



**GOBIERNO DE
MÉXICO**

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



**DEPARTAMENTO DE
SISTEMAS Y COMPUTACIÓN**

**Ingeniería en Tecnologías de la Información y
Comunicaciones**

Elaboración de Apuntes

Apuntes de la asignatura Matemáticas Discretas I

Nombre del Docente:

MAYRA PATRICIA GARDUÑO GAFFARE

**No dictamen:
SS-2-173/2023**

Revisores:

**Diana Guadalupe Rojas García
Elsa Arzate Hernández
Benjamín López González**

29 febrero 2024

Contribución académica

El presente trabajo se realiza dentro del marco de la modalidad B.1.2 de elaboración de apuntes en periodo sabático. La asignatura de trabajo es Matemáticas Discretas I y se imparte en el programa de la Ingeniería en Tecnologías de la Información y Comunicaciones, en los Institutos Tecnológicos Nacionales de México.

Las matemáticas discretas desempeñan un papel relevante en la formación del ingeniero en tecnologías de la información y comunicaciones (TIC's). Esta disciplina matemática se centra en el estudio de estructuras y objetos que son finitos o que pueden ser contados, en contraste con las matemáticas continuas que se ocupan de conceptos infinitos y continuos. Aunque puede parecer que las matemáticas discretas están alejadas de los objetivos educativos específicos de los ingenieros en TICs, su contribución es esencial en varias áreas clave.

En primer lugar, las matemáticas discretas proporcionan las bases teóricas y prácticas para la representación, manipulación y procesamiento de datos en los diferentes campos de la informática y la computación. Los sistemas numéricos por ejemplo permiten representar y almacenar datos de diversas naturalezas, como números enteros, fracciones, números reales, caracteres y otros símbolos. Los principales sistemas numéricos en el mundo de la informática son el binario, octal y hexadecimal, comprender cómo se representan y manipulan los datos en estos sistemas es esencial para el diseño de algoritmos y la programación de sistemas informáticos.

Por otro lado, la aritmética computacional es esencial para el entendimiento del funcionamiento de las computadoras, comprender cómo se realizan sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en los diferentes sistemas numéricos, permite comprender cómo se llevan a cabo las operaciones aritméticas en computadoras y sistemas digitales. Otro campo en donde los sistemas numéricos juegan un papel importante es en el almacenamiento de la información, las direcciones de memoria se representan en forma numérica. El sistema hexadecimal, por ejemplo, se utiliza ampliamente para representar y manipular las direcciones de memoria de manera eficiente. Los ingenieros en TICs deben tener un conocimiento profundo de estos sistemas para trabajar con eficacia en el diseño y la implementación de sistemas de memoria y gestión de direcciones.

Un segundo tema que considera la asignatura de matemáticas discretas I, es la lógica proposicional, esta es la base de la programación y desarrollo de algoritmos. Los condicionales y las estructuras de control, como los bucles y las sentencias "if-else", se basan en evaluaciones lógicas que determinan si se ejecuta un determinado bloque de código. La lógica proposicional permite expresar y evaluar condiciones lógicas para guiar el flujo de ejecución de un programa y tomar decisiones en función de los valores lógicos.

El algebra Booleana como un tercer tema, permite mostrar la utilidad de la lógica en el diseño y la verificación de circuitos digitales. Los circuitos digitales, presentes en computadoras, sistemas embebidos y otros dispositivos electrónicos, están compuestos por compuertas lógicas que operan con valores lógicos "verdadero" (1) y "falso" (0). La lógica proposicional permite describir y analizar el comportamiento de estos circuitos mediante expresiones lógicas y tablas de verdad, lo que facilita su diseño y su correcta implementación.

Un cuarto tema que considera la asignatura a desarrollar son los conjuntos, relaciones y funciones. Los conjuntos permiten representar y organizar datos de manera estructurada. En programación, los conjuntos se utilizan para almacenar y manipular colecciones de elementos de manera eficiente. Por ejemplo, los conjuntos pueden utilizarse para almacenar listas de contactos, registros de bases de datos, datos de entrada/salida, entre otros. Mediante los conjuntos, se realizan operaciones de búsqueda y filtrados de manera eficiente, utilizando operaciones como la intersección, la unión, la diferencia y la pertenencia, los conjuntos permiten realizar búsquedas rápidas y filtrar datos de acuerdo con ciertos criterios. En muchas aplicaciones informáticas, como los sistemas de búsqueda y recuperación de información, los conjuntos son utilizados para encontrar resultados relevantes y filtrar datos basados en múltiples condiciones.

Finalmente, las relaciones y las funciones se utilizan en el diseño y análisis de redes y protocolos de comunicación. Por ejemplo, en la teoría de grafos, se utilizan relaciones entre nodos y aristas para modelar y analizar redes de comunicación. Además, las funciones matemáticas se utilizan en la modulación y demodulación de señales, codificación y decodificación de información, y otras técnicas para el procesamiento y transmisión eficiente de datos en redes de comunicaciones. En el contexto de las bases de datos, las relaciones se utilizan para modelar y organizar

datos de manera estructurada en bases de datos relacionales. Por ejemplo, las tablas, las claves primarias y externas se utilizan para establecer relaciones entre los datos y garantizar la integridad y consistencia de la información. Las bases de datos relacionales son ampliamente utilizadas en aplicaciones informáticas para almacenar y acceder a grandes volúmenes de datos de manera eficiente.

Basado en este análisis de las temáticas de la materia, se puede concluir que la asignatura en cuestión desempeña un papel crucial al aportar conocimientos, habilidades y competencias que son esenciales para la formación integral de los estudiantes y para su inserción en el ámbito laboral o académico una vez finalizados sus estudios.

Tabla de contenido

Introducción	1
TEMA I. Sistemas numéricos	3
1.1 Tipos de sistemas numéricos	3
1.1.1 Representación de un número en diferentes bases	3
1.2 Conversiones entre sistemas numéricos	6
1.2.1 Conversión de un número de cualquier base a base diez	6
1.2.2 Conversión de base diez a cualquier base	8
1.2.3 Conversión entre números de cualquier base	10
1.2.4 Conversión de binario a decimal	14
1.2.5 Conversiones directas entre sistemas potencias de dos	16
1.3 Operaciones básicas	20
1.3.1 Suma	21
1.3.2 Resta	26
1.3.3 Multiplicación	31
1.3.4 División	40
1.4 Aplicaciones de los sistemas numéricos en la computación	44
TEMA 2. Lógica Proposicional	47
2.1 Argumentos y tipos de proposiciones lógicas	47
2.1.1 Definición de proposición	47
2.2 Proposiciones compuestas	49
2.3 Evaluación de expresiones	50
2.3.1 Representación simbólica de proposiciones	50
2.3.2 Operadores lógicos	56
2.3.3 Tablas de verdad	59
2.3.4 Tautología, contradicción y contingencia	67
2.4 Algebra declarativa	68

2.5 Reglas de Inferencia.....	70
2.5.1 Inferencia lógica	70
2.5.2 Leyes de inferencia	70
2.5.3 Equivalencias lógicas	72
2.5.3 Demostraciones mediante inferencia	75
2.6 Cálculo de predicados	83
2.6.1 Elementos de la lógica de predicados	84
2.6.2 Simbolización de expresiones	85
2.7 Inducción matemática.....	93
TEMA III. Álgebra Booleana.....	99
3.1 Teoremas y postulados	99
3.2 Optimización de expresiones booleanas	101
3.2.1 Características de las expresiones booleanas	101
3.2.2 Simplificación de expresiones booleanas	102
3.3 Compuertas lógicas	106
3.3.1 Diagramas de compuertas	106
3.3.2 Implementación de expresiones con compuertas lógicas.	106
TEMA IV. Conjuntos y Relaciones	113
4.1 Representación y operaciones de conjuntos	113
4.1.1 Definición de conjuntos	113
4.1.2 Nomenclatura de los conjuntos	113
4.1.3 Representación de un conjunto	113
4.1.4 Tipos de conjuntos	115
4.1.5 Operaciones de conjuntos.....	118
4.2 Propiedades de las relaciones.....	137
4.2.1 Definición de relación	137
4.2.2 Producto cartesiano.....	142

4.2.3 Propiedades de las relaciones	143
4.2.4 Representación de relaciones	149
4.3 Relaciones de orden parcial	153
4.4 Diagramas de Hasse	154
4.5 Representación de funciones	159
4.5.1 Definición de función	159
4.5.2 Tipos de las funciones	161
Referencias	197

Introducción

La elaboración de apuntes de asignaturas de los programas educativos del Tecnológico Nacional de México, es un proceso fundamental para el desarrollo y crecimiento de la institución. El desarrollo de estos proyectos no solo beneficia a los docentes involucrados, sino que también tiene un impacto positivo en la calidad educativa que se ofrece a los estudiantes a través de sus instituciones.

Personalmente, el proceso de la elaboración de los apuntes implicó en mí una revisión crítica de los contenidos y una reflexión sobre la mejor manera de presentarlos. La profundización en la comprensión de los temas me permitió identificar posibles vacíos o áreas de mejora, que contribuyeron a actualizar mis conocimientos.

Como autor de los apuntes de Matemáticas Discretas, mi objetivo principal fue crear un recurso que sea de gran utilidad para los maestros que imparten esta asignatura. Estos apuntes están diseñados para servir como una guía completa del contenido, proporcionando una estructura clara y detallada del temario a cubrir. Se espera que los maestros encuentren en ellos una herramienta invaluable para la planificación de sus clases, asegurando que se aborden todos los temas importantes de manera efectiva.

La claridad y precisión en la transmisión del conocimiento es un gran reto para los docentes en el aula, es por ello por lo que estos apuntes buscan ser una referencia rápida y útil durante la preparación de las lecciones y al responder preguntas de los estudiantes. Se han incluido ejemplos y ejercicios que ayudarán a los maestros a explicar conceptos complejos de forma clara y concisa, facilitando así la enseñanza de temas difíciles.

Los ejemplos y ejercicios incluidos pueden ser utilizados durante las clases para ilustrar conceptos y ayudar a los estudiantes a comprender mejor los temas. Además, los apuntes pueden servir como base para la creación de exámenes y tareas, facilitando a los maestros la evaluación del entendimiento de los estudiantes sobre los temas tratados.

Un punto importante que destacar es también que los apuntes pueden ser personalizados por los maestros según sus necesidades y las de sus estudiantes. Se

pueden agregar ejemplos adicionales, explicaciones más detalladas o ejercicios complementarios para adaptar el contenido al estilo de enseñanza y al nivel de comprensión de sus alumnos.

Finalmente, deseo con este material, proporcionar a los maestros una herramienta integral que facilite su labor docente y mejore la experiencia de aprendizaje de los estudiantes en la materia de Matemáticas Discretas. Espero sinceramente que estos apuntes cumplan con estas expectativas y sean de gran utilidad en el aula.

TEMA I. Sistemas numéricos

1.1 Tipos de sistemas numéricos

1.1.1 Representación de un número en diferentes bases

Cualquier número de un sistema numérico posicional se representa de manera general mediante la siguiente expresión:

$$N_B = \dots + S_3B^3 + S_2B^2 + S_1B^1 + S_0B^0 + S_{-1}B^{-1} + S_{-2}B^{-2} + \dots$$

Donde:

S son los coeficientes

B es la base del sistema

Por lo que un número en la base considerada se escribe:

$$\dots S_3S_2S_1S_0.S_{-1}S_{-2}$$

Por ejemplo, si se trata del sistema decimal o base 10 la representación general se explica de la siguiente manera:

Consideremos el siguiente número base 10, $N_{10} = 4782.32$.

Esta cantidad puede representarse mediante la suma de estos seis números:

$$N_{10} = 4000 + 700 + 80 + 2 + 0.3 + 0.02$$

La misma cantidad también puede representarse mediante:

$$N_{10} = 4(1000) + 7(100) + 8(10) + 2(1) + 3(0.1) + 2(0.01)$$

Expresando el número con potencias de 10 tenemos:

$$N_{10} = 4(10)^3 + 7(10)^2 + 8(10)^1 + 2(10)^0 + 3(10)^{-1} + 2(10)^{-2}$$

En general la forma común en base 10 de los números decimales es:

$$N_{10} = \dots + S_310^3 + S_210^2 + S_110^1 + S_010^0 + S_{-1}10^{-1} + S_{-2}10^{-2} + \dots$$

Notar que:

- S representa un símbolo cualquiera de los dígitos del sistema en base 10.
- Las potencias de la base van decreciendo hacia la derecha.

- Los subíndices de las S coinciden con los exponentes del 10.
- El punto decimal ha desaparecido.

La tabla 1.1 muestra el conjunto de símbolos que forman los sistemas numéricos de la base dos a la base dieciséis. Es importante establecer que los sistemas, binario, octal y hexadecimal son los sistemas más importantes dentro del mundo de la computación incluyendo el sistema decimal dado que es el utilizado en nuestros cálculos cotidianos.

Tabla 1.1 Conjuntos de símbolos de los 15 primeros sistemas numéricos posicionales.

BASE	NOMBRE	SIMBOLOS
2**	Binario	01
3	Ternario	012
4	Cuaternario	0123
5	Quinario	01234
6	Hexal	012345
7	Septal	0123456
8**	Octal	01234567
9	Nonario	012345678
10**	Decimal	0123456789
11	Undecimal	0123456789A
12	Duodecimal	0123456789AB
13	Tridecimal	0123456789ABC
14	Tetradecimal	0123456789ABCD
15	Pentadecimal	0123456789ABCDE
16**	Hexadecimal	0123456789ABCDEF

Notar que:

- El número de símbolos de un sistema es igual a la base.
- El símbolo de mayor valor en un sistema es una unidad menor que la base del sistema.
- A partir de la base once se utilizan letras para representar los números del 10 al 15 por lo que siempre que se tenga un valor entre 10 y 15 este se sustituirá por la letra correspondiente: $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$, $E = 14$, $F = 15$.

Un número es correcto si se forma de símbolos permitidos por la base.

Ejemplo

- 38702_9 es un número correctamente escrito ya que el dígito más alto es el 8 y este es un símbolo permitido en la base nueve.

- 38702_8 no es un número correcto ya que la base ocho no acepta el 8, el dígito mayor permitido por la base es el 7.
- Un mismo número puede ser de base diferente, el 38702 es correcto también en cualquiera de las siguientes bases, pero no podrá ser de una base menor a 9.

38702_{10}

38702_{13}

38702_{15}

38702_{11}

38702_{14}

38702_{16}

38702_{12}

Ejercicios de aprendizaje

Decir si los siguientes números están correctamente escritos:

a) 302514_5

No es un número correcto ya que el valor máximo que acepta la base 5 es el 4.

b) $D4E0AC_{16}$

Es un número correcto pues todos los dígitos están permitidos por la base.

c) 66666_8

Es un número correcto ya que el 6 es un número permitido por la base 8.

d) $B931A5_{11}$

No es un número correcto ya que la B no es un número permitido por la base once.

e) 8257106_{14}

Es un número correcto ya que todos los dígitos están permitidos por la base catorce.

1.1 Ejercicios de practica

Decir si los siguientes números son correctos justificando su respuesta:

a) $B731CA29_{14}$

b) 110010101_5

c) $7ECGABF_{16}$

d) 3256014_7

e) $D6B2C83_{13}$

1.2 Conversiones entre sistemas numéricos

Un número de una base cualquiera puede convertirse a cualquier otra base. Este proceso requiere de dos pasos, primero, el número base cualquiera N_B se convierte a base diez (N_{10}), y, a partir del número N_{10} , éste se convierte al N_B deseado. Dado esto, iniciaremos estudiando los procesos por separado.

1.2.1 Conversión de un número de cualquier base a base diez

La conversión se realiza mediante dos pasos:

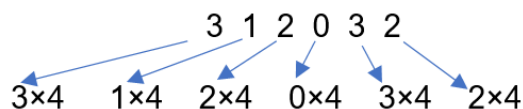
1. Se multiplica cada dígito del número a convertir por la base de éste, elevada a la potencia de la posición correspondiente.
2. Finalmente se suman los resultados de los productos para obtener el número convertido a base diez.

Ejemplo

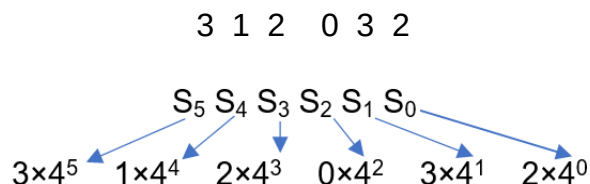
Se desea convertir el número $N_4 = 312032_4$ a base 10.

Resolución detallada:

Se multiplica cada dígito por la base 4.



Se eleva la base según la posición del dígito correspondiente:



Cada producto se suma:

$$3 \times 4^5 + 1 \times 4^4 + 2 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 2 \times 4^0$$

Se desarrolla cada termino:

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 \times 4^5 & + & 1 \times 4^4 & + & 2 \times 4^3 & + & 0 \times 4^2 & + & 3 \times 4^1 & + & 2 \times 4^0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 3 \times 1024 & + & 1 \times 256 & + & 2 \times 64 & + & 0 \times 16 & + & 3 \times 4 & + & 2 \times 1 \\
 \hline
 3072 & + & 256 & + & 128 & + & 0 & + & 12 & + & 2 = 3470
 \end{array}$$

Obteniendo como resultado:

$$312032_4 = 3470_{10}$$

Ejercicios de aprendizaje

Convertir los siguientes a base 10:

a) 325145_6

Solución:

$$3 \times 6^5 + 2 \times 6^4 + 5 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 4 \times 6^1 + 5 \times 6^0$$

$$3 \times 7776 + 2 \times 1296 + 5 \times 216 + 1 \times 36 + 4 \times 6 + 5 \times 1$$

$$23328 + 2592 + 1080 + 36 + 24 + 5 = 27065$$

$$325145_6 = 27065_{10}$$

b) $2B4DA_{15}$

Solución:

$$2 \times 15^4 + B \times 15^3 + 4 \times 15^2 + D \times 15^1 + A \times 15^0$$

$$2 \times 50625 + B \times 3375 + 4 \times 225 + D \times 15 + A \times 1$$

$$101250 + 37125 + 900 + 195 + 10 = 139480$$

$$2B4DA_{15} = 139480_{10}$$

c) $32E7FCA_{16}$

Solución:

$$1 \times 16^6 + 2 \times 16^5 + E \times 16^4 + 7 \times 16^3 + F \times 16^2 + C \times 16^1 + A \times 16^0$$

$$1 \times 16777216 + 2 \times 1048576 + E \times 65536 + 7 \times 4096 + F \times 256 + C \times 16 + A \times 1$$

$$16777216 + 2097152 + 917504 + 28672 + 3840 + 208 + 10 = 19824602$$

$$32E7FCA_{16} = 19824602_{10}$$

1.2 Ejercicios de práctica

Resolver las siguientes conversiones de base cualquiera a base 10:

a) $348A9_{11} \rightarrow N_{10}$

b) $543277_8 \rightarrow N_{10}$

c) $142BD3FC7_{16} \rightarrow N_{10}$

d) $153267247_8 \rightarrow N_{10}$

1.2.2 Conversión de base diez a cualquier base

El proceso visto anteriormente es para convertir un número de cualquier base a base diez, sin embargo, para convertir un número base diez a cualquier otra base el proceso cambia. En este caso el proceso es mediante una sucesión de divisiones, los pasos para la conversión son los siguientes:

1. Se divide el número base diez entre la base a la cual se quiere convertir.
2. El residuo de la división se etiqueta como S_0 del número de la nueva base
3. Si el cociente de la división es menor a la base que divide, el proceso termina, si no, se continúa dividiendo y asignando el residuo al siguiente coeficiente S .
4. Cuando el cociente de la división es menor a la base sobre la que se está convirtiendo, el proceso se termina y se asigna al cociente de esta última división el último coeficiente S .

Ejemplo

Se desea convertir el número $N_{10} = 3254_{10}$ a base 7.

Solución:

Se divide 3254 entre 7 y el residuo de la división se etiqueta como S_0 . El residuo se obtendrá siempre multiplicando el cociente por el divisor, en este caso $464 \times 7 = 3248$ y restando este resultado 3248 al dividendo 3254 siendo el residuo 6 como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} 464 \\ 7 \overline{) 3254} \\ \underline{3248} \\ 6 \end{array} \rightarrow S_0$$

Como 464 es mayor que 7, se sigue dividiendo y ahora el residuo 2 se etiqueta como S_1 :

$$\begin{array}{r} 66 \\ 7 \overline{) 464} \\ \underline{2} \rightarrow S_1 \end{array}$$

Como 66 es mayor que 7, se sigue dividiendo y ahora el residuo 3 se etiqueta como S_2 :

$$\begin{array}{r} 9 \\ 7 \overline{) 66} \\ \underline{3} \rightarrow S_2 \end{array}$$

Como 9 es mayor que 7, se sigue dividiendo y ahora el residuo 2 se etiqueta como S_1 :

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7 \overline{) 9} \\ \underline{2} \rightarrow S_3 \end{array}$$

Como 1 es menor que 7 entonces el proceso termina y se etiqueta este último cociente con el siguiente coeficiente S, quedando entonces:

$$\begin{array}{r} 1 \rightarrow S_4 \\ 7 \overline{) 9} \\ \underline{2} \rightarrow S_3 \end{array}$$

Recordando que la representación general de un número es $S_n \dots S_3 S_2 S_1 S_0$ entonces el número en base 7 es 122326, por lo que el resultado es:

$$3254_{10} = 122326_7$$

Ejercicios de aprendizaje

a) Convertir 47_{10} a N_3

$$\begin{array}{r} 15 \\ 3 \overline{) 47} \\ \underline{2} \rightarrow S_0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 3 \overline{) 15} \\ \underline{0} \rightarrow S_1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \rightarrow S_3 \\ 3 \overline{) 5} \\ \underline{2} \rightarrow S_2 \end{array}$$

El resultado es:

$$47_{10} = 1202_3$$

b) Convertir 1483_{10} a N_{15}

$$\begin{array}{r} 98 \\ 15 \overline{) 1483} \\ \underline{13 = D} \rightarrow S_0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \rightarrow S_2 \\ 15 \overline{) 98} \\ \underline{8} \rightarrow S_1 \end{array}$$

El resultado es:

$$1483_{10} = 68D_{15}$$

Notar que el residuo 13 en base quince se cambia por la letra D.

c) Convertir 342_{10} a N_5

$$\begin{array}{r} 68 \\ 5 \overline{) 342} \\ 2 \rightarrow S_0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ 5 \overline{) 68} \\ 3 \rightarrow S_1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \rightarrow S_3 \\ 5 \overline{) 13} \\ 3 \rightarrow S_2 \end{array}$$

El resultado es:

$$342_{10} = 2332_5$$

d) Convertir 927516_{10} a N_{16}

$$\begin{array}{r} 57969 \\ 16 \overline{) 927516} \\ 12 = C \rightarrow S_0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3623 \\ 16 \overline{) 57969} \\ 1 \rightarrow S_1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 226 \\ 16 \overline{) 3623} \\ 7 \rightarrow S_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 = E \rightarrow S_4 \\ 16 \overline{) 226} \\ 2 \rightarrow S_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{El resultado es:} \\ 927516_{10} = E271C_{16} \end{array}$$

1.3 Ejercicios de practica

- a) $84129_{10} \rightarrow N_8$
- b) $5861_{10} \rightarrow N_{11}$
- c) $1487_{10} \rightarrow N_{13}$
- d) $92653_{10} \rightarrow N_{16}$

1.2.3 Conversión entre números de cualquier base

Se ha visto como convertir un número a partir de la base diez o bien de cualquier base a la base diez, es decir $N_{10} \rightarrow N_B$ o $N_B \rightarrow N_{10}$. A partir de ambos procesos se puede convertir entonces un número de cualquier base a cualquier otra, es decir $N_B \rightarrow N_B$. Para esto, primero se debe convertir el número N_B origen a base 10 y finalmente el N_{10} al número N_B deseado, es decir, $N_B \rightarrow N_{10} \rightarrow N_B$. Las conversiones se pueden realizar de un número de mayor nivel a otro de menor y viceversa.

Ejemplo

Se desea convertir el número $N_{13} = C638AB_{13}$ a base 6.

Solución:

Como se mencionó, el proceso se lleva en dos pasos, primero se convierte el número N_{13} a base 10 y posteriormente se convierte el número N_{10} a la base 6, es decir $N_{13} \rightarrow N_{10} \rightarrow N_6$, entonces:

$$C638AB_{13} \rightarrow N_{10}$$

$$C \times 13^5 + 6 \times 13^4 + 3 \times 13^3 + 8 \times 13^2 + A \times 13^1 + B \times 13^0$$

$$C \times 371293 + 6 \times 28561 + 3 \times 2197 + 8 \times 169 + A \times 13 + B \times 1$$

$$4455516 + 171366 + 6591 + 1352 + 130 + 11 = 4634966$$

$$C638AB_{13} = 4634966_{10}$$

Una vez convertido el N_{13} a N_{10} se convierte el N_{10} a N_6 con el proceso visto con anterioridad:

$$4634966_{10} \rightarrow N_6$$

$\begin{array}{r} 772494 \\ 6 \overline{) 4634966} \\ \underline{2} \rightarrow S_0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 128749 \\ 6 \overline{) 772494} \\ \underline{0} \rightarrow S_1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 21458 \\ 6 \overline{) 128749} \\ \underline{1} \rightarrow S_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3576 \\ 6 \overline{) 21458} \\ \underline{2} \rightarrow S_3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 596 \\ 6 \overline{) 3576} \\ \underline{0} \rightarrow S_4 \end{array}$
$\begin{array}{r} 99 \\ 6 \overline{) 596} \\ \underline{2} \rightarrow S_5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \\ 6 \overline{) 99} \\ \underline{3} \rightarrow S_6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \rightarrow S_8 \\ 6 \overline{) 16} \\ \underline{4} \rightarrow S_7 \end{array}$	El resultado es: $4634966_{10} = 243202102_6$	

Por lo que el resultado final es:

$$C638AB_{13} = 243202102_6$$

Ejercicios de aprendizaje

Realizar las siguientes conversiones:

a) $452_6 \rightarrow N_4$

b) $48572_9 \rightarrow N_{15}$

c) $627502_8 \rightarrow N_3$

d) $15CD2EF_{16} \rightarrow N_{12}$

Solución de ejercicios

a)

Primer paso: $452_6 \rightarrow N_{10}$

$$4 \times 6^2 + 5 \times 6^1 + 2 \times 6^0$$

$$4 \times 36 + 5 \times 6 + 2 \times 1$$

$$144 + 30 + 2 = 176$$

$$452_6 = 176_{10}$$

Segundo paso: $176_{10} \rightarrow N_4$

$\begin{array}{r} 44 \\ 4 \overline{) 176} \\ 0 \rightarrow S_0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 \\ 4 \overline{) 44} \\ 0 \rightarrow S_1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \rightarrow S_3 \\ 4 \overline{) 11} \\ 3 \rightarrow S_2 \end{array}$	El resultado es: $176_{10} = 2300_4$
--	---	--	---

Por lo que el resultado final es:

$$452_6 = 2300_4$$

b)

Primer paso: $48572_9 \rightarrow N_{10}$

$$4 \times 9^4 + 8 \times 9^3 + 5 \times 9^2 + 7 \times 9^1 + 2 \times 9^0$$

$$4 \times 6561 + 8 \times 729 + 5 \times 81 + 7 \times 9 + 2 \times 1$$

$$26244 + 5832 + 405 + 63 + 2 = 32546$$

$$48572_9 = 32546_{10}$$

Segundo paso: $32546_{10} \rightarrow N_{15}$

$\begin{array}{r} 2169 \\ 15 \overline{) 32546} \\ 11 = B \rightarrow S_0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 144 \\ 15 \overline{) 2169} \\ 9 \rightarrow S_1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \rightarrow S_3 \\ 15 \overline{) 144} \\ 9 \rightarrow S_2 \end{array}$	El resultado es: $32546_{10} = 999B_{15}$
--	---	--	--

Por lo que el resultado final es:

$$48572_9 = 999B_{15}$$

c)

Primer paso: $627502_8 \rightarrow N_{10}$

$$6 \times 8^5 + 2 \times 8^4 + 7 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 2 \times 8^0$$

$$6 \times 32768 + 2 \times 4096 + 7 \times 512 + 5 \times 64 + 0 \times 8 + 2 \times 1$$

$$196608 + 8192 + 3584 + 320 + 0 + 2 = 208706$$

$$627502_8 = 208706_{10}$$

Segundo paso: $208706_{10} \rightarrow N_3$

$$\begin{array}{r} 69568 \\ 3 \overline{) 208706} \\ 2 \rightarrow S_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23189 \\ 3 \overline{) 69568} \\ 1 \rightarrow S_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7729 \\ 3 \overline{) 23189} \\ 2 \rightarrow S_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2576 \\ 3 \overline{) 7729} \\ 1 \rightarrow S_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 858 \\ 3 \overline{) 2576} \\ 2 \rightarrow S_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 286 \\ 3 \overline{) 858} \\ 0 \rightarrow S_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 95 \\ 3 \overline{) 286} \\ 1 \rightarrow S_6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ 3 \overline{) 95} \\ 2 \rightarrow S_7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 3 \overline{) 31} \\ 1 \rightarrow S_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \overline{) 10} \\ 1 \rightarrow S_9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \rightarrow S_{11} \\ 3 \overline{) 3} \\ 0 \rightarrow S_{10} \end{array}$$

El resultado es:

$$208706_{10} = 101121021212_3$$

Por lo que el resultado final es:

$$627502_8 = 101121021212_3$$

d)

Primer paso: $15CD2EF_{16} \rightarrow N_{10}$

$$1 \times 16^6 + 5 \times 16^5 + C \times 16^4 + D \times 16^3 + 2 \times 16^2 + E \times 16^1 + F \times 16^0$$

$$1 \times 16777216 + 5 \times 1048576 + C \times 65536 + D \times 4096 + 2 \times 256 + E \times 16 + F \times 1$$

$$16777216 + 5242880 + 786432 + 53248 + 512 + 224 + 15 = 22860527$$

$$15CD2EF_{16} = 22860527_{10}$$

Segundo paso: $22860527_{10} \rightarrow N_{12}$

$$\begin{array}{rcl}
 & 1905043 & \\
 12 \overline{) 22860527} & & 11 = B \rightarrow S_0 \\
 & 158753 & \\
 12 \overline{) 1905043} & & 7 \rightarrow S_1 \\
 & 13229 & \\
 12 \overline{) 158753} & & 5 \rightarrow S_2 \\
 & 1102 & \\
 12 \overline{) 13229} & & 5 \rightarrow S_3 \\
 \\
 & 91 & \\
 12 \overline{) 1102} & & 10 = A \rightarrow S_4 \\
 & 7 \rightarrow S_6 & \\
 12 \overline{) 91} & & 7 \rightarrow S_5
 \end{array}$$

El resultado es:

$$22860527_{10} = 77A557B_{12}$$

Por lo que el resultado final es:

$$15CD2EF_{16} = 77A557B_{12}$$

1.2.4 Conversión de binario a decimal

El sistema binario es de gran importancia en el mundo informático y en general en los sistemas digitales. Este sistema por sus características permite realizar conversiones rápidas entre sistemas potencias de 2, es decir sistemas como N_4 , N_8 , N_{16} , N_{32} ...etc. Los sistemas considerados potencias de 2 son aquellos que obtenidos de elevar 2^n , la Tabla 1.2 muestra algunos de ellos.

Tabla 1.2 Potencias de dos

$2^0 = 1$	$2^6 = 64$
$2^1 = 2$	$2^7 = 128$
$2^2 = 4$	$2^8 = 256$
$2^3 = 8$	$2^9 = 512$
$2^4 = 16$	$2^{10} = 1024$
$2^5 = 32$	$2^{11} = 2048$

Como se mostró en la Tabla 1.1, la base 2 solo maneja el 0 y el 1 y todos los números se representan con la combinación sistemática de ellos. Representar un número base 10 en binario es muy sencillo ya que, si analizamos el método de conversión que se explicó en la conversión de N_B a base 10, se aprecia que al multiplicar un dígito por la base 2, este será multiplicado por 1 o por 0. Los términos entonces van a depender del valor que toma 2^n y que son multiplicados solamente por 1.

Ejemplo

El proceso para convertir el número 10101_2 a base 10 sería el siguiente:

$$\begin{aligned} &1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 \end{aligned}$$

Como se puede notar dado que el coeficiente es 0 o 1, los términos que aportan a la suma son los multiplicados por 1 y además el valor del término será el valor de 2^n siendo n la posición correspondiente.

Así que el resultado se obtiene sumando únicamente los valores de 2^n multiplicados por 1:

$$\begin{aligned} &1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ &16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 21_{10} \end{aligned}$$

Considerando esto, podemos ver en la Tabla 1.3 los valores que se suman para convertir rápidamente un número binario a base 10. En el ejemplo vemos que el número 10101 es el correspondiente a la fila 22 resaltada en amarillo. La Tabla 1.3 puede crecer considerando siempre los valores de 2^n siendo n la posición del dígito.

Se puede notar que la cantidad de dígitos de un número binario crece dependiendo el número que se quiere representar. Podemos observar en la Tabla 1.3 que para representar el 2 y el 4 se requieren 2 dígitos, para representar el 4, 5, 6 y 7 se requieren 3 dígitos, para representar del 8 al 15 se requiere un dígito más por lo que ahora son 4 y así sucesivamente deberán incrementarse dígitos para representar números más grandes.

Tabla 1.3 Secuencia de conteo binario

$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$	Decimal
				0	0
				1	1
			1	0	2
			1	1	3
		1	0	0	4
		1	0	1	5
		1	1	0	6
		1	1	1	7
	1	0	0	0	8
	1	0	0	1	9
	1	0	1	0	10
	1	0	1	1	11

	1	1	0	0	12
	1	1	0	1	13
	1	1	1	0	14
	1	1	1	1	15
1	0	0	0	0	16
1	0	0	0	1	17
1	0	0	1	0	18
1	0	0	1	1	19
1	0	1	0	0	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1.2.5 Conversiones directas entre sistemas potencias de dos

Basados en este análisis de conversión, se establece que cualquier número basado en potencias de 2 se puede convertir de manera directa pasando por el número binario.

Se trabajará únicamente la conversión de binario, octal y hexadecimal ya que son los sistemas que se utilizan en el mundo de la computación, para ello, es importante establecer que, para representar un número en octal se requieren tres dígitos en binario ya que el número más grande que acepta el octal es el 7 y para representar el 7 en binario se necesitan tres 1's. Sin embargo, para representar un número hexadecimal en binario se requieren 4 dígitos ya que el valor mayor es el 15 y se requieren cuatro 1's. La tabla 1.4 muestra los números en binario del octal y el hexadecimal.

Tabla 1.4 Códigos binarios para el octal y el hexadecimal.

N ₈	N ₂	N ₁₆	N ₂
0	000	0	0000
1	001	1	0001
2	010	2	0010
3	011	3	0011
4	100	4	0100
5	101	5	0101
6	110	6	0110
7	111	7	0111
		8	1000
		9	1001
		A	1010
		B	1011
		C	1100
		D	1101
		E	1110
		F	1111

Es importante notar que todos los números N_8 se representan en N_2 con tres dígitos para esto se rellenan con ceros a la izquierda cuando sea necesario.

Ejemplo

3_8 en binario es:

011

y no

11.

Lo mismo será para los números hexadecimales, estos se representan con 4 dígitos complementando con los ceros necesarios a la izquierda.

Ejemplo

3_{16} en binario es:

0011

y no

11.

1.2.5.1 Conversión de Octal y Hexadecimal a Binario

Un número octal puede ser convertido en binario utilizando las triadas de bit mostradas en la tabla 1.4.

Ejemplo

Convertir el número 731215_8 a N_2

Solución:

Cada dígito del N_8 se substituye directamente por los valores correspondientes mostrados en la tabla 1.4.

7	3	1	2	1	5
111	011	001	010	001	101

Por lo tanto, el resultado final es:

$$731215_8 = 111011001010001101_2$$

Un número hexadecimal puede ser convertido a binario de manera directa substituyendo los valores por los cuatro bits correspondientes:

Ejemplo

Convertir $F3AD81_{16}$ a N_2

Solución:

Cada dígito del N_{16} se substituye directamente por los valores correspondientes mostrados en la tabla 1.4.

F	3	A	D	8	1
1111	0011	1010	1101	1000	0001

Por lo tanto, el resultado final es:

$$F3AD81_{16} = 111100111010110110000001_2$$

1.2.5.2 Conversiones de binario a octal y hexadecimal

Para convertir un número binario a octal, se agrupan en tres los dígitos binarios de derecha a izquierda y se substituyen según el valor correspondiente.

Ejemplo N2 a N8

Convertir 11100110100111_2 a N_8 .

Solución:

Se agrupan los dígitos de tres en tres de derecha a izquierda:

(11) (100) (110) (100) (111)

Si la última agrupación no tiene tres dígitos se complementa con ceros:

(011) (100) (110) (100) (111)

Se substituye cada triada por el valor correspondiente:

(011) (100) (110) (100) (111)

3 4 6 4 7

El resultado es:

$$11100110100111_2 = 34647_8$$

Ejemplo N2 a N16

Convertir 11101001110100111_2 a N_{16}

Solución:

Se agrupan los dígitos de cuatro en cuatro de derecha a izquierda:

(1) (1101) (0011) (1010) (0111)

Si la última agrupación no tiene cuatro dígitos se complementa con ceros:

(0001) (1101) (0011) (1010) (0111)

Se substituye cada grupo binario por el valor correspondiente:

(0001) (1101) (0011) (1010) (0111)

1 D 3 A 7

El resultado es:

$$11101001110100111_2 = 1D3A7_{16}$$

1.2.5.3 Conversión entre octal y hexadecimal

Dado lo anterior es posible convertir cualquier número base ocho a base 16 y viceversa de manera directa pasando por la base 2. Los pasos para el proceso son los siguientes:

$N_8 \rightarrow N_{16}$

1. Se convierte el número base 8 a base 2 substituyendo cada dígito N_8 por su correspondiente triada de unos y ceros según la Tabla 1.4.
2. Los dígitos del número binario obtenido se agrupan de cuatro en cuatro de derecha a izquierda.
3. Se substituyen cada grupo de cuatro bits por su valor correspondiente en hexadecimal según la Tabla 1.4.

Ejemplo N8 a N16

Convertir 725314_8 a N_{16}

Solución:

Se convierte N_8 a N_2 se substituye cada dígito del N_8 por su correspondiente triada de unos y ceros mostrados en la Tabla 1.4.

7	2	5	3	1	4
111	010	101	011	001	100

Los dígitos del número binario obtenido se agrupan de cuatro en cuatro de derecha a izquierda..

(0 01 1) (1 0 1 0) (1 0 1 0) (1 1 0 0) (1 1 0 0)

Se substituye cada grupo de cuatro bits por su valor correspondiente en hexadecimal según la Tabla 1.4

(0 01 1) (1 0 1 0) (1 0 1 0) (1 1 0 0) (1 1 0 0)

3 A A C C

Finalmente, el resultado es:

$$725314_8 = 3AACC_{16}$$

1.4 Ejercicios de practica

Realizar las siguientes conversiones:

a) $46572_8 \rightarrow N_{16}$

b) $15CD2EF_{16} \rightarrow N_8$

c) $11100110011101001_2 \rightarrow N_8 \text{ y } N_{16}$

1.3 Operaciones básicas

Al igual que en el sistema base diez es posible también realizar operaciones básicas en otros sistemas numéricos, en las siguientes secciones se explican los procesos para realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

1.3.1 Suma

PASOS

1. Se suma cada uno de los sumandos
2. Si el resultado de la suma es menor o igual al valor máximo que acepta la base, se escribe el número resultante en la columna que se está sumando.
3. Si el resultado es mayor que el valor máximo que acepta la base se divide el resultado entre la base. El residuo de la división es el resultado que se escribe en la columna que se está sumando y el cociente se suma a los números de la columna de la izquierda.

Ejemplo

Realizar la siguiente suma en base 16

$$\begin{array}{r} \text{A } 6 \text{ F } \text{C } 9 \text{ . } 7 \text{ B } 2_{16} \\ + \\ 4 \text{ E } 7 \text{ D } 0 \text{ . } 7 \text{ 3 } \text{E}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Solución detallada:

$\begin{array}{r} 1 \\ \text{A } 6 \text{ F } \text{C } 9 \text{ . } 7 \text{ B } 2 \\ 4 \text{ E } 7 \text{ D } 0 \text{ . } 7 \text{ 3 } \text{E} \\ \hline 0 \end{array}$	$2+14 = 16$ se divide $16/16$ cociente 1 residuo 0
--	--

$\begin{array}{r} 1 \\ \text{A } 6 \text{ F } \text{C } 9 \text{ . } 7 \text{ B } 2 \\ 4 \text{ E } 7 \text{ D } 0 \text{ . } 7 \text{ 3 } \text{E} \\ \hline \text{F } 0 \end{array}$	$1+11+3 = 15$ 15 es válido en hexadecimal $15 = \text{F}$
--	---

$\begin{array}{r} 1 \\ \text{A } 6 \text{ F } \text{C } 9 \text{ . } 7 \text{ B } 2 \\ 4 \text{ E } 7 \text{ D } 0 \text{ . } 7 \text{ 3 } \text{E} \\ \hline \text{E } \text{F } 0 \end{array}$	$7 + 7 = 14$ 14 es válido en hexadecimal $14 = \text{E}$
--	--

$ \begin{array}{r} 1 \\ A\ 6\ F\ C\ 9\ .\ 7\ B\ 2 \\ 4\ E\ 7\ D\ 0\ .\ 7\ 3\ E \\ \hline 9\ .\ E\ F\ 0 \end{array} $	$9 + 0 = 9$ 9 es válido en hexadecimal
--	---

11 A 6 F C 9 . 7 B 2 4 E 7 D 0 . 7 3 E 9 9 . E F 0 12 + 13 = 25 25/16 cociente 1 residuo 9	
---	--

$ \begin{array}{r} 111 \\ A6FC9.7B2 \\ 4E7D0.73E \\ \hline 799.EF0 \end{array} $	$15 + 7 + 1 = 23 \quad 23/16$ cociente 1 residuo 7
--	--

$ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & & & & & 1 \\ A & 6 & F & C & 9 & . & 7 & B & 2 \\ 4 & E & 7 & D & 0 & . & 7 & 3 & E \\ \hline & 5 & 7 & 9 & 9 & . & E & F & 0 \end{array} $	$14 + 6 + 1 = 21 \quad 21/16$ cociente 1 residuo 5
---	--

$ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & & & & & 1 \\ A & 6 & F & C & 9 & . & 7 & B & 2 \\ 4 & E & 7 & D & 0 & . & 7 & 3 & E \\ \hline F & 5 & 7 & 9 & 9 & . & E & F & 0_{16} \end{array} $	$10 + 4 + 1 = 15$ 15 es válido en hexadecimal $15 = F$
--	--

El resultado final de la suma es: F5799.EF0

Notar que se pueden hacer operaciones con punto decimal, al igual que en base diez simplemente se baja el punto en la posición correspondiente.

Ejercicios de aprendizaje

Resolver las siguientes sumas en las bases indicadas en cada una de ellas.

$$\begin{array}{r} 9\ 8\ 0\ B\ 3\ .\ 2\ 5_{16} \\ +\quad A\ 7\ 2\ 8\ .\ 0\ 9_{16} \\ \hline \end{array}$$

9 8 0 B 3 . 2 5 A 7 2 8 . 0 9 E	$5 + 9 = 14$ 14 es valido
---	------------------------------

9 8 0 B 3 . 2 5 A 7 2 8 . 0 9 2 E	$2 + 0 = 2$ 2 es válido
---	----------------------------

9 8 0 B 3 . 2 5 A 7 2 8 . 0 9 B . 2 E	$3 + 8 = 11$ 11 = B es válido
---	----------------------------------

9 8 0 B 3 . 2 5 A 7 2 8 . 0 9 D B . 2 E	$11 + 2 = 13$ 13 = D es válido
---	-----------------------------------

9 8 0 B 3 . 2 5 A 7 2 8 . 0 9 7 D B . 2 E	$7 + 0 = 7$ 8 es válido
---	----------------------------

1 9 8 0 B 3 . 2 5 A 7 2 8 . 0 9 2 7 D B . 2 E	$8 + 10 = 18$ 18/16 Cociente 1 Residuo 2
--	---

1 9 8 0 B 3 . 2 5 A 7 2 8 . 0 9 A 5 7 D B . 2 E	$9 + 11 = 10$ 10 = A es válido
--	-----------------------------------

El resultado final de la suma es: A 5 7 D B.2 E₁₆

Resolver la siguiente suma en base cinco:

$$\begin{array}{r} 230311.21_5 \\ + 3132003.321_5 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 230311.21 \\ 3132003.321 \\ \hline 1 \end{array}$	1 es válido, no se suma nada por lo que baja directamente
---	---

$\begin{array}{r} 230311.21 \\ 3132003.321 \\ \hline 31 \end{array}$	3 es válido
--	-------------

$\begin{array}{r} 1 \\ 230311.21 \\ 3132003.321 \\ \hline 031 \end{array}$	$2 + 3 = 5$ 5 no es válido $5/5$ Cociente 1 Residuo 0
--	--

$\begin{array}{r} 11 \\ 230311.21 \\ 3132003.321 \\ \hline 0.031 \end{array}$	$3 + 1 + 1 = 5$ 5 no es válido $5/5$ Cociente 1 Residuo 0
---	--

$\begin{array}{r} 11 \\ 230311.21 \\ 3132003.321 \\ \hline 20.031 \end{array}$	$1 + 1 = 2$ 2 válido
--	-------------------------

$ \begin{array}{r} \\ \\ 3 \\ \hline \\ \end{array} $	$3 + 0 = 3$ 3 válido
--	-----------------------------

$ \begin{array}{r} \\ \\ 3 \\ \hline \\ \end{array} $	$0 + 2 = 2$ 2 válido
--	-----------------------------

$ \begin{array}{r} \\ \\ 3 \\ \hline \\ \end{array} $	$3 + 3 = 6$ 6 no es válido 6/5 Cociente 1 Residuo 1
--	--

$ \begin{array}{r} \\ \\ 3 \\ \hline \\ \end{array} $	$2 + 1 + 1 = 4$ 4 es válido
--	------------------------------------

$ \begin{array}{r} \\ \\ 3 \\ \hline \\ \end{array} $	3 es válido, no se le suma nada, por lo que se baja directamente
--	--

El resultado final de la suma es:

$$3412320.031_5$$

1.5 Ejercicios de práctica.

Resolver las siguientes sumas en la base indicada en cada una de ellas:

$$\begin{array}{r}
 11001110.0111_2 \\
 + 1101011.1101_2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3A567B.D_{16} \\ + 9CE17F.34_{16} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42761731.3_8 \\ + 6505237.63_8 \\ \hline \end{array}$$

1.3.2 Resta

PASOS

1. Se resta cada uno de los elementos.
2. Si el minuendo es mayor o igual al sustraendo no hay problema se pone directamente el valor resultante de restar el sustraendo al minuendo.
3. Si el minuendo es menor, se suma la base que corresponda al minuendo antes de llevar a cabo la resta de los dos dígitos y se agrega 1 al sustraendo de la columna izquierda próxima.

Ejemplo

Resolver la siguiente resta de base catorce.

$$\begin{array}{r} 74100.A_{14} \\ - 5C53.C_{14} \\ \hline \end{array}$$

Solución detallada

$\begin{array}{r} 74100.A_5 \\ 5C53.C_2 \\ \hline 3 \end{array}$	$5 > 2$ $5 - 2 = 3$ resultado 3
---	---------------------------------------

$\begin{array}{r} 74100.A_5 \\ 5C53+1.C_2 \\ \hline .C3 \end{array}$	$10 < 12$ $10 + 14 = 24$ $24 - 12 = 12 = C$
---	---

$ \begin{array}{r} 7 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0 \ . \ A \ 5 \\ 5 \ C \ 5+1 \ 3+1 \ . \ C \ 2 \\ \hline A \ . \ C \ 3 \end{array} $	$0 < 4$ $0 + 14 = 14$ $14 - 4 = 10 = A$
--	---

$ \begin{array}{r} 7 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0 \ . \ A \ 5 \\ 5 \ C \ 5+1 \ 3+1 \ . \ C \ 2 \\ \hline 8 \ A \ . \ C \ 3 \end{array} $	$0 < 5+1$ $0 + 14 = 14$ $14 - 6 = 8$
--	--

$ \begin{array}{r} 7 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0 \ . \ A \ 5 \\ 5+1 \ C+1 \ 5+1 \ 3+1 \ . \ C \ 2 \\ \hline 2 \ 8 \ A \ . \ C \ 3 \end{array} $	$1 < 12+1$ $1 + 14 = 15$ $15 - 13 = 2$
--	--

$ \begin{array}{r} 7 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0 \ . \ A \ 5 \\ 0+1 \ 5+1 \ C+1 \ 5+1 \ 3+1 \ . \ C \ 2 \\ \hline C \ 2 \ 8 \ A \ . \ C \ 3 \end{array} $	$4 < 5+1$ $4 + 14 = 18$ $18 - 6 = 12 = C$ $7 - 1 = 6$
--	--

$ \begin{array}{r} 7 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0 \ . \ A \ 5 \\ 0+1 \ 5+1 \ C+1 \ 5+1 \ 3+1 \ . \ C \ 2 \\ \hline 6 \ C \ 2 \ 8 \ A \ . \ C \ 3 \end{array} $	$7 - 1 = 6$
--	-------------

El resultado final de la resta es:

$$6 \ C \ 2 \ 8 \ A \ . \ C \ 3_{14}$$

Ejercicios de aprendizaje

Resolver las siguientes restas en la base indicada en cada una de ellas.

$$\begin{array}{r}
 4 \ 1 \ 0 \ 7 \ 2 \ . \ 1 \ 4_8 \\
 - \ 3 \ 6 \ 0 \ 4 \ 3 \ . \ 7 \ 1 \ 3_8 \\
 \hline

 \end{array}$$

4 1 0 7 2 . 1 4 ₈	0 < 3
3 6 0 4 3 . 7 1(+1) 3 ₈	0 + 8 = 8
5	8 - 3 = 5

4 1 0 7 2 . 1 4 ₈	4 > 2
3 6 0 4 3 . 7 1(+1) 3 ₈	4 - 2 = 2
2 5	

4 1 0 7 2 . 1 4 ₈	1 < 7
3 6 0 4 3(+1) . 7 1(+1) 3 ₈	1 + 8 = 9
2 2 5	9 - 7 = 2

4 1 0 7 2 . 1 4 ₈	2 < 4
3 6 0 4(+1) 3(+1) . 7 1(+1) 3 ₈	2 + 8 = 10
6 . 2 2 5	10 - 4 = 6

4 1 0 7 2 . 1 4 ₈	7 > 5
3 6 0 4(+1) 3(+1) . 7 1(+1) 3 ₈	7 - 5 = 2
2 6 . 2 2 5	

4 1 0 7 2 . 1 4 ₈	0 = 0
3 6 0 4(+1) 3(+1) . 7 1(+1) 3 ₈	0 - 0 = 0
0 2 6 . 2 2 5	
4 1 0 7 2 . 1 4 ₈	1 < 6
3(+1) 6 0 4(+1) 3(+1) . 7 1(+1) 3 ₈	1 + 8 = 9
3 0 2 6 . 2 2 5	9 - 6 = 3
4 1 0 7 2 . 1 4 ₈	4 = 4
3(+1) 6 0 4(+1) 3(+1) . 7 1(+1) 3 ₈	4 - 4 = 0
0 3 0 2 6 . 2 2 5	

El resultado de la resta es: 0 3 0 2 6 . 2 2 5₈

$$\begin{array}{r} 15DA843.23_{14} \\ -BA2544.2B_{14} \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 15DA843.23 \\ BA2544.2(+1)B \\ \hline 6_{14} \end{array}$	$3 < B$ $3 + 14 = 17$ $17 - 11 = 6$
---	---

$\begin{array}{r} 15DA843.23 \\ BA2544.2(+1)B \\ \hline D6 \end{array}$	$2 < 2(+1)$ $2 + 14 = 16$ $16 - 3 = 13$ $13 = D$
---	---

$\begin{array}{r} 15DA843.23 \\ BA254(+1)4(+1).2(+1)B \\ \hline C.D6_{14} \end{array}$	$3 < 4(+1)$ $3 + 14 = 17$ $17 - 5 = 12$ $12 = C$
--	---

$\begin{array}{r} 15DA843.23 \\ BA254(+1)4(+1).2(+1)B \\ \hline DC.D6 \end{array}$	$4 < 4(+1)$ $4 + 14 = 18$ $18 - 5 = 13$ $13 = D$
$\begin{array}{r} 15DA843.23 \\ BA25(+1)4(+1)4(+1).2(+1)B \\ \hline 2DC.D6 \end{array}$	$8 > 5(+1)$ $8 - 6 = 2$

$\begin{array}{r} 15DA843.23_{14} \\ BA25(+1)4(+1)4(+1).2(+1)B \\ \hline 82DC.D6_{14} \end{array}$	$A > 2$ $A - 2 = 8$
--	------------------------

1 5 D A 8 4 3 . 2 3 B A 2 5(+1) 4(+1) 4(+1) . 2(+1) B	D > A
3 8 2 D C . D 6 ₁₄	D - A = 3

1 5 D A 8 4 3 . 2 3 (+1) B A 2 5(+1) 4(+1) 4(+1) . 2(+1) B	5 < B
8 3 8 2 D C . D 6	5 + 14 = 19
	19 - 11 = 8

1 5 D A 8 4 3 . 2 3 (+1) B A 2 5(+1) 4(+1) 4(+1) . 2(+1) B	1 = 1
0 8 3 8 2 D C . D 6	1 - 1 = 0

El resultado de la resta es: 08382DC.D6₁₄

1.6 Ejercicios de practica

Resolver las siguientes restas en la base indicada:

a)

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ . \ 0 \ 0 \ 1_2 \\ - \quad 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ . \ 1 \ 0 \ 1_2 \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 4 \ 1 \ 0 \ 7 \ 2 \ . \ 1 \ 4_8 \\ - \quad 3 \ 6 \ 0 \ 4 \ 3 \ . \ 7 \ 1 \ 3_8 \\ \hline \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 4 \ 0 \ 5 \ 8 \ 2 \ 7 \ 1 \ . \ 6_9 \\ - \quad 1 \ 5 \ 8 \ 3 \ 5 \ 8 \ 2 \ . \ 2 \ 8 \ 4_9 \\ \hline \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ D \ A \ 8 \ 4 \ 3 \ . \ 2 \ 3_{14} \\ - \quad B \ A \ 2 \ 5 \ 4 \ 4 \ . \ 2 \ B_{14} \\ \hline \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{r} A \ 7 \ 5 \ 0 \ 1 \ B \ 3_{16} \\ - \ 9 \ 1 \ D \ 3 \ 5 \ C \ B_{16} \\ \hline \end{array}$$

1.3.3 Multiplicación

PASOS

1. Se multiplica cada uno de los multiplicadores por el multiplicando de derecha a izquierda.
2. Si el resultado es un número permitido por la base en la que se está trabajando se pone el resultado.
3. Si el resultado es mayor que el número permitido por la base se divide entre la base siendo el residuo el resultado correspondiente a esa columna y el cociente se suma al resultado de la siguiente multiplicación.
4. Si el multiplicador es un número de varios dígitos, al final se suma los resultados de los productos para obtener el resultado final de la operación.

Ejemplo

Realizar la siguiente multiplicación en base catorce.

$$\begin{array}{r} 5 \ 9 \ A \ C \ . \ 1 \ 2_{14} \\ \times \ B \ . \ 8 \ 9_{14} \\ \hline \end{array}$$

Solución detallada

Multiplicando 9 por cada uno de los dígitos del multiplicando

$\begin{array}{r} \phantom{5 \ 9 \ A \ C \ . \ 1 \ 2_{14}} \phantom{B \ . \ 8 \ 9_{14}} \\ 5 \ 9 \ A \ C \ . \ 1 \ 2_{14} \\ \times \phantom{5 \ 9 \ A \ C \ . \ 1 \ 2_{14}} B \ . \ 8 \ 9_{14} \\ \hline \phantom{5 \ 9 \ A \ C \ . \ 1 \ 2_{14}} \phantom{B \ . \ 8 \ 9_{14}} 4 \end{array}$	$9 * 2 = 18$ $18 > 14$ no lo acepta la base $18/14 = \underline{1}$ (se suma al producto de la siguiente columna) residuo 4
--	---

$ \begin{array}{r} 1 \\ 5 9 A C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline A 4 \end{array} $	$9 * 1 = 9 + 1 = 10$ 10 valor válido se pone directamente el resultado $10 = A$
--	---

$ \begin{array}{r} 7 1 \\ 5 9 A C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline A \cdot A 4 \end{array} $	$9 * 12 = 108$ (no valido) $108/14 = \underline{7}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = $10 = A$
---	--

$ \begin{array}{r} 6 7 1 \\ 5 9 A C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline D A \cdot A 4 \end{array} $	$9 * 10 = 90 + 7 = 97$ (no valido) $97/14 = \underline{6}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = $13 = D$
---	---

$ \begin{array}{r} 6 6 7 1 \\ 5 9 A C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline 3 D A A 4 \end{array} $	$9 * 9 = 81 + 6 = 87$ (no valido) $87/14 = \underline{6}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 3
--	---

$ \begin{array}{r} 3 6 6 7 1 \\ 5 9 A C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline 3 9 3 D A A 4 \end{array} $	$9 * 5 = 45 + 6 = 51$ (no valido) $51/14 = \underline{3}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 9
---	---

$ \begin{array}{r} 3 6 6 7 1 \\ 5 9 A C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline 3 9 3 D A A 4 \end{array} $	El acarreo de 3 baja directamente
---	-----------------------------------

Multiplicando 8 por cada uno de los dígitos del multiplicando:

$ \begin{array}{r} 5 9 A C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline 3 9 3 D A A 4 \\ 2 \end{array} $	$8 * 2 = 16$ (no valido) $16/14 = \underline{1}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 2
--	--

$ \begin{array}{r} 5 9 A C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline 3 9 3 D A A 4 \\ 9 2 \end{array} $	$8 * 1 = 8 + 1 = 9$ 9 valor válido, se pone directamente el resultado
---	--

$ \begin{array}{r} 5 9 A 6 1 \\ C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline 3 9 3 D A A 4 \\ C 9 2 \end{array} $	$8 * 12 = 96$ (no valido) $96/14 = \underline{6}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 12 = C
---	--

$ \begin{array}{r} 5 6 6 1 \\ 5 9 A C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline 3 9 3 D A A 4 \\ 2 C 9 2 \end{array} $	$8 * 10 = 80 + 6$ (no valido) $86/14 = \underline{6}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 2
---	---

$ \begin{array}{r} 5 6 6 1 \\ 5 9 A C \cdot 1 2_{14} \\ B \cdot 8 9_{14} \\ \hline 3 9 3 D A A 4 \\ 8 2 C 9 2 \end{array} $	$8 * 9 = 72 + 6$ (no valido) $78/14 = \underline{5}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 8
--	--

3 5 6 6 1 5 9 A C . 1 B . 8 2₁₄ 9₁₄ 3 3 9 3 D A A 4 3 3 8 2 C 9 2	$8 * 5 = 40 + 5$(no valido) $45/14 = \underline{3}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 3
--	--

Multiplicando B por cada uno de los dígitos del multiplicando:

5 9 A 1 C . 1 B . 8 2₁₄ 9₁₄ 3 3 9 3 D A A 4 3 3 8 2 C 9 2 8	$11 * 2 = 22$ (no valido) $22/14 = \underline{1}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 8
--	--

5 9 A 1 C . 1 B . 8 2₁₄ 9₁₄ 3 3 9 3 D A A 4 3 3 8 2 C 9 2 C 8	$11 * 1 = 11+1 = 12$(valido) 12 valor válido se pone directamente el resultado $12 = C$
---	--

5 9 9 A 1 C . 1 B . 8 2₁₄ 9₁₄ 3 3 9 3 D A A 4 3 3 8 2 C 9 2 6 C 8	$11 * 12 = 132$ (no valido) $132/14 = \underline{9}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 6
---	---

5 9 9 A 1 C . 1 B . 8 2₁₄ 9₁₄ 3 3 9 3 D A A 4 3 3 8 2 C 9 2 7 6 C 8	$11 * 10 = 110 + 9 = 119$ (no valido) $119/14 = \underline{8}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 7
--	---

			8	9	1		
		5	9	A	C . 1	2 ₁₄	
					B . 8	9 ₁₄	
	3	9	3	D	A A	4	
3	3	8	2	C	9 2		
	9	7	6	C	8		

$11 * 9 = 99 + 8 = 107$ (no valido)
 $107/14 = \underline{7}$ (se suma al producto de la siguiente columna)
Residuo = 9

			7	8	9	1	
		5	9	A	C . 1	2 ₁₄	
					B . 8	9 ₁₄	
	3	9	3	D	A A	4	
3	3	8	2	C	9 2		
4	6	9	7	C	8		

$11 * 5 = 55 + 7 = 62$ (no valido)
 $62/14 = \underline{4}$ (se suma al producto de la siguiente columna)
Residuo = 6

	4	7	8	9	1		
		5	9	A	C . 1	2 ₁₄	
					B . 8	9 ₁₄	
	3	9	3	D	A A	4	
3	3	8	2	C	9 2		
4	6	9	7	C	8		

El acarreo de 4 se baja directamente

Se suma el resultado de todos los productos en base catorce:

		5	9	A	C . 1	2 ₁₄	
					B . 8	9 ₁₄	
	(1)	(1)	(2)	(1)			
	3	9	3	D	A A	4	
3	3	8	2	C	9 2		
4	6	9	7	C	8		
4	A	2	A	D .	A	D C	4

$10 + 9 + 8 = 27$
 $27/14 = 1$
Residuo = 13 = D
 $13 + 12 + 12 = 37 + 1$
 $38/14 = 2$
Residuo = 10 = A
 $3 + 2 + 6 = 11 + 2 = 13 = D$
 $9 + 8 + 7 = 24$
 $24/14 = 1$
Residuo = 10 = A
 $3 + 3 + 9 = 15 + 1 = 16$
 $16/14 = 1$
Residuo = 2
 $3 + 6 = 9 + 1 = 10 = A$

El resultado final de la multiplicación es:

$$4A2AD \cdot ADC4_{14}$$

Ejercicios de aprendizaje

Resolver las siguientes multiplicaciones en la base indicada:

a)

$$\begin{array}{r} B \ C_{16} \\ \times \ 2 \ A_{16} \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 7 \ 7 \\ \times \ B \ C_{16} \\ \times \ 2 \ A_{16} \\ \hline 7 \ 5 \ 8 \end{array}$	$10 * 12 = 120$ (no valido) $120/16 = \underline{7}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 8 $10 * 11 + 7 = 117$ (no valido) $117/16 = \underline{7}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 5 El 7 que se acarrea se baja directamente
$\begin{array}{r} 1 \ 1 \\ B \ C_{16} \\ 2 \ A_{16} \\ \hline 1 \ 7 \ 5 \ 8 \\ 1 \ 7 \ 8 \\ \hline 1 \ E \ D \ 8_{16} \end{array}$	$2 * 12 = 24$ (no valido) $24/16 = \underline{1}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 8 $2 * 11 + 1 = 23$ (no valido) $23/16 = \underline{1}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 7 El 1 que se acarrea se baja directamente

$ \begin{array}{r} \text{B } C_{16} \\ 2 \text{ A}_{16} \\ \hline 1 \quad 7 \quad 5 \quad 8 \\ \quad 7 \quad 8 \\ \hline 1 \quad E \quad D \quad 8_{16} \end{array} $				Todas las sumas son directas ya que ningún resultado sobre pasa el valor máximo aceptado por la base. El resultado final de la multiplicación es: 1 E D 8₁₆
---	--	--	--	---

Resolver la siguiente multiplicación:

b)

$$\begin{array}{r}
 A \ 5 \ 3 \ 7 \ 5 \cdot C_{13} \\
 \times \quad 4 \cdot B_{13} \\
 \hline
 \end{array}$$

$ \begin{array}{r} 8 \ 4 \ 3 \ 6 \ 5 \ A \\ \quad A \ 5 \ 3 \ 7 \ 5 \cdot C_{13} \\ \quad \quad 4 \cdot B_{13} \\ \hline 8 \ A \ 6 \ 0 \ 4 \ 0 \ 2 \end{array} $							11 * 12 = 132 (no valido) 132/13 = 10 (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 2 11 * 5 + 10 = 65 (no valido) 65/13 = <u>5</u> (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 0 11 * 7 + 5 = 82 (no valido) 82/13 = <u>6</u> (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 4 11 * 3 + 6 = 39 (no valido) 39/13 = <u>3</u> (se suma al producto de la siguiente columna)
--	--	--	--	--	--	--	--

	Residuo = 0 $11 * 5 + 3 = 58$ (no valido) $58/13 = \underline{4}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 6 $11 * 10 + 4 = 114$ (no valido) $114/13 = \underline{8}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 10 El 8 que se acarrea se baja directamente
3 1 1 2 1 3 A 5 3 7 5 . C₁₃ 4 . B₁₃ 8 A 6 0 4 0 2 3 2 8 1 3 A 9	$4 * 12 = 48$ (no valido) $48/13 = \underline{3}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 9 $4 * 5 + 3 = 23$ (no valido) $23/13 = \underline{1}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 10 $4 * 7 + 1 = 29$ (no valido) $29/13 = \underline{2}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 3 $4 * 3 + 2 = 14$ (no valido)

	$14/13 = \underline{1}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 1 $4 * 5 + 1 = 21$ (no valido) $21/13 = \underline{1}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 8 $4 * 10 + 1 = 41$ (no valido) $41/13 = \underline{3}$ (se suma al producto de la siguiente columna) Residuo = 2 El 3 que se acarrea se baja directamente
A 5 3 7 5 . C₁₃ 4 . B₁₃ 1 8 A 6 0 4 0 2 3 2 8 1 3 A 9 1 3 B 5 7 4 1 . 9 2	$4 + 10 = 14$, $14/13 = 1$ sobra 1 $10 + 8 = 18$, $18/14 = 1$ sobra 4 Resultado final de la multiplicación: $3B5741.92_{13}$

1.7 Ejercicios de practica

Resolver las siguientes multiplicaciones en las bases indicadas:

a)

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ . \ 0 \ 1_2 \\ \times \quad \quad 1 \ . \ 1 \ 0 \ 1_2 \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} A \ 8 \ D \ 9 \ B \ 3 \ F_{16} \\ \times \quad E \ 5 \ A_{16} \\ \hline \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} C \ 5 \ 9 \ D \ A \ . \ 2_{15} \\ \times \quad \quad 6 \ B \ . \ 4 \ 5_{15} \\ \hline \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} 7 \ 5 \ 4 \ 6 \ 2 \ . \ 3_8 \\ \times \quad \quad 6 \ 7 \ . \ 5 \ 3_8 \\ \hline \end{array}$$

1.3.4 División

PASOS

El proceso es el mismo que en decimal.

1. Se determina cuántos dígitos del dividendo se toman para que sea mayor que el divisor. Se busca el valor que toca en el cociente, es decir, cuantas veces cabe el dividendo en el divisor.
2. El cociente se multiplica por el divisor y el resultado se pone bajo el dividendo.
3. Se realiza la resta del dividendo menos el resultado de la multiplicación y se repite el proceso.

NOTA: En este apunte se trabaja únicamente la división con enteros. Todas las operaciones de multiplicación y resta deben realizarse en el sistema de la base en la cual se está trabajando.

Ejemplo

Realizar la siguiente división en base 13:

$$B6 \overline{) A \ 5 \ B \ 9_{13}}$$

Descripción detallada:

Paso 1. Se determinan cuántos dígitos del dividendo se deben tomar para que éste sea mayor que el divisor.

En este caso se toman tres dígitos del dividendo, A5B ya que si se toman dos A5 sería menor que B6. Esto se comprueba en el paso 2 ya que se convierten ambos números a base 10.

Paso 2. Se convierten tanto divisor como el dividendo seleccionado a base 10.

Divisor:

$$B \times 13^1 + 6 \times 13^0 = 11 \times 13 + 6 \times 1 = 149$$

Dividendo:

$$A \times 13^2 + 5 \times 13^1 + B \times 13^0 = 10 \times 169 + 5 \times 13 + B \times 1 = 1766$$

NOTA: Notar que si se hubieran tomado dos dígitos del dividendo el valor sería menor que el divisor ya que $A5 = A \times 13^1 + 5 \times 13^0 = 135$ y $135 < 149$ y no es posible dividirlos.

Paso 3. Se divide $1766/149 = 11$ el cual será el cociente en a división base 13.

Recordar que $11 = B$.

$$\begin{array}{r} B \\ B6 \overline{) A5B9_{13}} \end{array}$$

Paso 4. Se multiplica $B6 \times B$

$$\begin{array}{r} 95 \\ B6 \\ \times B \\ \hline 991 \end{array} \quad \begin{array}{l} 11 \times 6 = 66, 66/13 = 5, \text{ sobra } 1 \\ B \times B = 126, 126/13 = 9, \text{ sobra } 9 \end{array}$$

Paso 5. Se resta el resultado de la multiplicación al dividendo

$$\begin{array}{r} B \\ B6 \overline{) A5B9_{13}} \\ \underline{991} \\ 09A \end{array} \quad 5 < 9, 5+13=18, 18 - 9 = 9$$

Paso 6. Se baja el siguiente dígito del dividendo

$$\begin{array}{r} B \\ B6 \overline{) A5B9_{13}} \\ \underline{991} \\ 09A9 \end{array}$$

Paso 7. Se convierte 9A9 a base 10

$$9 \times 13^2 + 10 \times 13^1 + 9 \times 13^0 = 9 \times 169 + 10 \times 13 + 9 \times 1 = 1660$$

Paso 8. Se divide $1660/149 = 11$, y se coloca en el cociente. Recordar que $11 = B$

$$\begin{array}{r} \text{B B} \\ \text{B6} \overline{) \text{A 5 B } 9_{13}} \\ \underline{9 \text{ 4 } 1} \\ \text{9 A 9} \end{array}$$

Paso 9. Se multiplica $B6 \times B$ el cual ya se realizó en el paso 4 coincidentemente por lo que se retoma el mismo resultado y se resta al dividendo correspondiente.

$$\begin{array}{r}
 \text{B B} \\
 \text{B6} \overline{) \text{A 5 B 9}_{13}} \\
 \underline{9 \ 4 \ 1} \\
 9 \ \text{A} \ 9 \\
 \underline{9 \ 9 \ 1} \\
 0 \ 1 \ 8
 \end{array}$$

El resultado de la división es BB_{13} sobrando 18_{13}

Ejercicios de aprendizaje

Realizar las siguientes divisiones en la base que se indica.

a)

A7	1 A F ₁₆
----	---------------------

$$A \times 16^1 + 7 \times 16^0 = 10 \times 16 + 7 \times 1 = 167$$

Se toman tres dígitos del dividendo para que sea más grande que el divisor

$$1 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0 = 1 \times 256 + 10 \times 16 + 15 \times 1 = 431$$

Cociente de la división:

$$431/167 = 2$$

$$A7 \begin{array}{c} 2 \\ 1 \text{ A F}_{16} \end{array}$$

Multiplicación del cociente con el divisor:

$$\begin{array}{r} A7_{16} \\ \times 2_{16} \\ \hline 14E_{16} \end{array} \quad A \times 2 = 20, 20/16 = 1 \text{ sobra } 4$$

Resta del resultado de la división al dividendo

$$\begin{array}{r} 2 \\ A7 \overline{) 1AF_{16}} \\ \underline{14E} \\ 61 \end{array}$$

El resultado final de la división es: Cociente 2_{16} y sobra 61_{16}

b)

$$23 \quad 487_9$$

$$2 \times 9^1 + 3 \times 9^0 = 2 \times 9 + 3 \times 1 = 21$$

Se toman dos dígitos del dividendo

$$4 \times 9^1 + 8 \times 9^0 = 4 \times 9 + 8 \times 1 = 44$$

Cociente de la división

$$44/21 = 2$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 23 \overline{) 487_9} \end{array}$$

Multiplicación

$$\begin{array}{r} 23_9 \\ \times 2_9 \\ \hline 46_9 \end{array}$$

Resta al dividendo

$$\begin{array}{r} 2 \\ 23 \overline{) 487_9} \\ \underline{46} \\ 027 \end{array}$$

Conversión 27 a base 10

$$2 \times 9^1 + 7 \times 9^0 = 2 \times 9 + 7 \times 1 = 25$$

Cociente de la división

$$25/21 = 1$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 23 \overline{) 487_9} \\ \underline{46} \\ 027 \\ \underline{23} \\ 04 \end{array}$$

Resultado de la división: Cociente 21_9 y residuo 4_9

1.8 Ejercicios de práctica

Resolver las siguientes divisiones en las bases correspondientes.

a) $A712B_{16}/6B_{16}$

b) $96A_{16}/F_{16}$

c) $486_{13}/C_{13}$

d) $10110_2/11_2$

1.4 Aplicaciones de los sistemas numéricos en la computación

Los sistemas numéricos tienen múltiples aplicaciones en la computación, estos se utilizan desde el nivel más básico de hardware hasta el software avanzado. Algunas de sus principales aplicaciones son:

1. Representación de Datos:

- **Binario (Base 2):** Es el sistema numérico fundamental en la computación. Todo dato en una computadora, ya sean números, texto, imágenes o sonido, se representa en binario. Los dígitos binarios (bits) son la base de las operaciones lógicas y aritméticas en los procesadores.

- **Hexadecimal (Base 16):** Es utilizado frecuentemente en programación. El sistema hexadecimal es más compacto y legible que el binario y se utiliza para representar direcciones de memoria, colores en gráficos web (HTML/CSS), y en el desarrollo de bajo nivel como el ensamblador.
- **Octal (Base 8):** Usado históricamente en sistemas antiguos y en ciertos lenguajes de programación y sistemas operativos.

2. Operaciones Aritméticas y Lógicas:

- **ALU (Unidad Aritmética y Lógica):** Las ALUs dentro de los CPU realizan operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) y lógicas (AND, OR, NOT, XOR) utilizando números binarios.
- **Sistemas de Punto Flotante:** Para realizar cálculos con números reales, las computadoras usan representaciones de punto flotante, basadas en notaciones binarias.

3. Programación y Algoritmos:

- **Algoritmos de Cifrado:** La criptografía moderna se basa en operaciones con grandes números binarios y hexadecimales para encriptar y desencriptar datos.
- **Algoritmos de Compresión:** Utilizan la representación binaria para reducir el tamaño de los datos sin pérdida significativa de información.

4. Direcciones y Memoria:

- **Direcciones de Memoria:** Los sistemas operativos y hardware gestionan la memoria mediante direcciones numéricas, a menudo representadas en hexadecimal.
- **Gestión de Páginas y Segmentos:** En la gestión de memoria virtual, las direcciones y tamaños de páginas se manejan como números binarios.

5. Redes y Comunicaciones:

- **Direcciones IP:** Las direcciones IP en redes se representan y procesan en binario. Por ejemplo, una dirección IPv4 es un número binario de 32 bits.

- **Protocolo de Comunicación:** Muchos protocolos de comunicación utilizan estructuras de datos que incluyen campos de longitud fija y valores numéricos en formato binario o hexadecimal.

6. Gráficos y Multimedia:

- **Representación de Colores:** Los colores en los gráficos por computadora a menudo se representan en formato hexadecimal (por ejemplo, el color rojo puro es #FF0000).
- **Formatos de Archivo:** Los archivos de imágenes, audio y video se almacenan y procesan como secuencias de datos binarios.

7. Bases de Datos:

- **Índices y Hashes:** Los sistemas de bases de datos utilizan números binarios para crear índices y funciones hash, optimizando la búsqueda y recuperación de datos.

8. Inteligencia Artificial y Aprendizaje Automático:

- **Operaciones con Matrices y Vectores:** Muchos algoritmos de IA y aprendizaje automático implican operaciones con grandes conjuntos de datos numéricos, que se representan y manipulan en binario para eficiencia.

TEMA 2. Lógica Proposicional

2.1 Argumentos y tipos de proposiciones lógicas

2.1.1 Definición de proposición

El diccionario de la lengua española en un contexto general define la lógica como “Modo de pensar y de actuar sensato, de sentido común” o bien se dice también que es la “Disposición natural de los seres humanos para pensar de forma coherente” (Real Academia Española, 2014). Sin embargo, en el ámbito matemático se establece como una ciencia que estudia las técnicas, procedimientos, reglas, métodos y leyes para distinguir si un razonamiento es correcto o incorrecto y se nombra lógica matemática o lógica formal.

La proposición es un elemento fundamental en la lógica matemática pues son las estructuras que construyen el conocimiento de análisis. Una proposición es una oración o frase la cual puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez.

Ejemplos

Sean las siguientes frases:

- a) Un día tiene 24 horas.
- b) 4 es mayor que 9.
- c) ¡Hace frío!
- d) Toluca es la capital del Estado de México.
- e) El niño del vagón azul.
- f) ¿Cuál es el mejor?
- g) $5 + 2 = 6$.
- h) Carlos es un número primo.

Análisis

Las frases a), b), d) y g) se consideran proposiciones ya que éstas, solo pueden ser ciertas o falsas, así, a) y d) son proposiciones verdaderas, y, b) y g) son proposiciones falsas.

Las frases c), e) y f) no son proposiciones ya que no responden a una respuesta falsa o verdadera.

La frase h) aunque tiene características de una proposición, no lo es, ya que no es posible decir si es verdadera o falsa pues carece de sentido.

NOTA: Es importante notar que generalmente las proposiciones son frases declarativas o aseverativas, mientras que no lo son por ejemplo las oraciones interrogativas, imperativas o exclamativas.

Una proposición generalmente se representa mediante:

- Una letra minúscula
- Las últimas letras del abecedario a partir de la p
- Dos puntos seguidos de la letra

Ejemplos

Las proposiciones a), b), d) y g) planteadas en el punto 2.1.1 se pueden representarse de la siguiente manera:

p: Un día tiene 24 horas.

q: 4 es mayor que 9.

r: Toluca es la capital del Estado de México.

s: $5 + 2 = 6$.

Dado esto, se sabe entonces que se puede hablar de una proposición utilizando la letra asignada a ésta.

Como ya se dijo, una proposición es aquella oración que puede ser respondida con un sí, o un no, pero no ambos, esto significa que una proposición puede ser cierta o falsa, por esto que se dice que una proposición toma un valor de verdad.

El valor de una proposición puede ser Falso o Verdadero. También se manejan valores numéricos asociando el “1” si es verdadera y “0” si es falsa.

Ejemplo

Sean las proposiciones p), q), r) y s) de la sección 2.1.2 de acuerdo con el contenido de la proposición los valores de verdad de estas son:

p: V o 1

q: F o 0

r: V o 1

s: F o 0

2.2 Propositiones compuestas

Se conocen dos tipos de proposiciones proposiciones simples y compuestas.

Las proposiciones simples también llamadas atómicas son aquellas que no se pueden descomponerse en más de una proposición.

Las proposiciones compuestas o moleculares son aquellas formadas por más de una proposición simple unidas con algún tipo de conector gramatical como “y”, “o”, si...entonces, “si sólo si” o bien teniendo una negación.

Ejemplos

Sean las siguientes dos proposiciones son simples:

- El cielo está nublado
- Mañana hará calor

Si las unimos mediante algún conector gramatical se convierten en proposiciones compuestas:

El cielo está nublado y mañana hará calor.

La “y” es un conector que conjunta ambas proposiciones.

El cielo está nublado o mañana hará calor.

El conector “o” es un conector disyuntivo que permite una u otra o ambas proposiciones.

Si el cielo está nublado entonces mañana hará calor.

El si...entonces es una condicional, la cual tiene dos partes, un antecedente y un consecuente, si (antecedente) entonces (consecuente).

El cielo está nublado si y solo si mañana hará frío.

El sí, sólo sí establece dos condiciones de sentido inverso, uno, es necesario y suficiente, del otro.

El cielo no está nublado.

Mañana no hará frío.

La negación niega una proposición.

Las proposiciones p), q), r) y s) de la sección 2.1.2 son todas proposiciones simples, uniendo algunas se convierten en proposiciones lógicas:

- Un día no tiene 24 hora o Toluca no es la capital del Estado de México
- Si 4 es mayor que 9 y $5 + 2 = 6$ entonces un día tiene 24 horas.
- $5 + 2 = 6$ o 4 es mayor que 9 y un día tiene 24 horas si y solo si Toluca no es la capital del Estado de México.

NOTAR QUÉ

- Una proposición molecular puede estar compuesta de varias proposiciones simple.
- En lógica se trabaja con la relación entre proposiciones sin analizar el tema que las ocupa por lo que sus contenidos pueden no estar relacionados, como se ve en los ejemplos del inciso b).

2.3 Evaluación de expresiones

2.3.1 Representación simbólica de proposiciones

Las proposiciones pueden ser representadas de forma simbólica. Para esto se utilizan las variables o letras asignadas a cada proposición como se explicó en el apartado 2.1.2.

Los conectores gramaticales utilizados para formar proposiciones compuestas también se representan con símbolos y se llaman conectores lógicos. La Tabla 2.1 muestra los símbolos más comúnmente utilizados para representa los conectores gramaticales, así como las diferentes formas en que se pueden expresar en una oración.

Tabla 2.1 Conectores lógicos y su símbolo

Nombre	Representación simbólica	Conector gramatical	Algunas otras formas de expresar el conector
Conjunción	$\wedge$	“y”	pero, aunque, y, sin embargo, a pesar de
Disyunción	$\vee$	“o”	u, ya sea que, o bien
Negación	$\sim, \neg, '$	“no”	nunca, jamás, no es verdad que, tampoco,
Condicional	$\rightarrow$	“Si...entonces”	Siempre que, puesto que, por consiguiente
Bicondicional	$\leftrightarrow$	“sí sólo si”	Si entonces y sólo entonces, cuando y sólo cuando

Con los conectores lógicos y las variables asignadas a las proposiciones simples se puede representar simbólicamente cualquier proposición compuesta.

Proceso para representar simbólicamente una proposición

PASOS

1. Identificar los conectores gramaticales.
2. Extraer las proposiciones simples del texto restante (es todo menos los conectores).
3. Etiquetar cada proposición simple con una variable (proposiciones repetidas se etiquetan sólo una vez).
4. Se estructura la representación simbólica substituyendo las proposiciones por las variables y los conectores por los símbolos.
5. Todo símbolo tiene un peso jerárquico por lo que será necesario verificar si es requerido el uso de paréntesis para conservar en la representación simbólica el sentido del texto.

Ejemplos

a) Representar simbólicamente la proposición: “Juan estudia matemáticas y tiene una beca”.

Solución:

1. Identificación de los conectores: Juan estudia matemáticas **y** tiene una beca.

2. Identificación de las proposiciones simples: Juan estudia matemáticas y tiene una beca.

3. Etiquetado de las proposiciones.

p: Juan estudia matemáticas.

q: Juan tiene una beca.

4. Representación simbólica de la proposición: $p \wedge q$.

5. No necesita paréntesis.

Notar en la segunda proposición se aclara que es Juan quien tiene una beca ya que, aunque no está escrito se sabe que es Juan.

b) Representar simbólicamente la proposición compuesta: “Camino o me voy en metro o me voy en autobús”.

Solución:

1. Identificación de los conectores: Camino o me voy en metro o me voy en autobús.

2. Identificación de las proposiciones simples: Camino o me voy en metro o me voy en autobús.

3. Etiquetar las proposiciones.

p: Camino

q: Me voy en metro

r: Me voy en autobús

4. Representación simbólica de la proposición: $p \vee q \vee r$.

5. No requiere paréntesis.

Cuando varias proposiciones simples se unen con diversos conectivos lógicos se forman enunciados los cuales también se pueden representar simbólicamente.

c) Representar simbólicamente la proposición compuesta: “Si llueve entonces me llevo paraguas”.

Solución:

1. Identificación de los conectores: Si llueve me llevo paraguas.

2. Identificación de las proposiciones simples: Si llueve entonces me llevo paraguas.

3. Etiquetar las proposiciones.

p: Llueve

q: Me llevo paraguas

4. Representación simbólica de la proposición: $p \rightarrow q$.

5. No requiere paréntesis.

NOTA: Como una expresión condicional está formada por un antecedente y un consecuente, es importante detectar en la proposición cuál parte corresponde a uno, o a otro. Por ejemplo, si la proposición se plantea “Me llevo el paraguas si llueve” en este caso la representación simbólica sería la misma $p \rightarrow q$ ya que “llueve” sigue siendo el antecedente y “me llevo el paraguas” el consecuente.

d) Representar simbólicamente la proposición compuesta: “Si llueve y no llevo paraguas, me mojaré”.

Solución :

1. Identificación de los conectores: Si llueve y no llevo paraguas (entonces) me mojaré.

Notar que, aunque en la proposición no se encuentra el “entonces”, se asume por el sentido de la proposición, que existe el condicional.

2. Identificación de las proposiciones simples: Si llueve y no llevo paraguas (entonces) me mojaré.

Notar que “no” es un operador por lo que no se selecciona como parte de la proposición.

3. Etiquetar las proposiciones.

p: llueve

q: llevo paraguas

r: me mojaré

4. Representación simbólica de la proposición: $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$.

5. Se agregan paréntesis para aclarar que el antecedente está compuesto por toda la expresión ($p \wedge \sim q$).

Cuando varias proposiciones simples se unen con diversos conectivos lógicos se forman enunciados los cuales también se pueden representar simbólicamente.

c) Representar simbólicamente el siguiente enunciado:

Si corro rápido llegaré en primer lugar y me ganaré una medalla. “Si no gano una medalla entonces entrenaré duro o me retiraré de las carreras y emprenderé un negocio. Por consiguiente, si emprendo un negocio, no corrí rápido y no entrené duro”.

Solución:

1. Se identifican el o los conectores:

Si corro rápido (entonces) llegaré en primer lugar y me ganaré una medalla. (Y) Si no gano una medalla entonces entrenaré duro o me retiraré de las carreras y emprenderé un negocio. Por consiguiente, si emprendo un negocio (entonces) no corrí rápido y no entrené duro.

2. Se extraen las proposiciones simples:

Si corro rápido entonces llegaré en primer lugar y me ganaré una medalla. Y Si no gano una medalla entonces entrenaré duro o me retiraré de las carreras y emprenderé un negocio. Por consiguiente, si emprendo un negocio entonces no corrí rápido y no entrené duro.

3. Etiquetar las proposiciones.

p: corro rápido.

q: llegaré en primer lugar.

r: me ganaré una medalla.

s: entrenaré duro

t: me retiraré de las carreras

u: emprenderé un negocio

Notar que: me ganaré una medalla = gano una medalla, así mismo sucede con las proposiciones “corro rápido” y “emprenderé un negocio”.

4. Representación simbólica de la proposición:

$$(p \rightarrow q \wedge r) \wedge (\sim r \rightarrow s \vee t \wedge u) \rightarrow (u \rightarrow \sim p \wedge \sim s).$$

5. Los paréntesis son necesarios en la representación simbólica para alterar la prioridad de los operadores y conservar el sentido del enunciado, los paréntesis marcan los antecedentes y consecuentes correctos.

El primer paréntesis $(p \rightarrow q \wedge r)$ establece que el consecuente de p es $q \wedge r$.

Si la expresión fuera:

$$p \rightarrow q \wedge r \wedge \sim r \rightarrow s \vee t \wedge u \rightarrow u \rightarrow \sim p \wedge \sim s$$

considerando la prioridad de operadores primero se resolverían las conjunciones ($\wedge$) y luego las disyunciones ($\vee$):

$$p \rightarrow \underline{q \wedge r \wedge \sim r} \rightarrow \underline{s \vee t \wedge u} \rightarrow u \rightarrow \underline{\sim p \wedge \sim s}$$

posteriormente se resolverían los condicionales de izquierda a derecha, siendo el primero $p \rightarrow$:

$$\underline{p \rightarrow q \wedge r \wedge \sim r} \rightarrow s \vee t \wedge u \rightarrow u \rightarrow \sim p \wedge \sim s$$

Entonces p tendría como consecuente la expresión: $q \wedge r \wedge \sim r$, lo cual sería incorrecto ya que el enunciado sería:

Si corro rápido entonces llegaré en primer lugar y me ganaré una medalla y no me ganaré una medalla.

Ejercicios de aprendizaje

Realizar la representación simbólica de los siguientes enunciados:

a) "Si no pago el teléfono, entonces me cortarán el servicio telefónico. Y si pago el teléfono, entonces me quedará sin dinero o pediré prestado. Y si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la tarjeta de crédito, si sólo si soy una persona desorganizada"

p: Pago el teléfono.

q: Me cortarán el servicio telefónico.

r: Me quedará sin dinero.

s: Pediré prestado.

t: Pagar la tarjeta de crédito.

u: Soy una persona desorganizada.

Representación simbólica: $(\sim p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow \sim t] \leftrightarrow u$

b) “Si no estudio matemáticas para computación y no hago la tarea de fundamentos de programación, entonces reprobaré el semestre o no podré ir de vacaciones a Cancún”

Se identifican las proposiciones simples:

p: estudio matemáticas para computación

q: hago la tarea de fundamentos de programación

r: reprobaré el semestre

s: podré ir de vacaciones a Cancún

Representación simbólica: $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (r \vee \sim s)$

2.3.2 Operadores lógicos

Como se ha mencionado anteriormente existen 5 conectivas lógicas básicas con las cuales se construyen proposiciones compuestas: Conjunción, Disyunción, Implicación, Equivalencia y Negación, para poder evaluar un enunciado se requiere saber cómo operan los conectivos lógicos.

Cada conectivo lógico tiene su propia tabla de verdad en donde se muestran los resultados que se obtienen cuando se evalúa un conector.

Operador “y” o Conjunción “ $\wedge$ ”

Cuando dos proposiciones están conectadas por el operador “y”, por ejemplo, $q \wedge r$, se establece que ambas proposiciones tanto p como q deben ser verdaderas para que toda la expresión sea verdadera, como lo muestra la Tabla 2.2 del conectivo “y”:

Tabla 2.2 Tablas de verdad del conectivo “y”

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Como se puede ver en la Tabla 2.2 se evalúan los resultados de la expresión con todos los posibles valores de p y de q y la combinación de estos, es decir, que pasa cuando p y q son falsos, que pasa cuando p es falso y q verdadero, que pasa cuando p es verdadero y q es falso y que pasa cuando ambas proposiciones son verdaderas, vemos entonces que solamente en este último caso la expresión $p \wedge q$ es verdadera, en todos los demás casos es falsa.

Operador “o” o disyunción “ $\vee$ ”

Cuando dos expresiones están unidas por un operador “o” por ejemplo, $p \vee q$ es necesario que una de ellas sea verdadera para que toda la proposición sea verdadera. La tabla 2.3 muestra el comportamiento del operador $\vee$.

Tabla 2.3 Tablas de verdad del conectivo “o”

q	r	$q \vee r$	p	q	$p \vee q$
0	0	0	F	F	F
0	1	1	F	V	V
1	0	1	V	F	V
1	1	1	V	V	V

Se puede ver en la tabla 2.3 que el único caso en que una proposición conectada con una “o” es falsa, es cuando ambos valores de las proposiciones conectadas falso.

Operador “o exclusivo” o disyunción exclusiva “ $\oplus$ ”

Este operador hasta ahora no mencionado es una variante del operador “o” y se conoce como disyunción exclusiva. Este obedece a que dos proposiciones no pueden ser ambas verdaderas como en el caso de la disyunción. Cuando se usa una disyunción exclusiva se dice que solamente una de las proposiciones debe ser verdadera para que toda la proposición sea verdadera, en este caso la Tabla 2.4 del operados exclusivo sería:

Tabla 2.4 Tabla de verdad del conectivo “o exclusivo”

q	r	$q \oplus r$	p	q	$p \oplus q$
0	0	0	F	F	F
0	1	1	F	V	V
1	0	1	V	F	V
1	1	0	V	V	F

Operador Condicional ($\rightarrow$)

Una proposición condicional es falsa únicamente cuando su antecedente es verdadero y el consecuente no se cumple, es decir es falso, en todos los demás casos es verdadera. La Tabla 2.5 muestra los valores de la operación condicional.

Tabla 2.5 Tabla de verdad del condicional

q	r	$q \rightarrow r$	p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1	F	F	V
0	1	1	F	V	V
1	0	0	V	F	F
1	1	1	V	V	V

Operador Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Un bicondicional establece que una proposición es condición de la otra y viceversa, es por eso por lo que cuando ambas proposiciones son verdaderas o ambas son falsas el condicional es verdad, en otros casos es falsa como lo muestra la Tabla 2.6.

Tabla 2.6 Tabla de verdad del condicional

q	r	$q \leftrightarrow r$	p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	F	F	V
0	1	0	F	V	F
1	0	0	V	F	F
1	1	1	V	V	V

Operador de negación ($\sim$)

La negación cambia el valor de una proposición. En la Tabla 2.7 se observa que si una proposición es verdadera y se niega será falsa y si una proposición es falsa y se niega será verdadera.

Tabla 2.7 Tabla de verdad de la negación.

p	$\sim p$	p	$\sim p$
0	1	F	V
1	0	V	F

2.3.3 Tablas de verdad

El objetivo de la lógica proposicional es determinar la validez de las proposiciones. Una forma de validar estas expresiones es calculando la tabla de verdad de dichas expresiones a partir de su forma simbólica. Para esto se establecen ciertas reglas las cuales permiten realizar correcta y ordenadamente el proceso.

Pasos para la construcción de la tabla de verdad

1. Construir una tabla de N filas y M columnas. Donde N es el número de combinaciones posibles de los valores que pueden tomar las proposiciones simples y M estará dada por el número de operadores a resolver en la expresión más el número de proposiciones simples.
2. Colocar las proposiciones simples de la expresión ordenadas alfabéticamente en las primeras columnas de la tabla.
3. Colocar bajo la columna de cada proposición la combinación de los posibles valores de cada proposición y todas las combinaciones posibles entre estos. Se sugiere que los valores sean del menor (todos ceros) al mayor (todos unos).
4. Resolver la expresión paso a paso según la jerarquía de los operadores, la Tabla 2.8 muestra dicha jerarquía.

Tabla 2.8 Jerarquía de operadores.

Jerarquía de Operadores
$() , []$
$\sim$
$\wedge$
$\vee$
$\oplus$
$\rightarrow, \leftrightarrow$

5. Los paréntesis anidados se resuelven de adentro hacia afuera y el orden de resolución de toda la expresión es de izquierda a derecha.

Ejemplo

Construir la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(p \vee q) \rightarrow \sim (p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim p$

Solución detallada:

1. La proposición está compuesta de 2 proposiciones simples, p y q, por lo que $n = 2$, entonces se tendrán 4 combinaciones ya que $2^n = 2^2 = 4$. La tabla tendrá 4 filas (más la fila del encabezado). En cuanto a las columnas M la expresión contiene 7 operadores más 2 proposiciones simples, por lo que la tabla tendrá 9 columnas.

2. Se colocan las proposiciones simples p y q en las dos primeras columnas:

p	q							

3. Se colocan las 4 combinaciones posibles de las 2 proposiciones p y q, del menor valor al mayor, en este caso se inicia cuando p y q son iguales a cero, después cuando $p = 0$ y $q = 1$, $p = 1$ y $q = 0$ y finalmente cuando ambas valen 1:

p	q							
0	0							
0	1							
1	0							
1	1							

4. Se procede a resolver la tabla según la jerarquía de operadores, se inicia con el paréntesis ($p \wedge q$):

$$(p \wedge q) \rightarrow \sim (p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim p$$

p	q	$p \wedge q$						
0	0	0						
0	1	0						
1	0	0						
1	1	1						

Se continúa resolviendo el siguiente paréntesis $(p \vee \sim q)$ y dentro de este se resuelve primero la negación de q para posteriormente resolver la disyunción.

$$(p \wedge q) \rightarrow \sim (p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim p$$

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$				
0	0	0	1	0				
0	1	0	0	1				
1	0	0	1	1				
1	1	1	0	1				

Se realiza la negación de la expresión $(p \vee \sim q)$

$$(p \wedge q) \rightarrow \sim (p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim p$$

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim (p \vee \sim q)$			
0	0	0	1	0	1			
0	1	0	0	1	0			
1	0	0	1	1	0			
1	1	1	0	1	0			

Se realiza la negación de p

$$(p \wedge q) \rightarrow \sim (p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim p$$

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim (p \vee \sim q)$	$\sim p$		
0	0	0	1	0	1	1		
0	1	0	0	1	0	1		
1	0	0	1	1	0	0		
1	1	1	0	1	0	0		

Se continúa con la condicional ya que la expresión se resuelve de izquierda a derecha, por practicidad, se utilizan etiquetas en las expresiones a usar, en este caso sería (1) = $(p \wedge q)$ y (2) = $\sim (p \vee \sim q)$ por lo que la operación se expresaría $(1) \rightarrow (2)$:

$$(p \wedge q) \rightarrow \sim (p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim p$$

p	q	(1) $p \wedge q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	(2) $\sim (p \vee \sim q)$	$\sim p$	$(1) \rightarrow (2)$	
0	0	0	1	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	0	1	1	
1	0	0	1	1	0	0	1	
1	1	1	0	1	0	0	0	

Finalmente se resuelve el bicondicional, para esto, se etiquetó la última operación como (3) obteniendo así el resultado final:

$$(p \wedge q) \rightarrow \sim (p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim p$$

p	q	$\sim q$	$\sim p$	(1) $p \wedge q$	$p \vee \sim q$	(2) $\sim (p \vee \sim q)$	(3) $(1) \rightarrow (2)$	(3) $\leftrightarrow \sim p$
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1

b) $q \oplus r \wedge p \rightarrow q \vee \sim r$

1. La proposición está compuesta de 3 proposiciones simples, p, q y r por lo que $n = 3$, entonces se tendrán 8 combinaciones ya que $2^n = 2^3 = 8$. La tabla tendrá 8 filas (más la fila del encabezado). En cuanto a las columnas M la expresión contiene 5 operadores más 3 proposiciones simples, por lo que la tabla tendrá 8 columnas.

2. Se colocan las proposiciones simples p, q y r en las dos primeras columnas:

p	q	r					

3. Se colocan las 8 combinaciones posibles de las 3 proposiciones p, q y r del menor valor al mayor, en este caso se inicia con p, q y r iguales a cero y se termina cuando son iguales a uno.

p	q	r					
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

4. Se procede a resolver la tabla según la jerarquía de operadores, se inicia resolviendo la conjunción, $r \wedge p$:

$$q \oplus r \wedge p \rightarrow q \vee \sim r$$

p	q	r	$r \wedge p$				
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	0				
0	1	1	0				
1	0	0	0				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	1	1				

Se continúa por jerarquía con la negación de r y posteriormente se resuelve la disyunción:

$$q \oplus r \wedge p \rightarrow q \vee \sim r$$

p	q	r	$r \wedge p$	$\sim r$	$q \vee \sim r$		
0	0	0	0	1	1		
0	0	1	0	0	0		
0	1	0	0	1	1		
0	1	1	0	0	1		
1	0	0	0	1	1		
1	0	1	1	0	0		
1	1	0	0	1	1		
1	1	1	1	0	1		

Posteriormente se resuelve la disyunción exclusiva

$$q \oplus r \wedge p \rightarrow q \vee \sim r$$

p	q	r	(1) $r \wedge p$	$\sim r$	$q \vee \sim r$	$q \oplus (1)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0

Y finalmente se resuelve la implicación:

$$q \oplus r \wedge p \rightarrow q \vee \sim r$$

p	q	r	(1) $r \wedge p$	$\sim r$	(2) $q \vee \sim r$	(3) $q \oplus r \wedge p$	(3) $\rightarrow$ (2)
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1

Ejercicios de aprendizaje

Calcular la tabla de verdad de las siguientes expresiones:

a) $[\sim(p \rightarrow t) \rightarrow r] \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim r \wedge q) \oplus q \leftrightarrow \sim t$

Esta expresión cuenta con 4 proposiciones simples por lo que se tienen 16 combinaciones posibles de los valores que puede tomar cada proposición, puesto que, $n = 4$ y entonces $2^n = 2^4 = 16$, los valores inician con p, q, r y t iguales a cero y terminan con p, q, r y t iguales a 1.

El resultado de la evaluación de la expresión es:

p	q	r	t	$p \rightarrow t$	(1) $\sim(p \rightarrow t)$	(5) $(1) \rightarrow r$	$\sim r$	(2) $\sim r \wedge q$	$\sim p$	(3) $\sim p \vee (2)$
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0

p	q	r	t	(4) $\sim(3)$	(6) $(4) \oplus q$	(7) $(5) \rightarrow (6)$	$\sim t$	(7) $\leftrightarrow \sim t$
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0	1

Nota que:

- Las combinaciones representan el sistema binario, puesto que para dos proposiciones se tiene que es N_4 en binario, para tres N_8 en binario, para cuatro N_{16} en binario, para cinco N_{32} en binario y así sucesivamente.

- Es posible llenar la tabla de forma sistemática, si se analizan las combinaciones de las tablas de los tres últimos ejercicios, se visualiza que:
 - Para 2 proposiciones simples la primera columna se llena con 2 ceros y dos unos y la segunda columna con cero y uno alternadamente.
 - Para 3 proposiciones simples, la primera columna se llena con cuatro ceros y cuatro unos, la segunda con dos ceros y dos unos y la tercera con cero y uno de manera alternada.
 - Para 4 proposiciones simples la primera columna se llena con 8 ceros seguidos de 8 unos, la segunda con cuatro ceros seguidos de 4 unos, la tercera, dos ceros y dos unos y la cuarta columna cero y uno estas tres últimas repetidamente hasta llenar las 16 filas.

b) $[\sim p \rightarrow (\sim q \vee \sim r)] \rightarrow [\sim (p \rightarrow q) \vee \sim (p \rightarrow r)]$

La proposición la forman tres proposiciones simples por lo que hay 8 combinaciones.

Los resultados obtenidos de la evaluación son:

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	(1) $\sim q \vee \sim r$	$\sim p$	(4) $\sim p \rightarrow (1)$	$(p \rightarrow q)$	(2) $\sim (p \rightarrow q)$	$p \rightarrow r$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	(3) $\sim (p \rightarrow r)$	(5) $(2) \vee (3)$	(4) $\rightarrow$ (5)
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

2.1 Ejercicios de practica

a) $\sim p \rightarrow (\sim r \vee q \wedge p) \leftrightarrow r \vee \sim q$

b) $r \rightarrow \sim s \wedge q \oplus \sim p \wedge \sim r \vee \sim q \leftrightarrow \sim(r \wedge s \vee p)$

c) $[(p \rightarrow q) \vee (\sim q \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$

2.3.4 Tautología, contradicción y contingencia

Como se mencionó al inicio de esta sección, la lógica busca validar los razonamientos planteados a través de los enunciados, esta validación se puede obtener a través del resultado de la tabla de verdad, la última columna de la tabla resume el resultado de la operación lógica para cada combinación de valores de verdad de las proposiciones. Este resultado final es crucial para entender cómo se comporta una expresión lógica en diferentes situaciones, de aquí que un razonamiento puede ser una tautología, contradicción o contingencia

Tautología:

Una tautología es una afirmación que es verdadera en todas las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones que la componen, en otras palabras, tautología es una proposición que siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de sus componentes.

Ejemplo

La expresión $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$ es una tautología pues en los valores finales obtenidos todos los valores son 1's.

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1

Contradicción:

Una contradicción es una afirmación que es falsa en todas las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones que la componen, es decir, una

contradicción es una proposición que siempre es falsa, independientemente de los valores de verdad de sus componentes.

Ejemplo

La expresión $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee q)$ es una contradicción pues el resultado obtenido son todos 0's.

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$\sim(\sim p \vee q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee q)$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0

Contingencia:

Una proposición es contingente si su verdad o falsedad depende de los valores de verdad específicos de sus componentes, en otras palabras, es contingencia si es verdadera en algunas combinaciones de valores y falsa en otras.

Ejemplo

La expresión $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee q)$ es una contingencia pues el resultado de la contiene 0's y 1's.

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim p \vee q$	$\sim(\sim p \vee q)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee q)$
0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1

2.4 Algebra declarativa

Se llama álgebra declarativa o algebra proposicional a la estructura algebraica formada por expresiones que utilizan conectivos lógicos.

Una estructura algebraica se le llama fórmula bien formada (fbf) lo que indica que debe ser una expresión sintácticamente correcta.

En la lógica proposicional, las fbf's se forman a partir de los siguientes componentes básicos y reglas:

Componentes Básicos

1. **Variables proposicionales:** Letras mayúsculas como $P, Q, R, \dots$
2. **Conectivos lógicos:** Símbolos que representan operaciones lógicas:
 - $\sim$ (no)
 - $\wedge$ (y)
 - $\vee$ (o)
 - $\rightarrow$ (implicación)
 - $\leftrightarrow$ (si y solo si)
3. **Paréntesis:** Utilizados para agrupar subfórmulas y clarificar la estructura lógica.

Reglas de Formación

1. **Variables Proposicionales:** Cualquier variable proposicional es una fbf, por ejemplo: P
2. **Negación:** Si A es una fbf, entonces $\sim A$ también es una fbf.
3. **Conjunción:** Si A y B son fbf's, entonces $A \wedge B$ también es una fbf.
4. **Disyunción:** Si A y B son fbf's, entonces $A \vee B$ también es una fbf.
5. **Implicación:** Si A y B son fbf's, entonces $A \rightarrow B$ también es una fbf.
6. **Bicondicional:** Si A y B son fbf's, entonces $A \leftrightarrow B$ también es una fbf.
7. **Uso de Paréntesis:** Los paréntesis se utilizan para agrupar subfórmulas y clarificar el orden de las operaciones, por ejemplo: $(P \vee Q) \wedge R$ es una fbf donde $(P \vee Q)$ se evalúa primero.

Ejemplos de fbf's en Lógica Proposicional

- P
- $\sim P$
- $P \wedge Q$
- $(P \vee Q) \rightarrow R$
- $\sim(P \leftrightarrow Q)$

2.5 Reglas de Inferencia

2.5.1 Inferencia lógica

La inferencia lógica es el proceso mediante el cual se deducen nuevas proposiciones o conclusiones a partir de proposiciones ya dadas, utilizando reglas y principios de la lógica. Este proceso busca probar la validez de un argumento.

Un argumento es una secuencia de proposiciones, donde una o más proposiciones, llamadas premisas, se presentan como evidencia o apoyo para otra proposición llamada conclusión.

La idea es que, si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión debe seguir lógicamente.

Entonces un argumento consta de dos partes principales:

1. **Premisas:** Son las proposiciones que se presentan como evidencia o información inicial en un argumento. Son afirmaciones que se consideran verdaderas para el propósito del razonamiento.
2. **Conclusión:** Es la proposición que se pretende establecer o probar a través de las premisas. La conclusión se considera válida si se sigue lógicamente de las premisas.

Un ejemplo simple de argumento sería:

Premisa 1: Si Laura come chocolate, le duele el estómago.

Premisa 2: Laura comió chocolate.

Conclusión: A Laura le duele el estómago

Como se ve en este ejemplo, las premisas dan información con la cual se puede llegar a una conclusión. La primera premisa da información sobre lo que le pasa a Laura si come chocolate y la segunda sobre lo que hizo Laura. La conclusión sigue lógicamente de estas premisas.

2.5.2 Leyes de inferencia

En la literatura se cuenta con estructuras lógicas las cuales toman premisas y entregan conclusiones verdaderas, es decir son argumentos válidos. Estas estructuras están demostradas ser tautologías y por lo tanto son argumentos válidos. Estos argumentos pueden ser utilizados para demostraciones nuevas.

Ejemplos de inferencias conocidas:

a) Modus Ponendo Ponens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Esta inferencia se conoce como “Modus Ponendo Ponens” (abreviadamente MPP) y significa que, afirmando el antecedente del entonces, se afirma el consecuente que es la conclusión. Esta se demuestra con el ejemplo anterior:

Premisa 1: Si Laura como chocolate, le duele el estómago $p \rightarrow q$

Premisa 2: Laura comió chocolate p

Conclusión: A Laura le duele el estómago q

b) Modus Tollendo Tollens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

Inferencia “Modus Tollendo Tollens” MTT significa que negando el consecuente el antecedente también se niega para este argumento sea verdad. Se puede explicar con el mismo ejemplo de Laura:

Premisa 1: Si Laura como chocolate, le duele el estómago $p \rightarrow q$

Premisa 2: Laura no comió chocolate $\sim q$

Conclusión: A Laura no le duele el estómago $\sim p$

c) Silogismo Hipotético

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Esta regla de inferencia se denomina “Silogismo Hipotético” SH y establece que, si el consecuente de una premisa es el antecedente de otra, entonces el antecedente de la primera premisa implica el consecuente de la segunda. Esta regla se explica de la siguiente manera:

Premisa 1: Si es gato entonces tiene cuatro $p \rightarrow q$

Premisa 2: Si tiene cuatro patas entonces es cuadrúpedo $q \rightarrow r$

Conclusión: Si es gato entonces es cuadrúpedo $p \rightarrow r$

En la Tabla 2.9 se muestra una lista con las inferencias lógicas más utilizadas, así como una serie de tautologías útiles para demostraciones mediante inferencia.

Tabla 2.9 Tabla de tautologías y reglas de inferencia.

Adición $\frac{p}{\therefore p \vee q}$	Simplificación $\frac{p \wedge q}{\therefore p}$
Silogismo disyuntivo $\frac{p \vee q \quad \sim p}{\therefore q}$	Conjunción $\frac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$
Modus Ponens $\frac{p \quad p \rightarrow q}{\therefore q}$	Silogismo hipotético $\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$
Modus Tollens $\frac{p \rightarrow q \quad \sim q}{\therefore \sim p}$	Dilema constructivo $\frac{p \rightarrow q \quad r \rightarrow s \quad p \vee r}{\therefore q \vee s}$

Nota. Elaborada con datos de “Matemáticas para la computación” por Jiménez Murillo, J.A, 2008, Alfaomega.

2.5.3 Equivalencias lógicas

Una equivalencia lógica se da cuando dos proposiciones distintas tienen el mismo valor de verdad para todas las posibles combinaciones de valores de verdad de sus componentes. La equivalencia lógica se denota con el símbolo “ $\equiv$ ”, así si p y q son equivalentes se escribe entonces $p \equiv q$.

Ejemplo

Dadas las proposiciones a) y b) determinar si son lógicamente equivalentes:

a) $p \rightarrow q$

b) $\sim q \rightarrow \sim p$

Para determinar si son equivalentes se calcula la tabla de verdad de ambas proposiciones:

$p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1

Como se puede ver ambos resultados son iguales, es decir la última columna de las tablas tienen los mismos valores para las mismas combinaciones de valores de las proposiciones por lo que se dice que: $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$.

Otro ejemplo de equivalencia lógica son las proposiciones:

a) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

b) $p \leftrightarrow q$

Si se calcula su tabla de verdad se visualiza que los valores finales son los mismos

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Las equivalencias lógicas son fundamentales en la simplificación y el análisis de expresiones lógicas.

Cuando dos proposiciones son lógicamente equivalentes, puedes sustituir una por la otra en cualquier contexto lógico sin cambiar la verdad o falsedad de la expresión.

La Tabla 2.10 muestra una lista de algunas expresiones lógicamente equivalentes.

Tabla 2.10 Equivalencia lógicas,

Ley de identidad $(p \vee 0) \equiv p$ $(p \vee 1) \equiv 1$ $(p \vee \sim p) \equiv 1$ $(p \wedge 0) \equiv 0$ $(p \wedge 1) \equiv p$ $(p \wedge q \vee q) \equiv q$	Variante de la condicional $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ $(p \rightarrow q) \equiv \sim(p \wedge \sim q)$ $(p \vee q) \equiv (\sim p \rightarrow q)$ $(p \wedge q) \equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$ $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow (q \wedge r)]$
Leyes conmutativas $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$	Variante de la bicondicional $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ $(p \leftrightarrow q) \equiv [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]$ $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$
Leyes asociativas $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$ $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$	Leyes de idempotencia $(p \vee q) \equiv p$ $(p \wedge q) \equiv p$
Ley distributiva $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	Leyes de Morgan $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
Contradicción $(p \wedge \sim p) \equiv 0$	Contrapositiva $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$
Doble negación $\sim \sim p \equiv p$	Disyunción exclusiva $(p \oplus q) \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$

Nota. Elaborada con datos de "Matemáticas para la computación" por Jiménez Murillo, J.A, 2008, Alfaomega.

2.5.3 Demostraciones mediante inferencia

La demostración de argumentos mediante el método de inferencia parte de un conjunto de premisas, a partir de este conjunto de premisas y las reglas de la Tabla 2.9 se deberá llegar a la conclusión, esto demostrará que el argumento es válido. Para este método de demostración se asume que los argumentos son válidos por lo que en todos los ejercicios será posible llegar a la conclusión.

Ejemplo

Dado el siguiente argumento realizar su representación simbólica y demostrar la conclusión mediante inferencia lógica:

“Si Juan está viendo la tele entonces no está trabajando. Si Juan no trabaja entonces no tiene dinero. Juan está viendo la tele por lo tanto Juan no tiene dinero.”

Solución detallada

Obtención de proposiciones simples:

p: Juan está viendo la tele

q: Juan está trabajando

r: Juan tiene dinero

Representación simbólica del argumento: $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \rightarrow \sim r) \wedge p \rightarrow \sim r$

Forma de teorema:

Premisa 1: $p \rightarrow \sim q$

Premisa 2: $\sim q \rightarrow \sim r$

Premisa 3: p

Conclusión: $\therefore \sim r$

Dedución de nuevo conocimiento para llegar a la conclusión:

Una forma de mostrar el proceso es mediante una tabla la cual consta de tres columnas; en la primera se registra el número de la premisa, en la segunda las premisas y en la tercera la regla que se aplica para generar las nuevas premisas.

La tabla se comienza con la información inicial. Es importante destacar que en la columna de "Regla aplicada" se indica únicamente el número de la premisa, ya que

esta información proviene directamente de las premisas dadas y no se deduce mediante ninguna regla:

Numero de premisa	Premisas	Regla aplicada
1	$p \rightarrow \sim q$	Premisa 1
2	$\sim q \rightarrow \sim r$	Premisa 2
3	p	Premisa 3

Utilizando las premisas 1 y 3, podemos derivar la premisa 4, " $\sim q$ ", mediante la aplicación de la regla del Modus Ponens:

Numero de premisa	Premisas	Regla aplicada
1	$p \rightarrow \sim q$	Premisa 1
2	$\sim q \rightarrow \sim r$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	$\sim q$	MPP 1, 3

Finalmente, la conclusión se alcanza al aplicar nuevamente el Modus Ponens a las proposiciones 2 y 4:

Numero de premisa	Premisas	Regla aplicada
1	$p \rightarrow \sim q$	Premisa 1
2	$\sim q \rightarrow \sim r$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	$\sim q$	MPP 1, 3
$\therefore$	$\sim r$	MPP 2, 4

Es conveniente mencionar que:

- No importa el orden en que se utilicen las premisas.
- Las nuevas premisas se pueden combinar con existentes para obtener nuevo conocimiento.
- Se puede utilizar la abreviación del nombre de la regla utilizada.
- Generalmente la conclusión se denota con los tres puntos " $\therefore$ ".
- Una misma proposición puede ser empleada repetidamente en el proceso.
- El número de pasos para llegar a la conclusión puede variar, sin limitaciones específicas.
- Puede haber más de una solución viable para alcanzar la conclusión deseada.

Solución 2

Para este mismo ejercicio se muestra una segunda solución.

Datos iniciales:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$p \rightarrow \sim q$	Premisa 1
2	$\sim q \rightarrow \sim r$	Premisa 2
3	p	Premisa 3

Dedución de la premisa 4 aplicando un silogismo hipotético con las premisas 1 y 2:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$p \rightarrow \sim q$	Premisa 1
2	$\sim q \rightarrow \sim r$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	$p \rightarrow \sim r$	SH 1, 2

Obtención de la conclusión utilizando un Modus Ponens aplicado a 1 y 3:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$p \rightarrow \sim q$	Premisa 1
2	$\sim q \rightarrow \sim r$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	$p \rightarrow \sim r$	SH 1, 2
$\therefore$	$\sim r$	MPP 3, 4

Ejercicios de aprendizaje

Demostrar que los siguientes argumentos son válidos llegando a la conclusión a partir de las premisas dadas:

a)

$$(p \vee q) \rightarrow r$$

$$\sim s$$

$$r \rightarrow s$$

$$\therefore \sim p$$

Datos iniciales:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$(p \vee q) \rightarrow r$	Premisa 1
2	$\sim s$	Premisa 2
3	$r \rightarrow s$	Premisa 3

Se aplica un Modus Tollendo Tollens con las premisas 2 y 3 obteniendo la premisa 4:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$(p \vee q) \rightarrow r$	Premisa 1
2	$\sim s$	Premisa 2
3	$r \rightarrow s$	Premisa 3
4	$\sim r$	MTT 2, 3

Con la premisa 1 y 4 se obtiene la premisa 5; negación de p o q:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$(p \vee q) \rightarrow r$	Premisa 1
2	$\sim s$	Premisa 2
3	$r \rightarrow s$	Premisa 3
4	$\sim r$	MTT 2, 3
5	$\sim (p \vee q)$	MT 1, 4

Se desarrolla la negación de la pregunta 5 aplicando la ley de Morgan, donde se niegan ambas proposiciones y la “ $\vee$ ” se cambia por la “ $\wedge$ ”:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$(p \vee q) \rightarrow r$	Premisa 1
2	$\sim s$	Premisa 2
3	$r \rightarrow s$	Premisa 3
4	$\sim r$	MTT 2, 3
5	$\sim (p \vee q)$	MT 1, 4
6	$\sim p \wedge \sim q$	Morgan 5

La conclusión se obtiene entonces aplicando una simplificación de la premisa 6:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$(p \vee q) \rightarrow r$	Premisa 1
2	$\sim s$	Premisa 2
3	$r \rightarrow s$	Premisa 3
4	$\sim r$	MTT 2, 3
5	$\sim (p \vee q)$	MT 1, 4
6	$\sim p \wedge \sim q$	Morgan 5
$\therefore$	$\sim p$	simplificación 6

b)

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$p \vee s$$

$$t \rightarrow q$$

$$\sim s$$

$$\therefore \sim r \rightarrow \sim t$$

Datos iniciales:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$p \vee s$	Premisa 1
2	$\sim s$	Premisa 2
3	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Premisa 3
4	$t \rightarrow q$	Premisa 4

La premisa 5 muestra que la proposición 1 " $p \vee s$ " por la ley conmutativa es equivalentemente lógica que " $s \vee p$ ".

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$p \vee s$	Premisa 1
2	$\sim s$	Premisa 2
3	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Premisa 3
4	$t \rightarrow q$	Premisa 4
5	$s \vee p$	Conmutativa 1

Cambiando de lugar las variables, es más fácil verificar que es posible aplicar un silogismo disyuntivo con 2 y 5 lo que permite obtener " p ".

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$p \vee s$	Premisa 1
2	$\sim s$	Premisa 2
3	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Premisa 3
4	$t \rightarrow q$	Premisa 4
5	$s \vee p$	Conmutativa 1
6	p	Silogismo disyuntivo 2, 5

La proposición 6 es el antecedente de la proposición 3 por lo que aplicando un Modus Ponens se obtiene el consecuente de 3, (premisa 7).

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$p \vee s$	premisa
2	$\sim s$	premisa
3	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
4	$t \rightarrow q$	premisa
5	$s \vee p$	Conmutativa 1
6	p	Silogismo disyuntivo 2, 5
7	$q \rightarrow r$	MPP 3, 6

El consecuente de la premisa 4, “q” es el antecedente de la premisa 7 por lo que por silogismo hipotético se obtiene la premisa 8.

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$p \vee s$	premisa
2	$\sim s$	premisa
3	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
4	$t \rightarrow q$	premisa
5	$s \vee p$	Conmutativa 1
6	p	Silogismo disyuntivo 2, 5
7	$q \rightarrow r$	MPP 3, 6
8	$t \rightarrow r$	silogismo hipotético 4,7

Se aplica el contrarrecíproco a la premisa 8, negando tanto r como t, con r asumiendo el papel de antecedente y t convirtiéndose en consecuente, para así llegar a la conclusión.

c)

$\sim (p \wedge \sim q)$
 $\sim (r \vee s) \rightarrow \sim q$
 p
 $\sim r$

$\therefore s$

Datos iniciales:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$\sim (p \wedge \sim q)$	Premisa 1
2	$\sim (r \vee s) \rightarrow \sim q$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	$\sim r$	Premisa 4

La premisa 5 se obtiene de aplicar una equivalencia lógica llamada variante de la condicional, la equivalencia utilizada es la 24 (b) de la tabla 2.9:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$\sim (p \wedge \sim q)$	Premisa 1
2	$\sim (r \vee s) \rightarrow \sim q$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	$\sim r$	Premisa 4
5	$p \rightarrow q$	Variante de la condicional 1

La premisa 6 se obtiene aplicando la contrapositiva a la premisa 2. Es relevante observar que en la premisa ambos términos están negados, por lo que al negarlos dos veces se anulan las negaciones:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$\sim (p \wedge \sim q)$	Premisa 1
2	$\sim (r \vee s) \rightarrow \sim q$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	$\sim r$	Premisa 4
5	$p \rightarrow q$	Variante de la condicional 1
6	$q \rightarrow (r \vee s)$	Contrapositiva 2

El consecuente de la premisa 5 es el antecedente de la 6 por lo que se aplica un silogismo hipotético y se obtiene la 7:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$\sim (p \wedge \sim q)$	Premisa 1
2	$\sim (r \vee s) \rightarrow \sim q$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	$\sim r$	Premisa 4
5	$p \rightarrow q$	Variante de la condicional 1
6	$q \rightarrow (r \vee s)$	Contrapositiva 2
7	$p \rightarrow (r \vee s)$	SH 5, 6

La premisa 3 es el antecedente de la premisa 7, aplicando un Modus Ponens se afirma “ $r \vee s$ ”, premisa 8:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$\sim (p \wedge \sim q)$	Premisa 1
2	$\sim (r \vee s) \rightarrow \sim q$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	$\sim r$	Premisa 4
5	$p \rightarrow q$	Variante de la condicional 1
6	$q \rightarrow (r \vee s)$	Contrapositiva 2
7	$p \rightarrow (r \vee s)$	Silogismo 5, 6
8	$(r \vee s)$	MPP 7, 3

Finalmente se llega a la conclusión aplicando un silogismo disyuntivo con las premisas 4 y 8:

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$\sim (p \wedge \sim q)$	Premisa 1
2	$\sim (r \vee s) \rightarrow \sim q$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	$\sim r$	Premisa 4
5	$p \rightarrow q$	Variante de la condicional 1
6	$q \rightarrow (r \vee s)$	Contrapositiva 2
7	$p \rightarrow (r \vee s)$	Silogismo 5, 6
8	$(r \vee s)$	MPP 7, 3
$\therefore$	s	Silogismo disyuntivo (4, 8)

2.2 Ejercicios de practica

a)

$p \rightarrow r$
 $r \rightarrow s$
 $t \vee \sim s$
 $\sim t \vee u$
 $\sim u$

$\therefore \sim p$

b)

$$\begin{array}{l} (p \wedge \sim q) \\ r \\ \hline \therefore (p \wedge r) \vee \sim q \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} r \rightarrow \sim p \\ \sim q \rightarrow s \\ \sim s \vee u \\ r \vee t \\ p \wedge \sim q \\ \hline \therefore t \wedge u \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{l} r \rightarrow (\sim p \vee \sim q) \\ p \wedge q \\ r \vee s \\ \hline \therefore s \end{array}$$

2.6 Cálculo de predicados

La lógica de predicados, también conocida como lógica de primer orden, es una extensión de la lógica proposicional que permite un mayor grado de expresividad al incluir variables, cuantificadores y predicados.

Un razonamiento del tipo:

P₁: Todos los múltiplos de 6 son divisibles por 2

P₂: 30 es múltiplo de 6

Normalmente llevaría a pensar que 30 es divisible por 2, lo cual, si bien es válido, no es demostrable en lógica de proposiciones, pero si en lógica de predicados.

La lógica de predicados permitirá la simbolización de este tipo de expresiones estudiando la relación entre sujeto y predicado gramatical.

2.6.1 Elementos de la lógica de predicados

La lógica de predicados estará definida por los siguientes elementos:

Variables

Permiten generalizar proposiciones. Por ejemplo, en lugar de decir "Todos los múltiplos de 6 son divisibles por 2", podríamos decir "Para todo x, si x es un múltiplo de 6, entonces x es divisible por 2", donde "x" es una variable que representa a cualquier número. Las variables se asocian a los sujetos de la expresión y se denotarán con letras minúsculas.

Universo

El universo define el conjunto en el cual están contenidos todos los elementos con los que se trabaja. Por ejemplo, en la expresión del ejemplo "Para todo x, si x es un múltiplo de 6, entonces x es divisible por 2", es necesario definir a qué conjuntos de datos pertenece x, el cuál podría ser:

$$U = \{x | x \in N\}$$

Predicados

Un predicado es aquel que define la(s) propiedad(es) de los objetos. Por ejemplo, "es múltiplo de 6" sería un predicado que se le asigna a un objeto, en este caso un número "x". Los predicados se representan con letras mayúsculas de la siguiente manera:

Se define el predicado "x es múltiplo de 6" como:

$$M(x): x \text{ es un múltiplo de 6}$$

Como se puede ver, el predicado definido por la letra M va seguida entre paréntesis de la, o las variables.

Operadores

Dentro de la lógica de predicados se utilizan las conectivas lógicas vistas en lógica proposicional y dos nuevos operadores llamados cuantificadores.

Las conectivas lógicas utilizadas son:

$\wedge$ conjunción

$\vee$ disyunción

$\rightarrow$ implicación

$\sim$ negación

Los cuantificadores permiten expresar afirmaciones sobre conjuntos de elementos. Los cuantificadores más comunes son el cuantificador universal y el cuantificador existencial.

Cuantificados Universal

Se denota con el símbolo para todo ($\forall$) y se utiliza para expresar que todos los elementos de un conjunto tienen una propiedad. Se pueden tener otras expresiones gramaticales para este símbolo las cuales se verán en los ejemplos.

Cuantificador existencial

Se denota con el símbolo e mayúscula invertida ($\exists$) y se utiliza para expresar que al menos un elemento del conjunto tiene una propiedad.

2.6.2 Simbolización de expresiones

Las expresiones se simbolizan mediante los siguientes pasos:

1. Se define el universo.
2. Se identifican el o los predicados.
3. Se simboliza la expresión analizando la relación sujeto y predicado(s).

Ejemplos

Utilización del cuantificador universal:

a) Simbolizar la expresión “Todas las palomas vuelan”

Solución:

Primero se define el universo, pues de éste depende la simbolización de la expresión, se plantean entonces dos casos de universo:

- 1) El universo puede definirse como:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es paloma}\}$$

Definición del predicado

Dado que paloma es el sujeto el cual se define como x , entonces vuela es el predicado y se puede definir como V , entonces se dice que, x vuela y se escribe:

$$V(x) = x \text{ vuela}$$

Simbolización de la expresión

Definido el predicado y analizando la relación con el sujeto con respecto al universo “Las palomas”, entonces la simbolización es:

$$\forall x V(x)$$

La cual se lee para todo x, V de x, lo que significa que para todo x del universo se cumple que x vuela o bien todos los x vuelan.

2) El universo ahora se define como:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es ave}\}$$

Definición del predicado

Partiendo de este universo los predicados en la expresión son entonces dos:

$$V(x) = x \text{ vuela}$$

$$P(x) = x \text{ es paloma}$$

Simbolización de la expresión

En este caso el sentido de la relación predicados sujeto cambia. La expresión se simboliza entonces como:

$$\forall x P(x) \rightarrow V(x)$$

La cual se lee para todo x, P de x, entonces V de x, lo que significa que para todo x del universo si x es una paloma entonces (conectivo de implicación) se cumple que x vuela. Este caso es diferente del anterior puesto que en el universo “aves” hay aves que no vuelan.

b) Simbolizar la expresión “Todas las palomas vuelan y llevan mensajes”

Solución:

Como en el ejemplo a), se analizan los casos con dos tipos de universo:

1) El universo se define como:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es paloma}\}$$

Entonces los predicados son:

$$V(x) = x \text{ vuela}$$

$$M(x) = x \text{ llevan mensajes}$$

Puesto que “paloma” sigue siendo el sujeto.

Simbolización de la expresión

Definido los predicados y analizando la relación del sujeto con respecto al universo “Las palomas”, entonces la simbolización es:

$$\forall x (V(x) \wedge M(x))$$

La cual se lee para todo x, V de x, y (conjunción), M de x, lo que significa que para todo x del universo se cumple que x vuela y lleva mensajes.

2) El universo ahora se define como:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es ave}\}$$

Definición del predicado

Con este universo los predicados en la expresión ahora serán tres:

$$P(x) = x \text{ es paloma}$$

$$V(x) = x \text{ vuela}$$

$$M(x) = x \text{ llevan mensajes}$$

Simbolización de la expresión

En este caso el sentido de la relación predicados sujeto incluirá la disyunción sobre la conjunción de ambos predicados, quedando como:

$$\forall x P(x) \rightarrow (V(x) \wedge M(x))$$

La cual se lee para todo x, P de x, entonces V de x, y, M de x, lo que significa que para todo x del universo si x es una paloma entonces se cumple que x vuela y x lleva mensajes.

c) Simbolizar la expresión “Todos los invitados son familiares o amigos”

Solución:

Se plantean de igual manera dos universos.

1) Se define el universo como:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es persona}\}$$

Dado que el universo son todas las personas, entonces los predicados son tres pues invitado pasa a ser predicado:

$$I(x) = x \text{ es invitado}$$

$$F(x) = x \text{ es familiar}$$

$$A(x) = x \text{ es amigo}$$

La simbolización sería:

$$\forall x I(x) \rightarrow (F(x) \vee A(x))$$

La cual especifica que para todo x si x es un invitado, se cumple que x es familiar o es amigo.

2) Se considera ahora como universo:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es invitado}\}$$

Entonces únicamente se tienen dos predicados pues todos los x ya son invitados, los predicados entonces serían:

$$F(x) = x \text{ es familiar}$$

$$A(x) = x \text{ es amigo}$$

La simbolización queda como:

$$\forall x (F(x) \vee A(x))$$

La cual se lee como para todo x se cumple que x es un familiar o es un invitado.

d) Simbolizar la expresión “Ningún gato vuela”

Solución:

Notar que la expresión es una negación de todo, es decir, esto se puede interpretar como “Todos los gatos no vuelan” por lo que se establece que Ningún es la negación de “para todo”.

Si el universo es:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es gato}\}$$

Se tiene que el predicado es:

$$V(x) = x \text{ vuela}$$

Por lo tanto, la simbolización es:

$$\forall x \sim V(x)$$

Lo cual se lee, para todo x se cumple que x no vuela.

Utilización del cuantificador existencial:

a) Simbolizar la expresión “Algunas aves vuelan”

Solución:

Se define el universo como:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es ave}\}$$

Se define el predicado:

$$V(x) = x \text{ vuela}$$

Se realiza la simbolización:

En este ejemplo se habla de que no todas las aves vuelan, solamente algunas por lo que el cuantificador a utilizar es el existencial, por lo que la simbolización sería:

$$\exists x V(x)$$

Lo cual se lee como existe algún x del universo que vuela.

b) Simbolizar la siguiente expresión: “Hay aves que vuelan y comen peces”

Solución

Se define el universo como:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es ave}\}$$

Se definen los predicados:

$$V(x) = x \text{ vuela}$$

$$P(x) = x \text{ come peces}$$

Notar que en este ejemplo se utiliza la palabra hay y no la palabra algunas, sin embargo, el significado es el mismo ya que al expresar “hay aves que...” quiere decir que solamente algunas aves cumplen con las características, por lo que el cuantificador a utilizar será también el existencial, quedando la representación como:

$$\exists x (V(x) \wedge P(x))$$

c) Simbolizar la siguiente expresión “Algunas asignaturas de sistemas se imparten en la mañana o en la tarde”.

Solución

Se considera el siguiente universo:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es una asignatura}\}$$

Se define los predicados:

$$A(x) = x \text{ es una asignatura de sistemas}$$

$$M(x) = x \text{ se imparte en la mañana}$$

$$T(x) = x \text{ se imparte en la tarde}$$

Se realiza la simbolización:

$$\exists x A(x) \wedge (M(x) \vee T(x))$$

Y se lee como existe algún x que es una asignatura de sistemas y que se imparte en la mañana o en la tarde.

d) Simbolizar la siguiente expresión “Existen corredores del maratón de París que se retiraron de la competencia o no registró asistencia”.

Solución:

Se define el universo como:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es corredor del maratón de París}\}$$

Se definen los predicados:

$$R(x) = x \text{ se retiró de la competencia}$$

$$A(x) = x \text{ registró asistencia}$$

Se realiza la simbolización:

$$\exists x R(x) \vee \sim A(x)$$

Ejercicios de aprendizaje

Dado el universo $\mathcal{U} = \{x | x \text{ es estudiante del Tecnológico de Toluca}\}$

representar simbólicamente las siguientes expresiones:

a) Todo estudiante acreditó el examen de admisión

En la expresión se tiene un predicado el cual se define como:

$$A(x) = x \text{ acreditó el examen de admisión}$$

Por consiguiente, la simbolización queda como:

$$\forall x A(x)$$

b) Algunos estudiantes cursan materias y realizan residencia

$$M(x) = x \text{ cursan materias}$$

$$R(x) = x \text{ realiza residencia}$$

La simbolización de la expresión es:

$$\exists x (M(x) \wedge R(x))$$

c) Si algún estudiante regular es buen basquetbolista pasará a formar parte del selectivo.

En este caso se tienen tres predicados:

$$R(x) = x \text{ es regular}$$

$$B(x) = x \text{ es buen basquetbolista}$$

$$S(x) = x \text{ formará parte del selectivo}$$

En este ejemplo es importante notar que “si alguno” se puede representar como “todo”, de manera que la expresión puede entenderse como “Todo estudiante que es regular y es buen basquetbolista entonces formará parte del selectivo”, por lo que la simbolización sería:

$$\forall x (R(x) \wedge B(x) \rightarrow S(x))$$

d) Algunos que pertenecen al selectivo también tienen buen promedio.

Los predicados son dos:

$$S(x) = x \text{ pertenece al selectivo}$$

$$B(x) = x \text{ tiene buen promedio}$$

Dado que algunos pertenecen al selectivo y tienen buen promedio la simbolización queda como:

$$\exists x(S(x) \wedge B(x))$$

e) No todos los que pertenecen al selectivo tienen buen promedio.

Los predicados son dos:

$$S(x) = x \text{ pertenece al selectivo}$$

$$B(x) = x \text{ tiene buen promedio}$$

En este caso la expresión establece que “no todos ...” esto se puede entender como que “Algunos sí...”, es decir, existe al menos un alumno que pertenece al selectivo y no tiene buen promedio, lo que implica el uso del existencial, por lo que la simbolización queda como:

$$\exists x (S(x) \wedge \sim B(x))$$

2.3 Ejercicios de practica

Representar simbólicamente las siguientes expresiones utilizando el correspondiente universo:

a) Sea $U = \{x|x \text{ es niño}\}$, simbolizar las expresiones:

“Todos son traviesos”

“Ninguno es travieso”

“Todos son traviesos y lindos”

b) Sea $U = \{x|x \text{ es persona}\}$, simbolizar:

“Todos los niños son traviesos”

“Ningún niño es travieso”

c) Sea $U = \{x|x \text{ es número}\}$, simbolizar:

“Algunos números naturales son divisibles por 3”

“No todos los números naturales son divisibles por tres”

“Un número natural divisible por él mismo y por uno es primo”

d) Sea $U = \{x|x \text{ es alumno}\}$, simbolizar:

“Solamente quienes acreditan el examen pasan al siguiente curso”

2.7 Inducción matemática

La inducción matemática es un método de demostración utilizado para probar afirmaciones sobre números naturales. Se basa en dos pasos:

1. **Paso Base:** Se demuestra que la afirmación es cierta para el primer número natural (usualmente 0 o 1, dependiendo del contexto).
2. **Paso Inductivo:** Se asume que la afirmación es cierta para un número natural cualquiera k planteada como la hipótesis. Luego se demuestra que esto implica que la afirmación también es cierta para el siguiente número natural $(k+1)$ siendo esta la tesis de inducción.

Al combinar estos dos pasos, se establece que la afirmación es cierta para todos los números naturales mayores o iguales al número base utilizado en el paso base.

La inducción matemática es una herramienta poderosa que se utiliza en diversas ramas de las matemáticas, como la teoría de números, el cálculo, la combinatoria y la informática teórica, entre otras.

Ejemplo

Demostrar por inducción matemática que la suma de los números naturales se reduce a $n(n + 1)/2$ como lo plantea la siguiente expresión:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Paso Base

Se demuestra la expresión para algunos de los primeros números naturales:

Demostración considerando que $n = 1$

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Demostración para $n = 2$ lo implica demostrar que $1 + 2 = \frac{n(n+1)}{2}$

$$1 + 2 = \frac{2(2 + 1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Se podría realizar un tercer paso ahora llevando n hasta 3:

$$1 + 2 + 3 = \frac{3(3 + 1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Paso inductivo

Con estas tres comprobaciones se determina que la expresión es cierta por lo que se procede a determinar que esta afirmación se cumple para cualquier número k :

Se dice entonces que $n = k$ por lo que la formula se expresaría como:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

Ahora se demuestra que la expresión es cierta para un valor siguiente de k , es decir $k + 1$, por lo que la expresión queda como:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1)$$

Para demostrar la igualdad se realizan diversos pasos algebraicos sobre la parte derecha de la igualdad:

Se saca como factor común $(k + 1)$:

$$\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = (k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)$$

Se realiza la multiplicación de las fracciones:

$$(k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = (k + 1) \frac{k + 2}{2}$$

Simplificando el segundo término de la igualdad se tiene que:

$$\frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Lo que lleva a demostrar que es cierta la expresión para cualquier $k + 1$ incrementado en 1 su valor, que es $k + 2$, es decir se cumple que:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Ejercicios de aprendizaje

a) Demostrar por inducción matemática que la siguiente expresión es cierta para cualquier número natural:

$$\frac{1}{(1)2} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \frac{1}{3(4)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Paso base

Se demuestra para $n = 1$:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Sustituyendo n se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1(1+1)} &= \frac{1}{1+1} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por lo que la igualdad se cumple.

Paso inductivo

Se asume que la expresión es verdadera para cualquier número k , es decir $n = k$ por lo que se dice que la siguiente expresión es verdadera:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Para demostrarlo se considera ahora que también es verdadera para un valor de $n = k + 1$, sustituyendo n la expresión queda como:

$$\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} = \frac{k+1}{k+1+1}$$

Desarrollando las sumas de $k + 1 + 1$ se tiene que:

$$\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Dado que se asume que la expresión es verdadera para una $n = k$ se substituye $\frac{1}{k(k+1)}$ por la expresión $\frac{k}{k+1}$ dando como resultado:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

El siguiente paso es por métodos algebraicos demostrar la igualdad:

El primer término de la suma de fracciones se multiplica por k :

$$\frac{1}{k+1}(k) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

El segundo término de la suma de las fracciones se descompone en 2 términos quedando como:

$$\frac{1}{k+1}(k) + \left(\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{k+2}\right) = \frac{k+1}{k+2}$$

Para reducir términos se saca como factor común $\frac{1}{k+1}$

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)\left(k + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{k+1}{k+2}$$

Posteriormente se realiza la suma de fracciones $k + \frac{1}{k+2}$ quedando como:

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{k(k+2)+1}{k+2}\right) = \frac{k+1}{k+2}$$

Desarrollando el numerador del término en rojo se tiene que:

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{k^2+2k+1}{k+2}\right) = \frac{k+1}{k+2}$$

Multiplicando las fracciones se tiene:

$$\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Sustituyendo el numerador por su correspondiente binomio de suma al cuadrado queda:

$$\frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

De esta expresión se elimina $k + 1$ del numerador y el denominador, lo que permite concluir la igualdad:

$$\frac{(k+1)}{(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Por lo que se demuestra que la sucesión de la expresión es verdadera.

b) Demostrar por inducción matemática que la suma de los números naturales siguiente expresión:

$$3 + 7 + 11 + \dots + 4n - 1 = n(2n + 1)$$

Paso Base

Se demuestra la expresión para algunos de los primeros números naturales:

Demostración considerando que $n = 1$

$$4n - 1 = n(2n + 1)$$

Se substituye $n = 1$

$$4(1) - 1 = 1(2(1) + 1)$$

$$3 = 3$$

Paso inductivo

Se comprueba para $n = k$

$$3 + 7 + 11 + \dots + 4k - 1 = k(2k + 1)$$

Se comprueba para cualquier número $k + 1$, por lo que se agrega el termino cuando $n = k + 1$, quedando la expresión como sigue:

$$3 + 7 + 11 + \dots + 4k - 1 + 4(k + 1) - 1 = k + 1(2(k + 1) + 1)$$

Dado que $4k - 1 = k(2k + 1)$ se substituye en la expresión de la siguiente manera:

$$4k - 1 + 4(k + 1) - 1 = k + 1(2(k + 1) + 1)$$

$$k(2k + 1) + 4(k + 1) - 1 = k + 1(2(k + 1) + 1)$$

Se desarrollar los términos quedando como:

$$k(2k + 1) + 4(k + 1) - 1 = k + 1(2(k + 1) + 1)$$

$$k(2k + 1) + 4k + 4 - 1 = k + 1(2k + 2 + 1)$$

$$2k^2 + k + 4k + 3 = 2k^2 + 2k + k + 2k + 2 + 1$$

Simplificando los términos en rojo:

$$2k^2 + k + 4k + 3 = 2k^2 + 2k + k + 2k + 2 + 1$$

se tiene que la igualdad se cumple-

$$2k^2 + 5k + 3 = 2k^2 + 5k + 3$$

2.4 Ejercicios de practica

Demostrar por inducción matemática que si $n \in \mathbb{N}$, las siguientes igualdades son verdaderas:

a)

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n + 1)$$

b)

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$$

c)

$$(1 \cdot 2) + (2 \cdot 2^2) + (3 \cdot 2^3) + \dots + (n \cdot 2^n) = (n - 1)2^{n+1} + 2$$

TEMA III. Álgebra Booleana

3.1 Teoremas y postulados

Los teoremas del álgebra de Boole son un conjunto de reglas fundamentales que describen las propiedades y relaciones entre las operaciones lógicas básicas en el álgebra booleana. Estas leyes son útiles para simplificar expresiones booleanas y manipular funciones lógicas de manera algebraica.

Algunos de los teoremas y postulados del álgebra de Boole importantes para la simplificación de expresiones son:

Ley de Identidad:

$$A + 0 = A$$

$$A1 = A$$

Estas leyes establecen que la adición de 0 a una variable o la multiplicación de una variable por 1 no cambia su valor.

Ley de Anulación:

$$A + 1 = 1$$

$$A0 = 0$$

Estas leyes establecen que la adición de 1 a una variable o la multiplicación de una variable por 0 siempre da como resultado 1 o 0, respectivamente.

Ley de Idempotencia:

$$A + A = A$$

$$AA = A$$

Esta ley establece que una variable OR (suma lógica) o AND (producto lógico) consigo misma siempre es igual a la variable misma.

Ley de Complemento (o Negación):

$$A + A' = 1$$

$$AA' = 0$$

Estas leyes establecen que la adición de una variable y su complemento (negación) resulta en 1, mientras que la multiplicación resulta en 0.

Ley Conmutativa:

$$A + B = B + A$$

$$AB = BA$$

Esta ley establece que el orden de los términos en una suma o producto lógico no afecta el resultado.

Ley Asociativa:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C$$

Esta ley establece que el agrupamiento de términos en una suma o producto lógico no afecta el resultado.

Ley Distributiva:

$$A(B + C) = (AB) + (AC)$$

$$A + (BC) = (A + B)(A + C)$$

Esta ley establece cómo se distribuyen las operaciones AND y OR entre términos en una expresión booleana.

La tabla 3.1 muestra un concentrado de teoremas y sus duales

Tabla 3.1 Teoremas del algebra de booleana

Número	Teorema	Dual
1a.	$0A=0$	$1+A=1$
2a.	$1A=A$	$0+A=A$
3a.	$AA=A$	$A+A=A$
4a.	$AA'=0$	$A+A'=1$
5a.	$AB=BA$	$A+B=B+A$
6a.	$ABC=A(BC)$	$A+B+C=A+(B+C)$
7a.	$(AB...Z)'=A'+B'+...+Z'$	$(A+B+...+Z)'=A'B'...Z'$
8a.	$AB+AC=A(B+C)$	$(A+B)(A+C)=A+BC$
9a.	$AB+AB'=A$	$(A+B)(A+B')=A$
10a.	$A+AB=A$	$A(A+B)=A$
11a.	$A+A'B=A+B$	$A(A'+B)=AB$
12a.	$CA+CA'B=CA+CB$	$(C+A)(C+A'B)=(C+A)(C+B)$
13a.	$AB+A'C+BC=AB+A'C$	$(A+B)(A'+C)(B+C)=(A+B)(A'+C)$

3.2 Optimización de expresiones booleanas

3.2.1 Características de las expresiones booleanas

Las expresiones booleanas son expresiones matemáticas que operan sobre valores lógicos y sus características de estas son:

1. Se forman de variables las cuales generalmente son literales mayúsculas, pudiendo ser las primeras letras (A, B, C, D...), o bien, las últimas letras (...W, X, Y, Z) del alfabeto.
2. Las variables son booleanas por lo que pueden tener solo dos valores posibles: verdadero (representado comúnmente por 1 o "true") o falso (representado comúnmente por 0 o "false")
3. Las expresiones booleanas se forman utilizando operadores lógicos como AND, OR y NOT.

El operador AND representa el operador lógico “y”, multiplicación o conjunción y generalmente se representa con dos literales concatenadas, por ejemplo AB.

OR es la suma lógica y equivale a la disyunción, generalmente se representa con el signo +, por ejemplo, $A + B$.

NOT es la negación y generalmente se puede representar con los símbolos ', ~, ¬, por ejemplo, A' .

4. Una expresión Booleana se estructura mediante sumas de productos, por ejemplo, $F = AB + C'D$

5. Las expresiones booleanas pueden volverse más complejas mediante el uso de paréntesis para establecer el orden de evaluación y mediante la inclusión de múltiples operadores booleanos, por ejemplo, $F = (A + B')(CD)' + D$.

6. Los operadores lógicos AND, OR y NOT trabajan de la misma manera que en lógica proposicional:

AND		
A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR		
A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT	
A	A'
0	1
1	0

3.2.2 Simplificación de expresiones booleanas

La simplificación de expresiones booleanas consiste en reducir una expresión lógica a una forma más simple y equivalente, manteniendo la misma función lógica.

Las expresiones booleanas se simplifican para hacerlas más comprensibles, para reducir la complejidad y para mejorar la eficiencia en su evaluación.

Existen varias técnicas para reducir las expresiones, en este curso se estudia la reducción mediante las leyes del álgebra de Boole.

Para simplificar las expresiones booleanas se aplican teoremas y propiedades de manera iterativa y sistemática hasta que ya no se pueda reducirse más la expresión.

Para simplificar las expresiones booleanas se aplican los teoremas y postulados de manera iterativa y sistemática hasta que ya no se pueda reducirse más la expresión.

Ejemplo

Dada la expresión

$$F = AC'(C + D') + BC(A' + B)$$

reducirla a su mínima expresión.

Solución detallada

1. Se desarrolla el primer término de la expresión $AC'(C + D')$ aplicando la ley distributiva, teorema 8a quedando el termino como:

$$AC'C + AC'D' + BC(A' + B)$$

2. De la misma manera se aplica la misma ley distributiva sobre el segundo término $BC(A' + B)$ quedando

$$AC'C + AC'D' + BCA' + BCB$$

3. El primer término $AC'C$ se elimina por existencia de complementos ya que $C'C = 0$ y por identidad del elemento 0, $A0 = 0$, propiedades 4a y 1a respectivamente, quedando la expresión:

$$AC'D' + BCA' + BCB$$

4. El tercer término BCB se simplifica a BC , ya que $BB = B$ por el teorema 3a, ley de idempotencia, quedando la expresión como:

$$AC'D' + BCA' + BC$$

5. Sacando BC como factor común del segundo y tercer termino $BCA' + BC$ se obtiene $BC(A' + 1)$ obteniendo:

$$AC'D' + BC(A' + 1)$$

6. Finalmente por identidad del elemento 1, dual del teorema 1a, $(A' + 1) = 1$ por lo que $BC(A' + 1) = BC1$ quedando únicamente BC por ser 1 el elemento neutro del producto, obteniendo la expresión final como:

$$AC'D' + BC$$

7. Al no poder simplificar más se dice que la expresión reducida de:

$$F = AC'(C + D') + BC(A' + B)$$

es:

$$AC'D' + BC$$

Ejercicios de aprendizaje

Simplificar las siguientes expresiones booleanas

a) $F = X'Z(Y + Z'X) + ZY'$

$X'ZY + X'ZZ'X + ZY'$	desarrollo del primer término $X'Z(Y + Z'X)$, teorema 8a.
$X'ZY + 0 + ZY'$	se elimina el término $X'ZZ'X$ por teorema 4a $ZZ' = 0$ y $X'X = 0$
$Z(X'Y + Y')$	se extrae Z como factor común teorema 8a.
$Z(X' + Y')$	simplificación de $(X'Y + Y')$ teorema 11a.
$Z(XY)'$	aplicado la ley de Morgan, teorema 7a, al término $(X' + Y')$

Finalmente se obtiene que la función simplificada de:

$$X'Z(Y + Z'X) + ZY'$$

es:

$$Z(XY)'$$

b) $F = ((A + BC')' + D(E + F')')'$

$(A + BC')'' * (D(E + F')')'$	Aplicando la ley de Morgan sobre toda la expresión, la suma + se vuelve multiplicación (se marca con * en esta expresión para resaltar el cambio de operador) y cada término se niega.
$(A + BC')(D(E + F')')'$	La doble negación del primer término $(A + BC')''$ se elimina ya que $X'' = X$ por el teorema de involución.
$(A + BC')(D' + (E + F')'')$	Se aplica la ley de Morgan al término $(D(E + F')')'$ cambiando la multiplicación de D por $(E + F')')'$ a suma y negando cada término.
$(A + BC')(D' + (E + F'))$	Se elimina la doble negación de $(E + F')''$ por teorema de involución.
$(A + BC')(D' + E + F')$	Quedando de esta manera la expresión lo más reducida posible.

c) $F = AB + A(B + C) + B(B + C)$

$AB + A(B + C) + B(B + C)$ $= AB + AB + AC + BB + BC$	se desarrollan las multiplicaciones del segundo y tercer término, teorema 8a.
$AB + AB + AC + BB + BC$ $= AB + AC + B + BC$	se eliminan términos duplicados $AB + AB$ teorema 3a dual y BB teorema 3a.
$AB + AC + B + BC$ $= AB + AC + B$	se reduce a B el término $B + BC$ por el teorema 10a.
$AB + AC + B$ $= AC + B$	se reduce a B el término $AB + B$ por el teorema 10a. obteniendo así la máxima simplificación

d) $F = A'B'C'D + A'B'CD + AB'C'D + AB'CD + AB'CD'$

$A'B'D(C' + C) + AB'D(C' + C) + AB'CD'$	Se extrae factor común $A'B'D$ del primero y segundo término y factor común $AB'D$ del tercer y cuarto término, teorema 8a.
$A'B'D + AB'D + AB'CD'$	Se eliminan los términos $(C' + C)$ aplicando el teorema 4a dual y teorema 2a.
$B'D(A' + A) + AB'CD'$	Se extrae factor común $B'D$ del primero y segundo término, teorema 8a.
$B'D + AB'CD'$	Se eliminan el término $(A' + A)$ aplicando el teorema 4a dual y teorema 2a.
$B'(D + ACD')$	Se extrae factor común B' de ambos términos, teorema 8a.
$B'(D + AC)$	Se elimina D' por teorema 11a.
$B'D + B'AC$	Se desarrollo el producto de B' aplicando el teorema 8a, reduciendo así al máximo la expresión.

3.1 Ejercicios de practica

Simplificar las siguientes expresiones Booleanas:

a) $F = ABC + AB'(A'C')$

b) $F = Z'(Y + (X + Y)(X + Z) + XY)$

c) $F = A'B'C'D' + A'B'CD + A'B'CD' + ABC'D + ABCD + ABCD' + AB'C'D' + AB'CD + AB'CD'$

d) $F = A'B'C'D + A'B'CD + AB'C'D + AB'CD + AB'CD'$

3.3 Compuertas lógicas

Las compuertas lógicas sirven para implementar las funciones booleanas de manera gráfica. Cada operador lógico tiene una compuerta que lo representa, estas compuertas realizan una operación mediante una o varias variables de entrada y producen una salida dependiendo la operación realizada.

3.3.1 Diagramas de compuertas

Los diagramas utilizados para representar simbólicamente los operadores lógicos básicos se muestran en la tabla 3.2.

Tabla 3.2 Compuertas lógicas.

OPERADOR	COMPUERTA
OR	
AND	
NOT	

El operador OR tiene dos entradas y genera una salida con la suma de ambas variables.

La compuerta AND recibe dos variables y genera como salida el producto de dichas variables.

La compuerta de negación tiene una entrada y como salida la señal complementada.

3.3.2 Implementación de expresiones con compuertas lógicas.

La implementación de una función booleana mediante compuertas lógicas implica construir un esquema que produzca la salida deseada para cada combinación de

entradas de acuerdo con la función booleana específica. El esquema resultante es llamado circuito lógico.

Los pasos para la construcción de un circuito lógico son:

1. Simplificar la función para optimizar el diagrama.
2. Realizar el diagrama de cada término de la función de manera individual para facilitar el diseño del circuito completo. Es importante considerar la jerarquía de operadores al momento de la implementación.
3. Unir los diagramas individuales y generar la salida con la compuerta final requerida.

Ejemplo

Realizar el circuito lógico de la siguiente expresión booleana:

$$XY' + X'Z' + Y$$

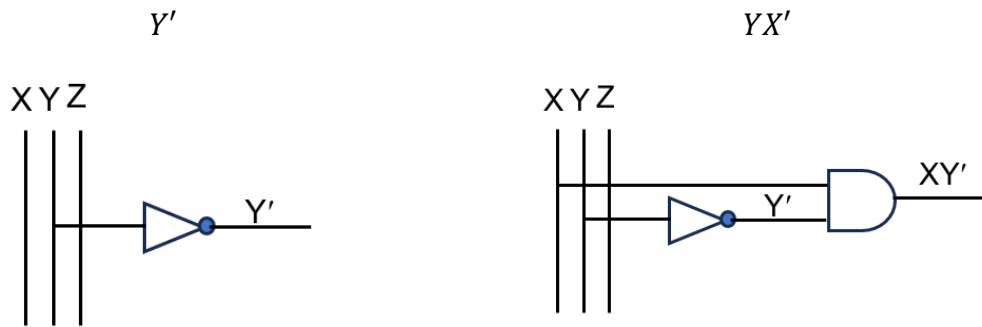
Solución detallada

1. Se realiza el trazo de las entradas o señales requeridas por la función.



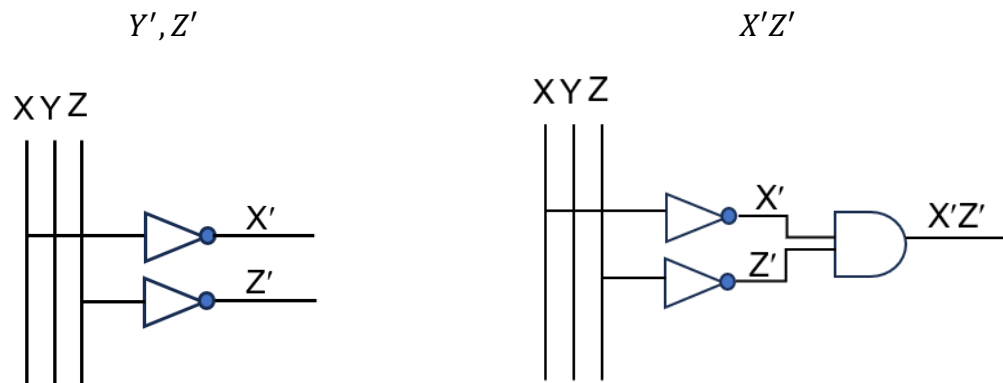
2. Se procede a la representación del primer término XY'

Este término se realiza en dos etapas; primero Y se pasa por la compuerta NOT para obtener Y' , y posteriormente se une a una compuerta AND con X para obtener la salida XY' .

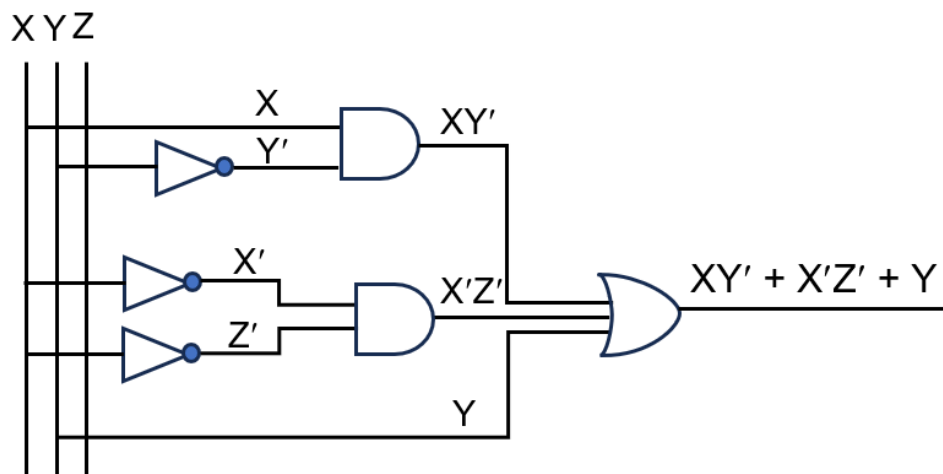


3. Se realiza la representación del segundo término $X'Z'$

De la misma manera que el anterior, primero se niegan ambas variables y posteriormente entran a una compuerta AND para obtener la salida $X'Z'$.



4. Finalmente se unen las salidas de ambos diagramas junto con una línea directa de la señal Y para entrar a una compuerta OR y obtener como salida la función deseada.



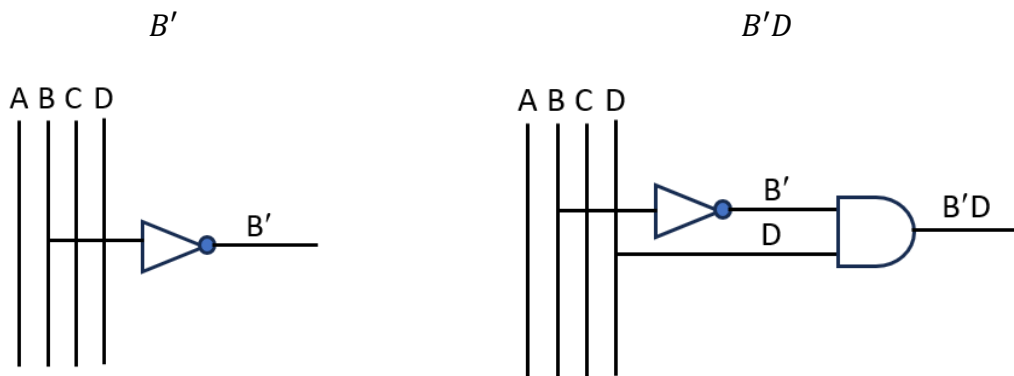
Como se visualiza en el ejemplo, es posible tener más de una entrada en una compuerta lógica esto no aplica para la compuerta NOT únicamente.

Ejercicios de aprendizaje

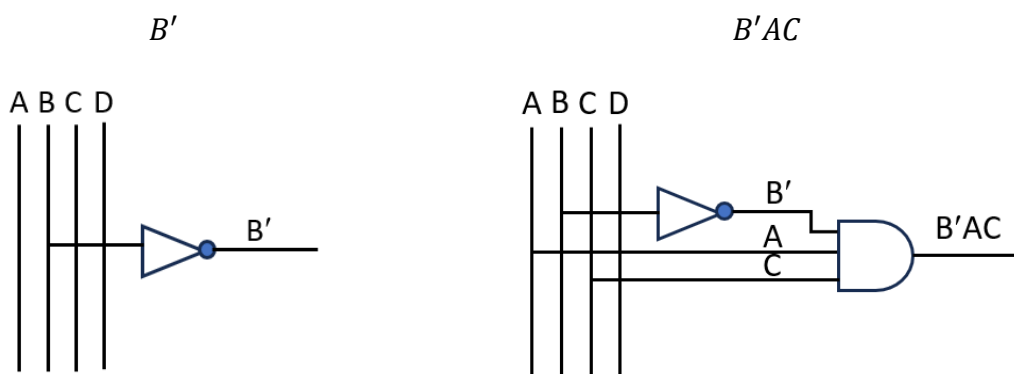
Implementar las siguientes funciones booleanas mediante compuertas lógicas.

a) $F = B'D + B'AC$

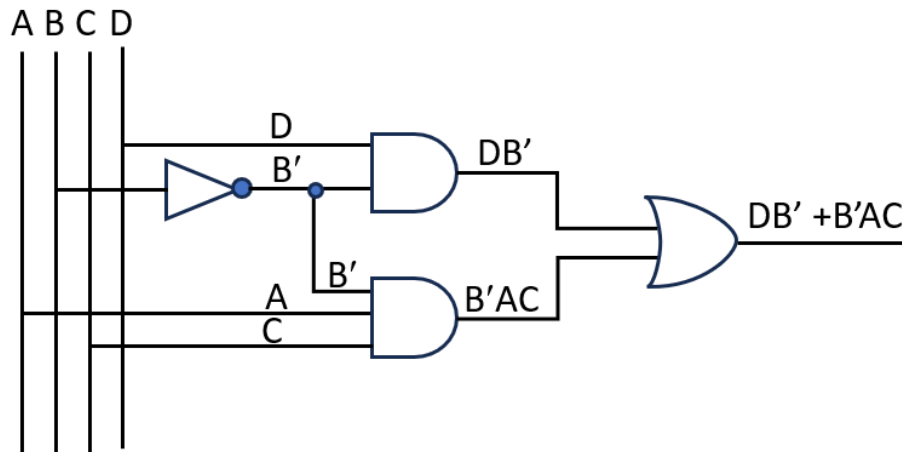
1. Representación del primer término. Primero se obtiene B' , posteriormente esta salida entra a una compuerta AND junto con la señal de D para obtener $B'D$.



2. Se implementa el segundo término en dos pasos. Primero se obtiene B' y posteriormente esta salida entra a una compuerta AND junto con las señales A y C.



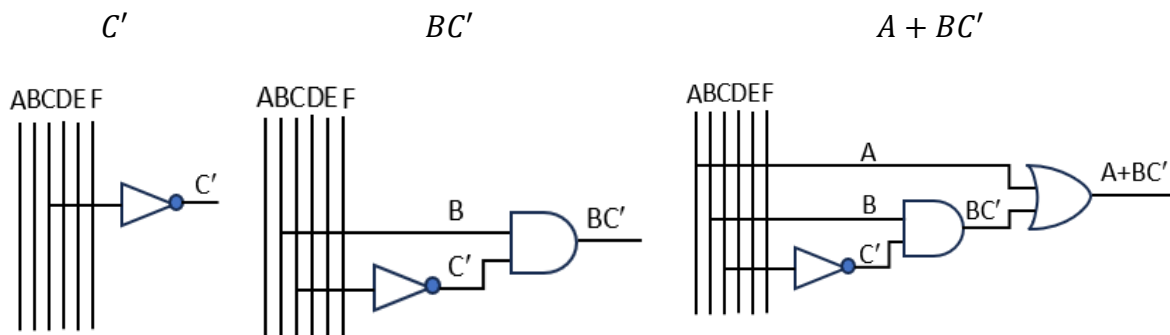
3. Finalmente se unen las salidas de cada circuito en una compuerta OR para obtener la salida de la función deseada.



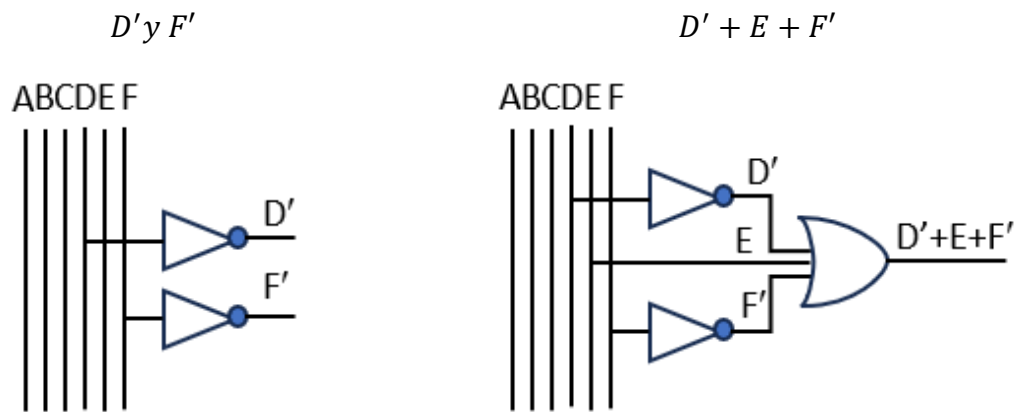
Como se puede ver en el diagrama final, para el segundo término, B' se obtiene de la misma salida que se utilizó para el primer término, esto es recomendable ya que evita redundancias. Por otro lado, se aclara que el intercambio de variables no afecta el resultado ya que por conmutatividad $B'D = DB'$, el cambio en el diagrama permitió no realizar cruce de líneas para una mayor claridad en el diseño.

b) $F = (A + BC')(D' + E + F')$

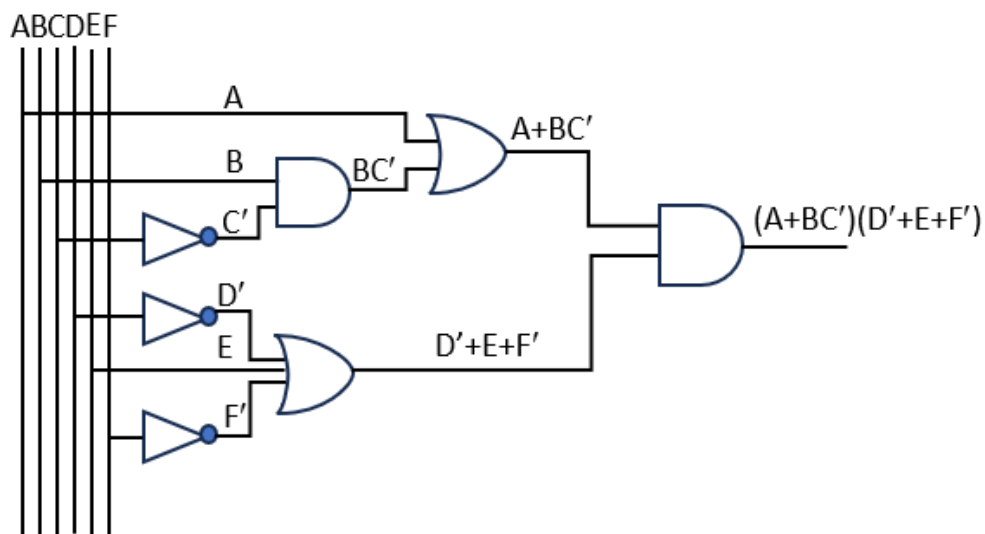
1. Implementación del primer término. Por claridad este término se resuelve en tres pasos siguiendo la jerarquía de operadores. Primero se obtiene la negación de C para realizar después la multiplicación lógica con B y finalmente esta salida se une con la señal A para entrar a una compuerta OR y obtener dicho término.



2. Implementación del segundo término. Se puede resolver en dos pasos, primero se obtienen las negaciones de D y F , y posteriormente las salidas se conectan a una compuerta OR junto con la señal E .

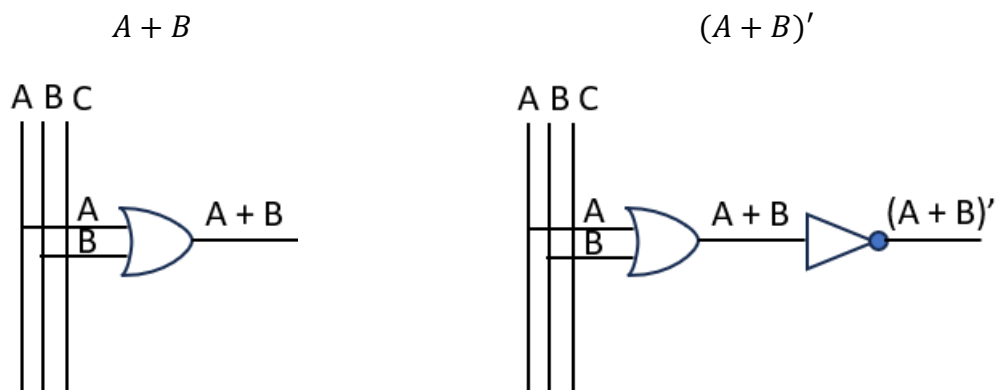


3. Finalmente se unen los dos diagramas para obtener el circuito final de la expresión.

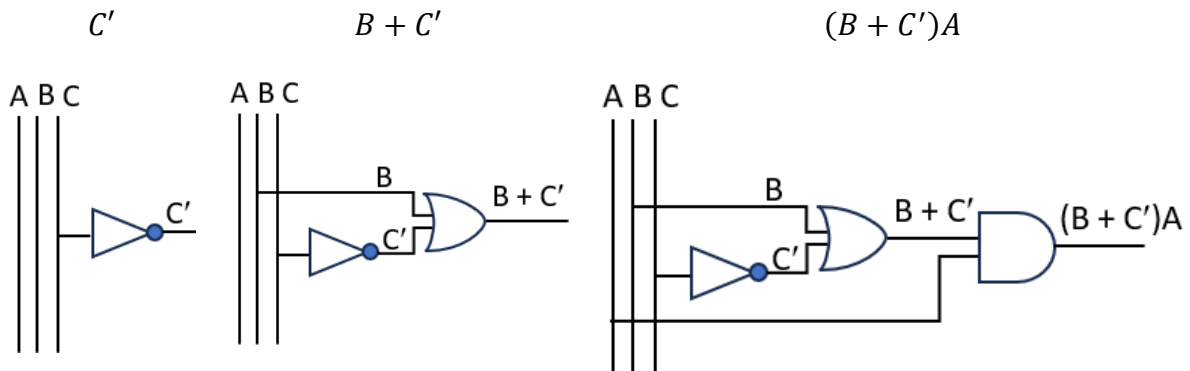


c) $F = (A + B)' + (B + C')A$

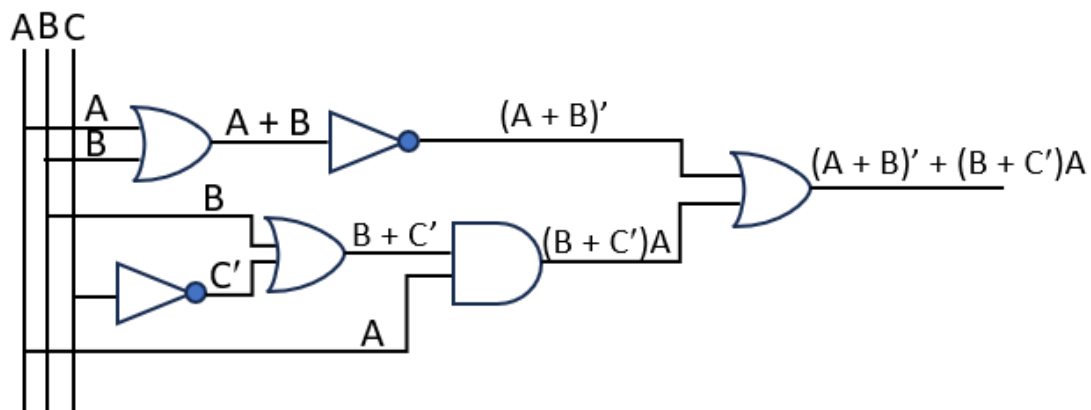
1. Implementación del primer término. Se realizan dos pasos, primero se realiza la operación OR de A con B y posteriormente la salida de ésta entra a una negación.



2. El segundo término se realiza en tres pasos. Primero se niega C , posteriormente se conecta a una compuerta OR y por último la salida entra a una compuerta AND junto con la señal de A .



3. Finalmente se unen las salidas de ambos diagramas a una compuerta OR para obtener la salida de la función deseada.



3.2 Ejercicios de practica

Implementar el circuito lógico de las siguientes funciones Booleanas:

- a) $F = ABC + AB'$
- b) $F = X'Z + XY'$
- c) $F = X(YZ + Y')$
- d) $F = AB' + A'C' + B$

TEMA IV. Conjuntos y Relaciones

4.1 Representación y operaciones de conjuntos

4.1.1 Definición de conjuntos

Un conjunto se puede definir como una agrupación de objetos que tienen una característica en común, los objetos pueden ser números, letras, palabras u otros elementos según el contexto.

En matemáticas tiene el mismo significado, sólo que a estos objetos se les llama elementos o miembros del conjunto.

Es importantes saber que:

- En un conjunto el orden de los elementos no importa, es decir, los elementos: juan, pedro, son los mismos que, pedro, juan.
- En un conjunto cada elemento es único dentro del conjunto, es decir no hay elementos duplicados.
- Un conjunto puede ser finito, tiene una cantidad determinada de elementos; o infinito, tiene una cantidad ilimitada de elementos.

4.1.2 Nomenclatura de los conjuntos

Algunas de las nomenclaturas genéricas más utilizadas son:

- Las letras mayúsculas denotan un conjunto $A, B, C, \dots, X, Y, Z$.
- Las letras minúsculas denotan los elementos de un conjunto $a, b, c, \dots, x, y, z$, o bien $1, 2, 3, \dots$ si los elementos son numéricos
- La pertenencia de un elemento a en un conjunto se denota mediante el signo $\in$, por lo que: $a \in S$ denota que a es un elemento que pertenece al conjunto S .
- Si un elemento no pertenece a un conjunto se denota mediante el símbolo $\notin$, por lo que: $b \notin S$ significa que el elemento b no pertenece al conjunto S .

4.1.3 Representación de un conjunto

Existen diversas formas de representar un conjunto, tres de ellas son:

1) Por extensión: En esta forma se enlistan los elementos que forman el conjunto separado por comas y escritos entre llaves { }.

Ejemplos

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots, \infty\}$$

$$Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$B = \{\text{lunes, martes, miercoles, jueves, viernes, s\u00e1bado, domingo}\}$$

2) Por comprensión: En esta forma se definen las propiedades de sus elementos entre llaves { }.

Ejemplos

Los conjuntos A , X , Y y B del ejemplo anterior que enlistan sus elementos, pueden describirse de manera resumida mediante las características de los elementos del conjunto como sigue:

$$A = \{a | a \text{ es una vocal}\}$$

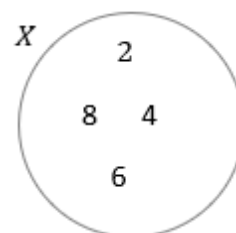
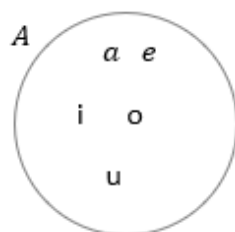
$$X = \{x | x \in \mathbb{N}\}$$

$$Y = \{y | y \text{ es un n\u00famero par y } 1 \leq y \leq 10\}$$

$$B = \{b | b \text{ es un d\u00eda de la seman}\}$$

3) Mediante diagramas de Venn: En esta forma los conjuntos se expresan con sus elementos dentro de \u00e9rculos llamados diagramas de Venn.

Ejemplos



4.1.4 Tipos de conjuntos

4.1.4.1 Subconjuntos

Un conjunto A es un subconjunto de B si todos los elementos de A se encuentran también en B . El símbolo de subconjunto es $\subset$, por lo que:

$$A \subset B$$

denota que A es subconjunto de B .

Ejemplo

Sean

$$A = \{a, e, i\} \text{ y } B = \{a, e, i, o, u\}$$

entonces se cumple que $A \subset B$ ya que todos los elementos de A pertenecen a B .

Por otro lado, si dos conjuntos A y B tienen los mismos elementos se dice que A es igual a B , y se denota como $A = B$. La igualdad de dos conjuntos establece que:

$$A \subset B \text{ y } B \subset A$$

léase como, A es subconjunto de B y B es subconjunto de A .

Ejemplo

Sean

$$A = \{a, e, i, o, u\} \text{ y } B = \{a, e, i, o, u\}$$

entonces se cumple que $A \subset B$ y $B \subset A$ ya que todos los elementos de A pertenecen a B y todos los elementos de B pertenecen a A .

Un conjunto A no es subconjunto de B si al menos un elemento de A no pertenece a B . El símbolo de no subconjunto es $\not\subset$, por lo que:

$$A \not\subset B$$

denota que A no es subconjunto de B .

Ejemplo

Sean

$$A = \{a, e, b\} \text{ y } B = \{a, e, i, o, u\}$$

entonces se dice que $A \not\subset B$ ya que no todos los elementos de A pertenecen a B , en este caso el elemento b no se encuentra en el conjunto B .

También podemos ver que $B \not\subset A$ puesto que los elementos i, o, u de B no se encuentran en A .

A partir de las definiciones anteriores se establecen tres teoremas:

- 1) Dado un conjunto A se dice que $A \subset A$, es decir, todo conjunto es subconjunto de él mismo.
- 2) Dados dos conjuntos A y B , si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces se cumple que $A = B$.
- 3) Dados tres conjuntos A , B y C , si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces se cumple que $A \subset C$.

4.1.4.2 Conjunto universo y conjunto vacío

El conjunto universo es un conjunto de referencia sobre el cual se trabaja. Este conjunto contiene todos los elementos que se pueden considerar en el contexto de análisis y generalmente se denota con la letra $\mathcal{U}$. Todo conjunto pertenece a un conjunto universo.

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es un número entero}\}$$

Subconjuntos de este universo pueden ser::

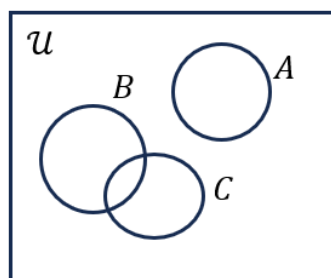
$$X = \{x | x \text{ es un número primo y } x > 2 \}$$

$$B = \{1, 4, 8, 9, 15\}$$

$$Y = \{y | y \text{ es un número par}\}$$

Cuando un conjunto se representa con diagramas de Venn el universo se delimita mediante un recuadro el cual debe contener todos los conjuntos pertenecientes a ese universo.

Ejemplo



Un conjunto vacío es aquel que no tiene elementos. El conjunto vacío se denota por el símbolo $\emptyset$ o bien con las llaves sin elementos $\{ \}$.

Ejemplo

$$A = \{a | a \text{ es un animal con dos cabezas}\}$$

En principio $A = \emptyset$ ya que no tendría elemento alguno.

4.1.4.3 Conjunto potencia

Un conjunto potencia contiene todos los subconjuntos posibles de un conjunto dado, es decir, dado un conjunto A , el conjunto potencia de A , denotado como $P(A)$, contendrá todos los subconjuntos posibles formados con los elementos de A .

Ejemplo

$$A = \{a, b, c\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Como se puede ver en el ejemplo el conjunto potencia incluye los siguientes subconjuntos de A :

$\emptyset$ el subconjunto que no tiene elementos

$\{a\}, \{b\}, \{c\}$ los subconjuntos con un elemento

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ los subconjuntos con dos elementos

$\{a, b, c\}$ el subconjunto con los tres elementos

De lo anterior se puede deducir que un conjunto potencia tendrá 2^n elementos donde n es el número de elementos del conjunto.

Ejercicios de aprendizaje

Obtener el conjunto potencia de los siguientes conjuntos:

a) $X = \{1, 2\}$

Solución:

$\emptyset$ conjunto vacío

$\{1\}, \{2\}$ conjuntos con un elemento

$\{1, 2\}$ conjuntos con dos elementos

Dado lo anterior tenemos que el conjunto potencia $P(X)$ es:

$$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

b) $X = \{a, b, c, d\}$

Solución:

$\emptyset$ el subconjunto que no tiene elementos

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ los subconjuntos con un elemento

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$ los subconjuntos con dos elementos

$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ el subconjunto con tres elementos

$\{a, b, c, d\}$ el subconjunto con tres elementos

Dado lo anterior tenemos que:

$$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \\ \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

4.1 Ejercicios de practica

a) Cuantos elementos tendría $P(A)$ si A tiene 10 elementos.

b) Obtener el conjunto potencia de $B = \{w, x, y, z\}$.

c) Cuántos elementos pertenecen al conjunto $P(A)$ y cuáles son sus elementos si $A = \{a | a \text{ es una vocal}\}$.

d) Calcular el número de elementos del conjunto potencia de $X = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 20\}$.

4.1.5 Operaciones de conjuntos

4.1.5.1 Unión

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene todos los elementos que pertenecen a A , a B o a ambos conjuntos. La unión se denota con el símbolo $\cup$, por lo que $A \cup B$ se lee A unión B .

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e\} \text{ y } B = \{a, e, i, o, u\}$$

Entonces:

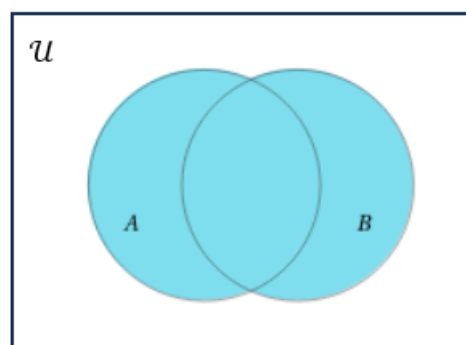
$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$$

Como se ve en el ejemplo, el conjunto resultante de la unión de dos conjuntos contendrá los elementos de los dos conjuntos sin repetir aquellos elementos contenidos en ambos conjuntos, tal es el caso de a y e .

Una operación también se puede representarse con diagramas de Venn, el resultado de la unión será el espacio comprendido por ambos conjuntos.

Ejemplo

$$A \cup B$$



4.1.5.2 Intersección

La intersección de conjuntos representa la conjunción en lógica. La intersección de dos conjuntos denotado como $A \cap B$ da como resultado los elementos que comparten ambos conjuntos.

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e\} \text{ y } B = \{a, e, i, o, u\}$$

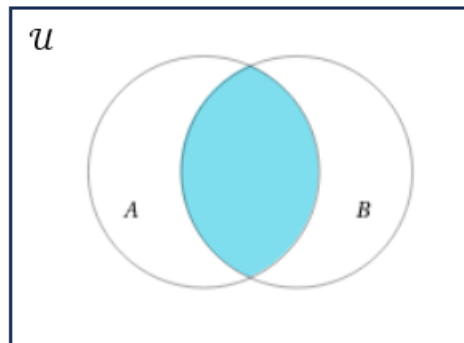
Entonces:

$$A \cap B = \{a, e\}$$

Como se puede ver en el resultado, los únicos elementos que pertenecen a la intersección son a y e ya que estos elementos se encuentran en ambos conjuntos.

En diagramas de Venn la intersección sería:

$$A \cap B$$



4.1.5.3 Diferencia

La diferencia de dos conjuntos se denota con el símbolo aritmético menos ($-$). Esta operación es análoga a la resta aritmética, al restar un conjunto B a un conjunto A se tienen como resultado los elementos de A sin los elementos que comparte con B .

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e\} \text{ y } B = \{a, e, i, o, u\}$$

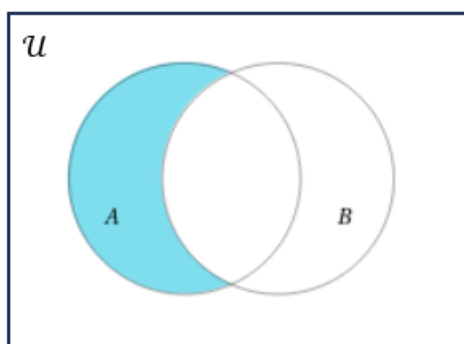
Entonces:

$$A - B = \{b, c, d\}$$

Como se puede ver en este caso, los elementos que se eliminan del conjunto A son los elementos a, e ya que estos los comparte con B .

La diferencia en diagramas de Venn sería:

$$A - B$$



4.1.5.4 Diferencia simétrica

La diferencia simétrica de dos conjuntos son los elementos de ambos conjuntos sin los elementos que comparten. Esta es equivalente a la disyunción exclusiva de lógica y se denota de la misma manera como $\oplus$.

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e\} \text{ y } B = \{a, e, i, o, u\}$$

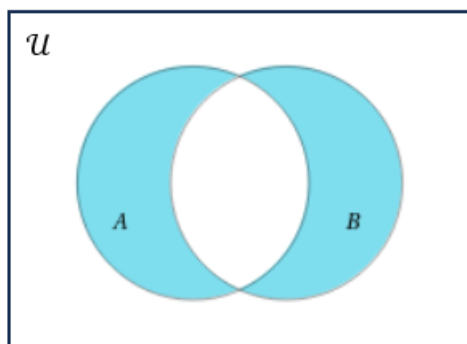
Entonces:

$$A \oplus B = \{b, c, d, i, o, u\}$$

En este caso es importante remarcar que los elementos que quedan fuera del resultado son los elementos que están en ambos conjuntos, es decir a y e .

La diferencia simétrica de dos conjuntos en diagramas de Venn resultaría como:

$$A \oplus B$$



4.1.5.5 Complemento

El complemento de un conjunto se obtiene con respecto al universo, generalmente se denota con un apostrofe, así, B' se lee el complemento de B . Se dice entonces que $B' = \mathcal{U} - B$.

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es una letra del alfabeto}\}$$

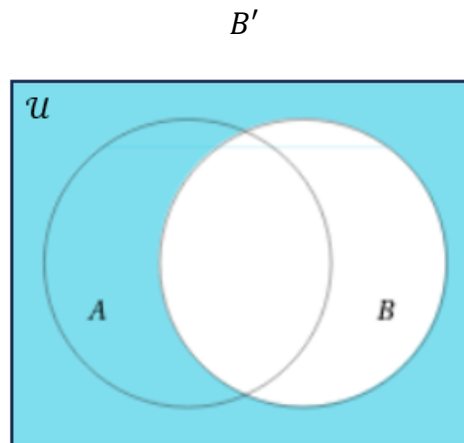
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

Entonces:

$$B' = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, \tilde{n}, o, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$$

Como se muestra en el resultado, el complemento de B son todas las letras que conforman el universo menos las letras del conjunto B .

En diagramas de Venn el complemento quedaría como:



4.1.5.6 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad de un conjunto B denotada como $n(B)$, se define como el número de elementos que contiene el conjunto B , en este caso no importa qué elementos son, si no cuántos son. La cardinalidad de un conjunto se puede determinar si un conjunto es finito.

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es una letra del alfabeto}\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

Entonces:

$$n(\mathcal{U}) = 28$$

$$n(B) = 5$$

Como se puede ver en el ejemplo la cardinalidad es un único valor numérico.

En los siguientes apartados se realizan diferentes tipos de ejercicios basados en la teoría de conjuntos anteriormente vista. Se estudiarán y resolverán ejercicios de tipo numérico, de espacialidad con diagramas de Venn y de resolución de problemas con conjuntos.

Ejercicios de tipo numérico

Ejercicios de aprendizaje

Dados los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{U} = \{x | 1 \leq x \leq 15\}$$

$$A = \{2, 4, 5, 7, 10\}$$

$$B = \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$$

$$C = \{1, 3, 4, 7, 10, 12, 13\}$$

Resolver las siguientes operaciones simples:

a) $A \cup B$

Solución:

El resultado de la unión de A y B es:

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

b) $B \cap C$

Solución:

El resultado de la intersección de A y B es:

$$B \cap C = \{1, 4, 7, 10\}$$

c) $B - A$

Solución:

La resta del conjunto B menos el conjunto A da como resultado:

$$B - A = \{1, 8, 9\}$$

d) $A \oplus B$

Solución:

La diferencia simétrica de A y B es:

$$A \oplus B = \{1, 2, 5, 8, 9\}$$

e) C'

Solución:

El resultado del complemento del conjunto C es:

$$C' = \{2, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15\}$$

4.2 Ejercicios de practica

Considerando los conjuntos definidos en los ejercicios de aprendizaje demostrar las igualdades de las siguientes expresiones:

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $B \cap C = C \cap B$

c) $B - A = A - B$

d) $A \oplus B = B \oplus A$

Las operaciones de conjuntos pueden volverse más extensas mediante la inclusión de múltiples operadores y conjuntos. La resolución de estas expresiones sigue la jerarquía de operadores mostrada en la Tabla 4.1. También se pueden utilizar paréntesis para establecer el orden de evaluación.

Tabla 4.1 Jerarquía de operadores.

Operadores
()
'
$\cap$
$\cup, -$
$\oplus$

Ejercicios de aprendizaje

Dado el conjunto universo $\mathcal{U} = \{x | 1 \leq x \leq 20\}$ y los conjuntos:

$$A = \{2, 4, 5, 7, 10, 18\}$$

$$B = \{1, 4, 7, 8, 9, 10, 15\}$$

$$C = \{1, 3, 4, 7, 10, 12, 13, 17\}$$

$$D = \{2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 18\}$$

Resolver las siguientes operaciones:

a) $(B' - A) \cap (C \oplus D)'$

Solución:

$$B' = \{1, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$(B' - A) = \{1, 3, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20\}$$

$$C \oplus D = \{1, 2, 5, 17, 18\}$$

$$(C \oplus D)' = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20\}$$

$$(B' - A) \cap (C \oplus D)' = \{3, 6, 11, 12, 13, 14, 16, 19, 20\}$$

b) $(A \cap C' \oplus B) - (C \cup D)'$

Solución:

$$C' = \{2, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 16, 18, 19, 20\}$$

$$A \cap C' = \{2, 5, 18\}$$

$$A \cap C' \oplus B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 15, 18\}$$

$$C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 17, 18\}$$

$$(C \cup D)' = \{6, 8, 9, 11, 14, 15, 16, 19, 20\}$$

$$(A \cap C' \oplus B) - (C \cup D)' = \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 18\}$$

c) $[(A - B') \cap (D \oplus B)] - (C \oplus D)'$

Solución:

$$B' = \{1, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$D' = \{1, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 19, 20\}$$

$$A - B' = \{4, 7, 10\}$$

$$(D \oplus B) = \{1, 2, 3, 5, 8, 9, 12, 13, 15, 18\}$$

$$(A - B') \cap (D \oplus B) = \emptyset$$

$$(C \oplus D)' = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20\}$$

$$[(A - B') \cap (D \oplus B)] - (C \oplus D)' = \emptyset$$

Considerando el conjunto universo $\mathcal{U} = \{x|x \in \mathbb{Z}^+\}$, y los conjuntos:

$$A = \{x|x \in \mathbb{Z}^+; 5 < x < 30; x \text{ es primo}\}$$

$$B = \{9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 21, 23\}$$

$$C = \{6, 7, 8, 9, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 25\}$$

$$D = \{x|x \in \mathbb{Z}^+; 10 < x < 20; x \text{ es impar}\}$$

Calcular:

a) $[B \oplus (C' \cap A)] - D'$

Solución:

$$C' = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 24, 26, \dots \infty\}$$

Los elementos del conjunto D son:

$$D = \{11, 13, 15, 17, 19\}$$

Por lo que:

$$D' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots \infty\}$$

Los elementos del conjunto A son:

$$A = \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

$$C' \cap A = \{11, 13, 19, 29\}$$

$$[B \oplus (C' \cap A)] = \{9, 12, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 29\}$$

$$[B \oplus (C' \cap A)] - D' = \{15, 17, 19, \}$$

b) $[(B - C) - D'] \cup (A \oplus B')$

Solución:

$$D' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots \infty\}$$

$$B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 18, 19, 20, 22, 24, \dots \infty\}$$

$$B - C = \{11, 12, 13, 16, \}$$

$$(B - C) - D' = \{11, 13\}$$

$$A \oplus B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, \dots \infty\}$$

$$[(B - C) - D'] \cup (A \oplus B')$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, \dots \infty\}$$

4.3 Ejercicios de practica

Considerando los conjuntos definidos en los ejercicios de aprendizaje, resolver las siguientes expresiones:

a) $(A \cap C \cap D)' \cap B$

b) $(D \oplus B) \cap A'$

c) $[(A - B) \cap (D \oplus B)] - (C \oplus D')$

Ejercicios de espacialidad

En este tipo de ejercicios se utilizan los diagramas de Venn y se trabaja con la espacialidad en los conjuntos. En estos ejercicios, no se requieren los elementos de los conjuntos ya que únicamente se busca encontrar la región que representa la expresión dada.

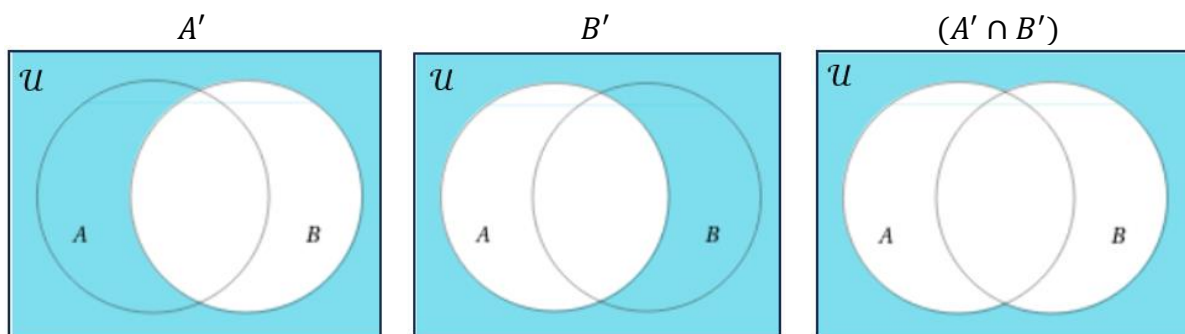
Ejercicios de aprendizaje

Encontrar la región resultante en los diagramas de Venn de las siguientes expresiones:

a) $(A' \cap B')$

Solución:

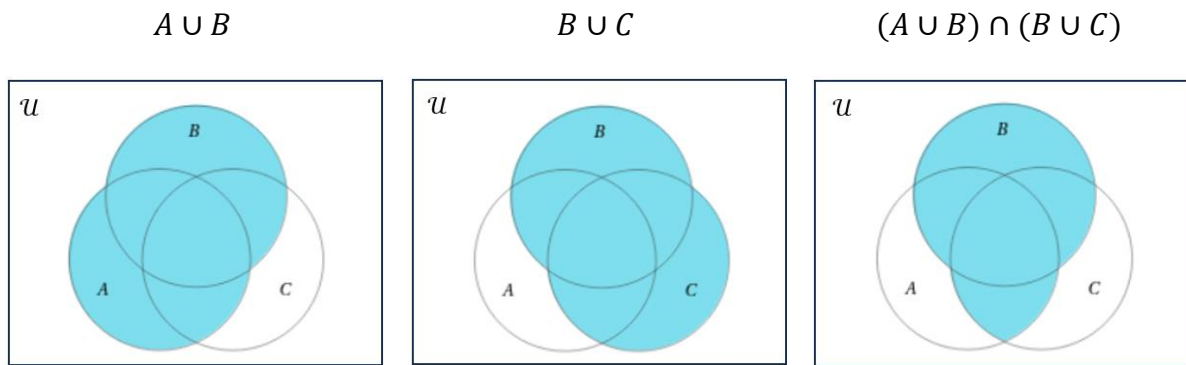
El ejercicio se resuelve en tres pasos: primero se obtiene la región de A' , posteriormente la región de B' y finalmente se obtiene la intersección de ambos diagramas.



b) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

Solución:

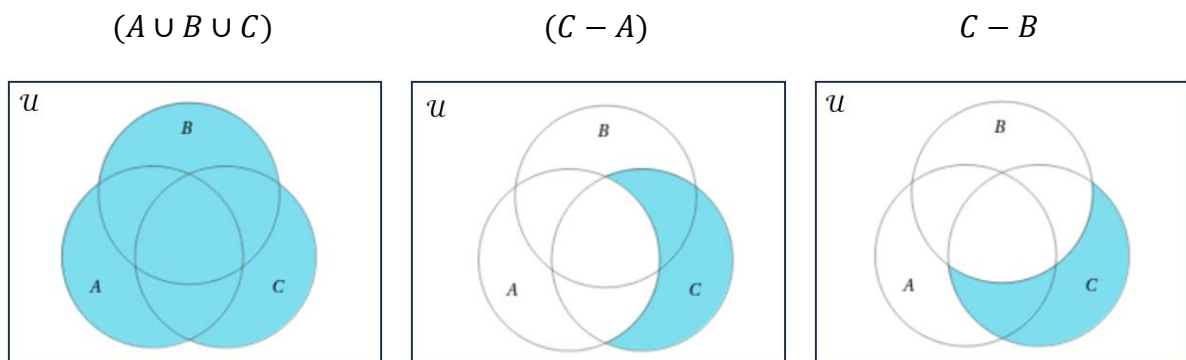
Los paréntesis definen la prioridad de las operaciones por lo que primero se realiza la unión de A con B después la unión de B con C para posteriormente realizar la intersección de ambos diagramas.



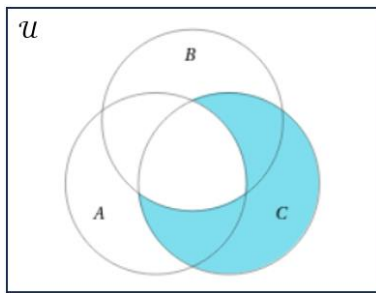
c) $(A \cup B \cup C) - [(C - A) \cup (C - B)]$

Solución:

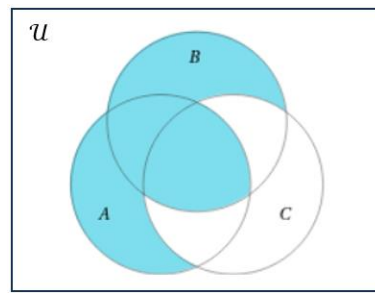
En el primer paso se determina la unión de A, B y C . En un segundo paso se realizan las diferencias de $C - A$ y $C - B$ para posteriormente realizar la unión de los diagramas de estas dos diferencias. Finalmente se realiza la diferencia del primer diagrama con el último para obtener la región resultante de la expresión. Los resultados gráficos son los siguientes:



$$(C - A) \cup (C - B)$$



$$(A \cup B \cup C) - [(C - A) \cup (C - B)]$$



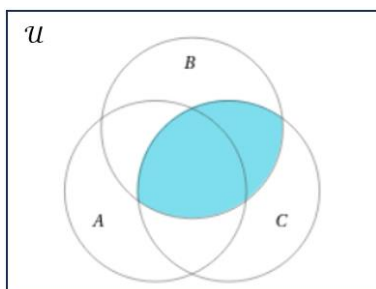
d) $[(C \cap B)' \cup (A \cap C)'] \oplus (A \cup B)$

Solución:

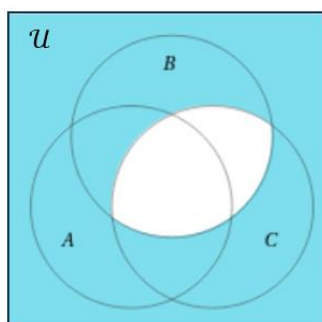
Primeramente, se resuelven las operaciones dentro de los corchetes. Se obtiene la intersección de C y B y la región resultante se complementa. Lo mismo con los conjuntos A y C . Se realiza la unión de A y B y finalmente se determina la región de la diferencia simétrica entre la región resultante de los corchetes y de la unión de A y B .

Los diagramas resultantes de este proceso son:

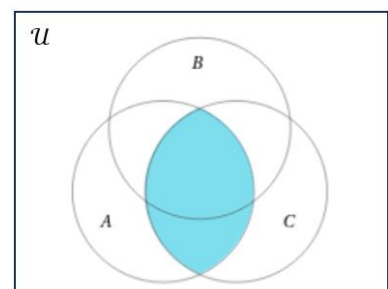
$$C \cap B$$



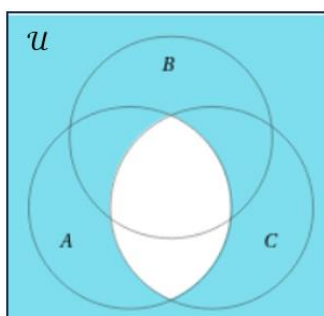
$$(C \cap B)'$$



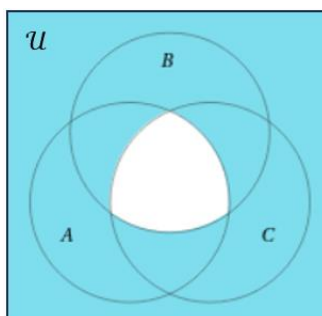
$$(A \cap C)'$$



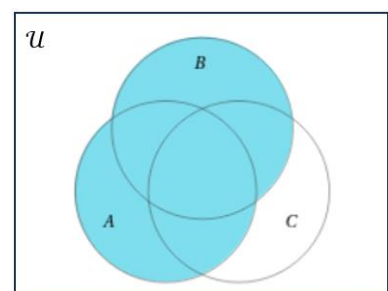
$$(A \cap C)'$$



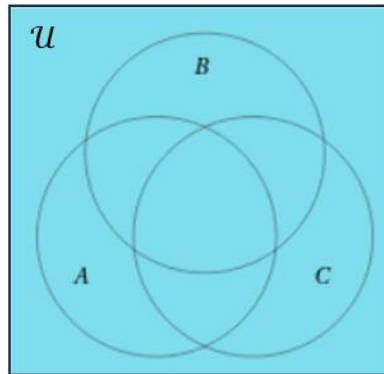
$$(C \cap B)' \cup (A \cap C)'$$



$$A \cup B$$



$$[(C \cap B)' \cup (A \cap C)'] \oplus (A \cup B)$$



4.4 Ejercicios de practica

Encontrar las regiones resultantes de las siguientes expresiones:

a) $((A \oplus C) - (B \cap A)) \cup (A \cap C)$

b) $(A \oplus B) - (C \cap B \cup A)$

c) $[(B \cap C) \cup (A \cup C)] - (A \cap C)$

d) $[(A \cup B)' - (A \cap C)] \cup [(A \cap B' \cap C')] \cup (A' \cap B \cap C')$

Ejercicios de resolución de problemas

En este tipo de ejercicios se plantean problemas los cuales pueden resolverse mediante conjuntos. En estos ejercicios se trabaja con cardinalidad de conjuntos, por lo que los datos dentro del conjunto indican el número de elementos que tiene dicho conjunto.

Para la resolución de estos ejercicios se recomienda considerar los siguientes pasos:

1. Analizar el problema para identificar el número de conjuntos involucrados y encontrar cuál es la cardinalidad de cada una de las regiones de los conjuntos.
2. Construir el diagrama de Venn con el número de conjuntos que involucra el problema.
3. Vaciar la información en los conjuntos.
4. Contestar las preguntas a partir de la información de dicho diagrama.

Ejercicios de aprendizaje

Resolver mediante conjuntos los siguientes problemas:

a) En un campamento hay 100 estudiantes y todos ellos escogen participar en, al menos, uno de los dos deportes: natación y tenis, además 32 estudiantes escogen participar en ambos deportes. Si 24 estudiantes escogieron solamente tenis, ¿cuántos estudiantes escogieron solamente natación?

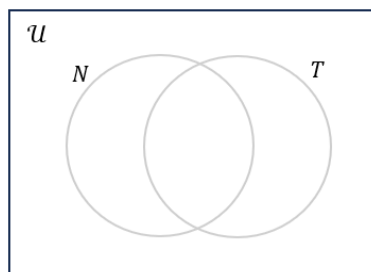
Solución:

Se realiza el análisis del problema para extraer los datos:

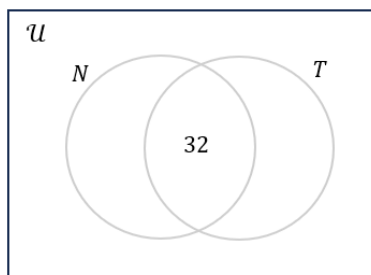
- El total de estudiantes es 100, por lo que: $n(\mathcal{U}) = 100$.
- Los deportes son los conjuntos: Natación (N) y tenis (T).
- 32 estudiantes participan en ambos deportes, por lo que, $N \cap T$.
- 24 estudiantes escogieron solamente tenis, por lo que: $n(T) = 24$.

Elaboración del diagrama de Venn:

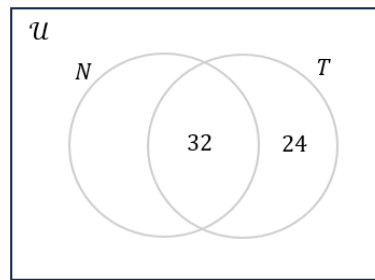
Se consideran dentro del universo dos conjuntos Natación (N) y Tenis (T)



32 estudiantes participan en ambos deportes por lo que en la intersección de los conjuntos hay 32 elementos

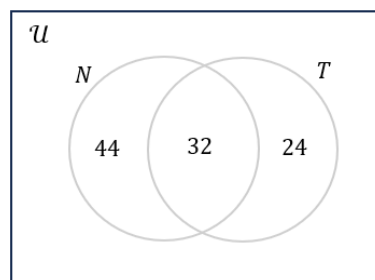


24 estudiantes escogieron solamente tenis, por lo que la región de N que no intersecta a T tiene 24 elementos.



El problema indica que 100 es el total de estudiantes y que todos los estudiantes escogieron participar en un deporte. Esto deduce dos cosas: uno, todos los estudiantes pertenecen a un conjunto y dos la suma de todos los elementos de los conjuntos debe ser 100.

Dado lo anterior, y conociendo que se tienen $32 + 24 = 56$ elementos, se deduce que 44 son los estudiantes que escogieron únicamente natación puesto que $100 - 56 = 44$.



Respuesta: 44 estudiantes escogieron natación.

b) En la biblioteca existen 290 revistas de ciencias que tratan de los siguientes temas: salud, tecnología y ecología. Del total, 88 revistas tienen información sobre salud, 101 sobre tecnología, 83 sobre ecología, 45 sobre tecnología y ecología, 32 sobre tecnología y salud, 37 sobre ecología y salud, 19 sobre los tres temas. Responder:

¿Cuántas revistas contienen material de al menos uno de los tres temas?

¿Cuántas revistas contienen material sobre los tres temas?

¿Cuántas revistas contienen material sobre uno de los tres temas?

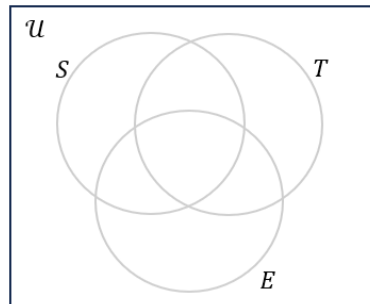
¿Cuántas no tienen material de tecnología?

¿Cuántas no tienen material sobre ninguno de los temas?

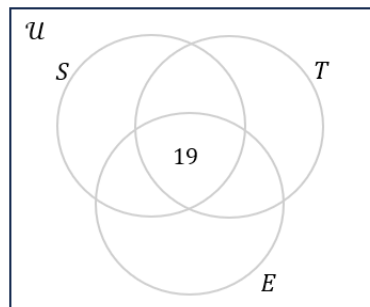
¿Cuántas revistas contienen material de salud y ecología, pero no de medicina?

Solución detallada

Se tienen tres conjuntos: Salud (S), Tecnología (T) y Ecología (E).

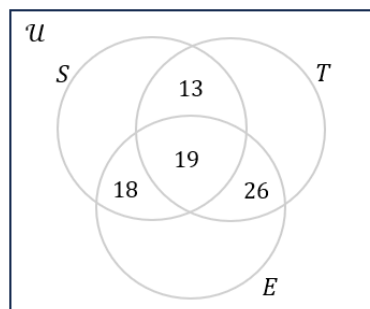


Se conoce que 19 revistas hablan de los tres temas, por lo que se sabe que $n(S \cap T \cap E) = 19$.

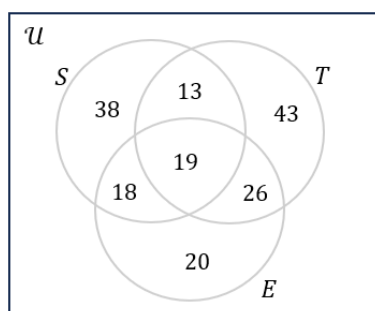


A partir de este dato se puede saber cuántos elementos tiene cada intersección de dos conjuntos. Por ejemplo, se plantea que 32 revistas hablan de salud y tecnología, conociendo que dentro de las 19 revistas hay libros que hablan de salud y tecnología, entonces: $(S \cap T) = 32 - 19 = 13$.

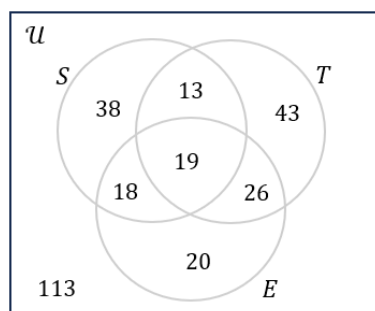
De esta misma manera se consideran los 19 elementos para las otras dos intersecciones quedando el diagrama como sigue:



El resto de los datos se determina sumando los elementos que tiene cada conjunto y restándolo al total que debe de tener, por ejemplo, para los temas de salud ya se tienen $13 + 19 + 18 = 50$ dado que hay 88 revistas con temas de salud el dato faltante es: $88 - 50 = 38$. Esto mismo se aplica a los otros dos conjuntos.



Finalmente se debe determinar si existen revistas que no hablen de ninguno de los tres temas, esto se confirma con la suma de los elementos de los tres conjuntos, es decir, $38 + 13 + 18 + 19 + 20 + 26 + 43 = 177$ como el total de revistas de la biblioteca es 290, entonces 113 no contienen información de los temas. Este dato pertenece al universo, pero no a los conjuntos.



A partir de esta información se responde a las preguntas planteadas:

¿Cuántas revistas contienen material de al menos uno de los tres temas?

El término, al menos, se precisa que es uno, pero también pueden ser más, por lo tanto, se consideran todos los elementos dentro de los conjuntos excepto el 113 de revistas que no contienen ningún tema.

Respuesta: $38 + 13 + 18 + 19 + 20 + 26 + 43 = 177$

¿Cuántas revistas contienen material sobre los tres temas?

El número de revistas que contienen material de los tres temas es aquel que se encuentra en la intersección de los tres conjuntos.

Respuesta: 19.

¿Cuántas revistas contienen material solamente sobre uno de los tres temas?

Las revistas que contienen únicamente un tema son las que se encuentra dentro de los conjuntos, pero fuera de las intersecciones, por lo que el total sería la suma de las tres áreas.

Respuesta: $38 + 43 + 20 = 101$

¿Cuántas no tienen material de tecnología?

Las revistas que no contienen material de tecnología son todas aquellas que están fuera del conjunto T.

Respuesta: $38 + 18 + 20 + 113 = 189$

¿Cuántas no tienen material sobre ninguno de los temas?

El dato fuera de los conjuntos corresponde a las revistas que no contienen información de los temas.

Respuesta: 113

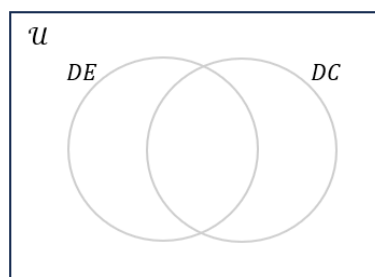
¿Cuántas revistas contienen material de salud y ecología, pero no de medicina?

El expresión, salud y ecología, determina que las revistas deben tener contenido tanto de salud como de ecología por lo que el dato se obtiene del área correspondiente a la intersección: $S \cap E$.

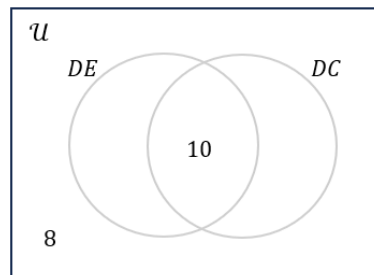
Respuesta: $19 + 18 = 37$

c) De 44 pacientes atendidos en urgencias, 33 tuvieron dolor de estómago, 10 en estómago y cabeza, y 8 no manifestaron dolor alguno. ¿Cuántos pacientes tuvieron únicamente dolor de cabeza?

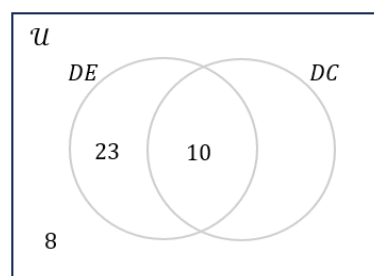
Se tienen dos conjuntos, dolor de estómago DE y dolor de cabeza DC .



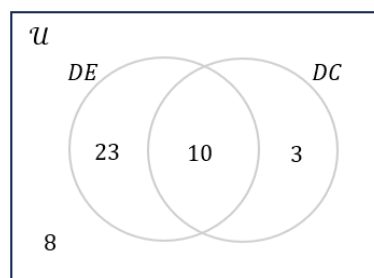
El problema proporciona dos datos directos: 8 que no manifestaron dolor alguno por lo que es un dato fuera de los conjuntos y 10 que tuvieron ambos dolores, siendo la intersección de los conjuntos.



Se especifica que un total de 33 manifestaron dolor de estómago, sin embargo, en estos 33 están comprendidos los 10 de la intersección puesto que también tuvieron dolor de estómago. Por lo que, los 33 menos los 10, serían los pacientes del área del conjunto DE faltante.



Finalmente, para responder la pregunta, ¿Cuántos pacientes tuvieron únicamente dolor de cabeza? Se toma en consideración el total de pacientes recibido, 44 y se restan los datos ya calculados en el diagrama.



Respuesta: $44 - (23 + 10 + 8) = 3$

4.5 Ejercicios de practica

a) En un examen relacionado con la habilidad para leer inglés, francés y español aplicado a 200 estudiantes, se obtuvieron los siguientes resultados: 80 leen inglés,

105 leen francés, 80 leen español, 55 leen español y francés, 55 leen inglés y no leen francés, 60 leen inglés y no leen español, 15 leen inglés y español, pero no francés. Responder, cuántos de estos estudiantes leen los tres idiomas, cuántos leen únicamente francés, cuántos no leen ninguno de los tres idiomas, cuántos leen español, pero no inglés ni francés.

b) De un grupo de 40 alumnos del Tecnológico algunos están estudiando para presentar exámenes de los cuales, 26 estudian teoría de la computación (TC), 18 redes (R), 20 inteligencia artificial (IA), 13 teoría de la computación y redes, 8 redes e inteligencia artificial, 10 teoría de la computación e inteligencia artificial y 4 estudian las tres asignaturas. Responder:

¿Cuántos de ellos no estudian para ninguna de las tres asignaturas?

¿Cuántos de ellos estudian únicamente para inteligencia artificial?

¿Cuántos de ellos estudian para dos asignaturas?

¿Cuántos de ellos estudian teoría de la computación y redes, pero no inteligencia artificial?

c) De un grupo de 500 personas encuestadas para saber que disciplina deportiva practican entre futbol (F), tenis (T) y beisbol (B), se determinó que: 55 juegan beisbol, 65 tenis, 52 futbol, 29 juegan beisbol y tenis, 31 juegan beisbol y futbol, 27 juegan tenis y futbol, y 18 juegan las tres disciplinas. Responder:

¿Cuántos de ellos no juegan ninguna de las tres disciplinas?

¿Cuántos de ellos juegan únicamente un deporte?

¿Cuántos de ellos juegan tenis y futbol, pero no beisbol?

¿Qué combinación de dos disciplinas se juega más?

¿Cuántos juegan al menos un deporte?

4.2 Propiedades de las relaciones

4.2.1 Definición de relación

En general una relación es una conexión que existe entre dos o más elementos, ya sean personas, cosas o conceptos.

En matemáticas, una relación es un conjunto de pares ordenados que, en base a una característica, relaciona elementos de uno o más conjuntos.

Formalmente, si se tienen dos conjuntos A y B , una relación R de A en B es un conjunto de pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, una relación R de A en B podría ser:

$$R = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$$

Algunas consideraciones en las relaciones son:

- A en B o bien $A \rightarrow B$ establece el sentido de la relación, en caso contrario se indicaría que la relación es de B en A .
- (a, b) es un par ordenado, por lo que $(a, b) \neq (b, a)$
- En un conjunto R el orden de los elementos no importa, es decir, $R = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\} = \{(2, 4), (3, 6), (1, 5)\}$
- Cada elemento de R es único dentro del conjunto, es decir no hay pares ordenados repetidos.
- En una relación los primeros elementos del par ordenado forman el dominio de la relación, mientras que los segundos elementos forman el codominio.
 - Dado esto, el dominio y codominio de la relación del ejemplo dado son:
 $Dom(R) = \{1, 2, 3\}$ y el codominio $Cod(R) = \{5, 4, 6\}$.

Ejercicios de aprendizaje

Dados los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ y } B = \{4, 5, 6\}$$

Determinar

a) La relación R de A en B que contenga los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$ que cumplan que a es impar y b es par y determinar el dominio y codominio de la relación.

Solución detallada:

Dado que 1 y 3 son impares y 4 y 6 son pares, entonces la relación será:

$$R = \{(1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6)\}$$

$$\text{Dom}(R) = \{1, 3\}$$

$$\text{Cod}(R) = \{4, 6\}$$

b) Suponga las mismas condiciones del inciso anterior, pero ahora se solicita determinar la relación R de B en A en lugar de A en B y obtener el dominio y codominio de la relación.

Solución detallada:

Los elementos pares del conjunto B siguen siendo 4 y 6, y los impares de A 1 y 3. Para este caso se pide una relación de B en A por lo que la relación sería:

$$R = \{(4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$$

$$\text{Dom}(R) = \{4, 6\}$$

$$\text{Cod}(R) = \{1, 3\}$$

Es importante notar que ambas relaciones son diferentes ya que el sentido de la relación cambió.

c) Una relación R de A en B donde $(a, b) \in R$ sí y sólo sí, $a + 2 \geq b$.

Solución detallada:

En este caso los valores del conjunto A deben evaluarse sumados en 2 para saber si dicho elemento cumple la condición, el procedimiento es el siguiente:

Se incrementa en dos el primer valor del conjunto A :

$$1 + 2 = 3$$

Se evalúa la condición $a + 2 \geq b$:

$$3 \geq 4 \text{ no cumple}$$

$$3 \geq 5 \text{ no cumple}$$

$$3 \geq 6 \text{ no cumple}$$

Ningún elemento de B es mayor o igual a tres, por lo tanto, el elemento 1 no se relaciona con ningún elemento de B .

Se continúa con el segundo elemento del conjunto A , se incrementa 2 en 2:

$$2 + 2 = 4$$

Se evalúa la condición $a + 2 \geq b$:

$$4 \geq 4 \text{ cumple}$$

$$4 \geq 5 \text{ no cumple}$$

$$4 \geq 6 \text{ no cumple}$$

Como el 4 es igual a 4, entonces 2 se relaciona con 4, es decir $(2,4) \in R$.

Se evalúa el último elemento del conjunto A , se incrementa el 3 en 2.

$$3 + 2 = 5$$

Se evalúa la condición $a + 2 \geq b$:

$$5 \geq 4 \text{ cumple}$$

$$5 \geq 5 \text{ cumple}$$

$$5 \geq 6 \text{ no cumple}$$

Como el 5 es mayor que 4, e igual a 5, entonces 3 se relaciona con 4 y con 5 es decir $(3,4)$ y $(3,5) \in R$.

Finalmente, la relación es:

$$R = \{(2,4), (3,4), (3,5)\}$$

d) Dados los conjuntos $X = \{-1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{0, 1, 2, 9\}$ calcular la relación R donde $(x,y) \in R$ sí y sólo sí $x + y = 4$

Solución:

Cada elemento de X debe sumarse a cada elemento del conjunto Y , si dicha suma es 4 entonces los elementos sumados pertenecen a la relación:

Evaluación con -1

$$-1 + 0 = -1 \text{ no cumple}$$

$$-1 + 1 = 0 \text{ no cumple}$$

$$-1 + 2 = 1 \text{ no cumple}$$

$$-1 + 9 = 8 \text{ no cumple}$$

Evaluación con 2

$$2 + 0 = 2 \text{ no cumple}$$

$$2 + 1 = 3 \text{ no cumple}$$

$$2 + 2 = 4 \text{ cumple}$$

$$2 + 9 = 11 \text{ no cumple}$$

Evaluación con -1

$$3 + 0 = 3 \text{ no cumple}$$

$$3 + 1 = 4 \text{ cumple}$$

$$3 + 2 = 5 \text{ no cumple}$$

$$3 + 9 = 12 \text{ no cumple}$$

Evaluación con -1

$$4 + 0 = 4 \text{ cumple}$$

$$4 + 1 = 5 \text{ no cumple}$$

$$4 + 2 = 6 \text{ no cumple}$$

$$4 + 9 = 13 \text{ no cumple}$$

Dado lo anterior el conjunto relación es:

$$R = \{(2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$$

e) Sean los conjuntos $X = Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, determinar la relación R donde $(x, y) \in R$ sí y sólo sí $y = 3 - x^2$.

Notar que en este problema $X = Y$ por lo que una relación puede ser sobre el mismo conjunto. En este caso se valida cada elemento con él mismo y todos los demás.

Solución:

El primer par ordenado a validar es $(-2, -2)$, sustituyendo los valores en la condición tenemos:

$$-2 = 3 - (-2^2)$$

$$-2 = -1,$$

dando una desigualdad por lo que $(-2, -2) \notin R$.

El siguiente par ordenado sería $(-2, -1)$, validando la condición:

$$-1 = 3 - (-2^2)$$

$$-1 = -1,$$

la igualdad se cumple por lo que el par ordenado $(-2, -1) \in R$.

Se continúa con todos los demás pares ordenados verificando que los que cumplen con la igualdad de la condición son:

$(-1, 2)$ ya que $2 = 3 - (-1^2)$ es una igualdad

$(1, 2)$ ya que $2 = 3 - 1^2$ es una igualdad

$(2, -1)$ ya que $-1 = 3 - 2^2$ es una igualdad

La relación final es:

$$R = \{(-2, -1), (-1, 2), (1, 2), (2, -1)\}$$

4.6 Ejercicios de practica

a) Dados $X = Y = \{5, 6, 7, 4\}$ calcular la relación R donde $(x, y) \in R$ si y solo si $(x + y)$ es par.

b) Dados $X = Y = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ calcular la relación R donde $(x, y) \in R$ si y solo si $x > y + 1$.

c) Dados $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{0, 1, 2\}$ calcular la relación R donde $(x, y) \in R$ si y solo si $y = x - 1$.

d) Dados $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ calcular la relación R donde $(x, y) \in R$ si y solo si $y = x^2 + 1$.

e) Dados $X = \{1, 3, 5\}$ y $Y = \{2, 4, 6\}$ calcular la relación R donde $(x, y) \in R$ si y solo si $x < y$.

4.2.2 Producto cartesiano

El producto cartesiano es el conjunto universo de toda relación ya que contiene todos los pares ordenados de los elementos de un conjunto.

Se denota con el símbolo $\times$, por lo que también se llama producto cruz.

Ejemplo

Sean los conjuntos $X = \{5, 6, 7, 4\}$ y $Y = \{2, 3, 8\}$ el producto cartesiano de $X \times Y$ es:

$$X \times Y = \{(5, 2), (5, 3), (5, 8), (6, 2), (6, 3), (6, 8), (7, 2), (7, 3), (7, 8), (4, 2), (4, 3), (4, 8)\}$$

También es posible tener el producto cruz sobre un mismo conjunto:

$$X \times X = \{(5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (6, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 4)\}$$

Es importante destacar que toda relación de X en Y va a ser un subconjunto de $X \times Y$.

4.2.3 Propiedades de las relaciones

Una relación puede ser reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y/o transitiva.

Reflexiva

Una relación R en un conjunto A es reflexiva si para todo $a \in A$, a se relaciona con a (aRa), es decir, cada elemento del conjunto está relacionado consigo mismo.

Ejemplo

Se analizan las siguientes relaciones R sobre el conjunto $A = \{2, 3, 5, 8\}$.

$$R_1 = \{(2, 5), (3, 3), (2, 2), (3, 8), (5, 5), (8, 8)\}$$

$$R_2 = \{(3, 3), (5, 3), (2, 2), (2, 3), (5, 5)\}$$

$$R_3 = \{(8, 3), (3, 2), (5, 8), (8, 2), (5, 2)\}$$

$$R_4 = \{(3, 3), (2, 2), (8, 8), (5, 5)\}$$

- R_1 es reflexiva ya que todos los elementos de A están relacionados con ellos mismos, es decir, 2 relacionado con 2, 3 relacionado con 3, 5 relacionado con 5 y 8 relacionado con 8. Notar en este ejemplo que la relación puede contener elementos (a, b) donde $a \neq b$, siempre que existan todos los pares (a, b) donde $a = b$.
- R_2 no es reflexiva dado que no todos los elementos de A están relacionados con ellos mismos; aunque el 2 está relacionado con el 2, el 3 con el 3, y el 5 con el 5, el 8 no se relaciona con el mismo puesto que el par $(8, 8)$ no se encuentra en la relación.

- R_3 no es reflexiva ya que los elementos de A no se relacionan con ellos mismos.
- R_4 es reflexiva ya que todos los elementos de A están relacionados con ellos mismos. En este ejemplo la relación no contiene elementos (a, b) donde $a \neq b$, pero si existen todos los pares (a, b) donde $a = b$.

Irreflexiva

Una relación R en un conjunto A es reflexiva si para todo $a \in A$, a se relaciona con a (aRa), es decir, cada elemento del conjunto está relacionado consigo mismo.

Ejemplo

Se analizan las 4 relaciones anteriores respecto a la propiedad irreflexiva.

- R_1 no es irreflexiva ya que existen elementos de A que se relacionan con ellos mismos, y la definición establece que no debe existir ningún par (a, b) donde $a = b$.
- R_2 no es irreflexiva ya que existen elementos de A , que se relacionan con ellos mismos $(3, 3)$, $(2, 2)$ y $(5, 5)$.
- R_3 es irreflexiva ya que ningún elemento de A se relaciona consigo mismo, es decir, no existen elementos (a, b) donde $a = b$.
- R_4 no es irreflexiva ya que existen elementos de A , que se relacionan con ellos mismos.

Simétrica

Una relación R en un conjunto A es simétrica si para todo a, b que pertenecen a A , si aRb entonces bRa , es decir, si a está relacionado con b , entonces b está relacionado con a .

Ejemplo

Se analizan las 4 relaciones anteriores respecto a la propiedad simétrica.

- R_1 no es simétrica ya que existe el par ordenado $(2, 5)$ pero no existe el $(5, 2)$ y la definición establece que para todo par ordenado $(a, b) \in R$ también se debe cumplir que (b, a) pertenezca a R .
- R_2 no es simétrica ya que existen $(2, 5)$ pero no existe el $(5, 2)$ en la relación.
- R_3 no es simétrica ya existen pares ordenados $(a, b) \in R$ donde $a \neq b$, y no existen sus correspondientes $(b, a) \in R$.

- R_4 es simétrica ya que para todo $(a, b) \in R$ existe el par $(b, a) \in R$. Notar que todo par ordenados (a, b) donde $a = b$, es por default simétrico.

Asimétrica

Una relación R en un conjunto A es asimétrica si para todo a, b en A , si aRb entonces bRa no debe existir, en otras palabras, si a está relacionado con b entonces b no puede estar relacionado con a .

Ejemplo

Se analizan las 4 relaciones anteriores respecto a la propiedad asimétrica.

- R_1 no es asimétrica. Esta relación cumple la asimetría con los pares ordenados (a, b) donde $a \neq b$, sin embargo, no es asimétrica ya que tiene pares $(a, b) \in R$ donde $a = b$, y la asimetría no acepta pares de elementos relacionados consigo mismos como es el $(3, 3)$.
- R_2 no es asimétrica ya que existen en la relación pares (a, b) donde $a = b$ por ejemplo el $(3, 3)$.
- R_3 es asimétrica ya que ningún par ordenado $(a, b) \in R$ donde $a \neq b$ de la relación tiene su par ordenado $(b, a) \in R$.
- R_4 no es asimétrica ya que existen en la relación pares (a, b) donde $a = b$ por ejemplo el $(3, 3)$.

Antisimétrica

Una relación R en un conjunto A es antisimétrica si para todo a, b en A , si aRb y bRa , entonces $a = b$, es decir, si a está relacionado con b y b está relacionado con a , entonces a es igual a b .

Ejemplo

Se analizan las 4 relaciones anteriores respecto a la propiedad antisimétrica.

- R_1, R_2 y R_3 son antisimétricas ya que para ningún par ordenado (a, b) donde $a \neq b$ en la relación, existe su correspondiente (b, a) . Recordar que los pares $(a, b) \in R$ donde $a = b$, son aceptados por la propiedad antisimétrica.
- R_4 es antisimétrica. En esta relación se evalúa la antisimetría con los pares ordenados (a, b) donde $a = b$, puesto que únicamente tiene elementos de este tipo.

Transitiva

Una relación R en un conjunto A es transitiva si para todo a, b, c en A , si aRb y bRc , entonces aRc , es decir, si a está relacionado con b y b está relacionado con c , entonces a está relacionado con c .

Ejemplo

Se analizan las 4 relaciones anteriores respecto a la propiedad transitiva.

- R_1 es transitiva ya que para todo par (a, b) , (b, c) que pertenece a R existe el correspondiente par (a, c) en la relación, dichos pares son:

$$(2, 5), (5, 5) \in R \text{ y } (2, 5) \in R$$

$$(3, 3), (3, 8) \in R \text{ y } (3, 8) \in R$$

$$(2, 2), (2, 5) \in R \text{ y } (2, 5) \in R$$

$$(3, 8), (8, 8) \in R \text{ y } (3, 8) \in R$$

$$(2, 5), (5, 5) \in R \text{ y } (2, 5) \in R$$

- R_2 es transitiva ya que existen pares (a, b) , (b, c) que pertenece a R y existe el correspondiente par (a, c) , estos son:

$$(5, 3), (3, 3) \in R \text{ y } (5, 3) \in R$$

$$(2, 2), (2, 3) \in R \text{ y } (2, 3) \in R$$

$$(2, 3), (3, 3) \in R \text{ y } (2, 3) \in R$$

$$(5, 5), (5, 3) \in R \text{ y } (5, 3) \in R$$

- R_3 no es transitiva ya que existe al menos un caso de pares (a, b) , (b, c) donde (a, c) no está en la relación, este es el siguiente:

$$(5, 8), (8, 3) \in R \text{ y } (5, 3) \notin R$$

- R_4 es transitiva ya que sólo existen en la relación pares (a, b) donde $a = b$ por lo que la transitividad se cumple.

Ejercicios de aprendizaje

a) Evaluar las propiedades de la siguiente relación sobre el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Solución:

$$R = \{(5, 4), (7, 3), (2, 1), (6, 3), (1, 3)\}$$

- No es reflexiva ya que los elementos de X no se relacionan con ellos mismos.
- Es irreflexiva ya que ningún elemento del conjunto X se relaciona con el mismo.
- No es simétrica ya que los pares (a, b) tal que $a \neq b$ no tienen su (b, a) en la relación, ejemplo $(5, 4) \in R$ y $(4, 5) \notin R$.
- Es asimétrica ya que para todo par (a, b) tal que $a \neq b$ que pertenece a la relación se cumple que $(b, a) \notin R$, por otro lado, la relación no contiene pares (a, b) tal que $a = b$.
- Es antisimétrica ya que para todo par (a, b) tal que $a \neq b$ que pertenece a la relación se cumple que $(b, a) \notin R$.
- No es transitiva ya que existe al menos un caso de pares (a, b) , (b, c) donde (a, c) no está en la relación, este es el siguiente:

$$(2, 1), (1, 3) \in R \text{ y } (2, 3) \notin R$$

b) Dado el conjunto $X = \{x | 2 \leq x \leq 10; x \text{ es par}\}$ obtener dos relaciones diferentes que cada una sea reflexiva, simétrica y transitiva.

Solución:

Una relación reflexiva, simétrica y transitiva sobre el conjunto $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ es:

$$R_1 = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (10, 10)\}$$

- Es reflexiva pues todos los elementos de X se relacionan consigo mismos.
- Es simétrica porque el par (a, b) donde $a = b$ cumple con la simetría y en la relación todos los pares son de este tipo.
- Es transitiva ya que sólo existen en la relación pares (a, b) donde $a = b$ por lo que la transitividad se cumple.

Otra relación que cumple sería:

$$R_2 = \{(2, 2), (10, 2), (4, 4), (6, 6), (2, 10), (8, 8), (10, 10)\}$$

- Es reflexiva pues todos los elementos de X se relacionan consigo mismos.
- Es simétrica ya que $(10, 2) \in R$ y $(2, 10) \in R$ y todo par ordenado (a, b) donde $a = b$, es simétrico.

- Es transitiva ya que para todo par (a, b) , (b, c) que pertenece a R existe el correspondiente par (a, c) en la relación.

c) Sea el conjunto $X = \{x | x \in \mathbb{N}\}$ obtener la relación “ser menor que” sobre X y evaluar cuáles propiedades se cumplen.

Solución:

La relación que cumple que el primer elemento del par es menor que el segundo elemento sobre los números naturales sería infinita, sin embargo basta con algunos pares para determinar qué tipo de relación sería. El conjunto de la relación se puede expresar como:

$$R_2 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), \dots, (2, 3), (2, 4), (2, 5), \dots, (3, 4), (3, 5), (3, 6), \dots \infty\}$$

Analizando dicha relación se concluye que:

- No podría ser reflexiva ya que un elemento relacionado con el mismo no cumpliría con la condición.
- Es irreflexiva ya que no existiría ningún elemento relacionado con el mismo.
- No podría ser simétrica pues si $1 < 2$ no se cumple que $2 < 1$.
- Es asimétrica ya que solamente existirán pares (a, b) donde $a \neq b$ y no existirán pares (a, b) donde $a = b$.
- Es antisimétrica ya que solamente existirán pares (a, b) donde $a \neq b$.
- La relación es transitiva puesto que siempre $a < b$ y $b < c$ por consiguiente siempre se cumplirá que $a < c$.

4.7 Ejercicios de practica

a) Sean los conjuntos $X = Y = \{x | 1 \leq x \leq 10\}$ obtener la relación R donde $(x, y) \in R$ si y sólo si, x es par y y es múltiplo de 3 y evaluar sus propiedades.

b) Determinar si una relación que no es simétrica implica que la relación es antisimétrica.

c) Decir qué propiedades cumple la relación determinada por la condición $(x, y) \in R$ si y sólo si $x + y$ es par, sobre el conjunto de números naturales.

d) Dada la siguiente relación sobre el conjunto $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, evaluar sus propiedades

$$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 5), (5, 1), (4, 4), (3, 3), (3, 1), (5, 3), (5, 5), (1, 3)\}$$

4.2.4 Representación de relaciones

4.2.4.1 Digrafos

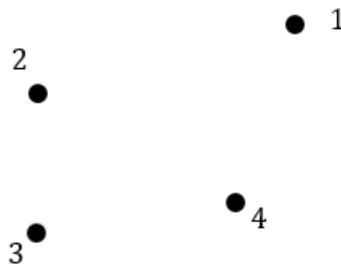
Una relación puede representarse mediante dígrafos los cuales permiten visualizar de forma gráfica las relaciones entre los elementos del conjunto.

Los dígrafos son gráficas dirigidas las cuales se componen de nodos y aristas. En el caso de las relaciones, los nodos son los elementos de la relación y las aristas la relación entre estos.

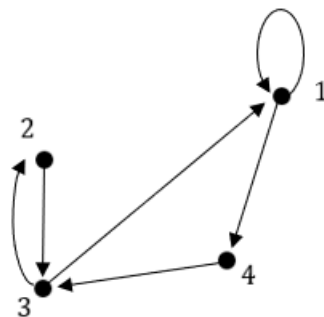
Ejemplo

Sea la relación $R = \{(2, 3), (4, 3), (1, 4), (1, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ sobre el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$, el grafo de la relación se trazaría como sigue:

1. Se colocan los nodos en el espacio (uno por elemento del conjunto) sin un orden específico etiquetándolos con su correspondiente elemento.



2. Se trazan las relaciones conectando con una arista dirigida los nodos que tienen relación.



Como se puede ver en el digrafo, cuando un elemento se relaciona consigo mismo, tal es el caso del 1, se traza una arista que sale y regresa al mismo nodo, a esta arista se le llama lazo, este trazo denota reflexividad.

Cuando un par ordenado es simétrico, tal es el caso de $(2, 3)$, $(3, 2)$, se trazan ambas aristas y forman lo que se conoce como lados paralelos.

Es posible evaluar las propiedades de una relación a partir de un grafo, de la siguiente manera:

- La relación no es reflexiva puesto que no todos los nodos tienen un lazo.
- La relación no es irreflexiva ya que existe un lazo en el grafo.
- La relación no es simétrica pues hay conexiones que no son lados paralelos.
- La relación no es asimétrica ni antisimétrica pues existe un lado paralelo.
- La relación no es transitiva pues si existe un lado paralelo debe existir lazos en los nodos correspondientes, tal es el caso de $(2, 3)$, $(3, 2)$ debe existir un lazo en 3 y en 2.

4.2.4.2 Matrices

Una relación puede representarse de manera matricial. En este caso los elementos de los conjuntos son las filas y las columnas. La matriz se rellena con 1's si existe relación entre dos elementos, o con 0's si no existe .

Ejemplo

Sea la relación representada por el dígrafo en el ejemplo de la sección 4.1.5.1. En este caso la relación es sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$, por lo que la matriz será cuadrada de m filas y n columnas, donde $m = n = 4$, entonces la matriz sería:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \end{array}$$

Considerando la relación es $R = \{(2, 3), (4, 3), (1, 4), (1, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, la matriz se llena de la siguiente manera:

$(2, 3)$ se coloca un 1 en la fila 2, columna 3

$(4, 3)$ se coloca un 1 en la fila 4, columna 3

$(1, 4)$ se coloca un 1 en la fila 1, columna 4

(1,1) se coloca un 1 en la fila 1, columna 1

(3,1) se coloca un 1 en la fila 3, columna 1

(3,2) se coloca un 1 en la fila 3, columna 2

Quedando la matriz siguiente:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejercicios de aprendizaje

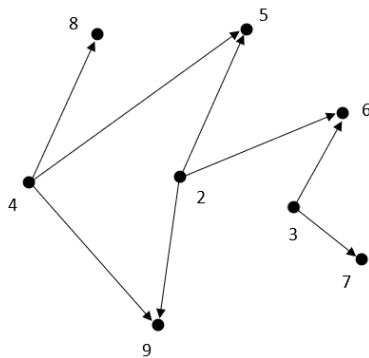
a) Sean los conjuntos $X = \{2, 3, 4\}$ y $Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ y la relación de X en Y :

$$R = \{(2, 9), (4, 8), (2, 5), (3, 7), (2, 6), (4, 5), (3, 6), (4, 9)\}$$

Representar la relación en forma matricial y gráfica.

Solución:

El digrafo y la representación matricial de la relación, son los siguientes:



$$\begin{array}{c} 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Cuál es la relación de pares ordenados definida por la matriz siguiente.

$$\begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Solución:

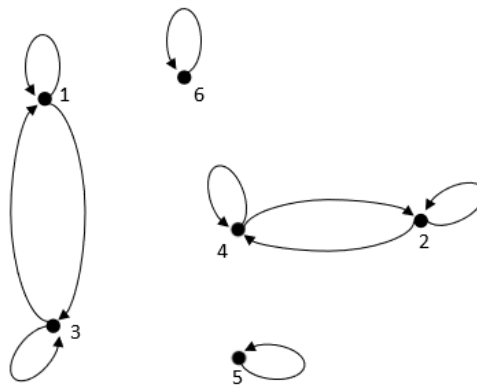
La relación R de pares ordenados es:

$$R = \{(2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 6), (3, 7), (4, 4), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 7), (6, 2), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (7, 3), (7, 7)\}$$

c) Construir el grafo de una relación sobre el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que sea reflexiva, simétrica y transitiva.

Solución:

El grafo podría ser el siguiente:



d) Obtener la relación en pares ordenados del grafo del inciso c).

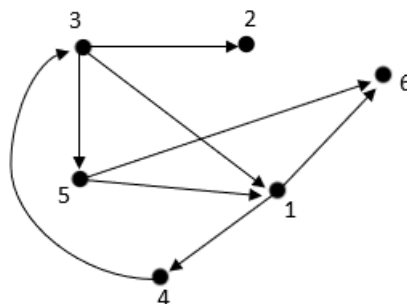
Solución:

La relación es:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$$

4.8 Ejercicios de practica

a) Dado el siguiente digrafo de una relación R determinar las propiedades de la relación.



b) Dadas los conjuntos $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

Realizar su representación matricial y su digrafo de la relación.

c) Construir el grafo de una relación de orden parcial sobre el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

d) Dada la matriz siguiente, expresar la relación mediante pares ordenados, decir sobre qué conjuntos se determina la relación y el dominio y codominio de ésta.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4.3 Relaciones de orden parcial

Una relación de orden parcial es aquella relación que cumple las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Una relación de orden parcial proporciona un ordenamiento parcial de un conjunto de elementos, lo que significa que no todos los elementos necesitan estar comparados entre sí. Esto es útil cuando se necesita establecer un ordenamiento en el que algunos elementos pueden ser incomparables.

Ejemplo

La relación R determinada por “ a divide a b ” sobre los números naturales, es una relación de orden parcial ya que:

- La relación es reflexiva pues todo número natural se divide por el mismo.
- La relación es antisimétrica ya que si un elemento (a, b) cumple la condición, el par (b, a) no lo cumplirá a menos que $a = b$.
- La relación es transitiva ya que si a divide a b , y b divide a c , entonces a divide a c .

Otro ejemplo de relación de orden parcial es la relación “ser menor o igual que” sobre el conjunto de los números naturales ya que:

- Es reflexiva pues todo número es menor o igual que sí mismo.
- Es antisimétrica pues si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
- Es transitiva ya que, si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces se cumple que $a \leq c$.

4.4 Diagramas de Hasse

Un diagrama de Hasse es una representación simplificada del digrafo de una relación de orden parcial. Una relación de orden parcial es aquella relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Dadas las características de una relación de orden parcial se dice que un grafo se simplifica mediante las siguientes acciones:

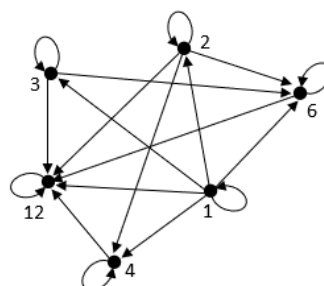
1. Se eliminan los lazos del digrafo ya que al ser reflexiva se sabe que todos los elementos tienen una relación en sí mismos.
2. Se eliminan las aristas que conectan los elementos del tercer par ordenado de la transitividad.
3. Las flechas de las aristas pueden eliminarse estableciendo la relación por niveles, un elemento de un nivel anterior estará únicamente relacionado con un elemento de un nivel superior.

Ejemplo

Sean los conjuntos $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y R la relación de divisibilidad de X en Y :

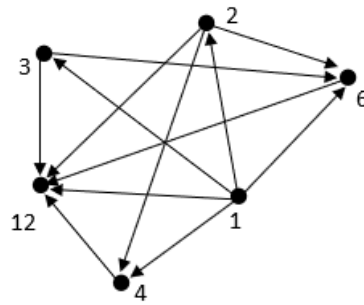
$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 12), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 12), (3, 3), (3, 6), (3, 12), (4, 4), (4, 12), (6, 6), (6, 12)\}$$

Sea el digrafo de la relación:



Se aplican los pasos para simplificar el digrafo:

1. Se eliminan los lazos del grafo:



2. Se eliminan las aristas del tercer par de la transitividad.

En este caso se tienen los siguientes pares transitivos:

(1,2) y (2,4) por lo que se elimina (1, 4)

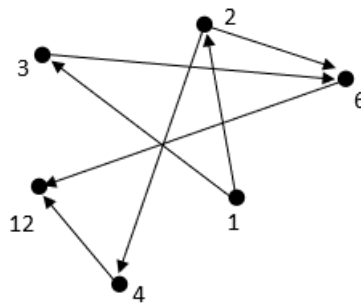
(1,2) y (2,6) por lo que se elimina (1, 6)

(1,2) y (2,12) por lo que se elimina (1, 12)

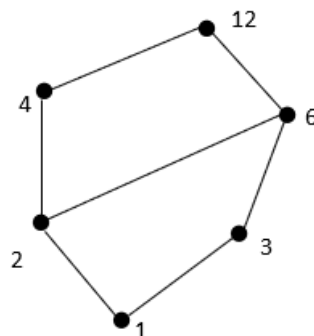
(2, 4) y (4, 12) por lo que se elimina (2, 12)

(3, 6) y (6, 12) por lo que se elimina (3, 12)

Eliminando dichas conexiones el diagrama queda como sigue:



3. Se acomodan los nodos por niveles, donde un nodo de nivel inferior implica que tendrá relación con un nodo de nivel superior, esto permitirá eliminar las flechas de las aristas y simplificar aún más el grafo, obteniendo así el diagrama de Hasse de la relación dada:

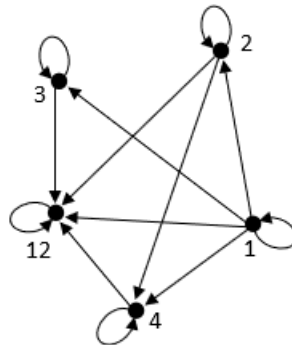


Ejercicios de aprendizaje

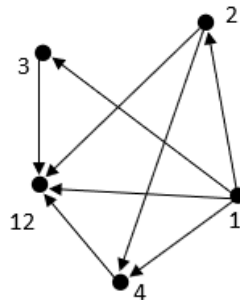
a) Dados los conjuntos $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y R la relación de orden parcial de X en Y , se determina el diagrama de Hasse de la relación:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 12), (2, 2), (2, 4), (2, 12), (3, 3), (3, 12), (4, 4), (4, 12), (12, 12)\}$$

Sea el digrafo de la relación:



Se eliminan los lazos del grafo:



Se eliminan las aristas del tercer par de la transitividad.

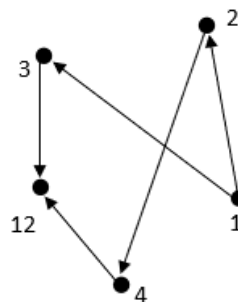
En este caso se tienen los siguientes pares transitivos:

$(1,2)$ y $(2,4)$ por lo que se elimina $(1, 4)$

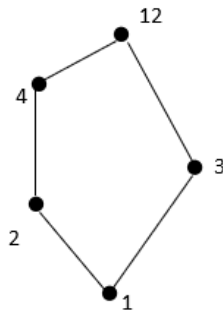
$(1,2)$ y $(2,12)$ por lo que se elimina $(1, 12)$

$(2, 4)$ y $(4, 12)$ por lo que se elimina $(2, 12)$

Eliminando dichas conexiones el diagrama queda como sigue



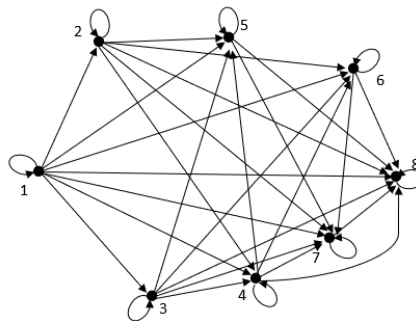
Acomodando los nodos y eliminando flechas de las aristas el diagrama de Hasse queda de la siguiente manera:



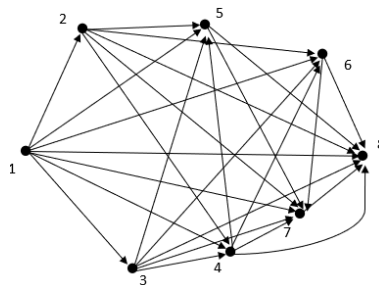
b) Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y R la relación de orden parcial sobre el conjunto X , se determina el diagrama de Hasse:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), \\ (3, 3), (3, 4), (3, 6), (3, 5), (3, 7), (3, 8), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 5), (5, 7), \\ (5, 8), (6, 6), (6, 7), (6, 8), (7, 7), (7, 8), (8, 8)\}$$

Sea el digrafo de la relación:



Se eliminan los lazos del grafo:

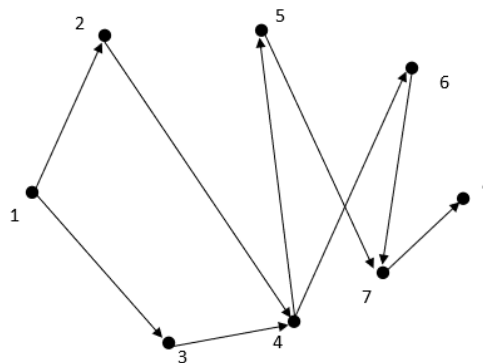


Se eliminan las aristas del tercer par de la transitividad.

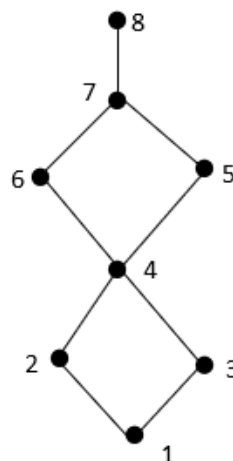
En este caso se tienen los siguientes pares transitivos:

(1,2) y (2,4) por lo que se elimina (1, 4) (3,4) y (4,6) por lo que se elimina (3, 6)
 (1,2) y (2,5) por lo que se elimina (1, 5) (3,4) y (4,7) por lo que se elimina (3, 7)
 (1,2) y (2,6) por lo que se elimina (1, 6) (3,4) y (4,8) por lo que se elimina (3, 8)
 (1,2) y (2,7) por lo que se elimina (1, 7) (4,5) y (5,7) por lo que se elimina (4, 7)
 (1,2) y (2,8) por lo que se elimina (1, 8) (4,5) y (5,8) por lo que se elimina (4, 8)
 (2,4) y (4,5) por lo que se elimina (2, 5) (4,6) y (6,7) por lo que se elimina (4, 7)
 (2,4) y (4,6) por lo que se elimina (2, 6) (4,6) y (6,8) por lo que se elimina (4, 8)
 (2,4) y (4,7) por lo que se elimina (2, 7) (5,7) y (7,8) por lo que se elimina (5, 8)
 (2,4) y (4,8) por lo que se elimina (2, 8) (6,7) y (7,8) por lo que se elimina (6, 8)
 (3,4) y (4,5) por lo que se elimina (3, 5)

Quedando el grafo siguiente:



Acomodando los nodos y eliminando flechas de las aristas el diagrama de Hasse queda de la siguiente manera:



4.9 Ejercicios de practica

a) Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y R la relación de orden parcial sobre el conjunto A , determinar el grafo de la relación y obtener el diagrama de Hasse:

$$R = \{(a, a), (a, d), (a, e), (a, f), (b, b), (b, d), (b, e), (b, f), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), \\ (d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (f, f)\}$$

b) Dado el conjunto A formado por los divisores positivos de 30, determinar la relación de orden parcial R donde $(a, b) \in A \times A$ y a divide a b . Obtener el diagrama de Hasse de la relación.

c) Determinar la relación de orden parcial sobre el conjunto de los divisores de 36 mayores que 1, definida por la regla de correspondencia " x divide a", y determinar el diagrama de Hasse.

4.5 Representación de funciones

4.5.1 Definición de función

Una función $\mathcal{F}$ es un tipo de relación, es por esto por lo que toda función es una relación, aunque no todas las relaciones son funciones. Para que una relación sea función, ésta debe cumplir dos condiciones.

Una relación R de X en Y , en donde X es el dominio y Y el codominio es una función si:

- 1) Todo elemento de X está en la relación, es decir el dominio de la relación debe ser igual al conjunto X .
- 2) Un elemento de X no puede relacionarse con más de un elemento de Y .

Ejemplo

Dados los conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$ una función de X en Y se puede determinar cumpliendo con las dos condiciones:

La primera condición plantea que todo elemento de X debe estar en la relación, dado esto, se establece que la relación debe tener tantos pares ordenados como elementos tiene X , por consiguiente, la función $\mathcal{F}$ para este ejemplo tendrá 4 pares ordenados, y en cada uno, un elemento del conjunto X .

La segunda condición establece que un elemento de X se debe relacionar únicamente con un, y sólo un, elemento de Y , de esto se deduce que ningún elemento de X se debe de repetir.

Por tanto, el dominio de la función podría expresarse c como:

$$\mathcal{F} = \{(1,), (2,), (3,), (4,)\}$$

De esta manera se asegura que la relación será función.

Finalmente, al no tener ninguna restricción en cuanto al codominio, algunos ejemplos de funciones podrían ser:

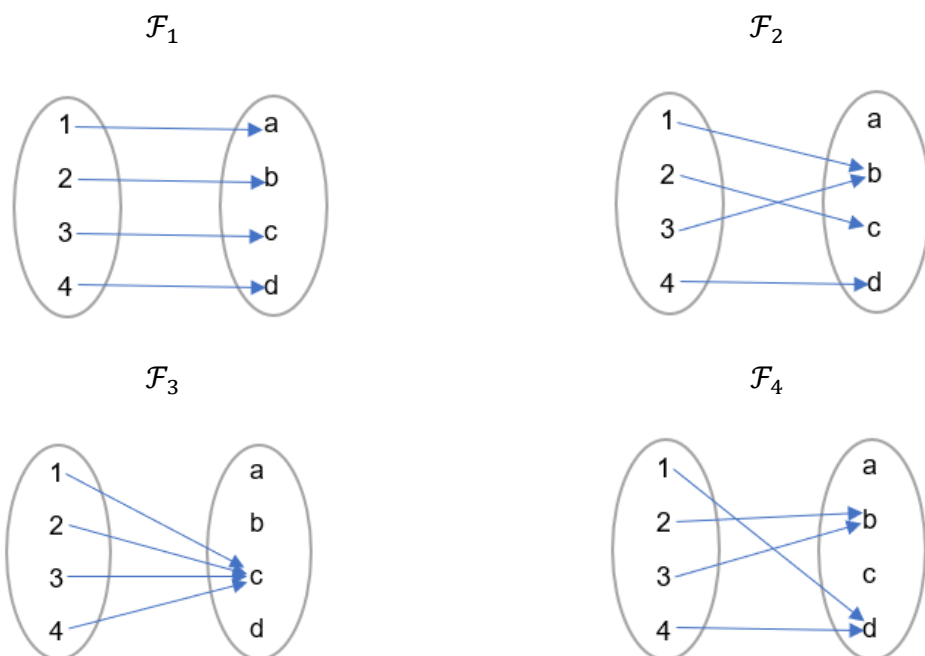
$$\mathcal{F}_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{(1, b), (2, c), (3, b), (4, d)\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{(1, c), (2, c), (3, c), (4, c)\}$$

$$\mathcal{F}_4 = \{(1, d), (2, b), (3, b), (4, d)\}$$

Dado que las funciones se determinan de la relación entre los elementos de conjuntos, estas se pueden representar gráficamente. Las funciones anteriores se representarían de la siguiente manera:



4.5.2 Tipos de las funciones

En una función, un elemento del conjunto del dominio se relaciona con un elemento del conjunto del codominio. Dependiendo de la relación que guarda el codominio con el dominio se puede decir que se tiene funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

4.5.2.1 Función inyectiva

Una función $\mathcal{F}$ de X en Y , en donde X es el dominio y Y el codominio es biyectiva, si ningún elemento de Y se relaciona con más de un elemento de X .

Analizando la condición se deduce que ningún elemento del codominio se debe de repetir en la relación.

Ejemplo

Dados los conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$ una función inyectiva de X en Y sería:

$$\mathcal{F} = \{(4, a), (2, c), (3, b), (1, d)\}$$

En esta relación ningún elemento de Y se relaciona con más de un elemento de X , por lo que es una función inyectiva.

Un ejemplo de una función NO inyectiva sería:

$$\mathcal{F} = \{(1, a), (2, a), (3, c), (4, d)\}$$

Esta función no es inyectiva ya que a se relaciona con 1 y con 2.

4.5.2.2 Función suprayectiva

Una función $\mathcal{F}$ de X en Y , en donde X es el dominio y Y el codominio es suprayectiva, si todo elemento de Y se relaciona al menos un elemento de X .

Analizando la condición se deduce que todos los elementos del conjunto del codominio deben estar en la relación, es decir, $Dom(R) = Y$.

Ejemplo

Dados los conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$ una función suprayectiva de X en Y sería:

$$\mathcal{F} = \{(3, d), (2, b), (1, c), (4, d)\}$$

En esta función, todos los elementos de Y están en la relación por lo que es una función suprayectiva.

Un ejemplo de una función NO suprayectiva sería:

$$\mathcal{F} = \{(1, a), (2, a), (3, c), (4, d)\}$$

Esta función no es suprayectiva ya que no todos los elementos de Y se encuentran en la relación, b no se relaciona con ningún elemento de X .

4.5.2.3 Función biyectiva

Una función es biyectiva si ésta es inyectiva y suprayectiva. A este tipo de función se le conoce como relación “uno a uno”, ya que a cada elemento del dominio le corresponde un elemento del codominio.

Ejemplo

Dados los conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$ algunas funciones biyectivas de X en Y serían:

$$\mathcal{F}_1 = \{(3, d), (2, b), (1, c), (4, a)\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{(1, b), (2, a), (3, d), (4, c)\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$$

Estas funciones son inyectivas porque a cada elemento del codominio le corresponde un único elemento del dominio y son suprayectivas porque todos los elementos de Y se encuentran en la relación, por lo tanto, se dice que las funciones son biyectivas.

Ejercicios de aprendizaje

a) Dados los conjuntos $A = \{2, 4, 5, 7, 8, 9\}$ y $B = \{q, b, e, m\}$ decir si las siguientes relaciones de A en B son funciones, en caso de serlo, decir de qué tipo justificando su respuesta.

$$\mathcal{F}_1 = \{(4, q), (8, e), (2, q), (7, p), (9, e)\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{(2, q), (8, e), (5, q), (7, m), (9, e), (4, b)\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{(4, q), (8, e), (2, q), (5, b), (7, m), (9, e), (4, m)\}$$

Solución:

$\mathcal{F}_1$ no es función puesto que no cumple con la primera condición, no todos los elementos de A están en la relación, notar que $Dom(\mathcal{F}_1) \neq A$ ya que falta el 5.

$\mathcal{F}_2$ es función puesto que cumple con las dos condiciones, todos los elementos de A están en la relación, y ninguno de ellos se repite.

La función es suprayectiva ya que todos los elementos de B están en la relación, notar que $Dom(\mathcal{F}_2) = \{q, e, m, b\} = A$.

La función no es inyectiva ya que existen elementos del codominio que se relacionan con más de un elemento del dominio, por ejemplo, a q lo relaciona el 2 y el 5.

Dado que la función es suprayectiva pero no inyectiva, la función no es biyectiva.

$\mathcal{F}_3$ no es función puesto que no cumple con la segunda condición, hay un elemento del dominio que se relaciona con más de uno del codominio, estos son: $(4, q)$ y $(4, m)$.

b) Dados $X = Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ calcular la relación R donde $(x, y) \in R$ si y solo si $y = 3 - x^2$, decir si la relación es función, en caso de serlo decir si es biyectiva justificando su respuesta.

Solución:

La relación que cumple la condición es:

$$R = \{(-2, -1), (-1, 2), (1, 2), (2, -1)\}$$

La relación no es función pues 0 no se encuentra en la relación, es decir $Dom(R) \neq X$.

c) Dados los conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{0, 1, 2\}$ determinar si la relación $y = x - 1$ es función. En caso de serlo decir si es biyectiva justificando su respuesta.

Solución:

La relación es función, ya que $Dom(R) = X$ y cada elemento de X se relaciona con un solo elemento de Y :

$$\mathcal{F} = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$$

La función es biyectiva, pues cumple con la inyectividad, cada elemento del codominio lo relaciona únicamente un elemento de X , y es suprayectiva ya que todos los elementos de Y se encuentran en la relación.

d) Dados los conjuntos $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ determinar si la relación $y = x^2 + 1$ es función. En caso de serlo decir si es biyectiva justificando su respuesta.

Solución:

La relación es función, ya que $Dom(\mathcal{F}) = X$ y cada elemento de X se relaciona con un solo elemento de Y :

$$\mathcal{F} = \{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$$

La función no es inyectiva ya que el 2 y el 5 tienen relación con más de un elemento del conjunto X .

La relación no es suprayectiva pues los elementos 3 y 4 no están en la relación.

Por lo tanto, la función no es biyectiva.

4.10 Ejercicios de practica

a) Sean los conjuntos $X = \{3, 4, 5, 7, 9\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$ mostrar un ejemplo del siguiente tipo de funciones:

Inyectiva y suprayectiva

No inyectiva y suprayectiva

Inyectiva y no suprayectiva

No inyectiva y no suprayectiva

b) Dados los conjuntos $X = \{0, 1, 2, 3\}$ y $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ determinar si la relación $y = 2x$ es función y en caso de serlo decir qué tipo de función es justificando su respuesta.

c) Que tipos de función se puede obtener de una relación de un conjunto X en Y si X tiene menos elementos que Y .

d) Diga si la función $\mathcal{F} = \{(1, 6), (2, 9), (3, 5), (4, 7), (2, 8)\}$ de $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, decir si es una función biyectiva.

ANEXO A. SOLUCIÓN DE EJERCICIOS DE PRACTICA

TEMA I. SISTEMAS NUMÉRICOS

1.1 Ejercicios de practica

- a) Es un número correcto pues todos los dígitos están permitidos por la base catorce.
- b) Es un número correcto pues todos los dígitos están permitidos por la base cinco.
- c) No es un número correcto ya que la G no es una letra que acepta la base 16.
- d) Es un número correcto ya que todos los dígitos están permitidos por la base siete.
- e) No es un número correcto ya que D no es un número permitido por la base trece.

1.2 Ejercicios de práctica

a)

$$3 \times 11^4 + 4 \times 11^3 + 8 \times 11^2 + A \times 11^1 + 9 \times 11^0$$

$$3 \times 14641 + 4 \times 1331 + 8 \times 121 + A \times 11^1 + 9 \times 11^0$$

$$43923 + 5324 + 968 + 110 + 9 = 50334$$

$$348A9_{11} = 50334_{10}$$

b)

$$5 \times 8^5 + 4 \times 8^4 + 3 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 7 \times 8^0$$

$$5 \times 32768 + 4 \times 4096 + 3 \times 512 + 2 \times 64 + 7 \times 8 + 7 \times 1$$

$$163840 + 16384 + 1536 + 128 + 56 + 7 = 27065$$

$$543277_8 = 181951_{10}$$

c)

$$1 \times 16^8 + 4 \times 16^7 + 2 \times 16^6 + B \times 16^5 + D \times 16^4 + 3 \times 16^3 + F \times 16^2 + C \times 16^1 + 7 \times 16^0$$

$$1 \times 4294967296 + 4 \times 268435456 + 2 \times 16777216 + B \times 1048576 + D \times 65536 + 3 \times 4096 + F \times 256 + C \times 16 + 7 \times 1$$

$$4294967296 + 1073741824 + 33554432 + 11534336 + 851968 + 12288 + 3840 + 192 + 7 = 5414666183$$

$$142BD3FC7_{16} = 5414666183_{10}$$

d)

$$1 \times 8^8 + 5 \times 8^7 + 3 \times 8^6 + 2 \times 8^5 + 6 \times 8^4 + 7 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 7 \times 8^0$$

$$1 \times 16777216 + 5 \times 2097152 + 3 \times 262144 + 2 \times 32768 + 6 \times 4096 + 7 \times 512 + 2 \times 64 + 4 \times 8 + 7 \times 1$$

$$16777216 + 10485760 + 786432 + 65536 + 24576 + 3584 + 128 + 32 + 7 = 28143271$$

$$153267247_8 = 28143271_{10}$$

1.3 Ejercicios de practica

a)

$\begin{array}{r} 10516 \\ 8 \overline{) 84129} \\ 1 \rightarrow S_0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1314 \\ 8 \overline{) 10516} \\ 4 \rightarrow S_1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 164 \\ 8 \overline{) 1314} \\ 2 \rightarrow S_2 \end{array}$
$\begin{array}{r} 20 \\ 8 \overline{) 164} \\ 4 \rightarrow S_3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \rightarrow S_5 \\ 8 \overline{) 20} \\ 4 \rightarrow S_4 \end{array}$	El resultado es: $84129_{10} = 244241_8$

b)

$\begin{array}{r} 532 \\ 11 \overline{) 5861} \\ 9 \rightarrow S_0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 48 \\ 11 \overline{) 532} \\ 4 \rightarrow S_1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \rightarrow S_3 \\ 11 \overline{) 48} \\ 4 \rightarrow S_2 \end{array}$	El resultado es: $5861_{10} = 4449_{11}$
---	---	---	---

c)

$\begin{array}{r} 114 \\ 13 \overline{) 1487} \\ 5 \rightarrow S_0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \rightarrow S_2 \\ 13 \overline{) 114} \\ 10 = A \rightarrow S_1 \end{array}$	El resultado es: $1487_{10} = 8A5_{13}$
---	---	--

d)

$\begin{array}{r} 5790 \\ 16 \overline{) 92653} \\ 13 = D \rightarrow S_0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 361 \\ 16 \overline{) 5790} \\ 14 = E \rightarrow S_1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 22 \\ 16 \overline{) 361} \\ 9 \rightarrow S_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \rightarrow S_4 \\ 16 \overline{) 22} \\ 6 \rightarrow S_3 \end{array}$	El resultado es: $92653_{10} = 169ED_8$
--	--	---	---	--

1.4 Ejercicios de práctica

a)

Primer paso:

4 6 5 7 2_8

100 110 101 111 011₂

Segundo paso:

(0100) (110 1) (01 11) (1 011)₂

4 D 7 B

Finalmente, el resultado es: $46572_8 \rightarrow 4D7B_{16}$

b)

Primer paso:

1 5 C D 2 E F_{16}

0001 0101 1100 1101 0010 1110 1111₂

Segundo paso:

(000)(001) (010)(1 11)(00 1)(101) (001)(0 11)(10 1)(111)₂

0 1 2 7 1 5 1 3 5 7

Finalmente, el resultado es: $15CD2EF_{16} \rightarrow 0127151357_8$

c) $11100110011101001_2 \rightarrow N_8$ y N_{16}

Conversión a N_8

(011) (100) (110) (011) (101) (001)

3 4 6 3 5 1

Resultado final: $11100110011101001_2 = 346351_8$

Conversión a N_{16}

(0001) (1100) (1100) (1110) (1001)

1 C C E 9

Resultado final: $11100110011101001_2 = 1CCE9_{16}$

1.5 Ejercicios de práctica.

a)

$$\begin{array}{r}
 11001110.0111_2 \\
 + 1101011.1101_2 \\
 \hline
 100111010.0100_2
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r}
 3A567B.D_{16} \\
 + 9CE17F.34_{16} \\
 \hline
 D737FB.06_{16}
 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r}
 42761731.32_8 \\
 + 6505237.63_8 \\
 \hline
 51467171.15_8
 \end{array}$$

1.6 Ejercicios de practica

a)

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad . \quad 0 \quad 0 \quad 1_2 \\
 - (+1) \quad 1(+1) \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1(+1) \quad 1(+1) \quad .1 \quad 0 \quad 1_2 \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad . \quad 1 \quad 0 \quad 0_2
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r}
 4 \quad 1 \quad 0 \quad 7 \quad 2 \quad . \quad 1 \quad 4_8 \\
 - 3(+1) \quad 6 \quad 0 \quad 4(+1) \quad 3(+1) \quad . \quad 7 \quad 1(+1) \quad 3_8 \\
 \hline
 0 \quad 3 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad . \quad 2 \quad 2 \quad 5_8
 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r}
 4 \quad 0 \quad 5 \quad 8 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad . \quad 6_9 \\
 - 1(+1) \quad 5(+1) \quad 8 \quad 3(+1) \quad 5(+1) \quad 8(+1) \quad 2 \quad . \quad 2(+1) \quad 8(+1) \quad 4_9 \\
 \hline
 2 \quad 3 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \quad . \quad 3 \quad 0 \quad 5_9
 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccccccc}
 1 & 5 & D & A & 8 & 4 & 3 & . & 2 & 3_{14} \\
 - & (+1) & B & A & 2 & 5(+1) & 4(+1) & 4(+1) & . & 2(+1) & B_{14}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccccccc}
 0 & 8 & 3 & 8 & & 2 & D & C & . & D & 6_{14}
 \end{array}
 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 A & 7 & 5 & 0 & 1 & B & 3_{16} \\
 - & 9 & 1(+1) & D(+1) & 3(+1) & 5(+1) & C(+1) & B_{16}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 1 & 5 & 7 & & C & B & E & 8
 \end{array}
 \end{array}$$

1.7 Ejercicios de practica

a)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & . & 0 & 1_2 \\
 \times & & & & 1 & . & 1 & 0 & 1_2
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & &
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 0 & 1 & 0 & 0 & 1_2
 \end{array}
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 A & 8 & D & C & 9 & B & 3 & F_{16} \\
 \times & & E & 5 & A_{16} & & &
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 9 & 7 & 7 & 6 & E & 0 & C & 0 & 6 & 2 & 6_{16}
 \end{array}
 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 C & 5 & 9 & D & A & . & 2_{15} \\
 \times & & 6 & B & . & 4 & 5_{15}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 5 & 8 & 8 & A & 5 & 9 & 2 & . & A & D & A_{15}
 \end{array}
 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 7 & 5 & 4 & 6 & 2 & . & 3_8 \\
 \times & & 6 & 7 & . & 5 & 3_8
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 6 & 5 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 3 & 6 & 1_8
 \end{array}
 \end{array}$$

1.8 Ejercicios de práctica

a)

$$A712B_{16}/6B_{16} = 18FB_{16}$$

b)

$$96A_{16}/F_{16} = A0$$

c)

$$486_{13}/C_{13} = 44_{13}$$

d)

$$10110_2/11_2 = 111_2$$

TEMA II LÓGICA PROPOSICIONAL

2.1 Ejercicios de practica

a)

p	q	q	$\sim p \rightarrow (\sim r \vee q \wedge p) \leftrightarrow r \vee \sim q$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

b)

p	q	r	s	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$\sim s$	(1) $\sim (r \wedge s) \vee p$	(3) $\sim s \wedge q$	(4) $(\sim p \wedge \sim r \vee \sim q)$	(5) $(3) \oplus (4)$	(6) $r \rightarrow (5)$	(6) $\leftrightarrow$ (1)
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

c)

p	q	q	$[(p \rightarrow q) \vee (\sim q \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

2.2 Ejercicios de practica

a)

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$p \rightarrow r$	Premisa 1
2	$r \rightarrow s$	Premisa 2
3	$t \vee \sim s$	Premisa 3
4	$\sim t \vee u$	Premisa 4
5	$\sim u$	Premisa 5
6	$p \rightarrow s$	Silogismo 1,2
7	$\sim s \vee t$	Conmutativa 3
8	$s \rightarrow t$	Variante de la condicional 7
9	$p \rightarrow t$	Silogismo 6,8
10	$t \rightarrow u$	Variante de la condicional 4
11	$p \rightarrow u$	Silogismo 9,10
$\therefore$	$\sim p$	MTT 11, 5

b)

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$p \wedge \sim q$	Premisa 1
2	r	Premisa 2
3	p	Simplificación conjuntiva (1)
4	$\sim q$	Simplificación conjuntiva (1)
5	$p \wedge r$	Regla de conjunción (2, 3)
$\therefore$	$(p \wedge r) \vee \sim q$	Adición (5, 4) (amplificación disyuntiva)

c)

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$r \rightarrow \sim p$	Premisa 1
2	$\sim q \rightarrow s$	Premisa 2
3	$\sim s \vee u$	Premisa 3
4	$r \vee t$	Premisa 4
5	$p \wedge \sim q$	Premisa 5
6	p	simplificación 5
7	$\sim r$	MTT 1, 6
8	t	Silogismo disyuntivo 4, 7
9	$\sim q$	Simplificación 5
10	S	MPP 2, 9
11	u	Silogismo disyuntivo 3, 10
$\therefore$	$t \wedge u$	Adición 8, 11

d)

Numero de premisa	Premisa	Regla que se aplica
1	$r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$	Premisa 1
2	$(p \wedge q)$	Premisa 2
3	$r \vee s$	Premisa 3
4	$r \rightarrow \sim (p \wedge q)$	D'Morgan 1
5	$\sim r$	MTT (2, 4)
$\therefore$	s	Silogismo disyuntivo (3, 5)

2.3 Ejercicios de practica

a)

$U = \{x | x \text{ es niño}\}$:

“Todos son traviesos”

$T(x) = x \text{ es travieso}$

$\forall x T(x)$

“Ninguno es travieso”

$\forall x \sim T(x)$

“Todos son traviesos y lindos”

$L(x) = x \text{ es lindo}$

$\forall x (T(x) \wedge L(x))$

b)

$$U = \{x|x \text{ es persona}\}$$

“Todos los niños son traviesos”

$$N(x) = x \text{ es niño}$$

$$T(x) = x \text{ es travieso}$$

$$\forall x (N(x) \rightarrow T(x))$$

“Ningún niño es travieso”

$$\forall x (N(x) \rightarrow \sim T(x))$$

c)

$$U = \{x|x \text{ es número}\}$$

“Algunos números naturales son divisibles por 3”

$$N(x) = x \text{ es número natural}$$

$$D(x) = x \text{ es divisible por 3}$$

$$\exists x (N(x) \wedge D(x))$$

“No todos los números naturales son divisibles por tres”

$$\sim (\forall x (N(x) \rightarrow D(x)))$$

“Un número natural divisible por él mismo y por uno es primo”

$$M(x) = x \text{ es divisible por él mismo}$$

$$U(x) = x \text{ es divisible por uno}$$

$$P(x) = x \text{ es primo}$$

$$\forall x (N(x) \wedge M(x) \wedge U(x) \rightarrow P(x))$$

d)

$$U = \{x|x \text{ es alumno}\}$$

“Solamente quienes acreditan el examen pasan al siguiente curso”

$$A(x) = x \text{ acredita el examen}$$

$$S(x) = x \text{ pasa al siguiente curso}$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow S(x))$$

2.4 Ejercicios de practica

a)

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n + 1)$$

Se realiza el paso base con $n = 1$

$$4(1) = 2(1)(1 + 1)$$

$$4 = 4$$

Se realiza el paso inductivo con $n = k$

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4k = 2k(k + 1)$$

Se demuestra la igualdad para cualquier número $n = k + 1$

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4k + 4(k + 1) = 2(k + 1)(k + 1 + 1)$$

Se sustituye $4 + 8 + 12 + \dots + 4k$ por $2k(k + 1)$:

$$2k(k + 1) + 4(k + 1) = 2(k + 1)(k + 1 + 1)$$

Se desarrollan términos:

$$2k^2 + 2k + 4k + 4 = 2(k + 1)(k + 2)$$

$$2k^2 + 6k + 4 = 2(k + 1)(k + 2)$$

Se saca el 2 como factor común en el primer término:

$$2(k^2 + 3k + 2) = 2(k + 1)(k + 2)$$

Y se determinan los binomios del trinomio $k^2 + 3k + 2$ siendo estos:

$$2(k + 2)(k + 1) = 2(k + 1)(k + 2)$$

Lo cual demuestra la igualdad.

b)

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$$

Se verifica para $n = 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1 + 1$$

$$2 = 2$$

Se verifica para $n = k$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k}\right) = k + 1$$

Se comprueba para todo $n = k + 1$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = ((k + 1) + 1)$$

Sumando los unos del término derecho de la expresión queda:

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = k + 2$$

Se sustituye $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ por $k + 1$:

$$(k + 1)\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = k + 2$$

Se desarrolla el primer término de la expresión realizando la suma de las fracciones:

$$(k + 1)\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = k + 2$$

$$(k + 1)\left(\frac{1 + k + 1}{k + 1}\right) = k + 2$$

$$(k + 1)\left(\frac{k + 2}{k + 1}\right) = k + 2$$

Se eliminan los $(k + 1)$ que multiplican y dividen, quedando comprobada la igualdad:

$$k + 2 = k + 2$$

c)

$$(1 \cdot 2) + (2 \cdot 2^2) + (3 \cdot 2^3) + \dots + (n \cdot 2^n) = (n - 1)2^{n+1} + 2$$

Se verifica para $n = 1$:

$$(1 \cdot 2^1) = (1 - 1)2^{1+1} + 2$$

$$2 = 2$$

Se verifica para $n = k$:

$$(1 \cdot 2) + (2 \cdot 2^2) + (3 \cdot 2^3) + \dots + (k \cdot 2^k) = (k - 1)2^{k+1} + 2$$

Se válida para cualquier $n = k + 1$:

$$(1 \cdot 2) + (2 \cdot 2^2) + (3 \cdot 2^3) + \dots + (k \cdot 2^k) + ((k + 1)2^{k+1}) = (k + 1 - 1)2^{k+1+1} + 2$$

$$(1 \cdot 2) + (2 \cdot 2^2) + (3 \cdot 2^3) + \dots + (k \cdot 2^k) + ((k + 1)2^{k+1}) = (k)2^{k+2} + 2$$

Se sustituye el valor de $(1 \cdot 2) + (2 \cdot 2^2) + (3 \cdot 2^3) + \dots + (k \cdot 2^k)$:

$$(k - 1)2^{k+1} + 2 + ((k + 1)2^{k+1}) = (k + 1 - 1)2^{k+1+1} + 2$$

$$(k - 1)2^{k+1} + 2 + (k + 1)2^{k+1} = (k)2^{k+2} + 2$$

Se factoriza el término en común 2^{k+1} :

$$2^{k+1}(k - 1 + k + 1) + 2 = (k)2^{k+2} + 2$$

Se simplifica el paréntesis:

$$2^{k+1}(2k) + 2 = (k)2^{k+2} + 2$$

Por leyes de exponentes se tiene que $(2^{k+1})(2)$ es igual a 2^{k+2} , por lo que se tiene:

$$2^{k+2}k + 2 = (k)2^{k+2} + 2$$

Lo que verifica la igualdad.

TEMA III Álgebra Booleana

3.1 Ejercicios de practica

a)

La simplificación de la expresión es la siguiente:

$$ABC + AB'(A + C)$$

$$ABC + AB'A + AB'C$$

$$ABC + AB' + AB'C$$

$$ABC + AB'$$

Función simplificada: $ABC + AB'$.

b)

Proceso de simplificación de la expresión:

$$Z'(Y + X + YZ + XY) \text{ teorema 8a dual sobre } (X + Y)(X + Z)$$

$$Z'(Y + X + XY) \text{ teorema 10a sobre } Y + YZ$$

$$Z'(Y + X) \text{ teorema 10a sobre } X + XY$$

Función simplificada: $Z'(Y + X)$

c)

Simplificación de la expresión:

$B'C'D'(A' + A) + A'B'C(D + D') + ABD(C' + C) + ABCD' + AB'C(D + D')$ teorema 4a dual aplicado a los siguientes pares de términos: $A'B'C'D' + AB'C'D'$, $A'B'CD + A'B'CD'$, $ABC'D + ABCD$, $AB'CD + AB'CD'$.

$B'C'D' + A'B'C + ABD + ABCD' + AB'C$ teorema 4a dual y 2a se eliminan las variables más su complemento.

$$B'C'D' + A'B'C + AB(D + CD') + AB'C \text{ teorema 8a, factor común } ABD + ABCD'$$

$$B'C'D' + A'B'C + AB(D + C) + AB'C \text{ teorema 11a sobre } (D + CD')$$

$$B'C'D' + A'B'C + ABD + ABC + AB'C \text{ teorema 8a sobre } AB(D + C)$$

$$B'C'D' + B'C(A' + A) + ABD + ABC \text{ teorema 8a sobre } A'B'C + AB'C$$

$B'C'D' + B'C + ABD + ABC$ teorema 4a dual y 2a se elimina $A' + A$

$B'(C'D' + C) + ABD + ABC$ teorema 8a factor común de $B'C'D' + B'C$

$B'(D' + C) + ABD + ABC$ teorema 11a sobre $(C'D' + C)$

$B'D' + B'C + ABD + ABC$ teorema 8a sobre $B'(D' + C)$

$B'D' + C(B' + AB) + ABD$ teorema 8a factor común de $B'C + ABC$

$B'D' + C(B' + A) + ABD$ teorema 11a sobre $(B' + AB)$

$B'D' + CB' + CA + ABD$ teorema 8a sobre $C(B' + A)$

Función simplificada: $B'D' + CB' + CA + ABD$

d)

Simplificación de la expresión dada:

$A'B'D(C' + C) + AB'D(C' + C) + AB'CD'$ teorema 8a factor común de $A'B'C'D + A'B'CD$ y $AB'C'D + AB'CD$.

$A'B'D + AB'D + AB'CD'$ se eliminan los términos $(C' + C)$ por teoremas 4a dual y 2a.

$B'D(A' + A) + AB'CD'$ teorema 8a factor común de $A'B'D + AB'D$.

$B'D + AB'CD'$ se elimina $(A' + A)$ por teoremas 4a dual y 2a.

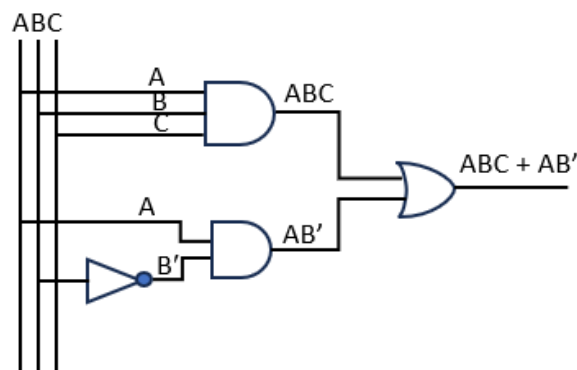
$B'(D + ACD')$ teorema 8a factor común de $B'D + AB'CD$.

$B'(D + AC)$ se elimina D' por teorema 11a aplicado a $(D + ACD')$

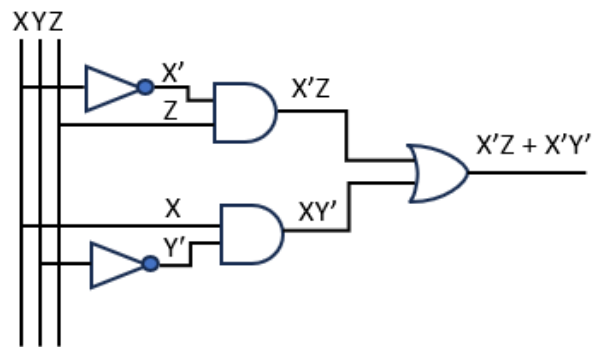
Función simplificada $B'(D + AC)$.

3.2 Ejercicios de practica

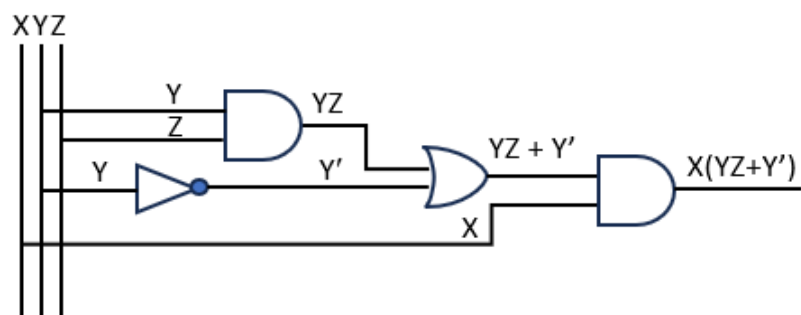
a)



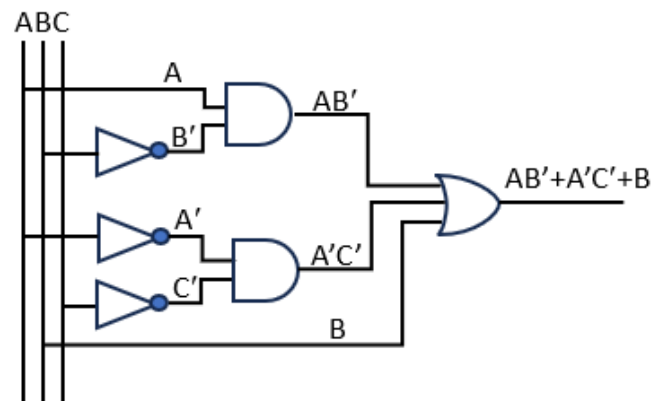
b)



c)



d)



TEMA IV conjuntos y relaciones

4.1 Ejercicios de practica

a)

El número de elementos de un conjunto potencia es 2^n donde n es el número de elementos del conjunto, entonces:

Dado que A tiene 10 elementos entonces:

$$n = 10$$

$$2^{10} = 1024$$

Por lo que $P(A)$ contiene 1024 subconjuntos.

b)

El conjunto potencia es:

$$P(B) = \{\emptyset, \{w\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{w, z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{w, x, y\}, \{w, x, z\}, \\ \{w, y, z\}, \{x, y, z\}, \{w, x, y, z\}\}$$

c)

Dado que un conjunto potencia tiene 2^n elementos y el conjunto A tiene 5 elementos entonces $P(A)$ tendrá 32 elementos.

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{o\}, \{u\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{a, o\}, \{a, u\}, \{e, i\}, \{e, o\}, \{e, u\}, \{i, o\}, \{i, u\}, \\ \{o, u\}, \{a, e, i\}, \{a, e, o\}, \{a, e, u\}, \{a, i, o\}, \{a, i, u\}, \{a, o, u\}, \{e, i, o\}, \{e, i, u\}, \{e, o, u\}, \\ \{i, o, u\}, \{a, e, i, o\}, \{a, e, i, u\}, \{a, e, o, u\}, \{a, i, o, u\}, \{e, i, o, u\}, \{a, e, i, o, u\}\}$$

d)

Dado que

$$X = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$n(X) = 8$$

Entonces

$$n(P(X)) = 2^8 = 256$$

4.2 Ejercicios de practica

a)

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B \cup A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

Por lo tanto, se cumple que: $A \cup B = B \cup A$

b)

$$B \cap C = \{1, 4, 7, 10\}$$

$$C \cap B = \{1, 4, 7, 10\}$$

Por lo tanto, se cumple que: $B \cap C = C \cap B$.

c)

$$B - A = \{1, 8, 9\}$$

$$A - B = \{2, 5, 10\}$$

Por lo tanto, no se cumple que: $B - A = A - B$.

d)

$$A \oplus B = \{1, 2, 5, 8, 9\}$$

$$B \oplus A = \{1, 2, 5, 8, 9\}$$

Por lo tanto, se cumple que: $A \oplus B = B \oplus A$.

4.3 Ejercicios de practica

a)

$$A \cap C = \{7, 17, 23\}$$

$$A \cap C \cap D = \{17\}$$

$$(A \cap C \cap D)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, \dots \infty\}$$

$$(A \cap C \cap D)' \cap B = \{9, 11, 12, 13, 15, 16, 21, 23\}$$

b)

$$D \oplus B = \{9, 12, 16, 19, 21, 23\}$$

$$A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, \dots \infty\}$$

$$(D \oplus B) \cap A' = \{9, 12, 16, 21\}$$

c)

$$A - B = \{7, 19, 29\}$$

$$D \oplus B = \{9, 12, 16, 19, 21, 23\}$$

$$[(A - B) \cap (D \oplus B)] = \{19\}$$

$$D' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots \infty\}$$

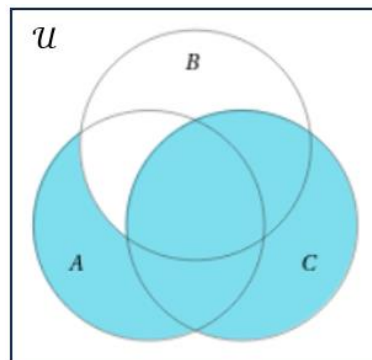
$$C \oplus D' = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 24, 26, \dots \infty\}$$

$$[(A - B) \cap (D \oplus B)] - (C \oplus D') = \{19\}$$

4.4 Ejercicios de practica

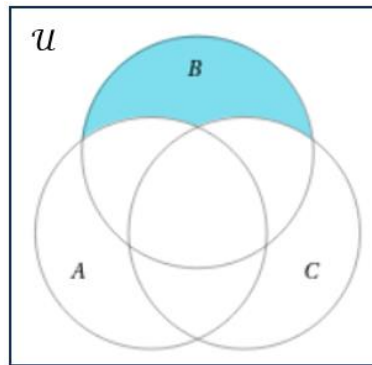
a)

La región resultante de $((A \oplus C) - (B \cap A)) \cup (A \cap C)$ es:



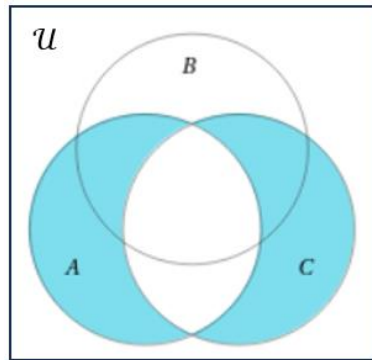
b)

La región resultante de la expresión $(A \oplus B) - (C \cap B \cup A)$ es:



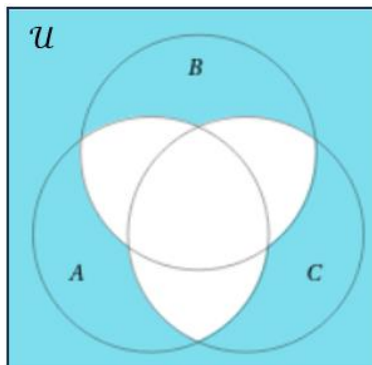
c)

El resultado espacial de la expresión $[(B \cap C) \cup (A \cup C)] - (A \cap C)$ es:



d)

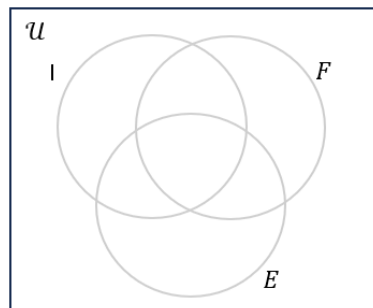
La región obtenida de $[(A \cup B)' - (A \cap C)] \cup [(A \cap B' \cap C')] \cup (A' \cap B \cap C')$ es:



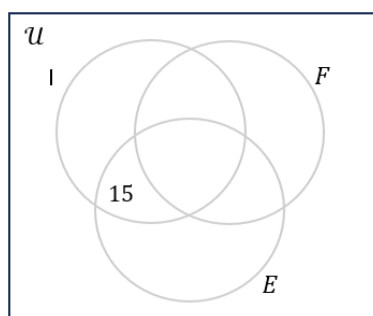
4.5 Ejercicios de practica

a)

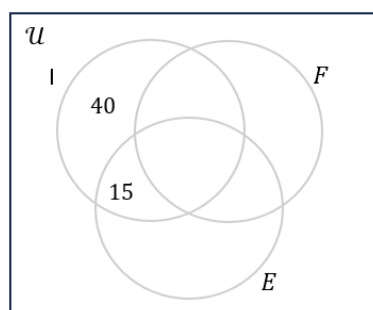
El problema tiene tres conjuntos, ingles (I), frances (F) y español (E).



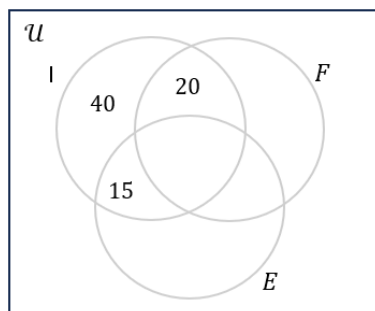
Se inicia colocando los 15 que tuvieron habilidad en inglés y español, pero no en francés, este dato corresponde a la intersección $I \cap E$ pero que no incluye la región del conjunto F .



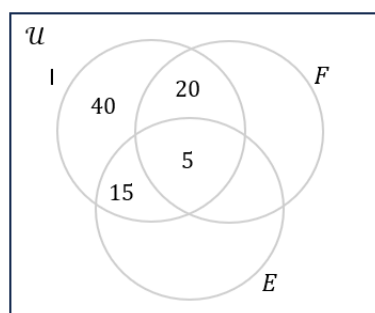
Se sabe que 55 leen inglés y no francés, este dato corresponde a las áreas de ingles que no forman parte del francés, como se tienen 15 estudiantes en una de las áreas entonces los 15 menos los 55 serían los que tienen habilidad para el inglés y no el francés.



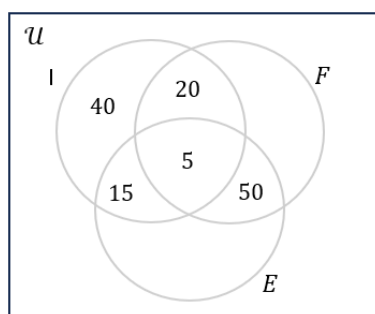
Conociendo que 60 leen inglés y no leen español y teniendo 40 estudiantes ya calculados con los datos anteriores en esta área, se determina que $60 - 40 = 20$ son los estudiantes de la intersección de francés e inglés y no español.



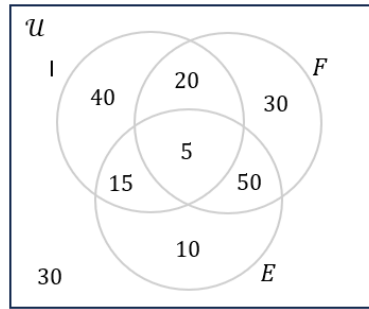
Con la suma de los tres valores calculados y conociendo que el total de los estudiantes con habilidad en inglés es 80 se determina el número de la intersección de los tres conjuntos determinada por $80 - (40 + 20 + 15) = 5$.



El dato faltante de la intersección de francés y español se determina sabiendo que 55 tienen habilidad en francés y español, considerando los 5 de la intersección de los tres conjuntos, entonces 50 son los estudiantes con habilidad únicamente en francés y español, pero no en inglés.



A partir de aquí se pueden determinar los valores restantes considerando el número total que tiene cada conjunto.



A partir de esta información se responden las preguntas:

¿Cuántos leen los tres idiomas?

Respuesta: 5

¿Cuántos leen únicamente francés?

Respuesta: 30

¿Cuántos no leen ninguno de los tres idiomas?

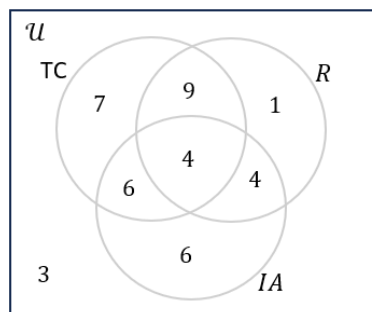
Respuesta: 30

¿Cuántos leen español, pero no inglés ni francés?

Respuesta: 10

b)

La distribución de los datos en los conjuntos es:



A partir del diagrama las respuestas a las preguntas son:

¿Cuántos de ellos no estudian para ninguna de las tres asignaturas?

Respuesta: 3

¿Cuántos de ellos estudian únicamente para inteligencia artificial?

Respuesta: 6

¿Cuántos de ellos estudian para dos asignaturas?

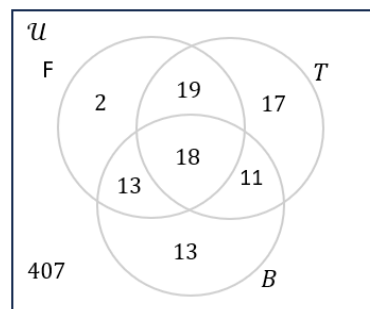
Respuesta: $9 + 6 + 4 = 19$

¿Cuántos de ellos estudian teoría de la computación y redes, pero no inteligencia artificial?

Respuesta: 9

c)

El diagrama resultante con la cardinalidad de los conjuntos es:



Respondiendo a las presuntas se tiene que:

¿Cuántos de ellos no juegan ninguna de las tres disciplinas?

Respuesta: 407

¿Cuántos de ellos juegan únicamente un deporte?

Respuesta: $2 + 17 + 13 = 32$

¿Cuántos de ellos juegan tenis y futbol, pero no beisbol?

Respuesta: 19

¿Qué combinación de dos disciplinas se juega más?

Respuesta: futbol y tenis con 19

¿Cuántos juegan al menos un deporte?

Respuesta: $2 + 19 + 17 + 13 + 18 + 11 + 13 = 93$

4.6 Ejercicios de practica

a)

El conjunto relación es:

$$R = \{(5, 5), (5, 7), (6, 6), (6, 4), (7, 5), (7, 7), (4, 6), (4, 4)\}$$

Ya que todos los pares ordenados cumplen que la suma de $(x + y)$ es par:

$$5 + 5 = 10$$

$$7 + 5 = 12$$

$$5 + 7 = 12$$

$$7 + 7 = 14$$

$$6 + 6 = 12$$

$$4 + 6 = 10$$

$$6 + 4 = 10$$

$$4 + 4 = 8$$

b)

Validando los pares ordenados se determina que los siguientes pares cumplen con la condición:

$(6, 6)$ ya que $6 > 6 + 1$

$(6, 7)$ ya que $6 > 7 + 1$

$(6, 8)$ ya que $6 > 8 + 1$

$(7, 7)$ ya que $7 > 7 + 1$

$(7, 8)$ ya que $7 > 8 + 1$

$(8, 8)$ ya que $8 > 8 + 1$

Por lo que la relación es:

$$R = \{(6, 6), (6, 7), (6, 8), (7, 7), (7, 8), (8, 8)\}$$

c)

Los pares que cumplen con la condición establecida son tres:

$(1, 0)$ ya que $0 = 1 - 1$

$(2, 1)$ ya que $1 = 2 - 1$

$(3, 2)$ ya que $2 = 3 - 1$

Por lo que la relación resultante es:

$$R = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$$

d)

Los pares ordenados que cumplen con la condición son:

$(0, 1)$ ya que $1 = (0)^2 + 1$

$(1, 3)$ ya que $3 = (1)^2 + 1$

$(2, 5)$ ya que $5 = (2)^2 + 1$

Por lo que la relación resultante es:

$$R = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5)\}$$

e)

Comparando cada elemento de X con los de Y se tiene que la relación es:

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$$

Ya que únicamente estos elementos cumplen que $x < y$.

4.7 Ejercicios de practica

a)

Los elementos pares del conjunto son: 2, 4, 6, 8, 10.

Los múltiplos de 3 del conjunto son: 3, 6, 9.

Entonces los elementos de la relación son:

$$R = \{(2, 3), (2, 6), (2, 9), (4, 3), (4, 6), (4, 9), (6, 3), (6, 6), (6, 9), (8, 3), (8, 6), (8, 9), (10, 3), (10, 6), (10, 9)\}$$

- La relación no reflexiva pues solamente un número del conjunto se relaciona con el mismo.
- La relación no irreflexiva pues existe un número del conjunto que se relaciona con el mismo.
- La relación no es simétrica puesto que hay números pares que no son múltiplos de 3, luego entonces hay pares (a, b) en la relación, sin el par (b, a) .
- La relación no es asimétrica puesto que existe el par ordenado $(6, 6)$.
- La relación es antisimétrica ya que si un elemento (a, b) cumple la condición, el par (b, a) no lo cumplirá, a excepción del $(6, 6)$, que es aceptado por la antisimetría.
- La relación es transitiva ya que para cada elemento $(a, b)(b, c)$ que pertenece a R se tiene también la relación (a, c) .

b)

Si bien una relación que no es simétrica puede ser antisimétrica, también se cumple que la relación no es ni simétrica ni antisimétrica.

Por ejemplo:

$$R_1 = \{(2, 2), (1, 4), (3, 6)\}$$

No es simétrica y si es antisimétrica, sin embargo, la relación:

$$R_1 = \{(2, 2), (1, 4), (3, 6), (1, 4)\}$$

No es simétrica pero tampoco es antisimétrica.

c)

Dado que el conjunto de la relación es infinito, se puede expresar como:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 6), \dots, (2, 2), (2, 4), (2, 6), \dots, (3, 1), (3, 3), (3, 5), \dots, \infty\}$$

Por lo que:

- La relación es reflexiva ya que cada número sumado a el mismo da un número par.
- Es simétrica puesto que si un $x + y$ es par, entonces $y + x$ también será par, esto para todo par ordenado que cumpla la condición.
- La propiedad transitiva se cumple en esta relación ya que si $x + y$ es par, y $y + z$ es par, entonces $x + z$ también será par.

Con este ejemplo se introduce el concepto de relación de equivalencia.

Una relación que es Reflexiva, Simétrica y Transitiva se dice que es una relación de equivalencia.

d)

La relación cumple con las siguientes propiedades:

- Es reflexiva, todo elemento del conjunto está relacionado consigo mismo.
- No es irreflexiva, existen pares relacionados consigo mismos, ejemplo, $(1, 1)$.
- Es simétrica, todo par ordenado (a, b) tiene su (b, a) en la relación.
- No es asimétrica ni antisimétrica, existen pares (a, b) y (a, b) , por ejemplo, $(1, 5)$ y $(5, 1)$.

- Es transitiva, para todo $(a, b), (b, c)$ que existe en la relación se tiene que (a, c) también pertenece a R .

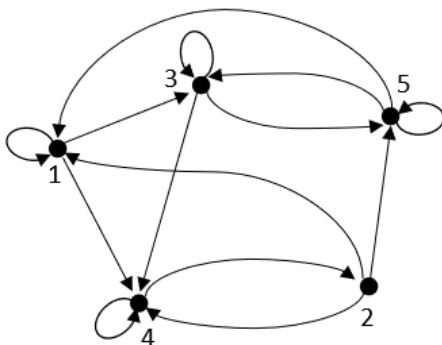
4.8 Ejercicios de practica

a)

- La relación no es reflexiva ya los nodos no tienen lazos, esto quiere decir que los elemento no se relacionan con ellos mismos.
- La relación es irreflexiva pues ningún elemento se relaciona con el mismo ya que no existen lazo en el digrafo.
- La relación no es simétrica ya que existe una conexión del nodo 3 al 5 pero no hay conexión del nodo 5 al 3.
- La relación es asimétrica y antisimétrica puesto que no existe conexión de regreso sobre cada par de nodos conectados, es decir se tiene conexión del nodo a al b , pero no se tiene conexión de b a a , esto en todos los casos.
- La relación no es transitiva ya que existen casos en donde $(a, b), (b, c) \in R$ y $(a, c) \notin R$, por ejemplo, $(1, 4)$ y $(4, 3)$ están en la relación, pero $(1, 3) \notin R$.

b)

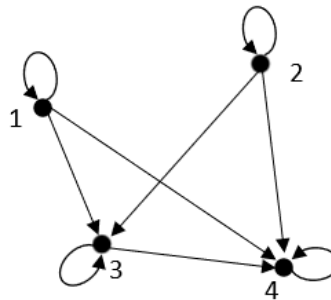
El digrafo y la matriz de la relación son los siguientes:



$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

c)

El siguiente digrafo representa una relación de orden parcial sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$



d)

La relación expresada con pares ordenados es:

$$R = \{(b, 2), (b, 5), (b, 6), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (d, 2), (d, 3), (d, 4)\}$$

Es una relación de $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

El dominio de la relación es: $Dom(R) = \{b, c, d\}$

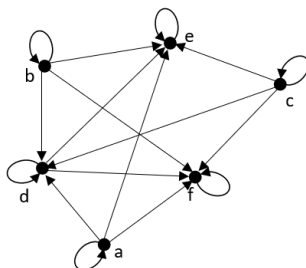
El codominio de la relación es: $Cod(R) = \{2, 5, 6, 3, 4\}$

4.9 Ejercicios de practica

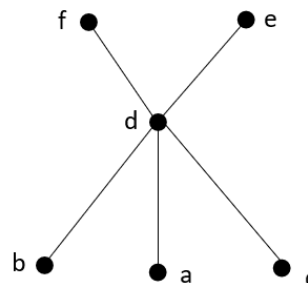
a)

$$R = \{(a, a), (a, d), (a, e), (a, f), (b, b), (b, d), (b, e), (b, f), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (f, f)\}$$

Digrafo de la relación es:



El diagrama de Hasse es:



b)

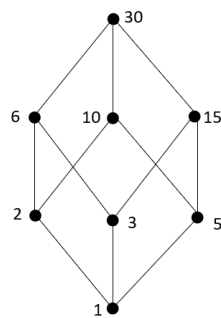
El conjunto A está definido por:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

Y la relación a divide a b es:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 6), (1, 10), (1, 15), (1, 30), (2, 2), (2, 6), (2, 10), (2, 30), \\ (3, 3), (3, 6), (3, 15), (3, 30), (5, 5), (5, 10), (5, 30), (6, 6), (6, 30), \\ (10, 10), (10, 30), (15, 15), (15, 30), (30, 30)\}$$

Obteniendo como diagrama de Hasse el siguiente:

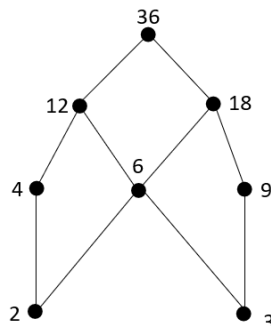


c)

La relación de orden parcial es:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 12), (2, 18), (2, 36), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (3, 12), (3, 18), (3, 36), \\ (4, 4), (4, 12), (4, 36), (6, 6), (6, 12), (6, 18), (6, 36), (9, 9), (9, 18), (9, 36), \\ (12, 12), (12, 36), (18, 18), (18, 36), (36, 36)\}$$

El diagrama de Hasse de la relación es:



4.10 Ejercicios de practica

a)

Función inyectiva y suprayectiva:

Dada la cardinalidad de los conjuntos X y Y la función puede ser suprayectiva pero no inyectiva ya que para que sea función un elemento de X se debe repetir y esto haría que no cumpliera con la inyectividad.

$$\mathcal{F} = \{(3, a), (4, b), (5, c), (7, d), (9, ?)\}$$

Función no inyectiva y suprayectiva:

$$\mathcal{F} = \{(3, a), (4, a), (5, c), (7, d), (9, b)\}$$

Función inyectiva y no suprayectiva:

La función puede no ser suprayectiva pero no puede ser inyectiva ya que se repetirían elementos en el codominio.

$$\mathcal{F} = \{(3, a), (4, b), (5, c), (7, ?), (9, ?)\}$$

Función no inyectiva y no suprayectiva

$$\mathcal{F} = \{(3, b), (4, b), (5, b), (7, b), (9, b)\}$$

b)

La relación es función, ya que $Dom(\mathcal{F}) = X$ y cada elemento de X se relaciona con un solo elemento de Y :

$$\mathcal{F} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

La función es inyectiva pues los elementos del codominio no se repiten.

La relación no es suprayectiva ya que no todos los elementos de X están en la relación faltan el 1, 3 y 5.

Se concluye que la función no es biyectiva.

c)

Se puede obtener una función inyectiva ya que al tener más elementos en el conjunto Y , los elementos del codominio no se repetirán. Por otro lado, la función no podrá ser

suprayectiva ya que, para conservar la condición de función, el codominio no tendrá todos los elementos de Y .

d)

La relación no cumple con la condición de que un elemento del dominio no puede relacionarse con más de un elemento del codominio por lo que la relación no es función y por tanto no puede tener la propiedad de biyectividad.

ANEXO B. SECUENCIAS DIDACTICAS EN GENIALLY

Tema I: <https://app.genial.ly/editor/652701973e3c5000117b53cf>

Tema II: <https://app.genial.ly/editor/655f8216b2689a0011486096>

Tema III: <https://app.genial.ly/editor/65b40f82407afb0014291c5f>

Tema IV: <https://app.genial.ly/editor/65bc4b7e3c8bac0015c53759>

Referencias

García Valle, J. Luis. (1993). *"Matemáticas especiales para computación"*. Mc Graw-Hill, México.

Jimenez Murillo, J. Alfredo. (2008). *"Matemáticas para la computación"*. Alfaomega, México.

Johnsonbaugh, R. (2005). *"Matemáticas Discretas"*. Sexta edición. Pearson educación. México.

Grimaldi, Ralph P. (1998). *"Matemáticas discreta y combinatoria"*. 3ra. Edición. Ed. Pearson educación, México.

Lipschutz, S., & Lipson, M. L. (2009). *"Matematicas Discretas"*, 3ª edición. Mc Graw-Hill.

**INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS
PROFESIONALES**

Periodo: Enero – Junio ☐ Agosto – Diciembre ☐ Verano ☐

Nombre de la asignatura: Matemáticas Discretas I

Plan de estudios: ITICS-2010-225 INGENIERIA EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN

Clave de asignatura: TIF-1019

Horas teoría – horas prácticas – créditos: 3-2-5

1. Caracterización de la asignatura

Esta asignatura aporta al perfil del Ingeniero en Tecnologías de la Información y Comunicaciones la habilidad para desarrollar e implementar sistemas de información para la gestión de procesos y apoyo en la toma de decisiones, utilizando metodologías basadas en estándares internacionales. Facilita en el estudiante la comprensión de las ciencias de la computación a partir de áreas de conocimiento como los sistemas numéricos, la lógica matemática, el álgebra booleana, las relaciones y funciones. Aporta conocimientos a las asignaturas de programación orientada a objetos, fundamentos de bases de datos, probabilidad y estadística y electricidad y magnetismo.

2. Intención didáctica

La asignatura se organiza en cuatro temas, los cuales incluyen contenidos conceptuales y aplicación de los mismos a través de ejercicios prácticos y reales. En el tema de sistemas numéricos el estudiante reconoce la importancia de los sistemas numéricos: binario, octal y hexadecimal en las ciencias computacionales. En el segundo tema conocerá los conceptos básicos de la lógica proposicional y su aplicación en computación, igualmente se examinan los conceptos de lógica de predicados y algebra declarativa. El concepto de inducción matemática es abordado en forma particular dada su aplicación en proceso de análisis y demostración de modelos matemáticos. El tema de álgebra booleana aborda los teoremas y postulados para optimizar expresiones booleanas en la aplicación de compuertas lógicas. En el tema de relaciones y funciones identifica las propiedades que posee una relación expresada como conjunto de pares ordenados, como una expresión algebraica, de una forma verbal o simbólica. De igual forma se realiza una identificación de funciones y se da solución a ejercicios prácticos. Cada tema busca contribuir de manera efectiva en el perfil del Ingeniero en Tecnologías de la Información y Comunicaciones. El enfoque sugerido para la asignatura requiere que las actividades prácticas promuevan el desarrollo de habilidades para la solución de problemas tales como: identificación, manejo y control de variables y datos relevantes, trabajo en equipo, así mismo, propicien procesos intelectuales como inducción-deducción y análisis-síntesis con la intención de generar

INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS PROFESIONALES

una actividad intelectual compleja. En las actividades prácticas sugeridas, es conveniente que el docente busque sólo guiar a sus estudiantes para que ellos hagan la elección de la mejor solución, que sea óptima y efectiva. La lista de actividades de aprendizaje no es exhaustiva, se sugieren sobre todo las necesarias para hacer más significativo y efectivo el aprendizaje. Algunas de las actividades sugeridas pueden hacerse como actividad extraclase y comenzar el tratamiento en clase a partir del análisis de las soluciones propuestas. Se busca partir de experiencias concretas, cotidianas, para que el estudiante se acostumbre a reconocer los elementos en su alrededor y no sólo se hable de ellos en el aula. Es importante ofrecer escenarios distintos, ya sean contruidos, artificiales, virtuales o naturales. En el transcurso de las actividades programadas es muy importante que el estudiante aprenda a valorar las actividades que lleva a cabo y entienda que está contruyendo su hacer futuro y en consecuencia actúe de una manera profesional; de igual manera, aprecie la importancia del conocimiento y los hábitos de trabajo; desarrolle la precisión y la curiosidad, la puntualidad, el entusiasmo y el interés, la tenacidad, la flexibilidad y la autonomía. El docente además de ser un motivador permanente en el proceso educativo deberá ser facilitador en el proceso de aprendizaje del estudiante al promover el uso de las herramientas digitales para la adquisición de las competencias establecidas en la asignatura.

3. Competencia de la asignatura

- Identifica las estructuras básicas de las matemáticas discretas para aplicarlas en el manejo y tratamiento de la información de las tecnologías de información.

4. Análisis por competencias específicas

Tema No.: 1	Sistemas Numéricos	Competencia específica:	Reconoce la importancia de los sistemas numéricos: binario, octal y hexadecimal en las ciencias computacionales.
-------------	--------------------	-------------------------	--

Subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
---	----------------------------	--------------------------	--------------------------------------	------------------------

INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

PROFESIONALES

1.1 Tipos de sistemas numéricos. 1.2 Conversiones entre sistemas numéricos. 1.3 Operaciones básicas. 1.4 Aplicación de los sistemas numéricos en la computación.	- Diferenciar los tipos de sistemas numéricos para identificar el uso de los sistemas numéricos posicionales. - Investigar los tipos de sistemas numéricos. - Realizar ejercicios de conversiones entre los diferentes sistemas de numeración. - Resolver operaciones binarias en complemento a dos. - Investigar la importancia de los sistemas numéricos y su aplicación en el hardware y software.	- Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes. - Propiciar el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los contenidos de la asignatura. - Proponer problemas que permitan al estudiante la integración de contenidos de la asignatura y entre distintas asignaturas, para su análisis y solución. - Relacionar los contenidos de esta asignatura con las demás del plan de estudios para desarrollar una visión interdisciplinaria en el estudiante.	- Habilidad de aplicar los conocimientos en la práctica. - Responsabilidad social y compromiso ciudadano. - Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y comunicaciones. - Habilidad de investigación. - Habilidad de aprender y actualizarse permanentemente	10 - 10
--	---	--	---	---------

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase (creatividad).	30%
B. Aplica procedimientos aprendidos en la asignatura para resolución de problemas en forma autónoma.	60%
C. Realiza actividades de investigación para participar activamente durante el curso, de manera autónoma y autorregulada.	10%

Matriz de evaluación:

**INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS
PROFESIONALES**

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Actividades clase y extraclase para reforzar el conocimiento del tema.	40	30%		10%			Resuelve ejercicios, realiza investigaciones y/o muestra trabajo de clase. Se retroalimentará la revisión de los trabajos de manera grupal durante la clase.
Examen escrito de resolución de operaciones básicas y conversiones de sistemas numéricos.	60		60%				Resuelve el examen escrito de manera autónoma y lo envía para su evaluación. Se retroalimentará en grupo la resolución de los ejercicios de examen.
	Total 100%	30%	60%	10%			

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple en su totalidad con los indicadores de alcance	100-95
	Notable	Cumple en su totalidad C, cumple casi en su totalidad D y cumple parcialmente A, B	90-94
	Bueno	Cumple casi en su totalidad C, cumple parcialmente A, B y D	80-89
	Suficiente	Cumple casi en su totalidad C y cumple parcialmente al menos otro de los restantes	70-79
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No cumple con ningún indicador	69-0

INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS PROFESIONALES

Tema No.: 2 Lógica Proposicional

Competencia específica Conoce los conceptos básicos de la lógica proposicional, lógica de predicados y álgebra declarativa.

Subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
2.1 Argumentos y tipos de proposiciones lógicas. 2.2 Proposiciones compuestas. 2.3 Evaluación de expresiones. 2.4 Álgebra declarativa. 2.5 Reglas de inferencia. 2.6 Cálculo de predicados. 2.7 Inducción matemática.	• Investigar el concepto de argumento, proposición y proposición lógica. • Presentar ejemplos de proposiciones lógicas. • Elaborar un esquema con los tipos de conexiones lógicas, su representación y tabla de. • Representar enunciados usando para ello notación lógica. • Analizar ejemplos de evaluación de proposiciones lógicas compuestas mediante tablas de verdad. • Investigar las reglas de inferencia. • Realizar ejercicios en donde se apliquen las reglas de inferencia. • Discutir las diferencias entre tautologías, Contradicciones y contingencias.	• Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes. • Propiciar el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los contenidos de la asignatura. • Proponer problemas que permitan al estudiante la integración de contenidos de la asignatura y entre distintas asignaturas, para su análisis y solución. • Relacionar los contenidos de esta asignatura con las demás del plan de estudios para desarrollar una visión interdisciplinaria en el estudiante.	• Habilidad de aplicar los conocimientos en la práctica. • Responsabilidad social y compromiso ciudadano. • Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y comunicaciones. • Habilidad de investigación. • Habilidad de aprender y actualizarse permanentemente.	10 - 10

**INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS
PROFESIONALES**

	Investigar la aplicación del álgebra declarativa y la inducción matemática.			
--	---	--	--	--

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase (creatividad).	30%
B. Aplica procedimientos aprendidos en la asignatura para resolución de problemas en forma autónoma.	60%
C. Realiza actividades de investigación para participar activamente durante el curso, de manera autónoma y autorregulada.	10%

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	
Actividades clase y extraclase para reforzar el conocimiento del tema.	40	30%		10%			Resuelve ejercicios, realiza investigaciones y/o muestra trabajo de clase. Se retroalimentará la revisión de los trabajos de manera grupal durante la clase.
Examen escrito de demostración de proposiciones mediante tablas de verdad y reglas de inferencia.	60		60%				Resuelve el examen escrito de manera autónoma y lo envía para su evaluación. Se retroalimentará en grupo la resolución de los ejercicios de examen.
	Total 100%	30%	60%	10%			

INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS PROFESIONALES

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple en su totalidad con los indicadores de alcance	100-95
	Notable	Cumple en su totalidad C, cumple casi en su totalidad D y cumple parcialmente A, B	90-94
	Bueno	Cumple casi en su totalidad C, cumple parcialmente A, B y D	80-89
	Suficiente	Cumple en su totalidad con los indicadores de alcance	100-95
Competencia no alcanzada	Insuficiente	Cumple en su totalidad C, cumple casi en su totalidad D y cumple parcialmente A, B	90-94

Tema No.: 3

Álgebra Booleana

Competencia específica

Identifica los conceptos, así como las operaciones y teoremas del álgebra booleana.

Subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
3.1 Teoremas y postulados. 3.2 Optimización de expresiones booleanas. 3.3 Compuertas lógicas.	- Investigar el concepto, historia, postulados y propiedades del álgebra booleana. - Elaborar un mapa conceptual de los conceptos de algebra booleana, las operaciones que se utilizan y las propiedades que contiene.	- Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes. - Propiciar el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los contenidos de la asignatura.	- Habilidad de aplicar los conocimientos en la práctica. - Responsabilidad social y compromiso ciudadano. - Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y comunicaciones.	10 - 10

**INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS
PROFESIONALES**

	• Obtener expresiones booleanas a partir de una tabla de verdad que muestre todos los posibles valores de un sistema lógico. • Simplificar expresiones booleanas usando para ello teoremas del álgebra booleana. • Desarrollar ejercicios de optimización de expresiones booleanas, aplicando las propiedades del álgebra booleana. • Investigar las aplicaciones del álgebra booleana en el área de las ciencias computacionales (circuitos lógicos). • Resolver problemas para obtener la expresión equivalente simplificada a partir de un circuito lógico.	• Proponer problemas que permitan al estudiante la integración de contenidos de la asignatura y entre distintas asignaturas, para su análisis y solución. • Relacionar los contenidos de esta asignatura con las demás del plan de estudios para desarrollar una visión interdisciplinaria en el estudiante.	• Habilidad de investigación. • Habilidad de aprender y actualizarse permanentemente.	
--	--	---	--	--

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase (creatividad).	30%
B. Aplica procedimientos aprendidos en la asignatura para resolución de problemas en forma autónoma	60%
C. Realiza actividades de investigación para participar activamente durante el curso, de manera autónoma y autorregulada	10%

INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS PROFESIONALES

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Actividades clase y extraclase para reforzar el conocimiento del tema.	40	30%		10%			Resuelve ejercicios, realiza investigaciones y/o muestra trabajo de clase. Se retroalimentará la revisión de los trabajos de manera grupal durante la clase.
Examen escrito de simplificación de expresiones booleanas y su representación mediante compuertas lógicas.	60		60%				Resuelve el examen escrito de manera autónoma y lo envía para su evaluación. Se retroalimentará en grupo la resolución de los ejercicios de examen.
	Total 100%	30%	60%	10%			

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple en su totalidad con los indicadores de alcance	100-95
	Notable	Cumple en su totalidad C, cumple casi en su totalidad D y cumple parcialmente A, B	90-94
	Bueno	Cumple casi en su totalidad C, cumple parcialmente A, B y D	80-89
	Suficiente	Cumple en su totalidad con los indicadores de alcance	100-95

INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

PROFESIONALES

Competencia no alcanzada	Insuficiente	Cumple en su totalidad C, cumple casi en su totalidad D y cumple parcialmente A, B.	90-94
--------------------------	--------------	---	-------

Tema No.: 4 Conjuntos y Relaciones

Competencia específica Identifica las propiedades que posee una relación expresada como conjunto de pares ordenados, como una expresión algebraica, de una forma verbal o simbólica.

Subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
4.1 Representación y operaciones de conjuntos. 4.2 Propiedades de las relaciones. 4.3 Ordenes parciales. 4.4 Diagramas de Hasse. 4.5 Representación de funciones.	- Investigar qué es un conjunto, los tipos de conjuntos y sus elementos. - Investigar las operaciones básicas de los conjuntos. - Construir diagramas de Venn. - Analizar el álgebra de conjuntos y dar solución a problemas reales. - Investigar los conceptos de: producto cartesiano, relación y relación binaria, utilizando diferentes fuentes de información. - Utilizando conjuntos, matrices y diagramas de flechas presentar ejemplos de relaciones. Investigar otros	- Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes. - Propiciar el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los contenidos de la asignatura. - Proponer problemas que permitan al estudiante la integración de contenidos de la asignatura y entre distintas asignaturas, para su análisis y solución. - Relacionar los contenidos de esta asignatura con las demás del plan de estudios para desarrollar una visión	- Habilidad de aplicar los conocimientos en la práctica. - Responsabilidad social y compromiso ciudadano. - Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y comunicaciones. - Habilidad de investigación. - Habilidad de aprender y actualizarse permanentemente	10 – 10



INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

PROFESIONALES

	tipos de representación y discutir las en grupos de trabajo. • Identificar las diferentes operaciones que pueden realizarse entre relaciones: unión, intersección, complemento, inversa y composición, resolver ejercicios en grupos de trabajo. • Hacer que una relación que no tenga la propiedad de equivalencia adquiera esta propiedad aplicando las cerraduras reflexiva, simétrica y transitiva. • Determinar cuándo una relación sea de orden parcial y determinar el diagrama de Hasse de dicha relación. • Realizar un cuadro comparativo entre una relación de equivalencia y un orden parcial, identificando sus coincidencias y diferencias. • Usar software para llevar a cabo operaciones entre relaciones, así como para determinar las características de estas relaciones. • Elaborar un ensayo con las aplicaciones de las relaciones	interdisciplinaria en el estudiante.		
--	---	--------------------------------------	--	--

**INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS
PROFESIONALES**

	de equivalencia y orden parcial en las ciencias computacionales. • Examinar la definición de una función, resumir las diferencias con respecto al concepto de relación.			
--	--	--	--	--

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase (creatividad).	30 %
B. Aplica procedimientos aprendidos en la asignatura para resolución de problemas en forma autónoma	60 %
C. Realiza actividades de investigación para participar activamente durante el curso, de manera autónoma y autorregulada.	10 %

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Actividades clase y extraclase para reforzar el conocimiento del tema.	40	30%		10%			Resuelve ejercicios, realiza investigaciones y/o muestra trabajo de clase. Se retroalimentará la revisión de los trabajos de manera grupal durante la clase.
Examen escrito de operaciones con conjuntos, representaciones de relaciones y propiedades de las relaciones.	60		60%				Resuelve el examen escrito de manera autónoma y lo envía para su evaluación. Se retroalimentará en grupo

**INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS
PROFESIONALES**

							la resolución de los ejercicios de examen.
	Total 100%	30%	60%	10%			

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple en su totalidad con los indicadores de alcance	100-95
	Notable	Cumple en su totalidad C, cumple casi en su totalidad D y cumple parcialmente A, B	90-94
	Bueno	Cumple casi en su totalidad C, cumple parcialmente A, B y D	80-89
	Suficiente	Cumple en su totalidad con los indicadores de alcance	100-95
Competencia no alcanzada	Insuficiente	Cumple en su totalidad C, cumple casi en su totalidad D y cumple parcialmente A, B	90-94

5. Fuentes de información y apoyos didácticos

Fuentes de información:

• Espinoza Armenta, R., (2010), Matemáticas Discretas, México: Ed. Alfaomega. • Jiménez Murillo, J.A, (2008), Matemáticas para la computación, México: Ed. Alfaomega. • Johnsonbaugh, R, (2005), Matemáticas Discretas, México D.F. Grupo Editorial Iberoamérica. • Lipschutz, S, Lipsun, M. (2009), Matemáticas Discreta, McGraw Hill.

Apoyos didácticos:

COMPUTADORA
TABLETA GRAFICA
PLATAFORMAS VIRTUALES:

- HERRAMIENTAS DE COMUNICACIÓN
- PLATAFORMA VIRTUAL DE ENSEÑANZA
- PIZARRÓN VIRTUAL

6. Calendarización de evaluación en semanas:



INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

PROFESIONALES

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
TP	ED/EF T1	EF T1	EF T1	EF/ES T1	EF T2	EF T2	EF T2	EF/ES T2	EF T3	EF T3	EF T3	EF/ES T3	EF T4	EF T4	EF T4	EF/ES T4
TR																
SD																

TP = tiempo planeado
ED = evaluación diagnóstica

TR = tiempo real
EFn = evaluación formativa
(competencia específica n)

SD = seguimiento departamental
ES = evaluación sumativa

Fecha de elaboración: 1 de Febrero de 2024

MAYRA PATRICIA GARDUÑO GAFFARE

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE SISTEMAS Y
COMPUTACIÓN