



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®

Instituto Tecnológico de Apizaco

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE APIZACO

**APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL EN INGENIERÍA
(VERANO CIENTÍFICO) INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR
DE SAN MIGUEL EL GRANDE**

TITULACIÓN INTEGRAL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
INGENIERO EN ELECTROMECAÁNICA**

**PRESENTA:
ABRAHAM CHAVARRIAS VILLORDO**

**NOMBRE DEL ASESOR:
MTRO. ENRIQUE ACOLTZI BAUTISTA**



APIZACO, TLAX., MARZO 2024



Apizaco, Tlax., 12/septiembre/2023.

Circular No.: MM/476/2023.

ASUNTO: Liberación para Titulación Integral.

MARTÍN ROJAS RAMÍREZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES
PRESENTE

Por este medio informo que ha sido liberado el siguiente proyecto para Titulación integral del C.

Alumno:	ABRAHAM CHAVARRIAS VILLORDO
Carrera:	INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
No. de Control:	18370548
Nombre del Proyecto:	APLICACIONES DE ÁLGEBRA LINEAL EN INGENIERÍA (VERANO CIENTÍFICO) INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN MIGUEL EL GRANDE
Producto:	TITULACIÓN INTEGRAL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN.

Agradezco de antemano su valioso apoyo en esta importante actividad para la formación profesional de nuestros egresados.

ATENTAMENTE

*Excelencia en Educación Tecnológica.
Pensar para Servir, Servir para Triunfar.*


EFRAÉN SÁNCHEZ FLORES
JEFE DEL DEPTO. DE METAL-MECÁNICA




ENRIQUE ACOLTZI BAUTISTA
ASESOR

c.c.p. Oficina de Titulación
Departamento de servicios Escolares
Expediente. - Jefe de proyectos de vinculación Metal-Mecánica

ESF/lhbr*





EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Apizaco
División de Estudios Profesionales

Apizaco, Tlax., 15/febrero/2024
No. OFICIO: DEP-CT/151/2024

ASUNTO: AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

ABRAHAM CHAVARRIAS VILLORDO
EGRESADO DE LA CARRERA DE INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
CON NÚMERO DE CONTROL: 18370548
P R E S E N T E

Por este medio, me permito informar a usted que por aprobación de la comisión revisora asignada para valorar el trabajo que mediante la opción **TITULACIÓN INTEGRAL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN** cuyo tema es: **"APLICACIONES DE ÁLGEBRA LINEAL EN INGENIERÍA (VERANO CIENTÍFICO) INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN MIGUEL EL GRANDE"**, conforme a lo establecido en el procedimiento para la obtención del Título Profesional en el Instituto Tecnológico, la División de Estudios Profesionales a mi cargo le otorga:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESION

Debiendo entregar **3** empastados del mismo, apropiadamente encuadernados, a la brevedad, para presentar su acto de recepción profesional.

Sin otro particular por el momento, le envió un cordial saludo.

ATENTAMENTE

*Excelencia en Educación Tecnológica®
Pensar para Servir, Servir para Triunfar®*


MARTÍN ROJAS RAMÍREZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

c.p. archivo



Av. Instituto Tecnológico No. 418, San Andrés Ahuashuatepec, Municipio de Tzompantepec,
Tlaxcala, Mex. C.P. 90491 Tel. (241) 4172010 Ext. 304, e-mail:
dep_titulacion@apizaco.tecnim.mx



2024
Felipe Carrillo
PUERTO
RECONOCIMIENTO DEL GOBIERNO

Agradecimientos

Quisiera expresar mi sincero agradecimiento a todas las personas que han contribuido de manera significativa al desarrollo y éxito de este proyecto de investigación.

En primer lugar, quiero extender mi gratitud a mis asesores de investigación, quienes han compartido sus ideas, recursos y perspectivas, enriqueciendo así el contenido y el alcance de este estudio. Y por supuesto no puedo dejar de agradecer a mi familia, pareja y amigos por su constante estímulo, comprensión y aliento durante todo este proceso. Su apoyo emocional ha sido fundamental para mantenerme motivado y enfocado en mi trabajo.

Finalmente, quiero expresar mi reconocimiento a todas las instituciones y organizaciones que han facilitado el acceso a recursos, bibliografía y datos necesarios para llevar a cabo esta investigación.

A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento por su invaluable contribución a este proyecto. Sin su colaboración y respaldo, este trabajo no habría sido posible.

¡Gracias!

Abraham Chavarrias Villordo

INDICE GENERAL

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
OBJETIVO GENERAL	1
Objetivos específicos	1
JUSTIFICACIÓN	2
Álgebra Lineal	2
Elementos del Álgebra Lineal	3
Importancia del Álgebra Lineal.....	3
Aplicaciones del Álgebra lineal	3
Determinación de las corrientes eléctricas optimas aplicando sistemas de ecuaciones lineales por el método Gauss	4
Carga y corriente:.....	4
Voltaje:	4
Potencia:	5
Leyes de Kirchoff	5
Primera Ley de Kirchoff (LCK).....	5
Segunda ley de Kirchoff (LVK)	6
Aplicación 1: Eléctrica	6
Conclusión para la aplicación número 1:	24
Desarrollo de un modelo por regresión lineal para estimar altura de especies forestales.....	25
Programación Lineal	26
Aplicaciones del modelo dentro de la actividad forestal	27
Suposiciones de la programación lineal	27
Aplicación 2: Forestal	30
Conclusión para la aplicación número 2:	35
Reducción de tiempos de producción por medio de ecuaciones lineales.....	36
Aplicación 3: Industrial.....	37
Conclusión para la aplicación número 3:	41
Aplicación 4: Agricultura.....	43

Conclusión de la aplicación número 4:	46
Distribución de temperatura en estado estacionario en una placa plana.	46
Aplicación 5: Mecánica	47
Conclusión	51
Bibliografía	51

Índice de figuras

Ilustración 1 Diagrama de conexiones del ejemplo 1	7
Ilustración 2 Circuito eléctrico.....	7
Ilustración 3 Análisis de los nodos y mallas	8
Ilustración 4 Entradas y salidas de las corrientes nodo 1	9
Ilustración 5 Entradas y salidas de las corrientes en el nodo 2	10
Ilustración 6 Matriz extendida	12
Ilustración 7 Intercambio de la fila 2 con la fila 3.....	13
Ilustración 8 Intercambio de la fila 3 con fila 4.....	14
Ilustración 9 Resultado de la matriz respecto a la tercera operación	14
Ilustración 10 Resultado de la matriz respecto a la cuarta operación.....	15
Ilustración 11 Resultado de la matriz respecto a la quinta operación.....	15
Ilustración 12 Resultado de la matriz respecto a la sexta operación	16
Ilustración 13 Resultado de la matriz respecto a la séptima operación.....	17
Ilustración 14 Resultado de la matriz respecto a la octava operación.....	18
Ilustración 15 Resultado de la matriz respecto a la novena operación.....	18
Ilustración 16 Resultado de la matriz respecto a la décima operación.....	19
Ilustración 17 Resultado de la matriz respecto a la onceava operación.....	20
Ilustración 18 Resultado de la matriz respecto a la doceava operación.....	20
Ilustración 19 Resultado de la matriz y la corriente I2.....	21
Ilustración 20 Resultado de la matriz respecto a la ecuación	22
Ilustración 21 Resultado final de la matriz con las corrientes	22
Ilustración 22 Diagrama con las corrientes determinadas	23
Ilustración 23 Tabla de referencia.....	31
Ilustración 24: Terreno de cultivo de maíz.....	44
Ilustración 25 Esquema de temperaturas de la placa.....	48

Índice de tablas

Tabla 1: Sistema de ecuaciones	11
Tabla 2: Sistema de ecuaciones con voltaje.....	11
Tabla 3: Sistema de ecuaciones a matriz.....	32
Tabla 4: Inversa de la matriz	32
Tabla 5: Matriz aumentada de coeficientes.....	33
Tabla 6: Integración de la tabla simplex	38
Tabla 7: Tabla simplex con variables de holgura	38
Tabla 8: Organización de datos en Excel para tabla simplex	39
Tabla 9: Programación de la función objetivo y restricciones	39
Tabla 10 Solución del modelo con Solver	41
Tabla 11: Temperaturas de las placas.....	49
Tabla 12: Inversa de la matriz de temperatura de placas	50
Tabla 13: Temperatura de los nodos	50

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la actualidad en las organizaciones y empresas desarrollan sus actividades de forma empírica y científica, sin embargo, en su mayoría en el sector privado es necesario aplicar métodos establecidos para determinar de forma concreta las necesidades de los recursos, en algunas ingenierías se desconoce actualmente que métodos y técnicas aplican, lo que ha originado una divulgación científica limitada con respecto a las aplicaciones del álgebra lineal, por evadir el registro de datos de cada una de las actividades, aunado de la poca documentación de dichas actividades que realizan las personas.

OBJETIVO GENERAL

Aplicar teoremas, postulados y métodos para dar solución a problemáticas del sector público y privado en 5 ingenierías para incrementar la productividad de las empresas y organizaciones.

Objetivos específicos

- Dar solución a las problemáticas aplicando sistemas de ecuaciones lineales
- Estimar y comparar las alturas de árboles mediante Gauss-Jordan y matriz inversa
- Generar circuitos y dar solución mediante el método de Gauss-Jordan
- Aplicar método simplex en la fabricación de radios para optimizar los recursos de la empresa.

JUSTIFICACIÓN

El Álgebra Lineal proporciona a los ingenieros los conocimientos necesarios para manejar y aplicar expresiones matemáticas con variables en el planteamiento y solución de ecuaciones de frecuente utilización en el ejercicio profesional mediante vectores, matrices, sistemas de ecuaciones y programación lineales. Se considera al Álgebra Lineal como la herramienta fundamental para el planteamiento y desarrollo de conceptos que permitan entender y asimilar conocimientos de casi todas las áreas de la ingeniería aplicada. Por otra parte, aplicar los teoremas y métodos a las diversas ingenierías permite estimar de forma correcta, optimizar los recursos de las empresas (tiempo, insumos, maquinaria, soluciones químicas, entre otras) e incrementar la productividad.

Álgebra Lineal

Se denomina álgebra lineal a la rama de las matemáticas que se encarga de resolver operaciones aritméticas a través de signos, letras y números.

En álgebra, las letras y los signos representan a otra entidad numérica, llamadas variables. Es decir, que utiliza símbolos y letras en vez de números para representar sus procedimientos u operaciones aritméticas, así como para indicar la forma en que deben ser utilizados esos símbolos y letras (Carrasco Venegas, 2011).

El álgebra lineal se encarga del estudio de conceptos tales como ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones, matrices, vectores y espacios vectoriales.

Elementos del Álgebra Lineal

Vectores: trazado de uno o varios segmentos de recta que sugieren una dirección definida proyectada en un determinado espacio, también son definidos como líneas que tienen magnitud, dirección y sentido concretos. Se representan gráficamente como segmentos rectilíneos y están compuestos por los siguientes elementos: dirección, origen o punto de aplicación y la longitud o módulo (elementos que forman parte del espacio vectorial) (William Rowan Hamilton, 1844).

Matriz: conjunto bidimensional de números o elementos dispuestos en filas y columnas, organizadas en forma rectangular. Permiten la representación de los coeficientes que tienen los sistemas de ecuaciones lineales (Cayley, 1858).

Importancia del Álgebra Lineal

En la vida cotidiana se presentan diferentes problemas en física, ingeniería, biología, química, medicina que requieren métodos del Álgebra Lineal, este es uno de los más útiles que toman todo aquel que se quiera dedicar a la ciencias exactas o sociales.

Aplicaciones del Álgebra lineal

Esta rama de las matemáticas es una herramienta imprescindible que se aplica en mecánica, química, economía, administración, sociología, industrial, agricultura, psicología, entre otras áreas de la teoría gráfica, geometría analítica, geometría fractal, teoría de la codificación, teoría de las ondulaciones, sistemas dinámicos y soluciones de sistemas polinomiales (Hermann Grassmann ,1844)

Determinación de las corrientes eléctricas optimas aplicando sistemas de ecuaciones lineales por el método Gauss

Los circuitos eléctricos y el electromagnetismo son las dos teorías fundamentales sobre las que se construyen todas las ramas de la ingeniería eléctrica, muchas de ellas como la potencia, las maquinas eléctricas, el control, la electrónica, las comunicaciones y la instrumentación, se sustentan en la teoría de circuitos eléctricos.

Los circuitos eléctricos se utilizan en numerosos sistemas eléctricos para realizar diferentes tareas, pero para hacer esto se debe analizar la complejidad del circuito y los fundamentos base de la eléctrica.

Carga y corriente:

La carga es una propiedad eléctrica de las partículas atómicas de las que está compuesta la materia y se mide en Coulomb (C).

La corriente eléctrica es la tasa de cambio de la carga en el tiempo y se mide en Amperes (A), y si la corriente no cambia con el tiempo, si no permanece constante la denominamos corriente directa (cd), que es aquella que permanece constante respecto al tiempo por convención el símbolo I se usa para representar tal corriente constante.

Una corriente que varía en el tiempo se representa mediante el símbolo i una forma común de corriente variable respecto al tiempo es la corriente senoidal o corriente alterna (ca) es la varia senoidalmente respecto al tiempo.

Voltaje:

Es la energía requerida para mover una carga eléctrica de un punto a otro en un elemento y su unidad de medida es el Voltio (V)

Potencia:

Es la variación con respecto al tiempo de entrega o absorción de la energía medida en Watts (W).

Leyes de Kirchoff

Inicialmente tenemos que definir los conceptos de nodo y rama.

Nodo: es un punto en el circuito en el que tres o más elementos se encuentran conectados entre sí.

Rama: es cualquier elemento de la red de dos terminales.

En circuitos eléctricos se pueden encontrar una variedad de elementos conectados en las ramas, el régimen de un circuito eléctrico de cualquier configuración puede determinarse utilizando las leyes primera y segunda de Kirchoff (Gustav Kirchhoff, 1846).

Primera Ley de Kirchoff (LCK)

La suma algebraica de las corrientes en un nodo es igual a cero.

$$\sum_{i=0}^n I = 0 \quad (1)$$

Una forma alternativa se define como: la suma de la corriente de rama que entran a un nodo en cualquier instante de tiempo es igual a la suma de las corrientes que salen del nodo en este instante de tiempo (Gustav Kirchhoff, 1846).

$$\int I \text{ entran} = \int I \text{ salen} \quad (2)$$

De acuerdo con la ley de corriente de Kirchhoff (LCK), se pueden considerar positivas o negativas las corrientes que entran a un nodo, siempre y cuando las corrientes que salen de ese nodo se tomen con el signo opuesto a las corrientes que entran al mismo nodo.

La cantidad de las ecuaciones mutuamente independientes con base en la LCK es:

$$K_1 = n - 1 \quad (3)$$

Segunda ley de Kirchhoff (LVK)

La suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a cero (Gustav Kirchhoff, 1846).

$$\int_{i=0}^n V_i = 0 \quad (4)$$

De forma equivalente se define como: la suma algebraica de las caídas de voltaje en las resistencias es igual a la suma algebraica de las fem en las fuentes para cualquier trayectoria o contorno cerrado.

$$\int IR = \int E \quad (5)$$

Ecuaciones de Kirchhoff escritas en forma de matrices

Si el circuito contiene L ramas, aplicando la primera y segunda leyes de Kirchhoff se pueden escribir sus ecuaciones para encontrar las corrientes y voltajes.

Aplicación 1: Eléctrica

En un cuarto de una habitación de un estudiante tenemos una fuente de voltaje de una batería (V1) a la cual tiene conectado una computadora portátil (R1) y tiene un reloj inteligente (R2) para cargarlo conectado en serie. También tiene conectado un teléfono (R3) y una consola de videojuegos (R4) conectado en paralelo al otro circuito ya por último tiene conectado un amplificador de sonido (R5) y con este amplificador de sonido está conectado otra fuente de voltaje que tiene afuera de su cuarto que es un panel solar (V2). El diagrama quedaría como se muestra en la ilustración 1: diagrama de conexiones del ejemplo 1.

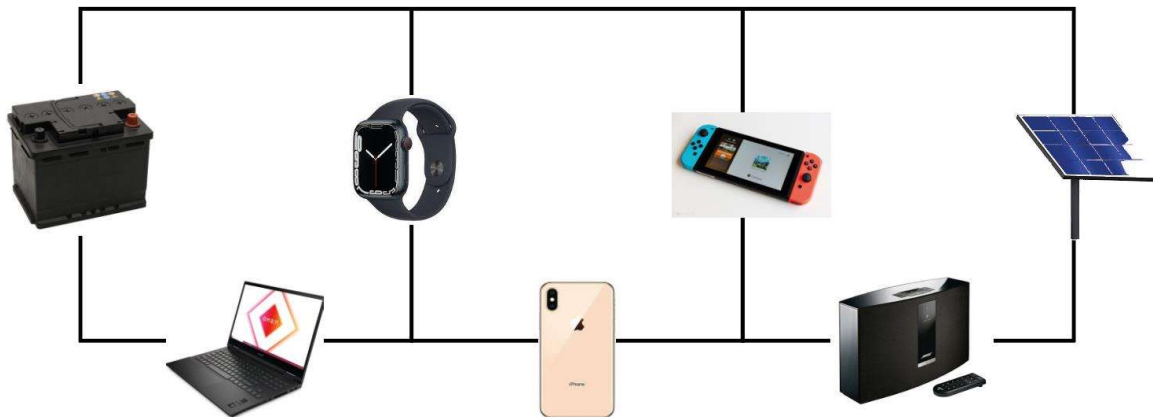


Ilustración 1 Diagrama de conexiones del ejemplo 1

En el diagrama eléctrico sustituimos los artículos

- La batería y el panel solar por fuentes de voltaje
- La laptop, el reloj, el teléfono, la consola de videojuegos y el sistema de audio por resistencias.

Y nos quedaría el diagrama eléctrico de la siguiente forma:

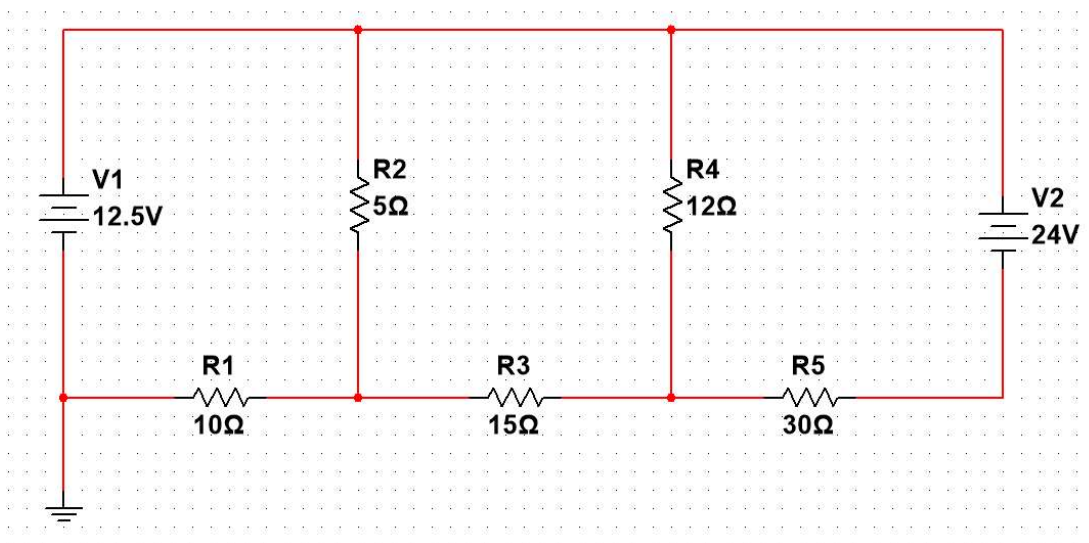


Ilustración 2 Circuito eléctrico

Donde tenemos que:

$$V1 = 12.5 \text{ V}$$

$$V2 = 24 \text{ V}$$

$$R1 = 10 \text{ Ohm}$$

$$R2 = 5 \text{ Ohm}$$

$$R3 = 15 \text{ Ohm}$$

$$R4 = 12 \text{ Ohm}$$

$$R5 = 30 \text{ Ohm}$$

En lo dicho circuito se plantea analizar las leyes de Kirchoff y determinar las fuentes de voltaje, las intensidades de corriente que circula, las caídas en cada resistencia y la potencia que hay en cada una de las resistencias.

Ya teniendo el circuito se identificará los nodos y las mallas en el diagrama

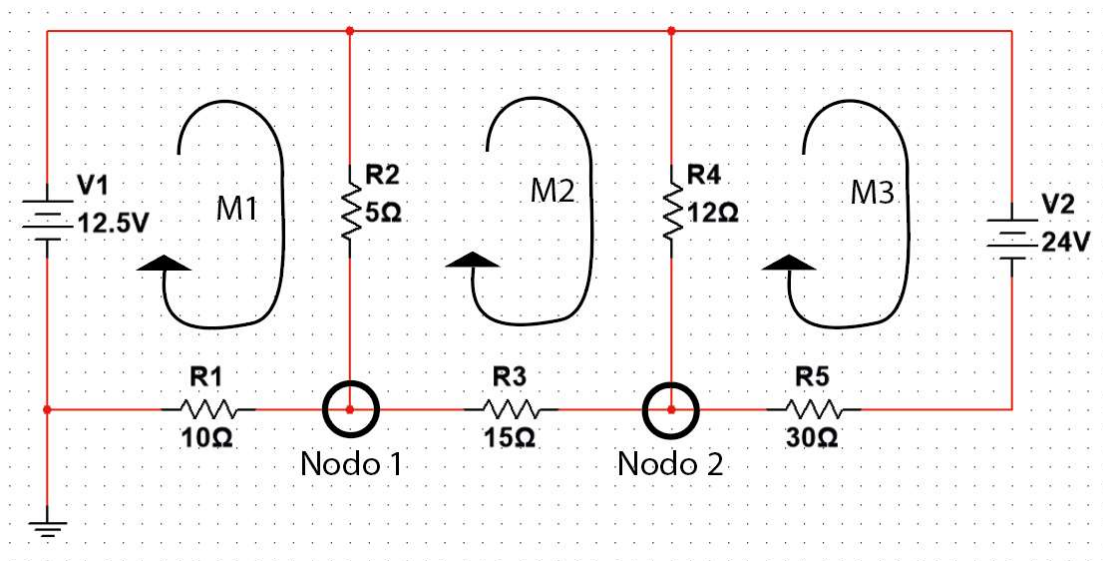


Ilustración 3 Análisis de los nodos y mallas

Identificación de 2 nodos y tres lazos o mallas presentes en el circuito y con estas variables se explican las leyes de Kirchoff.

La primera ley de Kirchoff enuncia que la suma algebraica de las corrientes en un nodo es igual a cero.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

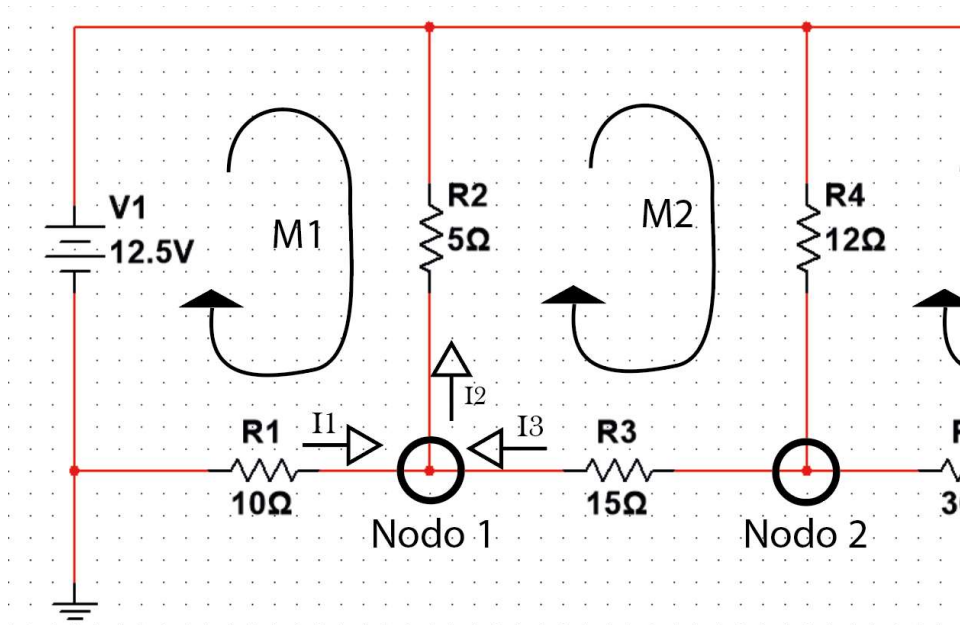


Ilustración 4 Entradas y salidas de las corrientes nodo 1

En el nodo 1 tenemos que I_1 es una corriente que entra I_2 es una corriente que sale y por último I_3 es una corriente que entra nos quedaría de la siguiente manera la ecuación.

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

Se tomará como referencia que las corrientes que entran al nodo sean positivas y la corriente que salen sean negativas y la sumatoria de las corrientes serán igual a 0.

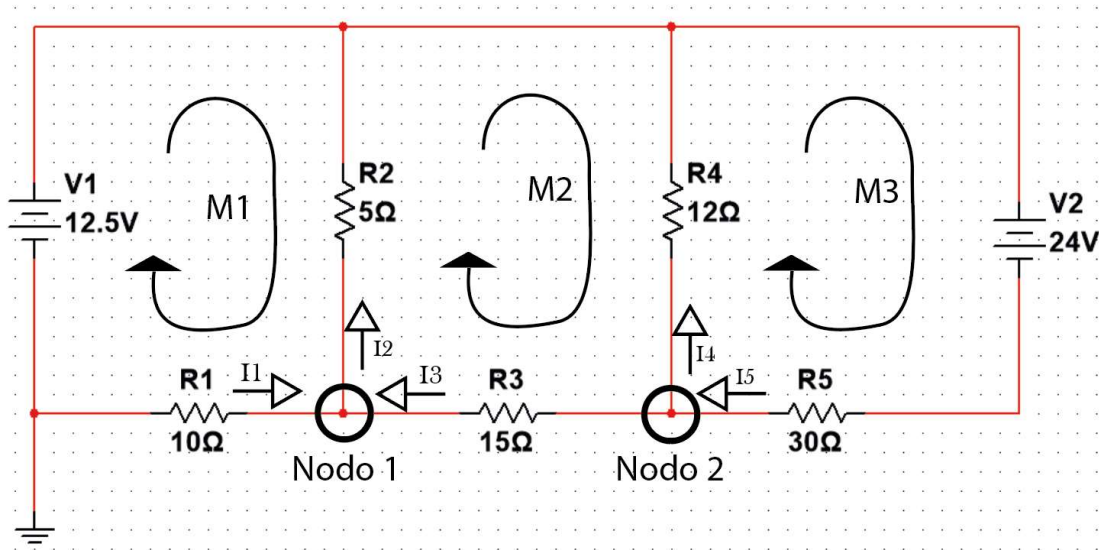


Ilustración 5 Entradas y salidas de las corrientes en el nodo 2

Al analizar el nodo 2 se tiene la corriente I_3 establecida y está saliendo, de igual manera la corriente I_4 que también está saliendo y otra corriente que es I_5 que entra.

$$-I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

La segunda ley de Kirchoff menciona que la suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a cero:

$$\int_{i=0}^n V_i = 0$$

En el análisis de la malla 1 viendo la dirección, hay que recordar que si vamos en la misma dirección de la corriente el voltaje es negativo y si es caso contrario con respecto a la corriente el voltaje es positivo. De acuerdo con la ley de Ohm el voltaje es el producto de la resistencia por la intensidad de corriente.

$$V_{R1} = R_1 * I_1 = 10 \Omega I_1$$

Entonces de tal manera que en la malla 1 (M1) la ecuación queda de la siguiente manera:

$$M1: 10\Omega I_1 + 5\Omega I_2 - 15.5 V = 0$$

Analizando la malla 2(M2) la ecuación queda de esta forma:

$$M2: -5\Omega I2 - 15\Omega I3 + 12\Omega I4 = 0$$

Y analizamos la malla 3 (M3) donde:

$$M3: -12\Omega I4 - 30\Omega I5 + 24 = 0$$

Recopilando todos los datos se tiene un sistema de ecuaciones 5 x 5:

Tabla 1: Sistema de ecuaciones

Nodo 1	$I1$	$-I2$	$+I3$			=0
Nodo 2			$-I3$	$-I4$	$+I5$	=0
Malla 1	$10 I1$	$5 I2$			-12.5	=0
Malla 2		$-5 I2$	$-15 I3$	$+12 I4$		=0
Malla 3				$-12 I4$	$-30 I5 + 24$	=0

Respecto al sistema de ecuaciones 5 x 5, los voltajes que son términos independientes se pasan, observar la tabla 2.

Tabla 2: Sistema de ecuaciones con voltaje

Nodo 1	$I1$	$-I2$	$+I3$			=0
Nodo 2			$-I3$	$-I4$	$+I5$	=0
Malla 1	$10 I1$	$5 I2$				= 12.5
Malla 2		$-5 I2$	$-15 I3$	$+12 I4$		=0
Malla 3				$-12 I4$	$-30 I5$	= -24

Y queda un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas que se solucionará con el método de eliminación de Gauss Jordan.

Posteriormente, se determina la matriz extendida de coeficientes del sistema que tiene de 5 x 5.

$$\begin{array}{l|ccccc|c}
 F1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 F2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 F3 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 12.5 \\
 F4 & 0 & -5 & -15 & 12 & 0 & 0 \\
 F5 & 0 & 0 & 0 & -12 & 30 & -24
 \end{array}$$

Ilustración 6 Matriz extendida

Entonces como primera operación: Intercambiaremos la fila 2 por la fila 3

$$F2 \leftrightarrow F3$$

F1	1	-1	1	0	0	0
F2	10	5	0	0	0	12.5
F3	0	0	-1	-1	1	0
F4	0	-5	-15	12	0	0
F5	0	0	0	-12	30	-24

Ilustración 7 Intercambio de la fila 2 con la fila 3

Segunda operación: Intercambiaremos la fila 3 con la fila 4

$$F3 \leftrightarrow F4$$

$$\begin{array}{l|ccccc|c}
 F1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 F2 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 12.5 \\
 F3 & 0 & -5 & -15 & 12 & 0 & 0 \\
 F4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 F5 & 0 & 0 & 0 & -12 & 30 & -24
 \end{array}$$

Ilustración 8 Intercambio de la fila 3 con fila 4

Tercera operación: Convertimos el 10 de la fila 2 en un 0 entonces la operación a realizar quedaría

$$-10 F1 + F2 \rightarrow F2$$

$$\begin{array}{l|ccccc|c}
 F1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 F2 & 0 & 15 & -10 & 0 & 0 & 12.5 \\
 F3 & 0 & -5 & -15 & 12 & 0 & 0 \\
 F4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 F5 & 0 & 0 & 0 & -12 & 30 & -24
 \end{array}$$

Ilustración 9 Resultado de la matriz respecto a la tercera operación

Cuarta operación: Para que el -5 de la fila 3 se convierta en un 0

$$3F3 + F2 \rightarrow F3$$

F1	1	-1	1	0	0	0
F2	0	15	-10	0	0	12.5
F3	0	0	-55	36	0	12.5
F4	0	0	-1	-1	1	0
F5	0	0	0	-12	30	-24

Ilustración 10 Resultado de la matriz respecto a la cuarta operación

Quinta operación: Para que el -1 de la fila 4 se convierta en 0

$$-55F4 + F3 \rightarrow F4$$

F1	1	-1	1	0	0	0
F2	0	15	-10	0	0	12.5
F3	0	0	-55	36	0	12.5
F4	0	0	0	91	-55	12.5
F5	0	0	0	-12	30	-24

Ilustración 11 Resultado de la matriz respecto a la quinta operación

Sexta operación: Convertimos el -12 de la fila 5 en un 0

$$12 F4 + 91F5 \rightarrow F5$$

F1		1	-1	1	0	0		0
F2		0	15	-10	0	0		12.5
F3		0	0	-55	36	0		12.5
F4		0	0	0	91	-55		12.5
F5		0	0	0	0	-3390		-2034

Ilustración 12 Resultado de la matriz respecto a la sexta operación

Séptima operación: Convertir el -3390 de la fila 5 en 1 y obtener el valor de la corriente en /5

$$F5 \div -3390 \rightarrow F5$$

F1	1	-1	1	0	0	0
F2	0	15	-10	0	0	12.5
F3	0	0	-55	36	0	12.5
F4	0	0	0	91	-55	12.5
F5	0	0	0	0	1	0.6

Ilustración 13 Resultado de la matriz respecto a la séptima operación

Octava operación: Convertiremos el -55 de la fila 4 en un 0

$$55F5 + F4 \rightarrow F4$$

$$\begin{array}{l|ccccc|c}
 F1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 F2 & 0 & 15 & -10 & 0 & 0 & 12.5 \\
 F3 & 0 & 0 & -55 & 36 & 0 & 12.5 \\
 F4 & 0 & 0 & 0 & 91 & 0 & 45.5 \\
 F5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.6
 \end{array}$$

Ilustración 14 Resultado de la matriz respecto a la octava operación

Novena operación: Convertiremos el 91 de la fila 4 en un 1 y así obtendremos la corriente /4

$$F4 \div 91 \rightarrow F4$$

$$\begin{array}{l|ccccc|c}
 F1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 F2 & 0 & 15 & -10 & 0 & 0 & 12.5 \\
 F3 & 0 & 0 & -55 & 36 & 0 & 12.5 \\
 F4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\
 F5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.6
 \end{array}$$

Ilustración 15 Resultado de la matriz respecto a la novena operación

Decima operación: Convertiremos el 36 de la fila 3 en 0 con la siguiente ecuación:

$$-36 F4 + F3 \rightarrow F3$$

F1	1	-1	1	0	0	0
F2	0	15	-10	0	0	12.5
F3	0	0	-55	0	0	-5.5
F4	0	0	0	1	0	0.5
F5	0	0	0	0	1	0.6

Ilustración 16 Resultado de la matriz respecto a la décima operación

Décimo primera operación: Convertiremos el -55 de la fila 3 en un 1 y así obtener la corriente /3

$$F3 \div -55 \rightarrow F3$$

$$\begin{array}{l|ccccc|l}
 F1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 F2 & 0 & 15 & -10 & 0 & 0 & 12.5 \\
 F3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.1 \\
 F4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\
 F5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.6
 \end{array}$$

Ilustración 17 Resultado de la matriz respecto a la onceava operación

Décimo segunda operación: Convertiremos el -1º de la fila 2 en 0:

$$10F3 + F2 \rightarrow F2$$

$$\begin{array}{l|ccccc|l}
 F1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 F2 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 13.5 \\
 F3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.1 \\
 F4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\
 F5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.6
 \end{array}$$

Ilustración 18 Resultado de la matriz respecto a la doceava operación

Décimo tercera operación: Convertiremos el 15 en 1 y así obtener la corriente que pasa por /2.

$$F2 \div 15 \rightarrow F2$$

$$\begin{array}{l|ccccc|l}
 F1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 F2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\
 F3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.1 \\
 F4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\
 F5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.6
 \end{array}$$

Ilustración 19 Resultado de la matriz y la corriente I2

Luego para la fila numero 1 haremos las siguientes ecuaciones:

$$-F3 + F1 \rightarrow F1$$

$$\begin{array}{l}
 F1 \\
 F2 \\
 F3 \\
 F4 \\
 F5
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccccc}
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 -0.1 \\
 0.9 \\
 0.1 \\
 0.5 \\
 0.6
 \end{array}$$

Ilustración 20 Resultado de la matriz respecto a la ecuación

Para finalmente convertir el -1 de la Fila 1 en 0 y obtener la corriente que circula por $I1$.

$$F1 + F2 \rightarrow F1$$

$$\begin{array}{l}
 F1 \\
 F2 \\
 F3 \\
 F4 \\
 F5
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 0.8 \\
 0.9 \\
 0.1 \\
 0.5 \\
 0.6
 \end{array}$$

Ilustración 21 Resultado final de la matriz con las corrientes

Y como resultado obtenemos:

$$I1 = 0.8 \text{ A}$$

$$I2 = 0.9 \text{ A}$$

$$I3 = 0.1 \text{ A}$$

$$I4 = 0.5 \text{ A}$$

$$I5 = 0.6 \text{ A}$$

Con esto se finaliza el método de Gauss Jordan y se obtienen las corrientes que pasan por el circuito.

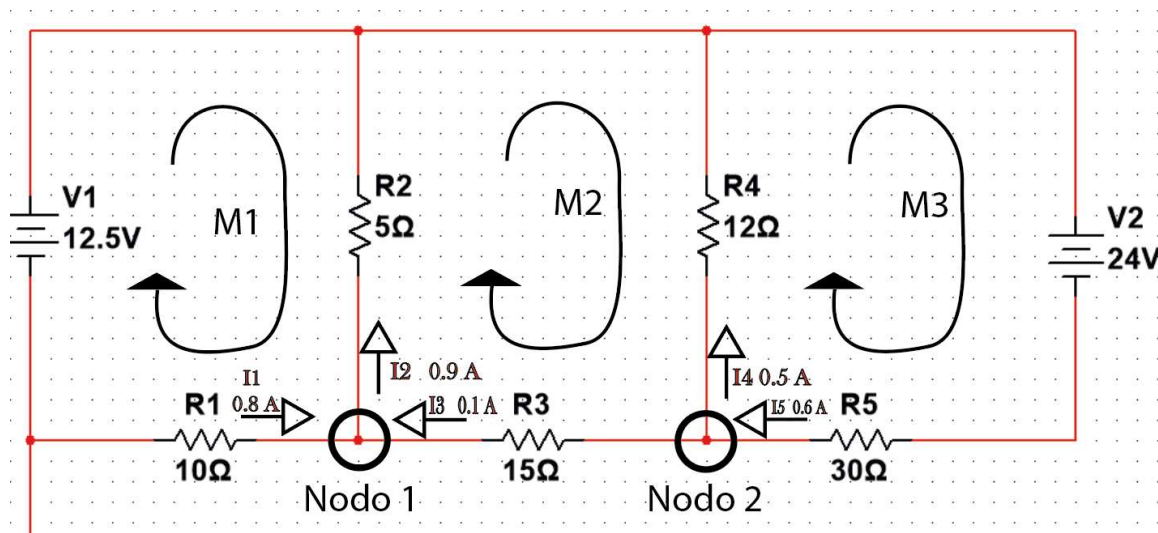


Ilustración 22 Diagrama con las corrientes determinadas

Y con las corrientes obtenidas de acuerdo con la Ley de Ohm se determinan los voltajes que pasan por las resistencias con la siguiente formula:

$$V_R = I \times R \quad (6)$$

Entonces los voltajes de las resistencias de acuerdo con el diagrama se establecerán de la siguiente forma:

$$V_{R1} = I_1 \times R_1 = (0.8 \text{ A})(10\Omega) = 8 \text{ v}$$

$$v_{R2} = I_2 \times R_2 = (0.9 \text{ A})(5\Omega) = 4.5 \text{ v}$$

$$V_{R3} = I_3 \times R_3 = (0.1 \text{ A})(15\Omega) = 1.5 \text{ v}$$

$$V_{R4} = I_4 \times R_4 = (0.5 \text{ A})(12\Omega) = 6 \text{ v}$$

$$V_{R5} = I_5 \times R_5 = (0.6 \text{ A})(30\Omega) = 18 \text{ v}$$

Y finalmente se determinan las potencias con la fórmula:

$$P_R = I \times V_R \quad (7)$$

De tal manera que las potencias que existen en las resistencias son:

$$P_{R1} = I_1 \times V_{R1} = (0.8 \text{ A})(8 \text{ v}) = 6.40 \text{ W}$$

$$P_{R2} = I_2 \times V_{R2} = (0.9 \text{ A})(4.5 \text{ v}) = 4.05 \text{ W}$$

$$P_{R3} = I_3 \times V_{R3} = (0.1 \text{ A})(1.5 \text{ v}) = 0.15 \text{ W}$$

$$P_{R4} = I_4 \times V_{R4} = (0.5 \text{ A})(6 \text{ v}) = 3.00 \text{ W}$$

$$P_{R5} = I_5 \times V_{R5} = (0.6 \text{ A})(18 \text{ v}) = 10.80 \text{ W}$$

Conclusión para la aplicación número 1:

Se concluye que, para obtener las corrientes para la potencia consumida de cada equipo de nuestro ejemplo, el método de Gauss Jordan, facilita la obtención de las corrientes a partir de un sistema de ecuación hasta realizar una matriz.

Desarrollo de un modelo por regresión lineal para estimar altura de especies forestales.

La gran mayoría de métodos que buscan el control del rendimiento se basan en las variables existentes maderables y tasas de incremento. Estos métodos son aplicables tanto a bosques regulares como irregulares en los que las clases de edad no se encuentran segregadas en áreas separadas, sino que el arbolado con edades distintas se mezcla entre sí (Brasnett, 1953; Davis, 1966).

El método de regulación forestal por categoría diamétrica o clases de tamaño fue previsto para bosques constituidos por rodales incoetáneos, y en este caso las clases de edad se encuentran entremezclados y no es posible la separación de ellas en áreas distintivas; de cualquier manera, pueden identificarse clases de tamaño, que aproximadamente, corresponden a periodos del turno y que, previamente referenciadas se agrupan para mostrar volúmenes separados para cada grupo existente (Brasnett, 1953).

El manejo forestal en México, como una actividad que pretende proporcionar eficientemente bienes y servicios, así como la conservación del recurso mismo, se encuentra en un estado de atraso significativo. Este obedece, parcialmente a las técnicas tradicionales que se han utilizado en la formulación de los planes de manejo. Debido a lo anterior es imperativo introducir en esta actividad el uso, relativamente nuevo, de otras técnicas de planeación para la solución del problema señalado.

Recientemente se han mencionado que los procedimientos tradicionales de regulación forestal se caracterizan por basarse en la consecución de un bosque meta (bosque normal), así como en el mantenimiento de la estructura que se asume necesaria para los objetivos del manejo sin dar flexibilidad al administrador para un manejo inteligente de las estructuras del recurso sujeto al aprovechamiento (Clutter et al, 1983; Rivero, 1984).

Las bases de estos métodos de regulación tradicional, los criterios financieros, la utilización de las técnicas de investigación de operaciones y el empleo del cómputo electrónico, han formado las premisas sobre las cuales se han desarrollado nuevos

métodos de regulación que permiten el desenvolvimiento de una amplia gama de alternativas de manejo, para optimizar el aprovechamiento del recurso bajo condiciones y objetivos específicos. De las técnicas de investigación de operaciones, la programación lineal es una herramienta sumamente útil que permite el análisis de un gran número de alternativas posibles, alternativas que a su vez son factibles de darse en la realización de una actividad. La programación lineal se ha utilizado ampliamente en el campo forestal en países con un desarrollo forestal avanzado, obteniéndose con ello un aprovechamiento más eficiente de los recursos forestales.

Programación Lineal

Matemáticamente la programación lineal es el análisis de problemas en los que se pretende maximizar o minimizar, una función lineal caracterizada por un cierto número de variables, sujetas estas a un conjunto en la forma de desigualdades lineales (Taha, 1998).

La programación lineal tiene sus orígenes en el modelo insumo-producto desarrollado por W.W. Leontief, el estado actual del conocimiento se atribuye a G.D. Dantzing, que introdujo el método simplex como un procedimiento sistemático para la solución de problemas idóneos con el uso de la programación lineal (Thierauf, 1975; Rivero, 1984, citados por Reygadas, 1988). La gama de campos de aplicación es abundante, cualquier problema lineal de optimización que se caracterice por la existencia de dos o más actividades que compitan por el uso de recursos limitados (Curtis, 1979). La programación lineal es una de las técnicas comprendida prioritariamente en el arco de la investigación de operaciones. Usualmente se le concibe como una herramienta que le permite la asignación de recursos escasos entre las actividades competitivas para un óptimo, sujetándose a un conjunto de restricciones (Hiller & Lieberinan, 1993).

La estructura del problema prototipo de programación lineal consiste en que se pretende encontrar el nivel de la actividad “j”, X_j , la cual contribuye con C_j a la medida total de efectividad Z, demanda unitariamente la cantidad “a” del recurso “i” disponible en la cuantía “b” de tal manera que la función Z tenga un óptimo y no violen las restricciones de disponibilidad de recursos (Hiller, 1974; Taha, 1976).

Aplicaciones del modelo dentro de la actividad forestal

La utilización, relativamente nueva, de técnica en la dasonomía ha tenido una amplia aceptación.

Martín y Sendak (1971) listan cerca de 200 aplicaciones de la Programación Lineal a lo largo de su bibliografía sobre la aplicación de las técnicas de investigación de operaciones en la actividad forestal. Estas aplicaciones, con mayor frecuencia, se refieren a las áreas de aprovechamiento maderable, manejo de fauna silvestre, regulación y abastecimiento forestal, ubicación de plantas y procesos de industrialización y distribución de productos, así como en análisis regionales dentro de otras áreas. En cuanto a aprovechamientos forestales maderables se le ha utilizado en todas las fases del manejo, desde el mejoramiento de árboles y reforestación hasta la regulación de masas forestales (Rivero, 1984).

Suposiciones de la programación lineal

Proporcionalidad: es una suposición sobre las actividades individuales que se considera independiente de las otras (mientras que la siguiente suposición sobre aditividad se refiere al efecto de llevar a cabo actividades en forma conjunta). Por lo tanto, considérese el caso de que sólo una de n actividades se realiza. Llámese a esta actividad k , de manera de $X_j = 0$ para toda $j = 1, 2 \dots n$ excepto para $j = k$.

Aditividad: la condición de proporcionalidad no es suficiente para garantizar que la función objetivo y las restricciones sean lineales. Si existe interacción entre algunas

actividades que puedan cambiar la medida total de efectividad o el consumo total de algún recurso, pueden surgir términos de producto cruzado. La aditividad supone que no existen interacciones de este tipo entre ninguna de las actividades. Por lo tanto, la aditividad requiere que, dados cualesquiera niveles de actividades (X_1, X_2, X_n), la medida total de efectividad y el consumo total de cada recurso debe ser igual a la suma de las cantidades correspondientes generadas por cada actividad que se lleva a cabo.

Divisibilidad: algunas variables de decisión sólo tienen significado físico cuando adquieren valores enteros. La solución óptima que se obtiene en programación lineal con mucha frecuencia no es entera. Por esto, la suposición de divisibilidad se refiere a que las unidades de cada actividad se puedan dividir en cualquier nivel fraccional, para que se permitan valores enteros de las variables de decisión. Aun cuando se requiera una solución entera, es frecuente que se aplique programación lineal. Si la solución obtenida no es entera, entonces los valores no enteros simplemente se redondean. Esto puede ser satisfactorio, en particular si las variables de decisión adquieren valores grandes, pero le dan a surgir algunos obstáculos.

Certidumbre: dice que todos los parámetros del modelo (los valores A_{ij} , B_i y C_j) son constantes conocidas. En los problemas reales, muy pocas veces se satisface por completo esta suposición. Casi siempre se formula un modelo de programación lineal para elegir un curso de acción futuro. Entonces, los parámetros que se emplean están basados en una predicción de las condiciones futuras, lo que inevitablemente introduce un cierto grado de incertidumbre (Taha, 1998).

La programación lineal es la técnica de programación matemática más ampliamente empleada para la toma de decisiones en manejo de recursos naturales (Dykstra, 1984). Un problema de programación lineal proporciona un conjunto de números X_1, X_2, X_n que maximice la función objetivo:

$$Z = \int_{j=1}^n C_j X_j \quad (8)$$

Sujeta a una serie de restricciones

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} B_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Donde

Z = valor de la medida global de efectividad

n = número de variables decisionales

m = número de restricciones

X_j = variables decisionales, niveles de la actividad j (para $j = 1, 2, \dots, n$)

C_j = coeficientes de la función objetivo (frecuentemente llamados coeficientes de costos)

correspondientes a la variable X_j . Incremento en Z que resulta al aumentar una unidad

en el nivel de la actividad j .

A_{ij} = coeficientes técnicos correspondientes a la variable x_j en la restricción i .

Cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j .

B_i = constante de la mano derecha para la restricción i . Cantidad de recurso i disponible

par asignar a las actividades (para $B_i = 1, 2, \dots, m$)

El modelo matemático en la programación lineal parte de ciertas suposiciones que permiten delimitar su aplicabilidad y lo hacen factible de procesamiento computacional. Tales suposiciones son (Hillier y Lieberman, 1977).

Aplicación 2: Forestal

En un muestreo se encuentran los datos de diámetro (d), altura (h) y volumen (v) de 29 árboles. Con estos valores genere un sistema de ecuaciones lineales de 3 x 3.

a) A través de la resolución de este sistema de ecuaciones encuentre el valor de las incógnitas (β_0 , β_1 y β_2) con el objetivo de integrarlas a un modelo de regresión lineal múltiple que sirva como herramienta para la estimación de volúmenes de árboles en pie.

b) A través del método matricial

Aplicando el método mínimo de cuadrados para obtener estimaciones de los coeficientes β_0 , β_1 y β_2 , hacemos mínima la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos de plano:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i})]^2$$

Y las ecuaciones normales resultantes:

$$\begin{aligned}\sum y &= nb_0 + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 \\ \sum x_1 y &= b_0 \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 y &= b_0 \sum x_2 + b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^2\end{aligned}$$

$$30.5140293 = 29\beta_0 + 11.278\beta_1 + 509.93\beta_2$$

$$13.6219381 = 11.278\beta_0 + 4.715924\beta_1 + 203.739\beta_2$$

$$575.309061 = 509.93\beta_0 + 203.739\beta_1 + 9303.9905\beta_2$$

Estos resultados se obtuvieron de la siguiente tabla:

1	No. Arbol	diámetro	altura	volumen	x_1^2	$x_1 * x_2$	x_2^2	$x_1 * y$	$x_2 * y$
2	1	0.368	23.45	1.0207	0.135424	8.6296	549.9025	0.37561247	23.9350878
3	2	0.44	19.98	1.2559	0.1936	8.7912	399.2004	0.55258438	25.0923543
4	3	0.4	15.7	0.8204	0.16	6.28	246.49	0.32816194	12.8803562
5	4	0.33	18.9	0.7101	0.1089	6.237	357.21	0.23434355	13.4214945
6	5	0.41	17.51	0.9089	0.1681	7.1791	306.6001	0.37264523	15.9146779
7	6	0.5	17.4	1.2210	0.25	8.7	302.76	0.61050026	21.245409
8	7	0.4	14.8	0.7018	0.16	5.92	219.04	0.28070769	10.3861847
9	8	0.38	15.79	0.5954	0.1444	6.0002	249.3241	0.22623655	9.40072413
10	9	0.25	16.13	0.3280	0.0625	4.0325	260.1769	0.08200566	5.29100527
11	10	0.23	17	0.2936	0.0529	3.91	289	0.06752573	4.99103191
12	11	0.45	19.9	1.3518	0.2025	8.955	396.01	0.60831523	26.9010514
13	12	0.42	18.13	1.3065	0.1764	7.6146	328.6969	0.54872244	23.6865188
14	13	0.35	16.41	0.9973	0.1225	5.7435	269.2881	0.34903828	16.364909
15	14	0.47	20.1	1.8411	0.2209	9.447	404.01	0.86531484	37.0060177
16	15	0.25	16.7	0.3786	0.0625	4.175	278.89	0.09465634	6.32304368
17	16	0.39	18.5	1.0390	0.1521	7.215	342.25	0.40522507	19.222215
18	17	0.65	15.8	2.0433	0.4225	10.27	249.64	1.32812018	32.2835368
19	18	0.37	19.6	0.8876	0.1369	7.252	384.16	0.32841642	17.3971943
20	19	0.53	22.8	2.3890	0.2809	12.084	519.84	1.26615328	54.4684809
21	20	0.57	21.9	2.5590	0.3249	12.483	479.61	1.45861551	56.0415431
22	21	0.4	16.5	0.8856	0.16	6.6	272.25	0.35423928	14.6123701
23	22	0.43	14.23	1.0944	0.1849	6.1189	202.4929	0.47057778	15.5728415
24	23	0.22	10.2	0.1901	0.0484	2.244	104.04	0.04182981	1.93938233
25	24	0.51	21.6	2.0990	0.2601	11.016	466.56	1.07051101	45.3392897
26	25	0.38	16.05	0.8367	0.1444	6.099	257.6025	0.31794151	13.4288455
27	26	0.25	13.96	0.4427	0.0625	3.49	194.8816	0.11067199	6.17992394
28	27	0.18	8.6	0.1417	0.0324	1.548	73.96	0.0254999	1.21832874
29	28	0.33	22.86	0.7304	0.1089	7.5438	522.5796	0.24101645	16.6958669
30	29	0.42	19.43	1.4446	0.1764	8.1606	377.5249	0.60674925	28.0693759
31	Σ	11.278	509.93	30.5140293	4.715924	203.739	9303.9905	13.6219381	575.309061

Ilustración 23 Tabla de referencia

Donde tenemos los diferentes parámetros de los 29 árboles tomado como muestra con su respectivo diámetro, altura y volumen considerando como:

$$X_1 = \text{Diámetro}$$

$$X_2 = \text{Altura}$$

$$Y = \text{Volumen}$$

En la parte de abajo se colocó las sumatorias de cada columna, para construir el sistema de ecuaciones y dar solución con el método matricial.

Se transforma nuestro sistema de ecuaciones por una matriz y se resolverá por el método de matriz inversa.

Tabla 3: Sistema de ecuaciones a matriz

β_0	β_1	β_2	=
29	11.278	509.93	30.5140293
11.278	4.715924	203.739	13.6219381
509.93	203.739	9303.9905	575.309061

Inversa de la matriz

Tabla 4: Inversa de la matriz

0.99697874	-0.43704948	-0.04507156
-0.43704948	4.12174985	-0.06630451
-0.04507156	-0.06630451	0.00402969

Multiplicando la inversa de la matriz por el resultado obtenemos los siguientes resultados:

$$\beta_0 = -1.46169803$$

$$\beta_1 = 4.66449405$$

$$\beta_2 = 0.03980372$$

Donde obtenemos los resultados de β_0 , β_1 , β_2 . Todo esto se obtiene con la herramienta de Excel donde se inserta la matriz y mediante fórmulas del mismo programa se calcula la inversa de la matriz y para el final solo multiplicamos la matriz inversa por los resultados de la matriz original y así obtener los resultados de beta.

Para reafirmar los resultados también se realizó la matriz por el método de Gauss Jordan en Excel.

Tabla 5: Matriz aumentada de coeficientes

Matriz aumentada de coeficientes			
29	11.278	509.93	30.5140293
11.278	4.715924	203.739	13.6219381
509.93	203.739	9303.9905	575.309061
1	0.38889655	17.5837931	1.05220791
11.278	4.715924	203.739	13.6219381
509.93	203.739	9303.9905	575.309061
1	0.38889655	17.5837931	1.05220791
0	0.32994869	5.42898138	1.75513733
509.93	203.739	9303.9905	575.309061
1	0.38889655	17.5837931	1.05220791
0	0.32994869	5.42898138	1.75513733
0	5.42898138	337.486883	38.756683
1	0.38889655	17.5837931	1.05220791
0	1	16.4540171	5.31942505
0	5.42898138	337.486883	38.756683
1	0.38889655	17.5837931	1.05220791
0	1	16.4540171	5.31942505
0	0	248.15833	9.87762347

1	0.38889655	17.5837931	1.05220791
0	1	16.4540171	5.31942505
0	0	1	0.03980372
1	0	11.1848826	-1.01649815
0	1	16.4540171	5.31942505
0	0	1	0.03980372
1	0	11.1848826	-1.01649815
0	1	0	4.66449405
0	0	1	0.03980372
1	0	0	-1.46169803
0	1	0	4.66449405
0	0	1	0.03980372

Donde se obtiene el mismo resultado de beta, por tanto, se valida el modelo y la estimación.

Donde se llegaron a los mismos resultados de Beta y con esos resultados se podrá realizar la primera operación donde hacemos:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i})]^2$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (1.46 + (4.66)(X_{1i}) + (0.0398)(x_{2i}))]^2$$

De manera general dicha formula se utilizará para la estimación del volumen de los árboles de cierta zona. Tomando una prueba de n número de árboles con el objetivo de calcular los parámetros β_0 , β_1 , β_2 de la ecuación, después se realiza el sistema de ecuaciones y posteriormente se resuelve por el método de matrices de Gauss. Y como ejemplo de aplicación, solamente se cambian las variables de X_1 y X_2 que son el diámetro y la altura del árbol, Esto sirve con el fin de conocer el volumen del árbol sin tener que ser cortado. O estimar el volumen de los árboles de un bosque.

Conclusión para la aplicación número 2:

La eficiencia de realizar la programación lineal nos ayuda a estimar el volumen de los árboles con solo medir su altura y su diámetro. Solo con tener una muestra del campo donde se hará la estimación.

Reducción de tiempos de producción por medio de ecuaciones lineales.

Uno de los objetivos más importantes de un ingeniero industrial es la reducción de tiempo de producción, por lo que, la utilización del estudio de tiempos es vital pues es una técnica para determinar con mayor exactitud posible, partiendo de un número de observaciones.

El álgebra lineal se utiliza directamente en la ingeniería industrial para la reducción del tiempo de producción, que es el tiempo necesario para completar la tarea, esto se analiza por medio de ecuaciones lineales.

En la ingeniería industrial se busca solamente una solución ante una problemática, sino que busca la solución que menos recursos requiera, de la forma más exacta posible, por lo tanto, las ecuaciones lineales en la ingeniería industrial son muy útiles, además, algunos sistemas ofrecen varias formas de resolver este problema, lo que puede tener un impacto en su sistema. Algo que la ingeniería industrial suele aplicar mucho esa estadística, pues en ésta se puede determinar un control de calidad, siendo esto muy importante para la carrera.

Aquí puede usar álgebra lineal para resolver todos estos problemas donde se usa la probabilidad. Existen ciertos problemas que se pueden generar durante el desempeño de la profesión como ingeniero industrial, sin embargo, existen determinadas problemáticas cuya forma más eficaz y precisa de resolverlo es otra vez de matrices, y el álgebra lineal las matrices nos ofrecen una gran cantidad de métodos para obtener dichos resultados.

Se puede decir que el álgebra lineal es muy importante para Para los ingenieros industriales pues enseñan a pensar de una manera mucho más lógica y logarítmica, la cual permite resolver problemas de otra perspectiva de una forma mucho más precisa y que cuando se usan métodos tradicionales.

Todo proceso industrial se puede reducir y procesar como un conjunto de matrices, y a través de ellas relacionar y controlar los diferentes procesos de la planta.

Aplicación 3: Industrial

La compañía “Pérez” fabrica y vende radios *fm* y *am* la producción de un radio *am* requiere 4 horas y un radio de *fm* requiere de 6 horas. En la planta existen un total disponible de 96 horas – hombres semanales de producción. Los administradores de la empresa han determinado que lo máximo que se puede vender a la semana son 30 radios *am* y 20 *fm*, la contribución de las utilidades de cada radio *am* se vende en 6 dólares y cada radio *fm* contribuye con 12 dólares a las utilidades.

¿Qué cantidad de cada tipo de radio debe fabricar la compañía cada semana para maximizar sus utilidades?

¿Podría la compañía incrementar sus utilidades aumentando su capacidad de producción?

Resolver el planteamiento mediante el método simplex

Definición de la función objetivo:

$$\text{Maximizar } Z = 6x_1 + 12x_2$$

Definición de variables:

$$x_1 = \text{Radios Am}$$

$$x_2 = \text{Radios Fm}$$

Restricciones:

$$4x_1 + 6x_2 \leq 96$$

$$x_1 \leq 30$$

$$x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Tabla 6: Integración de la tabla simplex

Z	X_1	X_2	LD
1	6	12	0
0	4	6	96
0	1	0	30
0	0	1	20

Convertir las inecuaciones a 0; Incluye realizar despeje con la ecuación efectiva

Tabla 7: Tabla simplex con variables de holgura

Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	LD
1	-6	-12	0	0	0	0
0	4	6	1	0	0	96
0	1	0	0	1	0	30
0	0	1	0	0	1	20

Tomaremos la primera tabla donde tenemos nuestra función objetivo y nuestras restricciones y se plasmará en Excel donde se resolverá por método simplex.

	A	B	C	D	E
1	Z	X1	X2	LD	
2	1	6	12	0	
3	0	4	6	96	
4	0	1	0	30	
5	0	0	1	20	
6	0	0	1	20	
7					
8					
9					

Tabla 8: Organización de datos en Excel para tabla simplex

Teniendo nuestra tabla se anotará la función objetivo y restricciones de acuerdo con las casillas x_1 , x_2

fo	0		
restriccion	0 <=	96	
restriccion	0 <=	30	
restriccion	0 <=	20	

Tabla 9: Programación de la función objetivo y restricciones

Se anotará la función objetivo y nuestras restricciones de acuerdo con las casillas obteniendo las fórmulas de la siguiente manera para el programa excel:

$$fo = ((6*B2) + (12*C2))$$

$$\text{Restricción 1} = (4*B2) + (6*C2)$$

$$\text{Restricción 2} = (1*B2)$$

$$\text{Restricción 3} = (1*C2)$$

Como siguiente paso iremos al apartado de datos donde estará *Solver* para poder realizar nuestro método simplex

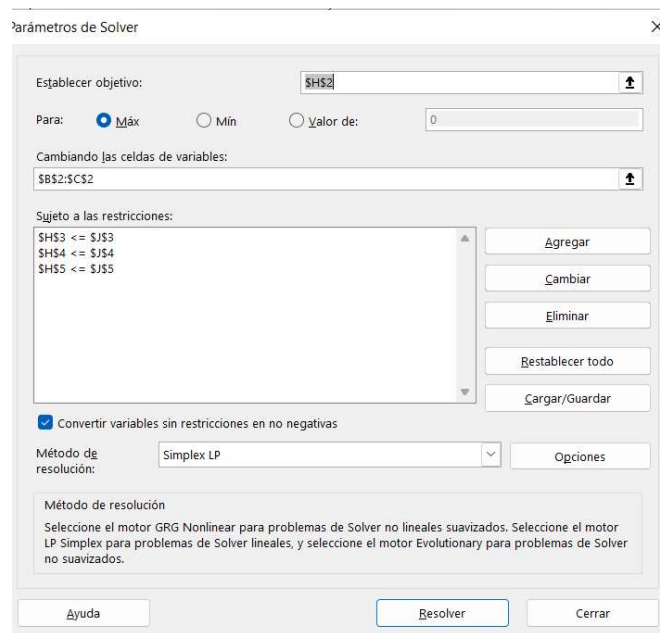


Ilustración 23 Ejecución del programa Solver

En *Solver* la pestaña se llama parámetros, donde se indicará que casilla es la función objetivo, si es para maximizar o minimizar. También se selecciona a que restricciones está sujeta nuestra función objetivo y por último nuestro método de resolución que será simplex.

Cuando resolvemos cambiaran los valores de nuestras restricciones y nuestra función objetivo quedando con los siguientes valores.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Z	X1	X2	LD							
2		0	16				fo	192			
3	1	6	12	0			restriccion	96 <=		96	
4	0	4	6	96			restriccion	0 <=		30	
5	0	1	0	30			restriccion	16 <=		20	
6	0	0	1	20							
7											

Tabla 10 Solución del modelo con Solver

Interpretando y respondiendo las preguntas al ejercicio podemos decir que la empresa “Pérez” deberá fabricar 16 radios FM y dejando de producir am respetando las restricciones que determinamos. Y también incrementando sus utilidades.

Conclusión para la aplicación número 3:

El método simplex nos ayuda a reducir tiempos en toma de decisiones basados en un sistema de ecuaciones donde ocupamos función objetivo y restricciones de acuerdo con el problema.

Análisis de la optimización lineal para el aprovechamiento de los terrenos de cultivos.

Los fundamentos de las ciencias biológicas aplicados juntamente con el manejo sostenible de los recursos naturales para la producción agropecuaria se constituyen en un pilar fundamental en la formación del ingeniero agrícola, permitiéndole realizar desarrollos tecnológicos adecuados a las diferentes explotaciones agrícolas y pecuarias. Un aspecto que identifica al ingeniero agrícola es su capacidad para aplicar la ingeniería al manejo y conservación de productos agrícolas y a las explotaciones pecuarias, los cuales constituyen sistemas “vivos” que requieren un conocimiento básico de las ciencias biológicas, sin lo cual no sería posible obtener una alta productividad en estos procesos de manera sostenible.

Usando diferentes variables de la optimización lineal, estimamos que se podría encontrar información necesaria para optimizar la siembra.

Tales como balances negativos de nutrientes y de materia orgánica, erosión, contaminación y la reducción de la biodiversidad. Según cita Casas (1998), entre las principales causas del deterioro progresivo de los suelos, se encuentra el reemplazo de los cultivos tradicionales como el maíz, por otros de mayor atractivo económico como la soja. Esto trajo como consecuencia una menor incorporación de residuos postcosecha y por otro lado la posibilidad de combinar el ciclo del cultivo para obtener dos cosechas en un año, lo que implica una alta tasa de extracción de nutrientes y agua del suelo. Asimismo, Casas (1998) menciona como causa de la degradación de los suelos a la elevada extracción de nutrientes, especialmente nitrógeno y fósforo, sin la reposición correspondiente por intermedio de fertilizantes químicos, fundamentalmente con la difusión de híbridos de alto potencial de rendimiento, siendo muy bajos los niveles de fertilización.

Para pensar en sistemas agrícolas que se sustenten en el largo plazo, es necesario dar respuesta a esta problemática productiva (Barbagelata y Melchiori, 2007).

La programación lineal es la técnica de programación matemática más ampliamente empleada para la toma de decisiones en manejo de recursos naturales (Dykstra, 1984). Un problema de programación lineal proporciona un conjunto de números $x_1, x_2, \dots, x_n$ que maximice la función objetivo:

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j \quad (8)$$

Sujeta a una serie de restricciones

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} B_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Donde

X = valor de la medida global de efectividad

n = número de variables decisionales

m = número de restricciones

X_j = variables decisionales, niveles de la actividad j (para $j = 1, 2, \dots, n$)

C_j = coeficientes de la función objetivo (frecuentemente llamados coeficientes de costos)

correspondientes a la variable X_j . Incremento en Z que resulta al aumentar una unidad

en el nivel de la actividad j .

A_{ij} = coeficientes técnicos correspondientes a la variable x_j en la restricción i .

Cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j .

B_i = constante de la mano derecha para la restricción i . Cantidad de recurso i disponible

par asignar a las actividades (para $B_i = 1, 2, \dots, m$)

Aplicación 4: Agricultura

Un agricultor desea conocer el número de plantas de maíz que actualmente se encuentran en su terreno para calcular la cantidad de fertilizante que debe adquirir para aplicarle al cultivo, el cual tiene la forma de un polígono regular con las dimensiones que se muestran en la ilustración 25: terreno de cultivo de maíz.

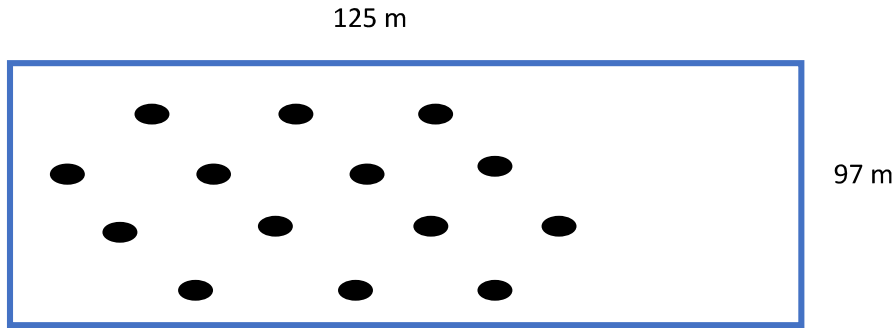


Ilustración24: Terreno de cultivo de maíz

Cabe mencionar que dicho terreno cuenta con un perímetro de 444 m, la distancia entre líneas de cultivos (surcos) es igual a 55 cm y la distancia entre cada planta es de 65 cm.

El agricultor aplica dos fertilizantes: $\text{CH}_4\text{N}_2\text{O}$ (urea) y $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ (sulfato) con las siguientes proporciones = 78g. de fertilizante a cada planta de maíz. Si cada costal de fertilizante es de 50 kg, cabe mencionar que el costo por costal de urea es de \$820.00, para sulfato de amonio es de \$620.00, determinar

- ¿cuántos costales de cada fertilizante debe comprar? 11.45 costales
- ¿cuánto tiene que invertir el agricultor para fertilizar su cultivo? \$16,488.00

Establecer ecuaciones para determinar el área del terreno, tota de surcos, total de plantas de maíz presentes en el terreno y costo de inversión para los fertilizantes.

Datos

$$\text{Formula } A = b * h \quad (9)$$

$$x = 125 \text{ m}$$

$$y = 97 \text{ m}$$

$$A = 125 * 97 = 12,125 \text{ m}^2$$

Para determinar el número de filas por surco se realiza lo siguiente:

Convertir los metros a centímetros para trabajar con la misma unidad de medida

$$97 \text{ m} = 9,700 \text{ cm}$$

Planteando la ecuación queda de la siguiente forma: $55x = 9,700$

Despejando se obtiene el valor de X

$$x = \frac{9,700}{55} = \mathbf{176.36 \text{ numeros de surcos}}$$

Para determinar el número de plantas por surco se realiza lo siguiente:

$$125 \text{ m} = 12,500 \text{ cm}$$

$$65 y = 12,500$$

$$y = \frac{12,500}{65} = \mathbf{192.30 \text{ plantas por surco}}$$

Determinar el número de plantas existentes en el terreno

$$z = \text{numero total de plantas en el terreno}$$

$$z = x * y$$

$$z = 176.36 * 192.30 = \mathbf{14,684.028 \text{ plantas existentes en el terreno}}$$

Para cada planta se requiere de 75 g. de fertilizante

$$u + s = 78 \text{ g.}$$

$$u = \frac{78}{2} = 39$$

$$s = \frac{78}{2} = 39$$

Determinar el total de cada fertilizante (TF)

$$tu = 39 * 14,684.028 = 572677.092 \text{ g.}$$

$$572.677 \text{ kg por cada fertilizante}$$

$$c = \frac{572.677}{50} = \mathbf{11.45 \text{ costales de tu y de ts}}$$

$$ct = \text{costo total}$$

$$ctu = 11.45 * \$820.00 = \$9,389.00$$

$$cts = 11.45 * \$620.00 = \$7099.00$$

$$ts = 39 * 14,684.028 = 572677.092 \text{ g.}$$

$$TF = tu + ts$$

$$TF = 11.45 + 11.45 = 22.90 \text{ costales de fertilizante}$$

$$ct = \$9,389.00 + \$7099.00 = \$16,488.00$$

Conclusión de la aplicación número 4:

El agricultor debe comprar 11.45 costales de cada fertilizante (urea y sulfato), con una inversión total de \$16,488.00 pesos, cabe mencionar que de esta forma el agricultor tendrá las proporciones exactas para cada planta misma que garantizará un crecimiento uniforme de las plántulas de maíz.

Distribución de temperatura en estado estacionario en una placa plana.

La mecánica es la rama de la ingeniería que se dedica al estudio, diseño y construcción de elementos maquinarias y cualquier servicio mecánico para ofrecerlo al servicio de la humanidad.

es indispensable en la sociedad ya que contribuye de manera directa con el desarrollo político y económico de las naciones por medio de la producción de riqueza y bienestar social. La manufactura industrial, automatización y robótica desempeñan un papel crucial en este desarrollo.

En particular, la robótica ha tenido un importante progreso en las últimas décadas gracias al constante apoyo de la Ingeniería Mecánica. Esta disciplina, entendida como el arte de dirigir las grandes fuentes de poder de la naturaleza para el uso y convivencia del hombre, reúne un extenso conjunto de conocimientos científicos y técnicos para su posible aplicación.

Dentro de estos fundamentos toman importante relevancia los soportes matemáticos, en especial, los proporcionados por el dominio del álgebra lineal. Este campo ha logrado un amplio desarrollo en diversas disciplinas gracias al uso de las computadoras y al aumento general en las aplicaciones matemáticas en áreas que por tradición no eran técnicas.

La Transferencia de calor es la energía en tránsito debido a una diferencia de temperaturas en un cuerpo o entre cuerpos diferentes.

Siempre que exista una diferencia de temperatura, la energía se transfiere de la región de mayor temperatura a la de menor temperatura de acuerdo con los conceptos de la Termodinámica, la energía que se transfiere como resultado de una diferencia de temperatura es el calor.

- Las leyes de la termodinámica tratan de la transferencia de energía, pero sólo se aplican a sistemas que están en equilibrio (pueden utilizarse para predecir la cantidad de energía requerida para modificar un sistema de un estado de equilibrio a otro), pero no sirven para predecir la rapidez (tiempo) con que pueden producirse estos cambios.

- La transferencia de calor, complementa los principios termodinámicos, proporcionando métodos de análisis que permitan predecir esta velocidad de transferencia térmica.

Aplicación 5: Mecánica

Un aspecto importante en el estudio de transferencia de calor es determinar la distribución de temperatura en estado estable sobre la placa delgada cuando se conoce la temperatura del borde. La placa mostrada en la figura representa la sección transversal de una viga de metal con flujo de calor insignificante en la dirección perpendicular a la placa.

¿Cuáles son las temperaturas en cada uno de los nodos?

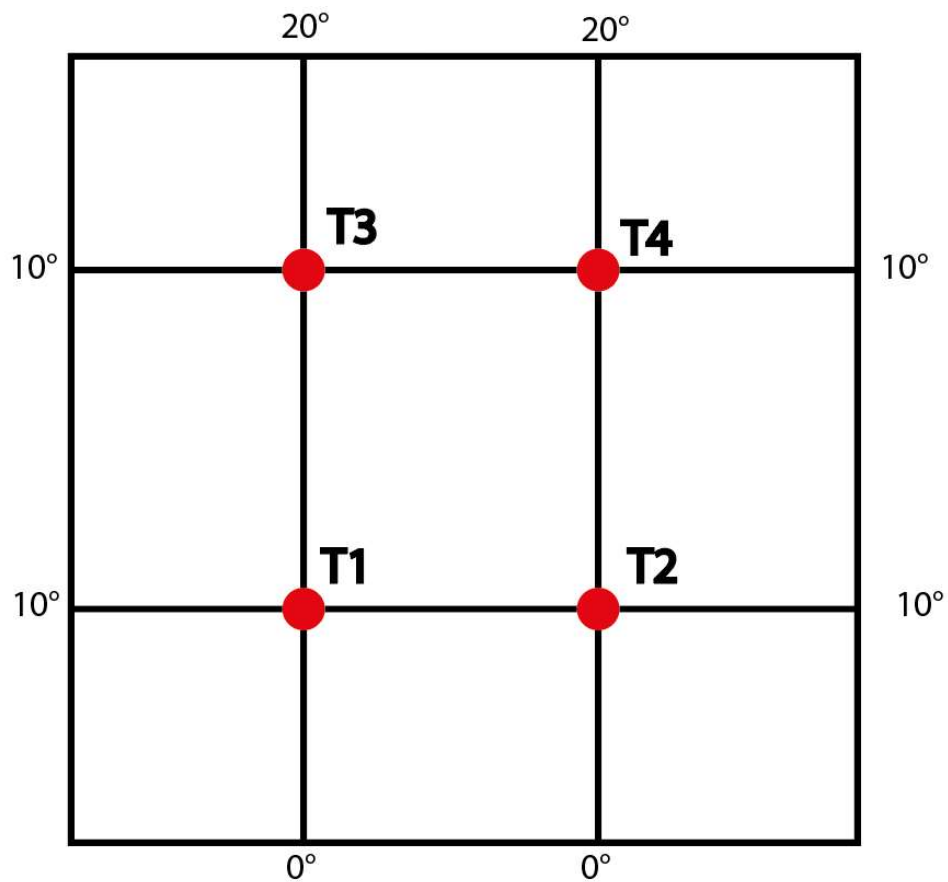


Ilustración 25 Esquema de temperaturas de la placa

Entonces para obtener las temperaturas en los nodos de las placas se tiene que sumar todas las temperaturas entrantes de dicho nodo.

De tal manera que se tiene que sacar las ecuaciones de todos 4 nodos:

$$T_1 = \frac{10 + T_3 + T_2 + 0}{4}$$

$$4T_1 - T_2 - T_3 = 10$$

$$T_2 = \frac{T_1 + T_4 + 10 + 0}{4}$$

$$-T_1 + 4T_2 - T_4 = 10$$

$$T_3 = \frac{10 + 20 + T_4 + T_1}{4}$$

$$-T_1 + 4T_3 - T_4 = 30$$

$$T_4 = \frac{T_3 + 20 + 10 + T_2}{4}$$

$$-T_2 - T_3 + 4T_4 = 30$$

Teniendo las ecuaciones de los nodos podemos estructurar la matriz.

$$4T_1 - T_2 - T_3 = 10$$

$$-T_1 + 4T_2 - T_4 = 10$$

$$-T_1 + 4T_3 - T_4 = 30$$

$$-T_2 - T_3 + 4T_4 = 30$$

Donde la variable no exista será igual a 0 para colocarla en la matriz de tal manera que se estructura así:

4	-1	-1	0	10
-1	4	0	-1	10
-1	0	4	-1	30
0	-1	-1	4	30

Tabla 11: Temperaturas de las placas

Se resolverá por el método de matriz inversa desde Microsoft Excel con el objetivo de reducir tiempos y aplicando los comandos:

=INVERSA

Se selecciona las casillas de la matriz que se le obtendrá la inversa. Para obtener los siguientes resultados:

0.291666667	0.083333333	0.083333333	0.041666667
0.083333333	0.291666667	0.041666667	0.083333333
0.083333333	0.041666667	0.291666667	0.083333333
0.041666667	0.083333333	0.083333333	0.291666667

Tabla12: Inversa de la matriz de temperatura de placas

Para concluir con la inversa de la matriz, se multiplica la matriz inversa con el resultado de la matriz original resaltada con el color amarillo y todo esto se aplica con el comando:

=MMULT

Obteniendo los valores finales de la temperatura de los nodos:

7.5	T_1
7.5	T_2
12.5	T_3
12.5	T_4

Tabla 13: Temperatura de los nodos

Conclusión para la aplicación número 5:

Para concluir podemos destacar cuanto nos reduce el tiempo las herramientas como Microsoft Excel para la elaboración de matrices y sistemas de ecuaciones, aprender a utilizarlas nos permitirá realizar más actividades en corto tiempo.

Conclusión

El álgebra lineal es una ciencia que nos permite avanzar en ciertas problemáticas desde diferentes perspectivas y con varios resultados para aplicarlos en diferentes campos.

Permite desarrollar conocimiento, promover características como la claridad, el orden, la relación, la lógica, la secuenciación, la coherencia, entre otras para el desarrollo de nuestras actividades.

El álgebra lineal está siendo aplicada con mayor importancia en el campo de la ingeniería, electrónica y administración, forestal. Resolviendo problemas de aplicación.

Bibliografía

- Carrasco Venegas, L. (2011). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Lima.
- Curtis, P. C. (1979). *CALCULO DE VARIAS VARIABLES CON ALGEBRA LINEAL*. México: Limusa.
- Hiller, F., & Lieberinan, G. (1993). *Introducción a la investigación de operaciones* (5ª edición ed.). Mc Graw Hill.
- Kolman, B. y Hill, D. (2006). *Álgebra lineal: fundamentos y aplicaciones*. Pearson.
- Taha, H. A. (1998). *Investigación de operaciones una introducción* (segunda ed.). México: Uno Representaciones y servicios de ingeniería, S.A.
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson.
- Strang, G. (2012). *Álgebra lineal: una introducción moderna*. Cengage Learning.
- Hohenwarter, M. (2021). Manual de GeoGebra. <https://wiki.geogebra.org/es/Manual>. Lay, C. (2012).