



SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



VERACRUZ
GOBIERNO
DEL ESTADO



SEV
Secretaría
de Educación



DET
Dirección de Educación
Tecnológica del Estado
de Veracruz



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE TANTOYUCA

**"SIMULACIÓN DE LA RESPUESTA ÓPTICA PARA SISTEMAS
NANOMÉTRICOS Y SU APLICACIÓN A SENSORES"**

Que para obtener el título de:

INGENIERO EN ELECTRONICA

Presenta

HÉCTOR DE JESÚS MARTÍNEZ SERNA

No. de control: 163S0335

Director de Tesis:

Dr. WILFRIDO VAZUEZ ESTRADA

**"SIMULACIÓN DE LA RESPUESTA ÓPTICA
PARA SISTEMAS NANOMÉTRICOS Y SU
APLICACIÓN A SENSORES"**

AGRADECIMIENTOS

A los ingenieros que no solo me transmitieron sus conocimientos durante mi estancia como estudiante sino que también me brindaron su amistad, a mi tutor por su paciencia y constancia para terminar este trabajo, a todos mis compañeros con los que tuve la dicha de compartir las clases en el aula, como todo hubo momentos malos y momentos buenos, pero fueron mucho más los momentos buenos en los que compartimos muchas cosas, también agradezco a toda mi familia ya que ellos siempre me apoyaron en todo momento y sabía que podía contar con ellos, fueron parte fundamental para que terminara la carrera, en especial mi mamá que se esforzó muchísimo durante toda mi formación para que esto fuera posible, además de darme consejos y platicar conmigo cada vez que lo requería, gracias a Dios por permitirme acabar mis estudios y por todo lo que me ha dado, a todos quiero decirles que esto no es el final, sino que es el inicio y vienen cosas mejores.

Arriba y Adelante...!

Tabla de contenido

RESUMEN	5
INTRODUCCIÓN.....	7
Capítulo I. Marco de referencia	11
1.1 Antecedentes.....	11
1.2 Planteamiento del problema	12
1.3 Objetivos generales y específicos.	13
1.3.1. Objetivo general	13
1.3.2 Objetivos específicos.....	13
1.4 Justificación	13
1.5 Alcances y Limitaciones	13
1.5.1 Alcances	13
1.5.2 Limitaciones	14
CAPITULO 2 MARCO TEORICO	14
2.1 Ecuaciones de Fresnel	14
Campos electromagnéticos y materia.....	16
2.2 Soluciones numéricas al problema	18
2.3 Método de diferencias finitas	18
2.3.1 Reflexión y transmisión de ondas planas	23
2.3.2 Condiciones a la frontera	27
2.4.1 Coeficientes de Reflexión y Transmisión de Fresnel	28
2.4.2 Ecuaciones de Maxwell	40
2.5 Medida del coeficiente de extinción de suspensiones de macropartículas de polímero	44
CAPITULO 3. MARCO OPERATIVO	47
4.1 DESARROLLO PROCEDIMIENTO Y DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES REALIZADAS	47
4.2 Diseño de nuestro sistema.	51
CAPITULO 4 RESULTADO Y CONCLUSIONES	53
5.1 RESULTADOS	53
5.2 CONCLUSION	57
Bibliografía	58

Ilustración 1 Un círculo y sus alrededores divididos por una malla rectangular. La malla no se adapta bien a la circunferencia.	19
Ilustración 2 una placa sometida a distintas condiciones a la frontera	20
Ilustración 3 Representación gráfica de la ecuación de Taylor.	22
Ilustración 4 Geometría del problema	28
Ilustración 5 Reflexión y transmisión de una capa de material de espesor d	35
Ilustración 6 Cambio del coeficiente de extinción.	45
Ilustración 7 La reflectancia en función del ángulo de incidencia.	46
Ilustración 8 Diferencia entre refracción y reflexión.	47
Ilustración 9 Representación de una onda incidente, onda reflejada y la onda refractada.	47
Ilustración 10 Ecuaciones de Fresnel.	48
Ilustración 11 En la gráfica izquierda e representa el índice de refracción de nuestra onda en el medio de plata y la gráfica derecha representa el coeficiente de extinción.	49
Ilustración 12 La línea azul (N) representa el índice refracción (.05158) y la línea roja (k) el coeficiente de extinción (3.9046).	49
Ilustración 13 En la gráfica izquierda se representa el índice de refracción de nuestra onda en el medio de plata y la gráfica derecha representa el coeficiente de extinción.	50
Ilustración 14 La línea azul (N) representa el índice de refracción (.27732) y la roja (k) el coeficiente de extinción (2.978).	50
Ilustración 15 Diagrama del sistema que se utilizó para detectar la bacteria E-Collins.	51
Ilustración 16 Ampliación de la muestra.	52
Ilustración 17 La onda color azul representa la transmisión y la onda roja representa la reflexión de la onda incidente obre nuestro material de dos medios.	53
Ilustración 18 En esta imagen se muestra nuestro material de dos medios (oro y aire), la unidad de longitud de la onda está en nanómetros.	54
Ilustración 19 El material1 está en la parte de arriba (seleccionada de color azul) y el material dos está en la parte de abajo (color gris).	54
Ilustración 20 El software de elementos finitos que utilicé tiene la opción de “mallar” nuestro sistema para obtener los datos que queramos en un punto más exacto de nuestro material.	55
<i>Ilustración 21 En esta imagen se logra apreciar que para una onda de incidencia a 70° la línea azul que representa la onda de transmisión tiene un valor de .7 y la línea roja que representa la onda de reflexión tiene un valor de .3.</i>	<i>55</i>
Ilustración 22 Representación de una onda de incidencia sobre nuestro sistema de dos medios.	56
Ilustración 23 Ondas reflectadas.	56

RESUMEN

La mayor parte de los fenómenos físicos pueden ser descritos o modelados mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales con sus correspondientes condiciones iniciales y de contorno. En la mayoría de los problemas de ingeniería no es posible obtener una solución exacta al sistema de ecuaciones. Por tanto, es necesario el uso de métodos que permitan obtener soluciones numéricas aproximadas a la real. El método de los elementos finitos (MEF) es uno de los métodos más usados en ingeniería y física para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales. Aunque puede usarse en cálculos a mano, es cuando se utilizan computadoras cuando permite la resolución de problemas sobre geometrías complejas. La variedad de problemas a los que puede aplicarse es enorme, se usa en el diseño y mejora de productos y aplicaciones industriales, así como en la simulación de sistemas físicos y biológicos. En ingeniería permite cálculos tan diversos como tensiones, fluidodinámica, transferencia de calor entre otros. Aunque el método de los elementos finitos como formulación matemática es relativamente nuevo, su estructura básica es conocida desde hace bastante tiempo. En los últimos años ha sufrido un gran desarrollo debido a los avances en computación. La generalización del uso de ordenadores y el incremento en la potencia de cálculo, ha permitido que el MEF haya desarrollado una increíble precisión. A su vez, han ido apareciendo una gran cantidad de software, cada vez más especializados por materias, que permiten realizar cálculos con elementos finitos de una manera sencilla. Pero no hay que llevarse a engaño, el manejo correcto de este tipo de software exige un profundo conocimiento no solo del programa con el que se trabaja, sino también de los principios del MEF. Sólo en ese caso estaremos en condiciones de garantizar que los resultados obtenidos en los análisis se ajustan a la realidad.

2. Definición del método El método de elementos finitos es un método de aproximación de problemas continuos de forma que: Se aproxima la geometría (discretización física). El medio continuo se divide en un número finito de partes, o elementos, cuyo comportamiento se define mediante un número finito de

parámetros asociados a ciertos puntos característicos, denominados nodos. Los nodos son los puntos de unión entre elementos adyacentes.

ABSTRAC

Most physical phenomena can be described or modeled by a set of differential equations with their corresponding initial and boundary conditions. In most engineering problems it is not possible to obtain an exact solution to the system of equations. Therefore, it is necessary to use methods that allow obtaining approximate numerical solutions to the real one. The finite element method is one of the most used methods in engineering and physics for the approximation of solutions of differential equations. Although it can be used in calculations by hand, it is when computers are used that it allows solving problems on complicated geometries. The variety of problems to which it can be applied is enormous, it is used in the design and improvement of industrial products and applications, as well as in the simulation of complex physical and biological systems. In engineering, it allows calculations as diverse as stresses, fluid dynamics, heat transfer....

Although the finite element method as a mathematical formulation is relatively new, its basic structure has been known for quite some time. In recent years it has undergone a great development due to advances in computing. The widespread use of computers and the phenomenal increase in computing power have allowed the MEF to develop incredible precision. At the same time, a large amount of software has been appearing, increasingly specialized by subject, which allows calculations with finite elements in a simple way. But do not be fooled, the correct handling of this type of software requires a deep knowledge not only of the program with which you work, but also of the principles of the MEF. Only in this case will we be in a position to guarantee that the results obtained in the analyzes conform to reality.

2. Definition of the method The finite element method is a method of approximation of continuous problems in such a way that: The geometry is approximated (physical discretization). The continuum is divided into a finite number of parts, or elements, whose behavior is defined by a finite number of parameters associated

with certain characteristic points, called nodes. Nodes are the junction points between adjacent elements.

INTRODUCCIÓN

Hoy en día los sensores electrónicos son parte de nuestras vidas, ya que los podemos apreciar en nuestro día a día en diferentes dispositivos de nuestro uso diario como la tv, computadoras, celulares, cocheras, lámparas, cámaras, dispositivos médicos etc. por ello la ciencia se ha preocupado por la creación de nuevos sensores para poder monitorear nuestro entorno y utilizar esa información para el beneficio de la humanidad.

Actualmente los sensores se utilizan para detectar o medir varias cosas tales como humedad, temperatura, luz, objetos, etc. Dependiendo del tipo de sensor genera una salida relacionada a la magnitud del estímulo recibido.

La nanotecnología ha tenido una gran influencia positiva en el área de la tecnología de sensores, ya que gracias a que ha sido posible el desarrollo de sensores a nano-escala, es decir muy pequeños, además de una eficiencia muy alta con aplicaciones en diferentes ámbitos de la ciencia.

Lo ideal es que un sensor sea fácil de utilizar, simple, eficiente y de bajo costo. En este contexto, podemos encontrar en el mercado una amplia gama de sensores que permiten la detección e identificación de variables, además de estudios dinámicos en diferentes campos como la biología o la química, entre otros.

Los sensores piezoeléctricos o magnéticos, que incluyen menor ruido e inmunidad a los dispositivos de detección electromagnética, pertenecen a los sensores ópticos que incluyen el interferómetro óptico Mach-Zenher integrado, el espejo resonante, el sensor acoplador de rejilla y los sensores de Resonancia de Plasmón de Superficie (SPR).

Los sensores más recientes son refractómetros de película que miden los cambios en el índice de refracción que ocurren en la superficie de una película metálica que soporta un plasmón de superficie, su configuración más común usa un acoplador primario para acoplar la luz a un plasmón de superficie en combinación con elementos ópticos convencionales. Se han propuesto configuraciones inteligentes de SPR modificando y / o aumentando sus componentes ópticos, innovando las estrategias de modulación de intensidad y fase, así como los métodos de excitación y detección simultánea (multiplexación). Todos con el objetivo de mejorar e incrementar su desempeño y rendimiento para la detección de variedad de especies químicas y biológicas tales como análisis relacionados con la calidad de los alimentos, patógenos, toxinas, residuos de medicamentos, vitaminas y anticuerpos.

El espectro característico de SPR describe un buzamiento definido colocado en un ángulo, que puede ubicarse de 0° a 80° , por ejemplo, a $35,21^\circ$ (fuente de luz 650nm) con un cierto valor de intensidad de luz reflejada. En trabajos anteriores se ha encontrado que la curva de SPR se conserva, incluso variando los espesores de la película de oro (de 30 nm a 50 nm) y sale con otras fuentes de luz, por ejemplo, 633 nm. Además, el espectro SPR ha sido estudiado con modelos teóricos y numéricos verificando su forma, posiciones e intensidades.

Monitorear los cambios del espectro SPR debido a cambios controlados del índice de refracción ha sido posible debido a que se conserva la forma de la curva SPR y se pueden monitorear los cambios de buzamiento (posición, intensidad), permitiendo la creación de gráficos ($\Delta \theta$ vs $\Delta |R|$) y diagramas de sensores de intensidad SPR ($\Delta |R|$ vs Δt) comúnmente utilizados en su aplicación como biosensores. Sin embargo, los espectros no proporcionan información sobre la calidad del chip o está contaminado por experimentos previos. Solo se puede monitorear la posición de inmersión o los cambios de intensidad. Aquí presentamos una herramienta refractométrica alternativa que consiste en un prisma semicircular fijado sobre dos goniómetros motorizados. Los ejes de rotación de ambos goniómetros se alinean entre sí de 0° a 80° , luego, se coloca una nanofilm de oro ($\approx 20\text{nm}$) en la cara inferior plana del prisma semicircular y

luego se deposita una microgotita (10 μ L) de soluciones bioquímicas en eso. Esta herramienta ofrece información rápida y sin etiquetas de diferentes sustancias químicas utilizando un fotodiodo para recolectar toda la luz reflejada especulativa en él.

Los espectros ópticos resultantes de la reflectividad describen dos zonas novedosas:

La primera zona angular (I) que no se ve a menudo en la comunidad de sensores, se encuentra entre los dos ángulos críticos de $\approx 41^\circ$ a $\approx 61^\circ$. Esta zona angular puede asegurar el espesor de la película (hasta 20 nm desde 50 nm) y, la pureza y calidad del oro, desde el punto de vista del volumen.

La segunda zona angular (II) es posterior al segundo ángulo crítico, que corresponde a las medidas muy comunes en la comunidad de sensores, que es la resonancia plasmónica, que es una ronda de $\approx 70^\circ$ a 75° y es responsable de la absorción y excelente detección de soluciones químicas. Así, la forma de los espectros se investiga mediante un modelo teórico. Este nuevo espectro es diferente de los espectros empleados en trabajos recientes que utilizan sensores SPR que incluyen imágenes SPR, o sensor infrarrojo SPR. Es importante resaltar que esta herramienta de bajo costo no tiene las condiciones para la resonancia, sin embargo, ofrece a la comunidad de sensores más información que el sensor SPR convencional para detectar como desinfectante, antibióticos, medio líquido rico para el crecimiento de bacterias, soluciones controladas incluso bacterias vivas.

En este informe se hicieron varias simulaciones con diferentes índices de refracción de los materiales como el oro, agua, aire, cobre, entre otros.

Simulamos el comportamiento de la luz a través de los materiales antes mencionados, con diferentes longitudes de onda, a tra vez de dos medios y tres medios, con el uso de la herramienta de Matlab programamos las fórmulas de la reflectancia y transmitancia y presentamos su comportamiento mediante gráficas, posteriormente pasamos a usa otro software llamado Comsol Multiphysics en el

cual también hicimos las simulaciones de dos medios y tres medios, así como también simulamos en polarización P y S.

Para ellos utilizamos varias ecuaciones una de ellas fueron las ecuaciones de Fresnel son un conjunto de relaciones matemáticas que relacionan las amplitudes de las ondas reflejadas y refractadas (o transmitidas) en función de la amplitud de la onda incidente.

Capítulo I. Marco de referencia

1.1 Antecedentes

A nuestro alrededor existen muchas formas de materia a tamaño nanométrico. Uno de los primeros materiales sintetizados por el hombre, que se tiene conocimiento, es una suspensión de nanopartículas de oro. Faraday preparó oro coloidal en 1856 y lo llamó "metal dividido". En su diario con fecha del 2 de abril de 1856, Faraday llamó las partículas que hizo "estado de oro dividido", estas suspensiones que fueron preparadas por Faraday son conservadas en la *Royal Institution*.

El oro metálico, cuando es dividido en finas partículas que van en tamaños de partícula de 10 a 500 nm, puede ser suspendido en agua. En 1890, el bacteriólogo alemán Robert Koch descubrió que los compuestos elaborados con oro inhiben el crecimiento de bacterias, por lo que ganó el premio Nobel de Medicina en 1905. En el sistema indio de medicina llamada Ayurveda, el oro es utilizado en diversas preparaciones. Una preparación popular se llama "Saraswatharishtam", prescrito para mejorar la memoria. El oro también se agregó en determinados medicamentos para los bebés, con el fin de mejorar su capacidad mental.

En diciembre 29 de 1959, el físico ganador del premio Nobel, Richard Feynman dio una plática en la reunión anual de la *American Physical Society* titulada "Hay mucho espacio en el fondo" ("*There's plenty of room at the bottom*"), en la que realizó una importante contribución al desarrollo de la nanotecnología. Comenzó la charla con una pregunta: "¿Por qué no podemos escribir los 24 volúmenes completos de la Enciclopedia Británica en la cabeza de un alfiler?". Minutos después Feynman reflexionaba: "*Los principios de la Física, tal y como yo lo veo, no impiden la posibilidad de manipular las cosas átomo a átomo*".

Desde ese punto de partida, y con su enorme facilidad para explicar de forma sencilla conceptos complejos, Feynman predijo lo que sería necesario hacer y

cómo habría que hacerlo, en una época en la que la tecnología aún estaba lejos de poder acometer la tarea de la miniaturización.

Fundamentalmente, demostró que con las leyes de la física conocidas en ese momento, la nanotecnología era posible. A continuación, propuso una serie de ideas para lograr miniaturizaciones de dispositivos. Entre ellas, la posibilidad de disponer los átomos individualmente de la forma que deseemos. Sin embargo, el mundo tuvo que esperar mucho tiempo para poner los átomos en el lugar requerido. (T. Pradeep, 2007)

1.2 Planteamiento del problema

Actualmente los sensores se utilizan para detectar o medir varias cosas tales como humedad, temperatura, luz, peso, objetos, etc. Dependiendo del tipo de sensor genera una salida relacionada a la magnitud del estímulo recibido.

La nanotecnología ha tenido una gran influencia positiva en el área de la tecnología de sensores, ya que gracias a que ha sido posible el desarrollo de sensores a nano-escala, es decir una millonésima parte de un metro, además de una eficiencia muy alta con aplicaciones en diferentes ámbitos de la ciencia.

En específico, el desarrollo de los sensores ópticos ha alcanzado numerosas atenciones como potentes herramientas de detección y análisis, debido a que a diferencia de otros tipos de sensores estos tienen la particularidad de que pueden ser miniaturizados fácilmente, abriendo así oportunidades a muchas aplicaciones que actualmente con otros sensores esto no sería posible.

1.3 Objetivos generales y específicos.

1.3.1. Objetivo general

Diseñar un sistema que permite detectar la bacteria E. Coli mediante un sistema nanométrico y que esto sirva como base para que en un futuro se puedan detectar más bacterias, con un sistema parecido a este.

1.3.2 Objetivos específicos

- Diseñar un sistema para detectar la bacteria E. Collins
- Realizar un sistema económico y compacto
- Detectar la bacteria fácilmente.

1.4 Justificación

Actualmente existen muchas enfermedades difíciles de detectar ya que muchas veces requieren de mucho dinero y de tiempo. Dinero y tiempo son cosas que bajo circunstancia de enfermedad muchas veces no tenemos.

Esto es un problema constante y esto hace difícil que los médicos tengan un diagnostico a la brevedad y pueda atender de la mejor forma a sus pacientes.

La fotonica es una ciencia que actualmente no está muy desarrollada como otras, con esta tesis se pretende detectar únicamente la bacteria E. Collins y dejar un precedente de que se pueden detectar otras bacteria utilizando un método similar.

1.5 Alcances y Limitaciones

1.5.1 Alcances

Se logró simular el sistema mediante un software de elementos finitos y logramos obtener varias observaciones muy importantes de la onda reflejada, ya que esta varia bajo ciertas condiciones como el ángulo de inclinación de la onda incidida al sistema, así como de los materiales.

Tomando en cuenta estas variaciones es muy factible que se puedan detectar otras enfermedades de una manera más rápida y eficiente.

1.5.2 Limitaciones

El sistema solo está simulado ya que todos los resultados los obtuvimos mediante un software de elementos finitos.

El sistema puede funcionar adecuadamente dentro de condiciones específicas.

CAPITULO 2 MARCO TEORICO

2.1 Ecuaciones de Fresnel

Una manera que se utiliza normalmente para la caracterización óptica de materiales es a partir del análisis de la reflectancia y transmitancia de la luz que, para una interfaz plana que separa dos medios semi-infinitos lineales, homogéneos e isotrópicos, esto se puede calcular utilizando las fórmulas de Fresnel. Las fórmulas de Fresnel se deducen a partir de las ecuaciones de Maxwell, es decir, de la imposición de las condiciones de frontera adecuadas. Las ecuaciones de Maxwell están dadas, en el Sistema Internacional de Unidades (SI).

- Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0} \quad (1-1)$$

- Ley de no existencia de mono polos magnéticos.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1-2)$$

- Ley de Faraday Lenz.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1-3)$$

- Ley de Ampere Maxwell.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{total} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1-4)$$

Donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{B}$ es el campo magnético, ρ_{total} es la densidad de carga volumétrica total, $\vec{j}_{total}$ es la densidad de corriente volumétrica total en el

sistema, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío y μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. Las condiciones de frontera, consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, imponen que la componente del campo eléctrico paralela a la interfaz, $E_{\parallel}^{interfaz}$ y la componente del campo magnético ortogonal a la interfaz, $B_{\perp}^{interfaz}$, son continuas a través de ella, mientras que sus respectivas componentes ortogonal, $E_{\perp}^{interfaz}$ y paralela, $B_{\parallel}^{interfaz}$ son discontinuas, es decir:

$$E_{\parallel}^{arriba} - E_{\parallel}^{abajo} = 0 \quad (1-5)$$

$$E_{\perp}^{arriba} - E_{\perp}^{abajo} = \frac{\sigma_{total}}{\epsilon_0} \quad (1-6)$$

$$E_{\perp}^{arriba} - E_{\perp}^{abajo} = \frac{\sigma_{total}}{\epsilon_0} \quad (1-7)$$

$$\vec{B}_{\parallel}^{arriba} - \vec{B}_{\parallel}^{abajo} = \mu_0 \vec{K}_{total} \times \hat{n}, \quad (1-8)$$

$$B_{\perp}^{arriba} - B_{\perp}^{abajo} = 0 \quad (1-9)$$

Donde σ_{total} es la intensidad de carga superficial total, $\vec{K}_{total}$ es la densidad de corriente superficial total, ambos sobre la interfaz, y $\hat{n}$ es el vector normal al plano de incidencia. En términos del campo $\vec{H}$, se tiene que

$$\vec{H}_{\parallel}^{arriba} - \vec{H}_{\parallel}^{abajo} = \vec{K}_{externa} \times \hat{n}, \quad (1-10)$$

$$\vec{H}_{\perp}^{arriba} - \vec{H}_{\perp}^{abajo} = \left(\frac{B_{\perp}^{arriba}}{\mu_{arriba}} - \frac{B_{\perp}^{abajo}}{\mu_{abajo}} \right) = 0 \quad (1-11)$$

Donde $\vec{K}_{externa}$ es la densidad de corriente superficial externa sobre la interfaz. Es importante notar que los campos eléctricos y magnéticos totales arriba de la interfaz corresponde a los campos electromagnéticos incidentes y reflejados, en tanto que los campos debajo de la interfaz corresponden a los campos electromagnéticos transmitidos.

Para deducir las fórmulas de Fresnel, se considera una interfaz plana que separa dos medios semi-infinitos con diferente índice de refracción, sobre la cual incide

una onda electromagnética plana cuyos campos eléctricos, $\vec{E}_i$, y magnético, $\vec{B}_i$, están dados por:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \times \vec{r} - w_i t)} \quad y \quad \vec{B}_i = \vec{B}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \times \vec{r} - w_i t)} \quad (1-12)$$

Donde $\vec{E}_{0i}$ y $\vec{B}_{0i}$ son los vectores de amplitud del campo eléctrico y magnético, respectivamente, $\vec{k}_i$ es el vector de propagación de la onda incidente, w_i su frecuencia y $\vec{r}$ es un punto del espacio donde se evalúa el campo electromagnético. Para los campos eléctrico y magnético del haz reflejado se proponen.

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \times \vec{r} - w_r t)} \quad y \quad \vec{B}_r = \vec{B}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \times \vec{r} - w_r t)}, \quad (1-13)$$

Y para el haz transmitido,

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \times \vec{r} - w_t t)} \quad y \quad \vec{B}_t = \vec{B}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \times \vec{r} - w_t t)} \quad (1-14)$$

Donde $\vec{E}_{0r}$, $\vec{B}_{0r}$, $\vec{E}_{0t}$, $\vec{B}_{0t}$ son los vectores (con componentes reales) de amplitud de los campos eléctricos, $\vec{E}$, y de los campos magnéticos, $\vec{B}$, $\vec{k}_r$, $\vec{k}_t$, son los vectores de propagación; w_r y w_t son las frecuencias. Los subíndices “r” y “t” denotan a los campos de los haces reflejado y transmitido, respectivamente.

Campos electromagnéticos y materia.

La materia está conformada por átomos, que aun si son eléctricamente neutros, están compuestos por un núcleo que tiene carga positiva y una nube de electrones con carga negativa. En presencia de un campo eléctrico, el núcleo cargado positivamente sentirá una fuerza de atracción en dirección del campo eléctrico, mientras que la nube electrónica sentirá una fuerza en dirección opuesta, causando una modificación en la configuración espacial original del átomo, pues la fuerza ejercida por el campo es contrarrestada por la fuerza de atracción entre el núcleo y la nube electrónica.

Si la intensidad del campo eléctrico incidente es lo más suficientemente pequeño como para que su relación con la separación promedio de las cargas en el átomo sea lineal, se tiene que:

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_h \vec{E} \quad (1-15)$$

Donde $\vec{p}$ es el momento bipolar (una medida de separación entre cargas positivas y negativas), ϵ_h es una función dieléctrica del medio en el que se encuentra la partícula y α es la polarizabilidad atómica, cuyo valor depende de las características del átomo en cuestión.

Ahora, si se considera no solo un átomo, sino un trozo de materia macroscópica conformado por millones de átomos, se dice que la materia en su totalidad esta polarizada si el momento dipolar promedio de los átomos que la componen es distinto de cero. Una medida de la polarización macroscópica es $\vec{P}$, que llamaremos vector de polarización, y que no es más que el momento dipolar promedio por unidad de volumen. $\vec{P}$ puede ser calculado, si suponemos que las partículas microscópicas que componen el pedazo de materia macroscópica tienen un momento dipolar promedio $\vec{p}$, como $\vec{P} = N\vec{p}$, donde N es el número de átomos (o bien, moléculas) por unidad de volumen.

La mayoría de los materiales, se interactúan con campos no tan fuerte como para ionizar a los átomos que la componen, tienen una respuesta lineal, es decir:

$$\vec{P} = \epsilon_0 X_e \vec{E}, \quad (1-16)$$

Donde X_e es la susceptibilidad dieléctrica del material, que es una cantidad adimensional que depende del material que se polariza y de la frecuencia del campo eléctrico con que este se excita, y ϵ_0 es la permitividad del vacío, una constante física.

A partir de la susceptibilidad dieléctrica, podemos definir la función dieléctrica del material. Que está dada como:

$$\epsilon_r(w) = 1 + X_e(w) \quad (1-17)$$

Esta función dieléctrica contiene toda la información necesaria para calcular la respuesta que tendrá un, material cuando interactúa con un campo eléctrico, y por lo tanto caracteriza electromagnéticamente a los materiales.

2.2 Soluciones numéricas al problema

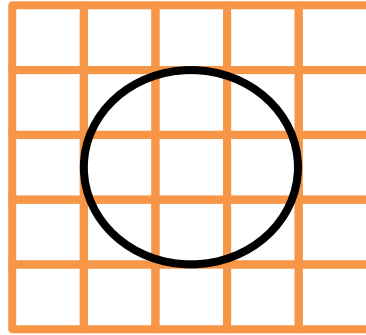
El problema de la interacción de un campo electromagnético con materia queda totalmente determinado al especificar el campo externo, la función dieléctrica y la geometría de la partícula o partículas interactuantes. Por lo tanto, se necesita de un método computacional para solucionar ecuaciones diferenciales parciales con valores a la frontera que sea aplicable a todo tipo de geometrías.

El método de elementos finitos (FEM) hoy en día es uno de los métodos numéricos más usados en el 2011, el número de artículos acerca del FEM y sus aplicaciones era más de 200,000 debido a su adaptabilidad a distintas geometrías y a su aplicabilidad para solucionar cantidad importante de ecuaciones diferenciales, por lo que es posible utilizarlo para resolver sistemas propios de distintas ramas de la ingeniería y la física.

2.3 Método de diferencias finitas

Debido a que este trabajo se centra en la aplicación del FEM, así que también es conveniente revisar primero los fundamentos de un método numérico más sencillo, el método de diferencias finitas (FDM). Esto debido a que el FEM es, en cierto sentido, una sofisticación del FDM, y por lo tanto tienen varios puntos en común. Se puede considerar como principal característica de ambos métodos la discretización del espacio en varias regiones o elementos, y cuyos vértices llamaremos nodos. Mientras las soluciones analíticas a las ecuaciones diferenciales nos permiten conocer las variables para las que se resuelven en un número infinito de puntos, este método solo nos da un resultado en los nodos, solución que podemos extender sobre todo el espacio utilizando interpolación. El método FDM y el FEM cambian, básicamente, en que el primero solo admite una división del espacio en subregiones rectangulares en problemas de dos dimensiones y en prismas rectangulares en problemas de tres dimensiones por otro lado el FEM admite una mayor variedad de figuras para realizar esta división,

siendo el triángulo y el tetraedro los más utilizados para problemas en dos y tres dimensiones, respectivamente.



*Ilustración 1 Un círculo y sus alrededores divididos por una malla rectangular.
La malla no se adapta bien a la circunferencia.*

Para dar un ejemplo del FDM, primero se va a resolver un problema bidimensional de transferencia de calor en una planta rectangular B . La ecuación que se utiliza para modelar la transferencia de calor es la de Laplace, incluyendo las condiciones a la frontera.

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2-1)$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad T(x, b) = g(x), \quad T(0, y) = h(y), \quad T(a, y) = j(y), \quad (2-2)$$

En la cual las funciones f, g, h y j son conocidas, si discretizamos tal como se muestra en la figura, obtendremos entonces que en los únicos nodos donde no conocemos la temperatura es en 6,7,10,11,14,15.

Ahora, si queremos encontrar una relación entre la temperatura T en el nodo ubicado (x_0, y_0) .

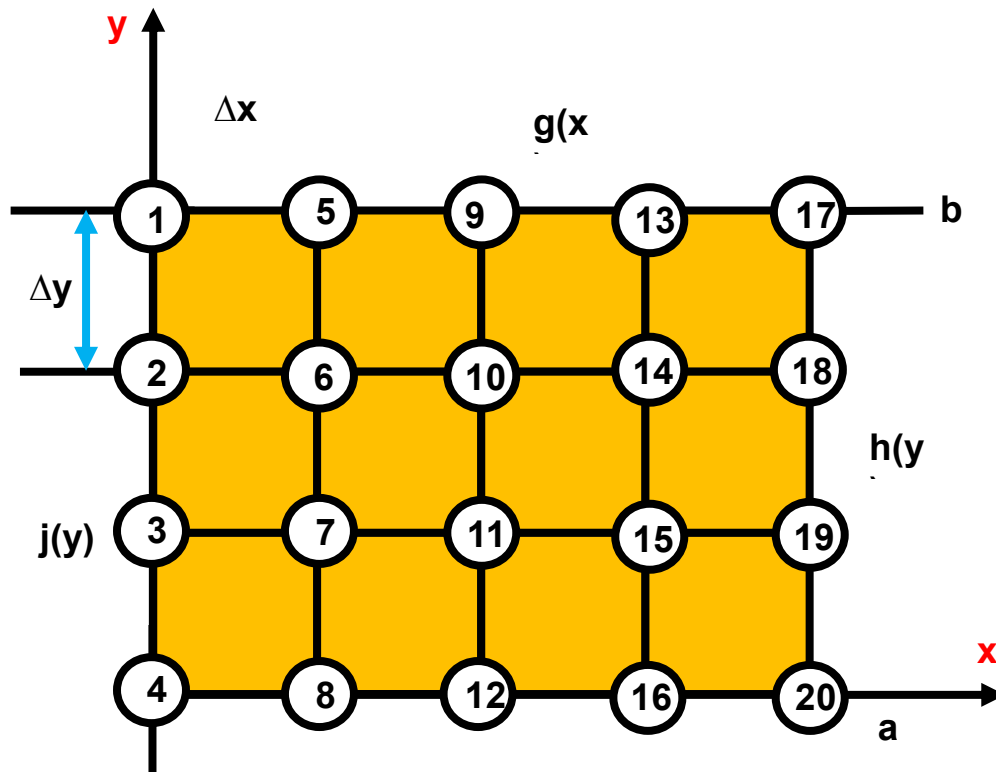


Ilustración 2 una placa sometida a distintas condiciones a la frontera

Aquel ubicado en $(x_0 + \Delta x, y_0)$, podemos hacer una expansión de TAYLOR, obteniendo como resultado

$$\begin{aligned}
 T(x_0 + \Delta x, y_0) &= T(x_0, y_0) + \frac{\partial T(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 T(x_0, y_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 \\
 &+ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 T(x_0, y_0)}{\partial x^3} (\Delta x)^3 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \quad (2-3)$$

Análogamente, para $T(x_0 - \Delta x, y_0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 T(x_0 - \Delta x, y_0) \\
 = T(x_0, y_0) - \frac{\partial T(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 T(x_0, y_0)}{\partial x^2 (\Delta x)^2} \\
 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 T(x_0, y_0)}{\partial x^3 (\Delta x)^3} + \dots
 \end{aligned} \tag{2-4}$$

por lo tanto si sumamos las ecuaciones, reacomodamos, y truncamos hasta los términos de orden $(\Delta x)^2$, obtenemos como resultado lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 T(x_0, y_0)}{\partial x^2} \approx \frac{T(x_0 + \Delta x, y_0) + T(x_0 - \Delta x, y_0) - 2T(x_0, y_0)}{(\Delta x)^2} \tag{2-5}$$

De manera análoga, utilizando ahora un desplazamiento Δy , obtenemos:

$$\frac{\partial^2 T(x_0, y_0)}{\partial y^2} \approx \frac{T(x_0, y_0 + \Delta y) + T(x_0, y_0 - \Delta y) - 2T(x_0, y_0)}{(\Delta y)^2} \tag{2-6}$$

Ahora, sumando las ecuaciones y utilizando las demás que suponiendo que $\Delta y = \Delta x$, se obtiene.

$$\begin{aligned}
 T(x_0 + \Delta x, y_0) + T(x_0 - \Delta x, y_0) + T(x_0, y_0 + \Delta y) + T(x_0, y_0 - \Delta y) \\
 - 4T(x_0, y_0) = 0
 \end{aligned} \tag{2-7}$$

Ello se traduce, si se usa una notación donde $T_{ij} = T(x_0, y_0)$ y $T_{i+1j-1} = T(x_0 + \Delta x, y_0 - \Delta y)$, en:

$$T_{i+1j} + T_{i-1j} + T_{ij+1} + T_{ij-1} - 4T_{ij} = 0, \tag{2-8}$$

En la siguiente imagen se representan los cálculos anteriores.

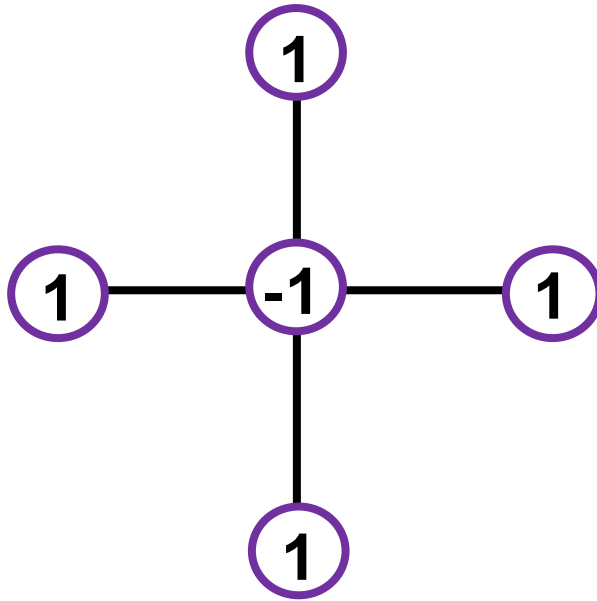


Ilustración 3 Representación gráfica de la ecuación de Taylor.

Si la ecuación se aplica todos los modos donde la temperatura no se conoce. Habremos transformado la ecuación diferencia por un sistema de seis ecuaciones algebraicas acopladas al saber.

$$-4T_6 + g_5 + h_2 + T_7 + T_{10} = 0, \quad (2-9)$$

$$-4T_7 + T_6 + h_3 + f_8 + T_{11} = 0, \quad (2-11)$$

$$-4T_{10} + g_9 + T_6 + T_{11} + T_{14} = 0, \quad (2-12)$$

$$-4T_{11} + T_{10} + T_7 + f_{12} + T_{15} = 0, \quad (2-13)$$

$$-4T_{11} + T_{10} + T_7 + f_{12} + T_{15} = 0, \quad (2-14)$$

$$-4T_{15} + T_{14} + T_{11} + f_{16} + j_{19} = 0, \quad (2-15)$$

En la cual f_{12} es, por ejemplo, la función $f(x)_0$ evaluada en la posición del nodo 12. Las ecuaciones anteriores pueden ser expresadas en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_6 \\ T_7 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{14} \\ T_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_5 + h_2 \\ f_8 + h_3 \\ g_9 \\ f_{12} \\ g_{13} + j_{18} \\ f_{16} + j_{19} \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

O de una forma general:

$$K_{n \times n} T_{n \times 1} = Q_{n \times 1} \quad (2-17)$$

En la cual los subíndices indican las dimensiones de las matrices y n es el número de nodos indeterminados.

De esta ecuación se podrían deducir varias cosas: la primera es que el problema de resolver una ecuación diferencia, en este caso la de Laplace la temperatura T , queda reducido a encontrar una matriz inversa de K ; también, que algunos nodos deben de coincidir con los lugares donde se aplica las condiciones a la frontera, por lo que en el caso del ejemplo, se tiene que aplicar un mallado mucho más fino para poder tener una buena aproximación a la circunferencia de los rectángulos de la malla. También, es conveniente notar que entre más fino sea el mallado, mayor número de incógnitas tendremos, por lo que la matriz K será más grande y será necesario utilizar mayores recursos computacionales para invertirla; por otro lado, esto aumenta la precisión del cálculo, pues hace los términos Δx y Δy mas pequeños y hace que se pierda menos información al truncar a términos de segundo orden.

2.3.1 Reflexión y transmisión de ondas planas

Primero consideraremos la reflexión y transmisión de una interface plana simple y posteriormente consideraremos la reflexión y transmisión de una capa de material de espesor finito. En ambos casos consideraremos que el medio de incidencia no

tiene pérdidas, i.e., el índice de refracción es real. Aunque en óptica generalmente las propiedades magnéticas de los materiales son despreciables, no lo es así a otras frecuencias. Para obtener el mayor provecho del siguiente texto, supondremos que tanto la permitividad eléctrica como la permeabilidad magnética son diferentes de la del vacío para los diferentes medios. Al final podemos hacer la permeabilidad magnética relativa de todos los medios igual a uno y obtenemos las expresiones usadas en óptica.

Ecuaciones de Maxwell en medios polarizables, conductores y magnetizables, isotrópicos y lineales.

Aquí establecemos la forma particular de las ecuaciones de Maxwell que utilizaremos para analizar el problema de reflexión y transmisión. En una interfaz plana entre dos medios isotrópicos y lineales. Introduciremos el vector magnético H para este fin.

De forma general, las ecuaciones de maxwell son:

$$\nabla * E(r, t) = \frac{p(r, t)}{\epsilon_0}, \quad (3-1)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad (3-2)$$

$$\nabla * B(r, t) = 0, \quad (3-3)$$

$$\nabla * E(r, t) = -\frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad (3-4)$$

$$\nabla * B(r, t) = \mu_0 J + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} \quad (3-5)$$

Si suponemos que NO hay corrientes externas y que las corrientes inducidas vienen de la polarización y magnetización del medio y de corrientes de conducción a través de la conductividad del medio. Entonces tenemos podemos escribir,

$$J = J_{ind} = \sigma E + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \times M. \quad (3-6)$$

Supongamos campos monocromáticos con dependencia $\exp(-i\omega t)$. Por lo tanto todas las derivadas parciales respecto al tiempo se pueden reemplazar por el factor $i\omega$. La Ley de Ampere-Maxwell queda como:

$$J = J_{ind} = \sigma E + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \times M. \quad (3-7)$$

Escribimos

$$\nabla \times (B - M) = \mu_0 \sigma E - i\omega \mu_0 P - i\omega \epsilon_0 \mu_0 E \quad (3-8)$$

Dividimos entre μ_0 ambos lados de la ecuación y definimos el vector H como

$$\frac{B - M}{\mu_0} = H \quad (3-9)$$

Tenemos entonces que:

$$B = \mu_0 H + M \quad (3-10)$$

Definamos ahora la susceptibilidad magnética (ω) tal que

$$B = \mu_0 H + M \quad (3-11)$$

Utilizando, además, $P(r; \omega) = \epsilon_0 X_e(\omega) E(r, \omega)$ tenemos,

$$\nabla \times H(r; \omega) = (\sigma - i\omega \epsilon_0 X_0 - i\omega \epsilon_0) E(r; \omega). \quad (3-12)$$

Factorizando $-i\omega \epsilon_0$ del lado derecho de la ecuación, tenemos,

$$\nabla \times H(r; \omega) = -i\omega \epsilon_0 \left(1 + X_e + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) E(r; \omega). \quad (3-13)$$

Si ahora definimos la permitividad eléctrica relativa del medio (también llamada la función dieléctrica o “constante” dieléctrica) como,

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}. \quad (3-14)$$

Tenemos que la ecuación de Ampere Maxwell se escribe como:

$$\nabla \times H(r; \omega) = -i\omega \varepsilon E(r; \omega) \quad (3-15)$$

Donde $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ es la permitividad eléctrica del medio.

Por otro lado, vemos que podemos escribir,

$$B(r, \omega) = \mu H(r; \omega) \quad (3-16)$$

Donde $\mu = \mu_0 [1 + \chi_h(\omega)]$ es la permeabilidad magnética del medio. Generalmente se define la permeabilidad magnética relativa $\mu_r = 1 + \chi_h$ y tenemos $\mu = \mu_0 \mu_r$.

Ahora veamos cómo queda la densidad de carga en estos medios. De la ecuación de continuidad de la carga a frecuencia ω tenemos,

$$\nabla \times J = i\omega p \quad (3-17)$$

$$\nabla \times J = i\omega p \quad (3-18)$$

$$\nabla \times (\sigma E - i\omega P + \nabla \times M) = i\omega p \quad (3-19)$$

Pero la divergencia de un rotacional es siempre cero. Por lo que,

$$\begin{aligned} \rho &= \nabla \times \left(\frac{\sigma}{i\omega} E - P \right) = \nabla \times \left(-i \frac{\sigma}{\omega} E - \varepsilon_0 \chi_e E \right) \\ &= \nabla \times \left(\frac{\sigma}{i\omega} E - \varepsilon_0 \chi_e E \right) E \end{aligned} \quad (3-20)$$

Usando $\varepsilon_0 \chi_e = \varepsilon - 1$ tenemos,

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\nabla \times \left(\chi_e + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right) E \quad (3-21)$$

Sustituyendo este resultado en la Ley de Gauss para el campo eléctrico tenemos, $\nabla \cdot \epsilon_r E = 0$, donde usamos $\epsilon_r = 1 + \chi_e + i\sigma / \omega \epsilon_0$.

Usando los resultados anteriores podemos escribir las ecuaciones de Maxwell en ausencia de densidad de carga y corriente externa de manera muy simétrica.

2.3.2 Condiciones a la frontera

Utilizando las ecuaciones de Maxwell alrededor de una interfaz entre dos medios, uno con permitividad y permeabilidad ϵ_1 y μ_1 , respectivamente y el otro con ϵ_2 y μ_2 , podemos mostrar que,

$$\epsilon_0 E_{\perp}^{(1)} - \epsilon_2 E_{\perp}^{(2)} = 0 \quad (3-1-1)$$

$$E_{\parallel}^{(1)} - E_{\parallel}^{(2)} = 0 \quad (3-1-2)$$

$$\mu_1 H_{\perp}^{(1)} - \mu_2 H_{\perp}^{(2)} = 0 \quad (3-1-3)$$

$$\mu_1 H_{\parallel}^{(1)} - \mu_2 H_{\parallel}^{(2)} = 0 \quad (3-1-4)$$

Donde $E_{\perp}^{(1)}$ y $H_{\perp}^{(1)}$ son la componente normal a la interfaz, sobre la interfaz, del lado del medio 1 y $E_{\perp}^{(2)}$ y $H_{\perp}^{(2)}$ son las componentes normales del lado del medio 2. En palabras podemos enunciar que la componente transversal del campo eléctrico y magnético H son continuas a través de una interfaz, y las componentes normales son discontinuas. Como nota al margen, veamos que si usamos $B = \mu H$ tenemos que:

$$B_{\perp}^{(1)} - B_{\perp}^{(2)} = 0 \quad (3-1-5)$$

$$B_{\parallel}^{(1)} / \mu_1 - B_{\parallel}^{(2)} / \mu_1 = 0 \quad (3-1-6)$$

y enunciamos que la componente normal del campo magnético es continua en la interfaz mientras que la componente transversal es discontinua.

2.4.1 Coeficientes de Reflexión y Transmisión de Fresnel

Consideremos una onda plana viajando en el plano y - z de la figura 1, y supongamos que ésta incide sobre una interface en $(z = z_1)$ a un ángulo de θ_i (respecto a la normal). El vector de campo eléctrico este dado como:

$$E^i = E_0 \exp(ik_y^i y + ik_z^i z) \hat{e}_i \quad (4-1)$$

El vector de onda tiene componentes, $k_y^i = k_1 \sin \theta_i$, $k_z^i = k_1 \cos \theta_i$ donde $k_1 = n_1 k_0$ con $n_1 = (\epsilon_1)^{1/2}$. Claro está que a la onda eléctrica le acompaña una onda magnética dada por,

$$H^i = H_0 \exp(ik_y^i y + ik_z^i z) \hat{h}_i \quad (4-2)$$

$y = z_1$

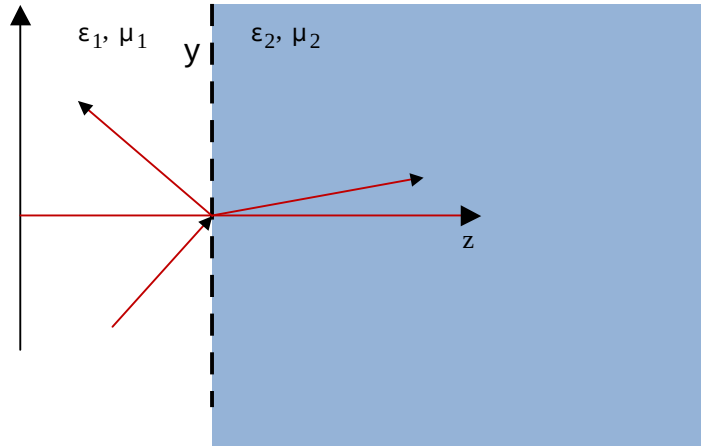


Ilustración 4 Geometría del problema

$$\nabla^2 E + k_0^2 \epsilon_{11} \mu E = 0$$

$$\nabla^2 E + k_0^2 \epsilon_{22} \mu E = 0$$

La onda electromagnética dada por (1) y (2) satisface la ecu. de helmholtz en el medio 1, pero no en el medio 2. No podemos extender la onda (1) y (2) en el interior del medio 2, pues ésta no satisface la ecuación de Helmholtz en dicho medio. Debemos suponer una onda transmitida en el medio dos distinta a la onda incidente. No es difícil darse cuenta que entonces debemos suponer una onda

reflejada en el medio 1 de manera que se puedan satisfacer las condiciones a la frontera en la interface.

Los campos reflejados y transmitidos deben a su vez ser ondas planas para poder satisfacer las condiciones de frontera todo a lo largo de la interface. Entonces tenemos,

$$E^i = E_0 \exp(ik_y^i y + ik_z^i z) \hat{e}_i \quad (4-3)$$

$$E^r = rE_0 \exp(ik_y^r y + ik_z^r z) \hat{e}_r \quad (4-4)$$

$$E^t = tE_0 \exp(ik_y^t y + ik_z^t z) \hat{e}_t \quad (4-5)$$

Donde r y t son los coeficientes de reflexión y transmisión e incluimos el signo + frente a

k_z^r para que todas las componentes de los vectores de onda sean positivas.

Como ya sabemos, para toda dirección de propagación existen dos estados de polarización independientes. Estos son en general arbitrarios pero perpendiculares entre sí. Es decir, una vez escogido uno, el otro queda determinado en la dirección perpendicular. En este caso conviene escoger los estados de polarización de forma que uno de los vectores, eléctrico o magnético, sean paralelos a la interface. Entonces un estado de polarización es aquel en el que el vector eléctrico es paralelo a la interface. En nuestra geometría el vector eléctrico es en dirección $\hat{e}_i = \hat{a}_x$. A este se le denomina comúnmente polarización TE por el inglés *transverse electric*). Al otro estado en el que el vector magnético es paralelo a la interface se le denomina TM (por *transverse magnetic*). En este caso $\hat{h}_i = \hat{a}_x$. En otras convenciones se les denominan polarización s y p , o paralelo y transversal, (respectivamente. La primera convención (TE y TM) es más común en textos de ingeniería eléctrica y es la que adoptaremos aquí.

Trabajaremos el caso de polarización TE asumiendo que tanto la permitividad eléctrica como la permeabilidad magnética son diferentes en ambos medios. Una vez teniendo este resultado es fácil obtener el otro por simetría en las ecuaciones.

Condiciones a la frontera

Las condiciones a la frontera que nos conviene usar son la continuidad de los campos tangenciales eléctrico y magnético (i.e., los campos paralelos a la interface),

$$(E \times \hat{n})_{z=z_1^-} = (E \times \hat{n})_{z=z_1^+} \quad (4-6)$$

$$(H \times \hat{n})_{z=z_1^-} = (H \times \hat{n})_{z=z_1^+} \quad (4-7)$$

Donde $z = z_1^-$ y $z = z_1^+$ quiere decir evaluado *justo a la izquierda* de la interface y *justo a la derecha* de la interface respectivamente.

Ley de Snell

Para satisfacer las ecu. (4-6) y (4-7) todo a lo largo de la interface y en todo momento del tiempo es necesario que los campos tengan la misma dependencia sobre las variables x y y . Esto implica

$$k_y^i = k_y^r = k_y^t \quad (4-8)$$

Dado que los campos satisfacen la ecuación de Helmholtz en su respectivo medio ($\nabla^2 E + k_0^2 \epsilon_1 \mu_1 E = 0$ en el medio 1 y $\nabla^2 E + k_0^2 \epsilon_2 \mu_2 E = 0$ en el medio 2) tenemos que

$$k_z^i = \sqrt{k_0^2 \epsilon_1 \mu_1 - (k_y^i)^2} = k_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_i} = k_0 n_1 \cos \theta_i \quad (4-9)$$

$$k_z^r = k_z^i = k_0 n_1 \cos \theta_i \quad (4-10)$$

$$k_z^i = \sqrt{K_0^2 \varepsilon_1 \mu_1 - (k_y^i)^2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_i} = k_z^i = k_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i} \quad (4-11)$$

Donde usamos $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ y $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$

Notemos que $k_y^i = k_y^r$ en el la $k_y^i = k_y^r = k_y^t$ implica $\sin \theta_i = \sin \theta_r$ y, por lo tanto;

$$\theta_i = \theta_r. \quad (4-12)$$

Que es la primera parte de la ley de Snell. Si $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ es una cantidad real podemos definir sin ninguna confusión el ángulo de transmisión θ_t (respecto a la normal a la interfase). En este caso, $k_y^i = K_y^t$ implica $n_2 \sin \theta_i = \sqrt{n_2^2 - (k_z^t)^2} = \sqrt{n_2^2 - n_2^2 \cos^2 \theta_t}$ y tenemos,

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (4-13)$$

Que es la segunda parte de la ley de Snell.

Cuando $k_z^t = k_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}$ es complejo o imaginario, ya sea porque $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ es complejo ó porque el argumento dentro de la raíz es negativo, se puede definir un ángulo de transmisión como el ángulo de propagación de los frentes de onda en el medio 2, Hay que calcularlo usando la parte real de k_z^t . La fase de la onda transmitida se propaga con el factor

$$(4-14)$$

Y entonces el ángulo θ_t con el que se propagan los frentes de onda está dado por

$$\tan \theta_t = \frac{k_y^i}{\text{Re}(k_z^t)} \quad (4-15)$$

La amplitud de la onda decrece en la dirección z (i.e., perpendicular a la interface) por el factor

$$\exp(-\text{Im}(k_z^t)z) \quad (4-16)$$

Coeficientes de reflexión y transmisión

Hasta el momento podemos escribir

$$E^i = E_0 \wedge (ik_y^i y + ik_z^i z) \hat{a}_{\chi} \quad (4-17)$$

$$E^r = rE_0 \wedge (ik_y^r y + ik_z^r z) \hat{a}_{\chi} \quad (4-18)$$

$$E^t = tE_0 \wedge (ik_y^t y + ik_z^t z) \hat{a}_{\chi} \quad (4-19)$$

Sólo nos falta obtener los coeficientes r y t. Para ello aplicamos las condiciones a la frontera (6) y (7). De la primera obtenemos $(E^i + E^r)_{z=z_1} = (E^t)_{z=z_1}$ lo que se reduce a

$$1 + r \wedge (-2ik_z^i z_1) = t \quad (4-20)$$

Para aplicar la segunda condición a la frontera, calculamos la componente tangencial de H, i.e. H_y términos de campo eléctrico usando la tercera ecuación de Maxwell $\nabla \times E \equiv \mu \partial H / \partial t = i\omega \mu H$. Obtenemos

$$H_y = \frac{i}{\omega \mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Dado que H_y continua a través de la interfase (y ω es igual de ambos lados de la interface), tenemos que

$$\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)_{z=z_1^-} = \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)_{z=z_1^+}$$

Aplicando esta ecuación a (17), (18), y (19), obtenemos

$$r \wedge (-2ik_z^i z_1) = \frac{\mu_2 k_z^i - \mu_1 k_z^t}{\mu_2 k_z^i + \mu_1 k_z^t} \quad (4-21)$$

Resolviendo (21) y (20) obtenemos —

$$r^{\wedge}(-2ik_z^i z_1) = \frac{\mu_2 k_z^i - \mu_1 k_z^t}{\mu_2 k_z^i + \mu_1 k_z^t} \quad (4-22)$$

$$t = \frac{2\mu_2 k_z^i}{\mu_2 k_z^i + \mu_1 k_z^t} \quad (4-23)$$

Estos son los coeficientes de reflexión y transmisión de Fresnel para la polarización TE. El factor de fase que aparece en nuestro resultado en la ec. (22) generalmente no aparece en el coeficiente de reflexión de Fresnel en otros textos. Generalmente se supone que el origen de coordenadas está en la interface, i.e., $z_1 = 0$, lo que haría el factor de fase $\exp(2jk_z z_1)$ igual a uno.

Para obtener los resultados para la polarización TM, podríamos repetir toda el álgebra hecha hasta ahora, pero trabajando con el vector magnético H, el cual en este caso tiene sólo componente en la dirección x. Para aplicar la condición a la frontera sobre la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico (la Ec. (6)) usaríamos la cuarta ecuación de Maxwell $\nabla \times H = J - i\omega \epsilon E$. Si suponemos la Ley de Ohm, $J = \sigma E$, y redefinimos la constante dieléctrica (i.e., la permitividad eléctrica relativa) como:

$$\epsilon_r \leftarrow \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (4-24)$$

Para absorber el término de conductividad, entonces usaríamos $\nabla \times H = j\omega \epsilon E$. Lo cual nos daría la condición a la frontera,

$$\left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial z} \right)_{z=z_1^-} = \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial z} \right)_{z=z_1^+}$$

No es difícil darse cuenta de que toda el álgebra es la misma, pero intercambiando E_x por $-H_x$ y ϵ_n por μ_n ($n = 1$ o 2). En este caso encontramos el coeficiente de reflexión y transmisión para el campo magnético. El coeficiente de reflexión para el campo magnético y para el campo eléctrico es el mismo porque que la relación entre la amplitud de la onda eléctrica y magnética es la misma para la onda incidente y reflejada ya que están en el mismo medio. No es el caso para el

coeficiente de transmisión. Generalmente el coeficiente de transmisión lo referimos al campo eléctrico y tenemos que tomar en cuenta que la relación entre la magnitud del campo magnético y el campo eléctrico en una onda plana es diferente en diferentes medios. En general tenemos: $E_0 = (\mu/\epsilon)^{1/2} H_0$. De manera que tenemos que, $t_E = E_t / E_0 = [(\mu_1/\epsilon_1)^{1/2} H_t] / [(\mu_2/\epsilon_2)^{1/2} H_0] = (\mu_1\epsilon_2/\mu_2\epsilon_1)^{1/2} t_H$, es decir:

$$t_E^{TM} = \sqrt{\frac{\mu_1\epsilon_2}{\mu_2\epsilon_1}} t_H^{TM} \quad (4-25)$$

Resultados

Aquí nada más listamos los resultados para ambas polarizaciones. Tenemos

$$r^{TE} = \frac{\mu_2 k_z^i - \mu_1 k_z^t}{\mu_2 k_z^i + \mu_1 k_z^t} \quad (4-26)$$

$$r^{TM} = \frac{\epsilon_2 k_z^i - \epsilon_1 k_z^t}{\epsilon_2 k_z^i + \epsilon_1 k_z^t} \quad (4-27)$$

$$t^{TE} = \frac{2\mu_2 k_z^i}{\mu_2 k_z^i + \mu_1 k_z^t} \quad (4-28)$$

$$t_E^{TM} = \sqrt{\frac{\mu_1\epsilon_2}{\mu_2\epsilon_1}} \frac{2\epsilon_2 k_z^i}{\epsilon_2 k_z^i + \epsilon_1 k_z^t} \quad (4-29)$$

Donde los coeficientes dan la relación entre la amplitud de la onda eléctrica reflejada y transmitida a la amplitud de la onda eléctrica incidente y,

$$k_z^t = k_0 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \sin^2 \theta_i} \quad \text{y} \quad k_z^i = k_0 n_1 \cos \theta_i$$

En caso de que el medio 2 sea conductor usamos

$$\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_2 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$$

Consideremos la siguiente geometría

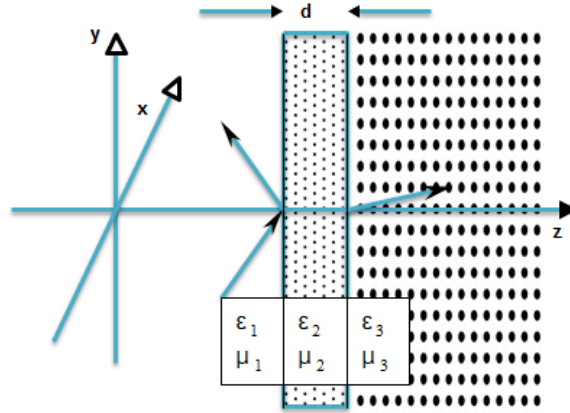


Ilustración 5 Reflexión y transmisión de una capa de material de espesor d .

$$z_1 \quad z_1+d$$

Asumamos el mismo campo incidente dado por

$$E^i = E_0 \hat{e}_i (ik_y^i y + ik_z^i z) \quad (4-30a)$$

$$H^i = H_0 \hat{h}_i (ik_y^i y + ik_z^i z) \quad (4-30b)$$

Donde $\hat{h}_i = \hat{k}_i \times \hat{e}_i$ y $H_0 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} E_0$. Los campos en los medios 1, 2 y 3 satisfacen la ecuación de Helmholtz correspondiente a las constantes del medio, Es decir, el campo eléctrico satisface,

$$\nabla^2 E + k_0^2 \epsilon_1 \mu_1 E = 0 \quad \nabla^2 E + k_0^2 \epsilon_2 \mu_2 E = 0 \quad \nabla^2 E + k_0^2 \epsilon_3 \mu_3 E = 0$$

en el medio 1, 2, y 3 respectivamente. (Recordemos que el operador Laplaciano en coordenadas cartesianas está dado como $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.) No podemos extender el campo incidente en el interior del medio 2 y 3, pues éste no satisface la ecuación de Helmholtz en dichos medios. Dado que no hay dependencia en x en el campo incidente, no la puede haber en los otros campos. Nuevamente consideraremos el caso de polarización TE en detalle y sólo daremos el resultado final para la polarización TM. Podemos postular los siguientes campos eléctricos en los tres medios,

$$E^i = E_0 \wedge (ik_{y1}y + ik_{z1}z) \hat{e}_x \quad (4-30)$$

$$E^r = rE_0 \wedge (ik_{y1}y + ik_{z1}z) \hat{e}_x \quad (4-31)$$

$$E^a = aE_0 \wedge (ik_{y2}y + ik_{z2}z) \hat{e}_x \quad (4-32)$$

$$E^b = bE_0 \wedge (ik_{y2}y + ik_{z2}z) \hat{e}_x \quad (4-33)$$

$$E^t = tE_0 \wedge (ik_y^t y + ik_z^t z) \hat{e}_x \quad (4-34)$$

E^i y E^r son el campo incidente y reflejado y al igual que antes se encuentran en el medio 1. E^a y E^b son los campos en el interior de la capa de material 2. La fase de E^a viaja en la dirección $+z$, y la fase de E^b en dirección $-z$. E^t es el campo transmitido al medio 3. Los coeficientes de amplitud relativa al campo incidente, r , a , b , y t , son constantes a determinar cómo función del ángulo de incidencia y las constantes de los medios. r y t son los coeficientes de reflexión y transmisión que queremos resolver.

Condiciones a la frontera

Debemos de aplicar las condiciones a la frontera en $z = z_1$ y en $z_2 = z_1 + d$: Las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético son continuas a través de las dos interfaces. Nuevamente, para que se satisfagan las condiciones de frontera todo a lo largo de las interfaces, requerimos que la dependencia en el plano x - y sea la misma para todos los campos. Por lo tanto:

$$k_{y1} = k_{y2} = k_{y3} \quad (4-35)$$

Y dado que cada campo debe satisfacer se respectiva ecuación de Helmholtz, tenemos que,

$$k_{y1} = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1 - (k_{y1})^2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_i} = k_0 n_1 \cos \theta_i \quad (4-36)$$

$$\begin{aligned} k_{y2} &= \sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 \mu_2 - (k_{y1})^2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_i} \\ &= k_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i} \end{aligned} \quad (4-37)$$

$$\begin{aligned} k_{y3} &= \sqrt{k_0^2 \varepsilon_3 \mu_3 - (k_{y1})^2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_i} \\ &= k_0 \sqrt{n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i} \end{aligned} \quad (4-38)$$

Estas ecuaciones se pueden reconocer como la ley de Snell en ambas interfaces.

La continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico da,

$$(E_x^i + E_x^r)_{z=z_1} = (E_x^a + E_x^b)_{z=z_1} \quad (4-39)$$

$$(E_x^a + E_x^b)_{z=z_2} = (E_x^t)_{z=z_2} \quad (4-40)$$

ya que todo el campo eléctrico es tangencial (en dirección x) La continuidad de la componente tangencial del campo magnético resulta en que el producto

$$\frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

es continuo a través de las dos interfaces; entonces,

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial E_x^i}{\partial z} + \frac{\partial E_x^r}{\partial z} \right)_{z=z_1} = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial E_x^a}{\partial z} + \frac{\partial E_x^b}{\partial z} \right)_{z=z_1} \quad (4-41)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial E_x^a}{\partial z} + \frac{\partial E_x^b}{\partial z} \right)_{z=z_1+d} = \frac{1}{\mu_3} \left(\frac{\partial E_x^t}{\partial z} \right)_{z=z_1+d} \quad (4-42)$$

Substituyendo las ecuaciones (31) -(34) en (39) -(42), obtenemos

$$^{\wedge}(ik_{z1}z_1) + r^{\wedge}(-ik_{z1}z_1) = a^{\wedge}(ik_{z2}z_1) + b^{\wedge}(-ik_{z2}z_1) \quad (4-43)$$

$$^{\wedge}[(ik_{z2}(z_1))] + b^{\wedge}[-ik_{z1}z_1) = a^{\wedge}(ik_{z2}z_1) + b^{\wedge}(-ik_{z2}z_1) \quad (4-44)$$

$$\frac{k_{z1}}{\mu_2} (r^{\wedge}(-ik_{z1} z_1) - ^{\wedge}(ik_{z1} z_1)) = \frac{k_{z2}}{\mu_2} (b^{\wedge}(-ik_{z2} z_1 - a^{\wedge}(ik_{z2} z_1)) \quad (4-45)$$

$$\begin{aligned} \frac{k_{z2}}{\mu_2} (b^{\wedge}[-ik_{z2} (z_1 + d)] - a^{\wedge}[ik_{z2} (z_1 (+ d))]) \\ = - \frac{k_{z3}}{\mu_3} t^{\wedge}[ik_{z3} (z_1 + d)] \end{aligned} \quad (4-46)$$

Coeficiente de reflexión

Podemos resolver el sistema de ecuaciones (43)-(46) sin mucha dificultad por simple substitución de una ecuación en otra. De (44) en (46) obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{k_{z2}}{\mu_2} (b^{\wedge}[-ik_{z2} (z_1 + d)]^{\wedge}[-ik_{z2} (z_1 + d)] - a^{\wedge}[ik_{z2} (z_1 (+ d))]) \\ = - \frac{k_{z3}}{\mu_3} (b^{\wedge}[-ik_{z2} (z_1 + d)] \\ + a^{\wedge}[ik_{z2} (z_1 (+ d))]) \end{aligned}$$

De donde despejamos,

$$\frac{b}{a} = ^{\wedge}[ik_{z2}(z_1 + d) = r_{23}^{\wedge}[ik_{z2}(z_1 + d)] \quad (4-47)$$

Donde reconocimos que

$$r_{23} = \left(\frac{\mu_3 k_{z2} - \mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2} + \mu_2 k_{z3}} \right)$$

Es el coeficiente de reflexión de Fresnel en polarización TE para la interface 2-3.

Usando (47) en (43), obtenemos

$$(1 + r^{(-2ik_{z1}z_1)})^{(ik_{z1}z_1)} = a(1 + r_{23}^{(2ik_{z2}d)})^{(ik_{z2}z_1)} \quad (4-48)$$

De (47) en (43)

$$\begin{aligned} \frac{k_{z1}}{\mu_1} (1 + r^{(-2ik_{z1}z_1)})^{(ik_{z1}z_1)} \\ = a \frac{k_{z2}}{\mu_2} (1 - r_{23}^{(2ik_{z2}d)})^{(ik_{z2}z_1)} \end{aligned} \quad (4-49)$$

De (48) resolvemos para a y substituímos en (49),

$$\begin{aligned} \frac{k_{z1}}{\mu_1} (1 - r^{(-2ik_{z1}z_1)}) \\ = \frac{(1 + r^{(-2ik_{z1}z_1)})k_{z2}}{(1 + r_{23}^{(2ik_{z2}d)})\mu_2} (1 - r_{23}^{(2ik_{z2}d)}) \end{aligned}$$

De donde despejamos para r y obtenemos,

$$\begin{aligned} r^{(-2ik_{z1}z_1)} \\ = \frac{\frac{k_{z1}}{\mu_1} - \frac{k_{z2}}{\mu_2} + r_{23}^{(2ik_{z2}d)}}{\frac{k_{z1}}{\mu_1} + \frac{k_{z2}}{\mu_2} + r_{23}^{(2ik_{z2}d)}} \left(\frac{k_{z1}}{\mu_1} + \frac{k_{z2}}{\mu_2} \right) \end{aligned}$$

Dividimos arriba y abajo entre $k_{z1}/\mu_1 + k_{z2}/\mu_2$ y despejamos r , y finalmente obtenemos

$$r = e^{(2ik_{z1}z_1)} \frac{r_{12} + r_{23} e^{(2ik_{z2}d)}}{1 + r_{12} r_{23} e^{(2ik_{z2}d)}} \quad (4-50)$$

Donde usamos

$$r_{12} = \left(\frac{\mu_2 k_{z1} - \mu_1 k_{z2}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}} \right)$$

Que es el coeficiente de reflexión de Fresnel en polarización TE para la interface 1-2. La ecuación (50) es el coeficiente de reflexión compuesto para la capa de espesor d para un campo con polarización TE. Nuevamente es factor de fase

generalmente es omitido ya que se define el coeficiente de reflexión de forma que el origen de coordenadas está en $z = z_1$.

2.4.2 Ecuaciones de Maxwell

Concretamente, uno de los casos que más llama la atención en el análisis de la interacción entre materia y campos electromagnéticos corresponden al caso en que la dimensión de la materia es comparable con la variación espacial de la perturbación que representa una onda electromagnética (luz) incidente, ya que, en este caso, la materia es sensible a los cambios espaciales y temporales de la perturbación EM. Para estudiar este tipo de casos se requiere un análisis dinámico en función de las características de la onda que incide como amplitud de onda, polarización, vector de onda y frecuencia, también, las propiedades de la materia como dimensión, geometría, composición, distribución, entre otras, serán parámetros para la modificación de la intensidad del campo EM en el espacio.

Tomando en cuenta la información anterior, se ha argumentado que, al considerar al material como un conjunto de partículas polarizables, el caso más general en que se analiza la interacción de luz y materia se puede estudiar a partir de los fenómenos electromagnéticos involucrados. Esta aproximación permite analizar la respuesta del sistema con base en el campo electromagnético en el espacio.

Las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica son las Ecuaciones de Maxwell, las cuales están dadas por:

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (5-1)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (5-2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (5-3)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (5-4)$$

En la cual E y B se refieren al campo eléctrico (en volts por metro) y al campo magnético (en amperes por metro), respectivamente, ρ es la distribución de carga

total, J es la densidad de corriente total, y ϵ_0, μ_0 son la permisividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío, respectivamente. Estas ecuaciones describen el campo electromagnético en todo el espacio en cualquier momento del tiempo.

Entonces, con base en el análisis de la sección anterior, al considerar una variación espacial de la polarización se obtuvo que la densidad de carga está dada por:

$$\rho_{total} = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot P \quad (5-5)$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación 2.25a se obtiene que:

$$\rho_{total} = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot P \quad (5-6)$$

Así, con la definición del desplazamiento eléctrico D dada por:

$$D = \epsilon_0 E - P \quad (5-7)$$

$$\nabla \cdot D = \rho_f \quad (5-8)$$

Tenemos como resultado que:

Lo cual corresponde al caso descrito por la ecuación 4-7. Por otra parte, considerando la relación entre la Polarización y el campo eléctrico definida por la ecuación 2.10, se tiene que

$$D = \epsilon_0 E - \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E \Rightarrow D = E \quad (5-9)$$

Por lo tanto, justifica la definición de permisividad dada por la ecuación 2.11. A la ecuación 2.27 se le conoce con el nombre de Ecuación Constitutiva (o ecuación material).

Por otra parte, en analogía al caso eléctrico, el campo magnético induce una magnetización M . Esta magnetización contribuye a la producción de una densidad de corriente efectiva J_M , dada por:

$$J_M = \nabla \times M \quad (5-10)$$

La cual implica que la densidad de corriente total estará dada por $J = J_f + J_M$, con el subíndice f denotando la densidad de corriente libre que no depende de la magnetización. Así, considerando, por simplicidad, el caso donde hay ausencia de campo eléctrico, de la ecuación 2.25d se tiene que:

$$\nabla \times B = \mu_0 [J_f + \nabla \times M] \quad (5-11)$$

Los términos M y B para definir un nuevo campo macroscópico H , llamado el campo Auxiliar H , dado por:

$$H = \frac{1}{\mu_0} M \quad (5-12)$$

Ahora bien, en una primera aproximación, se puede suponer que M es paralelo al campo magnético externo aplicado con una constante de proporcionalidad χ_m independiente de la dirección, proponiendo así que:

$$M = \chi_m H \quad (5-13)$$

Donde χ_m corresponde a la susceptibilidad magnética. Así, sustituyendo 2.3 en la relación 2.29, se obtiene que:

$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (1 + \chi_m) H \Rightarrow B = \mu H \quad (5-14)$$

por lo que, para medios que cumplen (medios lineales), se tiene que B también es proporcional a H , con la constante de proporcionalidad $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$, conocida con el nombre de permeabilidad magnética del material. La relación 2.31 corresponde a la otra Relación Constitutiva, y junto con la relación 2.27 sirven como ecuaciones suplementarias a las ecuaciones de Maxwell para medios materiales lineales.

$$\nabla \cdot D = \rho_f \quad (5-15)$$

Finalmente, considerando la definición del vector del desplazamiento D eléctrico y del campo auxiliar H, el conjunto de ecuaciones de Maxwell dadas en 2.25 se pueden reescribir de la forma:

$$\nabla \cdot D = \rho f \quad (5-16)$$

$$\nabla \cdot B = \rho 0 \quad (5-17)$$

$$\Delta \times E + \frac{\partial B}{\partial t} \quad (5-18)$$

$$\Delta \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = Jf \quad (5-19)$$

Este conjunto de ecuaciones define 8 ecuaciones escalares con 12 variables por determinar (E, D, B, H) [9], sin embargo, al considerar las ecuaciones constitutivas, dadas por 2.27 y 2.31, es posible reducir el problema a determinar únicamente 6 variables. Ahora bien, para que las Ecuaciones Constitutivas sean útiles es necesario determinar las propiedades eléctricas y magnéticas del material por medio de la permisividad eléctrica y la permeabilidad magnética. Por lo tanto, en este punto se hace énfasis en la importancia de las mediciones experimentales para reportar ϵ y μ para distintos materiales, en conjunto con modelos que permitan explicar su tendencia.

En resumen, si se considera que las propiedades electromagnéticas del material se pueden modelar por medio de la función dieléctrica y la permisividad μ , la interacción entre luz y materia se puede analizar al resolver el conjunto de ecuaciones de Maxwell dadas por 2.32 junto con las Relaciones Constitutivas.

2.5 Medida del coeficiente de extinción de suspensiones de macropartículas de polímero

Como se mencionó anteriormente, las soluciones químicas anteriores tienen coeficiente de extinción cero ya que son transparentes, sin embargo, cuando la muestra es absorbente o turbia, las curvas de reflectividad pueden ser usadas para medir el coeficiente de extinción. En la Fig. 7a trazamos la curva de reflectividad obtenida con una capa delgada de la suspensión de micropartículas de polímero y la comparamos con la curva correspondiente para el agua.

La imagen de microscopio de las microesferas de polímero es presentada en la Fig. 7b. Podemos observar en la Fig. 7a (área azul) la gran diferencia de altura de las curvas entre los dos ángulos críticos para el agua (curva cian) y para la suspensión de micropartículas de polímero (curva verde). La diferencia de reflectividad óptica a 41° es 0,214. Esto permite concluir que el sensor es capaz de medir el coeficiente de extinción de una muestra líquida. Además, podemos notar que después del segundo ángulo crítico (P) las curvas están ligeramente desplazadas lateralmente entre sí en 0.2013° (Dip D). Esto es el resultado de la sensibilidad plasmónica de la nanopelícula de Au a la superficie del índice de refracción. Los parámetros teóricos utilizados para esta curva de ajuste, son 16 nm de espesor de película de Au, $19 \mu\text{m}$ de espesor para la suspensión de micropartículas de polímero y un RI de $1,337 + 0,00045i$.

El coeficiente de extinción de la masa es obtenido de la parte imaginaria del índice de refracción efectivo requerido para ajustar el modelo teórico a la curva experimental como,

$$\alpha_{ext} = 2 k_o \text{Im}[n_{eff}], \quad (3)$$

Donde $k_o = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda en el vacío y $\text{Im}[n_{eff}]$ significa la parte imaginaria del índice de refracción del medio efectivo. Para la suspensión de micro partículas de polímero obtenemos 109.80 cm^{-1} .

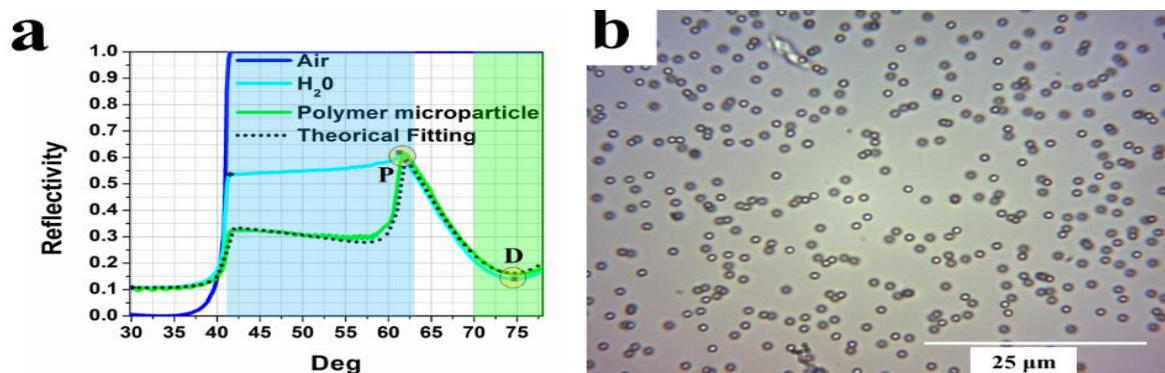


Ilustración 6 Cambio del coeficiente de extinción.

(a) Reflectancia óptica (línea azul) de referencia: BK7 / Aire. La línea cian corresponde al agua. La curva de trazos negros representa la reflectancia teórica y la curva verde corresponde a la medición experimental de micro partículas de polímero. El espesor de la película de Au fue de 16 nm. El espesor de la película de micro partículas fue de 19 μm. (b) La imagen del microscopio de la película de microesferas de polímero de 1,8 μm de diámetro diluida en agua..

Curva de reflectividad con suspensión de bacterias vivas

Medimos una monocapa de bacterias *E. coli* vivas suspendidas en PBS como una prueba de concepto preliminar para analizar el cambio del coeficiente de extinción en la curva de reflectividad y demostrar el potencial de esta configuración óptica.

En la Fig. 8 trazamos la curva de reflectividad obtenida para una película delgada de la bacteria *E. coli* (curva naranja) suspendida en PBS. También se muestra un ajuste del modelo teórico (línea discontinua negra). Podemos apreciar que el ajuste reproduce muy bien la curva experimental. El ajuste del modelo teórico requirió un índice de refracción efectivo complejo de $1.335 + 0.0000199i$. Esto era de esperar porque las bacterias dispersan la luz, lo que da como resultado un índice de refracción eficaz complejo. Sin embargo, para ajustarnos al modelo teórico, necesitábamos modificar considerablemente el índice de refracción (complejo) de la nanofilm de oro de su valor global de $1.3354 + 1.9019i$. Esto fue inesperado. Creemos que algunas biomoléculas se adsorbieron en la interfaz Au / muestra interactuando con los electrones libres dentro de la película de oro y cambiando su respuesta óptica en la longitud de onda operativa. Es bien sabido que la mera presencia de

la superficie modifica la respuesta óptica de los metales muy próximos a la superficie. Pero en este caso, la película es tan delgada que la mayoría de los electrones están cerca de la superficie. Además, los parámetros utilizados fueron 15,5 nm de película de Au, 20 μm de suspensión de bacterias vivas. Considerando el caso ya mencionado como un medio efectivo, el valor teórico del índice de refracción utilizado en la figura 8a para comparar con el experimento, tiene un valor de $1.335 + 0.0000199i$. Este índice de refracción imaginario produce un coeficiente de extinción de 4,85 cm^{-1} .

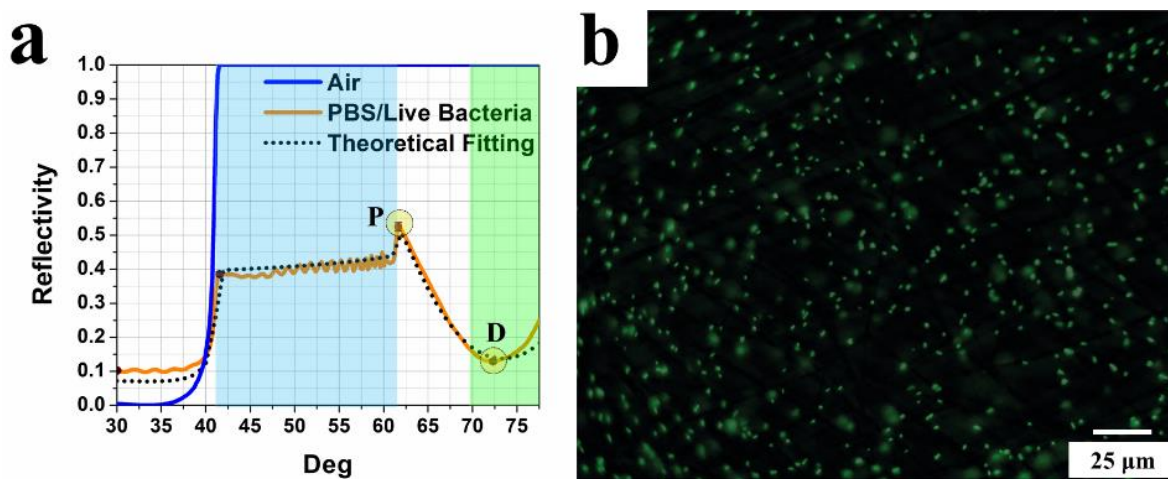


Ilustración 7 La reflectancia en función del ángulo de incidencia.

Los parámetros considerados para este ajuste son, 15,5 nm de película de oro, un medio efectivo de espesor de 20 μm , que corresponde a las bacterias vivas suspendidas en PBS. (b) Imagen de microscopio de fluorescencia de la bacteria E. Coli.

CAPITULO 3. MARCO OPERATIVO

4.1 DESARROLLO PROCEDIMIENTO Y DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES REALIZADAS

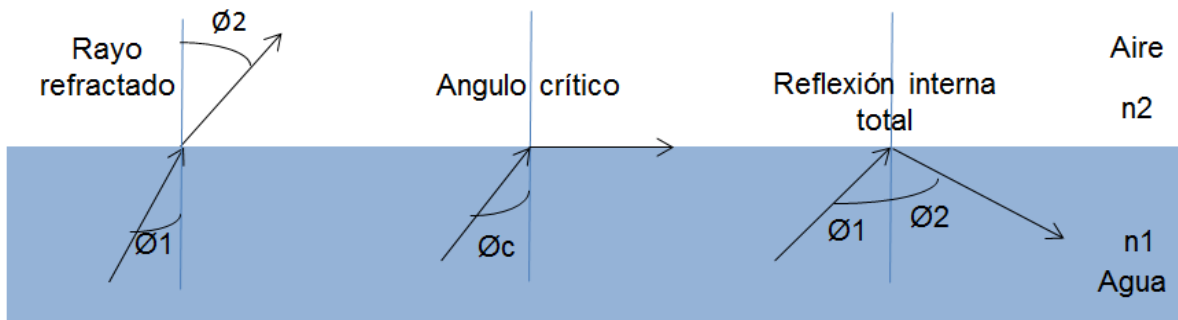


Ilustración 8 Diferencia entre refracción y reflexión.

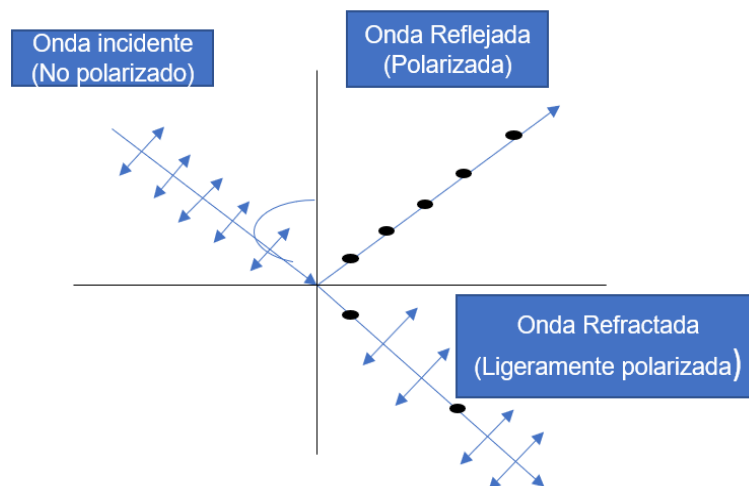


Ilustración 9 Representación de una onda incidente, onda reflejada y la onda refractada.

Graficación de las funciones dieléctricas para el oro y la plata.

Se denomina índice de refracción al cociente de la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio cuyo índice se calcula. Se simboliza con la letra n y se trata de un valor adimensional.

$$N = C/V$$

C: la velocidad de la luz en el vacío

V: Velocidad de la luz en el medio cuyo índice se calcula (agua, vidrio, etc.).

N: Índice de refracción del medio.

Las ecuaciones de Fresnel, también conocidas como fórmulas de Fresnel, son un conjunto de relaciones matemáticas que relacionan las amplitudes de las ondas reflejadas y refractadas (o transmitidas) en función de la amplitud de la onda incidente.

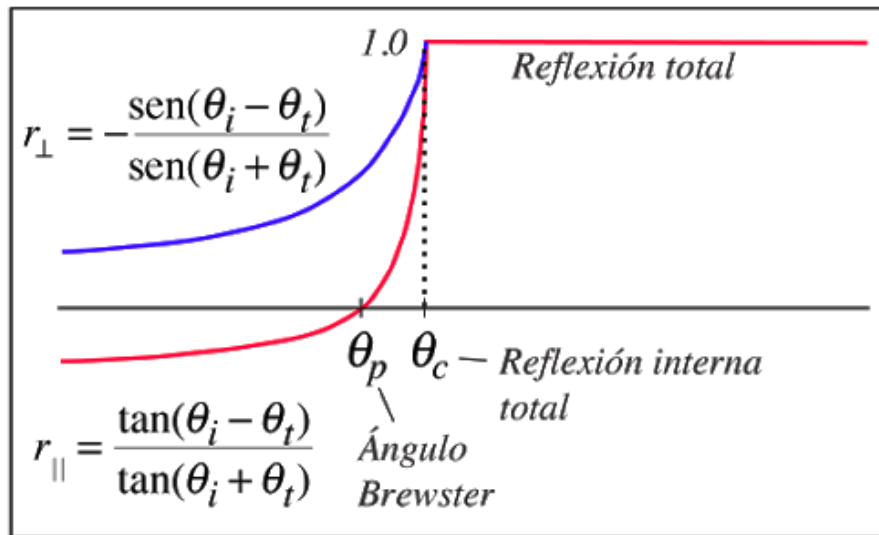


Ilustración 10 Ecuaciones de Fresnel.

Ag Plata

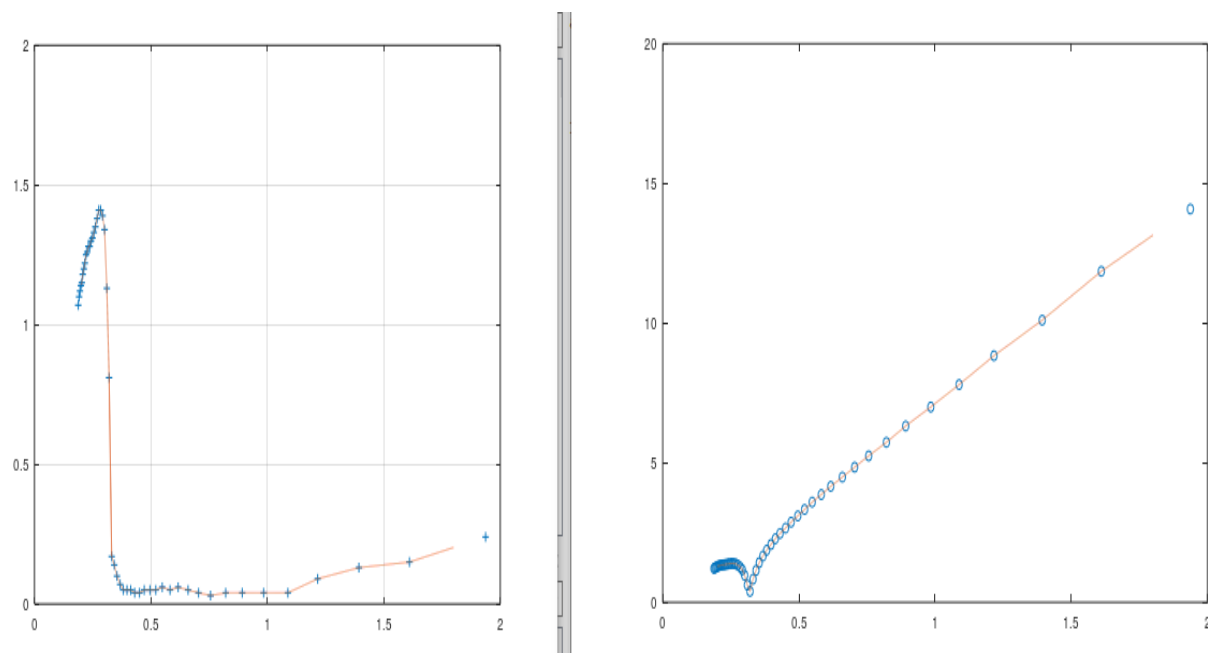


Ilustración 11 En la gráfica izquierda se representa el índice de refracción de nuestra onda en el medio de plata y la gráfica derecha representa el coeficiente de extinción.

Para verificar que nuestras graficas sean correctas, chequé que coincidiera las gráficas de la página INFO Refractive Index con las gráficas que realicé en Octave.

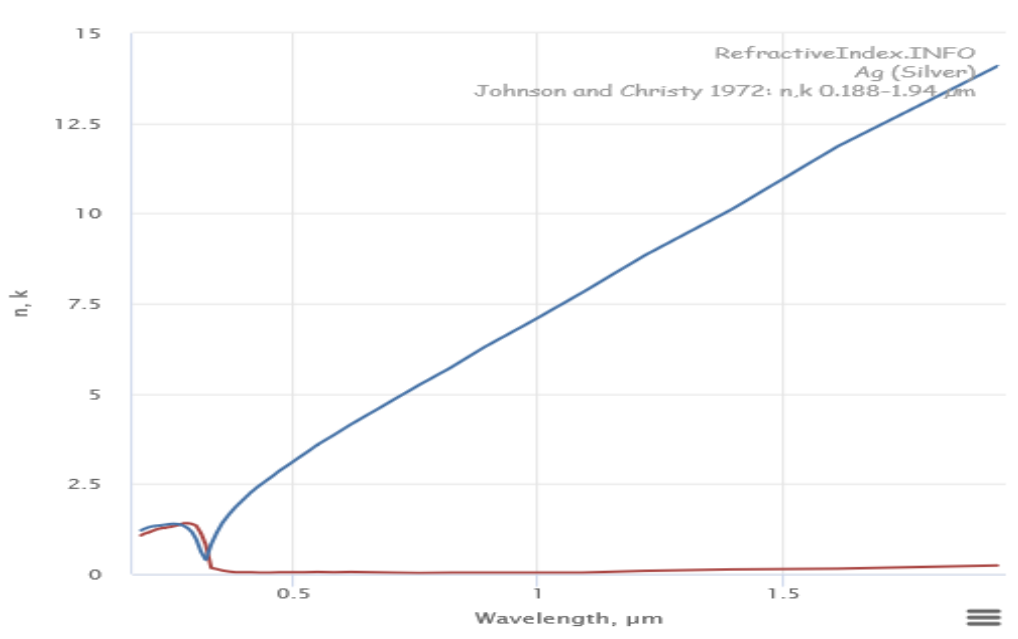


Ilustración 12 La línea azul (N) representa el índice refracción (.05158) y la línea roja (k) el coeficiente de extinción (3.9046)

Au Oro

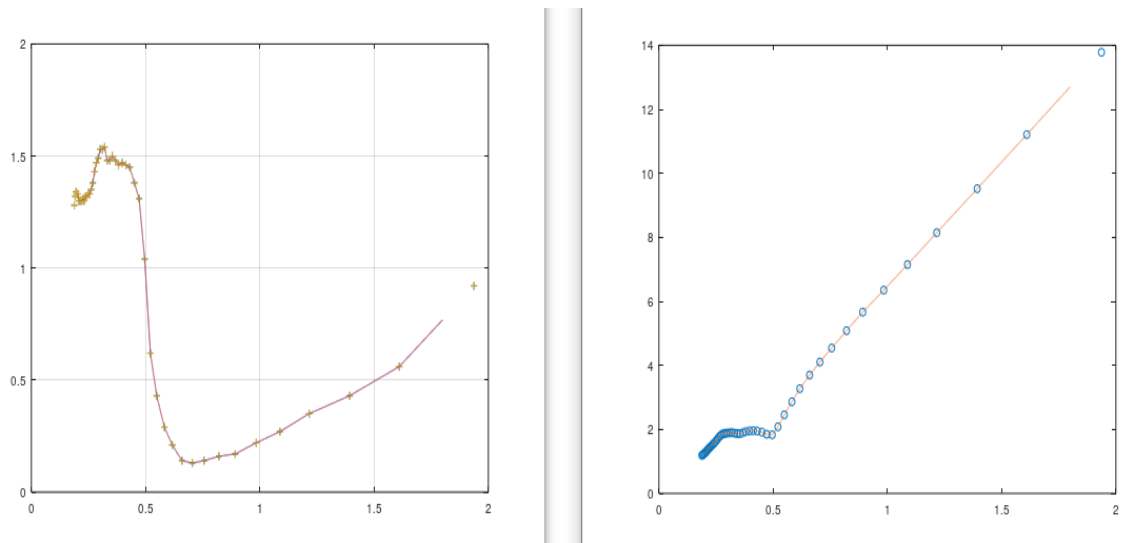


Ilustración 13 En la gráfica izquierda se representa el índice de refracción de nuestra onda en el medio de plata y la gráfica derecha representa el coeficiente de extinción.

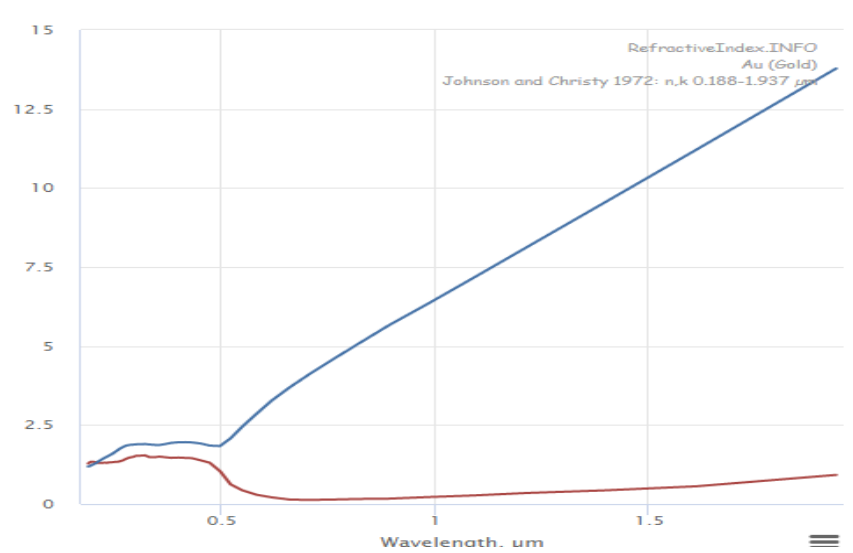


Ilustración 14 La línea azul (N) representa el índice de refracción (.27732) y la roja (k) el coeficiente de extinción (2.978).

4.2 Diseño de nuestro sistema.

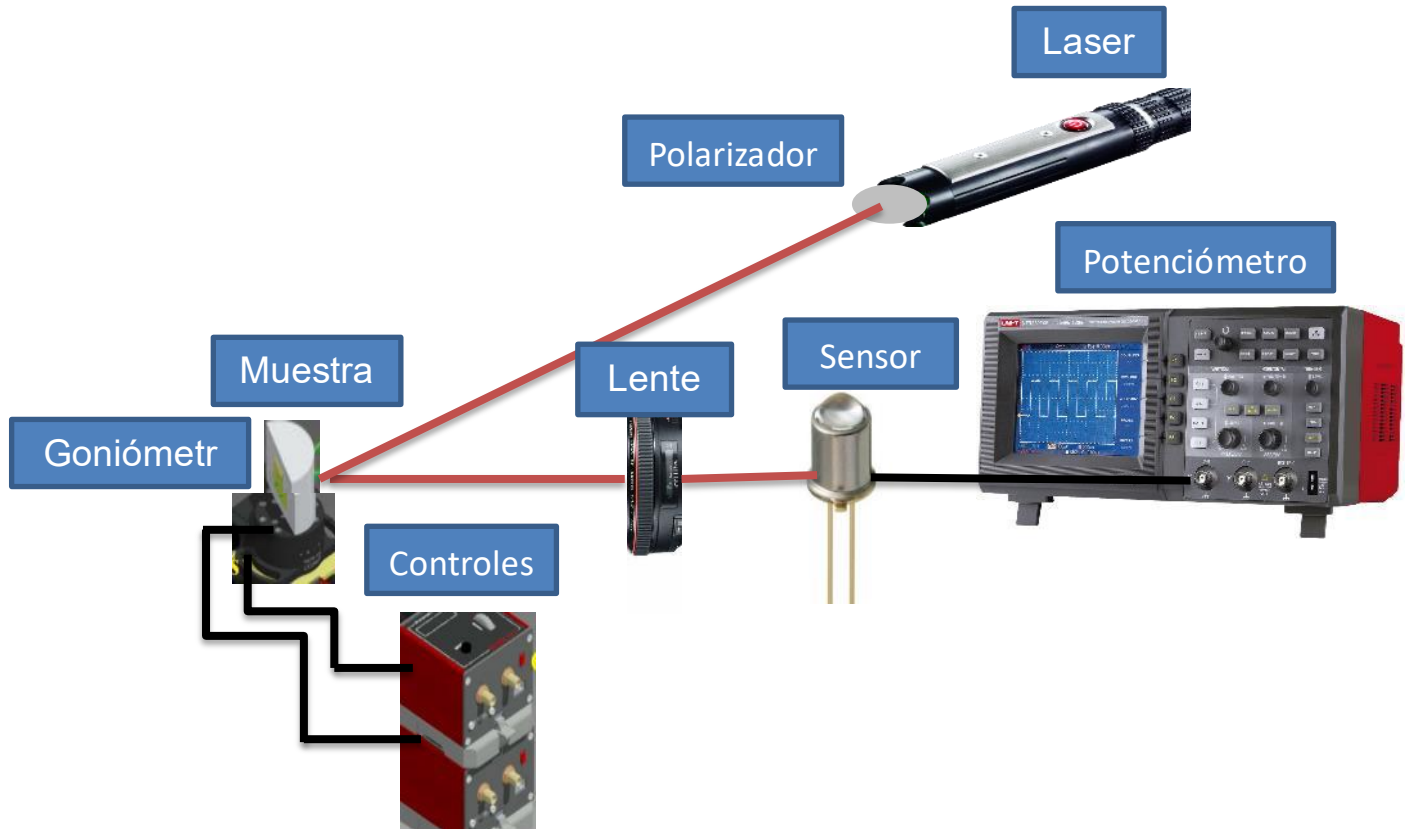


Ilustración 15 Diagrama del sistema que se utilizó para detectar la bacteria E-Collins.

En este sistema se muestra un láser que pasa por un polarizador e impacta en la muestra, la cual está Compuesta por aire y una película de oro en la cual hay bacterias, la onda reflejada pasa por un lente y después por un sensor, la función del sensor es detectar la onda reflejada, después mandamos la salida de esa onda a un potenciómetro para poder observar su comportamiento.

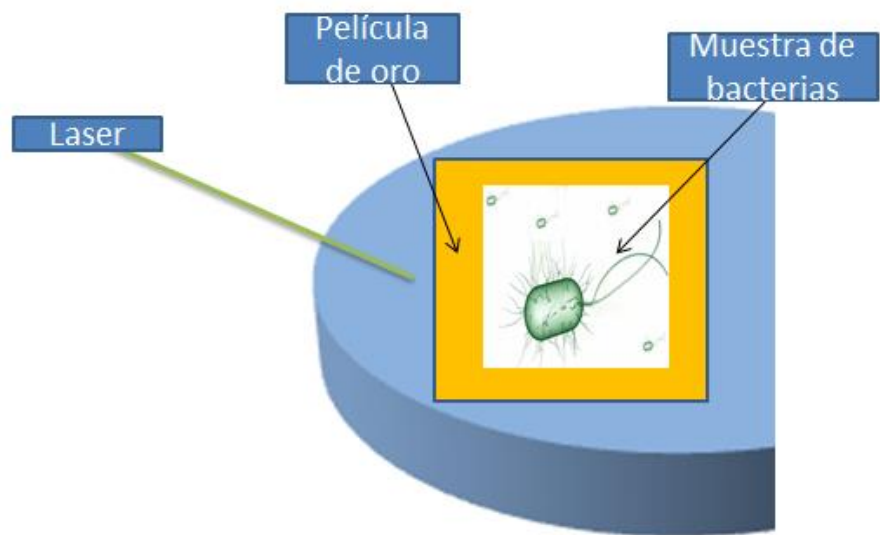


Ilustración 16 Ampliación de la muestra.

CAPITULO 4 RESULTADO Y CONCLUSIONES

5.1 RESULTADOS

En la siguiente imagen se muestran los parámetros que se utilizaron para la simulación de la onda de transmisión y refracción en un material de dos medios Oro y aire.

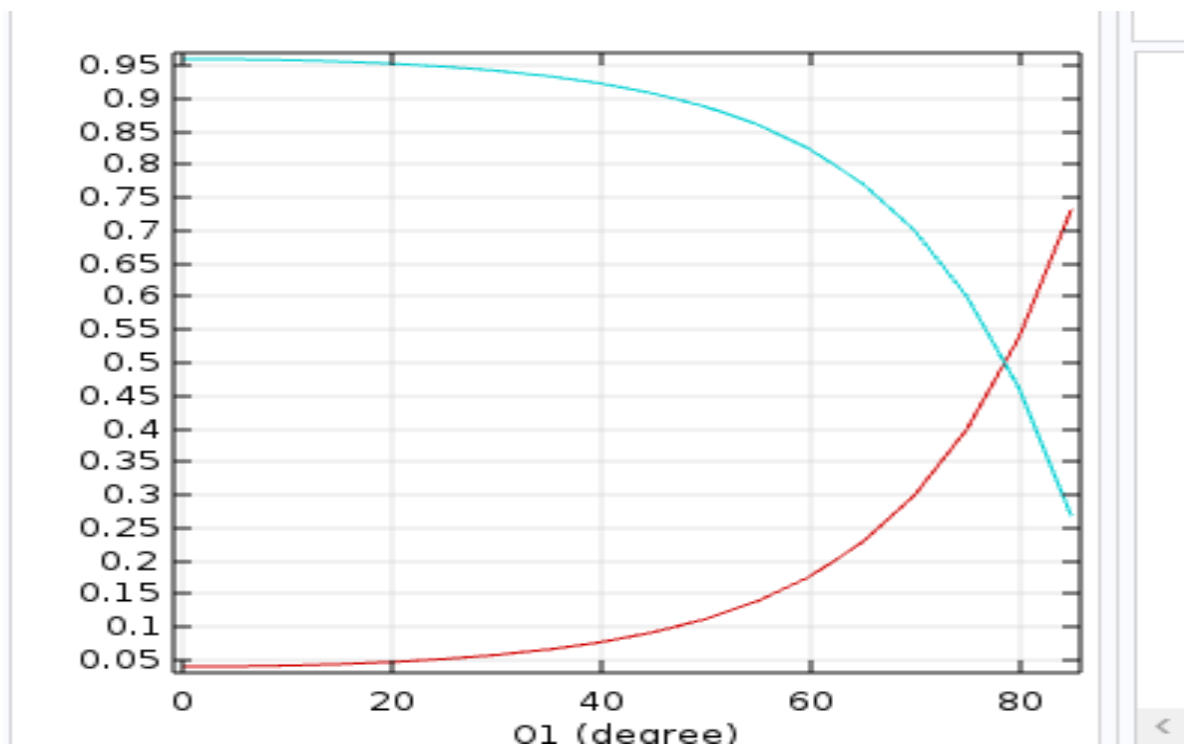


Ilustración 17 La onda color azul representa la transmisión y la onda roja representa la reflexión de la onda incidente sobre nuestro material de dos medios.

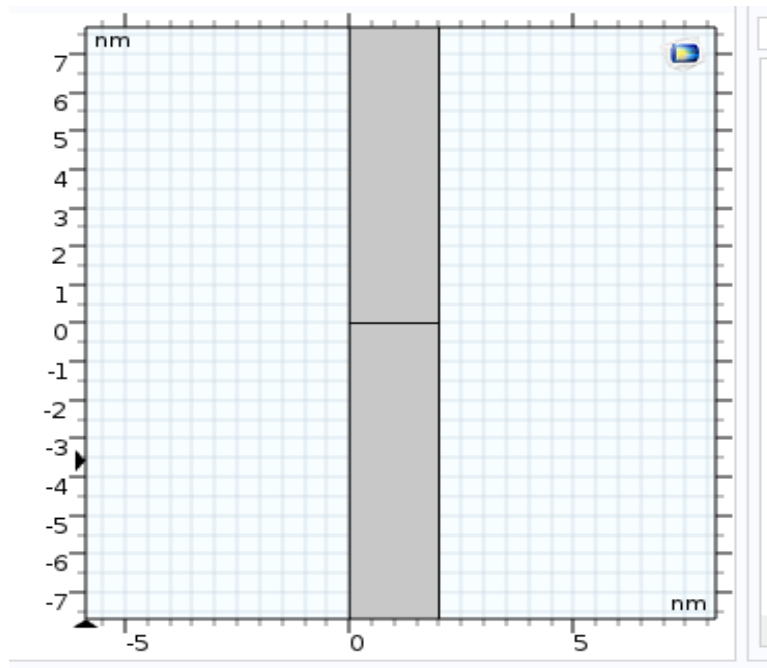


Ilustración 18 En esta imagen se muestra nuestro material de dos medios (oro y aire), la unidad de longitud de la onda está en nanómetros.

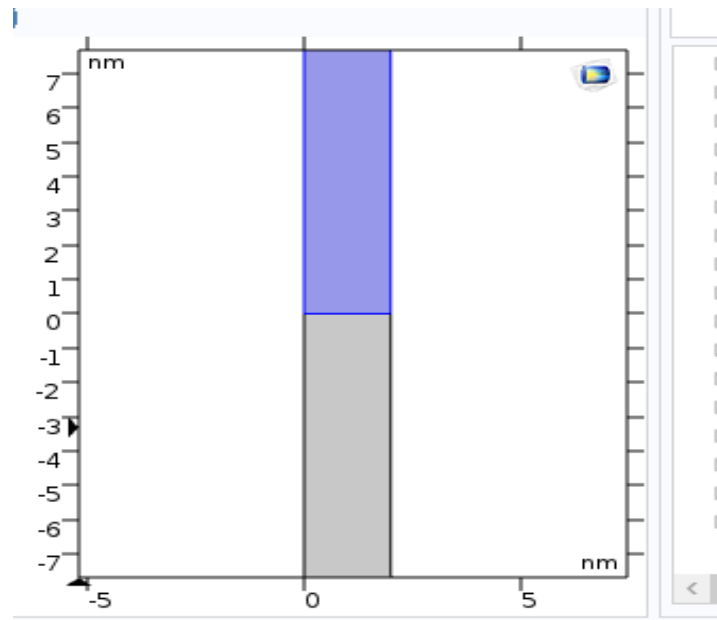


Ilustración 19 El material1 está en la parte de arriba (seleccionada de color azul) y el material dos está en la parte de abajo (color gris)

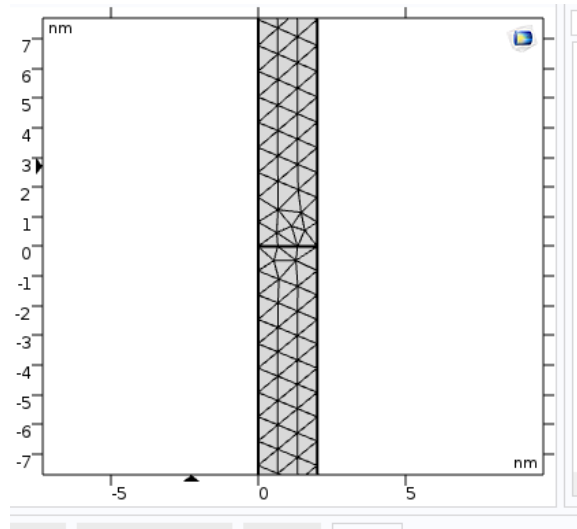


Ilustración 20 El software de elementos finitos que utilicé tiene la opción de “mallar” nuestro sistema para obtener los datos que queremos en un punto más exacto de nuestro material.

Esta es la representación gráfica de la simulación, en la cual la parte izquierda tiene valores de 0 hasta 1 (representa el voltaje de transmitancia o reflectancia de la onda que incide en nuestro material y en la parte inferior es representa el ángulo de nuestra onda de incidencia.

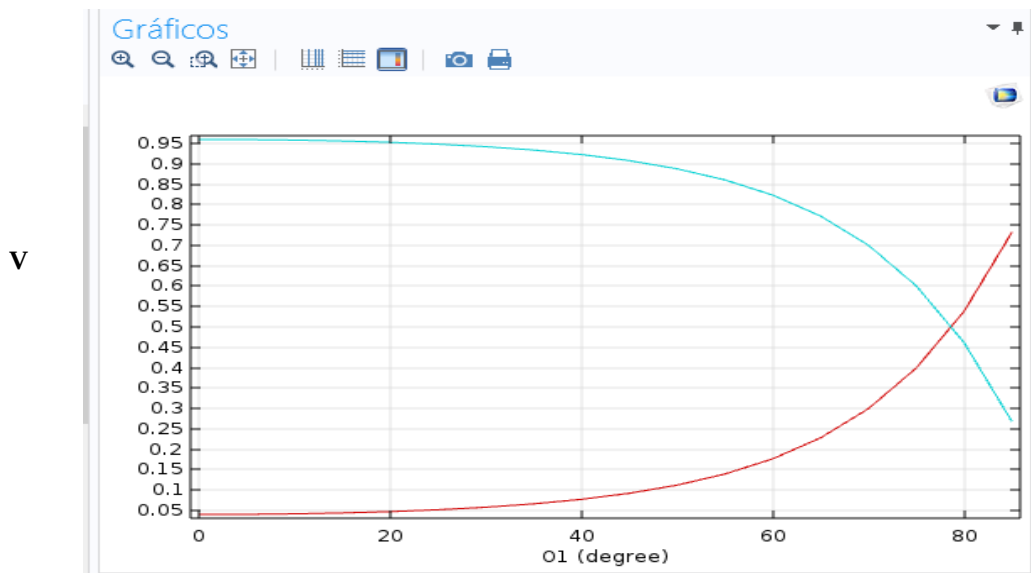


Ilustración 21 En esta imagen se logra apreciar que para una onda de incidencia a 70° la línea azul que representa la onda de transmisión tiene un valor de .7 y la línea roja que representa la onda de reflexión tiene un valor de .3.

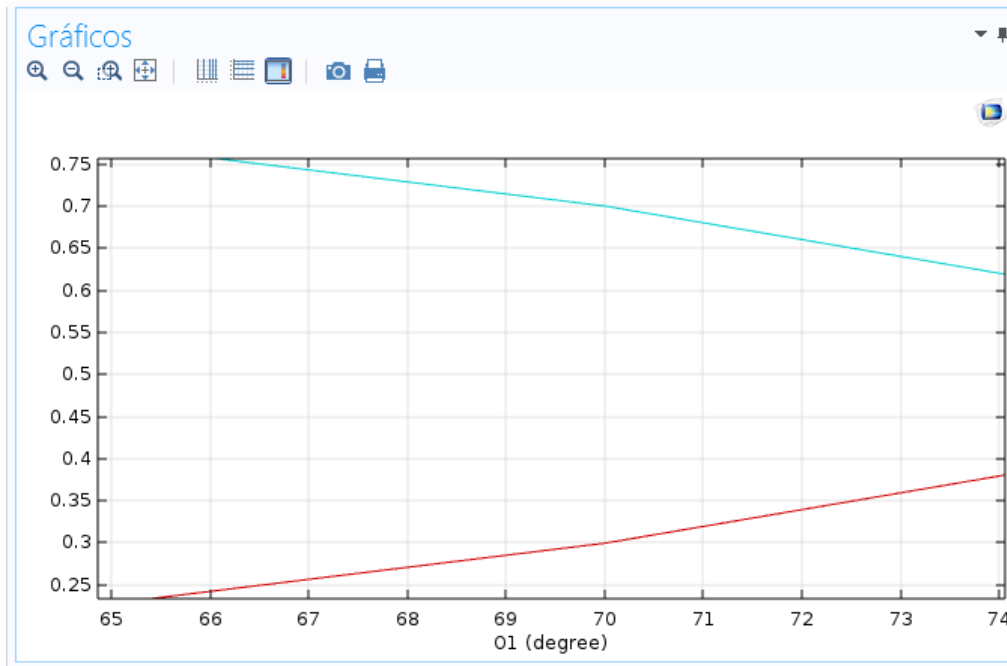


Ilustración 22 Representación de una onda de incidencia sobre nuestro sistema de dos medios.

Como resultado tenemos que dependiendo del ángulo de la onda de incidencia sobre nuestro material de dos medios (oro y aire) el valor de la onda de transmisión y reflexión, más adelante explicaré más a detalle como funcionaria el sistema de forma física, para una mejor comprensión de esta investigación.

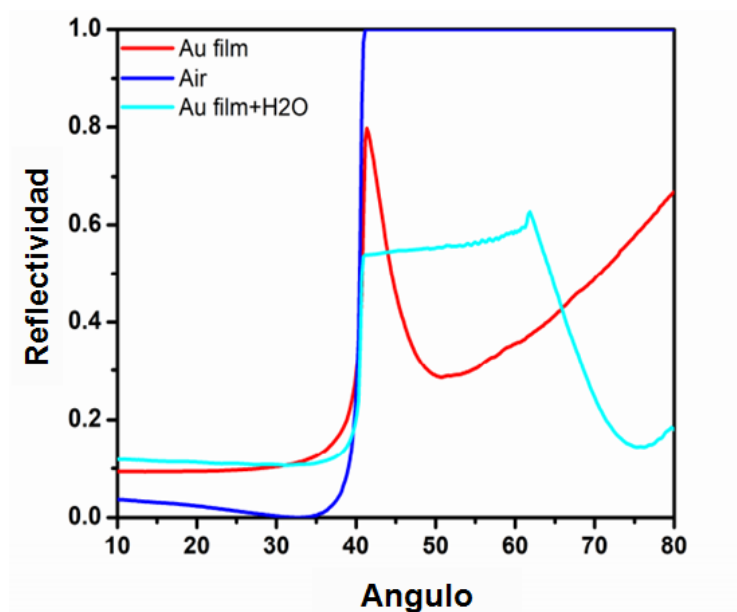


Ilustración 23 Ondas reflejadas.

5.2 CONCLUSION

Cuando se le aplica una onda a nuestro sistema, la onda reflectada varía dependiendo de varios factores como son:

- longitud de onda incidida
- Angulo
- Material de la película
- Bacteria

De tal modo que si aplicamos una onda de la misma longitud, del mismo Angulo, y al mismo material, la onda reflejada variaría de acuerdo a las bacterias que estén en la película, de este modo cabe la posibilidad de detectar otros tipos de bacterias dependiendo a la intensidad de la onda reflejada.

Como se observa en la figura XXI al aplicarle una magnitud de onda al sistema, se obtiene una onda reflejada la cual se examina en un potenciómetro ya que contiene un voltaje y así podemos observar las variaciones de la onda, debido a esto creemos que podríamos detectar varios tipo de bacterias, ya que si variamos la muestra, el valor de la onda reflejada también es diferente.

Bibliografía

- Barrera, R. G. (2000). Propiedades ópticas de materiales granulares. A. C. Esbaide.
- Bryant, M. P. (2013). *Introduction to metal-nanoparticle plasmonics*. Nueva Jersey, Estados Unidos: Jhon Wiley y Sons.
- CLINIC, M. (15 de Junio de 2016). *MAYO CLINIC*. Obtenido de <https://www.mayoclinic.org/es-es/diseases-conditions/e-coli/symptoms-causes/syc-20372058>
- Comsol. (2013). *01 Introduction to comsol multiphysics*. Estados Unidos: Academia.
- Dechaumphai, P. (2010). *Finite element method: fundamentals and applications*. Alpha Science International.
- F, Á. (2003). *Metodo dos elementos finitos*. Porto, Portugal.
- Gonzales, M. (8 de Noviembre de 2010). *La guia*. Obtenido de <https://quimica.laguia2000.com/conceptos-basicos/transmitancia-y-absorbancia>
- Hecht, E. (2000). *Óptica*. Addison Wesley Iberoamericana.
- Humberto, B. (2017). *Métodos de elementos finitos aplicado a nanoestructuras plasmónicas*. México.
- I. Babuska, J. W. (2010). *Finite elements: an introduction to the method and error estimation*. Oxford: Oxford University Press.
- Landau, I. (2015). *Teoria clasica de los campos*. Cali, Colombia.
- Lizarza, J. (2011). *Metodo de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*. San Sebastian: Printed in Spain.
- M., L. y. (1984). *Electrodynamics of continuous media*. Oxford: Pergamon press.
- Maier, S. (2007). *Plamonic: Fundamentals and applications*. Springer.
- O. W. Vázquez Estrada, G. M. (2016). Sensitivity of optical reflectance to the deposition of plasmonic nanoparticles and limits of detections. *J. Nanophotonics*.
- OMS. (7 de Agosto de 2018). *OMS*. Obtenido de <https://www.who.int/peh-emf/about/WhatisEMF/es/>
- OMS. (15 de Marzo de 2019). *OMS*. Obtenido de https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=bacteria+e+coli&oq=bacteria+e+
- OptimerSystem, D. c. (15 de Noviembre de 2014). *Optimer System*. Obtenido de http://www.optimersystem.com/avada_faq/que-es-reflectancia/
- Pachón, L. (2018). *Estudio de la respuesta óptica de películas delgadas de nanotubos de carbono decorados con nanópartículas de oro*. Bogotá.
- Pineda, D. (2019). *Interacción de ondas electromagneticas*. México.
- Plus, M. (22 de Octubre de 2019). *Medine Plus*. Obtenido de <https://medlineplus.gov/spanish/ecoliinfections.html>
- Requejo, F. G. (2009). *Propiedades asociadas a la estructura local en sistemas nanometricos*. La Plata, Argentina.
- Sejas, R. (2020). *Campos electromagneicos en el vacio y otros medios materiales*. Cochabamba, Bolivia.
- Solis Tinoco, V. E. (2020). *An optical sensor combining surface plasmon resonance*. México.
- T. Pradeep, M.-H. (2007). *The essentials, Understanding Nanoscience and nanothecnply*.
- Tejedor, G. (2017). *Ley de Snell*. Valencia.
- Wikipedia. (27 de Noviembre de 2014). *Wikipedia*. Obtenido de [https://es.wikipedia.org/wiki/Transmitancia#:~:text=La%20transmitancia%20o%20transmitencia%20es,unidad%20de%20tiempo%20\(potencia\).](https://es.wikipedia.org/wiki/Transmitancia#:~:text=La%20transmitancia%20o%20transmitencia%20es,unidad%20de%20tiempo%20(potencia).)
- Wikipedia. (20 de Septiembre de 2019). *Wikipedia*. Obtenido de <https://es.wikipedia.org/wiki/Reflectividad>
- Wikipedia. (10 de Mayo de 2021). *Wikipedia*. Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Snell
- Wikipedia. (7 de Mayo de 2021). *Wikipedia*. Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/Campo_electromagn%C3%A9tico
- Zangwill, A. (2012). *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press.
- Zienkiewicz. (2007). *El metodo de los elementos finitos*. Barcelona, España.: Reverté.