



Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®



**INSTITUTO TECNOLÓGICO
DE SAN LUIS POTOSÍ**

Apuntes de Asignatura: Teoría Electromagnética (ETF-1026)

Impacta a Ingeniería Electrónica (IELC-2010-211)

Elaboró: Saúl Almazán Cuéllar

Enero 2025

Contribución académica

La asignatura de Teoría Electromagnética consiste en el análisis de los campos electromagnéticos y su comportamiento sobre los diferentes medios. Por tal motivo, esta asignatura le permite al estudiante desarrollar las habilidades necesarias para aplicar los conceptos de campos electromagnéticos principalmente dentro de las comunicaciones, control e instrumentación. La importancia de la Teoría Electromagnética está en los fundamentos que rigen y explican el comportamiento de las ondas y su propagación, tanto por medios guiados (líneas de transmisión y guías de onda) como no guiados (antenas). aporta al perfil del egresado a la carrera de ingeniería electrónica las competencias que le permiten comprender y aplicar los conocimientos teóricos en la modelación, análisis y síntesis de sistemas de comunicación, adquiridos en las diversas materias cursadas durante su formación como ingeniero electrónico para su aplicación en las áreas industrial, comercial y de servicios asociados con señales físicas, y sirviendo como antecedente principalmente a los conocimientos de las asignaturas de Optoelectrónica e Instrumentación, entre otras.

La asignatura de Teoría Electromagnética proporciona las bases que permitirán a los alumnos que deseen profundizar sus conocimientos en comunicaciones o alguna materia en particular o iniciar su propia empresa desarrollando proyectos de acuerdo con su experiencia.

Contenido

Tema 1 Ecuaciones de Maxwell y Propagación de las ondas electromagnéticas.

- 1.1. Introducción a la electrostática y magnetostática desde un enfoque histórico para deducir las Ecuaciones de Maxwell.
- 1.2. Forma integral y Diferencial de las Ecuaciones de Maxwell y sus aplicaciones.
- 1.3. La ecuación de onda. Ondas viajeras y ondas planas uniformes.
- 1.4. Propagación de las Ondas Electromagnéticas Planas en medios con y sin pérdidas.
- 1.5. Polarización, Potencia y Vector Poynting.
- 1.6. Reflexión de Ondas en incidencia normal y oblicua.

Tema 2 Líneas de Transmisión.

- 2.1. Ecuaciones y parámetros de las líneas de transmisión.
- 2.2. Comportamiento de la línea de transmisión con carga, Impedancia de entrada y Relación de Onda Estacionaria.
- 2.3. Carta de Smith.
- 2.4. Acoplamiento de una línea de transmisión.
- 2.5. Análisis y diseño con líneas de transmisión.
- 2.6. Ecuaciones de Maxwell aplicadas a líneas de transmisión. Líneas de transmisión de microcintas.

Tema 3 Guías de onda.

- 3.1. Ecuaciones y parámetros de las guías de onda rectangulares.
- 3.2. Análisis de los Modos magnéticos transversales (MT).
- 3.3. Análisis de los Modos eléctricos transversales (ET).
- 3.4. Propagación de las ondas en la guía de onda.
- 3.5. Transmisión de potencia y atenuación.
- 3.6. Resonadores y filtros en la guías de onda.

Tema 4 Antenas.

- 4.1. Parámetros y características básicas de una antena.
- 4.2. Radiación.
- 4.3. Análisis del dipolo eléctrico elemental y de media onda.
- 4.4. Análisis de otros tipos de antena especiales.
- 4.5. Adaptación de antenas.
- 4.6. Arreglos de antena.
- 4.7. Área efectiva y fórmula de transmisión de Friis.

Introducción

Con estos apuntes para la asignatura de Teoría Electromagnética, se pretende que los estudiantes (principalmente) y docentes, tengan material de utilidad no solo durante el desarrollo de la asignatura, sino también les sirva de referencia para asignaturas posteriores.

En el caso de los estudiantes, les pueda ser de utilidad en su vida profesional. Esto se obtendrá por medio de ejemplos desarrollados paso a paso, empleo de evaluaciones numéricas, sugerencias, entre otras posibles herramientas dependiendo del tema abordado.

Uno de los objetivos de estos apuntes es que el estudiante tenga una mejor preparación y los docentes tengan tiempo para preparar mejor sus exposiciones frente a grupo.

1. Ecs. de Maxwell y Propagación de las ondas electromagnéticas

1.1. Introducción a la electrostática y magnetostática

Como es expuesto por [1] p 14: La fuerza electromagnética consiste en una fuerza eléctrica F_e y una fuerza magnética F_m . El origen del campo eléctrico es la carga eléctrica, que varía inversamente al cuadrado de la distancia a su origen respectivo, la carga eléctrica puede tener polaridad positiva o negativa.

Gracias a la física atómica, se sabe que toda la materia contiene una mezcla de neutrones, protones positivamente cargados y electrones negativamente cargados, y la cantidad de carga fundamental es la de un solo electrón, denotada en general por la letra e . La unidad con la cual se mide la carga eléctrica es el coulomb (C), nombrada en honor del científico francés Charles Augustin de Coulomb (1736-1806). La magnitud de e es $e = 1.6 \times 10^{-19}$ (C).

La carga de un solo electrón es $q_e = -e$ y de la de un protón es de igual magnitud pero de polaridad opuesta: $q_p = e$. Los experimentos de Coulomb demostraron que:

- 1. dos cargas iguales se repelen entre sí, mientras que dos cargas de polaridad opuesta se atraen,*
- 2. la fuerza actúa a lo largo de la línea que une las cargas, y*
- 3. su intensidad es proporcional al producto de las magnitudes de las dos cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*

Estas propiedades constituyen lo que actualmente se conoce como **ley de Coulomb**, que se expresa matemáticamente mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F}_{e_{21}} = \hat{\mathbf{R}}_{12} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \quad (N) \quad (\text{en el espacio libre})$$

Donde $\mathbf{F}_{e_{21}}$ es la fuerza eléctrica que actúa en la carga q_2 producida por la carga q_1 (como lo muestra la figura 1.1), ϵ_0 es una constante universal llamada **permitividad eléctrica del espacio libre** $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ farads por metro (F/m). Se supone que las dos cargas están en el **espacio libre** (vacío) y aisladas de todas las demás cargas. La fuerza $\mathbf{F}_{e_{21}}$ que actúa en la carga q_1 producida por la carga q_2 es igual a la fuerza $\mathbf{F}_{e_{12}}$ en magnitud, pero opuesta en dirección; $\mathbf{F}_{e_{12}} = -\mathbf{F}_{e_{21}}$.

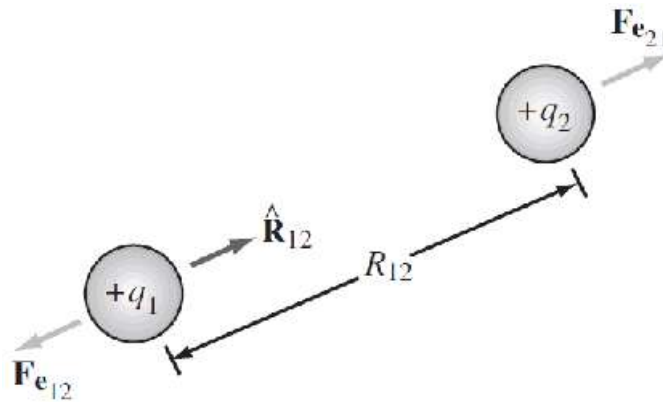


Figura 1.1 Fuerzas eléctricas que actúan en dos cargas puntuales positivas en el espacio libre.

La expresión de la ecuación para la fuerza eléctrica se puede ampliar definiendo la existencia de una **intensidad de campo eléctrico** $\mathbf{E}$ ocasionada por cualquier carga q como sigue:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (V/m) \text{ (en el espacio libre)}$$

La carga eléctrica tiene dos propiedades importantes. La primera es la **ley de la conservación de la carga eléctrica**, que establece que *la carga eléctrica (neta) no se crea ni se destruye*. Si un volumen contiene n_p protones y n_e electrones, entonces la carga total es

$$q = n_p e - n_e e = (n_p - n_e) e \quad (C).$$

Aun cuando algunos de los protones se combinarán con un número igual de electrones para producir neutrones u otras partículas elementales, la carga neta q no cambia. En la materia, las leyes de la mecánica cuántica que rigen el comportamiento de los protones dentro del núcleo del átomo y los electrones afuera de él no permiten que se combinen.

La segunda propiedad importante de la carga eléctrica es el **principio de superposición lineal**, que establece que *el vector campo eléctrico total en un punto del espacio producido por un sistema de cargas puntuales es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos en ese punto producidos por las cargas individuales*. Este concepto aparentemente simple permitirá calcular el campo eléctrico generado por distribuciones de carga complejas sin tener que preocuparse por las fuerzas que actúan en cada carga individual generadas por los campos producidos por todas las demás cargas.

Si deseamos obtener la **intensidad de campo eléctrico** $\mathbf{E}$ ocasionada por cualquier carga q en cualquier medio, la permitividad de espacio libre ϵ_0 se reemplaza con ϵ , donde ϵ ahora es la permitividad del material en el cual se mide el campo eléctrico y es, por consiguiente, característico de ese material particular. Por tanto,

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}} \frac{q}{4\pi\epsilon R^2} \quad (V/m).$$

ϵ se expresa en la forma $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (F/m)$, donde ϵ_r es una cantidad sin unidades llamada **permitividad relativa** o **constante dieléctrica** del material. En el caso del vacío, $\epsilon_r = 1$; para aire cerca de la superficie terrestre $\epsilon_r = 1.0006$.

Además de la intensidad del campo eléctrico $\mathbf{E}$, con frecuencia se verá que es conveniente utilizar una cantidad relacionada llamada **densidad de flujo eléctrico** $\mathbf{D}$, determinada por $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (C/m^2)$.

Alrededor del año 800 a.C., los griegos descubrieron que ciertas clases de rocas exhiben una fuerza que atrae limaduras de hierro. Estas rocas ahora se conocen con el nombre de **magnetita** (Fe_3O_4) y el fenómeno que se presenta en ellas es el **magnetismo**. En el siglo XIII, científicos franceses descubrieron que, cuando se colocaba una hoja sobre la superficie de un imán natural esférico, esta se orientaba a lo largo en distintas direcciones en diferentes lugares del imán. Trazando las direcciones tomadas por la aguja, se determinó que la fuerza magnética formaba líneas de campo magnético que rodeaban la esfera y parecía que pasaban a través de dos puntos diametralmente opuestos entre sí. Se encontró que estos puntos, llamados **polos norte y sur** del imán, existen en todo imán, sin importar su forma.

También se observó que los polos semejantes de imanes diferentes se repelen y los distintos se atraen. Esta propiedad de atracción-repulsión es similar a la fuerza eléctrica entre cargas eléctricas, excepto por una importante diferencia: *las cargas eléctricas pueden estar aisladas, pero los polos magnéticos siempre existen en pares*. Si un imán permanente se corta en pedazos, sin importar cuán pequeño sea cada trozo, siempre tendrá un polo norte y un polo sur.

Las líneas magnéticas que circundan un imán se llaman **líneas de campo magnético** y representan la existencia de un campo magnético llamado **densidad de flujo magnético** $\mathbf{B}$. No solo existe un campo magnético alrededor de los imanes permanentes, sino que también puede crearse mediante corriente eléctrica. En 1819 el científico danés Hans Oersted (1777-1851) descubrió esta conexión entre

electricidad y magnetismo. Oersted encontró que una corriente eléctrica presente en un alambre hacía que la aguja de una brújula colocada cerca de él se desviara, y que la aguja giraba de tal forma que su dirección siempre era perpendicular al alambre y a la línea radial que conectaba el alambre con la aguja. A partir de estas observaciones, dedujo que el alambre que conducía corriente inducía un campo magnético que formaba círculos alrededor del alambre.

Poco tiempo después del descubrimiento de Oersted, los científicos franceses Jean Baptiste Biot y Felix Sabat desarrollaron una expresión que relaciona la densidad del flujo magnético $\mathbf{B}$ en un punto en el espacio con la corriente I en el conductor.

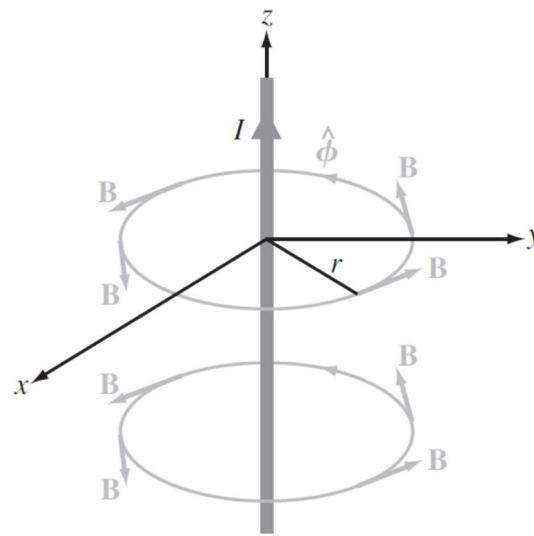


Figura 1.2 Campo magnético inducido por una corriente constante que fluye en la dirección z.

La aplicación de su fórmula, conocida en la actualidad como **ley de Biot-Sabat**, para un conductor muy largo se muestra en la figura 1.2, y nos lleva al resultado de que la densidad de flujo magnético $\mathbf{B}$ inducida por una corriente constante I que fluye en la dirección z está dada por

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad \mathbf{B} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{T})$$

donde r es la distancia radial a la corriente y $\hat{\phi}$ es un vector unitario azimutal que denota el hecho que la dirección del campo magnético es tangencial al círculo que circunda la corriente. El campo magnético se mide en teslas (T), en honor a Nikola Tesla (1856-1943), un ingeniero electricista croata-estadounidense, cuyo trabajo sobre transformadores hizo posible transportar electricidad a través de conductores

largos sin demasiadas pérdidas. La cantidad μ_0 se llama **permeabilidad magnética del espacio libre** [$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henrys por metro (H/m)], y es análoga a la permitividad eléctrica ϵ_0 . El producto de ϵ_0 y μ_0 especifica c , la **velocidad de la luz en el espacio libre**, como sigue: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8$ (m/s). La mayoría de los materiales naturales son **no magnéticos**, esto es, exhiben una permeabilidad magnética $\mu = \mu_0$. Para materiales ferromagnéticos, tales como el hierro y el níquel, μ es mucho más grande que μ_0 .

La permeabilidad magnética μ explica las propiedades de **magnetización** de un material. La μ de un material particular se define como $\mu = \mu_r \mu_0$ (H/m) donde μ_r es una cantidad sin unidades llamada **permeabilidad magnética relativa** del material.

Así como **E** y **D** constituyen un par de cantidades de campo electromagnético, **B** y la **intensidad de campo magnético H**, que se relacionan entre sí mediante μ :

B = μH . También **B** y **H** constituyen un par de cantidades de campo electromagnético.

Electroestática y Magnetostática

El campo eléctrico **E** está regido por la carga q y el campo magnético **H** está regido por $I = dq/dt$, y puesto que q y $I = dq/dt$ son variables independientes, los campos eléctrico y magnético inducidos son independientes uno de otro en tanto I permanezca constante. Para demostrar la validez de este enunciado, considere por ejemplo una pequeña sección de un haz de partículas cargadas que se mueven a una velocidad constante. Las cargas en movimiento constituyen una corriente directa. La carga total q contenida en esa sección del haz determina el campo eléctrico. El campo magnético no depende de q , sino de la tasa de carga (corriente) que fluye a través de esa sección. Pocas cargas que se mueven muy rápido pueden constituir la misma corriente que muchas cargas que se mueven lentamente. En estos dos casos, el campo magnético inducido será el mismo porque la corriente I es la misma, pero el campo eléctrico inducido será bastante diferente porque los números de cargas no son los mismos. La electrostática y magnetostática correspondientes a cargas estacionarias y corrientes constantes respectivamente, son casos especiales del electromagnetismo. Representan dos ramas independientes, caracterizadas así porque los campos eléctrico y magnético inducidos no están acoplados entre sí. La **dinámica**, la tercera y más general rama de la electromagnética, implica **campos**

variables con el tiempo inducidos por fuentes variables con el tiempo, es decir, corrientes y densidades de carga. Si la corriente asociada con el haz de partículas cargadas en movimiento varía con el tiempo, entonces la cantidad de carga presente en una sección dada del haz también varía con el tiempo y viceversa.

Según [1] p 152: La electrostática es un importante campo de estudio. Muchos artefactos y sistema electrónicos están basados en los principios de la electrostática. Entre ellos se incluyen máquinas de rayos X, osciloscopios, impresoras electrostáticas de inyección de tinta, pantallas de cristal líquido, maquinas copiadoras, teclados de capacitancia y muchos dispositivos de control transistorizados. La electrostática también se utiliza en el diseño de sensores de diagnóstico médico, tales como el electrocardiograma (para registrar el patrón de bombeo del corazón) y el electroencefalograma (para registrar la actividad del cerebro), así como en numerosas aplicaciones industriales.

Distribuciones de carga y corriente. Se presentan varias distribuciones de carga eléctrica, y si las cargas están en movimiento, constituyen distribuciones de corriente. La carga puede distribuirse en un volumen de espacio, a través de una superficie o a lo largo de una línea.

Densidades de carga. A escala atómica, la distribución de carga en un material es discreta, es decir, existe carga solo donde hay electrones y núcleos, y en ninguna otra parte. En la teoría electromagnética, el interés casi siempre se concentra en el estudio de fenómenos a una escala mucho mayor, por lo general tres o más ordenes de magnitudes más grandes que la separación entre átomos adyacentes. A semejante escala macroscópica, se puede pasar por alto la naturaleza discontinua de la distribución de carga y tratar la carga neta contenida en un volumen elemental Δv como si estuviera uniformemente distribuida dentro de él. Así pues, la **densidad**

de carga en un volumen ρ_v se define como $\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} \quad (C/m^3)$, donde Δq es la carga contenida en Δv . En general, ρ_v se define en un punto dado en el espacio, especificado por (x, y, z) en un sistema de coordenadas cartesianas en un instante dado t . Por lo tanto, $\rho_v = (x, y, z, t)$.

Físicamente, ρ_v representa la carga promedio por unidad de volumen para un volumen Δv con centro en (x, y, z) con Δv suficientemente grande para contener un gran número de átomos pero al mismo tiempo suficientemente pequeño como para verse como un punto a la escala macroscópica considerada. La variación de ρ_v con la ubicación en el espacio se llama **distribución espacial**, o simplemente

distribución. La carga total contenida en un volumen dado v se determina mediante $Q = \int_v \rho_v dv$ (C). En algunos casos, sobre todo cuando se trata de conductores, la carga eléctrica puede estar distribuida a través de la superficie de un material, en cuyo caso la cantidad relevante de interés es la **densidad de carga superficial** ρ_s ,

definida como $\rho_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds}$ (C/m²), donde Δq es la carga presente a través

de un área de superficie elemental Δs . Asimismo, si la carga esta distribuida a lo largo de una línea, la cual no tiene que ser recta, la distribución se caracteriza en función de la **densidad de carga lineal** ρ_l , definida como

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (C/m).$$

EJEMPLO 1: Calcule la carga total Q contenida en un tubo cilíndrico de carga orientado a lo largo del eje z como se muestra en la figura 1.3. La densidad de carga lineal es $\rho_l = 2z$, donde z es la distancia en metros al extremo inferior del tubo. La longitud de este es 10 cm.

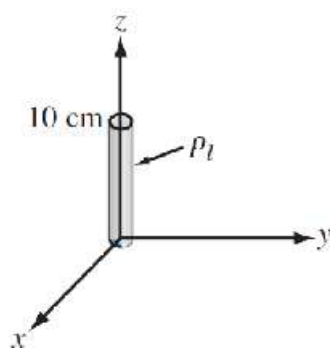


Figura 1.3 Distribución de carga lineal.

La carga total Q es $Q = \int_0^{0.1} \rho_l dz = \int_0^{0.1} 2z dz = z^2 \Big|_0^{0.1} = 0.01 = 10^{-2} C$.

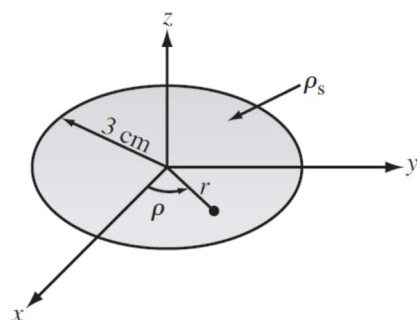


Figura 1.4 Distribución de carga superficial.

EJEMPLO 2: El disco circular de carga eléctrica que se ilustra en la figura 1.4 esta caracterizado por una densidad de carga superficial azimutalmente simétrica que se incrementa de forma lineal con r desde cero en el centro hasta 6 C/m^2 con $r = 3\text{ cm}$. Calcule la carga total presente en la superficie del disco.

Como ρ_s es simétrica respecto al ángulo azimutal ϕ , su forma funcional solo

depende de r y está dada por $\rho_s = \frac{6r}{3 \times 10^{-12}} = 2 \times 10^2 r \text{ C/m}^2$, donde r está en metros.

En coordenadas polares, un elemento de área es $ds = r dr d\phi$ y para el disco mostrado en la figura, los límites de integración son de 0 a 2π (rad) para ϕ y de 0 a $3 \times 10^{-2} \text{ m}$ para r . Por lo tanto,

$$Q = \int_s \rho_s ds = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{3 \times 10^{-2}} (2 \times 10^2 r) r dr d\phi = 2\pi \times 2 \times 10^2 \frac{r^3}{3} \Big|_0^{3 \times 10^{-2}} = 11.31 \text{ mC}.$$

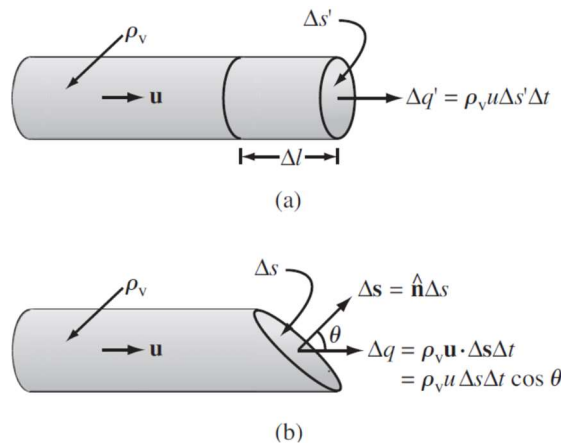


Figura 1.5 Cargas con velocidad $\mathbf{u}$ moviéndose a través de una sección transversal $\Delta s'$ en a) y Δs en b).

Densidad de corriente Considere un tubo de carga cuya densidad de carga volumétrica es ρ_v , como se ilustra en la figura 1.5a. Las cargas se mueven con una velocidad media $\mathbf{u}$ a lo largo del eje del tubo. Durante un periodo Δt , las cargas recorren una distancia $\Delta l = u \Delta t$. La cantidad de carga que atraviesa la superficie de sección transversal $\Delta s'$ del tubo en el instante Δt es, por consiguiente $\Delta q' = \rho_v \Delta v = \rho_v \Delta l \Delta s' = \rho_v u \Delta s' \Delta t$. Considere ahora el caso más general en el que las cargas fluyen a través de una superficie Δs cuya normal $\hat{n}$ no es necesariamente paralela a $\mathbf{u}$, como se observa en la figura 1.5b. En este caso, la cantidad de carga Δq que fluye a través de Δs es $\Delta q = \rho_v \mathbf{u} \cdot \Delta s \Delta t$, y la corriente correspondiente es

$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho_v \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{s} = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{s}$. Donde $\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}$ A/m² se define como la **densidad de**

corriente en amperes por metro cuadrado. Para una superficie arbitraria S, la corriente total que fluye a través de ella está determinada entonces por

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (A).$$

Cuando el movimiento de la materia eléctricamente cargada genera la corriente, se llama **corriente convectiva** y $\mathbf{J}$ se llama **densidad de corriente de convección**. Una nube cargada por el viento, por ejemplo, produce una corriente de convección. En algunos casos, la materia cargada que constituye la corriente de convección se compone únicamente de partículas cargadas, tales como los electrones de un haz de electrones presente en un tubo de rayos catódicos (el cinescopio de televisores y monitores de computadora).

Ésta es distinta de una **corriente de conducción**, donde los átomos del medio conductor no se mueven. En un alambre metálico, hay cantidades iguales de cargas positivas (en los núcleos atómicos) y cargas negativas (en las capas de electrones del átomo). Todas las cargas positivas y la mayoría de las negativas no se mueven; solo aquellos electrones en las capas electrónicas más externas de los átomos pueden ser empujados con facilidad de un átomo al siguiente si se aplica un voltaje entre los extremos del alambre. Este movimiento de electrones de un átomo a otro produce corriente de conducción. Los electrones que emergen del alambre no necesariamente son los mismos que entran a él por el otro extremo. Como los dos tipos de corriente son generados por diferentes mecanismos físicos, la corriente de conducción obedece la ley de Ohm, en tanto que la de convección no lo hace.

En [1] p. 155, se expresa que: **Ley de Coulomb (Continuación)** Requerimos más expresiones que relacionen la **intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$** con la **densidad de flujo eléctrico $\mathbf{D}$** asociada con cualquier distribución de carga especificada.

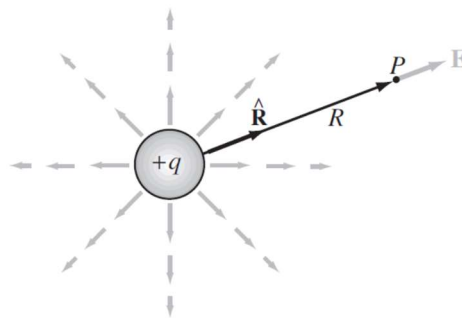


Figura 1.6 Líneas del campo eléctrico provocado por una carga q .

La **ley de Coulomb**, que se presentó por primera vez para cargas eléctricas en aire y más tarde se generalizó a medios materiales, establece que

1. Una carga aislada q induce un campo eléctrico $\mathbf{E}$ en todos los puntos del espacio y en cualquier punto específico P , y que $\mathbf{E}$ se determina mediante

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}} \frac{q}{4\pi\epsilon R^2} \quad (V/m),$$
 donde $\hat{\mathbf{R}}$ es un vector unitario que apunta de q a P (ver figura 1.6), R es la distancia entre ellos, y ϵ es la permitividad eléctrica del medio que contiene el punto de observación P ; y

2. En la presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ en un punto dado en el espacio, que puede deberse a una sola carga o una distribución de muchas, la fuerza que actúa en una carga de prueba q' , cuando ésta se coloca en ese punto, se determina por $\mathbf{F} = q'\mathbf{E} \quad (N)$. Con $\mathbf{F}$ medida en newtons (N) y q' en coulombs (C), la unidad de $\mathbf{E}$ es $(N/C)=(V/m)$.

Para un material con permitividad eléctrica ϵ , las cantidades de campo eléctrico $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ están relacionadas por $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ con $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$, donde

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \approx (1/36\pi) \times 10^{-9} \quad (F/m)$ es la permitividad eléctrica del espacio libre y $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ se llama **permitividad relativa** (o **constante dieléctrica**) del material.

Para la mayoría de los materiales y en la mayoría de las condiciones, su ϵ tiene un valor constante independiente tanto de la magnitud como de la dirección de $\mathbf{E}$. Si ϵ es independiente de la magnitud de $\mathbf{E}$, entonces se dice que el material es **lineal** porque $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ están relacionados linealmente y si es independiente de la dirección de $\mathbf{E}$, se dice que el material es **isotrópico**.

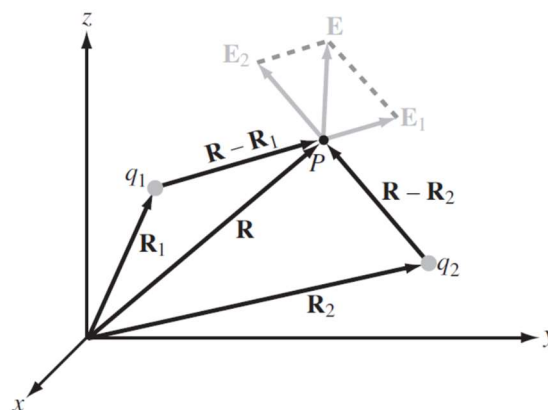


Figura 1.7 El campo eléctrico $\mathbf{E}$ en P producido por dos cargas es igual a la suma vectorial de $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$.

Campo eléctrico producido por múltiples cargas puntuales La expresión conocida para conocer el campo $\mathbf{E}$ producido por una carga puntual la extendemos a múltiples cargas puntuales. Sean q_1 y q_2 localizadas con vectores de posición $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ a partir del origen de un sistema de coordenadas dadas, como se ilustra en la figura 1.7. El campo eléctrico $\mathbf{E}$ tiene que evaluarse en un punto P con el vector de posición $\hat{\mathbf{R}}$. En P , el campo eléctrico $\mathbf{E}_1$ producido solo por q_1 esta determinado por

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1)}{4\pi\epsilon|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|^3} \quad (V/m). \text{ Con } R, \text{ la distancia entre } q_1 \text{ y } P (|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|) \text{ y el vector}$$

unitario $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1)/|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|$. El campo eléctrico producido solo por q_2 es

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_2(\mathbf{R} - \mathbf{R}_2)}{4\pi\epsilon|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|^3} \quad (V/m). \text{ Aplicando el principio de superposición lineal, el}$$

campo eléctrico total $\mathbf{E}$ en cualquier punto en el espacio es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos inducidos por todas las cargas individuales. En este caso

$$\text{tenemos: } \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q_1(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|^3} + \frac{q_2(\mathbf{R} - \mathbf{R}_2)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|^3} \right].$$

Una generalización al caso de N cargas puntuales, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ en el vector de posición $\mathbf{R}$ provocado por las cargas $q_1, q_2, \dots, q_n$ localizadas en punto con vectores de posición $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N$, se determina mediante

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\mathbf{R} - \mathbf{R}_i)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|^3} \quad (V/m).$$

EJEMPLO 3: Dos cargas puntuales con $q_1 = 2 \times 10^{-5} C$ y $q_2 = -4 \times 10^{-5} C$ están localizadas en el espacio libre en $(1, 3, -1)$ y $(-3, 1, -2)$, respectivamente, en un sistema de coordenadas cartesianas. Calcule a) el campo eléctrico $\mathbf{E}$ en $(3, 1, -2)$ y b) La fuerza sobre una carga de 8×10^{-5} localizada en ese punto. Todas las distancias están en metros

Para a) El campo eléctrico $\mathbf{E}$ con $\epsilon = \epsilon_0$ (espacio libre) se determina por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q_1(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|^3} + \frac{q_2(\mathbf{R} - \mathbf{R}_2)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|^3} \right], \text{ Los vectores } \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \text{ y } \mathbf{R} \text{ están dados por}$$

$$R_1 = \hat{x} + \hat{y}3 - \hat{z}$$

$$R_2 = -\hat{x}3 + \hat{y} - \hat{z}2 \quad \text{por lo que:}$$

$$R = \hat{x}3 + \hat{y} - \hat{z}2$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(\hat{x}2 - \hat{y}2 - \hat{z})}{27} - \left(\frac{4(\hat{x}6)}{216} \right) \right] \times 10^{-5} = \frac{\hat{x} - \hat{y}4 - \hat{z}2}{108\pi\epsilon_0} \times 10^{-5} \quad (V/m).$$

Para b)

$$F = q\mathbf{E} = 8 \times 10^{-5} \times \frac{\hat{x} - \hat{y}4 - \hat{z}2}{108\pi\epsilon_0} \times 10^{-5} = \frac{\hat{x}2 - \hat{y}8 - \hat{z}4}{27\pi\epsilon_0} \times 10^{-10} \quad (N).$$

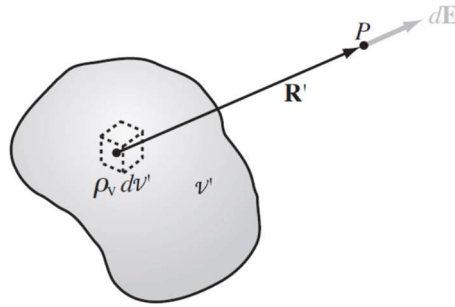


Figura 1.8. Campo eléctrico producido por una distribución de carga volumétrica.

Campo eléctrico producido por una distribución de carga Considere el volumen v' mostrado en la figura 1.8. Contiene una distribución de carga eléctrica caracterizada por una densidad de carga volumétrica ρ_v , cuya magnitud varía con la ubicación en el espacio dentro de ρ_v . El campo eléctrico diferencial en un punto P producido por una cantidad de carga diferencial $dq = \rho_v dv'$ contenido en un volumen diferencial

$$dv' \text{ es } d\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}}' \frac{dq}{4\pi\epsilon R'^2} = \hat{\mathbf{R}}' \frac{\rho_v dv'}{4\pi\epsilon R'^2}, \text{ donde } \mathbf{R}' \text{ es el vector del volumen diferencial } dv' \text{ al punto } P.$$

Aplicando el principio de superposición lineal, el campo eléctrico total $\mathbf{E}$ se obtiene integrando los campos contribuidos por todas las cargas que forman la distribución de carga. Por lo tanto $\mathbf{E} = \int_{v'} d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \hat{\mathbf{R}}' \frac{\rho_v dv'}{R'^2}$ (Distribución de volumen).

Es importante señalar que, en general, tanto $\mathbf{R}'$ como $\hat{\mathbf{R}}'$ varían como una función de la posición sobre el volumen de integración v' . Si la carga se distribuye a través de una superficie s' con densidad de carga ρ_s , entonces $dq = \rho_s ds'$ y si se distribuye a lo largo de una línea l' con una densidad de carga lineal ρ_l , entonces, $dq = \rho_l dl'$. Por lo tanto,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{s'} \hat{\mathbf{R}}' \frac{\rho_s ds'}{R'^2} \text{ (distribución de carga),}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{l'} \hat{\mathbf{R}}' \frac{\rho_l dl'}{R'^2} \text{ (distribución lineal).}$$

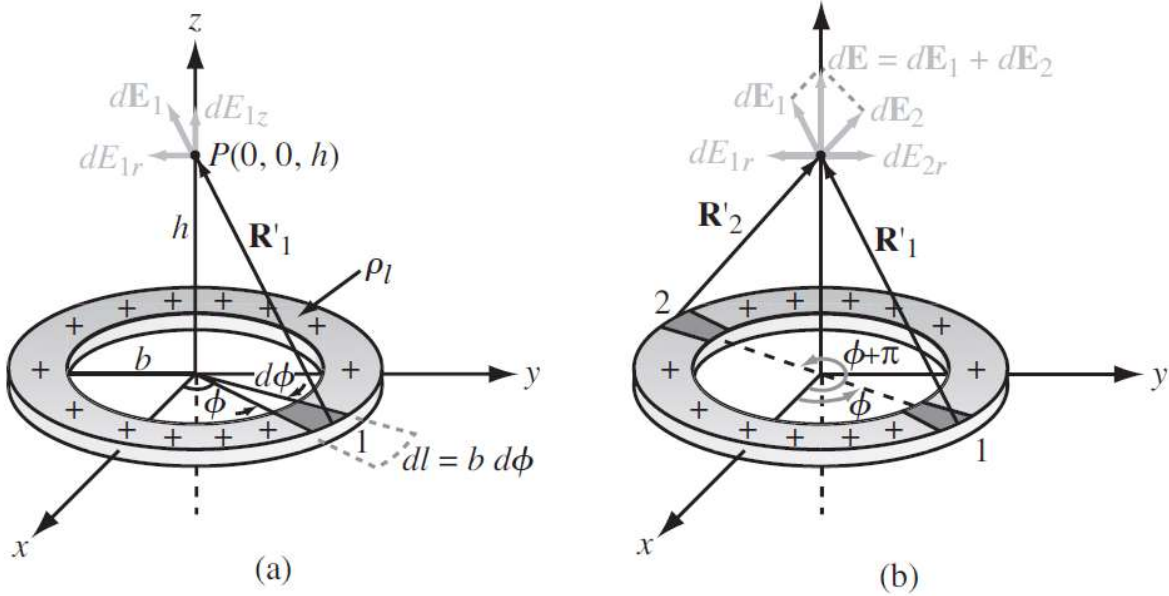


Figura 1.9 Anillo de carga con densidad lineal ρ_l . a) El campo $d\mathbf{E}_1$ producido por el segmento infinitesimal 1 y b) los campos $d\mathbf{E}_1$ y $d\mathbf{E}_2$ producidos por segmentos diametralmente opuestos.

EJEMPLO 4: Un anillo de carga de radio b se caracteriza por una densidad de carga uniforme de polaridad positiva ρ_l . Con el anillo en el espacio libre y colocado en el plano x - y como se aprecia en la figura 1.9, determine la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ en un punto $P(0,0,h)$ a lo largo del eje del anillo a una distancia h de su centro.

Se considera el campo eléctrico generado por un segmento diferencial del anillo, tal como un segmento 1 localizado en $(b, \phi, 0)$. La longitud del segmento es $dl = b d\phi$ y contiene una carga $dq = \rho_l dl = \rho_l b d\phi$. El vector de distancia $\mathbf{R}'_1$ del segmento 1 al punto $P(0,0,h)$ es $\mathbf{R}'_1 = -\hat{\mathbf{r}}b + \hat{\mathbf{z}}h$, obteniendo que $R'_1 = |\mathbf{R}'_1| = \sqrt{b^2 + h^2}$ por lo que

$\hat{\mathbf{R}}'_1 = \frac{\mathbf{R}'_1}{|\mathbf{R}'_1|} = \frac{-\hat{\mathbf{r}}b + \hat{\mathbf{z}}h}{\sqrt{b^2 + h^2}}$. El campo eléctrico en $P(0,0,h)$ producido por la carga del

$$\text{segmento 1 es } d\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{R}}'_1 \frac{\rho_l dl}{R'^2_1} = \frac{\rho_l b}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + h^2)^{3/2}} (-\hat{\mathbf{r}}b + \hat{\mathbf{z}}h) d\phi.$$

El campo $d\mathbf{E}_1$ tiene el componente dE_{1r} a lo largo de $-\hat{r}$ y el componente dE_{1z} a lo largo de $\hat{z}$. Por consideraciones de simetría, el campo $d\mathbf{E}_2$ generado por el segmento 2 en la figura, que es diametralmente opuesto al segmento 1, es idéntico a $d\mathbf{E}_1$ excepto que el componente $\hat{r}$ de $d\mathbf{E}_2$ es opuesto al de $d\mathbf{E}_1$. Por consiguiente, los componentes $\hat{r}$ de la suma se eliminan y las contribuciones z se suman. La suma de las dos contribuciones es $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2 = \hat{z} \frac{\rho_l b h}{2\pi\epsilon_0 (b^2 + h^2)^{3/2}} d\phi$.

Como por cada segmento anular localizado en el semicírculo definido en el rango $0 \leq \phi \leq \pi$ (la mitad derecha de anillo circular) existe un segmento correspondiente diametralmente opuesto en $(\phi + \pi)$, se puede obtener el campo total generado por el anillo integrándola última ecuación sobre un semicírculo entonces:

$$\mathbf{E} = \hat{z} \frac{\rho_l b h}{2\pi\epsilon_0 (b^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\phi = \hat{z} \frac{\rho_l b h}{2\epsilon_0 (b^2 + h^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{h}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + h^2)^{3/2}} Q, \text{ donde } Q = 2\pi b \rho_l$$

es la carga total contenida en el anillo.

1.2 Forma integral y diferencial de las ecuaciones de Maxwell y sus aplicaciones

Según [2] p 677: Sea $\mathbf{F}$ una función vectorial con derivadas continuas, entonces:

Teorema de la divergencia de Gauss

La divergencia de un campo vectorial nos lleva a escribirla de la siguiente manera:

$\oiint_A \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$ el campo tiene divergencia positiva si el flujo neto que sale de la superficie S es positivo, lo cual podría verse como si el volumen contuviera una *fuentes* de flujo. Si la divergencia es negativa, puede ser visto como un *sumidero* porque el flujo neto es hacia dentro. Para un campo uniforme, la misma cantidad de flujo que entra, sale de él; por lo tanto, su divergencia es cero y se dice que el campo es *sin divergencia*.

Teorema de Stokes

Este teorema convierte la integral de superficie del rotacional de un vector sobre una

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_A \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ superficie abierta S en una integral lineal del vector a lo largo del contorno C que limita la superficie S .

Sabemos que: $D = \varepsilon E$ con $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ y que $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} = (1/36\pi) \times 10^{-9} \text{ (F/m)}$, también ρ_v es la densidad de carga volumétrica. Entonces: $\int_v \rho_v dv = Q$ es la carga total en un volumen dado.

[1] p 160, expone que: El teorema de la divergencia establece que la integral de volumen de la divergencia de cualquier vector sobre un volumen V es igual al flujo total hacia afuera de ese vector a través de la superficie S que encierra a V. Por lo tanto, para el vector $\mathbf{D}$, $\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$.

Comparando el término a la derecha de la última ecuación con la anterior, tenemos: $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$ por lo tanto $\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_v \rho_v dv = Q$, eliminando integrales llegamos a:

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ que es una de las ecuaciones de Maxwell, en este caso para la electrostática.

Por otro lado, sabemos que para electrostática *todas las cargas están permanentemente fijas en el espacio, o, si se mueven, lo hacen a una tasa constante, de manera que ρ_v y $\mathbf{J}$ permanecen constantes en el transcurso del tiempo.*

Sabemos que el rotor, rotacional, circulación o curl de un campo estático, invariable en el tiempo es **cero**, esto nos lleva directamente a la expresión: $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ que es otra de las ecuaciones de Maxwell para la electrostática.

Los campos eléctrico y magnético no están interconectados en el caso estático.

La densidad de flujo magnético $\mathbf{B}$ y la intensidad del campo magnético $\mathbf{H}$ están relacionados por $B = \mu H$. Con la excepción para los materiales ferromagnéticos, para los cuales la relación entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ no es lineal. La mayoría de los materiales se caracterizan por permeabilidades magnéticas constantes. Además, $\mu = \mu_0$ para la mayoría de los dieléctricos y metales (excluidos los materiales ferromagnéticos).

Así como el campo eléctrico $\mathbf{E}$ en un punto en el espacio se definió como fuerza eléctrica F_e por unidad de carga que actúa en una carga de prueba cuando se coloca en ese punto. Ahora se **define la densidad de flujo magnético $\mathbf{B}$** en un punto del espacio en función de la fuerza magnética F_m que sería ejercida en una partícula cargada, que se mueve con una velocidad $\mathbf{u}$ como si estuviera pasando a través de ese punto. La fuerza magnética F_m , que actúa en una partícula de carga q , se expresa como $F_m = qu \times B \text{ (N)}$. Por consiguiente, la intensidad de $\mathbf{B}$ se mide en newtons/(C·m/s), unidad que también se conoce como Tesla (T). Para una partícula positivamente

cargada, la dirección de F_m coincide con la dirección del producto cruz $u \times B$, que es perpendicular al plano que contiene u y B , y que está regida por la regla de la mano derecha.

1. La fuerza eléctrica siempre tiene la dirección del campo eléctrico, en tanto que la fuerza magnética siempre es perpendicular al campo magnético.
2. La fuerza eléctrica actúa en una partícula cargada, ya sea que se esté moviendo o no, mientras que la fuerza magnética actúa en ella sólo cuando está en movimiento.
3. La fuerza eléctrica gasta energía al desplazar una partícula cargada, en tanto que la fuerza magnética no trabaja cuando desplaza una partícula.

Como no se realiza trabajo, un campo magnético no altera la energía cinética de una partícula cargada; *el campo magnético puede cambiar la dirección de movimiento de una partícula cargada, pero no su rapidez.*

De electrostática sabemos que el flujo hacia fuera neto de la densidad de flujo eléctrico $\mathbf{D}$ a través de una superficie cerrada que encierra una carga neta Q es igual a Q . Esta propiedad se conoce como ley de Gauss (para electricidad).

Matemáticamente lo expresamos $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \equiv \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$.

La conversión de la forma diferencial a integral se logró aplicando el teorema de divergencia a un volumen v encerrado por una superficie S que contiene carga. El análogo magnético de una carga puntual es un polo magnético, pero mientras que es posible que las cargas eléctricas existan aisladas, no sucede lo mismo con los polos magnéticos. Estos últimos siempre se presentan en pares; no importa cuantas veces se subdivide un imán permanente, cada nuevo trozo siempre tendrá un polo norte y uno sur, incluso si el proceso se siguiera hasta el nivel atómico. Por eso es que no existe equivalencia magnética de una carga Q o una densidad de carga ρ_v y, por consiguiente, no sorprende que la **ley de Gauss para magnetismo** este dada por $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \equiv \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

La ley circuital de Ampère (o simplemente ley de Ampère) en condiciones magnetostáticas (corrientes estacionarias). Se obtiene integrando ambos lados de la ecuación $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ sobre una superficie abierta S . $\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$, y luego se recurre al teorema de Stokes, para obtener el resultado $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ que es la ley de Ampère, donde $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente volumétrica en (A/m^2) .

Según [2] p 47: **La ley de inducción de Faraday** Faraday descubrió que un flujo magnético variable en el tiempo pasando a través de un circuito conductor cerrado da como resultado la generación de una corriente alrededor de dicho circuito. El flujo del campo magnético a través de un área abierta A (como se muestra en fig. 1.10), limitada por el circuito conductor está dada por $\Phi_M = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S}$. La fuerza

electromotriz (fem) inducida o producida alrededor del circuito es $fem = -\frac{d\Phi_M}{dt}$, sin

embargo la fem solo existe como resultado de un campo eléctrico dado por

$fem = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Entonces combinando las tres ecuaciones anteriores obtenemos

$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ indicando que un campo magnético variable en el tiempo

estará asociado con un campo eléctrico.

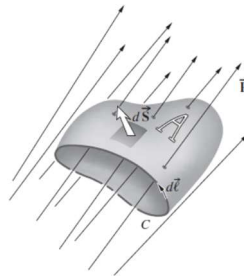


Figura 1.10 Campo $\vec{B}$ a través de un área abierta A, la cual es acotada por la curva cerrada C.

La ley de Gauss Eléctrica La ley de Gauss eléctrica relaciona el flujo de la intensidad del campo eléctrico a través de una superficie cerrada A con la carga total encerrada (como se muestra en la figura 1.11a), y está dada por $\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{S}$

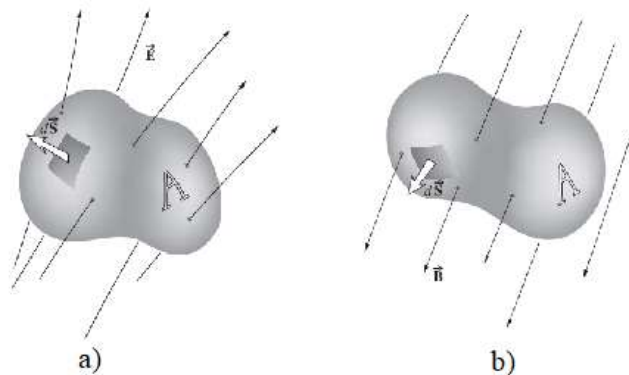


Figura 1.11 a) Campo $\vec{E}$ a través de un área cerrada A, b) Campo $\vec{B}$ a través de un área cerrada A.

Si el volumen encerrado por A es V y si dentro de ella hay una distribución continua de carga de densidad ρ entonces $\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho dV$ donde ϵ es la constante de permitividad eléctrica del medio. La permitividad expresa el comportamiento eléctrico del medio, es una medida de permeabilidad del material al campo eléctrico.

La ley de Gauss Magnética Al contrario de las cargas eléctricas, no existen cargas magnéticas aisladas. Esto es, no existen los monopolos. A diferencia del campo eléctrico, el campo magnético no converge o diverge hacia alguna carga magnética. Cualquier superficie cerrada en una región de campo magnético tiene un número igual de líneas $\vec{B}$ entrando y saliendo de ésta (como se muestra en la figura 1.11b). El flujo del campo magnético Φ_M a través de dicha superficie es cero, entonces escribimos $\Phi_M = \oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$.

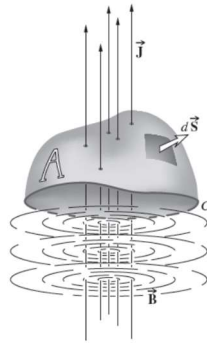


Figura 1.12 Densidad de corriente a través de un área abierta A

La ley circuital de Ampère Esta ley relaciona la integral de línea de la componente de $\vec{B}$ tangente a una curva cerrada C, con la corriente total i que atraviesa un área limitada por C, esto es $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu i$ donde la superficie abierta A está limitada por C, y J es la corriente por unidad de área (como lo muestra la figura 1.12). μ es la permeabilidad del medio, y en el vacío $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N s}^2 / \text{C}^2$.

La ecuación está incompleta puesto que no considera el hecho de que al existir un campo magnético deberá existir un campo eléctrico. Maxwell solucionó el problema suponiendo la existencia de un mecanismo a que llamo la corriente de

desplazamiento $\vec{J}_D$ que es definida como $\vec{J}_D \equiv \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ llegando a la ecuación

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \iint_A \left(\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \mu i$ lo que significa que incluso cuando $\vec{J} = 0$, un campo $\vec{E}$ variable en el tiempo estará acompañado por un campo $\vec{B}$.

Otra manera de emplear la ley de Ampère en forma diferencial es $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Si se toma la integral de superficie de ambos lados de la ecuación anterior sobre una superficie abierta arbitraria S con contorno C , se tiene

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}.$$

La integral de superficie de $\mathbf{J}$ es igual a la corriente de conducción I_c que fluye a través de S , y la integral de superficie $\nabla \times \mathbf{H}$ puede convertirse en una integral de línea $\mathbf{H}$ a lo largo del contorno C mediante el teorema de Stokes. Por consiguiente,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación anterior debe tener la misma unidad (amperes) que la corriente I_c , y como es proporcional a la derivada con respecto al tiempo de la densidad de flujo eléctrico $\mathbf{D}$ (que también se llama desplazamiento eléctrico), se conoce como corriente de desplazamiento I_d . Es decir,

$$I_d \triangleq \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \text{ donde } \mathbf{J}_d = \partial \mathbf{D} / \partial t \text{ representa una } \textbf{densidad de corriente de}$$

desplazamiento. De acuerdo con la última ecuación, $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + I_d = I$, donde I

es la corriente total. En electrostática, $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$, y por tanto, $I_d = 0$ e $I = I_c$. Fue

James Clerk Maxwell quien en 1873 introdujo el concepto de corriente de desplazamiento, en el marco de su exitoso intento por establecer una conexión unificada entre los campos eléctricos y magnéticos en condiciones que cambian con el tiempo.

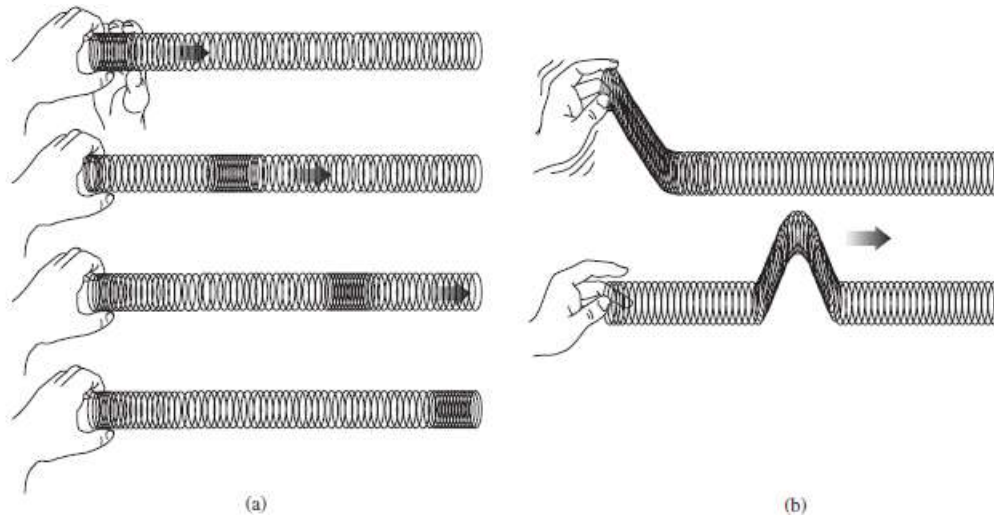


Figura 1.13 a) Ondas longitudinales y b) Ondas transversales

1.3 La ecuación de onda. Ondas viajeras y ondas planas uniformes

Como lo expone [2] p 18. Ondas unidimensionales y ondas armónicas las ondas más comunes y fáciles de visualizar son las ondas mecánicas, entre las cuales se encuentran las ondas de una cuerda, las ondas superficiales de los líquidos, las ondas sonoras en el aire, etc. Las ondas sonoras son longitudinales – el medio se desplaza en la dirección del movimiento de la onda. Las ondas de una cuerda (y las electromagnéticas) son transversales – el medio se desplaza en una dirección perpendicular a la del movimiento de la onda. La figura 1.13, ilustra estos tipos de ondas.

El significado de unidimensional es debido a la forma en la que esta onda se propaga o viaja (línea recta). En consecuencia, una onda bidimensional se propagará en un plano, pues requerirá dos variables espaciales para representarla, y una tridimensional requerirá tres variables espaciales.

La ecuación diferencial de onda es debida a d'Alembert quien la propuso en 1747, y es usada para definir cualquier clase de onda.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Esta es la ecuación diferencial de onda unidimensional.

Ondas Armónicas Es bien conocido que las ondas armónicas más simples son las ondas sinusoidales y/o cosinusoidales. Entonces,

$$\psi(x, t) \Big|_{t=0} = \psi(x) = A \sin(kx) = f(x) \text{ donde } k \text{ es una constante positiva conocida}$$

como el número de onda, mientras que A es la amplitud de la onda. La misma onda representada como una onda viajera desplazándose a velocidad constante sería:

$$\psi(x, t) = A \sin k(x - vt) = f(x - vt).$$

No es difícil concluir que esta onda es periódica tanto en el espacio como en el tiempo. El periodo espacial se conoce como longitud de onda (λ) medida en nanómetros, micrómetros o angstroms. Sabemos que una onda sinusoidal es periódica en 2π , concluimos entonces que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. El argumento de la función sinusoidal es conocido como la fase (φ).

El periodo temporal (τ), es definido como la cantidad de tiempo que una onda completa tarda en superar a un observador estacionario, por lo tanto $\tau = \frac{\lambda}{v}$, cuyo inverso es la frecuencia temporal $\nu = \frac{1}{\tau}$, de aquí que $v = \nu\lambda$.

Es también frecuente encontrar la frecuencia temporal angular definida como

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu.$$

La frecuencia espacial o número de onda se define como $\kappa \equiv \frac{1}{\lambda}$.

Fase y Velocidad de Fase en párrafos anteriores mencionamos que el argumento de la función sinusoidal es conocido como la fase (φ) de la onda. De la Ec. De onda viajera desplazándose a velocidad constante, podemos escribir

$$\psi(x, t) = A \sin k(x - vt) = A \sin(kx - kv t), \text{ pero sabemos que } k = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ y conocemos que}$$

$$\tau = \frac{\lambda}{v}, \text{ también sabemos que } \omega = \frac{2\pi}{\tau}. \text{ Sustituyendo en } \psi(x, t) \text{ obtenemos}$$

$$\varphi = (kx - \omega t) \text{ que es otra manera de representar la fase de nuestra senoide.}$$

Reescribiendo la última ecuación para $\psi(x, t)$ de una manera más general

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varepsilon), \text{ donde } \varepsilon \text{ es una fase inicial, por lo tanto la fase de nuestra senoide resulta ser } \varphi(x, t) = (kx - \omega t + \varepsilon).$$

Una expresión que indica la rapidez del cambio de la fase respecto al tiempo es encontrada derivando parcialmente la fase respecto al tiempo, obteniendo,

$\left| \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} \right| = \omega$, mientras que la expresión que indica la rapidez del cambio de fase respecto a la distancia se encuentra derivando parcialmente la fase respecto a la distancia, lo cual resulta que $\left| \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \right| = k$.

Por otro lado, la rapidez de propagación respecto al tiempo (velocidad de propagación) de la condición de fase constante, es simplemente $\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\varphi} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v$.

Esta es la velocidad con la que se mueve el perfil o forma de la onda y se conoce como la velocidad de fase de la onda.

Puesto que la fase es constante tenemos entonces que $d\varphi(x,t)/dt = 0$, empleando la ecuación más reciente para $\psi(x,t)$ fácilmente deducimos que $\psi(x,t)/dt = 0$, llegando así a la expresión $\pm v = -\frac{\partial \psi / \partial t}{\partial \psi / \partial x}$.

Puesto que la fase es constante tenemos entonces que $d\varphi(x,t)/dt = 0$, empleando la ecuación más reciente para $\psi(x,t)$ fácilmente deducimos que $\psi(x,t)/dt = 0$, llegando así a la expresión $\pm v = -\frac{\partial \psi / \partial t}{\partial \psi / \partial x}$,

Las ondas tridimensionales adoptan muchas formas diferentes; incluyen ondas planas, ondas cilíndricas y ondas esféricas. Una onda plana se caracteriza por una perturbación que en un punto dado en el tiempo tiene propiedades uniformes a través de un plano infinito perpendicular a la dirección de propagación de la onda y de forma similar, en el caso de ondas cilíndricas y esféricas las perturbaciones son uniformes a través de superficies cilíndricas y esféricas, en la figura 1.15 se muestran diversas ondas.

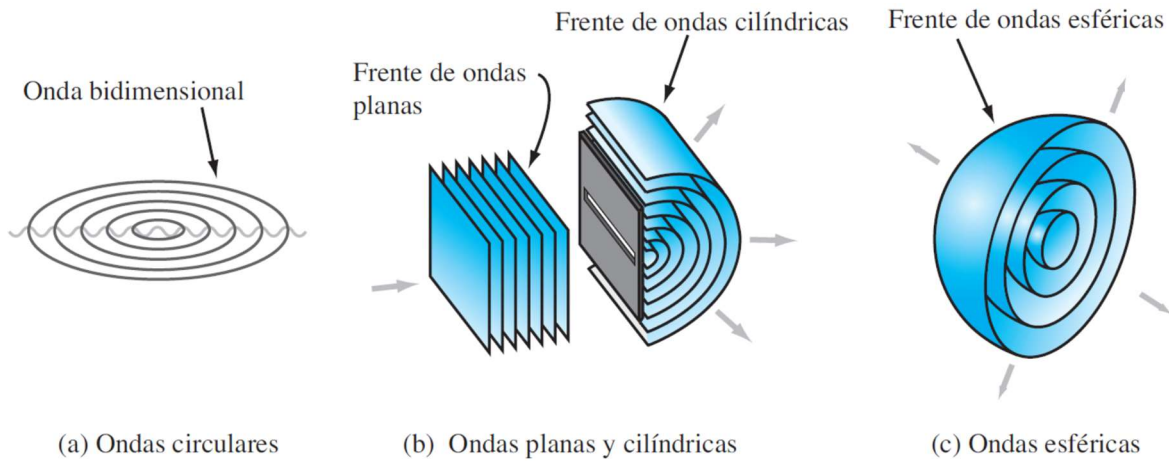


Figura 1.15 Diversos tipos de ondas, bidimensionales y tridimensionales.

Como lo expone [1] p 288: En el caso de variación con el tiempo, los campos eléctricos y magnéticos $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$, y sus fuentes, la densidad de carga ρ_v y la densidad de corriente $\mathbf{J}$, son (cada uno y en general) una función de las coordenadas espaciales (x, y, z) y la variable de tiempo t . Si su variación con el tiempo es una función sinusoidal con frecuencia angular ω , cada una de estas cantidades se representa por un fasor independiente del tiempo que depende solo de (x, y, z) . Por lo tanto, el fasor vectorial $\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z)$ correspondiente al campo instantáneo $\mathbf{E}(x, y, z; t)$ se define de acuerdo con $\mathbf{E}(x, y, z; t) = \Re \left[\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) e^{j\omega t} \right]$ y definiciones similares son aplicables a los demás campos y a ρ_v y $\mathbf{J}$. Para un medio lineal, isotrópico y homogéneo caracterizado por la permitividad eléctrica ϵ , permeabilidad magnética μ y conductividad σ , se recuerda que la diferenciación en el dominio del tiempo corresponde a multiplicar por $j\omega$ en el dominio fasorial.

Las ecuaciones de Maxwell en el dominio fasorial llegan a ser:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} &= \rho_v / \epsilon, \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= -j\omega \mu \tilde{\mathbf{H}}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}} &= 0, \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} &= \tilde{\mathbf{J}} + j\omega \mu \tilde{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

Donde se emplearon las relaciones $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.

Permitividad compleja En un medio con conductividad σ , la densidad de corriente $\mathbf{J}$ está relacionada con $\mathbf{E}$ por $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. En consecuencia,

$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}} + j\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}} = (\sigma + j\omega\epsilon)\tilde{\mathbf{E}} = j\omega\left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\tilde{\mathbf{E}}$. La permitividad compleja es definida

como $\epsilon_c \triangleq \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$, y si $\epsilon' = \epsilon$, $\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$. Para un medio sin pérdidas con $\sigma = 0$, se

desprende que $\epsilon'' = 0$ y $\epsilon_c = \epsilon' = \epsilon$

Ecuaciones de onda para un medio libre de cargas Se dice que un medio está libre de cargas si no contiene cargas en exceso, es decir, si $\rho_v = 0$. Por lo que las ecuaciones de Maxwell para un medio libre de cargas se convierten en

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0,$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}},$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0,$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_c\tilde{\mathbf{E}}.$$

Si se aplica el operador rotacional de ambos lados de la ecuación para el rotacional de la intensidad de campo eléctrico, obtendremos $\nabla^2\tilde{\mathbf{E}} + \omega^2\mu\epsilon_c\tilde{\mathbf{E}} = 0$, que se conoce como **ecuación de onda homogénea para $\tilde{\mathbf{E}}$** donde $\nabla^2\tilde{\mathbf{E}}$ es el laplaciano de $\tilde{\mathbf{E}}$ y es expresado como $\nabla^2\tilde{\mathbf{E}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\tilde{\mathbf{E}}$. Al introducir la **constante de**

propagación γ definida de tal manera que $\gamma^2 \triangleq -\omega^2\mu\epsilon_c$, permite reescribir la ecuación de onda homogénea como $\nabla^2\tilde{\mathbf{E}} - \gamma^2\tilde{\mathbf{E}} = 0$.

Propagación de ondas planas en un medio sin pérdidas La propiedades de propagación de una onda electromagnética, como su velocidad de fase u_p y longitud de onda λ , están restringidas por la frecuencia angular ω y los tres parámetros constitutivos del medio: ϵ , μ y σ . Si el medio es **no conductor** ($\sigma = 0$), la onda no sufre atenuación al viajar a través del medio y entonces se dice que éste es **sin**

pérdidas. De acuerdo con la ecuación $\epsilon_c \triangleq \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$, $\epsilon_c = \epsilon$ en un medio sin pérdidas en

cuyo caso la ecuación $\gamma^2 \triangleq -\omega^2\mu\epsilon_c$ se escribe $\gamma^2 = -\omega^2\mu\epsilon$. Cuando el medio es sin pérdidas, se acostumbra introducir el **número de onda k** definido por $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$.

Por lo que $\gamma^2 = -k^2$ y entonces $\nabla^2\tilde{\mathbf{E}} + k^2\tilde{\mathbf{E}} = 0$.

Para un fasor de campo eléctrico definido en coordenadas cartesianas como

$\tilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{x}}\tilde{E}_x + \hat{\mathbf{y}}\tilde{E}_y + \hat{\mathbf{z}}\tilde{E}_z$ la sustitución del Laplaciano en $\nabla^2\tilde{\mathbf{E}} + k^2\tilde{\mathbf{E}} = 0$ resulta en

$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\hat{x}\tilde{E}_x + \hat{y}\tilde{E}_y + \hat{z}\tilde{E}_z) + k^2(\hat{x}\tilde{E}_x + \hat{y}\tilde{E}_y + \hat{z}\tilde{E}_z) = 0$, y para satisfacer esta ecuación, cada componente vectorial de su lado izquierdo tiene que ser igual a cero.

De esta forma, $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\tilde{E}_x = 0$, y expresiones similares se aplican a $\tilde{E}_y$ y $\tilde{E}_z$.

Una **onda plana uniforme** se caracteriza por campos eléctricos y magnéticos que tienen propiedades uniformes en todos los puntos a través de un plano infinito. Si este es el plano x-y, entonces **E** y **H** no varían con x y y . Así,

$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\tilde{E}_x = 0$, se reduce a $\frac{d^2\tilde{E}_x}{dz^2} + k^2\tilde{E}_x = 0$, y expresiones similares se aplican a $\tilde{E}_y$, $\tilde{H}_x$ y $\tilde{H}_y$. También $\tilde{E}_z = \tilde{H}_z = 0$, esto significa que *una onda plana no tiene componentes eléctricos ni magnéticos a lo largo de su dirección de propagación*.

Las soluciones : $\tilde{\mathbf{E}}(z) = \hat{x}\tilde{E}_x^+(z) = \hat{x}E_{x0}^+e^{-jkz}$, $\tilde{\mathbf{H}}(z) = \hat{y}\frac{\tilde{E}_x^+(z)}{\eta} = \hat{y}\frac{E_{x0}^+}{\eta}e^{-jkz}$. Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí, y ambos son perpendiculares a la dirección del recorrido de las ondas. Aquí, E_{x0}^+ es una constante que tiene que ser determinada de las condiciones de frontera, mientras que η es la **impedancia**

intrínseca de un medio sin pérdidas, se define como $\eta \triangleq \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ (Ω).

Si el medio es vacío, $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$, en cuyo caso la impedancia intrínseca η se

vuelve $\eta = \eta_0 \triangleq \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377(\Omega) \approx 120\pi$ (Ω). η_0 se conoce como **impedancia**

intrínseca de espacio libre.

1.4 Propagación de las ondas electromagnéticas planas en medios con pérdidas

Partiendo de la ecuación de onda homogénea $\nabla^2\tilde{\mathbf{E}} - \gamma^2\tilde{\mathbf{E}} = 0$, empleada en la sección anterior. Donde $\gamma^2 = -\omega^2\mu\epsilon_c = -\omega^2\mu(\epsilon' - j\epsilon'')$, con $\epsilon' = \epsilon$ y $\epsilon'' = \sigma/\omega$. γ es complejo, y es expresado como $\gamma = \alpha + j\beta$, donde α es la **constante de atenuación** del medio

y β es su **constante de fase**. De esta manera obtendremos

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon'}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{Np/m}), \quad \beta = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon'}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{rad/m}).$$

Para una onda plana uniforme con un campo eléctrico $\tilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{x}} \tilde{E}_x(z)$ que viaja en la dirección positiva de z , la ecuación de onda de la ecuación $\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} - \gamma^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0$ se reduce

a $\frac{d^2 \tilde{E}_x(z)}{dz^2} - \gamma^2 \tilde{E}_x(z) = 0$ con solución: $\tilde{\mathbf{E}}(z) = \hat{\mathbf{x}} \tilde{E}_x(z) = \hat{\mathbf{x}} E_{x0} e^{-\gamma z} = \hat{\mathbf{x}} E_{x0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$,

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = \hat{\mathbf{y}} \tilde{H}_y(z) = \hat{\mathbf{y}} \frac{\tilde{E}_x(z)}{\eta_c} = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_{x0}}{\eta_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad \text{con} \quad \eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left(1 - j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^{-1/2} \quad (\Omega).$$

De la solución para el campo eléctrico se observa que

$$|\tilde{E}_x(z)| = |E_{x0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}| = |E_{x0}| e^{-\alpha z} \quad \text{es claro que su magnitud se reduce}$$

exponencialmente con z a una tasa especificada por la constante de atenuación α .

El campo magnético se reduce en la misma proporción. El proceso de atenuación convierte una parte de la energía transportada por la onda electromagnética en calor a consecuencia de la conducción en el medio. A lo largo de una distancia $z = \delta_s$ de

manera que $\delta_s = \frac{1}{\alpha}$ (m), δ_s , llamada **profundidad de penetración** del medio

caracteriza qué tan bien una onda electromagnética logra penetrar el medio conductor.

En la práctica, el medio se considera como dieléctrico de bajas pérdidas si

$\varepsilon''/\varepsilon' < 10^{-2}$, como buen conductor si $\varepsilon''/\varepsilon' > 10^2$, y como **cuasi-conductor** si $10^{-2} < \varepsilon''/\varepsilon' < 10^2$.

1.5 Polarización, Potencia y Vector de Poynting

Según [2] p 338 : La **polarización** de una onda plana uniforme describe la forma y lugar geométrico de la punta del vector $\mathbf{E}$ (en el plano ortogonal a la dirección de propagación) en un punto dado del espacio en función del tiempo. En el caso más general, el lugar geométrico de $\mathbf{E}$ es una elipse y la onda se conoce como **elípticamente polarizada**. En ciertas condiciones, la elipse puede degenerar en un círculo o en un segmento de línea recta, en cuyo caso el **estado de polarización** recibe el nombre de **circular** o **lineal**, respectivamente.

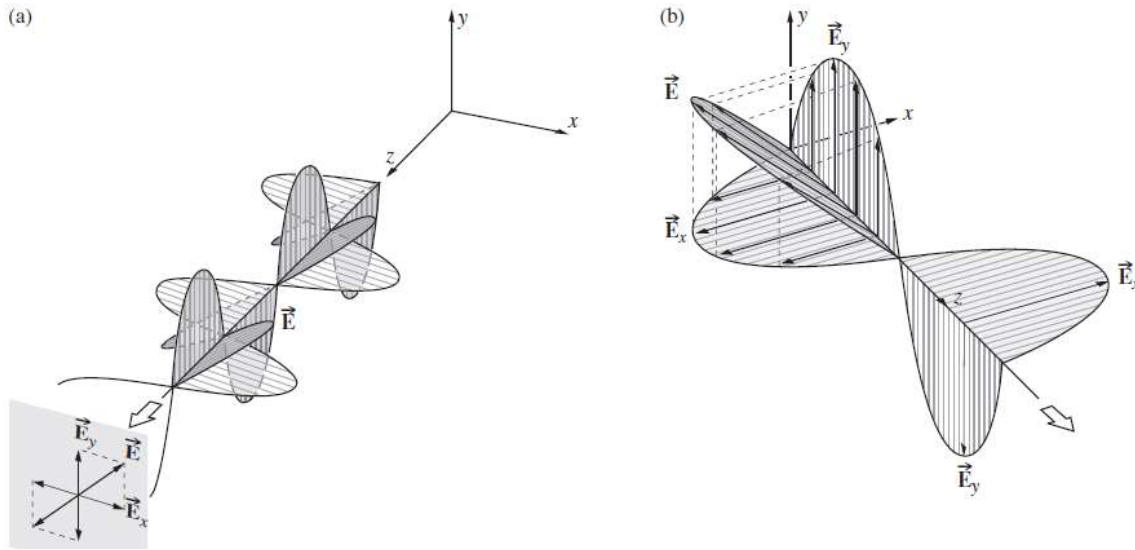


Figura 1.16 Polarización lineal del campo $\vec{E}$ con ondas en fase. a) En el primer y tercer cuadrante. b) En el segundo y cuarto cuadrante.

Polarización lineal o plana Sean las perturbaciones ortogonales de la forma $\vec{E}_x(z,t) = \hat{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t)$ y $\vec{E}_y(z,t) = \hat{j}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon)$ la perturbación resultante es la suma vectorial de estas dos ondas perpendiculares : $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_x(z,t) + \vec{E}_y(z,t)$.

Si ε es cero o múltiplo entero de $\pm 2\pi$, decimos que las ondas están en fase.

Escribiendo $\vec{E} = (\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y}) \cos(kz - \omega t)$. La onda resultante es también linealmente polarizada ya que tendrá una amplitud fija igual a $(\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y})$, como lo muestra la Figura 1.16.

Si ε es múltiplo entero impar de $\pm \pi$, las ondas están fuera de fase en 180° resultando

$\vec{E} = (\hat{i}E_{0x} - \hat{j}E_{0y}) \cos(kz - \omega t)$. La onda también es linealmente polarizada pero su plano de vibración se ha girado respecto al encontrado anteriormente y es mostrado en la Figura 1.17.

Polarización circular Si las dos ondas tienen la misma amplitud ($E_{0x} = E_{0y} = E_0$) pero la diferencia de fase $\varepsilon = -\pi/2 + 2m\pi$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, obtendremos

$\vec{E}_x(z,t) = \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t)$ y $\vec{E}_y(z,t) = \hat{j}E_0 \sin(kz - \omega t)$. En consecuencia

$\vec{E} = E_0 \left[\hat{i} \cos(kz - \omega t) + \hat{j} \sin(kz - \omega t) \right]$ como lo muestra la Figura 1.18. Debe ser

notado que la dirección de $\vec{E}$ es variable con el tiempo y no permanece en un mismo plano. El vector del campo eléctrico $\vec{E}$ resultante gira en el sentido de las agujas del

reloj con una frecuencia angular ω . Esta onda tiene polarización circular a derechas, como lo muestra la figura. Si $\varepsilon = \pi/2 + 2m\pi$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, obtendremos $\vec{E} = E_0 \left(\left[\hat{i} \cos(kz - \omega t) - \hat{j} \sin(kz - \omega t) \right] \right)$ con lo cual la onda tiene polarización circular a izquierdas. Aquí un punto importante, si sumamos la onda circular a derechas y la onda circular a izquierdas teniendo ambas la misma amplitud obtendremos una onda linealmente polarizada, ya que $\vec{E} = 2\hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t)$.

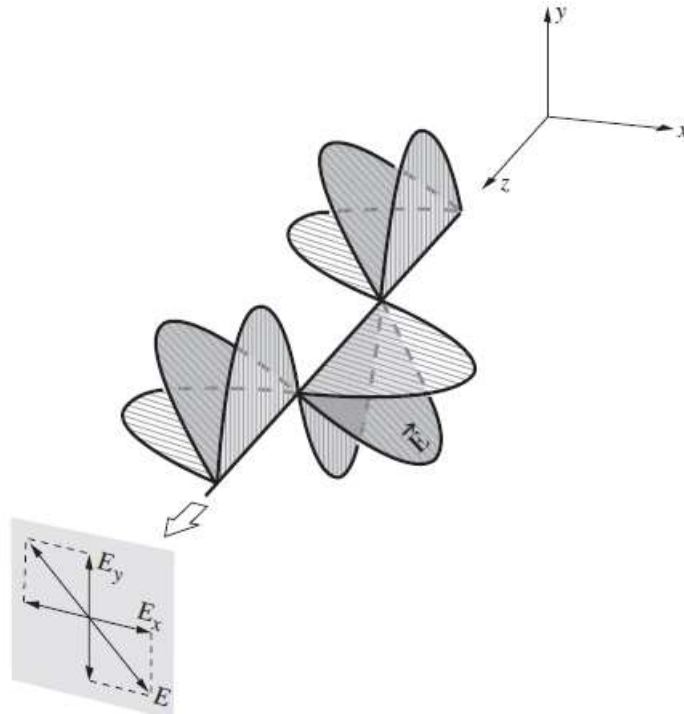


Figura 1.17 Polarización lineal del campo $\vec{E}$ con ondas desfasadas 180° .

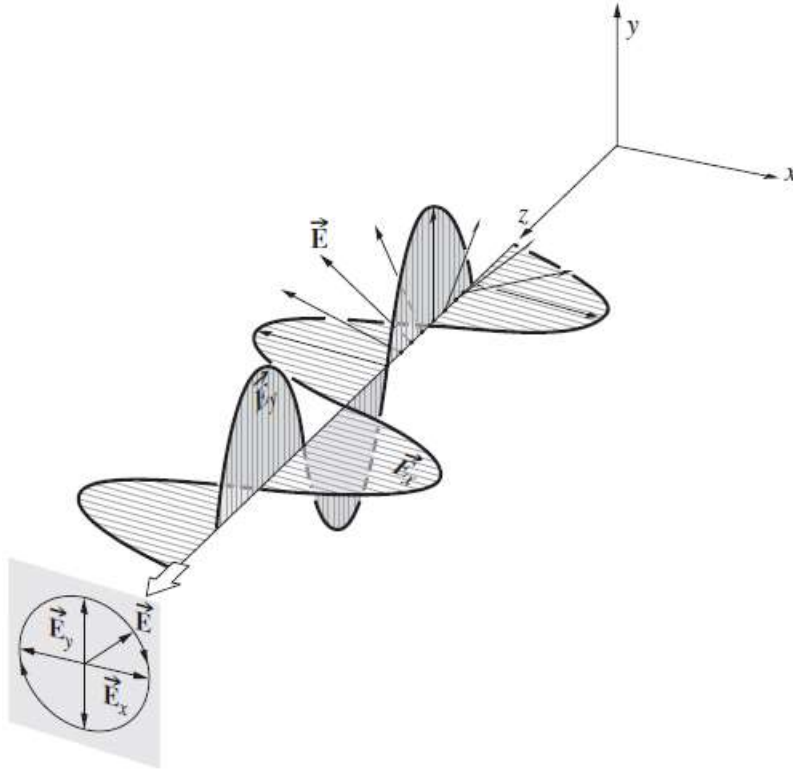


Figura 1.18 Polarización circular a derechas.

Polarización elíptica Las ondas linealmente polarizadas y las circularmente polarizadas son casos especiales de la polarización elíptica. Para la polarización elíptica la magnitud del campo $\vec{E}$ y su dirección son variables. Es posible demostrar

que $\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\cos\varepsilon = \sin^2\varepsilon$ es la ecuación de una elipse que

forma un ángulo α con el sistema coordenado dado por $\tan 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\varepsilon}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}$. Sin

embargo, si $\varepsilon = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$ obtendremos $\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} = 1$, ecuación que

puede ser reducida aún más si consideramos que $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ llegando

$E_y^2 + E_x^2 = E_0^2$ que es la ecuación de un círculo. Si ε es un múltiplo entero par de $\pm\pi$,

la ecuación de salida toma la forma de $E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}E_x$, de otra manera, cuando ε es

múltiplo entero impar de $\pm\pi$, obtendremos $E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}}E_x$ y no es difícil reconocer

que las dos últimas ecuaciones, son líneas rectas con diferentes pendientes, con lo cual obtendremos ondas linealmente polarizadas. También se pueden obtener ondas polarizadas elípticamente a partir de la suma de dos ondas una circularmente polarizada a derechas $\mathcal{R}$ con amplitud diferente a otra circularmente polarizada a izquierdas $\mathcal{L}$, como se muestra en la figura 1.19.

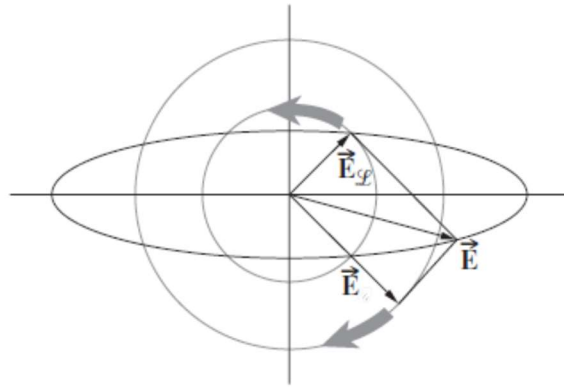


Figura 1.19 Polarización elíptica como una superposición de estados derecho $\mathcal{R}$ e izquierdo $\mathcal{L}$

El vector de Poynting y Potencia Una de las propiedades más interesantes y sobresalientes de la onda electromagnética es que transporta energía y momento. Ya que las ondas electromagnéticas existen en el espacio, es natural considerar la energía radiante por unidad de volumen o densidad de energía, u . La energía que fluye en el espacio en forma de onda electromagnética es transportada por igual por los campos eléctricos (u_E) y magnéticos (u_M), esto es $u = u_E + u_M$. Por lo cual

$u = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$. La figura 1.20 muestra una onda electromagnética que viaja con

una velocidad c a través de un área A . Si S representa el transporte de energía por unidad de tiempo (esto es la potencia en W/m^2) a través del área unitaria, durante un pequeño intervalo de tiempo Δt solo la energía contenida en el volumen cilíndrico,

$u(c\Delta t A)$ cruzará por A . Por lo tanto $S = uc = \frac{EB}{\mu_0}$. Para medios isótropos la energía

fluye en la dirección de propagación de la onda. El vector estará dado por

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$. La magnitud de $\vec{S}$ es la potencia por unidad de área que

cruza una superficie cuya normal es paralela a $\vec{S}$. Este es el vector de Poynting. En el caso de una onda armónica linealmente polarizada donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son fijos, viajando en la dirección de $\vec{k}$, tenemos $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, aplicando

la última ecuación encontraremos que $\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ siendo este el flujo instantáneo de energía por unidad de área por unidad de tiempo.

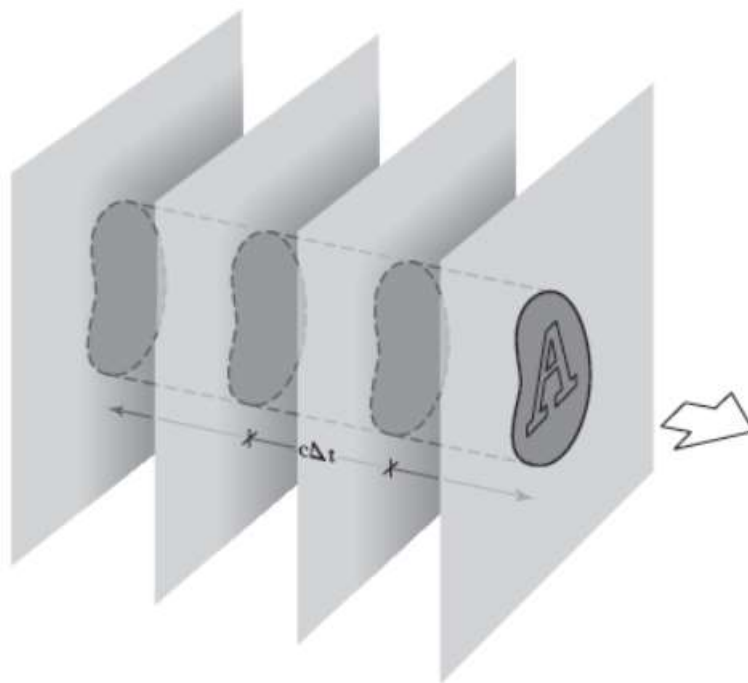


Figura 1.20 Flujo de energía electromagnética.

1.6 Reflexión de Ondas en incidencia normal y oblicua.

En este subtema:

Los super o subíndices **i** , **r** o **t** hacen referencia a incidente, reflejada o transmitida.

Los numerales 1 o 2 hacen referencia a medio 1 o medio 2.

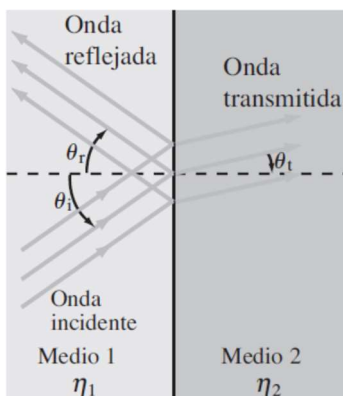


Figura1.21 Concepto gráfico para onda incidente, reflejada y transmitida.

En el medio 1, una onda plana incidente polarizada en la dirección x con campos $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ viaja en la dirección $\hat{\mathbf{k}}_i = \hat{\mathbf{z}}$ hacia el medio 2. La reflexión y la transmisión en la frontera discontinua origina una onda reflejada $(\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r)$ con $\hat{\mathbf{k}}_r = -\hat{\mathbf{z}}$ en el medio 1 y una onda transmitida $(\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t)$ con $\hat{\mathbf{k}}_t = \hat{\mathbf{z}}$ en el medio 2.

Las tres ondas se describen en forma fasorial como sigue:

Onda incidente $\tilde{\mathbf{E}}^i(z) = \hat{\mathbf{x}}E_0^i e^{-jk_1 z}, \quad \tilde{\mathbf{H}}^i(z) = \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\tilde{\mathbf{E}}^i(z)}{\eta_1} = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-jk_1 z}.$

Onda reflejada $\tilde{\mathbf{E}}^r(z) = \hat{\mathbf{x}}E_0^r e^{jk_1 z}, \quad \tilde{\mathbf{H}}^r(z) = (-\hat{\mathbf{z}}) \times \frac{\tilde{\mathbf{E}}^r(z)}{\eta_1} = -\hat{\mathbf{y}} \frac{E_0^r}{\eta_1} e^{jk_1 z}.$

Onda transmitida $\tilde{\mathbf{E}}^t(z) = \hat{\mathbf{x}}E_0^t e^{-jk_2 z}, \quad \tilde{\mathbf{H}}^t(z) = \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\tilde{\mathbf{E}}^t(z)}{\eta_2} = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0^t}{\eta_2} e^{-jk_2 z}.$

Las cantidades E_0^i , E_0^r y E_0^t son, respectivamente, las amplitudes de los campos eléctricos incidente, reflejado y transmitido, todos especificados con $t = 0$ y $z = 0$ (la frontera entre los dos medios).

El número de onda y la impedancia intrínseca del medio 1 y medio 2 son:

medio 1 $k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1} \quad \text{y} \quad \eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$

medio 2 $k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} \quad \text{y} \quad \eta_2 = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$

El campo eléctrico total $\tilde{\mathbf{E}}_1(z)$ en el medio 1 es la suma de los campos eléctricos de las ondas incidente y reflejada, y un enunciado similar es válido para el campo magnético $\tilde{\mathbf{H}}_1(z)$. Así,

medio 1 $\tilde{\mathbf{E}}_1(z) = \tilde{\mathbf{E}}^i(z) + \tilde{\mathbf{E}}^r(z) = \hat{\mathbf{x}}(E_0^i e^{-jk_1 z} + E_0^r e^{jk_1 z}),$
 $\tilde{\mathbf{H}}_1(z) = \tilde{\mathbf{H}}^i(z) + \tilde{\mathbf{H}}^r(z) = \hat{\mathbf{y}} \frac{1}{\eta_1} (E_0^i e^{-jk_1 z} - E_0^r e^{jk_1 z}).$

Solo con la onda transmitida presente en el medio 2, los campos son

medio 2 $\tilde{\mathbf{E}}_2(z) = \tilde{\mathbf{E}}^t(z) = \hat{\mathbf{x}}E_0^t e^{-jk_2 z}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_2(z) = \tilde{\mathbf{H}}^t(z) = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0^t}{\eta_2} e^{-jk_2 z}.$

En la frontera ($z = 0$), los componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético son continuos. En consecuencia,

$$\tilde{\mathbf{E}}_1(0) = \tilde{\mathbf{E}}_2(0) \quad \text{o} \quad E_0^i + E_0^r = E_0^t, \quad \tilde{\mathbf{H}}_1(0) = \tilde{\mathbf{H}}_2(0) \quad \text{o} \quad \frac{E_0^i}{\eta_1} - \frac{E_0^r}{\eta_1} = \frac{E_0^t}{\eta_2}.$$

Las soluciones simultaneas para E_0^r y E_0^t en función de E_0^i dan

$$E_0^r = \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \right) E_0^i = \Gamma E_0^i, \quad E_0^t = \left(\frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \right) E_0^i = \tau E_0^i, \quad \text{donde } \Gamma \text{ es el coeficiente de}$$

reflexión y τ es el coeficiente de **transmisión**, para incidencia normal.

$$\Gamma = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad \tau = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}, \quad \tau = 1 + \Gamma.$$

$$\text{Para medios no magnéticos, } \eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}, \eta_2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}, \Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}} - \sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}} + \sqrt{\epsilon_{r_2}}}$$

donde η_0 es la impedancia intrínseca del espacio libre, en cuyo caso la ecuación Γ se

$$\text{reformula como } \Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}} - \sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}} + \sqrt{\epsilon_{r_2}}}.$$

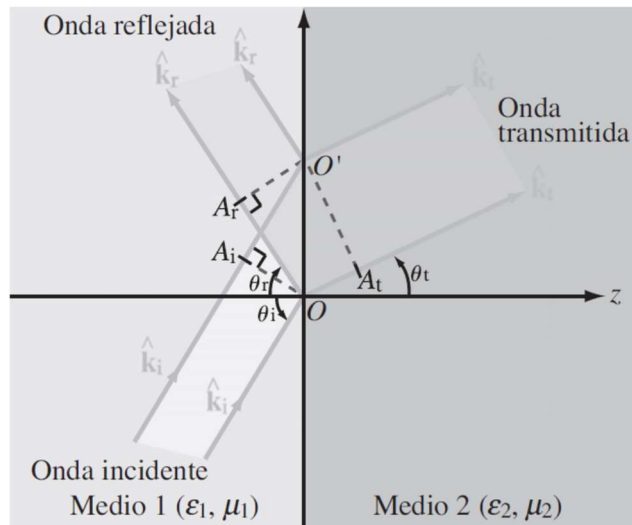


Figura 1.22 Reflexión y refracción de ondas en una frontera plana entre medios diferentes.

Para incidencia oblicua el fenómeno es ilustrado en la figura 1.22. El plano $z = 0$ es la frontera entre dos medios dieléctricos caracterizados por (ϵ_1, μ_1) para el medio 1 y (ϵ_2, μ_2) para el medio 2. Las dos líneas con dirección $\hat{\mathbf{k}}_i$ representan rayos trazados normales al frente de la onda incidente y, asimismo, aquellas a lo largo de $\hat{\mathbf{k}}_r$ y $\hat{\mathbf{k}}_t$ representan la onda reflejada y transmitida, respectivamente. Definidos con respecto a la normal a la frontera (el eje z), los **ángulos de incidencia, reflexión y transmisión**

(o **refracción**) son, respectivamente θ_i , θ_r y θ_t . Estos tres ángulos están interrelacionados por **las leyes de Snell**. La onda incidente se propaga en el medio 1 con velocidad de fase $u_{p1} = 1/\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$, y la onda transmitida en el medio 2 se propaga con una velocidad $u_{p2} = 1/\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$.

$\theta_i = \theta_r$ (ley de reflexión de Snell),

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \quad (\text{ley de refracción de Snell}).$$

La **ley de reflexión de Snell** establece que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia y **la ley de refracción de Snell** proporciona una relación entre $\sin \theta_t$ y $\sin \theta_i$ en función de la razón velocidades de fase. El **índice de refracción** de un medio, n , se define como la razón entre la velocidad de fase del espacio libre (es decir, la rapidez de la luz c) y la velocidad de fase en el medio. Por lo tanto,

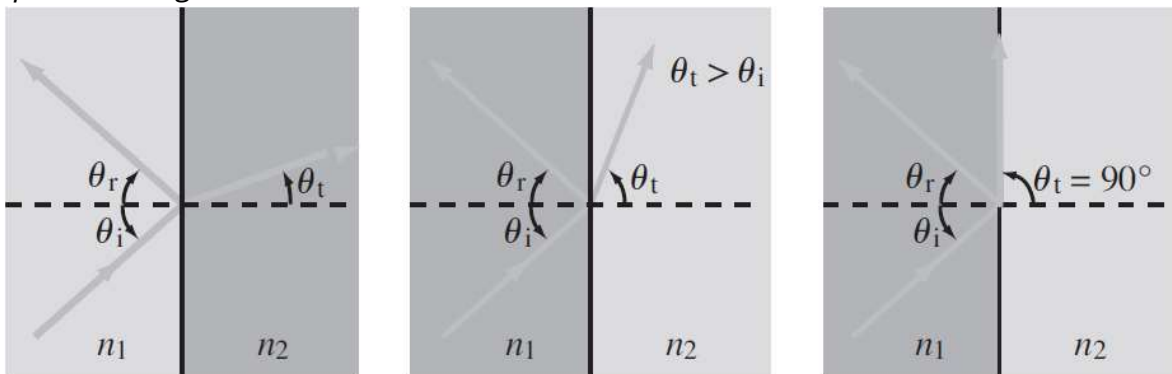
$$n = \frac{c}{u_p} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}. \quad \text{Empleando esta ecuación en la última se tiene}$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}}. \quad \text{Para materiales no magnéticos, } \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1, \text{ en cuyo caso}$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (\text{con } \mu_1 = \mu_2), \text{ donde } \eta = \sqrt{\mu/\epsilon} \text{ es la impedancia intrínseca de}$$

un medio dieléctrico.

El aire, con $\mu_r = \epsilon_r = 1$, tiene un índice de refracción $n_0 = 1$. Como para materiales no magnéticos $n = \sqrt{\epsilon_r}$, *con frecuencia se hace referencia a un material como más denso que un segundo material si el índice de refracción del primero es más grande que el del segundo.*



(a) $n_1 < n_2$

(b) $n_1 > n_2$

(c) $n_1 > n_2$ y $\theta_i = \theta_c$

Figura 1.23 Las leyes de Snell gráficamente.

Con incidencia normal ($\theta_i = 0$), $\theta_r = 0$, y con incidencia oblicua $\theta_t < \theta_i$ cuando $n_2 > n_1$ y $\theta_t > \theta_i$ cuando $n_2 < n_1$. Es decir, *si la onda en el medio 1 incide en un medio más*

denso, como en la figura 1.23a, la onda transmitida se refracta hacia el eje z , y lo opuesto es cierto si la onda incide en un medio menos denso figura 1.23b. Un caso de interés particular es cuando $\theta_t = \pi/2$, como se ilustra en la figura 1.23c; en este caso, la onda reflejada fluye a lo largo de la superficie y no se transmite energía al medio 2. El valor del ángulo de incidencia θ_i correspondiente a $\theta_t = \pi/2$ se llama ángulo crítico θ_c y se obtiene con

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_t|_{\theta_t=\pi/2} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1}}} \text{ (con } \mu_1 = \mu_2 \text{)}.$$

Si θ_i excede a θ_c , la onda incidente se refleja en su totalidad y la onda refractada se transforma en una onda superficial no uniforme que viaja a lo largo de la frontera entre los dos medios. Este comportamiento de onda se conoce como **reflexión interna total**.

Recordatorio de fasores

Como lo expone [1] p 31: **Fasores** Muchos problemas de ingeniería se plantean en la forma de ecuaciones integro-diferenciales lineales. Si la excitación, más comúnmente conocida como **función forzadora**, varía de forma sinusoidal con el tiempo, el uso de la notación fasorial para representar variables dependientes del tiempo permite convertir la ecuación integro-diferencial en una ecuación lineal sin funciones sinusoidales, con lo cual se simplifica el método de solución. Luego de resolver para la variable deseada, tal como voltaje o corriente en un circuito, la conversión del dominio fasorial de regreso al dominio del tiempo da el resultado deseado.

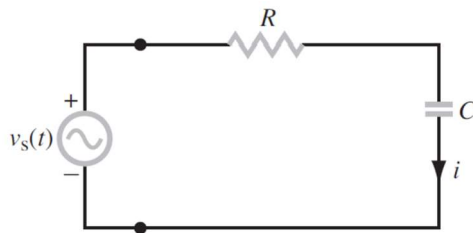


Figura 1.24 Circuito RC conectado a una fuente de voltaje $\mathcal{V}_s(t)$.

La figura 1.24 muestra un circuito RC simple que contiene una fuente de voltaje que varía de forma sinusoidal con el tiempo determinada por $\mathcal{V}_s(t) = V_0 \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$, donde V_0 es la amplitud, ω es la frecuencia angular y φ_0 es una fase de referencia. La

aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff da la siguiente ecuación para una

$$\text{trayectoria cerrada: } Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = \mathcal{V}_s(t)$$

El proceso consta de 5 pasos básicos:

1 *Adopte una referencia coseno* Se deberá expresar la función forzadora como un coseno, si aún no está en esa forma; por consiguiente, todas las funciones que varían con el tiempo, como la corriente presente en el circuito y el voltaje a través de R y C , también tendrán una referencia coseno. Así,

$$\mathcal{V}_s(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi_0) = V_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t - \phi_0\right) = V_0 \cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right). \text{ Donde se emplean}$$

las identidades $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ y $\cos(-x) = \cos x$.

2 *Expresa las variables dependientes del tiempo como fasores* Cualquier función que varia con el tiempo de forma cosenoidal $z(t)$ se expresa como $z(t) = \Re[\tilde{Z}e^{j\omega t}]$,

donde $\tilde{Z}$ es una función independiente del tiempo llamada **fasor** de la función **instantánea** $z(t)$. Para distinguir las cantidades instantáneas de sus contrapartes fasoriales, a la letra que denota un fasor se le coloca una tilde encima. El voltaje $\mathcal{V}_s(t)$ se escribe en la forma $\mathcal{V}_s(t) = \Re[V_0 e^{j(\omega t + \phi_0 - \pi/2)}] = \Re[V_0 e^{j(\phi_0 - \pi/2)} e^{j\omega t}] = \Re[\tilde{V}_s e^{j\omega t}]$, con $\tilde{V}_s = V_0 e^{j(\phi_0 - \pi/2)}$.

El fasor $\tilde{V}_s$, correspondiente a la función de tiempo $\mathcal{V}_s(t)$, contiene información de amplitud y fase pero es independiente de la variable de tiempo t . A continuación se define la variable desconocida $i(t)$ en función de un fasor $\tilde{I}$ como $i(t) = \Re[\tilde{I}e^{j\omega t}]$, y si la ecuación que se está tratando de resolver contiene derivadas o integrales, se utilizan las dos siguientes propiedades:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}[\Re(\tilde{I}e^{j\omega t})] = \Re\left[\frac{d}{dt}(\tilde{I}e^{j\omega t})\right] = \Re[j\omega \tilde{I}e^{j\omega t}], \quad y$$

$$\int i dt = \int \Re(\tilde{I}e^{j\omega t}) dt = \Re\left(\int \tilde{I}e^{j\omega t} dt\right) = \Re\left(\frac{\tilde{I}}{j\omega} e^{j\omega t}\right).$$

Por lo tanto, la diferenciación de la función de tiempo $i(t)$ equivale a multiplicar su fasor $\tilde{I}$ por $j\omega$, y la integración equivale a dividir entre $j\omega$.

3 Reescriba la ecuación diferencial/integral en forma fasorial Al Utilizar las ecuaciones obtenidas en la ecuación aplicando Kirchhoff, se tiene

$$R\Re(\tilde{I}e^{j\omega t}) + \frac{1}{C}\Re\left(\frac{\tilde{I}}{j\omega}e^{j\omega t}\right) = \Re(\tilde{V}_s e^{j\omega t}).$$

Como tanto R como C son cantidades reales y la operación $\Re(\)$ es distributiva, la última ecuación se simplifica a $\tilde{I}\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) = \tilde{V}_s$.

El factor de tiempo $e^{j\omega t}$ desapareció porque se encontraba en los tres términos. La ecuación obtenida empleando Kirchhoff es el equivalente en el dominio fasorial de la última ecuación.

4 Resuelva la ecuación En el dominio fasorial De acuerdo con la última ecuación la corriente fasorial $\tilde{I}$ está dada por $\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_s}{R + 1/(j\omega C)}$.

Antes de aplicar el siguiente paso, hay que convertir el lado derecho de la última ecuación en la forma $I_0 e^{j\omega}$ con I_0 como cantidad real. Por tanto,

$$\tilde{I} = V_0 e^{j(\phi_0 - \pi/2)} \left[\frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} \right] = V_0 e^{j(\phi_0 - \pi/2)} \left[\frac{\omega C e^{j\pi/2}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2} e^{j\phi_1}} \right] = \frac{V_0 \omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} e^{j(\phi_0 - \phi_1)},$$

Donde se ha utilizado la identidad $j = e^{j\pi/2}$. El ángulo de fase $\phi_1 = \tan^{-1}(\omega RC)$ y se encuentra en el primer cuadrante del plano complejo.

5 Determine el valor instantáneo

Para determinar $i(t)$, simplemente se aplica la ecuación $i(t) = \Re(\tilde{I}e^{j\omega t})$. Es decir, se

multiplica el fasor $\tilde{I}$ de $\tilde{I} = \frac{V_0 \omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} e^{j(\phi_0 - \phi_1)}$ por $e^{j\omega t}$ y luego se toma la parte real:

$$i(t) = \Re(\tilde{I}e^{j\omega t}) = \Re\left[\frac{V_0 \omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} e^{j(\phi_0 - \phi_1)} e^{j\omega t}\right] = \frac{V_0 \omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t + \phi_0 - \phi_1). \text{ En}$$

resumen, todas las cantidades que varían con el tiempo se transforman al dominio fasorial, se resuelven para el fasor $\tilde{I}$ de la corriente instantánea deseada $i(t)$ y luego se transforma de regreso al dominio del tiempo con el fin de obtener una expresión para $i(t)$. La Tabla 1.1 muestra algunos pares Funciones sinusoidales en el dominio del tiempo y sus equivalentes coseno de referencia en el dominio fasorial.

$z(t)$		$\tilde{Z}$
$A \cos \omega t$	$\Leftrightarrow$	A
$A \cos(\omega t + \phi_0)$	$\Leftrightarrow$	$A e^{j\phi_0}$
$A \cos(\omega t + \beta x + \phi_0)$	$\Leftrightarrow$	$A e^{j(\beta x + \phi_0)}$
$A e^{-ax} \cos(\omega t + \beta x + \phi_0)$	$\Leftrightarrow$	$A e^{-ax} e^{j(\beta x + \phi_0)}$
$A \text{ sen } \omega t$	$\Leftrightarrow$	$A e^{-j\pi/2}$
$A \text{ sen}(\omega t + \phi_0)$	$\Leftrightarrow$	$A e^{j(\phi_0 - \pi/2)}$
$\frac{d}{dt}(z_1(t))$	$\Leftrightarrow$	$j\omega \tilde{Z}_1$
$\frac{d}{dt}[A \cos(\omega t + \phi_0)]$	$\Leftrightarrow$	$j\omega A e^{j\phi_0}$
$\int z_1(t) dt$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{j\omega} \tilde{Z}_1$
$\int A \text{ sen}(\omega t + \phi_0) dt$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{j\omega} A e^{j(\phi_0 - \pi/2)}$

Tabla 1.1 Funciones sinusoidales en el dominio del tiempo $z(t)$ y sus equivalentes coseno de referencia en el dominio fasorial $\tilde{Z}$, donde $z(t) = \Re[\tilde{Z}e^{j\omega t}]$.

2. Líneas de Transmisión

2.1 Ecuaciones y parámetros de las líneas de transmisión.

[1] p 43 expone: En las líneas de transmisión transversales electromagnéticas las ondas que se propagan a lo largo de estas líneas se caracterizan por campos eléctricos y magnéticos que son totalmente **transversales** a la dirección de propagación. Este modo de propagación se conoce como modo **TEM**.

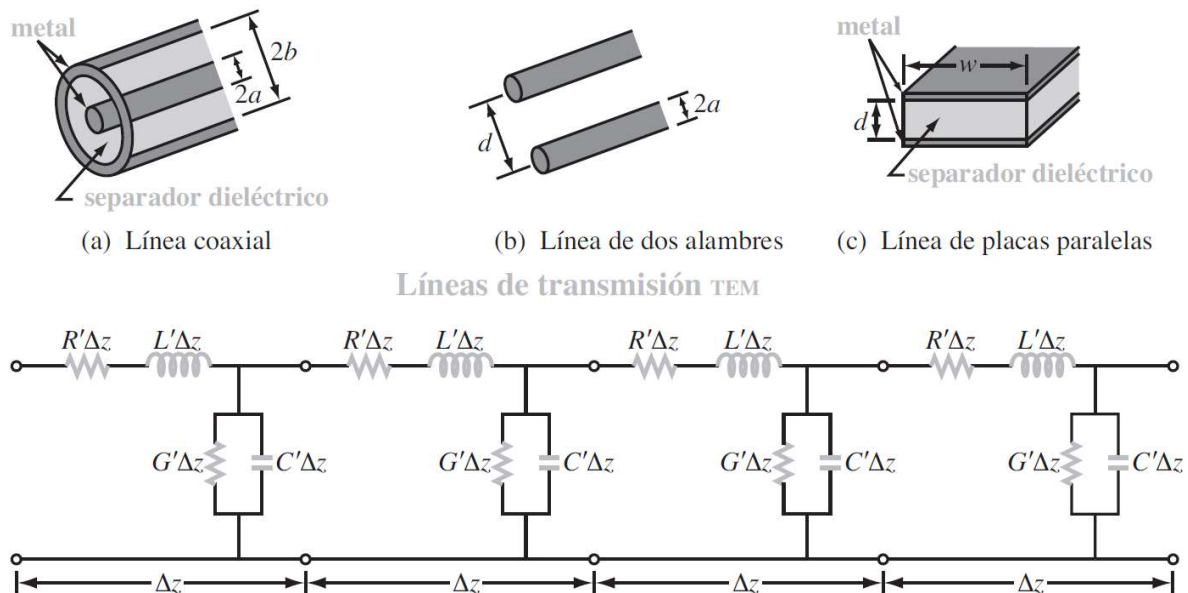


Figura 2.1 En la parte superior: Líneas de transmisión TEM Coaxial, de dos alambres y de placas paralelas. En la parte inferior: Representación de una línea de transmisión empleando circuitos equivalentes en secciones diferenciales.

Una característica sobresaliente común entre las líneas TEM es que se componen de dos superficies conductoras paralelas. *Esta es una de las razones por las cuales una línea de transmisión será representada mediante una configuración de alambres paralelos*, como se muestra en la figura 2.1, *sin importar la forma específica de la línea considerada*. La funcionalidad de un circuito electrónico normalmente es representada con un circuito equivalente compuesto de fuentes, resistores y capacitores. Se aplicará el mismo método a la línea de transmisión orientándola a lo largo de la dirección z , subdividiéndola en secciones diferenciales, cada una con una longitud Δz y luego representando cada sección por un circuito equivalente. Esta representación, se conoce como modelo de **circuito de elementos concentrados**, consta de cuatro elementos básicos, que serán los **parámetros de línea de transmisión**.

Los parámetros de línea de transmisión son: R' , L' , C' , la resistencia, la inductancia y la capacitancia de los dos conductores por unidad de longitud, con unidades Ω/m , H/m y F/m respectivamente, mientras que G' la **conductancia** del medio aislante por unidad de longitud, en S/m .

El apóstrofo indica que los parámetros de línea son cantidades diferenciales cuyas unidades se dan por unidad de longitud.

Todas las líneas de transmisión TEM comparten las siguientes relaciones útiles:

$$L'C' = \mu\epsilon \quad \text{y} \quad \frac{G'}{C'} = \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

Si el medio aislante entre los conductores es aire, la línea de transmisión se llama **línea aérea** (por ejemplo, línea aérea coaxial o línea aérea de dos conductores).

La Tabla 2.1 muestra los parámetros de línea de transmisión R' , L' , G' y C' para tres tipos de líneas.

Tabla 2.1 Parámetros de línea de transmisión R' , L' , G' y C' para tres tipos de líneas.

Parámetro	Coaxial	Dos alambres	Placas paralelas	Unidad
R'	$\frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2R_s}{w}$	Ω/m
L'	$\frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a)$	$\frac{\mu}{\pi} \ln \left[(d/2a) + \sqrt{(d/2a)^2 - 1} \right]$	$\frac{\mu d}{w}$	H/m
G'	$\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\sigma}{\ln \left[(d/2a) + \sqrt{(d/2a)^2 - 1} \right]}$	$\frac{\sigma w}{d}$	S/m
C'	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\epsilon}{\ln \left[(d/2a) + \sqrt{(d/2a)^2 - 1} \right]}$	$\frac{\epsilon w}{d}$	F/m
Notas: 1. Remítase a la figura 2.4 para definiciones de dimensiones. 2. μ , ϵ y σ pertenecen al material aislante entre los conductores. 3. $R_s = \sqrt{\pi f \mu_c / \sigma_c}$ 4. μ_c y σ_c pertenecen a los conductores. 5. Si $(d/2a)^2 \gg 1$, entonces $\left[(d/2a) + \sqrt{(d/2a)^2 - 1} \right] \approx \ln(d/a)$.				

2.2 Comportamiento de la línea de transmisión con carga, Impedancia de entrada y Relación de Onda Estacionaria.

Según [1] p 50: Las **ecuaciones de línea de transmisión**, llamadas también **ecuaciones del telegrafista** son ecuaciones diferenciales de primer orden en el dominio del tiempo y son expresadas como:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = R' i(z,t) + L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad \text{y} \quad -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = G' v(z,t) + C' \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} .$$
 Sin

embargo, nuestras fuentes serán sinusoidales, razón por la cual es conveniente emplear fasores. Por lo tanto, se definen $v(z,t) = \Re[\tilde{V}(z)e^{j\omega t}]$ y

$i(z,t) = \Re[\tilde{I}(z)e^{j\omega t}]$. Obteniendo así las ecuaciones del telegrafista en forma

$$\text{fasorial: } -\frac{\partial \tilde{V}(z)}{\partial z} = (R' + j\omega L') \tilde{I}(z) \quad \text{y} \quad -\frac{\partial \tilde{I}(z)}{\partial z} = (G' + j\omega C') \tilde{V}(z) .$$
 Se dice

que este par de ecuaciones de primer orden están acopladas, siendo una expresión usual la siguiente:

$$\frac{d^2 \tilde{V}(z)}{dz^2} - \gamma^2 \tilde{V}(z) = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{I}(z)}{dz^2} - \gamma^2 \tilde{I}(z) = 0, \quad \text{con } \gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} .$$

Estas son las **ecuaciones de onda** para $\tilde{V}(z)$ e $\tilde{I}(z)$, respectivamente y γ es la **constante de propagación compleja** de la línea de transmisión. γ consta de una parte real α , llamada **constante de atenuación** de la línea con unidades de Np/m, y una parte imaginaria β , llamada **constante de fase** de la línea con unidades de rad/m. Por lo tanto, $\gamma = \alpha + j\beta$.

Las ecuaciones de onda tienen soluciones de onda viajera de la siguiente forma:

$$\tilde{V}(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \quad (\text{V}) \quad \text{y} \quad \tilde{I}(z) = \tilde{I}_0^+ e^{-\gamma z} + \tilde{I}_0^- e^{\gamma z} \quad (\text{A}) .$$
 Después de resolver

permitirá definir la impedancia característica de la línea, como:

$$Z_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} .$$
 Las amplitudes de onda V_0^+ y V_0^- en general, cada una

será un cantidad compleja, entonces: $V_0^+ = |V_0^+| e^{j\phi^+}$ y $V_0^- = |V_0^-| e^{j\phi^-}$.

Ahora se tienen las condiciones para regresar al dominio del tiempo y obtener una expresión para $v(z,t)$, el voltaje instantáneo en la línea:

$$\begin{aligned}
 v(z,t) &= \Re(\tilde{V}(z)e^{j\omega t}) = \Re\left[(V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z})e^{j\omega t}\right] \\
 \text{Ec. 2.1} \quad &= \Re\left[|V_0^+| e^{j\phi^+} e^{j\omega t} e^{-(\alpha+j\beta)z} + |V_0^-| e^{j\phi^-} e^{j\omega t} e^{(\alpha+j\beta)z}\right] \\
 &= |V_0^+| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+) + |V_0^-| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi^-)
 \end{aligned}$$

En Ec. 2.1 observamos la presencia de dos ondas en la línea que se propagan en direcciones opuestas (un exponencial con argumento negativo $e^{-\alpha z}$ indicando que la onda se propaga en dirección positiva y el otro con argumento positivo $e^{\alpha z}$ indicando el desplazamiento en dirección negativa) esto produce una **onda estacionaria**.

EJEMPLO 1: Una **línea aérea** es una línea de transmisión en la cual el aire es el material dieléctrico presente entre los dos conductores, por lo que $G' = 0$. Además, los conductores están hechos de un material con alta conductividad, de manera que $R' = 0$. Para una línea aérea con impedancia característica de 50Ω y constante de fase de 20rad/m a 700MHz , determine la inductancia y la capacitancia por metro de la línea.

Se sabe que: $Z_0 = 50\Omega$, $\beta = 20\text{rad/m}$, $f = 700\text{MHz} = 7 \times 10^8\text{Hz}$. Por lo que empleando:

$$\beta = \Im(\gamma) = \Im\left(\sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}\right)$$

$$\beta = \Im\left(\sqrt{(j\omega L')(j\omega C')}\right) = \Im\left(j\omega\sqrt{L'C'}\right) = \omega\sqrt{L'C'}$$

$$\text{y} \quad Z_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$\text{Entonces: } \frac{\beta}{Z_0} = \omega C'$$

$$C' = \frac{\beta}{\omega Z_0} = \frac{20}{2\pi \times 7 \times 10^8 \times 50}$$

$$= 9.09 \times 10^{-11} (\text{F/m}) = 90.9 (\text{pF/m}).$$

$$\begin{aligned}
 L' &= Z_0^2 C' = (50)^2 \times 90.9 \times 10^{-12} \\
 &= 2.27 \times 10^{-7} (\text{H/m}) = 227 (\text{nH/m}).
 \end{aligned}$$

Cuando la velocidad de fase de un medio es independiente de la frecuencia, el medio se conoce como **no dispersor**, que claramente es el caso para una línea de transmisión TEM sin pérdidas.

Con $\gamma = j\beta$ para la línea sin pérdidas, las expresiones de las ecuaciones para el voltaje y corriente totales en la línea son:

$$\tilde{V}(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}, \quad \tilde{I}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z}.$$

Estas expresiones contienen dos incógnitas, V_0^+ y V_0^- , las amplitudes de voltaje de las ondas incidente y reflejada, respectivamente. Para determinar V_0^+ y V_0^- se tiene que considerar la línea de transmisión sin pérdidas en el contexto del circuito completo, incluido un circuito generador, en sus terminales de entrada y una carga en sus terminales de salida, como lo muestra la figura 2.2.

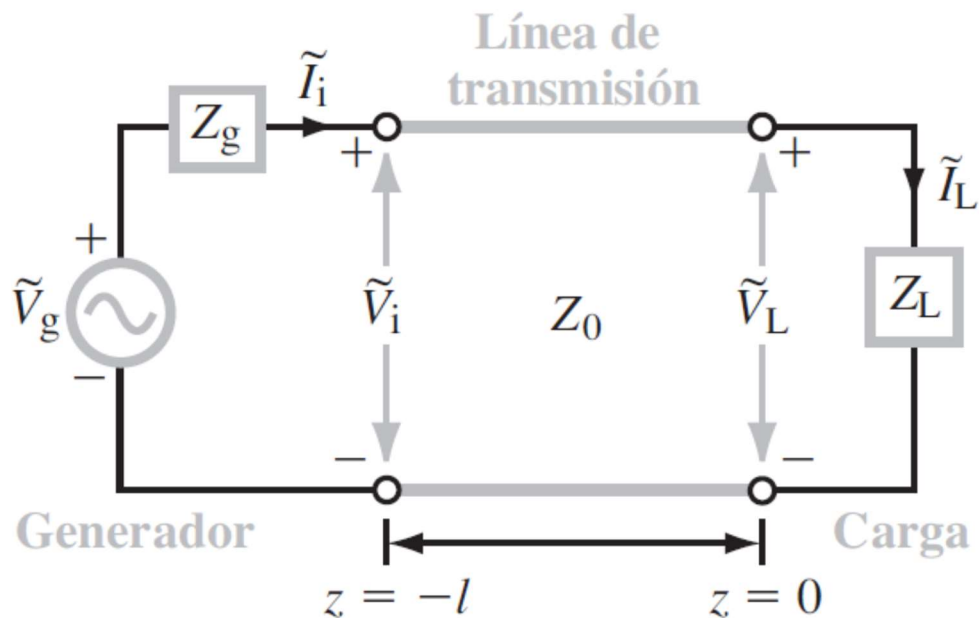


Figura 2.2 Línea de transmisión de longitud l conectada por un extremo a un circuito generador y por el otro a una carga Z_L . La carga se localiza en $z = 0$ y las terminales del generador están en $z = -l$.

En la figura 2.2 la línea, de longitud l , termina en una **impedancia de carga** arbitraria Z_L . Por conveniencia, la referencia de la coordenada espacial z se elige de manera que $z = 0$ corresponda a la ubicación de la carga. En el extremo emisor con $z = -l$, la línea está conectada a una fuente de voltaje sinusoidal con fador $\tilde{V}_g$ y una impedancia

interna Z_g . En la carga, el voltaje fasorial a traves de ella, $\tilde{V}_L$ y la corriente fasorial, $\tilde{I}_L$, están relacionados por la impedancia de carga Z_L como sigue: $Z_L = \frac{\tilde{V}_L}{\tilde{I}_L}$.

El voltaje $\tilde{V}_L$ es igual al voltaje total en la línea $\tilde{V}(z)$ e $\tilde{I}_L$ es igual a $\tilde{I}(z)$, ambos evaluados con $z = 0$: $\tilde{V}_L = \tilde{V}(z=0) = V_0^+ + V_0^-$, $\tilde{I}_L = \tilde{I}(z=0) = \frac{V_0^+}{Z_0} - \frac{V_0^-}{Z_0}$. Al utilizar

estas expresiones en la ecuación inmediata anterior, se obtiene el resultado:

$$Z_L = \left(\frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-} \right) Z_0, \text{ y en consecuencia: } V_0^- = \left(\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right) V_0^+.$$

La relación de la amplitud entre la onda de voltaje reflejada y la amplitud de voltaje incidente en la carga se conoce como **coeficiente de reflexión de voltaje** Γ . Con la

ecuación anterior, esta definición da el resultado $\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Z_L/Z_0 - 1}{Z_L/Z_0 + 1}$, la

relación de las amplitudes de corriente es $\frac{I_0^-}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{V_0^+} = -\Gamma$.

$\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta_r}$, normalmente Γ es complejo, $|\Gamma|$ es la magnitud de Γ y θ_r es su ángulo de fase. Observe que $|\Gamma| \leq 1$. Se dice que **una carga está acoplada a la línea** si

$Z_L = Z_0$ **porque en ese caso no habrá reflexión por parte de la carga** ($\Gamma = 0$ y $V_0^- = 0$). Por otra parte, cuando la carga es un circuito abierto ($Z_L = \infty$), $\Gamma = 1$ y $V_0^- = V_0^+$ y cuando está en corto circuito ($Z_L = 0$), $\Gamma = -1$ y $V_0^- = -V_0^+$.

EJEMPLO 2: Una línea de transmisión de 100Ω está conectada una carga compuesta de un resistor de 50Ω en serie con un capacitor de 10 pF . Determine el coeficiente de reflexión en la carga para una señal de 100 MHz .

La impedancia en la carga es $Z_L = R_L - j/\omega C_L = 50 - j\frac{1}{2\pi \times 10^8 \times 10^{-11}} = (50 - j159)\Omega$

El coeficiente de reflexión de voltaje es:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_L/Z_0 - 1}{Z_L/Z_0 + 1} = \frac{0.5 - j1.59 - 1}{0.5 - j1.59 + 1} = \frac{-0.5 - j1.59}{1.5 - j1.59} \\ &= \frac{-1.67e^{j72.6^\circ}}{2.19e^{-j46.7^\circ}} = -0.76e^{j119.3^\circ} \end{aligned}$$

Este resultado se convierte en una forma con magnitud positiva de Γ reemplazando el signo menos con e^{-j180° . Por lo tanto,

$$\Gamma = 0.76e^{j119.3^\circ}e^{-j180^\circ} = 0.76e^{-j60.7^\circ} = 0.76\angle -60.7^\circ. \text{ Por lo tanto } |\Gamma| = 0.76 \text{ y } \theta_r = -60.7^\circ.$$

Tabla 2.2 Parámetros característicos de líneas de transmisión.

	Constante de propagación $\gamma = \alpha + j\beta$	Velocidad de fase u_p	Impedancia característica Z_0
Caso general	$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$	$u_p = \omega/\beta$	$Z_0 = \sqrt{\frac{(R' + j\omega L')}{(G' + j\omega C')}}$
Sin pérdidas	$\alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{\epsilon_r}/c$	$u_p = c/\sqrt{\epsilon_r}$	$Z_0 = \sqrt{L'/C'}$
Coaxial sin pérdidas	$\alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{\epsilon_r}/c$	$u_p = c/\sqrt{\epsilon_r}$	$Z_0 = (60/\sqrt{\epsilon_r}) \ln(b/a)$
Dos conductores sin pérdidas	$\alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{\epsilon_r}/c$	$u_p = c/\sqrt{\epsilon_r}$	$Z_0 = \frac{(120/\sqrt{\epsilon_r})}{\ln[(d/2a) + \sqrt{(d/2a)^2 - 1}]}$ $Z_0 \simeq (120/\sqrt{\epsilon_r}) \ln(d/a),$ si $d \gg a$
Placas paralela sin pérdidas	$\alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{\epsilon_r}/c$	$u_p = c/\sqrt{\epsilon_r}$	$Z_0 = (120\pi/\sqrt{\epsilon_r})(d/w)$

Notas: **1.** $\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_r\epsilon_0, c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ y $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \simeq (120\pi)\Omega$, donde ϵ_r es la permitividad relativa del material aislante. **2.** Para línea coaxial, a y b son los radios de los conductores interno y externo. **3.** Para una línea de dos conductores, a = radio del conductor y d = separación entre los centros de los conductores. **4.** Para línea de placas paralelas, w = ancho de placas y d = separación entre placas.

Ondas estacionarias Sabemos que $\frac{I_0^-}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{V_0^+} = -\Gamma$ por lo que $V_0^- = \Gamma V_0^+$ y

sustituyendo en $\tilde{V}(z) = V_0^+e^{-j\beta z} + V_0^-e^{j\beta z}$, $\tilde{I}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0}e^{j\beta z}$, empleando

$\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta_r}$, en la ecuación para voltaje, es posible demostrar que

$$|\tilde{V}(z)| = |V_0^+| \left[1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma|\cos(2\beta z + \theta_r) \right]^{1/2}.$$

Una expresión similar para la magnitud de la corriente fasorial es encontrada siguiendo los pasos anteriores.

En la figura 2.3 se muestran las variaciones de $|\tilde{V}(z)|$ y $|\tilde{I}(z)|$ en función de z para una línea con $|V_0^+| = 1V$, $|\Gamma| = 0.3$, $\theta_r = 30^\circ$ y $Z_0 = 50\Omega$. El patrón sinusoidal se llama **onda estacionaria** y es provocado por la *interferencia* de dos ondas. El valor máximo de un **patrón de onda estacionaria** de $|\tilde{V}(z)|$ corresponderá a la posición en la línea donde

las ondas incidente y reflejada están **en fase** $2\beta z + \theta_r = -2n\pi$ y, por consiguiente, se suman constructivamente para dar un valor igual a $(1+|\Gamma|)|V_0^+| = 1.3V$. El valor mínimo de $|\tilde{V}(z)|$ corresponde a la interferencia destructiva, que ocurre cuando las ondas incidente y reflejada están en **oposición de fase** $(2\beta z + \theta_r = -(2n+1)\pi)$. En este caso $|\tilde{V}(z)| = (1-|\Gamma|)|V_0^+| = 0.7V$. En tanto que el periodo de repetición sea λ para las ondas incidente y reflejada individualmente, el periodo repetitivo del patrón de onda estacionaria es $\lambda/2$.

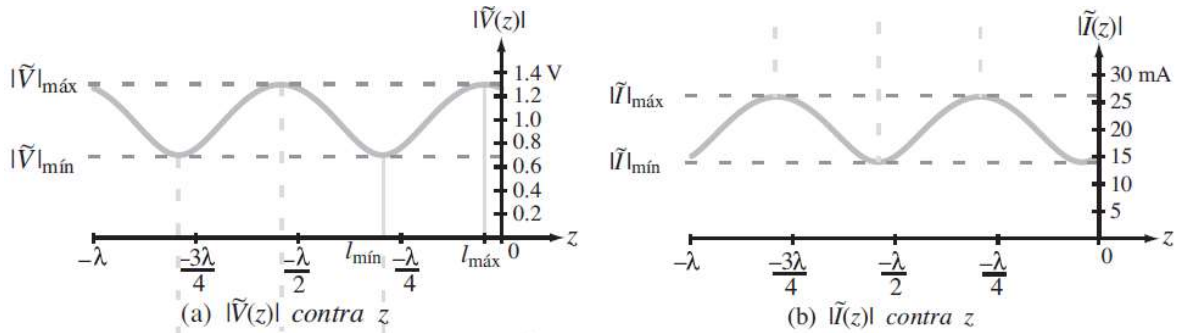


Figura 2.3: Patrón de onda estacionaria de a) $|\tilde{V}(z)|$ y b) $|\tilde{I}(z)|$ para una línea de transmisión sin pérdidas de impedancia característica $Z_0 = 50 \Omega$, terminada en una carga con coeficiente de reflexión $\Gamma = 0.3e^{j30^\circ}$. La magnitud de la onda incidente $|V_0^+| = 1$ V. La razón de onda estacionaria es $S = |\tilde{V}|_{\text{máx}}/|\tilde{V}|_{\text{mín}} = 1.3/0.7 = 1.86$.

La variación cresta a cresta del patrón depende de $|\Gamma|$, que varía entre 0 y 1. En el caso especial de una línea acoplada con $Z_L = Z_0$, se tiene $|\Gamma| = 0$ y $|\tilde{V}(z)| = |V_0^+|$ para todos los valores de z , como se muestra en la figura 2.4 a. Sin onda reflejada presente, no habrá interferencia ni ondas estacionarias. El otro extremo de la escala $|\Gamma|$, en $|\Gamma| = 1$, corresponde a cuando la carga está en cortocircuito ($\Gamma = -1$) o un circuito abierto ($\Gamma = 1$). Los patrones de onda estacionaria en estos casos se muestran en las figuras 2.4b y 2.4c, los cuales tienen máximos iguales a $2|V_0^+|$ y mínimos iguales a cero, pero los dos patrones están desplazados en z uno con respecto a otro por una distancia de $\lambda/4$. De $|\tilde{V}(z)|$ es fácil determinar que hay un máximo cuando el argumento del coseno es CERO o múltiplos de 2π . Tomando en cuenta que la ubicación en la línea siempre corresponde a valores negativos de z puesto que la carga está en $z = 0$, si $l_{\text{máx}} = -z$ se denota como la distancia de la carga en la cual $|\tilde{V}(z)|$ es un máximo, entonces $|\tilde{V}(z)| = |\tilde{V}|_{\text{máx}} = |V_0^+|[1+|\Gamma|]$ y éste ocurre

cuando $2\beta z + \theta_r = -2\beta l_{m\acute{a}x} + \theta_r = -2n\pi$, con $n = 0$ o un entero positivo. Resolviendo la

$$-z = l_{m\acute{a}x} = \frac{\theta_r + 2n\pi}{2\beta} = \frac{\theta_r \lambda}{4\pi} + \frac{n\lambda}{2},$$

ecuaci3n anterior para $l_{m\acute{a}x}$, se tiene:

$$\begin{cases} n = 1, 2, \dots & \text{si } \theta_r < 0, \\ n = 0, 1, 2, \dots & \text{si } \theta_r \geq 0. \end{cases}$$

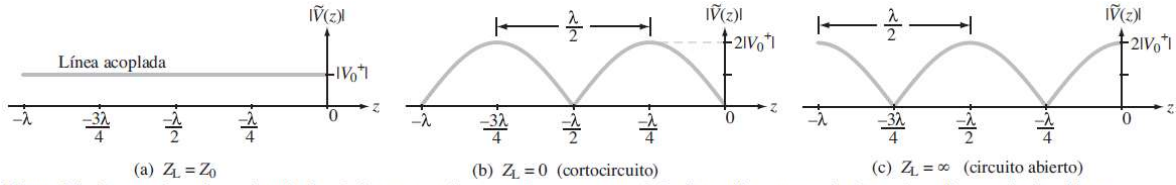


Figura 2.4: Patrones de onda estacionaria de voltaje correspondientes a a) una carga acoplada, b) una línea en cortocircuito y c) una línea en circuito abierto.

Como en el caso anterior (figura 2.4 b) *las ubicaciones en la línea correspondientes a máximos de voltaje también corresponden a mínimos de corriente y viceversa*.

Los valores mínimos de $|\tilde{V}(z)|$ ocurren a distancias $l_{min} = -z$ correspondientes a cuando el argumento de la función coseno es igual a $-(2n + 1)\pi$, que da el resultado

$|\tilde{V}|_{min} = |V_0^+| [1 - |\Gamma|]$, con $-\pi \leq \theta_r \leq \pi$. El primer mínimo corresponde a $n = 0$. La

separación entre $l_{m\acute{a}x}$ y la l_{min} adyacente es $\lambda/4$. Por consiguiente, el **primer mínimo**

ocurre con $l_{min} = \begin{cases} l_{m\acute{a}x} + \lambda/4, & \text{si } l_{m\acute{a}x} < \lambda/4, \\ l_{m\acute{a}x} - \lambda/4, & \text{si } l_{m\acute{a}x} \geq \lambda/4. \end{cases}$

La razón entre $|\tilde{V}|_{m\acute{a}x}$ y $|\tilde{V}|_{min}$ se llama **raz3n de onda estacionaria de voltaje S**, que

se calcula así $S = \frac{|\tilde{V}|_{m\acute{a}x}}{|\tilde{V}|_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$.

Esta cantidad, cuyo acr3nimo en inglés es VSWR o SWR, mide la desproporci3n entre la carga y la línea de transmisi3n.

EJEMPLO 3: Una línea de transmisi3n de 50Ω termina en una carga con $Z_L = (100 + j50)\Omega$. Calcule el coeficiente de reflexi3n de voltaje y la raz3n de onda estacionaria de voltaje (SWR).

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(100 + j50) - 50}{(100 + j50) + 50} = \frac{50 + j50}{150 + j50}.$$

$$\Gamma = \frac{70.7e^{j45^\circ}}{158.1e^{j18.4^\circ}} = 0.45e^{j26.6^\circ}.$$

$$S = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+0.45}{1-0.45} = 2.6.$$

Impedancia de entrada de una línea sin pérdidas Los patrones de onda estacionaria indican que para una línea desacoplada las magnitudes del voltaje y corriente son oscilatorias con la posición en la línea y están en oposición de fase entre sí. Por consiguiente, la razón entre voltaje y corriente, llamada **impedancia de entrada** Z_{ent} , también debe variar con la posición. Empleando

$$\tilde{V}(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}, \quad \tilde{I}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z} \text{ obtendremos}$$

$$Z_{ent}(z) = \frac{\tilde{V}(z)}{\tilde{I}(z)} = \frac{V_0^+ [e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}]}{V_0^+ [e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}]} Z_0 = Z_0 \left[\frac{1 + \Gamma e^{j2\beta z}}{1 - \Gamma e^{j2\beta z}} \right] \quad (\Omega).$$

Observe que $Z_{ent}(z)$ es la razón entre el voltaje total (voltajes de ondas incidente y reflejada) y la corriente total en cualquier punto z en la línea, en contraste con la impedancia característica de la línea Z_0 , la cual relaciona el voltaje y la corriente de cada una de las ondas individualmente.

En muchos problemas de línea de transmisión es la impedancia a la entrada de la línea en $z = -l$, por lo que $Z_{ent}(-l) = Z_0 \left[\frac{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \Gamma e^{-j\beta l}} \right] = Z_0 \left[\frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta l}} \right]$. Empleando las identidades de Euler y la expresión para Γ en función de Z_L y Z_0 obtendremos

$$Z_{ent}(-l) = Z_0 \left(\frac{Z_L \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jZ_L \sin \beta l} \right) = Z_0 \left(\frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} \right).$$

Desde el punto de vista del circuito generador, la línea de transmisión puede reemplazarse con una impedancia

$$Z_{ent}, \text{ como se ilustra en la figura 2.5, entonces: } \tilde{V}_i = \tilde{I}_i Z_{ent} = \frac{\tilde{V}_g Z_{ent}}{Z_g + Z_{ent}} \text{ pero desde el}$$

punto de vista de la línea de transmisión, el voltaje a través de ella en la entrada de la línea se determina mediante $\tilde{V}_i = \tilde{V}(-l) = V_0^+ [e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}]$.

Igualando las dos últimas ecuaciones y luego resolviendo para V_0^+ se llega a:

$$V_0^+ = \left(\frac{\tilde{V}_g Z_{ent}}{Z_g + Z_{ent}} \right) \left(\frac{1}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} \right).$$

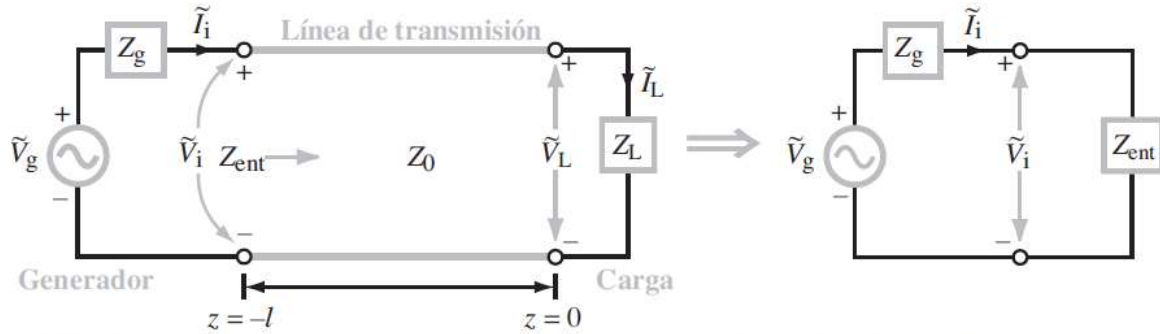


Figura 2.5: En el extremo del generador, el resto de la línea de transmisión puede reemplazarse con la impedancia de entrada de la línea Z_{ent} .

EJEMPLO 4: Un circuito generador de 1.05GHz con impedancia en serie $Z_g = 10\Omega$ y una fuente de voltaje $v_g(t) = 10 \sin(\omega t + 30^\circ) (V)$ está conectada a una carga $Z_L = (100 + j50)\Omega$ por medio de una línea de transmisión sin pérdidas de 50Ω y 67cm de largo. La velocidad de fase de la línea es de $0.7c$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Localice $v(z, t)$ e $i(z, t)$ en la línea.

Con $u_p = \lambda f$, obtendremos la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{u_p}{f} = \frac{0.7 \times 3 \times 10^8}{1.05 \times 10^9} = 0.2\text{m}.$$

$$\begin{aligned} \tan(\beta l) &= \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{0.2} \times 0.67\right) \\ &= \tan 6.7\pi = \tan 0.7\pi = \tan 126^\circ \end{aligned}$$

El coeficiente de reflexión de voltaje en la carga es:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(100 + j50) - 50}{(100 + j50) + 50} = 0.45e^{j26.6^\circ}$$

La impedancia de entrada de la línea es:

$$\begin{aligned} Z_{ent} &= Z_0 \left[\frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} \right] \\ &= Z_0 \left[\frac{Z_L/Z_0 + j \tan \beta l}{1 + j(Z_L/Z_0) \tan \beta l} \right] \\ &= 50 \left[\frac{(2 + j1) + j \tan 126^\circ}{1 + j(2 + j1) \tan 126^\circ} \right] \\ &= (21.9 + j17.4)\Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_g(t) &= 10 \sin(\omega t + 30^\circ) \\
 &= 10 \cos(\pi/2 - \omega t - 30^\circ) \\
 &= 10 \cos(\omega t - 60^\circ) \\
 &= \Re \left[10 e^{-j60^\circ} e^{j\omega t} \right] \\
 &= \Re \left[\tilde{V}_g e^{j\omega t} \right] \quad (V).
 \end{aligned}$$

Por lo que el voltaje fasorial es:

$$\tilde{V}_g = 10 e^{-j60^\circ} (V) = 10 \angle -60^\circ \quad (V)$$

aplicando la ecuación para V_0^+ :

$$V_0^+ = \left(\frac{\tilde{V}_g Z_{ent}}{Z_g + Z_{ent}} \right) \left(\frac{1}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} \right).$$

obtendremos

$$\begin{aligned}
 V_0^+ &= \left[\frac{10 e^{-j60^\circ} (21.9 + j17.4)}{10 + 21.9 + j17.4} \right] \\
 &\quad \cdot \left[e^{j126^\circ} + 0.45 e^{j26.6^\circ} e^{-j126^\circ} \right]^{-1} \\
 &= 10.2 e^{j159^\circ} (V) \\
 &= 10.2 \angle 159^\circ \quad (V).
 \end{aligned}$$

Entonces el voltaje fasorial en la línea es

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}(z) &= V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}) \\
 &= 10.2 e^{j159^\circ} (e^{-j\beta z} + 0.45 e^{j26.6^\circ} e^{j\beta z})
 \end{aligned}$$

por lo que el voltaje instantáneo $v(z, t)$ es

$$\begin{aligned}
 v(z, t) &= \Re \left[\tilde{V}(z) e^{j\omega t} \right] \\
 &= 10.2 \cos(\omega t - \beta z + 159^\circ) \\
 &\quad + 4.55 \cos(\omega t + \beta z + 185.6^\circ) (V)
 \end{aligned}$$

empleando V_0^+ se llega

$$\tilde{I}(z) = 0.20e^{j159} \left(e^{-j\beta z} - 0.45e^{j26.6}e^{j\beta z} \right),$$

$$i(z,t) = 0.20\cos(\omega t - \beta z + 19^\circ)$$

$$+ 0.091\cos(\omega t + \beta z + 5.6^\circ) \quad (A)$$

La Tabla 2.3 es un resumen de la propiedades de las ondas estacionarias en una línea de transmisión sin pérdidas, según [1] p 69.

Tabla 2.3: Propiedades de ondas estacionarias en una línea de transmisión sin pérdidas.

Máximo de voltaje	$ \tilde{V} _{\text{máx}} = V_0^+ [1 + \Gamma]$
Mínimo de voltaje	$ \tilde{V} _{\text{mín}} = V_0^+ [1 - \Gamma]$
Posiciones de máximos de voltaje (también posiciones de mínimos de corriente)	$l_{\text{máx}} = \frac{\theta_r \lambda}{4\theta} + \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
Posición de primer máximo (también posición de primer mínimo de corriente)	$l_{\text{máx}} = \begin{cases} \frac{\theta_r \lambda}{4\theta}, & \text{si } 0 \leq \theta_r \leq \pi \\ \frac{\theta_r \lambda}{4\pi} + \frac{\lambda}{2}, & \text{si } -\pi \leq \theta_r \leq 0 \end{cases}$
Posiciones de mínimos de voltaje (también posiciones de primer máximo de corriente)	$l_{\text{mín}} = \frac{\theta_r \lambda}{4\pi} + \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
Posiciones de primer mínimo (también posición de primer máximo de primer máximo de corriente)	$l_{\text{mín}} = \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{\theta_r}{\pi} \right)$
Impedancia de entrada	$Z_{\text{ent}} = Z_0 \left(\frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta} \right)$
Posiciones donde Z_{ent} es real	máximos y mínimos de voltaje
Z_{ent} a máximos de voltaje	$Z_{\text{ent}} = Z_0 \left(\frac{1 + \Gamma }{1 - \Gamma } \right)$
Z_{ent} a mínimos de voltaje	$Z_{\text{ent}} = Z_0 \left(\frac{1 - \Gamma }{1 + \Gamma } \right)$
Z_{ent} de línea en cortocircuito	$Z_{\text{ent}}^{\text{sc}} = jZ_0 \tan \beta l$
Z_{ent} de línea en circuito abierto	$Z_{\text{ent}}^{\text{oc}} = -jZ_0 \cot \beta l$
Z_{ent} de línea de longitud $l = n\lambda/2$	$Z_{\text{ent}} = Z_L, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
Z_{ent} de línea de longitud $l = \lambda/4 + n\lambda/2$	$Z_{\text{ent}} = Z_0^2 / Z_L, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
Z_{ent} de línea acoplada	$Z_{\text{ent}} = Z_0$
$ V_0^+ $ = amplitud de onda incidente, $\Gamma = \Gamma e^{j\theta}$ con $-\pi < \theta_r < \pi$; θ_r en radianes.	

2.3 Carta de Smith.

La carta de Smith fue propuesta por P. H. Smith en 1939 en un intento de facilitar los diversos cálculos de líneas de transmisión como acoplamientos y diseño. La carta de

Smith es una herramienta gráfica que permite realizar cálculos complejos con relativa facilidad y se sitúa en el plano complejo de Γ .

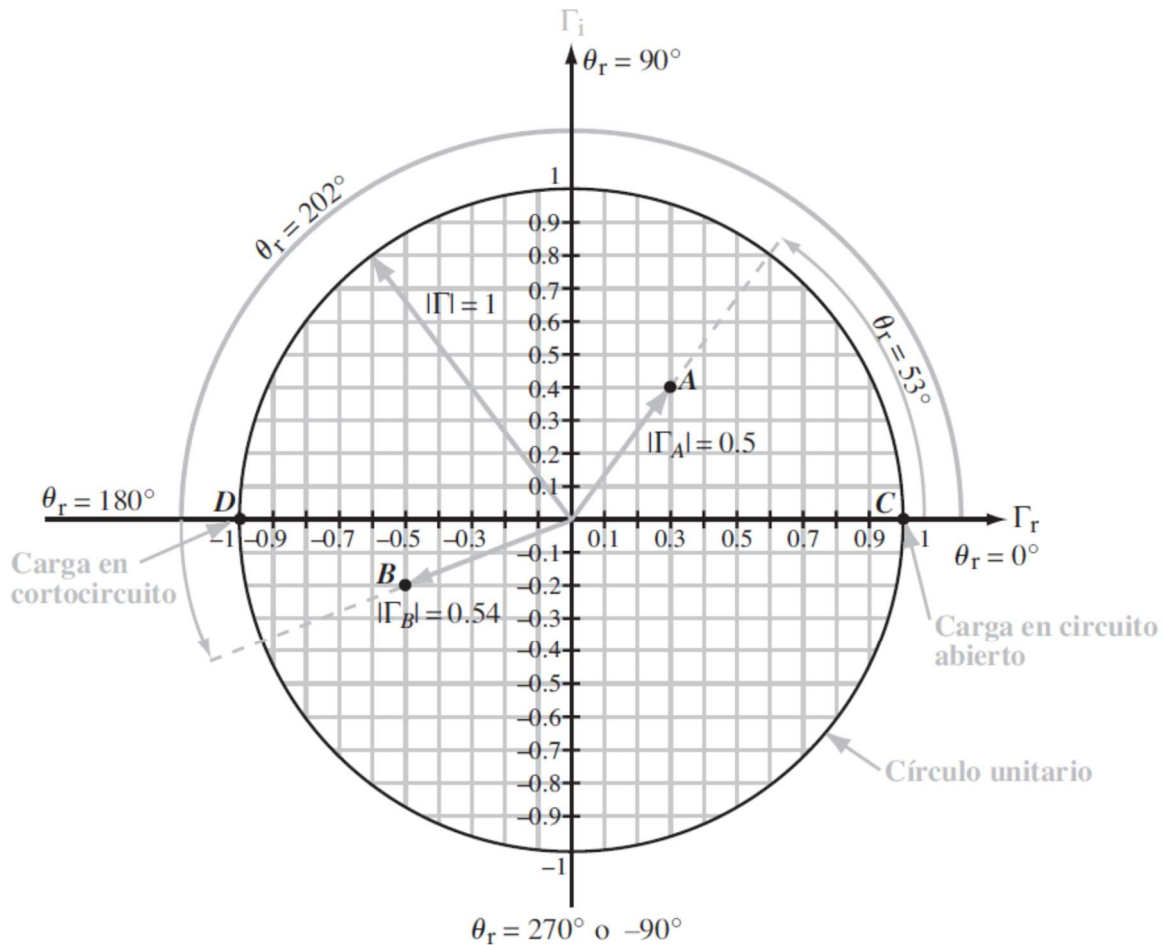


Figura 2.6: Plano complejo Γ mostrando el punto A que está en $\Gamma_A = 0.3 + j0.4 = 0.5e^{j53^\circ}$ y el punto B que está en $\Gamma_B = -0.5 - j0.2 = 0.54e^{j202^\circ}$. El círculo unitario corresponde a $|\Gamma| = 1$. En el punto C, $\Gamma = 1$, correspondiente a una carga en circuito abierto y el punto D, $\Gamma = -1$, correspondiente a un cortocircuito.

El **círculo unitario** que se ilustra en la figura 2.6 corresponde a $|\Gamma| = 1$, y los cálculos relacionados con líneas de transmisión, donde $\Gamma \leq 1$ serán los únicos que tengan significado físico.

En la carta de Smith, las impedancias se representan por valores normalizados, empleando como constante de normalización la impedancia característica de la línea Z_0 . Las impedancias normalizadas se denotan por letras minúsculas como en $z_L = Z_L/Z_0$ (sin dimensión) que es la impedancia de carga normalizada, y también $z_L = (1 + \Gamma)/(1 - \Gamma)$.

La impedancia de carga normalizada z_L es, en general, una cantidad compleja compuesta de una **resistencia de carga normalizada** r_L y una **reactancia de carga normalizada** x_L :

$$z_L = r_L + jx_L.$$

Γ por lo general es una cantidad compleja, constando de una magnitud $|\Gamma|$ y un ángulo de fase θ_r , de manera que

$$\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta_r} = \Gamma_r + j\Gamma_i.$$

Empleando las dos últimas ecuaciones llegaremos a $r_L + jx_L = \frac{(1+\Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1-\Gamma_r) - j\Gamma_i}$. De aquí

que cuando graficamos una gran cantidad de puntos para r_L y otra gran cantidad de puntos para x_L , obtendremos círculos. Los círculos para r_L siempre estarán centrados sobre el eje real del plano complejo Γ (r_L siempre es positiva, y valores negativos no tienen significado físico), mientras los círculos correspondientes a x_L siempre pasarán por $(1, 0)$ del plano complejo Γ , y su desarrollo algunas veces estará en el primer cuadrante de Γ cuando x_L sea positiva y cuando x_L es negativa el desarrollo estará en el cuarto cuadrante de Γ . La figura 2.7 muestra algunos de esos círculos r_L y x_L indicando su radio.

El punto P de la figura 2.8, representa una impedancia de carga normalizada

$z_L = 2 - j1$, con un coeficiente de reflexión de voltaje correspondiente

$\Gamma = 0.45 \exp(-j26.6^\circ)$. La magnitud $|\Gamma| = 0.45$ se obtiene dividiendo la longitud de la línea entre el centro de la carta de Smith y el punto P por la longitud de la línea entre el centro de la carta de Smith y el borde del círculo unitario (el radio de un círculo unitario corresponde a $|\Gamma| = 1$). El perímetro de la carta de Smith contiene tres escalas concéntricas. La escala más interna está rotulada como **ángulo del coeficiente de reflexión en grados**. Ésta es la escala para θ_r . Como se indica en la figura 2.8, $\theta_r = -26.6^\circ$ para el punto P .

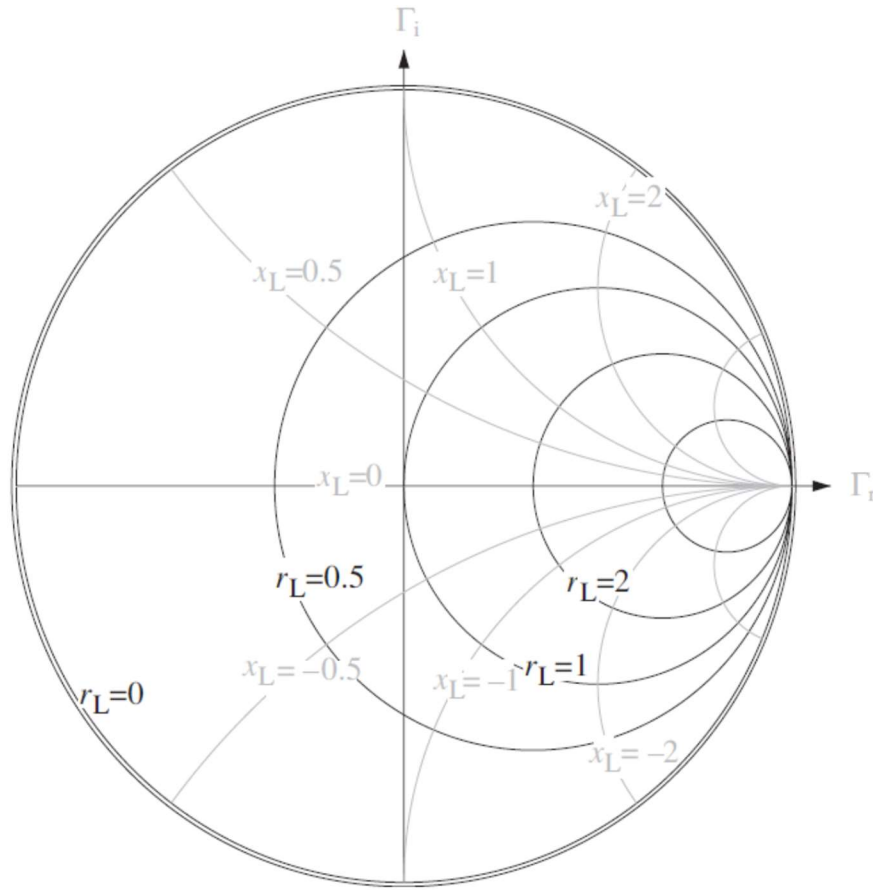


Figura 2.7: Familias de círculos r_L y x_L dentro del dominio $|\Gamma| \leq 1$.

De la sección 2.2 sabemos que la impedancia de entrada viendo hacia la carga a una distancia l de ésta se determina empleando $Z_{ent} = Z_0 \left[\frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta l}} \right]$, y para emplear la carta de Smith se requiere de la normalización de las impedancias a la impedancia característica por lo que la **impedancia de entrada normalizada** es

$$z_{ent} = \frac{Z_{ent}}{Z_0} = \left[\frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta l}} \right] \text{ (sin dimensión).}$$

Por otro lado $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta_r}$ es el coeficiente de reflexión de voltaje en la carga, y si se define $\Gamma_l = \Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j\theta_r} e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j(\theta_r - j2\beta l)}$ como el coeficiente de reflexión de voltaje **desfasado**, significando que Γ_l tiene la misma magnitud que Γ , pero su fase está desplazada $2\beta l$ con respecto a la de Γ . En función de Γ_l , podemos escribir

$$z_{ent} = \frac{1 + \Gamma_l}{1 - \Gamma_l}.$$

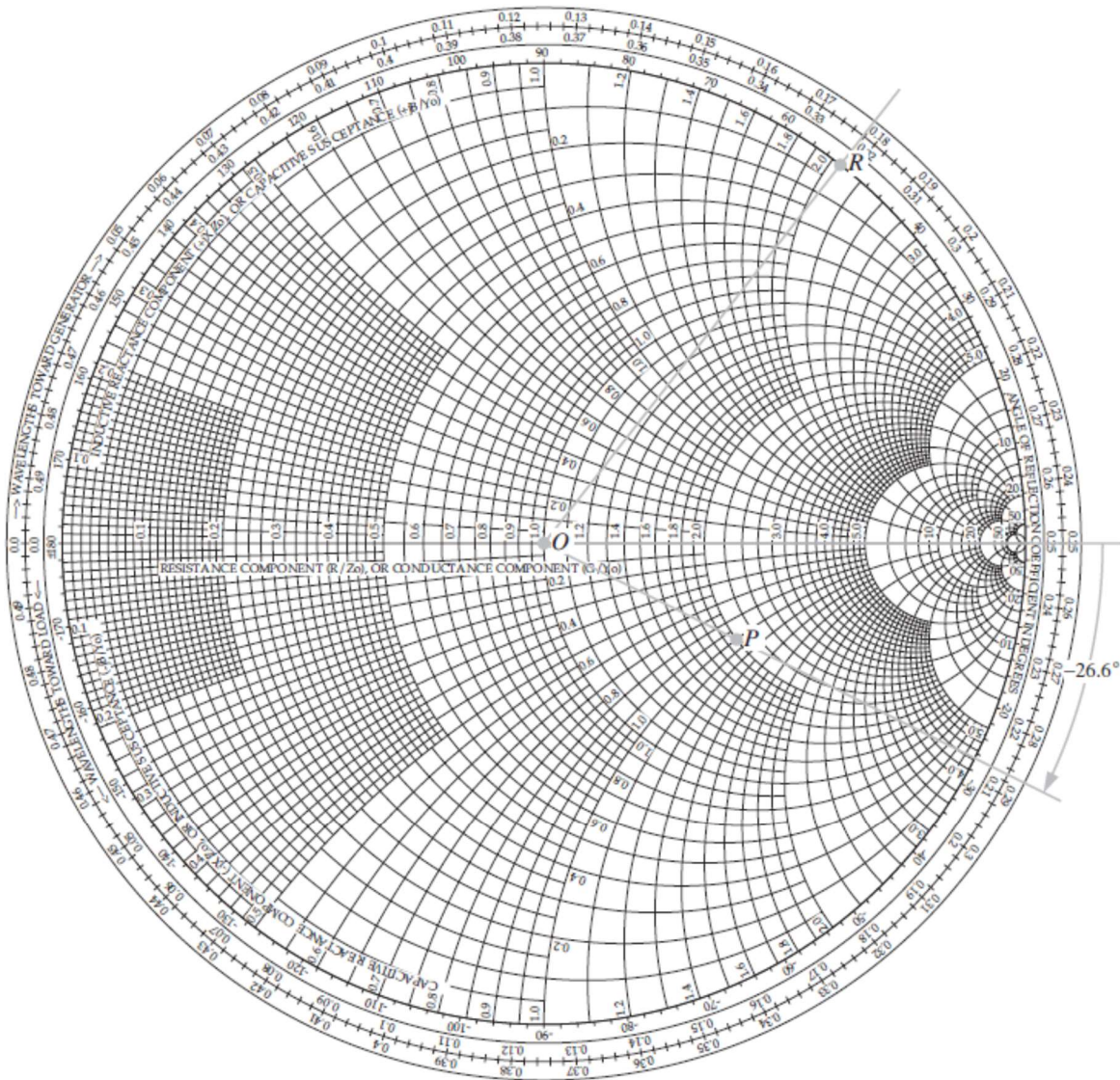


Figura 2.8: El punto P representa una impedancia de carga normalizada $z_L = 2 - j1$. El

coeficiente de reflexión tiene una magnitud $|\Gamma| = \overline{OP} / \overline{OR} = 0.45$ y un ángulo $\theta_r = -26.6^\circ$. El punto R es un punto arbitrario en el círculo $r_L = 0$ (que también es el círculo $|\Gamma| = 1$).

La similitud de forma sugiere que si Γ se transforma en Γ_l , z_L se transforma en z_{ent} . En la carta de Smith, transformar Γ en Γ_l significa mantener $|\Gamma|$ constante y disminuir la fase θ_r en $2\beta l$, lo que corresponde a una rotación en el sentido de las manecillas del reloj en la carta de Smith. Observando que una rotación completa alrededor de la carta de Smith es igual a un cambio de fase de 2π , la longitud l

correspondiente a semejante cambio se obtiene con $2\beta l = 2\frac{2\pi}{\lambda}l = 2\pi$ o $l = \lambda/2$. La escala más externa alrededor del perímetro de la carta de Smith (figura 2.8), llamada escala de **longitudes de onda hacia el generador** (*wavelengths toward generator*, WTG), se construyó para denotar movimiento en la línea de transmisión hacia el generador, en unidades de longitud de onda λ . Lo que es lo mismo, l se mide en longitudes de onda y una rotación completa corresponde a $l = \lambda/2$. En algunos problemas de línea de transmisión, será necesario moverse de algún punto sobre la línea de transmisión hacia otro más cercano a la carga; en tal caso, la fase se incrementa, lo que corresponde a una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por conveniencia, la carta de Smith contiene una tercera escala alrededor de su perímetro (entre la escala θ_r y la escala WTG) para ocuparse de dicha necesidad. Se llama escala de **longitudes de onda hacia la carga** (*wavelengths toward load*, WTL).

Emplearemos la carta de Smith para encontrar z_{ent} , considere una línea de transmisión de 50Ω terminada en una impedancia de carga $Z_L = (100 - j50)\Omega$. El objetivo es encontrar Z_{ent} a una distancia $l = 0.1\lambda$ de la carga. La impedancia de carga normalizada es $z_L = Z_L/Z_0 = 2 - j1$ y se denota como el punto A en la carta de Smith de la figura 2.9. En la escala WTG, la ubicación del punto A está en 0.287λ . Empleando un compás, se traza un círculo a través del punto A, con su centro localizado en el centro de la carta de Smith. Como el centro de la carta de Smith es el punto de intersección de los ejes Γ_r y Γ_i , todos los puntos en el círculo trazado tienen el mismo valor de $|\Gamma|$. Éste se llama **círculo de $|\Gamma|$ constante** o **círculo SWR**.

Como fue estudiado en sección 2.2, la razón de onda estacionaria de voltaje está dada por $S = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$. Por lo que un valor constante de $|\Gamma|$ corresponde a un valor específico de S. Como se mostró con anterioridad, para transformar z_L en z_{ent} , $|\Gamma|$ debe mantenerse constante, lo que significa permanecer en el círculo SWR y disminuir la fase de Γ en $2\beta l$. Esto equivale moverse una distancia $l = 0.1\lambda$ hacia el generador en la escala WTG. Como el punto A se encuentra en 0.287λ , hay que moverse a $0.287\lambda + 0.1\lambda = 0.387\lambda$ en la escala WTG.

Una línea radial trazada a través de esta nueva posición en la escala WTG interseca el círculo SWR en el punto B. Este punto representa z_{ent} , y su valor es $z_{ent} = 0.6 - j0.66$. Por último, se desnormaliza z_{ent} multiplicándolo por $Z_0 = 50\Omega$ para obtener

$Z_{ent} = (30 - j33)\Omega$. Este resultado se comprueba analíticamente con

$$Z_{ent} = Z_0 \left[\frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta l}} \right].$$

Los puntos entre A y B en el círculo SWR representan puntos diferentes a lo largo de la línea de transmisión.

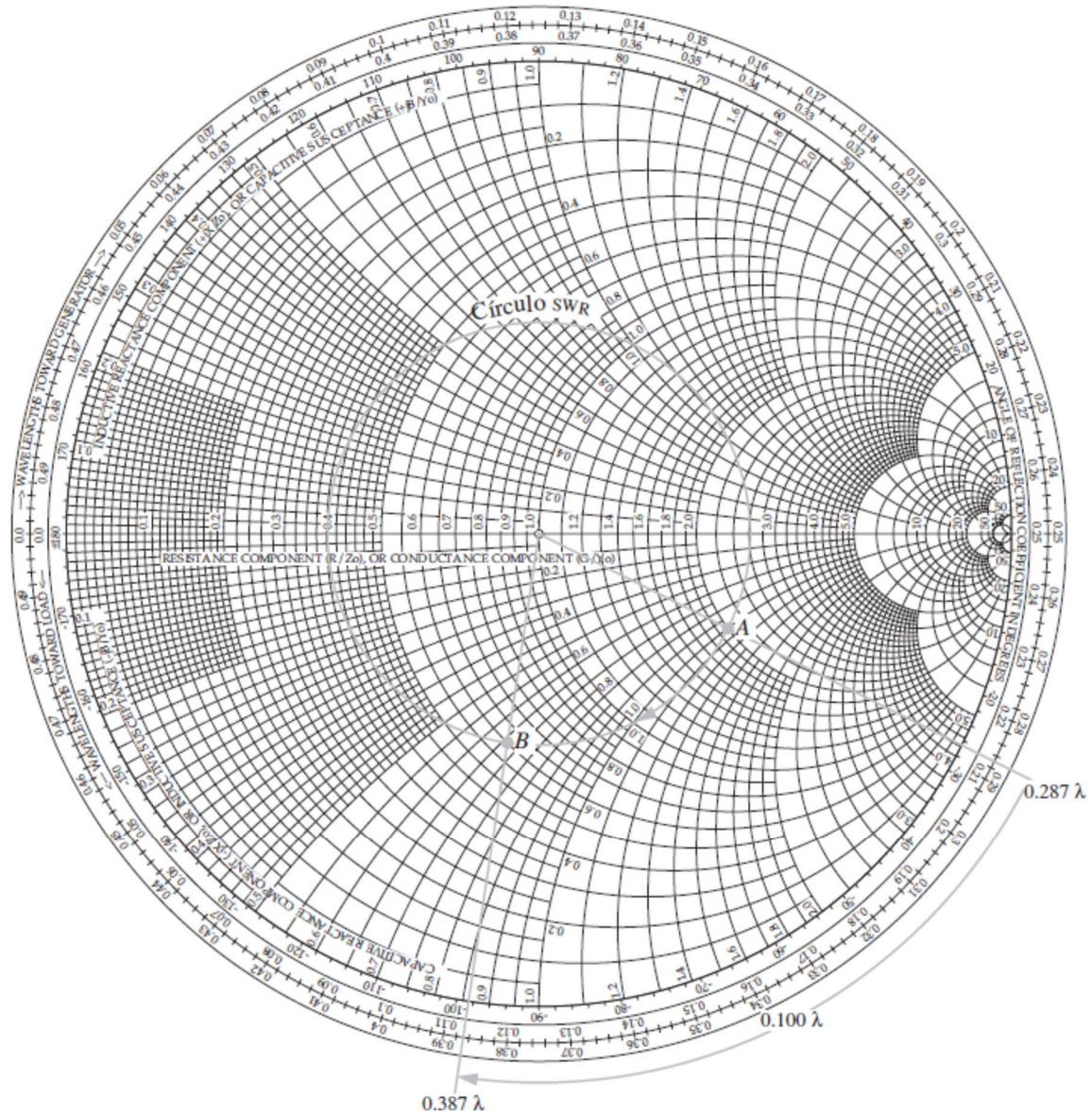


Figura 2.9: El punto A representa una carga normalizada $z_L = 2 - j1$ en 0.287λ de la escala WTG. El punto B representa la entrada a la línea en 0.1λ de la carga. En B ,

$$z_{ent} = 0.6 - j0.66.$$

Transformaciones de impedancia a admitancia Algunas veces es conveniente trabajar con admitancias y no con impedancias. Sabemos que la impedancia está dada por $Z = R + jX$ (Ω), donde R es la resistencia y X alguna reactancia. La **admitancia** Y correspondiente a Z es el recíproco de Z :

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \quad (S).$$

La parte real de Y es la **conductancia** G y la parte imaginaria de Y es la **susceptancia** B . De aquí que

$$Y = G + jB \quad (S).$$

Por comparación de las dos últimas ecuaciones llegamos a

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (S), \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (S).$$

Y si deseamos trabajar con la carta de Smith, requerimos normalizar de la siguiente manera:

$$y = \frac{Y}{Y_0} = \frac{G}{Y_0} + j \frac{B}{Y_0} = g + jb \quad (\text{sin dimensión}),$$

donde $Y_0 = 1/Z_0$ es la **admitancia característica de la línea** y

$$g = G/Y_0 = GZ_0 \quad (\text{sin dimensión}),$$

$$b = B/Y_0 = BZ_0 \quad (\text{sin dimensión}).$$

Las cantidades g y b representan la conductancia y la susceptancia normalizadas de y . La admitancia normalizada y es el recíproco de la impedancia normalizada z ,

$$y = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Z_0}{Z} = \frac{1}{z}.$$

La admitancia de carga normalizada y_L es

$$y_L = \frac{1}{z_L} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \quad (\text{sin dimensión}).$$

Considere la impedancia de entrada normalizada z_{ent} a una distancia $l = \lambda/4$ de la carga. Y si $2\beta l = 4\pi l/\lambda = 4\pi\lambda/4\lambda = \pi$ se obtiene

$$z_{ent}(l = \lambda/4) = \frac{1 + \Gamma e^{-j\pi}}{1 - \Gamma e^{-j\pi}} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = y_L.$$

Por lo tanto, la rotación de $\lambda/4$ en la carta de Smith transforma z_L en y_L . En la figura 2.10, los puntos que representan z_L y y_L son diametralmente opuestos entre sí en el círculo SWR. En realidad, semejante transformación en la carta de Smith se emplea para determinar cualquier admitancia normalizada a partir de su correspondiente impedancia normalizada y viceversa.

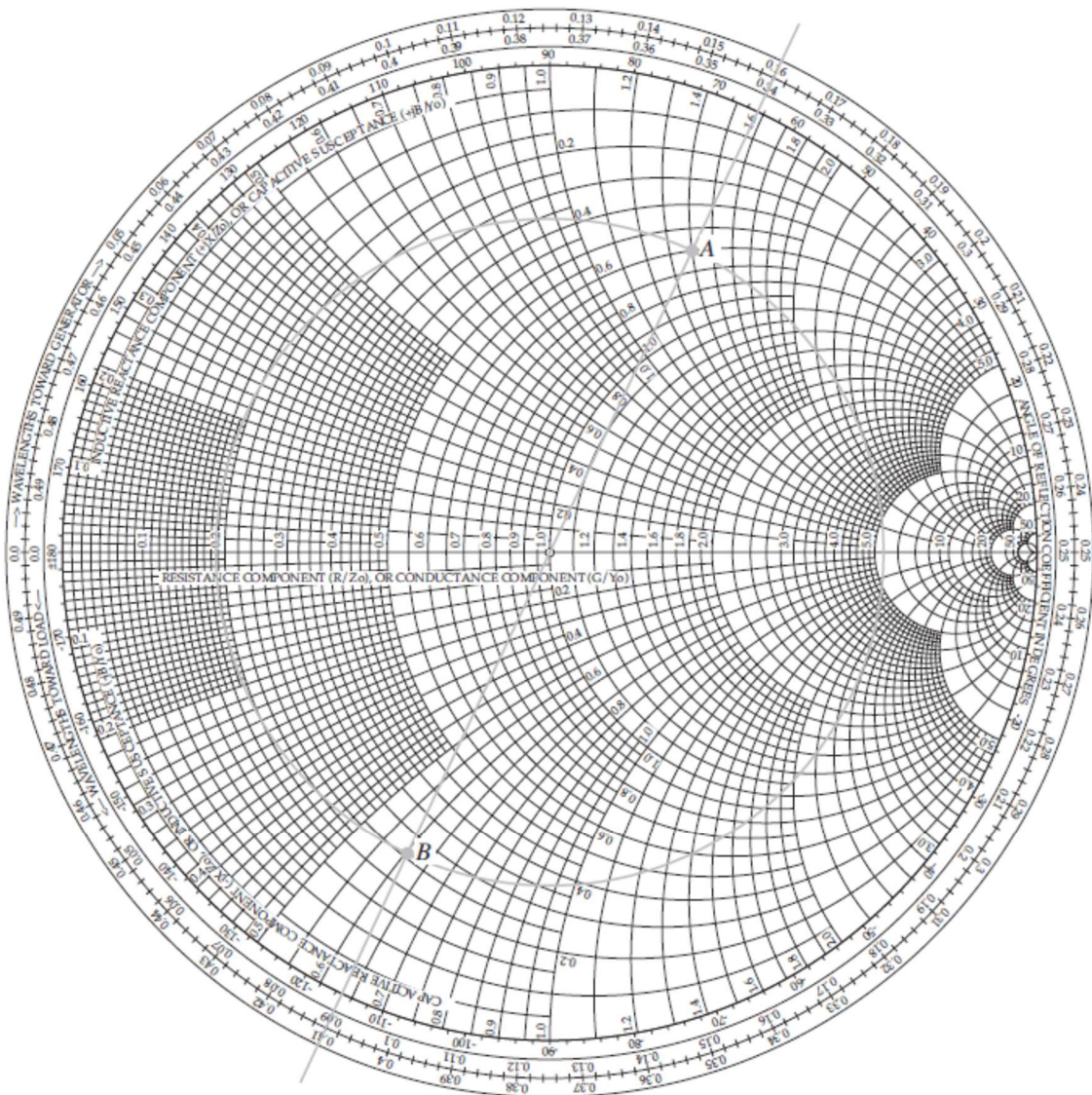


Figura 2.10: El punto A representa una carga normalizada $z_L = 0.6 + j1.4$. Su admitancia normalizada correspondiente es $y_L = 0.25 - j0.6$ y está en el punto B.

La carta de Smith se emplea con impedancias o admitancias normalizadas. Como una carta de impedancia, la carta de Smith se compone de círculos r_L y x_L , que representan la resistencia normalizada y la reactancia de una impedancia de carga normalizada z_L . Cuando se emplea como carta de admitancia los círculos r_L se vuelven círculos g_L y los círculos x_L se vuelven círculos b_L , donde g_L y b_L son la conductancia y susceptancia normalizadas de la admitancia de carga normalizada y_L , respectivamente.

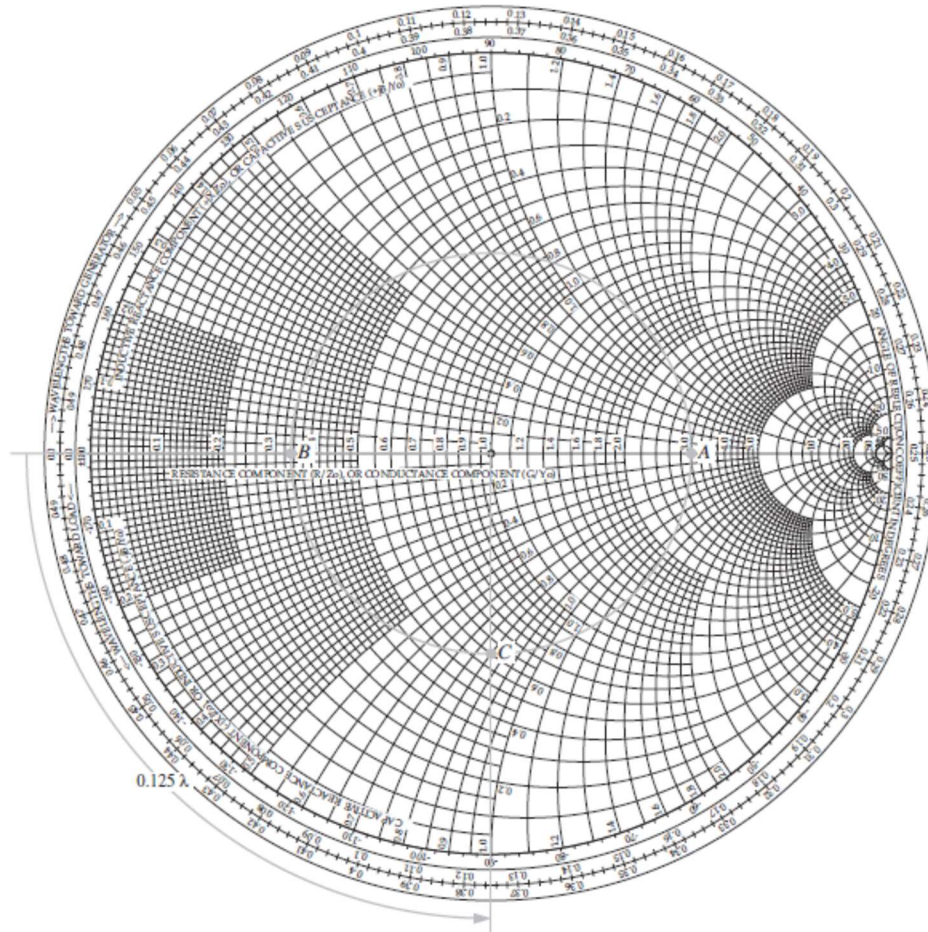


Figura 2.11: Solución del ejemplo 5. El punto A denota que $S=3$, El punto B representa la ubicación del mínimo de voltaje, y el punto C representa la carga en 0.125λ en la escala WTL con respecto al punto B. En C, $z_L = 0.6 - j0.8$.

EJEMPLO 5: Si la razón de onda estacionaria de voltaje es $S=3$ en una línea de 50Ω , el primer mínimo de voltaje ocurre a 5 cm de la carga y la distancia entre mínimos sucesivos es de 20 cm , encuentre la impedancia de carga.

La distancia entre mínimos sucesivos es igual a $\lambda/2$. Por lo tanto, $\lambda = 40\text{cm}$. En unidades de longitud de onda, el primer mínimo de voltaje está en

$$l_{\min} = \frac{5}{40} = 0.125\lambda.$$

El punto A en la carta de Smith en la figura 2.11 corresponde a $r_L = S = 3$. Con un compás, el círculo S constante se traza a través del punto A. El punto B corresponde a las ubicaciones de mínimos de voltaje. Al moverse 0.125λ desde el punto B hacia la carga en la escala WTL, (en sentido contrario a las manecillas del reloj), se llega al punto C, que representa la ubicación de la carga. La impedancia de carga normalizada en el punto C es

$$z_L = 0.6 - j0.8.$$

Multiplicando por $Z_0 = 50\Omega$, se obtiene $Z_L = 50(0.6 - j0.8) = (30 - j40)\Omega$.

2.4 Acoplamiento de una línea de transmisión.

Se dice que **una carga está acoplada a la línea si** $Z_L = Z_0$ porque en ese caso no habrá reflexión por parte de la carga ($\Gamma = 0$ y $V_0^- = 0$). Por otra parte, cuando la carga es un circuito abierto ($Z_L = \infty$), $\Gamma = 1$ y $V_0^- = V_0^+$ y cuando está en cortocircuito ($Z_L = 0$), $\Gamma = -1$ y $V_0^- = -V_0^+$.

Generalmente, una línea de transmisión se conecta a un circuito generador por un extremo y a una carga por el otro. La carga puede ser una antena o cualquier circuito con una impedancia de entrada equivalente Z_L . Se dice que la línea de transmisión está acoplada a la carga cuando su impedancia característica $Z_0 = Z_L$; en tal caso, no ocurre reflexión en el extremo de la carga de la línea. Como los usos primordiales de las líneas de transmisión son para transportar energía y para transmitir señales codificadas (como datos digitales), una carga acoplada garantiza que la potencia suministrada a la carga sea un máximo. La solución más simple para acoplar una carga a una línea de transmisión es diseñar un circuito de carga de manera que su impedancia $Z_0 = Z_L$. Por desgracia, esto no es posible en la práctica porque el circuito de carga tiene que satisfacer otros requerimientos. Una solución alternativa es colocar una **red acopladora de impedancia** entre la carga y la línea de transmisión o emplear una **red acopladora de una sola rama**. La red acopladora de una sola rama se muestra en la figura 2.12 y se compone de dos secciones de línea de transmisión, una de longitud d que conecta la carga a la línea de alimentación en

MM' y otra de longitud l conectada en paralelo con las otras dos líneas en MM' . Esta segunda línea se conoce como **rama** y en general termina en un cortocircuito o en un circuito abierto. La rama de la figura 2.12 termina en un corto circuito. Como en MM' la rama se agrega en paralelo a la línea (y, por lo tanto, se conoce como **rama en derivación**), es más fácil trabajar con admitancias que con impedancias. El procedimiento de acoplamiento consiste en dos pasos básicos. En el primero, la distancia d se selecciona como para transformar la admitancia de carga $Y_L = 1/Z_L$ en una admitancia de la forma $Y_d = Y_0 + jB$, cuando se ve hacia la carga en MM' . Luego, en el segundo paso, se selecciona la longitud l de la rama de manera que su admitancia de entrada Y_s en MM' sea igual a $-jB$. La suma en paralelo de las dos admitancias en MM' da Y_0 , la admitancia característica de la línea.

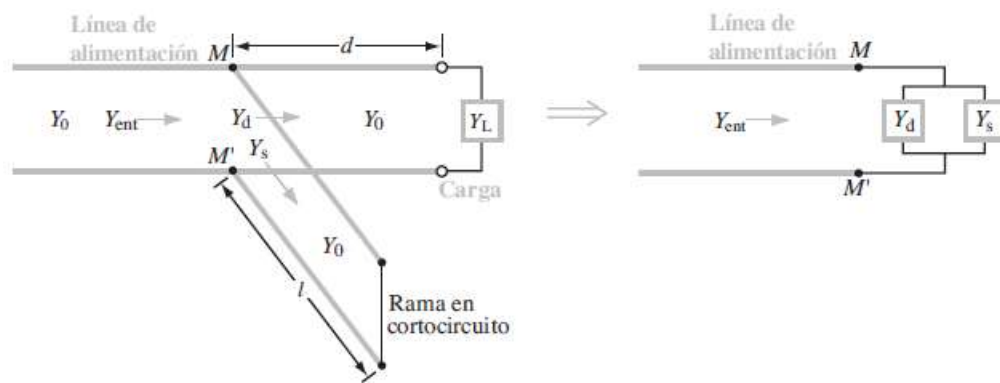


Figura 2.12: Red acopladora con una rama en cortocircuito.

EJEMPLO 6: Se conecta una línea de transmisión de 50Ω a una antena con impedancia de carga $Z_L = (25 - j50)\Omega$. Determine la posición y la longitud de la rama en cortocircuito requerida para igualar la línea.

La impedancia de carga normalizada es $z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{25 - j50}{50} = 0.5 - j1$, que está

localizada en el punto A en la carta de Smith de la figura 2.13. Se traza el círculo S constante a través del punto A. La carga normalizada y_L se encuentra en el punto B que se obtiene trazando una línea desde el punto A a través del centro hasta el punto imagen en el círculo S. El valor de y_L en B es $y_L = 0.4 + j0.8$ y está localizado en la posición 0.115λ en la escala WTG.

Para lograr el acoplamiento, hay que moverse una distancia d a partir de la carga hacia el generador de forma que la admitancia de entrada normalizada y_d de la línea terminada en la carga (figura 2.12) tenga una parte real igual a 1. Esta condición es

satisfecha por cualquiera de los puntos de acoplamiento C o D en las cartas de Smith de las figuras 2.13 y 2.14, respectivamente, correspondientes a las intersecciones del círculo S con el círculo $g_L = 1$. Los puntos C y D representan dos posibles soluciones para la distancia d en la figura 2.12.

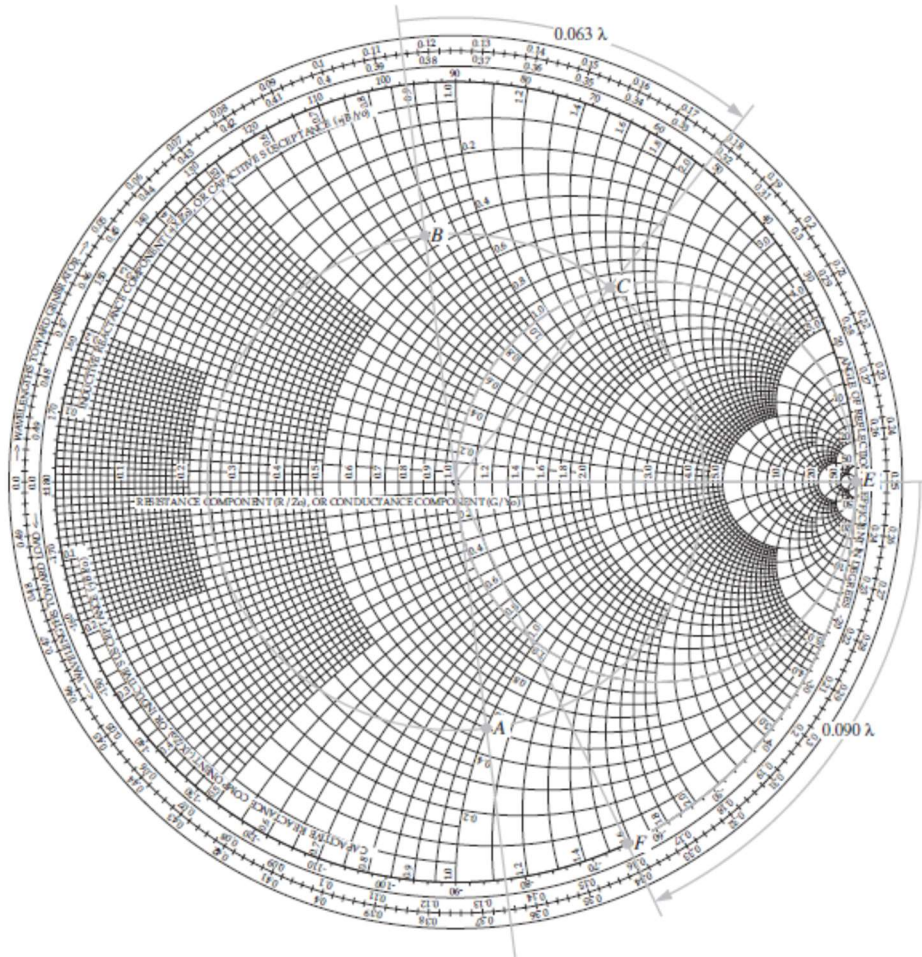


Figura 2.13: Solución para el punto C del ejemplo 6. El punto A es la carga normalizada con $z_L = 0.5 - j1$; el punto B es $y_L = 0.4 + j0.8$. El punto C es la intersección del círculo SWR con el círculo $g_L = 1$. La distancia de B a C es $d_1 = 0.063\lambda$

La longitud de la rama en cortocircuito (E a F) es $l_1 = 0.09\lambda$.

Solución para el punto C [figura 2.13]. En C, $y_d = 1 + j1.58$, y está localizado en 0.178λ en la escala WTG. La distancia entre los puntos B y C es

$$d_1 = (0.178 - 0.115)\lambda = 0.063\lambda.$$

Viendo desde el generador hacia la combinación en paralelo de la línea conectada la carga y la rama en cortocircuito, la admitancia de entrada normalizada en la unión es

$$y_{ent} = y_s + y_d,$$

donde y_s es la admitancia de entrada normalizada de la línea de la rama. Para igualar la línea de alimentación a las combinaciones en paralelo, se necesita que

$$y_{ent} = 1 + j0. \text{ Por lo tanto, } 1 + j0 = y_s + 1 + j1.58, \text{ o}$$

$$y_s = -j1.58.$$

La admitancia normalizada de un corto circuito es $-j\infty$ y está localizada en el punto E en la carta de Smith, cuya posición está en 0.25λ en la escala WTG. Una admitancia de entrada de $-j1.58$ se localiza en el punto F y está en la posición 0.34λ en la escala WTG. Por lo tanto,

$$l_1 = (0.34 - 0.25)\lambda = 0.09\lambda.$$

Solución para el punto D (figura 2.14) : En el punto D , $y_d = 1 - j1.58$, y la distancia entre los puntos B y D es

$$d_2 = (0.322 - 0.115)\lambda = 0.207\lambda.$$

La admitancia de entrada normalizada requerida de la rama es $y_s = +j1.58$, que se localiza en el punto G en la posición 0.16λ en la escala WTG. Girar desde el punto E hasta el punto G implica una rotación de 0.25λ más una rotación adicional de 0.16λ , o $l_2 = (0.25 + 0.16)\lambda = 0.41\lambda$.

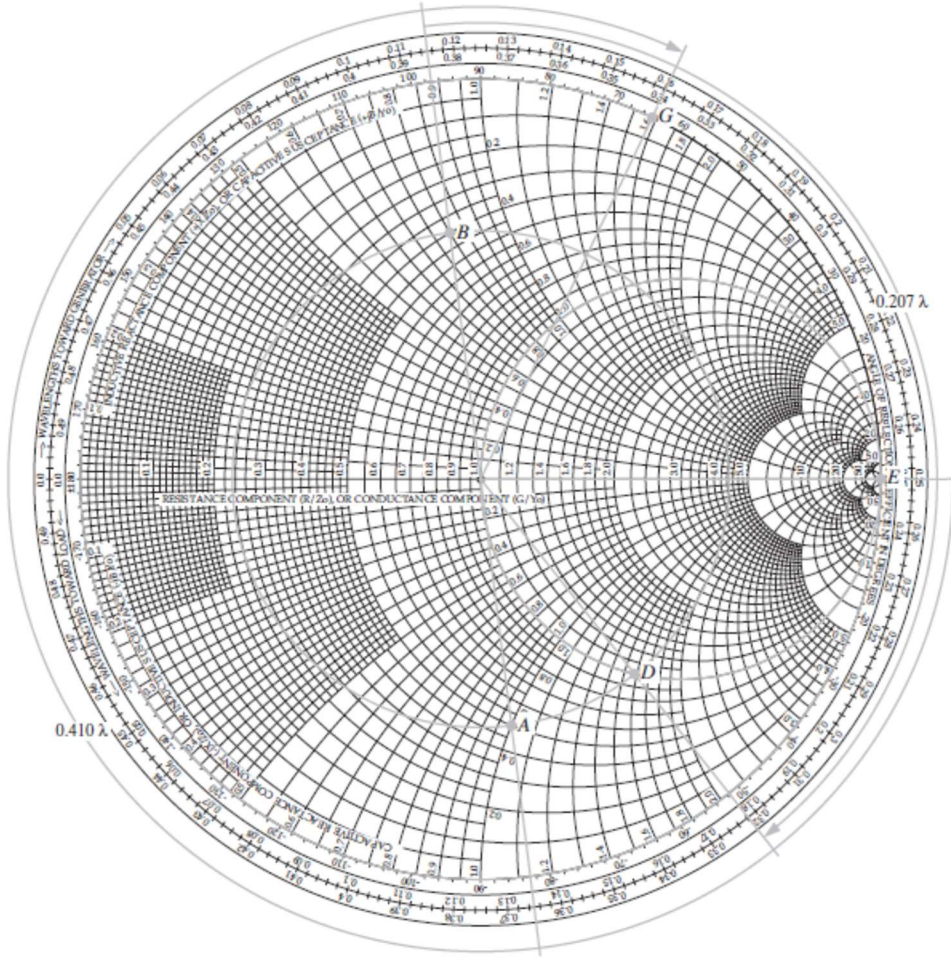


Figura 2.14: Solución para el punto D del Ejemplo 2.6. El punto D es el segundo punto de intersección del círculo SWR y el círculo $y_L = 1$. La distancia B a D da $d_2 = 0.207\lambda$ y la distancia de E a G da $l_2 = 0.410\lambda$.

2.5 Análisis y diseño con líneas de transmisión.

Línea en cortocircuito

La línea de transmisión mostrada en la figura 2.15(a) termina en un cortocircuito, $Z_L = 0$. Por consiguiente, el coeficiente de reflexión de voltaje definido por la ecuación $\Gamma = -1$, y la razón de onda estacionaria definida por $S = \infty$. Según las

ecuaciones $\tilde{V}(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}$ y $\tilde{I}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z}$, el voltaje y la corriente

en una línea de transmisión en cortocircuito sin pérdidas están dados por

$$\tilde{V}_{sc}(z) = V_0^+ [e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}] = -2jV_0^+ \sin \beta z, \quad \tilde{I}_{sc}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} [e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}] = 2 \frac{V_0^+}{Z_0} \cos \beta z.$$

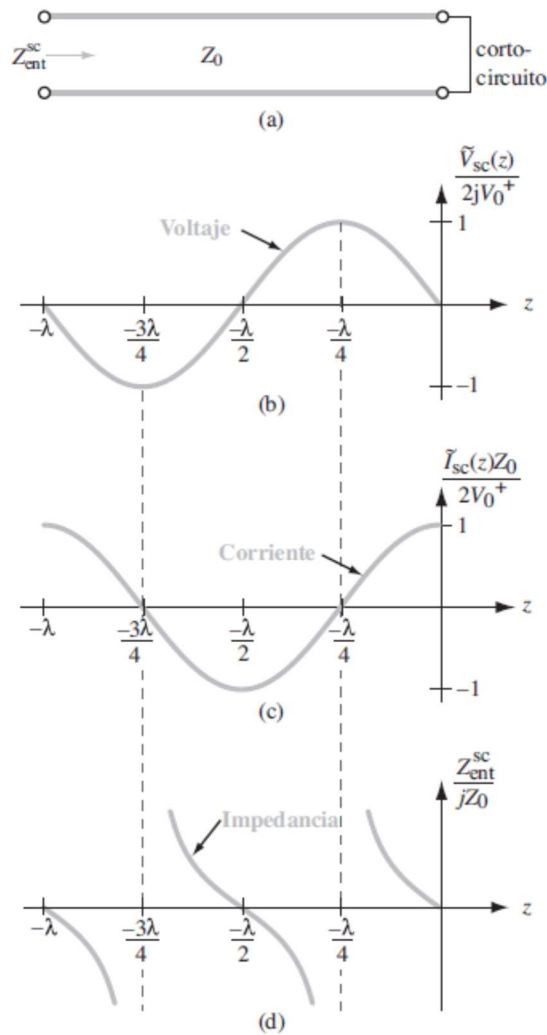


Figura 2.15: Línea de transmisión terminada en un cortocircuito: a) representación esquemática, b) voltaje normalizado en la línea, c) corriente normalizada y d) impedancia de entrada normalizada.

El voltaje $\tilde{V}_{sc}(z)$ es cero en la carga ($z=0$), como debe de ser con un cortocircuito, y su amplitud varía como $\sin \beta z$, en tanto que la corriente $\tilde{I}_{sc}(z)$ alcanza su valor máximo en la carga y varía como $\cos \beta z$. Ambas cantidades aparecen en la figura 2.15 como una función de z negativa.

La impedancia de entrada de la línea en $z=-l$ está definida por la razón entre $\tilde{V}_{sc}(-l)$ y $\tilde{I}_{sc}(-l)$. Denotando Z_{ent}^{sc} como la impedancia de entrada para la línea en

cortocircuito, se tiene $Z_{ent}^{sc} = \frac{\tilde{V}_{sc}(-l)}{\tilde{I}_{sc}(-l)} = jZ_0 \tan \beta l$. En general, la impedancia de entrada

$Z_{ent} = R_{ent} + jX_{ent}$. En el caso de la línea sin pérdidas en cortocircuito, la impedancia de entrada es puramente reactiva ($R_{ent} = 0$). Si $\tan \beta l \geq 0$, la línea parece inductiva ya que actúa como un inductor equivalente L_{eq} cuya impedancia es igual a Z_{ent}^{sc} . Por lo tanto,

$$j\omega L_{eq} = jZ_0 \tan \beta l, \quad \text{si } \tan \beta l \geq 0 \quad \text{o} \quad L_{eq} = \frac{Z_0 \tan \beta l}{\omega} \quad (H).$$

La longitud de línea mínima l que producirá una impedancia de entrada Z_{ent}^{sc}

equivalente a la de un inductor de inductancia L_{eq} es $l = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \left(\frac{\omega L_{eq}}{Z_0} \right) \quad (m)$.

También, si $\tan \beta l \leq 0$, la impedancia de entrada es capacitiva, en cuyo caso la línea actúa como un capacitor equivalente C_{eq} , de tal forma que

$$\frac{1}{j\omega C_{eq}} = jZ_0 \tan \beta l, \quad \text{si } \tan \beta l \leq 0, \quad \text{o} \quad C_{eq} = -\frac{1}{Z_0 \omega \tan \beta l} \quad (F).$$

Como l es un número positivo, la longitud más corta l con la cual $\tan \beta l \leq 0$, corresponde al intervalo $\pi/2 \leq \beta l \leq \pi$. Por consiguiente, la longitud de línea mínima l que produciría una impedancia de entrada Z_{ent}^{sc} equivalente a la de un capacitor de

capacitancia C_{eq} , es $l = \frac{1}{\beta} \left[\pi - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega C_{eq} Z_0} \right) \right] \quad (m)$.

Estos resultados indican que, con la selección apropiada de la longitud de una línea en cortocircuito, se pueden sustituir capacitores e inductores con cualquier reactancia deseada. En realidad, esta práctica es común en el diseño de circuitos de microondas y circuitos integrados de alta velocidad, porque fabricar un capacitor o inductor real con frecuencia es más difícil que poner una línea en cortocircuito.

EJEMPLO 7: Elija la longitud de una línea de transmisión sin pérdidas de 50Ω en cortocircuito de forma que su impedancia de entrada a $2.25GHz$ sea equivalente a la reactancia de un capacitor con capacitancia $C_{eq} = 4pF$. la velocidad de onda en la línea es de $0.75c$.

La constante de fase es $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{u_p} = \frac{2\pi \times 2.25 \times 10^9}{2.25 \times 10^8} = 62.8 \text{ (rad/m)}$

$$\tan \beta l = -\frac{1}{Z_0 \omega C_{eq}} = -\frac{1}{50 \times 2\pi \times 2.25 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-12}} = -0.354.$$

Sol. C2 $\beta l_1 = 2.8 \text{ rad} \text{ o } l_1 = \frac{2.8}{\beta} = \frac{2.8}{62.8} = 4.46 \text{ cm}.$

Sol. C4 $\beta l_2 = 5.94 \text{ rad} \text{ o } l_2 = \frac{5.94}{62.8} = 9.46 \text{ cm}.$

La longitud l_2 es más grande que l_1 exactamente por $l/2$. Cualquier longitud $l = 4.46 \text{ cm} + n\lambda/2$, donde n es un entero positivo, también es una solución.

Línea en circuito abierto

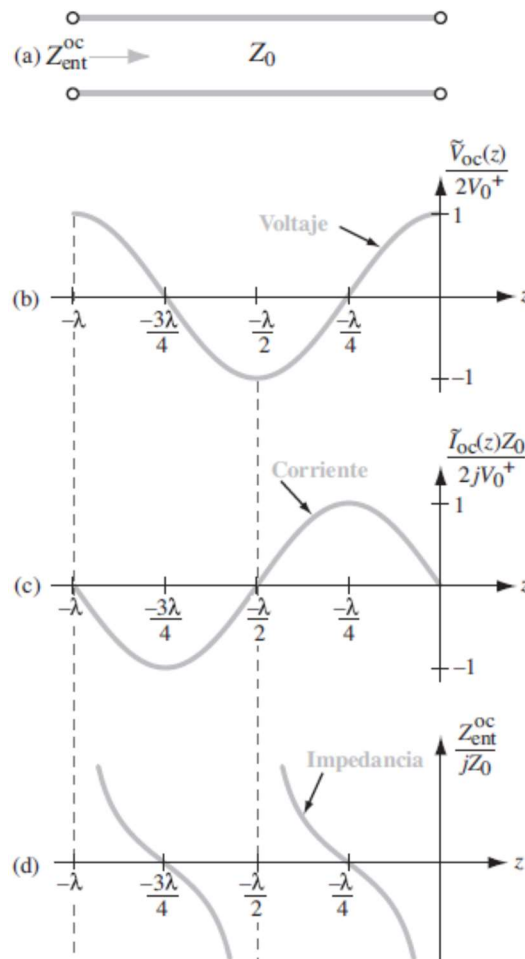


Figura 2.16: Línea de transmisión terminada en un circuito abierto: a) representación esquemática, b) voltaje normalizado en la línea, c) corriente normalizada y d) impedancia de entrada normalizada.

Con $Z_L = \infty$, como se ilustra en la figura 2.16, se tiene $\Gamma = 1$, $S = \infty$ y el voltaje, corriente e impedancia de entrada se definen mediante

$$\tilde{V}_{oc}(z) = V_0^+ [e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}] = 2V_0^+ \cos \beta z, \quad \tilde{I}_{oc}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} [e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}] = \frac{2jV_0^+}{Z_0} \sin \beta z,$$

$$\text{y } Z_{ent}^{oc} = \frac{\tilde{V}_{oc}(-l)}{\tilde{I}_{oc}(-l)} = -jZ_0 \cot \beta l.$$

Aplicación de mediciones en cortocircuito y circuito abierto. La combinación de las mediciones (la impedancia de entrada de una línea sin pérdidas terminada en un corto circuito y la impedancia de entrada de la línea cuando termina en circuito abierto) sirve para determinar la impedancia característica de la línea Z_0 y su constante de fase β .

$$Z_0 = \sqrt{Z_{ent}^{sc} Z_{ent}^{oc}} \quad \text{y} \quad \tan \beta l = \sqrt{\frac{-Z_{ent}^{sc}}{Z_{ent}^{oc}}}.$$

Como la ambigüedad de fase π asociada con la función tangente, la longitud l deberá ser menor que o igual a $\lambda/2$ para obtener un resultado no ambiguo.

Línea sin pérdidas de media y un cuarto longitud de onda

Si $l = n\lambda/2$, donde n es un entero, $\tan \beta l = \tan [(2\pi/\lambda)(n\lambda/2)] = \tan n\pi = 0$. Por lo tanto $Z_{ent} = Z_L$, con $l = n\lambda/2$, esto significa que una línea con media longitud de onda (o cualquier múltiplo entero de $\lambda/2$) no modifica la impedancia de carga. De aquí que, *un generador conectado a una carga mediante una línea sin pérdidas de media longitud de onda induciría el mismo voltaje a través de la carga y la corriente a través de ella como cuando la línea no está allí.*

Cuando la longitud de la línea es de un cuarto de la longitud de onda (o $\lambda/4 + n\lambda/2$), donde $n = 0$ o un entero positivo, correspondiente a $\beta l = (2\pi/\lambda)(\lambda/4) = \pi/2$. La

impedancia de entrada es $Z_{ent} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$, para $l = \lambda/4 + n\lambda/2$.

EJEMPLO 8: Se quiere igualar una línea de transmisión sin pérdidas de 50Ω a una impedancia de carga resistiva con $Z_L = 100\Omega$ mediante una sección de cuarto de onda como se muestra en la figura 2.17, con lo cual se eliminan las reflexiones a lo largo de la línea de alimentación. Determine la impedancia característica del transformador de cuarto de onda.

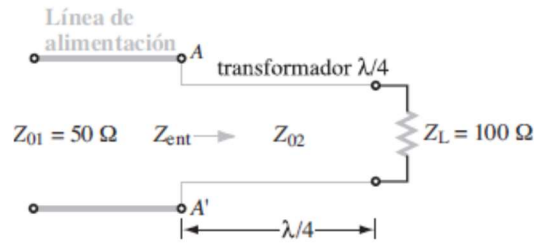


Figura 2.17: Configuración para el ejemplo 8.

Para eliminar las reflexiones en la terminal AA', la impedancia de entrada Z_{ent} viendo hacia la línea de cuarto de onda deberá ser igual a Z_{01} , la impedancia característica de la línea de alimentación. Entonces: $Z_{ent} = \frac{Z_{02}^2}{Z_L}$, y $Z_{02} = \sqrt{Z_{ent} Z_L} = \sqrt{50 \times 100} = 70.7 \Omega$.

Esto elimina las reflexiones en la línea de alimentación, no las elimina en la línea de $\lambda/4$. Sin embargo, como las líneas son sin pérdidas, toda la potencia incidente será transferida a la carga Z_L .

2.6 Ecuaciones de Maxwell aplicadas a líneas de transmisión. Líneas de transmisión de microcintas.

Según [3] p 524: Las líneas de microcinta pertenecen al grupo de líneas conocidas como líneas de transmisión de placas paralelas. Estas son muy empleadas en electrónica, son la manera más comúnmente empleada como línea de transmisión en circuitos de microondas, también son empleadas como componentes (filtros, resonadores, acopladores, antenas, etc.). En comparación con la línea coaxial, las microcintas permiten gran flexibilidad y diseños compactos. Una línea de microcinta está compuesta de un plano de tierra y un conductor separados por un sustrato dieléctrico como se muestra en la figura 2.18. Estas son construidas por los procesos fotográficos empleados para circuitos integrados. Debido a la estructura abierta de la línea de microcinta, el campo electromagnético no es confinado en el dieléctrico, éste está también en el aire, como se muestra en la figura 2.19. Para propósitos prácticos la línea de microcinta propagará una onda TEM. Su permitividad relativa efectiva ϵ_{eff} es menor que la permitividad relativa ϵ_r del sustrato. w es el ancho de la línea, y h el grosor del sustrato, la expresión para ϵ_{eff} está dada por:

$$\epsilon_{eff} = \frac{(\epsilon_r + 1)}{2} + \frac{(\epsilon_r - 1)}{2\sqrt{1 + 12h/w}}$$

La impedancia característica es:

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{h} \right), & w/h \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \frac{120\pi}{\left[w/h + 1.393 + 0.667 \ln(w/h + 1.444) \right]}, & w/h \geq 1 \end{cases}$$

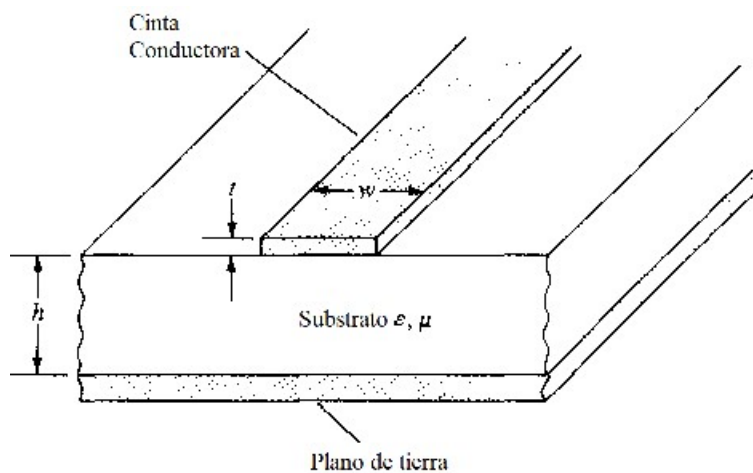


Figura 2.18: Línea de microcinta.

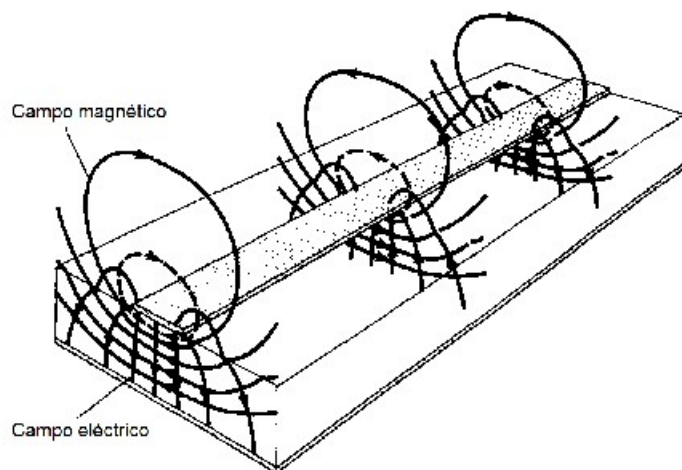


Figura 2.19: Distribución de los campos eléctrico y magnético en la línea de microcinta.

Para propósitos de diseño, si ϵ_r y Z_0 son conocidas, la relación w/h necesaria para tener Z_0 es dada por:

$$\frac{w}{h} = \begin{cases} \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} & w/h < 2 \\ \frac{2}{\pi} \left\{ B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left[\ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\epsilon_r} \right] \right\} & w/h > 2 \end{cases}$$

donde:

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r - 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(0.23 + \frac{0.11}{\epsilon_r} \right) \quad y \quad B = \frac{60\pi^2}{Z_0 \sqrt{\epsilon_r}}.$$

La constante de fase y la velocidad de fase de una onda propagándose por la microcinta está dada por:

$$\beta = \frac{\omega \epsilon_{eff}}{c} \quad y \quad u = \frac{c}{\epsilon_{eff}}$$

con c la velocidad de la luz en el vacío. La atenuación debido a las pérdidas por conducción (u Óhmicas) son (dB/m) $\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{wZ_0}$ donde $R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta}$ es la resistencia superficial del conductor. La atenuación debido a las pérdidas en el dieléctrico

$$(\text{dB/m}) \alpha_d \approx 27.3 \frac{(\epsilon_{eff} - 1) \epsilon_r \tan \theta}{(\epsilon_r - 1) \epsilon_{eff} \lambda} \quad \text{con } \lambda = u/f \text{ es la longitud de onda de la línea y}$$

$\tan \theta = \sigma/\omega\epsilon$ es la pérdida tangencial del substrato. La constante de atenuación total es entonces $\alpha = \alpha_c + \alpha_d$.

Las líneas de transmisión de microcintas no son útiles para largas transmisiones debido a la atenuación excesiva. Aunque la líneas de transmisión de microcinta sean flexibles y compactas.

EJEMPLO 9: Una línea de microcinta emplea cuarzo como substrato ($\epsilon_r = 3.8$). Si la razón ancho de la línea a grosor del substrato es $w/h = 4.5$, determine: a) la permitividad relativa efectiva del substrato, b) la impedancia característica de la línea, c) la longitud de onda de la línea a 10GHz.

$$a) \quad \epsilon_{eff} = \frac{(\epsilon_r + 1)}{2} + \frac{(\epsilon_r - 1)}{2\sqrt{1 + 12h/w}} = \frac{4.8}{2} + \frac{2.8}{2} \left[1 + \frac{12}{4.5} \right]^{1/2} = 3.131$$

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \frac{120\pi}{\left[w/h + 1.393 + 0.667 \ln(w/h + 1.444) \right]}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad &= \frac{120\pi}{\sqrt{3.131} \left[4.5 + 1.393 + 0.667 \ln(4.5 + 1.444) \right]} \\ &= 9.576 \Omega \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad \lambda = \frac{u}{f} = \frac{c}{f \sqrt{\epsilon_{eff}}} = \frac{3 \times 10^8}{10^{10} \sqrt{3.131}} = 1.69 \times 10^{-2} m = 16.9 mm$$

3. Guías de onda.

3.1. Ecuaciones y parámetros de las guías de onda rectangulares.

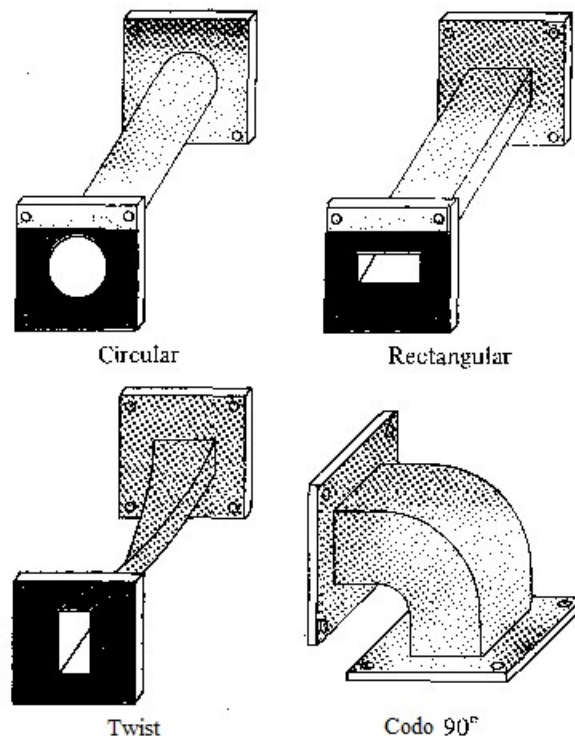


Figura 3.1 Guías de onda típicas (Mostradas por [3] p 543).

Según [1] p 349. Las líneas de transmisión (Tema 2) se dividieron en dos grupos: aquellas que soportan modos transversales electromagnéticos (TEM) y aquellas que no. Las integrantes del grupo TEM, que incluyen la línea coaxial, la línea de dos alambres y la línea de placas paralelas, entre otras, satisfacen el *requerimiento TEM* de que **E**, **H** y la dirección de propagación siempre son ortogonales entre sí. Para el otro grupo, que se conoce como **líneas de transmisión de alto orden**, ya sea **E** o **H** puede ser ortogonal a la dirección de propagación $\hat{k}$, pero no ambos al mismo tiempo. Así, *por lo menos un componente de E o H siempre apunta en la dirección de $\hat{k}$* . Si **E** es transversal a $\hat{k}$, entonces se conoce como modo **transversal eléctrico** (TE) y si **H** es transversal a $\hat{k}$, se conoce como modo **transversal magnético** (TM). Entre las líneas de transmisión de alto orden, las dos más comúnmente empleadas son la fibra óptica y la guía de onda metálica. Una onda óptica viaja a lo largo de la fibra en zigzag aprovechando la reflexión total interna en la frontera entre el núcleo (interno) y el revestimiento (externo). Otra forma de obtener reflexión interna en la frontera del núcleo es que la superficie esté hecha de un material conductor. En las condiciones apropiadas, una onda excitada en el interior

de un tubo conductor hueco, como las guías de onda circulares o rectangulares mostradas en las figuras 3.1 y 3.2, experimentará el mismo mecanismo que en la fibra óptica, y el resultado será una propagación exitosa a lo largo del tubo.

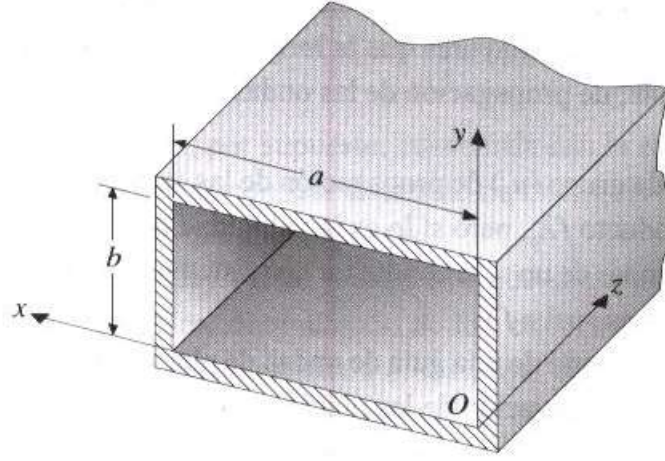


Figura 3.2: Sección de una guía de onda rectangular.

La mayoría de las aplicaciones de guía de ondas demandan guías llenas de aire, pero en algunos casos, la guía de onda puede estar rellena de un material dieléctrico para modificar su velocidad de propagación de onda, o bien, puede bombearse al vacío para eliminar las moléculas de aire e incrementar así su capacidad de manejo de potencia. Se elegirá el sistema de coordenadas que se ilustra en la figura 3.2, donde la dirección de propagación se definió a lo largo de $\hat{z}$.

La forma general para los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en el dominio fasorial:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \hat{x}\tilde{E}_x + \hat{y}\tilde{E}_y + \hat{z}\tilde{E}_z, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \hat{x}\tilde{H}_x + \hat{y}\tilde{H}_y + \hat{z}\tilde{H}_z.$$

En general, los seis componentes de $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ pueden depender de (x, y, z) y mientras aún no se conozca la forma funcional de su dependencia en (x, y) , la experiencia previa sugiere que $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ de una onda que viaja a lo largo de la dirección $+z$ deberá exhibir una dependencia en z de la forma $e^{-j\beta z}$, donde β es una **constante de propagación** de la onda en el interior de la guía. Por consiguiente, se adoptará la forma $\tilde{E}_x(x, y, z) = \tilde{e}_x(x, y)e^{-j\beta z}$ donde $\tilde{e}_x(x, y)$ describe la dependencia de $\tilde{E}_x(x, y, z)$ en (x, y) únicamente. Para todos los demás componentes de $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ se implica la forma de $\tilde{E}_x(x, y, z)$. Por lo tanto,

$$\tilde{\mathbf{E}} = (\hat{x}\tilde{e}_x + \hat{y}\tilde{e}_y + \hat{z}\tilde{e}_z)e^{-j\beta z}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = (\hat{x}\tilde{h}_x + \hat{y}\tilde{h}_y + \hat{z}\tilde{h}_z)e^{-j\beta z}.$$

La notación pretende distinguir entre $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ mayúsculas, que pueden variar con (x, y, z) y $\tilde{e}$ y $\tilde{h}$, que podrán variar con (x, y) únicamente. En un medio sin fuentes (el volumen interno de la guía de onda) caracterizado por la permitividad ϵ y la permeabilidad μ (y conductividad $\sigma = 0$), las ecuaciones del rotacional de Maxwell con $\mathbf{J} = 0$. $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}$, $\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}}$ que al aplicarlas al par de ecuaciones inmediato anterior nos lleva a

$$\tilde{E}_x = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} \right), \quad \tilde{E}_y = \frac{j}{k_c^2} \left(-\beta \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} \right),$$

$$\tilde{H}_x = \frac{j}{k_c^2} \left(\omega\epsilon \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} \right), \quad \tilde{H}_y = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega\epsilon \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} \right),$$

donde $k_c^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$ y k es el **número de onda de propagación sin frontera** definido como $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$. La constante k_c se llama **número de onda de corte**. Este grupo de 4 ecuaciones son las expresiones para las componentes x y y de $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ en función de sus componentes z .

3.2. Análisis de los Modos magnéticos transversales (MT).

Empleando el grupo de 4 ecuaciones del subtema anterior, los componentes x y y de $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ pueden ser determinados, mientras se conozcan las formas funcionales de $\tilde{E}_z$ y $\tilde{H}_z$. En el modo TE, $\tilde{E}_z = 0$, así que todo lo que se requiere conocer es $\tilde{H}_z$ y lo inverso es cierto en el caso TM. Ya contamos con expresiones para $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{H}_x$ y $\tilde{H}_y$ todas en función de $\tilde{E}_z$ y $\tilde{H}_z$. Como $\tilde{H}_z = 0$ en el modo TM, la tarea se reduce a obtener una solución para $\tilde{E}_z$. El punto de partida será la **ecuación de onda**

homogénea para $\tilde{\mathbf{E}}$. Para un medio sin pérdidas caracterizado por una constante de propagación sin frontera k , la ecuación de onda está determinada por la ecuación $\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + k^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0$ y para satisfacerla, cada uno de sus componentes $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$ tiene que satisfacerse de forma independiente. Su componente $\hat{z}$ se determina por medio de:

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \tilde{E}_z = 0, \text{ y empleando su forma funcional}$$

$$\tilde{E}_z(x, y, z) = \tilde{e}_z(x, y) e^{-j\beta z}, \text{ la reducimos a } \frac{\partial^2 \tilde{e}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{e}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \tilde{e}_z = 0 \text{ puesto que } \tilde{e}_z(x, y)$$

puede ser descompuesta en un par de funciones separables, obtendremos

$\tilde{e}_z(x, y) = X(x)Y(y)$. En consecuencia llegaremos a: $\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0$, $\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0$,

con k_x y k_y las constantes de separación y $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$. Para proponer soluciones a estas ecuaciones diferenciales es necesario considerar que: El campo eléctrico $\tilde{E}_z$ es paralelo a las cuatro paredes de la guía de onda. Como $\mathbf{E} = 0$ en las paredes conductoras, las condiciones de frontera requieren que $\tilde{E}_z$ en la cavidad de la guía de onda tienda a cero conforme x se aproxime a 0 y a , y conforme y tienda 0 y b . Para satisfacer estas condiciones de frontera, se eligen soluciones sinusoidales para

$$X(x)Y(y) \text{ como sigue: } \tilde{e}_z = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y)$$

$$\tilde{e}_z = 0 \text{ con } x = 0 \text{ y } a,$$

$$\tilde{e}_z = 0 \text{ con } y = 0 \text{ y } b.$$

La satisfacción de $\tilde{e}_z = 0$ en $x = a$ y $y = b$ requiere: $k_x = \frac{m\pi}{a}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ y

$k_y = \frac{n\pi}{b}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ respectivamente. Por lo que

$$\tilde{E}_z = \tilde{e}_z e^{-j\beta z} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z} \text{ donde } E_0 = BD \text{ es una amplitud}$$

relacionada con la intensidad de la onda en la guía.

Teniendo en cuenta que $\tilde{E}_z = 0$ en el modo TM, los componentes transversales de $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ pueden ser obtenidos aplicando el grupo de 4 ecuaciones del subtema anterior.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \\ \tilde{E}_y &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \\ \tilde{H}_x &= \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \\ \tilde{H}_y &= \frac{-j\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}. \end{aligned}$$

Cada combinación de los enteros m y n representa una solución viable, o un modo, denotado TM_{mn} . Las distribuciones de campo específicas para la región en el interior de la guía están asociadas con cada modo mn . La figura 3.3 ilustra las líneas de campo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en el modo TM_{11} a través de dos secciones transversales diferentes de la guía.

Una expresión para β es: $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$. (TE y TM)

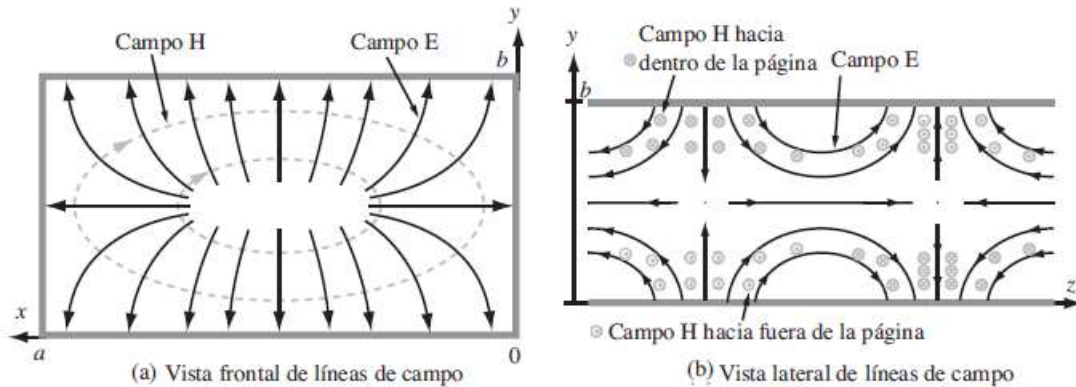


Figura 3.3: Líneas de campo eléctrico y magnético en modo TM₁₁ a través de dos planos de sección transversal.

El exponencial $e^{-j\beta z}$ describe una onda que viaja en la dirección $+z$, pero solo si β es real, lo que corresponde a $k > k_c$. Si $k < k_c$, β se vuelve imaginaria: $\beta = -j\alpha$ con α real, en cuyo caso $e^{-j\beta z} = e^{-\alpha z}$. Tal condición representa una onda evanescente, caracterizada por una amplitud que decae rápidamente con z a causa de la función de atenuación $e^{-\alpha z}$. Correspondiente a cada modo, especificada por valores enteros de m y n , existe una **frecuencia de corte** f_{mn} a la cual $\beta = 0$.

Con $\beta = 0$, se tiene $f_{mn} = \frac{u_p}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$, (TE y TM) donde $u_{p_0} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ es la velocidad de fase de una onda TEM en un medio sin fronteras con parámetros constitutivos μ y ϵ .

Una onda, en un modo dado, puede propagarse a través de la guía solo si su frecuencia $f > f_{mn}$. El modo con la frecuencia de corte más baja se conoce como el **modo dominante**. El modo dominante es TM₁₁ entre los modos TM, y TE₁₀ entre los modos TE. Mientras que en los modos TE se permite un valor de cero para m o n , en los modos TM no (porque si m o n es cero, $\tilde{E}_z$ llega a ser cero y todos los demás componentes de campo también se desvanecerán).

β se expresa en función de f_{mn} cómo: $\beta = \frac{\omega}{u_p} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{mn}}{f}\right)^2}$ (TE y TM). La velocidad

de fase de una onda TE o TM en una guía de onda se determina de la siguiente

manera: $u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{u_{p0}}{\sqrt{1 - (f_{mn}/f)^2}}$ (TE y TM).

El campo eléctrico transversal está integrado por componentes $\tilde{E}_x$ y $\tilde{E}_y$, de acuerdo con las ecuaciones en recuadro. Para una onda que viaja en la dirección $+z$, el campo asociado con $\tilde{E}_x$ es $\tilde{H}_y$ y (según la regla de la mano derecha), y asimismo, el campo magnético asociado con $\tilde{E}_y$ es $-\tilde{H}_x$. Las razones obtenidas con las ecuaciones (del recuadro) constituyen la impedancia de onda en la guía,

$$Z_{TM} = \frac{\tilde{E}_x}{\tilde{H}_y} = -\frac{\tilde{E}_y}{\tilde{H}_x} = \frac{\beta\eta}{k} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{mn}}{f}\right)^2} \text{ donde } \eta = \sqrt{\mu/\epsilon} \text{ es la impedancia intrínseca}$$

del material dieléctrico que llena la guía.

EJEMPLO1: Una onda TM, que se propaga en una guía de onda llena de un dieléctrico con permitividad desconocida, tiene un componente de campo magnético que se define como $H_y = 6 \cos(25\pi x) \sin(100\pi y) \sin(1.5\pi \times 10^{10} t - 109\pi z)$ (mA/m). Si las dimensiones de la guía son $a = 2b = 4$ cm, determine: a) el número de modo, b) la permitividad relativa del material en la guía, c) la velocidad de fase y d) la expresión para E_x .

- a) Por comparación con la expresión para $\tilde{H}_y$ de la ecuación en el recuadro, se deduce que el argumento de x es $(m\pi/a)$ y que el argumento de y es $(n\pi/b)$.

Por lo tanto $25\pi = \frac{m\pi}{4 \times 10^{-2}}$ y $100\pi = \frac{n\pi}{2 \times 10^{-2}}$ las cuales dan $m = 1$ y $n = 2$. Por lo tanto el modo es TM_{12} .

- b) La segunda función seno en la expresión para H_y , representa $\sin(\omega t - \beta z)$, lo que significa que $\omega = 1.5\pi \times 10^{10}$ (rad/s) o $f = 7.5$ GHz, $\beta = 109\pi$ (rad/m). Se reformula la última ecuación para β con la finalidad de obtener una expresión para $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ en función de las otras cantidades, y se tiene

$$\varepsilon_r = \frac{c^2}{\omega^2} \left[\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \text{ donde } c \text{ es la velocidad de la luz. Así}$$

$$\varepsilon_r = \frac{(3 \times 10^8)^2}{(1.5 \times 10^{10})^2} \left[(109\pi)^2 + \left(\frac{\pi}{4 \times 10^{-2}} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{2 \times 10^{-2}} \right)^2 \right] = 9.$$

- c) $u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1.5\pi \times 10^{10}}{109\pi} = 1.38 \times 10^9 \text{ m/s}$ ¡que es más rápida que la velocidad de la luz! La velocidad de fase en una guía de onda si puede ser mayor que c , pero la velocidad con la cual la energía es transportada por la guía es la velocidad de grupo u_g , nunca es mayor que c .

d) Aplicando $Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{mn}}{f} \right)^2}$ con $f_{12} = f_{mn} = \frac{u_{p0}}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2} = 5.15 \text{ GHz}$,

$$f = 7.5 \text{ GHz} \text{ y con } \eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}/\varepsilon_r = 377/\sqrt{9} = 125.67 \Omega \text{ se tiene que}$$

$$Z_{TM} = 91.3 \Omega \text{ por lo que}$$

$$E_x = Z_{TM} H_y$$

$$= 91.3 \times 6 \cos(25\pi x) \sin(100\pi y) \times \sin(1.5\pi \times 10^{10} t - 109\pi z) (mV/m)$$

$$= 0.55 \cos(25\pi x) \sin(100\pi y) \times \sin(1.5\pi \times 10^{10} t - 109\pi z) (V/m).$$

3.3. Análisis de los Modos eléctricos transversales (ET).

En el caso TM, en el cual la onda no tiene componente de campo magnético a lo largo de la dirección z ($\tilde{H}_z = 0$), el tratamiento se inició obteniendo una solución para $\tilde{E}_z$ y luego se le utilizó para deducir expresiones para los componentes tangenciales de $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$. El caso TE sigue el mismo procedimiento básico, con excepción de la inversión de los roles de $\tilde{E}_z$ y $\tilde{H}_z$. Tal proceso conduce al conjunto de 5 ecuaciones en recuadro doble de la página siguiente y de estas ecuaciones resaltamos el hecho $\tilde{E}_z = 0$. Las expresiones para f_{mn} , β y u_p , no cambian. Sin embargo, como no todos los campos se desvanecen si m o n adoptan un valor de cero, el modo TE de menor grado es TE_{10} si $a > b$ o TE_{01} si $a < b$. Se acostumbra asignar a a la dimensión más larga, en cuyo caso el modo TE_{01} siempre es el modo dominante. Otra diferencia entre los modos TE y TM está asociado con la expresión para la impedancia de onda. Para TE

$$Z_{TE} = \frac{\tilde{E}_x}{\tilde{H}_y} = -\frac{\tilde{E}_y}{\tilde{H}_x} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (f_{mn}/f)^2}}.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_x &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \\
\tilde{E}_y &= \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \\
\tilde{H}_x &= \frac{j\beta}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \\
\tilde{H}_y &= \frac{j\beta}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \\
\tilde{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z},
\end{aligned}$$

Tabla 3.1: Propiedades de onda para modos TE y TM en una guía de onda rectangular con dimensiones $a \times b$, rellena con un material dieléctrico con parámetros constitutivos ϵ y μ . El caso TEM, mostrado como referencia, corresponde a la propagación de ondas planas en un medio sin fronteras.

Guías de onda rectangulares		Onda plana
Modos TE	Modos TM	Modo TEM
$\tilde{E}_x = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ $\tilde{E}_y = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ $\tilde{E}_z = 0$ $\tilde{H}_x = -Z_{TE} \tilde{E}_y$ $\tilde{H}_y = Z_{TE} \tilde{E}_x$ $\tilde{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ $Z_{TE} = \eta / \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$	$\tilde{E}_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ $\tilde{E}_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ $\tilde{E}_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ $\tilde{H}_x = -Z_{TM} \tilde{E}_y$ $\tilde{H}_y = Z_{TM} \tilde{E}_x$ $\tilde{H}_z = 0$ $Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$	$\tilde{E}_x = E_{x0} e^{-j\beta z}$ $\tilde{E}_y = E_{y0} e^{-j\beta z}$ $\tilde{E}_z = 0$ $\tilde{H}_x = -\eta \tilde{E}_y$ $\tilde{H}_y = \eta \tilde{E}_x$ $\tilde{H}_z = 0$ $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$
<i>Propiedades comunes a los modos TE y TM</i> $f_c = \frac{u_{p0}}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$ $\beta = k \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$ $u_p = \frac{\omega}{\beta} = u_{p0} / \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$		$f_c = \text{no aplicable}$ $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ $u_{p0} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

3.4. Propagación de las ondas en la guía de onda.

Como lo expone [1] p 358: Cuando se emplea una onda como portadora para transmitir información a través de un cierto medio o lo largo de una línea de transmisión, el mensaje de interés se codifica en la amplitud, frecuencia o fase de la onda. Un ejemplo simple se muestra en la figura 3.4, donde una onda sinusoidal de alta frecuencia f es modulada en amplitud por un pulso de forma gaussiana.

Mediante un análisis de Fourier, la formade onda en la figura b) equivale a la superposición de un grupo de ondas sinusoidales con amplitudes y frecuencias específicas. La equivalencia exacta puede requerir un número grande o infinito de componentes de frecuencia, pero en la práctica, casi siempre es posible representarla forma de onda modulada, con un alto grado de fidelidad con un grupo

de ondas que se extienden a lo largo de un ancho de banda relativamente angosto que rodea la portadora de alta frecuencia f . La velocidad con la que la envolvente — o, de forma equivalente, el grupo de ondas—viaja a través del medio se llama **velocidad de grupo** u_g . Como tal, u_g es la velocidad de la energía transportada por el grupo de ondas y la información codificada presente en él.

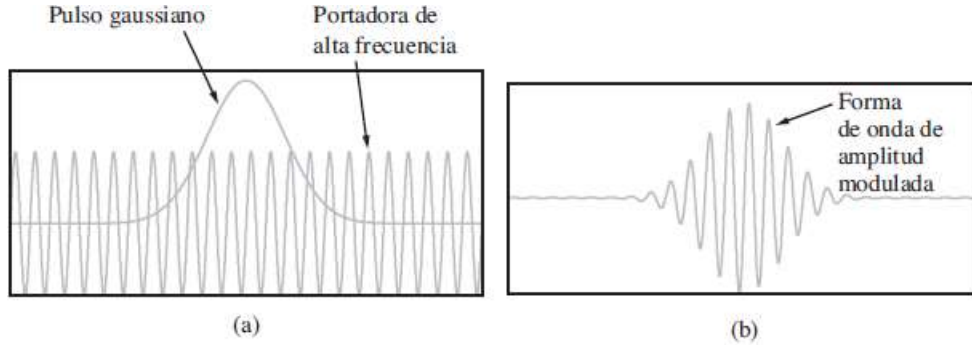


Figura 3.4 : La forma de onda de alta frecuencia de amplitud modulada en *b*) es el producto del pulso gaussiano por la portadora de alta frecuencia sinusoidal en *a*).

Dependiendo de si el medio de propagación es dispersor o no, u_g puede no ser igual a la velocidad de fase u_p . Se describió una “línea de transmisión dispersiva como una en la que la velocidad de fase no es una función constante de frecuencia”; la consecuencia de ello es que la forma de un pulso transmitido a través de ella se distorsionará progresivamente conforme avanza por la línea. Los medios que soportan ondas TEM no son dispersivos.

Una guía de onda rectangular no califica como línea de transmisión dispersiva porque la velocidad de fase de un modo TE o TM que se propaga a través de ella es una fuerte función de frecuencia, particularmente a frecuencias próximas a la de corte f_{mn} . Si $f \gg f_{mn}$, los modos TE y TM se vuelven aproximadamente de carácter TEM, no sólo en función de la disposición direccional de los campos eléctrico y magnético, sino también en función de la dependencia en la frecuencia de la velocidad de fase. La velocidad de fase, definida como la velocidad del patrón sinusoidal de la onda, se

determina mediante $u_p = \frac{\omega}{\beta}$ y la velocidad de grupo u_g es

$$u_g = \frac{1}{d\beta/d\omega} = u_{p_0} \sqrt{1 - (f_{mn}/f)^2} \quad \text{donde, como antes, } u_{p_0} \text{ es la velocidad de fase en un}$$

medio dieléctrico sin fronteras y para la velocidad de fase u_p , $u_p u_g = u_{p_0}^2$.

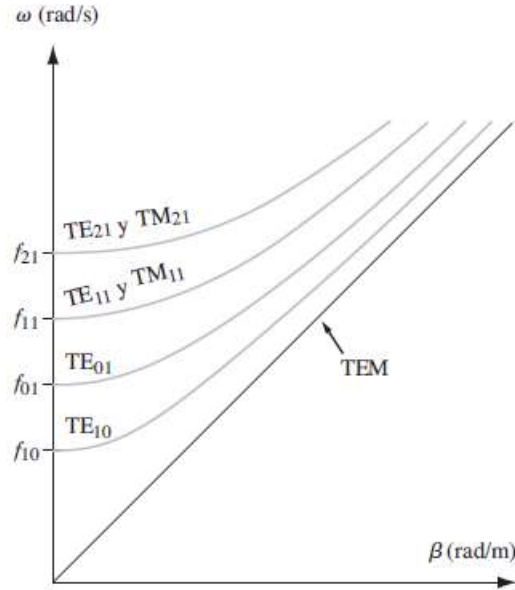


Figura 3.5 : Diagrama w - b para modos TE y TM en una guía de onda rectangular hueca. La línea recta corresponde a la propagación en un medio sin fronteras o por una línea de transmisión TEM.

Por encima del corte ($f > f_{mn}$), $u_p \geq u_{p_0}$ y $u_g \leq u_{p_0}$. Conforme $f \rightarrow \infty$, o más precisamente, conforme $(f_{mn}/f) \rightarrow 0$, los modos TE y TM se aproximan al caso TEM, en el cual $u_p = u_g = u_{p_0}$. Una herramienta gráfica útil para describir las propiedades de propagación de un medio línea de transmisión es el diagrama $\omega - \beta$. En la figura 3.5, la línea recta que parte del origen representa la relación $\omega - \beta$ para una onda TEM que se propaga en un medio sin fronteras (o por una línea de transmisión TEM). La línea TEM da una referencia con la cual las curvas $\omega - \beta$ de los modos TE/TM pueden compararse. En un lugar dado sobre la línea o curva $\omega - \beta$, la razón del valor de ω con el de β define $u_p = \omega/\beta$, mientras que la pendiente $d\omega/d\beta$ de la curva en ese punto define la velocidad de grupo u_g . Para la línea TEM, la razón y la pendiente tienen valores idénticos (por lo tanto, $u_p = u_g$) y la línea se inicia en $\omega = 0$. En contraste, la curva de cada uno de los modos TE/TM indicados se inicia en una frecuencia de corte propia de ese modo, por debajo de la cual la guía de onda no puede soportar la propagación de una onda en ese modo. A frecuencias próximas a la de corte, u_p y u_g adoptan valores muy diferentes; de hecho, en el corte $u_p = \infty$ y $u_g = 0$. En el otro extremo del espectro de frecuencia, a frecuencias mucho más altas que f_{mn} , las curvas $\omega - \beta$ de los modos TE/TM se aproximan a la línea TEM.

Es de hacerse notar que en los modos TE y TM, es fácil que u_p exceda la velocidad de la luz, pero u_g no lo hará, y puesto que u_g es la que representa el transporte real de energía, no se viola la afirmación de Einstein. Considere el caso relativamente simple del modo TE_{10} . Con $m=1$ y $n=0$, el único componente no cero del campo eléctrico de las ecuaciones en doble recuadro es $\tilde{E}_y$.

$$\tilde{E}_y = -j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a} \right) H_0 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{-j\beta z} \text{ que empleando la identidad del seno}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_y &= \left(\frac{\omega \mu \pi H_0}{2k_c^2 a} \right) (e^{-j\pi x/a} - e^{j\pi x/a}) e^{-j\beta z} \\ &= E_0' (e^{-j\beta(z+\pi x/\beta a)} - e^{-j\beta(z-\pi x/\beta a)}) \\ &= E_0' (e^{-j\beta z'} - e^{-j\beta z''}), \end{aligned}$$

donde se agruparon términos constantes en la constante E_0' . El primer término exponencial representa una onda con constante de propagación β que viaja en la dirección z' , donde $z' = z + \frac{\pi x}{\beta a}$ y el segundo término representa una onda que viaja en la dirección z'' con $z'' = z - \frac{\pi x}{\beta a}$.

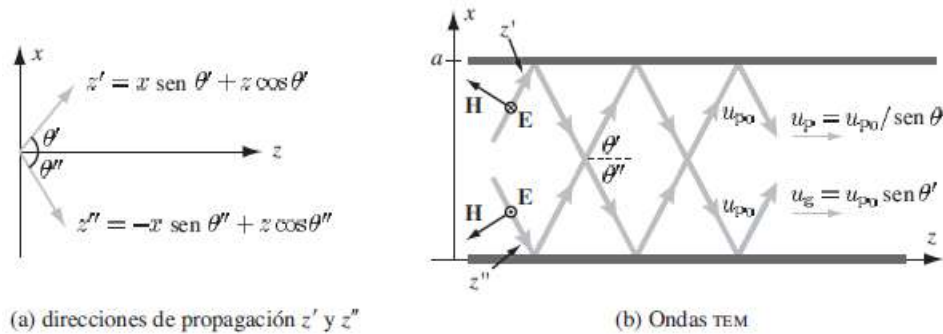


Figura 3.6 : El modo TE_{10} puede construirse como la suma de dos ondas TEM.

En la figura 3.6 (a), se observa que la dirección z' forma un ángulo θ' con respecto a z , y que la dirección z'' forma un ángulo $\theta'' = -\theta'$. Esto significa que el campo eléctrico $\tilde{E}_y$ (y su campo magnético asociado $\tilde{H}$) del modo TE_{10} se compone de dos ondas TEM, como lo muestra la figura 3.6 (b), que viajan en la dirección $+z$ zigzagueando entre las paredes opuestas de la guía de onda. A lo largo de la direcciones en zigzag (z' y z''), la velocidad de fase de los componentes de onda

individuales es u_{p_0} , pero la velocidad de fase de la combinación de las dos ondas a lo largo de z es u_p . Tome en cuenta que $\theta' = \tan^{-1}(\pi/\beta a)$. y $\theta'' = -\tan^{-1}(\pi/\beta a)$.

3.5. Transmisión de potencia y atenuación.

Para cualquier onda con campo eléctrico $\mathbf{E}$ y campo magnético $\mathbf{H}$, **el vector de Poynting** $\mathbf{S}$ se define como $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (W/m^2).

La dirección de $\mathbf{S}$ es a lo largo de la dirección de propagación de la onda, $\mathbf{k}$. Por lo tanto, $\mathbf{S}$ representa la potencia por unidad de área (densidad de potencia) que transporta la onda, y si ésta incide en una abertura de área A con vector unitario superficial dirigido hacia fuera $\hat{\mathbf{n}}$, entonces la potencia total que fluye a través de la abertura o que es interceptada por ella es $P = \int_A \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ (W).

Para un onda plana uniforme que se propaga en una dirección $\hat{\mathbf{k}}$, que forma un ángulo θ con $\hat{\mathbf{n}}$, $P = SA \cos \theta$, donde $S = |\mathbf{S}|$.

Como $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son funciones de tiempo, también lo es el vector de Poynting $\mathbf{S}$. Sin embargo, en la práctica, la cantidad de mayor interés es la **densidad de potencia promedio** de la onda $\mathbf{S}_{prom}$, que es el valor promedio con respecto al tiempo de $\mathbf{S}$.

$\mathbf{S}_{prom}$ es determinada por $\mathbf{S}_{prom} = \frac{1}{2} \Re [\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*]$ (W/m^2).

Una onda incidente y una onda reflejada se encuentran en un medio (medio1), que juntas producen los campos eléctrico y magnético $\tilde{\mathbf{E}}_1(z)$ y $\tilde{\mathbf{H}}_1(z)$, la densidad de potencia promedio neta que fluye en el medio 1 es

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{prom} &= \frac{1}{2} \Re [\tilde{\mathbf{E}}_1(z) \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*(z)] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[\hat{\mathbf{x}} E_0^i (e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}) \times \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0^{i*}}{\eta_1} (e^{jk_1 z} - \Gamma^* e^{-jk_1 z}) \right] \\ &= \hat{\mathbf{z}} \frac{|E_0^i|^2}{2\eta_1} (1 - |\Gamma|^2), \end{aligned}$$

El primer término de la ecuación representa la densidad de potencia promedio de la onda incidente y el segundo término (proporcional a $|\Gamma|^2$) representa la densidad de

potencia promedio de la onda reflejada. Por lo tanto, $\mathbf{S}_{prom_1} = \mathbf{S}_{prom}^i + \mathbf{S}_{prom}^r$, con

$$\mathbf{S}_{prom}^i = \hat{\mathbf{z}} \frac{|E_0^i|^2}{2\eta_1}, \quad \mathbf{S}_{prom}^r = -\hat{\mathbf{z}} |\Gamma|^2 \frac{|E_0^i|^2}{2\eta_1} = -|\Gamma|^2 \mathbf{S}_{prom}^i.$$

Aunque Γ es puramente real cuando ambos medios son dieléctricos sin pérdidas, se elige considerarlo como complejo, con lo cual la penúltima ecuación brinda una expresión que también es válida cuando el medio 2 es conductor. Para un medio sin pérdidas $\mathbf{S}_{prom_1} = \mathbf{S}_{prom_2}$. Este resultado es el esperado con base en consideraciones de conservación de potencia.

Según [3] p 570: Sabemos que $\mathbf{S}_{prom} = \frac{1}{2} \Re[\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}]$ y que $P_{prom} = \int_A \mathbf{S}_{prom} dA$ (W). En el caso actual, la onda TE o TM se desplaza en la guía de onda en dirección de $+z$, por

$$\text{lo cual } \mathbf{S}_{prom} = \frac{1}{2} \Re[E_x H_y^* - E_y H_x^*] \hat{\mathbf{z}} = \frac{|E_x|^2 + |E_y|^2}{2\eta} \hat{\mathbf{z}} \text{ con } \eta = \eta_{TE} \text{ o } \eta = \eta_{TM}.$$

La potencia total promedio transmitida a través de la sección transversal de la guía de

$$\text{onda es } P_{prom} = \int_s \mathbf{S}_{prom} ds = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \frac{|E_x|^2 + |E_y|^2}{2\eta} dy dx. \text{ De importancia práctica es la}$$

atenuación en una guía de ondas con pérdidas ($\sigma = 0, \sigma_c \approx \infty, \alpha = 0, \gamma = j\beta$). Cuando el medio dieléctrico es con pérdidas y las paredes de la guía no son perfectamente conductoras, existe una continua pérdida de potencia sea conservando la razón de decaimiento en P_{prom} debe ser igual al promedio temporal de pérdida de potencia P_L

$$\text{por unidad de longitud. } P_L = -\frac{dP_{prom}}{dz} = 2\alpha P_{prom} \text{ o } \alpha = \frac{P_L}{2P_{prom}}.$$

En general $\alpha = \alpha_c + \alpha_d$ donde α_c y α_d son las constantes de atenuación debido a pérdidas óhmicas o de conducción y a las pérdidas en el dieléctrico,

respectivamente. $R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta}$ es la resistencia superficial de la pared conductora. δ es

la profundidad de la superficie.

3.6. Resonadores y filtros en las guías de onda.

Según [1] p 363: Una guía de onda rectangular tiene paredes de metal en sus cuatro lados. Cuando los dos lados restantes se terminan con paredes conductoras, la guía de onda se transforma en una cavidad. Si las cavidades se diseñan para que *resuenen* a frecuencias específicas, pueden utilizarse como elementos de circuito en

osciladores de microondas, amplificadores y filtros pasabandas. La cavidad rectangular que se ilustra en la figura 3.7 (a) con dimensiones $(a \times b \times c)$, está conectada a dos cables coaxiales, una con un sensor de entrada y el otro con un sensor de salida.

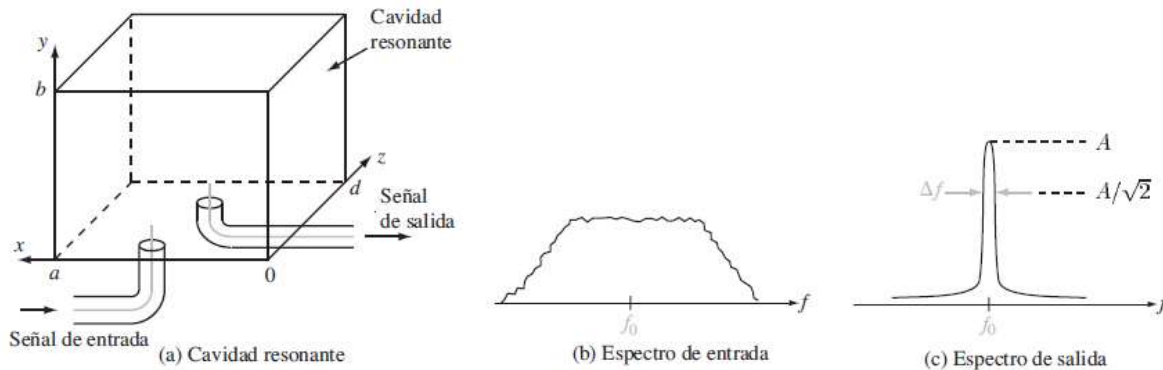


Figura 3.7 : Una cavidad resonante soporta un ancho de banda muy angosto alrededor de su frecuencia resonante, f_0 .

Como filtro pasabandas, la función de una cavidad resonante es filtrar todos los componentes de frecuencia contenidos en la señal de entrada excepto aquellos cuyas frecuencias quedan comprendidas dentro de una banda angosta alrededor de una frecuencia central específica f_0 . La cavidad está diseñada de manera que su frecuencia resonante sea f_0 . La comparación del espectro de la figura 3.7 (b), que describe el intervalo de frecuencias que podrían estar contenidas en una señal de entrada típica, con el espectro de salida angosto mostrado en la figura 3.7 (c) demuestra la acción filtrante impartida por la cavidad.

En una guía de onda rectangular, los campos constituyen ondas estacionarias a lo largo de las direcciones x y y , y una onda que se propaga a lo largo de $\hat{z}$. Los términos TE y TM se definieron respecto a la dirección de propagación; TE significa que $\mathbf{E}$ es totalmente transversal a z . En una cavidad, no hay una dirección de propagación única, porque *no* hay propagación. En lugar de ello, existen ondas estacionarias a lo largo de las tres direcciones. Por consiguiente, los términos TE y TM tienen que modificarse definiendo los campos con respecto a uno de los tres ejes rectangulares.

Por consistencia, se continuará definiendo la *dirección transversal* como cualquier dirección contenida en el plano cuya normal es $\hat{z}$. El modo TE en la guía de onda rectangular consta de una sola onda que se propaga cuyo componente $\tilde{H}_z$ se

encuentra con la ecuación $\tilde{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ donde el factor de fase

$e^{-j\beta z}$ significa que la dirección de propagación es a lo largo de $+\hat{z}$. Como la cavidad tiene paredes conductoras tanto en $z = 0$ como en $z = d$, contendrá dos ondas, una con amplitud H_0 que se mueve a lo largo $+\hat{z}$, y otra con amplitud que se mueve a lo

largo de H_0^- . De esta forma, $\tilde{H}_z = (H_0 e^{-j\beta z} + H_0^- e^{j\beta z}) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$. Las

condiciones de frontera requieren que el componente normal de $\tilde{\mathbf{H}}$ sea cero en la frontera conductora. Por consiguiente, $\tilde{H}_z$ debe ser cero en $z = 0$ y $z = d$. Para

satisfacer estas condiciones, es necesario que $H_0^- = -H_0$ y $\beta d = p\pi$, con

$p = 1, 2, 3, \dots$, en cuyo caso la ecuación se escribe

$\tilde{H}_z = -2jH_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)$. Dado que $\tilde{E}_z = 0$ para los modos TE,

todos los demás componentes de $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ son fáciles de determinar. Se sigue un procedimiento similar en el caso TM.

Frecuencia resonante La consecuencia de la condición de cuantización impuesta a β , es decir, $\beta = p\pi/d$ donde p solo adopta valores enteros, es que con cualquier conjunto específico de valores enteros de (m, n, p) , la onda en el interior de la cavidad puede existir a sólo una **frecuencia resonante**, f_{mnp} .

La expresión resultante para f_{mnp} es $f_{mnp} = \frac{u_{p0}}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2}$.

Factor de calidad En el caso ideal, si se introduce un grupo de frecuencias en la cavidad para excitar un cierto modo TE o TM, solo el componente a la frecuencia exacta de f_{mnp} de ese modo sobrevivirá, y todos los demás se atenuarán, al igual que las ondas evanescentes. Si se emplea un sensor para acoplar una muestra de la onda resonante que sale de la cavidad, la señal de salida será una onda sinusoidal monocromática a f_{mnp} . En la práctica, la cavidad exhibe una respuesta de frecuencia similar a la mostrada en figura 3.7 (c), la cual es muy angosta, pero no un transitorio abrupto perfecto.

El ancho de banda Δf de la cavidad se define como el intervalo de frecuencia entre las dos frecuencias (a ambos lados de f_{mnp}) a la cual la amplitud es $1/\sqrt{2}$ de la amplitud máxima (a f_{mnp}). El **ancho de banda normalizado**, definido como $\Delta f / f_{mnp}$, es aproximadamente igual al recíproco del **factor de calidad** Q de la cavidad,

$Q \approx \frac{f_{mnp}}{\Delta f}$. El factor de calidad se define en función de la razón entre la energía almacenada en el volumen de cavidad y la energía disipada en sus paredes por la conducción (la pérdida $I^2 R$, donde I se relaciona con el campo magnético tangencial y R es la resistencia del material de la pared). Para una cavidad ideal con paredes hechas de un conductor perfecto, no se pierde energía, por lo que Q es infinito y $\Delta f \approx 0$. Los metales tienen conductividades muy altas, pero no infinitas, así que una cavidad real con paredes metálicas almacenará la mayor parte de la energía acoplada a ella en su volumen, pero también perderá una parte de ella por conducción de calor. Un valor típico para Q es del orden de 10,000, el cual es mucho más alto que el que se obtiene con circuitos RLC concentrados en un solo punto.

EJEMPLO 2: El factor de calidad de una cavidad resonante hueca que opera en el

modo TE₁₀₁ se determina de la siguiente forma: $Q = \frac{1}{\delta_s} \frac{abd(a^2 + d^2)}{[a^3(d + 2b) + d^3(a + 2b)]}$

donde $\delta_s = 1/\sqrt{\pi f_{mnp} \mu_0 \sigma_c}$ es la profundidad de penetración y σ_c es la conductividad de las paredes conductoras. Diseñe una cavidad cubica con una frecuencia resonante de 12.6 GHz para un modo TE₁₀₁ y evalúe su ancho de banda. Las paredes de la cavidad son de cobre.

Con $a = b = d$, $m = 1$, $n = 0$, $p = 1$ y $u_{p_0} = c = 3 \times 10^8$ (m/s) empleando f_{mnp} y sustituyendo

llegamos a $f_{mnp} = \frac{u_{p_0}}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2} = f_{101} = \frac{3\sqrt{2} \times 10^8}{2a}$ (Hz) y con

$f_{101} = 12.6$ GHz se obtiene $a = 1.68$ cm también con f_{101} y sabiendo que la profundidad de penetración del cobre con $\sigma_c = 5.8 \times 10^7$ (S/m) es

$$\delta_s = \frac{1}{[\pi f_{101} \mu_0 \sigma_c]^{1/2}} = \frac{1}{[\pi \times 12.6 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7]^{1/2}} = 5.89 \times 10^{-7} \text{ m.}$$

Con $a = b = d$ para obtener que $Q = \frac{a}{3\delta_s} = \frac{1.68 \times 10^{-2}}{3 \times 5.89 \times 10^{-7}} = 9,512$.

Por lo tanto, el ancho de banda de la cavidad es $\Delta f \approx \frac{f_{101}}{Q} = \frac{12.6 \times 10^9}{9,512} = 1.32$ MHz.

4. Antenas.

4.1. Parámetros y características básicas de una antena.

Como expone [1] p373: Una antena se define como un transductor entre una onda guiada que se propaga a través de una línea de transmisión y una onda electromagnética que se propaga a través de un medio sin fronteras (por lo general el espacio libre), o viceversa. La figura 4.1 muestra cómo es que una antena tipo bocina emite una onda; la bocina actúa como transición entre la guía de la onda y el espacio libre. Aunque cualquier estructura conductora o dieléctrica es capaz de realizar esta función, una antena está diseñada para radiar o recibir energía electromagnética con propiedades direccionales y de polarización adecuadas para la aplicación pretendida. Además, para reducir al mínimo la reflexión en la unión línea de transmisión-antena, es importante conocer la impedancia de la antena e igualarla a la línea de transmisión.

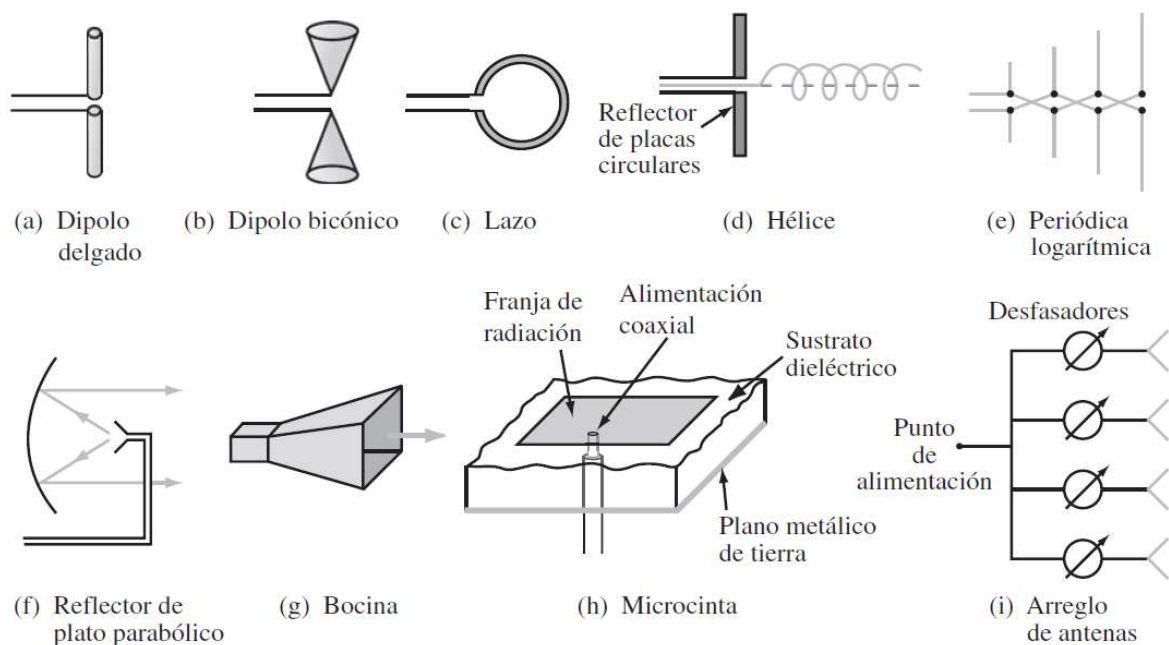


Figura 4.1: Varios tipos de antenas.

Las antenas se fabrican en varias formas y tamaños y se utilizan en la transmisión y recepción de radio y televisión, en sistemas de comunicación de ondas de radio, en teléfonos celulares, en sistemas de radar y sensores anticolidión para automóviles, entre muchas otras aplicaciones. Las propiedades de radiación e impedancia de una antena están regidas por su forma y tamaño, así como por el material del cual está hecha.

Las dimensiones de una antena generalmente se miden en unidades de longitud de onda de la onda que emite o recibe; una antena dipolo de 1 m de largo que opera con una longitud de onda de 2 m exhibe las mismas propiedades que un dipolo de 1 cm de largo que opera con $\lambda = 2 \text{ cm}$. De ahí que, en la mayoría de los planteamientos se hacen en referencia a las dimensiones de la antena en unidades de longitud de onda.

La función direccional que caracteriza la distribución de potencia *relativa* radiada por una antena se conoce como **patrón de radiación de antena** o simplemente como **patrón de antena**. Una antena **isotrópica** es una antena hipotética que radia de igual manera en todas las direcciones, y a menudo se utiliza como radiador de referencia cuando se describen las propiedades de radiación de las antenas reales. La mayoría de las antenas son dispositivos **recíprocos**, que exhiben el mismo patrón de radiación para transmisión que para recepción. Reciprocidad significa que, si en el modo de transmisión, una determinada antena transmite en la dirección A 100 veces la potencia que transmite en la dirección B , entonces, cuando se le utiliza en el modo de recepción, será 100 veces más sensible a la radiación electromagnética incidente de la dirección A que de la B . Todas las antenas que se ilustran en la figura 4.1 obedecen la ley de reciprocidad, pero no todas son dispositivos recíprocos.

Algunas antenas transistorizadas compuestas de semiconductores no lineales o materiales de ferrita no pueden mantener la reciprocidad. La propiedad de reciprocidad es muy conveniente porque permite calcular el patrón de radiación de una antena en el modo de transmisión, aun cuando la antena esté destinada a operar como receptora. El desempeño de una antena consta de dos aspectos: sus propiedades de radiación y su impedancia. Las propiedades de radiación incluyen su patrón de radiación direccional y el estado de polarización asociado de la onda radiada cuando la antena se utiliza en el modo de transmisión. Este estado de polarización se conoce como **polarización de antena**.

Por ser un dispositivo recíproco, una antena, cuando opera en el modo de recepción, puede extraer de una onda incidente sólo aquel componente de la onda cuyo campo eléctrico sea paralelo al de la dirección de polarización de la antena. El segundo aspecto, la **impedancia de la antena**, corresponde a la transferencia de potencia de un generador a la antena cuando ésta se utiliza como transmisor y, a la inversa, la transferencia de potencia de la antena a una carga cuando se le utiliza como receptor.

Las fuentes de radiación quedan comprendidas dentro de dos grupos: corrientes y campos de apertura. Las antenas de espira y dipolo son ejemplos de fuentes de corriente; las corrientes variables con el tiempo que fluyen en los alambres

conductores originan el campo electromagnético radiado. Una antena en forma de bocina es un ejemplo del segundo grupo porque los campos eléctrico y magnético a través de la apertura de la bocina actúan como fuentes del campo radiado. Los campos de apertura son inducidos por corrientes que varían con el tiempo. La selección de corrientes o aperturas como fuentes es simplemente una conveniencia computacional dictada por la estructura de la antena.

Características de interés en las Antenas:

Según [3] p 609: **Patrón de Radiación o Patrón de Antena** Es una gráfica 3D de su radiación en campo lejano.

Intensidad de la Radiación Es una medición en W/estereorradián (W/sr).

Ganancia Direccional De una antena es una medición de la potencia radiada en una dirección particular.

Directividad De una antena es una relación de la radiación de intensidad máxima a la intensidad de radiación promedio.

4.2. Radiación.

Según [1] p 375: Si se considera una antena lineal como compuesta de un gran número de elementos conductores infinitesimalmente cortos, cada uno de los cuales es tan corto que la corriente puede considerarse uniforme a lo largo de él, el campo de toda la antena se obtiene integrando los campos de todas estas antenas diferenciales, tomando en cuenta las magnitudes y fases apropiadas. Primero se examinarán las propiedades de radiación de semejante antena diferencial, conocida como **dipolo corto**. Un dipolo corto, también llamado **dipolo hertziano**, es un delgado conductor lineal cuya longitud l es muy corta en comparación con la longitud de onda λ ; para satisfacer la suposición de corriente uniforme, l no deberá exceder de $\lambda/50$. El alambre, orientado a lo largo de la dirección $+z$ como se indica en la figura 4.2, transporta una corriente que varía sinusoidalmente

$i(t) = I_0 \cos \omega t = \Re [I_0 e^{j\omega t}]$ (A), donde I_0 es su amplitud. La corriente fasorial

$\tilde{I} = I_0$. Aun cuando la corriente tiene que reducirse a cero en los extremos del dipolo, se considerará como constante a todo lo largo de él. El método acostumbrado de calcular los campos eléctrico y magnético en un punto Q del espacio, que se debe a la radiación producida por una fuente de corriente, es mediante el potencial vectorial retardado $\tilde{\mathbf{A}}$. El potencial vectorial retardado fasorial $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{R})$ a un vector de distancia $\mathbf{R}$ de un volumen v' que contiene una distribución de corriente fasorial $\tilde{\mathbf{J}}$ es

$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\tilde{\mathbf{J}} e^{-jkR'}}{R'} dv'$. donde μ_0 es la permeabilidad magnética del espacio libre (ya que el punto de observación está situado en aire) y $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ es el número de onda.

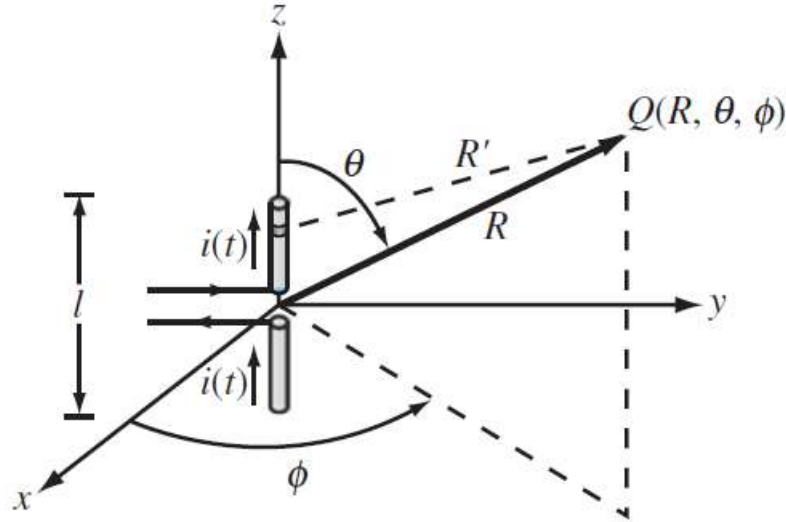


Figura 4.2: Dipolo corto colocado en el origen de un sistema de coordenadas esféricas.

Para el dipolo, la densidad de corriente es simplemente $\tilde{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{z}}(I_0/s)$, donde s es el área de sección transversal del conductor dipolo, $dv' = s dz$ y los límites de integración son de $z = -l/2$ a $z = l/2$. En la figura 4.2, la distancia R' entre el punto de observación y un punto dado a lo largo del dipolo no es la misma que la distancia a su centro, R , pero como se trata de un dipolo muy corto, se puede hacer $R' \approx R$.

Por lo tanto, $\tilde{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \int_{-l/2}^{l/2} \hat{\mathbf{z}} I_0 dz = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 l \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right)$. La función (e^{-jkR}/R) , llamada

factor de propagación esférica, da cuenta de la reducción $1/R$ de la magnitud con la distancia, así como también del cambio de fase representado por e^{-jkR} .

La dirección de $\tilde{\mathbf{A}}$ está dictada por la dirección de flujo de la corriente (dirección z). Como el objetivo es caracterizar la dirección de la potencia radiada a una distancia fija R de la antena, el sistema de coordenadas esféricas de la figura 4.3 se considera adecuado para la presentación de curvas de patrón de antena, con las variables R, θ y ϕ denotadas **rango, ángulo zenital y ángulo azimutal**, respectivamente. Para tal efecto, se tiene que escribir $\tilde{\mathbf{A}}$ en función de sus componentes en coordenadas

esféricas, lo que se realiza expresando $\hat{\mathbf{z}}$ en función de los vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas: $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{R}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta$, y al sustituir esta ecuación en

la anterior, llegamos a $\tilde{\mathbf{A}} = (\hat{\mathbf{R}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta) \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) = \hat{\mathbf{R}} \tilde{A}_R + \hat{\boldsymbol{\theta}} \tilde{A}_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}} \tilde{A}_\phi$, con

$$\tilde{A}_R = \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi} \cos \theta \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right), \quad \tilde{A}_\theta = -\frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi} \sin \theta \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right), \quad \text{y} \quad \tilde{A}_\phi = 0.$$

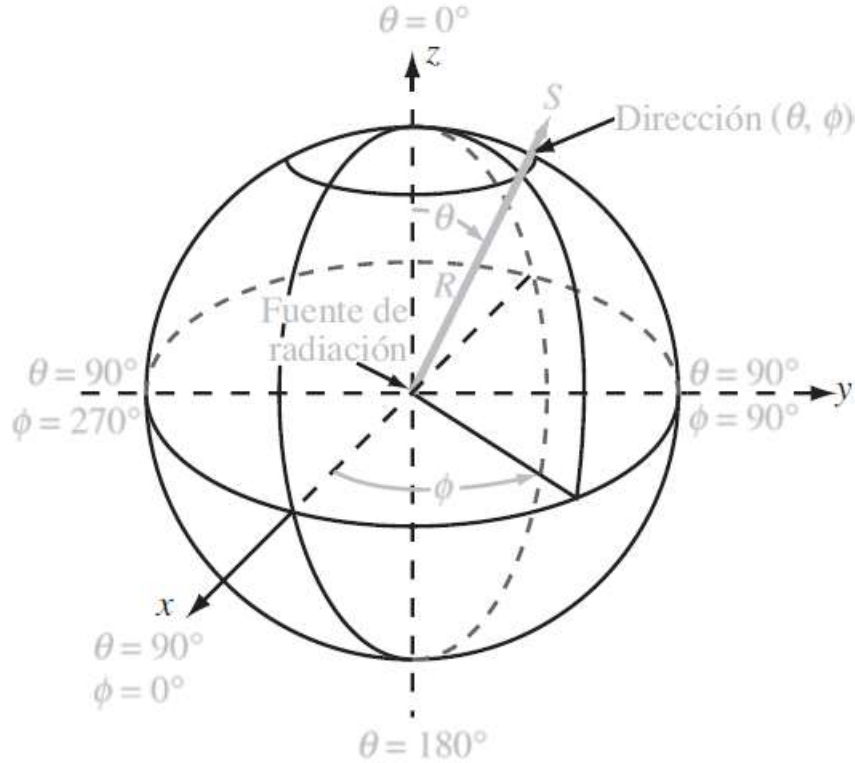


Figura 4.3: Sistema de coordenadas esféricas.

Con los componentes en coordenadas esféricas de $\tilde{\mathbf{A}}$ conocidos, se aplican las

relaciones de espacio libre $\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}$ para obtener

$$\tilde{H}_\phi = \frac{I_0 l k^2}{4\pi} e^{-jkR} \left[\frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} \right] \sin \theta, \quad \tilde{E}_R = \frac{2I_0 l k^2}{4\pi} \eta_0 e^{-jkR} \left[\frac{1}{(kR)^2} - \frac{1}{(kR)^3} \right] \cos \theta \text{ y}$$

$$\tilde{E}_\theta = \frac{I_0 l k^2}{4\pi} \eta_0 e^{-jkR} \left[\frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} - \frac{1}{(kR)^3} \right] \sin \theta, \quad \text{donde } \eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \cong 120\pi \text{ es la}$$

impedancia intrínseca del espacio libre. Los componentes restantes ($\tilde{H}_R$, $\tilde{H}_\theta$ y $\tilde{E}_\phi$)

dondequiera son cero. La figura 4.4 ilustra las líneas de campo eléctrico de la onda radiada por el dipolo corto. En la mayoría de las aplicaciones de antenas, interesa principalmente el patrón de radiación de la antena a grandes distancias de la fuente. En el caso del dipolo eléctrico, esto corresponde a distancias R de tal manera que $R \gg \lambda$, de forma equivalente, $kR = 2\pi R/\lambda \gg 1$.

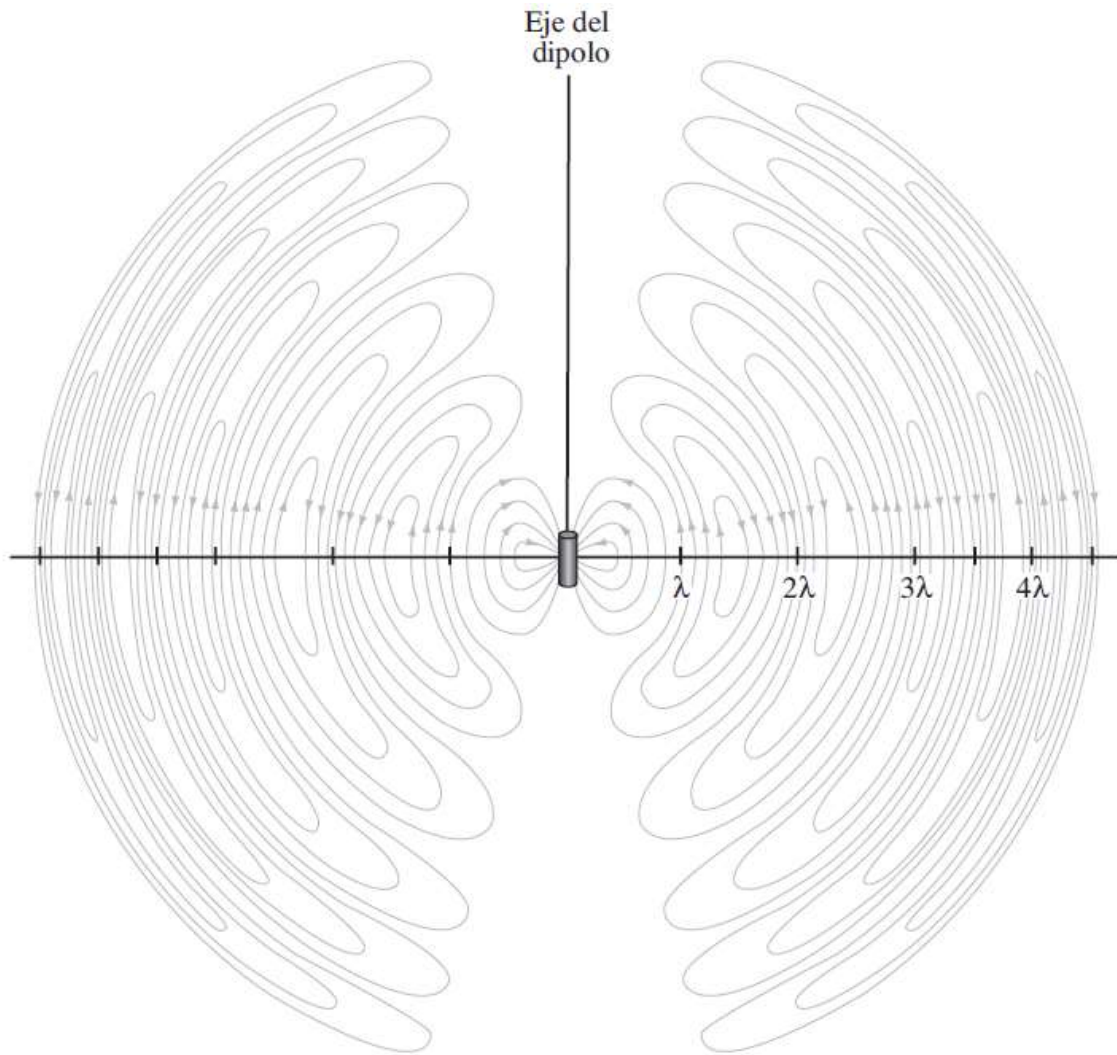


Figura 4.4: Líneas de campo eléctrico que circundan un dipolo oscilante en un instante dado.

Esta condición permite omitir los términos que varían como $1/(kR)^2$ y $1/(kR)^3$ a favor de los términos que varían como $1/kR$, lo que da las expresiones para campo lejano

$$\tilde{E}_\theta = \frac{jI_0 l k \eta_0}{4\pi} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) \sin \theta \quad (V/m), \quad \tilde{H}_\phi = \frac{\tilde{E}_\theta}{\eta_0} \quad (A/m), \text{ y } \tilde{E}_R \text{ es insignificante. En el punto}$$

de observación Q , la onda ahora se parece a una onda plana uniforme con sus

campos eléctrico y magnético en fase con respecto al tiempo, relacionados por la impedancia intrínseca del medio η_0 y ortogonales entre sí y la dirección de propagación ($\hat{\mathbf{R}}$). Ambos campos son proporcionales a $\sin \theta$ e independientes de ϕ (que es lo que se esperaba por consideraciones de simetría).

Dados $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ en forma fasorial, el **vector de Poynting promedio en el dominio del tiempo** de la onda radiada, que también se llama **densidad de potencia**, está dada por $\mathbf{S}_{prom} = \frac{1}{2} \Re(\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*)$ (W/m^2). Para el dipolo corto $\mathbf{S}_{prom} = \hat{\mathbf{R}} S(R, \theta)$ con

$$S(R, \theta) = \left(\frac{\eta_0 k^2 I_0^2 l^2}{32 \pi^2 R^2} \right) \sin^2 \theta = S_0 \sin^2 \theta \quad (W/m^2).$$

El patrón direccional de cualquier

antena se describe en función de la **intensidad de radiación normalizada** $F(\theta, \phi)$

definida como la razón entre la densidad de potencia $S(R, \theta, \phi)$ y $S_{máx}$, el valor

máximo de $S(R, \theta, \phi)$, con un rango R especificado: $F(\theta, \phi) = \frac{S(R, \theta, \phi)}{S_{máx}}$. Para el

dipolo hertziano, la dependencia en $\sin^2 \theta$ indica que la radiación es máxima en la dirección del lado ancho ($\theta = \pi/2$), correspondiente al plano azimutal, y se

determina mediante $S_{máx} = S_0 = \frac{\eta_0 k^2 I_0^2 l^2}{32 \pi^2 R^2} = \frac{15 \pi I_0^2}{R^2} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2$ (W/m^2), donde se utilizaron

las relaciones $k = 2\pi/\lambda$ y $\eta_0 \approx 120\pi$. Se observa que $S_{máx}$, es directamente

proporcional a I_0^2 y a l^2 (con l medida en longitudes de onda), y se reduce con la distancia como $1/R^2$.

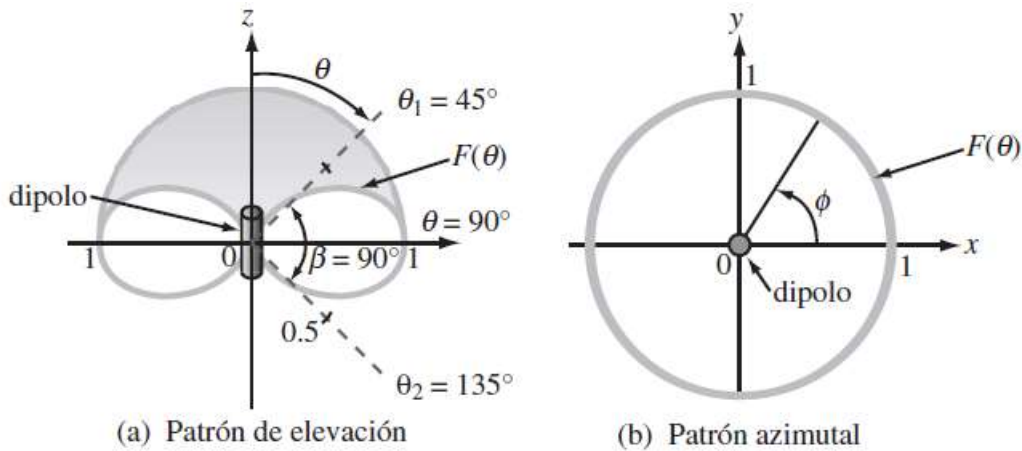


Figura 4.5: Patrones de radiación de un dipolo corto.

De la definición de la intensidad de radiación normalizada se tiene que

$F(\theta, \phi) = F(\theta) = \sin^2 \theta$. En la figura 4.5 se presentan las gráficas de $F(\theta)$ tanto en el plano de elevación (también llamado plano θ) como en el plano azimutal (plano ϕ). El dipolo no irradia energía a lo largo de la dirección de su eje y la radiación máxima ($F=1$) ocurre en la dirección transversal del eje. Como $F(\theta)$ es independiente de ϕ , el patrón tiene forma de dona en el espacio $\theta - \phi$.

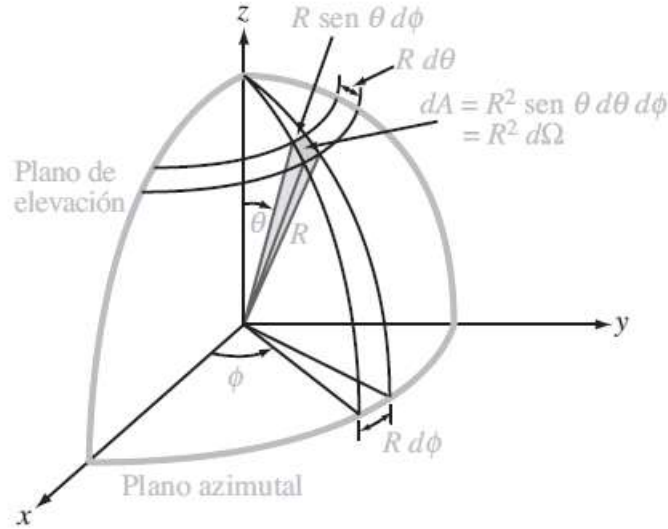


Figura 4.6: Definición de ángulo sólido $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.

Un **patrón de antena** describe las propiedades direccionales de campo lejano de una antena cuando se miden a una distancia fija de la antena. En general, el patrón de antena es una curva tridimensional que muestra la intensidad del campo radiado o densidad de potencia en función de la dirección especificada por el ángulo zenital θ y el ángulo azimutal ϕ . En virtud del teorema de reciprocidad, *una antena receptora tiene el mismo patrón de una antena direccional que el patrón que exhibe cuando opera en el modo transmisión*. Sea una antena transmisora colocada en el origen de la esfera de observación mostrada en figura 4.6. La potencia diferencial radiada por la antena a través de un área elemental dA es $dP_{rad} = S_{prom} \cdot dA = S_{prom} \cdot \hat{\mathbf{R}} dA = S dA$ (W), donde S es el componente radial del vector de Poynting promedio con respecto al tiempo $\mathbf{S}_{prom}$. En la región de campo lejano de cualquier antena, $\mathbf{S}_{prom}$ siempre está en dirección radial. En un sistema de coordenadas esféricas $dA = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$, y el **ángulo sólido** $d\Omega$ asociado con dA , definido como el área subtendida dividida entre

R^2 , se determina como $d\Omega = \frac{dA}{R^2} = \sin\theta d\theta d\phi$ (sr). En la figura 4.6, mientras un ángulo plano se mide en radianes y la medida angular de un círculo completo es 2π (rad), un ángulo sólido se mide en **estereorradianes** (sr) y la medida angular de una superficie esférica es $\Omega = (4\pi R^2)/R^2 = 4\pi$ (sr). El ángulo sólido de un hemisferio es 2π (sr). Empleando la relación $dA = R^2 d\Omega$, dP_{rad} , se reescribe como $dP_{rad} = R^2 S(R, \theta, \phi) d\Omega$. La potencia total radiada por una antena a través de una superficie esférica a una distancia fija R se obtiene integrando la ecuación anterior.

$$P_{rad} = R^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S(R, \theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = R^2 S_{m\acute{a}x} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} F(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi$$

$= R^2 S_{m\acute{a}x} \int \int_{4\pi} F(\theta, \phi) d\Omega$ (W), donde $F(\theta, \phi)$ es la intensidad de radiación normalizada definida anteriormente. El símbolo 4π bajo el signo de integral se utiliza como abreviatura de los límites indicados para θ y ϕ . Formalmente, P_{rad} se conoce como **potencia radiada total**. Cada combinación específica del ángulo zenital θ y el ángulo azimutal ϕ denota una dirección específica en el sistema de coordenadas esféricas de la figura 4.6. La intensidad de radiación normalizada $F(\theta, \phi)$ caracteriza el patrón direccional de energía radiada por una antena y una curva de $F(\theta, \phi)$ en función tanto de θ como de ϕ constituye un patrón tridimensional, un ejemplo de ello lo muestra la figura 4.7.

Con frecuencia, es de interés caracterizar la variación de $F(\theta, \phi)$ en la forma de dos curvas bidimensionales en planos específicos en el sistema de coordenadas esféricas. Los dos planos más comúnmente especificados para este propósito son los planos de elevación y azimutal. El **plano de elevación**, también llamado plano θ , es el plano correspondiente a un valor constante de ϕ . Por ejemplo, $\phi = 0$ define el plano $x-z$ y $\phi = 90^\circ$ define el plano $y-z$, los cuales son planos de elevación (ver figura 4.6). Una curva de $F(\theta, \phi)$ contra θ en cualquiera de estos planos constituye un patrón bidimensional en el plano de elevación. Sin embargo, esto no implica que el patrón de plano de elevación sea necesariamente el mismo en todos los planos de elevación. El **plano azimutal**, también llamado plano ϕ , está especificado por $\theta = 90^\circ$ y corresponde al plano $x-y$. Los planos de elevación y azimutal a menudo se conocen como los dos **planos principales** del sistema de coordenadas esféricas. Algunas antenas exhiben patrones altamente directivos con haces angostos, en cuyo

caso conviene trazar la curva del patrón de antena en una escala de decibels con F expresado en decibels:

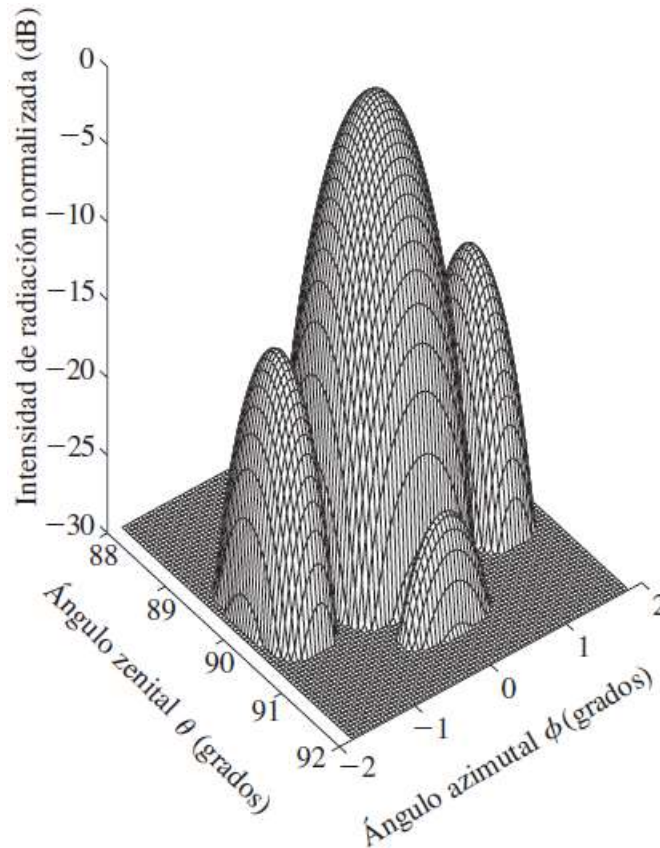


Figura 4.7: Patrón tridimensional de una antena de haz angosto.

$$F(\text{dB}) = 10 \log F.$$

El patrón de antena mostrado en la figura 4.8 (a) está graficado en una escala de decibels en coordenadas polares, con la intensidad como variable radial. Este formato permite una interpretación visual conveniente de la distribución direccional de los **lóbulos de radiación**. Otro formato comúnmente empleado para inspeccionar el patrón de una antena de haz angosto es la imagen rectangular mostrada en la figura 4.8 (b), la que permite que el patrón sea expandido con facilidad cambiando la escala del eje horizontal. Esta curvas representan la variación en un solo plano de la esfera de observación, el plano $\phi = 0$. A menos que el patrón sea simétrico en ϕ , se requieren patrones adicionales para definir la variación de $F(\theta, \phi)$ con θ y ϕ . El ángulo polar θ siempre es positivo, y se define dentro del intervalo de 0° (dirección z) a 180° (dirección $-z$) y no obstante el eje θ en la figura 4.8 (b) aparece tanto con

valores positivos como negativos. Esto no es una contradicción, sino más bien una forma diferente de trazar patrones de antena. La mitad derecha de la curva representa la variación de $F(\text{dB})$ con θ conforme θ se incrementa en el sentido de las manecillas del reloj en el plano $x - z$ [véase la inserción en la figura 4.8 (b)], correspondiente a $\phi = 0^\circ$, mientras que la mitad izquierda de la curva representa la variación de $F(\text{dB})$ con θ conforme θ se incrementa en sentido contrario al de las manecillas del reloj a $\phi = 180^\circ$. Por lo tanto, un valor negativo de θ simplemente denota que la dirección de (θ, ϕ) es a lo largo de la mitad izquierda del plano $x - z$.

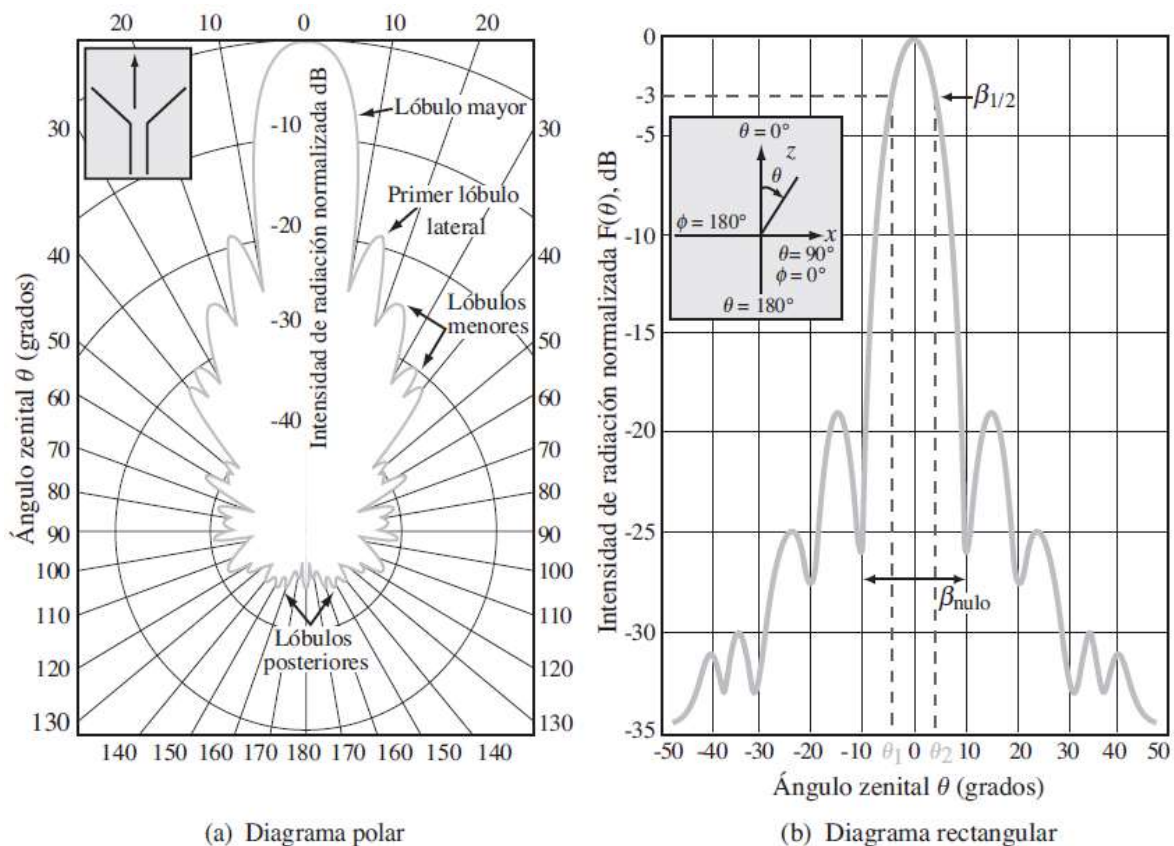


Figura 4.8: Curvas representativas del patrón de radiación normalizado de una antena de microondas en a) forma polar y b) forma rectangular.

El patrón mostrado en la figura 4.8 (a) indica que la antena es claramente directiva, puesto que la mayor parte de la energía se irradia a través de un intervalo angosto llamado **lóbulo principal**. Además del lóbulo principal, el patrón exhibe varios **lóbulos laterales** y también **lóbulos traseros**. En la mayoría de las aplicaciones, estos lóbulos extra se consideran indeseables porque representan energía desperdiciada por antenas transmisoras y direcciones de interferencia potenciales de antenas receptoras.

Para una antena con un solo lóbulo principal, el **ángulo sólido de patrón** Ω_p describe el ancho equivalente de lóbulo principal del patrón de antena [figura 4.9]. Se define como la integral de la intensidad de radiación normalizada $F(\theta, \phi)$ sobre una esfera:

$$\Omega_p = \iint_{4\pi} F(\theta, \phi) d\Omega \quad (sr).$$

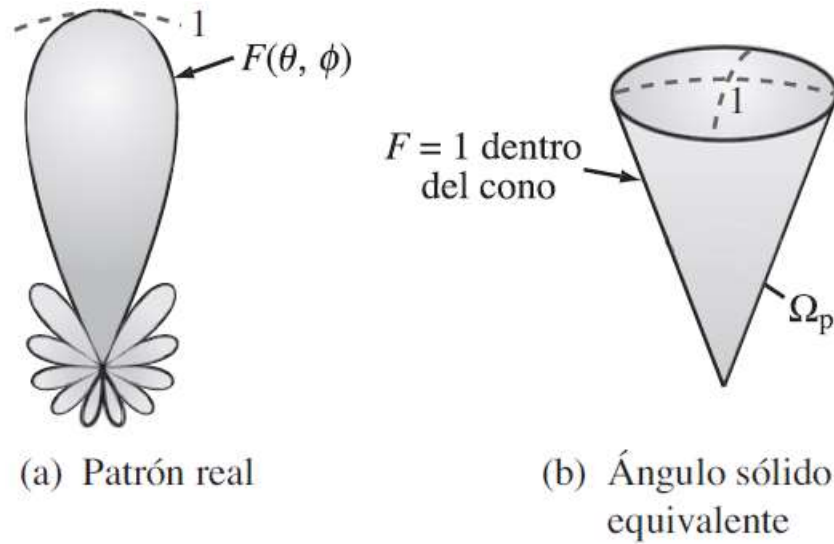


Figura 4.9: El ángulo sólido de patrón Ω_p define un cono equivalente sobre el cual toda la radiación de la antena real se concentra con intensidad igual a la máxima del patrón real.

Para una antena isotrópica con $F(\theta, \phi) = 1$ en todas las direcciones, $\Omega_p = 4\pi$ (sr). El ángulo sólido del patrón caracteriza las propiedades direccionales del patrón de radiación tridimensional. Para caracterizar el ancho del lóbulo principal en un plano determinado, el término que se utiliza es **ancho de haz**. El **ancho de haz a media potencia**, o simplemente ancho de haz β se define como el ancho angular del lóbulo principal entre los dos ángulos con los cuales la magnitud de $F(\theta, \phi)$ es igual a la mitad de su valor pico (-3 dB en una escala de decibeles). Por ejemplo, para el patrón que ilustra la figura 4.8 (b), β se determina mediante $\beta = \theta_2 - \theta_1$ donde θ_1 y θ_2 son los **ángulos a media potencia** con los cuales $F(\theta, 0) = 0.5$ (donde θ_2 denota el valor más grande y θ_1 el más pequeño, como se indica en la figura 4.8 (b)). Si el patrón es simétrico y el valor pico de $F(\theta, \phi)$ ocurre con $\theta = 0$, entonces $\beta = 2\theta_2$. Para el patrón de dipolo corto $F(\theta)$ es máximo con $\theta = 90^\circ$, θ_2 es de 135° y θ_1 de 45° . En este

caso, $\beta = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. El ancho de banda β también se conoce como **ancho de banda a 3 dB**. Además del ancho de banda a media potencia, otras dimensiones del haz resultan de interés en ciertas aplicaciones, tales como el **ancho de banda nulo** β_{nulo} , que es el ancho de la separación entre los primeros nulos a ambos lados del valor pico [figura 4.8 (b)].

La **directividad** D de una antena se define como la razón entre su intensidad de radiación máxima normalizada, $F_{m\acute{a}x}$ (la que por definición es igual a 1) y el valor

promedio de $F(\theta, \phi)$ en el espacio 4π :
$$D = \frac{F_{m\acute{a}x}}{F_{prom}} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \iint_{4\pi} F(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{4\pi}{\Omega_p}$$
 donde

Ω_p es el ángulo solido patrón. Por lo tanto, cuanto más angosto es el Ω_p de un patrón de antena, mayor es la directividad de la antena. Para una antena isotrópica, $\Omega_p = 4\pi$: por consiguiente, su directividad es $D_{iso} = 1$.

D se expresa como
$$D = \frac{4\pi R^2 S_{m\acute{a}x}}{P_{rad}} = \frac{S_{m\acute{a}x}}{S_{prom}},$$
 donde $S_{prom} = P_{rad} / (4\pi R^2)$ es el valor

promedio de la densidad de potencia radiada y es igual a la potencia total radiada por la antena, P_{rad} dividida entre el área de la superficie de una esfera de radio R . Como $S_{prom} = S_{iso}$, donde S_{iso} es la densidad de potencia radiada por una antena isotrópica, D representa la razón entre la densidad de potencia máxima radiada por una antena considerada y la densidad de potencia radiada por una antena isotrópica, ambas medidas en el mismo rango R y excitadas por la misma cantidad de potencia de entrada. Casi siempre, D se expresa en decibelios: $D(\text{dB}) = 10 \log D$. Para una antena con un solo lóbulo principal que apunta en la dirección z como se aprecia en la figura 4.10, Ω_p puede aproximarse como el producto de los anchos de banda a media

potencia β_{xz} y β_{yz} (en radianes): $\Omega_p \approx \beta_{xz} \beta_{yz}$, y, por lo tanto,
$$D = \frac{4\pi}{\Omega_p} \approx \frac{4\pi}{\beta_{xz} \beta_{yz}}.$$

Aunque aproximada, esta relación ofrece un método útil de estimar la directividad de una antena a partir de mediciones de los anchos de banda en los dos planos ortogonales cuya intersección es el eje del lóbulo principal.

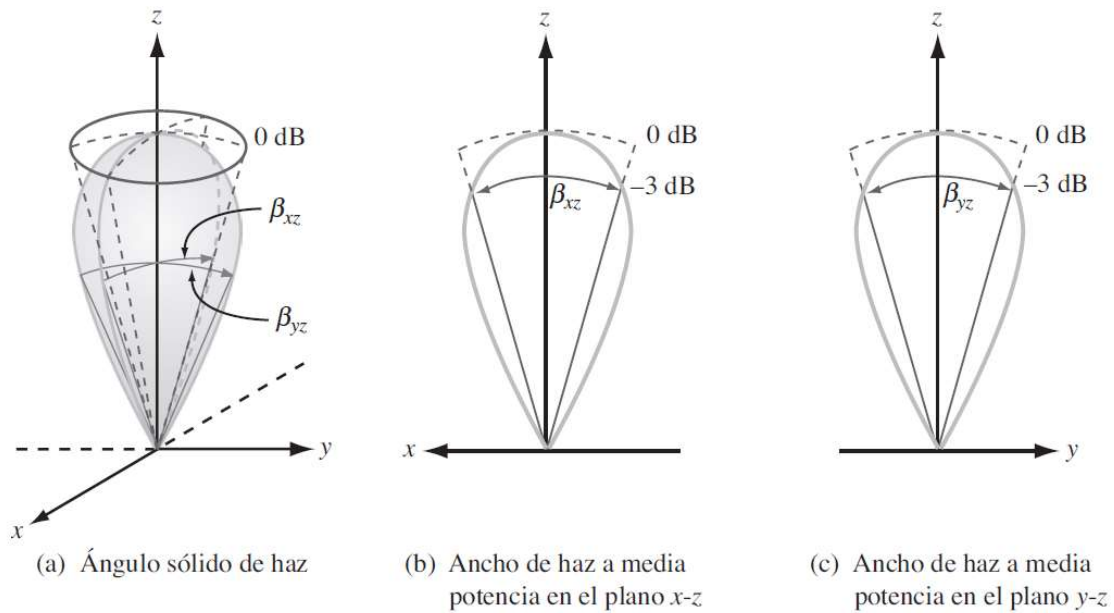


Figura 4.10: El ángulo sólido de un patrón de radiación unidireccional es aproximadamente igual al producto de los anchos de haz a media potencia en los dos planos principales, es decir, $\Omega_p \approx \beta_{xz}\beta_{yz}$.

EJEMPLO 1: Determine a) la dirección de máxima radiación, b) el ángulo sólido patrón, c) la directividad y d) el ancho de banda a media potencia en el plano y-z para una antena que irradia sólo hacia el hemisferio superior y cuya intensidad de radiación normalizada está determinada por $F(\theta, \phi) = \cos^2 \theta$.

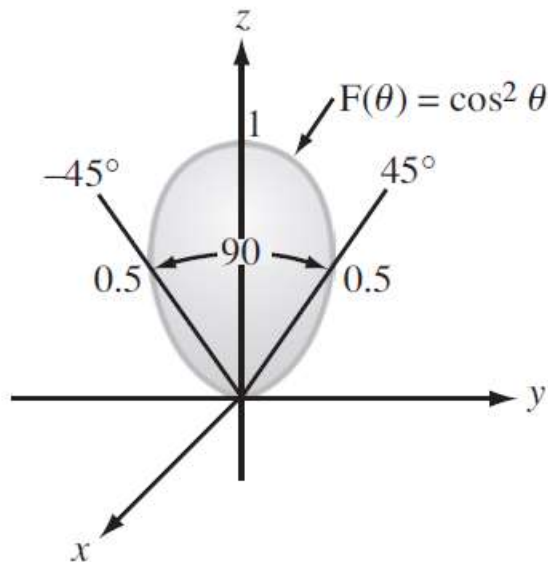


Figura 4.11: Diagrama polar de $F(\theta) = \cos^2 \theta$.

Matemáticamente, la aseveración de que la antena irradia a lo largo de direcciones que abarcan solo el hemisferio superior se enuncia como

$$F(\theta, \phi) = F(\theta) = \begin{cases} \cos^2 \theta, & \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ & \text{y } 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ 0, & \text{en cualquier otra parte.} \end{cases}$$

a) La función $F(\theta) = \cos^2 \theta$ es independiente de ϕ y es máximo cuando $\theta = 0^\circ$.

En la figura 4.11 se muestra un diagrama polar de $F(\theta)$.

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \iint_{4\pi} F(\theta, \phi) d\Omega \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right] d\phi \end{aligned}$$

b) El ángulo sólido patrón Ω_p es

$$\begin{aligned} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\phi = \frac{2\pi}{3} (sr). \end{aligned}$$

c) La directividad es $D = \frac{4\pi}{\Omega_p} = 4\pi \left(\frac{3}{2\pi} \right) = 6$, que corresponde a

$$D(dB) = 10 \log 6 = 7.78 dB.$$

d) El ancho de banda a media potencia β se obtiene con $F(\theta) = \cos^2 \theta = 0.5$ que da los ángulos a media potencia $\theta_1 = -45^\circ$ y $\theta_2 = 45^\circ$. Por lo tanto,

$$\beta = \theta_2 - \theta_1 = 90^\circ.$$

EJEMPLO 2: Calcule la directividad del dipolo hertziano.

De la sección del dipolo hertziano obtenemos la ecuación con $F(\theta) = \sin^2 \theta$ y desarrollamos para D con lo que llegamos a

$$D = \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{4\pi}{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta d\phi} = \frac{4\pi}{8\pi/3} = 1.5, \text{ o } 1.76 dB.$$

De la potencia total P_t (potencia del transmisor) suministrada a la antena, una parte, P_{rad} , se irradia hacia el espacio y el resto, $P_{pérdida}$, se disipa como pérdida de calor en la estructura de la antena. La **eficiencia de radiación** ξ se define como la razón

entre P_{rad} y P_t : $\xi = \frac{P_{rad}}{P_t}$. La **ganancia** de una antena se define como $G = \frac{4\pi R^2 S_{m\acute{a}x}}{P_t}$

que es de forma similar a la expresión de la directividad D excepto que se refiere a la potencia de entrada a la antena, P_t , en lugar de la potencia radiada P_{rad} .

Empleando la **eficiencia de radiación** ξ , $G = \xi D$. La ganancia se ocupa de las pérdidas óhmicas en el material de la antena, mientras que la directividad no. Para una antena sin pérdidas, $\xi = 1$.

Para la línea de transmisión conectada a su terminal, una antena es simplemente una impedancia. Si la línea de transmisión está acoplada a la impedancia de la antena, una parte de P_t , la potencia suministrada por el generador se irradia hacia el espacio y el resto se disipa como calor en la antena. La parte de resistencia de la impedancia de la antena se define como compuesta por una **resistencia de radiación** R_{rad} y una **resistencia de pérdidas** $R_{pérdida}$. La potencia radiada con respecto al tiempo

correspondiente P_{rad} y la potencia disipada $P_{pérdida}$ son $P_{rad} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{rad}$,

$P_{pérdida} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{pérdida}$, donde I_0 es la amplitud de la corriente sinusoidal que excita la antena. Como se definió antes, la eficiencia de radiación es la razón entre P_{rad} y P_t .

$$\xi = \frac{P_{rad}}{P_t} = \frac{P_{rad}}{P_{rad} + P_{pérdida}} = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{pérdida}}.$$

EJEMPLO 3: Se utiliza un dipolo con alimentación central de 4 cm de largo como antena a 75 MHz. El hilo de la antena es de cobre y su radio mide $a = 0.4 \text{ mm}$. La resistencia de pérdidas de un hilo circular de longitud l se determina mediante

$$R_{pérdida} = \frac{l}{2\pi a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}}, \text{ donde } \mu_c \text{ y } \sigma_c \text{ son la permeabilidad magnética y la}$$

conductividad del hilo, respectivamente. Calcule la resistencia de radiación y la eficiencia de radiación de la antena dipolo.

A 75MHz, $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{7.5 \times 10^7} = 4m$. La razón de la longitud de la antena a la longitud de

onda es $l/\lambda = 4cm/4m = 10^{-2}$. Por consiguiente, éste es un dipolo corto. P_{rad} es

$$P_{rad} = \frac{4\pi R^2}{D} S_{m\acute{a}x}. \text{ Para el dipolo hertziano, } S_{m\acute{a}x} = \frac{15\pi I_0^2}{R^2} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ y del Ejemplo 2 se tiene}$$

que $D=1.5$. Entonces $P_{rad} = \frac{4\pi R^2}{1.5} \times \frac{15\pi I_0^2}{R^2} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 40\pi^2 I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$. Igualando este

resultado con $P_{rad} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{rad}$, y despejando para R_{rad} , se tiene $R_{rad} = 80\pi^2 (l/\lambda)^2 \ (\Omega)$.

Con $l/\lambda = 10^{-2}$, $R_{rad} = 0.08 \ \Omega$. Vamos por $R_{pérdida}$. Para cobre, $\mu_c \simeq \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ y

$$\sigma_c = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m. Así } R_{pérdida} = \frac{4 \times 10^{-2}}{2\pi \times 4 \times 10^{-4}} \left[\frac{\pi \times 75 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7} \right]^{1/2} = 0.036 \ \Omega .$$

Y así la eficiencia de radiación es $\xi = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{pérdida}} = \frac{0.08}{0.08 + 0.036} = 0.69$. o 69%

eficiente.

4.3. Análisis del dipolo eléctrico elemental y de media onda.

En el subtema anterior se desarrollaron expresiones para los campos eléctrico y magnético radiados por un dipolo corto de longitud mucho más corta que λ . A continuación se utilizarán estas expresiones como bloque de construcción para obtener expresiones para los campos radiados por una antena dipolo de media onda, llamada así por su longitud $l = \lambda/2$.

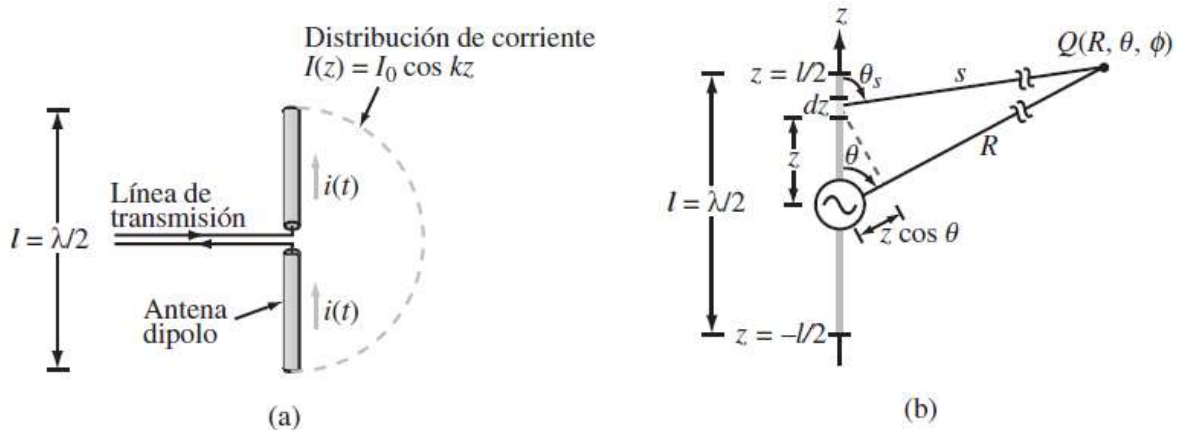


Figura 4.12: Dipolo de media onda con alimentación central.

Como lo muestra la figura 4.12, el dipolo de media onda se compone de un delgado hilo conductor alimentado en su centro por un generador conectado a las terminales de la antena mediante una línea de transmisión. La corriente que fluye a través del hilo conductor tiene una distribución simétrica con respecto al centro del dipolo y la corriente tiene que ser cero en los extremos. Matemáticamente, $i(t)$ se determina

así: $i(t) = I_0 \cos \omega t \cos(kz) = \Re \left[I_0 \cos(kz) e^{j\omega t} \right]$ cuyo fasor de corriente es

$$\tilde{I}(z) = I_0 \cos(kz), \quad -\frac{\lambda}{4} \leq z \leq \frac{\lambda}{4} \quad \text{y } k = 2\pi/\lambda.$$

La ecuación $\tilde{E}_\theta = \frac{jI_0 l k \eta_0}{4\pi} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) \sin \theta$ da una expresión para $\tilde{E}_\theta$, el campo lejano (a una distancia R) radiado por un dipolo corto de longitud l cuando se excita mediante una corriente I_0 . Adaptemos esa expresión a un segmento de dipolo infinitesimal de longitud dz , excitado por una corriente $\tilde{I}(z)$ y localizado a una distancia s del punto

de observación [figura 4.12 (b)]. Por lo tanto, $d\tilde{E}_\theta(z) = \frac{jk\eta_0}{4\pi} \tilde{I}(z) \left(\frac{e^{-jks}}{s} \right) \sin \theta_s dz$ y el

campo magnético asociado es $d\tilde{H}_\phi(z) = \frac{d\tilde{E}_\theta(z)}{\eta_0}$. El campo lejano producido por la

radiación de toda la antena se obtiene integrando los campos de todos los dipolos

hertzianos que forman la antena: $\tilde{E}_\theta = \int_{z=-\lambda/4}^{\lambda/4} d\tilde{E}_\theta$. De la figura 4.12 (b), es fácil observar

que $s \approx R - z \cos \theta$, sustituyendo ésta ecuación para s en el factor de fase de $d\tilde{E}_\theta(z)$ y reemplazando s con R y θ_s con θ en cualquier parte de la expresión, insertando el resultado como argumento de la última integral e integrando se obtendrá

$$\tilde{E}_\theta = j60I_0 \left[\frac{\cos[(\pi/2)\cos \theta]}{\sin \theta} \right] \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right), \quad \tilde{H}_\phi = \frac{\tilde{E}_\theta}{\eta_0}.$$

La densidad de potencia promedio con respecto al tiempo es

$$S(R, \theta) = \frac{|\tilde{E}_\theta|^2}{2\eta_0} = \frac{15I_0^2}{\pi R^2} \left[\frac{\cos^2[(\pi/2)\cos \theta]}{\sin^2 \theta} \right] = S_0 \left[\frac{\cos^2[(\pi/2)\cos \theta]}{\sin^2 \theta} \right] (W/m^2).$$

$S(R, \theta)$ es máxima cuando $\theta = \pi/2$ y su valor es $S_{\max} = S_0 = \frac{15I_0^2}{\pi R^2}$. Por lo que, la

$$\text{intensidad de radiación normalizada es } F(\theta) = \frac{S(R, \theta)}{S_0} = \left[\frac{\cos[(\pi/2)\cos \theta]}{\sin \theta} \right]^2.$$

El patrón de radiación del dipolo de media onda exhibe aproximadamente la misma forma de dona antes mostrada para el dipolo corto. Su directividad es un poco más grande (1.64 comparada con 1.5 para el dipolo corto), pero su resistencia de radiación es de 73Ω , que es más grande en ordenes de magnitud que la de un dipolo corto.

Para evaluar tanto la directividad D como la resistencia de radiación R_{rad} del dipolo de media onda, primero se tiene que calcular la potencia radiada total

$$P_{rad} = R^2 \iint_{4\pi} S(R, \theta) d\Omega = \frac{15I_0^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \right]^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

La integración sobre ϕ es igual a 2π y la evaluación numérica de la integración θ da el valor 1.22. Por lo que, $P_{rad} = 36.6I_0^2 (W)$. Se encontró que $S_{m\acute{a}x} = 15I_0^2 / (\pi R^2)$.

Utilizando la expresión en $D = \frac{4\pi R^2 S_{m\acute{a}x}}{P_{rad}} = \frac{S_{m\acute{a}x}}{S_{prom}}$, se obtiene el siguiente resultado

para la directividad D del dipolo de media onda: $D = \frac{4\pi R^2}{36.6I_0^2} \left(\frac{15I_0^2}{\pi R^2} \right) = 1.64$ o de forma

equivalente, 2.15 dB. Al relacionar la resistencia de radiación R_{rad} con la potencia

radiada total P_{rad} , se tiene $R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_0^2} = \frac{2 \times 36.6I_0^2}{I_0^2} \simeq 73\Omega$. Como se señal  en el

Ejemplo 3, como la resistencia de radiación de un dipolo corto es comparable en magnitud a la de su resistencia de pérdidas $R_{pérdida}$, su eficiencia de radiación ξ es mínima. Para el dipolo de 4 cm de largo del Ejemplo 3, $R_{rad} = 0.08 \Omega$ (a 75MHz) y $R_{pérdida} = 0.036 \Omega$. Si la frecuencia se mantiene igual y se incrementa la longitud del dipolo a 2m ($\lambda = 4$ con 75MHz), R_{rad} se vuelve 73Ω y $R_{pérdida}$ se incrementa a 1.8Ω .

La eficiencia de radiación se incrementa de 69% para el dipolo corto a 98% para el dipolo de media onda. Más significativo es el hecho de que resulta prácticamente imposible acoplar una línea de transmisión a una antena con una resistencia del orden de 0.1Ω , en tanto que es bastante fácil hacerlo cuando $R_{rad} = 73 \Omega$.

Otra interesante característica del dipolo de media onda tiene que ver con su reactancia. Vista por una línea de transmisión, una antena puede estar representada por una **impedancia de entrada** conectada a la línea en las terminales de la antena.

La impedancia de entrada Z_{ent} se compone de una parte real R_{ent} y una parte imaginaria X_{ent} : $Z_{ent} = R_{ent} + jX_{ent}$, donde R_{ent} es la suma de la resistencia de radiación R_{rad} y la resistencia de pérdida $R_{pérdida}$, $R_{ent} = R_{rad} + R_{pérdida}$. Para el dipolo de media onda, $R_{pérdida}$ es mucho más pequeña que R_{rad} y puede omitirse. Por consiguiente, $Z_{ent} \cong R_{rad} + jX_{ent}$. La obtención de una expresión para X_{ent} en el caso del dipolo de media onda es bastante compleja. Sin embargo, es necesario señalar que X_{ent} depende fuertemente de l/λ y se reduce de 42Ω con $l/\lambda = 0.5$ a cero con

$l/\lambda = 0.48$, mientras que R_{rad} permanece aproximadamente igual. Por consiguiente, si la longitud del dipolo de media onda se reduce en un 4%, Z_{ent} se vuelve puramente real e igual a 73Ω , con lo cual es posible acoplar el dipolo a una línea de transmisión de 75Ω sin utilizar una red de acoplamiento.

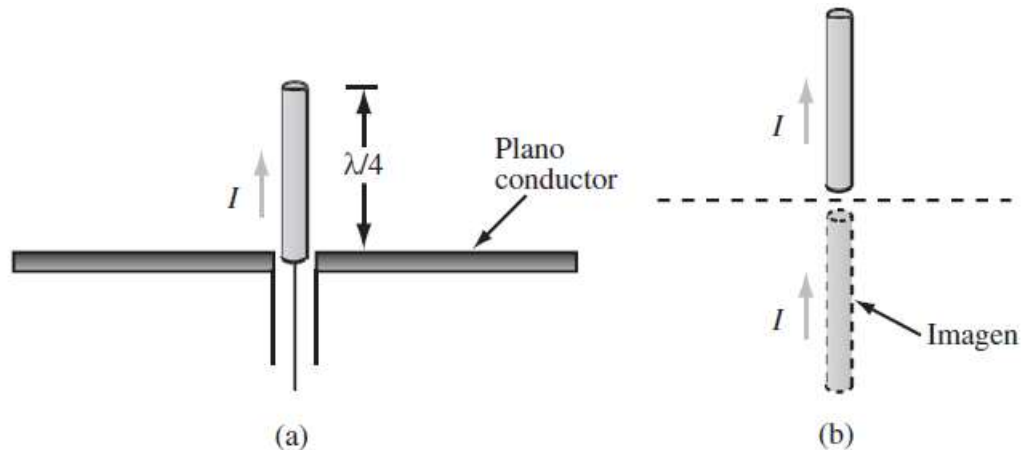


Figura 4.13: Un monopolo de cuarto de onda sobre un plano conductor equivale a un dipolo de media onda en el espacio libre.

Cuando una antena monopolo de cuarto de onda excitada por una fuente en su base [figura 4.13 (a)] se coloca sobre un plano de tierra conductor exhibe el mismo patrón de radiación en la región sobre el plano de tierra que un dipolo de media onda en el espacio libre. Esto es porque, según la teoría de imágenes, el plano conductor puede reemplazarse con la imagen del monopolo $\lambda/4$, como se ilustra en la figura 4.13 (b). Por lo tanto, el monopolo de $\lambda/4$ radiará un campo eléctrico y su intensidad de radiación normalizada serán idénticos a los del dipolo $\lambda/2$; pero la radiación está limitada a la mitad superior del espacio definido por $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Por eso, un monopolo irradia solo la mitad de potencia que el dipolo. Por consiguiente, para un monopolo $\lambda/4$, $P_{rad} = 18.3I_0^2$ y su resistencia de radiación $R_{rad} = 36.5\Omega$. El método utilizado para el monopolo de cuarto de onda también es válido para cualquier antena vertical colocada sobre el plano conductor, incluido un monopolo hertziano.

Se han examinado las propiedades de radiación del dipolo hertziano corto y el dipolo de media onda. Ahora se considerará el caso más general de un dipolo lineal de cualquier longitud arbitraria l , como se muestra en la figura 4.14, las corrientes que fluyen a través de sus dos mitades son simétricas y deben reducirse a cero en sus

extremos. Por consiguiente, el fasor de corriente $\tilde{I}(z)$ se expresa como una función seno con un argumento que se reduce a cero con $z = \pm l/2$:

$$\tilde{I}(z) = \begin{cases} I_0 \sin[k(l/2 - z)], & \text{con } 0 \leq z \leq l/2, \\ I_0 \sin[k(l/2 + z)], & \text{con } -l/2 \leq z < 0. \end{cases}$$

donde I_0 es la amplitud de la corriente.

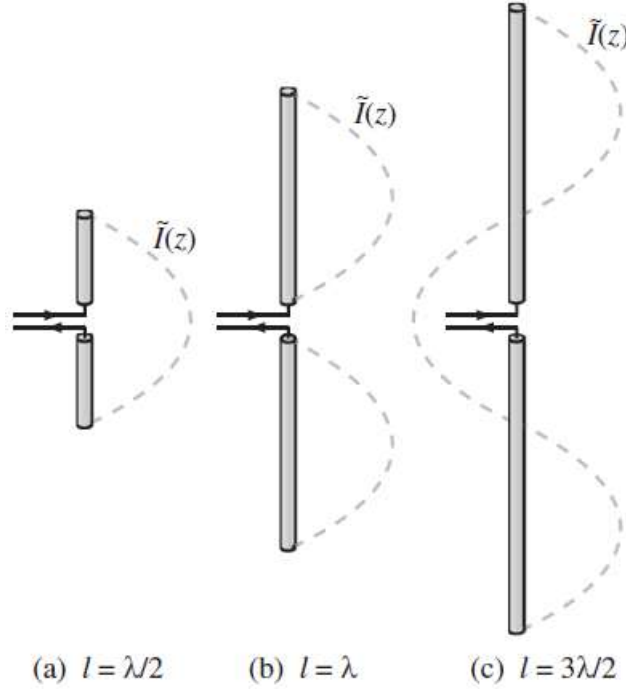


Figura 4.14: Distribución de corriente para tres dipolos con alimentación central.

El procedimiento para calcular los campos eléctrico y magnético y la densidad de potencia asociada de la onda radiada por semejante antena es básicamente la misma que la que se utilizó antes en relación con la antena dipolo de media onda. La única diferencia es la distribución de corriente $\tilde{I}(z)$. Si se inserta la última expresión para $\tilde{I}(z)$ en la expresión para el campo eléctrico diferencial $d\tilde{E}_\theta$ de la onda radiada por una longitud elemental dz en la ubicación z a lo largo del dipolo:

$$d\tilde{E}_\theta = \frac{jk\eta_0 I_0}{4\pi} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) \sin\theta e^{jkz\cos\theta} dz \times \begin{cases} \sin[k(l/2 - z)], & \text{con } 0 \leq z \leq l/2, \\ \sin[k(l/2 + z)], & \text{con } -l/2 \leq z < 0. \end{cases}$$

El campo total radiado por el dipolo es $\tilde{E}_\theta = j60I_0 \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin\theta} \right]$.

La densidad de potencia promedio con respecto al tiempo correspondiente radiada por la antena dipolo se determina mediante

$$S(\theta) = \frac{|\tilde{E}_\theta|^2}{2\eta_0} = \frac{15I_0^2}{\pi R^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi l}{\lambda}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)}{\sin\theta} \right]^2$$

4.4. Análisis de otros tipos de antena especiales.

En los últimos subtemas se han examinado las características de radiación de antenas considerándolas como radiadores de energía suministrada por una fuente. Ahora se considerará el proceso inverso, es decir, cómo una antena receptora extrae energía de una onda incidente y la suministra a una carga. La capacidad de una antena de capturar energía proveniente de una onda incidente de densidad de potencia S_i (W/m^2) y de convertirla en una **potencia interceptada** P_{int} (W) para suministrarla a una carga acoplada se caracteriza por el **área efectiva** A_e :

$$A_e = \frac{P_{\text{int}}}{S_i} (m^2).$$

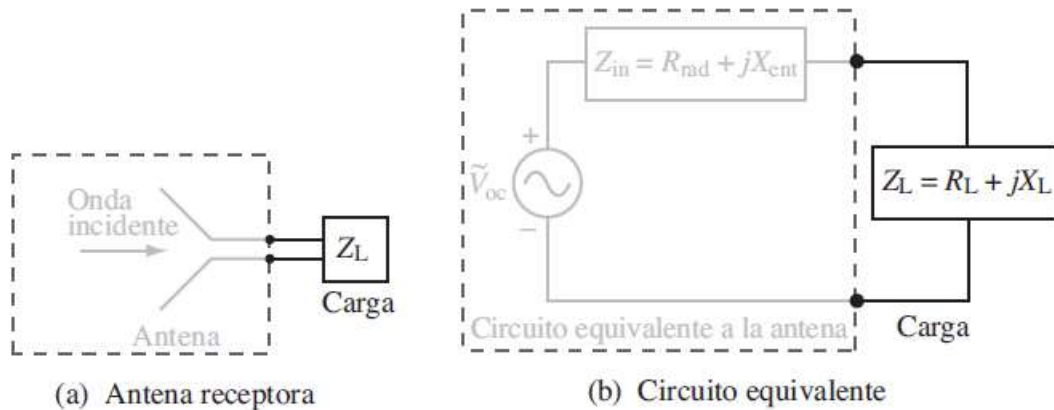


Figura 4.15: Antena receptora representada por un circuito equivalente.

Otros nombres comúnmente utilizados para A_e incluyen **apertura efectiva** y **sección transversal receptora**. El proceso de recepción de la antena puede modelarse en la forma de un circuito equivalente de Thévenin, como se muestra en la figura 4.15 (b),

donde $\tilde{V}_{oc}$ es el fasor de voltaje de circuito abierto (*open-circuit*) inducido en la antena receptora por la onda incidente, Z_{in} es la impedancia de la antena y Z_L es la impedancia de carga para la cual está pensada la potencia recibida. En general, tanto Z_{in} como Z_L son complejas $Z_{in} = R_{rad} + jX_{ent}$, $Z_L = R_L + jX_L$, donde R_{rad} denota la resistencia de radiación de la antena y se supone que su resistencia de pérdida es mucho menor que R_{rad} , por lo que se ignora. Para una transferencia de potencia máxima, la impedancia de carga debe elegirse de manera que

$Z_L = Z_{in}^*$, o $R_L = R_{rad}$ y $X_L = -X_{ent}$, en cuyo caso el circuito se reduce a una fuente $\tilde{V}_{oc}$ conectada entre los extremos de una resistencia igual a $2R_{rad}$. Como $\tilde{V}_{oc}$ es un fasor de voltaje sinusoidal, la potencia promedio suministrada a la carga con respecto al

tiempo es $P_L = \frac{1}{2} |\tilde{I}_L|^2 R_{rad} = \frac{1}{2} \left[\frac{|\tilde{V}_{oc}|}{2R_{rad}} \right]^2 R_{rad} = \frac{|\tilde{V}_{oc}|^2}{8R_{rad}}$, donde $\tilde{I}_L = \tilde{V}_{oc} / (2R_{rad})$ es la

corriente fasorial que fluye a través del circuito. Como la antena no presenta pérdidas, toda la potencia interceptada P_{int} termina en la resistencia de carga R_L . Por

consiguiente, $P_{int} = P_L = \frac{|\tilde{V}_{oc}|^2}{8R_{rad}}$.

Para una onda incidente con campo eléctrico $\tilde{E}_i$, paralelo a la dirección de polarización de la antena, la densidad de potencia que transporta la onda es

$S_i = \frac{|\tilde{E}_i|^2}{2\eta_0} = \frac{|\tilde{E}_i|^2}{240\pi}$. La razón de los resultados de las dos últimas ecuaciones da

$A_e = \frac{P_{int}}{S_i} = \frac{30\pi |\tilde{V}_{oc}|^2}{R_{rad} |\tilde{E}_i|^2}$. El voltaje de circuito abierto $\tilde{V}_{oc}$ inducido en la antena receptora

se debe al campo incidente $\tilde{E}_i$, pero la relación entre ellos depende de la antena específica considerada.

Como ilustración, considere el caso de la antena dipolo corto. Como la longitud l del dipolo corto es pequeña comparada con λ , la corriente inducida por el campo incidente será uniforme a través de su longitud y el voltaje de circuito abierto simplemente será $\tilde{V}_{oc} = \tilde{E}_i l$. Observando que $R_{rad} = 80\pi^2 (l/\lambda)^2$ para el dipolo corto y utilizando $\tilde{V}_{oc} = \tilde{E}_i l$, la ecuación anterior se simplifica como $A_e = \frac{3\lambda^2}{8\pi} (m^2)$ (dipolo corto).

En el Ejemplo 2 se encontró que para el dipolo corto, la directividad $D = 1.5$. En función de D , A_e la podemos expresar como $A_e = \frac{\lambda^2 D}{4\pi} (m^2)$ (cualquier antena). A pesar del hecho de que la relación entre A_e y D expresada en la última ecuación se obtuvo para un dipolo corto, es posible demostrar que también es válida *para cualquier antena* en condiciones de impedancia acoplada.

EJEMPLO 4: El circuito de la figura 4.15 (b) consiste en un generador compuesto de un fasor de voltaje $\tilde{V}_{oc}$ y una impedancia interna Z_{in} conectada a una carga Z_L . Si $Z_{in} = R_{rad} + jX_{ent}$, $Z_L = R_L + jX_L$, ¿Qué valores de R_L y X_L dan la transferencia máxima de potencia del generador a la carga?

El fasor de la corriente que fluye a través del circuito es

$$\tilde{I}_L = \frac{\tilde{V}_{oc}}{Z_{in} + Z_L} = \frac{\tilde{V}_{oc}}{(R_{rad} + R_L) + j(X_{ent} + X_L)}, \text{ y la potencia promedio con respecto al}$$

tiempo disipada en la resistencia de la carga R_L es

$$P_L = \frac{1}{2} |\tilde{I}_L|^2 R_L = \frac{1}{2} |\tilde{V}_{oc}|^2 \frac{R_L}{(R_{rad} + R_L)^2 + (X_{ent} + X_L)^2}. \text{ La tarea es especificar los}$$

parámetros de la carga, R_L y X_L , que incrementen al máximo P_L . Esto se logra diferenciando la expresión para P_L con respecto a R_L , igualándola a cero y luego repitiendo el proceso con respecto a X_L . El resultado es $Z_L = Z_{in}^*$.

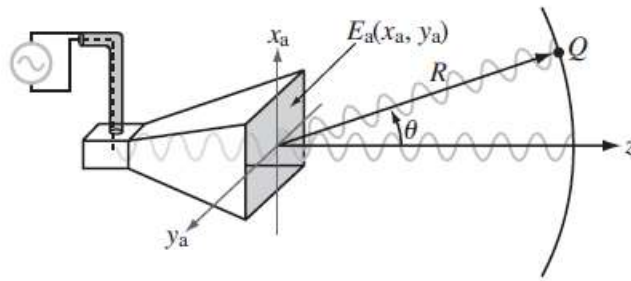


Figura 4.16: Una antena de bocina con distribución de campo $E_a(x_a, y_a)$ en la apertura.

Para antenas de alambre, las fuentes de radiación son los elementos de corriente infinitesimales que comprenden la distribución de corriente a lo largo del alambre, y el campo radiado total en un punto dado del espacio es igual a la suma, o integral, de los campos radiados por todos los elementos. Un arreglo paralelo se aplica a las antenas de apertura, excepto que ahora la fuente de radiación es la distribución de

campo eléctrico a través de la apertura. Considere la antena en forma de bocina mostrada en la figura 4.16 –que está conectada a una fuente por medio de una línea de transmisión coaxial--, con el conductor externo de la línea coaxial conectado al cuerpo metálico de la bocina y el conductor interno que sale a través de un pequeño agujero, parcialmente hacia la garganta de la bocina. El conductor saliente actúa como antena monopolo, que genera ondas que irradian hacia fuera de la bocina a través de su apertura. El campo eléctrico de la energía que llega a la apertura, que puede variar como una función de x_a y y_a a través de la apertura de la bocina, se conoce como distribución a través de una apertura del campo eléctrico, $E_a(x_a, y_a)$. En el interior de la bocina, la propagación de las ondas es guiada por su geometría; pero conforme las ondas cambian de guiadas a ondas sin fronteras, cada punto de su frente sirve como fuente de ondas secundarias esféricas. La apertura entonces puede representarse como una distribución de radiadores isotrópicos, cada uno con una intensidad proporcional al campo eléctrico $E_a(x_a, y_a)$ en su ubicación (x_a, y_a) . En un punto distante Q , la combinación de todas las ondas que llegan desde todos estos radiadores constituye la onda total que observaría un receptor colocado en ese punto. El proceso de radiación descrito para la antena de bocina es igualmente aplicable a cualquier apertura en la cual incide una onda electromagnética.

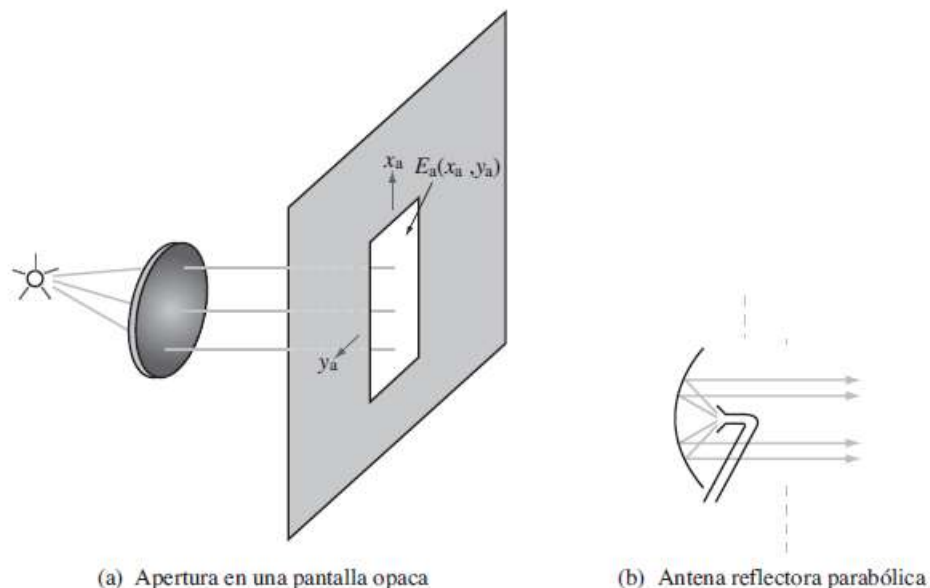


Figura 4.17: Radiación por aperturas: *a*) una apertura en una pantalla opaca iluminada por una fuente luminosa a través lentes colimadores y *b*) un reflector de plato parabólico iluminado por una pequeña antena de bocina.

Si se emplea una fuente luminosa para iluminar una apertura en una pantalla opaca mediante lentes colimadores, como lo muestra la figura 4.17 (a), la apertura se

transforma en una fuente de ondas esféricas secundarias, en gran parte como la apertura de una antena de bocina. En el caso del reflector parabólico mostrado en la figura 4.17 (b), puede describirse en función de una apertura imaginaria que representa las distribuciones de campo eléctrico a través de un plano en frente del reflector. El método que emplearemos es conocido como de difracción escalar, en parte por su inherente simplicidad y también porque es aplicable a una amplia variedad de casos prácticos. *El requerimiento clave para la validez de la formulación escalar es que la apertura de antena sea por lo menos de varias longitudes de onda de largo en sus dimensiones principales.*

Una característica distintiva de una antena así es su alta directividad y su correspondiente haz angosto, lo que la hace atractiva para sistemas de radar y sistemas de comunicaciones de microondas en el espacio libre. El intervalo de frecuencia comúnmente empleado en estas aplicaciones es la banda de microondas de 1 a 30 GHz. Como el intervalo de longitud de onda correspondiente es de 30 a 1 cm, respectivamente, es bastante práctico construir y utilizar antenas (en este intervalo de frecuencia) con dimensiones de apertura de muchas longitudes de onda.

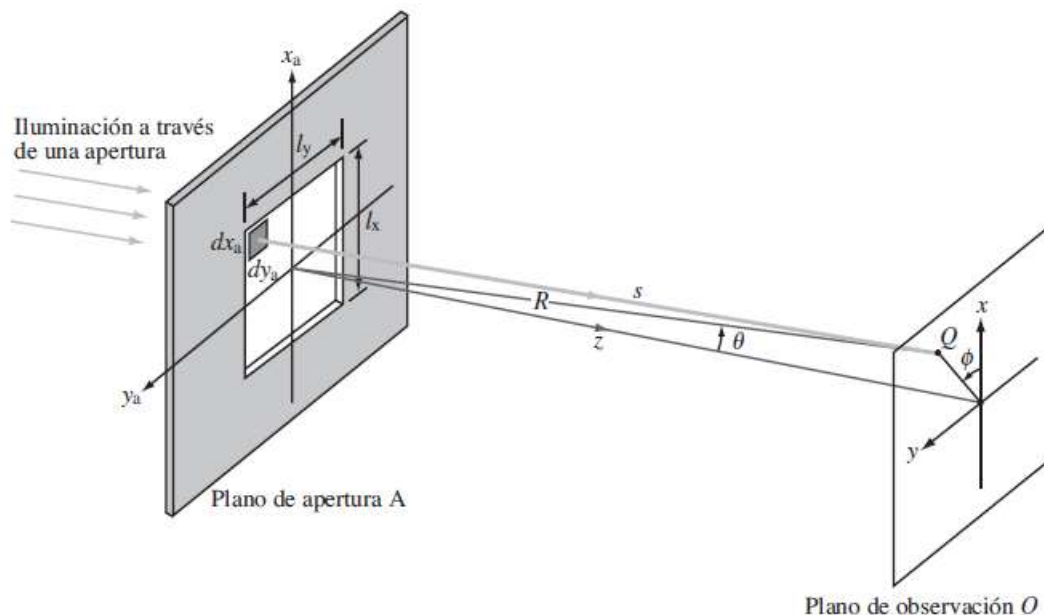


Figura 4.18: Radiación por medio de una apertura en el plano $x_a - y_a$ en $z = 0$.

El plano $x_a - y_a$ en la figura 4.18, denotado plano A , contiene una apertura con una distribución de campo eléctrico $E_a(x_a, y_a)$, casi siempre llamada **iluminación de apertura**. Por conveniencia, la apertura se eligió de forma rectangular con dimensiones l_x a lo largo de x_a y l_y a lo largo de y_a , aun cuando la formulación a

punto de explicarse en general es suficiente para acomodar cualquier distribución de apertura bidimensional, incluidas las asociadas con aperturas circulares y elípticas. A una distancia z del plano A de la apertura, hay un plano de observación O con ejes (x, y) .

Los dos planos tienen ejes paralelos y están separados por una distancia z que es suficientemente grande de manera que cualquier punto Q en el plano de observación se encuentra en la región de campo lejano de la apertura. Para satisfacer la condición de campo lejano, es necesario que $R \geq 2d^2/\lambda$, donde d es la dimensión lineal más larga de la apertura de radiación. La posición del punto Q de observación está especificada por el alcance R entre el centro de la apertura y el punto Q , así como por los ángulos θ y ϕ indicados en la figura 4.18, los que juntos definen la dirección del punto de observación con respecto al sistema de coordenadas de la apertura. El fasor de campo eléctrico de la onda que incide en el punto Q esta denotado por $\tilde{E}(R, \theta, \phi)$. La teoría de difracción escalar de Kirchhoff da la siguiente relación entre el campo radiado $\tilde{E}(R, \theta, \phi)$ y la iluminación de apertura $\tilde{E}_a(x_a, y_a)$:

$$\tilde{E}(R, \theta, \phi) = \frac{j}{\lambda} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) \tilde{h}(\theta, \phi), \text{ donde}$$

$$\tilde{h}(\theta, \phi) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_a(x_a, y_a) \exp[jk \sin \theta (x_a \cos \phi + y_a \sin \phi)] dx_a dy_a.$$

A $\tilde{h}(\theta, \phi)$ se le conoce como **factor de forma** de $\tilde{E}(R, \theta, \phi)$. Su integral se escribe con límites infinitos, en el entendido de que $\tilde{E}_a(x_a, y_a)$ es idénticamente cero afuera de la apertura. El factor de propagación esférica (e^{-jkR}/R) explica la propagación de onda entre el centro de la apertura y el punto de observación y $\tilde{h}(\theta, \phi)$ representa una integración del campo de excitación $\tilde{E}_a(x_a, y_a)$ a lo largo de la apertura, teniendo en cuenta la desviación aproximada de la distancia entre R y s , donde s es la distancia a cualquier punto (x_a, y_a) en el plano de la apertura[ver figura 4.18]. La *dirección de polarización de campo radiado* $\tilde{E}(R, \theta, \phi)$. es la misma que la del campo de apertura $\tilde{E}_a(x_a, y_a)$, y la densidad de potencia de la onda radiada es

$$S(R, \theta, \phi) = \frac{|\tilde{E}(R, \theta, \phi)|^2}{2\eta_0} = \frac{|\tilde{h}(\theta, \phi)|^2}{2\eta_0 \lambda^2 R^2}.$$

Considere una apertura rectangular de altura l_x y ancho l_y , con ambas dimensiones de por lo menos unas cuantas longitudes de onda de largo. La apertura se excita por medio de una distribución de campo uniforme que se determina como

$$\tilde{E}_a(x_a, y_a) = \begin{cases} E_0, & \text{para } -l_x/2 \leq x_a \leq l_x/2 \text{ y } -l_y/2 \leq y_a \leq l_y/2, \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Un patrón de radiación a un alcance fijo R en el plano $x-z$, correspondiente a $\phi = 0$, simplifica el problema, resultando que:

$$\tilde{h}(\theta) = \frac{2E_0 l_y}{2\pi \sin \theta} \sin(\pi l_x \sin \theta / \lambda) = E_0 l_x l_y \frac{\sin(\pi l_x \sin \theta / \lambda)}{\pi l_x \sin \theta / \lambda} = E_0 A_p \text{sinc}(\pi l_x \sin \theta / \lambda), \text{ donde}$$

$A_p = l_x l_y$ es el área física de la apertura y donde se utilizó la definición estándar de la función sinc, la que, con cualquier argumento t , se define como $\text{sinc } t = \frac{\sin t}{t}$.

Empleando $S(R, \theta, \phi) = \frac{|\tilde{E}(R, \theta, \phi)|^2}{2\eta_0} = \frac{|\tilde{h}(\theta, \phi)|^2}{2\eta_0 \lambda^2 R^2}$, se obtiene la expresión para la

densidad de potencia de la onda radiada en el punto de observación:

$S(R, \theta) = S_0 \text{sinc}^2(\pi l_x \sin \theta / \lambda)$ (plano $x-y$), donde $S_0 = E_0^2 A_p^2 / (2\eta_0 \lambda^2 R^2)$. La función sinc alcanza su valor máximo cuando su argumento es igual a cero y su valor es igual a la unidad. Por lo tanto, a una distancia R fija, $S_{\text{máx}} = S(\theta = 0) = S_0$. La intensidad de radiación normalizada se determina entonces mediante

$$F(\theta) = \frac{S(R, \theta)}{S_{\text{máx}}} = \text{sinc}^2(\pi l_x \sin \theta / \lambda) = \text{sinc}^2(\pi \gamma) \text{ (plano } x-y), \text{ y se trazó (en una escala}$$

de dB) en la figura 4.19, como una función de la variable intermedia $\gamma = (l_x / \lambda) \sin \theta$. El patrón exhibe nulos con valores enteros no cero de γ .

La intensidad de radiación normalizada $F(\theta)$ es simétrica en el plano $x-z$ y su valor máximo ocurre a lo largo de la dirección del eje óptico de la antena ($\theta = 0$ en este caso). Su ancho de haz a media potencia $\beta_{xz} = \theta_2 - \theta_1$, donde θ_1 y θ_2 son los valores de θ con los cuales $F(\theta, 0) = 0.5$ (o -3dB en una escala de decibeles), como se muestra en la figura 4.19. Como el patrón es simétrico con respecto a $\theta = 0$, $\theta_1 = -\theta_2$ y $\beta_{xz} = 2\theta_2$. El ángulo θ_2 se obtiene a partir de la solución de

$$F(\theta_2) = \text{sinc}^2(\pi l_x \sin \theta / \lambda) = 0.5. \text{ Esta ecuación se satisface con } \sin \theta_2 = 0.44 \frac{\lambda}{l_x}. \text{ Como}$$

$\lambda/l_x \ll 1$ (una condición fundamental de la teoría de difracción escalar es que las dimensiones de la apertura sean mucho más grandes que la longitud de onda λ), θ_2 es un ángulo pequeño, en cuyo caso se utiliza la aproximación $\sin \theta_2 \approx \theta_2$. Por consiguiente, $\beta_{xz} = 2\theta_2 \approx 2 \sin \theta_2 = 0.88 \frac{\lambda}{l_x} (\text{rad})$.

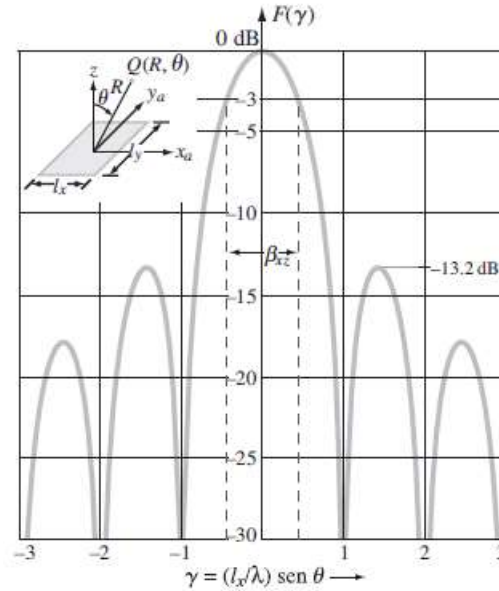


Figura 4.19: Patrón de radiación normalizado de una apertura rectangular uniformemente iluminada en el plano x - z ($\phi = 0$).

Una solución similar para el plano y - z ($\phi = \pi/2$) da $\beta_{yz} = 0.88 \frac{\lambda}{l_y} (\text{rad})$.

Algo importante es que la distribución de apertura uniforme $\tilde{E}_a = E_0$ a través de una apertura da un patrón de campo lejano con el ancho de haz más angosto posible. El primer nivel del lóbulo lateral está a 13.2 dB por debajo del valor pico [ver figura 4.19], que equivale al 4.8% del valor pico.

Si la aplicación que se pretende realizar demanda un patrón con un nivel de lóbulo lateral más bajo (para evitar la interferencia con las señales provenientes de fuentes a lo largo de direcciones afuera del haz principal del patrón de antena), esto se logra con una **distribución de apertura ahusada**, que presenta un máximo en el centro de la apertura y disminuye hacia los bordes. Una distribución ahusada da un patrón con lóbulos laterales más bajos, pero el principal se ensancha. Cuanto mayor es el ahusamiento, más bajos son los lóbulos laterales y más ancho es el lóbulo principal. En general, el ancho del haz en un plano dado, por ejemplo el plano x - z , se

determina como $\beta_{xz} = k_x \frac{\lambda}{l_x}$, donde k_x es una constante relacionada con la inclinación del ahusamiento, sin ahusamiento $k_x = 0.88$, y para una distribución sumamente ahusada, $k_x \approx 2$. En el caso típico, $k_x \approx 1$. Para ilustrar la relación entre las dimensiones de la antena y la forma del haz correspondiente, en la figura 4.20 se muestran los patrones de radiación de un reflector circular y un reflector cilíndrico.

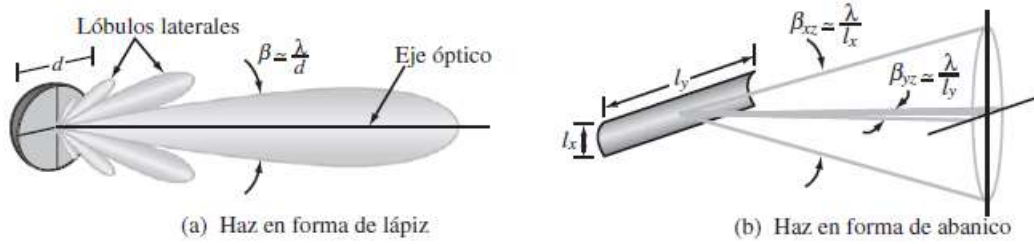


Figura 4.20: Patrones de radiación de *a*) un reflector circular y *b*) un reflector cilíndrico (lóbulos laterales no mostrados).

El reflector circular tiene un patrón circularmente simétrico, en tanto que el de un reflector cilíndrico tiene un haz angosto en el plano azimutal correspondiente a su dimensión larga y un haz ancho en el plano de elevación correspondiendo a su dimensión angosta. Para un patrón de antena circularmente simétrico, el ancho del haz β está relacionado con el diámetro d por medio de la relación aproximada $\beta \approx \lambda/d$.

Conocemos una expresión aproximada para la directividad de la antena D en función de los anchos del haz a media potencia β_{xz} y β_{yz} para antenas caracterizadas por un solo lóbulo mayor cuyo eje óptico se encuentra a lo largo de la dirección z :

$$D \approx \frac{4\pi}{\beta_{xz}\beta_{yz}}. \text{ Empleando las relaciones aproximadas } \beta_{xz} \approx \lambda/l_x \text{ y } \beta_{yz} \approx \lambda/l_y, \text{ se tiene}$$

$$D \approx \frac{4\pi l_x l_y}{\lambda^2} = \frac{4\pi A_p}{\lambda^2}. \text{ Para cualquier antena, su directividad está relacionada con su}$$

área efectiva A_e mediante $D = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2}$. Por consiguiente, *para antenas de apertura, sus aperturas efectivas son aproximadamente iguales a sus aperturas físicas; es decir, $A_e \approx A_p$.*

4.5. Adaptación de antenas.

Para que la teoría de ANTENAS se cumpla a cabalidad, es necesario que **antena esté adecuadamente acoplada a la línea de transmisión conectada sus terminales**, con lo que se evitan las reflexiones y sus problemas asociados.

En la **sección 4.3** se mostró que para un dipolo de onda de $\lambda/2$ su $R_{rad} = 73\Omega$. Sin embargo, la obtención de una expresión para X_{ent} en el caso del dipolo de media onda es bastante compleja. Pero tomando en cuenta que X_{ent} depende fuertemente de l/λ y se reduce de 42Ω con $l/\lambda = 0.5$, a cero con $l/\lambda = 0.48$, mientras que R_{rad} permanece aproximadamente igual. Por consiguiente, si la longitud del dipolo de media onda se reduce en un 4%, Z_{ent} se vuelve puramente real e igual a 73Ω , con lo cual es posible acoplar el dipolo a una línea de transmisión de 75Ω sin utilizar una red de acoplamiento.

También, como lo expone [3] p 629: “La fórmula de transmisión de Friis (que es el tema de la próxima **sección 4.7**) caracteriza el acoplamiento entre dos antenas en términos de sus ganancias de directividad, distancia de separación, y frecuencia de operación”, implicando con esto modificar alguna o algunas de las variables involucradas con el ánimo de obtenerlos resultados deseados.

4.6. Arreglos de antena.

Según [1] p 403: Los servicios de radiodifusión de AM operan en la banda de 535 a 1605 kHz. Las antenas que utilizan son básicamente dipolos verticales montados a lo largo de altas torres. La altura de las antenas varía de $\lambda/6$ a $5\lambda/8$, según las características de operación deseadas y otras consideraciones. Sus alturas físicas varían de 46m (150 pies) a 274m (900 pies); la longitud de onda a 1MHz, aproximadamente a la mitad de la banda de AM, es de 300m. Como el campo radiado por un dipolo simple es uniforme en el plano horizontal, es necesario utilizar más de una torre de antena para dirigir el patrón de antena horizontal a lo largo de las direcciones de interés (como una ciudad) y para reducirlo al mínimo a lo largo de direcciones de baja densidad de población o en una dirección correspondiente a un área a la que sirve otra estación con la misma frecuencia (para evitar efectos de interferencia indeseables). Cuando dos o más antenas se utilizan juntas, la combinación se llama **arreglos de antenas**. El arreglo de antenas de radiodifusión de AM es solo un ejemplo de aplicación de los arreglos; se utilizan extensamente en numerosos sistemas de comunicación y también en aplicaciones de radar. Los arreglos de antenas permiten al diseñador la flexibilidad de obtener una alta directividad, haces angostos, bajos lóbulos laterales, haces dirigibles y patrones de

antena conformados. Aun cuando un arreglo no tiene que estar compuesto de elementos radiadores similares, la mayoría de ellos casi siempre utilizan elementos idénticos, tales como dipolos, ranuras, antenas de bocina o platos parabólicos, excitados por el mismo tipo de corriente o distribución de campo. Los elementos de antena que constituyen un arreglo pueden estar dispuestos en varias configuraciones, pero la más común es la configuración lineal unidimensional, en donde los elementos se acomodan a lo largo de una línea recta, y la configuración reticulada bidimensional, en donde los elementos forman una retícula rectangular. La forma deseada del patrón de radiación de campo lejano del arreglo puede sintetizarse controlando las amplitudes relativas de los elementos del arreglo.

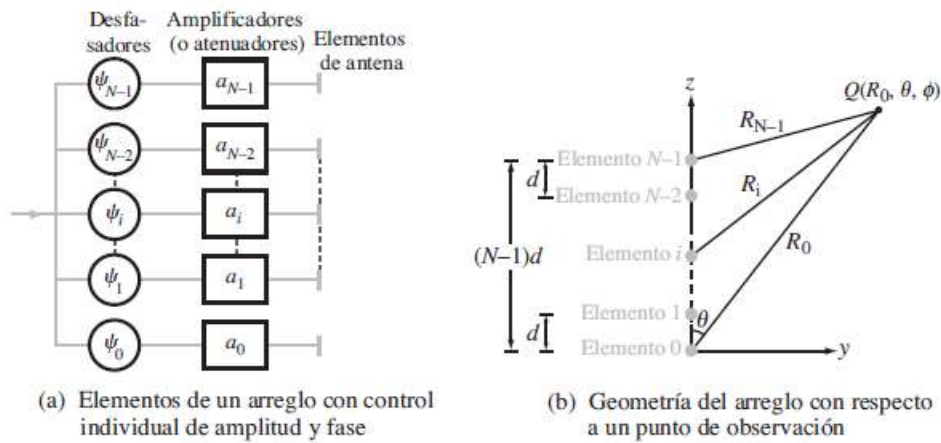


Figura 4.21: Configuración y geometría de un arreglo lineal.

Los radiadores son alimentados por un oscilador común mediante una red de ramales. En cada rama, un atenuador (o amplificador) y un desfasador están insertados en serie para controlar la amplitud y la fase de la señal que alimenta al elemento de antena en esa rama. En la región de campo lejano de cualquier elemento radiador, la intensidad del campo eléctrico fasorial $\tilde{E}_e(R, \theta, \phi)$ se expresa como el producto de dos funciones, el factor de propagación esférica e^{-jkR}/R , que se ocupa de la dependencia en el alcance R y $\tilde{f}_e(\theta, \phi)$, que se ocupa de la dependencia direccional del campo eléctrico del elemento. Por lo tanto, para un elemento aislado,

el campo radiado es $\tilde{E}_e(R, \theta, \phi) = \frac{e^{-jkR}}{R} \tilde{f}_e(\theta, \phi)$, y la densidad de potencia

correspondiente S_e es $S_e(R, \theta, \phi) = \frac{1}{2\eta_0} |\tilde{E}_e(R, \theta, \phi)|^2 = \frac{1}{2\eta_0 R^2} |\tilde{f}_e(\theta, \phi)|^2$.

Los elementos del arreglo mostrado en la figura 4.21 (a), el campo de zona lejana originado por el elemento i a una distancia R_i del punto de observación Q se expresa

entonces en la forma $\tilde{E}_i(R_i, \theta, \phi) = A_i \frac{e^{-jkR_i}}{R_i} \tilde{f}_e(\theta, \phi)$, donde $A_i = a_i e^{j\psi_i}$ es un

coeficiente de alimentación complejo que representa la amplitud a_i y la fase ψ_i de la excitación que origina a $\tilde{E}_i$, con respecto a una excitación de referencia.

En la práctica, la excitación de uno de los elementos se utiliza como referencia.

Observe que R_i y A_i pueden ser diferentes para los distintos elementos que

constituyen el arreglo, pero $\tilde{f}_e(\theta, \phi)$ es la misma para todos los elementos puesto que se suponen idénticos y por ende, exhiben patrones direccionales idénticos. El campo total en el punto de observación $Q(R, \theta, \phi)$ es la suma de los campos

producidos por los N elementos: $\tilde{E}(R_0, \theta, \phi) = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{E}_i(R_i, \theta, \phi) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} A_i \frac{e^{-jkR_i}}{R_i} \right] \tilde{f}_e(\theta, \phi)$,

donde R_0 denota el alcance de Q a partir del centro del sistema de coordenadas, que coincide con la ubicación del elemento cero.

Con el fin de satisfacer la condición de campo lejano de la ecuación $R \geq 2d^2/\lambda$, para un arreglo de longitud $l = (N-1)d$, donde d es la separación entre elementos, el alcance R_0 deberá ser suficientemente grande de manera que

$R_0 \geq \frac{2l^2}{\lambda} = \frac{2(N-1)^2 d^2}{\lambda}$. Esta condición permite ignorar las diferencias en las

distancias de Q a los elementos individuales por lo que se refiere a la magnitud del campo radiado. Por lo tanto, se establece $R_i = R_0$ en el denominador la última

expresión para $\tilde{E}(R_0, \theta, \phi)$ cambiando R_i por R_0 . Por lo que se refiere a la parte que tiene que ver con la fase del factor de propagación, se utiliza la aproximación del rayo paralelo $R_i \simeq R_0 - z_i \cos \theta = R_0 - id \cos \theta$, donde $z_i = id$ es la distancia entre el elemento i -ésimo y el elemento cero [figura 4.22].

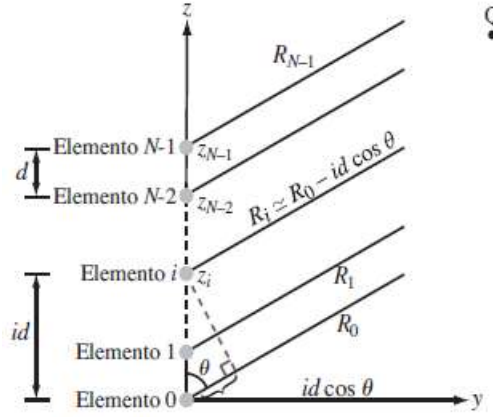


Figura 4.22: Los rayos entre los elementos y un punto de observación alejado son aproximadamente líneas paralelas. Por consiguiente, la distancia $R_i \approx R_0 - id \cos \theta$.

Si se emplean estas dos aproximaciones en la ecuación anteriormente referida se

tiene $\tilde{E}(R_0, \theta, \phi) = \tilde{f}_e(\theta, \phi) \left(\frac{e^{-jkR_0}}{R_0} \right) \left[\sum_{i=0}^{N-1} A_i e^{jikd \cos \theta} \right]$, y la densidad de potencia del arreglo de antena direccional es

$$S(R_0, \theta, \phi) = \frac{1}{2\eta_0} |\tilde{E}(R_0, \theta, \phi)|^2 = \frac{1}{2\eta_0 R_0^2} |\tilde{f}_e(\theta, \phi)|^2 \left| \sum_{i=0}^{N-1} A_i e^{jikd \cos \theta} \right|^2$$

$$= S_e(R_0, \theta, \phi) \left| \sum_{i=0}^{N-1} A_i e^{jikd \cos \theta} \right|^2,$$

Esta expresión es un producto de dos factores. El primero, $S_e(R_0, \theta, \phi)$, es la densidad de potencia de la energía radiada por un elemento individual, y el segundo, por lo general llamado **factor de arreglo**, es una función de las posiciones de los elementos individuales y de sus coeficientes de alimentación, pero no del tipo específico de radiadores utilizados. *El factor de arreglo representa la intensidad de la radiación de campo lejano de los N elementos, si éstos hubieran sido radiadores isotrópicos.*

Denotando el factor de arreglo por $F_a(\theta) = \left| \sum_{i=0}^{N-1} A_i e^{jikd \cos \theta} \right|^2$, y la densidad de potencia

como $S(R_0, \theta, \phi) = S_e(R_0, \theta, \phi) F_a(\theta)$, que es el **principio de multiplicación de patrón**.

El coeficiente de alimentación A_i es, en general, una amplitud compleja compuesta de un factor de amplitud a_i y un factor de fase ψ_i : $A_i = a_i e^{j\psi_i}$. Por lo que

$$F_a(\theta) = \left| \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{j\psi_i} e^{j i k d \cos \theta} \right|^2$$
. El factor del arreglo está regido por dos funciones de entrada: la **distribución de amplitud del arreglo** dado por las a_i y la **distribución de fase del arreglo** dado por las ψ_i . La distribución de amplitud sirve para controlar la forma del patrón de radiación del arreglo, mientras que la distribución de fase se utiliza para dirigir su dirección.

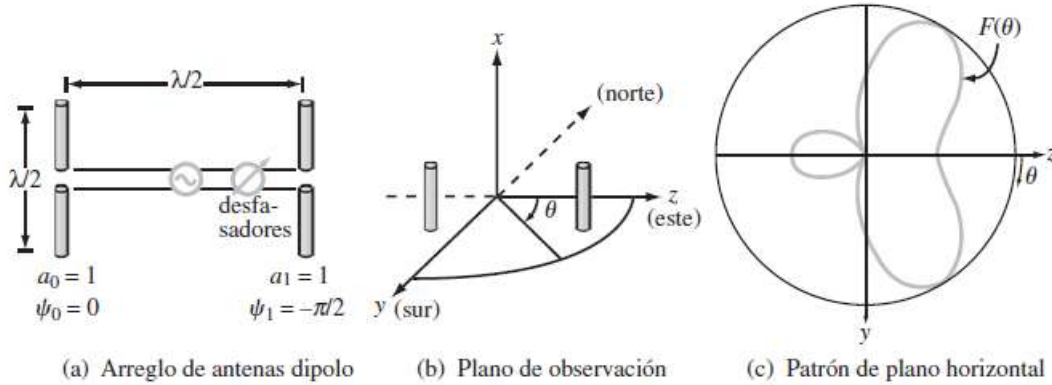


Figura 4.23: Arreglo de antenas dipolo de dos medias ondas de ejemplo.

EJEMPLO 5: Una estación de radio AM utiliza dos dipolos de media onda verticalmente orientados y separados por una distancia de $\lambda/2$, como se muestra en la figura 4.23 (a). El vector que va de la ubicación del primer dipolo a la ubicación del segundo dipolo apunta al este. Los dos dipolos se alimentan con excitaciones de igual amplitud y el dipolo más hacia el este se excita con un desplazamiento de fase de $-\pi/2$ con respecto al otro. Determine y trace el patrón del arreglo de antenas en el plano horizontal.

El factor de arreglo se obtuvo para radiadores dispuestos a lo largo del eje z . Para mantener igual el sistema de coordenadas, se elige la dirección hacia el este como eje z , [figura 4.23 (b)] y el primer dipolo se coloca en $z = -\lambda/4$ y el segundo en $z = \lambda/4$. El dipolo de media onda radia uniformemente en el plano perpendicular a su eje, el que en este caso es el plano horizontal. Por consiguiente, $S_e = S_0$ para todos los ángulos θ en la figura referida, donde S_0 es el valor máximo de la densidad de potencia radiada por cada dipolo individual. En consecuencia, la densidad de potencia radiada por el arreglo de dos dipolos es $S(R, \theta) = S_0 F_a(\theta)$. Para los dos elementos separados por $d = \lambda/2$ y excitados con amplitudes iguales ($a_0 = a_1 = 1$) y

con ángulos de fase $\psi_0 = 0$ y $\psi_1 = -\pi/2$, $F_a(\theta) = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta - \frac{\pi}{4} \right)$. Entonces, la densidad de potencia radiada por el arreglo de antenas es

$S(R, \theta) = S_0 F_a(\theta) = 4S_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta - \frac{\pi}{4} \right)$, tiene un valor máximo $S_{m\acute{a}x} = 4S_0$ y ocurre cuando $\theta = 60^\circ$. La intensidad de radiación normalizada

$F(\theta) = \frac{S(R, \theta)}{S_{m\acute{a}x}} = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta - \frac{\pi}{4} \right)$. El patrón de $F(\theta)$ se muestra en figura 4.23 (c).

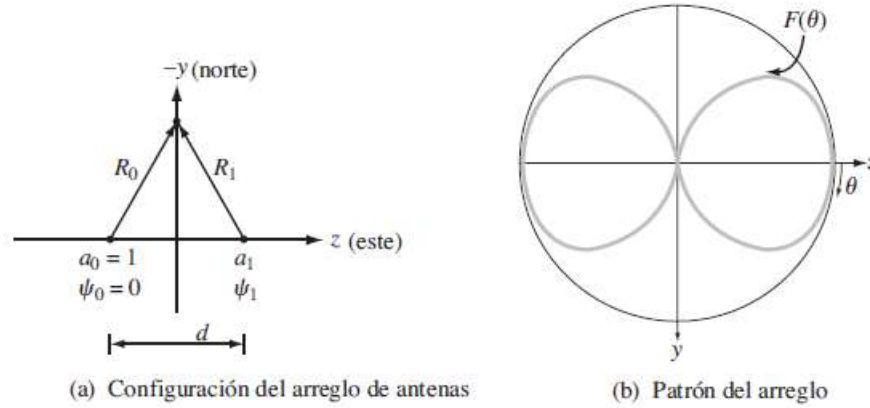


Figura 4.24: a) Dos dipolos verticales separados por una distancia d a lo largo del eje z ; b) patrón de arreglo de antenas normalizado en el plano y - z con $a_0 = a_1 = 1$, $\psi_1 = \psi_0 = -\pi$ y $d = \lambda/2$.

EJEMPLO 6: Dados dos dipolos verticales, como se ilustra en la figura 4.23 (b), especifique los parámetros que harán que el arreglo exhiba radiación máxima hacia el este y ninguna radiación hacia el norte o sur.

De acuerdo con el ejemplo anterior, se estableció que como cada dipolo radia por igual a lo largo de todas direcciones en el plano $y - z$, el patrón de radiación del arreglo de dos dipolos en ese plano está regido únicamente por el factor de arreglo $F_a(\theta)$. La forma del patrón del factor del arreglo depende de tres parámetros: la razón de amplitud a_1/a_0 , la diferencia de fase $\psi_1 - \psi_0$ y la separación d [en figura 4.23 (a)]. Por conveniencia, se elige $a_0 = 1$ y $\psi_0 = 0$. Así considerando la especificación que requiere que F_a sea igual a cero cuando $\theta = 90^\circ$ (direcciones norte y sur de la figura referida). Desde cualquier punto de observación sobre el eje y , los alcances R_0 y R_1 indicados en la figura referida son iguales, lo que significa que las fases de propagación asociadas con el tiempo de recorrido de las ondas radiadas por los dos en ese punto dipolos son idénticas. Así, para satisfacer la condición establecida, se

tiene que elegir $a_1 = a_0$ y $\psi_1 = \pm\pi$. Con estas opciones, las señales radiadas por los dos dipolos tendrán amplitudes iguales y fases opuestas, por lo que interferirán destructivamente. Esto se prueba evaluando el factor del arreglo con $\theta = 90^\circ$, $a_0 = a_1 = 1$ y $\psi_1 = \pm\pi$. Los dos valores de ψ_1 , π y $-\pi$ conducen a la misma solución para la separación d cuando se considera la especificación en el sentido de que el patrón de radiación deberá tener un máximo hacia el este, correspondiente a $\theta = 0^\circ$. Con $\psi_1 = -\pi$ y $\theta = 0^\circ$ y que $F_a(\theta = 0)$ sea máximo, se requiere que el ángulo de fase del segundo término sea cero o múltiplo de 2π y se logra con

$d = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ con $d = \lambda/2$, el factor del arreglo a cualquier ángulo θ se

determina mediante $F_a(\theta) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)$. Las direcciones a lo largo de las cuales

$F_a(\theta)$ es un máximo, son aquellas correspondientes a $\theta = 0^\circ$ (este) y $\theta = 180^\circ$ (oeste), como se muestra en la figura 4.24 (b).

Arreglo de N elementos con distribución de fase uniforme

Considere un arreglo de N elementos con igual separación d y excitaciones de fase iguales; es decir, $\psi_i = \psi_0$ para $i = 1, 2, \dots, N-1$. Tal arreglo de elementos en fase en ocasiones se conoce como **arreglo de radiación transversal al eje** porque el haz principal del patrón de radiación de su factor del arreglo siempre ocurre en la

dirección transversal al eje del arreglo. Partiendo de $F_a(\theta) = \left| \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{j\psi_i} e^{j i k d \cos \theta} \right|^2$ y

tomando en cuenta las condiciones impuestas, llegaremos a $F_a(\theta) = \left| \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{j i k d \cos \theta} \right|^2$.

La diferencia de fase entre los campos radiados por elementos adyacentes es

$\gamma = k d \cos \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta$. Empleando la ecuación para gama obtendremos las

expresiones para factor de arreglo con fase uniforme y la de con fase y amplitud uniformes.

$$F_a(\gamma) = \left| \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{j i \gamma} \right|^2 \quad (\text{fase uniforme}).$$

$$F_a(\gamma) = \frac{\sin^2(N\gamma/2)}{\sin^2(\gamma/2)} \quad (\text{fase y amplitud uniformes}).$$

Es posible demostrar que el valor máximo de $F_a(\gamma)$ ocurre con $\gamma = 0$ (o $\theta = \pi/2$) y es igual a N^2 . Por consiguiente, el factor del arreglo normalizado se determina mediante

$$F_{an}(\gamma) = \frac{F_a(\gamma)}{F_{a,m\acute{a}x}} = \frac{\sin^2 \left[\frac{N\pi d}{\lambda} \cos \theta \right]}{N^2 \sin^2 \left[\frac{\pi d}{\lambda} \cos \theta \right]}.$$

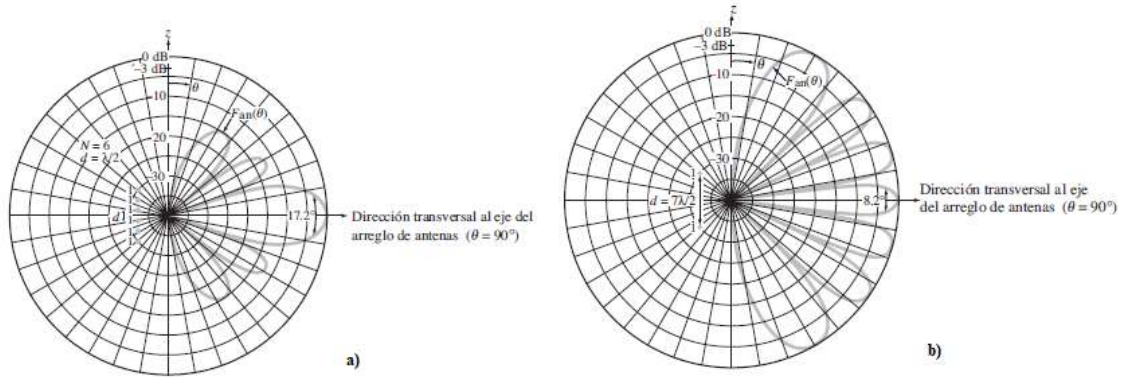


Figura 4.25: a) Patrón normalizado de un arreglo de seis elementos uniformemente excitados con una separación entre los elementos $d = \lambda/2$. b) Patrón normalizado de un arreglo de dos elementos con una separación entre ellos $d = 7\lambda/2$.

En la figura 4.25 a) se muestra una curva polar de $F_{an}(\theta)$ con $N = 6$ y $d = \lambda/2$, es una curva del patrón de radiación del factor del arreglo solo; el patrón del arreglo de antenas es igual al producto de este patrón por el de un solo elemento (ver sección correspondiente al principio de multiplicación del patrón).

EJEMPLO 7: Obtenga una expresión para el factor del arreglo de dos elementos con igual excitación y separación $d = 7\lambda/2$, y luego trace el patrón del arreglo.

El factor del arreglo de dos elementos ($N = 2$) con igual excitación ($a_0 = a_1 = 1$) se

obtiene de

$$F_a(\gamma) = \left| \sum_{i=0}^1 a_i e^{j\gamma} \right|^2 = |1 + e^{j\gamma}|^2 = \left| e^{j\gamma/2} (e^{-j\gamma/2} + e^{j\gamma/2}) \right|^2$$

$$= \left| e^{j\gamma/2} \right|^2 \left| e^{-j\gamma/2} + e^{j\gamma/2} \right|^2 = 4 \cos^2(\gamma/2),$$

donde $\gamma = (2\pi d/\lambda) \cos \theta$.

El patrón del arreglo normalizado, mostrado en la figura 4.25 b), consta de 7 haces, todos con el mismo valor pico, pero no el mismo ancho angular. El número de haces en el rango angular entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ es igual a la separación entre los elementos del arreglo, d , medida en unidades de $\lambda/2$.

4.7. Área efectiva y fórmula de transmisión de Friis.

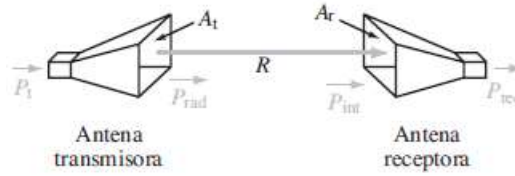


Figura 4.26: Configuración de transmisor-receptor.

Según [1] p 395: Las dos antenas mostradas en la figura 4.26 forman parte de un enlace de comunicaciones a través del espacio libre, con la separación entre las antenas, R , suficientemente grande para que cada antena esté en la región de campo lejano de la otra. Las antenas transmisora y receptora tienen áreas efectivas A_t y A_r y eficiencias de radiación ξ_t y ξ_r respectivamente. El objetivo es determinar una relación entre P_t , la potencia del transmisor suministrada a la antena

transmisora, y P_{rec} , la potencia suministrada al receptor por la antena receptora.

Como siempre, se supone que la impedancia de ambas antenas está acoplada a la de sus respectivas líneas de transmisión. Inicialmente, se considerará el caso en el que las dos antenas están orientadas de manera que la cresta del patrón de radiación apunta en la dirección de la otra. Primero se tratará la antena transmisora como radiador isotrópico sin pérdidas. En este caso, la densidad de potencia que incide en la antena receptora a una distancia R de una antena transmisora isotrópica es simplemente igual a la potencia del transmisor P_t dividida entre el área de la

superficie de una esfera de radio R : $S_{iso} = \frac{P_t}{4\pi R^2}$. La antena transmisora real no es

una sin pérdidas ni una isotrópica. Por consiguiente, la densidad de potencia S_r

originada por la antena real se determina como $S_r = G_t S_{iso} = \xi_t D_t S_{iso} = \frac{\xi_t D_t P_t}{4\pi R^2}$, donde,

mediante la ganancia $G_t = \xi_t D_t$ explica el hecho de que solo una parte de la potencia P_t suministrada a la antena se irradia en realidad hacia el espacio y D_t da cuenta de la directividad de la antena transmisora (en la dirección de la antena

receptora). Utilizando la ecuación $A_e = \frac{\lambda^2 D}{4\pi}$ (m^2), la última ecuación puede

expresarse en función del área efectiva A_t de la antena transmisora: $S_r = \frac{\xi_t D_t P_t}{4\pi R^2}$. Del

lado de la antena receptora, la potencia interceptada por la antena receptora es igual al producto de la densidad de potencia incidente S_r por el área efectiva

$A_r : P_{\text{int}} = S_r A_r = \frac{\xi_r A_r A_t P_t}{\lambda^2 R^2}$. La potencia recibida P_{rec} suministrada al receptor es igual a la potencia interceptada P_{int} multiplicada por la eficiencia de radiación de la antena receptora ξ_r . Por lo tanto, $P_{\text{rec}} = \xi_r P_{\text{int}}$, lo que conduce al resultado

$\frac{P_{\text{rec}}}{P_t} = \frac{\xi_t \xi_r A_t A_r}{\lambda^2 R^2} = G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2$. Esta relación se conoce como la **fórmula de transmisión de Friis**.

A la **fórmula de transmisión de Friis**, que es la relación P_{rec}/P_t y que en ocasiones se le llama **razón de transferencia de potencia**. En la obtención de la fórmula de Friis que implica las ganancias G_t y G_r de las antenas transmisora y receptora, se utilizó el hecho de que $\xi_t A_t = \xi_t D_t \lambda^2 / 4\pi = G_t \lambda^2 / 4\pi$, y relaciones similares se aplican a la antena receptora. Si ninguna de las dos antenas están orientadas en la dirección de transferencia de potencia máxima, la última ecuación se reescribe en la forma

general $\frac{P_{\text{rec}}}{P_t} = G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 F_t(\theta_t, \phi_t) F_r(\theta_r, \phi_r)$, donde $F_t(\theta_t, \phi_t)$ es la intensidad de radiación normalizada de la antena transmisora, evaluada en la dirección (θ_t, ϕ_t) correspondiente a la dirección de la antena receptora (desde el punto de vista del patrón de antena de la antena transmisora) y una definición similar se aplica a $F_r(\theta_r, \phi_r)$ para la antena receptora.

EJEMPLO 8: Un sistema satelital de TV de transmisión directa de 6 GHz transmite 100 W por medio de una antena parabólica de 2 m de diámetro desde una distancia aproximadamente 40,000 km sobre la superficie de la Tierra. Cada canal de TV ocupa un ancho de banda de 5 MHz. A causa del ruido electromagnético captado por la antena y por el ruido que genera la electrónica del receptor, una estación de TV receptora en tierra tiene un nivel de ruido que se determina mediante $P_n = K T_{\text{sis}} B(W)$, donde T_{sis} [medida en kelvin (K)] es una figura de mérito, llamada **temperatura del ruido del sistema**, que caracteriza el desempeño frente al ruido de la combinación receptor-antena, K es la constante de Boltzmann $[1.38 \times 10^{-23} (J/K)]$, y B es el ancho de banda del receptor en Hz. La **razón señal a ruido** S_n (que no deberá confundirse con la densidad de potencia S) se define como la razón entre P_{rec} , la potencia de la señal recibida del transmisor, y $P_n : S_n = P_{\text{rec}} / P_n$. Para un receptor con $T_{\text{sis}} = 580 K$, ¿Qué diámetro mínimo de una antena receptora parabólica se requiere para recepción de TV de alta calidad con $S_n = 40 \text{ dB}$? Se supone que las antenas

satelital y receptora en tierra no tienen pérdidas y que sus áreas efectivas son iguales a sus aperturas físicas.

Como datos se dan las siguientes cantidades:

$$P_t = 100W, f = 6GHz = 6 \times 10^9 Hz, S_n = 10^4,$$

diámetro de la antena transmisora $d_t = 2m$ y el área de la antena satelital transmisora es $A_t = (\pi d_t^2 / 4) = \pi (m^2)$.

La potencia de ruido del receptor es $P_n = KT_{sis} B = 1.38 \times 10^{-23} \times 580 \times 5 \times 10^6 = 4 \times 10^{-14} W$.

Para antenas sin pérdidas ($\xi_t = \xi_r = 1$), la potencia de la señal recibida es

$$P_{rec} = \frac{P_t A_t A_r}{\lambda^2 R^2} = \frac{100 \pi A_r}{(5 \times 10^{-2})^2 (4 \times 10^7)^2} = 7.85 \times 10^{-11} A_r.$$

El área de la antena receptora, A_r , se obtiene igualando la razón P_{rec} / P_n a

$$S_n = 10^4 : 10^4 = \frac{7.85 \times 10^{-11} A_r}{4 \times 10^{-14}}, \text{ la cual da como resultado para } A_r = 5.1 m^2. \text{ El diámetro}$$

mínimo requerido es $d_r = \sqrt{4A_r / \pi} = 2.55 m$.

Referencias

- [1] F.T. Ulaby, *Fundamentos de aplicaciones en electromagnetismo*, Pearson Educación de México, 5ª Ed., México, 2007.
- [2] Eugene Hecht, *Optics*, Pearson Education, 5ª Ed., U.S.A., 2017.
- [3] Matthew N.O. Sadiku, *Elementos de electromagnetismo* (Traducción de la tercera edición en inglés), Oxford University Press, 3ª Edición, N. Y. U.S.A. y Alfaomega Grupo Editor, México, Tercera reimpresión: marzo de 2009.

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN LUIS POTOSÍ

VERIFICACIÓN DE INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA COLEGIADA

Para el llenado de este formato considere la información de la cédula 3.3.2 de CACEI, el programa de la asignatura y la información que se solicita en el SII2. Esta información debe capturarse en el sistema por un solo docente y podrá ser exportada por los demás. Se pueden realizar ajustes a esta instrumentación cuando los docentes así lo consideren, pero al menos se debe hacer una revisión anual. Es importante indicar que estrategias de evaluación miden la evaluación del logro del atributo o atributos a los que contribuye la materia.

Recuerde que la información que se defina en este formato es la misma que se debe definir en los formatos mencionados en el párrafo anterior y por lo tanto servirá para el llenado de los mismos. Es además la evidencia del trabajo colegiado ante el Sistema de Gestión Integral.

DATOS GENERALES

Carrera	Ingeniería Electrónica		
Nombre de la Asignatura	Teoría Electromagnética		
Clave de la Asignatura (Programa de estudio)	ETF-1026		
Fecha de Revisión	1/20/2023		
¿Existe un acuerdo de Academia para una adecuación al programa?	☐ Si Folio del acuerdo: ☒ No		
Atributos de Egreso a los que contribuye la materia en orden de importancia de mayor a menor y de acuerdo a la cédula 3.3.2	Atributo	Nivel de contribución:	Medio
	Resuelve problemas de Ingeniería		
	Atributo	Nivel de contribución:	Medio
	Experimentación		

ACUERDOS POR UNIDAD

UNIDAD 1: Ecuaciones de Maxwell y propagación de ondas electromagnéticas.

Tiempo: 20 horas

Actividades de enseñanza (métodos, técnicas y ambientes de aprendizaje)

Discutir y analizar las ecuaciones de Maxwell, utilizar software de desarrollo matemático.

Actividades de aprendizaje (métodos, técnicas e instrumentos) por unidad

Comprensión y solución de problemas en la aplicación de ondas electromagnéticas.

Indicadores de alcance (agregue o quite indicadores según corresponda)

A 50 %

Distingue los conceptos de ondas electromagnéticas

B 50 %

Resuelve problemas usando las ecuaciones de Maxwell en propagación de ondas electromagnéticas

MATRIZ DE EVALUACIÓN (Solamente es necesario llenar esta matriz en forma colegiada si contiene las evidencias de aprendizaje que contribuyen a los Atributos de Egreso)

Evidencia de aprendizaje	Total %	Indicador de alcance						Evaluación formativa de la competencia (instrumento de evaluación)	Nombre abreviado del AE del PE al que contribuye Si aplica
		A	B	C	D	E	F		
Examen	40	25	25					Se evalúa el conocimiento adquirido de la competencia.	Resuelve problemas de ingeniería
Portafolio de evidencias	60	25	25					Rúbrica	
Total	100								

Principales prácticas/proyecto (de acuerdo a cédula 3.3.2)

UNIDAD 2: Líneas de transmisión

Tiempo: 25 horas

Actividades de enseñanza (métodos, técnicas y ambientes de aprendizaje)

Discutir y analizar las características de una línea de transmisión.

Actividades de aprendizaje (métodos, técnicas e instrumentos) por unidad

Comprensión y solución de problemas en la aplicación líneas de transmisión.

Indicadores de alcance (agregue o quite indicadores según corresponda)

A 50 %

Reconoce los conceptos fundamentales de una línea de transmisión

B 50 %

Resuelve problemas de líneas de transmisión

MATRIZ DE EVALUACIÓN (Solamente es necesario llenar esta matriz en forma colegiada si contiene las evidencias de aprendizaje que contribuyen a los Atributos de Egreso)

[illegible]

Total	100								
Principales prácticas/proyecto (de acuerdo a cédula 3.3.2)									

UNIDAD 3: Guías de onda.

Tiempo: 15 horas

Actividades de enseñanza (métodos, técnicas y ambientes de aprendizaje)

Analizar y clasificar las características propias de una línea de las guías de onda.

Actividades de aprendizaje (métodos, técnicas e instrumentos) por unidad

Comprensión y solución de problemas en la aplicación de líneas de las guías de onda.

Indicadores de alcance (agregue o quite indicadores según corresponda)

A 50 %

Aplica los conceptos fundamentales de una guía de onda

B 50 %

Resuelve problemas de guías de onda

MATRIZ DE EVALUACIÓN (Solamente es necesario llenar esta matriz en forma colegiada si contiene las evidencias de aprendizaje que contribuyen a los Atributos de Egreso)

[illegible]

Examen	40	25	25					Se evalúa el conocimiento adquirido de la competencia.	Resuelve problemas de ingeniería
Portafolio de evidencias	60	25	25					Rúbrica	
Total	100								

Principales prácticas/proyecto (de acuerdo a cédula 3.3.2)

UNIDAD 4: Antenas.

Tiempo: 20 horas

Actividades de enseñanza (métodos, técnicas y ambientes de aprendizaje)

Analizar y describir los conceptos del funcionamiento de las antenas.

Actividades de aprendizaje (métodos, técnicas e instrumentos) por unidad

Resolver problemas en la aplicación de antenas.

Indicadores de alcance (agregue o quite indicadores según corresponda)

A 50 %

Analiza y aplica los conceptos principios de antenas

B 50 %

Resuelve problemas de antenas

MATRIZ DE EVALUACIÓN (Solamente es necesario llenar esta matriz en forma colegiada si contiene las evidencias de aprendizaje que contribuyen a los Atributos de Egreso)

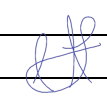
Evidencia de aprendizaje	Total %	Indicador de alcance						Evaluación formativa de la competencia (instrumento de evaluación)	Nombre abreviado del
		A	B	C	D	E	F		

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN LUIS POTOSÍ

VERIFICACIÓN DE INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA COLEGIADA

									AE del PE al que contribuye Si aplica
Examen	40	25	25					Se evalúa el conocimiento adquirido de la competencia.	Resuelve problemas de ingeniería
Portafolio de evidencias	60	25	25					Rúbrica	
Total	100								
Principales prácticas/proyecto (de acuerdo a cédula 3.3.2)									

FIRMAS DE LOS DOCENTES

Nombre	Firma
Dr. Ismael Lara Velázquez	
Ing. Pablo Torres Flores	
Dr. Saúl Almazán Cuéllar	

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN LUIS POTOSÍ

VERIFICACIÓN DE INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA COLEGIADA

IMAGEN O LIGA DE LA REUNIÓN



REVISIÓN

Elizabeth Rivera Bravo Presidente de Academia	Norma Orocio Castro Jefe del Departamento
	
Vo.Bo.	Vo.Bo.