



DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA Y BIOQUÍMICA

Programa y Modalidad

B.1.2 ELABORACIÓN DE APUNTES DE ASIGNATURA BALANCE DE MOMENTO, CALOR Y MASA

ISABEL TOMÁS PICHARDO ESQUIVEL

No dictamen. AS-2-316/2023

Revisores

**Dr. Nicolás Flores Álamo
M. en C. Claudia Delgado Hernández
M. en C. Luz del Carmen Martínez Contreras**

FEBRERO DEL 2024

CONTRIBUCIÓN

Con la elaboración de este material pretendo ofrecer un soporte en la impartición de la asignatura de Balance de Momento Calor y Masa, para la explicación de la mayoría de los conocimientos que la materia requiere con el cual se dará apoyo didáctico importante a estudiantes y maestros, los cuales podrá ser consultados al menos por 80 alumnos de la materia en el Instituto Tecnológico de Toluca o más a nivel nacional por semestre. De igual forma será un material de apoyo para el futuro docente, que quiera impartir esta materia, y para el estudiante que quiera aprender esta asignatura ya que el material se podrá reproducir para quien lo desee utilizar porque se puede considerar como instrumento de ayuda para recordar lo expuesto en clases a lo largo del curso.

En la elaboración de estos apuntes se busca reformular las ideas y comentarios de los pocos textos que tocan los temas buscando con esto estimular y dirigir el aprendizaje con una mayor concentración y atención es importante hacer mención que para lograr esto se requiere de la intervención de los diferentes sentidos como lo es el oído, la vista y el tacto, para que el proceso de enseñanza aprendizaje se facilite

Las competencias para desarrollar en la materia de Balance de Momento Calor y Masa son las siguientes: Capacidad para analizar los fenómenos involucrados con los sistemas de transporte de cantidad de movimiento, calor y masa en estado estable bajo condiciones de flujo unidireccional y le proporciona las bases para poder diseñar, seleccionar, optimizar y controlar procesos de transferencia en procesos químicos. Estos fenómenos son importantes al aumentar la capacidad crítica y lógica del estudiante ya que permiten comprender el comportamiento a nivel microscópico de los materiales y/o fluidos que se exponen a cambios de movimiento, calor y masa.

La asignatura comprende el balance en los tres mecanismos de transferencia a nivel microscópico, usando elementos diferenciales de los sistemas más comunes en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

La asignatura se relaciona con todas las posteriores que involucran procesos unitarios para dar soporte a las materias formativas propias del ingeniero químico.

La asignatura se encuentra organizada en cinco temas; los dos primeros y el cuarto, desarrollan la capacidad del estudiante para realizar balances de momento, calor y masa, además, consideraran la aplicación de las condiciones límite en los modelos que surgen del balance y plantea una solución viable al modelo para obtener los perfiles de velocidad, temperatura y concentración en los sistemas de transporte molecular.

Se aplican las leyes de Newton, Fourier y Fick para la integración de los conceptos generales en el planteamiento de los balances microscópicos y dar solución a las

ecuaciones diferenciales generadas, se incluye el tema de superficies extendidas para definir su comportamiento y uso. El tema tres da mayor énfasis a las aplicaciones de fenómenos de transferencia de calor en estado transitorio, mediante la aplicación del concepto de parámetros concentrados y el uso de las gráficas de Heissler para estos casos de estudio. En el quinto tema se aborda la transferencia de masa, permitiendo evaluar los coeficientes convectivos por medio de correlaciones o analogías reportadas en la literatura, y en diferentes sistemas. Se integra así mismo en el tema seis el estudio de los fenómenos en la interfaz con la importancia de la capa límite hidrodinámica y la capa límite térmica en la determinación de las correlaciones para evaluar los coeficientes de transferencia de calor, y finalmente en este mismo tema se propone la evaluación de los coeficientes de transferencia de masa bajo la teoría de la doble película.

Como Objetivos se pretende que a partir de las leyes fundamentales que gobiernan el flujo de momentum, calor y masa, el estudiante reconozca los fenómenos físicos a su alrededor.

Se pretende también que el estudiante aprenda a valorar las actividades que lleva a cabo y entienda que está construyendo su hacer futuro y en consecuencia actúe de manera profesional.

BALANCE DE MOMENTUM, CALOR Y MASA

ÍNDICE

1. BALANCE DE MOMENTUM	8
1.1 CONCEPTOS	8
1.1.1 SISTEMAS	9
1.1.1.1 TIPOS DE SISTEMAS	10
1.1.2 VOLUMEN DE CONTROL	10
1.2 CONDICIONES	12
1.2.1 CONDICIÓN ESTACIONARIA.....	12
1.2.2 CONDICIÓN LÍMITE.....	12
1.3 DETERMINACIÓN DE PERFIL DE VELOCIDAD	15
1.3.1 PROCEDIMIENTO GENERAL PARA LA DETERMINACIÓN DEL PERFIL DE VELOCIDAD	16
1.3.2 EJERCICIOS DE PERFIL DE VELOCIDAD	17
1.4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN.....	54
2. BALANCE DE CALOR.....	63
2.1 CONDICIONES FRONTERA.....	66
2.2 OBTENCIÓN DE PERFILES DE TEMPERATURA Y FLUJO DE CALOR SIN GENERACIÓN.....	66
2.2.1 BALANCE DE ENERGÍA A PAREDES SIMPLES Y COMPUESTAS	68
2.3 RADIO CRÍTICO DE AISLAMIENTO.	78
2.4 OBTENCIÓN DE PERFILES DE TEMPERATURA EN LA CONDUCCIÓN DE CALOR EN UNA ALETA DE ENFRIAMIENTO O SUPERFICIES EXTENDIDAS.....	79
2.4.1 FLUJO ESTACIONARIO DE UNA PELÍCULA NO ISTÉRMICA.	81
3. BALANCE DE CALOR EN ESTADO TRANSITORIO	85
3.1. MODULO DE BIOT Y DE FOURIER	85
3.1.1 NÚMERO DE BIOT	85
3.1.2 MODULO DE FOURIER	87
3.2. PARÁMETROS CONCENTRADOS	88
3.3. APLICACIÓN DE LAS GRAFICAS DE HEISSLER PARA PROBLEMAS EN GEOMETRÍAS SIMPLES. PLACAS, CILINDROS Y ESFERAS EN ESTADO TRANSITORIO.....	98
3.3.1 APLICACIÓN DE LAS GRAFICAS DE HEISSLER PARA PROBLEMAS EN GEOMETRÍAS SIMPLES	99

4. BALANCE DE MASA	127
4.1 CONDICIONES FRONTERA O LÍMITE EN EL BALANCE DE MASA	128
4.2 BALANCES DE MATERIA APLICADOS A UNA ENVOLTURA.....	130
4.2.1 DIFUSIÓN A TRAVÉS DE UNA PELÍCULA GASEOSA	131
4.2.2 DIFUSIÓN DE UNA PELÍCULA LÍQUIDA DESCENDENTE: TRANSFERENCIA DE MATERIA POR CONVECCIÓN FORZADA	135
4.2.3 DIFUSIÓN CON REACCIÓN QUÍMICA HETEROGÉNEA	138
4.3.4 DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD (EJERCICIO PROPUESTO)	141
4.3.5 DIFUSIÓN A TRAVÉS DE UNA PELÍCULA ESFÉRICA NO ISOTÉRMICA... ..	141
4.3.6 DIFUSIÓN Y REACCIÓN QUÍMICA EN EL INTERIOR DE UN CATALIZADOR POROSO	145
4.2.4 DIFUSIÓN CON POLIMERIZACIÓN CATALÍTICA	147
4.2.5 APLICACIÓN EN COORDENADAS RECTANGULARES (EJERCICIO PROPUESTO)	154
4.2.6 DIFUSIÓN EN FASE GASEOSA	155
4.2.7 ELABORACIÓN DE MAQUETA PARA REFORZAMIENTO DE CONCEPTOS	158
5. TRANSFERENCIA EN LA INTERFAZ	159
5.1. TEORÍA DE LA CAPA LIMITE EN FLUJO LAMINAR Y TURBULENTO.	159
5.1.1 CAPA LÍMITE	159
5.2. CORRELACIONES PARA EL CÁLCULO DE COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR.....	161
5.2.1 CORRELACIONES DE CONVECCIÓN FORZADA	163
5.2.2 CORRELACIONES DE CONVECCIÓN NATURAL.....	164
5.2.3 CORRELACIONES PARA FLUJO INTERNO Y EXTERNO	165
5.2.4 CORRELACIONES PARA DIFERENTES RÉGIMENES DE FLUJO	166
5.3. TEORÍA DE LA DOBLE PELÍCULA: (COEFICIENTE INDIVIDUAL DE TRANSFERENCIA DE MASA, COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE MASA, RESISTENCIA DETERMINANTE EN LA DIFUSIÓN ENTRE FASES).	167
5.3.1 DEFINICIÓN DE COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE MASA PARA ELEVADAS VELOCIDADES DE TRANSFERENCIA DE MATERIA	167
5.4. ANALOGÍAS EN LA TRANSFERENCIA DE MASA, CALOR Y MOMENTUM. ...	176
5.4.1 ANALOGÍA DE REYNOLDS.....	177
5.4.2 ANALOGÍA DE PRANDTL.....	178
5.4.3 ANALOGÍA DE CHILTON-COLBURN.....	179

5.4.4 ANALOGÍA DE VON KARMAN	179
6. APÉNDICE.....	181
6.1 CAPITULO 1	181
6.2 CAPITULO 2	183
6.3 CAPITULO 3	184
6.4 CAPITULO 4	185
6.5 CAPITULO 5	186
7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	187

INTRODUCCIÓN

Los apuntes se realizaron con el propósito de exponer de una manera concreta y sencilla la mayor parte de los conceptos y principios incluidos en el temario de Balance de Momento Calor y Masa de la carrera de ingeniería química. El contenido de estos apuntes está redactado lo más claro posible ya que intenta explicar los conceptos relacionados con esta materia, mediante un seguimiento ordenado de los temas involucrados. Además, pretende mostrar la mayor parte del contenido apoyándose en problemas aplicados en ingeniería, gráficas y figuras con el propósito de obtener un mejor entendimiento y aprendizaje de estos conceptos y principios, brindándole al lector interesado en estas áreas del conocimiento, una herramienta con la cual pueda resolver aquellos problemas relacionados con la materia ya que los libros de texto que abordan actualmente estos temas no proporcionan un desarrollo completo en la explicación de la solución de los problemas .

Para conocer los fenómenos involucrados en los procesos unitarios en la ingeniería química es fundamental conocer la transferencia de cantidad de movimiento, calor y masa, en virtud de que aporta las bases para la comprensión y aplicación en el diseño de procesos que durante la formación profesional se estudiarán.

Los apuntes abordan desde la comprensión de los conceptos básicos en cada tema, así como sus diferentes formas de representar las aplicaciones, la interpretación de los perfiles, e identifica los diferentes modelos más comunes en los procesos.

Considero muy importante mencionar que actualmente la herramienta tecnológica es básica en cualquier nivel sin embargo hay que saber relacionarla con su aplicación, porque de nada sirve tenerla y no saber emplearla, los libros de texto siempre serán básicos en los fundamentos, pero la experiencia en los temas aportará la ubicación adecuada del entendimiento además del adecuado respaldo de los temas que anteceden a la materia sin pasar por alto las aplicaciones matemáticas que en la materia son muy importantes.

1. BALANCE DE MOMENTUM

1.1 CONCEPTOS

COLISIÓN:

En el caso de partículas o cuerpos que chocan entre sí, la colisión resulta en la transferencia de momentum de un cuerpo al otro. Este fenómeno está gobernado por las leyes de conservación de la cantidad de movimiento.

FRICCIÓN:

La fricción entre superficies sólidas o interfaces fluidas puede provocar la transferencia de momentum. Este fenómeno es esencial para entender el comportamiento de vehículos en movimiento, el deslizamiento de objetos y otros escenarios donde hay contacto y resistencia al movimiento relativo.

VISCOSIDAD:

En fluidos, la viscosidad es responsable de la transferencia de momentum entre capas de fluido que se mueven a diferentes velocidades. La viscosidad afecta la resistencia al flujo y la distribución de velocidades en un fluido y es descrita principalmente con la ley de viscosidad de Newton.

LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD

También conocida como transferencia de cantidad de movimiento, la transferencia de movimiento, abarca diversos mecanismos que explican cómo la cantidad de movimiento angular o lineal se transfiere entre objetos o partículas. Uno de los fundamentos clave en este ámbito es la Ley de Newton de la viscosidad.

Esta ley, es un principio fundamental en la transferencia de movimiento en fluidos y describe cómo se manifiesta la viscosidad, que es la resistencia de un fluido al flujo, y cómo esta propiedad influye en la transferencia de cantidad de movimiento entre capas de fluido que se mueven a diferentes velocidades.

PRINCIPIOS CLAVE DE LA LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD:

GRADIENTE DE VELOCIDAD:

La viscosidad surge cuando hay un gradiente de velocidad dentro de un fluido, es decir, cuando diferentes capas del fluido se mueven a diferentes velocidades.

COEFICIENTE DE VISCOSIDAD:

La viscosidad se caracteriza mediante el coeficiente de viscosidad, denotado comúnmente como μ . Este coeficiente es una medida de la resistencia interna del fluido al desplazamiento relativo de sus capas.

ESFUERZO CORTANTE:

El esfuerzo cortante, representado por τ (tau), es la fuerza por unidad de área que se requiere para mantener un flujo laminar constante en un fluido. En términos más simples, es la fuerza que causa el deslizamiento entre las capas de fluido.

MODELO MATEMÁTICO DE LA LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD:

La ley establece que el esfuerzo cortante es directamente proporcional al gradiente de velocidad y al coeficiente de viscosidad.

Donde:

τ_{xz} : Esfuerzo cortante.

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx}$$

μ : Coeficiente de viscosidad del fluido.

$\frac{dv_z}{dx}$: Gradiente de velocidad con respecto a la dirección perpendicular a las capas del fluido.

1.1.1 SISTEMAS

Un sistema, en esencia, se representa como una porción identificable de materia dentro de fronteras claramente definidas. Estas fronteras actúan como un marco que permite al investigador concentrarse en el estudio detallado de la materia contenida dentro de ellas.

Todo aquello que existe fuera de los límites del sistema se denomina entorno. Este término abarca todo lo que rodea y no forma parte directa de la porción de materia seleccionada. El entorno actúa como el contexto más amplio en el cual el sistema interactúa y se desenvuelve.

La delimitación entre el sistema y su entorno se establece a través del límite del sistema. Este límite, establecido por el investigador, demarca la división entre la materia que se estudiará en detalle y su entorno circundante. Es crucial para establecer los límites claros necesarios para realizar análisis específicos y comprender las interacciones del sistema con su entorno.

1.1.1.1 TIPOS DE SISTEMAS

La diversidad en los sistemas se manifiesta a través de sus capacidades únicas para interactuar con el entorno. A continuación, se presentan tres categorías fundamentales:

1.1.1.1.1 SISTEMA ABIERTO

Un sistema abierto posee la capacidad de intercambiar tanto energía como materia con su entorno. Un ejemplo ilustrativo es una piscina llena de agua. En este caso, el agua puede entrar o salir de la piscina, y, además, puede experimentar cambios en su temperatura mediante un sistema de calefacción y refrigeración por viento. La dinámica de intercambio constante define la naturaleza abierta de este sistema.

1.1.1.1.2 SISTEMA CERRADO

Un sistema cerrado se limita a intercambiar únicamente energía con su entorno, excluyendo el intercambio de materia. Un ejemplo representativo sería un cilindro mantenido cerrado por una válvula. En este contexto, el sistema puede experimentar cambios de temperatura al ser calentado o enfriado, pero no permite la pérdida de masa al entorno circundante.

1.1.1.1.3 SISTEMA AISLADO

Un sistema aislado, se establece una exclusión total de intercambio tanto de materia como de energía con el entorno. Una analogía sería una caja fuerte, donde su contenido está separado por capas herméticas de metal, actuando como una barrera efectiva contra la transferencia de materia y energía. Bajo condiciones normales, este tipo de sistema mantiene su aislamiento de manera rigurosa.

1.1.2 VOLUMEN DE CONTROL

El volumen de control se presenta como una región fija en el espacio, estratégicamente seleccionada para realizar análisis termodinámicos sobre los equilibrios de masa y energía en sistemas de flujo. es importante destacar que el límite de este volumen puede manifestarse como una envolvente tangible o como una barrera imaginaria, trascendiendo las restricciones físicas.

La superficie de control actúa como la delimitación del volumen de control, siendo el elemento crucial que establece los confines de la investigación. este límite, que puede ser tanto real como imaginario, se convierte en la referencia para comprender las interacciones entre el sistema y su entorno.

Un ejemplo concreto de la utilidad del análisis de volumen de control es la determinación de la tasa de cambio de momento para un fluido. Dentro de este espacio definido, cualquier alteración en el momento del fluido se atribuye

exclusivamente a las fuerzas externas que actúan sobre el fluido contenido en el volumen de control.

1.1.2.1 ELECCIÓN DEL VOLUMEN DE CONTROL

La versatilidad en la selección del volumen de control es destacable. Puede elegirse como un ente estático que permanece inmutable, como uno dinámico que se desplaza con el flujo del fluido, o incluso como una entidad que tiene la capacidad de deformarse conforme evoluciona el proceso. Esta capacidad de adaptación otorga la flexibilidad necesaria para modelar una amplia gama de escenarios fluidodinámicos.

El camino hacia la resolución de problemas implica la aplicación rigurosa de las leyes básicas de conservación dentro de este volumen de control elegido. Aquí, las ecuaciones que rigen la conservación de masa, energía y momento toman protagonismo. Al comprender y resolver estas leyes en el contexto específico del volumen de control, se obtienen perspectivas valiosas sobre la evolución del sistema a lo largo del tiempo.

Un aspecto crítico es la comprensión detallada de todas las velocidades de flujo en relación con la superficie de control que delimita el volumen. La claridad en la definición de los límites del volumen de control es esencial para garantizar una evaluación precisa de las interacciones fluidas. Este conocimiento detallado de las velocidades relativas y los confines del volumen de control es la clave para un análisis fluidodinámico efectivo.

1.1.3 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

El teorema del valor medio constituye una piedra angular en el análisis matemático, estableciendo una conexión esencial entre la continuidad y la diferenciabilidad de una función en un intervalo dado. La afirmación central del teorema es la siguiente:

Si una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que la derivada de la función, denotada por $f'(c)$, es igual a la razón de cambio promedio de la función en el intervalo $[a, b]$.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Este teorema resalta la relación íntima entre la tasa de cambio instantánea (derivada) y la tasa de cambio promedio de una función en un intervalo cerrado. En otras palabras, garantiza que, en algún punto dentro del intervalo abierto, la velocidad instantánea de cambio de la función coincide con la velocidad promedio de cambio en el intervalo cerrado.

1.2 CONDICIONES

1.2.1 CONDICIÓN ESTACIONARIA

La condición estacionaria se presenta cuando las variables de estado, tales como temperatura, presión, volumen, entre otras, permanecen constantes. A diferencia de las funciones de estado, como entropía y entalpía, que pueden variar, la condición estacionaria se mantiene inalterada a lo largo del tiempo.

En los estudios científicos relacionados con la energía, la descripción del comportamiento bajo condición estacionaria puede expresarse mediante una formulación matemática. En esta formulación, las propiedades del sistema en estudio permanecen invariables a medida que transcurre el tiempo.

En este contexto, la expresión matemática que caracteriza la condición estacionaria se revela como una herramienta fundamental. En ella, las variables de estado se mantienen constantes, proporcionando una base sólida para entender y modelar sistemas energéticos en los que la variación temporal de las propiedades se encuentra limitada.

La expresión sería la siguiente:

Donde:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

∂p : Es la variable de estudio (condición o propiedad).

∂t : Es el diferencial de tiempo.

La expresión matemática asociada con el estado estacionario indica que la derivada parcial de cualquier propiedad o propiedades del sistema con respecto al tiempo siempre será igual a cero. Es importante destacar que esta condición se cumple únicamente en períodos de tiempo discretos.

Este planteamiento implica que, para cualquier momento durante el estudio, la diferencia entre el valor final y el valor inicial de una propiedad específica será nula. En términos más simples, la propiedad en cuestión permanece constante en el tiempo durante intervalos discretos, reflejando así la estabilidad inherente al estado estacionario del sistema.

1.2.2 CONDICIÓN LÍMITE

La condición límite sirve como un indicador del comportamiento de una función en la frontera de su área de definición. Se establece que una condición inicial es, en esencia, una condición límite. Es importante señalar que no todas las condiciones límite tienen una solución asociada.

La condición límite proporciona información valiosa sobre cómo se comporta una función cuando se acerca a los límites de su dominio. Sirve como un punto focal al explorar el comportamiento extremo de la función y puede revelar aspectos cruciales sobre su naturaleza.

En el contexto de las condiciones iniciales, se destaca que estas también pueden considerarse como condiciones límite. Sin embargo, es fundamental reconocer que la existencia de soluciones para todas las condiciones límite no está garantizada. Algunas condiciones límite pueden plantear desafíos que resultan en la ausencia de soluciones viables.

1.2.2.1 TIPOS DE CONDICIONES LÍMITE

Existen dos categorías principales de condiciones límite, cada una ofreciendo perspectivas distintas sobre cómo se deben comportar las funciones en los límites de sus dominios.

- **CONDICIONES LÍMITE IMPLÍCITAS:**

En muchos problemas físicos, nos encontramos con condiciones límite implícitas, lo que indica que hay ciertas condiciones que se espera que la función satisfaga en los límites de su dominio. Este escenario es común en sistemas definidos en un área específica de información. En esencia, estas condiciones establecen restricciones o requisitos que buscamos que la función cumpla, proporcionando así un marco flexible para la resolución de problemas físicos complejos.

- **CONDICIONES LÍMITE EXPLÍCITAS:**

En el contexto de los problemas aquí abordados, se centraliza en condiciones límite explícitas, específicamente aquellas que son lineales. Estas condiciones expresan una relación directa y lineal entre la función y sus derivadas parciales. Este enfoque simplificado a menudo se utiliza para resolver problemas donde la relación entre las variables y sus derivadas puede describirse de manera clara y directa a través de una expresión lineal.

1.2.2.2 CONDICIONES LÍMITE APLICADAS AL BALANCE MOMENTUM

Para el balance de momentum, las condiciones límite se refieren a las restricciones o especificaciones que se aplican en los límites o fronteras de un sistema o dominio para resolver problemas de flujo de fluidos. Estas condiciones establecen cómo se comporta el fluido en las interfaces del sistema y son fundamentales para determinar el flujo dentro del dominio de interés. Algunas de las condiciones límite comunes aplicadas al balance de momentum son:

1. **Condición de no deslizamiento:** Esta condición establece que la velocidad del fluido en contacto con una superficie sólida es igual a la velocidad de la superficie sólida. En otras palabras, el fluido no se desliza sobre la superficie

sólida, lo que significa que su velocidad tangencial es cero en la interfaz sólido-fluido.

2. **Condición de flujo entrante o saliente:** En los límites de entrada o salida del dominio de flujo, se especifican las condiciones para la velocidad, la presión u otras propiedades del fluido que ingresan o salen del sistema. Esto puede implicar la imposición de un perfil de velocidad conocido, una presión fija o una velocidad nula, dependiendo del problema específico.
3. **Condición de simetría:** En algunos casos, se aplica una condición de simetría en las fronteras del dominio donde se asume que el flujo es simétrico respecto a un plano o eje determinado. Esto simplifica el problema al reducir la cantidad de fronteras que deben modelarse explícitamente.
4. **Condición de pared adiabática:** En problemas de transferencia de calor, se puede especificar que no hay transferencia de calor a través de las paredes del sistema, lo que se conoce como una condición de pared adiabática.
5. **Condición de flujo libre:** En algunas situaciones, como en los límites exteriores de un dominio de flujo, se puede asumir que el flujo tiene una presión o velocidad conocida en el infinito, lo que se conoce como una condición de flujo libre.

1.3 DETERMINACIÓN DE PERFIL DE VELOCIDAD

Para el flujo rectilíneo estacionario, el balance general de cantidad de movimiento aplicado a una delgada envoltura de fluido es:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Velocidad de entrada} \\ \text{de cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Velocidad de salida} \\ \text{de cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Suma de fuerzas} \\ \text{que actúan en el} \\ \text{sistema} \end{array} \right\} = 0 \quad \text{Ec ... 1}$$

Entendiendo que al sistema puede entrar cantidad de movimiento por transporte viscoso o transporte molecular de acuerdo con la expresión newtoniana de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

$$\begin{array}{c} \text{Transporte} \\ \text{molecular o} \\ \text{viscoso} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Esfuerzo} \\ \text{cortante} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Área a través de la} \\ \text{cual se transmite} \\ \text{el movimiento} \\ \Delta_x, \Delta_z \end{array} \right)$$

También puede entrar y salir cantidad de movimiento a través del flujo global.

$$\text{Flujo global} \rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad en la} \\ \text{dirección que} \\ \text{avanza el fluido} \\ v_z^2 \end{array} \right)^2 \left(\begin{array}{c} \text{Densidad} \\ \text{del} \\ \text{fluido} \\ \rho \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Área perpendicular} \\ \text{a la dirección que} \\ \text{avanza el fluido} \\ \Delta_x \Delta_y \end{array} \right)$$

Las fuerzas que se analizan son las fuerzas de presión actuando sobre las superficies y las fuerzas de gravedad sobre todo el volumen.

$$\begin{array}{c} \text{Presión del} \\ \text{fluido} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Diferencial} \\ \text{de} \\ \text{presiones} \\ \Delta P = (P_0 - P_L) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Área perpendicular} \\ \text{a la cual se ejerce} \\ \text{la presión} \\ \Delta_x \Delta_y \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} \text{Fuerzas de} \\ \text{gravedad} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Densidad} \\ \text{del} \\ \text{fluido} \\ \rho \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Diferencia} \\ \text{de} \\ \text{volumen} \\ \Delta_x \Delta_y \Delta_z \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Componente de la} \\ \text{gravedad en la} \\ \text{dirección del fluido} \\ g_z \end{array} \right)$$

El balance de cantidad de movimiento de la ecuación 1 puede aplicarse solamente cuando las líneas de corriente del sistema son rectas (es decir para el flujo rectilíneo).

1.3.1 PROCEDIMIENTO GENERAL PARA LA DETERMINACIÓN DEL PERFIL DE VELOCIDAD

Para abordar y resolver problemas de flujo viscoso rectilíneo en estado estacionario, se sigue un procedimiento sistemático que involucra varios pasos clave. A continuación, se detalla el proceso paso a paso:

1. Balance de Cantidad de Movimiento:

Se formula el balance de cantidad de movimiento, utilizando la ecuación 1 para una envoltura de espesor finito. Esta ecuación proporciona la relación fundamental entre la cantidad de movimiento y las fuerzas involucradas en el flujo viscoso.

2. Reducción del espesor:

Se procede a reducir el espesor de la envoltura hacia cero, aplicando la definición matemática de la primera derivada. Esto se realiza para obtener la correspondiente ecuación diferencial que describe la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.

3. Expresión newtoniana de la densidad de flujo:

Se introduce la expresión newtoniana adecuada de la densidad de flujo de cantidad de movimiento en la ecuación diferencial obtenida en el paso anterior. Esto conduce a la formulación de la ecuación diferencial para la distribución de velocidad en el sistema.

4. Integración de ecuaciones diferenciales:

Se lleva a cabo la integración de las dos ecuaciones diferenciales obtenidas en los pasos anteriores. Esto proporciona las distribuciones de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad en el sistema, revelando cómo estas propiedades varían a lo largo del espacio.

5. Cálculos de magnitudes importantes:

Se realizan cálculos específicos para determinar magnitudes clave, tales como velocidad media, velocidad máxima, velocidad volumétrica de flujo, pérdidas de presión y fuerzas que actúan sobre las superficies límite. Estos valores ofrecen una comprensión detallada del comportamiento del flujo viscoso en el sistema.

Siguiendo este procedimiento paso a paso, se logra una descripción detallada y cuantitativa del flujo viscoso rectilíneo en estado estacionario, permitiendo la resolución efectiva de problemas relacionados con la cantidad de movimiento y la distribución de velocidad en el sistema.

A considerar...

¿Qué es un perfil de velocidad?

El perfil de velocidad es una descripción de cómo varía la velocidad del fluido en diferentes puntos y diferentes espacios a lo largo de una dirección específica en un flujo. En otras palabras, muestra cómo la velocidad del fluido cambia desde la superficie de un objeto o de una pared hasta el centro del flujo o a través de una sección transversal de un conducto.

Para entenderlo mejor, imaginar un flujo de agua en un tubo. En la pared del tubo, la velocidad del agua es cero debido a la condición de no deslizamiento. A medida que nos alejamos de la pared y nos movemos hacia el centro del tubo, la velocidad del agua aumenta gradualmente hasta alcanzar su valor máximo en el centro del flujo. Este cambio en la velocidad del fluido a medida que nos movemos a través del tubo es lo que llamamos; el perfil de velocidad.

El perfil de velocidad puede tener diferentes formas dependiendo del tipo de flujo y de las condiciones en el sistema. Por ejemplo, en un flujo laminar y estable, el perfil de velocidad puede ser suave y simétrico, con una velocidad máxima en el centro del flujo y disminuyendo gradualmente hacia las paredes. En un flujo turbulento, el perfil de velocidad puede ser más irregular y fluctuante, con regiones de alta velocidad cerca de las paredes y en el centro del flujo.

1.3.2 EJERCICIOS DE PERFIL DE VELOCIDAD

1.3.2.1 FLUJO EN UNA PELÍCULA DESCENDENTE

Considere una superficie plana inclinada semejante a la de la figura, suponer que la viscosidad y densidad del fluido son constantes y se razona una región de longitud L , suficientemente alejada de los extremos de la pared, de forma que las perturbaciones en la entrada y en la salida no están incluidas en L ; es decir, que en esta región el componente v_z de la velocidad es independiente de z .

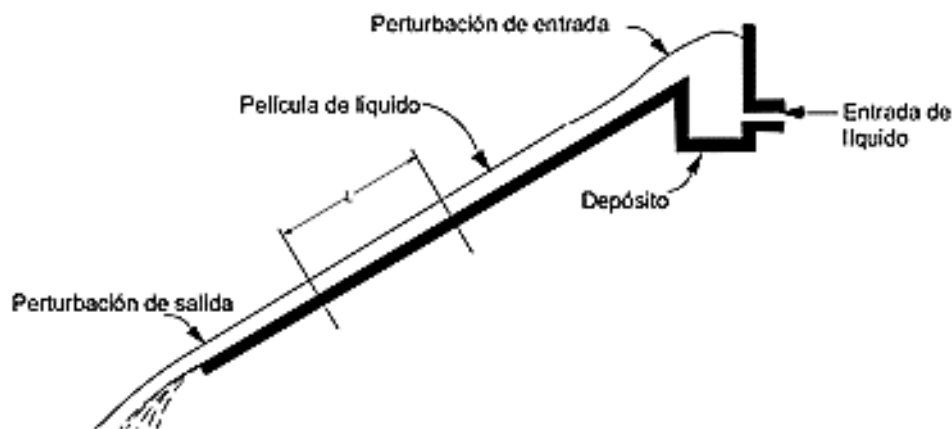


Figura 1. Fenómeno físico completo y delimitación del espacio/volumen de control de longitud L .

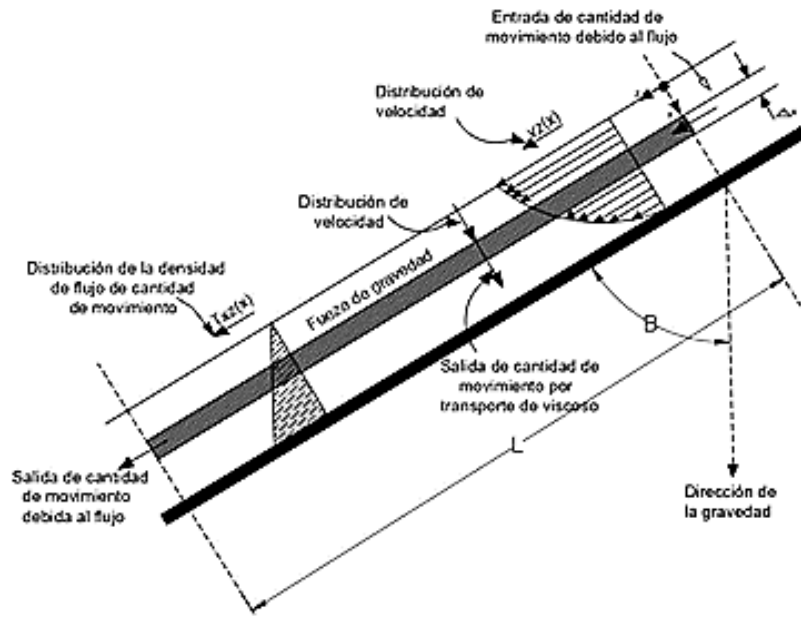


Figura 2. Caracterización del volumen de control en la longitud L.

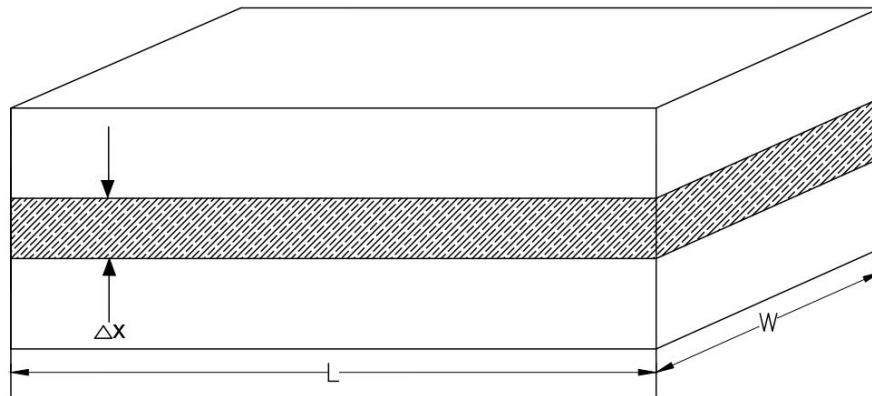


Figura 3. Vista del volumen de control de región L.

1. Planteando el balance general de cantidad de movimiento.

$$\tau_{xz}(Lw)|_{x=x} - \tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta x} + v_z^2 \rho w \Delta_x|_{z=0} - v_z^2 \rho w \Delta_x|_{z=0} + \rho L w \Delta_x g_z = 0$$

2. Reduciendo términos semejantes.

$$\tau_{xz}(Lw)|_{x=x} - \tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta x} + \rho L w \Delta_x g_z = 0$$

3. Factorizando y reduciendo las constantes $Lw\Delta_x$:

$$\frac{\tau_{xz}(Lw)|_{x=x}}{Lw\Delta_x} - \frac{\tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta_x}}{Lw\Delta_x} + \frac{\rho Lw\Delta_x g_z}{Lw\Delta_x} = 0$$

4. Cambiando los signos de los términos de la ecuación anterior:

$$(-1) \left(\frac{\tau_{xz}(Lw)|_{x=x}}{Lw\Delta_x} - \frac{\tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta_x}}{Lw\Delta_x} + \frac{\rho Lw\Delta_x g_z}{Lw\Delta_x} \right) = 0$$

5. Reduciendo los términos semejantes.

$$-\frac{\tau_{xz}|_{x=x}}{\Delta_x} + \frac{\tau_{xz}|_{x=x+\Delta_x}}{\Delta_x} - \rho g_z = 0$$

6. Reordenando la ecuación.

$$\frac{\tau_{xz}|_{x=x+\Delta_x} - \tau_{xz}|_{x=x}}{\Delta_x} - \rho g_z = 0$$

Despejando el término de ρg_z :

$$\frac{\tau_{xz}|_{x=x+\Delta_x} - \tau_{xz}|_{x=x}}{\Delta_x} = \rho g_z$$

7. Aplicando el límite cuando Δ_x tiende a 0 de la ecuación anterior.

$$\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{\tau_{xz}|_{x=x+\Delta_x} - \tau_{xz}|_{x=x}}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \rho g_z$$

8. Resolviendo el límite:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g_z$$

9. Reordenando la ecuación anterior.

$$d\tau_{xz} = \rho g_z dx$$

10. Integrando la ecuación.

$$\int d(\tau_{xz}) = \rho g_z \int dx$$

Una vez integrada:

$$\tau_{xz} = \rho g_z x + c_1 \dots \text{Ecuación 1}$$

Considerando la siguiente condición límite

$$C.L. 1 \quad x = 0 \quad \tau_{xz} = 0$$

11. Sustituyendo la primera condición límite $C.L. 1 \quad x = 0 \quad \tau_{xz} = 0$ en la Ecuación 1, posteriormente despejar para encontrar c_1

$$0 = \rho g_z(0) + c_1$$

Despejando c_1 se obtiene que es igual a 0

12. Sustituyendo el valor de c_1 en la Ecuación 1, lo que nos queda de la siguiente manera:

$$\tau_{xz} = \rho g_z x + 0$$

Resultando:

$$\tau_{xz} = \rho g_z x$$

13. Usando y sustituyendo la Ley de Newton de la viscosidad en esta ecuación:

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \dots \dots \dots \text{Ley de Newton de la viscosidad}$$

Por lo tanto;

$$-\mu \frac{dv_z}{dx} = \rho g_z$$

14. Reordenando la ecuación anterior:

$$-\mu dv_z = \rho g_z dx$$

Despejando los términos independientes:

$$dv_z = -\frac{\rho g_z dx}{\mu}$$

15. Reintegrando la ecuación:

$$\int dv_z = -\frac{\rho g_z}{\mu} \int dx$$

Obteniendo:

$$v_z = -\frac{\rho g_z}{\mu} \left(\frac{x^2}{2} \right) + c_2 \dots \text{Ecuación 2}$$

16. Sustituyendo la segunda condición límite $C.L. 2 \quad x = \delta \quad v_z = 0$ en la Ecuación 2.

$$0 = -\frac{\rho g_z}{\mu} \left(\frac{\delta^2}{2} \right) + c_2$$

Donde δ significa espesor

Despejando c_2 se obtiene lo siguiente:

$$c_2 = \frac{\rho g_z}{\mu} \left(\frac{\delta^2}{2} \right)$$

17. Sustituyendo c_2 en Ecuación 2:

$$v_z = -\frac{\rho g_z}{\mu} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{\rho g_z}{\mu} \left(\frac{\delta^2}{2} \right)$$

18. Factorizando la ecuación anterior.

$$v_z = \frac{\rho g_z}{2\mu} (\delta^2 - x^2)$$

19. Recordando el razonamiento para un triángulo rectángulo.

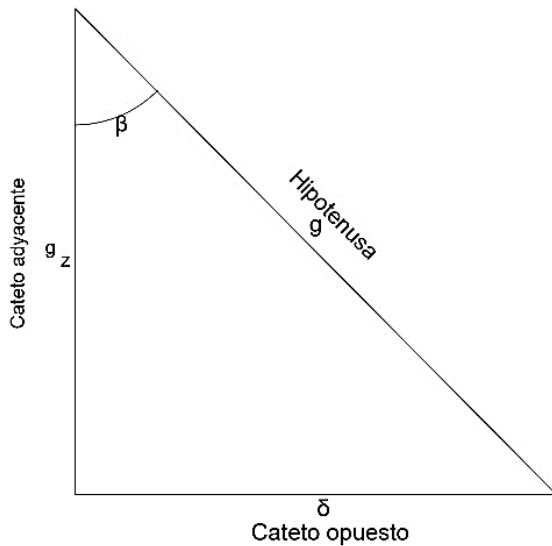


Figura 4. Triángulo rectángulo

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\sin \beta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos \beta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\tan \beta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

Que expresados como el triángulo de la figura 2:

$$\sin \beta = \frac{\delta}{g}$$

$$\cos \beta = \frac{g_z}{g}$$

$$\tan \beta = \frac{\delta}{g_z}$$

Despejando de la función coseno, se obtiene la expresión:

$$g_z = g \cos \beta$$

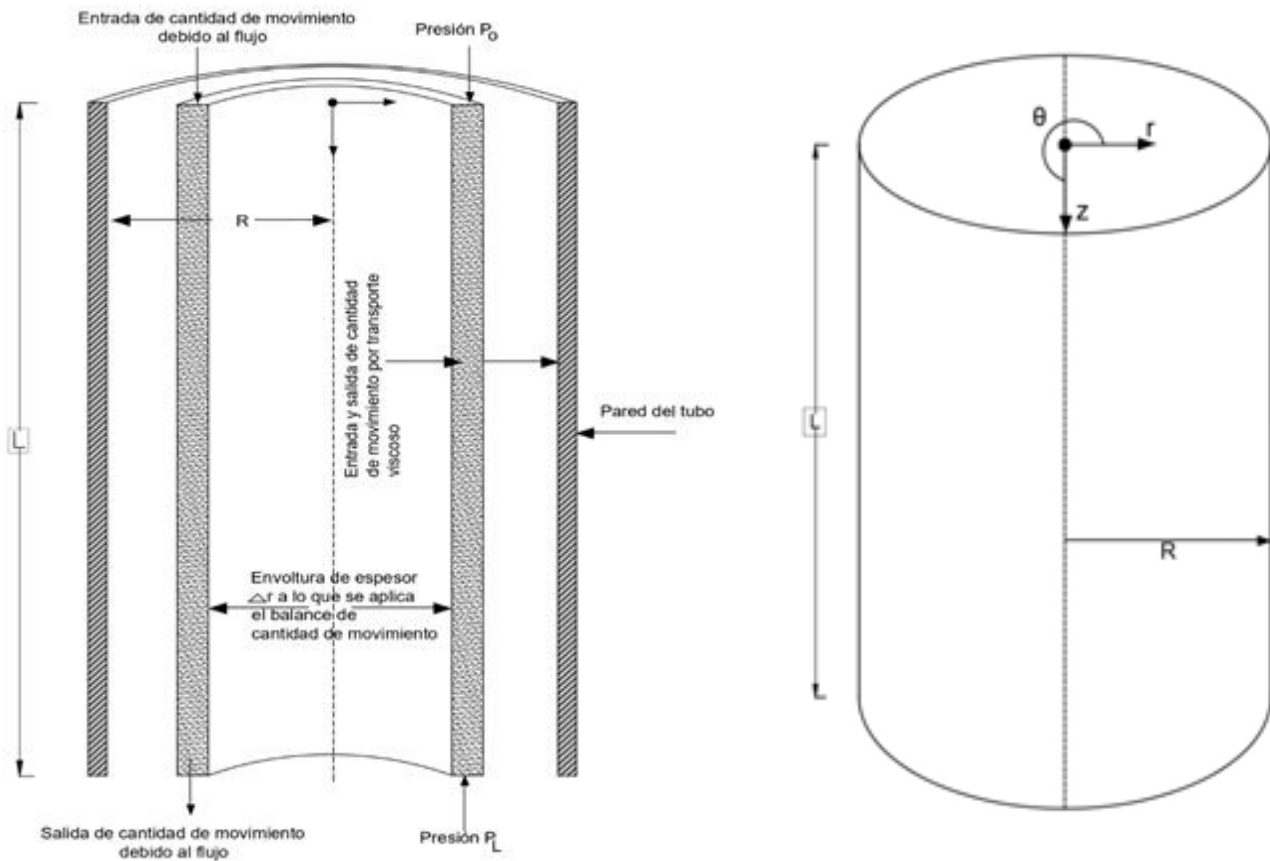
20. Sustituyendo g_z en la ecuación del paso 17, este será el perfil de velocidad.

$$v_z = \frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} (\delta^2 - x^2)$$

Perfil de velocidad

1.3.2.2 FLUJO A TRAVÉS DE UN TUBO CIRCULAR

El fenómeno del flujo de fluidos en tubos circulares es de relevancia en diversos campos como la física, química, biología e ingeniería. Para comprender y analizar el flujo laminar en tubos circulares, se recurre al balance de cantidad de movimiento, proporcionando una base teórica sólida para su estudio detallado.



Figuras 5, 6 y 7. Caracterización de coordenadas cilíndricas y especificaciones para el desarrollo de perfil de velocidad a través de un tubo circular.

1. Planteando el balance general de cantidad de movimiento para coordenadas circulares:

$$\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r} - \tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r+\Delta_r} + v_z^2 \rho w \Delta_x|_{z=0} - v_z^2 \rho w \Delta_x|_{z=0} + (P_0 - P_L)(2\pi r \Delta_r) + \rho g_z(2\pi r \Delta_r L) = 0$$

2. Reduciendo los términos semejantes de velocidad:

$$\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r} - \tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r+\Delta_r} + (P_0 - P_L)(2\pi r \Delta_r) + \rho g_z(2\pi r \Delta_r L) = 0$$

3. Factorizando las constantes: $2\pi L \Delta_r$:

$$\frac{\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r}}{2\pi L \Delta_r} - \frac{\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r+\Delta_r}}{2\pi L \Delta_r} + \frac{(P_0 - P_L)(2\pi r \Delta_r)}{2\pi L \Delta_r} + \frac{\rho g_z(2\pi r \Delta_r L)}{2\pi L \Delta_r} = 0$$

4. Cambiando los signos de los términos de la ecuación:

$$(-1) \left(\frac{\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r}}{2\pi L \Delta_r} - \frac{\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r+\Delta_r}}{2\pi L \Delta_r} + \frac{(P_0 - P_L)(2\pi r \Delta_r)}{2\pi L \Delta_r} + \frac{\rho g_z(2\pi r \Delta_r L)}{2\pi L \Delta_r} \right) = 0$$

5. Reduciendo los términos semejantes:

$$-\frac{r\tau_{rz}|_{r=r}}{\Delta_r} + \frac{r\tau_{rz}|_{r=r+\Delta_r}}{\Delta_r} - \frac{(P_0 - P_L)(r)}{L} - \rho g_z r = 0$$

6. Reordenando la ecuación:

$$\frac{r\tau_{rz}|_{r=r+\Delta_r} - r\tau_{rz}|_{r=r}}{\Delta_r} - \frac{(P_0 - P_L)(r)}{L} - \rho g_z r = 0$$

Despejando los términos $\frac{(P_0 - P_L)(r)}{L}$ y $\rho g_z r$:

$$\frac{r\tau_{rz}|_{r=r+\Delta_r} - r\tau_{rz}|_{r=r}}{\Delta_r} = \rho g_z r + \frac{(P_0 - P_L)(r)}{L}$$

7. Aplicando el límite cuando Δ_r tiende a 0 de la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta_r \rightarrow 0} \frac{r\tau_{rz}|_{r=r+\Delta_r} - r\tau_{rz}|_{r=r}}{\Delta_r} = \lim_{\Delta_r \rightarrow 0} \left(\rho g_z r + \frac{r}{L} (P_0 - P_L) \right)$$

8. Resolviendo el límite:

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = r \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right)$$

9. Reordenando la ecuación anterior:

$$d(r\tau_{rz}) = \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r dr$$

10. Integrando la ecuación:

$$\int d(r\tau_{rz}) = \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \int r dr$$

Por tanto:

$$r\tau_{rz} = \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \frac{r^2}{2} + c_1$$

Despejando al término τ_{rz} :

$$\tau_{rz} = \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \frac{r^2}{2r} + \frac{c_1}{r}$$

Reduciendo la ecuación anterior:

$$\tau_{rz} = \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r} \dots \dots \dots \text{Ecuación 1}$$

Considerando la siguiente condición límite:

$$C.L. 1 \quad r = 0 \quad \tau_{rz} = \infty = 0$$

11. Sustituyendo la primera condición límite $C.L. 1 \quad r = 0 \quad \tau_{rz} = 0$ en la ecuación 1:

$$0 = \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \frac{0}{2} + \frac{c_1}{0}$$

Despejando a c_1 se obtiene que es igual a 0.

12. Sustituyendo el valor de c_1 en la ecuación 1:

$$\tau_{rz} = \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \frac{r}{2} + 0$$

Resultando en:

$$\tau_{rz} = \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \frac{r}{2}$$

13. Usando y sustituyendo la Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \dots \dots \dots \text{Ley de Newton de la viscosidad}$$

Por lo tanto:

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \frac{r}{2}$$

14. Separando los términos independientes de la ecuación anterior.

$$-\mu dv_z = \left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) \frac{r}{2} dr$$

Despejando a dv_z

$$dv_z = -\frac{\left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L}\right)}{2\mu} r dr$$

15. Reintegrando la ecuación.

$$\int dv_z = -\frac{\left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L}\right)}{2\mu} \int r dr$$

Obteniendo:

$$v_z = -\frac{\left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L}\right)}{2\mu} \left(\frac{r^2}{2}\right) + c_2 \dots \text{Ecuación 2}$$

16. Considerando y sustituyendo la segunda condición límite C. L. 2 $r = R$ $v_z = 0$ en la Ecuación 2:

$$0 = -\frac{\left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L}\right)}{2\mu} \left(\frac{R^2}{2}\right) + c_2$$

Reordenando:

$$0 = -\frac{\left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L}\right)}{4\mu} (R^2) + c_2$$

Despejando c_2 :

$$c_2 = \frac{\left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L}\right)}{4\mu} (R^2)$$

17. Sustituyendo c_2 en Ecuación 2, queda así:

$$v_z = -\frac{\left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L}\right)}{4\mu} (r^2) + \frac{\left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L}\right)}{4\mu} (R^2)$$

18. Factorizando la ecuación anterior.

$$v_z = \frac{\left(\rho g_z + \frac{P_0 - P_L}{L}\right)}{4\mu} (R^2 - r^2)$$

Esta expresión representa el perfil de velocidad en función de las presiones del sistema, para poder referirla en función de las presiones debidas a la gravedad nos apoyamos de la ecuación dada en el paso 19.

19. Utilizando la siguiente expresión:

$$\varphi = P + \rho gh$$

φ representa el efecto combinado de la presión estática y la fuerza de gravitación.

Cambiando la nomenclatura de h (altura) por la letra L de longitud:

$$\varphi = P + \rho gL$$

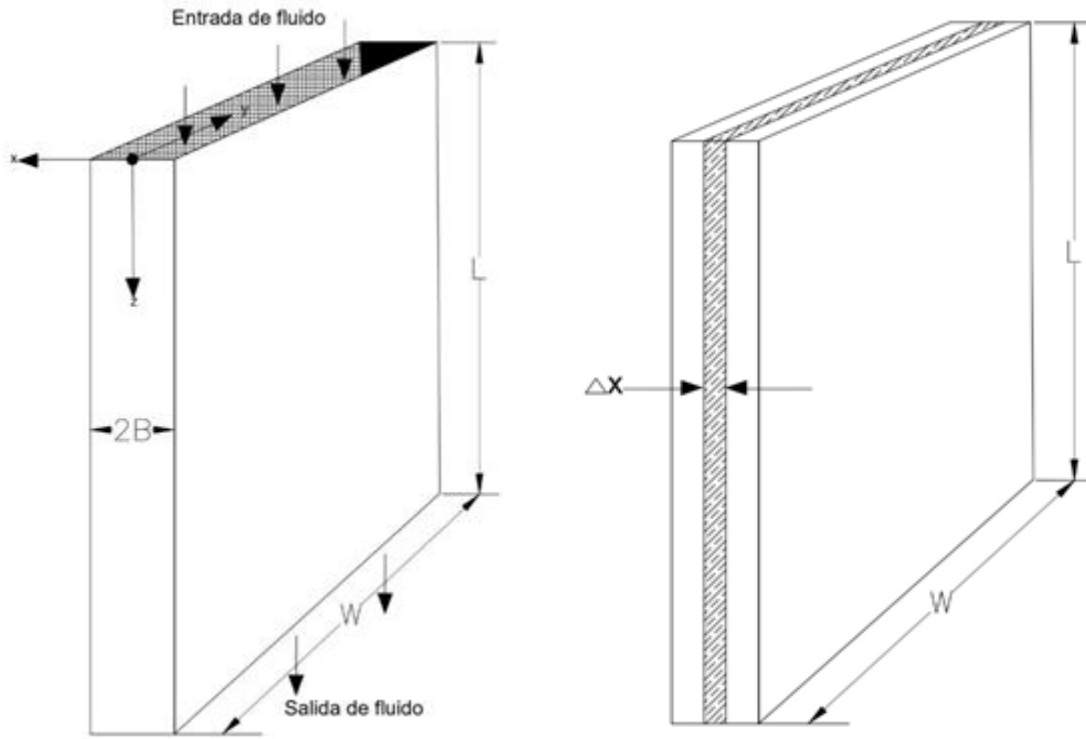
20. Sustituyendo esta expresión en la ecuación del paso número 17, resultando en:

$$v_z = \frac{\varphi_0 - \varphi_L}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

Perfil de velocidad para un tubo circular

1.3.2.3 FLUJO LAMINAR EN UNA RENDIJA ESTRECHA

En el caso de un fluido viscoso que fluye con un patrón laminar a través de una rendija formada por dos paredes planas separadas por una distancia de $2B$, podemos realizar un balance diferencial de cantidad de movimiento para obtener expresiones para las distribuciones de densidad de flujo de cantidad de movimiento y velocidad.



Figuras 8 y 9. Caracterización de las variables para el desarrollo del perfil de velocidad.

1. Planteando el balance general de cantidad de movimiento:

$$\tau_{xz}(Lw)|_{x=x} - \tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta x} + v_z^2 \rho w \Delta x|_{z=0} - v_z^2 \rho w \Delta x|_{z=L} + P_0(w \Delta x) - P_L(w \Delta x) + \rho L w \Delta x g = 0$$

2. Eliminando los términos semejantes de velocidad:

$$\tau_{xz}(Lw)|_{x=x} - \tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta x} + (P_0 - P_L)(w \Delta x) + \rho L w \Delta x g = 0$$

3. Factorizando las constantes $Lw\Delta x$:

$$\frac{\tau_{xz}(Lw)|_{x=x}}{Lw\Delta x} - \frac{\tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta x}}{Lw\Delta x} + \frac{(P_0 - P_L)(w \Delta x)}{Lw\Delta x} + \frac{\rho L w \Delta x g}{Lw\Delta x} = 0$$

4. Cambiando los signos de los términos de la ecuación anterior:

$$(-1) \left(\frac{\tau_{xz}(Lw)|_{x=x}}{Lw\Delta x} - \frac{\tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta x}}{Lw\Delta x} + \frac{(P_0 - P_L)(w \Delta x)}{Lw\Delta x} + \frac{\rho L w \Delta x g}{Lw\Delta x} \right) = 0$$

5. Reduciendo los términos semejantes:

$$-\frac{\tau_{xz}|_{x=x}}{\Delta_x} + \frac{\tau_{xz}|_{x=x+\Delta_x}}{\Delta_x} - \frac{(P_0 - P_L)}{L} - \rho g = 0$$

6. Reordenando la ecuación:

$$\frac{\tau_{xz}|_{x=x+\Delta_x} - \tau_{xz}|_{x=x}}{\Delta_x} - \frac{(P_0 - P_L)}{L} - \rho g = 0$$

Despejando los términos de $\frac{(P_0 - P_L)}{L}$ y ρg :

$$\frac{\tau_{xz}|_{x=x+\Delta_x} - \tau_{xz}|_{x=x}}{\Delta_x} = \rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L}$$

7. Aplicando el límite cuando Δ_x tiende a 0 de la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{\tau_{xz}|_{x=x+\Delta_x} - \tau_{xz}|_{x=x}}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \rho g + \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{(P_0 - P_L)}{L}$$

8. Resolviendo el límite:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L}$$

9. Reordenando la ecuación anterior:

$$d\tau_{xz} = \left(\rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L} \right) dx$$

10. Integrando la ecuación anterior:

$$\int d(\tau_{xz}) = \left(\rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L} \right) \int dx$$

Una vez integrada:

$$\tau_{xz} = \left(\rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L} \right) x + c_1$$

11. Usando y sustituyendo la Ley de Newton de viscosidad en esta ecuación:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \dots \dots \dots \text{Ley de Newton de la viscosidad}$$

Por lo tanto:

$$-\mu \frac{dv_z}{dx} = \left(\rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L} \right) x + c_1$$

12. Reordenando la ecuación anterior:

$$-\mu dv_z = \left(\rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L} \right) x + c_1 dx$$

Despejando a dv_z :

$$dv_z = - \left(\frac{\rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L}}{\mu} \right) x - \frac{c_1}{\mu} dx$$

13. Reintegrando esta ecuación.

$$\int dv_z = - \left(\frac{\rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L}}{\mu} \right) \int x dx - \frac{c_1}{\mu} \int dx$$

Una vez integrada:

$$v_z = - \left(\frac{\rho g + \frac{(P_0 - P_L)}{L}}{\mu} \right) \left(\frac{x^2}{2} \right) - \frac{c_1 x}{\mu} + c_2$$

Simplificando esta ecuación:

$$v_z = - \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) x^2 - \frac{c_1 x}{\mu} + c_2 \dots \text{Ecuación 1}$$

14. Se tienen las siguientes condiciones límite, las cuales se van a sustituir en la ecuación anterior obteniendo dos ecuaciones nuevas:

$$C.L. 1 \ x = B \quad v_z = 0 \dots \dots \dots y \dots \dots \dots C.L. 2 \ x = -B \quad v_z = 0$$

Sustituyendo la primera condición límite y la segunda condición límite:

$$0 = - \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) (B^2) - \frac{c_1(B)}{\mu} + c_2 \dots \text{Ecuación 2}$$

$$0 = - \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) (-B^2) - \frac{c_1(-B)}{\mu} + c_2 \dots \text{Ecuación 3}$$

15. Restando las ecuaciones 2 y 3:

$$(-1) \left(0 = - \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) (B^2) - \frac{c_1(B)}{\mu} + c_2 \right) + \left(0 = - \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) (-B^2) - \frac{c_1(-B)}{\mu} + c_2 \right)$$

Despejando a c_1 :

$$c_1 = 0$$

16. Sustituyendo a c_1 en la ecuación 3:

$$0 = - \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) (-B^2) - \frac{(0)(-B)}{\mu} + c_2$$

Resultando en:

$$0 = - \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) (-B^2) + c_2$$

17. Despejando a c_2 de la ecuación anterior obteniendo lo siguiente:

$$c_2 = \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) (B^2)$$

18. Sustituyendo c_2 en la ecuación 1, para obtener el perfil de velocidad.

$$v_z = - \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) x^2 + \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) B^2$$

Simplificando la ecuación para obtener el perfil de velocidad en función de las presiones:

$$v_z = \left(\frac{\rho g L + P_0 - P_L}{2\mu L} \right) (B^2 - x^2) \dots \dots \dots \text{Perfil de velocidad}$$

Esta expresión representa el perfil de velocidad en función de las presiones del sistema, para poder referirla en función de las presiones debidas a la gravedad nos apoyamos de la ecuación dada en el paso 19.

19. Usando la siguiente expresión:

$$\varphi = P + \rho g h$$

φ representa el efecto combinado de la presión estática y la fuerza de gravitación.

Cambiando la nomenclatura de h (altura) por la letra L de longitud:

$$\varphi = P + \rho g L \dots \text{Ecuación 4}$$

Se tienen las siguientes condiciones:

$$P_0 = 0 \therefore L = 0 \dots \dots \dots y \dots \dots \dots P_L = L \therefore L = -L$$

Se usa el signo negativo a la L ya que el fluido recorre de arriba hacia abajo.

20. Sustituyendo ambas condiciones en la Ecuación 4. Se obtienen las siguientes expresiones:

$$\varphi_0 = P_0 + \rho g(0) \dots \dots \dots y \dots \dots \dots \varphi_L = P_L + \rho g(-L)$$

21. De estas dos expresiones se despeja a P_0 y a P_L . Resultando en:

$$P_0 = \varphi_0 \dots \dots \dots y \dots \dots \dots P_L = \varphi_L + \rho g L$$

22. Sustituyendo estas últimas expresiones de P_0 y P_L en el perfil de velocidad:

$$v_z = \left(\frac{\rho g L + (\varphi_0) - (\varphi_L + \rho g L)}{2\mu L} \right) (B^2 - x^2)$$

Realizando las operaciones faltantes:

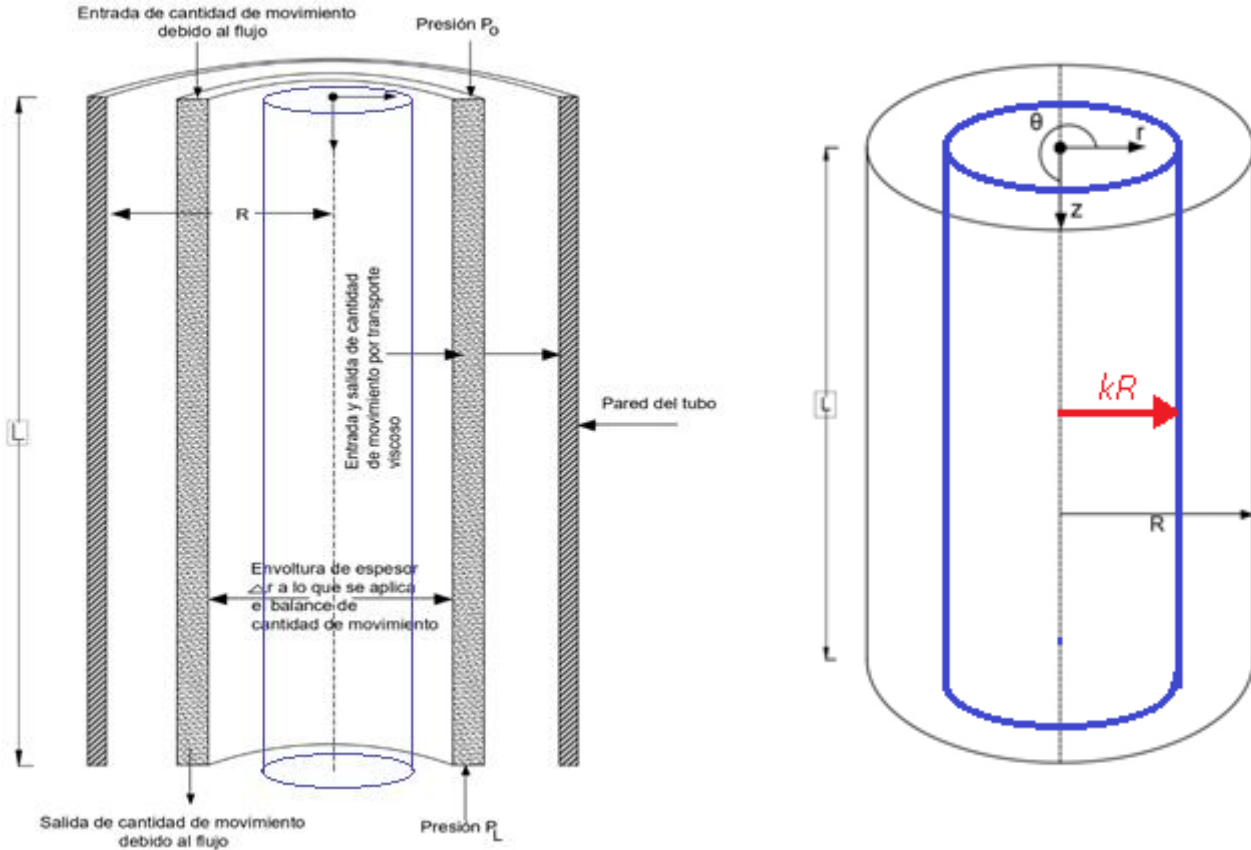
$$v_z = \left(\frac{\rho g L + \varphi_0 - \varphi_L - \rho g L}{2\mu L} \right) (B^2 - x^2)$$

Comprimiendo la ecuación anterior se reducen los términos de $\rho g L$ puesto que son términos semejantes con signos opuestos y finalmente el perfil de velocidad es:

$$v_z = \left(\frac{\varphi_0 - \varphi_L}{2\mu L} \right) (B^2 - x^2)$$

1.3.2.4 FLUJO A TRAVÉS DE UNA SELECCIÓN DE CORONA CIRCULAR

En el escenario descrito, donde un fluido incompresible fluye en estado estacionario entre dos cilindros circulares coaxiales de radios KR y R , y el fluido se mueve en contra de la gravedad, realizaremos un análisis para entender este flujo particular.



Figuras 9 y 10. Caracterización de coordenadas cilíndricas y especificaciones para el desarrollo de perfil de velocidad a través de un tubo circular.

1. Planteando el balance general de cantidad de movimiento para coordenadas circulares:

$$\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r} - \tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r+\Delta_r} + v_z^2 \rho w \Delta_x|_{z=0} - v_z^2 \rho w \Delta_x|_{z=L} + P_0(2\pi r \Delta_r) - P_L(2\pi r \Delta_r) - \rho g_z(2\pi r \Delta_r L) = 0$$

2. Reduciendo los términos semejantes con signo contrario de velocidad:

$$\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r} - \tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r+\Delta_r} + (P_0 - P_L)(2\pi r \Delta_r) - \rho g_z(2\pi r \Delta_r L) = 0$$

3. Factorizando las constantes $2\pi L\Delta_r$:

$$\frac{\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r}}{2\pi L\Delta_r} - \frac{\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r+\Delta_r}}{2\pi L\Delta_r} + \frac{P_0(2\pi r\Delta_r)}{2\pi L\Delta_r} - \frac{P_L(2\pi r\Delta_r)}{2\pi L\Delta_r} - \frac{\rho g_z(2\pi r\Delta_r L)}{2\pi L\Delta_r} = 0$$

4. Cambiando los signos de los términos de la ecuación:

$$(-1) \left(\frac{\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r}}{2\pi L\Delta_r} - \frac{\tau_{rz}(2\pi rL)|_{r=r+\Delta_r}}{2\pi L\Delta_r} + \frac{(P_0 - P_L)(2\pi r\Delta_r)}{2\pi L\Delta_r} - \frac{\rho g_z(2\pi r\Delta_r L)}{2\pi L\Delta_r} \right) = 0$$

5. Reduciendo los términos semejantes:

$$-\frac{r\tau_{rz}|_{r=r}}{\Delta_r} + \frac{r\tau_{rz}|_{r=r+\Delta_r}}{\Delta_r} - \frac{(P_0 - P_L)(r)}{L} + \rho g_z r = 0$$

6. Reordenando la ecuación:

$$\frac{r\tau_{rz}|_{r=r+\Delta_r} - r\tau_{rz}|_{r=r}}{\Delta_r} - \frac{(P_0 - P_L)(r)}{L} + \rho g_z r = 0$$

Despejando los términos de $\frac{(P_0 - P_L)(r)}{L}$ y $\rho g_z r$:

$$\frac{r\tau_{rz}|_{r=r+\Delta_r} - r\tau_{rz}|_{r=r}}{\Delta_r} = \frac{(P_0 - P_L)(r)}{L} - \rho g_z r$$

7. Aplicar el límite cuando Δ_r tiende a 0 de la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta_r \rightarrow 0} \frac{r\tau_{rz}|_{r=r+\Delta_r} - r\tau_{rz}|_{r=r}}{\Delta_r} = \lim_{\Delta_r \rightarrow 0} \frac{(P_0 - P_L)(r)}{L} - \lim_{\Delta_r \rightarrow 0} \rho g_z r$$

8. Resolviendo el límite queda lo siguiente:

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \frac{(P_0 - P_L)(r)}{L} - \rho g_z r$$

9. Reordenando la ecuación anterior:

$$d(r\tau_{rz}) = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g_z \right] r dr$$

10. Integrando esta ecuación:

$$\int d(r\tau_{rz}) = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g_z \right] \int r dr$$

Obteniendo:

$$r\tau_{rz} = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g_z \right] \frac{r^2}{2} + c_1$$

Despejando al término τ_{rz} :

$$\tau_{rz} = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g_z \right] \frac{r^2}{2r} + \frac{c_1}{r}$$

Reduciendo la ecuación anterior y nos queda lo siguiente:

$$\tau_{rz} = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g_z \right] \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}$$

11. De la ecuación anterior se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\left(\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g_z \right) = w$$

12. Por lo tanto, la ecuación se reduce a:

$$\tau_{rz} = \frac{wr}{2} + \frac{c_1}{r}$$

13. Usando y sustituyendo la Ley de Newton de viscosidad en esta ecuación:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \dots \dots \dots \text{Ley de Newton de la viscosidad}$$

Por lo tanto:

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \frac{wr}{2} + \frac{c_1}{r}$$

14. Reordenando la ecuación anterior:

$$-\mu dv_z = \frac{wr}{2} dr + \frac{c_1}{r} dr$$

Despejando al término dv_z

$$dv_z = -\frac{wr}{2\mu} dr - \frac{c_1}{\mu r} dr$$

15. Reintegrando esta ecuación:

$$\int dv_z = -\frac{w}{2\mu} \int r dr - \frac{c_1}{\mu} \int \frac{1}{r} dr$$

Una vez integrada:

$$v_z = -\frac{w}{2\mu} \left(\frac{r^2}{2} \right) - \frac{c_1}{\mu} (\ln r) + c_2$$

16. Aplicando el álgebra correspondiente, se obtiene la ecuación general:

$$v_z = -\frac{wr^2}{4\mu} - \frac{c_1 \ln|r|}{\mu} + c_2 \dots \dots \dots \text{Ecuación general}$$

Se tienen las siguientes condiciones límite:

$$C.L. 1 \ r = kR; \ v_z = 0 \qquad C.L. 2 \ r = R; \ v_z = 0$$

17. Sustituyendo ambas condiciones límite en la ecuación general:

$$\text{Con } C.L. 1 \ r = kR; \ v_z = 0$$

$$\text{Se obtiene: } 0 = -\frac{w(kR)^2}{4\mu} - \frac{c_1 \ln|kR|}{\mu} + c_2 \dots \dots \dots \text{Ecuación 1}$$

$$\text{Con } C.L. 2 \ r = R; \ v_z = 0$$

$$\text{Se obtiene: } 0 = -\frac{w(R)^2}{4\mu} - \frac{c_1 \ln|R|}{\mu} + c_2 \dots \dots \dots \text{Ecuación 2}$$

18. Restando ambas ecuaciones para obtener un sistema de ecuaciones:

$$0 = -\frac{w(kR)^2}{4\mu} - \frac{c_1 \ln|kR|}{\mu} + c_2$$

$$0 = \frac{w(R)^2}{4\mu} + \frac{c_1 \ln|R|}{\mu} - c_2$$

19. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene lo siguiente:

$$0 = \frac{wR^2}{4\mu} (1 - k^2) + \frac{c_1}{\mu} (\ln|R| - \ln|kR|)$$

Utilizando la ley de los logaritmos:

$$0 = \frac{wR^2}{4\mu} (1 - k^2) + \frac{c_1}{\mu} \left(\frac{\ln|R|}{\ln|kR|} \right)$$

Desarrollando el álgebra se observa que se pueden reducir los términos R en los logaritmos:

$$0 = \frac{wR^2}{4\mu}(1 - k^2) + \frac{c_1}{\mu} \left(\ln \left| \frac{1}{k} \right| \right)$$

20. Despejando a c_1 de la ecuación anterior.

$$-\frac{wR^2}{4\mu}(1 - k^2) = \frac{c_1}{\mu} \left(\ln \left| \frac{1}{k} \right| \right)$$

$$c_1 = \frac{\left(-\frac{wR^2}{4\mu}(1 - k^2) \right) \mu}{\left(\ln \left| \frac{1}{k} \right| \right)}$$

Aplicando el álgebra correspondiente, se obtiene:

$$c_1 = \frac{-wR^2(1 - k^2)}{4 \ln \left| \frac{1}{k} \right|}$$

21. Sustituyendo a c_1 en la ecuación 2:

$$0 = -\frac{wR^2}{4\mu} - \frac{\left(\frac{-wR^2(1 - k^2)}{4 \ln \left| \frac{1}{k} \right|} \right) \ln |R|}{\mu} + c_2$$

22.: Despejando a c_2 de esta ecuación:

$$-c_2 = -\frac{wR^2}{4\mu} - \frac{(-wR^2(1 - k^2)) \ln |R|}{4\mu \left(\ln \left| \frac{1}{k} \right| \right)}$$

Teniendo un término común en la ecuación anterior que es $-\frac{wR^2}{4\mu}$ por lo tanto factorizando:

$$-c_2 = -\frac{wR^2}{4\mu} \left[\frac{-1 + (1 - k^2) \ln |R|}{\ln \left| \frac{1}{k} \right|} \right]$$

Resultando en:

$$c_2 = \frac{wR^2}{4\mu} \left[1 - (1 - k^2) \frac{\ln |R|}{\ln \left| \frac{1}{k} \right|} \right]$$

23. Sustituyendo las ecuaciones 1 y 2 en la ecuación general.

$$v_z = -\frac{wr^2}{4\mu} - \left[\left(\frac{-wR^2(1 - k^2)}{4 \ln \left| \frac{1}{k} \right|} \right) \left(\frac{\ln |r|}{\mu} \right) \right] + \left[\frac{wR^2}{4\mu} \left(1 - (1 - k^2) \frac{\ln |R|}{\ln \left| \frac{1}{k} \right|} \right) \right]$$

Reduciendo términos semejantes y aplicando el álgebra correspondiente:

$$v_z = \frac{w}{4\mu} \left[(-r^2 + R^2(1 - k^2)) \left(\frac{\ln|r|}{\ln\left|\frac{1}{k}\right|} \right) + R^2 - R^2(1 - k^2) \left(\frac{\ln|R|}{\ln\left|\frac{1}{k}\right|} \right) \right]$$

$$v_z = \frac{w}{4\mu} \left[\left(R^2 - r^2 + R^2 \frac{(1 - k^2)}{\ln\left|\frac{1}{k}\right|} (\ln|r| - \ln|R|) \right) \right]$$

$$v_z = \frac{w}{4\mu} \left[\left(R^2 - r^2 + R^2 \frac{(1 - k^2)}{\ln\left|\frac{1}{k}\right|} \left(\ln\left|\frac{r}{R}\right| \right) \right) \right]$$

$$v_z = \frac{wR^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{(1 - k^2)}{\ln\left|\frac{1}{k}\right|} \left(\ln\left|\frac{r}{R}\right| \right) \right)$$

24. Sustituyendo el cambio de variable de w, $w = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g_z \right)$:

$$v_z = \frac{P_0 - P_L - \rho g_z R^2}{4\mu L} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{(1 - k^2)}{\ln\left|\frac{1}{k}\right|} \left(\ln\left|\frac{r}{R}\right| \right) \right) \dots \text{Perfil de velocidad}$$

25. Recordando la siguiente expresión:

$$\varphi = P + \rho gh$$

Cambiando la nomenclatura de h (altura) por la letra L de longitud:

$$\varphi = P + \rho gL$$

Se tienen las siguientes condiciones:

$$P_0 = 0 \therefore L = 0 \dots \dots \dots y \dots \dots \dots P_L = L \therefore L = L$$

En este caso, el signo de L es positivo debido a que el fluido va de abajo hacia arriba.

26. Sustituyendo ambas condiciones en la expresión introducida en el paso 25.

Se obtienen las siguientes expresiones:

$$\varphi_0 = P_0 + \rho g(0) \dots \dots \dots y \dots \dots \dots \varphi_L = P_L + \rho g(L)$$

27. Despejando a P_0 y a P_L de las expresiones anteriores:

$$P_0 = \varphi_0 \dots \dots \dots y \dots \dots \dots P_L = \varphi_L - \rho gL$$

28. Sustituyendo estas últimas expresiones de P_0 y P_L en el perfil de velocidad obtenido en el paso 24:

$$v_z = \frac{\varphi_0 - (\varphi_L - \rho gL) - \rho g_z L(R^2)}{4\mu L} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{(1 - k^2)}{\ln\left|\frac{1}{k}\right|} \left(\ln\left|\frac{r}{R}\right| \right) \right)$$

Con el álgebra correspondiente:

$$v_z = \frac{\varphi_0 - \varphi_L + \rho g L - \rho g_z L(R^2)}{4\mu L} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{(1 - k^2)}{\ln \left|\frac{1}{k}\right|} \left(\ln \left|\frac{r}{R}\right|\right) \right)$$

Resolviendo la ecuación anterior se anulan los términos de ρg puesto que eran términos semejantes de signo opuesto:

$$v_z = \frac{\varphi_0 - \varphi_L(R^2)}{4\mu L} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{(1 - k^2)}{\ln \left|\frac{1}{k}\right|} \left(\ln \left|\frac{r}{R}\right|\right) \right)$$

Perfil de velocidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.3.2.5 FLUJO EN UNA PELÍCULA ASCENDENTE

Considere una superficie plana inclinada semejante a la de la figura, suponer que la viscosidad y densidad del fluido son constantes y se razona una región de longitud L , suficientemente alejada de los extremos de la pared, de forma que las perturbaciones en la entrada y en la salida no están incluidas en L ; es decir, que en esta región el componente v_z de la velocidad es independiente de z . Determine el perfil de velocidad.

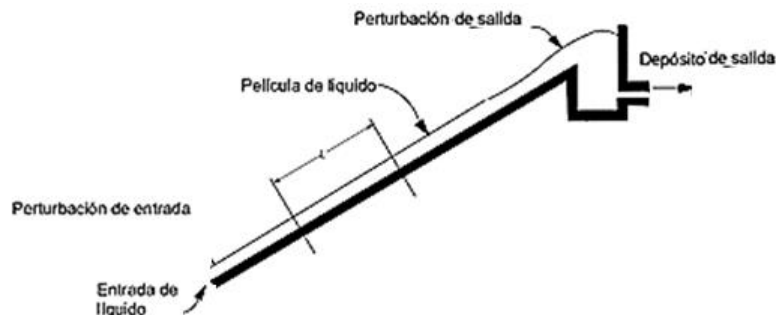


Figura. Fenómeno físico completo y delimitación del espacio/volumen de control

1.3.2.6 FLUJO LAMINAR EN UNA RENDIJA ESTRECHA

En el caso de un fluido viscoso que fluye con un patrón laminar ascendente a través de una rendija formada por dos paredes planas separadas por una distancia de $2B$, podemos realizar un balance diferencial de cantidad de movimiento para obtener expresiones para las distribuciones de densidad de flujo de cantidad de movimiento y velocidad.

1.3.3 ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA SISTEMAS NO ISOTÉRMICOS

Se presenta la ley de conservación de la energía para un fluido puro que fluye a través de un elemento de volumen estacionario. Este principio, conocido como el primer principio termodinámico para un sistema abierto no estacionario, se formula para un instante específico.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de acumulación} \\ \text{de energía cinética} \\ \text{e interna} \end{array} \right) \\
 = & \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de entrada} \\ \text{de energía cinética} \\ \text{e interna por} \\ \text{convección} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de salida} \\ \text{de energía cinética} \\ \text{e interna} \\ \text{por convección} \end{array} \right) \\
 + & \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad neta de adición} \\ \text{de calor por} \\ \text{conducción} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad neta de} \\ \text{trabajo por sistema} \\ \text{a alrededores} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Este es el primer principio termodinámico expresado para un sistema abierto no estacionario. Es importante notar que esta exposición inicial del primer principio no es exhaustiva, ya que no abarca otras formas de energía y transporte, como la nuclear radioactiva y electromagnética.

Se tiene entonces un desglose de componentes de energía:

- **ENERGÍA CINÉTICA:** Relacionada con el movimiento observable del fluido, la energía cinética del sistema es esencial para comprender la dinámica del flujo.
- **ENERGÍA INTERNA:** Esta forma de energía se deriva de los movimientos fortuitos de traslación e internos de las moléculas, así como de la interacción entre ellas. La energía interna, vinculada a la temperatura local y la densidad del fluido, constituye un componente crucial en la descripción de la energía en el sistema.
- **ENERGÍA POTENCIAL:** Aunque no se menciona explícitamente, la energía potencial del fluido no se incluye en el término de trabajo en esta formulación. Este componente, asociado con la altura relativa del fluido, podría ser relevante en contextos específicos.

Se proporcionan las siguientes ecuaciones de variación para los diferentes componentes de energía. La elección de la ecuación de variación se determina según la dirección en la que se mueve el fluido. Esta consideración direccional guía la selección del componente correspondiente, proporcionando así la ecuación adecuada para el desarrollo del ejercicio.

- Componente r^a :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned}$$

- Componente θ^b :

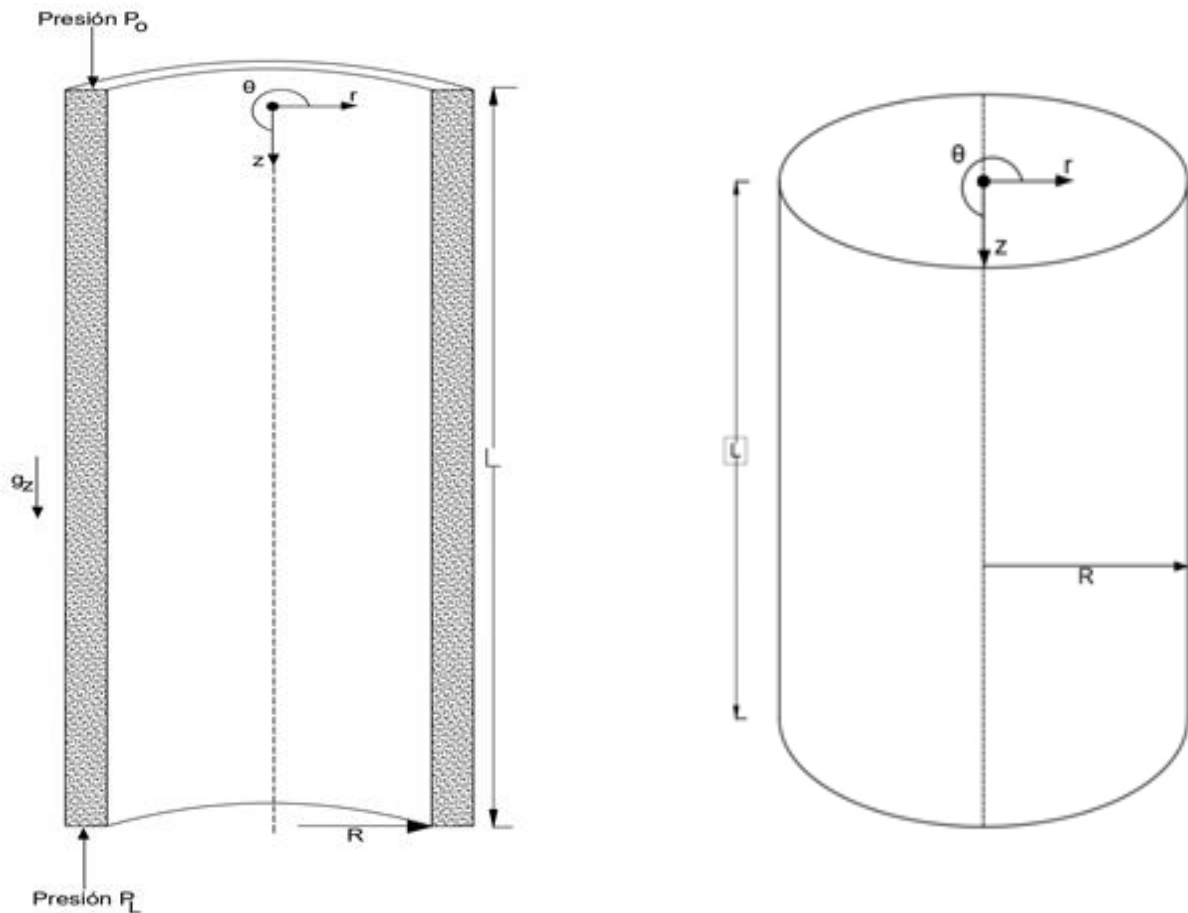
$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \end{aligned}$$

- Componente z :

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

1.3.3.1 FLUJO A TRAVÉS DE UN TUBO CIRCULAR HUECO.

En el escenario descrito, donde un fluido incompresible fluye a través de un tubo circular de arriba hacia abajo, con una presión P_0 a favor del movimiento y una presión P_L que se opone al movimiento, y el sistema está a temperatura y presión constantes, se analizará este flujo.



Figuras. Caracterización de coordenadas cilíndricas y especificaciones para el desarrollo de perfil de velocidad a través de un tubo circular.

Antes de iniciar, se debe identificar la dirección del flujo; en este caso se sabe que cae y su dirección es en el sentido de Z .

1. Ya que el fluido se mueve sobre el eje Z , se iguala a cero la velocidad de los componentes con direcciones r y θ .

En este caso, se toman por condiciones: $v_z \neq 0$; $v_r = 0$; $v_\theta = 0$

Por tanto:

$$\text{Si } v_r = 0 \therefore \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0$$

$$\text{Si } v_\theta = 0 \therefore \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$$\text{Si } v_z \neq 0 \therefore \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \neq 0; \frac{\partial P}{\partial r} \neq 0; g_z \neq 0$$

2. Anulando las derivadas que se igualaron a cero en las ecuaciones para cada componente.

○ Componente r^a :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned}$$

• Componente θ^b :

$$\begin{aligned} \rho \left(\cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial t}} + v_r \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r} \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{v_r v_\theta}{r}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial z}} \right) \\ = -\cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}} + \mu \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right)} + \frac{1}{r^2} \cancel{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}} - \frac{2}{r^2} \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}} \right] + \cancel{\rho g_\theta} \end{aligned}$$

• Componente z :

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_r \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r} \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}} \right] + \rho g_z$$

3. Agrupando y reordenando las variables del componente z que no se cancelaron, además de igualarlas a cero, ya que se está realizando el balance de momentum:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \rho g_z \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \rho g_z \end{aligned}$$

4. Separando los términos constantes (P y z):

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right]$$

Realizando un cambio de variable donde: $u = \frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z$

$$u = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{d \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)}{dr} \right]$$

5. Separando los términos independientes:

$$u * r * dr = \mu * d \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

6. Integrando la ecuación anterior:

$$u \int r dr = \mu \int d \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

Obteniendo:

$$(u) \frac{r^2}{2} = \mu r \frac{dv_z}{dr} + c_1$$

7. Aplicando las siguientes condiciones límite:

$$C.L.1 \ r = R; \ v_z = 0 \dots\dots y \dots\dots C.L.2 \ r = 0; \ v_z = max.; \therefore \tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} = 0$$

8. Sustituyendo la $C.L.2 \ r = 0; \ v_z = max.; \therefore \tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} = 0$ en la ecuación obtenida en el paso 6, y posteriormente se despeja a c_1

$$(u) \frac{0^2}{2} = \mu(0) + c_1$$

Resolviendo para c_1 :

$$c_1 = 0$$

9. Sustituyendo a c_1 en la ecuación del paso 6:

$$(u) \frac{r^2}{2} = \mu r \frac{dv_z}{dr} + 0$$

10. Separando los términos independientes de la ecuación anterior:

$$(u) \frac{r^2}{2r} dr = \mu dv_z$$

11. Integrando la ecuación:

$$(u) \int \frac{r}{2} dr = \mu \int dv_z$$

$$(u) \frac{r^2}{4} = \mu v_z + c_2 \dots \text{Ecuación general}$$

12. Sustituyendo la $C.L.1 \ r = R; \ v_z = 0$ en la ecuación del paso 11, y posteriormente se despeja a c_2 :

$$(u) \frac{R^2}{4} = \mu(0) + c_2$$

Despejando:

$$c_2 = (u) \frac{R^2}{4}$$

13. Sustituyendo a c_2 en la ecuación general.

$$(u) \frac{r^2}{4} = \mu v_z + (u) \frac{R^2}{4}$$

14. Despejando al término v_z

$$(u) \frac{r^2}{4} - (u) \frac{R^2}{4} = \mu v_z$$

Factorizando:

$$\frac{(u)}{4} (r^2 - R^2) = \mu v_z$$

$$v_z = \frac{(u)}{4\mu} (r^2 - R^2)$$

15. Sustituyendo el cambio de variable inicial:

$$v_z = \frac{\frac{dP}{dz} - \rho g_z}{4\mu} (r^2 - R^2)$$

16. Considerando como variables a P y Z, también a μ , R, r y v_z como constantes:

$$\frac{v_z 4\mu}{(r^2 - R^2)} + \rho g_z = \frac{dP}{dz}$$

Considerando como cambio de variable: $M = \frac{v_z 4\mu}{(r^2 - R^2)} + \rho g_z$

La expresión se reduce a:

$$M = \frac{dP}{dz}$$

17. Despejando las variables independientes:

$$M dz = dP$$

18. Integrando la ecuación:

$$M \int_0^L dz = \int_{P_0}^{P_L} dP$$

19. Resolviendo la integral definida:

$$M[z]_0^L = [P]_{P_0}^{P_L}$$

Resultando en:

$$M[L - 0] = P_L - P_0$$

20. Introduciendo de nuevo el valor M del cambio de variable del paso 16:

$$\frac{v_z 4\mu L}{(r^2 - R^2)} + \rho g_z = P_L - P_0$$

21. Despejando al término v_z de esta ecuación.

$$\frac{v_z 4\mu L}{(r^2 - R^2)} = P_L - P_0 - \rho g_z$$

$$v_z 4\mu L = (P_L - P_0 - \rho g_z)(r^2 - R^2)$$

$$v_z = \left(\frac{P_L - P_0 - \rho g_z}{4\mu L} \right) (r^2 - R^2) \dots \text{Perfil de velocidad}$$

Este último es el perfil de velocidad debido a las presiones del sistema.

22. Recordando la siguiente expresión:

$$\varphi = P + \rho gh$$

Cambiando la nomenclatura de h (altura) por la letra L de longitud:

$$\varphi = P + \rho gL$$

Utilizando las siguientes condiciones:

$$P_0 = 0 \therefore L = 0 \dots \dots \dots y \dots \dots \dots P_L = L \therefore L = -L$$

El signo negativo para la L ya que el fluido corre de arriba hacia abajo.

23. Sustituyendo ambas condiciones en la expresión que resultó del paso 21.

Se obtienen las siguientes expresiones:

$$\varphi_0 = P_0 + \rho g(0) \dots \dots \dots y \dots \dots \dots \varphi_L = P_L + \rho g(-L)$$

24. De estas dos expresiones se despeja a P_0 y a P_L .

$$P_0 = \varphi_0 \dots \dots \dots y \dots \dots \dots P_L = \varphi_L + \rho gL$$

25. Sustituyendo estas últimas expresiones de P_0 y P_L en el perfil de velocidad de la ecuación 21, lo cual queda de la siguiente manera:

$$v_z = \left(\frac{\varphi_L + \rho gL - \varphi_0 - \rho gL}{4\mu L} \right) (r^2 - R^2)$$

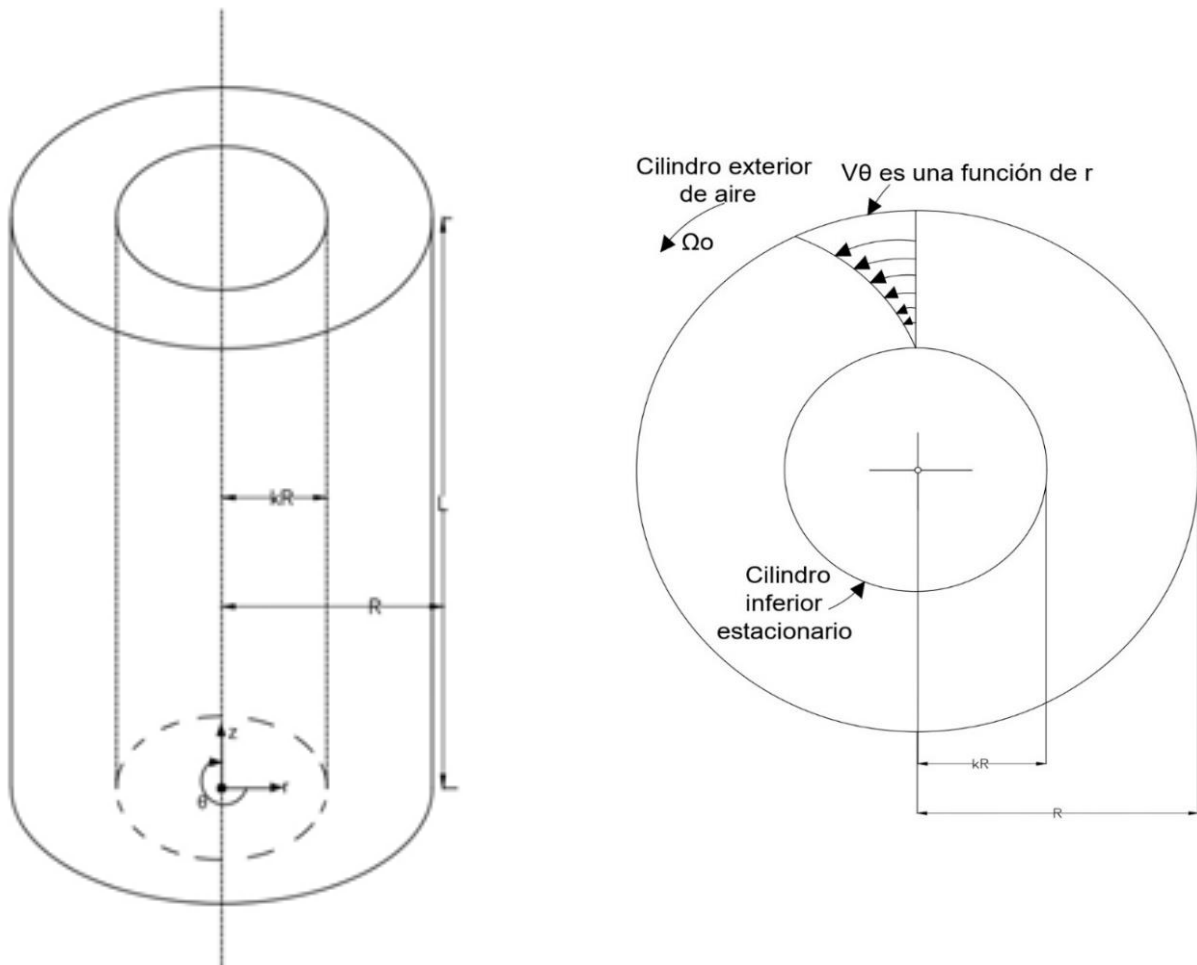
Resolviendo la ecuación anterior se anulan los términos de ρg puesto que son términos semejantes con signos opuestos:

$$v_z = \left(\frac{\varphi_L - \varphi_0}{4\mu L} \right) (r^2 - R^2)$$

Perfil de velocidad

1.3.3.2 FLUJO TANGENCIAL DE UN FLUIDO NEWTONIANO EN TUBOS CONCÉNTRICOS

En el caso descrito, donde se tiene un fluido incompresible en estado laminar que fluye tangencialmente entre dos cilindros verticales coaxiales, con el cilindro exterior girando a una velocidad angular Ω_0 , llevaremos a cabo un análisis para determinar las distribuciones de velocidad y esfuerzo cortante.



Figuras. Caracterización de coordenadas cilíndricas y especificaciones para el desarrollo de perfil de velocidad a través de dos tubos concéntricos.

Antes de iniciar, se debe identificar la dirección del flujo; en este caso se sabe que cae y su dirección es en el sentido de θ .

1. Ya que el fluido se mueve sobre el componente θ , se igualan a cero las velocidades sobre las direcciones r y z .

$$v_z = 0; v_r = 0; v_\theta \neq 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } v_r = 0; \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \\
\text{Si } v_z = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \\
\text{Si } v_\theta \neq 0; \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \neq 0 \\
v_\theta = f(r); \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0; \quad g_\theta = 0
\end{aligned}$$

2. Se cancelan las derivadas que se igualaron a cero en las ecuaciones para cada componente.

• Componente r^a :

$$\begin{aligned}
\rho \left(\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + v_r \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r} \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} - \cancel{\frac{v_\theta^2}{r}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial z}} \right) \\
= -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \cancel{\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}} - \frac{2}{r^2} \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}} \right] + \cancel{\rho g_r}
\end{aligned}$$

• Componente θ^b :

$$\begin{aligned}
\rho \left(\cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial t}} + v_r \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r} \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{v_r v_\theta}{r}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial z}} \right) \\
= -\cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \cancel{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}} - \frac{2}{r^2} \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}} \right] + \cancel{\rho g_\theta}
\end{aligned}$$

• Componente z :

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_r \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r} \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} \right) = -\cancel{\frac{\partial P}{\partial z}} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}} \right] + \rho g_z$$

3. Agrupando y reordenando las variables del componente θ que no se cancelaron e igualándose a cero.

$$0 = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) \right]$$

4. El término de μ reduce en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned}
\frac{0}{\mu} &= \frac{\mu}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) \right] \\
0 &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) \right)
\end{aligned}$$

Separando las derivadas:

$$0 = \frac{d \left(\frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dr} \right)}{dr}$$

5. Reordenando la ecuación anterior.

$$0 dr = d \left(\frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dr} \right)$$

Integrando:

$$\int 0 dr = \int d\left(\frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dr}\right)$$

El resultado de esta integral es el siguiente:

$$\frac{d(rv_\theta)}{rdr} = 0 + c_1$$

6. Reordenar e integrando nuevamente esta última ecuación.

$$d(rv_\theta) = c_1 r dr$$

$$\int d(rv_\theta) = c_1 \int r dr$$

El resultado de esta integral será la ecuación general:

$$rv_\theta = \frac{c_1}{2} r^2 + c_2 \dots \text{Ecuación general}$$

7. Aplicando las dos condiciones límite a la ecuación general

$$C.L.1 \quad r = kR; \quad v_\theta = 0 \dots \dots \dots y \dots \dots \dots C.L.2 \quad r = R; \quad v_\theta = \Omega_0 R$$

8. Aplicando las dos condiciones límite a la ecuación general y después se cambian los signos de los términos al resultado obtenido de aplicar las condiciones límite.

Aplicando la C.L.1 $r = kR; \quad v_\theta = 0$

$$kR(0) = \frac{c_1}{2} (kR)^2 + c_2 \dots \text{Ecuación 1}$$

Aplicando la C.L.2 $r = R; \quad v_\theta = \Omega_0 R$

$$R\Omega_\theta R = \frac{c_1}{2} R^2 + c_2 \dots \text{Ecuación 2}$$

9. Como se dijo en el paso 8, se cambiarán los signos de los términos en las ecuaciones obtenidas:

$$\left(0 = \frac{c_1}{2} (kR)^2 + c_2\right) (-1)$$

10. Se forma un sistema de ecuaciones con el resultado obtenido de la ecuación del paso 9 y el resultado de la ecuación 2, consiguiendo un sistema como el siguiente:

$$0 = -\frac{c_1}{2} (kR)^2 - c_2$$

$$R\Omega_\theta R = \frac{c_1}{2} R^2 + c_2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos la siguiente ecuación:

$$R\Omega_\theta R = \frac{c_1}{2} R^2 - \frac{c_1}{2} (kR)^2$$

11. Realizando el álgebra correspondiente para despejar a c_1 .

$$R\Omega_\theta R = \frac{c_1}{2} R^2 (1 - k^2)$$

$$2R^2\Omega_0 = c_1 R^2 (1 - k^2)$$

$$\frac{2R^2\Omega_0}{R^2(1 - k^2)} = c_1$$

Reduciendo los términos de R^2 y c_1 tendrá:

$$c_1 = \frac{2\Omega_0}{(1-k^2)}$$

12. Sustituyendo a c_1 en la ecuación 1, para poder despejar a c_2 .

$$0 = \frac{\frac{2\Omega_0}{(1-k^2)}}{2} (kR)^2 + c_2$$

13. Una vez habiendo sustituido a c_1 en la ecuación 2, se puede realizar el álgebra necesaria para despejar a c_2 .

$$0 = \frac{2\Omega_0}{2(1-k^2)} (kR)^2 + c_2$$

Reduciendo los términos semejantes de la ecuación:

$$c_2 = -\frac{\Omega_0(kR)^2}{(1-k^2)}$$

14. Sustituyendo los valores obtenidos de c_1 y c_2 en la ecuación general.

$$rv_\theta = \frac{\frac{2\Omega_0}{(1-k^2)}}{2} r^2 - \frac{\Omega_0(kR)^2}{(1-k^2)}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$rv_\theta = \frac{2\Omega_0 r^2}{2(1-k^2)} - \frac{\Omega_0(kR)^2}{(1-k^2)}$$

15. Reacomodando la ecuación anterior de tal manera que el término de v_θ se interprete como la variable independiente, ya que de esta variable se define el perfil de velocidad.

$$v_\theta = \frac{\frac{\Omega_0 r^2}{(1-k^2)} - \frac{\Omega_0(kR)^2}{(1-k^2)}}{r}$$

Realizando las operaciones con fracciones:

$$v_\theta = \frac{\Omega_0 r^2}{r(1-k^2)} - \frac{\Omega_0(kR)^2}{r(1-k^2)}$$

16. Factorizando la ecuación anterior:

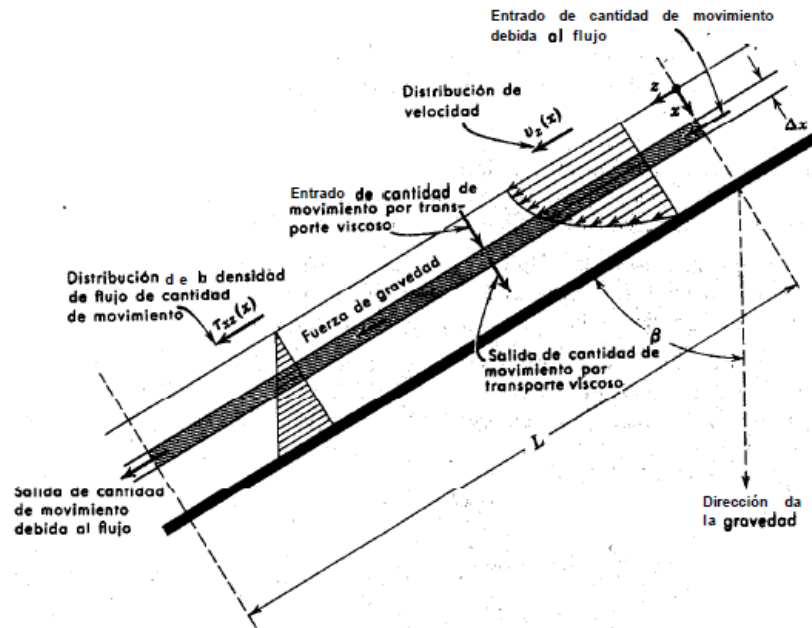
$$v_\theta = \frac{\Omega_0}{(1-k^2)} \left(r - \frac{(kR)^2}{r} \right)$$

Perfil de velocidad

1.3.3.3 FLUJO DE PELÍCULA DESCENDENTE

Flujo de un líquido que desciende por una lámina plana inclinada de longitud L y ancho w . Se considera la viscosidad y la densidad del fluido constantes, ignorando las perturbaciones de entrada y salida ($z = 0, z = L, y = w$)

Estas películas se han estudiado en relación con torres de pared mojada, experiencias de evaporización y absorción de gases y aplicación de capas de pintura de papel.



Movimiento componente en z

$$V_x = 0 \rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0$$

$$V_y = 0 \rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0$$

$$V_z \neq 0 \rightarrow \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial y} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial x} \neq 0; \frac{\partial P}{\partial z} = 0; \rho g_z \neq 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

$$0 = \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \right) + \rho g_z$$

$$-\rho g_z = \mu \left(\frac{d \left(\frac{dV_z}{dx} \right)}{dx^2} \right)$$

$$-\rho g_z \int dx = \mu \int d\left(\frac{dV_z}{dx}\right)$$

$$-\rho g_z x = \mu \frac{dV_z}{dx} + C_1$$

Condiciones límite

$$1^{\circ} \text{ C. L } x = \delta \quad V_z = 0$$

$$2^{\circ} \text{ C. L } x = 0 \quad \tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dV_z}{dx} \dots \dots \dots \text{Ley de Newton de viscosidad}$$

Aplicando segunda condición límite

$$C_1 = 0$$

$$-\rho g_z x = \mu \frac{dV_z}{dx}$$

$$-\rho g_z \int x dx = \mu \int dV_z$$

$$-\rho g_z \frac{x^2}{2} = \mu V_z + C_2$$

Aplicando primera condición límite

$$-\rho g_z \frac{\delta^2}{2} = \mu(0) + C_2$$

$$C_2 = -\rho g_z \frac{\delta^2}{2}$$

$$-\rho g_z \frac{x^2}{2} = \mu V_z - \rho g_z \frac{\delta^2}{2}$$

$$V_z = \frac{\rho g_z}{2\mu} (\delta^2 - x^2) ; \text{ como } g_z = g \cos \beta$$

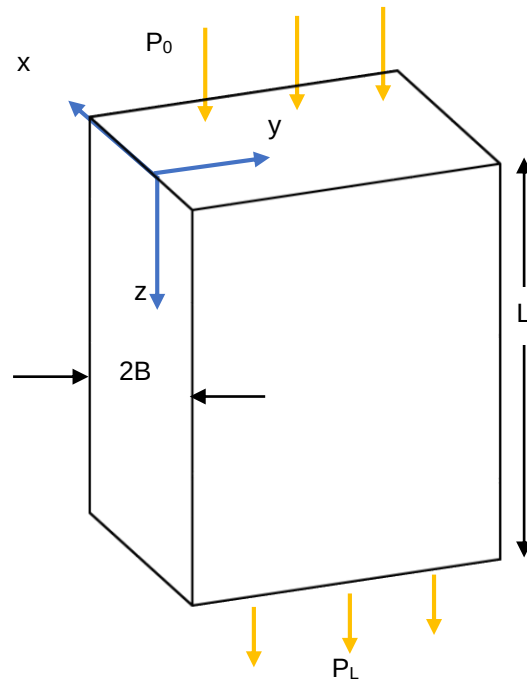
$$V_z = \frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} (\delta^2 - x^2)$$

Perfil de velocidad dependiente del espacio de análisis

1.3.3.4 FLUJO LAMINAR EN UNA RENDIJA ESTRECHA

Un fluido viscoso circula con flujo laminar por una rendija formada por dos paredes planas, separadas por una distancia $2B$, efectuar un balance diferencial de cantidad de movimiento y de velocidad.

(Ecuaciones de variación)



Ecuaciones de variación:

$$v_x = 0 \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$$

$$v_y = 0 \rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$$

$$v_z = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} \neq 0; \frac{\partial P}{\partial z} \neq 0; \rho g_z \neq 0$$

Componente z

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}} \right) + \rho g_z$$

Obteniendo:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \right) + \rho g_z$$

Si

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{d \left(\frac{dv_z}{dx} \right)}{dx}$$

Por tanto

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{d \left(\frac{dv_z}{dx} \right)}{dx} \right) + \rho g_z = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = -\mu \left(\frac{d \left(\frac{dv_z}{dx} \right)}{dx} \right)$$

Nota: $-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = cte.$

$$\int cte. dx = -\mu \int d \left(\frac{dv_z}{dx} \right)$$

$$cte. x + c_1 = -\mu d \left(\frac{dv_z}{dx} \right)$$

Condiciones límite

$$1^a \text{ C.L. } x = B \quad v_z = 0$$

$$2^a \text{ C.L. } x = -B \quad v_z = 0$$

Reordenando e integrando nuevamente

$$\int dv_z = -\frac{cte.}{\mu} \int x dx - \frac{c_1}{\mu} \int dx$$

$$v_z = -\frac{cte.}{2\mu} x^2 - \frac{c_1}{\mu} x + c_2$$

Aplicando condiciones límite

$$0 = -\frac{cte.}{2\mu} B^2 - \frac{c_1}{\mu} B + c_2 \dots \textcircled{1}$$

$$0 = -\frac{cte.}{2\mu} B^2 + \frac{c_1}{\mu} B + c_2 \dots \textcircled{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$0 = -\frac{cte.}{2\mu} B^2 - \frac{c_1}{\mu} B + c_2$$

+

$$0 = -\frac{cte.}{2\mu} B^2 + \frac{c_1}{\mu} B + c_2$$

$$0 = -\frac{cte.}{2\mu} B^2 - \frac{cte.}{2\mu} B^2 + c_2 + c_2$$

$$0 = -\frac{2cte.}{2\mu} B^2 + 2c_2$$

$$0 = -\frac{cte.}{\mu} B^2 + 2c_2$$

Despejando c_2

$$c_2 = \frac{cte.}{2\mu} B^2$$

Sustituyendo c_2 en ① y despejando c_1

$$0 = -\cancel{\frac{cte.}{2\mu}} B^2 - \frac{c_1}{\mu} B + \cancel{\frac{cte.}{2\mu}} B^2$$

$$c_1 = 0$$

Sustituyendo c_1 y c_2 en la Ecuación General

$$v_z = -\frac{cte. x^2}{\mu} \frac{0}{2} - \frac{0}{\mu} x + \frac{cte.}{2\mu} B^2$$

$$v_z = \frac{cte.}{2\mu} (B^2 - x^2) = \left(-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \right) \left(\frac{1}{2\mu} \right) (B^2 - x^2)$$

Despejando $-\frac{\partial P}{\partial z}$

$$\frac{2\mu v_z}{B^2 - x^2} - \rho g_z = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\text{Ahora se toma } \frac{2\mu v_z}{B^2 - x^2} - \rho g_z = cte.$$

Reordenado e integrando

$$cte. \int_0^L dx = - \int_{P_0}^{P_L} dz$$

$$cte. (L - 0) = -(P_L - P_0)$$

$$cte. L = -(P_L - P_0)$$

$$cte. L = P_0 - P_L$$

Sustituyendo el valor de la cte.

$$\left(\frac{2\mu v_z}{B^2 - x^2} - \rho g_z \right) L = P_0 - P_L$$

Despejando v_z

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g_z \right) \left(\frac{B^2 - x^2}{2\mu} \right)$$

Perfil de velocidad

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L + \rho g_z L}{2\mu L} \right) (B^2 - x^2)$$

Si

$$\mathcal{P}_0 = P_0 + \rho g(0)$$

$$\mathcal{P}_0 = P_0$$

$$\mathcal{P}_L = P_L + \rho g(-L)$$

$$\mathcal{P}_L = P_L - \rho gL$$

$$P_L = \mathcal{P}_L + \rho gL$$

Sustituyendo los valores de P_0 y P_L en el perfil de velocidad

$$v_z = \frac{\mathcal{P}_0 - (\mathcal{P}_L + \rho gL) + \rho gL}{2\mu L} (B^2 - x^2)$$

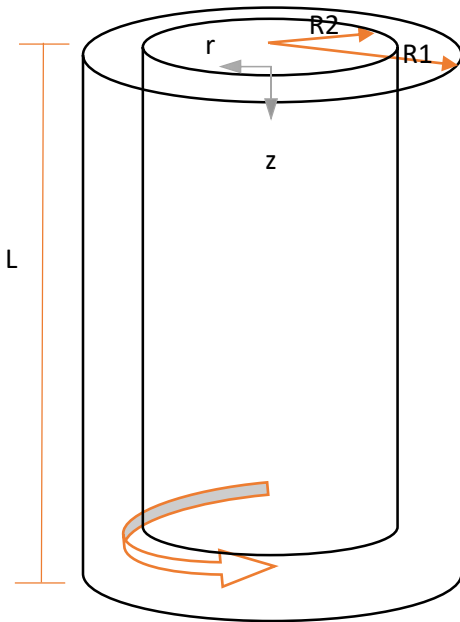
$$v_z = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L - \cancel{\rho gL} + \cancel{\rho gL}}{2\mu L} (B^2 - x^2)$$

$$v_z = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2\mu L} (B^2 - x^2)$$

Perfil de velocidad en función de las presiones del sistema

1.4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

1. Determinar el perfil de velocidad y esfuerzo cortante en un fluido que se encuentra en un espacio anular formado por dos cilindros concéntricos de radio 2 y 5 cm respectivamente. Colocados en posición vertical y el interior tiene movimiento axial de 2 cm/min; así como la fuerza que se requiere para mover el cilindro interior.



DATOS:

$$R1 = 2 \text{ cm}$$

$$R2 = 5 \text{ cm}$$

Calculando la velocidad del cilindro 1:

$$V1 = 2 \frac{\text{cm}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ seg}} = 3.33 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V(R1) = 3.33 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esfuerzo cortante en el cilindro 1:

$$\tau(R1) = 0$$

Velocidad y esfuerzo cortante en el cilindro 2

$$V(R2) = 0$$

$$\tau(R2) = \tau$$

Área superficial del cilindro: $A_c = 2 \pi r L$

Variación de la velocidad conforme se aumenta el radio: $V_c = 2 \pi r L \Delta r$

1. Balance general:

Sin tomar en cuenta las fuerzas externas (presión, viscosidad y gravedad)

$$\tau_{rz}(2 \pi r L)|_r - \tau_{rz}(2 \pi r L)|_{r+\Delta r} = 0$$

2. Factorizar las constantes:

$$\frac{\tau_{rz}(2 \pi r L)|_r}{2 \pi L \Delta r} - \frac{\tau_{rz}(2 \pi r L)|_{r+\Delta r}}{2 \pi L \Delta r} = 0$$

3. Cambiando los signos de los términos:

$$\frac{\tau_{rz}(r)|_{r+\Delta r} - \tau_{rz}(r)|_r}{\Delta r} = 0$$

Aplicando límites cuando el espesor del radio tiende a cero:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\tau_{rz}(r)|_{r+\Delta r} - \tau_{rz}(r)|_r}{\Delta r} = 0$$

Obteniendo:

$$\frac{d}{dr} r \tau_{rz} = 0$$

4. Integrando:

$$\int \frac{d}{dx} r \tau_{rz} = \int 0$$

$$r \tau_{rz} = C1$$

Despejando el esfuerzo cortante:

$$\tau_{rz} = \frac{C1}{r}$$

5. Aplicando condiciones límite:

$$\tau(R1) = 0 \quad \tau(R2) = \tau$$

$$0 = \frac{R1}{r} \quad \tau = \frac{R2}{r}$$

$$C1=0$$

Usando y substituyendo la ley de Newton de la viscosidad para C1:

$$\tau = -\frac{\mu dv}{dr} \dots \dots \dots \text{Ley de Newton de la viscosidad}$$

$$-\frac{C1}{\mu r} dr = dv$$

Integrando:

$$-\int \frac{C1}{\mu r} dr = \int dv$$

Se obtiene que:

$$v = -\ln r \frac{C1}{\mu} + C2$$

Perfil de velocidad

Resolviendo para C2:

$$v = C2 - \frac{C1}{\mu} \ln r$$

Aplicando las condiciones límite:

$$v(R1) = v \quad v(R2) = 0$$

$$v = C2 - \frac{C1}{\mu} \ln R1 \quad 0 = C2 - \frac{C1}{\mu} \ln R2$$

$$C2 = \frac{C1}{\mu} \ln R2$$

6. Sustituyendo en perfil de velocidad:

$$v = \frac{C1}{\mu} \ln R2 - \frac{C1}{\mu} \ln R1$$

Agrupando términos semejantes:

$$v = \frac{C1}{\mu} [\ln R2 - \ln R1]$$

Aplicando leyes de los logaritmos:

$$v = \frac{C1}{\mu} [\ln R2/R1]$$

7. Despejando C1:

$$C1 = \frac{v\mu}{\ln \left[\frac{R2}{R1} \right]}$$

Sustituyendo en solución de C2 del paso 5:

$$C2 = \frac{C1}{\mu} \ln R2 \dots \dots \dots C2 \text{ del paso 5}$$

Sustituyendo:

$$C2 = \frac{\frac{v\mu}{\ln \left[\frac{R2}{R1} \right]}}{\mu} \ln R2$$

Aplicando operaciones con fracciones se obtiene C2:

$$C2 = \frac{v \ln R2}{\ln \left[\frac{R2}{R1} \right]}$$

8. Sustituyendo a C1 y C2 en perfil de velocidad:

$$v = C2 - \frac{C1}{\mu} \ln r \dots \text{Perfil de velocidad}$$

Sustituyendo a C1 y C2:

$$v = \frac{v \ln R2}{\ln \left[\frac{R2}{R1} \right]} - \frac{\frac{v\mu}{\ln \left[\frac{R2}{R1} \right]}}{\mu} \ln r$$

Aplicando operaciones con fracciones:

$$v = \frac{v}{\ln \left[\frac{R2}{R1} \right]} - [\ln R2 - \ln r]$$

Aplicando leyes de los logaritmos:

$$v = \frac{v}{\ln \left[\frac{R2}{R1} \right]} - \left[\ln \frac{R2}{r} \right]$$

Perfil de velocidad dependiente del radio

9. Sustituyendo los valores iniciales:

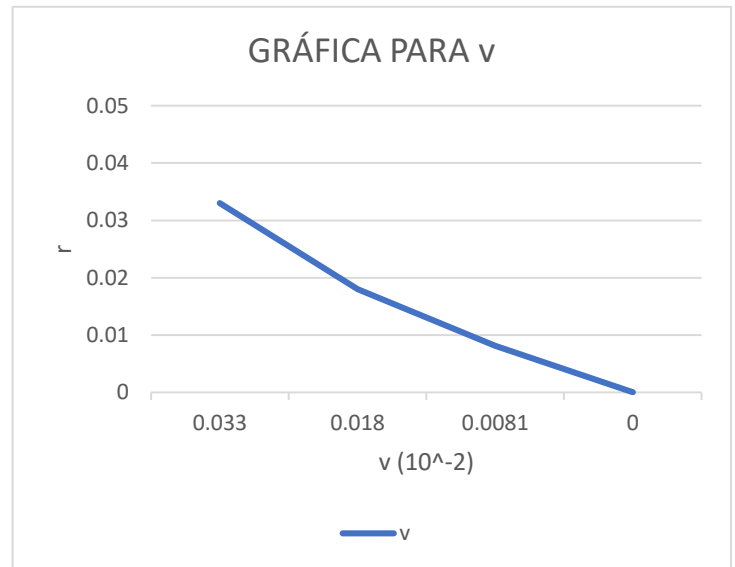
$$R1= 0.02\text{m} \quad R2=0.05\text{m} \quad v1 = 3.33 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Se procede a realizar gráficas para observar como la velocidad del fluido interno cambia conforme varia el radio del mismo fluido contenido.

$$v = \frac{3.33 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\ln \left[\frac{0.05}{0.02} \right]} - \left[\ln \frac{0.05}{r} \right]$$

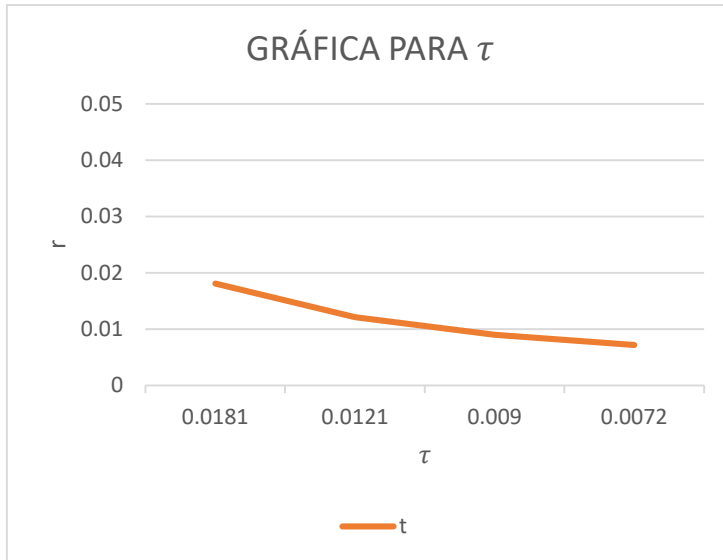
$$v = 3.63 \times 10^{-4} \left[\ln \frac{0.05}{r} \right]$$

r	v
0.02	0.033
0.03	0.018
0.04	0.0081
0.05	0



10. Resolviendo para $\tau_{rz} = \frac{c_1}{r}$

$$\tau_{rz} = \frac{v\mu}{\ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right]}$$



$$\tau_{rz} = 3.63 \times 10^{-4} \frac{\mu}{r}$$

r	τ
0.02	0.0181
0.03	0.0121
0.04	0.009
0.05	0.0072

11. Fuerza para mover el cilindro interior:

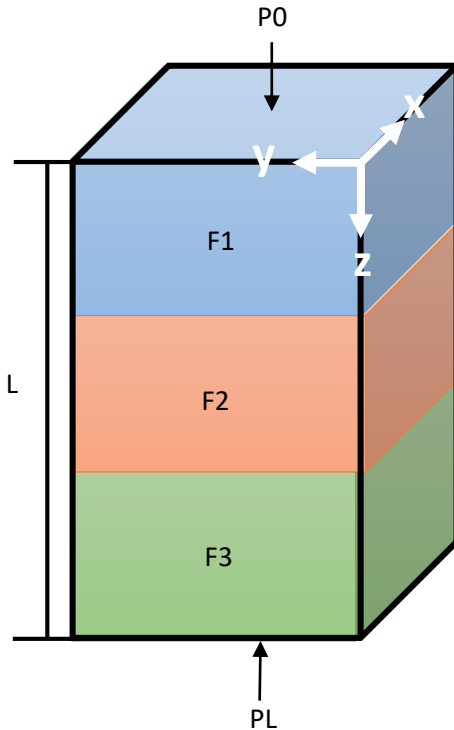
$$F = \tau_{rz}(2 \pi R_1 L)$$

$$F = 3.63 \times 10^{-4} \frac{\mu}{r} (2 \pi 0.02 L)$$

La fuerza es dependiente de la viscosidad del fluido, la longitud a la que se realiza el estudio y también del radio interior del punto de observación.

2. Se requiere determinar la presión que se ejerce en el fondo de un recipiente rectangular cerrado de 1m de altura, que contiene 3 fluidos en reposo, los cuales tienen una densidad de $0.89 \frac{g}{cm^3}$, $1 \frac{g}{cm^3}$ y $0.7 \frac{g}{cm^3}$ respectivamente, cada fluido ocupa la tercera parte del recipiente.

Para facilitar cálculos y por los datos proporcionados, no se tomará en cuenta la viscosidad de los fluidos



DATOS:

$$\rho_1 = \left(0.89 \frac{g}{cm^3}\right) \left(\frac{100cm}{1m}\right)^3 \left(\frac{1kg}{1000g}\right) = 849 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_2 = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_3 = 700 \frac{kg}{m^3}$$

$$L_{TOT} = 1m \quad L_{1,2,3} = \frac{1}{3} \times L_{TOT}$$

1. Utilizando las ecuaciones de variación para cada eje:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Sustituyendo la ley de Newton:

$$\tau = -\frac{\mu dv}{dr} \dots \dots \dots \text{Ley de Newton de la viscosidad}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \tau x^2}{\partial x} + \rho g_z$$

Reacomodando:

$$\frac{\partial \tau x^2}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

2. Considerando variables y las constantes:

Variables: $P, \rho \dots \dots \dots y \dots \dots \dots$ **Constantes:** τ, V_z, g_z

Por tanto:

$$\frac{\partial \tau x^2}{\partial x} = 0$$

Esto representa que el esfuerzo cortante no cambia conforme varía la distancia, en este caso, la altura de la columna con fluidos.

Resultando en:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

Reacomodando:

$$-\partial P = -\rho g_z \partial z$$

3. Integrando:

$$-\int \partial P = -\rho g_z \int \partial z$$

Obteniendo:

$$-P = -\rho g_z z + C1 \Big|_0^L$$

Considerando las condiciones de la integral definida:

$$P = \rho g L + C1$$

4. Aplicando condiciones límite:

$$P(0) = 0 \dots \dots 0 = \rho g (0) + C1$$

Por tanto:

$$C1 = 0$$

5. Sustituyendo en la ecuación anterior del paso 4:

$$P = \rho g L:$$

6. Interpretando la ecuación para cada capa de fluido:

$$1^\circ: P1 = P\left(\frac{L}{3}\right) \quad P1 = \rho g \frac{L}{3}$$

$$2^\circ: P2 = P\left(\frac{2L}{3}\right) \quad P2 = \rho g \frac{2L}{3}$$

$$3^\circ: P3 = P(L) \quad P3 = \rho g L$$

7. Evaluando con las condiciones dadas para cada capa de fluido:

$$P1 = \rho g \frac{L}{3} = \left(9.81 \frac{m}{s^2}\right) \left(890 \frac{kg}{m^3}\right) \left(\frac{1}{3} m\right)$$

$$P1 = 2910.3 \frac{kg}{ms^2}$$

Que es la presión ejercida por el primer fluido

$$P2 = \rho g \frac{2L}{3} = \left(9.81 \frac{m}{s^2}\right) \left(1000 \frac{kg}{m^3}\right) \left(\frac{2}{3} m\right) + P1$$

$$P2 = 6540 + 2910.3 = 9450.3 \frac{kg}{ms^2}$$

Que es la presión ejercida por los fluidos 1 y 2

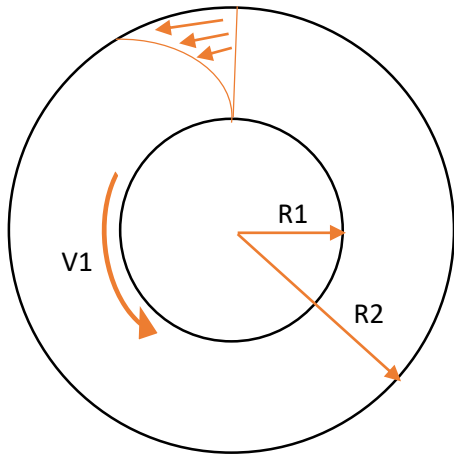
$$P3 = \rho g L = \left(9.81 \frac{m}{s^2}\right) \left(700 \frac{kg}{m^3}\right) (1m) + P2$$

$$P3 = 6867 + 9450.3$$

$$P3 = 16317.3 \frac{kg}{ms^2}$$

Que es la presión ejercida en el fondo del recipiente por los 3 fluidos

3. Ejercicio propuesto: determinar el perfil de velocidad de un fluido Newtoniano se mueve en un espacio anular entre dos esferas, la viscosidad del fluido es de $1.25 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$, la esfera interior se mueve a 1.0 m/s y tiene un radio 20 cm y de la esfera exterior es de 25 cm .



DATOS

$$v_1 = 0.1 \frac{m}{s}$$

$$R_1 = 0.2m$$

$$\tau(R_1) = 0$$

$$R_2 = 0.25m$$

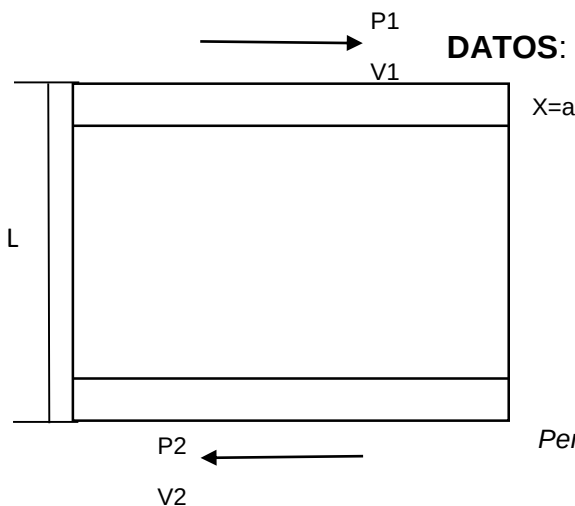
$$\tau(R_2) = \tau$$

Respuesta:

$$v = -0.4 + \frac{0.1}{r}$$

Perfil de velocidad dependiente del radio del punto de observación/estudio

4. Ejercicio propuesto: Una maquina consta de dos bandas transportadoras que se mueven cada una a $0.1 \frac{m}{s}$ y en sentido contrario para arrastrar un fluido newtoniano. Se requiere determinar el perfil de velocidad del fluido, si las placas están separadas a 1 cm y la viscosidad del fluido es de 1.4 ctp .



DATOS:

$$L = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m} \quad \mu = 1.4 \text{ ctp} = 1.4 \frac{kg}{ms}$$

$$v(a) = V_1 \quad v\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \quad v(0) = -V_2$$

Respuesta:

$$v = 20x \frac{1}{s} + 0.1 \frac{m}{s}$$

Perfil de velocidad dependiente de la altura de análisis.

5. Seleccione uno de los siguientes perfiles de transferencia de velocidad:
- I. Transferencia de movimiento para coordenadas rectangulares unidireccionales.
 - II. Transferencia de movimiento para coordenadas cilíndricas unidireccionales.
 - III. Transferencia de movimiento en flujo en un conducto con cambio brusco de sección transversal.
 - IV. Transferencia de movimiento en un flujo en una placa plana.
 - V. Transferencia de movimiento en un flujo de un fluido alrededor de un cilindro.
 - VI. Transferencia de movimiento en un flujo en una esfera.
 - VII. Flujo en un conducto con entrada y salida.
 - VIII. Transferencia de movimiento en un flujo de tuberías en paralelo.

Una vez seleccionado el tema, investigar sobre el perfil de transferencia de calor. Se deberá comprender cómo se distribuye el calor en su perfil específico, cómo afecta la viscosidad y cuáles son las condiciones de frontera relevantes.

Para fortalecer la asimilación de compuestos, se deberá diseñar y construir una maqueta que represente su perfil de velocidad. Para la exposición de la maqueta, se tiene que incluir:

- Ubicación de coordenadas (cilíndricas, esféricas o rectangulares).
- Zonas de transferencia de movimiento.
- Efecto de la viscosidad en la transferencia de velocidad.
- Condiciones de frontera específicas para el proceso.

Después de todas las presentaciones, se promoverá una discusión en clase sobre los diferentes perfiles de velocidad y las maquetas creadas.

2. BALANCE DE CALOR

La transferencia de calor es un fenómeno fundamental en la física y la ingeniería que describe el movimiento de energía térmica entre sistemas con diferentes temperaturas. Este proceso puede ocurrir por tres mecanismos principales: conducción, convección y radiación.

MECANISMOS DE TRANSFERENCIA:

- Conducción:

La conducción es el proceso de transferencia de calor a través de un material sin movimiento aparente de las partículas del material. Se rige por la ley de Fourier y es proporcional al gradiente de temperatura y a la conductividad térmica del material.

- Radiación:

La convección implica la transferencia de calor entre una superficie sólida y un fluido en movimiento (convección forzada) o entre capas de fluido con diferentes temperaturas (convección natural). Se describe mediante la ley de enfriamiento de Newton para la convección forzada.

- Convección:

La radiación térmica es el proceso de transferencia de calor a través de ondas electromagnéticas, como la luz o el calor infrarrojo. La ley de Stefan-Boltzmann describe la radiación de un cuerpo negro, mientras que la ley de Planck describe la distribución espectral de la radiación térmica.

TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN (LEY DE FOURIER):

La Ley de Fourier es un principio fundamental en la transferencia de calor que describe el flujo de calor a través de un material. Esta ley establece la relación entre la tasa de transferencia de calor, el área de sección transversal, el gradiente de temperatura y la conductividad térmica del material.

Existen dos versiones para la ley de Fourier y son principalmente diferenciables por la estructura donde el objeto en el cual se lleva a cabo la transferencia de calor, a continuación, se presentan estas variaciones:

Donde:

Q : Tasa de transferencia de calor.

Ley de Fourier para una placa

k : Coeficiente de transferencia de calor del material.

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

A : Área transversal donde ocurre la transferencia de calor.

$\frac{\partial T}{\partial x}$: Gradiente de temperatura con respecto a la dirección a la transferencia de calor.

También:

Ley de Fourier para un cilindro

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial r}$$

Donde:

q: Tasa de transferencia de calor.

k: Coeficiente de transferencia de calor del material.

A: Área transversal donde ocurre la transferencia de calor.

$\frac{\partial T}{\partial r}$: Gradiente de temperatura con respecto al radio en dirección a la transferencia de calor.

Hay otro concepto crucial a considerar en el estudio de la transferencia de calor, y este es el valor de la difusividad térmica.

La difusividad térmica es fundamental en la transferencia de calor porque determina la velocidad a la que un material responde a los cambios de temperatura. Un valor alto de difusividad térmica indica una rápida conducción de calor, mientras que un valor bajo indica una conducción más lenta. Esta propiedad es crucial en diversas aplicaciones y escenarios térmicos.

Se define matemáticamente como el cociente entre la conductividad térmica (k) y la capacidad calorífica volumétrica a densidad constante ($\rho \cdot Cp$).

Difusividad térmica

$$\alpha = \frac{k}{\rho Cp}$$

Donde:

α : Difusividad térmica del material.

k: Coeficiente de transferencia de calor del material.

ρ : Densidad constante del material.

Cp: Capacidad calorífica del material.

Mezclando los conceptos y las variables, se puede obtener una variante de la ley de Fourier dependiente de la difusividad del material:

Donde:

Ley de Fourier para un cilindro dependiente de la difusividad térmica.

$$Q = -\alpha \rho Cp A \frac{\partial T}{\partial r}$$

Q: Tasa de transferencia de calor.

α : Difusividad térmica del material.

ρ : Densidad constante del material.

Cp: Capacidad calorífica del material.

A: Área transversal donde ocurre la transferencia de calor.

$\frac{\partial T}{\partial r}$: Gradiente de temperatura con respecto al radio en dirección a la transferencia de calor.

CONVECCIÓN (LEY DE NEWTON):

La Ley de Newton de la convección térmica describe la transferencia de calor entre un sólido y un fluido circundante (líquido o gas) a través del fenómeno de convección. Esta ley establece que la tasa de transferencia de calor (Q) es proporcional al área de transferencia (A), al gradiente de temperatura entre el sólido y el fluido (ΔT), y a un coeficiente de transferencia de calor por convección (h).

Donde:

$$Q = h A \Delta T$$

Q: Tasa de transferencia de calor.

h: Coeficiente de transferencia de calor por convección.

A: Área donde ocurre la transferencia de calor.

ΔT : Diferencial de temperatura entre la superficie del sólido y el fluido circundante.

El coeficiente de convección (h), representa la eficiencia con la que el calor se transfiere entre un sólido y un fluido circundante. Un coeficiente de convección elevado indica una transferencia de calor más eficiente entre el sólido y el fluido circundante, esto se puede utilizar en situaciones donde se busca enfriar un objeto o sistema, ya que un alto coeficiente de convección permite una disipación rápida del calor.

RADIACIÓN (LEY DE STEFAN-BOLTZMANN):

La Ley de Stefan-Boltzmann es una relación fundamental en la física que describe la radiación térmica emitida por un cuerpo negro, que es un objeto ideal que absorbe toda la radiación incidente sobre él. Esta ley establece que la potencia total radiada (P) por unidad de área de un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta (T). La expresión matemática de la ley es:

Donde:

$$Q = \sigma A T^4$$

Q: Tasa de transferencia de calor por unidad de área.

σ : constante de Stefan-Boltzmann ($5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$).

A: Área donde ocurre la transferencia de calor (m^{-2}).

T: Temperatura absoluta (K).

A la ley de Stefan Boltzmann, se le tiene que agregar la consideración de que solo ocurre en un cuerpo negro ideal, para su aplicación en fenómenos de radiación reales, se le agrega el término de emisividad (ϵ), que es un factor adimensional que varía entre 0 y 1 y representa la eficiencia con la que un cuerpo emite radiación térmica en comparación con un cuerpo negro ideal. Un cuerpo negro ideal tiene una emisividad de 1, mientras que los objetos reales tienen emisividades menores a 1.

La ley de Stefan Boltzmann con la consideración de la emisividad se escribe:

Donde:

$$Q = \sigma \epsilon A T^4$$

Q: Tasa de transferencia de calor por unidad de área.

σ : Constante de Stefan-Boltzmann ($5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$).

ϵ : Emisividad del cuerpo negro ($0 \leq \epsilon \leq 1$).

A: Área donde ocurre la transferencia de calor (m^{-2}).

T: Temperatura absoluta (K).

2.1 CONDICIONES FRONTERA

Para el balance de calor, las condiciones de frontera comunes consideradas son:

1. **Condición de temperatura constante:** En esta condición, la temperatura en la superficie del objeto permanece constante. Por ejemplo, un objeto que se calienta o se enfría en un ambiente con temperatura constante.
2. **Condición de flujo de calor constante:** Aquí, se mantiene un flujo de calor constante a través de la superficie del objeto. Esto puede ocurrir, por ejemplo, cuando se aplica un flujo de calor constante a través de una placa metálica.
3. **Condición de aislamiento térmico:** En este caso, no hay flujo de calor a través de la superficie del objeto, lo que significa que el flujo de calor a través de la frontera es cero. Esto se observa en situaciones donde el objeto está perfectamente aislado térmicamente del entorno.
4. **Condiciones de convección:** Estas condiciones surgen cuando hay transferencia de calor debido a la convección del fluido circundante. Aquí, se consideran la temperatura y la velocidad del fluido en la interfaz sólido-fluido para determinar el intercambio de calor.

2.2 OBTENCIÓN DE PERFILES DE TEMPERATURA Y FLUJO DE CALOR SIN GENERACIÓN

A considerar...

¿Qué es el perfil de temperatura?

El perfil de temperatura es una descripción de cómo varía la transferencia de calor en diferentes puntos a lo largo de una dirección específica en un medio o a través de una superficie. En otras palabras, muestra cómo la temperatura cambia desde la superficie de un objeto o de una pared hasta el centro del medio o a través de una sección transversal de un material. Para entenderlo mejor, podemos imaginar un objeto sólido que está siendo calentado o enfriado. En la superficie del objeto, la temperatura puede ser alta o baja, dependiendo de factores como la temperatura del medio circundante y las propiedades térmicas del material. A medida que nos alejamos de la superficie y nos adentramos en el objeto, la temperatura, aumentando o disminuyendo, dependiendo de la distribución de temperaturas y la conductividad térmica del material.

El perfil de temperatura puede tener diferentes formas dependiendo de las condiciones de temperatura y de los materiales involucrados. Por ejemplo, en un material con una alta conductividad térmica y una distribución uniforme de temperatura, el perfil de temperatura puede ser suave y simétrico, con una temperatura máxima en la superficie y disminuyendo gradualmente hacia el interior del material. En otros casos, como en materiales con gradientes de temperatura pronunciados o en presencia de flujos de calor no uniformes, el perfil de temperatura puede ser más complejo y variado.

Comprender el perfil de temperatura es fundamental en el estudio del balance de calor porque nos proporciona información importante sobre

cómo se distribuye la temperatura en un sistema y cómo varía en diferentes puntos y direcciones. Esto es esencial para el diseño de sistemas de refrigeración, calefacción y aislamiento térmico, así como para el análisis de procesos de transferencia de calor en aplicaciones industriales y ambientales, adicional a que en las propias reacciones químicas con los calores de formación de los reactivos.

PROCEDIMIENTO GENERAL:

El desarrollo de un perfil de transferencia de calor implica un proceso detallado y estructurado que se puede abordar eficientemente al seguir una serie de pasos clave. A continuación, se presentan las recomendaciones detalladas para llevar a cabo este procedimiento de manera efectiva:

1. Iniciar el proceso identificando claramente el problema específico de transferencia de calor que se pretende analizar.
2. Es crucial delimitar y comprender las condiciones iniciales y los límites del sistema para una formulación precisa.
3. Se aplica un balance de cantidad de movimiento a una delgada lámina o envoltura perpendicular a la dirección de transporte de cantidad de movimiento, con lo que se obtiene una ecuación de diferencial de primer orden.
4. Se debe encontrar las constantes en el problema, como longitud, densidad, radio, para así factorizarlas de la ecuación diferencial y posteriormente cambiar los signos de los términos involucrados.
5. Se aplican límites y se deriva la ecuación.
6. Se introduce después de esta expresión la ley de Fourier, ley de Newton o ley de Stefan-Boltzmann, según corresponda el ejercicio. Una vez introducida, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden del flujo de calor en función de la distancia.
7. Se vuelve a integrar las ecuaciones para obtener las distribuciones de flujo de cantidad de calor en el sistema.

A continuación, se comprobarán varios problemas de conducción de calor, se resolverán por un método análogo similar al anterior.

2.2.1 BALANCE DE ENERGÍA A PAREDES SIMPLES Y COMPUESTAS

$$\left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de} \\ \text{energía calorífica} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de} \\ \text{salida de} \\ \text{energía calorífica} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de} \\ \text{producción de} \\ \text{energía calorífica} \end{array} \right) = 0$$

La transferencia de energía calorífica dentro de un sistema puede ocurrir a través de diversos mecanismos, siendo tres de ellos fundamentales: conducción de calor, transporte convectivo y generación de calor. La conducción de calor sigue la ley de Fourier, que describe cómo el calor se propaga a través de un medio. Por otro lado, el transporte convectivo implica el movimiento global del fluido, resultando en la entrada o salida de energía, conocida como calor sensible.

La energía calorífica puede generarse de varias maneras, como la degradación de energía eléctrica, la disminución de la velocidad de partículas nucleares en procesos de fisión, la degradación de energía mecánica y la conversión directa de otras formas de energía en calor.

Al abordar este fenómeno, se utiliza una ecuación diferencial que, al integrarse, incorpora constantes de integración determinadas por condiciones límite específicas:

- La temperatura en la superficie del sistema, representada por $T = T_0$.
- La densidad de flujo de calor en la superficie, indicada por $q = q_0$.
- En una interfaz entre un sólido y un fluido, la relación entre la densidad de la interfaz y la temperatura del fluido se describe mediante la ecuación $4 = h(T - T_{\text{fluido}})$, donde h es el coeficiente de transmisión de calor.

La definición de las interfaces sólido-fluido implica determinar tanto la variación de temperatura como la densidad de flujo de calor en dichas interfaces. Estos parámetros se rigen por la ecuación mencionada anteriormente, lo que permite comprender y cuantificar la transferencia de calor en estos puntos críticos del sistema.

2.2.1.1 CONDUCCIÓN DE CALOR CON MANANTIAL CALORÍFICO DE ORIGEN ELÉCTRICO (PARED CILÍNDRICA SIMPLE)

La distribución de densidad del flujo de calor en el alambre de sección circular de radio R y conductividad eléctrica $K_e [=] \frac{\Omega}{\text{cm}}$ cuya densidad de corriente es $I [=] \frac{\text{ampere}}{\text{cm}^2}$. La transmisión de una corriente eléctrica en un proceso reversible y parte de la energía eléctrica se transforma en calor (energía calorífica). La velocidad de producción de calor por la unidad de volumen viene dada por:

$$S_e = \frac{I^2}{K_e}$$

Donde: S_e es el calor que se origina debido a la disipación eléctrica se supone que el aumento de temperatura en el alambre no es grande, de modo que se puede suponer que $K = K_e = \text{cte}$. La superficie del alambre se mantiene a la temperatura T_0 .

Obtener la distribución de temperatura.

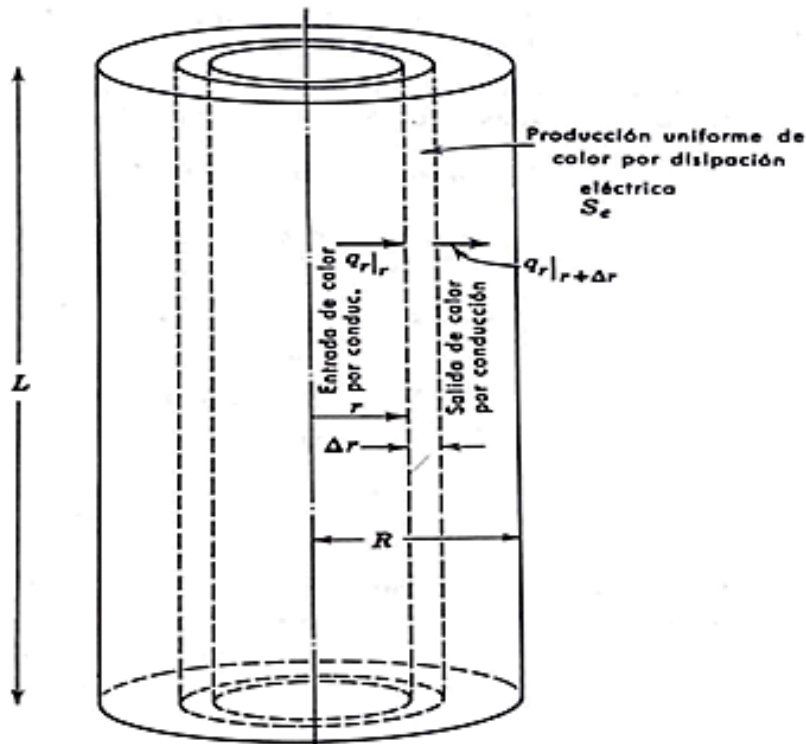


Figura: Caracterización de las variables y constantes del problema.

Observando la imagen se puede concluir que el calor avanza en dirección r

1. A partir de balance general:

$$Sq_r|_{r=r} - Sq_r|_{r=r+\Delta r} + (2\pi\Delta rL)S_e = 0$$

2. Sustituyendo que $S = 2\pi rL$:

$$2\pi rLq_r|_{r=r} - 2\pi rLq_r|_{r=r+\Delta r} + (2\pi\Delta rL)S_e = 0$$

3. Factorizando las constantes y cambiando los signos de los términos:

$$rq_r|_{r=r+\Delta r} - rq_r|_{r=r} - \Delta r Se = 0$$

4. Aplicando el límite cuando r tiendo a cero. Se obtiene la derivada:

$$\frac{d(rdr)}{dr} - rSe = 0$$

5. Separando los términos:

$$\frac{d(rdr)}{dr} = rSe \, dr$$

Integrando la ecuación:

$$\int rdr = Se \int r \, dr$$

Una vez integrada:

$$rq_r = Se \frac{r^2}{2} + C_1$$

6. Despejando q_r :

$$q_r = Se \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

7. Aplicando las condiciones límite:

$$1^{ra} C.L. \quad T = T_0 \quad r = R$$

$$2^{ra} C.L. \quad q_r = \text{determinado} \quad r = 0$$

8. Aplicando segunda condición límite, se obtiene $C_1=0$

$$q_r = Se \frac{r}{2}$$

9. Introduciendo ley de Fourier: $q = -k A \frac{dT}{dr} \dots \dots \dots$ Ley de Fourier

$$\left(-k \frac{dT}{dr} = Se \frac{r}{2} \right)$$

10. Separando los términos de r y T :

$$-k \, dT = Se \frac{r}{2} \, dr$$

Despejando a dT :

$$dT = -\frac{1}{k} \frac{Se}{2} r \, dr$$

11. Integrando la ecuación:

$$\int dT = -\frac{Se}{2k} \int r \, dr$$

Se obtiene:

$$T = \frac{Se}{4k} r^2 + C_2$$

12. Sustituyendo los límites del sistema en la ecuación:

$$T_0 = -\frac{Se}{4k} r^2 + C_2$$

13. Despejando para encontrar el valor de C_2 :

$$C_2 = T_0 + \frac{Se r^2}{4k}$$

14. Igualando los términos para el perfil de temperatura:

$$T = T_0 = \frac{Se}{4k} [R^2 - r^2]$$

15. En el perfil de cantidad de calor se despeja T:

$$Q_r = q_r A|_{r=r} = (2\pi RL) \left(\frac{SeR}{T^2} \right)$$

16. Simplificando los términos y se obtiene:

$$Q_r = \pi LR^2 Se$$

Perfil de transferencia de calor debido a la disipación eléctrica

2.2.1.2 CONDUCCIÓN DE CALOR CON MANANTIAL CALORÍFICO DE ORIGEN ELÉCTRICO AISLADO (PARED CILÍNDRICA COMPUESTA)

El alambre del problema anterior está cubierto con un aislamiento. La temperatura entre la interface aislante-medio ambiente es T y el radio del alambre recubierto es R . Obtener el perfil de la temperatura en el aislante.

1. Balance general:

$$Sq_r|_{r=r} - Sq_r|_{r=r+\Delta r} = 0$$

Considerar que:

$$S = 2\pi rL$$

Sustituyendo en el balance general:

$$2\pi rLq_r|_{r=r} - 2\pi rLq_r|_{r=r+\Delta r} = 0$$

2. Se factorizan las constantes y se aplican el limite cuando el diferencial del radio tiende a cero, obteniendo la derivada:

$$d(rq_r) = 0$$

3. Introduciendo y sustituyendo la ley de Fourier:

$$q_r = -k \frac{dT}{dr} \dots \dots \dots \text{Ley de Fourier}$$

Una vez sustituida:

$$d\left(r\left(-\frac{kdT}{dr}\right)\right) = 0$$

Aplicando el álgebra correspondiente:

$$d\left(-rk\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

4. Integrando:

$$\int d\left(-rk\frac{dT}{dr}\right) = \int 0$$

Se obtiene:

$$-rk\frac{dT}{dr} = C_1$$

Reduciendo las constantes:

$$-r\frac{dT}{dr} = C_1$$

5. Separando los términos de r y T:

$$dT = C_1 \frac{dr}{r}$$

Integrando la ecuación:

$$\int dT = C_1 \int \frac{dr}{r}$$

Obteniendo:

$$T = -C_1 \ln(r) + C_2 \dots \dots \dots \text{Ec. General}$$

Considerando las condiciones Limite:

$$1^{ra} C.L. \quad r = R \quad T = T_0$$

$$2^{ra} C.L. \quad r = R_1 \quad T = T_1$$

6. Aplicando condiciones límite, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$T_0 = -C_1 \ln(R) + C_2$$

$$T_1 = -C_1 \ln(R_1) + C_2$$

7. Se igualan respecto a C2:

$$T_0 + C_1 \ln(R) = T_1 + C_1 \ln(R_1)$$

8. Obteniendo el valor de C1:

$$C_1 = \frac{T_1 - T_0}{\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)}$$

9. Sustituyendo en la ecuación general para obtener C2:

$$C_2 = T_0 + \frac{(T_1 - T_0) \ln(R)}{\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)}$$

10. Sustituyendo C1 y C2 nuevamente en ecuación general:

$$T = -C_1 \ln(r) + C_2 \dots \dots \dots \text{Ecuación general}$$

$$T = \frac{(T_1 - T_0) \ln(r)}{\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)} + T_0 + \frac{(T_1 - T_0) \ln(R)}{\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)}$$

11. Simplificando términos comunes y se reordena:

$$T = \frac{\Delta T}{\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)} [-\ln(r) + \ln(R)] + T_0$$

Aplicando las leyes de los logaritmos correspondiente:

$$T = \frac{\Delta T}{\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)} \left(\ln\left(\frac{R}{r}\right) \right) + T_0$$

Perfil de transferencia de calor de origen calorífico pero aislado.

2.2.1.3 CONDUCCIÓN DE CALOR CON UN MANANTIAL CALORÍFICO DE ORIGEN NUCLEAR (EJERCICIO PROPUESTO)

Se considerará un elemento combustible nuclear de forma esférica. El sistema consta de una esfera de material fisionable, de radio R^F revestida de con una vaina esférica de aluminio, cuyo radio externo es R^c . En el interior del material fisionable se producen fragmentos de fisión que poseen energías cinéticas elevadas. La principal fuente de energía calorífica en el reactor se debe a las colisiones entre estos fragmentos y los átomos de material fisionable.

Este manantial volumétrico de energía calorífica que resulta de la fisión nuclear, se determina llamarlo S . Dicho manantial no será un informe en el interior de la esfera del material fisionable, sino mínimo en el centro de la misma. Para los fines de este problema, se supondrá que el material puede representarse, aproximadamente, mediante una función parabólica sencilla:

$$S_n = S_{n0} \left(1 + b \left(\frac{r}{R^F} \right)^2 \right)$$

En esta ecuación, S_{n0} es la velocidad volumétrica de producción de calor en el centro de la esfera, y B es una constante adimensional comprendida entre 0 y 1.

Respuesta:

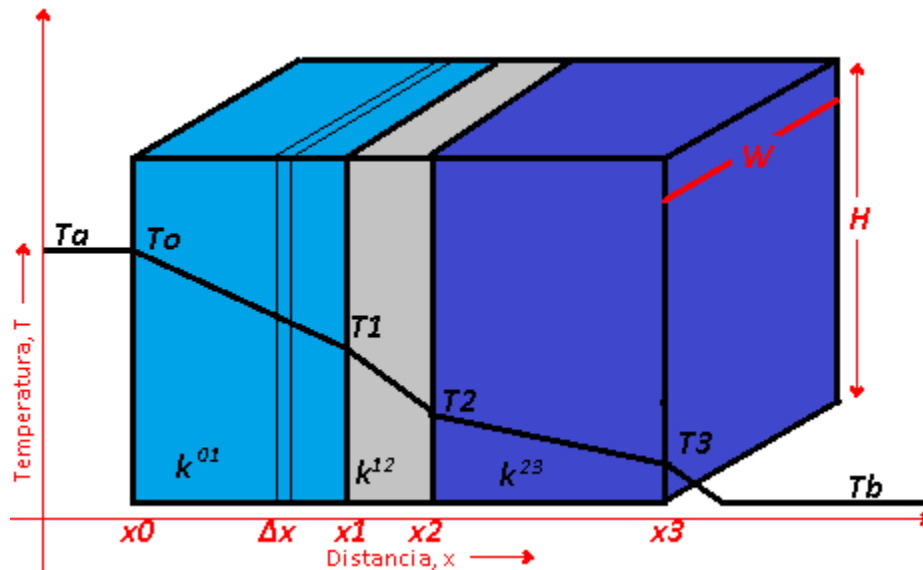
$$T^c - T_0 = \frac{S_{n0} R^{F2}}{3k^c} \left(1 - \frac{3}{5} b \right) \left(\frac{R^F}{r} - \frac{R^F}{R^c} \right)$$

La temperatura máxima de la esfera del material fisionable puede hallarse fácilmente haciendo $r=0$. Este valor es conveniente hacerlo con el fin de poder estimar el deterioro estructural.

2.2.1.4 CONDUCCIÓN DE CALOR A TRAVÉS DE UNA PARED COMPUESTA SITUADA ENTRE DOS CORRIENTES DE FLUIDOS A TEMPERATURAS T_a y T_b .

En los problemas industriales de transmisión de calor se opera frecuentemente conducción a través de paredes constituidas por capas de varios materiales cada uno de los cuales tiene su propia y característica conductividad calorífica.

Calculemos una resistencia total a partir de cada una de las distintas resistencias.



En la figura se presenta una pared compuesta formada por tres materiales de distintas distancias.

1. Balance para la pared 1:

$$Sq_x|_{x=x} - Sq_x|_{x=x+\Delta x} = 0$$

Considerando que: $S = wH$, se sustituye en el balance de la pared 1:

$$wHq_x|_{x=x} - wHq_x|_{x=x+\Delta x} = 0$$

2. Se factorizan las constantes y se cambian los signos de los términos:

$$\frac{wHq_x|_{x=x+\Delta x} - wHq_x|_{x=x}}{wH} = 0$$

Aplicando límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene la siguiente derivada:

$$d(q_x^{01}) = 0$$

Integrando:

$$\int d(q_x^{01}) = 0$$

Se obtiene:

$$q_x^{01} = C_1$$

Considerando que para las otras paredes son las mismas condiciones, se realizan las siguientes conclusiones:

Balance para la pared 2

$$d(q_x^{12}) \rightarrow q_x^{12} = C_2$$

Balance para la pared 3

$$d(q_x^{23}) \rightarrow q_x^{23} = C_3$$

Condiciones

$$\begin{aligned} x = x_1, \quad q_x^{01} = q_x^{12} \therefore C_1 = C_2 \quad q_x^{01} = q_x^{12} = C \text{ (Punto en común)} \\ x = x_2, \quad q_x^{12} = q_x^{23} \therefore C_2 = C_3 \quad q_x^{12} = q_x^{23} = C \text{ (Punto en común)} \end{aligned}$$

Deduciendo

$$q_x^{01} = q_x^{12} = q_x^{23} = C \dots \dots \dots \text{Ec. 1}$$

Condición:

$$\begin{aligned} x = x_0 \\ q_x^{01} = q_0 \dots \dots \dots \text{Ec. 2} \\ q_x^{01} = q_x^{12} = q_x^{23} = q_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_x^{01} = q_0 \dots \dots \dots \text{Ec. 3} \\ q_x^{12} = q_0 \dots \dots \dots \text{Ec. 4} \\ q_x^{23} = q_0 \dots \dots \dots \text{Ec. 5} \end{aligned} \quad \begin{aligned} q_0 = -k^{01} \left(\frac{dt^{01}}{dx} \right) \dots \dots \dots \text{Ec. 6} \\ q_0 = -k^{12} \left(\frac{dt^{12}}{dx} \right) \dots \dots \dots \text{Ec. 7} \\ q_0 = -k^{23} \left(\frac{dt^{23}}{dx} \right) \dots \dots \dots \text{Ec. 8} \end{aligned}$$

Sustituyendo ley de Fourier e integrando definidamente:

$$\int_{T_1}^{T_0} dT^{01} = -\frac{q_0}{k^{01}} \int_{x_1}^{x_0} dx$$

Se obtiene:

$$(T_0 - T_1) = -\frac{q_0}{k^{01}} (x_0 - x_1) \dots \dots \dots \text{Ec. 9}$$

$$\int_{T_2}^{T_1} dT^{12} = -\frac{q_0}{k^{12}} \int_{x_2}^{x_1} dx$$

Se obtiene:

$$(T_1 - T_2) = -\frac{q_0}{k^{12}} (x_1 - x_2) \dots \dots \dots \text{Ec. 10}$$

$$\int_{T_3}^{T_2} dT^{23} = -\frac{q_0}{k^{23}} \int_{x_3}^{x_2} dx$$

$$(T_2 - T_3) = -\frac{q_0}{k^{23}} (x_2 - x_3) \dots \dots \dots \text{Ec. 11}$$

Para las condiciones en los extremos:

$$x = x_0 \text{ para } q_0 = h_0(T_a - T_0)$$

Se obtiene:

$$(T_a - T_0) = \frac{q_0}{h_0} \dots \dots \dots \text{Ec. 12}$$

$$x = x_3 \text{ para } q_3 = h_3(T_3 - T_b)$$

Se obtiene:

$$(T_3 - T_b) = \frac{q_3}{h_3} \dots \dots \dots \text{Ec. 13}$$

Sabiendo que:

$$q_x^{23} = q_0 \rightarrow (T_3 - T_b) = \frac{q_0}{h_3} \dots \dots \dots \text{Ec. 14}$$

Sumando Ec.9,10,11,12,14

$$\begin{aligned} & (T_0 - T_1) + (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_a - T_0) + (T_3 - T_b) \\ &= -\frac{q_0}{k^{01}}(x_0 - x_1) - \frac{q_0}{k^{12}}(x_1 - x_2) - \frac{q_0}{k^{23}}(x_2 - x_3) + \frac{q_0}{h_0} + \frac{q_0}{h_3} \\ & (T_a - T_b) = q_0 \left[\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_3} + \frac{x_1 - x_0}{k^{01}} + \frac{x_2 - x_1}{k^{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k^{23}} \right] \dots \dots \dots \text{Ec. 15} \end{aligned}$$

Despejando q_0

$$q_0 = \frac{(T_a - T_b)}{\left[\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_3} + \frac{x_1 - x_0}{k^{01}} + \frac{x_2 - x_1}{k^{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k^{23}} \right]} \dots \dots \dots \text{Ec. 16}$$

Obtenemos Q con:

$$\begin{aligned} Q &= q_0 A_1 \\ Q &= \frac{(T_a - T_b) w H}{\left[\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_3} + \frac{x_1 - x_0}{k^{01}} + \frac{x_2 - x_1}{k^{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k^{23}} \right]} \\ u &= \left(\frac{1}{h_0} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{k^{i-1,i}} + \frac{1}{h_n} \right)^{-1} \\ & \text{Perfil de transferencia de calor} \end{aligned}$$

2.2.1.5 CONDUCCIÓN DE CALOR EN PAREDES COMPUESTAS CILÍNDRICAS (EJERCICIO PROPUESTO).

Efectuar un desarrollo análogo al ejercicio anterior, para el caso de una pared cilíndrica compuesta.

Respuesta:

$$U_0 = r_0^{-1} \left(\frac{1}{r_0 h_0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{k^{1-i,i}} + \frac{1}{r_3 h_3} \right)^{-1}$$

Perfil de temperatura

2.2.1.6 FLUJO TANGENCIAL EN TUBOS CONCÉNTRICOS EN GENERACIÓN DE CALOR DE ORIGEN VISCOSO (EJERCICIO PROPUESTO).

Considerando un fluido newtoniano incomprensible contenido entre dos cilindros coaxiales, el exterior de los cuales esta grande en estado estacionario con una velocidad angular Ω_0 .

Considere que las superficies mojadas de estos cilindros externo e interno están en las temperaturas T_l y T_k , respectivamente.

Supóngase un flujo laminar estacionario y Despréciase la variación de μ, p y k con la temperatura.

Este problema tiene interés en relación con los efectos caloríficos de viscometría.

Respuesta:

$$\Theta = \left[(N+1) + \frac{N}{\Re^2} \right] + \left[\frac{N}{k^2} - (N+1) \right] \frac{\ln \Re}{\ln k}$$

Perfil de temperatura

2.2.1.7 ACTIVIDAD PROPUESTA. ELABORACIÓN DE MAQUETAS PARA LA DESCRIPCIÓN DEL PERFIL DE TEMPERATURA.

Seleccione uno de los siguientes perfiles de transferencia de calor:

- | | |
|---|---|
| I. Transferencia de calor sin generación en una superficie plana. | V. Transferencia de calor sin generación en una superficie envolvente cilíndrica compuesta. |
| II. Transferencia de calor sin generación en una superficie envolvente cilíndrica simple. | VI. Transferencia de calor sin generación de calor en una superficie en esfera compuesta con frontera convectiva. |
| III. Transferencia de calor sin generación en una superficie en esfera simple. | VII. Transferencia de calor en barra con generación de calor. |
| IV. Transferencia de calor sin generación en una pared compuesta de placas. | VIII. Transferencia de calor sin generación en una esfera con generación de calor. |

Una vez seleccionado el tema, investigar sobre el perfil de transferencia de calor. Se deberá comprender cómo se distribuye el calor en su perfil específico, cómo afecta el coeficiente de transferencia de calor y cuáles son las condiciones de frontera relevantes.

Para fortalecer la asimilación de compuestos, se deberá diseñar y construir una maqueta que represente su perfil de transferencia de calor. Para la exposición de la maqueta, se tiene que incluir:

- Ubicación de coordenadas (esféricas o rectangulares).
- Zonas de flujo de calor.
- Efecto del coeficiente de transferencia de calor en la transferencia de temperatura.
- Condiciones de frontera específicas para el proceso.

Después de todas las presentaciones, se promoverá una discusión en clase sobre los diferentes perfiles de temperatura y las maquetas creadas.

2.3 RADIO CRÍTICO DE AISLAMIENTO.

El radio crítico de aislamiento es un concepto clave en el análisis del balance de transferencia de calor, especialmente en el contexto de la conducción de calor a través de una superficie sólida. Se refiere al punto en el cual el incremento en el radio de aislamiento alrededor de un cuerpo sólido deja de tener un efecto significativo en la reducción de la pérdida de calor o en la ganancia de calor desde el cuerpo hacia el entorno.

En otras palabras, el radio crítico de aislamiento representa la distancia a partir de la cual agregar más material aislante alrededor de un objeto sólido no produce una disminución sustancial en la transferencia de calor a través de ese objeto. Este concepto es fundamental en el diseño eficiente de sistemas de aislamiento térmico, ya que ayuda a determinar la cantidad óptima de material aislante a utilizar para lograr los niveles deseados de eficiencia térmica.

Se necesita aislar un recipiente metálico que contiene un líquido caliente. Se pretende agregar un material aislante alrededor del recipiente para reducir la pérdida de calor hacia el ambiente y mantener el líquido caliente durante más tiempo.

Se comienza agregando capas de material aislante alrededor del recipiente. A medida que aumenta el grosor del aislamiento, se observa que la pérdida de calor disminuye. Sin embargo, llega un punto en el que agregar más capas de aislamiento ya no tiene un impacto significativo en la reducción de la pérdida de calor. Este punto es el radio crítico de aislamiento.

2.4 OBTENCIÓN DE PERFILES DE TEMPERATURA EN LA CONDUCCIÓN DE CALOR EN UNA ALETA DE ENFRIAMIENTO O SUPERFICIES EXTENDIDAS.

La conducción de calor es el cálculo de la eficiencia/ eficacia de una aleta de enfriamiento. Estas aletas se utilizan para aumentar la superficie disponible para la transmisión de calor entre paredes metálicas y fluidos que son muy malos conductores tales como gases.

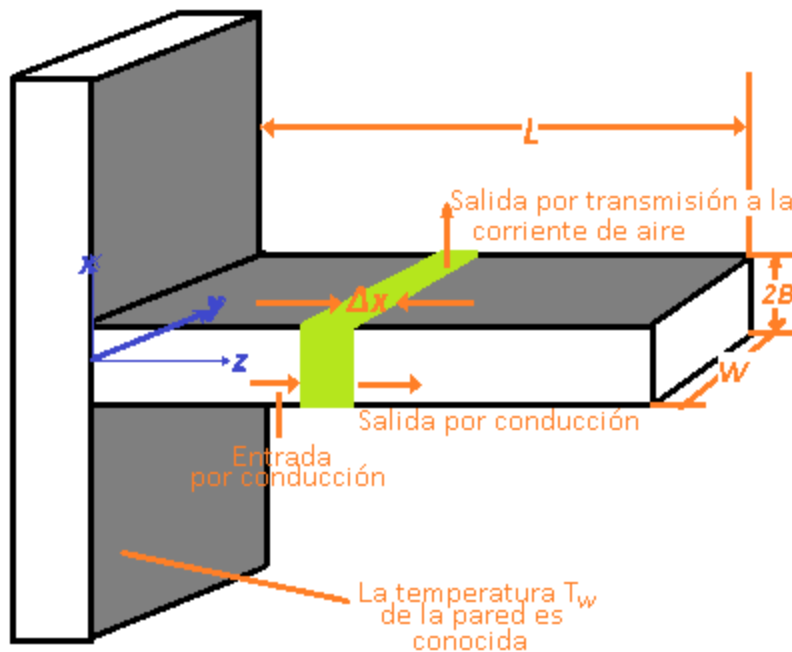
Puede obtenerse una descripción aceptable del sistema sustituyendo la verdadera situación física por un modelo aproximado.

Caso real:

- T es función de z y x, pero la influencia de z es más importante.
- Por el extremo de la aleta área y los bordes se pierde una pequeña cantidad de calor.
- El coeficiente de transmisión de calor es función de la posición.

Modelo:

- T solo es función de z.
- No hay pérdida de calor de pared externo y los bordes.
- La densidad de flujo de calor en la superficie viene dada por $q = h(T - T_a)$ en la que h es constante y $T = T(z)$.



1. Aplicando un balance de energía en el Δz de la aleta:

$$q_{x|_x} 2BW - q_{z|_{z+\Delta z}} 2BW - h(2W\Delta z)(T - T_0)$$

2. Dividiendo por $2 B W \Delta z$ y pasando al limite cuando Δz tiende a cero.

$$-\frac{dq_z}{dz} = \frac{h}{b}(T - T_0)$$

Introduciendo la ley de Fourier:

$$q_r = -k \frac{dT}{dr} \dots \dots \dots \text{Ley de Fourier}$$

Siendo k conductividad calorífica del metal que se considera constante, se obtiene:

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{h}{kB} (T - T_0)$$

3. Esta ecuación se resuelve con las siguientes condiciones límite:

$$1) \text{ C.L.} \quad z = 0 \quad T = T_w$$

$$2) \text{ C.L.} \quad z = L \quad \frac{dT}{dz} = 0$$

4. Introduciendo las variables adimensionales:

$$\theta = \frac{T - T_a}{T_w - T_a} \dots \dots \dots \text{Temperatura adimensional}$$

$$\mathfrak{z} = \frac{z}{L} \dots \dots \dots \text{Distancia adimensional}$$

$$N = \sqrt{\frac{hL^2}{kB}} \cong \text{Coeficiente adimensional de transmisión de calor}$$

5. De acuerdo con esto, el problema puede replantearse de esta forma:

$$\frac{d^2\odot}{d\mathfrak{z}^2} = N^2\odot \text{ con } \odot|_{c=0} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{d\odot}{dL}|_{c=1} = 0$$

6. Al integrar y determinar las dos constantes de integración se obtiene la siguiente función:

$$6 = \cosh NL - (\tanh N) \sinh NL$$

7. Que se expresa como:

$$\odot = \frac{\cosh N(1 - L)}{\cosh N}$$

Es preciso resaltar que esta expresión es solamente aceptable si las pérdidas de calor en los bordes son desperdiciados.

La eficiencia de una aleta se define por:

$$n: \frac{\text{Calor disipado por la superficie de la aleta}}{\text{Calor que se disipa en la superficie se mantuviese en } T_w'}$$

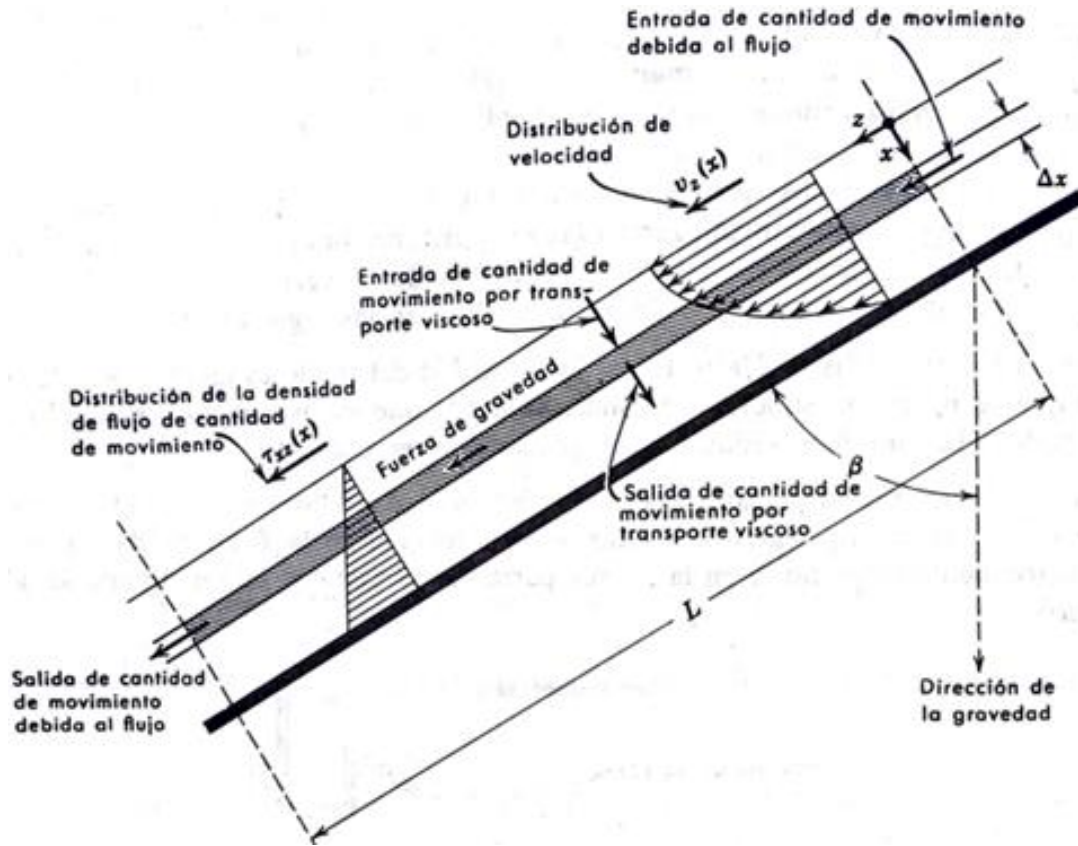
El valor teórico de n para el problema considerado es:

$$n = \frac{(\int_0^w \int_0^L h(T - T_a) dz dy)}{(\int_0^w \int_0^L h(T_w - T_a) dz dy)}$$

$$\odot \frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{z}} = \frac{1}{\cosh(N)} \left(\frac{1}{N} \sinh N c_1 - \mathfrak{z} \right) \Big|_0^1 = \frac{\tanh N}{N}$$

2.4.1 FLUJO ESTACIONARIO DE UNA PELÍCULA NO ISTÉRMICA.

Un líquido descendente con flujo laminar estacionario sobre la superficie de un plano inclinado, tal como se indica en las figuras. Las condiciones son tales que la superficie libre del líquido se mantiene a $T = T_0$, y la superficie del sólido situada en $x = \delta$ se mantiene a $T = T_\delta$. Las correspondientes viscosidades del fluido son μ_0 y μ_s respectivamente y tanto la densidad como la conductividad calorífica pueden suponerse constantes.



Desarrollar expresiones para la distribución de velocidad en función de las propiedades del fluido supóngase que la variación de la viscosidad con la temperatura puede expresarse mediante una ecuación de la forma.

De acuerdo con lo que sugiere la teoría de Eyring siendo A y B constantes empíricas los efectos finales y el calentamiento viscoso pueden despreciarse.

1. Siendo entonces el balance general:

$$\tau_{xz}(Lw)|_x - \tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta x} + \Delta_z^2 \rho(w\Delta x)|_z + \rho Lw\Delta x g_z = 0$$

2. Factorizando las constantes $(Lw\Delta x)$ y cambiando los signos de los términos:

$$\frac{\tau_{xz}(Lw)|_x - \tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta x}}{Lw\Delta x} + \frac{\Delta_z^2 \rho(w\Delta x)|_z + \rho Lw\Delta x g_z}{Lw\Delta x} = 0$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\frac{\tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta x} - \tau_{xz}(Lw)|_x}{\Delta x} - \rho g_z = 0$$

Se despeja a ρg_z :

$$\frac{\tau_{xz}(Lw)|_{x=x+\Delta x} - \tau_{xz}(Lw)|_x}{\Delta x} = \rho g_z$$

1. Aplicando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene la derivada:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho g_z$$

2. Despejando términos independientes y dependientes:

$$\partial \tau_{xz} = \rho g_z dx$$

3. Integrando la ecuación:

$$\int d\tau_{xz} = \rho g_z \int dx$$

Se obtiene:

$$\tau_{xz} = \rho g_z x + C_1$$

4. Resolviendo para C_1 :

$$C_1 = 0 \therefore \tau_{xz} = \rho g_z x$$

5. Aplicamos las ecuaciones de variación

$$\text{Si } V_z = 0 \quad V_x V_y = 0$$

$$\text{Si } V_x = 0 \therefore \frac{\partial V_x}{\partial t} - \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0$$

$$\text{Si } V_y = 0 \therefore \frac{\partial V_y}{\partial t} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0$$

$$\text{Si } V_z \neq 0 \therefore \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y} = 0$$

6. Para el componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_z$$

Reduciéndose a:

$$0 = \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \rho g_z$$

Despejando y considerando la viscosidad constante:

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \rho g_z$$

7. Sustituyendo y reordenando:

$$0 = \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \right) + \rho g_z \dots \dots \dots \text{Ec. A}$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \right) = -\rho g_z \quad \therefore \quad z = \cos \beta$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \right) = -\rho g \cos \beta$$

8. Sustituyendo en la Ec. A

$$\mu d\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}\right) = -\rho g \cos\beta \int dx$$

$$\mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}\right) = -\rho g \cos\beta x + C_1 \dots \dots \dots \text{Ec. B}$$

$$\tau_{xz} = 0 \qquad x = 0 \qquad C_1 = 0$$

9. Sustituyendo C1 en (Ec. B) y ordenando

$$\mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}\right) = -\rho g \cos\beta \dots \dots \dots \text{Ec. C}$$

10. Considerando que la viscosidad depende de la posición en la película y que su comportamiento la refiere en el siguiente modelo:

$$\mu = \mu_0 e^{-\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}$$

11. Sustituyendo el valor de μ en la ecuación C:

$$\mu_0 e^{-\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x}\right) = -\rho g x \cos\beta$$

Despejando a dV_z :

$$dV_z = -\frac{\rho g x \cos\beta}{\mu_0 e^{-\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}} dx$$

12. Integrando:

$$\int dV_z = -\frac{\rho g \cos\beta}{\mu_0} \int x e^{\left(\frac{\alpha x}{\delta}\right)} dx$$

13. Introduciendo $\frac{s^2}{\delta} = 1$ y reordenando:

$$\int dV_z = -\frac{\rho g S^2 \cos\beta}{\mu_0} \int \frac{x}{\delta} e^{\left(\frac{\alpha x}{\delta}\right)} d\frac{x}{S} \dots \dots \dots \text{Ec. D}$$

14. Haciendo el siguiente cambio de variable $\left(a = \frac{x}{\delta}\right)$ a la segunda fórmula de la Ec. D:

$$\int a e^{a\alpha} da$$

15. Integrando por partes:

$$u = a \qquad v = \frac{1}{\alpha} e^{a\alpha}$$

$$du = da \qquad dv = e^{a\alpha} da$$

16. Aplicando la fórmula $uv - \int v du$:

$$\int a e^{a\alpha} da = \frac{a}{\alpha} e^{a\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} e^{a\alpha} + C_2 \dots \dots \dots \text{Ec. E}$$

17. Al sustituir Ec. E en Ec. D y haciendo nuevamente el cambio de variable

$$a = \frac{x}{\delta}$$

$$V_z = -\frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{\mu_0} \left[\frac{x}{\delta \alpha} e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} + C_2 \right] \dots \dots \dots \text{Ec. F}$$

18. Evaluando la C2 con la 2° condición límite:

$$\begin{aligned} x = \delta & \quad \therefore \quad V_z = 0 \\ -C_2 &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha} \\ C_2 &= e^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

19. Sustituyendo C2 en Ec. F y ordenando:

$$\begin{aligned} V_z &= -\frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \left[\frac{\alpha}{d} e^{\alpha \left(\frac{x}{\delta} \right)} - \frac{1}{\delta^2} e^{\alpha \left(\frac{x}{\delta} \right)} + e^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \\ V_z &= -\frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \left[e^{\alpha \left(\frac{x}{\delta} \right)} \left(\frac{x}{\delta \alpha} - \frac{1}{\delta^2} \right) + e^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \\ V_z &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \left[e^{\alpha} \left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta} \right) - e^{\alpha \left(\frac{x}{\delta} \right)} \left(\frac{1}{\delta \alpha} - \frac{1}{\delta^2} \right) \right] \end{aligned}$$

20. Perfil de temperatura en dirección de x:

$$\begin{aligned} S q_x|_{x=x} - S q_x|_{x=x+\Delta x} &= 0 \quad S = wL \\ wL q_x|_{x=x} - wL q_x|_{x=x+\Delta x} &= 0 \end{aligned}$$

21. Separando las constantes (wL) y cambiando los signos de los términos en la ecuación:

$$\frac{wL q_x|_{x=x+\Delta x}}{wL} - \frac{wL q_x|_{x=x}}{wL} = 0$$

22. Aplicando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ se obtiene la derivada:

$$\frac{dq_x}{dT} = 0$$

Separando términos independientes y dependientes:

$$dq_x = 0$$

23. Integrando:

$$\int dq_x = 0$$

Se obtiene:

$$q_x + C_1 = 0$$

24. Aplicando la ley de Fourier:

$$q_x = C_1 \quad q_x = -\frac{k d T}{dx} \dots \dots \dots \text{Ley de Fourier}$$

Sustituyendo:

$$-\frac{k d T}{dx} = C_1$$

Separando términos independientes y dependientes:

$$-k d T = (C_1)(dx)$$

25. Integrando:

$$\begin{aligned} -k \int dT &= C_1 \int dx \\ -k T &= C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

26. Sustituyendo para T:

$$T = -\frac{C_1 x + C_2}{k}$$

3. BALANCE DE CALOR EN ESTADO TRANSITORIO

En el análisis de la transferencia de calor, se encuentra que ciertos cuerpos exhiben un comportamiento particular donde su temperatura interna permanece uniforme en todo momento durante el proceso de transferencia de calor. Esta uniformidad en la temperatura permite representar la temperatura del cuerpo como una función del tiempo, denotada como $T(t)$. Este enfoque simplificado se conoce como análisis de sistemas concentrados y es útil para abordar ciertas clases de problemas de transferencia de calor sin sacrificar la precisión en los resultados.

En este análisis, se considera que el cuerpo actúa como un único punto o "bulto", donde toda su masa se comporta de manera uniforme en términos de temperatura. Aunque esta simplificación puede no capturar completamente la complejidad de la distribución de temperatura dentro del cuerpo, es adecuada para situaciones donde la variación espacial de la temperatura es insignificante o puede ser ignorada sin afectar significativamente los resultados del análisis.

3.1. MODULO DE BIOT Y DE FOURIER

3.1.1 NÚMERO DE BIOT

El número o módulo de Biot (N_{Bi}) es una medida adimensional que compara la resistencia al flujo interno de calor por conducción dentro de un cuerpo con la resistencia al flujo externo de calor por convección superficial. Cuando el N_{Bi} es pequeño, indica que la conducción térmica dentro del cuerpo es mucho más eficiente que la convección en la superficie externa.

Cuando el N_{Bi} es significativamente menor que 0.1, esto sugiere que el gradiente de temperatura dentro del cuerpo es despreciable en comparación con el gradiente de temperatura en la capa de fluido en la superficie. Bajo estas condiciones, es posible emplear el método de "capacidad calorífica global", también conocido como método de "capacidad térmica de bloque" o "método de calentamiento o enfriamiento newtoniano". Este método asume que la temperatura interna del objeto analizado es uniforme en toda su masa en cualquier instante.

Este enfoque es aplicable en una variedad de situaciones, como placas, cilindros o esferas, donde se obtienen errores menores al 5%. Esta práctica ha sido respaldada por diferentes fuentes académicas y literatura especializada, incluidos Kreith (1970), Pitts y Sissom (1975), Geankoplis (1982) y Holman (1986).

El número de Biot viene dado por:

Donde:

$$N_{Bi} = \frac{hL}{k}$$

L es la longitud característica del objeto.

k es la conductividad térmica del material del que está hecho el objeto.

h es el coeficiente de película.

Cuando se analiza el enfriamiento de un cuerpo caliente, la pérdida de calor por convección en la superficie se manifiesta como una disminución en su energía interna:

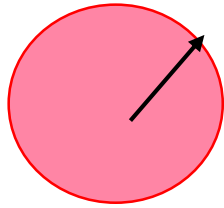


Figura. Enfriamiento de una esfera caliente

Considerando ecuaciones:

$$q = hA(T - T_{\infty})$$

Ecuación 1

$$q = C_p V \frac{dT}{dt}$$

Ecuación 2

$$hA(T - T_{\infty}) = -C_p V \frac{dT}{dt}$$

Ecuación 3

Donde:

h es el coeficiente de transferencia de calor

las A es el área superficial de la esfera ($4\pi r^2$)

T es la temperatura promedio de la esfera

T_{∞} es la temperatura del ambiente

C_p es el calor específico del material del que está hecha la esfera

ρ es la densidad del material del que está hecha la esfera

V es el volumen de la esfera ($\frac{4}{3}\pi r^3$)

t es el tiempo

La ecuación 1 representa la famosa "ley del enfriamiento de Newton", un principio fundamental en la transferencia de calor, que establece cómo cambia la temperatura de un objeto en función del tiempo cuando está en contacto con un medio con una temperatura diferente. Matemáticamente, esta ley se formula como una ecuación diferencial de primer orden, donde el tiempo actúa como la variable independiente.

Los procesos descritos por este tipo de ecuaciones se conocen como procesos de primer orden. Su respuesta dinámica está determinada por un parámetro crucial llamado constante de tiempo (τ). Esta constante indica el tiempo necesario para que el cambio en la variable alcance el 63.2% del cambio total posible.

Separando variables en la ecuación 3:

$$-\frac{hA}{C_p V} dt = \frac{dT}{(T - T_{\infty})}$$

Asimismo, puesto que T_{∞} puede suponerse constante, $dT = d(T - T_{\infty})$

La ecuación 2 puede expresarse como:

$$-\frac{hA}{C_p V} dt = \frac{d(T - T_{\infty})}{(T - T_{\infty})}$$

Integrando entre los límites de 0 y t para el tiempo y de T_0 y T para la temperatura:

$$\ln\left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}\right) = -\frac{hA}{C_p V} t$$

Aplicando leyes de los exponentes:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-\left(\frac{hA}{C_p V}\right)t}$$

La cantidad $\frac{C_p V}{hA}$ es la constante de tiempo para el proceso de enfriamiento de la esfera.

Recordando que el número de Biot viene dado por:

Donde:

$$N_{Bi} = \frac{hL}{k}$$

L es una constante que se obtiene al dividir el volumen de la esfera por el área de su superficie.

k es la conductividad térmica del material del que está hecha la esfera.

h es el coeficiente de película.

Para estimar la contribución de la radiación a la transferencia de calor total, se puede emplear la ecuación:

$$h_r = \varepsilon \sigma \frac{(T^4 - T_{\infty}^4)}{(T - T_{\infty})}$$

Donde:

h_r es el coeficiente de transferencia de calor por radiación.

ε es la emisividad del material del que está hecha la esfera.

σ es la constante de Stefan-Boltzmann que equivale a $5.669 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ (Holman, 1986:343).

3.1.2 MODULO DE FOURIER

En la física e ingeniería el número de Fourier o módulo de Fourier se caracteriza la conducción de calor. Conceptualmente es la relación entre la velocidad de la conducción de calor y la velocidad del almacenamiento de energía:

Donde:

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2}$$

α es la difusividad térmica

t es el tiempo característico

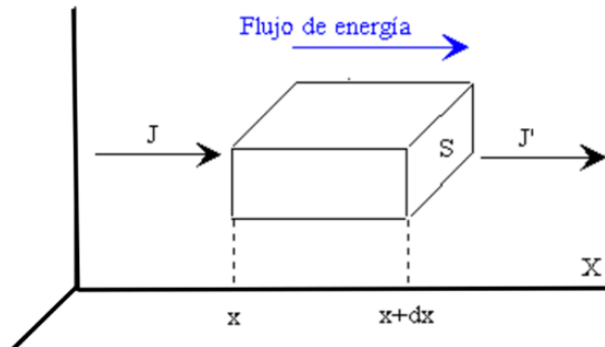
L es la longitud a través de la que la conducción de calor que ocurre.

Sea J la densidad de corriente de energía (energía por unidad de área y por unidad de tiempo), que se establece en la barra debido a la diferencia de temperaturas entre dos puntos de la misma. La ley de Fourier afirma que hay una proporcionalidad entre el flujo de energía J y el gradiente de temperatura.

$$J = -K \frac{dt}{dx} \dots \dots \dots \text{Ley de Fourier}$$

Siendo K una constante característica del material denominada conductividad térmica.

Consideremos un elemento de la barra de longitud dx y sección S . La energía que entra en el elemento de volumen en la unidad de tiempo es JS , y la que sale es $J'S$. La energía del elemento cambia, en la unidad de tiempo, en una cantidad igual a la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente.



Figura

$$JS - J'S = -\frac{dJ}{dx} S dx$$

Esta energía, se emplea en cambiar la temperatura del elemento. La cantidad de energía absorbida o cedida (en la unidad de tiempo) por el elemento es igual al producto de la masa de dicho elemento por el calor específico y por la variación de temperatura.

$$(\rho S dx)c \frac{dT}{dt}$$

Igualando ambas expresiones, y teniendo en cuenta la ley de Fourier, se obtiene la ecuación diferencial que describe la conducción térmica

3.2. PARÁMETROS CONCENTRADOS

El enfoque de sistemas concentrados permite simplificar los cálculos y facilita la resolución de problemas de transferencia de calor, especialmente en situaciones donde el cuerpo de interés exhibe propiedades uniformes o donde la variación

espacial de la temperatura es mínima en comparación con el tiempo considerado en el proceso de transferencia de calor.

Cuando se analiza una pequeña bola de cobre que ha sido retirada de un horno, se observa que su temperatura experimenta cambios con el tiempo, pero estos cambios no son significativos con respecto a la posición en un momento dado. Esto sugiere que la temperatura de la bola de cobre permanece uniforme en todo momento, sin importar su ubicación específica dentro de la bola. En otras palabras, la temperatura de la bola se considera constante y uniforme en todo su volumen durante el proceso de enfriamiento.

Este comportamiento indica que la distribución de temperatura dentro de la bola de cobre es homogénea, lo que significa que no hay grandes variaciones de temperatura de un punto a otro en su interior. Por lo tanto, se puede hablar de la temperatura de la bola en un momento dado sin necesidad de especificar una ubicación particular dentro de ella. Este concepto es fundamental para comprender y modelar la transferencia de calor en cuerpos sólidos durante procesos de enfriamiento o calentamiento.

Cuando consideramos un rosbif en un horno, observamos que la distribución de temperatura dentro de él es muy diferente a la de una bola de cobre. Si alguna vez ha cocinado un asado, habrá notado que la temperatura dentro del rosbif no es uniforme en absoluto. Esto es evidente si corta el rosbif a la mitad antes de que esté completamente cocido: las partes exteriores están bien cocidas, mientras que la zona central permanece casi cruda.

Esta disparidad en la distribución de temperatura ilustra claramente que el análisis de sistemas concentrados no es aplicable en este caso. En contraste con la bola de cobre, donde la temperatura se mantiene uniforme en todo el cuerpo, en el rosbif hay una clara variación de temperatura a lo largo de su estructura.

Este ejemplo del rosbif en el horno ayuda a comprender la importancia de considerar la distribución no uniforme de temperatura en ciertos sistemas, lo que lleva a utilizar enfoques más complejos para modelar y entender la transferencia de calor en estos casos.

Considere un cuerpo de forma arbitraria y masa m , volumen V , área superficial A_s , densidad ρ y calor específico C_p , inicialmente a una temperatura T_i . En el instante $T = 0$, el cuerpo está colocado en un medio a la temperatura T_∞ y se lleva a efecto transferencia de calor entre ese cuerpo y su medio ambiente, con un coeficiente de transferencia de calor h . En beneficio de la discusión, se supondrá que $T_\infty > T_i$, pero el análisis es igualmente válido para el caso opuesto. Se supondrá que el análisis de sistemas concentrados es aplicable, de modo que la temperatura permanece uniforme dentro del cuerpo en todo momento y sólo cambia con el tiempo, $T = T(t)$.

Durante un intervalo diferencial de tiempo, dt , la temperatura del cuerpo se eleva en una cantidad diferencial dT . Un balance de energía del sólido para el intervalo de tiempo dt se puede expresar como:

$$\begin{aligned} & (\text{Transferencia de calor hacia el cuerpo durante } dt) \\ & = (\text{El incremento en la energía del cuerpo durante } dt) \end{aligned}$$

O bien.

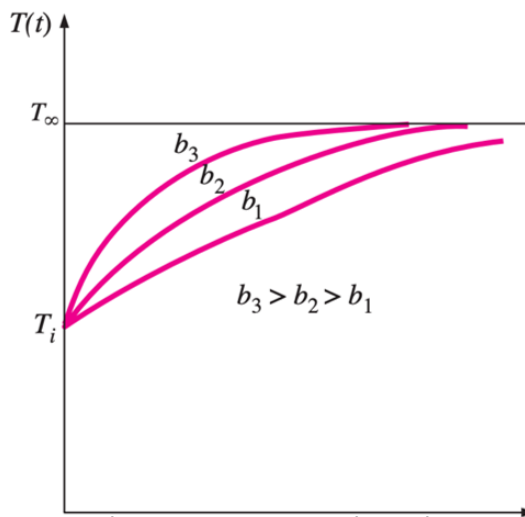
$$hA_s(T - T_\infty)dt = mc_p dT$$

Dado que $m = \rho V$ y $dT = d(T - T_\infty)$, puesto que $T_\infty = \text{constante}$, la ecuación se puede reacomodar como:

$$\frac{d(T - T_\infty)}{T - T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V C_p} dt$$

Al tomar el exponencial de ambos miembros y reacomodar, se obtiene

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt}; \quad b = \frac{hA_s}{\rho V C_p} \quad (1/s)$$



Es una cantidad positiva cuya dimensión es $(\text{tiempo})^{-1}$. El recíproco de b tiene unidad de tiempo (por lo común s) y se llama constante de tiempo. Se observa que tiene la gráfica, teniendo diferentes valores de b . Se pueden hacer dos observaciones a partir de esta figura y de la relación antes dada:

Figura. La temperatura de un sistema concentrado se acerca a la del medio ambiente a medida que transcurre el tiempo.

1. La ecuación $\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt}$ permite determinar la temperatura $T(t)$ de un cuerpo en el instante t o, de modo alternativo, el tiempo t requerido para alcanzar el valor específico $T(t)$.
2. La temperatura de un cuerpo se aproxima a la del medio ambiente, T_∞ , en forma exponencial. Al principio, la temperatura del cuerpo cambia con rapidez, pero, posteriormente, lo hace más bien con lentitud. Un valor grande de b indica que el cuerpo tenderá a alcanzar la temperatura del medio ambiente en un tiempo corto. Entre mayor sea el valor del exponente b ,

mayor será la velocidad de decaimiento de la temperatura. Note que b es proporcional al área superficial, pero inversamente proporcional a la masa y al calor específico del cuerpo. Esto no es sorprendente, ya que tarda más tiempo en calentarse o enfriarse una masa grande, en especial cuando tiene un calor específico grande.

Una vez que, con base en la ecuación $\frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{-bt}$, se cuenta con la temperatura $T(t)$ en el instante t , se puede determinar la razón de la transferencia de calor por convección entre el cuerpo y su medio ambiente en ese tiempo a partir de la ley de Newton del enfriamiento como

$$\dot{Q}(t) = hA_s[T(t) - T_\infty] \quad (W)$$

La cantidad total de transferencia de calor entre el cuerpo y el medio circundante durante el intervalo desde tiempo de $t = 0$ hasta t es simplemente el cambio en el contenido de energía de ese cuerpo:

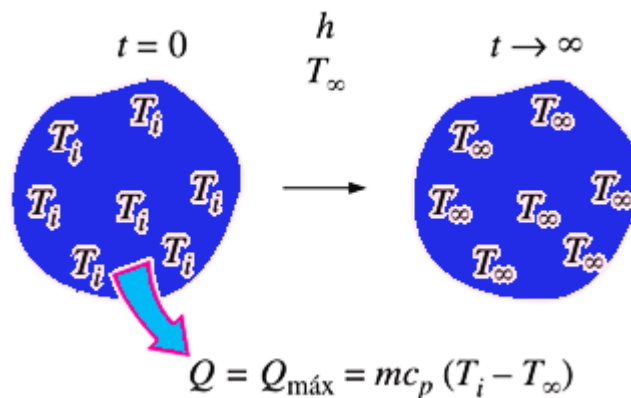
$$Q = mC_p[T(t) - T_i] \quad (kJ)$$

La cantidad de transferencia de calor llega a su límite superior cuando el cuerpo alcanza la temperatura T del medio circundante. Por lo tanto, la transferencia de calor máxima entre el cuerpo y sus alrededores es:

$$Q_{\text{máx}} = C_p(T_\infty - T_i) \quad (KJ)$$

También se pudo obtener esta ecuación al sustituir la relación de $T(t)$, en la relación para $\dot{Q}$ para integrar desde $t = 0$ hasta $t \rightarrow \infty$.

La transferencia de calor hacia un cuerpo o desde éste alcanza su valor máximo cuando alcanza la temperatura del medio ambiente.



El análisis de sistemas concentrados es una herramienta muy útil en el estudio de la transferencia de calor, pero es crucial determinar cuándo es apropiado utilizarlo. Un primer paso fundamental para establecer un criterio de aplicabilidad es definir una longitud característica, que es una medida representativa de la geometría del

sistema en estudio. Esta longitud característica puede ser cualquier dimensión significativa del sistema, como el diámetro de un tubo, el grosor de una placa o el radio de un cilindro.

La longitud característica es importante porque proporciona una escala de referencia para evaluar los efectos de la conductividad térmica y la transferencia de calor en el sistema. Permite comparar el tamaño del sistema con las escalas de longitud asociadas con los fenómenos de transferencia de calor, como la difusión térmica o la convección. Esta longitud característica (L_c) se calcula como:

$$L_c = \frac{V}{A_s}$$

Donde:

L_c es la longitud característica del objeto.

V es el volumen del objeto.

A_s es el área superficial del objeto.

Para el cálculo del número de Biot (B_i), se emplea

$$B_i = \frac{hL_c}{k}$$



Figura

También se puede expresar como:

$$B_i = \frac{\text{Convección de calor}}{\text{conducción de calor}}$$

El número de Biot se puede concebir como la razón entre la convección en la superficie del cuerpo con respecto a la conducción dentro de éste.

También se puede expresar como:

$$B_i = \frac{h}{k/L_c} \frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{\text{Convección en la superficie del cuerpo}}{\text{Conducción dentro del cuerpo}}$$

O bien,

$$B_i = \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{\text{Resistencia a la conducción dentro del cuerpo}}{\text{Resistencia a la convección en la superficie del cuerpo}}$$

Cuando un objeto sólido se calienta debido al contacto con un fluido más caliente que lo rodea, como sucede cuando se hornea una papa, el calor inicialmente se transfiere al objeto a través del proceso de convección, es decir, el fluido caliente transfiere calor al objeto. Luego, este calor se conduce hacia el interior del objeto.

El número de Biot es una medida que compara la facilidad con la que el calor se transfiere dentro del objeto (mediante la conducción térmica) con respecto a cómo se transfiere desde la superficie del objeto hacia el entorno circundante (mediante la convección). Un número pequeño de Biot indica que la resistencia a la transferencia de calor dentro del objeto es baja en comparación con la resistencia a la transferencia de calor fuera del objeto.

Cuando realizamos un análisis de sistemas concentrados en la transferencia de calor, estamos asumiendo que la temperatura dentro del cuerpo o material es uniforme en todas partes. Esto significa que no hay diferencias significativas de temperatura dentro del cuerpo en un momento dado. Este supuesto es válido solo cuando la resistencia térmica del material a la conducción de calor, es decir, la resistencia a que el calor se propague a través del material, es insignificante. Por lo tanto, el análisis de sistemas concentrados es preciso cuando el número de Biot es igual a cero y aproximado cuando el número de Biot es mayor que cero.

En muchos casos prácticos, es normal encontrarse con una incertidumbre del orden del 15% en el coeficiente de transferencia de calor por convección, representado por la letra 'h'. Esta incertidumbre puede surgir debido a varias razones, como variaciones en las condiciones del medio circundante o en la geometría del objeto de estudio. Además, asumir que 'h' es constante y uniforme puede ser una simplificación bastante grande, especialmente cuando lidiamos con formas geométricas irregulares.

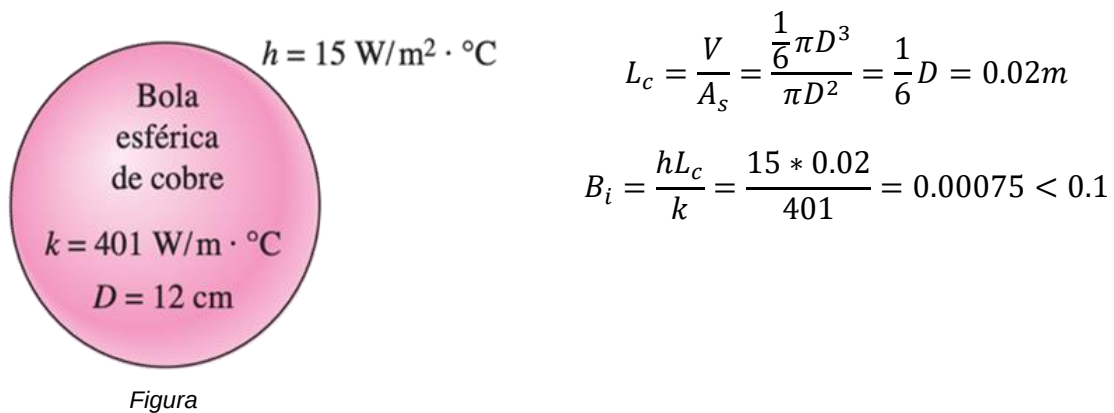
Por lo tanto, debemos plantearnos la pregunta de cuánta precisión estamos dispuestos a sacrificar para facilitar el análisis utilizando el enfoque de sistemas concentrados. En situaciones donde no tenemos suficiente información experimental sobre la geometría específica del sistema, es difícil afirmar con certeza que los resultados serán precisos dentro de un margen aceptable, incluso cuando el número de Biot es igual a cero. En estos casos, incluso una incertidumbre del 15% en 'h' puede tener un impacto significativo en la precisión de los resultados.

Sin embargo, se acepta generalmente que el análisis de sistemas concentrados es aplicable cuando el número de Biot es menor o igual a 0.1. Cuando cumplimos con este criterio, las diferencias de temperatura dentro del cuerpo en comparación con las del entorno (representadas por la diferencia $T - T_{\infty}$) permanecen dentro de un margen del 5%. Esto significa que incluso para geometrías ligeramente irregulares, como una esfera, podemos considerar razonablemente que la variación de temperatura dentro del cuerpo es mínima y, por lo tanto, uniforme en toda su extensión.

El primer paso en la aplicación del análisis de sistemas concentrados es el cálculo del número de Biot y la valoración de la aplicabilidad de este procedimiento. Es

posible que se desee utilizar este tipo de análisis, incluso cuando no se satisface el criterio $B_i < 0.1$, si una gran exactitud no es la preocupación principal.

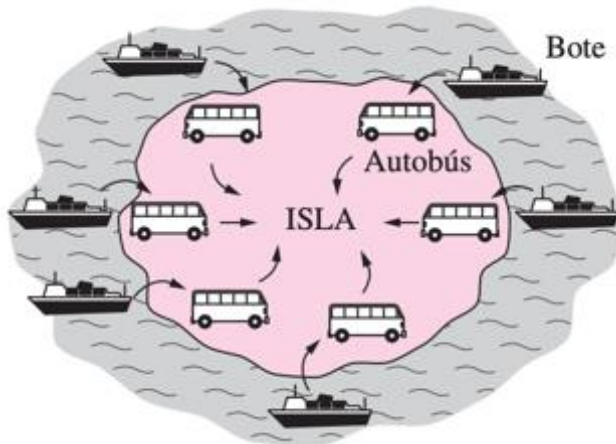
Note que el número de Biot es la razón entre la convección en la superficie con respecto a la conducción dentro del cuerpo, y debe ser tan pequeño como sea posible para que el análisis de sistemas concentrados sea aplicable. Por lo tanto, los cuerpos pequeños con conductividad térmica alta son buenos candidatos para este tipo de análisis, en especial cuando se encuentran en un medio que sea un mal conductor del calor (como el aire u otro gas) que esté inmóvil. Por tanto, la pequeña bola de cobre caliente colocada en aire estático, que se discutió con anterioridad, es la que con mayor probabilidad satisface el criterio para el análisis de sistemas concentrados.



Los cuerpos pequeños con altas conductividades térmicas y bajos coeficientes de convección son los que tienen más probabilidad de satisfacer el criterio para el análisis de los sistemas concentrados.

Note que el número de Biot es la razón entre la convección en la superficie con respecto a la conducción dentro del cuerpo, y debe ser tan pequeño como sea posible para que el análisis de sistemas concentrados sea aplicable. Por lo tanto, los cuerpos pequeños con conductividad térmica alta son buenos candidatos para este tipo de análisis, en especial cuando se encuentran en un medio que sea un mal conductor del calor (como el aire u otro gas) que esté inmóvil. Por tanto, la pequeña bola de cobre caliente colocada en aire estático, que se discutió con anterioridad, es la que con mayor probabilidad satisface el criterio para el análisis de sistemas concentrados.

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN SISTEMAS CONCENTRADOS



Figura

Para comprender el mecanismo de la transferencia de calor durante el calentamiento o el enfriamiento de un sólido por el fluido que lo circunda y el criterio para el análisis de sistemas concentrados, se considerará la analogía de que la transferencia de calor hacia un sólido, es como el tránsito de pasajeros hacia una isla.

Se considera una situación en la que personas en tierra firme necesitan llegar a una isla. Para lograrlo, deben tomar un bote desde la costa hasta el puerto de la isla y luego tomar un autobús para llegar a su destino final en la isla. La cantidad de personas que se aglomera en el puerto depende de varios factores, como el flujo de botes hacia la isla y la eficiencia del sistema de transporte terrestre en la isla misma.

Si la isla cuenta con un excelente sistema de transporte terrestre, con muchos autobuses disponibles y un servicio eficiente, es menos probable que se produzcan aglomeraciones en el puerto, especialmente si el número de botes que llegan a la isla es bajo. Sin embargo, si la situación es inversa y el sistema de transporte terrestre es deficiente o la cantidad de botes que llegan a la isla es alta, es probable que se produzcan grandes aglomeraciones en el puerto.

En una isla pequeña con una gran cantidad de autobuses rápidos, la posibilidad de aglomeraciones es considerablemente menor. Esto se debe a que el sistema de transporte terrestre cuenta con una alta capacidad para manejar eficientemente el flujo de personas que llegan en bote desde la costa hasta el puerto de la isla.

Con una flota de autobuses rápida y eficiente, las personas pueden ser transportadas rápidamente desde el puerto hacia diferentes destinos en la isla. Esto significa que el tiempo de espera en el puerto se reduce significativamente, ya que hay suficientes autobuses disponibles para llevar a las personas a sus destinos finales.

En contraste, si la isla es grande y cuenta con un número limitado de autobuses o si los autobuses son lentos y poco frecuentes, la situación sería diferente. En este

escenario, el flujo de personas desde el puerto hacia los destinos en la isla sería más lento y menos eficiente. Como resultado, las personas podrían experimentar largos tiempos de espera en el puerto antes de poder abordar un autobús y llegar a su destino.

En una isla grande con un sistema de transporte terrestre limitado, es más probable que se produzcan aglomeraciones en el puerto, ya que el sistema no puede manejar eficientemente el gran flujo de llegada de personas desde los botes. Esto crearía una diferencia significativa entre la cantidad de personas en el puerto y en la isla, con una mayor concentración de personas esperando en el puerto en comparación con las que ya han llegado a la isla.

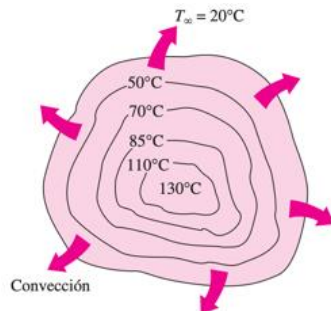
En la transferencia de calor, un sistema deficiente de transporte terrestre se asemeja a una conducción de calor ineficiente en un cuerpo. En esta analogía, la acumulación de personas en el muelle se compara con la acumulación de energía térmica y el aumento resultante de la temperatura cerca de la superficie del cuerpo en cuestión en comparación con sus partes interiores. Es evidente que el análisis de sistemas concentrados no es adecuado cuando hay una acumulación de energía en la superficie.

En esta analogía simplificada, hemos excluido la radiación y el tráfico aéreo hacia la isla. Similar a los pasajeros en el muelle, el calor cambia de "vehículos" en la superficie, es decir, de convección a conducción. Al observar que una superficie tiene un grosor virtualmente nulo y, por lo tanto, no puede retener energía, el calor que llega por convección a la superficie de un cuerpo debe continuar su trayecto hacia el interior de dicho cuerpo, principalmente a través de la conducción.

Considere la transferencia de calor de un cuerpo caliente hacia sus alrededores más fríos. El calor se transmite del cuerpo al fluido circundante por una diferencia de temperatura. Pero esta energía provendrá de la región cercana a la superficie y, por consiguiente, la temperatura del cuerpo cercana a dicha superficie caerá. Esto crea un gradiente de temperatura entre las regiones interior y exterior del cuerpo e inicia el flujo de calor por conducción del interior del mismo hacia la superficie exterior.

Cuando el coeficiente de transferencia de calor por convección h y, en consecuencia, la transferencia de calor por convección desde el cuerpo es altos,

la temperatura del cuerpo cerca de la superficie cae con rapidez. Esto creará una diferencia de temperatura grande entre las regiones interior y exterior a menos que el cuerpo pueda transferir calor desde la región interior a la exterior más rápido.



Figura

Cuando el coeficiente de convección h es alto y k es bajo, se tienen grandes diferencias de temperatura entre las regiones interior y exterior de un sólido grande.

Así, la magnitud de la diferencia máxima en la temperatura dentro del cuerpo depende de su capacidad para conducir calor hacia su superficie en relación con la aptitud del medio circundante para alejar por convección el calor de esa superficie. El

número de Biot es una medida de las magnitudes relativas de estos dos efectos competidores.

Recuerde que la conducción de calor en una dirección específica n , por unidad de área superficial, se expresa como

Donde:

$\dot{q}$ es el flujo de calor.

$$\dot{q} = -k \frac{dT}{dn} \quad \frac{dT}{dn} \text{ es el gradiente de temperatura.}$$

k es la conductividad térmica del sólido

Por tanto, la distribución de temperatura en el cuerpo será uniforme sólo cuando su conductividad térmica sea infinita, y no se sabe que exista ese material. Por tanto, dentro del cuerpo deben existir gradientes de temperatura y diferencias de temperatura, sin importar cuán pequeñas sean, para que se produzca el calor. Por supuesto, el gradiente de temperatura y la conductividad térmica son inversamente proporcionales para un flujo de calor dado. Por lo tanto, entre mayor sea la conductividad térmica, menor será el gradiente de temperatura.

3.3. APLICACIÓN DE LAS GRÁFICAS DE HEISSLER PARA PROBLEMAS EN GEOMETRÍAS SIMPLES. PLACAS, CILINDROS Y ESFERAS EN ESTADO TRANSITORIO.

Las gráficas de Heissler son herramientas útiles en la resolución de problemas de transferencia de calor en geometrías simples, como placas, cilindros y esferas, cuando se encuentran en estado transitorio. Se utilizan principalmente para cuerpos donde la variación de temperatura dentro de ellos es insignificante, es decir, cuerpos que permanecen casi uniformemente calientes o fríos durante un proceso. Este comportamiento es típico en cuerpos pequeños hechos de materiales altamente conductores.

En este contexto, se enfoca en cuerpos donde la variación de la temperatura interna es mínima, lo que significa que la temperatura se mantiene casi constante en todo el cuerpo durante un proceso. Esto se conoce como comportamiento isotérmico. Se habla principalmente de cuerpos pequeños hechos de materiales altamente conductores, donde los cambios de temperatura son rápidamente distribuidos y uniformizados en todo el cuerpo.

A pesar de las simplificaciones anteriores, es importante reconocer que, en la realidad, la temperatura dentro de un cuerpo puede variar de un punto a otro y también a lo largo del tiempo. En esta sección, nos adentramos en el estudio de la variación de la temperatura en función tanto del tiempo como de la posición. Esto es especialmente relevante en problemas unidimensionales, como los que involucran una pared plana extensa, un cilindro largo o una esfera, donde la transferencia de calor se distribuye de manera diferente a lo largo de su extensión y puede variar con el tiempo.

Considere una pared plana de espesor $2L$, un cilindro largo de radio r_o y una esfera de radio r_o , inicialmente a una temperatura uniforme T_i . En el instante $t = 0$, cada configuración geométrica se coloca en un medio grande que está a una temperatura constante T_∞ y se mantiene en ese medio para $t > 0$. La transferencia de calor se lleva a efecto entre estos cuerpos y sus medios ambientes por convección, con un coeficiente de transferencia de calor h uniforme y constante.

Note que los tres casos poseen simetría geométrica y térmica:

- La pared plana es simétrica con respecto a su plano central ($x = 0$), el cilindro es simétrico con respecto a su línea central ($r = 0$) y la esfera es simétrica con respecto a su punto central ($r = 0$).
- Se desprecia la transferencia de calor por radiación entre estos cuerpos y sus superficies circundantes, o bien, se incorpora el efecto de la radiación en el coeficiente de transferencia de calor por convección, h .
- Variación del perfil de temperatura con el tiempo en la pared plana. Cuando la pared se expone por primera vez al medio circundante que está a $T_\infty < T_i$, en $t = 0$, toda la pared está a la temperatura inicial T_i . Pero la temperatura de la pared en las superficies y cerca de éstas empieza.

3.3.1 APLICACIÓN DE LAS GRÁFICAS DE HEISSLER PARA PROBLEMAS EN GEOMETRÍAS SIMPLES

1. MEDICIÓN DE TEMPERATURA POR TERMOPARES

Se medirá la temperatura de un flujo de gas mediante un termopar cuya unión se considera una esfera de 1 mm de diámetro.

Las propiedades de la unión son $k = 35 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$, $\rho = 8\,500 \text{ kg/m}^3$ y $C_p = 320 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, y el coeficiente de transferencia de calor por convección entre la unión y el gas es $h = 210 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Determine cuánto tiempo transcurrirá para que la lectura del termopar sea 99% de la diferencia inicial de temperatura.

SOLUCIÓN

a) Se medirá la temperatura de un flujo de gas mediante un termopar. Se debe determinar el tiempo que transcurre para registrar 99% de la T inicial.

b) Suposiciones

1. La unión tiene forma esférica con un diámetro $D = 0.001 \text{ m}$.
2. Las propiedades térmicas de la unión y el coeficiente de transferencia de calor son constantes.
3. Los efectos de la radiación son despreciables.

c) Propiedades: En el enunciado del problema se dan las propiedades de la unión.

d) Análisis

1. La longitud característica de la unión es:

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{1}{6}\pi D^3}{\pi D^2} = \frac{1}{6}D = \frac{1}{6}(0.001 \text{ m}) = 1.67 \times 10^{-4} \text{ m}$$

2. Entonces el número de Biot queda

$$B_i = \frac{hL_c}{k} = \frac{(210 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}})(1.67 \times 10^{-4} \text{ m})}{35 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}} = 0.001 < 0.1$$

3. Por lo tanto, se puede aplicar el análisis de sistemas concentrados y el error que se comete en esta aproximación es despreciable. Con el fin de tener la

lectura de 99% de la diferencia inicial de temperatura $T_i - T_\infty$ entre la unión y el gas, se debe tener

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.01$$

Por ejemplo, cuando $T_i = 0^\circ\text{C}$ y $T_\infty = 100^\circ\text{C}$, se considera que un termopar da la lectura de 99% de esta diferencia aplicada de temperatura cuando indica $T(t) = 99^\circ\text{C}$.

4. El valor del exponente b es

$$b = \frac{hA_s}{\rho C_p V} = \frac{h}{\rho C_p L_c} = \frac{210 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}}{(8500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(320 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}})(1.67 \times 10^{-4} \text{ m})} = 0.462 \text{ s}^{-1}$$

5. Ahora se sustituyen estos valores en la ecuación $\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt}$ y se obtiene

$$0.01 = e^{-(0.462 \text{ s}^{-1})t}$$

Lo cual da

$$t = 10 \text{ s}$$

Por lo tanto, se debe esperar por lo menos 10 s para que la temperatura de la unión del termopar esté a menos de 1% de la diferencia inicial de temperatura entre la unión y el gas.

1. Discusión

Note que la conducción a través de los alambres y el intercambio por radiación con las superficies circundantes afectarán el resultado y deben considerarse en un análisis más refinado

2. PREDICCIÓN DEL MOMENTO DE LA MUERTE

A las 5 PM se encuentra una persona muerta en un cuarto cuya temperatura es de 20°C . Se mide la temperatura del cuerpo y resulta ser de 25°C , se estima que el coeficiente de transferencia de calor es $h = 8 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Considerando el cuerpo como un cilindro de 30 cm de diámetro y 1.70 m de largo, estime el momento de la muerte de esa persona.

SOLUCIÓN

a) Se encuentra un cuerpo que todavía está caliente. Se debe estimar el momento de la muerte.

b) Suposiciones

1. El cuerpo se puede considerar como un cilindro de 30 cm de diámetro y 1.70 m de largo.
2. Las propiedades térmicas del cuerpo y el coeficiente de transferencia de calor son constantes.
3. Los efectos de la radiación son despreciables.
4. La persona estaba sana cuando murió, con una temperatura corporal de 37°C.

c) Propiedades

La masa del cuerpo humano promedio es agua en un 72%, por consiguiente, se puede suponer que el cuerpo tiene las propiedades del agua a la temperatura promedio de $[(37+25) ^\circ\text{C}]/2 = 31^\circ\text{C}$; $k = 0.617 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$, $\rho = 996 \text{ kg/m}^3$, y $C_p = 4178 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$ (tabla A-9).

d) Análisis

1. La longitud característica del cuerpo es

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\pi r_o^2 L}{2\pi r_o L + 2\pi r_o^2}$$

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\pi(0.15 \text{ m})^2(1.7 \text{ m})}{2\pi(0.15 \text{ m})(1.7 \text{ m}) + 2\pi(0.15 \text{ m})^2} = 0.0689 \text{ m}$$

2. Entonces el número de Biot que se obtiene:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{(8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}})(0.0689 \text{ m})}{0.617 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}} = 0.89 > 0.1$$

3. Por lo tanto, no es aplicable el análisis de sistemas concentrados. Sin embargo, todavía se puede usar con el fin de obtener una estimación “aproximada” del momento de la muerte. En este caso, el exponente b es

$$b = \frac{hA_s}{\rho C_p V} = \frac{h}{\rho C_p L_c} = \frac{8 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}}{(996 \frac{kg}{m^3})(4178 \frac{J}{kg \text{ } ^\circ C})(0.0689 m)} = 2.79 \times 10^{-5} s^{-1}$$

4. Sustituyendo estos valores en la ecuación $\frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{-bt}$

$$\frac{25 - 20}{37 - 20} = e^{-(2.79 \times 10^{-5} s^{-1})t}$$

Resultando en:

$$t = 43860 s = 12.2 h$$

5. Por tanto, como una estimación aproximada, la persona murió alrededor de 12 horas antes de encontrar el cuerpo, por tanto, el momento de la muerte es 5 AM.

1. Discusión

En este ejemplo se demuestra cómo obtener valores aproximados con la aplicación de un análisis sencillo.

3. HUEVO COCIDO

Un huevo común se puede considerar como una esfera de 5 cm de diámetro. Inicialmente el huevo está a una temperatura uniforme de 5 °C y se lleva a agua hirviendo a 95°C. Tomando el coeficiente de transferencia de calor por convección como $h = 1200 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}$.

Determine cuánto tiempo transcurrirá para que el centro del huevo llegue a los 70°C.
SOLUCIÓN

1. Se cuece un huevo hirviendo.
2. Se debe determinar el tiempo de conocimiento del huevo.
3. El huevo tiene forma esférica con radio $r_o = 2.5 cm$
4. La conducción de calor en el huevo es unidimensional debido a la simetría térmica con respecto al punto medio.
5. Las propiedades térmicas del huevo y el coeficiente de transferencia de calor son constantes.
6. El número de Fourier es > 0.2 de modo que se puede aplicar las soluciones aproximadas de un término.
7. El contenido de agua de los huevos es alrededor de 74% y, como consecuencia, la conductividad térmica y la difusividad de ellos se pueden considerar que son las del agua a la temperatura promedio

$$T_m = \frac{5 + 70}{2}$$

$$T_m = 35 \approx 99.5 \text{ } ^\circ F$$

8. Teniendo los datos de

$$k = 0.627 \frac{W}{m^{\circ}C}$$

9. Calcular la difusividad térmica de

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

Buscar valor de α en tabla A-9

La difusividad térmica de α se puede calcular de

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

10. Empleando la fórmula para la interpolación

$$y = y_o + \frac{y_1 - y_o}{X_1 - X_o} (X - X_o)$$

11. Una vez teniendo el valor de la interpolación, se aplica la fórmula para obtener α

$$\alpha = \frac{\mu}{\rho} \times \frac{1}{P_r}$$

$$\alpha = \frac{4.57 \times 10^{-4} \frac{ibm}{ft \cdot h}}{62 \frac{ibm}{ft^3}} \times \frac{1}{4.6049} \times \frac{0.093 m^2}{1 ft^2}$$

$$\alpha = 1.5 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

12. Calculando el número de Biot para este problema:

$$Bi = \frac{hr_o}{k}$$

$$Bi = \frac{(1200 \frac{W}{m^2 \cdot ^{\circ}C})(0.025m)}{0.627 \frac{W}{m^{\circ}C}}$$

$$Bi = 47.8$$

Si $Bi_o > 0.1$ no es aplicable el análisis de sistemas concentrados.

13. Con base en la tabla 4-2 los coeficientes 1 y A1 para una esfera, correspondientes a este Bi, son:

$$\lambda_1 = 3.0754$$

$$A_1 = 1.9958$$

14. Se considera el centro de la esfera como:

$$r = 0$$

$$\theta_{esf} = \frac{T_o - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

$$\frac{70 - 95}{5 - 95} = (1.9958) e^{-(3.0753)^2 \tau}$$

15. Despejando a τ

$$\tau = 0.209$$

16. El cual es mayor que 0.2 y, por tanto, se puede aplicar la solución de un término con un error menor al 2%.
17. Entonces, a partir de la definición del número de Fourier, se determina que el tiempo de cocimiento es

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = Fo$$

Donde el tiempo es adimensional (número de Fourier)

18. Aplicando la formula

$$t = \frac{\tau r_o^2}{\alpha}$$

$$t = \frac{(0.209)(0.025m)^2}{(0.151 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s})}$$

$$t = 865 s \approx 14.4 \text{ minutos}$$

19. Por lo tanto, transcurrirán más o menos 15 min para el que el centro del huevo se caliente desde 5°C hasta 70°C.

4. CALENTAMIENTO DE LECHE

Para calentar algo de leche para un bebé, una madre la vierte en un vaso de pared delgada cuyo diámetro es de 6 cm. La altura de la leche en el vaso es de 7 cm. En seguida, coloca el vaso en una cacerola grande llena con agua caliente a 70 °C. la leche se agita constantemente, de modo que su temperatura es uniforme en todo momento.

Si el coeficiente de transferencia de calor entre agua y el vaso es de $120 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$.

Determine cuánto tiempo transcurrirá para que la leche se caliente de 3 °C hasta 38 °C. Considera las propiedades de la leche iguales a las del agua. En este caso, ¿Puede tratarse la leche como un sistema concentrado? ¿Porqué?

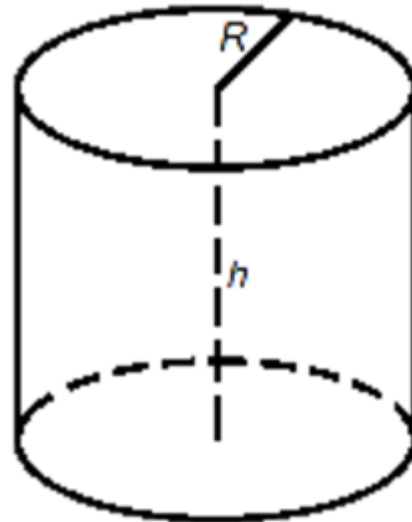
1. SOLUCION: Calculando la longitud característica:

$$L_c = \frac{V}{A_s}$$

$$L_c = \frac{\pi r_o^2 L}{2\pi r_o L + 2\pi r_o^2}$$

$$L_c = \frac{\pi(0.03)^2(0.07)}{2\pi(0.03)(0.07) + 2\pi(0.03)^2}$$

$$L_c = 0.01050 \text{ m}$$



2. Calculando el número de Biot

$$B_i = \frac{hL_c}{k}$$

$$B_i = \frac{(120)(0.0105)}{0.598}$$

$$B_i = 2.107 > 0.1$$

3. Para calcular b

$$b = \frac{hA_s}{\rho C_p L_c}$$

$$b = \frac{h}{\rho C_p L_c}$$

$$b = \frac{(120)}{(998)(4182)(0.0105)}$$

$$b = 0.002738s^{-1}$$

4. Calculando el tiempo:

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{T_t - T_{\infty}} = e^{-bt}$$

$$\frac{38 - 70}{3 - 70} = e^{-0.002738t}$$

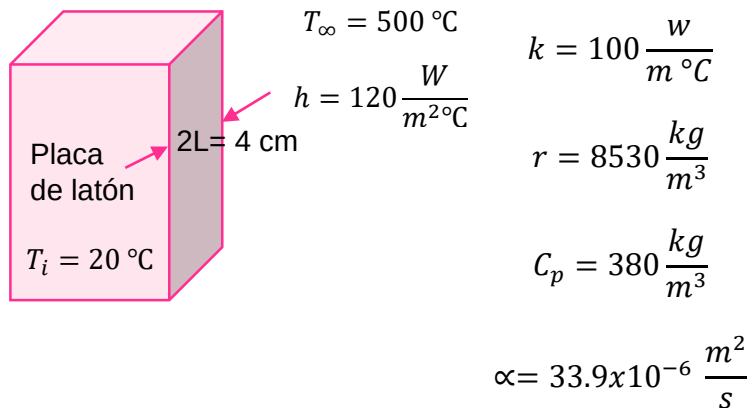
$$t = 270 s = 4.5 \text{ minutos}$$

5. Discusión: Se observa que el tiempo en que la leche tardara en calentarse es de 4.5 minutos que se puede traducir a 4 minutos con 30 segundos.

5. CALENTAMIENTO DE PLACAS GRANDES DE LATÓN EN UN HORNO

En una instalación de producción, placas grandes de latón de 4 cm de espesor que se encuentran inicialmente a una temperatura uniforme de 20°C se calientan al pasar por un horno que se mantiene a 500°C (figura 4-23). Las placas permanecen en el horno 7 min. Si el coeficiente combinado de transferencia de calor por convección y radiación como $h=120\frac{W}{m^2\text{°C}}$, determine la temperatura superficial de las placas cuando salen del horno.

1. Consideraciones



2. Tomando en cuenta que la mitad del espesor de la placa es de $L=0.02 \text{ m}$.

3. Análisis con el número de Biot

$$\frac{1}{Bi} = \frac{k}{hL}$$

$$\frac{1}{Bi} = \frac{100 \frac{W}{m\text{°C}}}{(120 \frac{W}{m^2\text{°C}})(0.02 \text{ m})}$$

$$Bi = 45.8$$

4. Calculando la temperatura:

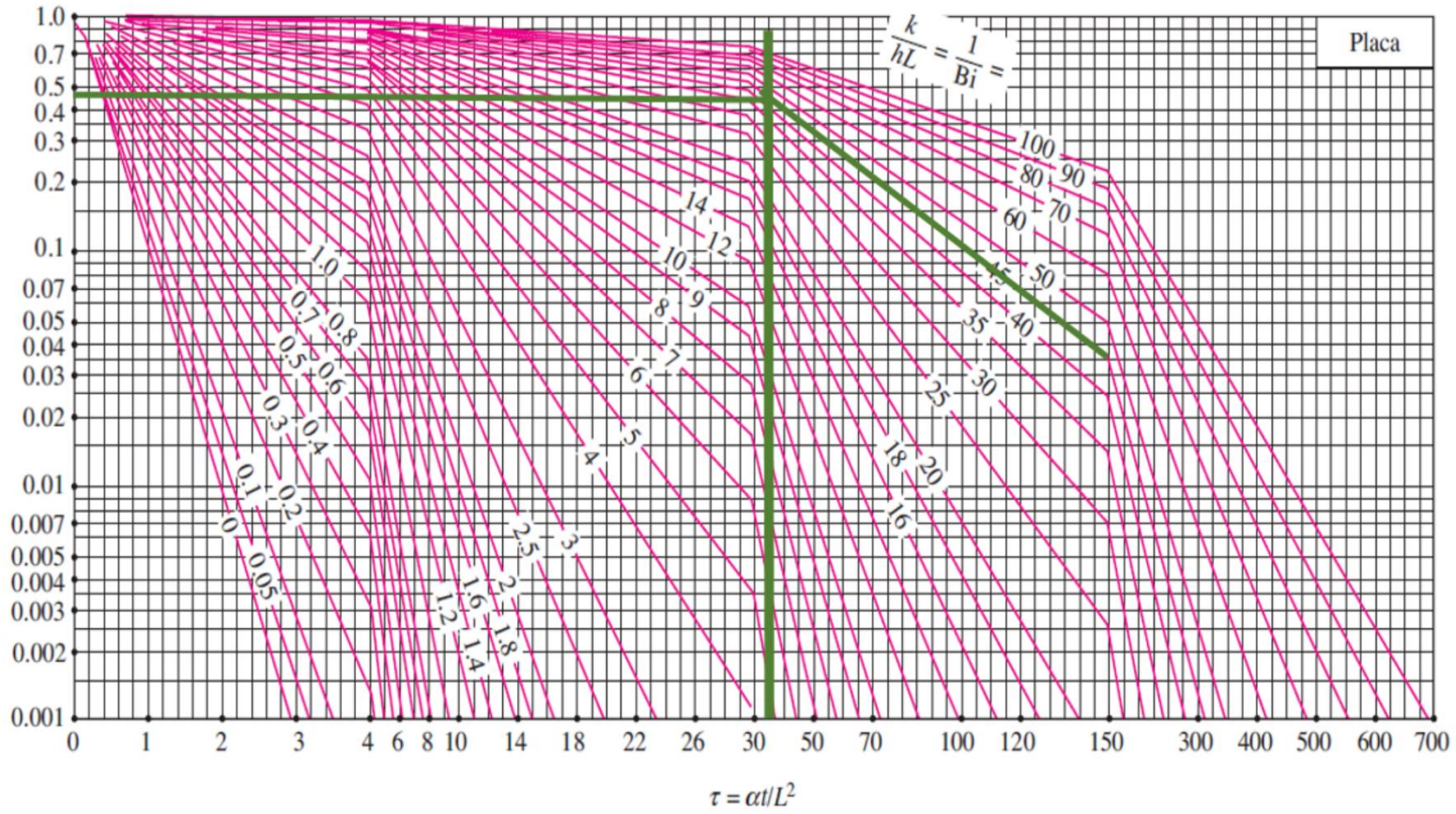
$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$\tau = \frac{(33.9 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s})(7 \times 60 s)}{(0.02)^2}$$

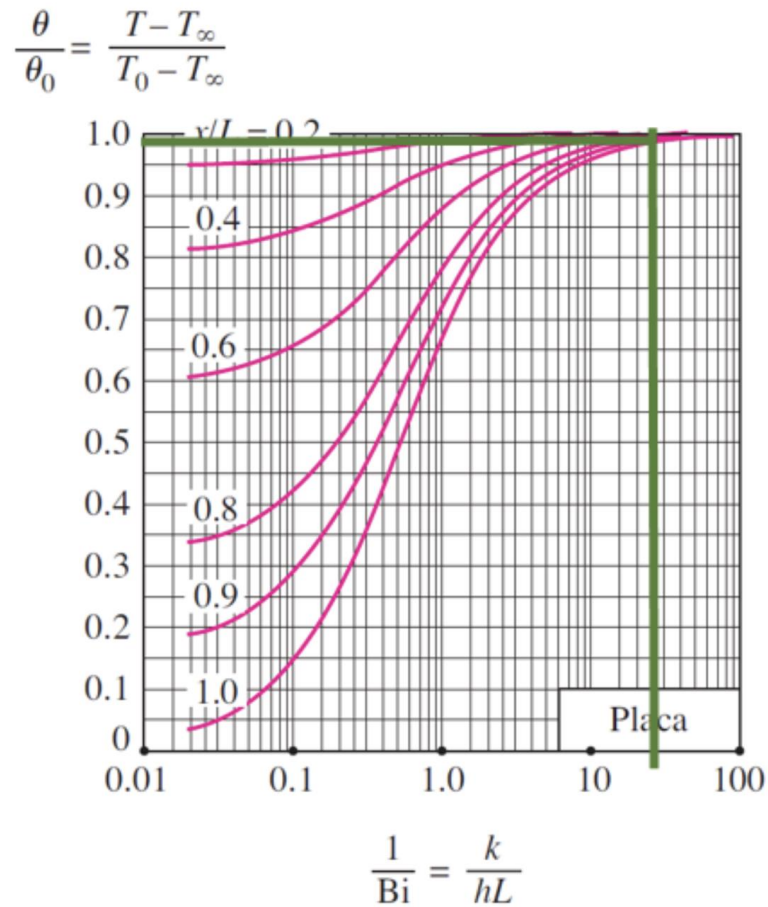
$$\tau = 35.6$$

5. Se obtienen los valores de los diagramas de Heissler

$$\theta_0 = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



6. Se hace una segunda lectura para determinar los siguientes valores



7. Obteniendo

$$\frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.46$$

8. Así mismo

$$\frac{1}{Bi} = \frac{k}{hL} = 45.8$$

9. Por lo tanto, se obtiene

$$\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.99$$

$$\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right) \left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)$$

$$= (0.46)(0.99)$$

$$= 0.455$$

10. Temperatura

$$T = T_{\infty} + 0.455(T_i - T_{\infty})$$

$$T = 500 + 0.455(20 - 500)$$

$$T = 282 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

11. Discusión: al salir del horno, la temperatura superficial de las placas será de 282 °C

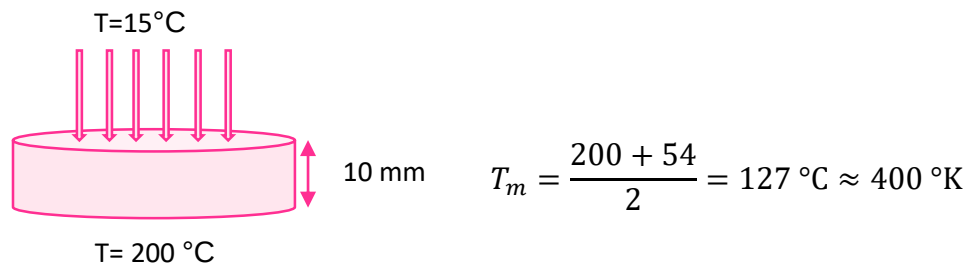
6. PLACA DE ACERO (EJERCICIO PROPUESTO)

Una placa de acero de 28 cm de grueso tiene inicialmente una temperatura de 400 °C. De improvisto ambas caras se mantiene una 35°C. El acero tiene una densidad de $7,835 \frac{kg}{m^3}$, una capacidad calorífica de $0.13 \frac{kcal}{kg \text{ }^{\circ}\text{C}}$ y una conductividad térmica de $37 \frac{kcal}{hm \text{ }^{\circ}\text{C}}$. Se desea predecir la temperatura en el centro de la placa a los 10 minutos si el coeficiente total de transferencia de calor en la superficie es de $120 \frac{kcal}{hm^2 \text{ }^{\circ}\text{C}}$. Use el método de Schmidt.

7. DISCO DE ACERO AL CARBONO

Un disco de acero al carbono AISI 1010 de espesor 10 mm inicialmente está a una temperatura de 200 °C. Por medio de un chorro de aire a 15 °C, aplicando en de sus caras, el disco es enfriado hasta los 54 °C. Si el coeficiente de transferencia de calor por convección en la cara en contacto con el aire es de $100 \frac{W}{m^2 K}$. Determine el tiempo que toma este proceso.

Asuma que la transferencia de calor en las demás caras del disco es despreciable.



$T_\infty = 15^\circ\text{C}$ $T_i = 200^\circ\text{C}$ $T_f = 54^\circ\text{C}$	$k = 58.7 \frac{W}{mK}$ $\rho = 7832 \frac{kg}{m^3}$ $C_p = 487 \frac{J}{kg K}$
--	---

1. Calculando el número de Biot

$$B_i = \frac{hL_c}{k}$$

$$k = 58.7 \frac{W}{mK}$$

$$L_c = \frac{V}{A_s}$$

$$h_\infty = 100 \frac{W}{m^2 K}$$

$$B_i = \frac{(100)(10 \times 10^{-3})}{58.7} = 1.7036 \times 10^{-2}$$

$$1.0736 \times 10^{-2} < 0.1$$

2. Despejando a t

$$\ln\left(\frac{T_f - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right) = \frac{-hA_s}{\rho V C_p} * t$$

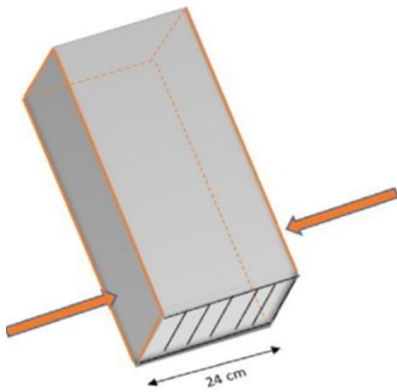
$$t = -\frac{\rho l C_p}{h} \ln\left(\frac{T_f - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)$$

$$t = -\frac{(7832)(10 \times 10^{-3})(487)}{100} \ln\left(\frac{54 - 15}{200 - 15}\right)$$

$$t = 593.87 \text{ s} \approx 10 \text{ minutos}$$

8. MÉTODO GRÁFICO DE SCHMIDT

Una placa de acero de 24 cm de grueso tiene inicialmente una temperatura de 400 °C. De improvisto ambas caras tiene una temperatura de 35 °C. El acero tiene una $\rho = 7865$, $C_p = 0.13$ y una conductividad térmica de 37. Se desea predecir la temperatura en el centro de la placa a los 10 minutos. Use método Schmidt.



1. Ecuación método Schmidt

$$T_{x,\theta+1} = \frac{1}{2} [(T_{x+1,\theta}) + (T_{x-1,\theta})]$$

Donde:

$T_{x,\theta+1}$ Temperatura en el tiempo $\theta + 1$ a la distancia x

$T_{x+1,\theta}$ Temperatura en el tiempo θ a la distancia $x+1$

$T_{x-1,\theta}$ Temperatura en el tiempo θ a la distancia $x-1$

2. Calcular difusividad térmica

$$\alpha \frac{\Delta \theta}{\Delta x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

$$\alpha = \frac{37 \frac{\text{kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}}}{(7865 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(0.13 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}})} = 0.03618 \frac{\text{m}^2}{\text{h}}$$

3. Determinar el incremento del tiempo

3.1 El tiempo es el parámetro más importante para poder definir las divisiones. La temperatura será más exacta entre más divisiones existan.

3.2 Tomando incrementos de distancia de 4cm

3.3 Sustituir en ecuación

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$$

$$\Delta\theta = \frac{(0.04)^2}{2(0.03618 \frac{m^2}{h})}$$

$$\Delta\theta = 0.02211 h$$

$$\frac{10 \text{ minutos}}{0.02221 h} * \frac{h}{60 \text{ minutos}} = 7.5 \approx 8$$

4. Obtención de temperaturas.

Debido a la ecuación de Schmidt, se considera que la temperatura inicial es de 400 °C y la temperatura final es de 35 °C, se obtiene: el primer cambio de temperatura cuando la placa se somete a enfriamiento de 400°C a 35 °C, donde se considera que la temperatura final llega a 217.5 según la ecuación de Schmidt.

4.1 Con la formula

$$T_x = \frac{1}{2} [(T_s) + (T_{\infty})]$$

$$T_{0.5} = \frac{1}{2} [400 + 35]$$

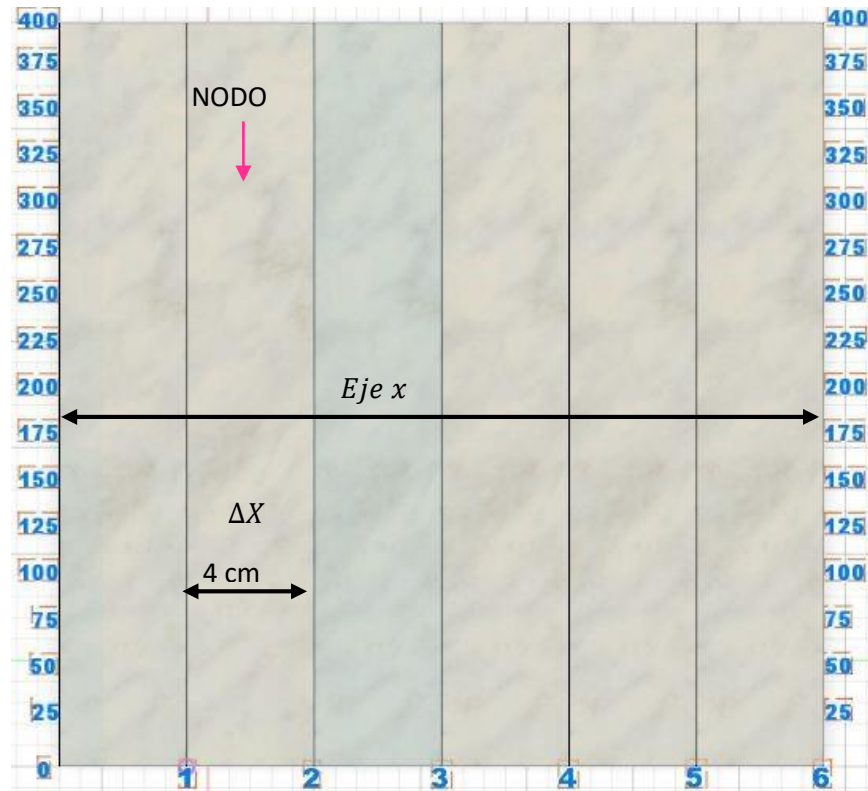
$$T_{0.5} = 217.5$$

TEMPERATURAS							
$\Delta\theta$	T_s	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	217.5	400	400	400	400	400	217.5
1	35	308.75	400	400	400	308.75	35
2	35	217.5	354.375	400	354.375	217.5	35
3	35	194.5	308.75	354.375	308.75	194.5	35
4	35	171.88	274.53	308.75	274.53	171.88	35
5	35	154.77	240.31	274.53	240.31	154.77	35
6	35	137.66	214.65	240.31	214.65	137.66	35
7	35	124.82	188.98	214.65	188.98	124.82	35
8	35	111.74	169.74	188.98	169.74	111.99	35

Gráfica

5.1 Para graficar, se divide la región en intervalos ΔX , donde en este caso, tiene un valor de 4 cm y se marca el valor inicial de la temperatura correspondiente (T_s , T_1 , T_2 , T_3 o T_4).

5.2 Trazar una línea recta de la temperatura inicial, hasta la temperatura situada cada dos nodos (cada 8 cm, el doble de ΔX).



5.3 Para una mayor comprensión, se grafica con respecto al tiempo ($\Delta\theta$) y se van trazando las líneas rectas en la temperatura inicial y la temperatura situada cada dos nodos, cada 8 cm. ejemplo:

Tomando a $\Delta\theta = n$

5.4 Se traza una línea recta de T_s (temperatura inicial) hasta T_2 (que se podría decir temperatura final, ya que está situada en una distancia de cada 2 nodos u 8 cm, y sería el final de la línea recta).

Después se traza otra línea partiendo de la temperatura de T_1 hasta la temperatura de T_3 .

5.5 Ahora partiendo de T_2 como temperatura. inicial, se traza la línea hasta la temperatura de T_4 .

5.6 Debido a que el sistema es simétrico, lo que sucede de lado derecho (T_s a T_3) es exactamente igual a lo que pasa de lado izquierdo (T_3 a T_6), donde T_3 es el punto medio de la región y se encontrarán los puntos de equilibrio en cierto tiempo

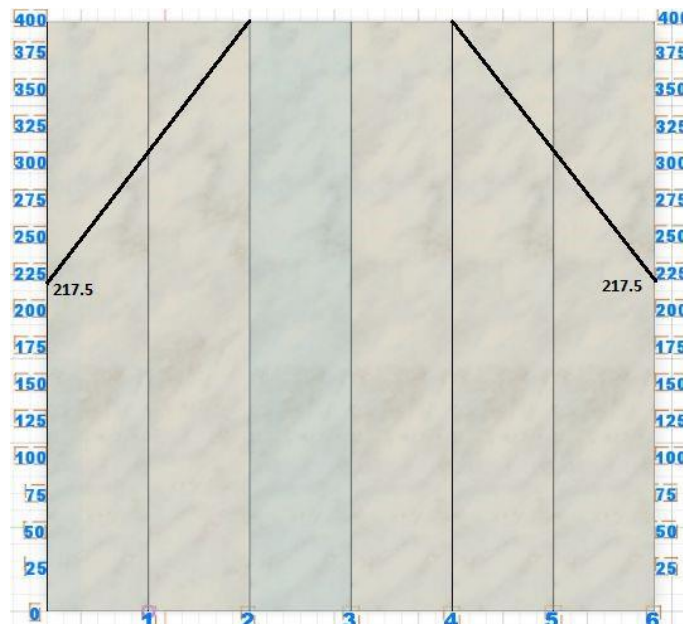
5. Aplicación de la grafica

Para el acompañamiento del desarrollo del ejercicio, se utilizará Matlab como herramienta principal para la modelización, simulación y análisis del ejercicio.

1. Graficando $\Delta\theta = 0$

$\Delta\theta$	Temperaturas						
	T_s	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	217.5	400	400	400	400	400	217.5
1	35	308.75	400	400	400	308.75	35
2	35	217.5	354.375	400	354.375	217.5	35
3	35	194.69	308.75	354.38	308.75	194.69	35
4	35	171.88	274.53	308.75	274.53	171.88	35
5	35	154.77	240.31	274.53	240.31	154.77	35
6	35	137.66	214.65	240.31	214.65	137.66	35
7	35	124.82	188.98	214.65	188.98	124.82	35
8	35	111.99	169.74	188.98	169.74	111.99	35

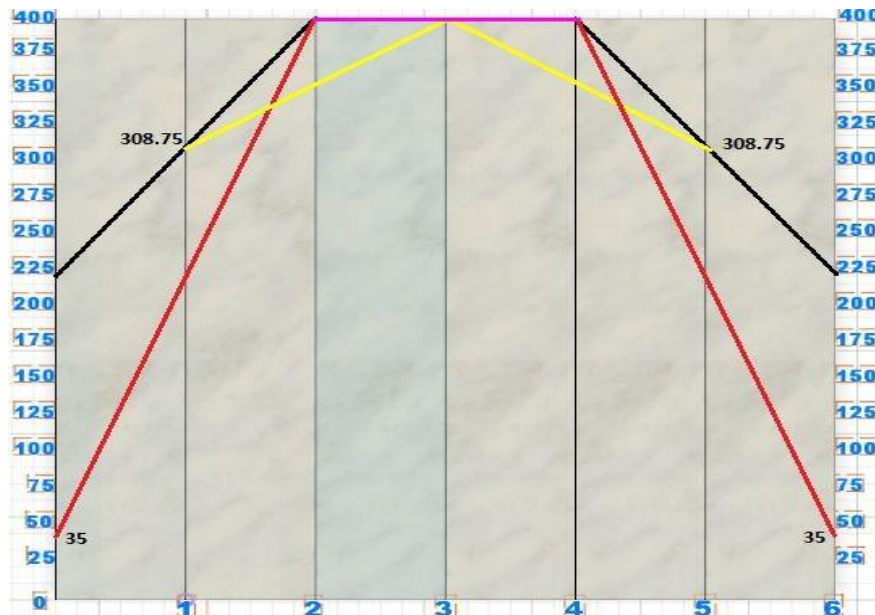
- Línea negra: se traza una línea recta partiendo de $T_s = 217.5^\circ\text{C}$ hasta $T_2 = 400^\circ\text{C}$
- $T_1 = 400^\circ\text{C}$ y $T_3 = 400^\circ\text{C}$, aquí la temperatura se mantiene, por lo cual no es necesario identificar, a, ya que siempre se mantendrá en la parte máxima de la gráfica
- De la misma manera para T_2 , T_4 , T_3 y T_5 en ambas la temperatura es 400°C por lo tanto se mantiene en dicha región.
- Línea negra ahora se parte de $T_4 = 400^\circ\text{C}$ y termina en $T_6 = 217.5^\circ\text{C}$, de esta forma se concluye para un tiempo de 0.



2. Graficando $\Delta\theta = 1$

$\Delta\theta$	Temperaturas						
	T_s	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	217.5	400	400	400	400	400	217.5
1	35	308.75	400	400	400	308.75	35
2	35	217.5	354.375	400	354.375	217.5	35
3	35	194.69	308.75	354.38	308.75	194.69	35
4	35	171.88	274.53	308.75	274.53	171.88	35
5	35	154.77	240.31	274.53	240.31	154.77	35
6	35	137.66	214.65	240.31	214.65	137.66	35
7	35	124.82	188.98	214.65	188.98	124.82	35
8	35	111.99	169.74	188.98	169.74	111.99	35

- Línea roja: se traza una línea recta partiendo de $T_s = 35^\circ\text{C}$ hasta $T_2 = 400^\circ\text{C}$
- Línea amarilla: se traza otra línea partiendo de $T_1 = 308.75^\circ\text{C}$ hasta $T_3 = 400^\circ\text{C}$
- Línea rosa: ahora se parte de $T_2 = 400^\circ\text{C}$ hasta $T_4 = 400^\circ\text{C}$
- De igual manera esto se mencionó antes, en el sistema simétrico, lo que sucede de lado derecho es exactamente lo que sucede del lado izquierdo, donde T_3 es el punto medio de la región.



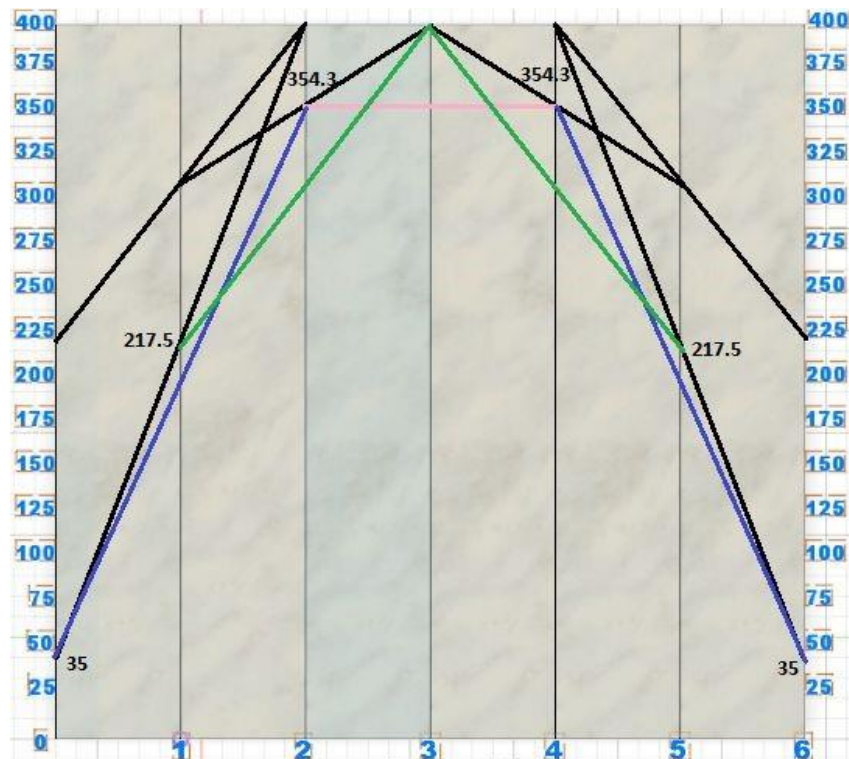
3. Graficando $\Delta\theta = 2$

$\Delta\theta$	Temperaturas						
	T_s	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	217.5	400	400	400	400	400	217.5
1	35	308.75	400	400	400	308.75	35
2	35	217.5	354.375	400	354.375	217.5	35
3	35	194.69	308.75	354.38	308.75	194.69	35
4	35	171.88	274.53	308.75	274.53	171.88	35
5	35	154.77	240.31	274.53	240.31	154.77	35
6	35	137.66	214.65	240.31	214.65	137.66	35
7	35	124.82	188.98	214.65	188.98	124.82	35
8	35	111.99	169.74	188.98	169.74	111.99	35

→ Línea azul: se traza una línea recta partiendo de $T_s = 35^\circ\text{C}$ hasta $T_2 = 354.375^\circ\text{C}$

→ Línea verde: se traza otra línea recta partiendo de $T_1 = 217.5^\circ\text{C}$ hasta $T_3 = 400^\circ\text{C}$

→ Línea rosa: Ahora se aparte de $T_2 = 354.375^\circ\text{C}$ hasta $T_4 = 354.375^\circ\text{C}$ sin incremento alguno.



4. Graficando $\Delta\theta = 3$

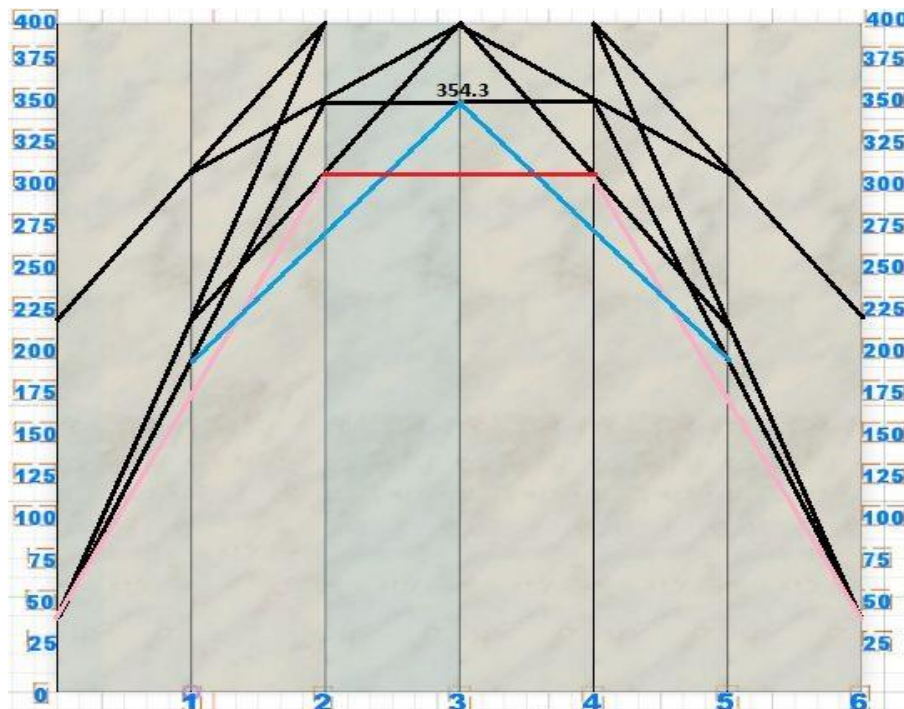
$\Delta\theta$	Temperaturas						
	T_s	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	217.5	400	400	400	400	400	217.5
1	35	308.75	400	400	400	308.75	35
2	35	217.5	354.375	400	354.375	217.5	35
3	35	194.69	308.75	354.38	308.75	194.69	35
4	35	171.88	274.53	308.75	274.53	171.88	35
5	35	154.77	240.31	274.53	240.31	154.77	35
6	35	137.66	214.65	240.31	214.65	137.66	35
7	35	124.82	188.98	214.65	188.98	124.82	35
8	35	111.99	169.74	188.98	169.74	111.99	35

→ Línea rosa: se traza una línea recta partiendo de $T_s = 35^\circ\text{C}$ hasta $T_2 = 308.75^\circ\text{C}$

→ Línea azul: se traza otra línea recta partiendo de $T_1 = 194.69^\circ\text{C}$ hasta $T_3 = 354.38^\circ\text{C}$

→ Línea roja: ahora se parte de $T_2 = 308.75^\circ\text{C}$ hasta $T_4 = 308.75^\circ\text{C}$ sin incremento alguno.

→ En el incremento de $\Delta\theta = 3$ se sitúa el primer punto de equilibrio con un valor de 354.3°C



5. Graficando $\Delta\theta = 4$

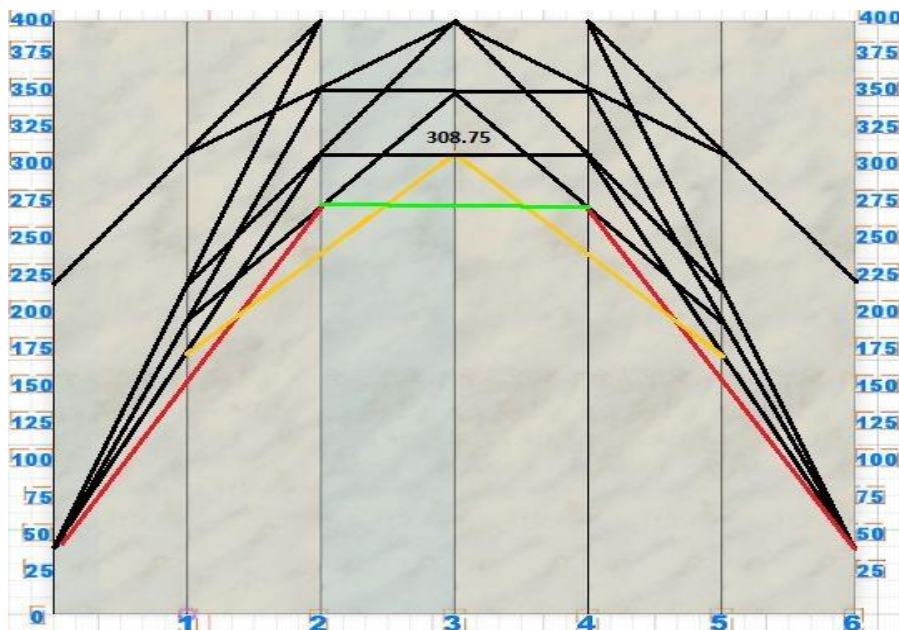
$\Delta\theta$	Temperaturas						
	T_s	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	217.5	400	400	400	400	400	217.5
1	35	308.75	400	400	400	308.75	35
2	35	217.5	354.375	400	354.375	217.5	35
3	35	194.69	308.75	354.38	308.75	194.69	35
4	35	171.88	274.53	308.75	274.53	171.88	35
5	35	154.77	240.31	274.53	240.31	154.77	35
6	35	137.66	214.65	240.31	214.65	137.66	35
7	35	124.82	188.98	214.65	188.98	124.82	35
8	35	111.99	169.74	188.98	169.74	111.99	35

→ La línea roja: se traza una línea recta partiendo de $T_s = 35\text{ °C}$ hasta $T_2 = 274.53\text{ °C}$

→ La línea naranja: se traza otra línea recta partiendo de $T_1 = 171.88\text{ °C}$ hasta $T_3 = 308.75\text{ °C}$

→ Línea verde: ahora se parte de $T_2 = 274.53\text{ °C}$ hasta $T_4 = 274.53\text{ °C}$ sin incremento alguno.

→ En este momento en el incremento de tiempo $\Delta\theta = 4$ será el segundo punto de equilibrio con un valor de 308.75 °C



6. Graficando $\Delta\theta = 5$

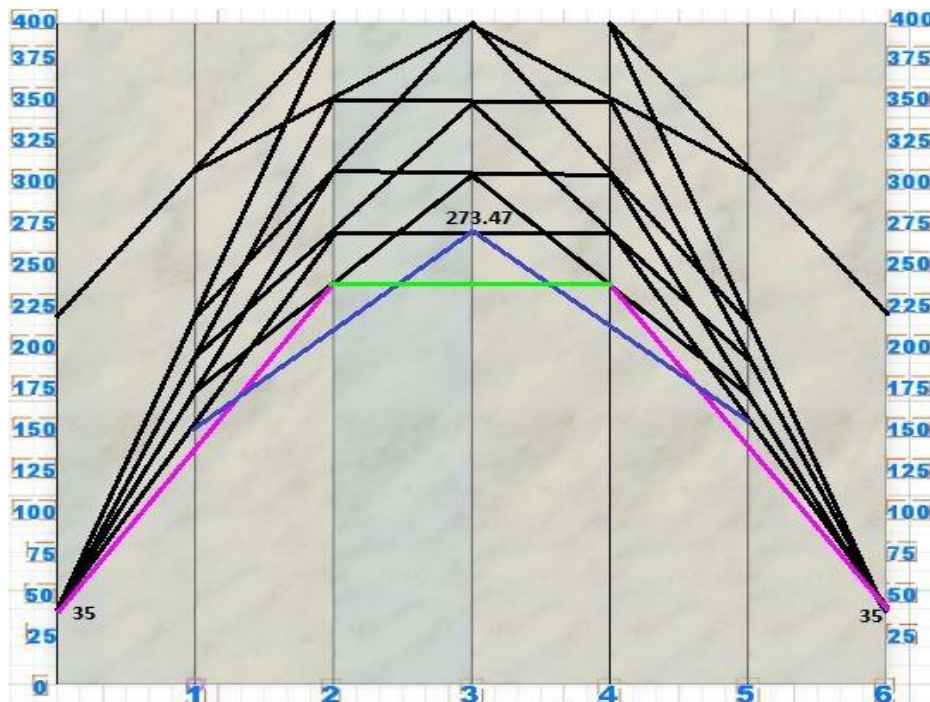
$\Delta\theta$	Temperaturas						
	T_s	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	217.5	400	400	400	400	400	217.5
1	35	308.75	400	400	400	308.75	35
2	35	217.5	354.375	400	354.375	217.5	35
3	35	194.69	308.75	354.38	308.75	194.69	35
4	35	171.88	274.53	308.75	274.53	171.88	35
5	35	154.77	240.31	274.53	240.31	154.77	35
6	35	137.66	214.65	240.31	214.65	137.66	35
7	35	124.82	188.98	214.65	188.98	124.82	35
8	35	111.99	169.74	188.98	169.74	111.99	35

→ Línea morada: Se traza una línea recta partiendo de $T_s = 35^\circ\text{C}$ hasta $T_2 = 240.31^\circ\text{C}$

→ Línea azul: se traza otra línea recta partiendo de $T_1 = 154.77^\circ\text{C}$ hasta $T_3 = 274.53^\circ\text{C}$

→ Línea verde ahora se parte de $T_2 = 240.31^\circ\text{C}$ hasta $T_4 = 240.31^\circ\text{C}$ sin incremento alguno.

→ En este momento en el incremento de tiempo $\Delta\theta = 5$ será el tercer punto de equilibrio con un valor de 274.53°C .



7. Graficando $\Delta\theta = 6$

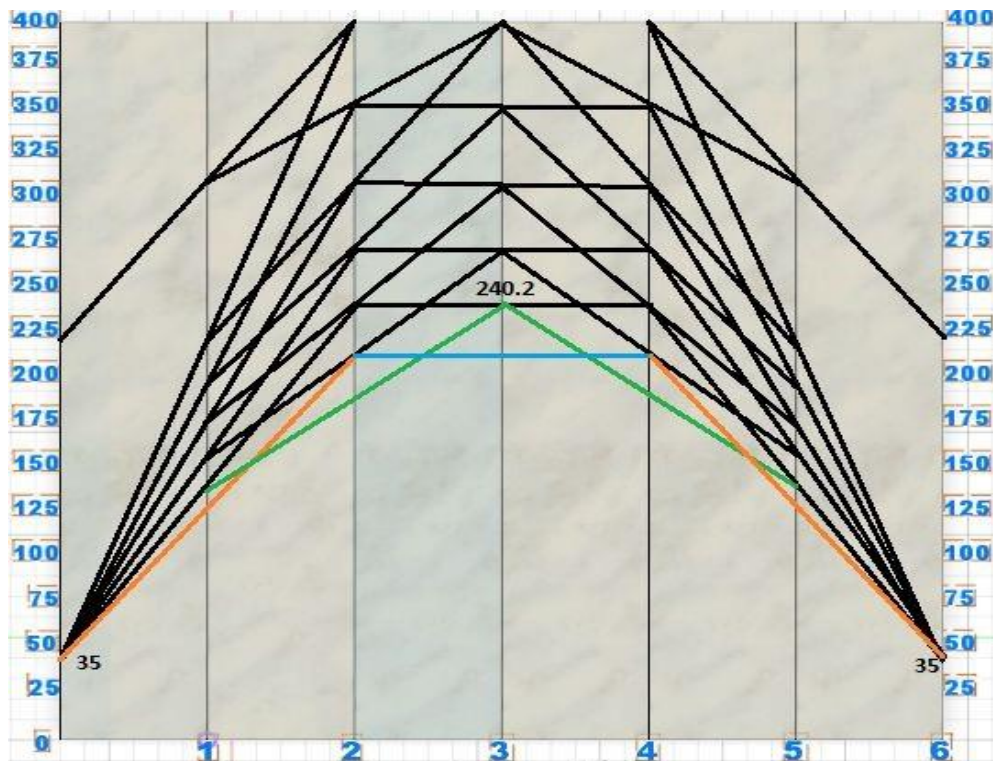
$\Delta\theta$	Temperaturas						
	T_s	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	217.5	400	400	400	400	400	217.5
1	35	308.75	400	400	400	308.75	35
2	35	217.5	354.375	400	354.375	217.5	35
3	35	194.69	308.75	354.38	308.75	194.69	35
4	35	171.88	274.53	308.75	274.53	171.88	35
5	35	154.77	240.31	274.53	240.31	154.77	35
6	35	137.66	214.65	240.31	214.65	137.66	35
7	35	124.82	188.98	214.65	188.98	124.82	35
8	35	111.99	169.74	188.98	169.74	111.99	35

→ Línea naranja: Se traza una línea recta partiendo de $T_s = 35^\circ\text{C}$ hasta $T_2 = 214.65^\circ\text{C}$

→ Línea verde: se traza otra línea recta partiendo de $T_1 = 137.6^\circ\text{C}$ hasta $T_3 = 240.31^\circ\text{C}$

→ Línea azul: ahora se parte de $T_2 = 214.65^\circ\text{C}$ hasta $T_4 = 214.65^\circ\text{C}$ sin incremento alguno.

→ En este momento en el incremento de tiempo $\Delta\theta = 6$ será el cuarto punto de equilibrio con un valor de 240.31°C



8. Graficando $\Delta\theta = 7$

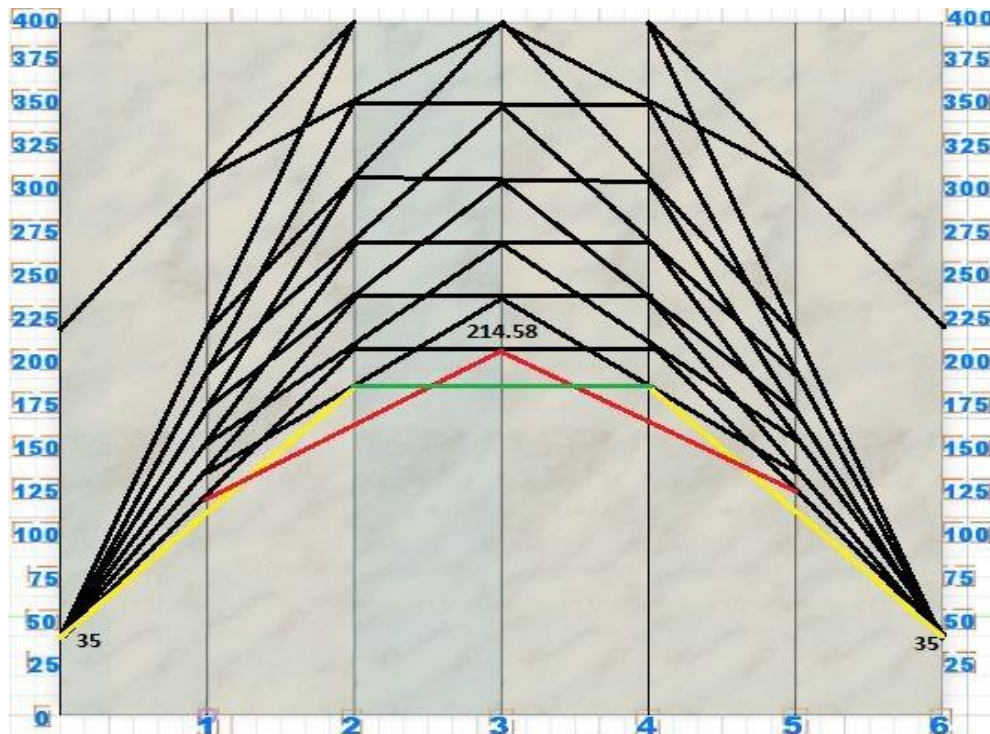
$\Delta\theta$	Temperaturas						
	T_s	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	217.5	400	400	400	400	400	217.5
1	35	308.75	400	400	400	308.75	35
2	35	217.5	354.375	400	354.375	217.5	35
3	35	194.69	308.75	354.38	308.75	194.69	35
4	35	171.88	274.53	308.75	274.53	171.88	35
5	35	154.77	240.31	274.53	240.31	154.77	35
6	35	137.66	214.65	240.31	214.65	137.66	35
7	35	124.82	188.98	214.65	188.98	124.82	35
8	35	111.99	169.74	188.98	169.74	111.99	35

→ Línea amarilla: Se traza una línea recta partiendo de $T_s = 35^\circ\text{C}$ hasta $T_2 = 188.98^\circ\text{C}$

→ Línea roja: se traza otra línea recta partiendo de $T_1 = 124.82^\circ\text{C}$ hasta $T_3 = 214.65^\circ\text{C}$

→ Línea verde: ahora se parte de $T_2 = 188.98^\circ\text{C}$ hasta $T_4 = 188.98^\circ\text{C}$ sin incremento alguno.

→ En este momento en el incremento de tiempo $\Delta\theta = 7$ será el quinto punto de equilibrio con un valor de 214.65°C



9. Graficando $\Delta\theta = 8$

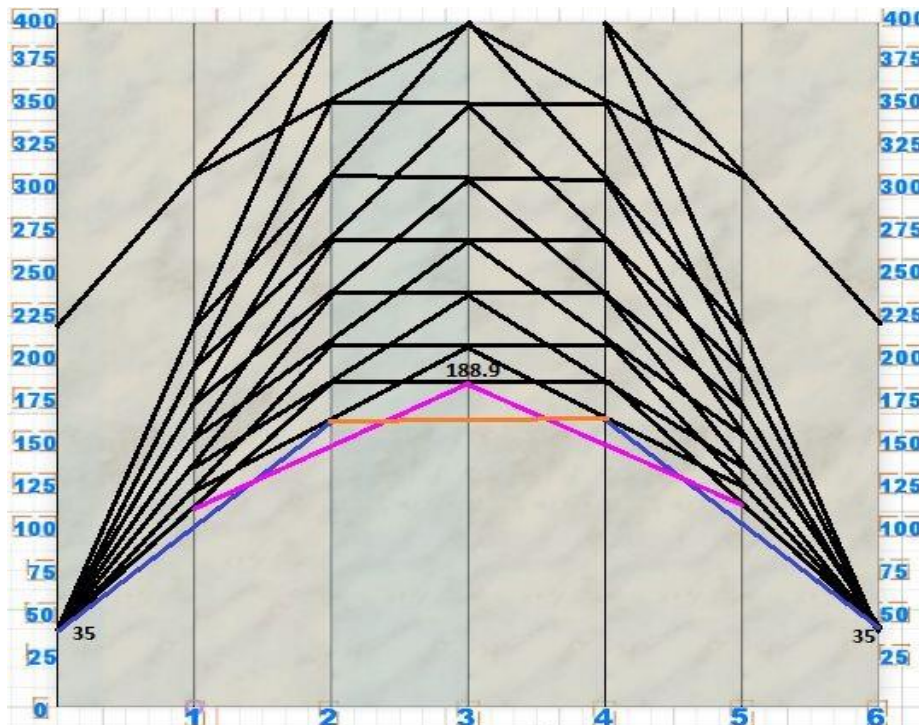
$\Delta\theta$	Temperaturas						
	T_s	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	217.5	400	400	400	400	400	217.5
1	35	308.75	400	400	400	308.75	35
2	35	217.5	354.375	400	354.375	217.5	35
3	35	194.69	308.75	354.38	308.75	194.69	35
4	35	171.88	274.53	308.75	274.53	171.88	35
5	35	154.77	240.31	274.53	240.31	154.77	35
6	35	137.66	214.65	240.31	214.65	137.66	35
7	35	124.82	188.98	214.65	188.98	124.82	35
8	35	111.99	169.74	188.98	169.74	111.99	35

→ Línea azul: Se traza una línea recta partiendo de $T_s = 35^\circ\text{C}$ hasta $T_2 = 169.74^\circ\text{C}$

→ Línea morada: se traza otra línea recta partiendo de $T_1 = 111.99^\circ\text{C}$ hasta $T_3 = 188.9^\circ\text{C}$

→ Línea naranja: ahora se parte de $T_2 = 169.74^\circ\text{C}$ hasta $T_4 = 169.74^\circ\text{C}$ sin incremento alguno.

→ En este momento en el incremento de tiempo $\Delta\theta = 8$ será el sexto punto de equilibrio con un valor de 188.9°C



Aquí se observa que el resultado final de todas las temperaturas graficadas y los 6 puntos de equilibrio con el tiempo que según le corresponda.

→ 1 = 354.38 °C con un incremento $\Delta\theta = 3$

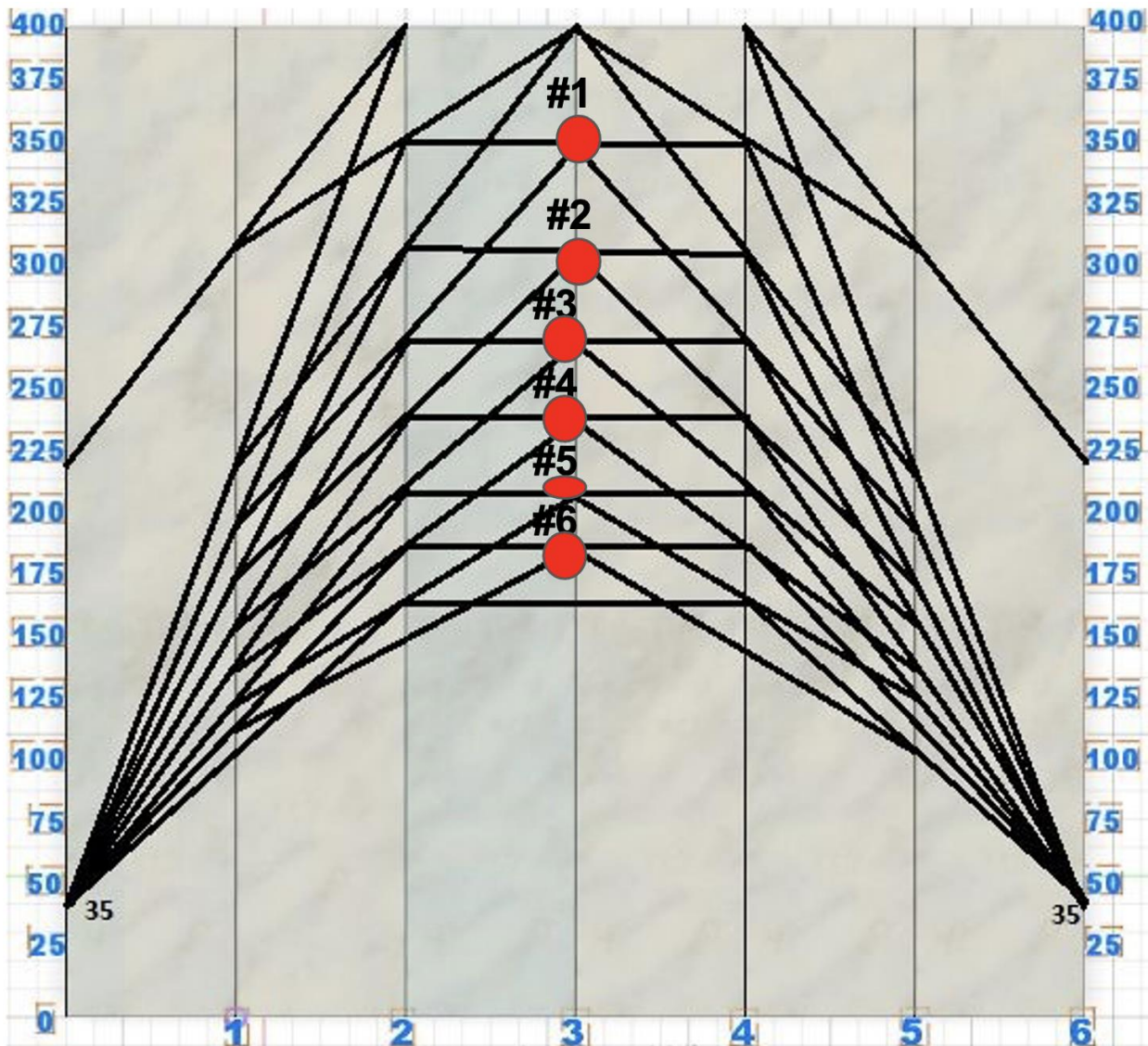
→ 2 = 308.75 °C con un incremento $\Delta\theta = 4$

→ 3 = 274.53 °C con un incremento $\Delta\theta = 5$

→ 4 = 240.31 °C con un incremento $\Delta\theta = 6$

→ 5 = 214.65 °C con un incremento $\Delta\theta = 7$

→ 6 = 188.98 °C con un incremento $\Delta\theta = 8$



6. El tiempo en el que se llega al equilibrio

Interpretación de $\Delta\theta$

Por lo tanto, si $\Delta\theta=3$, se multiplica el valor de 1.3266 min por el incremento que en este ejemplo es de 3, dándonos como resultado 4 minutos.

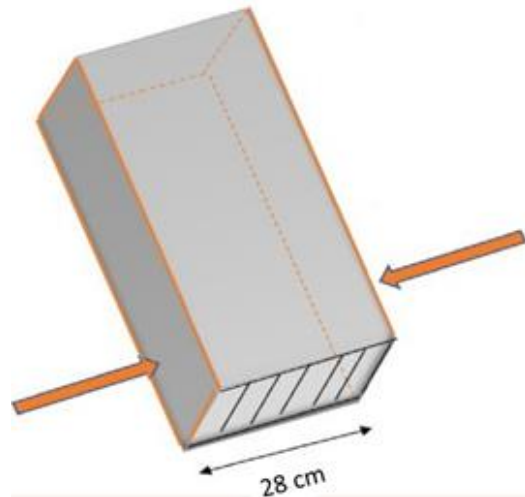
Recordando que el valor de cada incremento de tiempo es igual a:

- #1= 354.38°C con un incremento de $\Delta\theta= 3$, en un tiempo de 4 minutos
- #2= 308.75°C con un incremento de $\Delta\theta= 4$. en un tiempo de 5 minutos 3 segundos
- #3= 274.53°C con un incremento de $\Delta\theta= 5$, en un tiempo de 6 minutos 6 segundos.
- #4= 240.31°C con un incremento de $\Delta\theta= 6$, en un tiempo de 7 minutos 9 segundos.
- #5= 214.65°C con un incremento de $\Delta\theta= 7$, en un tiempo de 9 minutos 2 segundos.

#6= 188.98°C con un incremento de $\Delta\theta= 8$, en un tiempo de 10 minutos 6 segundos.

9. (Ejercicio propuesto)

Una placa de acero de 28 cm de grueso tiene inicialmente una temperatura de 400 °C. De improviso ambas caras se mantiene una 35°C. El acero tiene una densidad de 7,835 $\frac{kg}{m^3}$, una capacidad calorífica de 0.13 $\frac{kcal}{kg\ ^\circ C}$ y una conductividad térmica de 37 $\frac{kcal}{hm\ ^\circ C}$. Se desea predecir la temperatura en el centro de la placa a los 10 minutos si el coeficiente total de transferencia de calor en la superficie es de 120 $\frac{kcal}{hm^2\ ^\circ C}$. Use el método de Schmidt.



4. BALANCE DE MASA

El balance de masa es un concepto fundamental en la ingeniería de procesos y se aplica en una amplia gama de sistemas, incluidos los sistemas de transferencia de masa. En el contexto de la transferencia de masa, el balance de masa se refiere a la aplicación del principio de conservación de la masa a un sistema en el que están ocurriendo fenómenos de transferencia de masa, como la difusión, la convección o la reacción química.

El balance de masa se puede expresar matemáticamente como:

$$(Entradas) - (Salidas) + (Generación) - (Consumo) = (Acumulación)$$

Donde:

- Entradas: Cantidad de masa que entra al sistema (por ejemplo, a través de una corriente de entrada).
- Salidas: Cantidad de masa que sale del sistema (por ejemplo, a través de una corriente de salida).
- Generación: Cantidad de masa generada dentro del sistema (por ejemplo, en una reacción química que produce una especie química).
- Consumo: Cantidad de masa consumida dentro del sistema (por ejemplo, en una reacción química que consume una especie química).
- Acumulación: Cambio en la cantidad de masa dentro del sistema con el tiempo.

En el contexto específico de un mecanismo de transferencia de masa, las entradas y salidas pueden representar la entrada y salida de especies químicas (por ejemplo, moléculas, iones) a través de una interfaz, como una superficie de contacto entre dos fases (por ejemplo, gas-líquido, sólido-líquido). La generación y el consumo pueden referirse a la producción o consumo de especies químicas dentro del sistema debido a reacciones químicas o procesos de intercambio. El balance de masa se puede utilizar para modelar y comprender cómo cambian las concentraciones de especies químicas en el tiempo y el espacio dentro del sistema de transferencia de masa.

A considerar

¿Qué es el perfil de transferencia de masa?

El perfil de transferencia de masa es una descripción de cómo varía la concentración o la cantidad de una especie química en diferentes puntos a lo largo de una dirección específica en un sistema. En otras palabras, muestra cómo la concentración de la especie química cambia desde la superficie de un objeto o una interfaz hasta el centro del sistema o a través de una sección transversal de un medio.

Para entenderlo mejor, podemos imaginar un sistema donde hay una especie química que se está transfiriendo desde una fase a otra, como la transferencia de oxígeno desde el aire a un líquido. En la interfaz entre el aire y el líquido, la concentración de oxígeno puede ser diferente debido

al proceso de transferencia de masa. A medida que nos alejamos de la interfaz y nos movemos hacia el interior del líquido, la concentración de oxígeno puede cambiar gradualmente hasta alcanzar su valor máximo en el centro del líquido.

El perfil de transferencia de masa nos proporciona información importante sobre cómo se está llevando a cabo la transferencia de masa en un sistema y cómo varía la concentración de la especie química en diferentes puntos del sistema. Esto es crucial para comprender y diseñar procesos de separación, reacciones químicas y otras operaciones donde la transferencia de masa juega un papel importante.

4.1 CONDICIONES FRONTERA O LÍMITE EN EL BALANCE DE MASA

Las condiciones frontera o límite en el balance de masa son condiciones que especifican cómo se comporta el flujo de masa en los límites o fronteras de un sistema o dominio. Estas condiciones son fundamentales para resolver problemas de transferencia de masa y modelar adecuadamente los fenómenos de interés. Aquí hay una explicación detallada de algunas condiciones frontera comunes:

1. Condición de flujo entrante o saliente (concentración o velocidad especificada):

En esta condición, se especifica la concentración o velocidad del fluido que entra o sale del sistema en un límite dado. Por ejemplo, en un problema de transferencia de masa a través de una membrana permeable, se puede especificar la concentración del soluto en el fluido que entra al sistema a través de la membrana.

2. Condición de no flujo (o flujo nulo):

Esta condición indica que no hay flujo de masa a través de un límite específico. Por ejemplo, en una superficie sólida impermeable, la concentración de un soluto puede ser cero en el límite sólido-fluido, lo que implica que no hay transferencia de masa a través de esa interfaz.

3. Condición de flujo constante o a velocidad conocida:

En esta condición, se especifica una velocidad constante o un perfil de velocidad conocido en un límite dado. Por ejemplo, en un problema de transferencia de masa a través de una corriente de aire, se puede especificar una velocidad constante del flujo de aire en la interfaz sólido-fluido.

4. Condición de equilibrio termodinámico:

Esta condición se aplica cuando hay un equilibrio termodinámico entre el sistema y su entorno. Esto significa que la concentración del soluto o la presión parcial del componente en la interfaz es igual a la concentración o presión parcial en el entorno externo.

5. Condición de simetría:

Se aplica cuando se asume simetría en el sistema, lo que implica que las condiciones en un lado del límite son iguales a las del lado opuesto. Esto puede simplificar el problema al reducir la cantidad de cálculos necesarios.

6. Condición de absorción o desorción:

Esta condición se refiere a la absorción o desorción de especies en una interfaz. Por ejemplo, en un problema de adsorción de gas sobre

un sólido, se puede especificar una velocidad de adsorción en la interfaz sólido-gas.

Estas condiciones frontera son fundamentales para resolver ecuaciones de balance de masa y modelar correctamente el transporte de masa en diferentes sistemas y fenómenos. Dependiendo del problema específico, se seleccionan y aplican las condiciones frontera apropiadas para obtener soluciones significativas y precisas.

TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE EN FLUJO LAMINAR Y TURBULENTO

La teoría de la capa límite se refiere a un concepto fundamental que describe el comportamiento de la transferencia de masa en la vecindad de una superficie sólida, donde la velocidad del flujo del fluido varía desde cero en la superficie sólida hasta alcanzar la velocidad del flujo del fluido en el entorno lejano.

La capa límite puede ser laminar o turbulenta, dependiendo de las condiciones de flujo.

1. CAPA LÍMITE EN FLUJO LAMINAR:

En el caso de un flujo laminar, las partículas del fluido se mueven en capas ordenadas y paralelas, con movimientos suaves y predecibles.

En la capa límite laminar, la transferencia de masa se produce principalmente por difusión molecular, donde las moléculas de la especie en cuestión se mueven desde la superficie sólida hacia la corriente de fluido adyacente debido a un gradiente de concentración.

La tasa de transferencia de masa en la capa límite laminar se describe comúnmente utilizando la ley de Fick, que relaciona la tasa de transferencia de masa con el gradiente de concentración.

2. CAPA LÍMITE EN FLUJO TURBULENTO:

En el caso de un flujo turbulento, el movimiento del fluido es caótico y altamente no lineal, con remolinos y vórtices que caracterizan el flujo.

La capa límite en un flujo turbulento es más gruesa y menos ordenada que en un flujo laminar, lo que resulta en una mayor tasa de transferencia de masa.

En la capa límite turbulenta, además de la difusión molecular, la transferencia de masa también puede ocurrir debido a la convección turbulenta, donde la mezcla aleatoria del fluido transporta la especie desde la superficie sólida hacia el flujo adyacente.

La descripción de la transferencia de masa en la capa límite turbulenta es más compleja y puede requerir modelos empíricos o semiempíricos, como el modelo de Prandtl o el concepto de espesor de mezcla.

La teoría de la capa límite es esencial para comprender la transferencia de masa en sistemas donde el flujo de fluido interactúa con una superficie sólida. Ya sea en condiciones de flujo laminar o turbulento, la capa límite desempeña un papel crucial en la determinación de la tasa de transferencia de masa y, por lo tanto, en el rendimiento y la eficiencia de muchos procesos industriales y naturales.

Entender cómo varía la velocidad del fluido desde la superficie sólida hasta el flujo libre y cómo esto afecta la transferencia de masa es fundamental para diseñar sistemas eficientes y optimizar procesos. Tanto en el caso del flujo laminar como en el turbulento, se requieren enfoques específicos para modelar y predecir la transferencia de masa, lo que puede involucrar desde leyes de difusión molecular hasta modelos empíricos más complejos.

4.2 BALANCES DE MATERIA APLICADOS A UNA ENVOLTURA

Ley de la conservación de la materia:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de entrada} \\ \text{de materia de A} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de salida} \\ \text{de materia de A} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de producción} \\ \text{de materia de A} \\ \text{por reacción homogénea} \end{array} \right) = 0$$

La ley de la conservación de la materia puede, por supuesto, expresarse también en moles. La especie química A puede entrar o salir del sistema en virtud de la difusión o del movimiento global del fluido. Por otra parte, la especie A también puede formar o destruir a causa de reacciones químicas homogéneas.

La concentración en una superficie puede estar especificada $X_A = X_{A0}$.

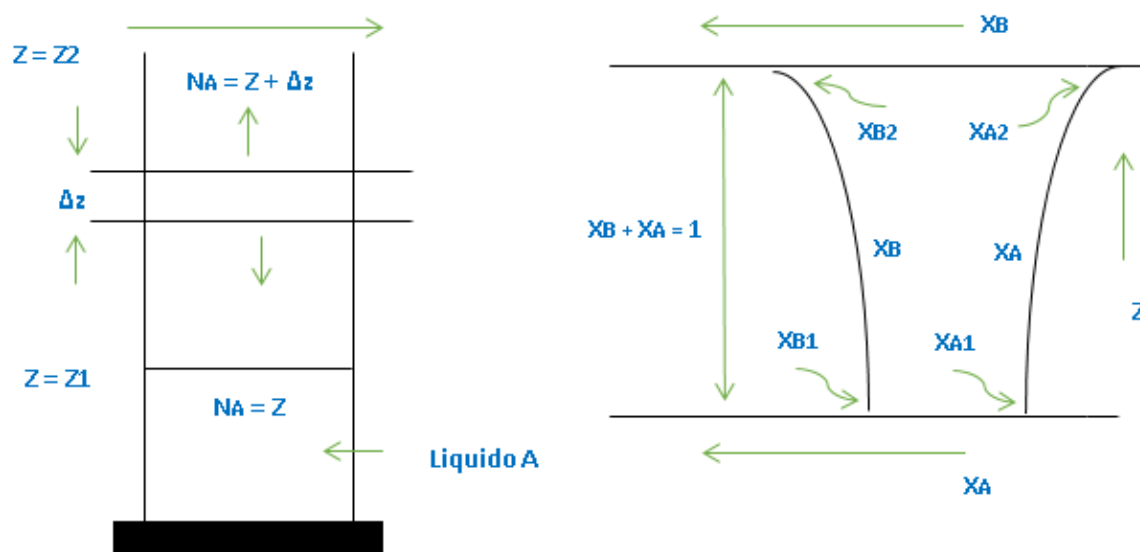
La densidad de flujo de materia en una superficie puede también estar determinada (si se conoce la relación N_A/N_B , el gradiente de concentración está fijado); por ejemplo, $N = N_{A0}$. Si la difusión tiene lugar en un sólido, puede ocurrir que la sustancia A pase desde la superficie del sólido hasta la corriente de fluido que la rodea, de acuerdo con la ecuación.

$$N_{A0} = k_c(c_{A0} - c_{Af})$$

En la que N_{A0} es la densidad de flujo de materia en la superficie, c_{A0} es la concentración en la superficie, c_A , es la concentración en la corriente de fluido, y la constante de proporcionalidad k_c , es un “coeficiente de transferencia de materia”.

4.2.1 DIFUSIÓN A TRAVÉS DE UNA PELÍCULA GASEOSA

El líquido A se está evaporando en el seno del **gas B**, e imaginemos que mediante un artificio es posible mantener el nivel del líquido en $z = z_1$. La concentración de la fase gaseosa, expresada en fracción molar, exactamente en la interfase líquido-gas, es x_{A1} . Se admite que la concentración de A en la fase gaseosa es la correspondiente al equilibrio con el líquido de la interface; es decir, que x_{A1} es la relación entre la presión de vapor de A y la presión total, p^{vap}/p , suponiendo que A y B forman una mezcla gaseosa ideal. Finalmente, se supone que la solubilidad de B en el líquido A es despreciable. Por la parte superior del tubo (para $z = z_2$) circula lentamente una corriente de mezcla gaseosa (**A – B**) cuya concentración es x_{A2} de forma que la fracción molar de A en la parte superior de la columna permanece constante e igual a x_{A2} . Se supone que todo el sistema se mantiene a temperatura y presión constantes, y que los gases A y B se comportan como ideales.



1. Aplicando un balance de materia en estado estacionario a un incremento de altura de columna Δz

$$SN_{Az}|_z - SN_{Az}|_{z+\Delta z} = 0$$

2. Factorizando las constantes **S** y Δz . Cambiando los signos de los términos y reordenando:

$$\frac{SN_{Az}|_{z+\Delta z} - SN_{Az}|_z}{\Delta z} = 0$$

3. Aplicando el limite cuando Δz tiende a 0:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{SN_{Az}|_{z+\Delta z} - SN_{Az}|_z}{\Delta z} = 0$$

Al momento de aplicar el límite cuando Δz tiende a 0, se deduce el teorema fundamental de la derivada:

Obteniendo la derivada:

$$-\frac{dN_{Az}}{dz} = 0$$

Sustituyendo la ecuación $N_{Az} = -\frac{c\mathcal{D}_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz}$ se obtiene:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{c\mathcal{D}_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0$$

4. Para mezclas gaseosas ideales a temperatura y presión constantes, C es una constante, y $\mathcal{D}_{AB}$, es prácticamente independiente de la concentración. Por consiguiente:

$$c\mathcal{D}_{AB} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0$$

Despejando la ecuación:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0$$

5. Integrando la ecuación:

$$\int d \left(\frac{1}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = \int 0 dz$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} = C_1$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden para el perfil de concentración, expresada en fracción molar de A.

Despejando los términos independientes y dependientes:

$$\frac{1}{1-x_A} dx_A = C_1 dz$$

6. Integrando la ecuación por cambio de variable:

$$\int \frac{1}{1-x_A} dx_A = \int C_1 dz$$

$$u = 1 - x_A$$

$$du = -dx_A$$

$$\int \frac{-du}{u} = C_1 \int dz$$

Obteniendo la ecuación:

$$-\ln(u) = C_1 z + C_2$$

Sustituyendo el cambio de variable:

$$-\ln(1-x_A) = C_1 z + C_2$$

7. Las dos constantes de integración pueden obtenerse al utilizar las condiciones límite

$$\text{C.L. 1:} \quad \text{Para } z = z_1 \quad x_A = x_{A1}$$

$$\text{C.L. 2:} \quad \text{Para } z = z_2 \quad x_A = x_{A2}$$

Donde

$$-\ln(1-x_A) = C_1 z + C_2 \rightarrow \text{Ecuación general}$$

8. Sustituyendo en la ecuación general las condiciones límite para obtener un sistema de ecuaciones:

$$-\ln(1 - x_{A1}) = C_1 z_1 + C_2$$

$$-\ln(1 - x_{A2}) = C_1 z_2 + C_2$$

9. Multiplicando (-1) para reducir la constante C_2 :

$$\ln(1 - x_{A1}) = -C_1 z_1 - C_2$$

$$-\ln(1 - x_{A2}) = C_1 z_2 + C_2$$

10. Realizando la suma:

$$\ln(1 - x_{A1}) - \ln(1 - x_{A2}) = -C_1 z_1 + C_1 z_2$$

11. Ordenando y aplicando leyes de los logaritmos:

$$\ln \frac{1 - x_{A1}}{1 - x_{A2}} = C_1 (z_2 - z_1)$$

12. Despejando C_1 :

$$C_1 = \frac{\ln \frac{1 - x_{A1}}{1 - x_{A2}}}{(z_2 - z_1)}$$

13. Obteniendo C_2 :

$$-\ln(1 - x_{A1}) = \frac{\ln \frac{1 - x_{A1}}{1 - x_{A2}}}{(z_2 - z_1)} (z_1) + C_2$$

14. Despejando C_2 :

$$C_2 = \frac{\ln \frac{1 - x_{A1}}{1 - x_{A2}}}{(z_2 - z_1)} (z_1) + \ln(1 - x_{A1})$$

15. Sustituyendo en la ecuación general:

$$-\ln(1 - x_A) = \frac{\ln \frac{1 - x_{A1}}{1 - x_{A2}}}{(z_2 - z_1)} (z) + \frac{\ln \frac{1 - x_{A1}}{1 - x_{A2}}}{(z_2 - z_1)} (z_1) + \ln(1 - x_{A1})$$

16. Ordenando:

$$\ln \left(\frac{1 - x_A}{1 - x_{A1}} \right) = \frac{\ln \frac{1 - x_{A1}}{1 - x_{A2}}}{(z_2 - z_1)} (z + z_1)$$

$$\ln \left(\frac{1 - x_A}{1 - x_{A1}} \right) = \ln \frac{1 - x_{A1}}{1 - x_{A2}} \frac{(z + z_1)}{(z_2 - z_1)}$$

17. Aplicando leyes de los logaritmos:

$$e^{\ln \left(\frac{1 - x_A}{1 - x_{A1}} \right)} = e^{\ln \frac{1 - x_{A1}}{1 - x_{A2}} \frac{(z + z_1)}{(z_2 - z_1)}}$$

Obteniendo:

$$\frac{1 - x_A}{1 - x_{A1}} = \frac{1 - x_{A1}}{1 - x_{A2}}^{\frac{z + z_1}{z_2 - z_1}}$$

El análisis de estas curvas indica que la pendiente dx_A/dz no es constante, a pesar de serlo la densidad de flujo molar N_{Az} . Si bien los perfiles de concentración son útiles para describir los procesos de difusión, lo que generalmente interesa en los cálculos

ingenieriles es la concentración media o la densidad de flujo de materia en una superficie. Por ejemplo, la concentración media de B en la región comprendida entre $z = z_1$ y $z = z_2$, es:

$$\frac{x_{B,med}}{x_{B1}} = \frac{\int_{x_2}^{x_2} (x_B/x_{B1}) d_z}{\int_{x_2}^{x_2} d_z}$$

18. Obteniendo:

$$x_{B,med} = \frac{(x_B - x_{B1})}{\ln(x_B/x_{B1})}$$

Es decir, que el valor medio de X_B es la media logarítmica de los valores extremos (X_B). En la ecuación anterior, $\int$ es una longitud reducida $(z - z_L)/(z_2 - z_L)$. La velocidad de transferencia de materia en la interfase líquido-gas, es decir, la velocidad de evaporación.

$$N_{Az}|_{z=z1} = -\frac{c\mathcal{D}_{AB}}{1-x_A} \frac{d_{xa}}{d_z}$$

$$N_{Az}|_{z=z1} = -\frac{c\mathcal{D}_{AB}}{(z_2 - z_1)} \ln \frac{x_{B2}}{x_{B1}}$$

19. Las ecuaciones pueden combinarse para obtener otra expresión de la velocidad de transferencia de materia

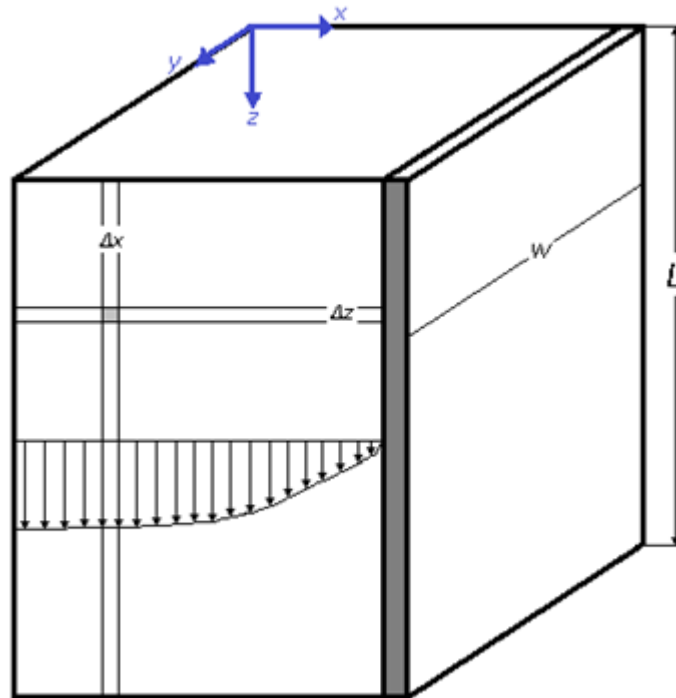
$$N_{Az}|_{z=z1} = -\frac{c\mathcal{D}_{AB}}{(z_2 - z_1)x_B \ln} (x_{A1} - x_{A2})$$

Los resultados obtenidos en esta sección se han utilizado para la determinación experimental de difusividades gaseosas. Por otra parte, estos resultados se aplican también en las “teorías de película” para la transferencia de materia.

4.2.2 DIFUSIÓN DE UNA PELÍCULA LÍQUIDA DESCENDENTE: TRANSFERENCIA DE MATERIA POR CONVECCIÓN FORZADA

Se van a plantear las ecuaciones diferenciales que describen el proceso. Primeramente, hay que resolver el problema de transporte de movimiento:

$$V(x) = V_{max} \left(1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right)$$



$$N A|_A (W \Delta x) - N A|_{A+\Delta z} (W \Delta x) + N A|_A (W \Delta z) - N A|_{A+\Delta x} (W \Delta z) = 0.$$

(Ecuación 1)

1. Factorizando los elementos constantes:

$$\frac{[N A|_A (W \Delta x) - N A|_{A+\Delta z} (W \Delta x) + N A|_A (W \Delta z) - N A|_{A+\Delta x} (W \Delta z)]}{\Delta x \Delta z W} = 0$$

2. Reduciendo los términos constantes:

$$\frac{N A|_A}{\Delta z} - \frac{N A|_{A+\Delta z}}{\Delta z} + \frac{N A|_A}{\Delta x} - \frac{N A|_{A+\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

3. Cambiando los signos de los términos de la ecuación:

$$-\frac{N A|_A}{\Delta z} + \frac{N A|_{A+\Delta z}}{\Delta z} - \frac{N A|_A}{\Delta x} + \frac{N A|_{A+\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

4. Reacomodando:

$$\frac{N_A|_{A+\Delta z}}{\Delta z} - \frac{N_A|_A}{\Delta z} + \frac{N_A|_{A+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{N_A|_A}{\Delta x} = 0$$

5. Aplicando el limite cuando Δx tiende a cero.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{N_A|_{A+\Delta z}}{\Delta z} - \frac{N_A|_A}{\Delta z} + \frac{N_A|_{A+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{N_A|_A}{\Delta x} = 0 \quad \text{Ecuación 1}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{N_A|_{A+\Delta z} - N_A|_A}{\Delta x} \right)^1 \text{ se aproxima a } \frac{dN_{Ax}}{dx}$$

4. Aplicando el limite cuando Δz tiende a cero.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{N_A|_{A+\Delta z}}{\Delta z} - \frac{N_A|_A}{\Delta z} + \frac{N_A|_{A+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{N_A|_A}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{N_A|_{A+\Delta z} - N_A|_A}{\Delta z} \right)^1 \text{ se aproxima a } \frac{dN_{Az}}{dz}$$

5. Sustituyendo las aproximaciones en ecuación 1.

Obteniendo:

$$\frac{d}{dz} (N_{Az}) + \frac{d}{dx} (N_{Ax}) \rightarrow \text{Ecuación 2}$$

Sabiendo que

$$N_{Az} = -cD_{AB} \times \frac{d}{dz} (X_A) + X_A (N_{Az} + N_{Bz}) = C_A V_X(x)$$

6. Sustituyendo en la ecuación 2 obtenida:

$$\frac{d}{dz} \left[cD_{AB} \times \frac{d}{dz} (X_A) + X_A (N_{Az} + N_{Bz}) \right] + \frac{d}{dx} \left[cD_{AB} \times \frac{d}{dz} (X_A) + X_A (N_{Az} + N_{Bz}) \right]$$

$$= 0$$

$$\frac{d}{dz} \left[cD_{AB} \times \frac{d}{dz} (X_A) + X_A (N_{Az} + N_{Bz}) \right] = -\frac{d}{dx} \left[cD_{AB} \times \frac{d}{dz} (X_A) + X_A (N_{Az} + N_{Bz}) \right]$$

7. Resolviendo la ecuación diferencial por el método de variables separables:

$$\int \left[cD_{AB} \times \frac{d}{dz} (X_A) + X_A (N_{Az} + N_{Bz}) \right] dx$$

$$\left[cD_{AB} \times \frac{d}{dz} (X_A) + X_A (N_{AZ} + N_{BZ}) \right] x + C1$$

$$= - \left[cD_{AB} \times \frac{d}{dz} (X_A) + X_A (N_{AZ} + N_{BZ}) \right] z + C2$$

8. Reduciendo términos

$$2X_A (N_{AZ} + N_{BZ}) \frac{d}{dz} (C_A) = D_{AB} \frac{d^2}{dx^2}$$

9. Sustituyendo:

$$V_{max} \left(1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right) \frac{d}{dz} (C_A) = D_{AB} \frac{d^2}{dx^2}$$

10. Integrando para eliminar el primer diferencial

$$\int d C_A = \int D_{AB} \frac{d^2}{dx^2} dz$$

$$C_A = D_{AB} \frac{d^2}{dx^2} z + C1$$

Obteniendo:

$$\frac{C_A - C1}{z * D_{AB}} = \frac{d^2}{dx^2}$$

11. Aplicando las siguientes condiciones limite

Condición limite 1	z=0	C _A =0
Condición limite 2	x=0	C _{A0}
Condición limite 3	X=∞	C _A =0

12. Con una integral definida se resuelve el punto de una doble diferencial

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4 * D_{AB} / V_{max}}} = \frac{C_A - C1}{z * D_{AB}}$$

13. Se evalúa el límite de integración superior disminuido por el límite de integración inferior

$$\frac{C_A - C1}{z * D_{AB}} = \frac{x}{\sqrt{4 * D_{AB} / V_{max}}} - 0$$

$$N_{AZ}(z) = \frac{x}{\sqrt{4 * D_{AB} / V_{max}}}$$

Usando una integral de volumen donde se estén acotando las dos regiones de largo y el ancho de la película con dicha integral catalogada como doble integral de región tipo 1.

Aunque la clasificación no tiene relevancia ya que ambos intervalos de integración son contantes y se adaptan de manera correcta al determinante adimensional.

Observamos como el orden de integración no afecta en el Jacobiano de la integración ya sea a la elección del lector y su comodidad.

Ejemplo de lo dicho:

$$\iint_v dv = \iint_{c1}^{c2} f(x,y) dx dy$$

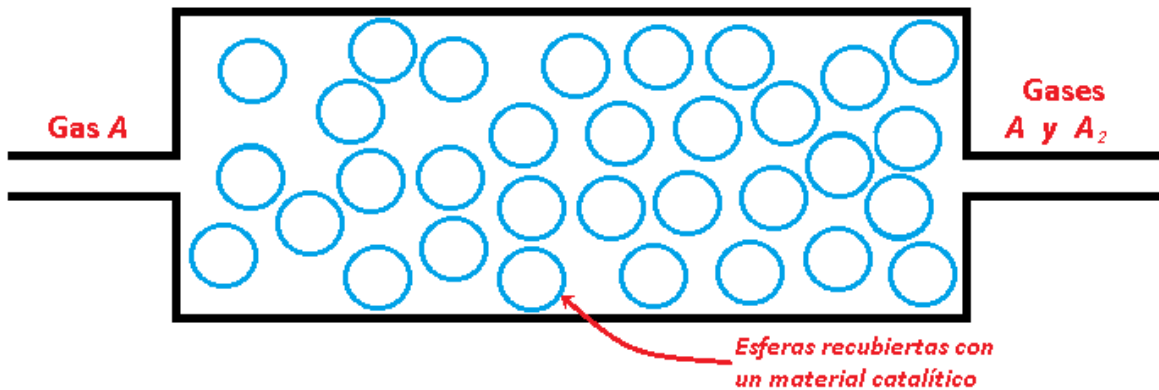
$$\iint_v dv = \iint_{c1}^{c2} f(x,y) dy dx$$

Donde $C1, C2 \in \mathbb{R}$

4.2.3 DIFUSIÓN CON REACCIÓN QUÍMICA HETEROGÉNEA

Suponiendo que la reacción $2A \rightarrow A_2$ se produce instantáneamente en la superficie catalítica, y que el producto A_2 difunde después en sentido contrario a través de la película gaseosa hasta alcanzar la corriente turbulenta del gas que consta de A y A_2 . Se trata de encontrar una expresión para la velocidad local de conversión de A en A_2 , cuando se conocen el espesor efectivo de la película gaseosa δ , y las composiciones globales x_{A0} y x_{A20} , de la corriente. Se supone que la película gaseosa es isotérmica, aunque para muchas reacciones catalíticas no se puede despreciar el calor que se genera en la reacción. Para el caso, se mueve un mol de A_2 en la dirección z negativa por cada dos moles de A que se mueven en la dirección z positiva, según se deduce de la estequiometría de la reacción. Por consiguiente, en estado estacionario.

$$N_{A2z} = -\frac{1}{2}N_{Az}$$



1. Por lo tanto, mediante la ley de difusión y la estequiometría de la reacción, se ha obtenido una expresión para N_{Az} en función del gradiente de concentración. Se aplica ahora un balance de materia para la especie A , a una delgada lámina de la película gaseosa de espesor Δz .

$$N_{Az} = -\frac{cD_{AA_2}}{1 - \frac{1}{2}x_A} \frac{d_{xa}}{d_z}$$

2. Introduciendo en esta expresión el valor de N_{Az} de la ecuación anterior, se obtiene para $c\mathcal{D}_{AB}$, constante

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0$$

3. Separando términos independientes y dependientes:

$$d \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0 dz$$

Integrando:

$$\int d \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = \int 0 dz$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{1 - \frac{x_A}{2}} \frac{dx_A}{dz} = C_1$$

4. Integrando la ecuación por cambio de variable:

$$\int \frac{dx_A}{1 - \frac{x_A}{2}} = \int C_1 dz$$

$$u = 1 - \frac{x_A}{2}$$

$$du = -\frac{1}{2} dx_A$$

$$-2 \int \frac{du}{u} = C_1 \int dz$$

Resultando en una integral sencilla:

$$-2 \ln \left(1 - \frac{x_A}{2} \right) = C_1 z + C_2$$

5. Obteniendo la ecuación general:

$$-2 \ln \left(1 - \frac{x_A}{2} \right) = C_1 z + C_2$$

6. Aplicando las condiciones límite:

C.L. 1: Para $z = z_1$

$$x_A = x_{A1}$$

C.L. 2: Para $z = z_2$

$$x_A = x_{A2}$$

7. Sustituyendo en ecuación general las condiciones límite:

$$-2 \ln \left(1 - \frac{x_{A0}}{2} \right) = C_1 0 + C_2$$

$$-2 \ln \left(1 - \frac{0}{2} \right) = C_1 \delta + C_2$$

8. Multiplicando por -1, se suman las ecuaciones para reducir la constante C_2 :

$$-2 \ln \left(1 - \frac{x_{A0}}{2} \right) = C_1 0 + C_2$$

$$2 \ln \left(1 - \frac{0}{2} \right) = -C_1 \delta - C_2$$

9. Obteniendo:

$$-2 \ln \left(1 - \frac{x_{A0}}{2} \right) = -C_1 \delta$$

10. Despejando C_1 :

$$C_1 = \frac{2 \ln \left(1 - \frac{x_{A0}}{2} \right)}{\delta}$$

$$C_2 = -2 \ln \left(1 - \frac{x_{A0}}{2} \right)$$

11. Sustituyendo en ecuación general:

$$-2 \ln \left(1 - \frac{x_A}{2} \right) = \frac{2 \ln \left(1 - \frac{x_{A0}}{2} \right)}{\delta} (z) - 2 \ln \left(1 - \frac{x_{A0}}{2} \right)$$

Ordenamos

$$\ln \left(1 - \frac{x_A}{2} \right) = -\ln \left(1 - \frac{x_{A0}}{2} \right) \left(\frac{z}{\delta} - 1 \right)$$

12. Aplicando leyes de los logaritmos:

$$e^{\ln \left(1 - \frac{x_A}{2} \right)} = e^{\ln \left(1 - \frac{x_{A0}}{2} \right) \left(\frac{z}{\delta} - 1 \right)}$$

$$1 - \frac{x_A}{2} = 1 - \frac{x_{A0}}{2} \left(1 - \frac{z}{\delta} \right)$$

Obteniendo la ecuación:

$$1 - \frac{x_A}{2} = 1 - \frac{x_{A0}}{2} \left(1 - \frac{z}{\delta} \right)$$

13. La ecuación puede utilizarse ahora para obtener la densidad de flujo molar a través de la película

$$N_{Az} = \frac{2cD_{AA_2}}{\delta} \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x_A}$$

4.3.4 DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD (EJERCICIO PROPUESTO)

La difusividad del sistema gaseoso binario oxígeno-tetracloruro de carbono se determina observando la evaporación en estado estacionario de CCL_4 , en un tubo que contiene O_2 . La distancia entre el nivel del CCL_4 , líquido y la parte superior del tubo es $(z_2 - z_1 = 17.1\text{cm})$. La presión total del sistema es 755 mm Hg, y la temperatura 0 C. La presión de vapor del CCL_4 , a esta temperatura es 33,0 mm Hg. La sección transversal del tubo de difusión es 0.82 cm^2 . Se ha encontrado que en estas condiciones se evaporan 0.0208 cm^3 de CCL_4 , durante un período de 10 horas después de alcanzarse el estado estacionario. ¿Cuál es la difusividad del sistema gaseoso binario CCL_4 - O_2 ?

RESPUESTA:

$$D_{CCL_4-O_2} = 0.0636\text{ cm}^2/\text{seg}$$

Este método de determinación de difusividades en fase gaseosa presenta algunas limitaciones importantes. Una de las más significativas es el enfriamiento que ocurre durante el proceso de evaporación. Además, pueden surgir efectos de convección natural si el vapor generado por la evaporación es más ligero que el gas presente sobre el líquido. Además, debido a la presencia de menisco, la longitud del camino de difusión puede no ser uniforme a lo largo de la sección del tubo, lo que introduce complicaciones adicionales en la medición.

4.3.5 DIFUSIÓN A TRAVÉS DE UNA PELÍCULA ESFÉRICA NO ISOTÉRMICA

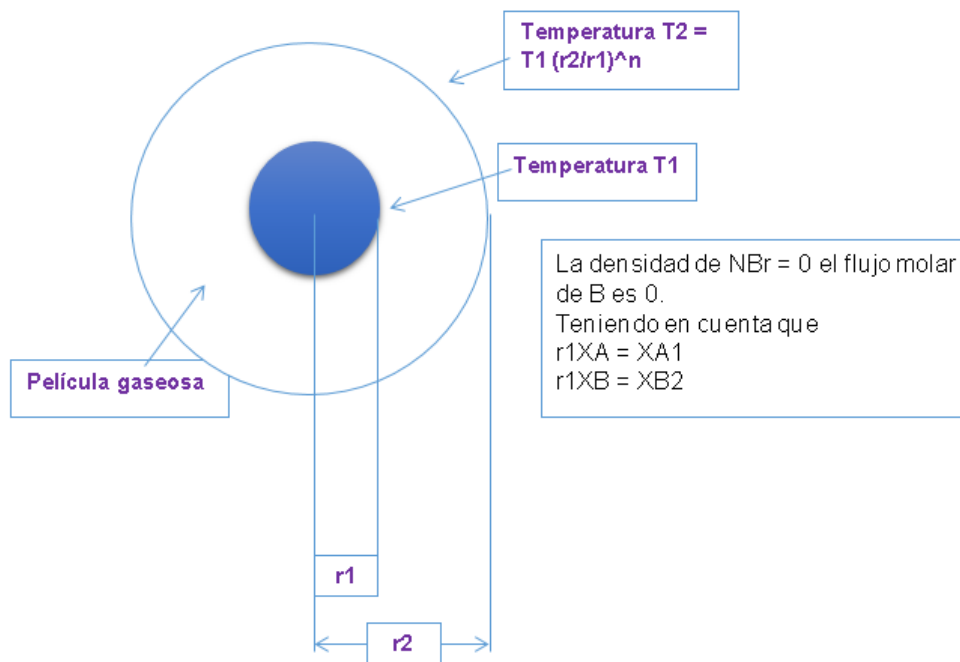
Ahora se deducirá el perfil de concentración y la densidad del flujo molar para la difusión a través de una envoltura esférica. Ampliar esto resultados con el fin de describir la difusión en una película no isotérmica en la que la temperatura varía con la distancia de acuerdo con la expresión:

$$\left(\frac{T}{T_1}\right) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

En la que T_1 es la temperatura para $r=r_1$. Como aproximación, supóngase que la difusividad de A en B, varía con la potencia 3/2 de la temperatura.

$$\left(\frac{D_{AB}}{D_{AB_1}}\right) = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

en la que la difusividad de A en B en 1 es la difusividad para $T=T_1$. Se dice que este tipo de problemas en el secado de pequeñas gotas, y en la difusión a través de películas gaseosas que rodean a partículas catalíticas esféricas.



1. Se sabe que para una esfera

$$V = 4/3\pi r^3 \quad S = 4\pi r^2$$

2. Obteniendo el balance general

$$SNAr|r - SNAr|r + \Delta r = 0$$

$$4\pi r^2 NAr|r - 4\pi r^2 NAr|r + \Delta r = 0$$

3. Dividiendo entre $4\pi\Delta r$

$$\frac{r^2 NAr|r - r^2 NAr|r + \Delta r}{\Delta r} = 0$$

4. Aplicando el limite cuando Δr tiende a 0

$$\frac{d}{dr} (r^2 NAr) = 0$$

5. Sustituyendo la densidad de flujo molar NA

$$NAr = -CDAB \left(\frac{\partial XA}{\partial r} \right) + XA (NAr + NBr)$$

6. Si NBr = 0

$$NAr = -CDAB \left(\frac{\partial XA}{\partial r} \right) + XA NAr$$

$$NAr(1 - XA) = -CDAB \left(\frac{\partial XA}{\partial r} \right)$$

7. Sustituyendo las ecuaciones anteriores:

$$d \frac{r^2 CDAB}{(1-XA)} \frac{\partial XA}{\partial r} = 0$$

8. Si $T = \text{cte.}$ y $D_{AB} = \text{cte.}$ Por lo tanto:

$$d CDAB \frac{r^2}{(1-XA)} \frac{\partial XA}{\partial r}$$

9. Dividiendo entre CD_{AB}

$$d \frac{r^2}{(1-XA)} \frac{\partial XA}{\partial r}$$

10. Integrando

$$\frac{r^2}{(1-XA)} \frac{\partial XA}{\partial r} = C1$$

11. Reordenando e integrando por cambio de variable:

$$\int \frac{\partial XA}{(1-XA)} = \int \frac{C1}{r^2} \partial r$$

$$U = 1 - XA$$

$$dU = - \partial XA$$

$$-Ln (1 - XA) = - \frac{C1}{r} + C2$$

$$Ln XB = \frac{C1}{r} - C2$$

12. Empleando las condiciones límite:

1ra Condición limite $r = r_1$; $X_A = X_{A1}$; $X_B = X_{B1}$

2da Condición limite $r = r_2$; $X_A = X_{A2}$; $X_B = X_{B2}$

$$Ln XB_1 = \frac{C1}{r_1} - C2$$

$$Ln XB_2 = \frac{C1}{r_2} - C2$$

13. Igualando y agrupando términos

$$Ln XB_1 - Ln XB_2 = C1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{Ln XB_1 - Ln XB_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = C1$$

14. Sustituyendo C1 en C2

$$\ln XB_1 - \frac{\ln \frac{XB_1}{XB_2}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = -C_2$$

Balance General

$$\ln XB = \frac{C_1}{r} - C_2$$

15. Sustituyendo C₁ y C₂

$$\ln XB = \frac{\ln \frac{XB_1}{XB_2}}{r\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} + \ln XB_1 - \frac{\ln \frac{XB_1}{XB_2}}{r_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$\ln XB - \ln XB_1 = \frac{\ln \frac{XB_1}{XB_2}}{r\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} - \frac{\ln \frac{XB_1}{XB_2}}{r_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$\ln \frac{XB}{XB_1} = \ln \left[\left(\frac{XB}{XB_1} \right)^{r\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - r_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \right]$$

$$\frac{XB}{XB_1} = \left[\left(\frac{XB_1}{XB_2} \right)^{\frac{r\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{r_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}} \right]$$

$$NAr = -\frac{CDAB}{(1 - XA)} \left(\frac{\partial XA}{\partial r} \right) - \frac{CDAB}{XB} \left(\frac{\partial XB}{\partial r} \right)$$

Perfil de concentración

16. Despejando XB y derivando con respecto a r

$$\frac{dXB}{dr} = XB_1 \left(\frac{XB_1}{XB_2} \right)^{\frac{r\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{r_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}} - \ln \left(\frac{XB_1}{XB_2} \right) \left(\frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \right)$$

$$NAr = -\frac{CDAB}{XB} XB_1 \left(\frac{XB_1}{XB_2} \right)^{\frac{r\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{r_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}} \left(\frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \right) \ln \left(\frac{XB_1}{XB_2} \right)$$

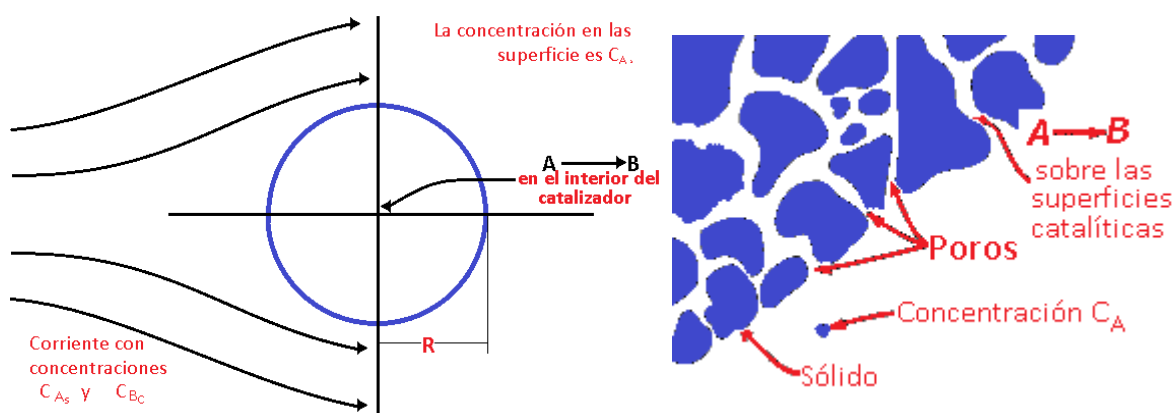
$$NAr|_{r=r_1} = \frac{CDAB}{r_1^2} \left(\frac{XB_1}{XB} \right) \frac{\ln \left(\frac{XB_1}{XB_2} \right)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

Perfil de transferencia de concentración dependiente de las fracciones de B y radio de evaluación

4.3.6 DIFUSIÓN Y REACCIÓN QUÍMICA EN EL INTERIOR DE UN CATALIZADOR POROSO

Hasta ahora se ha considerado la difusión para gases y líquidos en sistemas de geometría sencilla. A continuación, vamos a utilizar el balance de materia aplicado a una envoltura y la primera ley de Fick con el fin de describir la difusión en el interior de una partícula esférica de un catalizador poroso. No se intenta describir la difusión en el interior del tortuoso camino de los huecos, sino la difusión media de la especie química en función de un coeficiente efectivo de difusión

Consideremos concretamente una partícula esférica de un catalizador poroso de radio R . Esta partícula está en un reactor catalítico que es atravesado por una corriente gaseosa que contiene la sustancia reaccionante A y el producto de reacción B. En las inmediaciones de la partícula catalítica que estamos considerando se supone que la concentración de A es C_{A_s} moles por unidad de volumen. La especie A difunde a través del camino tortuoso existente en el catalizador y se convierte en B en la superficie de este.



1. Comenzamos aplicando un balance de materia para la especie A a una envoltura esférica de espesor Δr situada en el interior de una partícula catalítica:

$$N_{Ar}|_r 4\pi r^2 - N_{Ar}|_{r+\Delta r} 4\pi (r + \Delta r)^2 + R_A 4\pi (r)^2 \Delta r = 0$$

En esta expresión, $N_{Ar}|_r$ es el número de moles de A que pasan en la dirección r a través de una superficie esférica imaginaria situada a una distancia r del centro de la esfera. El término de manantial $R_A 4\pi (r)^2 \Delta r$ expresa el número de moles de A que se producen por reacción química en la envoltura de espesor Δr .

2. Reduciendo las constantes y cambiando los signos de los términos de la ecuación:

$$\frac{N_{Ar}|_{r+\Delta r} (r)^2 - N_{Ar}|_r r^2}{\Delta r} - R_A (r)^2 = 0$$

Despejando $R_A(r)^2$

$$\frac{N_{Ar}|_{r+\Delta r}r^2 - N_{Ar}|_r r^2}{\Delta r} = R_A r^2$$

3. Aplicando el límite cuando Δr tiende a 0 e igualamos a $R_A r^2$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{N_{Ar}|_{r+\Delta r}r^2 - N_{Ar}|_r r^2}{\Delta r} = R_A r^2$$

Al momento de aplicar el límite cuando Δr tiende a 0, se obtiene la definición de la derivada, por tanto:

$$\frac{d}{dr}(r^2 N_{Ar}) = r^2 R_A$$

Teniendo en cuenta que el medio es granular y no homogéneo, el proceso de límites que se ha efectuado está en contradicción con la representación física. Por lo tanto, los símbolos N_{Ar} y R_A , no pueden interpretarse como magnitudes que poseen un valor representativo de un punto, sino valores medios de un pequeño entorno del punto considerado (este entorno es pequeño con respecto a la dimensión R , pero grande con relación a los pasadizos existentes en el interior de la partícula porosa).

4. Vamos a definir ahora una difusividad efectiva para la especie A en el medio poroso, mediante la expresión

$$N_{Ar} = -\mathcal{D}_A \frac{dC_A}{dr}$$

En la que C_A es la concentración del gas A contenido entre los poros. La difusividad efectiva de $\mathcal{D}_A$ puede medirse experimentalmente, y, en general, depende de la presión y la temperatura, así como también de la estructura de los poros del catalizador. El mecanismo real de la difusión en los poros es complejo, ya que las dimensiones de éstos pueden ser menores que el recorrido libre medio de las moléculas que difunden.

5. Introduciendo la expresión anterior, para difusividad constante, se llega a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r^2 N_{Ar}) &= r^2 R_A \\ -\mathcal{D}_A \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dC_A}{dr} \right) &= R_A \end{aligned}$$

6. Considerando ahora un caso en el que la especie A desaparece de acuerdo con una reacción química de primer orden en las superficies catalíticas que forman las paredes de los pasadizos tortuosos. Sea a el área de la superficie catalítica disponible por unidad de volumen (sólidos + huecos). Por lo tanto

$$R_A = -k_1 a C_A$$

7. Sustituyendo R_A en la ecuación

$$-\mathcal{D}_A \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dC_A}{dr} \right) = -k_1 a C_A$$

8. Cambiando los signos de los términos de la ecuación:

$$\mathcal{D}_A \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dC_A}{dr} \right) = k_1 a C_A$$

Esta ecuación se resuelve con las condiciones límite de que $C_A = C_{As}$ para $r = R$ y C_A , es finito para $r = 0$.

Las ecuaciones diferenciales en las que aparece el operador $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dC_A}{dr} \right)$ pueden simplificarse frecuentemente mediante un cambio de variable del tipo $\frac{C_A}{C_{As}} = \frac{f(R)}{r}$.

La ecuación correspondiente a $f(r)$ es:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{k_1'' a}{D_A} (f)$$

4.2.4 DIFUSIÓN CON POLIMERIZACIÓN CATALÍTICA

Obtener un resultado análogo, cuando la reacción $N_a \rightarrow a$, se produce instantáneamente en la superficie catalítica.

a) Demostrar en primer lugar

$$N_{Az} = - \frac{cD_{AB}}{(1-n^{-1})x_A} \frac{dx_A}{dz}$$

1. Aplicando un balance de materia en estado estacionario a un incremento de altura de columna Δz

$$SN_{Az}|_z - SN_{Az}|_{z+\Delta z} = 0$$

2. Reduciendo las constantes $S \Delta z$:

$$\frac{SN_{Az}|_z - SN_{Az}|_{z+\Delta z}}{\Delta z} = 0$$

Cambiando los signos de los términos:

$$\frac{SN_{Az}|_{z+\Delta z} - SN_{Az}|_z}{\Delta z} = 0$$

3. Aplicando el límite cuando Δz tiende a 0

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{SN_{Az}|_{z+\Delta z} - SN_{Az}|_z}{\Delta z} = 0$$

4. Al momento de aplicar el límite cuando Δz tiende a 0, se obtiene la definición de la derivada, por tanto obtenemos la ecuación:

$$- \frac{dN_{Az}}{dz} = 0$$

5. Sustituyendo $N_{Az} = - \frac{cD_{AB}}{(1-n^{-1})x_A} \frac{dx_A}{dz}$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{cD_{AB}}{(1-n^{-1})x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0$$

6. Para mezclas gaseosas ideales a temperatura y presión constantes, C es una constante, y D_{AB} , es prácticamente independiente de la concentración. Por lo anterior:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(1-n^{-1})x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0$$

7. Integrando la ecuación:

$$\int d \left(\frac{1}{(1-n^{-1})x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = \int 0 dz$$

8. Siendo $(1 - n^{-1})$ constante:

$$\frac{1}{(1 - n^{-1})} \int d \left(\frac{1}{x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = \int 0 dz$$

9. Separando términos dependientes e independientes:

$$\frac{1}{(1 - n^{-1})x_A} \frac{dx_A}{dz} = C_1$$

Ésta es, una ecuación diferencial de segundo orden para el perfil de concentración, expresada en fracción molar de A.

Integrando la ecuación por cambio de variable:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - n^{-1})} \int \frac{1}{x_A} dx_A &= \int C_1 dz \\ u = x_A \quad du &= dx_A \\ \frac{1}{(1 - n^{-1})} \int \frac{du}{u} &= C_1 \int dz \end{aligned}$$

10. Obteniendo la ecuación

$$(1 - n^{-1}) \ln(x_A) = C_1 z + C_2$$

11. Las dos constantes de integración pueden obtenerse utilizando las condiciones límite

C.L. 1:

Para $z = z_1$

$$x_A = x_{A1}$$

C.L. 2:

Para $z = z_2$

$$x_A = x_{A2}$$

Donde

$$(1 - n^{-1}) \ln(x_A) = C_1 z + C_2 \quad \text{Ecuación general}$$

12. Sustituyendo en ecuación general las condiciones límite para obtener un sistema de ecuaciones

$$(1 - n^{-1}) \ln(x_{A1}) = C_1 z_1 + C_2$$

$$(1 - n^{-1}) \ln(x_{A2}) = C_1 z_2 + C_2$$

13. Multiplicamos por -1 para reducir la constante C_2

$$(1 - n^{-1}) \ln(x_{A1}) = C_1 z_1 + C_2$$

$$-(1 - n^{-1}) \ln(x_{A2}) = -C_1 z_2 - C_2$$

14. Realizando la suma de ecuaciones obteniendo:

$$(1 - n^{-1})(\ln(x_{A1}) - \ln(x_{A2})) = C_1 z_1 - C_1 z_2$$

15. Ordenamos y aplicando leyes de los logaritmos:

$$(1 - n^{-1}) \ln \frac{x_{A1}}{x_{A2}} = C_1 (z_2 - z_1)$$

16. Despejando C_1

$$C_1 = \frac{(1 - n^{-1}) \ln \frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{(z_2 - z_1)}$$

17. Obteniendo C_2

$$\ln(x_{A1}) = \frac{(1 - n^{-1}) \ln \frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{(z_2 - z_1)} (z_1) + C_2$$

18. Despejando C_2

$$C_2 = \frac{(1 - n^{-1}) \ln \frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{(z_2 - z_1)} (z_1) + \ln(x_{A1})$$

19. Sustituyendo en la ecuación general

$$(1 - n^{-1}) \ln(x_A) = C_1 z + C_2$$

$$(1 - n^{-1}) \ln(x_A) = \frac{(1 - n^{-1}) \ln \frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{(z_2 - z_1)} (z) + \frac{(1 - n^{-1}) \ln \frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{(z_2 - z_1)} (z_1) + \ln(x_{A1})$$

20. Reordenando:

$$(1 - n^{-1}) \ln \left(\frac{x_A}{x_{A1}} \right) = \frac{(1 - n^{-1}) \ln \frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{(z_2 - z_1)} (z + z_1)$$

$$(1 - n^{-1}) \ln \left(\frac{x_A}{x_{A1}} \right) = (1 - n^{-1}) \ln \frac{x_{A1}}{x_{A2}} \frac{(z + z_1)}{(z_2 - z_1)}$$

21. Aplicando leyes de los logaritmos:

$$e^{(1-n^{-1}) \ln \left(\frac{x_A}{x_{A1}} \right)} = e^{(1-n^{-1}) \ln \frac{x_{A1}}{x_{A2}} \frac{(z+z_1)}{(z_2-z_1)}}$$

22. Obteniendo la ecuación:

$$(1 - n^{-1}) \frac{1 - x_A}{1 - x_{A1}} = (1 - n^{-1}) \frac{1 - x_A^{\frac{z+z_1}{z_2-z_1}}}{1 - x_{A1}}$$

b) Integrando esta expresión de N_{Az} entre los límites $z = 0$ y $z = \delta$ (teniendo en cuenta el hecho de que para el estado estacionario N_{Az} es constante) para obtener:

$$N_{Az} = - \frac{ncD_{AB}}{(n-1)\delta} \ln \left(\frac{1}{1 - (1 - n^{-1})x_{AB}} \right)$$

23. Aplicando un balance de materia en estado estacionario a un incremento de altura de columna Δz

$$SN_{Az}|_z - SN_{Az}|_{z+\Delta z} = 0$$

1. Reduciendo las constantes $S \Delta z$:

$$\frac{SN_{Az}|_z - SN_{Az}|_{z+\Delta z}}{\Delta z} = 0$$

Cambiando los signos de los términos:

$$\frac{SN_{Az}|_{z+\Delta z} - SN_{Az}|_z}{\Delta z} = 0$$

24. Aplicando el límite cuando Δz tiende a 0

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{SN_{Az}|_{z+\Delta z} - SN_{Az}|_z}{\Delta z} = 0$$

25. Al momento de aplicar el límite cuando Δz tiende a 0, se obtiene la definición de la derivada, por tanto obtenemos la ecuación:

$$-\frac{dN_{Az}}{dz} = 0$$

26. Sustituyendo $N_{Az} = -\frac{ncD_{AB}}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{dx_A}{1-(1-n^{-1})x_{AB}}\right)$

Obteniendo:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{ncD_{AB}}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{dx_A}{1-(1-n^{-1})x_{AB}}\right) \right) = 0$$

Para mezclas gaseosas ideales a temperatura y presión constantes, **C** es una constante, y nD_{AB} , es prácticamente independiente de la concentración.

27. Por consiguiente:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{dx_A}{1-(1-n^{-1})x_{AB}}\right) \right) = 0$$

28. Integrando la ecuación:

$$\int d \left(\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{dx_A}{1-(1-n^{-1})x_{AB}}\right) \right) = \int 0 dz$$

29. Aplicando la integral donde aplicamos la integral de la diferencial la cual se cancelaria y así mismo la integral de 0 quedando únicamente la constante de integración C_1

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{dx_A}{1-(1-n^{-1})x_A}\right) = C_1$$

Siendo esta, una ecuación diferencial de segundo orden para el perfil de concentración, expresada en fracción molar de A.

Integrando la ecuación por cambio de variable:

30. Siendo $\frac{1}{(n-1)\delta}$ constante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{1}{1-(1-n^{-1})}\right) \int \frac{dx_A}{x_A} &= \int C_1 dz \\ u = x_A \quad dz &= dx_A \\ \frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{1}{1-(1-n^{-1})}\right) \int \frac{du}{u} &= C_1 \int dz \end{aligned}$$

31. Obteniendo la ecuación

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_A}{1-(1-n^{-1})}\right) = C_1 z + C_2$$

32. Las dos constantes de integración pueden obtenerse utilizando las condiciones límite

C.L. 1:	Para $z = z_1$	$x_A = x_{A1}$
C.L. 2:	Para $z = z_2$	$x_A = x_{A2}$

Donde

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_A}{1-(1-n^{-1})}\right) = C_1 z + C_2 \quad \text{Ecuación general}$$

33. Sustituyendo en ecuación general las condiciones límite para obtener un sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_{A1}}{1-(1-n^{-1})}\right) = C_1 0 + C_2$$

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_{A2}}{1-(1-n^{-1})}\right) = C_1 \delta + C_2$$

34. Multiplicando por -1 para reducir la constante C_2

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_{A1}}{1-(1-n^{-1})}\right) = C_2$$

$$-\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_{A2}}{1-(1-n^{-1})}\right) = -C_1 \delta - C_2$$

35. Obteniendo C_2

$$C_2 = \frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_{A1}}{1-(1-n^{-1})}\right)$$

36. Realizando la suma:

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_{A1}}{1-(1-n^{-1})}\right) - \frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_{A2}}{1-(1-n^{-1})}\right) = -C_1 \delta$$

37. Ordenando y aplicando leyes de los logaritmos:

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_{A1}/x_{A2}}{1-(1-n^{-1})}\right) = -C_1 \delta$$

38. Despejando C_1 :

$$C_1 = -\frac{1}{(n-1)\delta^2} \ln\left(\frac{x_{A1}/x_{A2}}{1-(1-n^{-1})}\right)$$

39. Sustituyendo

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_A}{1-(1-n^{-1})}\right) = C_1 z + C_2 \text{ en la ecuación general}$$

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_A}{1-(1-n^{-1})}\right)$$

$$= -\frac{1}{(n-1)\delta^2} \ln\left(\frac{\frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{1-(1-n^{-1})}\right) z + \frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_{A1}}{1-(1-n^{-1})}\right)$$

40. Ordenando y despejando la ecuación

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_A}{1-(1-n^{-1})}\right) - \frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_{A1}}{1-(1-n^{-1})}\right)$$

$$= -\frac{z}{(n-1)\delta^2} \ln\left(\frac{\frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{1-(1-n^{-1})}\right)$$

41. Aplicando leyes de los logaritmos:

$$\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_A/x_{A1}}{1-(1-n^{-1})}\right) = -\frac{z}{(n-1)\delta^2} \ln\left(\frac{\frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{1-(1-n^{-1})}\right)$$

42. De acuerdo a leyes de logaritmos:

$$e^{\frac{1}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{x_A/x_{A1}}{1-(1-n^{-1})}\right)} = e^{-\frac{z}{(n-1)\delta^2} \ln\left(\frac{\frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{1-(1-n^{-1})}\right)}$$

43. Obteniendo la ecuación solicitada:

$$\frac{\frac{x_A/x_{A1}}{1-(1-n^{-1})}}{\frac{1}{(n-1)\delta}} = \frac{\frac{x_{A1}/x_{A2}}{1-(1-n^{-1})}}{-\frac{z}{(n-1)\delta^2}}$$

Obtener un resultado análogo para el caso, cuando la reacción $\mathbf{N_a} \rightarrow \mathbf{a}$, se produce instantáneamente en la superficie catalítica.

a) Demostrar en primer lugar

$$N_{Az} = -\frac{cD_{AB}}{(1-n^{-1})x_A} \frac{d_{x_a}}{d_z}$$

mediante la ley de difusión y la estequiometria de la reacción, se ha obtenido una expresión para N_{Az} en función del gradiente de concentración. Se aplica ahora un balance de materia para la especie **A**, a una delgada lámina de la película gaseosa de espesor Δz .

44. Introduciendo en esta expresión el valor de N_{Az} de la ecuación anterior, se obtiene para cD_{AB} , constante

$$\frac{d}{d_z} \left(\frac{1}{(1-n^{-1})x_A} \frac{d_{x_a}}{d_z} \right) = 0$$

45. Separando variables independientes y dependientes:

$$d \left(\frac{1}{(1-n^{-1})x_A} \frac{d_{x_a}}{d_z} \right) = d_z$$

46. Integrando:

$$\int d \left(\frac{1}{(1-n^{-1})x_A} \frac{d_{x_a}}{d_z} \right) = \int 0 d_z$$

47. Se obtiene:

$$\frac{1}{(1-n^{-1})x_A} \frac{d_{x_a}}{d_z} = C_1$$

48. Integrando la ecuación por cambio de variable:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-n^{-1})} \int \frac{dx_A}{x_A} &= \int C_1 d_z \\ u = x_A \quad du &= dx_A \\ \frac{1}{(1-n^{-1})} \int \frac{du}{u} &= C_1 \int d_z \end{aligned}$$

49. Obteniendo la ecuación general

$$\ln\left(\frac{x_A}{(1-n^{-1})}\right) = C_1 z + C_2$$

50. Aplicando las condiciones limite

C.L. 1:	Para $z = z_1$	$x_A = x_{A1}$
C.L. 2:	Para $z = z_2$	$x_A = x_{A2}$

51. Sustituyendo en ecuación general las condiciones limite

$$\ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right) = C_1 0 + C_2$$

$$\ln\left(\frac{0}{(1-n^{-1})}\right) = C_1 \delta + C_2$$

52. Cambiando los signos y sumando ambas ecuaciones para reducir la constante C_2

$$\ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right) = C_1 0 + C_2$$

$$-\ln\left(\frac{0}{(1-n^{-1})}\right) = -C_1 \delta - C_2$$

53. Despejando C_2 :

$$C_2 = \ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right)$$

54. Sumando al sistema de ecuaciones:

$$\ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right) = -C_1 \delta$$

55. Despejando C_1 :

$$C_1 = -\frac{\ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right)}{\delta}$$

56. Sustituyendo en ecuación general

$$\ln\left(\frac{x_A}{(1-n^{-1})}\right) = C_1 z + C_2$$

$$\ln\left(\frac{x_A}{(1-n^{-1})}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right)}{\delta} z + \ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right)$$

57. Ordenando

$$\ln\left(\frac{x_A}{(1-n^{-1})}\right) - \ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right) = -\frac{z}{\delta} \ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right)$$

58. Utilizando leyes de los logaritmos

$$\ln\left(\frac{x_A/x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right) = -\frac{z}{\delta} \ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right)$$

59. Reduciendo los logaritmos

$$e^{\ln\left(\frac{x_A/x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right)} = e^{-\frac{z}{\delta} \ln\left(\frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}\right)}$$

$$\frac{x_A/x_{A0}}{(1-n^{-1})} = \frac{x_{A0}}{(1-n^{-1})}^{\left(\frac{\delta}{z}\right)}$$

60. Obteniendo la ecuación

$$\frac{x_A}{(1 - n^{-1})x_{A0}} = \frac{x_{A0}}{(1 - n^{-1})} \left(\frac{\delta}{z}\right)$$

61. La ecuación puede utilizarse ahora para obtener la densidad de flujo molar a través de la película

$$N_{Az} = \frac{cD_{AA_2}}{\delta} \ln \frac{1}{\frac{x_A}{(1 - n^{-1})x_{A0}}}$$

4.2.5 APLICACIÓN EN COORDENADAS RECTANGULARES (EJERCICIO PROPUESTO)

La difusividad del sistema gaseoso binario oxígeno-tetracloruro de carbono se determina observando la evaporación en estado estacionario del CCl_4 en un tubo que contiene O_2 .

La distancia entre el nivel del CCl_4 líquido y la parte superior del tubo es $z_2 - z_1 = 17.1$ cm. La presión total del sistema es de 755 mmHg y la temperatura de 0°C la presión del vapor del CCl_4 a esta temperatura es de 33 mmHg.

La sección transversal del tubo de difusión es de 0.82 cm^2 .

Se ha encontrado que en estas condiciones se evaporan 0.0208 cm^3 de CCl_4 durante 10 horas después de alcanzar el estado estacionario.

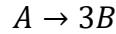
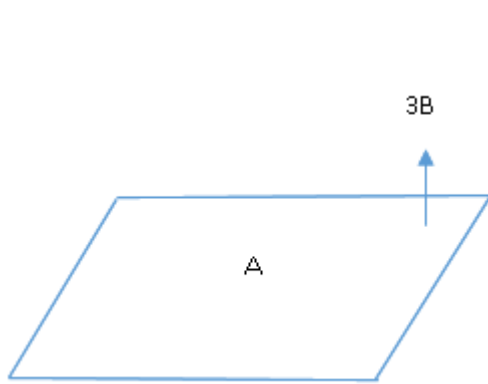
¿Cuál es la difusividad del sistema estacionario $\text{CCl}_4\text{-O}_2$?

Respuesta:

$$D_{AB}(\text{CCl}_4 - \text{O}_2) = 0.0636 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

4.2.6 DIFUSIÓN EN FASE GASEOSA

El siguiente dibujo muestra la difusión en la fase gaseosa en la velocidad de una superficie catalizadora, La componente A se difunde a través de una película estancada a la superficie catalizadora en la cual se convierte instantáneamente en B, por medio de la rx:



B se difunde alejándose de la superficie catalizadora, de nuevo a través de la película estancada.

a) Determine la rapidez con que A entra en la película de gas si este es un proceso permanente

b) Evalúe el perfil de concentración contra z

1. Aplicando un balance de materia a un incremento de Δz

$$SN_{Az}|_z - SN_{Az}|_{z+\Delta z} = 0$$

2. Factorizando las constantes:

$$\frac{SN_{Az}|_z - SN_{Az}|_{z+\Delta z}}{\Delta z}$$

Cambiando los signos de los términos:

$$\frac{SN_{Az}|_{z+\Delta z} - SN_{Az}|_z}{\Delta z}$$

3. Aplicando limite cuando Δz tiende a 0:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{SN_{Az}|_{z+\Delta z} - SN_{Az}|_z}{\Delta z} = 0$$

Al momento de aplicar el límite cuando Δz tiende a 0, se deduce la derivada por definición del límite.

Obteniendo la ecuación:

$$-\frac{dN_{Az}}{dz} = 0$$

4. Se puede deducir que N_{Az} es constante por lo cual:

$$dN_{Az} = 0$$

$$N_{Az} = -cD_{AB} \frac{d_{xa}}{dz} X_A (N_{Az} + N_{Bz})$$

$$-3N_{Az} = N_{Bz}$$

5. Sustituyendo en la ecuación:

$$N_{Az} = -cD_{AB} \frac{d_{xa}}{dz} X_A (N_{Az} - 3N_{Az})$$

6. Realizando la resta:

$$N_{Az} = -c\mathcal{D}_{AB} \frac{d_{xa}}{d_z} + 2x_A N_{Az}$$

7. Reacomodando:

$$N_{Az} = -\frac{c\mathcal{D}_{AB}}{1 - 2x_A} \frac{d_{xa}}{d_z}$$

8. Despejando d_z e integrando:

$$N_{Az} \int_0^\delta d_z = -c\mathcal{D}_{AB} \int_{x_{A0}}^0 \frac{d_{xa}}{1 + 2x_A}$$

Integrando la ecuación por cambio de variable.

9. Una vez integrada, se evalúan los límites de integración. Obteniendo:

$$N_{Az} \delta = -c\mathcal{D}_{AB} \int_{x_{A0}}^0 \frac{d_{xa}}{1 + 2x_A}$$

$$u = 1 + 2x_A$$

$$du = 2dx_A$$

$$N_{Az} \delta = -c\mathcal{D}_{AB} \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

10. Reacomodando términos e integrando logarítmicamente

$$N_{Az} \delta = \frac{c\mathcal{D}_{AB}}{2} \ln(1 + 2x_A)$$

$$d \left[-\frac{c\mathcal{D}_{AB}}{1 + 2x_A} \frac{d_{xa}}{d_z} \right] = 0$$

11. Manteniendo a $c\mathcal{D}_{AB}$ constante lo cual nos quedaría una ecuación

$$d \left[\frac{1}{1 + 2x_A} \frac{d_{xa}}{d_z} \right] = 0$$

12. Integrando la ecuación:

$$\int d \left[\frac{1}{1 + 2x_A} \frac{d_{xa}}{d_z} \right] = 0$$

13. Obteniendo la ecuación:

$$\frac{1}{1 + 2x_A} \frac{d_{xa}}{d_z} = C_1$$

14. Despejando d_z :

$$\frac{1}{1 + 2x_A} d_{xa} = C_1 d_z$$

15. Integrando la ecuación:

$$\int \frac{1}{1 + 2x_A} d_{xa} = \int C_1 d_z$$

16. Integrando la ecuación por cambio de variable:

$$u = 1 + 2x_A$$

$$du = 2dx_A$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \int C_1 dz$$

17. Obteniendo la ecuación general:

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 2x_A) = C_1 z + C_2$$

18. Aplicando condiciones límite:

C.L. 1:	Para $z = z_1$	$x_A = x_{A1}$
C.L. 2:	Para $z = z_2$	$x_A = x_{A2}$

19. Sustituyendo en ecuación general las condiciones límite:

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 2x_{A0}) = C_1 0 + C_2$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 0) = C_1 \delta + C_2$$

20. Multiplicando por -1 para reducir C_2 :

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 2x_{A0}) = C_1 0 + C_2$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 0) = C_1 \delta + C_2$$

21. Obteniendo C_2 :

$$C_2 = \frac{1}{2} \ln(1 + 2x_{A0})$$

22. Despejando C_1 :

$$C_1 = -\frac{1}{2\delta} \ln(1 + 2x_{A0})$$

23. Sustituyendo en ecuación general

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 2x_A) = C_1 z + C_2$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 2x_A) = -\frac{z}{2\delta} \ln(1 + 2x_{A0}) + \frac{1}{2} \ln(1 + 2x_{A0})$$

24. Ordenando:

$$\ln(1 + 2x_A) = 1 - \frac{z}{\delta} \ln(1 + 2x_{A0})$$

25. Aplicando leyes de los logaritmos

$$e^{\ln(1+2x_A)} = e^{\ln(1+2x_{A0})(1-\frac{z}{\delta})}$$

$$1 + 2x_A = 1 + 2x_{A0}^{(1-\frac{z}{\delta})}$$

26. Obteniendo la ecuación despejando x_A

$$x_A = \frac{1}{2} \left[1 + 2x_{A0}^{(1-\frac{z}{\delta})} - 1 \right]$$

Perfil de concentración de la especie A dependiente del espesor de película

4.2.7 ELABORACIÓN DE MAQUETA PARA REFORZAMIENTO DE CONCEPTOS

Seleccione uno de los siguientes perfiles de concentración:

- I. Transferencia de masa para coordenadas rectangulares unidireccionales.
- II. Transferencia de masa para coordenadas cilíndricas unidireccionales.
- III. Transferencia de masa en flujo en un conducto con cambio brusco de sección transversal.
- IV. Transferencia de masa en un flujo en una placa plana.
- V. Transferencia de masa en un flujo de un fluido alrededor de un cilindro.
- VI. Transferencia de masa en un flujo en una esfera.
- VII. Flujo en un conducto con entrada y salida.
- VIII. Transferencia de masa en un flujo de tuberías en paralelo.

Una vez seleccionado el tema, investigar sobre el perfil de concentración. Se deberá comprender cómo se distribuye la concentración en su perfil específico, cómo afecta la difusividad y cuáles son las condiciones de frontera relevantes.

Para fortalecer la asimilación de compuestos, se deberá diseñar y construir una maqueta que represente su perfil de concentración. Para la exposición de la maqueta, se tiene que incluir:

- Ubicación de coordenadas (cilíndricas, esféricas o rectangulares).
- Zonas de transferencia de masa.
- Efecto de la difusividad en la transferencia de masa.
- Condiciones de frontera específicas para el proceso.

Después de todas las presentaciones, se promoverá una discusión en clase sobre los diferentes perfiles de velocidad y las maquetas creadas.

5. TRANSFERENCIA EN LA INTERFAZ

La transferencia en la interfaz se refiere al intercambio de cantidad de movimiento, calor y masa que ocurre en la región donde dos medios diferentes se encuentran o interactúan entre sí. Esta interfaz puede ser entre un fluido y una superficie sólida, entre dos fluidos diferentes, o entre un fluido y un medio poroso, por ejemplo.

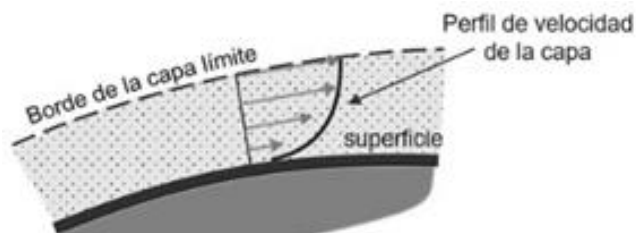
1. **Transferencia de movimiento:** En la interfaz, se produce la transferencia de cantidad de movimiento, lo que implica cambios en la velocidad y dirección del flujo de los fluidos en contacto. Esto puede manifestarse como fricción entre el fluido y la superficie sólida, cambios en la dirección del flujo debido a gradientes de velocidad, o cualquier otro efecto que modifique el movimiento del fluido en la interfaz.
2. **Transferencia de calor:** La transferencia de calor en la interfaz implica el intercambio de energía térmica entre el fluido y la superficie sólida. Esto puede ocurrir en forma de calor conducido a través de la superficie sólida, calor convectivo debido al movimiento del fluido, o incluso radiación térmica si la temperatura de la superficie sólida es lo suficientemente alta.
3. **Transferencia de masa:** En la interfaz, también puede ocurrir la transferencia de masa, que implica el movimiento de componentes o sustancias químicas desde el fluido hacia la superficie sólida o viceversa. Esto puede ser el resultado de procesos de difusión, convección o reacciones químicas que tienen lugar en la interfaz.

Cuando se considera el balance global en un sistema que involucra transferencia de movimiento, calor y masa en la interfaz, se debe tener en cuenta cómo estos tres procesos interactúan entre sí y cómo afectan el comportamiento global del sistema. Esto implica considerar los efectos de cada proceso en el transporte de los otros, así como sus efectos individuales en las propiedades y comportamiento del sistema en su conjunto.

5.1. TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE EN FLUJO LAMINAR Y TURBULENTO.

5.1.1 CAPA LÍMITE

El concepto de capa límite se deriva de la observación de que los efectos de la fricción de un fluido en números de Reynolds altos están confinados a una delgada región cerca de la superficie de un cuerpo. Se estudia principalmente para comprender la variación de velocidades en la región donde un fluido interactúa con un obstáculo presente en su camino o a través del cual se mueve. La existencia de esta capa se debe principalmente a la viscosidad, una propiedad inherente de todos los fluidos.



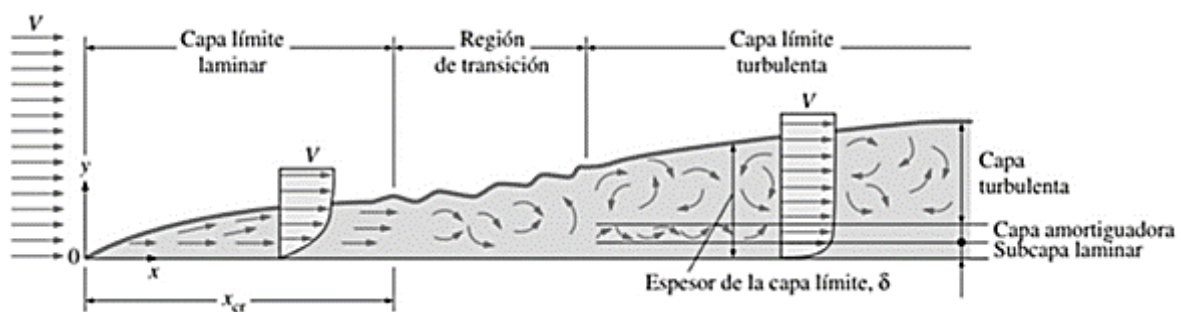
El espesor de la capa límite aumenta en dirección corriente abajo y siempre el cociente δ/x sigue siendo pequeño, el perfil de velocidad en la capa límite satisface la condición de no deslizamiento en la pared, y emerge suavemente hasta la velocidad de corriente libre en el borde de la capa, existe un esfuerzo cortante en la pared, las líneas de corriente de flujo en la capa límite son aproximadamente paralelas en la superficie. También, el espesor de la capa límite es variable según el tipo de fluido y las condiciones de flujo de este. Sin embargo, por definición, se tiene entendido que la capa límite se extenderá hasta donde la velocidad sea 99% de la velocidad de la corriente libre, es decir, se extenderá hasta que la velocidad sea casi igual a la velocidad del fluido no perturbado por la presencia del sólido.

5.1.1.1 TIPOS DE CAPA LÍMITE

Existen diferentes tipos de capa límite, que varían según las características del flujo y las condiciones del entorno. Algunos de los tipos más comunes son:

CAPA LÍMITE LAMINAR: En esta capa, el flujo se mueve de manera ordenada y suave, con líneas de corriente bien definidas y sin turbulencias significativas. Es típica en flujos de baja velocidad y Números de Reynolds bajos. La transferencia de masa y calor en esta capa suele ser relativamente baja.

CAPA LÍMITE TURBULENTO: En contraste con la capa límite laminar, esta capa se caracteriza por la presencia de turbulencias y fluctuaciones en la velocidad del flujo. Ocurre en flujos con altos Números de Reynolds y puede surgir debido a la inestabilidad del flujo laminar o a la presencia de irregularidades en la superficie. La transferencia de masa y calor en esta capa puede ser significativamente mayor que en la capa límite laminar debido a la turbulencia.



ECUACIONES DE DESCRIPCIÓN

$Re < 2 \times 10^5$ La capa límite es laminar

$2 \times 10^5 < Re < 3 \times 10^6$ La capa límite está en estado transitorio

$Re > 3 \times 10^6$ La capa límite es turbulenta

5.1.1.2 RÉGIMEN DE FLUJO

El régimen de flujo se refiere a la forma en que un fluido se mueve en un sistema, y puede clasificarse en diferentes categorías según ciertas características del flujo.

5.1.1.2.1 TIPOS DE RÉGIMEN DE FLUJO

Algunos de los regímenes de flujo más comunes son:

FLUJO LAMINAR: En este régimen, el fluido se mueve de manera ordenada y suave, con líneas de corriente paralelas y sin turbulencias significativas. Ocurre a velocidades bajas y en condiciones donde la viscosidad del fluido es dominante, lo que limita la formación de turbulencia.

FLUJO TURBULENTO: En contraste con el flujo laminar, en el flujo turbulento el fluido experimenta fluctuaciones aleatorias en la velocidad y la presión. Se caracteriza por la presencia de remolinos y vórtices, lo que aumenta la mezcla y la transferencia de energía. Este tipo de flujo ocurre a velocidades más altas y en condiciones donde la viscosidad no es dominante.

FLUJO TRANSICIONAL: Es un estado intermedio entre el flujo laminar y el flujo turbulento. En este régimen, el flujo puede experimentar transiciones abruptas entre el comportamiento laminar y turbulento debido a cambios en las condiciones del flujo, como la velocidad o la geometría.

FLUJO ESTACIONARIO: En este régimen, las propiedades del fluido en un punto específico del sistema no cambian con el tiempo. Es típico en sistemas donde no hay movimiento relativo entre las partículas del fluido y las paredes del sistema.

FLUJO NO ESTACIONARIO O TRANSITORIO: En este régimen, las propiedades del fluido en un punto específico del sistema cambian con el tiempo. Ocurre en sistemas donde hay cambios en las condiciones de operación o en la geometría que afectan el comportamiento del flujo.

5.2. CORRELACIONES PARA EL CÁLCULO DE COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR.

Las correlaciones para el cálculo de coeficientes de transferencia de calor son relaciones empíricas o teóricas que permiten estimar la transferencia de calor entre un fluido y una superficie sólida en función de variables como las propiedades del fluido, las características de la superficie y las condiciones de flujo. Estas correlaciones son fundamentales en la ingeniería térmica y en el diseño de sistemas de intercambio de calor, ya que proporcionan una forma de predecir el comportamiento del intercambio de calor en diversas configuraciones y condiciones. Las correlaciones se derivan a partir de datos experimentales obtenidos en condiciones controladas o se desarrollan a partir de análisis teóricos de los procesos

de transferencia de calor. Pueden tomar la forma de ecuaciones algebraicas, expresiones analíticas o gráficos, y su aplicación puede variar según el tipo de flujo (laminar o turbulento), la geometría del sistema, y otras variables relevantes.

Algunos ejemplos comunes de correlaciones para el cálculo de coeficientes de transferencia de calor incluyen:

- 1. CORRELACIONES DE CONVECCIÓN FORZADA:** Estas correlaciones se utilizan para estimar el coeficiente de transferencia de calor en sistemas donde el flujo del fluido es inducido por una fuerza externa, como en tuberías, intercambiadores de calor y equipos de refrigeración.
- 2. CORRELACIONES DE CONVECCIÓN NATURAL:** Estas correlaciones se aplican en sistemas donde el movimiento del fluido es impulsado por diferencias de densidad debido a gradientes de temperatura, como en el enfriamiento de superficies expuestas al aire ambiente.
- 3. CORRELACIONES PARA FLUJO INTERNO Y EXTERNO:** Dependiendo de si el fluido fluye dentro de una tubería o alrededor de una superficie sólida, se utilizan correlaciones específicas para estimar el coeficiente de transferencia de calor.
- 4. CORRELACIONES PARA DIFERENTES REGÍMENES DE FLUJO:** Las correlaciones pueden distinguirse entre regímenes de flujo laminar y turbulento, ya que las características de transferencia de calor varían significativamente entre estos regímenes.

5.2.1 CORRELACIONES DE CONVECCIÓN FORZADA

Las correlaciones de convección forzada se utilizan en sistemas donde el fluido se mueve debido a una fuerza externa aplicada, como la acción de una bomba, un ventilador o el movimiento de un objeto sólido. Estas correlaciones son fundamentales en la ingeniería térmica y en el diseño de sistemas de intercambio de calor, ya que proporcionan una forma de predecir el comportamiento del intercambio de calor en condiciones de flujo inducido.

Las correlaciones de convección forzada se desarrollan a partir de datos experimentales obtenidos en condiciones controladas de flujo y temperatura, o mediante análisis teóricos de los procesos de transferencia de calor en sistemas específicos. Pueden tomar la forma de ecuaciones algebraicas, expresiones analíticas o gráficos que relacionan el coeficiente de transferencia de calor con variables relevantes, como la velocidad del fluido, las propiedades termofísicas del fluido y la geometría del sistema.

Algunos aspectos importantes de las correlaciones de convección forzada incluyen:

1. **DEPENDENCIA DE LA VELOCIDAD DEL FLUIDO:** En sistemas de convección forzada, el coeficiente de transferencia de calor suele aumentar con la velocidad del fluido. Esto se debe a que velocidades más altas promueven una mayor mezcla y agitación del fluido, lo que aumenta la tasa de transferencia de calor.
2. **INFLUENCIA DE LA GEOMETRÍA:** La geometría del sistema, como la forma y el tamaño de la superficie de intercambio de calor, puede afectar significativamente el coeficiente de transferencia de calor. Las correlaciones de convección forzada suelen tener en cuenta estas características geométricas para proporcionar estimaciones precisas del coeficiente de transferencia de calor.
3. **REGÍMENES DE FLUJO:** Las correlaciones pueden distinguirse entre regímenes de flujo laminar y turbulento, ya que las características de transferencia de calor varían significativamente entre estos regímenes. Para regímenes de flujo laminar, las correlaciones suelen basarse en soluciones analíticas de las ecuaciones de flujo, mientras que, para regímenes de flujo turbulento, se utilizan enfoques más empíricos basados en datos experimentales.
4. **APLICACIÓN EN DISEÑO DE EQUIPOS:** Las correlaciones de convección forzada son ampliamente utilizadas en el diseño de intercambiadores de calor, refrigeradores, calentadores y otros equipos de transferencia de calor donde el flujo del fluido es inducido por una fuerza externa.

5.2.2 CORRELACIONES DE CONVECCIÓN NATURAL

Las correlaciones de convección natural se utilizan cuando el movimiento del fluido es impulsado únicamente por diferencias de densidad causadas por gradientes de temperatura, sin la necesidad de una fuerza externa aplicada, como en el caso de la convección forzada. Este tipo de convección ocurre naturalmente debido a la acción de la gravedad y es común en sistemas donde no hay un flujo inducido por medios mecánicos, como en la atmósfera, en cuerpos de agua y en muchos procesos de transferencia de calor en la ingeniería.

Algunas características importantes de las correlaciones de convección natural son las siguientes:

1. **DEPENDENCIA DE LAS DIFERENCIAS DE TEMPERATURA:** En la convección natural, el coeficiente de transferencia de calor está influenciado por las diferencias de temperatura entre la superficie caliente y el medio circundante. A medida que aumenta la diferencia de temperatura, aumenta la tasa de transferencia de calor.
2. **FLUJO ASCENDENTE Y DESCENDENTE:** En función de la distribución de temperaturas, el fluido caliente tiende a ascender y el fluido frío tiende a descender, lo que resulta en corrientes de convección ascendente y descendente. Estas corrientes contribuyen al transporte de calor desde la superficie caliente hacia el medio circundante.
3. **REGÍMENES DE CONVECCIÓN:** Al igual que en la convección forzada, las correlaciones de convección natural distinguen entre regímenes de flujo laminar y turbulento. En regímenes de flujo laminar, la convección natural sigue patrones de flujo suaves y ordenados, mientras que, en regímenes de flujo turbulento, se observan movimientos caóticos y aleatorios.
4. **INFLUENCIA DE LA GEOMETRÍA:** La geometría del sistema también juega un papel importante en la determinación del coeficiente de transferencia de calor en la convección natural. Factores como la forma y el tamaño de la superficie de transferencia de calor, así como la orientación relativa del objeto caliente respecto a la dirección de la gravedad, pueden afectar significativamente el proceso de transferencia de calor.
5. **APLICACIONES EN LA INGENIERÍA:** Las correlaciones de convección natural son utilizadas en una amplia gama de aplicaciones de ingeniería, incluyendo el diseño de edificios con sistemas de ventilación natural, el enfriamiento de equipos electrónicos mediante disipadores de calor pasivos, y la refrigeración de componentes en reactores nucleares utilizando corrientes de aire ascendente y descendente.

5.2.3 CORRELACIONES PARA FLUJO INTERNO Y EXTERNO

Las correlaciones para flujo interno y externo se utilizan en sistemas donde el flujo de fluido ocurre dentro o fuera de un conducto o superficie sólida. Estas correlaciones son fundamentales en el diseño y análisis de intercambiadores de calor, sistemas de refrigeración, calentadores, o una variedad de aplicaciones industriales donde se requiere transferencia de calor entre un fluido y una superficie sólida.

A continuación, se detallan algunas características importantes de las correlaciones para flujo interno y externo:

1. **FLUJO INTERNO:** En el caso del flujo interno, el fluido circula a través de conductos cerrados, como tuberías, conductos de ventilación o intercambiadores de calor. Las correlaciones para flujo interno tienen en cuenta factores como el diámetro del conducto, la velocidad del fluido, las propiedades termofísicas del fluido y la geometría del conducto para determinar el coeficiente de transferencia de calor.
2. **FLUJO EXTERNO:** En el flujo externo, el fluido circula en contacto con una superficie sólida, como en el caso de la transferencia de calor entre un fluido y una placa, un tubo o una carcasa de un intercambiador de calor. Las correlaciones para flujo externo consideran la velocidad y características del flujo del fluido, así como la geometría y las propiedades térmicas de la superficie sólida para calcular el coeficiente de transferencia de calor.
3. **DEPENDENCIA DE LAS PROPIEDADES DEL FLUIDO:** Las correlaciones para flujo interno y externo tienen en cuenta las propiedades termofísicas del fluido, como la viscosidad, la conductividad térmica y la densidad, ya que estas propiedades influyen en la capacidad del fluido para transportar calor.
4. **REGÍMENES DE FLUJO:** Las correlaciones para flujo interno y externo distinguen entre diferentes regímenes de flujo, como el flujo laminar y turbulento, ya que el régimen de flujo afecta significativamente el coeficiente de transferencia de calor. En general, el flujo turbulento tiende a tener coeficientes de transferencia de calor más altos que el flujo laminar debido a una mayor agitación del fluido.
5. **VALIDACIÓN EXPERIMENTAL:** Las correlaciones para flujo interno y externo se desarrollan a menudo mediante experimentación y análisis teórico. Estas correlaciones se validan mediante datos experimentales obtenidos en laboratorio o en condiciones reales, lo que garantiza su precisión y confiabilidad en una variedad de aplicaciones.

5.2.4 CORRELACIONES PARA DIFERENTES REGÍMENES DE FLUJO

Las correlaciones para diferentes regímenes de flujo se utilizan en función del régimen de flujo predominante en un sistema. Estas correlaciones son fundamentales en la ingeniería térmica y fluidodinámica para comprender y predecir cómo varía la transferencia de calor en diferentes condiciones de flujo.

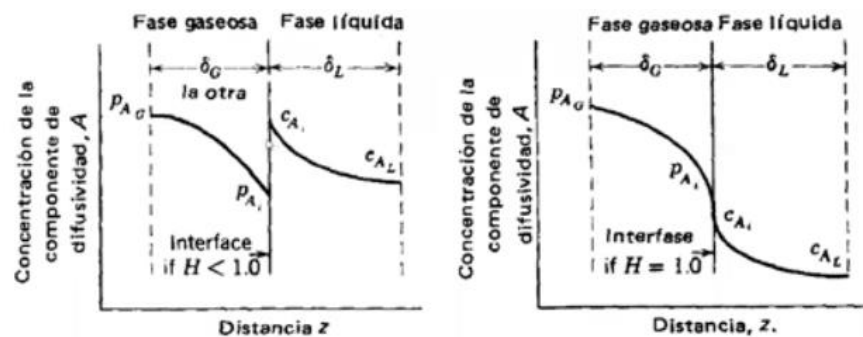
A continuación, se detallan algunas características importantes de las correlaciones para diferentes regímenes de flujo:

1. **FLUJO LAMINAR:** En el flujo laminar, las partículas del fluido se mueven en capas paralelas y ordenadas, sin turbulencia significativa. Las correlaciones para flujo laminar se basan en soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo laminar y consideran factores como la viscosidad del fluido, la velocidad del flujo y las dimensiones geométricas del sistema. Estas correlaciones son precisas para sistemas con números de Reynolds (Re) bajos, donde la viscosidad domina el comportamiento del flujo.
2. **FLUJO TURBULENTO:** En el flujo turbulento, se producen vórtices y remolinos en el fluido, lo que aumenta la mezcla y la transferencia de calor. Las correlaciones para flujo turbulento son más complejas y suelen basarse en experimentos empíricos y relaciones semiempíricas. Estas correlaciones consideran factores como el número de Reynolds, el número de Prandtl y el número de Nusselt, que describen las características del flujo, la conductividad térmica y la transferencia de calor, respectivamente.
3. **TRANSICIÓN ENTRE REGÍMENES DE FLUJO:** En algunos casos, los sistemas pueden experimentar una transición entre el flujo laminar y el turbulento, lo que se conoce como flujo de transición. Las correlaciones para flujo de transición tienen en cuenta esta variabilidad y pueden incluir criterios específicos para determinar cuándo ocurre la transición entre los regímenes de flujo.
4. **CORRELACIONES EMPÍRICAS Y TEÓRICAS:** Las correlaciones para diferentes regímenes de flujo pueden basarse en enfoques empíricos, que se derivan de datos experimentales, o en enfoques teóricos, que se derivan de análisis matemáticos de las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía. En general, las correlaciones empíricas son más adecuadas para aplicaciones prácticas, mientras que las correlaciones teóricas ofrecen una comprensión más profunda del fenómeno físico.

5.3. TEORÍA DE LA DOBLE PELÍCULA: (COEFICIENTE INDIVIDUAL DE TRANSFERENCIA DE MASA, COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE MASA, RESISTENCIA DETERMINANTE EN LA DIFUSIÓN ENTRE FASES).

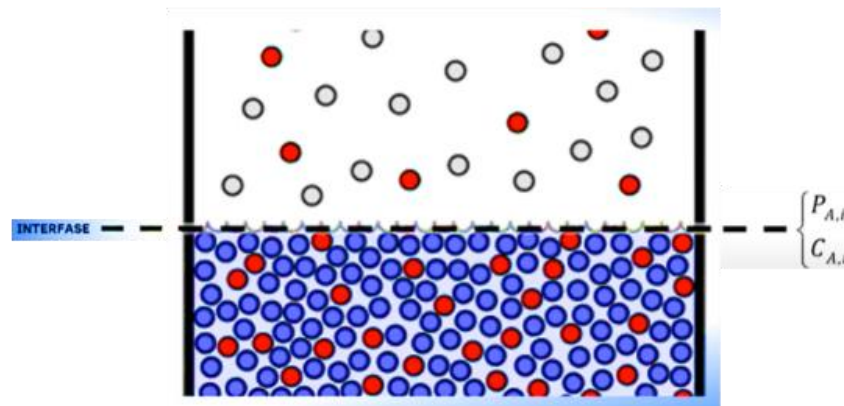
5.3.1 DEFINICIÓN DE COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE MASA PARA ELEVADAS VELOCIDADES DE TRANSFERENCIA DE MATERIA

Describe la transferencia de masa entre una fase gaseosa y una fase líquida que se encuentran en contacto, con base en la suposición de resistencias en serie a través de dos capas límite (una en cada fase).



Interfase

Región tridimensional de contacto entre dos fases A y B, en la que sus propiedades varían desde las correspondientes a la fase A hasta las de la fase B.



Coefficientes individuales: Son aquellos que únicamente permiten medir el flujo del soluto desde la matriz del gas hasta la interfase. También es conocido como un coeficiente local. Flujos morales específicos.

Coefficientes globales: Son aquellos que permiten medir el flujo molar desde la matriz del gas hasta la matriz del líquido pasando por las interfases.

Relación de resistencias individual y global

$$\text{Resistencia total en el gas} = \frac{\text{resistencia en el gas}}{\text{resistencia global (gas y líquido)}} = \frac{\Delta P_{A, \text{película gaseosa}}}{\Delta P_{A, \text{total}}} = \frac{1/k_G}{1/K_G}$$

$$\text{Resistencia total en el líquido} = \frac{\text{resistencia en el líquido}}{\text{resistencia global (gas y líquido)}} = \frac{\Delta C_{A, \text{película líquida}}}{\Delta C_{A, \text{total}}} = \frac{1/k_L}{1/K_L}$$

FLUJOS MOLARES

Flujos molares parciales:

$$N_{A,Z} = k_g(P_{A,G} - P_{A,i}) \quad y \quad N_{A,Z} = k_l(C_{A,i} - C_{A,L})$$

Flujos molares globales:

$$N_{A,Z} = K_G(P_{A,G} - P_A^*) \quad y \quad N_{A,Z} = k_L(C_A^* - C_{A,L})$$

Para altas velocidades de transferencia se usan definiciones análogas, pero se añade un punto negro (•).

$$F_{kZ} = f * A \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$Q = h * A \Delta T$$

$$W_A^m - X_{A0}(W_A^m + W_B^m) = k_X^* A \Delta X_A$$

Los puntos negros se utilizarán solamente cuando los coeficientes de transferencia hayan sido corregidos para la velocidad de transferencia de materia.

La transferencia adicional de cantidad de movimiento y de energía debida al paso del fluido a través de la interfase es puede ser considerable.

$$F_z^m = (W_A^m + W_B^m M_B) V_{z0}$$

$$F_z^m = (W_A^m H_{A0} + W_{B0}^m)$$

-El índice superior m indica a la transferencia de materia

-El subíndice 0 indica condiciones del fluido junto a la interfase.

Para obtener los coeficientes de transferencia corregidos:

$$\theta_v = \frac{f^*}{f}$$

$$\theta_T = \frac{h^*}{h}$$

$$\theta_{AB} = \frac{k_z^*}{k_z}$$

CONSTANTES:

-Para movimiento: $(V_x - 0)(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B) - k \frac{dT}{dy} = q_y|_{y=0} = q_0$

-Para energía: $(T - T_0)(N_{A0}C_{pA} + N_{B0}C_{pB}) - k \frac{dT}{dy} = q_y|_{y=0} = q_0$

-Para continuidad: $(X_A - X_{A0})(N_{A0} + N_{B0}) - CD_{AB} \frac{dX_A}{dy} = J_{Ay}|_{y=0} = N_{A0} - N_{A0} - X_{A0}(N_{A0} + N_{B0})$

Tenemos los siguientes coeficientes locales de transferencia

$$f_{loc}^* = \frac{-t_0}{\frac{1}{2}pV_\infty(0 - V_\infty)}$$

$$h_{loc}^* = \frac{q_0}{(T_0 - T_\infty)}$$

$$k_{x,loc}^* = \frac{N_{A0} - X_{A0}(N_{A0} + N_{B0})}{(X_{A0} - X_{A\infty})}$$

Principales resultados en teoría de la doble película:

Movimiento:

$$1 + \frac{(V_\infty - 0)(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B)}{t_0} = \frac{N_{A0}M_A + N_{B0}M_B}{f_{loc}^*}$$

Energía:

$$1 + \frac{(T_0 - T_\infty)(N_{A0}C_{pA} + N_{B0}C_{pB})}{q_0} = \frac{N_{A0}C_{pA} + N_{B0}C_{pB}}{h_{loc}^*}$$

Masa:

$$1 + \frac{X_{A0} - X_{A\infty}}{\frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}} - X_{A0}} = \frac{N_{A0} + N_{B0}}{k_{x,loc}^*}$$

Términos adimensionales:

$$R_v = \frac{N_{A0}M_A + N_{B0}M_B}{\frac{1}{2}pV_\infty f_{loc}^*} = \frac{(V_\infty - 0)(N_{A0}C_{pA} + N_{B0}C_{pB})}{t_0}$$

$$R_T = \frac{N_{A0}C_{pA} + N_{B0}C_{pB}}{h_{loc}^*} = \frac{(T_0 - T_\infty)(N_{A0}C_{pA} + N_{B0}C_{pB})}{q_0}$$

$$R_T = \frac{N_{A0}C_{pA} + N_{B0}C_{pB}}{h_{loc}^*} = \frac{(T_0 - T_\infty)(N_{A0}C_{pA} + N_{B0}C_{pB})}{q_0}$$

$$R_{AB} \frac{N_{A0} + N_{B0}}{k_{x,loc}^*} = \frac{X_{A0} - X_{A\infty}}{\frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}} - X_{A0}}$$

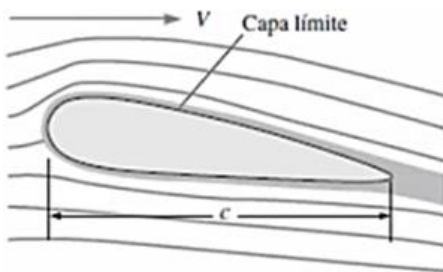
Factores de corrección:

$$\theta = \frac{\phi}{e^\phi - 1}$$

$$\theta = \frac{\ln(R + 1)}{R}$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN:

1. Se tiene agua que fluye sobre la aleta de un pequeño vehículo submarino con la velocidad $V = 6.0$ mi/h. La temperatura del agua es de 40°F y la longitud de la aleta es de 1.6ft .
 - a) La capa límite sobre la superficie de la aleta ¿es laminar o turbulenta o en transición?
 - b) Determine el espesor de la capa límite al final de la aleta.
 - c) Determine el espesor de desplazamiento al final de la aleta.



Datos:

De tablas para el agua a 40°F (4.4°C):

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1.5494 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

1. Determino el número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho * V * x}{\mu}$$

$$Re = \frac{\left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(2.6822 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (0.4877 \text{m})}{1.5494 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}}$$

$$Re = 844,268.06$$

2. Estado de transición

$$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.38}{(Re_x)^{1/5}}$$

$\delta =$ Despejando el espesor

$$\delta \cong \frac{0.38x}{(Re_x)^{1/5}}$$

Sustituyendo datos

$$\delta \cong \frac{0.38(0.4877 \text{ m})}{(844,268.06)^{1/5}}$$

$$1.5279 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.1528 \text{ cm}$$

$$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.048}{(Re_x)^{1/5}}$$

Despejando el espesor de desplazamiento

$$\delta^* \cong \frac{0.048x}{(Re_x)^{1/5}}$$

Sustituyendo datos

$$\delta^* \cong \frac{0.048(0.4877 \text{ m})}{(844,268.06)^{1/5}}$$

$$0.0120 \text{ m} = 1.2 \text{ cm}$$

$$\delta^* =$$

2. Aire a 1 Pa y 285 K entra a un tubo de 25mm de diámetro y 5m de largo para enfriarlo cuya densidad es de 1.1614 kg/m^3 un calor específico de $1007 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$, la conductividad térmica es de $26.3 \text{ W/m}^\circ\text{K}$ y cuya viscosidad es de $1.72 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ de acuerdo con tablas y la velocidad del aire por el tubo es de 5 m/s . Determine el coeficiente de la transferencia de calor al ducto de aire.

$$Re = \frac{\rho * V * x}{\mu}$$

$$Pr = \frac{\mu * Cp * \rho}{k}$$

$$Re = \frac{\left(1.1614 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (0.025 \text{ m})}{1.72 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 84.4 \quad \text{Régimen laminar}$$

$$Pr = \frac{(1.72 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}) \left(1007 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{K}}\right)}{\frac{26.3 \times 10^{-3} \text{ W}}{\text{m}^\circ\text{K}}} = 65.857$$

$$Nu = 3.66 + \frac{0.0688 \left(\frac{D}{L}\right) Re Pr}{1 + 0.04 \left[\left(\frac{D}{L}\right) Re Pr\right]^{2/3}}$$

$$Nu = 3.66 + \frac{0.0688 \left(\frac{0.025 \text{ m}}{5 \text{ m}}\right) 84.4 * 65.86}{1 + 0.04 \left[\left(\frac{0.025 \text{ m}}{5 \text{ m}}\right) 84.4 * 65.86\right]^{2/3}}$$

$$Nu = 3.66 + 1.35 = 5.013$$

$$h = \frac{5.013 \left(26.3 \times 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}\right)}{5 \text{ m}} = 0.026 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 * ^\circ\text{K}}$$

3. Un banco de intercambiadores de doble tubo opera con el flujo caliente en serie de 300 a 200°F y el fluido frío en seis corrientes paralelas de 190 a 220°F. ¿Cuál es la diferencia verdadera de temperatura At ?

$$P' = \frac{200 - 190}{300 - 190} = 0.091 \quad R' = \frac{300 - 200}{6(220 - 190)} = 0.558$$

$$\frac{1 - 0.091}{y} = 2.3 \frac{(6)(0.558)}{0.558 - 1} \log \left[\left(\frac{0.558 - 1}{0.558} \right) \left(\frac{1}{0.091} \right)^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{0.558} \right]$$

$$At = y(T_1 - t_1)$$

$$At = 0.242(300 - 190)$$

$$At = 26.62 \text{ } ^\circ F$$

La MLDT es de 26.62, por lo cual se usaría un error de 26% si se usara.

4. Una gota casi esférica de agua, de 0.05 cm de diámetro, cae con una velocidad de 215cm/seg en él se no de aire seco en reposo a 1atm. Estimar la velocidad instantánea de evaporación en la gota si la superficie está a 21°C y del aire a 60°C. La presión de vapor de agua a 21°C es de 0.0245atm. Supóngase condiciones de pseudoestado estacionario.

DATOS:

$$C_f = 3.89 \times 10^{-5} \frac{gmol}{cm^3}$$

$$P_f = 1.12 \times 10^{-3} \frac{g}{cm^3}$$

$$u_f = 1.91 \times 10^{-4} \frac{g}{cm * s}$$

$$D_{AB} = 0.292 \frac{cm^2}{s}$$

$$\frac{u}{pD_{AB}} = 0.58$$

$$\frac{Dv_{\infty pf}}{u_f} = \frac{(0.5)(215)(1.12 \times 10^{-3})}{1.91 \times 10^{-4}} = 63$$

$$k_{xm} \frac{(0.292)(3.89 \times 10^{-5})}{0.05} (2 + 3.96) = 1.35 \times 10^{-3} \frac{gmol}{s * cm^2}$$

$$W_A^m = (1.35 \times 10^{-3})(pi)(0.05)^2 \frac{0.0245 - 0}{1 - 0.0245} = 2.66 \times 10^{-7} \frac{gmol}{s}$$

5. Suponiendo que se tiene un reactor químico en el que se lleva a cabo una reacción química y se produce un producto gaseoso. Se pretende determinar la velocidad del fluido.

- La longitud característica del sistema (D) es de 0.1 m
- Longitud característica de la capa límite de masa (L) es de 0.02 m.
- Diámetro de la tubería (D): 0.2 m
- Temperatura del fluido (T): 60°C
- Densidad del aire (ρ): 1.184 kg/m³
- Viscosidad dinámica del aire (μ): 1.81 x 10⁻⁵ Pa·s
- Calor específico del aire (Cp): 1005 J/(kg·K)
- Conductividad térmica del aire (k): 0.0257 W/(m·K)
- Velocidad del fluido (V)= 1 m/s

Solución

$$Re = \frac{\rho * V * D}{\mu}$$

$$Re = \frac{(1.184 * 1 * 0.2)}{1.81 \times 10^{-5}} = 13094.48$$

$$Pr = \frac{\mu * Cp}{k} = 706.86$$

$$Nu = 0.023 * Re^{0.8} * Pr^{0.4}$$

$$Nu = 0.023 * 13094.48^{0.8} * 706.86^{0.4} = 180.25$$

$$Sh = Nu * \left(\frac{D}{L}\right)^{2/3}$$

$$Sh = 180.25 * \left(\frac{0.1}{0.02}\right)^{2/3} = 526.32$$

El coeficiente de transferencia de masa (Sh) entre el gas y la superficie sólida en el reactor es aproximadamente 526.32

5.4. ANALOGÍAS EN LA TRANSFERENCIA DE MASA, CALOR Y MOMENTUM.

Las analogías resultan de utilidad para comprender los fenómenos de transferencia y también como un medio para predecir el comportamiento de los sistemas para los cuales existen datos cuantitativos limitados disponibles.

Se basan en el hecho de que los tres fenómenos son similares bajo ciertas condiciones:

- No hay reacción que genere calor o materia.

En las situaciones analizadas, no se consideran reacciones químicas o físicas que generen o consuman calor o materia durante el proceso de transferencia. Esto simplifica el análisis y permite centrarse en los aspectos fundamentales de la transferencia de energía, masa y momento.

- No hay radiación.

Se asume que no hay transferencia de energía mediante radiación electromagnética. Esta simplificación es válida en sistemas donde los efectos radiativos son despreciables en comparación con los procesos de conducción y convección.

- No hay disipación viscosa (que solo ocurre a altas velocidades).

Se excluyen los efectos de disipación viscosa, que son relevantes solo a altas velocidades de flujo. Esto simplifica el análisis de sistemas con velocidades de flujo moderadas o bajas, donde los efectos viscosos son mínimos.

- La rapidez de transferencia de materia es baja.

Se considera que la transferencia de masa ocurre a una velocidad baja en comparación con otros procesos en el sistema. Esta suposición es válida en sistemas donde la transferencia de masa es un proceso relativamente lento en comparación con la transferencia de calor y momento.

- Las propiedades físicas son constantes.

Se asume que las propiedades físicas relevantes, como la densidad, la viscosidad y la conductividad térmica, permanecen constantes a lo largo del sistema y durante el proceso de transferencia. Esta simplificación facilita el análisis al evitar la necesidad de considerar cambios en las propiedades físicas con respecto a la posición o el tiempo.

Debido a todo lo anterior, el perfil de velocidad no se ve modificado por la transferencia de masa, ni calor o la transferencia de calor.

Las analogías en el campo de la ingeniería y la física brindan herramientas poderosas para establecer relaciones entre fenómenos aparentemente distintos pero que comparten características fundamentales. En mecánica de fluidos y transferencia de calor, estas analogías desempeñan un papel crucial al proporcionar un marco conceptual que permite entender y predecir el comportamiento de sistemas complejos. Las analogías de Reynolds, Prandtl, Chilton-Colburn y von Karman son ejemplos destacados de cómo relacionamos fenómenos aparentemente diferentes, como el flujo de un fluido y la transferencia de calor, mediante principios y relaciones fundamentales. Estas analogías son herramientas poderosas para abordar problemas prácticos en el diseño de sistemas térmicos y fluidodinámicos, permitiéndonos realizar estimaciones y predicciones útiles con un alto grado de confiabilidad. En esta sección, exploraremos estas analogías en detalle, comprendiendo su importancia y aplicaciones en el amplio campo de la ingeniería y las ciencias físicas.

5.4.1 ANALOGÍA DE REYNOLDS

La Analogía de Reynolds es un concepto fundamental que establece una relación entre el transporte de cantidad de movimiento y el transporte de calor en un flujo de fluido. Fue propuesta por Osborne Reynolds a finales del siglo XIX y se basa en la idea de que, bajo ciertas condiciones, los perfiles de velocidad y temperatura en un flujo son similares.

En esencia, la Analogía de Reynolds postula que, en flujos turbulentos, donde las fuerzas de inercia dominan sobre las fuerzas viscosas, se puede establecer una analogía entre el transporte de cantidad de movimiento (o momento) y el transporte de calor. Esto significa que las características de la capa límite de velocidad en un flujo turbulento son análogas a las características de la capa límite térmica, lo que permite predecir el transporte de calor basándose en mediciones de velocidad y viceversa.

La analogía se expresa mediante el número de Prandtl y el número de Nusselt, que relacionan las tasas de transferencia de cantidad de movimiento y calor respectivamente. En términos prácticos, esta analogía es de gran utilidad en el diseño de intercambiadores de calor y en la predicción del comportamiento térmico de sistemas complejos. Permite, por ejemplo, estimar la transferencia de calor en un flujo turbulento a partir de mediciones de velocidad, lo que simplifica considerablemente el análisis y diseño de sistemas térmicos.

La ecuación de la Analogía de Reynolds se puede expresar de la siguiente manera:

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n$$

Donde:

- Nu es el número de Nusselt, que representa la tasa de transferencia de calor.
- Re es el número de Reynolds, que representa la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas en el flujo.
- Pr es el número de Prandtl, que relaciona la difusividad térmica con la viscosidad del fluido.
- C , m , y n son constantes que dependen de las condiciones específicas del flujo y la geometría del sistema.

5.4.2 ANALOGÍA DE PRANDTL

La Analogía de Prandtl establece una relación entre la transferencia de cantidad de movimiento (momentum) y la transferencia de calor en un flujo laminar o turbulento.

La base de la Analogía de Prandtl es el concepto de similitud de capa límite, que postula que las capas límite de cantidad de movimiento y calor se comportan de manera similar en un flujo. Esto significa que las propiedades de un flujo, como la velocidad y la temperatura, cambian de manera gradual desde la pared de un conducto hasta el flujo principal.

La ecuación fundamental de la Analogía de Prandtl es:

$$Nu = \frac{C \cdot Re^m \cdot Pr^n}{\left(1 + \left(\frac{Pr}{Pr_w}\right)^{1/3}\right)^{3/4}}$$

- Nu es el número de Nusselt, que representa la tasa de transferencia de calor.
- Re es el número de Reynolds, que describe la relación entre las fuerzas inerciales y viscosas en el flujo.
- Pr es el número de Prandtl, que relaciona la difusividad térmica con la viscosidad del fluido.
- Pr_w es el número de Prandtl en la pared.
- C , m y n son constantes que dependen de las condiciones específicas del flujo y la geometría del sistema.

La Analogía de Prandtl proporciona una forma de predecir la transferencia de calor en función de las mediciones de flujo y las propiedades del fluido. Es ampliamente utilizada en la ingeniería para el diseño y análisis de sistemas de transferencia de calor en una amplia gama de aplicaciones industriales y ambientales.

5.4.3 ANALOGÍA DE CHILTON-COLBURN

La Analogía de Chilton-Colburn, también conocida como la Analogía de Fluido Caliente, es una herramienta importante en el estudio de la transferencia de calor en flujos de fluidos. Esta analogía establece una relación entre la transferencia de calor y la fricción en un flujo, permitiendo predecir la tasa de transferencia de calor en función de las propiedades del fluido y las condiciones del flujo.

La base de la Analogía de Chilton-Colburn es la idea de que la fricción en un flujo está relacionada con la transferencia de calor. Esto se debe a que la fricción genera turbulencia en el flujo, lo que aumenta la mezcla y, por lo tanto, facilita la transferencia de calor. Por lo tanto, la tasa de transferencia de calor puede expresarse en términos de la fricción del flujo.

La ecuación fundamental de la Analogía de Chilton-Colburn es:

$$Nu = f \cdot \left(\frac{Re \cdot Pr}{1 + \frac{12.7 \cdot f}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Donde:

- Nu es el número de Nusselt, que representa la tasa de transferencia de calor.
- f es el factor de fricción del flujo.
- Re es el número de Reynolds, que describe la relación entre las fuerzas inerciales y viscosas en el flujo.
- Pr es el número de Prandtl, que relaciona la difusividad térmica con la viscosidad del fluido.

La Analogía de Chilton-Colburn proporciona una forma de calcular la transferencia de calor en función de la fricción del flujo, lo que la hace especialmente útil en el diseño y análisis de intercambiadores de calor y otros dispositivos de transferencia de calor en la ingeniería.

5.4.4 ANALOGÍA DE VON KARMAN

La Analogía de von Kármán, también conocida como la Analogía de von Kármán-Pohlhausen, se basa en la observación de que, bajo ciertas condiciones, la distribución de temperatura en un flujo de fluido turbulento es similar a la distribución de velocidad en el mismo flujo. Fue desarrollada por el ingeniero húngaro Theodore von Kármán en colaboración con el físico alemán Ludwig Prandtl.

La Analogía de von Kármán establece una relación entre el número de Nusselt (Nu) y el número de Reynolds (Re) para flujos de transferencia de calor en régimen turbulento. La ecuación general para esta analogía es:

$$Nu = f \cdot \left(\frac{Re \cdot Pr}{1 + \frac{12.7}{2} \cdot \frac{f}{Re}} \right)^{1/2}$$

Donde:

- Nu es el número de Nusselt,
- Re es el número de Reynolds,
- Pr es el número de Prandtl, y
- C , m y n son constantes empíricas que dependen del tipo de flujo y las condiciones del sistema.

La Analogía de von Kármán ha sido ampliamente utilizada para estimar el coeficiente de transferencia de calor en sistemas de flujo turbulento, especialmente en problemas de convección forzada en canales y tuberías. Sin embargo, es importante tener en cuenta que esta analogía tiene limitaciones y no es aplicable en todas las situaciones de transferencia de calor turbulenta.

Para obtener más detalles sobre la Analogía de von Kármán y sus aplicaciones, se pueden consultar libros de transferencia de calor y fluidos, así como artículos científicos en revistas especializadas en ingeniería térmica y fluidodinámica.

En el curso de cierto experimento en el que interviene el flujo de aire seco a 25° C y 1 atm, con una velocidad del flujo libre de 2 m/s, sobre un cuerpo cubierto con una capa de naftaleno, se observa que se han sublimado 12 g de naftaleno en 15 min. El área superficial del cuerpo es de 0.3 m². Tanto el cuerpo como el aire se mantuvieron a 25° C en el curso del estudio. La presión de vapor del naftaleno a 25° C es de 11 Pa y la difusividad de masa del propio naftaleno en aire a 25° C es de $D_{AB} = 0.61 \times 10^{-5}$ m²/s. Determine el coeficiente de transferencia de calor en las mismas condiciones de flujo, sobre la misma configuración geométrica.

6. APÉNDICE

El presente apéndice ha sido diseñado como un recurso complementario que acompaña al texto principal. Su propósito es proporcionar a los alumnos una herramienta adicional para fortalecer su comprensión de los conceptos y técnicas presentados en el texto principal.

Cada sección del apéndice está dedicada para resolver ejercicios específicos, organizados de acuerdo con los temas abordados en los capítulos correspondientes de los apuntes. Al solucionar los ejercicios, se espera que los alumnos puedan dar una explicación paso a paso de los procedimientos utilizados para resolver cada problema, junto con comentarios adicionales y consejos útiles para abordar problemas similares en el futuro.

Esperando que este apéndice sirva como una guía práctica y útil para los alumnos, ayudándoles a consolidar su aprendizaje y a desarrollar sus habilidades en el tema. Este enfoque promueve una comprensión más profunda y duradera de los conceptos tratados.

6.1 CAPITULO 1

EJERCICIO 1.3.2.5 FLUJO EN UNA PELÍCULA ASCENDENTE

Considere una superficie plana inclinada semejante a la de la figura, suponer que la viscosidad y densidad del fluido son constantes y se razona una región de longitud L , suficientemente alejada de los extremos de la pared, de forma que las perturbaciones en la entrada y en la salida no están incluidas en L ; es decir, que en esta región el componente v_z de la velocidad es independiente de z . Determine el perfil de velocidad.

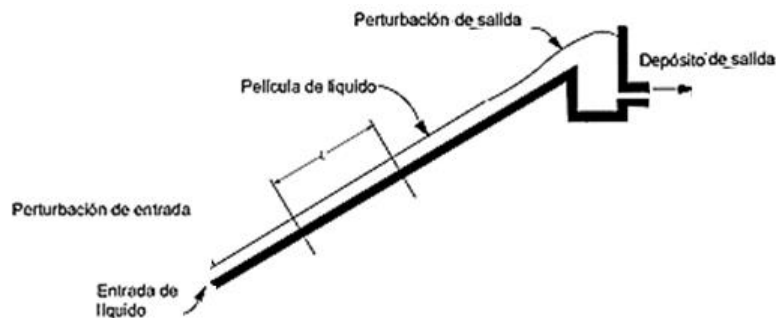
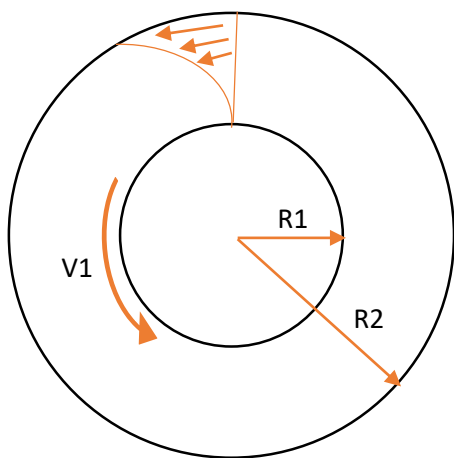


Figura. Fenómeno físico completo y delimitación del espacio/volumen de control.

EJERCICIO 1.3.2.6 FLUJO LAMINAR EN UNA RENDIJA ESTRECHA

En el caso de un fluido viscoso que fluye con un patrón laminar ascendente a través de una rendija formada por dos paredes planas separadas por una distancia de $2B$, podemos realizar un balance diferencial de cantidad de movimiento para obtener expresiones para las distribuciones de densidad de flujo de cantidad de movimiento y velocidad.

EJERCICIO 4. EJERCICIO PROPUESTO: Determinar el perfil de velocidad de un fluido Newtoniano se mueve en un espacio anular entre dos esferas, la viscosidad del fluido es de $1.25 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$, la esfera interior se mueve a 1.0 m/s y tiene un radio 20cm y de la esfera exterior es de 25cm .



DATOS

$$v_1 = 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$R_1 = 0.2\text{m} \quad \tau(R_1) = 0$$

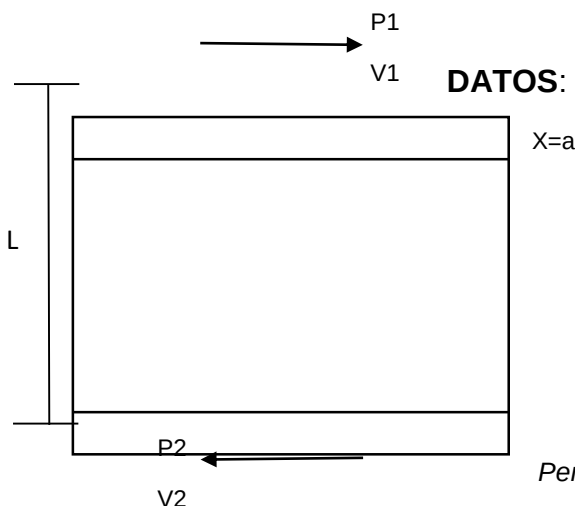
$$R_2 = 0.25\text{m} \quad \tau(R_2) = \tau$$

Respuesta:

$$v = -0.4 + \frac{0.1}{r}$$

Perfil de velocidad dependiente del radio del punto de observación/estudio

5. EJERCICIO PROPUESTO: Una maquina consta de dos bandas transportadoras que se mueven cada una a $0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y en sentido contrario para arrastrar un fluido newtoniano. Se requiere determinar el perfil de velocidad del fluido, si las placas están separadas a 1cm y la viscosidad del fluido es de 1.4 ctp .



DATOS:

$$L = 1\text{cm} = 0.01\text{m} \quad \mu = 1.4 \text{ ctp} = 1.4 \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

$$v(a) = V_1 \quad v\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \quad v(0) = -V_2$$

Respuesta:

$$v = 20x \frac{1}{\text{s}} + 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Perfil de velocidad dependiente de la altura de análisis.

6.2 CAPITULO 2

EJERCICIO 2.2.1.3 CONDUCCIÓN DE CALOR CON UN MANANTIAL CALORÍFICO DE ORIGEN NUCLEAR (EJERCICIO PROPUESTO)

Se considerará un elemento combustible nuclear de forma esférica. El sistema consta de una esfera de material fisionable, de radio R^F revestida de con una vaina esférica de aluminio, cuyo radio externo es R^c . En el interior del material fisionable se producen fragmentos de fisión que poseen energías cinéticas elevadas. La principal fuente de energía calorífica en el reactor se debe a las colisiones entre estos fragmentos y los átomos de material fisionable.

Este manantial volumétrico de energía calorífica que resulta de la fisión nuclear, se determina llamarlo S . Dicho manantial no será un informe en el interior de la esfera del material fisionable, sino mínimo en el centro de la misma. Para los fines de este problema, se supondrá que el material puede representarse, aproximadamente, mediante una función parabólica sencilla:

$$S_n = S_{n0} \left(1 + b \left(\frac{r}{R^F} \right)^2 \right)$$

En esta ecuación, S_{n0} es la velocidad volumétrica de producción de calor en el centro de la esfera, y B es una constante adimensional comprendida entre 0 y 1.

Respuesta:

$$T^c - T_0 = \frac{S_{n0} R^{F2}}{3k^c} \left(1 - \frac{3}{5} b \right) \left(\frac{R^F}{r} - \frac{R^F}{R^c} \right)$$

La temperatura máxima de la esfera del material fisionable puede hallarse fácilmente haciendo $r=0$. Este valor es conveniente hacerlo con el fin de poder estimar el deterioro estructural.

EJERCICIO 2.2.1.5 CONDUCCIÓN DE CALOR EN PAREDES COMPUESTAS CILÍNDRICAS (EJERCICIO PROPUESTO).

Efectuar un desarrollo análogo al ejercicio anterior, para el caso de una pared cilíndrica compuesta.

Respuesta:

$$U_0 = r_0^{-1} \left(\frac{1}{r_0 h_0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{k^{1-1,i}} + \frac{1}{r_3 h_3} \right)^{-1}$$

2.2.1.6 FLUJO TANGENCIAL EN TUBOS CONCÉNTRICOS EN GENERACIÓN DE CALOR DE ORIGEN VISCOSO (EJERCICIO PROPUESTO).

Considerando un fluido newtoniano incomprensible contenido entre dos cilindros coaxiales, el exterior de los cuales esta grande en estado estacionario con una velocidad angular Ω_0 .

Considere que las superficies mojadas de estos cilindros externo e interno están en las temperaturas T_l y T_k , respectivamente.

Supóngase un flujo laminar estacionario y Despréciase la variación de μ, p y k con la temperatura.

Este problema tiene interés en relación con los efectos caloríficos de viscometría.

Respuesta:

$$\odot = \left[(N + 1) + \frac{N}{\Re^2} \right] + \left[\frac{N}{k^2} - (N + 1) \right] \frac{Ln \Re}{ln k}$$

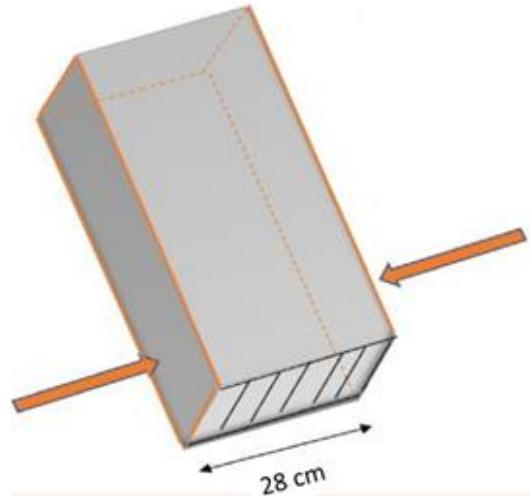
Perfil de temperatura

6.3 CAPITULO 3

EJERCICIO 6. PLACA DE ACERO (EJERCICIO PROPUESTO)

Una placa de acero de 28 cm de grueso tiene inicialmente una temperatura de 400 °C. De imprevisto ambas caras se mantiene una 35°C. El acero tiene una densidad de $7,835 \frac{kg}{m^3}$, una capacidad calorífica de $0.13 \frac{kcal}{kg \cdot ^\circ c}$ y una conductividad térmica de $37 \frac{kcal}{hm \cdot ^\circ c}$. Se desea predecir la temperatura en el centro de la placa a los 10 minutos si el coeficiente total de transferencia de calor en la superficie es de $120 \frac{kcal}{hm^2 \cdot ^\circ c}$. Use el método de Schmidt.

EJERCICIO 9. Una placa de acero de 28 cm de grueso tiene inicialmente una temperatura de 400 °C. De improvisto ambas caras se mantiene una 35°C. El acero tiene una densidad de $7,835 \frac{kg}{m^3}$, una capacidad calorífica de $0.13 \frac{kcal}{kg \text{ } ^\circ C}$ y una conductividad térmica de $37 \frac{kcal}{hm \text{ } ^\circ C}$. Se desea predecir la temperatura en el centro de la placa a los 10 minutos si el coeficiente total de transferencia de calor en la superficie es de $120 \frac{kcal}{hm^2 \text{ } ^\circ C}$. Use el método de Schmidt.



6.4 CAPITULO 4

EJERCICIO 4.3.4 DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD (EJERCICIO PROPUESTO)

La difusividad del sistema gaseoso binario oxígeno-tetracloruro de carbono se determina observando la evaporación en estado estacionario de CCl_4 , en un tubo que contiene O_2 . La distancia entre el nivel del CCl_4 , líquido y la parte superior del tubo es ($z_2 - z_1 = 17.1 \text{ cm}$). La presión total del sistema es 755 mm Hg, y la temperatura 0 °C. La presión de vapor del CCl_4 , a esta temperatura es 33,0 mm Hg. La sección transversal del tubo de difusión es 0.82 cm^2 . Se ha encontrado que en estas condiciones se evaporan 0.0208 cm^3 de CCl_4 , durante un período de 10 horas después de alcanzarse el estado estacionario. ¿Cuál es la difusividad del sistema gaseoso binario $CCl_4 - O_2$?

RESPUESTA:

$$D_{CCl_4 - O_2} = 0.0636 \text{ cm}^2/\text{seg}$$

Este método de determinación de difusividades en fase gaseosa presenta algunas limitaciones importantes. Una de las más significativas es el enfriamiento que ocurre durante el proceso de evaporación. Además, pueden surgir efectos de convección natural si el vapor generado por la evaporación es más ligero que el gas presente sobre el líquido. Además, debido a la presencia de menisco, la longitud del camino de difusión puede no ser uniforme a lo largo de la sección del tubo, lo que introduce complicaciones adicionales en la medición.

6.5 CAPITULO 5

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E. N., Fenómenos del Transporte, 2a Ed., Editorial Reventé. 2002.
- Welty J.R., Fundamentos de transferencia de momento, calor y masa, 1a Edición, Limusa, México. 2005.
- Geankoplis, C.J., Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias, 4a Ed. Patria. México. 2006.
- Kreith, F., & Bohn, M. Principios de Transferencia de Calor. Cengage Learning Editores. 2001
- Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., & Lavine, A. S. Fundamentos de Transferencia de Calor. México: Editorial Limusa. 2006