

I N D I C E (REPORTE INTERMEDIO)

No. de práctica	Título	Página
1	Medición del ángulo entre las diagonales de un cubo y de un paralelepípedo.	2
2	Cálculo de posición y velocidad en movimiento rectilíneo.	7
3	Cálculo de posición y velocidad en movimiento curvilíneo.	13
4	Simulación de la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo en caída libre.	22
5	Simulación de la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo en tiro parabólico.	27
6	Obtención de gráficas de velocidad y aceleración de una partícula en trayectoria lineal.	32
7	Comprobación de la velocidad y aceleración de partículas con movimiento dependiente.	37
8	Obtención de la gráfica Posición-Tiempo, empleando sensores de movimiento.	43
9	Interacción práctica con los parámetros del movimiento de rotación.	52
10	Medición de altura máxima y alcance horizontal en tiro parabólico.	65
11	Comprobación de velocidades angulares en un sistema planetario de engranes.	70
12	Obtención de las gráficas de localización de los centros instantáneos de rotación.	76
13	Estimación práctica de velocidades en posiciones y puntos particulares de un mecanismo.	82

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
1	Medición del ángulo entre las diagonales De un cubo y de un paralelepípedo.	El alumno comprobará experimentalmente la operación vectorial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

4.- Introducción

De las 5 operaciones básicas con vectores: Suma, diferencia, multiplicación de un escalar por un vector, producto vectorial y producto escalar ó interno; es esta última la única que carece de la propiedad de Cerradura pues partiendo de dos vectores, al relacionarlos mediante la operación producto escalar, el resultado que se obtiene NO ES UN VECTOR; sino un ESCALAR.

Sí es conmutativa porque: **$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$**

Su definición es: **$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [\mathbf{A}][\mathbf{B}]\cos\Theta$** (1)

Siendo **$[\mathbf{A}]$** = Magnitud del vector **$\mathbf{A}$** ; **$[\mathbf{B}]$** = magnitud del vector **$\mathbf{B}$**

Θ = Ángulo interno entre los dos vectores **$\mathbf{A}$** y **$\mathbf{B}$**

Expresando a los vectores **$\mathbf{A}$** y **$\mathbf{B}$** en función de los vectores unitarios i, j, k :

$$\mathbf{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad ; \quad \mathbf{B} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

Se encuentra que **$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$** (2)

En virtud de que al aplicar la definición: $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ pero $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = k \cdot j = k \cdot i = j \cdot i = 0$

En consecuencia, al igualar las expresiones (1) y (2) y despejar:

$$\cos \Theta = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) / [\mathbf{A}][\mathbf{B}]$$

Que permite calcular el ángulo interno entre los dos vectores.

Para el caso que nos ocupa, colocando de frente el modelo didáctico PR1, se especifican los puntos:

A : Vértice inferior izquierdo

B : Vértice superior derecho

C : Vértice inferior derecho

D : Vértice superior izquierdo

Entonces, usando el punto A como origen del sistema rectangular XYZ de coordenadas:

AB = diagonal 1 = (L, L, L) ; siendo **AB** = vector que inicia en el punto A y termina en B

CD = diagonal 2 = (-L, L, L)

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD} = -L^2 + L^2 + L^2 = L^2$$

$$\text{Además: } \mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD} = (3L^2)^{1/2} (3L^2)^{1/2} \cos \Theta = 3L^2 \cos \Theta$$

Igualando ambas expresiones:

$$3L^2 \cos \Theta = L^2$$

$$\cos \Theta = 1/3$$

De lo cual: $\Theta = \cos^{-1}(1/3) = 70.53^\circ$: ¡ ángulo entre las diagonales del cubo !

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

REPASO VECTORIAL PREVIO:

(Este repaso es recomendable aún cuando no se encuentra incluido en el programa)

Operaciones básicas con vectores: Suma, diferencia, producto de un escalar por un vector, producto escalar ó interno y producto vectorial ó producto cruz.

Definición, propiedades e interpretación gráfica.

6.- Material y equipo necesario

a) INDISPENSABLE:

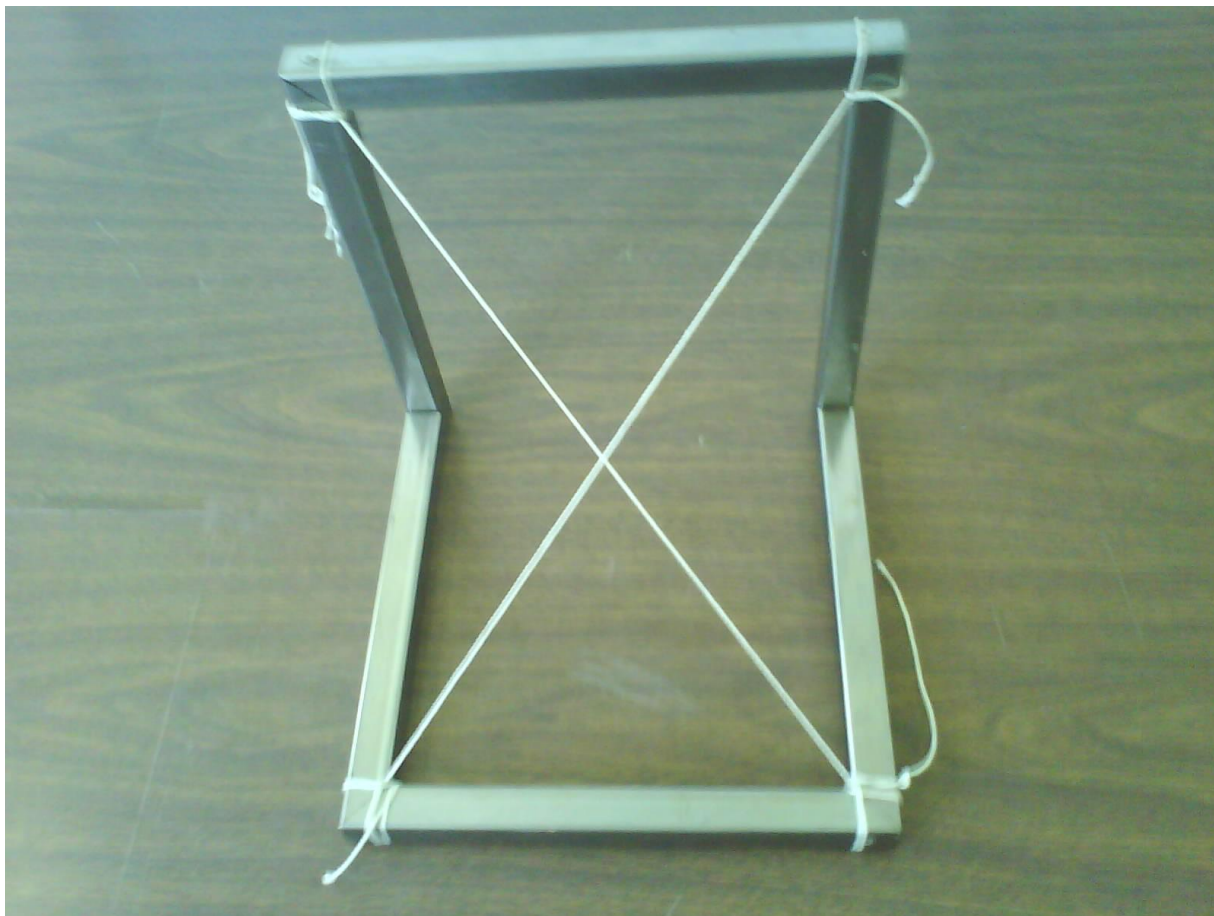
- 1.- Modelo didáctico PR1 construido en acero cromado cuadrado hueco de $\frac{3}{4}$ " formando en aristas internas un cubo de 20.5 cm de lado.
- 2.- Hilo adecuado para su colocación en las diagonales del cubo (2 tramos de 50 cm c/u)
- 3.- Instrumento para medición de ángulos ("transportador")
- 4.- Flexómetro de 1 m como mínimo, graduado en cm y en pulgadas
- 5.- Mesa de trabajo

b) OPCIONAL:

- 6.- Dos tramos de "hilo de albañil" de 14 m c/u
- 7.- Cinta metálica de 20 metros, ó mayor.

7.- Metodología

- 1.- Colocar de frente en la mesa de trabajo el modelo didáctico PR1
- 2.- Con ayuda del flexómetro, el alumno deberá verificar la longitud de aristas internas para comprobar que las mediciones son sobre un cubo verdadero.
- 3.- Colocar el hilo sobre las diagonales del cubo utilizando tensión moderada, según se muestra:



4.- Realizar la medición del ángulo entre las diagonales con la precisión que permita el instrumento.

5.- Anotar los datos observados y comparar con el resultado teórico. Calcular el porcentaje de error con respecto al resultado teórico.

8.- Sugerencias Didácticas

1.- Complementar con la medición del ángulo formado por las diagonales de un paralelepípedo: puede emplearse algún marco ó cualquier caja abierta previa medición de sus lados y el correspondiente cálculo teórico.

2.- Es particularmente espectacular y propio para la participación de todos los alumnos, el realizar esta práctica con las diagonales del aula en que se imparta la clase, para lo cual la medición del largo, ancho y altura reportarán datos aproximados de 8.0, 7.5 y 2.5 metros respectivamente y con participación directa de los alumnos

se colocan los hilos en las diagonales y se mide el ángulo de cruce, realizando posteriormente el cálculo teórico y la respectiva comparación.

3.- Otorga confianza y reafirma el conocimiento el hecho de utilizar por lo menos 3 puntos distintos de ubicación del origen del sistema XYZ de coordenadas rectangulares para realizar el cálculo teórico tanto con el modelo didáctico PR1 como con las diagonales del aula.

9.- Reporte del Alumno (resultados)

Además de reportar lo que especifica el punto 5 de la METODOLOGÍA de esta práctica, el alumno deberá analizar, interpretar y responder al cuestionario:

9.1.- Si en lugar de emplear la diagonal **AB** se emplea la diagonal **BA** ; Cuánto vale el ángulo entre las diagonales y cuál es?

9.2.- Si en lugar de emplear la diagonal **CD** se emplea la diagonal **DC** ; Cuánto vale el ángulo entre las diagonales y cuál es?

9.3.- Si ambas diagonales (**AB** y **CD**) se invierten por **BA** y **DC** ,Qué sucede con el ángulo?

9.4.- Anexar la interpretación gráfica de cada una de las tres preguntas anteriores.

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Mecánica Vectorial para Ingenieros DINÁMICA	Beer and Johnston	McGraw Hill
Análisis Vectorial	Hwei P. Hsu	Fondo Educativo Interamericano S.A.
Cálculo Multivariable	James Stewart	Thomson Learning

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
2	Cálculo de posición y velocidad en movimiento rectilíneo.	El alumno calculará la posición y velocidad simultáneas. (movimiento rectilíneo)

4.- Introducción

La Dinámica es parte de la Mecánica y estudia tanto la geometría del movimiento (Cinemática) como las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en movimiento (Cinética).

Se define como POSICIÓN de una partícula al punto que ocupa esa partícula en un instante determinado.

TRAYECTORIA: Secuencia de puntos que en forma sucesiva son ocupados por una partícula en movimiento. (puede decirse que es el camino o itinerario que sigue una partícula en movimiento).

DESPLAZAMIENTO: Cambio de posición de una partícula con referencia a una posición “inicial” hasta una posición “final”.

Es un vector que se obtiene con: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Siendo $\vec{r}_1$ el vector de la posición uno o “inicial”

$\vec{r}_2$ el vector de la posición dos o “final”

VELOCIDAD: Es el cambio de posición por unidad de tiempo. Su expresión diferencial general es:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad ; \quad \text{Que es útil para una, dos, o tres dimensiones}$$

Cuando la trayectoria es UNIDIRECCIONAL se dice que el movimiento es en línea recta o MOVIMIENTO RECTILÍNEO. En este caso, sea cual sea la dirección de la línea recta que define el movimiento, se puede emplear:

x = variable independiente que indica la posición de la partícula sobre la línea recta en cada instante. Pudiendo ser positiva o negativa con referencia al cero establecido.

$$V = \frac{dx}{dt} \dots\dots\dots (1)$$

que también puede ser positiva o negativa para indicar el sentido de la velocidad.

En consecuencia, la aceleración se obtiene con:

$$a = \frac{dV}{dt} \dots\dots\dots (2)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \dots\dots\dots (3)$$

Igualando el despeje del diferencial del tiempo (dt) de las ecuaciones (1) y (2) se obtiene otra expresión útil para la aceleración: $a = V \frac{dV}{dx} \dots\dots\dots (4)$

Puede afirmarse que las cuatro ecuaciones anteriores son aplicables al movimiento rectilíneo en general de una partícula; sin embargo cuando se consideran condiciones adicionales como -Que la aceleración sea cero o -Que la aceleración sea constante

Se deducen las expresiones:

-MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU):

Se denomina así cuando la aceleración es cero para cualquier valor del tiempo; en ese caso $a = \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = \frac{dx}{dt} = \text{constante}$

Entonces, despejando : $dx = V dt$ que, al integrar: $\int_{x_0}^x dx = V \int_{t=0}^t dt$

Se llega a $x = x_0 + V t \dots\dots\dots (5)$ Esta ecuación es suficiente para resolver todo lo correspondiente al movimiento rectilíneo uniforme, en la cual:

x_0 = Posición inicial (posición correspondiente a $t = 0$) V = Velocidad de la partícula (es constante)

t = tiempo transcurrido desde el inicio del movimiento (desde $t = 0$)

x = Posición de la partícula, correspondiente al valor del tiempo t

$x - x_0$ = Distancia dirigida recorrida por la partícula hasta ese instante.

-MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA):

Se denomina de este modo cuando la condición adicional es que la aceleración es constante:

$$a = \frac{dV}{dt} = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \int_{V_0}^V dV = a \int_{t=0}^t dt \quad \Rightarrow \quad V = V_0 + a t \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{También: } V = V_0 + a t = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x dx = \int_{t=0}^t (V_0 + a t) dt$$

$$\text{De la cual se obtiene: } x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

De modo similar, separando variables en la ec. (4) e integrando se llega a:

$$V^2 = V_0^2 + 2 a (x - x_0) \quad \dots\dots\dots (8)$$

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

1.1 Desplazamiento, velocidad y aceleración.

1.2 Análisis del movimiento rectilíneo.

6.- Material y equipo necesario

1.- Modelo didáctico PR2 con base de ángulo constante (de 25°) proporcionando dos posibilidades: guía canal de acero o pista de madera de pino de $\frac{3}{4}'' \times 4'' \times 59''$



2.- Mesa de trabajo

3.- Pernos de sujeción del modelo a la mesa de trabajo y pijas para fijar la pista al canal.

4.- Flexómetro ($L = 3 \text{ m}$)

5.- Cronómetro ordinario

6.- Transportador para verificar ángulos

7.- Nivel de albañil

8.- Soporte adicional para rigidez

9.- Por lo menos 5 objetos pequeños de diferentes materiales y formas

(sugerencia: Tuerca de $\frac{1}{2}$ " ; Placa de nylamid de 7x7 cm, de $\frac{3}{8}$ " ; Barra cuadrada de latón de $\frac{1}{2}$ " x 5 cm o menor ; Pinza sujetadora de plástico para tendedero ; moneda de \$ 5.00 ; pelota de hule blando de 2")

7.- Metodología

- a) Colocar el modelo didáctico en la mesa de trabajo asegurándose de fijar suficientemente los pernos y nivelar la pista, colocando el soporte adicional para dar rigidez.
- b) Seleccionar una longitud de recorrido sobre la pista que será la misma para todos los objetos que se utilicen (puede ser desde 50 cm hasta 1.5 m con intervalos de 10 cm)
- c) Debe medirse la altura al c.g. del objeto en el punto final de la pista con referencia a la superficie donde caerá.
- d) Cada objeto se coloca sobre la pista y se libera del reposo en la marca seleccionada.
- e) Medir lo más cuidadosamente posible dos cosas para cada objeto ensayado:
el tiempo sobre la pista y la distancia HORIZONTAL que recorre desde el punto final de la pista hasta el punto donde cae.
- f) Con esos datos pueden calcularse tanto la velocidad de salida de la pista como la aceleración constante del objeto sobre la misma.
- g) Dividir en cinco partes iguales el tiempo de recorrido sobre la rampa y para cada uno de los valores obtenidos, evaluar la posición y la velocidad lineal de la partícula.
- h) Elaborar las gráficas de posición-tiempo y de velocidad-tiempo para cada objeto.

8.- Sugerencias Didácticas

- a) Seleccionar por lo menos dos distintas longitudes de rampa para reafirmar conceptos y comparar resultados.
- b) Utilizar primeramente la pista de madera para los objetos irregulares y finalmente la guía canal de acero para ensayar la pelota de hule.

c) Solicitar al alumno que explique a qué se deben las diferencias en velocidades, aceleraciones y recorridos horizontales observados.

PRECAUCIÓN: Emplear láminas delgadas de triplay, fibracel, o de cartón para evitar que los objetos y el piso del laboratorio se dañen en el área de impacto.

9.- Reporte del Alumno (resultados)

Además de las gráficas, el alumno deberá anexar los cálculos realizados y presentar en forma tabular los resultados obtenidos para velocidades y aceleraciones.

Como ejemplo se presenta este caso:

Longitud de rampa: 1.40 m ; $\theta = 25^\circ$; Altura al c.g. : 91 cm

No.	Objeto	d (m)	V_{final} (m/s)	a m/s ²	t (s)	Observaciones
1	Tuerca de $\frac{1}{2}$ "	0.63	1.961	1.371	1.43	Rampa: pista de pino
2	Placa de nylamid	0.51	1.520	0.826	1.84	(id)
3	Barra de latón	0.48	1.416	0.715	1.98	(id)
4	Moneda de \$ 5.00	0.46	1.353	0.654	2.07	(Id)
5	Pelota de hule de 2"	0.81	2.734	2.68	1.02	Rampa canal de acero; altura al c.g.: 0.93 m

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Jorge G. Solar	Addison Wesley México
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros	Facultad de Ingeniería UNAM	Trillas-Facultad de Ingeniería UNAM
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedfor Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
3	Cálculo de posición y velocidad en movimiento curvilíneo.	El alumno calculará la posición y velocidad simultáneas. (movimiento curvilíneo)

4.- Introducción

La posición de una partícula en movimiento general (curvilíneo y rectilíneo) en coordenadas rectangulares puede expresarse como:

$\vec{r} = f_1\hat{i} + f_2\hat{j} + f_3\hat{k}$ (I) siendo f_1, f_2, f_3 funciones que dependen del tiempo

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ son los vectores unitarios en los respectivos ejes X,Y,Z

Esta ecuación (I) define la trayectoria de la partícula y si se deriva con respecto al tiempo se obtiene la velocidad instantánea:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = f_1'\hat{i} + f_2'\hat{j} + f_3'\hat{k}$ Que es un vector TANGENTE a la trayectoria.

Derivando nuevamente se encuentra la expresión de la aceleración:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = f_1''\hat{i} + f_2''\hat{j} + f_3''\hat{k}$ Este es un vector tangente a la gráfica de los vectores velocidad.

Las tres ecuaciones presentadas describen el movimiento general de una partícula (que normalmente corresponde a **Movimiento curvilíneo**) y cuando se imponen algunas restricciones se aplican según sea el caso a:

- Movimiento rectilíneo
- Movimiento circular
- Movimiento de un proyectil (parabólico)

En el caso del **movimiento curvilíneo** de una partícula en dos dimensiones debido a la dificultad que en muchos casos ofrece la evaluación de la aceleración de la partícula con componentes rectangulares, se recurre al empleo de componentes **NORMAL Y TANGENCIAL** o al empleo de componentes **RADIAL Y TRANSVERSAL**.

COMPONENTES NORMAL Y TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN:

Ya que la velocidad de una partícula es tangente a su trayectoria, puede escribirse vectorialmente como: $\vec{V} = V \hat{e}_t$ En la cual: V = magnitud del vector velocidad; es decir $|\vec{V}|$ o $\frac{ds}{dt}$

$\hat{e}_t$ = vector unitario tangente a la trayectoria

$\frac{ds}{dt}$ = rapidez o magnitud de la velocidad

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\hat{e}_t)}{dt} = \frac{dV}{dt}(\hat{e}_t) + V\left(\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right)$$

Puede aplicarse aquí la regla de la cadena del Cálculo diferencial:

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \left(\frac{d\hat{e}_t}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

En la cual, analizando cada uno de los tres factores del lado derecho se deduce que:

$$\frac{ds}{dt} = V \quad ; \quad \frac{1}{ds/d\theta} = \frac{1}{\rho} \quad ; \quad \text{siendo } \rho = \text{radio de curvatura}$$

Además, es demostrable que: $\frac{d\hat{e}_t}{d\theta} = \hat{e}_n$; siendo $\hat{e}_n$ = vector unitario normal

Substituyendo esto en la expresión de la aceleración se llega a:

$\vec{a} = \frac{dV}{dt}(\hat{e}_t) + \frac{V^2}{\rho}(\hat{e}_n)$ donde el primer término corresponde a la componente tangencial y el segundo a la componente normal de la aceleración.

COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL DE LA ACELERACIÓN:

De manera semejante pero usando como referencia las coordenadas polares, primeramente se expresa la posición instantánea de una partícula en movimiento:

$\vec{r} = r \hat{e}_r$; con r = magnitud del vector de posición $\vec{r}$

$\hat{e}_r$ = vector unitario en dirección radial

Luego se deriva con respecto al tiempo empleando similares procedimientos a los utilizados en el caso anterior: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r \hat{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}(\hat{e}_r) + wr(\hat{e}_\theta)$

Siendo el primer término la componente **radial** de la velocidad de la partícula y el segundo término, su componente **transversal**.

Además: $w = \frac{d\theta}{dt}$ = velocidad angular

$\hat{e}_\theta$ = vector unitario en dirección transversal

Al derivar por segunda ocasión:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (a_r - rw^2)\hat{e}_r + (\alpha r + 2wV_r)\hat{e}_\theta$$

Con $\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ = Aceleración angular.

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

1.4 Análisis del movimiento curvilíneo.

6.- Material y equipo necesario

a) Dispositivo didáctico de varilla giratoria y collarín deslizante (PR3) útil para ejemplificar la segunda opción de trabajo en esta práctica.

b) Equipo geométrico suficiente para dibujar a escala los modelos presentados en las opciones uno y tres y para medir los ángulos correspondientes a la línea de acción de los vectores velocidad y aceleración.

c) Calculadora para ingeniería ordinaria o programable.

7.- Metodología

a) Revisar el modelo con el cual se trabajará en esta práctica, identificando el movimiento curvilíneo que esté incluido y los conceptos que deben aplicarse.

b) Seleccionar las herramientas a utilizar (formulario) para realizar los cálculos solicitados.

c) Seguir las indicaciones del caso hasta obtener los resultados que se piden.

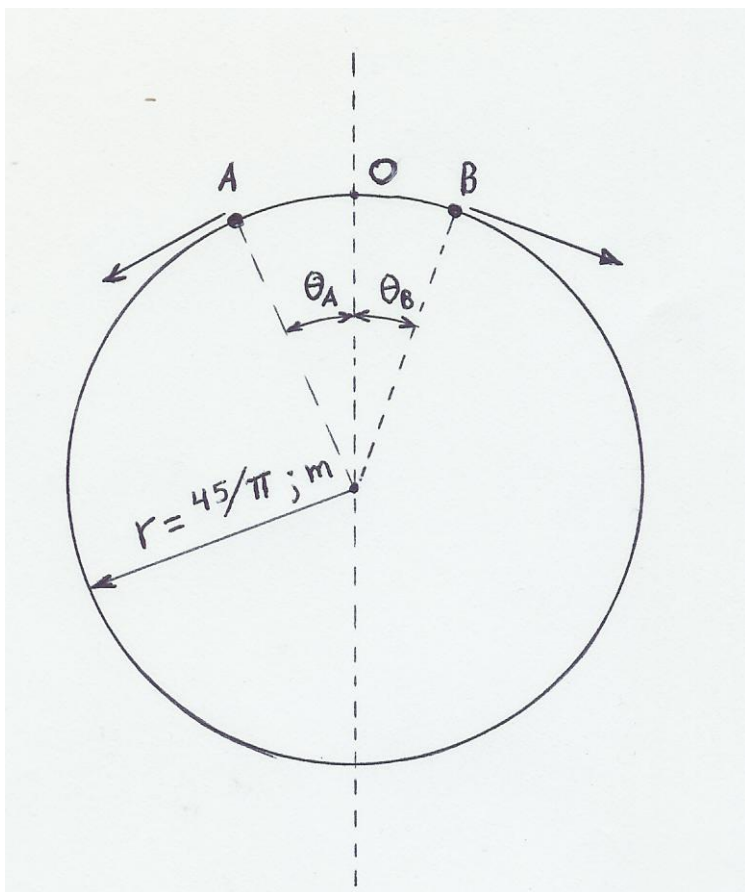
d) Elaborar un diagrama del funcionamiento del conjunto procurando incluir los puntos inicial, intermedios y final y reportar resultados en forma tabular.

LAS OPCIONES QUE SE PROPONEN EN ESTA PRÁCTICA SON:

I.- Las partículas A y B arrancan del mismo punto O en sentidos opuestos sobre la trayectoria circular de radio $r = 14.3239 \text{ m}$; ($r = 45/\pi$)

con rapidez inicial $V_{oA} = 0.5 \text{ m/s}$; $V_{oB} = 1.5 \text{ m/s}$

Y aceleración tangencial $a_A = 0.06 \text{ m/s}^2$; $a_B = 0.024 \text{ m/s}^2$



Realizar el análisis de funcionamiento del sistema, calculando:

- 1) Posición, velocidad y velocidad angular de ambas partículas cada 5 segundos después del inicio, así como en el instante justo antes del impacto.
- 2) La magnitud de la aceleración de cada partícula en el instante justo antes del impacto.

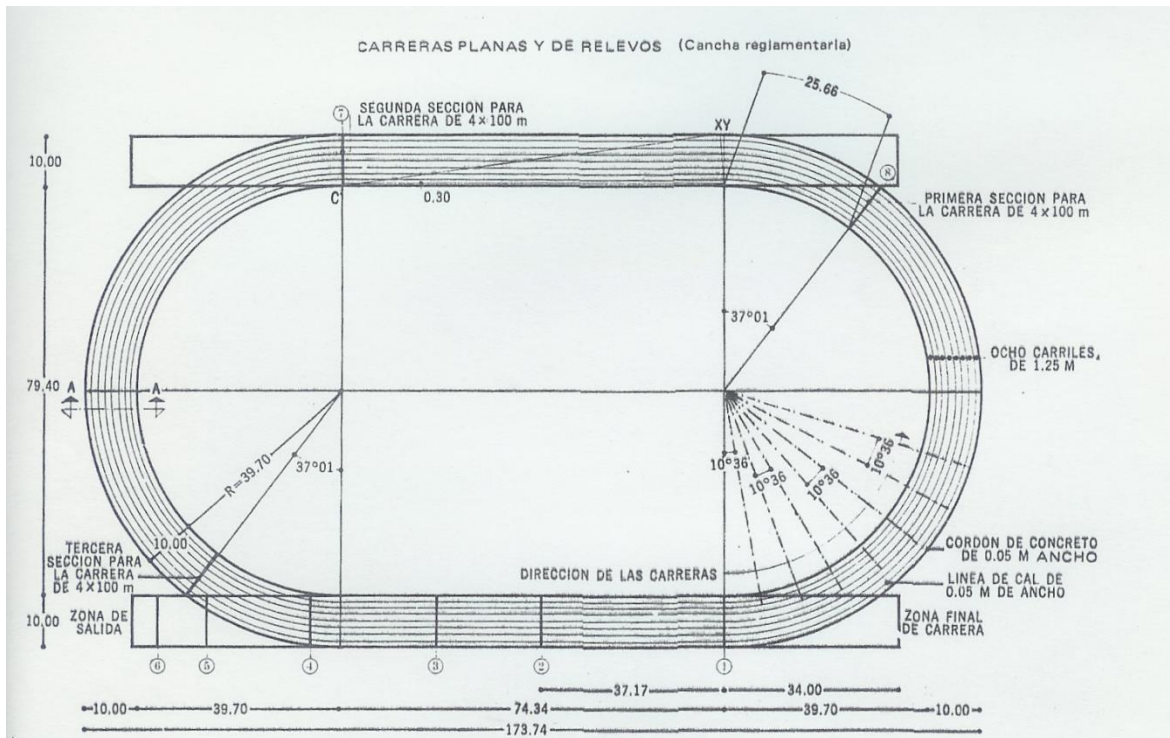
II.- Se hace girar una varilla según $\theta = 6t$; Simultáneamente, el collarín B se desliza a lo largo de la varilla de manera que su distancia desde O está dada por: $r = 60 + 8t + 7t^2$; θ en (rad); t en (s); r en (mm). La longitud de la varilla es de 285 mm.



Realizar el análisis detallado del funcionamiento de ese sistema, determinando la posición, velocidad y aceleración del collarín cada segundo a partir del inicio y en el instante en que el collarín se impacta en el extremo de la varilla.

III.- Al iniciar la última vuelta en una competencia oficial de 5,000 metros planos sobre pista de tartán reglamentaria, el atleta B que en ese instante se ubica en segundo lugar (y alejado de su más cercano perseguidor), observa que el líder A lo aventaja con 12 metros. Considerando que la velocidad de ambos en ese momento es de 6.7 m/s y que A mantendrá constante esa velocidad hasta el final, el corredor B acelera a razón de 7.5 mm/s^2 ¿Quién ganará la competencia? (al parecer habrá “final de fotografía”).

Se anexa un diagrama de la pista reglamentaria de atletismo, que es oficial para la prueba de 5,000 metros planos:



En el punto 1 se inicia la última vuelta y también es LA META.

Analice el funcionamiento del sistema indicando para A y B cada 10 segundos su posición y velocidad dentro de la pista así como en el instante del rebase (en caso de ocurrir) y en el instante en que uno de los dos cruce primero la meta.

¿Cuál es la aceleración de B en el punto medio (LÍNEA A-A) de la última curva? (considerando que transita por el carril interior)

8.- Sugerencias Didácticas

a) Permitir que el alumno realice sus deducciones con respecto a los sistemas propuestos asegura un mejor aprendizaje de la materia.

b) Es recomendable sugerir al estudiante que obtenga más detalles del funcionamiento de cada sistema por iniciativa propia: ("Para aprender más")

c) Es deseable propiciar la investigación; por ejemplo en este orden de ideas puede ser útil mencionar que en virtud de que el año tiene 7 meses de 31 días, 4 meses de 30 y Febrero de 28 días; pero cada 4 años se agrega un día a ese mes: eso significa para un ingeniero, que la tierra tarda 31,557,600 segundos en dar una vuelta completa al sol (cuál es el dato reportado por los científicos?). La órbita es elíptica con:

$$a = 93 \times 10^6 \text{ millas} ; e = 1/62 ; \text{ Distancia máxima al sol} = 94.5 \times 10^6 \text{ millas}$$

Distancia mínima al sol = $91.5 \times 10^6 \text{ millas}$; El sol se ubica en uno de los focos.

En base a esa información puede demostrarse que la ecuación que describe la órbita es $r = \frac{9,275 \times 10^6}{62 - \cos \theta}$; Km considerando el origen (polo) en el sol y el eje mayor de la órbita elíptica como referencia para el ángulo θ .

¿Puedes calcular a qué distancia del sol se encuentra la tierra a las 12:00 horas del día de tu cumpleaños?

(investiga sobre las leyes de Kepler para un cálculo más certero)

9.- Reporte del Alumno (resultados)

Deberá presentarse el diagrama elaborado acerca del funcionamiento del sistema y los resultados en forma tabular.

Como ejemplo, se presentan algunos componentes del reporte correspondiente a

La OPCIÓN I con los datos:

Radio de la trayectoria circular: $r = 15.9155 \text{ m}$; $(r = 50/\pi)$

Rapidez inicial: $V_{oA} = 0.6 \text{ m/s}$; $V_{oB} = 1.3 \text{ m/s}$

Aceleración tangencial: $a_A = 0.05 \text{ m/s}^2$; $a_B = 0.03 \text{ m/s}^2$

No.	t (s)	θ_A (rad)	θ_B (rad)	V_A (m/s)	V_B (m/s)	w_A (rad/s)	w_B (rad/s)	Observaciones
1	5	0.2278				0.534		
2	10		0.9111					
3	15			1.35				
4	20				1.9			
5	25							
6	30							
7							0.14125	Instante del impacto

La magnitud de la aceleración de la partícula B en el instante justo antes del impacto resulta ser: $|a_B| = 0.3189 \text{ m/s}^2$

Adicionalmente se indica que la partícula A recorre antes de impactarse con B, una distancia medida sobre la trayectoria de 43.933 m

Se invita al estudiante a comprobarlo y completar el llenado de la tabla de resultados presentada.

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Jorge G. Solar	Addison Wesley México
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros	Facultad de Ingeniería UNAM	Trillas-Facultad de Ingeniería UNAM
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedford Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
4	Simulación de la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo en caída libre.	Con ayuda de software, el alumno realizará la simulación.

4.- Introducción

En la expresión de la aceleración con componentes rectangulares:

$$\bar{a} = f_1'' \hat{i} + f_2'' \hat{j} + f_3'' \hat{k}$$

se imponen las restricciones: $f_1'' = 0$; $f_3'' = 0$; $f_2'' = -g$

con g = magnitud de la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre o cerca de ella. (puede considerarse $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$);

Su dirección y sentido son: vertical y hacia el centro de la tierra.

Si además en la velocidad de la partícula: $\bar{v} = f_1' \hat{i} + f_2' \hat{j} + f_3' \hat{k}$ se considera $f_1' = f_3' = 0$

Se define así el movimiento de una partícula como rectilíneo, vertical, hacia abajo y con aceleración constante igual a la magnitud de la aceleración de la gravedad que se denomina “caída libre” si el objeto es simplemente liberado del reposo (o “soltado”) desde una cierta altura: (y_0)

En consecuencia, las ecuaciones del MRUA aplicables son: (6), (7) y (8) que fueron presentadas en la práctica dos; pero al cambiar la variable x por y para remarcar

que el movimiento es vertical y considerando la convención ordinaria de signos; es decir **positivo hacia arriba** quedan como:

$$V_y = -gt \dots\dots\dots(6)$$

$$y = y_o - \frac{1}{2} gt^2 \dots\dots\dots(7)$$

$$V_y^2 = -2g(y - y_o) \dots\dots(8)$$

Las variables que intervienen deben considerarse así:

V_y = velocidad instantánea de la partícula en caída libre

t = tiempo transcurrido desde que se “suelta” la partícula

y = Posición instantánea (altura a la que se encuentra en el instante t)

y_o = Posición o altura inicial

OBSERVE que seleccionando como origen del sistema vertical lineal de coordenadas **el punto más bajo** de los que intervengan en el problema de caída libre que se esté analizando, la diferencia $(y - y_o)$ resultará **negativa** con lo cual se despejan sin dificultad los parámetros que se requieran de las ecuaciones (7) y (8); si de manera adicional se hace el cambio de variable $y_o = h$ y se considera que $y = 0$, entonces la ecuación (8) se transforma en $V_y = \sqrt{2gh}$ que es útil para conocer la magnitud de la velocidad con que llega al piso (o al nivel de referencia) un objeto que es soltado desde una altura h ; o viceversa: calcular con la forma $h = \frac{V_y^2}{2g}$ la altura a la que llegará una partícula que es lanzada verticalmente **hacia arriba** con velocidad V_y .

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

1.2 Análisis del movimiento rectilíneo.

6.- Material y equipo necesario

a) Software MATLAB

b) Equipo computacional adecuado.

c) Considerar como datos de trabajo:

No.	$h_1 ; (m)$	$h_2 ; (m)$	$h_3 ; (m)$
1	12	1.20	6.0
2	14	1.26	6.2
3	16	1.32	6.4
4	18	1.38	6.6
5	20	1.44	6.8
6	22	1.50	7.0
7	24	1.56	7.2
8	26	1.62	7.4
9	28	1.68	7.6
10	30	1.74	7.8
11	32	1.80	8.0

7.- Metodología

a) Realizar selección sucesiva al azar de los valores de h_1 , h_2 y h_3 por equipos (cinco integrantes como máximo).

b) Con los valores seleccionados, definir para cada equipo el enunciado de trabajo:

“Se libera la pelota A desde el reposo a una altura de (h_1) metros en el mismo instante en que una segunda pelota B es lanzada en línea vertical distinta hacia arriba desde (h_2) metros de altura (con respecto al suelo).

Si las pelotas se encuentran al mismo nivel a una altura de (h_3) metros, determinar la rapidez con la que se lanzó la pelota B “.

c) Analizar y resolver la situación con la ayuda de un programa en MATLAB, determinando primeramente el tiempo necesario para que ambas pelotas lleguen al punto del cruce y posteriormente la rapidez con la que fue lanzada hacia arriba la pelota B .

- d) Establecer $x_{1A} = x_1$; $x_{1B} = x_1 + 0.4$ (en metros) seleccionando solo uno de los valores siguientes: $x_1 = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0]$.
- e) Dividir el tiempo calculado en por lo menos 100 intervalos y obtener la expresión de la posición vertical de ambas pelotas para cada uno de los 100 valores del tiempo en programa MATLAB .
- f) Graficar (x_A, Y_A) y (x_B, Y_B) con el comando plot
- g) Usar el comando comet para observar la “simulación” del experimento desde el instante del lanzamiento hasta el momento del cruce.
- h) Completar las trayectorias de A y de B ; graficarlas tanto con plot como con comet
- i) Analizar el ejemplo proporcionado por el profesor.

8.- Sugerencias Didácticas

a) Hacer efectiva la selección al azar de h_1, h_2 y h_3 y verificar que cada equipo obtenga una selección diferente (son 1331 posibilidades)

b) Recomendar al estudiante aplicar un procedimiento similar a uno de los experimentos:

-La torre Eiffel de París tiene una altura menor de 400 metros. Si un individuo deja caer un objeto y 5 segundos después percibe el sonido que se produce al chocar (el objeto) contra el suelo, ¿desde qué altura se dejó caer?

Considerar que la velocidad del sonido es de 330 m/s

-Un automóvil viaja en línea recta a 110 Km/h en un tramo de carretera paralela a la vía del tren. Si la velocidad del tren es de 80 Km/h y tiene una longitud de 300 metros: ¿Cuánto tiempo necesita el automóvil para rebasar al tren?

a) En el mismo sentido ; b) En sentidos contrarios.

9.- Reporte del Alumno (resultados)

Los estudiantes deben reportar:

- Los valores seleccionados de h_1, h_2 y h_3
- El tiempo requerido para que ocurra el cruce
- El valor de x_1 seleccionado.
- Las gráficas (x_A, y_A) ; (x_B, y_B) obtenidas con el comando plot hasta el momento del cruce.
- Las gráficas (x_A, y_A) ; (x_B, y_B) de las trayectorias completas obtenidas con el comando plot
- Sus observaciones con respecto al uso del comando comet en este caso.

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Jorge G. Solar	Addison Wesley México
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros	Facultad de Ingeniería UNAM	Trillas-Facultad de Ingeniería UNAM
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedford Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
5	Simulación de la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo en tiro parabólico.	Con ayuda de software, el alumno realizará la simulación.

4.- Introducción

En el caso particular del movimiento de un proyectil (“tiro parabólico”): después de que ha sido disparado, se considera que LA ÚNICA FUERZA que actúa sobre él **es su peso**; en consecuencia ese movimiento se lleva a cabo en un **plano vertical** quedando definida su aceleración en componentes rectangulares con: $\vec{a} = -g\hat{j}$; mientras que su posición y velocidad deberán definirse como:

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$; $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j}$ (RECUERDE que el vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula) ; g = magnitud de la aceleración de gravedad

Por tratarse de un plano, el eje Z no interviene y puesto que la componente de la aceleración a lo largo del eje X **es cero**, la componente del movimiento en la dirección horizontal es rectilíneo uniforme (MRU); por lo cual la expresión aplicable en esa dirección es $x = x_o + V_x t$ (5)

Mientras que, para describir la componente vertical del movimiento del proyectil son útiles las ecuaciones:

$$V_y = V_{oy} - gt \text{(6)}$$

$$y = y_o + V_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \dots\dots(7)$$

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2g(y - y_o) \dots\dots(8)$$

Para emplear con mejores probabilidades de éxito las cuatro ecuaciones aquí presentadas es conveniente seleccionar como origen del sistema de coordenadas al punto que, según el problema de “tiro parabólico” que se esté analizando, se encuentre localizado en el extremo inferior izquierdo para evitar hasta donde sea posible que intervengan coordenadas x ó y negativas.

La convención de signos que está implícita es:

POSITIVO hacia la derecha.

POSITIVO hacia arriba.

Normalmente un proyectil es “disparado” con una cierta velocidad, que para ser incluida en los cálculos se denominará $\vec{V}_o$; sus componentes vectoriales en el plano XY donde se desarrolla el movimiento se calculan usando la trigonometría aplicable al caso; por ejemplo:

Si la velocidad de disparo es un vector que se encuentra en el primer cuadrante, sus componentes vectoriales son:

$$V_x = V_o \cos \theta_o \quad ; \quad V_{oy} = V_o \sin \theta_o \quad ; \quad \text{Ambas positivas empleando la convención de signos ordinaria.}$$

OBSERVAR que en la notación empleada, la componente vertical de la velocidad de disparo se denota como V_{oy} significando “velocidad **inicial** sobre el eje Y “ y cuyo valor está presente sólo en el instante del disparo mientras que la componente horizontal se designa V_x y su valor se mantiene constante durante todo el tiempo que dure el movimiento libre del proyectil correspondiente porque la aceleración en dirección horizontal **es cero**.

θ_o = ángulo del vector “velocidad de disparo” con respecto a la horizontal (trazado en sentido contrario a las manecillas del reloj).

La magnitud de la componente vertical de la velocidad instantánea disminuye cuando la partícula va subiendo, siendo **cero** en el instante en que alcanza la **altura máxima** sobre su trayectoria parabólica; después de lo cual empezará a aumentar su magnitud pero con sentido **hacia abajo** hasta que el proyectil se impacte en algún punto y termine su viaje.

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

1.4 Análisis del movimiento curvilíneo.

6.- Material y equipo necesario

a) Software MATLAB

b) Equipo computacional adecuado.

c) Considerar como datos de trabajo:

No	$V_o ; [m/s]$	$h_o ; [m]$	$d_1 ; [m]$
1	13	0.75	6
2	14	0.88	6.25
3	15	1.01	6.50
4	16	1.14	6.75
5	17	1.27	7.00
6	18	1.40	7.25
7	19	1.53	7.50
8	20	1.66	7.75
9	21	1.79	8.00
10	22	1.92	8.25
11	23	2.05	8.50
12	24	2.18	8.75
13	25	2.31	9.00

7.- Metodología

a) Realizar la selección al azar de los valores de trabajo de V_o, h_o y d_1 por equipos (son 2197 posibilidades diferentes).

b) Con los valores seleccionados, definir para cada equipo el enunciado correspondiente.

c) Obtener el rango de valores de $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ que garantice que la pelota llegará a la pared por lo menos al mismo nivel en que fue lanzada.

- d) Evaluar el “ángulo deseable” y verificar que pertenezca al rango obtenido.
- e) Si ello se cumple, calcular la altura máxima.
- f) Empleando el valor del “ángulo deseable”, evaluar el tiempo que se requiere desde el lanzamiento hasta el impacto de la pelota en la pared.
- g) Dividir en por lo menos 150 intervalos para proceder a obtener la gráfica de la “trayectoria deseable”.
- h) Graficar primero con el comando `plot` y después con el comando `comet`.
- i) Analizar el ejemplo proporcionado por el profesor.

8.- Sugerencias Didácticas

- a) Que cada equipo realice el proceso completo (sin omitir pasos de cálculo) para obtener tanto el “ángulo deseable” como la altura máxima con los datos seleccionados.
- b) Que los estudiantes apliquen un procedimiento similar al propuesto en esta práctica a un nuevo (diferente) experimento.

9.- Reporte del Alumno (resultados)

Por equipos, los alumnos entregarán:

- a) Completo el desarrollo, operaciones y resultados del cálculo de:
 - 1) El intervalo de valores de θ que hacen posible que la bola impacte la pared en una altura por lo menos igual a la del punto de lanzamiento.
 - 2) El “ángulo deseable” (que corresponde a la obtención de la altura máxima).
 - 3) La altura máxima.
 - 4) El “tiempo de vuelo” correspondiente.
- b) Impreso el programa MATLAB de la solución de acuerdo a sus datos de trabajo.
- c) Las gráficas obtenidas con el comando `plot`
- d) Sus observaciones acerca del uso en este “experimento” del comando `comet`.

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Jorge G. Solar	Addison Wesley México
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros	Facultad de Ingeniería UNAM	Trillas-Facultad de Ingeniería UNAM
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedford Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
6	Obtención de gráficas de velocidad y aceleración de una partícula en trayectoria lineal.	El alumno obtendrá y realizará las gráficas.

4.- Introducción

Lo usual es definir las condiciones del movimiento rectilíneo de una partícula por el tipo de aceleración que corresponda; las opciones que se tienen para ello son:

1) $a = f(V)$

2) $a = f(x)$

3) $a = f(t)$

De las cuales, la opción (3) incluye el caso en que la aceleración es constante en virtud de que

$a = C$; siendo $C = \text{constante}$

También puede interpretarse como $a = C(t^0)$ con lo cual la aceleración **es función del tiempo**.

Ya se ha tenido interacción con la opción (3) pues: $a = f(t)$; si $a = \text{constante}$, implica:

$$dV = a dt \Rightarrow \int_{V_0}^V dV = a \int_{t_0}^t dt \Rightarrow V = V_0 + at \quad \text{considerando } t_0 = 0 ;$$

además:

$$V = dx/dt \Rightarrow dx = (V_o + at)dt \Rightarrow x = x_o + V_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

Que son las ecuaciones (6) y (7) de la introducción a la práctica dos de este manual.

Se procede de modo semejante si la aceleración es variable función del tiempo; por ejemplo consideremos que la aceleración de una partícula con movimiento a lo largo del eje X, está definida por:

$$a = 6t - 14 \quad ; \quad \text{donde } a \text{ se obtiene en } m/s^2 \text{ y el tiempo } t \text{ en segundos.}$$

Considerando que en $t = 0$ la partícula se encuentra en $x = +5$ con una velocidad de 10 m/s hacia la derecha, su velocidad instantánea se obtiene de

$$\int_{V_o}^V dV = \int_0^t (6t - 14) dt$$

$$\Rightarrow V = V_o + 3t^2 - 14t = 3t^2 - 14t + 10$$

Al realizar las gráficas de la aceleración y de la velocidad en el ejemplo proporcionado, se observará que corresponden a una recta y a una parábola de segundo grado respectivamente.

En la opción (1): a partir de $a = f(V)$ puede elegirse emplear la definición $a = \frac{dV}{dt}$ separando variables y realizando la integración: $\int_0^t dt = \int_{V_o}^V \frac{dV}{a}$ con lo cual se obtiene la velocidad en función del tiempo; pero también se puede optar por emplear la expresión (4) presentada en la práctica dos: $a = \frac{V dV}{dx}$ igualmente, primero separando variables para realizar la integración:

$$\int_{x_o}^x dx = \int_{V_o}^V \frac{V dV}{a} \quad \text{y así conocer la expresión de la velocidad en función de la posición } x.$$

Si se requiere aplicar la opción (2): el inicio es $a = f(x)$; la continuación es emplear $a = \frac{V dV}{dx}$ pero ahora la separación de las variables presentes cambia a: $V dV = a dx$ que, después de realizar la integración (y multiplicar por 2 ambos lados de la ecuación) proporciona:

$$V^2 = V_o^2 + 2 \int_{x_o}^x a dx$$

Con ello se habrá logrado obtener la expresión de la velocidad en función de la posición y la posibilidad de realizar las gráficas tanto de la aceleración como de la velocidad.

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

1.2 Análisis del movimiento rectilíneo.

6.- Material y equipo necesario

a) Software MATLAB

b) Equipo computacional adecuado.

c) Considerar como datos de trabajo:

No	$C_1; [m/s^2]$	$C_2; [m/s^4]$	$x_o; [m]$	$T; [s]$
1	8	2.00	3.0	5.0
2	9	2.25	3.5	5.3
3	10	2.50	4.0	5.6
4	11	2.75	4.5	5.9
5	12	3.00	5.0	6.2
6	13	3.25	5.5	6.5
7	14	3.50	6.0	6.8
8	15	3.75	6.5	7.1
9	16	4.00	7.0	7.4

7.- Metodología

a) Realizar la selección sucesiva al azar de C_1, C_2, x_o y T por equipos.

(6561 posibilidades diferentes)

b) Con los valores seleccionados, definir para cada equipo el enunciado correspondiente:

“Una partícula tiene movimiento en línea recta gobernado por la expresión de su aceleración en función del tiempo:

$$a = C_1 - C_2 t^2 ; \text{ en la cual } a \rightarrow [m/s^2] , t \rightarrow [s]$$

Si al iniciar el “experimento” (en $t = 0$) la partícula se encuentra en $x = x_0$ con velocidad $V_0 = 0$; determinar:

- 1) El tiempo en segundos para el cual la velocidad es otra vez cero.
 - 2) La posición y la velocidad en $t = T$.
 - 3) La distancia total recorrida por la partícula desde $t = 0$ hasta $t = T$.”
- c) A partir de las definiciones de aceleración y velocidad, encontrar la expresión de la velocidad y la posición instantáneas de la partícula.
- d) Determinar el tiempo donde la velocidad de la partícula es cero nuevamente.
- e) Calcular la posición y velocidad de la partícula en el tiempo $t = T$.
- f) Relacionar los resultados parciales obtenidos en los incisos (d) y e) y anotar las observaciones pertinentes.
- g) Calcular la distancia total recorrida por la partícula desde $t = 0$ hasta $t = T$.
- h) Usando un programa MATLAB, dividir en por lo menos 100 intervalos al tiempo que transcurre desde $t = 0$ hasta el tiempo obtenido en el inciso (d) y dividir del mismo modo al tiempo transcurrido desde el valor obtenido en el inciso (d), hasta $t = T$ y realizar las gráficas completas de la trayectoria, velocidad y aceleración de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = T$ usando el comando plot.

8.- Sugerencias Didácticas

- a) Hacer efectiva la selección sucesiva al azar de C_1, C_2, x_0 y T y verificar que cada equipo obtenga una selección diferente.
- b) Recomendar que los estudiantes apliquen un procedimiento similar al experimento :

“La aceleración de una partícula con movimiento rectilíneo se define con la relación:
 $a = -C_1 V^{C_2}$ en la cual $a \rightarrow [m/s^2]$, $V \rightarrow [m/s]$.

Si la velocidad inicial de la partícula es V_0 en $x = 0$, determinar:

- a) La posición de la partícula donde su velocidad es V_1 , $[m/s]$

b) La velocidad de la partícula cuando su posición es $x = x_1$, [m] “

NOTAS:

-Deberán usarse valores lógicos de C_1, C_2, V_0, V_1, x_1 para obtener resultados adecuados.

-El objetivo final es la realización de las gráficas de velocidad, aceleración y trayectoria de la partícula con ayuda de un programa MATLAB.

9.- Reporte del Alumno (resultados)

Por equipos, los estudiantes deberán reportar:

- Los valores de C_1, C_2, x_0 y T seleccionados al azar.
- El tiempo donde la velocidad de la partícula es cero nuevamente.
- Posición y velocidad de la partícula en el instante $t = T$.
- Distancia total recorrida por la partícula desde $t = 0$ hasta $t = T$.
- Las gráficas completas de trayectoria, velocidad y aceleración de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = T$ obtenidas con ayuda del programa MATLAB.

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica DINÁMICA	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros DINÁMICA	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Mecánica para Ingeniería DINÁMICA	Jorge G. Solar	Addison Wesley México
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros	Facultad de Ingeniería UNAM	Trillas-Facultad de Ingeniería UNAM
Mecánica para Ingeniería DINÁMICA	Anthony Bedford Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
7	Comprobación de la velocidad y aceleración de partículas con movimiento dependiente.	El alumno comprobará estos parámetros mediante observaciones experimentales.

4.- Introducción

Al analizar el caso de dos (o más) partículas que de manera simultánea se mueven en el espacio o en un plano, puede relacionarse en cada instante la posición de una con respecto a la otra mediante la expresión vectorial: $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{(B/A)}$; en la cual:

$\vec{r}_B$ = Posición de la partícula B en el instante de análisis (desde el origen del sistema de referencia fijo)

$\vec{r}_A$ = Posición de la partícula A en el mismo instante de análisis (desde el mismo origen)

$\vec{r}_{(B/A)}$ = Posición de B con respecto a A : Es un vector que inicia en el punto donde se encuentra la partícula A y termina en el punto donde está la partícula B (en el instante de análisis); es decir que la posición de B se observa desde la partícula A para el mismo instante.

Derivando esa expresión base con respecto al tiempo, se obtiene la expresión vectorial que relaciona las velocidades: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{(B/A)}$

Una segunda derivación para las aceleraciones: $\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{(B/A)}}$

Si el movimiento es en línea recta pueden simplificarse a:

$$x_B = x_A + x_{(B/A)}$$

$$V_B = V_A + V_{(B/A)}$$

$$a_B = a_A + a_{(B/A)}$$

La condición vectorial se conserva usando **convención de signos** en todas ellas.

Estas seis ecuaciones vectoriales se conocen como “ecuaciones de movimiento relativo” y son aplicables en ambas situaciones: tanto si las partículas se mueven de manera independiente una de la otra, o si lo hacen de manera dependiente; (de tal manera que la posición de una partícula es determinada por la posición de otra u otras partículas).

El segundo caso (mov. Dependiente) se presenta en varias situaciones; por ejemplo al considerar dos puntos distintos de un mismo mecanismo o al moverse dos bloques ligados mediante un sistema de poleas y cables. En cada mecanismo o sistema de poleas y cables deberá obtenerse primeramente la expresión de posiciones relativas para posteriormente, derivando se encuentren las de velocidades y aceleraciones.

Para obtener la ecuación base de movimiento dependiente, se recomienda en los sistemas de movimiento relativo de bloques ligados con poleas y cables (que se consideran inextensibles), **utilizar como referencia** algún punto que permanezca fijo durante el funcionamiento o en su defecto, un punto que mantenga velocidad constante y contar las líneas de cuerda principal que gobiernan el movimiento de los bloques involucrados y que generalmente será en línea recta horizontal o vertical o inclinada; sea cual fuere el caso se recomienda emplear la letra “equis” (x) con los respectivos subíndices para referencia a los bloques y como convención de signos; positivo ALEJÁNDOSE del punto de referencia (lo que implica que el signo negativo es acercándose).

Por ejemplo, la ecuación $x_A + 2 x_B + x_C = \text{constante}$

Puede servir para analizar el movimiento de un sistema de tres bloques ligados con cuerda inextensible y poleas (en cualquier dirección) donde al bloque A llega un extremo de la cuerda, el bloque B puede ser una polea móvil accionada con dos líneas de cuerda y al bloque C llega el otro extremo de la cuerda: las ecuaciones de

velocidades y aceleraciones del mov. dependiente serán en consecuencia
 $V_A + 2 V_B + V_C = 0$; $a_A + 2 a_B + a_C = 0$

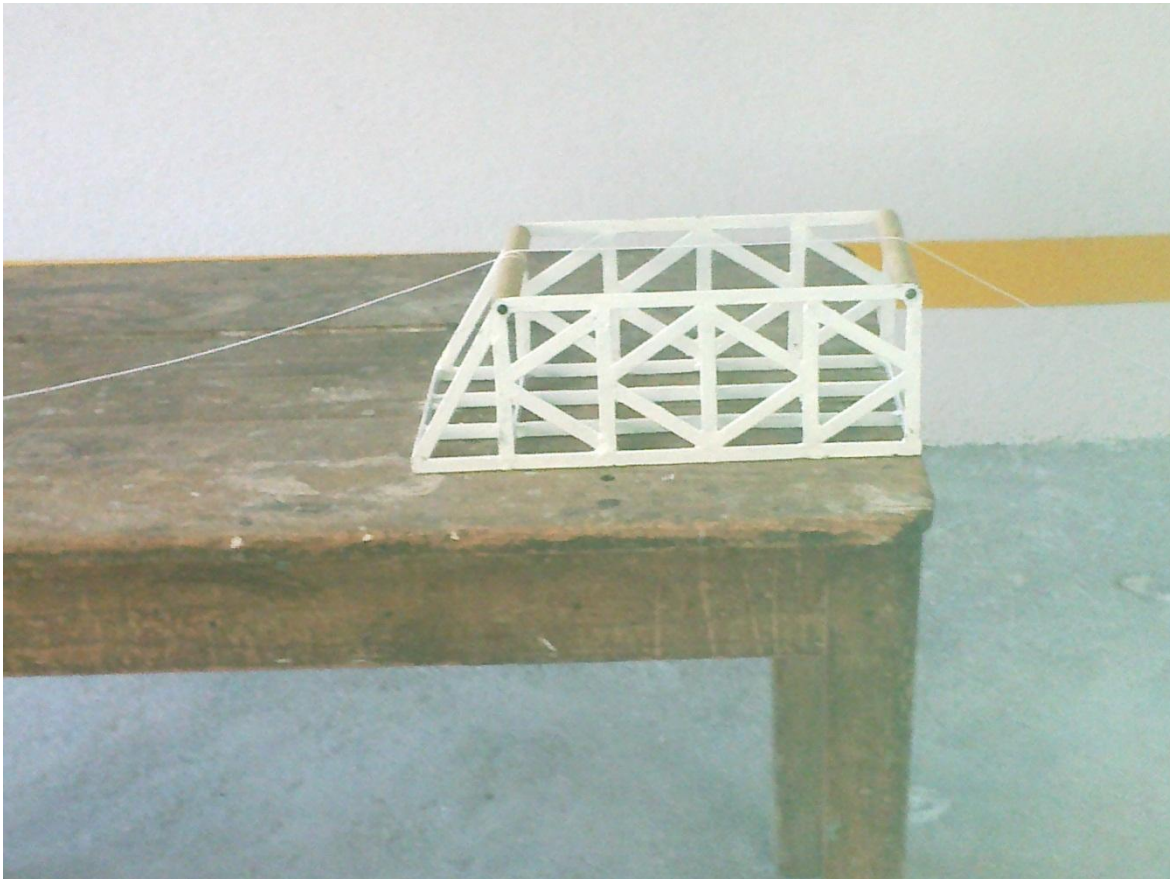
5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

1.3 Análisis del movimiento de varias partículas.

1.6 Análisis del movimiento relativo a un sistema de referencia en translación.

6.- Material y equipo necesario

a) Modelo didáctico Pr7 para análisis de movimiento horizontal dependiente.



b) Hilo de albañil de longitud suficiente según el espacio disponible.

c) Flexómetro

d) Cronómetro

- e) Mesa de trabajo (por lo menos de 80 cm de altura)
- f) Tres objetos de diferente forma para ser utilizados como partícula “conducida” (o arrastrada).

7.- Metodología

- a) Colocar correctamente en la mesa de trabajo el modelo didáctico Pr7
- b) Sujetar un objeto a la vez empleando el hilo de albañil asegurándose de que quede razonablemente tenso en el tramo horizontal e inclinado.
- c) Realizar las mediciones correspondientes al estado inicial del sistema considerando como “partícula” A a un punto de referencia sobre el tramo horizontal de hilo y como “partícula” B al objeto “conducido”
- d) Accionar el cilindro motriz a baja velocidad constante durante 2 segundos.
- e) Medir nuevamente los tramos horizontales: el del hilo empleado y el del recorrido del objeto “conducido”.
- f) Con la medición anterior y el tiempo de 2 segundos, estimar las velocidades de ambas “partículas” y la aceleración de la partícula B.
- g) Repetir los incisos c-f con distinta colocación inicial para el mismo objeto y diferente velocidad constante del cilindro motriz (puede emplearse diferente tiempo; por ejemplo: 1 seg.)
- h) Realizar el proceso completo para los tres objetos “conducidos” disponibles para obtener parámetros de comparación.
- i) Reunir los resultados obtenidos en forma tabular para reporte.

8.- Sugerencias Didácticas

- a) Inducir a que el alumno deduzca que la diferencia de nivel entre los planos de movimiento de ambas partículas es constante.

b) Es recomendable comparar con cáñamo o alambre delgado para disminuir errores debido al alargamiento del hilo de albañil.

c) Puede variarse la diferencia de nivel para observar diferencias en el funcionamiento del sistema.

d) El trabajo en equipo es recomendable y si es con rotación de tareas a realizar durante la práctica es mucho mejor para involucrar a los estudiantes y motivar su iniciativa.

9.- Reporte del Alumno (resultados)

Deberán precisarse en el reporte las condiciones iniciales del sistema así como las observaciones y resultados obtenidos.

Se propone el siguiente formato de reporte para cada objeto conducido:

PRIMER ENSAYO: Objeto conducido _____

Diferencia de nivel entre planos de movimiento _____

$d_{OA} =$ $d_{OB} =$ Tiempo empleado _____

Partícula	Posición inicial	Desplazamiento	Velocidad	Aceleración	Observaciones
A					
B					

SEGUNDO ENSAYO: Objeto conducido _____

Diferencia de nivel entre planos de movimiento _____

$d_{OA} =$

$d_{OB} =$

Tiempo empleado _____

Partícula	Posición inicial	Desplazamiento	Velocidad	Aceleración	Observaciones
A					
B					

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Jorge G. Solar	Addison Wesley México
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros	Facultad de Ingeniería UNAM	Trillas-Facultad de Ingeniería UNAM
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedford Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
8	Obtención de la gráfica Posición-Tiempo, empleando sensores de movimiento.	Con ayuda de la Tecnología, el alumno obtendrá y realizará la gráfica Posición-Tiempo.

4.- Introducción

La rapidez es la razón de la distancia total recorrida entre el tiempo que le tomo realizar dicho recorrido (cantidad escalar), y la velocidad es la rapidez y dirección del movimiento (cantidad vectorial). El cambio de la posición (distancia recorrida) dividida por el tiempo da la magnitud de la velocidad media del objeto.

La posición de un objeto móvil que viaja a lo largo de una línea directa puede ser descrita por una serie de pares ordenados (t,x) . El primer número es el tiempo cuando el objeto estaba en una cierta posición y el segundo número es la distancia de un punto de referencia.

Una representación geométrica de posición-tiempo de un objeto en movimiento nos da la representación del conjunto de pares ordenados (t,x) en el plano cartesiano (gráfica).

A partir de la especificación de la aceleración de una partícula con movimiento rectilíneo, ya sea en función de la posición, o de la velocidad, o del tiempo, la expresión de la velocidad puede quedar definida en función de la posición o en función del tiempo, según se analizó en la práctica seis de este manual; entonces la continuación del análisis es:

a) Si $V = f(x)$:

La definición de velocidad $V = \frac{dx}{dt}$ separando las variables proporciona

$$\int_0^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{V}$$

Permitiendo encontrar $x = f(t)$

b) Si $V = f(t)$:

Directamente se aplica $\int_{x_0}^x dx = \int_0^t V dt$ llegando inmediatamente a $x = f(t)$

La aceleración en función del tiempo $a = f(t)$ se obtiene directamente de mediciones de laboratorio o de una especificación teórica para definir el movimiento rectilíneo de una partícula, siendo más sencillo su manejo al incluir procesos de integración o derivación inmediatos.

La aceleración en función de la posición $a = f(x)$ se presenta cuando la resistencia al avance de (o el empuje sobre) un objeto es una fuerza elástica; por ejemplo en el caso de un resorte perfectamente elástico, la magnitud instantánea de la fuerza que actúa es:

$F = k x$; Con k = constante del resorte ; x = alargamiento o acortamiento instantáneo del resorte. (Al suspenderse, el resorte recupera su longitud natural)

En consecuencia, al igualar: $k x = m a \Rightarrow a = \frac{k}{m} x = C x$; es decir $a = f(x)$ donde la constante C depende de la rigidez del resorte y de la masa de la partícula.

Los casos más frecuentes de la aceleración en función de la velocidad instantánea son de la forma:

I) $a = k V$: Cuando en un mecanismo intervienen actuadores hidráulicos o neumáticos.

II) $a = k V^2$: Cuando existe movimiento relativo de un objeto con respecto a un fluido

(Es decir, en lo relacionado con automovilismo de alta velocidad, la aeronáutica y la navegación superficial y submarina)

Se incluye aquí, parte del análisis correspondiente al caso (II):

Considerando que existe movimiento relativo, pueden considerarse dos componentes de la fuerza que el fluido ejerce sobre el objeto:

Componente PERPENDICULAR y componente PARALELA al movimiento relativo; de las cuales, la primera es conocida como fuerza de sustentación y ambas son evaluadas mediante expresiones similares.

Respecto a la componente paralela puede decirse que se denomina RESISTENCIA al avance (o, en su caso EMPUJE) y su magnitud se evalúa con la expresión:

$$F_R = C_R \rho A \left(\frac{V^2}{2} \right) ; \text{ La descripción de las variables que intervienen es:}$$

C_R = Coeficiente de resistencia que depende del número de Reynolds para velocidades bajas e intermedias y del número de Mach para velocidades altas (es adimensional).

ρ = Densidad del fluido

A = “área característica” que normalmente es la proyección del objeto al plano perpendicular al movimiento relativo.

V = Velocidad relativa del fluido con respecto al objeto.

En esas condiciones, la aceleración será: $a = \left(\frac{1}{2m} C_R \rho A \right) V^2$ (1); es decir:

$a = k V^2$ donde la constante k depende de la masa de la partícula, de la viscosidad, elasticidad y densidad del fluido, así como de la forma del objeto.

Se presenta el análisis dimensional de la aceleración en la expresión (1) usando las dimensiones fundamentales del sistema internacional

$M = \text{masa} ; L = \text{longitud} ; T = \text{tiempo} :$

$$L T^{-2} = \frac{M L^{-3} L^2}{M} (L T^{-1})^2 = L^{-1} L^2 T^{-2} = L T^{-2} ; \quad (\text{¡Sí corresponde!})$$

Como información útil adicional, se recuerda que el número de Reynolds (R_E) representa la relación de las fuerzas de inercia a las fuerzas de viscosidad y que el número de Mach (M) es la raíz cuadrada de la relación de las fuerzas de inercia a las fuerzas elásticas; es decir:

$$R_E = \frac{m a}{\tau A} = \frac{(\rho L^3)(L T^{-2})}{\left[\mu \left(\frac{V}{L} \right) \right] (L^2)} = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu V L} = \frac{\rho L V}{\mu} ;$$

Los factores del numerador son: densidad, longitud y velocidad; el único parámetro del denominador es la viscosidad absoluta o dinámica.

$$M = \sqrt{\frac{m \cdot a}{E \cdot A}} = \sqrt{\frac{\rho \cdot L^3 \cdot L \cdot T^{-2}}{E \cdot L^2}} = \sqrt{\frac{\rho \cdot L^2 \cdot V^2}{E \cdot L^2}} = V \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{V}{\sqrt{E/\rho}} = \frac{V}{c}$$

Siendo V , la velocidad relativa y $c = \sqrt{E/\rho}$ la velocidad del sonido en el fluido.

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

1.1 Desplazamiento, velocidad y aceleración.

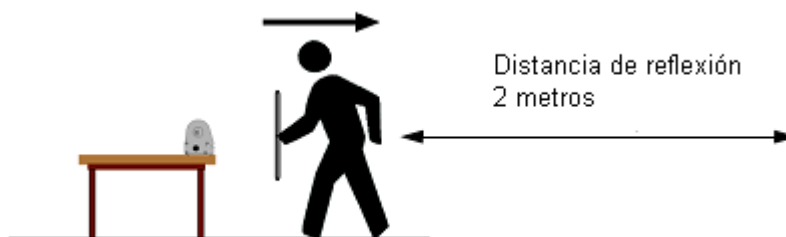
6.- Material y equipo necesario

- Computadora con puerto USB
- USB interface (PASPOR)
- Sensor de Movimiento (PASPOR) (PS-2103A)
- Software (DataStudio)
- Reflector de Movimiento
- Mesa de trabajo
- Espacio libre mínimo de 2 metros

7.- Metodología

MONTAJE DEL EQUIPO

- a) Montar el equipo como se muestra en la figura



- b) Colocar el Sensor de Movimiento sobre el borde de la mesa. Colocarse a una distancia en el que el Sensor perciba la señal de manera clara



- c) Con la superficie reflectora a la altura de la cintura asegúrese que el Sensor este apuntando al centro de la superficie.

En el monitor de la computadora se podrá ver la imagen del movimiento

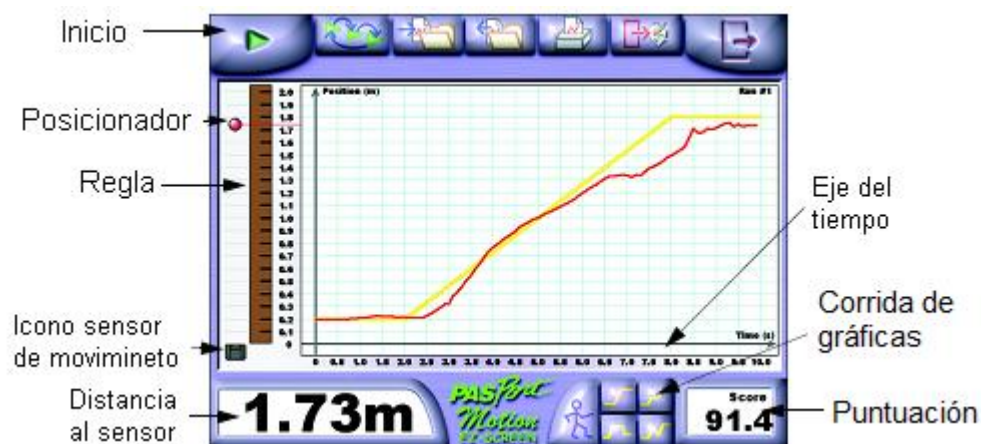
1. Conectar el Sensor de Movimiento a la Xplorer GLX
2. Conectar el USB (PASPORT) en la interfaz del puerto USB de la computadora y automáticamente aparecerá en la pantalla de Windows.



3. Elegir la opción EZscreen y dar un clic en el botón "Match Graph"



4. Elegir la primer gráfica en el botón de ajuste. (completarla antes de comenzar otra medición).



5.-La práctica consiste en tratar de igualar el movimiento al del gráfico mostrado. Cada miembro del equipo tendrá tres posibilidades para conseguir una marca perfecta.

6.-Seleccionar un primer integrante del equipo; esta persona será el objetivo. Seleccionar a otro integrante del equipo para operar el Sensor, el cual controlará la computadora.

7.-Mantener el objetivo a la altura de la cintura. Asegurarse que el Sensor este apuntando a la superficie reflectora y que el objetivo pueda ver el monitor de la computadora.

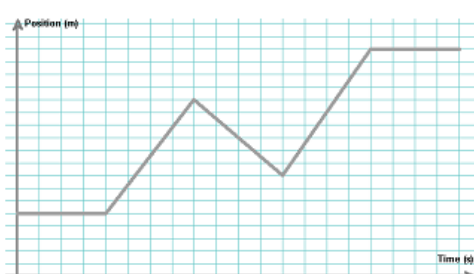
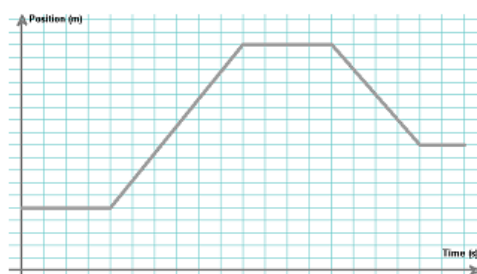
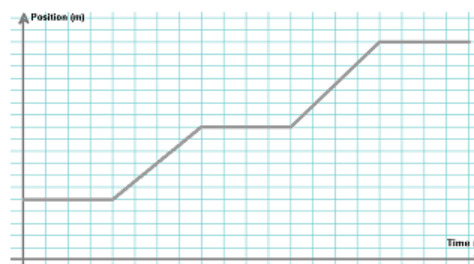
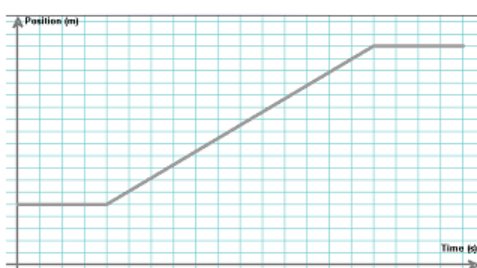
8.-Cuando el objetivo este en posición frente al Sensor de Movimiento y listo para moverse, el operador podrá pulsar el botón de inicio para comenzar una corrida de datos.

- Cuando el operador presione el botón start, el programa comenzará en 5 segundos en cuenta regresiva.
- El objetivo puede ajustar su posición alineándose al pequeño círculo rojo sobre el eje vertical de la gráfica.
- Cuando la grabación de datos comienza, la gráfica trazará la posición del objetivo. La grabación de datos dura 10 segundos y se detiene automáticamente.

- Note que el valor de la marca se encuentra en la esquina inferior derecha. Esta marca está basada de manera que el movimiento del objetivo se ajusta a la gráfica. Una marca de 100 es un valor perfecto. Hay cuatro gráficos disponibles. Cada miembro de grupo conseguirá tres posibilidades para conseguir una marca perfecta.

8.- Sugerencias Didácticas

Algunos ejemplos de gráficas que se pueden analizar con los estudiantes son:



1. Promediar los resultados para cada corrida de datos
2. Una vez que se ha hecho el promedio de cada corrida de datos, elegir un promedio final para conseguir el resultado general para todas las gráficas.
3. Si hay un empate, escoger a un ganador o hacer un desempate con otra corrida de datos.

9.- Reporte del Alumno (resultados)

En esta práctica pueden y deben personalizarse los datos y los resultados de los estudiantes participantes en virtud de que cada uno de ellos actúa como “partícula” en movimiento lineal; en consecuencia, un formato adecuado para reportar los resultados es:

Registro de resultados de la corrida de gráfica #1

Nombre estudiante	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Promedio
1				
2				
3				

Registro de resultados de la corrida de gráfica #2

Nombre estudiante	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Promedio
1				
2				
3				

Registro de resultados de la corrida de gráfica #3

Nombre estudiante	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Promedio
1				
2				
3				

Registro de resultados para la corrida de gráfica #4

Nombre estudiante	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Promedio
1				
2				
3				

Registro del promedio final de todas las corridas de las gráficas

Nombre del estudiante	Promedio final
1	
2	
3	

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Jorge G. Solar	Addison Wesley México
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros	Facultad de Ingeniería UNAM	Trillas-Facultad de Ingeniería UNAM
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedford Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
9	Interacción práctica con los parámetros del movimiento de rotación.	El alumno analizará y estimará los parámetros del movimiento de rotación.

4.- Introducción

La partícula tiene movimiento de rotación si su trayectoria es una **circunferencia** de radio r y con centro en el origen o en cualquier otro punto.

Sea: s = distancia recorrida por la partícula **sobre su trayectoria**

θ = ángulo central generado por las posiciones “inicial” y “final” de la partícula (se expresa en radianes)

La Trigonometría indica que $s = r \theta$;

$$\Rightarrow V = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} + \theta \frac{dr}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} ; \text{ porque el segundo término es cero } (r = \text{cte})$$

Si se emplea $w = \frac{d\theta}{dt}$ = velocidad angular ; la expresión se transforma en:

$$V = r w = w r = \text{velocidad lineal (es tangente a la trayectoria)}$$

Derivando nuevamente: $a = \frac{dV}{dt} = r \frac{dw}{dt} + w \frac{dr}{dt} = r \frac{dw}{dt}$; por la misma razón.

De modo similar, $\alpha = \frac{dw}{dt}$ = aceleración angular $\Rightarrow a = r \alpha = \alpha r$; que tiene la misma dirección que la velocidad; es decir que es tangente a la trayectoria y debe

distinguirse de la componente normal de la aceleración de conformidad con lo estudiado en la introducción a la práctica tres de este manual.

(la componente normal de la aceleración en movimiento de rotación tiene una magnitud de $a_n = \frac{v^2}{r} = w^2 r$).

En la expresión $w = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t w dt$; considerando constante la velocidad angular $w \Rightarrow \theta = \theta_0 + w t$ (1) expresión necesaria y suficiente para analizar lo relacionado con el movimiento circular uniforme (MCU).

Mientras que, si la aceleración angular α es constante: $\alpha = \frac{dw}{dt} \Rightarrow$ el movimiento se denomina “movimiento circular uniformemente acelerado” (MCUA):

$$\int_{w_0}^w dw = \alpha \int_0^t dt \Rightarrow w = w_0 + \alpha t \quad \text{..... (2)}$$

Sustituyendo ahora la ecuación (2) en la definición $w = \frac{d\theta}{dt}$:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (w_0 + \alpha t) dt \Rightarrow \theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad \text{..... (3)}$$

Si en las definiciones $w = \frac{d\theta}{dt}$; $\alpha = \frac{dw}{dt}$ se despeja el diferencial de tiempo y se iguala $\frac{d\theta}{w} = \frac{dw}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{w dw}{d\theta} \Rightarrow \int_{w_0}^w w dw = \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha d\theta$ que, si $\alpha = cte$

$$\Rightarrow w^2 = w_0^2 + 2 \alpha (\theta - \theta_0) \quad \text{..... (4)}$$

Observe que existe una semejanza total de las ecuaciones (1) a (4) de MCU y de MCUA respectivamente, con las ecuaciones (5) a (8) del movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado descrito en la práctica dos.

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

1.5 Análisis del movimiento de rotación.

6.- Material y equipo necesario

a)Mesa de trabajo

b) Rampa girable a diferentes ángulos y espacio libre disponible de 5 metros.

c) Flexómetro

d) Cronómetro ordinario

e) 5 bloques pequeños de diversos materiales (aprox. De $0.5 \times 0.5 \times 0.5$ Pul.)

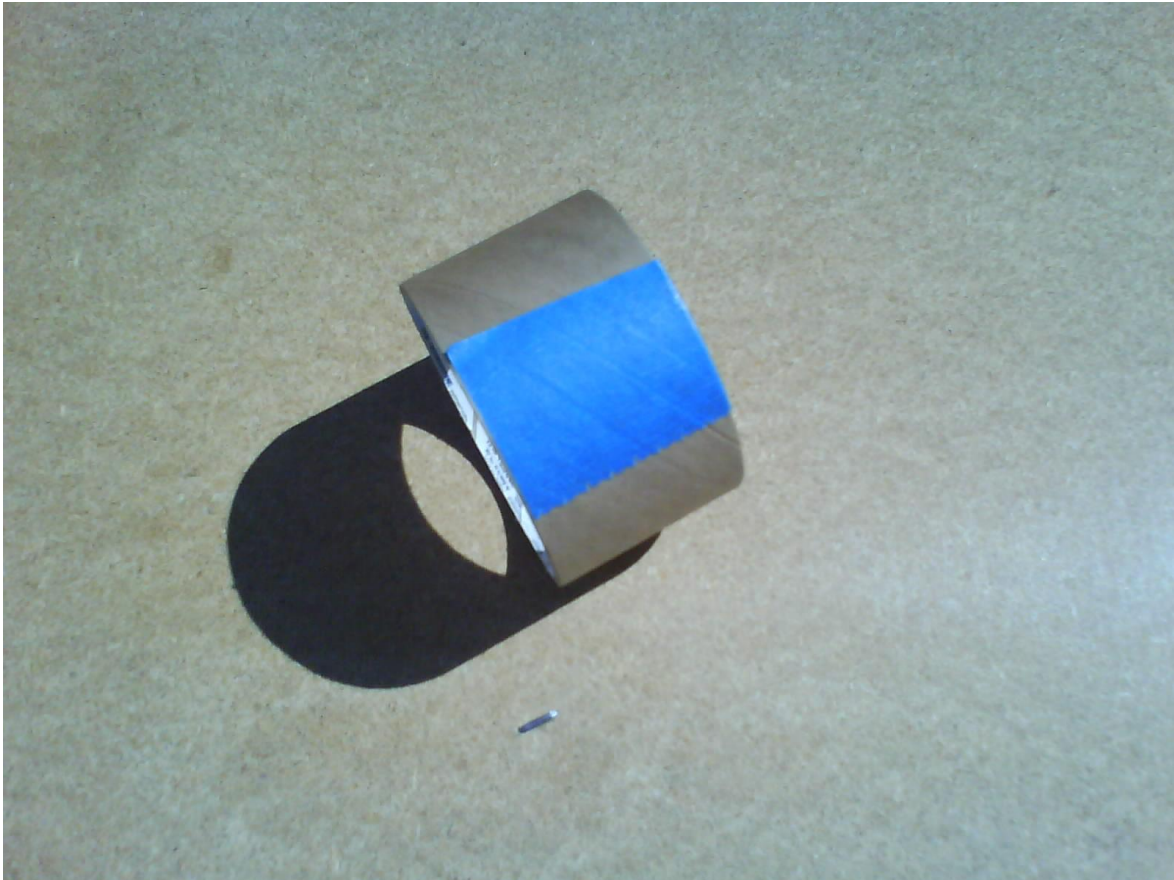
f) Mecanismo de tornamesa para 33, 45 y 78 rpm



g) Casete comercial transparente de cinta (60 minutos)



h) Núcleo de cartón de 8.2 cm de diámetro por 5 cm de ancho.



i) Calibrador vernier de 6".

7.- Metodología

TORNAMESA:

- Presentar o realizar una estimación del coeficiente de fricción cinético entre el material de los respectivos bloques y el de la cubierta del tornamesa.
- Instalar sobre la mesa de trabajo y verificar el correcto funcionamiento del tornamesa; apagarlo para iniciar.
- Colocar un bloque a pequeña distancia del centro y hacer funcionar el tornamesa a 33 rpm, después a 45 y por último a 78 rpm y observar qué ocurre.

d) Con el mismo bloque pero a una distancia media, repetir el inciso (c). Puede usarse también una distancia mayor (bloque cerca del borde) y hacer deducciones.

e) Los incisos (c) y (d) pueden sustituirse por: colocar 3 bloques simultáneamente desde el inicio, a distintas distancias del centro y hacer funcionar el tornamesa a 33, 45 y 78 rpm. También puede colocarse un disco normal de acetato (de 33 rpm) para variar la superficie de contacto y comparar.

NÚCLEO CILÍNDRICO:

f) El núcleo de cartón se coloca en reposo sobre la rampa a una distancia definida medida desde el punto de contacto con la superficie horizontal y se libera.

g) Se pide al estudiante que consiga que el núcleo cilíndrico realice el recorrido total: la longitud de rampa + 2.5 metros en el piso horizontal en un tiempo especificado en segundos y centésimas de segundo y respalde con sus cálculos su éxito en ese objetivo. (Puede emplear ángulo fijo en la rampa y variar las distancias sobre ella o usar la misma distancia de rampa y variar el ángulo de inclinación).

CASETE TRANSPARENTE:

h) En cualquier etapa de funcionamiento del casete transparente, medir los diámetros instantáneos de los dos carretes y el diámetro fijo de las poleas adicionales: Seleccionar uno de los dos carretes y accionarlo lentamente con desarmador de punta plana de $\frac{3}{8}$ " o con bolígrafo de cuerpo hexagonal de 7.5 cm de ancho (Punto fino o medio de marca comercial conocida).

Girar el carrete seleccionado un ángulo definido previamente (de preferencia múltiplo de 90 grados) y observar el ángulo girado en el otro carrete y en las poleas inferiores adicionales así como la distancia recorrida por la cinta para poder evaluar velocidades angulares y tangenciales.

8.- Sugerencias Didácticas

TORNAMESA:

a) Para minimizar el impacto de la aceleración inicial al arranque del tornamesa, puede intentarse igualar la velocidad de giro en la posición que se colocará el bloque que corresponda soltándolo en movimiento desde posición lo más próxima posible a la superficie giratoria.

b) Si en una posición el bloque permanece en reposo relativo sobre la superficie del tornamesa y en otra ocurre el deslizamiento, deberá encontrarse la posición intermedia en la cual el bloque esté en MOVIMIENTO RELATIVO INMINENTE.

NÚCLEO CILÍNDRICO:

c) Es adecuado establecer una calificación en porcentaje con tolerancias especificadas en centésimas de segundo por exceso o defecto para los diferentes intentos de lograr igualar el tiempo marcado para el recorrido total del núcleo de cartón y así obtener promedios e inclusive definir en PRIMER LUGAR al estudiante que logre el mejor promedio.

CASETE TRANSPARENTE:

d) Es recomendable cambiar la selección del carrete motriz para observar las diferencias que ocurrirán en las velocidades y reafirmar conceptos.

OTROS:

e) Es conveniente emplear como auxiliares demostrativos otros dispositivos disponibles:

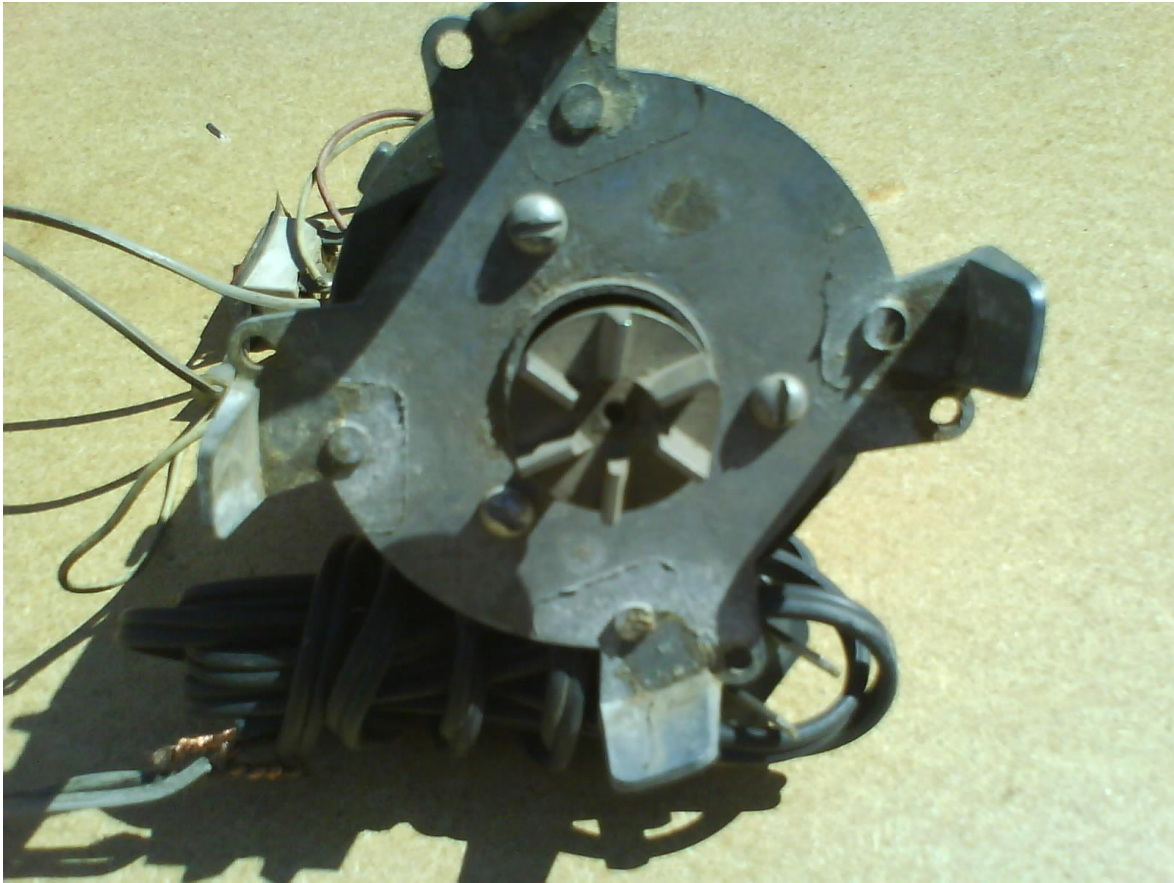
-Tapa circular de plástico con cordón impulsor para observar y sentir la aceleración angular:



-Mecanismo simple seccionado de un par de engranes embonados accionable manualmente para comprobar la relación de velocidades:



-Motor portátil de licuadora para medición de velocidad angular:



-Disco de acetato de 33 rpm con perforaciones a diferentes radios para análisis de rotación centroidal y no centroidal empleando ejes de diámetro y longitud adecuadas para accionamiento manual:



9.- Reporte del Alumno (resultados)

El estudiante deberá reportar sus observaciones, cálculos y resultados para cada uno de los dispositivos ensayados. Se propone emplear el formato siguiente para el reporte de resultados:

TORNAMESA:

RPM	V_1	a_{n1}	V_2	a_{n2}	V_3	a_{n3}	Observaciones
33	(m/s)	(m/s^2)	(m/s)	(m/s^2)	(m/s)	(m/s^2)	
45							

	(m/s)	(m/s^2)	(m/s)	(m/s^2)	(m/s)	(m/s^2)	
78	(m/s)	(m/s^2)	(m/s)	(m/s^2)	(m/s)	(m/s^2)	

NÚCLEO CILÍNDRICO:

CONDICIONES	Intento 1	Intento 2	Intento 3	Resultado
Inclinación de la rampa				
Tiempo especificado				
Longitud de rampa empleado				
Longitud horizontal				
Tiempo (calificación)				
Promedio obtenido				
Observaciones				

CASETE TRANSPARENTE:

Tiempo de referencia:

ELEMENTO	Diámetro De referencia	Angulo girado	Longitud recorrida	Velocidad angular	Velocidad tangencial	Velocidad Lineal (cinta)
Carrete motriz						
Carrete conducido						
Poleas auxiliares						
Cinta magnética						

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Jorge G. Solar	Addison Wesley México
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros	Facultad de Ingeniería UNAM	Trillas-Facultad de Ingeniería UNAM
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedfor Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
10	Medición de Altura máxima y alcance horizontal en tiro parabólico.	El alumno comprobará con medición directa esos parámetros en tiro parabólico.

4.- Introducción

De acuerdo a lo analizado en la práctica cinco de este manual, las ecuaciones que se utilizan para resolver lo relacionado con el movimiento de un proyectil (tiro parabólico) son:

$$x = x_o + V_x t \dots\dots (5)$$

$$V_y = V_{oy} - gt \dots\dots\dots(6)$$

$$y = y_o + V_{oy} t - \frac{1}{2} gt^2 \dots\dots(7)$$

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2g(y - y_o) \dots(8)$$

Que incluyen de forma implícita la convención de signos: (+) hacia arriba; (+) hacia la derecha; Recomendándose además ubicar el origen del sistema de coordenadas en el punto inferior izquierdo del plano vertical que define el movimiento.

Si el objetivo es determinar la altura máxima que alcanza la partícula con este tipo de movimiento, en la ecuación (8) se aplica $V_y = 0$ y se obtiene:

$y = y_0 + \frac{V_{oy}^2}{2g}$; En esta expresión: y = altura máxima, y_0 = altura en el punto de lanzamiento. (con referencia al origen del sistema que se haya seleccionado), V_{oy} = componente vertical de la **velocidad de lanzamiento** que también se expresa como “velocidad inicial en Y”.

(recordar que $V_{oy} = V_o \text{ Sen } \theta_o$ si el lado inicial del ángulo de disparo θ_o es la horizontal; se genera contra las manecillas del reloj y su lado final es el vector velocidad de disparo V_o)

Si la trayectoria del proyectil es libre, tiene sentido común evaluar la altura máxima cuando el ángulo de disparo se encuentra en el primero o en el segundo cuadrantes en virtud de que si se encuentra en el tercero o cuarto cuadrantes, la coordenada vertical del punto de disparo es también la altura máxima.

Se define como **alcance horizontal** a la distancia medida horizontalmente entre la vertical que pasa por el punto de lanzamiento y la que pasa en el punto de impacto del proyectil, que puede considerarse como el suelo o el nivel más bajo sobre la trayectoria libre.

Como ejemplo, consideremos que el punto de disparo (A) y el punto de llegada (B) están al mismo nivel y que el ángulo de disparo está en el primer cuadrante; en ese caso las coordenadas de A y de B pueden definirse como:

A (0,0) ; B (d,0) siendo d = alcance horizontal $\Rightarrow$ en las ecuaciones (5) y (7):

$$d = V_o \text{ Cos } \theta_o t ; \quad 0 = V_o \text{ Sen } \theta_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

$\Rightarrow$ Sustituyendo $t = \frac{d}{V_o \text{ Cos } \theta_o}$ en la segunda expresión:

$$0 = d \text{ Tan } \theta_o - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_o^2 \text{ Cos}^2 \theta_o} \Rightarrow \text{ tan } \theta_o \text{ Cos}^2 \theta_o = \frac{g d}{2 V_o^2} ; \text{ es decir:}$$

$$d = \frac{2 V_o^2}{g} [\text{ Sen } \theta_o \text{ Cos } \theta_o]$$

En la cual se observa que el alcance es función del ángulo de disparo; en consecuencia, al derivar con respecto a θ_o e igualar con cero:

$$\frac{2 V_o^2}{g} [-\text{ Sen}^2 \theta_o + \text{ Cos}^2 \theta_o] = 0 \Rightarrow \text{ tan } \theta_o = 1 \Rightarrow \theta_o = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

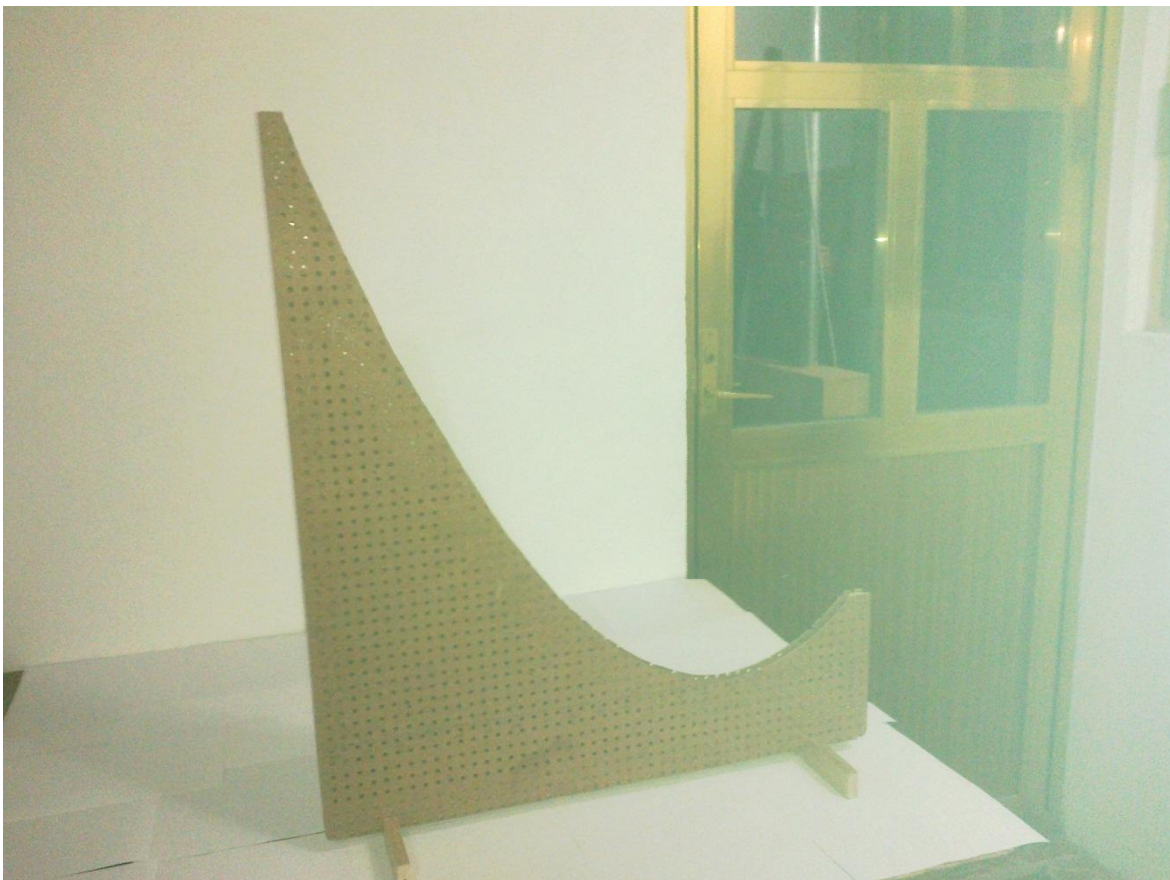
Este resultado indica que, para una cierta velocidad de disparo V_0 , el alcance es máximo para un ángulo de disparo de 45° .

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

1.4 Análisis del movimiento curvilíneo.

6.- Material y equipo necesario

a) Modelo didáctico PR10 de hojas paralelas con separación de $\frac{1}{2}$ " con trayectoria parabólica.



b) Mesa de trabajo y 3 m de espacio libre.

c) Pelotas de diversos tamaños y materiales (de $\frac{7}{8}$ " a 2.5").

- d) Cronómetro ordinario.
- e) Flexómetro (5 m).
- f) Cama de arena o aserrín de aprox. 36 por 48 cm.
- g) Calibrador de altura o dispositivo auxiliar para medición de altura máxima.

7.- Metodología

- a) Colocar el modelo didáctico PR10 por ejemplo, longitudinalmente a 40 cm del borde de la mesa de trabajo y apuntando hacia fuera de ella. (medir la altura de la mesa)
- b) Ubicar el calibrador de alturas en el sentido de la trayectoria (sin interferir) aproximadamente a 10 cm del borde.
- c) Ubicar la cama de arena o aserrín en el piso con el lado largo paralelo a la trayectoria. (el centroide a 1 m del extremo del modelo didáctico, medido horizontalmente)
- d) Seleccionar una pelota de entre las disponibles y una cierta altura de lanzamiento sobre el brazo alto de la trayectoria.
- e) Colocarla en reposo en el punto seleccionado y liberarla.
- f) Con ayuda de los integrantes del equipo, se debe observar la altura máxima alcanzada y la marca del primer rebote en la cama de arena.
- g) Medir el alcance horizontal con referencia al punto de lanzamiento. (extremo del modelo) y registrar los datos.
- h) Cepillar la cama de arena y repetir con la misma pelota los incisos (d) a (h) empleando dos alturas diferentes más.
- i) Seleccionar otra pelota y repetir el ensayo.
- j) Comparar los resultados obtenidos para cada ensayo y revisar contra lo que la teoría predice.

8.- Sugerencias Didácticas

a) Que el estudiante compruebe que el perfil de trayectoria empleado fue construido según la ecuación $y = 10 + \frac{x^2}{30}$; [cm] y en consecuencia proporciona un ngulo de disparo de 45° .

b) Es deseable se construyan dos modelos similares pero siguiendo las ecuaciones:

$$y = 13.17 + \frac{\sqrt{3}}{90} x^2 ; [cm]$$

$$y = 4.51 + \frac{\sqrt{3}}{30} x^2 ; [cm]$$

Para obtener 30° y 60° respectivamente, en el mismo punto de disparo y abrir el abanico de posibilidades de ensayo y comparación.

9.- Reporte del Alumno (resultados)

Deberá elaborar un reporte incluyendo datos y operaciones realizadas. Se sugiere concentrar resultados en forma tabular:

ÁNGULO DE DISPARO: _____

Pelota (describir)	Altura seleccionada	Velocidad De disparo	Altura máxima	Alcance horizontal	% error	Observ.
A:						
B:						

Nota: El porcentaje de error se refiere a la diferencia con respecto a lo que la teoría indica.

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Jorge G. Solar	Addison Wesley México
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros	Facultad de Ingeniería UNAM	Trillas-Facultad de Ingeniería UNAM
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedfor Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
11	Comprobación de velocidades angulares en un sistema planetario de engranes.	El alumno estimará y comprobará velocidades angulares.

4.- Introducción

El estudio completo sobre la Tecnología relacionada con los engranes cónicos, rectos y helicoidales y los mecanismos principales donde intervienen estos elementos de diseño, se realiza posteriormente en materias tales como:

Análisis y síntesis de Mecanismos (clave EME-1005 unidad 4)

Diseño de elementos de máquinas (clave EMF-1009 unidad 3)

Diseño e Ingeniería asistido por computadora (clave EMC-1010 unidad 3)

Comprender el funcionamiento cinemático de los sistemas planetarios de engranes es objetivo en DINÁMICA; siendo necesario tener presentes algunos conceptos básicos:

Los engranes en general, transmiten movimiento giratorio desde un eje impulsor o “motriz” a otro u otros ejes “conducidos”. Se prefiere usar engranes rectos para transmitir potencia entre ejes paralelos; sin embargo cuando las cargas a transmitir son muy altas o las velocidades son grandes y se desea mantener un funcionamiento silencioso, pueden emplearse para esa aplicación los engranes helicoidales. Si los ejes no son paralelos, deberá elegirse entre engranes helicoidales o de tornillo sinfín o cónicos pues los engranes rectos no son opción en ese caso.

Con respecto a los engranes rectos, es útil recordar que:

Circunferencia primitiva: es la base de todos los cálculos; si un engrane impulsa a otro sus circunferencias primitivas se mantienen tangentes.

d = diámetro primitivo: es el diámetro de la circunferencia primitiva.

p = paso circular: es la distancia medida sobre la circunferencia primitiva entre dos puntos homólogos de dos dientes consecutivos.

P = paso diametral estándar o DIAMETRAL PITCH: indica el número de dientes del engrane por cada pulgada de su diámetro primitivo.

m = paso diametral métrico o MÓDULO de generación: es el cociente del diámetro primitivo expresado en milímetros entre el número de dientes del engrane.

z = número de dientes del engrane

n = velocidad de giro del engrane expresada en revoluciones por minuto.

En base a estas definiciones y nomenclatura son válidas las siguientes relaciones:

$$m P = 25.4 \quad ; \quad d = m z \quad ; \quad p = \pi m \quad ; \quad \pi d = p z$$

Uno de los objetivos del diseño de los engranes es eliminar el deslizamiento logrando rodadura y en consecuencia, obtener relaciones de velocidad exactas.

Al no existir deslizamiento cuando los engranes (1) y (2) están embonados funcionando, se cumple la expresión: $(\pi d_1) n_1 = (\pi d_2) n_2$

$\Rightarrow n_1 \pi(mz_1) = n_2 \pi(mz_2)$: observar que el valor del módulo es el mismo para ambos engranes; es decir que para que dos engranes puedan funcionar embonados, sus dientes deben ser del mismo tamaño.

$\Rightarrow n_1 z_1 = n_2 z_2$ Que es la relación básica de la cinemática de dos engranes embonados donde uno impulsa al otro.

Se pueden emplear relaciones similares válidas al considerar que la velocidad angular (w) es directamente proporcional a (n) y que el diámetro primitivo es directamente proporcional a (z):

$$n_1 d_1 = n_2 d_2 \quad ; \quad n_1 r_1 = n_2 r_2 \quad ; \quad w_1 z_1 = w_2 z_2 \quad ; \quad w_1 d_1 = w_2 d_2 \quad ; \quad \text{etc.}$$

Siendo $r = d/2$ el radio primitivo.

La relación básica en su forma $n_2 = n_1 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)$ puede extenderse a trenes de engranes simples y compuestos; por ejemplo en un tren simple de tres engranes:

$n_3 = n_2 \left(\frac{z_2}{z_3} \right) \Rightarrow n_3 = n_1 \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \left(\frac{z_2}{z_3} \right) = n_1 \left(\frac{z_1}{z_3} \right)$ Girando el engrane (3) en el mismo sentido que el engrane (1).

Mientras que en un tren de engranes compuesto que consta de 5 engranes: el 1,2 y 5 cada uno en su propio eje y los engranes 3 y 4 montados rígidamente sobre el mismo eje y en consecuencia girando a la misma velocidad angular:

$n_5 = n_1 \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \left(\frac{z_2}{z_3} \right) \left(\frac{z_4}{z_5} \right) = n_1 \left(\frac{z_1 z_4}{z_3 z_5} \right)$ Girando el engrane (5) en sentido contrario al del engrane (1).

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

2.3 Rotación con respecto a un eje fijo

2.4 Movimiento general en el plano

6.- Material y equipo necesario

a) Mesa de trabajo.

b) Mecanismo planetario de engranes (paradoja de Ferguson).



- c) Azul de metilo; pincel.
- d) Mecanismo auxiliar para estimación de pequeñas rotaciones.
- e) Tubo manivela

7.- Metodología

- a) Instalar en la mesa de trabajo el mecanismo Paradoja de Ferguson colocando los pernos y tuercas en los barrenos previamente preparados.
- b) Con ayuda del azul de metilo, verificar el número de dientes del engrane fijo, de los dos engranes móviles y del engrane planeta.
- c) Colocar el mecanismo auxiliar con la varilla indicadora en la parte superior de la paradoja y marcar los dientes de los engranes móviles que mejor quedan en línea con esa varilla.
- d) Retirar el mecanismo auxiliar para iniciar el ensayo: se recomienda que el brazo de la paradoja se mantenga en el punto inferior sobre la vertical.

- e) Colocar en su posición al tubo manivela y girar el brazo del mecanismo una vuelta completa: con ayuda del mecanismo auxiliar estimar el ángulo girado por los engranes móviles.
- f) repetir los incisos (d) y (e) girando 3 vueltas completas el brazo del mecanismo y también girándolo 5 vueltas completas.
- g) Aplicar el factor de amplificación necesario para ajustar el funcionamiento del mecanismo a las revoluciones por minuto en el brazo que el profesor indique y evaluar las rpm correspondientes (y los sentidos de giro) en los engranes móviles.
- h) Desmontar el conjunto cuidadosamente y entregarlo para su adecuado almacenaje.

8.- Sugerencias Didácticas

- a) Motivar al estudiante a emplear el método de la tabulación y el de velocidades relativas así como el método de los centros instantáneos para explicar que los engranes giran en sentidos contrarios.
- b) Por ser un conjunto metálico sensibilizar al alumno a tomar las precauciones necesarias incluyendo la necesidad de lubricación.

9.- Reporte del Alumno (resultados)

El estudiante empleará alguno de los métodos que se mencionan en el inciso (a) de las sugerencias didácticas y reportará el cálculo completo de las rpm de los engranes móviles que correspondan al dato que proporcione el profesor, indicando sus observaciones y las dificultades encontradas.

Para reportar los resultados observados en el ensayo se empleará una tabulación como la siguiente:

ROTACIONES DE LOS ELEMENTOS MÓVILES:

Brazo	1 rev	3 rev	5 rev	Rpm especificadas:	(Dato del Profesor)
Engrane Medio					
Engrane exterior móvil					

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Análisis Cinemático de Mecanismos	Joseph Edward Shigley	Mc Graw Hill
Cinemática de las Máquinas	Guillet	C.E.C.S.A.
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedford Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
12	Obtención de las gráficas de localización de los centros instantáneos de rotación.	En un mecanismo de 4 barras, el alumno identificará y localizará centros instantáneos de rotación.

4.- Introducción

Un concepto útil e interesante en Cinemática es el de **Centro instantáneo de rotación**, aplicable para el cálculo de velocidades en el movimiento plano de elementos y mecanismos: También se denomina **polo de velocidad**, o simplemente **polo** y es un punto que, para una determinada posición instantánea de dos elementos con movimiento relativo plano es común a los dos elementos considerados y en consecuencia, tiene en ambos la misma velocidad, que puede ser muy grande, pequeña o inclusive velocidad cero.

Si se numeran los elementos (o eslabones) de un mecanismo con la sugerencia de reservar el número 1 al bastidor o elementos fijos, un centro instantáneo se puede designar como P_{23} ; P_{14} ; etc. Indicando el primer ejemplo que se refiere al punto (centro instantáneo) que, para ese instante del movimiento pertenece al eslabón 2 y al eslabón 3 al mismo tiempo teniendo la misma velocidad en ambos; mientras que el segundo ejemplo indica que es un punto de velocidad cero y que en ese instante el elemento 4 se encuentra girando alrededor de P_{14} y podrán calcularse las velocidades absolutas instantáneas de todos los puntos (o partículas) del elemento 4 que interese, simplemente empleando la relación escalar $V = w r$ si se conoce la velocidad angular o el despeje $w = \frac{V}{r}$ si el dato es la velocidad de alguno de los puntos del eslabón 4 e interesa evaluar su velocidad angular; los respectivos sentidos pueden deducirse por inspección empleando el sentido común.

Un centro instantáneo de rotación puede localizarse dentro o fuera de los elementos que involucra y su posición es momentánea: válida sólo en el instante considerado pues en general, el c.i. del instante t no coincidirá con el c.i. del instante $t + \Delta t$; La aceleración de las diferentes partículas del elemento no pueden calcularse empleando los respectivos c.i. porque ellos normalmente tendrán aceleración distinta de cero.

Por lo anterior, el método de cálculo de velocidades de los elementos con movimiento plano, **es una alternativa importante** en la materia de DINÁMICA en virtud de su efectividad, su aportación al ampliar el conocimiento y dominio de estos temas además de que, siendo un procedimiento escalar, en cualquier momento se puede obtener la conexión inmediata con el método vectorial de velocidades relativas así como, en su caso continuar con el cálculo de aceleraciones vectorialmente.

Un mecanismo tiene tantos polos como combinaciones binarias distintas es posible formar con sus elementos; es decir
$$N = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2! (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Siendo N = Cantidad total de c.i. ; n = cantidad de elementos que forman el mecanismo.

Para localizar los centros instantáneos de rotación (c.i.), primeramente se aplican los casos particulares:

- 1) Cuando dos eslabones se encuentran conectados por un perno, el c.i. es ese punto (perno) de unión.
- 2) Cuando un eslabón desliza con movimiento rectilíneo sobre otro, el c.i. se encuentra en el infinito en dirección perpendicular al deslizamiento.
- 3) Si dos eslabones resbalan uno sobre el otro, conservando el contacto todo el tiempo como ocurre con el mecanismo **leva-seguidor**, el c.i. se encuentra en dirección perpendicular a la tangente común que corresponda al instante de análisis.
- 4) Si un eslabón **rueda** sobre otro sin deslizar, el c.i. es el punto de contacto

Para encontrar los c.i. que falten, se emplea el teorema de ARONHOLD-KENNEDY, que establece: “Los 3 c.i. que existen cuando 3 eslabones tienen movimiento relativo entre sí, ESTÁN SOBRE LA MISMA LÍNEA RECTA” . Esto se hace con la ayuda de un diagrama circular en el cual se indican con línea continua los polos hallados y con línea discontinua los polos por encontrar, así hasta terminar aplicando el teorema mencionado. También se hace por medio de una tabulación con el listado completo de los c.i. que corresponden, marcando los polos encontrados empleando los “casos especiales” para visualizar mejor los faltantes y aplicar el teorema hasta concluir.

Algunos c.i. no son puntos fijos y pueden tener velocidad y aceleración; a la curva que puede considerarse como la trayectoria de los c.i.

o polos de velocidad, se le denomina POLODIA y su estudio y trazado contribuyen a lograr una mejor comprensión de la Cinemática del movimiento plano de un cuerpo rígido.

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

2.1 Introducción

2.2 Translación

2.3 Rotación con respecto a un eje fijo

2.4 Movimiento general en el plano

6.- Material y equipo necesario

a) Modelo didáctico PR12/13 : mecanismo de 4 barras en bastidor de madera (29 por 81 cm).



- b) Flexómetro (5 m)
- c) Cinta metálica enrollable (20 – 30 m)
- d) Marcadores no permanentes (de agua, gis, lápiz o bicolor)
- e) transportador para medición de ángulos.
- f) Espacio libre suficiente interior o exterior al laboratorio.

7.- Metodología

- a) Numerar los elementos del mecanismo en el sentido de las manecillas del reloj, reservando el número 1 al bastidor (elemento fijo).
- b) Identificar la ubicación de los 6 centros instantáneos de rotación: $(P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24} \text{ y } P_{34})$ para una posición cualquiera de referencia del mecanismo.

- c) Verificar que P_{12} y P_{14} son puntos fijos durante el funcionamiento del mecanismo, que la trayectoria del polo P_{23} es circular y la de P_{34} es un arco de círculo.
- d) A partir de la posición de referencia, girar lentamente la manivela 30 grados a favor o en contra de las manecillas del reloj, detener en esa posición el mecanismo y localizar nuevamente solo los centros instantáneos P_{13} y P_{24} .
- e) Girar en el mismo sentido elegido inicialmente otros 30 grados la manivela y localizar P_{13} y P_{24} .
- f) Continuar el proceso con incrementos de 30 grados hasta completar un ciclo (360°)
- g) Para ambos centros instantáneos (P_{13} y P_{24}) por separado se tabulan los datos en parejas ordenadas para posteriormente graficar.

8.- Sugerencias Didácticas

- a) Identificar los puntos críticos de inversión del sentido de movimiento en la trayectoria de los centros instantáneos P_{34} y P_{24} .
- b) Para esta práctica es más recomendable colocar el mecanismo de cuatro barras en el piso, en lugar de mesa de trabajo.
- c) Deben intervenir por lo menos tres estudiantes para medir las distancias correspondientes con el flexómetro o la cinta metálica: el tercero debe supervisar la linealidad correcta de la medición y el punto exacto del cruce al aplicar el teorema de Aronhold-Kennedy.

9.- Reporte del Alumno (resultados)

El estudiante reportará como resultado de esta práctica, el concentrado de puntos (con incrementos de 30°) de un ciclo completo y las gráficas correspondientes a la trayectoria de los centros instantáneos P_{13} y P_{24} .

10.- Bibliografía Preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Análisis Cinemático de Mecanismos	Joseph Edward Shigley	Mc Graw Hill
Cinemática de las Máquinas	Guillet	C.E.C.S.A.
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedfor Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
 DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA
 CARRERA: INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA
 MANUAL DE PRÁCTICAS DE LA MATERIA: DINÁMICA
 Con clave EME-1008 de la retícula IEME-2010-210

1.- Práctica No.	2.- Nombre de la práctica	3.- Objetivo específico
13	Estimación práctica de velocidades en posiciones y puntos particulares de un mecanismo.	El alumno estimará en forma práctica velocidades angulares y lineales en un mecanismo de 4 barras.

4.- Introducción

En la Cinemática de los cuerpos rígidos se define como CUERPO RÍGIDO (c.r.) a cualquier objeto de estudio considerándolo INDEFORMABLE aun cuando estén actuando sobre él una o varias fuerzas; la consecuencia inmediata de esta consideración es que la distancia entre sus partículas permanece inalterable.

Movimiento de TRASLACIÓN: Si las partículas del cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas; en este caso el movimiento de una partícula del c.r. define completamente el movimiento de las demás partículas del mismo c.r.

Considerando ambas características (distancia inalterable y trayectorias paralelas) en la ecuación fundamental del movimiento relativo: $\overline{r_B} = \overline{r_A} + \overline{r_{B/A}}$

$$\Rightarrow \overline{r_{B/A}} = cte.$$

Entonces, al derivarla con respecto al tiempo para obtener las relaciones de velocidad y aceleración respectivamente, se obtiene: $\overline{V_B} = \overline{V_A} ; \overline{a_B} = \overline{a_A}$

Lo cual refuerza lo expresado.

Movimiento de ROTACIÓN: Si todas las partículas del cuerpo rígido describen trayectorias circulares con respecto a una línea fija perpendicular al plano en que se encuentra el c.r. (eje de rotación).

El movimiento PLANO de un c.r. puede considerarse como la suma de una traslación y una rotación que ocurren en forma simultánea aunque, para su cálculo se consideren en secuencia indistinta, siendo válidas las ecuaciones:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad ; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \quad ; \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad \text{entre dos partículas A y B cualesquiera del mismo cuerpo rígido.}$$

En las tres ecuaciones indicadas, el primer término del lado derecho corresponde al movimiento de traslación y el segundo al de rotación.

La velocidad del punto B con respecto al punto A implica la consideración de que B gira en ese instante con centro en A y se calcula vectorialmente con el producto vectorial:

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

Donde:

$\vec{\omega}$ = vector velocidad angular instantánea del c.r.

$\vec{r}_{B/A}$ = vector de posición de B con respecto a A

En su caso, la aceleración del punto B con respecto al punto A deberá evaluarse vectorialmente considerando sus componentes tangencial y normal:

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}) = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{B/A}$$

Con $\vec{\alpha}$ = vector aceleración angular instantánea del c.r.

Es importante hacer notar que tanto $\vec{\omega}$ como $\vec{\alpha}$ son INDEPENDIENTES del punto de referencia pues su valor instantáneo es único para todo el c.r.; lo cual no significa que sean constantes y pueden cambiar con el tiempo.

El método vectorial de cálculo de velocidades y aceleraciones en diversos puntos de un c.r. es la herramienta fundamental en la materia de DINÁMICA; sin embargo como ya se mencionó en la práctica anterior, una opción importante para evaluar velocidades lo constituye el empleo de los centros instantáneos de rotación.

5.- Temas del programa EME-1008 relacionados

2.3 Rotación con respecto a un eje fijo

2.4 Movimiento general en el plano

6.- Material y equipo necesario

a) Modelo didáctico PR12/13



b) Mesa de trabajo

c) Transportador para medición de ángulos

d) Flexómetro (3 m)

e) Calibrador vernier de 6"

f) Plumones marcadores no permanentes

7.- Metodología

- a) Medir y numerar los elementos en el sentido de las manecillas del reloj, reservando el número 1 para el bastidor (fijo: velocidad cero).
- b) Colocar el modelo didáctico PR12/13 sobre la mesa de trabajo con el eje del elemento 2 (manivela) sobre la línea horizontal de referencia (0°).
- c) En esa posición, hacer oscilar lentamente sobre un ángulo pequeño ((10° máx.)) La manivela, observar y estimar los desplazamientos correspondientes del extremo derecho del elemento 3 y de los pernos de unión P_{23} y P_{34} .
- d) Con incrementos de 45° colocar sucesivamente el eje de la manivela (2) en cada una de esas 8 posiciones además de las dos posiciones angulares donde coinciden linealmente los ejes de los elementos (2) y (3), realizando lo indicado en el inciso (c).
- e) Considerar que durante el funcionamiento del mecanismo esos desplazamientos angulares se realizan en un solo sentido y en un tiempo definido por la velocidad del motor acoplado a la manivela; por ejemplo, pueden usarse dos tiempos distintos: 3 décimas de segundo y 2 milésimas de segundo.
- f) En esas condiciones, pueden estimarse las velocidades lineales de los 3 puntos especificados en el inciso (c), de cualquier punto adicional que se desee y las velocidades angulares de los elementos 2,3 y 4.

8.- Sugerencias Didácticas

- a) Solicitar al estudiante comparar las velocidades estimadas con el procedimiento descrito, con las obtenidas mediante el cálculo teórico en dos de las diez posiciones definidas en el inciso (d) de la metodología.
- b) El alumno puede (y debe) auxiliarse de la gráfica de localización del centro instantáneo P_{13} obtenida en la práctica anterior.
- c) Si el tiempo lo permite, puede definirse algún punto adicional ubicado sobre los elementos 3 y 4 o substituir por ellos a los puntos P_{23} y P_{34} .

9.- Reporte del Alumno (resultados)

El estudiante reportará las observaciones realizadas y los resultados obtenidos para los dos tiempos especificados en un formato tabular:

I) TIEMPO CONSIDERADO: _____

Posición (manivela)	V $[P_{23}]$	V $[P_{34}]$	V $[P]$	ω_2	ω_3	ω_4
0°						
45°						
90°						
135°						
180°						
225°						
270°						
315°						
Posición crítica 1						
Posición crítica 2						

II) TIEMPO CONSIDERADO: _____

Posición (manivela)	V $[P_{23}]$	V $[P_{34}]$	V $[P]$	ω_2	ω_3	ω_4
0°						
45°						
90°						
135°						
180°						
225°						
270°						
315°						
Posición crítica 1						
Posición crítica 2						

10.- Bibliografía preliminar

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Ingeniería Mecánica D I N A M I C A	R. C. Hibbeler	Prentice Hall
Mecánica Vectorial para Ingenieros D I N A M I C A	Beer and Johnston	Mc Graw Hill
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Jorge G. Solar	Addison Wesley México
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros	Facultad de Ingeniería UNAM	Trillas-Facultad de Ingeniería UNAM
Mecánica para Ingeniería D I N A M I C A	Anthony Bedford Wallace Fowler	Addison Wesley
Mecánica para Ingeniería y sus aplicaciones II DINÁMICA	David J. McGill Wilton W. King	Grupo Editorial Iberoamérica