

CÁLCULO DIFERENCIAL

AURELIO RAMÍREZ QUEZADA

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA
2016**

**NOMBRE DE LOS REVISORES: ING. KARLA IVONNE LEYVA AGUILAR
MAT. SOTERO MONROY RIVERA**

**OPCIÓN 5: ELABORACIÓN DE MATERIAL, RECURSOS O AUXILIARES
DIDÁCTICOS.**

TÍTULO: ELABORACIÓN DEL LIBRO DE TEXTO: CÁLCULO DIFERENCIAL

REPORTE FINAL DE PERÍODO SABÁTICO 2016-2017

PRÓLOGO

El presente trabajo se ha desarrollado tomando como base la estructura temática de la materia de Cálculo Diferencial Clave ACF-0901 que se imparte en todas las carreras de ingeniería del Tecnológico Nacional de México, esta forma de estructurar el contenido de la materia, permitirá al alumno seguir de manera ordenada el desarrollo de la asignatura.

La exposición de algunos conceptos teóricos y resultados obtenidos analíticamente, en la medida de lo posible, se han interpretado geométricamente con el fin de visualizarlos, y de esta manera mejorar la comprensión de los mismos.

Aunque si bien no es un trabajo de análisis teórico exhaustivo, se han incluido algunos teoremas con su correspondiente demostración, para que el alumno visualice el tratamiento lógico, en la obtención de las fórmulas que aplica en la resolución de problemas.

Si el lector considera necesario, profundizar o ampliar el tema, se deberá consultar la bibliografía especializada al respecto.

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1 se exponen los conceptos básicos relacionados con los números reales, su clasificación, su representación geométrica en la recta real, el valor absoluto de un número, así como sus axiomas y propiedades, que permiten resolver desigualdades de primer y segundo grado con una incógnita incluyendo desigualdades con valor absoluto.

En el capítulo 2 se define y desarrolla el concepto de función real de variable real, sus diferentes representaciones, tipos, gráficas y clasificaciones.

En el capítulo 3 se expone el concepto de límite desde un punto de vista intuitivo, así como su definición formal, el concepto de límites laterales, límites infinitos y límites al infinito, sus propiedades y algunos métodos analíticos para su cálculo. Además se expone el concepto de discontinuidad de una función en un punto, un intervalo y los diferentes tipos de discontinuidades.

En el capítulo 4 se presenta la definición de derivada, su interpretación geométrica, el concepto de incremento y de razón de cambio, el concepto de diferencial, las propiedades de la derivada, así como las diferentes fórmulas o reglas que se aplican para derivar una función algebraica o trascendente.

En el capítulo 5, se exponen algunas aplicaciones representativas de la derivada de una función, tales como, su aplicación para obtener la ecuación de una recta normal a una curva, describir el carácter creciente o decreciente de una función, la obtención de sus valores máximos o mínimos, la concavidad y los puntos de inflexión de una curva, el cálculo de aproximaciones usando el diferencial, la resolución de problemas de optimización y tasas relacionadas, terminando con la aplicación de la regla de L'Hôpital al cálculo límites de formas indeterminadas.

CONTENIDO

	Pág.
CAPÍTULO 1	
NÚMEROS REALES	1
1.1 Clasificación de los números reales	2
1.2 Recta numérica	5
1.3 Propiedades de los números reales	7
1.3.1 Tricotomía	9
1.3.2 Transitividad	10
1.3.3 Densidad	10
1.3.4 Axioma del supremo	12
1.4 Intervalos y su representación mediante desigualdades	12
1.5 Resolución de desigualdades de primer grado con una incógnita y de desigualdades cuadráticas con una incógnita	13
1.6 Valor absoluto y sus propiedades	21
1.7 Resolución de desigualdades que incluyan valor absoluto	23
	30
CAPÍTULO 2	
FUNCIONES	30
2.1 Definición de función	31
2.2 Concepto de variable, función dominio, codominio y recorrido de una función	32
2.3 Función inyectiva, suprayectiva y biyectiva.	35
2.4 Función real de variable real y su representación gráfica.	37
2.5 Clasificación de las funciones por su naturaleza; algebraicas y trascendentes.	40
2.5.1 Función polinomial.	41
2.5.2 Función racional.	43
2.5.3 Función raíz n -ésima.	48
2.5.4 Funciones trigonométricas.	49
2.5.5 Función exponencial.	57
2.5.6 Función logarítmica.	59
2.5.7 Función definida parte por parte.	62
2.5.8. Función inversa.	62
2.5.9 Función implícita.	66
2.5.10 Función valor absoluto.	67
2.5.11 Funciones trigonométricas inversas.	68
2.6 Función definida por más de una regla de correspondencia	72
2.7 Operaciones con funciones: adición, multiplicación, composición.	73
2.8 Función inversa. Función logarítmica.	75

2.9 Funciones con dominio en los números naturales y recorrido en los números reales: las sucesiones infinitas.	78
2.10 Función implícita.	82
2.11 Clasificación de las funciones por sus propiedades:	83
2.11.1 Función creciente y decreciente.	83
2.11.2 Función par e impar.	85
2.11.3 Función simétrica.	87
2.11.4 Función periódica.	89
2.12 Traslación de funciones.	91
	96

CAPÍTULO 3

LÍMITES Y CONTINUIDAD	96
3.1 Noción de límite.	97
3.2 Definición de límite de una función de variable real.	102
3.3 Cálculo de límites.	106
3.4 Propiedades de los límites.	108
3.5 Límites laterales.	109
3.6 Límites infinitos y límites al infinito.	112
3.7 Asíntotas (verticales, horizontales u oblicuas).	121
3.8 Límites especiales.	128
3.9 Definición de continuidad.	131
3.10 Propiedades de la continuidad.	135
3.10.1 Funciones continuas y discontinuas en un punto y en un intervalo.	139
3.11 Tipos de discontinuidades	143
	148

CAPÍTULO 4

DERIVADAS	148
4.1 Definición de la derivada	149
4.2 Conceptos de incremento y de razón de cambio. La derivada de una función	158
4.3 La interpretación geométrica de la derivada	161
4.4 Concepto de diferencial. Interpretación geométrica de las diferenciales.	162
4.5 Propiedades de la derivada	166
4.6 Derivada de las funciones exponenciales	173
4.7 Derivada de las funciones trigonométricas.	174
4.8 Regla de la cadena	177
4.9 Fórmulas de derivación y fórmulas de diferenciación.	179
4.10 Derivadas de orden superior y regla de L'Hôpital	181
4.11 Derivada de funciones implícitas	183

4.12	Derivada de la función inversa.	185
4.13	Derivada de las funciones logarítmicas	187
4.14	Derivada de las funciones trigonométricas inversas	190
4.15	Funciones hiperbólicas y sus derivadas	194
		204

CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LA DERIVADA 204

5.1	Recta tangente y recta normal a una curva en un punto. Curvas ortogonales	205
5.2	Teorema de Rolle, teorema de Lagrange o teorema del valor medio del cálculo diferencial	209
5.3	Función creciente y decreciente	220
5.4	Máximos y mínimos (criterio de la primera derivada).	222
5.5	Máximos y mínimos (criterio de la segunda derivada)	227
5.6	Concavidades y puntos de inflexión	230
5.7	Análisis de la variación de funciones	237
5.8	Cálculo de aproximaciones usando la diferenciales	237
5.9	Problemas de optimización y de tasas relacionadas.	239
5.10	Regla de L'Hôpital	245

ÍNDICE

BIBLIOGRAFÍA

CAPÍTULO 1

NÚMEROS REALES

COMPETENCIA ESPECÍFICA A DESARROLLAR

Comprender las propiedades de los números reales, para resolver desigualdades de primer y segundo grado con una incógnita y desigualdades con valor absoluto, representando las soluciones en la recta numérica real.

1.1 CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

Para el estudio de los temas relacionados con el cálculo diferencial, es necesario tener un conocimiento apropiado de los axiomas, propiedades o leyes de los números reales. Denotados por $\mathbb{R}$. Se inicia su estudio con una descripción de los diferentes subconjuntos de números que lo constituyen. Tomando como primer subconjunto a los números naturales, denotados por $\mathbb{N}$, ampliando éste a los números enteros, simbolizados por $\mathbb{Z}$, los que a su vez se extienden a los números racionales $\mathbb{Q}$, completando con los números irracionales $\mathbb{I}$, para finalmente obtener los números reales como la unión de los racionales con los irracionales.

a) Números naturales

Los números naturales son aquellos que se han utilizado para contar los objetos de las diversas colecciones de cosas, dándoles así una utilidad práctica

Se define por:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ o bien } \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es importante señalar que el primer elemento del conjunto es el número uno 1, el cual no tiene elemento anterior (antecesor) y a partir de éste número se obtienen los demás, cada elemento siguiente (sucesivo) se obtiene del que le precede adicionando el número uno.

Las siguientes son las propiedades de las operaciones que se realizan con los números naturales.

✓ Adición y multiplicación

Con los números naturales se realizan las operaciones de suma o adición (+) y multiplicación ($\cdot$) con las siguientes propiedades.

Propiedades de los números naturales

Sean a, b, c números naturales, entonces se tiene	
Para la adición	
1. $a + b \in \mathbb{N}$	Clasura de la suma.
2. $a + b = b + a$	Conmutatividad de la suma.
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$	Asociatividad de la suma.
Para la multiplicación	
4. $ab \in \mathbb{N}$	Clausura de la multiplicación.
5. $ab = ba$	Conmutatividad de la multiplicación.
6. $a(bc) = (ab)c$	Asociatividad de la multiplicación.
7. $a = a$	Neutro multiplicativo.
Suma y multiplicación	
8. $a(b + c) = ab + ac$	Distributividad.

Las propiedades 1 y 4 establecen que la suma y la multiplicación de números naturales, dan como resultado un número natural.

Las propiedades 2 y 5 indican que no importa el orden de los elementos que intervienen en las operaciones, su resultado no cambia.

Las propiedades 3 y 6 indican que se pueden realizar las operaciones asociando los elementos de manera diferente y el resultado no se altera.

La propiedad 7 muestra que la multiplicación de cualquier número natural por el número natural uno no lo altera.

Finalmente, la propiedad 8 establece que la multiplicación de un número natural por la suma de otros es igual a la suma de los correspondientes productos.

b) Números enteros

La necesidad de resolver ecuaciones tales como la siguiente $a + x = b$, en donde $a, b, x \in \mathbb{N}$, propició la aparición de los números...-3,-2,-1,0, ya que al resolverla se presentan las siguientes situaciones:

1. Si a menor b entonces el número $x = b - a$ es un número natural.
2. Si a mayor b entonces el número $x = b - a$ no es un número natural, a éste número se le llamó negativo o inverso aditivo.
3. Si a igual b entonces el número $x = 0$ que se obtiene de: $x = b - a = a - a = 0$, puesto que $b = a$, se denominó cero o neutro aditivo.

Estos resultados permitieron extender el conjunto de los números naturales a otro conjunto denominado **enteros** definidos por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{o bien} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -(n+1), -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\} \quad n \in \mathbb{N}$$

Con estos números se pueden describir situaciones de pérdida, temperaturas menores a cero o localizar altitudes de lugares situados debajo del nivel del mar, etc. La expresión: $b - a = b + (-a)$, define la operación **resta** o **diferencia** como la suma de un número con el inverso aditivo de otro.

Este nuevo conjunto de números, preserva las operaciones de adición y multiplicación con los números naturales, incluye el neutro aditivo y el inverso aditivo, de manera que se amplían las propiedades de las operaciones suma y multiplicación a las siguientes.

Propiedades de los números enteros

Sean a, b, c números naturales, entonces se tiene	
Para la adición	
1. $a + b \in \mathbb{N}$	Clausura de la suma.
2. $a + b = b + a$	Conmutatividad de la suma.
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$	Asociatividad de la suma.
4. Existe uno y solo un elemento denotado por 0 tal que para todo a se tiene $a + 0 = 0 + a = a$	
5. Para cada a existe uno y solo un elemento denotado por $-a$ tal que $a + (-a) = -a + a = 0$	
Para la multiplicación	
6. $ab \in \mathbb{N}$	Clausura de la multiplicación.
7. $ab = ba$	Conmutatividad de la multiplicación.
8. $a(bc) = (ab)c$	Asociatividad de la multiplicación.
9. $a = a$	Neutro multiplicativo.
Suma y multiplicación	
10. $a(b + c) = ab + ac$	Distributividad.

c) Números racionales

En el proceso de medir propiedades físicas, tales como longitud, superficies, masa, volumen, etc., el uso de números enteros resulta satisfactorio cuando la magnitud a medir es un múltiplo entero de la unidad de medición, si no es así, entonces a la unidad de medición se divide en n partes iguales ($n \in \mathbb{Z}^+$), se escribe $\frac{1}{n}$, ahora si la magnitud a medir, tiene m partes de

$\frac{1}{n}$, entonces la medida de tal magnitud será $m\left(\frac{1}{n}\right)$ unidades, a esta expresión se denomina

fracción o razón de dos enteros.

El conjunto de números de esta forma, incluidos los enteros se denomina, **números racionales**, se denota por $\mathbb{Q}$ y se definen como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$$

Es decir, el conjunto de números racionales es dado por la razón de dos números enteros exceptuando cero como denominador.

En este conjunto de números se tiene las siguientes definiciones:

✓ **Elemento neutro aditivo**

$$\frac{0}{a} = 0 \quad \text{tal que} \quad \frac{0}{a} + \frac{b}{c} = \frac{b}{c} \quad \text{con } a, c \text{ distinto de cero.}$$

✓ **Elemento neutro multiplicativo**

$$\frac{a}{a} = 1 \quad \text{tal que} \quad \left(\frac{a}{a}\right)\left(\frac{b}{c}\right) = \left(\frac{b}{c}\right) \quad \text{con } a, c \text{ distinto de cero.}$$

✓ **Inverso multiplicativo**

$$\frac{a}{b} \text{ por } \left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{tal que} \quad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = 1 \quad \text{con } a, b \text{ distinto de cero.}$$

✓ **División**

La siguiente expresión, define la división, como la multiplicación de un número por el inverso multiplicativo de otro.

$$\frac{a}{b} = a \left(\frac{1}{b} \right) = a \left(b^{-1} \right) \quad \text{con } b \text{ distinto de cero.}$$

Representación decimal de los números racionales

Al realizar la división de $\frac{p}{q}$, con $q \neq 0$, el cociente es su representación decimal expresada por:

1. $a.b_1b_2...b_n$ donde $a \in \mathbb{Z}$, y las b son los dígitos $(0,1,2,...,9)$ $n \in \mathbb{N}$, se denomina **expansión decimal finita**.

2. $a.b_1b_2...b_i \overline{c_1c_2...c_n c_2...c_n...}$ donde $a \in \mathbb{Z}$, y las b, c los dígitos $(0,1,2,...,9)$ $n \in \mathbb{N}$.

Se denomina **expansión decimal periódica infinita**.

El grupo de cifras sobre las que se traza la línea se llama periodo y son las que se repiten de forma indefinida indicándose con los tres puntos suspensivos.

Para obtener el racional cuya expansión decimal es finita se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= a.b_1b_2\dots b_n && \text{entonces} \\ x &= a.b_1b_2\dots b_n && \text{multiplicar por } 10^n \\ 10^n x &= ab_1b_2\dots b_n && \text{despejar } x, \text{ simplificar para obtener } \mathbb{Q} \\ x &= \frac{ab_1b_2\dots b_n}{10^n}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.1

Obtenga el número racional con expansión decimal infinita 2.123454545...

Solución

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= 2.123454545\dots && \text{entonces} \\ x &= 2.123454545\dots && \text{multiplicar por } 10^3 \\ 10^3 x &= 2123.454545\dots && \text{multiplicar por } 10^2 \\ 10^5 x &= 212345.\overline{45} && \text{a ésta expresión restar la anterior} \\ 10^5 x - 10^3 x &= 210222 && \text{despejar } x, \text{ simplificar para obtener } \mathbb{Q} \\ x &= \frac{10511}{495000}. \end{aligned}$$

Como se puede observar, el conjunto de números naturales está contenido en el conjunto de los números enteros, los que a su vez, están contenidos en el conjunto de números racionales, en notación de conjuntos se escribe $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

d) Numero irracionales

La medida de la longitud de la diagonal d de un cuadrado de lado uno, según el teorema de Pitágoras es:

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Este número no es posible representarlo como razón de dos números enteros, es decir, no es un número racional, su representación decimal es una expansión decimal infinita no periódica, algunos otros ejemplos de este tipo de números son:

$$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \pi, e, \text{ etc.}$$

El conjunto de este tipo de números se denomina se **números irracionales** y se define por:

$$I = \{a \mid a \text{ es una expansión decimal infinita no periódica}\} \text{ o } I = \{a \mid a \in \mathbb{R}, a \notin \mathbb{Q}\}.$$

El conjunto de números racionales y el conjunto números irracionales son conjuntos disjuntos, es decir no tienen elementos comunes. La unión estos dos conjuntos, forman el conjunto de **números reales**, en notación de conjuntos se escribe:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$$

1.2 LA RECTA NUMÉRICA

Un aspecto muy importante de los números reales es su representación geométrica. En una línea recta, que se denomina **recta numérica**, **recta real** o **recta de los números reales**, en

ella, se elige un punto arbitrario O, al que se le asigna el número cero y a la derecha un punto A, al que se le asigna el número uno, estableciendo así, un segmento de longitud unidad, figura 1.2.1 el cual se extiende sobre la recta, marcando los múltiplos de esta longitud en ambas direcciones del punto O. obteniendo, así puntos en la recta que corresponden a cada número entero.

Los puntos a la derecha del punto cero, se les asignan **números positivos y negativos a los de la izquierda.**

El número asignado a cada punto, se le llama, coordenada del punto, de esta manera se establece una correspondencia de puntos a números, y de números a puntos.

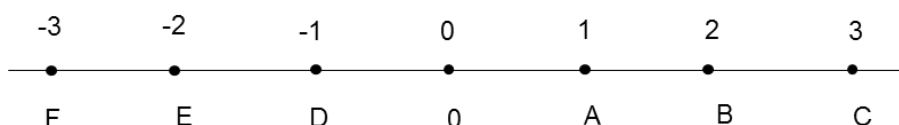


Figura 1.2.1 Representación geométrica de los Números Reales

Para representar fracciones con denominador n se divide el segmento unitario en n partes iguales, de modo que cada punto de la subdivisión representa la fracción.

La expansión decimal de un número irracionales se utiliza para localizarlo en la recta.

Ejemplo 1.2.1

Localizar en la recta numérica al número $a = 0.315... = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{5}{10} + ...$

Solución

Se divide el segmento unitario en 10 partes iguales, cada punto de la división corresponde a los números 0, .1, .2, .3, .4,..., .8, .9, 1, por lo que el número a está localizado entre .3 y .4.

Se divide el segmento de .3 a .4 en 10 partes iguales en la que a cada punto de la nueva subdivisión le corresponde los números .30, .31, .32, .33,..., .38, .39, .40

Ahora a está entre .31 y .32.

Nuevamente se divide el segmento de .31 a .32 en 10 partes iguales y cada punto de la división corresponde a los números .31, .311, .312, .313,..., .318, .319, .32 continuando con este proceso, se localiza en la recta numérica, el punto que corresponda al número irracional con la precisión que se requiera. En la figura 1.2.2 se muestran algunos de los puntos.

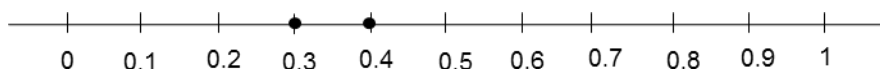


Figura 1.2.2 Representación geométrica del número $a = 0.315... = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{5}{10} + ...$

1.3 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

En el conjunto de los números reales, cada par de números a, b , se asocia con uno y solo un número real, denotado por $a + b$, en la operación suma y $a \cdot b$, para el número real que se obtiene en la operación multiplicación, y a los axiomas relativos se denominan: **axiomas de cuerpo**, se establece una relación de orden simbolizada por " $<$ ", se lee menor que, y a los axiomas que rigen estas relaciones: **axiomas de orden**; además, se cumple el **axioma del supremo**, a lo anterior se denomina **sistema de los números reales**.

Se enuncian los axiomas, y algunas propiedades derivadas de ellos, en donde a, b, c , representan números reales cualesquiera.

A) Axiomas de cuerpo

Axioma 1. Propiedad conmutativa.

a. La suma es un número real, y es independiente del orden de los sumandos

$$a + b = b + a.$$

b. El producto es un número real y es independiente del orden de los factores

$$ab = ba.$$

Axioma 2. Propiedad asociativa.

a. Los sumandos se pueden asociar de manera indistinta

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

b. Los factores se pueden asociar de distinta manera.

$$a(bc) = (ab)c.$$

Axioma 3. Propiedad distributiva

Multiplicación de una suma:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Axioma 4. Existencia de elementos neutros

a. Existencia de elemento neutro aditivo.-Existe uno y solo un elemento denotado por 0 tal que para todo a , se tiene:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

b. Existencia de elemento neutro multiplicativo.-Existe uno y solo un elemento denotado por 1 tal que para todo a , se tiene:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Axioma 5. Existencia de elementos inversos

a. Existencia del negativo o inverso aditivo.- Para cada a , existe uno y solo un elemento denotado por $-a$, tal que:

$$a + (-a) = -a + a = 0.$$

b. Existencia del inverso multiplicativo o reciproco.- Para cada a , distinto de cero, existe uno y solo un elemento denotado por a^{-1} , tal que:

$$a^{-1}a = aa^{-1} = a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

Una aplicación del axioma 5a, es la definición de resta o diferencia, así como la definición de la división.

Definición de resta 1.3.1

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a - b = a + (-b)$.

La operación resta, suma de un número real con el inverso aditivo de otro.

Definición de división 1.3.2

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$.

Multiplicación de un número real con el inverso multiplicativo de otro a excepción del número cero.

Las propiedades de las operaciones usuales en álgebra, se derivan de estos axiomas, se mencionan algunas básicas.

Teoremas relacionados con la igualdad en $\mathbb{R}$.

Sean a, b, c , números reales cualesquiera, se tiene:

Teorema I1. Si $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Teorema I2. Si $a + x = b$, x se designa por $b - a$.

Teorema I3. Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.

Teorema I4. Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.

Teorema I5. Si $ab = 0$, entonces o $a = 0$ o $b = 0$.

Teorema I6. Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

Teorema I7. $-(-a) = a$.

Teorema I8. $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$.

Teorema I9. $(\frac{b}{a}) + (\frac{c}{d}) = \frac{(ad+bc)}{bd}$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

Teorema I10. $(\frac{a}{b})(\frac{c}{d}) = \frac{(ac)}{bd}$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

Teorema I11. $\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})} = \frac{(ad)}{bc}$ si $b \neq 0, c \neq 0$ y $d \neq 0$.

B) Axiomas de orden

Se inicia por definir que es un número positivo, y a partir de éste concepto decidir cuando un número es mayor o menor que otro.

Se supone que el conjunto de los números reales contiene un subconjunto de números denominado, números positivos, denotado por $\mathbb{R}^+$, que cumplen con los axiomas siguientes:

Axioma 6. (De la clausura). Si a, b pertenecen a $\mathbb{R}^+$, también $a + b$ y $a \cdot b$.

Axioma 7. (De la tricotomía). Para todo número real x , una y solo una de las proposiciones siguientes se cumple **i.** $x \in \mathbb{R}^+$. **ii.** $(-x) \in \mathbb{R}^+$. **iii.** $x = 0$.

Axioma 8. $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Una vez que se conocen las proposiciones que cumplen los números positivos, se definen los símbolos $<, >, \leq, \geq$, denominados menor que, mayor que, menor o igual que, mayor o igual que.

✓ Relaciones de orden

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, las relaciones de orden $<, >, \leq, \geq$, se **definen** mediante:

1. $x < y$ si y sólo si $(y - x) \in \mathbb{R}^+$.
2. $x > y$ si y sólo si $y < x$ si y sólo si $(x - y) \in \mathbb{R}^+$
3. $x \leq y$ si y sólo si $(x < y)$ o $(x = y)$.
4. $x \geq y$ si y sólo si $(x > y)$ o $(x = y)$.

Las relaciones de orden se conocen como desigualdades estrictas si utilizan el símbolo $<$ o $>$, y no estrictas cuando se emplea $\leq$ o $\geq$.

Las propiedades o teoremas relacionados con las desigualdades, se derivan de los axiomas de orden dados, algunas de las más importantes son:

Teoremas de la desigualdad en $\mathbb{R}$

Sean a, b, c, d, x , números reales cualesquiera.

Teorema D1. $x > 0$ si y sólo si $x \in \mathbb{R}^+$.

Teorema D2. x es negativo, si y sólo si $x < 0$.

Teorema D3. (Tricotomía) Sean a, b números reales cualesquiera, una y sólo una de las proposiciones se cumple **i.** $a < b$. **ii.** $b < a$. **iii.** $a = b$.

Teorema D4. (Transitiva) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Teorema D5. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.

Teorema D6. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

Teorema D7. Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.

Teorema D8. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Teorema D9. Si $a < b$ entonces $-a > -b$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$.

Teorema D10. Si $ab > 0$ entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.

Teorema D11. Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$.

Se demuestra el teorema D4.

Demostración:

Por definición de relación de orden.

Si $a < b$, entonces $(b - a) \in \mathbb{R}^+$, y si $b < c$, entonces $(c - b) \in \mathbb{R}^+$.

Por axioma 6

$(b - a) + (c - b) = b - a + c - b = (-b + b) + (-a + c) = 0 + (c - a) \in \mathbb{R}^+$, por tanto $a < c$.

Fin de la prueba.

1.3.1 Tricotomía

Teorema D3. (Tricotomía) Sean a, b números reales cualesquiera, una y solo una de las proposiciones se cumple **i.** $a < b$. **ii.** $b < a$. **iii.** $a = b$.

Demostración:

Se desea demostrar que un número real cualesquiera, cumple una y solo una de las proposiciones del teorema.

Sea $x = b - a$, un número real, entonces del axioma 7, x cumple una y solo una de las siguientes proposiciones: **i.** $x \in \mathbb{R}^+$. **ii.** $(-x) \in \mathbb{R}^+$. **iii.** $x = 0$. Si cumple **i**, entonces $a < b$, si cumple **ii**, entonces $a > b$, y si cumple **iii**, $a = b$. Fin de la prueba.

La relación de orden se puede visualizar geométricamente en la recta real.

Sean A y B dos puntos cualesquiera de la recta real con B a la derecha de A. Figura 1.3.1.1, entonces al punto A le corresponde el número real a y b al punto B.

La relación $a < b$, indica geométricamente que el número real a está a la izquierda del número b . Análogamente $a > b$, indica que el punto A, está a la derecha del punto B, finalmente si $a = b$, entonces A y B localizan al mismo punto

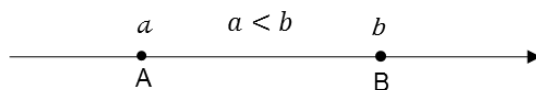


Figura 1.3.1.1 Representación geométrica de $a < b$

1.3.2 Transitividad

Teorema D4. (Transitiva). Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Por lo visto en el punto anterior, si $a < b$ significa que el punto A en la recta real, figura 1.3.2.1, está a la izquierda del punto B, y como el punto B a su vez está a la izquierda del punto C, entonces $b < c$, se puede concluir que si $a < b$ y $b < c$ entonces geométricamente se visualiza que $a < c$, es decir el punto A está a la izquierda del punto C.



Figura 1.3.2.1 Representación geométrica de $a < b$ entonces $a < c$

1.3.3 Densidad

Se dice que el conjunto de números reales es un conjunto denso, ya que, entre cada dos números reales cualesquiera siempre existe un número real, el siguiente teorema puntualiza este hecho.

Teorema 1.3.3.1

Los racionales son densos en los números reales. Es decir, dados dos números reales a, b cualesquiera con $a < b$, existe un racional c , tal que $a < c < b$.

1.3.4 Axioma del supremo (de completitud)

Antes de enunciar el axioma del supremo es necesario introducir algunos conceptos relacionados con el tema.

Cota superior de un conjunto**Definición 1.3.1**

Sea S un conjunto no vacío de números reales. Si existe un número real b , tal que para todo $x \in S$, se tiene $x \leq b$, se dice que, b es una **cota superior** de S , y que el conjunto S está **acotado superiormente** por b .

Si b es elemento de S , se denomina **máximo de S** se escribe $b = \max S$.

Si el conjunto S no tiene cota superior, se dice **no acotado superiormente**.

Cota inferior de un conjunto**Definición 1.3.2**

Sea S un conjunto no vacío de números reales. Si existe un número real a , tal que para todo $x \in S$, se tiene $a \leq x$, se dice que, a es una **cota inferior** de S , y que el conjunto S está **acotado inferiormente** por a .

Si a es elemento de S , se denomina **mínimo de S** se escribe $a = \min S$.

Si el conjunto S no tiene cota inferior se dice **no acotado inferiormente**.

Ejemplo 1.3.2

El intervalo $(1,6)$, está acotado superiormente, 6 es una cota superior, el conjunto de cotas superiores es el intervalo $[6, \infty)$. Está acotado inferiormente, 1 es una cota inferior, el conjunto de cotas inferiores es $(-\infty, 1]$. El intervalo dado no tiene máximo no tiene mínimo.

Conjunto acotado**Definición 1.3.3**

Un conjunto S de números reales, se dice **acotado** si y sólo si está acotado superiormente e inferiormente.

Supremo de un conjunto**Definición 1.3.4**

Sea S un conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente por b y no existe cota superior de S menor que b entonces b se denomina **supremo** de S se escribe $b = \sup S$.

Ínfimo de un conjunto**Definición 1.3.5**

Sea S un conjunto de números reales, acotado inferiormente por a y no existe cota inferior de S menor que a entonces a se denomina **ínfimo** de S se escribe $a = \inf S$.

De las definiciones anteriores, el supremo es la menor de las cota superiores y el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores. Es importante indicar que, determinar el supremo o el ínfimo de un conjunto no es tarea fácil.

Ejemplo 1.3.3

Para el conjunto $C = \{x \mid x^2 < 2, x \in \mathbb{Q}^+\}$ se tiene:

1. Dos es cota superior.
2. Cero es cota inferior.

3. Dos es cota superior pero no es elemento de C por lo que no es máximo.
4. Cero es cota inferior pero no está contenido en C por lo que no es mínimo.
5. Cero es el ínfimo ya que es la mayor cota inferior.
6. Dos no es supremo de C ya que ningún número racional al cuadrado es igual a 2.

Ejemplo 1.3.4

Sea $A = \{x \mid 0 \leq x < 1, x \in \mathbb{R}\}$ determinar si tiene cota superior, cota inferior, máximo, mínimo, supremo, ínfimo.

Solución

1. Uno es la cota superior.
2. Cero es cota inferior.
3. Uno es cota superior pero no es elemento de A , por lo que no es máximo.
4. Cero es cota inferior, está contenido en A , por lo tanto es mínimo.
5. Uno es el supremo, ya que es el menor de todas las cotas mayores de A .
6. Cero es el ínfimo, ya que es la mayor de las cotas menores de A .
7. El conjunto A , es un conjunto acotado.

Para terminar con los axiomas que satisfacen los números reales, se enuncia el axioma del supremo, denominado también, axioma de completitud o de completitud.

El axioma del supremo permite afirmar la existencia de los números irracionales, con lo cual el conjunto de los números reales es un conjunto denso.

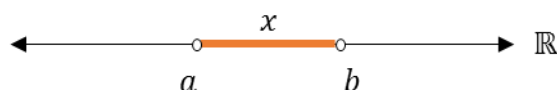
C) Axioma del supremo

Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo.

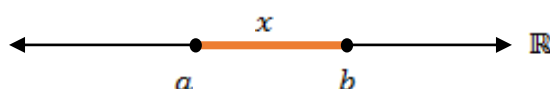
1.4 INTERVALOS Y SU INTERPRETACIÓN MEDIANTE DESIGUALDADES

De la relación de orden de los números reales, el subconjunto de números reales que satisfacen una determinada desigualdad se denomina intervalo y dependiendo de la relación de orden existen diferentes tipos:

1. Intervalo abierto (a, b) .- es el conjunto de números x que son mayores que el número real a , y menores que el número real b , y satisfacen la relación $a < x < b$ o bien $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$. Geométricamente:



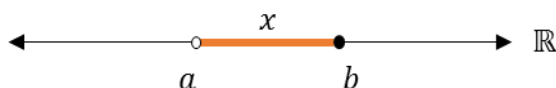
2. Intervalo cerrado $[a, b]$.- Conjunto de números reales x , que son mayor o igual que el número real a , y menor o igual que el número real b , satisfacen la relación $a \leq x \leq b$ o $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ geométricamente



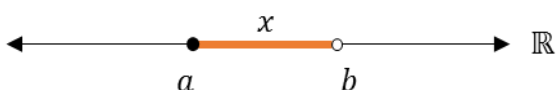
Con la combinación de estas desigualdades se obtienen los siguientes intervalos:

3. Intervalos semiabiertos

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$



$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$$



4. Intervalos infinitos

$$(a, \infty) = \{x | a < x\}$$



$$[a, \infty) = \{x | a \leq x\}$$



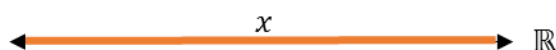
$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$$



$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$$



$$(-\infty, \infty) = \{x | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$



1.5 RESOLUCIONES DE DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA Y DESIGUALDADES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA.

Resolver una desigualdad con incógnita x es encontrar todos los valores, tales que hagan verdadera la proposición dada, utilizando los axiomas de los números reales.

La solución de una desigualdad, generalmente es expresada, en notación de intervalo o unión de ellos, cuando las desigualdades son estrictas, los extremos del intervalo no son parte de la, solución y son parte de ella, si las desigualdades son no estrictas.

Desigualdades de primer grado con una incógnita

Son aquellas de la forma $ax + b \geq 0$, $a \neq 0$ y en su solución se aplican los axiomas y propiedades de la sección 1.3 relativo a los números reales.

Ejemplo 1.5.1

Resolver la desigualdad $ax + b \geq 0$, $a \neq 0$ e indicar los axiomas utilizados.

Solución

Se tiene $ax + b \geq 0$, $a \neq 0$ aplicar A5a

$ax + b + (-b) \geq 0 + (-b)$ sumar $(-b)$ en ambos lados, simplificar

$ax + 0 \geq -b$ multiplicar por a^{-1} (A5b)

$a^{-1}ax \geq a^{-1}(-b)$ $a^{-1}a = 1$ (A4b)

$x \geq -ba^{-1}$ aplicar A5b

$x \geq -\frac{b}{a}$ si $a > 0$, El conjunto solución es $x \in \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$

y si $a < 0$ entonces $x \leq -\frac{b}{a}$ y por lo tanto el conjunto solución es $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$.

Interpretación geométrica

Si en la desigualdad $ax + b \geq 0$, $a > 0$ se toma $y_1 = ax + b$, y $y_2 = 0$, entonces $y_1 \geq y_2$, significa geométicamente que en $x = -\frac{b}{a}$; $y_1 = y_2$, es decir, en este valor de x , las rectas se intersecan.

Para todo valor de x , en el intervalo $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$, se cumple que $y_1 > y_2$ es decir, la recta dada por y_1 está arriba de la recta y_2 ver figura 1.5.1

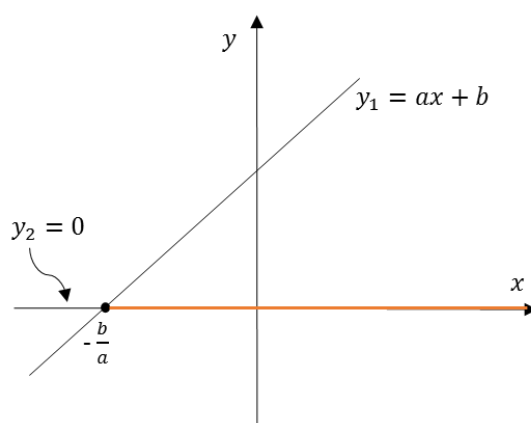


Figura 1.5.1 Visualización de la solución a $ax + b \geq 0$, $a \neq 0$.

Ejemplo 1.5.2.

Resolver la desigualdad $\frac{1}{2}x + 3 \geq 0$.

Solución

Se tiene $\frac{1}{2}x + 3 \geq 0$ sumar (-3) , A5a.

$\frac{1}{2}x + 3 + (-3) \geq 0 + (-3)$ simplificar

$\frac{1}{2}x \geq -3$ aplicar A5b

$2\left(\frac{1}{2}\right)x \geq 2(-3)$ aplicar A1b y A4

$x \geq -6$.

En notación de intervalo $x \in [-6, \infty)$.

Geométricamente

De la desigualdad $\frac{1}{2}x + 3 \geq 0$, si, $y_1 = \frac{1}{2}x + 3$ y $y_2 = 0$, en $x = 6$, las rectas se intersecan. Para todo valor de x , en el intervalo $(6, \infty)$ se cumple que $y_1 > y_2$, es decir, la recta dada por $y_1 = \frac{1}{2}x + 3$, está arriba de la recta $y_2 = 0$, que corresponde al eje x , ver figura 1.5.2.

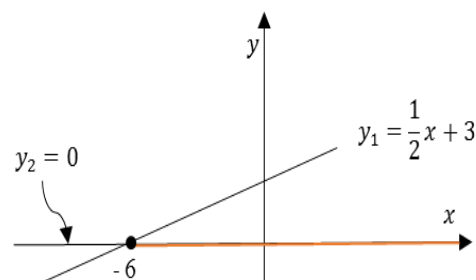


Figura 1.5.2 Visualización de la solución a la desigualdad $\frac{1}{2}x + 3 \geq 0$.

Ejemplo 1.5.3

Resolver la desigualdad $-\frac{3}{4}x + 2 \geq 0$.

Solución

Se tiene $-\frac{3}{4}x + 2 \geq 0$ sumar (-2) , aplicar A5a.

$$-\frac{3}{4}x + 2 + (-2) \geq 0 + (-2) \quad \text{simplificar}$$

$$-\frac{3}{4}x \geq -2 \quad \text{aplicar A5b, A4b}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)x \leq (-2)\left(-\frac{4}{3}\right) \quad \text{simplificar}$$

$$x \leq \frac{8}{3}.$$

En notación de intervalo $x \in \left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$ es el conjunto solución. El resultado, geoméricamente se muestra en la figura 1.5.3.

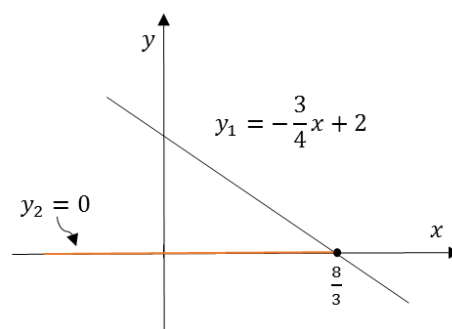


Figura 1.5.3 Visualización de la solución a la desigualdad $-\frac{3}{4}x + 2 \geq 0$

Ejemplo 1.5.4

Resolver la desigualdad $3 - 2x > 4x + \frac{1}{2}$.

Solución

Se tiene $3 - 2x > 4x + \frac{1}{2}$, sumar $\left(-\frac{1}{2}\right)$ aplicar A5a, y TD5

$$3 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2x + 2x > 4x + 2x + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{simplificar}$$

$$\frac{5}{2}x > 6x \quad \text{aplicar A5b}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)\frac{5}{2}x > \left(\frac{1}{6}\right)6x \quad \text{simplificar}$$

$$\frac{5}{12} > x \quad \text{o bien } x < \frac{5}{12}.$$

En notación de intervalo $x \in \left(-\infty, \frac{5}{12}\right)$.

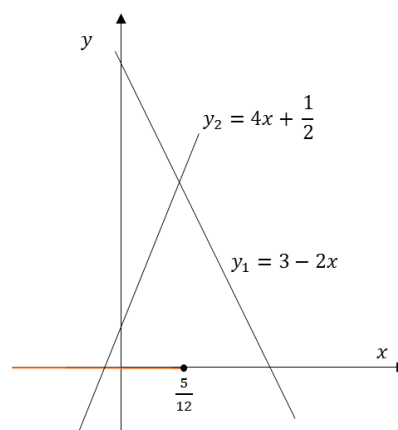


Figura 1.5.4 Visualización de la solución a la desigualdad $3 - 2x > 4x + \frac{1}{2}$.

Geométricamente

De la desigualdad $3 - 2x > 4x + \frac{1}{2}$,

Si $y_1 = 3 - 2x$ y $y_2 = 4x + \frac{1}{2}$, entonces $y_1 > y_2$, significa,

geométricamente, que para todos los valores de x , en el intervalo $\left(-\infty, \frac{5}{12}\right)$, la recta dada por

$y_1 = 3 - 2x$, está arriba de la recta $y_2 = 4x + \frac{1}{2}$, ver figura 1.5.4.

Ejemplo 1.5.5

Resolver la desigualdad $3x - 1 \leq x - 2 < \frac{1}{2}x + 2$.

Solución

La desigualdad se cumple si y sólo si $3x - 1 \leq x - 2$, y $x - 2 < \frac{1}{2}x + 2$.

Al resolver la primera parte:

$$3x - 1 \leq x - 2 \quad \text{sumar } (-x), \text{ aplicar A5a, TD5}$$

$$3x + (-x) - 1 + 1 \leq x + (-x) - 2 + 1 \quad \text{simplificar}$$

$$2x \leq -1 \quad \text{aplicar A5b}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)2x \leq -1\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{simplificar}$$

$$x \leq -\frac{1}{2}.$$

La solución en forma de intervalo es $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

Al resolver la segunda parte:

$$\begin{aligned}
 x - 2 &< \frac{1}{2}x + 2 && \text{sumar } \left(-\frac{1}{2}x\right), \text{ aplicar A5a, TD5} \\
 x + \left(-\frac{1}{2}x\right) - 2 + 2 &< \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{2}x\right) + 2 + 2 && \text{simplificar} \\
 \left(\frac{1}{2}\right)x &< 4 && \text{aplicar A5b} \\
 2\left(\frac{1}{2}\right)x &< (2)4 && \text{simplificar} \\
 x &< 8.
 \end{aligned}$$

La solución en forma de intervalo es $x \in (-\infty, 8)$.

Como los valores de x , deben cumplir la primera desigualdad y la segunda, entonces el conjunto solución debe ser la intersección de los conjuntos solución esto es

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cap (-\infty, 8) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \text{ o bien } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right].$$

Geométricamente

De la desigualdad $3x - 1 \leq x - 2 < \frac{1}{2}x + 2$,

Si $y_1 = 3x - 1$, $y_2 = x - 2$, y $y_3 = \frac{1}{2}x + 2$, entonces

$y_1 \leq y_2 < y_3$ significa, geométricamente que, para todos

los valores de x , en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, la recta y_2 está

arriba de la recta y_1 , y abajo de la recta y_3 , en $x = -\frac{1}{2}$, la

recta y_1 se interseca con la recta y_2 , ver figura 1.5.5.

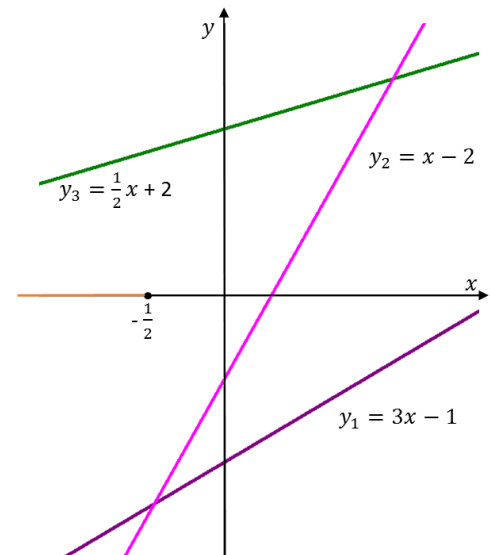


Figura 1.5.5 Visualización de la solución a la desigualdad $3x - 1 \leq x - 2 < \frac{1}{2}x + 2$.

✓ Desigualdades cuadráticas con una incógnita.

(Desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$).

Este tipo de desigualdades es conveniente expresarla como producto y entonces resolverla.

Ejemplo 1.5.6

Resolver la desigualdad $2x^2 + x - 6 > 0$, y expresar la solución en forma de intervalo.

Solución

La desigualdad $2x^2 + x - 6 > 0$, es equivalente a $(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right) > 0$, en esta última, se tienen dos factores cuyo producto debe ser un número positivo, que se obtiene, si los factores tienen igual signo, se presentan dos casos:

Caso A: $x - \frac{3}{2} > 0$, y $(x+2) > 0$, o bien **Caso B:** $x - \frac{3}{2} < 0$, y $(x+2) < 0$.

Para el caso A

$$x - \frac{3}{2} > 0 \quad y \quad x + 2 > 0 \quad \text{aplicar A5a, TD5}$$

$$x > \frac{3}{2} \quad y \quad x > -2$$

$$\left(\frac{3}{2}, \infty\right) \quad y \quad (-2, \infty) \quad \text{conjunto solución respectivamente}$$

$$x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \cap (-2, \infty) = \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \text{ conjunto solución para el caso A.}$$

Para el caso B

$$x - \frac{3}{2} < 0 \quad y \quad x + 2 < 0 \quad \text{aplicar A5a, TD5}$$

$$x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} < \frac{3}{2} \quad y \quad x + 2 - 2 < -2 \quad \text{simplificar}$$

$$x < \frac{3}{2} \quad y \quad x < -2$$

$$\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \quad y \quad (-\infty, -2) \quad \text{conjunto solución respectivamente}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -2) \text{ conjunto solución para el caso B.}$$

La solución de la desigualdad es la unión de la solución de los dos casos: $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Interpretación geométrica

De la desigualdad $2x^2 + x - 6 > 0$, si $y_1 = 2x^2 + x - 6$, $y_2 = 0$ entonces $y_1 > y_2$ significa geométricamente que, para todos los valores de x , en el conjunto $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, la gráfica de y_1 , que corresponde a una parábola está arriba de la recta $y_2 = 0$, que corresponde al eje x , ver figura 1.5.6

Ejemplo 1.5.7

Resolver la desigualdad $2x^2 + x - 6 > 0$, y expresar la solución en forma de intervalo.

Solución

Del ejemplo anterior, observamos que sólo cambia el sentido de la desigualdad, de manera que ahora se buscan los valores de x , tales que sustituidos en la desigualdad se obtenga un

número negativo, ya que los valores de $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, sustituidos en la desigualdad dan números positivos, entonces los números del intervalo $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, serán números negativos, por lo tanto, son la solución a la desigualdad. Geométricamente corresponde a la parte de la gráfica de la parábola situada abajo del eje x . Ver figura 1.5.6.

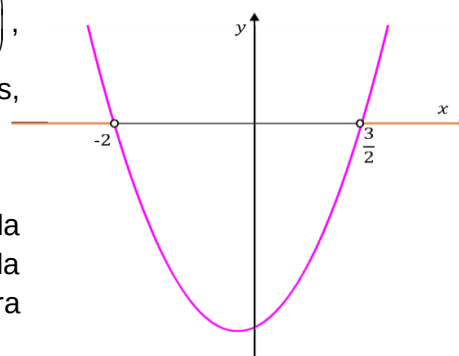


Figura 1.5.6 Visualización de la solución a la desigualdad $2x^2 + x - 6 > 0$.

1

Ejemplo 1.5.8

Resolver la desigualdad $2x^2 - 9x + 7 > -x^2 + x + 6$, y expresar la solución en forma de intervalo.

Solución

Para resolver la desigualdad, se simplifica la expresión algebraica, para transformarla a la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$, y resolverla como en los casos anteriores.

Se tiene:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 9x + 7 &> -x^2 + x + 6 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + x^2 - 9x + 7 - 6 &> 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow (3x - 5 + \sqrt{22})(3x - 5 - \sqrt{22}) &> 0. \end{aligned}$$

La desigualdad es verdadera cuando se cumple que:

Caso A $(3x - 5 + \sqrt{22}) > 0$ y $(3x - 5 - \sqrt{22}) > 0$ o bien

Caso B $(3x - 5 + \sqrt{22}) < 0$ y $(3x - 5 - \sqrt{22}) < 0$

Resolver caso A

$$\begin{aligned} (3x - 5 + \sqrt{22}) &> 0 \quad \text{y} \quad (3x - 5 - \sqrt{22}) > 0 \\ 3x &> 5 - \sqrt{22} \quad \text{y} \quad 3x > 5 + \sqrt{22} \\ x &> \frac{5 - \sqrt{22}}{3} \quad \text{y} \quad x > \frac{5 + \sqrt{22}}{3} \\ \left(\frac{5 - \sqrt{22}}{3}, \infty\right) &\quad \text{y} \quad \left(\frac{5 + \sqrt{22}}{3}, \infty\right) \quad \text{conjunto solución correspondiente} \\ x \in \left(\frac{5 - \sqrt{22}}{3}, \infty\right) \cap \left(\frac{5 + \sqrt{22}}{3}, \infty\right) &= \left(\frac{5 + \sqrt{22}}{3}, \infty\right) \quad \text{conjunto solución para el caso A.} \end{aligned}$$

Resolver caso B

$$\begin{aligned}
(3x - 5 + \sqrt{22}) < 0 & \quad y \quad (3x - 5 - \sqrt{22}) < 0 \\
3x < 5 - \sqrt{22} & \quad y \quad 3x < 5 + \sqrt{22} \\
x < \frac{5 - \sqrt{22}}{3} & \quad y \quad x < \frac{5 + \sqrt{22}}{3} \\
\left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{22}}{3}\right) & \quad y \quad \left(-\infty, \frac{5 + \sqrt{22}}{3}\right) \quad \text{conjunto solución para cada desigualdad} \\
x \in \left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{22}}{3}\right) \cap \left(-\infty, \frac{5 + \sqrt{22}}{3}\right) &= \left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{22}}{3}\right) \quad \text{conjunto solución para el caso B.}
\end{aligned}$$

La solución de la desigualdad es la unión de la solución de los dos casos:

$$x \in \left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{22}}{3}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{22}}{3}, \infty\right).$$

Estrategia para resolver desigualdades de la forma $\frac{ax + b}{cx + d} > m$.

1. Considerar que el denominador debe ser diferente de cero.
2. Realizar y simplificar la operación $\frac{ax + b}{cx + d} - m > 0$, para obtener $\frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1} > 0$.
3. Como la división de dos números debe ser un número positivo, entonces el numerador y denominador deben tener el mismo signo, dando lugar a dos posibles casos:

$$\textbf{Caso A } a_1x + b_1 > 0 \quad y \quad c_1x + d_1 > 0.$$

$$\textbf{Caso B } a_1x + b_1 < 0 \quad y \quad c_1x + d_1 < 0.$$

Ejemplo 1.5.9

Resolver la siguiente desigualdad $\frac{3x - 2}{4x - 5} > 6$.

Solución

1. El denominador debe ser diferente de cero, $4x - 5 \neq 0$, si $x \neq \frac{5}{4}$.
2. Realizar operaciones y simplificar

$$\begin{aligned}
\frac{3x - 2}{4x - 5} &> 6 && \text{sumar } (-6) \\
\frac{3x - 2}{4x - 5} + (-6) &> 6 + (-6) && \text{simplificar} \\
\frac{3x - 2}{4x - 5} - 6 &> 0 && \text{realizar operación} \\
\frac{3x - 2 - 24x + 30}{4x - 5} &> 0 && \text{simplificar terminos semejantes} \\
\frac{28 - 21x}{4x - 5} &> 0 \\
\frac{4 - 3x}{4x - 5} &> 0.
\end{aligned}$$

3. Resolver por casos

Caso A.

$$4 - 3x > 0 \quad y \quad 4x - 5 > 0$$

sumar $3x$ en la primera desigualdad y sumar 5 en la segunda

$$4 - 3x + 3x > 0 + 3x \quad y \quad 4x - 5 + 5 > 0 + 5 \quad \text{simplificar y multiplicar por } \left(\frac{1}{3}\right) \text{ la primera desigualdad y por } \left(\frac{1}{4}\right) \text{ la segunda}$$

$$\frac{4}{3} > x \quad y \quad x > \frac{5}{4}$$

$$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \quad y \quad \left(\frac{5}{4}, \infty\right) \quad \text{solución para cada desigualdad}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cap \left(\frac{5}{4}, \infty\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{solución para el caso A.}$$

Caso B.

$$4 - 3x < 0 \quad y \quad 4x - 5 < 0$$

$$4 < 3x \quad y \quad 4x < 5$$

$$\frac{4}{3} < x \quad y \quad x < \frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{4}{3}, \infty\right) \quad y \quad \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \quad \text{solución para cada desigualdad}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \cap \left(\frac{4}{3}, \infty\right) = \emptyset \quad \text{no hay solución para el caso B.}$$

4. Solución para la desigualdad propuesta.

$$\text{Solución del caso A unión con la del caso B: } \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \cup \emptyset = \left(-\infty, \frac{5}{4}\right).$$

1. 6 VALOR ABSOLUTO Y SUS PROPIEDADES

La siguiente es la definición del valor absoluto de un número real x .

Definición de valor absoluto 1.6.1

Sea x , un número real. Entonces su valor absoluto, denotado por $|x|$ es definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Geométricamente, representa en la recta real, la distancia que hay del origen al punto x . Ver figura 1.6.1

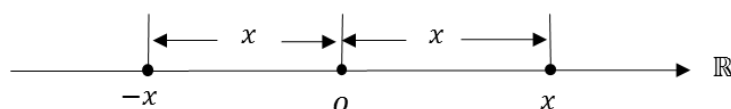


Figura 1.6.1 Representación geométrica de $|x|$.

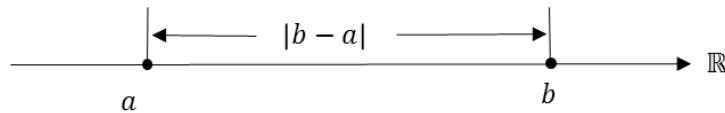


Figura 1.6.2 Representación geométrica de la distancia entre dos números.

Ejemplo 1.6.1

Utilice la definición de valor absoluto para determinar el valor absoluto de 5 y de -5

Solución

Puesto que $x = 5$, entonces $x > 0$, se aplica la primera parte de la definición, es decir $|x| = x = 5$.
Si $x = -5$, entonces $x < 0$, se aplica la segunda parte de la definición, es decir $|x| = -x = -(-5) = 5$.

Ejemplo 1.6.2

Resuelva la siguiente igualdad $|x + 1| = 2$.

Solución

De la definición de valor absoluto, se tiene que:

$$|x + 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \\ x + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 \\ x = -2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Por lo tanto la solución es $x = 1$, y $x = -3$.

Ejemplo 1.6.3

Resuelva la siguiente igualdad $|x^2 - 2| = 1$.

Solución

De la definición de valor absoluto, se tiene que:

$$|x^2 - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 1 \\ x^2 - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 + 2 \\ x^2 = -1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x^2 = -3 \end{cases}.$$

Despejar x de la primera parte, la solución es $x = \pm\sqrt{3}$. Para la segunda parte no existe solución.

Propiedades del valor absolutoSean a, x, y números reales cualesquiera entonces

T.1.6.1 $|x| \geq 0$.

T.1.6.2 $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

T.1.6.3 $|x| = |-x|$.

T.1.6.4 $|xy| = |x||y|$.

T.1.6.5 $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $|y| \neq 0$.

T.1.6.6 $|x - y| = 0$ si y sólo si $x = y$.

Propiedades de las desigualdades con valor absoluto

T.1.6.7 $-|x| \leq x \leq |x|$.

T.1.6.8 $|x + y| \leq |x| + |y|$ Desigualdad del triángulo.

T.1.6.9 Si $a \geq 0$, entonces $|x| = a$ si y sólo si $\begin{cases} x = a, & \text{si } x \geq 0 \\ x = -a, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

T.1.6.10 $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$.

T.1.6.11 $|x| \geq a$ si y sólo si $x \leq -a$ o $x \geq a$.

Propiedad T1.6.8**Demostración**Para dos números reales x, y cualesquiera, por T.1.6.7 se tiene:

Para x : $-|x| \leq x \leq |x|$

y para y : $-|y| \leq y \leq |y|$

al sumar las dos expresiones

$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$ y por T.1.6.7

$|x + y| \leq |x| + |y|$ se obtiene el resultado.

1.7 RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES QUE INCLUYEN VALOR ABSOLUTO.

Las propiedades del valor absoluto se aplican en la resolución de las desigualdades con valor absoluto.

Ejemplo 1.7.1Resolver la desigualdad $|x + 2| < 3$, y escribir la solución en forma de intervalo.**Solución.**Se tiene $|x + 2| < 3$ aplicar teorema **T.1.6.10**

$|x + 2| < 3$ si y sólo si $-3 < x + 2 < 3$

aplicar(-2) aplicar AA5, AO3 y simplificar

si y sólo si $-3 + (-2) < x + 2 + (-2) < 3 + (-2)$ simplificar

si y sólo si $-5 < x < 1$.

La solución en forma de intervalo $x \in (-5, 1)$.

Interpretación geométrica

a. Significa que la distancia del punto con coordenada -2 al punto con coordenada x , debe ser menor que 3 unidades, ver figura 1.7.1.

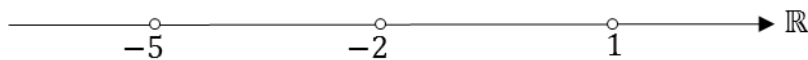


Figura 1.7.1 Representación geométrica de $|x + 2| < 3$.

b. De la desigualdad $|x + 2| < 3$, si $y_1 = |x + 2|$ y $y_2 = 3$, entonces $y_1 < y_2$, como el valor de y_1 es positivo, o igual a cero, entonces la grafica de y_1 , interseca al eje x , o está arriba de él, sin embargo debe estar abajo de la grafica de la recta $y_2 = 3$. Ver figura 1.7.2

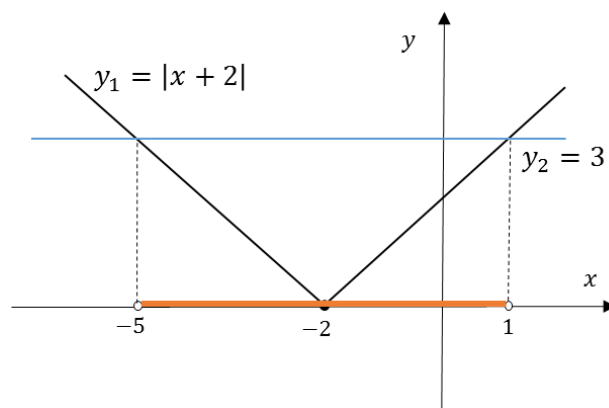


Figura 1.7.2 Interpretación geométrica de la desigualdad $|x + 2| < 3$.

Ejemplo 1.7.2

Determine los valores de x , que satisfacen la siguiente desigualdad $|3x - 4| \geq 2$, escribir la solución en forma de intervalo.

Solución.

Se tiene $|3x - 4| \geq 2$, aplicar **T.1.6.11**

$$\begin{aligned}
 3x - 4 &\leq -2 & \text{o} & & 3x - 4 &\geq 2 & \text{aplicar A5a, TD5, resolver las dos desigualdades y simplificar} \\
 3x - 4 + 4 &\leq -2 + 4 & \text{o} & & 3x - 4 + 4 &\geq 2 + 4 & \text{simplificar} \\
 3x &\leq 2 & \text{o} & & 3x &\geq 6 & \text{multiplicar por } \left(\frac{1}{3}\right) \\
 \left(\frac{1}{3}\right)3x &\leq 2\left(\frac{1}{3}\right) & \text{o} & & \left(\frac{1}{3}\right)3x &\geq 6\left(\frac{1}{3}\right) & \text{simplificar} \\
 x &\leq \left(\frac{2}{3}\right) & \text{o} & & x &\geq (2) & \text{en notación de intervalo} \\
 x &\in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] & \text{o} & & x &\in [2, \infty) & \text{solución parcial.}
 \end{aligned}$$

La solución de la desigualdad en notación de intervalo es $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [2, \infty)$.

Interpretación geométrica

a. Significa que la distancia del punto de coordenada $\frac{4}{3}$, al punto de coordenada x , debe ser mayor o igual que $\frac{2}{3}$ de la unidad. Ver figura 1.7.3.

Análiticamente

$$|3x - 4| \geq 2 \Leftrightarrow \left| 3 \left(x - \frac{4}{3} \right) \right| \geq 2 \Leftrightarrow 3 \left| x - \frac{4}{3} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \left| x - \frac{4}{3} \right| \geq \frac{2}{3}.$$

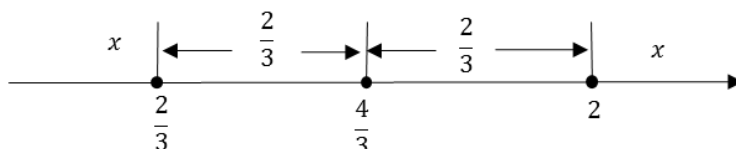


Figura 1.7.3 Interpretación geométrica de la desigualdad $|3x - 4| \geq 2$.

b. De la desigualdad $|3x - 4| \geq 2$, si $y_1 = |3x - 4|$ y $y_2 = 2$, entonces $y_1 > y_2$, como el valor de y_1 , es positivo, su grafica interseca o está arriba del eje x , además como es mayor o igual que $y_2 = 2$, la interseca o está arriba de su grafica. Ver figura 1.7.4

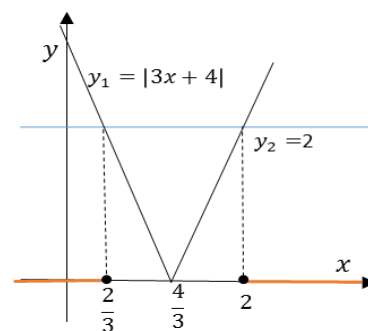


Figura 1.7.4 Interpretación geométrica de la desigualdad $|3x - 4| \geq 2$.

Ejemplo 1.7.3

Resolver la siguiente desigualdad $\left| x + \frac{1}{2} \right| \geq x + \frac{3}{2}$. Escribir la solución en forma de intervalo.

Solución

Se tiene $\left| x + \frac{1}{2} \right| \geq x + \frac{3}{2}$ aplicar teorema **T1.6.11**

$$x + \frac{1}{2} < -\left(x + \frac{3}{2}\right) \quad \text{o} \quad x + \frac{1}{2} > x + \frac{3}{2} \quad \text{aplicar AA5, AO3 a las dos desigualdades y simplificar}$$

$$x + \frac{1}{2} < -x - \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x + \frac{1}{2} > x + \frac{3}{2} \quad \text{sumar } xy\left(-\frac{1}{2}\right), \text{ a la primera desigualdad, a la segunda sumar } (-x)y\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$x + x + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + x < -x + x - \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{o} \quad x + (-x) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) > x + (-x) + \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{simplificar}$$

$$2x < -2 \quad \text{o} \quad 0 > 1 \quad \text{multiplicar por } \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x < -1 \quad \text{o} \quad \text{no hay solución para la segunda parte de la desigualdad.}$$

Así, la solución en forma de intervalo es $x \in (-\infty, -1)$.

Interpretación geométrica

De la desigualdad $\left|x + \frac{1}{2}\right| \geq x + \frac{3}{2}$, si $y_1 = \left|x + \frac{1}{2}\right|$,

y $y_2 = x + \frac{3}{2}$, entonces $y_1 > y_2$, significa que

para cualquier x , en el intervalo $(-\infty, 1)$ la recta y_1 , está arriba de la recta y_2 . Ver figura 1.7.5

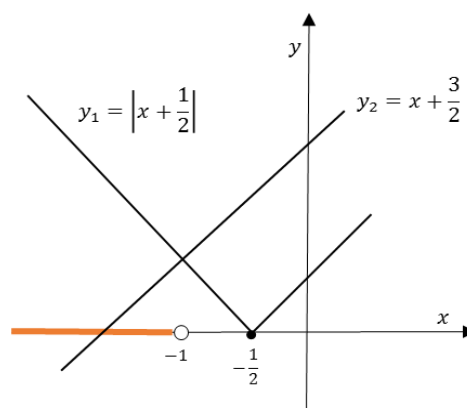


Figura 1.7.5 Interpretación geométrica de la desigualdad $\left|x + \frac{1}{2}\right| \geq x + \frac{3}{2}$.

Ejemplo 1.7.4

Resolver la desigualdad $|2x+1| > |2x+3|$. Escribir la solución en forma de intervalo.

Solución

Se tiene $|2x+1| > |2x+3|$. Aplicar AM5.

$$|2x+1| > |2x+3| \Leftrightarrow \frac{|2x+1|}{|2x+3|} > 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2x+1}{2x+3} \right| > 1 \quad \text{aplicar T1.6.11}$$

$$\frac{2x+1}{2x+3} < -1 \quad \text{o} \quad \frac{2x+1}{2x+3} > 1 \quad \text{aplicar AA5, AO3 y simplificar}$$

$$\frac{2x+1}{2x+3} + 1 < 0 \quad \text{o} \quad \frac{2x+1}{2x+3} - 1 > 0 \quad \text{efectuar la operación}$$

$$\frac{2x+1+2x+3}{2x+3} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{2x+1-2x-3}{2x+3} > 0 \quad \text{simplificar}$$

$$\frac{4x+4}{2x+3} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{-2}{2x+3} > 0 \quad \text{multiplicar por } \left(\frac{1}{4}\right) \text{ la primera y por } \left(\frac{1}{2}\right) \text{ la segunda}$$

$$\frac{x+1}{2x+3} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{-1}{2x+3} > 0 \quad \text{resolver cada una de las desigualdades.}$$

Resolver la primera desigualdad $\frac{x+1}{2x+3} < 0$.

$$\frac{x+1}{2x+3} < 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \quad \text{y} \quad 2x+3 < 0 \quad \text{o} \quad x+1 < 0 \quad \text{y} \quad 2x+3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1 \quad \text{y} \quad x < -\frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x < -1 \quad \text{y} \quad x > -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1, \infty) \quad \text{y} \quad x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \quad \text{o} \quad x \in (-\infty, -1) \quad \text{y} \quad x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Solución para la primera parte: $x \in (-1, \infty) \cap \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) = \emptyset$

Solución para la segunda parte: $x \in (-\infty, -1) \cap \left(-\frac{3}{2}, \infty\right) = \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

Solución para la desigualdad, la unión de la solución de la primera parte con la solución de la segunda $x \in \emptyset \cup \left(-\frac{3}{2}, -1\right) = \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$.

De forma análoga para la segunda desigualdad $\frac{-1}{2x+3} > 0$.

$$\frac{-1}{2x+3} > 0 \Leftrightarrow 2x+3 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{3}{2} \quad \text{Solución para la segunda desigualdad } x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

Finalmente se tiene la solución a la desigualdad dada

$$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup \left\{-\frac{3}{2}\right\} = (-\infty, -1).$$

Interpretación geométrica

a. De la desigualdad $|2x+1| > |2x+3|$ si $y_1 = |2x+1|$ y $y_2 = |2x+3|$ entonces $y_1 \geq y_2$, significa que para cualquier valor de x , en el intervalo $(-\infty, -1)$ la recta y_1 , está arriba de la recta y_2 . Ver figura 1.7.6

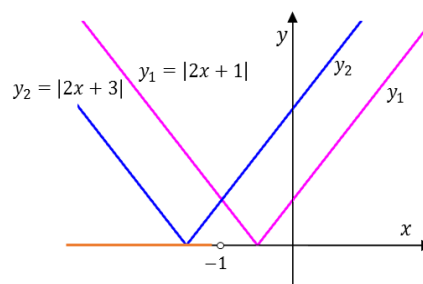


Figura 1.7.6 Interpretación geométrica de la desigualdad $|2x+1| > |2x+3|$.

b. Respecto de la distancia de un punto a otro, se tiene que, para cualquier valor de x , en el intervalo $(-\infty, -1)$, la distancia de éste punto, al punto $-\frac{1}{2}$, es mayor que del punto x , al punto $-\frac{3}{2}$.

Analíticamente

$$|2x+1| > |2x+3| \Leftrightarrow \left|2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right| > \left|2\left(x + \frac{3}{2}\right)\right| \Leftrightarrow 2\left|x + \frac{1}{2}\right| > 2\left|x + \frac{3}{2}\right| \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| > \left|x + \frac{3}{2}\right|.$$

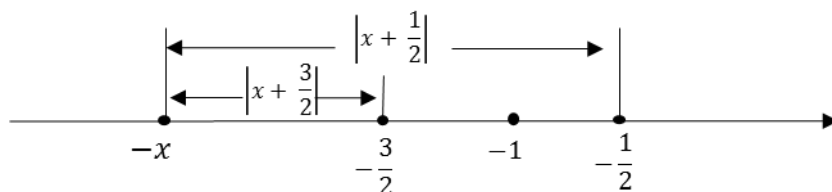


Figura 1.7.7 Interpretación como distancia de un punto a otro $|2x+1| > |2x+3|$

Unidad 1**Ejercicios propuestos**

Expresar el número racional como una expansión decimal finita o bien como expansión decimal infinita.

$$1) \frac{7}{8}. \quad 2) \frac{1}{21}. \quad 3) \frac{19}{3}. \quad 4) -\frac{1}{13}. \quad 5) -\frac{4}{7}.$$

Expresar en forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ m las siguientes expansiones decimales

$$6) 0.12\bar{3}. \quad 7) 0.14\bar{2}. \quad 8) 2.14\bar{5}. \quad 9) 3.18\bar{19}. \quad 10) 0.51\bar{22}.$$

Sobre la recta real localice los puntos de coordenadas

$$11) \frac{1}{3}. \quad 12) -\frac{4}{5}. \quad 13) \frac{8}{9}. \quad 14) -\frac{15}{16}. \quad 15) -\frac{9}{4}. \quad 16) 1.75. \quad 17) -2.15. \quad 18) \sqrt{3}. \quad 19) -\sqrt{5}.$$

Para los siguientes números racionales determine su relación de orden

$$20) \frac{13}{16} \text{ y } \frac{22}{9}. \quad 21) -\frac{2}{5} \text{ y } -\frac{41}{100}. \quad 22) \frac{25}{46} \text{ y } \frac{23}{40}.$$

Para los siguientes conjuntos determine si es que existe:

a) Cota superior **b)** cota inferior **c)** máximo **d)** mínimo **e)** supremo **f)** ínfimo

$$23) A = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, 1 \right\}. \quad 24) B = [a, b). \quad 25) A = \{x | x \geq 1\}. \quad 26) C = \left\{ 2 - \frac{1}{n} \mid n = 3, 4, \dots \right\}.$$

Escriba como una desigualdad los siguientes intervalos

$$27) (-\infty, 3]. \quad 28) \left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{3} \right]. \quad 29) \left[\frac{5}{3}, \infty \right). \quad 30) \left(-\frac{3}{4}, \frac{8}{5} \right]. \quad 31) \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{3} \right).$$

Represente geométricamente las siguientes desigualdades y escríbalas con notación de intervalo

$$32) x \leq 0. \quad 33) -\frac{2}{3} < x < 4. \quad 34) x < -\sqrt{2}. \quad 35) -5 \geq x. \quad 36) x \geq 1.$$

Resuelva las siguientes desigualdades lineales

$$37) x + 3 < 1. \quad 38) 3x + 4 < 2x - 3. \quad 39) 11x - \frac{1}{2} \leq 2x + 1. \quad 40) 7x - \frac{2}{3} > \frac{1}{2}x - 8.$$

$$41) \frac{1}{2}x - \frac{4}{5} \geq \frac{2}{3}x + \frac{7}{8}. \quad 42) \frac{2}{3}x - \frac{8}{7} \geq -\frac{4}{3}x - 10. \quad 43) -x - 4 \geq \frac{1}{2}x - 5.$$

$$44) -\frac{3}{2}x + 2 \leq -\frac{1}{4}x - \frac{2}{5}. \quad 45) \frac{8}{3}x - \frac{4}{5} < -\frac{1}{3}x - 2 < \frac{3}{2}x + 2.$$

Resuelva las siguientes desigualdades cuadráticas

$$50) x^2 + 2x - 8 < 0. \quad 51) -x^2 - 6x - 8 > 0. \quad 52) 2x^2 - x - 10 \geq 0. \quad 53) -x^2 + 3x - 3 \geq 0.$$

$$54) 2x^2 + 6x + 8 \leq 0. \quad 55) x^2 \leq \frac{1}{2}x + 5. \quad 56) -4x - 2 > \frac{3}{2}x^2. \quad 57) 9x + 18 \geq 2x^2.$$

$$58) -\frac{15}{12}x^2 - \frac{5}{14}x < \frac{1}{2}x + \frac{6}{49}. \quad 59) -3x - \frac{3}{2} \leq \frac{4}{5}x^2 + \frac{2}{5}x.$$

Determine si cada una de las afirmaciones es falsa o verdadera

$$60) |x| = \sqrt{x^2}. \quad 61) |x| = |-x|. \quad 62) d(a, 0) = d(0, a). \quad 63) d(a, b) \neq d(b, a).$$

$$64) d(a, b) < 0. \quad 65) d(x, 1) = |x - 1|. \quad 66) d(x, -1) = |x - 1|. \quad 67) d(x, -1) = |x + 1|.$$

Verifique gráficamente que

$$68) \text{ Si } |x| \leq 1 \text{ entonces } x \geq x^2. \quad 69) \text{ Si } |x| \geq 1 \text{ entonces } x \leq x^2.$$

Resuelva las siguientes ecuaciones.

$$70) |x| = 5. \quad 71) |x - 1| = 2. \quad 72) |3x - 1| = x + 7. \quad 73) |x - 2| = |2x + 1|.$$

$$74) |x^2 - 4| = 2. \quad 75) |x^2 - 2| = x. \quad 76) |x^2 - 4| = |4 - x^2|.$$

Determinar el conjunto de números que satisfacen la desigualdad. Expresar la solución en notación de intervalo y gráficamente.

$$77) |2x + 3| < 1. \quad 78) |3x - 2| \leq 1. \quad 79) |1 - x| > 4. \quad 80) |3 - 2x| < x.$$

$$81) |2 - 3x| > x. \quad 82) \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x \right| < 2x. \quad 83) \left| \frac{2}{3} - \frac{4}{5}x \right| > -x. \quad 84) \left| \frac{1}{4}x - \frac{1}{5} \right| < -2x.$$

$$85) \left| 1 - \frac{1}{x} \right| > 2. \quad 86) \left| 1 + \frac{2}{x} \right| \leq x. \quad 87) \left| \frac{1}{2} - \frac{3}{x} \right| \geq 2. \quad 88) \left| \frac{x + 1}{3x} \right| < 4.$$

$$89) \left| \frac{x + 1}{1 - x} \right| > 3. \quad 90) |x^2 - 2| \geq 3. \quad 91) |(x - 1)(x + 2)| \leq 5. \quad 92) |x| \leq |x - 1|.$$

$$93) |2x - 3| \geq |x + 1|. \quad 94) |x - 2| \leq |4 - x^2|.$$

CAPÍTULO 2

FUNCIONES

COMPETENCIA ESPECÍFICA A DESARROLLAR

Comprender el concepto de función real, y tipos de funciones, así como sus propiedades y operaciones.

2.1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Además de los números reales, otro concepto fundamental relacionado con el cálculo es el de función, que en términos generales es una manera de asociar los elementos de un conjunto A con los elementos de un conjunto B, sin importar la naturaleza de los elementos que forman a los conjuntos.

Cuando los elementos de los conjuntos A y B son números reales la función se denomina función real de variable real. Su notación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se lee “f de r en r”.

Definición de función 2.1.1

Sean A y B subconjuntos de números reales. Una función f es una regla que asocia a cada elemento x del conjunto A uno y solo un elemento y del conjunto B.

Al conjunto A se llama **dominio** de la función, y **codominio** al conjunto B, se ilustra esta relación en la figura 2.1.1

Se denomina imagen de x , al único elemento y en el conjunto B, que la regla de correspondencia lo asocia con el elemento x del dominio, se escribe $y = f(x)$, se lee “ f de x ” y representa el valor de la función para el valor correspondiente de x .

Al conjunto de todas las imágenes $f(x)$ en B, se denomina **rango o recorrido** de la función se escribe R_f y D_f para el dominio.

Puesto que los valores de $y = f(x)$ dependen del elemento x elegido, a x se denomina **variable independiente** y **variable dependiente** a y .

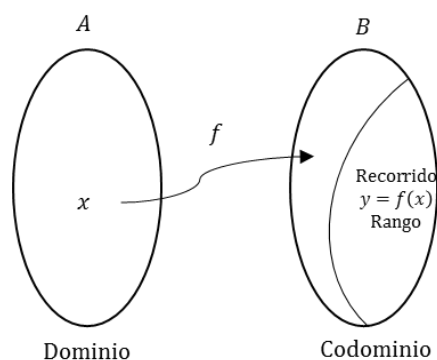


Figura 2.1.1 Relación gráfica de los elementos de una función

Representación de una función:

Existen diferentes formas de representar una función siendo las más usuales las siguientes:

- 1) Mediante un enunciado, es decir describiéndola con palabras.
- 2) Mediante el uso de tablas es decir por medio de una relación numérica.
- 3) Utilizando una expresión algebraica, es decir en forma analítica.
- 4) Mediante una gráfica, diagrama de flechas etc., esto es, utilizando una representación visual.

Ejemplo 2.1.1

Representación de una función en diferentes formas

1) Mediante un enunciado: “Asignar a cada número natural par menor que 8 su cuadrado”.

2) Uso de tablas.

3) Utilizando una expresión algebraica:

$$y = x^2 \quad D_f = \{x | x = 2n; n \in \mathbb{N}; n < 4\} \quad R_f = \{4, 16, 36\}.$$

4) Mediante una gráfica figura 2.2.2

La transición de una forma a otra de representar una función, constituye una habilidad, que permite plantear y resolver problemas relacionados con las diferentes materias que utilizan el cálculo en su aplicación.

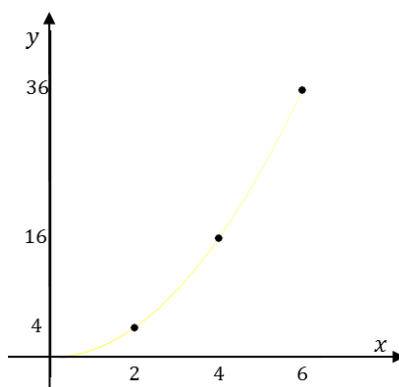


Figura 2.2.2 Representación gráfica de una función

2.2 CONCEPTO DE VARIABLE, FUNCIÓN DOMINIO, CODOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

Cuando una cantidad o magnitud depende de otra, se dice que la primera es función de la segunda, y su magnitud puede ser afectada por la variación de la segunda, en tal situación, se dice que la primera magnitud, es una variable dependiente y variable dependiente a la segunda. En las funciones reales de variable real, la variable independiente se representa por la letra x , representa un elemento cualquiera del dominio de la función, sus valores generalmente se localizan geoméricamente en el eje de las abscisas y a la variable dependiente se le representa por y , y sus valores se localizan en el eje de las ordenadas, la notación funcional que las relaciona es dada por

$$y = f(x).$$

Dependiendo de los valores que tomen las variables, éstas pueden ser, continuas si tienen cualquier valor entre dos números y discretas cuando no toman valores intermedios.

Ejemplo 2.2 1

En la función f definida por: “Asignar a cada número natural par menor que 8, su cuadrado” la variable dependiente y la independiente son variables discretas.

Ejemplo 2.2.2

En la función f definida por: “Asignar a cada número real su cubo” las dos variables son continuas.

No necesariamente deben ser las letras x, y las que se utilicen para denotar las variables, se pueden utilizar otros símbolos.

✓ **Dominio de una función.**

El dominio de una función real de variable real, lo forman todos los valores que la variable independiente puede tomar de un conjunto finito o infinito de números reales, para los cuales el valor de la función también es un número real, y puede ser de forma explícita o implícita en éste caso, se denomina dominio natural.

El contexto de la función define su dominio y cuando está definido por una expresión algebraica se debe determinar las restricciones en los valores de la variable independiente, eligiendo solo aquellos cuya imagen sea un número real.

Ejemplo 2.2.3

Determinar el dominio de la función que relaciona el radio de una esfera con su área superficial.

Solución

La fórmula para calcular el área de una esfera es $A = 4\pi r^2$. En esta expresión la magnitud del área A , depende del valor del radio r de la esfera, con lo que se establece una relación funcional entre el radio y el área de la esfera, es decir A es función de r , identificando al radio como la variable independiente y A como la variable dependiente. Además, para que exista la esfera, el valor del radio debe ser un número positivo, con lo cual el dominio de la función es:

$$D_f = \{r \mid r \in \mathbb{R}^+\}$$

Por otra parte si la expresión, $A = 4\pi r^2$ no se limita a determinar el área de la esfera, los valores de la variable independiente r , serán todos los números reales, ya que cualquier número real al cuadrado es también un número real, así el dominio de la función ahora es:

$$D_f = \{r \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 2.2.4

Determine el dominio de las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x-2}. \quad \text{b) } g(x) = \frac{x}{6x^2 + x - 2}. \quad \text{c) } h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{4-x}}.$$

Solución

a) Se observa que el único valor de x que no tiene imagen es 2 ya que al sustituirlo en la expresión algebraica el denominador es cero.

Así el dominio es $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$ o $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

b) Como el valor de la función es dado por una división entonces para que exista se debe evitar que el denominador sea cero, lo cual ocurre cuando $x = \frac{1}{2}$ o $x = -\frac{2}{3}$, de manera que el dominio la función es:

$$D_f = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \right\} \quad \text{o} \quad D_f = \left(-\infty, -\frac{2}{3} \right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty \right).$$

c) Como el valor de la función es dado por la raíz cuadrada de un número real, éste debe ser no negativo, es decir, los valores de la variable x , deben cumplir con la desigualdad $\frac{x-1}{4-x} \geq 0$, que tiene como solución el intervalo $[1, 4)$, el cual corresponde al dominio de la función $D_f = [1, 4)$.

✓ Rango de una función

En el codominio se localizan las imágenes de los elementos del dominio y su conjunto se denomina **rango** de la función, el cual puede ser el total del codominio o solo un subconjunto de él, puesto que la manera de asignar a cada elemento del dominio con su imagen depende de la regla de correspondencia, se dice que el rango de una función, queda determinado por su dominio y la regla de correspondencia.

Ejemplo 2.2.5

Determine el rango de las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x-2}. \quad \text{b) } g(x) = \frac{x}{6x^2 + x - 2}. \quad \text{c) } h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{4-x}}.$$

Solución

a) Del dominio de la función es $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$ o $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, se elige un valor de $x < 2$, entonces el denominador es negativo ($x - 2 < 0$), así que, el cociente es un número real negativo cualesquiera, si ahora se elige $x > 2$, el denominador es un número real positivo cualesquiera, finalmente el valor de la función no puede ser cero puesto que el numerador, no es cero, obteniendo de esta manera, el rango de la función es $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

b) Como el valor de la función es dado por una división, entonces para que exista, se debe evitar que el denominador sea cero, lo cual ocurre, cuando $x = \frac{1}{2}$ o $x = -\frac{2}{3}$. La función es cero en $x = 0$. Formar intervalos con estos números como extremos, y determinar la tendencia en los valores de la función para cada uno de ellos, se tiene

Si $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3} \right)$ el valor de la función es un número negativo, es decir $f(x) < 0$

Si $x \in \left(-\frac{2}{3}, 0 \right)$ el valor de la función es un número positivo, es decir $f(x) > 0$

Si $x \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$ el valor de la función es un número negativo, es decir $f(x) < 0$

Si $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty \right)$ el valor de la función es un número positivo, es decir $f(x) > 0$

y finalmente, si $x = 0$ el valor de la función es cero, es decir $f(x) = 0$.

De manera que el rango de la función son todos los números reales.

c) Como el valor de la función, es dado por la raíz cuadrada de un número, y puesto que el valor mínimo de la raíz cuadrada de un número es cero, en este caso, cuando $x = 1$, se analiza que valores toma la función para los valores de x en el intervalo del dominio, es decir, cuando $x \in [1, 4)$, al hacer esto se observa que cuando x se aproxima a 4, los valores de la función continúan aumentando indefinidamente, así el rango de la función es el intervalo $[0, \infty)$.

2.3 FUNCIÓN INYECTIVA, SUPRAYECTIVA Y BIYECTIVA.

Tomando como base la relación entre los elementos del dominio de la función con sus correspondientes imágenes, las funciones se clasifican en: inyectiva, suprayectiva y biyectiva.

Definición 2.3.1

Función inyectiva o uno a uno.-Es aquella función en la cual, cada uno de los elementos del codominio, es como máximo imagen de uno del dominio, o bien no es imagen de ninguno.

En este tipo de funciones se verifica que: si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ejemplo 2.3.1

Determine si las siguientes funciones son inyectivas en el dominio indicado y en su dominio natural.

$$\text{a) } f(x) = 1 - x, \quad D_f = \{x | x \in (-\infty, 0)\}. \quad \text{b) } g(x) = x^2, \quad D_g = \{x | x \in [0, \infty)\}.$$

Solución

a) Se tiene $f(x) = 1 - x$ y $D_f = \{x | x \in (-\infty, 0)\}$

Sí $x_1 \neq x_2$ para cualesquier $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$

Así $f(x_1) = 1 - x_1$ y $f(x_2) = 1 - x_2$ como $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ por lo que f es inyectiva en el dominio dado. El dominio natural de f son todos los números reales, y para x_1, x_2 números reales también se verifica lo anterior por lo que también es inyectiva.

b) Se tiene $g(x) = x^2$ y $D_g = \{x | x \in [0, \infty)\}$

Sí $x_1 \neq x_2$, para cualesquiera $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ entonces $g(x_1) \neq g(x_2)$.

Así, $g(x_1) = (x_1)^2$ y $g(x_2) = (x_2)^2$ como $x_1 \neq x_2$, entonces se verifica que $g(x_1) \neq g(x_2)$ por lo que g es inyectiva en el dominio dado. El dominio natural de g son todos los números reales, y para x_1, x_2 números reales, no se verifica lo anterior ya que, si $x_1 \neq x_2$ puede suceder que $g(x_1) = g(x_2)$, por lo tanto no es inyectiva.

Comprobación gráfica: Es inyectiva si y sólo, si su gráfica se interseca en uno y solo un punto con toda recta paralela al eje x .

Definición 2.3.2

Función suprayectiva o sobre.-Si todos los elementos del codominio son imagen de por lo menos un elemento del dominio.

Ejemplo 2.3.2

Determine si las siguientes funciones, son suprayectivas.

a) $f(x) = 1 - x^3$.

b) $g(x) = 2 - x^2$.

c) $h(x) = \sqrt{x}$.

Solución

a) Se tiene $f(x) = 1 - x^3$. El rango de la función son todos los números reales y el codominio también y para todo número real en el codominio existe otro en el dominio de la función, por lo que la función es suprayectiva o sobre.

b) Se tiene $g(x) = 2 - x^2$ y $R_g = (-\infty, 2]$. Si el codominio de la función es igual que el rango entonces la función es suprayectiva, si no es así entonces no lo es.

c) Se tiene $h(x) = \sqrt{x}$, $D_h = [0, \infty)$ y $R_h = [0, \infty)$. Si la función h se define como $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, entonces es función suprayectiva o sobre, si no es así, no.

Definición 2.3.3

Función biyectiva o biunívoca.-Es aquella función que es inyectiva y suprayectiva, es decir a cada elemento del dominio le corresponde solo un elemento del codominio y a cada elemento del codominio le corresponde uno solo del dominio.

Ejemplo 2.3.3

Determine si las siguientes funciones son biyectivas o biunívocas.

a) $f(x) = 1 - x$. **b)** $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x}$, $g: (-\infty, 1] \rightarrow [0, \infty)$. **c)** $h(x) = \frac{1}{x}$, $h: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$.

Solución

a) Se tiene $f(x) = 1 - x$ definida como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $D_f = \mathbb{R}$, y $R_f = \mathbb{R}$; en donde para cada número real en el dominio, existe, uno y sólo uno, en el codominio, dándose una correspondencia de elementos uno a uno. Por otra parte, el rango es igual al codominio obteniendo una función sobre por lo tanto la función es biyectiva.

b) Se tiene $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x}$ $g: (-\infty, 1] \rightarrow [0, \infty)$

Se verifica que para cada elemento del codominio, existe un único elemento del dominio, dando lugar a una relación uno a uno, y como el codominio es igual al rango, se tiene una correspondencia sobre por lo que la función es biyectiva.

c) Se tiene $h(x) = \frac{1}{x}$ $h: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$.

2.4 FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

Una función real de variable real también se define como: "Conjunto de pares ordenados de números reales (x, y) tales que no existen pares diferentes que tengan el mismo primer elemento". Sí a cada par ordenado (x, y) se hace corresponder con un punto del plano cartesiano, entonces se puede obtener la gráfica de la función, el par ordenado (x, y) se denomina coordenadas del punto.

El primer elemento (x) del par ordenado, corresponde al dominio de la función, y se localiza sobre el eje x , representa la distancia dirigida del punto de coordenadas (x, y) al eje y .

El segundo (y) elemento del par ordenado, corresponde a la imagen del elemento del dominio, se escribe $y = f(x)$ y se localiza sobre el eje y , representa la distancia dirigida del punto de coordenadas (x, y) al eje x . Ver figura 2.4.1

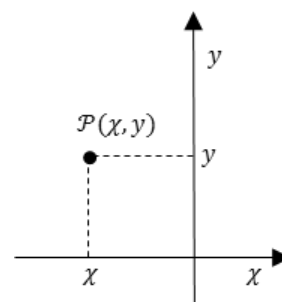


Figura 2.4.1 Localización de un par ordenado (x, y)

Cuando el conjunto de pares ordenados de números reales no es muy extenso se pueden localizar todos los puntos y de esta manera obtener la representación gráfica de la función.

Ejemplo 2.4.1

Represente gráficamente la función f definida por: "Asigne a cada entero mayor que -4 y menor que 3 su valor absoluto".

Solución.

Dominio de la función: $D_f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

Rango de la función: $R_f = \{0, 1, 2, 3\}$

Función como conjunto de pares:

$$f = \{(-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$$

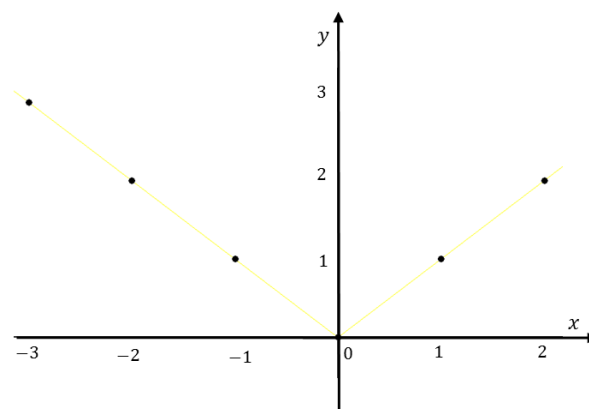


Figura 2.4.2 Gráfica de la función

Lo complicado al trazar la gráfica de una función depende de la regla de correspondencia, es decir de la expresión analítica que la define, si es de la forma, $y = mx + b$ la gráfica es una recta y para trazarla es suficiente un par de puntos, si tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola, y requiere de algunos puntos más para graficarla los que se unen mediante una curva suave, para otros casos, resulta conveniente considerar los siguientes puntos:

- Determinar los elementos del dominio, aquellos que no lo son y determinar signo de la función en los intervalos del dominio.
- Determinar los puntos de intersección con los ejes coordenados.
- Observar el comportamiento tendencial del valor de la función cuando la variable independiente tiende al extremo de un intervalo abierto.
- Hacer una tabla con los pares obtenidos y localizarlos en el plano, unirlos mediante una curva suave (en temas posteriores se verán otros aspectos importantes para trazar gráficas).

Ejemplo 2.4.2

Trazar la gráfica de las siguientes funciones

a) $f(x) = 2x - 3$.

b) $y = 3x^2 - 2x - 5$.

c) $f(x) = \frac{x+4}{3x^2 - 2x - 5}$.

Solución

a) La gráfica es una recta, los dos puntos para graficarla son las intersecciones con los ejes de coordenadas, es decir los pares:

$(0, f(0))$ y $(x, 0)$. Así si $x = 0$, entonces $f(0) = -3$, si $y = 0$, entonces

$$0 = 2x - 3; \text{ y } x = \frac{3}{2}.$$

Por consiguiente los puntos de intersección son: $(0, -3)$ y $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Ver figura 2.4.3

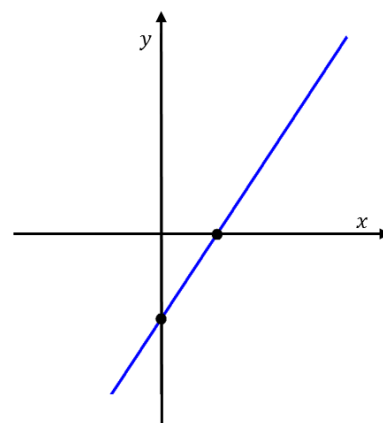


Figura 2.4.3 Gráfica de la función $f(x) = 2x - 3$

b) El dominio de la función $y = 3x^2 - 2x - 5$, son todos los números reales.

- Intersección con los ejes coordenados.

- Con el eje y se tiene: $(0, f(0))$ si $x = 0$ entonces $f(0) = -5$, se obtiene el punto $(0, -5)$

- Con el eje x : $(x, 0)$ si $y = 0$ entonces $0 = 3x^2 - 2x - 5$, al resolver se tiene $x = -1$, $x = \frac{5}{3}$, se

obtienen los puntos $(-1, 0)$, $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

Signo de la función en los intervalos del dominio.

Se elabora una tabla con los intervalos del dominio de la función para determinar el signo de la ésta.

Tabla 2.4.1

Intervalo	x de prueba	signo de f
$(-\infty, -1)$	-2	+
$\left(-1, \frac{5}{3}\right)$	-2	-
$\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$	2	+

De los datos de la tabla se tiene:

En el intervalo $(-\infty, -1)$ el signo de la función es positivo así que la gráfica esta “arriba” del eje x .

En el intervalo $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$, la función es negativa, la gráfica esta “abajo” del eje x .

En el intervalo $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$, la función es positiva, así que, la gráfica esta “arriba” del eje x .

Con la información obtenida se realiza el bosquejo de la gráfica. Ver Figura 2.4.4

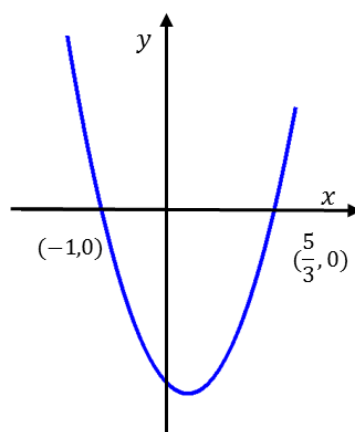


Figura 2.4.4 Gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x - 5$.

c) Se tiene $f(x) = \frac{x+4}{3x^2-2x-5}$, el dominio de la función $D_f = (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$.

Intersección con los ejes coordenados.

Con el eje y se tiene: $(0, f(0))$ si $x = 0$ entonces $f(0) = -\frac{4}{5}$ se obtiene el punto $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$.

Con el eje x :

$(x, 0)$ si $y = 0$ entonces $0 = \frac{x+4}{3x^2-2x-5}$, al resolver la ecuación se tiene $x = -4$, se obtiene el punto $(-4, 0)$.

Signo de la función en los intervalos del dominio.

Se elabora una tabla con los intervalos obtenidos, para determinar el signo de la función.

Tabla 2.4.1

Intervalo	x de prueba	signo de f
$(-\infty, -4)$	-5	-
$(-4, -1)$	-2	+
$\left(-1, \frac{5}{3}\right)$	0	-
$\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$	2	+

De los datos de la tabla se tiene:

En el intervalo $(-\infty, -4)$, el signo de la función es negativo, así que, la gráfica está “abajo” del eje x . En el intervalo $(-4, -1)$, el signo de la función es positivo, la gráfica está “arriba” del eje x . En el intervalo $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$, el signo de la función es negativo, por lo que la gráfica está “abajo” del eje x . En el intervalo $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$, el signo de la función es positivo. Por lo que la gráfica está “arriba” del eje x .

Tendencia de la función

En el intervalo $(-\infty, -4)$, si x es cada vez menor, el valor de la función, es cada vez mayor.

En el intervalo $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$, si x es cada vez mayor el valor de la función, es cada vez menor.

Para valores de x cada vez más próximos a -1 por la izquierda, el valor de la función, es cada vez mayor.

Para valores de x , cada vez más próximos a -1 por la derecha, el valor de la función, es cada vez menor.

Para valores de x , cada vez más próximos a $\frac{5}{3}$ por la izquierda, el valor de la función, es cada vez menor.

Para valores de x cada vez más próximos a $\frac{5}{3}$ por la derecha, el valor de la función, es cada vez mayor.

Con ésta información las ecuaciones $x = -1$, $x = \frac{5}{3}$, corresponden a las rectas asíntotas verticales a la gráfica de la función, y la ecuación $y = 0$, es la asíntota horizontal.

Con la información obtenida se hace el bosquejo de la gráfica de la función .Ver Figura 2.4.5

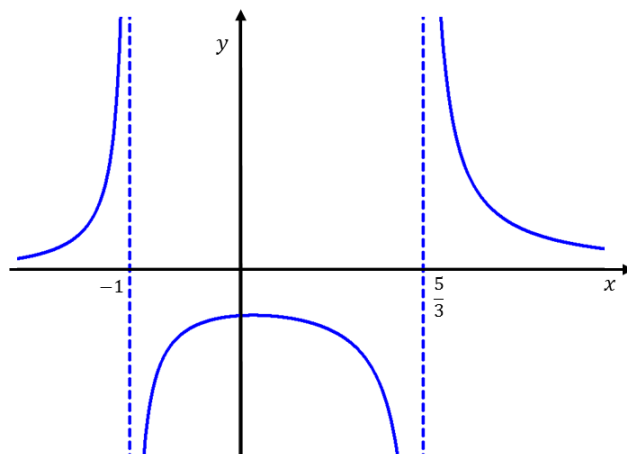


Figura 2.4.5 Gráfica de la función $f(x) = \frac{x+4}{3x^2-2x-5}$.

2.5 CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES POR SU NATURALEZA, ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES.

Las funciones reales de variable real, también se clasifican en funciones algebraicas y trascendentes, según la expresión analítica que la defina, siendo las primeras aquellas que se obtienen efectuando con la función constante y la función identidad un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y extracción de raíz. Si una función no es algebraica es trascendente.

Ejemplo 2.5.1

Son funciones algebraicas:

$$\text{a) } f(x) = \frac{\pi x + 4}{\sqrt{3x^2 - 2x - 5}}. \quad \text{b) } g(x) = \frac{\pi x + 4}{\sqrt{3x^2 - 2x - 5}}. \quad \text{c) } h(x) = (2x - 5)^{3/2}.$$

Son funciones trascendentes: las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas, exponenciales.

2.5.1 Función polinomial

Un polinomio en x de grado n es una expresión de la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ en donde n es un número entero no negativo y $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales llamados coeficientes del polinomio.

Si una función es definida por un polinomio, entonces se denomina función polinomial, el dominio son todos los números reales, en cuanto al rango éste difiere, si el polinomio es de grado impar son todos los números reales, en el caso del polinomio de grado cero el rango es solo el elemento cero, el rango de una función polinomial de grado par se trata en temas posteriores, se verán algunos ejemplos.

✓ **Función constante**

El polinomio de grado cero, define la función constante, denotada por $f(x) = c$ o $y = c$, su gráfica es una recta paralela al eje x , el rango consta de un solo elemento denotado por $R_f = \{c\}$. Ver Figura 2.5.1.1

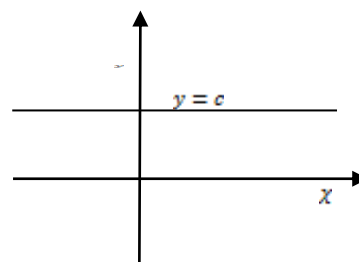


Figura 2.5.1.1 Gráfica de la función $f(x) = c, c > 0$.

✓ **Función identidad**

Si en la función lineal $m = 1$ y $b = 0$, se obtiene la función $f(x) = x$, o $y = x$, denominada función identidad. Ver Figura 2.5.1.2

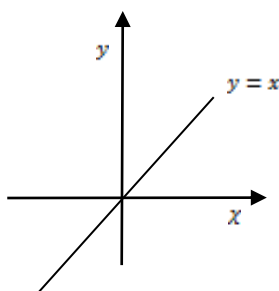


Figura 2.5.1.2 Gráfica de la función $f(x) = x$.

✓ **Función lineal**

El polinomio de grado uno denotado generalmente por $y = mx + b$ define la función lineal, su grafica es una línea recta. Las coordenadas de los puntos de intersección tienen la forma $(0, b), \left(-\frac{b}{m}, 0\right)$ con el eje x y con el eje y respectivamente. Ver Figura 2.5.1.3

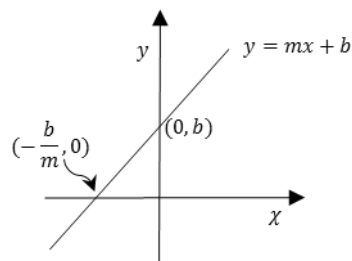


Figura 2.5.1.3 Gráfica de la función $y = mx + b$.

✓ **Función cuadrática**

Es la función definida por un polinomio de grado dos, su gráfica es una parábola con eje de simetría paralelo al eje y .

Consideraciones para graficar la función.

- Si $a_2 > 0$ la parábola abre hacia arriba.
- Si $a_2 < 0$ la parábola abre hacia abajo.
- Si $a_0 > 0$ la intersección con el eje y está por encima del origen.
- Si $a_0 < 0$ intersección con el eje y está por abajo del origen.

- Si $f(a) = 0$ entonces a es una raíz, el número máximo de raíces es dos, se obtienen por diferentes métodos, el más usual la fórmula general, la abscisa del punto más alto o más bajo se llama vértice, es dada por $x = \frac{-a_1}{2a_2}$, y la ordenada o $f\left(\frac{-a_1}{2a_2}\right)$.

Ejemplo 2.5.1.1

Trazar la gráfica de la función f definida por $f(x) = -2x^2 + x + 10$.

Solución

Identificar constantes $a_2 = -2$, $a_1 = 1$, $a_0 = 10$.

Puesto que:

$a_2 = -2 < 0$, la parábola abre hacia abajo

$a_0 = 10 > 0$, la intersección con el eje y está por encima de origen

Se resuelve la ecuación $0 = -2x^2 + x + 10$ para obtener las raíces:

$x_1 = -2$, $x_2 = \frac{5}{2}$. Coordenadas del vértice:

$x = \frac{-1}{2(-2)} = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{8}$. Ver Figura 2.5.1.4

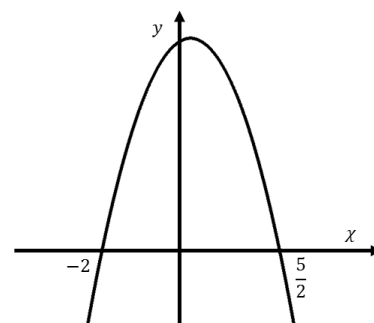


Figura 2.5.1.4 Gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + x + 10$.

En la figura 2.5.1.5, se observan gráficas de funciones polinomiales de tercer y cuarto grado

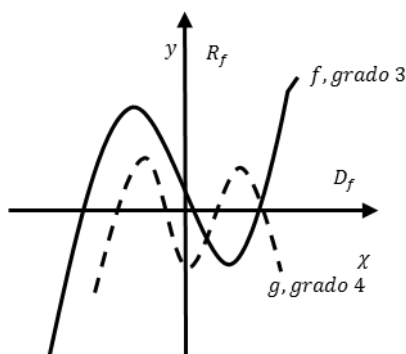


Figura 2.5.1.5 Gráficas de funciones polinomiales de tercero y cuarto grado

2.5.2 Función racional

Sean p y q polinomios en x de grado n y m respectivamente dados por

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ entonces la función

f definida por $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ se denomina función racional con dominio todos los valores

de x tales que el polinomio $q(x) \neq 0$.

Ejemplo 2.5.2.1

Determine el dominio de las siguientes funciones e identifique si son racionales.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x}. \quad \text{b) } g(x) = 5 + (x+2)^2. \quad \text{c) } h(x) = (4-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Solución

a) El numerador es un polinomio de grado cero y de grado uno el denominador por lo tanto es función racional, el denominador es cero si $x = 0$, así el dominio son todos los números reales excepto cero.

b) La función se puede expresar como

$$g(x) = 5 + (x+2)^{-2} = 5 + \frac{1}{(x+2)^2} = 5 + \frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{5x^2 + 20x + 21}{x^2 + 4x + 4}$$

Donde el numerador y denominador son polinomios de grado dos, así pues es racional la función, el denominador es cero si $x = -2$, por consiguiente el dominio son todos los números reales excepto -2.

c) La función $h(x) = (4-x)^{-\frac{1}{2}}$ se puede expresar como

$$h(x) = (4-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(4-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4-x}}.$$

Ya que el denominador no es un polinomio, la función no es racional. Para determinar el dominio, el denominador no debe ser cero, además el radicando debe ser no negativo, es decir $4-x > 0 \Leftrightarrow 4 > x$, por lo que $D_f = (-\infty, 4)$.

Considerar los siguientes puntos para trazar la gráfica de una función racional:

- 1) Determinar los ceros del denominador y obtener el dominio de la función.
- 2) Observar el comportamiento de la función cerca de los ceros del denominador.
 - Si $x = a$, es cero del denominador, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical, si para valores de x , cerca de a por la izquierda o por la derecha, los valores de la función aumentan o disminuyen sin cota.
 - Si el cero del numerador también es cero del denominador verificar que $x = a$ es o no asíntota vertical.
- 3) Intersección con los ejes:
 - Con el eje x verificar que $f(x) = 0$ para algún x , con el eje y verificar que $f(a)$ existe.
- 4) Determinar signos de la función en los intervalos del dominio.
 - Si el signo de la función es positivo, la gráfica está arriba del eje x .
 - Si el signo de la función es negativo, la gráfica está abajo del eje x .
- 5) Observar el comportamiento o tendencia de la función cuando $|x|$ es cada vez mayor.
- 6) Si el numerador y el denominador son factores primos.
 - Si a es un cero del denominador $x = a$, es una asíntota vertical.
 - Si $n < m$ entonces el eje x es una asíntota horizontal.

- Si $n = m$ entonces $y = \frac{a_n}{b_m}$ es una asíntota horizontal.
 - Si $n > m$ entonces no hay asíntota horizontal.
 - Si $n = m + 1$ entonces el cociente de la división es la asíntota oblicua.
- 7) Calcular algunos puntos y localizarlos en el plano.

Ejemplo 2.5.2.2

Trazar la gráfica de las funciones.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x}. \quad \text{b) } g(x) = 5 + (x + 2)^{-2}. \quad \text{c) } h(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}.$$

Solución.

a) Se tiene $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) Determinar los ceros del denominador $x = 0$, así $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2) Observar el comportamiento de la función cerca de los ceros del denominador.

- El cero del denominador es $x = 0$, entonces la asíntota vertical tiene como ecuación $x = 0$, ya que para valores de x próximos a cero por la izquierda y por la derecha, la función disminuye y aumenta sin cota sin respectivamente. Observar las Tablas 2.5.2.1, y 2.5.2.2.

Sucesión de valores de x , cada vez mayores pero menores que cero, los valores de la función disminuyen sin cota.

Tabla 2.5.2.1

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	-1	-10	-100	-1000

Sucesión de valores de x cada vez menores pero mayores que cero, los valores de la función aumentan sin cota.

Tabla 2.5.2.2

x	1	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	1	10	100	1000

3) Intersección con los ejes.

- Con el eje x , no existe ningún valor de x tal que $f(x) = 0$, así que no hay intersección con el eje x , para el eje y , no existe $f(0)$, por lo tanto no hay intersección.

4) Determinar signos de la función en los intervalos del dominio.

- Si $x \in (-\infty, 0)$ el signo de la función es negativo, la gráfica está abajo del eje x .
- Si $x \in (0, \infty)$ el signo de la función es positivo, la gráfica está arriba del eje x .

5) Observar el comportamiento o tendencia de la función cuando $|x|$ es cada vez mayor. Ver Tablas 2.5.2.3 y 2.5.2.4.

Cuando x aumenta indefinidamente, el valor de la función se aproxima a cero.

Tabla 2.5.2.3

x	1	10	100	1000
$f(x)$	1	-0.1	0.01	-1000

Cuando x disminuye indefinidamente, el valor de la función se aproxima a cero.

Tabla 2.5.2.4

x	-1	10	-100	-1000
$f(x)$	-1	-0.1	-0.01	-0.001

6) Como el numerador y el denominador son factores primos y cero es un cero del denominador entonces $x = 0$ es la ecuación de la asíntota vertical, además se cumple que $n = 0 < m = 1$, entonces el eje x , es una asíntota horizontal.

7) Los puntos para la gráfica pueden ser tomados de las tablas.

Con la información anterior se traza la gráfica, Figura 2.5.2.1.

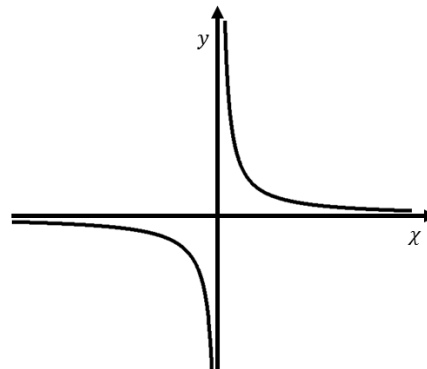


Figura 2.5.2.1 Gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

b) Se tiene $g(x) = 5 + (x + 2)^{-2}$, en forma racional $f(x) = \frac{5x^2 + 20x + 21}{x^2 + 4x + 4}$.

Solución.

1) Cero del denominador $x = -2$, $D_g = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

2) Observar el comportamiento de la función cerca de $x = -2$.

- Como $x = -2$, es cero del denominador, entonces la recta $x = -2$, es asíntota vertical, ya que, como muestran los datos de las tablas, los valores de la función aumentan sin cota para valores de x próximos a -2, por la izquierda y por la derecha.

Sucesión de valores de x menores que -2, pero cada vez mayores los valores de la función aumentan sin cota.

Tabla 2.5.2.5

x	-3	-2.1	-2.01
$g(x)$	6	105	10005

Sucesión de valores de x mayores que -2 pero cada vez menores, los valores de la función aumentan sin cota.

Tabla 2.5.2.6

x	1	-1.9	-1.99
$g(x)$	6	105	10005

3) Intersección con los ejes:

- No existe ningún valor de x tal que $f(x) = 0$, así que no hay intersección con el eje x , para el eje y , $f(0) = \frac{21}{4}$ por lo tanto hay intersección en el punto $\left(0, \frac{21}{4}\right)$.

4) Los signos de la función en los intervalos del dominio se muestran en la siguiente Tabla:

Tabla 2.5.2.7

Intervalo	x de Prueba	Signo f
$(-\infty, -2)$	-3	$+$
$(-2, \infty)$	0	$+$

- Si $x \in (-\infty, -2)$ el signo de la función es positivo, la gráfica está arriba del eje x .
- Si $x \in (-2, \infty)$ el signo de la función es positivo, la gráfica está arriba del eje x .

5) El valor de la función se aproxima a 5 cuando $|x|$ es cada vez mayor, como se observa en las Tablas 2.5.2.8-9.

Cuando x aumenta indefinidamente el valor de la función se aproxima a 5.

Tabla 2.5.2.8

x	1	10	100
$g(x)$	5.1111	5.0069	5.00009

Cuando x disminuye indefinidamente el valor de la función se aproxima a 5.

Tabla 2.5.2.9

x	-3	-10	-100
$g(x)$	6	5.0156	5.0001

6) Puesto que el numerador y el denominador son factores primos y $n = 2 = m$, entonces $y = 5$, es la ecuación de la asíntota horizontal.

7) Los puntos se obtienen de la Tabla 2.5.2.7.

Con la información anterior se traza la gráfica, Figura 2.5.2.2.

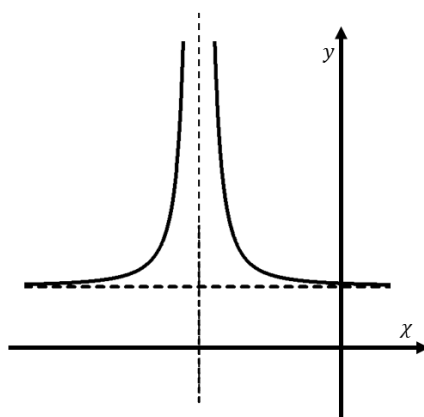


Figura 2.5.2.2 Gráfica de la función $g(x) = 5 + (x + 2)^{-2}$.

c) Se tiene $h(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$.

Solución.

1) Cero del denominador se resuelve $x^2 + x - 6 = 0$, solución $x = -3$, $x = 2$. Así:

$$D_h = (-\infty, -3) \cup (2, \infty).$$

2) Observar el comportamiento de la función cerca de los ceros del denominador:

Cuando $x = -3$.

Sucesión de valores de x menores que -3 , pero cada vez más próximos a -3 .

Tabla 2.5.2.9

x	-4	-3.1	-3.01
$h(x)$	3	21	201

Sucesión de valores de x , cada vez menores pero mayores que -3 .

Tabla 2.5.2.10

x	-2	-2.9	-2.99
$h(x)$	1	-19	-199

En los dos casos, los valores numéricos de la función aumentan sin cota, así, $x = -3$ es la ecuación de la asíntota vertical

Un proceso similar para $x = 2$.

Sucesión de valores de x cada vez mayores pero menores que 2.

Tabla 2.5.2.11

x	1	1.9	1.99	1.999
$h(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{29}{49}$	$\frac{299}{499}$	$\frac{2999}{4999}$

Sucesión de valores de x cada vez menores pero mayores que 2.

Tabla 2.5.2.11

x	3	2.1	2.01	2.001
$h(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{31}{51}$	$\frac{301}{501}$	$\frac{3001}{5001}$

En los dos casos se observa un comportamiento tendencial en los valores de la función hacia un mismo número, el número $\frac{3}{5}$. Se verifica al simplificar la expresión:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x+1)}{(x+3)} \quad x \neq 2.$$

Se obtiene una nueva función $h_1 = \frac{(x+1)}{(x+3)}$ que evaluada en $x = 2$ proporciona el punto $\left(2, \frac{3}{5}\right)$, que no forma parte de la gráfica de la función.

3) Intersección con los ejes:

- En el eje x se cumple que $f(x) = 0$, para el valor de $x_1 = -1$, así el punto $(-1, 0)$ es la intersección.
- Para el eje y , se evalúa la función con $x = 0$ se obtiene como punto de intersección $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

4) Los signos de la función en los intervalos del dominio son:

- Si $x \in (-\infty, -3)$ el signo de la función es positivo, la gráfica está arriba del eje x .
- Si $x \in (-3, 0)$ el signo de la función es negativo, la gráfica está abajo del eje x .
- Si $x \in (0, 2)$ el signo de la función es positivo, la gráfica está arriba del eje x .
- Si $x \in (2, \infty)$ el signo de la función es positivo, la gráfica está arriba del eje x .

5) Como el numerador y el denominador son del mismo grado, la asíntota horizontal es el cociente de los correspondientes coeficientes de los términos de mayor grado en numerador y denominador, $y = 1$.

6) Los puntos para el bosquejo de la gráfica, se obtienen de la Tabla 2.5.2.9-10-11-12. Con la información anterior se traza la gráfica, Figura 2.5.2.3.

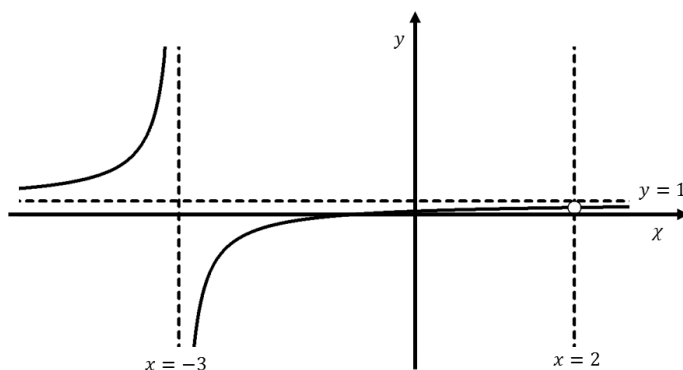


Figura 2.5.2.3 Gráfica de la función $h(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$.

2.5.3 Función raíz n-ésima

Una función de la forma $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ en donde $n \in \mathbb{N}$, se denomina función raíz. Si n es par, el radicando x debe ser un número no negativo, es decir $x \geq 0$, el dominio y el rango son iguales $D_f = [0, \infty)$, su gráfica se muestra en la Figura 2.5.3.1.

Para valores pares de $n > 2$, la gráfica de la función es similar a la mostrada en la Figura 2.5.3.2.

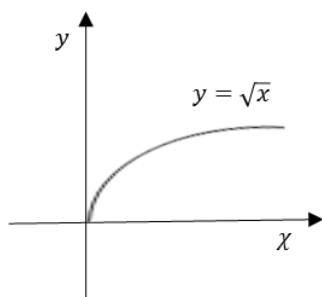


Figura 2.5.3.1 Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

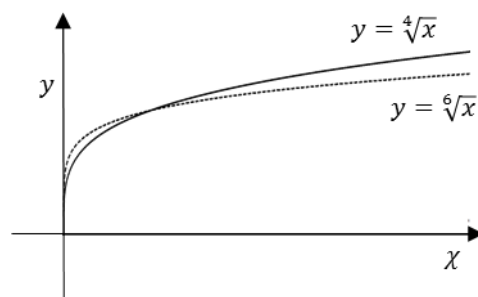


Figura 2.5.3.2 Gráfica de la función $f(x) = \sqrt[4]{x}$ y $f(x) = \sqrt[6]{x}$.

Si n , es impar el dominio son todos los números reales $D_f = \mathbb{R}$, e igual que el rango, y la gráfica tiene una forma similar a la figura 2.5.3.3.

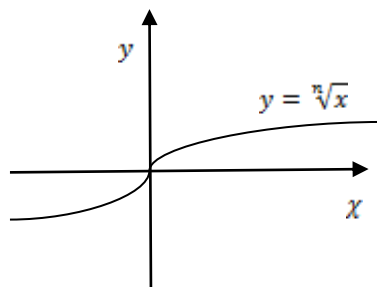


Figura 2.5.3.3 Gráfica de la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

2.5.4 Funciones trigonométricas

Antes de definir las funciones trigonométricas es importante recordar aspectos relacionados con las medidas angulares.

La medición de ángulos se puede hacer en grados sexagesimales ($^\circ$) o en radianes (rad), la relación fundamental entre estas medidas se obtiene al considerar que el ángulo determinado por una vuelta completa contiene 360° sexagesimales y en radianes 2π de manera que 360° es equivalente a 2π o bien 180° es equivalente a π radianes.

Con la regla de conversión $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.017 \text{ rad}$ y $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.295^\circ$ _____ (1)

Ejemplo 2.5.4.1

a) Expresar en radianes como múltiplo del número π , el ángulo de 75° .

b) Expresar el ángulo $-\frac{3\pi}{4}$ rad, en grados sexagesimales.

Solución.

a) De la relación: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.017 \text{ rad}$ se tiene $75^\circ = 75 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}$.

b) De la relación: $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.295^\circ$ se tiene $-\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \left(-\frac{3\pi}{4}\right) \frac{180^\circ}{\pi} = -135^\circ$.

La siguiente Tabla muestra los valores más comunes en grados y radianes.

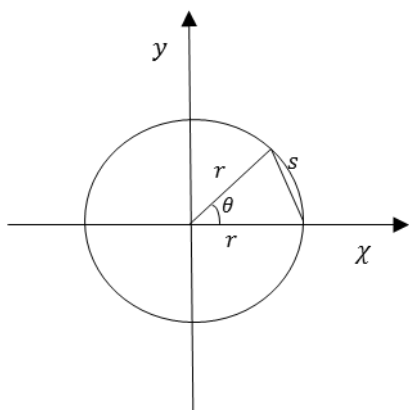
Tabla 2.5.4.1

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

La relación entre la longitud de arco de una circunferencia denotado por S , el ángulo central denotado por θ y el radio r , se obtiene al considerar que la longitud de arco S es proporcional al ángulo central θ , y que la longitud total de la circunferencia es de $2\pi r$, cuando el ángulo central $\theta = 2\pi$, así se obtiene la relación:

$$\frac{S}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{--- (2) de donde } S = \theta r \quad \text{--- (3) si ahora } r = 1 \text{ entonces } S = \theta \quad \text{--- (4)}$$

Es decir, en un círculo unitario la longitud de arco, es igual al ángulo central medido en radianes, de modo que un radian es el ángulo central en una circunferencia que corresponde a un arco de longitud igual al radio. Ver figuras 2.5.4.1 y figura 2.5.4.2



Figuras 2.5.4.1 Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

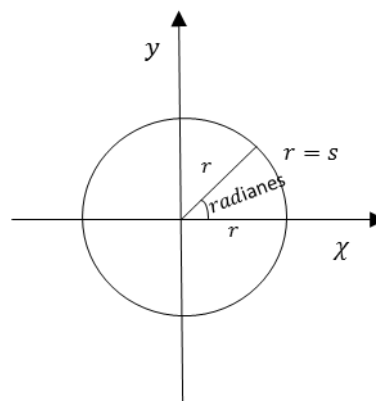


Figura 2.5.4.2 Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente cotangente, secante y cosecante (abreviadas sen, cos, tan, cot, sec y csc respectivamente) se definen como la razón entre los lados de un triángulo rectángulo respecto de un ángulo agudo denotado por θ donde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ de

esta, manera el dominio de definición son los números reales positivo menores que $\frac{\pi}{2}$, se am-

plía el dominio al intervalo $\theta \in [0, 2\pi]$ cuando se definen como funciones circulares del modo siguiente.

Sea $x^2 + y^2 = 1$, la ecuación de una circunferencia de radio uno, centrada en el origen, θ la medida angular en radianes y $P(x, y)$ un punto sobre la circunferencia, figura 2.5.4.3 que cuando la recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj los valores de θ son positivos, y negativos cuando la recorre en el mismo sentido, entonces las funciones trigonométricas se definen por:

$$\operatorname{sen} \theta = y, \quad \cos \theta = x, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \quad \cot \theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0. \quad \sec \theta = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \quad \csc \theta = \frac{1}{y}, \quad y \neq 0. \quad \text{--(5)}$$

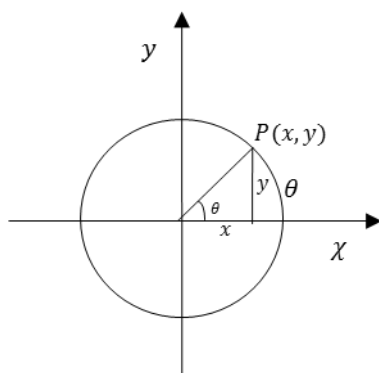


Figura 2.5.4.3 Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Como se puede observar las coordenadas (x, y) del punto P, pueden sustituirse por $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$ respectivamente, de esta manera el signo que tengan las funciones trigonométricas dependerá de la ubicación del punto P en el plano xy .

En la tabla 2.5.4.1 se muestra el signo de la función trigonométrica, según el cuadrante en donde se localiza el punto P.

Tabla 2.5.4.1

Cuadrante	Valores de θ	$\operatorname{sen} \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
I	$(0, \pi/2)$	+	+	+	+	+	+
II	$(\pi/2, \pi)$	+	-	-	-	-	+
III	$(\pi, 3\pi/2)$	-	-	+	+	-	-
IV	$(3\pi/2, 2\pi)$	-	+	-	-	+	-

Además, como el punto $P(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ puede recorrer la circunferencia, en sentido de las manecillas del reloj tantas veces como se desee entonces θ puede tomar cualquier número $\mathbb{R}^+$, de manera similar si el punto P realiza el recorrido en sentido contrario, entonces θ puede tomar cualquier número $\mathbb{R}^-$, así θ puede tomar cualquier $\mathbb{R}$ de modo que el dominio de la función seno y coseno son todos los números reales.

El rango de la función seno y coseno, de la figura 2.5.4. se observa que al realizar el punto $P(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$, el recorrido sobre la circunferencia y completar una vuelta el valor máximo de $\operatorname{sen} \theta$, es uno cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, y -1 es su mínimo cuando $\theta = \frac{3\pi}{2}$, de manera que el rango de la función es $[-1, 1]$, para la función coseno su valor máximo es de uno cuando $\theta = 0$, y -1 es su

mínimo cuando $\theta = \pi$, de esta manera se tiene que el rango es igual para las dos funciones. Ver figura 2.5.4.4

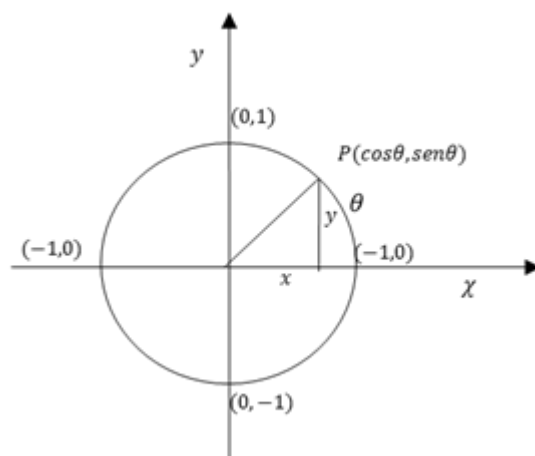


Figura 2.5.4.4 Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

✓ Gráfica de la función seno

Para realizar la gráfica de la función seno, $y = \text{sen } \theta$, se obtienen algunos pares ordenados $(\theta, \text{sen } \theta)$, se localizan en el plano y se unen mediante una curva suave.

Algunos valores de la función $y = \text{sen } \theta$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, con subintervalos iguales a $\frac{\pi}{6}$, se muestran en la tabla 2.5.4.2, se visualizan en la figura 2.5.4.5.

Tabla 2.5.4.2

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \text{sen } \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Es importante observar que después de una vuelta, los valores de la función se repiten, así $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$, etc., esto en general se denomina $\text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}(\theta)$, y se dice que la función es periódica. Una función f es periódica si existe un número p tal que $f(\theta + p) = f(\theta)$, para todos los números reales θ , en el dominio de la función, en este caso $p = 2\pi$, por lo que la función es periódica, con periodo 2π .

Intersección con los ejes

Con el eje θ , se cumple $f(\theta) = 0$, para $\theta = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$.

Con el eje y , se cumple $f(0) = 0$.

Las funciones periódicas pueden trazarse al repetir el ciclo de su gráfica. Un ciclo es la parte de la gráfica comprendida en un intervalo de la variable independiente igual al periodo, para este caso, el primer ciclo empieza en el origen y termina en el punto $(2\pi, 0)$, de esta manera se obtiene la gráfica, figura 2.5.4.6

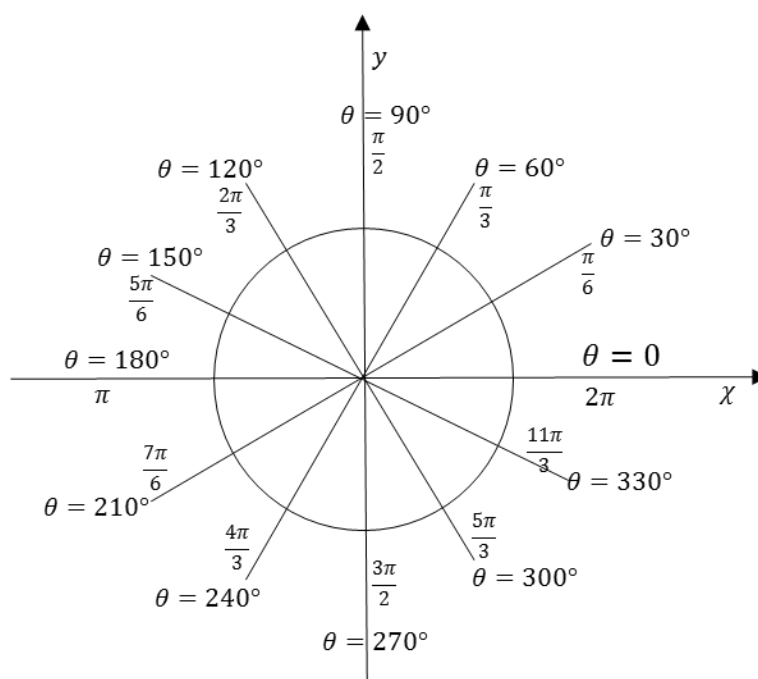


Figura 2.5.4.5 Valores de θ con intervalos de $\frac{\pi}{6}$.

✓ Gráfica de la función coseno

De manera similar se obtiene la gráfica de la función coseno, $x = \cos \theta$, se obtienen algunos pares ordenados $(\theta, \cos \theta)$, se localizan en el plano y se unen mediante una curva suave.

Algunos valores de la función $x = \cos \theta$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, tomando subintervalos iguales a $\frac{\pi}{6}$, se muestran en la Tabla 2.5.4.3.

Tabla 2.5.4.3

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$x = \cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$y = \sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Al analizar los datos de la Tabla 2.4.4.3, se observa que:

- Los valores de la función coseno también se repiten por ejemplo,

$\cos(0) = \cos 2\pi = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{1}{2}$, etc., en general se tiene $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi)$, se dice que la función coseno también es periódica con periodo 2π .

- Las siguientes expresiones muestran la relación entre los valores del coseno y los del seno.

$$\begin{aligned}\cos(0) &= \sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ &\vdots \\ \cos(\theta) &= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

A partir de estos resultados se puede inferir que la gráfica de la función coseno es igual a la gráfica de la función seno desplazada $\frac{\pi}{2}$ horizontalmente a la izquierda. Figura 2.5.4.7.

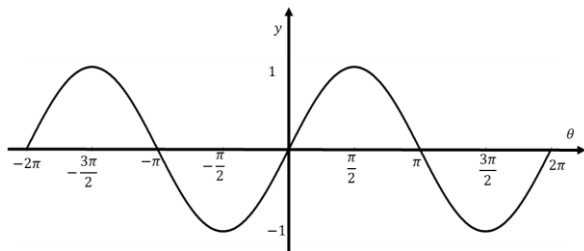


Figura 2.5.4.6 Gráfica de la función $y = \sin \theta$.

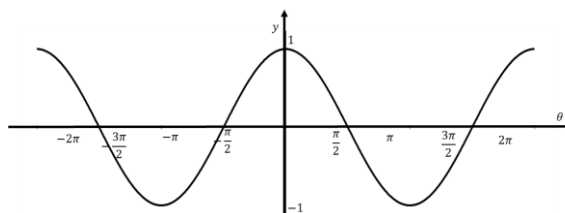


Figura 2.5.4.7 Gráfica de la función $y = \cos \theta$.

Dominio, rango y gráfica de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. Al sustituir $x = \cos \theta$ y $y = \sin \theta$ en $\tan \theta = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, dado en (5) se obtiene:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} , \text{ y para la función secante } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} .$$

Así el dominio de estas funciones es: $\left\{ \theta \mid \theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$, los valores de $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$, corresponden a los ceros de la función coseno, así como a las asíntotas verticales de la gráfica de estas funciones.

La función cotangente y cosecante se obtienen, al sustituir $x = \cos \theta$, y $y = \sin \theta$, en

$\cot \theta = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$, dado en (5), se obtiene $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, y para la función cosecante

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}.$$

Así el dominio de estas funciones es: $\{\theta \mid \theta \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, ahora los valores de $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, corresponden a los ceros de la función seno, así como a las asíntotas verticales de la gráfica.

De la gráfica de las funciones, se observa que el rango de la función tangente y cotangente es $(-\infty, \infty)$, con periodo π . Para las funciones secante y cosecante el rango es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, con periodo 2π . Ver Figura 2.5.4.8.

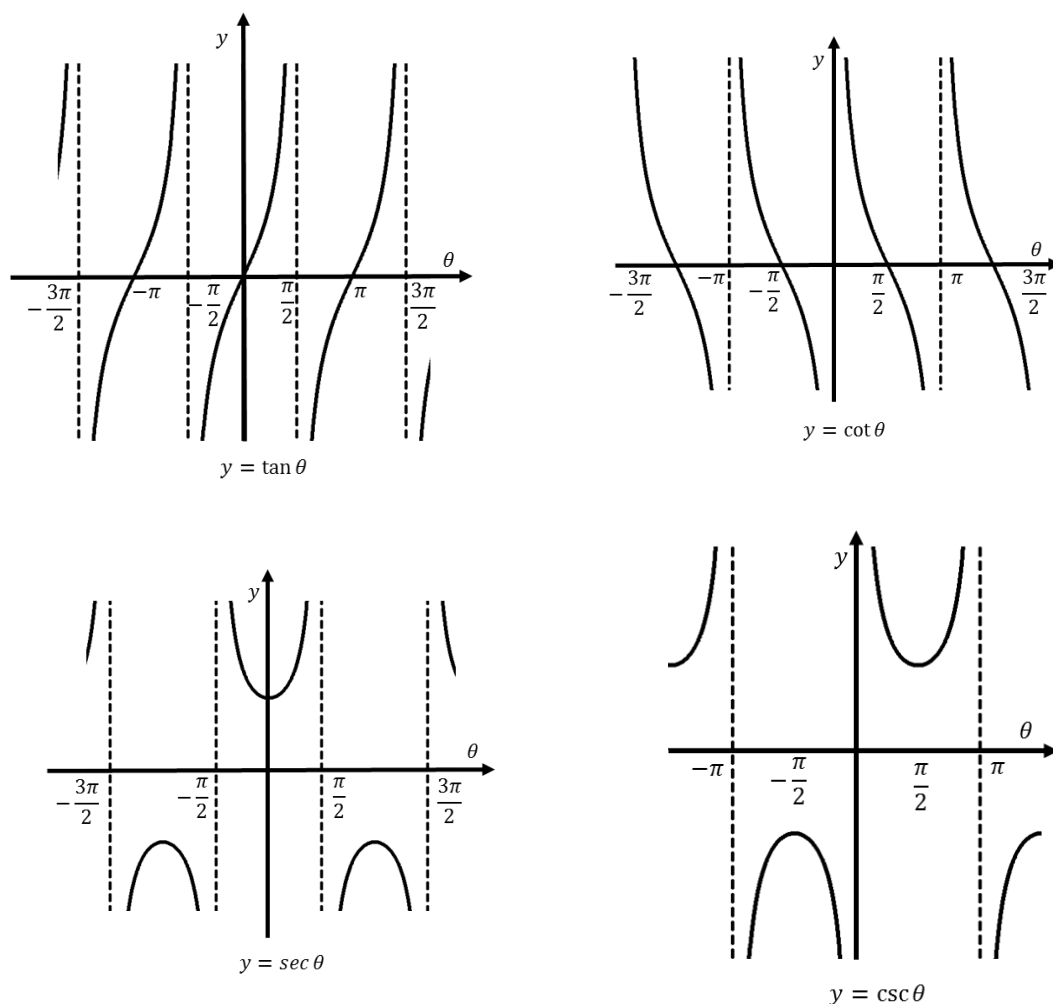


Figura 2.5.4.8 Gráfica de la función tangente, cotangente, secante y cosecante respectivamente.

Parámetros asociados a las funciones seno y coseno

Ahora se utiliza como variable independiente la letra x en las funciones trigonométricas.

Sean $y = a \sin(bx + c)$, $y = a \cos(bx + c)$, donde a, b, c son constantes.

El valor de a , representa una expansión vertical si $a > 1$, y una compresión si $a < 1$. Su valor absoluto $|a|$, se denomina amplitud. El valor de b , está relacionado con expansiones o compresiones horizontales de la gráfica, que modifican su periodo según el número $\frac{2\pi}{b}$.

El parámetro c , representa desplazamientos horizontales iguales a c , si $c < 0$ a la izquierda y a la derecha si $c > 0$.

Ejemplo 2.5.4.2

Trazar la gráfica de la función f definida por $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, y determinar la amplitud y el periodo.

Solución.

Identificación de parámetros: $a = 3$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{4}$.

Puesto $|a| = |3| = 3$, entonces la amplitud de la gráfica es 3, y corresponde al mayor valor de la función y el valor mínimo a -3.

El periodo se obtiene del cociente $\frac{2\pi}{b}$, con $b = 2$, así el periodo es π , de esta forma en cada intervalo de longitud π , la gráfica tendrá un ciclo.

Como $c = \frac{\pi}{4}$, entonces la gráfica está desplazada hacia la izquierda $\frac{\pi}{4}$, respecto de la gráfica de $y = \sin x$.

Intersección con los ejes

Con el eje y : cuando $x = 0$, entonces

$$y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.1.$$

Con el eje x : cuando $y = 0$, entonces $0 = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$,

se cumple si $2x + \frac{\pi}{4} = 0$, despejando x se tiene $x = -\frac{\pi}{8}$.

Puesto que el periodo es π , entonces un primer ciclo se tendrá en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right]$, los ceros de la función se

obtienen adicionando a $-\frac{\pi}{8}$, $n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. La gráfica se muestra en la Figura 2.5.4.9.

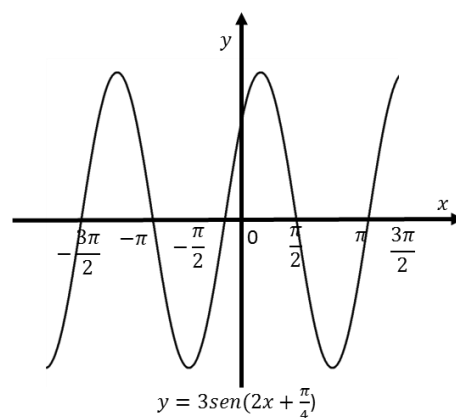


Figura 2.5.4.9 Gráfica de la función

Identidades pitagóricas

Ya que un punto P de coordenadas (x, y) , en la circunferencia unitaria

$$x^2 + y^2 = 1 \text{----- (1)}$$

Puede ser representado por $(\cos \theta, \sin \theta)$, en donde

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta \text{----- (2)}$$

Al sustituir (2) en (1) se tiene

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{----- (3)}$$

Al dividir (3) por $\sin^2 \theta$, se tiene $1 + \tan^2 \theta = 1$

$$1 + \tan^2 \theta = 1 \text{----- (4)}$$

Al dividir (3) por $\cos^2 \theta$, se tiene

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \text{----- (5)}$$

3, 4 y 5 se denominan identidades pitagóricas.

2.5.5 Función exponencial

Una expresión de la forma $f(x) = a^x$, con $a > 0$, se denomina función exponencial, en donde a , se llama base y x , exponente.

El dominio de este tipo de funciones son todos los $\mathbb{R}$, y los números positivos el rango. Para exponente un número racional se tiene:

$$\text{Si } x = 0, \quad a^x = a^0 = 1$$

$$\text{Si } x = -n \quad a^x = a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x = \frac{m}{n} \quad a^x &= a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^m \\ &= \left(\sqrt[n]{a} \right)^m \\ &= \sqrt[n]{a^m}. \end{aligned}$$

Para exponente un número irracional se toma su representación decimal para aproximar el valor de la función tanto como sea requerido.

Ejemplo 2.5.5.1

Dada la función exponencial $f(x) = 2^x$, determinar su valor para $x = \sqrt{5}$, hasta cuatro cifras decimales

Solución

Si $x = \sqrt{5}$, entonces $f(\sqrt{5}) = 2^{\sqrt{5}}$.

La representación decimal de $\sqrt{5} = 2.236067978...$ ahora se utilizan como exponentes la sucesión de números racionales 2, 2.2, 2.236, 2.23606, 2.236067, ... hasta que las cuatro primeras cifras decimales de los resultados no cambien.

Así $f(\sqrt{5}) = 2^{\sqrt{5}} \approx 4.7111$

Respecto de la base a , existen tres tipos de funciones exponenciales si $0 < a < 1$, $a = 1$, y $a > 1$

Ejemplo 2.5.5.2

Trazar la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ d) $y = 1^x$ e) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ f) $y = 2^x$ g) $y = 3^x$.

Solución

Para trazar la gráfica se obtienen algunos pares ordenados de números, se localizan en el plano xy y se unen con una curva suave, ver figura 2.5.5.1

Tabla 2.5.5.1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3		x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$		$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$		$\frac{27}{8}$
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$		$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$y = 1^x$	1	1	1	1	1	1	1									

De la tabla de valores y de la Figura 2.5.5.1 se puede observar lo siguiente:

- Las gráficas intersecan al eje y , en el punto $(0,1)$.
- Las gráficas tienen al eje x , como asíntota horizontal.
- Las gráficas están arriba del eje x .
- Las funciones con base $a > 1$, son crecientes, es decir, si los valores de x , son cada vez mayores los valores de la función también.
- Las funciones con base $0 < a < 1$, son decrecientes, es decir, si los valores de x son cada vez mayores los valores de la función son cada vez menores.
- La función exponencial es inyectiva es decir es uno a uno.

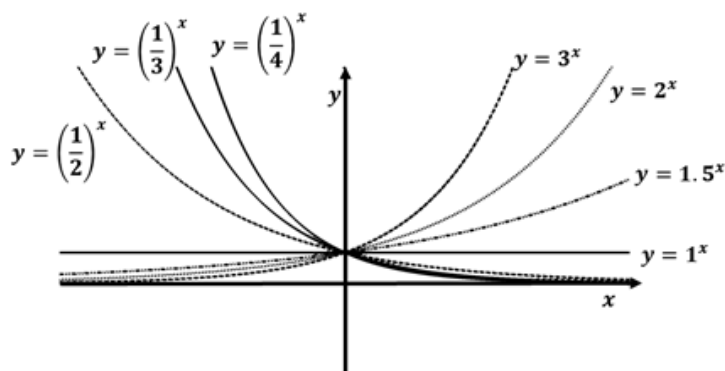


Figura 2.5.5.1 Gráficas de las funciones logarítmicas.

✓ Función exponencial natural

Existen un número con características muy particulares denominado número de Euler, denotado por $e \approx 2.718281$ y definido por:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ o bien } e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}.$$

El cual cuando se utiliza como base en la función exponencial ésta se denomina función exponencial natural, $f(x) = e^x$, y es particularmente importante.

Como en esta función la base $a = e > 1$, entonces se comporta como aquellas para las cuales $a > 1$. Ver gráfica en la Figura 2.5.5.2.

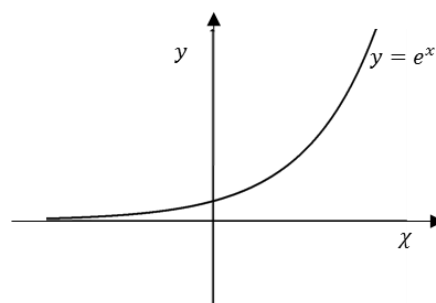


Figura 2.5.5.2 Gráfica de la función exponencial natural.

Se exponen las leyes de los exponentes.

Sean a, b números positivos, x, y números reales entonces

$$1) a^x a^y = a^{x+y}. \quad 2) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}. \quad 3) (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}. \quad 4) (ab)^x = a^x b^x. \quad 5) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

2.5.6 Función logarítmica.

Sea f la función exponencial $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, se tiene que, no existen dos elementos de f que tengan la misma imagen, entonces el proceso de asignar elementos x del dominio de f con los elementos y del rango de f , se puede invertir y formar una nueva función, a ésta se denomina inversa de f y se denota por f^{-1} , de esta manera el rango de f constituye el dominio de f^{-1} y el dominio de f forma el rango de f^{-1} , además si los pares ordenados de f son (x, y) los de f^{-1} serán (y, x) , la gráfica de f^{-1} , es simétrica respecto a la recta $y = x$. La función f^{-1} se denomina función logarítmica y se escribe:

$$y = \log_a x \text{ si y solo si } x = a^y \text{ ----- (1)}$$

Las gráficas de $y = a^x$, y de su inversa $y = \log_a x$ se muestran en la Figura 2.5.6.1

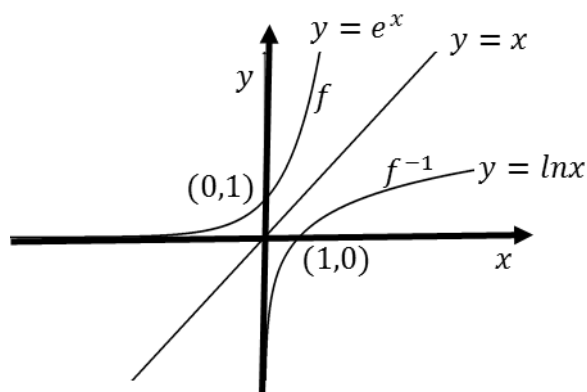


Figura 2.5.6.1 Gráficas de la función f definida

Por $y = a^x$, y de su inversa.

Ejemplo 2.5.6.1

Si f es definida por $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, entonces f^{-1} es dada por $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Algunos pares ordenados de f son:

$$\left\{(-3, 8), (-2, 4), (-1, 2), (0, 1), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right), \left(3, \frac{1}{8}\right)\right\}.$$

En tanto que los correspondientes para f^{-1} :

$$\left\{(8, -3), (4, -2), (2, -1), (1, 0), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, 2\right), \left(\frac{1}{8}, 3\right)\right\}$$

Nota: Dos puntos son simétricos respecto de una recta si esta es la mediatriz del segmento que los une.

Las gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, y de su inversa se muestran en la Figura 2.5.6.2.

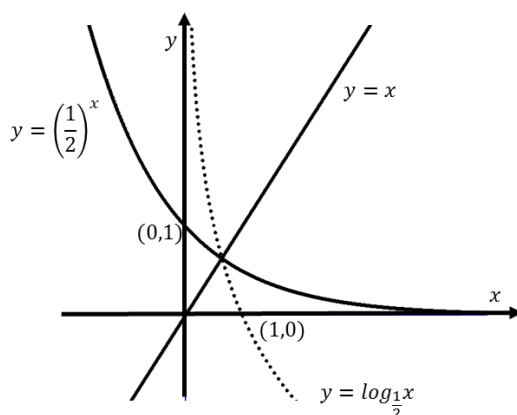


Figura 2.5.6.2 Gráficas de la función f definida por $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, y de su inversa

Las gráficas de la función logarítmica con base a tal que $0 < a < 1$ son decrecientes y crecientes si $a > 1$, tienen como asíntota vertical el eje y .

✓ **Función logaritmo natural**

Definición 2.5.6.1

Sea f definida por $y = e^x$ entonces f^{-1} es $y = \log_e x$, generalmente se escribe $y = \ln x$ se denomina logaritmo natural.

La gráfica de la función exponencial y logaritmo natural se muestran en la Figura 2.5.6.5

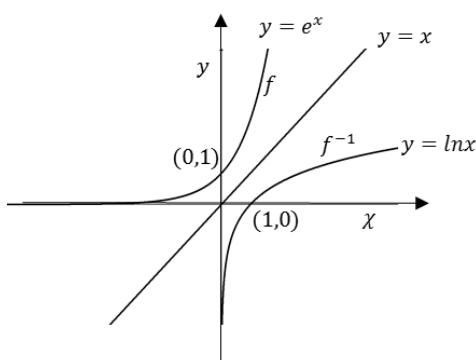


Figura 2.5.6.5 Gráfica de la función exponencial y logaritmo.

Para obtener el dominio de la función logarítmica, es necesario tomar en cuenta que el argumento debe ser un número real positivo.

Ejemplo 2.5.6.2

Determinar el dominio de la función dada por $y = \ln(25 - x^2)$.

Solución

Como el argumento es $25 - x^2$, entonces para que exista la función se debe cumplir que $25 - x^2 > 0$, la solución de la desigualdad es el intervalo $(-5, 5)$, número positivo, de manera que $D_f = (-5, 5)$.

Recordar las propiedades de los logaritmos es recomendable cuando se estudia la función logarítmica

Leyes de los logaritmos

Sea $a > 0$, $a \neq 1$, x, y números positivos, b cualquier número real entonces

$$\mathbf{1)} \log_a xy = \log_a x + \log_a y. \quad \mathbf{2)} \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y. \quad \mathbf{3)} \log_a x^b = b \log_a x.$$

Los logaritmos de cualquier base a están relacionados con el logaritmo natural mediante la expresión

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Que se obtiene de $y = \log_a x$, si y solo si $x = a^y$, al tomar logaritmo natural de esta última expresión.

El uso de propiedades de logaritmos permite resolver ecuaciones con la variable x en el exponente, o bien en el argumento de la función logaritmo.

Ejemplo 2.5.6.3

Obtener el valor de x en la ecuación $4^{x+1} = e^{x+2}$.

Solución

En la expresión $4^{x+1} = e^{x+2}$, se toma logaritmo natural en ambos lados

$$\ln 4^{x+1} = \ln e^{x+2} \text{ Aplicar propiedades de logaritmos } (\ln e = 1)$$

$$(x+1)\ln 4 = (x+2)\ln e$$

$$x\ln 4 + \ln 4 = x + 2 \text{ Realizar operaciones y simplificar}$$

$$x(\ln 4 + 1) = 2 - \ln 4$$

$$x = \frac{2 - \ln 4}{\ln 4 + 1} \approx 1.5886.$$

Ejemplo 2.5.6.4

Obtener el valor de x que cumple la ecuación $\ln 2x + \ln(x-1) = \ln 4$.

Solución

En la expresión $\ln 2x + \ln(x-1) = \ln 4$. Aplicar propiedades de logaritmos

$$\ln 2x(x-1) - \ln 4 = 0$$

$$\ln\left(\frac{2x(x-1)}{4}\right) = 0 \quad \text{puesto que } \ln 1 = 0 \text{ entonces}$$

$$\frac{2x(x-1)}{4} = 1 \quad \text{al realizar operaciones y simplificar se tiene}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

2.5.7 Función definida parte por parte

Una función definida por más de una regla de correspondencia, se denomina función parte por parte. El dominio de este tipo de funciones es la unión de los dominios de cada regla de correspondencia que la define.

Ejemplo 2.5.7.1

Determine el dominio de la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0. \\ 1, & 1 < x < 2. \\ 1-x, & 2 < x. \end{cases}$

Solución

La función f es definida por tres reglas de correspondencia, así que, es una función por partes.

El dominio de la primera regla de correspondencia es $(-\infty, 0)$, $(1, 2)$, para la segunda y $(2, \infty)$ para la tercera, por lo tanto el dominio de la función f

es $D_f = (-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$ y el rango $R_f = (-\infty, 1)$.

La gráfica se muestra en la Figura 2.5.7.1

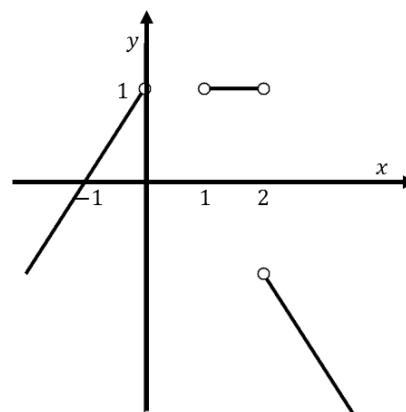


Figura 2.5.7.1 Gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0. \\ 1, & 1 < x < 2. \\ 1-x, & 2 < x. \end{cases}$$

2.5.8 Función inversa

En el punto 2.5.6 se utilizó el concepto de función inversa para definir la función logaritmo, como la inversa de la función exponencial, en este parte se define tal función, utilizando a su vez el concepto de función uno a uno.

Definición 2.5.8.1

Si f es una función uno a uno, con dominio A y rango B , entonces f^{-1} se denomina inversa de f con dominio B y rango A , así
 $f^{-1}(y) = x$ si y solo si $y = f(x)$ para y en B .----- (1)

En la Figura 2.5.8.1 se esquematiza la relación de una función f y su inversa f^{-1}

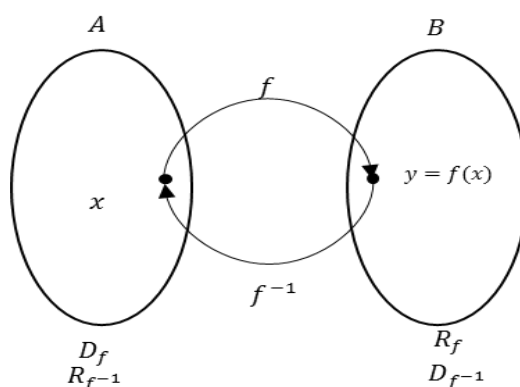


Figura 2.5.8.1 Relación gráfica de f y f^{-1} .

En la Figura 2.5.8.1 se puede observar que el dominio de f^{-1} , es el rango de f , el rango de f^{-1} , es el dominio de f , además si, f es uno a uno f^{-1} también lo es, como f^{-1} es uno a uno entonces también tiene inversa, es decir la inversa de f^{-1} es f .

De la definición 2.5.8.1 se tiene que la relación entre las dos funciones es:

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y sólo si } y = f(x), \text{ para cualquier } y \text{ en el rango de } f. \text{----- (2)}$$

Al intercambiar las variables x, y la relación entre f y f^{-1} se puede escribir:

$$f^{-1}(x) = y \text{ si y sólo si } x = f(y), \text{ para cualquier } x \text{ en el dominio de } f^{-1}. \text{----- (3)}$$

En el primer caso se dice que f^{-1} cancela el efecto de f y en el segundo f cancela el efecto de f^{-1} . Se escribe:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en el dominio de } f. \text{----- (4)}$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en el dominio de } f^{-1}. \text{----- (5)}$$

A las expresiones 4 y 5 se les llama **fórmulas de cancelación**.

Al aplicar las fórmulas anteriores a la función exponencial y a su inversa se tiene:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x, \text{ para toda } x \text{ en el dominio de } f. \text{----- (6)}$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x, \text{ para toda } x > 0. \text{----- (7)}$$

Si $x = 1$, se sustituye en (6) y en (7) se tiene.

$$\log_a a = 1, \text{ ya que } a = a^1. \text{-----} (8)$$

$$a^{\log_a 1} = 1, \text{ ya que } a^0 = 1. \text{-----} (9)$$

De la definición de función logaritmo natural:

$$y = \ln x, \text{ si solo si } x = e^y. \text{-----} (10)$$

Al aplicar 6 y 7 a 10 se tiene:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^x) = \ln e^x = x, \text{ para toda } x \in \mathbb{R}. \text{---} (11)$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(\ln x) = e^x = x, \text{ para toda } x > 0. \text{-----} (12)$$

Si $x = 1$, se sustituye en (11) y en (12) se tiene.

$$\ln e = 1, \text{ ya que } e = e^1. \text{-----} (13)$$

$$e^0 = 1, \text{ ya que } \ln 1 = 0. \text{-----} (14)$$

La expresión 11 permite representar un número real x cualesquiera, y la 12 un número positivo.

Guía para obtener la inversa de una función

Sea $y = f(x)$ función inyectiva (uno a uno).

1) Escribir $y = f(x)$

2) Resolver la ecuación $y = f(x)$ para x en términos de y (cuando sea posible). Se obtiene

$$x = f^{-1}(y).$$

3) Expresar f^{-1} en términos de x , intercambiando las variables x , y para obtener

$$y = f^{-1}(x).$$

Ejemplo 2.5.8.1

a) Dada la función f definida por $f(x) = x + 2$ obtener f^{-1} .

Solución

a) Se tiene $f(x) = x + 2$, paso 1

$$y - 2 = x \quad \text{paso 2}$$

$$x - 2 = y \quad \text{paso 3}$$

$$y = f^{-1}(x)$$

$$y = x - 2.$$

b) Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$, obtener f^{-1}

Solución

b) Se tiene $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$, paso 1

$$\begin{aligned}
 (x-3)y &= x-2 && \text{paso 2} \\
 xy - 3y &= x-2 \\
 xy - x - 3y &= 2 \\
 x &= \frac{2+3y}{y-1}, \quad x = f^{-1}(y) && \text{paso 3} \\
 y &= \frac{3x+2}{x-1} \\
 y &= f^{-1}(x) \\
 y &= \frac{3x+2}{x-1} \\
 f^{-1}(x) &= \frac{3x+2}{x-1}.
 \end{aligned}$$

Gráfica de f^{-1}

Si los pares de f son de la forma (x, y) entonces los de f^{-1} , son (y, x) que corresponden a reflexiones de los pares (x, y) respecto de la recta $y = x$

Ejemplo 2.5.8.2

Sea f la función definida por $f(x) = x + 2$. Trazar la gráfica de f^{-1} .

Solución

Puesto que la f definida por $f(x) = x + 2$ es una función lineal entonces es suficiente obtener dos puntos para graficarla, los cuales pueden ser $(0, 2)$ y $(-2, 0)$, entonces los correspondientes para f^{-1} son $(2, 0)$ y $(0, -2)$. La gráfica se muestra en la Figura 2.5.8.2

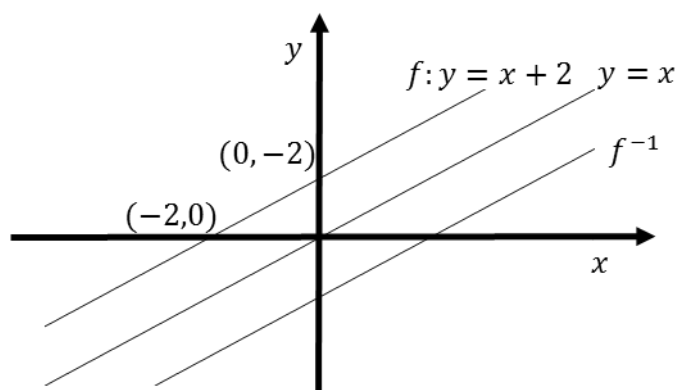


Figura 2.5.8.2 Gráfica de la función $f(x) = x + 2$.

Ejemplo 2.5.8.3

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$. Trazar la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f en el intervalo $(-\infty, 3)$.

Solución

Para la gráfica de f se obtiene la siguiente información:

-Dominio de la función $(-\infty, 3)$.

-Intersección con el eje x : si $y = 0$, entonces $x = 2$, punto de intersección $(2, 0)$.

-Intersección con el eje y : si $x = 0$, entonces $y = \frac{2}{3}$, punto de intersección $(0, \frac{2}{3})$

-Ecuación de la asíntota vertical: $x = 3$.

-Ecuación de la asíntota horizontal: $y = 1$.

Con la información anterior se traza la gráfica de

f se muestra en la Figura 2.5.8.3

Para la gráfica de f^{-1} se tiene según lo que se visto se tiene.

Intersección con el eje x : $(0, \frac{2}{3})$

Intersección con el eje y : $(2, 0)$

Ecuación de la asíntota vertical: $x = 1$.

Ecuación de la asíntota horizontal: $y = 3$.

La gráfica de f^{-1} se muestra en la Figura 2.5.8.3

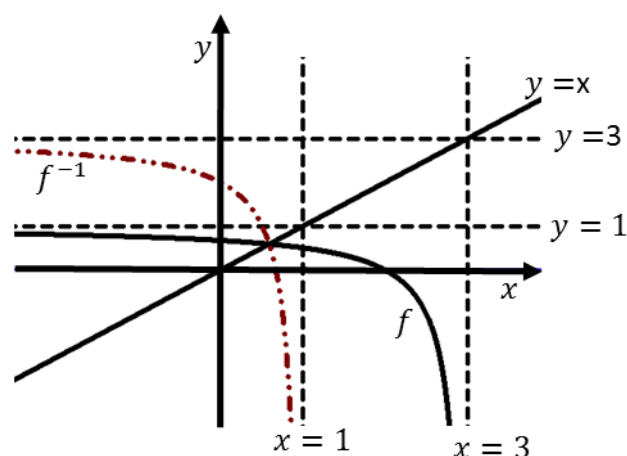


Figura 2.5.8.3 Gráfica de la función $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$,
y su inversa f^{-1} .

2.5.9 Función implícita

Cuando una función f de variable dependiente y y de variable independiente x , es dada por una ecuación en donde y está despejada, es decir está dada solo en términos de la variable independiente x se dice que f es una función explícita, cuando no es así f se denomina implícita.

En la siguiente ecuación se define f de manera explícita

$$y = 4\text{sen } x + \frac{1}{3}x \text{ ----- (1).}$$

La misma función f está definida de forma implícita en la ecuación

$$12\text{sen } x + x - \frac{1}{3}x = 0 \text{ ----- (2).}$$

Una expresión como 2 en general se escribe como:

$$F(x, y) = 0 \text{ ----- (3).}$$

Si además, en 2 se define a y como función de x , entonces 3 se escribe

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ ----- (4).}$$

Por lo que 2 se puede escribir

$$12\text{sen } x + x - 3f(x) = 0 \text{ ----- (5).}$$

2.5.10 Función valor absoluto

Definición 2.5.10.1

La función valor absoluto se define por la expresión

$$f(x) = |x| \text{ --- (1) o bien } f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases} \text{ --- (2).}$$

Con todos los números reales como dominio y rango el intervalo $[0, \infty)$.

La grafica de la función valor absoluto se muestra en la Figura 2.5.10.1

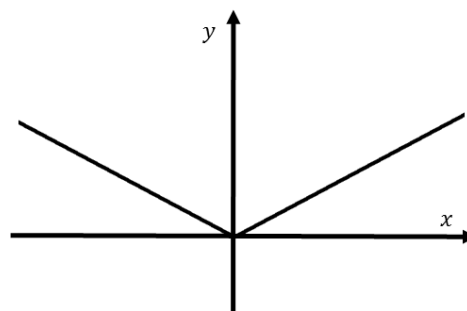


Figura 2.5.10.1 Grafica de la función $f(x) = |x|$.

Para trazar la gráfica de una función con valor absoluto, se utiliza la definición y graficarla como una función por partes.

Ejemplo 2.5.10.1

Trazar la gráfica de la función f definida por $f(x) = |4 - x^2|$.

Solución

Se tiene $f(x) = |4 - x^2|$, De la definición se utiliza (2) para escribirla como

$$f(x) = f(x) = |4 - x^2| = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } 4 - x^2 \geq 0, \\ -(4 - x^2), & \text{si } 4 - x^2 < 0. \end{cases}$$

Ahora se gráfica como una función por partes

Para la primera parte: $f_1 = 4 - x^2$ si $4 - x^2 \geq 0$, al resolver se tiene $x \in [-2, 2]$.

Para la segunda parte: $f_2 = -4 + x^2$ si $4 - x^2 < 0$, al resolver se tiene $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

La grafica se muestra en la Figura 2.5.10.2

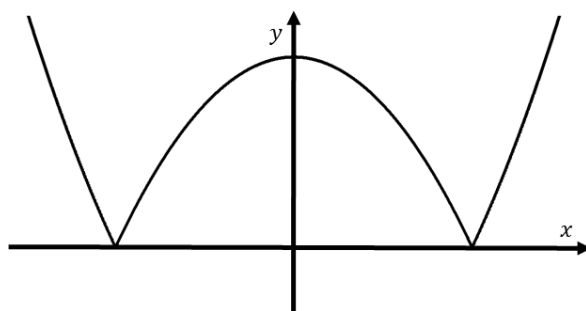


Figura 2.5.10.2 Grafica de la función $f(x) = |4 - x^2|$.

2.5.11 Funciones trigonométricas inversas

Como se vio en la sección 2.5.8 las funciones que tienen inversa deben ser funciones uno a uno, y las funciones trigonométricas no lo son, sin embargo se puede restringir el dominio para que en algún intervalo de la variable independiente se comporten como tales.

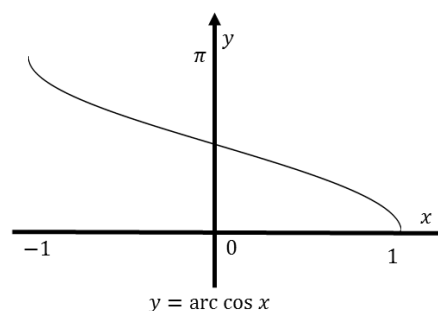
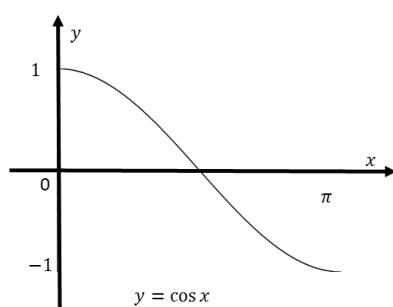
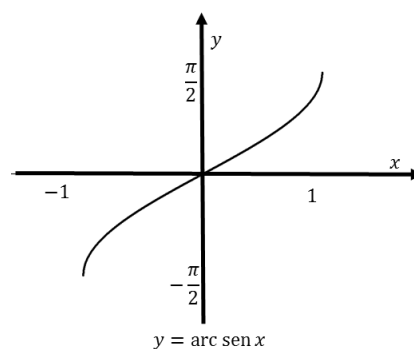
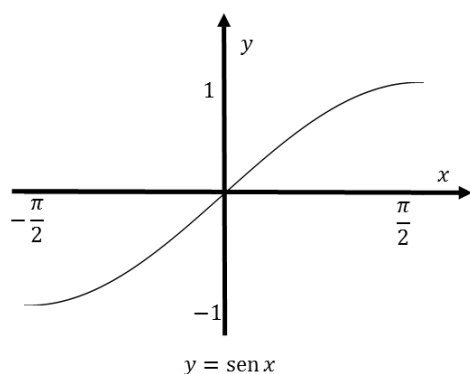
En la siguiente Tabla, se muestran las funciones trigonométricas con su dominio, en donde se comportan como funciones uno a uno y su correspondiente función inversa.

Obsérvese también que el dominio de f es el rango de f^{-1} de:

Tabla 2.5.11.1

Función f	Dominio f	Rango f	Función f^{-1}	Dominio f^{-1}	Rango f^{-1}
$\text{sen } x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$	$\text{arc sen } x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\text{cos } x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	$\text{arccos } x$	$[-1, 1]$	$(0, \pi)$
$\text{tan } x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(-\infty, \infty)$	$\text{arc tan } x$	$(-\infty, \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\text{cot } x$	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$	$\text{arc cot } x$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$
$\text{sec } x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\text{arc sec } x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$\text{csc } x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\text{arc csc } x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

En la Figura 2.5.11.1 se muestran las gráficas de las funciones trigonométricas en el intervalo en donde son uno a uno y su función inversa correspondiente



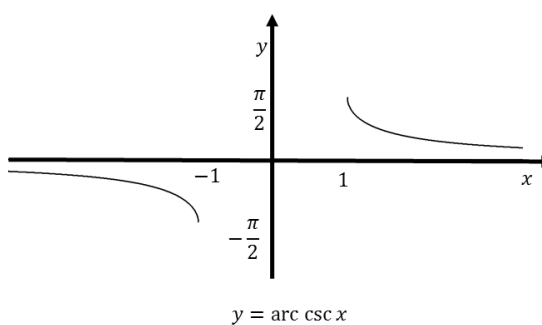
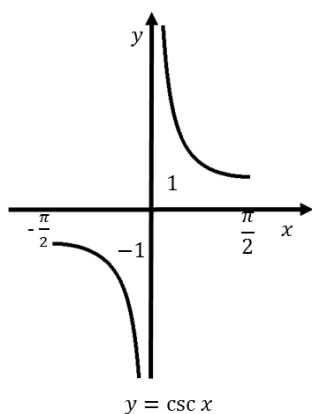
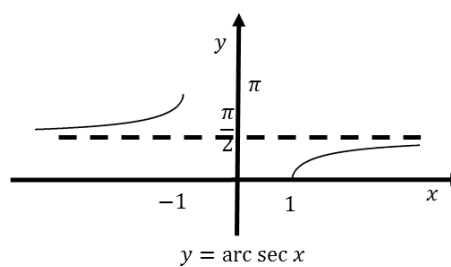
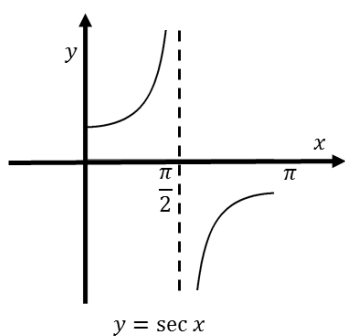
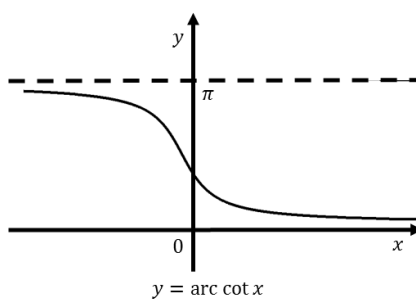
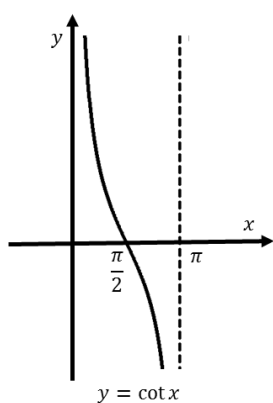
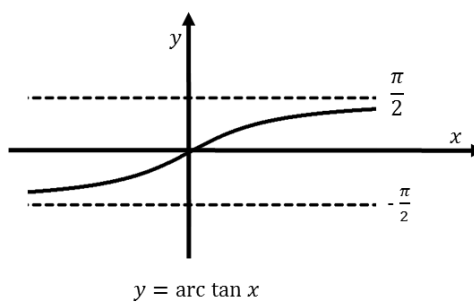
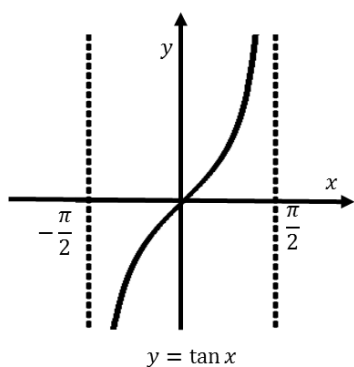


Figura 2.5.11.1 Gráficas de las funciones trigonométricas en el intervalo en donde son uno a uno y su función inversa correspondiente.

La notación para $\arcsen x$, también es $\sen^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$ y $\csc^{-1} x$.
Para $\arc cos x$, $\arc tan x$, $\arc cot x$, $\arcsec x$ y $\arccsc x$ respectivamente.

Además se debe tener presente que en el dominio de f en donde es uno a uno, f^{-1} es:

$$\begin{aligned} y = \arcsen x & \text{ si y solo si } x = \sen y \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ y = \arc cos x & \text{ si y solo si } x = \cos y \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi \\ y = \arc tan x & \text{ si y solo si } x = \tan y \quad y \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ y = \arc cot x & \text{ si y solo si } x = \cot y \quad y \quad 0 < y < \pi \\ y = \arcsec x & \text{ si y solo si } x = \sec y \quad y \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ y = \arccsc x & \text{ si y solo si } x = \csc y \quad y \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0, \pi] \end{aligned}$$

✓ Obtención del valor de una función trigonométrica inversa

Ejemplo 2.5.11.1

Obtener el valor de las expresiones: **a)** $\arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **b)** $\arc tan\sqrt{3}$. **c)** $\arcsec 1$.

Solución

a) De la relación de una función con su inversa:

$$y = \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ si y sólo si } \frac{1}{\sqrt{2}} = \sen y.$$

Una forma de visualizar el problema es construir un triángulo rectángulo con la información dada, como el seno es la razón del cateto opuesto a la hipotenusa, entonces el cateto opuesto es 1 y la hipotenusa $\sqrt{2}$; con esta información se traza el triángulo rectángulo de ángulo y , con cateto adyacente 1, obtenido al aplicar el teorema

de Pitágoras, así que $y = \frac{\pi}{4}$. Ver Figura 2.5.11.2.

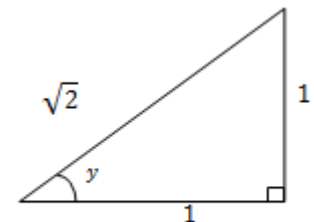


Figura 2.5.11.2 Triángulo rectángulo auxiliar.

Solución

b) Se tiene $\arc tan\sqrt{3}$.

De la relación de una función con su inversa:

$$y = \arc tan\sqrt{3}, \text{ si y sólo si } \sqrt{3} = \tan y.$$

De manera similar, como la tangente es la razón entre el cateto opuesto y el adyacente, entonces el cateto opuesto es $\sqrt{3}$ y 1 el adyacente; y al aplicar el teorema de Pitágoras la hipotenusa es 2. Con esta información se traza el triángulo rectángulo de ángulo y . Ver Figura 2.5.11.3

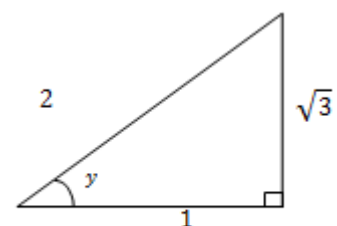


Figura 2.5.11.3 Triángulo rectángulo auxiliar

Puesto que $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, entonces $y = \frac{\pi}{3}$, por lo tanto $y = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Solución

c) Se tiene $y = \arccos 1$.

De la relación de una función con su inversa: $y = \arccos 1$ si y sólo si $1 = \cos y$.

De la identidad trigonométrica $\sec y = \frac{1}{\cos y}$, y puesto que $\sec y = 1$, entonces $\cos y$ debe ser 1, $\cos y = 1$ si $y = 0$, por lo tanto

$$y = \arccos 1 = 0.$$

Aplicación de las formulas $f^{-1}(f(x))$ y $f(f^{-1}(x))$ a las funciones trigonométricas

Al aplicar $f^{-1}(f(x))$ sobre $f(x) = \sin x$, se tiene:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sin x) = \arcsin(\sin x) = x.$$

Para toda x en el dominio de f es decir para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Al aplicar $f(f^{-1}(x))$ sobre $f^{-1}(x) = \arcsin x$ se tiene

$$f(f^{-1}(x)) = f(\arcsin x) = \sin(\arcsin x) = x.$$

Para toda x en el dominio de f^{-1} , es decir para $x \in [-1, 1]$.

Se procede de manera similar para las funciones restantes

Ejemplo 2.2.5.11.2

Evaluar

a) $\sin(\arcsin 1)$. b) $\arccos\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)$. c) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Solución

a) Se tiene $y = \sin(\arcsin 1)$.

Ya que 1 está en el dominio de f^{-1} debe estar en el rango de f y como el $R_f = [-1, 1]$ entonces $\sin(\arcsin 1) = 1$.

b) Se tiene $y = \arccos\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)$.

Puesto que $\frac{\pi}{3}$ está en el dominio de f , debe estar en el rango de f^{-1} , ya que $R_{f^{-1}} = [0, \pi]$.

Entonces

$$\arccos\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

c) Se tiene $y = \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Puesto que $-\frac{\pi}{2}$ no está en el dominio de f , por lo tanto no está en el rango de f^{-1} , así que, se evalúa $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$; puesto que cero está en el dominio de f^{-1} se tiene que:

$$\arccos(0)=\frac{\pi}{2}.$$

2.6 FUNCIÓN DEFINIDA POR MÁS DE UNA REGLA DE CORRESPONDENCIA

Continuando con lo que se vio en la sección 2.5.7

Una expresión de la forma:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x \in D_{f_1}, \\ f_2(x) & x \in D_{f_2}, \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ f_n(x) & x \in D_{f_n}. \end{cases}$$

En donde $f_1, f_2, \dots, f_n$ son a su vez funciones de x , se denomina función definida por más de una regla de correspondencia. El dominio de f es la unión de los dominios de las n funciones, y la unión del rango de las n funciones forma el rango de f .

Algunos ejemplos son:

1) Función valor absoluto dada por $f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

En donde:

$$f_1(x)=x \quad y \quad D_{f_1}=[0, \infty), \quad R_{f_1}=[0, \infty),$$

$$f_2(x)=-x \quad y \quad D_{f_2}=(0, \infty), \quad R_{f_2}=[0, \infty).$$

$$\text{Así } D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = \mathbb{R}, \quad R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2} = [0, \infty).$$

2) Función máximo entero denotada por

$$f(x)=\llbracket x \rrbracket, \text{ donde } \llbracket x \rrbracket = n \text{ si } n \leq x < n+1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \mathbb{Z}.$$

La Figura 2.6.1 muestra la gráfica de la función dada por $f(x)=\llbracket x \rrbracket + x$, en el intervalo $[-2, 2]$.

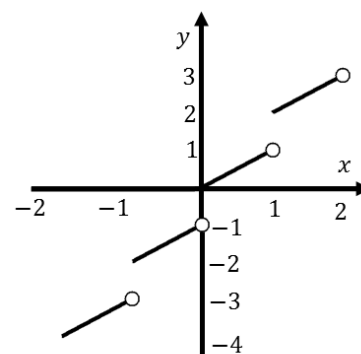


Figura 2.6.1 Gráfica de la función máximo entero $f(x)=\llbracket x \rrbracket + x$.

3. Función signo denotada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \{-1, 0, 1\}$ La Figura 2.6.2 muestra la gráfica de esta función

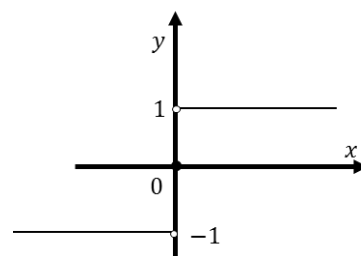


Figura 2.6.2 Gráfica de la función signo

2.7 OPERACIONES CON FUNCIONES: ADICIÓN, MULTIPLICACIÓN, COMPOSICIÓN.

Las operaciones de adición, multiplicación y división se efectúan con funciones al definir las como sigue:

Definición 2.7.1

Sean f y g funciones real de variable real. Entonces

- a)** La suma de f con g , denotada por $f + g$, es definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- b)** La resta de f con g denotada por $f - g$, es definida por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.
- c)** La multiplicación de f con g , denotada por $f \cdot g$, es definida por $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.
- d)** La división de f entre g , denotada por $\frac{f}{g}$ es definida por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

En todos los casos, el dominio de la función así obtenida, es la intersección de los dominios de cada función, con la restricción adicional para la división, en donde se debe excluir el o los valores de x , tales que $g(x) = 0$

Ejemplo 2.7.1

Sean f y g funciones definidas por $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ respectivamente. Efectuar las operaciones indicadas y determinar el dominio de la función resultante.

$$\text{a) } f + g. \quad \text{b) } f - g. \quad \text{c) } f \cdot g. \quad \text{d) } \frac{f}{g}.$$

Solución

- a)** $(f + g)(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x}.$
- b)** $(f - g)(x) = \sqrt{1-x} - \frac{1}{x}.$
- c)** $(fg)(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{1-x}}{x}.$
- d)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\frac{1}{x}} = x\sqrt{1-x}.$

Puesto que el dominio de la función resultante, es la intersección de los dominios de las funciones con las cuales se lleva a cabo la operación, es necesario determinar el dominio de cada una de ellas. Así el dominio de cada una de las funciones f , y g es:

$$D_f = (-\infty, 1] \quad D_g = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Y el correspondiente a la función resultante

$$\text{a) } D_{f+g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 1] \cap (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = (-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

$$\text{b) } D_{f-g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 1] \cap (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = (-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

$$\text{c) } D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 1] \cap (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = (-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

$$\text{d) } D_{f/g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 1] \cap (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = (-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

En éste último caso, la función resultante se puede evaluar en el número $x = 0$, sin embargo la función g , con la cual se realiza la operación, no está definida para éste valor de x .

Además de las operaciones anteriores, existe otra operación denominada función composición, se define a continuación.

Definición 2.7.2

Sean f y g funciones entonces la función composición de f con g denotada por $f \circ g$ se define por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ son todos los números x , en el dominio de g .tal que, $g(x)$ está en el dominio de f , es decir.

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}.$$

Definición 2.7.3

La composición de g con f denotada por $g \circ f$ se define por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

El dominio de $g \circ f$ son todos los números x en el dominio de f ,tal que $f(x)$ está en el dominio de g , o bien

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}.$$

La visualización de una función como composición de funciones es común, y en algunos casos conveniente, así la función f definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, puede ser representada por:

$f(x) = g(h(x))$, donde $g(x) = \sqrt{x}$, y $h(x) = 1-x^2$.Así:

$$f(x) = g(h(x)) = g(1-x^2) = \sqrt{1-x^2} . \text{ Dónde } D_{g \circ h} = [-1, 1].$$

2.8 FUNCIÓN INVERSA, FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Se continúa con los conceptos de función logarítmica y función inversa vistos en la sección 2.5.6 y 2.5.8 respectivamente.

El concepto de función inversa permite determinar elementos del dominio de una función que tenga inversa, es decir, dada una función f con dominio el conjunto A y rango o imagen el conjunto B, se desea conocer que elemento x del conjunto A corresponde a un elemento y conocido del rango B. Por ejemplo.

Ejemplo 2.8.1

Sea f una función definida por $f(x) = x^3$ determine el elemento x , del dominio de f si $f(x) = 64$

Solución

$$\begin{aligned} \text{Sea } y &= f(x) \text{ entonces} \\ y &= x^3 \quad \text{ademas} \\ x^3 &= 64 \quad \text{extraer raiz cubica} \\ \sqrt[3]{x^3} &= \sqrt[3]{64} \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Así $f(4) = 64$

En esta relación se tiene $y = x^3$ y $x = \sqrt[3]{y}$.

Esta expresión permite conocer los elementos x , del dominio de f dados los elementos y del rango o imagen.

La expresión $x = \sqrt[3]{y}$ define una función g , con dominio B y rango A, como los símbolos de las variables son convencionales, entonces se pueden intercambiar y escribir $y = \sqrt[3]{x}$ o bien $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Efectuando la composición de f con g , se tiene: $(f \circ g)x = f(\sqrt[3]{x}) = ((\sqrt[3]{x}))^3 = x$. A su vez, la composición de g con f : $(g \circ f)x = g(x^3) = (\sqrt[3]{x^3}) = x$.

Esta relación entre f y g solo es cierta si para cada elemento y en B existe un único elemento x en A, que como se vio en la sección 2.5.8 corresponde a la relación de una función con su inversa.

✓ Una función que no es inyectiva pero tiene inversa

Para obtener la inversa de una función es básico que sea inyectiva (uno a uno), en caso que no lo sea, el dominio de definición se restringe a un intervalo en donde se comporte como tal.

Ejemplo 2.8.2

La función f definida por $f(x) = x^2$, no es una función inyectiva, ya que existen dos valores de x , en el dominio natural de la función que tienen la misma imagen es decir;

$$f(x) = f(-x) = x^2.$$

Sin embargo, se puede restringir el dominio al intervalo $[0, \infty)$, en el cual es uno a uno, y así obtener: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \in [0, \infty)$.

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$. Ver Figura 2.8.1

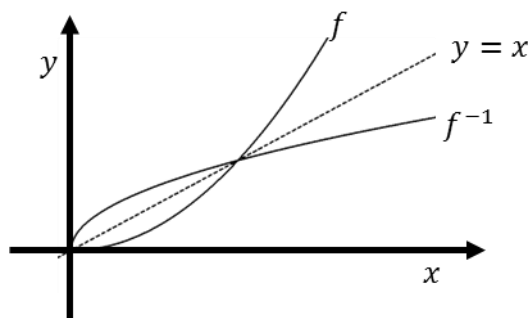


Figura 2.8.1 Gráficas de f y f^{-1} .

Función logarítmica

Puesto que la función logarítmica y la función exponencial son funciones inversas, se puede definir una en función de la otra, así la función logaritmo con base a , donde a es un número positivo diferente de 1, denotada por $\log_a x$ se define por:

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y, \text{----- (1)}$$

Las siguientes expresiones muestran la relación entre estas dos funciones:

$$\mathbf{1)} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2 \quad \text{puesto que} \quad \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2. \quad \mathbf{5)} \log_2 2 = 1 \quad \text{puesto que} \quad 2 = (2)^1.$$

$$\mathbf{2)} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1 \quad \text{puesto que} \quad \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1. \quad \mathbf{6)} \log_2 4 = 2 \quad \text{puesto que} \quad 4 = (2)^2.$$

$$\mathbf{3)} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2 \quad \text{puesto que} \quad \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2. \quad \mathbf{7)} \log_3 3 = 1 \quad \text{puesto que} \quad 3 = (3)^1.$$

$$\mathbf{4)} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \quad \text{puesto que} \quad \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1. \quad \mathbf{8)} \log_3 9 = 2 \quad \text{puesto que} \quad 9 = (3)^2.$$

$$\mathbf{9)} \log_{\frac{1}{3}} 1 = \log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_2 1 = \log_3 1 = 0 \quad \text{puesto que} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2^0 = 3^0 = 1.$$

De esta manera si f es una función definida por

$$f(x) = \log_a x \quad \text{donde} \quad x > 0, x \in D_f, a > 0, a \neq 1, \text{----- (2).}$$

Entonces

$$f^{-1}(x) = a^x \quad \text{donde} \quad x \in D_{f^{-1}}, a > 0, a \neq 1, \text{----- (3).}$$

Aplicando composición de funciones con (2) y (3) se tiene

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\log_a x) = a^{\log_a x} = x \quad \text{para } x \in D_f. \text{----- (4).}$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(a^x) = \log_a a^x = x \quad \text{para } x \in D_{f^{-1}}. \text{----- (5).}$$

Propiedades de logaritmos

Teorema 2.8.1

Si $a > 0$, $a \neq 1$

1. $\log_a x$ esta definida solo si $x > 0$. 4. Si $a > 1$ y $0 < x < 1$, $\log_a x < 0$.

2. $\log_a a = 1$.

5. Si $a > 1$ y $x > 1$, $\log_a x > 0$.

3. $\log_a 1 = 0$.

La relación entre la función exponencial y la función logaritmo natural se obtiene de (4) y (5) al sustituir a por e .

$$\text{De (4) } x = e^{\ln x}, \quad x > 0. \text{----- (6).}$$

$$\text{De (5) } x = \ln e, \quad x \in \mathbb{R}. \text{----- (7).}$$

Aplicación de las propiedades

Ejemplo 2.8.3

Represente por una sola expresión $\log_3 27^x + \log_3 81^x$.

Solución

Por propiedades de logaritmos se escribe

$$\log_3 27^x + \log_3 81^x = \log_3 (27^x)(81^x).$$

$$\text{Por propiedades de exponentes: } 27^x = (3^3)^x = 3^{3x}, \quad 81^x = (3^4)^x = 3^{4x}.$$

Así que:

$$\begin{aligned} \log_3 27^x + \log_3 81^x &= \log_3 (27^x)(81^x). \\ &= \log_3 (3^{3x})(3^{4x}) \quad \text{por propiedades de exponentes} \\ &= \log_3 (3^{7x}) \quad \text{por propiedades de logaritmos} \\ &= 7 \times \log_3 3 \\ &= 7x. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8.4

Resuelva la ecuación $4 \ln(1-x) = 5$.

Solución

Por propiedades de logaritmos se escribe $\ln(1-x)^4 = 5$.

De la relación con la función exponencial $\ln(1-x)^4 = 5$ si y sólo si $(1-x)^4 = e^5$.

Extraer raíz cuarta en ambos lados de la ecuación $1 - x = e^{\frac{5}{4}}$.

Despejar x , y aproximar $x = 1 - e^{\frac{5}{4}} = 1 - e^{\sqrt[4]{5}} \approx -2.61$.

Gráficas de funciones logarítmicas con diferente base

Ejemplo 2.8.4

En la Figura 2.8.2 se muestran graficas de funciones logarítmicas con diferente base.

$$y_1 = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y_2 = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y_3 = \log_2 x, \quad y_4 = \log_3 x, \quad y_5 = \ln x, \quad y_6 = \log x.$$

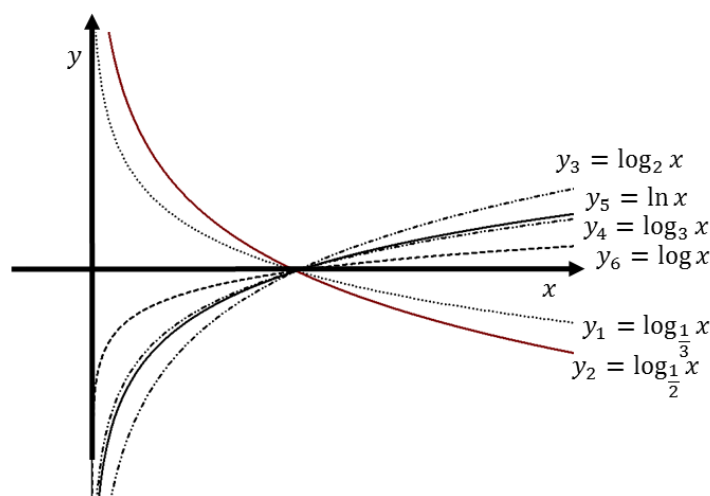


Figura 2.8.2 Gráficas de funciones logarítmicas con diferente base.

Las siguientes son algunas de las propiedades de las funciones logarítmicas.

Propiedades de la función logarítmica

- | | |
|---|---|
| 1) Dominio $(0, \infty)$. | 2) Rango $\mathbb{R}$. |
| 3) Biyectiva (uno a uno). | 4) No interseca al eje y . |
| 5) Intersecta al eje x en el punto $(1, 0)$. | 6) El eje y es asíntota vertical. |
| 7) Si $a > 1$ y $x < 1$ $\log_a x < 0$. | 8) Si $a > 1$ y $x > 1$ $\log_a x > 0$. |
| 9) Si $a < 1$ y $x < 1$ $\log_a x > 0$. | 10) Si $a < 1$ y $x > 1$ $\log_a x < 0$. |

2.9 FUNCIONES CON DOMINIO EN LOS NÚMEROS NATURALES Y RECORRIDO EN LOS NÚMEROS REALES: LAS SUCESIONES INFINITAS.

Cuando un conjunto de objetos o elementos están dados en un orden específico se dice que están en secuencia, en matemáticas tal conjunto se denomina sucesión y se define por.

Definición 2.9.1**Sucesión**

Una sucesión es una función que tiene como dominio los números enteros positivos y recorridos los números reales.

Una sucesión generalmente se denota por $\{a_n\}$, en lugar de $f(n)$, y a los números del recorrido se les denomina elementos o términos de la sucesión.

En una sucesión $\{a_n\}$, a cada número entero positivo n se le asigna un elemento del recorrido a_n , formando un conjunto ordenado de elementos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ donde a_1 se denomina primer elemento a_2 , segundo elemento, etc., a_n , n -ésimo elemento, el término que antecede a a_n , se escribe a_{n-1} y a_{n+1} al que sigue de a_n .

En la sucesión $\{a_n\}$, a_n define la manera en que son obtenidos los elementos de ella.

Ejemplo 2.9.1

Para cada sucesión, escribir los primeros cinco términos.

$$1) \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}. \quad 2) \{b_n\} = \left\{ \frac{n+1}{2n} \right\}.$$

Solución

1) Como los términos de la sucesión se obtiene a partir de la expresión $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ con n entero

positivo, entonces si $n=1$, $a_1 = \frac{1}{1^2} = 1$, $n=2$, $a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, y así sucesivamente formando la sucesión $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$.

2) Los elementos b_n de la sucesión se obtienen de $\left\{ \frac{n+1}{2n} \right\}$, procediendo de forma similar al

ejercicio anterior se tiene: $1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}, \dots$

En ocasiones, se requiere obtener la regla general que determina la forma en que se generan los términos de la sucesión, a partir de algunos términos consecutivos dados.

Ejemplo 2.9.2

Obtener una expresión analítica para el n -ésimo término de la sucesión a partir de los siguientes términos: $2, \frac{3}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{6}{9}, \dots$.

Solución

El numerador es de la forma $(n+1)$ y el denominador de la forma $(2n-1)$, de esta manera

$$a_n = \frac{n+1}{2n-1}.$$

Obtener una regla que permita obtener el término general no siempre es sencillo.

La grafica de una sucesión, se obtiene al localizar en el plano los pares ordenados (n, a_n) .

Ejemplo 2.9.3

En la Figura 2.9.1 se muestra gráficamente los primeros cinco términos de la sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$.

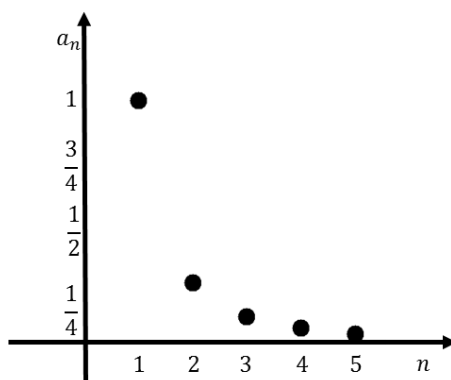


Figura 2.9.1 Gráfica de la sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$

Sucesión monótona**Definición 2.9.2**

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es creciente si $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$ y es decreciente si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$

La sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si es creciente o decreciente.

Ejemplo 2.9.4

Verificar si la sucesión $\left\{\frac{n+2}{3n+1}\right\}$, es creciente.

Solución.

El término n -ésimo de la sucesión es dado por $a_n = \frac{n+2}{3n+1}$, y el siguiente por $a_{n+1} = \frac{n+3}{3n+4}$.

Si la sucesión es creciente, se debe cumplir que, para cualquier n entero positivo:

$$a_n \leq a_{n+1} \text{-----(1)}$$

Al sustituir a_n , y a_{n+1} , en (1) se tiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{n+2}{3n+1} \leq \frac{n+3}{3n+4} \text{-----}(2)$$

Si la desigualdad es cierta para todo n entero positivo, la sucesión es creciente.

Se resuelve $\frac{n+2}{3n+1} \leq \frac{n+3}{3n+4}$.

$$\frac{n+2}{3n+1} \leq \frac{n+3}{3n+4} \Leftrightarrow (n+2)(3n+4) \leq (n+3)(3n+1) \quad \text{Como } (3n+1) \text{ y } (3n+4) \text{ son positivos}$$

no cambia el sentido de la desigualdad

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 4n + 6n + 8 \leq 3n^2 + n + 9n + 3 \text{ al simplificar se tiene}$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq 3.$$

Como la desigualdad equivalente no es cierta, entonces la sucesión es decreciente y por lo tanto monótona.

Ejemplo 2.9.5

Verificar si la sucesión $\left\{ \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \right\}$, es monótona.

Solución

Los términos de la sucesión se obtienen a partir de la expresión $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$, con n entero

positivo, entonces si $n=1$, $a_1 = \frac{(-1)(1)}{1^2 + 1} = -\frac{1}{2}$, $n=2$, $a_2 = \frac{(-1)^2(2)}{2^2 + 1} = \frac{2}{5}$, $a_3 = -\frac{3}{10}$, $a_4 = \frac{4}{17}$..., y

así sucesivamente formando la sucesión $-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, \frac{4}{17}, -\frac{5}{26}, \dots$

Se observa que $a_n \leq a_{n+1}$ no se cumple por la alternancia en los valores positivos y negativos de los términos por la misma razón $a_n \leq a_{n+1}$ tampoco se cumple. Por lo tanto la sucesión no es monótona.

Ejemplo 2.9.6

Determine si la sucesión $\left\{ \frac{e^n}{n!} \right\}$, es creciente.

Solución

Si la sucesión es creciente se debe cumplir, para cualquier n entero positivo que

$$a_n \leq a_{n+1} \text{-----} (1).$$

Dónde:

$$a_n = \frac{e^n}{n!} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \text{-----}(2).$$

Al sustituir (2) en (1) se tiene la desigualdad:

$$\frac{e^n}{n!} \leq \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \text{-----}(3)$$

Si la desigualdad es cierta para todo n entero positivo, la sucesión es creciente.

Se resuelve: $\frac{e^n}{n!} \leq \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\frac{e^n}{n!} \leq \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \Leftrightarrow (n+1)!e^n \leq e^{n+1}n! \quad \text{Como } (n!) \text{ y } (n+1)! \text{ son positivos}$$

no cambia el sentido de la desigualdad

$$\Leftrightarrow (n+1)n!e^n \leq e^{n+1}n! \quad \text{simplificar}$$

$$\Leftrightarrow (n+1) \leq e.$$

Como $a_n \geq a_{n+1}$ para $n \geq 2$, la desigualdad se cumple, la sucesión es decreciente y por consiguiente monótona.

2.10 FUNCIÓN IMPLÍCITA

Cuando una función f con variable dependiente y , variable independiente x , es definida por: $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ ----- (1). Se dice que f es una función explícita.

Si (1) se escribe: $18x^2 - 3x - 6y = \frac{1}{3}$ ----- (2)

Se dice que la función f , está implícita en (2) ya que al despejar y se obtiene (1)

En la ecuación de dos variables x, y , representada por $F(x, y) = 0$, los puntos (x, y) que la satisfacen forman la gráfica de la ecuación. Por otra parte los puntos $(x, f(x))$ que la satisfacen tal que $y = f(x)$ forman la gráfica de la función implícita, es decir la parte de la gráfica de la ecuación en donde para cada valor de x , le corresponde uno sólo de y .

Ejemplo 2.10.1

En la ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, está definida y como función implícita de x , es decir $y = f(x)$.

Obtener tres funciones implícitas.

Solución.

De $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ----- (1) despejar y en términos de x .

$$y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2} \text{-----}(2)$$

De (2) se obtienen dos funciones:

$$f_1 = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \text{ (3), y } f_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \text{ (4).}$$

La tercera función se obtiene al formar una función por partes con (3) y (4).

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} & -3 \leq x < 0, \\ -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} & 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

Todas las combinaciones de (3) y (4), tal que la relación entre x, y cumpla con la definición de función será una función implícita en (1).

Las gráficas de f_1, f_2 y f_3 , se muestran en la Figura 2.10.1.

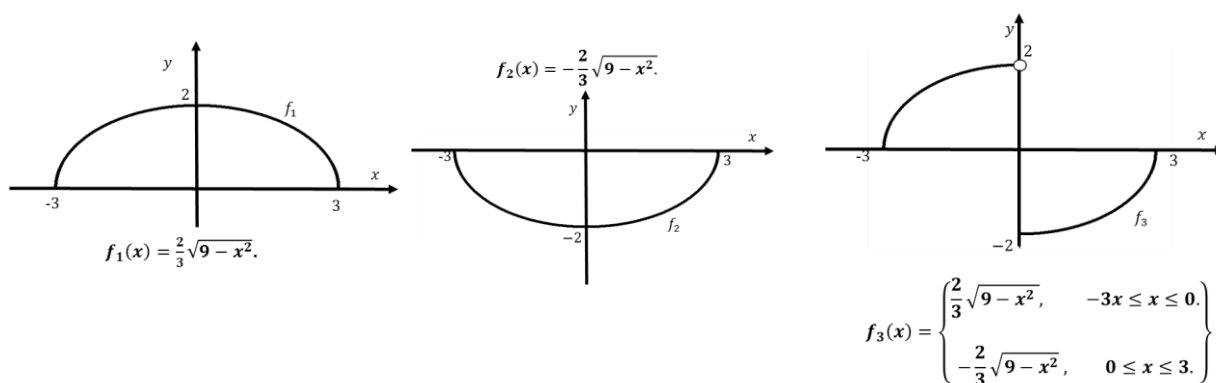


Figura 2.10.1 Gráficas de las funciones implícitas.

Si en el ejemplo anterior se hubiera despejado x , se tendría una función implícita con variable independiente y .

2.11 CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES POR SUS PROPIEDADES

Además de clasificar las funciones como inyectivas, suprayectivas, biyectivas, algebraicas, trascendentes, también se clasifican según sus propiedades en: crecientes, decrecientes, par, impar, simétricas y periódicas.

2.11.1 Función creciente y decreciente.

La idea de función creciente y decreciente se puntualiza en la siguiente definición.

Definición 2.11.1**Función creciente y decreciente**

Sea f una función definida en un intervalo I con $x_1, x_2 \in I$ tal que $x_1 < x_2$ entonces

- a) La función f es creciente si $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- b) La función f es decreciente si $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- c) La función f es estrictamente creciente si $f(x_1) < f(x_2)$.
- d) La función f es estrictamente decreciente si $f(x_1) > f(x_2)$.

Por ejemplo, en la Figura 2.11.1, se observa que al aumentar los valores de x , de -1 a 2, los valores de la función aumentan de 0 a 9, y disminuyen de 9 a 0 al aumentar los valores de x de 2 a 5, en el primer caso se dice que la función es creciente y decreciente en el segundo.

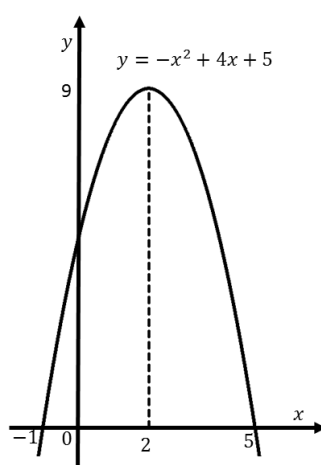


Figura 2.11.1 Gráfica de una función creciente y decreciente.

Ejemplos de funciones crecientes y decrecientes.

Ejemplo 2.11.1

a) La función f definida por $f(x) = e^x$, es estrictamente creciente, ya que para cualquier par de valores $x_1 < x_2$ se tiene: $f(x_1) < f(x_2)$, es decir $e^{x_1} < e^{x_2}$. Ver Figura 2.11.2.a

b) La función f definida por $f(x) = \ln x$ es estrictamente creciente, ya que para cualquier par de valores $x_1 < x_2 \in D_f$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$ ya que $\ln x_1 < \ln x_2$. Ver Figura 2.11.2.b.

c) La función f definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ es estrictamente decreciente en su dominio ya que para cualesquiera $x_1 < x_2 \in D_f$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$ puesto que $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Ver Figura 2.11.3.c.

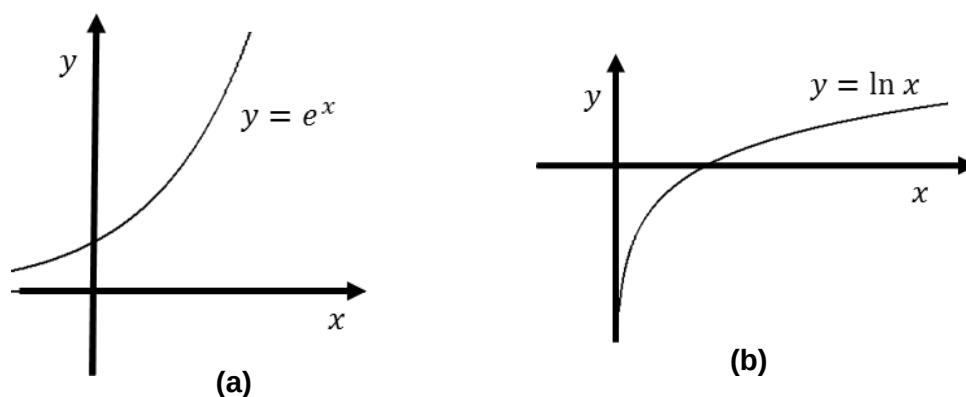


Figura 2.11.1 (a) y (b) Gráfica de funciones crecientes.

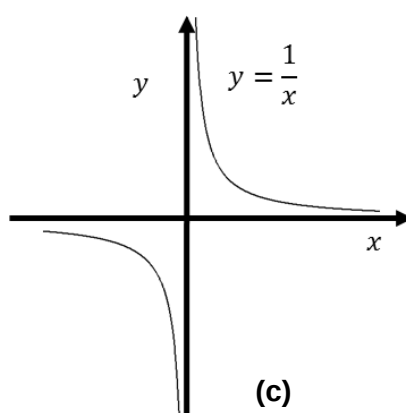


Figura 2.11.1 (c) Gráfica de una función decreciente.

Propiedades

1. Una función f estrictamente creciente o estrictamente decreciente es inyectiva (uno a uno).
2. Una función f estrictamente creciente o estrictamente decreciente tiene inversa.

Una mirada a las gráficas de la Figura 2.11.2 a y b, muestra que al trazar una recta tangente en algún punto de la gráfica, la pendiente de la recta tangente es positiva, en tanto que es negativa para la Figura 2.11.3.c, en temas posteriores se hará hincapié en esta característica.

2.11.2 Función par e impar

Un punto $P'(-x, y)$ es simétrico del punto $P(x, y)$ respecto del eje y , si este eje, es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. Ver Figura 2.11.2.(a)

Si la gráfica de una función f es simétrica respecto del eje y , se dice que es **función par** y satisface $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D_f$.

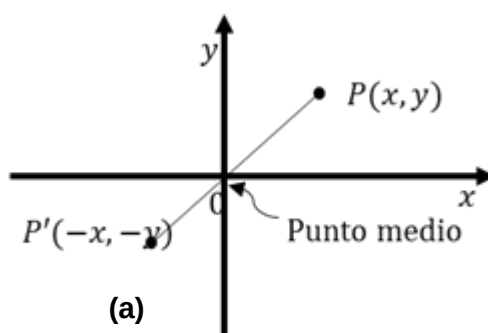


Figura 2.11.2 (a) P' simétrico de P respecto del eje

Un punto $P'(-x, -y)$, es simétrico del punto $P(x, y)$ respecto del origen O , si O es el punto medio del segmento determinado por P y P' . Ver Figura 2.11.2. (b).

Si la gráfica de una función f es simétrica respecto del origen, se dice que f es **función impar** y satisface $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D_f$.

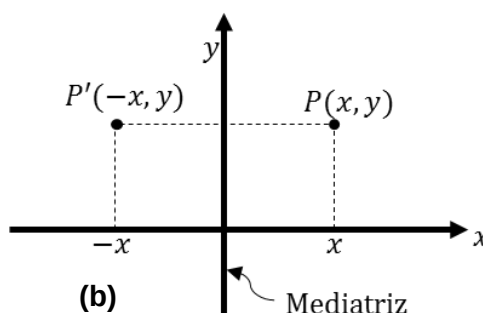


Figura 2.11.2 (b) P' simétrico de P respecto del origen.

Ejemplo 2.11.2

En cada caso, determinar si la función f dada es par, impar o ninguna de las dos cosas.

a) $f(x) = x^4 + x^2$.

Solución

Se tiene $f(x) = x^4 + x^2$, evaluando con $-x$

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x).$$

Así, f es par.

b) $f(x) = x^3 - x$

Solución

Se tiene $f(x) = x^3 - x$, evaluando con $-x$

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Así, f es impar.

c) $f(x) = x^3 + x^2 + x$

Solución

Se tiene $f(x) = x^3 + x^2 + x$ evaluando con $-x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x)^2 + (-x) \\ &= -x^3 + x^2 - x \neq f(x) \\ &= -(x^3 - x^2 + x) \neq -f(x). \end{aligned}$$

Como $f(-x) \neq f(x)$ entonces f no es función par, además $f(-x) \neq -f(x)$ por lo que tampoco es impar.

d) $f(x) = \sin x$.

Solución

Se tiene $f(x) = \sin x$ evaluando con $-x$

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

Como $f(-x) = -f(x)$, entonces f es impar.

e) $f(x) = \cos x$.

Solución

Se tiene $f(x) = \cos x$, evaluar con $-x$

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x).$$

Como $f(-x) = f(x)$, entonces f es par.

2.11.3 Función simétrica.

En la tráficación de funciones, es útil conocer si la gráfica de una función f es simétrica respecto de un punto, o de una recta. En el plano de coordenadas xy , usualmente el punto es el origen y la recta, el eje y , para trazar la gráfica de la inversa de una función, es útil la recta $y = x$.

La propiedad de una función de ser par o impar, permite saber si la gráfica tiene simetría respecto del eje y o respecto del origen, la gráfica de una función f es simétrica respecto del eje y , si es función par, es decir si cumple $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D_f$, es simétrica respecto del origen, si es función impar, es decir si cumple $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D_f$.

Si la función f es par, al hacer su gráfica es suficiente graficar puntos (x, y) , para $x \geq 0$, y reflejarla respecto del eje y para obtener la gráfica de $x < 0$.

Si la función f es impar es suficiente graficar puntos (x, y) para $x \geq 0$, y reflejarla respecto del origen.

Ejemplo 2.11.3

Utilizar el concepto de simetría para trazar la gráfica de la función $f(x) = x^4 + x^2$.

Solución.

Se tiene $f(x) = x^4 + x^2$, como la función es par, (ver ejemplo 2.11.2.a), se determinan algunos puntos para $x \geq 0$.

x	0	1	2	3
$y = f(x)$	0	2	20	90

Intersección con los ejes:

Con el eje y : Si $x = 0$, entonces $y = 0$, se obtiene el punto de intersección $(0,0)$.

Con el eje x : Si $y = 0$, entonces $x^4 + x^2 = 0$. Al resolver la ecuación se obtiene el punto de intersección $(0,0)$.

La grafica para $x \geq 0$ se muestra en la Figura 2.11.3.(a) y la gráfica completa en la figura 2.11.3.(b)

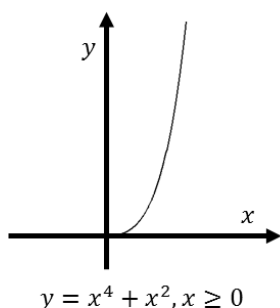


Figura 2.11.3. (a) Gráfica de la función $f(x) = x^4 + x^2$, para $x \geq 0$.

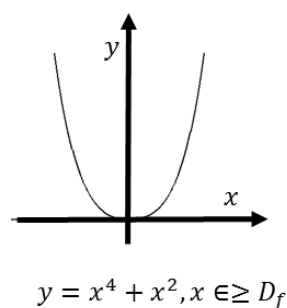


Figura 2.11.3. (b). Gráfica de la función $f(x) = x^4 + x^2$, para $x \in D_f$

Ejemplo 2.11.4

Utilizar el concepto de simetría para trazar la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x$.

Solución.

Se tiene $f(x) = x^3 - x$, como la función es impar, ver ejemplo 2.11.2.b, se determinan algunos puntos para $x \geq 0$

x	0	1	2	2	$\frac{1}{2}$
$y = f(x)$	0	0	6	24	$-\frac{3}{8}$

Intersección con los ejes:

Con el eje y : Si $x = 0$ entonces $y = 0$ se obtiene el punto de intersección $(0, 0)$.

Con el eje x : Si $y = 0$ entonces $0 = x^3 - x$ se resuelve la ecuación para obtener el punto de intersección.

$$\begin{aligned}x^3 - x &= 0 \\x(x^2 - 1) &= 0 \\x = 0, x^2 - 1 &= 0 \\x^2 &= 1 \\x &= \pm 1.\end{aligned}$$

Se obtienen los puntos $(0, 0)$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

La grafica para $x \geq 0$ se muestra en la Figura 2.11.6 y la gráfica completa en la Figura 2.11.4.(a) y 2.11.4.(b).

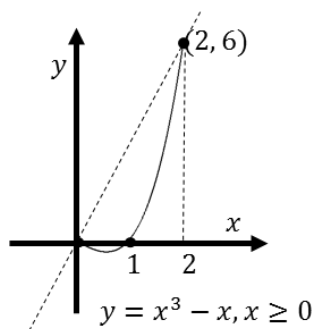


Figura 2.11.4. (a) Gráfica de $f(x) = x^3 - x$, para $x \geq 0$

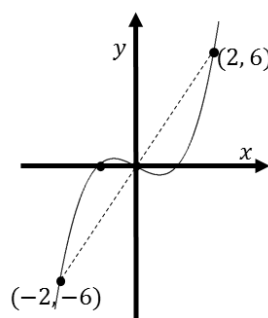


Figura 2.11.4. (b) Gráfica de $f(x) = x^3 - x$, para $x \in D_f$.

2.11.4 Función periódica

Una función f , tal que $f(x + p) = f(x)$, se dice que es periódica de periodo p . Al menor número positivo p , que cumple la propiedad se denomina periodo fundamental.

Las funciones periódicas comunes son las funciones trigonométricas, así se tiene que:

$$f(x) = \text{sen } x, \text{ entonces } f(x + p) = \text{sen}(x + p) = \text{sen } x, \quad p = 2\pi.$$

$$f(x) = \text{cos } x, \text{ entonces } f(x + p) = \text{cos}(x + p) = \text{cos } x, \quad p = 2\pi.$$

$$f(x) = \text{tan } x, \text{ entonces } f(x + p) = \text{tan}(x + p) = \text{tan } x, \quad p = \pi.$$

$$f(x) = \text{cot } x, \text{ entonces } f(x + p) = \text{cot}(x + p) = \text{cot } x, \quad p = \pi.$$

$$f(x) = \text{sec } x, \text{ entonces } f(x + p) = \text{sec}(x + p) = \text{sec } x, \quad p = 2\pi.$$

$$f(x) = \text{csc } x, \text{ entonces } f(x + p) = \text{csc}(x + p) = \text{csc } x, \quad p = 2\pi.$$

Ejemplo 2.11.5

Verificar que el valor funcional de $f(x) = \sin x$, para $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, y $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi$, son iguales.

Solución.

Evaluar $f(x) = \sin x$ en $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, y en $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Ya que la función seno es impar:

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ y } f\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Solución alternativa

Se tiene $f(x) = \sin x$.

De la identidad trigonométrica $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

Aplicar a $f(x) = \sin(x + 2\pi)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x + 2\pi) = \sin x \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos x \\ &= \sin x(1) + (0) \cos x \\ &= \sin x. \end{aligned}$$

Por lo que: $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Las siguientes funciones también son periódicas.

Ejemplo 2.11.6

Grafique la siguiente función periódica.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases} \text{ periodo } 1.$$

Algunos pares ordenados son

x	1	2	3	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$f(x)$	0	0	3	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

En la Figura 2.11.5 se muestra la gráfica

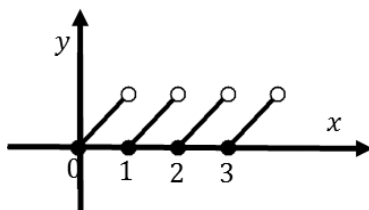


Figura 2.11.5. Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1, \\ 0 & x = 1. \end{cases}$ periodo 1.

Ejemplo 2.11.7

Grafique la siguiente función periódica. $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1, \\ -x & 1 \leq x < 2. \end{cases}$ periodo 2.

Para valores de x en el intervalo $[0, 1)$, la gráfica de f es la función identidad y para $x \in [1, 2)$, es la negativa de la identidad. En la Figura 2.11.6, se muestra la gráfica:

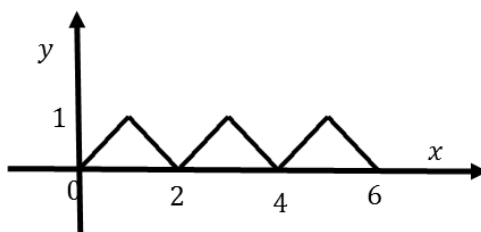


Figura 2.11.6 Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1, \\ -x & 1 \leq x < 2. \end{cases}$ periodo 2.

2.12 TRASLACIÓN DE FUNCIONES

Una traslación de la gráfica de una función es un tipo de transformación rígida que solo la cambia de posición en el plano xy , conservando su forma.

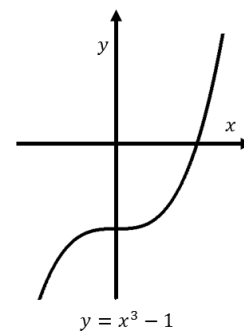
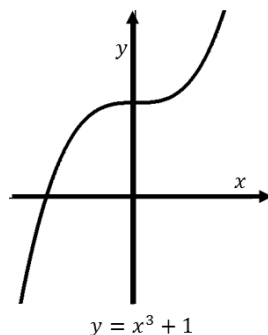
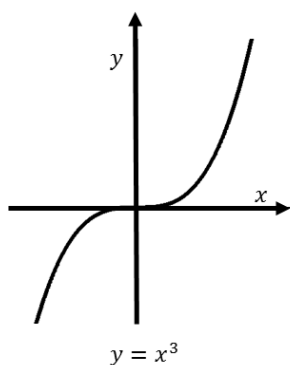
Se consideran cuatro tipos de traslaciones para la gráfica de la función f definida por $y = f(x)$.

Sea $y = f(x)$ y c una constante positiva, se tiene

- 1) $y = f(x) + c$ es la gráfica de f , trasladada c unidades verticalmente hacia arriba.
- 2) $y = f(x) - c$ es la gráfica de f , trasladada c unidades verticalmente hacia abajo.
- 3) $y = f(x + c)$ es la gráfica de f , trasladada c unidades horizontalmente hacia la izquierda.
- 4) $y = f(x - c)$ es la gráfica de f , trasladada c unidades horizontalmente hacia la derecha.

Ejemplo 2.12.1

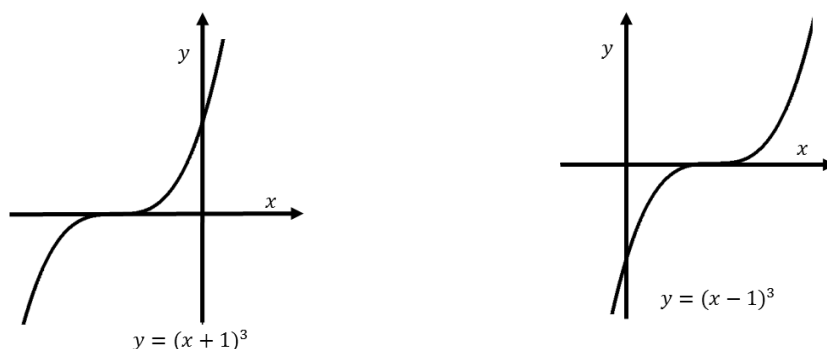
En la Figura 2.12.1 se muestra las traslaciones verticales y horizontales de la función f definida por $f(x) = x^3$ cuando $c = 1$.



a. Posición inicial de f .
hacia arriba

b f trasladada 1 unidad verticalmente
hacia abajo

c. f trasladada 1 unidad verticalmente



- d. f trasladada 1 unidad horizontalmente hacia la izquierda c. f trasladada 1 unidad horizontalmente hacia la derecha

Figura 2.12.1 Gráfica de la función $f(x) = x^3$ con traslaciones cuando $c = 1$.

La gráfica de una función f se puede obtener como resultado de traslaciones verticales y horizontales. Como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.12.2

Mostrar una secuencia de traslaciones verticales y horizontales que indiquen como se obtiene la gráfica de la función $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$.

Solución

Se tiene $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$.

A. Tomar $g_1(x) = \cos x$, como función inicial, trasladar $\frac{\pi}{2}$ unidades horizontalmente hacia la derecha, se obtiene:

$$g_2(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

B. Trasladar 2 unidades verticalmente hacia arriba, se obtiene:

$$g_3(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$$

C. Se obtiene así la función original: $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$. Ver Figura 2.12.2.

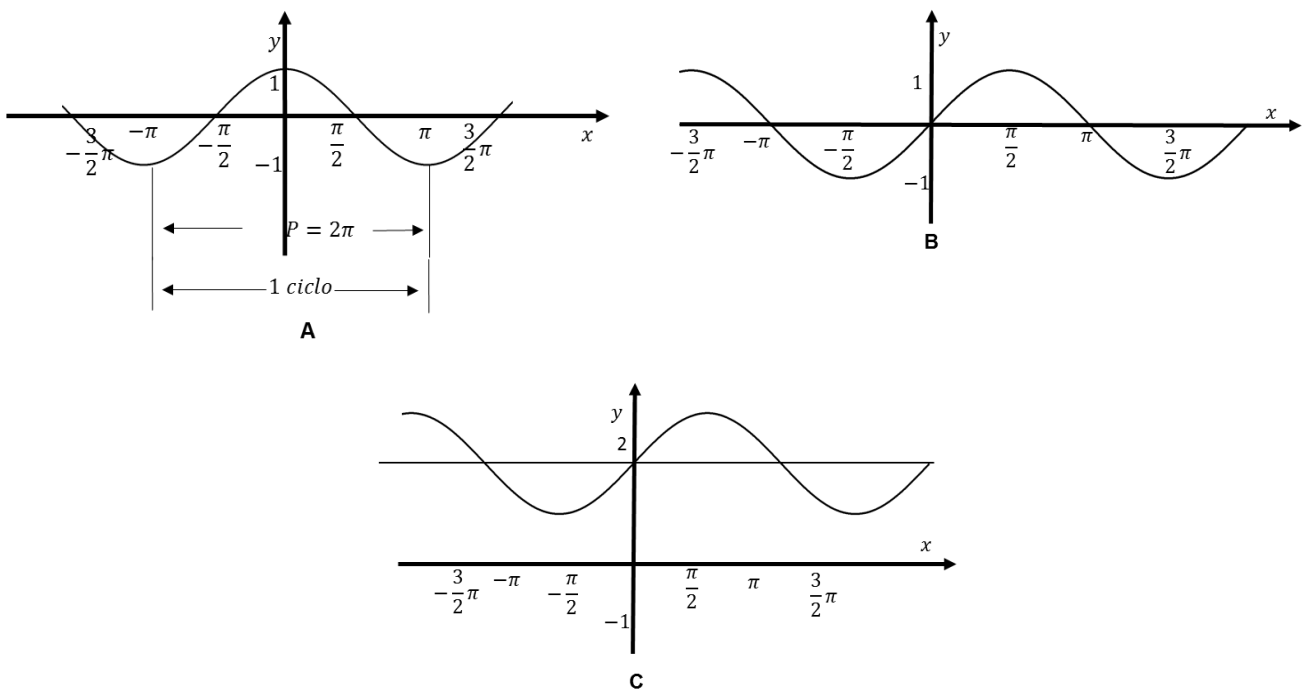


Figura 2.12.2 Gráfica de la función como resultado de traslaciones.

Unidad 2

Ejercicios propuestos

Determine el dominio de las siguientes funciones.

$$1) f(x) = \frac{1-x}{x+1}. \quad 2) f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+5}}. \quad 3) f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{4-x}.$$

Determine si la función dada es inyectiva, suprayectiva, biyectiva o ninguna de las dos cosas.

$$4) f(x) = x^3 + 5 \quad 5) f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \quad 6) f(x) = x + 1.$$

Determine el dominio y haga un bosquejo de la gráfica para la función dada

$$7) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}. \quad 8) f(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x - 2}. \quad 9) f(x) = \sqrt{x^2 - x}.$$

$$10) f(x) = \frac{x-2}{x+2}. \quad 11) f(x) = \frac{x^2-1}{1-x}. \quad 12) f(x) = \frac{1}{x-2} + 3.$$

$$13) f(x) = \sqrt{1-2x}. \quad 14) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}. \quad 15) f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$16) f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1. \quad 17) f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1. \quad 18) f(x) = \log_4 x.$$

$$19) f(x) = \log x - 2. \quad 20) f(x) = 2\ln(x-1). \quad 21) f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ -x, & x > 1 \end{cases}.$$

$$22) f(x) = |x| + 4. \quad 23) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 1-x, & \pi < x \end{cases}.$$

Determine si la función dada es uno a uno. En caso afirmativo obtenga su inversa. Grafique la función y su inversa.

$$24) f(x) = x^5 + 3. \quad 25) f(x) = \sqrt{x^3 + 8}. \quad 26) f(x) = 2e^x. \quad 27) f(x) = e^{x+1}.$$

Suponga que en la ecuación dada existe una función f implícita tal que . Obtenga por lo menos tres funciones implícitas y grafíquelas.

$$28) 3x^2 + 4y^2 - 5 = 0. \quad 29) xy^2 - 1 = 0.$$

Grafique las siguientes funciones

$$30) f(x) = |-2\sin(2x)|. \quad 31) f(x) = \arcsen x - 1. \quad 32) f(x) = \arctan x + 2.$$

Determine el periodo en las siguientes funciones.

33) $f(x) = 4\sin(\pi - 2x)$. **34)** $f(x) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$.

Sin utilizar calculadora obtenga el valor exacto de la expresión dada.

35) $\arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **36)** $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **37)** $\arcsen\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Sean las funciones f, g, h definidas por $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = x^2 + 1$, efectuar las operaciones indicadas y determinar el dominio de la función obtenida.

38) $f + g$. **39)** $(f)(g)$. **40)** $\frac{g}{h}$. **41)** $g - h$. **42)** $f \circ g$. **43)** $h \circ f$. **44)** $f \circ f$.

Obtenga una fórmula para el término a_n para las sucesiones.

45) $\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{5}{32}, \frac{7}{64}, \dots$ **46)** $1, -\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1-\frac{2}{3}}, -\frac{1}{1-\frac{3}{4}}, \dots$

Determine si la sucesión dada es creciente, decreciente o ninguna de las dos cosas.

47) $\left\{\frac{8^n}{n!}\right\}$. **48)** $\left\{\frac{n-2}{n^2+1}\right\}$.

Determine si la función dada es par, impar o ninguna de las dos cosas. Verifique si las gráficas de las funciones son simétricas respecto del eje y , del origen o ninguna de las dos cosas.

49) $f(x) = x\sin x$. **50)** $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. **51)** $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos x$.

Obtenga la ecuación final que define la función f , después de que a su gráfica, se le han aplicado las traslaciones indicadas. Dibuje la gráfica final.

52) $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Traslada dos unidades a la izquierda y cinco unidades hacia abajo.

53) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Traslada dos unidades a la izquierda y cuatro unidades hacia arriba.

54) $f(x) = \sin x$. Traslada $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda, dos unidades hacia abajo y expandida por un factor de tres.

A la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}x$, aplique las transformaciones indicadas y grafique la función así obtenida.

55) $g(x) = f(x) - 3.$ **56)** $g(x) = f(x) + 2.$ **57)** $g(x) = f(x - 3).$

58) $g(x) = f(x + 2).$ **59)** $g(x) = -f(x).$ **60)** $g(x) = 2f(x).$

61) $g(x) = \frac{1}{3}f(x).$ **62)** $g(x) = f(-x).$

CAPÍTULO 3

LÍMITES Y CONTINUIDAD

COMPETENCIA ESPECÍFICA A DESARROLLAR

Comprender el concepto de límite de funciones, y aplicarlo, para determinar analíticamente la continuidad de una función en un punto, o en un intervalo, y mostrar gráficamente los diferentes tipos de discontinuidad.

3.1 NOCIÓN DE LÍMITE

Un enfoque intuitivo del límite de una función, se obtiene cuando se observa cómo es su comportamiento, es decir, hacia qué valor se acerca cuando la variable independiente toma valores sucesivos cada vez más próximos a un valor dado. La idea se ilustra con el siguiente ejemplo.

Sea f una función definida por $f(x) = x^2 - x$.

Determinar hacia qué valor se aproxima la función, cuando la variable independiente se acerca a, -1 .

Solución

Para observar el comportamiento de la función, se elabora una tabla con valores sucesivos de la variable independiente x , que sean menores que el número -1 , pero que estén cada vez más próximos a él, y valores sucesivos de x , que sean mayores que el número -1 , pero que a su vez estén también más próximos a -1 .

Tabla 3.1.1

Valores sucesivos de x , menores y mayores que, -1 , pero cada vez más próximos a -1 .

x	-1.2	-1.1	-1.01	-1.001	-1	-0.999	-0.99	-0.9	-0.8
$f(x)$	2.6400	2.3100	2.0301	2.0030	2	1.9970	1.9701	1.7100	1.4400

De los datos de la Tabla se tiene:

Cuando x , toma valores sucesivos menores a -1 , pero cada vez más próximos a él, los valores de la función, se aproximan cada vez más a 2.

En notación de límites se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - x) = 2. \text{-----} (1).$$

Se lee “el límite de la función cuando x , tiende a menos uno por la izquierda es dos”.

Cuando x , toma valores sucesivos mayores a -1 , pero cada vez más cerca de él, los valores de la función se aproximan cada vez más a 2. En notación de límites se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - x) = 2. \text{-----} (2).$$

Se lee “el límite de la función cuando x tiende a menos uno por la derecha, es dos”

En ambos casos, el valor de la función se puede aproximar tanto al número 2 como se quiera, siempre y cuando, la variable x , se aproxime lo suficiente al número -1 . En notación de límite se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x) = 2. \text{-----} (3).$$

Con esta notación se expresa que el límite lateral por la izquierda, como se denomina (1), y el límite lateral por la derecha, como se denomina (2), son iguales, (3) generalmente se denomina límite bilateral, o solamente, límite de la función. En notación de límites:

$$\text{Sí } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L, \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L. \text{ Entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \text{-----} (4)$$

Cuando los límites laterales no son iguales, se dice que el límite de la función no existe.

En la Figura 3.1.1 se visualiza el comportamiento de la función f cerca de $x = -1$.

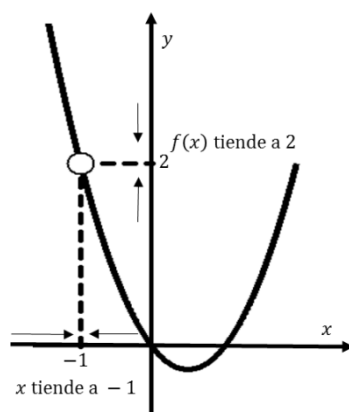


Figura 3.1.1 Valores de x próximos a -1 para la función $f(x) = x^2 - x$.

Definición informal de límite

La siguiente es una definición informal del concepto de límite de una función:

Sí los valores de $f(x)$ se pueden aproximar arbitrariamente al número L , tomando valores de x , cerca de a , pero no igual a a , el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a , es L . Se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad \text{----- (5)}$$

El número a , al que tiende la variable x , para obtener el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, no necesariamente tiene que estar en el dominio de la función.

Ejemplo 3.1.1

Determinar el límite de la función definida por $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ cuando x , tiende a 3.

Solución

Al evaluar la función con valores de x , próximos a 3, por la izquierda $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, y por la derecha

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, se obtienen los valores que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 3.1.2

Valores sucesivos de x , menores y mayores que 3 pero cada vez más próximos a 3.

x	2.8	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1	3.2
$f(x)$	5.9	5.99	5.999	5.999	6	6.001	6.01	6.1	6.2

De los datos de la Tabla se observa que:

Cuando $x \rightarrow 3^-$, $f(x) \rightarrow 6$ y cuando $x \rightarrow 3^+$, $f(x) \rightarrow 6$.

Como en los dos casos la tendencia en los valores de la función es hacia 6 entonces se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

En la Figura 3.1.2 se visualiza el comportamiento de la función f cerca de $x = 3$

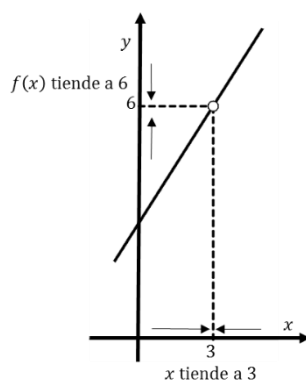


Figura 3.1.2 Valores de x próximos a 3 para la función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Límite de una función definida por partes.

Ejemplo 3.1.2

Determine $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ -x^2 + 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$.

Solución

Se evalúa la función con valores de x , próximos a 1 por la izquierda, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, y por la derecha

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, se muestran los resultados en la Tabla 3.1.3.

Tabla 3.1.3

Valores sucesivos de x menores y mayores que 1 pero cada vez más próximos a 1.

x	0.8	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.6400	1.7100	1.9701	1.9970	2	1.9999	1.9999	1.9900	1.9600

Es importante observar que los valores de la función, se obtienen evaluando $f(x) = x^2 + 1$, cuando los valores sucesivos de x , son por la izquierda, ya que para $x < 1$, la función es definida por la primera parte.

Y por la derecha con $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, ya que los valores de $x > 1$, definen la segunda parte de la función.

A partir de los datos de la Tabla 3.1.3 se tiene que:

Cuando $x \rightarrow 1^-$, $f(x) \rightarrow 2$, es decir $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.

Y cuando $x \rightarrow 1^+$, $f(x) \rightarrow 2$, es decir $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.

Como el comportamiento de la función es igual para los dos casos entonces se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

En la Figura 3.1.3 se muestra geoméricamente la tendencia de la función.

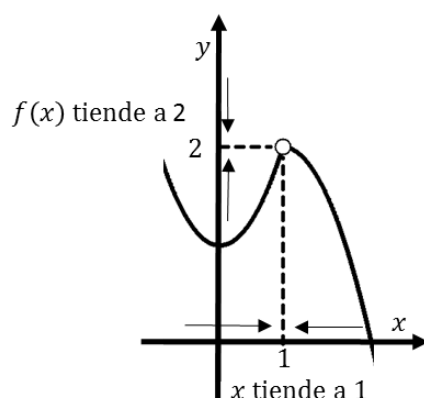


Figura 3.1.3 Valores de x próximos a 1 para la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1. \\ -x^2 + 2x + 1, & x > 1. \end{cases}$

El siguiente ejemplo muestra que no siempre existe el límite de la función.

Ejemplo 3.1.3

Sea f una función definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x < 1. \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$. Determine $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Solución

La Tabla 3.1.4 muestra los valores de la función para los correspondientes de x , los valores de la función cuando x , tiende a 1 por la izquierda se obtienen evaluando $f(x) = -x^2 + 2$ y con $f(x) = x + 1$ cuando x , tiende a 1 por la derecha.

Tabla 3.1.4

Valores sucesivos de x , menores y mayores que 1 pero cada vez más próximos a 1.

x	0.8	0.9	0.99	0.999	$\frac{1}{2}$	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.3600	1.1900	1.0199	1.0019	1.5	2.001	2.01	2.1	2.2

De los datos de la tabla se observa que:

Cuando $x \rightarrow 1^-$, $f(x) \rightarrow 1$, es decir $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.

Y cuando $x \rightarrow 1^+$, $f(x) \rightarrow 2$, es decir $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.

Puesto que los límites laterales no son iguales se dice que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ No existe.

Se ilustra el comportamiento de la función en la Figura 3.1.4.

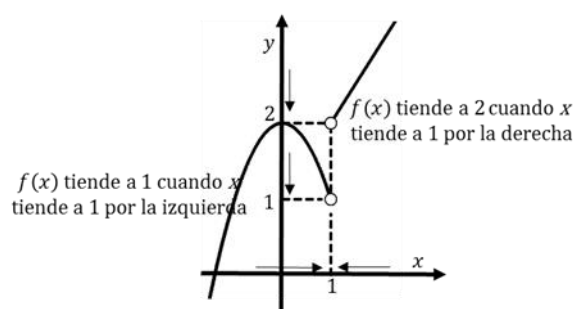


Figura 3.1.4 Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x < 1. \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$

El siguiente ejercicio muestra lo importante que es la elección de los valores sucesivos de la variable independiente al determinar el límite de una función.

Ejemplo 3.1.4

Determinar $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Solución

La Tabla 3.1.5, muestra los valores de la función para los valores de x , próximos a cero por la izquierda y por la derecha.

Tabla 3.1.5

Valores sucesivos de x , menores y mayores que cero, pero cada vez más próximos a 0.

x	-0.2	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.2
$f(x)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

De la información obtenida, pareciera que el límite de la función es cero cuando x , tiende a cero, ya que, la manera de elegir los valores de x , da como resultado que los valores de la función sean cero.

Sin embargo, el comportamiento de la función próximo a cero no es así, como se podrá observar más adelante.

Si los valores de x , son: $\pm 1, \pm 0.2, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001$.

Se pueden representar por: $\pm 1, \pm \frac{2}{10}, \pm \frac{1}{10}, \pm \frac{1}{100}, \pm \frac{1}{1000}$.

Al evaluar la función:

$$f(1) = \sin(\pi) = 0, \quad f\left(\frac{2}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{10}}\right) = \sin(5\pi) = 0, \quad f\left(\frac{1}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{1}{10}}\right) = \sin(10\pi) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{100}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{1}{100}}\right) = \sin(100\pi) = 0, \quad f\left(\frac{1}{1000}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{1}{1000}}\right) = \sin(1000\pi) = 0.$$

Como se puede observar, ésta forma de asignar valores sucesivos a x , , cerca de cero, continuara dando el mismo resultado para la función. Puesto que:

$$\operatorname{sen}(n\pi) = 0, \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Para los valores negativos, se obtiene el mismo resultado.

Por otra parte se tiene,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 1 \quad \text{sí} \quad \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}$$

Al despejar x , $x = \frac{2}{1+4n}$, ésta expresión, proporciona una forma de asignar valores sucesivos a x , cerca de cero, para los cuales el valor de la función será uno, más aún, si los valores de x , dados por la expresión $x = \frac{2}{3+4n}$, $n \in \mathbb{Z}$, se aproximan a cero, el valor de la función es -1 .

Conclusión

Como los valores de la función no tienden a un único valor cuando x , tiende a cero se dice que el límite no existe, se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right), \text{ no existe, o } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe.}$$

3.2 DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA VARIABLE REAL

En la idea intuitiva de límite de una función, se utilizan las frases, “suficientemente cerca”, “arbitrariamente cerca”, “suficientemente próximo” etc., tales frases no tienen precisión matemática, y por lo tanto, no se utilizan en la definición formal del límite de una función, sin embargo, se les puede asignar un carácter preciso, al decir que $f(x)$ esta “suficientemente cerca” de L , significa que, la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee, denotando la cantidad tan pequeña como se desee por ε (épsilon), se escribe:

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Siempre que se elija x en el dominio de la función, “suficientemente próximo” a un valor fijo a , pero diferente de a , y escribir:

$$0 < |x - a| < \delta.$$

En donde δ (delta), representa una cantidad positiva, y al escribir 0, en el lado izquierdo de la igualdad, significa que $x \neq a$, y así, obtener la definición formal de limite.

Definición formal de límite

Sea f una función definida en un intervalo que contenga al número a , excepto en el número a , mismo. Entonces, se dice que límite de $f(x)$ cuando x , tiende a a , es L y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Es importante notar que, el proceso de límite se inicia con la asignación de un número $\varepsilon > 0$ a la distancia entre $f(x)$ y L , con la implicación de que, x , debe cumplir la desigualdad $0 < |x - a| < \delta$ en donde el número $\delta > 0$ es función del número ε .

En la figura 3.2.1 se muestra geoméricamente el enunciado de la definición, así para un $\varepsilon > 0$ dado $|f(x) - L| < \varepsilon$ si y sólo si $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, es decir $f(x)$ está en el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, con la implicación de que $0 < |x - a| < \delta$, si y sólo si $a - \delta < x < a + \delta$, es decir x , debe estar en el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y debe ser diferente de a .

Figura 3.2.1, representación geométrica de la definición de límite.

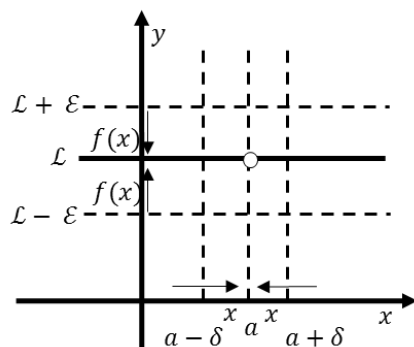


Figura 3.2.1 Representación geométrica de la definición de límite de una función.

Ejemplo 3.2.1

Con la información que se proporciona, obtener un δ , tal que cumpla con la definición de límite.

$$\varepsilon = 0.1 \quad a = 5 \quad L = 11 \quad f(x) = 3x - 4.$$

Solución

Se tiene $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$ -----(1).

Sustituyendo valores en (1)

$$|(3x - 4) - 11| < 0.1 \text{ siempre que } 0 < |x - 5| < \delta \text{ -----(2).}$$

Desarrollando la desigualdad para obtener δ en función de ε

$$|3x - 4 - 11| < 0.1 \text{ -----(3).}$$

$$|3x - 15| < 0.1 \text{ -----(4)}$$

$$|3(x-5)| < 0.1 \text{-----}(5).$$

$$3|x-5| < 0.1 \text{-----}(6).$$

Finalmente se tiene:

$$|x-5| < \frac{0.1}{3} \text{-----}(7).$$

Expresión que se relaciona con (2), es decir

$$|x-5| < \frac{0.1}{3} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x-5| < \delta \text{-----}(8).$$

Por lo tanto, se puede elegir $\delta = \frac{0.1}{3}$, y obtener el intervalo abierto que contenga a x :

$$5 - \frac{0.1}{3} < x < 5 + \frac{0.1}{3}, \text{ o bien } x \in \left(\frac{14.9}{3}, \frac{15.1}{3} \right).$$

De tal manera que la distancia entre $f(x) = 3x - 4$ y $L = 11$ sea menor a 0.1.

En la Figura 3.2.2 se muestran geoméricamente los resultados.

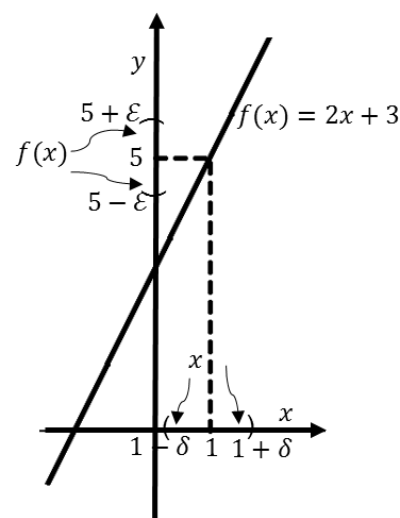


Figura 3.2.2 Muestra los intervalos $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ y $(a - \delta, a + \delta)$.

Ejemplo 3.2.2

Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$

Solución

A partir de la definición de límite se tiene que demostrar que para un $\varepsilon > 0$ dado, se tiene un $\delta > 0$, tal que se cumpla la definición, es decir:

$$\text{Se tiene } |f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta \text{----- (1).}$$

Sustituyendo valores en (1)

$$|(2x+3) - 5| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - 1| < \delta \text{-----}(2).$$

Desarrollando la desigualdad para obtener δ en función de ε

$$\begin{aligned} |2x + 3 - 5| < \varepsilon, &\Leftrightarrow |2x - 2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 2|x - 1| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Como $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $0 < |x - 1| < \delta$. Entonces se puede elegir $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Al invertir el proceso, se verifica (2), con lo cual se termina la demostración.

En la Figura 3.2.3 se muestran los intervalos para la función y para la variable independiente.

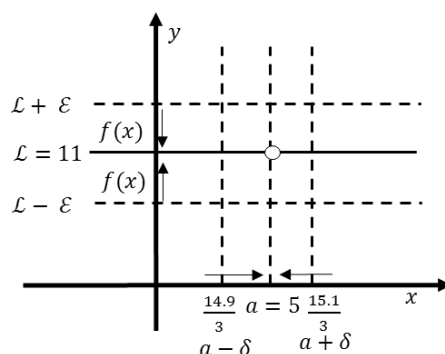


Figura 3.2.3 Muestra los intervalos para $f(x)$ y x .

Ejemplo 3.2.3

Demuestre que $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x) = 2$.

Solución

Se debe obtener un $\delta > 0$, en función de $\varepsilon > 0$, tal que:

$$|(x^2 - x) - 2| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - (-1)| < \delta \text{ -----(1).}$$

En la demostración a partir de la definición, es necesario obtener una relación entre las dos desigualdades de (1), desarrollando la primera:

$$|x^2 - x - 2| = |(x - 2)(x + 1)| = |x - 2||x + 1| < \varepsilon \text{ ----- (2).}$$

El factor $|x + 1|$, se tiene en (1) y en (2), es decir, ya se tiene una relación entre las desigualdades.

Para obtener δ en función de ε , se asigna al factor $|x - 2|$ una constante positiva $k > 0$ tal que

$$|x - 2| < k, \text{ así que, } |x + 1| < \frac{\varepsilon}{k} \text{ siempre que } 0 < |x + 1| < \delta \text{ ----- (3).}$$

Eligiendo $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, se tiene $0 < |x + 1| < \frac{\varepsilon}{k} = \delta$ ----- (4).

Ahora se obtienen las condiciones que debe tener k , como el intervalo que contiene x , está centrado en -1, se puede fijar su tamaño una unidad a la izquierda y una a la derecha, así que

$$|x + 1| < 1, \text{ o bien } -2 < x < 0 \text{ ----- (5).}$$

Bajo estas condiciones el factor $|x - 2|$ debe cumplir

$$2 < x - 2 < 4, \text{ o bien } |x - 2| < 4 = k \text{ ----- (6).}$$

Sustituyendo $k = 4$, en (4) se tiene $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ y $\delta = 1$ según (5)

De modo que existen dos elecciones para δ , se escribe $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$, eligiendo para δ el mínimo de los dos valores.

Verificar que $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, es adecuado.

Se tiene

$$|x^2 - x - 2| = |(x-2)(x+1)| = |x-2||x+1| < 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon \text{ -----(2).}$$

Así que se verifica que $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x) = 2$.

La aplicación de la definición para demostrar el límite de una función generalmente resulta difícil.

3.3 CÁLCULO DE LÍMITES

La noción de límite que se vio en la sección 3.1 permitió obtener el resultado de algunos límites, sin embargo, se evidenció que esta idea no es suficiente para afirmar que un valor obtenido de ésta manera sea precisamente el límite, por otra parte, en la sección anterior, se mostró como se comprueba que un valor supuesto es el límite de una función lo que con frecuencia no es fácil realizar.

En esta parte, el cálculo de límites se realiza mediante el uso de teoremas relativos a éstos.

Teoremas básicos

T3.3.1 Si $f(x) = c$ donde $c \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} c = c$

Generalmente se describe como “el límite de una constante es la constante”.

T3.3.2 Si $f(x) = x$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

Se describe como “el límite de una variable es su valor límite”.

Ejemplo 3.3.1

Obtener el límite indicado

a) $\lim_{x \rightarrow 1} 2$. b) $\lim_{x \rightarrow 4} (-3)$. c) $\lim_{x \rightarrow 1} x$. d) $\lim_{x \rightarrow 2} x$.

Solución

La solución se obtiene al aplicar el teorema correspondiente

a) Al aplicar **T3.3.1** se tiene $\lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$.

b) Al aplicar **T3.3.1** se tiene $\lim_{x \rightarrow 4} (-3) = -3$.

c) Al aplicar **T3.3.2** se tiene $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$.

d) Al aplicar **T3.3.2** se tiene $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$.

Los siguientes teoremas, se aplican para obtener el límite de las operaciones con funciones.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, $c \in \mathbb{R}$, se tiene

T3.3.3 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2$

T3.3.4 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 L_2$

T3.3.5 $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right] = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$

T3.3.6 $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL_1$

Ejemplo 3.1.2

Obtenga el límite e indique el teorema que se aplica

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x+5)$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} x(4x-2)$.

Solución.

a) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 3} (2x+5)$. Aplicar **T3.3.3**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (2x+5) &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x + \lim_{x \rightarrow 3} 5. \text{ Aplicar T3.3.6 y T3.3.1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x + 5. \text{ Aplicar T3.3.1 y T3.3.2} \\ &= (2)(3) + 5 = 11. \end{aligned}$$

b) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right)$. Aplicar **T3.3.5**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (3x-1)}. \text{ Aplicar T3.3.3} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3}{\lim_{x \rightarrow 2} 3x - \lim_{x \rightarrow 2} 1}. \text{ Aplicar T3.3.1, T3.3.2 y T3.3.6} \\ &= \frac{2+3}{6-1} = 1. \end{aligned}$$

c) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 1} x(4x-2)$. Aplicar **T3.3.4**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} x(4x-2) &= \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (4x-2). \text{ Aplicar T3.3.3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 1} 4x - \lim_{x \rightarrow 1} 2 \right). \text{ Aplicar T3.3.6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \left(4 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 2 \right). \text{ Aplicar T3.3.1 y T3.3.2} \\ &= (1)[(4)(1)-2] = 2. \end{aligned}$$

3.4 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Además de los teoremas básicos sobre límites dados en la sección anterior se tienen los siguientes:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, $c \in \mathbb{R}$, se tiene:

T3.4.1 $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

T3.4.2 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L_1^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

T3.4.3 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ si $L_1 \geq 0$ n par.

T3.4.4 $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$, no existe si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

T3.4.5 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe entonces es único.

T3.4.6 Si f es definida por un polinomio y a es un número real entonces

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

T3.4.7 Si $f(x) = g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contenga a , excepto posiblemente en a , mismo, si existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Ejemplo 3.1.1

Determinar el límite indicado

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-1)^3$. **b)** $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x-4}$. **c)** $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^4 - x^3 + x^2 - x + 3)$. **d)** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2}$. **e)** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Solución

a) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-1)^3$ Aplicar **T3.4.2**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (2x-1)^3 &= \left[\lim_{x \rightarrow 2} (2x-1) \right]^3, \text{ Aplicar T3.3.3} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 2} 2x - \lim_{x \rightarrow 2} (1) \right]^3, \text{ Aplicar T3.3.3 y T3.3.1} \\ &= \left[2 \lim_{x \rightarrow 2} x - 1 \right]^3 \text{ Aplicar T3.3.2} \\ &= [2(2)-1]^3 = 1. \end{aligned}$$

b) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x-4}$. Aplicar **T3.4.3**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x-4} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (3x-4)} \quad \text{Aplicar T3.3.3} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} 3x - \lim_{x \rightarrow 3} 4} \quad \text{Aplicar T3.3.6 y T3.3.1} \\ &= \sqrt{3\left(\lim_{x \rightarrow 3} x\right) - 4} \quad \text{Aplicar T3.3.2} \\ &= \sqrt{3(3) - 4} = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

c) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^4 - x^3 + x^2 - x + 3)$ Aplicar **T3.3.3**

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^4 - x^3 + x^2 - x + 3) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^4 - \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 3$$

Aplicar **T3.3.6, T3.4.1, T3.4.2 y T3.3.1**

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 1} x^4 - 1 + 1 - 1 + 3 = 4.$$

d) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2}$. Aplicar **T3.3.5**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)} \quad \text{Aplicar T3.3.3} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2}{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 2} \quad \text{Aplicar T3.4.1, T3.3.2 y T3.3.1} \\ &= \frac{4}{0}.\end{aligned}$$

Se obtiene una forma indeterminada $\frac{4}{0}$ y por el teorema **T3.4.4** el límite no existe.

e) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Al sustituir $x = 1$ en el numerador y denominador se obtienen la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, lo cual

significa que existe un factor común en el numerador y en el denominador, así que, se procede a simplificar la expresión racionalizando el denominador y posteriormente se determina el límite si es que existe.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(x^{2/3} + x^{1/3} + 1)}{\sqrt[3]{x}-1} \quad \text{Simplificar} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x^{2/3} + x^{1/3} + 1) \quad \text{Aplicar T3.3.3 y T3.3.1} \\ &= 1 + 1 + 1 = 3.\end{aligned}$$

3.5 LÍMITES LATERALES

La noción intuitiva de los límites laterales por la izquierda y por la derecha se puntualiza formalmente en las siguientes definiciones:

Definición 3.5.1**Límite por la izquierda**

Sea f una función definida en un intervalo abierto (c, a) . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1.$$

Significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ siempre que

$$a - \delta > x > a.$$

Se ilustra la definición gráficamente en la Figura 3.5.1, en donde se observa que los valores de x solo pertenecen al intervalo $(a - \delta, a)$ y su imagen en el intervalo $(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$.

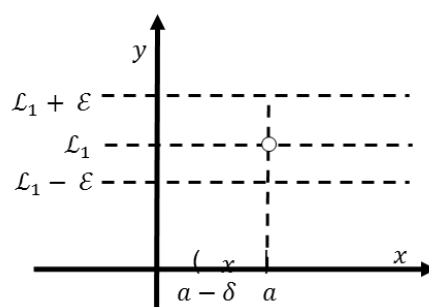


Figura 3.5.1 Límite de $f(x)$ por la izquierda.

Para obtener la definición por la derecha se sustituye el intervalo $(a - \delta, a)$ por $(a, a + \delta)$.

Definición 3.5.2**Límite por la derecha**

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, c) . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2.$$

Significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ siempre que

$$a < x < a + \delta.$$

Se ilustra la definición gráficamente en la Figura 3.5.2, en donde se observa que ahora los valores de x , solo pertenecen al intervalo $(a, a + \delta)$, y su imagen correspondiente en el intervalo $(L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$.

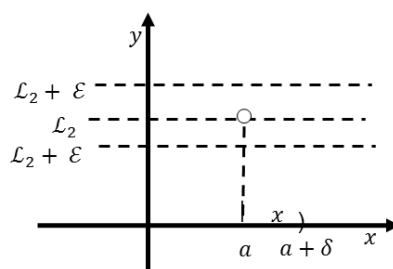


Figura 3.5.2 Límite de $f(x)$ por la izquierda.

La relación entre los límites laterales por la izquierda, y por la derecha, se expone en el teorema siguiente.

Teorema T3.5.1 Existencia del límite bilateral

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga a a , excepto en el número a , mismo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

El teorema anterior afirma que, el límite bilateral existe, si y solo si, existen los límites laterales y además deben ser iguales.

Ejemplo 3.5.1

Determinar el límite indicado si es que existe.

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x}$. b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1-x}$. c) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x}$. d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket$. e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket$. f) $\lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x \rrbracket$.

Solución

a) Sea $y = \sqrt{1-x}$.

Al graficar $y = \sqrt{1-x}$. En la Figura 3.5.3, se observa que cuando x , tiende a 1, por la izquierda, $f(x)$ tiende a cero, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0$.

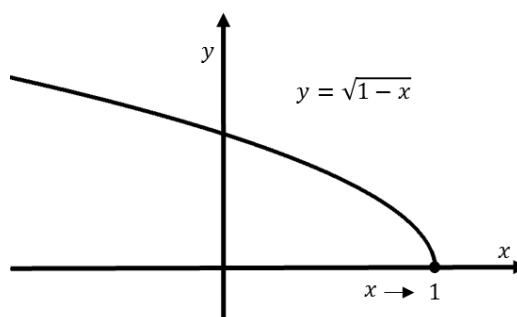


Figura 3.5.3 Límite de $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x}$.

b) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1-x}$.

La evaluación de la función con valores de x , mayores que 1, dan como resultado números negativos, puesto que no existen raíces cuadradas de números negativos, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1-x} \text{ No existe.}$$

c) De los resultados de los incisos anteriores **a** y **b** se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0, \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1-x} \text{ no existe.}$$

Al aplicar el teorema **T3.5.1**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1-x}.$$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x}$, no existe.

d) La función mayor entero $f(x) = \llbracket x \rrbracket = n$, se define como $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$. La grafica se muestra en la Figura 3.5.4, en donde se observa que si los valores de x tienden a 2 por la izquierda, $f(x)$ tiende a uno, así, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket = 1$.

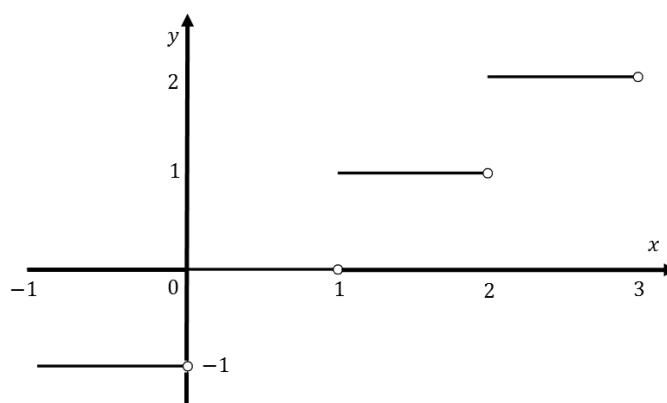


Figura 3.5.4 Gráfica de $f(x) = \llbracket x \rrbracket$.

e) Con referencia la gráfica de la Figura 3.5.4, se observa que cuando x , tiende a 2 por la derecha, los valores de $f(x)$ tienden a 2, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket = 2.$$

f) De los resultados de los incisos **d** y **e**

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket = 2.$$

Al compararlos $\lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket$.

Por lo que al aplicar el teorema **T3.5.1** $\lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x \rrbracket$ no existe.

3.6 LÍMITES INFINITOS Y AL INFINITO

✓ Límites infinitos

Se dice que el límite de una función existe, cuando se obtiene un número real, si no es así, entonces no existe, en éste caso, es importante conocer cómo se comporta la función, cuando el valor de la variable independiente se aproxima a un número dado.

Ejemplo 3.6.1

a) El siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$, no existe, ya que al aplicar el teorema **T3.4.4**, se tiene la forma indeterminada $\frac{1}{0}$, ya que $\lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1$, y $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$.

Sin embargo, al analizar el comportamiento de la función para valores de x , próximos a 1, por la izquierda y por la derecha, los valores de la función se hacen cada vez mayores, lo que se denota respectivamente por:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty \text{ ----- (1).}$$

Se dice que el límite de la función tiende a más infinito, se utiliza el símbolo ∞ para indicar que los valores de una variable aumentan tanto como se quiera.

Si ahora el límite que se propone es:

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

La respuesta es no existe. Sin embargo, al analizar el comportamiento de la función para valores de x , próximos a 1, por la izquierda, y por la derecha, los valores de la función disminuyen cada vez más, se denota respectivamente por:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty, \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty, \text{ ----- (2).}$$

Se dice que el límite de la función, tiende a menos infinito, se emplea el símbolo $-\infty$ para indicar que los valores de una variable disminuyen tanto como se desee.

Los resultados 1 y 2 se generalizan y se denomina **límites Infinitos**, se escriben:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty, \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty, \text{ ----- (3).}$$

Si n entero positivo impar. Y para n entero positivo par:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty, \text{ ----- (4).}$$

En las siguientes definiciones se formaliza la idea de este tipo de límites.

Definición 3.6.1**Límites infinitos**

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga al número a , excepto en el número a , mismo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty. \text{-----} (5)$$

Si para todo número $M > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que

$$0 < |x - a| < \delta.$$

De forma análoga

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty. \text{-----} (6)$$

Si para todo número $N < 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ siempre que

$$0 < |x - a| < \delta.$$

En la Figura 3.6.1 se ilustra la definición.

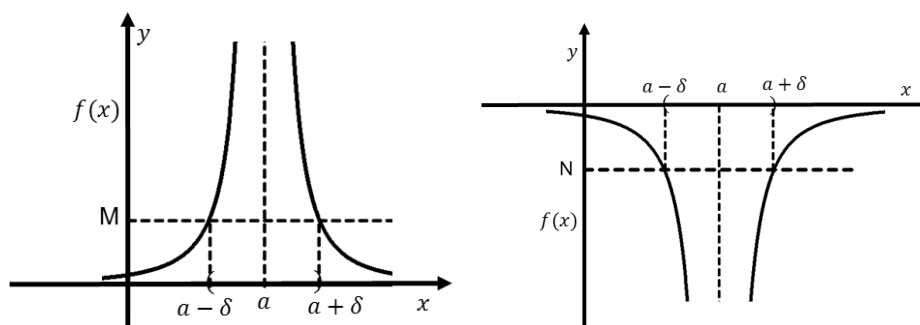


Figura 3.6.1 Definición de límites infinitos geoméricamente.

Ejemplo 3.6.2

Aplicar la definición **3.6.1** para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$.

Solución

Se tiene que para todo número M positivo, se debe obtener otro número δ positivo, tal que, exista un valor de x , en el intervalo $(1-\delta, 1+\delta)$ que cumpla $f(x) > M$.

Así

$$\frac{1}{(x-1)^2} > M \text{ Siempre que } 0 < |x-1| < \delta \text{ o } |x-1| < \delta \quad x \neq 1$$

Efectuar operaciones para obtener desigualdades equivalentes

$$\frac{1}{(x-1)^2} > M$$

Multiplicar la desigualdad por $(x-1)^2, \frac{1}{M}$

$$\frac{1}{M} > (x-1)^2$$

Extraer raíz cuadrada, recordando que $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

$$\frac{1}{\sqrt{M}} > |x-1| \text{ o bien } |x-1| < \frac{1}{M}, \text{ eligiendo } \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}, \text{ se tiene } |x-1| < \delta = \frac{1}{M}.$$

Al invertir el proceso se verifica que, $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, garantiza que, $\frac{1}{(x-1)^2} > M$ se cumple.

De ésta manera, δ está en función del valor dado a M , por ejemplo, si $M = 10\,000$ entonces

$\delta = \frac{1}{\sqrt{10\,000}} = 0.01$ y $x \neq 1$ en el intervalo $(0.99, 1.01)$, garantiza que, $f(x) > 10\,000$ así, si $x = 0.999$, entonces $f(0.999) = 1\,000\,000 > 10\,000$.

✓ Límites al infinito

En esta parte, se analiza el comportamiento de una función, cuando el valor de la variable independiente aumenta o disminuye arbitrariamente.

Una idea intuitiva de lo anterior, se puede obtener, cuando se evalúa la función con valores de x , que aumenten o disminuyan como se muestra en la Tabla 3.6.1 para la función f definida por:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Tabla 3.6.1

Los valores de x , aumentan. Los valores de x , disminuyen.

x	10	100	1000	10000	0	-10000	-1000	-100	-10
$f(x)$	0.8181	0.9801	0.9980	0.9998	1	1.0002	1.0020	1.0202	1.0202

A partir de los datos obtenidos se observa que, el valor de la función se aproxima a 1, cuando x , aumenta y también cuando disminuye, se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1, \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

Para el primer comportamiento y para el segundo respectivamente. En la Figura 3.6.2 se muestra el comportamiento de la función.

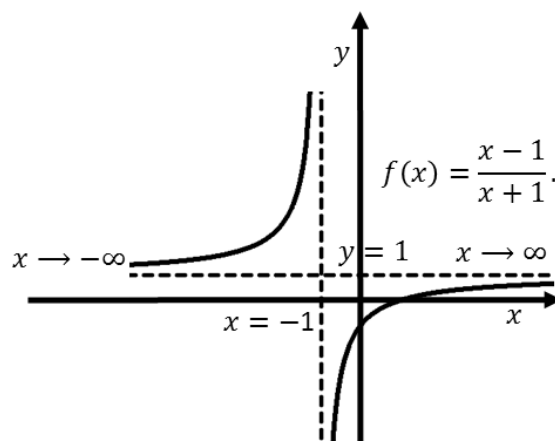


Figura 3.6.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Un caso relevante de este tipo de límites está relacionado con la definición del número de Euler, denotado por e .

Definición 3.6.2

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2.7182 \text{ o bien } e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \approx 2.7182$$

En donde si $h \rightarrow 0$ entonces el exponente $\frac{1}{h} \rightarrow \infty$

La definición formal de límites al infinito es la siguiente:

Definición 3.6.3

A. Sea f una función definida en un intervalo abierto $(-\infty, b)$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L. \text{-----} (7)$$

Significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$.

De forma análoga:

B. Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, ∞) . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \text{-----} (8)$$

Significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$.

En la Figura 3.6.3 se ilustra geométricamente la definición.

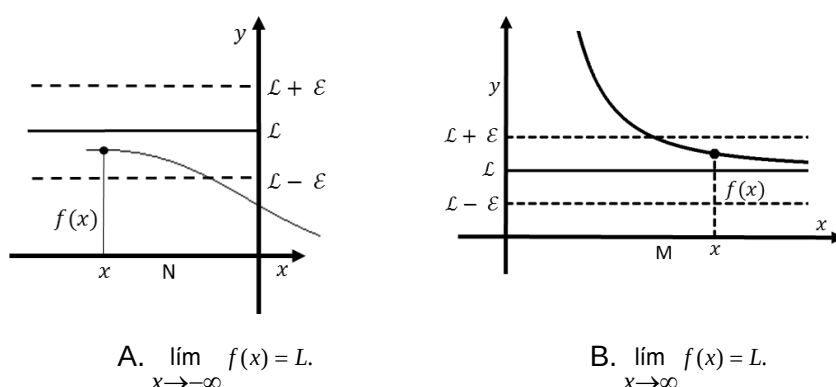


Figura 3.6.3 Límite cuando x tiende a menos infinito (A) y a más infinito (B).

Ejemplo 3.6.3

Demuestre que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$

Solución

De la definición **3.6.2B**.

Para un ε dado obtener un número M positivo tal que $\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon$, siempre que $x > M$.

De $\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon$, se obtiene M en función ε , como $x > 0$.

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{x-1-x-1}{x+1} \right| = \left| \frac{-2}{x+1} \right| = \frac{|-2|}{|x+1|} = \frac{2}{x+1} < \frac{2}{x} < \varepsilon.$$

Al tomar recíprocos de la desigualdad, $\frac{2}{x} < \varepsilon$, se obtiene

$$\frac{x}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Eligiendo $M = \frac{2}{\varepsilon}$ se tiene $x > M$ implica $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Es decir $\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon$, se cumple.

Ejemplo 3.6.4

Si $\varepsilon = 0.1$ entonces $M = \frac{2}{0.1} = 20$, así que si $x > 20$ entonces $\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| < 0.1$.

En el cálculo de límites, además de los teoremas vistos en la sección 3.3 y 3.4 el siguiente es de gran utilidad.

Teorema T3.6.1

Si r es un número racional positivo y x^r está definida para toda x , . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^r} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^r} \right) = 0. \text{----- (9).}$$

Ejemplo 3.6.5

Obtener el límite indicado **a)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)$. **b)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$.

Solución

a) Se tiene $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)$.

Para obtener el resultado se identifica el exponente de la variable x , en este caso el exponente $r = 1$, que es un racional positivo, se aplica **T3.6.1**. Así que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$.

b) Se tiene $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$.

De forma análoga $r = 1$, número real positivo, se aplica T3.6.1 y se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0.$$

Solución alternativa

En relación a los valores de la Tabla 3.6.2, se observa que, cuando x , disminuye arbitrariamente el valor de la función tiende a 0.

Tabla 3.6.2. Los valores de x disminuyen

x	-10	-100	-1000	-10000	
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0

En la Figura 3.6.4 se muestra el comportamiento de la función.

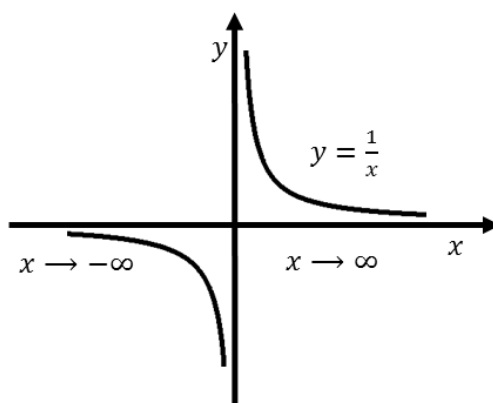


Figura 3.6.4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)$, y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$.

El siguiente teorema permite obtener el límite de un polinomio.

Teorema T3.6.2

Sea $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n . Entonces

$\lim_{x \rightarrow \infty} p_n(x) = \infty$ si $a_n > 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} p_n(x) = -\infty$ si $a_n < 0$.

Ejemplo 3.6.5

Obtener el límite indicado

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 1)$. b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 1}{2x^5 + x - 1}$. c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$. d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} + x)$.

Solución

a) Se tiene $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 1)$. Aplicar **T3.4.2**.

Para obtener el resultado se identifica $a_n = 3 > 0$ y se aplica **T3.6.2** así:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 1) = \infty.$$

Solución alternativa

Aplicar teoremas sobre límites efectuar operaciones y simplificar

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 1) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 \left(3 + \frac{4x^3}{x^5} + \frac{5x^2}{x^5} + \frac{1}{x^5} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 \left(3 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Ya que: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right) = 3$. Según **T3.6.1**.

Es importante hacer notar que la igualdad $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 1) = \infty$.

Significa que el límite no existe, solo es una forma de indicar que los valores de la función aumentan sin cota.

b) Del ejercicio anterior

$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 1) = \infty$, al aplicar **T3.6.2** al denominador

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^5 + x - 1) = \infty.$$

Y por el límite de un cociente aplicado a (1) se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 1}{2x^5 + x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^5 + x - 1)} = \frac{\infty}{\infty}. \text{----- (2)}$$

La expresión $\frac{\infty}{\infty}$, se denomina “forma indeterminada”, y no proporciona información acerca del comportamiento de la función. Cuando esto sucede, se aplica la siguiente regla: dividir numerador y denominador por la mayor potencia que se tenga en el denominador, en este caso x^5 - aplicar teoremas, realizar operaciones y simplificar.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 1}{2x^5 + x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3x^5}{x^5} + \frac{4x^3}{x^5} + \frac{5x^2}{x^5} + \frac{1}{x^5} \right)}{\left(\frac{2x^5}{x^5} + \frac{x}{x^5} - \frac{1}{x^5} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right)}{\left(2 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} \right)} \quad \text{Aplicar T3.3.5} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} \right)} \quad \text{Aplicar T3.3.3, T3.6.1} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

c) Al aplicar el límite de un cociente a la expresión $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$, se tiene la forma indeterminada

$\frac{\infty}{\infty}$, así que, se procede como en el ejercicio anterior.

Se divide numerador y denominador por x , y se aplican los teoremas correspondientes, efectuar operaciones y simplificar para obtener el resultado.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}, \quad \text{ya que, } x > 0 \quad x = \sqrt{x^2}. \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = 1.
\end{aligned}$$

d) Al aplicar directamente los teoremas sobre límites a la expresión, $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$, se tiene la forma indeterminada $\infty(\infty)$. En este caso racionalizar el numerador, realizar operaciones y simplificar.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}+x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{(\sqrt{x^2+1}-x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}-x)}.
\end{aligned}$$

Ahora se divide numerador y denominador por x , considerando que $x < 0$ puesto que $x \rightarrow -\infty$ es decir, $-x = |x| = \sqrt{x^2}$ sustituyendo en la igualdad

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{-x}}{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} - \frac{x}{-x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} -1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} -1}{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \right)} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3.7 ASÍNTOTAS (VERTICALES, HORIZONTALES Y OBLICUAS)

La recta a la cual la gráfica de una función se aproxima en forma continua se denomina recta asintótica o asíntota y son muy útiles cuando se grafica una función.

Se tienen tres tipos de asíntotas:

- 1) Asíntota vertical.-es una recta paralela al eje y de ecuación $x = a$, con a constante.
- 2) Asíntota horizontal.-es una recta paralela al eje x , con ecuación $y = k$ con k constante.
- 3) Asíntota oblicua.-es una recta de la forma $y = mx + b$ con m, b constantes

Las siguientes definiciones relacionan las asíntotas con el concepto de límite infinito y al infinito de una función.

Definición 3.7.1.

Asíntota vertical

La recta de ecuación $x = a$, se denomina asíntota vertical a la curva de $y = f(x)$ si al menos es cierto uno de los siguientes enunciados

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \\
&\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.
\end{aligned} \quad \text{----- (1)}$$

Definición 3.7.2.

Asíntota horizontal

La recta de ecuación $y = L$ se denomina asíntota horizontal a la curva de $y = f(x)$, si al menos, es cierto uno de los siguientes enunciados:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad \text{----- (2.)}$$

Definición 3.7.3.

Asíntota oblicua o inclinada

La recta de ecuación $y = mx + b$, se denomina oblicua a la curva de $y = f(x)$, si al menos es cierto uno de los siguientes enunciados

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0. \text{----- (3)}$$

donde $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$.

Ejemplo 3.7.1

Obtenga las ecuaciones de las asíntotas vertical, horizontal y oblicua si existen para la función dada. Grafique la función y las asíntotas.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

b) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

c) $f(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2}$.

Solución

a) Puesto que -1 no está en el dominio de la función, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, es probable que $x = -1$ sea la ecuación de la asíntota vertical, se determina mediante $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ y se verifica con la definición

3.7.1.

Se tiene $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$. Aplicar T3.3.5

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)} = \frac{-2}{0}. \text{ Por T3.4.4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right). \text{ No existe.}$$

Como el límite no existe, se analiza el comportamiento de la función cuando x tiende a -1 .

Si $x \rightarrow -1$ entonces $x - 1 < 0$, y $x + 1 < 0$, además $(x + 1) \rightarrow 0$ así que:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \infty.$$

Como se cumple con la definición 3.7.1, entonces $x = -1$, es la ecuación de la asíntota vertical.

Para obtener la ecuación de la asíntota horizontal el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, debe ser un número real, así que, se determina $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$. Dividir numerador y denominador por x , aplicar propiedades de límites y simplificar.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = 1.$$

De forma análoga para $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1 + \frac{1}{x}}{-1 - \frac{1}{x}} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{1}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{x} \right)} = 1.$$

Como se cumple con la definición **3.7.2**, entonces $y = 1$, es la ecuación de la asíntota horizontal.

La asíntota horizontal excluye la asíntota oblicua y viceversa.

La gráfica de la función, así como las asíntotas, se muestran en la Figura 3.6.5.

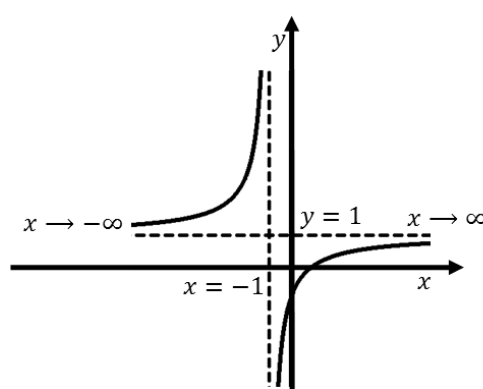


Figura 3.6.5 Gráfica de

$x = -1$, horizontal $y = 1$.

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, y las asíntotas: vertical

b) Dominio de la función $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$, es $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, posibles asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

Si cumplen con la definición **3.7.1**

Para $x = -1$, se determina $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$.

Para calcular $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$, racionalizar el denominador, aplicar teoremas sobre límites y simplificar.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{x^2-1}}{\lim_{x \rightarrow -1^-} (x-1)} = 0.
 \end{aligned}$$

Puesto que no cumple la definición **3.7.1** entonces la recta $x = -1$, no es asíntota vertical.

Para $x = 1$, se determina $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Para calcular $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$, como en el caso anterior, racionalizar el denominador, aplicar teoremas sobre límites y simplificar.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2-1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2-1)}} = \frac{2}{0}. \text{ No existe al aplicar } \mathbf{T3.4.4.}$$

Como no existe el límite, se analiza el comportamiento de f , la función cuando $x \rightarrow 1^+$.

Si $x \rightarrow 1^+$, entonces $x+1 > 0$ y $(x-1) \rightarrow 0$ ya que $\sqrt{x^2-1} > 0$ se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \infty.$$

Como se cumple con la definición **3.7.1**, $x = 1$, es la ecuación de la asíntota vertical.

Se determina $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$, según la definición **3.7.2**.

Del ejemplo 3.6.5c, para el primer caso $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = 1$, por lo que la ecuación de la asíntota

horizontal es, $y = 1$, y para el segundo, determinar $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Dividir numerador y denominador por $-x$, aplicar teoremas sobre límites y simplificar se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{x}{-x} + \frac{1}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{-\sqrt{x^2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \right) = -1.$$

Como se cumple la definición **3.7.2**, $y = -1$, es la ecuación de la asíntota horizontal.

La gráfica de la función y sus asíntotas se muestran en la Figura 3.6.6.

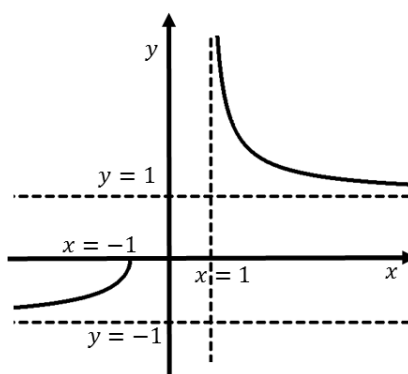


Figura 3.6.6 Gráfica $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$, asíntotas vertical $x = 1$ y horizontal $y = \pm 1$.

Solución

c) Se tiene $f(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2}$.

El dominio de la función es $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$, con probables asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 1$.

Para verificar si $x = -2$, es ecuación de la asíntota vertical, se determina $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ aplicando los teoremas correspondientes así,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (2x^3 + x)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 2)} = \frac{-18}{0} \text{ Por T3.4.4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2}. \text{ No existe.}$$

Como el límite no existe se analiza el comportamiento de f cuando $x \rightarrow -2^-$ y cuando $x \rightarrow -2^+$.

Si $x \rightarrow -2^-$, entonces $(2x^3 + x) < 0$ y $(x^2 + x - 2) > 0$, además $(x^2 + x - 2) \rightarrow 0$, por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} = -\infty.$$

Como se cumple con la definición **3.7.1** entonces $x = -2$, es la ecuación de la asíntota vertical.

Si $x \rightarrow -2^+$ entonces $(2x^3 + x) < 0$ y $(x^2 + x - 2) < 0$, además $(x^2 + x - 2) \rightarrow 0$, por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} = \infty.$$

Se confirma que $x = -2$ es la ecuación de la asíntota vertical.

De la misma manera, para verificar si $x = 1$, es la ecuación de la asíntota vertical, se determina $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, aplicando los teoremas correspondientes así:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2)} = \frac{3}{0}. \text{ Por T3.4.4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2}. \text{ No existe.}$$

Como el límite no existe, se analiza el comportamiento de f , cuando $x \rightarrow 1^-$ y cuando $x \rightarrow 1^+$.

Si $x \rightarrow 1^-$ entonces $(2x^3 + x) > 0$ y $(x^2 + x - 2) < 0$, además $(x^2 + x - 2) \rightarrow 0$, por lo tanto.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} = -\infty.$$

Como se cumple con la definición 3.7.1, entonces $x = 1$, es la ecuación de la asíntota vertical.

Si $x \rightarrow 1^+$ entonces $(2x^3 + x) > 0$ y $(x^2 + x - 2) > 0$, además $(x^2 + x - 2) \rightarrow 0$ por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} = \infty.$$

Como se cumple con la definición 3.7.1, se confirma que $x = 1$ es la ecuación de la asíntota vertical.

Asíntota horizontal

Se determina $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2}$, según definición 3.7.2.

Al aplicar teoremas sobre límites, efectuar operaciones y simplificar se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) = \left(\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x + \frac{1}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} \right) = \infty.$$

Significa que no se obtiene un número real, y por lo tanto, no hay asíntota horizontal.

Se obtiene un resultado similar para el segundo límite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} = -\infty. \text{ Confirmando que no hay asíntota horizontal.}$$

Para que exista asíntota oblicua, se debe cumplir con la definición 3.7.3.

Solución

Si $y = mx + b$, es la ecuación de la asíntota, entonces por la definición 3.7.3.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} \right) \left(\frac{1}{x} \right) \text{ y } b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} - mx \right).$$

Aplicar teoremas sobre límites, operaciones y simplificar:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} \right) \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} = 2.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x^2 + 5x}{x^2 + x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-2 + \frac{5}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} = -2$$

Al sustituir los valores obtenidos en $y = mx + b$, se tiene la ecuación de la asíntota oblicua $y = 2x - 2$. La figura 3.6.7 muestra los resultados.

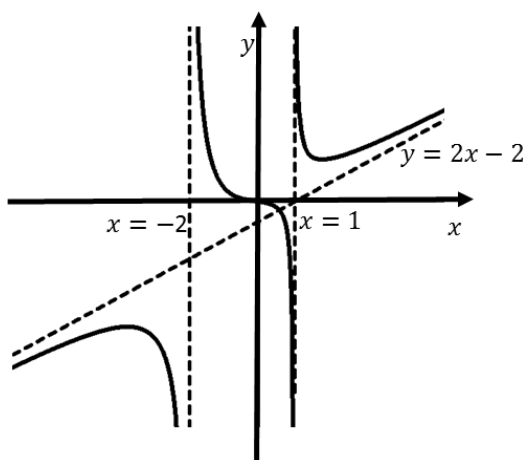


Figura 3.6.7 Gráfica $f(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2 + x - 2}$, asíntotas vertical $x = 1, x = -2$, y oblicua $y = 2x - 2$.

Las asíntotas de las funciones racionales, pueden ser obtenidas al comparar el grado de los polinomios.

Sean:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ con } a_n \neq 0 \text{ y } q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \text{ donde } b_m \neq 0.$$

Sea f una función racional definida por $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$, sin factores comunes.

Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de f son:

Ecuación asíntota vertical: $x = k$ si k es un cero real de $q_m(x)$.

Ecuación asíntota horizontal: $y = \frac{a_n}{b_m}$, si $n = m$. Y $y = 0$ si $n < m$. No hay si $n > m$.

Ecuación asíntota oblicua: $y = mx + b$, como resultado de $\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ si $n = m + 1$.

3.8 LÍMITES ESPECIALES

Ahora se exponen teoremas relacionados con límites de funciones trascendentes, en particular los denominados límites especiales, antes se expone el teorema de la compresión.

Teorema T3.8.1 de compresión

Sean f, g y h funciones que cumplan $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x , próxima a a , excepto a , misma.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Ejemplo.3.8.1

Aplicar el teorema de compresión para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Solución

Del ejemplo 3.1.4 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ no existe, así que, no se aplica **T3.3.4** es decir

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \neq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Sin embargo si $x \neq 0$, se tiene

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1, \text{ multiplicar por } x^2$$

$$-x^2 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x^2.$$

Si $f(x) = -x^2$ y $h(x) = x^2$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2$. Por **T3.4.1**

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 0, \text{ y por } \mathbf{T3.8.1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0.$$

Límites de funciones trascendentes

T3.8.2

A. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$. **B.** $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$. **C.** $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$. **D.** $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$, $x > 0$.

Como consecuencia de lo anterior se tienen

E. $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \frac{\sin a}{\cos a}$, $\cos a \neq 0$. **F.** $\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \frac{\cos a}{\sin a}$, $\sin a \neq 0$.

G. $\lim_{x \rightarrow a} \sec x = \frac{1}{\cos a}$, $\cos a \neq 0$. **H.** $\lim_{x \rightarrow a} \csc x = \frac{1}{\sin a}$, $\sin a \neq 0$.

I. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$. **J.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. **K.** $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$.

L. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, $x > 0$. **M.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

Se les denomina límites especiales a los siguientes límites trigonométricos

Límites especiales

T3.8.3

$$\text{A. } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \text{ B. } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0.$$

Demostración A

Sea $x^2 + y^2 = 1$, la ecuación de la circunferencia de radio uno, centrada en el origen. Figura 3.8.1. P un punto de coordenadas $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ sobre la circunferencia, t el ángulo central de la circunferencia medido en radianes, tal que $0 < t < \frac{\pi}{2}$, Q, R, S puntos de coordenadas $(1, 0)$, $(1, \tan t)$ y $(x, 0)$ respectivamente.

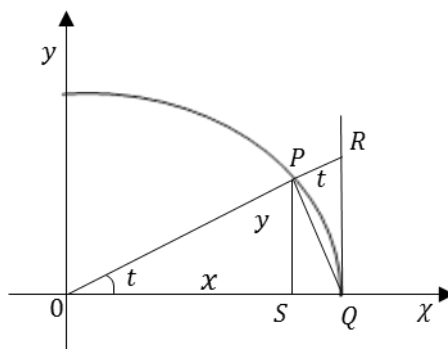


Figura 3.8.1 Gráfica $x^2 + y^2 = 1$, y $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Sean

A_1 : Área del triángulo OPQ

A_2 : Área del sector circular OPQ

A_3 : Área del triángulo OPQ

De las fórmulas para calcular estas áreas:

$$A_1 = \frac{1}{2} \overline{OQ}(y) = \frac{1}{2} \sin t \dots \dots \dots (1)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} r^2 t = \frac{1}{2} t \dots \dots \dots (2)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \overline{OQ} \tan t(y) = \frac{1}{2} \tan t \dots \dots \dots (3)$$

Se tiene

$$A_1 < A_2 < A_3 \dots \dots \dots (4) \text{ Sustituir (1), (2) y (3)}$$

$$\frac{1}{2} \sin t < \frac{1}{2} t < \frac{1}{2} \tan t \dots \dots \dots (5) \text{ Sustituir } \left(\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \right) \text{ y multiplicar por } \frac{2}{\sin t}$$

$$1 < \frac{t}{\sin t} < \cos t \dots \dots \dots (6) \text{ Tomar recíprocos}$$

$$1 > \frac{\sin t}{t} > \cos t \dots \dots \dots (7) \text{ Tomar límite}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} 1 > \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} > \lim_{t \rightarrow 0} \cos t \dots (8) \text{ Calcular límite}$$

$$1 > \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} > 1 \dots \dots \dots (9) \text{ Aplicar T3.8.1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \dots \dots \dots (10) \text{ Se obtiene el resultado y termina verificación.}$$

Observación

Puesto que, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ entonces $t > 0$, si ahora $t \rightarrow 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$, el cual se acaba de obtener.

Si ahora $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ entonces $t < 0$, y si $t \rightarrow 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin t}{t} = 1$, el cual se obtiene al sustituir a t por $-t$ en (7),

$$1 > \frac{\sin(-t)}{-t} > \cos(-t) \dots \dots \dots \text{Aplicar propiedades del seno y coseno}$$

$$1 > \frac{-\sin(t)}{-t} > \cos(t) \dots \dots \dots \text{Tomar límite}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} 1 > \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} > \lim_{t \rightarrow 0} \cos t \dots \dots \text{Calcular límite}$$

$$1 > \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} > 1 \dots \dots \text{Aplicar T3.8.1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \dots \dots \dots \text{Se obtiene el mismo resultado, termina verificación.}$$

Demostración B

$$\text{Se tiene } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0.$$

La sustitución directa produce una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, que se modifica al multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador, utilizar identidades trigonométricas aplicar teoremas sobre límites y simplificar.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \left(\frac{1 + \cos t}{1 + \cos t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t(1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t(1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{(1 + \cos t)} = 1 \left(\frac{0}{1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Termina demostración.

Ejemplo 3.8.2

Calcular los límites indicados.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x.$

Solución

a) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos x}$. Aplicar **T3.3.5**, **T3.8.3** y simplificar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

b) La expresión $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$, no tiene la forma $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, ya que el argumento del seno, no es igual al denominador, por lo tanto, no se puede aplicar **T3.8.3**, para hacerlo, multiplicar numerador y denominador por 3, aplicar teoremas y simplificar.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{(3)2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \left(\frac{3}{2}\right)(1) = \left(\frac{3}{2}\right).$$

c) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

La sustitución directa produce una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que, se modifica la expresión

analítica $\left(\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right)$, al multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador.

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\right) = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Y con la última expresión, calcular el límite al aplicar **T.3.3.5** y **T3.8.1**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(1 - \cos x)} = \frac{0}{1+1} = 0.$$

d) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$.

Nuevamente la sustitución directa produce una forma indeterminada, así que, es necesario manipular algebraicamente la expresión, para tratar de eliminarla forma indeterminada, aplicar identidades trigonométricas, y teoremas **T3.8.1** y **T3.8.2**.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = (1)(1) = 1.$$

3.9 DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

De forma intuitiva, una función es continua cuando su grafica no presenta interrupciones, cuando las tiene, se dice que es discontinua o no continua, en la figura 3.9.1, se muestran algunas graficas de funciones no continuas en el número a .

La relación entre la evaluación de una función en un punto dado, y su límite en dicho punto define el concepto de continuidad.

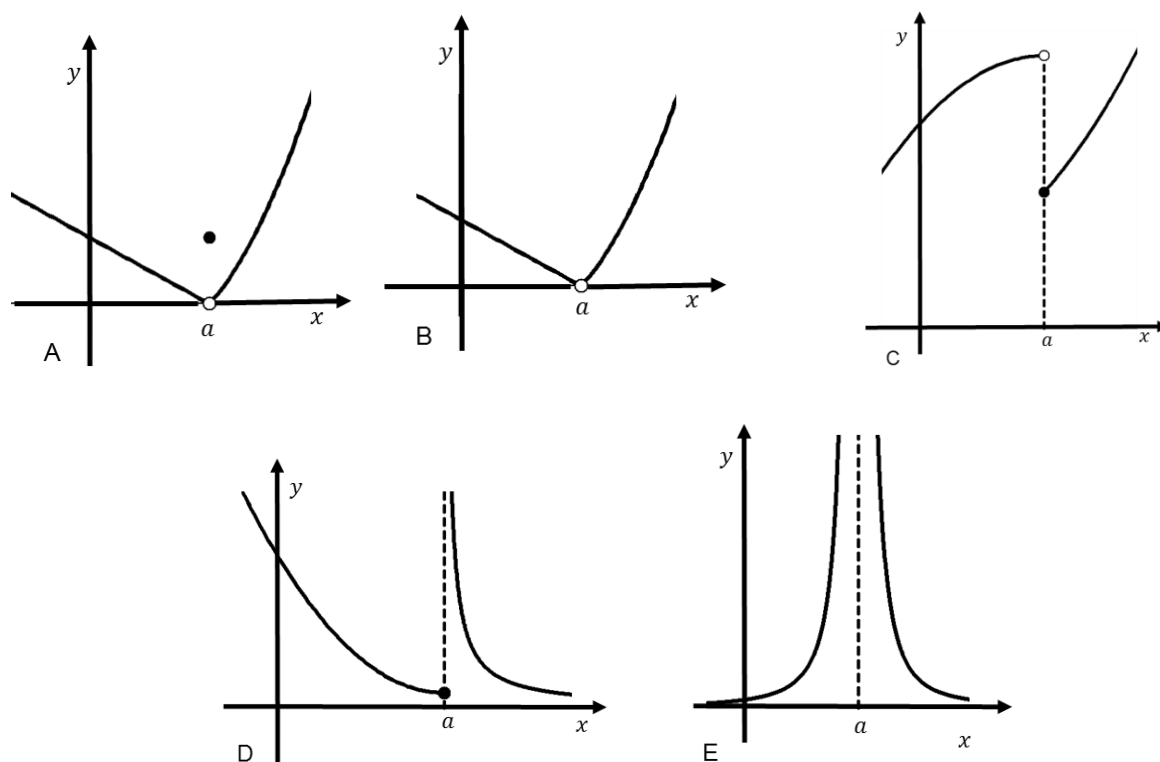


Figura 3.9.1 Gráficas de funciones no continuas.

Continuidad en un punto

Definición 3.9.1

Una función f , es continua en número a , si cumple lo siguiente:

- A.** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, existe. **B.** $f(a)$, existe. Entonces **C.** $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si una de las tres condiciones no se cumple, entonces la función f se dice que es **discontinua**, en el número a .

Ejemplo 3.9.1

Determine que condición de la definición 3.9.1 no se cumple en $x = -2$, para las funciones dadas.

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$. **b)** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}, & x \neq -2, \\ -3, & x = -2. \end{cases}$

Solución

a) Verificar que $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$, existe. Se procede a calcular:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-1) = -3.$$

Así que **(A)** se cumple.

Verificar que $f(a)$, exista.

Se procede a calcular $f(-2) = \frac{(-2)^2 + (-2) - 2}{(-2) + 2} = \frac{0}{0}$, no existe.

De los resultados anteriores **C** no se cumple. Por lo tanto no es continua en $x = -2$.

b) Verificar que $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -3, & x = -2. \end{cases}$ existe.

Se procede a calcular el límite de la función para la primera parte

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-1) = -3.$$

Así que **(A)** se cumple.

Para la segunda parte, verificar que $f(-2)$ exista.

Se tiene que $f(-2) = -3$, por lo tanto existe.

De los resultados anteriores $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = f(-2)$, se cumple **C**. por lo tanto, la función es continua en $x = -2$.

En la Figura 3.9.2, se muestra la gráfica de las funciones, se observa que las gráficas son iguales, excepto que la gráfica de la función del inciso **a** tiene un “hueco” en $x = -2$.

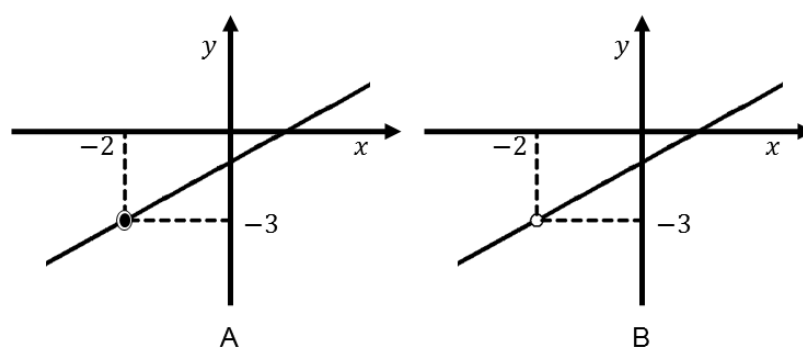


Figura 3.9.2 Gráfica de las funciones $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$ y $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -3, & x = -2. \end{cases}$ respectivamente.

Si una función es continua en un intervalo abierto (a, b) , $(-\infty, a)$ o (a, ∞) , se dice que es continua en el intervalo.

La continuidad de una función en un intervalo abierto o cerrado se define de la siguiente manera.

Definición 3.9.2**Continuidad en un intervalo**

A. Una función f se dice que es continua en un intervalo abierto (a, b) , si es continua en todos los números del intervalo.

B. Una función f se dice que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en todos los números del intervalo abierto (a, b) , y se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a). \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

Ejemplo 3.9.2

Demuestre que $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$, es continua en todo su dominio.

Solución

Se determina el dominio y se verifica que se cumpla la definición 3.9.2. Para que f exista, el radicando $(1 - x^2)$, debe ser $(1 - x^2) \geq 0$ (es decir mayor o igual a cero); al resolver la desigualdad se tiene $-1 \leq x \leq 1$, así que el dominio es $D_f = [-1, 1]$. De la definición **3.9.2A**.

La función debe ser continua en todo número x , del intervalo $(-1, 1)$, para verificar se toma un número c , tal que $-1 < c < 1$, se calcula:

$$\lim_{x \rightarrow c} (1 + \sqrt{1 - x^2}) = \lim_{x \rightarrow c} 1 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} (1 - x^2)} = 1 + \sqrt{1 - c^2} \quad \text{y} \quad f(c) = 1 + \sqrt{1 - c^2}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow c} (1 + \sqrt{1 - x^2})$, y $f(c)$, son iguales, entonces la función es continua en todo número del intervalo abierto $(-1, 1)$.

Ahora, se verifica sí:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (1 + \sqrt{1 - x^2}) = f(-1), \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} (1 + \sqrt{1 - x^2}) = f(1). \quad \text{Se cumple.}$$

Para determinar que la función es continua por la derecha en a , y continua por la izquierda en b se tiene respectivamente

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (1 + \sqrt{1 - x^2}) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1^+} (1 - x^2)} = 1, \quad f(-1) = 1 + \sqrt{1 - (-1)^2} = 1.$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1 + \sqrt{1 - x^2}) = 1 = f(-1)$, la función es continua por la derecha en -1 .

Finalmente

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + \sqrt{1 - x^2}) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2)} = 1, \quad \text{y} \quad f(1) = 1 + \sqrt{1 - (1)^2} = 1.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + \sqrt{1-x^2}) = 1 = f(1)$, la función es continua por la izquierda en 1.

La gráfica de la función se muestra en la Figura 3.9.3

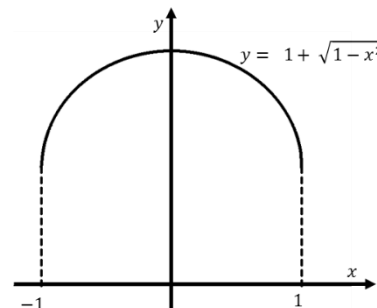


Figura 3.9.3 La función $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ es continua en $[-1, 1]$.

3.10 PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD

La continuidad de funciones tiene las siguientes propiedades:

Teorema 2.10.1

Si f y g son funciones continuas en un número a , y k es una constante, entonces las funciones siguientes también son continuas en el número a .

A. $f + g$. **B.** $f - g$. **C.** kf . **D.** fg . **E.** $\frac{f}{g}$, $g(a) \neq 0$.

Demostración de T3.10.1E

Se tiene que f y g son funciones continuas en el número a por lo tanto se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

De las propiedades de los límites **T3.3.5**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g} \right), g(a) \neq 0.$$

Por lo tanto, se prueba que es continua en el número a .

El teorema **T3.10.1**, aplica también para funciones continuas en un intervalo.

Ejemplo 3.10.1

Sean f y g funciones definidas por $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, respectivamente. Demuestre que $f + g$, es continua en todo su dominio.

Solución

Se determina el dominio de $f + g$, y se verifica que cumpla con la definición **3.9.2**.

Dominio de $f = \mathbb{R}$, dominio de $g = \mathbb{R}$, Dominio de $f + g = \mathbb{R}$.

Verificar que $(f + g)(x)$, cumpla con la definición **3.9.2** para todo número $x \in D_{f+g}$

Sea $c \in \mathbb{R}$, calcular $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$, y $(f + g)(c)$, determinar si son iguales.

Dominio de f , $D_f = \mathbb{R}$, dominio de g , $D_g = \mathbb{R}$, dominio de $f + g$, $D_{f+g} = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$. Sustituir $f(x)$ y $g(x)$, aplicar **T3.3.3** y **T3.8.2**

$$= \lim_{x \rightarrow c} (\sin x + \cos x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} (\sin x) + \lim_{x \rightarrow c} (\cos x)$$

$$= (\sin c) + (\cos c).$$

Puesto que se cumple $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$, y $(f + g)(c)$, son iguales entonces $f + g$, es continua en todo su dominio.

En el siguiente teorema, se muestra, como el límite de una función continua f , compuesta con otra función g , se evalúa el límite de la función g , cuando éste, existe.

✓ Límite de la función compuesta

Teorema T3.10.

Sea f una función continua en b , $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(b).$$

Sí, en el teorema anterior la función g es continua en el número a , es decir, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(a)$, y la función f , es continua en $g(a)$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(a)\right) = f(g(a)).$$

Este resultado se puntualiza en el siguiente teorema.

✓ Continuidad de la función composición

Teorema T3.10.3

Sea g una función continua en a , y f una función continua en $g(a)$, entonces la función f compuesta con g , es continua en a , es decir $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a .

Ejemplo 3.10.2

Aplique **T 3.10.3** para determinar en donde es continua la función $h(x) = e^{\sin x}$.

Solución

Se tiene $h(x) = f(g(x))$, donde $f(x) = e^x$ y $g(x) = \sin x$. Como g , es continua en los números reales, y f también, entonces por **T3.10.3**, $h = f \circ g$ es continua en los números reales.

✓ **Continuidad de la inversa de una función**

Sea a f una función uno a uno, definida por $f(x) = \cos x$, en el intervalo $[0, \pi]$, entonces para todo $a \in [0, \pi]$ al aplicar **T3.8.2**, $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$, es decir, f es continua sobre el intervalo $[0, \pi]$, y su gráfica no tiene interrupciones.

Por otra parte, la gráfica de f^{-1} , se obtiene al reflejar sobre la recta $y = x$, la gráfica de f , por lo que la gráfica de f^{-1} , tampoco tiene interrupciones, es decir f^{-1} también es continua sobre el intervalo $[0, \pi]$.

Éste resultado es consecuencia del siguiente teorema:

Teorema T3.10.4**Continuidad de la inversa de una función**

Si f es una **función uno a uno** continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$.

Ejemplo 3.10.3

Sea f la función definida por $f(x) = e^x$, determinar en donde la función f^{-1} , es continua.

Solución

Sea f la función definida por $y = \ln x$, con dominio los números reales, y rango, el intervalo $(0, \infty)$.

Sea a , cualquier elemento del dominio, al aplicar **T3.8.2**. Se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a.$$

Puesto que se cumple con la definición **3.9.2**, entonces f , es continua en todo su dominio.

Sea f^{-1} , la función inversa de f , definida por $y = \ln x$, con dominio el intervalo $(0, \infty)$, sea a , cualquier número del intervalo $(0, \infty)$, al aplicar **T 3.8.2**

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a.$$

Al cumplir con la definición **3.9.2**, entonces f^{-1} , es continua en su dominio.

Las gráficas de la función f , y f^{-1} que se muestran en la Figura 3.10.1 ilustran estos resultados.

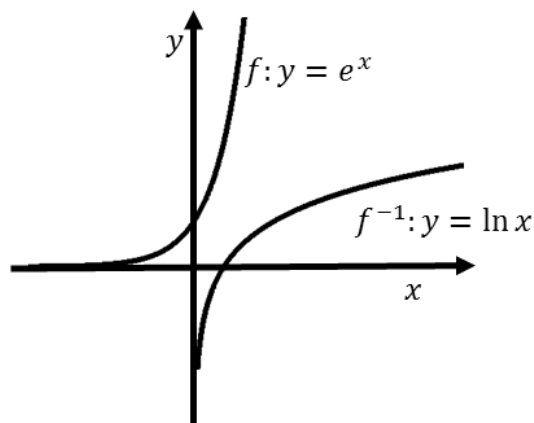


Figura 3.10.1 Las funciones f y f^{-1} , son continuas.

✓ Continuidad de la función polinomial

Sea f , una función polinomial definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$.
ya, cualquier número real. Entonces al aplicar **T3.3.12**, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(c).$$

Puesto que se cumple con la definición **3.9.2**, entonces f , es continua en todo su dominio, éste resultado se incluye en el teorema siguiente:

Teorema T3.10.5

Son continuas en todo su dominio las funciones siguientes:

Función polinomial, función racional, función raíz, función trigonométrica, función trigonométrica inversa, función exponencial, función logarítmica.

✓ Teorema del valor intermedio

En la Figura 3.10.2, se muestra la gráfica de una función f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, en donde se advierte un número M entre, $f(a)$ y $f(b)$, como la función es continua, entonces adquiere todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, como consecuencia, debe existir por lo menos un número c , entre a y b tal que, $f(c) = M$.

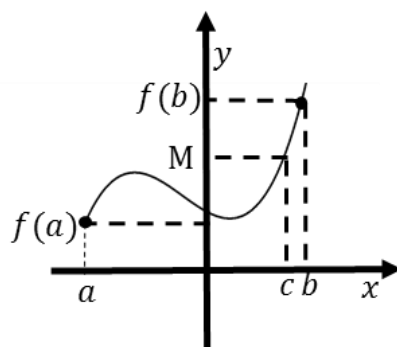


Figura 3.10.2 La función f , adquiere todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

El resultado obtenido se formaliza en el teorema siguiente:

Teorema T3.10.6 del valor intermedio

Sea f una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, y M un número real entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número real c , entre a y b , tal que $f(c) = M$.

Ejemplo 3.10.4

Aplique el teorema del valor intermedio para obtener un número c en el intervalo $[0, 4]$, tal que,

$f(c) = 3$, para la función $f(x) = -x^2 + 5x$.

Solución

Se tiene $f(x) = -x^2 + 5x$, $a = 0$, $b = 4$, $M = 3$.

Entonces $f(a) = f(0) = 0$ y $f(b) = f(4) = 4$, se cumple que $M \in (f(a), f(b))$.

Esto es, $0 < 3 < 4$, además $f(c) = 3$, así que, $f(c) = -c^2 + 5c = 3$.

Al resolver

$$-c^2 + 5c - 3 = 0$$

Se obtiene $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 0.6972$ y $x_2 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 4.3027$.

Como $x_1 \in (0, 4)$ y $x_2 \notin (0, 4)$, entonces solo el número $c = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$, cumple con el teorema del valor intermedio.

En la Figura 3.10.3 se muestra el resultado.

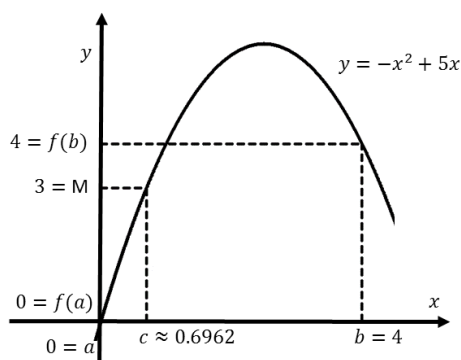


Figura 3.10.3 Se muestra el número c que cumple con el teorema.

3.10.1 FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS EN UN PUNTO Y EN UN INTERVALO

Se analiza la continuidad de las funciones o su discontinuidad, ya sea en un punto o bien, en un intervalo con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.11.1

Para la función f , definida por $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$. Determine:

- a) Si es continua en $x = 2$.
- b) Si es continua en el intervalo cerrado $[-4, 0]$.

Solución

a) Se tiene $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, $a = 2$, entonces, para que f sea continua en $x = 2$, se debe cumplir

que, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-2} = f(2)$.

Ya que $f(2) = \frac{5}{0}$, no existe entonces f no es continua en $a = 2$.

b) Para que f sea continua en un intervalo cerrado $[-4, 0]$, se debe cumplir que sea continua, en todo número del intervalo abierto $(-4, 0)$, y cumplir que:

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x+1}{x-2} = f(-4), \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x-2} = f(0). \text{-----}(1)$$

Así, para verificar que f es continua en $[-4, 0]$. Para todo número $c \in (-4, 0)$, se debe cumplir que:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{2x+1}{x-2} = f(c). \text{-----}(2)$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} (2x+1)}{\lim_{x \rightarrow a} (x-2)} = \frac{2c+1}{c-2} \text{ y } f(c) = \frac{2c+1}{c-2}.$$

Puesto que (2) se cumple, entonces f es continua en todo el intervalo $(-4, 0)$.

Para verificar que f es continua en los extremos del intervalo, se debe cumplir que:

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x+1}{x-2} = f(-4), \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x-2} = f(0). \text{-----}(1)$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -4^+} (2x+1)}{\lim_{x \rightarrow -4^+} (x-2)} = \frac{7}{6}, \text{ y } f(-4) = \frac{7}{6}.$$

Como se cumple (1), entonces f , es continua por la derecha en -4 .

Por otra parte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2)} = -\frac{1}{2}, \text{ y } f(0) = -\frac{1}{2}.$$

Como también se cumple (1), entonces f es continua por la izquierda en cero.

Ejemplo 3.11.2

Dada la función f definida por $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ x^2 - 2x, & x > 2. \end{cases}$. Determine si,

a) Es continua en $a = 2$. **b)** Es continua en $(-\infty, 2)$. **c)** Es continua en todo su dominio.

Solución

a) Para que f sea continua en $a = 2$, se debe cumplir

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2). \text{-----}(1).$$

Puesto que la función no puede ser evaluada en 2, entonces $f(2)$ no existe, así que, (1) no se cumple, y por lo tanto, f no es continua en 2.

b) Para que f sea continua en $(-\infty, 2)$, se debe cumplir

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \text{-----}(2), \text{ para cualquier } c < 2.$$

Así.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (2-x) = 2-c, \text{ y } f(c) = 2-c.$$

Como se cumple (2), entonces f es continua en todo el intervalo $(-\infty, 2)$.

c) De la expresión que define la función, se tiene $x < 2$ y $x > 2$, por lo que $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, del inciso anterior, se verifica que es continua en $(-\infty, 2)$. Para verificar que es continua en $(2, \infty)$ se debe cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \text{-----}(3) \text{ para cualquier } c > 2.$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (x^2 - 2x) = c^2 - 2c, \text{ y } f(c) = c^2 - 2c.$$

Puesto que se cumple (3), entonces f es continua en todo su dominio.

Ejemplo 3.11.3

Si en el ejemplo anterior f es definida por $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ x^2 - 2x, & x > 2. \end{cases}$

Determine si es continua en todo su dominio.

Solución

El dominio de la función son todos los números reales, como se verificó que es continua en los intervalos $(-\infty, 2), (2, \infty)$, solo se verifica si es continua en $a = 2$, para esto, se debe cumplir

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2). \text{ -----(1).}$$

Para verificar que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe, se debe cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x). \text{ -----(2).}$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x) = 0, \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x) = 0.$$

Del resultado anterior, se observa que (2) se cumple y que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$, la evaluación de la función es $f(2) = 2$, como el límite y la evaluación de la función es diferente, entonces la función no es continua en todo su dominio. En este caso se dice que es discontinua en 2.

Una situación interesante se tiene en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.11.4

Para la función f definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1. \end{cases}$. Determine si es continua en todo su dominio.

Solución

El dominio de la función son todos los números reales, como f está definida por partes, se determina si es continua en cada una de ellas, para la primera parte. Sí es continua en $(-\infty, 1)$, se debe cumplir

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \text{ -----(1) para cualquier } c < 1.$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (-x^2 + 2x + 3) = -c^2 + 2c + 3 \text{ y } f(c) = -c^2 + 2c + 3.$$

Como se cumple (1) entonces es continua en $(-\infty, 1)$.

Para verificar si es continua en la segunda parte, es decir, en el intervalo cerrado $[1, \infty]$, debe cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c), \text{ para cualquier } c > 1.$$

Además,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1). \quad (3).$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 1) = c^2 + 1 \text{ y } f(c) = c^2 + 1.$$

Como se cumple (2) entonces f es continua en $(1, \infty)$.

Ahora,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 \text{ y } f(1) = 2.$$

Como se cumple (2), entonces f es continua por la izquierda en $x = 1$.

Para finalizar, ya que f es por partes, se determina si es continua por la derecha en $x = 1$, si lo es, se debe cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad (4).$$

Se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad f(1) = 2.$$

Se calcula

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 2x + 3) = 4.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe, por lo que en $x = 1$, no se cumple la definición 3.9.1, por lo tanto f no es continua en todo su dominio, o bien es discontinua en $x = 1$.

3.11 TIPOS DE DISCONTINUIDAD

Existen dos tipos de discontinuidad de una función f en un punto:

- 1) Discontinuidad evitable o removible.
- 2) Discontinuidad no evitable o esencial.

1) La discontinuidad evitable en un punto a , se presenta cuando

A. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $f(a) = M$.

B. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $f(a)$, no está definida.

El caso A, se ejemplifica con la función f definida por $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2. \\ x^2 - 2x, & x > 2 \end{cases}$

El análisis de continuidad, se desarrolló en el ejemplo 3.11.3, la gráfica se muestra en la Figura 3.12.1.

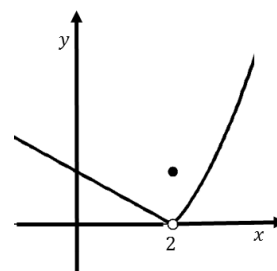


Figura 3.12.1 Discontinuidad evitable.

El caso **B**, se ejemplifica con la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 2 \\ x^2 - 2x, & x > 2 \end{cases}$$

El análisis de continuidad, se desarrolló en el ejemplo 3.11.2, la gráfica se muestra en la Figura 3.12.2

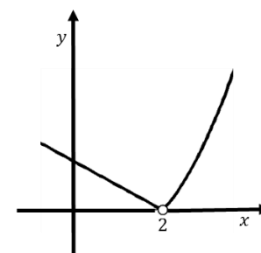


Figura 3.12.2 Discontinuidad evitable.

2) Discontinuidad no evitable o esencial de una función f en un punto a ocurre, cuando:

C. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$. Discontinuidad de salto finito.

D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$. Discontinuidad de salto infinito.

E. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$. Discontinuidad asintótica.

El caso **C**, se ejemplifica con la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

El análisis de continuidad, se desarrolló en el ejemplo 3.11.4, la gráfica se muestra en la Figura 3.12.3.

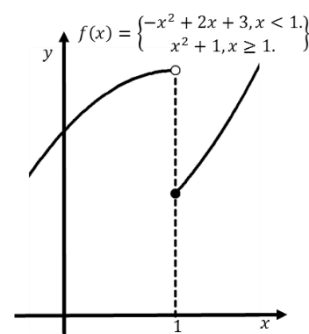


Figura 3.12.3 Discontinuidad esencial de salto finito

El caso **D**, se ejemplifica con la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5, & x \leq 3 \\ \frac{1}{x+3}, & x > 3 \end{cases}$.

Para el análisis de continuidad, se debe cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \text{ exista y } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \pm\infty \text{ ----- (1)}$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \right) = \frac{1}{2} \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty.$$

Como se cumple (1), entonces tiene discontinuidad de salto infinito. La gráfica se muestra en la Figura 3.12.4

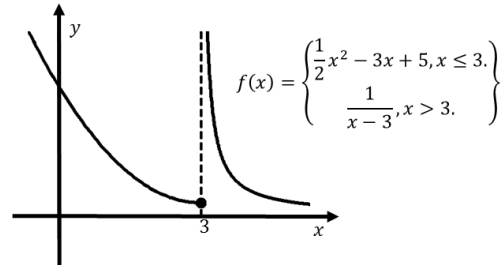


Figura 3.12.4 Discontinuidad esencial de salto infinito.

El caso E, se ejemplifica con la función f definida por $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

El análisis de continuidad, se desarrolló en el ejemplo 3.11.1, la gráfica se muestra en la Figura 3.12.5.

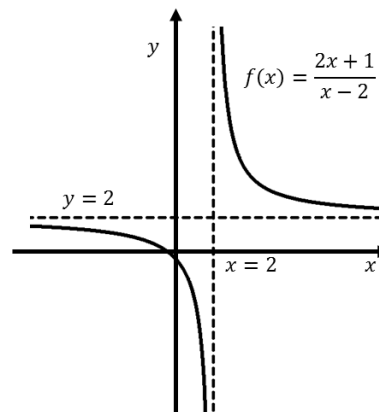


Figura 3.12.5 Discontinuidad esencial asimptótica.

Unidad 3

Ejercicios propuestos

Elabore una tabla con valores sucesivos de la variable independiente, para determinar el límite indicado, si es que existe, en caso de que no exista argumente su respuesta.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1). \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right). \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1}. \quad 5) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ si } f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & x > 1. \end{cases} \quad 7) \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \text{ Si } f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Utilice la definición de límite $(\varepsilon - \delta)$ para demostrar que los resultados siguientes son verdaderos.

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 5. \quad 9) \lim_{x \rightarrow 1} x = 1. \quad 10) \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3. \quad 11) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0.$$

Utilice los teoremas sobre límites para evaluar el límite indicado, si es que existe, si no existe argumente su respuesta.

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x - 1). \quad 13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}. \quad 14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-1}. \quad 15) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}-1} \right). \quad 16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-1|}{x}.$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-1|}{1-x} \quad 18) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x^3}{x^2-1} \right) \quad 19) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \right) \quad 20) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \right)$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right). \quad 22) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} \right). \quad 23) \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1}. \quad 24) \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}.$$

$$25) f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & x > 1. \end{cases} \quad \text{a. } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$26) f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x^2, & x > 1. \end{cases} \quad \text{a. } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$27) f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ x^2-4x+3, & x > 2. \end{cases} \quad \text{a. } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

$$28) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^4 - x^3 + 2x^2). \quad 29) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^5} - x^3 + 2x^2 + x - 1}{7x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2}. \quad 30) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{5}{3}x^5 - x^2}{\frac{1}{2}x^5 - x^3 + 2x^2 + x - 1}}.$$

$$31) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}x^5 - 4x^3 + \frac{7}{3}x^2 - 1}{\frac{7}{3}x^7 - \frac{2}{3}x^3 - x^2}. \quad 32) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{2}x^5 - 4x^3 + \frac{7}{3}x^2 - 1}{\frac{7}{3}x^7 - \frac{2}{3}x^3 - x^2}. \quad 33) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 - \frac{2}{3}x^3 - x^2}{x^5 - \frac{7}{3}x^2 - 1}.$$

$$34) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4} \right).$$

Obtenga las ecuaciones de las asíntotas vertical, horizontal y oblicua si existen para las funciones dadas.

$$35) f(x) = \frac{x-1}{1-x^2}. \quad 36) f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}. \quad 37) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{\frac{2}{3}x^3 - x^2}. \quad 38) f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + x}{x^3 + x^2}.$$

Utilice los teoremas sobre límites para evaluar el límite indicado, si es que existe, si no existe argumente su respuesta.

$$39) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x}. \quad 40) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin(x-1)}. \quad 41) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{2}{3}x\right)}{\frac{3}{4}x}. \quad 42) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\sin(x - \pi)}.$$

$$43) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec(2x)\csc(3x)}. \quad 44) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan(3x)}. \quad 45) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}.$$

Determine si la función dada es continua en todo su dominio.

$$46) f(x) = \frac{x-1}{x}. \quad 47) f(x) = 2 + \sqrt{1-x}. \quad 48) f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$$

Determine el o los valores de la variable independiente, en donde la función dada es discontinua, e indique el tipo de discontinuidad.

$$49) f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -2 \\ x^2+x, & x > -2. \end{cases} \quad 50) f(x) = \begin{cases} 4+x, & x < -2 \\ 1, & x = -2 \\ x+x^2, & x > -2. \end{cases} \quad 51) f(x) = \frac{2x^2+x-2}{x^2+x-6}.$$

$$52) f(x) = \begin{cases} x^2+x-2, & x \leq 2 \\ \frac{x}{x-2}, & x > 2. \end{cases} \quad 53) f(x) = \begin{cases} x^2+4x+3, & x < 0 \\ -x^2+4, & x > 0. \end{cases} \quad 54) f(x) = \frac{x^3+x^2-2x}{x^2+x-6}.$$

CAPÍTULO 4

DERIVADAS

COMPETENCIA ESPECÍFICA A DESARROLLAR

Comprender el concepto de derivada, para aplicarlo como la herramienta que estudia y analiza la variación de una variable con respecto a otra.

4.1 DEFINICIÓN DE LA DERIVADA

La relación entre la pendiente de una recta tangente a una curva C, y el límite de la pendiente de una recta secante de C, donde C es la gráfica de una función, se utiliza para definir el concepto de derivada de una función.

Sea la curva C la gráfica de una función f definida por $y = f(x)$, Figura 4.1.1, $P(x, y)$ y $Q_1(x_1, f(x_1))$ puntos sobre la curva, la recta que une los puntos P y Q, se denomina recta secante a la curva, la pendiente de ésta recta es dada por:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \text{ ----- (1)}$$

Expresión que corresponde a la tangente trigonométrica del ángulo θ_1 , es decir:

$$\tan \theta_1 = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = m_{\text{sec}} \text{ ----- (2)}$$

Si ahora el punto Q_1 se desplaza sobre la curva C hacia el punto fijo P, entonces el valor de x_1 tiende hacia el valor de x y por consecuencia la posición de la recta secante l_{sec} tiende hacia la posición de la recta tangente l_T de la curva en el punto P.

Se puntualiza lo anterior al escribir:

- ✓ La posición límite de la recta secante de la curva, es la recta tangente a C en el punto P.
- ✓ El límite de la pendiente de la recta secante, es la pendiente de la recta tangente a la curva, es decir, deben ser iguales:
- ✓

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} m_{\text{sec}} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = m_T = \tan \theta \text{ ----- (3)}$$

Donde m_T es la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto $P(x, y)$, y $\tan \theta$ es la tangente trigonométrica del ángulo θ .

En la expresión (3), $x_1 - x$: Representa el cambio de la variable independiente, también se escribe:

$$\Delta x = x_1 - x, \text{ o bien } h = x_1 - x \text{ ----- (4)}$$

$f(x_1) - f(x)$: representa el cambio de la función asociado al correspondiente cambio en la variable independiente, también se escribe:

$$\Delta y = f(x_1) - f(x), \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \text{ o bien } \Delta y = f(x + h) - f(x) \text{ ----- (5)}$$

Así que la expresión (3) se puede escribir:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ ----- (6)}$$

Ya que, si $x_1 \rightarrow x$ entonces $\Delta x \rightarrow 0$, y si $x_1 \rightarrow x$, entonces $h \rightarrow 0$ por lo que se tiene:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \text{ ----- (7)}$$

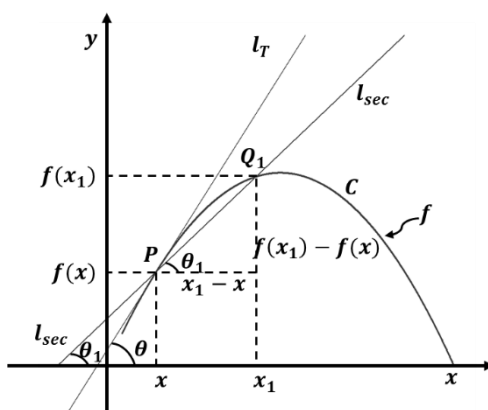


Figura 4.1.1 La derivada como $\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$

Las expresiones 3,6 y 7 se utilizan para definir una función de f denotada f' , denominada derivada de f definida por:

Definición 4.1.1

Derivada de una función

La derivada de una función f en un valor x , denotada $f'(x)$ es dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ ----- (8)}$$

Siempre que el límite exista.

Si el límite en (8) existe, se dice que la función es derivable.

Formas equivalentes de expresar la derivada de una función f en $x = a$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ ----- (9)}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{ ----- (10)}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \text{ ----- (11)}$$

La operación que permite obtener la derivada de una función se denomina diferenciación o derivación, básicamente consiste en cuatro pasos:

- 1) Obtener $f(x + \Delta x)$.
- 2) Calcular $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
- 3) Obtener y simplificar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- 4) Calcular $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ejemplo 4.1.1

Dada la función f definida por $f(x) = x^2 + 1$. Obtener su derivada.

Solución

Sea $y = f(x) = x^2 + 1$. Aplicar los cuatro pasos:

- 1) Evaluar la función con $(x + \Delta x)$ y desarrollar:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 1 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 1.$$

- 2) Efectuar operaciones, simplificar y restar $f(x)$:

$$\Delta y = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 1) - (x^2 + 1) = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

- 3) Simplificar la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

- 4) Aplicar teoremas de límites para obtener el resultado final:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \text{ Así que se tiene } f'(x) = 2x$$

El valor de la derivada en un valor particular de la variable independiente, se obtiene al sustituirlo en la expresión analítica que resulta en el cuarto paso.

Ejemplo 4.1.2

Calcular el valor de la derivada del ejemplo anterior en el valor de $x = 3$.

Solución

Al sustituir $x = 3$ en $f'(x) = 2x$, se tiene $f'(3) = 2(3) = 6$.

Otras notaciones para la derivada de la función f definida por $y = f(x)$ son:

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} f(x), D_x y, D_x f.$$

El valor de la derivada en $x = a$, se denota por:

$$y'(a), \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}, \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}, \left. \frac{d}{dx} f(a), D_x y \right|_{x=a}.$$

Los símbolos $\frac{d}{dx}, D_x$ se denominan **operador derivada**. Así para el ejemplo 4.1 la operación diferenciación o derivación es denotada por:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1), D_x(x^2 + 1).$$

Diferenciabilidad de una función.- Una función es derivable en todo su dominio, si el límite en (8) existe para todo x en el dominio de la función.

Ejemplo 4.1.3

Determine si la función f es derivable en todo su dominio.

a) $f(x) = x^3 + x$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución

a) Se tiene $f(x) = x^3 + x$. Puesto que el dominio de la función son todos los números reales, se tiene que verificar que la derivada existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

De la definición de derivada (8):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sustituir $f(x + \Delta x) - f(x) = ((x + \Delta x)^3 + (x + \Delta x)) - (x^3 + x)$ y Δx en (8) para obtener:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((x + \Delta x)^3 + (x + \Delta x)) - (x^3 + x)}{\Delta x}$$

Efectuar operaciones, simplificar y calcular límite:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + x + \Delta x - x^3 - x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 1) = 3x^2 + 1. \end{aligned}$$

Se obtiene: $f'(x) = 3x^2 + 1$.

Puesto que la función derivada existe para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces se verifica que la función f es derivable o diferenciable en todo su dominio.

b) Se tiene $f(x) = \sqrt{x}$.

Puesto que el dominio de la función es el intervalo $[0, \infty)$, se tiene que verificar que la derivada exista para todo $x \in [0, \infty)$.

De la definición de derivada (8):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sustituir $f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$ y Δx en (8) para obtener:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

En éste caso racionalizar el numerador, efectuar operaciones, simplificar y calcular límite:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$\text{Así: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Puesto que la función derivada no existe para todo $x \in [0, \infty)$ entonces se verifica que la función f no es derivable o diferenciable en todo su dominio.

- ✓ Una función f es diferenciable en el intervalo (a, b) si existe el límite en (8) para todo $x \in (a, b)$.

Si en el ejemplo anterior, el dominio de la función f , solo se define en el intervalo $(0, \infty)$, entonces la función f' sería derivable en todo su dominio.

- ✓ Una función f es diferenciable en el intervalo $[a, b]$ si existe el límite en (8) para todo $x \in (a, b)$ y además:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ y } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \text{ existen} \text{-----} (12)$$

Los límites en (12) definen la derivada $y = f'(x)$, por la derecha y por la izquierda.

Definición 4.1.2

Derivada unilateral de una función

Si la función f está definida en $x = a$, entonces la derivada por la derecha de f en $x = a$ denotada por $f'_+(a)$ es definida mediante:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{-----} (13)$$

Si la función la función f está definida en $x = b$, entonces la derivada por la izquierda de f en $x = b$ denotada por $f'_-(b)$ es definida mediante:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \text{-----} (14)$$

Siempre que el límite exista.

Ejemplo 4.1.4

Determine si la función f definida por $f(x) = |x+1|$, es diferenciable en el intervalo indicado.

$$\text{a) } [0, 1] \quad \text{b) } [-2, 2].$$

Solución

a) Se tiene $f(x) = |x+1|$. Por la definición de valor absoluto,

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{si } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Para el intervalo $[0, 1]$, $x \geq -1$, f es definida por $f(x) = x+1$. Ahora para que sea diferenciable en el intervalo $[0, 1]$, debe ser diferenciable en todo punto del intervalo $(0, 1)$, y en $x = 0$ por la derecha y en $x = 1$, por la izquierda.

De la definición de derivada (8):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sustituir $f(x + \Delta x) - f(x) = ((x + \Delta x) + 1) - ((x + \Delta x) + 1)$ y Δx en (8) para obtener:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((x + \Delta x) + 1) - (x + 1)}{\Delta x}$$

Efectuar operaciones, simplificar y calcular límite:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((x + \Delta x) + 1) - (x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x + 1 - x - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Así que : $f'(x) = 1$.

Puesto que la función derivada existe para todo $x \in (0,1)$ entonces f es derivable o diferenciable en el intervalo $(0,1)$.

Para verificar que sea diferenciable en $x = 0$ por la derecha, se debe verificar que el siguiente límite exista

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Al calcular $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ se tiene:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + 1) - 1}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1. \end{aligned}$$

Así que $f'_+(0) = 1$, por lo tanto f es diferenciable en $x = 0$ por la derecha.

Para verificar que sea diferenciable en $x = 1$ por la izquierda se debe verificar que

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ exista.}$$

Al calcular $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1) - 2}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1
 \end{aligned}$$

Así que $f'_-(1) = 1$ por lo tanto f es diferenciable en $x = 1$ por la izquierda.

Puesto que las derivadas laterales existen, entonces la función es diferenciable en el intervalo $[0, 1]$.

b) Para que f sea diferenciable en el intervalo $[-2, 2]$, se tiene que verificar que lo sea en todo $x \in (-2, 2)$ y en los extremos del intervalo cerrado. Como la función es dada por un valor absoluto entonces, se tiene, para el intervalo indicado:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -x - 1, \text{ si } x < -1, \text{ en el intervalo } [-2, -1) \text{ y} \\
 f(x) &= x + 1, \text{ si } x \geq -1, \text{ en el intervalo } [-1, 2].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que verificar la diferenciabilidad en los dos intervalos.

Para el intervalo $[-2, -1)$, f debe ser diferenciable en todo $x \in (-2, -1)$ y debe existir $f'_+(-2)$.

Al calcular la derivada para todo $x \in (-2, -1)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((-x - \Delta x) - 1) - (-x - 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-1) = -1
 \end{aligned}$$

Como la derivada existe en todo $x \in (-2, -1)$, entonces f es diferenciable.

Para calcular $f'_+(-2)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 f'_+(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(-x - 1) - (1)}{x - (-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-x - 2}{x + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-1) = -1.
 \end{aligned}$$

Así que $f'_+(-2)$ existe. Por consiguiente f es diferenciable en todo $x \in [-2, -1)$.

Para el intervalo $[-1, 2]$, f debe ser diferenciable en todo $x \in (-1, 2)$ y debe existir $f'_+(-1)$ y $f'_-(2)$.

Al calcular la derivada para todo $x \in (-1, 2)$, se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((x + \Delta x) + 1) - (x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x + 1 - x - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Como la derivada existe en todo $x \in (-2, -1)$, entonces f es diferenciable.

Para calcular $f'_+(-1)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1) - (0)}{x - (-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (1) = 1. \end{aligned}$$

Así que $f'_+(-1)$ existe.

Para calcular $f'_-(2)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x + 1) - (3)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (1) = 1. \end{aligned}$$

Así que $f'_-(2)$ existe. Por consiguiente f es diferenciable en todo $x \in [-2, -1)$.

Solo falta saber si es diferenciable en $x = -1$. Para esto se verifica que se cumpla:

$$f'_+(-1) = f'_-(-1).$$

Como $f'_+(-1) = 1$, entonces se calcula $f'_-(-1)$ así que:

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(-x - 1) - (0)}{x - (-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1) = -1. \end{aligned}$$

Como $f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$ entonces f no es diferenciable en $x = -1$, y por consiguiente, no lo es en todo el intervalo $[-2, 2]$.

En el ejemplo anterior la gráfica de la función f , no tiene interrupciones en el intervalo $[-2, 2]$. (Ver Figura 4.1.2), es decir, es continua; sin embargo en el punto $x = -1$, no tiene derivada, esto es, una función continua en un punto a no necesariamente es diferenciable en el mismo punto.

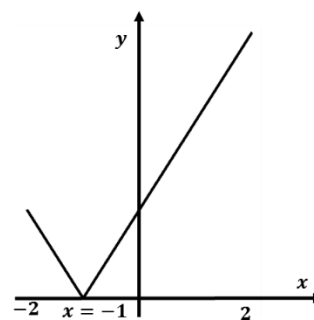


Figura 4.1.2 Función $f(x) = |x + 1|$, no derivable, en $x = -1$.

El siguiente teorema, relaciona la diferenciable de una función con su continuidad.

Teorema 4.1.1

Sea f una función diferenciable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

El recíproco del teorema, no necesariamente es cierto, como se manifestó en el último ejercicio.

4.2 CONCEPTOS DE INCREMENTO Y DE RAZÓN DE CAMBIO. LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

El cambio que experimenta una variable al pasar de un valor inicial a un valor final, se obtiene al restar el valor inicial del valor final, generalmente se representa por el símbolo Δ (letra delta mayúscula). Así para la variable x , se tiene:

$$\Delta x = x_f - x_i \text{-----} (1)$$

Donde:

Δx : Representa el cambio de x

x : Valor inicial de la variable

x_f : Valor final de la variable

Si el valor inicial de la variable es menor que su valor final, entonces el cambio es positivo y se dice que ha habido un aumento o incremento en la variable.

Para la variable x , se escribe:

$$\text{Si } x_i < x_f \text{ entonces } \Delta x > 0 \text{-----} (2)$$

Si el valor inicial de la variable es mayor que su valor final entonces el cambio es negativo, y se dice que ha habido una disminución o decremento en la variable.

Para la variable x , se escribe:

$$\text{Si } x_i > x_f \text{ entonces } \Delta x < 0 \text{----- (3)}$$

La palabra incremento usualmente se utiliza para describir las dos situaciones indicadas, y es la que se utiliza en el presente documento.

Si una función f es definida por $y = f(x)$, entonces para un valor inicial de x , se tiene $y_i = f(x_i)$, y $y_f = f(x_f)$ para un valor final. Por lo tanto el cambio en f puede ser representado por:

$$\Delta y = y_f - y_i = f(x_f) - f(x_i) = f(x_i + \Delta x) - f(x_i) \text{----- (4)}$$

Donde $x_f = x_i + \Delta x$, se obtiene de (1), y Δy se denomina incremento de y , o incremento de la función.

En la Figura 4.2.1, se ilustran geométricamente éstos conceptos, las coordenadas del punto P y del punto Q son $(x_i, f(x_i))$ y $(x_f, f(x_f))$ respectivamente.

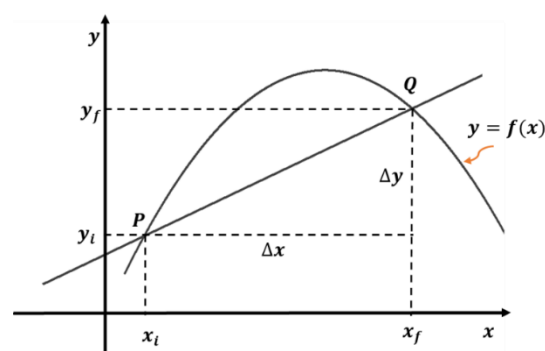


Figura 4.2.1 Representación geométrica de $\Delta x, \Delta y$.

Razón de cambio

Es importante recordar que una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, indica cuantas unidades de b , están contenidas en a , o bien, se dice que las cantidades a y b , se comparan por su cociente.

Ahora bien, el cambio de una función f definida por $y = f(x)$, desde un valor inicial x_i hasta un valor final x_f de x , se denota por Δy , y por Δx el cambio en la variable independiente, de

esta manera la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una razón de cambio media de la función. En forma equivalente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_f) - f(x_i)}{x_f - x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} = \frac{\text{cambio de } f}{\text{cambio de } x} \text{----- (5)}$$

Cuando existe $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, la razón se denomina razón de cambio media instantánea de la función, o bien, razón de cambio instantánea, en forma equivalente:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

De esta forma, la derivada de una función, es el límite de la razón de cambio media de la función, respecto del cambio en la variable independiente, cuando éste tiende a cero, y es independiente de la naturaleza de la función.

Ejemplo 4.2.1

Dada la función f definida por $f(x) = x^{1/3}$, determine la razón de cambio media de la función, en el intervalo $[0, 8]$.

Solución

Se tiene $f(x) = x^{1/3}$, $[0, 8]$ entonces:

x_f	x_i	$\Delta x = x_f - x_i$	$f(x_f)$	$f(x_i)$	$\Delta y = f(x_f) - f(x_i)$
8	0	$8 = 8 - 0$	$f(8) = 2$	$f(0) = 0$	$2 = 2 - 0$

La razón de cambio media de la función sobre el intervalo $[0, 8]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Esto significa que en el intervalo $[0, 8]$ la variable independiente cambia en ocho unidades, y dos la función, o bien, que por cada cuatro unidades de cambio en la variable independiente, la función cambia una.

Debe notarse que, al elegir otro intervalo del mismo tamaño, la razón de cambio media no necesariamente es igual, por ejemplo sobre el intervalo $[16, 24]$ la variable independiente también cambia ocho unidades sin embargo la razón de cambio media es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{24}}{8} \neq \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 4.2.2

Dada la función f definida por $f(x) = x^{1/3}$, determine, la razón de cambio media instantánea.

Solución

Se tiene $f(x) = x^{1/3}$, entonces la razón de cambio media instantánea de la función es dada por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Al sustituir $f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}$ en la expresión anterior se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}}{\Delta x} \text{ ----- (6).}$$

Para resolver se identifica el numerador como factor de una diferencia de cubos:

$$(x + \Delta x) - x = \left((x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3} \right) \left((x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3} (x^{1/3}) + x^{2/3} \right)$$

Despejar $\left((x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3} \right)$ y sustituir en (6).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{(x + \Delta x) - x}{\left((x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3} (x^{1/3}) + x^{2/3} \right)} \right] \text{ Simplificar} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{x + \Delta x - x}{\left((x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3} (x^{1/3}) + x^{2/3} \right)} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\left((x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3} (x^{1/3}) + x^{2/3} \right)} \right] \text{ Calcular el límite} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}}. \end{aligned}$$

Así que la razón de cambio media instantánea de la función es dada por:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Para cualquier valor de x excepto cero.

4.3 LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Si la gráfica de f dada por $f = f(x)$ es la curva C y las coordenadas de los puntos P y Q sobre la curva son $(a, f(a))$, $(x, f(x))$, respectivamente, entonces la recta con pendiente:

$$m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ ----- (1),}$$

es la recta secante a la curva que pasa por los puntos P y Q .

Si el punto P se mantiene fijo, y el punto Q se desplaza sobre la curva hacia el punto P , entonces las rectas secantes a la curva que pasan por P y por los diferentes puntos próximos a P , tienden a la posición de la recta tangente a la curva en el punto P , ver Figura 4.3.1, por consecuencia la pendiente de las rectas secantes así obtenidas se aproximan cada vez más a la pendiente de la recta tangente, tal situación se describe analíticamente por:

$$\lim_{x \rightarrow a} m_{\text{sec}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m_T = f'(a) \text{ ----- (2)}$$

Donde

m_{sec} : Pendiente de la recta secante

m_T : Pendiente de la recta tangente

$f'(a)$: Valor de la derivada de la función evaluada en el punto de tangencia

Así que, la interpretación geométrica de la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente a su gráfica para un valor de x .

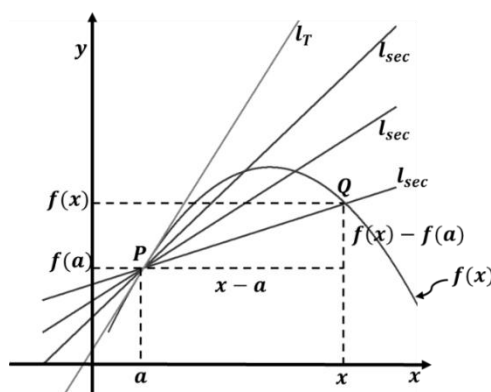


Figura 4.3.1 Interpretación geométrica de la derivada $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m_T$

Ahora se tiene que, si la función f es diferenciable en algún punto de su gráfica, entonces, la ecuación de la recta tangente en dicho punto (denominado punto de tangencia) es dada por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \text{----- (3)}$$

Donde:

$f'(a)$: Es el valor de la derivada de la función en el punto de tangencia.

$(a, f(a))$: Coordenadas del punto de tangencia.

Ejemplo 4.3.1

Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la función f definida por $f(x) = x^3 + x$ en el punto de coordenadas $(1, 2)$.

Solución

Se tiene $f(x) = x^3 + x$, punto de tangencia $(1, 2)$.

Para utilizar (3) se calcula el valor de la derivada en el punto de tangencia, del ejemplo 4.1.3a la derivada es $f'(x) = 3x^2 + 1$, evaluada en $x = 1$, se tiene $f'(1) = 4$.

Al sustituir valores en (3) se obtiene la ecuación de la recta tangente a la curva.

$$y - 2 = 4(x - 1), \text{ al despejar: } y = 4x - 2 \text{ Ecuación de la recta tangente.}$$

En la Figura 4.3.2 se muestran la gráfica de la función y la recta tangente.

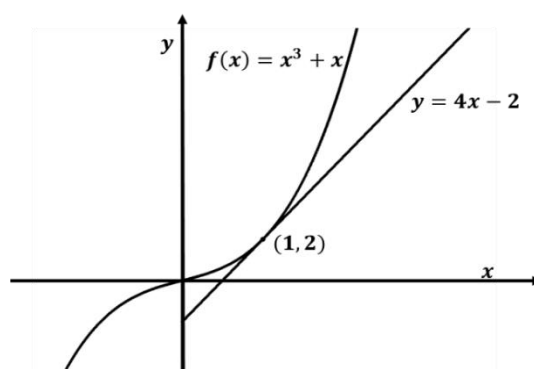


Figura 4.3.2 Gráfica de $f(x) = x^3 + x$, y de la recta tangente $y = 4x - 2$.

4.4 CONCEPTO DE DIFERENCIAL, INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS DIFERENCIALES.

Sea la función f definida por $f(x) = x^3 + x$, y $y = 4x - 2$, la ecuación de su recta tangente, en el punto de tangencia $(1, 2)$, tomar como referencia el valor de $x = 1$, para elaborar la tabla siguiente:

Tabla 4.4.1 Valores de x próximos a 1

x	0.8	0.9	0.99	1	1.01	1.1	1.2
$f(x) = x^3 + x$	1.3120	1.6290	1.9602	2	2.0403	2.4310	2.9280
$y = 4x - 2$	1.2000	1.6000	1.9600	2	2.0400	2.0400	2.0800
$f(x) - y$	0.1120	0.0290	0.0002	0	0.0003	0.0310	0.1280
$\Delta y = f(x) - 2$	-0.688	-0.371	-0.0398	0	0.0403	0.4310	0.9280
$\Delta x = x - 1$	-0.2	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.02
$f'(x)$	2.92	3.43	3.9403	4	4.0603	4.6300	5.3200
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3.44	3.71	3.98	$\frac{0}{0}$	4.03	4.31	4.64
$f'(x)\Delta x$	-0.584	-0.343	-0.0394	0	0.0406	0.4630	1.064

De los datos de la tabla se tiene:

1. Los valores de x por la izquierda de 1, aumentan y se aproximan al número uno; por la derecha, disminuyen y también se aproximan a uno.
2. El valor de la función por la izquierda de 1, aumenta y se aproxima al número dos; por la derecha disminuye, y también se aproxima a dos.
3. El valor de la recta tangente por la izquierda de 1, aumenta y se aproxima a dos; por la derecha, disminuye y también se aproxima a dos.

4. La diferencia entre el valor de la función y el de la recta tangente es cada vez menor y tiende a cero.
5. El valor del cambio de la función Δy por la izquierda es negativo y, positivo por la derecha. Numéricamente, es cada vez menor por los dos lados, es decir $|\Delta y| \rightarrow 0$.
6. El cambio Δx de la variable independiente por la izquierda, es negativo y, positivo por la derecha. Numéricamente, es cada vez menor y tiende a cero, es decir $|\Delta x| \rightarrow 0$.
7. El valor de la derivada por la izquierda aumenta y, disminuye por la derecha, en ambos casos tiende al número cuatro.
8. El cociente de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cociente diferencial o razón de cambio medio, por la izquierda aumenta y disminuye por la derecha, en ambos casos tiende a cuatro y en $x=1$, toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Al analizar los datos obtenidos se observa que, el comportamiento tendencial de la función y el de la recta tangente es similar, es decir, tienden al mismo valor 2 al aproximar los valores de la variable independiente x , al valor que tiene en el punto de tangencia ($x=1$), por consecuencia, la diferencia entre sus valores tienden a cero, así que, para valores de la variable independiente próximos al punto de tangencia, los valores de la función pueden ser aproximados con los de la recta tangente. es decir, si f es una función diferenciable en el punto $(a, f(a))$, entonces la pendiente de la recta tangente es :

$$m_T = f'(a) = \frac{y-a}{x-a} \text{-----} (1)$$

Donde (x, y) son las coordenadas de un punto sobre la recta tangente.

Al despejar y de (1) se obtiene la ecuación de la recta tangente en la forma punto-pendiente

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \text{-----} (2)$$

Esta expresión recibe un nombre particular dado en la siguiente definición:

Definición 4.4.1

Aproximación lineal

Se denomina aproximación lineal de $f(x)$ en $x=a$, a la función

$$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a) \text{-----} (3)$$

Así que para un valor de x próximo a su valor en el punto de tangencia, el valor de la función, es aproximadamente igual al de su recta tangente. En la Figura 4.4.1 se muestran estos resultados.

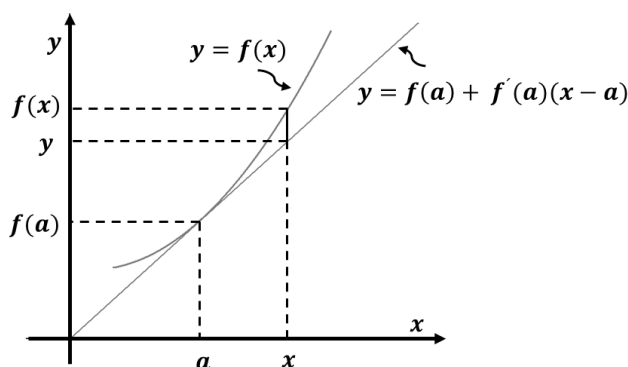


Figura 4.4.1 Aproximación lineal de $f(x)$ por $L(x)$

Ejemplo 4.4.1

Obtenga la linealización de la función f definida por $f(x) = x^3 + x$, en $a = 1$. Utilizarla para obtener una aproximación lineal de la función para el valor de $x = 1.02$.

Solución

La linealización se obtiene al sustituir $f'(a) = f'(1) = 4$, $f(1) = 2$, $a = 1$ en (3).

Así se obtiene la linealización de la función:

$$L(x) = 4(x - 1) + 2.$$

Al utilizar una aproximación lineal de la función para el valor de $x = 1.02$, se tiene:

$$f(x) \approx L(x)$$

$$f(1.02) \approx L(1.02)$$

$$f(1.02) \approx 4(1.02 - 1) + 2 = 4(0.02) + 2 = 2.08.$$

Otro comportamiento tendencial importante, se observa en el cociente de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y el valor de la derivada $f'(x)$, al aproximar a cero el cambio de la variable independiente Δx , es decir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \text{ o bien } \Delta y \approx f'(x) \Delta x \text{ -----(4)}$$

A Δx , y $f'(x) \Delta x$ se les llama diferenciales y se representan por dx para Δx y dy para $f'(x) \Delta x$, esto es:

$$\Delta x = dx, dy = f'(x) \Delta x \text{ ----- (5)}$$

Además para valores de Δx , próximos a cero, el cambio de la función se aproxima al valor de su diferencial, con estos resultados se tiene la siguiente:

Definición 4.4.2**Diferenciales**

Sea f una función diferenciable definida por $y = f(x)$. El cambio en la variable independiente x , se denomina diferencial de x , se denota por dx . El diferencial de la variable dependiente y se escribe dy y es dado por $dy = f'(x)\Delta x$.

Los conceptos mencionados se muestran gráficamente en la Figura 4.4.2

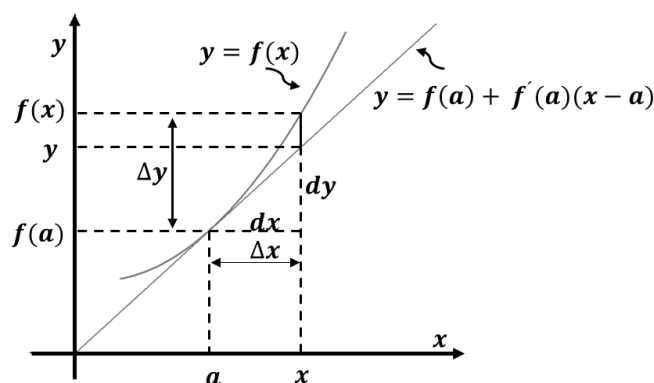


Figura 4.4.2 Interpretación geométrica de los diferenciales dy, dx .

Ejemplo 4.4.2

Muestre geoméricamente los conceptos $dy, dx, \Delta x, \Delta y$ en $x = 1$, $\Delta x = 0.5$ para la función f , definida por $f(x) = x^3 + x$.

Solución

Se tiene $f(x) = x^3 + x$, $f'(x) = 3x^2 + 1$, $x = 1$, $\Delta x = 0.5$

Al sustituir los valores en la expresión $\Delta x = x_f - x_i$, se tiene $0.5 = x_f - 1$, despejar $x_f = 1.5$.

Para $\Delta y = f(x_f) - f(x_i) = f(1.5) - f(1) = 4.875 - 2 = 2.875$

Para $dy = f'(x)\Delta x = f'(1)(0.5) = 2$ y de la expresión $dx = \Delta x$, se tiene $dx = 0.5$

Geoméricamente los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4.4.3

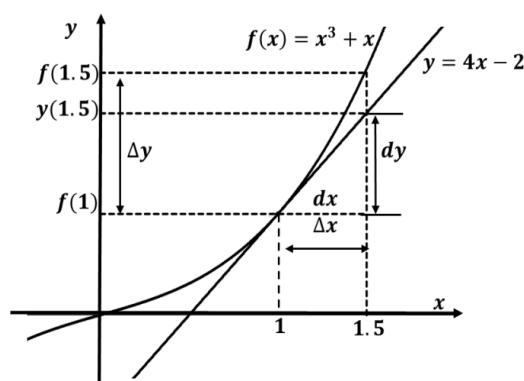


Figura 4.4.3 Representación geométrica de $dy, dx, \Delta x, \Delta y$.

El diferencial dy , puede ser una cantidad positiva o negativa, el valor numérico es cada vez mayor en la medida en que los valores de la variable independiente se alejen del punto de tangencia, y puesto que el diferencial es una función lineal resulta más fácil utilizarlo para aproximar el cambio de la función.

4.5 PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Las siguientes reglas o teoremas permiten obtener la derivada de una función sin recurrir a la definición, las demostraciones son las usuales.

Teoremas para obtener derivadas de funciones

1) Teorema 4.5.1 (Regla de la función constante).

Sea f una función definida por $f(x) = c$, para c una constante, entonces

$$f'(x) = 0.$$

Demostración

Sea $f(x) = c$ y $f(x + \Delta x) = c$, donde c es una constante, al sustituir éstas expresiones en la definición de derivada $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) Teorema 4.5.2 (Regla de la función identidad).

Sea f una función definida por $f(x) = x$, entonces

$$f'(x) = 1.$$

Demostración

Sea $f(x) = x$ y $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$, al sustituir éstas expresiones en la definición de derivada

$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Fin de la demostración.

3) Teorema 4.5.3 (Regla de las potencias)

Sea f una función definida por $f(x) = x^n$, n entero positivo, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Demostración

Sea $f(x) = x^n$, y $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$, n entero positivo, al sustituir éstas expresiones en la definición de derivada $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \text{ ----- (1)}$$

Para simplificar la expresión se utiliza el Teorema del Binomio de Newton:

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n$$

Sustituir esta última expresión en (1):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n \right) - x^n}{\Delta x}$$

Al simplificar y factorizar con Δx se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + nx\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1} \right)}{\Delta x}$$

Simplificar y calcular límite

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + nx\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1} \right) \\ &= \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(0) + \dots + nx(0) + (0) \right) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Fin de la demostración.

4) Teorema 4.5.4 (Regla de la suma o resta de funciones)

Sean f y g funciones derivables en x , entonces

$$D_x[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x).$$

Demostración

Sea $h(x) = f(x) + g(x)$, y $h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$, al sustituir éstas expresiones en la definición de derivada $h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} && \text{Reagrupar} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} && \text{Separar} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} && \text{Identificar derivada.} \\
 h'(x) &= f'(x) + g'(x).
 \end{aligned}$$

Fin de la demostración.

5) Teorema 4.5.5 (Regla del producto de una constante por una función)

Sea f una función derivable en x , y c una constante, entonces

$$D_x [cf(x)] = cf'(x).$$

Demostración

Sea $cf(x)$ y $cf(x + \Delta x)$, al sustituir éstas expresiones en la definición de derivada se tiene:

$$\begin{aligned}
 D_x [cf'(x)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} \\
 &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= cf'(x).
 \end{aligned}$$

Fin de la demostración.

6) Teorema 4.5.6 (Regla del producto de funciones)

Sean f y g funciones derivables en x , entonces

$$D_x [f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Demostración

Sea $h(x) = f(x)g(x)$, y $h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$, al sustituir éstas expresiones en la

definición de derivada $h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$ se tiene:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)] - [f(x)g(x)]}{\Delta x}$$

El artificio algebraico para llegar al resultado consiste en sumar y restar $f(x)g(x + \Delta x)$, en el numerador de la expresión anterior:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

Factorizar expresiones:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)] + g(x+\Delta x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

Separar límites para identificar la definición de derivada:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

Identificar límites y calcular:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x+\Delta x) \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \right] \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

Fin de la demostración.

7) Teorema 4.5.7 (Regla del cociente de funciones).

Sean f y g funciones derivables en x , $g(x) \neq 0$, entonces

$$D_x \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demostración

Sea $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, y $h(x+\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}$, al sustituir éstas expresiones en la definición de

derivada $h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$ se tiene:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)} \end{aligned}$$

Como en la demostración anterior, el artificio algebraico para llegar al resultado, consiste en sumar y restar $f(x)g(x)$, en el numerador de la expresión anterior:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)}$$

Factorizar expresiones:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)] - f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)}$$

Separar términos y simplificar:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{g(x+\Delta x)\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x} \end{aligned}$$

Identificar definición de derivada y calcular límites:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)g(x+\Delta x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{g(x)} f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)g(x)} g'(x) \\ &= \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

Fin de la demostración.

Ejemplo 4.5.1

Utilice las reglas o teoremas para derivar la función indicada. Indique el teorema que se aplica.

$$\text{a) } f(x) = 3x + \sqrt{2}. \quad \text{b) } f(x) = (x^4 - x)(2x^2 - 3x + 1). \quad \text{c) } f(x) = \frac{2}{x}.$$

Solución

a) Se tiene $f(x) = 3x + \sqrt{2}$ Aplicar T.4.5.4.

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(3x) + D_x\sqrt{2} \quad \text{Aplicar T.4.5.5, T4.5.1} \\ &= 3D_x x + 0 \quad \text{Aplicar T4.5.2} \\ &= 3(1) = 3 \end{aligned}$$

b) Se tiene $f(x) = (x^4 - x)(2x^2 - 3x + 1)$ Aplicar T.4.5.6.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4 - x)D_x(2x^2 - 3x + 1) + (2x^2 - 3x + 1)D_x(x^4 - x) \quad \text{Aplicar T. 4.5.4} \\ &= (x^4 - x)(D_x 2x^2 - D_x 3x + D_x 1) + (2x^2 - 3x + 1)(D_x x^4 - D_x x) \quad \text{Aplicar T. 4.5.5, T.4.5.1, T.4.5.2} \\ &= (x^4 - x)(2D_x x^2 - 3D_x x + 0) + (2x^2 - 3x + 1)(D_x x^4 - 1) \quad \text{Aplicar T. 4.5.3} \\ &= (x^4 - x)(4x - 3(1)) + (2x^2 - 3x + 1)(4x^3 - 1) \quad \text{Realizar operación y simplificar} \\ &= 12x^5 - 15x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 6x - 1. \end{aligned}$$

c) Se tiene $f(x) = \frac{2}{x}$ Aplicar T.4.5.7

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x D_x 2 - 2 D_x x}{x^2} \text{ Aplicar T.4.5.1, T4.5.2} \\ &= \frac{x(0) - 2(1)}{x^2} \\ &= \frac{-2}{x^2}. \end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado al escribir $f(x) = \frac{2}{x}$ como $f(x) = 2x^{-1}$ y aplicar T.4.5.5, T.4.5.3:

$$f'(x) = D_x 2x^{-1} = 2D_x x^{-1} = 2(-1)x^{-2} = -\frac{2}{x^2}.$$

En general si $f(x) = \frac{1}{x^n}$, para n entero y aplicar los teoremas para derivar se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^n D_x (1) - 1 D_x x^n}{(x^n)^2} \\ &= \frac{x^n (0) - n x^{n-1}}{(x^n)^2} \\ &= -n x^{-n-1}. \end{aligned}$$

Ahora al escribir $f(x) = \frac{1}{x^n}$ como $f(x) = x^{-n}$ y aplicar los teoremas para derivadas se obtiene el mismo resultado:

$$f'(x) = -n x^{-n-1}.$$

De ésta manera el Teorema 4.5.3 se amplía para n entero.

La derivada de la función $f(x) = x^{1/3}$, es $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$ y, la derivada de $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ es $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$, las dos obtenidas a partir de la definición, (ver ejemplos 4.2.2 y 4.1.3 b respectivamente). Se obtiene el mismo resultado al aplicar el Teorema 4.5.3.

Éstos últimos resultados muestran que existen diferentes procedimientos para obtener la derivada de una función.

En el siguiente ejemplo, se obtiene la derivada al aplicar diferentes estrategias.

Ejemplo 4.5.2

Sea la función $f(x) = (x^4 - x)^2$. Obtener la derivada:

a) Al desarrollar el binomio. b) Aplicar la regla del producto.

Solución

a) Se tiene $f(x) = (x^4 - x)^2$, al desarrollar el binomio $f(x) = (x^4 - x)^2 = x^8 - 2x^5 + x^2$

Aplicar las reglas para derivar y factorizar:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^7 - 10x^4 + 2x \\ &= 2x(4x^6 - 5x^3 + 1) \\ &= 2x(x^3 - 1)(4x^3 - 1) \\ &= 2(x^4 - x)(4x^3 - 1) \end{aligned}$$

b) Se tiene $f(x) = (x^4 - x)(x^4 - x)$, aplicar la regla del producto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4 - x)D_x(x^4 - x) + (x^4 - x)D_x(x^4 - x) \\ &= (x^4 - x)(4x^3 - 1) + (x^4 - x)(4x^3 - 1) \\ &= 2(x^4 - x)(4x^3 - 1). \end{aligned}$$

Derivada de la potencia de una función.

8) Teorema 4.5.8

Sea f una función derivable en x definida por $[f(x)]^n$ entonces:

$$D_x[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x).$$

Se obtiene el mismo resultado al aplicar éste teorema al ejercicio anterior.

$$\begin{aligned} D_x(x^4 - x)^2 &= 2(x^4 - x)D_x(x^4 - x) \\ &= 2(x^4 - x)(4x^3 - 1). \end{aligned}$$

4.6 DERIVADA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Sea f una función definida por $f(x) = a^x$, $a > 0$ entonces f' a partir de la definición será:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{Al sustituir } f(x+h) = a^{x+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \quad \text{Factorizar } a^x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \quad \text{Aplicar límite de un producto} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} a^x \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h} \right) \quad \text{Aplicar límite de una constante}(a^x) \\ &= (a^x) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h} \right) \text{----- (1)} \end{aligned}$$

Para calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$, se observará su comportamiento tendencial para valores de $a = 2, e$ y 3 .

Tabla 4.6.1 Valores de x próximos a cero

h	0.001	0.0001	0	-0.0001	-0.001
$\frac{(2^h - 1)}{h}$	0.6933	0.6931		0.6931	0.6929
$\frac{(e^h - 1)}{h}$	1.0005	1.0000		0.9999	0.9995
$\frac{(3^h - 1)}{h}$	1.0992	1.0986		1.0985	1.0980

De los datos obtenidos en los tres casos, el comportamiento tendencial es hacia un número, en el primero es hacia el número .6931, para el segundo hacia 1 y 1.0986 para el tercero. Si se relacionan con su logaritmo natural se tiene:

$\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln e = 1$, y $\ln 3 \approx 1.0986$, es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2^h - 1)}{h} \approx \ln 2, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3^h - 1)}{h} \approx \ln 3.$$

De acuerdo con ésta evidencia se puede escribir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h} \approx \ln a \text{ ----- (2)}$$

Al sustituir (2) en (1) se tiene:

$$f'(x) = a^x \ln a.$$

Si $f(x) = e^x$, entonces:

$$f'(x) = e^x \ln e = e^x (1) = e^x.$$

En el teorema siguiente se puntualizan estos resultados.

Teorema 4.6.1 Derivadas de las funciones exponenciales

Sea f la función definida por $f(x) = a^x$, $a > 0$ entonces

$$D_x a^x = a^x \ln a$$

Sea f la función definida por $f(x) = e^x$ entonces

$$D_x e^x = e^x.$$

4.7 DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se inicia con el cálculo de la derivada a partir de la definición para la función $f(x) = \sin x$.

Sea $f(x) = \sin x$, y $f(x+h) = \sin(x+h)$, entonces al sustituir éstas expresiones en la definición de derivada se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Utilizar la identidad trigonométrica $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \sin h \cos x) - \sin x}{h} \quad \text{Factorizar } \sin x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \quad \text{Separar e identificar límites}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right]$$

$$= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(\cos h - 1)}{h} \right] + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin h}{h} \right] \quad \text{Por teorema 3.8.3}$$

$$= \sin(0) + \cos x(1) = \cos x.$$

De esta manera se obtiene el teorema siguiente:

Teorema 4.7.1

Derivada de la función f , definida por $f(x) = \sin x$

$$D_x \sin x = \cos x.$$

Se obtiene la derivada de $f(x) = \cos x$ por un procedimiento similar.

Sea $f(x) = \cos x$, y $f(x+h) = \cos(x+h)$ entonces al sustituir éstas expresiones en la definición de derivada se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Utilizar la identidad trigonométrica $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin B \sin A$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} && \text{Factorizar } \cos x \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} && \text{Separar e identificar límites} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x (\cos h - 1)}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h} \right] \\
&= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(\cos h - 1)}{h} \right] - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin h}{h} \right] && \text{Por teorema 3.8.3} \\
&= \cos x (0) - \sin x (1) = -\sin x.
\end{aligned}$$

Se obtiene el teorema siguiente:

Teorema 4.7.2

Derivada de la función f , definida por $f(x) = \cos x$

$$D_x \cos x = -\sin x.$$

Puesto que las cuatro funciones trigonométricas restantes, pueden ser expresadas en función del seno y coseno, su derivada se obtiene al aplicar las reglas descritas.

Para la función tangente se tiene:

$$\begin{aligned}
D_x \tan x &= D_x \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] && \text{Aplicar teoremas T.4.5.7, T4.7.1 y T.4.7.2} \\
&= \left[\frac{\cos x (\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} \right] \\
&= \left[\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right] && \text{Aplicar identidad pitagórica y trigonométrica} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}$$

Por lo que $D_x \tan x = \sec^2 x$.

Análogamente para la función cotangente.

$$\begin{aligned}
D_x \cot x &= D_x \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right] && \text{Aplicar teoremas T.4.5.7, T4.7.1 y T.4.7.2} \\
&= \left[\frac{(\sin x)(-\sin x) - \cos x (\cos x)}{(\sin x)^2} \right] \\
&= \left[\frac{-(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sin^2 x} \right] && \text{Aplicar identidad pitagórica y trigonométrica} \\
&= \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.
\end{aligned}$$

Por lo que $D_x \cot x = -\csc^2 x$.

Estos resultados y las derivadas de la función secante y cosecante se resumen a continuación.

Teorema 4.7.3

$D_x \tan x = \sec^2 x$	$D_x \cot x = -\csc^2 x$
$D_x \sec x = \tan x \sec x$	$D_x \csc x = -\cot x \csc x$

Ejemplo 4.7.3

Aplicar las reglas para derivar las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = x^2 \sin x \quad \text{b) } f(x) = x^{3/2} \cos^2 x \quad \text{c) } f(x) = 2^x \sec x.$$

Solución

a) Aplicar regla del producto.

$$\begin{aligned} D_x x^2 \sin x &= x^2 D_x \sin x + \sin x D_x x^2 \\ &= x^2 \cos x + \sin x (2x) \\ &= x(x \cos x + 2 \sin x) \end{aligned}$$

b) Aplicar regla del producto.

$$\begin{aligned} D_x x^{3/2} \cos^2 x &= x^{3/2} D_x \cos^2 x + \cos^2 x D_x x^{3/2} \quad \text{Aplicar T4.5.8 para derivar } \cos^2 x \\ &= x^{3/2} (2) \cos x (-\sin x) + \cos^2 x \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right) \\ &= x^{1/2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 x - 2x \cos x \sin x\right). \end{aligned}$$

c) Aplicar regla del producto.

$$\begin{aligned} D_x 2^x \sec x &= 2^x D_x \sec x + \sec x D_x 2^x \\ &= 2^x \tan x \sec x + \sec x (2^x \ln 2) \\ &= 2^x \sec x (\tan x + \ln 2) \end{aligned}$$

4.8 REGLA DE LA CADENA

Sea f una función definida por:

$$f(x) = (x^4 - x)^2 \text{ ----- (1)}$$

Si $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4 - x$, $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 4x^3 - 1$, entonces (1) se puede escribir:

$$f(g(x)) = f(x^4 - x) = (x^4 - x)^2$$

Si $h(x) = f(g(x))$, entonces $h(x) = (x^4 - x)^2$, y h' al aplicar la regla del producto para derivadas es (ver ejemplo 4.5.2 b):

$$h'(x) = 2(x^4 - x)(4x^3 - 1).$$

Identificada como el producto de $f'(g(x))g'(x)$, puesto que $f'(g(x)) = 2(x^4 - x)$ y $g'(x) = 4x^3 - 1$, es decir:

$$h'(x) = D_x f(g(x)) = 2(x^4 - x)(4x^3 - 1) = f'(g(x))g'(x).$$

El siguiente teorema está relacionado con éste resultado.

Teorema 4.8.1

Sean f y g funciones derivables en $g(x)$ y en x respectivamente, entonces

$$D_x f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \text{ ----- (2)}$$

Al utilizar la notación de Leibniz se tiene:

Sea $y = f(u)$, $u = g(x)$, entonces $\frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x))$ y $\frac{du}{dx} = g'(x)$, por consiguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) \text{ ----- (3)}$$

La dependencia entre las variables se puede representar por:

$$y \text{ --- } u \text{ --- } x$$

En donde el cambio de la variable y , depende del cambio en la variable u , que a su vez depende del cambio en x , es decir, el cambio en la variable y , solo depende del cambio en x a ésta forma de relacionar las derivadas se conoce como la regla de la cadena.

Estos resultados se relacionan con el siguiente teorema.

Teorema 4.8.2.

Si u es diferenciable de x , entonces

$$\begin{array}{lll} 1. D_x u^n = nu^{n-1} D_x u & 4. D_x \sin u = \cos u D_x u & 7. D_x \cot u = -\csc^2 u D_x u \\ 2. D_x a^u = a^u \ln a D_x u & 5. D_x \cos u = -\sin u D_x u & 8. D_x \sec u = \tan u \sec u D_x u \\ 3. D_x e^u = e^u D_x u & 6. D_x \tan u = \sec^2 u D_x u & 9. D_x \csc u = -\cot u \csc u D_x u. \end{array}$$

Donde $u = g(x)$.

Ejemplo 4.8.1

Obtener la derivada de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = a^{x^2} & \text{b) } f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{e^{3x}} & \text{c) } f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{\sec 2x}. \end{array}$$

Solución

a) Aplicar regla de la cadena

$$D_x a^{x^2} = a^{x^2} \ln a D_x x^2 = a^{x^2} \ln a (2x) = 2xa^{x^2} \ln a.$$

b) Se tiene $f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{e^{3x}}$ Aplicar regla del cociente y de la cadena

$$\begin{aligned} D_x \left(\frac{\sin\sqrt{x}}{e^{3x}} \right) &= \frac{e^{3x} D_x \sin\sqrt{x} - \sin\sqrt{x} D_x e^{3x}}{(e^{3x})^2} \\ &= \frac{(e^{3x})(\cos\sqrt{x}) D_x \sqrt{x} - (\sin\sqrt{x})(e^{3x}) D_x 3x}{(e^{3x})^2} \\ &= \frac{(e^{3x})(\cos\sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) - (\sin\sqrt{x})(e^{3x}) 3}{(e^{3x})^2} \\ &= \frac{(e^{3x}) \left[\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - 3\sin\sqrt{x} \right]}{(e^{3x})^2} \\ &= \frac{\left[\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - 3\sin\sqrt{x} \right]}{e^{3x}}. \end{aligned}$$

c) Se tiene $f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{\sec 2x}$ Aplicar regla del cociente y de la cadena

$$\begin{aligned} D_x \left(\frac{(x^2 - 1)}{\sec(2x)} \right) &= \frac{\sec(2x) D_x (x^2 - 1) - (x^2 - 1) D_x \sec(2x)}{(\sec 2x)^2} \\ &= \frac{\sec(2x)(2x) - (x^2 - 1) \sec(2x) \tan(2x) D_x 2x}{(\sec 2x)^2} \\ &= \frac{2\sec(2x) [x - (x^2 - 1) \tan(2x)]}{(\sec 2x)^2} = \frac{2 [x - (x^2 - 1) \tan(2x)]}{\sec(2x)}. \end{aligned}$$

4.9 FÓRMULAS DE DERIVACIÓN Y FÓRMULAS DE DIFERENCIACIÓN

Si f es una función derivable definida por $y = f(x)$, el cambio en la variable independiente x , se denomina diferencial de x , se escribe dx , el diferencial de la variable dependiente y , se denomina diferencial de y (diferencial de la función df) se escribe dy , es dado por $dy = f'(x)dx$, es decir, es el producto de la derivada de la función por el diferencial de la variable independiente. Por consecuencia su cálculo requiere de las fórmulas para derivar.

En la siguiente Tabla se muestran las reglas básicas de derivación con su correspondiente fórmula de diferenciación.

Tabla 4.9.1 Formulas de derivación y de diferenciación

Fórmulas de derivación	Fórmulas de diferenciación	Fórmulas de derivación	Fórmulas de diferenciación
1. $\frac{d}{dx} c = 0$	$dc = 0$	7. $\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$	$du^n = nu^{n-1} du$
2. $\frac{d}{dx} x = 1$	$dx = dx$	8. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$	$da^u = a^u \ln a du$
3. $\frac{d}{dx} cu = c \frac{d}{dx} u$	$d(cu) = cdu$	9. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$	$de^u = e^u du$
4. $\frac{d}{dx} (u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	$d(u+v) = du + dv$	10. $\frac{d}{dx} \text{sen } u = \cos u \frac{du}{dx}$	$d \text{sen } u = \cos u du$
5. $\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	$d(uv) = u dv + v du$	11. $\frac{d}{dx} \cos u = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$	$d \cos u = -\text{sen } u du$
6. $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$	$d \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$	12. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	$d \tan u = \sec^2 u du$

Donde u, v son funciones derivables de x .

Ejemplo 4.9.1

Determinar el diferencial de la función dada.

$$\text{a) } f(x) = \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \quad \text{b) } f(x) = \frac{(x^2 - x)^3}{\sec(2x)}.$$

Solución

a) Al aplicar la fórmula (10) del diferencial se tiene:

$$\begin{aligned} d \left[\text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] &= \cos \left(\frac{1}{x} \right) d \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \cos \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= -\cos \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x^2} \right) dx. \end{aligned}$$

b) Al aplicar la fórmula (6) del diferencial se tiene:

$$\begin{aligned} d \left[\frac{(x^2 - x)^3}{\sec(2x)} \right] &= \frac{\sec(2x) d(x^2 - x)^3 - (x^2 - x)^3 d \sec(2x)}{[\sec(2x)]^2} \\ &= \frac{\sec(2x) 3(x^2 - x)^2 (2x - 1) dx - (x^2 - x)^3 \sec(2x) \tan(2x) (2) dx}{[\sec(2x)]^2} \\ &= \frac{(x^2 - x)^2 \sec(2x) [3(2x - 1) - 2(x^2 - x) \tan(2x)] dx}{\sec(2x)^2} \\ &= \frac{(x^2 - x)^2 [3(2x - 1) - 2(x^2 - x) \tan(2x)] dx}{\sec(2x)} \end{aligned}$$

4.10 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR Y REGLA L'HÔPITAL.

Si f es una función derivable, entonces la función f' es la primera derivada de f , si f' es derivable, la función f'' es la segunda derivada de f , o primera derivada de f' , si f'' es a su vez derivable, la función f''' es la tercera derivada de f , o segunda derivada de la función f' o primera derivada de f'' y así sucesivamente, con esta notación a partir de la cuarta derivada ($f^{(4)}$) se utilizan números enteros. De ésta manera $f^{(n)}$, n entero positivo, es la n -ésima derivada de la función f , o la primera derivada de la función $f^{(n-1)}$.

Al proceso anterior se conoce como derivación sucesiva, y a las derivadas obtenidas, derivadas de orden superior.

A f' se le denomina derivada de primer orden, f'' derivada de segundo orden, f''' derivada de tercer orden, etc., a $f^{(n)}$ derivada de n -ésimo orden.

Otras notaciones para derivadas de orden superior son:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)], \frac{d^2}{dx^2}[f(x)], \frac{d^3}{dx^3}[f(x)], \dots, \frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$$

$$D_x f, D_x^2 f, D_x^3 f, \dots, D_x^n f.$$

Para la primera, segunda, tercera y n -ésima derivada, respectivamente.

Ejemplo 4.10.1

Calcular la cuarta derivada de la función dada.

a) $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x$

b) $f(x) = \sin(x^2)$.

Solución

a) $f'(x) = 15x^4 + 8x^3 + 1$

$f''(x) = 60x^3 + 24x^2$

$f'''(x) = 180x^2 + 48x$

$f^{(4)}(x) = 360x + 48.$

$$\text{b) } f'(x) = 2x \cos(x^2)$$

$$f''(x) = 2 \left[x(-\sin(x^2))(2x) + \cos(x^2)(1) \right]$$

$$f''(x) = 2 \left[-2x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2) \right]$$

$$f'''(x) = 2 \left[-(2x^2)(\cos(x^2)(2x)) - \sin(x^2)(4x) - \sin(x^2)(2x) \right]$$

$$= 4x \left[-2x^2 \cos(x^2) - 3\sin(x^2) \right]$$

$$f^{(4)}(x) = 4x \left[(-2x^2)(-\sin(x^2)(2x)) + \cos(x^2)(-4x) - 3\cos(x^2)(2x) \right] + \left[-2x^2 \cos(x^2) - 3\sin(x^2) \right] 4$$

$$= 16x^4 \sin(x^2) - 16x^2 \cos(x^2) - 24x^2 \cos(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) - 12\sin(x^2)$$

$$= (16x^4 - 12)\sin(x^2) - 48x^2 \cos(x^2).$$

✓ **Regla de L'Hôpital.**

En el cálculo de límites de cocientes, es usual tener una expresión $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, cuando se sustituye el valor límite de la variable independiente en la expresión que se desea obtenerlo.

Por ejemplo, en $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$, o en $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{3x^3-x} = \frac{\infty}{\infty}$.

En el primer caso se tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, en $x=1$, y en el segundo $\frac{\infty}{\infty}$. Puesto que $(x^2+1) \rightarrow \infty$ y $(3x^3+x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Resulta conveniente en casos similares, aplicar la regla de L'Hôpital para calcular tales límites.

Teorema 4.10.1. Regla de L'Hôpital.

Sean f y g funciones diferenciables en un intervalo abierto que contenga al número c , excepto posiblemente en c mismo. Supóngase $g(x) \neq 0$ excepto, posiblemente en c . Si el cociente

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada y $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ ----- (1).}$$

Ejemplo 4.10.2

Aplicar la regla de L'Hôpital para calcular el límite indicado.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{e^x+1}.$$

Solución

A.RAMÍREZ Q.

a) Se tiene $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$. Al sustituir $x = 0$ en el numerador y en el denominador, se tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo tanto se aplica la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

b) Al sustituir $x = 1$ en el numerador y en el denominador, se tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que, se aplica la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

c) Ya que $(3x^2 - 1) \rightarrow \infty$ y $(e^x + 1) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Se obtiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x}$$

Puesto que $6x \rightarrow \infty$ y $e^x \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Se obtiene nuevamente la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, se vuelve aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$

La aplicación de la regla de se ampliará en temas posteriores.

4.11 DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Sea la ecuación:

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \text{----- (1).}$$

En donde se define a y como función implícita de x , es decir $y = f(x)$. Se desea obtener $f'(x)$. Una estrategia consiste en lo siguiente:

Sustituir y en (1) por $f(x)$ y aplicar el proceso de diferenciación a la ecuación, al aplicar la regla para derivar potencia de funciones $D_x[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 D_x[4x^2 + 9f(x)^2] &= 36 \\
 D_x 4x^2 + D_x 9f(x)^2 &= D_x 36 \\
 8x + 18f(x)f'(x) &= 0 \quad \text{Despejar } f'(x) \text{ y simplificar} \\
 f'(x) &= -\frac{8x}{18f(x)} \quad \text{Al sustituir } f(x) \text{ por } y, \text{ se tiene} \\
 &= -\frac{4x}{9y}.
 \end{aligned}$$

La regla de la cadena aplicada a la derivada de potencia de funciones se puede escribir $D_x y^n = n y^{n-1} y'$, al utilizar esta notación en el proceso anterior se obtiene el mismo resultado.

$$\begin{aligned}
 D_x[4x^2 + 9y^2] &= 36 \\
 D_x 4x^2 + D_x 9y^2 &= D_x 36 \\
 8x + 18yy' &= 0 \\
 18yy' &= -8x \\
 y' &= -\frac{4x}{9y}.
 \end{aligned}$$

Al proceso de obtener la derivada de una función implícita en una ecuación, se denomina **derivación implícita**.

El proceso de diferenciación implícita, usualmente se utiliza para obtener la derivada de la función implícita, cuando es difícil despejar la variable dependiente o bien no es posible.

Ejemplo 4.11.1

Suponga que en la ecuación $xy^2 = \sin(x^2 - y^2)$, se define a y como función implícita diferenciable. Obtener $\frac{dy}{dx}$.

Solución

Al aplicar la derivación implícita se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}[xy^2] &= \frac{d}{dx}[\sin(x^2 - y^2)] \\
 \frac{d}{dx}[xy^2] &= \frac{d}{dx}[\sin(x^2 - y^2)] \\
 x \frac{d}{dx} y^2 + y^2 \frac{d}{dx} x &= \cos(x^2 - y^2) \frac{d}{dx}(x^2 - y^2) \\
 2xyy' + y^2 &= \cos(x^2 - y^2)(2x - 2yy') \\
 2xyy' + y^2 &= 2x\cos(x^2 - y^2) - 2yy'\cos(x^2 - y^2) \\
 2yy'[x + \cos(x^2 - y^2)] &= 2x\cos(x^2 - y^2) - y^2 \\
 y' &= \frac{2x\cos(x^2 - y^2) - y^2}{2y[x + \cos(x^2 - y^2)]}.
 \end{aligned}$$

4.12 DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA.

Una función f tiene inversa si es uno a uno en su dominio de definición.

Si f es definida por $y = f(x)$, la relación con su función inversa denotada por f^{-1} es dada por:

$$x = f^{-1}(y) \text{ si y sólo si } y = f(x) \text{ -----(1)}$$

Para obtener la función f^{-1} a partir de la expresión que define la función f se despeja la variable independiente x .

Por ejemplo, sea f la función definida por $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$, entonces al despejar x , se obtiene la función f^{-1} . Es decir, la función f es: $y = \sqrt{x}$ y la función inversa:

$$f^{-1}(y), \text{ es } x = y^2 \text{ ----- (2).}$$

Sus correspondientes derivadas son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ----- (3)} \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dy} = 2y \text{ ----- (4).}$$

Al realizar el producto $\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)$, se tiene

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2y) \text{ ----- (5)}$$

Y al sustituir $y = \sqrt{x}$ en (5) se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2\sqrt{x}) \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right) &= 1. \text{ ----- (6)} \end{aligned}$$

El resultado obtenido se relaciona con el teorema siguiente:

Teorema 4.12.1

Sea f una función continua y uno a uno en el intervalo $[a, b]$ definida por $y = f(x)$. Si f es diferenciable en el intervalo y $f'(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo, entonces, la derivada de la función f^{-1} , definida por $x = f^{-1}(y)$ es:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ ----- (7)}$$

Otra expresión para (7) se obtiene de la definición de función inversa

$$y = f^{-1}(x) \text{ si y sólo si, } x = f(y) \text{ -----(8)}$$

Al derivar (8) con respecto x , y aplicar la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx} f(y) \\ 1 &= f'(y) \frac{dy}{dx} \quad \text{Despejar } \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{f'(y)} \quad \text{Sustituir } y \text{ por } f^{-1}(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, f'(f^{-1}(x)) \neq 0 \text{ ----- (9)}}$$

La notación para la derivada de la función inversa $f'(f^{-1}(x))$, se puede escribir: $(f^{-1})'$.

Ejemplo 4.12.1

Dada la función f definida por $f(x) = x^3 + x$, obtener para $x=1$ en f :

- La derivada de la función inversa.
- La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} .

Solución

a. Se tiene $f : y = x^3 + x$, $x=1$.

Al derivar $f : \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$, y evaluar en $x=1$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 4 \cdot x$

Sustituir último resultado en la expresión (7):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{4}$$

b. Para $x=1$, $f(x) = f(1) = 2$, de manera que el punto de tangencia en la gráfica de f es $(2,1)$, el correspondiente en la gráfica de f^{-1} es $(2,1)$.

Como la derivada de f^{-1} evaluada en el punto de tangencia es la pendiente de la recta tangente, entonces del inciso anterior $m = (f^{-1}(2))' = \frac{1}{4}$, al sustituir en la ecuación punto pendiente, $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde (x_0, y_0) son las coordenadas del punto de tangencia en la curva dada por f^{-1} . Se tiene:

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{1}{4}(x - 2) \\ y &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}. \quad \text{Ecuación de la recta tangente a la grafica de } f^{-1} \end{aligned}$$

4.13 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS.

Para obtener la derivada de éste tipo de funciones, se utiliza la derivación implícita y el hecho de que la función logaritmo y la función exponencial, son funciones inversas una de la otra.

Sea f una función definida por $y = \ln x$, entonces su inversa f^{-1} es dada por $x = e^y$.

Al derivar implícitamente esta última expresión con respecto a x , se tiene

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} e^y$$

$$1 = e^y \frac{dy}{dx} \quad \text{Despejar } \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} \quad \text{Sustituir } y \text{ por } \ln x, \quad e^y \text{ por } x, \text{ se tiene}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}. \quad \text{Fórmula para obtener la derivada de } \ln x.$$

Si el argumento de la función logaritmo es función de x , $u = g(x)$, entonces

$$y = \ln u, \text{ si y sólo si, } u = e^y.$$

Al derivar con respecto a x , y aplicar la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} e^y$$

$$\frac{du}{dx} = e^y \frac{dy}{dx} \quad \text{Despejar } \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} \frac{du}{dx} \quad \text{Sustituir } y \text{ por } \ln u, \quad e^y \text{ por } u$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad \text{Fórmula para obtener la derivada de } \ln u.$$

Al aplicar un procedimiento similar a $y = \log_a x$, $y = \log_a u$, donde $u = g(x)$ se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}$$

Éstos resultados se muestran en el teorema siguiente:

Teorema 4.13.1

$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x},$	$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx},$	$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a},$	$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}.$
-------------------------------------	---	--	--

Ejemplo 4.13.1

Obtenga las derivadas de las funciones dadas.

$$\text{a) } y = \log_2(\sqrt{x} + x) \qquad \text{b) } y = \ln\left(\frac{1 - \sin x}{x}\right)$$

Solución

a) Como el argumento es una función de x , se aplica la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \log_2(\sqrt{x} + x) \frac{d}{dx}(\sqrt{x} + x) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x} + x) \ln 2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x} + x) \ln 2} \left(\frac{1 + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1 + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + x) \ln 2}.\end{aligned}$$

b) El argumento es una función de x , se aplica la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{1 - \sin x}{x} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - \sin x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \sin x} \left(\frac{x(-\cos x) - (1 - \sin x)(1)}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{x}{1 - \sin x} \right) \left(\frac{-x \cos x - 1 + \sin x}{x^2} \right) = \frac{\sin x - x \cos x - 1}{x(1 - \sin x)}.\end{aligned}$$

✓ **Diferenciación logarítmica**

Es un método o estrategia que utiliza las propiedades de los logaritmos, para modificar la expresión $y = f(x)$ que define una función, y así, obtener su derivada, consiste en los siguientes pasos:

- 1) Tomar logaritmos naturales en ambos lados de la expresión $y = f(x)$, y utilizar sus propiedades.
- 2) Efectuar la diferenciación implícitamente con respecto a x .
- 3) Multiplicar la ecuación resultante por y , y sustituirla por $f(x)$, se obtiene $\frac{dy}{dx}$.

Ejemplo 4.13.2

Utilice diferenciación implícita para obtener la derivada de la función definida por $y = \frac{(x^3 + 2)^4}{\sqrt[3]{2x^2 + 1}}$.

Solución

Paso 1: $\ln y = \ln \frac{(x^3 + 2)^4}{\sqrt[3]{2x^2 + 1}}$. Por propiedades de logaritmos.

$$\ln y = \ln(x^3 + 2)^4 - \ln \sqrt[3]{2x^2 + 1}$$

$$\ln y = 4 \ln(x^3 + 2) - \frac{1}{3} \ln(2x^2 + 1)$$

Paso 2: $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \left[4 \ln(x^3 + 2) - \frac{1}{3} \ln(2x^2 + 1) \right]$ aplicar regla de la cadena

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 4 \left(\frac{3x^2}{x^3 + 2} \right) - \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{4x}{2x^2 + 1} \right)$$

Paso 3: $\frac{dy}{dx} = 4 \left[\left(\frac{3x^2}{x^3 + 2} \right) - \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{4x}{2x^2 + 1} \right) \right] y$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \left[\left(\frac{3x^2}{x^3 + 2} \right) - \left(\frac{x}{3(2x^2 + 1)} \right) \right] \frac{(x^3 + 2)^4}{\sqrt[3]{2x^2 + 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \left(\frac{9x^2(2x^2 + 1) - x(x^3 + 2)}{3(x^3 + 2)(2x^2 + 1)} \right) \frac{(x^3 + 2)^4}{\sqrt[3]{2x^2 + 1}} \text{ realizar operaciones y simplificar}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} \left(\frac{18x^4 + 9x^2 - x^4 - 2x}{(x^3 + 2)(2x^2 + 1)} \right) \frac{(x^3 + 2)^4}{\sqrt[3]{2x^2 + 1}} = \frac{4x(17x^3 + 9x - 2)(x^3 + 2)^3}{3(2x^2 + 1)\sqrt[3]{2x^2 + 1}}.$$

El método también permite obtener la derivada de funciones dadas por $y = [f(x)]^{g(x)}$.

Ejemplo 4.13.3

Obtener la derivada de la función $y = [x]^{\sin^2 x}$.

Solución

Paso 1: $\ln y = \ln [x]^{\sin^2 x}$ Por propiedades de logaritmos

$$\ln y = \sin^2 x \ln [x]$$

Paso 2: $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} [\sin^2 x \ln [x]]$ Aplicar regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \sin^2 x \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{d}{dx} \sin^2 x \\ &= \sin^2 x \left(\frac{1}{x} \right) + \ln x (2 \sin x) \frac{d}{dx} \sin x \\ &= \left(\frac{\sin^2 x}{x} \right) + (2 \sin x) (\cos x) \ln x \end{aligned}$$

Paso 3: $\frac{dy}{dx} = \left[\left(\frac{\sin^2 x}{x} \right) + (2 \sin x) (\cos x) \ln x \right] y$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \left[\frac{\sin x}{x} + 2 (\cos x) \ln x \right] [x]^{\sin^2 x}.$$

4.14 DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.

Se aplica el concepto de derivación implícita y función inversa, para obtener fórmulas para derivar funciones trigonométricas inversas.

Sea $y = \arcsen x$ si, y sólo si, $x = \sen y$, $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Derivar implícitamente $x = \sen y$ con respecto a x , aplicar regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} x &= \frac{d}{dx} \sen y \\ 1 &= \cos y \frac{dy}{dx} \quad \text{Despejar } \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} \text{-----(1)}\end{aligned}$$

Ahora tomar como referencia la expresión $x = \sen y$, para construir un triángulo rectángulo (Ver Figura 4.14.1) y obtener $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$.

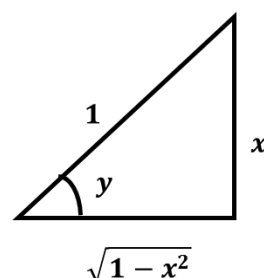


Figura 4.14.1 $x = \sen y$.

Sustituir éste resultado en la expresión (1), se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{----- (2)}.$$

Fórmula para obtener la derivada de $y = \arcsen x$.

Mediante un proceso similar con $y = \arcsen u$, donde $u = g(x)$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \text{----- (3)}.$$

Fórmula para obtener la derivada de $y = \arcsen u$.

Para obtener la derivada de la función $y = \arccos x$ se tiene

Sea $y = \arccos x$ si y sólo si, $x = \cos y$, donde $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$.

Derivar implícitamente $x = \cos y$ con respecto a x , aplicar regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} x &= \frac{d}{dx} \cos y \\ 1 &= -\operatorname{sen} y \frac{dy}{dx} \quad \text{Despejar } \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{sen} y} \dots\dots\dots(4)\end{aligned}$$

Tomar como referencia la expresión $x = \cos y$, para construir un triángulo rectángulo, ver Figura 4.14.2, para obtener:

$$\operatorname{sen} y = \sqrt{1-x^2}.$$

Sustituir éste resultado en la expresión (4), se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \dots\dots\dots(5).$$

Fórmula para obtener la derivada de $y = \arccos x$.

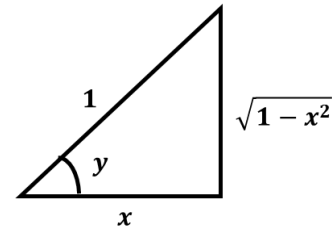


Figura 4.14.2 $x = \cos y$.

Mediante un proceso similar con $y = \arccos u$, donde $u = g(x)$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \dots\dots\dots(6).$$

Fórmula para obtener la derivada de $y = \arccos u$.

Para obtener la derivada de la función $\arctan x$ se tiene:

Sea $y = \arctan x$ si, y sólo si, $x = \tan y$, donde $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Derivar implícitamente $x = \tan y$ con respecto a x , aplicar regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} x &= \frac{d}{dx} \tan y \\ 1 &= \sec^2 y \frac{dy}{dx} \quad \text{Despejar } \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \dots\dots\dots(7)\end{aligned}$$

De la expresión $x = \tan y$, se tiene el triángulo rectángulo de la Figura 4.14.3, para obtener

$$\sec^2 y = 1 + x^2.$$

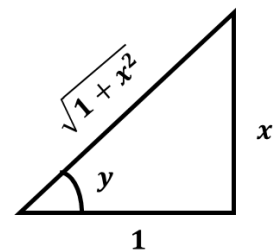


Figura 4.14.3 $y = \arctan x$.

Sustituir éste resultado en la expresión (7), se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \text{----- (8).}$$

Fórmula para obtener la derivada de $y = \arctan x$.

Mediante un proceso similar con $y = \arctan u$, donde $u = g(x)$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \text{----- (9).}$$

Fórmula para obtener la derivada de $y = \arctan u$.

En el siguiente cuadro se muestran las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

Teorema 4.14.1

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable de x .

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dx} \arcsen u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} & \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} & \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} & \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}. \end{array}$$

Ejemplo 4.14.1

Obtenga la derivada de las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{b) } f(x) = e^{x^2} \operatorname{arcsec} x.$$

Solución

a) Aplicar regla del producto y de la cadena.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right] &= \sqrt{x} \frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \frac{d}{dx} \sqrt{x} \\ &= \sqrt{x} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan \left(\frac{1}{x} \right) \\
&= \frac{x^2 \sqrt{x}}{(x^2+1)} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan \left(\frac{1}{x} \right) \\
&= \frac{-\sqrt{x}}{1+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan \left(\frac{1}{x} \right).
\end{aligned}$$

b) Se tiene $f(x) = e^{x^2} \operatorname{arcsec} x$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} [e^{x^2} \operatorname{arcsec} x] &= e^{x^2} \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x + \operatorname{arcsec} x \frac{d}{dx} e^{x^2} \\
&= e^{x^2} \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} + \operatorname{arcsec} x (e^{x^2}) \frac{d}{dx} x^2 \\
&= e^{x^2} \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} + \operatorname{arcsec} x (e^{x^2}) 2x \\
&= e^{x^2} \left[\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} + 2x \operatorname{arcsec} x \right].
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.14.2

Suponga que en la ecuación $e^{\sqrt{x}} + y = \arcsen(x+y)$, y es función de x . Derive implícitamente para obtener $\frac{dy}{dx}$.

Solución

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} [e^{\sqrt{x}} + y = \arcsen(x+y)] \\
&\frac{d}{dx} e^{\sqrt{x}} + \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} \arcsen(x+y) \\
&e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} \sqrt{x} + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \frac{d}{dx} (x+y) \\
&e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) \\
&\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} - \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \right) \\
&\frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \right) = \frac{2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \sqrt{1-(x+y)^2}}{2\sqrt{x} \sqrt{1-(x+y)^2}} \\
&\frac{dy}{dx} \left(\frac{\sqrt{1-(x+y)^2} - 1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \right) = \frac{2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \sqrt{1-(x+y)^2}}{2\sqrt{x} \sqrt{1-(x+y)^2}}
\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \sqrt{1-(x+y)^2}\right) \sqrt{1-(x+y)^2}}{2\sqrt{x} \sqrt{1-(x+y)^2} \left(\sqrt{1-(x+y)^2} - 1\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \sqrt{1-(x+y)^2}\right)}{2\sqrt{x} \left(\sqrt{1-(x+y)^2} - 1\right)}.$$

4.15 FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y SUS DERIVADAS.

Las funciones hiperbólicas son un tipo particular de funciones, obtenidas por combinación de las funciones exponenciales. Son seno hiperbólico, coseno hiperbólico, tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica y cosecante hiperbólica, denotadas por: $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{sech} x$ y $\operatorname{csch} x$, respectivamente.

La siguiente es su definición.

Definición 4.15.1

Funciones hiperbólicas.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad x \neq 0 \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \quad x \neq 0.$$

Existe semejanza entre las identidades trigonométricas y las funciones hiperbólicas, algunas de ellas se muestran en el teorema siguiente.

Teorema 4.15.1

Identidades de funciones hiperbólicas.

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Prueba de la identidad $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

Se tiene:

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x \quad \text{De la definición de } \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$= 1 - \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)^2$$

$$= 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \text{ De la identidad } (\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1),$$

y de la definición de $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$, se tiene el resultado: $\operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$.

Fin de la demostración.

Las gráficas de las funciones hiperbólicas con su respectivo dominio y rango se muestran en la Figura 4.15.1.

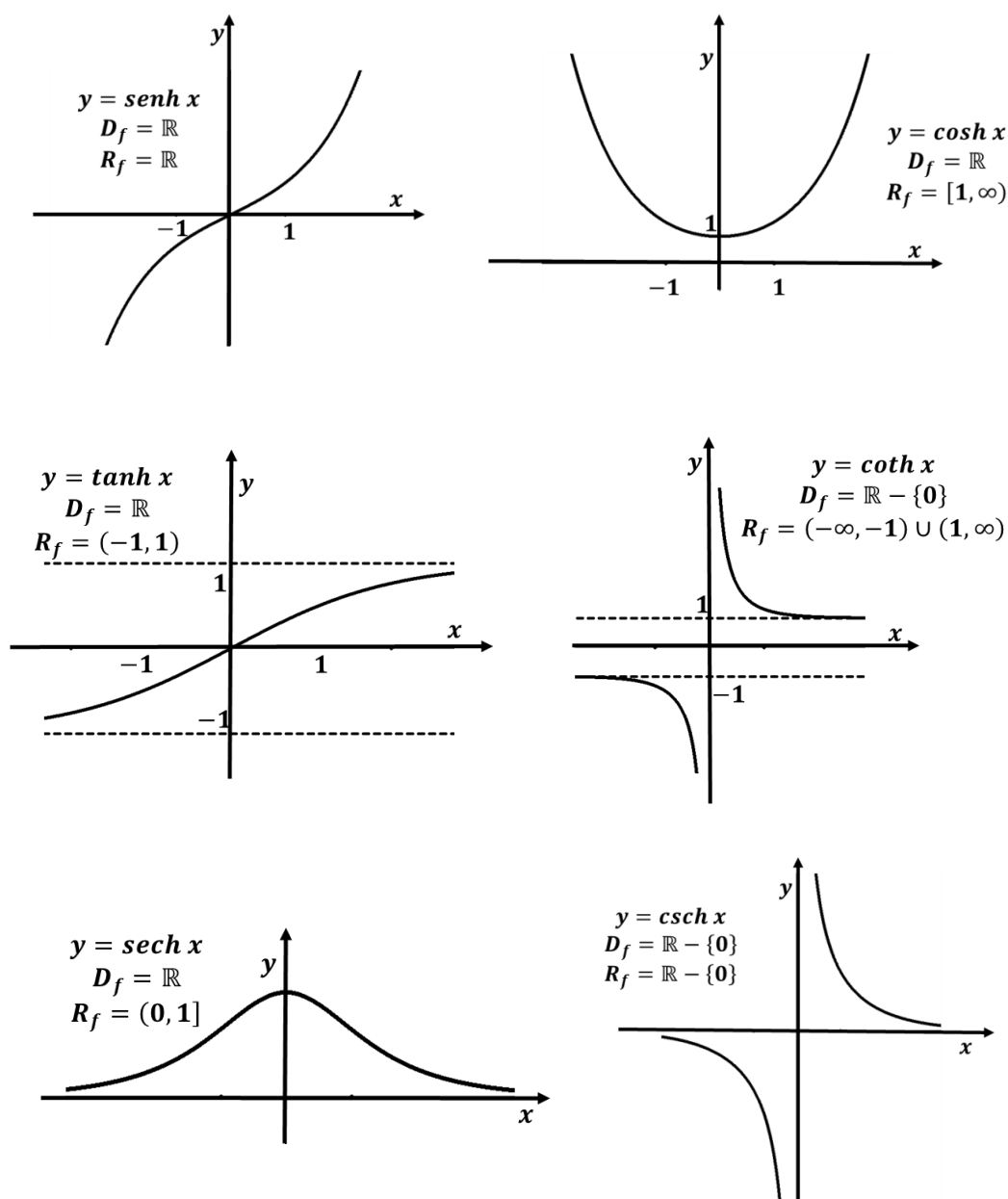


Figura 4.15.1 Gráficas de las funciones hiperbólicas.

✓ **Derivadas de las funciones hiperbólicas.**

Las derivadas de las funciones hiperbólicas, se obtienen al derivar las expresiones exponenciales que las definen.

Sea f la función definida por $y = \sinh x$, entonces

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \cosh x.$$

Para la función $y = \cosh x$:

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \sinh x.$$

Y para la función $y = \tanh x$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tanh x &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right) \\ &= \frac{\cosh x (\cosh x) - \sinh x (\sinh x)}{(\cosh x)^2} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x. \end{aligned}$$

De forma similar se obtienen las derivadas de las funciones, $\coth x$, $\operatorname{sech} x$ y $\operatorname{csch} x$.

Si la función es dada por $\sinh u$, donde u es una función diferenciable de x , entonces

$$\frac{d}{dx} \sinh u = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right) \frac{du}{dx} = \cosh u \frac{du}{dx}.$$

En el siguiente cuadro, se muestran las reglas para derivar funciones hiperbólicas.

Teorema 4.15.2**Derivadas de funciones hiperbólicas.**

$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$

Ejemplo 4.15.1

Obtenga la derivada de la función dada.

$$\text{a) } y = \arctan(\cosh \sqrt{x})$$

$$\text{b) } y = \sec^{-1}\left(\operatorname{csech}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Solución

a) Aplicar reglas para derivar funciones trigonométricas inversas, hiperbólicas y regla de la cadena.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\arctan(\cosh \sqrt{x}) \right] &= \frac{1}{1 + (\cosh \sqrt{x})^2} \frac{d}{dx} (\cosh \sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{1 + \cosh^2 \sqrt{x}} (\sinh \sqrt{x}) \frac{d}{dx} \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{1 + \cosh^2 \sqrt{x}} (\sinh \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sinh \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1 + \cosh^2 \sqrt{x})}. \end{aligned}$$

b) Se tiene $y = \sec^{-1}\left(\operatorname{csech}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. Aplicar reglas de diferenciación.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\sec^{-1}\left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \right] &= \frac{1}{\left| \operatorname{sech}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \sqrt{\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{x}\right) - 1}} \frac{d}{dx} \left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \frac{-\operatorname{sech}\left(\frac{1}{x}\right) \tanh\left(\frac{1}{x}\right)}{\left| \operatorname{sech}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \sqrt{\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{x}\right) - 1}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{-\operatorname{sech}\left(\frac{1}{x}\right) \tanh\left(\frac{1}{x}\right)}{\left| \operatorname{sech}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \sqrt{\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{x}\right) - 1}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{\tanh\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 \sqrt{\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{x}\right) - 1}}. \end{aligned}$$

✓ **Funciones hiperbólicas inversas.**

En las gráficas de la figura 4.15.1, se observa que las funciones $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$ y $\operatorname{csch} x$, son funciones uno a uno por consiguiente tienen función inversa denotada por $\sinh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$, $\coth^{-1} x$ y $\operatorname{csch}^{-1} x$, respectivamente.

Las funciones $\cosh x$ y $\sinh x$, no son funciones uno a uno, sin embargo en el intervalo $[0, \infty)$, se comportan como tales, por consiguiente tienen función inversa denotada por $\cosh^{-1} x$, y $\sinh^{-1} x$, respectivamente.

Las gráficas de éstas funciones con su dominio y rango se muestran en la Figura 4.15.2.

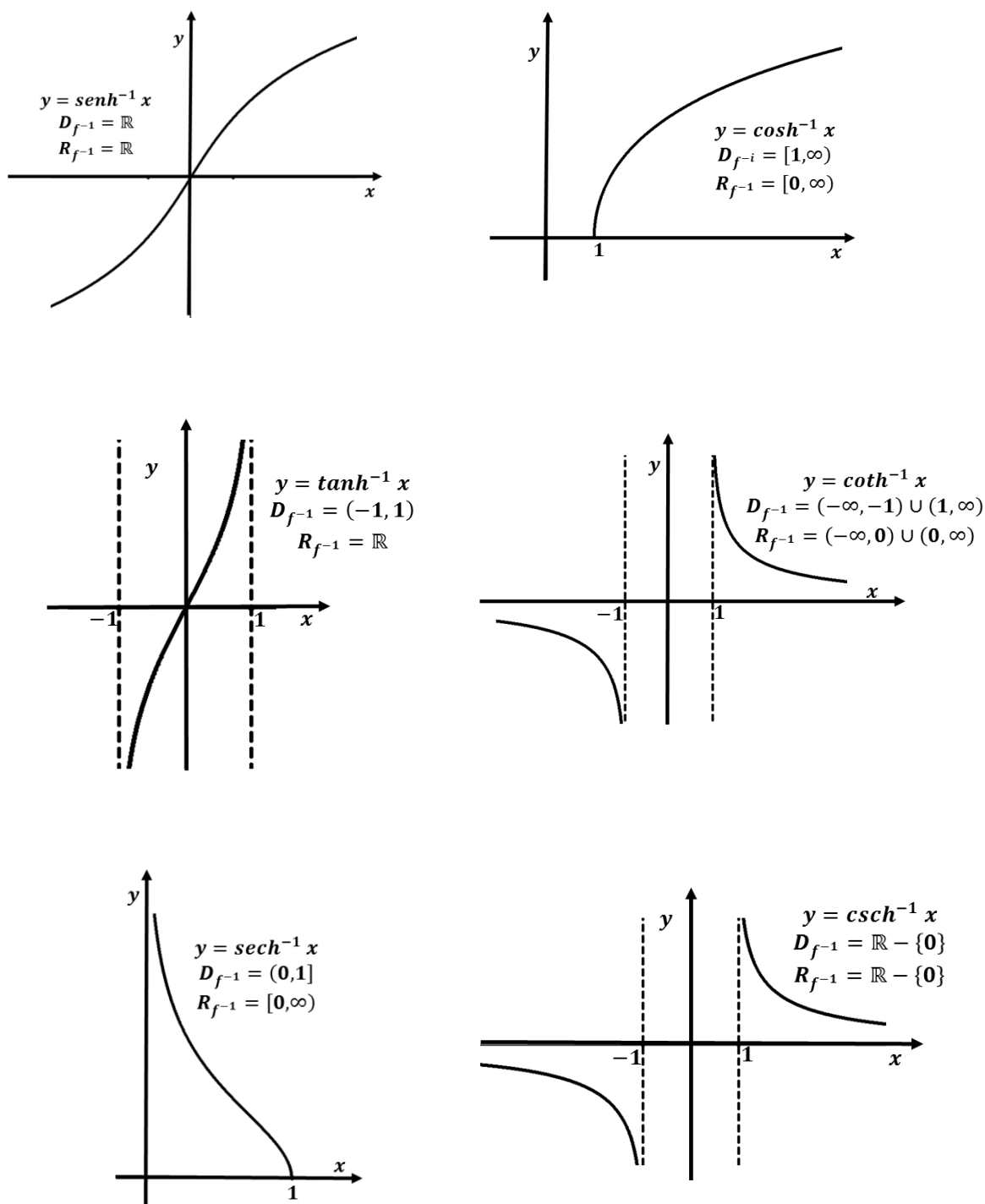


Figura 4.15.2 Gráficas de las funciones hiperbólicas inversas

✓ **Derivadas de funciones hiperbólicas inversas.**

Se obtienen a partir de la relación de una función hiperbólica con su inversa, así

$$y = \sinh^{-1} x \text{ si y sólo si, } x = \sinh y \text{ -----(1).}$$

Derivar implícitamente $x = \sinh y$ con respecto a x , aplicar regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x &= \frac{d}{dx} \sinh y \\ 1 &= \cosh y \frac{dy}{dx} \quad \text{Despejar } \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cosh y} \text{ ----} \quad \text{--(2)} \end{aligned}$$

De la identidad $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, despejar $\cosh y$

$$\begin{aligned} \cosh y &= \sqrt{1 + \sinh^2 y} \quad \text{Sustituir } \sinh y \text{ por } x \\ \cosh y &= \sqrt{1 + x^2} \quad \text{Sustituir } \cosh y \text{ por } \sqrt{1 + x^2} \text{ en (2)} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ ----(3)} \end{aligned}$$

Se obtiene la **fórmula para derivar la función** $\sinh^{-1} x$.

Sí el argumento u es función diferenciable de x , entonces

$$y = \sinh^{-1} u \text{ si y sólo si, } u = \sinh y \text{ -----(4).}$$

Derivar implícitamente $u = \sinh y$ con respecto a x , aplicar regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u &= \frac{d}{dx} \sinh y \\ \frac{du}{dx} &= \cosh y \frac{dy}{dx}, \quad \text{Despejar } \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cosh y} \frac{du}{dx} \text{ ----(5)} \end{aligned}$$

De la identidad $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ despejar $\cosh y$

$$\cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} \text{ ----- (6)}$$

Sustituir $u = \sinh y$ en (6),

$$\cosh y = \sqrt{1+u^2} \text{ ----- (7)}$$

Sustituir (7) en (5),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx} \text{ ----- (8)}$$

Se obtiene la **fórmula para derivar la función** $\sinh^{-1} u$.

El resto de las formulas para derivar funciones hiperbolicas inversas, se obtienen de manera similar.

Las reglas para derivar funciones hiperbólicas inversa se muestran en el teorema siguiente.

Teorema 4.15.3

Fórmulas para derivar funciones hiperbólicas inversas.

Sea u función diferenciable de x , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh^{-1} u &= \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \frac{du}{dx}, & \frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} u &= -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2+1}} \frac{du}{dx}, & u \neq 0 \\ \frac{d}{dx} \cosh^{-1} u &= \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, & \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} u &= -\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}} \frac{du}{dx}, & 0 < u < 1 \\ \frac{d}{dx} \tanh^{-1} u &= \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, & \frac{d}{dx} \operatorname{coth}^{-1} u &= \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, & |u| > 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.15.2

Obtenga la derivada de la función dada.

$$\text{a) } y = (\sinh^{-1} x)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{b) } y = \operatorname{sech}^{-1}(\ln x^2).$$

Solución

a) Se tiene $y = (\sinh^{-1} x)^{\frac{1}{x}}$. Aplicar derivación logarítmica.

$$\begin{aligned}
 \ln y &= \ln(\sinh^{-1} x)^{\frac{1}{x}} \\
 \frac{d}{dx} \ln y &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \ln(\sinh^{-1} x) \right] \\
 \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \ln(\sinh^{-1} x) + \ln(\sinh^{-1} x) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \\
 \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1}{x} \right) \frac{1}{\sinh^{-1} x} \frac{d}{dx} (\sinh^{-1} x) + \ln(\sinh^{-1} x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\
 \left[\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} \right] &= \frac{1}{x \sinh^{-1} x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - \frac{\ln(\sinh^{-1} x)}{x^2} y \\
 \frac{dy}{dx} &= \left[\frac{1}{x \sinh^{-1} x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - \frac{\ln(\sinh^{-1} x)}{x^2} \right] y \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} \sinh^{-1} x} - \frac{\ln(\sinh^{-1} x)}{x} \right] (\sinh^{-1} x)^{\frac{1}{x}}.
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1}(\ln x^2) &= \frac{-1}{\ln x^2 \sqrt{1 - (\ln x^2)^2}} \frac{d}{dx} (\ln x^2) \\
 &= \frac{-1}{\ln x^2 \sqrt{1 - (\ln x^2)^2}} \left(\frac{2x}{x^2} \right) \\
 &= \frac{-2}{x \ln x^2 \sqrt{1 - (\ln x^2)^2}}.
 \end{aligned}$$

Unidad 4**Serie de ejercicios**

Obtenga a partir de la definición, la derivada de la función dada.

$$1) f(x) = x^3. \quad 2) f(x) = \frac{1}{x}. \quad 3) g(t) = t^3.$$

Calcule $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ y determine si la función dada es diferenciable en el valor de a .

$$4) f(x) = \begin{cases} 2+x, & \text{si } x < 1 \\ 4-x, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad a=1. \quad 5) f(x) = 2+|x+1|, \quad a=-1..$$

Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor de a .

$$6) f(x) = x^3 + 1, \quad a=1. \quad 7) f(x) = \sqrt{x+1}, \quad a=3.$$

Represente geométricamente Δx , dx , Δy y dy para la función dada. Si $\Delta x = 0.2$, y $x = 2$.

$$8) f(x) = x^3 + 2, \text{ si } \Delta x = 0.2, \quad x = 2. \quad 9) f(x) = \sqrt{1-x}, \text{ si } \Delta x = 0.3, \quad x = -3.$$

Aplique los teoremas para derivar y obtenga $\frac{dy}{dx}$ de la función dada.

$$10) y = x^2 - \frac{1}{x^3}. \quad 11) y = (1-3x^5)^3. \quad 12) y = x^2 - \left(\frac{1-x^3}{x-x^2} \right)^2.$$

$$13) y = 3e^{x^2} + x^3. \quad 14) y = \tan(\ln x). \quad 15) y = e^x \ln x (e^x + e^{-x}).$$

$$16) y = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} + e^{\ln x} \quad 17) y = \sin^3(e^x + x) \quad 18) y = \sec(\ln e^x + \sqrt{x})$$

$$19) y = \ln \sin \sqrt{x^2 + 2}. \quad 20) y = \cot[\cos(\ln x^2)].$$

Suponga que en la ecuación dada existe una función implícita f , definida por $y = f(x)$.

Obtenga $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$21) \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1. \quad 22) \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1. \quad 23) \sin(x+y) = 1.$$

En las funciones dadas, $y = f(x)$, y $x = f^{-1}(y)$, compruebe que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

$$24) f(x) = 4-3x. \quad 25) f(x) = \sqrt[3]{x-27}. \quad 26) f(x) = \frac{2x-3}{x+2}.$$

Para la función dada obtenga $(f^{-1})'$ para el valor indicado de x en f .

27) $f(x) = 3x^3 + 4x$, $x = 2$.

28) $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$, $x = -6$.

29) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x = 1$.

Obtenga $\frac{dy}{dx}$ por el método de diferenciación logarítmica, para las funciones dadas.

30) $y = \frac{x^5 + 2x^3}{\sqrt[3]{1-x}}$.

31) $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}$.

32) $y = \frac{\sqrt{1+\cos x^2}}{(1-\cos x^2)^{\frac{2}{3}}}$.

Obtenga la derivada de la función dada.

33) $f(x) = \cos^{-1}(\cos \ln x)$.

34) $f(x) = \tan^{-1}(\sin x) + \cot^{-1}(\ln x^2)$.

35) $f(x) = \sec^{-1}\sqrt{2-x^2}$.

36) $f(x) = \ln(\cosh x^2)$.

37) $f(x) = \cosh(\ln \sqrt{1+x^2})$.

38) $f(x) = x^{\cosh x}$.

39) $f(x) = (\tanh x)^x$.

40) $f(x) = x^3 \sinh^{-1} \sqrt{x}$.

41) $f(x) = \tanh^{-1}(\cos x^2)$.

CAPITULO 5

APLICACIONES DE LA DERIVADA

COMPETENCIA ESPECÍFICA A DESARROLLAR

Aplicar el concepto de la derivada para la solución de problemas de optimización y, de variación de funciones y el de diferencial en problemas que requieren de aproximaciones.

5.1 RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO. CURVAS ORTOGONALES

En el punto 4.3, la derivada de una función f , se interpretó, como la pendiente de la recta tangente en un punto de su gráfica, de tal manera que para un punto $P(a, f(a))$, sobre la gráfica de f , la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \text{ -----(1)}$$

Recta normal

Sea C la gráfica de una función f , $P(a, f(a))$ punto sobre C , l_T la recta tangente a C en P , ver Figura 5.1.1.

Sea l_N la recta que pasa por P perpendicular a la recta tangente l_T , a l_N se denomina recta normal a C en el punto P , su ecuación es:

$$y - f(a) = \frac{1}{f'(a)}(x - a), \quad f'(a) \neq 0 \text{ -----(2)}$$

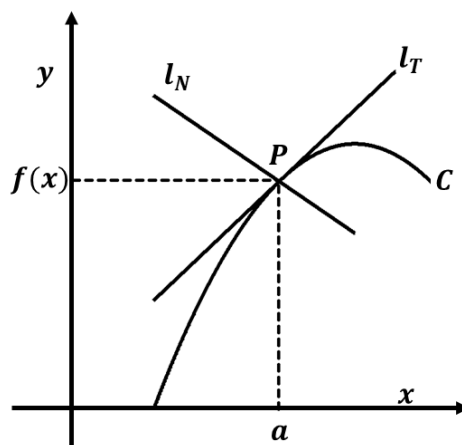


Figura 5.1.1 Gráfica de f , de l_T y de l_N .

Ejemplo 5.1.1

Hallar la ecuación de la recta normal a la curva de la función $f(x) = x + x^3$, en el punto $P(1, 2)$.

Solución

Se tiene $a = 1$, $f(a) = f(1) = 2$.

Para obtener $f'(a)$, derivar $f(x)$ y evaluar con $a = 1$

$$f'(x) = 1 + 3x^2, \quad f'(1) = 4.$$

Sustituir $f'(1) = 4$ en (1) para obtener la ecuación de la recta normal. Ver Figura 5.1.2.

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{4}(x - 1) + 2$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}. \quad \text{Ecuación de la recta normal a la curva}$$

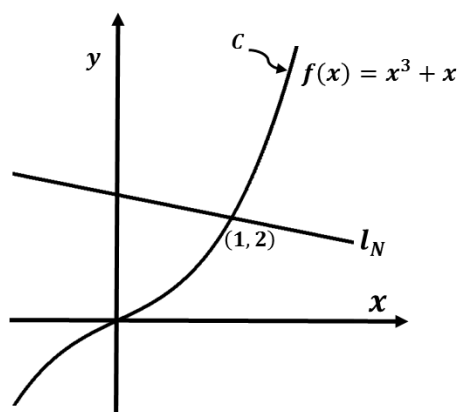


Figura 5.1.2 Gráfica de f , y de l_N

Ejemplo 5.1.2

Dada la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$, determine:

- a.** Las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función, que son paralelas a la recta $x + y = 0$.
- b.** Las ecuaciones de las rectas normales a la gráfica de la función, que son perpendiculares a la recta $4x + 9y = 1$.

Solución

a. La pendiente m de la recta $x + y = 0$, es $m = -1$, la pendiente m_T de la recta tangente es $f'(x)$. Puesto que las rectas son paralelas entonces tienen pendientes iguales, así

$$m = m_T = f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}.$$

Al igualar las pendientes se obtiene el valor de la abscisa.

$$\frac{-1}{(x+1)^2} = -1$$

$$(x+1)^2 = 1$$

$$x+1 = \pm 1$$

$$x = 0, -2.$$

Para obtener el valor de la ordenada se evalúa $f(x)$ en $x = 0$, y en $x = -2$, así se obtienen los punto de tangencia $(0,1)$ y $(-2,-1)$, respectivos.

Al sustituir en la ecuación (1) se tiene.

En el punto $(0,1)$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - 1 = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 1 = -1(x - 0)$$

$$y = -x + 1, \text{ Ecuación de la recta tangente.}$$

En el punto $(-2,-1)$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - (-1) = f'(-2)(x - (-2))$$

$$y + 1 = (-1)(x - (-2))$$

$$y = -x + 3, \text{ Ecuación de la recta tangente.}$$

b) La pendiente m de la recta $4x + 9y = 1$, es $m = -\frac{4}{9}$, como es perpendicular a la recta normal l_N , entonces es paralela a la recta tangente y por lo tanto la pendiente de ésta es también $-\frac{4}{9}$, como la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función al igualar ésta con $-\frac{4}{9}$, y resolver para x , se tienen los valores de la abscisa en el punto de tangencia, por el cual pasa la recta normal.

Así,

$$\frac{-1}{(x+1)^2} = -\frac{4}{9}$$

$$(x+1)^2 = -\frac{9}{4}$$

$$x+1 = \pm \frac{3}{2}; \text{ Por consiguiente } x = \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}.$$

Evaluar la función en los valores de obtenidos de x , para obtener los puntos de tangencia P y Q .

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{2}{3}, \quad P\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \quad Q\left(-\frac{5}{2}, -\frac{2}{3}\right).$$

La pendiente m_N de la recta normal se obtiene de la relación $mm_N = -1$. Al sustituir $m = -\frac{4}{9}$ se

tiene $m_N = \frac{9}{4}$, de ésta manera la ecuación de la recta normal a la gráfica en cada uno de los puntos se obtiene al sustituir valores en la ecuación (2):

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

En el punto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$:

$$y - \frac{2}{3} = \frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{9}{4}x - \frac{9}{8} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{9}{4}x - \frac{11}{24}. \quad \text{Ecuación de la recta normal.}$$

En el punto $Q\left(-\frac{5}{2}, -\frac{2}{3}\right)$:

$$y - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{4}\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$y = \frac{9}{4}x + \frac{45}{8} - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{9}{4}x + \frac{119}{24}. \quad \text{Ecuación de la recta normal.}$$

La gráfica de la función y de la recta normal se muestra en la Figura 5.1.3.

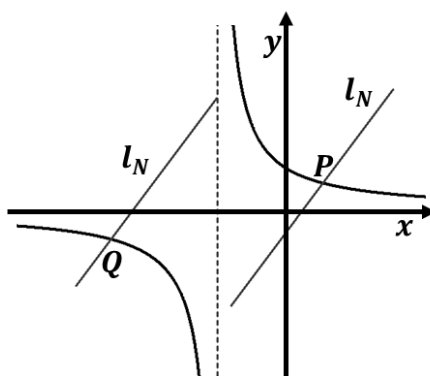


Figura 5.1.3 Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x+1}$, y de l_N .

Curvas ortogonales.

Sean C_1 y C_2 dos curvas que se interseca en el punto P, y l_1, l_2 , las correspondientes rectas tangentes. Ver Figura 5.1.4.

El ángulo entre las curvas C_1 y C_2 , en el punto de intersección se define como el ángulo que forman sus correspondientes rectas tangentes. Para calcularlo se aplica la siguiente fórmula:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}, \quad m_2 m_1 \neq -1.$$

Donde

m_1 : Es la pendiente de la recta tangente l_1 .

m_2 : Es la pendiente de la recta tangente l_2 .

θ : Ángulo de las curvas en el punto de intersección.

Sí, $m_2 m_1 = -1$, las rectas tangentes son perpendiculares y por lo tanto, el ángulo que forman es de 90° , en tal caso se dice que las curvas son ortogonales.

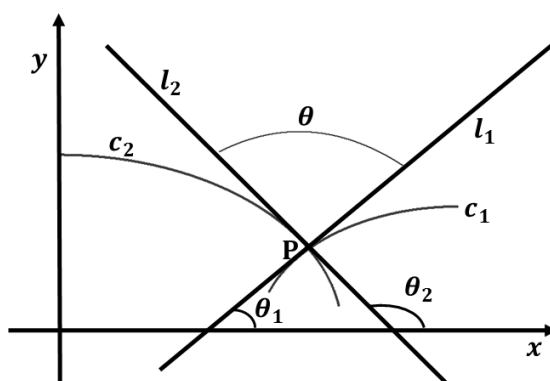


Figura 5.1.4 Ángulo entre curvas.

Ejemplo 5.1.3.

Obtenga el ángulo de intersección, en el primer cuadrante de las curvas dadas por las ecuaciones:

$$x^2 + 2x + 5 - 4y = 0 \text{ --- (1),}$$

$$x^2 + 4y - 9 = 0 \text{ --- (2).}$$

Solución

Formar un sistema de ecuaciones y resolver, se obtienen los puntos de intersección $(-2, \frac{5}{4})$, y $(1, 2)$, se elige el punto $(1, 2)$ por estar en el primer cuadrante, la pendiente de la recta tangente en el punto, es la correspondiente derivada, $\frac{dy}{dx}$.

Para $m_1 = \frac{dy}{dx}$ de la ecuación (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, y al evaluar $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = 1 = 45^\circ$.

Para $m_2 = \frac{dy}{dx}$ de la ecuación (2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x$, y al evaluar $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = -\frac{1}{2} \approx 154^\circ$.

Al sustituir éstos valores en la formula:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}, \quad m_2 m_1 \neq -1.$$

Se tiene:

$$\tan \theta = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{1 + (1)\left(-\frac{1}{2}\right)} = -3$$

Por lo tanto $\theta = \arctan(-3) \approx 109^\circ$.

Ejemplo 5.1.3.

Determine si las curvas de las ecuaciones dadas, son ortogonales en su punto de intersección.

$$C_1 : x^2 + 2x + 5 - 4y = 0.$$

$$C_2 : x^2 + 4y - 9 = 0.$$

Solución

Formar un sistema de ecuaciones y resolver, se obtienen los puntos de intersección

$$\left(\pm \frac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right).$$

Se obtiene en cada ecuación $\frac{dy}{dx}$.

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{C_1} = 2x, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{C_2} = -\frac{x}{y}.$$

Si las curvas son ortogonales se cumple que:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{C_1} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{C_2} = -1.$$

Al sustituir valores

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{C_1} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{C_2} = 2 \left(\frac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2} \right) \left[-\frac{\frac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2}}{2 \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right)} \right] = -\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{-1+\sqrt{17}} \right) = -1.$$

Se cumple la condición, entonces son ortogonales.

5.2 TEOREMA DE ROLLE, TEOREMA DE LAGRANGE O TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Algunos teoremas y definiciones relacionados con los valores extremos de las funciones previas al teorema de Rolle son.

Definición 5.2.1

Máximo y mínimo absoluto.

- 1) Un número $f(c)$ es máximo absoluto de una función f restringida al conjunto A tal que $c \in A$, si $f(x) \leq f(c)$ para toda $x \in A$.
- 2) Un número $f(c)$ es mínimo absoluto de una función f restringida al conjunto A tal que $c \in A$, si $f(x) \geq f(c)$ para toda $x \in A$.

Los valores máximo y mínimo de la función se denominan valores extremos de f o extremos absolutos de f en A .

Ejemplo 5.2.1

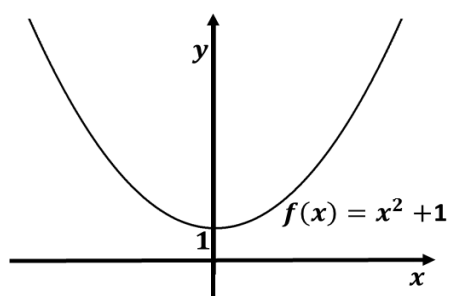
a) La función $f(x) = x^2 + 1$, tiene un valor mínimo en $x = 0$, $f(0) = 1$, puesto que, para toda $x \in A = D_f = \mathbb{R}$, no existe otro valor de la función menor que 1, entonces 1 es el valor mínimo absoluto de f , en éste caso no tiene máximo absoluto.

b) La función $f(x) = -x^2 + 1$, tiene un valor máximo en $x = 0$, $f(0) = 1$. Para toda $x \in A = D_f = \mathbb{R}$, no existe otro valor de la función mayor que 1, entonces 1 es el valor máximo absoluto de f , sin embargo no tiene mínimo absoluto.

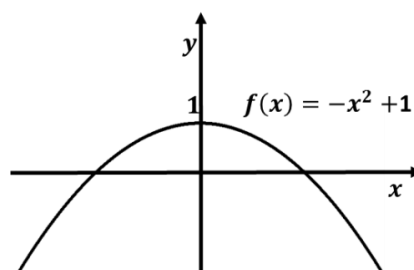
c) La función $f(x) = \sin x$, tiene un valor mínimo absoluto de -1 , en $x = -\frac{\pi}{2}$, y valor máximo absoluto de 1, en $x = \frac{\pi}{2}$ en $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

d, e) Las funciones $f(x) = \ln x$, $f(x) = e^x$, no tienen valor mínimo absoluto, tampoco valor máximo absoluto en $A = (0, \infty)$ y en $A = \mathbb{R}$ respectivamente.

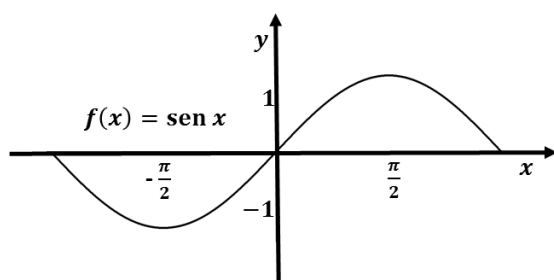
Las situaciones anteriores se muestran en la Figura 5.2.1.



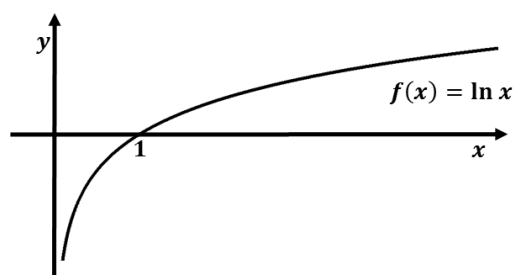
a) $f(0) = 1$. Valor mínimo absoluto



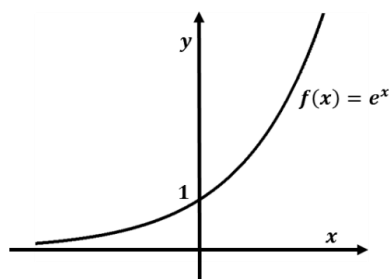
b) $f(0) = 1$. Valor máximo absoluto



c) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ Valor mínimo absoluto,
 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ Valor máximo absoluto.



d) $f(x) = \ln x$. No tiene valor mínimo absoluto,
 tampoco valor máximo absoluto.



e) $f(x) = e^x$. No tiene valor mínimo absoluto, ni valor máximo absoluto

Figura 5.2.1 Valores extremos absolutos.

En ocasiones solo se desea saber si la función restringida a un intervalo $A = [a, b]$, tiene un valor máximo o mínimo.

Los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de la función en un intervalo $[a, b]$ se denominan, valores extremos de f o extremos absolutos de f en el intervalo $[a, b]$. Si en el extremo de un intervalo ocurre un valor extremo, se denomina extremo de punto frontera o extremo terminal.

Ejemplo 5.2.2

a) Sea $f(x) = -x + 4$, definida en el intervalo $[0, 4)$. En el intervalo dado, la función tiene un valor máximo absoluto de 4, no tiene mínimo absoluto, ya que f no está definida en $x = 4$.

b) Sea $f(x) = x^2 + 1$, definida en el intervalo $(0, 2)$. En el intervalo dado, la función no tiene un valor máximo absoluto, no tiene mínimo absoluto, ya que f no está definida en $x = 0$, y $x = 2$.

c) Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$, definida en el intervalo $[0, 2]$. La función tiene a 2 como máximo absoluto y tiene a 1 como mínimo absoluto.

d) Sea $f(x) = e^x$, definida en el intervalo $[0, 1]$. En el intervalo dado, la función tiene un valor máximo absoluto de e , y valor mínimo absoluto 1.

Las situaciones anteriores se muestran en la Figura 5.2.2.

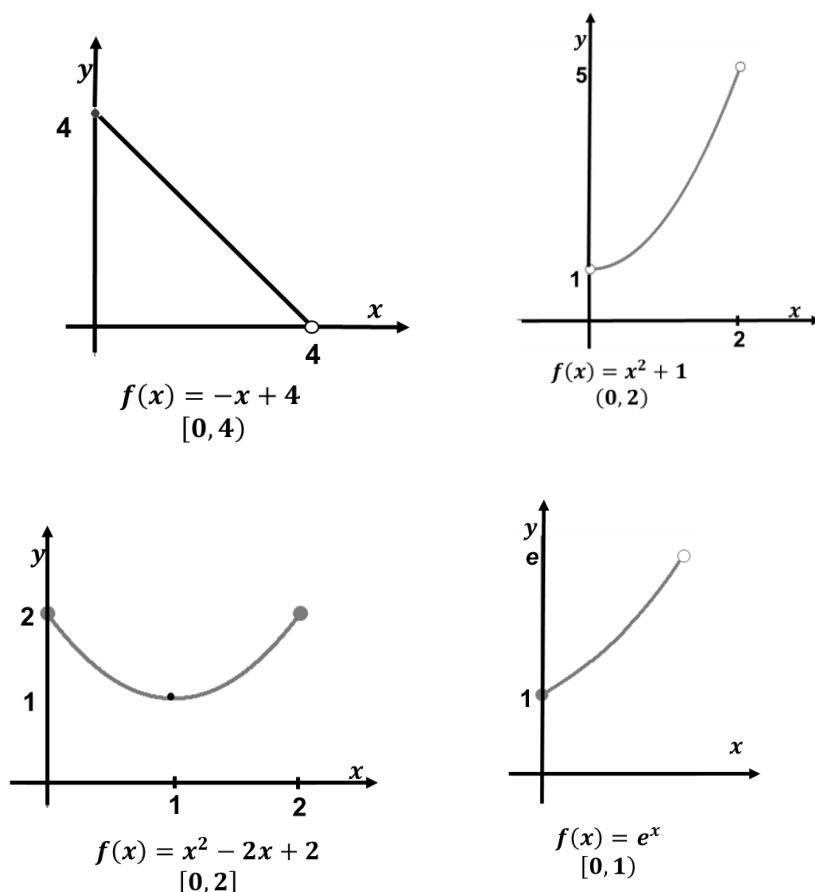


Figura 5.2.2. Gráficas de las funciones

Como se observa en los ejemplos analizados, una función no necesariamente tiene valores extremos en un intervalo dado. El siguiente teorema asegura la existencia de valores extremos en un intervalo cerrado.

Teorema 5.2.1 Teorema del valor extremo.

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene valor máximo absoluto y valor mínimo absoluto en el intervalo.

Extremos relativos.

En la figura 5.2.3, se observa que, el valor de $f(c_1)$, es mayor $f(x)$, para valores de x , próximos a c_1 . Por otro lado, el valor de $f(c_2)$ es menor que $f(x)$, para valores de x próximos a c_2 . Puesto que hay valores de f mayores que $f(c_1)$ y valores menores de f que $f(c_2)$, a tales valores se les denomina valores extremos relativos de f , éstos conceptos se puntualizan en la definición siguiente.

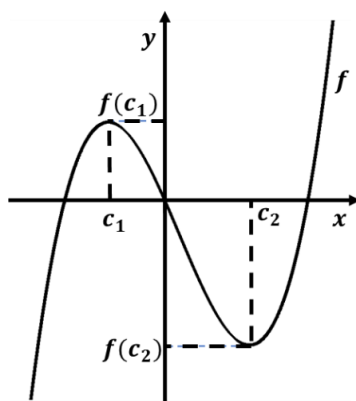


Figura 5.2.3. Máximo relativo en c_1 y mínimo relativo en c_2 .

Definición 5.2.2**Máximo y mínimo relativos.**

Sea f una función definida en un conjunto A que contenga a c .

- 1) Se dice que un número $f(c)$, es un valor máximo relativo de f en A si existe un intervalo abierto (a, b) en A , que contenga a c , y $f(x) \leq f(c)$ para toda x en (a, b) .
- 2) Se dice que un número $f(c)$, es un valor mínimo relativo de f en A si existe un intervalo un intervalo abierto (a, b) en A , que contenga a c , y $f(x) \geq f(c)$ para toda x en (a, b) .

Los valores máximo y mínimo relativos, también se denominan máximo y mínimo locales, o valores locales extremos de la función. De ésta manera un máximo local, puede ser menor que un mínimo local y viceversa.

El teorema del valor extremo, afirma que una función continua en un intervalo cerrado, tiene máximo y mínimo, sin embargo no establece como obtenerlos.

En la Figura 5.2.4 muestra un valor mínimo relativo en c_2 , dos valores máximos relativos, uno en c_1 y otro en c_3 , en a , un valor mínimo absoluto. Además en los puntos

$(c_1, f(c_1))$ y $(c_2, f(c_2))$ la recta tangente a la gráfica es horizontal, y por lo tanto $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. En el punto $(c_3, f(c_3))$, $f'(c_3)$, no existe.

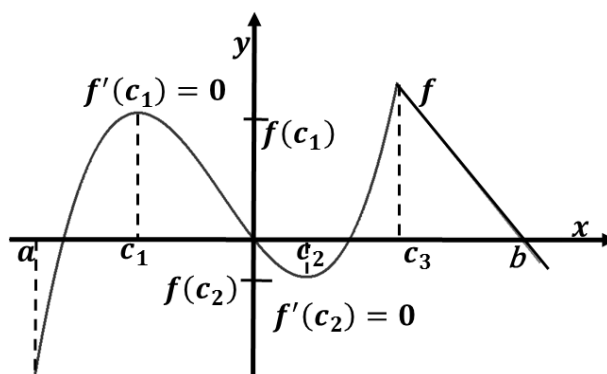


Figura 5.2.4 Valores máximo y mínimo relativo de f .

El siguiente teorema se relaciona con éste hecho.

Teorema 5.2.2

Si f es continua y diferenciable para toda x en un intervalo abierto (a, b) que contenga a c , y si f tiene un extremo relativo en c , entonces si $f'(c)$ existe $f'(c) = 0$.

Demostración

Se prueba que la derivada en c es cero.

Suponer que f tiene un máximo relativo en c , por la definición 5.2.1, $f(x) \leq f(c)$ para toda x , próxima a c , o $f(c+h) \leq f(c)$ para un número h suficientemente próximo a cero.

Al tener un número h suficientemente próximo a cero se tiene:

Por un lado, si $h > 0$, multiplicar $f(c+h) \leq f(c)$ por $\frac{1}{h}$ para obtener:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \text{ ----- (1).}$$

Tomar en (1) límite por la derecha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \text{ ----- (2).}$$

Como la derivada existe, entonces

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \text{ ----- (3).}$$

Por lo tanto $f'(c) \leq 0$.

Por otro lado, si $h < 0$, multiplicar $f(c+h) \leq f(c)$ por $\frac{1}{h}$.

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0. \text{-----} (4).$$

Tomar en (4) límite por la izquierda

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0. \text{-----} (5).$$

Como la derivada existe, entonces

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0. \text{-----} (6).$$

Así que ahora, la derivada es negativa.

Con estos resultados la única posibilidad para que la derivada exista, es que la derivada por la derecha y por la izquierda sean cero.

Para un mínimo relativo la prueba es similar. Fin de la prueba

A los números c , del teorema anterior se denominan **números críticos**, en tales números es posible que existan valores extremos.

Definición 5.2.4

Número crítico

Un número c , en el dominio de f , tal que $f'(c) = 0$, o bien $f'(c)$ no existe se denomina número crítico.

Ejemplo 5.2.3

Obtener los números críticos de la función dada.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x. \quad \text{b) } f(x) = |x-1|.$$

Solución

a) Para obtener los números críticos, derivar la función, igualar a cero y resolver.

$$f'(x) = x^2 - 4x - 5, \quad x^2 - 4x - 5 = 0, \quad x = -1, 5. \text{ Números críticos.}$$

b) En éste caso la derivada en $x=1$, no existe, ya que los límites unilaterales son diferentes

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = -1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1.$$

De esta manera, $x=1$, es el número crítico.

Según el teorema del valor extremo, una función continua en un intervalo cerrado, tiene máximo absoluto y mínimo absoluto, éste valor en el intervalo, es el extremo relativo, y puede ocurrir en un número crítico o en un extremo del intervalo.

El siguiente procedimiento permite obtener el máximo absoluto y el mínimo absoluto en un intervalo cerrado.

- 1) Obtener los números $f(a)$ y $f(b)$.
- 2) Obtener los números críticos en el intervalo (a, b) y evaluar la función en ellos.
- 3) El mayor valor obtenido en (1) o en (2) es el valor máximo absoluto, y el menor el valor mínimo absoluto.

Ejemplo 5.2.4

Obtener los valores máximo y mínimo absoluto en el intervalo $[-1, 2]$, de la función:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Solución

Se evalúa la función en los extremos del intervalo.

$$f(-1) = 0, \quad f(2) = 0.$$

Para obtener los números críticos, derivar la función, igualar a cero y resolver.

$$f'(x) = 4x^3 - 10x, \quad 4x^3 - 10x = 0, \quad x = 0, \pm \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Los números críticos son $c_1 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Los valores extremos $f\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = -\frac{9}{4}$, valor mínimo absoluto, y $f(0) = 4$ valor máximo absoluto.

✓ Teorema de Rolle, teorema de Lagrange o teorema del valor medio.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , tal que $f(a) = f(b) = 0$, entonces en el intervalo abierto (a, b) , la gráfica de f debe tener al menos una recta tangente horizontal, es decir, para algún número $c \in (a, b)$, la derivada en c es cero. La Figura 5.2.5 muestra una interpretación geométrica de ésta situación.

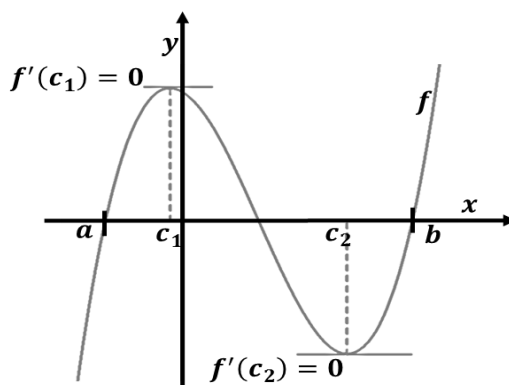


Figura 5.2.5 Gráfica con dos rectas tangentes.

Teorema 5.2.3. Teorema de Rolle (Michel Rolle 1652-1719).

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , tal que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces existe un número $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Demostración

Se prueba que la derivada en c es cero.

Si $f(x) = 0$, para toda x en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f'(c) = 0$.

Por otro lado, si $f(x)$ no es constante, por el teorema 5.2.1, existe un $c \in (a, b)$, tal que f alcanza su valor máximo (o su mínimo) en c .

Suponer que f alcanza su máximo en c , Figura 5.2.6, se tiene que demostrar que $f'(c) = 0$.

Entonces por el teorema 5.2.2, se tiene que $f'(c) = 0$. Para un mínimo relativo la prueba es similar. Fin de la demostración

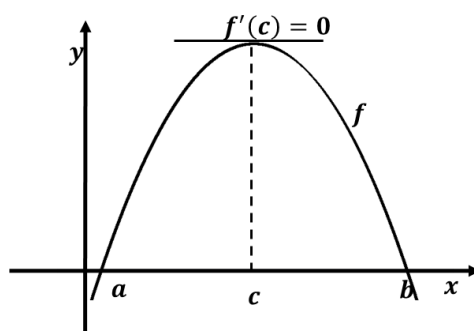


Figura 5.2.6 Recta tangente en $x = c$, $f'(c) = 0$.

Ejemplo 5.2.5

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, obtenga los valores de c , en el intervalo $[-1, 3]$ que cumplen con el teorema de Rolle.

Solución

La función es un polinomio y por tanto es continua y diferenciable en todo su dominio.

Se deriva la función, se iguala a cero y se resuelve, para obtener los números c , en donde $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad 3x^2 - 6x = 0, \quad x = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Los valores de c , son: $c_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$, $c_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$. Se muestran los resultados en la Figura 5.2.7.

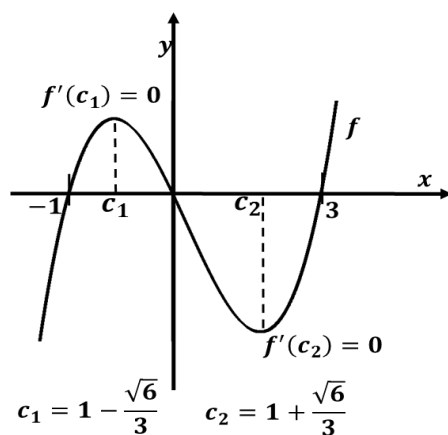


Figura 5.2.7 $f'(c_1) = 0$, $f'(c_2) = 0$.

Teorema 5.2.3 Teorema de Lagrange (Joseph-Louis Lagrange 1736-1813) o teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , entonces existe número $c \in (a, b)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geométricamente el teorema establece que en la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es igual a la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ para algún número c en el intervalo abierto (a, b) , como se observa en la Figura 5.2.8.

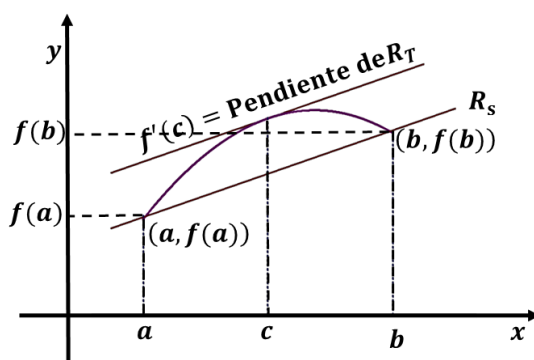


Figura 5.2.8 $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostración

La ecuación de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ como se observa en la figura 5.2.8, es:

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \text{o bien} \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(b). \text{----- (1)}$$

Se forma una función G , entre f y la recta secante.

$$\begin{aligned} G(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(b). \text{----- (2)} \end{aligned}$$

La función obtenida es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el abierto (a, b) , además cumple con las condiciones del teorema de Rolle, ya que:

$$G(a) = 0, \text{ y } G(b) = 0.$$

Al derivar la función G , se tiene

$$G'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Del teorema de Rolle, existe un número c en (a, b) , tal que $G'(c) = 0$, por lo que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De donde,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Fin de la prueba.

Ejemplo 5.2.6

Para la función $f(x) = -x^2 + 5x - 4$, verificar que se cumple con las condiciones del teorema del valor medio. Obtenga el número c , en el intervalo $(1, 3)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}.$$

Solución

Como la función dada es un polinomio, es continua y diferenciable en todo su dominio. Por lo tanto cumple con la hipótesis de teorema del valor medio en el intervalo $[1, 3]$.

Se evalúa la función en los extremos del intervalo $f(1) = 0$, $f(3) = 2$.

Los valores se sustituyen en $f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$.

Se tiene:

$$f'(c) = \frac{2-0}{3-1} = 1 \text{ ----- (1).}$$

Derivar la función, evaluarla en c , igualar con (1) y resolver para c .

$$f'(x) = -2x + 5$$

$$f'(c) = -2c + 5$$

$$-2c + 5 = 1$$

$$c = 2$$

De ésta manera se verifica que el número c , en el intervalo dado es $c = 2$.

5.3 FUNCIÓN CRECIENTE Y DECRECIENTE

El concepto de función creciente y decreciente está relacionado con la idea de aumentar o subir y de bajar o disminuir.

En la figura 5.3.1, en el intervalo $[a, b]$ cuando x se desplaza hacia la derecha desde a hasta c la gráfica de f sube; y baja, cuando x se desplaza de c hasta b , de este modo se dice que la función es creciente en el intervalo $[a, c]$ y decreciente en $[c, b]$. En la siguiente definición se puntualiza la idea.

Definición 5.3.1

Función creciente y decreciente.

Se dice que una función f , es creciente en un intervalo A si y solo si $f(x_1) < f(x_2)$, siempre que $x_1, x_2 \in A$ y $x_1 < x_2$.

Se dice que una función f , es decreciente en un intervalo A si y solo si $f(x_1) > f(x_2)$, siempre que $x_1, x_2 \in A$ y $x_1 < x_2$.

Una función que es creciente o decreciente en un intervalo, se dice que es **monótona**.

En la figura 5.3.1, también se observa que en el intervalo en donde la función es creciente, la recta tangente tiene pendiente positiva, es decir $f'(x) > 0$, y en el intervalo donde es decreciente, la recta tangente tiene pendiente negativa, esto es $f'(x) < 0$. Éste hecho, se relaciona con el siguiente teorema que proporciona un criterio para determinar si una función es creciente o decreciente.

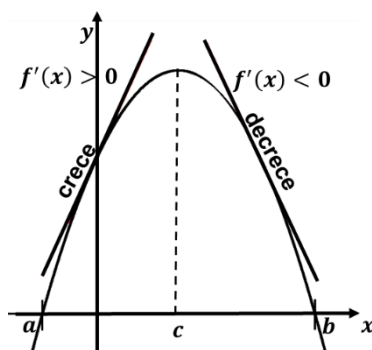


Figura 5.3.1 Función Creciente y Decreciente

Teorema 5.3.1

Sea f continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) .

- 1) Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$ entonces f es creciente en $[a, b]$.
- 2) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$ entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Demostración

Para el punto 2.

Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en $[a, b]$ tal que $x_1 < x_2$.

Por el teorema del valor medio, en el intervalo (x_1, x_2) , existe un número c tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Por hipótesis $f'(c) < 0$.

Así que, el cociente diferencial es negativo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Como $x_1 < x_2$ entonces $x_2 - x_1 > 0$ por lo tanto $f(x_2) - f(x_1) < 0$. Así que

$$f(x_2) < f(x_1).$$

De la definición 5.3.1 para la función decreciente, se cumple. Fin de la prueba.

Ejemplo 5.3.1

Determine los intervalos en donde la función $f(x) = 3x + \frac{1}{3x}$, es creciente o decreciente.

Solución

Obtener la derivada de la función, determinar los intervalos donde es positiva y en donde es negativa.

$$f'(x) = 3 - \frac{1}{3x^2}$$

Para obtener los intervalos donde es creciente, se resuelve la desigualdad

$$3 - \frac{1}{3x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{9x^2 - 1}{3x^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-1)(3x+1)}{3x^2} > 0.$$

Ya que el denominador es positivo, los factores del numerador deben tener igual signo para que se cumpla la desigualdad. Así:

$$(3x-1)(3x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1) > 0 & y & (3x+1) > 0 \\ (3x-1) < 0 & y & (3x+1) < 0 \end{cases}$$

Para la primera parte:

$$(3x-1) > 0 \quad y \quad (3x+1) > 0.$$

$$x > \frac{1}{3} \quad y \quad x > -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Solución } x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right).$$

Para la segunda parte:

$$(3x-1) < 0 \quad y \quad (3x+1) < 0.$$

$$x < \frac{1}{3} \quad y \quad x < -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Solución } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right).$$

Por lo tanto la función es creciente, en los intervalos $x \in x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Es decreciente, en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ excepto en $x = 0$.

5.4 MÁXIMOS Y MÍNIMOS (CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA)

En el Teorema 5.3.1 se indica como es el signo de la derivada de una función creciente y decreciente, antes y después de un número crítico c . Si la derivada cambia de signo antes y después del número c , entonces en c tiene un extremo relativo. En el teorema siguiente se precisa la idea.

Teorema 5.4.1 Criterio de la primera derivada.

Si f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , que contiene al número c , excepto posiblemente en el número crítico c mismo. Entonces

1) Si $f'(x) > 0$ antes de c y $f'(x) < 0$ después de c , entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f .

2) Si $f'(x) < 0$ antes de c y $f'(x) > 0$ después de c , entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f .

Demostración

Para el punto 2.

Sea f diferenciable en (a, c) , tal que $f'(x) < 0$, para toda x en (a, c) , entonces por el teorema 5.3.1 (2) f , es decreciente en el intervalo $[a, c]$. Sea f , diferenciable en (c, b) , tal que $f'(x) > 0$ para toda x en (c, b) , entonces por el teorema 5.3.1 (1), f es creciente en el intervalo $[c, b]$. Como f , es decreciente en el intervalo $[a, c]$, entonces para toda $x_1 \neq c$ en $[a, c]$, $f(x_1) > f(c)$, y para toda $x_2 \neq c$ en $[c, b]$, $f(x_2) > f(c)$ ya que, f es creciente en $[c, b]$ y de la definición 5.2.3 (2) f , tiene un mínimo relativo en c . La interpretación geométrica se muestra en la Figura 5.4.1. La demostración es similar para el punto 1. Fin de la prueba.

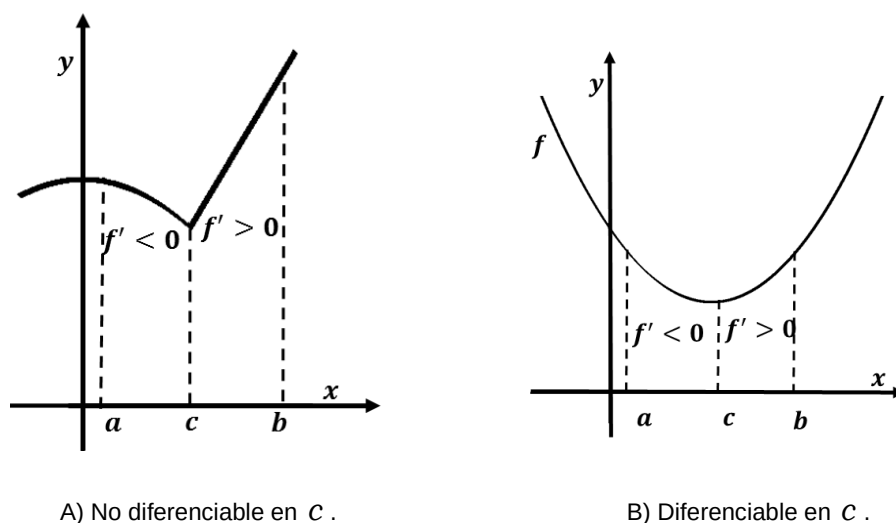


Figura 5.4.1 Mínimo relativo

La aplicación del teorema del criterio de la primera derivada, para determinar los extremos relativos, usualmente consiste en lo siguiente:

- 1) Obtener f' .
- 2) Hallar los números críticos de la función, es decir, los valores de x en los que $f'(x) = 0$, o bien $f'(x)$ no existe.
- 3) Aplicar criterio de la primera derivada.

Ejemplo 5.4.1

Obtener los extremos relativos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

Solución

Derivar la función.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12.$$

Igualar la derivada a cero y resolver.

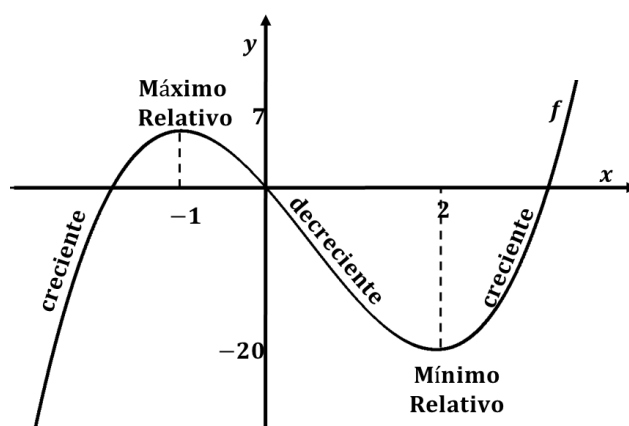
$$6x^2 - 6x - 12 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

Se obtienen los números críticos de f , $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, con éstos valores, la recta real se divide en tres intervalos, tomar puntos de prueba en cada uno de ellos y evaluar la derivada para determinar su signo, si hay cambio de signo de un intervalo a otro, entonces hay extremo relativo, en la Tabla 5.4.1, se muestran los resultados.

Tabla 5.4.1

Intervalo	x de Prueba	$f(x)$	$f'(x)$	f
$(-\infty, -1)$	-2		+	Creciente
$x = -1$		7		Máximo relativo
$(-1, 2)$	0		-	Decreciente
$x = 2$		-20		Mínimo relativo
$(2, \infty)$	3		+	Creciente

El máximo relativo de la función es $f(-1) = 7$, el mínimo relativo $f(2) = -20$, la función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, y decreciente en $(-1, 2)$. Ver Figura 5.4.2.

Figura 5.4.2 Gráfica de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.**Ejemplo 5.4.2**

Obtener los extremos relativos de la función $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 1$.

Solución

Derivar la función.

$$f'(x) = 8x^3 - 4x.$$

Igualar la derivada a cero y resolver.

$$8x^3 - 4x = 0, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

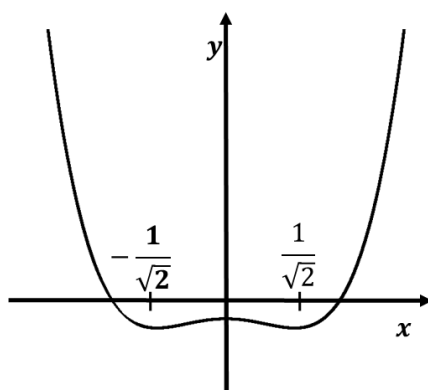
Se obtienen los números críticos de f , $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Con éstos valores, la recta real se divide en cuatro intervalos, tomar puntos de prueba en cada uno de ellos y evaluar la

derivada para determinar su signo, si hay cambio de signo de un intervalo a otro, entonces hay extremo relativo, en la Tabla 5.4.2, se muestran los resultados.

Tabla 5.4.2

Intervalo	x de Prueba	$f(x)$	$f'(x)$	f
$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	-1		$-$	Decreciente
$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{3}{4}$		Mínimo relativo
$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$-\frac{1}{2}$		$+$	Creciente
$x = 0$		-1		Máximo relativo
$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{2}$		$-$	Decreciente
$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{3}{4}$		Mínimo relativo
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$	1		$+$	Creciente

El máximo relativo de la función es $f(0) = -1$, la función tiene dos mínimos relativos $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{3}{4}$ y $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{3}{4}$, la función es creciente en los intervalos $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, y decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Ver Figura 5.4.3.

Figura 5.4.3 Gráfica de $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 1$.**Ejemplo 5.4.3**

Obtener los extremos relativos de la función $f(x) = x^4 - x^3$.

Solución

Derivar la función.

$$f'(x) = f(x) = 4x^3 - 3x^2.$$

Igualar la derivada a cero y resolver.

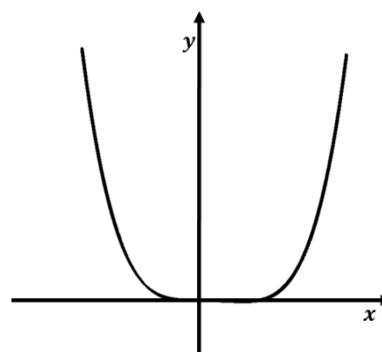
$$4x^3 - 3x^2 = 0, \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{4}.$$

Se obtienen los números críticos de f , $c_{1,2} = 0$, $c_3 = \frac{3}{4}$, con éstos valores, la recta real se divide en tres intervalos, tomar puntos de prueba en cada uno de ellos y evaluar la derivada para determinar su signo, si hay cambio de un intervalo a otro, entonces hay extremo relativo, se analiza la información en la Tabla 5.4.3.

Tabla 5.4.3

Intervalo	x de Prueba	$f(x)$	$f'(x)$	f
$(-\infty, 0)$	-1		$-$	Decreciente
$x = 0$		7		No hay cambio de signo
$(0, \frac{3}{4})$	$\frac{1}{2}$		$-$	Decreciente
$x = \frac{3}{4}$		-20		Mínimo relativo
$(\frac{3}{4}, \infty)$	1		$+$	Creciente

La derivada no cambia de signo después del número crítico $c_{1,2} = 0$, entonces no hay extremo relativo en él. El extremo relativo $f(\frac{3}{4}) = -20$, es el mínimo relativo. La gráfica de la función se muestra en la Figura 5.4.4

Figura 5.4.4 Gráfica de $f(x) = x^4 - x^3$.

Ejemplo 5.4.4

Obtener los extremos relativos de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 2}$.

Solución

Derivar la función.

$$f'(x) = \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{x^2-x-2}} \dots$$

Igualar la derivada a cero y resolver.

$$\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{x^2-x-2}} = 0,$$

$$2x-1=0, \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad .$$

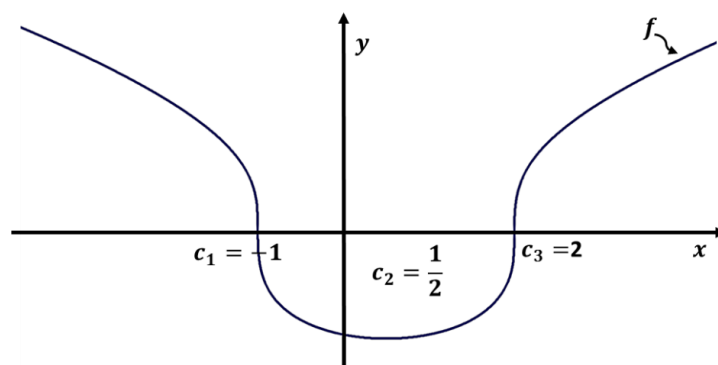
$$x^2 - x - 2 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_3 = 2$$

Se obtienen los números críticos de f , en el número crítico $c_2 = \frac{1}{2}$, $f'(c_2) = 0$, y en los números críticos $c_1 = -1$, $c_3 = 2$, $f'(c_1)$ y $f'(c_3)$, no existe, con estos valores, la recta real se divide en cuatro intervalos, tomar puntos de prueba en cada uno de ellos y evaluar la derivada para determinar su signo, si hay cambio de signo de un intervalo a otro, entonces hay extremo relativo, en la Tabla 5.4.4, se muestran los resultados.

Tabla 5.4.4

Intervalo	x de Prueba	$f(x)$	$f'(x)$	f
$(-\infty, -1)$	-2		$-$	Decreciente
$x = -1$		0		No hay extremo relativo
$(-1, \frac{1}{2})$	0		$-$	Decreciente
$x = \frac{1}{2}$		$-\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$		Mínimo relativo
$(\frac{1}{2}, 2)$	1		$+$	Creciente
$x = 2$		0		No hay extremo relativo
$(2, \infty)$	3		$+$	Creciente

La derivada no cambia de signo después del número crítico $c_1 = -1$, tampoco después de $c_3 = 2$, entonces no hay extremo relativo en ellos. El extremo relativo es el número $f(\frac{1}{2}) = -\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$, y es un mínimo relativo. La gráfica de la función se muestra en la Figura 5.4.5.

Figura 5.4.5 Gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 2}$.

5.5 MÁXIMOS Y MÍNIMOS (CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA).

Sea f una función tal que f' y f'' existen en (a, b) que contiene a c , tal que $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces por el teorema 5.3.1 (2), f' es decreciente. Puesto que $f'(x)$, representa la pendiente (m) de la recta tangente a la gráfica de f , al ordenar los puntos dados de acuerdo con el valor de la pendiente de la curva en ellos, ver Figura 5.5.1,

$m_1 > m_2 > m_3 = 0 > m_4 > m_5$, es decir, $f'(x)$ pasa de positiva a negativa por lo que f tiene un máximo en $(c, f(c))$, según Teorema 5.4.1(1).

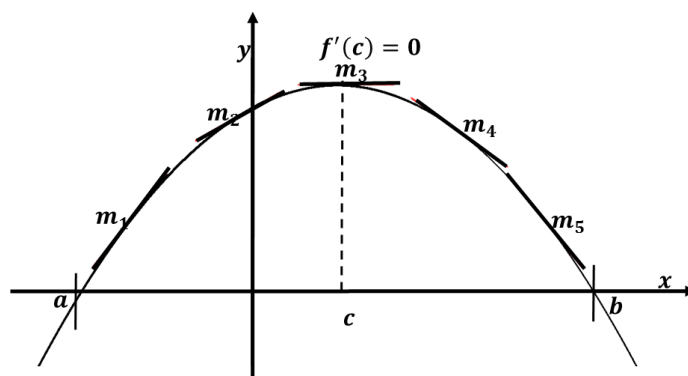


Figura 5.5.1 $f'(c) > 0$, antes de c , $f'(c) < 0$ después de c .

Teorema 5.5.1 Criterio de la segunda derivada para extremos relativos.

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$, si f' existe para todo $x \in (a, b)$, que contiene al número crítico c , y si $f''(c)$ existe, se tiene:

- 1) Si $f''(c) > 0$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
- 2) Si $f''(c) < 0$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
- 3) Si $f''(x) = 0$, la prueba no aplica, $f(c)$ puede o no ser un extremo relativo.

Demostración

Para el punto 2.

Por hipótesis se tiene $f''(c) < 0$, es decir:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Existe un intervalo (a, b) que contiene a c , tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \text{ para toda } x \neq c.$$

Si $x < c$ entonces $x - c < 0$ y $f'(x) - f'(c) < 0$. Así que $\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$.

Si $x > c$ entonces $x - c > 0$ y $f'(x) - f'(c) < 0$. Así que $\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$.

Al cambiar el signo de la derivada, $f'(x)$ de positiva a negativa y como $f'(c) = 0$, entonces f tiene un máximo en c , según teorema 5.4.1. La demostración para el punto (1) es similar. Fin de la prueba.

Ejemplo 5.5.1

Aplicar el criterio de la segunda derivada para obtener los extremos relativos de la función

$$f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 1.$$

Solución

Obtener la segunda derivada de la función.

$$f'(x) = 8x^3 - 4x.$$

$$f''(x) = 24x^2 - 4.$$

Igualar a cero la primera derivada y resolver.

$$8x^3 - 4x = 0$$

$$4x(2x^2 - 1) = 0,$$

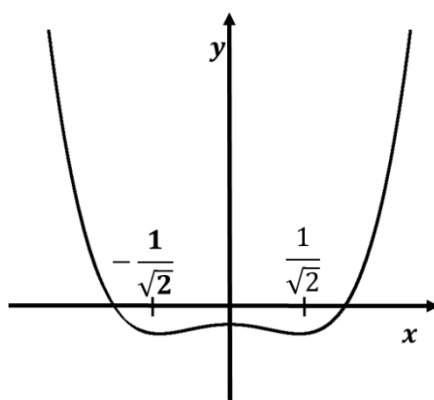
$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Se obtienen los números críticos de f , $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Evaluar la segunda derivada con los valores para obtener su signo.

Tabla 5.5.1

Número crítico	$f(x)$	$f''(x)$	f
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{2}$	+	Mínimo relativo
0	-1	-	Máximo relativo
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{2}$	+	Mínimo relativo

Así, la función tiene el número $f(0) = -1$ como máximo relativo y $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}$ como mínimo relativo. La gráfica de la función se muestra en la Figura 5.5.2.

**Figura 5.5.2.**

Ejemplo 5.5.2

Aplicar el criterio de la segunda derivada para obtener los extremos relativos de la función:

$$f(x) = x^{2/3}.$$

Solución

Obtener la segunda derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9x^2\sqrt[3]{x}}.$$

La primera derivada tiene un solo número crítico en $x = 0$, es importante observar que ese punto está en el dominio de la función, sin embargo, la derivada no existe en él.

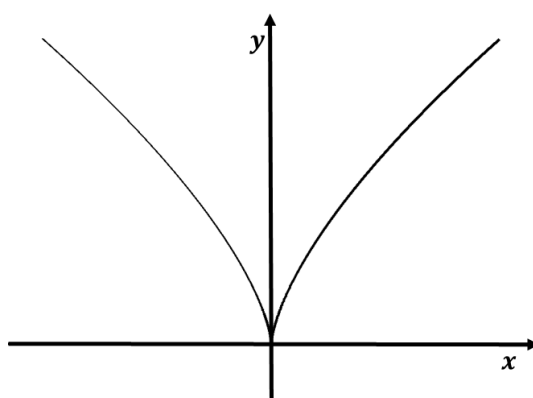
Como la segunda derivada no está definida en el número crítico, entonces el criterio de la segunda derivada no aplica. Con la información obtenida se elabora la siguiente tabla y se analizan los resultados.

Tabla 5.5.2

Intervalo	x de Prueba	$f(x)$	$f'(x)$	f
$(-\infty, 0)$	-1		-	Decreciente
$x = 0$		0		Mínimo relativo
$(0, \infty)$	1		+	Creciente

La función tiene un valor mínimo relativo $f(0) = 0$, en éste caso coincide con el mínimo absoluto.

La gráfica de la función se muestra en la Figura 5.4.6.

**Figura 5.5.3** Gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}$.

5.6 CONCAVIDADES Y PUNTO DE INFLEXIÓN.

En la Figura 5.6.1 se muestra la gráfica de una función f en el intervalo (a, b) en donde $m_1, m_2, \dots, m_5$, representan la correspondiente pendiente de la recta tangente a la curva. Si en el intervalo (a, b) , x se desplaza de izquierda a derecha, los valores de m disminuyen, es decir $f'(x)$, es una función decreciente y por lo tanto $f''(x) < 0$.

De forma análoga en la Figura 5.6.2, f' , es una función creciente, así $f''(x) > 0$.

En el primer caso las rectas tangentes están por encima de la curva. Se dice que la curva es **cóncava hacia abajo**.

En el segundo caso las rectas tangentes están por abajo de la curva. Se dice que la curva es **cóncava hacia arriba**.

El siguiente enunciado define la concavidad de una curva.

Definición 5.6.1

Concavidad de una curva.

Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto (a, b) . Se dice que la grafica de una función f es cóncava hacia arriba en el intervalo abierto (a, b) si f' es creciente. Es cóncava hacia abajo si f' es decreciente en el intervalo (a, b) .

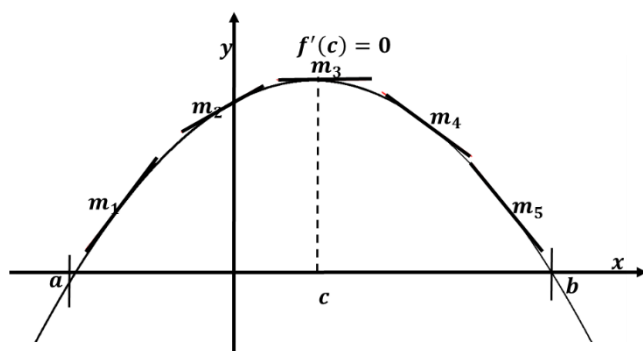


Figura 5.6.1 $f' = m$, es decreciente.

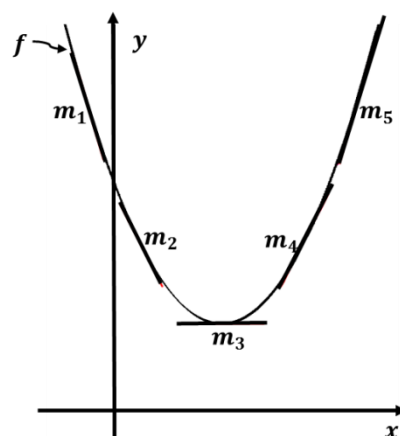


Figura 5.6.2 $f' = m$, es creciente.

Puesto que la concavidad de la gráfica de una función f , está relacionada con el carácter creciente o decreciente de f' , y ésta a su vez con el signo de f'' , entonces, existe una relación entre la concavidad de la gráfica de f y el signo de f'' . Se expresa en el teorema siguiente.

Teorema 5.6.1 Criterio de concavidad.

Sea f una función diferenciable en algún intervalo abierto (a, b) .

- 1) Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo.
- 2) Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo.

Es importante señalar que en el punto uno, el teorema afirma que, si $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de f , es cóncava hacia arriba, sin embargo si la gráfica de f , es cóncava hacia arriba, no necesariamente $f''(x) > 0$. De forma similar en el punto dos por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^4$, es cóncava hacia arriba en $x = 0$, sin embargo, $f''(0)$ no es mayor que cero.

Los intervalos de concavidad son determinados por los valores de x , en donde la $f''(x) = 0$, o no existe.

Ejemplo 5.6.1

Obtener los intervalos de concavidad de la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}$.

Solución

Obtener la segunda derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9x^2\sqrt[3]{x}}.$$

Se observa que no existe x , tal que $f''(x) = 0$, además en $x = 0$, $f''(x)$.

Con la información obtenida se tiene:

Tabla 5.6.1

Intervalo	x de Prueba	$f(x)$	f''	f
$(-\infty, 0)$	-1		-	Cóncava hacia abajo
$x = 0$		0		
$(0, \infty)$	1		-	Cóncava hacia abajo

De los datos de la tabla se observa que no hay cambio en el signo de la segunda derivada, de manera que la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en los dos intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. La gráfica de la función se muestra en la Figura 5.6.3.

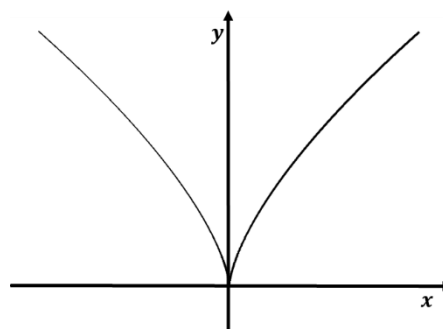


Figura 5.6.3 Gráfica de $f(x) = x^{2/3}$.

✓ Puntos de inflexión.

En el ejemplo anterior la gráfica de la función no cambió su concavidad. Cuando la gráfica de la función cambia de concavidad en algún punto de ella, y en dicho punto existe la recta tangente, se dice que ese punto es un **punto de inflexión**.

Definición 5.6.2

Punto de inflexión.

Sea f una función continua en un intervalo abierto que contiene a c . Si la gráfica de f tiene recta tangente en $(c, f(c))$, éste se denomina punto de inflexión, si en él la gráfica de f cambia de concavidad.

Los intervalos de concavidad son determinados por los valores de x , en donde la $f''(x) = 0$, o no existe, y su análisis proporciona la información respecto de los puntos de inflexión. El siguiente teorema indica donde localizar posibles puntos de inflexión.

Teorema 5.6.2

Si la gráfica de la función f tiene punto de inflexión en $(c, f(c))$, entonces $f''(c) = 0$ o bien $f''(c)$ no existe.

Usualmente el procedimiento para localizar posibles puntos de inflexión consiste en lo siguiente:

- 1) Obtener $f''(x)$.
- 2) Hallar los valores de x , en donde la $f''(x) = 0$, o no existe.
- 3) Con los valores de x del paso anterior, determinar los intervalos en donde se evalúa $f''(x) = 0$.
- 4) Aplicar el teorema 5.6.1, criterio de concavidad.

Ejemplo 5.6.2

Determine los puntos de inflexión en la gráfica de la función $f(x) = 2x^4 - 2x - 1$.

Solución

Obtener la segunda derivada de la función.

$$f'(x) = 8x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 24x^2 - 4$$

Igualar a cero la segunda derivada y resolver.

$$24x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Con los valores de x , formar los intervalos y evaluar $f''(x)$.

Tabla 5.6.2

Intervalo	x de Prueba	$f'(x)$	f''	f
$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	-1		+	Cóncava hacia arriba
$x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$		$-\frac{23}{18}$		Punto de inflexión
$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	0		-	Cóncava hacia abajo
$x = \frac{1}{\sqrt{6}}$		$-\frac{23}{18}$		Punto de inflexión
$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \infty\right)$	1		+	Cóncava hacia arriba

De los resultados obtenidos, la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, y cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, así que $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{23}{18}\right)$, es un punto de inflexión, del mismo modo lo es el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{23}{18}\right)$, ya que cambia la concavidad después de $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. La gráfica de la función se muestra en la Figura 5.6.4.

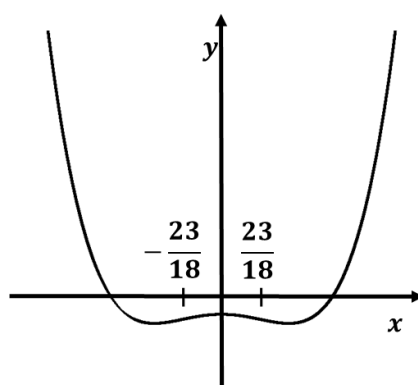


Figura 5.6.4 Gráfica de $f(x) = 2x^4 - 2x - 1$.

Ejemplo 5.6.3

Determine si la gráfica de la función dada tiene punto de inflexión. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 3, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Solución

Se obtiene la segunda derivada de la función, como es por partes, se determina para cada una de ellas su derivada.

Para la primera:

$$\text{Si } x \leq 1, f(x) = x^2 + 1, f'(x) = 2x, f''(x) = 2.$$

Para la segunda parte:

$$\text{Si } x > 1, f(x) = -x^2 + 3, f'(x) = -2x, f''(x) = -2.$$

Al analizar la información:

Si $x \leq 1$, $f''(x) > 0$, por lo que la gráfica de f es cóncava hacia arriba.

Si $x > 1$, $f''(x) < 0$, en consecuencia la gráfica de f es cóncava hacia abajo.

Como hay cambio de concavidad se puede inferir que en $x = 1$, existe un punto de inflexión, sin embargo no existe recta tangente en el punto $(1, 2)$ ya que $f'_-(1) \neq f'_+(1)$. Ver Figura 5.6.5.

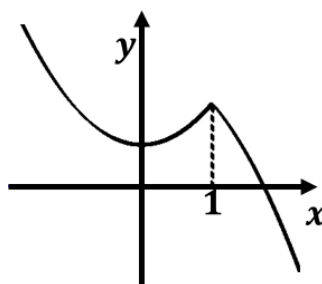


Figura 5.6.5 Gráfica de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 3, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

5.7 ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN DE FUNCIONES.

El comportamiento de una función, es predecible cuando se analiza por medio de los cambios en la variable independiente, es decir mediante su primera derivada, o bien cuando se hace con los cambios en la primera derivada, esto es cuando se utiliza la segunda derivada.

La caracterización de una función mediante la primera y segunda derivada, hace posible que una función pueda ser utilizada para describir diferentes situaciones sin importar su naturaleza.

El análisis de la variación de las funciones se aplica para demostrar los teoremas que se han descrito en las unidades anteriores.

En el siguiente ejemplo se aplica el criterio de la primera y segunda derivada de una función, para caracterizar su comportamiento y trazar la gráfica.

Ejemplo 5.7.1

Dada la función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(4-x)^{\frac{2}{3}}$. Determine:

- Intervalos donde es creciente y donde es decreciente.
- Valores máximo y mínimo relativo.
- Intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.
- Coordenadas de los puntos de inflexión.
- Trazar la gráfica.

Solución

Obtener primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x) = x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)(4-x)^{-\frac{1}{3}}(-1) + (4-x)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{Simplificar.}$$

$$f'(x) = \frac{-3x+4}{3x^{\frac{2}{3}}(4-x)^{\frac{1}{3}}}. \quad \text{Igualar a cero y resolver.}$$

$$\frac{-3x+4}{3x^{\frac{2}{3}}(4-x)^{\frac{1}{3}}} = 0. \quad \text{Obtener números críticos.}$$

Números críticos $x = \frac{4}{3}, 0, 4$, $f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ y $f'(x)$ no existe si $x = 0, 4$.

$$f''(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}(4-x)^{\frac{1}{3}}(-3) - (-3x+4)\frac{-3x+8}{3x^{\frac{1}{3}}(4-x)^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{4}{3}}(4-x)^{\frac{2}{3}}} \right] \quad \text{Simplificar}$$

$$f''(x) = \frac{-32}{9x^{\frac{5}{3}}(4-x)^{\frac{4}{3}}} \quad \text{Igualar a cero.}$$

$$\frac{-32}{9x^{\frac{5}{3}}(4-x)^{\frac{4}{3}}} = 0 \quad \text{Resolver.}$$

Números donde $f''(x)$ no existe, $x = 0, 4$.

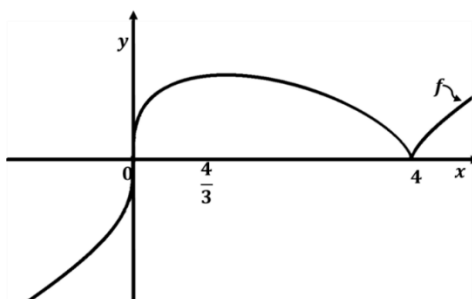
Con los números obtenidos se divide la recta real y se elabora la siguiente tabla.

Tabla 5.7.1

Intervalo	x de Prueba	$f(x)$	f'	f''	f
$(-\infty, 0)$	-1		+	+	Creciente, Cóncava hacia arriba
$x = 0$		0	∞	∞	No hay extremo relativo
$(0, \frac{4}{3})$	1		+		Creciente
$x = \frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	0	-	Máximo relativo
$(\frac{4}{3}, 4)$	2		-		
$(0, 4)$	2			-	Cóncava hacia abajo
$x = 4$		0	∞	∞	Mínimo relativo
$(4, \infty)$	5		+	-	Cóncava hacia abajo

Conclusión:

- a) Creciente en $(-\infty, \frac{4}{3}) \cup (4, \infty)$, decreciente en $(\frac{4}{3}, 4)$.
- b) Valor máximo relativo $f(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$, valor mínimo relativo no hay.
- c) Coordenadas punto de inflexión $(0, 0)$.
- d) Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$, cóncava hacia abajo en $(0, 4) \cup (4, \infty)$.
- e) Gráfica de la Figura 5.7.1.

Figura 5.7.1 Gráfica de la función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(4-x)^{\frac{2}{3}}$.**5.8 CÁLCULO DE APROXIMACIONES USANDO LA DIFERENCIAL.**

Para una función definida por $y = f(x)$, en el punto 4.4, se definió sus diferencial como $dy = f'(x)dx$, donde dx representa el cambio Δx de la variable independiente, para valores de Δx próximos a cero. El cambio Δy , de la variable independiente se aproxima al valor del diferencial, es decir, $\Delta y \approx dy$ si $\Delta x \approx 0$. Con éste argumento, se puede obtener un valor aproximado del cambio de una función, utilizando su diferencial.

Ejemplo 5.8.1

A un recipiente de forma esférica de 1m de radio interno, se aplica un revestimiento interno de 2 mm de espesor. Determinar un valor aproximado del cambio de volumen del recipiente.

Solución

El valor aproximado del cambio de volumen se obtiene con el diferencial de la función que permite calcular el volumen de una esfera.

Volumen de una esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. El volumen es función del radio r .

$$dV = 4\pi r^2 dr \text{ ----- (1)}$$

Al aplicar el recubrimiento, el volumen del recipiente disminuye, de modo que, el cambio en la variable independiente $\Delta r = dr$ es negativo, al sustituir los valores en (1), se tiene un signo negativo, su interpretación es la disminución en el volumen del recipiente.

Se tiene $r = 1\text{m}$, $dr = -2\text{mm} = -0.002\text{m}$.

$$dV = 4\pi(1)^2(-0.002) = -0.008\pi \approx -0.025\text{m}^3.$$

Como $\Delta V \approx dV$. Entonces, un valor aproximado del cambio en el volumen ΔV es $0.008\pi\text{ m}^3$.

El valor exacto en el cambio de volumen se obtiene al calcular la diferencia entre el volumen final y el volumen inicial.

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(r + \Delta r) - V(r) \\ &= \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi(r)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi[r^3 + 3r^2\Delta r + 3r\Delta r^2 + \Delta r^3 - r^3] \\ &= \frac{4}{3}\pi\Delta r[3r^2 + 3r\Delta r + \Delta r^2] \text{ Al sustituir valores} \\ &= \frac{4}{3}\pi(-0.002)[3(1^2) + 3(1^2)(-0.002) + (-0.002)^2] \approx -0.025\text{ m}^3\end{aligned}$$

Ejemplo 5.8.2

Aplicar diferenciales para calcular la variación de volumen en un recipiente de forma esférica, de radio 1m, si al hacer la medición del radio, se tiene un error de 2 cm.

Solución

El volumen del recipiente esférico se obtiene con la formula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y su variación aproximada

dV , representa el error al calcularlo debido a la variación en la medición del radio.

$$dV = 4\pi r^2 dr \text{ ----- (1)}$$

El error en la medición del radio es $\pm 2\text{ cm}$ y representa la variación en la variable independiente r , es decir $dr = \pm 0.02\text{m}$.

De ésta manera al sustituir valores en (1)

$$dV = 4\pi(1)^2(.02) = 0.08\pi.$$

Como la variación en la medición es más, o es menos entonces su variación aproximada es

$$dV = \pm 0.08\pi \text{ m}^3.$$

A la razón $\frac{dV}{V}$ se conoce como error relativo, se denota $E.R.$, y $\frac{dV}{V}100$, como error porcentual, se denota $\%E.R.$.

En éste ejemplo,

$$\frac{dV}{V} = \frac{3dr}{r} = 0.03, \text{ es decir } E.R. = \pm 0.03 \text{ y } \%E.R. = 3\%.$$

El valor de una función en un punto determinado, se puede aproximar con el valor de la recta tangente en dicho punto, cuando el cambio en la variable independiente es pequeño, mediante la **línealización**.

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx. \text{----- (1)}$$

Ejemplo 5.8.3

Utilice diferenciales para calcular el valor aproximado de $\sin 46^\circ$.

Solución

Sea, $y = f(x) = \sin x$.

Puesto que, $46^\circ = (45^\circ + 1^\circ) = \frac{46^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{180} \pi$.

Entonces al considerar: $x + \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{180} \pi$, y $\Delta x = \frac{1}{180} \pi = dx$.

Se tiene de (1)

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx = \sin x + \cos x dx$. Sustituir valores

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{180} \pi\right) &\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{180} \pi \\ &\approx \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1}{180} \pi\right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{180} \pi\right) \approx 0.719 \end{aligned}$$

De ésta forma, $\sin 46^\circ \approx 0.719$.

5.9 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y TAZAS RELACIONADAS

Los conceptos de máximo y mínimo de una función, son aplicables a los problemas en los cuales se requiere aprovechar al máximo los recursos o minimizar los gastos. El gran reto, en la solución de este tipo de problemas, es interpretar analíticamente las relaciones entre las diferentes cantidades o variables descritas, en forma explícita o implícita en el enunciado del problema.

Debido a la diversidad de problemas, no existe un método que garantice la solución, sin embargo, es útil establecer una estrategia como la siguiente.

Sugerencia para la solución de problemas.

- 1) Leer el problema hasta comprenderlo.
- 2) Identificar las incógnitas y su relación con los datos proporcionados, hacer un esquema que permita visualizarlas.
- 3) Expresar las relaciones de las variables mediante una función de una sola variable.
- 4) Aplicar los métodos para obtener máximos y mínimos de una función.

Ejemplo 5.9.1

Hallar el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la región limitada por las gráficas de la ecuaciones dadas, si los lados del rectángulo son paralelos a los ejes de coordenadas.

$$3x^2 + 4y - 12 = 0, \quad x^2 - 4y - 4 = 0.$$

Solución

Graficar las ecuaciones. Figura 5.9.1

$$y_1 = \frac{1}{4}x^2 - 1 \text{ --- (1)} \quad y_2 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \text{ --- (2)}.$$

Identificar la base y la altura con las variables x, y , respectivamente.

Base $2x$, altura y .

De la fórmula para el área de un rectángulo

$$A = 2xy \text{ --- (3)}.$$

Se tiene una función de dos variables. De la Figura 5.9.1, la altura y , se obtiene de

$$\begin{aligned} y &= y_2 - y_1 \\ y &= \left[\left(-\frac{3}{4}x^2 + 3 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right] \\ y &= x^2 + 4. \text{ --- (4)} \end{aligned}$$

Sustituir en (3) para obtener una función de una variable.

$$A(x) = 2x(x^2 + 4) \text{ --- (5)}.$$

Derivar (5), igualar a cero la derivada y resolver para obtener los números críticos.

$$\begin{aligned} A'(x) &= -6x^2 + 8 \\ -6x^2 + 8 &= 0, \quad x_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Se elige solo el número crítico $\frac{2}{\sqrt{3}}$, por ser parte del dominio de la función.

Se obtiene la segunda derivada, y se aplica el criterio de la segunda derivada.

$$A''(x) = -12x.$$

La segunda derivada es positiva para $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, como consecuencia, en éste número existe un valor máximo.

Sustituir $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, en (4) para obtener la altura

$$y = x^2 + 4x = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3}$$

Como la base es $2x = \frac{4}{\sqrt{3}}$, y la altura $y = \frac{8}{3}$, entonces el área máxima es

$$A = 2xy = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\frac{8}{3} = \frac{32}{3\sqrt{3}} u^2$$

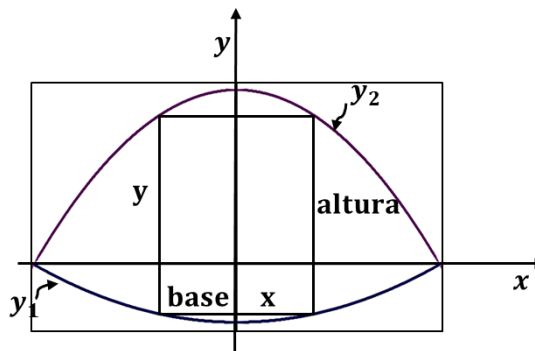


Figura 5.9.1

Ejemplo 5.9.2

Hallar el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en una circunferencia de radio r .

Solución

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen, de radio r . Graficar la ecuación. Figura 5.9.2.

$$x^2 + y^2 = r^2. \text{-----}(1).$$

Identificar:

Ancho del rectángulo: $2x$.

Largo del rectángulo: $2y$.

Área del rectángulo: $A = 4xy$ ----- (2).

Por simetría de la Figura 5.9.2: $\frac{1}{4}A = xy$ ----- (3).

Despejar y en (1)

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{-----} (4)$$

Sustituir en (3), se obtiene una función de solo una variable

$$\frac{1}{4}A(x) = x\sqrt{r^2 - x^2}, \text{-----}(5).$$

Derivar (5),

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}A'(x) &= x \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \right) + \sqrt{r^2 - x^2} \\ &= \frac{-2x^2 + r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\end{aligned}$$

Igualar la derivada a cero y resolver:

$$\frac{-2x^2 + r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0, \quad x = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Número crítico $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Si, $0 < x < \frac{r}{\sqrt{2}}$, entonces $A' > 0$. Si $\frac{r}{\sqrt{2}} < x < r$, entonces $A' < 0$.

Así A tiene valor máximo en $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Sustituir $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$, en (4) $y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{2}}$,

Sustituir $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ y $y = \frac{r}{\sqrt{2}}$ en (2)

$$A = 4 \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right) = 2r^2$$

Se obtiene el área del mayor rectángulo inscrito.

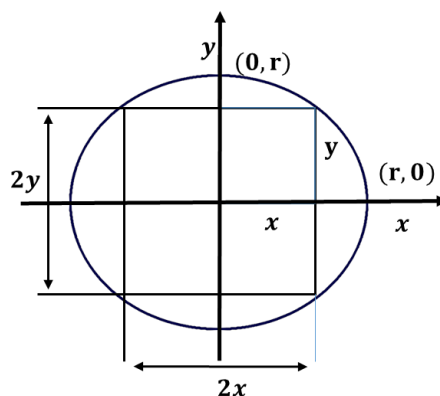


Figura 5.9.2

✓ Tazas relacionadas.

Cuando la derivada de una cierta variable, es afectada por la derivada de otras respecto al tiempo, se dice que las tasas están relacionadas, así por ejemplo, la razón de cambio instantáneo del área superficial de un globo esférico que se infla, está relacionada con la razón de cambio instantáneo de su radio.

De ésta manera, si el área superficial del globo esférico se obtienen mediante la fórmula

$$A = 4\pi r^2,$$

Donde:

A : representa el área superficial y r el radio del globo.

Cuando se deriva con respecto al tiempo se obtiene la relación entre las tasas.

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= 4\pi \frac{d}{dt} r^2 \\ \frac{dA}{dt} &= 8\pi r \frac{dr}{dt} \quad \text{--- (1)}\end{aligned}$$

La razón de cambio instantáneo del área $\left(\frac{dA}{dt}\right)$, con la razón de cambio instantáneo del radio $\left(\frac{dr}{dt}\right)$.

De modo que sí en cierto momento el diámetro del globo es de 50 cm y la razón de cambio instantáneo del área superficial es de $200 \text{ cm}^3/\text{s}$, se puede calcular la razón a la que el radio cambia en ese momento.

Se tiene: $\frac{dA}{dt} = 200 \text{ cm}^3/\text{s}$, $r = 25 \text{ cm}$.

Despejar $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ de (1):

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{dA}{dt}\right) \frac{1}{8\pi r}.$$

Al sustituir valores

$$\frac{dr}{dt} = 200 \frac{1}{8\pi 25} = \frac{1}{\pi} \text{ cm}.$$

En la solución de problemas de tasas relacionadas, también es útil seguir una estrategia, similar a la que se tiene en los problemas de optimización.

Sugerencias para la solución de tasas relacionadas:

- 1) Leer el problema hasta comprenderlo.
- 2) Hacer un esquema que permita visualizar las relaciones entre las variables identificadas en el punto uno, expresar las tasas en forma de derivadas.
- 3) Expresar las relaciones de las variables mediante una sola ecuación.
- 4) Aplicar la regla de la cadena para derivar con respecto al tiempo.
- 5) Despejar la razón de cambio instantáneo y sustituir valores.

Ejemplo 5.9.3

Dos ciclistas inician su recorrido desde el mismo punto y a la misma hora. Uno se dirige hacia el norte a una velocidad de 20 km/h, el otro hacia el este a 25 km/h. ¿A qué velocidad cambia la distancia entre ellos después de 3 horas?

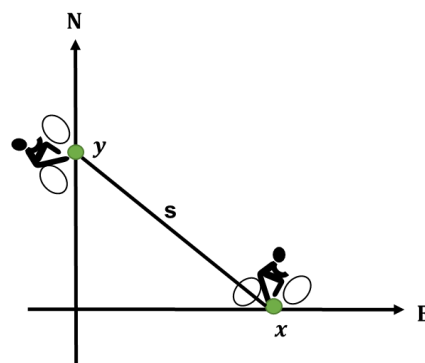


Figura 5.9.3

Solución

Trazar un esquema que represente la situación planteada. Figura 5.4.3.

Denotar con x la distancia recorrida por el ciclista que se dirige hacia el este, y por y la distancia del que se dirige hacia el norte.

De ésta manera:

La velocidad del ciclista en dirección este es: $\frac{dx}{dt} = 25 \text{ km/h}$.

La velocidad del ciclista en dirección norte es: $\frac{dy}{dt} = 20 \text{ km/h}$.

Después de 3 horas la distancia recorrida por los ciclistas es:

Para el que se dirige al este: $x = (25)3 = 75 \text{ km}$. Para el que se dirige al norte: $y = (20)3 = 60 \text{ km}$.

Para obtener la velocidad de cambio de la distancia entre los ciclistas, se debe obtener una expresión analítica que proporcione la distancia entre ellos.

En éste caso se aplica el teorema de Pitágoras

$$s^2 = x^2 + y^2 \quad \text{---(1)}$$

Donde s representa la distancia entre los ciclistas y la velocidad de cambio de la distancia es dada por la derivada de s con respecto al tiempo.

Derivar (1) implícitamente con respecto al tiempo (t), aplicar la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s^2 &= \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) \\ 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{2s} \left[2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \right] \quad \text{---(2)} \end{aligned}$$

Sustituir datos en (2)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{9225}} [2(75)(25) + 2(60)(20)] \approx 32.01.$$

De ésta forma la velocidad a la que cambia la distancia entre ellos, después de 3 horas, es aproximadamente 32.01 km/h.

Ejemplo 5.9.4

Un recipiente en forma de cono invertido se vacía a razón de $0.1 \text{ m}^3/\text{min}$. La altura del recipiente es de 3 m y 4 m de diámetro. Obtener la razón de cambio de nivel de agua, cuando el agua tiene 1 m de profundidad.

Solución

En la Figura 5.9.4 se identifican las variables y los datos del enunciado. Identificar con h la profundidad del agua, r el radio a la profundidad h y la razón de cambio de volumen por $\frac{dV}{dt}$.

La fórmula para calcular el volumen del cono de agua de radio r y h de profundidad es:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ ----- (1)}$$

En (1) se tiene una función de volumen con dos variables, para sea de una sola, se tiene que buscar una relación entre las variables r y h para que (1) sea de una sola variable.

En la Figura 5.9.4 se identifican los triángulos semejantes hrs y abc , para establecer la relación:

$$\frac{2}{3} = \frac{r}{h}, \text{ al despejar } r$$

$$r = \frac{2}{3} h \text{ ----- (2)}$$

Al sustituir (2) en (1) se tiene una función de una sola variable

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{2}{3} h \right)^2 h = \frac{4}{27} \pi h^3 \text{ ----- (3)}.$$

Derivar (3) al tiempo (t), aplicar la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} V = \frac{d}{dt} (h^3)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{27} \pi \left(3h^2 \frac{dh}{dt} \right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{9} \pi h^2 \frac{dh}{dt} \text{ ----- (4)}$$

Despejar $\frac{dh}{dt}$ en (4) y sustituir datos en (2)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{4\pi h^2} \left(\frac{dV}{dt} \right)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{4\pi (1)} (0.1) \approx 0.071$$

Así que cuando la profundidad del agua es de 1m, la disminución en la profundidad es de aproximadamente 0.071m.

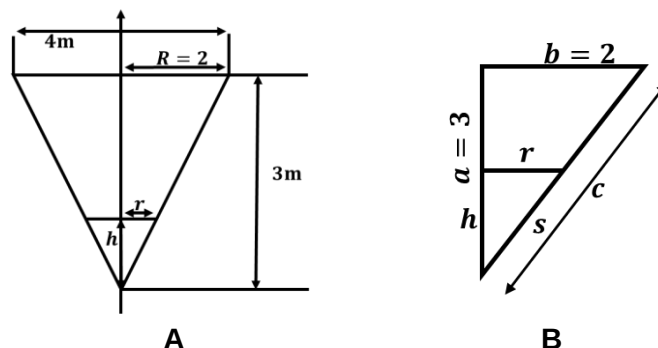


Figura 5.9.4 Esquema del ejemplo 5.9.4

5.10 REGLA DE L'HÔPITAL.

Si en la expresión $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, se sustituye x por su valor límite se tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$,

o bien $\frac{\infty}{\infty}$ si la expresión es $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$, ya que el numerador y el denominador tienden a infinito, es decir, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1) \rightarrow \infty$, y $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 1) \rightarrow \infty$.

En ambos casos al aplicar la estrategia adecuada se obtiene el límite. Sin embargo en ocasiones no es sencillo calcularlo, como en la expresión $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{e^x + 1}$, en tales expresiones resulta útil aplicar la regla de L'Hôpital.

Teorema 5.10.1 Regla de L'Hôpital

Sean f y g funciones diferenciables en un intervalo abierto que contenga a , excepto tal vez en a mismo, y sea $g(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo abierto. Entonces

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, y

2) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$,

y si además $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, se concluye que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

La regla también se aplica a límites unilaterales.

Si al sustituir el valor límite de la variable independiente se tiene la forma indeterminada, entonces, el límite se obtiene al derivar numerador y denominador, si al sustituir el valor límite de la variable, nuevamente se obtiene la forma indeterminada, se vuelve a derivar numerador y denominador hasta que no se tenga más la forma indeterminada y se pueda evaluar el límite.

Ejemplo 5.10.1

Aplicar la regla de L'Hôpital, para calcular

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x}$.

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, se tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, ya que, el límite del numerador y del denominador es cero, se aplica la regla de L'Hôpital y se calcula el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x) = 2.$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$, se tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, ya que, el límite del numerador y del denominador tienden a infinito, se aplica la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x}.$$

Se tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Se deriva nuevamente, se calcula el límite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{2x} = \infty.$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x}$. Como el numerador y el denominador tienden a ∞ , se tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica la regla, derivar numerador y denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}.$$

Se tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica nuevamente la regla, derivar numerador y denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}}. \quad \text{Simplificar y calcular límite. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2.$$

✓ Otras formas indeterminadas

Otras formas indeterminadas son: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 .

Para la forma indeterminada $\infty - \infty$, usualmente se requiere de algunos artificios algebraicos para transformarla en la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, o $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 5.10.2

Aplicar la regla de L'Hôpital, para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right].$$

Solución

Al sustituir el valor límite de la variable independiente en la expresión

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right]$$

Se tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$. Al realizar operaciones

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3 - x^2 - x - 1}{x^3 - 1} \right].$$

Tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, ya que, el límite del numerador y del denominador es cero, se aplica la regla de L'Hôpital y se calcula el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3 - x^2 - x - 1}{x^3 - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-2x - 1}{3x^2} \right] = -1.$$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty$, entonces se puede escribir

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \text{ o bien } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ----- (1)}$$

de ésta manera se tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$., o $\frac{\infty}{\infty}$. y aplicar la regla.

Ejemplo 5.10.3

Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x \cos 3x)$.

Solución

Cuando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\sec x \rightarrow \infty$, y $\cos 3x = 0$. Se tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$.

Se escribe

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x \cos 3x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\frac{1}{\sec x}}.$$

Ahora tiene la forma $\frac{0}{0}$. Se aplica la regla y se calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\frac{1}{\sec x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 3x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{-3\sin 3x}{-\sin x} \right) = -3.$$

Si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$, toma alguna de las formas indeterminadas 0^0 , 1^∞ , ∞^0 .

Escribir $y = f(x)^{g(x)}$, y tomar logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x) \text{ ----- (2)}$$

El lado derecho de (2) tomará la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, según se vio se puede transformar en $\frac{0}{0}$, o en $\frac{\infty}{\infty}$.

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} (\ln y) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow a} y \right) = L \text{ ----- (3)}$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^L \text{ ----- (4)}$$

Ejemplo 5.10.4

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot x}$.

Solución

Si $x \rightarrow 0$, $\cot x \rightarrow \infty$, y $\cos x = 1$. Se tiene la forma indeterminada 1^∞ .

Sea $y = (\cos x)^{\cot x}$, tomar logaritmo natural y aplicar propiedades de logaritmos

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln (\cos x)^{\cot x} \\ \ln y &= \cot x \ln (\cos x) \text{ ----- (5)} \end{aligned}$$

Si $x \rightarrow 0$, $\cot x \rightarrow \infty$, y $\ln (\cos x) = 0$.

En el lado derecho de (5) se tiene la forma indeterminada $\infty \cdot 0$.

A (5) se aplica (1):

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos x)}{\frac{1}{\cot x}}.$$

Ahora tiene la forma $\frac{0}{0}$. Se aplica la regla y se calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{(\cos x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x \cos x) = 0.$$

Al aplicar (3) y (4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} y \right) = 0, \text{ así } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot x} = e^0 = 1.$$

Ejemplo 5.10.5

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^2}$.

Solución

Si $x \rightarrow 0$, se tiene la forma indeterminada 0^0 .

Sea: $y = x^{x^2}$, tomar logaritmo natural y aplicar propiedades de logaritmos:

$$\ln y = \ln x^{x^2}$$

$$\ln y = x^2 \ln x \text{ ---- (6)}$$

Si $x \rightarrow 0$, $\ln x \rightarrow -\infty$.

En el lado derecho de (6) se tiene la forma indeterminada $0 \cdot (-\infty)$.

A (6) se aplica (1):

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \right).$$

Ahora tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se aplica la regla y se calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

Al aplicar (3) y (4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^2} = 1.$$

Unidad 5**Serie de ejercicios**

Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función en el valor indicado de x .

$$1) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x = 0. \quad 2) f(x) = x \operatorname{sen} x, x = \frac{\pi}{4}. \quad 3) f(x) = \frac{1}{x+1}, x = 2.$$

$$4) f(x) = e^x - \operatorname{sen} x, x = 0.$$

Hallar el ángulo entre las curvas dadas en su punto de intersección, determine si son ortogonales.

$$5) x^2 + y^2 = 4, x^2 - y + 1 = 0. \quad 6) 2x^2 + 3y^2 = 6, y^2 - x - 1 = 0. \quad 7) 2x^2 + 3y^2 = 6, x^2 + y^2 = 4.$$

Obtenga un número c que satisfaga el teorema de Rolle para la función en el intervalo indicado.

$$8) f(x) = -x^2 + 4, [-2, 2]. \quad 9) f(x) = x^2 - 4, [-2, 2]. \quad 10) f(x) = x^2 + x, [-1, 0].$$

Obtenga los valores extremos de la función en el intervalo indicado.

$$11) f(x) = 2x^3 + x, [-1, 2]. \quad 12) f(x) = \frac{1}{x+1}, [0, 1]. \quad 13) f(x) = \frac{x}{x-1}, [-1, 0].$$

Obtenga los números críticos, si existen, de la función.

$$14) f(x) = x^3 - 2x + 1. \quad 15) f(x) = \sqrt{x+1}. \quad 16) f(x) = x^{2/3}.$$

Verifique si la función cumple con el Teorema del Valor Medio, en el intervalo indicado.

$$17) f(x) = e^{3x} + x, [0, 2]. \quad 18) f(x) = \frac{1}{x+2}, [-1, 1]. \quad 19) f(x) = \ln x^2.$$

Determine los intervalos en donde la función es creciente o decreciente.

$$20) f(x) = x - \frac{1}{x-1}. \quad 21) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x+2}. \quad 22) f(x) = \operatorname{sen} 2x.$$

Obtenga los extremos relativos, si es que hay, para las funciones.

$$23) f(x) = \sqrt{x^2 - 1}. \quad 24) f(x) = x^3 - x + 1. \quad 25) f(x) = x^{2/3} + 1.$$

Determine los intervalos en donde la función es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y los puntos de inflexión para las funciones dadas.

$$26) f(x) = x^4 - x + 1. \quad 27) f(x) = \sqrt{x^2 - 2}. \quad 28) f(x) = 2 \operatorname{sen} 2x. \quad 29) f(x) = x^{2/3} + 1.$$

Para las funciones dadas determine los intervalos en donde la función es, creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, valores extremos y puntos de inflexión. Trace la gráfica.

$$30) f(x) = x(x+1)^{1/3}.$$

$$31) f(x) = x^2 + \frac{2}{x}.$$

$$32) f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$33) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x^2}.$$

34) Aplique diferenciales, para calcular el error porcentual en la variación del volumen de un cubo, si el error en la medición de la arista es de ± 0.01 cm.

35) Aplique diferenciales, para aproximar el valor de $e^{0.1}$.

36) Aplique diferenciales, para saber con qué, exactitud debe medirse la arista de un cubo para que el error en el volumen sea menor al dos por ciento.

37) Hallar el radio de un cilindro de 10 l de capacidad, para que en su fabricación se emplee la menor cantidad de material, si es totalmente tapado.

38) Una valla de 2m de altura se coloca en el piso y paralela a una edificación. Determine la longitud de la escalera de menor longitud que pueda colocarse en el piso y recargarse en la edificación por encima de la valla.

39) Un automóvil en movimiento sigue una trayectoria recta este-oeste, un observador situado 200 m al sur, mirando de frente lo ve pasar. El auto se desplaza a 80km/h. ¿A qué velocidad aumenta la distancia del auto al observador después de 20 minutos?

40) A las 14 horas un automóvil A se localiza a 60 km al sur de un automóvil B. El automóvil A viaja hacia el norte a 100Km/h, el automóvil B viaja hacia el oeste a 120 km/h. ¿A qué hora la distancia entre los dos autos será mínima?

Evalúe los siguientes límites, si es que existen.

$$41) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin \pi x}{3 - x}.$$

$$42) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{e^x}.$$

$$43) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1^x}{x}.$$

$$44) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{e^x - \cos x}.$$

$$45) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{\tanh 2x}.$$

$$46) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x.$$

$$47) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right].$$

$$48) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$49) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x.$$

$$50) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{2x}}.$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Courant, R. y Robbins H. **(2002)** *¿Qué son las matemáticas?*. México: FCE.
2. Courant, R. y Fritz J. **(1999)** *Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol.1.* México: Limusa.
3. Granville, W.A. **(2009)**. *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Editorial Limusa.
4. Hassler, N.B, Lasalle, J.P. y Sullivan J.A. **(2009)**. *Análisis matemático Vol. 1* México: Editorial Trillas.
5. Larson, R. Hostetler, R. Bruce H.E. **(2010)**. *Cálculo esencial*. México: CENGAGE –Learning,
6. Leithold, L. **(1987)**. *El Cálculo con Geometría Analítica*. México: Editorial HARLA.
7. Purcell, E. J., Varver D. y Rigdon, S.E. **(2007)** *Cálculo*. México: PEARSON EDUCACIÓN.
8. Smith, R. T. y Minton, R.B. **(2003)** *Cálculo Vol. 1*. España: McGraw-Hill.
9. Stewart, J. **(2001)** *Cálculo de una variable*. México: Thomson-Learning.
10. Swokowski, E. **(1989)** *Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
11. Zill, D. G., Wright, W.S. Ibarra, J. **(2015)** *Matemáticas 1*. México: McGraw-Hill.