11 | Iztacalco, DF                         |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 100    | 0      |
| 12          | Customer 12 | Tlalpan, DF                           |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 71     | 0      |
| 13          | Customer 13 | Cuajimalpa de Morelos, DF             |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 92     | 0      |
| 14          | Customer 14 | Venustiano Carranza, DF               |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 65     | 0      |
| 15          | Customer 15 | Xochimilco, DF                        |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 49     | 0      |
| 16          | Customer 16 | Coyoacán, DF                          |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 45     | 0      |
| 17          | Customer 17 | Texcoco, Estado de México             |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 100    | 0      |
| 18          | Customer 18 | Chalco, Estado de México              |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 44     | 0      |
| 19          | Customer 19 | Naucalpan de Juárez, Estado de México |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 67     | 0      |
| 20          | Customer 20 | Zumpango, Estado de México            |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 95     | 0      |
| 21          | Customer 21 | Tultitlán, Estado de México           |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 86     | 0      |
| 22          | Customer 22 | Cuautitlán Izcalli, Estado de México  |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 50     | 0      |
| 23          | Customer 23 | Ixtapalca, Estado de México           |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 99     | 0      |
| 24          | Customer 24 | Ocoyoacac, Estado de México           |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 69     | 0      |
| 25          | Customer 25 | Tlalnepantla, Estado de México        |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 56     | 0      |

*Figura 3.29. Pantalla de las direcciones y demandas para el VRPPD*

Paso 4. Generar la latitud y longitud del almacén y los clientes.

Estando en la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se va a la pestaña complementos y se da click en *1.2 Opcional-Registrar Latitud/Longitud usando las direcciones* para generar la latitud (y) y longitud (x) del almacén y de cada cliente como se presenta en la figura 3.30.

| Location ID | Name        | Address                               | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Supply | Profit |
|-------------|-------------|---------------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| 0           | Depot       | Toluca, Estado de México              | 19.2927208   | -99.6534729   | 00:00             | 23:59           | Starting location | 0:00         | 0      | 0      |
| 1           | Customer 1  | Álvaro Obregón, DF                    | 19.3728104   | -99.2165680   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 50     | 0      |
| 2           | Customer 2  | Cuauhtémoc, DF                        | 19.4290009   | -99.1710968   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 76     | 0      |
| 3           | Customer 3  | Iztapalapa, DF                        | 19.3472195   | -99.0588989   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 93     | 0      |
| 4           | Customer 4  | Azcapotzalco, DF                      | 19.4846001   | -99.1968994   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 82     | 0      |
| 5           | Customer 5  | Miguel Hidalgo, DF                    | 19.4351196   | -99.1996994   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 85     | 0      |
| 6           | Customer 6  | Gustavo A. Madero, DF                 | 19.4874992   | -99.1176987   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 35     | 0      |
| 7           | Customer 7  | Tláhuac, DF                           | 19.2872295   | -99.0058899   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 40     | 0      |
| 8           | Customer 8  | La Magdalena Contreras, DF            | 19.3165302   | -99.2389297   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 58     | 0      |
| 9           | Customer 9  | Benito Juárez, DF                     | 19.3813210   | -99.1631470   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 74     | 0      |
| 10          | Customer 10 | Milpa Alta, DF                        | 19.1924496   | -99.0245514   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 53     | 0      |
| 11          | Customer 11 | Iztacalco, DF                         | 19.3935108   | -99.0891266   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 100    | 0      |
| 12          | Customer 12 | Tlalpan, DF                           | 19.2897892   | -99.1736984   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 71     | 0      |
| 13          | Customer 13 | Cuajimalpa de Morelos, DF             | 19.3563995   | -99.2993088   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 92     | 0      |
| 14          | Customer 14 | Venustiano Carranza, DF               | 19.4393005   | -99.1111984   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 65     | 0      |
| 15          | Customer 15 | Xochimilco, DF                        | 19.2621193   | -99.1017303   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 49     | 0      |
| 16          | Customer 16 | Coyoacán, DF                          | 19.3329105   | -99.1442719   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 45     | 0      |
| 17          | Customer 17 | Texcoco, Estado de México             | 19.5143394   | -98.8790894   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 100    | 0      |
| 18          | Customer 18 | Chalco, Estado de México              | 19.2670307   | -98.8982086   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 44     | 0      |
| 19          | Customer 19 | Naucalpan de Juárez, Estado de México | 19.4988594   | -99.2852173   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 67     | 0      |
| 20          | Customer 20 | Zumpango, Estado de México            | 19.7903404   | -99.1023865   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 95     | 0      |
| 21          | Customer 21 | Tultitlán, Estado de México           | 19.6249409   | -99.1557999   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 86     | 0      |
| 22          | Customer 22 | Cuautitlán Izcalli, Estado de México  | 19.6561699   | -99.2105865   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 50     | 0      |
| 23          | Customer 23 | Ixtapaluca, Estado de México          | 19.3170700   | -98.8959885   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 99     | 0      |
| 24          | Customer 24 | Ocoyoacac, Estado de México           | 19.2705994   | -99.4560776   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 69     | 0      |
| 25          | Customer 25 | Tlalnepantla, Estado de México        | 19.5426807   | -99.1973114   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 56     | 0      |

*Figura 3.30. Pantalla de las latitudes y longitudes para el VRPPD*

Al culminar el proceso de generación de latitudes y longitudes, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.1 Establecer distancias en la hoja de trabajo* para generar la tabla de relación de distancia y tiempos entre los nodos como se presenta en la figura 3.31.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 2  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 3  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 4  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 5  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 6  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 7  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 8  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 9  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 10 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 11 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 12 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 13 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 14 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 15 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 16 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 17 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 18 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 19 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 20 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 21 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 22 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 23 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 24 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 25 | 0.00     | 0:00     |

*Figura 3.31. Pantalla de la relación de nodos para el VRPPD*

Paso 5. Generar las distancias y duraciones entre nodos.

Estando en la hoja de trabajo 2. *Distancias* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.2 Opcional-Llenar distancias en la hoja de trabajo* para generar las distancias y duraciones entre el almacén y los clientes como se presenta en la figura 3.32.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 55.55    | 1:04     |
| Depot | Customer 2  | 61.94    | 1:08     |
| Depot | Customer 3  | 80.64    | 1:29     |
| Depot | Customer 4  | 68.82    | 1:15     |
| Depot | Customer 5  | 60.58    | 1:05     |
| Depot | Customer 6  | 72.08    | 1:19     |
| Depot | Customer 7  | 94.25    | 1:44     |
| Depot | Customer 8  | 71.80    | 1:09     |
| Depot | Customer 9  | 63.40    | 1:11     |
| Depot | Customer 10 | 102.04   | 2:02     |
| Depot | Customer 11 | 72.10    | 1:18     |
| Depot | Customer 12 | 77.88    | 1:21     |
| Depot | Customer 13 | 45.38    | 0:45     |
| Depot | Customer 14 | 72.39    | 1:20     |
| Depot | Customer 15 | 86.12    | 1:30     |
| Depot | Customer 16 | 71.02    | 1:21     |
| Depot | Customer 17 | 105.55   | 2:00     |
| Depot | Customer 18 | 100.34   | 1:52     |
| Depot | Customer 19 | 70.37    | 1:14     |
| Depot | Customer 20 | 116.26   | 2:03     |
| Depot | Customer 21 | 88.48    | 1:30     |
| Depot | Customer 22 | 91.03    | 1:32     |
| Depot | Customer 23 | 95.70    | 1:47     |
| Depot | Customer 24 | 22.90    | 0:26     |
| Depot | Customer 25 | 77.83    | 1:21     |

*Figura 3.32. Pantalla de las distancias y tiempos para el VRPPD*

Al culminar el proceso de generación de distancias y tiempos, se va a la pestaña Complementos y se da click en 3. *Establecer vehículos en la hoja de trabajo.*

Paso 6. Especificaciones del tipo de vehículos.

Estando en la hoja de trabajo llamada 3. *Vehículos* se registran las especificaciones de la flota de transportes con que dispone la empresa y se anexa los costos como se presenta en la figura 3.33.

| Vehicle type ID | Type name | Capacity | Fixed cost per trip | Cost per unit distance | Number available |
|-----------------|-----------|----------|---------------------|------------------------|------------------|
| 1               | A         | 192      | 10                  | 7.1                    | 10               |

*Figura 3.33. Pantalla de los vehículos para el VRPPD*

Al finalizar el registro de los vehículos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 4. *Establecer solución en la hoja de trabajo* para visualizar la tabla de valores de solución para el problema como se muestra en la figura 3.34.

|            |               |          |      |             |              |         |           |              |
|------------|---------------|----------|------|-------------|--------------|---------|-----------|--------------|
| Vehicle:   | A 1           | Stops:   | 0    | Net profit: | 0.00         |         |           |              |
| Stop count | Location name | Distance | Load | Profit      | Driving time | Arrival | Departure | Working time |
| 0          | Depot         | 0.00     | 0    | 0           | 0:00         | 06:00   | 06:00     | 0:00         |
| 1          |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 2          |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 3          |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 4          |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 5          |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 6          |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 7          |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 8          |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 9          |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 10         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 11         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 12         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 13         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 14         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 15         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 16         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 17         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 18         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 19         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 20         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 21         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 22         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 23         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 24         |               |          |      |             |              |         |           |              |
| 25         |               |          |      |             |              |         |           |              |

*Figura 3.34. Pantalla de los valores de solución para el VRPPD*

Paso 7. Generar la representación de nodos y rutas.

En la hoja de trabajo llamada 4. *Solución* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 5. *Opcional-establecer imagen en la hoja de trabajo* para generar el mapa de ubicación del almacén y los clientes con la ruta de los vehículos como se presenta en la figura 3.35.

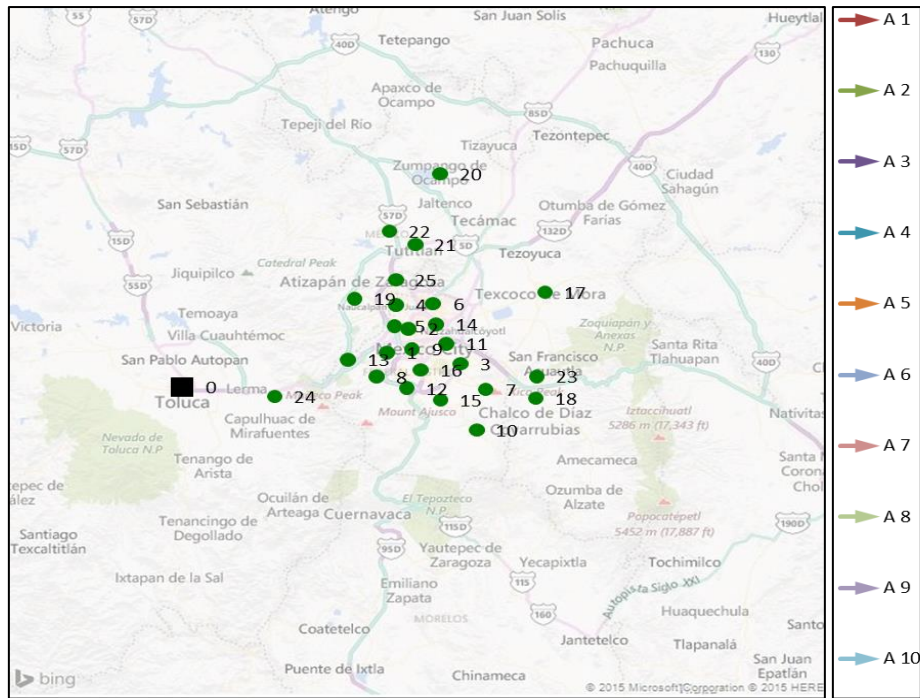


Figura 3.35. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el VRPPD

Al finalizar la imagen de los nodos y rutas, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *6.1 Participar la hoja de cálculo VRP-solver* para generar la ruta que cada vehículo debe realizar.

Paso 8. Asignación de rutas para cada vehículo y representación del ruteo.

Por último, la solución del ruteo de la empresa se presenta detalladamente en la hoja de trabajo *4. Solución* como se presenta a continuación:

El vehículo A1 realiza la ruta A1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-24-13-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.36.

|                   |                      |                 |             |                     |                |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|-------------|---------------------|----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 1</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>    | <b>Net profit:</b>  | <b>-670.46</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Load</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b> | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0           | 0:00                | 06:00          | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 24          | 22.90           | 69          | 0:26                | 06:26          | 06:26            | 0:26                |
| 2                 | Customer 13          | 48.60           | 161         | 1:00                | 07:00          | 07:00            | 1:00                |
| 3                 | Depot                | 93.02           | 161         | 1:44                | 07:44          | 07:44            | 1:44                |

Figura 3.36. Pantalla de la ruta 1 para el VRPPD

El vehículo A2 realiza la ruta A2.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-1-9-19-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.37.

|                   |                      |                 |             |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|-------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 2</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>    | <b>Net profit:</b>  | <b>-1123.53</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Load</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0           | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 1           | 55.55           | 50          | 1:04                | 07:04           | 07:04            | 1:04                |
| 2                 | Customer 9           | 62.54           | 124         | 1:19                | 07:19           | 07:19            | 1:19                |
| 3                 | Customer 19          | 86.83           | 191         | 1:54                | 07:54           | 07:54            | 1:54                |
| 4                 | Depot                | 156.84          | 191         | 3:08                | 09:08           | 09:08            | 3:08                |

*Figura 3.37. Pantalla de la ruta 2 para el VRPPD*

El vehículo A3 realiza la ruta A3.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-2-5-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.38.

|                   |                      |                 |             |                     |                |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|-------------|---------------------|----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 3</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>    | <b>Net profit:</b>  | <b>-912.32</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Load</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b> | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0           | 0:00                | 06:00          | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 2           | 61.94           | 76          | 1:08                | 07:08          | 07:08            | 1:08                |
| 2                 | Customer 5           | 66.64           | 161         | 1:16                | 07:16          | 07:16            | 1:16                |
| 3                 | Depot                | 127.09          | 161         | 2:21                | 08:21          | 08:21            | 2:21                |

*Figura 3.38. Pantalla de la ruta 3 para el VRPPD*

El vehículo A4 realiza la ruta A4.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-15-18-23-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.39.

|                   |                      |                 |             |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|-------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 4</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>    | <b>Net profit:</b>  | <b>-1522.80</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Load</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0           | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 15          | 86.12           | 49          | 1:30                | 07:30           | 07:30            | 1:30                |
| 2                 | Customer 18          | 110.42          | 93          | 2:28                | 08:28           | 08:28            | 2:28                |
| 3                 | Customer 23          | 118.78          | 192         | 2:46                | 08:46           | 08:46            | 2:46                |
| 4                 | Depot                | 213.07          | 192         | 4:32                | 10:32           | 10:32            | 4:32                |

*Figura 3.39. Pantalla de la ruta 4 para el VRPPD*

El vehículo A5 realiza la ruta A5.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-4-25-6-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.40.

|                   |                      |                 |             |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|-------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 5</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>    | <b>Net profit:</b>  | <b>-1169.05</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Load</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0           | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 4           | 68.82           | 82          | 1:15                | 07:15           | 07:15            | 1:15                |
| 2                 | Customer 25          | 79.07           | 138         | 1:31                | 07:31           | 07:31            | 1:31                |
| 3                 | Customer 6           | 90.97           | 173         | 1:54                | 07:54           | 07:54            | 1:54                |
| 4                 | Depot                | 163.25          | 173         | 3:15                | 09:15           | 09:15            | 3:15                |

*Figura 3.40. Pantalla de la ruta 5 para el VRPPD*

El vehículo A6 realiza la ruta A6.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-17-21-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.41.

|                   |                      |                 |             |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|-------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 6</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>    | <b>Net profit:</b>  | <b>-1642.56</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Load</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0           | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 17          | 105.55          | 100         | 2:00                | 08:00           | 08:00            | 2:00                |
| 2                 | Customer 21          | 143.40          | 186         | 2:50                | 08:50           | 08:50            | 2:50                |
| 3                 | Depot                | 229.94          | 186         | 4:19                | 10:19           | 10:19            | 4:19                |

*Figura 3.41. Pantalla de la ruta 6 para el VRPPD*

El vehículo A7 realiza la ruta A7.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-20-22-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.42.

|                   |                      |                 |             |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|-------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 7</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>    | <b>Net profit:</b>  | <b>-1670.53</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Load</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0           | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 20          | 116.26          | 95          | 2:03                | 08:03           | 08:03            | 2:03                |
| 2                 | Customer 22          | 144.87          | 145         | 2:43                | 08:43           | 08:43            | 2:43                |
| 3                 | Depot                | 233.88          | 145         | 4:14                | 10:14           | 10:14            | 4:14                |

*Figura 3.42. Pantalla de la ruta 7 para el VRPPD*

El vehículo A8 realiza la ruta A8.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-16-12-8-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.43.

|                   |                      |                 |             |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|-------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 8</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>    | <b>Net profit:</b>  | <b>-1156.27</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Load</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0           | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 16          | 71.02           | 45          | 1:21                | 07:21           | 07:21            | 1:21                |
| 2                 | Customer 12          | 79.45           | 116         | 1:34                | 07:34           | 07:34            | 1:34                |
| 3                 | Customer 8           | 90.32           | 174         | 1:49                | 07:49           | 07:49            | 1:49                |
| 4                 | Depot                | 161.45          | 174         | 3:05                | 09:05           | 09:05            | 3:05                |

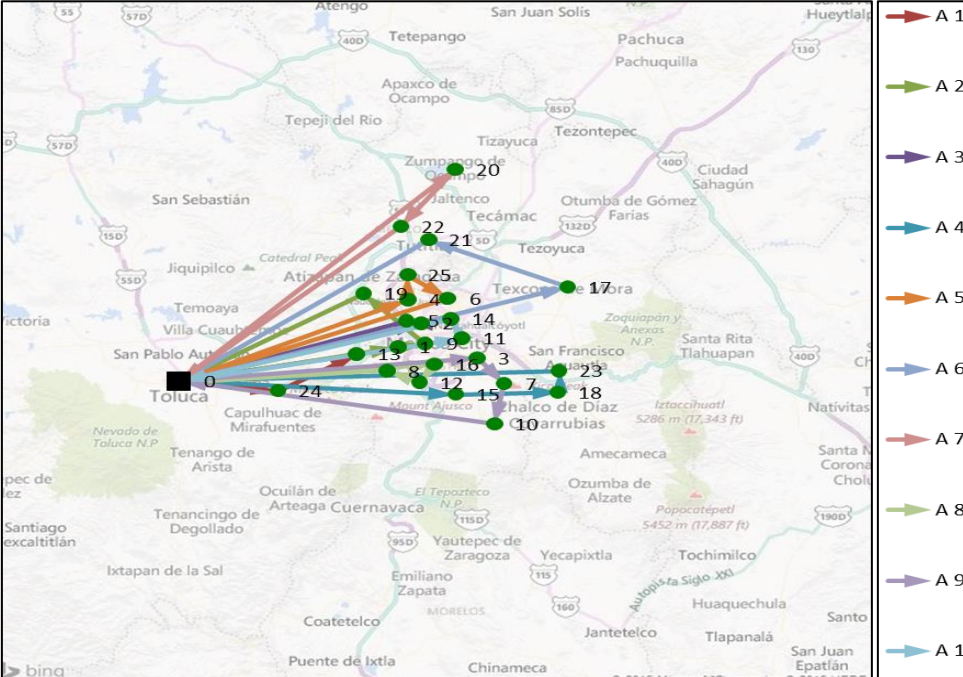
*Figura 3.43. Pantalla de la ruta 8 para el VRPPD*

El vehículo A9 realiza la ruta A9.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-3-7-10-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.44.

|                   |                      |                 |             |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|-------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 9</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>    | <b>Net profit:</b>  | <b>-1484.56</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Load</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0           | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 3           | 80.64           | 93          | 1:29                | 07:29           | 07:29            | 1:29                |
| 2                 | Customer 7           | 92.08           | 133         | 1:58                | 07:58           | 07:58            | 1:58                |
| 3                 | Customer 10          | 106.40          | 186         | 2:34                | 08:34           | 08:34            | 2:34                |
| 4                 | Depot                | 207.69          | 186         | 4:34                | 10:34           | 10:34            | 4:34                |

*Figura 3.44. Pantalla de la ruta 9 para el VRPPD*

Figura 3.45. Pantalla de la ruta 10 para el VBRDD



b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?

Respuesta:

A1.1: Toluca – Ocoyoacac - Cuajimalpa de Morelos – Toluca.

A2.1: Toluca - Álvaro Obregón - Benito Juárez - Naucalpan de Juárez – Toluca.

A3.1: Toluca – Cuauhtémoc - Miguel Hidalgo –Toluca.

A4.1: Toluca – Xochimilco – Chalco – Ixtapaluca –Toluca.

A5.1: Toluca – Azcapotzalco –Tlalnepantla - Gustavo A. Madero – Toluca.

A6.1: Toluca – Texcoco – Tultitlán – Toluca.

A7.1: Toluca – Zumpango - Cuautitlán Izcalli – Toluca.

A8.1: Toluca – Coyoacán – Tlalpan - La Magdalena Contreras – Toluca.

A9.1: Toluca – Iztapalapa – Tláhuac - Milpa Alta – Toluca.

A10.1: Toluca – Iztacalco - Venustiano Carranza – Toluca.

c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?

Respuesta: Para el camión A1 = 83.9%, A2 = 99.5%, A3 = 83.9%, A4 = 100%, A5 = 90.1%, A6 = 96.9%, A7 = 75.5%, A8 = 90.6%, A9 = 96.9% y A10 = 85.9%

d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?

Respuesta:  $93.02 + 156.84 + 127.09 + 213.07 + 163.25 + 229.94 + 233.88 + 161.45 + 207.69 + 149.92 = 1736.2$  Km.

e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

Respuesta: Dado que el costo de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L. Para la ruta A1.1 = \$953.4, A2.1 = \$1,607.6, A3.1 = \$1,302.7, A4.1 = \$2,183.9, A5.1 = \$1,673.3, A6.1 = \$2,356.9, A7.1 = \$2,397.27, A8.1 = \$1,654.9, A9.1 = \$2,128.8 y A10.1 = \$1,536.7.

f) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?

Respuesta: La ruta A1.1

g) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?

Respuesta: La ruta A9.1

h) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad del límite de distancia para cada ruta?

Respuesta: Para la ruta A1.1 = 31%, A2.1 = 52.3%, A3.1 = 42.4%, A4.1 = 71%, A5.1 = 54.4%, A6.1 = 76.6%, A7.1 = 78%, A8.1 = 53.8%, A9.1 = 69.2% y A10.1 = 50%

i) ¿Qué camión llega primero al almacén?

Respuesta: El camión A1

j) ¿Qué camión llega al final al almacén?

Respuesta: El camión A9

### **3.5 Ejemplo de aplicación VRPTW**

Reanudando el ejemplo VRPTW del subtema 1.4.2 donde una empresa que produce harina de trigo se encuentra ubicada en Querétaro, Querétaro.

Esta debe satisfacer las demandas de los centros comerciales y cumplir con el lapso de tiempo para entrega que fijan los clientes como se muestra en la tabla 1.5, de lo contrario le imponen una multa.

La flota de vehículos que dispone la empresa es de 6 camiones para 8 toneladas de capacidad de carga útil. La hora de salida del almacén para los transportes es a las 5:00 horas, el límite de tiempo de manejo es a las 23:59 horas, el límite de tiempo de trabajo es de 23:59 horas y el límite de distancia para recorrer es de 900 kilómetros. El precio de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L.

Tabla 1.5. Clientes y demandas para el VRPTW

| Nombre     | Localidad                           | Ventana de tiempo |       | Tiempo de servicio | Demanda | ID |
|------------|-------------------------------------|-------------------|-------|--------------------|---------|----|
|            |                                     | Inicio            | Fin   |                    |         |    |
| Almacén    | Querétaro, Querétaro                | 05:00             | 23:59 | 00:30              | 0       | 0  |
| cliente 1  | Huimilpan, Querétaro                | 06:10             | 23:59 | 00:20              | 3       | 1  |
| cliente 2  | San Joaquín, Querétaro              | 07:15             | 23:59 | 00:20              | 2       | 2  |
| cliente 3  | Cadereyta de Montes, Querétaro      | 08:05             | 23:59 | 00:20              | 1.5     | 3  |
| cliente 4  | Jalpan de Serra, Querétaro          | 09:20             | 23:59 | 00:20              | 3.5     | 4  |
| cliente 5  | Pedro Escobedo, Querétaro           | 10:10             | 23:59 | 00:20              | 4       | 5  |
| cliente 6  | Tequisquiapan, Querétaro            | 11:05             | 23:59 | 00:20              | 5       | 6  |
| cliente 7  | Peñamiller, Querétaro               | 12:20             | 23:59 | 00:20              | 2.5     | 7  |
| cliente 8  | El Marqués, Querétaro               | 13:05             | 23:59 | 00:20              | 3       | 8  |
| cliente 9  | Tolimán, Querétaro                  | 14:20             | 23:59 | 00:20              | 2       | 9  |
| cliente 10 | Ezequiel Montes, Querétaro          | 15:10             | 23:59 | 00:20              | 4       | 10 |
| cliente 11 | Aguascalientes, Aguascalientes      | 16:05             | 23:59 | 00:20              | 1.5     | 11 |
| cliente 12 | Calvillo, Aguascalientes            | 17:20             | 23:59 | 00:20              | 1.5     | 12 |
| cliente 13 | Tepezalá, Aguascalientes            | 18:15             | 23:59 | 00:20              | 2       | 13 |
| cliente 14 | Pabellón de Arteaga, Aguascalientes | 19:10             | 23:59 | 00:20              | 3.5     | 14 |
| cliente 15 | El Llano, Aguascalientes            | 20:00             | 23:59 | 00:20              | 3       | 15 |

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.5 es diseñar rutas para satisfacer las demandas de los centros comerciales.

El objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga, el límite de distancia y cumpla con los lapsos de tiempo para entrega, y se resuelvan las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuántas rutas se necesitan para satisfacer la demanda de los centros comerciales?
- b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?
- f) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?
- g) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?
- h) ¿Qué camión llega primero al almacén?
- i) ¿Qué camión llega al final al almacén?
- j) ¿Cuál es el tiempo de trabajo para cada ruta?
- k) ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?

La resolución de este ejemplo de aplicación se soluciona con el libro de Excel *vrp\_solver\_v1.05* que a continuación se presenta:

Paso 1. Tener una clave de acceso a Microsoft® Bing Maps.

Primero se registra un usuario a Bing Maps para que esta página de Mapeo Web nos proporcione una clave para su base de datos SIG, posteriormente dicha clave se ingresa en la casilla *Licencia SIG* en la primera hoja de trabajo del libro de Excel *VRP-solver* y finalmente se guarda el libro.

Paso 2. Registrar las restricciones del problema en la hoja de consola del *VRP-solver*.

Primero se abre el libro de Excel *vrp\_solver*, después en la primera hoja de trabajo llamada *Consola VRP-solver* se registra la información del problema que son los valores como: el número de clientes, y las limitaciones que son: Entrega, el número de tipos de vehículos, los vehículos regresan al almacén, el tiempo de trabajo inicial, el límite de tiempo de manejo, el límite de tiempo de trabajo y el límite de distancia, en las casillas de la columna *Valores* como se muestra en la figura 3.47.

| Sequence                          | Parameter                          | Value        | Remarks                                                                                                 |
|-----------------------------------|------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>0.Optional - GIS License</b>   | Bing Maps Key                      | Ah6dXOU2G315 | You can get a free key at <a href="https://www.bingmapsportal.com/">https://www.bingmapsportal.com/</a> |
| <b>1.Locations</b>                | Number of customers                | 15           | [10,200]                                                                                                |
|                                   | Pickup / Delivery?                 | Delivery     |                                                                                                         |
| <b>2.Distances</b>                | Distance / duration computation    | Bing Maps    | The distance unit is km for 'Geodesic Approximation' and 'Bing Maps'                                    |
|                                   | Bing Maps route type               | Fastest      | Recommendation: use Fastest                                                                             |
|                                   | Average vehicle speed              | 70           | Not used for the 'Bing Maps' option                                                                     |
| <b>3.Vehicles</b>                 | Number of vehicle types            | 1            | Heterogeneous VRP if greater than 1                                                                     |
| <b>4.Solution</b>                 | All vehicles must be used?         | No           | Flexible fleet / fleet mix if 'No'                                                                      |
|                                   | Vehicles must return to the depot? | Yes          | Open VRP if no return                                                                                   |
|                                   | Time window type                   | Hard         |                                                                                                         |
|                                   | Work start time                    | 05:00        | [00:00,23:59]                                                                                           |
|                                   | Driving time limit                 | 23:59        |                                                                                                         |
|                                   | Working time limit                 | 23:59        |                                                                                                         |
|                                   | Distance limit                     | 900          | Positive                                                                                                |
| <b>5.Optional - Visualization</b> | Visualization background           | Bing Maps    |                                                                                                         |
|                                   | Location labels                    | Location IDs |                                                                                                         |
| <b>6.Solver</b>                   | Warm start?                        | Yes          |                                                                                                         |
|                                   | CPU time limit (seconds)           | 60           | Recommendation: At least 60 seconds.                                                                    |
|                                   | LNS minimum removal rate           | 10%          | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                   | LNS maximum removal rate           | 40%          | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                   | LNS candidate list size            | 2            | [1, 5]                                                                                                  |
|                                   | Random number seed                 | 123456789    | [1,2147483647]                                                                                          |

*Figura 3.47. Pantalla de las restricciones para el VRPTW*

Al culminar el registro se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *1.1 Establecer ubicaciones en la hoja de trabajo* para continuar con el proceso de solución.

Paso 3. Registrar la dirección del almacén y los clientes con su respectiva demanda.

En la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se registra la dirección del almacén y los clientes de acuerdo a su ID de la tabla 1.2 en la columna de *Direcciones*, se registra el pedido de cada cliente en la columna *Demanda*, se agregan los tiempos de servicio en la columna *Tiempo de Servicio* y se registran las ventanas de tiempo iniciales en la columna *Ventana de tiempo inicial* como se presenta en la figura 3.48.

| Location ID | Name        | Address                             | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Demand | Profit |
|-------------|-------------|-------------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| 0           | Depot       | Querétaro, Querétaro                |              |               | 05:00             | 23:59           | Starting location | 0:30         | 0      | 0      |
| 1           | Customer 1  | Huimilpan, Querétaro                |              |               | 06:10             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 3      | 0      |
| 2           | Customer 2  | San Joaquín, Querétaro              |              |               | 07:15             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 2      | 0      |
| 3           | Customer 3  | Cadereyta de Montes, Querétaro      |              |               | 08:05             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 1.5    | 0      |
| 4           | Customer 4  | Jalpan de Serra, Querétaro          |              |               | 09:20             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 3.5    | 0      |
| 5           | Customer 5  | Pedro Escobedo, Querétaro           |              |               | 10:10             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 4      | 0      |
| 6           | Customer 6  | Tequisquiapan, Querétaro            |              |               | 11:05             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 5      | 0      |
| 7           | Customer 7  | Peñamiller, Querétaro               |              |               | 12:20             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 2.5    | 0      |
| 8           | Customer 8  | El Marqués, Querétaro               |              |               | 13:05             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 3      | 0      |
| 9           | Customer 9  | Tolimán, Querétaro                  |              |               | 14:20             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 2      | 0      |
| 10          | Customer 10 | Ezequiel Montes, Querétaro          |              |               | 15:10             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 4      | 0      |
| 11          | Customer 11 | Aguascalientes, Aguascalientes      |              |               | 16:05             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 1.5    | 0      |
| 12          | Customer 12 | Calvillo, Aguascalientes            |              |               | 17:20             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 1.5    | 0      |
| 13          | Customer 13 | Tepezalá, Aguascalientes            |              |               | 18:15             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 2      | 0      |
| 14          | Customer 14 | Pabellón de Arteaga, Aguascalientes |              |               | 19:10             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 3.5    | 0      |
| 15          | Customer 15 | El Llano, Aguascalientes            |              |               | 20:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 3      | 0      |

*Figura 3.48. Pantalla de las direcciones y demandas para el VRPTW*

Paso 4. Generar la latitud y longitud del almacén y los clientes.

Estando en la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se va a la pestaña complementos y se da click en *1.2 Opcional-Registrar Latitud/Longitud usando las direcciones* para generar la latitud (y) y longitud (x) del almacén y de cada cliente como se presenta en la figura 3.49.

| Location ID | Name        | Address                            | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Demand | Profit |
|-------------|-------------|------------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| 0           | Depot       | Querétaro, Querétaro               | 20.5921001   | -100.3960037  | 05:00             | 23:59           | Starting location | 0:30         | 0      | 0      |
| 1           | Customer 1  | Huimilpan, Querétaro               | 20.3855801   | -100.2714767  | 06:10             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 3      | 0      |
| 2           | Customer 2  | San Joaquín, Querétaro             | 20.9155998   | -99.5661011   | 07:15             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 2      | 0      |
| 3           | Customer 3  | Cadereyta de Montes, Querétaro     | 20.7008991   | -99.8131027   | 08:05             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 1.5    | 0      |
| 4           | Customer 4  | Jalpan de Serra, Querétaro         | 21.2175903   | -99.4759293   | 09:20             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 3.5    | 0      |
| 5           | Customer 5  | Pedro Escobedo, Querétaro          | 20.5009708   | -100.1392212  | 10:10             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 4      | 0      |
| 6           | Customer 6  | Tequisquiapan, Querétaro           | 20.5181007   | -99.9039001   | 11:05             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 5      | 0      |
| 7           | Customer 7  | Peñamiller, Querétaro              | 21.0543499   | -99.8151474   | 12:20             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 2.5    | 0      |
| 8           | Customer 8  | El Marqués, Querétaro              | 20.5833359   | -100.3727036  | 13:05             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 3      | 0      |
| 9           | Customer 9  | Tolimán, Querétaro                 | 20.9088898   | -99.9296722   | 14:20             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 2      | 0      |
| 10          | Customer 10 | Ezequiel Montes, Querétaro         | 20.6636600   | -99.8967209   | 15:10             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 4      | 0      |
| 11          | Customer 11 | Aguascalientes, Aguascalientes     | 21.8823109   | -102.2941818  | 16:05             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 1.5    | 0      |
| 12          | Customer 12 | Calvillo, Aguascalientes           | 21.8462791   | -102.7141876  | 17:20             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 1.5    | 0      |
| 13          | Customer 13 | Tepezalá, Aguascalientes           | 22.2250309   | -102.1733017  | 18:15             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 2      | 0      |
| 14          | Customer 14 | Pabellón de Arteaga, Aguascaliente | 22.1466198   | -102.2796478  | 19:10             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 3.5    | 0      |
| 15          | Customer 15 | El Llano, Aguascalientes           | 21.9158401   | -101.9647522  | 20:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:20         | 3      | 0      |

*Figura 3.49. Pantalla de las latitudes y longitudes para el VRPTW*

Al culminar el proceso de generación de latitudes y longitudes, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.1 Establecer distancias en la hoja de trabajo* para generar la tabla de relación de distancia y tiempos entre los nodos como se presenta en la figura 3.50.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 2  | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 3  | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 4  | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 5  | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 6  | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 7  | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 8  | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 9  | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 10 | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 11 | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 12 | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 13 | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 14 | 0.00     | 0.00     |
| Depot | Customer 15 | 0.00     | 0.00     |

*Figura 3.50. Pantalla de la relación de nodos para el VRPTW*

Paso 5. Generar las distancias y duraciones entre nodos.

Estando en la hoja de trabajo *2. Distancias* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.2 Opcional-Llenar distancias en la hoja de trabajo* para generar las distancias y duraciones entre el almacén y los clientes como se presenta en la figura 3.51.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 36.13    | 0:52     |
| Depot | Customer 2  | 139.62   | 2:40     |
| Depot | Customer 3  | 77.41    | 1:21     |
| Depot | Customer 4  | 193.70   | 3:59     |
| Depot | Customer 5  | 34.35    | 0:31     |
| Depot | Customer 6  | 77.34    | 1:06     |
| Depot | Customer 7  | 132.01   | 2:31     |
| Depot | Customer 8  | 4.34     | 0:11     |
| Depot | Customer 9  | 87.74    | 1:32     |
| Depot | Customer 10 | 65.39    | 1:06     |
| Depot | Customer 11 | 327.28   | 5:22     |
| Depot | Customer 12 | 381.91   | 5:39     |
| Depot | Customer 13 | 390.28   | 6:03     |
| Depot | Customer 14 | 369.22   | 5:38     |
| Depot | Customer 15 | 322.33   | 5:09     |

*Figura 3.51. Pantalla de las distancias y tiempos para el VRPTW*

Al culminar el proceso de generación de distancias y tiempos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *3. Establecer vehículos en la hoja de trabajo*.

Paso 6. Especificaciones del tipo de vehículos.

Estando en la hoja de trabajo llamada *3. Vehículos* se registran las especificaciones de la flota de transportes con que dispone la empresa y se anexa los costos como se presenta en la figura 3.52.

| Vehicle type ID | Type name | Capacity | Fixed cost per trip | Cost per unit distance | Number available |
|-----------------|-----------|----------|---------------------|------------------------|------------------|
| 1               | A         | 8        | 10                  | 7.1                    | 6                |

*Figura 3.52. Pantalla de los vehículos para el VRPTW*

Al finalizar el registro de los vehículos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *4. Establecer solución en la hoja de trabajo* para visualizar la tabla de valores de solución para el problema como se muestra en la figura 3.53.

| Vehicle:   | A 1           | Stops:   | 0         | Net profit: | 0.00         |         |           |              |
|------------|---------------|----------|-----------|-------------|--------------|---------|-----------|--------------|
| Stop count | Location name | Distance | Delivered | Profit      | Driving time | Arrival | Departure | Working time |
| 0          | Depot         | 0.00     | 0         | 0           | 0:00         | 05:00   | 05:00     | 0:00         |
| 1          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 2          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 3          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 4          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 5          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 6          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 7          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 8          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 9          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 10         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 11         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 12         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 13         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 14         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 15         |               |          |           |             |              |         |           |              |

*Figura 3.53. Pantalla de los valores de solución para el VRPTW*

Paso 7. Generar la representación de nodos y rutas.

En la hoja de trabajo llamada 4. *Solución* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 5. *Opcional-establecer imagen en la hoja de trabajo* para generar el mapa de ubicación del almacén y los clientes con la ruta de los vehículos como se presenta en la figura 3.54.

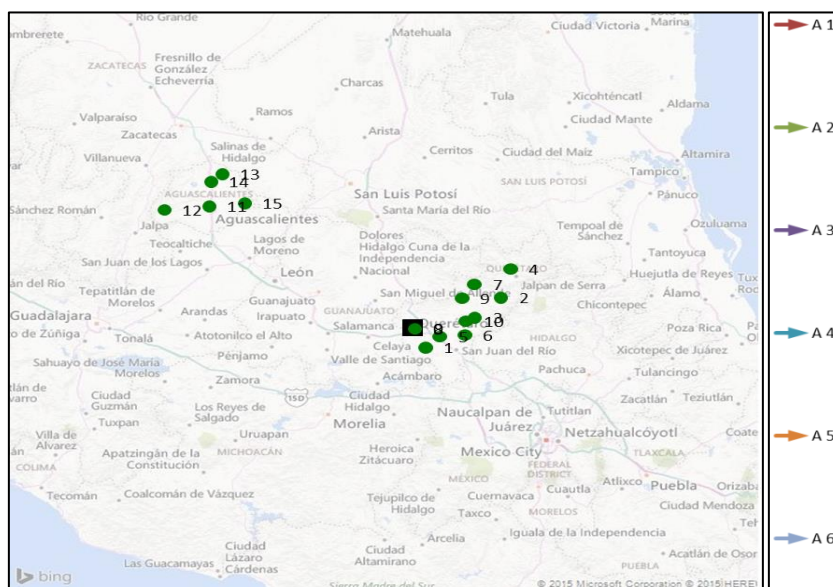


Figura 3.54. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el VRPTW

Al finalizar la imagen de los nodos y rutas, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 6.1 *Participar la hoja de cálculo VRP-solver* para generar la ruta que cada vehículo debe realizar.

Paso 8. Asignación de rutas para cada vehículo y representación del ruteo.

Por último, la solución del ruteo de la empresa se presenta detalladamente en la hoja de trabajo 4. *Solución* como se presenta a continuación:

El vehículo A1 realiza la ruta A1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-1-5-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.55.

|                   |                      |                 |                  |                     |                |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 1</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-854.89</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b> | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 05:00          | 05:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 1           | 36.13           | 3                | 0:52                | 05:52          | 06:30            | 1:12                |
| 2                 | Customer 5           | 86.53           | 7                | 1:52                | 07:30          | 10:30            | 2:32                |
| 3                 | Depot                | 119.00          | 7                | 2:21                | 10:59          | 11:29            | 3:31                |

Figura 3.55. Pantalla de la ruta 1 para el VRPTW

El vehículo A2 realiza la ruta A2.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-2-3-10-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.56.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 2</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-1978.09</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 05:00           | 05:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 2           | 139.62          | 2                | 2:40                | 07:40           | 08:00            | 3:00                |
| 2                 | Customer 3           | 202.27          | 3.5              | 4:02                | 09:22           | 09:42            | 4:42                |
| 3                 | Customer 10          | 214.53          | 7.5              | 4:18                | 09:58           | 15:30            | 5:18                |
| 4                 | Depot                | 277.20          | 7.5              | 5:24                | 16:36           | 17:06            | 6:54                |

*Figura 3.56. Pantalla de la ruta 2 para el VRPTW*

El vehículo A3 realiza la ruta A3.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-8-6-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.57.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 3</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-1081.32</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 05:00           | 05:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 8           | 4.34            | 3                | 0:11                | 05:11           | 13:25            | 0:31                |
| 2                 | Customer 6           | 76.55           | 8                | 1:11                | 14:25           | 14:45            | 1:51                |
| 3                 | Depot                | 150.89          | 8                | 2:14                | 15:48           | 16:18            | 3:24                |

*Figura 3.57. Pantalla de la ruta 3 para el VRPTW*

El vehículo A4 realiza la ruta A4.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-4-7-9-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.58.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 4</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-3047.46</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 05:00           | 05:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 4           | 193.70          | 3.5              | 3:59                | 08:59           | 09:40            | 4:19                |
| 2                 | Customer 7           | 283.81          | 6                | 6:15                | 11:56           | 12:40            | 6:55                |
| 3                 | Customer 9           | 342.85          | 8                | 7:35                | 14:00           | 14:40            | 8:35                |
| 4                 | Depot                | 427.81          | 8                | 9:08                | 16:13           | 16:43            | 10:38               |

*Figura 3.58. Pantalla de la ruta 4 para el VRPTW*

El vehículo A5 realiza la ruta A5.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-12-15-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.59.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 5</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>3</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-5517.62</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 05:00           | 05:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 12          | 381.91          | 1.5              | 5:39                | 10:39           | 17:40            | 5:59                |
| 2                 | Customer 15          | 474.80          | 4.5              | 7:29                | 19:30           | 20:20            | 8:09                |
| 3                 | Depot                | 775.72          | 4.5              | 12:43               | 01:34           | 02:04            | 13:53               |

*Figura 3.59. Pantalla de la ruta 5 para el VRPTW*

El vehículo A6 realiza la ruta A6.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-11-13-14-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.60.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 6</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-5199.91</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 05:00           | 05:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 11          | 327.28          | 1.5              | 5:22                | 10:22           | 16:25            | 5:42                |
| 2                 | Customer 13          | 379.25          | 3.5              | 6:30                | 17:33           | 18:35            | 7:10                |
| 3                 | Customer 14          | 398.78          | 7                | 7:04                | 19:09           | 19:30            | 8:04                |
| 4                 | Depot                | 730.97          | 7                | 12:51               | 01:17           | 01:47            | 14:21               |

Figura 3.60. Pantalla de la ruta 6 para el VRPTW

El análisis del ruteo se presenta detalladamente en la hoja de trabajo 5. *Visualización* como se presenta en la figura 3.61, donde los vehículos realizan una ruta específica para satisfacer las demandas de los clientes partiendo del almacén.

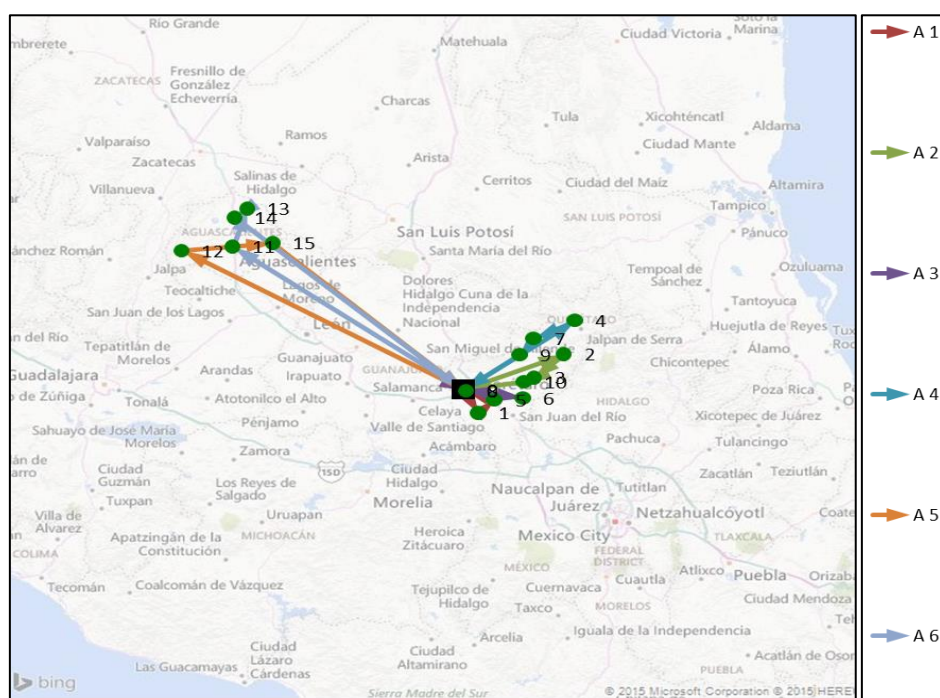


Figura 3.61. Pantalla del ruteo para el VRPTW

Paso 9. Solución a los objetivos VRPTW.

a) ¿Cuántas rutas se necesitan para satisfacer la demanda de los centros comerciales?

Respuesta: 6 rutas.

b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?

Respuesta:

A1.1: Querétaro – Huimilpan - Pedro Escobedo – Querétaro.

A2.1: Querétaro - San Joaquín - Cadereyta de Montes - Ezequiel Montes – Querétaro.

A3.1: Querétaro - El Marqués – Tequisquiapan – Querétaro.

A4.1: Querétaro - Jalpan de Serra – Peñamiller – Tolimán – Querétaro.

A5.1: Querétaro – Calvillo - El Llano – Querétaro.

A6.1: Querétaro – Aguascalientes – Tepezalá - Pabellón de Arteaga – Querétaro.

c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?

Respuesta: Para el camión A1= 87.5%, A2= 93.8%, A3= 100%, A4= 100%, A5= 56.3% y A6= 87.5%

d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?

Respuesta:  $119 + 277.2 + 150.89 + 427.81 + 775.72 + 730.97 = 2481.6$  Km.

e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

Respuesta: Dado que el costo de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L. Para la ruta A1.1= \$1,219.7, A2.1= \$2,841.3, A3.1= \$1,546.6, A4.1= \$4,385.0, A5.1= \$7,951.1 y A6.1= \$7,492.4.

f) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?

Respuesta: La ruta A3.1

g) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?

Respuesta: La ruta A6.1

h) ¿Qué camión llega primero al almacén?

Respuesta: El camión A1

i) ¿Qué camión llega al final al almacén?

Respuesta: El camión A5

j) ¿Cuál es el tiempo de trabajo para cada ruta?

Respuesta: Para la ruta A1.1= 3:31 horas, A2.1= 6:54 horas, A3.1= 3:24 horas, A4.1= 10:38 horas, A5.1= 13:53 horas y A6.1= 14:21 horas

k) ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?

Respuesta: Para la ruta A1.1= 13.2%, A2.1= 30.8%, A3.1= 16.8%, A4.1= 47.5%, A5.1= 86.2% y A6.1= 81.2%

### **3.6 Ejemplo de aplicación VRPMT**

Retomando el ejemplo VRPMT del subtema 1.5.2 donde la casa del oso es un establecimiento que vende paquetes de hilos ubicado en la calle Francisco I. Madero #34 en Xonacatlán, el cual abastece de materia prima a los productores de peluche. El día martes debe satisfacer las demandas de los clientes con una limitación de tiempo de servicio que se presentan en la tabla 1.6.

La tienda solo tiene a su disposición dos vehículos con capacidades de carga útil de 180 y 150 paquetes. La restricción que se impone es asignar a los transportes realizar varias rutas dentro del horizonte de tiempo. La hora de salida del establecimiento para los transportes es a las 7:00 horas, el límite de tiempo de manejo es a las 21:00 horas, el límite de tiempo de trabajo es de 20:00 horas y el límite de distancia para recorrer es de 400 kilómetros. El precio de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L.

Tabla 1.6. Clientes y demandas para el VRPMT

| Direcciones                                                                      | Tiempo de servicio | Demanda | ID |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------|----|
| Calle Francisco Ignacio Madero 34, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX | 00:20              | 0       | 0  |
| Calle 5 de Mayo 20, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX                | 00:10              | 30      | 1  |
| Calle 5 de Febrero 10, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX             | 00:10              | 32      | 2  |
| Calle 16 de Septiembre 30, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX         | 00:10              | 25      | 3  |
| Calle 20 de Noviembre 33, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX          | 00:10              | 38      | 4  |
| Calle Felipe Carrillo Puerto 97, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX   | 00:10              | 36      | 5  |
| Calle José María Morelos 17, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX       | 00:10              | 38      | 6  |
| Calle 5 de Febrero 90, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX             | 00:10              | 35      | 7  |
| Calle Francisco Sarabia 26, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX        | 00:10              | 28      | 8  |
| Calle Durango 5, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX                   | 00:10              | 15      | 9  |
| Calle Ramos Millán 6, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX              | 00:10              | 10      | 10 |
| Calle Durango 16, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX                  | 00:10              | 40      | 11 |
| Calle Vicente Guerrero 7, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX          | 00:10              | 35      | 12 |
| Calle 16 de Septiembre 15, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX         | 00:10              | 30      | 13 |
| Calle Francisco Ignacio Madero 18, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX | 00:10              | 39      | 14 |

Tabla 1.6. Clientes y demandas para el VRPMT (continuación)

|                                                                             |       |    |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------|----|----|
| Calle Vicente Guerrero 34, Xonacatlán de Vicencio, 52060<br>Xonacatlán, MEX | 00:10 | 37 | 15 |
| Calle 20 de Noviembre 5, Xonacatlán de Vicencio, 52060<br>Xonacatlán, MEX   | 00:10 | 25 | 16 |
| Calle Miguel Hidalgo 16, Xonacatlán de Vicencio, 52060<br>Xonacatlán, MEX   | 00:10 | 30 | 17 |
| Calle Vicente Guerrero 29, Xonacatlán de Vicencio, 52060<br>Xonacatlán, MEX | 00:10 | 19 | 18 |
| Calle Miguel Hidalgo 40, Xonacatlán de Vicencio, 52060<br>Xonacatlán, MEX   | 00:10 | 37 | 19 |
| Calle 20 de Noviembre 13, Xonacatlán de Vicencio, 52060<br>Xonacatlán, MEX  | 00:10 | 26 | 20 |

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.6 es diseñar rutas para satisfacer las demandas de los clientes, el objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga, el límite de distancia y que los transportes realicen varias rutas dentro del horizonte de tiempo, y se resuelvan las preguntas siguientes:

- ¿Cuántas rutas se necesitan para satisfacer la demanda de los clientes?
- ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?
- ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?
- ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?
- ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?
- ¿Cuál es el tiempo de trabajo para cada ruta?
- ¿Qué camión llega primero al almacén?
- ¿Qué camión llega al último al almacén?

Para resolver este problema se va a desarrollar dos procedimientos para que los vehículos realicen 2 viajes y las preguntas se van a resolver con los dos procesos.

La resolución de este ejemplo de aplicación se soluciona con el libro de Excel *vrp\_solver\_v1.05*.

El primer procedimiento para el VRPMT1 se presenta a continuación:

Paso 1. Tener una clave de acceso a Microsoft® Bing Maps.

Primero se registra un usuario a Bing Maps para que esta página de Mapeo Web nos proporcione una clave para su base de datos SIG, posteriormente dicha clave se ingresa en la casilla *Licencia SIG* en la primera hoja de trabajo del libro de Excel VRP-solver y finalmente se guarda el libro.

Paso 2. Registrar las restricciones del problema en la hoja de consola del VRP-solver.

Primero se abre el libro de Excel *vrp\_solver*, después en la primera hoja de trabajo llamada *Consola VRP-solver* se registra la información del problema que son los valores como: el número de clientes, y las limitaciones que son: Entrega, el número de tipos de vehículos, los vehículos regresan al almacén, el tiempo de trabajo inicial, el límite de tiempo de manejo, el límite de tiempo de trabajo y el límite de distancia, en las casillas de la columna *Valores* como se muestra en la figura 3.62.

| Sequence                          | Parameter                          | Value         | Remarks                                                                                                 |
|-----------------------------------|------------------------------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>0.Optional - GIS License</b>   | Bing Maps Key                      | Ah6dXOU2G3193 | You can get a free key at <a href="https://www.bingmapsportal.com/">https://www.bingmapsportal.com/</a> |
| <b>1.Locations</b>                | Number of customers                | 20            | [10,200]                                                                                                |
|                                   | Pickup / Delivery?                 | Delivery      |                                                                                                         |
| <b>2.Distances</b>                | Distance / duration computation    | Bing Maps     | The distance unit is km for 'Geodesic Approximation' and 'Bing Maps'                                    |
|                                   | Bing Maps route type               | Fastest       | Recommendation: use Fastest                                                                             |
|                                   | Average vehicle speed              | 70            | Not used for the 'Bing Maps' option                                                                     |
| <b>3.Vehicles</b>                 | Number of vehicle types            | 2             | Heterogeneous VRP if greater than 1                                                                     |
| <b>4.Solution</b>                 | All vehicles must be used?         | No            | Flexible fleet / fleet mix if 'No'                                                                      |
|                                   | Vehicles must return to the depot? | Yes           | Open VRP if no return                                                                                   |
|                                   | Time window type                   | Hard          |                                                                                                         |
|                                   | Work start time                    | 07:00         | [00:00,23:59]                                                                                           |
|                                   | Driving time limit                 | 21:00         |                                                                                                         |
|                                   | Working time limit                 | 20:00         |                                                                                                         |
|                                   | Distance limit                     | 400           | Positive                                                                                                |
| <b>5.Optional - Visualization</b> | Visualization background           | Bing Maps     |                                                                                                         |
|                                   | Location labels                    | Location IDs  |                                                                                                         |
| <b>6.Solver</b>                   | Warm start?                        | Yes           |                                                                                                         |
|                                   | CPU time limit (seconds)           | 60            | Recommendation: At least 60 seconds.                                                                    |
|                                   | LNS minimum removal rate           | 10%           | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                   | LNS maximum removal rate           | 40%           | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                   | LNS candidate list size            | 2             | [1, 5]                                                                                                  |
|                                   | Random number seed                 | 123456789     | [1,2147483647]                                                                                          |

Figura 3.62. Pantalla de las restricciones para el VRPMT1

Al culminar el registro se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *1.1 Establecer ubicaciones en la hoja de trabajo* para continuar con el proceso de solución.

Paso 3. Registrar la dirección del almacén y los clientes con su respectiva demanda.

En la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se registra la dirección del almacén y los clientes de acuerdo a su ID de la tabla 1.2 en la columna de *Direcciones*, se registra el pedido de cada cliente en la columna *Demanda* y se agregan los tiempos de servicio en la columna *Tiempo de servicio* como se presenta en la figura 3.63.

| Name        | Address                                                                | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Demand | Profit |
|-------------|------------------------------------------------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| Depot       | Calle Francisco Ignacio Madero 34, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xon   |              |               | 07:00             | 07:20           | Starting location | 0:20         | 0      | 0      |
| Customer 1  | Calle 5 de Mayo 20, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX      |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 30     | 0      |
| Customer 2  | Calle 5 de Febrero 10, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 32     | 0      |
| Customer 3  | Calle 16 de Septiembre 30, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán,   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 25     | 0      |
| Customer 4  | Calle 20 de Noviembre 33, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán,    |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 38     | 0      |
| Customer 5  | Calle Felipe Carrillo Puerto 97, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacat |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 36     | 0      |
| Customer 6  | Calle José María Morelos 17, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlá   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 38     | 0      |
| Customer 7  | Calle 5 de Febrero 90, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 35     | 0      |
| Customer 8  | Calle Francisco Sarabia 26, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán,  |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 28     | 0      |
| Customer 9  | Calle Durango 5, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX         |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 15     | 0      |
| Customer 10 | Calle Ramos Millán 6, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX    |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 10     | 0      |
| Customer 11 | Calle Durango 16, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX        |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 40     | 0      |
| Customer 12 | Calle Vicente Guerrero 7, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, I  |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 35     | 0      |
| Customer 13 | Calle 16 de Septiembre 15, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán,   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 30     | 0      |
| Customer 14 | Calle Francisco Ignacio Madero 18, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xon   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 39     | 0      |
| Customer 15 | Calle Vicente Guerrero 34, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán,   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 37     | 0      |
| Customer 16 | Calle 20 de Noviembre 5, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, I   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 25     | 0      |
| Customer 17 | Calle Miguel Hidalgo 16, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, M   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 30     | 0      |
| Customer 18 | Calle Vicente Guerrero 29, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán,   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 19     | 0      |
| Customer 19 | Calle Miguel Hidalgo 40, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, M   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 37     | 0      |
| Customer 20 | Calle 20 de Noviembre 13, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán,    |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 26     | 0      |

*Figura 3.63. Pantalla de las direcciones y demandas para el VRPMT1*

Paso 4. Generar la latitud y longitud del almacén y los clientes.

Estando en la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se va a la pestaña complementos y se da click en *1.2 Opcional-Registrar Latitud/Longitud usando las direcciones* para generar la latitud (y) y longitud (x) del almacén y de cada cliente como se presenta en la figura 3.64.

| Name        | Address                                                   | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Demand | Profit |
|-------------|-----------------------------------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| Depot       | Calle Francisco Ignacio Madero 34, Xonacatlán             | 19.4066400   | -99.5315000   | 07:00             | 07:20           | Starting location | 0:20         | 0      | 0      |
| Customer 1  | Calle 5 de Mayo 20, Xonacatlán de Vicencio                | 19.4022500   | -99.5320000   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 30     | 0      |
| Customer 2  | Calle 5 de Febrero 10, Xonacatlán de Vicencio             | 19.4032300   | -99.5344600   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 32     | 0      |
| Customer 3  | Calle 16 de Septiembre 30, Xonacatlán de Vicencio         | 19.4032100   | -99.5328600   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 25     | 0      |
| Customer 4  | Calle 20 de Noviembre 33, Xonacatlán de Vicencio          | 19.4060300   | -99.5353400   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 38     | 0      |
| Customer 5  | Calle Felipe Carrillo Puerto 97, Xonacatlán de Vicencio   | 19.4035300   | -99.5250900   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 36     | 0      |
| Customer 6  | Calle José María Morelos 17, Xonacatlán de Vicencio       | 19.4064200   | -99.5168100   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 38     | 0      |
| Customer 7  | Calle 5 de Febrero 90, Xonacatlán de Vicencio             | 19.3984300   | -99.5320799   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 35     | 0      |
| Customer 8  | Calle Francisco Sarabia 26, Xonacatlán de Vicencio        | 19.4030200   | -99.5276100   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 28     | 0      |
| Customer 9  | Calle Durango 5, Xonacatlán de Vicencio, S                | 19.4024200   | -99.5358200   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 15     | 0      |
| Customer 10 | Calle Ramos Millán 6, Xonacatlán de Vicencio              | 19.4067800   | -99.5232500   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 10     | 0      |
| Customer 11 | Calle Durango 16, Xonacatlán de Vicencio, S               | 19.4027000   | -99.5360300   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 40     | 0      |
| Customer 12 | Calle Vicente Guerrero 7, Xonacatlán de Vicencio          | 19.4046999   | -99.5288999   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 35     | 0      |
| Customer 13 | Calle 16 de Septiembre 15, Xonacatlán de Vicencio         | 19.4033800   | -99.5321600   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 30     | 0      |
| Customer 14 | Calle Francisco Ignacio Madero 18, Xonacatlán de Vicencio | 19.4054499   | -99.5309800   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 39     | 0      |
| Customer 15 | Calle Vicente Guerrero 34, Xonacatlán de Vicencio         | 19.4052900   | -99.5273500   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 37     | 0      |
| Customer 16 | Calle 20 de Noviembre 5, Xonacatlán de Vicencio           | 19.4074400   | -99.5313100   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 25     | 0      |
| Customer 17 | Calle Miguel Hidalgo 16, Xonacatlán de Vicencio           | 19.4062200   | -99.5298200   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 30     | 0      |
| Customer 18 | Calle Vicente Guerrero 29, Xonacatlán de Vicencio         | 19.4054100   | -99.5274300   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 19     | 0      |
| Customer 19 | Calle Miguel Hidalgo 40, Xonacatlán de Vicencio           | 19.4050000   | -99.5329100   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 37     | 0      |
| Customer 20 | Calle 20 de Noviembre 13, Xonacatlán de Vicencio          | 19.4076200   | -99.5308300   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 26     | 0      |

Figura 3.64. Pantalla de las latitudes y longitudes para el VRPMT1

Al culminar el proceso de generación de latitudes y longitudes, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.1 Establecer distancias en la hoja de trabajo* para generar la tabla de relación de distancia y tiempos entre los nodos como se presenta en la figura 3.65.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 2  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 3  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 4  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 5  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 6  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 7  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 8  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 9  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 10 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 11 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 12 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 13 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 14 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 15 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 16 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 17 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 18 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 19 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 20 | 0.00     | 0:00     |

Figura 3.65. Pantalla de la relación de nodos para el VRPMT1

Paso 5. Generar las distancias y duraciones entre nodos.

Estando en la hoja de trabajo 2. *Distancias* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 2.2 *Opcional-Llenar distancias en la hoja de trabajo* para generar las distancias y duraciones entre el almacén y los clientes como se presenta en la figura 3.66.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 0.66     | 0:04     |
| Depot | Customer 2  | 0.65     | 0:03     |
| Depot | Customer 3  | 0.58     | 0:03     |
| Depot | Customer 4  | 0.47     | 0:03     |
| Depot | Customer 5  | 1.08     | 0:06     |
| Depot | Customer 6  | 2.47     | 0:08     |
| Depot | Customer 7  | 1.25     | 0:06     |
| Depot | Customer 8  | 0.76     | 0:04     |
| Depot | Customer 9  | 0.85     | 0:04     |
| Depot | Customer 10 | 1.13     | 0:06     |
| Depot | Customer 11 | 0.82     | 0:04     |
| Depot | Customer 12 | 0.47     | 0:03     |
| Depot | Customer 13 | 0.50     | 0:03     |
| Depot | Customer 14 | 0.14     | 0:01     |
| Depot | Customer 15 | 0.65     | 0:04     |
| Depot | Customer 16 | 0.14     | 0:01     |
| Depot | Customer 17 | 0.25     | 0:02     |
| Depot | Customer 18 | 0.65     | 0:04     |
| Depot | Customer 19 | 0.31     | 0:01     |
| Depot | Customer 20 | 0.19     | 0:01     |

Figura 3.66. Pantalla de las distancias y tiempos para el VRPMT1

Al culminar el proceso de generación de distancias y tiempos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 3. *Establecer vehículos en la hoja de trabajo*.

Paso 6. Especificaciones del tipo de vehículos.

Estando en la hoja de trabajo llamada 3. *Vehículos* se registran las especificaciones de la flota de transportes con que dispone la empresa y se anexa los costos como se presenta en la figura 3.67.

| Vehicle type ID | Type name | Capacity | Fixed cost per trip | Cost per unit distance | Number available |
|-----------------|-----------|----------|---------------------|------------------------|------------------|
| 1 A             |           | 180      | 8                   | 7.1                    | 1                |
| 2 B             |           | 150      | 8                   | 7.1                    | 1                |

Figura 3.67. Pantalla de los vehículos para el VRPMT1

Al finalizar el registro de los vehículos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 4. *Establecer solución en la hoja de trabajo* para visualizar la tabla de valores de solución para el problema como se muestra en la figura 3.68.

| Vehicle:   | A 1           | Stops:   | 0         | Net profit: | 0.00         |         |           |              |
|------------|---------------|----------|-----------|-------------|--------------|---------|-----------|--------------|
| Stop count | Location name | Distance | Delivered | Profit      | Driving time | Arrival | Departure | Working time |
| 0          | Depot         | 0.00     | 0         | 0           | 0:00         | 07:00   | 07:00     | 0:00         |
| 1          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 2          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 3          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 4          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 5          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 6          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 7          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 8          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 9          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 10         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 11         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 12         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 13         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 14         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 15         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 16         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 17         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 18         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 19         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 20         |               |          |           |             |              |         |           |              |

Figura 3.68. Pantalla de los valores de solución para el VRPMT1

Paso 7. Generar la representación de nodos y rutas.

En la hoja de trabajo llamada 4. *Solución* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 5. *Opcional-establecer imagen en la hoja de trabajo* para generar el mapa de ubicación del almacén y los clientes con la ruta de los vehículos como se presenta en la figura 3.69.

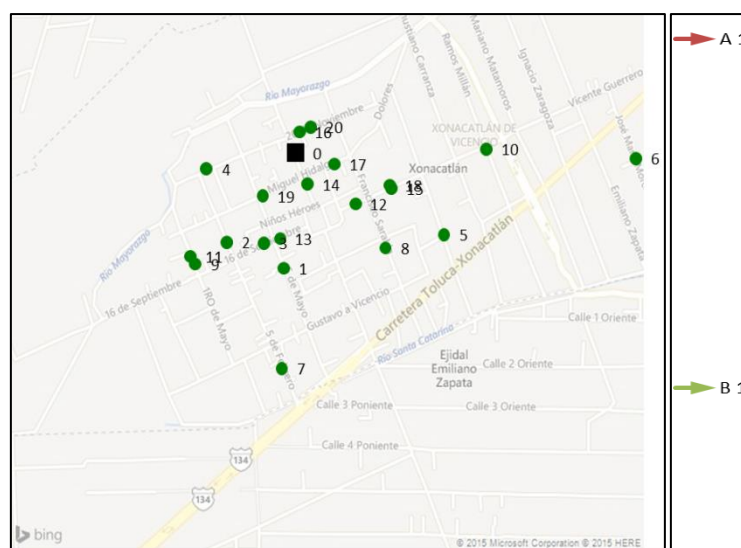


Figura 3.69. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el VRPMT1

Al finalizar la imagen de los nodos y rutas, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *6.1 Participar la hoja de cálculo VRP-solver* para generar la ruta que cada vehículo debe realizar.

Paso 8. Asignación de rutas para cada vehículo y representación del ruteo.

Por último, la solución del ruteo de la empresa se presenta detalladamente en la hoja de trabajo *4. Solución* como se presenta a continuación:

El vehículo A1 realiza la ruta A1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-17-12-18-15-10-6-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.70.

| Vehicle:   | A 1           | Stops:   | 13        | Net profit:  | -54.91  |           |              |
|------------|---------------|----------|-----------|--------------|---------|-----------|--------------|
| Stop count | Location name | Distance | Delivered | Driving time | Arrival | Departure | Working time |
| 0          | Depot         | 0.00     | 0         | 0:00         | 07:00   | 07:00     | 0:00         |
| 1          | Customer 17   | 0.25     | 30        | 0:02         | 07:02   | 07:12     | 0:12         |
| 2          | Customer 12   | 0.59     | 65        | 0:04         | 07:14   | 07:24     | 0:24         |
| 3          | Customer 18   | 0.76     | 84        | 0:05         | 07:25   | 07:35     | 0:35         |
| 4          | Customer 15   | 0.76     | 121       | 0:05         | 07:35   | 07:45     | 0:45         |
| 5          | Customer 10   | 1.24     | 131       | 0:07         | 07:47   | 07:57     | 0:57         |
| 6          | Customer 6    | 2.36     | 169       | 0:11         | 08:01   | 08:11     | 1:11         |
| 7          | Customer 5    | 3.68     | 205       | 0:15         | 08:15   | 08:25     | 1:25         |
| 8          | Customer 8    | 4.11     | 233       | 0:17         | 08:27   | 08:37     | 1:37         |
| 9          | Customer 7    | 5.24     | 268       | 0:20         | 08:40   | 08:50     | 1:50         |
| 10         | Customer 1    | 5.80     | 298       | 0:23         | 08:53   | 09:03     | 2:03         |
| 11         | Customer 13   | 5.96     | 328       | 0:24         | 09:04   | 09:14     | 2:14         |
| 12         | Customer 3    | 6.03     | 353       | 0:24         | 09:14   | 09:24     | 2:24         |
| 13         | Depot         | 6.61     | 353       | 0:27         | 09:27   | 09:47     | 2:47         |

Figura 3.70. Pantalla de la ruta 1 para el VRPMT1

El vehículo B1 realiza la ruta B1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-14-19-2-9-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.71.

| Vehicle:   | B 1           | Stops:   | 9         | Net profit:  | -23.81  |           |              |
|------------|---------------|----------|-----------|--------------|---------|-----------|--------------|
| Stop count | Location name | Distance | Delivered | Driving time | Arrival | Departure | Working time |
| 0          | Depot         | 0.00     | 0         | 0:00         | 07:00   | 07:00     | 0:00         |
| 1          | Customer 14   | 0.14     | 39        | 0:01         | 07:01   | 07:11     | 0:11         |
| 2          | Customer 19   | 0.38     | 76        | 0:02         | 07:12   | 07:22     | 0:22         |
| 3          | Customer 2    | 0.73     | 108       | 0:04         | 07:24   | 07:34     | 0:34         |
| 4          | Customer 9    | 1.02     | 123       | 0:06         | 07:36   | 07:46     | 0:46         |
| 5          | Customer 11   | 1.06     | 163       | 0:06         | 07:46   | 07:56     | 0:56         |
| 6          | Customer 4    | 1.54     | 201       | 0:08         | 07:58   | 08:08     | 1:08         |
| 7          | Customer 16   | 1.99     | 226       | 0:10         | 08:10   | 08:20     | 1:20         |
| 8          | Customer 20   | 2.04     | 252       | 0:10         | 08:20   | 08:30     | 1:30         |
| 9          | Depot         | 2.23     | 252       | 0:11         | 08:31   | 08:51     | 1:51         |

Figura 3.71. Pantalla de la ruta 2 para el VRPMT1



Primero se abre el libro de Excel *vrp\_solver*, después en la primera hoja de trabajo llamada *Consola VRP-solver* se registra la información del problema que son los valores como: el número de clientes, y las limitaciones que son: Entrega, el número de tipos de vehículos, los vehículos regresan al almacén, el tiempo de trabajo inicial basado en el primer proceso, el límite de tiempo de manejo, el límite de tiempo de trabajo y el límite de distancia, en las casillas de la columna *Valores* como se muestra en la figura 3.73.

| Sequence                         | Parameter                          | Value         | Remarks                                                                                                 |
|----------------------------------|------------------------------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>0.Optional - GIS License</b>  | Bing Maps Key                      | Ah6dXOU2G3193 | You can get a free key at <a href="https://www.bingmapsportal.com/">https://www.bingmapsportal.com/</a> |
| <b>1.Locations</b>               | Number of customers                | 10            | [10,200]                                                                                                |
|                                  | Pickup / Delivery?                 | Delivery      |                                                                                                         |
| <b>2.Distances</b>               | Distance / duration computation    | Bing Maps     | The distance unit is km for 'Geodesic Approximation' and 'Bing Maps'                                    |
|                                  | Bing Maps route type               | Fastest       | Recommendation: use Fastest                                                                             |
|                                  | Average vehicle speed              | 70            | Not used for the 'Bing Maps' option                                                                     |
| <b>3.Vehicles</b>                | Number of vehicle types            | 2             | Heterogeneous VRP if greater than 1                                                                     |
| <b>4.Solution</b>                | All vehicles must be used?         | No            | Flexible fleet / fleet mix if 'No'                                                                      |
|                                  | Vehicles must return to the depot? | Yes           | Open VRP if no return                                                                                   |
|                                  | Time window type                   | Hard          |                                                                                                         |
|                                  | Work start time                    | 08:21         | [00:00,23:59]                                                                                           |
|                                  | Driving time limit                 | 21:00         |                                                                                                         |
|                                  | Working time limit                 | 20:00         |                                                                                                         |
|                                  | Distance limit                     | 400           | Positive                                                                                                |
| <b>5.Optional - Visualizator</b> | Visualization background           | Bing Maps     |                                                                                                         |
|                                  | Location labels                    | Location IDs  |                                                                                                         |
| <b>6.Solver</b>                  | Warm start?                        | Yes           |                                                                                                         |
|                                  | CPU time limit (seconds)           | 60            | Recommendation: At least 60 seconds.                                                                    |
|                                  | LNS minimum removal rate           | 10%           | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                  | LNS maximum removal rate           | 40%           | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                  | LNS candidate list size            | 2             | [1, 5]                                                                                                  |
|                                  | Random number seed                 | 123456789     | [1,2147483647]                                                                                          |

*Figura 3.73. Pantalla de las restricciones para el VRPMT2*

Al culminar el registro se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *1.1 Establecer ubicaciones en la hoja de trabajo* para continuar con el proceso de solución.

Paso 11. Registrar la dirección del almacén y los clientes con su respectiva demanda.

En la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se registra la dirección del almacén y los clientes de acuerdo a su ID de la tabla 1.2 en la columna de *Direcciones*, se registra el pedido de cada

cliente en la columna *Demanda* y se agregan los tiempos de servicio en la columna *Tiempo de servicio* como se presenta en la figura 3.74.

| Location ID | Name        | Address                                                                       | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Demand | Profit |
|-------------|-------------|-------------------------------------------------------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| 0           | Depot       | Calle Francisco Ignacio Madero 34, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán,  |              |               | 08:21             | 08:41           | Starting location | 0:20         | 0      | 0      |
| 1           | Customer 1  | Calle 5 de Mayo 20, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX             |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 30     | 0      |
| 2           | Customer 2  | Calle 16 de Septiembre 30, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX      |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 25     | 0      |
| 3           | Customer 3  | Calle 20 de Noviembre 33, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX       |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 38     | 0      |
| 4           | Customer 4  | Calle Felipe Carrillo Puerto 97, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, ME |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 36     | 0      |
| 5           | Customer 5  | Calle 5 de Febrero 90, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX          |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 35     | 0      |
| 6           | Customer 6  | Calle Francisco Sarabia 26, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX     |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 28     | 0      |
| 7           | Customer 7  | Calle Durango 16, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX               |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 40     | 0      |
| 8           | Customer 8  | Calle 16 de Septiembre 15, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX      |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 30     | 0      |
| 9           | Customer 9  | Calle 20 de Noviembre 5, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX        |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 25     | 0      |
| 10          | Customer 10 | Calle 20 de Noviembre 13, Xonacatlán de Vicencio, 52060 Xonacatlán, MEX       |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 26     | 0      |

*Figura 3.74. Pantalla de las direcciones y demandas para el VRPMT2*

Paso 12. Generar la latitud y longitud del almacén y los clientes.

Estando en la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se va a la pestaña complementos y se da click en *1.2 Opcional-Registrar Latitud/Longitud usando las direcciones* para generar la latitud (y) y longitud (x) del almacén y de cada cliente como se presenta en la figura 3.75.

| Location ID | Name        | Address                                          | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Demand | Profit |
|-------------|-------------|--------------------------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| 0           | Depot       | Calle Francisco Ignacio Madero 34, Xonacatlán    | 19.4066400   | -99.5315000   | 08:21             | 08:41           | Starting location | 0:20         | 0      | 0      |
| 1           | Customer 1  | Calle 5 de Mayo 20, Xonacatlán de Vicencio, 52   | 19.4022500   | -99.5320000   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 30     | 0      |
| 2           | Customer 2  | Calle 16 de Septiembre 30, Xonacatlán de Vice    | 19.4032100   | -99.5328600   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 25     | 0      |
| 3           | Customer 3  | Calle 20 de Noviembre 33, Xonacatlán de Vicer    | 19.4060300   | -99.5353400   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 38     | 0      |
| 4           | Customer 4  | Calle Felipe Carrillo Puerto 97, Xonacatlán de \ | 19.4035300   | -99.5250900   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 36     | 0      |
| 5           | Customer 5  | Calle 5 de Febrero 90, Xonacatlán de Vicencio,   | 19.3984300   | -99.5320799   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 35     | 0      |
| 6           | Customer 6  | Calle Francisco Sarabia 26, Xonacatlán de Vicer  | 19.4030200   | -99.5276100   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 28     | 0      |
| 7           | Customer 7  | Calle Durango 16, Xonacatlán de Vicencio, 520    | 19.4027000   | -99.5360300   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 40     | 0      |
| 8           | Customer 8  | Calle 16 de Septiembre 15, Xonacatlán de Vice    | 19.4033800   | -99.5321600   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 30     | 0      |
| 9           | Customer 9  | Calle 20 de Noviembre 5, Xonacatlán de Vicen     | 19.4074400   | -99.5313100   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 25     | 0      |
| 10          | Customer 10 | Calle 20 de Noviembre 13, Xonacatlán de Vicer    | 19.4076200   | -99.5308300   | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:10         | 26     | 0      |

*Figura 3.75. Pantalla de las latitudes y longitudes para el VRPMT2*

Al culminar el proceso de generación de latitudes y longitudes, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.1 Establecer distancias en la hoja de trabajo* para generar la tabla de relación de distancia y tiempos entre los nodos como se presenta en la figura 3.76.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 2  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 3  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 4  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 5  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 6  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 7  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 8  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 9  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 10 | 0.00     | 0:00     |

*Figura 3.76. Pantalla de la relación de nodos para el VRPMT2*

Al culminar el proceso de generación de latitudes y longitudes, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.1 Establecer distancias en la hoja de trabajo* para generar la tabla de relación de distancia y tiempos entre los nodos como se presenta en la figura 3.77.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 0.66     | 0:04     |
| Depot | Customer 2  | 0.58     | 0:03     |
| Depot | Customer 3  | 0.47     | 0:03     |
| Depot | Customer 4  | 1.08     | 0:06     |
| Depot | Customer 5  | 1.25     | 0:06     |
| Depot | Customer 6  | 0.76     | 0:04     |
| Depot | Customer 7  | 0.82     | 0:04     |
| Depot | Customer 8  | 0.50     | 0:03     |
| Depot | Customer 9  | 0.14     | 0:01     |
| Depot | Customer 10 | 0.19     | 0:01     |

*Figura 3.77. Pantalla de las distancias y tiempos para el VRPMT2*

Al culminar el proceso de generación de distancias y tiempos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *3. Establecer vehículos en la hoja de trabajo*.

Paso 13. Especificaciones del tipo de vehículos.

Estando en la hoja de trabajo llamada 3. *Vehículos* se registran las especificaciones de la flota de transportes con que dispone la empresa y se anexa los costos como se presenta en la figura 3.78.

| Vehicle type ID | Type name | Capacity | Fixed cost per trip | Cost per unit distance | Number available |
|-----------------|-----------|----------|---------------------|------------------------|------------------|
| 1               | A         | 180      | 8                   | 7.1                    | 1                |
| 2               | B         | 150      | 8                   | 7.1                    | 1                |

*Figura 3.78. Pantalla de los vehículos para el VRPMT2*

Al finalizar el registro de los vehículos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 4. *Establecer solución en la hoja de trabajo* para visualizar la tabla de valores de solución para el problema como se muestra en la figura 3.79.

| Vehicle:   | A 1           | Stops:   |           |        | Net profit:  |         |           |              |
|------------|---------------|----------|-----------|--------|--------------|---------|-----------|--------------|
| Stop count | Location name | Distance | Delivered | Profit | Driving time | Arrival | Departure | Working time |
| 0          | Depot         | 0.00     | 0         | 0      | 0:00         | 08:21   | 08:21     | 0:00         |
| 1          |               |          |           |        |              |         |           |              |
| 2          |               |          |           |        |              |         |           |              |
| 3          |               |          |           |        |              |         |           |              |
| 4          |               |          |           |        |              |         |           |              |
| 5          |               |          |           |        |              |         |           |              |
| 6          |               |          |           |        |              |         |           |              |
| 7          |               |          |           |        |              |         |           |              |
| 8          |               |          |           |        |              |         |           |              |
| 9          |               |          |           |        |              |         |           |              |
| 10         |               |          |           |        |              |         |           |              |

*Figura 3.79. Pantalla de los valores de solución para el VRPMT2*

Paso 14. Generar la representación de nodos y rutas.

En la hoja de trabajo llamada 4. *Solución* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 5. *Opcional-establecer imagen en la hoja de trabajo* para generar el mapa de ubicación del almacén y los clientes con la ruta de los vehículos como se presenta en la figura 3.80.

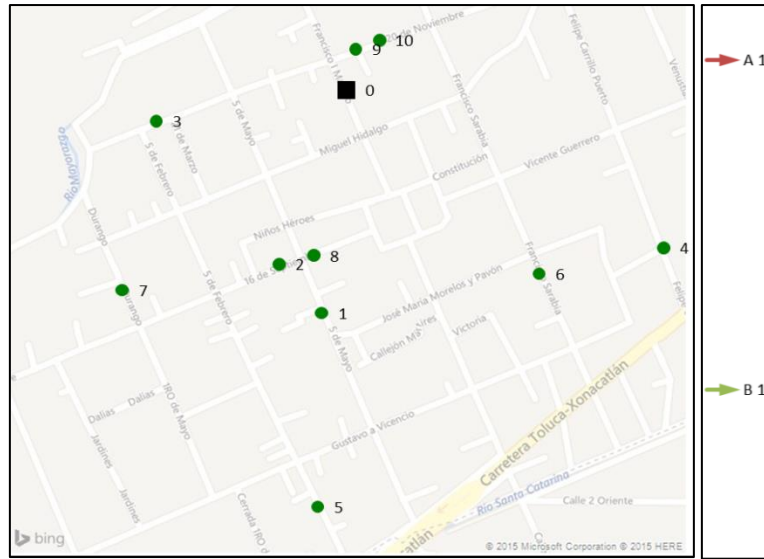


Figura 3.80. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el VRPMT2

Al finalizar la imagen de los nodos y rutas, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *6.1 Participar la hoja de cálculo VRP-solver* para generar la ruta que cada vehículo debe realizar.

Paso 15. Asignación de rutas para cada vehículo y representación del ruteo.

Por último, la solución del ruteo de la empresa se presenta detalladamente en la hoja de trabajo *4. Solución* como se presenta a continuación:

El vehículo A1 realiza la ruta A1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-9-10-6-4-5-1-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.81.

|                   |                      |                 |                  |                     |                |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 1</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>7</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-35.07</b>  |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b> | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 08:21          | 08:21            | 0:00                |
| 1                 | Customer 9           | 0.14            | 25               | 0:01                | 08:22          | 08:32            | 0:11                |
| 2                 | Customer 10          | 0.19            | 51               | 0:01                | 08:32          | 08:42            | 0:21                |
| 3                 | Customer 6           | 0.90            | 79               | 0:05                | 08:46          | 08:56            | 0:35                |
| 4                 | Customer 4           | 1.33            | 115              | 0:07                | 08:58          | 09:08            | 0:47                |
| 5                 | Customer 5           | 2.59            | 150              | 0:10                | 09:11          | 09:21            | 1:00                |
| 6                 | Customer 1           | 3.15            | 180              | 0:13                | 09:24          | 09:34            | 1:13                |
| 7                 | Depot                | 3.81            | 180              | 0:17                | 09:38          | 09:58            | 1:37                |

Figura 3.81. Pantalla de la ruta 1 para el VRPMT2

El vehículo B1 realiza la ruta B1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-8-2-7-3-0, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.81.

| Vehicle:   | B 1           | Stops:   | 5         | Net profit:  | -21.72  |           |              |
|------------|---------------|----------|-----------|--------------|---------|-----------|--------------|
| Stop count | Location name | Distance | Delivered | Driving time | Arrival | Departure | Working time |
| 0          | Depot         | 0.00     | 0         | 0:00         | 08:21   | 08:21     | 0:00         |
| 1          | Customer 8    | 0.50     | 30        | 0:03         | 08:24   | 08:34     | 0:13         |
| 2          | Customer 2    | 0.58     | 55        | 0:03         | 08:34   | 08:44     | 0:23         |
| 3          | Customer 7    | 0.99     | 95        | 0:05         | 08:46   | 08:56     | 0:35         |
| 4          | Customer 3    | 1.47     | 133       | 0:07         | 08:58   | 09:08     | 0:47         |
| 5          | Depot         | 1.93     | 133       | 0:09         | 09:10   | 09:30     | 1:09         |

Figura 3.82. Pantalla de la ruta 2 para el VRPMT2

El análisis del ruteo se presenta detalladamente en la hoja de trabajo 5. *Visualización* como se presenta en la figura 3.83, donde los vehículos realizan una ruta específica para satisfacer las demandas de los clientes partiendo del almacén.



Figura 3.83. Pantalla del ruteo para el VRPMT2

Paso 16. Solución a los objetivos VRMT.

a) ¿Cuántas rutas se necesitan para satisfacer la demanda de los clientes?

Respuesta: 4 rutas.

b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?

Respuesta:

Primer proceso

A1.1: calle Francisco Ignacio Madero 34 - calle Miguel Hidalgo 16 - calle Vicente Guerrero 7 - calle Vicente Guerrero 29 - calle Vicente Guerrero 34 - calle Ramos Millán 6 - calle Francisco Ignacio Madero 34.

B1.1: calle Francisco Ignacio Madero 34 - calle Francisco Ignacio Madero 18 - calle Miguel Hidalgo 40 - calle 5 de Febrero 10 - calle Durango 5 - calle Francisco Ignacio Madero 34.

Segundo proceso

A1.1: calle Francisco Ignacio Madero 34 - calle 20 de Noviembre 5 - calle 20 de Noviembre 13 - calle Francisco Sarabia 26 - calle Felipe Carrillo Puerto 97 - calle 5 de Febrero 90 - calle 5 de Mayo 20 - calle Francisco Ignacio Madero 34.

B1.1: calle Francisco Ignacio Madero 34 - calle 16 de Septiembre 15 - calle 16 de Septiembre 30 - calle Durango 16 - calle 20 de Noviembre 33 - calle Francisco Ignacio Madero 34.

c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?

Respuesta:

Primer proceso: A1= 93.9% y B1= 82%

Segundo proceso: A1= 100% y B1= 88.7%

d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?

Respuesta:  $2.36 + 1.02 + 3.81 + 1.93 = 9.1$  Km.

e) ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?

Respuesta:

Primer proceso: A1.1= 0.6 % y B1.1= 0.3%

Segundo proceso: A1.1= 1% y B1.1= 0.5%

f) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

Respuesta: Dado que el costo de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L. Primer proceso: A1= \$24.2 y B1= \$10.4, y segundo proceso: A1= \$39.0 y B1= \$19.8.

g) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?

Respuesta: La ruta B1.1 del primer proceso.

h) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?

Respuesta: La ruta A1.1 del segundo proceso.

i) ¿Cuál es el tiempo de trabajo para cada ruta?

Respuesta: Primer proceso: A1= 1:11 horas y B1= 00:46 horas, y segundo proceso: A1= 1:37 horas y B1= 1:09 horas.

j) ¿Qué camión llega primero al almacén?

Respuesta: El vehículo B1 del primer proceso.

k) ¿Qué camión llega al último al almacén?

Respuesta: El vehículo A1 del segundo proceso.

### **3.7 Ejemplo de aplicación OVRP**

Continuando con el ejemplo OVRP del subtema 1.6.2 donde una empresa que produce chocolates está ubicada en Colima, la cual debe distribuir sus paquetes de producto, para ello contrata un servicio de distribución para poder satisfacer las demandas de los clientes que se

presentan en la tabla 1.7. La fábrica impone que los vehículos no regresan al almacén después de dar el servicio a los clientes.

La empresa que ofrece el servicio de distribución tiene a su disposición una flota de: 3 camiones con una capacidad de 250 paquetes de chocolates y 2 camiones con una capacidad de 200 paquetes de producto. La hora de salida de la fábrica es a las 6:00 horas, el límite de tiempo de manejo es a las 22:00 horas, el límite de tiempo de trabajo es de 20:00 horas y el límite de distancia a recorrer es de 650 kilómetros. El precio de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L.

*Tabla 1.7. Clientes y demandas para el OVRP*

| Nombre     | Localidad                | Demanda | ID |
|------------|--------------------------|---------|----|
| almacén    | Colima, Colima           | 0       | 0  |
| cliente 1  | Manzanillo, Colima       | 20      | 1  |
| cliente 2  | Comala, Colima           | 11      | 2  |
| cliente 3  | Minatitlán, Colima       | 30      | 3  |
| cliente 4  | Armería, Colima          | 42      | 4  |
| cliente 5  | Coquimatlán, Colima      | 51      | 5  |
| cliente 6  | Tecomán, Colima          | 35      | 6  |
| cliente 7  | Ixtlahuacán, Colima      | 29      | 7  |
| cliente 8  | Villa de Álvarez, Colima | 80      | 8  |
| cliente 9  | Cuauhtémoc, Colima       | 52      | 9  |
| cliente 10 | Celaya, Guanajuato       | 10      | 10 |
| cliente 11 | Salvatierra, Guanajuato  | 75      | 11 |
| cliente 12 | Abasolo, Guanajuato      | 42      | 12 |
| cliente 13 | Irapuato, Guanajuato     | 29      | 13 |
| cliente 14 | León, Guanajuato         | 15      | 14 |
| cliente 15 | Comonfort, Guanajuato    | 17      | 15 |
| cliente 16 | Acámbaro, Guanajuato     | 24      | 16 |
| cliente 17 | San Felipe, Guanajuato   | 79      | 17 |
| cliente 18 | Pueblo Nuevo, Guanajuato | 70      | 18 |
| cliente 19 | Coroneo, Guanajuato      | 51      | 19 |
| cliente 20 | Guanajuato, Guanajuato   | 8       | 20 |

*Tabla 1.7. Clientes y demandas para el OVRP (continuación)*

|            |                                      |    |    |
|------------|--------------------------------------|----|----|
| cliente 21 | San Francisco del Rincón, Guanajuato | 14 | 21 |
| cliente 22 | Santa Catarina, Guanajuato           | 9  | 22 |
| cliente 23 | San Miguel de Allende, Guanajuato    | 21 | 23 |
| cliente 24 | Silao de la Victoria, Guanajuato     | 35 | 24 |
| cliente 25 | Tarimoro, Guanajuato                 | 37 | 25 |
| cliente 26 | Moroleón, Guanajuato                 | 40 | 26 |
| cliente 27 | Uriangato, Guanajuato                | 50 | 27 |
| cliente 28 | Santiago Maravatío, Guanajuato       | 33 | 28 |
| cliente 29 | Salamanca, Guanajuato                | 81 | 29 |
| cliente 30 | Huanímaro, Guanajuato                | 9  | 30 |

El problema a resolver con los datos de la tabla 1.7 es diseñar rutas para satisfacer las demandas de los clientes, el objetivo es que la flota de vehículos maximice su capacidad de carga, el límite de distancia y cumpla que los camiones no regresen a la fábrica de chocolates, y se resuelvan las preguntas siguientes:

- ¿Cuántas rutas se necesitan para satisfacer la demanda de los clientes?
- ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?
- ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?
- ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?
- ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?
- ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?
- ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?
- ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?
- ¿Qué camión termina primero su ruta?
- ¿Qué camión termina al último su ruta?

La resolución de este ejemplo de aplicación se soluciona con el libro de Excel vrp\_solver\_v1.05 que a continuación se presenta:

Paso 1. Tener una clave de acceso a Microsoft® Bing Maps.

Primero se registra un usuario a Bing Maps para que esta página de Mapeo Web nos proporcione una clave para su base de datos SIG, posteriormente dicha clave se ingresa en la casilla *Licencia SIG* en la primera hoja de trabajo del libro de Excel VRP-solver y finalmente se guarda el libro.

Paso 2. Registrar las restricciones del problema en la hoja de consola del VRP-solver.

Primero se abre el libro de Excel vrp\_solver, después en la primera hoja de trabajo llamada *Consola VRP-solver* se registra la información del problema que son los valores como: el número de clientes, y las limitaciones que son: Entrega, el número de tipos de vehículos, los vehículos no regresan al almacén, el tiempo de trabajo inicial, el límite de tiempo de manejo, el límite de tiempo de trabajo y el límite de distancia, en las casillas de la columna *Valores* como se muestra en la figura 3.84.

| Sequence                          | Parameter                          | Value        | Remarks                                                                                                 |
|-----------------------------------|------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>0.Optional - GIS License</b>   | Bing Maps Key                      | Ah6dXOU2G319 | You can get a free key at <a href="https://www.bingmapsportal.com/">https://www.bingmapsportal.com/</a> |
|                                   |                                    |              |                                                                                                         |
| <b>1.Locations</b>                | Number of customers                | 30           | [10,200]                                                                                                |
|                                   | Pickup / Delivery?                 | Delivery     |                                                                                                         |
|                                   |                                    |              |                                                                                                         |
| <b>2.Distances</b>                | Distance / duration computation    | Bing Maps    | The distance unit is km for 'Geodesic Approximation' and 'Bing Maps'                                    |
|                                   | Bing Maps route type               | Fastest      | Recommendation: use Fastest                                                                             |
|                                   | Average vehicle speed              | 70           | Not used for the 'Bing Maps' option                                                                     |
|                                   |                                    |              |                                                                                                         |
| <b>3.Vehicles</b>                 | Number of vehicle types            | 2            | Heterogeneous VRP if greater than 1                                                                     |
|                                   |                                    |              |                                                                                                         |
| <b>4.Solution</b>                 | All vehicles must be used?         | No           | Flexible fleet / fleet mix if 'No'                                                                      |
|                                   | Vehicles must return to the depot? | No           | Open VRP if no return                                                                                   |
|                                   | Time window type                   | Hard         |                                                                                                         |
|                                   | Work start time                    | 06:00        | [00:00,23:59]                                                                                           |
|                                   | Driving time limit                 | 22:00        |                                                                                                         |
|                                   | Working time limit                 | 20:00        |                                                                                                         |
|                                   | Distance limit                     | 650          | Positive                                                                                                |
|                                   |                                    |              |                                                                                                         |
| <b>5.Optional - Visualization</b> | Visualization background           | Bing Maps    |                                                                                                         |
|                                   | Location labels                    | Location IDs |                                                                                                         |
|                                   |                                    |              |                                                                                                         |
| <b>6.Solver</b>                   | Warm start?                        | Yes          |                                                                                                         |
|                                   | CPU time limit (seconds)           | 60           | Recommendation: At least 60 seconds.                                                                    |
|                                   | LNS minimum removal rate           | 10%          | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                   | LNS maximum removal rate           | 40%          | [5%, 50%]                                                                                               |
|                                   | LNS candidate list size            | 2            | [1, 5]                                                                                                  |
|                                   | Random number seed                 | 123456789    | [1,2147483647]                                                                                          |

Figura 3.84. Pantalla de las restricciones para el OVRP

Al culminar el registro se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *1.1 Establecer ubicaciones en la hoja de trabajo* para continuar con el proceso de solución.

Paso 3. Registrar la dirección del almacén y los clientes con su respectiva demanda.

En la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se registra la dirección del almacén y los clientes de acuerdo a su ID de la tabla 1.2 en la columna de *Direcciones*, además se registra el pedido de cada cliente en la columna *Demanda* como se presenta en la figura 3.85.

| Location ID | Name        | Address                              | Latitude (y) | Longitudo (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Demand | Profit |
|-------------|-------------|--------------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| 0           | Depot       | Colima, Colima                       |              |               | 00:00             | 23:59           | Starting location | 0:00         | 0      | 0      |
| 1           | Customer 1  | Manzanillo, Colima                   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 20     | 0      |
| 2           | Customer 2  | Comala, Colima                       |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 11     | 0      |
| 3           | Customer 3  | Minatitlán, Colima                   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 30     | 0      |
| 4           | Customer 4  | Armería, Colima                      |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 42     | 0      |
| 5           | Customer 5  | Coquimatlán, Colima                  |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 51     | 0      |
| 6           | Customer 6  | Tecomán, Colima                      |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 35     | 0      |
| 7           | Customer 7  | Ixtlahuacán, Colima                  |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 29     | 0      |
| 8           | Customer 8  | Villa de Álvarez, Colima             |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 80     | 0      |
| 9           | Customer 9  | Cuauhtémoc, Colima                   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 52     | 0      |
| 10          | Customer 10 | Celaya, Guanajuato                   |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 10     | 0      |
| 11          | Customer 11 | Salvatierra, Guanajuato              |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 75     | 0      |
| 12          | Customer 12 | Abasolo, Guanajuato                  |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 42     | 0      |
| 13          | Customer 13 | Irapuato, Guanajuato                 |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 29     | 0      |
| 14          | Customer 14 | León, Guanajuato                     |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 15     | 0      |
| 15          | Customer 15 | Comonfort, Guanajuato                |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 17     | 0      |
| 16          | Customer 16 | Acámbaro, Guanajuato                 |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 24     | 0      |
| 17          | Customer 17 | San Felipe, Guanajuato               |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 79     | 0      |
| 18          | Customer 18 | Pueblo Nuevo, Guanajuato             |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 70     | 0      |
| 19          | Customer 19 | Coroneo, Guanajuato                  |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 51     | 0      |
| 20          | Customer 20 | Guanajuato, Guanajuato               |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 8      | 0      |
| 21          | Customer 21 | San Francisco del Rincón, Guanajuato |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 14     | 0      |
| 22          | Customer 22 | Santa Catarina, Guanajuato           |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 9      | 0      |
| 23          | Customer 23 | San Miguel de Allende, Guanajuato    |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 21     | 0      |
| 24          | Customer 24 | Silao de la Victoria, Guanajuato     |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 35     | 0      |
| 25          | Customer 25 | Tarimoro, Guanajuato                 |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 37     | 0      |
| 26          | Customer 26 | Moroleón, Guanajuato                 |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 40     | 0      |
| 27          | Customer 27 | Uriangato, Guanajuato                |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 50     | 0      |
| 28          | Customer 28 | Santiago Maravatío, Guanajuato       |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 33     | 0      |
| 29          | Customer 29 | Salamanca, Guanajuato                |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 81     | 0      |
| 30          | Customer 30 | Huanímaro, Guanajuato                |              |               | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 9      | 0      |

Figura 3.85. Pantalla de las direcciones y demandas para el OVRP

Paso 4. Generar la latitud y longitud del almacén y los clientes.

Estando en la hoja de trabajo llamada *1. Ubicaciones* se va a la pestaña complementos y se da click en *1.2 Opcional-Registrar Latitud/Longitud usando las direcciones* para generar la latitud (y) y longitud (x) del almacén y de cada cliente como se presenta en la figura 3.86.

| Location ID | Name        | Address                        | Latitude (y) | Longitude (x) | Time window start | Time window end | Must be visited?  | Service time | Demand | Profit |
|-------------|-------------|--------------------------------|--------------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------|--------|--------|
| 0           | Depot       | Colima, Colima                 | 19.2424908   | -103.7273636  | 00:00             | 23:59           | Starting location | 0:00         | 0      | 0      |
| 1           | Customer 1  | Manzanillo, Colima             | 19.0855198   | -104.3085632  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 20     | 0      |
| 2           | Customer 2  | Comala, Colima                 | 19.3247108   | -103.7582779  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 11     | 0      |
| 3           | Customer 3  | Minatitlán, Colima             | 19.3862000   | -104.0500031  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 30     | 0      |
| 4           | Customer 4  | Armería, Colima                | 18.9365997   | -103.9644394  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 42     | 0      |
| 5           | Customer 5  | Coquimatlán, Colima            | 19.2001801   | -103.8099518  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 51     | 0      |
| 6           | Customer 6  | Tecmán, Colima                 | 18.9103203   | -103.8718491  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 35     | 0      |
| 7           | Customer 7  | Ixtlahuacán, Colima            | 19.0014000   | -103.7340012  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 29     | 0      |
| 8           | Customer 8  | Villa de Álvarez, Colima       | 19.2691002   | -103.7370682  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 80     | 0      |
| 9           | Customer 9  | Cuauhtémoc, Colima             | 19.2320309   | -103.6949463  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 52     | 0      |
| 10          | Customer 10 | Celaya, Guanajuato             | 20.5172195   | -100.8542175  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 10     | 0      |
| 11          | Customer 11 | Salvatierra, Guanajuato        | 20.2120800   | -100.8794327  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 75     | 0      |
| 12          | Customer 12 | Abasolo, Guanajuato            | 20.4530296   | -101.5296936  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 42     | 0      |
| 13          | Customer 13 | Irapuato, Guanajuato           | 20.6590099   | -101.3456497  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 29     | 0      |
| 14          | Customer 14 | León, Guanajuato               | 21.1416400   | -101.6630799  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 15     | 0      |
| 15          | Customer 15 | Comonfort, Guanajuato          | 20.7187195   | -100.7595367  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 17     | 0      |
| 16          | Customer 16 | Acámbaro, Guanajuato           | 20.0329800   | -100.7186737  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 24     | 0      |
| 17          | Customer 17 | San Felipe, Guanajuato         | 21.4823399   | -101.2171021  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 79     | 0      |
| 18          | Customer 18 | Pueblo Nuevo, Guanajuato       | 20.5230808   | -101.3712463  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 70     | 0      |
| 19          | Customer 19 | Coroneo, Guanajuato            | 20.2003307   | -100.3651886  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 51     | 0      |
| 20          | Customer 20 | Guanajuato, Guanajuato         | 21.0184097   | -101.2591019  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 8      | 0      |
| 21          | Customer 21 | San Francisco del Rincón, G    | 21.0173302   | -101.8578873  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 14     | 0      |
| 22          | Customer 22 | Santa Catarina, Guanajuato     | 21.1419392   | -100.0634308  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 9      | 0      |
| 23          | Customer 23 | San Miguel de Allende, Guan    | 20.9111595   | -100.7400970  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 21     | 0      |
| 24          | Customer 24 | Silao de la Victoria, Guanajua | 20.9433708   | -101.4244995  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 35     | 0      |
| 25          | Customer 25 | Tarimoro, Guanajuato           | 20.2861691   | -100.7532425  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 37     | 0      |
| 26          | Customer 26 | Moroleón, Guanajuato           | 20.1286201   | -101.1925812  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 40     | 0      |
| 27          | Customer 27 | Uriangato, Guanajuato          | 20.1389694   | -101.1753006  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 50     | 0      |
| 28          | Customer 28 | Santiago Maravatío, Guanajua   | 20.1738701   | -100.9936371  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 33     | 0      |
| 29          | Customer 29 | Salamanca, Guanajuato          | 20.5540104   | -101.2206497  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 81     | 0      |
| 30          | Customer 30 | Huanímaro, Guanajuato          | 20.3682995   | -101.4960327  | 00:00             | 23:59           | Must be visited   | 0:00         | 9      | 0      |

*Figura 3.86. Pantalla de las latitudes y longitudes para el OVRP*

Al culminar el proceso de generación de latitudes y longitudes, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.1 Establecer distancias en la hoja de trabajo* para generar la tabla de relación de distancia y tiempos entre los nodos como se presenta en la figura 3.87.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 2  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 3  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 4  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 5  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 6  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 7  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 8  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 9  | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 10 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 11 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 12 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 13 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 14 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 15 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 16 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 17 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 18 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 19 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 20 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 21 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 22 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 23 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 24 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 25 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 26 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 27 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 28 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 29 | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 30 | 0.00     | 0:00     |

*Figura 3.87. Pantalla de la relación de nodos para el OVRP*

Paso 5. Generar las distancias y duraciones entre nodos.

Estando en la hoja de trabajo 2. *Distancias* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *2.2 Opcional-Llenar distancias en la hoja de trabajo* para generar las distancias y duraciones entre el almacén y los clientes como se presenta en la figura 3.88.

| From  | To          | Distance | Duration |
|-------|-------------|----------|----------|
| Depot | Depot       | 0.00     | 0:00     |
| Depot | Customer 1  | 98.88    | 1:56     |
| Depot | Customer 2  | 11.04    | 0:25     |
| Depot | Customer 3  | 58.75    | 1:46     |
| Depot | Customer 4  | 50.94    | 0:58     |
| Depot | Customer 5  | 11.83    | 0:23     |
| Depot | Customer 6  | 47.73    | 0:56     |
| Depot | Customer 7  | 38.34    | 1:19     |
| Depot | Customer 8  | 4.28     | 0:14     |
| Depot | Customer 9  | 4.70     | 0:16     |
| Depot | Customer 10 | 466.12   | 8:06     |
| Depot | Customer 11 | 560.22   | 8:25     |
| Depot | Customer 12 | 373.68   | 6:53     |
| Depot | Customer 13 | 405.84   | 7:19     |
| Depot | Customer 14 | 470.61   | 6:47     |
| Depot | Customer 15 | 494.45   | 8:43     |
| Depot | Customer 16 | 569.66   | 7:49     |
| Depot | Customer 17 | 519.15   | 8:59     |
| Depot | Customer 18 | 396.76   | 7:11     |
| Depot | Customer 19 | 638.20   | 9:09     |
| Depot | Customer 20 | 530.91   | 7:52     |
| Depot | Customer 21 | 403.25   | 7:47     |
| Depot | Customer 22 | 626.89   | 10:45    |
| Depot | Customer 23 | 588.17   | 8:52     |
| Depot | Customer 24 | 520.64   | 7:30     |
| Depot | Customer 25 | 504.52   | 8:49     |
| Depot | Customer 26 | 499.96   | 7:38     |
| Depot | Customer 27 | 518.90   | 6:49     |
| Depot | Customer 28 | 549.02   | 7:18     |
| Depot | Customer 29 | 424.64   | 7:34     |
| Depot | Customer 30 | 379.72   | 7:10     |

*Figura 3.88. Pantalla de las distancias y tiempos para el OVRP*

Al culminar el proceso de generación de distancias y tiempos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en *3. Establecer vehículos en la hoja de trabajo*.

Paso 6. Especificaciones del tipo de vehículos.

Estando en la hoja de trabajo llamada *3. Vehículos* se registran las especificaciones de la flota de transportes con que dispone la empresa y se anexa los costos como se presenta en la figura 3.89.

| Vehicle type ID | Type name | Capacity | Fixed cost per trip | Cost per unit distance | Number available |
|-----------------|-----------|----------|---------------------|------------------------|------------------|
| 1               | A         | 250      | 10                  | 7.1                    | 3                |
| 2               | B         | 200      | 10                  | 7.1                    | 2                |

Figura 3.89. Pantalla de los vehículos para el OVRP

Al finalizar el registro de los vehículos, se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 4. *Establecer solución en la hoja de trabajo* para visualizar la tabla de valores de solución para el problema como se muestra en la figura 3.90.

| Vehide:    | A 1           | Stops:   | 0         | Net profit: | 0            |         |           |              |
|------------|---------------|----------|-----------|-------------|--------------|---------|-----------|--------------|
| Stop count | Location name | Distance | Delivered | Profit      | Driving time | Arrival | Departure | Working time |
| 0          | Depot         | 0.00     | 0         | 0           | 0:00         | 06:00   | 06:00     | 0:00         |
| 1          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 2          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 3          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 4          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 5          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 6          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 7          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 8          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 9          |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 10         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 11         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 12         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 13         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 14         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 15         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 16         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 17         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 18         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 19         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 20         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 21         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 22         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 23         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 24         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 25         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 26         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 27         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 28         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 29         |               |          |           |             |              |         |           |              |
| 30         |               |          |           |             |              |         |           |              |

Figura 3.90. Pantalla de los valores de solución para el OVRP

Paso 7. Generar la representación de nodos y rutas.

En la hoja de trabajo llamada 4. *Solución* se va a la pestaña *Complementos* y se da click en 5. *Opcional-establecer imagen en la hoja de trabajo* para generar el mapa de ubicación del almacén y los clientes con la ruta de los vehículos como se presenta en la figura 3.91.

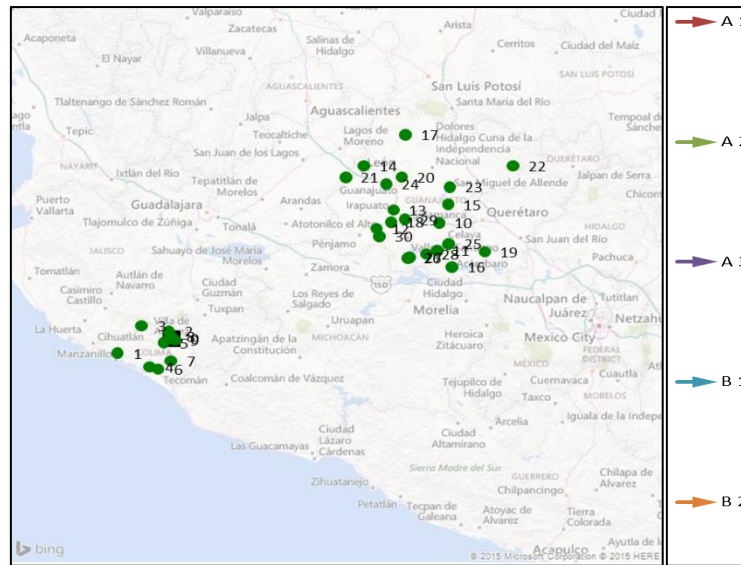


Figura 3.91. Pantalla de la representación de nodos y rutas para el OVRP

Al finalizar la imagen de los nodos y rutas, se va a la pestaña Complementos y se da click en 6.1 Participar la hoja de cálculo VRP-solver para generar la ruta que cada vehículo debe realizar.

Paso 8. Asignación de rutas para cada vehículo y representación del ruteo.

Por último, la solución del ruteo de la empresa se presenta detalladamente en la hoja de trabajo 4. Solución como se presenta a continuación:

El vehículo A1 realiza la ruta A1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-9-12-18-13-10-15-23-22, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.92.

| Vehicle:   | A 1           | Stops:   | 8         | Net profit:  | -4521.19 |           |              |
|------------|---------------|----------|-----------|--------------|----------|-----------|--------------|
| Stop count | Location name | Distance | Delivered | Driving time | Arrival  | Departure | Working time |
| 0          | Depot         | 0.00     | 0         | 0:00         | 06:00    | 06:00     | 0:00         |
| 1          | Customer 9    | 4.70     | 52        | 0:16         | 06:16    | 06:16     | 0:16         |
| 2          | Customer 12   | 375.94   | 94        | 7:05         | 13:05    | 13:05     | 7:05         |
| 3          | Customer 18   | 400.76   | 164       | 7:29         | 13:29    | 13:29     | 7:29         |
| 4          | Customer 13   | 419.19   | 193       | 8:00         | 14:00    | 14:00     | 8:00         |
| 5          | Customer 10   | 480.33   | 203       | 8:59         | 14:59    | 14:59     | 8:59         |
| 6          | Customer 15   | 508.86   | 220       | 9:37         | 15:37    | 15:37     | 9:37         |
| 7          | Customer 23   | 536.52   | 241       | 10:15        | 16:15    | 16:15     | 10:15        |
| 8          | Customer 22   | 635.38   | 250       | 12:07        | 18:07    | 18:07     | 12:07        |

Figura 3.92. Pantalla de la ruta 1 para el OVRP

El vehículo A2 realiza la ruta A2.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-7-30-26-27-28-11, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.93.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 2</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>6</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-4128.07</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 7           | 38.34           | 29               | 1:19                | 07:19           | 07:19            | 1:19                |
| 2                 | Customer 30          | 452.13          | 38               | 9:27                | 15:27           | 15:27            | 9:27                |
| 3                 | Customer 26          | 523.32          | 78               | 11:14               | 17:14           | 17:14            | 11:14               |
| 4                 | Customer 27          | 527.52          | 128              | 11:31               | 17:31           | 17:31            | 11:31               |
| 5                 | Customer 28          | 560.91          | 161              | 12:20               | 18:20           | 18:20            | 12:20               |
| 6                 | Customer 11          | 580.01          | 236              | 12:48               | 18:48           | 18:48            | 12:48               |

*Figura 3.93. Pantalla de la ruta 2 para el OVRP*

El vehículo A3 realiza la ruta A3.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-8-2-21-14-20-24-17, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.94.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>A 3</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>7</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-4263.48</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 8           | 4.28            | 80               | 0:14                | 06:14           | 06:14            | 0:14                |
| 2                 | Customer 2           | 11.27           | 91               | 0:27                | 06:27           | 06:27            | 0:27                |
| 3                 | Customer 21          | 420.39          | 105              | 8:18                | 14:18           | 14:18            | 8:18                |
| 4                 | Customer 14          | 449.29          | 120              | 9:05                | 15:05           | 15:05            | 9:05                |
| 5                 | Customer 20          | 510.36          | 128              | 10:26               | 16:26           | 16:26            | 10:26               |
| 6                 | Customer 24          | 531.83          | 163              | 10:54               | 16:54           | 16:54            | 10:54               |
| 7                 | Customer 17          | 599.08          | 242              | 12:04               | 18:04           | 18:04            | 12:04               |

*Figura 3.94. Pantalla de la ruta 3 para el OVRP*

El vehículo B1 realiza la ruta B1.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-5-6-4-1-3, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.95.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>B 1</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>5</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-1249.03</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 5           | 11.83           | 51               | 0:23                | 06:23           | 06:23            | 0:23                |
| 2                 | Customer 6           | 54.37           | 86               | 1:13                | 07:13           | 07:13            | 1:13                |
| 3                 | Customer 4           | 67.59           | 128              | 1:33                | 07:33           | 07:33            | 1:33                |
| 4                 | Customer 1           | 115.75          | 148              | 2:32                | 08:32           | 08:32            | 2:32                |
| 5                 | Customer 3           | 174.51          | 178              | 4:09                | 10:09           | 10:09            | 4:09                |

*Figura 3.95. Pantalla de la ruta 4 para el OVRP*

El vehículo B2 realiza la ruta B2.1 con la siguiente secuencia de nodos: 0-29-25-16-19, con información detallada para realizar un análisis posterior que se presenta en la figura 3.96.

|                   |                      |                 |                  |                     |                 |                  |                     |
|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| <b>Vehicle:</b>   | <b>B 2</b>           | <b>Stops:</b>   | <b>4</b>         | <b>Net profit:</b>  | <b>-4206.90</b> |                  |                     |
| <b>Stop count</b> | <b>Location name</b> | <b>Distance</b> | <b>Delivered</b> | <b>Driving time</b> | <b>Arrival</b>  | <b>Departure</b> | <b>Working time</b> |
| 0                 | Depot                | 0.00            | 0                | 0:00                | 06:00           | 06:00            | 0:00                |
| 1                 | Customer 29          | 424.64          | 81               | 7:34                | 13:34           | 13:34            | 7:34                |
| 2                 | Customer 25          | 504.37          | 118              | 8:52                | 14:52           | 14:52            | 8:52                |
| 3                 | Customer 16          | 537.97          | 142              | 9:43                | 15:43           | 15:43            | 9:43                |
| 4                 | Customer 19          | 591.11          | 193              | 10:52               | 16:52           | 16:52            | 10:52               |

Figura 3.96. Pantalla de la ruta 5 para el OVRP

El análisis del ruteo se presenta detalladamente en la hoja de trabajo 5. *Visualización* como se presenta en la figura 3.97, donde los vehículos realizan una ruta específica para satisfacer las demandas de los clientes partiendo del almacén.

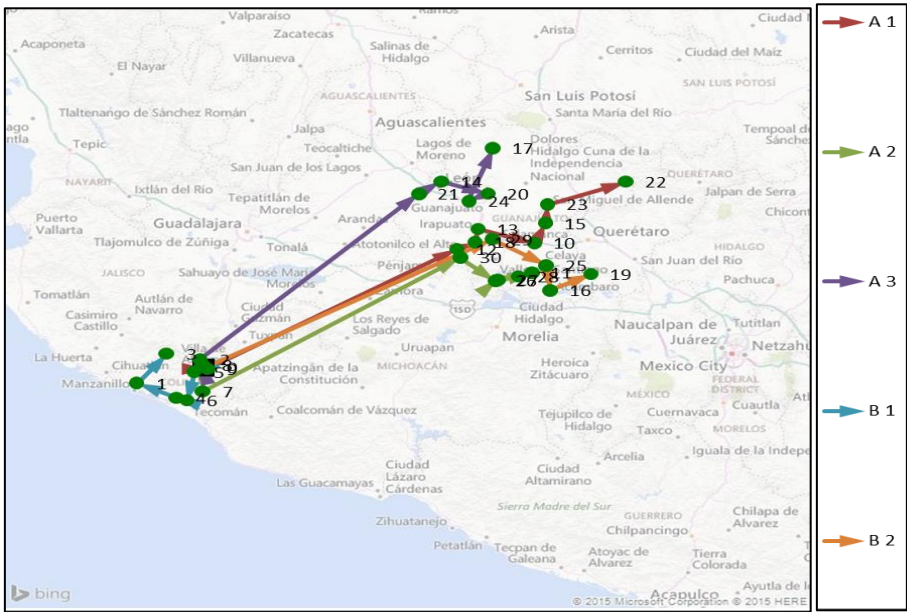


Figura 3.97. Pantalla del ruteo para el OVRP

Paso 9. Solución a los objetivos OVRP.

a) ¿Cuántas rutas se necesitan para satisfacer la demanda de los clientes?

Respuesta: 5 rutas.

b) ¿Cuál es la secuencia de clientes para cada ruta obtenida?

Respuesta:

A1.1: Colima – Cuauhtémoc - Abasolo- Pueblo Nuevo – Irapuato – Celaya – Comonfort - San Miguel de Allende - Santa Catarina.

A2.1: Colima – Ixtlahuacán – Huanímaro – Moroleón – Uriangato - Santiago Maravatío - Salvatierra.

A3.1: Colima - Villa de Álvarez – Comala - San Francisco del Rincón – León – Guanajuato - Silao de la Victoria - San Felipe.

B1.1: Colima – Coquimatlán – Tecomán - Armería – Manzanillo - Minatitlán.

B2.1: Colima – Salamanca – Tarimoro – Acámbaro - Coroneo.

c) ¿Cuál es el porcentaje utilizado de la capacidad de carga útil de los vehículos para cada ruta obtenida?

Respuesta: Para el camión A1= 100%, A2= 94.4%, A3= 96.8%, B1= 89% y B2= 96.5%

d) ¿Cuál es el total de kilómetros para el proceso de distribución?

Respuesta:  $635.38 + 580.01 + 599.08 + 174.51 + 591.11 = 2580.1$  Km.

e) ¿Cuál es el costo de combustible para cada ruta obtenida?

Respuesta: Dado que el costo de combustible es de \$20.5 y el rendimiento del camión es de 2 Km/L. Para la ruta A1.1= \$6,512.6, A2.1=\$5,945.1, A3.1= \$6,140.6, B1.1= \$1,788.7 y B2.1= \$6,058.9.

f) ¿Cuál es el porcentaje utilizado del límite de distancia para cada ruta?

Respuesta: Para la ruta A1.1= 97.8%, A2.1= 89.2%, A3.1= 92.2%, B1.1= 26.8% y B2.1= 90.9%

g) ¿Qué ruta tiene el menor tiempo de recorrido?

Respuesta: La ruta B1.1 con 4:09 horas.

h) ¿Qué ruta tiene el mayor tiempo de recorrido?

Respuesta: La ruta A2.1 con 12:48 horas.

i) ¿Qué camión termina primero su ruta?

Respuesta: El camión B1.

j) ¿Qué camión termina al último su ruta?

Respuesta: El camión A2.

## RESULTADOS

Al realizar el análisis de los diferentes modelos teórico matemáticos que han sido desarrollados para modelar redes de distribución logística, se encontró que el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) destaca de los problemas de programación ya que es uno de los modelos matemáticos principales para el diseño de rutas, porque tiene como objetivo resolver problemas de abastecimiento de la demanda del cliente, abarcando un número de restricciones que influyen en la distribución.

Con la investigación del VRP, se encontró que dicho modelo es uno de los problemas más difíciles y eficientes de optimización en la Logística y en la Administración de la Cadena de Suministro, el cual sigue siendo tema de investigación para el ruteo y las redes de distribución para bienes y servicios. La aplicación de un VRP es una ventaja competitiva para las empresas, ya que permite reducir costos y utilizar al máximo las flotas vehiculares. Dado a las diferentes restricciones para el VRP y sus extensiones, los modelos matemáticos requieren de mecanismos de soluciones sofisticadas; por tal motivo los investigadores necesitan combinar una mayor gama de variables para encontrar la solución óptima o cercana.

La investigación plantea que existe una gama de extensiones del VRP aplicadas a la ingeniería en logística, y da como resultado los modelos siguientes: Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados (CVRP), Problema de Ruteo de Vehículos con limitaciones de Carga de dos Dimensiones (2L-CVRP), Problema de Ruteo de Vehículos con limitaciones de Carga de tres Dimensiones (3L-CVRP), VRP con LIFO, Problema de Ruteo de Camiones y Remolques (TTRP), Problema de Ruteo de Vehículos Capacitados con Restricción de Distancia (DCVRP), Problema de Ruteo de Vehículos con Recolección y Entrega (VRPPD), Problema de Ruteo de Vehículos con viajes de regreso (VRPB), Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo (VRPTW) , Problema de Ruteo de Vehículos con Viajes Múltiples (VRPMT) y el Problema de Ruteo de Vehículos Abierto (OVRP).

Para la solución del VRP, los modelos de investigación de operaciones que abarcan los exactos, heurísticos y metaheurísticos, son métodos aplicables para encontrar soluciones

óptimas en el ruteo y redes de distribución. Entre los modelos matemáticos que ofrecen la mejor solución factible, son los métodos heurísticos y metaheurísticos, ya que tienen como objetivo resolver problemas de gran complejidad de una manera más fácil y con tiempos cortos de cómputo. Debido a la compleja combinación de datos, las técnicas son aplicadas para programas de ruteo y así facilitar el análisis de la información logística, ofreciendo rutas óptimas para la distribución.

La teoría de grafos es esencial para una solución visible del VRP en los mapas geográficos, porque es aplicable para un proceso grafico manual o para un Sistema de Información Geográfica que utilizan los programas de ruteo. Esta herramienta es una ayuda visual para identificar los nodos y los arcos que representan los depósitos o clientes y el trayecto de las rutas. El sistema de grafos es de utilidad para la interpretación del mapeo de las rutas en la red de distribución.

## CONCLUSIONES

Parte importante de esta tesis, es resaltar el valor que tiene el hecho de seguir investigando modelos matemáticos para redes de distribución logística, que ayuden a los profesionistas de la ingeniería en logística y transporte a resolver problemas de ruteo complejos y que además son parte cotidiana de su ámbito laboral. El desarrollo de esta investigación amplía el panorama de mejorar los procesos de recolección y entrega de la logística, este documento no sólo persigue el interés académico, sino que impulsa la investigación y además deje líneas de investigación a futuro.

El Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) y sus extensiones son problemas altamente combinatorios y complejos por lo que la búsqueda de la solución óptima se vuelve un problema desafiante; por ello se requiere de implementar algoritmos complejos ya que la mayoría de estos problemas no se conoce un algoritmo exacto para encontrar la solución óptima y el espacio de búsqueda es enorme lo cual hace inviable el uso de algoritmos exactos, porque la cantidad de tiempo que se necesita para encontrar una solución es inaceptable, así que se implementan métodos heurísticos y metaheurísticos que permiten obtener una solución en un tiempo razonable para las variantes del VRP.

Las variantes del VRP están dentro de los problemas en los que un aumento en el número de nodos del grafo, supone un aumento exponencial del tiempo de ejecución, y rápidamente sobrepasa las capacidades de cálculo de las técnicas avanzadas de modelación; por tales motivos la simulación se ha convertido en una alternativa para resolver las situaciones imprevisibles en el sistema de distribución, ya que permite predecir el comportamiento de los sistemas de ruteo bajo diversas situaciones reales o previsibles y proporciona la capacidad de poder analizar las posibles alternativas a la optimización del problema de ruteo, sin tener que alterar físicamente el mismo.

## RECOMENDACIONES

Se le recomienda a los profesionistas de la ingeniería en logística y transporte a aplicar métodos analíticos para ruteo a fin de utilizar las flotas de vehículos de la manera más eficiente posible.

Con el desarrollo de este trabajo de investigación se aborda a ayudar a los investigadores a futuro, ya que esta tesis es una herramienta útil de consulta en la parte teórica y de referencia en la parte aplicativa de la simulación para problemas de ruteo.

Se le recomienda a las empresas privadas y públicas donde los procesos logísticos de recolección y entrega son tareas principales, a utilizar modelos matemáticos para ruteo y redes de distribución logística con el objetivo de optimizar sus flotas de vehículos, ya que la mayoría de las empresas comerciales siguen diseñando de manera empírica sus sistemas de distribución.

Se le recomienda a la Academia de Ingeniería en Logística del Instituto Tecnológico de Toluca, ampliar la gama de problemas de programación y diseño de rutas para la materia de especialidad "Ruteo y Redes de Distribución".

## REFERENCIAS

Ayadi, R.; Benadada, Y. 2013. "Memetic algorithm for a multi-objective Vehicle Routing Problem with Multiple Trips". International Journal of Computer Science and Applications. 2. India. ISSN 0972-9038.

Caicedo Barrera, A.; Wagner de García, G.; Méndez Parra, R. M. 2010. Introducción a la Teoría de Grafos. Elizcom, Armenia, Colombia. ISBN: 978-958-99325-7-5.

Di Gaspero, L.; Schaerf, A.; Stutzle, T. 2013. Advances in Metaheuristics: 53 (Operations Research/Computer Science Interfaces Series). Springer, New York, USA. ISBN: 978-1-4614-6321-4.

Duarte Muñoz, A. 2007. Metaheurísticas. Dykinson, Madrid, España. ISBN: 984-9849-016-9.

Erdogan, G. (20 de noviembre de 2013). VRP Spreadsheet Solver [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://verolog.deis.unibo.it/vrp-spreadsheet-solver>

Farahani, R. Z.; Rezapour, S.; Kardar, L. 2011. Logistics Operations and Management: Concepts and Models. Elsevier, New York, USA. ISBN: 978-0-12-385202-1.

Ferrucci, F. 2013. Pro-active Dynamic Vehicle Routing: Real-Time Control and Request-Forecasting Approaches to Improve Customer Service. Physica-Verlag, New York, USA. ISBN: 978-3-642-33471-9.

Gendreau, M.; Iori, M.; Laporte, G.; Martello, S. 2006. "A tabu search algorithm for a routing and container loading problem". Transportation Science. 3, August. Baltimore, USA. ISSN: 0041-1655.

Golden, B.; Raghavan, S.; Wasil, E. 2008. The Vehicle Routing Problem: Latest advances and new challenges. Springer, New York, USA. ISBN: 978-0-387-77777-1.

Iori, M.; Salazar González, J. J.; Vigo, D. 2007. "An exact approach for the vehicle routing problem with two dimensional loading constraints". Transportation Science. 41, May. Baltimore, USA. ISSN: 0041-1655.

Larson, R. C.; Odoni, A. R. 1981. Urban operations research. Prentice Hall PTR, Nueva Jersey, USA. ISBN: 0139394478.

Lieberman, G. J.; Hillier, F. S. 2010. Introducción a la Investigación de Operaciones. 9° ed. Mc Graw Hill, México. ISBN: 978-607-15-0308-4.

Lopez Aguilar, E. 2015. Formulaciones lineales del Problema de Ruteo de Vehículos con restricciones de sincronización. (Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Nuevo Leon). Recuperada de <http://eprints.uanl.mx/9555/1/1080214949.pdf>

Niño Sáenz, A.; 2017. Estudio del Problema de Ruteo de Vehículos de dos escalones. (Tesis de Ingeniería, Universidad Industrial de Santander). Recuperada de <http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/tesis/2017/166069.pdf>

Olivera, A.; Viera, O. 2007. "Adaptive memory programming for the vehicle routing problem with multiple trips". Computers & Operations Research. 34, January. Elsevier. USA. ISSN: 0305-0548.

Onieva, E.; Santos, I.; Osaba, E.; Quintián, H.; Corchado, E. 2015. Hybrid Artificial Intelligent Systems: 10th International Conference, HAIS 2015, Bilbao, Spain, June 22-24, 2015, Proceedings. Springer, New York, USA. ISBN: 978-3-319-19643-5.

Ortiz Zezzatti, C. A. O.; Chira, C.; Hernández Aguirre, A.; Basurto, M. 2012. Logistics Management and Optimization through Hybrid Artificial Intelligence Systems. Information Science Reference. USA. ISBN: 978-1-4666-0297-7.

Robuste Francesc, A.; Galván, D. 2005. e-Logistics. UPC, Barcelona, España. ISBN: 84-8301-802-0.

Rodríguez Villalobos, A. 2010. Grafos - software para la construcción, edición y análisis de grafos. Bubok Publishing, Valencia, España. ISBN: 978-84-9981-116-1.

Sánchez Hernández, F. (2015). Aplicación del modelo VRP (Vehicle Routing Problem) para la optimización de una red de distribución (Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México). Recuperada de <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/7969/TESIS.pdf?sequence=1>

Sarmiento Lepesqueur, A.; 2014. Estudio del Problema de Ruteo de Vehículos con balance de carga: Aplicación de la meta-heurística Búsqueda Tabú. (Tesis de Maestría, Universidad de La Sabana). Recuperada de <https://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/9798/Ang%C3%A9lica%20Sarmiento%20Lepesqueur%20%28TESIS%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Scheuerer, S. 2006. "A tabu search heuristic for the truck and trailer routing problem". Computers & Operations Research. 33, March. Elsevier. USA. ISSN: 0305-0548.

Stadtler, H.; Fleischmann, B.; Grunow, M.; Meyr, H.; Surie, C. 2012. Advanced Planning in Supply Chains: Illustrating the Concepts Using an SAP APO Case Study. Springer, New York, USA. ISBN: 978-3-642-24214-4.

Taha Hamdy, A. 2012. Investigación de operaciones. 9a. ed. PEARSON EDUCACIÓN, México. ISBN: 978-607-32-0796-6.

Toth, P.; Vigo, D. 2014. Vehicle routing: problems, methods, and applications. 2th ed. Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM. Philadelphia, USA. ISBN: 978-1-611973-58-7.

Vaira, G. 2014. Genetic Algorithm for Vehicle Routing Problem. (Tesis de Doctorado, Universidad Vilnius). Recuperada de [http://old.mii.lt/files/mii\\_dis\\_2014\\_vaira.pdf](http://old.mii.lt/files/mii_dis_2014_vaira.pdf)

Walker, J. 2015. Design of Vehicle Routing Problem Domains for a Hyper-Heuristic Framework. (Tesis de Doctorado, Universidad de Nottingham). Recuperada de <https://pdfs.semanticscholar.org/883e/3c1be7d3cfbd769282c15596fbb5ebdfcebe.pdf>

Winston, W. L. 2005. Investigación de Operaciones: Aplicaciones y Algoritmos. 4° ed.  
Thomson, México. ISBN: 970-686-362-1.