



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE MISANTLA

SISTEMA DE CALIBRACIÓN DE CÁMARA: PROYECCIÓN DE PUNTO DE INTERÉS CON LÁSER Y LUZ BLANCA

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES**

P R E S E N T A:

DIANA LAURA HERNÁNDEZ ROMERO

DIRECTOR:

DR. ROBERTO ÁNGEL MELÉNDEZ ARMENTA

CO-DIRECTORES:

DR. SIMÓN PEDRO ARGUIJO HERNÁNDEZ

DR. FRANCISCO JAVIER CUEVAS DE LA ROSA

MISANTLA, VERACRUZ.

ENERO 2024



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE MISANTLA

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN DE TRABAJO DE TITULACIÓN MAESTRÍA

08 DE ENERO DEL 2024

ASUNTO: AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN:
TESIS PROFESIONAL

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el (la) C:

HERNÁNDEZ ROMERO DIANA LAURA

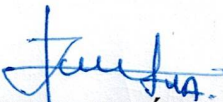
Estudiante de la **MAESTRIA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES** con No. de Control **212T0437** ha cumplido satisfactoriamente con lo estipulado por el **Lineamiento de Posgrado para la obtención del grado de Maestría** mediante **TESIS PROFESIONAL**

Por tal motivo se **Autoriza** la impresión del **Tema** titulado:

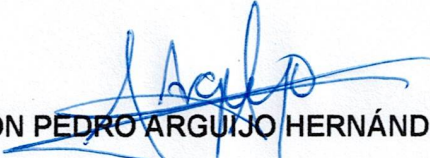
“SISTEMA DE CALIBRACIÓN DE CÁMARA: PROYECCIÓN DE PUNTO DE INTERÉS CON LÁSER Y LUZ BLANCA”

Dándose un plazo no mayor de un mes de la expedición de la presente a la solicitud del examen para la obtención del grado de maestría.

ATENTAMENTE


DR. ROBERTO ÁNGEL MELÉNDEZ ARMENTA
Presidente




DR. SIMÓN PEDRO ARGUIJO HERNÁNDEZ

Secretario


M.S.C. JOSÉ ANTONIO HIRAM VÁZQUEZ LÓPEZ

Vocal

Archivo.

VER. 01/03/09

F-SA--39

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis padres, el Sr. René Hernández Sánchez y la Sra. Rosalba Romero Sánchez, y a mi hermana Ilse Paola Hernández Romero, a quienes tengo mi total admiración, amor y respeto por haberme apoyado incondicionalmente para concluir esta etapa académica que ha traído desafíos pero grandes aprendizajes en mi vida personal y profesional. Sin ellos no podría ser la profesional que soy al día de hoy.

Expreso mi agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por su crucial respaldo financiero a través de una beca de estudios para posgrado con número **806374**, la cual ha hecho posible la realización de este trabajo. Estoy convencida de que México alberga talentos excepcionales capaces de elevar el nivel tecnológico e impulsar la innovación en el desarrollo de soluciones para diversos sectores del país. Este apoyo no solo beneficia el presente proyecto, sino que también impulsa de manera significativa a futuras investigaciones científicas y tecnológicas basadas en el mismo.

Asimismo, expreso mi sincero agradecimiento a mis asesores, el Dr. Roberto Ángel Meléndez Armenta, el Dr. Simón Pedro Hernández Arguijo y al Dr. Francisco Javier Cuevas de la Rosa, por su orientación y apoyo a lo largo de este proyecto de investigación. Sus conocimientos, consejos, compromiso y dedicación fueron fundamentales para el éxito de este trabajo.

Finalmente, agradezco al Instituto Tecnológico Superior de Misantla, por ser la casa de estudios que me formó como Maestra en Sistemas Computacionales, y al Centro de Investigaciones en Óptica A.C. (CIO) campus León, por permitirme realizar una estancia de investigación en sus instalaciones con aulas y laboratorios adecuados, en donde se llevaron a cabo las experimentaciones y actividades requeridas para validar el sistema propuesto en este trabajo de investigación.

Dedicatoria

A Dios.

*El único dador de
vida, sabiduría y
libertad.*

Resumen

Los sistemas de calibración de cámara son técnicas que permiten relacionar diversos parámetros de una cámara para obtener información de un objeto de interés en el sistema de coordenadas tridimensionales a través de imágenes. Una problemática de estos sistemas es que generalmente requieren del uso de dispositivos costosos y espacios de experimentación complejos. En este trabajo se presenta un sistema de calibración de cámara utilizando dos métodos de proyección para representar un punto de interés mediante dispositivos de fácil acceso y el uso de técnicas de Procesamiento Digital de Imágenes (PDI) y métodos de ajuste matemático para estimar la posición de dichos puntos en relación con su profundidad en el sistema de coordenadas tridimensionales.

La metodología de este trabajo de investigación se divide en cuatro etapas: En la primera etapa se realizó el diseño del sistema de calibración utilizando dos métodos de proyección: láser y luz blanca. Posteriormente, en la segunda etapa, se generó un dataset de imágenes utilizando el sistema de calibración. En la tercera etapa, se implementaron técnicas de PDI para obtener información sobre la ubicación del punto de interés en todas las imágenes del dataset. Por último, en la cuarta etapa se implementaron métodos de ajuste para estimar la ubicación de los puntos de interés. Para seleccionar el mejor método de ajuste en ambos métodos de proyección, se realizó un análisis estadístico basado en los resultados de los métodos de ajuste aplicados.

Los resultados evidencian que la metodología propuesta alcanza una precisión superior al 95 %, al emplear el método de interpolación cuadrática para estimar la ubicación de puntos de interés en el sistema de coordenadas tridimensional mediante ambas técnicas de proyección. Los datos derivados de este sistema de calibración son susceptibles de ser procesados y aplicados en diversas áreas de investigación y desarrollo que requieran la precisa determinación espacial de puntos u objetos de interés con objetivos variados.

Palabras clave: calibración, cámara, procesamiento digital de imágenes, OpenCV, ajuste matemático, estimación, profundidad.

Índice general

Resumen	V
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Preguntas de investigación	4
1.4. Hipótesis	5
1.5. Objetivos	5
1.6. Justificación	6
2. Estado del arte	8
2.1. Conceptos básicos	8
2.1.1. Imagen	8
2.1.2. Parámetros intrínsecos	8
2.1.3. Parámetros extrínsecos	9
2.1.4. Calibración de cámara	9
2.1.5. Puntos en dos dimensiones	10
2.1.6. Puntos en tres dimensiones	12
2.1.7. Proyecciones de tres dimensiones a dos dimensiones	12
2.1.8. Visión por computadora	15
2.1.9. Procesamiento digital de imágenes	15
2.1.10. Píxeles de borde	15
2.1.11. Segmentación	16
2.1.12. Binarización mediante umbral	16
2.1.13. Transformada de Hough	17

2.1.14. Momentos	17
2.1.15. Regresión polinomial por mínimos cuadrados	18
2.1.16. Interpolación por polinomios de enésimo grado	19
2.1.17. Transformación de datos por normalización	21
2.1.18. Coeficiente de correlación lineal	22
2.2. Trabajos relacionados	23
2.2.1. Sistemas de calibración de aplicación flexible	23
2.2.2. Calibración de vista única	24
2.2.3. Calibración de cámara por patrones	26
2.2.4. Métodos de ajuste en sistemas de calibración	30
3. Metodología	33
3.1. Descripción de recursos	33
3.1.1. Recursos materiales	33
3.2. Procedimiento	35
4. Resultados	40
4.1. Dataset de imágenes obtenidas con el sistema de calibración propuesto	40
4.1.1. Imágenes con punto por láser	41
4.1.2. Imágenes con punto por proyector de luz blanca	44
4.1.3. Imágenes con patrón de tablero de ajedrez	46
4.2. Implementación de métodos de procesamiento digital de imágenes	47
4.2.1. Segmentación de zona de interés a partir del histograma	48
4.2.2. Segmentación del punto de interés	50
4.2.3. Detección de contornos del punto láser	52
4.2.4. Detección de las coordenadas del punto láser	53
4.2.5. Detección de contornos y coordenadas del punto por luz blanca	56
4.2.6. Normalización de las coordenadas del punto de interés	58
4.3. Implementación de métodos de ajuste para la estimación del punto de interés	60
4.3.1. Regresión polinomial por mínimos cuadrados	61
4.3.2. Interpolación lineal	61
4.3.3. Interpolación cuadrática	62
4.3.4. Spline cúbico	62

4.4. Análisis estadístico de los resultados de los métodos de ajuste	63
5. Conclusiones	66
5.1. Trabajos Futuros	69
Referencias	71
Anexos	78
A. Elementos del sistema de calibración	78
B. Sistema de calibración propuesto usando láser	80
C. Sistema de calibración propuesto usando proyector de luz blanca	82
D. Sistema de calibración propuesto usando tablero de ajedrez	85
E. Coordenadas del punto de interés usando el sistema de calibración y láser	85
F. Coordenadas del punto de interés usando el sistema de calibración y pro- yector de luz blanca	89
G. Resultados de los métodos de ajuste aplicados en pruebas usando láser .	91
G.1. Regresión polinomial por mínimos cuadrados	91
G.2. Interpolación lineal	95
G.3. Interpolación cuadrática	99
G.4. Spline cúbico	103
H. Resultados de los métodos de ajuste aplicados en pruebas usando proyector de luz blanca	107
H.1. Regresión polinomial por mínimos cuadrados	107
H.2. Interpolación lineal	110
H.3. Interpolación cuadrática	113
H.4. Spline cúbico	116
I. Gráficas de resultados de estimación y ajuste aplicados datos de prueba utilizando láser	119
J. Gráficas de resultados de estimación y ajuste aplicados datos de prueba utilizando luz blanca	128

Índice de figuras

2.1. Reconstrucción tridimensional completa a partir de imágenes individuales (Criminisi, 2001).	10
2.2. Ejes del sistema de coordenadas tridimensional de acuerdo a un punto o (Criminisi, 2001).	11
2.3. Sistema de coordenadas de calibración de la cámara (Criminisi, 2001). . .	13
3.1. Metodología propuesta para el desarrollo del proyecto de investigación. .	36
3.2. Etapas de procesamiento digital de imágenes utilizado en el sistema. . . .	38
4.1. Primera y última imagen del subconjunto Láser_P1.	43
4.2. Primera y última imagen del subconjunto Láser_P2.	43
4.3. Primera y última imagen del subconjunto Láser_P3.	44
4.4. Primera y última imagen del subconjunto Láser_P4.	44
4.5. Primera y última imagen del subconjunto Proyector_P1.	46
4.6. Primera y última imagen del subconjunto Proyector_P2.	46
4.7. Primera y última imagen del subconjunto de imágenes de tablero de ajedrez.	47
4.8. Esquinas del tablero de ajedrez (puntos rojos) ubicadas en el plano de referencia en la posición de 14 cm.	47
4.9. Histograma con picos y regiones delimitadas de la primera imagen del subconjunto Láser_P1.	48
4.10. Segmentación, binarización y ubicación de coordenadas de la última ima- gen en Láser_P1.	54
4.11. Segmentación, binarización y ubicación de coordenadas de la última ima- gen en Láser_P3.	55

4.12. Segmentación, binarización y ubicación de coordenadas de la última imagen en Láser_P4.	55
4.13. Área de luminosidad (óvalo rojo) en última imagen del subconjunto Láser_P2.	56
4.14. Segmentación, binarización y ubicación de coordenadas de la última imagen en Proyector_P1.	59
4.15. Segmentación, binarización y ubicación de coordenadas de la última imagen en Proyector_P1.	59
1. Panel de referencia usado en el sistema de calibración.	78
2. Panel de referencia (fondo) y trípode (derecha) del sistema de calibración.	79
3. Diseño de sistema de calibración mediante proyección por láser.	80
4. Diseño propuesto empleando de una distancia mayor a un metro del plano de referencia al SVL.	81
5. Diseño propuesto empleando de una distancia menor a 80 centímetros del plano de referencia al SVL.	81
6. Diseño de sistema de calibración mediante proyección por luz blanca. . .	82
7. Diseño propuesto con luz artificial encendida.	83
8. Diseño propuesto con luz artificial apagada.	84
9. Diseño de sistema de calibración utilizado tablero de ajedrez.	85
10. Ajuste y estimación de puntos de interés mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados en el subconjunto Láser_P1.	119
11. Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación lineal en los datos de prueba del subconjunto Láser_P1.	120
12. Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación cuadrática en los datos de prueba del subconjunto Láser_P1.	120
13. Ajuste y estimación de puntos de interés mediante spline cúbico en los datos de prueba del subconjunto Láser_P1.	121
14. Ajuste y estimación de puntos de interés mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados en el subconjunto Láser_P3.	122
15. Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación lineal en los datos de prueba del subconjunto Láser_P3.	123
16. Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación cuadrática en los datos de prueba del subconjunto Láser_P3.	123

17.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante spline cúbico en los datos de prueba del subconjunto Láser_P3.	124
18.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados en el subconjunto Láser_P4.	125
19.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación lineal en los datos de prueba del subconjunto Láser_P4.	126
20.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación cuadrática en los datos de prueba del subconjunto Láser_P4.	126
21.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante spline cúbico en los datos de prueba del subconjunto Láser_P4.	127
22.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados en el subconjunto Proyector_P1.	128
23.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación lineal en los datos de prueba del subconjunto Proyector_P1.	129
24.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación cuadrática en los datos de prueba del subconjunto Proyector_P1.	129
25.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante spline cúbico en los datos de prueba del subconjunto Proyector_P1.	130
26.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados en el subconjunto Proyector_P2.	131
27.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación lineal en los datos de prueba del subconjunto Proyector_P2.	132
28.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación cuadrática en los datos de prueba del subconjunto Proyector_P2.	132
29.	Ajuste y estimación de puntos de interés mediante spline cúbico en los datos de prueba del subconjunto Proyector_P2.	133

Índice de tablas

4.1.	Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Láser_P1.	43
4.2.	Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Láser_P2.	43
4.3.	Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Láser_P3.	43
4.4.	Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Láser_P4.	44
4.5.	Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Proyector_P1.	45
4.6.	Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Proyector_P2.	46
4.7.	Coeficientes de ajuste para regresión polinomial por mínimos cuadrados.	61
4.8.	Comparación de resultados de ajuste con datos de entrenamiento usando Regresión Polinomial por Mínimos Cuadrados.	64
4.9.	Resultados de métodos de ajuste con el subconjunto Láser_P1.	65
4.10.	Resultados de métodos de ajuste con el subconjunto Láser_P3.	65
4.11.	Resultados de métodos de ajuste con el subconjunto Láser_P4.	65
4.12.	Resultados de métodos de ajuste con el subconjunto Proyector_P1.	65
4.13.	Resultados de métodos de ajuste con el subconjunto Proyector_P2.	65
1.	Coordenadas de las imágenes del subconjunto Láser_P1.	86
2.	Coordenadas de las imágenes del subconjunto Láser_P3.	87
3.	Coordenadas de las imágenes del subconjunto Láser_P4.	88
4.	Coordenadas de las imágenes del subconjunto Proyector_P1 (1/2).	89
5.	Coordenadas de las imágenes del subconjunto Proyector_P1 (2/2).	90
6.	Coordenadas de las imágenes del subconjunto Proyector_P2 (1/2).	90
7.	Coordenadas de las imágenes del subconjunto Proyector_P2 (2/2).	91

8.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (1/2).	91
9.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (2/2).	92
10.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P3 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados.	93
11.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P4 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados.	94
12.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante interpolación lineal (1/2).	95
13.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante interpolación lineal (2/2).	96
14.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P3 mediante interpolación lineal.	97
15.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P4 mediante interpolación lineal.	98
16.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante interpolación cuadrática (1/2).	99
17.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante interpolación cuadrática (2/2).	100
18.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P3 mediante interpolación cuadrática.	101
19.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P4 mediante interpolación cuadrática.	102
20.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante spline cúbico (1/2).	103
21.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante spline cúbico (2/2).	104
22.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P3 mediante spline cúbico.	105
23.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P4 mediante spline cúbico.	106

24.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (1/2).	107
25.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (2/2).	108
26.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P2 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (1/2).	108
27.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P2 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (2/2).	109
28.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante interpolación lineal (1/2).	110
29.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante interpolación lineal (2/2).	111
30.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P2 mediante interpolación lineal.	112
31.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante interpolación cuadrática (1/2).	113
32.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante interpolación cuadrática (2/2).	114
33.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P2 mediante interpolación cuadrática.	115
34.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante spline cúbico (1/2).	116
35.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante spline cúbico (2/2).	117
36.	Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P2 mediante spline cúbico.	118

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

La visión por computadora es una de las tecnologías más relevantes de las últimas décadas. Desde sus inicios, esta técnica ha sido considerada como el componente de percepción visual con el que las máquinas y sistemas informáticos logran imitar la manera en la que los humanos percibimos el mundo, y dotarlos de comportamientos inteligentes mediante la visión. Investigadores del Massachusetts Institute of Technology (MIT) fueron los pioneros en implementar tecnologías como la inteligencia artificial y la robótica, y creían firmemente que resolver el problema de la entrada visual a estas tecnologías, sería un gran avance en el camino hacia soluciones más difíciles con una planificación de alto nivel ([Szeliski, 2022](#)).

En 1990, gran parte de la actividad inicial de la visión por computadora estuvo dirigida a reconstrucciones proyectivas, las cuales en ese momento aún no requerían conocimientos de calibración de cámaras para obtener información precisa de las imágenes. Posteriormente, en los años 2000, se continuó profundizando en la interacción entre los campos de visión y gráficos, resaltando la importancia de adoptar enfoques de aprendizaje basados en datos como componentes centrales y datos del entorno que rodea una escena en el mundo real ([Szeliski, 2022](#)).

Otra disciplina interrelacionada con la visión por computadora y centrada en el análisis y manipulación de imágenes utilizando herramientas y técnicas computacionales es el

Procesamiento Digital de Imágenes (PDI), la cual tiene sus primeras aplicaciones en la década de 1920 en la industria periodística, con el objetivo de mejorar la calidad visual de las primeras imágenes impresas en papel mediante la selección de procedimientos de impresión y la distribución de los niveles de intensidad de las imágenes ([Gonzalez y Woods, 2018](#)).

Desde la década de 1960 hasta la actualidad, el campo del procesamiento de imágenes ha crecido vigorosamente. Además de las aplicaciones en medicina y programas espaciales, las técnicas de PDI ahora se utilizan en una amplia gama de aplicaciones, en las que se incluye la ubicación de puntos de interés en superficies, procedimientos informáticos para mejorar el contraste o codificar los niveles de intensidad en color y otros campos como la industria, robótica y las ciencias biológicas. Algo que distingue a la visión por computadora del PDI, es la necesidad de recuperar la estructura tridimensional del mundo a partir de imágenes digitales y utilizar esto como un intérprete de la comprensión completa de la escena ([Gonzalez y Woods, 2018](#)).

En cuestión con el tema principal de este trabajo de investigación, la calibración de cámaras se define como un proceso que busca corregir las posibles distorsiones y desviaciones de las imágenes captadas por cámaras. La calibración puede ser empleada en campos de estudio como la visión por computadora, la realidad aumentada y en la toma de fotografías. La necesidad inicial de calibrar una cámara se manifestó en el transcurso de la Primera Guerra Mundial. Durante este período, surgieron los primeros indicios del uso de la fotogrametría en operaciones cartográficas aéreas, marcando un contraste con los enfoques previos de carácter terrestre y cualitativo en contraposición a los enfoques cuantitativos emergentes ([Clarke y Fryer, 1998](#)).

Durante los últimos 25 años, muchos informes e investigaciones han empleado cámaras digitales para mediciones fotogramétricas, donde recomiendan conjuntos de parámetros específicos, configuraciones y técnicas de análisis para la calibración de cámaras. Los enfoques descritos también se implementan en sistemas fotogramétricos para proporcionar tanto una capacidad de calibración de la cámara dedicada, como un mecanismo para la mejora de la precisión 3D mediante el ajuste del haz autocalibrado ([Luhmann et al., 2016](#)).

Desde una perspectiva fotogramétrica, se podría afirmar que la problemática de la cali-

bración de la cámara ha sido abordada en gran medida gracias a la evolución tecnológica de las cámaras. Sin embargo, persisten diversos factores y circunstancias que podrían restringir aplicar calibración. Entre estas limitaciones, destaca de manera significativa el considerable costo computacional y financiero asociado, lo cual puede restringir la adquisición de un sistema de calibración. Como resultado, esto también puede imponer restricciones en las investigaciones y proyectos que requieren llevar a cabo la medición e identificación precisa de uno o varios objetos de interés mediante el análisis y procesamiento de imágenes digitales.

1.2. Planteamiento del problema

En las últimas décadas, la detección y localización de puntos de interés ha sido el tema de investigación más popular en técnicas de PDI y visión por computadora, ya que gracias a estas tecnologías, es posible obtener distancias, características y localización de uno o varios puntos para diferentes propósitos ([Y. Wu y Ji, 2019](#)) ([Tatsuta et al., 2018](#)). Obtener las estimaciones precisas de estos datos es de vital importancia para niveles altos de procesamiento visual, sin embargo, de acuerdo a la cantidad de puntos de interés y a diferentes aspectos naturales del entorno de experimentación, características y propiedades de la imagen, es posible determinar el nivel de dificultad para detectar puntos de interés ([Baker et al., 1998](#)).

Uno de los grandes problemas que enfrenta el proceso de obtener las ubicaciones de diversos puntos de interés en una imagen digital, es la inexactitud de relación de las medidas entre un plano en tercera dimensión (3D) a uno en segunda dimensión (2D). En este sentido, con el uso de técnicas de PDI y de visión por computadora, es posible obtener información y características del mundo real a través de imágenes digitales, esto incluye obtener medidas y posiciones de uno o diversos elementos. Sin embargo, durante la captura de imágenes, es posible que se presenten diferentes distorsiones en la imagen procesada provocadas por perspectivas de la cámara y factores relacionados con las propiedades de la misma imagen: brillo, contraste, ruido, etc. Estas distorsiones influyen para obtener medidas erróneas e inexactas ([Ren et al., 2022](#)).

La precisión en la obtención de la ubicación de diversos puntos de interés mediante un sistema de calibración, es una solución óptima para asegurar la conformidad de normas

y estandarizaciones en áreas de estudio específicas. Cuando las mediciones obtenidas son erróneas, existe el riesgo de que los resultados no se ajusten a los requisitos establecidos por las normativas específicas para cada área a impactar. Esto puede tener implicaciones significativas en términos de calidad, seguridad y confiabilidad de los productos o procesos involucrados, y es por esto que la precisión en la obtención de medidas y posiciones mediante un sistema de calibración, es un factor crítico para garantizar el cumplimiento de las normas y estándares aplicables en diferentes áreas (Jung et al., 2016; Liu et al., 2018).

Por lo tanto, en este trabajo se presenta la implementación de un sistema de calibración utilizando dos métodos de proyección destinados a proyectar puntos de interés proyectados sobre un plano de referencia a diferentes distancias, comparando el desempeño del sistema utilizando ambos métodos de proyección en diferentes distancias entre los elementos del sistema. El sistema de calibración propuesto permite obtener, a partir de imágenes 2D desde una sola perspectiva, la posición y el centroide de dichos puntos en el sistema de coordenadas tridimensional y bidimensional. Esto se logra mediante la aplicación de técnicas de PDI y visión por computadora. Finalmente, para lograr una estimación precisa de la ubicación de los puntos de interés, se emplean cuatro métodos de ajuste matemático que se basan en las coordenadas de dichos puntos obtenidas a partir de las imágenes digitales.

1.3. Preguntas de investigación

General:

- ¿Cuál es la estructura mínima requerida de un sistema de calibración para obtener la detección y estimación de profundidad de diversos puntos de interés en el mundo real?

Específicas:

- ¿Qué técnicas de visión por computadora y PDI permiten obtener la detección y ubicación de un punto de interés sobre un plano de referencia?
- ¿Qué método de proyección de puntos de interés es mejor en cuanto a distribución de coordenadas y ajuste?

- ¿Qué método de ajuste permite obtener la ubicación con relación a la profundidad de diversos puntos de interés con una precisión significativamente alta?

1.4. Hipótesis

La implementación de un sistema de calibración que utiliza dos métodos de proyección (láser y luz blanca), junto con la aplicación de técnicas de visión por computadora, PDI, y métodos de ajuste matemático, posibilita la determinación precisa de la posición en términos de profundidad para múltiples puntos de interés en un conjunto de imágenes, alcanzando una precisión superior al 95 %.

1.5. Objetivos

General:

- Implementar un sistema de calibración de cámara con dos métodos de proyección de puntos de interés (láser y luz blanca) y obtener la ubicación en el sistema de coordenadas tridimensional (3D) de dichos puntos mediante técnicas de PDI y un método de ajuste matemático en diferentes imágenes digitales.

Específicos:

1. Realizar una investigación sobre diferentes sistemas de calibración utilizados en diferentes áreas de investigación como instrumentos de medición y sistemas de detección de puntos de interés.
2. Diseñar un sistema de calibración asequible usando dos métodos de proyección que permitan obtener información de la ubicación tridimensional y bidimensional de diversos puntos de interés.
3. Generar un dataset de imágenes utilizando el sistema de calibración propuesto y la implementación de ambos métodos de proyección. Este dataset brindará recursos a otros desarrolladores de llevar a cabo experimentos e investigaciones destinados a objetivos específicos de calibración.
4. Aplicar técnicas específicas de PDI en las imágenes del dataset para adquirir la

información de ubicación en el sistema de coordenadas bidimensional (2D) de los puntos de interés.

5. Implementar métodos de ajuste matemáticos para estimar la ubicación de los puntos de interés propuestos, y seleccionar el más factible de acuerdo a un análisis estadístico de los resultados obtenidos de dichos métodos.

1.6. Justificación

Actualmente, existen diferentes métodos de calibración utilizados dentro de la visión por computadora, entre los más populares se encuentra el método DLT (Direct Linear Transformation, por sus siglas en inglés) ([Abdel-Aziz et al., 2015](#)), el método Tsai ([Tsai, 1987](#)) y el método Zhang ([Z. Zhang, 2000](#)). Cada uno de ellos es capaz de determinar los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara del sistema, los cuales son esenciales para calcular medidas, obtener distancias y corregir distorsiones de acuerdo a la imagen 2D de entrada mediante algoritmos matemáticos. Sin embargo, todos estos métodos hacen uso de múltiples cámaras, sistemas de visión de rayos de alta gama, láseres ([Bartsch et al., 2021](#); [Li et al., 2021](#)) e incluso, requieren estar ubicados en espacios de experimentación rigurosos para obtener la información de interés del objeto de estudio. Esto convierte generalmente a los sistemas de calibración en opciones de alto costo computacional y económico.

El desarrollo del sistema de calibración propuesto surge en respuesta a la necesidad de contar con una solución efectiva y asequible para la identificación y ubicación precisa de puntos de interés en un espacio tridimensional, proyectados en un plano bidimensional. Dado que se trata de un sistema conformado por elementos de fácil adquisición y un espacio experimental no controlado, esta solución puede ser utilizado para desarrollar otras investigaciones enfocadas en aplicaciones de calibración específicas, evitando la inversión en equipos costosos y espacios de experimentación complejos.

Para alcanzar este objetivo, se emplean técnicas de PDI en las imágenes capturadas por el sistema, y métodos de ajuste matemáticos para estimar la posición de dichos puntos con datos conocidos y no conocidos, específicamente, en este estudio se utiliza el método regresión polinomial por mínimos cuadrados y métodos de interpolación. Estas técnicas

en conjunto ha sido ampliamente utilizadas en diversos estudios de análisis de datos, ya que proporcionan una manera robusta de modelar la relación entre las coordenadas en 3D y sus proyecciones en 2D ([Y. Zheng y Peng, 2013](#); [Panteleris et al., 2018](#)). El sistema de calibración propuesto permitirá obtener mediciones precisas y confiables, incluso en entornos donde las condiciones pueden ser menos que ideales ([Abadi y Tahcfulloh, 2022](#); [Criminisi, 2001](#)).

Por otro lado, en términos de la implementación técnica, los sistemas de calibración han sido ampliamente utilizados en diversos campos de investigación y desarrollo, como en estudios demográficos ([Gallagher et al., 2009](#)), antropometría ([Kohlschütter y Herout, 2012](#); [D. Wang et al., 2019](#); [BenAbdelkader y Yacoob, 2008](#)), diseño ergonómico de espacios de trabajo ([Parvez et al., 2018](#)), industria de manufactura ([Usamentiaga y García, 2019](#)), robótica ([Özgüner et al., 2020](#)), sistemas de tráfico ([Lin et al., 2020](#); [F. Wu et al., 2021](#)), salud y salubridad ([Das et al., 2021](#)) y estructuras civiles ([Xu y Brownjohn, 2018](#)). El sistema de calibración propuesto en este trabajo puede obtener la ubicación de diversos puntos de interés mediante la metodología propuesta. Además, la información recopilada por el sistema puede documentarse, procesarse y utilizarse en diversos modelos y aplicaciones en investigaciones futuras. Por lo tanto, el sistema propuesto se convierte en una propuesta versátil con oportunidad de aplicación en diversas áreas de estudio.

Capítulo 2

Estado del arte

2.1. Conceptos básicos

En esta sección se exponen los fundamentos teóricos necesarios para una comprensión sólida de la presente investigación.

2.1.1. Imagen

Una imagen se define como una función bidimensional $f(x, y)$, en donde x y y son coordenadas espaciales y la amplitud (f) en cualquier par de coordenadas x, y se denomina como la intensidad o nivel de gris de la imagen. Cuando las coordenadas espaciales y los valores de intensidad son cantidades discretas finitas, se puede clasificar a una imagen como imagen digital [Gonzalez y Woods \(2018\)](#).

2.1.2. Parámetros intrínsecos

Los parámetros intrínsecos de una cámara brindan una descripción de las características ópticas y geométricas que definen cómo es que la cámara captura una imagen. Estos parámetros son esenciales para el proceso de calibración y mapeo entre el mundo 3D y la imagen 2D capturada por la cámara. Los parámetros intrínsecos incluyen: 1) Longitud focal, 2) Punto principal, 3) Distorsión radial, 4) Distorsión tangencial, 5) Relación de aspecto, 6) Resolución de la imagen, y 7) Matrices intrínsecas ([Y. M. Wang et al., 2010](#)).

Los parámetros intrínsecos son esenciales para tareas como la reconstrucción 3D a partir

de imágenes 2D, la corrección de distorsión en las imágenes y la calibración precisa de las cámaras.

2.1.3. Parámetros extrínsecos

Los parámetros externos de una cámara describen las propiedades geométricas y posicionales de la misma, es decir, información del espacio a donde pertenece la cámara, como su posición y orientación en el sistema de coordenadas tridimensional (Y. M. Wang et al., 2010). Los parámetros extrínsecos incluyen: 1) Posición, 2) Orientación, 3) Matriz de rotación, 4) Matriz de transformación, 5) Foco y punto de vista, 6) Campo de visión y 7) Distorsión.

2.1.4. Calibración de cámara

La calibración de cámara es un proceso fundamental en la visión por computadora y la fotogrametría que implica determinar los parámetros intrínsecos y extrínsecos de una cámara para poder relacionar de manera precisa las coordenadas del mundo real con las proyecciones en la imagen capturada por la cámara (Kaehler y Bradski, 2016).

En específico, una calibración de cámara en una sola vista, es decir, desde una perspectiva, es posible dado un sistema de coordenadas X, Y, Z , un punto o en el sistema de coordenadas tridimensional, y un sistema de coordenadas bidimensional de una imagen, es decir, x e y . Si se conocen los tres puntos de fuga X, Y, Z , y al menos una medida de distancia a lo largo de cada dirección, es posible aplicar la Ecuación 2.1, la cual describe la localización en X, Y, Z de un punto en el mundo real q en una imagen, $Q, l_{ij} = v_i \times v_j$, y q_{ij} es la intersección del plano abarcado por los ejes i y j con la línea que pasa por Q paralela. Si se conocen los parámetros α_i , entonces es posible calcular la estructura métrica para el punto Q . Una representación visual de todo este concepto se muestra en la Figura 2.1.

$$\begin{aligned}\alpha_x X &= -\frac{o \cdot l_{yz}}{\mathbf{q}_{yz} \cdot l_{yz}} \frac{\|q_{yz} \times q\|}{\|v_x \times q\|} \cdot \\ \alpha_y Y &= -\frac{o \cdot l_{xz}}{\mathbf{q}_{xz} \cdot l_{xz}} \frac{\|q_{xz} \times q\|}{\|v_y \times q\|} \cdot \\ \alpha_z Z &= -\frac{o \cdot l_{xy}}{\mathbf{q}_{xy} \cdot l_{xy}} \frac{\|q_{xy} \times q\|}{\|v_z \times q\|} \cdot\end{aligned}\tag{2.1}$$

Es posible elegir el origen del punto o para que sea el mismo que un punto O en una imagen, y a partir de la Ecuación 2.2 determinar la matriz de proyección (P) del mundo real a una imagen completa y una escena calibrada. En esta matriz de proyección vx , vy , vz son los tres puntos de fuga, es decir, las coordenadas para las tres direcciones en el espacio (no necesariamente ortogonales entre sí), y o denota el origen del sistema de coordenadas en la imagen a procesar (Criminisi, 2001).

$$\mathbf{P} = [\alpha_x vx, \alpha_y vy, \alpha_z vz, o] \quad (2.2)$$

En este proceso, tanto el punto de origen como los puntos de fuga vx , vy , y vz , otorgan dos grados de libertad cada uno. Los tres valores escalares adicionales otorgan otros tres grados de libertad, sumando en total once grados de libertad independientes. Este enfoque posibilita la obtención de una calibración externa integral a partir de una única imagen.

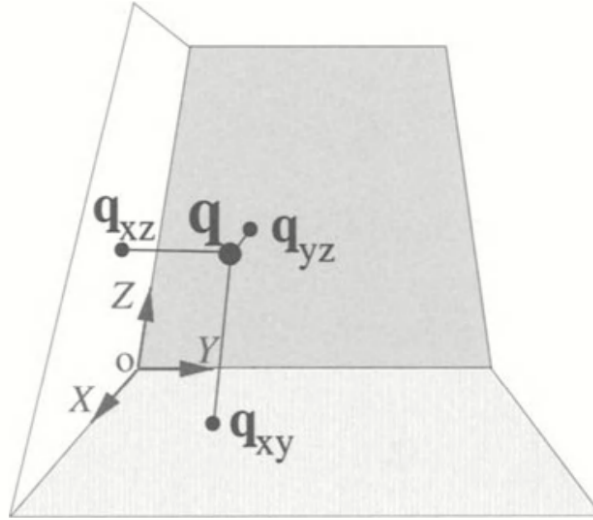


Figura 2.1: Reconstrucción tridimensional completa a partir de imágenes individuales (Criminisi, 2001).

2.1.5. Puntos en dos dimensiones

Los puntos en dos dimensiones (2D) representan coordenadas de un píxel en una imagen, se pueden denotar usando un par de valores como se muestra en la Ecuación 2.3, o alternativamente como se muestra en la Ecuación 2.4.



Figura 2.2: Ejes del sistema de coordenadas tridimensional de acuerdo a un punto o (Criminisi, 2001).

$$\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Los puntos 2D también se pueden representar usando coordenadas homogéneas, como se muestra en la Ecuación 2.5, en donde $\tilde{x}$ es un vector homogéneo y donde los vectores que difieren solamente por la escala se consideran equivalentes y se representan como P^2 , como se muestra en la Ecuación 2.6. Por otra parte, el espacio proyectivo 2D es una extensión del espacio euclidiano bidimensional que incluye puntos en el infinito y permite tratar las transformaciones proyectivas de manera más elegante y generalizada, en donde las propiedades geométricas que involucran líneas, puntos y transformaciones se describen de manera más coherente y simétrica (Szeliski, 2022).

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{w}) \in P^2 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}^2 = \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0) \quad (2.6)$$

2.1.6. Puntos en tres dimensiones

Las coordenadas de puntos en tres dimensiones (3D) pueden ser descritas usando coordenadas no homogéneas, como se muestra en la Ecuación 2.7, u homogéneas como se muestra en la Ecuación 2.8. Como se comprobó anteriormente, a veces es útil denotar un punto en 3D utilizando el vector aumentado como se muestra en la Ecuación 2.9 ([Szeliski, 2022](#)).

$$\mathbf{x} = (x, y) \in R^3 \quad (2.7)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}) \in P^3 \quad (2.8)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = (x, y, z, 1) \quad (2.9)$$

2.1.7. Proyecciones de tres dimensiones a dos dimensiones

La proyección de un punto en el mundo real x en un punto dentro de una imagen x se describe como se muestra en la Ecuación 2.10:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} \quad (2.10)$$

en donde $\mathbf{P}$ es una matriz de proyección homogénea de 3×4 , y el signo “=” es igual a la escala representada. El mundo y los puntos en una imagen están representados por vectores homogéneos para coordenadas tridimensionales (Ecuación 2.11) y bidimensionales (Ecuación 2.12). Sin embargo, la escala de la matriz no afecta a las coordenadas en cualquiera de los dos casos, por lo tanto, solo los once grados de libertad correspondientes a la relación de los elementos de la matriz son significativos ([Criminisi, 2001](#)).

$$\mathbf{X} = (X, Y, Z, W)^T \quad (2.11)$$

$$\mathbf{x} = (x, y, w)^T \quad (2.12)$$

Suponiendo un escenario en el que un punto, denominado P_w con coordenadas (X_w, Y_w, Z_w) , describe una posición en un sistema de coordenadas que corresponde al mundo real. A su vez, el punto $P_c(X_c, Y_c, Z_c)$ refleja las coordenadas de un punto en el sistema de coordenadas de una cámara. Ahondando en esto, el punto $P(x, y)$ señala las coordenadas físicas en el plano de la imagen, mientras que $P(u, v)$ representa las coordenadas de un píxel en dicho plano de la imagen. Estas coordenadas del píxel están situadas en el sistema de coordenadas propio de ese plano. Esta manera de entender la disposición se puede apreciar visualmente en la Figura 2.3.

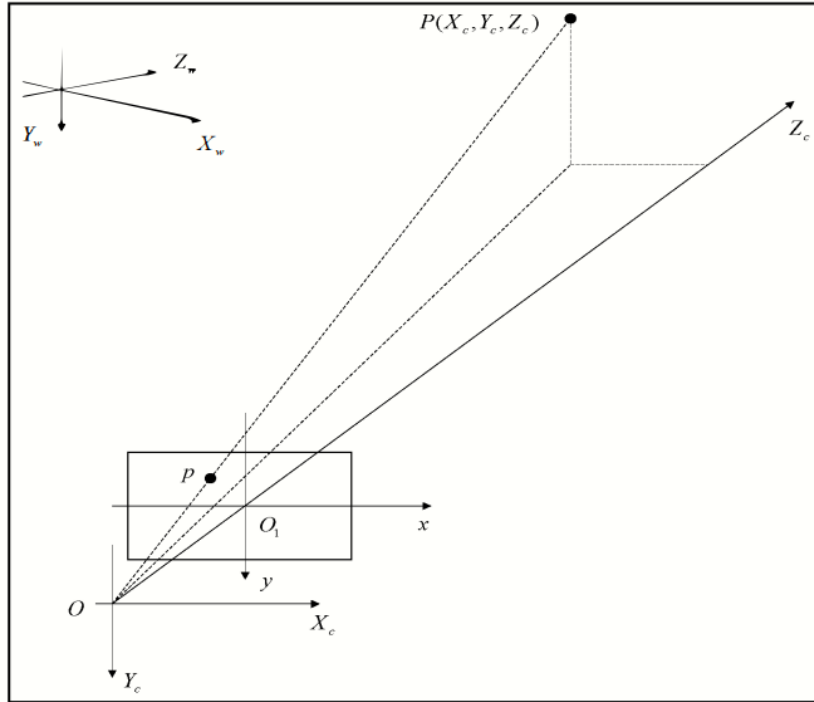


Figura 2.3: Sistema de coordenadas de calibración de la cámara (Criminisi, 2001).

El proceso de convertir las coordenadas tridimensionales $P_w (X_w, Y_w, Z_w)$ de un punto tridimensional P , a las coordenadas $P(u, v)$ en el sistema de coordenadas del plano de píxeles de una imagen, se lleva a cabo a través de las siguientes cuatro fases (Y. M. Wang et al., 2010).

1. Las coordenadas tridimensionales del punto $P_w (X_w, Y_w, Z_w)$ se transforman en las coordenadas $P_c (X_c, Y_c, Z_c)$ del sistema de coordenadas de la cámara, representado

en la Ecuación 2.13, en donde R es una matriz de rotación de 3×3 , y t es un vector de traslación de 3×1 .

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + \mathbf{t} \quad (2.13)$$

2. Las coordenadas $P_c (X_c, Y_c, Z_c)$ en el sistema de coordenadas de la cámara son proyectados en un modelo de cámara estenopeica (conocido en la literatura como *pinhole camera model*) para obtener las coordenadas físicas $P(x, y)$ en el sistema de coordenadas del plano de la imagen. Esto se representa matemáticamente en la Ecuación 2.14. En contexto, un punto en este modelo de cámara (conocido en la literatura como *pinhole point*) es un punto tridimensional en el espacio que se proyecta sobre el plano de la imagen mediante rayos visuales rectos. Este punto es la intersección del plano de la imagen con el rayo visual que conecta el centro óptico y el punto tridimensional [Criminisi \(2001\)](#).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

3. Es necesario conocer la distorsión de la lente radial y la distorsión tangencial para convertir las coordenadas físicas $P(x, y)$ a $P(x_q, y_q)$ en el sistema de coordenadas del plano de la imagen, como se expresa en la Ecuación 2.15, en donde k_1 y k_2 son los coeficientes de distorsión radial, y p_1 y p_2 son los coeficientes de distorsión tangencial.

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \times \begin{bmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2) \\ p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

4. Por último, las coordenadas del punto $P(x_q, y_q)$ en el sistema de coordenadas del plano de la imagen deben ser transformadas en coordenadas en el sistema de píxeles $P(u, v)$, como se expresa en la Ecuación 2.16 y en la Ecuación 2.17 se representa el valor de las variables F_x y F_y .

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x x_q + u_0 \\ f_y y_q + v_0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_x &= \mathbf{f} \times \mathbf{s} / \Delta \mathbf{x} \\ \mathbf{f}_y &= \mathbf{f} / \Delta \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.1.8. Visión por computadora

La visión por computadora es una técnica que involucra la transformación de datos procedentes de una cámara fija o de vídeo en una decisión o en una representación conocida como imagen, con el objetivo de usar los datos resultantes para obtener información proveniente de la imagen y lograr algún objetivo en concreto. Los datos de entrada pueden incluir información contextual de una escena, como “la cámara está montada en un coche” o “el telémetro láser indica que un objeto está a un metro de distancia” ([Kaehler y Bradski, 2016](#)).

2.1.9. Procesamiento digital de imágenes

El Procesamiento Digital de Imágenes (PDI) es una disciplina de la informática y la ingeniería que se enfoca en la manipulación y análisis de imágenes digitales utilizando técnicas y algoritmos computacionales. El objetivo principal del PDI es mejorar la calidad visual de las imágenes, extraer información relevante de las mismas y realizar diversas operaciones para lograr ciertos objetivos específicos.

En el PDI, las imágenes se presentan como matrices numéricas, en las que cada elemento, o píxel, corresponde a un valor que indica la intensidad luminosa o el color en un punto específico de la imagen. A través de una serie de operaciones matemáticas y algoritmos, se pueden llevar a cabo tareas de filtrado para eliminar ruido, realzar características, aplicar corrección de color, detección de bordes, identificar objetos mediante la segmentación, reconocer patrones, entre otros ([Gonzalez y Woods, 2018](#)).

2.1.10. Píxeles de borde

Los píxeles de borde son píxeles en los que la intensidad de una imagen cambia abruptamente. En ese sentido, los bordes (o segmentos de borde) pueden definirse como conjuntos

de píxeles de borde conectados entre sí. En el PDI, el análisis de los píxeles de borde es crucial para detectar objetos, márgenes, y cambios en la estructura de la imagen. Los métodos más populares para detectar píxeles de borde son: 1) Operadores de derivadas, 2) Operadores de gradiente, 3) Operadores basados en máscaras, 4) Transformada de Hough y 5) Operadores basados en la segunda derivada ([Gonzalez y Woods, 2018](#)).

2.1.11. Segmentación

La segmentación es un método utilizado en el PDI cuyo propósito es reunir píxeles específicos que presentan similitudes desde una perspectiva estadística. Este proceso considera la existencia de límites entre píxeles que demarcan distintas regiones de extensión reducida, así como discontinuidades visibles. En términos más simples, la segmentación de imágenes implica identificar conjuntos de píxeles que están visualmente conectados. La distinción primordial entre el agrupamiento de píxeles y la segmentación radica en que el primero generalmente pasa por alto la disposición espacial y las vecindades de los píxeles, mientras que la segmentación se basa en gran medida en las señales y las restricciones espaciales de un conjunto de píxeles en específico ([Szeliski, 2022](#)).

Entre las aplicaciones que se pueden lograr mediante la segmentación se incluyen: 1) Detección de objetos, 2) Reconocimiento y clasificación, 3) Mejora de imágenes y 4) Eliminación de fondos.

2.1.12. Binarización mediante umbral

La técnica de binarización mediante la detección de valor de umbral en el tratamiento de imágenes es una de las principales técnicas de PDI y diversos sistemas de visión. De acuerdo a la literatura, es posible considerar la fijación de un valor de umbral óptimo para identificar objetos o regiones de interés como una operación que implica pruebas con respecto a una función de la forma, de la Ecuación 2.18,

$$\mathbf{T} = T[x, y, p(x, y), f(x, y)] \quad (2.18)$$

donde $f(x, y)$ es la intensidad en el punto (x, y) y $p(x, y)$ es alguna propiedad local del punto; por ejemplo, la intensidad media de un entorno de vecindad centrado en (x, y) .

Aunado a esto, se creará una imagen binaria, $g(x, y)$ como se define en la Ecuación 2.19, en donde a los píxeles en $g(x, y)$ a los que se les asigna valor 0 corresponden a los objetos o regiones de interés detectados, mientras que los que corresponden al entorno o fondo de la escena, tienen un valor de 1.

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x, y) > T \\ 1 & \text{si } f(x, y) \leq T \end{cases} \quad (2.19)$$

Cuando T depende solo de $f(x, y)$, se denomina umbral *global*. Si T depende tanto de $f(x, y)$ como de $p(x, y)$, entonces se denomina como umbral *local*. Finalmente, si T depende de las coordenadas espaciales x e y , se le denomina como *umbral dinámico* (Pajares y De la Cruz, 2008).

2.1.13. Transformada de Hough

La transformada de Hough es un método utilizado en el PDI para encontrar líneas, círculos, u otras formas simples en una imagen. Este método originalmente era una transformada de línea, la cual es una forma relativamente rápida de buscar líneas en forma polar en lugar de la representación tradicional de pendiente-intersección. Esto hace que sea más fácil detectar líneas verticales y horizontales en una imagen binaria. La teoría básica de la transformada de línea de Hough es que cualquier punto en una imagen binaria podría ser parte de algún conjunto de líneas posibles (Kaehler y Bradski, 2016; OpenCV, 2020).

Otra parte de la teoría explica que si tomamos cada píxel de una imagen de entrada que no sea cero y lo convertimos en un conjunto de puntos en la imagen de salida, sumando todas estas contribuciones, las líneas presentes en la imagen original (es decir, en un plano x, y) se manifestarán como puntos destacados en la imagen resultante (Kaehler y Bradski, 2016; OpenCV, 2020).

2.1.14. Momentos

Dentro del PDI, los momentos son características numéricas que sirven para calcular los contornos en una imagen, integrando (o sumando) todas las capas del contorno detectado. De manera general, la Ecuación 2.20 define el momento (p, q) de un contorno.

$$\mathbf{m}_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n I(x, y) x^p y^q \quad (2.20)$$

en donde p pertenece al orden de x , y q al orden y , por lo que en este contexto, orden significa la potencia a la que se eleva el componente correspondiente en la suma mostrada en la Ecuación previa.

La suma se realiza en los píxeles del límite del contorno (indicado por n en la Ecuación 2.20. Posteriormente, si p y q son ambos iguales a 0, entonces el momento m_{00} es en realidad la longitud en píxeles del contorno. El momento m_{10} es el producto de las intensidades de los píxeles en las coordenadas en x del área del objeto y se muestra en la Ecuación 2.21, mientras que el momento m_{01} es el producto de las intensidades de los píxeles en las coordenadas en y del área del objeto, mostrado en la Ecuación 2.22.

$$\mathbf{m}_{10} = \sum_x \sum_y y I(x, y) x^1 y^0 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{m}_{01} = \sum_x \sum_y y I(x, y) x^0 y^1 \quad (2.22)$$

2.1.15. Regresión polinomial por mínimos cuadrados

Una manera efectiva de modelar relaciones polinómicas a partir de conjuntos de datos es mediante la técnica de regresión polinomial. El enfoque de mínimos cuadrados, puede ser abordado a través de varias estrategias, siendo el ajuste de curvas una de las más notables. Este método se enfoca en la determinación de una curva que no solo pase por un conjunto dado de puntos, sino que también se ajuste a restricciones adicionales predefinidas. Al emplear el método de mínimos cuadrados en el contexto del ajuste de curvas, es posible extender su aplicación a un polinomio de grado superior, lo que proporciona la flexibilidad de obtener coeficientes de ajuste precisos para cualquier cantidad de datos disponible. Esta extensión se visualiza en la Ecuación 2.23, que describe la fórmula general para un polinomio de n -ésimo grado ([Chapra et al., 2015](#)).

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (2.23)$$

Para obtener los coeficientes de ajuste para un polinomio de n -ésimo grado es necesario resolver el sistema de ecuaciones M (mostrado en la Ecuación 2.24), el cual define la derivada de la Ecuación 2.23 con respecto a cada uno de los coeficientes desconocidos del polinomio.

$$M = \begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 = \sum y \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 = \sum xy \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 = \sum x^2 y \end{cases} \quad (2.24)$$

2.1.16. Interpolación por polinomios de enésimo grado

La interpolación es una técnica ampliamente empleada en matemáticas y análisis numérico con el propósito de estimar valores desconocidos dentro de un conjunto discreto de datos conocidos. Su fundamento consiste en encontrar una función o polinomio que se ajuste a los datos conocidos y pueda usarse para predecir valores en puntos intermedios. Entre las técnicas de interpolación más utilizadas en la ingeniería como métodos de ajuste, se encuentran la interpolación lineal, polinomial y los trazadores o splines ([Chapra et al., 2015](#)).

Interpolación lineal

El método más simple de interpolación es el lineal. Este consiste en unir dos puntos asociados con una línea recta y se constituye como se muestra en la Ecuación 2.25. La notación de la Ecuación 2.25 indica que se trata de un polinomio de primer grado, mientras que el denominador indica que es una aproximación por diferencias divididas finitas a la primera derivada. De manera general, cuanto menor sea el intervalo entre los puntos asociados con el dato que se desea predecir, mejor será la aproximación.

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = f_0(x) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (2.25)$$

Interpolación cuadrática

Una estrategia para mejorar la estimación de un valor consiste en introducir alguna curvatura a la línea recta que une los puntos establecidos en una interpolación. Si se

tienen tres puntos como un conjunto de datos, estos pueden ajustarse en un polinomio de segundo grado. La interpolación cuadrática para determinar el ajuste de la curva de un conjunto de datos se basa en la Ecuación 2.26, en donde con el término $b_2(x - x_0)(x - x_1)$ es posible conocer la curvatura de segundo grado del polinomio ([Chapra et al., 2015](#)).

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = b_0(x) + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (2.26)$$

Un procedimiento simple para determinar los valores de los coeficientes b_0 , b_1 y b_2 es necesario seguir los pasos de la secuencia algorítmica:

1. Para determinar el valor de b_0 , es necesario evaluar con $x = x_0$ para obtener como resultado lo que se muestra en la Ecuación 2.27.

$$\mathbf{b}_0 = f(x_0) \quad (2.27)$$

2. Para determinar el valor de b_1 , se determina que $x = x_1$ para obtener por diferencias divididas lo que se muestra en la Ecuación 2.28.

$$\mathbf{b}_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.28)$$

3. Para determinar el valor del coeficiente b_2 , se determina que $x = x_2$ para obtener por diferencias divididas lo que se muestra en la Ecuación 2.29.

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \quad (2.29)$$

Spline cúbico

El trazador o spline cúbico es un método de interpolación polinómica que se emplea para ajustar una curva compuesta por segmentos polinómicos de tercer grado. Estos segmentos se ensamblan de manera continua y suave en los puntos de intersección, conformando así una curva global. La idea básica detrás del método de spline cúbico es dividir los puntos conocidos en segmentos pequeños y definir un polinomio de tercer grado para cada uno de estos segmentos. Esta idea se puede representar mediante la Ecuación 2.30 ([Chapra](#)

et al., 2015).

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (2.30)$$

Así, para $n + 1$ puntos asociados con datos ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) existen n intervalos y, en consecuencia, $4n$ incógnitas a evaluar. De manera similar como con los trazadores cuadráticos, se quieren $4n$ condiciones para evaluar las incógnitas, las cuales son:

1. Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores ($2n - 2$ condiciones).
2. La primera y última función deben pasar a través de los puntos extremos (2 condiciones).
3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n - 1$ condiciones).
4. Las segundas derivadas en los nodos deben ser iguales ($n - 1$ condiciones).
5. Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero (2 condiciones).

Estas condiciones establecidas tienen como objetivo obtener los coeficientes de los polinomios cúbicos en cada segmento del conjunto de datos, y con ello garantizar que la curva de ajuste sea suave, tenga una curvatura mínima y logre una aproximación precisa y fluida de la función original.

2.1.17. Transformación de datos por normalización

En el análisis de datos, las unidades de medida pueden afectar a los resultados y conclusiones de una investigación. En general, expresar un atributo en unidades más pequeñas, conducirá a un rango más amplio para ese atributo y, por lo tanto, tenderá a darle a dicho atributo un mayor efecto o peso. Una solución a esto, es normalizar o estandarizar los datos para que se encuentren dentro de un rango más pequeño o común, por ejemplo, $[-1, 1]$ o $[0, 1]$. La normalización de los datos permite dar a todos los atributos de un modelo el mismo peso, y en el caso de los métodos basados en distancias, la normalización ayuda a prevenir utilizar atributos con rangos grandes.

Existen diversos métodos de normalización de datos, entre ellos se encuentra el método

de normalización por mínimos y máximos (min-max). Este método realiza una transformación lineal en los datos originales de acuerdo a lo expuesto en la Ecuación 2.31, donde min_A y max_A son los valores mínimo y máximo de un atributo A . La normalización por mínimos y máximos asigna un valor v_i de A a v'_i en un rango de nuevos valores de entrada de A ($newmin_A$, $newmax_A$) (Han et al., 2012).

$$\mathbf{v}'_i = \frac{v_i - min_A}{max_A - min_A}(newmax_A - newmin_A) + newmin_A \quad (2.31)$$

Este método de normalización en particular preserva las relaciones entre los valores de los datos originales y es capaz de encontrar errores “fuera de límites” si un caso de entrada futuro para la normalización queda fuera del rango de datos original para A .

2.1.18. Coeficiente de correlación lineal

El coeficiente de correlación lineal es una medida estandarizada que permite conocer la relación entre dos variables. Generalmente, es una medida útil que indica el sentido o el grado de relación entre dos variables. Esta medida se obtiene de acuerdo a lo expuesto en la Ecuación 2.32, en donde y es el valor a estimar por el método de ajuste, y_est es el valor estimado, $\sum(y - y_est)^2$ es la variación total y $\sum(y - \bar{y})^2$ es la variación explicada por el modelo de ajuste (Murray, 1975).

$$\mathbf{r}^2 = 1 - \frac{\sum(y - y_est)^2}{\sum(y - \bar{y})^2} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{r} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x - \bar{x})^2} \sqrt{\sum(y - \bar{y})^2}} \quad (2.33)$$

En la literatura, también r^2 es conocida como coeficiente de determinación, y esta puede interpretarse como la fracción de la variación total que se explica mediante la estimación y ajuste de la recta por el método de ajuste. En cuanto a rangos, el coeficiente de correlación r es de $[-1, 1]$ y mide que tan bien la recta se ajusta a los datos muestrales. Entre más cerca se encuentre r de $+1$, el cual se expresa mediante la Ecuación 2.33, más cerca se encuentra los datos de una línea recta ascendente que indica una relación lineal positiva. Si $r^2 = 1$ o $r = \pm 1$, entonces se determina que hay una correlación lineal perfecta (Murray,

1975; Newbold et al., 2008).

2.2. Trabajos relacionados

En esta sección se presentan las investigaciones y trabajos actuales sobre sistemas de calibración de cámaras aplicados en distintas áreas de investigación y desarrollo. Dichos trabajos emplean técnicas de PDI y ajuste matemático, las cuales son fundamentales en el marco de la presente investigación.

2.2.1. Sistemas de calibración de aplicación flexible

Una gran aportación que pueden brindar los sistemas de calibración es la facilidad de adquisición y adaptabilidad en diferentes entornos y con diferentes instrumentos, cumpliendo siempre con los estándares y regulaciones que el área de aplicación final requiera. Un sistema de calibración flexible que ha sido un referente importante en numerosos estudios y proyectos de investigación en los últimos años en el área de visión por computadora es el presentado por [Z. Zhang \(2000\)](#). Este trabajo propone una técnica de calibración flexible y asequible, que utiliza una cámara y un patrón plano de calibración, en este caso, un patrón de tablero de ajedrez impreso y colocado sobre un plano. Una de las grandes ventajas del sistema propuesto es que es una opción asequible para aquellos que no son expertos en visión artificial y no desean invertir en equipos costosos.

Para realizar el proceso de calibración con las imágenes adquiridas en diferentes posiciones y orientaciones por la cámara, el método propuesto utiliza una solución de forma cerrada y un refinamiento no lineal basado en el criterio de máxima verosimilitud para encontrar los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara, además, de que es posible modelar la distorsión radial de la lente. Los resultados demuestran que este método exhibe un notable nivel de robustez en contraposición a enfoques tales como la autocalibración. Asimismo, se logró una alta precisión de calibración con errores de reproyección que fluctúan en el rango de 0,1 a 0,3 píxeles, manteniendo una alta precisión frente a variaciones en la distancia y orientación de la cámara ([Z. Zhang, 2000](#)).

Una gran deficiencia de los sistemas de calibración tradicionales, es que tienden a contar con diseños robustos que no necesariamente brindan resultados precisos y confiables,

además de que son difíciles de adquirir y adecuar a diferentes aplicaciones. [Jiang et al. \(2019\)](#) proponen un método activo de calibración empleando un panel LCD para realizar una calibración de cámara. El método propuesto consiste en tres pasos: 1) Generación y manipulación de un patrón virtual estándar (tablero de ajedrez) mediante una rotación predefinida R_v y traslación T_v , 2) el patrón debe ser proyectado en una pantalla LCD fija y se debe capturar la imagen con la cámara del sistema.

Cabe mencionar que es necesario que el patrón proyectivo se muestre en la pantalla y ocupe el área en el plano LCD tanto como sea posible. Por último, 3) basado en una secuencia específica de patrones, deben variarse los parámetros R_v y T_v , la homografía entre los puntos 3D y los puntos de la imagen correspondientes se calcula directamente para obtener los parámetros de la cámara. Los resultados al emplear este método demuestran un error de calibración de tan solo 0.018 píxeles en términos de error medio de reproducción mediante el uso de 18 patrones virtuales, que es significativamente menor que los métodos más avanzados.

2.2.2. Calibración de vista única

La calibración de sistemas de vista única (conocido en la literatura inglesa como “Calibration Single View”) es un método de calibración con el que se puede obtener información de los parámetros extrínsecos e intrínsecos de una cámara mediante imágenes. Esta técnica posee la capacidad de ser aplicada en diversos campos de visión, como el PDI y visión por computadora, con la finalidad de lograr diferentes objetivos específicos, los cuales pueden abarcar desde el seguimiento y detección de objetos hasta la detallada reconstrucción tridimensional de escenarios.

La calibración de cámara con imágenes de una sola perspectiva se presenta como una solución innovadora en visión por computadora. Aunque es una técnica desafiante, este enfoque permite inferir los parámetros de una cámara con potenciales ventajas de simplicidad y eficiencia en diversas aplicaciones. Los métodos de calibración de una sola imagen son una propuesta “rápida” y “precisa”, en comparación con los métodos de calibración tradicionales que suelen necesitar de múltiples imágenes en diferentes perspectivas de un objetivo de calibración ([Z. Zhang et al., 2018](#)). Por ello, estos autores presentan un nuevo enfoque de calibración mediante un método lineal para calibrar los coeficientes de distor-

sión de la cámara y los parámetros intrínsecos utilizando una sola imagen, basado en el modelo de división de distorsión. Además, se incluyen experimentos tanto de simulación como en un entorno real para evaluar la precisión y eficacia del método. Los resultados demuestran que el método propuesto tiene una alta precisión de calibración, y es similar a los métodos iterativos tradicionales de calibración que utilizan una gran variedad de cámaras.

Los sistemas calibración de cámara de vista única pueden combinarse con otras técnicas de información y gráficos en computadora, como la codificación 2.5-D. Un ejemplo de ello es el trabajo propuesto por [J. Zhang et al. \(2018\)](#), en el cual presentan un método de calibración que requiere de una sola imagen para identificar los parámetros extrínsecos e intrínsecos de una cámara. La técnica de calibración propuesta se basó en el método de calibración Zhang ([Z. Zhang, 2000](#)). Como objeto de calibración se utilizó una pirámide rectangular con un patrón de 20 puntos en cada plano de la pirámide. Los parámetros extrínsecos de las cámaras utilizadas en este trabajo se calcularon utilizando las restricciones geométricas de los círculos en cada plano de la pirámide. Los resultados demuestran que el sistema de calibración propuesto tiene un error promedio de distancia focal calibrada de 3 %, y un error de rotación promedio inferior al 1 %, convirtiendo este método en un sistema robusto, preciso y rápido.

Los sistemas de calibración de cámara de vista única no se limitan únicamente al uso de patrones, sino que también pueden aprovechar la información geométrica de la escena, lo cual se refiere a utilizar los patrones o características detectados en la escena para ajustar los parámetros intrínsecos y extrínsecos de una cámara, y con ello lograr capturar imágenes de la escena de una manera precisa y fiel a su geometría original. [Zhu y Ge \(2022\)](#) presentan un método de calibración de cámara de vista única utilizando la geometría de la escena. El método propuesto utiliza patrones de referencia de cuadrícula de cuatro rejillas mutuamente ortogonales, líneas paralelas en la escena y el método de mínimos cuadrados para determinar los parámetros intrínsecos de la cámara.

El proceso de calibración se realiza mediante la solución de un sistema de ecuaciones de restricción que se establece utilizando el principio de tres puntos colineales en cada línea recta y los parámetros intrínsecos de la cámara se obtienen descomponiendo los valores propios de la matriz. Se realizaron diversos experimentos para corroborar la precisión del

método propuesto, con los que se demostró que este sistema de calibración tiene una alta precisión y cumple con los requisitos fundamentales para la reconstrucción en 3D (tercera dimensión) de objetos en un entorno real. Los resultados indican que el método propuesto puede obtener los parámetros intrínsecos de la cámara con alta precisión, incluso en condiciones de alto nivel de ruido. El error cuadrático medio de la posición del punto cardinal de acuerdo con las propiedades del punto de fuga no supera el 5,3 %, lo que convierte a este sistema efectivo y preciso para la calibración de cámaras de vista única.

2.2.3. Calibración de cámara por patrones

La proyección de puntos es un método que establece la relación entre las coordenadas tridimensionales (3D) de un punto en el espacio tridimensional y sus correspondientes coordenadas bidimensionales (2D) en el plano de la imagen capturada por la cámara. Un método utilizado comúnmente para lograr la calibración de cámara es utilizando un proyector para representar un patrón de puntos sobre una superficie específica. Sin embargo, este tipo de métodos suelen deformar dichos puntos y obtener errores en los parámetros y ruidos de la cámara debido a una superficie imperfecta del objeto de calibración. Como solución a esto, [Huang et al. \(2021\)](#) proponen un sistema de calibración proyector-cámara, rápido y flexible, que utiliza un algoritmo de ajuste de paquetes para optimizar los parámetros estimados del proyector, la cámara y las coordenadas de correspondencia para lograr una calibración sólida. El sistema propuesto requiere de una imagen del patrón de calibración en diferentes posiciones de la tabla de calibración. Los resultados de la simulación muestran que este método puede revelar información física tridimensional precisa de un objeto, lo cual no solo es importante en el contexto de calibración, sino también para otras aplicaciones como el seguimiento de objetos y la estimación de pose.

Para los sistemas de calibración es fundamental que las cámaras capturen imágenes completas del patrón de calibración para obtener resultados de alta precisión en la obtención de los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara. Sin embargo, cuando se desea calibrar sistemas multicámara, a menudo se requiere que cada una de las cámaras capturen por completo los objetos de calibración para establecer de manera correcta las uniones y relaciones entre puntos de interés. Además, estos sistemas por lo general comparten un campo de visión común limitado, lo que resulta en imágenes incompletas de la placa o

patrón de calibración. Como solución, [Gao et al. \(2021\)](#) proponen un método de calibración de cámara modificado utilizando patrones y algoritmos PDI, con el objetivo de obtener información de los puntos del plano de calibración en el sistema tridimensional, incluso cuando las imágenes del plano están parcialmente capturadas (incompletas), lo que reduce la carga de muestreo en comparación con los métodos de calibración tradicionales.

Una de las aportaciones más importantes del método propuesto, es que el patrón de calibración utilizado es una modificación del patrón de tablero de ajedrez tradicional, un patrón muy utilizado en sistemas en la calibración de cámaras. El patrón propuesto utiliza intersecciones en el eje X , los cuales se organizan en grupos de identificación para asegurar la unicidad de cada grupo de identificación y con ello garantizar la precisión de la calibración. Dichas intersecciones se pueden posicionar mediante algoritmos de soporte para formar correspondencias. Durante los experimentos para validar la precisión del sistema de calibración propuesto, se capturaron diversas imágenes del patrón de calibración en diferentes poses usando dos cámaras. Después del procesamiento de las imágenes, se adquirieron las uniones X con su posición en el tablero de calibración y luego se utilizaron mediante la función *estimateCalibrationParameters()* de MATLAB. Los resultados muestran que la precisión de la calibración utilizando los métodos propuestos fue buena, además, los errores de reproyección RMS (Roat Mean Square por sus siglas en inglés) en diferentes configuraciones indican que la utilización de muestras incompletas con el método propuesto tiene un efecto positivo en la precisión de la calibración.

Para determinar los parámetros de una cámara, generalmente se utilizan técnicas de calibración que involucran imágenes de un tablero de ajedrez como un patrón de calibración sobre una superficie o plano en específico; sin embargo, es posible obtener ese mismo patrón de calibración mediante dispositivos digitales, como las pantallas LCD, las cuales son dispositivos de visualización que utilizan cristales líquidos para controlar la transmisión de luz y crear imágenes en una pantalla plana. [Sels et al. \(2019\)](#) plantean un enfoque alternativo para la calibración geométrica de cámaras mediante el uso de patrones de código gris mostrados en una pantalla LCD. El método propuesto demuestra que usar este tipo de patrones permiten decodificar la información de ubicación 3D de los puntos de la pantalla LCD en cada píxel de la imagen de la cámara, obteniendo una estimación

más precisa de la distancia focal, un gran número de correspondencias y valores mínimos en las desviaciones estándar en los parámetros estimados de la cámara.

Como experimento de validación, se analizó el efecto del sistema de calibración a partir de un conjunto de datos utilizando 15 posiciones diferentes de la cámara, en donde se capturaron n muestras (imágenes) por posición de la cámara y se ejecutó el método de calibración propuesto. El experimento muestra que, cuando se usan más de 100,000 puntos, la desviación estándar va por debajo de 0.14 píxeles, y la distancia focal media no cambia. Los resultados demuestran que usando el patrón de código gris se obtiene un gran número de correspondencias, lo que hace posible obtener desviaciones estándar más pequeñas en los parámetros estimados de la cámara. Por otra parte, utilizando el tablero de ajedrez se obtienen desviaciones estándar de alrededor de 4,8 píxeles en la distancia focal y el código gris otorga desviaciones estándar de alrededor de 3,1 píxeles, lo que representa una mejora de un factor de 1,5. Por lo tanto, se concluye que el uso del código de grises hace que el algoritmo de calibración de la cámara sea más robusto y preciso que la calibración utilizando correspondencias de tableros de ajedrez. Además, el método utilizando un patrón de código de grises no requiere equipo especial de laboratorio, solo un trípode para montar la cámara y un monitor LCD o un ordenador portátil (Sels et al., 2019).

Uno de los objetivos más desafiantes de los sistemas de calibración consiste en obtener mediciones precisas de un plano tridimensional (3D) a partir de la información contenida en una imagen digital. Gai et al. (2018) presentan un novedoso método de calibración de cámaras duales para mediciones ópticas 3D. Este método reduce el grado de acoplamiento entre los parámetros y mejora la precisión en técnicas de reconstrucción 3D. El método utiliza una placa de calibración plana con puntos uniformemente distribuidos, donde el intervalo de puntos es de 35 mm tanto en la dirección horizontal como en la vertical.

De manera cronológica, primero se captaron 8 pares de imágenes de dicha placa de calibración en varias orientaciones para obtener los parámetros en las dos cámaras del sistema. Los primeros 4 pares de imágenes se utilizaron como datos de calibración, y las 4 restantes como datos de validación. Posteriormente, se calculó la matriz de rotación y traslación utilizando el método de la matriz de incremento de distancia del centroide, con el fin de reducir el acoplamiento entre los parámetros de la cámara. Por último, se calcula

y minimiza el error de reconstrucción para optimizar los parámetros de calibración. Los resultados muestran que el método propuesto puede reducir el grado de acoplamiento entre los parámetros y mejorar la precisión de la reconstrucción 3D en comparación con los métodos clásicos de calibración (Gai et al., 2018).

Existen diversos patrones de calibración basados en el tablero de ajedrez, los cuales pueden variar en términos de tamaño y el número de cuadrados que lo componen. Estas especificaciones desempeñan un papel crucial en la precisión de un método de calibración de cámaras. Yu et al. (2018) presentan un método de calibración de cámaras utilizando diferentes patrones de tablero de ajedrez para analizar la precisión y errores causados por la variación en sus características. El método propuesto implementa el algoritmo SBI para seleccionar subconjuntos de imágenes que favorezcan la calibración, utilizando el emparejamiento de bordes para evaluar la calidad de la calibración. La calibración de cámara utilizando el método propuesto es posible mediante la correspondencia entre un número suficientemente grande de puntos 3D conocidos en coordenadas del mundo real y sus proyecciones en una imagen 2D. Para la captura de las imágenes, se realizaron diversos experimentos comparativos con patrones de ajedrez en diferentes tamaños y número de cuadros para explorar su influencia en la precisión de la calibración.

El trabajo propuesto presenta diversas conclusiones. En primer lugar, se realizó un extenso estudio de la influencia del tamaño y número de cuadrados en los patrones de calibración usados en el método propuesto. Se descubrió que el tamaño de los cuadrados no es necesariamente mejor para el sistema de calibración cuanto más grandes sean, y que un patrón de cuadrícula densa no garantiza una alta precisión de calibración. Además, se descubrió que usar demasiadas imágenes para la calibración puede acumular errores, es por ello que se sugiere utilizar entre 20 y 26 imágenes para la calibración de la cámara. En segundo lugar, los resultados experimentales mostraron que el algoritmo SBI mejoró significativamente la precisión de la calibración en comparación con otros métodos de selección de imágenes. En conclusión, el método propuesto proporciona información valiosa sobre cómo mejorar la precisión de la calibración de la cámara utilizando un patrón sencillo de calibración como lo es el patrón de tablero de ajedrez y un algoritmo práctico de selección de imágenes.

Generalmente, los sistemas de calibración son utilizados en campos como la robótica, la

industria o la realidad aumentada; sin embargo, existen otras áreas en donde los sistemas de calibración son fundamentales para conseguir una percepción visual precisa y de alta calidad mediante cámaras, tal es el caso de los deportes. [Chen et al. \(2018\)](#) proponen un método de calibración de cámaras Pan-Tilt-Zoom (PTZ por sus siglas en inglés) utilizadas en la transmisión de partidos de fútbol y las cuales pueden moverse en tres dimensiones: 1) Pan (movimiento horizontal), 2) Tilt (movimiento vertical) y 3) Zoom (acercamiento o alejamiento). Para el método de calibración propuesto se utilizó un algoritmo conocido como Two-Point para datos de anotación. Este algoritmo es preciso para obtener información mediante imágenes de referencia con dos correspondencias de puntos 3D-2D de acuerdo a tres pasos: 1) Estimación de la longitud focal a partir de dos puntos, 2) Estimación de los ángulos Pan y Tilts iniciales a partir de un punto y 3) Optimización de los parámetros de la cámara PTZ minimizando el error de proyección.

Para validar la precisión del método de calibración propuesto, se realizaron dos tipos de experimentos: 1) Con datos sintéticos, en donde se evaluó la precisión del método bajo diferentes condiciones de ruido en la localización de características y 2) Con datos reales, es decir, con diversas imágenes de 2 partidos de fútbol reales como para cubrir todo el campo de juego. Los resultados de los experimentos con datos sintéticos mostraron que el método propuesto tiene una precisión promedio de alrededor de 0.5 grados en la estimación de los ángulos Pan y Tilt, mientras que los experimentos con datos reales mostraron una precisión de alrededor de 1.5 grados para la estimación de dichos ángulos. Los resultados en ambos experimentos demuestran que el método de calibración propuesto es robusto y preciso.

2.2.4. Métodos de ajuste en sistemas de calibración

La aplicación de métodos de ajuste como el método de mínimos cuadrados o la interpolación en métodos de calibración de cámara ofrece una solución eficaz para rectificar y potenciar las mediciones, disminuir errores sistemáticos, y elevar tanto la precisión como la confiabilidad de los instrumentos y técnicas de medición. De manera específica, la regresión por mínimos cuadrados se emplea para modelar y corregir las distorsiones de la lente, lo que permite obtener una representación más precisa de la escena capturada. Este método minimiza la discrepancia entre los puntos de referencia en la imagen y sus

coordenadas reales en el mundo 3D, ajustando los parámetros de la lente para lograr una correspondencia óptima.

Por otro lado, la interpolación se utiliza para estimar valores desconocidos entre puntos de referencia bien definidos. En el contexto de la calibración de cámaras, la interpolación es utilizada para determinar las coordenadas de puntos de referencia no conocidos en una imagen digital. Un ejemplo de la aplicación de estos métodos de ajuste es presentado en el trabajo de [Ramírez-Hernández et al. \(2020\)](#), donde proponen un método de calibración de cámara para mejorar la precisión de sistemas de visión estéreo para la localización de puntos tridimensionales. El método propuesto utiliza el método de mínimos cuadrados para modelar el error causado por la digitalización de la imagen y la distorsión de la lente. Para obtener las coordenadas de puntos tridimensionales particulares, los sistemas de visión estéreo utilizan la información de dos imágenes tomadas por dos cámaras diferentes. Este sistema ubica las coordenadas de píxeles bidimensionales del punto tridimensional en ambas imágenes y las convierte en ángulos. Con los ángulos obtenidos, el sistema encuentra las coordenadas del punto tridimensional a través de un proceso de triangulación. En los resultados de este trabajo, se muestra un análisis comparativo entre los puntos de datos tridimensionales reales y los puntos usando este sistema de calibración con el objetivo de validar las mejoras.

Por otra parte, [Rojas et al. \(2019\)](#) proponen una metodología para la reconstrucción tridimensional de objetos mediante el uso de luz estructurada. En este trabajo se describen dos técnicas de proyección de patrones de luz estructurada para realizar la calibración del sistema propuesto: la proyección de puntos y el método basado en el desplazamiento de fase. El método de mínimos cuadrados se utilizó para obtener un polinomio de grado n que permitiera calcular la profundidad de un objeto bajo prueba y realizar su reconstrucción tridimensional. Finalmente, los resultados obtenidos muestran una satisfactoria reconstrucción de objetos utilizando ambas técnicas, mostrando que son factibles y adecuadas para la obtención de medidas superficiales de objetos. En particular, se destaca que el método basado en el desplazamiento de fase ofrece una reconstrucción adecuada considerando que tiene un conjunto de valores más amplio de toda la superficie del objeto.

Un ejemplo adicional de calibración de cámara, en el cual se emplea el método de mínimos cuadrados para reducir al mínimo los errores en la estimación de los parámetros de la

cámara, es el que muestran [Ishikawa et al. \(2018\)](#). Se trata de un método de calibración automático que no requiere de un objetivo específico para realizar sistemas de escaneo 2D-3D, y que utiliza la fusión de sensores de odometría. El método propuesto extiende el marco de calibración mano-ojo a la calibración 2D-3D y solo requiere una nube de puntos tridimensional y la imagen de la cámara. La tarea principal del método de mínimos cuadrados es minimizar el error de rotación y translación. Los resultados experimentales muestran que el método propuesto logra una mayor precisión en la calibración en comparación con otros métodos existentes, además de que es rápido y fácil de implementar. En cuanto al error de translación aplicando mínimos cuadrados, este disminuye gradualmente con el aumento del número de movimientos.

Tal como se discutió con anterioridad, los métodos de ajuste se utilizan para diferentes propósitos en los sistemas de calibración, como para la corrección de discontinuidad en patrones de calibración, en el ajuste de datos discontinuos o la detección de puntos de interés. [X. Wu et al. \(2020\)](#) presentan un método de escaneo de perfiles láser 3D con un sistema de calibración flexible de alta precisión. La calibración en el sistema propuesto se logra mediante dos etapas: 1) Calibración de la cámara para la medición métrica, la cual se realiza utilizando métodos comunes de visión por computadora, como el sistema de calibración Zhang ([Z. Zhang, 2000](#)), con una placa plana utilizada como objeto de calibración que contiene un conjunto de puntos fiduciales colocados con precisión y 2) Calibración del plano láser para la computación de puntos 3D, con la cual es posible determinar las posiciones relativas entre el plano láser y la cámara.

Los métodos de ajuste utilizados en este trabajo para mejorar la calibración de cámara del sistema y la detección de puntos de interés son: 1) Sistema de ajuste polinomial, el cual se utiliza para restablecer la continuidad de los valores de gris en las regiones de transición de la franja láser, 2) Interpolación cúbica, la cual se utiliza para optimizar el centro de la franja láser cifrado y suave para hacer que los datos sean continuos y lo más suaves posible, basados en la minimización del error. Además, la interpolación por spline cúbico se fusiona en conjunto con la extracción del centro de la franja para conectar las líneas láser rotas y obtener la completitud del perfil 3D medido. Los resultados muestran que la precisión geométrica mínima es de $18 \mu m$ y la repetibilidad es inferior a $\pm 3 \mu m$, lo que indica que el método propuesto es factible para su uso en mediciones de alta precisión.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Descripción de recursos

3.1.1. Recursos materiales

Python

Python es un lenguaje de programación de alto nivel, interpretado e interactivo, conocido por su sintaxis simple y legible ([AWS, 2023](#); [Foundation, 2023](#)). Este lenguaje de programación fue utilizado como herramienta fundamental para el desarrollo del presente trabajo debido a su versatilidad, eficiencia y gran cantidad de bibliotecas y paquetes especializados en análisis de imágenes y procesamiento de datos.

Las bibliotecas utilizadas en este trabajo son las siguientes:

- OpenCV: Biblioteca de código abierto que proporciona una infraestructura de visión por computadora, fácil de usar para crear aplicaciones de visión sofisticadas ([Kaehler y Bradski, 2016](#)).
- Numpy: Biblioteca de código abierto que permite realizar funciones numéricas de computación en Python ([Numpy, 2023](#)).
- Matplotlib: Biblioteca de Python que permite crear visualizaciones de datos, animaciones y gráficos interactivos en 2D ([Matplotlib, 2023](#)).

Cámara Web Logitech C920 HD Pro

Esta cámara digital tipo webcam ofrece una resolución de 1920×1080 píxeles a 30 fps, brindando una excelente calidad de imagen. Sus dimensiones son 2.8 pulgadas de altura por 1.7 pulgadas de ancho, lo que la hacen una cámara compacta. Además, cuenta con amplio campo de visión de 78 grados y un sistema de enfoque automático. Por último, este dispositivo es compatible con varias versiones de Windows ([Logitech, 2023](#)).

Proyector Dell M115HD.

Este proyector Dell utiliza la tecnología DLP (Digital Light Processing) y sus dimensiones son 4.1 pulgadas de ancho, 4.1 pulgadas de largo y 1.4 pulgadas de alto. Ofrece hasta 450 lúmenes de brillo y una relación de contraste de 10,000:1 (típica), con una lámpara LED de larga duración. El proyector tiene una capacidad de aspecto nativa de 16:10 y una corrección trapezoidal vertical de +/- 40 grados. El tamaño de la pantalla proyectada varía según la distancia de proyección, lo que añade versatilidad a su uso ([Dell, 2023](#)).

Laptop MSI GL66

Para aplicar las técnicas de PDI y cálculos matemáticos requeridos en este trabajo, se utilizó una laptop de la marca MSI modelo Pulse GL66, con un procesador Intel Core i7-11800H. Para la manipulación y visualización eficiente de gráficos y datos, esta computadora cuenta con una tarjeta gráfica NVIDIA GeForce RTX 3070, así como una memoria RAM de 16 GB y un SSD de 512 GB ([MSI, 2023](#)).

Apuntador Láser Spectra 50260

Este apuntador láser emite una luz de color verde y tiene una capacidad de alcance de hasta 10 metros. Este dispositivo encuentra su aplicación habitual en entornos de oficina e instituciones educativas, donde se utiliza para señalar elementos clave en presentaciones. Su diseño en forma de pluma negra no solo lo hace cómodo de manejar, sino que también aporta una gran facilidad de uso ([Depot, 2023](#)).

Plano de referencia

A modo de superficie para proyectar los puntos de interés, se utilizó una placa de madera con medidas de 27 centímetros de ancho, 23 centímetros de alto y 3 centímetros de profundidad. Para su sustentación, el panel incorpora dos soportes cilíndricos de metal, que permiten su colocación en superficies planas o perforadas con medidas de la circunferencia del soporte. Véase en la Figura 1 en el Anexo A.

Riel metálico milimétrico

Con el propósito de variar la posición del plano de referencia en distintas profundidades, este sistema incorpora un riel deslizante de 70 milímetros de longitud, de los cuales 50 centímetros presentan una regla impresa en su superficie. La movilidad del riel se logra mediante un sistema de engranajes dentados y un tornillo, que desplazan una superficie plana de 10 centímetros de ancho por 10 centímetros de alto.

Trípode para cámara web

Para capturar las imágenes, se empleó un trípode comercial genérico (sin marca) utilizado como soporte de la cámara web del sistema. Este elemento es fabricado de aluminio liviano y tiene la capacidad de extender de 15.5 pulgadas a 54 pulgadas de altura. Véase en la Figura 2 en el Anexo A.

3.2. Procedimiento

En la Figura 3.1 se describe gráficamente las etapas que conforman la metodología propuesta para desarrollar el presente trabajo de investigación. A continuación, en el siguiente listado se describe cada una de acuerdo a su objetivo principal.

1. Diseño del sistema de calibración.

En esta fase, se lleva a cabo una investigación técnica y teórica con el propósito de definir los componentes que integran el sistema de calibración, haciendo uso de dos métodos de proyección: láser y luz blanca. Esta investigación se realiza en concordancia con un perfil específico de un sistema de calibración de bajo costo financiero

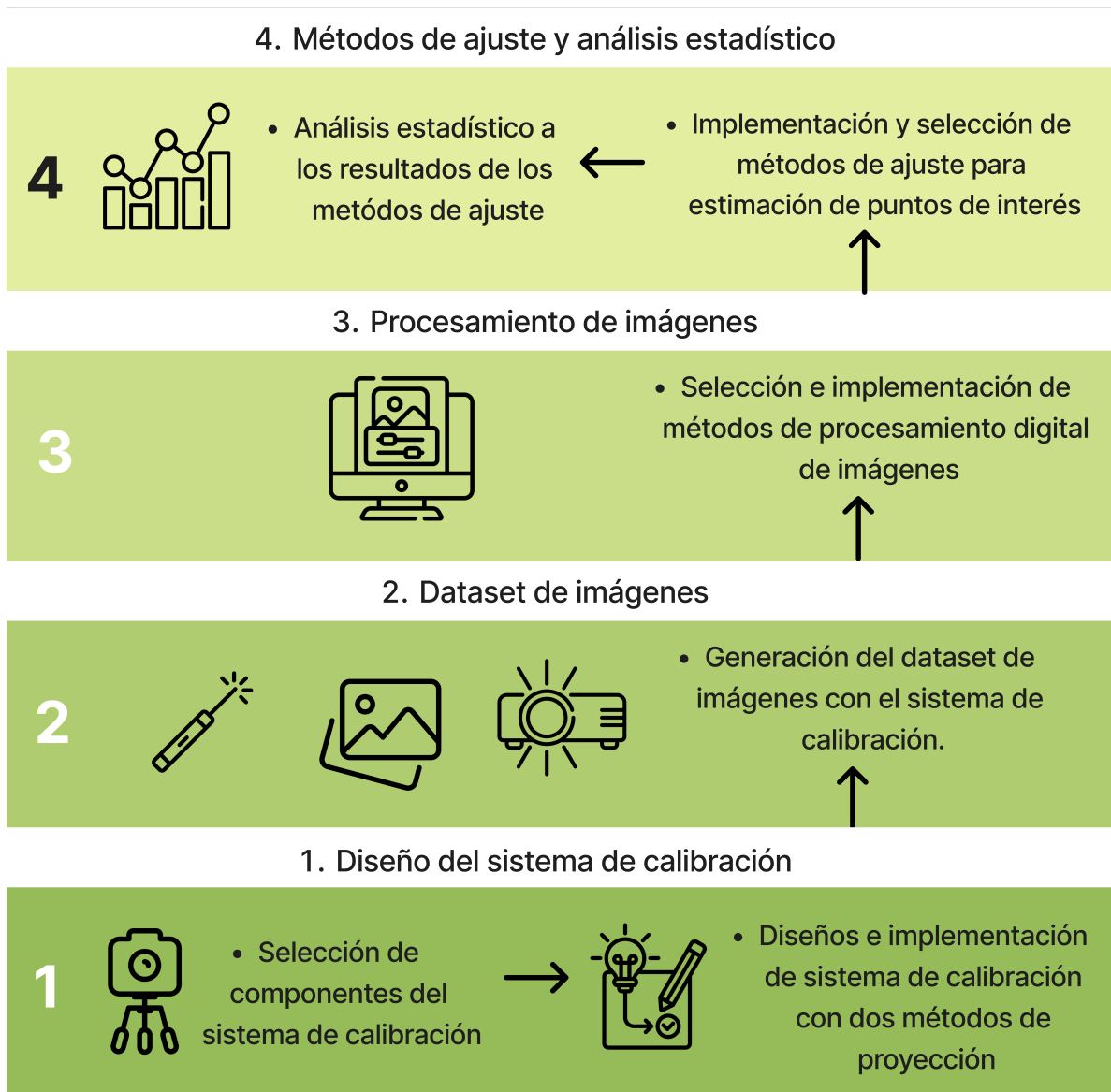


Figura 3.1: Metodología propuesta para el desarrollo del proyecto de investigación.

y computacional y tomando en consideración el entorno de experimentación disponible.

Una vez que se han seleccionado los componentes del sistema, se procede a diseñar la configuración del sistema de calibración, estableciendo de manera precisa la posición y distancia relativa entre dichos componentes. Posteriormente, se lleva a cabo la implementación del sistema, permitiendo la captura de muestras (imágenes) de los puntos de interés que se pretenden estimar mediante el sistema propuesto.

2. Dataset de imágenes.

En esta etapa se lleva a cabo la captura de imágenes usando los dos métodos de proyección propuestos para los puntos de interés. El objetivo principal es obtener diversas muestras que permitan analizar los resultados utilizando diferentes distancias entre los elementos del sistema de calibración. El dataset está compuesto de tres conjuntos de imágenes:

- Conjunto de imágenes utilizando láser para proyectar puntos de interés sobre el plano de referencia, abarcando distancias cortas y distancias largas de la cámara al plano de referencia.
- Conjunto de imágenes utilizando luz blanca para proyectar puntos de interés sobre el plano de referencia, abarcando distancias cortas de la cámara al plano de referencia.
- Conjunto de imágenes de un patrón de calibración con forma de tablero de ajedrez colocado sobre el plano de referencia del sistema de calibración.

3. Procesamiento de imágenes.

Como tercera etapa, se realiza la selección de las técnicas de PDI útiles para resaltar las regiones de interés y obtener la información y posición del punto de interés usando el sistema de calibración propuesto. En esta etapa, las imágenes de los conjuntos que conforman el dataset adquirido, se someten a diversos métodos de procesamiento de imágenes, los cuales se describen específicamente en la Figura 3.2.

4. Métodos de ajuste y análisis estadístico.

En la cuarta y última etapa se aplican diversos métodos de ajuste matemático pa-

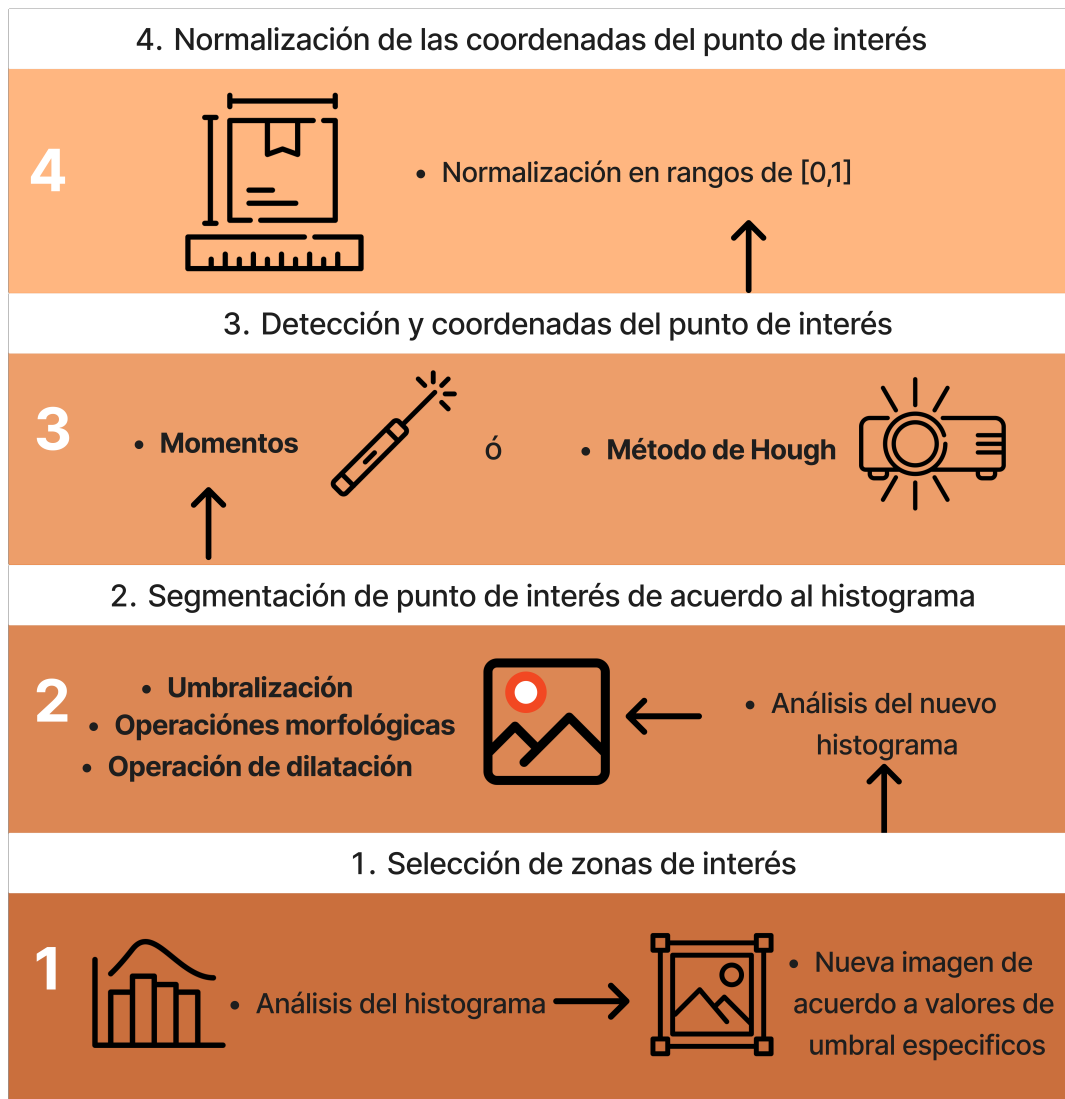


Figura 3.2: Etapas de procesamiento digital de imágenes utilizado en el sistema.

ra estimar la profundidad de los puntos de interés en el sistema de coordenadas tridimensional, utilizando la información de sus coordenadas en el sistema bidimensional obtenidas por los métodos de PDI. Los métodos de ajuste empleados en este trabajo de investigación son:

- Regresión polinomial por el método de mínimos cuadrados.
- Interpolación lineal.
- Interpolación cuadrática.
- Spline cúbico.

El objetivo principal en esta etapa es que cada uno de los métodos de ajuste obtenga una curva de estimación precisa para obtener la ubicación de los puntos de interés en distancias no conocidas, utilizando la información de distancias conocidas en cada una de las imágenes que conforman el dataset propuesto. Por último, los resultados de los métodos de ajuste se analizan mediante métodos estadísticos para evaluar la precisión del modelo desarrollado para obtener la estimación de posición de los puntos de interés y determinar el mejor método de ajuste para la estimación de ubicación del punto de interés.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de este trabajo de investigación empleando la metodología propuesta (Figura 3.1). Este capítulo se divide en cuatro etapas:

1. Dataset de imágenes obtenidas con el sistema de calibración propuesto.
2. Implementación de métodos de procesamiento digital de imágenes.
3. Implementación de métodos de ajuste para la estimación del punto de interés.
4. Análisis estadístico de los resultados de los métodos de ajuste.

4.1. Dataset de imágenes obtenidas con el sistema de calibración propuesto

Las imágenes que conforman el dataset fueron recopiladas utilizando el sistema de calibración propuesto y ambos métodos de proyección (láser o proyector de luz blanca), colocando los elementos que conforman el sistema en diferentes distancias entre sí. Dicho dataset se divide en tres conjuntos:

1. Imágenes de un punto de interés por láser.
2. Imágenes de un punto de interés por proyector de luz blanca.
3. Imágenes de un patrón de tablero de ajedrez.

Todas las imágenes en cada uno de los conjuntos tiene una resolución de 1920 píxeles de

ancho por 1080 píxeles de alto y se encuentran en formato BMP (mapa de bits), con el propósito de preservar la máxima calidad de imagen posible. Además, para obtener cada uno de los conjuntos de imágenes, se utilizaron diferentes distancias entre los elementos del sistema de calibración. Los movimientos del plano de referencia hacia la cámara sobre el riel milimétrico son de atrás (cero cm del riel milimétrico) hacia adelante (un máximo de 50 cm del riel milimétrico), creando un efecto de acercamiento del plano de referencia al desplazarse a través de cada una de las imágenes.

El dataset de imágenes está disponible para su consulta en el repositorio de Github *Calibration Camera System: Point of interest projection with laser and white light* ([dlhr06, 2023](#)).

4.1.1. Imágenes con punto por láser

El conjunto de imágenes de un punto proyectado por láser fue generado por el sistema de calibración propuesto mostrado en la Figura 3 en el Anexo B. Este conjunto de imágenes fue generado en un espacio de experimentación específico en dos arreglos diferentes:

1. La cámara a una distancia mayor a 100 cm (véase en la Figura 4).
2. La cámara a una distancia menor a 80 cm (véase en la Figura 5).

Estas distancias son con respecto al plano de referencia en la posición inicial de cero cm sobre el riel milimétrico. Los nombres de las distancias y los elementos del diseño del sistema de calibración que emplea este método de proyección son: Distancia del Sistema de Visión Láser (DSVL), que abarca desde el plano de referencia hasta el Sistema de Visión Láser (SVL) compuesto por la cámara y el láser, y la Distancia de la Cámara al Láser (DCL).

Los cuatro subconjuntos de imágenes que integran este conjunto son:

- Láser_P1 : Este subconjunto está conformado por 46 imágenes del plano de referencia mientras un punto es proyectado mediante un láser. La distancia DSVL del plano de referencia en su posición inicial al conjunto SVL es de 150 cm. Por otra parte, la separación entre la cámara y el láser, es decir, la distancia DCL, es de 65 cm. Esta información se describe en la Tabla 4.1. En la Figura 4.1a se visualiza la imagen del plano de referencia en su posición inicial, la cual corresponde a la

posición en cero cm del riel milimétrico, y en la Figura 4.1b se muestra la posición final del plano de referencia, el cual corresponde a 45 cm en el riel milimétrico.

- Láser_P2 : Este subconjunto tiene la misma distribución de los elementos del sistema del subconjunto Láser_P1, con la diferencia de que ha sido generado en un día diferente, esto con la finalidad de generar una comparación entre los datos obtenidos con un mismo sistema de calibración pero con imágenes tomadas en días distintos. Este subconjunto está conformado por 46 imágenes del plano de referencia, con una distancia DSVL de 150 cm y una distancia DCL de 65 cm. Esta información se describe en la Tabla 4.2. En la Figura 4.2a se puede observar la imagen del plano de referencia en su posición inicial, la cual corresponde a la posición en cero cm del riel milimétrico. Por otra parte, en la Figura 4.2b se muestra la posición final del plano de referencia, el cual corresponde a 45 cm en el riel milimétrico.
- Láser_P3 : Este subconjunto está conformado por 41 imágenes del plano de referencia, empleando una distancia DSVL de 78 cm y una distancia DCL de 42 cm. Esta información se describe en la Tabla 4.3. Este conjunto de imágenes tiene distancias menores entre los componentes que conforman el sistema de calibración, en contraste con los conjuntos Láser_P1 y Láser_P2, con el objetivo de realizar una comparación de los resultados utilizando distancias diferentes entre los elementos del sistema. En la Figura 4.3a se visualiza la imagen del plano de referencia en la posición inicial de cero cm y en la Figura 4.3b se muestra la posición final del plano de referencia, el cual corresponde a 40 cm en el riel milimétrico.
- Láser_P4 : Siguiendo la idea de comparar subconjuntos de imágenes obtenidas con sistemas de calibración con el mismo diseño, pero con imágenes de días diferentes, este subconjunto es similar al subconjunto Láser_P3 y está conformado por 41 imágenes del plano de referencia, empleando una distancia DSVL de 78 cm y una distancia DCL de 42 cm. Esta información se describe en la Tabla 4.4. Además, en la Figura 4.4a se visualiza la imagen del plano de referencia en la posición inicial de cero cm y en la Figura 4.4b se muestra la posición final del plano de referencia, el cual corresponde a 40 cm en el riel milimétrico.

Tabla 4.1: Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Láser_P1.

Descripción	Distancia
Del plano de referencia a SVL (Posición inicial)	150 cm
Del plano de referencia a SVL (Posición final)	105 cm
DCL	65 cm



(a) Posición del plano de referencia en cero cm.



(b) Posición del plano de referencia en 45 cm.

Figura 4.1: Primera y última imagen del subconjunto Láser_P1.

Tabla 4.2: Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Láser_P2.

Descripción	Distancia
Del plano de referencia a SVL (Posición inicial)	150 cm
Del plano de referencia a SVL (Posición final)	105 cm
DCL	65 cm



(a) Posición del plano de referencia en cero cm.

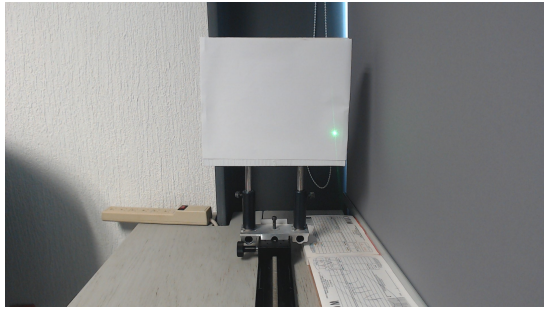


(b) Posición del plano de referencia en 45 cm.

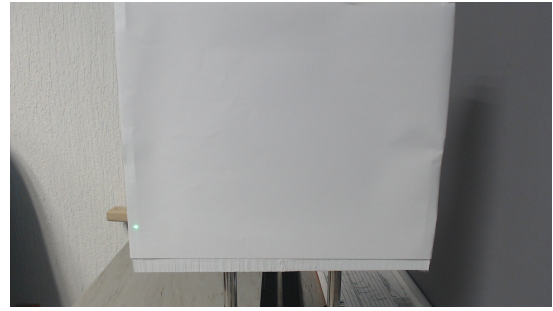
Figura 4.2: Primera y última imagen del subconjunto Láser_P2.

Tabla 4.3: Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Láser_P3.

Descripción	Distancia
Del plano de referencia a SVL (Posición inicial)	78 cm
Del plano de referencia a SVL (Posición final)	38 cm
DCL	42 cm



(a) Posición del plano de referencia en cero cm.

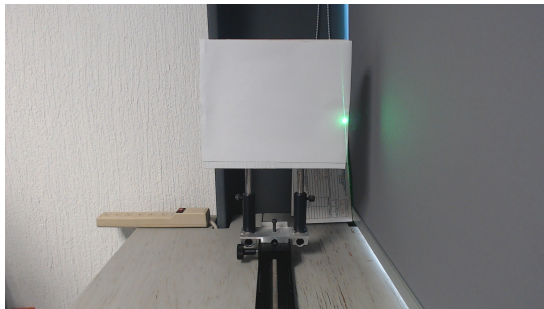


(b) Posición del plano de referencia en 40 cm.

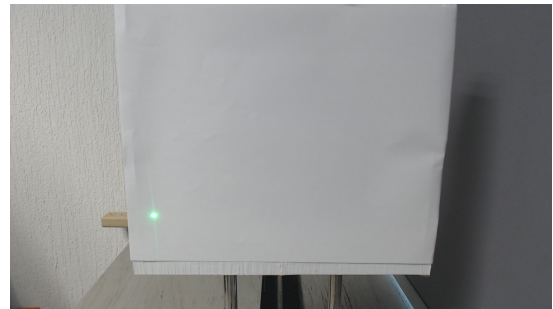
Figura 4.3: Primera y última imagen del subconjunto Láser_P3.

Tabla 4.4: Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Láser_P4.

Descripción	Distancia
Del plano de referencia a SVL (Posición inicial)	78 cm
Del plano de referencia a SVL (Posición final)	38 cm
DCL	42 cm



(a) Posición del plano de referencia en cero cm.



(b) Posición del plano de referencia en 40 cm.

Figura 4.4: Primera y última imagen del subconjunto Láser_P4.

4.1.2. Imágenes con punto por proyector de luz blanca

El conjunto de imágenes de punto de interés representado con un proyector de luz blanca se basa en el diseño propuesto para el sistema de calibración mostrado en la Figura 6. en el Anexo C. Este conjunto de imágenes fue generado en un espacio de experimentación específico en dos condiciones distintas de iluminación dentro de la habitación:

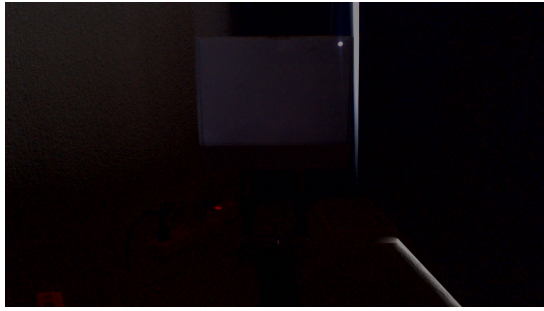
1. Luz artificial encendida (véase en la Figura 7).
2. Luz artificial apagada (véase en la Figura 8).

Además, para este sistema de calibración, en ambas condiciones se utilizaron distancias menores a 80 cm entre el plano de referencia y el conjunto conformado por la cámara y el proyector de luz blanca. Los nombres de las distancias y los elementos del diseño del sistema de calibración que emplea este método de proyección son: Distancia del Sistema de Visión y Proyector (DSVP), que abarca desde el plano de referencia hasta el Sistema de Visión y Proyector (SVP) compuesto por la cámara y el láser.

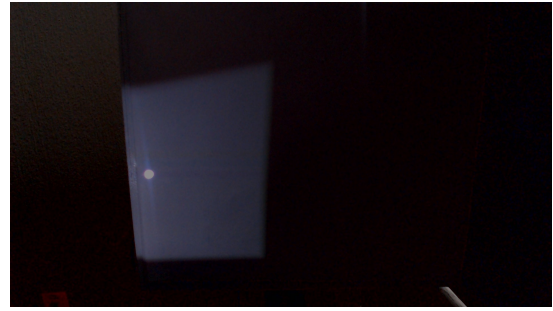
- **Proyector_P1:** Este subconjunto está conformado por 41 imágenes del plano de referencia, mientras un punto es proyectado mediante un proyector de luz blanca con la luz artificial de la habitación apagada. La distancia DSVP es de 74 cm, mientras que la separación entre la cámara y el proyector, denominada Distancia Cámara a Proyector (DCP), es de 22 cm. Esta información se describe en la Tabla 4.5. En la Figura 4.5a se visualiza la imagen del plano de referencia en la posición inicial, la cual corresponde a la posición en cero cm del riel milimétrico y en la Figura 4.5b se muestra la posición final del plano de referencia, la cual corresponde a 40 cm en el riel milimétrico
- **Proyector_P2:** Este subconjunto tiene la misma distribución de sus elementos que el sistema usado para el subconjunto Proyector_P1, conformado por 41 imágenes del plano de referencia mientras un punto es proyectado, pero con la diferencia de que para este subconjunto, la luz artificial en la habitación está encendida. La distancia DSVP es de 75 cm, y la distancia DCP es de 22 cm. Esta información se describe en la Tabla 4.6. Además, en la Figura 4.6a se visualiza la imagen del plano de referencia en la posición inicial, la cual corresponde a la posición en cero cm del riel milimétrico y en la Figura 4.6b se muestra la posición final del plano de referencia, la cual corresponde a 40 cm en el riel milimétrico

Tabla 4.5: Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Proyector_P1.

Descripción	Distancia
Del plano de referencia a SVP (Posición inicial)	74 cm
Del plano de referencia a SVP (Posición final)	34 cm
DCL	22 cm



(a) Posición del plano de referencia en cero cm.



(b) Posición del plano de referencia en 40 cm.

Figura 4.5: Primera y última imagen del subconjunto Proyector_P1.

Tabla 4.6: Distancias de elementos del sistema de calibración en el conjunto Proyector_P2.

Descripción	Distancia
Del plano de referencia a SVP (Posición inicial)	75 cm
Del plano de referencia a SVP (Posición final)	35 cm
DCL	22 cm



(a) Posición del plano de referencia en cero cm.



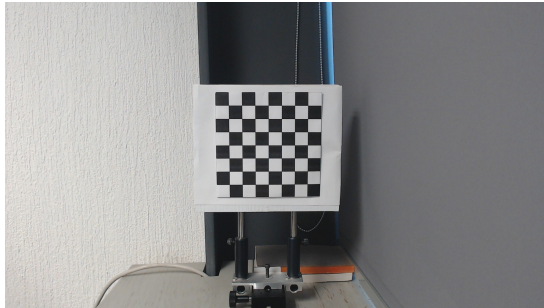
(b) Posición del plano de referencia en 40 cm.

Figura 4.6: Primera y última imagen del subconjunto Proyector_P2.

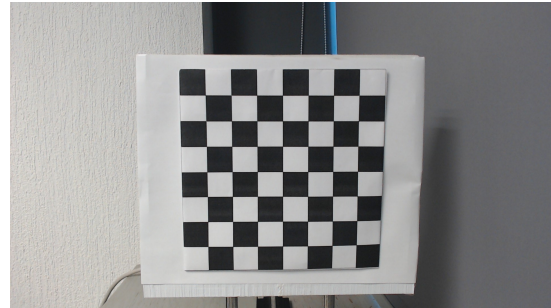
4.1.3. Imágenes con patrón de tablero de ajedrez

El conjunto de imágenes del tablero de ajedrez se constituye de 36 imágenes usando el diseño propuesto para el sistema de calibración, mostrado en la Figura 9 en el Anexo D. El tablero de ajedrez que se emplea está conformado por 64 casillas (8×8 casillas), y cada casilla tiene un tamaño de 2×2 cm. Las esquinas de las casillas del tablero de ajedrez pueden ser utilizados como puntos de interés, lo que lleva a obtener 81 esquinas por cada imagen de este conjunto, es decir, 81 puntos de interés. Un ejemplo de la posición de dichos puntos de interés se muestra en la Figura 4.8. En cuanto a la posición de los dispositivos que conforman el sistema de calibración, la cámara se encuentra frente al

plano de referencia en una distancia de 75 cm en su posición inicial (abreviada en el diseño como DCC), la cual corresponde a la posición en cero cm del riel milimétrico. La Figura 4.7a muestra la posición inicial del plano de referencia que corresponde a la posición en cero cm, mientras que la Figura 4.7b muestra la posición final del plano de referencia, la cual corresponde a 35 cm en el riel milimétrico.



(a) Posición del plano de referencia en cero cm.



(b) Posición del plano de referencia en 35 cm.

Figura 4.7: Primera y última imagen del subconjunto de imágenes de tablero de ajedrez.

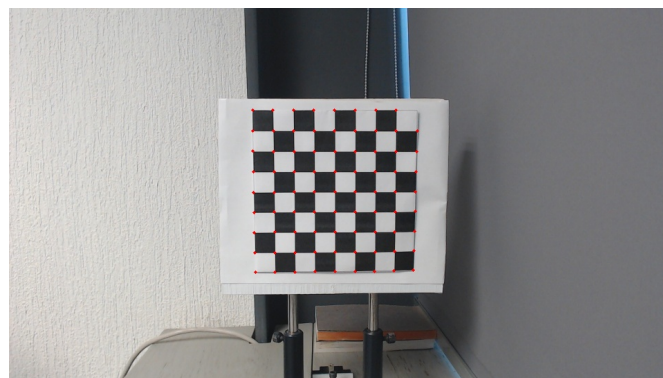


Figura 4.8: Esquinas del tablero de ajedrez (puntos rojos) ubicadas en el plano de referencia en la posición de 14 cm.

4.2. Implementación de métodos de procesamiento digital de imágenes

En esta sección, se presentan los métodos de PDI utilizados para detectar y ubicar los puntos de interés, ya sea utilizando el método de proyección con láser o con luz blanca. Todos estos métodos fueron codificados en Python utilizando las librerías OpenCV, NumPy y Matplotlib.

4.2.1. Segmentación de zona de interés a partir del histograma

De acuerdo con el análisis de los histogramas en las imágenes que conforman el dataset de este trabajo, se ha identificado que en cada una de ellas existen zonas que no son de interés, o en otras palabras, que no son esenciales para determinar el umbral óptimo para segmentar y detectar el punto de interés, ya sea proyectado por láser o por luz blanca. Por esta razón, en este trabajo se propone el Algoritmo 1 con el cual es posible eliminar las zonas de poco interés en función de un rango de valores de intensidad de píxeles de acuerdo al histograma de cada imagen. Además, este algoritmo es capaz de determinar las zonas de interés aun cuando la iluminación en cada imagen varía por condiciones internas o externas al sistema de calibración.

En el primer paso del algoritmo es necesario obtener los valores del histograma en una resolución de 64 bins e identificar sus picos de acuerdo a la imagen de entrada en escala de grises. Conforme al análisis del histograma, se deben considerar los valores que se encuentran por debajo de un umbral específico. Para las muestras con un punto proyectado por láser, el valor promedio de la variable *valHist* es de una frecuencia de 20,000, mientras que para las muestras con un punto proyectado por luz blanca, la frecuencia promedio es de 40,000. En la Figura 4.9, se visualiza el histograma que corresponde a la primera imagen del subconjunto L_P1 con los picos que delimitan las regiones con zonas predominantes en cuanto a su intensidad.

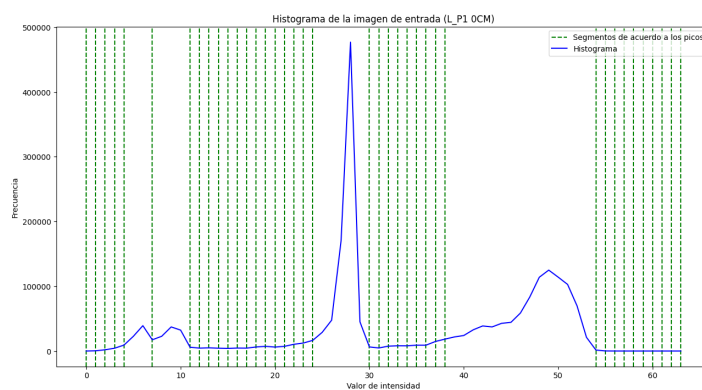


Figura 4.9: Histograma con picos y regiones delimitadas de la primera imagen del subconjunto Láser.P1.

Después, el algoritmo va a iterar a través de la matriz *minVals* con el fin de identificar un rango de valores con una máxima separación entre los picos del histograma. Esto permite

determinar los valores de umbral que preservan las áreas de interés de manera efectiva ($th1$ y $th2$). Estos dos valores de umbral son multiplicados por cuatro para obtener los valores de intensidades dentro de los 256 bins correspondientes al histograma original. Posteriormente, de acuerdo con el valor de umbral máximo y mínimo que corresponden a las zonas de interés en la imagen que se desean preservar, se crea una nueva imagen binaria de acuerdo a la información de la imagen de entrada en escala de grises. Para lograrlo, dentro dos bucles *for* anidados se recorre cada pixel de la imagen de escala de grises en la posición (i, j) y se almacena en una variable, la cual es utilizada para comparar si cada uno de los valores está dentro del rango de los dos valores de umbral determinados previamente. Si el valor cumple con la condición de ser mayor que $th1$ y menor que $th2$, entonces se establece un valor de 1 que para cada pixel de la nueva imagen binaria.

Por último, para mejorar la calidad de la imagen binaria de salida y eliminar cualquier ruido o perturbación en la misma, se utilizó la función *cv2.morphologyEx* de OpenCV, con la cual es posible realizar operaciones de morfología en imágenes de acuerdo a la estructura de los objetos detectados en la misma. Esta función recibe los siguientes parámetros:

1. Una imagen binarizada (**newImg**).
2. Operación morfológica: Dentro de este parámetro se especifica la operación morfológica que se va a aplicar sobre la imagen. *cv2.MORPH_CLOSE* es una operación de cierre que consiste de una dilatación seguida de una erosión que permite cerrar pequeños huecos en los objetos, mientras que *cv2.MORPH_Open* consiste en una erosión seguida de una dilatación y se usa para eliminar ruido y abrir huecos en los objetos.
3. Kernel o máscara (K): Define la forma o tamaño de la operación del filtro dentro de la imagen.
4. Interacciones: Este es un argumento que especifica el número de interacciones que se realizará en la operación morfológica y que determina cuántas veces se aplicará dicha operación de manera repetida.

Para visualizar la imagen con las zonas de interés segmentadas, se propone multiplicar la imagen binarizada después de haber sido procesada por las operaciones morfológicas

con la imagen de entrada en color original. Esto resulta en una imagen en la que solo las regiones de interés permanecen en color, mientras que el resto de la imagen se vuelve negro.

Algoritmo 1 Histograma y segmentación del punto láser

Input: Imagen de entrada *inImg*

Output: Nueva imagen con zonas de interés segmentadas *newImg*

```

1: inImg  $\leftarrow$  imgGray ▷ Imagen de entrada en escala de grises
2: histImg  $\leftarrow$  (imgGray, bins = 64) ▷ Histograma de la imagen
3: peaks  $\leftarrow$  (histImg) ▷ Picos altos del histograma
4: valHist  $\leftarrow$  20000 ▷ Valor de umbral rango máximo
5: minVals  $\leftarrow$  (histImg < valHist[0])
6: maxSp  $\leftarrow$  0 ▷ Valor máximo de separación entre dos regiones
7: th1  $\leftarrow$  0 ▷ Valor de umbral mínimo
8: th2  $\leftarrow$  0 ▷ Valor de umbral máximo
9: function FOR I IN RANGE(len(minvals)-1)
10:   val1  $\leftarrow$  minVals[i]
11:   val2  $\leftarrow$  minVals[i + 1]
12:   Va  $\leftarrow$  val2 - val1
13:   function IF(Va > maxSp)
14:     th1  $\leftarrow$  val1 * 4
15:     th2  $\leftarrow$  val2 * 4
16:     maxSp  $\leftarrow$  Va
17: newImg  $\leftarrow$  np.zeros_like(inImg) ▷ Nueva imagen de acuerdo a imagen de entrada
18: function FOR I IN RANGE(imgGray.shape[0]:)
19:   function FOR J IN RANGE(imgGray.shape[1]:)
20:     val  $\leftarrow$  imgGray[i, j]
21:     function IF(val > th1 and val < th2)
22:       newImg[i, j]  $\leftarrow$  1
23: function CV2.MORPHOLOGYEX(newImg, cv2.MORPH_CLOSE, k, iterations)
24:   Return newImg
25: function CV2.MORPHOLOGYEX(newImg, cv2.MORPH_OPEN, k, interactions)
26:   Return newImg  $\leftarrow$  newImg * inImg ▷ Nueva imagen segmentada

```

4.2.2. Segmentación del punto de interés

Para llevar a cabo la segmentación de los puntos de interés con base en la imagen generada por el Algoritmo 1 en este estudio, se propone el Algoritmo 2 con el fin de lograr este propósito. Durante el análisis de los histogramas de las imágenes obtenidas del punto de interés usando láser y proyector de luz blanca, fue posible concluir que los puntos proyectados en el plano se caracterizaban por tener las regiones más intensas en la imagen.

Es por ello que como primera propuesta de segmentación del punto de interés por ambos

métodos de proyección, se propuso un método que se centró en evaluar los últimos 55 niveles de intensidad del histograma de la imagen, ya que estos niveles eran los que correspondían a la intensidad del punto de interés. Sin embargo, durante las pruebas de validación se observó que existen diversas fuentes de variabilidad lumínica debido a factores externos al sistema de calibración, lo que provocaba fluctuaciones naturales en los valores del histograma. Estas variaciones no solo afectan a la ubicación de la región correspondiente al punto de interés, sino también a otras áreas de la imagen, lo que podía dar lugar a que el punto de interés no fuera necesariamente la región más brillante.

Al mantener en la imagen de entrada las zonas de interés mediante el Algoritmo 1, es posible detectar y segmentar con mayor precisión el punto de interés mediante los valores del histograma. Para ello se propone la función *histPL*, la cual utiliza como parámetro de entrada el histograma en escala de grises de la imagen que contiene las zonas de interés. Dentro de esta función se evalúa cuál es el valor con más incidencias en su intensidad a partir del valor máximo de umbral *th2*, el cual está más cerca de los últimos valores de intensidad de la imagen.

Posterior a obtener el valor de umbral adecuado para identificar el punto de interés, el siguiente paso es realizar una binarización de la imagen. Para realizar dicho proceso, en este estudio se utilizó la función *cv2.threshold* de OpenCV. Esta función requiere como parámetros de entrada los siguientes datos:

1. La imagen de entrada en escala de grises (**newImgGray**).
2. El valor óptimo de umbral, de acuerdo al valor retornado de la función *histPL*.
3. Un valor para los píxeles que superan el umbral especificado. Por lo general este valor es de **255** para representar los píxeles blancos en la imagen binaria.
4. Función *cv2.threshbinary* de OpenCV, con la cual es posible binarizar por completo la imagen de entrada.

Por último, para obtener una imagen con información precisa de la ubicación del punto de interés, se utilizó la función *cv2.dilate* de OpenCV. Esta función requiere como parámetros de entrada los siguientes datos:

1. Una imagen binarizada (**imgPointBin**).

2. Kernel o máscara (K): Define la forma o tamaño de la operación del filtro dentro de la imagen.
3. Interacciones: Este es un argumento que indica cuántas veces se debe aplicar la operación de dilatación. Cuanto mayor sea el valor, mayor será la expansión de los objetos en la imagen.

Algoritmo 2 Segmentación del punto de interés de acuerdo al histograma

Input: Imagen de entrada con zonas de interés $newImg$, valor de umbral mínimo $th1$, valor de umbral máximo $th2$

Output: Imagen binaria del punto de interés $imgBin$

```

1: function HISTPL(histogram)
2:    $hist \leftarrow histogram[th2 + 20]$ 
3:    $threshVal \leftarrow np.argmax[hist]$ 
4:    $threshVal \leftarrow + = th2 + 20$ 
5:   Return  $threshVal$ 
6:  $newImg \leftarrow newImgGray$  ▷ Imagen de entrada en escala de grises
7:  $histImgGray \leftarrow newImgGray$  ▷ Histograma de la imagen
8: function CV2.THRESHOLD( $newImgGray$ ,  $histPL(histImgGray)$ ,
   255,cv2.THRESHBINARY)
9:   Return  $imgPointBin$ 
10: function CV2.DILATE( $imgPointBin$ ,  $k$ ,  $iterations$ )
11:   Return  $imgPointBin$  ▷ Imagen binarizada con punto de interés marcado

```

4.2.3. Detección de contornos del punto láser

Una vez que es posible identificar la región en donde se localiza el punto de interés mediante la binarización de la imagen, es necesario delimitar el contorno de dicho punto para obtener las coordenadas bidimensionales del mismo. Para ello, en este trabajo se propone el Algoritmo 3 para detectar los contornos del punto proyectado por láser usando la función *cv2.findContours* de OpenCV. Esta función permite detectar y extraer contornos en imágenes RGB o binarias mediante un análisis y localización de secuencias de puntos que pueden representar una curva cerrada o una frontera. Esta función requiere como parámetros de entrada los siguientes datos:

1. Una imagen binaria de entrada (obtenida del Algoritmo 2).
2. *cv2.RETR_EXTERNAL* (abreviado en el Algoritmo como *cv2.RE*): Esta constante obtiene los contornos externos de los objetos detectados en la imagen.
3. *cv2.CHAIN_APPROX_SIMPLE* (abreviado en el Algoritmo como *cv2.CAS*): Esta

constante especifica el método de aproximación de los contornos, en este caso será un método simple.

Por último, para visualizar los contornos detectados, se crea una nueva imagen con la misma forma y tipo de datos que la imagen original y se marcan los contornos con la función *cv2.drawContours* de OpenCV, la cual solo requiere como parámetro de entrada la nueva imagen creada, la variable que contiene los contornos detectados por la función *cv2.findContours*, los contornos que se desean dibujar en la imagen, en este caso el valor -1 significa que se van a dibujar todos los contornos detectados, el valor RGB del color utilizado para dibujar los contornos, y por último, el grosor de dichos contornos.

Algoritmo 3 Detección de contornos con *cv2.findContours*

Input: Imagen binarizada *imgBin*, Imagen de entrada *inImg*

Output: Contornos detectados *outContour*, Imagen contorneada *imgContour*

```

1: function CV2.FINDCONTOURS(imgBin, cv2.RE, cv2.CAS)
2:   Return outContour
3: contourImg  $\leftarrow$  np.zeroslike(inImg)           ▷ Nueva imagen para marcar contornos
4: imgContour  $\leftarrow$  cv2.drawContours(contourImg, outContour,  $-1$ , (0, 255, 0), 2)

```

4.2.4. Detección de las coordenadas del punto láser

En el caso de las imágenes de los subconjuntos donde el punto de interés se proyecta con láser, las coordenadas fueron ubicadas mediante los momentos de la imagen. Tal como se describe en el Algoritmo 4, en este trabajo se propone usar la función *cv2.moments* de OpenCV, la cual requiere una imagen binaria y el primer contorno externo detectado en la misma imagen como parámetros de entrada, para retornar una lista que contiene todos los momentos calculados.

Posteriormente, para obtener las coordenadas del centro del punto láser, se utiliza la lista de valores obtenida de la función *cv2.moments*. La coordenada x del centro del punto láser (CX) se divide por el momento m_{10} (momento de primer orden en dirección del eje x , representado en la Ecuación 2.21) entre el momento m_{00} (que es el área del contorno del punto). De igual manera, para obtener la coordenada y del centro del punto láser (CY), se obtiene dividiendo el momento m_{01} (momento de primer orden en dirección del eje y , representado en la Ecuación 2.22) entre el momento m_{00} . Para visualizar que las coordenadas se ubican de manera precisa en el centro del punto de interés, se utilizó la

función *cv2.circle*, la cual requiere como parámetros de entrada la imagen original del punto de interés sobre el plano de referencia y las coordenadas obtenidas *CX* y *CY*.

Algoritmo 4 Detección de las coordenadas del punto láser por Momentos

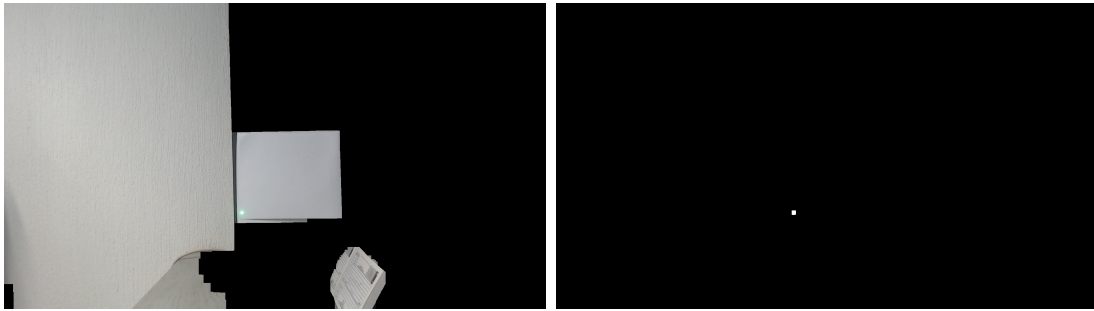
Input: Contornos detectados *outContour*, Imagen de entrada *inImg*

Output: Coordenadas del punto láser *cPoint* $\leftarrow (x, y)$, Imagen de salida con coordenadas marcadas *outImgCoor*

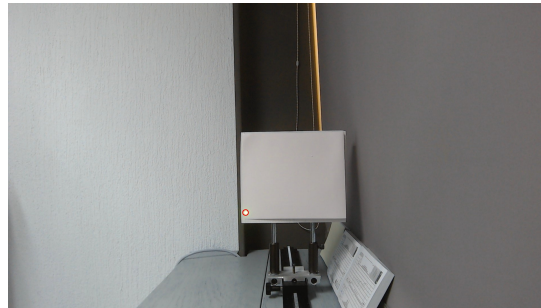
```

1: function CV2.MOMENTS(outContour[0])
2:   Return Mbin                                ▷ Momentos de la imagen detectados
3:    $CX \leftarrow (Mbin["m_{10}"]/Mbin["m_{00}"])$       ▷ Centro del punto en el eje x
4:    $CXY \leftarrow (Mbin["m_{01}"]/Mbin["m_{00}"])$       ▷ Centro del punto en el eje y
5:   OutImgCoor  $\leftarrow (\mathbf{cv2.circle}(inImg, (CX, CY)))$  ▷ Coordenadas en img. de entrada

```



(a) Nueva imagen con zonas de interés. (b) Imagen binaria con punto de interés segmentado.



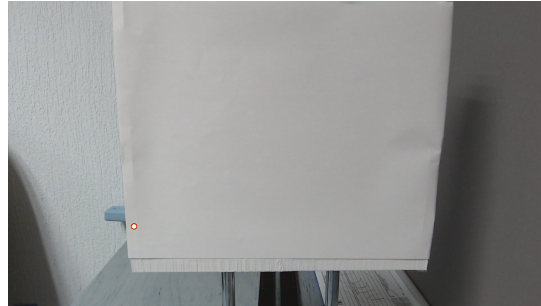
(c) Ubicación del punto de interés mediante las coordenadas obtenidas.

Figura 4.10: Segmentación, binarización y ubicación de coordenadas de la última imagen en Láser_P1.

Finalmente, en la Figura 4.10, 4.11 y 4.12 se visualiza el proceso de segmentación, binarización y detección del punto láser de acuerdo a sus coordenadas en la última imagen de los subconjuntos *Láser_P1*, *Láser_P3* y *Láser_P4* respectivamente como un ejemplo de la detección precisa mediante los algoritmos desarrollados. Para las imágenes del subconjunto *Láser_P2*, resultó imposible detectar el punto láser utilizando los algoritmos propuestos, debido a la intensa entrada de luz exterior que supera o iguala el nivel de intensidad del propio punto láser, generando un nivel de ruido significativo. En consecuencia, no se pudo



(a) Nueva imagen con zonas de interés. (b) Imagen binaria con punto de interés segmentado.



(c) Ubicación del punto de interés mediante las coordenadas obtenidas.

Figura 4.11: Segmentación, binarización y ubicación de coordenadas de la última imagen en Láser_P3.



(a) Nueva imagen con zonas de interés. (b) Imagen binaria con punto de interés segmentado.



(c) Ubicación del punto de interés mediante las coordenadas obtenidas.

Figura 4.12: Segmentación, binarización y ubicación de coordenadas de la última imagen en Láser_P4.

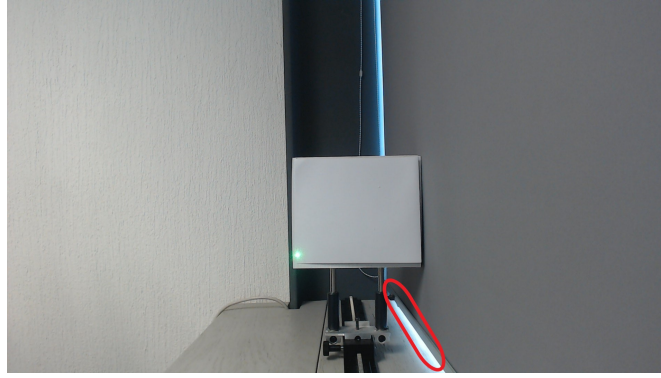


Figura 4.13: Área de luminosidad (óvalo rojo) en última imagen del subconjunto Láser_P2.

determinar un valor de umbral apropiado para la detección del punto. Esta zona de alta luminosidad se ilustra en la Figura 4.13 como un óvalo resaltado.

4.2.5. Detección de contornos y coordenadas del punto por luz blanca

Para los dos subconjuntos de imágenes de puntos proyectados sobre el plano de referencia con luz blanca, se ha utilizado el Algoritmo 1 y 2 para extraer las de zonas de interés y ubicar el punto de interés propuestos para el punto proyectado por láser, con algunos cambios de acuerdo al análisis del histograma de las nuevas imágenes y sin usar dilatación en la imagen binarizada de salida.

El punto de interés proyectado mediante luz blanca se distingue de su contraparte iluminada con láser. Mientras que esta última presenta una apariencia de destello o estrella, el uso de un proyector para representar el punto de interés logra una forma más precisa y estéticamente favorable: un círculo bien definido. Por ello, para obtener las coordenadas del punto de interés proyectado por luz blanca, se desarrolló el Algoritmo 5, el cual hace uso del método de Hough para definir con exactitud los contornos de cada punto.

Como primera instancia, la imagen binarizada de entrada debe convertirse en escala de grises para ser usada como imagen de entrada en la función de OpenCV. Para ello, dentro de un bucle *for*, se creó la imagen *imgHough*, la cual inicialmente está conformada por píxeles con valor cero. En esta imagen, se copian los valores de los píxeles de la imagen de entrada *imgBin* en las mismas posiciones de la imagen binarizada *imgPointBin*. Posteriormente, la función *cv2.HoughCircles* requiere como parámetros de entrada los

siguientes datos:

1. La nueva imagen de entrada en escala de grises(*imgHough*).
2. El método de detección de círculos, en este caso se utilizó el método *cv2.HOUGH_GRADIENT* (*cv2.HG*), el cual realiza la detección de bordes basada en el gradiente de la imagen.
3. La resolución inversa del acumulador, el cual controla la distancia mínima entre los centros de los círculos detectados. Para ambos casos de puntos proyectados por luz blanca, este parámetro es de **1**, lo cual indica que no habrá espacio mínimo entre los círculos detectados.
4. La distancia mínima entre los centros de los círculos detectados. Para ambos casos de puntos proyectados por luz blanca este parámetro es de **50**.
5. param1: Este parámetro es específico de la detección de círculo y controla la sensibilidad de la detección de bordes. Para ambos casos de puntos proyectados por luz blanca este parámetro es de **200**.
6. param2: Este parámetro es otro umbral, pero está relacionado con la precisión de la detección de círculos. Para el caso de los puntos detectados con la luz encendida, este parámetro tiene un valor **10**, mientras que para los puntos detectados con la luz apagada, este parámetro tiene un valor de **9**.
7. minRadius: Este parámetro es el valor mínimo de los círculos que se pueden detectar. Para ambos casos, se establece en **0**, lo que significa que se pueden detectar círculos de cualquier tamaño, incluso aquellos con radios muy pequeños.
8. maxRadius: Este parámetro es el valor máximo del radio de los círculos que se pueden detectar. Para el caso de los puntos detectados con la luz encendida, este parámetro tiene un valor de **15**, mientras que para los puntos detectados con la luz apagada, este parámetro tiene un valor de **12**.

Con la información de los círculos detectados en la imagen, es posible obtener y marcar las coordenadas de los centros de los puntos proyectados por luz blanca en la imagen de salida *outImgCoorL*. Dentro de un bucle *For* se itera a través de las coordenadas de los círculos detectados. En este proceso, se utiliza *cv2.circle* para dibujar dos círculos en la imagen

outImgCoorL. El primer círculo dibujado representa el contorno del círculo detectado el cual es representado de color rojo de acuerdo al espacio de color RGB (255,0,0), y se utiliza para visualizar los círculos en la imagen. El segundo círculo dibujado representa el centro del círculo, el cual está representado en color verde de acuerdo al espacio de color RGB (0,255,0).

Algoritmo 5 Detección de contornos y coordenadas por Hough

Input: Imagen binarizada *imgPointBin*, Imagen de entrada *inImg*

Output: Coordenadas del punto de luz blanca *cPointL* $\leftarrow (x, y)$, Imagen de salida con coordenadas marcadas *outImgCoorL*

```

1: imgHough  $\leftarrow$  np.zeros_like(inImg) ▷ Nueva imagen para Hough
2: function FOR I IN RANGE(imgPointBin.shape[0]:)
3:   function FOR J IN RANGE(imgPointBin.shape[1]:)
4:     val  $\leftarrow$  imgPointBin[i, j]
5:     function IF(val:)
6:       imgHough[i, j]  $\leftarrow$  inImg[i, j]
7: imgHough  $\leftarrow$  cv2.cvtColor(imgHough, cv2.COLOR_RGB2GRAY)
8: function cv2.HOUGH_CIRCLES(imgHough, cv2.HG, 1, 50, param1, param2, minRadius, maxRadius)
9:   Return hCircles ▷ Círculos detectados
10: hCircles  $\leftarrow$  np.uint16(np.around(hc))
11: x, y, r = hCircles[0][0]
12: function FOR IDX, I IN ENUMERATE(hCircles[0,:])
13:   outImgCoorL = cv2.circle(inImg, (i[0], i[1]), i[2], (255, 0, 0), 4)
14:   outImgCoorL = cv2.circle(inImg, (i[0], i[1]), 2, (0, 255, 0), 1)
15: Return cPointL, outImgCoorL

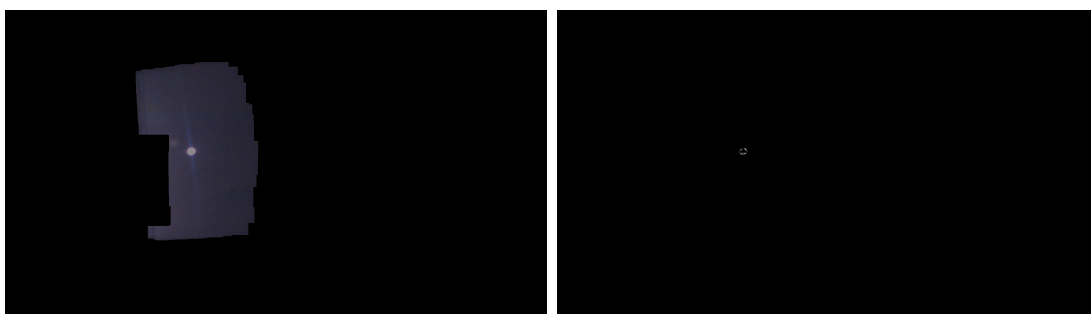
```

Finalmente, en las Figuras 4.14 y 4.15 se visualiza el proceso de segmentación, binarización y detección del punto proyectado por luz blanca de acuerdo a sus coordenadas en la última imagen de los subconjuntos *Projector_P1* y *Projector_P2* respectivamente, como un ejemplo de la detección precisa mediante los algoritmos desarrollados.

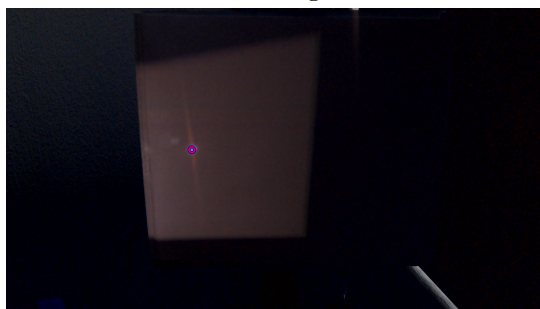
4.2.6. Normalización de las coordenadas del punto de interés

Con el propósito de obtener coordenadas del punto de interés en un rango de valores consistente para diferentes imágenes con dimensiones específicas y, al mismo tiempo, minimizar el error de redondeo al aplicar estas coordenadas en los métodos de ajuste, en este trabajo se presenta una función de normalización que se detalla en el Algoritmo 6.

La normalización tiene como objetivo estandarizar los valores de las columnas numéricas en el conjunto de datos para utilizar una escala uniforme, sin distorsionar las diferencias

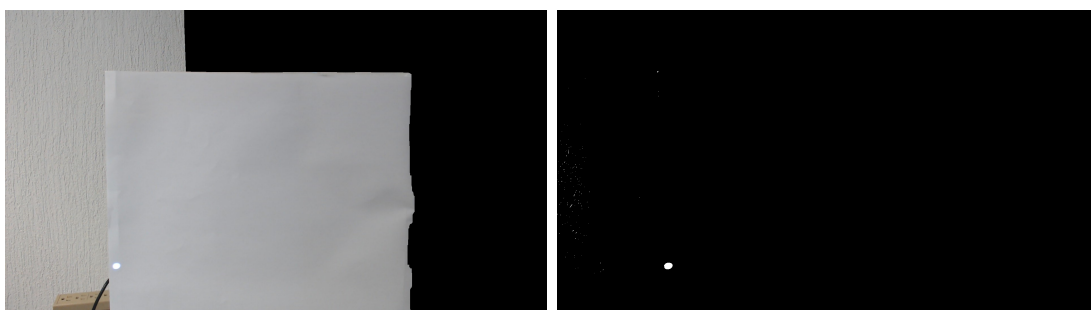


(a) Nueva imagen con zonas de interés. (b) Imagen binaria con punto de interés segmentado.



(c) Ubicación del punto de interés mediante las coordenadas obtenidas.

Figura 4.14: Segmentación, binarización y ubicación de coordenadas de la última imagen en Proyector_P1.



(a) Nueva imagen con zonas de interés. (b) Imagen binaria con punto de interés segmentado.



(c) Ubicación del punto de interés mediante las coordenadas obtenidas.

Figura 4.15: Segmentación, binarización y ubicación de coordenadas de la última imagen en Proyector_P1.

en los intervalos de valores ni perder información valiosa. Esta normalización resuelve los problemas de redondeo que comúnmente se presentan en operaciones por computadora, generando nuevos valores que mantienen la distribución general y las relaciones en los datos originales, al tiempo que garantiza que estos valores se encuentren en una escala general que es aplicable a cualquier imagen.

Para normalizar las coordenadas en cualquiera de las imágenes de los subconjuntos que conforman la base de datos de este trabajo, se utilizó la Ecuación 2.31 para la normalización de un conjunto de datos por máximos y mínimos.

Algoritmo 6 Normalización de las coordenadas del punto de interés

Input: Coordenada eje x x , coordenada eje y y , ancho de la imagen wx , alto de la imagen hx

Output: Coordenadas normalizadas del punto de interés (CX, CY)

- 1: **function** NORM(inputX = 0, valMax = 0, valMin = 0, newValMax = 1)
 - 2: **normCoord** $\leftarrow (inputX - valMin)/(valMax - valMin) * newValMax$
 - 3: **Return** *normCoord*
 - 4: $CX \leftarrow norm(x, wx)$ ▷ Coordenada normalizada en el eje x
 - 5: $CY \leftarrow norm(y, hx)$ ▷ Coordenada normalizada en el eje y
-

Finalmente, en el Anexo E se muestran las coordenadas originales y normalizadas de cada subconjunto de imágenes, utilizando el sistema de calibración con láser. Así mismo, en el Anexo F se muestran las coordenadas originales y normalizadas de cada subconjunto de imágenes, utilizando el sistema de calibración con proyector de luz blanca.

4.3. Implementación de métodos de ajuste para la estimación del punto de interés

En esta sección, se expondrán los métodos de ajuste matemáticos empleados para estimar la posición tridimensional del punto de interés con relación a la profundidad (eje z). Esta estimación se obtiene con la información de las coordenadas obtenidas en la sección 4.2 de cada uno de los subconjuntos de imágenes obtenidos.

Para evaluar el rendimiento de cada uno de los métodos propuestos, se empleó el método de validación cruzada, que consiste en la división de las coordenadas obtenidas a partir del procesamiento de las imágenes del dataset en dos conjuntos:

- Datos de entrenamiento: Este conjunto está compuesto por las posiciones del plano de referencia que son múltiplos de cinco (0,5,10,15...), empezando desde la posición inicial de cero centímetros del plano en el riel milimétrico hasta la posición final del mismo de acuerdo al conjunto de imágenes.
- Datos de prueba: Este conjunto está conformado por el resto de muestras que representan los datos de las posiciones no consideradas en los modelos de ajuste (1,2,3,4,6...).

4.3.1. Regresión polinomial por mínimos cuadrados

Uno de los métodos de ajuste utilizados en este trabajo para la estimación de la posición de los puntos de interés en relación con la profundidad es la regresión polinomial utilizando el método de mínimos cuadrados. De acuerdo con la Ecuación 2.24, al resolver este sistema de ecuaciones se obtienen los coeficientes de ajuste a_0 , a_1 y a_2 para ajustar la curva de un polinomio de segundo grado (Ecuación 2.23). A continuación, en la Tabla 4.7 se muestran los coeficientes utilizados en cada polinomio de ajuste para los datos de cada uno de los subconjuntos de imágenes obtenidos.

Tabla 4.7: Coeficientes de ajuste para regresión polinomial por mínimos cuadrados.

Subconjunto de imágenes	Coeficiente a_0	Coeficiente a_1	Coeficiente a_2
Láser_P1	-30.6678	0.2899	-0.00023
Láser_P3	33.6051	0.0386	-0.000057
Láser_P4	30.4011	0.0488	0.000061
Proyector_P1	28.8245	0.0531	-0.000064
Proyector_P1	37.2027	0.0256	-0.000052

Finalmente, dentro del Anexo G se muestran los resultados de ajuste, los datos de entrenamiento y los datos de prueba para los subconjuntos de imágenes utilizando puntos de interés por láser (G.1). Del mismo modo, en el Anexo H se muestran los resultados del ajuste en puntos de interés utilizando proyector de luz blanca (H.1).

4.3.2. Interpolación lineal

De acuerdo con la Ecuación 2.25 que describe un polinomio de interpolación de primer grado, para obtener la estimación de los puntos de interés por este método fue esencial

agrupar los datos de entrenamiento en intervalos (2 datos para cada muestra). Después, al conjunto de prueba se asignaron los intervalos correspondientes que estén dentro del rango de cada una de las muestras.

En el Anexo G se muestran los resultados de ajuste para las coordenadas no consideradas en el ajuste en el subconjunto de imágenes utilizando puntos de interés por láser (G.2). Del mismo modo, en el Anexo H se muestran los resultados de ajuste en puntos de interés utilizando proyector de luz blanca (H.2).

4.3.3. Interpolación cuadrática

De acuerdo con la Ecuación 2.26 que describe un ajuste de curva para un polinomio de interpolación de segundo grado, para obtener la estimación de los puntos de interés por este método fue fundamental tres coeficientes de ajuste (b_0 , b_1 y b_2), los cuales al tratarse de un polinomio de segundo grado, también son los mismos que los usados en la regresión polinomial, mostrados en la Tabla 4.7. Posteriormente, se requiere agrupar los datos de entrenamiento en segmentos de 3 datos para estimar la posición en el eje z de cada uno de los puntos no considerados dentro del modelo.

Finalmente, en el Anexo G se muestran los resultados de ajuste para las coordenadas no consideradas en el ajuste en el subconjunto de imágenes utilizando puntos de interés por láser (G.3). Del mismo modo, en el Anexo H se muestran los resultados de ajuste en puntos de interés utilizando proyector de luz blanca (H.3).

4.3.4. Spline cúbico

De acuerdo con la Ecuación 2.30 que describe un ajuste de curva compuesta por segmentos polinómicos de tercer grado, para obtener la estimación de los puntos de interés por este método se dividieron los datos de entrenamiento en segmentos de 3 datos para estimar la posición en el eje z de cada uno de los puntos no considerados dentro del modelo.

Finalmente, en el Anexo G se muestran los resultados de ajuste para las coordenadas no consideradas en el ajuste en el subconjunto de imágenes utilizando puntos de interés por láser (G.4). Del mismo modo, en el Anexo H se muestran los resultados de ajuste en puntos de interés utilizando proyector de luz blanca (H.4).

4.4. Análisis estadístico de los resultados de los métodos de ajuste

Para evaluar los resultados obtenidos en los métodos de ajuste y determinar cuál presenta un desempeño óptimo en la estimación de la ubicación de los puntos de interés por ambos métodos de proyección, a continuación, se presenta el análisis estadístico de estos los métodos de acuerdo con los siguientes datos:

- Promedio del error absoluto en todas las muestras estimadas mediante el método de ajuste correspondiente (abreviado como $\overline{EA}$).
- Promedio del error relativo en todas las muestras estimadas mediante el método de ajuste correspondiente (abreviado como $\overline{ER}$).
- Coeficiente de correlación (r) entre la variable dependiente (dato por ajustar en eje Z) y la variable independiente (resultado de la estimación por el método de ajuste correspondiente).
- Coeficiente de determinación (r^2) entre la variable independiente resultado de la estimación por el método de ajuste correspondiente y la variable dependiente (dato por ajustar en eje Z).

En primer lugar, en la Tabla 4.8 se presentan los datos de evaluación estadística relacionados con los resultados de ajuste utilizando el método de regresión polinomial por mínimos cuadrados (abreviado como MC) en los datos de entrenamiento de los 5 subconjuntos de imágenes. En la tabla, se resalta en color verde que el mejor ajuste según este método se logró en el subconjunto *Láser_P1*, obteniendo un coeficiente de correlación de 0.9999 y un coeficiente de determinación de 0.9998. Estos resultados indican que el modelo explica el 99.98 % de la incertidumbre original, lo que refleja un ajuste excelente.

El análisis estadístico de los métodos de ajuste aplicados a los datos de prueba de los subconjuntos *Láser_P2*, *Láser_P3* y *Láser_P4* se presenta en las Tablas 4.9, 4.10 y 4.11, respectivamente. En cada una de estas Tablas, se destaca de color verde el método de ajuste más efectivo, el cual para el caso de estos subconjuntos, el método de interpolación cuadrática refleja el mejor ajuste, explicando el 99.99 % de la incertidumbre original para estimar la posición en relación con la profundidad de los puntos de interés proyectados

Tabla 4.8: Comparación de resultados de ajuste con datos de entrenamiento usando Regresión Polinomial por Mínimos Cuadrados.

Subconjunto	$\overline{EA}$	$\overline{ER}$	r	r^2
Láser_P1	0.1352	0.6080	0.9999	0.9998
Láser_P3	0.5048	2.2180	0.999	0.998
Láser_P4	0.4831	1.9573	0.999	0.9981
Proyector_P1	0.6051	2.4146	0.9985	0.9971
Proyector_P	20.4468	2.1418	0.9992	0.9984

por láser. Además, la elección de la interpolación cuadrática como el mejor método de ajuste se basó en que los resultados de este método arrojaron un promedio inferior en términos de error relativo y error absoluto en comparación con los otros métodos.

En el Anexo I, se muestra gráficamente el ajuste y estimación de los puntos de interés proyectados por láser utilizando los cuatro métodos de ajuste propuestos en este trabajo.

De la misma forma, se llevó a cabo un análisis estadístico de los métodos de ajuste aplicados a los datos de prueba en los subconjuntos *Proyector_P1* y *Proyector_P2*, y los resultados se presentan en las Tablas 4.12 y 4.13, respectivamente. Al igual que en los subconjuntos de imágenes de puntos de interés por láser, el método de interpolación cuadrática se destacó como la opción más efectiva para estimar la posición en relación con la profundidad de los puntos de interés proyectados por luz blanca, obteniendo un coeficiente de determinación de 99.97% en ambos subconjuntos, lo que explica que el modelo tiene un ajuste excelente. Además, el método de ajuste por interpolación obtiene en sus resultados un promedio inferior en términos de error relativo y error absoluto en comparación con los otros métodos.

Finalmente, en el Anexo J, se muestra gráficamente el ajuste y estimación de los puntos de interés proyectados por láser utilizando los cuatro métodos de ajuste propuestos en este trabajo.

Tabla 4.9: Resultados de métodos de ajuste con el subconjunto Láser_P1.

Subconjunto	$\overline{EA}$	$\overline{ER}$	r	r^2
Regresión Polinomial MC	0.1352	0.6080	0.9999	0.9998
Interpolación Lineal	0.1246	2.1662	0.9999	0.9999
Interpolación Cuadrática	0.1065	2.0324	0.9999	0.9999
Spline Cúbico	0.1080	2.0953	0.9999	0.9998

Tabla 4.10: Resultados de métodos de ajuste con el subconjunto Láser_P3.

Subconjunto	$\overline{EA}$	$\overline{ER}$	r	r^2
Regresión Polinomial MC	0.4296	5.5804	0.9992	0.9985
Interpolación Lineal	0.1093	0.8245	0.9999	0.9999
Interpolación Cuadrática	0.0604	0.8176	0.9999	0.9999
Spline Cúbico	0.0616	0.9999	0.9999	0.9999

Tabla 4.11: Resultados de métodos de ajuste con el subconjunto Láser_P4.

Subconjunto	$\overline{EA}$	$\overline{ER}$	r	r^2
Regresión Polinomial MC	0.4442	5.1213	0.9992	0.9985
Interpolación Lineal	0.1319	1.8904	0.9999	0.9999
Interpolación Cuadrática	0.0627	1.4764	0.9999	0.9999
Spline Cúbico	0.0664	1.4822	0.9999	0.9999

Tabla 4.12: Resultados de métodos de ajuste con el subconjunto Proyector_P1.

Subconjunto	$\overline{EA}$	$\overline{ER}$	r	r^2
Regresión Polinomial MC	0.5321	6.7520	0.9988	0.9977
Interpolación Lineal	0.1867	1.9625	0.9998	0.9997
Interpolación Cuadrática	0.1472	2.0070	0.9998	0.9997
Spline Cúbico	0.1429	2.0302	0.9998	0.9997

Tabla 4.13: Resultados de métodos de ajuste con el subconjunto Proyector_P2.

Subconjunto	$\overline{EA}$	$\overline{ER}$	r	r^2
Regresión Polinomial MC	0.4332	5.6188	0.9993	0.9986
Interpolación Lineal	0.1177	1.0052	0.9998	0.9997
Interpolación Cuadrática	0.1245	0.9815	0.9998	0.9997
Spline Cúbico	0.1412	1.0374	0.9998	0.9997

Capítulo 5

Conclusiones

Los resultados obtenidos de este trabajo de investigación muestran un sistema de calibración de cámara que emplea dos métodos de proyección para un punto de interés: 1) proyección mediante láser y 2) proyección mediante luz blanca. Este sistema se basa en dispositivos asequibles y de fácil manejo, compuestos principalmente por un plano de referencia ubicado sobre un riel milimétrico de 50 centímetros de longitud, una cámara web y el dispositivo de proyección del punto de interés.

Con el sistema de calibración propuesto se obtuvo un dataset de imágenes conformado por tres conjuntos principales:

- Imágenes de un punto de interés utilizando láser.
- Imágenes de un punto de interés utilizando proyector de luz blanca.
- Imágenes de un tablero de ajedrez sobre el plano de referencia.

Cada conjunto descrito comprende imágenes capturadas desde una única perspectiva para cada muestra, ilustrando los desplazamientos del plano de referencia con movimientos de atrás hacia adelante. Es relevante destacar que el plano de referencia es el único componente del sistema de calibración que experimenta movimiento, mientras que los demás permanecen estáticos a distancias predefinidas durante la adquisición de cada conjunto de imágenes.

Para obtener la información sobre la posición de los puntos de interés, se aplicaron técnicas de PDI específicas en las imágenes obtenidas. Estas técnicas se seleccionaron en función

de diversas propiedades de las imágenes, centrándose particularmente en los niveles de intensidad del histograma. Las técnicas de PDI utilizadas para la detección de los puntos de interés proyectados por láser son:

- Segmentación a partir del histograma.
- Operaciones morfológicas.
- Operación de dilatación.
- Momentos.

Por otra parte, las técnicas de PDI utilizadas para la detección de los puntos de interés proyectados por luz blanca son:

- Segmentación a partir del histograma.
- Método de Hough.

Gracias a la aplicación de estas técnicas, fue posible obtener la posición en el sistema de coordenadas 2D de los puntos de interés mediante ambos métodos de proyección. Posteriormente, estas coordenadas se sometieron a un proceso de normalización con el propósito de potenciar la interpretación de los datos y prevenir posibles inconvenientes de rendimiento en el modelo de estimación de posición en el sistema de coordenadas 3D de los puntos de interés.

Finalmente, para calcular la posición de los puntos de interés en el sistema de coordenadas tridimensional empleando ambos métodos de proyección, se implementaron cuatro métodos de ajuste matemático. En este proceso, las coordenadas derivadas de los conjuntos de imágenes, se dividieron en conjuntos de datos de entrenamiento y prueba, con el propósito de aplicar la técnica de validación cruzada y mejorar la robustez del análisis.

Los métodos de ajuste utilizados fueron los siguientes:

- Regresión polinomial por mínimos cuadrados.
- Interpolación lineal.
- Interpolación cuadrática.
- Spline cúbico.

La técnica de ajuste que ha demostrado obtener resultados de precisión significativamente elevados en la estimación de la posición de los puntos de interés proyectados mediante láser, que conforman los datos de prueba, es la interpolación cuadrática, la cual logra obtener un coeficiente de correlación de 99.99 % y un error absoluto promedio inferior a 0.1. De manera similar, en el caso de la estimación de los puntos de interés proyectados con luz blanca que conforman los datos de prueba, la interpolación cuadrática también destaca como el método de ajuste preferido, logrando un coeficiente de correlación del 99.98 % usando este modelo de ajuste y un error absoluto promedio inferior a 0.2.

En conclusión, se demuestra que la implementación del sistema de calibración propuesto en este trabajo de investigación puede localizar de manera efectiva un punto de interés en el sistema de coordenadas 3D en diferentes posiciones con respecto a la profundidad, haciendo uso de elementos de fácil acceso, y la aplicación de técnicas de PDI y métodos de ajuste matemático. La metodología propuesta se presenta como una herramienta suficiente para determinar la posición de uno o varios puntos de interés en el sistema de coordenadas 3D.

Es importante destacar que de manera general los sistemas de calibración de cámara juegan un papel crucial en este contexto, permitiendo la obtención de información espacial de diversos objetos de interés a través de imágenes capturadas por estos sistemas. Estos hallazgos subrayan la factibilidad y utilidad de la propuesta, abriendo oportunidades para su aplicación en diversos campos que requieran la precisa localización de objetos de interés en un entorno tridimensional.

El sistema de calibración propuesto en este trabajo de investigación, puede ser utilizado en diversas aplicaciones donde el objetivo general sea localizar puntos de interés en el sistema de coordenadas 3D mediante imágenes, ya que el porcentaje de precisión utilizando la metodología propuesta es superior al 95 % utilizando dos métodos de proyección distintos para representar dicho punto de interés. De manera específica y como propuesta de valor, el área de antropometría tiene diferentes áreas de oportunidad y desarrollo para optimizar la adquisición de medidas antropométricas en seres humanos mediante imágenes digitales de acuerdo a la información de diversos puntos de interés sobre regiones específicas en el cuerpo humano. Es por ello que se encuentra a la metodología propuesta como una solución eficaz para obtener información de las medidas antropométricas

de las personas que conforman un grupo étnico específico con el propósito de resolver diferentes problemáticas actuales (X. Zheng et al., 2020; Shah et al., 2019; Gan et al., 2020; Abd Rahman et al., 2018; Silva et al., 2019; Stark et al., 2022) y todo mediante el procesamiento digital y análisis matemático y estadístico de la información proveniente de las imágenes obtenidas por el sistema propuesto.

5.1. Trabajos Futuros

En este trabajo de investigación, se propone un sistema de calibración utilizando dos métodos de proyección diferentes para representar un punto de interés sobre un plano de referencia y obtener su ubicación en el sistema de coordenadas bidimensional y tridimensional. Sin embargo, una gran contribución para este trabajo sería localizar y obtener, simultáneamente y de manera automática, la ubicación de diversos puntos de interés en el sistema de coordenadas bidimensional y tridimensional mediante una imagen de una sola perspectiva.

Entre los conjuntos de imágenes del dataset obtenidos con el sistema propuesto, descritos en la sección 4.1.3, se presenta un conjunto que contiene diversas imágenes de un tablero de ajedrez posicionado sobre el plano de referencia del sistema, tal como se muestra en la Figura 9 en el Anexo 9. Cada posición del tablero exhibe cuatro esquinas que sirven como puntos de interés, de los cuales es posible obtener sus coordenadas bidimensionales mediante técnicas de PDI y estimar su posición con respecto a la profundidad mediante interpolación cuadrática, el cual fue el método de ajuste con desempeño más óptimo. Sin embargo, las imágenes del conjunto muestran deformaciones y aberraciones causadas por factores internos y externos del sistema de calibración, afectando la estructura del tablero, y con ello, generando errores en las coordenadas de los puntos de interés.

Es por ello que de acuerdo con los resultados obtenidos en este trabajo, se proponen los siguientes trabajos futuros:

- Desarrollar una metodología que permita eliminar las posibles deformaciones de las imágenes a procesar mediante técnicas de PDI o visión por computadora y utilizando el sistema de calibración propuesto.
- Implementar un método de ajuste de interpolación cuadrática para obtener la infor-

mación de la posición en el sistema de coordenadas 3D de varios puntos de interés representados simultáneamente en una imagen y en una sola perspectiva, esto de acuerdo con la información de su posición en el sistema de coordenadas 2D.

- Desarrollar una función que permita obtener automáticamente la relación pixel-centímetro entre dos o varios puntos de interés, tomando en cuenta la metodología que resuelva las posibles deformaciones en las imágenes a procesar, y la rotación y traslación del objeto de interés. Esta función tendrá la finalidad de hacer una relación de medidas obtenidas de una imagen digital con medidas en el mundo real.

Referencias

- Abadi, A. B., y Tahcfulloh, S. (2022). Digital image processing for height measurement application based on python opencv and regression analysis. *JOIV: International Journal on Informatics Visualization*, 6(4), 763-770.
- Abdel-Aziz, Y. I., Karara, H. M., y Hauck, M. (2015). Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry. *Photogrammetric engineering and remote sensing*, 81(2), 103-107.
- Abd Rahman, N. I., Md Dawal, S. Z., Yusoff, N., y Mohd Kamil, N. S. (2018). Anthropometric measurements among four asian countries in designing sitting and standing workstations. *Sādhanā*, 43, 1-9.
- AWS. (2023). *¿qué es python?* Descargado de <https://aws.amazon.com/es/what-is/python/>
- Baker, S., Nayar, S. K., y Murase, H. (1998). Parametric feature detection. *International Journal of Computer Vision*, 27(1), 27-50.
- Bartsch, J., Sperling, Y., y Bergmann, R. B. (2021). Efficient vision ray calibration of multi-camera systems. *Optics Express*, 29(11), 17125-17139.
- BenAbdelkader, C., y Yacoob, Y. (2008). Statistical body height estimation from a single image. *8th IEEE international conference on automatic face and gesture recognition*, 1-7.
- Chapra, S. C., Canale, R. P., Ruiz, R. S. G., Mercado, V. H. I., Díaz, E. M., y Benites, G. E. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros*. (7.^a ed., Vol. 5). McGraw-Hill.
- Chen, J., Zhu, F., y Little, J. (2018). A two-point method for ptz camera calibration in sports. En (p. 287-295). IEEE.

- Clarke, T., y Fryer, J. (1998). The development of camera calibration methods and models. *The Photogrammetric Record*, 16(91), 51-66.
- Criminisi, A. (2001). *Accurate visual metrology from single and multiple uncalibrated images*. Springer Science and Business Media.
- Das, S., Nag, A., Adhikary, D., Ram, R. J., BR, A., Ojha, S. K., y Hegde, G. M. (2021). Computer vision-based social distancing surveillance solution with optional automated camera calibration for large scale deployment. *arXiv preprint*.
- Dell. (2023). *Projector dell m115hd, dlp , wxga 1280x800*. Descargado de <https://cutt.ly/kwjzSX8R>
- Depot, M. O. (2023). *Apuntador láser spectra 50260 pluma negra*. Descargado de <https://www.officedepot.com.mx/officedepot/en/kiosk/kioskd/50260>
- dlhr06. (2023, November). *Calibration Camera System: Point of interest projection with laser and white light*. Descargado de <https://github.com/dlhr06/CalibrationCameraSystem>
- Foundation, P. S. (2023). *The python tutorial*. Descargado de <https://docs.python.org/3/tutorial/index.html>
- Gai, S., Da, F., y Dai, X. (2018). A novel dual-camera calibration method for 3d optical measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, 104, 126-134.
- Gallagher, A., Blose, A., y Chen, T. (2009). Jointly estimating demographics and height with a calibrated camera. *IEEE 12th International Conference on Computer Vision*, 1187-1194.
- Gan, X. Y., Ibrahim, H., y Ramli, D. A. (2020). A simple vision based anthropometric estimation system using webcam. *Journal of Physics: Conference Series*, 1529(2).
- Gao, Z., Zhu, M., y Yu, J. (2021). A novel camera calibration pattern robust to incomplete pattern projection. *IEEE Sensors Journal*, 21(8), 10051-10060.
- Gonzalez, R. C., y Woods, R. E. (2018). *Digital image processing, global edition*. Pearson UK.

- Han, J., Kamber, M., y Pei, J. (2012). *Data mining concepts and techniques. third edition.* Elsevier.
- Huang, B., Tang, Y., y Ozdemir, H., S.and Ling. (2021). A fast and flexible projector-camera calibration system. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 18(3), 1049-1063.
- Ishikawa, R., Oishi, T., y Ikeuchi, K. (2018). Lidar and camera calibration using motions estimated by sensor fusion odometry. En *2018 ieee/rsj international conference on intelligent robots and systems (iros)* (p. 7342-7349). IEEE.
- Jiang, J., Zeng, L., Chen, B., Lu, Y., y Xiong, W. (2019). An accurate and flexible technique for camera calibration. *Computing*, 101, 1971,1988.
- Jung, J., Yoon, I., Lee, S., y Paik, J. (2016). Object detection and tracking-based camera calibration for normalized human height estimation. *Journal of Sensors*.
- Kaehler, A., y Bradski, G. (2016). *Learning opencv 3: Computer vision in c++ with the opencv library.* O'Reilly Media, Inc.
- Kohlschütter, T., y Herout, P. (2012). Automatic human body parts detection in a 2d anthropometric system. *International Symposium on Visual Computing*, 536-544.
- Li, Z., Yuan, Y., Ke, F., He, W., y Su, C. Y. (2021). Robust vision-based tube model predictive control of multiple mobile robots for leader–follower formation. *Optics Express*, 29(11), 17125-17139.
- Lin, Y., Larsson, V., Geppert, M., Kukulova, Z., Pollefeys, M., y Sattler, T. (2020). Infrastructure-based multi-camera calibration using radial projections. *Computer Vision–ECCV 2020: 16th European Conference*, 16, 327-344.
- Liu, Y., Sowmya, A., y Khamis, H. (2018). Single camera multi-view anthropometric measurement of human height and mid-upper arm circumference using linear regression. *PloS one*, 13(4).
- Logitech. (2023). *Cámara web logitech c920s pro full hd con tapa de privacidad.* Descargado de <https://bit.ly/47K83rW>

- Luhmann, T., Fraser, C., y Maas, H. G. (2016). Sensor modelling and camera calibration for close-range photogrammetry. *SPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 115, 37-46.
- Matplotlib. (2023). *Matplotlib — visualization with python*. Descargado de <https://matplotlib.org/>
- MSI. (2023). *Laptop msi pulse gl66*. Descargado de <https://mx.msi.com/Laptop/Pulse-GL66-11UX>
- Murray, R. S. (1975). *Schaum's outline of theory and problems of probability and statistics*. McGraw-Hill.
- Newbold, P., Carlson, W. L., y Thorne, B. M. (2008). *Statistics for business and economics*. Pearson.
- Numpy. (2023). *Numpy documentation*. Descargado de <https://numpy.org/doc/stable/>
- OpenCV. (2020). *Hough circle transform*. Descargado de https://docs.opencv.org/4.x/da/d53/tutorial_py_houghcircles.html
- Pajares, G., y De la Cruz, J. (2008). *Visión por computador: Imágenes digitales y aplicaciones*. Alfaomega.
- Panteleris, P., Oikonomidis, I., y Argyros, A. (2018). Using a single rgb frame for real time 3d hand pose estimation in the wild. *IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision (WACV)*, 436-445.
- Parvez, M. S., Parvin, F., Shahriar, M. M., y Kibria, G. (2018). Design of ergonomically fit classroom furniture for primary schools of bangladesh. *Journal of Engineering*, 1-9.
- Ramírez-Hernández, L. R., Rodríguez-Quinoñez, J. C., Castro-Toscano, M. J., Hernández-Balbuena, D., Flores-Fuentes, W., Rascón-Carmona, R., y Sergiyenko, O. (2020). Improve three-dimensional point localization accuracy in stereo vision systems using a novel camera calibration method. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 17(1).

- Ren, Z., Fang, F., Yan, N., y Wu, Y. (2022). State of the art in defect detection based on machine vision. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology*, 9(2), 661-691.
- Rojas, I. M., Robledo, M. P., de la Rosa, F. J. C., y Arguijo, P. (2019). Reconstrucción tridimensional de objetos mediante el uso de luz estructurada. *Res. Comput. Sci.*, 148(8), 91-103.
- Sels, S., Ribbens, B., y Vanlanduit, R., S. andPenne. (2019). Camera calibration using gray code. *Sensors 2019*, 19(2), 246.
- Shah, J., Shah, C., Sandhu, H., Shaikh, M., y Natu, P. (2019). A methodology for extracting anthropometric measurements from 2d images. En *2019 international conference on advances in computing, communication and control (icac3)*.
- Silva, D., Ferriani, L., y Viana, M. C. (2019). Depression, anthropometric parameters, and body image in adults: a systematic review. *Revista da Associação Médica Brasileira*, 65, 731-738.
- Stark, E., Haffner, O., y Kučera, E. (2022). Low-cost method for 3d body measurement based on photogrammetry using smartphone. *Electronics*, 11(7).
- Szeliski, R. (2022). *Computer vision: algorithms and applications*. Springer Nature.
- Tatsuta, H., Takahashi, K. H., y Sakamaki, Y. (2018). Geometric morphometrics in entomology: Basics and applications. *Entomological Science*, 21(2), 164-184.
- Tsai, R. (1987). A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3d machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(4), 323-344.
- Usamentiaga, R., y García, D. F. (2019). Multi-camera calibration for accurate geometric measurements in industrial environments. *Measurement*, 134, 345-358.
- Wang, D., Sheng, Y., y Zhang, G. (2019). A new female body segmentation and feature localisation method for image-based anthropometry. *MultiMedia Modeling: 25th International Conference, MMM 2019*, 25(1), 567-577.

- Wang, Y. M., Li, Y., y Zheng, J. B. (2010). A camera calibration technique based on opencv. *Conference on Information Sciences and Interaction Sciences*, 403-406.
- Wu, F., Song, H., Dai, Z., Wang, W., y Li, J. (2021). Multi-camera traffic scene mosaic based on camera calibration. *ET Computer Vision*, 15(1), 47-59.
- Wu, X., Tang, N., Liu, B., y Long, Z. (2020). A novel high precise laser 3d profile scanning method with flexible calibration. *Optics and Lasers in Engineering*, 132, 105938.
- Wu, Y., y Ji, Q. (2019). Facial landmark detection: A literature survey. *International Journal of Computer Vision*, 127, 115-142.
- Xu, Y., y Brownjohn, J. M. (2018). Review of machine-vision based methodologies for displacement measurement in civil structures. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 8, 91-110.
- Yu, S., Zhu, R., Yu, L., y Ai, W. (2018). Effect of checkerboard on the accuracy of camera calibration. *Advances in Multimedia Information Processing-PCM 2018: 19th Pacific-Rim Conference on Multimedia*, 11166, 619-629.
- Zhang, J., Yu, H., Deng, H., Chai, Z., y Ma, X., M.and Zhong. (2018). A robust and rapid camera calibration method by one captured image. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 68(10), 4112-4121.
- Zhang, Z. (2000). A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(11), 1330-1334.
- Zhang, Z., Zhao, R., Liu, E., Yan, K., y Ma, Y. (2018). A single-image linear calibration method for cameras. *Measurement*, 130, 298-305.
- Zheng, X., Zhu, M., y Xu, Y. (2020). 3d anthropometric algorithm from a single view-point rgb-d camera. En *2020 12th international conference on advanced computational intelligence (icaci)* (p. 466-469).
- Zheng, Y., y Peng, S. (2013). A practical roadside camera calibration method based on least squares optimization. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 15(2), 831-843.

- Zhu, S., y Ge, D. (2022). A single-view camera calibration method using scene geometry. En (p. 27-34). IEEE.
- Özgüner, O., Shkurti, T., Huang, S., Hao, R., Jackson, R. C., Newman, W. S., y Çavuşoğlu, M. C. (2020). Camera-robot calibration for the da vinci robotic surgery system. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 17(4), 2154-2161.

Anexos

A. Elementos del sistema de calibración



Figura 1: Panel de referencia usado en el sistema de calibración.



Figura 2: Panel de referencia (fondo) y trípode (derecha) del sistema de calibración.

B. Sistema de calibración propuesto usando láser

El sistema de calibración propuesto para proyectar un punto mediante láser, se conforma de una cámara web montada sobre un soporte de cámara ajustable (trípode), un plano de referencia, el cual está colocado sobre un riel milimétrico y un apuntador láser. Para más información de los elementos, consulte la sección 3.1.1.

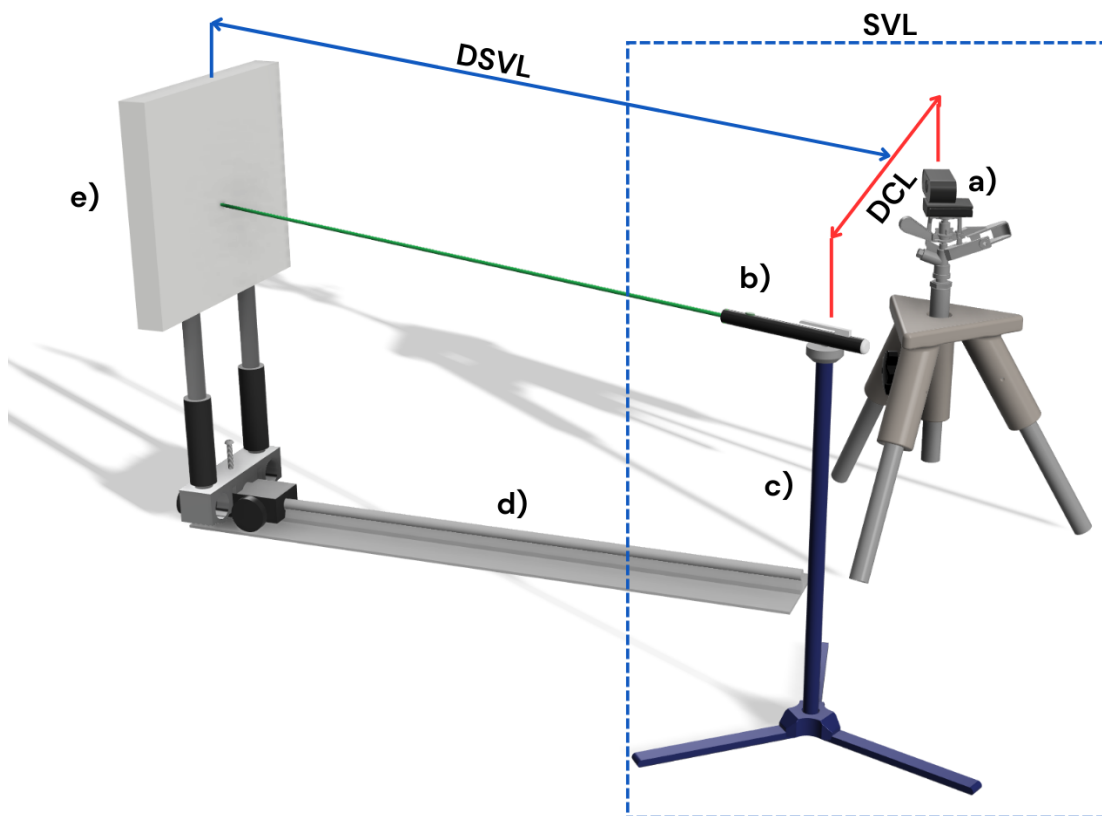


Figura 3: Diseño de sistema de calibración mediante proyección por láser.



Figura 4: Diseño propuesto empleando de una distancia mayor a un metro del plano de referencia al SVL.

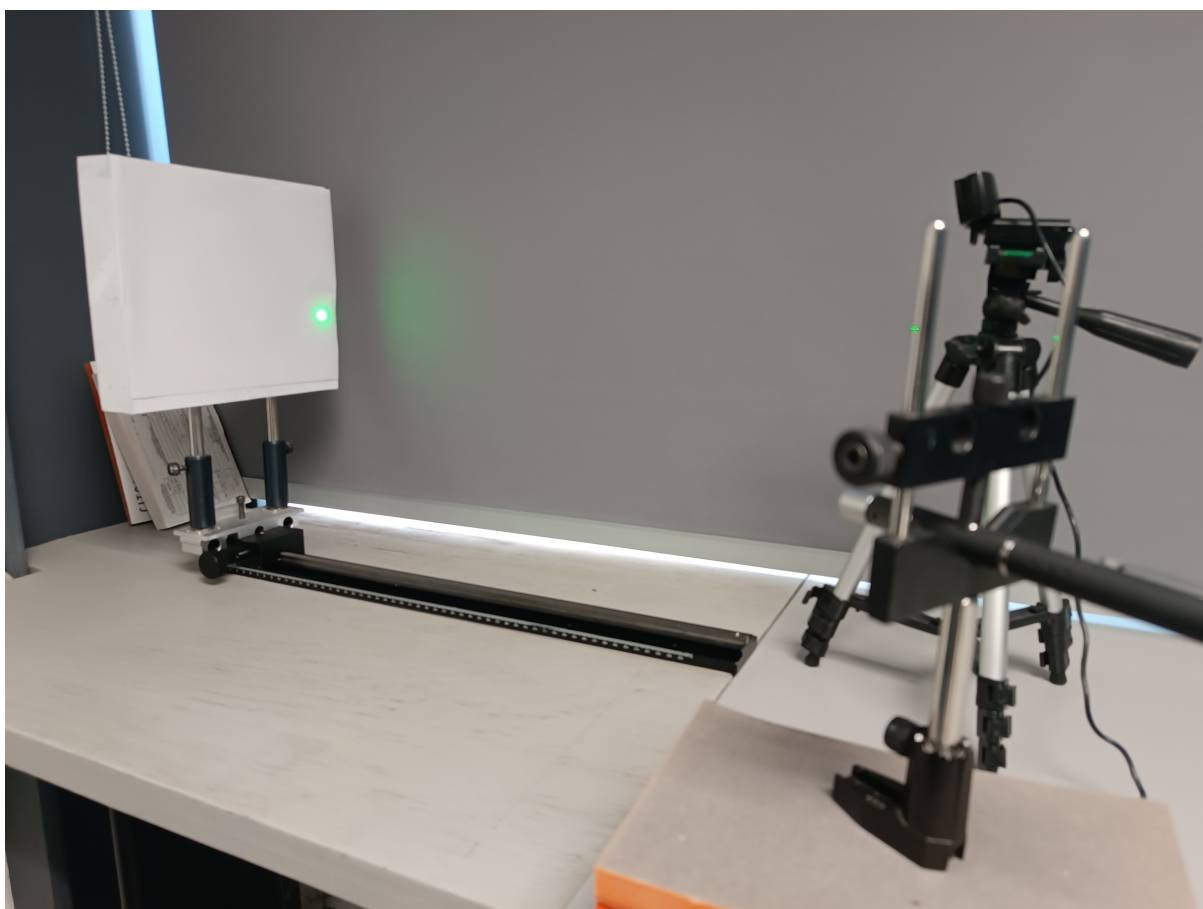


Figura 5: Diseño propuesto empleando de una distancia menor a 80 centímetros del plano de referencia al SVL.

C. Sistema de calibración propuesto usando proyector de luz blanca

El sistema de calibración propuesto para proyectar un punto mediante un proyector de luz blanca, se conforma de una cámara web montada sobre un soporte de cámara ajustable (trípode), un plano de referencia, el cual está colocado sobre un riel milimétrico y un proyector de luz blanca. Para más información de los elementos, consulte la sección 3.1.1.

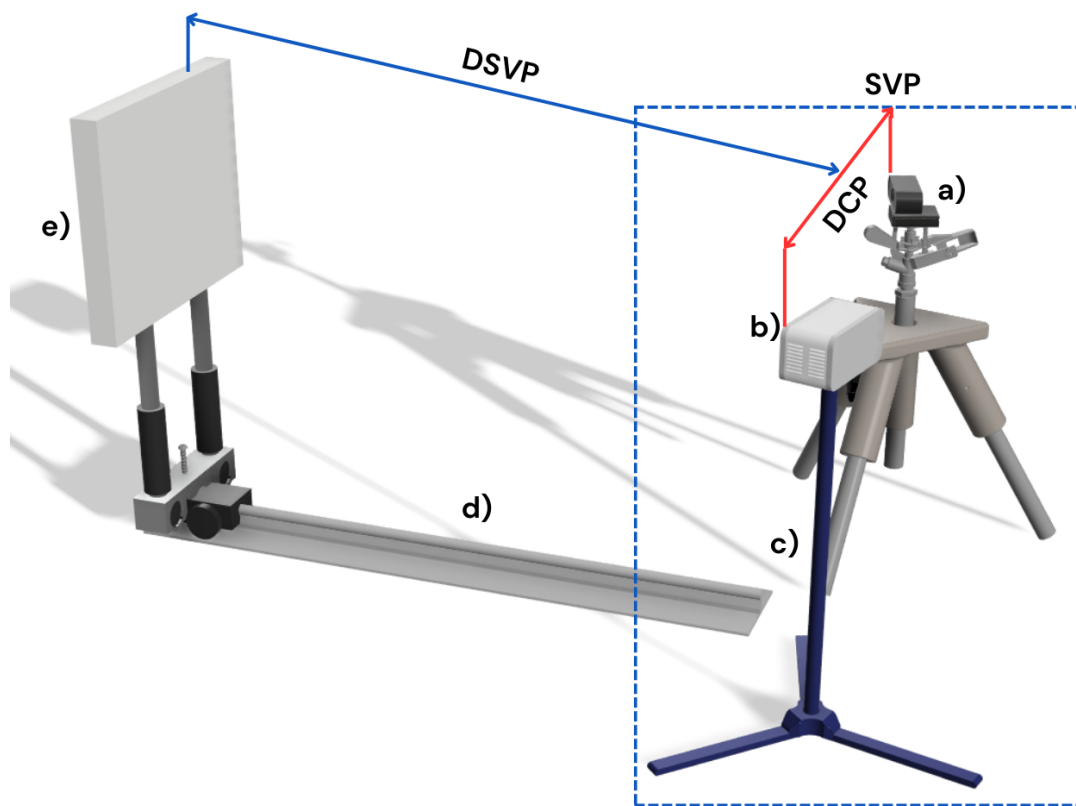


Figura 6: Diseño de sistema de calibración mediante proyección por luz blanca.



Figura 7: Diseño propuesto con luz artificial encendida.

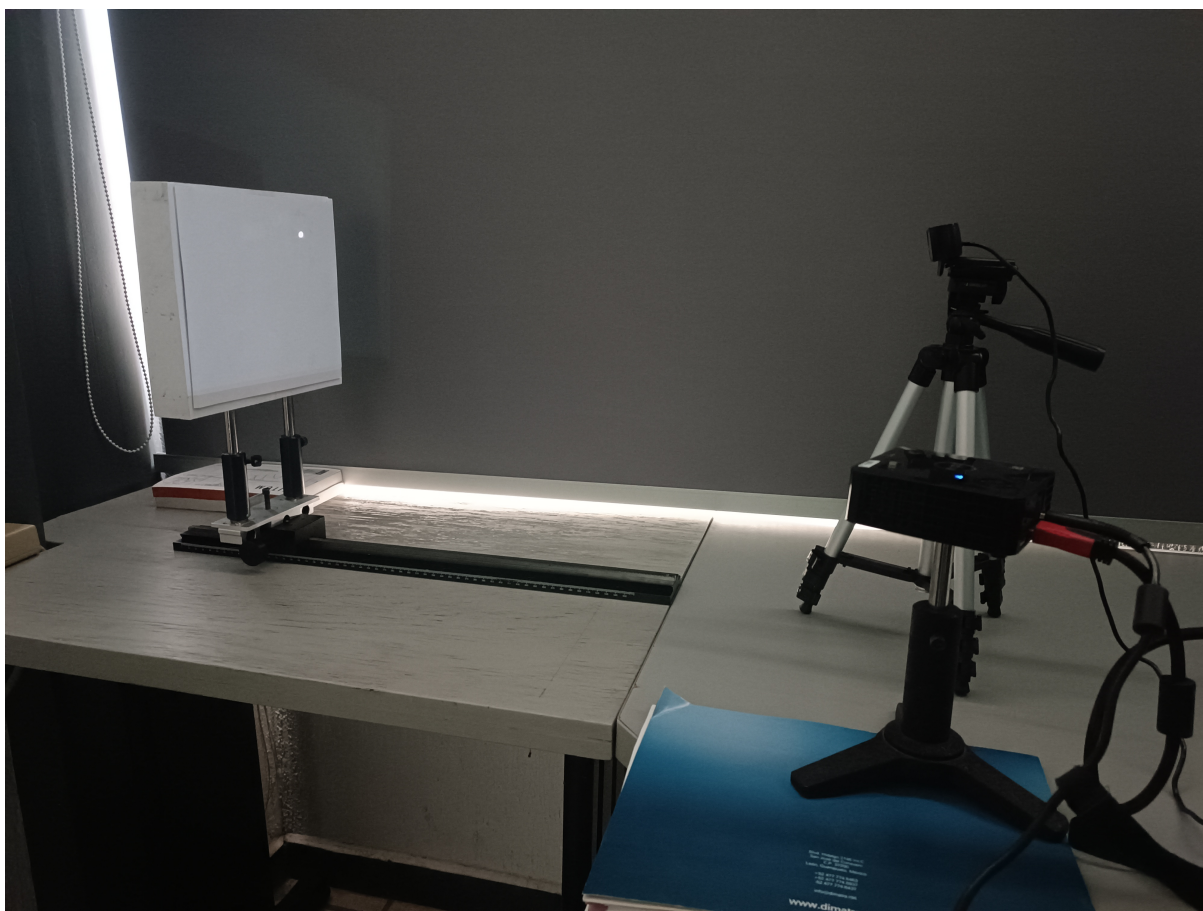


Figura 8: Diseño propuesto con luz artificial apagada.

D. Sistema de calibración propuesto usando tablero de ajedrez

El sistema de calibración propuesto utilizando un tablero de ajedrez sobre el plano de referencia, se conforma de una cámara web montada sobre un soporte de cámara ajustable (trípode) y un plano de referencia, el cual está colocado sobre un riel milimétrico. Para más información de los elementos, consulte la sección 3.1.1.

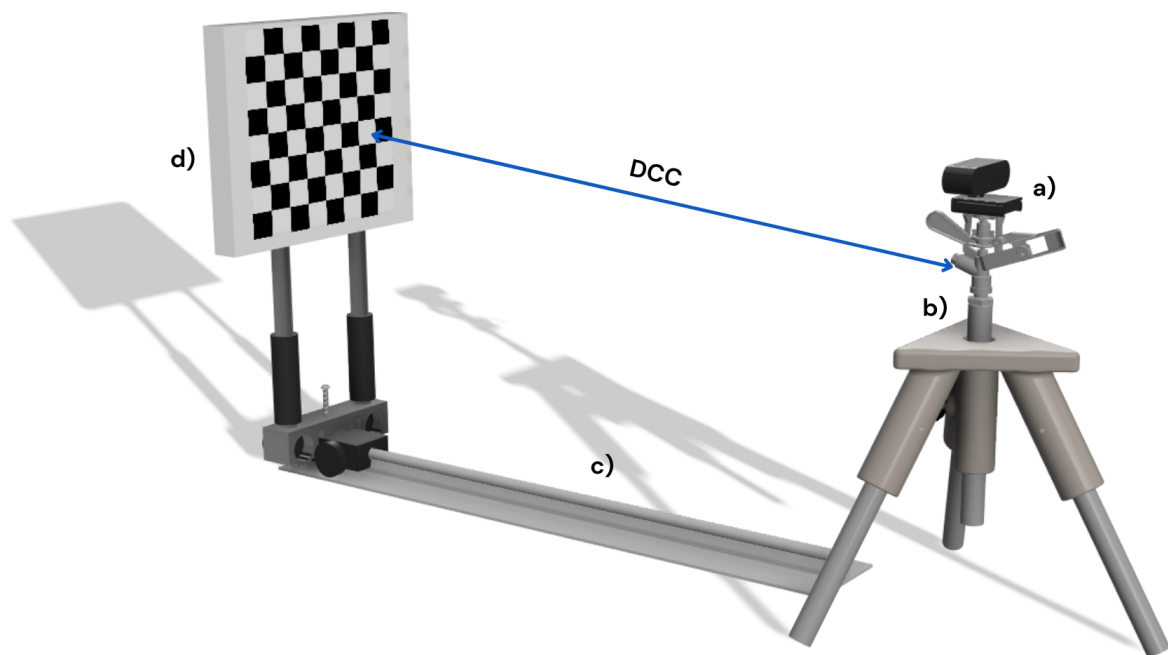


Figura 9: Diseño de sistema de calibración utilizado tablero de ajedrez.

E. Coordenadas del punto de interés usando el sistema de calibración y láser

A continuación, se presentan las coordenadas en el espacio 2D de los puntos interés detectados en los subconjuntos *Láser_P1*, *Láser_P3* y *Láser_P4*.

Muestra	Coordenadas originales		Coordenadas normalizadas		Movimiento eje Z (plano)
	X	Y	X	Y	
0	1100	650	0,5729	0,6018	0CM
1	1097	652	0,5713	0,6037	1CM
2	1093	653	0,5692	0,6046	2CM
3	1088	655	0,5666	0,6064	3CM
4	1085	656	0,5651	0,6074	4CM
5	1079	658	0,5619	0,6092	5CM
6	1074	660	0,5593	0,6111	6CM
7	1071	661	0,5578	0,612	7CM
8	1066	663	0,5552	0,6138	8CM
9	1061	664	0,5526	0,6148	9CM
10	1057	665	0,5505	0,6157	10CM
11	1051	666	0,5484	0,6166	11CM
12	1047	667	0,5453	0,6175	12CM
13	1043	670	0,5432	0,6203	13CM
14	1037	672	0,5401	0,6222	14CM
15	1033	673	0,538	0,6231	15CM
16	1028	676	0,5354	0,6259	16CM
17	1023	677	0,5328	0,6268	17CM
18	1018	679	0,5302	0,6287	18CM
19	1013	680	0,5276	0,6296	19CM
20	1007	683	0,5244	0,6324	20CM
21	1002	684	0,5218	0,6333	21CM
22	996	686	0,5187	0,6351	22CM
23	990	689	0,5156	0,6379	23CM
24	985	690	0,513	0,6388	24CM
25	979	692	0,5098	0,6407	25CM
26	974	694	0,5072	0,6425	26CM
27	967	696	0,5036	0,6444	27CM
28	961	698	0,5005	0,6462	28CM
29	955	701	0,4973	0,649	29CM
30	949	703	0,4942	0,6509	30CM
31	943	705	0,4911	0,6527	31CM
32	936	707	0,4875	0,6546	32CM
33	929	709	0,4838	0,6564	33CM
34	923	712	0,4807	0,6592	34CM
35	916	714	0,477	0,6611	35CM
36	910	716	0,4739	0,6629	36CM
37	902	719	0,4697	0,6657	37CM
38	896	721	0,4666	0,6675	38CM
39	888	723	0,4625	0,6694	39CM
40	880	727	0,4583	0,6731	40CM
41	873	729	0,4546	0,675	41CM
42	865	731	0,4505	0,6768	42CM
43	859	735	0,4473	0,6805	43CM
44	850	736	0,4427	0,6814	44CM
45	841	739	0,438	0,6842	45CM

Tabla 1: Coordenadas de las imágenes del subconjunto Láser_P1.

Muestra	Coordenadas originales		Coordenadas normalizadas		Movimiento eje Z (plano)
	X	Y	X	Y	
0	1167	463	0,6078	0,4287	0CM
1	1159	466	0,6036	0,4314	1CM
2	1151	471	0,5994	0,4361	2CM
3	1142	474	0,5947	0,4388	3CM
4	1133	478	0,5901	0,4425	4CM
5	1125	485	0,5859	0,449	5CM
6	1113	487	0,5796	0,4509	6CM
7	1104	492	0,575	0,4555	7CM
8	1093	496	0,5692	0,4592	8CM
9	1083	504	0,564	0,4666	9CM
10	1071	507	0,5578	0,4694	10CM
11	1060	512	0,552	0,474	11CM
12	1047	519	0,5453	0,4805	12CM
13	1037	523	0,5401	0,4842	13CM
14	1023	528	0,5328	0,4888	14CM
15	1011	534	0,5265	0,4944	15CM
16	996	528	0,5187	0,4981	16CM
17	984	547	0,5125	0,5064	17CM
18	970	554	0,5052	0,5129	18CM
19	955	561	0,4973	0,5194	19CM
20	939	568	0,489	0,5259	20CM
21	924	575	0,4812	0,5324	21CM
22	907	583	0,4723	0,5398	22CM
23	890	591	0,4635	0,5472	23CM
24	872	599	0,4541	0,5546	24CM
25	853	608	0,4442	0,5629	25CM
26	835	616	0,4348	0,5703	26CM
27	814	625	0,4239	0,5787	27CM
28	793	635	0,413	0,5879	28CM
29	772	646	0,402	0,5981	29CM
30	748	655	0,3895	0,6064	30CM
31	723	666	0,3765	0,6166	31CM
32	700	678	0,3645	0,6227	32CM
33	674	690	0,351	0,6388	33CM
34	647	702	0,3369	0,65	34CM
35	617	716	0,3213	0,6629	35CM
36	588	730	0,3062	0,6759	36CM
37	558	746	0,2906	0,6907	37CM
38	520	761	0,2708	0,7046	38CM
39	483	778	0,2515	0,7203	39CM
40	446	795	0,2322	0,7361	40CM

Tabla 2: Coordenadas de las imagenes del subconjunto Láser_P3.

Muestra	Coordenadas originales		Coordenadas normalizadas		Movimiento eje Z (plano)
	X	Y	X	Y	
0	1202	410	0,626	0,3796	0CM
1	1196	417	0,6229	0,3861	1CM
2	1184	419	0,6166	0,3879	2CM
3	1177	423	0,613	0,3916	3CM
4	1168	427	0,6083	0,3953	4CM
5	1159	433	0,6036	0,4009	5CM
6	1151	438	0,5994	0,4055	6CM
7	1139	440	0,5932	0,4074	7CM
8	1131	444	0,589	0,4111	8CM
9	1120	451	0,5833	0,4175	9CM
10	1109	456	0,5776	0,4222	10CM
11	1098	459	0,5718	0,425	11CM
12	1087	466	0,5661	0,4314	12CM
13	1075	472	0,5598	0,437	13CM
14	1063	479	0,5536	0,4435	14CM
15	1050	482	0,5468	0,4462	15CM
16	1039	492	0,5411	0,4555	16CM
17	1022	494	0,5322	0,4574	17CM
18	1009	503	0,5255	0,4657	18CM
19	996	510	0,5187	0,4722	19CM
20	981	517	0,5109	0,4787	20CM
21	965	524	0,5026	0,4851	21CM
22	951	532	0,4953	0,4925	22CM
23	933	540	0,4859	0,5	23CM
24	920	547	0,4791	0,5064	24CM
25	898	557	0,4677	0,5157	25CM
26	880	566	0,4583	0,524	26CM
27	860	575	0,4479	0,5324	27CM
28	841	584	0,438	0,5407	28CM
29	819	596	0,4265	0,5518	29CM
30	797	605	0,4151	0,5601	30CM
31	774	618	0,4031	0,5722	31CM
32	751	628	0,3911	0,5814	32CM
33	724	641	0,377	0,5935	33CM
34	698	655	0,3635	0,6064	34CM
35	670	666	0,3489	0,6166	35CM
36	642	680	0,3343	0,6296	36CM
37	613	695	0,3192	0,6435	37CM
38	580	714	0,302	0,6611	38CM
39	546	727	0,2843	0,6731	39CM
40	508	745	0,2645	0,6898	40CM

Tabla 3: Coordenadas de las imágenes del subconjunto Láser_P4.

F. Coordenadas del punto de interés usando el sistema de calibración y proyector de luz blanca

A continuación, se presentan las coordenadas en el espacio 2D de los puntos interés detectados en los subconjuntos *Proyector_P1* y *Proyector_P2*.

Muestra	Coordenadas originales		Coordenadas normalizadas		Movimiento eje Z (plano)
	X	Y	X	Y	
0	1188	150	0,6187	0,1388	0CM
1	1180	150	0,6145	0,1388	1CM
2	1176	158	0,6125	0,1462	2CM
3	1164	162	0,6062	0,15	3CM
4	1154	170	0,601	0,1574	4CM
5	1148	178	0,5979	0,1648	5CM
6	1138	180	0,5927	0,1666	6CM
7	1132	190	0,5895	0,1759	7CM
8	1118	190	0,5822	0,1759	8CM
9	1112	196	0,5791	0,1814	9CM
10	1100	206	0,5729	0,1907	10CM
11	1090	210	0,5677	0,1944	11CM
12	1076	218	0,5604	0,2018	12CM
13	1068	228	0,5562	0,2111	13CM
14	1052	236	0,5479	0,2185	14CM
15	1044	242	0,5437	0,224	15CM
16	1032	250	0,5375	0,2314	16CM
17	1020	260	0,5312	0,2407	17CM
18	1004	266	0,5229	0,2462	18CM
19	990	278	0,5156	0,2574	19CM
20	976	286	0,5083	0,2648	20CM
21	962	300	0,501	0,2777	21CM
22	946	310	0,4927	0,287	22CM
23	930	324	0,4843	0,3	23CM
24	912	332	0,475	0,3074	24CM
25	890	346	0,4635	0,3203	25CM
26	878	354	0,4572	0,3277	26CM
27	856	368	0,4458	0,3407	27CM
28	836	382	0,4354	0,3537	28CM
29	816	394	0,425	0,3648	29CM

Tabla 4: Coordenadas de las imágenes del subconjunto *Proyector_P1* (1/2).

Muestra	Coordenadas originales		Coordenadas normalizadas		Movimiento eje Z (plano)
	X	Y	X	Y	
30	790	412	0,4114	0,3814	30CM
31	766	428	0,3989	0,3962	31CM
32	742	444	0,3864	0,4111	32CM
33	718	458	0,3739	0,424	33CM
34	690	480	0,3593	0,4444	34CM
35	660	498	0,3437	0,4611	35CM
36	628	515	0,327	0,4768	36CM
37	597	536	0,3109	0,4962	37CM
38	563	561	0,2932	0,5194	38CM
39	523	586	0,2723	0,5425	39CM
40	492	611	0,2562	0,5657	40CM

Tabla 5: Coordenadas de las imágenes del subconjunto Proyector_P1 (2/2).

Muestra	Coordenadas originales		Coordenadas normalizadas		Movimiento eje Z (plano)
	X	Y	X	Y	
0	1104	530	0,575	0,4907	0CM
1	1096	534	0,5708	0,4944	1CM
2	1086	538	0,5656	0,4981	2CM
3	1078	542	0,5614	0,5018	3CM
4	1068	546	0,5562	0,5055	4CM
5	1060	552	0,552	0,5111	5CM
6	1050	556	0,5468	0,5148	6CM
7	1040	562	0,5416	0,5203	7CM
8	1028	568	0,5354	0,5259	8CM
9	1018	574	0,5302	0,5314	9CM
10	1006	580	0,5239	0,537	10CM
11	994	584	0,5177	0,5407	11CM
12	980	594	0,5104	0,55	12CM
13	968	600	0,5041	0,5555	13CM
14	956	606	0,4979	0,5611	14CM
15	942	614	0,4906	0,5685	15CM
16	926	622	0,4822	0,5759	16CM
17	912	630	0,475	0,5833	17CM
18	894	638	0,4656	0,5907	18CM
19	880	648	0,4583	0,6	19CM
20	864	656	0,45	0,6074	20CM
21	846	662	0,4406	0,6129	21CM
22	830	672	0,4322	0,6222	22CM
23	810	684	0,4218	0,6333	23CM
24	790	692	0,4114	0,6407	24CM
25	772	704	0,402	0,6518	25CM
26	750	716	0,3906	0,6629	26CM
27	728	728	0,3791	0,674	27CM
28	704	738	0,3666	0,6833	28CM
29	706	738	0,3677	0,6833	29CM

Tabla 6: Coordenadas de las imágenes del subconjunto Proyector_P2 (1/2).

Muestra	Coordenadas originales		Coordenadas normalizadas		Movimiento eje Z (plano)
	X	Y	X	Y	
30	680	750	0,3541	0,6944	30CM
31	654	766	0,3416	0,7074	31CM
32	628	780	0,3281	0,7203	32CM
33	602	792	0,3135	0,7333	33CM
34	574	810	0,2989	0,75	34CM
35	542	826	0,2822	0,7629	35CM
36	506	844	0,2635	0,7814	36CM
37	472	862	0,2479	0,7962	37CM
38	430	882	0,2239	0,8166	38CM
39	392	902	0,2041	0,8351	39CM
40	354	922	0,1843	0,8536	40CM

Tabla 7: Coordenadas de las imágenes del subconjunto Proyector_P2 (2/2).

G. Resultados de los métodos de ajuste aplicados en pruebas usando láser

A continuación, se presentan los resultados de los métodos de ajuste utilizados para estimar la posición con relación a la profundidad de los puntos interés detectados en los subconjuntos *Láser_P1*, *Láser_P3* y *Láser_P4*.

G.1. Regresión polinomial por mínimos cuadrados

i	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Regresión Polinomial MC	Error absoluto	Error relativo
1	0.5713	1	0.9224	0.0776	7.7586
2	0.5692	2	1.8546	0.1454	7.2693
3	0.5666	3	2.9981	0.0019	0.0639
4	0.5651	4	3.6524	0.3476	8.6900
5	0.5593	6	6.1454	0.1454	2.4237
6	0.5578	7	6.7806	0.2194	3.1343
7	0.5552	8	7.8722	0.1278	1.5969
8	0.5526	9	8.9521	0.0479	0.5324
9	0.5484	11	10.6715	0.3285	2.9867
10	0.5453	12	11.9207	0.0793	0.6604

Tabla 8: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (1/2).

i	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Regresión Polinomial MC	Error absoluto	Error relativo
11	0.5432	13	12.7575	0.2425	1.8654
12	0.5401	14	13.9786	0.0214	0.1529
13	0.5354	16	15.7979	0.2021	1.2631
14	0.5328	17	16.7877	0.2123	1.2486
15	0.5302	18	17.7657	0.2343	1.3014
16	0.5276	19	18.7319	0.2681	1.4108
17	0.5218	21	20.8447	0.1553	0.7394
18	0.5187	22	21.9498	0.0502	0.2280
19	0.5156	23	23.0382	0.0382	0.1659
20	0.513	24	23.9380	0.0620	0.2583
21	0.5072	26	25.9027	0.0973	0.3741
22	0.5036	27	27.0926	0.0926	0.3431
23	0.5005	28	28.0991	0.0991	0.3540
24	0.4973	29	29.1205	0.1205	0.4154
25	0.4911	31	31.0483	0.0483	0.1559
26	0.4875	32	32.1369	0.1369	0.4279
27	0.4838	33	33.2321	0.2321	0.7034
28	0.4807	34	34.1313	0.1313	0.3862
29	0.4739	36	36.0448	0.0448	0.1246
30	0.4697	37	37.1864	0.1864	0.5037
31	0.4666	38	38.0091	0.0091	0.0240
32	0.4625	39	39.0715	0.0715	0.1833
33	0.4546	41	41.0356	0.0356	0.0869
34	0.4505	42	42.0120	0.0120	0.0285
35	0.4473	43	42.7536	0.2464	0.5731
36	0.4427	44	43.7883	0.2117	0.4812
Promedio				0.1352	0.6080

Tabla 9: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (2/2).

i	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Regresión Polinomial MC	Error absoluto	Error relativo
1	0.6036	1	1.7282	0.7282	72.8184
2	0.5994	2	2.4791	0.4791	23.9565
3	0.5947	3	3.3107	0.3107	10.3561
4	0.5901	4	4.1156	0.1156	2.8889
5	0.5796	6	5.9194	0.0806	1.3425
6	0.575	7	6.6951	0.3049	4.3553
7	0.5692	8	7.6605	0.3395	4.2439
8	0.564	9	8.5140	0.4860	5.4004
9	0.552	11	10.4402	0.5598	5.0895
10	0.5453	12	11.4893	0.5107	4.2560
11	0.5401	13	12.2905	0.7095	5.4575
12	0.5328	14	13.3962	0.6038	4.3130
13	0.5187	16	15.4684	0.5316	3.3228
14	0.5125	17	16.3531	0.6469	3.8054
15	0.5052	18	17.3741	0.6259	3.4775
16	0.4973	19	18.4537	0.5463	2.8751
17	0.4812	21	20.5729	0.4271	2.0340
18	0.4723	22	21.6976	0.3024	1.3747
19	0.4635	23	22.7769	0.2231	0.9700
20	0.4541	24	23.8939	0.1061	0.4422
21	0.4348	26	26.0708	0.0708	0.2724
22	0.4239	27	27.2311	0.2311	0.8561
23	0.413	28	28.3415	0.3415	1.2197
24	0.402	29	29.4115	0.4115	1.4189
25	0.3765	31	31.6962	0.6962	2.2460
26	0.3645	32	32.6769	0.6769	2.1152
27	0.351	33	33.7077	0.7077	2.1447
28	0.3369	34	34.7027	0.7027	2.0666
29	0.3062	36	36.5799	0.5799	1.6108
30	0.2906	37	37.3820	0.3820	1.0325
31	0.2708	38	38.2529	0.2529	0.6654
32	0.2515	39	38.9431	0.0569	0.1459
Promedio				0.4296	5.5804

Tabla 10: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P3 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados.

i	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Regresión Polinomial MC	Error absoluto	Error relativo
1	0.6229	1	1.4571	0.4571	45.7084
2	0.6166	2	2.6251	0.6251	31.2545
3	0.613	3	3.2845	0.2845	9.4830
4	0.6083	4	4.1366	0.1366	3.4146
5	0.5994	6	5.7228	0.2772	4.6192
6	0.5932	7	6.8068	0.1932	2.7602
7	0.589	8	7.5312	0.4688	5.8597
8	0.5833	9	8.5017	0.4983	5.5369
9	0.5718	11	10.4150	0.5850	5.3178
10	0.5661	12	11.3413	0.6587	5.4891
11	0.5598	13	12.3480	0.6520	5.0151
12	0.5536	14	13.3213	0.6787	4.8477
13	0.5411	16	15.2309	0.7691	4.8067
14	0.5322	17	16.5476	0.4524	2.6609
15	0.5255	18	17.5153	0.4847	2.6926
16	0.5187	19	18.4768	0.5232	2.7538
17	0.5026	21	20.6701	0.3299	1.5712
18	0.4953	22	21.6260	0.3740	1.6999
19	0.4859	23	22.8216	0.1784	0.7755
20	0.4791	24	23.6617	0.3383	1.4095
21	0.4583	26	26.1020	0.1020	0.3924
22	0.4479	27	27.2490	0.2490	0.9224
23	0.438	28	28.2956	0.2956	1.0559
24	0.4265	29	29.4559	0.4559	1.5722
25	0.4031	31	31.6328	0.6328	2.0414
26	0.3911	32	32.6535	0.6535	2.0421
27	0.377	33	33.7698	0.7698	2.3327
28	0.3635	34	34.7547	0.7547	2.2196
29	0.3343	36	36.6039	0.6039	1.6775
30	0.3192	37	37.4095	0.4095	1.1066
31	0.302	38	38.2019	0.2019	0.5312
32	0.2843	39	38.8781	0.1219	0.3126
Promedio				0.4442	5.1213

Tabla 11: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P4 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados.

G.2. Interpolación lineal

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coorde- nada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpola- ción lineal	Error absoluto	Error relativo
1	[0.5729, 0.5619]	0,5	0.5713	1	0.7273	0.2727	27.2727
2	[0.5729, 0.5619]	0,5	0.5692	2	1.6818	0.3182	15.9091
3	[0.5729, 0.5619]	0,5	0.5666	3	2.8636	0.1364	4.5455
4	[0.5729, 0.5619]	0,5	0.5651	4	3.5455	0.4545	11.3636
5	[0.5619, 0.5505]	5,10	0.5593	6	6.1404	0.1404	2.3392
6	[0.5619, 0.5505]	5,10	0.5578	7	6.7982	0.2018	2.8822
7	[0.5619, 0.5505]	5,10	0.5552	8	7.9386	0.0614	0.7675
8	[0.5619, 0.5505]	5,10	0.5526	9	9.0789	0.0789	0.8772
9	[0.5505, 0.538]	10,15	0.5484	11	10.8400	0.1600	1.4545
10	[0.5505, 0.538]	10,15	0.5453	12	12.0800	0.0800	0.6667
11	[0.5505, 0.538]	10,15	0.5432	13	12.9200	0.0800	0.6154
12	[0.5505, 0.538]	10,15	0.5401	14	14.1600	0.1600	1.1429
13	[0.538, 0.5244]	15,20	0.5354	16	15.9559	0.0441	0.2757
14	[0.538, 0.5244]	15,20	0.5328	17	16.9118	0.0882	0.5190
15	[0.538, 0.5244]	15,20	0.5302	18	17.8676	0.1324	0.7353
16	[0.538, 0.5244]	15,20	0.5276	19	18.8235	0.1765	0.9288
17	[0.5244, 0.5098]	20,25	0.5218	21	20.8904	0.1096	0.5219
18	[0.5244, 0.5098]	20,25	0.5187	22	21.9521	0.0479	0.2179
19	[0.5244, 0.5098]	20,25	0.5156	23	23.0137	0.0137	0.0596

Tabla 12: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante interpolación lineal (1/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coorde- nada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpola- ción lineal	Error absoluto	Error relativo
20	[0.5244, 0.5098]	20,25	0.513	24	23.9041	0.0959	0.3995
21	[0.5098, 0.4942]	25,30	0.5072	26	25.8333	0.1667	0.6410
22	[0.5098, 0.4942]	25,30	0.5036	27	26.9872	0.0128	0.0475
23	[0.5098, 0.4942]	25,30	0.5005	28	27.9808	0.0192	0.0687
24	[0.5098, 0.4942]	25,30	0.4973	29	29.0064	0.0064	0.0221
25	[0.4942, 0.477]	30,35	0.4911	31	30.9012	0.0988	0.3188
26	[0.4942, 0.477]	30,35	0.4875	32	31.9477	0.0523	0.1635
27	[0.4942, 0.477]	30,35	0.4838	33	33.0233	0.0233	0.0705
28	[0.4942, 0.477]	30,35	0.4807	34	33.9244	0.0756	0.2223
29	[0.477, 0.4583]	35,40	0.4739	36	35.8289	0.1711	0.4753
30	[0.477, 0.4583]	35,40	0.4697	37	36.9519	0.0481	0.1301
31	[0.477, 0.4583]	35,40	0.4666	38	37.7807	0.2193	0.5770
32	[0.477, 0.4583]	35,40	0.4625	39	38.8770	0.1230	0.3154
33	[0.4583, 0.438]	40,45	0.4546	41	40.9113	0.0887	0.2163
34	[0.4583, 0.438]	40,45	0.4505	42	41.9212	0.0788	0.1877
35	[0.4583, 0.438]	40,45	0.4473	43	42.7094	0.2906	0.6759
36	[0.4583, 0.438]	40,45	0.4427	44	43.8424	0.1576	0.3583
Promedio						0.1246	2.1662

Tabla 13: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante interpolación lineal (2/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coorde- nada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpola- ción lineal	Error absoluto	Error relativo
1	[0.6078, 0.5859]	0,5	0.6036	1	0.9589	0.0411	4.1096
2	[0.6078, 0.5859]	0,5	0.5994	2	1.9178	0.0822	4.1096
3	[0.6078, 0.5859]	0,5	0.5947	3	2.9909	0.0091	0.3044
4	[0.6078, 0.5859]	0,5	0.5901	4	4.0411	0.0411	1.0274
5	[0.5859, 0.5578]	5,10	0.5796	6	6.1210	0.1210	2.0166
6	[0.5859, 0.5578]	5,10	0.575	7	6.9395	0.0605	0.8643
7	[0.5859, 0.5578]	5,10	0.5692	8	7.9715	0.0285	0.3559
8	[0.5859, 0.5578]	5,10	0.564	9	8.8968	0.1032	1.1467
9	[0.5578,0.5265]	10,15	0.552	11	10.9265	0.0735	0.6680
10	[0.5578,0.5265]	10,15	0.5453	12	11.9968	0.0032	0.0266
11	[0.5578,0.5265]	10,15	0.5401	13	12.8275	0.1725	1.3271
12	[0.5578,0.5265]	10,15	0.5328	14	13.9936	0.0064	0.0456
13	[0.5265, 0.489]	15,20	0.5187	16	16.0400	0.0400	0.2500
14	[0.5265, 0.489]	15,20	0.5125	17	16.8667	0.1333	0.7843
15	[0.5265, 0.489]	15,20	0.5052	18	17.8400	0.1600	0.8889
16	[0.5265, 0.489]	15,20	0.4973	19	18.8933	0.1067	0.5614
17	[0.489, 0.4442]	20,25	0.4812	21	20.8705	0.1295	0.6165
18	[0.489, 0.4442]	20,25	0.4723	22	21.8638	0.1362	0.6189
19	[0.489, 0.4442]	20,25	0.4635	23	22.8460	0.1540	0.6696
20	[0.489, 0.4442]	20,25	0.4541	24	23.8951	0.1049	0.4371
21	[0.4442, 0.3895]	25,30	0.4348	26	25.8592	0.1408	0.5414
22	[0.4442, 0.3895]	25,30	0.4239	27	26.8556	0.1444	0.5349
23	[0.4442, 0.3895]	25,30	0.413	28	27.8519	0.1481	0.5289
24	[0.4442, 0.3895]	25,30	0.402	29	28.8574	0.1426	0.4917
25	[0.3895, 0.3213]	30,35	0.3765	31	30.9531	0.0469	0.1514
26	[0.3895, 0.3213]	30,35	0.3645	32	31.8328	0.1672	0.5224
27	[0.3895, 0.3213]	30,35	0.351	33	32.8226	0.1774	0.5376
28	[0.3895, 0.3213]	30,35	0.3369	34	33.8563	0.1437	0.4226
29	[0.3213, 0.2322]	35,40	0.3062	36	35.8474	0.1526	0.4240
30	[0.3213, 0.2322]	35,40	0.2906	37	36.7228	0.2772	0.7492
31	[0.3213, 0.2322]	35,40	0.2708	38	37.8339	0.1661	0.4371
32	[0.3213, 0.2322]	35,40	0.2515	39	38.9169	0.0831	0.2130
						0.1093	0.8245

Tabla 14: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P3 mediante interpolación lineal.

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpolación lineal	Error absoluto	Error relativo
1	[0.626, 0.6036]	0,5	0.6229	1	0.6920	0.3080	30.8036
2	[0.626, 0.6036]	0,5	0.6166	2	2.0982	0.0982	4.9107
3	[0.626, 0.6036]	0,5	0.613	3	2.9018	0.0982	3.2738
4	[0.626, 0.6036]	0,5	0.6083	4	3.9509	0.0491	1.2277
5	[0.6036, 0.5776]	5,10	0.5994	6	5.8077	0.1923	3.2051
6	[0.6036, 0.5776]	5,10	0.5932	7	7.0000	0.0000	0.0000
7	[0.6036, 0.5776]	5,10	0.589	8	7.8077	0.1923	2.4038
8	[0.6036, 0.5776]	5,10	0.5833	9	8.9038	0.0962	1.0684
9	[0.5776, 0.5468]	10,15	0.5718	11	10.9416	0.0584	0.5313
10	[0.5776, 0.5468]	10,15	0.5661	12	11.8669	0.1331	1.1093
11	[0.5776, 0.5468]	10,15	0.5598	13	12.8896	0.1104	0.8492
12	[0.5776, 0.5468]	10,15	0.5536	14	13.8961	0.1039	0.7421
13	[0.5468, 0.5109]	15,20	0.5411	16	15.7939	0.2061	1.2883
14	[0.5468, 0.5109]	15,20	0.5322	17	17.0334	0.0334	0.1966
15	[0.5468, 0.5109]	15,20	0.5255	18	17.9666	0.0334	0.1857
16	[0.5468, 0.5109]	15,20	0.5187	19	18.9136	0.0864	0.4545
17	[0.5109, 0.4677]	20,25	0.5026	21	20.9606	0.0394	0.1874
18	[0.5109, 0.4677]	20,25	0.4953	22	21.8056	0.1944	0.8838
19	[0.5109, 0.4677]	20,25	0.4859	23	22.8935	0.1065	0.4630
20	[0.5109, 0.4677]	20,25	0.4791	24	23.6806	0.3194	1.3310
21	[0.4677, 0.4151]	25,30	0.4583	26	25.8935	0.1065	0.4095
22	[0.4677, 0.4151]	25,30	0.4479	27	26.8821	0.1179	0.4366
23	[0.4677, 0.4151]	25,30	0.438	28	27.8232	0.1768	0.6315
24	[0.4677, 0.4151]	25,30	0.4265	29	28.9163	0.0837	0.2884
25	[0.4151, 0.3489]	30,35	0.4031	31	30.9063	0.0937	0.3021
26	[0.4151, 0.3489]	30,35	0.3911	32	31.8127	0.1873	0.5853
27	[0.4151, 0.3489]	30,35	0.377	33	32.8776	0.1224	0.3708
28	[0.4151, 0.3489]	30,35	0.3635	34	33.8973	0.1027	0.3021
29	[0.3489, 0.2645]	35,40	0.3343	36	35.8649	0.1351	0.3752
30	[0.3489, 0.2645]	35,40	0.3192	37	36.7595	0.2405	0.6501
31	[0.3489, 0.2645]	35,40	0.302	38	37.7784	0.2216	0.5831
32	[0.3489, 0.2645]	35,40	0.2843	39	38.8270	0.1730	0.4436
						0.1319	1.8904

Tabla 15: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P4 mediante interpolación lineal.

G.3. Interpolación cuadrática

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpolación Cuadrática	Error absoluto	Error relativo
1	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5713	1	0.7355	0.2645	26.4529
2	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5692	2	1.6965	0.3035	15.1729
3	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5666	3	2.8798	0.1202	4.0074
4	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5651	4	3.5591	0.4409	11.0235
5	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5593	6	6.1625	0.1625	2.7091
6	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5578	7	6.8299	0.1701	2.4302
7	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5552	8	7.9795	0.0205	0.2563
8	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5526	9	9.1074	0.1074	1.1929
9	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5484	11	10.8763	0.1237	1.1249
10	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5453	12	12.1399	0.1399	1.1655
11	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5432	13	12.9763	0.0237	0.1824
12	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5401	14	14.1906	0.1906	1.3611
13	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5354	16	15.9875	0.0125	0.0783
14	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5328	17	16.9587	0.0413	0.2431
15	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5302	18	17.9139	0.0861	0.4781
16	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5276	19	18.8564	0.1436	0.7557
17	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5218	21	20.9158	0.0842	0.4009
18	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5187	22	21.9921	0.0079	0.0358
19	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5156	23	23.0520	0.0520	0.2259

Tabla 16: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante interpolación cuadrática (1/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpolación Cuadrática	Error absoluto	Error relativo
20	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.513	24	23.9307	0.0693	0.2889
21	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5072	26	25.8590	0.1410	0.5424
22	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5036	27	27.0337	0.0337	0.1248
23	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.5005	28	28.0309	0.0309	0.1104
24	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4973	29	29.0410	0.0410	0.1414
25	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4911	31	30.9398	0.0602	0.1943
26	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4875	32	32.0069	0.0069	0.0217
27	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4838	33	33.0780	0.0780	0.2364
28	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4807	34	33.9612	0.0388	0.1140
29	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4739	36	35.8574	0.1426	0.3962
30	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4697	37	37.0001	0.0001	0.0003
31	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4666	38	37.8298	0.1702	0.4480
32	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4625	39	38.9109	0.0891	0.2283
33	[0.477,0.4583,0.438]	35,40,45	0.4546	41	40.9439	0.0561	0.1368
34	[0.477,0.4583,0.438]	35,40,45	0.4505	42	41.9729	0.0271	0.0646
35	[0.477,0.4583,0.438]	35,40,45	0.4473	43	42.7636	0.2364	0.5497
36	[0.477,0.4583,0.438]	35,40,45	0.4427	44	43.8812	0.1188	0.2699
Promedio						0.1065	2.0324

Tabla 17: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante interpolación cuadrática (2/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpolación Cuadrática	Error absoluto	Error relativo
1	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.6036	1	1.0442	0.0442	4.4230
2	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5994	2	2.0480	0.0480	2.3983
3	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5947	3	3.1232	0.1232	4.1061
4	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5901	4	4.1264	0.1264	3.1605
5	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5796	6	6.2344	0.2344	3.9074
6	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.575	7	7.0782	0.0782	1.1176
7	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5692	8	8.0799	0.0799	0.9990
8	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.564	9	8.9606	0.0394	0.4382
9	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.552	11	10.9620	0.0380	0.3456
10	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5453	12	12.0607	0.0607	0.5062
11	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.5401	13	12.9030	0.0970	0.7459
12	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.5328	14	14.0490	0.0490	0.3503
13	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.5187	16	16.1285	0.1285	0.8031
14	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.5125	17	16.9869	0.0131	0.0768
15	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.5052	18	17.9552	0.0448	0.2489
16	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4973	19	18.9685	0.0315	0.1655
17	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4812	21	20.9383	0.0617	0.2938
18	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4723	22	21.9722	0.0278	0.1263
19	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4635	23	22.9564	0.0436	0.1894
20	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4541	24	23.9710	0.0290	0.1208
21	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4348	26	25.9395	0.0605	0.2327
22	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4239	27	26.9832	0.0168	0.0623
23	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.413	28	27.9786	0.0214	0.0764
24	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.402	29	28.9449	0.0551	0.1900
25	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.3765	31	31.0488	0.0488	0.1575
26	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.3645	32	31.9731	0.0269	0.0840
27	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.351	33	32.9634	0.0366	0.1109
28	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.3369	34	33.9533	0.0467	0.1372
29	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.3062	36	35.9645	0.0355	0.0986
30	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.2906	37	36.9108	0.0892	0.2412
31	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.2708	38	38.0383	0.0383	0.1007
32	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.2515	39	39.0582	0.0582	0.1492
Promedio						0.0604	0.8176

Tabla 18: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P3 mediante interpolación cuadrática.

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpolación Cuadrática	Error absoluto	Error relativo
1	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.6229	1	0.7310	0.2690	26.8969
2	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.6166	2	2.1780	0.1780	8.9003
3	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.613	3	2.9816	0.0184	0.6141
4	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.6083	4	4.0052	0.0052	0.1303
5	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.5994	6	5.8646	0.1354	2.2575
6	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.5932	7	7.0987	0.0987	1.4099
7	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.589	8	7.9065	0.0935	1.1691
8	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.5833	9	8.9710	0.0290	0.3225
9	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.5718	11	11.0107	0.0107	0.0971
10	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.5661	12	11.9682	0.0318	0.2654
11	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5598	13	12.9864	0.0136	0.1043
12	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5536	14	13.9603	0.0397	0.2835
13	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5411	16	15.8486	0.1514	0.9462
14	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5322	17	17.1319	0.1319	0.7756
15	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5255	18	18.0644	0.0644	0.3580
16	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5187	19	18.9824	0.0176	0.0928
17	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5026	21	21.0415	0.0415	0.1975
18	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.4953	22	21.9222	0.0778	0.3537
19	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.4859	23	23.0088	0.0088	0.0381
20	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.4791	24	23.7690	0.2310	0.9623
21	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.4583	26	25.9739	0.0261	0.1004
22	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.4479	27	27.0081	0.0081	0.0299
23	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.438	28	27.9507	0.0493	0.1759
24	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.4265	29	29.0021	0.0021	0.0071
25	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.4031	31	31.0029	0.0029	0.0093
26	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.3911	32	31.9570	0.0430	0.1345
27	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.377	33	33.0174	0.0174	0.0526
28	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.3635	34	33.9897	0.0103	0.0303
29	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.3343	36	35.9674	0.0326	0.0905
30	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.3192	37	36.9229	0.0771	0.2084
31	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.302	38	37.9553	0.0447	0.1176
32	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.2843	39	38.9557	0.0443	0.1137
Promedio						0.0627	1.4764

Tabla 19: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P4 mediante interpolación cuadrática.

G.4. Spline cúbico

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Spline Cúbico	Error absoluto	Error relativo
1	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5713	1	0.7265	0.2735	27.3514
2	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5692	2	1.6825	0.3175	15.8755
3	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5666	3	2.8672	0.1328	4.4266
4	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5651	4	3.5498	0.4502	11.2541
5	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5593	6	6.1681	0.1681	2.8013
6	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5578	7	6.8362	0.1638	2.3405
7	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5552	8	7.9815	0.0185	0.2313
8	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5526	9	9.1074	0.1074	1.1936
9	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5484	11	10.8759	0.1241	1.1283
10	[0.5619, 0.5505,0.538]	0,5,10	0.5453	12	12.1399	0.1399	1.1655
11	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5432	13	12.9782	0.0218	0.1680
12	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5401	14	14.1920	0.1920	1.3716
13	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5354	16	15.9861	0.0139	0.0869
14	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5328	17	16.9572	0.0428	0.2516
15	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5302	18	17.9140	0.0860	0.4777
16	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5276	19	18.8571	0.1429	0.7520
17	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5218	21	20.9149	0.0851	0.4053
18	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5187	22	21.9907	0.0093	0.0422
19	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5156	23	23.0515	0.0515	0.2238

Tabla 20: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante spline cúbico (1/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Spline Cúbico	Error absoluto	Error relativo
20	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.513	24	23.9304	0.0696	0.2899
21	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5072	26	25.8597	0.1403	0.5397
22	[0.538, 0.5244,0.5098]	15,20,25	0.5036	27	27.0348	0.0348	0.1287
23	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.5005	28	28.0305	0.0305	0.1088
24	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4973	29	29.0405	0.0405	0.1398
25	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4911	31	30.9395	0.0605	0.1952
26	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4875	32	32.0069	0.0069	0.0216
27	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4838	33	33.0803	0.0803	0.2433
28	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4807	34	33.9632	0.0368	0.1082
29	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4739	36	35.8561	0.1439	0.3997
30	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4697	37	36.9985	0.0015	0.0040
31	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4666	38	37.8289	0.1711	0.4501
32	[0.4942, 0.477,0.4583]	30,35,40	0.4625	39	38.9109	0.0891	0.2286
33	[0.477,0.4583,0.438]	35,40,45	0.4546	41	40.9437	0.0563	0.1374
34	[0.477,0.4583,0.438]	35,40,45	0.4505	42	41.9722	0.0278	0.0661
35	[0.477,0.4583,0.438]	35,40,45	0.4473	43	42.7627	0.2373	0.5518
36	[0.477,0.4583,0.438]	35,40,45	0.4427	44	43.8804	0.1196	0.2718
Promedio						0.1080	2.0953

Tabla 21: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P1 mediante spline cúbico (2/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Spline Cúbico	Error absoluto	Error relativo
1	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.6036	1	1.0746	0.0746	7.4575
2	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5994	2	2.0886	0.0886	4.4276
3	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5947	3	3.1580	0.1580	5.2651
4	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5901	4	4.1447	0.1447	3.6187
5	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5796	6	6.2130	0.2130	3.5497
6	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.575	7	7.0547	0.0547	0.7821
7	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5692	8	8.0753	0.0753	0.9417
8	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.564	9	8.9624	0.0376	0.4181
9	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.552	11	10.9621	0.0379	0.3445
10	[0.6078, 0.5859, 0.5578]	0,5,10	0.5453	12	12.0605	0.0605	0.5041
11	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.5401	13	12.8984	0.1016	0.7816
12	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.5328	14	14.0452	0.0452	0.3231
13	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.5187	16	16.1298	0.1298	0.8116
14	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.5125	17	16.9893	0.0107	0.0630
15	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.5052	18	17.9625	0.0375	0.2085
16	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4973	19	18.9747	0.0253	0.1333
17	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4812	21	20.9342	0.0658	0.3135
18	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4723	22	21.9670	0.0330	0.1499
19	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4635	23	22.9539	0.0461	0.2004
20	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4541	24	23.9707	0.0293	0.1223
21	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4348	26	25.9386	0.0614	0.2360
22	[0.5265, 0.489,0442]	15,20,25	0.4239	27	26.9824	0.0176	0.0652
23	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.413	28	27.9815	0.0185	0.0660
24	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.402	29	28.9480	0.0520	0.1792
25	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.3765	31	31.0464	0.0464	0.1498
26	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.3645	32	31.9715	0.0285	0.0891
27	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.351	33	32.9671	0.0329	0.0996
28	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.3369	34	33.9584	0.0416	0.1224
29	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.3062	36	35.9561	0.0439	0.1219
30	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.2906	37	36.8933	0.1067	0.2885
31	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.2708	38	38.0137	0.0137	0.0360
32	[0.3895, 0.3213,0.2322]	30,35,40	0.2515	39	39.0375	0.0375	0.0961
Promedio						0.0616	0.9999

Tabla 22: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P3 mediante spline cúbico.

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Spline Cúbico	Error absoluto	Error relativo
1	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.6229	1	0.7329	0.2671	26.7061
2	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.6166	2	2.1811	0.1811	9.0558
3	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.613	3	2.9842	0.0158	0.5254
4	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.6083	4	4.0066	0.0066	0.1656
5	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.5994	6	5.8637	0.1363	2.2721
6	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.5932	7	7.0982	0.0982	1.4023
7	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.589	8	7.9077	0.0923	1.1540
8	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.5833	9	8.9727	0.0273	0.3035
9	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.5718	11	11.0082	0.0082	0.0743
10	[0.626, 0.6036, 0.5776]	0,5,10	0.5661	12	11.9653	0.0347	0.2893
11	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5598	13	12.9881	0.0119	0.0916
12	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5536	14	13.9627	0.0373	0.2664
13	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5411	16	15.8472	0.1528	0.9551
14	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5322	17	17.1303	0.1303	0.7662
15	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5255	18	18.0638	0.0638	0.3544
16	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5187	19	18.9824	0.0176	0.0924
17	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.5026	21	21.0404	0.0404	0.1923
18	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.4953	22	21.9212	0.0788	0.3580
19	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.4859	23	23.0119	0.0119	0.0518
20	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.4791	24	23.7727	0.2273	0.9473
21	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.4583	26	25.9711	0.0289	0.1112
22	[0.5468, 0.5109, 0.4677]	15,20,25	0.4479	27	27.0046	0.0046	0.0172
23	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.438	28	27.9500	0.0500	0.1786
24	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.4265	29	29.0027	0.0027	0.0094
25	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.4031	31	31.0023	0.0023	0.0073
26	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.3911	32	31.9586	0.0414	0.1293
27	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.377	33	33.0276	0.0276	0.0837
28	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.3635	34	33.9999	0.0001	0.0002
29	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.3343	36	35.9518	0.0482	0.1340
30	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.3192	37	36.8910	0.1090	0.2947
31	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.302	38	37.9122	0.0878	0.2311
32	[0.4677, 0.4151, 0.3489]	30,35,40	0.2843	39	38.9179	0.0821	0.2106
Promedio						0.0664	1.4822

Tabla 23: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Láser_P4 mediante spline cúbico.

H. Resultados de los métodos de ajuste aplicados en pruebas usando proyector de luz blanca

A continuación, se presentan los resultados de los métodos de ajuste utilizados para estimar la posición con relación a la profundidad de los puntos interés detectados en los subconjuntos *Proyector_P1* y *Proyector_P2*.

H.1. Regresión polinomial por mínimos cuadrados

i	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Regresión Polinomial MC	Error absoluto	Error relativo
1	0.6145	1	1.9109	0.9109	91.0916
2	0.6125	2	2.2891	0.2891	14.4566
3	0.6062	3	3.4681	0.4681	15.6036
4	0.601	4	4.4270	0.4270	10.6762
5	0.5927	6	5.9311	0.0689	1.1487
6	0.5895	7	6.5022	0.4978	7.1112
7	0.5822	8	7.7869	0.2131	2.6633
8	0.5791	9	8.3249	0.6751	7.5016
9	0.5677	11	10.2638	0.7362	6.6927
10	0.5604	12	11.4730	0.5270	4.3914
11	0.5562	13	12.1573	0.8427	6.4824
12	0.5479	14	13.4849	0.5151	3.6793
13	0.5375	16	15.1023	0.8977	5.6108
14	0.5312	17	16.0571	0.9429	5.5466
15	0.5229	18	17.2862	0.7138	3.9653
16	0.5156	19	18.3403	0.6597	3.4721
17	0.501	21	20.3726	0.6274	2.9877
18	0.4927	22	21.4828	0.5172	2.3508
19	0.4843	23	22.5732	0.4268	1.8558
20	0.475	24	23.7413	0.2587	1.0780

Tabla 24: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en *Proyector_P1* mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (1/2).

i	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Regresión Polinomial MC	Error absoluto	Error relativo
21	0.4572	26	25.8626	0.1374	0.5285
22	0.4458	27	27.1422	0.1422	0.5267
23	0.4354	28	28.2558	0.2558	0.9136
24	0.425	29	29.3181	0.3181	1.0969
25	0.3989	31	31.7580	0.7580	2.4452
26	0.3864	32	32.8121	0.8121	2.5379
27	0.3739	33	33.7921	0.7921	2.4002
28	0.3593	34	34.8428	0.8428	2.4788
29	0.327	36	36.8080	0.8080	2.2444
30	0.3109	37	37.6027	0.6027	1.6289
31	0.2932	38	38.3345	0.3345	0.8802
32	0.2723	39	39.0071	0.0071	0.0183
Promedio				0.5321	6.7520

Tabla 25: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector P1 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (2/2).

i	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Regresión Polinomial MC	Error absoluto	Error relativo
1	0.5708	1	1.6539	0.6539	65.3895
2	0.5656	2	2.5521	0.5521	27.6073
3	0.5614	3	3.2699	0.2699	8.9983
4	0.5562	4	4.1491	0.1491	3.7277
5	0.5468	6	5.7116	0.2884	4.8074
6	0.5416	7	6.5611	0.4389	6.2705
7	0.5354	8	7.5601	0.4399	5.4983
8	0.5302	9	8.3865	0.6135	6.8168
9	0.5177	11	10.3297	0.6703	6.0936
10	0.5104	12	11.4363	0.5637	4.6974

Tabla 26: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector P2 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (1/2).

i	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Regresión Polinomial MC	Error absoluto	Error relativo
11	0.5041	13	12.3746	0.6254	4.8107
12	0.4979	14	13.2829	0.7171	5.1224
13	0.4822	16	15.5157	0.4843	3.0271
14	0.475	17	16.5074	0.4926	2.8975
15	0.4656	18	17.7718	0.2282	1.2680
16	0.4583	19	18.7298	0.2702	1.4220
17	0.4406	21	20.9664	0.0336	0.1601
18	0.4322	22	21.9850	0.0150	0.0683
19	0.4218	23	23.2079	0.2079	0.9040
20	0.4114	24	24.3886	0.3886	1.6192
21	0.3906	26	26.6233	0.6233	2.3972
22	0.3791	27	27.7862	0.7862	2.9120
23	0.3666	28	28.9917	0.9917	3.5419
24	0.3677	29	28.8881	0.1119	0.3858
25	0.3406	31	31.3037	0.3037	0.9797
26	0.327	32	32.4079	0.4079	1.2746
27	0.3135	33	33.4325	0.4325	1.3105
28	0.2989	34	34.4604	0.4604	1.3542
29	0.2635	36	36.6072	0.6072	1.6867
30	0.2458	37	37.4971	0.4971	1.3434
31	0.2239	38	38.4287	0.4287	1.1281
32	0.2041	39	39.1097	0.1097	0.2814
Promedio				0.4332	5.6188

Tabla 27: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P2 mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados (2/2).

H.2. Interpolación lineal

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coor- denada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpola- ción lineal	Error absoluto	Error relativo
1	[0.6187, 0.5979]	0,5	0.6145	1	1.0096	0.0096	0.9615
2	[0.6187, 0.5979]	0,5	0.6125	2	1.4904	0.5096	25.4808
3	[0.6187, 0.5979]	0,5	0.6062	3	3.0048	0.0048	0.1603
4	[0.6187, 0.5979]	0,5	0.601	4	4.2548	0.2548	6.3702
5	[0.5979, 0.5729]	5,10	0.5927	6	6.0400	0.0400	0.6667
6	[0.5979, 0.5729]	5,10	0.5895	7	6.6800	0.3200	4.5714
7	[0.5979, 0.5729]	5,10	0.5822	8	8.1400	0.1400	1.7500
8	[0.5979, 0.5729]	5,10	0.5791	9	8.7600	0.2400	2.6667
9	[0.5729, 0.5437]	10,15	0.5677	11	10.8904	0.1096	0.9963
10	[0.5729, 0.5437]	10,15	0.5604	12	12.1404	0.1404	1.1701
11	[0.5729, 0.5437]	10,15	0.5562	13	12.8596	0.1404	1.0801
12	[0.5729, 0.5437]	10,15	0.5479	14	14.2808	0.2808	2.0059
13	[0.5437, 0.5083]	15,20	0.5375	16	15.8757	0.1243	0.7768
14	[0.5437, 0.5083]	15,20	0.5312	17	16.7655	0.2345	1.3792
15	[0.5437, 0.5083]	15,20	0.5229	18	17.9379	0.0621	0.3453

Tabla 28: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector P1 mediante interpolación lineal (1/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coorde- nada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpola- ción lineal	Error absoluto	Error relativo
16	[0.5437, 0.5083]	15,20	0.5156	19	18.9689	0.0311	0.1635
17	[0.5083, 0.4635]	20,25	0.501	21	20.8147	0.1853	0.8822
18	[0.5083, 0.4635]	20,25	0.4927	22	21.7411	0.2589	1.1769
19	[0.5083, 0.4635]	20,25	0.4843	23	22.6786	0.3214	1.3975
20	[0.5083, 0.4635]	20,25	0.475	24	23.7165	0.2835	1.1812
21	[0.4635, 0.4114]	25,30	0.4572	26	25.6046	0.3954	1.5207
22	[0.4635, 0.4114]	25,30	0.4458	27	26.6987	0.3013	1.1161
23	[0.4635, 0.4114]	25,30	0.4354	28	27.6967	0.3033	1.0831
24	[0.4635, 0.4114]	25,30	0.425	29	28.6948	0.3052	1.0524
25	[0.4114, 0.3437]	30,35	0.3989	31	30.9232	0.0768	0.2478
26	[0.4114, 0.3437]	30,35	0.3864	32	31.8464	0.1536	0.4801
27	[0.4114, 0.3437]	30,35	0.3739	33	32.7696	0.2304	0.6983
28	[0.4114, 0.3437]	30,35	0.3593	34	33.8479	0.1521	0.4475
29	[0.3437, 0.2562]	35,40	0.327	36	35.9543	0.0457	0.1270
30	[0.3437, 0.2562]	35,40	0.3109	37	36.8743	0.1257	0.3398
31	[0.3437, 0.2562]	35,40	0.2932	38	37.8857	0.1143	0.3008
32	[0.3437, 0.2562]	35,40	0.2723	39	39.0800	0.0800	0.2051
Promedio						0.1867	1.9625

Tabla 29: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante interpolación lineal (2/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coorde- nada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpola- ción lineal	Error absoluto	Error relativo
1	[0.575, 0.552]	0,5	0.5708	1	0.9130	0.0870	8.6957
2	[0.575, 0.552]	0,5	0.5656	2	2.0435	0.0435	2.1739
3	[0.575, 0.552]	0,5	0.5614	3	2.9565	0.0435	1.4493
4	[0.575, 0.552]	0,5	0.5562	4	4.0870	0.0870	2.1739
5	[0.552, 0.5239]	5,10	0.5468	6	5.9253	0.0747	1.2456
6	[0.552, 0.5239]	5,10	0.5416	7	6.8505	0.1495	2.1352
7	[0.552, 0.5239]	5,10	0.5354	8	7.9537	0.0463	0.5783
8	[0.552, 0.5239]	5,10	0.5302	9	8.8790	0.1210	1.3444
9	[0.5239, 0.4906]	10,15	0.5177	11	10.9309	0.0691	0.6279
10	[0.5239, 0.4906]	10,15	0.5104	12	12.0270	0.0270	0.2252
11	[0.5239, 0.4906]	10,15	0.5041	13	12.9730	0.0270	0.2079
12	[0.5239, 0.4906]	10,15	0.4979	14	13.9039	0.0961	0.6864
13	[0.4906, 0.45]	15,20	0.4822	16	16.0345	0.0345	0.2155
14	[0.4906, 0.45]	15,20	0.475	17	16.9212	0.0788	0.4636
15	[0.4906, 0.45]	15,20	0.4656	18	18.0788	0.0788	0.4379
16	[0.4906, 0.45]	15,20	0.4583	19	18.9778	0.0222	0.1167
17	[0.45, 0.402]	20,25	0.4406	21	20.9792	0.0208	0.0992
18	[0.45, 0.402]	20,25	0.4322	22	21.8542	0.1458	0.6629
19	[0.45, 0.402]	20,25	0.4218	23	22.9375	0.0625	0.2717
20	[0.45, 0.402]	20,25	0.4114	24	24.0208	0.0208	0.0868
21	[0.402, 0.3541]	25,30	0.3906	26	26.1900	0.1900	0.7307
22	[0.402, 0.3541]	25,30	0.3791	27	27.3904	0.3904	1.4459
23	[0.402, 0.3541]	25,30	0.3666	28	28.6952	0.6952	2.4829
24	[0.402, 0.3541]	25,30	0.3677	29	28.5804	0.4196	1.4470
25	[0.3541, 0.2822]	30,35	0.3406	31	30.9388	0.0612	0.1974
26	[0.3541, 0.2822]	30,35	0.327	32	31.8846	0.1154	0.3607
27	[0.3541, 0.2822]	30,35	0.3135	33	32.8234	0.1766	0.5353
28	[0.3541, 0.2822]	30,35	0.2989	34	33.8387	0.1613	0.4745
29	[0.2822, 0.1843]	35,40	0.2635	36	35.9551	0.0449	0.1248
30	[0.2822, 0.1843]	35,40	0.2458	37	36.8590	0.1410	0.3810
31	[0.2822, 0.1843]	35,40	0.2239	38	37.9775	0.0225	0.0591
32	[0.2822, 0.1843]	35,40	0.2041	39	38.9888	0.0112	0.0288
Promedio						0.1177	1.0052

Tabla 30: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector P2 mediante interpolación lineal.

H.3. Interpolación cuadrática

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpolación Cuadrática	Error absoluto	Error relativo
1	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.6145	1	1.0755	0.0755	7.5549
2	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.6125	2	1.5760	0.4240	21.2006
3	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.6062	3	3.1029	0.1029	3.4308
4	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.601	4	4.3067	0.3067	7.6674
5	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5927	6	6.1221	0.1221	2.0357
6	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5895	7	6.7873	0.2127	3.0390
7	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5822	8	8.2369	0.2369	2.9613
8	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5791	9	8.8338	0.1662	1.8469
9	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5677	11	10.9498	0.0502	0.4561
10	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5604	12	12.2397	0.2397	1.9976
11	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5562	13	12.9588	0.0412	0.3169
12	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5479	14	14.3307	0.3307	2.3619
13	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5375	16	15.9575	0.0425	0.2656
14	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5312	17	16.8932	0.1068	0.6285
15	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5229	18	18.0691	0.0691	0.3840

Tabla 31: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante interpolación cuadrática (1/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coor- denada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpola- ción Cuadrática	Error absoluto	Error relativo
16	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5156	19	19.0560	0.0560	0.2945
17	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.501	21	20.9013	0.0987	0.4702
18	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.4927	22	21.8740	0.1260	0.5728
19	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.4843	23	22.8028	0.1972	0.8573
20	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.475	24	23.7976	0.2024	0.8435
21	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.4572	26	25.6458	0.3542	1.3624
22	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.4458	27	26.7911	0.2089	0.7738
23	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.4354	28	27.8093	0.1907	0.6810
24	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.425	29	28.7885	0.2115	0.7292
25	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.3989	31	31.0445	0.0445	0.1435
26	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.3864	32	32.0229	0.0229	0.0714
27	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.3739	33	32.9367	0.0633	0.1918
28	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.3593	34	33.9558	0.0442	0.1299
29	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.327	36	36.0666	0.0666	0.1849
30	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.3109	37	37.0447	0.0447	0.1208
31	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.2932	38	38.0632	0.0632	0.1663
32	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.2723	39	39.1892	0.1892	0.4851
Promedio						0.1472	2.0070

Tabla 32: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante interpolación cuadrática (2/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Interpolación Cuadrática	Error absoluto	Error relativo
1	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5708	1	0.9786	0.0214	2.1407
2	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5656	2	2.1496	0.1496	7.4803
3	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5614	3	3.0627	0.0627	2.0883
4	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5562	4	4.1525	0.1525	3.8127
5	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5468	6	6.0087	0.0087	0.1450
6	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5416	7	6.9725	0.0275	0.3928
7	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5354	8	8.0657	0.0657	0.8215
8	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5302	9	8.9537	0.0463	0.5143
9	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5177	11	10.9981	0.0019	0.0176
10	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5104	12	12.1330	0.1330	1.1083
11	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.5041	13	13.0778	0.0778	0.5983
12	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4979	14	13.9778	0.0222	0.1586
13	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4822	16	16.1260	0.1260	0.7878
14	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.475	17	17.0485	0.0485	0.2852
15	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4656	18	18.1963	0.1963	1.0908
16	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4583	19	19.0553	0.0553	0.2913
17	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4406	21	21.0287	0.0287	0.1368
18	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4322	22	21.9110	0.0890	0.4044
19	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4218	23	22.9614	0.0386	0.1680
20	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4114	24	24.0215	0.0215	0.0897
21	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.3906	26	26.2124	0.2124	0.8170
22	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.3791	27	27.4641	0.4641	1.7190
23	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.3666	28	28.7923	0.7923	2.8296
24	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.3677	29	28.6802	0.3198	1.1027
25	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.3406	31	31.1685	0.1685	0.5434
26	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.327	32	32.2029	0.2029	0.6341
27	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.3135	33	33.0949	0.0949	0.2874
28	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.2989	34	34.0020	0.0020	0.0059
29	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.2635	36	36.0673	0.0673	0.1870
30	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.2458	37	37.0288	0.0288	0.0777
31	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.2239	38	38.1526	0.1526	0.4015
32	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.2041	39	39.1060	0.1060	0.2718
Promedio						0.1245	0.9815

Tabla 33: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector P2 mediante interpolación cuadrática.

H.4. Spline cúbico

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Spline Cúbico	Error absoluto	Error relativo
1	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.6145	1	1.0884	0.0884	8.8419
2	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.6125	2	1.5916	0.4084	20.4192
3	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.6062	3	3.1169	0.1169	3.8977
4	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.601	4	4.3124	0.3124	7.8100
5	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5927	6	6.1148	0.1148	1.9132
6	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5895	7	6.7786	0.2214	3.1625
7	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5822	8	8.2369	0.2369	2.9613
8	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5791	9	8.8352	0.1648	1.8311
9	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5677	11	10.9485	0.0515	0.4681
10	[0.5979, 0.5729,0.5437]	0,5,10	0.5604	12	12.2379	0.2379	1.9824
11	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5562	13	12.9572	0.0428	0.3290
12	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5479	14	14.3301	0.3301	2.3579
13	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5375	16	15.9583	0.0417	0.2604
14	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5312	17	16.8953	0.1047	0.6157
15	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5229	18	18.0744	0.0744	0.4132

Tabla 34: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante spline cúbico (1/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coor- denada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Spline Cúbico	Error absoluto	Error relativo
16	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.5156	19	19.0604	0.0604	0.3181
17	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.501	21	20.8950	0.1050	0.5002
18	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.4927	22	21.8649	0.1351	0.6140
19	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.4843	23	22.8036	0.1964	0.8540
20	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.475	24	23.8033	0.1967	0.8195
21	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.4572	26	25.6439	0.3561	1.3696
22	[0.5437, 0.5083,0.4635]	15,20,25	0.4458	27	26.7879	0.2121	0.7855
23	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.4354	28	27.8020	0.1980	0.7071
24	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.425	29	28.7815	0.2185	0.7534
25	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.3989	31	31.0495	0.0495	0.1597
26	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.3864	32	32.0348	0.0348	0.1087
27	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.3739	33	32.9620	0.0380	0.1153
28	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.3593	34	33.9797	0.0203	0.0598
29	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.327	36	36.0289	0.0289	0.0802
30	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.3109	37	36.9722	0.0278	0.0751
31	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.2932	38	37.9702	0.0298	0.0784
32	[0.4114, 0.3437,0.2562]	30,35,40	0.2723	39	39.1193	0.1193	0.3059
Promedio						0.1429	2.0302

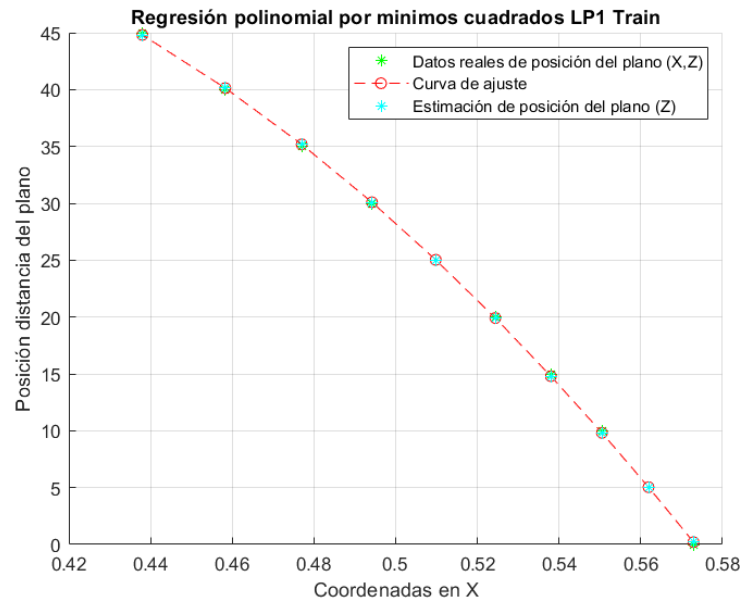
Tabla 35: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector_P1 mediante spline cúbico (2/2).

i	Intervalo Coordenada x	Intervalo Coordenada Z	Xi	Dato por ajustar (Z)	Resultado Spline Cúbico	Error absoluto	Error relativo
1	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5708	1	0.9917	0.0083	0.8265
2	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5656	2	2.1677	0.1677	8.3851
3	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5614	3	3.0782	0.0782	2.6058
4	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5562	4	4.1601	0.1601	4.0033
5	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5468	6	6.0011	0.0011	0.0190
6	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5416	7	6.9632	0.0368	0.5252
7	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5354	8	8.0650	0.0650	0.8119
8	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5302	9	8.9556	0.0444	0.4934
9	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5177	11	10.9962	0.0038	0.0344
10	[0.575, 0.552,0.5239]	0,5,10	0.5104	12	12.1307	0.1307	1.0888
11	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.5041	13	13.0764	0.0764	0.5878
12	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4979	14	13.9772	0.0228	0.1627
13	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4822	16	16.1270	0.1270	0.7937
14	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.475	17	17.0523	0.0523	0.3077
15	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4656	18	18.2070	0.2070	1.1499
16	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4583	19	19.0643	0.0643	0.3387
17	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4406	21	21.0147	0.0147	0.0700
18	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4322	22	21.8922	0.1078	0.4898
19	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4218	23	22.9583	0.0417	0.1813
20	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.4114	24	24.0222	0.0222	0.0924
21	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.3906	26	26.2194	0.2194	0.8437
22	[0.4906, 0.45,0.402]	15,20,25	0.3791	27	27.4588	0.4588	1.6994
23	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.3666	28	28.7716	0.7716	2.7558
24	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.3677	29	28.6588	0.3412	1.1767
25	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.3406	31	31.1881	0.1881	0.6068
26	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.327	32	32.2466	0.2466	0.7705
27	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.3135	33	33.1795	0.1795	0.5439
28	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.2989	34	34.0791	0.0791	0.2328
29	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.2635	36	35.9380	0.0620	0.1721
30	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.2458	37	36.7807	0.2193	0.5926
31	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.2239	38	37.8297	0.1703	0.4482
32	[0.3541, 0.2822,0.1843]	30,35,40	0.2041	39	38.8491	0.1509	0.3869
Promedio						0.1412	1.0374

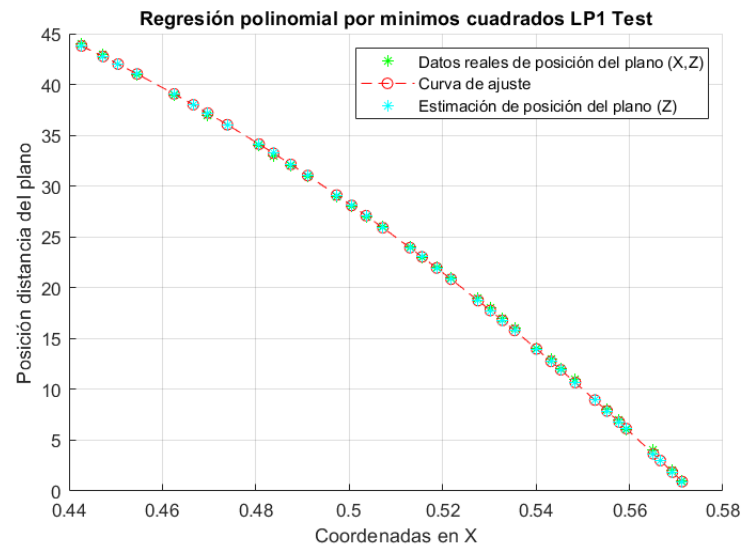
Tabla 36: Resultados de ajuste y estimación de datos de prueba en Proyector P2 mediante spline cúbico.

I. Gráficas de resultados de estimación y ajuste aplicados datos de prueba utilizando láser

A continuación, se muestran las gráficas de los resultados de estimación de los datos de prueba en los subconjuntos *Láser-P1*, *Láser-P3* y *Láser-P4*, utilizando los métodos de ajuste establecidos.



(a) Curva de ajuste en datos de entrenamiento.



(b) Curva de ajuste en datos de prueba.

Figura 10: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados en el subconjunto *Láser-P1*.

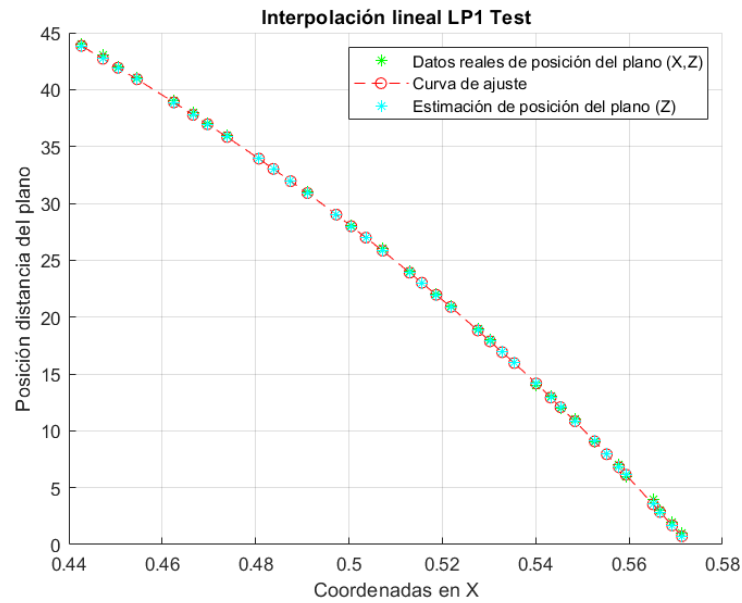


Figura 11: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación lineal en los datos de prueba del subconjunto Láser_P1.

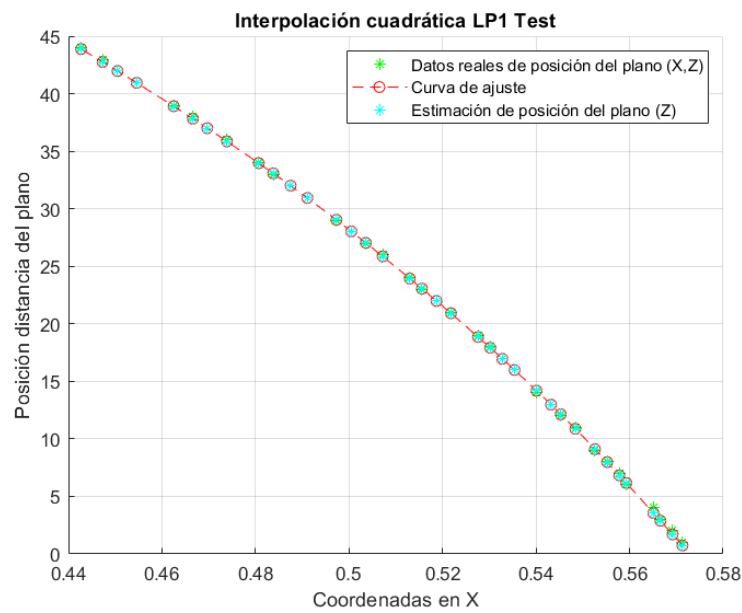


Figura 12: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación cuadrática en los datos de prueba del subconjunto Láser_P1.

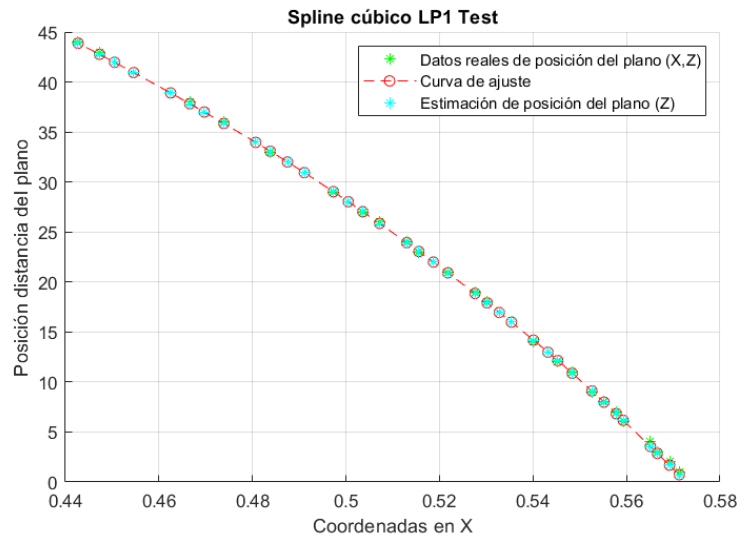
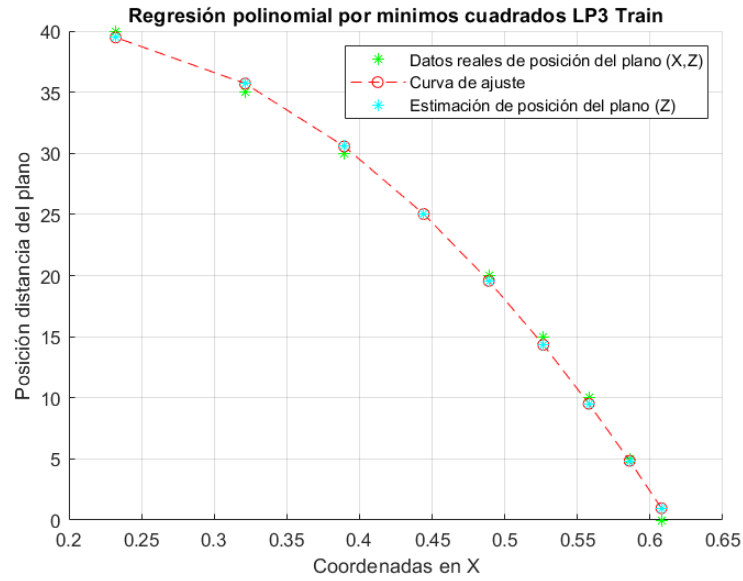
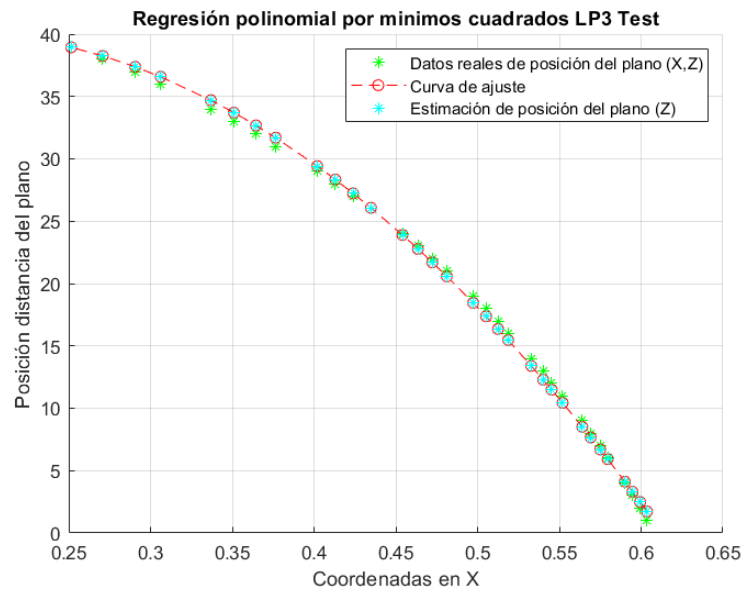


Figura 13: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante spline cúbico en los datos de prueba del subconjunto Láser_P1.



(a) Curva de ajuste en datos de entrenamiento.



(b) Curva de ajuste en datos de prueba.

Figura 14: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados en el subconjunto Láser_P3.

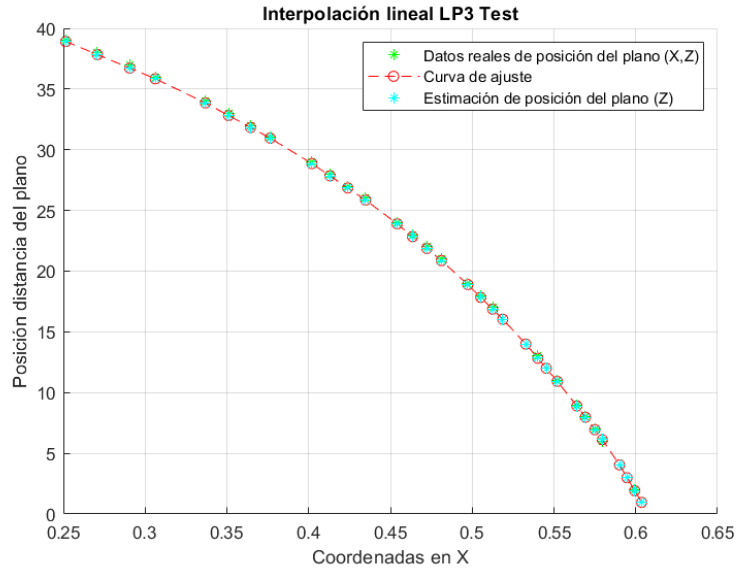


Figura 15: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación lineal en los datos de prueba del subconjunto Láser_P3.

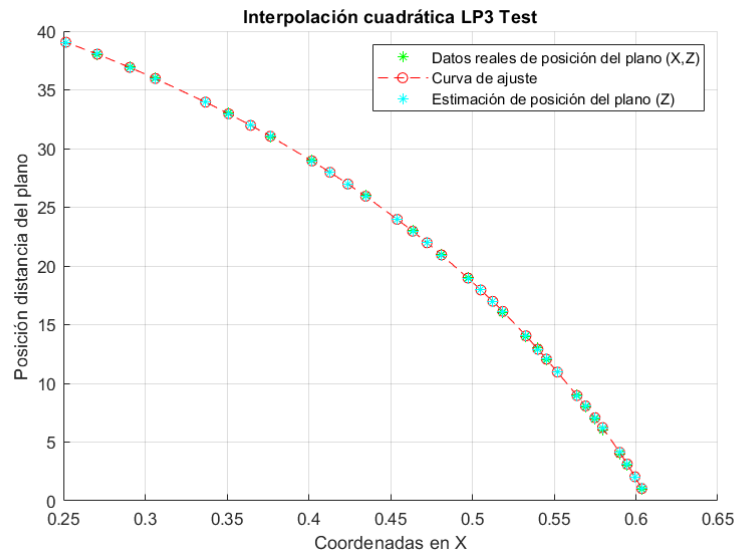


Figura 16: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación cuadrática en los datos de prueba del subconjunto Láser_P3.

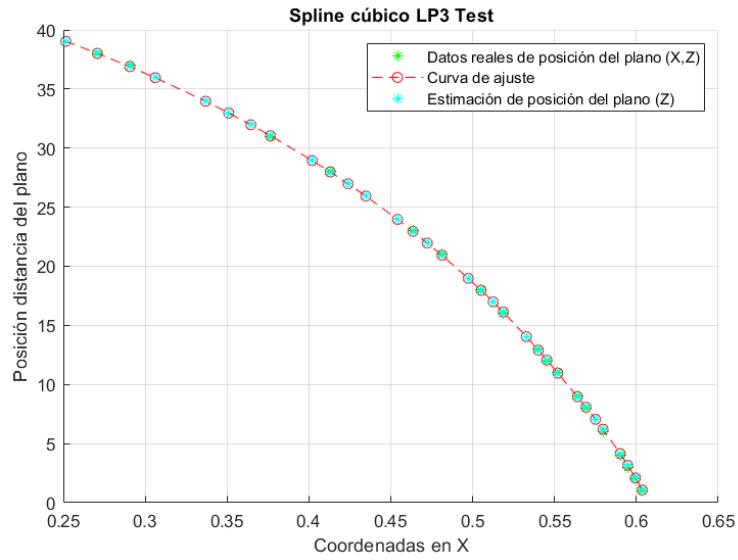
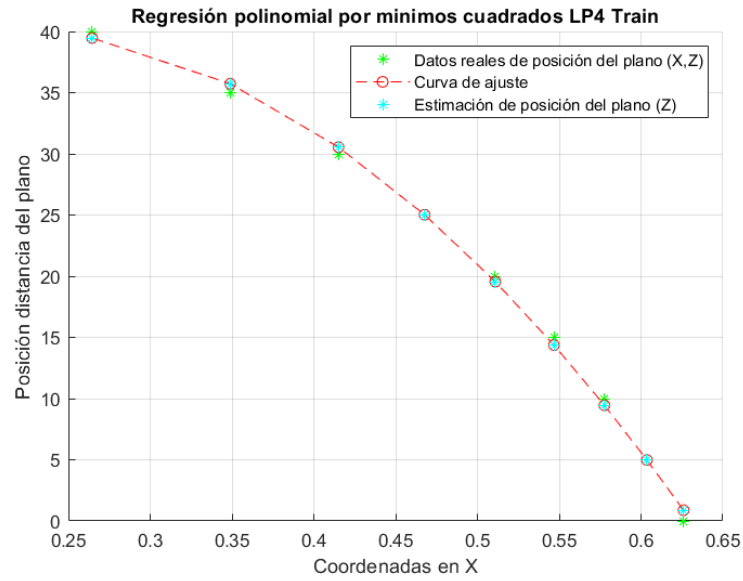
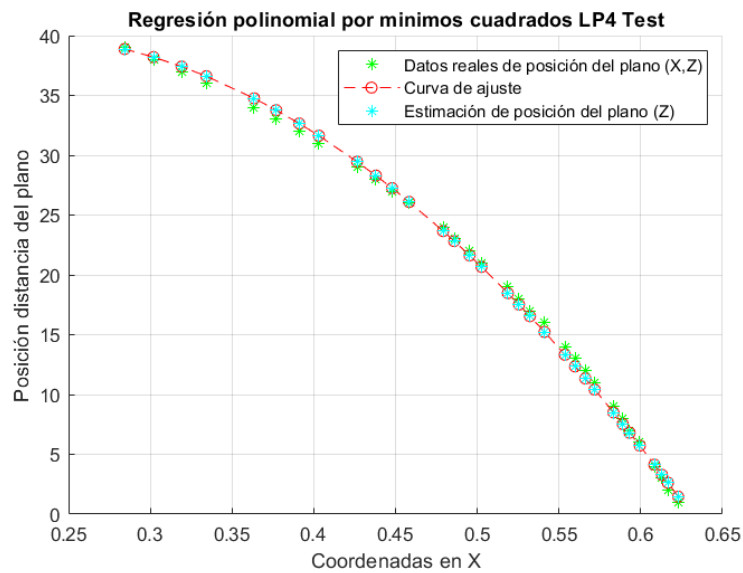


Figura 17: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante spline cúbico en los datos de prueba del subconjunto Láser_P3.



(a) Curva de ajuste en datos de entrenamiento.



(b) Curva de ajuste en datos de prueba.

Figura 18: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados en el subconjunto Láser_P4.

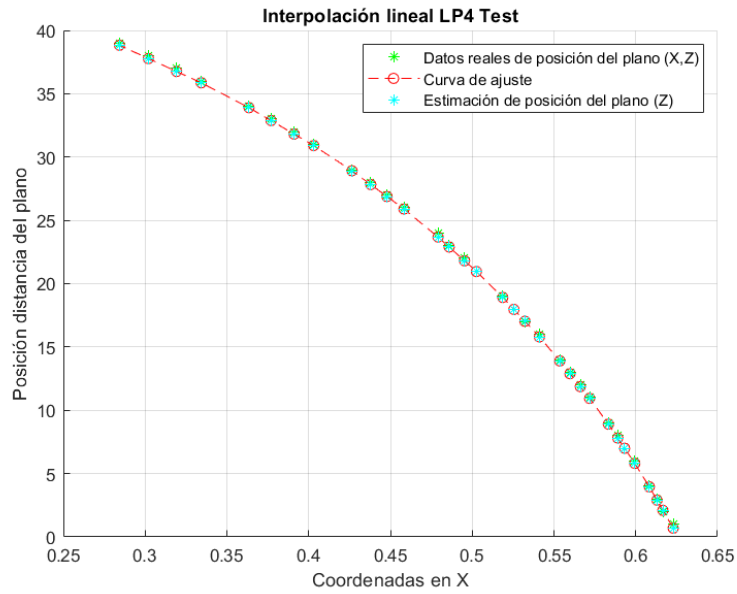


Figura 19: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación lineal en los datos de prueba del subconjunto Láser_P4.

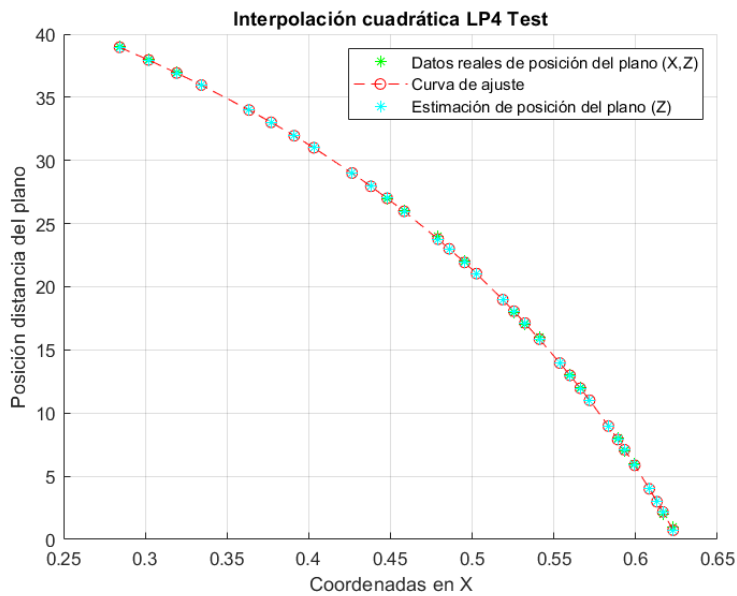


Figura 20: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación cuadrática en los datos de prueba del subconjunto Láser_P4.

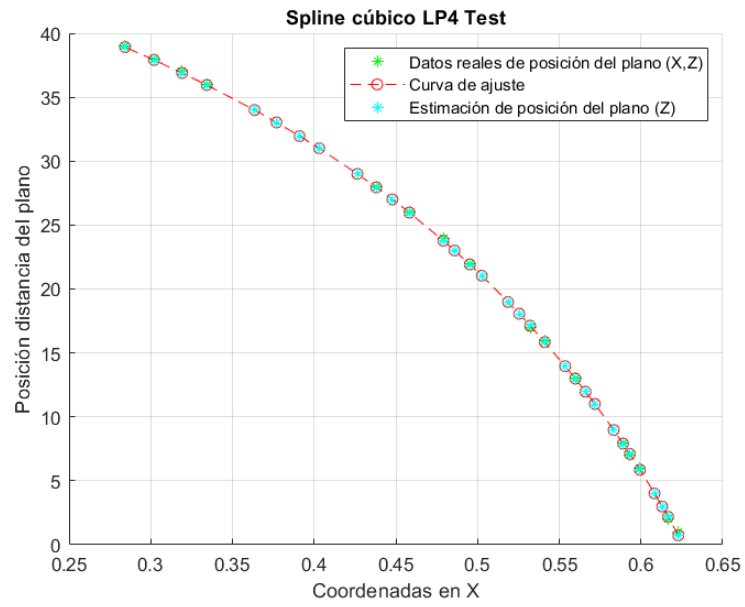
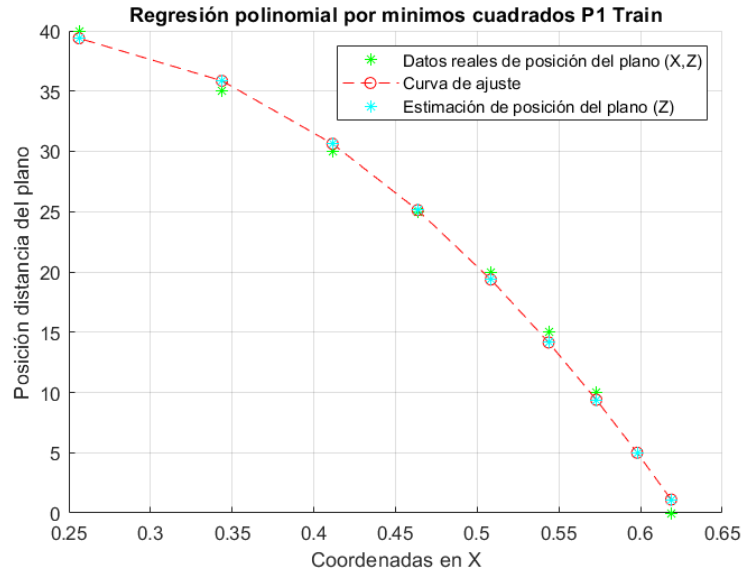


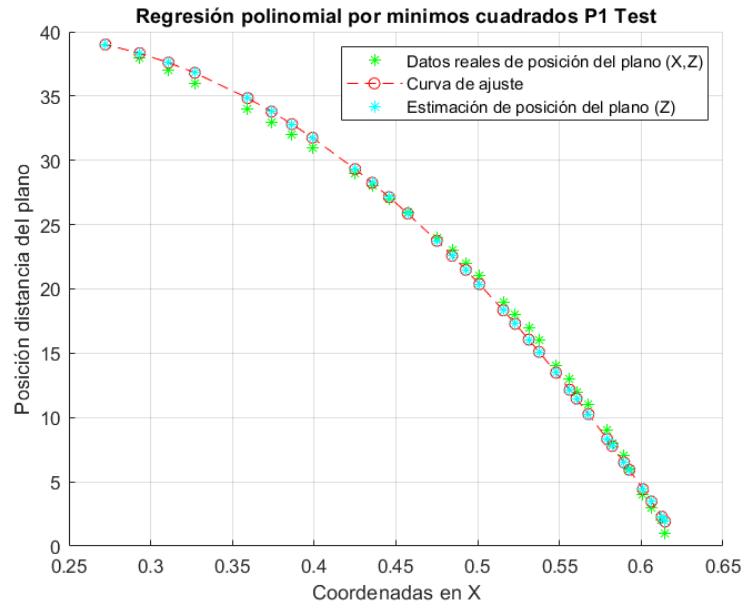
Figura 21: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante spline cúbico en los datos de prueba del subconjunto Láser_P4.

J. Gráficas de resultados de estimación y ajuste aplicados datos de prueba utilizando luz blanca

A continuación, se muestran las gráficas de los resultados de estimación de los datos de prueba en los subconjuntos *Proyector_P1* y *Proyector_P2*, utilizando los métodos de ajuste establecidos.



(a) Curva de ajuste en datos de entrenamiento.



(b) Curva de ajuste en datos de prueba.

Figura 22: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados en el subconjunto *Proyector_P1*.

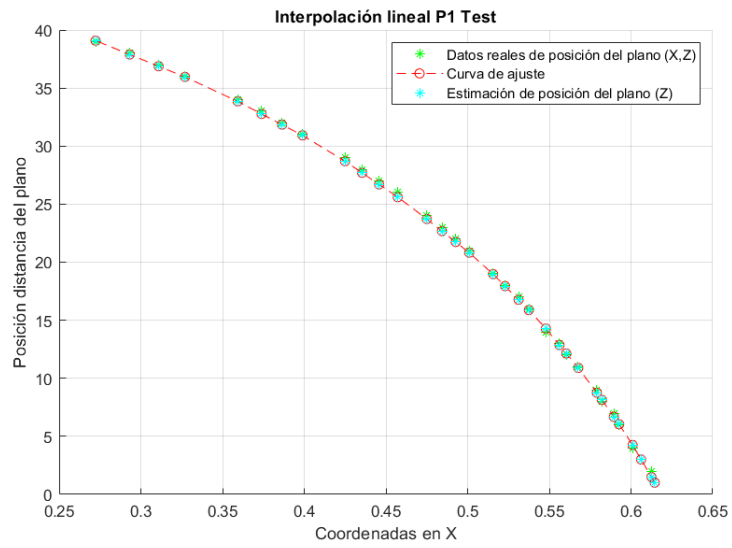


Figura 23: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación lineal en los datos de prueba del subconjunto Proyector_P1.

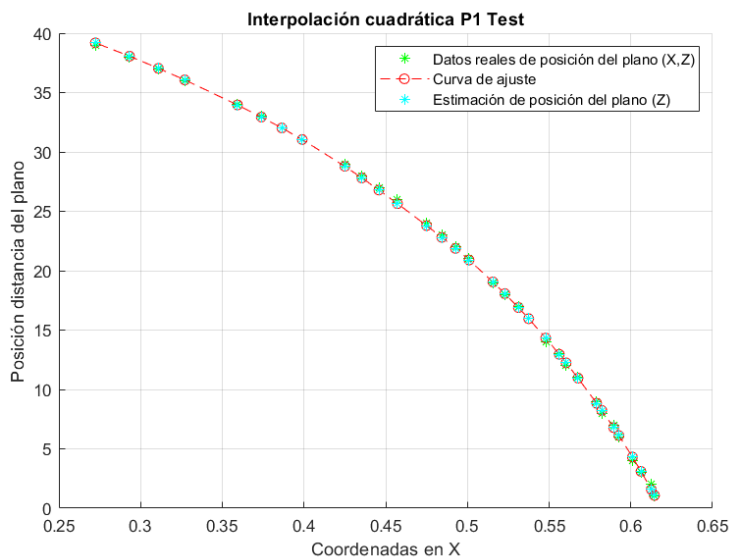


Figura 24: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación cuadrática en los datos de prueba del subconjunto Proyector_P1.

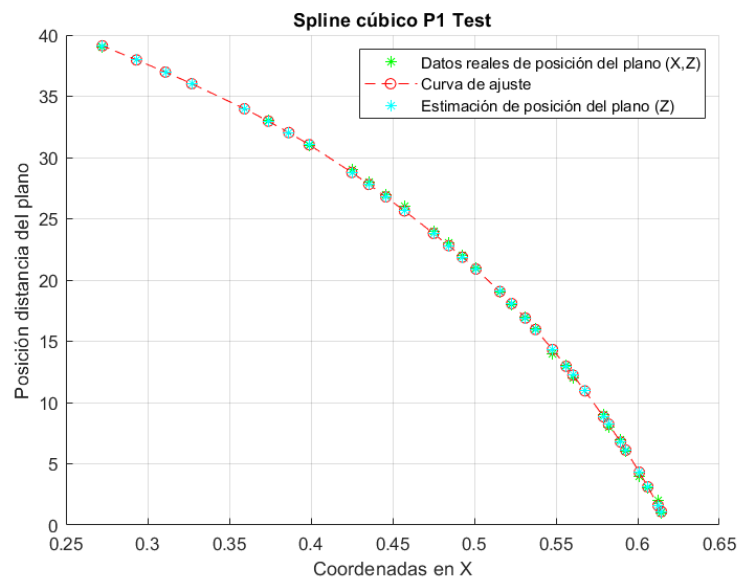
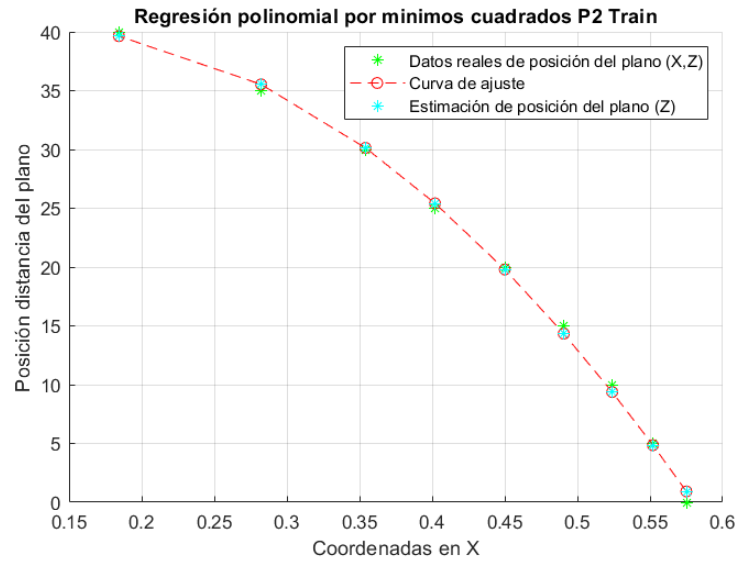
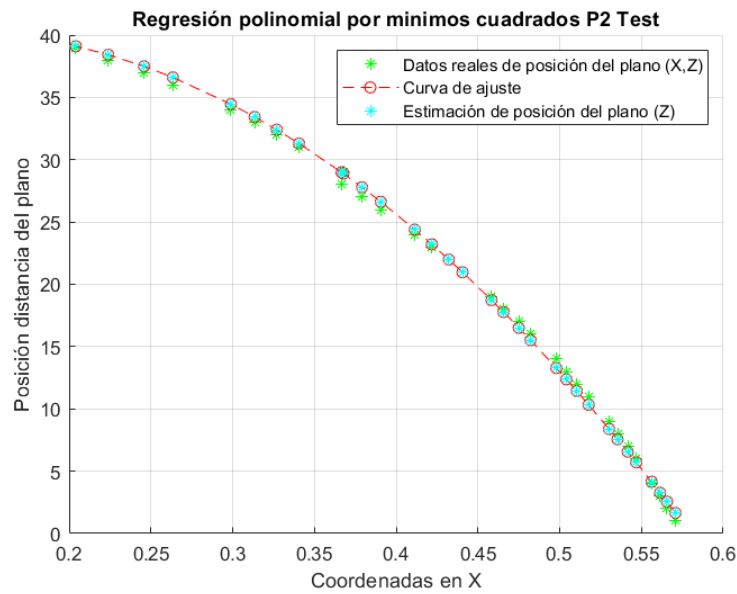


Figura 25: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante spline cúbico en los datos de prueba del subconjunto Proyector_P1.



(a) Curva de ajuste en datos de entrenamiento.



(b) Curva de ajuste en datos de prueba.

Figura 26: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante regresión polinomial por mínimos cuadrados en el subconjunto Proyector_P2.

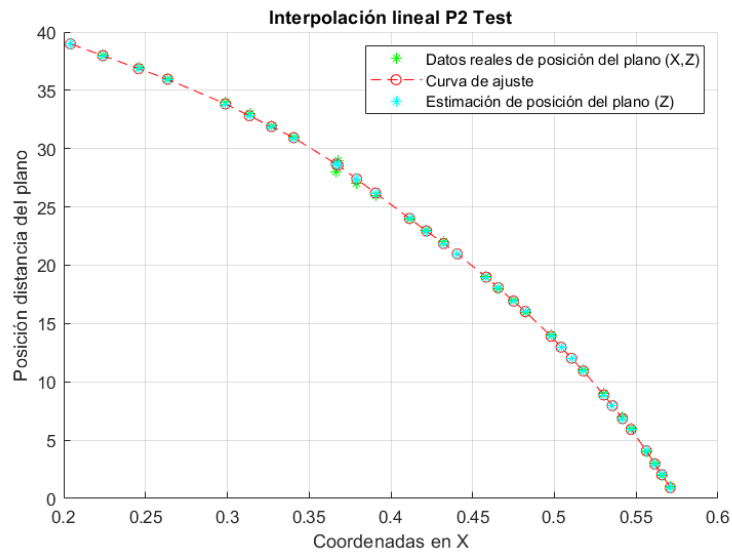


Figura 27: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación lineal en los datos de prueba del subconjunto *Proyector_P2*.

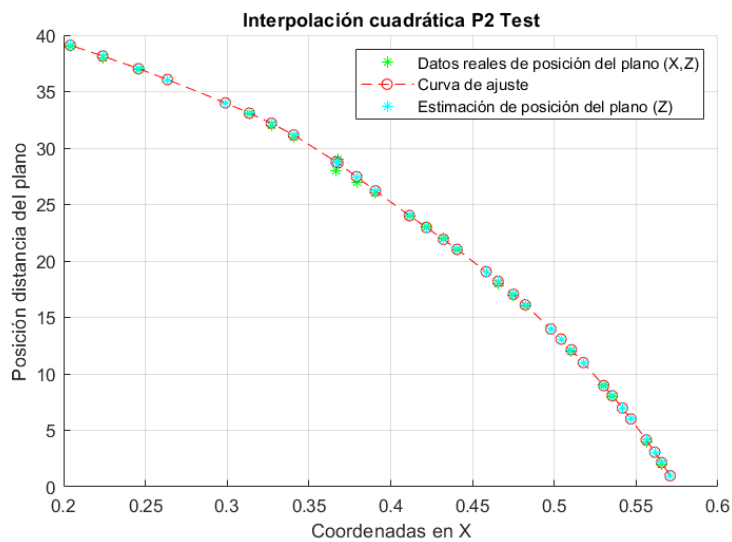


Figura 28: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante interpolación cuadrática en los datos de prueba del subconjunto *Proyector_P2*.

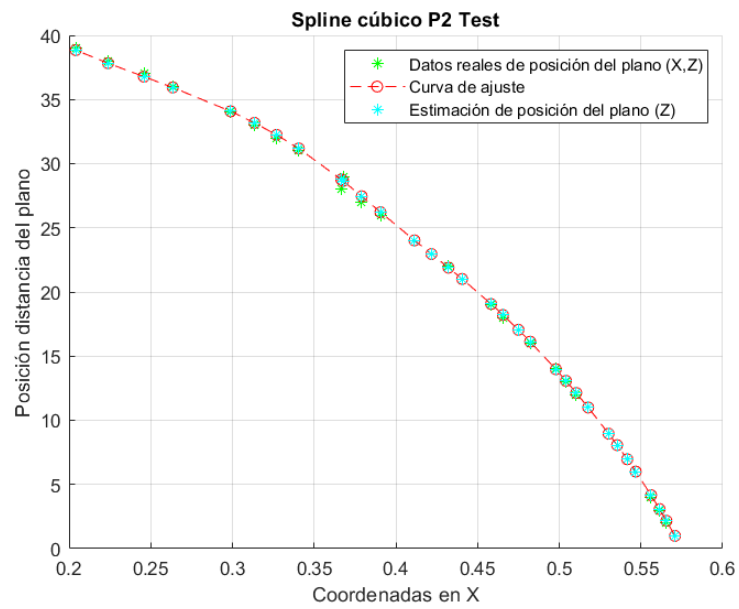


Figura 29: Ajuste y estimación de puntos de interés mediante spline cúbico en los datos de prueba del subconjunto Proyector_P2.