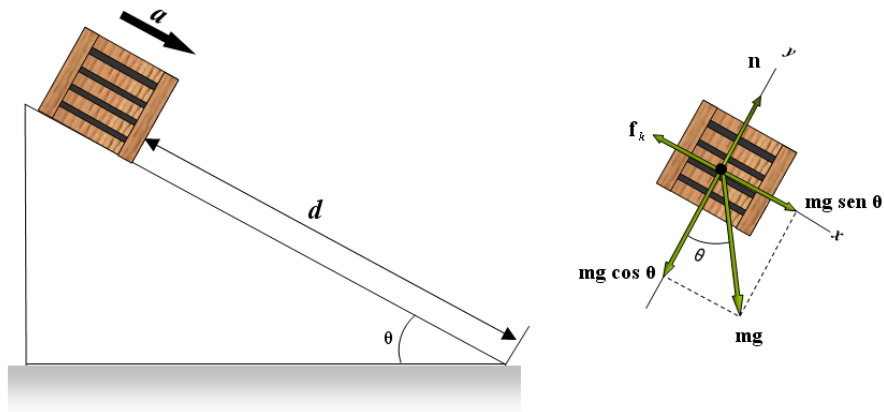


ESTÁTICA



LEONARDO CECILIANO HERNANDEZ.

Departamento de Metalmecánica

del

Instituto Tecnológico de Toluca.

Agosto 2010.

Índice.

Unidad I. Análisis de la partícula

Introducción	1
Concepto de fuerza, vector	1
Descomposición de fuerzas en 2 y 3 dimensiones (expresión de fuerzas con vectores unitarios, cósenos directores)	4
Sistema de fuerzas concurrentes	6
Equilibrio de una partícula	7

Unidad II. Análisis del cuerpo rígido

Fuerzas internas y externas	13
Principio de transmisibilidad.	13
Diagrama de cuerpo libre (tercera ley de Newton).	13
Momento de una fuerza con respecto a un punto.	17
Momento de una fuerza con respecto a un eje.	21
Par de fuerzas.	22
Descomposición de una fuerza en una fuerza y un par.	23
Sistemas equivalentes de fuerzas	24
Fuerzas coplanares.	25
Fuerzas concurrentes.	25
Restricciones al movimiento y fuerzas reactivas.	26

Unidad III. Método de análisis de estructuras

Introducción.	34
Análisis de armadura en el plano (métodos de nodos y secciones).	34
Análisis de marcos isostáticos.	40
Análisis de máquinas de baja velocidad.	40
Método del trabajo virtual.	42

Unidad IV. Propiedades de áreas planas y líneas

Introducción.	47
Primer momento de líneas y áreas (centroides y centros de gravedad de áreas por integración y compuestas).	47
Segundo momento de área (simple, polar de área, teorema de ejes paralelos en 2 dimensiones, segundo momento de áreas compuestas).	57

Unidad V. Fricción.

Fricción.	66
Fricción seca.	68
Leyes de fricción.	69
Coeficientes y ángulos de fricción.	70
Análisis en planos inclinados.	71
Ejercicios Unidad I.	76
Ejercicios Unidad II.	78
Ejercicios Unidad III	80

Ejercicios Unidad IV.	83
Ejercicios Unidad V.	85
Bibliografía.	87

Introducción

Los adelantos de la ciencia han provocado muchos cambios en el mundo. Por ejemplo, desde Aristóteles en el 350 AC y hasta hace 500 años se creía que la Tierra era plana y que estaba en el centro del universo, hace 70 años no se conocía la televisión, los aviones jet ni la forma de prevenir las picaduras dentales, hace pocos años se descubrió la clonación de seres vivos, recientemente se descifró el código del genoma humano. La ciencia no es nueva, data de la prehistoria. El ser humano ha estado sobre la Tierra desde hace 100 mil años y desde entonces ha empezado a hacer ciencia. La ciencia es una actividad humana, formada por un conjunto de conocimientos. La ciencia es el equivalente contemporáneo de lo que se llamaba filosofía natural. La filosofía natural era el estudio de las preguntas acerca de la naturaleza que aún no tenían respuesta.

A medida que se iban encontrando esas respuestas, pasaban a formar parte de lo que hoy llamamos ciencia. La ciencia hizo sus mayores progresos en el siglo XVI, cuando se descubrió que era posible describir la naturaleza por medio de las matemáticas; cuando se expresan las ideas de la ciencia en términos matemáticos no hay ambigüedad, es más fácil verificarlos o refutarlos por medio del experimento.

En la actualidad las tecnologías computacionales y diseño entre otras están generando cambios drásticos en los métodos aplicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, las instituciones educativas son cada vez más dependientes de dichas herramientas y el papel del profesor y del estudiante han sufrido cambios significativos en la forma de enseñar y de aprender para alcanzar grados de eficiencia y mejora continua en el logro de la obtención de un aprendizaje significativo como lo exige los programas educativos en la globalización internacional.

El uso de las nuevas tecnologías es bueno pero en este trabajo nos enfocamos más a que los estudiantes comprendieran más los conceptos relacionados al equilibrio de los cuerpos realizando un estudio detallado de los conceptos y de las leyes de la estática a través de un análisis teórico, para después aplicar dichos conceptos en la solución de problemas que se encuentran en varios ámbitos de la ingeniería y en caso particular de la ingeniería electromecánica.

En el presente trabajo se realizó un estudio del programa de estática y su ubicación y relación con las demás materias del plan de estudios de la retícula 2004 de la carrera de Ingeniería Electromecánica y como el curso de dicha materia se tiene que impartir bajo el criterio que le corresponden tres horas teóricas y dos horas prácticas correspondientes a 8 créditos; Con base a la necesidad de contar con materiales didácticos para la impartición de las horas teóricas con base al plan de estudios de la carrera de Ingeniería Electromecánica.

En este trabajo se busca tener un libro de texto que se apegara al programa de estudios de la materia de estática de la carrera de ingeniería electromecánica, con la finalidad de visualizar de manera objetiva los conceptos asociados a los fenómenos físicos en particular de la estática (equilibrio de los cuerpos) usando las leyes y principios fundamentales de la Mecánica por medio de desarrollos teóricos y lograr así que el estudiante de ingeniería comprenda la

conceptualización y la aplicación de dichos principios y leyes físicas en un entorno que se desarrolle en el ámbito de la Ingeniería Electromecánica o cualquiera que sea su especialidad.

El presente trabajo se realizó con la finalidad de proporcionar a los estudiantes del curso de estática de la carrera de Ingeniería Electromecánica la oportunidad de reafirmar y comprender los conceptos a través de la solución de un determinado número de problemas sobre equilibrio de los cuerpos y algunas propiedades de la materia, cuidadosamente seleccionados.

El presente documento está integrado por cinco capítulos o unidades que son:

- Análisis de la partícula
- Análisis del cuerpo rígido
- Método de análisis de estructuras
- Propiedades de áreas planas y líneas
- Fricción

Al final de cada capítulo o unidad se presenta una serie de ejercicios que el alumno tiene que resolver solo o con ayuda de los profesores que imparten dicha materia. En principio se propone que el estudiante utilice un método teórico en la solución de los mismos, pero también se deja al criterio del profesor que está impartiendo la materia, si él considera la utilización de otro método (utilización de medios tecnológicos, experimental, etc.) ya sea para solución directa de los problemas o simplemente la verificación o comprobación de los resultados obtenidos con anterioridad con el método teórico.

Por último quiero agradecer al Instituto Tecnológico de Toluca y a la Dirección General de Institutos Tecnológicos, por las facilidades que se me brindaron para la realización de este trabajo, esperando que este material sea de gran utilidad tanto para los maestros que imparten la materia y sobre todo para los alumnos que cursan la materia.

Atentamente.

Leonardo Ceciliano Hernández

UNIDAD I.

Análisis de la partícula

Introducción:

La Mecánica es la rama de la física que estudia el estado de reposo o movimiento de los cuerpos los cuales están sometidos a la acción de las fuerzas.

La mecánica para su estudio se subdivide en tres ramas que son: La mecánica del cuerpo rígido, mecánica del cuerpo deformante y mecánica de fluidos.

La mecánica del cuerpo rígido para su estudio se divide en estática y dinámica.

En este libro se tratará el estudio de la estática, entendiéndose por esta la parte de la mecánica que estudia el equilibrio de los cuerpos sujetos a la acción de fuerzas. Un cuerpo está en equilibrio cuando está en reposo y si se mueve lo hace con velocidad constante.

La dinámica estudia el movimiento de los cuerpos los cuales adquieren una aceleración bajo la acción de una fuerza.

La estática se considera como un caso particular en el estudio de la dinámica, pues se dice que cuando un cuerpo que está en movimiento y su aceleración es cero, entonces este se mueve con velocidad constante por lo tanto el cuerpo está en equilibrio.

El estudio de la estática requiere un tratamiento especial ya que en el caso de la ingeniería, muchos diseños de los cuerpos u objetos que se requiere estudiar, se necesita que dichos cuerpos se encuentren en equilibrio.

Conceptos básicos.

Antes de comenzar el estudio de la estática es necesario entender el significado de ciertos conceptos y principios fundamentales.

Magnitudes básicas. Las siguientes cuatro magnitudes se utilizan en el estudio de la mecánica:

Longitud

Tiempo: El tiempo es un parámetro (magnitud escalar) que se utiliza para distinguir una sucesión de eventos que surgen en un espacio. Aunque los principios de la estática son independientes del tiempo, esta magnitud juega un papel importante en el estudio de la dinámica.

Masa: Es una magnitud escalar y se considera una propiedad de la materia

Fuerza: Es una magnitud vectorial y se define como el agente externo a un cuerpo que al actuar sobre él es capaz de modificar el estado de movimiento del cuerpo.

Las fuerzas pueden ser de contacto o de acción a distancia.

Como la fuerza es una magnitud vectorial se caracteriza por tener magnitud, dirección, sentido y un punto de aplicación.

Algunos otros conceptos y principios fundamentales son los siguientes:

Sistema de referencia. Es un sistema de coordenadas cartesianas que se utiliza como base para iniciar el estudio del movimiento de los cuerpos, normalmente para el análisis de la acción de una fuerza sobre un cuerpo, se considera el punto de aplicación de esta al origen del sistema de referencia.

Partícula: Una partícula es un cuerpo que tiene masa, pero el cual siempre se puede tomar un sistema con ayuda del cual se puede analizar las características y el movimiento del cuerpo y considerar las dimensiones de este como despreciables. Por ejemplo todo cuerpo que está en el interior de la tierra, el tamaño del cuerpo comparado con el de la tierra se considera despreciable, en este ejemplo para el estudio de las características del movimiento del cuerpo el sistema de referencia se coloca en la tierra.

Cuerpo rígido: Un cuerpo rígido puede ser considerado como una combinación de un gran número de partículas en la que todas las partículas permanecen una distancia fija unas de otras antes y después de aplicar una carga. Como resultado, las propiedades del material de cualquier cuerpo que se suponga rígido no tendrán que considerarse al analizar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. En la mayoría de los casos, las deformaciones reales que ocurren en máquinas, mecanismos y estructuras similares son relativamente pequeñas, y la hipótesis de cuerpo rígido es la adecuada para el análisis.

Inercia: Es la capacidad que tiene un cuerpo para mantener su estado de equilibrio, es decir, mantenerse en reposo y si este se mueve bajo la acción de fuerzas lo hace con una velocidad constante (aceleración cero).

Leyes fundamentales del movimiento:

Todo el estudio del movimiento de un cuerpo rígido está fundamentado en las tres leyes fundamentales de Newton cuya validez se basa en la observación experimental.

Las tres leyes de Newton se aplican al movimiento de un cuerpo o partícula analizado desde un sistema de referencia no acelerado (inercial).

Las tres leyes de movimiento de Newton pueden ser enunciadas en forma breve de la forma siguiente:

Primera ley de Newton: Todo cuerpo que se mueve bajo la acción de fuerzas y cuya aceleración es cero entonces el cuerpo está en reposo o se mueve con velocidad constante, siempre y cuando no exista otra fuerza que sea capaz de sacarlo de este estado.

A la primera ley de Newton también se le conoce ley de la inercia.

A los sistemas de referencia que cumplen con la ley de la inercia se les conoce como sistemas inerciales.

Segunda ley de Newton: Si sobre un cuerpo de masa m actúa una fuerza $\vec{F}$, provocándole esta una aceleración $\vec{a}$, al cuerpo, entonces la magnitud de la aceleración producida por la fuerza es directamente proporcional a la magnitud de dicha fuerza e inversamente proporcional a la magnitud de la masa del cuerpo.

La expresión matemática de la segunda ley de Newton es la forma siguiente:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Tercera ley de Newton: Sobre todo cuerpo que actúa una fuerza de acción, existe otra fuerza de reacción con las mismas características que la primera pero de sentido contrario y bajo la acción de estas dos fuerzas sobre el cuerpo este en equilibrio.

Vectores fuerza.

Para el estudio de la mecánica las magnitudes físicas se dividen en magnitudes escalares y magnitudes vectoriales.

Magnitud Escalar (Escalar). Es aquella magnitud la cual para su estudio y representación solo requiere de un número antecedido de un signo y de una unidad de medida. Son ejemplos de escalares el tiempo, la masa, el volumen, la presión etc.

Magnitud Vectorial (Vector). Es aquella magnitud la cual para su estudio y representación se requiere que está definida por una magnitud, una dirección, un sentido y un punto de aplicación. Son ejemplos de vectores las fuerzas, los momentos de fuerza, la posición, etc.

La magnitud del vector, es la medida del vector y se indica con un número antecedido por un signo y una unidad de medida.

La dirección del vector, es el ángulo positivo que forma la línea de acción del vector con el eje positivo de las abscisas.

El sentido del vector puede ser positivo negativo y va implícito en la dirección del vector.

El punto de aplicación del vector, normalmente se toma como referencia un sistema coordenadas cartesianas y el origen del sistema se coloca en el punto de objeto con respecto al cual se va a realizar el análisis (estado de movimiento).

Para la representación de los escalares utilizaremos las letras del alfabeto ya sean mayúsculas o minúsculas y para representar vectores utilizaremos el mismo criterio solo que sobre la letra que se utilice se colocara una flecha encima de la letra como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplos de Escalares:

Tiempo ($t = 8 \text{ s}$), masa ($m = 10 \text{ Kg}$), volumen ($V = 3 \text{ m}^3$) y la presión ($P = 45 \text{ atm}$).

Ejemplos de vectores:

Fuerza ($\vec{F} = 4 \text{ N}$, $\alpha = 45^\circ$), Momento de fuerza ($\vec{M} = 36 \text{ N.m}$, $\beta = 24^\circ$) y posición ($\vec{r} = 3 \text{ m}$, $\theta = 15^\circ$).

También para denotar la magnitud de un vector se utilizara la expresión $|\vec{F}|$, la cual se lee la magnitud del vector F, que en un caso particular puede representar una fuerza.

Concepto de fuerza vector.

Una fuerza es una magnitud vectorial la cual al actuar sobre un cuerpo de masa m es capaz de modificar el estado de movimiento de dicho cuerpo.

Componentes rectangulares de un vector fuerza.

Toda fuerza F, puede descomponerse en dos direcciones perpendiculares entre sí, una componente horizontal sobre el eje de las abscisas o eje de las x la cual se denomina como F_x y la otra componente vertical, sobre el eje de las ordenadas la cual se denomina como F_y

Para obtener las expresiones matemáticas que definen las componentes rectangulares del vector fuerza nos basamos en la figura (1).

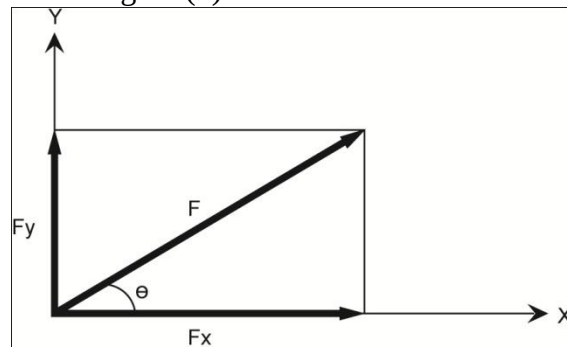


Figura 1. Componentes rectangulares de un vector

De la figura (1) tenemos que si θ (dirección del vector) es el ángulo positivo que forma la fuerza F con el eje positivo de las abscisas entonces por trigonometría tenemos:

Componente horizontal de la fuerza- $F_x = F \cos \theta$

Componente vertical de la fuerza- $F_y = F \sin \theta$

Magnitud de la fuerza- $F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$

Dirección de la fuerza- $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right)$

Principio de superposición o suma de vectores

Si sobre un cuerpo o partícula actúan N fuerzas al mismo tiempo entonces el sistema de fuerza se puede sustituir por una sola fuerza llamada fuerza resultante

Ejemplo

1.- Dada las fuerzas obtener sus componentes rectangulares si $\vec{F} = 60 \text{ N}$, $\theta = 60^\circ$ y $\vec{F}_1 = 500 \text{ N}$, $\beta = 160^\circ$.

Solución:

$\vec{F}$:

$$F_x = F \cos 60^\circ = 60N(0.5) = 30N, F_y = F \sin 60^\circ = 60N(0.866) = 51.96N.$$

$$F_{1x} = F_1 \cos 160^\circ = 500N(-0.9396) = -469.84N.$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 160^\circ = 500N(0.3420) = 171.01N.$$

$\vec{F}_{1x}$:

Dadas las fuerzas encontrar las componentes rectangulares de cada una de ellas.

Solución.

Para la fuerza $\vec{F}$:

$$F_x = F \cos \theta = 180 \text{ N} \left(\frac{3}{5} \right) = 108N, F_y = F \sin \theta = 180N \left(\frac{4}{5} \right) = 144N$$

Para la fuerza $\vec{F}_{1x}$

$$F_{1x} = -F \cos \beta = -15 \text{ N} \cos 35^\circ = -12.28N, F_y = F \sin \beta = 15N \sin 35^\circ = 8.6N$$

Para la fuerza $\vec{F}_{2x}$:

$$F_{2x} = F \cos \omega = 3 \text{ N} \cos 70^\circ = 1.02N, F_{2y} = -F \sin \omega = -3N \sin 70^\circ = -2.81N$$

Vectores en tres dimensiones.

Para poder representar y trabajar un vector en tres dimensiones se utilizan los vectores unitarios ortogonales $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$, también se puede representar a través de los cosenos directores o con una terna de escalares $\vec{r} = (x, y, z)$ donde x, y, z son las componentes rectangulares del vector.

Vector posición. Es un vector que indica a qué distancia, en qué dirección y con qué sentido se encuentra un cuerpo u objeto de estudio con respecto al origen del sistema de referencia que se elija para el análisis del fenómeno (figura 2).

Es importante mencionar que a través de un vector posición y con ayuda de un vector unitario en dirección de un vector dado se podrá representar la magnitud de una fuerza como una magnitud vectorial.

Representación del vector posición.

Un vector posición se puede representar de las formas siguientes:

- a) Con la representación de su magnitud y de su dirección y el sentido va implícito en su dirección, ejemplo:

$$\vec{r} = 60m, \theta = 60^\circ$$

b) Con la ayuda de una terna de escalares $\vec{r} = (x, y, z)m$ llamados componentes rectangulares del vector, ejemplo.
 Para tres dimensiones $\vec{r} = (2, 3, 5) m$ para el caso particular de dos dimensiones tenemos $\vec{r} = (2, 4, 0) m$

c) Con la ayuda de los vectores unitarios ortogonales $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$, ejemplo.
 $\vec{r} = (8\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) m$

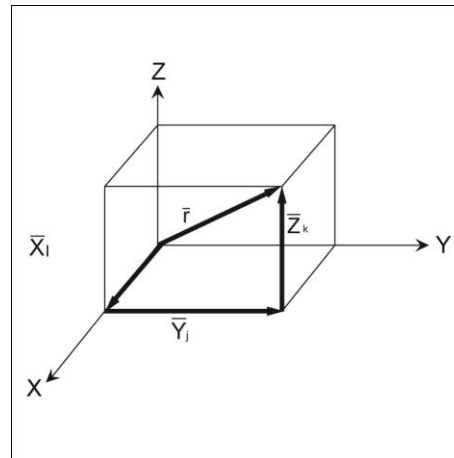


Figura 2. Vector posición en tres dimensiones

Para encontrar las componentes rectangulares de cualquier vector, en caso particular de un vector posición cuyo origen no se encuentra en el origen del sistema de coordenadas cartesianas (Figura 3) y se requiere expresar al vector a través de sus componentes rectangulares como si el origen de dicho vector estuviera en el origen del sistema de referencia dado.

Para encontrar las componentes del vector posición conociendo las componentes de los vectores posición que indican la localización del origen y del final del vector posición $\vec{r}$ respectivamente con respecto al origen del sistema de referencia dado se procede de la siguiente manera:

$$\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (r_{Bx} - r_{Ax}, r_{By} - r_{Ay}, r_{Bz} - r_{Az})$$

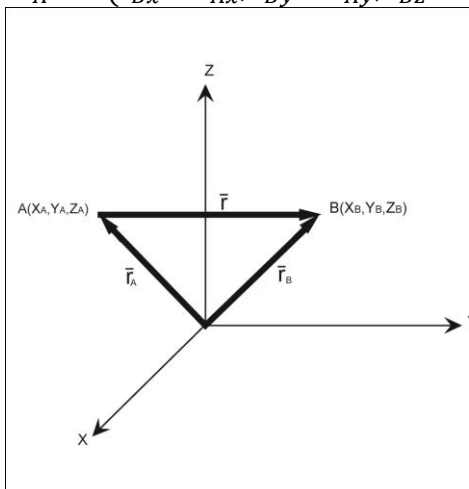


Figura3. Un vector posición a través de dos vectores dados

Cosenos Directores

Para representar un vector en tres dimensiones se consideran los ángulos directores α, β y γ son los ángulos que forma el vector con los respectivos ejes cartesianos positivos.

Para descomponer el vector $\vec{r} = (x, y, z)$ en sus componentes rectangulares con ayuda de los cosenos directores tenemos:

$$x = r \cos \alpha, y = r \cos \beta, z = r \cos \gamma$$

Para obtener la magnitud del vector posición se tiene:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

El proceso anterior se puede aplicar para cualquier vector en tres dimensiones, en la siguiente figura 4, se muestra un vector fuerza.

Si se requiere saber la dirección de un vector fuerza en tres direcciones se obtiene los ángulos directores de la forma siguiente:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{x}{F}\right), \beta = \cos^{-1}\left(\frac{y}{F}\right) \text{ y } \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{z}{F}\right)$$

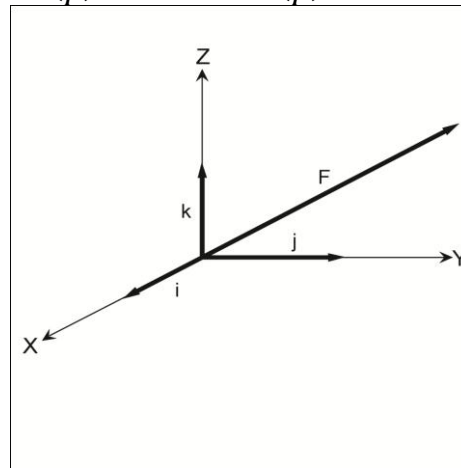


Figura 4. Vector Fuerza en tres dimensiones

Equilibrio.

Para que un cuerpo o sistema se encuentre en equilibrio de translación debe de cumplir con las condiciones de equilibrio las cuales son:

La suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe de ser igual a cero.

$$\sum \vec{F} = 0$$

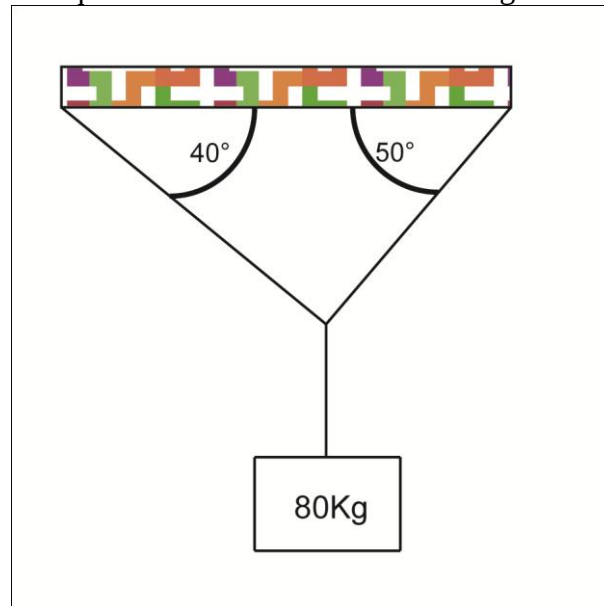
La forma escalar de la ecuación anterior es la siguiente:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \text{ y } \sum F_z = 0$$

Solución de ejercicios de equilibrio.

Ejemplo1.

Encontrar el valor de las tensiones de los cables que actúan sobre el cuerpo de masa de 80 kg para que el sistema esté en equilibrio como se muestra en la figura.



Solución.

Se obtiene la magnitud del peso de la masa de 80 kg.

$$W = mg = (80 \text{ Kg}) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 784.8 \text{ N}$$

Se descomponen cada una de las fuerzas en sus componentes rectangulares:

$$T_{1x} = T_1 \cos \omega = T_1 \cos 50^\circ = 0.6127 T_1$$

$$T_{2x} = T_2 \cos \varepsilon = T_2 \cos 140^\circ = -0.760 T_2$$

$$W_x = W \cos \pi = 784.8 \text{ N} \cos 270^\circ = 0$$

$$T_{1y} = T_1 \sin \omega = T_1 \sin 50^\circ = 0.766 T_1$$

$$T_{2y} = T_2 \sin \varepsilon = T_2 \sin 140^\circ = 0.642 T_2$$

$$W_y = W \sin \pi = 784.8 \text{ N} \sin 270^\circ = -784.8 \text{ N}$$

Aplicando las condiciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum F_z = 0$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

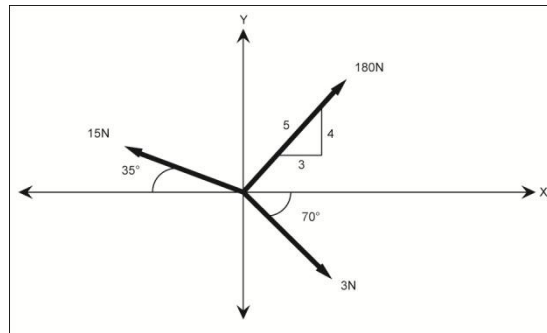
$$0.6127 T_1 - 0.760 T_2 = 0$$

$$0.7660 T_1 + 0.642 T_2 = 784.8$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que los valores para las tensiones en las cuerdas son: $T_1 = 611.5 \text{ N}$ y $T_2 = 492.93 \text{ N}$.

Ejemplo 2.

Dado el diagrama de cuerpo libre del sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo como se muestra en la siguiente figura. Encontrar la fuerza que hay que aplicarle al cuerpo para que se encuentre en equilibrio.



Solución.

Descomponemos cada una de las fuerzas en sus componentes rectangulares:

$$F_{1x} = F \cos \theta = 180N \left(\frac{3}{5} \right) = 108N, \quad F_{1y} = F \sin \theta = 180N \left(\frac{4}{5} \right) = 144N$$

$$F_{2x} = F \cos \beta = 15N \cos 145^\circ = -12.28N, \quad F_{2y} = F \sin \beta = 15N \sin 145^\circ = 8.60N$$

$$F_{3x} = F \cos \delta = 3N \cos 290^\circ = 1.02N, \quad F_{3y} = F \sin \delta = 3N \sin 290^\circ = -2.81N$$

Obtenemos la resultante componente a componente:

$$\vec{F}_R = \left(\sum F_x, \sum F_y \right) = (96.74, 149.79)N$$

Para que el sistema esté en equilibrio se debe de cumplir que $\sum \vec{F} = 0$ por lo tanto para el equilibrio se debe de aplicar una fuerza equilibrante de:

$$\vec{F}_E = (-96.74, -149.79)N$$

Equilibrio en tres dimensiones:

Para estudiar la solución de los problemas del equilibrio en tres dimensiones normalmente se presentan los siguientes casos:

- Se dan las magnitudes de los vectores fuerza y los ángulos directores (los ángulos que forman los vectores con los ejes coordenados respectivos)
- Se dan los vectores en función de los vectores ortogonales unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$.
- Se dan las magnitudes de las fuerzas y las coordenadas de los vectores posición donde actúan las fuerzas y con un vector unitario en dirección de un vector posición que actúa en la misma línea de acción de la fuerza, se le puede dar dirección a la magnitud de la fuerza dada.

Para obtener un vector unitario $\hat{u}$ en dirección de un vector dado $\vec{r}$ se divide el vector dado entre su magnitud de la manera siguiente:

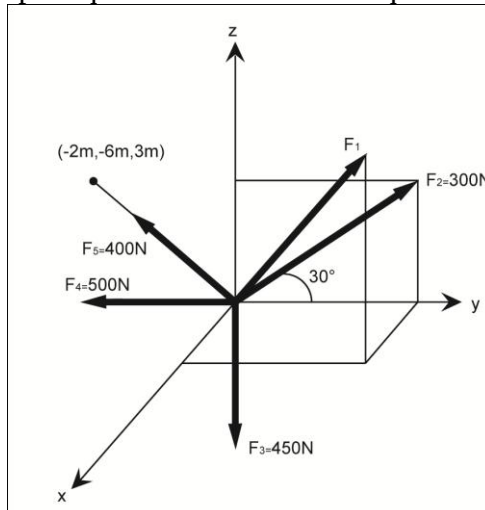
$$\hat{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

El vector unitario que se obtiene bajo este proceso es adimensional.

Para el caso de una fuerza se tiene que $\vec{F} = |\vec{F}|\hat{u}$ y de esta manera el vector unitario direcciona a la magnitud de la fuerza $\vec{F}$. Normalmente para el caso que se tiene la necesidad de direccionar la magnitud de una fuerza, el vector unitario $\hat{u}$ que se utiliza para este proceso se obtiene con la ayuda de un vector posición $\vec{r}$ que se encuentra en la misma línea de acción sobre la cual actúa la fuerza.

Ejemplo 1.

Dado el sistema de fuerzas que actúan sobre una partícula. Encontrar el valor de la fuerza equilibrante que se requiere para que el sistema esté en equilibrio.



Solución

Para la solución del problema se procede a descomponer cada una de las fuerzas en sus componentes rectangulares y se aplican las ecuaciones de equilibrio de la forma siguiente:

Para direccionar a la fuerza $\vec{F}_1$ tenemos que:

$$\vec{F}_1 = F_1 \hat{u} \quad y \quad \hat{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \frac{(3,4,6)m}{\sqrt{61}m} = (0.38, 0.51, 0.77)$$

$$\vec{F}_1 = F_1(0.38, 0.51, 0.77) = 200N(0.38, 0.51, 0.77) = (76, 102, 154)N$$

Para la fuerza $\vec{F}_2$ tenemos que:

$$F_{2x} = 0, \quad F_{2y} = F_2 \cos 30^\circ = 300 N(0.866) = 259.8 N \quad y$$

$$F_{2z} = F_2 \sin 30^\circ = 300N(0.5) = 150 N$$

Para la fuerza $\vec{F}_3$ tenemos que:

$$\vec{F}_3 = F_3 \hat{u} \quad y \quad \hat{u}_3 = \frac{\vec{r}_3}{|\vec{r}_3|} = \frac{(-2, -6, 3)m}{\sqrt{49}m} = (-0.28, -0.85, 0.42)$$

$$\vec{F}_3 = F_3(-0.28, -0.85, 0.42) = 400 N(-0.28, -0.85, 0.42) = (-112, -340, 168) N$$

Para la fuerza $\vec{F}_4$ tenemos que:

$$\vec{F}_4 = (0, -500, 0)N$$

Para la fuerza $\vec{F}_5$ tenemos que:

$$\vec{F}_5 = (0, 0, -450)N$$

Encontramos que la fuerza resultante es:

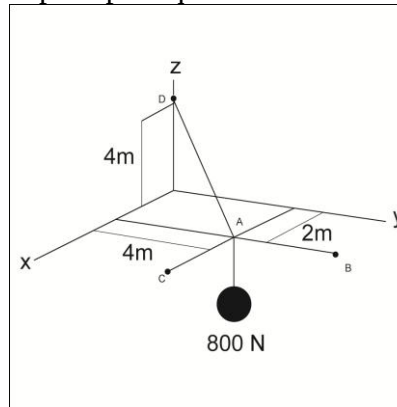
$$\vec{F}_R = \left(\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z \right) = (-36, -478.2, 22)N$$

Aplicando las condiciones de equilibrio $\sum \vec{F} = 0$ al sistema tenemos que la fuerza que se requiere para equilibrar el sistema es:

$$\vec{F}_E = (36, 478.2, -22)N$$

Ejemplo 2.

En el siguiente sistema encontrar las tensiones que se ejercen sobre los cables que están sujetando la lámpara de 800 N de peso para que el sistema esté en equilibrio.



Solución.

Expresamos las tensiones que actúan sobre la lámpara a través de sus componentes rectangulares de la manera siguiente.

$$\vec{T}_{AD} = T_{AD} \hat{u}, \text{ donde } \hat{u} = \frac{\vec{R}_{AD}}{|\vec{R}_{AD}|} = \frac{(-2, -4, 4)m}{\sqrt{36} m} = (-0.33, -0.66, 0.66)$$

$$\vec{R}_{AD} = \vec{R}_D - \vec{R}_A = (0, 0, 4)m - (2, 4, 0)m = (-2, -4, 4)m$$

$$\vec{T}_{AD} = T_{AD} \hat{u} = (-0.33T_{AD}, -0.66T_{AD}, 0.66T_{AD})N$$

Como T_{AC} es paralela al eje “x” entonces:

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC} \hat{i} = (T_{AC}, 0, 0)N$$

Como T_{AB} es paralela al eje “y” entonces:

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \hat{j} = (0, T_{AB}, 0)N$$

Como el peso de cuerpo está sobre el eje “z” entonces tenemos:

$$\vec{w} = 800N \hat{k} = (0, 0, -800)N$$

Aplicamos las condiciones de equilibrio en su forma escalar y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-0.33T_{AD} + T_{AC} = 0$$

$$-0.66T_{AD} + T_{AB} =$$

$$0.66T_{AD} - 800 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos:

$$T_{AD} = 1212.12 N, \quad T_{AB} = 799.99 N \quad y \quad T_{AC} = 399.99 N$$

UNIDAD II.

Análisis del cuerpo rígido.

Fuerzas Internas y Externas.

Un cuerpo rígido es aquel que no se deforma. Estos, las estructuras y máquinas no son completamente rígidas: se deforman bajo las cargas a las que están sujetas. Los cuerpos son supuestos en mecánica, sin embargo, en la vida real.

Estas fuerzas, pueden ser externas, cuando causan que el objeto se mueva o permanezca en reposo; o internas, que son las que mantienen unidas las partículas que forman el cuerpo rígido.

Las fuerzas externas se pueden dividir en fuerzas de traslación y de rotación. Las primeras, son aquellas en las que el objeto se mueve hacia delante o atrás; el piso y las paredes permanecen en la misma posición. La fuerza de rotación, ocasiona un movimiento diferente, por ejemplo un giro sobre el eje.

Principio de transmisibilidad.

Establece que las condiciones de equilibrio o movimiento de un cuerpo rígido permanecerán sin cambio si una fuerza F que actúa en un punto del cuerpo rígido se substituye por una fuerza F' de la misma magnitud y dirección, pero actuando en un punto diferente, siempre que las dos fuerzas tengan la misma línea de acción.

El principio físico anterior nos permite afirmar que las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido, están asociados al modelo geométrico de los vectores deslizantes y por tanto en adelante su tratamiento algebraico; corresponderá a este tipo de vector en los problemas físicos donde ellas se presenten.

Diagrama de cuerpo libre.

Para resolver problemas de equilibrio de los cuerpos es importante aislarlos unos de otros, ello permite hacer un análisis de las fuerzas conocidas que actúan sobre un cuerpo, así como las que se desconocen y se desea calcular.

Cuando se aísla un cuerpo sobre él aparecen únicamente las fuerzas externas que soportan, las cuales son ocasionadas por tener contacto con otros cuerpos o por atracción gravitacional. Este procedimiento gráfico para aislar un cuerpo recibe el nombre de diagrama de cuerpo libre.

Producto Cruz.

El momento de una fuerza será formulado usando vectores cartesianos en la siguiente sección. Sin embargo, antes de hacerlo, es necesario ampliar nuestro conocimiento del álgebra vectorial e introducir el método del producto cruz de la multiplicación vectorial.

El producto cruz de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ da el vector $\vec{C}$, el cual se escribe como:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \text{ -----(1)}$$

y se lee “ $\vec{C}$ es igual a $\vec{A}$ cruz $\vec{B}$ ”.

Magnitud: La magnitud de $\vec{C}$ se define como el producto de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el seno del ángulo θ entre sus colas ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$). Así, $C = AB \sin \theta$.

Dirección. El vector $\vec{C}$ tiene una dirección perpendicular al plano que contiene a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de manera tal que $\vec{C}$ se especifica mediante la regla de la mano derecha; es decir, enrollando los dedos de la mano derecha desde el vector $\vec{A}$ (cruz) hacia el vector $\vec{B}$, el pulgar señala entonces la dirección de $\vec{C}$, como se muestra en la figura 5.

Conociendo la magnitud y la dirección de $\vec{C}$, podemos escribir

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (AB \sin \theta) \hat{u}_c$$

Donde el escalar $AB \sin \theta$ define la magnitud de $\vec{C}$ y el vector unitario $\hat{u}_c$ define la dirección de $\vec{C}$, ver figura 5.

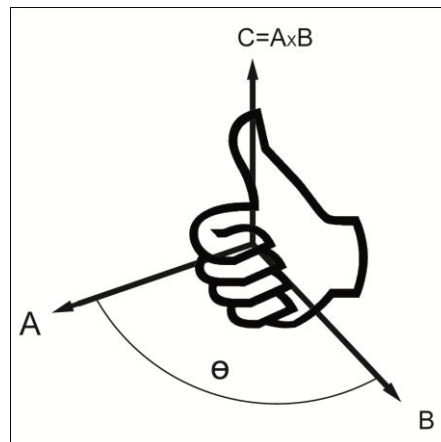


Figura 5. Dirección del producto cruz entre vectores

Leyes de operación:

1.- La ley conmutativa no es válida, es decir,

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

En vez de ello,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Esto se muestra en la figura 6 usando la regla de la mano derecha. El producto cruz $\vec{B} \times \vec{A}$ produce un vector que actúa en dirección opuesta a $\vec{C}$; esto es, $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{C}$.

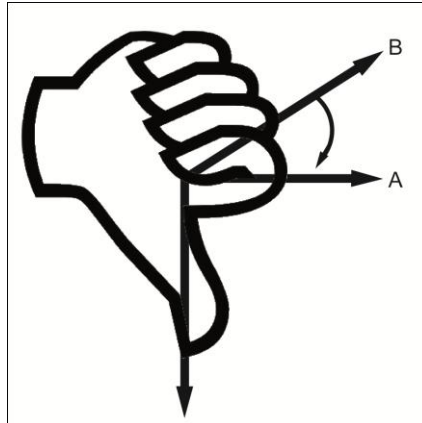


Figura 6. El producto cruz no es conmutativo

2.- Multiplicación por escalar:

$$a(\vec{A} \times \vec{B}) = (a\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (a\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})a$$

Esta propiedad es fácil de demostrar ya que la magnitud del vector resultante ($|a|AB\sin\theta$) y su dirección son las mismas en cada caso.

3.- La ley distributiva:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{D})$$

Es importante advertir que debe mantenerse el orden correcto de los productos cruz, en vista de que son conmutativos.

Formulación vectorial cartesiana: La ecuación (1) puede usarse para encontrar el producto cruz de un par de vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo, para encontrar $\hat{i} \times \hat{j}$, la magnitud del vector resultante es $(\hat{i})(\hat{j})\sin 90^\circ = (1)(1)(1) = 1$, y su dirección se determina usando la regla de la mano derecha. Como se muestra en la figura 6, el vector resultante señala en la dirección $+\hat{k}$. Así, $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$. De manera similar,

$$\begin{array}{lll} \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} & \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} & \hat{i} \times \hat{i} = 0 \\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} & \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} & \hat{j} \times \hat{j} = 0 \\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} & \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} & \hat{k} \times \hat{k} = 0 \end{array}$$

Estos resultados no tienen que memorizarse; en lugar de ello, debe entenderse claramente cómo se obtiene cada uno empleando la regla de la mano derecha y la definición del producto cruz. El esquema sencillo mostrado en la figura 7 ayuda a obtener los mismos resultados cuando se necesita. Si el círculo se construye como se muestra, entonces, al “cruzar” dos vectores unitarios en sentido contrario a las manecillas de reloj alrededor del círculo, se

obtiene el tercer vector unitario positivo; por ejemplo, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$. Desplazándose en el sentido de las manecillas del reloj se obtiene un vector unitario negativo; por ejemplo, $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$.

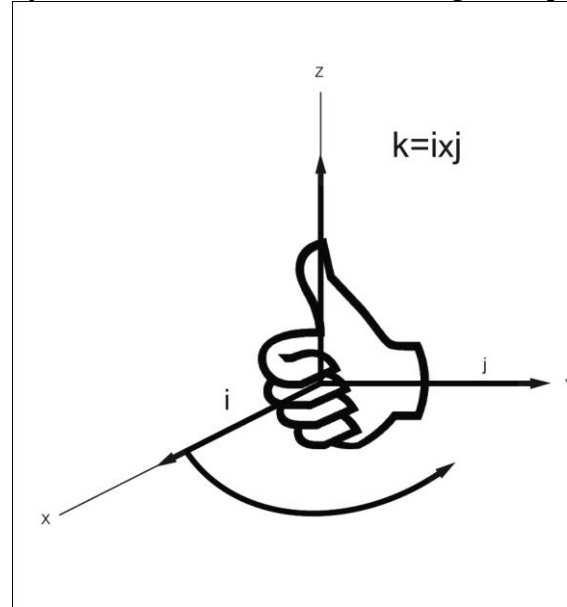


Figura 7. Producto cruz entre los vectores unitarios

Considere ahora el producto cruz de dos vectores generales $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que se expresan en forma vectorial cartesiana. Tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ \vec{A} \times \vec{B} &= A_x B_x (\hat{i} \times \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) \\ &+ A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \times \hat{j}) + A_y B_z (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &+ A_z B_x (\hat{k} \times \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \times \hat{j}) + A_z B_z (\hat{k} \times \hat{k})\end{aligned}$$

Al efectuar las operaciones de productos cruz y combinando términos resulta

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{j} - (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

Esta ecuación puede escribirse también en forma determinante más compacta como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Así, para encontrar el producto cruz de dos vectores cartesianos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera, es necesario desarrollar un determinante cuya primera fila de elementos consiste en los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$ y cuyas segunda y tercera fila representan las componentes x, y, z de los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, respectivamente. *

Un determinante con tres filas y tres columnas puede ser desarrollado usando tres menores, cada uno de los cuales es multiplicado por uno de los tres términos anotados en la primera fila. Hay cuatro elementos en cada menor, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

Por definición, esta notación representa los términos $(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$, lo cual es simplemente el producto de los dos elementos de la fecha inclinada hacia abajo y hacia la derecha $A_{11}A_{22}$ menos el producto de los dos elementos de la fecha inclinada hacia abajo y hacia la izquierda $A_{12}A_{21}$. Para un determinante de 3x3, como el de la ecuación 4-5, los tres elementos menores pueden ser generados de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\text{Para el elemento } \hat{i}: \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y)$$

$$\text{Para el elemento } \hat{j}: \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\hat{j}(A_x B_z - A_z B_x)$$

$$\text{Para el elemento } \hat{k}: \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

Al sumar los resultados y tomar nota de que el elemento $\hat{j}$ debe incluir el signo menos, se obtiene la forma desarrollada de $\vec{A} \times \vec{B}$ dada por la ecuación (1).

Momento de Fuerza.

El momento de una fuerza F con respecto al punto O , o realmente con respecto al eje de momento que pasa por O y es perpendicular al plano que contiene a O y a F puede escribirse utilizando la definición del producto cruz de la manera siguiente:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \text{-----}(2)$$

Donde $\vec{r}$ es un vector posición trazado desde el punto O hasta cualquier punto que se encuentre situado en la línea de acción sobre la cual actúa la fuerza $\vec{F}$.

La magnitud del vector momento de fuerza se define por la expresión $M = rF \sin \theta$, donde θ es el ángulo entre las líneas de acción de los vectores posición y el vector fuerza.

Como el momento de fuerza es una magnitud vectorial entonces la dirección y el sentido de $\vec{M}$ están definidos por la regla de la mano derecha tal como se aplica en el producto cruz. Así, colocando la mano derecha en la línea de acción sobre la cual actúa el vector posición y se enrollan los dedos de la mano en dirección de la línea de acción sobre la cual actúa la fuerza es decir de $\vec{r}$ hacia $\vec{F}$ es decir " $\vec{r} \times \vec{F}$ " y el pulgar está dirigido hacia arriba o perpendicular al plano que contiene ambos vectores y de esta manera se determina la dirección y sentido del vector momento de fuerza con respecto al punto O ver figura 8. El enrollamiento de los dedos alrededor del vector momento indica el sentido de rotación causado por la fuerza, como el producto cruz no es conmutativo es importante mantener el orden correcto entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$ en la ecuación (2)

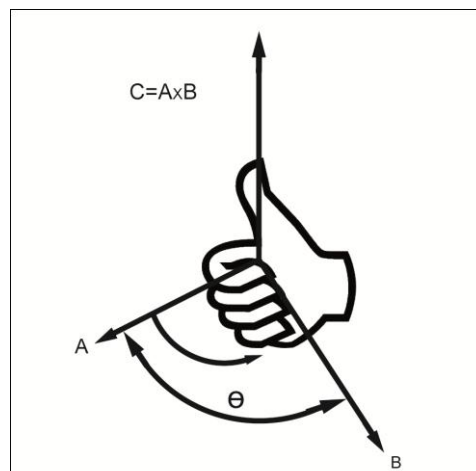


Figura 8. Dirección del vector producto cruz

De esta manera entonces el momento de fuerza expresado en forma vectorial está dado por la ecuación.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = r F \sin \theta \hat{n}$$

Donde $\hat{n}$ es un vector unitario cuya dirección y sentido está definido por la regla de la mano derecha y es un vector perpendicular al plano donde se encuentran los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

Otra forma de definir el momento de una fuerza es con la ayuda de la definición de producto cruz entre vectores, es a través de la definición de un determinante de 3x3, si establecemos a los vectores posición y fuerza de la forma $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ y $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ respectivamente entonces el momento de fuerza se define por la expresión:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

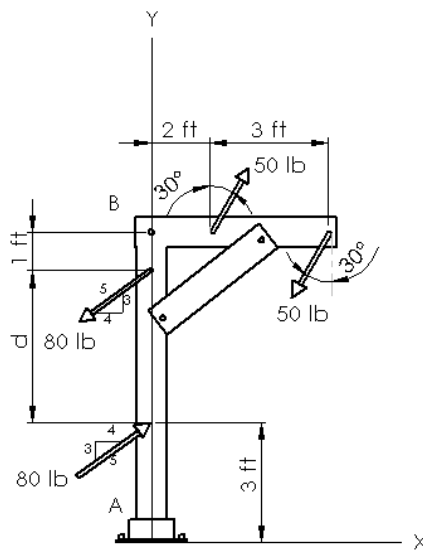
Al desarrollar la ecuación anterior, el momento de fuerza expresado a través de sus componentes rectangulares queda expresado por la ecuación

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (r_y F_z - r_z F_y)\hat{i} - (r_x F_z - r_z F_x)\hat{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\hat{k}$$

De esta forma con ayuda de la ecuación anterior se obtiene al momento de forma directamente en forma vectorial y dicho vector es perpendicular al plano en que se encuentran los vectores dados.

Ejemplo 1.

Calcular el momento resultante con respecto al punto A del sistema de fuerzas como se muestra en la figura si $d = 7 \text{ ft}$.



Solución:

Se obtiene el momento de cada una de las fuerzas:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 80 \left(\frac{4}{5}\right) & 80 \left(\frac{3}{5}\right) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 64 & 48 & 0 \end{vmatrix} = (-192 \hat{k}) \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 10 & 0 \\ -80 \left(\frac{4}{5}\right) & -80 \left(\frac{3}{5}\right) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 10 & 0 \\ -64 & -48 & 0 \end{vmatrix} = (640 \hat{k}) \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

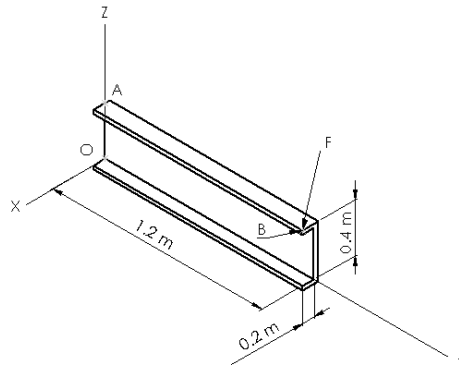
$$\vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 11 & 0 \\ 50 \cos 30^\circ & 50 \sin 30^\circ & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 11 & 0 \\ 43.3 & 25 & 0 \end{vmatrix} = (-423.3 \hat{k}) lb \cdot ft$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 11 & 0 \\ -50 \cos 30^\circ & -50 \sin 30^\circ & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 11 & 0 \\ -43.3 & -25 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (351.3 \hat{k}) lb \cdot ft \end{aligned}$$

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^4 \vec{M}_i = (376 \hat{k}) lb \cdot ft$$

Ejemplo 2.

Encontrar el momento que ejerce la fuerza $\vec{F} = (240, 500, -350)N$ sobre la barra con respecto a los puntos O y A respectivamente.



Solución.

Calculando el momento de la fuerza con respecto al punto O de la forma siguiente:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.2 & 1.2 & 0.4 \\ 240 & 500 & -350 \end{vmatrix} = (-620\hat{i} + 166\hat{j} - 188\hat{k})Nm$$

El momento con respecto al punto A esta dado por

$$\vec{r}_A = \vec{B} - \vec{A} = (0.2, 1.2, 0.4)m - (0, 0, 0.4)m = (0.2, 1.2, 0)m$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.2 & 1.2 & 0 \\ 240 & 500 & -350 \end{vmatrix} = (-420\hat{i} + 70\hat{j} - 188\hat{k})Nm$$

Momento de una fuerza con respecto a un eje específico.

Cuando se calcula el momento de una fuerza con respecto a un punto dicho momento de fuerza en dirección siempre es perpendicular al plano donde se encuentran los vectores posición y el vector fuerza. En algunos problemas es importante saber la componente de este momento a lo largo de un eje específico que pasa por el punto.

Un análisis vectorial para encontrar el momento con respecto a un eje que pasa por un punto se puede realizar siguiendo los siguientes pasos:

1.- Se obtiene el momento de fuerza con respecto a un punto específico que se encuentre sobre el eje con ayuda de la ecuación $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

2.-Para direccionar el eje dado se encuentra un vector unitario $\hat{u}$ sobre dicho eje.

3.-Para obtener la magnitud del momento con respecto al eje se encuentra el producto escalar de los vectores $\hat{u}$ y $\vec{M}$ por la siguiente ecuación.

$$M = \hat{u} \cdot \vec{M} = uM \cos \theta = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \text{-----} (3)$$

Cuando se obtiene el valor de la magnitud de $\vec{M}$ por la ecuación (3) este valor puede ser positivo o negativo. El signo de este escalar indica el sentido y dirección de $\vec{M}$ a lo largo del eje dado, si el signo es positivo entonces $\vec{M}$ tendrá el mismo sentido que $\hat{u}$, mientras que si es negativo entonces $\vec{M}$ tendrá el sentido contrario a $\hat{u}$.

4.- Por último para determinar el momento de fuerza con respecto a un eje como vector cartesiano se multiplica su magnitud M por el vector unitario $\hat{u}$.

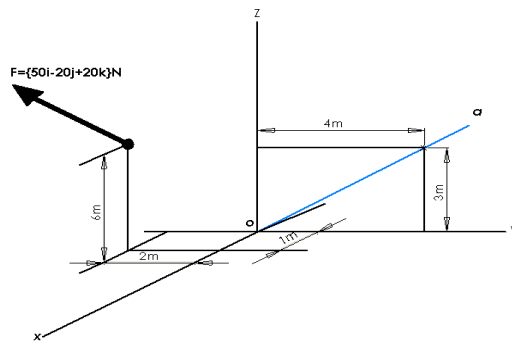
$$\vec{M}_{oa} = M\hat{u} = [\hat{u} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})] \cdot \hat{u}$$

Ahora si se quiere obtener el momento resultante de la acción de varias fuerzas, con respecto a un eje específico, se aplica la siguiente ecuación.

$$\vec{M}_R = \sum [\hat{u} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})] = \hat{u} \cdot \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

Ejemplo 1.

Dado el sistema encontrar el momento de la fuerza $\vec{F} = (50, -20, 20)N$ con respecto al eje "oa" como se muestra en la figura.



Solución:

Para calcular el momento con respecto al eje dado encontramos un vector unitario sobre el eje dado.

$$\hat{u} = \frac{\vec{r}_{oa}}{|\vec{r}_{oa}|} = \frac{(0,4,3)m}{\sqrt{25}m} = (0,0.8,0.6)$$

El momento de F con respecto al punto O que pasa por el eje es:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 6 \\ 50 & -20 & 20 \end{vmatrix} = (80\hat{i} + 280\hat{j} + 80\hat{k})Nm$$

Encontramos la magnitud del momento con respecto al eje dado.

$$M = \hat{u} \cdot \vec{M} = \begin{vmatrix} 0 & 0.8 & 0.6 \\ 1 & -2 & 6 \\ 50 & -20 & 20 \end{vmatrix} = 272Nm$$

Encontramos el momento resultante con respecto al eje oa.

$$\vec{M}_{oa} = M\hat{u} = 272Nm(0,0.8,0.6) = (217.6\hat{j} + 163.2\hat{k})Nm$$

Momento de un par

Un par se define como dos fuerzas las cuales tienen la misma magnitud pero con direcciones y sentidos opuestos, dichas fuerzas actúan en líneas paralelas que están separadas por una distancia d perpendicular entre ellas como se muestra en la figura 9.

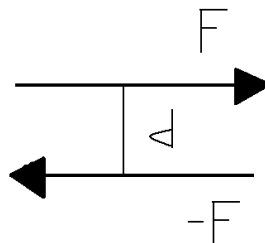


Figura 9. Par de fuerzas

Todo par de fuerzas puede trasladarse paralelamente a sí mismo siguiendo la dirección de las fuerzas componentes sin que varié el efecto que produce.

Todo par de fuerzas puede desplazarse a lo largo de la recta a la que pertenece su brazo.

Un par de fuerzas se transforma en otro equivalente cuando gira alrededor del punto medio de su brazo.

Un par de fuerzas puede trasladarse a otro plano paralelo al suyo manteniendo su efecto.

Todo par de fuerzas puede sustituirse por otro equivalente cuyas fuerzas componentes y brazo del par sean diferentes.

Para obtener el momento del par se utiliza la siguiente ecuación.

$$\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

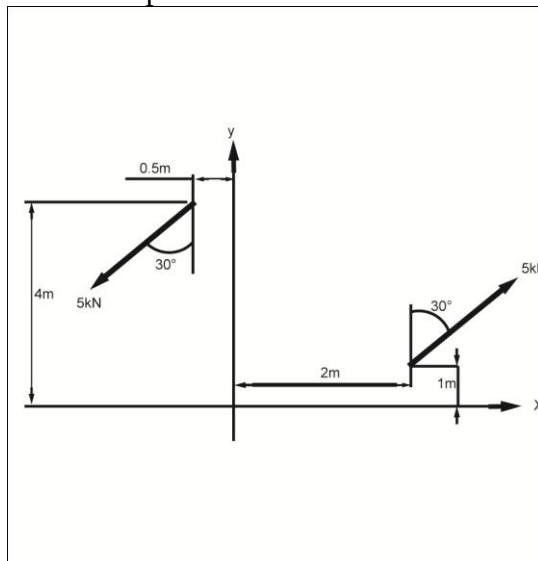
$$\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$\vec{r}$ - Es el vector posición que va de un punto de la línea de acción de la fuerza negativa a un punto de la línea de acción de la fuerza positiva.

$\vec{r}_B$ - Es el vector posición que va del origen del sistema a un punto de la línea de acción de la fuerza positiva.

$\vec{r}_A$ - Es el vector posición que va del origen del sistema a un punto de la línea de acción de la fuerza negativa.

Ejemplo. Encontrar el momento del par de fuerzas como se muestra en la figura.



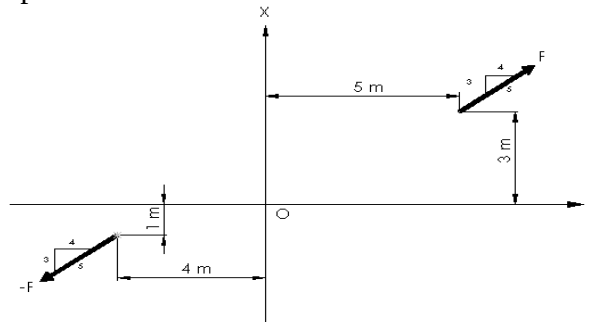
Solución.
Obtenemos $\vec{r}$.

$$\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (2,1,0)m - (-0.5,4,0)m = (2.5, -3,0)m$$

$$\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2.5 & -3 & 0 \\ 5\cos 60^\circ & 5\sin 60^\circ & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2.5 & -3 & 0 \\ 2.5 & 4.3 & 0 \end{vmatrix} = (18.25\hat{k})\text{KNm}$$

Problema 2.

Encontrar el momento del par de fuerzas si $F=25\text{ N}$



Solución.
Obtenemos $\vec{r}$.

$$\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (5,3,0)m - (-4,-1,0)m = (9,4,0)m$$

$$\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 9 & 4 & 0 \\ 25\left(\frac{4}{5}\right) & 25\left(\frac{3}{5}\right) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 9 & 4 & 0 \\ 20 & 15 & 0 \end{vmatrix} = (55\hat{k})\text{Nm}$$

Sistemas de fuerzas equivalentes

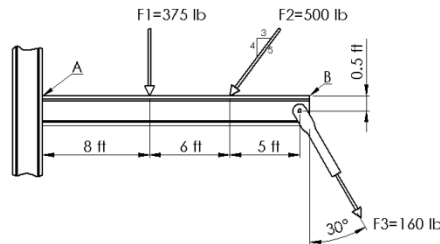
Una fuerza tiene el efecto de trasladarse y de girar a un cuerpo y la medida en que lo hace depende de dónde y cómo es aplicada la fuerza.

Para poder generar un sistema de fuerzas equivalentes se requiere que tanto los efectos externos tanto de translación como de rotación de fuerzas que actúan sobre el sistema sean los mismos efectos que produce el momento del par.

Para lograr lo anterior se tiene que cuando el punto donde se quiere aplicar la fuerza equivalente se encuentra sobre la línea de acción de la fuerza entonces la fuerza equivalente solo se traslada una distancia x a donde se encuentre el nuevo punto sobre la misma línea de acción de la fuerza. Cuando el punto donde se requiere trasladar la fuerza no se encuentra sobre la misma línea de acción de la fuerza entonces hay que trasladar la fuerza al punto y sumar el momento del par en cualquier lugar del cuerpo, dicho momento se encuentra tomando el momento de la fuerza con respecto al punto y cuando se ejercen estas reglas se producen momentos externos equivalentes.

Ejemplo.

La viga que se muestra en la figura está sometida a un sistema de fuerzas coplanares. Determine la fuerza resultante así como su ubicación sobre la viga, para que sea equivalente al sistema de fuerzas dado medido desde el punto A.



Solución.

Se obtiene la fuerza resultante del sistema de fuerzas:

$$\sum F_x = 500 \cos 60^\circ N + 100 N = 350 N$$

$$\sum F_y = -500 \sin 60^\circ + 200 N = -233 N$$

Por lo que la fuerza resultante que actúa sobre la viga es de:

$$\vec{F}_R = (350, -233) N$$

Calculando momentos con respecto al punto A y partiendo que tanto el momento de la fuerza resultante con respecto A y el momento del sistema de fuerza con respecto al punto A deben de ser iguales tenemos:

$$233 N(x) = -(500 N \sin 60^\circ)(2m) - (100 N)(0.5m) + (200 N)(3.5m)$$

$$x = \frac{-216 Nm}{233 N} = -0.92m$$

El signo negativo significa que la fuerza resultante se aplica a la derecha del origen del sistema de referencia.

Fuerzas concurrentes.

Se les llaman fuerzas concurrentes todas aquellas fuerzas cuyas líneas de acción se interceptan, es decir cuando el origen de todos los vectores fuerza coinciden con el punto de intersección de las líneas de acción de las fuerzas.

Fuerzas coplanares.

Son las fuerzas cuyas líneas de acción se encuentran en el mismo plano

Fuerzas paralelas.

Son las fuerzas cuyas líneas de acción se encuentran paralelas unas a otras ya sea que las fuerzas estén en el mismo plano o estas estén en planos diferentes pero paralelos entre sí.

Equilibrio de cuerpos rígidos sujetos a sistemas de fuerzas.

Para estudiar las condiciones suficientes y necesarias que son requeridas para que se obtenga el equilibrio de un cuerpo rígido. Se considera un cuerpo rígido ya sea que este en reposo o si este está en movimiento, este se mueve con velocidad constante.

Si se toma la i -ésima partícula del cuerpo y $\vec{f}_i$ es la fuerza interna que actúa sobre dicha partícula y $\vec{F}_i$ es la fuerza que actúa sobre dicha partícula entonces al aplicarle a esa partícula la primera ley de Newton tenemos que:

$$\vec{f}_i + \vec{F}_i = 0$$

Ahora si aplicamos la primera ley de Newton al sistema de n partículas tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n \vec{f}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

Como la suma de las fuerzas internas es igual a cero ya que las fuerzas internas entre partículas dentro del cuerpo aparecen en pares y colineales pero en sentidos opuestos, de acuerdo con la tercera ley de Newton, por lo tanto de la ecuación anterior solo quedará el segundo sumando.

$$\vec{F}_{RO} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

Para el caso de los momentos de las fuerzas se tiene que como la fuerza resultante interna del sistema de partículas es cero entonces el momento resultante producido por dicha fuerza con respecto a un punto también es cero, entonces solo queda el momento resultante producido por las fuerzas externas el cual está dado por:

$$\vec{M}_{RO} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

Por lo que las condiciones para que un cuerpo rígido este en equilibrio total son:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0$$

Restricciones al movimiento y fuerzas reactivas.

Para asegurar el equilibrio de un cuerpo rígido, no solo es necesario satisfacer las ecuaciones de equilibrio, sino que el cuerpo también este sostenido o restringido adecuadamente por sus soportes. Algunos cuerpos pueden tener más soportes de los necesarios por equilibrio,

mientras que otros pueden no tener suficientes o estar arreglados de tal manera que ocasionen el colapso del cuerpo.

Al definir un cuerpo rígido es aquel que no se deforma, se supone que la mayoría de los cuerpos considerados en la mecánica elemental son rígidos.

Este análisis estará basado en la suposición fundamental de que el efecto de la fuerza dada sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si dicha fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción. Por tanto las fuerzas que actúen sobre un cuerpo rígido pueden representarse por vectores deslizantes.

Dos conceptos fundamentales asociados con los efectos de una fuerza sobre un cuerpo rígido son el momento de una fuerza con respecto a un punto y el momento de una fuerza con respecto a un eje.

Restricciones redundantes.

Cuando un cuerpo tiene soportes redundantes, es decir, más de los necesarios para mantenerlo en equilibrio, se vuelve estáticamente indeterminado. Esto quiere decir que habrá más cargas desconocidas sobre el cuerpo que ecuaciones de equilibrio disponibles para su solución. Por ejemplo el problema bidimensional, figura 10, y el problema tridimensional en la figura 9, mostrados junto con sus diagramas de cuerpo libre, son ambos estáticamente indeterminados debido a las reacciones adicionales en los soportes. En el caso bidimensional, hay cinco incógnitas: M_A , A_x , A_y , B_y , y C_y , para las cuales solo pueden ser escritas tres ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, y $\sum M_o = 0$). El problema tridimensional tiene ocho incógnitas, para las cuales solo pueden ser escritas seis ecuaciones de equilibrio.

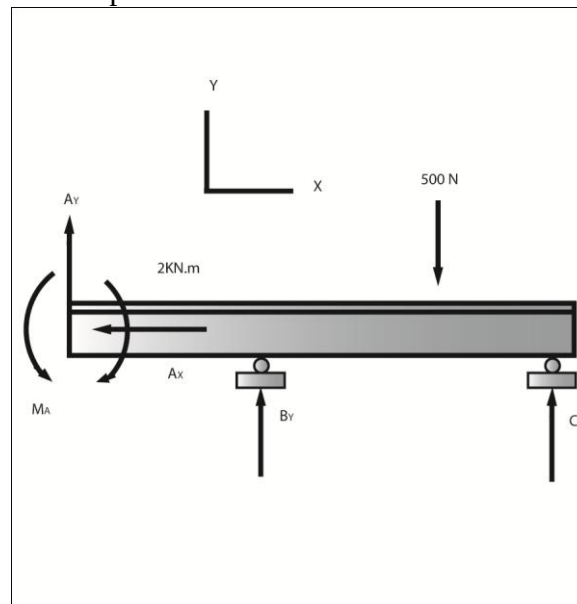


Figura 10. Reacciones en dos dimensiones

Las ecuaciones adicionales necesarias para resolver problemas indeterminados del tipo mostrado en la figura 11, se obtienen generalmente a partir de las condiciones de deformación

presentes en los puntos de soporte. Estas ecuaciones implican las propiedades físicas del cuerpo que se estudian en temas tratados en la mecánica de la deformación, tal como “mecánica de materiales”.

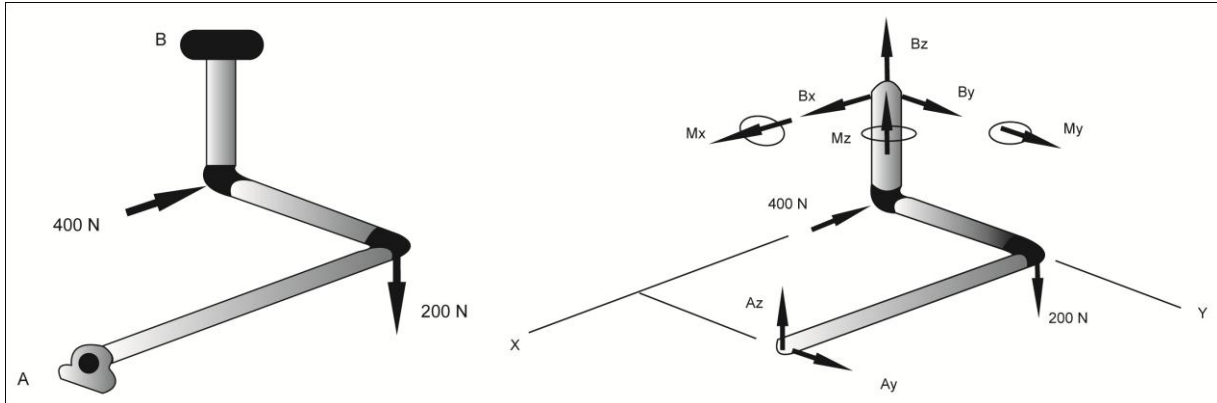


Figura 11. Reacciones en tres dimensiones.

Restricciones impropias.

En algunos casos, puede haber tantas fuerzas desconocidas sobre el cuerpo como ecuaciones de equilibrio; sin embargo, puede presentarse inestabilidad del cuerpo debido a restricciones impropias de los soportes. En el caso de problemas tridimensionales, el cuerpo está impropriamente restringido si todas las reacciones en los soportes intersecan un eje común. En problemas bidimensionales, este eje es perpendicular al plano de las fuerzas y, por tanto, aparece como un punto. Por consiguiente, cuando todas las fuerzas de reacción son concurrentes en este punto, el cuerpo está restringido de modo impropio. Ejemplos de ambos casos están dados en la figura 12. A partir de los diagramas de cuerpo libre se advierte que la suma de momentos con respecto al eje x figura 10 (a), o punto O, figura 10(b), no será igual a cero; se tendrá entonces una rotación con respecto al eje x o al punto O. Además, en ambos casos, resulta imposible determinar completamente todas las incógnitas ya que se puede escribir una ecuación de momento que no contiene ninguna de las reacciones desconocidas, y como resultado, esto reduce el número de ecuaciones de equilibrio disponibles en una.

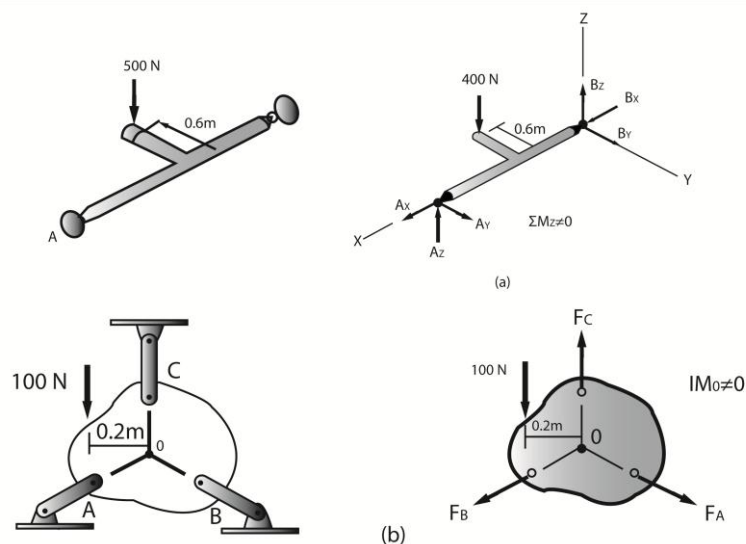


Figura 12. Restricciones impropias

Otra manera en que una restricción impropia conduce a inestabilidad ocurre cuando todas las fuerzas de reacción son paralelas. Ejemplo tridimensional y bidimensional de esto se muestra en la figura 13.

En ambos casos, la suma de fuerzas a lo largo del eje x no será igual a cero.

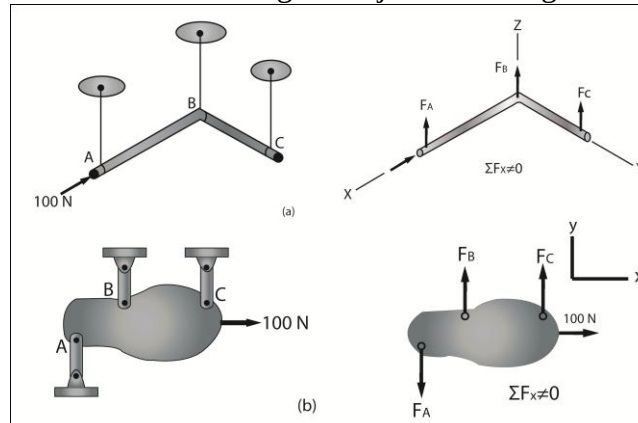


Figura 13. Restricciones impropias en dos y tres dimensiones

En algunos casos, un cuerpo puede tener menos fuerza de reacción que ecuaciones de equilibrio a ser satisfechas.

Entonces, una restricción apropiada requiere que las líneas de acción de las fuerzas de reacción no intersequen sobre un eje común, y las fuerzas reactivas no deben ser todas paralelas entre sí. Cuando el número mínimo de fuerzas reactivas es necesario para restringir apropiadamente el cuerpo en consideración, el problema será estáticamente determinado, y por tanto, las ecuaciones de equilibrio pueden ser usadas para determinar todas las fuerzas reactivas.

Tipos de apoyos

Los apoyos de vigas, son los elementos que le proporcionan la estabilidad a la viga y por lo general, se encuentran en los extremos o cerca de ellos. Las fuerzas en los apoyos que se generan son productos de las cargas aplicadas y se llaman reacciones y equilibran las cargas aplicadas. Analíticamente estas reacciones representan las incógnitas de un problema matemático.

Reacciones formada por una fuerza de dirección conocida.

Los apoyos y conexiones que causan reacciones de este tipo son: rodillos, balancines, superficies lisas, bielas y cables cortos. Estos apoyos solo impiden el movimiento en una dirección. Las reacciones de este grupo solo proporcionan una incógnita, que consiste en la magnitud de la reacción y se pueden dirigir en uno u otro sentido a lo largo de la dirección conocida. Apoyo Esquema

También pueden ser soportes fijos los cuales proporcionan un impedimento en el movimiento tanto de traslación y de rotación de las estructuras, este tipo de soportes proporcionan dos grados de libertad o incógnitas en el análisis de equilibrio de las estructuras.

Miembros de dos y tres fuerzas

Para solucionar algunos problemas de equilibrio puede identificarse si antes se identifica los miembros sujetos a dos o tres fuerzas solamente.

Miembros de dos fuerzas

Cuando un miembro no está sujeto a momentos de par y se le aplica fuerzas en solo dos puntos, las fuerzas que actúan en ellos son colineales y de sentido opuesto (para mantener el equilibrio), este se llama miembro de dos fuerzas

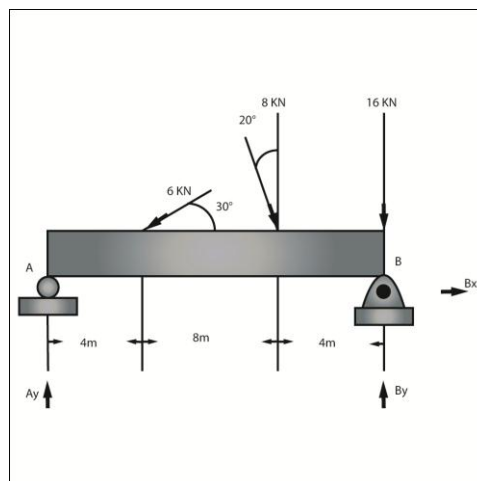
Miembro de tres fuerzas. Si un miembro está sujeto a tres fuerzas solamente, es necesario que estas sean concurrentes o paralelas para que el miembro permanezca en equilibrio.

Reacciones en los soportes. Los momentos de par y fuerza reactivas que actúan en varios tipos de soportes y conexiones, cuando los miembros se localizan en tres dimensiones. Como en el caso de dos dimensiones una fuerza es desarrollada por un soporte q restringe el giro de un miembro unidad mientras q un momento de par de fuerzas se desarrolla cuando se evita la rotación de un miembro unido. Evite cualquier traslación de un miembro conectado; por lo tanto debe actuar una fuerza sobre el miembro en el punto de conexión. Esta fuerza tiene tres componentes con magnitudes desconocidas F_x , F_y , F_z , siempre y cuando estas componentes sean conocidas, uno puede obtener la magnitud de la fuerza, F es igual a la raíz cuadrada de la sumatoria al cuadrado de las fuerzas y la orientación está definida por ángulos directores coordenados.

En esencia requiere primero aislar el cuerpo dibujado su Forma después se procede a un etiquetado de todos los momentos y par de fuerzas en referencia a un sistema coordenado x , y , z , establecido. Como regla general las componentes de reacción que tienen una magnitud desconocida se muestra actuando sobre el diagrama de cuerpo libre en el sentido positivo de una forma si se obtiene algún valor negativo este indicara que las componentes actúan en las direcciones coordenadas negativas y en el procedimiento se procede a invertir el sentido de la reacción en el diagrama de cuerpo libre.

Ejemplo.

Dada la estructura como se muestra en la figura encontrar el valor de las reacciones para el equilibrio del sistema.



Solución. $\sum F_x = 0$

$$\begin{aligned} -F_1 \cos 30^\circ + F_2 \sin 20^\circ + R_{Bx} &= 0 \\ -6 \text{ KN} \cos 30^\circ + 8 \text{ KN} \sin 20^\circ + R_{Bx} &= 0 \\ R_{Bx} &= (5.19 - 2.73) \text{ KN} = 2.45 \text{ KN} \end{aligned}$$

. $\sum F_y = 0$

$$\begin{aligned} -F_1 \sin 30^\circ + F_2 \cos 20^\circ - 16 \text{ KN} + R_{By} + R_{Ay} &= 0 \\ +R_{By} + R_{Ay} &= +F_1 \sin 30^\circ - F_2 \cos 20^\circ + 16 \text{ KN} \end{aligned}$$

$$R_{By} + R_{Ay} = 20.5 \text{ KN}$$

Despreciando el ancho de la viga se tiene: $\sum \vec{M} = 0$

$$4m(6 \text{ KN} \sin 30^\circ) + (12m)(8 \text{ KN} \cos 20^\circ) + (16m)(16 \text{ KN}) - (16m)R_{By} = 0$$

$$R_{By} = \frac{258.2}{16} = 22.4 \text{ KN}$$

Por lo tanto.

$$R_{Ay} = (20.5 - R_{By}) \text{ KN} = -1.88 \text{ KN}$$

El signo menos significa que el sentido real de la reacción es el contrario del que está en la figura del diagrama de cuerpo libre.

Determinación de reacciones por medio de sistemas equivalentes.

Sistemas Equivalentes

Un sistema de fuerzas y momentos es simplemente un conjunto particular de fuerzas y momentos de pares. Una fuerza tiene el efecto de trasladar y girar un cuerpo, y la medida en que lo hace depende de dónde y cómo es aplicada la fuerza. Analizaremos el método usado para simplificar un sistema de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo a una sola fuerza resultante y un momento de par actuando en un punto específico O . para hacer esto es necesario que el sistema de fuerza y el momento de par produzcan los mismos efectos externos de traslación y rotación del cuerpo que sus resultantes cuando esto ocurre se dice que estos dos conjuntos de carga son equivalentes

$$(\sum F)_1 = (\sum F)_2$$

Y si las sumas de los momentos respecto a un punto O son también iguales

$$(\sum M_o)_1 = (\sum M_o)_2$$

Si la suma de las fuerzas son iguales y las sumas de los momentos respecto a un punto también son iguales, entonces las sumas de los momentos respecto a cualquier punto son iguales.

Representación de sistemas con sistemas equivalentes.

Si solo nos interesa la fuerza y el momento totales ejercidos sobre un cuerpo por un sistema dado de fuerzas y momentos, este sistema puede representar con uno equivalente. Con esto queremos decir que en vez de mostrar las fuerzas y los momentos reales que actúan sobre un cuerpo podemos mostrar un sistema diferente que ejerza la misma fuerza y el mismo momento totales. De esta manera un sistema dado se reemplazaría por otro menos complicado para simplificar el análisis de las fuerzas y momentos que actúen sobre el cuerpo así como para comprender mejor sus efectos sobre el cuerpo.

Representación de un sistema por medio de una fuerza y un par.

Cuando un cuerpo rígido está sometido a un sistema de fuerzas y momentos de par, a menudo es más sencillo estudiar los efectos externos sobre el cuerpo reemplazando el sistema de una sola fuerza resultante equivalente actuando en un punto específico O y en un momento de par resultante. Como el punto O no está sobre la línea de acción de las fuerzas, un efecto equivalente es producido si las fuerzas son desplazadas hacia el punto O y los correspondientes momentos de par $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$ y $\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$ son aplicados al cuerpo además al momento de par $\vec{M}_C$ simplemente es desplazado al punto O ya que es un vector libre.

Por suma vectorial la fuerza resultante es $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ y el momento de par resultante es

$$\vec{M}_R = \vec{M}_C + \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Cada sistema de fuerza y par ocasionara los mismos efectos externos, es decir la misma traslación y rotación del cuerpo tanto la magnitud como la dirección de F_R son independientes de la ubicación del punto O sin embargo $\vec{M}_R$ depende de la ubicación ya que los momentos en M_1 y M_2 son determinados usando los vectores de posición r_1 y r_2 , también se tiene que $\vec{M}_R$ es un vector libre y puede actuar en cualquier punto aunque el punto O generalmente es seleccionado como su punto de aplicación.

El método anterior de simplificar cualquier sistema de fuerza y momento de par a una fuerza resultante que actué en el punto O y un momento de par resultante puede ser generalizado y representado mediante la aplicación de las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= \sum \vec{F} \\ \vec{M}_R &= \sum \vec{M}_C + \sum \vec{M}_O\end{aligned}$$

La primera ecuación establece que la fuerza resultante del sistema es equivalente a la suma de todas las fuerzas y la segunda ecuación establece que el momento de par resultante del sistema es equivalente a la suma de todos los momentos de par en la $\sum M_C$, mas los momentos con respecto al punto O de todas las fuerzas $\sum M_O$. Si el sistema de fuerzas se encuentra en el plano x - y , son perpendiculares a este plano, que está a lo largo del eje z , entonces las ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes tres ecuaciones escalares

$$F_{R_x} = \sum F_x$$

$$M_{R_y} = \sum F_y$$

$$M_R = \sum M_c + M_O$$

Observe que la fuerza resultante F_R es equivalente a la suma vectorial de sus componentes F_{R_x} y F_{R_y} .

Ejemplo.

Se tiene una fuerza $\vec{F} = (10, 5, -3) \text{ lb}$ que actúa en un punto que se encuentra en una posición $\vec{R} = (2, 2, 4) \text{ fts}$. Obtenga el sistema equivalente por un par que actúe en la posición $\vec{R} = (8, 2, 6) \text{ fts}$.

Solución.

Queremos representar la fuerza F_A con una fuerza F que actúa en B y un par M . Podemos determinar F y M usando las dos condiciones de equivalencia.

La suma de las fuerzas debe ser igual.

$$(\sum F)_2 = (\sum F)_1$$

$$\vec{F} = \vec{F}_A = (10, 5, -3) \text{ lb}$$

La suma de los momentos respecto a un punto arbitrario debe ser igual. El vector de B a A es.

$$\vec{r}_{BA} = (-6\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k}) \text{ fts}$$

Por lo que el momento respecto a B en el sistema 1 es:

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & 0 & -2 \\ 10 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (10, 30, -30) \text{ lb.fts}$$

La suma de los momentos con respecto a B debe ser igual

$$(M_B)_2 = (M_B)_1$$

$$M = (10\hat{i} + 30\hat{j} - 30\hat{k}) \text{ lb.pie}$$

UNIDAD III.

Método de análisis de estructuras.

En las unidades anteriores se ha estudiado el equilibrio de un sistema de partículas, así como el equilibrio de un solo cuerpo rígido en la presente unidad estudiaremos el equilibrio de varios cuerpos unidos entre sí, normalmente a un sistemas de cuerpos rígidos unidos entre ellos se le conoce como estructura o armadura.

En el análisis de este tipo de sistemas no tan solo se determinaran las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, si no que para determinar el equilibrio del sistema se requiere estudiar las características de las fuerzas internas (fuerzas de tensión y fuerzas de compresión) que actúan sobre cada una de las partes que integran al sistema, normalmente a dichas partes se les conoce como miembros de la estructura, ver figura14.

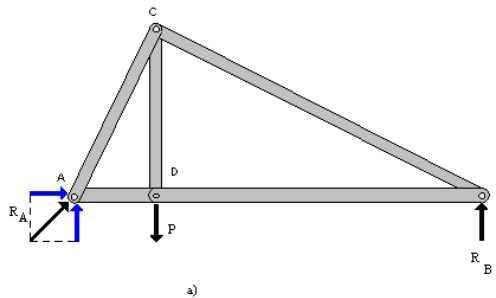


Figura 14. Estructura y sus partes

Los puntos A, B, C y D son los nodos de la estructura y las fuerzas $\vec{P}$, $\vec{R}_x$ y $\vec{R}_y$ son las fuerzas externas producidas por los soportes que sostienen a la estructura o cargas que actúan sobre la misma.

En la actualidad existen muchos problemas en la ingeniería que se relacionan con este tipo de análisis, como son el análisis de equilibrio de las estructuras (metálicas o de otros tipos) que son utilizadas en la industria de la construcción, para el análisis de equilibrio de vigas, etc.

Normalmente las armaduras, los armazones y las maquinas son las estructuras más comunes que se encuentran en los diferentes tipos de industria y es la razón por la cual pondremos mayor énfasis en su estudio en la presente unidad.

Armadura. Está diseñada para soportar cargas y son normalmente estructuras fijas y estables. Constan exclusivamente de elementos rectos conectados entre sí por nodos localizados en cada uno de los extremos de los miembros de dicha estructura se dice que cada elemento de la estructura llamado miembro es un elemento de dos fuerzas, porque en el interior del elemento actúan dos fuerzas internas y estas fuerzas normalmente actúan sobre los nodos, a dichas fuerzas se les conoce como de tensión o de compresión, este par de fuerzas son de igual magnitud y de sentidos opuestos y actúan sobre la misma línea de acción que está a lo largo del miembro de la estructura.

Armazones. Están diseñados para soportar cargas y también son estructuras normalmente fijas y estables, sin embargo estas estructuras siempre contienen por lo menos un elemento de

fuerza múltiple, es decir contienen por lo menos un elemento sobre el cual actúan tres o más fuerzas que generalmente no actúan en la misma línea de acción, como es el caso de una grúa.

Maquinas. Son estructuras que están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas y las cuales contienen partes móviles y también contienen por lo menos un elemento de fuerza múltiple.

Las estructuras normalmente están colocadas sobre soportes los cuales pueden ser fijos o móviles y en ciertos casos también están sujetos por cables y de acuerdo al tipo de soporte o cable son las fuerzas externas que actúan sobre la estructura, este tipo de consideraciones sobre las fuerzas que actúan sobre una armadura es muy importante para el análisis de equilibrio de las estructuras.

Diagrama de cuerpo libre.

Cuando hablamos del equilibrio de un cuerpo rígido se tienen que tener en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo pero también se tendría que excluir todas aquellas fuerzas que no actúan directamente sobre el cuerpo ya que al añadir una fuerza u omitir otra esto afectaría directamente sobre el estado de equilibrio del cuerpo, entonces es necesario hablar de un diagrama de cuerpo libre.

Para trazar un diagrama de cuerpo libre se debe aislar por completo al cuerpo de su entorno es decir no se considera la fuerza debido al campo gravitacional, tampoco las reacciones que hace el piso sobre el cuerpo y las que otros cuerpos harían sobre el cuerpo que se está analizando su equilibrio, a las fuerzas que bajo estas condiciones actúan sobre el cuerpo se les conoce como fuerzas externas a el peso de cuerpo libre debe incluirse en las fuerzas externas.

La magnitud y dirección de las fuerzas externas deben marcarse claramente en el diagrama de cuerpo libre se debe tener mucho cuidado en indicar el sentido de las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre y no el de las fuerzas ejercidas por el las fuerzas externas casi siempre son el peso del cuerpo libre y las fuerzas aplicadas con un propósito específico.

Las fuerzas externas consisten en la acción de las reacciones realizadas por soportes o por otros cuerpos que actúan sobre el sistema y las cuales tienden a oponerse al posible movimiento de las estructuras obligándolas a permanecer en estado de equilibrio, también se les conoce como fuerzas de restricción. Las reacciones se ejercen en los puntos donde el cuerpo libre se apoya o se conecta a otro cuerpo. (En el anexo se muestra una tabla donde se muestran algunos tipos de reacciones).

Análisis de Armaduras por el Método de Nodos.

Como ya se mencionó anteriormente una armadura puede considerarse como un conjunto de miembros de dos fuerzas unidos entre sí por articulaciones llamados nodos y la cual esta soportada o sujeta por soportes como se muestra en la figura 15.

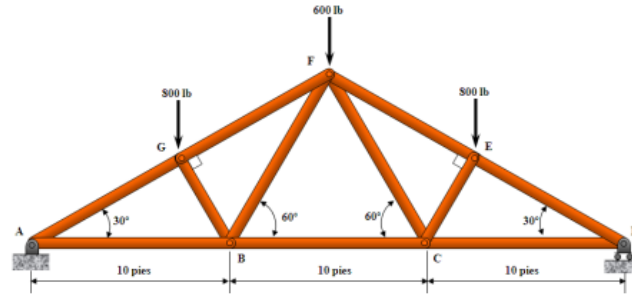


Figura 15. Estructura o armadura en dos dimensiones

En la figura las articulaciones A, B, C, D, E, F y G son los nodos y AB, AG, BC y etc., son los miembros de la armadura.

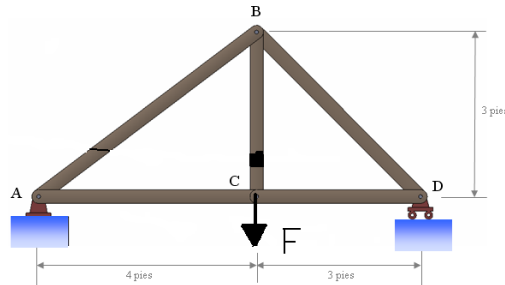
Para aplicar el método de nodos en el análisis de equilibrio de la estructura se realizan los siguientes pasos:

- Se analiza a la estructura como un solo cuerpo y se dibujan sobre la estructura las fuerzas externas que aplican los soportes o sujeciones (reacciones) sobre la estructura.
- Se aplican las condiciones de equilibrio $\sum \vec{F} = 0$ y $\sum \vec{M} = 0$ con respecto a uno de los nodos de la armadura, para encontrar los valores de las fuerzas externas (reacciones por los soportes y de algunas de las cargas en los casos cuando estas no se conocen)
- Una vez que se conocen los valores de las fuerzas externas se procede a calcular los valores de las fuerzas internas realizando el análisis de las fuerzas que actúan en cada uno de los nodos.
- Para realizar el paso anterior se procede primero a dibujar sobre la estructura cada uno de los pares de fuerzas que actúan en cada uno de los miembros de la armadura el sentido de cada una de las fuerzas al comienzo se da de forma arbitraria y si en el momento de efectuar el cálculo de dicha el valor es positivo eso significa que el sentido asignado con anterioridad era el correcto de lo contrario habría que modificar el sentido de dicha fuerza una vez realizado esto se procede a continuar con el cálculos del resto de los pares de fuerzas considerando que las fuerzas que actúan en cada miembro son de igual magnitud pero de sentidos contrarios
- Se realiza un análisis de equilibrio utilizando la condición $\sum \vec{F} = 0$, en cada uno de los nodos para de esta manera se obtener los valores de cada una de las fuerzas que actúan sobre cada uno de los nodos y el análisis de equilibrio en el último de los nodos se realiza para verificar el equilibrio total del sistema o estructura.
- Por último para verificar si cada una de las fuerzas internas que actúan sobre cada nodo de la armadura está actuando como fuerza de tensión o fuerza de compresión se considera que si la fuerza sale del nodo esta tensionando y si la fuerza está dirigida hacia el nodo entonces la fuerza está comprimiendo.

A continuación se muestran ejemplos de cómo aplicar el método de nodos para el análisis de equilibrio de una estructura.

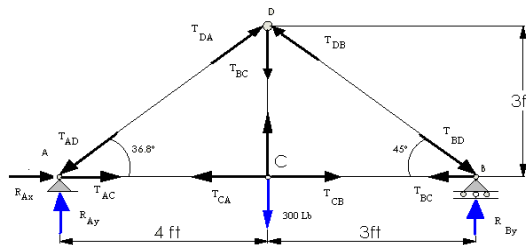
Ejemplo 1.

Dada la armadura como se muestra en la figura. Calcular las fuerzas internas que actúan en cada uno de los miembros de la armadura y determinar si están a tensión o compresión si sobre el nodo C actúa una carga de 300 lb.



Solución:

Se dibujan todas las fuerzas que actúan en cada uno de los miembros como se muestra en la figura:



Calculamos las fuerzas externas que actúan sobre la estructura utilizando las condiciones de equilibrio de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= 0 ; \\ \sum F_x &= R_{Ax} = 0 \\ \sum R_y &= R_{Ay} + R_{By} - 300 = 0\end{aligned}$$

$\sum \vec{M} = 0$: Calculando los momentos con respecto al nodo izquierdo de la armadura tenemos:

$$\begin{aligned}-(4\text{pies})(300\text{ lb}) + (7\text{pies})R_{By} &= 0 \\ R_{By} &= \frac{1200\text{ lb pies}}{7\text{ pies}} = 171.42\text{ lb}\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene:

$$R_{Ay} = 300\text{ lb} - R_{By} = 300\text{ lb} - 171.42\text{ lb} = 128.58\text{ lb}$$

Para calcular las fuerzas internas que actúan sobre cada uno de los miembros de la estructura aplicamos el método de nodos de la forma siguiente:

Observamos el sentido de cada una de las fuerzas que actúan en cada uno de los nodos en la figura anterior y tenemos que para cada uno de los nodos las condiciones de equilibrio están dadas por:

Nodo A:

$$\begin{aligned} -T_{AD} \cos 36.8^\circ + T_{AC} &= 0 \\ R_{Ry} - T_{AD} \sin 36.8^\circ &= 0 \\ T_{AD} &= \frac{R_{Ry}}{\sin(36.8^\circ)} = \frac{128.50 \text{ lb}}{0.599} \\ T_{AD} &= 214.58 \text{ lb (C)} \\ T_{AC} &= T_{AD} \cos 36.8^\circ \\ &= 214.58 \text{ lb} \cos(36.8) \\ &= 171.4 \text{ lb (T)} \end{aligned}$$

Nodo C

$$\begin{aligned} T_{CB} - T_{CA} &= 0 \\ T_{CD} - 300 \text{ lb} &= 0 \\ T_{CD} &= 300 \text{ lb (T)} \\ T_{CB} = T_{CA} &= 171.4 \text{ lb (T)} \end{aligned}$$

Nodo B.

$$\begin{aligned} T_{BD} \cos(45^\circ) - T_{BC} &= 0 \\ R_{By} - T_{BD} \sin(36.8^\circ) &= 0 \\ T_{BD} &= \frac{R_{By}}{\sin(45^\circ)} = 242.4 \text{ lb (C)} \\ T_{BD} \cos(45^\circ) &= T_{BC} \\ 171.4 \text{ lb} &= 171.4 \text{ lb} \end{aligned}$$

Nodo D.

$$T_{BC} = T_{CB} = 171.4 \text{ lb (T)}, \quad T_{DB} = T_{BD} = 242.4 \text{ lb (C)} \text{ y } T_{DA} = T_{AD} = 214.58 \text{ lb (C)}$$

Del análisis anterior podemos concluir que el sistema está en equilibrio.

Método de secciones.

En muchas ocasiones cuando en ingeniería se está trabajando con el equilibrio de las estructuras, debido a la acción de fuerzas externas o cargas la estructura rompe su estado de equilibrio pero resulta que bajo dicha acción solamente uno o unos de sus miembros resultan afectados sufren alguna deformación, pero para realizar el análisis de equilibrio no es necesario realizar dicho análisis en toda la estructura, es decir en cada uno de sus miembros, solamente se requiere hacer el análisis de los miembros afectados, para estos casos podemos aplicar el método de secciones el cual consiste en seccionar las estructuras realizando ciertos cortes los cuales nos permiten analizar cada una de las secciones en las que se dividió la estructura, considerando cada una de las secciones como sistemas aislados diferentes.

Para aplicar el método de secciones en el análisis de equilibrio de una armadura se siguen los siguientes procedimientos:

- Se analizan primero las fuerzas externas que actúan sobre la armadura, es decir de la misma forma que se realizó en el caso del método de nodos para encontrar el valor de todas las fuerzas
- Encontrando los valores de las fuerzas externas, se procede a seccionar la armadura con ayuda de uno o varios cortes los cuales se deben realizar de tal manera que la línea de corte contenga los miembros de la estructura que se requiere analizar (ver figura 16), dicho procedimiento se puede realizar hasta las veces que sea necesario hasta haber terminado el análisis de todos los miembros que se requiera

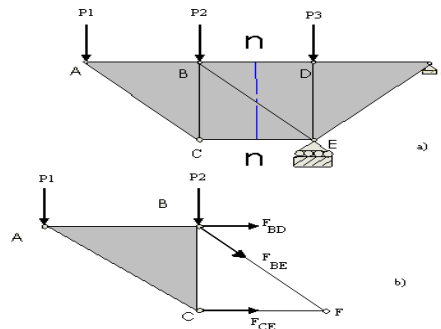
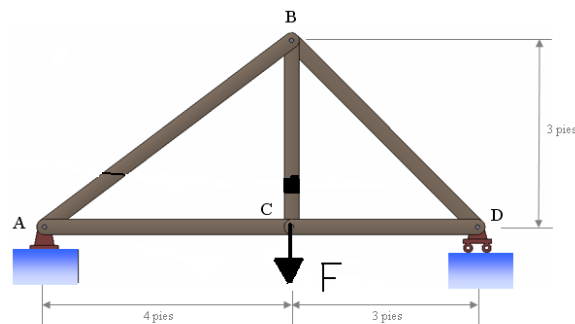


Figura 16. Seccionamiento de una estructura

- Una vez realizado el corte o seccionamiento de la estructura se procede al análisis de las fuerzas internas que actúan sobre los miembros seleccionados, pero ahora se les considera como fuerzas externa y para encontrar sus valores se aplican las condiciones de equilibrio $\sum \vec{F} = 0$ y $\sum \vec{M} = 0$ con respecto a un punto de la estructura.
- Para determinar si las fuerzas internas que actúan en cada miembro están a tensión o compresión, se utiliza el criterio que si la fuerza que actúa esta dirigida hacia el nodo entonces comprime y si esta sale del nodo entonces la fuerza esta tensionando.

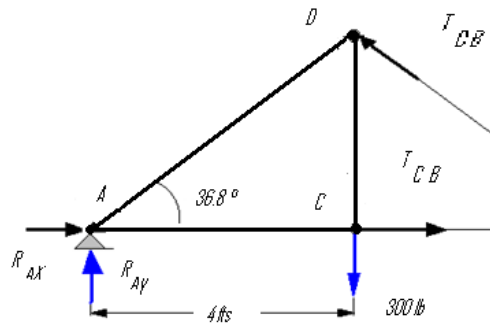
Ejemplo 2.

Dada la estructura la cual por el lado izquierdo está sujeta a un soporte fijo y por el lado derecho por un soporte móvil y sobre la cual actúa una carga de 300 lb en el nodo C, determinar las fuerzas que actúan sobre los miembros DB y CB y determine si están a compresión o tensión.



Solución.

Se procede a realizar un seccionamiento como se muestra en la figura y se aplican las condiciones de equilibrio con respecto al nodo A tenemos:



Calculamos las fuerzas externas que actúan sobre la estructura utilizando las condiciones de equilibrio de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= 0 ; & \sum F_x &= R_{Ax} = 0 \\ & & \sum R_y &= R_{Ay} + R_{By} - 300 = 0\end{aligned}$$

$\sum \vec{M} = 0$: Calculando los momentos con respecto al nodo izquierdo de la armadura tenemos:

$$\begin{aligned}-(4\text{pies})(300\text{ lb}) + (7\text{pies})R_{By} &= 0 \\ R_{By} &= \frac{1200\text{ lb pies}}{7\text{ pies}} = 171.42\text{ lb}\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene:

$$R_{Ay} = 300\text{ lb} - R_{By} = 300\text{ lb} - 171.42\text{ lb} = 128.58\text{ lb}$$

Calcularemos el valor de las fuerzas internas solicitadas en cada uno de los miembros, para lo cual las consideramos como fuerzas internas una vez que se haya realizado el seccionamiento de la estructura como se muestra en la figura anterior y posteriormente se aplican las condiciones de equilibrio para la parte elegida de la estructura.

$$\sum F_x = 0 \quad T_{CB} - T_{DB} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_{Ay} + T_{DB} \sin 45^\circ - 300\text{ lb} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned}T_{DB} &= 242.4\text{ lb (C)} \\ T_{BC} &= 171.4\text{ lb (T)}\end{aligned}$$

Marcos isostáticos y máquinas de baja velocidad

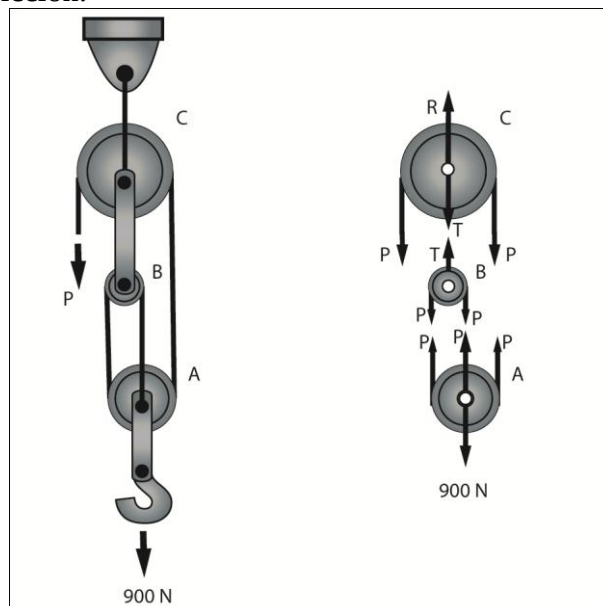
Las maquinas son estructuras que están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas y las cuales contienen partes móviles y también contienen por lo menos un elemento de fuerza múltiple. Los bastidores y las maquinas son tipos de estructuras que están compuestos por medios de multifuerzas es decir son miembros que están sometidos a más de dos fuerzas y los bastidores son generalmente estacionarios y se utilizan para soportar cargas y las maquinas normalmente tienen partes móviles y están diseñadas para transmitir movimiento y alterar el efecto de las fuerzas.

Para el estudio del equilibrio de este tipo de estructuras también se utilizan las condiciones de equilibrio ya estudiadas anteriormente siguiendo los siguientes pasos.

- Se analiza la máquina y se dibuja un diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre el mecanismo.
- Se identifican todos los miembros de dos fuerzas sobre la máquina y se representa un diagrama de cuerpo libre de los mismos. Reconociendo los miembros de dos fuerza podemos evitar la resolución de un numero innecesario de ecuaciones en el análisis de equilibrio
- Si las fuerzas que se están analizando son internas entonces estas no se muestran en el diagrama de cuerpo libre.
- Por último se aplican las condiciones de equilibrio para determinar tanto reacciones como las cargas que actúan sobre el sistema o máquina.

Ejemplo.

Determine la tensión en los cables de la maquina simple y la magnitud de la fuerza P requerida para que esta soporte una carga de 1000 N, considere que entre las cuerda y las poleas no hay fricción.



Solución.

Para la polea A. $\sum F_y = 0$

$$3P - 900N = 0 ; P = 300N$$

Para la polea B. $\sum F_y = 0$

$$T - 2P = 0 ; \quad T = 600N$$

Para la polea C. $\sum F_y = 0$

$$R - 2P - T = 0 ; \quad R = 1200N$$

Trabajo virtual.

En el estudio del equilibrio de los cuerpos o sistemas en muchas ocasiones es utilizado el principio de trabajo virtual el cual fue propuesto por el matemático suizo Jean Bernoulli en el siglo XVIII, este método se considera como un método alternativo basado en el principio de trabajo mecánico para resolver problemas de equilibrio una partícula, un cuerpo rígido o un sistema de cuerpos rígidos conectados entre sí.

Antes de analizar el principio de trabajo virtual haremos un pequeño recordatorio de las definiciones de trabajo mecánico producido por una fuerza y por un momento de par.

Trabajo de una fuerza.

Si sobre un cuerpo de masa m se aplica una fuerza $\vec{F}$ provocando un desplazamiento $d\vec{r}$, siendo θ el ángulo entre dichos vectores entonces la diferencial de trabajo dW realizado por el cuerpo está dado por:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Si tomamos en cuenta la definición producto punto entre dos vectores entonces podemos escribir la ecuación anterior de la forma siguiente:

$$dW = F \cdot dr \cos \theta$$

Como lo podemos ver en la definición de trabajo, esta es una magnitud escalar, por lo tanto el trabajo puede ser una magnitud positiva, negativa o cero.

La unidad de trabajo en el $S \cdot I$ es un Joule (J), el cual se define como la cantidad de trabajo producido por una fuerza de magnitud de $1N$ cuando actúa sobre un cuerpo y esta es capaz de producirle al cuerpo un desplazamiento $1m$ en dirección en la cual actúa la fuerza ($1J = 1N \cdot m$) y las unidades de trabajo en el sistema ingles son *pie · libra* ($ft \cdot lb$) y es el trabajo producido por la acción de una fuerza de $1 lb$ que desplaza a un cuerpo una distancia de un *pie* en la misma dirección sobre la cual actúa la fuerza.

Trabajo de un momento par

Cuando bajo la acción de una fuerza que actúa sobre un cuerpo y esta es capaz de producir una rotación al cuerpo entonces bajo esa acción también se produce trabajo. Considere el cuerpo rígido que se muestra en la figura 17, sobre el cual actúan el par de fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ el cual produce un momento par $\vec{M}$ y que tiene una magnitud $M = F \cdot r$. En el momento que bajo la acción del par de fuerzas el cuerpo experimenta un desplazamiento diferencial, los puntos A y

B de la figura se mueven respectivamente los desplazamientos $d\vec{r}_A$ y $d\vec{r}_B$ hasta alcanzar unas posiciones finales asociadas a los puntos A' y B' respectivamente. Como $d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + d\vec{r}'$ se puede considerar a este movimiento como una transmisión $d\vec{r}_A$ donde los puntos A y B se mueven hasta A' y B'' donde el cuerpo gira un ángulo $d\theta$ con respecto de A.

Las fuerzas de par no producen trabajo mediante la translación de $d\vec{r}_A$ porque cada fuerza realiza la misma cantidad de desplazamiento en direcciones opuestas y de esta manera el trabajo total es cero. Sin embargo durante la rotación F desplaza $d\vec{r}'' = r d\theta$ y por lo tanto realiza un trabajo $dw = F \cdot dr'' = F \cdot r d\theta$ como $M = F \cdot r$ entonces el trabajo producido por el par esta dado por

$$dW = M \cdot d\theta$$

Si $\vec{M}$ y $d\theta$ tienen el mismo sentido el trabajo es positivo, sin embargo si tienen un sentido opuesto el trabajo será negativo.

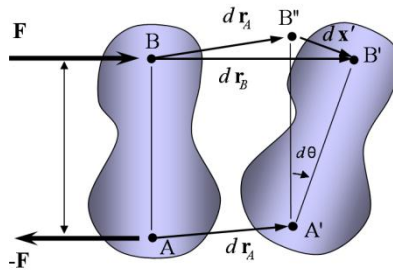


Figura 17. Trabajo de un momento par.

Trabajo virtual

Cuando definimos el trabajo que produce una fuerza en términos del movimiento real utilizamos que bajo la acción de la fuerza el cuerpo realizo un desplazamiento real $d\vec{r}$. Consideremos ahora un movimiento imaginario o virtual de un cuerpo en equilibrio estático, el cual indica un desplazamiento o una rotación, que es supuesto y no existe realmente

Esos movimientos son cantidades diferenciales de primer orden y las denotamos por δr y $\delta \theta$ al cambio de posición y al cambio de ángulo respectivamente, por lo que el trabajo virtual realizado por una fuerza $\vec{F}$ sobre el cuerpo está dado por:

$$\delta W = F \cos \theta \delta r$$

De la misma manera cuando un par sufre una rotación $\delta \theta$ en el plano de las fuerzas de par, el trabajo es:

$$\delta W = M \delta \theta$$

Principio de trabajo virtual

En el estudio del equilibrio de los cuerpos el principio de trabajo virtual establece que si un cuerpo está en equilibrio, entonces la suma algebraica de los trabajos virtuales realizados por cada una de las fuerzas, así como de los trabajos realizados por cada uno de los momentos par debe ser igual a cero, para cualquier desplazamiento virtual total del cuerpo. Entonces

$$\delta W = 0$$

Analicemos el siguiente ejemplo, consideremos un cuerpo que descansa sobre el piso como se muestra en la figura 18 y consideremos las fuerzas que actúan sobre el mismo siendo estas la normal y el peso del cuerpo considerando que no existe la fricción entre las superficies en contacto.

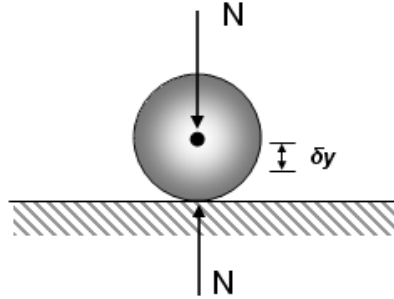


Figura 18. Cuerpo que descansa sobre el piso.

Dónde:

N- Fuerza normal

w- Peso del cuerpo

δy - Desplazamiento virtual

En el sistema anterior estamos imaginando que el cuerpo se desplaza en dirección al piso un desplazamiento δy por lo tanto el peso del cuerpo realizara un trabajo virtual positivo $\delta W_1 = w\delta y$ y la fuerza normal un trabajo virtual negativo $\delta W_2 = -N\delta y$ entonces el trabajo virtual total realizado sobre el cuerpo será:

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta W_1 + \delta W_2 = w\delta y - N\delta y \\ &= (w - N)\delta y\end{aligned}$$

Por lo tanto para que se cumpla el equilibrio se debe de cumplir que el trabajo virtual total debe ser cero. Entonces

$$\delta W = (w - N)\delta y = 0$$

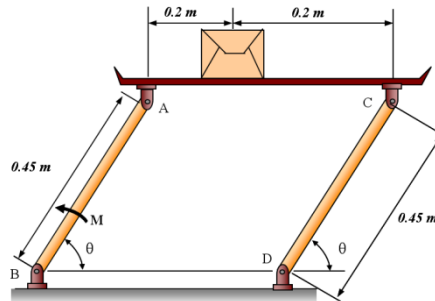
Como se supuso que $\delta y \neq 0$ se tiene que $\sum F_y = 0$ entonces $w - N = 0$, por lo tanto la condición de equilibrio es que el peso debe de ser en magnitud igual que la fuerza normal.

De manera semejante se puede aplicar la ecuación de trabajo virtual $\delta W = 0$ a un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas coplanares en este caso las translaciones virtuales separadas en las direcciones x y y y una rotación virtual con respecto a un eje perpendicular al plano $x - y$ que pasa por un punto arbitrario O , corresponderán a tres ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M_O = 0$ al escribir estas ecuaciones no es necesario incluir el trabajo realizado por las fuerzas internas que actúan dentro del cuerpo, ya que el cuerpo rígido no se deforma cuando está sometido bajo la acción de una fuerza o carga externa y además cuando el cuerpo se mueve a través de un desplazamiento virtual, las fuerzas

internas actúan en pares colineales iguales pero en sentidos opuestos de esta manera el trabajo realizado por cada par es cero.

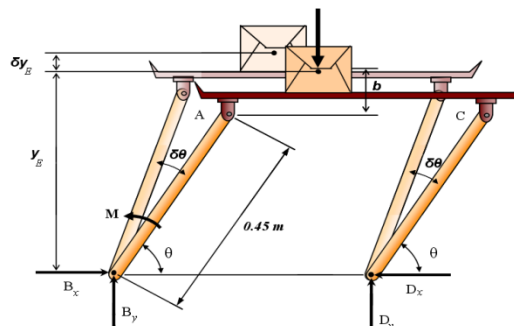
Ejemplo 1.

Se tiene una caja que se muestra en la figura de abajo y la cual pase una masa de 50 Kg. Calcular la magnitud del momento de par M en función del ángulo θ , que se requiere para mantener a la estructura en equilibrio, en su cálculo desprecie la masa de los elementos.



Solución.

Utilizando el método del trabajo virtual y suponemos que la estructura realice un desplazamiento virtual $\delta\theta$ entonces tenemos que solo el momento del par y el peso de cuerpo realizan trabajo si tomamos en cuenta la siguiente figura, tenemos:



Para el desplazamiento virtual.

$$y_E = (0.45 \text{ m}) \sen \theta + b, \quad b = \text{const}$$

$$\delta y_E = 0.45 \text{ m} \cos \theta \delta \theta$$

Por lo tanto aplicando el principio del trabajo virtual $\delta U = 0$ tenemos:

$$M \delta \theta - [50(9.81) \text{ N}] \delta y_E = 0$$

$$M \delta \theta - [50(9.81) \text{ N}] (0.45 \text{ m} \cos \theta \delta \theta) = 0$$

$$\delta \theta (M - 220.72 \cos \theta) = 0$$

Como supusimos que $\delta \theta \neq 0$ entonces:

$$(M - 220.72 \cos \theta) = 0$$

Por lo tanto el momento par en función del ángulo que se requiere para que la estructura este en equilibrio es:

$$M = (220.72 \cos\theta) \text{ N.m}$$

Unidad IV

Propiedades de áreas planas y líneas

Introducción.

La física es la materia que estudia las características y comportamientos físicos de un objeto o sistema, entre estos se encuentran el centro de masa (CM), el centro de gravedad (CG), y el centroide de un cuerpo o sistema de partículas.

Estos tres temas son estudiados en esta unidad para que el estudiante entienda y aplique dichos conceptos en la solución de problemas de equilibrio que se encuentran en su entorno.

En la Física, el centroide, el centro de gravedad y el centro de masas pueden, bajo ciertas circunstancias coincidir o no entre sí. En estos casos se suele utilizar los términos de manera intercambiable, aunque designan conceptos diferentes. El centroide es un concepto puramente geométrico que depende de la forma geométrica del sistema; el centro de masas depende de la distribución de materia, mientras que el centro de gravedad depende también del campo gravitatorio. Así tendremos que:

- el centro de masas coincide con el centroide cuando la densidad es uniforme o cuando la distribución de materia en el sistema de tiene ciertas propiedades, tales como simetría.
- el centro de masas coincide con el centro de gravedad, cuando el sistema se encuentra en un campo gravitatorio uniforme (el módulo y la dirección de la fuerza de gravedad son constantes).

Centro de gravedad y centro de masa para un sistema de partículas.

Centro de gravedad.

Para un sistema de partículas cuyas distancias relativas no varía, el centro de gravedad G es un punto que marca el peso resultante. Este punto se puede visualizar considerando el sistema de n partículas en una región espacial como se muestra en la figura 19. Los pesos de cada partícula equivalen a un sistema de fuerzas paralelas que se puede reemplazar por una sola fuerza resultante (equivalente) el punto de aplicación definido como G .

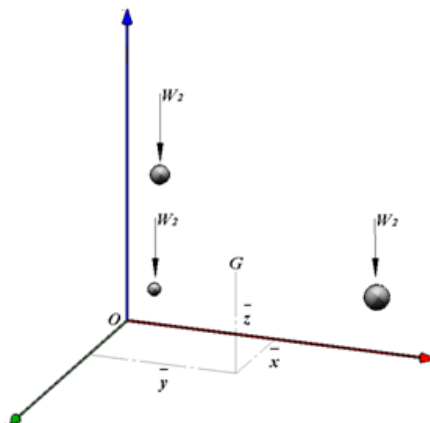


Figura 19. Centro de gravedad de un sistema de partículas.

Para conocer las coordenadas $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ de G se requiere que el peso resultante sea igual al peso total de todas las n partículas

$$W_R = \sum W$$

Entonces la suma de los momentos de la fuerza de los pesos de todas las partículas respecto a los ejes coordenados es el mismo que el momento que causa el peso respecto a estos mismos ejes. Para determinar la coordenada $\bar{x}$ de G se pueden sumar los momentos respecto al eje y, lo que resulta:

$$xW_R = \tilde{x}_1W_1 + \tilde{x}_2W_2 + \dots + \tilde{x}_nW_n$$

Análogamente, al sumar los momentos respecto al eje x obtenemos la coordenada sobre el eje y:

$$\bar{y}W_R = \tilde{y}_1W_1 + \tilde{y}_2W_2 + \dots + \tilde{y}_nW_n$$

Aunque no se producen momentos con respecto al eje z debido a los pesos, se puede obtener la coordenada en z de G girando el sistema coordenado incluyendo el sistema de partículas 90° con respecto al eje x o al y (figura 20). Al sumar los momentos con respecto al eje x tenemos:

$$\bar{z}W_R = \tilde{z}_1W_1 + \tilde{z}_2W_2 + \dots + \tilde{z}_nW_n$$

Se generalizan éstas fórmulas y se expresan simbólicamente de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}W}{\sum W} \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}W}{\sum W} \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}W}{\sum W}$$

En donde

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ son las coordenadas de G (centro de gravedad) del sistema de partículas. $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ son las coordenadas de cada una de las partículas del sistema. Y $\sum W$ es el peso sumado de las partículas que componen el sistema. Estas ecuaciones representan el balance de la suma de los momentos debidos al peso de cada partícula en el sistema y el momento debido al peso que resulta del sistema.

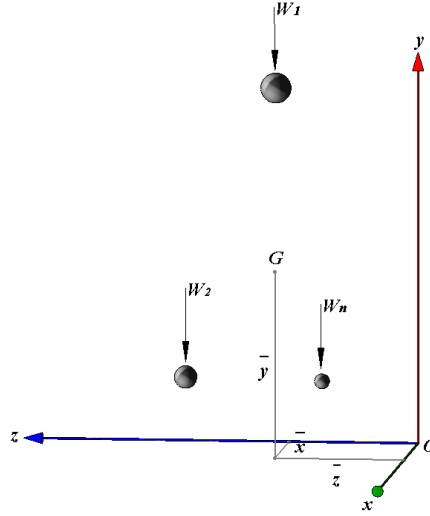


Figura 20. Sistema de partículas girado 90°.

Centro de masa.

Cuando se estudian problemas que implican el movimiento de materia bajo influencia de una fuerza (dinámica) es importante conocer el punto llamado centro de masa. Con una aceleración debida a la gravedad g constante en cada partícula, el peso W es igual a mg . Al sustituir éste término en las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}m}{\sum m} \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}m}{\sum m} \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}m}{\sum m}$$

En estas condiciones la ubicación el centro de gravedad es el mismo que la del centro de masa, aunque las partículas del sistema tienen “peso” únicamente dentro de un campo gravitatorio, pero el centro de masa es independiente a éste campo.

Centro de gravedad, centro de masa, y centroide para un cuerpo.

Centro de gravedad.

Para usar los principios anteriores en él un cuerpo sólido compuesto por un número infinito de partículas, es necesario usar la integración en vez de sumar discretamente los términos. Al considerar la partícula de coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y con un peso dW como en la Figura 21, las ecuaciones que resultan son:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}dW}{\int dW} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}dW}{\int dW} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}dW}{\int dW}$$

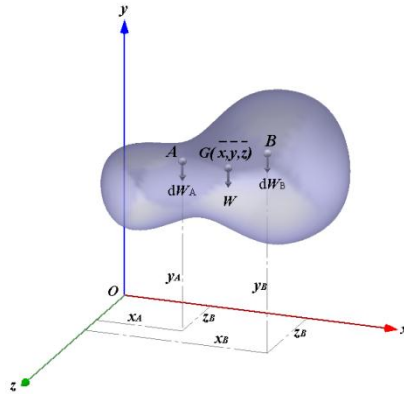


Figura 21. Centro de gravedad de un cuerpo.

Aplicando apropiadamente éstas ecuaciones y expresando el peso diferencial dW debe ser expresado en términos de su volumen asociado dV . Con γ representando el peso específico unitario del cuerpo se tiene $dW = \gamma dV$ y entonces:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} \gamma dV}{\int_V \gamma dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} \gamma dV}{\int_V \gamma dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} \gamma dV}{\int_V \gamma dV}$$

Por lo tanto la integración debe efectuarse en todo el volumen.

Centro de masa.

Mediante la ecuación $\gamma = \rho g$, donde g es la aceleración causada por la gravedad, se relaciona la densidad ρ . Al sustituir esta relación en las expresiones anteriores resultan estas nuevas expresiones con las que se puede determinar el centro de masa del cuerpo:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} \rho g dV}{\int_V \rho g dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} \rho g dV}{\int_V \rho g dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} \rho g dV}{\int_V \rho g dV}$$

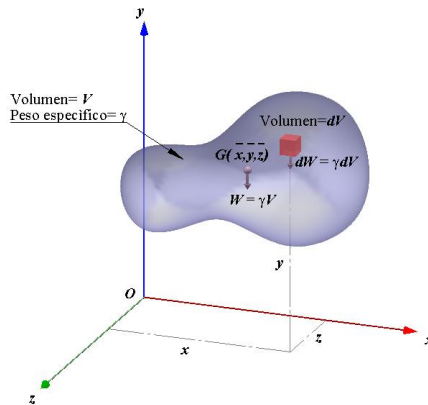


Figura 22. Centro de masa de un cuerpo.

Centroide.

El centro geométrico de un objeto está definido por el centroide. Para determinar su ubicación se pueden usar relaciones similares a las usadas para encontrar el centro de gravedad o centro de masa. Si el cuerpo está compuesto por un material cuya densidad es homogénea, el peso específico será constante. Estas expresiones definen el centroide del objeto porque son independientes del peso y solo influye la geometría. Se pueden considerar los siguientes tres casos específicos:

Volumen.

Cuando se subdivide un objeto en elementos de volumen dV (figura 23), el centroide con ubicación $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del volumen del objeto se puede determinar calculando los “momentos” de cada elemento con respecto a cada eje coordenado, lo que resulta:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} dV}{\int_V dV}$$

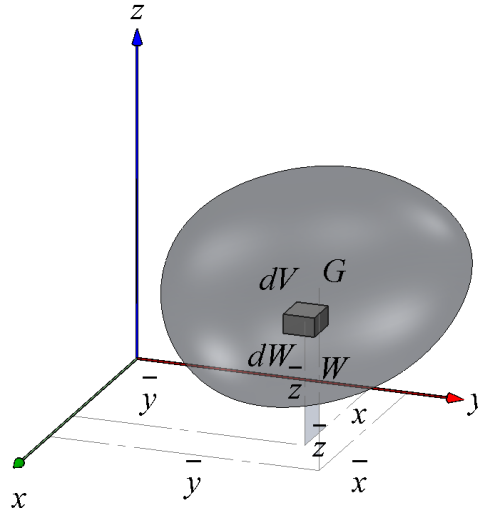


Figura 23. Centroide de un volumen.

Área.

De forma análoga el centroide de la superficie limitante del objeto se puede conocer subdividiendo el área en elementos dA (figura 24) y determinando los “momentos” que cada elemento con respecto a cada eje coordenado:

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA} \quad \bar{z} = \frac{\int_A \tilde{z} dA}{\int_A dA}$$

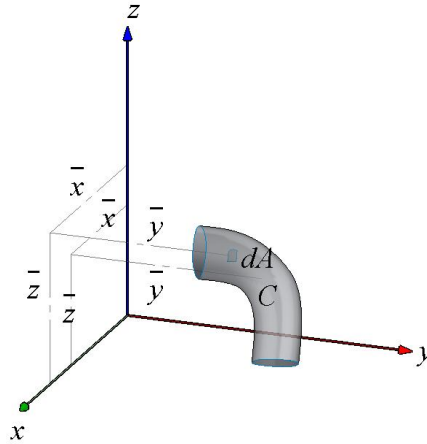


Figura 24. Centroide de un área.

Línea.

Para un objeto con la geometría de una línea o alambre, también se puede determinar el centroide al dividir la longitud en elementos diferenciales dL (Figura 25) y calculando los momentos que estos causan con respecto a los ejes coordenados:

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x} dL}{\int_L dL} \quad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y} dL}{\int_L dL} \quad \bar{z} = \frac{\int_L \tilde{z} dL}{\int_L dL}$$

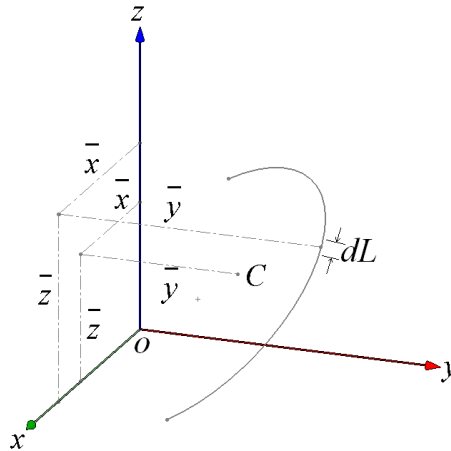


Figura 25. Centroide de la línea.

Cuerpos compuestos

Un cuerpo compuesto está formado por cuerpos más simples pueden ser rectangulares, circulares o de otras formas geométricas determinadas y los cuales están conectados entre sí como se muestra en la figura de abajo, donde se tiene una placa rectangular con un orificio en forma circular, en este caso si se conocen los centroides, centros de masa o gravedad de cada una de las partes que componen al cuerpo entonces se puede obtener las coordenadas del centroide, centro de masas o gravedad del cuerpo compuesto de una forma más sencilla sin tener que recurrir al proceso de integración, mediante el uso de las siguientes expresiones:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}W}{\sum W}, \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}W}{\sum W}, \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}W}{\sum W}$$

Donde $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ representan las coordenadas del centro de gravedad o de masa y $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ representan las coordenadas del centro de gravedad o masa de cada una de las partes las cuales ya son conocidas y $\sum W$ representa la suma de todos los pesos de cada una de las partes que forman al cuerpo.

Cuando el cuerpo que se está analizando tiene densidad o peso específico contante es decir es homogéneo en centro de gravedad coincide con el centroide del cuerpo y para el caso de un área se tiene que:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}A}{\sum A}, \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}A}{\sum A}, \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}A}{\sum A}$$

Cabe mencionar que las sumatorias que se realizan en el momento de la suma se consideran sumas algebraicas y cuando el área a considerarse no es parte de cuerpo es decir forma un hueco se considera con signo negativo para efectos del cálculo (figura 26).

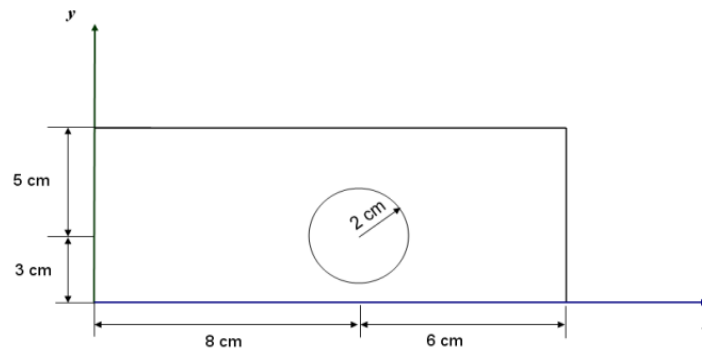
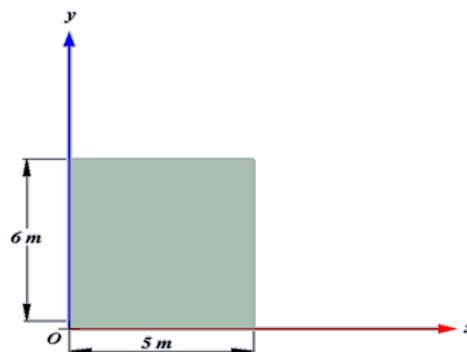


Figura 26. Cuerpo compuesto

Ejemplo

Localizar el centroide de la placa que se muestra en la siguiente figura:



Calculando el área

$$A = b \times h = (5m)(6m) = 30m^2$$

$$\int x^2 dA = \int_0^5 \int_0^6 x dy dx = \int_0^5 6x dx = [3x^2]_0^5 = 75m^3$$

$$\bar{x} = \frac{75m^3}{30m^2} = 2.5m$$

$$\int y^2 dA = \int_0^5 \int_0^6 y dy dx = \int_0^5 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^6 dx = \int_0^5 18 dx = [18x]_0^5 = 90m^3$$

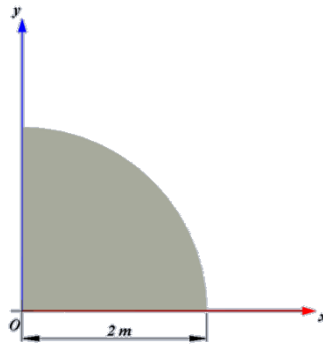
$$\bar{y} = \frac{90m^3}{30m^2} = 3m$$

Las coordenadas del centro de masa son:

$$C = (\bar{x}, \bar{y}) = C(2.5, 3)m$$

Ejemplo 3

Calcular el centroide de la siguiente placa de forma circular:



Calculamos el área

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \left(\frac{\pi(2m)^2}{4} \right) = \pi m^2$$

La ecuación de la circunferencia en coordenadas polares es

$$r = 2$$

$$\int x^2 dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \cos \phi dr d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\phi = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi = \frac{8}{3} [\sin \phi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} m^3$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{8}{3}m^3}{\pi m^2} = \frac{8}{3\pi} m = .85m$$

$$\int y^2 dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \sin \phi dr d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\phi = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi = \frac{8}{3} [-\cos \phi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} m^3$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{8}{3}m^3}{\pi m^2} = \frac{8}{3\pi}m$$

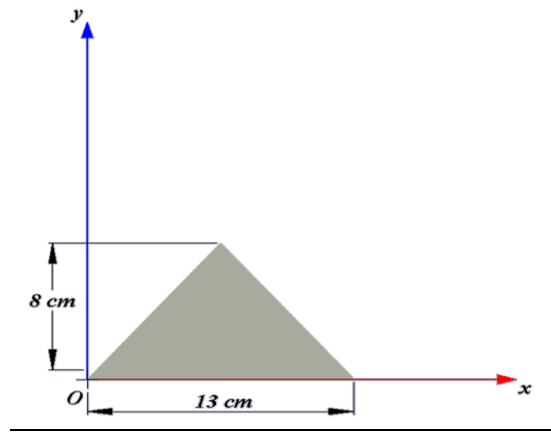
$$\bar{y} = .85m$$

Las coordenadas del centro de masa son:

$$C(\bar{x}, \bar{y}) = C(0.85, 0.85)m$$

Ejemplo 4

Calcular la coordenada el centro de masa de la siguiente figura:



El área del triángulo es:

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{(13m)(8m)}{2} = 52m^2$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0,0)$ y $A(6.5,8)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y - y_1}{x_2 - x_1} = \left(\frac{8 - 0}{6.5 - 0} \right) = 1.25$$

$$y = 1.23x$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $C = (6.5,8)$ y $D(13,0)$ es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \left(\frac{0 - 8}{13 - 6.5} \right) = \frac{-8}{6.5} = -1.23$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = -1.23(x - 13)$$

$$y = -1.23x + 16$$

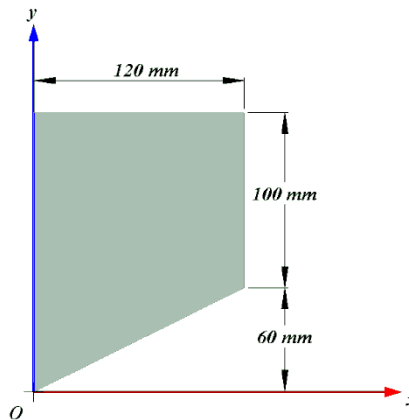
$$\int x^2 dA = \int_0^{6.5} \int_0^{1.23x} x dy dx + \int_{6.5}^{13} \int_0^{-1.23x+16} x dy dx$$

Calculando por separado las integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^{6.5} \int_0^{1.23x} x dy dx &= \int_0^{6.5} x(1.23x) dx \\ &= 1.23 \int_0^{6.5} x^2 dx = 1.23 \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^{6.5} = 112.6 \\ \int_{6.5}^{13} \int_0^{-1.23x+16} x dy dx &= \int_{6.5}^{13} x(-1.23x + 16) dx = \int_{6.5}^{13} (-1.23x^2 + 16x) dx \\ &= \left(-1.23 \frac{x^3}{3} + 8x^2 \right)_{6.5}^{13} = 225.83 \\ \int x^2 dA &= 338.42 m^3 \\ \bar{x} &= \frac{338.42 m^3}{52 m^2} = 6.5 m \end{aligned}$$

Ejemplo:

Localizar el centroide del área plana de la figura.



Solución.

Encontramos las áreas de los cuerpos geométricos por separado:

$$A_R = b \times h = (120 \text{ mm})(160 \text{ mm}) = 19200 \text{ mm}^2$$

$$A_T = \frac{b \times h}{2} = \frac{1}{2} (120 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 3600 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{total}} = A_R - A_T = 15600 \text{ mm}^2$$

Las coordenadas del centroide del triángulo por tablas están dadas por:

$$C(\bar{x}, \bar{y}) = (80, 20) \text{ mm}$$

Las coordenadas del centroide del rectángulo por tablas están dadas por:

$$C(\bar{x}, \bar{y}) = (60, 80) \text{ mm}$$

Como el centroide de un cuerpo homogéneo compuesto está dado por:

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A}, \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A}$$

Por lo tanto para nuestro caso particular tenemos:

$$\bar{x} = \frac{60 \text{ mm}(19200 \text{ mm}^2) - 80 \text{ mm}(3600 \text{ mm}^2)}{15600 \text{ mm}^2} = 55.4 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{80 \text{ mm}(19200 \text{ mm}^2) - 20 \text{ mm}(3600 \text{ mm}^2)}{15600 \text{ mm}^2} = 93.8 \text{ mm}$$

Momento de inercia de un cuerpo.

Siempre que una carga distribuida actúa en forma perpendicular a un área y que su intensidad varía linealmente, el cálculo del momento de la distribución de la carga con respecto a un eje la implicará una cantidad llamada el momento de inercia del área.

Si consideramos la figura 27, entonces el momento de inercia de un diferencial de área dA con respecto a los ejes coordenados son $dI_x = y^2 dA$ y $dI_y = x^2 dA$ respectivamente y entonces los momentos de inercia se determinan por integración por toda el área, es decir.

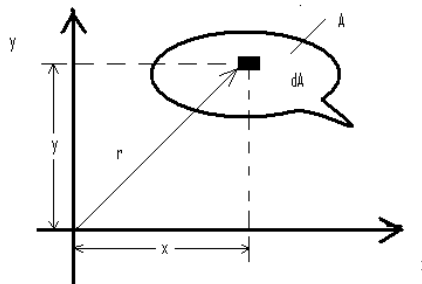


Figura 27. Momento de un área.

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

También se puede obtener esta cantidad con respecto al origen O también conocido como polo de la forma siguiente:

$$J_0 = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

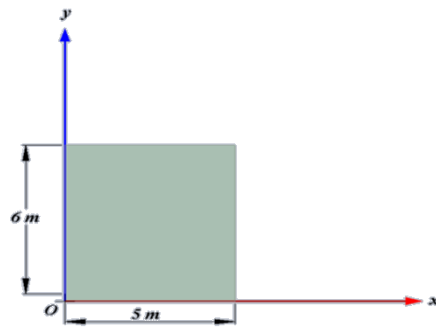
Las cantidades anteriores siempre serán positivas ya que indican productos de cuadrados de las distancias y áreas, las unidades de los momentos son unidades lineales a la cuarta potencia (m^4, cm^4, in^4, etc).

El radio de giro de un área con respecto a un eje dado tiene unidades de longitud y es una cantidad que se utiliza en mecánica estructural para el diseño de columnas, si se conocen los momentos y las áreas entonces los radios de giro se pueden obtener por medio de las siguientes expresiones:

$$K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} ; K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad y \quad K_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

Ejemplo1.

Calcular el momento de inercia de la placa con respecto a los ejes coordenados



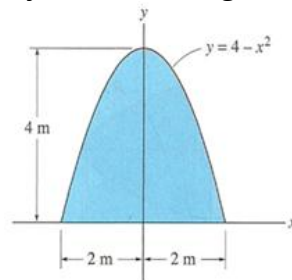
Solución:

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^5 \int_0^6 y^2 dy dx = \frac{1}{3} \int_0^5 [y^3]_0^6 dx = \frac{216}{3} \int_0^5 dx = \frac{5(216)}{3} = 360 cm^4$$

$$I_y = \int_0^5 \int_0^6 x^2 dy dx = 5 \int_0^5 [x^2 y]_0^6 dx = \int_0^5 6x^2 dx = [2x^3]_0^5 = 250 cm^4$$

Ejemplo 2.

Calcular el momento de inercia de la placa como se muestra en la figura, con respecto a los ejes coordenados, el momento polar y los radios de giro correspondientes



Solución:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int y^2 dA = \int_0^2 \int_0^{-x^2+4} y^2 dy dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^2 [y^3]_0^{-x^2+4} dx = \frac{1}{3} \int_0^2 (-x^2 + 4)^3 dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^2 (-x^6 + 12x^4 - 48x^2 + 64x) dx \\
 &= 19.5 \text{ cm}^4 \\
 I_y &= \int x^2 dA = \int_0^2 \int_0^{-x^2+4} x^2 dy dx \\
 &= \int_0^2 [x^2 y]_0^{-x^2+4} dx = \int_0^2 x^2 (-x^2 + 4) dx \\
 &= \int_0^2 (-x^4 + 4x^2) dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= 4.2 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

3) Como el momento polar es:

$$\begin{aligned}
 J_o &= I_x + I_y = (19.5 + 4.2) \text{ cm}^4 \\
 &= 23.7 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

Para obtener los radios de giro k_x y k_y tenemos que:

$$K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{y} \quad K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Dónde:

$$\begin{aligned}
 A &= \int dA = \int_0^2 \int_0^{-x^2+4} dy dx \\
 &= \int_0^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 \\
 &= 5.4 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto los radios de giro son:

$$\begin{aligned}
 K_x &= \sqrt{\frac{19.5 \text{ cm}^4}{5.4 \text{ cm}^2}} = 1.9 \text{ cm} \\
 K_y &= \sqrt{\frac{4.2 \text{ cm}^4}{5.4 \text{ cm}^2}} = 0.8 \text{ cm} \\
 K_o &= \sqrt{\frac{23.7 \text{ cm}^4}{5.4 \text{ cm}^2}} = 2.09 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.

Determine el momento de inercia con respecto al eje x de una placa circular con centro en el origen de coordenadas y radio b .

Solución. Utilizando coordenadas polares:

$$I_x = \int y^2 dA = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^b (r \sen \theta)^2 r dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^b r^3 \sen^2 \theta dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b^4 \sen^2 \theta d\theta$$

$$= b^4 \left[\left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sen(2\theta) \right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi b^4}{4}$$

Teorema de los ejes paralelos.

Considere el momento de inercia I de una área A con respecto a un eje a AA' (ver figura 28). Si se representa con y la distancia desde un elemento de área dA desde AA' , se escribe

$$I = \int y^2 dA$$

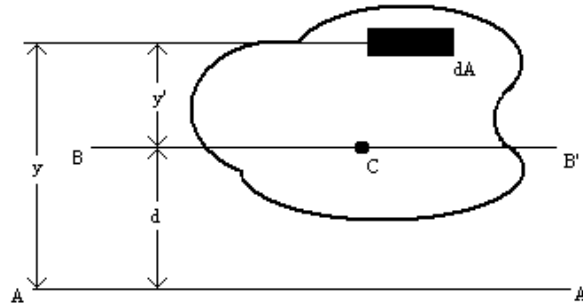


Figura 28. Teorema de los ejes paralelos.

Ahora, se dibuja a través del centroide C del área AA' , dicho eje es llamado eje centroidal. Representado con y' la distancia desde el elemento dA hasta BB' , se escribe $y = y' + d$, donde d es la distancia entre los ejes AA' y BB' . Sustituyendo por y en la integral anterior, se escribe

$$I = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA$$

$$= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

La primera integral representa el momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto al eje centroidal BB' . La segunda integral representa el primer momento del área con respecto a BB' ; como el centroide C del área está localizado sobre dicho eje, la segunda integral debe ser igual a cero. Finalmente se observa que la última integral es igual al área total A . Por lo tanto, se tiene

$$I = \bar{I} + Ad^2$$

Esta fórmula expresa que el momento de inercia I de una área con respecto a cualquier eje dado AA' es igual al momento de inercia I del área con respecto a un eje centroidal BB' que es paralelo a AA' mas el producto del área A y el cuadrado de la distancia d entre los 2 ejes. Este teorema se conoce como el teorema de ejes paralelos o teorema de Steiner. Sustituyendo $k^2 A$ por I y $\bar{k}^2 A$ por I , el teorema también se puede expresar de la siguiente forma

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$

Se puede utilizar un teorema similar para relacionar el momento polar de inercia J_O de un área, con respecto a un punto O , con el momento polar de inercia $\bar{J}_C$ de la misma área con respecto a su centroide C . Denotando con d la distancia entre O y C , se escribe

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \quad \text{o} \quad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2$$

Ejemplo 1. Como una aplicación del teorema de los ejes paralelos, se procederá a determinar el momento de inercia I_T de un área circular con respecto a una línea tangente del círculo (ver figura). Tomando en cuenta que el momento de inercia de un área circular con respecto a un eje centroidal es $\bar{I} = \frac{1}{4} \pi r^4$ por tanto se puede escribir

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \frac{1}{4} \pi r^4 + (\pi r^2) r^2 = \frac{5}{4} \pi r^4$$

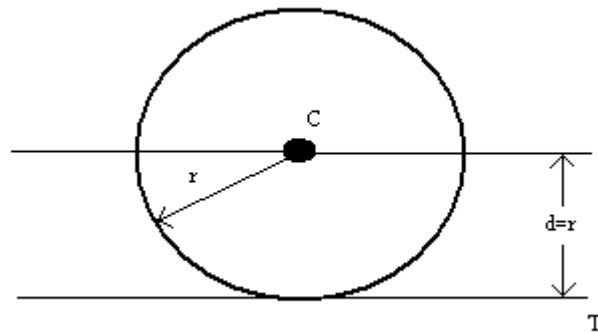


Figura 29. Círculo de radio r tangente a la línea T .

Ejemplo 2. El teorema de los ejes paralelos también se puede usar para determinar el momento centroidal de inercia de un área cuando se conoce el momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo. Por ejemplo, considere un área triangular (ver figura 30). En el problema resuelto 9.1 se encontró que el momento de inercia del triángulo con respecto a su base AA' es igual a $\frac{1}{12} bh^3$. Con el teorema de los ejes paralelos se escribe

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$

$$I_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{1}{2} bh \left(\frac{1}{3} h \right)^2 = \frac{1}{36} bh^3$$

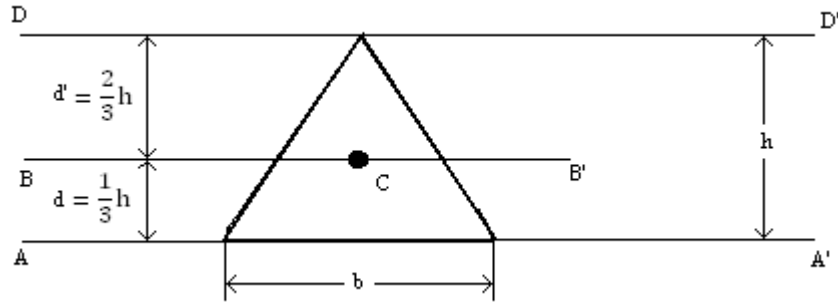


Figura 30. Triángulo de base b y altura h.

Es necesario resaltar que el producto Ad^2 fue restado del momento de inercia dado, con el fin de obtener el momento centroidal de inercia del triángulo. Observe que dicho producto se suma cuando se pasa de un eje centroidal a un eje paralelo, pero debe restarse cuando se pasa a un eje centroidal. En otras palabras, el momento de inercia de un área siempre es menor en relación a un eje centroidal que con respecto a cualquier otro eje paralelo.

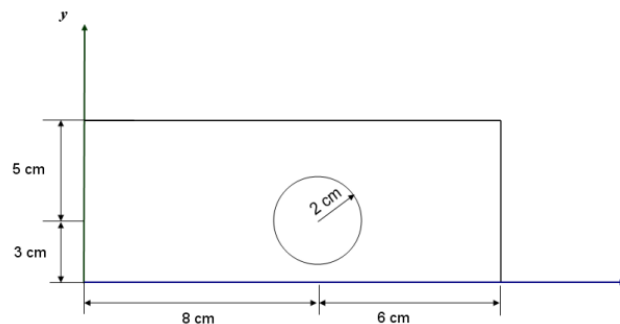
En la figura 23, se observa que el momento de inercia del triángulo con respecto a la línea DD' (la cual se ha dibujado a través de un vértice del triángulo) se puede obtener escribiendo

$$I_{DD'} = \bar{I}_{BB'} + Ad'^2 = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{4}bh^3$$

Observe que $I_{DD'}$ no se habría podido obtener directamente a partir de $I_{AA'}$. El teorema de los ejes paralelos pasa a través del centroide del área.

Ejemplo 3.

Calcular el momento de segundo orden con respecto al eje x , de la placa compuesta como se muestra en la figura, donde la placa cuenta con un orificio de forma circular de radio igual a dos centímetros.



Solución.

Calculamos las áreas de cada una de las partes por separado.

$$A = \pi r^2 = \pi(2\text{cm})^2 = 4\pi \text{ cm}^2 = 12.56 \text{ cm}^2$$

$$A_1 = b \times h = (14\text{cm})(8\text{cm}) = 112\text{cm}^2$$

Por lo tanto por el teorema de los ejes paralelos tenemos:

$$I_C = \bar{I} + Ad^2 = \frac{1}{4}\pi(2cm)^4 + 12.56 cm^2(46.8cm^2) = 600.37cm^4$$

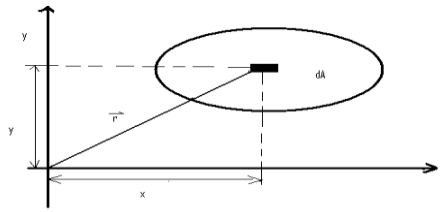
$$I_R = \bar{I} + Ad^2 = \frac{1}{12}(14cm)(8cm)^3 + 112cm^2(46.8cm^2) = 5250.93cm^4$$

$$I = I_R - I_C = 4,650.56 cm^4$$

Producto de inercia.

El producto de inercia de un área es necesario para determinar los momentos de inercia máximo y mínimo para un área, los cuales son importante considerar en el diseño de algunos elementos estructurales y mecánicos como son vigas, levas, flechas y otros.

El producto de un área considerando un elemento arbitrario de diferencial de área en una posición $\vec{r} = (x, y)$ con respecto a los ejes coordenados, como se muestra en la figura está dado por:



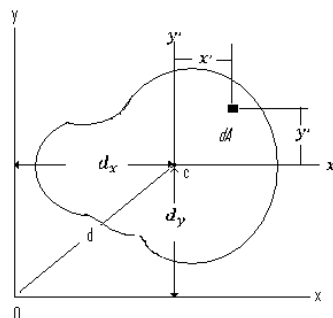
$$I_{xy} = \int xy dA$$

El producto de inercia tiene unidades de longitud a la cuarta potencia. Sin embargo, como x o y pueden ser cantidades positivas, negativas o cero, entonces el producto de inercia puede ser positivo negativo o cero dependiendo de la ubicación u orientación de los ejes coordenados.

Ejemplo

Teorema de los ejes paralelos.

Considérese el área de la figura donde x' y y' representan un conjunto de ejes que pasan por el centroide del área y x y y a un conjunto correspondientes de ejes paralelos, por lo que el producto de inercia está dado por:



$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int (x' + d_x)(y' + d_y) dA \\
 &= \int x' y' dA + d_x \int y' dA + d_y \int x' dA + d_x d_y \int dA
 \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que el producto de inercia está dado por:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A d_x d_y$$

Donde $\bar{I}_{xy}$ es el producto de inercia del área con respecto al eje centroidal.

Ejemplo 1.

Determinar el momento de segundo orden de la placa que está dada por la ecuación $y = \sqrt[3]{x}$ y está limitada por las rectas $x = 0$ y $x = 8$

$$\begin{aligned}
 \int xy dA &= \int_0^8 \int_0^{\sqrt[3]{x}} xy dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^8 [xy^2]_0^{\sqrt[3]{x}} \frac{1}{2} \int_0^8 x^{\frac{5}{3}} dx \\
 &= \left[\frac{3}{16} \sqrt[3]{x^8} \right]_0^8 = 48 m^4
 \end{aligned}$$

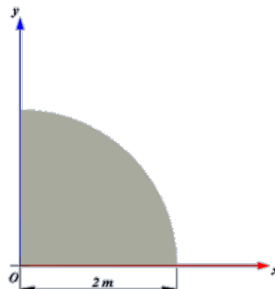
Ejemplo 2.

Determinar el momento de segundo orden de la placa que está dada por la ecuación $y = \sqrt{x}$ y está limitada por las rectas $x = 0$ y $x = 4$ las unidades están dadas en cm

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int xy dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} xy dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^4 [xy^2]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^4 = 10.6 cm^4
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.

Encontrar el momento de segundo orden de la placa circular como se muestra en la figura siguiente.



Solución:

Utilizando coordenadas cartesianas tenemos:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \frac{1}{4} \int xy \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r \cos \theta \sin \theta r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} [r^4 \sin \theta \cos \theta]_0^2 \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= 4 \int_0^1 u \, du = [2u^2]_0^1 = 2 \, m^4 \end{aligned}$$

Unidad V

Fricción

La fricción puede ser definida como una fuerza resistente que actúa sobre un cuerpo e impide o retarda el deslizamiento del cuerpo con relación a un segundo cuerpo o superficie con los cuales este en contacto. La fuerza de fricción actúa siempre tangencialmente a la superficie en los puntos de contacto con otros cuerpos, y está dirigida en sentido opuesto al movimiento posible o existente del cuerpo con respecto a esos puntos.

En general, pueden ocurrir dos tipos de fricción entre superficies. La fricción fluida existe cuando las superficies en contacto están separadas por una película de fluido (gas o líquido). La naturaleza de la fricción fluida se estudia en la mecánica de fluidos, ya que depende del conocimiento de la velocidad del fluido y de la capacidad del fluido a resistir fuerzas cortantes. La fricción seca es llamada a menudo fricción de Coulomb, ya que sus características fueron estudiadas extensamente por C.A. Coulomb en 1871. Específicamente, la fricción seca ocurre entre las superficies de cuerpos que están en contacto en ausencia de un fluido lubricante.

Estrictamente hablando, la fricción, es un concepto físico derivado de la interacción de dos cuerpos íntimamente unidos por una fuerza N perpendicular a la superficie de contacto. Este rozamiento está representado por la fuerza F paralela a la superficie de contacto, que hay que aplicar a uno de los cuerpos para que se mueva deslizándose sobre el otro (figura 31).

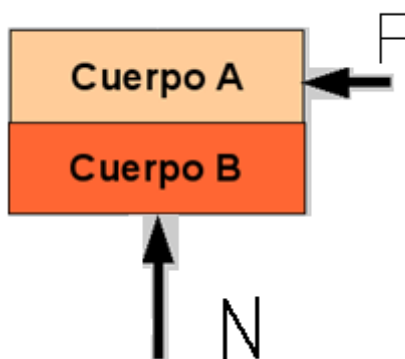


Figura 31. Fricción entre las superficies A y B.

En la práctica, este estado "ideal" de rozamiento "seco" solo se consigue en ciertas condiciones muy especiales, ya que en la mayoría de los casos, entre los cuerpos existe algún otro elemento interactuante, como suciedad, polvo, algún fluido pelicular etc., que aparta el proceso de esta idealización. No obstante para la mayoría de las aplicaciones basta con que los cuerpos estén naturalmente secos y limpios para ser considerados como cuerpos que cumplen con estas condiciones.

La magnitud de la fuerza F resulta una fracción de la magnitud de la fuerza N y su valor es más grande a medida que aumenta el valor de la carga de unión N , pero además, depende de

otros factores adicionales que intervienen en el proceso, todos estos factores adicionales involucrados, están representados por un número conocido como coeficiente de rozamiento (μ).

Tipos de rozamiento

Existen dos tipos de rozamiento o fricción, la fricción estática (μ_s) y la fricción dinámica (μ_k). El primero es una resistencia, la cual se debe superar para poner movimiento un cuerpo con respecto a otro que se encuentra en contacto (figura 32). El segundo, es una fuerza de magnitud constante que se opone al movimiento una vez que éste ya comenzó. En resumen, lo que diferencia a un roce con el otro es que el estático actúa cuando el cuerpo está en reposo y el dinámico cuando está en movimiento.

Si la fuerza de rozamiento F_r es proporcional a la normal N , y la constante de proporcionalidad la llamamos μ .

$$F_r = \mu N$$

Permaneciendo la fuerza normal constante, podemos calcular dos coeficientes de rozamiento el estático y el dinámico:

$$\mu_s = \frac{F_s}{N} \quad y \quad \mu_k = \frac{F_k}{N}$$

Donde el coeficiente de rozamiento estático μ_s corresponde a la mayor fuerza que el cuerpo puede soportar antes de iniciar el movimiento y el coeficiente de rozamiento dinámico μ_k es el que corresponde a la fuerza necesaria para mantener el cuerpo en movimiento una vez iniciado.

Rozamiento estático

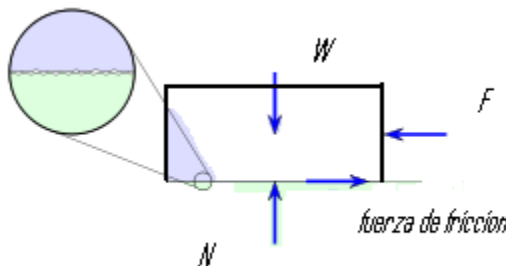


Figura 32. Contacto entre superficies.

Sobre un cuerpo en reposo al que aplicamos una fuerza horizontal F , intervienen cuatro fuerzas:

F - La fuerza aplicada.

F_s - La fuerza de rozamiento entre la superficie de apoyo y el cuerpo, y que se opone al movimiento.

W - Es el peso del propio cuerpo, igual a su masa por la aceleración de la gravedad.

N - Es la fuerza normal, que la superficie hace sobre el cuerpo sosteniéndolo.

Dado que el cuerpo está en reposo la fuerza aplicada y la fuerza de rozamiento son iguales, y el peso del cuerpo y la normal:

$$W = N$$

$$F = F_s$$

Sabemos que el peso del cuerpo W es el producto de su masa por la gravedad, y que la fuerza de rozamiento es el coeficiente estático por la normal:

$$W = N = mg$$

$$F = F_s = \mu_s N = \mu_s mg$$

La fuerza horizontal F máxima que podemos aplicar a un cuerpo en reposo es igual al coeficiente de rozamiento estático por su masa y por la aceleración de la gravedad.

Fricción seca

Si se trata de mover un bloque sobre una superficie rugosa por aplicación de una fuerza, éste no se moverá si la fuerza $F = P$ no sobrepasa cierto valor. Esto quiere decir que si el bloque no se mueve, la superficie debe ejercer una fuerza igual a la aplicada.

El gráfico de la figura 33 muestra la variación de la fuerza de fricción en función de la fuerza P . Para valores relativamente pequeños de F , la fuerza de fricción es igual a P . Cuando P alcanza el valor crítico $\mu_s N$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estático, f alcanza el mismo valor y el bloque está a punto de moverse (movimiento inminente). Si F aumenta, la fuerza de fricción disminuye a un valor $\mu_k N$ donde μ_k es el coeficiente de fricción cinético, y permanece constante, independiente del aumento de F .

Entonces, en reposo la fuerza de fricción puede tomar valores $0 \leq F_s \leq \mu_s N$. La fuerza de fricción no es en general $\mu_s N$

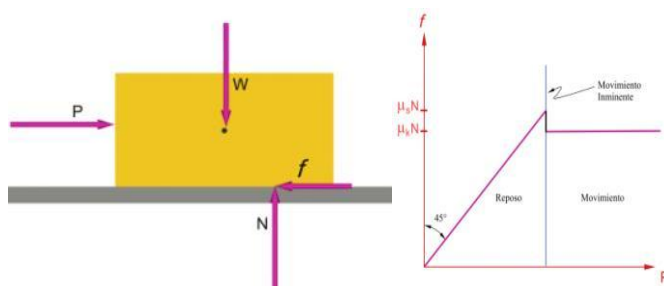


Figura 33. Gráfico de la relación entre la fuerza P que actúa y la fricción

La figura 34, muestra que mientras el bloque está en reposo, a medida que aumenta la fuerza P , la resultante entre la normal N y la fuerza de fricción f se desplaza hacia la derecha para que se cumpla la condición de equilibrio $\sum \vec{F} = 0$ (fuerzas concurrentes). Esto quiere decir que la distribución de fuerzas normales que ejerce la superficie rugosa sobre el bloque no es uniforme, porque de ser así N pasaría por el centro de gravedad (figura 27).



Figura 34. Distribución de las fuerza según cómo va actuando la fuerza de fricción.

Leyes de fricción

Existen dos tipos principales de fricción: fricción estática y fricción dinámica. La fricción no es una propiedad del material, es una respuesta integral del sistema.

Las dos leyes básicas de la fricción se han conocido desde hace un buen tiempo:

- 1) la resistencia de fricción es proporcional a la carga
- 2) la fricción es independiente del área de deslizamiento de las superficies.

La segunda ley puede ilustrarse arrastrando un bloque o ladrillo sobre una superficie plana. La fuerza de arrastre será la misma aunque el bloque descanse sobre una cara o sobre un borde.

Coeficientes y ángulos de fricción

El coeficiente de rozamiento o coeficiente de fricción expresa la oposición al movimiento que ofrecen las superficies de dos cuerpos en contacto. Es un coeficiente adimensional. Usualmente se representa con la letra griega μ (miu). La mayoría de las superficies, aún las que se consideran pulidas son extremadamente rugosas a escala microscópica. Cuando dos superficies son puestas en contacto, el movimiento de una respecto a la otra genera fuerzas tangenciales llamadas fuerzas de fricción, las cuales tienen sentido contrario a la fuerza aplicada. La naturaleza de este tipo de fuerza está ligada a las interacciones de las partículas microscópicas de las dos superficies implicadas.

El valor del coeficiente de rozamiento es característico de cada par de materiales en contacto; no es una propiedad intrínseca de un material. Depende además de muchos factores como la temperatura, el acabado de las superficies, la velocidad relativa entre las superficies, etc.

Así por ejemplo; el coeficiente de fricción es diferente para el roce entre acero templado y acero templado que para acero templado y acero blando, o entre acero templado e hierro fundido etc.

Acabado superficial

La rugosidad de las superficies en contacto tiene una marcada influencia sobre el coeficiente de rozamiento.

Observe la figura de abajo, en ella se ha representado una notable ampliación de una superficie elaborada mediante algún proceso de mecanizado con una herramienta de corte, observe los surcos dejados por la herramienta en la superficie. Estos surcos pueden ser de pequeño tamaño y no ser observados a simple vista para los mecanizados de terminación fina, pero pueden ser incluso visibles en los procesos de producción.

Resulta evidente que a medida que el acabado superficial sea peor, (surcos más grandes), el encajamiento de los picos de una superficie con los valles de la otra producen un notable aumento de la fuerza necesaria para producir el movimiento relativo de ambas y con ello el incremento del coeficiente de fricción resultante de la unión.

En la figura 35, se puede notar que en el contacto de ambas superficies reales se produce el contacto solo en algunos puntos, esta situación hace que la fuerza N esté aplicada solo a una pequeña área. Con la reducción del área, la presión resultante en los puntos de contacto puede ser muy elevada y producir efectos secundarios con gran influencia en el coeficiente de fricción como pueden ser: micro-soldadura resultante de la elevada temperatura generada durante el movimiento, interacción molecular, generación de partículas por desgarradura y otros.

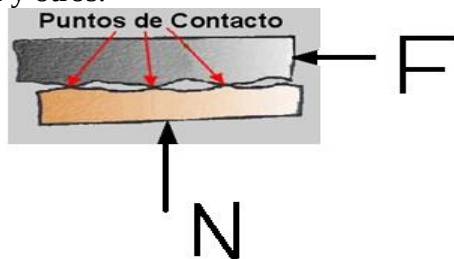


Figura 35. Fotografía macroscópica de dos superficies en contacto.

Algunos de los coeficientes de fricción se muestran a continuación en la siguiente tabla donde:

μ_s - es el coeficiente de rozamiento estático

μ_k - es el coeficiente de rozamiento cinético o dinámico

Tabla de coeficientes de rozamiento

Material	μ_s	μ_k
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Goma sobre cemento	1.0	0.8
Madera sobre madera	0.25-0.5	0.2
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.4

Madera encerada sobre nieve	0.14	0.1
Metal sobre metal lubricado	0.15	0.06
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Articulaciones del cuerpo humano	0.01	0.003
*todos los valores fueron obtenidos experimentalmente y son aproximados		

Análisis en planos inclinados

El plano inclinado es una superficie que forma un cierto ángulo θ con otro plano horizontal; este dispositivo modifica las fuerzas y se puede considerar como una máquina. También se conoce con el nombre de rampa o pendiente.

Una de las formas más sencillas de hacer subir un objeto, por ejemplo un bloque, es arrastrarlo por un plano inclinado. La fuerza que se necesita para arrastrar el bloque a lo largo de un plano inclinado perfectamente liso, es decir, en el que no actúan fuerzas de rozamiento, es menor que el peso del bloque. Por eso se dice que el plano inclinado ofrece una ventaja mecánica, pues aumenta el efecto de la fuerza que se aplica. Sin embargo, el bloque debe ser arrastrado a lo largo de una distancia mayor para conseguir la misma elevación, ya que la fuerza que es necesario ejercer para ascender el bloque por el plano inclinado es tanto menor cuanto mayor es la longitud del mismo.

El plano inclinado aparece de muchas formas, una de ellas es en forma de cuña. Con una cuña se puede elevar lentamente un objeto o rajar un tronco de madera ya que crea una fuerza mayor en ángulo recto que la fuerza que se aplica cada vez que se golpea la cuña. Un hacha es una cuña afilada sujeta a un mango; la cabeza del hacha utiliza una pequeña fuerza, el golpe del hacha, para producir una fuerza mayor que corta cuando el filo del hacha penetra separando la madera, u otro material, en dos superficies.

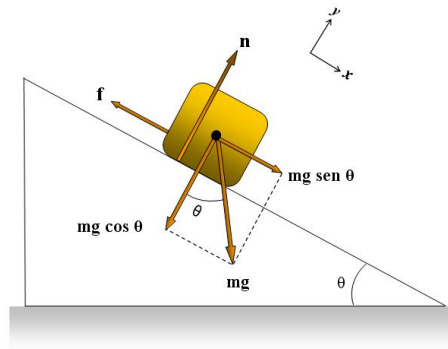
Para realizar un análisis sobre las fuerzas que intervienen en un plano inclinado, normalmente se realiza primero un diagrama de cuerpo libre y luego se aplican las leyes de Newton para hacer el estudio de equilibrio del sistema o del movimiento del cuerpo que se encuentra sobre el plano, se puede considerar la situación ideal donde no se toma en cuenta la fuerza de fricción entre las superficies en contacto y también se analiza la situación real considerando los coeficientes de fricción que caracterizan a los medios en contacto como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo1.

Se tiene un bloque que se coloca sobre una superficie rugosa inclinada respecto a la horizontal con un ángulo θ . El ángulo θ se aumenta hasta el punto cuando el bloque se mueve con respecto a la superficie ¿Cómo se relaciona el ángulo de inclinación con respecto al coeficiente de fricción estático? ¿Cómo calcularía el coeficiente de fricción cinético?

Solución:

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre para el sistema como se muestra en la figura. Aplicando la segunda ley de Newton al sistema tenemos.



$$\begin{aligned}\sum F_x &= mg \sen \theta - f_s = 0 \\ \sum F_y &= N - mg \cos \theta = 0\end{aligned}$$

Estas ecuaciones son válidas para cualquier ángulo de inclinación θ para el ángulo crítico θ_c en el que el cuerpo comienza a moverse, la fuerza de rozamiento tiene su magnitud máxima por lo que en ese punto.

$$\begin{aligned}mg \sen \theta_c &= M_s N \\ mg \cos \theta_c &= N\end{aligned}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera tenemos

$$\tan \theta_c = M_s$$

Por lo que tenemos que el valor del coeficiente de rozamiento estático es igual al valor de la tangente del ángulo para el cual el cuerpo comienza a deslizarse.

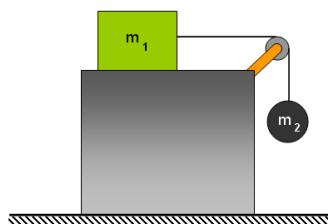
Una vez que el bloque comienza a moverse la magnitud de la fuerza de rozamiento es el valor cinético $M_k N$ que es menor que la fuerza de rozamiento estático como resultado es el plano inclinado se mantiene en el ángulo crítico el bloque acelera descendiendo por plano inclinado. Para volver a la primera ecuación de equilibrio basta con remplazar F_s por F_k y reducir el ángulo a un valor θ_c^1 tal que el bloque se desliza hacia abajo con una rapidez constante y entonces tenemos que

$$\tan \theta_c^1 = M_k$$

En el siguiente ejemplo se muestra el comportamiento de un sistema cuando dos cuerpos están unidos entre sí por una cuerda, uno de ellos se desplaza sobre una superficie rugosa y el otro cae bajo la acción de la fuerza de gravedad.

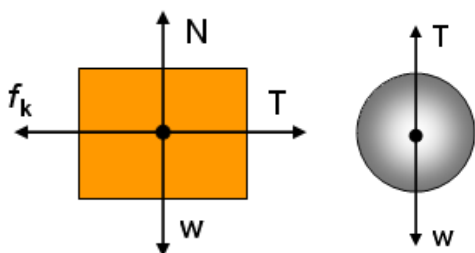
Ejemplo 2.

Una caja está unida a una pesa mediante una cuerda ligera que pasa por una polea (no hay fricción entre la cuerda y la polea), si el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y la superficie es 0.8 encontrar la aceleración de los dos objetos y la tensión en la cuerda si la masa de la caja es de 14 kg y la pesa tiene un valor de 17 kg



Solución:

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre como se muestra en la figura.



Aplicando las leyes de Newton al sistema se tiene

Para la caja

$$\sum F_x = m_1 a$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T - f_k = m_1 a$$

$$N - m_1 g = 0$$

Donde T es la tensión en la cuerda y como $f_k = \mu_k N$, tenemos

$$T = \mu_k m_1 g + m_1 a$$

Para la pelota

$$\sum F_y = m_2 a$$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

$$T = m_2 g - m_2 a$$

Igualando ambas ecuaciones con respecto a la tensión tenemos:

$$m_2 g - (\mu_k m_1 + m_1 a) = m_2 a$$

$$a = \frac{(m_2 - \mu_k m_1) g}{m_1 + m_2}$$

Sustituyendo valores tenemos

$$a = \frac{[17 \text{ kg} - 0.8(14 \text{ kg})] \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{(17 + 14) \text{ kg}}$$

$$a = 1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Por lo tanto:

$$T = (0.8)(14 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) + (14 \text{ kg}) \left(1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$= 135 \text{ N}$$

Ahora mostramos otro ejemplo que se relaciona con una situación más apegada a una situación real de ingeniería.

Ejemplo 3.

Se observa que cuando la caja del camión de volteo es elevada a un ángulo de $\theta = 25^\circ$, las máquinas expendedoras comienzan a deslizarse fuera de la caja. Determine el coeficiente de fricción estática entre las máquinas y la superficie del camión.



Solución:

Un modelo idealizado de una máquina expendedora que descansa sobre la caja del camión se muestra en la figura. Las dimensiones han sido medidas y el centro de gravedad se ha localizado. Supondremos que la máquina pesa W .

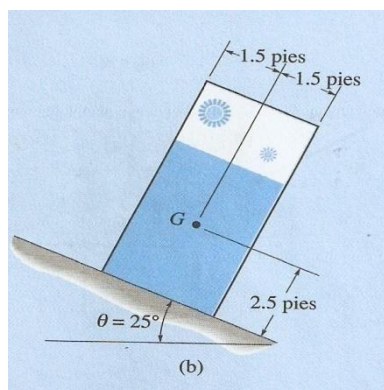
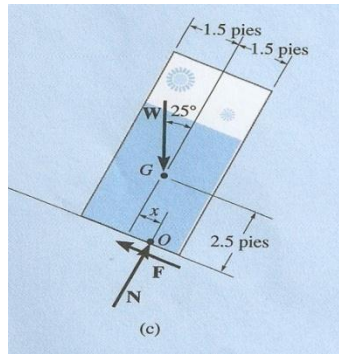


Diagrama de cuerpo libre: como se muestra en la siguiente figura, la dimensión x se usa para localizar la posición de la fuerza normal resultante N . Hay cuatro incógnitas, N, F, μ_s y x .



Ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; & W \sin 25^\circ - F &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0; & N - W \cos 25^\circ &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0; & -W \sin \theta (2.5 \text{ pies}) + W \cos \theta (x) &= 0\end{aligned}$$

Como el movimiento es inminente en $\theta = 25^\circ$, usando las dos primeras ecuaciones, tenemos:

$$\begin{aligned}F_s &= \mu_s N; & W \sin 25^\circ &= \mu_s (W \cos 25^\circ) \\ \mu_s &= \tan 25^\circ = 0.466\end{aligned}$$

Al ángulo $\theta = 25^\circ$ se le llama ángulo de reposo, y por comparación, es iguala al ángulo de fricción estática $\theta = \phi_s$. Observe a partir de los cálculos que θ es independiente del peso de la máquina expendedora, por lo que conociendo θ se tiene un método conveniente para determinar el coeficiente de fricción estática.

A partir de la ecuación con respecto a x y utilizando el ángulo $\theta = 25^\circ$, encontramos $x = 1.17$ pies. Como $1.17 \text{ pies} < 1.5 \text{ pies}$, la máquina expendedora se deslizará antes de que pueda volcarse, como se observa en la primera imagen.

Unidad I.

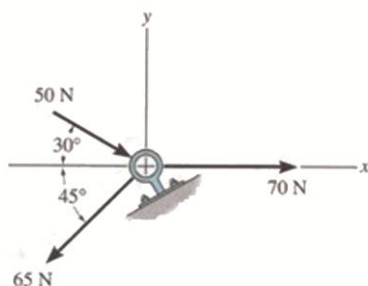
Equilibrio de la partícula.

1.- Dados las siguientes fuerzas encontrar sus componentes rectangulares respectivamente:

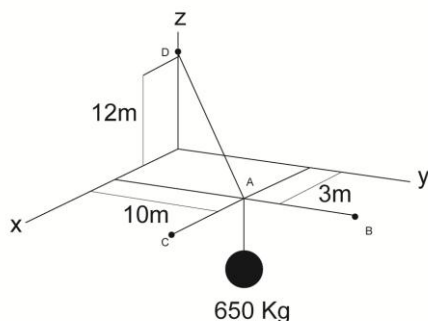
$$\vec{F} = 50 \text{ N}, \alpha = 68^\circ$$

$$\vec{F} = 280 \text{ N}, \theta = 235^\circ$$

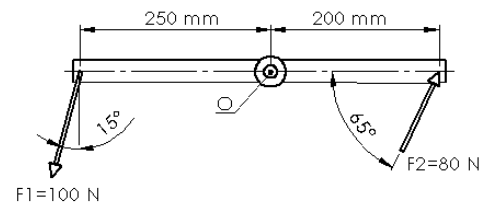
2.- Dado el sistema de fuerzas encontrar la fuerza equilibrante.



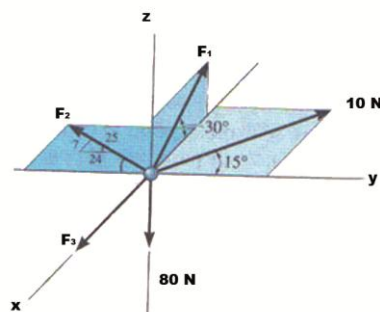
3.- Dado el sistema como se muestra en la figura determinar el valor de las tensiones que actúan sobre los cables que sostienen el cuerpo de 650Kg para que este se encuentre en equilibrio.



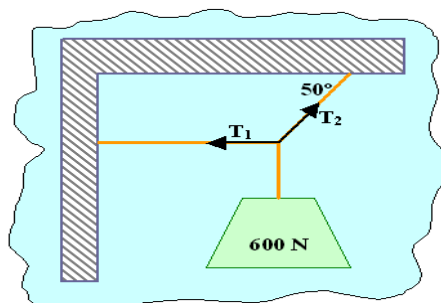
4.- Calcular la fuerza equilibrante que hay que aplicar al sistema en el punto O par que la viga de la figura este en equilibrio de translación.



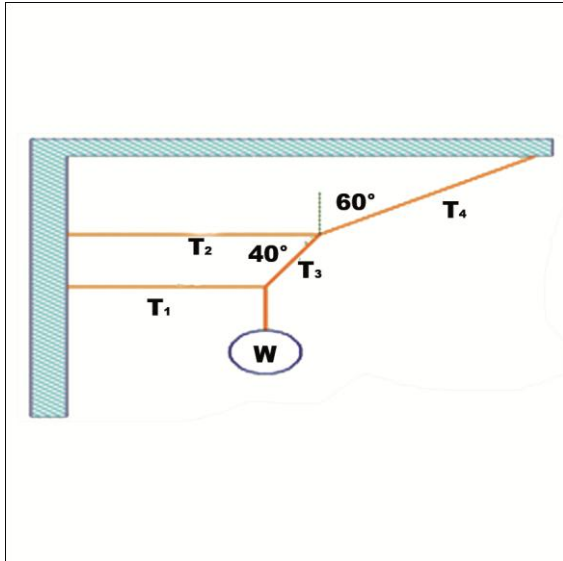
5.- Calcular el valor de las magnitudes de las fuerzas F_1 , F_2 y F_3 que actúan sobre la partícula para que el sistema este en equilibrio.



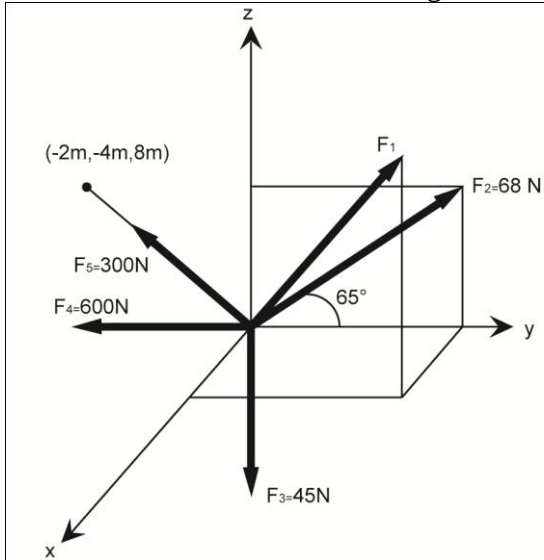
6. Para la situación mostrada en la figura, encuéntrase los valores de T_1 y T_2 , si el peso del objeto es de 600 N para que el sistema esté en equilibrio.



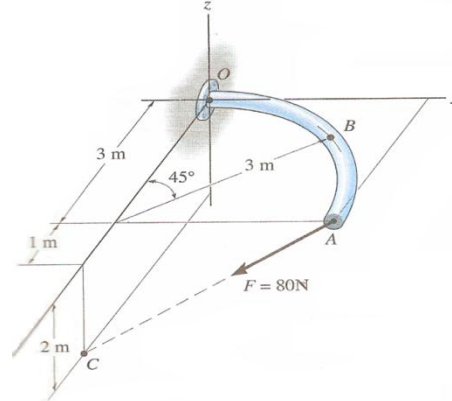
7. El objeto de la figura siguiente está en equilibrio y tiene un peso $W = 80 \text{ N}$. Encuéntrense las tensiones T_1 , T_2 , T_3 y T_4 para que el sistema esté en equilibrio.



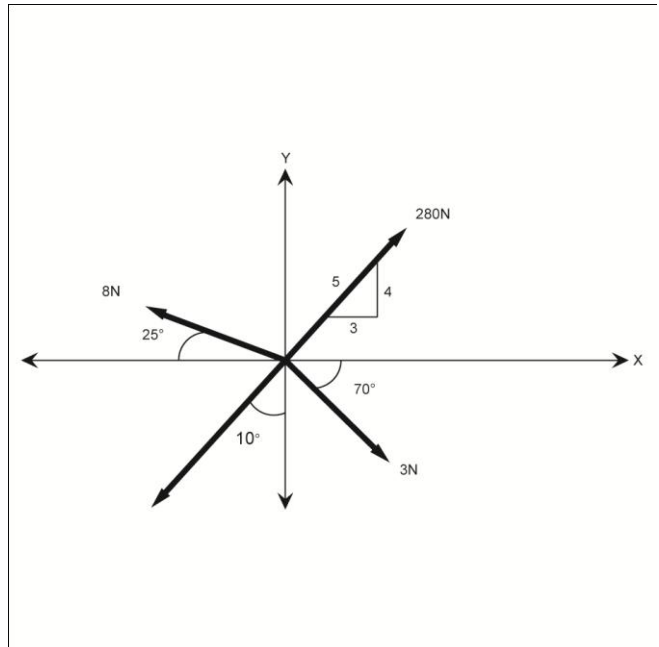
8.- Encontrar las componentes de las fuerzas, como se muestra en la figura.



9.- Encontrar las componentes de la fuerza F como se muestra en la figura.



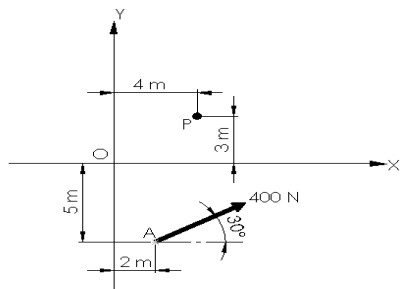
10.- Encontrar la fuerza resultante del sistema de fuerzas y expresarla con ayuda de los vectores unitarios ortogonales, si la fuerza que forma 10° con la vertical tiene un valor de 60 N .



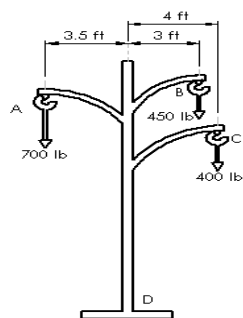
Unidad II

Equilibrio de cuerpo rígido.

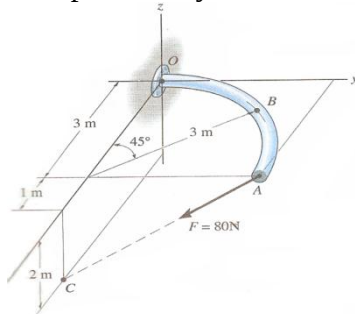
1.- Encuentra el momento de la fuerza con respecto a los puntos O y P respectivamente.



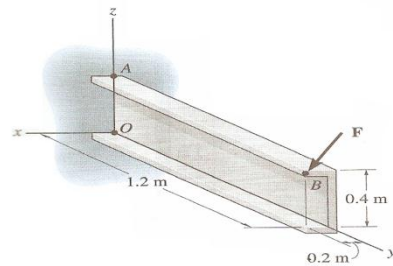
2.- Encuentra el momento resultante que se ejerce por el sistema de fuerzas sobre el cuerpo, con respecto al punto D.



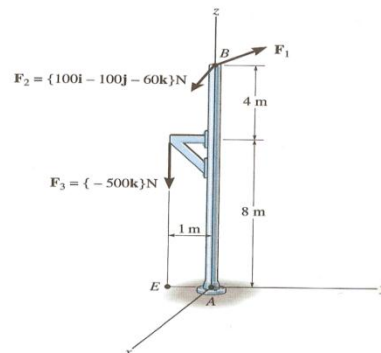
3.- Calcular el momento de la fuerza con respecto los puntos O y B.



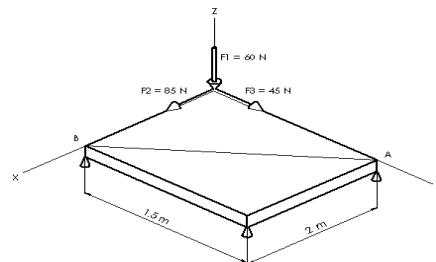
4.- Encuentra el momento con respecto a los puntos O y A respectivamente, que ejerce la fuerza $\vec{F} = (4, 8, -25)N$ sobre la viga.



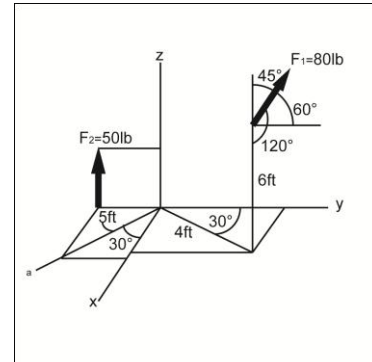
5.- Encuentra el valor de la fuerza $\vec{F}_1$ para que el momento resultante sea cero.



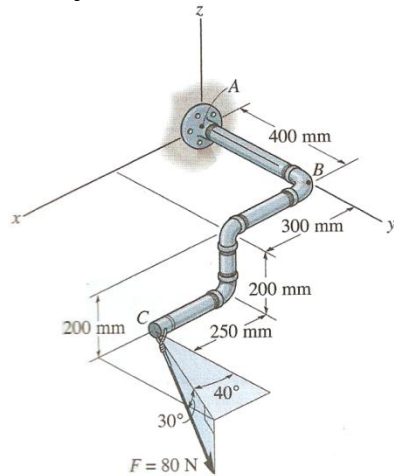
6.- Encuentra el momento que ejercen las fuerzas sobre la placa con respecto a los ejes coordenados y al eje BA respectivamente.



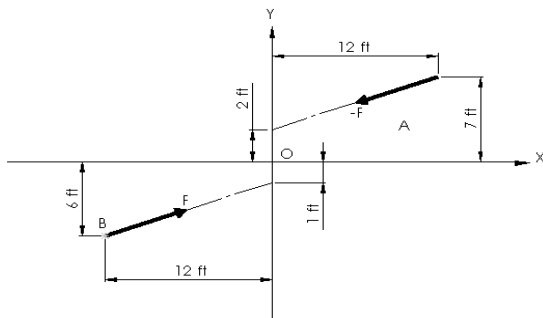
7.- Calcular el momento con respecto al eje oa de las fuerzas como se muestra en la figura.



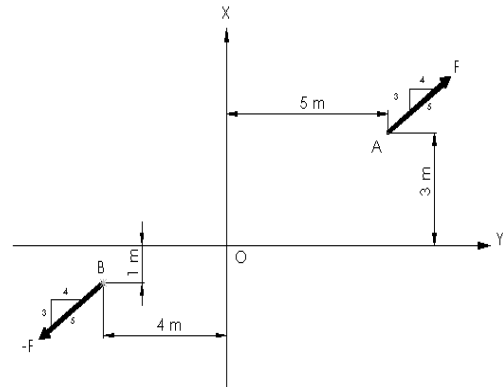
8.- En la figura se muestra una fuerza de $F = 80 \text{ N}$ que actúa sobre la tubería. Calcular el momento de dicha fuerza con respecto al eje x .



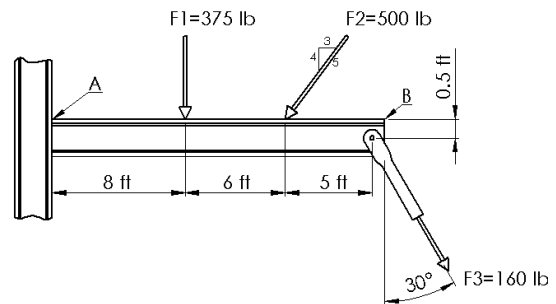
9.- Encuentre el momento del par del sistema si $F = 35 \text{ N}$ y actúa como se muestra en la figura.



10.- Encuentre el momento del par que actúa sobre un sistema si $F = 690 \text{ N}$ y esta actúa como se muestra en la figura.



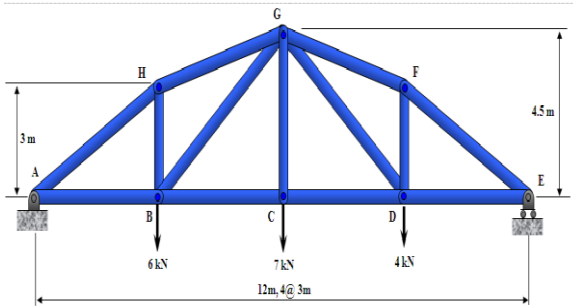
11.- Determinar las características y en qué punto, con respecto al punto B se debe aplicar una fuerza sobre la parte superior de la viga para que sus efectos sean equivalentes a los efectos del sistema de fuerzas sobre la viga que se muestra en la figura.



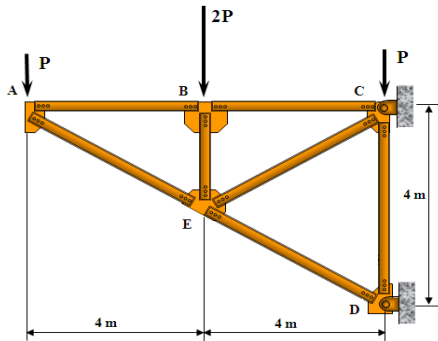
Unidad III.
Método de Análisis de Estructuras

(Método de Nodos).

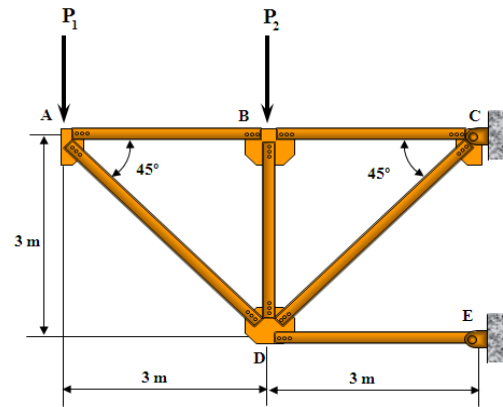
1.- Dada la estructura como se muestra en la figura. Encontrar el valor de todas las fuerzas internas que actúan en cada uno de sus miembros y establecer si están a tensión o compresión.



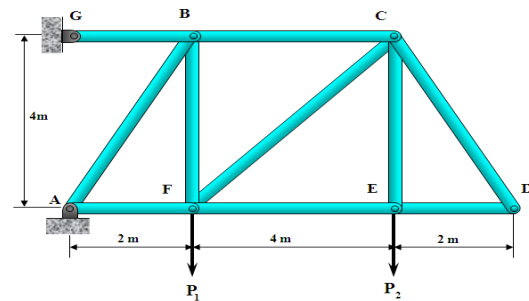
2.- Dada la estructura como se muestra en la figura. Encontrar el valor de todas las fuerzas internas que actúan en cada uno de sus miembros y establecer si están a tensión o compresión, si la carga P que actúa sobre los nodos correspondientes es de 45 N.



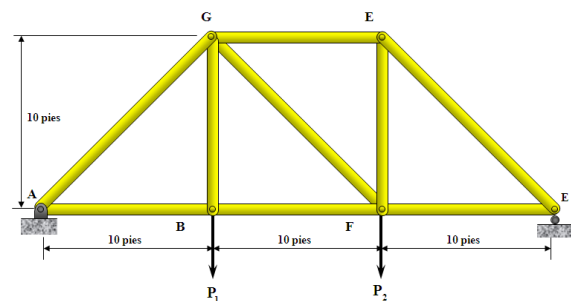
3.- Dada la estructura como se muestra en la figura. Encontrar el valor de todas las fuerzas internas que actúan en cada uno de sus miembros y establecer si están a tensión o compresión, si las carga que actúa sobre los nodos correspondientes toman los valores de $P_1 = 35 \text{ N}$ y $P_2 = 120 \text{ N}$



4.- Dada la estructura como se muestra en la figura. Encontrar el valor de todas las fuerzas internas que actúan en cada uno de sus miembros y establecer si están a tensión o compresión, si las carga que actúa sobre los nodos correspondientes toman los valores de $P_1 = 160 \text{ N}$ y $P_2 = 400 \text{ N}$

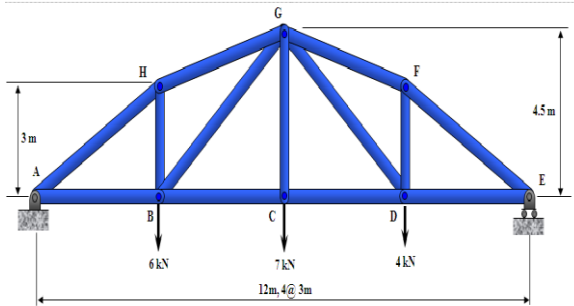


5.- Dada la estructura como se muestra en la figura. Encontrar el valor de todas las fuerzas internas que actúan en cada uno de sus miembros y establecer si están a tensión o compresión, si las carga que actúa sobre los nodos correspondientes toman los valores de $P_1 = 80 \text{ N}$ y $P_2 = 40 \text{ N}$

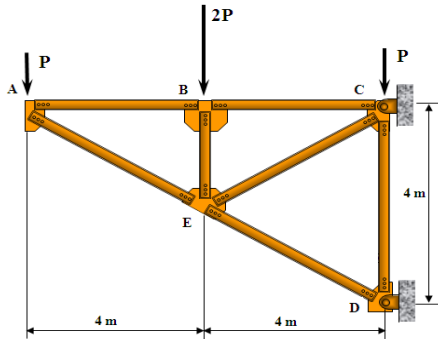


Estructuras (Método de secciones)

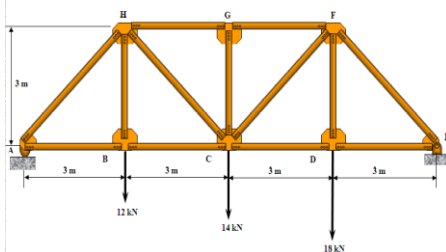
1.- Dada la estructura como se muestra en la figura. Encontrar el valor de las fuerzas internas que actúan en los miembros BC, BG y establecer si están a tensión o compresión.



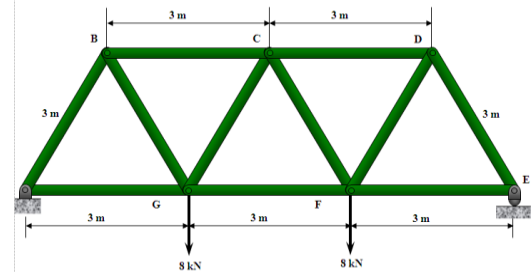
2.- Dada la estructura como se muestra en la figura. Encontrar el valor de las fuerzas internas que actúan en los miembros ED y EC. Establecer si están a tensión o compresión, si la carga P que actúa sobre los nodos correspondientes es de 95 N.



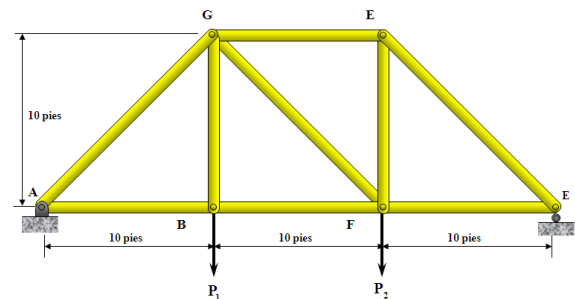
3.- Dada la estructura. Encontrar el valor de las fuerzas internas que actúan en los miembros GF, CF y CD. Establecer si están a tensión o compresión, si las cargas que actúan sobre los nodos correspondientes toman los valores como se muestra en la figura.



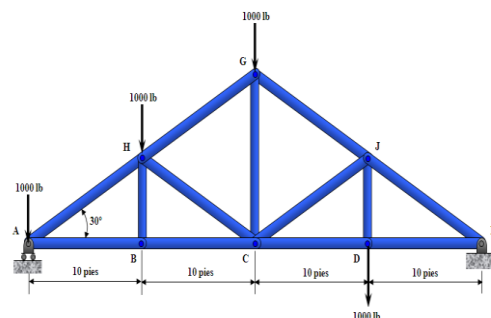
4.- Dada la estructura como se muestra en la figura. Encontrar el valor de las fuerzas internas que actúan en los miembros GF y BC. Establecer si están a tensión o compresión, si las carga que actúa sobre los nodos G y F toman los valores de $P_1 = 8 \text{ kN}$ y $P_2 = 8 \text{ kN}$.



5.- Dada la estructura como se muestra en la figura. Encontrar el valor de las fuerzas internas que actúan en los miembros GE y BF. Establecer si están a tensión o compresión, si las carga que actúa sobre los nodos B y F toman los valores de $P_1 = 180 \text{ N}$ y $P_2 = 70 \text{ N}$.

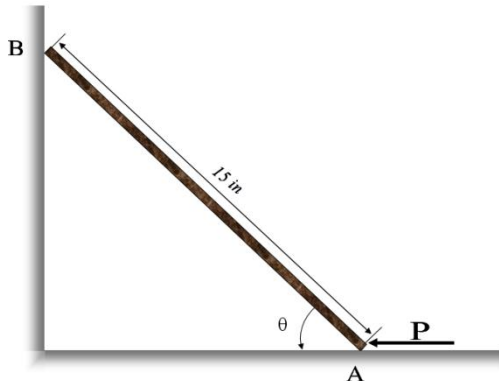


6.- Dada la estructura como se muestra en la figura. Encontrar el valor de las fuerzas internas que actúan en los miembros BC y HG. Establecer si están a tensión o compresión, las carga que actúa sobre los nodos A, H, G, C y D son de 1000 lb cada una.

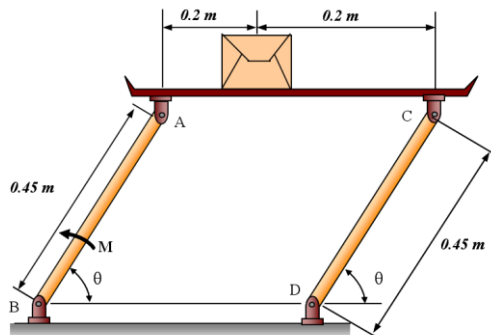


Trabajo Virtual y máquinas de baja velocidad

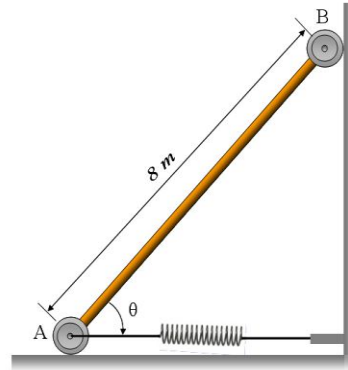
1.- Determine la magnitud de la fuerza P requerida para sostener la barra lisa de 50 kg en equilibrio cuando $\theta = 60^\circ$.



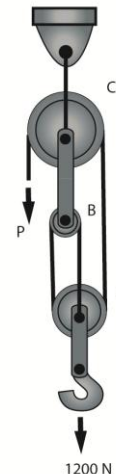
2.- Si la caja tiene una masa de 20 kg determine el ángulo θ el cual es necesario para que un momento par de 30 N.m mantenga en equilibrio a la estructura.



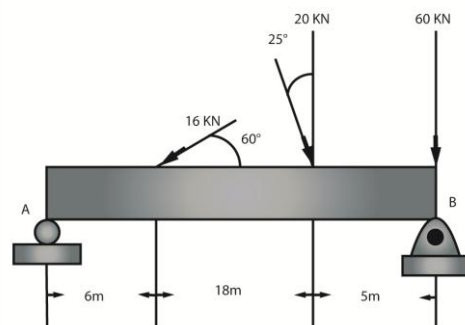
3.-Determine el ángulo θ con el cual la barra de 50 kg se encuentra en equilibrio. El resorte esta deformado cuando $\theta = 60^\circ$, si $K = 600 \frac{N}{m}$.



4. Dado el sistema de poleas. Determinar la fuerza P que hay que aplicar en la cuerda, que se requiere para que el sistema soporte una carga de 1200 N. Desprecie la fricción en el sistema.

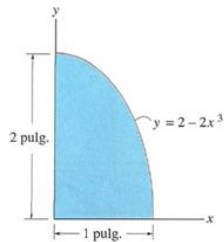


5. Determine la magnitud de las reacciones que ejercen los soportes sobre la viga como se muestra en la figura.

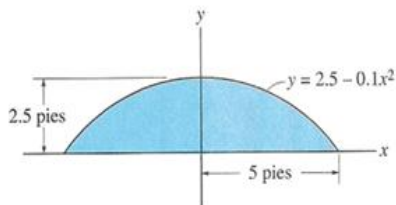


Unidad IV. Propiedades de Áreas Planas y Líneas

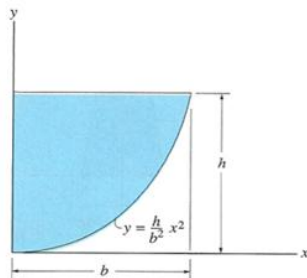
1.- Dada la placa como se muestra en la figura encontrar las coordenadas de su centroide.



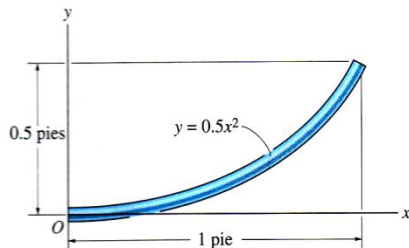
2.- Dada la placa como se muestra en la figura encontrar las coordenadas de su centroide.



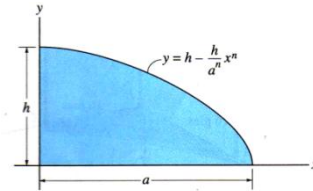
3.- Dada la placa como se muestra en la figura, encontrar las coordenadas del centro de masa si su densidad es constante.



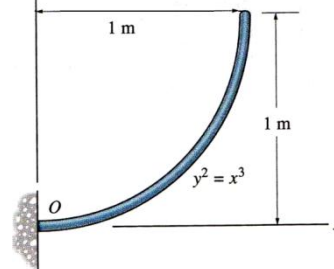
4.- Encontrar las coordenadas del centro de masa de la varilla homogénea como se muestra en la figura.



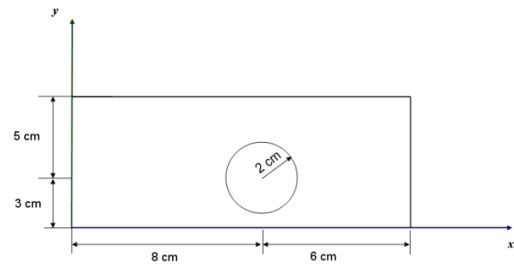
5.- Dada la placa como se muestra en la figura encontrar las coordenadas de su centroide.



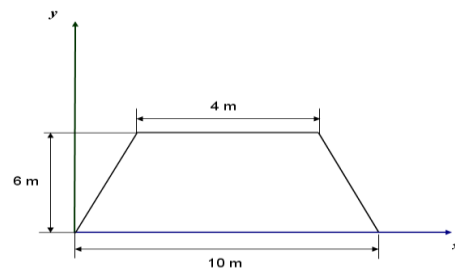
6.- De termine las coordenadas del centroide de la varilla que se muestra en la figura.



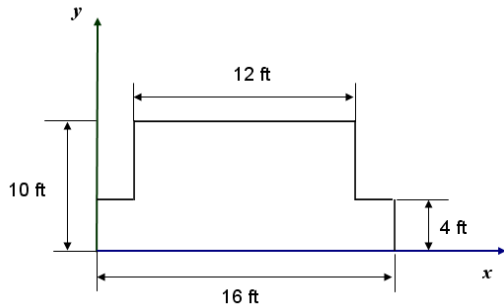
7.- Calcule el centroide del área compuesta como se muestra en la figura.



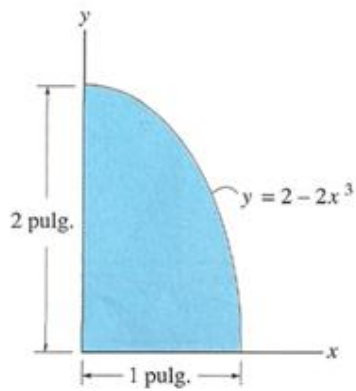
8.- Calcule el centroide del área compuesta como se muestra en la figura.



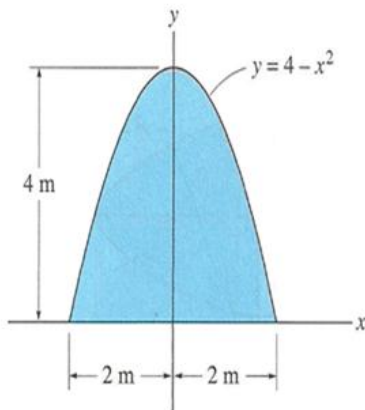
9.- Calcule el centroide del área compuesta como se muestra en la figura.



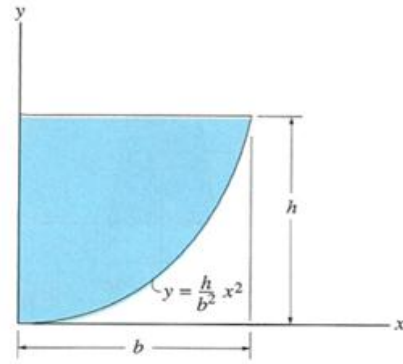
10.- Calcular I_x para la placa de la figura.



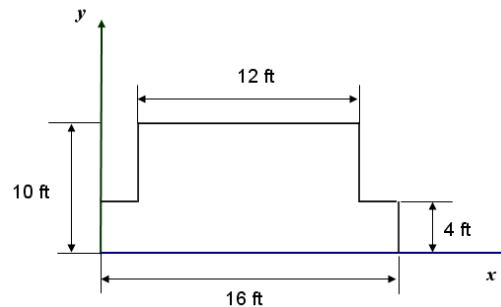
11.- Calcular los radios de giro para la placa de la figura.



12.- Calcular I_{xy} para la placa de la figura.

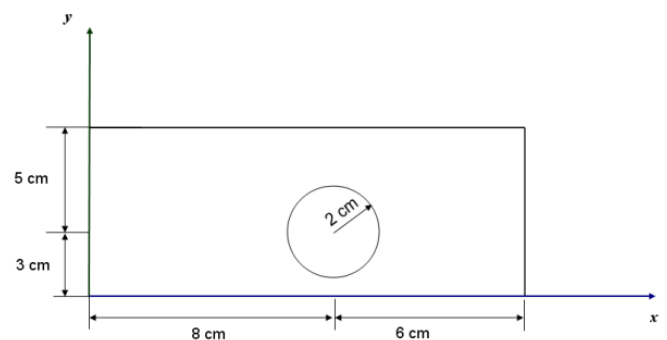


13.- Con ayuda del proceso de integración. Calcular I_x de la placa mostrada en la figura.



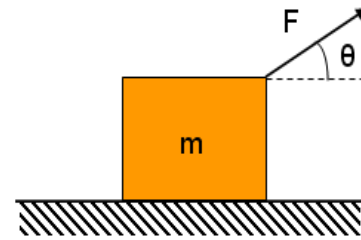
14.- Comprobar los resultados del problema anterior utilizando el teorema de los ejes paralelos.

15.- Utilizar el teorema de los ejes paralelos para calcular I_{xy} de la placa como se muestra en la figura.

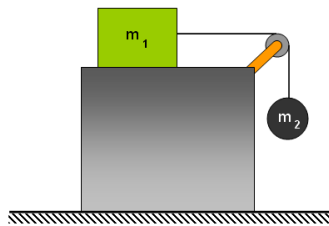


Unidad V. Fricción

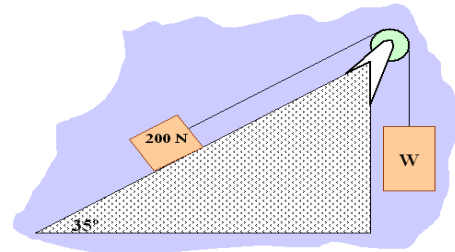
1.- Un bloque de madera de 5,0 kg se coloca en un plano inclinado ajustable de madera si el coeficiente de fricción estático entre ambas superficies es 0.4 ¿Cuál será el ángulo de inclinación para el cual, el bloque comenzara su movimiento a través del plano?



2.- Una caja está unida a una pesa mediante una cuerda ligera que pasa por una polea (no hay fricción entre la cuerda y la polea), si el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y la superficie es 0.6 encontrar la aceleración de los dos objetos y la tensión en la cuerda si la masa de la caja es de 6 kg y la pesa tiene un valor de 15 kg.



4.-Un bloque de peso de 200 N se encuentra sobre un tablón que forma un ángulo $\theta = 35^\circ$ con la horizontal y el bloque está unido a otro bloque de peso $W = 150 \text{ N}$ por medio de una cuerda ligera a través de una polea si el coeficiente de rozamiento cinético es 0.2 encontrar la tensión en la cuerda y la aceleración del sistema.

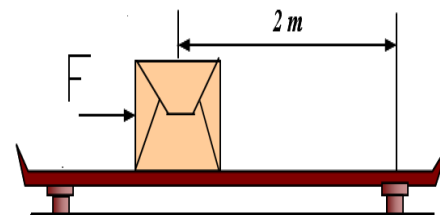


3.- Una mujer en un aeropuerto arrastra una caja de 20 kg con una rapidez constante tirando de una cuerda que forma un ángulo θ por encima de la horizontal. Si ella tira de la cuerda con una fuerza de rozamiento es de 20 N.

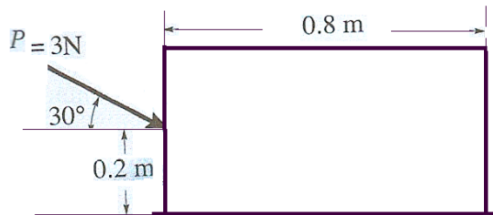
- Dibujar el diagrama de cuerpo libre sobre la caja
- ¿Cuál es el valor de θ ?
- ¿Cuál es el valor de la fuerza normal que el piso ejerce sobre la caja?

5.- Cual será la fuerza F que hay que aplicarle a la caja de 2 Kg, que viaja sobre una mesa con una aceleración de $0.5 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ constante para que se desplace una distancia de 2m, si el coeficiente de fricción cinético entre la caja y la mesa es $\mu = 0.2$.

¿Cuál será la velocidad que alcanza la caja a los 2 metros si esta parte del reposo?

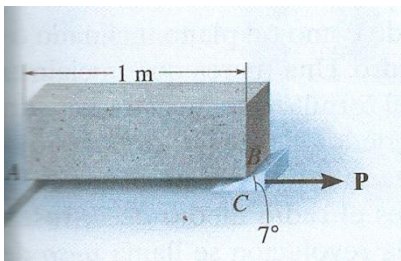


6.- La caja uniforme mostrada en la siguiente figura tiene una masa de 30 kg. Si una fuerza $P = 3\text{ N}$ se aplica a la caja, determine si esta permanece en equilibrio. El coeficiente de fricción estático es $\mu = 0.3$.



7.- Se golpea un disco hecho de una aleación de metales con una rapidez inicial de $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ este se encuentra sobre una mesa de aluminio, si el disco permanece sobre la mesa y se desliza una distancia de 12 m antes de detenerse, determine el coeficiente de rozamiento cinético entre las superficies.

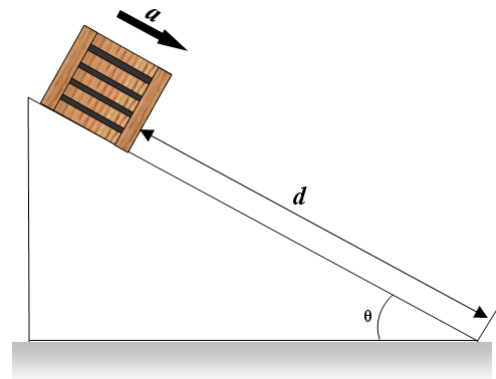
8.- La piedra uniforme que se muestra en la figura tiene una masa de 500 Kg. y es mantenida en posición horizontal usando una cuña en el punto B. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$, en las superficies de contacto, determine la fuerza P mínima necesaria para retirar la cuña. ¿Es la cuña auto bloqueante? Suponga que la piedra no desliza en el punto A.



9.- Un automóvil viaja a 80 km/h por una carretera horizontal, si el coeficiente de fricción estático entre la carretera y los

neumáticos en un día lluvioso es de 0.1 ¿Cuál es la distancia mínima que necesitará el coche para detenerse? ¿Cuál es la distancia de frenado en un día cuando la carretera está seca si el coeficiente de fricción estático es de 0.6?

10.- Un bloque desciende por un plano inclinado de 45° con rapidez constante bajo la acción de una fuerza de 15 N aplicada paralela al plano inclinado si el coeficiente de rozamiento cinético es de 0.3, determinar (a) el peso del bloque y (b) la fuerza mínima paralela al plano inclinado que permita que el bloque descienda 2m por el plano inclinado con velocidad constante.



Bibliografía.

R.C. Hibbeler. Ingeniería Mecánica “Estática”. Ed. Prentice Hall. México, XXII Edición., 2010.

Beer Ferdinand P. y E. Russell Johnston Jr. Mecánica Vectorial para Ingenieros: Estática. Editorial Mc Graw Hill.

Haberle Russell C. Mecánica para Ingenieros: Estática. Editorial Pearson Prentice Hall, 1996

Seely Ensign. Mecánica Analítica para Ingenieros. Editorial UTEHA

Bedfor, Anthony and Fowler, Guayanés. Estática para ingeniería. México, Editorial Addison Wesley. 1996.

http://es.wikipedia.org/wiki/Momento_de_fuerza

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/inercia/inercia.htm

<http://www.jfinternational.com/mf/fuerzas-friccion.html>

<http://www.monografias.com/trabajos15/coeficiente-friccion/coeficiente-friccion.shtml?monosearch>