

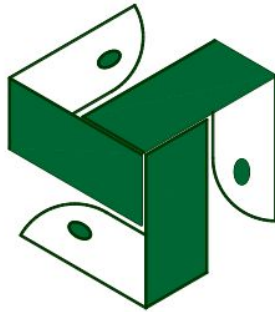


GOBIERNO DEL
ESTADO DE MÉXICO

INGENIERÍA MECATRONICA



TESCO
TECNOLÓGICO
DE ESTUDIOS
SUPERIORES
DE COACALCO



TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE COACALCO

**DESARROLLO E IMPLEMENTACIÓN DE UN
CONTROLADOR PID, EN UN ROBOT
ANTROPOMÓRFICO DE 4° GRADOS DE
LIBERTAD.**

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO DE MECHATRÓNICA**

**PRESENTA
DAVID AMBROSIO MARTINEZ**

201920161

**ASESOR DE PROYECTO
Dr. RICARDO ALEJANDRO BALCAZAR MONTES DE OCA**

COACALCO DE BERRIOZABAL, JUNIO DE 2024

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco por brindarnos la oportunidad de llevar a cabo este proyecto. Su apoyo constante y el acceso a sus recursos han sido fundamentales para el éxito de nuestra iniciativa.

Así mismo extender el reconocimiento merecido al Dr. Ricardo Alejandro Balcázar Montes de Oca, quien ha desempeñado un papel crucial como el encargado del proyecto. Su profundo conocimiento, dedicación incansable y orientación experta han sido invaluableles. Cada paso del camino, el Dr. Ricardo ha demostrado un compromiso excepcional, proporcionando una dirección clara y contribuciones significativas que han elevado la calidad de nuestro trabajo.

Sin la ayuda del Dr. Ricardo y el respaldo de todas estas personas e instituciones, este proyecto no habría sido posible. Estoy profundamente agradecidos por su contribución a nuestro trabajo y esperamos que este proyecto tenga un impacto positivo en la comunidad.

Además, quiero expresar una gran gratitud a todos los colaboradores y compañeros que han colaborado en este proyecto. Cada uno de ustedes ha aportado con su experiencia única, esfuerzo incansable y habilidades excepcionales, contribuyendo al logro colectivo de nuestros objetivos. Su trabajo en equipo y compromiso han sido esenciales para superar los desafíos y alcanzar el éxito.

Aprecio profundamente la generosidad de todos aquellos que han compartido sus conocimientos, brindado orientación y ofrecido su apoyo a lo largo de este proyecto. Estamos agradecidos por la oportunidad de aprender y crecer juntos, y esperamos continuar colaborando en futuros proyectos.

Quiero dedicar un espacio especial para expresar mi más profundo agradecimiento a mis padres, Araceli Martínez I y Alejandro Ambrosio M. Su amor incondicional, apoyo inquebrantable y sacrificio constante han sido la piedra angular de mi viaje académico y personal.

No hay palabras suficientes para expresar mi gratitud por todo lo que han hecho por mí. Esta tesis es tan suya como mía, porque sin su amor y apoyo inquebrantable, este logro no habría sido posible.

Gracias, queridos padres, por ser mi roca, mi inspiración y mi mayor fuente de fortaleza. Los amo más de lo que las palabras pueden expresar.

¡Muchas gracias a todos!

Resumen

El propósito de la presente labor consiste en la creación de un robot antropomórfico de 4° grado de libertad, capaz de realizar pequeñas colaboraciones con otros robots colaborativos.

Se espera que se realice el modelado en CAD de las piezas mediante el uso principal del software SolidWorks, con el propósito de generar el modelo del robot y las piezas adecuadas para que sea funcional.

En segundo lugar, se llevará a cabo el modelado matemático, diseñando la cinemática, dinámica y el control PID. Estos puntos fueron elaborados por Matlab, con el propósito de identificar una representación del movimiento del robot. Asimismo, se busca conocer parámetros como masa, velocidad y aceleración, siendo estos claves para el diseño del control PID de los eslabones individuales del robot.

Por último, se presenta el diseño eléctrico y electrónico, así como la implementación de su programación, el diseño fue realizado de manera concreta en el software proteos, donde se colocaron los drives, motores y las tarjetas de control (Arduino) donde respectivamente se realizó e implemento la programación de cada uno de los grados de libertad y se implementó el PID necesario para cada motor.

El resultado de todo este trabajo, concluyen con los objetivos obtenidos de manera correcta, con un par de factores no tomados en cuenta que provocaron retardos en término del proyecto, el peso y diferencias en cada uno de los eslabones debido al peso de los motores consecutivos, así como las ganancias en el control PID.

Este resumen termina destacando la relevancia de la investigación, así como la contribución, en donde podemos mencionar que el desarrollo de un robot como una manera de poderlo adaptar en el proceso industrial en el que se requiera, como parte de la contribución este forma parte de un proyecto realizado con la finalidad de implementar proyectos y prototipos dentro del CCAI.

Índice

Índice.....	6
Índice de figuras	8
Índice de tablas	10
Capítulo 1 Introducción	1
Planteamiento del Problema.....	1
Objetivo General.....	1
Objetivos Particulares	1
Justificación	3
Metodología	3
Capítulo 2.- Estado del Arte	5
Capítulo 3.- Marco Teórico	11
3.1 Modulación por ancho de pulso (PWM)	11
3.2 Solidworks	11
3.3 Cinemática directa	12
3.4 Ecuación de Euler LaGrange.....	12
3.5 Coordenadas generalizadas	13
3.6 Robótica industrial	14
3.7 PID.....	18
3.7.1 Parte proporcional	19
3.7.2 Parte integral.....	19
3.7.3 Parte derivativa	20
3.7.4 Retroalimentación	21
3.8 Motor DC	21
3.8.1 Motor MG25-370	22
3.8.2 Encoder y módulo L298N.....	22
3.9 ARDUINO	23
Capítulo 4.- Desarrollo	25

4.1 Diseño en CAD del robot de 4 GDL	25
4.2 Cinemática directa de un robot de cuatro grados de libertad.....	29
4.1.1 Algoritmo de Denavit Hartenberg	30
4.1.2 Matrices de transformación homogénea	33
4.3 Dinámica del robot de cuatro grados de libertad	35
4.4 Diseño del controlador para el robot de cuatro grados de libertad	57
Capítulo 5.- Simulaciones.....	60
5.1 Simulación de la dinámica del robot de 4 GDL	60
5.2 Simulación de la implementación del control PID en el robot de 4 GDL	63
Capítulo 6.- Experimentaciones	67
6.1 Diagramas eléctricos	67
6.2 Programación	68
6.3 Resultados.....	72
Conclusiones.....	75
Trabajos a Futuro	77
Referencias Bibliográficas	78
Anexos	82

Índice de figuras

Figura 1.- Parámetros Denavit-Hartenberg	18
Figura 2.- Diagrama de bloques de un controlador PID en un lazo realimentado .	18
Figura 3.- Diagrama de conexiones del motor MG25-370.....	22
Figura 4.- Diagrama de conexiones eléctricas (datasheet)	23
Figura 5.- diagrama de conexión arduino mega (datasheet arduino mega)	24
Figura 6.- Diagrama de cuerpo libre del robot de 4 GDL.....	25
Figura 7.- Base del robot de 4 GDL.....	26
Figura 8.- Motor con brida.	27
Figura 9.- Eslabón del eje 2.....	27
Figura 10.- Eslabón del eje 2 con motor y brida	27
Figura 11.- Eslabón del eje 3.....	28
Figura 12.- Eslabón del eje 4.....	28
Figura 13.- Ensamble del Robot de 4 GDL	29
Figura 14.- Balero para eslabón 2, 3 y 4	29
Figura 15.- Robot antropomórfico de 4 GDL.	32
Figura 16.- Robot de 4 GDL obtenido mediante el uso de las librerías de Peter Corke, Vista 1	33
Figura 17.- Robot de 4 GDL obtenido mediante el uso de las librerías de Peter Corke, Vista 2	33
Figura 18.- Sistema en lazo cerrado del robot de 4 GDL	58
Figura 19.- Dinámica del robot de 4 GDL sin condiciones iniciales y torques cero.	61
Figura 20.- Dinámica del robot de 4 GDL con condiciones iniciales y torques cero	62
Figura 21.- Dinámica del robot de 4 GDL con una entrada escalón.....	62
Figura 22.- Respuesta de la señal de salida q_1 en un sistema retroalimentado con un controlador PID	63
Figura 23.- Respuesta de la señal de salida q_2 en un sistema retroalimentado con un controlador PID	64
Figura 24.- Respuesta de la señal de salida q_3 en un sistema retroalimentado con un controlador PID	64
Figura 25.- Respuesta de la señal de salida q_4 en un sistema retroalimentado con un controlador PID	65
Figura 26.- Respuesta de la señal de salida q_2 en un sistema retroalimentado con un controlador PID	66

Figura 27.- Respuesta de la señal de salida q_2 en un sistema retroalimentado con un controlador PID versión 2	66
Figura 28.- Diagrama eléctrico para el eje del motor.....	68
Figura 29.- Robot de 4GDL parte 1	72
Figura 30.- Robot de 4GDL parte 2	73
Figura 31.- Robot de 4GDL prueba 1	73
Figura 32.- .- Robot de 4GDL prueba 2.....	73
Figura 33.- Robot de 4GDL prueba 3	74
Figura 34.- Robot de 4GDL prueba 4	74

Índice de tablas

Tabla 1.- Parámetros de Denavit Hartenberg correspondientes al robot de 4 GDL	31
Tabla 2.- Significado de los parámetros de DH	32
Tabla 3.- Parámetros del robot de 4 GDL	60
Tabla 4.- Código de Arduino.....	72

Capítulo 1 Introducción

Planteamiento del Problema

Dentro del mundo de la robótica una parte muy importante en el área industrial es el uso y desarrollo de robots, donde hay varias empresas que destacan en los manipuladores robóticos industriales, por mencionar algunas son ABB, KUKA, FANUC, donde ponen a la venta cierto tipo de modelos de robots para la implementación de alguna celda de manufactura industrial.

Sin embargo, hay ciertos procesos que los robots que tienen en catalogo no se adaptan al proceso industrial que ellos requieren y por ende es necesario realizar el diseño y la implementación de ellos.

La implementación de un robot conlleva el conocimiento de muchas disciplinas desde la parte mecánica hasta la programación poniendo a prueba las habilidades de ingenieros e investigadores. Esto hace que el proyecto sea arduo y difícil.

En el centro de cooperación academia industria (CCAI), en algunos puntos requiere mejorar las celdas de manufactura que ya hay y para ello es necesario ir desarrollando ciertos prototipos, para este caso es el de realizar un robot antropomórfico, el cual tenga la capacidad de realizar pequeñas colaboraciones con el IRB 120. Cabe mencionar que con el paso del tiempo el prototipo se tiene que ir mejorando. Uno de los puntos de porque realizar un manipulador robótico de tipo antropomórfico de 4 grados es el desempeño en sus trayectorias. En comparación de un robot de 3 grados de libertad tipo cartesiano.

Objetivo General

Implementar un robot manipulador de 4 grados de libertad antropomórfico. El cual brinde apoyo al robot IRB120 o el IRB 14000.

Objetivos Particulares

Para el desarrollo de este proyecto se divide en varias etapas y estas a su vez en otras, dichas etapas son:

1. Diseño en CAD

El objetivo de esta etapa es realizar un diseño en 3D el cual involucre las dimensiones correctas para poder realizar su implementación y realizar un modelo de matemático de manera adecuada. Dentro de lo que se realizara en esta etapa son los siguientes puntos:

- a. Realizar un bosquejo del robot que se pretende desarrollar.
- b. Realizar el modelo en 3d.
- c. Colocar dentro del diseño 3d los elementos mecánicos, eléctricos y electrónicos que necesite el robot.
- d. Comprobar dentro del software si no hay colisiones dentro del robot, si las hay corregir el diseño.
- e. Imprimir en 3d el diseño del robot.

2. Modelación matemática

El objetivo en este punto es el de tener el fundamento matemático necesario para realizar la dinámica correcta y de esta manera saber implementar el control adecuado. Para este punto se realizará mediante el software de Matlab. Dentro de este objetivo se realizan los siguientes puntos.

- a. Diseñar la cinemática directa.
- b. Diseñar la dinámica
- c. Diseñar el control PID e implementar

3. Diseño eléctrico y electrónico

La meta de este punto es que en base al diseño de su dinámica y la implementación del control se puede ver que equipos eléctricos, electrónicas y tarjetas microcontroladoras se pueden usar. Se realizará la conexión de motores a sus drivers y el driver a la tarjeta controladora. De igual manera los sensores de los motores estarán enviando datos a la tarjeta controladora y esta a su vez se estará reflejando en Matlab, para que de esta manera se pueda realizar la implementación de su control.

Posteriormente se realiza los planos correspondientes a ello.

4. Programación

Realizar la programación necesaria para que el control mantenga la posición del motor en el ángulo que se desea.

5. Implementación

Se realiza la integración de todos los puntos, se verifica su adquisición de datos para ver el comportamiento en tiempo real y en los movimientos del robot, con la idea de ver si es necesario modificar algún detalle de ello.

Justificación

Uno de los principales motivos de realizar este proyecto es que el CCAI necesita irse dando a conocer con las empresas y otros colegios, una manera de ello es mediante la implementación de proyectos o prototipos.

Por otro lado, el prototipo tendrá un uso en ciertas demostraciones con empresas, alumnos o directivos, como un centro que no solo forma ingenieros si no también jóvenes investigadores.

Tomando en cuenta el área de investigación de una manera muy general el control PID es de los controladores más utilizados a nivel industrial, sin embargo, en el área de control automático hay una gran variedad de controladores los cuales podrían ponerse a prueba con el prototipo y ver el desempeño de cada controlador.

Otro motivo muy importante son los costos de ciertos equipos que se usan para el complemento de celdas de manufactura, como son el "MTD" de la marca ABB. Este complemento para celdas robotizadas no es más que un robot de tipo antropomórfico de dos grados de libertad el cual se usa mucho para girar o inclinar una pieza, la cual se desea pintar o soldar en algún punto que el robot no alcanza. El precio de este robot es aproximadamente de \$150,000. Pesos moneda nacional, esto es si se consigue en el mercado gris.

Metodología

Para el desarrollo de esta sección se toma como base los objetivos particulares. Los cuales se describen en los siguientes puntos:

1. Desarrollar un bosquejo del robot antropomórfico que se desea realizar.
2. Realizar el diseño en 3d del robot, partiendo del bosquejo
3. Checar si el robot cumple con las dimensiones adecuadas y si no existen colisiones, dado el caso de que existan ciertos detalles se pasa de nuevo al punto 2.

4. Realizar el diseño en 3d de piezas mecánicas que unen a los eslabones y a los motores.
5. Realizar el ensamble de la estructura del robot las piezas mecánicas y de los motores, si hay algo que no quede de manera adecuada se pasa alguno de los pasos anteriores.
6. Se realiza la impresión en 3d.
7. Teniendo bien la estructura del robot. Se realiza la cinemática directa, usando las reglas y la tabla de Denavit – Hartenberg
8. Se comprueba su cinemática usando Matlab, este punto es crucial para todo el diseño matemático, ya que si no cumple de manera adecuada con los movimientos del robot que se desea implementar dicho diseño matemático no será adecuado.
9. Tomando en cuenta el punto ocho se puede realizar la dinámica del sistema el cual ayuda a saber el comportamiento del robot con respecto al tiempo y la aplicación de ciertas fuerzas en ciertos puntos
10. Conociendo como se comporta el robot de manera matemática se realiza la estrategia de control para cada uno de sus motores, cabe mencionar que no todos los motores van a tener las mismas ganancias de control, puesto que cada uno tiene cargas diferentes.
11. Se realizan los planos eléctricos necesarios para que los motores, los sensores, los controladores y los microprocesadores puedan funcionar de manera adecuada.
12. Se realiza las conexiones de motores, sensores, controladores de fuerza para los motores, tarjetas micro procesadoras y otros dispositivos que se requieran.
13. Se realiza la programación en Matlab.
14. Se realiza la adquisición de datos mediante su tarjeta y Matlab. Se comprueba que los sensores estén mandando la información adecuada.
15. Se comprueba que el control este llevando a los motores en una posición deseada.
16. Se realiza la integración de todos los elementos y se pone a prueba su funcionamiento hasta que se corrijan todos sus detalles.

Capítulo 2.- Estado del Arte

En [1] se menciona la realización de un Modelado y controlador óptimo basado en detector de perturbaciones para la estabilización de un robot móvil de péndulo invertido de tres enlaces. Este trabajo presenta la realización de un complicado problema de estabilización para un robot móvil basado en tres enlaces pendulares invertidos. Este menciona también que los actuadores del robot móvil son motores de corriente continua que disponen de acoplamiento táctil para medir tanto la posición como la velocidad de eslabones. Se obtiene un modelo matemático del robot mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange se diseña un controlador óptimo. Simulaciones numéricas y pruebas experimentales muestran un buen desempeño del controlador a pesar de la presencia de perturbaciones.

Este artículo presenta el rendimiento dinámico de un robot de rehabilitación de la cadera con dos grados de libertad, este artículo muestra la dinámica de la configuración del robot la cual de manera similar que en nuestro proyecto se realizó con el método de Newton-Euler y de esta manera se desarrolló un modelo dinámico, sobre la base del modelo dinámico resuelto, se proporciona el índice de rendimiento dinámico de la configuración del robot de rehabilitación de la articulación de la cadera y se elabora el atlas de rendimiento bajo diferentes parámetros [2].

En [3] se ve el desarrollo de un robot paralelo con 6 grados de libertad diseñado específicamente para llevar a cabo cirugías laparoscópicas de incisión única (SILS). El estudio incluye la definición del modelo cinemático para identificar posibles singularidades durante la operación y análisis FEM para evaluar la rigidez de la estructura del robot. La investigación también implica simulaciones numéricas y gráficas para verificar el modelo cinemático, así como la creación de un modelo experimental de bajo costo para probar la funcionalidad del sistema robótico.

Este artículo presenta un robot manipulador plano redundante con seis grados de libertad, que incorpora juntas rotativas y prismáticas. La simulación gráfica se llevó a cabo utilizando herramientas del software MATLAB/Simulink para modelar el comportamiento de este manipulador. La dinámica inversa se determinó mediante

la formulación de Lagrange-Euler (LE). Siguiendo el principio de simetría, se simplificó este modelo basándose en la diagonal principal de la matriz de inercia del robot. Asimismo, el modelo abarca la dinámica de los actuadores y la estimación de las fuerzas de fricción, ambas con simetría central presente en las juntas [4].

El artículo [5] aborda la introducción de un simulador gráfico que se centra en el análisis de las características cinemáticas y dinámicas de robots manipuladores planos redundantes. En este artículo presenta un robot de 6 grados de libertad, podemos relacionar esto con el desarrollo del proyecto un robot de 4 grados de libertad cuya cinemática y dinámica se obtienen mediante la formulación de Lagrange-Euler. Este enfoque implica utilizar las herramientas de software MATLAB/Simulink para implementar el simulador gráfico y derivar las ecuaciones dinámicas del sistema a través de la formulación mencionada. En este contexto, se destaca la utilidad de la simulación para comprender y caracterizar el comportamiento del robot en términos cinemáticos y dinámicos.

En el artículo [6] propone un controlador, inspirado en procesos naturales, para ajustar un controlador proporcional-integral-derivativo (PID). Este sistema robótico tiene dos grados de libertad (2-DOF) para permitir movimientos en las articulaciones del hombro. Se destaca que la sintonización convencional de controladores PID, mediante métodos como Ziegler-Nichols, genera sobre impulsos significativos, no deseados en aplicaciones de rehabilitación. La propuesta para abordar este problema incluye la aplicación de algoritmos de optimización inspirados en la naturaleza para mejorar el rendimiento de los controladores PID, específicamente en este contexto. Si bien el texto no se relaciona directamente con un robot de 4 grados de libertad, se puede inferir que el mismo enfoque podría aplicarse a un robot con múltiples grados de libertad, ajustando controladores PID individuales para cada grado de libertad y mejorando así la eficiencia del sistema en general.

En comparación con un robot de 4 grados de libertad (4DoF) controlado por un PID convencional, En este artículo [7] se presenta el diseño de un exoesqueleto específico para el tobillo con dos grados de libertad (2DoF), donde se implementa un enfoque diferente de control. Mientras que el robot de 4 grados de libertad podría tener un controlador PID tradicional, el exoesqueleto de tobillo se destaca por utilizar un controlador PID basado en redes neuronales (PIDNN) para gestionar

adaptativamente el sistema y minimizar la incertidumbre asociada. Ambos sistemas representan enfoques diferentes en términos de diseño y estrategias de control, donde el PIDNN se emplea para mejorar la adaptabilidad y la eficiencia del exoesqueleto de tobillo en particular.

En él [8] se aborda el diseño e investigación de un sistema de control y estructura de actuador en serie basado en un robot de rehabilitación de exoesqueleto de miembros inferiores, en este artículo se propuso un algoritmo basado en la optimización de enjambre de partículas (PSO) para introducir el controlador difuso en el sistema de control PID, y cinco parámetros, a saber, el factor difuso del controlador difuso y el factor difuso, se toman como objeto de la optimización del algoritmo para obtener los parámetros óptimos del controlador difuso. Se simula la salida de par de la articulación con y sin interferencia externa, y el modelo de simulación se establece en el entorno MATLAB/Simulink, de manera similar a la presenta en dicho artículo, en el proyecto se simula en el entorno de Matlab/simulink el sistema de control PID que sería integrado en el robot de 4 grados de libertad.

Este artículo [9], trata sobre el control integrado del seguimiento de trayectoria y la estabilidad de guiñada para vehículos autónomos. Para garantizar la distribución más efectiva del par motor de las cuatro ruedas del vehículo, el algoritmo PID se utiliza para rastrear y gestionar la tasa de deslizamiento longitudinal de cada neumático en la capa inferior casi similar a el proyecto de 4 grados de libertad, donde es necesario usar un par de controladores PID por cada motor usado para lograr a posición establecida tratando de eliminar el error y conseguir un sistema estable de la misma forma que en el artículo Se utilizan herramientas de simulación como MATLAB/Simulink y Carsim para verificar la eficacia de la tecnología de control integrado.

En [10] se realiza la investigación sobre los métodos de control anti-oscilación de robots de inspección con ruedas de doble brazo para líneas de transmisión de alto voltaje, este articulo presenta variables tomadas en cuenta en la realización del control para la disminución del error presentado, este menciona que El análisis de la oscilación alrededor de las líneas de transmisión del robot de inspección reveló que el desplazamiento del cuerpo del robot, δ , varía con el tiempo durante el cruce de obstáculos. En entornos de trabajo reales, el coeficiente de fricción entre las

ruedas del robot de inspección y la superficie de la línea de transmisión es variable; por lo tanto, el sistema de control anti-oscilación se convierte en un sistema no lineal que varía en el tiempo, haciendo que el control del desplazamiento del cuerpo, δ , sea relativamente difícil, de esta manera estas variables como el de fricción entre piezas realizadas en el proyecto del robot de 4 grados de libertad existen diferentes puntos de fricción uno de ellos es el que se localiza en el sistema de engranajes y los otros se localizan en las uniones de las piezas

En [11] Este artículo presenta un sistema aplicado a vehículos aéreos no tripulados basado en Sistemas Operativos de Robots donde se usa Un módulo Derivado Integral Proporcional (PID) ajusta la altitud de vuelo, permitiendo un seguimiento estable del objetivo automáticamente en ambientes interiores y exteriores, similar a el control que se pretende usar en el proyecto realizado el cual sea capaz de mejorar la respuesta al poder realizarse el movimiento y llegar a la posición que se determine de la manera más estable que se pueda.

Control longitudinal basado en PID de camiones en pelotón, en este artículo [12], se aplicaron reglas de reducción del diagrama de bloques para obtener la función de transferencia de velocidad a posición. Este trabajo aporta al proyecto una manera muy útil de encontrar las ganancias del PID que se aplicaran a cada uno de los motores.

Este artículo [13] menciona que la velocidad del motor de DC está controlada por el controlador proporcional integral derivado (PID). El modelado cinemático se utiliza para comprender el comportamiento mecánico de los robots y así diseñar los robots móviles adecuados. La velocidad y dirección de las ruedas derecha e izquierda se calculan utilizando el modelado cinemático, y el modelado cinemático se proporciona al controlador PID para obtener la salida, las bases presentadas en ese artículo apoyan al desarrollo del controlador PID para cada uno de los grados de libertad del proyecto.

En [14] presenta el diseño de un nuevo robot bípedo, liviano y de tamaño completo, un robot que se asimila a un par de piernas humanas, con la movilidad de 12 grados de libertad, teniendo como resultado 6 grados de libertad por cada pierna.

Este artículo [15] menciona algunos conceptos generales como; modelado dinámico y cinemático y menciona que un modelo CRM preciso, que garantice un diseño de control preciso y facilite los estudios de simulación, es indispensable para desarrollar metodologías de control. de la misma forma establece que para los grados de libertad los sistemas de cadena cerrada imponen restricciones a los grados de libertad (DOF) del sistema, se define como el número mínimo de variables articulares independientes necesarias para definir con precisión las posiciones de todos los enlaces del robot en el espacio. Este número también equivale al recuento mínimo de juntas accionadas necesarias para controlar todo el sistema de forma eficaz, este artículo presenta descripciones generales sobre el control y modelado dinámico de manipuladores de robots cooperativos, en los cuales se presentan conceptos como los ya mencionados los cuales son similares al desarrollo del proyecto.

Este artículo [16] desarrolla un manipulador robótico móvil rentable y eficiente diseñado para ordenar objetos en entornos domésticos e industriales. Para lograr este objetivo, implementamos un enfoque de aprendizaje profundo utilizando YOLO para una detección precisa de objetos. Además, incorporamos cinemática inversa para facilitar el posicionamiento, colocación y movimiento precisos de los brazos robóticos hacia la ubicación deseada del objeto.

En [17] habla y presenta un método de planificación basado en cuadrícula resistiva de consultas múltiples aplicado a manipuladores robóticos de alta DOF de manera más clara presenta un método de consultas múltiples capaz de obtener rutas libres de colisiones para manipuladores de alta DOF con múltiples obstáculos circundantes, este artículo presenta posibles soluciones a problemas que puedan presentarse en el proyecto debido a las colisiones, aun siendo este un robot de 4 grados de libertad.

El artículo [18] se desarrolla un sistema de control antropomórfico altamente avanzado que utilice tecnologías de sensores múltiples para lograr un control preciso de un brazo robótico este artículo propone esto en base a un robot antropomórfico, esta técnica de fusión no sólo mejora la precisión del sistema sino que también mejora la capacidad de adaptarse a los cambios ambientales dinámicos, garantizando así el movimiento estable del brazo robótico.

Este artículo [19] se propone un método de Lagrange parcial que puede manejar la ecuación de Lagrange de manera eficiente incluso para sistemas con múltiples grados de libertad mediante el uso de un enfoque de divide y vencerás. El método propuesto puede manejar fácilmente extensiones y reconstrucciones del sistema, como cambios en enlaces intermedios, para manipuladores de enlaces en serie con múltiples grados de libertad. El aporte de este artículo es el uso del método de las ecuaciones de Lagrange.

Este artículo [20] presenta un exoesqueleto de tres articulaciones ubicadas en la cadera, la rodilla y el tobillo. Este artículo ha diseñado un controlador de impedancia con compensador de gravedad basado en modelos específicamente para el Sistema de Exoesqueleto (SLE). Se derivó y validó con una notable precisión un modelo dinámico que describe la interacción entre el usuario y el exoesqueleto. Este modelo se logró utilizando la formulación de Euler-Lagrange y siguiendo las reglas de Denavit-Hartenberg, y fue implementado y validado en Simscape™ y Simulink®. Además, se introdujo un novedoso método de simplificación sistemática que facilita el proceso de modelado dinámico en este contexto específico. Este artículo y el proyecto desarrollado se valen de principios similares de modelado dinámico, utilizando herramientas como la formulación de Lagrange y las reglas de Denavit-Hartenberg para describir la interacción entre el sistema mecánico y su entorno.

En este artículo [21], se presenta un controlador difuso diseñado para supervisar el desplazamiento de un mecanismo robótico tridimensional de la columna lumbar impulsado por tendones. La implementación de dicho controlador se realizó utilizando el software Matlab/Simulink R2023a de MathWorks. Al relacionar este artículo con el proyecto de un robot de 4 grados de libertad, donde se lleva a cabo la dinámica para simular su comportamiento mediante el modelo matemático de Euler-Lagrange, se evidencia una similitud en la metodología empleada. Ambos casos hacen uso de herramientas de simulación (Matlab/Simulink) y se fundamentan en modelos matemáticos avanzados (Lagrangiana o Euler-Lagrange) con el objetivo de comprender y controlar el movimiento dinámico de los sistemas mecánicos en cuestión.

Capítulo 3.- Marco Teórico

3.1 Modulación por ancho de pulso (PWM)

La modulación por ancho de pulsos (PWM) es una técnica que implica la variación del ciclo de trabajo de una señal periódica para transmitir información o controlar la cantidad de energía enviada a una carga.

El ciclo de trabajo se refiere al ancho relativo de la parte positiva de la señal en relación con el período.

Matemáticamente, se expresa como:

$$D = \frac{\tau}{T}$$

Donde D es el ciclo de trabajo,

τ es el tiempo en que la función es positiva (ancho del pulso)

T es el período de la función.

La construcción típica de un circuito PWM implica el uso de un comparador con dos entradas y una salida. Una entrada se conecta a un oscilador de onda dientes de sierra, mientras que la otra queda disponible para la señal moduladora. La frecuencia de salida generalmente coincide con la de la señal dientes de sierra (portadora), y el ciclo de trabajo varía según la señal moduladora.

Un inconveniente común de los circuitos PWM es la posibilidad de interferencias de radiofrecuencia. Para minimizar esto, se recomienda ubicar el controlador cerca de la carga y aplicar filtrado en la fuente de alimentación

3.2 Solidworks

SolidWorks es un software CAD (diseño asistido por computadora) para modelado mecánico en 2D y 3D, desarrollado en la actualidad por SolidWorks Corp., una filial de Dassault Systèmes (Suresnes, Francia), para el sistema operativo Microsoft Windows. Su primera versión fue lanzada al mercado en 1995 con el propósito de hacer la tecnología CAD más accesible.

El programa permite modelar piezas y conjuntos y extraer de ellos tanto planos técnicos como otro tipo de información necesaria para la producción. Es un

programa que funciona con base en las nuevas técnicas de modelado con sistemas CAD. El proceso consiste en traspasar la idea mental del diseñador al sistema CAD, "construyendo virtualmente" la pieza o conjunto. Posteriormente todas las extracciones (planos y ficheros de intercambio) se realizan de manera bastante automatizada. [22]

3.3 Cinemática directa

La cinemática directa, o forward kinematics en inglés, es un concepto crucial en este proyecto y se define como la rama que se encarga de establecer la relación entre las articulaciones individuales del manipulador del robot y la posición, así como la orientación de la herramienta o efector final. De manera más formal, la cinemática directa implica determinar la posición y orientación del efector final, teniendo en cuenta los valores de las variables conjuntas del robot. Estas variables conjuntas incluyen los ángulos entre los eslabones en el caso de juntas de tipo revolución o rotacionales, y la extensión del eslabón en el caso de juntas de tipo prismática o deslizantes. [23]

3.4 Ecuación de Euler LaGrange

Las ecuaciones cinemáticas proporcionan una descripción del movimiento de un robot sin tener en cuenta las fuerzas y momentos involucrados. Por otro lado, las ecuaciones dinámicas, también conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange, establecen de manera explícita la relación entre las fuerzas y el movimiento. [23]

Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. El inconveniente que presenta este método es que el análisis se complica notablemente cuando aumenta el número de articulaciones del robot. En estos casos, es conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Estas últimas reciben el nombre de Lagrange, debido a que fue el primero que las dio a conocer en 1788.

La energía total E de un robot manipulador de n grados de libertad es la suma de sus energías cinética K y potencial U :

$$\varepsilon(q(t), q'(t)) = k(q(t), q'(t)) + U(q(t))$$

Donde $q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$

El Lagrangiano $L(q, \dot{q})$ de un robot manipulador de n g.d.l. es la diferencia entre su energía cinética K y su energía potencial U :

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t))$$

Aquí se considera que la energía potencial U se debe a fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad y a fuerzas de resortes. Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de n g.d.l., vienen dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau$$

O de forma equivalente

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n$$

donde τ_i son las fuerzas y pares ejercidos externamente (por accionadores) en cada articulación, así como fuerzas no conservativas. Como fuerzas no conservativas se incluyen las de fricción, las de resistencia al movimiento de un objeto dentro de un fluido, y en general las que dependen del tiempo o de la velocidad.

Nótese que se tendrán tantas ecuaciones escalares dinámicas como g.d.l. tenga el robot manipulador.

El uso de las ecuaciones de Lagrange para el modelado dinámico de manipuladores se reduce a cuatro etapas:

1. Cálculo de la energía cinética: $K(q(t), \dot{q}(t))$
2. Cálculo de la energía potencial: $U(q(t))$
3. Cálculo del Lagrangiano: $L(q(t), \dot{q}(t))$
4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange.

En lo que resta del epígrafe se presentarán algunos ejemplos con el fin de mostrar el procedimiento de modelado de robots mediante el empleo de las ecuaciones de Lagrange. [24]

3.5 Coordenadas generalizadas

Las coordenadas que especifican por completo la configuración, es decir, la posición y orientación de todos los cuerpos de un sistema mecánico se llaman coordenadas generalizadas. Se dice que la configuración de un sistema mecánico es

completamente conocida si se conoce la posición y orientación de todos los cuerpos que hay en el sistema. Puesto que un cuerpo rígido tiene seis grados de libertad (DOF), un sistema mecánico con m cuerpos móviles requiere coordenadas $6m$ para especificar por completo su configuración en el espacio cartesiano tridimensional. Estas coordenadas se llaman coordenadas generalizadas de un sistema mecánico

3.6 Robótica industrial

El robot industrial es un manipulador programable en tres o más ejes con varios propósitos, controlado automáticamente y reprogramable. El campo de la robótica industrial puede definirse como el estudio, diseño y uso de robots para la ejecución de procesos industriales. También nos facilitaran el trabajo un poco peligroso en fábricas

Los usos típicos de los robots incluyen soldadura, pintura, ensamblaje, desensamblaje, recogida y colocación para placas de circuitos impresos, embalado y etiquetado, paletizado, inspección y comprobación de productos; todo ello realizado con gran resistencia, velocidad y precisión. Pueden ayudar en la manipulación de materiales. [25]

Robótica

La robótica es un campo relativamente joven de la tecnología moderna que cruza los límites de la ingeniería tradicional. Comprender la complejidad de los robots y sus aplicaciones requiere conocimientos de ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería de sistemas e industrial, informática, economía y matemáticas. Nuevas disciplinas de la ingeniería, tales como ingeniería de fabricación, ingeniería de aplicaciones e ingeniería del conocimiento han surgido para hacer frente a la complejidad del campo de la robótica y la automatización de fábricas. [23]

Robot manipulador

Los manipuladores, especialmente los brazos robóticos, son sistemas mecánicos ampliamente utilizados en la industria y constituyen la forma más simple de arquitectura robótica. Estos brazos robóticos no solo son comunes por sí mismos, sino que también sirven como componentes básicos en sistemas mecánicos robóticos más complejos.

En términos generales, un manipulador es un sistema mecánico diseñado para la manipulación de objetos, y manipular implica mover algo con la mano. Por lo tanto, un manipulador puede definirse como cualquier dispositivo que facilite a un operador humano realizar tareas de manipulación. Aunque los manipuladores han existido desde que el hombre creó sus primeras herramientas, fue solo después de la Segunda Guerra Mundial que se desarrollaron hasta el punto de poder replicar los movimientos del brazo y la mano humanos de manera notable. [26]

Matlab

MATLAB es una de las muchas sofisticadas herramientas de computación disponibles en el comercio para resolver problemas de matemáticas, tales como Maple, Mathematica y MathCad.

MATLAB es superior en los cálculos que involucran matrices, mientras que Maple lo supera en los cálculos simbólicos. El nombre mismo de MATLAB es una abreviatura de Matrix Laboratory, laboratorio matricial. Son capaces de realizar las mismas funciones que una calculadora científica, y muchas más.

Se define MATLAB como un entorno de programación y lenguaje de programación se basa en el conocimiento general del software y no está tomada de una fuente específica. MATLAB es desarrollado por MathWorks y proporciona una amplia variedad de herramientas para análisis numérico, visualización de datos, desarrollo de algoritmos y simulación. [27]

Simulink

Simulink es un entorno de diagrama de bloques para simulación multidominio y diseño basado en modelos. Ofrece soporte para el diseño en el nivel de sistema, la simulación, la generación automática de código, y las pruebas y verificación continuas de sistemas embebidos. Simulink proporciona un editor gráfico, bibliotecas de bloques personalizables y softwares para modelar y simular sistemas dinámicos. Se integra con MATLAB®, lo que permite incorporar algoritmos de MATLAB en modelos y exportar los resultados de simulación a MATLAB para seguir analizándolos. [28]

"Robotics Toolbox for MATLAB"

La "Robotics Toolbox for MATLAB" es una extensa colección de herramientas y funciones diseñadas para trabajar con robots y sistemas robóticos en el entorno de MATLAB. Esta toolbox abarca diversas áreas relacionadas con la representación y manipulación de la orientación y la posición en 2D y 3D ($SO(2)$, $SE(2)$, $SO(3)$, $SE(3)$), utilizando matrices, cuaterniones, giros, ángulos triples y matrices exponenciales. Además, ofrece funciones para la conversión y manipulación de tipos de datos esenciales, como vectores, transformaciones homogéneas y cuaterniones unitarios.

La principal característica de la Robotics Toolbox es su enfoque general para representar la cinemática y la dinámica de manipuladores de enlace en serie como objetos de MATLAB. Permite a los usuarios crear objetos de robot para una amplia variedad de manipuladores de enlace en serie, incluyendo ejemplos para robots reconocidos como Kinova, Universal Robotics, Rethink, así como robots clásicos como el Puma 560 y el brazo Stanford.

Además de su versatilidad en la representación de manipuladores de enlace en serie, la toolbox también aborda aspectos relacionados con robots móviles. Incluye funciones para modelos de movimiento (monociclo, bicicleta), algoritmos de planificación de rutas (error, transformación de distancia, D^* , PRM), planificación kinodinámica (celosía, RRT), localización (EKF, filtro de partículas), construcción de mapas (EKF), y localización y mapeo simultáneos (EKF). Además, proporciona un modelo detallado de Simulink para un robot volador cuadrotor. [29]

Peter corke

El Dr. Peter, profesor distinguido de visión robótica en la Universidad Tecnológica de Queensland, se desempeña como director del Centro de Robótica QUT y director del Centro de Excelencia ARC para Visión Robótica. Su destacada carrera investigadora se centra en habilitar que los robots desarrollen habilidades visuales y aplicar estas capacidades en sectores como la minería, la agricultura y el monitoreo ambiental.

A lo largo de su carrera, el Dr. Corke ha realizado estancias de investigación en instituciones de renombre, incluyendo visitas a Oxford, la Universidad de Illinois, la Universidad Carnegie-Mellon y la Universidad de Pensilvania. Su formación académica incluye una licenciatura y maestría en ingeniería eléctrica, así como un doctorado, todos obtenidos en la Universidad de Melbourne.

El Dr. Corke es reconocido como miembro de la Academia Australiana de Ciencias y de la Academia Australiana de Tecnología e Ingeniería. Además, es miembro del IEEE y ha desempeñado roles destacados, como ex editor en jefe de la revista IEEE Robotics & Automation. También ha sido fundador y editor asociado del Journal of Field Robotics, editor multimedia fundador y ex miembro del consejo editorial del International Journal of Robotics Research. Su influencia se extiende al ámbito editorial como miembro del consejo asesor de la serie Springer Tracts on Advanced Robotics y del consejo de la Federación Internacional de Robótica (IFRR). [29]

Denavit-Hartenberg

El método de Denavit-Hartenberg es una herramienta ampliamente conocida en el área de ingeniería, ya que ofrece un procedimiento sencillo para obtener el modelo cinemático directo cuya estructura queda en términos de las transformaciones homogéneas.

Jaques Denavit y Richard S. Hartenberg en 1955 presentaron un procedimiento para obtener una representación mínima de la orientación y traslación de robots manipuladores. Consiste en determinar una tabla de parámetros relacionados con los eslabones del robot. La convención Denavit-Hartenberg toma como referencia el diagrama de un robot manipulador en cadena cinemática abierta

Las variables articulares en la representación Denavit-Hartenberg se denotan con θ_i para el tipo rotacional, prismática o lineal por d_i ; este parámetro d_i también hace el papel de representar el ancho del servomotor de la articulación rotacional más el espesor de la placa metálica del eslabón, en este caso se denota por el símbolo β_i ; la longitud del eslabón se representa con l_i y el ángulo de separación entre los ejes z_i y z_{i-1} se denota con α_i . [30], esto se ve en la Figura 1

Características de eslabones	
l_i	Longitud del eslabón i -ésimo.
d_i	Articulaciones lineales o prismáticas. También representa el espesor del servomotor (β_i).
α_i	Ángulo entre los ejes z_{i-1} y z_i medido con respecto al eje x_i .
θ_i	articulaciones rotacionales; representa el ángulo entre los ejes x_{i-1} y x_i medido alrededor del eje z_{i-1} .

Figura 1.- Parámetros Denavit-Hartenberg

3.7 PID

Un controlador PID (controlador proporcional, integral y derivativo) es un mecanismo de control que a través de un lazo de retroalimentación permite regular la velocidad, temperatura, presión y flujo entre otras variables de un proceso en general. El controlador PID calcula la diferencia entre nuestra variable real contra la variable deseada

El algoritmo del control PID consta de tres parámetros distintos: el proporcional, el integral, y el derivativo. El valor proporcional depende del error actual, el integral depende de los errores pasados y el derivativo es una predicción de los errores futuros. La suma de estas tres acciones es usada para ajustar el proceso por medio de un elemento de control, como la posición de una válvula de control o la potencia suministrada a un calentador. [31], esto se puede ver en Figura 2

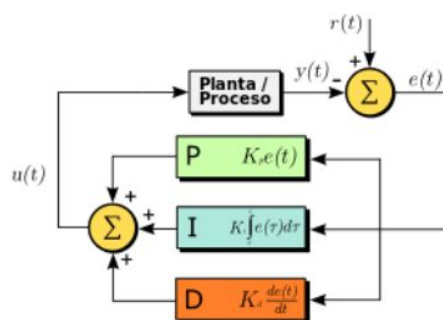


Figura 2.- Diagrama de bloques de un controlador PID en un lazo realimentado

3.7.1 Parte proporcional

La parte proporcional consiste en el producto entre la señal de error y la constante proporcional para lograr que el error en estado estacionario se aproxime a cero, pero en la mayoría de los casos, estos valores solo serán óptimos en una determinada porción del rango total de control, siendo distintos los valores óptimos para cada porción del rango.

La fórmula del proporcional está dada por: $P_{sal} = K_{pe}(t)$

Donde:

K_p es la ganancia proporcional, valor de sintonización.

$e(t) = SP - PV(t)$ es el error (SP es el punto de establecimiento, y PV(t) es la variable de proceso)

El error, la banda proporcional y la posición inicial del elemento final de control se expresan en tanto por uno. Nos indicará la posición que pasará a ocupar el elemento final de control.

3.7.2 Parte integral

El modo de control Integral tiene como propósito disminuir y eliminar el error en estado estacionario, provocado por perturbaciones exteriores y los cuales no pueden ser corregidos por el control proporcional. El control integral actúa cuando hay una desviación entre la variable y el punto de consigna, integrando esta desviación en el tiempo y sumándola a la acción proporcional. El error es integrado, lo cual tiene la función de promediarlo o sumarlo por un período determinado; Luego es multiplicado por una constante K_i . Posteriormente, la respuesta integral es adicionada al modo Proporcional para formar el control P + I con el propósito de obtener una respuesta estable del sistema sin error estacionario. El modo integral presenta un desfase en la respuesta de 90° que sumados a los 180° de la retroalimentación (negativa) acercan al proceso a tener un retraso de 270° , luego entonces solo será necesario que el tiempo muerto contribuya con 90° de retardo para provocar la oscilación del proceso. <<< la ganancia total del lazo de control debe ser menor a 1, y así inducir una atenuación en la salida del controlador para conducir el proceso a estabilidad de este. >>> Se caracteriza por el tiempo de acción integral en minutos por repetición. Es el tiempo en que delante una señal en escalón, el elemento final de control repite el mismo movimiento correspondiente a la acción proporcional.

El control integral se utiliza para obviar el inconveniente del offset (desviación permanente de la variable con respecto al punto de consigna) de la banda proporcional.

La fórmula de la integral está dada por: $I_{sal} = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$

Donde:

K_i es la ganancia integral, un parámetro de ajuste,

τ es la variable de integración (toma en cuenta el valor desde el instante 0 hasta el instante actual).

3.7.3 Parte derivativa

La acción derivativa se manifiesta cuando hay un cambio en el valor absoluto del error; (si el error es constante, solamente actúan los modos proporcional e integral).

El error es la desviación existente entre el punto de medida y el valor consigna, o "Set Point".

La función de la acción derivativa es mantener el error al mínimo corrigiéndolo proporcionalmente con la misma velocidad que se produce; de esta manera evita que el error se incremente.

Se deriva con respecto al tiempo y se multiplica por una constante K_d y luego se suma a las señales anteriores (P+I). Es importante adaptar la respuesta de control a los cambios en el sistema ya que una mayor derivativa corresponde a un cambio más rápido y el controlador puede responder acordeamente.

La fórmula del derivativo está dada por: $D_{sal} = K_d \frac{de}{dt}$

Donde:

K_d es la ganancia derivativa, un parámetro de ajuste,

t es el tiempo o tiempo instantáneo (el presente)

El control derivativo se caracteriza por el tiempo de acción derivada en minutos de anticipo. La acción derivada es adecuada cuando hay retraso entre el movimiento de la válvula de control y su repercusión a la variable controlada.

Cuando el tiempo de acción derivada es grande, hay inestabilidad en el proceso. Cuando el tiempo de acción derivada es pequeño la variable oscila demasiado con relación al punto de consigna. Suele ser poco utilizada debido a la sensibilidad al ruido que manifiesta y a las complicaciones que ello conlleva.

El tiempo óptimo de acción derivativa es el que retorna la variable al punto de consigna con las mínimas oscilaciones

3.7.4 Retroalimentación

La realimentación también referida de forma común como retroalimentación es un mecanismo por el cual una cierta proporción de la salida de un sistema se redirige a la entrada, con señales de controlar su comportamiento. [32]

Control realimentado.

El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia, y lo realiza tomando en cuenta esta diferencia. Aquí sólo se especifican con este término las perturbaciones impredecibles, ya que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden compensarse dentro del sistema. [33]

3.8 Motor DC

La estabilidad inherente de la velocidad en un motor de corriente alterna (CA) lo hace especialmente adecuado para entornos industriales con cargas pesadas. No obstante, existe un diseño alternativo que permite cambiar la dirección del motor mediante un conmutador. Este enfoque facilita el funcionamiento del motor en corriente continua (DC), donde la dirección de la corriente permanece constante. La DC suele provenir de baterías o convertidores de CA a DC, como un rectificador de pared.

En este diseño, el conmutador suministra voltajes positivos y negativos a través de terminales entrelazados, dispuestos a lo largo del estator. Estos voltajes alimentan la bobina del rotor mediante escobillas metálicas conectadas al eje. De esta manera, la polaridad correcta se proporciona a la bobina central independientemente de su

posición. Al igual que en el motor de CA, existen varios diseños que emplean pares de bobinas paralelas, múltiples escobillas y conmutadores ubicados en el estator o el rotor.

Este tipo de motor tiene la capacidad de girar a velocidades variables y puede acelerar indefinidamente, limitado solo por la fricción y el par aplicado en su eje. La velocidad de este motor es proporcional a la tensión aplicada, mientras que su par está restringido por la corriente máxima suministrada. A pesar de su uso generalizado en la robótica, los motores de DC presentan una eficiencia limitada debido al desgaste y la fricción de las escobillas.

3.8.1 Motor MG25-370

El GM 25-370 12 V DC es un motor con caja reductora de engranes metálicos (tipo motorreductor) que tiene integrado un codificador / encoder de cuadratura de Efecto Hall que permite conocer la posición y velocidad de giro del motor. Esto se puede ver en la Figura 3



Figura 3.- Diagrama de conexiones del motor MG25-370

3.8.2 Encoder y módulo L298N

Los Encoders son sensores que generan señales digitales en respuesta al movimiento. Están disponibles en dos tipos, uno que responde a la rotación, y el otro al movimiento lineal. Cuando son usados en conjunto con dispositivos mecánicos tales como engranes, ruedas de medición o flechas de motores, estos pueden ser utilizados para medir movimientos lineales, velocidad y posición. [34], [35]

El módulo L298N posee dos canales de Puente H, pudiéndolos utilizar para controlar dos motores DC o un motor Pasó a Paso, controlando el sentido de giro y velocidad. Básicamente está conformado por un driver L298N sus diodos de protección y un regulador de voltaje de 5V(78M05). Esto se puede ver en la Figura 4

Posee un conector de 6 pines para ingresar las señales TTL para controlar los motores, una bornera de tres pines para la alimentación, y dos borneras de 2 pines para la salida a los motores. [35]

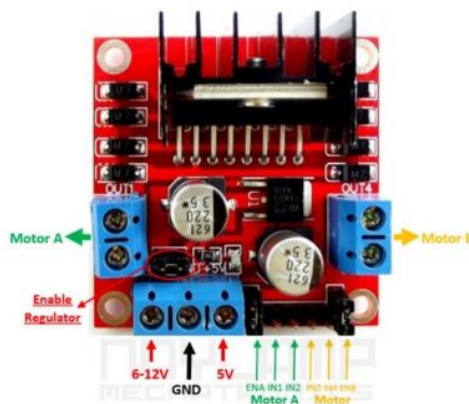


Figura 4.- Diagrama de conexiones eléctricas (datasheet)

3.9 ARDUINO

Arduino es una plataforma electrónica de código abierto basada en hardware y software fáciles de usar. Las placas Arduino pueden leer entradas (luz en un sensor, un dedo en un botón o un mensaje de Twitter) y convertirlas en una salida: activar un motor, encender un LED o publicar algo en línea. Puede decirle a su placa qué hacer enviando un conjunto de instrucciones al microcontrolador de la placa. Para ello se utiliza el lenguaje de programación Arduino (basado en Wiring), y el Software Arduino (IDE) , basado en Processing [36]

El Arduino Mega 2560 es una placa microcontroladora basada en el ATmega2560. Tiene 54 pines de entrada/salidas digitales (de los cuales 15 se pueden usar como salidas PWM), 16 entradas analógicas, 4 UART (puertos serie de hardware), un



Capítulo 4.- Desarrollo

En este capítulo se ve el diseño en 3d del robot de cuatro grados de libertad para posteriormente realizar su impresión en 3d. En este mismo capítulo también se ve el desarrollo de diagramas eléctricos que se conecta con cada uno de los ejes del robot.

De igual manera se ve el desarrollo de la cinemática y dinámica del robot de cuatro grados de libertad, después se desarrolla el diseño del controlador PID al mismo tiempo se realizan las simulaciones del robot en lazo abierto y después en lazo cerrado.

4.1 Diseño en CAD del robot de 4 GDL

Par poder realizar la cinemática del robot como primer punto es realizar un diagrama de cuerpo libre, el cual se realiza con el software de Solid Works. El tipo de robot que se va a manejar en este proyecto es un robot de tipo antropomórfico. Este robot se puede ver en la Figura 6.

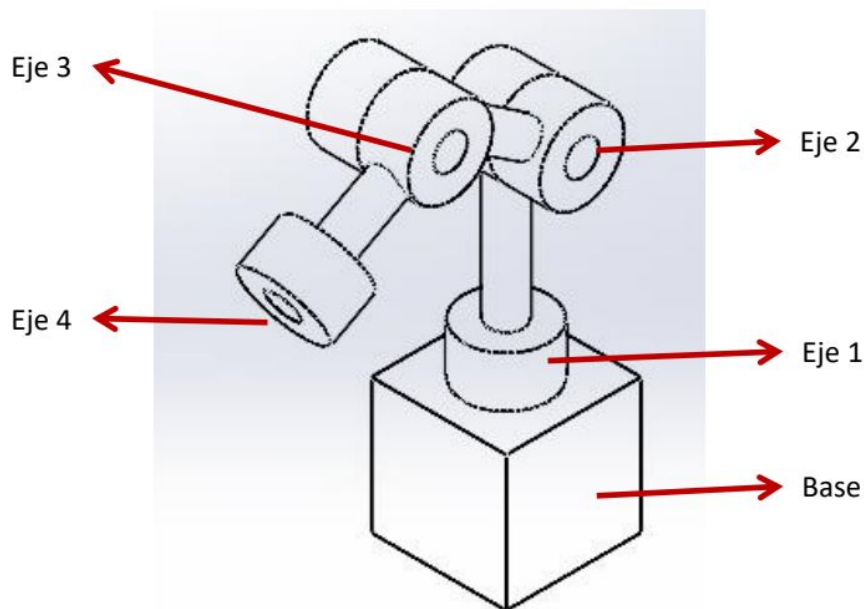


Figura 6.- Diagrama de cuerpo libre del robot de 4 GDL

Los cuatro ejes de la Figura 6 representan los cuatro grados de libertad del robot, estos grados de libertad son de tipo rotacional. Tomando en cuenta esto se realiza

cada una de las piezas que van a conformar el robot. Desde la base hasta el efector final. De igual manera se realizan bridas y acoplamientos para el tipo del motor que va a llevar.

En la Figura 7 se ve la base del robot, en la parte inferior se dejan orificios para poderse atornillar a una mesa. Los orificios de arriba son para sujetar la brida y el motor.

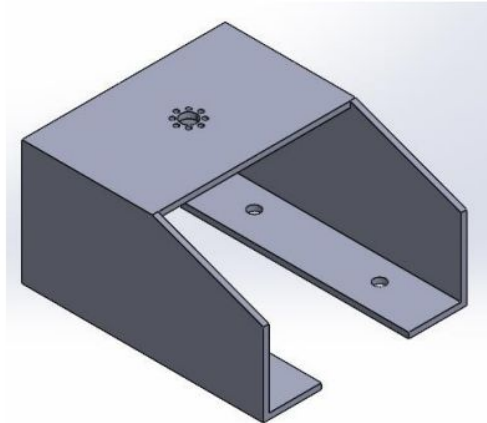


Figura 7.- Base del robot de 4 GDL

En la Figura 8, se muestra el motor con la pieza que acopla el motor con la base, a esta pieza se le da el nombre de brida, el motor se fija a los orificios que están en la base y la brida sujeta el siguiente eslabón del robot.

Posteriormente se realiza el eslabón que corresponde al eje 2, dicho eslabón se ve en la Figura 9, a este eslabón se le agregan 4 nervios con el objetivo de evitar que la pieza se abra o rompa con los movimientos del robot. En la Figura 10, se ve un ejemplo de cómo se ensambla el eje con un motor.

Para el eslabón del eje numero 3 se ve en la Figura 11, se considera la figura de una "H" con el objetivo de unir el motor del eje 2 y el motor del eje 3, también se considera que debe de ser más esbelto la parte de arriba con el fin de disminuir peso. Las dos través de la Figura 11 no se encuentran en la misma distancia con el objetivo de que se facilite el acoplamiento del siguiente eslabón y el motor.

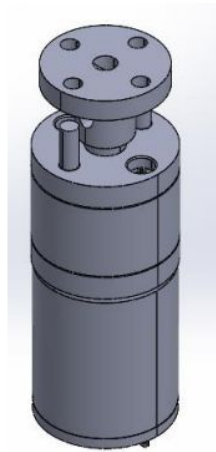


Figura 8.- Motor con brida.

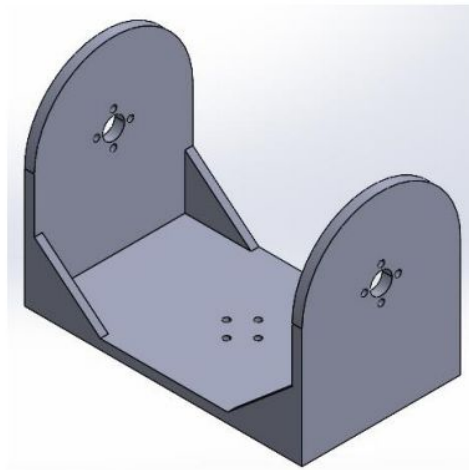


Figura 9.- Eslabón del eje 2

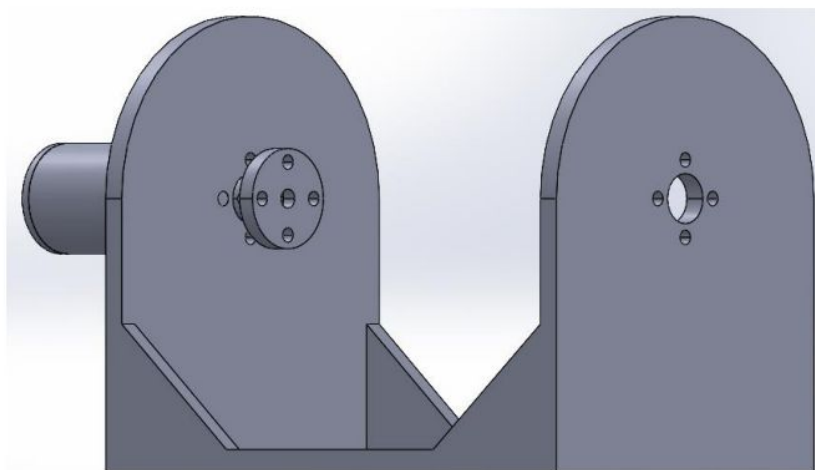


Figura 10.- Eslabón del eje 2 con motor y brida

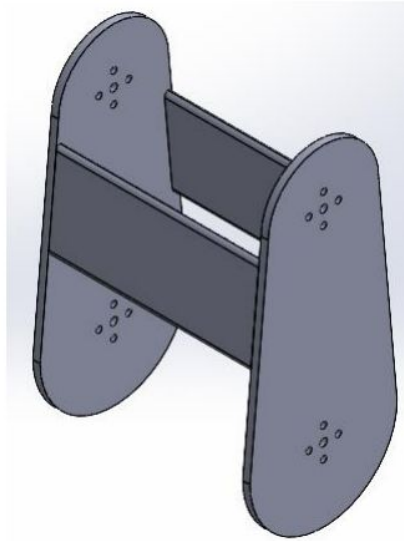


Figura 11.- Eslabón del eje 3

En la Figura 12, se ve el ultimo eslabón del robot, la idea de este eslabón es la de unir el eslabón 3, el motor del eje3 y el motor del eje 4. Aunado a ello no debe de perder simetría con el eslabón anterior. De igual manera se colocan dos nervios con el fin de darle mayor fuerza y soporte a la hora de colocar los motores y estos se encuentren en funcionamiento.

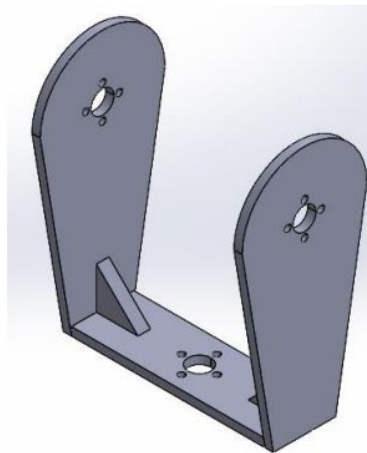


Figura 12.- Eslabón del eje 4

Por ultimo se realiza el ensamble de todas las bridas, eslabones y motores para formar al robot con el cual se va a trabajar. Esto se puede ver en la Figura 13. Para el eje numero 4 solo se coloca el motor con su brida en el eslabón 4. Por ultimo se realizan unos baleros personalizados para poder dar estabilidad al eslabón 3 con el eslabón 2, de igual manera el eslabón 3 con el eslabón 4, esto se ve en la Figura 14

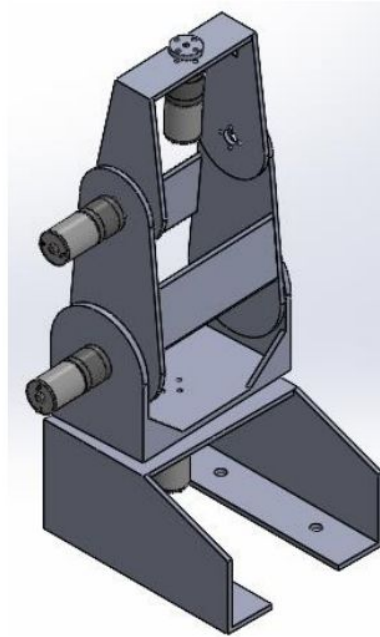


Figura 13.- Ensamble del Robot de 4 GDL

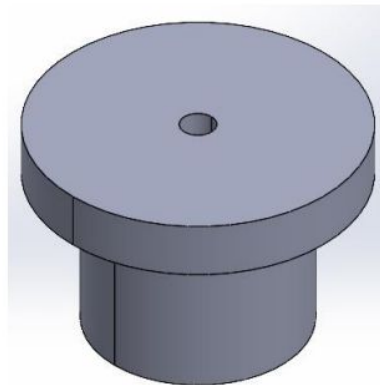


Figura 14.- Balero para eslabón 2, 3 y 4

4.2 Cinemática directa de un robot de cuatro grados de libertad

Cinemática de un robot son los movimientos de un robot en un espacio definido y esto con respecto a un punto de referencia. En esta sub sección se desarrolla la cinemática directa para el robot de cuatro grados de libertad (4 GDL). Esto con el objetivo de saber la posición del robot cuando se le aplique cierto ángulo a cada uno

de sus ejes, dando como resultado el desplazamiento en el eje "X", el eje "Y" y en el eje "Z" de igual manera indica el movimiento de rotación que tuvo el robot.

Para obtener la cinemática del robot de 4 GDL se usa el método de Denavit Hartenberg, posteriormente dicha cinemática se comprueba mediante la librería e instrucciones de Peter Corke desarrolladas para Matlab, El objetivo de este punto es ver que la cinemática sea la adecuada, puesto que dicha cinemática se va a utilizar para desarrollar su dinámica.

4.1.1 Algoritmo de Denavit Hartenberg

En base a la Figura 13, se realiza un dibujo de cuerpo libre el cual se vaya indicando el numero de eslabones, articulaciones y colocar el sistema de coordenadas para cada eje, para así formar un sistema el cual permita realizar la tabla de Denavit Hartenberg [23].

Algoritmo de Denavit Hartenberg

1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con "n" (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.
2. Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en "n".
3. Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.
4. Para i de 0 a $n - 1$ situar el eje z_i sobre el eje de la articulación $i + 1$
5. Situar el origen del sistema de la base $\{S_0\}$ en cualquier punto del eje z_0 . Los ejes x_0 e y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0 .
6. Para i de 1 a $n - 1$, situar el origen del sistema $\{S_i\}$ (solidario al eslabón i) en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_i . Si ambos ejes se cortasen se situaría $\{S_i\}$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos $\{S_i\}$ se situaría en la articulación $i + 1$.
7. Situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i .
8. Situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i
9. Situar el sistema $\{S_n\}$ en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n .

10. Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
11. Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1} , que habría que desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_i y x_{i-1} quedasen alineados.
12. Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo $\{S_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese con $\{S_i\}$.
13. Obtener α_i como el ángulo que habría que girar en torno a x_i , para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$.
14. Obtener las matrices de transformación A_i^{i-1} .
15. Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot $T = {}^0A_1 * {}^1A_2 * \dots * A_n^{n-1}$.
16. La matriz T define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base, en función de las n coordenadas articulares.

Tomando en cuenta el algoritmo anterior se puede realizar el diagrama de cuerpo libre del robot esto se ve en la Figura 15.

Posteriormente se realiza la tabla de Denavit Hartenberg (DH), la cual se ve en Tabla 1

	θ_i	d_i	a_i	α_i
A_1^0	q_1	0.0856 m	0	90°
A_2^1	q_2	0.01 m	0.11 m	0°
A_3^2	q_3	0.05 m	0	0°
A_4^3	q_4	0.1 m	0	90°

Tabla 1.- Parámetros de Denavit Hartenberg correspondientes al robot de 4 GDL

Donde:

θ_i	Es el ángulo que forman los ejes x_{i-1} y x_i medido en un plano perpendicular al eje z_{i-1} , utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.
d_i	Es la distancia a lo largo del eje z_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo hasta la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i . Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.
a_i	Es la distancia a lo largo del eje x_i que va desde la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i hasta el origen del sistema i -ésimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes z_{i-1} y z_i .

α_i	Es el ángulo de separación del eje z_{i-1} y el eje z_i , medido en un plano perpendicular al eje x_i , utilizando la regla de la mano derecha.
------------	---

Tabla 2.- Significado de los parámetros de DH

Un detalle importante es comprobar que la Tabla 1, realmente describa la cinemática del robot que se busca, en este caso la de un robot antropomórfico de 4 GDL, para dar esta veracidad de los parámetros de DH se usa las librerías de Peter Corke y el software de Matlab. Los resultados obtenidos en base a la Tabla 1 se ven en la Figura 16 y la Figura 17. Si se toma en comparación la Figura 6, Figura 15, y Figura 16, se puede observar que son muy similares esto da veracidad de que los parámetros de la Tabla 1 son correctos de esta manera se puede empezar a desarrollar las ecuaciones de la cinemática directa, las cuales son las matrices de transformación.

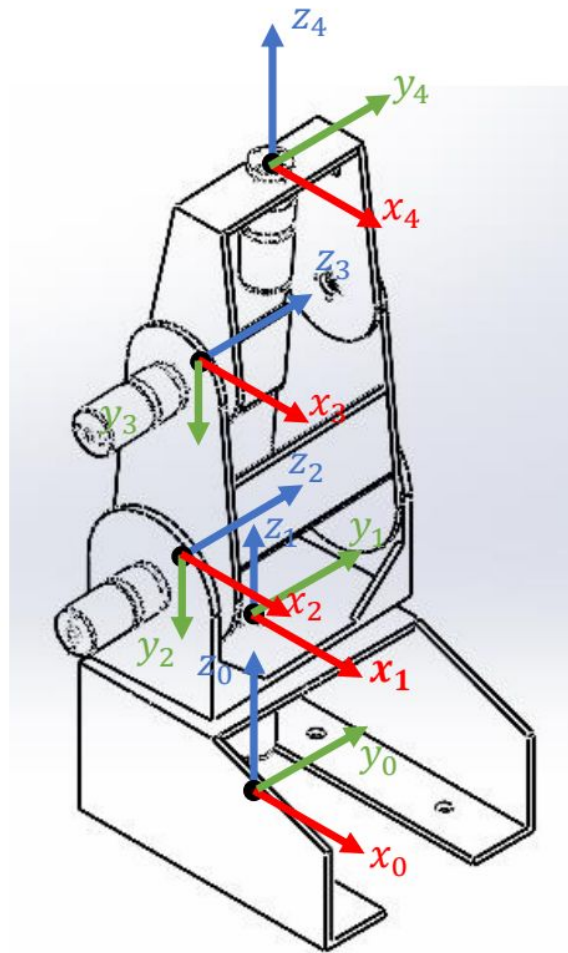


Figura 15.- Robot antropomórfico de 4 GDL.

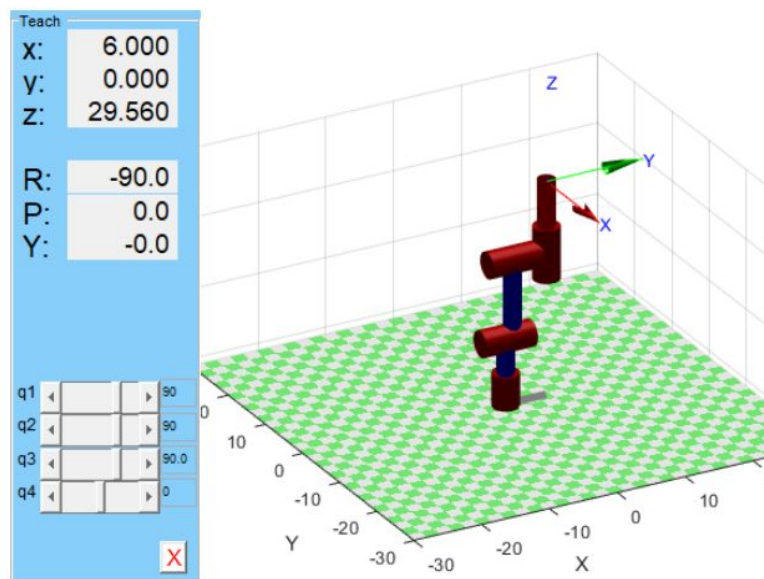


Figura 16.- Robot de 4 GDL obtenido mediante el uso de las librerías de Peter Corke, Vista 1

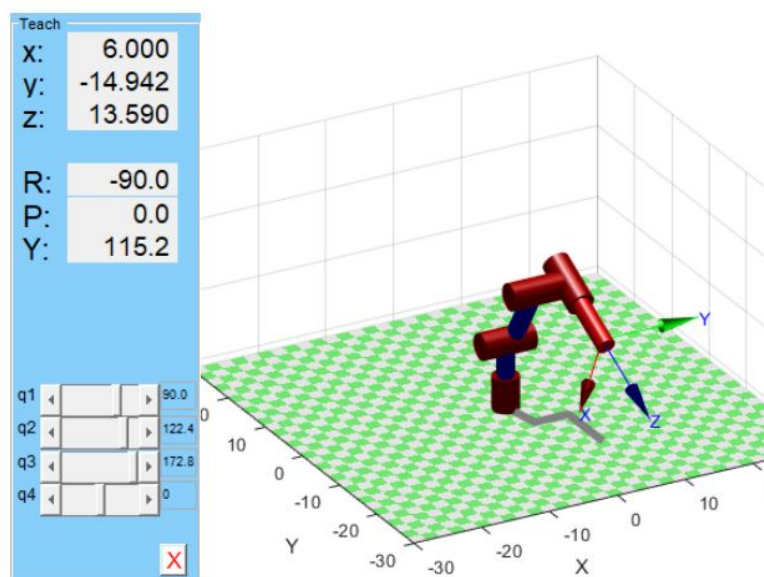


Figura 17.- Robot de 4 GDL obtenido mediante el uso de las librerías de Peter Corke, Vista 2

4.1.2 Matrices de transformación homogénea

En esta subsección se realiza la obtención de las matrices de transformación homogénea las cuales representan el paso 14, 15 y 16 del algoritmo de DH. Para realizar las matrices de transformación homogénea se consideran la ecuación (1).

$$A_1^0 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos \alpha_i \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Tomando en cuenta la ecuación (1) y la Tabla 1, se realiza la matriz de transformación homogénea para el primer eslabón. La cual esta representada por la ecuación (2)

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\cos \alpha_1 \sin(\theta_1) & \sin(\alpha_1) \sin(\theta_1) & a_1 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\alpha_1) \cos(\theta_1) & -\sin(\alpha_1) \cos(\theta_1) & a_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos(\alpha_1) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\theta_1=\theta_1, \alpha_1=\alpha_1, a_1=a_1, d_1=d_1} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\cos \alpha_1 \sin \theta_1 & \sin \theta_1 \sin \alpha_1 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \alpha_1 & -\cos \theta_1 \sin \alpha_1 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\theta_1=q_1, d_1=0.0856, a_1=0, \alpha_1=\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ A_1 &= \begin{pmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.0856 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

De una manera muy similar se realiza para los demás ejes. Dando como resultados la ecuación (3), ecuación (4) y (5)

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & 0.11 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & 0.11 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & 0 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} \cos q_4 & 0 & \sin q_4 & 0 \\ \sin q_4 & 0 & -\cos q_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Para encontrar la matriz de transformación general del sistema se toma en cuenta la ecuación (6)

$$T = A_1 * A_2 * A_3 * A_4 \quad (6)$$

La ecuación (6) se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (\cos q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) - (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3)) \\
a_{21} &= (\sin q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) - (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3)) \\
a_{31} &= (\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) \\
a_{41} &= 0 \\
a_{12} &= \sin q_1 \\
a_{22} &= -\cos q_1 \\
a_{32} &= 0 \\
a_{42} &= 0 \\
a_{13} &= (\cos q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4)) \\
a_{23} &= (\sin q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4)) \\
a_{33} &= (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) - (\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) \\
a_{43} &= 0 \\
a_{14} &= 0.25 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2 \\
a_{24} &= 0.11 \cos q_2 \sin q_1 - 0.25 \cos q_1 \\
a_{34} &= 0.11 \sin q_2 + 0.0856 \\
a_{44} &= 1
\end{aligned}$$

De la ecuación (6) se describe la posición del robot en un sistema de coordenadas donde $x = a_{14}$, $y = a_{34}$ y $z = a_{44}$

4.3 Dinámica del robot de cuatro grados de libertad

En esta sección se realiza la dinámica del robot, el método que se utiliza es mediante un algoritmo de Euler – Lagrange el cual esta basado en un sistema de energías.

Cabe mencionar que para el desarrollo de esta sección es muy importante desarrollar de manera adecuada la cinemática directa.

A estos pasos se le va a llamar LN, donde “L” se refiere a un paso de la ecuación de Lagrange y “N” es el numero de pasos.

Para **L1** y **L2** es el desarrollo de la cinemática directa.

L3. Se obtienen las matrices U_{ij} donde $(i = 1, j = 1)$ se toma en consideración la ecuación

$$U_{ij} = \frac{\partial}{\partial q_j} A_i^0 \quad (7)$$

Donde el resultado de la ecuación (7) se ve en la ecuación (8)

$$U_{11} = \frac{\partial}{\partial q_1} \begin{pmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.0856 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{11} = \begin{pmatrix} -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Para U_{12} el resultado se ve en la ecuación (9)

$$U_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

De una manera muy similar se puede realizar hasta terminar con U_{14} dando como resultado las ecuaciones siguientes

$$U_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$U_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Para U_{21} hasta U_{24} se toma en consideración que la matriz de transformación es A_2^0 , dando $U_{21} = \frac{\partial}{\partial q_1} A_2^0$. Recordar que no es lo mismo A_2^0 a A_2^1 , donde

$$A_2^0 = \begin{pmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 & \sin q_1 & 0.1 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2 \\ \cos q_2 \sin q_1 & -\sin q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 & 0.11 \cos q_2 \sin q_1 - 0.1 \cos q_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & 0.11 \sin q_2 + 0.0856 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$U_{21} = \begin{pmatrix} -\cos q_2 \sin q_1 & \sin q_1 \sin q_2 & \cos q_1 & 0.1 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1 \\ \cos q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 & \sin q_1 & 0.1 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

De una manera muy similar se puede realizar hasta terminar con U_{44} dando como resultado las ecuaciones siguientes

$$U_{22} = \begin{pmatrix} -\cos q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 \cos q_2 & 0 & -0.11 \cos q_1 \sin q_2 \\ -\sin q_1 \sin q_2 & -\cos q_2 \sin q_1 & 0 & -0.11 \sin q_1 \sin q_2 \\ \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & 0.11 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$U_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$U_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$U_{31} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\ a_{12} &= (\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\ a_{13} &= \cos q_1 \\ a_{14} &= 0.15 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1 \\ a_{21} &= (\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\ a_{22} &= -(\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\ a_{23} &= \sin q_1 \\ a_{24} &= 0.15 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2 \end{aligned}$$

De a_{31} hasta a_{44} el valor que tiene es 0

$$U_{32} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\ a_{12} &= -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\ a_{13} &= 0 \\ a_{14} &= -0.11 \cos q_1 \sin q_2 \\ a_{21} &= -(\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\ a_{22} &= -(\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\ a_{23} &= 0 \\ a_{24} &= -0.11 \sin q_1 \sin q_2 \\ a_{31} &= \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3 \\ a_{32} &= -\cos q_2 \sin q_3 - \cos q_3 \sin q_2 \\ a_{33} &= 0 \\ a_{34} &= 0.11 \cos q_2 \end{aligned}$$

De a_{41} hasta a_{44} el valor que tiene es 0

$$U_{33} = \begin{pmatrix} -(\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & 0 & 0 \\ -(\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & -(\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & 0 & 0 \\ \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3 & -\cos q_2 \sin q_3 - \cos q_3 \sin q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$U_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$U_{41} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(\sin q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) - (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3)) \\ a_{12} &= \cos q_1 \\ a_{13} &= -(\sin q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4)) \\ a_{14} &= 0.25 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1 \\ a_{21} &= (\cos q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) - (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3)) \\ a_{22} &= \sin q_1 \\ a_{23} &= (\cos q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4)) \\ a_{24} &= 0.25 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2 \end{aligned}$$

$$U_{42} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(\cos q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4)) \\ a_{12} &= 0 \\ a_{13} &= (\cos q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) - (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3)) \\ a_{14} &= -0.11 \cos q_1 \sin q_2 \\ a_{21} &= -(\sin q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4)) \\ a_{22} &= 0 \\ a_{23} &= (\sin q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) - (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3)) \\ a_{24} &= -0.11 \sin q_1 \sin q_2 \\ a_{31} &= (\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) - (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) \\ a_{32} &= 0 \\ a_{33} &= (\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) \\ a_{34} &= 0.11 \cos q_2 \end{aligned}$$

$$U_{43} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -(\cos q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4)) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= (\cos q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) - (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3)) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= -(\sin q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4)) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= (\sin q_1)((\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) - (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3)) \\
a_{24} &= 0 \\
a_{31} &= (\cos q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) - (\sin q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) \\
a_{32} &= 0 \\
a_{33} &= (\cos q_2)(\cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_3) + (\sin q_2)(\cos q_3 \cos q_4 - \sin q_3 \sin q_4) \\
a_{34} &= 0
\end{aligned}$$

$$U_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0 \\
a_{31} &= \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{32} &= 0 \\
a_{33} &= \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{34} &= 0
\end{aligned}$$

L 4. Obtener las matrices U_{ijk} definidas por la ecuación (24)

$$U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} \quad (24)$$

Donde U_{111} queda

$$\begin{aligned}
U_{111} &= \frac{\partial}{\partial q_1} U_{11} \\
U_{111} &= \begin{pmatrix} -\cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & 0 \\ -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)
\end{aligned}$$

De una manera muy similar se puede realizar hasta terminar con U_{444} dando como resultado las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}
U_{112} &= \frac{\partial}{\partial q_2} U_{11} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{26}$$

$$U_{113} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$U_{114} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$U_{121} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Para $U_{121} = U_{122} = U_{123} = U_{124}$.

De una manera similar ocurre a $U_{131} = U_{132} = U_{133} = U_{134}$, $U_{141} = U_{142} = U_{143} = U_{144}$

Para U_{211} se ve en la ecuación (30)

$$\begin{aligned}
U_{211} &= \frac{\partial}{\partial q_1} U_{21} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos q_1 \cos q_2 & \cos q_1 \sin q_2 & -\sin q_1 & -0.1 \sin q_1 - 0.11 \cos q_1 \cos q_2 \\ -\cos q_2 \sin q_1 & \sin q_1 \sin q_2 & \cos q_1 & 0.1 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
U_{212} &= \frac{\partial}{\partial q_2} U_{21} \\
&= \begin{pmatrix} \sin q_1 \sin q_2 & \cos q_2 \sin q_1 & 0 & 0.11 \sin q_1 \sin q_2 \\ -\cos q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 \cos q_2 & 0 & -0.11 \cos q_1 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{31}$$

Para U_{213} y U_{214} el resultado es una matriz de ceros.

Continuando con U_{221}

$$U_{221} = \frac{\partial}{\partial q_1} U_{22} = \begin{pmatrix} \sin q_1 \sin q_2 & \cos q_2 \sin q_1 & 0 & 0.11 \sin q_1 \sin q_2 \\ -\cos q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 \cos q_2 & 0 & -0.11 \cos q_1 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$U_{222} = \frac{\partial}{\partial q_2} U_{22} = \begin{pmatrix} -\cos q_1 \cos q_2 & \cos q_1 \sin q_2 & 0 & -0.11 \cos q_1 \cos q_2 \\ -\cos q_2 \sin q_1 & \sin q_1 \sin q_2 & 0 & -0.11 \cos q_2 \sin q_1 \\ -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & -0.11 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Para U_{223} y U_{224} el resultado es una matriz de ceros.

Ocurre lo mismo para $U_{231} = U_{232} = U_{233} = U_{234} = U_{241} = U_{242} = U_{243} = U_{244} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para U_{311} el resultado es diferente.

$$U_{311} = \frac{\partial}{\partial q_1} U_{31} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\ a_{12} &= (\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\ a_{13} &= -\sin q_1 \\ a_{14} &= -0.15 \sin q_1 - 0.11 \cos q_1 \cos q_2 \\ a_{21} &= -(\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\ a_{22} &= (\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\ a_{23} &= \cos q_1 \\ a_{24} &= 0.15 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1 \end{aligned}$$

$$U_{312} = \frac{\partial}{\partial q_2} U_{31} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\ a_{12} &= (\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= 0 \\
a_{14} &= 0.11 \sin q_1 \sin q_2 \\
a_{21} &= -(\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\
a_{22} &= -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\
a_{23} &= 0 \\
a_{24} &= -0.11 \cos q_1 \sin q_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{313} &= \frac{\partial}{\partial q_3} U_{31} \\
&= \begin{pmatrix} (\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & (\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & 0 & 0 \\ -(\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{314} &= \frac{\partial}{\partial q_4} U_{31} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (37)
\end{aligned}$$

$$U_{321} = \frac{\partial}{\partial q_1} U_{32} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\
a_{12} &= (\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\
a_{13} &= 0 \\
a_{14} &= 0.11 \sin q_1 \sin q_2 \\
a_{21} &= -(\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\
a_{22} &= -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\
a_{23} &= 0 \\
a_{24} &= -0.11 \cos q_1 \sin q_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{322} &= \frac{\partial}{\partial q_2} U_{32} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\
a_{12} &= (\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= 0 \\
a_{14} &= -0.11 \cos q_1 \cos q_2 \\
a_{21} &= -(\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \\
a_{22} &= (\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) \\
a_{23} &= 0 \\
a_{24} &= -0.11 \cos q_2 \sin q_1 \\
a_{31} &= -\cos q_2 \sin q_3 - \cos q_3 \sin q_2 \\
a_{32} &= \sin q_2 \sin q_3 - \cos q_2 \cos q_3 \\
a_{33} &= 0 \\
a_{34} &= -0.11 \sin q_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{323} &= \frac{\partial}{\partial q_3} U_{32} \\
&= \begin{pmatrix} -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & (\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & 0 & 0 \\ -(\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & (\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & 0 & 0 \\ -\cos q_2 \sin q_3 - \cos q_3 \sin q_2 & \sin q_2 \sin q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{324} &= \frac{\partial}{\partial q_4} U_{32} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{331} &= \frac{\partial}{\partial q_1} U_{33} \\
&= \begin{pmatrix} (\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & (\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & 0 & 0 \\ -(\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{332} &= \frac{\partial}{\partial q_2} U_{33} \\
&= \begin{pmatrix} -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & (\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & 0 & 0 \\ -(\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & (\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & 0 & 0 \\ -\cos q_2 \sin q_3 - \cos q_3 \sin q_2 & \sin q_2 \sin q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{333} &= \frac{\partial}{\partial q_3} U_{33} \\
&= \begin{pmatrix} -(\cos q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & (\cos q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & 0 & 0 \\ -(\sin q_1)(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) & (\sin q_1)(\cos q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \sin q_2) & 0 & 0 \\ -\cos q_2 \sin q_3 - \cos q_3 \sin q_2 & \sin q_2 \sin q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{334} &= \frac{\partial}{\partial q_4} U_{33} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
U_{341} &= \frac{\partial}{\partial q_1} U_{34} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{46}$$

$$U_{341} = U_{342} = U_{343} = U_{344}$$

$$\begin{aligned}
U_{411} &= \frac{\partial}{\partial q_1} U_{41} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{12} &= -\sin q_1 \\
a_{13} &= \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{14} &= -0.055 \cos(q_1 - 1.0q_2) - 0.055 \cos(q_1 + q_2) - 0.25 \sin q_1 \\
a_{21} &= -\frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{22} &= \cos q_1 \\
a_{23} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0.25 \cos q_1 - 0.055 \sin(q_1 + q_2) - 0.055 \sin(q_1 - 1.0q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{412} &= \frac{\partial}{\partial q_2} U_{41} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= -\frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{14} &= 0.055 \cos(q_1 - 1.0q_2) - 0.055 \cos(q_1 + q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= -0.11 \cos q_1 \sin q_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{413} &= \frac{\partial}{\partial q_3} U_{41} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= -\frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{414} &= \frac{\partial}{\partial q_4} U_{41} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= -\frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{421} &= \frac{\partial}{\partial q_1} U_{42} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= -\frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{14} &= 0.055 \cos(q_1 - 1.0q_2) - 0.055 \cos(q_1 + q_2) \\
a_{21} &= \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= -0.11 \cos q_1 \sin q_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{422} &= \frac{\partial}{\partial q_2} U_{42} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{14} &= -0.11 \cos q_1 \cos q_2 \\
a_{21} &= -\frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= -0.11 \cos q_2 \sin q_1 \\
a_{31} &= -\sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{32} &= 0 \\
a_{33} &= \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{34} &= -0.11 \sin q_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{423} &= \frac{\partial}{\partial q_3} U_{42} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= \frac{1}{2} \sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{14} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -\frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0 \\
a_{31} &= -\sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{32} &= 0 \\
a_{33} &= \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{34} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{424} &= \frac{\partial}{\partial q_4} U_{42} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= -\frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0 \\
a_{31} &= -\sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{32} &= 0 \\
a_{33} &= \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{34} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{431} &= \frac{\partial}{\partial q_1} U_{43} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= -\frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{432} &= \frac{\partial}{\partial q_2} U_{43} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= -\frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0 \\
a_{31} &= -\sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{32} &= 0 \\
a_{33} &= \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{34} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{433} &= \frac{\partial}{\partial q_3} U_{43} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= -\frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0 \\
a_{31} &= -\sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{32} &= 0 \\
a_{33} &= \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{34} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{434} &= \frac{\partial}{\partial q_4} U_{43} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= -\frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0 \\
a_{31} &= -\sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{32} &= 0 \\
a_{33} &= \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{34} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{441} &= \frac{\partial}{\partial q_1} U_{44} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= -\frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{442} &= \frac{\partial}{\partial q_2} U_{44} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{12} &= 0 \\
a_{13} &= \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{14} &= 0 \\
a_{21} &= -\frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{22} &= 0 \\
a_{23} &= \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \\
a_{24} &= 0 \\
a_{31} &= -\sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
a_{32} &= 0
\end{aligned}$$

$$a_{33} = \cos(q_2 + q_3 + q_4)$$

$$a_{34} = 0$$

$$U_{443} = \frac{\partial}{\partial q_3} U_{44}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

$$a_{11} = -\frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4)$$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{13} = \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

$$a_{14} = 0$$

$$a_{21} = -\frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4)$$

$$a_{22} = 0$$

$$a_{23} = \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4)$$

$$a_{24} = 0$$

$$a_{31} = -\sin(q_2 + q_3 + q_4)$$

$$a_{32} = 0$$

$$a_{33} = \cos(q_2 + q_3 + q_4)$$

$$a_{34} = 0$$

$$U_{444} = \frac{\partial}{\partial q_4} U_{44}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$a_{11} = -\frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4)$$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{13} = \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

$$a_{14} = 0$$

$$a_{21} = -\frac{1}{2}\sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\sin(q_1 - q_2 - q_3 - q_4)$$

$$a_{22} = 0$$

$$a_{23} = \frac{1}{2}\cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2}\cos(q_1 - q_2 - q_3 - q_4)$$

$$a_{24} = 0$$

$$a_{31} = -\sin(q_2 + q_3 + q_4)$$

$$a_{32} = 0$$

$$a_{33} = \cos(q_2 + q_3 + q_4)$$

$$a_{34} = 0$$

L 5. Obtener las matrices de pseudo – inercias J_i para cada elemento, que vienen definidas por la ecuación (63)

$$J_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int y_i x_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int z_i x_i dm & \int z_i y_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.3274 \times 10^{-3} m_1 & 0.0856 m_1 \\ 0 & 0 & 0.0856 m_1 & m_1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_2(0.1 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2)^2 \\ a_{12} &= -m_2(0.1 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)(0.1 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\ a_{13} &= m_2(0.11 \sin q_2 + 0.0856)(0.1 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\ a_{14} &= m_2(0.1 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\ a_{21} &= -m_2(0.1 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)(0.1 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\ a_{22} &= m_2(0.1 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)^2 \\ a_{23} &= -m_2(0.11 \sin q_2 + 0.0856)(0.1 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1) \\ a_{24} &= -m_2(0.1 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1) \\ a_{31} &= m_2(0.11 \sin q_2 + 0.0856)(0.1 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\ a_{32} &= -m_2(0.11 \sin q_2 + 0.0856)(0.1 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1) \\ a_{33} &= m_2(0.11 \sin q_2 + 0.0856)^2 \\ a_{34} &= m_2(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\ a_{41} &= m_2(0.1 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\ a_{42} &= -m_2(0.1 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1) \\ a_{43} &= m_2(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\ a_{44} &= m_2 \end{aligned}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_3(0.15 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2)^2 \\ a_{12} &= -m_3(0.15 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)(0.15 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\ a_{13} &= m_3(0.15 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2)(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\ a_{14} &= m_3(0.15 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\ a_{21} &= -m_3(0.15 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)(0.15 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\ a_{22} &= m_3(0.15 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)^2 \\ a_{23} &= -m_3(0.15 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{24} &= -m_3(0.15 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1) \\
a_{31} &= m_3(0.15 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2)(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\
a_{32} &= -m_3(0.15 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\
a_{33} &= m_3(0.11 \sin q_2 + 0.0856)^2 \\
a_{34} &= m_3(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\
a_{41} &= m_3(0.15 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\
a_{42} &= -m_3(0.15 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1) \\
a_{43} &= m_3(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\
a_{44} &= m_3
\end{aligned}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= m_4(0.25 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2)^2 \\
a_{12} &= -m_4(0.25 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)(0.25 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\
a_{13} &= m_4(0.25 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2)(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\
a_{14} &= m_4(0.25 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\
a_{21} &= -m_4(0.25 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)(0.25 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\
a_{22} &= m_4(0.25 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)^2 \\
a_{23} &= -m_4(0.25 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\
a_{24} &= -m_4(0.25 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1) \\
a_{31} &= m_4(0.25 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2)(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\
a_{32} &= -m_4(0.25 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1)(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\
a_{33} &= m_4(0.11 \sin q_2 + 0.0856)^2 \\
a_{34} &= m_4(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\
a_{41} &= m_4(0.25 \sin q_1 + 0.11 \cos q_1 \cos q_2) \\
a_{42} &= -m_4(0.25 \cos q_1 - 0.11 \cos q_2 \sin q_1) \\
a_{43} &= m_4(0.11 \sin q_2 + 0.0856) \\
a_{44} &= m_4
\end{aligned}$$

L 6. Obtener la matriz de inercias $D = [d_{ij}]$ cuyos elementos vienen definidos por la ecuación

$$d_{ij} = \sum_{k=(i,j)}^n \text{Traza}(U_{kj} J_k U_{ki}^T) \quad (68)$$

Para $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \text{Traza}(U_{11} * J_1 * U_{11}^T) + \text{Traza}(U_{21} * J_2 * U_{21}^T) + \text{Traza}(U_{31} * J_3 * U_{31}^T) + \text{Traza}(U_{41} * J_4 * U_{41}^T) \\
d_{12} &= \text{Traza}(U_{22} * J_2 * U_{21}^T) + \text{Traza}(U_{32} * J_3 * U_{31}^T) + \text{Traza}(U_{42} * J_4 * U_{41}^T) \\
d_{13} &= \text{Traza}(U_{33} * J_3 * U_{31}^T) + \text{Traza}(U_{43} * J_4 * U_{41}^T) \\
d_{14} &= \text{Traza}(U_{44} * J_4 * U_{41}^T) \\
d_{21} &= \text{Traza}(U_{21} * J_2 * U_{22}^T) + \text{Traza}(U_{31} * J_3 * U_{32}^T) + \text{Traza}(U_{41} * J_4 * U_{42}^T) \\
d_{22} &= \text{Traza}(U_{22} * J_2 * U_{22}^T) + \text{Traza}(U_{32} * J_3 * U_{32}^T) + \text{Traza}(U_{42} * J_4 * U_{42}^T) \\
d_{23} &= \text{Traza}(U_{33} * J_3 * U_{32}^T) + \text{Traza}(U_{43} * J_4 * U_{42}^T) \\
d_{24} &= \text{Traza}(U_{44} * J_4 * U_{42}^T) \\
d_{31} &= \text{Traza}(U_{31} * J_3 * U_{33}^T) + \text{Traza}(U_{41} * J_4 * U_{43}^T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{32} &= \text{Traza}(U_{32} * J_3 * U_{33}^T) + \text{Traza}(U_{42} * J_4 * U_{43}^T) \\
d_{33} &= \text{Traza}(U_{33} * J_3 * U_{33}^T) + \text{Traza}(U_{43} * J_4 * U_{43}^T) \\
d_{34} &= \text{Traza}(U_{44} * J_4 * U_{44}^T) \\
d_{41} &= \text{Traza}(U_{41} * J_4 * U_{44}^T) \\
d_{42} &= \text{Traza}(U_{42} * J_4 * U_{44}^T) \\
d_{43} &= \text{Traza}(U_{43} * J_4 * U_{44}^T) \\
d_{44} &= \text{Traza}(U_{44} * J_4 * U_{44}^T)
\end{aligned}$$

Donde

$$DI = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} \quad (69)$$

L 7. Obtener los términos h_{ikm} definidos por la ecuación

$$h_{ikm} = \sum_{j=(i,k,m)}^n \text{traza}(U_{jkm} J_j U_{ji}^T) \quad (70)$$

$$h_{111} = \text{traza}(U_{111} J_1 U_{11}^T) + \text{traza}(U_{211} J_2 U_{21}^T) + \text{traza}(U_{311} J_3 U_{31}^T) + \text{traza}(U_{411} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{112} = \text{traza}(U_{212} J_2 U_{21}^T) + \text{traza}(U_{312} J_3 U_{31}^T) + \text{traza}(U_{412} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{113} = \text{traza}(U_{313} J_3 U_{31}^T) + \text{traza}(U_{413} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{114} = \text{traza}(U_{414} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{121} = \text{traza}(U_{221} J_2 U_{21}^T) + \text{traza}(U_{321} J_3 U_{31}^T) + \text{traza}(U_{421} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{122} = \text{traza}(U_{222} J_2 U_{21}^T) + \text{traza}(U_{322} J_3 U_{31}^T) + \text{traza}(U_{422} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{123} = \text{traza}(U_{323} J_3 U_{31}^T) + \text{traza}(U_{423} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{124} = \text{traza}(U_{424} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{131} = \text{traza}(U_{331} J_3 U_{31}^T) + \text{traza}(U_{431} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{132} = \text{traza}(U_{332} J_3 U_{31}^T) + \text{traza}(U_{432} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{133} = \text{traza}(U_{333} J_3 U_{31}^T) + \text{traza}(U_{433} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{134} = \text{traza}(U_{434} J_4 U_{41}^T)$$

$$h_{141} = \text{traza}(U_{441} J_4 U_{41}^T)$$

$$\begin{aligned}
h_{142} &= \text{traza}(U_{442}J_4U_{41}^T) \\
h_{143} &= \text{traza}(U_{443}J_4U_{41}^T) \\
h_{144} &= \text{traza}(U_{444}J_4U_{41}^T) \\
h_{211} &= \text{traza}(U_{211}J_2U_{22}^T) + \text{traza}(U_{311}J_3U_{32}^T) + \text{traza}(U_{411}J_4U_{42}^T) \\
h_{212} &= \text{traza}(U_{212}J_2U_{22}^T) + \text{traza}(U_{312}J_3U_{32}^T) + \text{traza}(U_{412}J_4U_{42}^T) \\
h_{213} &= \text{traza}(U_{313}J_3U_{32}^T) + \text{traza}(U_{413}J_4U_{42}^T) \\
h_{214} &= \text{traza}(U_{414}J_4U_{42}^T) \\
h_{221} &= \text{traza}(U_{221}J_2U_{22}^T) + \text{traza}(U_{321}J_3U_{32}^T) + \text{traza}(U_{421}J_4U_{42}^T) \\
h_{222} &= \text{traza}(U_{222}J_2U_{22}^T) + \text{traza}(U_{322}J_3U_{32}^T) + \text{traza}(U_{422}J_4U_{42}^T) \\
h_{223} &= \text{traza}(U_{323}J_3U_{32}^T) + \text{traza}(U_{423}J_4U_{42}^T) \\
h_{224} &= \text{traza}(U_{424}J_4U_{42}^T) \\
h_{231} &= \text{traza}(U_{331}J_3U_{32}^T) + \text{traza}(U_{431}J_4U_{42}^T) \\
h_{232} &= \text{traza}(U_{332}J_3U_{32}^T) + \text{traza}(U_{432}J_4U_{42}^T) \\
h_{233} &= \text{traza}(U_{333}J_3U_{32}^T) + \text{traza}(U_{433}J_4U_{42}^T) \\
h_{234} &= \text{traza}(U_{434}J_4U_{42}^T) \\
h_{241} &= \text{traza}(U_{441}J_4U_{42}^T) \\
h_{242} &= \text{traza}(U_{442}J_4U_{42}^T) \\
h_{243} &= \text{traza}(U_{443}J_4U_{42}^T) \\
h_{244} &= \text{traza}(U_{444}J_4U_{42}^T) \\
h_{311} &= \text{traza}(U_{311}J_3U_{33}^T) + \text{traza}(U_{411}J_4U_{43}^T) \\
h_{312} &= \text{traza}(U_{312}J_3U_{33}^T) + \text{traza}(U_{412}J_4U_{43}^T) \\
h_{313} &= \text{traza}(U_{313}J_3U_{33}^T) + \text{traza}(U_{413}J_4U_{43}^T) \\
h_{314} &= \text{traza}(U_{414}J_4U_{43}^T) \\
h_{321} &= \text{traza}(U_{321}J_3U_{33}^T) + \text{traza}(U_{421}J_4U_{43}^T) \\
h_{322} &= \text{traza}(U_{322}J_3U_{33}^T) + \text{traza}(U_{422}J_4U_{43}^T)
\end{aligned}$$

$$h_{323} = \text{traza}(U_{323}J_3U_{33}^T) + \text{traza}(U_{423}J_4U_{43}^T)$$

$$h_{324} = \text{traza}(U_{424}J_4U_{43}^T)$$

$$h_{331} = \text{traza}(U_{331}J_3U_{33}^T) + \text{traza}(U_{431}J_4U_{43}^T)$$

$$h_{332} = \text{traza}(U_{332}J_3U_{33}^T) + \text{traza}(U_{432}J_4U_{43}^T)$$

$$h_{333} = \text{traza}(U_{333}J_3U_{33}^T) + \text{traza}(U_{433}J_4U_{43}^T)$$

$$h_{334} = \text{traza}(U_{434}J_4U_{43}^T)$$

$$h_{341} = \text{traza}(U_{441}J_4U_{43}^T)$$

$$h_{342} = \text{traza}(U_{442}J_4U_{43}^T)$$

$$h_{343} = \text{traza}(U_{443}J_4U_{43}^T)$$

$$h_{344} = \text{traza}(U_{444}J_4U_{43}^T)$$

$$h_{411} = \text{traza}(U_{411}J_4U_{44}^T)$$

$$h_{421} = \text{traza}(U_{421}J_4U_{44}^T)$$

$$h_{422} = \text{traza}(U_{422}J_4U_{44}^T)$$

$$h_{444} = \text{traza}(U_{444}J_4U_{44}^T)$$

L 8. Obtener la matriz columna de fuerzas de Coriolis y centrípeta $H = [h_i]^T$ cuyos elementos vienen definidos por la ecuación

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad (71)$$

$$h_1 = (q_1')^2 h_{1,1,1} + (q_2')^2 h_{1,2,2} + (q_3')^2 h_{1,3,3} + (q_4')^2 h_{1,4,4} + q_1' q_2' h_{1,1,2} + q_1' q_2' h_{1,2,1} + q_1' q_3' h_{1,1,3} + q_1' q_3' h_{1,3,1} + q_1' q_4' h_{1,1,4} + q_1' q_4' h_{1,4,1} + q_2' q_3' h_{1,2,3} + q_2' q_3' h_{1,3,2} + q_2' q_4' h_{1,2,4} + q_2' q_4' h_{1,4,2} + q_3' q_4' h_{1,3,4} + q_3' q_4' h_{1,4,3}$$

$$h_2 = (q_1')^2 h_{2,1,1} + (q_2')^2 h_{2,2,2} + (q_3')^2 h_{2,3,3} + (q_4')^2 h_{2,4,4} + q_1' q_2' h_{2,1,2} + q_1' q_2' h_{2,2,1} + q_1' q_3' h_{2,1,3} + q_1' q_3' h_{2,3,1} + q_1' q_4' h_{2,1,4} + q_1' q_4' h_{2,4,1} + q_2' q_3' h_{2,2,3} + q_2' q_3' h_{2,3,2} + q_2' q_4' h_{2,2,4} + q_2' q_4' h_{2,4,2} + q_3' q_4' h_{2,3,4} + q_3' q_4' h_{2,4,3}$$

$$h_3 = (q'_1)^2 h_{3,1,1} + (q'_2)^2 h_{3,2,2} + (q'_3)^2 h_{3,3,3} + (q'_4)^2 h_{3,4,4} + q'_1 q'_2 h_{3,1,2} + q'_1 q'_2 h_{3,2,1} + q'_1 q'_3 h_{3,1,3} + q'_1 q'_3 h_{3,3,1} + q'_1 q'_4 h_{3,1,4} + q'_1 q'_4 h_{3,4,1} + q'_2 q'_3 h_{3,2,3} + q'_2 q'_3 h_{3,3,2} + q'_2 q'_4 h_{3,2,4} + q'_2 q'_4 h_{3,4,2} + q'_3 q'_4 h_{3,3,4} + q'_3 q'_4 h_{3,4,3}$$

$$h_4 = (q'_1)^2 h_{4,1,1} + (q'_2)^2 h_{4,2,2} + (q'_3)^2 h_{4,3,3} + (q'_4)^2 h_{4,4,4} + q'_1 q'_2 h_{4,1,2} + q'_1 q'_2 h_{4,2,1} + q'_1 q'_3 h_{4,1,3} + q'_1 q'_3 h_{4,3,1} + q'_1 q'_4 h_{4,1,4} + q'_1 q'_4 h_{4,4,1} + q'_2 q'_3 h_{4,2,3} + q'_2 q'_3 h_{4,3,2} + q'_2 q'_4 h_{4,2,4} + q'_2 q'_4 h_{4,4,2} + q'_3 q'_4 h_{4,3,4} + q'_3 q'_4 h_{4,4,3}$$

La matriz de Coriolis se muestra en la ecuación (72)

$$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} \quad (72)$$

L 9. Obtener la matriz columna de fuerzas de gravedad $G = [g_i]^T$ cuyos elementos están definidos por la ecuación (73)

$$g_i = \sum_{j=1}^n (-m_j * g * U_{ji} r_j^j) \quad (73)$$

con $i = 1, 2, \dots, n$

g : es el vector de gravedad expresado en el sistema de la base $\{S_0\}$ y viene expresado por $(g_{x0}, g_{y0}, g_{z0}, 0)$

r_j^j : es el vector de coordenadas homogéneas del centro de masas del elemento j expresado en el sistema de referencia del elemento j

$$g = (0 \quad 0 \quad -g \quad 0)$$

$$r_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2^2 = \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
r_3^3 &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
r_4^4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
g_1 &= \sum_{j=1}^4 [(-m_j g(U_{j,i}) r_j^j)]_{i=1} \\
g_2 &= \sum_{j=1}^4 [(-m_j g(U_{j,i}) r_j^j)]_{i=2} \\
g_3 &= \sum_{j=1}^4 [(-m_j g(U_{j,i}) r_j^j)]_{i=3} \\
g_4 &= \sum_{j=1}^4 [(-m_j g(U_{j,i}) r_j^j)]_{i=4}
\end{aligned}$$

Dando como resultado la ecuación

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} \quad (74)$$

L 10. La dinámica del robot se ve en la ecuación (75)

$$\tau = DIq'' + Cq' + G \quad (75)$$

Donde τ es el torque o la fuerza que se ejerce en el motor, DI es la matriz de inercias del sistema y esta se define en la ecuación (69), C es la matriz de Coriolis la cual esta definida en la ecuación (72) y G es la matriz de gravedad la cual esta representada por la ecuación (74). Cabe mencionar que $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]^T$, $q'' = [q_1'', q_2'', q_3'', q_4'']^T$, $\dot{q} = [q_1', q_2', q_3', q_4']^T$

Para poder conocer el comportamiento angular de cada uno de los ejes del motor se tiene que seguir la ecuación (76).

$$q'' = DI^{-1}(\tau - Cq' - G) \quad (76)$$

4.4 Diseño del controlador para el robot de cuatro grados de libertad

En esta subsección se ve el desarrollo del controlador PID del robot. Cabe mencionar que el desarrollo de dicho controlador no aplica al robot completo, lo que se desarrolla es un controlador para cada grado de libertad. En pocas palabras habrá cuatro controladores PID, donde cada controlador tendrá diferentes

ganancias puesto que la fuerza que requiere cada motor es muy diferente debido a que unos eslabones cargan mayor peso. La representación del sistema en lazo cerrado se puede ver en la Figura 18

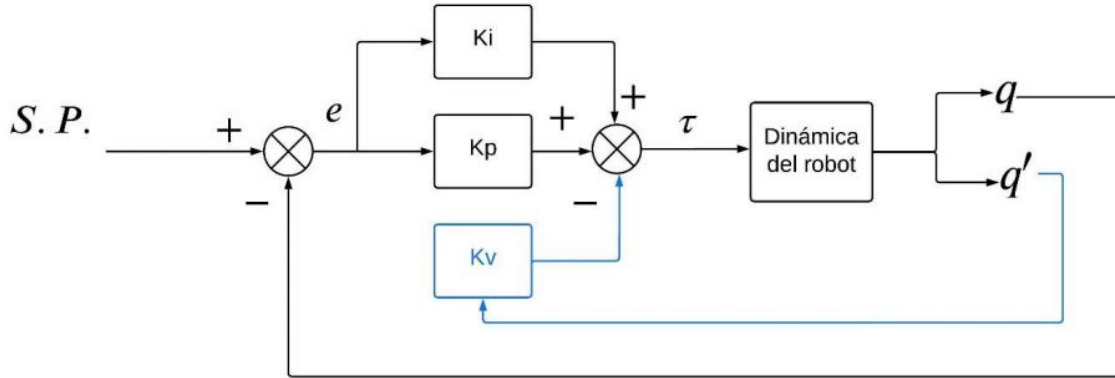


Figura 18.- Sistema en lazo cerrado del robot de 4 GDL

Para el desarrollo del controlador es necesario tomar en cuenta la dinámica del sistema en este caso la ecuación (76). Donde $\tau = K_p e - K_v q' + K_i \int_0^t e(T) dT$

La ecuación en lazo cerrado en variables en espacio de estados se puede definir como la ecuación

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ e' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ -q' \\ M(q)^{-1} [K_p e - K_v q' + K_i v - C q' - G - C_B] \end{pmatrix} \quad (77)$$

donde e es el error, q es la posición del robot, q' es la velocidad del robot, v es una variable para definir la integral del error, C_B es el coeficiente de viscosidad del motor de cada eje, K_p es la ganancia proporcional del controlador, K_v es la ganancia de la velocidad, K_i es la ganancia integrativa, M es la matriz de inercia, C es la matriz de Coriolis, G es la matriz de gravedad. El error se define como $e = S.P. - q$ donde $S.P.$ es el valor de referencia.

El método para obtener las ganancias es mediante un método iterativo, puesto que obtener las ganancias por algún método analítico se vuelve muy complicado debido a que estos métodos están hechos para trabajar para sistemas lineales y el modelo dinámico del robot es un sistema no lineal.

Los valores de la ganancia proporcional se pueden ver en la ecuación (78)

$$K_p = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} \quad (78)$$

para los valores de la ganancia de la velocidad se ve en la ecuación (79)

$$K_v = \begin{bmatrix} 65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (79)$$

para los valores de la ganancia integrativa se ven en la ecuación

$$K_i = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 135 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 135 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Cabe mencionar que una de las ventajas de la ecuación (80) es que proporciona un pequeño impulso cuando el robot no puede subir a efectos de los pesos de los demás eslabones, sin embargo, esta ganancia provoca que la respuesta de salida de este grado de libertad cascabelee, q' se usa para amortiguar la acción que genera la ganancia proporcional, a grandes rasgos lo que realiza $K_v q'$ es disminuir la velocidad del motor cuando se vaya aproximando al valor deseado (*S.P*)

La matriz del coeficiente de viscosidad se ve en la ecuación (81)

$$C_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (81)$$

Capítulo 5.- Simulaciones

En este capítulo se ven las simulaciones que se le realizan al robot de 4 GDL. El software que se usa para el desarrollo de este capítulo es Matlab 2019 con ayuda de simulink, el solucionador de ecuaciones que se utilizar es el ODE 45. Las simulaciones se realizan para la dinámica del robot de 4 GDL y para la implementación del controlador PID al robot de 4 GDL.

5.1 Simulación de la dinámica del robot de 4 GDL

Para el desarrollo de esta sección es necesario el uso de la ecuación (76) y dar los parámetros del robot de 4 GDL, estos se ven en la Tabla 3

id	Símbolo	unidad	Descripción
1	m_1	0.5 kg	Masa del primer eslabón, el acoplamiento del eslabón y el motor
2	m_2	0.5 kg	Masa del segundo eslabón, el acoplamiento del eslabón y el motor
3	m_3	0.2 kg	Masa del tercer eslabón, el acoplamiento del eslabón, dos baleros y el motor
4	m_4	0.1 kg	Masa de la brida
5	g	9.8 m/s ²	Gravedad

Tabla 3.- Parámetros del robot de 4 GDL

Las distancias de los eslabones del robot se ven en la Tabla 1.

Uno de los primeros objetivos es ver cómo se comporta la simulación del robot cuando no se le aplica ninguna fuerza y sus posiciones del robot son ceros (condiciones iniciales o condición de reposo). Dicho comportamiento se ve en Figura 19, donde el eje uno se mantiene en cero, el eje dos existe un desplazamiento angular de -0.6 grados, esto es debido al peso de los demás eslabones, de una manera muy similar ocurre con el eje número tres, el cual tiene un pequeño desplazamiento angular de aproximadamente -0.2 grados. Para el eje cuatro se mantiene aproximadamente en cero grados.

Esto da como conclusión que el modelo dinámico del robot de 4 GDL se comporta de manera adecuada, las pequeñas variaciones se pueden deber a los puntos

decimales al momento de que el solucionador de ecuaciones empieza a resolver el sistema.

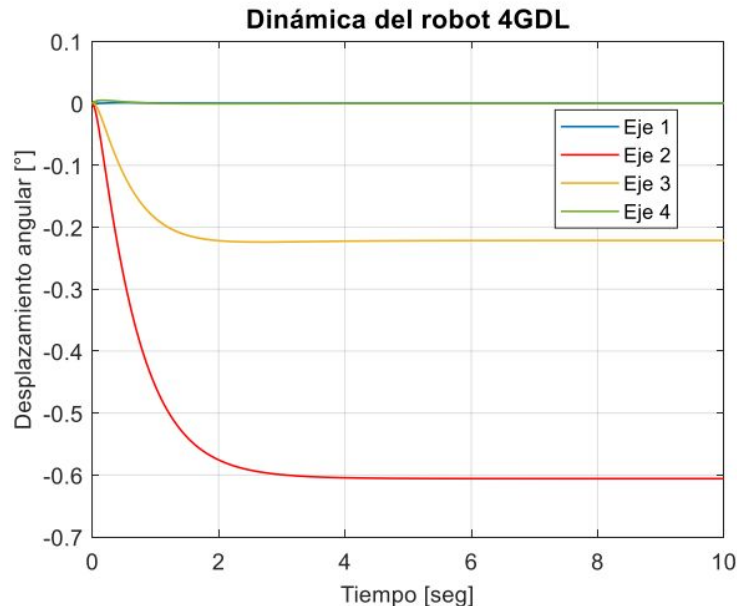


Figura 19.- Dinámica del robot de 4 GDL sin condiciones iniciales y torques cero.

Posteriormente a la dinámica del robot se le dan condiciones iniciales, las cuales son $\theta_1 = 0, \theta_2 = 90^\circ, \theta_3 = 90, \theta_4 = 0$, y se ve el comportamiento de ello en simulación. Estas condiciones iniciales sedan para ejemplificar una situación real de cómo se acomodaría el robot. El comportamiento de esto se ve en la Figura 20 donde el eje dos y el eje tres inician en 90° y caen. El eje dos llega a -36° y el eje tres llega a -12° , esto se debe a que existen varias operaciones con números decimales, sin embargo, la importancia de ello es que estos ejes deberían de caer o descender.

Posteriormente se ve el comportamiento de la dinámica del robot cuando se le aplica una fuerza, para este caso la fuerza que se le va aplicar es solo una entrada de tipo escalón por un tiempo de dos segundos, ejemplificando un pico de energía en un tiempo muy corto. En este caso las condiciones iniciales son cero, esto se puede ver en Figura 21.

El análisis de la Figura 21 es importante puesto que da conocer el comportamiento cuando al robot se le energiza por un tiempo determinado. El comportamiento del eje 1 y 4 son muy similares esto se debe a que la cantidad de energía que requieren estos ejes no es mucha, dando como resultado un desplazamiento angular de 33° aproximadamente. Por otro lado, el eje 2 con este tiempo y con esta entrada de escalón unitario no le es suficiente para poder levantar los demás eslabones del

robot. Llegando como máximo a -8° aproximadamente. Para el eje 3 la cantidad de fuerza que necesita es mucho menor que la del eje 2. Por ende, puede romper su punto de inicio y llegar a 15° .

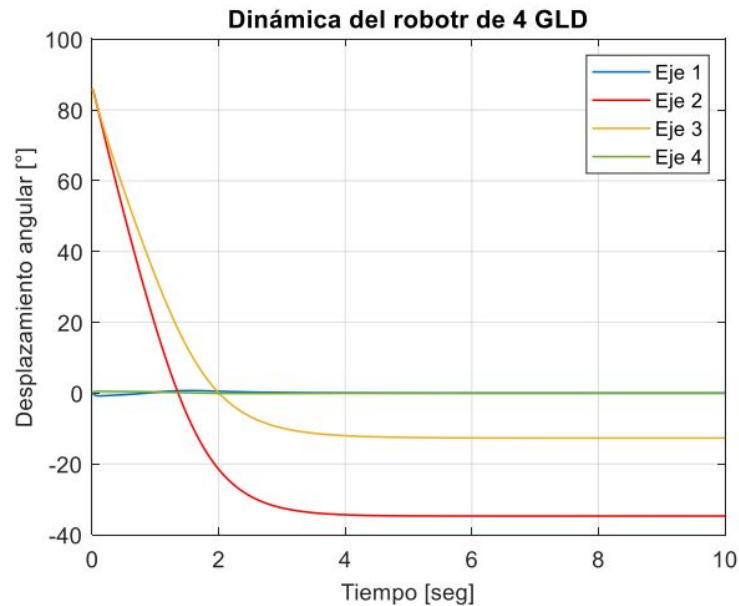


Figura 20.- Dinámica del robot de 4 GDL con condiciones iniciales y torques cero

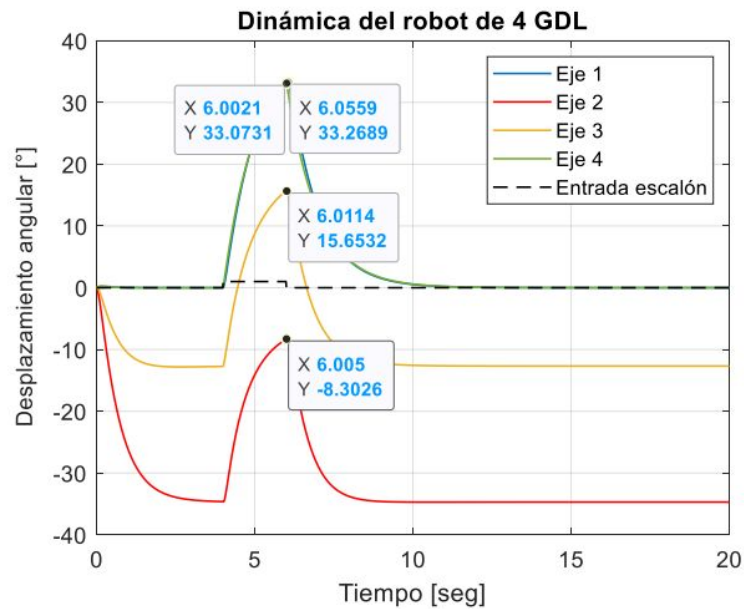


Figura 21.- Dinámica del robot de 4 GDL con una entrada escalón

5.2 Simulación de la implementación del control PID en el robot de 4 GDL

En esta sección se toma como referencia desde la ecuación (76) - (81), los parámetros del sistema que se encuentran en la Tabla 1 y la Tabla 3, de igual manera se considera el diagrama de bloques de la Figura 18.

Los resultados que se obtienen se pueden ver en la Figura 22. Donde el tiempo de respuesta es de 1.7 segundos aproximadamente para una entrada constante de 45° .

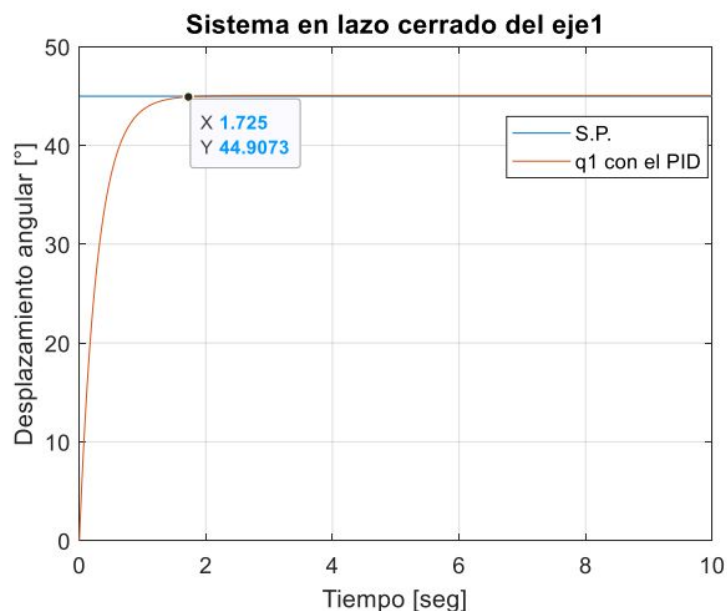


Figura 22.- Respuesta de la señal de salida q_1 en un sistema retroalimentado con un controlador PID

Para el eje 2 se puede ver la respuesta del sistema con el controlador en la Figura 23, el ángulo de referencia que se busca es de 115° , el cual llega aproximadamente en 2 segundos. Cabe mencionar que uno de los ejes mas complicados a controlar es el eje 2, esto es debido a todo el peso recae sobre este eje.

Otro punto importante es que el eje 2 no debe de tener sobre impulsos, ya que esto provocaría que el eje 2 no logre alcanzar el valor de referencia y este oscile durante un tiempo muy prolongado, por ende, la ganancia integrativa debe de ser muy pequeña o nula. Sin embargo, si no existe la ganancia integrativa y la posición del robot sobre pasa el valor de referencia, ejemplo 120° , el robot se puede quedar con un error en estado estacionario.

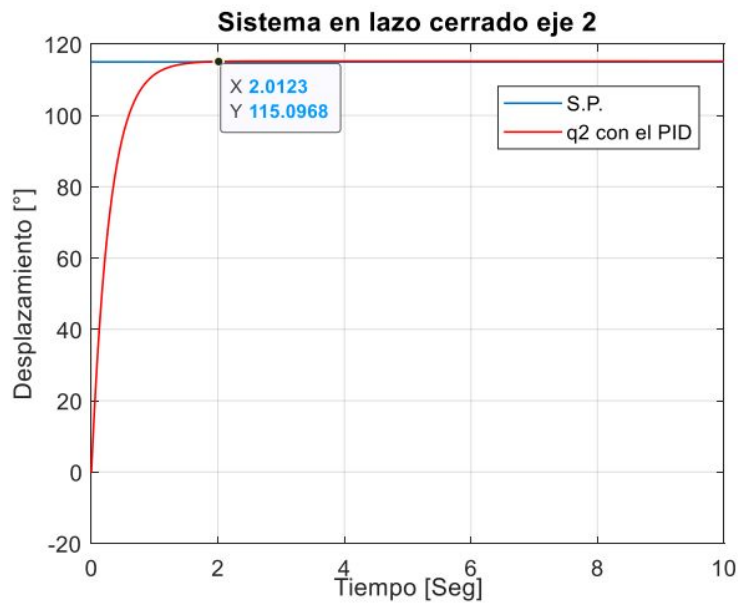


Figura 23.- Respuesta de la señal de salida q_2 en un sistema retroalimentado con un controlador PID

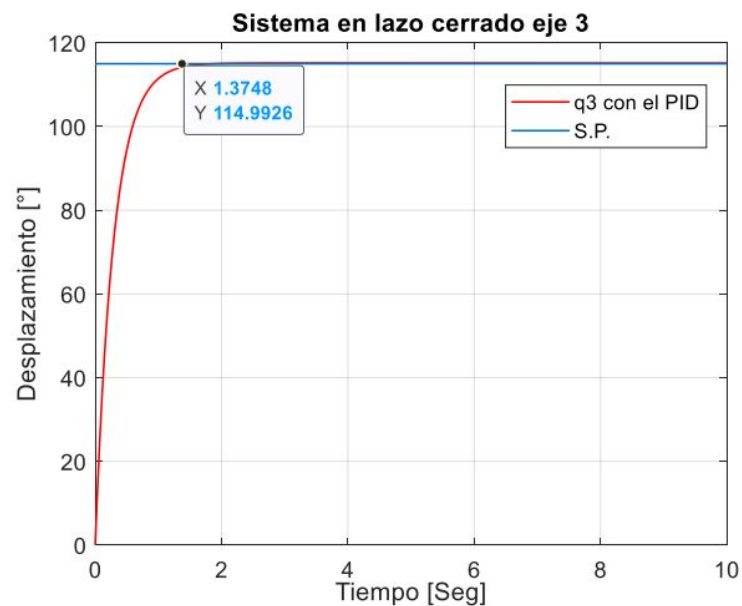


Figura 24.- Respuesta de la señal de salida q_3 en un sistema retroalimentado con un controlador PID

Para la respuesta del eje 3 se puede ver en la Figura 24, donde su tiempo de respuesta es aproximadamente de 2 segundos, con un valor de referencia de 115° .

Por último, la respuesta del eje 4 se ve en la Figura 25, donde su tiempo de respuesta es de 2 segundos aproximadamente, con un valor de referencia de 45° .

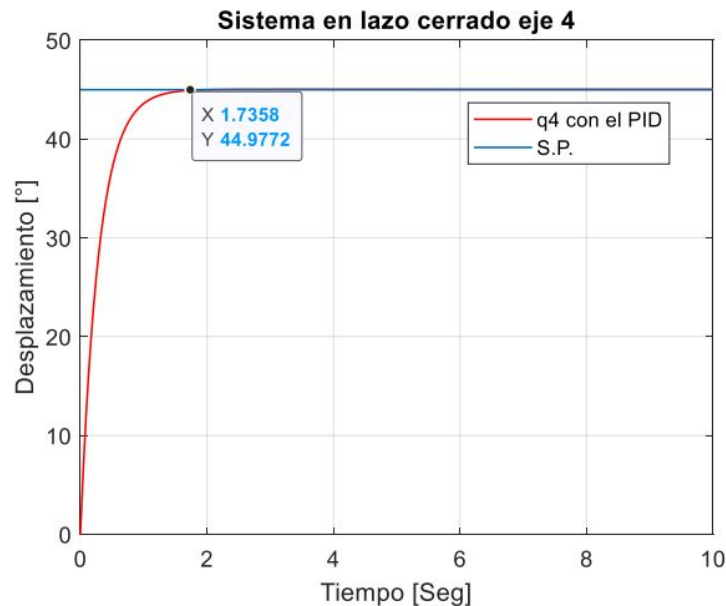


Figura 25.- Respuesta de la señal de salida q_4 en un sistema retroalimentado con un controlador PID

Cabe mencionar los valores de referencia se colocaron de manera aleatoria, incluso en posiciones muy complicadas para el eje 2 y 3. Donde se genera su carga máxima. Un ejemplo de ello es el que se ve en la Figura 26, el cual realiza un seguimiento de trayectoria donde son dos funciones escalones en periodos de tiempo muy cortos. En la primera función escalón debido al tiempo de intervalo de dicha función no logra alcanzar el valor de referencia el cual es de 45° , para el segundo escalón si logra llegar al valor de referencia con un tiempo de respuesta de 1.7 segundos.

Cabe mencionar que los cambios de la trayectoria de la Figura 26 son muy drásticos y en periodos muy cortos, por ende, se aumentan la ganancia de la parte proporcional, la que corresponde al eje 2. Los resultados se ven en la Figura 27, los cuales son de mucha mejoría.

Una de las ventajas de este controlador es que a medida que la señal se acerca al valor de referencia la velocidad va disminuyendo y esto le da la peculiaridad de generar respuestas suaves.

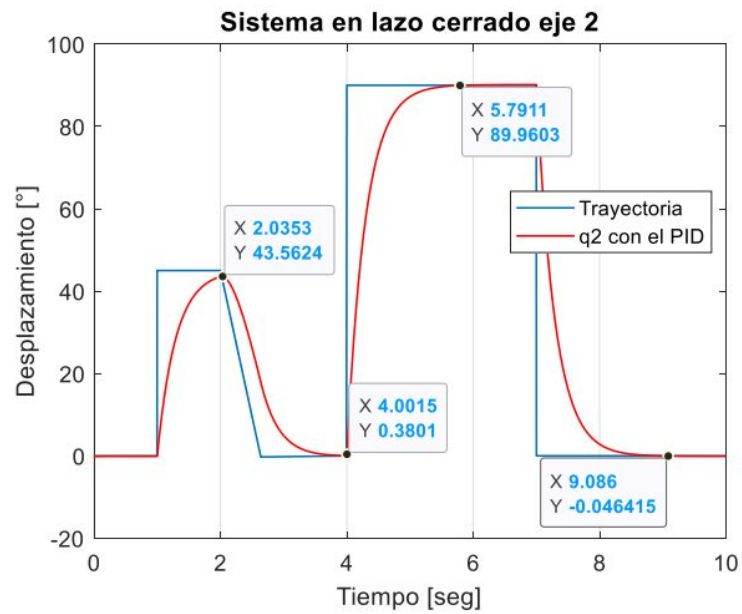


Figura 26.- Respuesta de la señal de salida q_2 en un sistema retroalimentado con un controlador PID

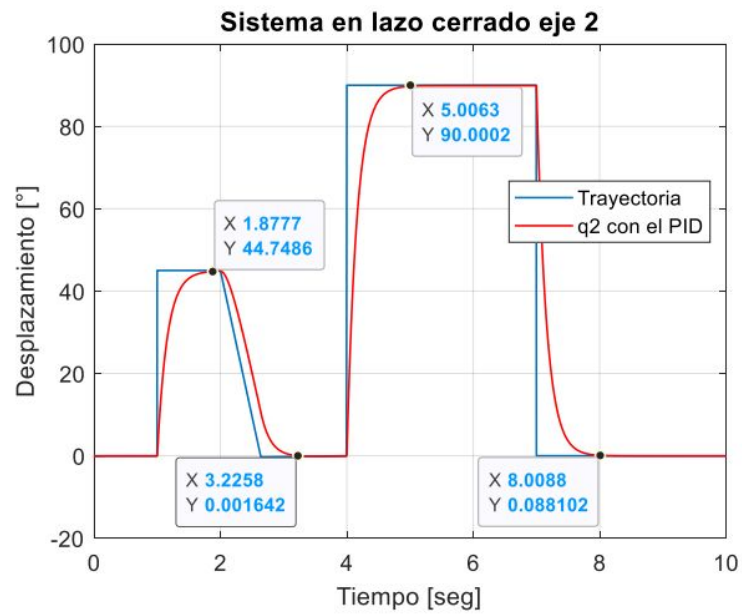


Figura 27.- Respuesta de la señal de salida q_2 en un sistema retroalimentado con un controlador PID versión 2

Capítulo 6.- Experimentaciones

Para el desarrollo de este capítulo se apoya del uso de PROTEUS versión 8, para la realización de diagramas eléctricos y electrónicos. Para la parte de la programación se realiza mediante el software de Arduino.

6.1 Diagramas eléctricos

En esta sección se realizan los diagramas eléctricos y electrónicos donde se integra una tarjeta controladora de motores de corriente directa, dicha tarjeta es la “L298N”, la cual amplifica la señal PWM del Arduino a un voltaje de 12 vcd el cual es el voltaje del motor “JGA25-370”, este motor ya viene incorporado con su propio encoder, el cual hay que realizar una relación de los pulsos que da el encoder con respecto a las revoluciones que da el eje del motor, esto es conocido como la resolución del encoder con respecto al motor.

Para el desarrollo de este proyecto, se usa un Arduino por cada eje, de igual manera un controlador de motores, se le agregan tres botones, el primer botón tiene el objetivo de mover el motor hacia adelante, el segundo botón mueve el motor hacia atrás, cabe mencionar que esto es un movimiento manual. Por último, el tercer botón activa al PID. Dicho diagrama se ve en la Figura 28.

El potenciómetro es el que manda la señal de referencia para el eje del motor donde 0 volts son 0 grados y 5 volts son 360 grados (una vuelta).

A manera de nota, una parte importante de este diagrama es el de hacer un nodo común del negativo del encoder con el negativo del fute de alimentación del motor.

Cabe mencionar que este diagrama se realiza uno por cada motor (eje), dando un total de 4 diagramas similares, la diferencia de ellos se encontrara en la programación de cada microcontrolador.

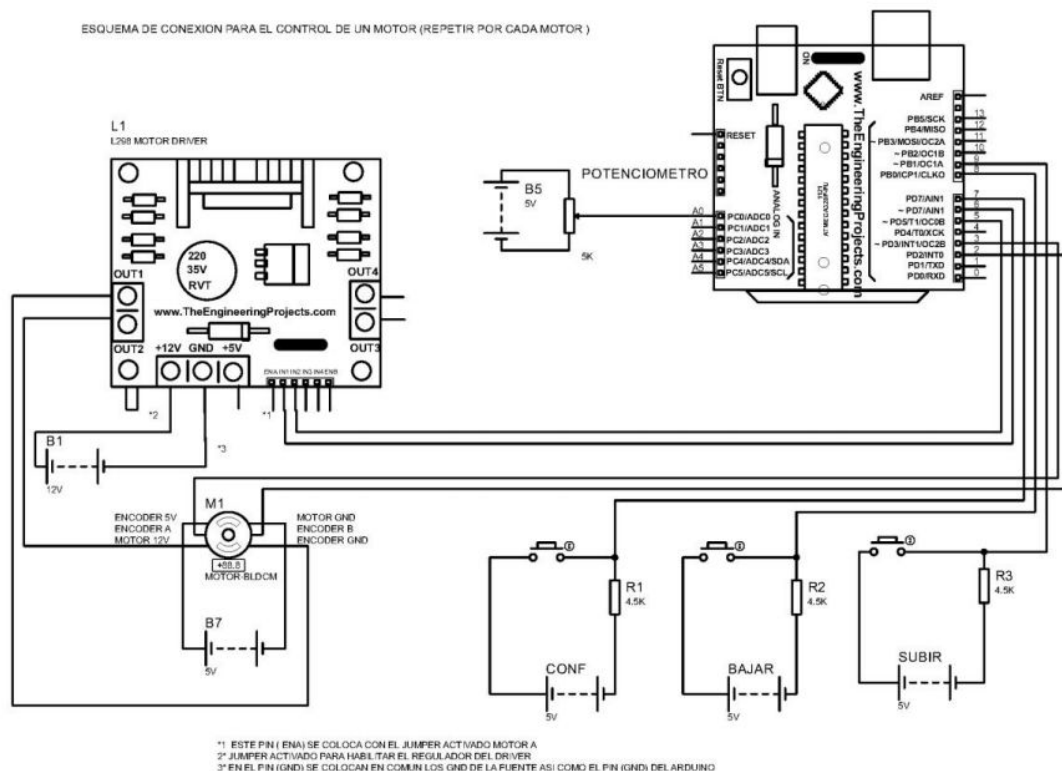


Figura 28.- Diagrama eléctrico para el eje del motor.

6.2 Programación

La programación se realiza mediante el lenguaje de Arduino, donde lo primero que se busca es poder leer la cantidad de pulsos que da una vuelta de motor, posteriormente mediante una entrada analógica y un encoder se programa que 0 grados es 0 volts y 360 grados son 5 volts de corriente directa. Posteriormente se condiciona las acciones de los botones, donde la instrucción importante es “attachInterrupt” esto debido a que es la que va a realizar la interrupción cuando se active el botón del controlador PID.

Para el desarrollo del controlador PID es necesario realizar el error el cual es una resta entre el valor deseado y el valor medido. Para realizar la derivada se realiza una división del valor del temporizador del Arduino entre un millón.

Para la parte de la derivada es el valor actual medido menos un valor anterior todo esto entre “dt”.

Para la parte integrativa se suma el error anterior mas el error actual y se multiplica por "dt". El código se ve en la Tabla 4

```
const int C1 = 3; // Senal A del encoder
const int C2 = 2; // Senal B del encoder
```

```
volatile int n = 0;
volatile byte ant = 0;
volatile byte act = 0;
```

```
const int Pin_config = 7;
const int Pin_m3_down = 8;
const int Pin_m3_up = 9;
int btn_config = 0;
int btn_m3Down = 0;
int btn_m3Up = 0;
const int Pin_m3A1 = 5;
const int Pin_m3A2 = 6;
int m3A1 = 0;
int m3A2 = 0;
```

```
unsigned long lasTime = 0;
unsigned long sampleTime = 0;
```

```
const float r = 1598.0;
const float recorrido = 0.14/6.0;
float angulo = 0.0;
float angulo_previo = 0.0;
bool status = false;
```

```
double setpoint = 0;
double respuesta = 0;
```

```
double Y1 = 0;
double Y2 = 0;
```

```
uint32_t timer = 0;
double dt = 0;
double U = 0;
```

```
double Gt = (5)*1.0;
double Gd = (1)*0.015;
```

```
void setup() {
  Serial.begin(9600);
```

```

pinMode(C1, INPUT);
pinMode(C2, INPUT);

attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(C1), encoder, CHANGE);
attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(C2), encoder, CHANGE);

pinMode(Pin_config, INPUT);
pinMode(Pin_m3_down, INPUT);
pinMode(Pin_m3_up, INPUT);

pinMode(Pin_m3A1, OUTPUT);
pinMode(Pin_m3A2, OUTPUT);

timer = micros();
}

void loop() {
  btn_config = digitalRead(Pin_config);
  btn_m3Down = digitalRead(Pin_m3_down);
  btn_m3Up = digitalRead(Pin_m3_up);
  delay(200);
  if (btn_config == HIGH) {
    status = true;
    delay(1000);
  }

  if (btn_m3Down == HIGH && btn_m3Up == LOW)
  {
    analogWrite(Pin_m3A1, 0);
    analogWrite(Pin_m3A2, 250);
  } else if (btn_m3Down == LOW && btn_m3Up == HIGH)
  {
    analogWrite(Pin_m3A1, 250);
    analogWrite(Pin_m3A2, 0);
  } else
  {
    analogWrite(Pin_m3A1, 0);
    analogWrite(Pin_m3A2, 0);
  }

  setpoint = (analogRead(A0)*0.023)/1023 ;
  angulo = n * recorrido / r;
  double setpointimp=setpoint*15652.17;
  Serial.print("Modo manual: ");
  Serial.print(angulo, 4);
  Serial.println(" , setpoint = " + String(setpointimp));
}

```

```

U = 0;
timer = micros();
while (status) {
    setpoint = analogRead(A0)*0.023/1023;
    double setpointimp=setpoint*15652.17;
    angulo_previo = angulo;
    angulo = n * recorrido / r;
    double anguloimp = angulo*15652.17;
    double atd = 100.0; //100

    Y1 = angulo - setpoint;
    double g = 9.8;

    dt = (double)(micros() - timer) / 1000000;
    timer = micros();
    Y2 = (angulo - angulo_previo) / dt;

    U = - (Gt * Y1) - (Gd * Y2) - (g*angulo);

    if (U < -atd) {
        U = -atd;
    } else if (U > atd) {
        U = atd;
    }

    if (U <= -0.001) {
        analogWrite(Pin_m3A1, map(abs(U), 0.001, 100, 100, 200));
        analogWrite(Pin_m3A2, 0);
    } else if (U >= 0.001) {
        analogWrite(Pin_m3A1, 0);
        analogWrite(Pin_m3A2, map(U, 0.001, 100, 100, 200));
    } else {
        analogWrite(Pin_m3A1, 0);
        analogWrite(Pin_m3A2, 0);
    }
    double Uimp = U*15652.17;
    double Y1imp = Y1*15652.17;
    Serial.println("Ref = " + String(setpointimp) + " , error = " + String(Y1imp) + " ,
posicion = " + String(anguloimp) + " , U = " + String(Uimp) + " , velocidad = " +
String(Y2));
}
}

void encoder(void) {
    ant = act;

```

```

if (digitalRead(C1)) bitSet(act, 1);
else bitClear(act, 1);
if (digitalRead(C2)) bitSet(act, 0);
else bitClear(act, 0);

if (ant == 2 && act == 0) n++;
if (ant == 0 && act == 1) n++;
if (ant == 3 && act == 2) n++;
if (ant == 1 && act == 3) n++;

if (ant == 1 && act == 0) n--;
if (ant == 3 && act == 1) n--;
if (ant == 0 && act == 2) n--;
if (ant == 2 && act == 3) n--;
}

```

Tabla 4.- Código de Arduino

6.3 Resultados

En esta sección solo se verán fotos que evidencian los resultados de la experimentación. Los cuales fueron satisfactorios. Puesto que los tiempos de respuesta fueron más rápido de lo esperado. Esto se puede ver de la Figura 29 - Figura 34

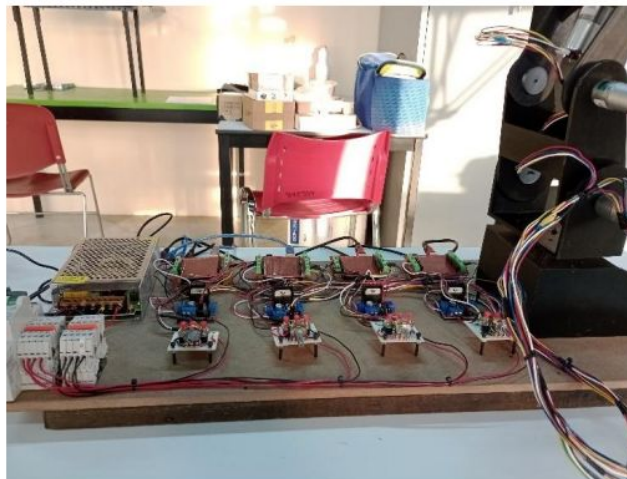


Figura 29.- Robot de 4GDL parte 1

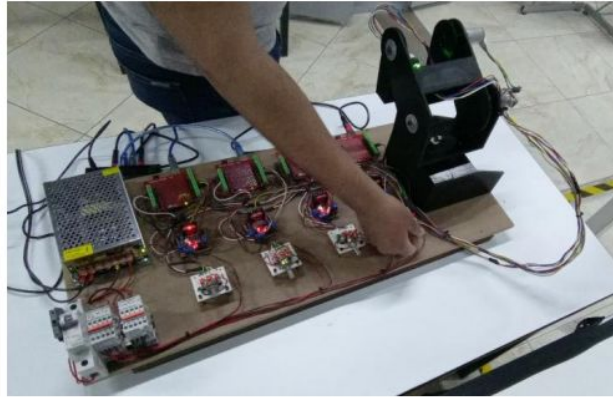


Figura 30.- Robot de 4GDL parte 2



Figura 31.- Robot de 4GDL prueba 1



Figura 32.- Robot de 4GDL prueba 2

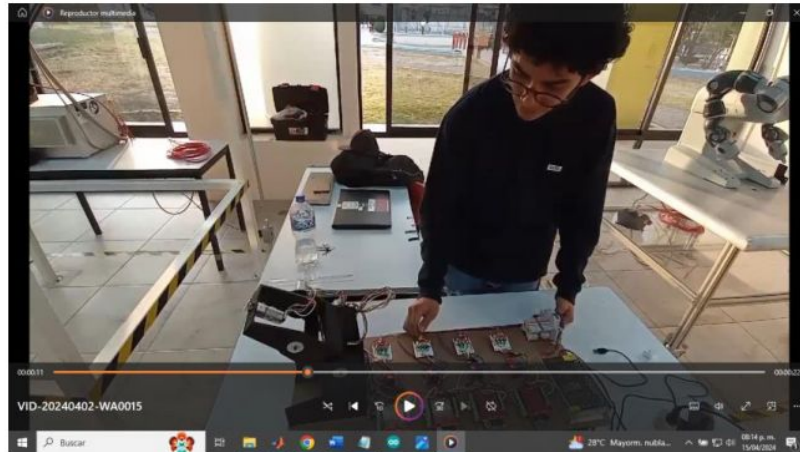


Figura 33.- Robot de 4GDL prueba 3

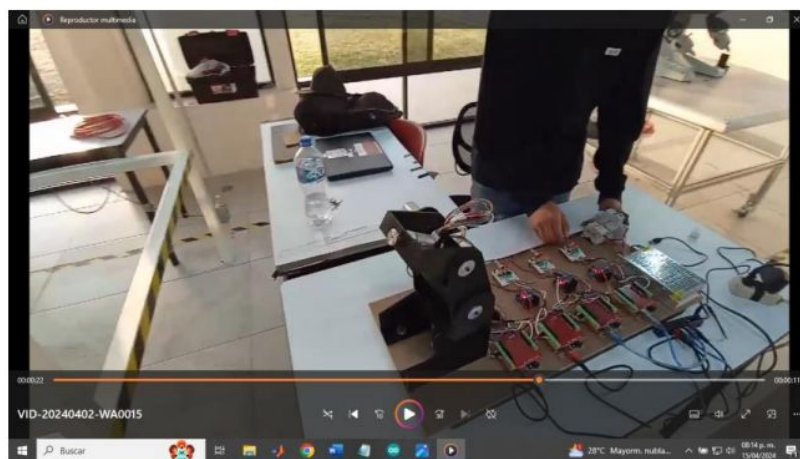


Figura 34.- Robot de 4GDL prueba 4

Conclusiones

De una manera general se cumplieron con todos los objetivos, en algunos casos no se logró el 100 por ciento de ellos debido a factores desconocidos dentro del desarrollo de este proyecto, sin embargo, se logró realizar la fabricación del robot.

El desarrollo de la cinemática se cumplió mas de lo que se tenía pensado, esto fue gracias a las librerías de Peter Corke, ya que de esta manera se pudo observar que dicha cinemática era muy similar a lo que se estaba buscando. Cabe mencionar que dentro de esta sección se realizaron al menos 3 tablas de Denavit Hartenberg, donde lógicamente dichas tablas no eran correctas, esto se comprobó con las librerías de Peter Corke. Una ventaja de esto es que al momento del desarrollo de dinámica se realiza con menos incertidumbres.

Conforme al diseño, se cumplió satisfactoriamente, brindando el apoyo de ver los puntos donde el robot podría tener colisiones, o donde probablemente la pieza se doblará o se fracturara, la solución para ello fue agregar nervios o soportes a los costados o aumentando un poco el grosor sin afectar el largo del eje del motor. Por otro lado, el uso se logró un diseño el cual no tuviera mucho peso y fuera funcional muy a pesar de que la impresión se realizó en 3D.

Para el desarrollo de la dinámica es muy necesario que la cinemática sea correcta, puesto que se requiere el uso de las matrices de transformación dependiendo el grado de libertad que se vaya desarrollando. Para no estar calculando todo el algoritmo de la dinámica, se desarrolló un código en Matlab que brinda la facilidad de encontrar la matriz de masas, matriz de inercias, la matriz de gravedad y la matriz de Coriolis. Esto permitió poder evaluar la cantidad de peso que podría soportar el eje dos.

En el desarrollo de la dinámica hubo un dato interesante donde a pesar de no aplicar ninguna fuerza electromotriz en los ejes, el eje 2 y 3 tenían un desplazamiento angular de 2° y 6° respectivamente. Mediante el algoritmo que se realizó se trato de buscar que generaba este desplazamiento, sin embargo, no se encontró de manera correcta, a donde se concluyó que probablemente eran detalles de los decimales que no se consideraban.

Otro punto importante en la dinámica es el considerar los coeficientes de fricción y viscosidad, ya que si no se realiza esto se generan singularidades en el sistema y no se puede ver el comportamiento de los ejes conforme transcurre el tiempo.

Al momento del desarrollo del controlador PID al inicio se planteaba realizar un controlador donde las tres ganancias fueran afectadas directamente por el error, sin embargo, en varias simulaciones las respuestas que se obtenían siempre generaban oscilaciones y después de un tiempo estas oscilaciones se estabilizaban. Cabe mencionar que estas oscilaciones en un robot real no son deseadas puesto que pierden precisión. Lo que se busco para mejorar el desarrollo del controlador fue tomar lectura de la velocidad del motor y minimizar la velocidad cuando el eje del motor llegara al punto de deseado.

Otro punto interesante fue la ganancia integrativa debido a que si esta ganancia era cero el robot se quedaba con un error en estado estacionario. Por otro lado, si la ganancia integrativa era muy grande generaba pequeñas oscilaciones.

De manera general el diseño e implementación del controlador PID dio resultados deseados y esto se puede ver en las figuras de las simulaciones.

La fabricación del robot en su momento tuvo varios inconvenientes, uno de ellos fue que no se le dejo un soporte en uno de los costados, la solución para ello fue la de colocar una pieza la cual diera el soporte y al mismo tiempo le brindará la movilidad.

Cabe mencionar que, durante la etapa de la experimentación, se averiguo que después de una hora aproximadamente el motor del eje 2 se calentaba mucho provocando que ya no respondiera de manera adecuada.

De una manera muy general en esta etapa se concluye que los resultados fueron satisfactorios esto debido a que la estructura del robot soporto momentos (torques) muy fuertes, de igual manera el robot tiene la movilidad adecuada, su estructura soporta el peso y el movimiento del robot y lo más importante el robot llega a la posición deseada.

Trabajos a Futuro

Los trabajos a futuro que se pueden realizar en este trabajo son varios los cuales van desde la parte del diseño hasta el desarrollo e implementación de diferentes controladores.

Una mejora en el robot puede ser la de en el eslabón del eje dos, la cual necesita mas soporte, debido que su soporte solo está en un área muy pequeña, una solución a ello es la de mejorar el área de dicho eslabón mediante unas placas o cambiar la base por una base circular la cual tenga un soporte mediante un balero del mismo ancho del eslabón 2 y altura de al menos un centímetro.

Cambiar el motor del eje 2 por uno que tenga la capacidad de cargar un mayor peso, esto con el objetivo de que el motor no se sobre caliente. Utilizar mejores tarjetas controladoras de motores.

Otro trabajo a futuro es el de colocarle una pinza en el efector final puesto que no se puede visualizar dicho movimiento.

Aplicar y diseñar otras estrategias de control como: control por modos deslizantes, control PID en combinación con un control difuso o solo control difuso.

Un trabajo a futuro muy interesante seria el de ver un método analítico o iterativo para poder encontrar las ganancias del controlador. Un método iterativo puede ser algoritmos genéticos, enjambre de partículas, métodos que tengan analogías con comportamientos de la naturaleza.

Comprobar que el PID que se diseño sea asintóticamente estable, esto mediante la aplicación del teorema de Lyapunov.

Otro trabajo a futuro interesante es el de agregarle otros 2 ejes más y realizar todo el desarrollo descrito en este proyecto.

Referencias Bibliográficas

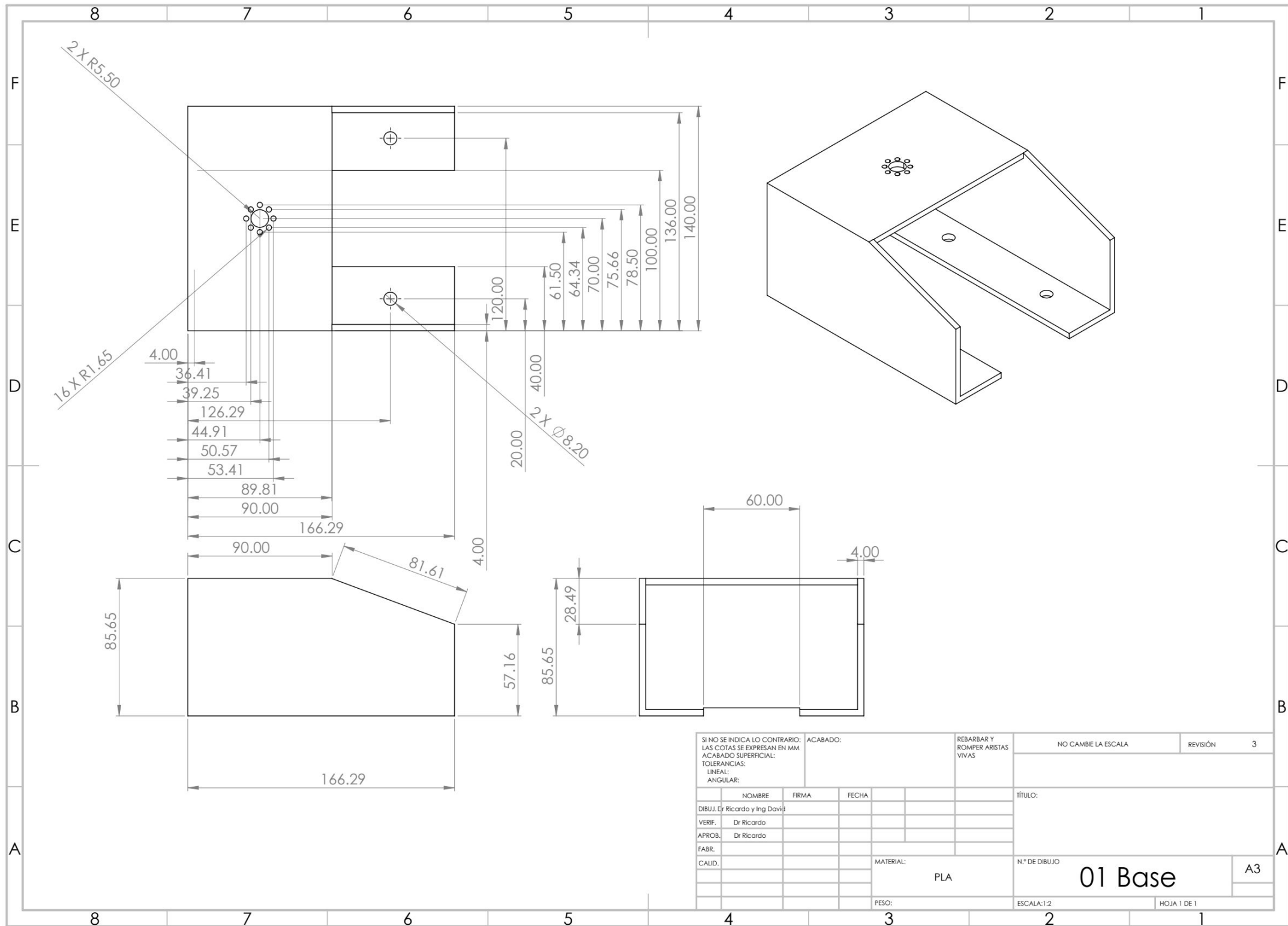
- [1] L. A. Jordán-Martínez, M. G. Figueroa-García, and J. H. Pérez-Cruz, "Modeling and Optimal Controller Based on Disturbance Detector for the Stabilization of a Three-link Inverted Pendulum Mobile Robot," *Electronics (Basel)*, vol. 9, no. 11, p. 1821, Nov. 2020, doi: 10.3390/electronics9111821.
- [2] Z. Jia, R. Li, J. Liu, and Y. Wang, "Dynamic Modeling and Performance Analysis of a Hip Rehabilitation Robot," *Biomimetics*, vol. 8, no. 8, p. 585, Dec. 2023, doi: 10.3390/biomimetics8080585.
- [3] D. Písla *et al.*, "Development of a 6-DOF Parallel Robot for Potential Single-Incision Laparoscopic Surgery Application," *Machines*, vol. 11, no. 10, p. 978, Oct. 2023, doi: 10.3390/machines11100978.
- [4] C. Urrea and D. Saa, "Design, Simulation, Implementation, and Comparison of Advanced Control Strategies Applied to a 6-DoF Planar Robot," *Symmetry (Basel)*, vol. 15, no. 5, p. 1070, May 2023, doi: 10.3390/sym15051070.
- [5] C. Urrea and D. Saa, "Design and Implementation of a Graphic Simulator for Calculating the Inverse Kinematics of a Redundant Planar Manipulator Robot," *Applied Sciences*, vol. 10, no. 19, p. 6770, Sep. 2020, doi: 10.3390/app10196770.
- [6] M. K. Joyo *et al.*, "Optimized Proportional-Integral-Derivative Controller for Upper Limb Rehabilitation Robot," *Electronics (Basel)*, vol. 8, no. 8, p. 826, Jul. 2019, doi: 10.3390/electronics8080826.
- [7] T. Lee, I. Kim, and Y. S. Baek, "Design of a 2DoF Ankle Exoskeleton with a Polycentric Structure and a Bi-Directional Tendon-Driven Actuator Controlled Using a PID Neural Network," *Actuators*, vol. 10, no. 1, p. 9, Jan. 2021, doi: 10.3390/act10010009.
- [8] C. Zhao, Z. Liu, L. Zhu, and Y. Wang, "Design and Research of Series Actuator Structure and Control System Based on Lower Limb Exoskeleton Rehabilitation Robot," *Actuators*, vol. 13, no. 1, p. 20, Jan. 2024, doi: 10.3390/act13010020.

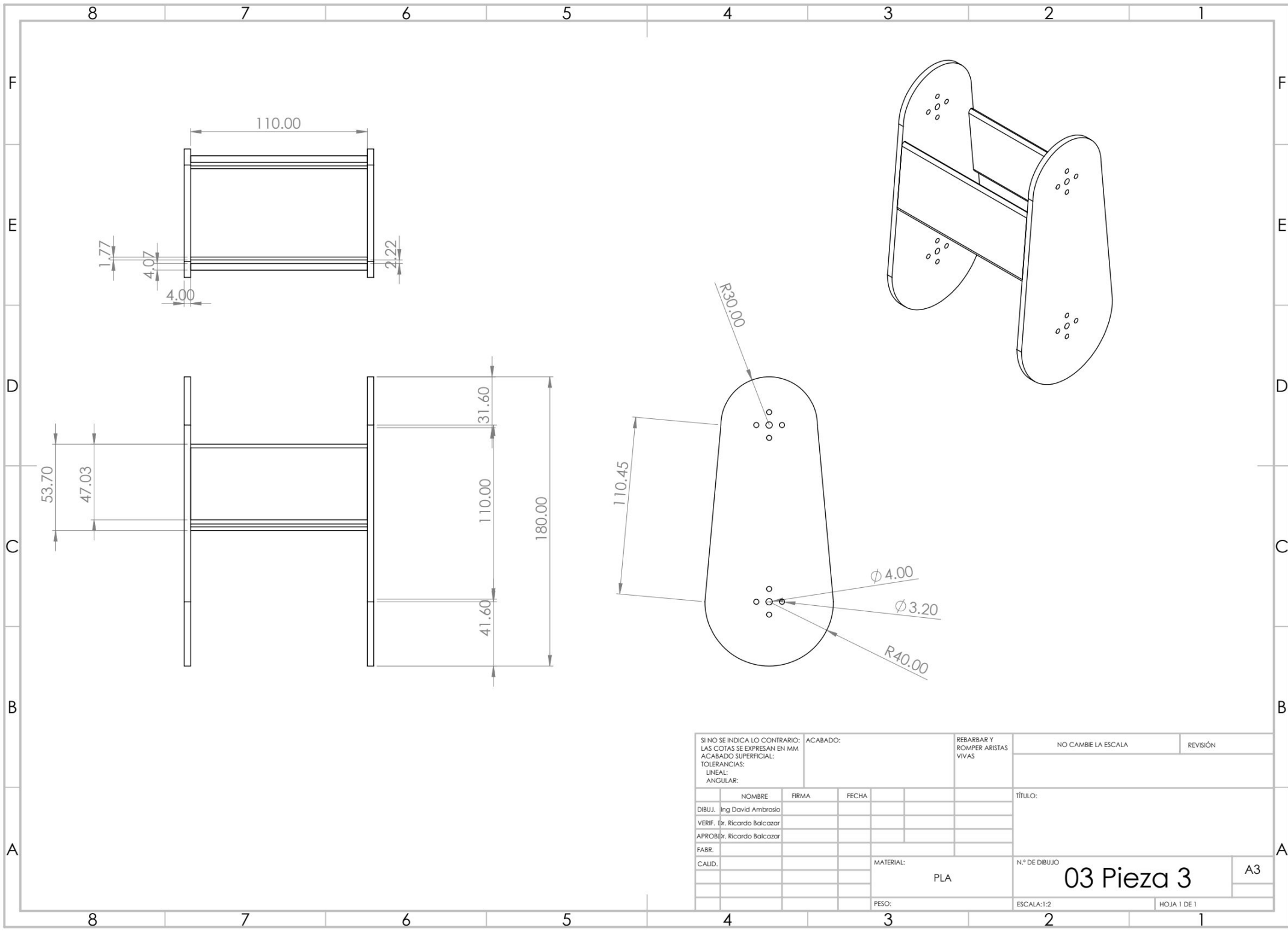
- [9] J. Li, J. Luo, S. Guo, and B. Feng, "Research on Yaw Stability Control Strategy Based on Direct Slip Rate Allocation," *Electronics (Basel)*, vol. 13, no. 1, p. 193, Jan. 2024, doi: 10.3390/electronics13010193.
- [10] Z. Yang *et al.*, "Research on the Anti-Swing Control Methods of Dual-Arm Wheeled Inspection Robots for High-Voltage Transmission Lines," *Actuators*, vol. 12, no. 12, p. 472, Dec. 2023, doi: 10.3390/act12120472.
- [11] S.-Y. Yang, H.-Y. Cheng, and C.-C. Yu, "Real-Time Object Detection and Tracking for Unmanned Aerial Vehicles Based on Convolutional Neural Networks," *Electronics (Basel)*, vol. 12, no. 24, p. 4928, Dec. 2023, doi: 10.3390/electronics12244928.
- [12] A. Shaju, S. Southward, and M. Ahmadian, "PID-Based Longitudinal Control of Platooning Trucks," *Machines*, vol. 11, no. 12, p. 1069, Dec. 2023, doi: 10.3390/machines11121069.
- [13] H. Khan, S. Khatoon, P. Gaur, M. Abbas, C. A. Saleel, and S. A. Khan, "Speed Control of Wheeled Mobile Robot by Nature-Inspired Social Spider Algorithm-Based PID Controller," *Processes*, vol. 11, no. 4, p. 1202, Apr. 2023, doi: 10.3390/pr11041202.
- [14] M. Folgheraiter, S. Yessirkepov, and T. Umurzakov, "NU-Biped-4.5: A Lightweight and Low-Prototyping-Cost Full-Size Bipedal Robot," *Robotics*, vol. 13, no. 1, p. 9, Dec. 2023, doi: 10.3390/robotics13010009.
- [15] A. Ghorbanpour, "Cooperative Robot Manipulators Dynamical Modeling and Control: An Overview," *Dynamics*, vol. 3, no. 4, pp. 820–854, Dec. 2023, doi: 10.3390/dynamics3040045.
- [16] S. K. Jagatheesaperumal, V. P. Rajamohan, A. K. J. Saudagar, A. AlTameem, M. Sajjad, and K. Muhammad, "MoMo: Mouse-Based Motion Planning for Optimized Grasping to Declutter Objects Using a Mobile Robotic Manipulator," *Mathematics*, vol. 11, no. 20, p. 4371, Oct. 2023, doi: 10.3390/math11204371.
- [17] J. Huerta-Chua *et al.*, "Exploring a Novel Multiple-Query Resistive Grid-Based Planning Method Applied to High-DOF Robotic Manipulators," *Sensors*, vol. 21, no. 9, p. 3274, May 2021, doi: 10.3390/s21093274.
- [18] F. Chen *et al.*, "Sensor Fusion-Based Anthropomorphic Control of a Robotic Arm," *Bioengineering*, vol. 10, no. 11, p. 1243, Oct. 2023, doi: 10.3390/bioengineering10111243.

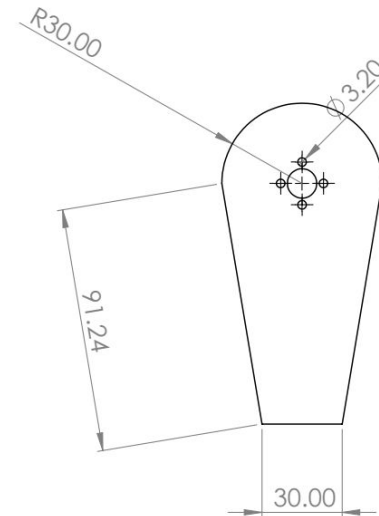
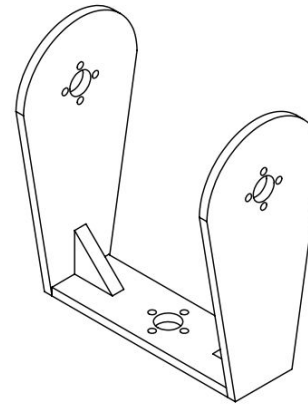
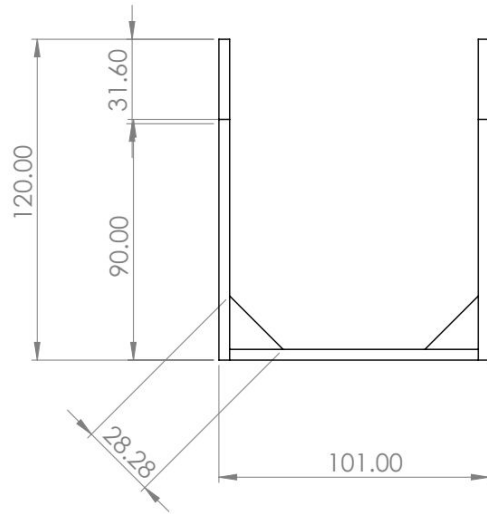
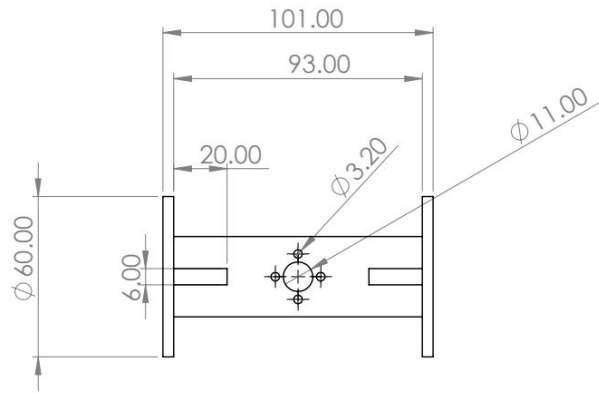
- [19] T. Kusaka and T. Tanaka, "Partial Lagrangian for Efficient Extension and Reconstruction of Multi-DoF Systems and Efficient Analysis Using Automatic Differentiation," *Robotics*, vol. 11, no. 6, p. 149, Dec. 2022, doi: 10.3390/robotics11060149.
- [20] M. Sarajchi and K. Sirlantzis, "Design and Control of a Single-Leg Exoskeleton with Gravity Compensation for Children with Unilateral Cerebral Palsy," *Sensors*, vol. 23, no. 13, p. 6103, Jul. 2023, doi: 10.3390/s23136103.
- [21] T. Paixão, A. B. Alvarez, R. Florez, and F. Palomino-Quispe, "Fuzzy Controller Implemented for Movement of a Tendon-Driven 3D Robotic Lumbar Spine Mechanism," *Sensors*, vol. 23, no. 24, p. 9633, Dec. 2023, doi: 10.3390/s23249633.
- [22] Wikipedia, "SolidWorks," Wikipedia. Accessed: Feb. 28, 2024. [Online]. Available: <https://es.wikipedia.org/wiki/SolidWorks>
- [23] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, 2nd ed. 202AD.
- [24] R. Kelly Martínez and V. Santibañez Davila, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson, 2003.
- [25] Wikipedia, "Robot industrial," Wikipedia. Accessed: Feb. 28, 2024. [Online]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Robot_industrial
- [26] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems*, vol. 124. Cham: Springer International Publishing, 2014. doi: 10.1007/978-3-319-01851-5.
- [27] H. Moore, *MATLAB para ingenieros*, 1st ed. México: Pearson Educación, 2007.
- [28] MathWorks, "Descripción de Simulink," Matlab. Accessed: Feb. 28, 2024. [Online]. Available: https://la.mathworks.com/help/simulink/gs/product-description_es.html
- [29] P. Corke, "ROBOTICS TOOLBOX," PeterCorke. Accessed: Mar. 06, 2024. [Online]. Available: <https://petercorke.com/toolboxes/robotics-toolbox/>
- [30] F. Reyes-Cortés, *MATLAB APLICADO A ROBÓTICA Y MECATRÓNICA*. México: Alfaomega, 2012.
- [31] Wikipedia, "controlador PID," Wikipedia. Accessed: Mar. 06, 2024. [Online]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Controlador_PID

- [32] Wikipedia, "Realimentación," Wikipedia. Accessed: Mar. 06, 2024. [Online]. Available: <https://es.wikipedia.org/wiki/Realimentaci%C3%B3n>
- [33] O. Katsuhiko, *Ingeniería de control moderna*, 5th ed. Pearson Educación, 2010.
- [34] West-Instruments-de-México, *MANUAL DE APLICACIÓN DE ENCODERS*, 1st ed. México: West Instruments de México. Accessed: Mar. 06, 2024. [Online]. Available: <https://www.lagos.udg.mx/sites/default/files/adjuntos/encoders.pdf>
- [35] Naylamp, "TUTORIAL DE USO DEL MÓDULO L298N," Naylamp. Accessed: Mar. 06, 2024. [Online]. Available: https://naylampmechatronics.com/blog/11_tutorial-de-uso-del-modulo-l298n.html
- [36] Arduino, "What is Arduino?," Arduino. Accessed: Mar. 06, 2024. [Online]. Available: <https://www.arduino.cc/en/Guide/Introduction>

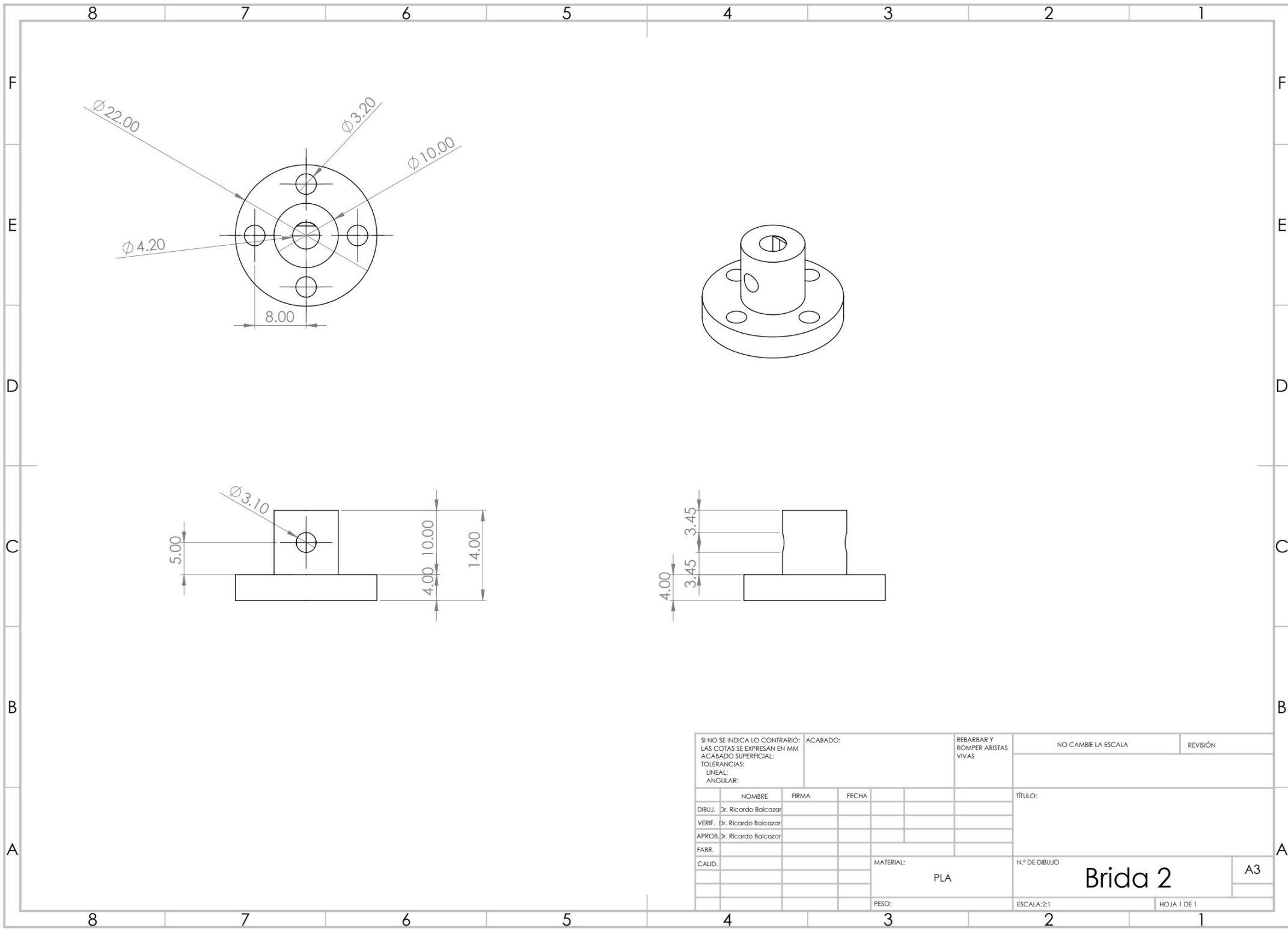
Anexos







SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:				ACABADO:		REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		NO CAMBIE LA ESCALA		REVISIÓN	
NOMBRE		FIRMA		FECHA						TÍTULO:	
DIBUJ. Ing David Ambrosio											
VERIF. Dr. Ricardo Balcazar											
APROB. Dr. Ricardo Balcazar											
FABR.											
CALID.											
						MATERIAL: PLA		N.º DE DIBUJO 04 Pieza 4		A3	
						PESO:		ESCALA:1:2		HOJA 1 DE 1	



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:				ACABADO:		REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	NO CAMBIE LA ESCALA		REVISIÓN		
	NOMBRE		FIRMA		FECHA			TÍTULO:			
DIBUJ.	Dr. Ricardo Balcazar										
VERIF.	Dr. Ricardo Balcazar										
APROB.	Dr. Ricardo Balcazar										
FABR.											
CALID.					MATERIAL:		N.º DE DIBUJO		Brida 2		
					PLA						

Brida 2

A3

PLA

JGA25-371 DC Gearmotor with Encoder (126 RPM at 12 V)



This JGA25-371 DC gearmotor features an integrated encoder which provides a resolution of 12 counts per revolution, ensuring an accurate control of motor's speed.



Overview

This JGA25-371 DC gearmotor features an integrated encoder which provides a resolution of 12 counts per revolution, ensuring an accurate control of motor's speed.

Specifications

- Operating voltage: between 6 V and 24 V
- Nominal voltage: 12 V
- Free-run speed at 12 V: 126 RPM
- Free-run current at 12 V: 46 mA
- Stall current at 12 V: 1 A
- Stall torque at 12 V: 4.2 kg·cm
- Gear ratio: 1:34
- Reductor size: 21 mm
- Weight: 99 g

For other variations of this motor see the [JGA25-371 gearmotor selector](#).

Model: JGA25-371		Data Sheet										
Voltage		No Load		Load				Stall		Reducer		Weight
Workable	Rated	Speed	Current	Speed	Current	Torque	Output	Torque	Current	Ratio	Size	Unit
Range	Volt.V	rpm	mA	rpm	mA	kg.cm	W	kg.cm	A	1:00	mm	g
6-24V	12	977	46	781	300	0.11	1.25	0.55	1	4.4	15	99
6-24V	12	463	46	370	300	0.23	1.25	1.1	1	9.28	17	99
6-24V	12	201	46	168	300	0.53	1.25	2.65	1	21.3	19	99
6-24V	12	126	46	100	300	0.85	1.25	4.2	1	34	21	99
6-24V	12	95	46	76	300	1.1	1.25	5.5	1	45	21	99
6-24V	12	55	46	44	300	1.95	1.25	9.7	1	78	23	99
6-24V	12	41	46	32	300	2.5	1.25	12.5	1	103	23	99
6-24V	12	25	46	20	300	4.2	1.25	21	1	171	25	99
6-24V	12	19	46	15	300	5.6	1.25	28	1	226	25	99
6-24V	12	11	46	8.8	300	9.45	1.25	47	1	378	27	99
6-24V	12	8.6	46	6.8	300	12	1.25	60	1	500	27	99



JGA25-371 Geared Motor with Encoder

SKU 114090047

Please use this motor as an alternative to [JGB37-371](#) and [Encoder Geared Motor JGA25-371](#)

Introduction:

This Motor with **encoder**, Mainly used in robot platform and car provides power, Good quality and long lifetime, high torque and low noise.

If you don't need an encoder, you can choose [JGA25-370](#) Geared Motor

What is a geared motor?

The geared motor uses a gear set to convert the original high speed and low torque of the motor to a low speed and high torque state. So what are the benefits of geared motors? Under the same voltage conditions, you can manually clamp the motor to stop it, but once it is a gear motor, it is more difficult to stop the motor with an external force because the "force" of the motor becomes larger. Therefore, when you use a geared motor, you will find it is slower than a motor that does not slow down, but it can provide a larger load. Geared motors are typically used where high torque is required, such as an elevator, which will carry more than a dozen people upstairs, which will require a lot of torque. Of course, there will be some energy loss during deceleration, but it will still bring a lot of convenience to our lives.

What is an encoder?

An encoder is a device that monitors the speed of a motor through an optoelectronic, Hall or magnetic encoder chip. Using an encoder, we can use some complicated algorithms. For example, we can use the PID algorithm to monitor the speed of the motor. And controls such as speed off can keep the speed of the motor at a certain value. When the external load becomes larger, the speed of the ordinary motor will slow down, but when we know that it is slow, we can adjust it by an algorithm. Controlling the output voltage keeps the motor speed at a certain value. Of course, we need to learn to control the related algorithms.

What can we do with this motor?

With this motor, we can design and manufacture a balance car. Keep the motor steady by using position loops and gyroscopes to keep the car balanced.

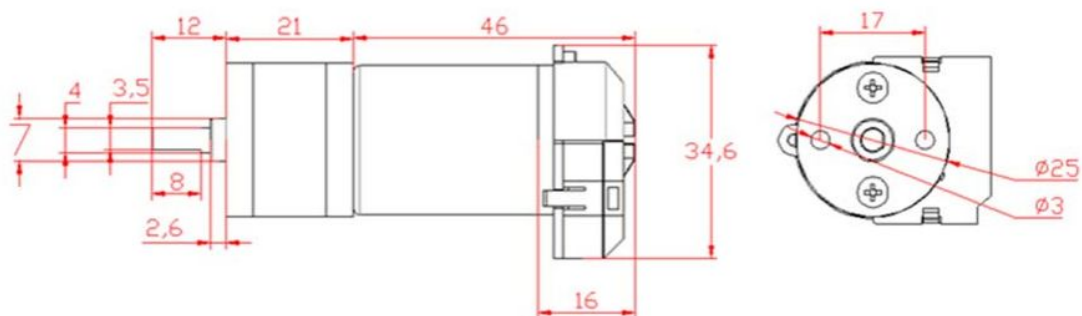
We can design off-road vehicles or mobile robots. The geared motor allows the robot to get more force so that it can pass through some light slopes.



Specification:

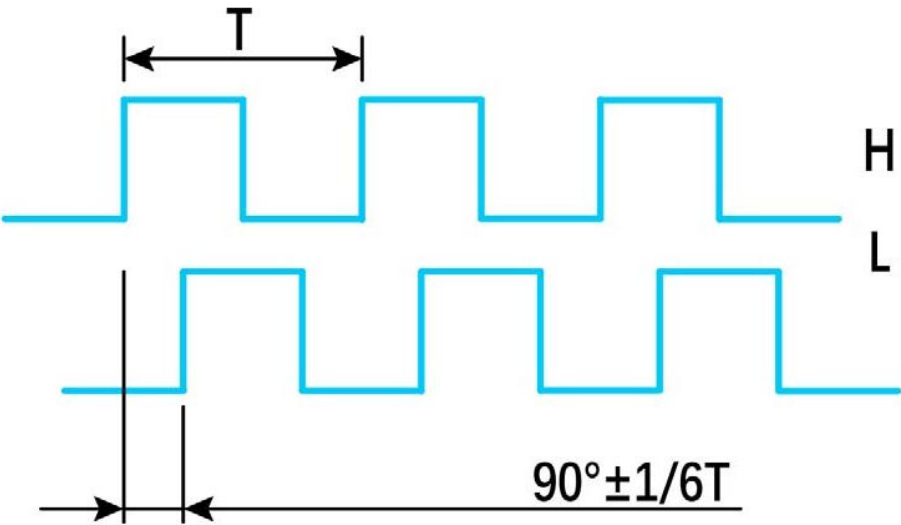
Voltage V	No-load		Maximum efficiency pointed				Blockage	
	speed r/min	electric current A	speed r/min	electric current A	Torque Kg.cm	Power W	Torque Kg.cm	electric current A
6	190	0.2	133	0.5	0.75	1.1	4.0	2.1
12	350	0.1	245	0.65	1.4	2.4	5.2	2.2

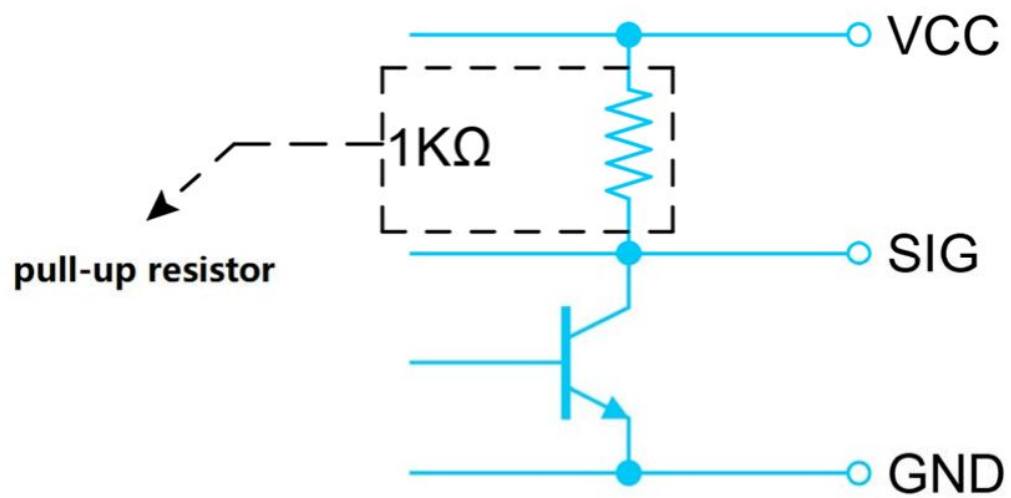
size:



Electrical characteristics:

Encoder electrical characteristics	specification	Code	Test Conditions	MIN	Benchmark	MAX	unit
	Input voltage	vcc	--	2.7	-	5.5	V
	Output saturation voltage	Vce sat	VCC=14V;IC=20 mA	-	300	700	mA
	Output leakage current	Icex	VCC=14V;VCC=14V	-	<0.1	10	A
	Input Current	Ice	VCC=20V output open	-	5	10	mA
	Output rise time	tr	VCC=14V;RH=820Ω ; CH=20pF	-	0.3	1.5	S
	Output fall time	tr	VCC=14V;RL=820Ω ; CL=20pF	-	0.3	1.5	S





Part List

1 x JGA25-371 motor

1 x 6pin Wire

ECCN/HTS

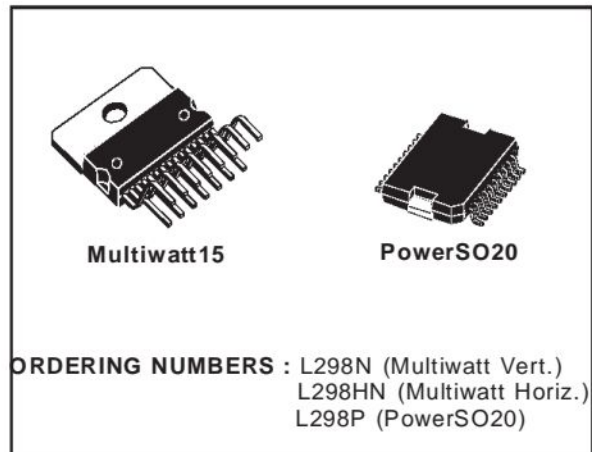
ECCN	ERA99
HSCODE	8501101000
UPC	

DUAL FULL-BRIDGE DRIVER

- OPERATING SUPPLY VOLTAGE UP TO 46 V
- TOTAL DC CURRENT UP TO 4 A
- LOW SATURATION VOLTAGE
- OVERTEMPERATURE PROTECTION
- LOGICAL "0" INPUT VOLTAGE UP TO 1.5 V (HIGH NOISE IMMUNITY)

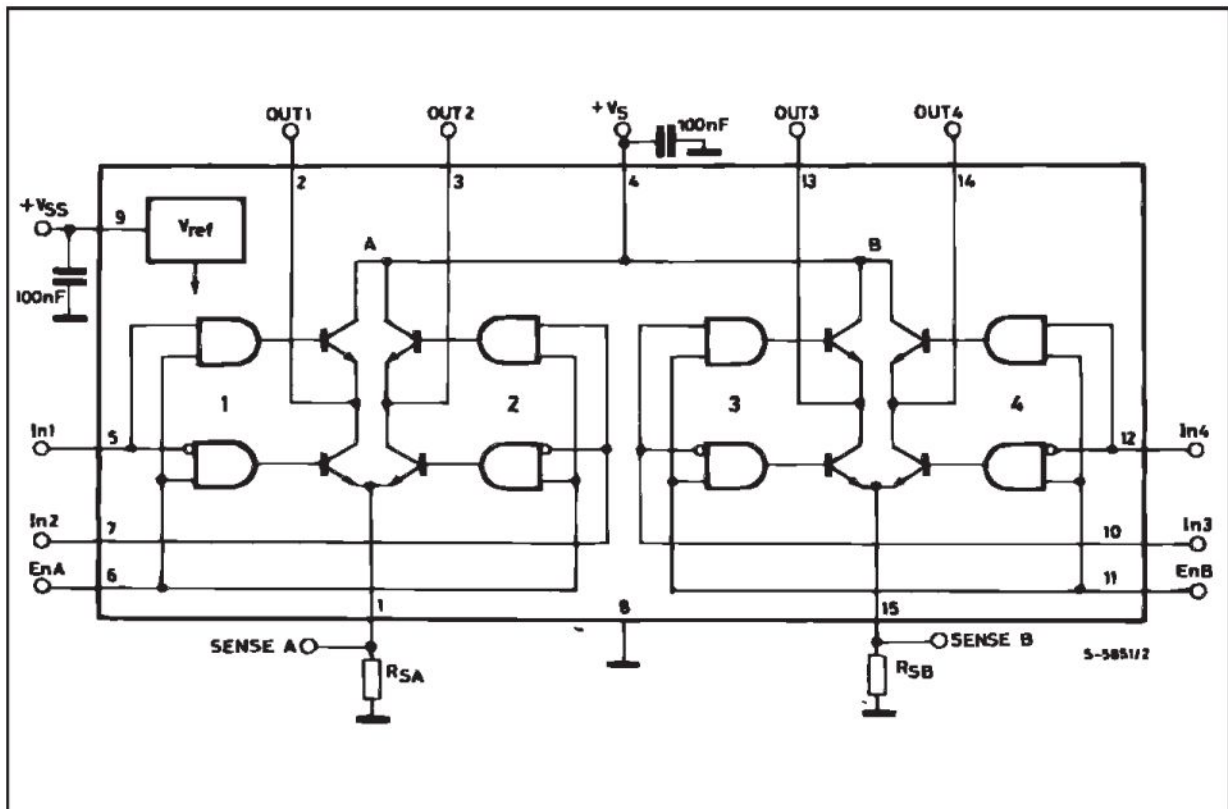
DESCRIPTION

The L298 is an integrated monolithic circuit in a 15-lead Multiwatt and PowerSO20 packages. It is a high voltage, high current dual full-bridge driver designed to accept standard TTL logic levels and drive inductive loads such as relays, solenoids, DC and stepping motors. Two enable inputs are provided to enable or disable the device independently of the input signals. The emitters of the lower transistors of each bridge are connected together and the corresponding external terminal can be used for the con-



nection of an external sensing resistor. An additional supply input is provided so that the logic works at a lower voltage.

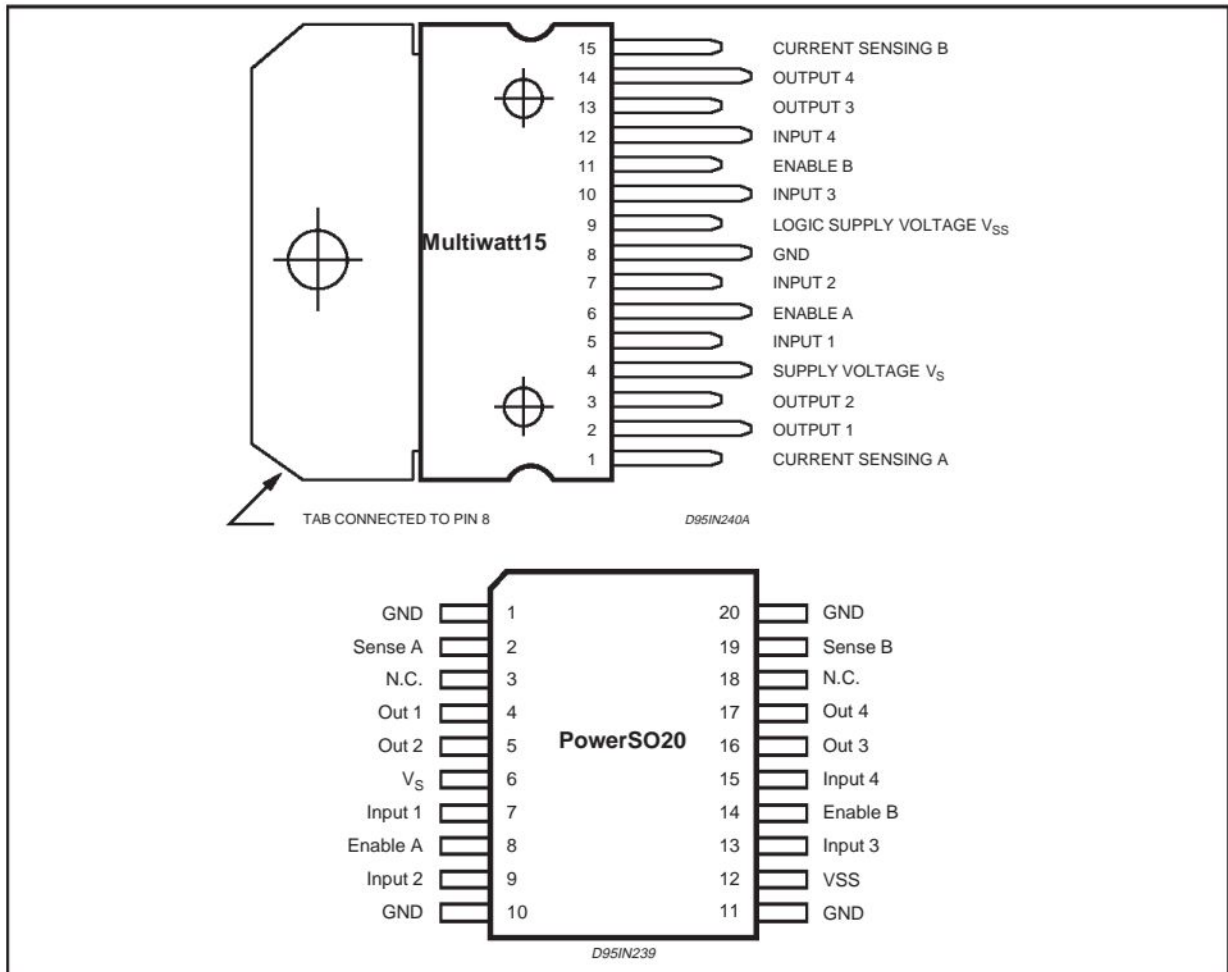
BLOCK DIAGRAM



ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

Symbol	Parameter	Value	Unit
V_S	Power Supply	50	V
V_{SS}	Logic Supply Voltage	7	V
V_I, V_{en}	Input and Enable Voltage	-0.3 to 7	V
I_O	Peak Output Current (each Channel)		
	– Non Repetitive ($t = 100\mu s$)	3	A
	– Repetitive (80% on –20% off; $t_{on} = 10ms$)	2.5	A
	– DC Operation	2	A
V_{sens}	Sensing Voltage	-1 to 2.3	V
P_{tot}	Total Power Dissipation ($T_{case} = 75^\circ C$)	25	W
T_{op}	Junction Operating Temperature	-25 to 130	$^\circ C$
T_{stg}, T_j	Storage and Junction Temperature	-40 to 150	$^\circ C$

PIN CONNECTIONS (top view)



THERMAL DATA

Symbol	Parameter		PowerSO20	Multiwatt15	Unit
$R_{th j-case}$	Thermal Resistance Junction-case	Max.	–	3	$^\circ C/W$
$R_{th j-amb}$	Thermal Resistance Junction-ambient	Max.	13 (*)	35	$^\circ C/W$

(*) Mounted on aluminum substrate

PIN FUNCTIONS (refer to the block diagram)

MW.15	PowerSO	Name	Function
1;15	2;19	Sense A; Sense B	Between this pin and ground is connected the sense resistor to control the current of the load.
2;3	4;5	Out 1; Out 2	Outputs of the Bridge A; the current that flows through the load connected between these two pins is monitored at pin 1.
4	6	V _S	Supply Voltage for the Power Output Stages. A non-inductive 100nF capacitor must be connected between this pin and ground.
5;7	7;9	Input 1; Input 2	TTL Compatible Inputs of the Bridge A.
6;11	8;14	Enable A; Enable B	TTL Compatible Enable Input: the L state disables the bridge A (enable A) and/or the bridge B (enable B).
8	1,10,11,20	GND	Ground.
9	12	V _{SS}	Supply Voltage for the Logic Blocks. A100nF capacitor must be connected between this pin and ground.
10; 12	13;15	Input 3; Input 4	TTL Compatible Inputs of the Bridge B.
13; 14	16;17	Out 3; Out 4	Outputs of the Bridge B. The current that flows through the load connected between these two pins is monitored at pin 15.
—	3;18	N.C.	Not Connected

ELECTRICAL CHARACTERISTICS (V_S = 42V; V_{SS} = 5V, T_j = 25°C; unless otherwise specified)

Symbol	Parameter	Test Conditions	Min.	Typ.	Max.	Unit
V _S	Supply Voltage (pin 4)	Operative Condition	V _{IH} +2.5		46	V
V _{SS}	Logic Supply Voltage (pin 9)		4.5	5	7	V
I _S	Quiescent Supply Current (pin 4)	V _{en} = H; I _L = 0		13	22	mA
		V _i = L		50	70	mA
		V _i = H				
I _{SS}	Quiescent Current from V _{SS} (pin 9)	V _{en} = L			4	mA
		V _i = X				
V _{iL}	Input Low Voltage (pins 5, 7, 10, 12)	V _{en} = H; I _L = 0		24	36	mA
		V _i = L		7	12	mA
		V _i = H				
V _{iH}	Input High Voltage (pins 5, 7, 10, 12)	V _{en} = L			6	mA
		V _i = X				
V _{iL}	Input Low Voltage (pins 5, 7, 10, 12)		−0.3		1.5	V
V _{iH}	Input High Voltage (pins 5, 7, 10, 12)		2.3		V _{SS}	V
I _{iL}	Low Voltage Input Current (pins 5, 7, 10, 12)	V _i = L			−10	μA
I _{iH}	High Voltage Input Current (pins 5, 7, 10, 12)	V _i = H ≤ V _{SS} −0.6V		30	100	μA
V _{en} = L	Enable Low Voltage (pins 6, 11)		−0.3		1.5	V
V _{en} = H	Enable High Voltage (pins 6, 11)		2.3		V _{SS}	V
I _{en} = L	Low Voltage Enable Current (pins 6, 11)	V _{en} = L			−10	μA
I _{en} = H	High Voltage Enable Current (pins 6, 11)	V _{en} = H ≤ V _{SS} −0.6V		30	100	μA
V _{CEsat(H)}	Source Saturation Voltage	I _L = 1A	0.95	1.35	1.7	V
		I _L = 2A		2	2.7	V
V _{CEsat(L)}	Sink Saturation Voltage	I _L = 1A (5)	0.85	1.2	1.6	V
		I _L = 2A (5)		1.7	2.3	V
V _{CEsat}	Total Drop	I _L = 1A (5)	1.80		3.2	V
		I _L = 2A (5)			4.9	V
V _{sens}	Sensing Voltage (pins 1, 15)		−1 (1)		2	V

ELECTRICAL CHARACTERISTICS (continued)

Symbol	Parameter	Test Conditions	Min.	Typ.	Max.	Unit
$T_1 (V_i)$	Source Current Turn-off Delay	$0.5 V_i$ to $0.9 I_L$ (2); (4)		1.5		μs
$T_2 (V_i)$	Source Current Fall Time	$0.9 I_L$ to $0.1 I_L$ (2); (4)		0.2		μs
$T_3 (V_i)$	Source Current Turn-on Delay	$0.5 V_i$ to $0.1 I_L$ (2); (4)		2		μs
$T_4 (V_i)$	Source Current Rise Time	$0.1 I_L$ to $0.9 I_L$ (2); (4)		0.7		μs
$T_5 (V_i)$	Sink Current Turn-off Delay	$0.5 V_i$ to $0.9 I_L$ (3); (4)		0.7		μs
$T_6 (V_i)$	Sink Current Fall Time	$0.9 I_L$ to $0.1 I_L$ (3); (4)		0.25		μs
$T_7 (V_i)$	Sink Current Turn-on Delay	$0.5 V_i$ to $0.9 I_L$ (3); (4)		1.6		μs
$T_8 (V_i)$	Sink Current Rise Time	$0.1 I_L$ to $0.9 I_L$ (3); (4)		0.2		μs
$f_c (V_i)$	Commutation Frequency	$I_L = 2A$		25	40	KHz
$T_1 (V_{en})$	Source Current Turn-off Delay	$0.5 V_{en}$ to $0.9 I_L$ (2); (4)		3		μs
$T_2 (V_{en})$	Source Current Fall Time	$0.9 I_L$ to $0.1 I_L$ (2); (4)		1		μs
$T_3 (V_{en})$	Source Current Turn-on Delay	$0.5 V_{en}$ to $0.1 I_L$ (2); (4)		0.3		μs
$T_4 (V_{en})$	Source Current Rise Time	$0.1 I_L$ to $0.9 I_L$ (2); (4)		0.4		μs
$T_5 (V_{en})$	Sink Current Turn-off Delay	$0.5 V_{en}$ to $0.9 I_L$ (3); (4)		2.2		μs
$T_6 (V_{en})$	Sink Current Fall Time	$0.9 I_L$ to $0.1 I_L$ (3); (4)		0.35		μs
$T_7 (V_{en})$	Sink Current Turn-on Delay	$0.5 V_{en}$ to $0.9 I_L$ (3); (4)		0.25		μs
$T_8 (V_{en})$	Sink Current Rise Time	$0.1 I_L$ to $0.9 I_L$ (3); (4)		0.1		μs

1) Sensing voltage can be $-1 V$ for $t \leq 50 \mu s$; in steady state $V_{sens} \min \geq -0.5 V$.

2) See fig. 2.

3) See fig. 4.

4) The load must be a pure resistor.

Figure 1 : Typical Saturation Voltage vs. Output Current.

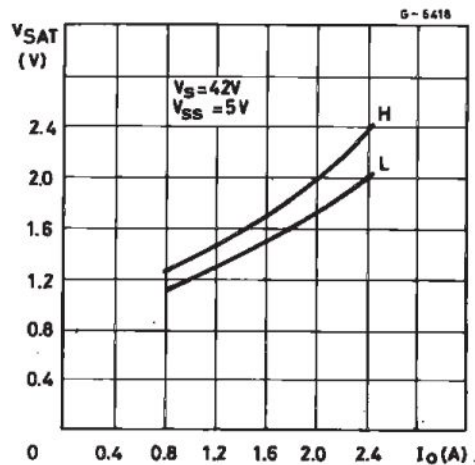
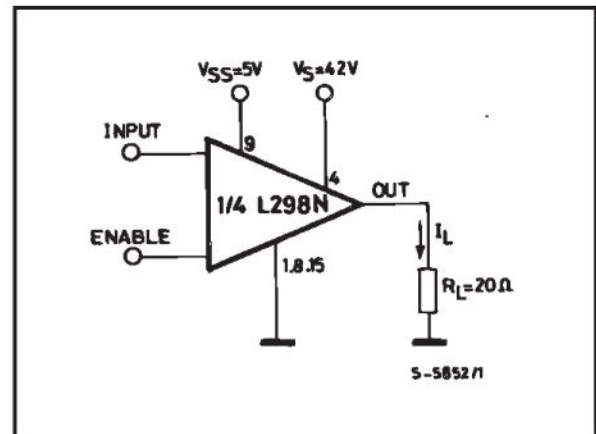
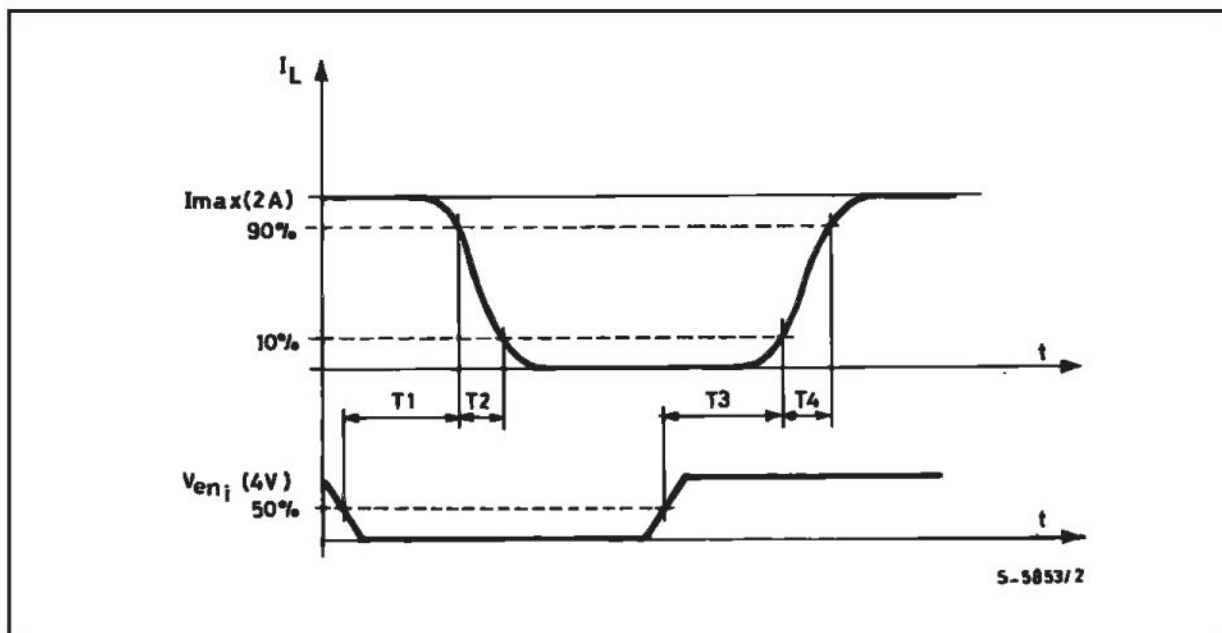
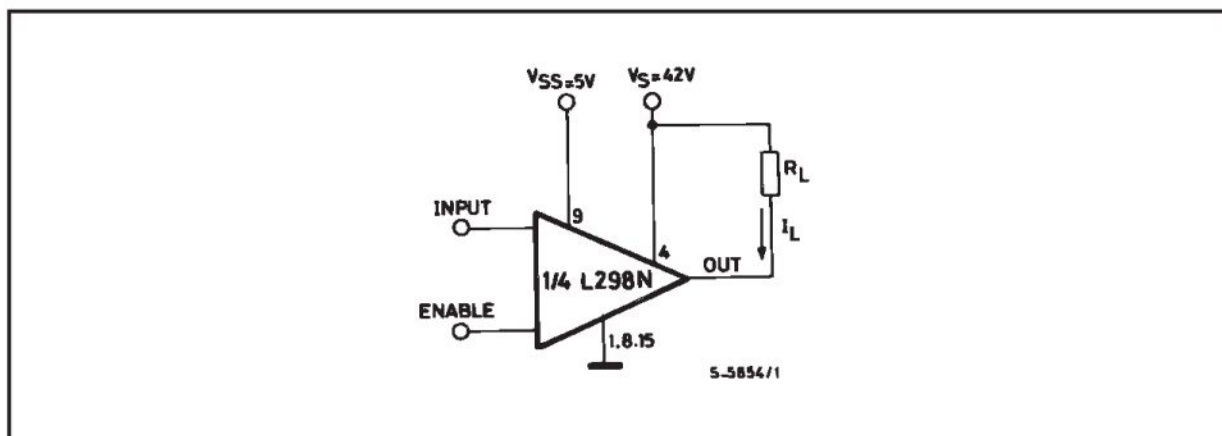


Figure 2 : Switching Times Test Circuits.



Note : For INPUT Switching, set EN = H
For ENABLE Switching, set IN = H

Figure 3 : Source Current Delay Times vs. Input or Enable Switching.**Figure 4 :** Switching Times Test Circuits.

Note : For INPUT Switching, set EN = H
 For ENABLE Switching, set IN = L

Figure 5 : Sink Current Delay Times vs. Input 0 V Enable Switching.

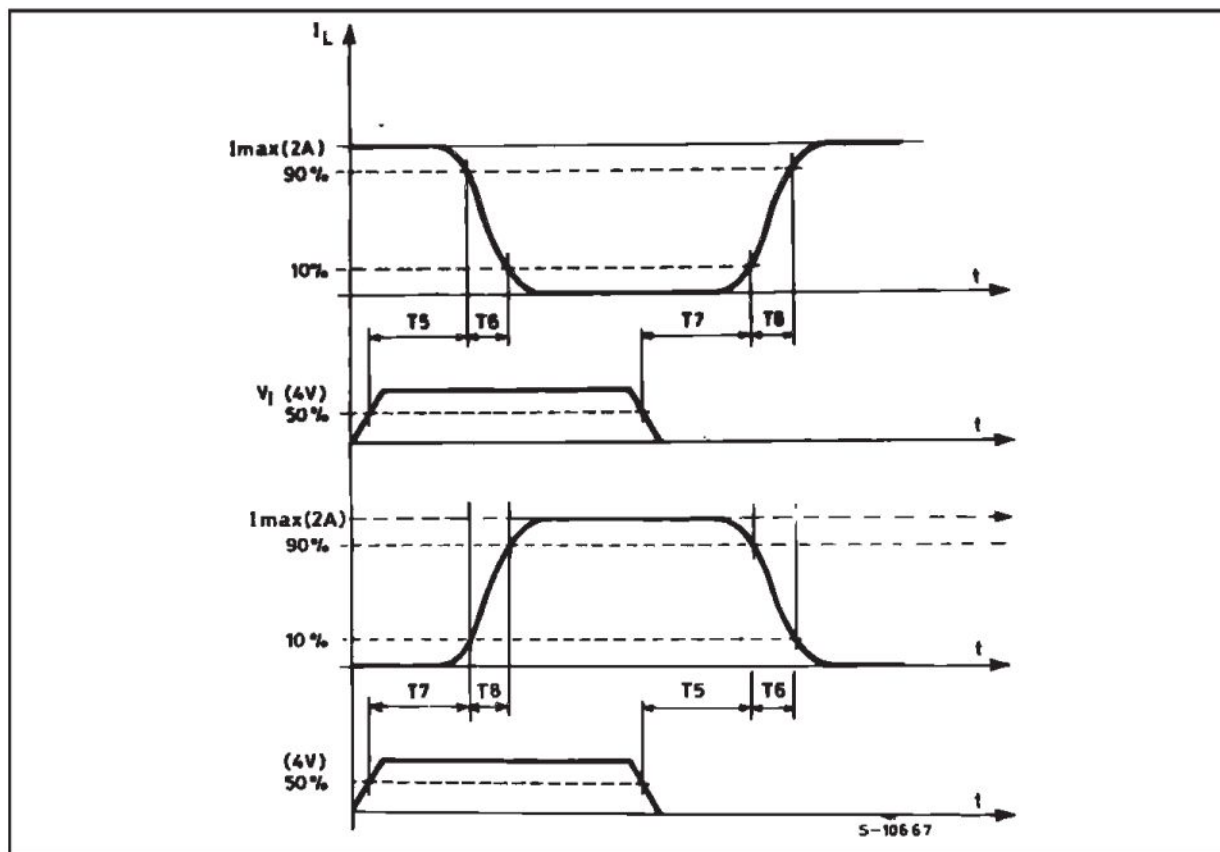


Figure 6 : Bidirectional DC Motor Control.

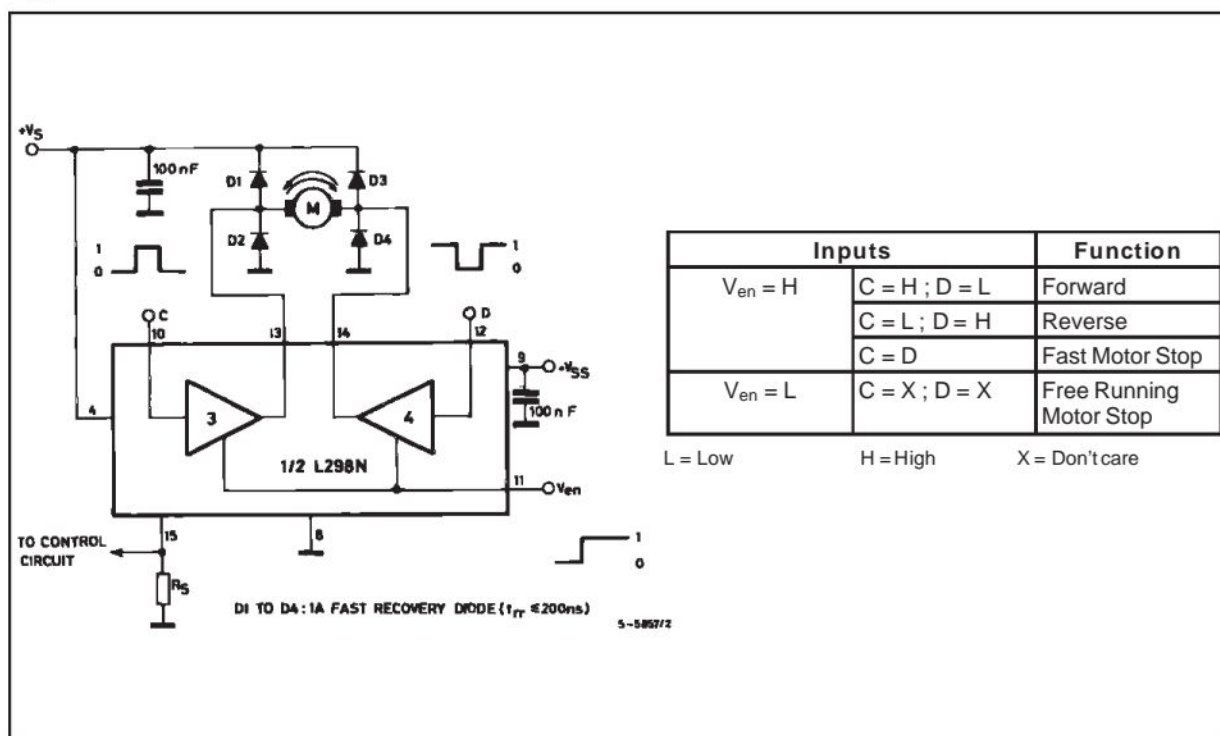
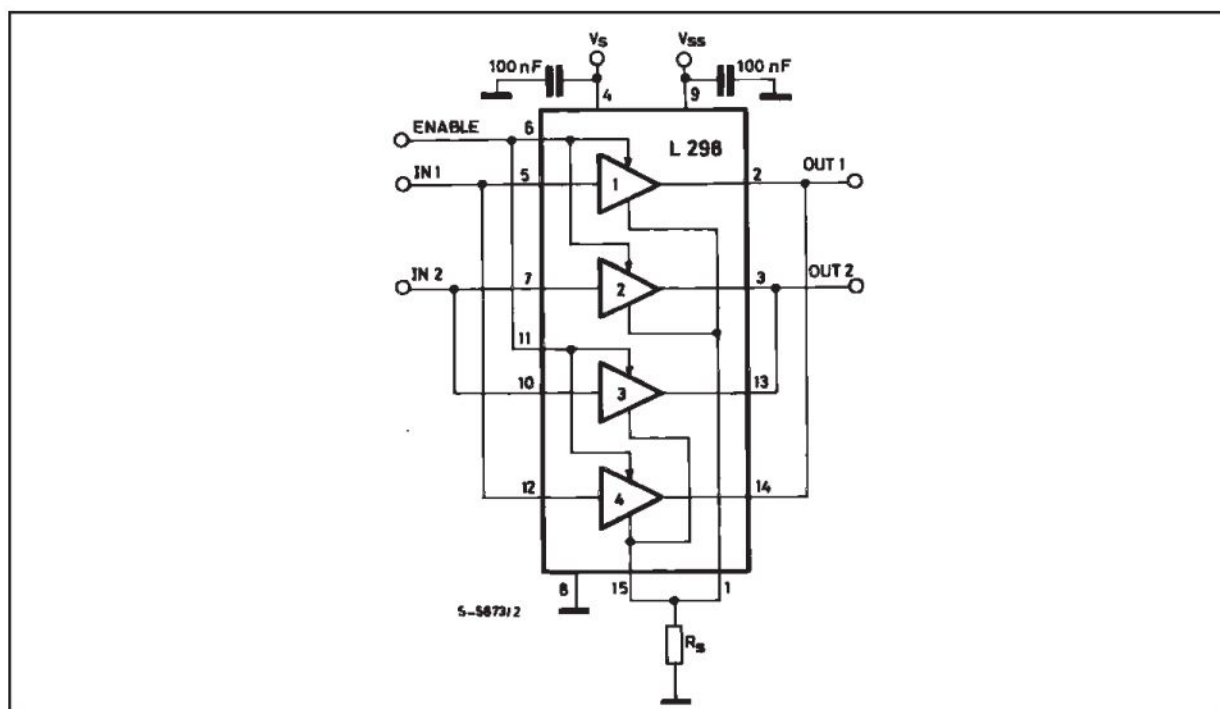


Figure 7 : For higher currents, outputs can be paralleled. Take care to parallel channel 1 with channel 4 and channel 2 with channel 3.



APPLICATION INFORMATION (Refer to the block diagram)

1.1. POWER OUTPUT STAGE

The L298 integrates two power output stages (A; B). The power output stage is a bridge configuration and its outputs can drive an inductive load in common or differential mode, depending on the state of the inputs. The current that flows through the load comes out from the bridge at the sense output: an external resistor (R_{SA} ; R_{SB}) allows to detect the intensity of this current.

1.2. INPUT STAGE

Each bridge is driven by means of four gates the input of which are In1; In2; EnA and In3; In4; EnB. The In inputs set the bridge state when The En input is high; a low state of the En input inhibits the bridge. All the inputs are TTL compatible.

2. SUGGESTIONS

A non inductive capacitor, usually of 100 nF, must be foreseen between both V_S and V_{SS} , to ground, as near as possible to GND pin. When the large capacitor of the power supply is too far from the IC, a second smaller one must be foreseen near the L298.

The sense resistor, not of a wire wound type, must be grounded near the negative pole of V_S that must be near the GND pin of the I.C.

Each input must be connected to the source of the driving signals by means of a very short path.

Turn-On and Turn-Off : Before to Turn-ON the Supply Voltage and before to Turn it OFF, the Enable input must be driven to the Low state.

3. APPLICATIONS

Fig 6 shows a bidirectional DC motor control Schematic Diagram for which only one bridge is needed. The external bridge of diodes D1 to D4 is made by four fast recovery elements ($t_{rr} \leq 200$ nsec) that must be chosen of a VF as low as possible at the worst case of the load current.

The sense output voltage can be used to control the current amplitude by chopping the inputs, or to provide overcurrent protection by switching low the enable input.

The brake function (Fast motor stop) requires that the Absolute Maximum Rating of 2 Amps must never be overcome.

When the repetitive peak current needed from the load is higher than 2 Amps, a paralleled configuration can be chosen (See Fig.7).

An external bridge of diodes are required when inductive loads are driven and when the inputs of the IC are chopped; Schottky diodes would be preferred.

This solution can drive until 3 Amps in DC operation and until 3.5 Amps of a repetitive peak current.

On Fig 8 it is shown the driving of a two phase bipolar stepper motor ; the needed signals to drive the inputs of the L298 are generated, in this example, from the IC L297.

Fig 9 shows an example of P.C.B. designed for the application of Fig 8.

Figure 8 : Two Phase Bipolar Stepper Motor Circuit.

This circuit drives bipolar stepper motors with winding currents up to 2 A. The diodes are fast 2 A types.

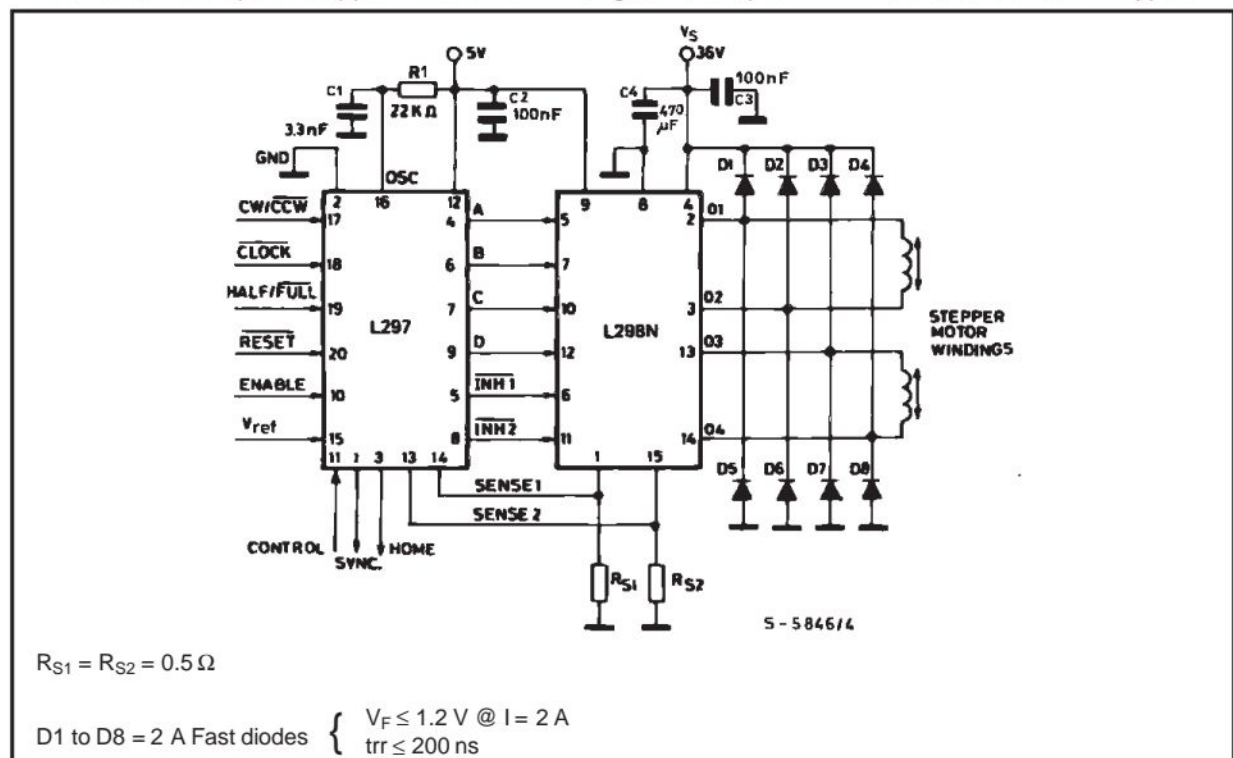


Fig 10 shows a second two phase bipolar stepper motor control circuit where the current is controlled by the I.C. L6506.

Figure 9 : Suggested Printed Circuit Board Layout for the Circuit of fig. 8 (1:1 scale).

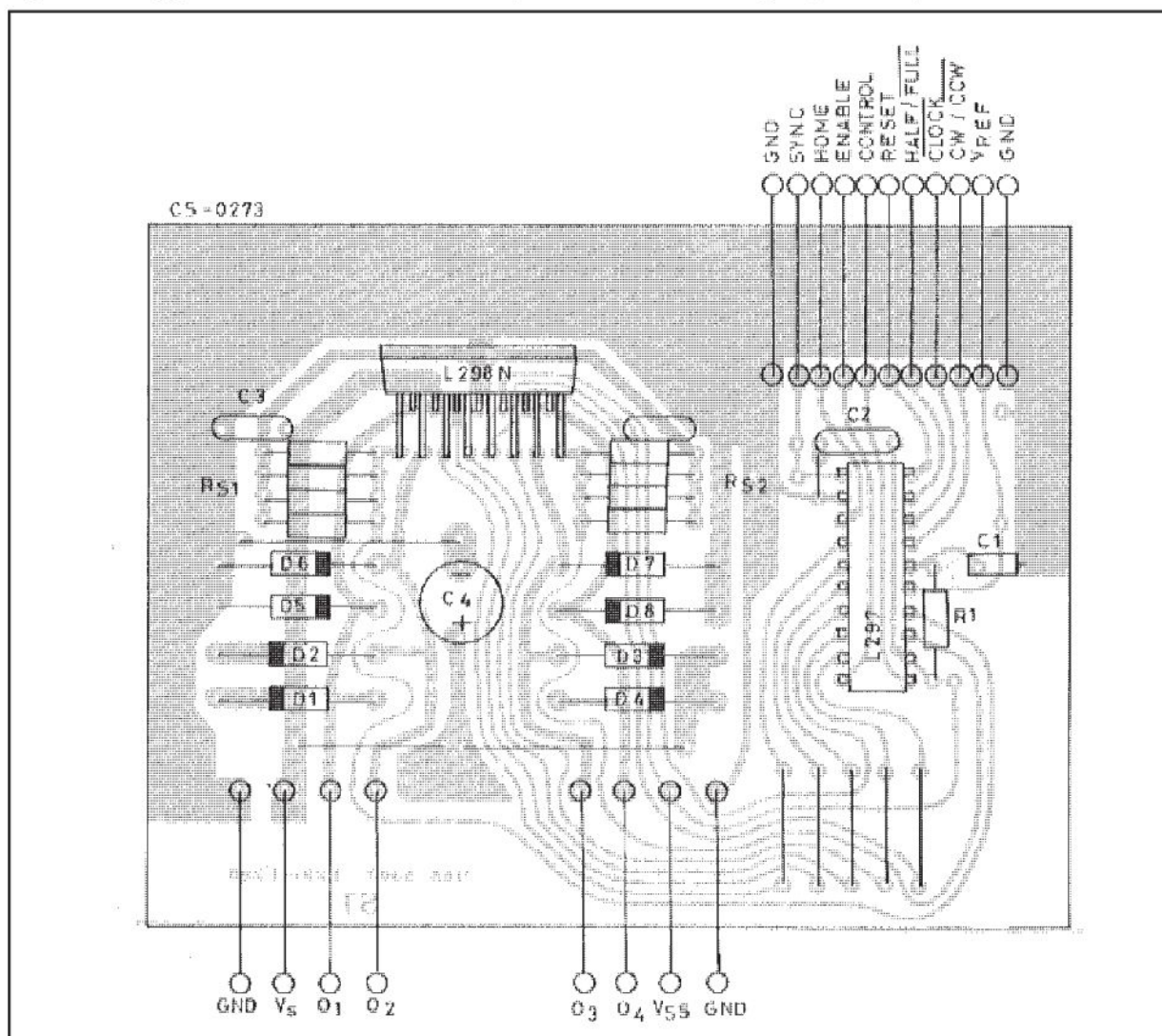
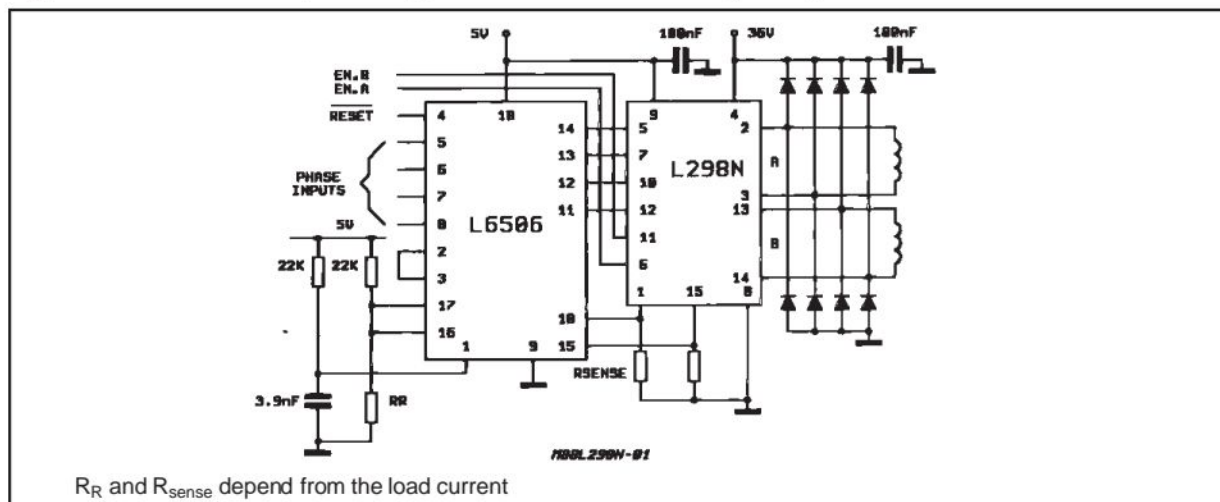
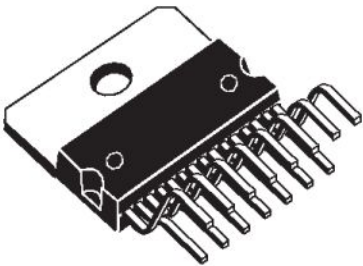


Figure 10 : Two Phase Bipolar Stepper Motor Control Circuit by Using the Current Controller L6506.

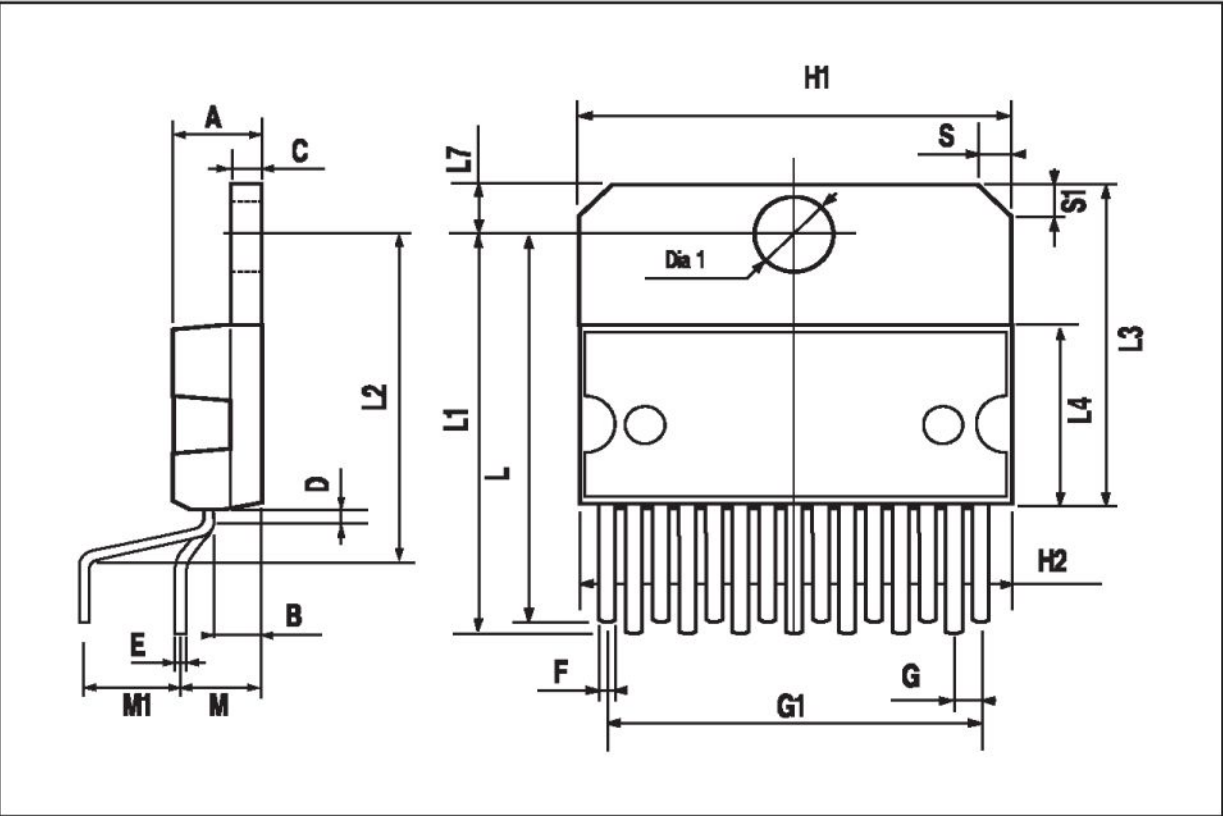


DIM.	mm			inch		
	MIN.	TYP.	MAX.	MIN.	TYP.	MAX.
A			5			0.197
B			2.65			0.104
C			1.6			0.063
D		1			0.039	
E	0.49		0.55	0.019		0.022
F	0.66		0.75	0.026		0.030
G	1.02	1.27	1.52	0.040	0.050	0.060
G1	17.53	17.78	18.03	0.690	0.700	0.710
H1	19.6			0.772		
H2			20.2			0.795
L	21.9	22.2	22.5	0.862	0.874	0.886
L1	21.7	22.1	22.5	0.854	0.870	0.886
L2	17.65		18.1	0.695		0.713
L3	17.25	17.5	17.75	0.679	0.689	0.699
L4	10.3	10.7	10.9	0.406	0.421	0.429
L7	2.65		2.9	0.104		0.114
M	4.25	4.55	4.85	0.167	0.179	0.191
M1	4.63	5.08	5.53	0.182	0.200	0.218
S	1.9		2.6	0.075		0.102
S1	1.9		2.6	0.075		0.102
Dia1	3.65		3.85	0.144		0.152

OUTLINE AND
MECHANICAL DATA

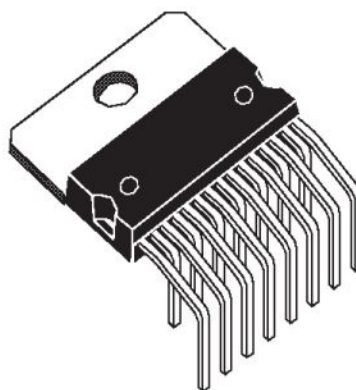


Multiwatt15 V

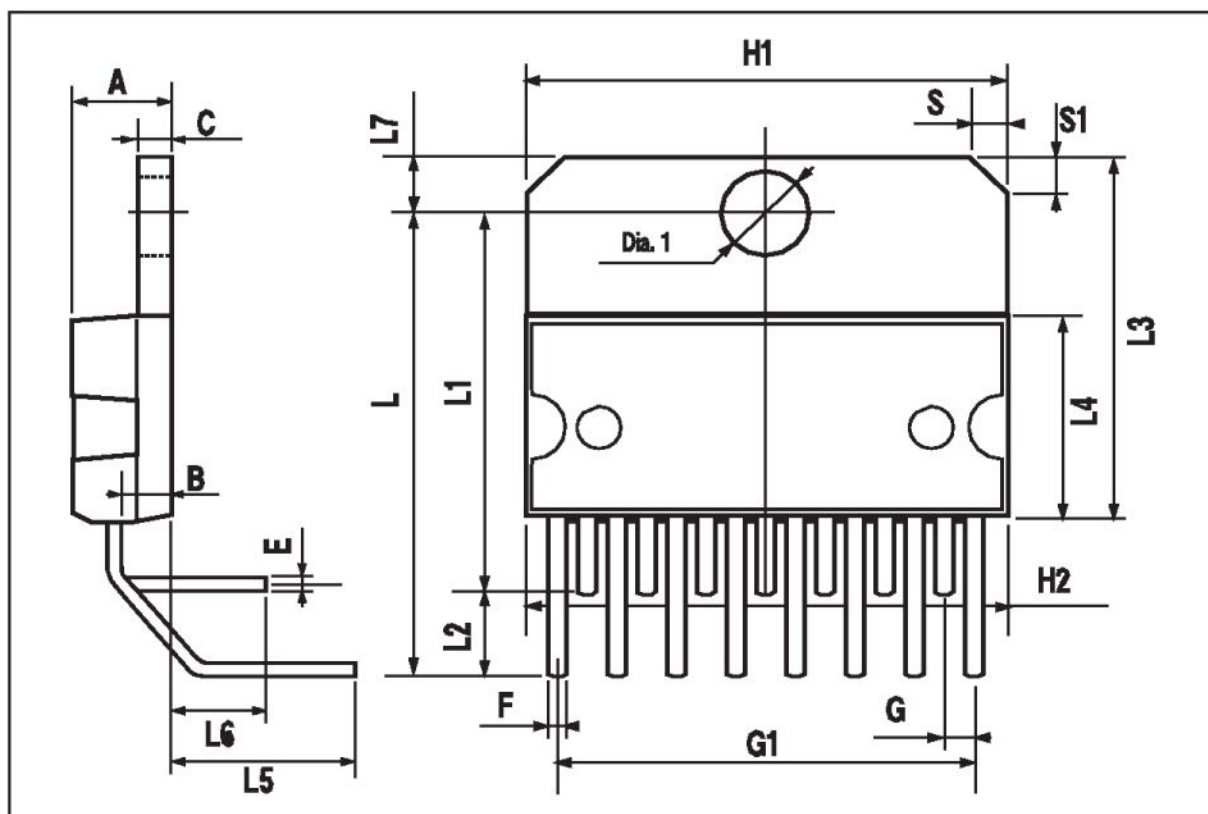


DIM.	mm			inch		
	MIN.	TYP.	MAX.	MIN.	TYP.	MAX.
A			5			0.197
B			2.65			0.104
C			1.6			0.063
E	0.49		0.55	0.019		0.022
F	0.66		0.75	0.026		0.030
G	1.14	1.27	1.4	0.045	0.050	0.055
G1	17.57	17.78	17.91	0.692	0.700	0.705
H1	19.6			0.772		
H2			20.2			0.795
L		20.57			0.810	
L1		18.03			0.710	
L2		2.54			0.100	
L3	17.25	17.5	17.75	0.679	0.689	0.699
L4	10.3	10.7	10.9	0.406	0.421	0.429
L5		5.28			0.208	
L6		2.38			0.094	
L7	2.65		2.9	0.104		0.114
S	1.9		2.6	0.075		0.102
S1	1.9		2.6	0.075		0.102
Dia1	3.65		3.85	0.144		0.152

OUTLINE AND MECHANICAL DATA



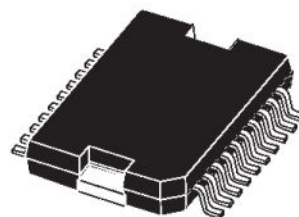
Multiwatt15 H



DIM.	mm			inch		
	MIN.	TYP.	MAX.	MIN.	TYP.	MAX.
A			3.6			0.142
a1	0.1		0.3	0.004		0.012
a2			3.3			0.130
a3	0		0.1	0.000		0.004
b	0.4		0.53	0.016		0.021
c	0.23		0.32	0.009		0.013
D (1)	15.8		16	0.622		0.630
D1	9.4		9.8	0.370		0.386
E	13.9		14.5	0.547		0.570
e		1.27			0.050	
e3		11.43			0.450	
E1 (1)	10.9		11.1	0.429		0.437
E2			2.9			0.114
E3	5.8		6.2	0.228		0.244
G	0		0.1	0.000		0.004
H	15.5		15.9	0.610		0.626
h			1.1			0.043
L	0.8		1.1	0.031		0.043
N	10° (max.)					
S	8° (max.)					
T		10			0.394	

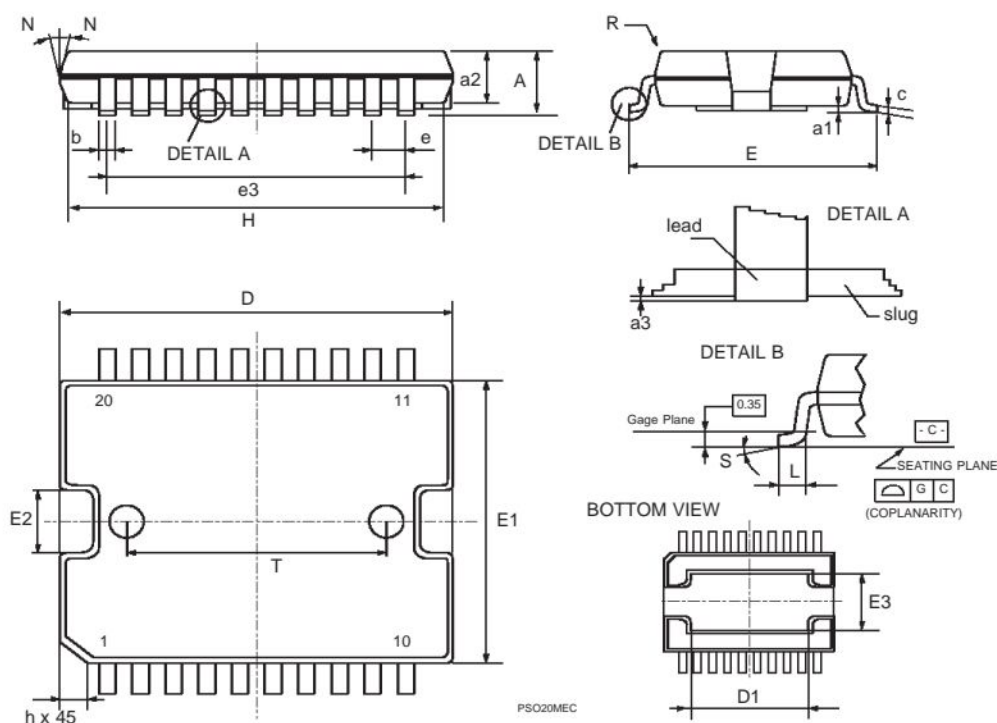
(1) "D and F" do not include mold flash or protrusions.
 - Mold flash or protrusions shall not exceed 0.15 mm (0.006").
 - Critical dimensions: "E", "G" and "a3"

OUTLINE AND MECHANICAL DATA



JEDEC MO-166

PowerSO20



Information furnished is believed to be accurate and reliable. However, STMicroelectronics assumes no responsibility for the consequences of use of such information nor for any infringement of patents or other rights of third parties which may result from its use. No license is granted by implication or otherwise under any patent or patent rights of STMicroelectronics. Specification mentioned in this publication are subject to change without notice. This publication supersedes and replaces all information previously supplied. STMicroelectronics products are not authorized for use as critical components in life support devices or systems without express written approval of STMicroelectronics.

The ST logo is a registered trademark of STMicroelectronics
© 2000 STMicroelectronics – Printed in Italy – All Rights Reserved
STMicroelectronics GROUP OF COMPANIES

Australia - Brazil - China - Finland - France - Germany - Hong Kong - India - Italy - Japan - Malaysia - Malta - Morocco -
Singapore - Spain - Sweden - Switzerland - United Kingdom - U.S.A.

<http://www.st.com>