



**GOBIERNO DE  
MÉXICO**

**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO



## **DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL**

### **B.2 Libro de Texto**

#### **Introducción a la Optimización Lineal**

**Dr. Manuel González De La Rosa**

**No dictamen  
AS-1-145/2023**

Vo.Bo

Firma y nombre de

Persona(s) Revisora(s)

**M.T.E. Claudia Georgina Santiesteban Alcántara  
M. S. H. O. Norma Rubí Baca  
Dr. Juan Carlos Contreras Ruíz**

**12 de Febrero de 2024**

## INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN LINEAL

Dr. Manuel González De La Rosa  
Instituto Tecnológico de Toluca  
[mgonzalezd@toluca.tecnm.mx](mailto:mgonzalezd@toluca.tecnm.mx)

12 de Febrero de 2024

## CONTRIBUCIÓN ACADÉMICA

El presente libro de texto se elabora con un enfoque introductorio a la optimización lineal también llamada programación lineal. Está dirigido a lectores que inician su formación en programación matemática y optimización. Con frecuencia la formación de jóvenes ingenieros en diversas universidades no sólo de México sino de todo el mundo incluye áreas de programación matemática y optimización en donde la programación lineal es uno de los temas iniciales. Una vez comprendido el enfoque y conceptos de la optimización lineal se continua con áreas como la programación entera, la programación por metas, la programación dinámica y la programación no lineal entre otros.

Las áreas de programación matemática mencionadas anteriormente se incluyen en asignaturas tales como investigación de operaciones, administración de operaciones, introducción a la programación matemática, toma de decisiones, modelos matemáticos de optimización, optimización entre otros incluidas en la formación de ingenieros industriales, químicos, en sistemas computacionales, en logística, ingeniería civil, ingeniería en computación y en licenciaturas como administración y gestión empresarial.

## DEDICATORIA

A mi esposa Ana Gabriela que siempre ha estado conmigo compartiendo sueños y proyectos. Con todo mi cariño a mis hijos Jazmín e Isaac quienes me han inspirado a realizar este proyecto.

A ti estimado estudiante deseoso de incrementar tu conocimiento para hacer más grande la Ingeniería en México, espero poder guiarte en la construcción de conocimiento con teoría, conceptos, ejemplos y ejercicios.

A ti compañero docente que compartes la pasión de construir conocimiento en los jóvenes que son el futuro de nuestro país.

## PALABRAS DE AGRADECIMIENTO

Deseo agradecer a los revisores de este texto, compañeros de trabajo y docentes de la academia de Ingeniería Industrial del Instituto Tecnológico de Toluca: Claudia Georgina Santiesteban Alcántara, Norma Rubí Baca y Juan Carlos Contreras Ruiz, sus observaciones siempre serán bien recibidas.

Finalmente, este libro de texto pudo ser posible por la gestión realizada de los directivos del Tecnológico Nacional de México quienes emiten y dan seguimiento a la convocatoria para la prestación de "Año Sabático convocatoria 1-2023" disponible para todos los compañeros docentes a nivel nacional.

## Índice

| Capítulo I. Fundamentos y conceptos teóricos                 | Página |
|--------------------------------------------------------------|--------|
| 1.1 Introducción                                             | 1      |
| 1.2 Vectores y matrices                                      | 3      |
| 1.3 Operaciones básicas de vectores y matrices               | 3      |
| 1.4 Sistemas de ecuaciones lineales                          | 12     |
| 1.5 Métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales | 14     |
| 1.6 Espacios vectoriales                                     | 15     |
| 1.7 Complejidad computacional y eficiencia algorítmica       | 16     |
| Ejercicios propuestos                                        | 20     |
| Fuentes de consulta                                          | 21     |
| <br>Capítulo II. La geometría de la optimización lineal      |        |
| 2.1 Variables de decisión y restricciones                    | 22     |
| 2.2 Conjuntos convexos                                       | 25     |
| 2.3 Envolvente y poliedro convexo                            | 29     |
| 2.4 Rayos, semirrectas y direcciones                         | 30     |
| Ejercicios propuestos                                        | 32     |
| Fuentes de consulta                                          | 33     |
| <br>Capítulo III.                                            |        |
| 3.1 Modelación y formulación                                 | 34     |
| 3.2 Primeros modelos de optimización lineal                  | 37     |
| 3.3 Aplicaciones financieras de la optimización lineal       | 39     |
| 3.4 Aplicaciones en sistemas de manufactura                  | 44     |
| 3.5 Aplicaciones en sistemas de transporte y logística       | 50     |
| 3.6 Aplicaciones para mercadotecnia                          | 54     |
| 3.7 Otras aplicaciones                                       | 56     |
| Ejercicios propuestos                                        | 58     |
| Fuentes de consulta                                          | 60     |

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| Capítulo IV Métodos de solución                                      |     |
| 4.1 El método gráfico                                                | 61  |
| 4.2 El método simplex                                                | 70  |
| 4.3 El método simplex tabular                                        | 77  |
| 4.4 El método simplex revisado                                       | 83  |
| 4.5 Método simplex de las dos fases                                  | 84  |
| 4.6 Método elipsoidal                                                | 90  |
| 4.7 Uso de software                                                  | 91  |
| Ejercicios propuestos                                                | 101 |
| Fuentes de consulta                                                  | 102 |
| <br>Capítulo V Dualidad y análisis de sensibilidad                   |     |
| 5.1 Introducción a la programación dual                              | 103 |
| 5.2 Construcción del programa lineal dual                            | 103 |
| 5.3 Teoremas y relaciones entre los problemas lineales primal y dual | 106 |
| 5.4 Método dual-simplex                                              | 113 |
| 5.5 Método primal-dual                                               | 117 |
| 5.6 Introducción al análisis de sensibilidad                         | 123 |
| 5.7 Cambios en los coeficientes de la función objetivo               | 123 |
| 5.8 Cambios en el vector de recursos                                 | 126 |
| 5.9 Cambios en las restricciones                                     | 127 |
| 5.10 Adición y eliminación de variables de decisión                  | 129 |
| Ejercicios propuestos                                                | 131 |
| Fuentes de consulta                                                  | 132 |
| <br>Capítulo VI Optimización lineal a gran escala                    |     |
| 6.1 Introducción a la optimización lineal a gran escala              | 133 |
| 6.2 Método de generación de columnas                                 | 140 |
| 6.3 Método de planos cortantes                                       | 147 |
| 6.4 Método de descomposición Dantzig-Wolfe                           | 148 |
| 6.5 Método de descomposición de Benders                              | 153 |
| Ejercicios propuestos                                                | 157 |
| Fuentes de consulta                                                  | 159 |

## Prefacio

En un entorno globalizado y de alta competitividad es imprescindible incorporar modelos, técnicas, algoritmos y métodos de optimización para la planeación y diseño de políticas y cursos de acción dentro de los procesos productivos de las empresas. No existe actualmente otra forma de obtener una solución óptima sin el uso de la programación matemática. Proveer a los futuros egresados de las distintas áreas de la ingeniería conocimientos de optimización o programación matemática les permitirá enfrentar con seguridad los retos del entorno actual.

El diseño y evaluación de políticas, la asignación de recursos y la planificación de actividades no sólo es parte de las actividades de un Ingeniero Industrial, sino de todas las demás áreas de la ingeniería por lo que es de suma importancia incorporar inicialmente la optimización lineal dentro de su formación.

En la actualidad los estudiantes de Ingeniería Industrial en las distintas universidades del mundo incorporan inicialmente la optimización lineal como área de estudio fundamental para el modelaje y optimización del proceso de toma de decisiones. Con frecuencia posteriormente a la optimización lineal se continua con el estudio de la programación entera, la programación multiobjetivo, modelos de flujo en redes y la programación por metas. La optimización lineal sirve como base para técnicas y métodos de optimización de suma importancia en la formación de futuros ingenieros.

La construcción de modelos en la ingeniería industrial es de suma importancia ya que permiten incorporar elementos de la realidad dentro del proceso de toma de decisiones y diseñar cursos de acción que permitan el uso óptimo en la asignación de recursos para alcanzar los objetivos planteados. Dentro de los modelos antes mencionados se encuentran los modelos de optimización o también conocidos como modelos de programación matemática los cuales se incluyen dentro de las asignaturas de Investigación de Operaciones I, Investigación de Operaciones II, Simulación, Administración de Operaciones I y Administración de Operaciones II todas estas asignaturas forman parte del plan de estudios actual.

El enfoque de la optimización lineal es determinístico ya que contempla parámetros establecidos por el analista. Sin embargo, los avances de hardware y software permiten realizar cambios al modelo y poder calcular nuevamente la solución obtenida con relativa facilidad y oportunidad. Los modelos con frecuencia permiten incluir procesos secuenciales en el tiempo que consideran diversos horizontes de planeación para el apoyo en el proceso de toma de decisiones. A diferencia de otros enfoques de optimización que incorporan variables aleatorias en la modelación y formulación forman parte de técnicas, métodos y conceptos más avanzados dentro de la programación matemática.

Un modelo matemático de optimización lineal está formado por variables de decisión, restricciones y función objetivo. Las restricciones y función objetivo son funciones estrictamente lineales. Para encontrar una solución óptima, si es que existe, se requiere de conceptos base de álgebra lineal, geometría en el espacio  $n$ -dimensional, métodos y algoritmos de optimización específicos. La optimización lineal como área de las matemáticas tiene sus orígenes en el siglo XIX y continúa evolucionando gracias a las tecnologías de información y comunicación, así como con los avances de software y hardware actuales.

Una solución óptima, si es que existe, es aquella que maximiza o minimiza la función objetivo. Una solución factible es aquella que satisface el conjunto de restricciones planteadas en el modelo matemático construido, por lo tanto, una solución óptima es a la vez factible. Cabe mencionar que la cantidad de soluciones factibles forman un conjunto convexo y pueden ser una cantidad exorbitante de ellas.

El libro de texto propuesto proporcionará los elementos fundamentales teóricos y prácticos para el análisis de un entorno real de toma de decisiones, la construcción de modelos, la aplicación del algoritmo de optimización, el análisis de la solución obtenida, así como su interpretación en apoyo para la toma de decisiones. La consulta de material bibliográfico y artículos de investigación publicados en inglés permite la incorporación de conocimiento actualizado y de vanguardia ya que la optimización lineal como todas las áreas del conocimiento humano reportan avances constantes en el cuerpo del conocimiento.

## Capítulo I. Fundamentos y conceptos teóricos

Objetivo: Proporcionar al lector los conceptos teóricos y fundamentos básicos para comprender y aplicar los métodos, principios y algoritmos de la optimización lineal.

### 1.1 Introducción

En este capítulo se incluyen subtemas de álgebra lineal, operaciones básicas de vectores y matrices, sistemas de ecuaciones lineales, métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, inversión y factorización de matrices. El estudio de los espacios vectoriales provee una base robusta para la comprensión de los temas del capítulo II. También se considera incorporar el estudio de conceptos para analizar la eficiencia de los algoritmos y complejidad computacional.

#### Modelo de programación lineal

Un modelo es una representación abstracta de la realidad. El lector con seguridad ya ha tenido experiencia con modelos, desde un mapa, una maqueta hasta una ecuación que relaciona dos o más variables. Un mapa se considera un modelo físico representado en papel de lo que existe en la realidad, montañas, valles, ríos, carreteras, poblados y ciudades se representan con la simbología apropiada en una imagen. Una maqueta también es un modelo físico que representa una casa o edificio y que permite visualizar las dimensiones de las habitaciones, así como la exposición a la luz natural del sol lo que permite el análisis para poder mejorar el diseño de la construcción. La ecuación  $A = \pi r^2$  permite relacionar el área de un círculo con su radio haciendo uso de la constante pi. Con un poco de reflexión el lector puede identificar que los dos ejemplos anteriores son algunos de los muchos modelos que con seguridad ha tenido experiencia durante su formación escolar.

En ingeniería y en la investigación de operaciones los modelos de optimización lineal forman parte inicial de la formación en optimización o programación matemática. Estos modelos permiten representar por medio de ecuaciones y desigualdades las relaciones entre las variables. El modelo permite analizar y representar las relaciones relevantes para el analista, posteriormente se aplican métodos o algoritmos de solución para encontrar la solución óptima factible o declarar que no existe solución.

Las funciones en matemáticas considerando un orden creciente de complejidad tenemos la función constante, la ecuación lineal, la ecuación cuadrática, la ecuación cúbica, la ecuación polinomial, las funciones trascendentes, ecuaciones diferenciales. Todas las anteriores expresadas con dos variables (x, y), con tres variables (x, y, z) o con mayor número de variables.

Si generalizamos aún más un modelo matemático puede estar formado por una sola función o por varias de ellas, puede diferentes tipos de funciones con diferentes variables. Empecemos con un modelo sencillo de optimización lineal.

Un ejemplo de modelo de optimización lineal es el siguiente:

#### Ejemplo 1. Modelo de optimización lineal

$$\text{Max } z = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3$$

Sujeto a:

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 120$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 180$$

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 300$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

El modelo anterior contiene las variables siguientes:  $z, x_1, x_2, x_3$ . Contiene una sola ecuación la función objetivo  $z = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3$  y tres desigualdades, la primera desigualdad es:  $2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 120$ . Las expresiones Max, Sujeto a, y  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$  caracterizan al modelo lineal como un modelo de optimización lineal, Max indica el sentido de optimización ya que se desea maximizar el valor de  $z$  al cambiar los valores de  $x_1, x_2, x_3$ . Sujeto a: indica las restricciones que se deben cumplir expresadas como desigualdades y finalmente,  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$  indica que los valores de las variables deben ser valores reales positivos.

El modelo anterior puede escribirse de forma matricial.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [3 \quad 8 \quad 5] \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 120 \\ 180 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Siendo  $\mathbf{A}$  una matriz;  $\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  son vectores;  $z$  corresponde a un escalar. Note el uso de negritas y cursivas para indicar la notación matricial. Con lo anterior el modelo de optimización lineal en notación matricial queda como:

$$\text{Max } \mathbf{c}\mathbf{x},$$

Sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geq 0.$$

La notación matricial anterior hace uso de vectores y matrices. Los métodos de análisis, operaciones y métodos de solución forman parte del álgebra lineal que a su vez forma parte de las matemáticas, igual como la aritmética, la geometría, la trigonometría, la geometría analítica, la estadística, la probabilidad, el cálculo diferencial y el cálculo integral entre otras más.

## 1.2 Vectores y matrices

Una constante o un solo valor en álgebra lineal se representa con un escalar. Los vectores están formados por un conjunto de escalares o por un conjunto de variables. Una matriz está formada por renglones y columnas donde cada renglón o columna puede identificarse como un vector.

Retomando el ejemplo 1 expresado en notación matricial  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  son vectores columna;  $\mathbf{c}$  es un vector renglón,  $\mathbf{A}$  una matriz.

Los vectores y matrices tienen dimensión. Para el ejemplo 1 los vectores  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  tienen dimensión (3, 1) es decir tres renglones y una sola columna. La dimensión del vector  $\mathbf{c}$  es (1, 3) un solo renglón y tres columnas. Finalmente, la dimensión de la matriz  $\mathbf{A}$  es de (3, 3) tres renglones y tres columnas. Las dimensiones de los vectores y matrices son importantes ya que las operaciones aritméticas en vectores y matrices pueden realizarse siempre y cuando las dimensiones sean las adecuadas. Si las dimensiones no son adecuadas entonces no es posible realizar la operación indicada.

### Componentes de vectores y matrices

Los componentes del vector  $\mathbf{x}$  son  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . Note el uso de negritas y cursivas para denotar el vector y el uso de subíndices para los componentes. Para el caso de las matrices se requiere de dos subíndices, para denotar los componentes de la matriz  $\mathbf{A}$  tenemos  $a_{ij}$ , donde  $i$  se refiere al renglón y  $j$  a la columna. Como ejemplo considere el vector  $\mathbf{c}$  y la matriz  $\mathbf{A}$ , entonces  $c_2 = 8$ ,  $a_{32} = 6$ .

## 1.3 Operaciones básicas de vectores y matrices

### Igualdad de vectores

Dos vectores son iguales si ambos son vectores renglón (columna) y todos sus componentes son exactamente los mismos. Dos matrices son iguales si sus componentes son iguales.

### Suma y resta

Considere  $k$  es un escalar con valor de 7,  $k = 7$ ; así como los vectores y matrices siguientes:

$$s = [0 \quad -1]$$

$$t = [6 \quad 2]$$

$$u = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La suma y resta de vectores se hacen componente a componente. Los componentes del vector  $s$  son  $s_1 = 0$  y  $s_2 = -1$ . Los componentes del vector  $t$  son  $t_1 = 6$  y  $t_2 = 2$ . Si se desea calcular  $r = s + t$  entonces:

$$r = [s_1 + t_1 \quad s_2 + t_2] = [0 + 6 \quad -1 + 2] = [6 \quad 1]$$

El vector  $r$  tiene las mismas dimensiones que los vectores  $s$  y  $t$ .

Si ahora se desea calcular  $w = u - v$  tenemos:

$$w = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 - 4 \\ 2 - 5 \\ 0 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Para poder realizar la suma y/o resta las dimensiones de los vectores deben ser iguales. La operación  $y = r + w$  no está definida ya que los vectores tienen dimensiones diferentes.

La suma y resta de matrices solo está definida si ambas tienen las mismas dimensiones, es decir el mismo número de renglones y el mismo número de columnas. La suma y resta se hace componente con componente y el resultado es una nueva matriz

## Multiplicación

La multiplicación de un vector por un escalar también se hace componente a componente, para calcular  $p = ku$ . El operador  $*$  significa multiplicación.

$$p = k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 * -3 \\ 7 * 2 \\ 7 * 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de un escalar por una matriz es similar al caso anterior solo que se consideran todos los componentes, entonces tenemos:

$$Q = k * A = 7 * \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 * 7 & 1 * 7 & 7 * 7 \\ 1 * 7 & 5 * 7 & 1 * 7 \\ 4 * 7 & 6 * 7 & 1 * 7 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 49 \\ 7 & 35 & 7 \\ 28 & 42 & 7 \end{bmatrix}$$

En la multiplicación de dos vectores se tienen dos casos:

Caso 1. Producto vectorial da como resultado un nuevo vector que es perpendicular a los otros dos. Si se desea calcular el producto vectorial de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es el vector  $\mathbf{h}$  con componentes i, j, k tal que:

$$\mathbf{h} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \det \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = 12\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 23\mathbf{k}$$

$$\mathbf{h} = 12\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 23\mathbf{k}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ -23 \end{bmatrix}$$

Donde es necesario calcular los determinantes ( $\det$ ) de las submatrices indicadas. Observe que los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  también se pueden expresar como  $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ . Durante el presente texto no se requiere del producto vectorial, se incluye con efectos de diferenciar la multiplicación de vectores.

Caso 2. Producto escalar, también conocido como producto punto y nos da como resultado un número real. Si tenemos dos vectores  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  y deseamos calcular el producto escalar el vector  $\mathbf{c}$  debe ser un vector renglón de dimensiones (1, n) y el renglón  $\mathbf{d}$  un vector columna de dimensiones (n, 1) observe que el valor de n es el mismo y se acostumbra colocar primero el vector renglón. El producto escalar queda definido como:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \sum_{i=1}^n c_i d_i$$

Ejemplo. Calcule el producto escalar  $\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}$

$$\mathbf{g} = [-2 \quad 8 \quad 7]$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}$$

$$f = \sum_{i=1}^n g_i h_i$$

$$f = g_1 * h_1 + g_2 * h_2 + g_3 * h_3$$

$$f = (-2 * -3) + (8 * 2) + (7 * 0)$$

$$f = 6 + 16 + 0 = 22$$

$$f = 22$$

Cabe mencionar que

$$g \cdot h = h \cdot g$$

Durante el presente texto se usa principalmente el producto escalar de dos vectores.

En base a lo anterior tenemos que:

1.  $u + 0 = 0$
2.  $0 * u = 0$
3.  $u + v = v + u$
4.  $(u + v) + w = u + (v + w)$
5.  $k * (u + v) = k * u + k * v$

La multiplicación de dos matrices  $A$ ,  $Q$  genera una nueva matriz  $R$  y puede realizarse si las dimensiones de ambas matrices son compatibles ya que se requiere calcular el producto escalar para cada componente  $R_{ij}$  de la nueva matriz al tomar el renglón  $i$  de  $A$  y la columna  $j$  de  $Q$ .

$$R = A * Q$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 14 & 7 & 49 \\ 7 & 35 & 7 \\ 28 & 42 & 7 \end{bmatrix}$$

El cálculo de  $R_{11}$  es el producto escalar del primer renglón de  $R$  con la primera columna de  $Q$ :

$$R_{11} = [2 \quad 1 \quad 7] * \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$R_{11} = (2 * 14) + (1 * 7) + (7 * 28)$$

$$R_{11} = 28 + 7 + 196 = 231$$

Para calcular  $R_{21}$  se calcula el producto escalar del segundo renglón de  $R$  con la primera columna de  $Q$ . De forma similar se calculan todos los demás componentes de  $R$  entonces:

$$R = A * Q$$

$$R = \begin{bmatrix} 231 & 343 & 154 \\ 77 & 224 & 91 \\ 126 & 280 & 245 \end{bmatrix}$$

### Tipos de matrices

1. Matriz cuadrada, aquella en la que el número de renglones  $n$  es igual al número de columnas  $m$ ,  $n=m$ .
2. Matriz rectangular, tiene número distinto de renglones y columnas  $n \neq m$ .
3. Matriz 0, aquella en la que todos sus componentes  $a_{ij}$  son 0
4. Matriz diagonal, es una matriz cuadrada cuyos componentes son 0 excepto en la diagonal principal. La diagonal principal son los componentes  $a_{ij}$  en la que  $i=j$ .
5. Matriz identidad  $I$ . Es una matriz diagonal en la que los componentes de la diagonal principal son 1.

### Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Cuadrada

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz rectangular

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz 0

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal superior

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal inferior

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidad

Note que:

1.  $A + \text{matriz } 0 = A$
2.  $0 * A = \text{matriz } 0$
3.  $A * I = I * A = A$
4.  $A * A = A^2$
5.  $A + Q = Q + A$
6.  $(A + Q) + R = A + (Q + R)$
7.  $k * (A + Q) = k * A + k * Q$
8.  $(A * Q) * R = A * (Q * R)$
9.  $A * (Q + R) = A * Q + A * R$
10.  $(A + Q) * R = A * R + Q * R$

## Inversa de una matriz

Si consideramos la propiedad  $A \cdot I = A$ , ¿Existe una matriz  $D$  tal que  $A \cdot D = I$ ? A la matriz  $D$ , si existe, se le denomina matriz inversa de  $A$  y se denota como  $D = A^{-1}$ .

$$A \cdot D = I$$

$$A \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recuerde que calcular cada componente  $D_{ij}$  requiere del producto escalar del vector renglón  $i$  de la matriz  $A$  con el vector columna  $j$  de la matriz  $D$ . Encontrar la matriz  $D$  requiere de resolver un sistema de ecuaciones lineales formado por 9 ecuaciones y 9 incógnitas cada incógnita es cada componente  $D_{ij}$ .

La primera ecuación es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \\ D_{31} \end{bmatrix} = I_{11} = 1$$
$$2D_{11} + D_{21} + 7D_{31} = I_{11} = 1$$

Al proceder con los demás componentes  $D_{ij}$  tenemos el sistema de ecuaciones completo:

Primer renglón

$$2D_{11} + D_{21} + 7D_{31} = I_{11} = 1$$

$$2D_{12} + D_{22} + 7D_{32} = I_{12} = 0$$

$$2D_{13} + D_{23} + 7D_{33} = I_{13} = 0$$

Segundo renglón

$$D_{11} + 5D_{21} + D_{31} = I_{21} = 0$$

$$D_{12} + 5D_{22} + D_{32} = I_{22} = 1$$

$$D_{13} + 5D_{23} + D_{33} = I_{23} = 0$$

### Tercer renglón

$$4D_{11} + 6D_{21} + D_{31} = I_{31} = 0$$

$$4D_{12} + 6D_{22} + D_{32} = I_{32} = 0$$

$$4D_{13} + 6D_{23} + D_{33} = I_{33} = 1$$

Para que el sistema anterior tenga solución es necesario que alguna de las condiciones siguientes se cumpla:

1. Que los vectores renglón de la matriz  $A$  sean independientes.
2. Calcular el determinante de la matriz  $A$ . Si el determinante de  $A$  es distinto de cero entonces  $A$  es invertible y por lo tanto la matriz  $D$  es única.

Para invertir la matriz  $A$  se aplica el método de la matriz aumentada también conocido como el método de la matriz adjunta, aunque existen otros métodos tales como el método de Gauss o el método de los determinantes.

### Método de la matriz aumentada o matriz adjunta

Para encontrar la matriz  $D = A^{-1}$  escribimos la matriz  $A$  y como adjunta la matriz  $I$  y así formar la matriz  $G$ ,  $G = (A | I)$ , matricialmente el operador  $|$  se usa para separar las matrices originales. Note que  $G$  es una matriz “ampliada” formada por las matrices  $A$ ,  $I$ .

$$G = A | I = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

El método de la matriz aumentada consiste en realizar operaciones por renglón y transformar cada componente de la matriz aumentada  $G$  y obtener una nueva matriz  $H$  tal que:

$$H = I | D = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ 0 & 1 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ 0 & 0 & 1 & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{array} \right)$$

Note que en la matriz  $D = A^{-1}$  aparecerá a la derecha de la matriz  $H$

Se procede por columnas haciendo operaciones elementales de renglón. Las operaciones elementales de renglón son:

- Multiplicar un renglón de la matriz por un número real distinto de cero
- Sumar el múltiplo de un renglón de la matriz a otro renglón
- Intercambiar dos renglones

Primero se calcula el 1 de la diagonal principal y después los ceros, a estos componentes se les llaman "pivote". Para la primera columna de  $G$ , primero hacemos el 1 en el componente  $G_{11}=2$ , esto se logra al multiplicar todo el renglón 1 por  $1/2$ . Entonces el renglón 1 nuevo ( $R1n$ ) es el renglón 1 multiplicado por  $1/2$ . Es decir, primero hacemos el "pivote".

$R1n = \frac{1}{2} * R1$  : (Renglón 1 nuevo =  $\frac{1}{2} * \text{Renglón 1 viejo}$ )

$$\begin{array}{l} R1 \\ R2 \\ R3 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

El operador  $\rightarrow$  significa "equivalente", ya que es un error usar el símbolo de igualdad ya que las matrices al realizar operaciones de renglón se transforman y no son iguales, son matrices equivalentes.

Ahora corresponde hacer 0 el componente  $G_{21}=1$ . Usamos como "pivote" el valor actual de  $G_{11}=1$  por lo que el renglón 2 nuevo ( $R2n$ ) se obtiene al restarle el renglón 1 actual.

$R2n = R2 - R1n$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1-1 & 5-\frac{1}{2} & 1-\frac{7}{2} & 0-\frac{1}{2} & 1-0 & 0-0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora corresponde hacer 0 el componente  $G_{31}=4$ . Usamos nuevamente como "pivote" el valor actual de  $G_{11}=1$ , por lo que el renglón 3 nuevo ( $R3n$ ) se obtiene al multiplicar el  $R1$  actual por  $-4$  y sumarlo al renglón 3 actual.

$R3n = -4R1 + R3$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -4+4 & -2+6 & -14+1 & -2+0 & 0+0 & 0+1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -13 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora corresponde hacer 1, el "nuevo pivote", el componente  $G_{22}=9/2$ . Por lo que el renglón 2 nuevo ( $R2n$ ) se obtiene al multiplicar el  $R2$  actual por  $2/9$ .

$R2n = 2/9R2$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -13 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} * 0 & \frac{2}{9} * \frac{9}{2} & \frac{2}{9} * -\frac{5}{2} & \frac{2}{9} * -\frac{1}{2} & \frac{2}{9} * 1 & \frac{2}{9} * 0 \\ 0 & 4 & -13 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 4 & -13 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora corresponde hacer 0 el componente  $G_{32}=4$ . Por lo que el renglón 3 nuevo ( $R3n$ ) se obtiene al multiplicar el  $R2$  actual por  $-4$  y sumarlo al  $R3$  actual.

$R3n = -4R2 + R3$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 4 & -13 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0+0 & -4+4 & \frac{20}{9}-13 & \frac{4}{9}-2 & -\frac{8}{9}+0 & 0+1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{97}{9} & -\frac{14}{9} & -\frac{8}{9} & 1 \end{array} \right)$$

Ahora corresponde hacer 1, el “nuevo pivote”, el componente  $G_{33}=-97/9$ . Por lo que el renglón 3 nuevo (R3n) se obtiene al multiplicar el R3 actual por  $-9/97$ .

$$R3n = -9/97R3$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{97}{9} & -\frac{14}{9} & -\frac{8}{9} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{9}{97} * 0 & -\frac{9}{97} * 0 & -\frac{9}{97} * -\frac{97}{9} & -\frac{9}{97} * -\frac{14}{9} & -\frac{9}{97} * -\frac{8}{9} & -\frac{9}{97} * 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{97} & \frac{8}{97} & -\frac{9}{97} \end{array} \right)$$

Ahora corresponde hacer 0 el componente  $G_{23}=-5/9$ . Por lo que el renglón 2 nuevo (R2n) se obtiene al multiplicar el R3 actual por  $5/9$  y sumarlo al R2 actual.

$$R2n = 5/9R3 + R2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{97} & \frac{8}{97} & -\frac{9}{97} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0+0 & 0+1 & \frac{5}{9}-\frac{5}{9} & \frac{70}{873}-\frac{1}{9} & \frac{40}{873}+\frac{2}{9} & -\frac{5}{97}+0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{97} & \frac{8}{97} & -\frac{9}{97} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{97} & \frac{26}{97} & -\frac{5}{97} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{97} & \frac{8}{97} & -\frac{9}{97} \end{array} \right)$$

Ahora corresponde hacer 0 el componente  $G_{13}=7/2$ . Por lo que el renglón 1 nuevo (R1n) se obtiene al multiplicar el R3 actual por  $-7/2$  y sumarlo al R1 actual.

$$R1n = -7/2R3 + R1$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{97} & \frac{26}{97} & -\frac{5}{97} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{97} & \frac{8}{97} & -\frac{9}{97} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0+1 & 0+\frac{1}{2} & -\frac{7}{2}+\frac{7}{2} & -\frac{49}{97}+\frac{1}{2} & -\frac{28}{97}+0 & \frac{63}{194}+0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{97} & \frac{26}{97} & -\frac{5}{97} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{97} & \frac{8}{97} & -\frac{9}{97} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{194} & -\frac{28}{97} & \frac{63}{194} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{97} & \frac{26}{97} & -\frac{5}{97} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{97} & \frac{8}{97} & -\frac{9}{97} \end{array} \right)$$

Finalmente corresponde hacer 0 el componente  $G_{12}=1/2$ . Por lo que el renglón 1 nuevo (R1n) se obtiene al multiplicar el R2 actual por  $-1/2$  y sumarlo al R1 actual.

$$R1n = -1/2R2 + R1$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{194} & -\frac{28}{97} & \frac{63}{194} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{97} & \frac{26}{97} & -\frac{5}{97} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{97} & \frac{8}{97} & -\frac{9}{97} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0+1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0+0 & \frac{3}{194}-\frac{1}{194} & -\frac{13}{97}-\frac{28}{97} & \frac{5}{194}+\frac{63}{194} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{97} & \frac{26}{97} & -\frac{5}{97} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{97} & \frac{8}{97} & -\frac{9}{97} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{97} & -\frac{41}{97} & \frac{34}{97} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{97} & \frac{26}{97} & -\frac{5}{97} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{97} & \frac{8}{97} & -\frac{9}{97} \end{array} \right)$$

$$D = A^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{97} \begin{bmatrix} 1 & -41 & 34 \\ -3 & 26 & -5 \\ 14 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

El procedimiento anterior no requiere de métodos matemáticos avanzados ya que sólo se aplica la aritmética, sin embargo, la cantidad de cálculos a realizar es considerable y debe hacerse con cuidado ya que la posibilidad de error es importante. Se recomienda el uso de números fraccionarios para reducir la posibilidad de error debido al redondeo de las cifras.

## 1.4 Sistemas de ecuaciones lineales

El sistema de ecuaciones lineales más simple es aquel que tiene dos ecuaciones y dos variables, tal como el sistema siguiente:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Donde  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  por lo que el sistema anterior puede escribirse matricialmente como:  $Ax = b$ .

Los componentes de las matrices y vectores anteriores son números reales por lo que pertenecen a  $\mathbb{R}$ . Ya que sólo se tienen dos variables o incógnitas (x, y) el sistema anterior está en  $\mathbb{R}^2$ , al sistema cartesiano en dos dimensiones (x, y).

El sistema 1 está formado por dos rectas, la primera  $a_{11}x + a_{12}y = b_1$  y la segunda  $a_{21}x + a_{22}y = b_2$  para que el sistema tenga solución es necesario encontrar valores (x, y) que satisfagan ambas ecuaciones. El valor encontrado (x, y) pertenece a ambas rectas y es el punto en  $\mathbb{R}^2$  en el cual se intersectan. Recuerde que dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente entonces el sistema no tendrá solución ya que no tendrán un punto (x, y) en común.

Al tratar de resolver el sistema:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Tenemos:

1. Si  $a_{12} = 0$ , entonces  $x = b_1 / a_{11}$  y se sustituye en la segunda ecuación para calcular y.
2. Si  $a_{22} = 0$ , entonces  $x = b_2 / a_{21}$  y se sustituye en la primera ecuación para calcular y.
3. Si  $a_{12} = a_{22} = 0$ , entonces el sistema tiene una sola incógnita x

Para resolver el sistema suponemos que  $a_{12} \neq 0$  y que  $a_{22} \neq 0$ , multiplicamos  $a_{11}x + a_{12}y = b_1$  por  $a_{22}$  y multiplicamos  $a_{21}x + a_{22}y = b_2$  por  $a_{12}$  tenemos:

$$a_{22} * (a_{11}x + a_{12}y = b_1) \rightarrow a_{22}a_{11}x + a_{22}a_{12}y = a_{22}b_1$$

$$a_{12} (a_{21}x + a_{22}y = b_2) \rightarrow a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = a_{12}b_2$$

$$a_{22}a_{11}x + a_{22}a_{12}y = a_{22}b_1 \quad (2)$$

$$a_{12}a_{21}X + a_{12}a_{22}Y = a_{12}b_2$$

Ahora considere que  $r, s, u, v$ , son números reales entonces:

1. Si  $r = s$  y  $u = v$  entonces  $r + u = s + v$
2. Si  $u = v$  y  $e$  es un número real entonces  $eu = ev$

Debido a lo anterior y aplicado a los vectores y matrices tenemos que los sistemas 1 y 2 son equivalentes, es decir la solución encontrada para el sistema 1 es también una solución para el sistema 2.

Regresando a la solución del sistema 2, note que los coeficientes para  $y$  en ambas ecuaciones son iguales por lo que restamos la segunda ecuación de la primera.

$$\begin{array}{r} a_{22}a_{11}X + a_{22}a_{12}Y = a_{22}b_1 \\ - \quad [a_{12}a_{21}X + a_{12}a_{22}Y = a_{12}b_2] \\ \hline = a_{22}a_{11}X - a_{12}a_{21}X = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array}$$

Por lo que  $x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$  al denominador  $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}$  se le llama determinante del sistema. Si el determinante es distinto de cero entonces el sistema tiene solución única.

Dos ecuaciones son equivalentes si son paralelas entre sí. Por ejemplo:

$$\begin{array}{l} x - 2y = 8 \\ 2x - 4y = 16 \end{array} \quad (3)$$

La segunda ecuación se obtiene al multiplicar la primera por 2, en este caso el sistema tiene un número infinito de soluciones. Si usamos la primera ecuación, despejamos y tenemos  $y = \frac{x}{2} - 4$ , los puntos en el espacio  $(x, y) = (x, \frac{x}{2} - 4)$  satisfacen ambas ecuaciones y son un número infinito de puntos.

Si calculamos el determinante de sistema 3 tenemos:

$$a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} = (-4 * 1) - (-2 * 2) = -4 + 4 = 0$$

El determinante es 0 por lo que tenemos un número infinito de soluciones de la forma  $(x, y) = (x, \frac{x}{2} - 4)$  al sistema de ecuaciones (3).

Un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas dado por:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

En este caso tenemos que  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$  Naturalmente todos los componentes de los vectores y matrices anteriores son números reales.

Si los valores del vector  $b$  son cero  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$  al sistema de ecuaciones se le llama sistema

homogéneo. Este sistema tiene la solución trivial  $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$  o bien existe un número ilimitado de soluciones si  $n > m$ .

## 1.5 Métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales

Los métodos de solución más comunes son:

Método de la matriz adjunta, recomendable cuando la matriz  $A$  es cuadrada y se discutió anteriormente.

Método de eliminación Gaussiana, recomendable cuando la matriz  $A$  es rectangular. Aquí se procede a reducir la matriz  $A$  por renglones a su forma escalonada reducida por renglones.

Una matriz es escalonada reducida por renglones si tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Note que:

Los elementos de la matriz  $a_{ij} \neq 0, i < j$  es deseable que  $a_{ii} = 1$ .

Los elementos  $a_{ij} = 0, i > j$  aparecen en la parte inferior de la matriz.

Se pueden tener tres situaciones:

1. El último renglón de la matriz  $A$  está formado por ceros y  $a_{mn} \neq 0$  por lo que el valor de  $x_n = \frac{b_n}{a_{mn}}$ , los demás valores de  $x_i$  se obtienen por sustitución hacia atrás.  
En este caso el sistema tiene una solución única.
2. El último renglón de la matriz  $A$  contiene ceros y por lo menos dos elementos  $a_{ij} \neq 0$ , lo cual indica que la última ecuación es una ecuación lineal de dos o más variables. En este caso el sistema tiene un número infinito de soluciones.
3. Si el último renglón de la matriz  $A$  indica que  $a_{mn} = 0$  y  $b_n \neq 0$ , entonces no existe solución, se dice que el sistema es inconsistente.

## 1.6 Espacios vectoriales

Un conjunto de vectores  $s, t$  en  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial  $V$  si con las operaciones de adición y multiplicación de un escalar satisfacen:

1. Los vectores  $s, t$  pertenecen a  $V$ ,  $u = s + t$ , también pertenece a  $V$
2. Si  $s, t, u$  pertenecen a  $V$ , entonces  $(s + t) + u = s + (t + u)$
3. Existe un vector  $0$  que pertenece a  $V$  tal que para todo vector  $u$  que pertenece a  $V$ ,  $u + 0 = 0 + u = u$
4. Si  $u$  pertenece a  $V$  y existe un vector  $-u$  tal que  $u + (-u) = 0$
5. Si  $s, t$  pertenecen a  $V$ , entonces  $(s + t) = (t + s)$
6. Si  $s$  pertenece a  $V$  y  $k$  es un escalar, entonces  $ks$  también pertenece a  $V$ .
7. Si  $s, t$  pertenecen a  $V$  y  $k$  es un escalar, entonces  $k(s + t) = ks + kt$
8. Si  $s$  pertenece a  $V$  y  $k$  y  $l$  son escalares, entonces  $(k + l)s = ks + ls$
9. Si  $s$  pertenece a  $V$  y  $k$  y  $l$  son escalares, entonces  $k(ls) = (kl)s$
10. Para todo vector  $s$  que pertenece a  $V$ , existe un vector  $1$  tal que  $1s = s$

Considere los vectores columna de la matriz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ .

Dos vectores  $s, t$  son ortogonales si su producto punto es cero.

La norma o longitud de un vector está dado por:  $\|s\| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2}$

El ángulo  $\beta$  entre dos vectores  $s, t$  está definido como:  $\beta = \cos^{-1} \left[ \frac{s \cdot t}{\|s\| \|t\|} \right]$

Ejemplo. Considere el conjunto de los vectores columna  $\{c_1, c_2, c_3\}$  de la matriz siguiente:  $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $c_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $c_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Un vector ortogonal  $d_1$  a  $c_1$  es:  $d_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ . La norma o longitud del vector  $\|c_2\| = \sqrt{10}$ . El ángulo  $\beta$  entre los vectores  $c_2, c_3$  es  $\beta = \cos^{-1} \left[ \frac{c_2 \cdot c_3}{\|c_2\| \|c_3\|} \right] = \cos^{-1} \left[ \frac{3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{1}} \right] = \cos^{-1} 0.948 = 18.4$

La combinación lineal de dos o más vectores se forma con la multiplicación por un escalar y la adición de vectores, permite expresar un vector a partir de otros. Por lo que un vector  $t$  en  $\mathbb{R}^m$  es una combinación lineal de los vectores,  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$  todos en  $\mathbb{R}^m$  tal que:

$t = \sum_{i=1}^k u_i c_i$  donde  $u_i$  son números reales.

Un conjunto de vectores  $c_i$  son linealmente independientes si se cumple que:

$$\sum_{i=1}^k u_i c_i = 0$$

Solo si  $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_k = 0$

Ejemplo. Considere los vectores  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$ , ¿son

linealmente independientes? . La respuesta es no ya que  $e_3 = 3e_1 + e_2$  los vectores  $\{e_1, e_2, e_3\}$  son linealmente dependientes.

Conjunto generador. Se denomina conjunto generador a los vectores  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$  en  $\mathbb{R}^m$  si cualquier vector en  $\mathbb{R}^m$  puede ser representado como una combinación lineal de los vectores  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ .

De manera especial considere los vectores columna de la matriz identidad en  $\mathbb{R}^3$ ,  $I^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  formada por los vectores unitarios  $c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  la matriz identidad es un conjunto generador ya que cualquier vector en  $\mathbb{R}^3$  puede expresarse como una combinación lineal con los valores adecuados de  $u_k$ .

Un conjunto generador es una base si se cumplen dos condiciones:

1. Los vectores  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$  generan  $\mathbb{R}^m$
2. Son linealmente independientes.

La dimensión  $n$  del espacio  $\mathbb{R}^n$  es el número máximo de vectores linealmente independientes en el espacio vectorial.

## 1.7 Complejidad computacional y eficiencia algorítmica

Las operaciones de suma, resta y multiplicación de vectores y matrices requieren de operaciones matemáticas básicas, aritmética básica. Se han desarrollado en el presente texto de forma manual y usando los métodos y algoritmos aprendidos en educación básica. La suma, y resta pueden considerarse operaciones básicas. Así la multiplicación requiere de mayor número de operaciones. Sin embargo, surge una pregunta ¿cuántas operaciones se requieren para invertir una matriz?, ¿cuántas operaciones se requieren para resolver un sistema de ecuaciones y obtener una respuesta?, ¿existe un algoritmo para invertir una matriz que sea eficiente en el sentido que realice el número mínimo de operaciones?

A fin de discutir este interesante tema se requieren algunos conceptos matemáticos y definiciones de ciencia de computación. Se presentan de manera informal, para un tratamiento más riguroso se sugiere consultar Brassard (1996).

**Algoritmo.** Conjunto de pasos y/o instrucciones bien definidas para llegar a un objetivo. Un algoritmo permite calcular la inversa de una matriz, realizar sumas y restas, al final para un conjunto de datos  $n$  el algoritmo proporciona una respuesta.

**Representación de objetos.** Para representar un número, un vector, una matriz se requiere de un alfabeto conocido. En una computadora se utiliza el lenguaje binario formado por 0 y 1, el alfabeto está formado por solo dos símbolos, el 0 y el 1; para representar objetos, números, vectores, matrices, etc. Este texto también puede considerarse un objeto y usamos el alfabeto que aprendimos en educación básica para representar ideas, conceptos, métodos, objetos, etc.

Llamaremos palabra a un subconjunto ordenado y definido de elementos del alfabeto. El término definido se refiere a que una palabra puede formarse como un subconjunto al azar obteniendo una palabra sin sentido. Las palabras formadas están definidas, aceptadas y representan una idea bien entendible. Denominamos al conjunto de palabras, lenguaje. Si consideramos el concepto máquina de Turing entonces la máquina de Turing acepta las palabras en una secuencia definida, a partir de éstas cambia de estado, realiza procesos de forma determinista y termina emitiendo una respuesta. La máquina de Turing tiene al menos tres estados: en espera de instrucciones, en proceso y termina emitiendo una respuesta. En forma resumida, una máquina de Turing, lee el problema, realiza las operaciones necesarias y proporciona una respuesta. Una máquina de Turing no determinista cambia de estado a estado de forma aleatoria.

En ciencias computacionales las operaciones aritméticas, comparaciones, decisiones, repeticiones, etc., se realizan con objetos e instrucciones formados por 0 y 1. Por lo tanto requieren de álgebra booleana. Para un objeto como un vector o una matriz representado por 0 y 1 se le aplica un algoritmo para realizar la suma, resta, multiplicación, calcular su inversa. Internamente en la computadora el vector o matriz se encuentra representado en la memoria por medio de 0 y 1 a los cuales se les aplica el algoritmo también almacenado en la memoria de la computadora y se obtiene un resultado que se almacena en la memoria.

En base a lo anterior un algoritmo se ejecutará al aplicar  $q$  cantidad de cálculos ejecutados en el intervalo de tiempo  $t$ . Respecto del tiempo de ejecución claramente depende de que tan rápida es la computadora pero la cantidad de operaciones no dependen de la rapidez de la computadora, dependen del tamaño  $n$  de los datos que representan el problema a resolver y del algoritmo que va a realizar los cálculos.

Para expresar la eficiencia de un algoritmo es necesaria la notación de Landau referente a la comparación asintótica de funciones ya que la eficiencia de un algoritmo se expresa como el máximo número de operaciones en función del “tamaño”  $n$  del problema. Una cota superior asintótica es aquella  $f = O(g)$  si existe una constante  $M \geq 0$  tal que  $f(n) \leq M g(n)$  para todo  $n$  suficientemente grande, a esta cota se le llama “O grande”. Decimos

de  $f = o(g)$  si para todo  $\varepsilon > 0$  se cumple que  $f(n) < \varepsilon g(n)$  para todo  $n$  suficientemente grande, a esta cota se le llama “o chica”.

Las principales órdenes de complejidad “O grande” son:

|               |             |
|---------------|-------------|
| $O(1)$        | Constante   |
| $O(\log n)$   | Logarítmica |
| $O(n)$        | Lineal      |
| $O(n \log n)$ | Casi lineal |
| $O(n^2)$      | Cuadrática  |
| $O(n^3)$      | Cúbica      |
| $O(a^n)$      | Exponencial |

Es posible demostrar que:

La suma es de complejidad  $O(n^2)$

Calcular la raíz cuadrada es de complejidad  $O(2^n)$

El cálculo de una potencia es de complejidad  $O(\log n)$

Invertir una matriz es de complejidad  $O(n^3)$

Siguiendo con conceptos de complejidad computacional un problema matemático es computable si existe un algoritmo que lo resuelve en un espacio y tiempo finitos. De otra forma el problema se denomina incomputable o indecidible.

Considere el caso de multiplicar dos números  $r$ ,  $s$ . Si  $r = 17$  y  $s = 5$ , es posible obtener el resultado aplicando dos algoritmos: suma repetida y el algoritmo clásico que aprendimos en aritmética básica. Para dos números de  $n$  cifras el algoritmo de suma repetida requiere de menos de  $(10^n - 1)2n$  operaciones básicas. El algoritmo clásico requiere a lo más  $2n^2$  operaciones básicas.

Si aplicamos el algoritmo de la suma repetida realizaremos un máximo de  $n10^{n-1}$  operaciones. Si aplicamos el algoritmo clásico tenemos como máximo  $2n^2$  operaciones básicas. En este caso  $n$  se refiere al número de dígitos que forman los dos números a multiplicar. Como puede apreciarse el algoritmo clásico tiene una cota superior asintótica menor respecto al algoritmo de suma repetida ya que  $2n^2 < n10^{n-1}$ .

La tesis de Cobham-Edmonds. Esta indica que un problema matemático se considera tratable si existe una máquina de Turing determinista que lo resuelve en tiempo polinómico sobre la longitud o tamaño  $n$  del problema. En ciencia computacional la clase P de problemas, son la clase de problemas matemáticos en las que actualmente existe un algoritmo eficiente para resolverlos. Es decir, el número de operaciones necesarias para resolver el problema está acotado por un polinomio en la notación "O grande" es decir pertenece a la clase P.

La clase NP de problemas, son el tipo de problemas que no están en P, es decir no existe un máquina de Turing que lo resuelva en tiempo polinómico. Dentro de la clase NP existe adicionalmente la clase NP-Duro y NP-completo. Trivialmente un problema que pertenece a la clase P es un problema fácil ya que existe un algoritmo eficiente que lo resuelve, si el problema está clasificado como NP, no existe hasta el momento un algoritmo eficiente que lo resuelva por lo tanto se considera un problema muy difícil o imposible de resolver.

Advertencia para el lector. Durante el presente texto se han desarrollado las ideas principales sin llegar a la formalidad matemática. Para una discusión más rigurosa se sugiere acudir a textos especializados sobre complejidad computacional y análisis de algoritmos.

## Ejercicios propuestos

1. Indique que tipo de función es la función indicada

- a)  $2x - 4y = 16$
- b)  $-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 \leq 34$
- c)  $-2x_1 + 3x_2^2 + 5x_3 - 7x_4 \leq 34$
- d)  $a^2 + b^2 = c^2$
- e)  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$

2. Operaciones con vectores y matrices

Para los vectores y matrices siguientes:

$$s = [-3 \quad 2 \quad 0 \quad 1] \quad t = [0 \quad -2 \quad 5 \quad -1]$$

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a) Calcule  $s + t$
- b) Calcule  $s \cdot u$
- c) Calcule  $s * u$

3. Calcular matriz inversa de la matriz  $E = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1\frac{37}{68} & \frac{-1}{4} & -2\frac{43}{68} & 4\frac{57}{68} \\ 1\frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-7}{4} & 3\frac{1}{4} \\ \frac{-49}{68} & \frac{1}{4} & 1\frac{1011}{6250} & -2\frac{13}{68} \\ \frac{-1}{17} & 0 & \frac{3}{17} & \frac{-2}{17} \end{bmatrix}$

4. Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0$$

$$-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 4$$

$$3x_1 - 5x_2 + 0x_3 - 1x_4 = 0$$

$$3x_1 - 5x_2 + 0x_3 - 1x_4 = -8$$

$$9x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 0$$

$$9x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 2$$

$$0x_1 - x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 0$$

$$0x_1 - x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 6$$

5. Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es 0 para los vectores siguientes indique si son ortogonales

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. La matriz transpuesta  $A^T$  de una matriz  $A$  se obtiene al intercambiar los renglones y columnas de tal forma que los componentes son  $A = [a_{ij}]$ ,  $A^T = [a_{ji}]$ . Calcule la matriz transpuesta e indique su nueva dimensión de las matrices indicadas:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 9 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## Fuentes de consulta

Arreola R. J., Arreola R. A., (2003). Programación Lineal. Una introducción a la toma de decisiones cuantitativa. Thomson. México, D. F.

Brassard G., Bratley P., (1996). Fundamentals of algorithmics. Prentice Hall. Upper Saddle River, New Jersey, EEUU.

Strang G., (1986). Algebra Lineal y sus aplicaciones. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware, EEUU.

Grossman S. (1992). Álgebra Lineal con aplicaciones. Mc Graw Hill Interamericana. México, D. F.

## Capítulo II. La geometría de la optimización lineal

**Objetivo:** Comprender los conceptos de conjuntos convexos, poliedra y puntos extremos para la comprensión del funcionamiento de los algoritmos de solución en optimización lineal.

**Avance:** Las variables de decisión se representan en un espacio  $n$ -dimensional por lo que cada punto refleja una posible solución al problema de optimización lineal. Las restricciones del modelo matemático definen regiones donde cada punto forma una solución factible. Los conceptos de poliedra, conjuntos convexos, puntos extremos, convexidad permiten la comprensión de los métodos y algoritmos de optimización lineal.

### 2.1 Variables de decisión y restricciones.

Comencemos con la modelación y formulación de un problema de optimización lineal básico. Un modelo es una representación abstracta de la realidad, al proceso de construir el modelo se le denomina modelación. Un modelo de optimización lineal está formado por:

- a. Variables de decisión
- b. Función objetivo
- c. Conjunto de restricciones

La función objetivo y el conjunto de restricciones son estrictamente funciones lineales. Al proceso de construir estas funciones lineales se le denomina formulación.

#### Ejemplo.

Considere hipotéticamente un fabricante de pintura que desea saber cuántos litros de pintura verde y cuántos litros de pintura azul debe elaborar cada semana para obtener el máximo de ingresos. Cada litro de pintura verde se vende en \$45 y cada litro de pintura azul se vende en \$55. Se consideran principalmente dos procesos: mezclado de las resinas y pigmentos para la pintura y envasado-etiquetado.

Los recursos que tiene son limitados por lo que tiene solo 45 kg de resinas y pigmentos. 45 horas de mano de obra las cuales se dividen en 30 horas para mezcla y 15 horas de envasado-etiquetado. Fabricar un litro de pintura verde requiere de 0.4 kg de resinas-pigmentos y un litro de pintura azul requiere de 0.7 kg de resinas-pigmentos.

Cada litro de pintura verde requiere de 0.5 horas para elaborar la mezcla y la pintura azul requiere de 0.4 horas.

El proceso de embotellado-etiquetado requiere de 0.3 horas para la pintura verde y 0.1 horas para la pintura azul.

Tenemos los supuestos siguientes:

- a. Lo que se produce se vende, por lo tanto la venta está asegurada

- b. Las cantidades requeridas de resina-pigmentos incluyen los desperdicios y se consideran cantidades fijas, no varían durante el horizonte de planeación.
- c. Sólo se producen dos productos, pintura verde y pintura azul. Al momento no hay otros tipos de pintura.

Para construir este modelo de optimización lineal comenzamos al identificar lo que se va a decidir. Principalmente se desean conocer las cantidades de pintura verde y pintura azul a fabricar. Ya que son artículos diferentes asociamos a cada producto una variable de decisión distinta, por lo tanto sea  $x_1$ : los litros de pintura verde a fabricar por semana y  $x_2$ : son los litros de pintura azul a fabricar por semana. Note que el horizonte de planeación es de una semana. Si los productos a fabricar, los materiales o la mano de obra cambian, entonces será necesario cambiar el modelo a uno con nuevos valores actualizados. Aún no sabemos cuántos litros de pintura verde o pintura azul maximizan el ingreso del fabricante. Se acostumbra dentro de la investigación de operaciones utilizar como variables de decisión  $x$  con subíndices distintos para cada variable.

Para construir la función objetivo (FO) se construye una combinación lineal de las variables de decisión con el ingreso obtenido de cada una, así tenemos que el sentido de la optimización es maximizar (max):

$$\text{FO max } z = 45x_1 + 55x_2$$

Ahora checamos que las unidades de la función objetivo sean las correctas:

$$\text{FO max } z = 45(\$/\text{litro}) * (\text{litros de pintura verde}) + 55(\$/\text{litro}) * (\text{litros de pintura azul})$$

$$\text{FO max } z = 45(\$) \text{ de pintura verde} + 55(\$) \text{ de pintura azul}$$

Lo cual es correcto ya que se está sumando (\$) ingresos por pintura verde y pintura azul, no hay discordancia de unidades no estamos sumando \$ + litros lo cual sería un error. La variable  $z$  representa el total de ingreso por la pintura elaborada. Solo existen dos sentidos de optimización: maximizar y minimizar (min).

Con las variables de decisión  $x_1$ ,  $x_2$  construimos la primera restricción relacionada a la cantidad disponible de resina-pigmentos:

$$0.4 x_1 + 0.7x_2 \leq 70$$

Revisamos las unidades

$$0.4(\text{kg/litro}) * (\text{litros de pintura verde}) + 0.7(\text{kg/litro}) * (\text{litros de pintura azul}) \leq 45 \text{ kg de resina-pigmento disponibles}$$

$$0.4(\text{kg para elaborar pintura verde}) + 0.7(\text{kg para elaborar pintura azul}) \leq 45 \text{ kg de resina-pigmento disponibles}$$

Del lado izquierdo sumamos kg + kg que debe ser menor a la cantidad disponible de 45 kg para elaborar ambas pinturas.

Respecto a los tiempos para elaborar la pintura para el proceso de mezclado tenemos:

$$0.5 x_1 + 0.4 x_2 \leq 30$$

Revisamos las unidades

$0.5(\text{h/litro}) * (\text{litros de pintura verde}) + 0.4(\text{h/litro}) * (\text{litros de pintura azul}) \leq 30$  horas disponibles

$0.3(\text{h para elaborar pintura verde}) + 0.1(\text{h para elaborar pintura azul}) \leq 30$  h

Del lado izquierdo sumamos horas + horas que debe ser menor a la cantidad disponible de 30 horas para elaborar ambas pinturas.

Para el proceso de envasado y etiquetado tenemos:

$$0.3 x_1 + 0.1 x_2 \leq 15$$

Revisamos las unidades

$0.3(\text{h/litro}) * (\text{litros de pintura verde}) + 0.1(\text{h/litro}) * (\text{litros de pintura azul}) \leq 15$  horas disponibles

$0.3(\text{h para elaborar pintura verde}) + 0.1(\text{h para elaborar pintura azul}) \leq 15$  h

Del lado izquierdo sumamos horas + horas que debe ser menor a la cantidad disponible de 15 horas para elaborar ambas pinturas.

Para terminar ya que el modelo de optimización lineal considera números reales para  $x_1$  y  $x_2$  adicionalmente restringimos que  $x_1$  y  $x_2 \geq 0$  por lo que el modelo completo queda como:

$$\text{FO max } z = 45x_1 + 55 x_2$$

Sujeto a:

$$0.4 x_1 + 0.7x_2 \leq 45$$

$$0.5 x_1 + 0.4 x_2 \leq 30$$

$$0.3 x_1 + 0.1 x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En este caso tenemos dos variables de decisión  $x_1, x_2$  por lo que el problema de optimización tiene dimensión  $n=2$  y estamos en el plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ . En un caso más cercano a la realidad un fabricante de pinturas puede tener más tipos de pinturas y para cada una debemos asociar un subíndice diferente. También tendremos mayor número de restricciones relacionados con las resinas, pigmentos y otros recursos utilizados por lo que el número de restricciones también crece. El problema consiste en encontrar valores para el vector  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  que satisfagan todas las restricciones y maximicen  $z$ .

Es común que en modelos de la vida real tengamos cientos de variables de decisión y cientos de restricciones, en este caso la dimensión del problema de optimización lineal también crece a  $\mathbb{R}^n$ . Donde  $n$  es la dimensión de la base generadora de la matriz  $A$  del problema de optimización.

## 2.2 Conjuntos convexos

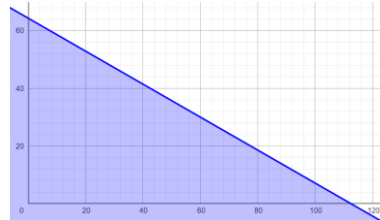
El modelo de optimización lineal básico de la mezcla óptima para producción de pintura, la función objetivo representa una recta, si la función objetivo se iguala a 0 entonces pasa por el origen y carece de interés ya que  $z$  valdría 0 y se desea maximizar el ingreso.

Las dos restricciones son funciones lineales por lo que también son rectas sin embargo al ser desigualdades no generan una recta sino una región en  $\mathbb{R}^2$ . La región está formada por todos aquellos valores de  $x_1, x_2$  que satisfacen la desigualdad y por lo tanto son un número infinito de puntos ya sea a un lado de la recta o al otro lado. Al conjunto de valores de  $x_1, x_2$  que satisfacen las restricciones, incluyendo  $x_1, x_2 \geq 0$  se les denomina soluciones factibles. Note que la restricción  $x_1, x_2 \geq 0$  indica valores reales en el primer cuadrante del plano cartesiano. Entonces el problema de optimización queda establecido como: encontrar los valores de  $x_1, x_2$  factibles que maximicen la función objetivo.

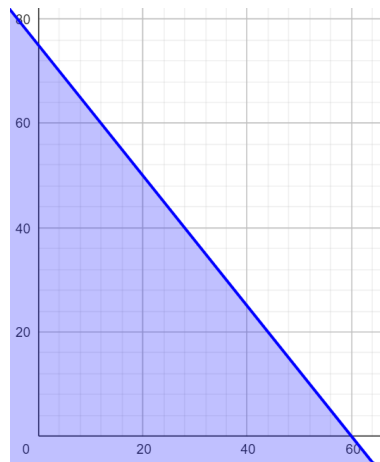
Ejemplo.

Para la primera restricción del ejemplo de fabricante de pintura tenemos:

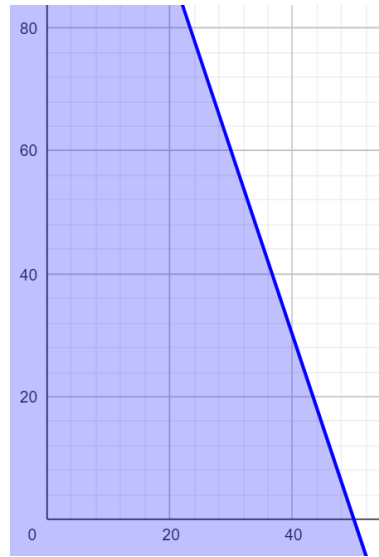
$$0.4 x_1 + 0.7 x_2 \leq 45$$



$$0.5 x_1 + 0.4 x_2 \leq 30$$



$$0.3 x_1 + 0.1 x_2 \leq 15$$



Todas las restricciones



### Conjunto.

Un conjunto es una agrupación de objetos que tienen características en común, como ejemplo el conjunto de todos los valores de  $x_1, x_2$  que satisfacen las restricciones forman el conjunto de soluciones factibles al problema de optimización.

### Combinación lineal.

Una combinación lineal convexa tiene la forma:  $x = \sum_{i=1}^m \gamma_i x_i$  donde  $\sum_{i=1}^m \gamma_i = 1$  y  $\gamma_i \geq 0$  para todo valor de  $i$ . Aquí  $x$  es un nuevo punto calculado a partir de los puntos  $x_i$ .  $\gamma_i$  son valores reales cualesquiera mayores a cero. De acuerdo a esta definición si tomamos dos parejas de valores  $r = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  donde  $r \neq s$ , podemos construir una combinación lineal convexa al asignar valores adecuados de  $\gamma_1, \gamma_2$ . Note que  $r, s$  son puntos en  $\mathbb{R}^2$  y que  $\gamma_i$  son escalares, valores reales.

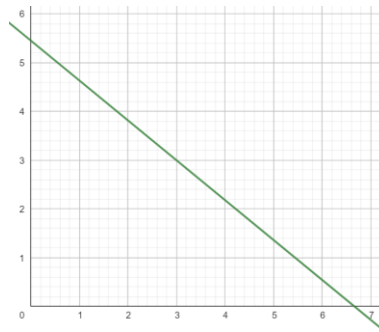
Como ejemplo calculamos si  $r = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\gamma_1 = 0.3, \gamma_2 = 0.7$  la combinación lineal convexa  $t$  es:

$$t = \gamma_1 r + \gamma_2 s = 0.3 * \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.7 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

Las propiedades de los conjuntos convexos en optimización lineal permiten que si  $r, s$  son soluciones factibles al problema entonces  $t$  también es una solución factible.

En  $\mathbb{R}^2$  la función objetivo es una familia de rectas, se determina una en particular para cada valor posible de  $z$ . Sea el espacio vectorial  $\mathbb{E}^2$  definido por  $c_1x_1 + c_2x_2 = k$  el cual es una línea. En  $\mathbb{R}^3$  Sea  $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = k$  el cual forma un plano. Así en  $\mathbb{R}^n$  tenemos un conjunto de puntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  que satisface  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = k$  donde no todas las  $c_j$  son iguales a cero se le denomina hiperplano. De forma matricial se escribe como el hiperplano  $H$  tal que  $H = \{x: cx = k\}$  formado por todos los puntos  $x$  tal que  $cx = k$ . Si  $k=0$  entonces el hiperplano pasa por el origen.

La función objetivo para el ejemplo del fabricante de pinturas tiene la forma:

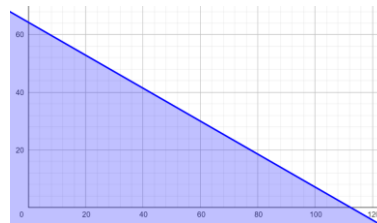


En este caso  $z = 300$ , para valores mayores la función objetivo se aleja del origen

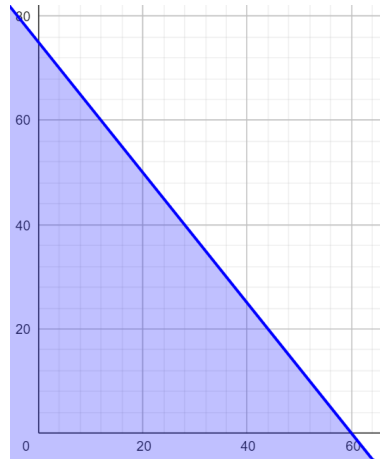
La definición anterior permite definir los semiespacios relativos a un hiperplano  $H$ . Si  $S_1 = \{x: cx < k\}$  entonces nos estamos refiriendo al semiespacio abierto, de igual forma tenemos a  $S_2 = \{x: cx > k\}$  en estricta igualdad la definición corresponde al hiperplano  $H$ . Los semiespacios cerrados permiten la igualdad en la definición entonces tenemos que son:  $S_3 = \{x: cx \leq k\}$ ,  $S_4 = \{x: cx \geq k\}$

Las restricciones al problema de fabricante de pintura generan los semiespacios cerrados siguientes, los cuales se muestran sombreados:

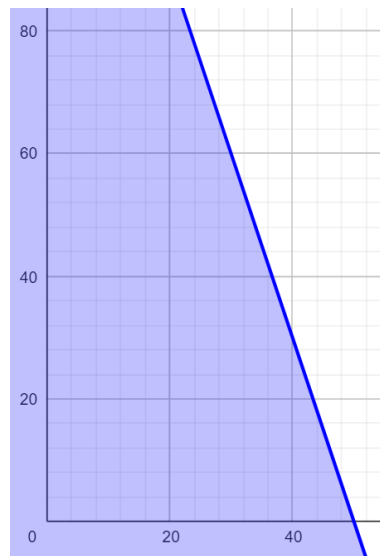
$$0.4x_1 + 0.7x_2 \leq 45$$



$$0.5 x_1 + 0.4 x_2 \leq 30$$



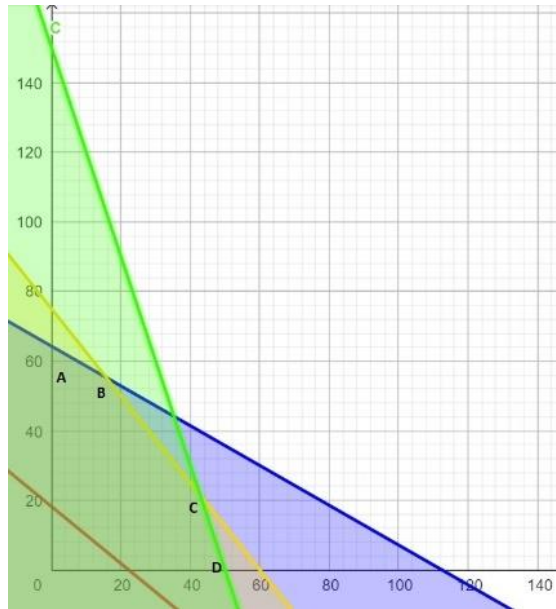
$$0.3 x_1 + 0.1 x_2 \leq 15$$



Un conjunto convexo es un conjunto de puntos que satisface  $s = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , aquí  $s, x_1, x_2$  son puntos en  $\mathbb{R}^n$  y  $\alpha$  es un escalar. Un punto frontera de un conjunto convexo está ubicado en los límites del conjunto convexo. Así un punto interior es un punto del conjunto convexo que no se considera un punto frontera. Un conjunto se considera abierto si incluye solo los puntos interiores. Un conjunto cerrado es aquel conjunto que incluye los puntos interiores y puntos frontera.

Para el ejemplo del fabricante de pintura los semiespacios cerrados acotados por el primer cuadrante forman un conjunto convexo. En optimización lineal consideramos conjuntos cerrados ya que es de interés tanto los puntos interiores como los puntos frontera.

En el ejemplo del fabricante de pintura la intersección de los semiespacios cerrados correspondientes a las tres restricciones forman un conjunto convexo. La recta en color rojo corresponde a la función objetivo.



Punto extremo  $r$  es aquel punto de un conjunto convexo  $D$  si y solo si no existen puntos distintos  $x_1, x_2$  que pertenecen a  $D$ , tal que  $r = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ ,  $0 < \alpha < 1$ , el valor de  $\alpha$  considera la desigualdad estricta. Implica que un punto extremo no puede estar entre dos puntos pertenecientes a  $D$ , por lo que debe ser un punto frontera.

Relativo a conjuntos convexos tenemos:

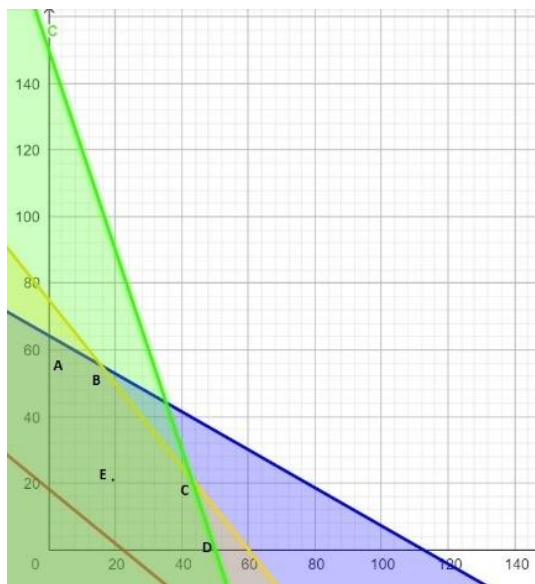
1. Toda combinación convexa de puntos de un conjunto convexo, pertenece al conjunto convexo
2. La intersección de conjuntos convexos también es un conjunto convexo.
3. El conjunto de todas las combinaciones convexas de un número finito de puntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un conjunto convexo.

### 2.3 Envolverte y poliedro convexo

La envolvente convexa  $B$  de un número finito de puntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es el conjunto de todas las combinaciones convexas, es el conjunto:  $B = \{x: x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\}$  donde  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ ,  $\alpha_i \geq 0$  para todo valor  $\alpha_i$ .

Un poliedro convexo está formado con la envolvente convexa generado por un número finito de puntos. Los poliedros convexos pueden ser cerrados y no acotados

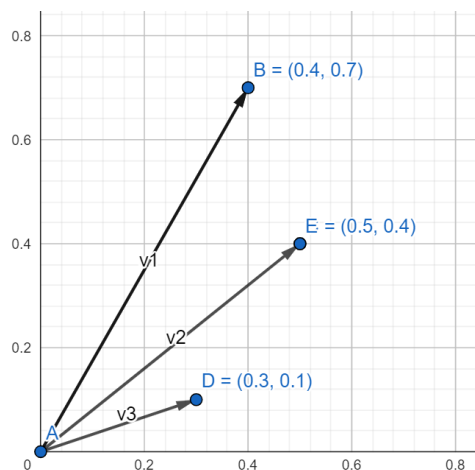
En el ejemplo del fabricante de pintura se muestra el punto E que es un punto interior, los puntos A, B, C y D son puntos extremos y a su vez puntos frontera. Todos estos puntos son factibles ya que pertenecen a la intersección de los semiespacios cerrados formados por las restricciones, tal y como se muestra en la figura siguiente:



## 2.4 Rayos, semirrectas y direcciones

Si un conjunto convexo es no acotado entonces contiene al menos un rayo. Un rayo  $e$ ,  $e$  que pertenece a  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto  $D$  de puntos  $x$  tales que  $D = \{x: x = \alpha e\}, \alpha \geq 0$ . Si  $x$  pertenece a  $\mathbb{R}^n$  es y forma el conjunto  $B = \{x: x = x + \alpha e\}, \alpha \geq 0$  entonces  $B$  es una semirrecta que pasa por  $x$  y es paralela al rayo generado por  $e$ . Al vector  $e$  se le conoce como la dirección del rayo y la semirrecta.

Un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^n$  forma un cono si  $x$  está en el cono y también  $y = \alpha x, \alpha \geq 0$  también está en el cono. Un cono  $C$ , se genera por un conjunto de puntos  $A$  si  $C = \{y: y = \alpha x\}$ , para todo  $\alpha \geq 0$  y para cada  $x$  que pertenece a  $A$ . Como ejemplo tomamos los valores de los coeficientes de las restricciones del problema del fabricante de pintura y los graficamos como vectores, tal y como se muestra en la figura siguiente:



El vector  $v_1$  corresponde a los coeficientes (0.4, 0.7) de la primera restricción, el vector  $v_2$  corresponde a los coeficientes (0.5, 0.4) de la segunda restricción y finalmente  $v_3$  corresponde a los coeficientes de la tercera restricción (0.3, 0.1)

**Teorema.** Considere un poliedro convexo no acotado y no vacío  $P$ . El conjunto de puntos extremos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es no vacío y finito. El conjunto de direcciones extremas  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  tampoco es vacío y es finito. Un punto  $x$  pertenece al poliedro  $P$  si y solo si puede ser representado como una combinación de los puntos extremos y una combinación lineal no negativa de sus direcciones extremas.  $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^k \gamma_j d_j$ ;  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ ;  $\alpha_i, \gamma_j \geq 0$

Sea  $P$  el poliedro convexo generado por el conjunto de puntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  entonces tenemos:

$$P = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right\}$$

Donde  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ ; y  $\alpha_i \geq 0$  entonces el cono convexo poliédrico generado por  $P$  es el siguiente:

$C = \{y : y = \alpha x\}$  donde  $x$  pertenece a  $P$  para todo  $\alpha \geq 0$

### Ejercicios propuestos

1. Presente gráficamente los semiespacios dados por:
  - a)  $A = \{ (x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 7 \}$
  - b)  $B = \{ (x_1, x_2) : x_1 \leq 9 \}$
  - c)  $C = \{ (x_1, x_2) : x_2 \leq 7 \}$
  - d)  $D = \{ (x_1, x_2) : x_1 \geq 0 \}$
  - e)  $E = \{ (x_1, x_2) : x_2 \geq 0 \}$
  - f)  $F = \{ (x_1, x_2) : 2x_1 - 3x_2 \leq 0 \}$
  - g)  $G = \{ (x_1, x_2) : 2x_1 - 3x_2 \geq 0 \}$
  - h)  $F = \{ (x_1, x_2) : 2x_1 - 3x_2 < 0 \}$
  - i)  $G = \{ (x_1, x_2) : 2x_1 - 3x_2 > 0 \}$
2. De acuerdo con el ejercicio anterior mencione cuáles son conjuntos abiertos y cuáles son conjuntos cerrados
3. Explique con sus propias palabras el concepto de punto extremo
4. Explique con sus propias palabras el concepto de punto interior
5. Encuentre todos los puntos extremos del siguiente poliedro convexo  
 $P = \{ (x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 7, x_1 \leq 9, x_2 \leq 7, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}$
6. De acuerdo al ejercicio anterior identifique un punto interior

## Fuentes de consulta

Arreola R. J., Arreola R. A., (2003). Programación Lineal. Una introducción a la toma de decisiones cuantitativa. Thomson. México, D. F.

Strang G., (1986). Algebra Lineal y sus aplicaciones. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware, EEUU.

Grossman S. (1992). Álgebra Lineal con aplicaciones. Mc Graw Hill Interamericana. México, D. F.

### Capítulo III. Modelación y formulación

**Objetivo:** Construir modelos de optimización lineal para apoyar el proceso de toma de decisiones y diseño de cursos de acción en las empresas del entorno.

**Avance:** La modelación es el proceso de abstracción donde se obtienen los elementos esenciales del proceso de toma de decisiones y es el primer paso para construir un modelo cuantitativo, hace especial énfasis en los aspectos cuantitativos de la realidad. La formulación permite asignar variables y las relaciones entre las variables para desarrollar restricciones y la función objetivo. La construcción de modelos matemáticos es todo un arte y una ciencia. Con frecuencia la construcción de un modelo matemático para un entorno en particular es ya en sí una aportación a la ciencia y un producto de investigación muy valioso.

#### 3.1 Modelación y formulación

Construir un modelo de programación lineal se considera un arte y una ciencia, requiere de un proceso de abstracción que considera en primer lugar el problema real. Identificar a partir de la situación real los elementos relevantes que permitirán la modelación y formulación exitosa de un modelo matemático.

El proceso de modelación se considera pasar de los elementos relevantes de una realidad a un modelo matemático. La formulación forma parte de la modelación ya que permite utilizar los elementos relevantes de la realidad para plantear variables de decisión, función objetivo y restricciones. El proceso de solución del modelo es posterior a los procesos de modelación y formulación; incluye la aplicación de un algoritmo que permitirá identificar la mejor solución, la solución óptima o declarar que el problema no tiene solución.

Un modelo es una representación parcial y abstracta de un entorno real. Los modelos se pueden dividir en modelos simbólicos y modelos físicos. Una maqueta de una casa es un modelo físico, un mapa es un modelo simbólico. En optimización lineal se trabaja con modelos simbólicos, abstractos ya que incluyen variables de decisión, función objetivo, restricciones, ecuaciones y desigualdades. La jerarquía de la situación real prevalece sobre el modelo matemático y el algoritmo de solución.

A partir de la situación real es necesario identificar los actores siguientes:

- a) Al analista o consultor de optimización.
- b) La persona o equipo gerencial quienes toman las decisiones.
- c) Las personas que operan el sistema y tienen la información relevante.

Una vez identificados los actores anteriores por lo general quienes toman las decisiones y pagan la consultoría son el cuerpo gerencial de la empresa o institución a su vez contratan al analista o consultor de optimización quien es ajeno a la empresa. La información detallada para el proceso de consultoría pertenece a quienes “operan” el sistema.

El analista o consultor de optimización tiene los conocimientos y la formación en optimización, es un especialista en investigación de operaciones también llamada programación matemática, domina los procesos de modelación y formulación tanto determinística como probabilística, así como algoritmos para resolver los modelos matemáticos. Su formación incluye conocimientos sobre estadística y probabilidad, optimización lineal y entera, simulación y líneas de espera; teoría de inventarios, sistemas de producción y sistemas logísticos, programación dinámica entre otras.

El equipo gerencial son el grupo de personas que toman las decisiones en la empresa o institución, son conocedores de la programación matemática y es deseable que conozcan el alcance de un proceso de consultoría en optimización. Tienen una visión “macro” del entorno a resolver y en algunas ocasiones también tienen una visión detallada. Su obligación es alinear las acciones y procesos del entorno o departamento donde se origina el problema con la misión y visión de la empresa. Tienen una visión global.

Las personas que operan el sistema lo conocen a detalle y tienen información actualizada, al día del entorno problemático sobre el cual deben tomarse las decisiones. Con frecuencia tienen una visión localizada en su departamento y a sus decisiones.

La optimización lineal es una herramienta poderosa que permitirá construir un modelo de apoyo a la toma de decisiones en los tres niveles de planeación dentro de una empresa o institución. Planeación estratégica, planeación táctica y planeación operativa. La planeación estratégica corresponde a la planeación a largo plazo de 3 a 5 años o más. La planeación táctica tiene un horizonte de planeación más corto, de 2 a 3 años. La planeación operativa tiene un horizonte de planeación inmediato y hasta los 2 años.

El proceso de consultoría en optimización tiene las fases siguientes:

1. Establecer el problema y objetivos a resolver.
2. Establecer los límites en tiempo, departamentos de la empresa a considerar, personal, recursos y alcance del proyecto
3. Modelación y formulación del problema de optimización a resolver
4. Solución del modelo matemático
5. Interpretar la solución del modelo matemático al entorno real
6. Resolver el problema real

Es recomendable seguir los principios de consultoría y administración de proyectos. El definir mediante una serie de reuniones mensuales con los tres actores del proceso, problema a resolver, alcance del proceso de consultoría, objetivos a alcanzar, establecer orden del día, compromisos, seguimiento de acuerdos, fechas de entregables, fechas de pago, autorización de presupuestos y autorización de pagos. Un proceso de consultoría con este enfoque llevará por lo menos 3 meses. Donde cada actor del proceso de decisión tiene sus aportaciones y obligaciones.

Arreola (2003) presenta los principios generales de la modelación.

1. No se debe elaborar un modelo complicado cuando uno simple es suficiente
2. El problema no debe ajustarse al modelo o método de solución
3. La fase deductiva de la modelación debe realizarse rigurosamente
4. Los modelos deben validarse antes de su implantación
5. Nunca debe pensarse que el modelo es el sistema real
6. Un modelo nunca debe criticarse por algo para lo que no fue hecho
7. No venda un modelo como la perfección máxima
8. Uno de los primeros beneficios de la modelación reside en el desarrollo del modelo
9. Un modelo es tan bueno o tan malo como la información con la que se trabaja
10. Los modelos no pueden reemplazar al tomador de decisiones

El proceso de construir un modelo es un proceso iterativo y en realidad no termina, en cada reunión con los participantes del proyecto de optimización se aporta información nueva. Las primeras reuniones permitirán definir con claridad el problema y establecer el objetivo a perseguir, es recomendable elaborar minutas de estas reuniones que soporten los acuerdos y compromisos.

Es bastante frecuente que el equipo que toma las decisiones contemple como problema un problema grande y complejo que puede descomponerse en partes más pequeñas. Aunque las diferentes técnicas de optimización permiten modelar elementos distintos de una realidad compleja en realidad cada técnica atiende a un problema más pequeño.

El consultor o analista de optimización debe ser muy claro en los alcances de las diferentes técnicas de optimización y sus algoritmos correspondientes con el mismo enfoque debe guiar al equipo tomador de decisiones en el alcance de cada técnica lo que es posible realizar y lo que no es posible realizar.

Construir un modelo de optimización se considera un proceso evolutivo, una espiral ascendente que no termina. Corresponde al consultor definir en qué momento se tiene un modelo adecuado para la problemática y objetivos ya planteados que permitan satisfacer al tomador de decisiones.

Las propiedades de un modelo de optimización lineal son las siguientes:

1. Es un modelo determinístico, no se consideran variables aleatorias dentro del modelo y se considera que todos los parámetros son conocidos.
2. Divisibilidad, permite que las variables de decisión tomen valores continuos, no discretos.
3. Condición de no negatividad, las variables de decisión no pueden tomar valores negativos.
4. Proporcionalidad. Los valores de las variables de decisión afectan o modifican proporcionalmente a las restricciones y función objetivo.
5. Aditividad. Permite que los valores de cada variable de decisión sumen al consumo de recursos de las restricciones o al incremento(decremento) de la función objetivo.

Los parámetros se identifican con frecuencia con la disponibilidad de recursos, la disponibilidad de materia prima, mano de obra, horas máquina; los precios de compra o venta del producto; los rendimientos de material o maquinaria utilizada para la producción, por lo general estos parámetros se consideran conocidos y no se requiere tomar decisiones. Cambian con el entorno económico que condiciona el proceso de decisión, cambian con el avance de la tecnología en materiales, procesos y maquinaria.

Las variables de decisión se identifican fácilmente al establecer el problema y el objetivo a alcanzar. En programación matemática se tienen básicamente dos sentidos de optimización: minimizar y maximizar. Se minimiza el costo, el consumo de recursos, el tiempo. Se maximiza el ingreso, la utilidad, la utilización del recurso.

Al tomar valores distintos las variables de decisión tenemos soluciones distintas que proporcionan consumo de recursos distintos y también valores distintos de la función objetivo. Al encontrar la solución óptima al problema por medio del algoritmo adecuado, la solución que minimiza o maximiza la función objetivo se tiene una solución al modelo matemático y corresponde interpretarla e implementarla en el entorno real para resolver el problema propuesto.

El conjunto de restricciones generalmente corresponde a los recursos restringidos del entorno de decisión. Una restricción para cada recurso. Por lo general se modela el tiempo disponible, la materia prima, la mano de obra o recurso financiero disponible. En modelos más abstractos se incluyen condiciones lógicas del proceso de decisión. Si el recurso es abundante entonces no se incluye como restricción.

### 3.2 Primeros modelos de optimización lineal

El problema de la dieta

Este problema fue uno de los primeros problemas planteados sobre optimización. Fue George Joseph Stigler en la década de 1930 quien plantea el problema de diseño de una dieta óptima de costo mínimo para el ejército americano al satisfacer los requerimientos diarios de varios nutrientes a partir de un conjunto de alimentos.

En optimización al enunciado anterior se le denomina problema. Un escenario específico se muestra en la tabla siguiente y se le denomina instancia del problema.

La información relevante se muestra en la tabla y ya se ha aplicado un proceso de abstracción al elegir de un conjunto de alimentos posibles solo a 3: leche, legumbres y naranjas. Del total de posibles nutrientes también se han elegido 4: Niacina, Tiamina, Vitamina C y Fibra. Los requerimientos diarios indicados son por persona. Naturalmente pueden ser muchos más los alimentos y los nutrientes lo que hace al modelo planteado más cercano a la realidad para fines de exposición se proporciona un modelo simplificado.

|                 | Leche<br>(Litro) | Legumbre<br>(1 porción) | Naranjas<br>(Pieza) | Requerimientos<br>Nutricionales |
|-----------------|------------------|-------------------------|---------------------|---------------------------------|
| Niacina (mg)    | 3.2              | 4.9                     | 0.8                 | 13                              |
| Tiamina (mg)    | 1.12             | 1.3                     | 0.19                | 15                              |
| Vitamina C (mg) | 32               | 0                       | 93                  | 45                              |
| Fibra (gramos)  | 0                | 15                      | 2.4                 | 24                              |
| Costo \$ pesos  | \$20             | \$12                    | \$15                |                                 |

Las variables de decisión en programación matemática se acostumbra usar la letra x con subíndices, cada subíndice en este caso corresponde a cada alimento. Pueden usarse otras letras como variables e inclusive usar variables nemónicas.

Variables de decisión:

- $X_1$ : Litros de leche a consumir
- $X_2$ : Porciones de legumbres a consumir
- $X_3$ : Naranjas a consumir

La función objetivo en este caso es minimizar el costo.

$$\text{Minimizar } 20x_1 + 12x_2 + 15x_3$$

Las restricciones se modelan a fin de cumplir con los requerimientos mínimos de los nutrientes indicados en la tabla.

Para la niacina

$$3.2x_1 + 4.9x_2 + 0.8x_3 \geq 13$$

Para la tiamina

$$1.12x_1 + 1.3x_2 + 0.19x_3 \geq 15$$

Para la vitamina c

$$32X_1 + 0X_2 + 93X_3 \geq 45$$

Para la fibra

$$0X_1 + 15X_2 + 2.4X_3 \geq 24$$

Finalmente se establecen las condiciones de no negatividad

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

El modelo de optimización lineal es el siguiente:

Variables de decisión:

- $X_1$ : Litros de leche a consumir
- $X_2$ : Porciones de legumbres a consumir
- $X_3$ : Naranjas a consumir

$$\text{Minimizar } 20X_1 + 12X_2 + 15X_3$$

Sujeto a:

$$3.2X_1 + 4.9X_2 + 0.8X_3 \geq 13$$

$$1.12X_1 + 1.3X_2 + 0.19X_3 \geq 15$$

$$32X_1 + 0X_2 + 93X_3 \geq 45$$

$$0X_1 + 15X_2 + 2.4X_3 \geq 24$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

### 3.3 Aplicaciones financieras de la optimización lineal

Una de las funciones de la gerencia de finanzas es maximizar el rendimiento de capital de la empresa al mínimo riesgo, los ejemplos siguientes apoyan el proceso de toma de decisiones.

El problema de asignación de capital

Se cuenta con \$ 5.7 millones de pesos a invertir durante un año. Las opciones de inversión se muestran en la tabla siguiente, para el caso de empresas o corporativos se contempla la compra de acciones en la bolsa mexicana de valores. Naturalmente las opciones son muchas más sin embargo a modo de ejemplo tenemos:

| Opciones de inversión                    | Tasa de rendimiento esperado anual |
|------------------------------------------|------------------------------------|
| Minera Risco                             | 6.4                                |
| Aerovías de México                       | 5.9                                |
| Grupo Rotoplas (Construcción)            | 5.2                                |
| Consortio ARA (Construcción)             | 5.6                                |
| América Móvil (Comunicaciones)           | 6                                  |
| Empresas Cablevisión<br>(Comunicaciones) | 5.7                                |
| Proyecto interno de mercadotecnia        | 6.8                                |
| CETES                                    | 6.2                                |

El consejo de administración ha establecido las políticas para la estrategia de inversión y son las siguientes:

- No se debe invertir más del 15% del capital a una opción en particular debido a la volatilidad financiera internacional
- La inversión en CETES debe ser al menos el 10 % del capital ya que es una inversión segura
- Lo invertido en las empresas de comunicación debe ser al menos la inversión en empresas de la construcción
- La inversión en el proyecto interno no puede ser mayor al 10% del total de capital

El objetivo es maximizar el rendimiento total al final del año. La solución a este modelo de optimización lineal permitirá a la gerencia de finanzas asignar la cantidad de capital a cada una de las opciones.

Variables de decisión:

- $X_1$ : Monto de inversión en acciones de Minera Risco  
 $X_2$ : Monto de inversión en acciones de Aerovías de México  
 $X_3$ : Monto de inversión en acciones de Grupo Rotoplas  
 $X_4$ : Monto de inversión en acciones de Consortio ARA  
 $X_5$ : Monto de inversión en acciones de América Móvil  
 $X_6$ : Monto de inversión en acciones de Empresas Cablevisión  
 $X_7$ : Monto de inversión en el proyecto interno de mercadotecnia  
 $X_8$ : Monto de inversión en CETES

La función objetivo es maximizar el rendimiento anual:

Maximizar  $0.064 x_1 + 0.059 x_2 + 0.052 x_3 + 0.056 x_4 + 0.06 x_5 + 0.07 x_6 + 0.068 x_7 + 0.062 x_8$   
 La primera política “No se debe invertir más del 15% del capital a una opción en particular debido a la volatilidad financiera internacional” se puede modelar con un conjunto de restricciones ya que debe establecerse para cada tipo de inversión:

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \leq 0.15$$

$$\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \leq 0.15$$

$$\frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \leq 0.15$$

$$\frac{x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \leq 0.15$$

$$\frac{x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \leq 0.15$$

$$\frac{x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \leq 0.15$$

$$\frac{x_7}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \leq 0.15$$

$$\frac{x_8}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \leq 0.15$$

La segunda política “La inversión en CETES debe ser al menos el 10 % del capital ya que es una inversión segura” se establece a continuación:

$$\frac{x_8}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \geq 0.1$$

La tercera política “Lo invertido en las empresas de comunicación debe ser al menos la inversión en empresas de la construcción” es como sigue:

$$x_3 + x_4 \geq x_5 + x_6$$

La cuarta política “La inversión en el proyecto interno no puede ser mayor al 10% del total de capital” se establece a continuación:

$$\frac{x_7}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \leq 0.1$$

Naturalmente las inversiones a realizar no pueden ser mayores al capital disponible:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 5'700,000$$

Finalmente las variables de decisión no pueden tomar valores negativos. A esta condición se le denomina “no negatividad”. La inversión de cantidades negativas en este entorno no tiene sentido.

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 \geq 0$$

### Selección de un portafolio de inversión

Este problema es muy similar al problema de asignación de capital expuesto anteriormente. Se incorpora al proceso de decisión la información relacionada con el riesgo de cada inversión a realizar.

El riesgo de una inversión puede medirse de diferentes formas y con frecuencia se incorpora la probabilidad, la distribución normal y la desviación estándar. En este ejemplo se usa la desviación estándar calculada a partir del porcentaje de rendimiento histórico para cada opción, a mayor desviación estándar mayor riesgo.

Como analista de optimización se le ha pedido construir un modelo de optimización lineal que permita diseñar un portafolio de inversión de mínimo riesgo. Se cuenta con un capital de \$ 3.3 millones de pesos y se considera un horizonte de inversión a un año. Las opciones de inversión se muestran en la tabla siguiente:

| Opciones de inversión                 | Tasa de rendimiento esperado anual | Desviación estándar de la tasa de rendimiento esperada |
|---------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Minera Risco                          | 6.4                                | 1.2                                                    |
| Aerovías de México                    | 5.9                                | 1.5                                                    |
| Grupo Rotoplas (Construcción)         | 5.2                                | 2.1                                                    |
| Consorcio ARA (Construcción)          | 5.6                                | 1.9                                                    |
| América Móvil (Comunicaciones)        | 6                                  | 0.9                                                    |
| Empresas Cablevisión (Comunicaciones) | 5.7                                | 1.1                                                    |
| Proyecto interno de mercadotecnia     | 6.8                                | 0.9                                                    |
| CETES                                 | 6.2                                | 0.5                                                    |

Las políticas establecidas por el consejo de administración son:

- No se debe invertir más del 15% del capital a una opción en particular debido a la volatilidad financiera internacional
- La inversión en CETES debe ser al menos el 10 % del capital ya que es una inversión segura
- Lo invertido en las empresas de comunicación debe ser al menos la inversión en empresas de la construcción

d) La inversión en el proyecto interno no puede ser mayor al 10% del total de capital

La función objetivo es minimizar el riesgo, bajo este enfoque se busca minimizar la “volatilidad total” donde la volatilidad está expresada al usar la desviación estándar. A menor volatilidad menor riesgo:

$$\text{Minimizar } 1.2 x_1 + 1.5 x_2 + 2.1 x_3 + 1.9 x_4 + 0.9 x_5 + 1.1 x_6 + 0.9 x_7 + 0.5 x_8$$

Las variables de decisión son las mismas:

Variables de decisión:

- X<sub>1</sub>: Monto de inversión en acciones de Minera Risco
- X<sub>2</sub>: Monto de inversión en acciones de Aerovías de México
- X<sub>3</sub>: Monto de inversión en acciones de Grupo Rotoplas
- X<sub>4</sub>: Monto de inversión en acciones de Consorcio ARA
- X<sub>5</sub>: Monto de inversión en acciones de América Móvil
- X<sub>6</sub>: Monto de inversión en acciones de Empresas Cablevisión
- X<sub>7</sub>: Monto de inversión en el proyecto interno de mercadotecnia
- X<sub>8</sub>: Monto de inversión en CETES

La primera política “No se debe invertir más del 15% del capital a una opción en particular debido a la volatilidad financiera internacional” se puede modelar con un conjunto de restricciones ya que debe establecerse para cada tipo de inversión:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} &\leq 0.15 \\ \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} &\leq 0.15 \\ \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} &\leq 0.15 \\ \frac{x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} &\leq 0.15 \\ \frac{x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} &\leq 0.15 \\ \frac{x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} &\leq 0.15 \\ \frac{x_7}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} &\leq 0.15 \\ \frac{x_8}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} &\leq 0.15 \end{aligned}$$

La segunda política “La inversión en CETES debe ser al menos el 10 % del capital ya que es una inversión segura” se establece a continuación:

$$\frac{x_8}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \geq 0.1$$

La tercera política “Lo invertido en las empresas de comunicación debe ser al menos la inversión en empresas de la construcción” es como sigue:

$$x_3 + x_4 \geq x_5 + x_6$$

La cuarta política “La inversión en el proyecto interno no puede ser mayor al 10% del total de capital” se establece a continuación:

$$\frac{x_7}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \leq 0.1$$

Naturalmente las inversiones a realizar no pueden ser mayores al capital disponible

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 6'300,000$$

Finalmente las variables de decisión no pueden tomar valores negativos. A esta condición se le denomina “no negatividad”. La inversión de cantidades negativas en este entorno no tiene sentido.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

### 3.4 Aplicaciones en sistemas de manufactura

El problema de la mezcla de producción

En este problema la empresa fabrica chamarras para dama en un horizonte de planeación definido por ejemplo un mes. Cada producto consume diversos recursos tales como horas-máquina, horas-hombre y materia prima. A su vez cada producto tiene un precio de venta al público.

Los datos para este problema se muestran en la tabla siguiente:

| Producto   | Precio de venta por unidad | Costo de producción de por unidad | Horas-máquina necesarias para cada unidad de producto | Horas-hombre necesarias para cada unidad de producto | Consumo de materia prima necesaria para cada unidad de producto |
|------------|----------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Modelo 100 | \$ 450                     | \$ 210                            | 4 horas                                               | 7 horas                                              | 2.5 Kg                                                          |
| Modelo 110 | \$ 470                     | \$ 180                            | 5 horas                                               | 6 horas                                              | 2.7 Kg                                                          |
| Modelo 120 | \$ 530                     | \$ 310                            | 6 horas                                               | 5 horas                                              | 1.8 Kg                                                          |
| Modelo 130 | \$ 650                     | \$ 270                            | 7 horas                                               | 4 horas                                              | 6.5 Kg                                                          |
|            |                            | Disponibilidad mensual            | 5000 horas                                            | 4900 horas                                           | 6000 kg                                                         |

Los datos de la tabla anterior se denominan parámetros y son fijos para este mes. Para el mes siguiente corresponde revisar ya que pueden cambiar.

Las políticas establecidas para elaborar la mezcla de producción son:

- La cantidad a producir del modelo 110 debe ser igual a la cantidad a producir del modelo 120
- Se debe producir mayor cantidad del modelo 130 que del modelo 100 ya que es el producto de “moda”.

Las variables de decisión para este modelo son las siguientes, se acostumbra en programación matemática utilizar x con un subíndice para diferenciar entre las variables.

$X_{100}$ : Unidades a producir del modelo 100 para el mes siguiente

$X_{110}$ : Unidades a producir del modelo 110 para el mes siguiente

$X_{120}$ : Unidades a producir del modelo 120 para el mes siguiente

$X_{130}$ : Unidades a producir del modelo 130 para el mes siguiente

La función objetivo ya que se tienen datos del precio de venta y el costo de producción es maximizar la utilidad. Utilidad por unidad vendida = precio de venta – costo de producción.

$$\text{Maximizar } (450-210) X_{100} + (470-180)X_{110} + (530-310)X_{120} + (650-270)X_{130}$$

La primera política para la mezcla de producción “La cantidad a producir del modelo 110 debe ser igual a la cantidad a producir del modelo 120 ” se modela así

$$X_{110} = X_{120}$$

La segunda política "Se debe producir mayor cantidad del modelo 130 que del modelo 100" se modela con:

$$X_{130} > X_{100}$$

Respecto a las horas -máquina disponibles tenemos:

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 \leq 5000$$

Respecto a las horas-hombre disponibles tenemos:

$$7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 4900$$

La cantidad de materia prima disponible establece la restricción siguiente:

$$2.5x_1 + 2.7x_2 + 1.8x_3 + 6.5x_4 \leq 6000$$

Finalmente se establece las condiciones de no negatividad para las variables de decisión.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

El problema de programación de la producción

Este tipo de problemas considera varios productos, su demanda, los niveles de inventario, un horizonte de planeación

La empresa motores eléctricos XYZ fabrica 3 motores, modelo TGB, WSX y UJM que se usan en electrodomésticos como licuadoras, lavadoras y aspiradoras. Las órdenes de compra para los próximos 3 meses son:

| Motor | Unidades pedidas |         |        |
|-------|------------------|---------|--------|
|       | Enero            | Febrero | Marzo  |
| TGB   | 35,000           | 15,000  | 25,000 |
| WSX   | 12,000           | 10,000  | 13,000 |
| UJM   | 5,000            | 5,000   | 5,000  |

Las capacidades de las instalaciones se indican en la tabla siguiente:

| Mes     | Horas-Máquina disponibles | Horas-hombre disponibles | Capacidad en el almacén m <sup>2</sup> |
|---------|---------------------------|--------------------------|----------------------------------------|
| Enero   | 900                       | 1200                     | 300                                    |
| Febrero | 800                       | 1100                     | 350                                    |
| Marzo   | 1000                      | 1200                     | 250                                    |

Los requerimientos necesarios para producir cada motor se indican en la tabla siguiente:

| Mes | Horas-Máquina necesarias por unidad | Horas-hombre necesarias por unidad | Espacio requerido en el almacén en metros cuadrados |
|-----|-------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| TGB | 0.15                                | 0.06                               | 0.30                                                |
| WSX | 0.18                                | 0.07                               | 0.35                                                |
| UJM | 0.21                                | 0.08                               | 0.40                                                |

Los costos de producción son de \$3200, \$2700 y \$3300 para los motores TGB, WSX y UJM respectivamente. Los costos de mantener el inventario por cada motor de un mes al siguiente se estiman en un 8% del costo de producción.

Los niveles de inventario actuales para cada motor son 900, 800 y 700 unidades para los motores TGB, WSX y UJM respectivamente. El costo por hora-hombre contratada adicional es de \$1100 y el costo por hora-hombre no utilizada es de \$1000.

Las variables de decisión para este modelo son las siguientes;  $x_{ij}$ : son las unidades a producir del motor  $i$  en el mes  $j$ .  $I_{ij}$ : son las unidades en inventario del motor  $i$  al final del mes  $j$ .  $AH_j$ : Son las horas-hombre en aumento utilizadas en el mes  $j$ .  $DH_j$ : Son las horas-hombre en disminución utilizadas en el mes  $j$ .

Subíndice  $i$

$i=1$ , motor TGB

$i=2$ , motor WSX

$i=3$ , motor UJM

Subíndice  $j$

$j=1$ , mes de enero

$j=2$ , mes de febrero

$j=3$ , mes de marzo

Por ejemplo:  $x_{2,3}$  es la cantidad de motores WSX a producir en el mes de marzo,  $I_{1,1}$  es el nivel de inventario del motor TGB al final del mes de enero,  $AH_2$  son las horas hombre a incrementar para el mes de febrero y  $DH_3$  son las horas hombre a reducir en el mes de marzo.

Función objetivo. Este modelo contempla minimizar el costo total de la programación de la producción que está integrado por el costo de producción, el costo de inventario y el costo en el aumento o disminución de la mano de obra.

Minimizar

$$3200(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 2700(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 3300(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ + 3200(0.08)(I_{11} + I_{12} + I_{13}) + 2700(0.08)(I_{21} + I_{22} + I_{23}) + 3300(0.08)(I_{31} + I_{32} + I_{33}) \\ + 1100(AH_1 + AH_2 + AH_3) + 1000(DH_1 + DH_2 + DH_3)$$

Restricciones para las horas-máquina:

$$0.15x_{11} + 0.18x_{21} + 0.21x_{31} \leq 900, \quad \text{mes de enero} \\ 0.15x_{12} + 0.18x_{22} + 0.21x_{32} \leq 800, \quad \text{mes de febrero} \\ 0.15x_{13} + 0.18x_{23} + 0.21x_{33} \leq 1000, \quad \text{mes de marzo}$$

Restricciones para las horas-hombre:

$$0.06x_{11} + 0.07x_{21} + 0.08x_{31} \leq 1200, \quad \text{mes de enero} \\ 0.06x_{12} + 0.07x_{22} + 0.08x_{32} \leq 1100, \quad \text{mes de febrero} \\ 0.06x_{13} + 0.07x_{23} + 0.08x_{33} \leq 1200, \quad \text{mes de marzo}$$

Restricciones de capacidad en el almacén:

$$0.30(x_{11} + I_{11}) + 0.35(x_{21} + I_{21}) + 0.40(x_{31} + I_{31}) \leq 300, \quad \text{mes de enero} \\ 0.30(x_{12} + I_{12}) + 0.35(x_{22} + I_{22}) + 0.40(x_{32} + I_{32}) \leq 350, \quad \text{mes de febrero} \\ 0.30(x_{13} + I_{13}) + 0.35(x_{23} + I_{23}) + 0.40(x_{33} + I_{33}) \leq 400, \quad \text{mes de marzo}$$

La producción y el inventario requieren de estar ligadas por medio de ecuaciones de balance de inventario, "Inventario inicial + producción - inventario final = demanda"

$$900 + x_{11} - I_{11} = 35000, \quad \text{para el mes de enero, motor TGB} \\ I_{11} + x_{12} - I_{12} = 15000, \quad \text{para el mes de febrero, motor TGB} \\ I_{13} + x_{13} - I_{13} = 25000, \quad \text{para el mes de marzo, motor TGB}$$

$$800 + x_{21} - I_{21} = 12000, \quad \text{para el mes de enero, motor WSX} \\ I_{21} + x_{22} - I_{22} = 10000, \quad \text{para el mes de febrero, motor WSX} \\ I_{23} + x_{23} - I_{23} = 13000, \quad \text{para el mes de marzo, motor WSX}$$

$$700 + x_{31} - l_{31} = 5000, \quad \text{para el mes de enero, motor UJM}$$

$$l_{31} + x_{32} - l_{32} = 5000, \quad \text{para el mes de febrero, motor UJM}$$

$$l_{33} + x_{33} - l_{33} = 5000, \quad \text{para el mes de marzo, motor UJM}$$

Las fluctuaciones de mano de obra se modelan por mes de la forma siguiente:

$$0.06x_{11} + 0.07x_{21} + 0.08x_{31} - 1200 = AH_1 - DH_1, \quad \text{para el mes de enero.}$$

$$0.06x_{12} + 0.07x_{22} + 0.08x_{32} - 1100 = AH_2 - DH_2, \quad \text{para el mes de febrero.}$$

$$0.06x_{13} + 0.07x_{23} + 0.08x_{33} - 1200 = AH_3 - DH_3, \quad \text{para el mes de marzo.}$$

Finalmente no se permiten valores negativos en las variables de decisión.

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$$

$$l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{21}, l_{22}, l_{23}, l_{31}, l_{32}, l_{33} \geq 0$$

$$AH_1, AH_2, AH_3, DH_1, DH_2, DH_3 \geq 0$$

Como puede apreciar el lector si se desea construir un modelo que contemple dos años de horizonte de planeación y 37 modelos de motor distintos el modelo anterior crece en el número de variables de decisión y restricciones. Para construir un modelo “grande” editar el modelo tal y como se ha hecho hasta el momento puede ser muy tedioso y facilita la inclusión de errores en los subíndices, variables y parámetros.

Para facilitar el modelaje de instancias “grandes” se hace uso de software especializado que permite construir el modelo de forma algebraica. En este entorno los datos y parámetros se declaran en tablas así como los conjuntos de subíndices y conjuntos de restricciones. Software como GAMS permiten construir modelos “grandes” permitiendo reducir el margen de error.

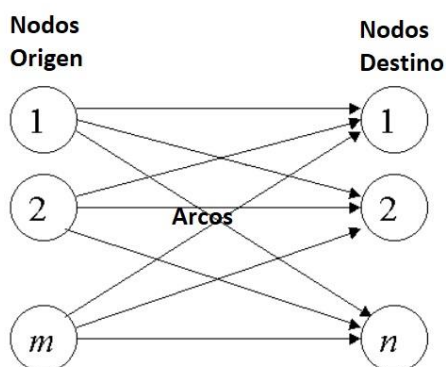
Este software “modelador” con frecuencia está ligado al software optimizador que contiene el algoritmo que permitirá encontrar la solución óptima si existe o declara que el problema no tiene solución, principalmente debido a errores en el modelaje. Cabe mencionar que si el modelo está bien construido, verificado y validado entonces la solución actual real es una solución el modelo matemático construido. La dupla software-modelador y software-optimizador por lo general vienen juntos. En los últimos años el software-optimizador de mayor éxito es CPLEX.

La dupla GAMS-CPLEX es bastante común y se trata de software especializado que requiere de ciencia, arte y habilidades de programación siendo este contexto un ejemplo de la intersección del cuerpo del saber de la ingeniería industrial y la ingeniería en sistemas computacionales.

### 3.5 Aplicaciones en sistemas de transporte y logísticos

#### El problema de transporte

Este problema es uno de los más antiguos reportados en la literatura. Requiere de conceptos básicos de redes. Una red se puede definir como un conjunto de nodos y un conjunto de arcos. Los nodos representan ciudades que pueden considerarse nodos origen, nodos de transbordo y nodos destino. Los arcos representan carreteras o vías de comunicación que conectan los nodos de la red. La representación en red se muestra en la figura siguiente.



El problema de transporte consiste en transportar producto terminado de los nodos origen a nodos destino. Se considera un solo producto, varias fábricas que abastecen a distintos mercados. Se conoce el costo de transporte por cada unidad de producto terminado y el objetivo es satisfacer la demanda de cada mercado sin sobrepasar las capacidades de las plantas a un costo mínimo.

El horizonte de planeación puede ser semanal o mensual. Una instancia al problema de transporte se muestra en la tabla siguiente:

|                 | Costo de transporte unitario de la planta a la ciudad de consumo |         |        |        |                               |
|-----------------|------------------------------------------------------------------|---------|--------|--------|-------------------------------|
|                 | Guadalajara                                                      | Morelia | Puebla | Toluca | Capacidad de la planta al mes |
| Planta Lerma    | \$32                                                             | \$27    | \$40   | \$6    | 120                           |
| Planta Chapala  | \$15                                                             | \$25    | \$52   | \$47   | 160                           |
| Planta Orizaba  | \$43                                                             | \$36    | \$12   | \$38   | 170                           |
| Demanda mensual | 160                                                              | 100     | 80     | 100    |                               |

Las plantas se consideran nodos origen y las ciudades son nodos destino.

Variable de decisión: Esta vez es necesario usar dos subíndices, el subíndice  $i$  se refiere a las plantas o nodos origen y el subíndice  $j$  se refiere a las ciudades o nodos destino.  $X_{ij}$ : Cantidad a enviar de la planta origen  $i$  a la ciudad destino  $j$ .

| Nodos origen           |
|------------------------|
| $i=1$ , planta Lerma   |
| $i=2$ , planta Chapala |
| $i=3$ , planta Orizaba |

| Nodos destino       |
|---------------------|
| $j=1$ , Guadalajara |
| $j=2$ , Morelia     |
| $j=3$ , Puebla      |
| $j=4$ , Toluca      |

Por ejemplo  $x_{23}$  es la cantidad a enviar de la planta Chapala a la ciudad de Puebla.

La función objetivo es minimizar el costo total de transporte:

$$\text{Minimizar } 32x_{11} + 27x_{12} + 40x_{13} + 6x_{14} + 15x_{21} + 25x_{22} + 52x_{23} + 47x_{24} + 43x_{31} + 36x_{32} + 12x_{33} + 38x_{34}$$

Tenemos dos conjuntos de restricciones, el primer conjunto es para las plantas ya que la cantidad a enviar desde cada planta no puede ser mayor que su capacidad

Planta Lerma

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 120$$

Para la planta Chapala tenemos:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 160$$

Para la planta Orizaba tenemos:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 170$$

El segundo conjunto es para las ciudades destino y los envíos recibidos deben abastecer la demanda

Guadalajara

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 160$$

Morelia

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 100$$

Puebla

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 80$$

Toluca

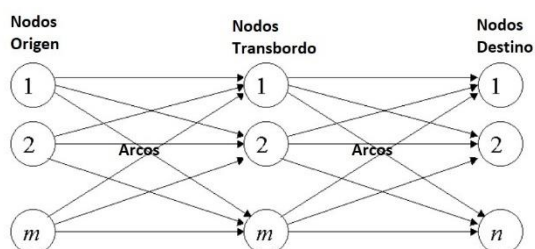
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 100$$

Finalmente no se permiten envíos con valores negativos.

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{34} \geq 0$$

El problema de transbordo

Es una variante del problema anterior ya que incluye un conjunto de nodos adicionales llamados nodos de transbordo, una representación en red se muestra en la figura siguiente:



La tabla de datos relevantes ahora incluye los datos relacionados a los nodos de transbordo. Las ciudades de transbordo son Pachuca y Querétaro:

|                 | Costo unitario de transporte |         |        |        |         |           | Capacidad de la planta al mes |
|-----------------|------------------------------|---------|--------|--------|---------|-----------|-------------------------------|
|                 | Guadalajara                  | Morelia | Puebla | Toluca | Pachuca | Querétaro |                               |
| Planta Lerma    | \$32                         | \$27    | \$40   | \$6    | \$28    | \$31      | 120                           |
| Planta Chapala  | \$15                         | \$25    | \$52   | \$47   | \$47    | \$41      | 160                           |
| Planta Orizaba  | \$43                         | \$36    | \$12   | \$38   | \$35    | \$37      | 170                           |
| Pachuca         | \$45                         | \$40    | \$32   | \$28   | --      | --        | --                            |
| Querétaro       | \$38                         | \$30    | \$28   | \$20   | --      | --        | --                            |
| Demanda mensual | 160                          | 100     | 80     | 100    | --      | --        | --                            |

Variable de decisión: Los nodos de transbordo son nodos origen y también son nodos destino, la variable de decisión es:  $X_{ij}$ : Cantidad a enviar de la planta origen  $i$  a la ciudad destino  $j$ .

Nodos origen

i=1, planta Lerma

i=2, planta Chapala

i=3, planta Orizaba

i=5, transbordo Pachuca

i=6, transbordo Querétaro

Nodos destino

j=1, Guadalajara

j=2, Morelia

j=3, Puebla

j=4, Toluca

j=5, Pachuca

j=6, Querétaro

La función objetivo es minimizar el costo total de transporte:

$$\text{Minimizar } 28x_{15} + 31x_{16} + 47x_{25} + 41x_{26} + 35x_{35} + 37x_{36} + 45x_{51} + 40x_{52} + 32x_{53} + 28x_{54} + 38x_{61} + 30x_{62} + 28x_{63} + 20x_{64}$$

Tenemos dos conjuntos de restricciones, el primer conjunto es para las plantas ya que la cantidad a enviar desde cada planta no puede ser mayor que su capacidad

Planta Lerma

$$x_{15} + x_{16} \leq 120$$

Para la planta Chapala tenemos:

$$x_{25} + x_{26} \leq 160$$

Para la planta Orizaba tenemos:

$$x_{35} + x_{36} \leq 170$$

El segundo conjunto es para las ciudades destino y los envíos recibidos deben abastecer la demanda

Guadalajara

$$x_{51} + x_{61} \geq 160$$

Morelia

$$x_{52} + x_{62} \geq 100$$

Puebla

$$x_{53} + x_{63} \geq 80$$

Toluca

$$x_{54} + x_{64} \geq 100$$

En el problema de transbordo se establecen restricciones de balance de envíos en los nodos de transbordo. La cantidad de producto que llega debe ser iguales a la cantidad de producto que se envía.

Para el nodo de transbordo Pachuca

$$X_{15} + X_{25} + X_{35} = X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54}$$

Para el nodo de transbordo Querétaro

$$X_{16} + X_{26} + X_{36} = X_{61} + X_{62} + X_{63} + X_{64}$$

Finalmente no se permiten envíos con valores negativos.

$$X_{15}, X_{16}, X_{25}, X_{26}, X_{35}, X_{36}, X_{51}, X_{52}, X_{53}, X_{54}, X_{61}, X_{62}, X_{63}, X_{64} \geq 0$$

### 3.6 Aplicaciones para mercadotecnia

#### Estrategia publicitaria

El corporativo Moda Sensacional desea establecer una estrategia publicitaria para el próximo año. Los canales publicitarios son redes sociales, anuncios espectaculares en avenidas principales, canales de *streaming* y anuncios en plazas comerciales. Para cada canal publicitario se ha estimado:

- Número de familias potencialmente compradoras
- Costo por anuncio
- Disponibilidad mensual máxima
- Unidades de exposición esperada.

Las políticas para establecer la estrategia publicitaria son:

- Deben utilizarse al menos 20 anuncios espectaculares
- Los mensajes publicitarios deben llegar al menos a 25000 familias potencialmente compradoras
- No debe gastarse más de \$ 2'000,000

La información relevante se proporciona en la tabla siguiente:

| Canal publicitario             | Número de familias potencialmente compradoras | Costo por anuncio | Disponibilidad máxima de anuncios | Unidades vendidas esperadas por anuncio |
|--------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------|
| Redes sociales                 | 6000                                          | \$12,000          | 400                               | 700                                     |
| Anuncios espectaculares        | 900                                           | \$25,000          | 10                                | 800                                     |
| Canales de <i>streaming</i>    | 7000                                          | \$17,000          | 1000                              | 200                                     |
| Anuncios en plazas comerciales | 2500                                          | \$3,000           | 200                               | 500                                     |

Las variables de decisión corresponden a:

| Variable | Significado                                         |
|----------|-----------------------------------------------------|
| $x_1$ :  | Cantidad de anuncios en redes sociales              |
| $x_2$ :  | Cantidad de anuncios espectaculares                 |
| $x_3$ :  | Cantidad de anuncios en canales de <i>streaming</i> |
| $x_4$ :  | Cantidad de anuncios en plazas comerciales          |

La función objetivo consiste en maximizar las unidades vendidas esperadas por anuncio

$$\text{Max } 700x_1 + 800x_2 + 200x_3 + 500x_4$$

La política “deben utilizarse al menos 20 anuncios espectaculares” se modela con:

$$x_2 \geq 20$$

“Los mensajes publicitarios deben llegar al menos a 25000 familias potencialmente compradoras” se modela con:

$$6000x_1 + 900x_2 + 7000x_3 + 2500x_4 \geq 25000$$

“No debe gastarse más de \$ 2'000,000” corresponde a:

$$12000x_1 + 25000x_2 + 17000x_3 + 3000x_4 \leq 2000\ 000$$

La disponibilidad máxima de anuncios debe respetarse con una restricción para cada tipo de anuncio :

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 400 \\x_2 &\leq 10 \\x_3 &\leq 1000 \\x_4 &\leq 200\end{aligned}$$

Finalmente no se permiten valores negativos para las variables de decisión

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

### Estrategia de ventas

La empresa *celulares para todos* debe diseñar una estrategia de ventas para el mes siguiente. Cuenta con un presupuesto de \$85 000 para los canales de venta siguientes: kioscos en plazas comerciales, eventos de promoción en la feria anual de la ciudad, puntos de venta en locales comerciales tradicionales y ventas a través de redes sociales.

La efectividad de cada canal depende principalmente del número de vendedores dedicados a atender a los clientes. Para cada canal de venta se ha colectado información sobre las ventas esperadas, costo de contratación de vendedores, horas

dedicadas a atender al público y costo de venta. La información relevante se proporciona en la tabla siguiente:

| Canal de venta                         | Ventas esperadas | Costo de contratación de vendedores | Horas dedicadas a atender al público |
|----------------------------------------|------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| Kioscos en plazas comerciales          | 60               | \$ 1200                             | 200                                  |
| Eventos en la feria                    | 40               | \$800                               | 80                                   |
| Puntos de venta en locales comerciales | 50               | \$1000                              | 300                                  |
| Redes sociales                         | 20               | \$ 500                              | 400                                  |

Variables de decisión:

Sea

$x_1$ : La cantidad de vendedores asignados a quioscos

$x_2$ : La cantidad de vendedores asignados a eventos en la feria

$x_3$ : La cantidad de vendedores asignados a puntos de venta en locales comerciales

$x_4$ : La cantidad de vendedores asignados a redes sociales

La función objetivo consiste en maximizar las ventas esperadas

Maximizar  $60x_1 + 40x_2 + 50x_3 + 20x_4$

La restricción relacionada con el presupuesto asignado es:

$1200x_1 + 800x_2 + 1000x_3 + 500x_4 \leq 8500$

Debe cubrirse al menos 5 000 horas de atención al cliente:

$200x_1 + 80x_2 + 300x_3 + 400x_4 \geq 5000$

Finalmente no se permiten valores negativos:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

### 3.7 Otras aplicaciones

La construcción de modelos de programación lineal es muy amplia y variada. Con frecuencia se reportan en la literatura modelos de optimización lineal y modelos de optimización entera y combinatoria para su consideración al lector especializado que incrementan el cuerpo del saber.

Los modelos de optimización lineal, optimización entera y optimización combinatoria a simple vista son muy parecidos, una de las diferencias es que en la optimización entera los valores de las variables de decisión sólo pueden tomar valores enteros, respecto a la optimización combinatoria además de valores enteros para las variables de decisión se establecen con frecuencia valores binarios. Los algoritmos de solución, también son diferentes para optimización lineal con frecuencia se utiliza el método simplex, para la

optimización entera y combinatoria el algoritmo utilizado con frecuencia es el método de ramificar y acotar.

La construcción de modelos de optimización permite incluir variables continuas, variables enteras y variables binarias en cuyo caso tenemos un modelo de optimización mixto que en la mayoría de las veces representa todo un reto identificar y aplicar los algoritmos para encontrar la solución óptima. Cabe aclarar que éstos modelos mixtos son los más difíciles de resolver y con frecuencia son de complejidad computacional NP. Algunas aplicaciones de los modelos de optimización se incluyen a continuación de forma indicativa más no limitativa.

## Ejercicios propuestos

1. Defina con sus propias palabras el concepto de modelación
2. Defina con sus propias palabras el concepto de formulación
3. Un fabricante de televisores desea conocer cuántas unidades de los modelos que fabrica deben producirse durante el mes siguiente para maximizar la utilidad. Actualmente fabrica tres modelos: FG, ER, SX y WE. La demanda mínima para cada tipo de televisor, el precio de venta y demás información relevante se muestran en la tabla siguiente:

| Modelo | Tiempo requerido para fabricarse | Materiales requeridos para fabricarse | Precio de venta | Costo de venta | Demanda En piezas |
|--------|----------------------------------|---------------------------------------|-----------------|----------------|-------------------|
| FG     | 2                                | 3                                     | \$18000         | \$7500         | 250               |
| ER     | 3                                | 2                                     | \$19000         | \$14000        | 300               |
| SX     | 4                                | 2                                     | \$21000         | \$16000        | 250               |
| WE     | 2                                | 2                                     | \$16500         | \$8000         | 200               |
|        | Tiempo disponible<br>1000        | Material disponible<br>2000           |                 |                |                   |

Formule el problema mediante un modelo de optimización lineal

4. Una compañía fabricante de pinturas maneja tres aditivos B1, B2 y B3 las cuales se mezclan para obtener pintura de alta calidad. La información relevante es la siguiente:
  - a) Cada 300 ml de aditivo B1 añade 55 unidades de aglutinante por tanque, cada medio litro de aditivo B2 añade 45 unidades de aglutinante y finalmente cada 250 ml de B3 añade 110 unidades de aglutinante.
  - b) Si se emplea más de 900 ml de aditivos por tanque, los aditivos forman depósitos no deseados
  - c) Debe utilizarse una proporción 3:2:5 para que la pintura adquiera una duración aceptable lo cual es indispensable para incrementar las ventas
  - d) Los precios por litro de aditivo son los siguientes: B1, \$110; B2, \$130 y B3, \$220.
 Formule un modelo de optimización lineal
5. Formule un modelo de programación lineal para el problema de transporte con los datos incluidos en la tabla:

| Origen / Destino | Costo de transporte unitario de la planta a la ciudad de consumo |       |      |       |       | Capacidad de la planta al mes |
|------------------|------------------------------------------------------------------|-------|------|-------|-------|-------------------------------|
|                  | D1                                                               | D2    | D3   | D4    | D5    |                               |
| O1               | \$120                                                            | \$227 | \$40 | \$540 | \$60  | 180                           |
| O2               | \$145                                                            | \$225 | \$52 | \$460 | \$470 | 110                           |
| O3               | \$110                                                            | \$236 | \$12 | \$510 | \$380 | 150                           |
| O4               | \$135                                                            | \$244 | \$17 | \$440 | \$122 | 65                            |
| Demanda mensual  | 160                                                              | 100   | 80   | 70    | 150   |                               |

## Fuentes de consulta

Arreola R. J., Arreola R. A., (2003). Programación Lineal. Una introducción a la toma de decisiones cuantitativa. Thomson. México, D. F.

Strang G., (1986). Algebra Lineal y sus aplicaciones. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware, EEUU.

Kantorovich, L.V. (1939): "Mathematical Methods of Organizing and Planning Production". Management Science, Vol. 6, N° 4 (Jul, 1960), pp. 366-422. Ed. INFORMS.

Stigler, G. J. (1945): "The Cost of Subsistence". Journal of Farm Economics. Vol. 27, N° 2 (May, 1945), pp. 304-314.

Von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1944): "Theory of Games and Economic Behavior". Ed. Princeton University Press. (Commemorative Edition, May 2007).

## Capítulo IV. Métodos de solución

**Objetivo:** Aplicar los distintos métodos de solución a un modelo de optimización lineal para encontrar la solución óptima o declarar que no existe una solución óptima.

**Avance:** Una vez que el modelo matemático de optimización lineal es adecuado se requiere de aplicar un algoritmo o método de solución para encontrar la solución óptima y también soluciones factibles. El número de variables y restricciones es de suma importancia para decidir qué algoritmo es el más adecuado de utilizar. El método gráfico aplicable para problemas con dos o tres variables se incluye para facilitar la comprensión de algoritmos más sofisticados. El método simplex es el más conocido de todos y fue desarrollado por George Dantzig en 1947. El desarrollo de nuevas tecnologías en software y hardware han permitido el desarrollo de algoritmos más sofisticados tales como el método elipsoidal y métodos de puntos interiores de barrera.

### 4.1 El método gráfico

Este método de solución permite resolver modelos de optimización lineal simples de 2 ó 3 variables. Si es de 2 variables entonces el modelo se puede representar en el plano cartesiano, es decir en  $\mathbb{R}^2$ . Si es de 3 variables entonces se puede representar en  $\mathbb{R}^3$ . Requiere de conocimientos de geometría analítica y su esencia es básicamente gráfica. Para mayor número de variables  $n$  se requiere de una mayor abstracción matemática ya que su representación geométrica esta en  $\mathbb{R}^n$ . Se incluye en los cursos de investigación de operaciones ya que facilita la comprensión de los conceptos: función objetivo, restricciones, región factible, punto solución, solución factible, solución óptima, solución infactible, solución óptima única, solución óptima múltiple entre otros.

El método gráfico básicamente consiste en:

Paso 1. Graficar cada restricción.

Paso 2. Identificar la región solución.

Paso 3. Graficar la función objetivo

Paso 4. Identificar la solución óptima si existe o declarar que el modelo no tiene solución

El modelo de optimización lineal a resolver es el siguiente:

$$\text{Max } 10x_1 + 15x_2$$

Sujeto a:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 400$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 150$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 110$$

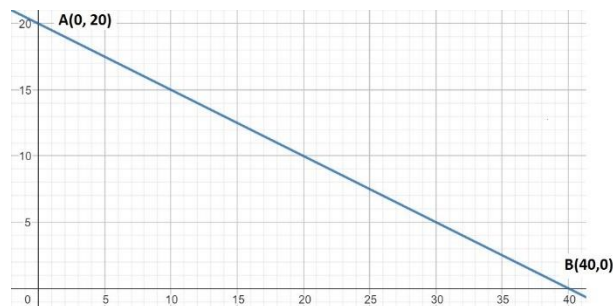
$$x_1, x_2 \geq 0$$

### Paso 1. Graficar cada restricción

En este modelo tenemos sólo dos variables de decisión y es posible representarlo en  $\mathbb{R}^2$ . Las condiciones de no negatividad  $x_1, x_2 \geq 0$  indican que solo se utiliza el primer cuadrante de plano cartesiano.

Para cada restricción se considera cada una como una estricta igualdad, al aplicar los conceptos de geometría analítica gráfica de una recta, calculamos dos puntos por los que pasa la recta.

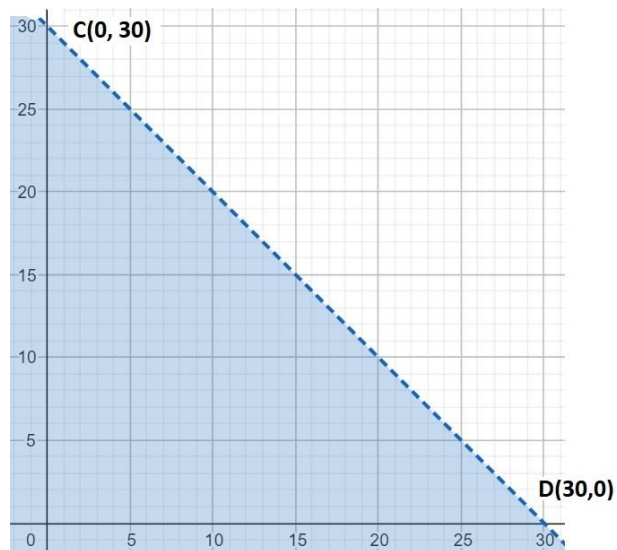
Para la primera restricción, calculamos los puntos de intersección con los ejes. El eje x corresponde a  $x_1$  y el eje y corresponde a  $x_2$ . Entonces  $10x_1 + 20x_2 = 400$ , si hacemos  $x_1 = 0$ , entonces  $x_2 = 400 / 20$ ,  $x_2 = 20$ . Tenemos entonces el primer punto A(0, 20). Ahora hacemos  $x_2 = 0$  entonces  $x_1 = 400 / 10$ ,  $x_1 = 40$ . Tenemos entonces el segundo punto B(40, 0). Ambos puntos se muestran en la figura siguiente:



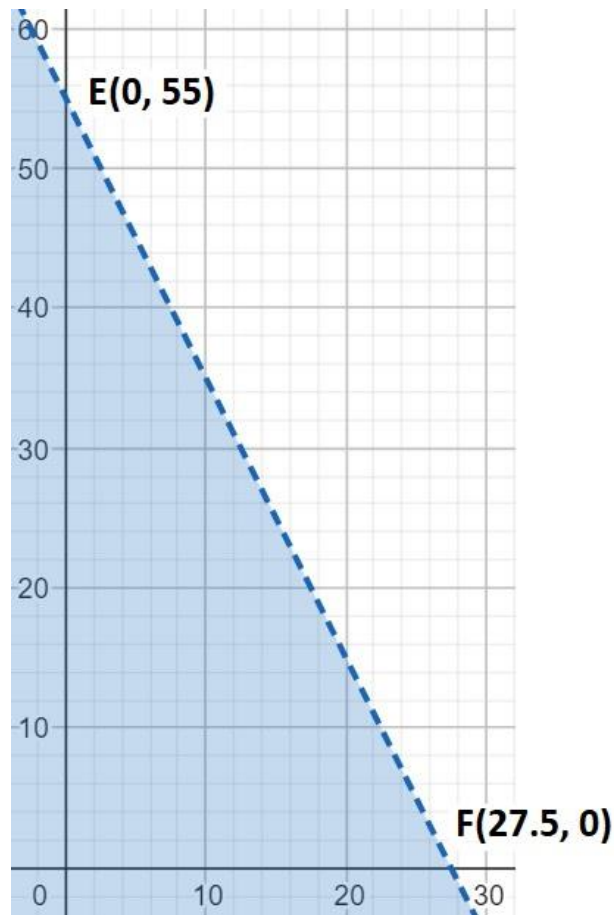
Ya que la restricción es del tipo  $\leq$  genera una región. Tenemos dos regiones, la región arriba de la recta y la región debajo de la recta. Para identificar la región correcta basta con sustituir en la restricción un punto de la región a validar. Si se cumple la desigualdad entonces tenemos la región correcta. El punto a validar más fácil es el origen (0, 0) al sustituirlo en la restricción tenemos que  $0 + 0 \leq 400$  por lo que la región que corresponde a la desigualdad es la de abajo. La representación gráfica de la primera restricción se muestra en la figura siguiente.



De la misma forma para la segunda restricción,  $5x_1 + 5x_2 = 150$ , si hacemos  $x_1 = 0$  entonces  $x_2 = 150 / 5$ ,  $x_2 = 30$ . Tenemos entonces el primer punto C(0, 30). Ahora hacemos  $x_2 = 0$  entonces  $x_1 = 150 / 5$ ,  $x_1 = 30$ . Tenemos entonces el segundo punto D(30, 0). La región de puntos que satisface la restricción 2 se muestra en la figura siguiente:

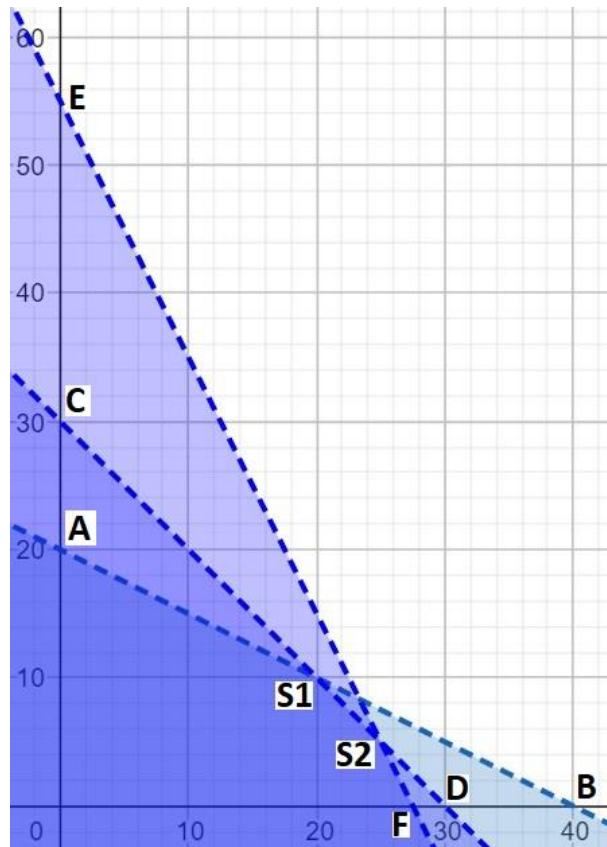


Para la tercera restricción,  $4x_1 + 2x_2 = 110$ , si hacemos  $x_1 = 0$  entonces  $x_2 = 110 / 2$ ,  $x_2 = 55$ . Tenemos entonces el primer punto E(0, 55). Ahora hacemos  $x_2 = 0$  entonces  $x_1 = 110 / 4$ ,  $x_1 = 27.5$ . Tenemos entonces el segundo punto F(27.5, 0). La región de puntos que satisface la restricción 3 se muestra en la figura siguiente:



Paso 2. Identificar la región solución.

Para identificar la región solución que contiene todos los puntos factibles a las tres restricciones, debemos graficar todas las restricciones al mismo tiempo, en una sola figura, la región solución que contiene todos los puntos factibles a las tres restricciones es la intersección de cada región de cada restricción y corresponde a la región más “obscura”, se muestra a continuación. Esta región está delimitada por los puntos 0, A, S1, S2, F, 0 y por los segmentos de recta 0-A, A-S1, S1-S2, S2-F, F-0.

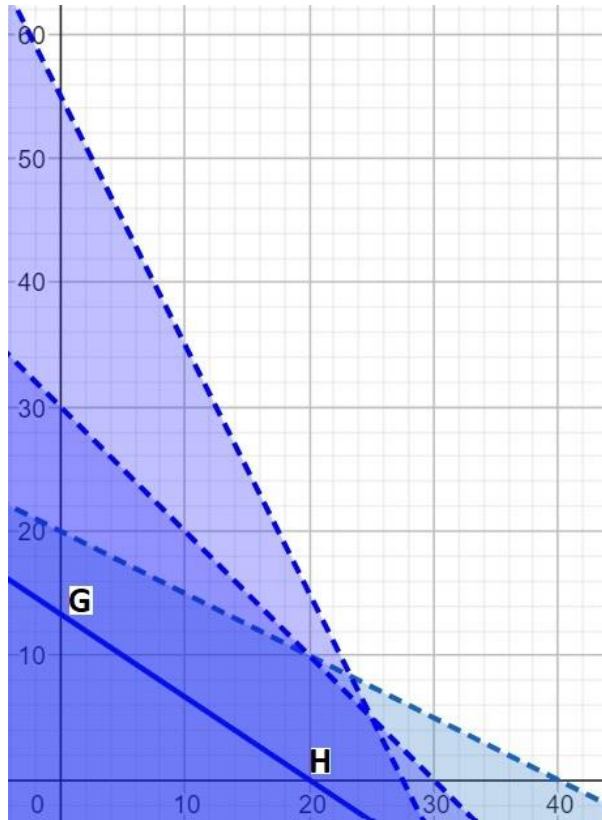


Note que se han graficado las tres regiones, los seis puntos calculados A, B, C, D, E y F. Se han incluido los puntos S1 y S2. El punto S1 es la intersección de la restricción 1 y la restricción 2 consideradas como igualdad. El punto S2 es la intersección de la restricción 2 y la restricción 3 consideradas como igualdad.

### Paso 3. Graficar la función objetivo

La función objetivo se grafica al igualarla a un valor adecuado, en este caso digamos 200 por lo que la recta a graficar es  $10x_1 + 15x_2 = 200$ , si hacemos  $x_1 = 0$  entonces  $x_2 = 200 / 15$ ,  $x_2 = 13.3$ . Tenemos entonces el primer punto G(0, 13.3). Ahora hacemos  $x_2 = 0$  entonces  $x_1 = 200 / 10$ ,  $x_1 = 20$ . Tenemos entonces el segundo punto H(20, 0). Se muestran en la figura siguiente. La función objetivo aparece como una recta continua.

Si sustituimos el punto origen (0, 0) el valor de la función objetivo vale 0 y naturalmente pasa por el origen, de acuerdo con lo anterior el sentido de optimización maximizar indica que la función objetivo se aleja del origen. Tenemos una recta al igualar la función objetivo a 200, si cambiamos este valor entonces tenemos una recta paralela que forma parte de una familia de rectas, cada una con un valor distinto.



Paso 4. Identificar la solución óptima si existe o declarar que el modelo no tiene solución

La solución óptima al modelo de optimización es aquel punto dentro de la región factible que maximice su valor. Si trasladamos la función objetivo alejándose del origen el último punto que toca a la región factible es el punto S1. Para calcular este punto basta con resolver como ecuaciones las restricciones 1 y 2.

Resolvemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas  $10x_1 + 20x_2 = 400$  y  $5x_1 + 5x_2 = 150$ . Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para sumarla a la primera y eliminar a  $x_1$ . Tenemos que  $[10x_1 + 20x_2 = 400] - 2 [5x_1 + 5x_2 = 150]$ ;  $[10x_1 + 20x_2 = 400] + [-10x_1 - 10x_2 = -300]$ . La ecuación resultante es  $[0x_1 + 10x_2 = 100]$ , por lo que  $x_2 = 10$ .

Con el valor de  $x_2 = 10$  lo sustituimos en cualquiera de las dos restricciones tomándola como igualdad, digamos la primera  $[10x_1 + 20(10) = 400]$  tenemos que  $x_1 = (400 - 200) / 10 = 20$ , entonces S1(20,10).

El valor de la función objetivo se obtiene al sustituir el punto S1 en la función objetivo. Tenemos entonces que:  $10(20) + 15(10) = 350$ . En este caso tenemos una solución óptima única.

Un ejemplo de minimización, considere el modelo de optimización lineal

$$\text{Minimizar } 4y_1 + 14y_2$$

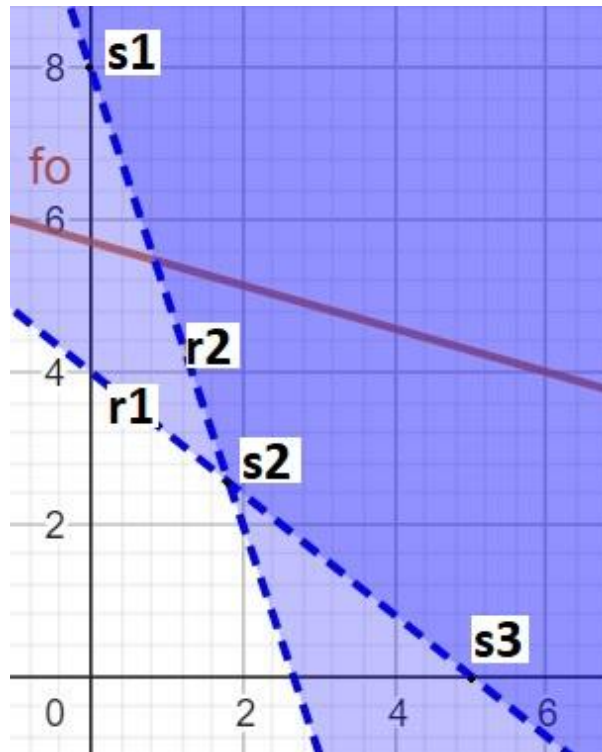
Sujeto a:

$$4y_1 + 5y_2 \geq 20$$

$$3y_1 + y_2 \geq 8$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

La región solución se muestra en la figura siguiente,  $r_1$  corresponde a la restricción 1 y  $r_2$  a la restricción 2. La función objetivo está marcada con  $fo$ ,  $y_1$  corresponde al eje  $x$ ,  $y_2$  corresponde al eje  $y$ .



Paso 3. Graficar la función objetivo

En este caso la función objetivo en el sentido de minimización se acerca al origen. La función objetivo graficada es  $4y_1 + 14y_2 = 80$ , para valores diferentes tenemos una familia de rectas.

Paso 4. Identificar la solución óptima si existe o declarar que el modelo no tiene solución

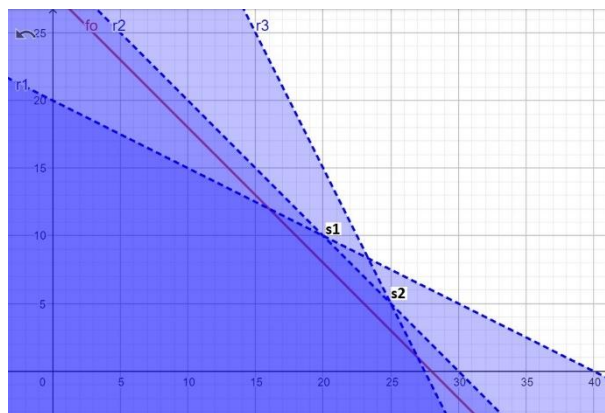
La solución óptima a este modelo corresponde al punto  $s_3(5,0)$  la función objetivo vale 20.

#### Solución óptima múltiple

Esta se origina cuando una de las restricciones es paralela a la función objetivo. Considere el modelo lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max } & x_1 + x_2 \\ \text{Sujeto a:} \\ & 10x_1 + 20x_2 \leq 400 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 110 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En este modelo la función objetivo y la restricción 2 son paralelas por lo que tenemos un número infinito de puntos, dos de ellos son  $s_1$  y  $s_2$ , sin embargo cualquier punto que pertenezca al segmento de recta  $s_1$ - $s_2$  maximiza la función objetivo.

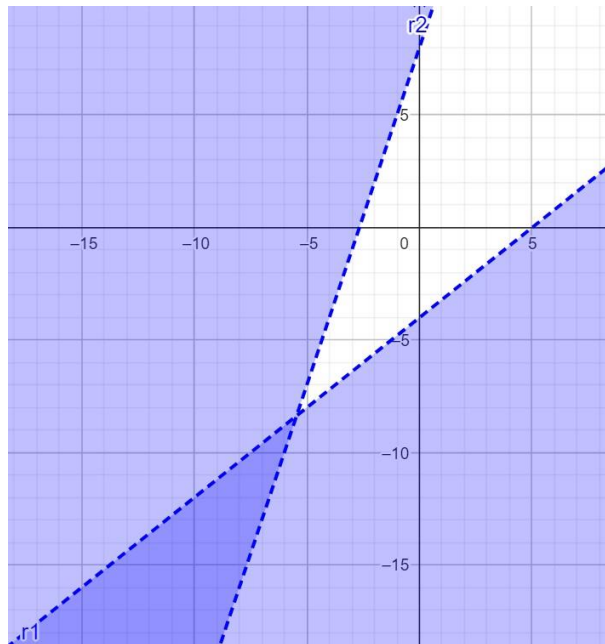


#### Solución infactible

Tenemos una solución infactible si la región solución se forma fuera del primer cuadrante

Para el modelo de optimización lineal tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & y_1 + y_2 \\ \text{Sujeto a:} \\ & 4y_1 - 5y_2 \geq 20 \\ & -3y_1 + y_2 \geq 8 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$



### Solución inexistente

Tenemos una solución inexistente si no se forma una región factible, es decir la intersección generada por las regiones de las restricciones no existe. Considere el modelo lineal

Minimizar  $y_1 + y_2$

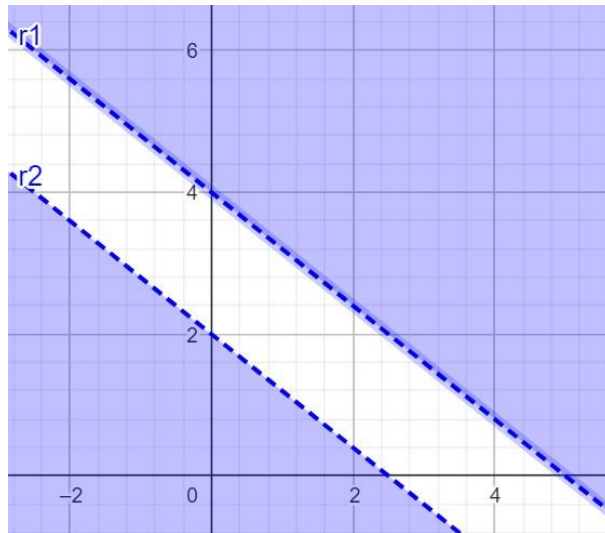
Sujeto a:

$$4y_1 + 5y_2 \geq 20$$

$$4y_1 + 5y_2 \leq 10$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Se muestra en la figura siguiente



#### 4.2 El método simplex

El método simplex fue desarrollado por Dantzig y para aplicarlo se debe adoptar un enfoque matricial. Con frecuencia durante los cursos de investigación de operaciones a nivel superior se enseña el método simplex tabular el cual fue desarrollado después del desarrollo presentado por Dantzig. El método simplex tabular facilita los cálculos haciéndolo apropiado para fines de enseñanza.

Lo primero que corresponde hacer es transformar las restricciones del modelo lineal a ecuaciones al incluir en cada restricción una nueva variable de holgura. Para las restricciones del tipo  $\leq$  se incluye una variable de naturaleza “faltante” y las restricciones del tipo  $\geq$  se incluye una variable de naturaleza “sobrante”.

Una vez que el modelo está representado exclusivamente por ecuaciones entonces tiene la forma matricial donde  $c$ ,  $x$ ,  $b$  son vectores y  $A$  es una matriz de las dimensiones adecuadas:

Maximizar  $cx$

Sujeto :

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Se transforma a:

Maximizar  $cx$

Minimizar  $cx$

Sujeto a:

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

Se transforma a:

Minimizar  $cx$

Sujeto :

$$Ax + h = b$$

$$x, h \geq 0$$

Sujeto a:

$$Ax - h = b$$

$$x, h \geq 0$$

El método simplex divide las variables  $x, h$  en dos conjuntos: variables básicas  $x_B$  y variables no básicas  $x_{NB}$  a cada variable básica o no básica tiene asociado su vector columna correspondiente de la matriz aumentada  $A I$ .

El método simplex se puede resumir en los pasos siguientes:

Datos de entrada: Un modelo de optimización lineal en formato estándar.

Datos de salida: Un vector solución  $x$ , o una prueba que indica que el problema no tiene solución.

Paso 1. Encontrar una solución básica factible  $x_B$

- Para determinar la primera solución básica factible se puede hacer uso de las variables de holgura ya que la matriz  $A$  original se modifica con la matriz identidad aumentada formada por los coeficientes de las variables de holgura  $h$ . Esta solución básica factible es una matriz identidad formada por los coeficientes de las variables  $h$ .
- Calcular el valor de las variables básicas mediante la ecuación  $x_B = B^{-1} b$
- Calcule el valor de la función objetivo por medio de la ecuación  $z = c_B x_B$ . El vector  $c_B$  son los coeficientes en la función objetivo de las variables básicas.

Paso 2. Criterio de mejora. Este paso tiene como objetivo saber si la solución actual se puede mejorar. Debemos calcular los efectos netos de las variables no básicas.

- Calcular los valores  $w$ , mediante  $w = c_B B^{-1}$
- Calcular el efecto neto unitario  $\Phi_j$  de cada variable no básica al aplicar la ecuación  $\Phi_j = c_j - w a_j$ ,  $c_j$  es el coeficiente de la función objetivo que corresponde a la variable no básica  $j$ ,  $a_j$  es el vector columna de la matriz  $A$  que corresponde a la variable no básica  $j$ .
- Caso maximización. Si los efectos netos de todas las variables no básicas  $\Phi_j \leq 0$  son negativos o cero entonces la solución básica actual es una solución óptima. Si además algún  $\Phi_j = 0$  entonces tenemos una solución óptima múltiple.

Caso minimización. Si los efectos netos de todas las variables no básicas  $\Phi_j \geq 0$  son positivos o cero entonces la solución básica actual es una solución óptima. Si además algún  $\Phi_j = 0$  entonces tenemos una solución óptima múltiple.

- Caso maximizar. Si para alguna variable no básica  $j$  de  $x_{NB}$  tenemos que  $\Phi_j \geq 0$ , seleccionar aquella variable  $j$  que tenga el mayor valor  $\Phi_j$  como variable de entrada a la solución básica factible actual. Si hay empate en los valores de  $\Phi_j$  elija arbitrariamente.

Caso minimizar. Si para alguna variable no básica  $j$  de  $x_{NB}$  tenemos que  $\Phi_j \geq 0$ , seleccionar aquella variable  $j$  que tenga el menor valor  $\Phi_j$  como variable de entrada a la solución básica factible actual. Si hay empate en los valores de  $\Phi_j$  elija arbitrariamente.

Paso 3. Calcular una nueva solución básica factible con la variable de entrada

- Calcular el  $\alpha_k$  para cada variable de entrada  $x_k$  con la ecuación  $\alpha_k = B^{-1}a_k$
- Identificar la variable de salida del conjunto de variables básicas  $x_B$  al encontrar el mínimo cociente de la siguiente ecuación

$$x_k = \theta = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\alpha_k)_i}, (\alpha_k)_i > 0 \right\}$$

- Si  $(\alpha_k)_i < 0$  para todas las variables básicas el problema tiene solución ilimitada o no acotada
- Con la variable de entrada tomada de  $x_{NB}$  y la variable de salida tomada de  $x_B$  intercambie los vectores columna correspondientes el de salida por el de entrada y forme una nueva base  $x_B$
- Calcule el valor de las variables básicas de la nueva base por medio de la ecuación  $x_B = B^{-1}b$ , calcule el nuevo valor de la función objetivo  $z = c_B x_B$ . Regrese al paso 2.

Resolver por medio del método simplex el modelo lineal siguiente:

$$\text{Max } 10x_1 + 15x_2$$

Sujeto a:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 400$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 150$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 110$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Para este problema los vectores y matrices son:  $c = [10 \ 15]$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $b =$

$\begin{bmatrix} 400 \\ 150 \\ 110 \end{bmatrix}$ . Al incluir las variables de holgura  $h$  tenemos que:

$$\text{Max } 10x_1 + 15x_2$$

Sujeto a:

$$10x_1 + 20x_2 + h_1 = 400$$

$$5x_1 + 5x_2 + h_2 = 150$$

$$4x_1 + 2x_2 + h_3 = 110$$

$$x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 \geq 0$$

Los vectores y matrices cambian ahora tenemos que,  $c = [10 \ 15 \ 0 \ 0 \ 0]$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$ ,

ahora A se aumenta con la matriz identidad formada por las variables de holgura h.

$$A | I = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 10 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Iteración 1.

Paso 1.

- a. Se selecciona como solución básica factible inicial a las columnas de  $A | I$  que corresponden a las variables de holgura  $h_1$ ,  $h_2$ , y  $h_3$  y que forman una matriz identidad. Recuerde que en álgebra lineal la matriz identidad es una matriz base y permite generar cualquier vector en  $\mathbb{R}^3$ . Las variables básicas son  $x_B = \{h_1, h_2, h_3\}$

por lo que le llamaremos  $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y las variables no básicas son  $x_{NB} = \{x_1, x_2\}$

- b. Se calcula el valor de las variables básicas mediante  $x_B = B^{-1} b$ . La inversa de una matriz identidad es una matriz identidad por lo que  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  entonces

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 150 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 = 400 \\ h_2 = 150 \\ h_3 = 110 \end{bmatrix}. \text{ Note que el valor de las variables no básicas } x_{NB} = \{x_1, x_2\} = [0 \ 0]$$

- c. El valor de la función objetivo es  $z = c_B x_B = [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 400 \\ 150 \\ 110 \end{bmatrix} = 0$

Paso 2.

- a. Calcular  $w = c_B B^{-1}$ ,  $w = [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0]$

- b. Calcular los efectos netos para las variables no básicas  $x_{NB} = \{x_1, x_2\}$ , mediante  $\Phi_j = c_j - w a_j$ .

Para  $x_1$ ,  $a_1$  es el vector columna de A correspondiente a  $x_1$  por lo que  $c_{x_1} = 10$ ,  $a_{x_1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$  tenemos que  $\Phi_{x_1} = 10 - [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 10$

Para  $x_2$ ,  $a_2$  es el vector columna de  $A$  correspondiente a  $x_2$  por lo que  $c_{x_2} = 15$ ,  $a_{x_2} = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$  tenemos que  $\Phi_{x_2} = 10 - [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 20$ .

Tenemos al menos un efecto  $\Phi$  positivo por lo que la solución actual se puede mejorar y la solución actual no es óptima. Se elige como variable que entra la de mayor valor y corresponde a  $x_2$ . Por lo que  $x_2$  entra a la base.

Paso 3.

- a. Para la variable de entrada  $x_2$  Se calcula  $\alpha_k$  mediante  $\alpha_k = B^{-1}a_k$  por lo que  $\alpha_k = \alpha_{x_2}$

$$B^{-1}a_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- b. Identificar la variable de salida del conjunto de variables básicas  $x_B = \{h_1, h_2, h_3\}$  al encontrar el mínimo cociente de la siguiente ecuación

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\alpha_k)_i}, (\alpha_k)_i > 0 \right\}$$

$\theta = \min \left\{ \frac{400}{20}, \frac{150}{5}, \frac{110}{2} \right\} = \min \{20, 30, 55\} = 20$ , que corresponde a  $h_1$ . Por lo que  $h_1$  sale de la base.

La nueva base  $B_2$  está formada al reemplazar los vectores columna en  $B_1$  correspondientes de  $h_1$ ,  $a_{h_1}$  por el vector columna de  $x_2$ ,  $a_{x_2}$ ,  $B_2 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , las variables básicas cambian  $x_B = \{x_2, h_2, h_3\}$  y las variables no básicas son  $x_{NB} = \{x_1, h_1\}$

- c. Corresponde calcular ahora  $x_B = B^{-1}b$ , y  $z = c_B x_B$ .

$$x_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{10} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 150 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 = 20 \\ h_2 = 50 \\ h_3 = 70 \end{bmatrix}.$$

$$z = [15 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix} = 300$$

Regrese al paso 2.

## Iteración 2

### Paso 2.

- c. Calcular  $w = c_B B^{-1}$ ,  $w = [15 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\frac{3}{4} \ 0 \ 0]$
- d. Calcular los efectos netos para las variables no básicas  $x_{NB} = \{x_1, h_1\}$ , mediante  $\Phi_j = c_j - w a_j$ .

Para  $x_1$ ,  $a_1$  es el vector columna de A correspondiente a  $x_1$  por lo que  $c_{x1} = 10$ ,  $a_{x1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$  tenemos que  $\Phi_{x1} = 10 - [\frac{3}{4} \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{5}{2}$

Para  $h_1$ ,  $a_2$  es el vector columna de A correspondiente a  $h_1$  por lo que  $c_{h1} = 0$ ,  $a_{h1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  tenemos que  $\Phi_{h1} = 0 - [\frac{3}{4} \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{3}{4}$

Tenemos al menos un efecto  $\Phi$  positivo por lo que la solución actual se puede mejorar y la solución actual no es óptima. Se elige como variable que entra la de mayor valor y corresponde a  $x_1$ . Por lo que  $x_1$  entra a la base.

### Paso 3.

- a. Para la variable de entrada  $x_1$  Se calcula  $\alpha_k$  mediante  $\alpha_k = B^{-1} a_k$  por lo que  $\alpha_k =$

$$\alpha_{x1} B^{-1} a_{x1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- b. Identificar la variable de salida del conjunto de variables básicas  $x_B = \{x_2, h_2, h_3\}$  al encontrar el mínimo cociente de la siguiente ecuación

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\alpha_k)_i}, (\alpha_k)_i > 0 \right\}$$

$\theta = \min \left\{ \frac{20}{\frac{1}{2}}, \frac{50}{2}, \frac{70}{3} \right\} = \min \{40, 20, 23.33\} = 20$ , que corresponde a  $h_2$ . Por lo que  $h_2$  sale de la base.

La nueva base  $B_3$  está formada al reemplazar los vectores columna en  $B_2$  correspondientes de  $h_2, a_{h2}$  por el vector columna de  $x_1, a_{x1}$ ,  $B_3 = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ , las variables básicas cambian  $x_B = \{x_2, x_1, h_3\}$  y las variables no básicas son  $x_{NB} = \{h_2, h_1\}$

c. Corresponde calcular ahora  $x_B = B^{-1}b$ , y  $z = c_B x_B$ .

$$x_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{-1}{5} & 0 \\ \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-6}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 150 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 = 10 \\ x_1 = 20 \\ h_3 = 10 \end{bmatrix}.$$

$$z = [15 \quad 10 \quad 0] \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = 350$$

Regrese al paso 2.

### Iteración 3

#### Paso 2.

a. Calcular  $w = c_B B^{-1}$ ,  $w = [15 \quad 10 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{-1}{5} & 0 \\ \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-6}{5} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e. Calcular los efectos netos para las variables no básicas  $x_{NB} = \{h_2, h_1\}$ , mediante  $\Phi_j = c_j - w a_j$ .

Para  $h_2$ ,  $a_1$  es el vector columna de  $A$  correspondiente a  $h_2$  por lo que  $c_{h2} = 0$ ,  $a_{h2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  tenemos que  $\Phi_{h2} = 0 - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1$

Para  $h_1$ ,  $a_2$  es el vector columna de  $A$  correspondiente a  $h_1$  por lo que  $c_{h1} = 0$ ,  $a_{h1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  tenemos que  $\Phi_{h1} = 0 - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$

Ahora los efectos  $\Phi$  son negativos por lo que no hay variable que entre a la base y por lo tanto la solución actual es óptima.

La solución actual es

$$x_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{-1}{5} & 0 \\ \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-6}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 150 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 = 10 \\ x_1 = 20 \\ h_3 = 10 \end{bmatrix}, z = 350.$$

Note que el método simplex:

- En cada solución básica factible calcula un punto extremo del poliedro solución, comienza en el origen al usar las variables de holgura como solución inicial ya que las variables no básicas valen 0.
- En cada iteración se calcula la variable que entra y la variable que sale por lo que la matriz base B cambia y hay que calcular nuevamente  $B^{-1}$ , lo que conlleva a un mayor esfuerzo computacional para problemas reales mucho más grandes. El “costo” de cálculos mayor corresponde al proceso de invertir la matriz por lo que el software computacional especializado aplica métodos avanzados para invertir la matriz aplicando por ejemplo actualizaciones con matrices elementales o factorizaciones diseñadas para reducir el costo computacional de invertir nuevamente la matriz
- Si no es posible utilizar variables de holgura para base inicial se usan variables artificiales que permitan formar una matriz identidad. Esto ocurre cuando las restricciones originales antes de transformar en igualdades ya son igualdades. Por lo que el método simplex se modifica al método simplex de las dos fases y se aplica haciendo uso del método simplex tabular.

#### 4.3 El método simplex tabular.

Los cálculos realizados en el método simplex de la sección anterior pueden realizarse de una forma más simple mediante el uso de una tabla. El método simplex tabular se aplica para facilitar el aprendizaje del método ya que, para modelos reales con cientos de variables y cientos de restricciones, software especializado como CPLEX aplica estrategias como el método de las dos fases, preprocesamiento para reducir el número de restricciones eliminando restricciones dominadas por otras más fuertes sin afectar el modelo, entre otras estrategias para reducir el trabajo computacional al resolver el modelo.

La tabla tiene la forma siguiente:

| Base                               | z | $x_B$               | $x_N$                                                 | Solución       |
|------------------------------------|---|---------------------|-------------------------------------------------------|----------------|
| z<br>renglón 0                     | 1 | 0                   | $-(C_N - W_N)$<br>$-(C_N - C_B B^{-1} N)$<br>$\Phi_j$ | $c_B B^{-1} b$ |
| $x_B$<br>renglón 1 al<br>renglón m | 0 | Matriz<br>Identidad | $B^{-1} N$<br>$\alpha_j$                              | $B^{-1} b$     |

En el método simplex tabular aplica estrategias explicadas en la sección 1.3, cálculo de la matriz inversa, en la cual se usa la matriz aumentada, identificar el elemento pivote, realizar operaciones de renglón para hacer ceros los elementos restantes de la columna del elemento pivote. La matriz  $B^{-1}$  se va calculando al calcular el elemento pivote adecuado, que debe ser 1, y después por medio de operaciones elementales de renglón hacer ceros los demás elementos de la columna.

#### Paso 1. Encontrar una solución básica factible inicial

Las variables de holgura al formar una matriz identidad forman una solución básica factible inicial. La tabla se construye ordenando las variables de izquierda a derecha iniciando con el menor subíndice, se continua de menor a mayor y se termina con el mayor subíndice.

#### Paso 2. Criterio de mejorabilidad

Para el caso de maximización, si en el renglón 0 todos los  $\Phi_j$  son positivos la actual solución es óptima. Si algún valor es cero tenemos una solución óptima múltiple. Si algún  $\Phi_j$  es negativo entonces la solución actual puede mejorarse. Seleccione como variable de entrada a la base aquella con  $\Phi_j$  más negativo, vaya al paso 3.

Para el caso de minimización, si en el renglón 0 todos los  $\Phi_j$  son negativos la actual solución es óptima. Si algún valor es cero tenemos una solución óptima múltiple. Si algún  $\Phi_j$  es positivo entonces la solución actual puede mejorarse. Seleccione como variable de entrada a la base aquella con  $\Phi_j$  más positivo, vaya al paso 3.

#### Paso 3. Criterio de factibilidad

- Si en la columna de la variable de entrada todos los  $\alpha_j$  son negativos la solución es ilimitada
- Si en la columna de la variable de entrada algún  $\alpha_j$  es positivo, calcule la variable de salida al calcular  $\theta$ . Si hay empate decida arbitrariamente.
- La columna de la variable que sale y el renglón de la variable que entra determinan el elemento pivote el cual debe ser un 1. Si no es un 1 se debe multiplicar el renglón por el valor adecuado. Haga los demás elementos de la columna ceros al realizar operaciones elementales de renglón.
- Vaya al paso 2.

Para aplicar el método simplex tabular es necesario usar variables de holgura de naturaleza faltante para las restricciones tipo  $\leq$  o sobrante para las restricciones tipo  $\geq$  en cada restricción, es decir cada restricción debe expresarse como estricta igualdad

Ahora el modelo lineal:

$$\text{Max } 10x_1 + 15x_2$$

Sujeto a:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 400$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 150$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 110$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

se resolverá al aplicar el método simplex tabular.

Primero se deben transformar las restricciones a igualdades usando variables de holgura

$$\text{Max } z = -10x_1 - 15x_2 - 0h_1 - 0h_2 - 0h_3$$

Sujeto a:

$$10x_1 + 20x_2 + h_1 = 400$$

$$5x_1 + 5x_2 + h_2 = 150$$

$$4x_1 + 2x_2 + h_3 = 110$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Paso 1. Construir una solución básica factible inicial con las variables de holgura que forman una matriz identidad. La tabla inicial es la siguiente.

| Renglón | Base  | z | $x_1$ | $x_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | Solución |  |
|---------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|----------|--|
| 0       | z     | 1 | -10   | -15   | 0     | 0     | 0     | 0        |  |
| 1       | $h_1$ | 0 | 10    | 20    | 1     | 0     | 0     | 400      |  |
| 2       | $h_2$ | 0 | 5     | 5     | 0     | 1     | 0     | 150      |  |
| 3       | $h_3$ | 0 | 4     | 2     | 0     | 0     | 1     | 110      |  |

Note que en esta tabla la solución actual está indicada por las columnas Base,  $x_B$  y Solución,  $z=0$ ,  $h_1=400$ ,  $h_2=150$ ,  $h_3=110$ . Las variables que no están en la base  $x_N$  valen 0.

Paso 2 criterio de mejorabilidad. Del renglón 0 se identifica el coeficiente -15 asociado a la variable de decisión  $x_2$ . La solución actual se puede mejorar.

| Renglón | Base           | z | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | h <sub>3</sub> | Solución |  |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|--|
| 0       | z              | 1 | -10            | -15            | 0              | 0              | 0              | 0        |  |
| 1       | h <sub>1</sub> | 0 | 10             | 20             | 1              | 0              | 0              | 400      |  |
| 2       | h <sub>2</sub> | 0 | 5              | 5              | 0              | 1              | 0              | 150      |  |
| 3       | h <sub>3</sub> | 0 | 4              | 2              | 0              | 0              | 1              | 110      |  |

Paso 3. Criterio de factibilidad. Al tomar la columna  $a_{x_2} = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ , los coeficientes son positivos, por lo que se calcula  $\theta$  al dividir cada elemento del vector solución  $\begin{bmatrix} 400 \\ 150 \\ 110 \end{bmatrix}$  entre el elemento positivo de  $a_{x_2}$   $\theta = \min \begin{bmatrix} 400/20 \\ 150/5 \\ 110/2 \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 55 \end{bmatrix} = 20$ , asociado al primer renglón por lo que sale  $h_1$ . El elemento pivote es 20.

| Renglón | Base           | z | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | h <sub>3</sub> | Solución | $\theta$      |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|---------------|
| 0       | z              | 1 | -10            | -15            | 0              | 0              | 0              | 0        | min           |
| 1       | h <sub>1</sub> | 0 | 10             | 20             | 1              | 0              | 0              | 400      | <b>400/20</b> |
| 2       | h <sub>2</sub> | 0 | 5              | 5              | 0              | 1              | 0              | 150      | 150/5         |
| 3       | h <sub>3</sub> | 0 | 4              | 2              | 0              | 0              | 1              | 110      | 110/2         |

Ahora se procede a actualizar la tabla con la nueva solución, actualizando la columna Base al sustituir  $h_1$  por  $x_2$ .

| Renglón | Base           | z | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | h <sub>3</sub> | Solución |  |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|--|
| 0       | z              | 1 | -10            | -15            | 0              | 0              | 0              | 0        |  |
| 1       | x <sub>2</sub> | 0 | 10             | <b>20</b>      | 1              | 0              | 0              | 400      |  |
| 2       | h <sub>2</sub> | 0 | 5              | 5              | 0              | 1              | 0              | 150      |  |
| 3       | h <sub>3</sub> | 0 | 4              | 2              | 0              | 0              | 1              | 110      |  |

Se realiza el "pivoteo" haciendo primero 1 y después 0s en la columna de la tabla de la variable que entra  $x_2$ . Multiplicamos por 1/20 todo el renglón 1, tenemos:

| Renglón | Base           | z | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | h <sub>3</sub> | Solución |                 |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|-----------------|
| 0       | z              | 1 | -10            | -15            | 0              | 0              | 0              | 0        |                 |
| 1       | x <sub>2</sub> | 0 | 1/2            | 1              | 1/20           | 0              | 0              | 20       | $1/20 \cdot R1$ |

Ahora hacemos 0 el valor -15 de la columna pivote del renglón 0. Multiplicamos el renglón nuevo R1n por 15 y lo sumamos al renglón 0.

| Renglón | Base           | z | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | h <sub>3</sub> | Solución |  |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|--|
| 0       | z              | 1 | -10            | -15            | 0              | 0              | 0              | 0        |  |
| 1       | x <sub>2</sub> | 0 | 1/2            | 1              | 1/20           | 0              | 0              | 20       |  |

El renglón 1 nuevo R1n queda como:

| Renglón | Base           | z | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | h <sub>3</sub> | Sol |              |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|--------------|
| 0       | z              | 1 | -5/2           | 0              | 3/4            | 0              | 0              | 300 | $15R1n + R0$ |
| 1       | x <sub>2</sub> | 0 | 1/2            | 1              | 1/20           | 0              | 0              | 20  |              |
| 2       | h <sub>2</sub> | 0 | 5              | 5              | 0              | 1              | 0              | 150 |              |
| 3       | h <sub>3</sub> | 0 | 4              | 2              | 0              | 0              | 1              | 110 |              |

Ahora hacemos 0 el valor 5 del renglón 2, multiplicamos el R1n por -5 y lo sumamos al renglón 2 R2

| Renglón | Base           | z | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | h <sub>3</sub> | Sol |              |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|--------------|
| 0       | z              | 1 | -5/2           | 0              | 3/4            | 0              | 0              | 300 |              |
| 1       | x <sub>2</sub> | 0 | 1/2            | 1              | 1/20           | 0              | 0              | 20  |              |
| 2       | h <sub>2</sub> | 0 | 5/2            | 0              | -1/4           | 1              | 0              | 50  | $-5R1n + R2$ |

Finalmente de la columna pivote hacemos 0 el valor de 2 del renglón 3 al multiplicar R1n por -2 y sumarlo al renglón 3 R3.

| Renglón | Base           | z | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | h <sub>3</sub> | Sol |              |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|--------------|
| 0       | z              | 1 | -5/2           | 0              | 3/4            | 0              | 0              | 300 |              |
| 1       | x <sub>2</sub> | 0 | 1/2            | 1              | 1/20           | 0              | 0              | 20  |              |
| 2       | h <sub>2</sub> | 0 | 5/2            | 0              | -1/4           | 1              | 0              | 50  |              |
| 3       | h <sub>3</sub> | 0 | 3              | 0              | -1/10          | 0              | 1              | 70  | $-2R1n + R3$ |

La solución actual está indicada por las columnas Base y Solución,  $z=300$ ,  $x_2 = 20$ ,  $h_2=50$ ,  $h_3=10$ . Continúe con el paso 2.

Paso 2. Paso 2 criterio de mejorabilidad. Del renglón 0 se identifica el coeficiente  $-35/2$  asociado a la variable de decisión  $x_1$ . La solución actual se puede mejorar por lo que  $x_1$  entra a la base.

Paso 3. Criterio de factibilidad. Al tomar la columna  $a_{x_1} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , los coeficientes son positivos, por lo que se calcula  $\theta$  al dividir cada elemento del vector solución  $\begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix}$  entre el elemento positivo de  $a_{x_1}$   $\theta = \min \begin{bmatrix} 20/0.5 \\ 50/2.5 \\ 70/3 \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 23.33 \end{bmatrix} = 23.33$ , asociado al segundo renglón por lo que sale  $h_2$ . El elemento pivote es  $5/2$ .

| Renglón | Base  | z | $x_1$ | $x_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | Sol | $\theta$ |
|---------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----------|
| 0       | z     | 1 | -5/2  | 0     | 3/4   | 0     | 0     | 300 | min      |
| 1       | $x_2$ | 0 | 1/2   | 1     | 1/20  | 0     | 0     | 20  | 20/0.5   |
| 2       | $h_2$ | 0 | 5/2   | 0     | -1/4  | 1     | 0     | 50  | 50/2.5   |
| 3       | $h_3$ | 0 | 3     | 0     | -1/10 | 0     | 1     | 70  | 70/3     |

Se actualiza la tabla al sustituir en la columna Base a  $h_2$  por  $x_1$ .

| Renglón | Base  | z | $x_1$ | $x_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | Sol | $\theta$ |
|---------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----------|
| 0       | z     | 1 | -5/2  | 0     | 3/4   | 0     | 0     | 300 | min      |
| 1       | $x_2$ | 0 | 1/2   | 1     | 1/20  | 0     | 0     | 20  | 20/0.5   |
| 2       | $x_1$ | 0 | 5/2   | 0     | -1/4  | 1     | 0     | 50  | 50/2.5   |
| 3       | $h_3$ | 0 | 3     | 0     | -1/10 | 0     | 1     | 70  | 70/3     |

Se "hace el pivote" es decir el valor de  $5/2$  debe ser 1 por lo que se calcula el renglón 2 nuevo R2n al multiplicar todo el renglón por  $2/5$ .

| Renglón | Base  | z | $x_1$ | $x_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | Sol |       |
|---------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|
| 0       | z     | 1 | -5/2  | 0     | 3/4   | 0     | 0     | 300 |       |
| 1       | $x_2$ | 0 | 1/2   | 1     | 1/20  | 0     | 0     | 20  |       |
| 2       | $x_1$ | 0 | 1     | 0     | -1/10 | 2/5   | 0     | 20  | 2/5R2 |
| 3       | $h_3$ | 0 | 3     | 0     | -1/10 | 0     | 1     | 70  |       |

Ahora se hace 0 el valor de  $-5/2$  del renglón 0. La operación es  $5/2R_2n + R_0$

| Renglón | Base  | z | $x_1$ | $x_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | Sol |                 |
|---------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----------------|
| 0       | z     | 1 | 0     | 0     | 1/2   | 1     | 0     | 350 | $5/2R_2n + R_0$ |
| 1       | $x_2$ | 0 | 1/2   | 1     | 1/20  | 0     | 0     | 20  |                 |
| 2       | $x_1$ | 0 | 1     | 0     | -1/10 | 2/5   | 0     | 20  |                 |
| 3       | $h_3$ | 0 | 3     | 0     | -1/10 | 0     | 1     | 70  |                 |

Ahora se hace 0 el valor de  $1/2$  del renglón 1. La operación es  $-1/2R_2n + R_1$

| Renglón | Base  | z | $x_1$ | $x_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | Sol |                  |
|---------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|------------------|
| 0       | z     | 1 | 0     | 0     | 1/2   | 1     | 0     | 350 |                  |
| 1       | $x_2$ | 0 | 0     | 1     | 1/10  | -1/5  | 0     | 10  | $-1/2R_2n + R_1$ |
| 2       | $x_1$ | 0 | 1     | 0     | -1/10 | 2/5   | 0     | 20  |                  |
| 3       | $h_3$ | 0 | 3     | 0     | -1/10 | 0     | 1     | 70  |                  |

Finalmente se hace 0 el valor de 3 del renglón 3. La operación es  $-3R_2n + R_3$

| Renglón | Base  | z | $x_1$ | $x_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | Sol |                |
|---------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----------------|
| 0       | z     | 1 | 0     | 0     | 1/2   | 1     | 0     | 350 |                |
| 1       | $x_2$ | 0 | 0     | 1     | 1/10  | -1/5  | 0     | 10  |                |
| 2       | $x_1$ | 0 | 1     | 0     | -1/10 | 2/5   | 0     | 20  |                |
| 3       | $h_3$ | 0 | 0     | 0     | 1/5   | -6/5  | 1     | 10  | $-3R_2n + R_3$ |

La solución actual está indicada por las columnas Base y Solución,  $z=350$ ,  $x_2 = 10$ ,  $x_1=20$ ,  $h_3=10$ . Continúe con el paso 2.

Paso 2. Paso 2 criterio de mejorabilidad. Del renglón 0 se identifica que no hay valores negativos. La solución actual es óptima.

#### 4.4 El método simplex revisado.

Este método se aplica con frecuencia en forma matricial ya que es una versión simplificada del método simplex tabular debido a que maneja y almacena exclusivamente la información indispensable del método simplex.

Para comenzar el problema a resolver se encuentra en su forma estándar.

Paso 1. Encontrar una solución básica factible inicial

La base inicial factible está formada por las variables de holgura o en su caso variables artificiales por lo que tenemos al inicio una matriz identidad.

Resuelva el sistema  $x_B = B^{-1} b$  y calcule la función objetivo  $x_0 = c_B x_B$

Paso 2. Resuelva el sistema  $w = c_B B^{-1}$  y calcule los efectos netos  $\Phi_j = c_j - w a_j$  para las variables no básicas. De acuerdo al sentido de optimización identifique si la solución es óptima, pare o si se puede mejorar vaya al paso 3.

Paso 3. Para la variable de entrada  $k$  calcule  $\alpha_k = B^{-1} a_k$  y aplique la regla del mínimo cociente.  $\theta = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1} b)_i}{(\alpha_k)_i}, (\alpha_k)_i > 0 \right\}$  Si  $(\alpha_k)_i < 0$  el problema tiene solución ilimitada.

Actualice la base actual  $B$  al reemplazar a columna de la variable de salida con la columna de la variable de entrada.

Note que el método simplex revisado requiere de los diccionarios de las variables básicas y no básicas, almacena la matriz  $B$  que se invierte en cada iteración.

#### 4.5 Método simplex de las dos fases.

Este método consiste en usar variables artificiales para formar la solución básica factible inicial. Las variables artificiales forman la matriz identidad solicitada. Ocurre con frecuencia en problemas de minimización que contienen restricciones del tipo  $\geq$  ya que las variables de holgura “sobrantes” tienen signo  $-1$ ; o con modelos con restricciones del tipo igualdad. Se puede aplicar el método simplex tabular.

Durante la fase I, la solución básica factible inicial está formada por las variables artificiales que no tienen ninguna interpretación al problema real. En esta fase la función objetivo del problema original se sustituye por minimizar la suma de las variables artificiales. Se procede a aplicar el método simplex tabular, el criterio de mejorabilidad y el criterio de factibilidad. Si se logran sacar las variables artificiales de la base entonces se procede a la fase II. En caso de que existan variables artificiales en la base indica que el modelo lineal no tiene solución.

Durante la fase II ya sin variables artificiales en la base, solo debe tener variables de decisión o variables de holgura se sustituye a la tabla actual la función objetivo original y se procede con los criterios de mejorabilidad y factibilidad de los pasos 2 y 3 respectivamente.

El método de las dos fases se aplicará para el siguiente modelo lineal.

| El modelo lineal es:                                                                                       | Se modifica a:                                                                                                                           | Ya con variables artificiales:                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Minimizar $4y_1 + 14y_2$<br>Sujeto a:<br>$4y_1 + 5y_2 \geq 20$<br>$3y_1 + y_2 \geq 8$<br>$y_1, y_2 \geq 0$ | Minimizar $4y_1 + 14y_2 + 0h_1 + 0h_2$<br>Sujeto a:<br>$4y_1 + 5y_2 - h_1 = 20$<br>$3y_1 + y_2 - h_2 = 8$<br>$y_1, y_2, h_1, h_2 \geq 0$ | Minimizar $4y_1 + 14y_2 + 0h_1 + 0h_2 + 0r_1 + 0r_2$<br>Sujeto a:<br>$4y_1 + 5y_2 - h_1 + r_1 = 20$<br>$3y_1 + y_2 - h_2 + r_2 = 8$<br>$y_1, y_2, h_1, h_2, r_1, r_2 \geq 0$ |

Note que las variables de decisión son  $y_1, y_2$ . Las variables de holgura son  $h_1, h_2$  y las variables artificiales son  $r_1, r_2$ .

Fase I. Se cambia la función objetivo a minimizar  $r_0 = -r_1 - r_2$

La tabla inicial es la siguiente:

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $r_1$ | $r_2$ | Sol |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $r_0$ | 0     | 0     | 0     | 0     | -1    | -1    | 0   |
| $r_1$ | 4     | 5     | -1    | 0     | 1     | 0     | 20  |
| $r_2$ | 3     | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     | 8   |

Observe que en el renglón 0 los coeficientes asociados a las variables básicas deben ser cero por lo que hay que realizar operaciones de renglón para hacer los ceros correspondientes y corregir la tabla anterior para que sea una solución inicial básica factible. Para hacer 0 el coeficiente asociado a  $r_1$  se suma el renglón 1 al renglón 0. La tabla se modifica y se muestra a continuación

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $r_1$ | $r_2$ | Sol |         |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|---------|
| $r_0$ | 4     | 5     | -1    | 0     | 0     | -1    | 20  | $R1+R0$ |
| $r_1$ | 4     | 5     | -1    | 0     | 1     | 0     | 20  |         |
| $r_2$ | 3     | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     | 8   |         |

Para hacer 0 el coeficiente asociado a  $r_1$  se suma el renglón 1 al renglón 0. La tabla se modifica y se muestra a continuación

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $r_1$ | $r_2$ | Sol |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|
| $r_0$ | 7     | 6     | -1    | -1    | 0     | 0     | 28  | R2+R0 |
| $r_1$ | 4     | 5     | -1    | 0     | 1     | 0     | 20  |       |
| $r_2$ | 3     | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     | 8   |       |

Paso 2. Criterio de mejorabilidad.

Para el caso de minimización, si en el renglón 0 todos los  $\Phi_j$  son negativos la actual solución es óptima. Si algún valor es cero tenemos una solución óptima múltiple. Si algún  $\Phi_j$  es positivo entonces la solución actual puede mejorarse. Seleccione como variable de entrada a la base aquella con  $\Phi_j$  más positivo, vaya al paso 3.

El  $\Phi_j$  más positivo corresponde a  $y_1$ , por que  $y_1$  entra a la base.

Paso 3. Criterio de factibilidad.

Con los valores de la columna asociada a la variable de entrada se calcula  $\theta$ .

Al tomar la columna  $a_{y1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ , los coeficientes son positivos, por lo que se calcula  $\theta$  al dividir cada elemento del vector solución  $\begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix}$  entre el elemento positivo de  $a_{y1}$   $\theta = \min \left[ \frac{20/4}{8/3} \right] = \min \left[ \frac{5}{2.6} \right] = 2.6$ , asociado al primer renglón por lo que sale  $r_2$ . El elemento pivote es 3.

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $r_1$ | $r_2$ | Sol |                             |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----------------------------|
| $r_0$ | 7     | 6     | -1    | -1    | 0     | 0     | 28  | $\theta$ min<br>20/4<br>8/3 |
| $r_1$ | 4     | 5     | -1    | 0     | 1     | 0     | 20  |                             |
| $r_2$ | 3     | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     | 8   |                             |

Primero se hace el 1 y después los ceros. Se multiplica el renglón 2 por  $1/3$ .  $R2n = 1/3 R2$

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$ | $h_2$  | $r_1$ | $r_2$ | Sol   |          |
|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|----------|
| $r_0$ | 7     | 6     | -1    | -1     | 0     | 0     | 28    | $1/3 R2$ |
| $r_1$ | 4     | 5     | -1    | 0      | 1     | 0     | 20    |          |
| $y_1$ | 1     | $1/3$ | 0     | $-1/3$ | 0     | $1/3$ | $8/3$ |          |

Ahora se hace 0 el valor de 7 del renglón 0. La operación de renglón en  $-7R2n + R0$

| Base  | $y_1$ | $y_2$  | $h_1$ | $h_2$  | $r_1$ | $r_2$  | Sol    |               |
|-------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|---------------|
| $r_0$ | 0     | $11/3$ | -1    | $4/3$  | 0     | $-4/3$ | $28/3$ | $-7R_2 + R_0$ |
| $r_1$ | 4     | 5      | -1    | 0      | 1     | 0      | 20     |               |
| $y_1$ | 1     | $1/3$  | 0     | $-1/3$ | 0     | $1/3$  | $8/3$  |               |

Ahora se hace 0 el valor de 4 del renglón 1. La operación de renglón es  $-4R_1 + R_0$

| Base  | $y_1$ | $y_2$  | $h_1$ | $h_2$  | $r_1$ | $r_2$  | Sol    |               |
|-------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|---------------|
| $r_0$ | 0     | $11/3$ | -1    | $4/3$  | 0     | $-7/3$ | $28/3$ | $-4R_1 + R_0$ |
| $r_1$ | 0     | $11/3$ | -1    | $4/3$  | 1     | $-4/3$ | $28/3$ |               |
| $y_1$ | 1     | $1/3$  | 0     | $-1/3$ | 0     | $1/3$  | $8/3$  |               |

La solución actual es  $r_1 = 28/3$ ,  $y_1 = 8/3$  la función objetivo  $r_0 = 28/3$

Vamos al paso 2.

Paso 2. Criterio de mejorabilidad.

Ya que  $\Phi_j$  asociado a  $y_2$  es el más positivo, la solución se puede mejorar,  $y_2$  es la variable que entra a la base.

| Base  | $y_1$ | $y_2$  | $h_1$ | $h_2$  | $r_1$ | $r_2$  | Sol    |
|-------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|
| $r_0$ | 0     | $11/3$ | -1    | $4/3$  | 0     | $-7/3$ | $28/3$ |
| $r_1$ | 0     | $11/3$ | -1    | $4/3$  | 1     | $-4/3$ | $28/3$ |
| $y_1$ | 1     | $1/3$  | 0     | $-1/3$ | 0     | $1/3$  | $8/3$  |

Paso 3. Criterio de factibilidad.

Con los valores de la columna asociada a la variable de entrada se calcula  $\theta$ .

Al tomar la columna  $a_{y_2} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ , los coeficientes son positivos, por lo que se calcula  $\theta$  al dividir cada elemento del vector solución  $\begin{bmatrix} 28/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$  entre el elemento positivo de  $a_{y_2}$   $\theta = \min \left[ \frac{28/3}{11/3}, \frac{8/3}{1/3} \right] = 5.454$ , asociado al primer renglón por lo que sale  $r_1$ . El elemento pivote es  $11/3$ .

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $r_1$ | $r_2$ | Sol  | $e \min$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| $r_0$ | 0     | 11/3  | -1    | 4/3   | 0     | -7/3  | 28/3 |          |
| $y_2$ | 0     | 11/3  | -1    | 4/3   | 1     | -4/3  | 28/3 | 60/11    |
| $y_1$ | 1     | 1/3   | 0     | -1/3  | 0     | 1/3   | 8/3  | 8        |

Primero se hace el 1 y después los ceros. Tenemos entonces:

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $r_1$ | $r_2$ | Sol   |                |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| $r_0$ | 0     | 11/3  | -1    | 4/3   | 0     | -7/3  | 28/3  |                |
| $y_2$ | 0     | 1     | -3/11 | 4/11  | 3/11  | -4/11 | 28/11 | $R1n = 3/11R1$ |
| $y_1$ | 1     | 1/3   | 0     | -1/3  | 0     | 1/3   | 8/3   |                |

Se hace 0 en el renglón 0.

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $r_1$ | $r_2$ | Sol   |                 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|
| $r_0$ | 0     | 0     | 0     | 0     | -1    | -1    | 0     | $-11/3R1n + R0$ |
| $y_2$ | 0     | 1     | -3/11 | -4/11 | 3/11  | -4/11 | 28/11 |                 |
| $y_1$ | 1     | 1/3   | 0     | -1/3  | 0     | 1/3   | 8/3   |                 |

Se hace el 0 en el renglón 2.  $-1/3R1 + R2$

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $r_1$ | $r_2$ | Sol   |                |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| $r_0$ | 0     | 0     | 0     | 0     | -1    | -1    | 0     |                |
| $y_2$ | 0     | 1     | -3/11 | 4/11  | 3/11  | -4/11 | 28/11 |                |
| $y_1$ | 1     | 0     | 1/11  | -5/11 | -1/11 | 5/11  | 20/11 | $-1/3R1n + R2$ |

La solución actual es  $y_2 = 28/11$ ,  $y_1 = 20/11$  la función objetivo  $r_0 = 0$

Vamos al paso 2.

Paso 2. Criterio de mejorabilidad.

Ya que los valores  $\Phi_j$  son negativos tenemos una solución óptima única. Adicionalmente no hay variables artificiales en la base, se puede confirmar con el valor de 0 en la función objetivo  $r_0$ . Pasamos a la fase II.

Fase II. Se sustituye la función objetivo original en la última tabla. La función objetivo es Minimizar  $y_0 = 4y_1 + 14y_2$  por lo que:

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$   | $h_2$   | $r_1$   | $r_2$   | Sol     |
|-------|-------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $y_0$ | -4    | -14   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $y_2$ | 0     | 1     | $-3/11$ | $4/11$  | $3/11$  | $-4/11$ | $28/11$ |
| $y_1$ | 1     | 0     | $1/11$  | $-5/11$ | $-1/11$ | $5/11$  | $20/11$ |

Ya no se requieren las columnas de las variables artificiales por lo que se pueden eliminar de la tabla, note que es necesario reestablecer los 0s en el renglón 0 para las columnas de las variables básicas. Para el valor de -4 asociado a  $y_1$   $4R_2+R_0$ .

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$   | $h_2$    | Sol     |              |
|-------|-------|-------|---------|----------|---------|--------------|
| $y_0$ | 0     | -14   | $4/11$  | $-20/11$ | $80/11$ | $4R_2 + R_0$ |
| $y_2$ | 0     | 1     | $-3/11$ | $4/11$   | $28/11$ |              |
| $y_1$ | 1     | 0     | $1/11$  | $-5/11$  | $20/11$ |              |

Para el valor de -14 asociado a  $y_2$ ,  $14R_1+R_0$ .

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$    | $h_2$   | Sol      |               |
|-------|-------|-------|----------|---------|----------|---------------|
| $y_0$ | 0     | 0     | $-38/11$ | $36/11$ | $472/11$ | $14R_1 + R_0$ |
| $y_2$ | 0     | 1     | $-3/11$  | $4/11$  | $28/11$  |               |
| $y_1$ | 1     | 0     | $1/11$   | $-5/11$ | $20/11$  |               |

Paso 2. Criterio de mejorabilidad.

Ya que existe un  $\Phi_j$  no negativo en el renglón 0, el asociado a  $h_2$ , la solución se puede mejorar. La variable  $h_2$  entra a la base.

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$    | $h_2$   | Sol      |
|-------|-------|-------|----------|---------|----------|
| $y_0$ | 0     | 0     | $-38/11$ | $36/11$ | $472/11$ |
| $y_2$ | 0     | 1     | $-3/11$  | $4/11$  | $28/11$  |
| $y_1$ | 1     | 0     | $1/11$   | $-5/11$ | $20/11$  |

Paso 3. Criterio de factibilidad.

Con los valores de la columna asociada a la variable de entrada se calcula  $\theta$ .

Al tomar la columna  $a_{h2} = \begin{bmatrix} 4/11 \\ -5/11 \end{bmatrix}$ , sólo un coeficiente es positivo, el asociado a  $y_2$ , por lo que  $y_2$  sale de la base, en este caso  $\theta = 7$ . El elemento pivote es  $4/11$ .

| Base  | $y_1$ | $y_2$ | $h_1$    | $h_2$   | Sol      |
|-------|-------|-------|----------|---------|----------|
| $y_0$ | 0     | 0     | $-38/11$ | $36/11$ | $472/11$ |
| $h_2$ | 0     | 1     | $-3/11$  | $4/11$  | $28/11$  |
| $y_1$ | 1     | 0     | $1/11$   | $-5/11$ | $20/11$  |

Se realiza las operaciones para hacer primero el 1 y después los ceros en la columna asociada a  $h_2$ .

| Base  | $y_1$ | $y_2$  | $h_1$    | $h_2$   | Sol      |
|-------|-------|--------|----------|---------|----------|
| $y_0$ | 0     | 0      | $-38/11$ | $36/11$ | $472/11$ |
| $h_2$ | 0     | $11/4$ | $-3/4$   | 1       | 7        |
| $y_1$ | 1     | 0      | $1/11$   | $-5/11$ | $20/11$  |

$11/4R1$

| Base  | $y_1$ | $y_2$  | $h_1$  | $h_2$   | Sol     |
|-------|-------|--------|--------|---------|---------|
| $y_0$ | 0     | -9     | -1     | 0       | 20      |
| $h_2$ | 0     | $11/4$ | $-3/4$ | 1       | 7       |
| $y_1$ | 1     | 0      | $1/11$ | $-5/11$ | $20/11$ |

$-36/11R1n+R0$

| Base  | $y_1$ | $y_2$  | $h_1$  | $h_2$ | Sol |
|-------|-------|--------|--------|-------|-----|
| $y_0$ | 0     | -9     | -1     | 0     | 20  |
| $h_2$ | 0     | $11/4$ | $-3/4$ | 1     | 7   |
| $y_1$ | 1     | $5/4$  | $-1/4$ | 0     | 5   |

$5/11R1n+R2$

La solución actual es  $h_2 = 7$ ,  $y_1 = 5$ ,  $y_0 = 20$ . Debido a que no hay valores positivos  $\Phi_j$  la solución actual es óptima.

#### 4.6 El método elipsoidal

Para modelos lineales grandes con cientos de variables de decisión y cientos de restricciones los cambios de base del método simplex pueden crecer rápidamente e incluso de forma exponencial. En este caso el método simplex puede no ser la mejor opción por lo que se requiere de un cambio de estrategia.

Una idea que siempre ha prevalecido durante el desarrollo de la programación matemática y los algoritmos de optimización es calcular un solución inicial, un punto en

$\mathbb{R}^n$  que puede ser factible o infactible, a partir de ahí calcular una dirección de mejora, calcular una longitud de paso y generar un nuevo punto en  $\mathbb{R}^n$ . La estrategia se repite hasta alcanzar el punto óptimo o hasta cumplir un criterio de paro.

El método elipsoidal sigue esta estrategia al generar puntos interiores y moverse hasta un punto óptimo. Inicia con un punto interior al politopo formado por el conjunto de restricciones, se construye un elipsoide centrado en este punto. Al optimizar sobre el elipsoide se genera un nuevo punto que se encuentra cercano al punto óptimo del problema, al repetir esta estrategia y bajo las condiciones adecuadas el algoritmo genera una serie de puntos interiores que converge al punto óptimo.

Considere el problema de optimización lineal: Maximizar  $cx$ . Sujeto a  $Ax \leq b$ . Donde  $A$  es una matriz cuadrada de rango máximo. Los vectores  $b$  y  $c$  son vectores constantes en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $P$  el politopo  $n$  dimensional en  $\mathbb{R}^n$  definido por las desigualdades anteriores, es decir  $P = \{Ax \leq b\}$ .

Si tenemos un punto interior llamado  $a$  que pertenece a  $\mathbb{R}^n$ , es posible construir un elipsoide que esté centrado en  $a$  y tangente a cualquier restricción de  $P$ . Se requieren dos matrices positivas definidas.  $D, Q$ ;  $D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$  y  $Q = AD^{-2}A^T$ . Para la matriz  $D$ ,  $d_i = b_i - A_i^T a > 0$ . El elipsoide  $E$  buscado queda definido por  $E = (x-a)^T Q (x-a) = 1$ . Note que el centro del elipsoide es  $a$ . El valor máximo de la función objetivo  $cx$  sobre el elipsoide  $E$  se alcanza en la dirección  $d$  que se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones lineales  $Qd = c$ . La longitud de paso  $\alpha$  se calcula mediante  $\alpha = (cd)^{1/2}$  por lo que el nuevo punto  $a_2 = a + \alpha d$ . Al repetir la estrategia anterior es posible definir una serie de puntos interiores que convergen al óptimo.

El punto inicial puede obtenerse al aplicar la fase I del método de las dos fases. Para definir el criterio de terminación del algoritmo elipsoidal se aplica la teoría de dualidad al modelo lineal para calcular los costos reducidos y establecer las condiciones de optimalidad. Sobre las condiciones de optimalidad use una tolerancia adecuada como criterio de paro.

#### 4.7 Uso de software

Existe en el mercado software especializado para aplicaciones de optimización lineal que requieren licencia de uso, algunos de los más conocidos en orden creciente de especialización tenemos a LINDO, GAMS y CPLEX.

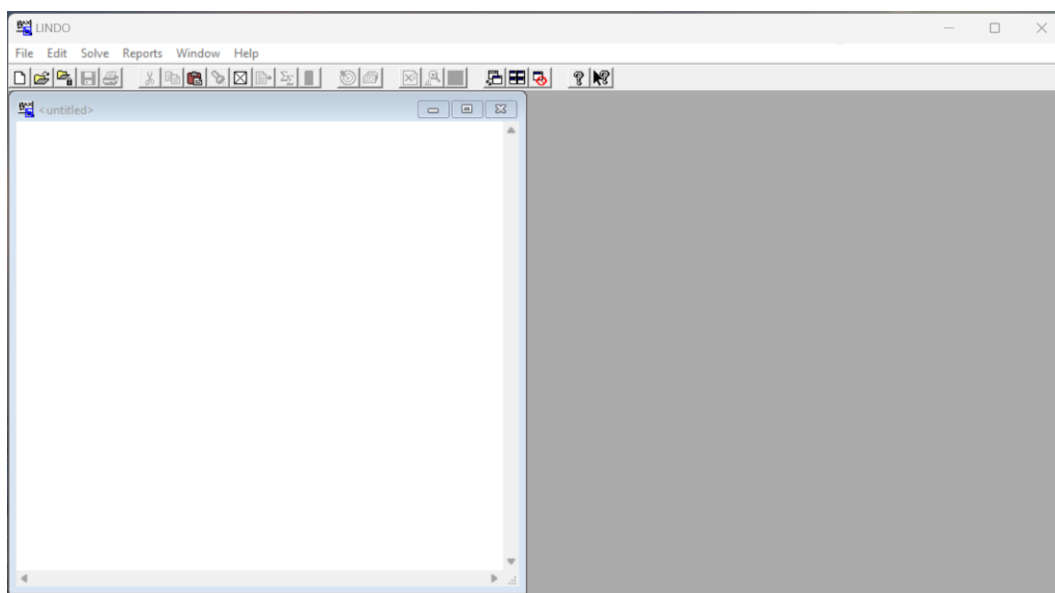
##### LINDO

El software *LINDO*, también llamado *LINDO classic* es fabricado por Lindo Systems Inc. y puede descargarse versiones de prueba desde el sitio web [www.lindo.com](http://www.lindo.com). En la página web incluye recursos como manuales, notas para construir y resolver un modelo

de optimización, libros, ejemplos, canales de youtube, guías para la modelación. Incluye modelos de optimización para muchas aplicaciones. Los recursos disponibles se mejoran e incrementan de forma constante.

Lindo Systems fabrica adicionalmente LINGO, What's Best, Lindo API y *Solver suite*. El software LINGO permite construir y resolver modelos de optimización no lineal. What's Best tiene un enfoque de optimización con hojas de cálculo que se usa con Excel. Lindo API funciona como un motor de optimización ya que es una aplicación interfaz de programación, es decir una *application programming interface*, que puede usarse con diversos lenguajes de programación tales como c, c++, fortran, visual basic, etc. Finalmente *solver suite* es un software específico para programación matemática usado en un entorno industrial por medio de proyectos donde la creación o modificación de modelos de optimización es una actividad recurrente.

Las primeras versiones de LINDO tienen su origen en la década de los 80's. Una breve introducción al software LINDO se incluye a continuación, la pantalla principal de LINDO classic con la ventana de programación se muestra en la figura siguiente:



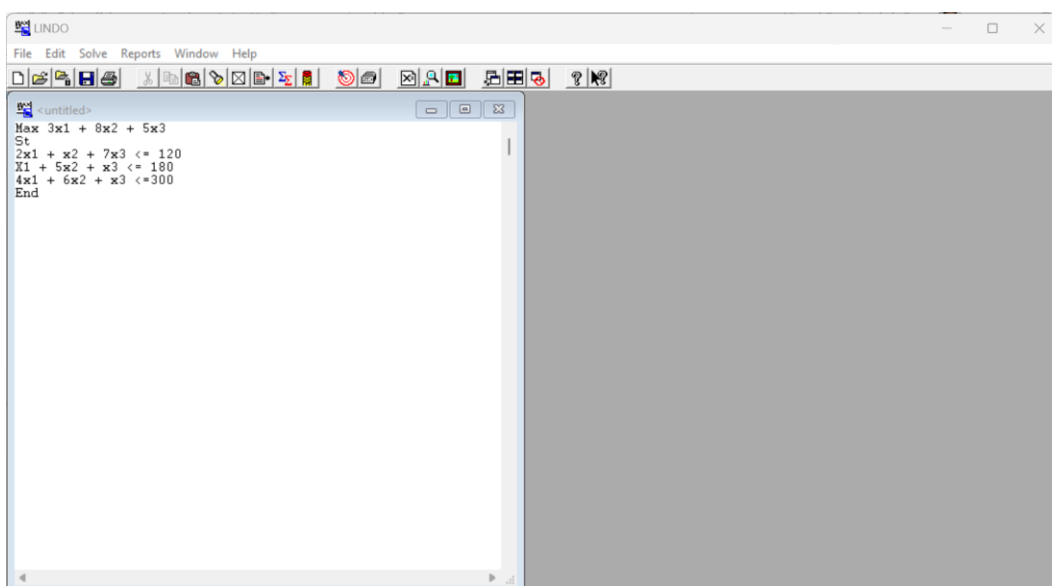
Para construir y resolver el siguiente modelo de programación lineal se captura lo indicado en la columna derecha de la tabla siguiente:

| Modelo de Optimización Lineal                                                                                                                                              | Programación en LINDO                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{Max } z = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3$<br>Sujeto a:<br>$2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 120$<br>$x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 180$<br>$4x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 300$<br>$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ | $\text{Max } 3x1 + 8x2 + 5x3$<br>St<br>$2x1 + x2 + 7x3 \leq 120$<br>$x1 + 5x2 + x3 \leq 180$<br>$4x1 + 6x2 + x3 \leq 300$<br>End |

De la tabla anterior note que:

- El sentido de optimización se indica con la palabra reservada max. Si se desea minimizar entonces se usa la palabra min.
- Las palabras reservadas min, max, st, end, NO pueden usarse como variables. Indican al modelo la función objetivo, el sentido de optimización, el inicio de las restricciones y el fin del modelo.
- Las variables de decisión  $x_1, x_2$ , etc., no llevan subíndice. Puede usarse cualquier otra palabra por ejemplo variable1, variable2.
- Todas las variables aparecen del lado izquierdo de cada expresión, las constantes del lado derecho.
- La variable  $z$  no se incluye.
- El sentido de las desigualdades se indican para  $\leq$  con los caracteres  $\leq$  y para  $\geq$  con los caracteres  $\geq$ .
- No es necesario indicar la condición de no negatividad de las variables LINDO ya las asume.

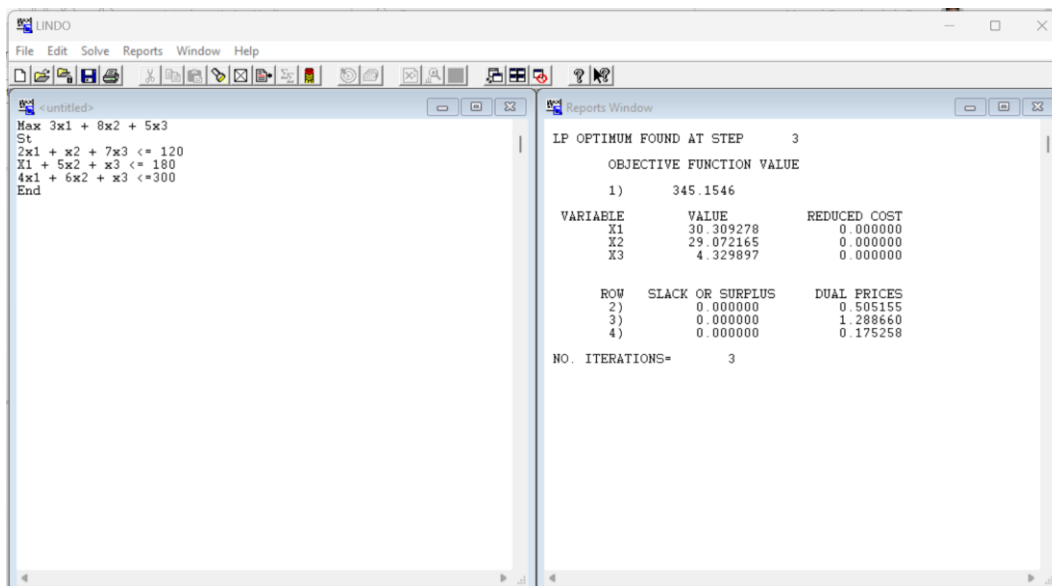
El modelo de optimización se muestra en la figura siguiente:



LINDO incluye los menús de File, Edit, Window, Help con opciones similares a otros softwares del entorno Windows.

Para resolver el modelo se usa el menú solve que tiene las opciones Solve, que permite aplicar el método simplex al modelo incluido en la ventana de programación, Compile permite compilar el modelo, Debug permite identificar errores en la programación del modelo, Pivot permite indicar alguna variable para realizar la operación de pivoteo, Preemptive Goal para programación lineal por metas.

Al activar la opción solve se aplica el método simplex al modelo incluido. Si existe algún error de programación el software lo indica, de lo contrario muestra una ventana de diálogo indicando que el modelo es infactible o que se tiene una solución óptima. Posteriormente muestra una ventana de diálogo preguntando a usuario si realiza un análisis de sensibilidad. Finalmente muestra la ventana de resultados. Las ventanas de programación y resultados ordenadas de forma vertical se muestran en la figura siguiente.



Adicionalmente a los recursos de la página web de LINDO Systems existen en la red un gran número de notas, libros, blogs, videos en youtube, etc., sobre como usar estos productos.

Construir y resolver en LINDO Classic modelos de optimización lineal con cientos o miles de variables y restricciones puede ser una tarea tediosa, difícil e inadecuada. Además que se facilita cometer errores de edición por la cantidad de variables y restricciones por lo que se vuelve necesario usar lenguajes de modelación algebraica tales como GAMS entre otros.

## GAMS

El software GAMS por sus siglas en inglés *General Algebraic Modeling System* es un software que permite por medio de un lenguaje de programación construir modelos de programación matemática, por ejemplo, optimización lineal escalables de gran tamaño ya que incluye los datos y parámetros del modelo separados del álgebra de la función objetivo y restricciones del modelo a construir y optimizar. Este enfoque permite modelar y optimizar en entornos donde los modelos se construyen y optimizan de manera recurrente por hora, día o semana ya que los datos cambian con la frecuencia mencionada pero la estructura algebraica sigue siendo la misma. Ocurre con mucha frecuencia en modelos de planeación de recursos y modelos de programación de actividades.

Los datos y parámetros que forman el modelo son obtenidos del sistema ERP de la empresa por lo que permite ahorros de tiempo y esfuerzo de modelación comparado con el proceso de edición si el modelo de optimización se construye desde cero término algebraico por término algebraico.

Básicamente en GAMS se construye y modela el modelo matemático separando los datos y parámetros del problema del álgebra de la función objetivo y de las restricciones, esta parte de modelaje “prepara” la información del modelo para posteriormente usarla en el software “optimizador”. El software “optimizador” puede ser CPLEX o MINOS entre otros que toman el modelo preparado por GAMS para aplicar los algoritmos de optimización especializados. De acuerdo con lo anterior GAMS no optimiza, solo construye el modelo de optimización, el software optimizador aplica el algoritmo de optimización para encontrar y reportar la solución óptima o declarar que no existe.

GAMS surge desde la década de los 70´s y desde entonces ha tenido innovaciones e incorporaciones de recursos que permiten ser uno de los lenguajes especializados para programación matemática más utilizados en el mundo de la optimización.

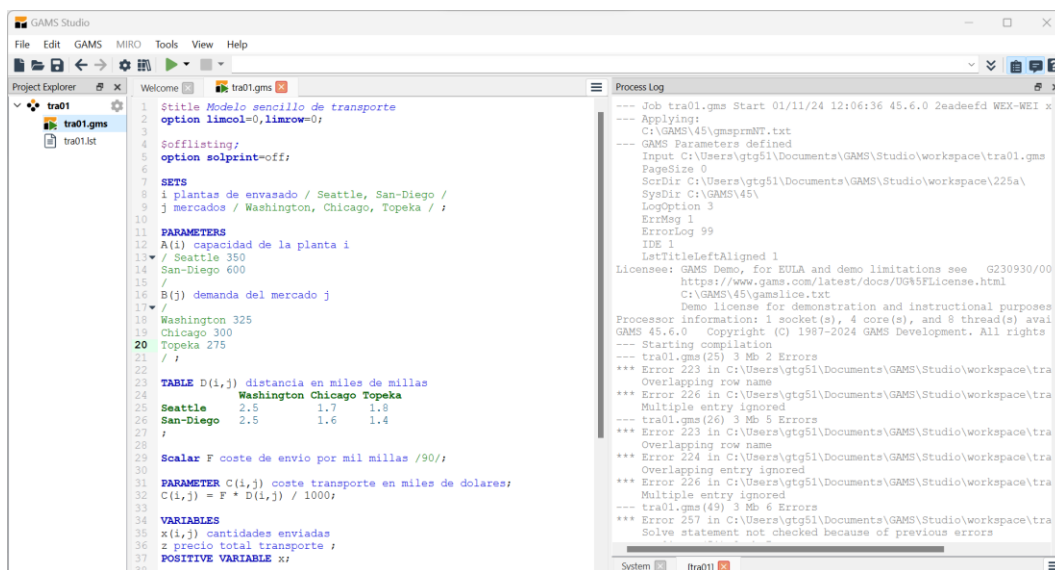
GAMS incluye versiones de prueba con capacidades reducidas para su uso en pc y puede descargarse desde el sitio [www.gams.com](http://www.gams.com), el sitio incluye recursos para su uso tales como manuales, cursos, notas, blog, tutoriales, ejemplos, bibliotecas, etc. Así mismo por ser un lenguaje especializado de programación es posible encontrar recursos de libre acceso en internet tales como cursos, apuntes, ejemplos, libros, diapositivas, videos, blogs, entre otros. Al descargar GAMS en sus versiones de prueba se incluyen también versiones limitadas del software optimizador de diversos fabricantes más comunes dentro de la programación matemática, por lo que no es necesario buscar y descargar un software optimizador para que funcione con GAMS.

De acuerdo a la página web de la compañía fabricante de GAMS, GAMS ofrece GAMS modeling lenguaje que es el lenguaje de modelación al que se hace referencia en estas líneas, GAMS MIRO model *interface with rapid orchestration* permite construir modelos

con una interfaz de usuario gráfica que puede montarse incluso en una página web de fácil distribución entre los colegas al construir y optimizar un modelo, GAMS ENGINE es un servidor de software que permite correr modelos de GAMS de forma centralizada e inclusive en la nube y permite reducir costos al evitar licencias individuales en las distintas áreas de la compañía y GAMPy que combina el lenguaje de modelación algebraico de GAMS con la flexibilidad del lenguaje de programación Python lo que permite construir modelos de programación matemática desde Python.

A continuación se incluye una breve introducción al software GAMS para entender su uso y aplicación, el software es bastante amplio y potente por lo que un tratado profundo requiere de más de un libro de texto ya que también modela y optimiza modelos de programación entera, programación mixta, programación para flujo en redes, programación probabilística, programación no lineal con restricciones y sin restricciones, programación convexa, y casi todos los objetos de estudio de la programación matemática.

La interfaz de programación GAMS Studio se muestra en la figura siguiente:



Observe en la figura anterior que se incluye la barra de menús e íconos ya comunes en las aplicaciones de Windows; tres ventanas, de izquierda a derecha la ventana con archivos del proyecto correspondiente al modelo a optimizar, el archivo de esta explicación es un modelo de optimización lineal de transporte llamado tra01.gms el archivo con los resultados del modelo es tra01.lst; la segunda ventana incluye la programación en GAMS necesaria para el modelo y la tercera ventana incluye los resultados de compilación y optimización para el usuario.

Un código en GAMS está formado por cabecera del programa, opciones de programación, declaración numérica de conjuntos y parámetros, declaración de variables, declaración de ecuaciones, declaración del modelo y lanzamiento del

programa de optimización. Después de programar, compilar y correr GAMS muestra los resultados obtenidos en ventanas de diálogo y en el archivo con terminación lst.

El modelo de transporte a construir y optimizar, Marín (2000), es un problema con dos plantas de envasado: Seattle y San Diego; tres mercados: Washington, Chicago y Topeka por lo que se requiere determinar las cantidades a enviar desde las plantas de envasado a los tres mercados a costo mínimo. La información relevante se muestra en la tabla siguiente:

| Distancia en miles de millas | Mercados   |         |        |                        |
|------------------------------|------------|---------|--------|------------------------|
| Plantas de envasado          | Washington | Chicago | Topeka | Capacidad de la planta |
| Seattle                      | 2.5        | 1.7     | 1.8    | 350                    |
| San Diego                    | 2.5        | 1.6     | 1.4    | 600                    |
| Demanda del mercado          | 325        | 300     | 275    |                        |

El costo de envío por cada mil millas es de \$90

El código completo con su explicación se incluye en la tabla siguiente:

| Código                                                                                                                        | Explicación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>\$title Modelo sencillo de transporte  option limcol=0,limrow=0;  \$offlisting; option solprint=off;</pre>               | <p>La etiqueta \$title describe el titulo del modelo</p> <p>Establece como límites de columna y renglón el valor de 0</p> <p>\$offlisting indica a GAMS no enviar la solución obtenida a pantalla</p>                                                                                                                       |
| <pre>SETS i plantas de envasado / Seattle, San-Diego / j mercados / Washington, Chicago, Topeka / ;</pre>                     | <p>Establece los conjuntos i,j correspondientes a las plantas origen y destino. Estos conjuntos indican los subíndices sobre los que se desarrolla el álgebra. Los elementos del conjunto se establecen entre los caracteres / / con comas. Note SETS al principio y ; al final.</p>                                        |
| <pre>PARAMETERS A(i) capacidad de la planta i / Seattle 350 San-Diego 600 / B(j) demanda del mercado j / Washington 325</pre> | <p>Incluye los valores numéricos asociados a cada subíndice indicado en SETS dentro de los caracteres / / sin comas. Note que para el parámetro A(i) GAMS espera dos valores uno para cada subíndice i y tres valores para cada subíndice j establecidos en SETS. Nuevamente tenemos PARAMETERS al inicio y ; al final.</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Chicago 300<br>Topeka 275<br>/ ;                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>TABLE</b> D(i,j) distancia en miles de millas<br>Washington Chicago Topeka<br>Seattle 2.5 1.7 1.8<br>San-Diego 2.5 1.6 1.4<br>;                                                                                                                                      | En esta parte se indica a GAMS las distancias del problema de transporte a resolver. Se guarda la distancia D con los subíndices i, j en una tabla TABLE. Observe que los renglones corresponden al subíndice i y las columnas a j tal y como se especificaron en SETS. Las columnas deben estar alineadas. Note que tenemos TABLE al inicio y; al final |
| <b>Scalar</b> F coste de envío por mil millas /90/;                                                                                                                                                                                                                     | Se establece un escalar llamado F que es el costo de envío por mil millas con valor de 90 el cual se declara entre los caracteres / /, al inicio tenemos scalar y al final ;                                                                                                                                                                             |
| <b>PARAMETER</b> C(i,j) coste transporte en miles de dolares;<br>C(i,j) = F * D(i,j) / 1000;                                                                                                                                                                            | Se establece el parámetro del costo de transporte C para cada elemento (i, j) por medio de la ecuación<br><br>$C(i,j) = F * D(i,j) / 1000;$                                                                                                                                                                                                              |
| <b>VARIABLES</b><br>x(i,j) cantidades enviadas<br>z precio total transporte ;<br><b>POSITIVE VARIABLE</b> x;                                                                                                                                                            | Las variables a utilizar en el modelo son x para cada elemento (i, j) y z que es el costo total de transporte.<br><br>A su vez se define que $x(i, j) \geq 0$                                                                                                                                                                                            |
| <b>EQUATIONS</b><br>cost define la funcion objetivo<br>supply(i) respetar capacidad planta i<br>demand(j) respetar demanda mercado j ;<br>cost .. z =e= sum((i,j), C(i,j)*x(i,j)) ;<br>supply(i) .. sum(j, x(i,j)) =l= A(i) ;<br>demand(j) .. sum(i, x(i,j)) =g= B(j) ; | Las ecuaciones declaradas son 3, la función de costo, un conjunto de i ecuaciones para supply y un conjunto de ecuaciones para el subíndice j.<br><br>Las ecuaciones son:<br><br>$cost\ z = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}$ $supply(i) = \sum_j X_{ij} \leq A(i)$ $demand(j) = \sum_i X_{ij} \geq B(j)$                                                     |
| <b>model</b> transport /all/;                                                                                                                                                                                                                                           | Se establece a GAMS que el modelo se llama transporte e incluye todas las líneas de programación anteriores                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>SOLVE</b> transport using LP minimizing z;                                                                                                                                                                                                                           | Indica a GAMS que resuelva el modelo transporte al aplicar programación lineal y minimizar la variable z                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>display</b> x.l,x.m;                                                                                                                                                                                                                                                 | Finalmente se pide a GAMS que muestre la solución de los valores de x en su cota mínima y valor óptimo.                                                                                                                                                                                                                                                  |

El código anterior de GAMS es:

```
$title Modelo sencillo de transporte
option limcol=0,limrow=0;

$offlisting;
option solprint=off;

SETS
i plantas de envasado / Seattle, San-Diego /
j mercados / Washington, Chicago, Topeka / ;

PARAMETERS
A(i) capacidad de la planta i
/ Seattle 350
San-Diego 600
/
B(j) demanda del mercado j
/
Washington 325
Chicago 300
Topeka 275
/ ;

TABLE D(i,j) distancia en miles de millas
           Washington Chicago Topeka
Seattle    2.5          1.7    1.8
San-Diego  2.5          1.6    1.4
;

Scalar F coste de envio por mil millas /90/;

PARAMETER C(i,j) coste transporte en miles de dolares;
C(i,j) = F * D(i,j) / 1000;

VARIABLES
x(i,j) cantidades enviadas
z precio total transporte ;
POSITIVE VARIABLE x;

EQUATIONS
cost define la funcion objetivo
supply(i) respetar capacidad planta i
```

```

demand(j) respetar demanda mercado j ;
cost .. z =e= sum((i,j), C(i,j)*x(i,j)) ;
supply(i) .. sum(j, x(i,j)) =l= A(i) ;
demand(j) .. sum(i, x(i,j)) =g= B(j) ;

model transport /all/;

SOLVE transport using LP minimizing z;

display x.l,x.m;

```

Al compilar y correr el modelo anterior GAMS envía mensaje a la ventana de diálogo y genera un archivo con terminación lst. Ya que se trata de un modelo de optimización lineal invoca al software CPLEX para su solución.

La ventana de diálogo muestra información básica sobre el archivo gms, su ubicación, la licencia, datos sobre la ejecución, estadísticas sobre el modelo tales como el número de renglones y columnas, la versión de la licencia de GAMS y CPLEX, los mensajes del optimizador y la solución obtenida.

El archivo con terminación lst muestra datos sobre la ejecución del modelo, datos de la compilación, el modelo y la solución obtenida.

## CPLEX

Este software es fabricado por IBM y permite desarrollar y resolver modelos de optimización lineal, puede usarse con lenguajes de modelación algebraica como GAMS e incluye herramientas de desarrollo propias por medio de CPLEX optimization studio que incluye su propio OPL *optimization programming Language* no muy distinto al lenguaje de modelación algebraica de GAMS. Debido a sus orígenes en la década de los 80's, a su compromiso en innovación y desarrollo tecnológico incorpora actualizaciones continuas tomando como base artículos de investigación y nuevos métodos y desarrollos en programación matemática siendo un referente y líder en la industria del software para programación matemática. Permite una integración eficiente con c, c++, java o Python. La versión de prueba de GAMS Studio en diciembre de 2023 incluye CPLEX 22.1.1.

### Ejercicios propuestos

1. Resuelva por el método gráfico el siguiente modelo de optimización lineal

$$\text{Max } 18x_1 + 11x_2$$

Sujeto a:

$$12x_1 + 18x_2 \leq 200$$

$$6x_1 + 6x_2 \leq 110$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Resuelva por el método gráfico el siguiente modelo de optimización lineal

$$\text{Minimizar } 3y_1 - 7y_2$$

Sujeto a:

$$4y_1 + y_2 \geq 12$$

$$-3y_1 + 2y_2 \geq 15$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

3. Aplique el método simplex al problema siguiente:

$$\text{Max } 14x_1 + 9x_2$$

Sujeto a:

$$20x_1 + 10x_2 \leq 140$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 110$$

$$3x_1 + x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4. Resuelva por el método de las dos fases

$$\text{Minimizar } 6y_1 + 12y_2$$

Sujeto a:

$$14y_1 + 16y_2 \geq 210$$

$$3y_1 + 13y_2 \geq 85$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

5. Resuelva al aplicar el método simplex revisado

$$\text{Max } 18x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 15x_4$$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 200$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 110$$

$$3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 15x_4 \leq 210$$

$$16x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 \leq 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

## Fuentes de consulta

Arreola R. J., Arreola R. A., (2003). Programación Lineal. Una introducción a la toma de decisiones cuantitativa. Thomson. México, D. F.

s/a., CPLEX(2023). IBM ILOG Optimization Studio. Página web. URL. <https://www.ibm.com/mx-es/products/ilog-cplex-optimization-studio>

s/a., GAMS(2023). GAMS Development Corporation. Página web. URL. <https://www.gams.com/>

Marín A., J., I., (2000). Introducción al Lenguaje GAMS. Universidad Politécnica de Madrid. Archivo PDF. URL [https://www.diquima.upm.es/old\\_diquima/recursos/manuales/Gams.pdf](https://www.diquima.upm.es/old_diquima/recursos/manuales/Gams.pdf)

s/a., LINDO(2023). LINDO Systems. Página web. URL. <https://www.lindo.com/>

Strang G., (1986). Algebra Lineal y sus aplicaciones. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware, EEUU.

Salamanca F., A., Ruiz J. J., (1991). Algoritmo del elipsoide interior para programación lineal. Qüestiió. Vol 15. 1.

## Capítulo V. Teoría de la dualidad y análisis de sensibilidad

**Objetivo:** Comprender los fundamentos de la teoría de la dualidad para facilitar el análisis de postoptimalidad. Analizar variaciones a los coeficientes de la función objetivo y restricciones, la inclusión o eliminación de variables, así como la inclusión o eliminación de restricciones al modelo lineal construido.

### 5.1 Introducción a la programación dual

Para cada modelo de optimización lineal le corresponde un modelo dual el cual contiene propiedades matemáticas que son muy útiles para el análisis de variaciones e interpretación de la solución reportada. Así mismo la teoría de dualidad proporciona un certificado matemático de optimalidad si la solución óptima existe. En este capítulo se incluyen los métodos dual-simplex y el método simplex primal-dual que permiten bajo las condiciones matemáticas adecuadas encontrar con mayor facilidad la solución óptima, declarar que no existe o bien declarar el problema es infactible.

Las relaciones entre los problemas primal y dual, en conjunto con los teoremas de dualidad permiten:

- Establecer un certificado de optimalidad irrefutable para un problema dado.
- Encontrar la solución del problema dual a partir del problema primal y viceversa.
- El valor de las variables duales permiten conocer el “valor” de los recursos en el problema primal lo cual apoya el proceso de toma de decisiones.
- La teoría de dualidad permite establecer los métodos dual-simplex y primal-dual para obtener una solución al problema planteado con menor número de iteraciones y por lo tanto con menor esfuerzo computacional en comparación a otros métodos, por ejemplo, el método simplex primal o el método de las dos fases.

La teoría de dualidad en optimización lineal no es exclusiva, se trata de un concepto matemático más amplio, ya que dado un problema matemático existe un problema equivalente que tiene propiedades matemáticas muy útiles. En los conceptos y métodos de la ingeniería eléctrica es posible establecer que para cada red eléctrica existe una red dual equivalente.

### 5.2 Construcción del programa lineal dual

Con frecuencia denominados “primal” al programa lineal que se construye para apoyar el proceso de toma de decisiones. De acuerdo con lo anterior durante el desarrollo de este texto se han construido solamente programas lineales primales. Por lo que el problema primal es el primer modelo que se construye, después se construye el modelo dual.

Para construir el modelo dual, considere el problema lineal siguiente que es una variante del modelo presentado en la sección 1.1 al que se le denomina modelo primal:

$$\text{Max } z = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3$$

Sujeto a:

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 120$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 180$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Paso 1. Establecer las variables duales.

Observe que este modelo primal tiene tres variables  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  y tiene dos restricciones. Para construir el modelo dual equivalente, lo primero que hay que hacer es asociar una variable dual para cada restricción del problema primal. Las variables duales serán  $y_1$  y  $y_2$ . En forma matricial  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ .

$$\text{Max } z_1 = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \quad \text{Variables duales}$$

Sujeto a:

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 120 \quad y_1$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 180 \quad y_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Paso 2. Función objetivo

La función objetivo del problema dual se construye con el vector de recursos  $b$  del problema primal, si en el problema primal el sentido de optimización es maximizar al problema dual le corresponde minimizar y viceversa. Note que:  $b = \begin{bmatrix} 120 \\ 180 \end{bmatrix}$  por lo que la función objetivo del problema dual será  $b^T y$

$$\text{Min } z_D = 120y_1 + 180y_2$$

Paso 3. Restricciones y tipo de variables de decisión

Para el conjunto de restricciones del problema dual usaremos la matriz A transpuesta del problema primal.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ , por lo que  $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ . Las restricciones del problema dual en forma matricial serán  $A^T y$ . El vector de recursos del problema dual corresponde al vector de coeficientes de la función objetivo del problema primal. El modelo dual correspondiente es:

$$\text{Min } z_D = 120 y_1 + 180 y_2$$

Sujeto a:

$$2y_1 + y_2 \geq 3$$

$$y_1 + 5y_2 \geq 8$$

$$7y_1 + y_2 \geq 5$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Para establecer el sentido de las restricciones y el tipo de variable se establecen de la forma siguiente:

- Si la restricción es del tipo  $\leq$  en el problema primal le corresponde variables  $\geq 0$  en el problema dual.
- Si la restricción es del tipo  $=$  en el problema primal le corresponde variables irrestrictas en el problema dual.
- Si la restricción es del tipo  $\geq$  en el problema primal le corresponde variables  $\leq 0$  en el problema dual.
- Si las variables de decisión del problema primal son del tipo  $\geq 0$  las restricciones en el problema dual corresponden al tipo  $\geq$ .
- Si las variables de decisión del problema primal son del tipo irrestrictas las restricciones en el problema dual serán del tipo igualdad.
- Si las variables de decisión del problema primal son del tipo  $\leq 0$  las restricciones en el problema dual serán del tipo  $\leq$ .

Las relaciones primal-dual se resumen en la tabla siguiente:

| Función Objetivo |             | Maximizar |                   | Minimizar     |             |
|------------------|-------------|-----------|-------------------|---------------|-------------|
| Restricciones    | $\leq$      |           | $\Leftrightarrow$ | Variables     | $\geq 0$    |
|                  | $=$         |           | $\Leftrightarrow$ |               | Irrestricta |
|                  | $\geq$      |           | $\Leftrightarrow$ |               | $\leq 0$    |
| Variables        | $\geq 0$    |           | $\Leftrightarrow$ | Restricciones | $\geq$      |
|                  | Irrestricta |           | $\Leftrightarrow$ |               | $=$         |
|                  | $\leq 0$    |           | $\Leftrightarrow$ |               | $\leq$      |

De forma matricial:

| Problema primal |
|-----------------|
| Max $z_P = cx$  |
| Sujeto a:       |
| $Ax \leq b$     |
| $x \geq 0$      |

| Problema dual     |
|-------------------|
| Min $z_D = b^T y$ |
| Sujeto a:         |
| $A^T y \geq c^T$  |
| $y \geq 0$        |

Los modelos primal y dual equivalentes usados como ejemplo se muestran a continuación:

| Problema primal                |
|--------------------------------|
| Max $z_P = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3$ |
| Sujeto a:                      |
| $2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 120$   |
| $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 180$    |
| $x_1, x_2, x_3 \geq 0$         |

| Problema dual                 |
|-------------------------------|
| Min $z_D = 120 y_1 + 180 y_2$ |
| Sujeto a:                     |
| $2y_1 + y_2 \geq 3$           |
| $y_1 + 5y_2 \geq 8$           |
| $7y_1 + y_2 \geq 5$           |
| $y_1, y_2 \geq 0$             |

De acuerdo a la estructura de cada problema, se le pregunta al lector

¿Cuál problema es más fácil de resolver?

Si se aplica el método simplex ¿cuál se resuelve más fácil?

¿cuál problema llevará mayor número de iteraciones al aplicar el método simplex?

¿Los dos problemas tienen solución óptima?

Si se conoce la solución óptima del problema primal ¿es posible conocer la solución óptima del problema dual?

El uso de la palabra “equivalente” se justificará más adelante con los teoremas de optimalidad y dualidad. Note que al aplicar las relaciones primal-dual anteriores al problema dual debemos llegar al problema primal.

### 5.3 Teoremas y relaciones entre los problemas lineales primal y dual

La teoría de optimización clásica establece que para determinar los puntos máximos y mínimos de una función diferenciable sin restricciones se tiene que:

1. Calcular las derivadas parciales.
2. Igualar las derivadas parciales a cero y resolver para cada variable. Estos son los puntos críticos.
3. Para saber si un punto crítico es un mínimo, un máximo o un punto de inflexión debe recurrirse al criterio de la segunda derivada.

Sin embargo, un problema de optimización lineal si bien es diferenciable, ya que se trata de una función lineal, tiene un conjunto de restricciones. Por lo tanto adicional a lo anterior para un problema con restricciones se requiere aplicar multiplicadores de Lagrange, se usa un multiplicador de Lagrange asociado a cada restricción y construir la función Lagrangeana usando la función objetivo original más cada restricción con su multiplicador de Lagrange correspondiente.

Ahora tenemos una función objetivo que incluye todas las restricciones y tenemos una función lagrangeana y un problema de optimización sin restricciones.

Si al problema primal anterior se construye la función de Lagrange  $L_1$  tenemos:

| Problema primal                                                                            | Función Lagrangeana                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $\text{Max } z_1 = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3$                                                     | $\text{Max } L_1 = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3$                             |
| <p>Sujeto a:</p> $2x_1 + x_2 + 7x_3 = 120$ $x_1 + 5x_2 + x_3 = 180$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ | $+ y_1 (120 - 2x_1 - x_2 - 7x_3)$ $+ y_2 (180 - x_1 - 5x_2 - x_3)$ |

Note que la función de Lagrange  $L_1$  tiene como variables  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  y los multiplicadores de Lagrange son  $y_1$  y  $y_2$  y también se consideran variables.

Para encontrar los valores mínimos o máximos de la función Lagrangeana se deben determinar las condiciones de optimalidad Kuhn-Tucker. En optimización lineal considere el modelo siguiente que llamaremos primal:

Problema primal

Max  $cx$

Sujeto a:

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

Al construir la función lagrangeana  $L_p$  tenemos que  $\text{Max } L_p(x, y) = \text{Max } cx + y(b - Ax)$ , y representa el vector de multiplicadores de Lagrange, uno para cada restricción  $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]$ . Las condiciones de Kuhn-Tucker para optimalidad son:

| Para las variables de decisión x                  | Para los multiplicadores y                        |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\frac{\partial L}{\partial x} = c - yA \leq 0$   | $\frac{\partial L}{\partial y} = b - Ax \geq 0$   |
| $\frac{\partial L}{\partial x} x = (c - yA)x = 0$ | $\frac{\partial L}{\partial y} y = y(b - Ax) = 0$ |

A partir del problema primal, construimos el problema dual el cual es el siguiente:

Problema dual

$$\text{Min } b^T y$$

Sujeto a:

$$A^T y \geq c^T$$

$$y \geq 0$$

La función Lagrangeana para el problema dual es  $\text{Min } L_d(x, y) = \text{Min } b^T y + x (c^T - A^T y)$ . Note que ahora los multiplicadores de Lagrange están representados por x, uno para cada restricción del problema dual  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ . Las condiciones de optimalidad Kuhn-Tucker para el dual son:

| Para las variables de decisión y                  | Para los multiplicadores x                        |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\frac{\partial L}{\partial y} = b - Ax \geq 0$   | $\frac{\partial L}{\partial y} = c - yA \leq 0$   |
| $\frac{\partial L}{\partial y} y = y(b - Ax) = 0$ | $\frac{\partial L}{\partial y} x = (c - yA)x = 0$ |

Al observar ambas funciones lagrangeanas del problema primal  $L_p$  y del problema dual  $L_d$ , se concluye que son iguales por lo que las condiciones Kuhn-Tucker para el problema primal y el problema dual también son iguales, de acuerdo a lo anterior a todo problema primal existe un problema dual equivalente.

Lo anterior sugiere que si  $x_1$  y  $y_1$  son soluciones factibles que satisfacen  $x_1 \geq 0, y_1 \geq 0$ ; a los problemas primal y dual correspondientes entonces tenemos que:

$$Ax_1 \leq b$$

$$A^T y_1 \geq c^T$$

Al premultiplicar por ambos lados por  $y_1$  y por  $x_1$  tenemos que:

$$y_1 Ax_1 \leq y_1 b$$

$$x_1 A^T y_1 \geq x_1 c^T$$

Al replantear términos semejantes y acomodar tenemos la relación:

$$y_1 b \geq x_1 A^T y_1 = y_1 Ax_1 \geq x_1 c^T$$

Por lo que:

Lema 5.1.

Para los problemas primal y dual, el valor de la función objetivo para cualquier solución factible del problema de minimización es siempre mayor o igual que el valor de la función objetivo para cualquier solución factible del problema de maximización.

Teorema de existencia.

La condición necesaria y suficiente para que un problema de optimización lineal tenga solución es que tanto el conjunto de soluciones  $P$  para el problema primal,  $P = \{x | Ax \leq b\}$ , como el conjunto de soluciones  $Q$  del problema dual  $Q = \{y | A^T y \geq c^T\}$  no sean vacíos. Por lo que:

- Existe una solución óptima para el problema primal  $x^*$  y una solución óptima para el problema dual  $y^*$  si y solo si se cumple que  $\exists(x^*, y^*) \Leftrightarrow P \neq \emptyset \wedge Q \neq \emptyset$

Los casos son los siguientes:

- Solución óptima finita para ambos problemas primal y dual si  $P \neq \emptyset \wedge Q \neq \emptyset$
- El problema primal es infactible y el problema dual es no acotado si  $P = \emptyset \wedge Q \neq \emptyset$
- El problema primal es no acotado y el problema dual es infactible si  $P \neq \emptyset \wedge Q = \emptyset$
- Ambos problemas el primal y el dual son infactibles si  $P = \emptyset \wedge Q = \emptyset$

Corolario 5.1 Si  $x_1$  y  $y_1$  son soluciones factibles a los problemas primal y dual correspondientes adicionalmente si  $cx_1 = b^T y_1$ , entonces  $x_1$  y  $y_1$  son soluciones factibles óptimas para su problema respectivo y el valor de la función objetivo primal evaluada en  $x_1$  es igual al valor de la función objetivo del dual evaluada en  $y_1$ .

Teorema fundamental de la dualidad

Para los problemas primal y dual sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:

- El problema primal y el problema dual poseen soluciones óptimas  $x^*$ ,  $y^*$  respectivamente si el valor de la función objetivo del problema primal evaluada en  $x^*$  es igual al valor de la función objetivo del problema dual evaluada en  $y^*$
- Un problema tiene solución no acotada y el otro solución infactible
- Ambos tienen solución infactible

La holgura complementaria

Si regresamos a la condición  $y_1 b \geq x_1 A^T y_1 = y_1 A x_1 \geq x_1 c^T$  la cual puede reescribirse como

$$cx \leq yAx \leq yb$$

Donde  $x, y$  son soluciones factibles y adicionalmente en el óptimo tenemos que  $cx^* = y^*b$  deducimos que  $cx^* = y^*Ax^* = y^*b$  al separar los extremos de la expresión anterior tenemos que  $cx^* = y^*Ax^*, y^*b = y^*Ax^*$ . Al replantear tenemos que  $y^*(Ax^* - b) = 0, (c - y^*A)x^* = 0$ .

Se establece que:

- Si una variable en el problema primal es positiva, la restricción asociada en el problema dual debe ser activa.  $(c - y^*A)x^* = 0$
- Si una restricción en el problema primal es pasiva la variable dual asociada debe ser cero,  $y^*(Ax^* - b) = 0$ .

Una restricción es activa si se cumple como estricta igualdad, es decir si la variable de holgura asociada es cero. Una restricción es pasiva si se cumple como estricta desigualdad por lo que la variable de holgura no es cero.

Teorema de holgura complementaria

Sean  $x^*, y^*$  dos soluciones óptimas a los problemas primal y dual respectivamente, entonces se cumple que:

$$(c - y^*A)x^* = 0$$

$$y^*(Ax^* - b) = 0$$

Ejemplo. Considere el programa lineal de la sección 4.3

$$\text{Max } 10x_1 + 15x_2$$

Sujeto a:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 400$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 150$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 110$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La tabla óptima es la siguiente:

| Renglón | Base  | z | $x_1$ | $x_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | Sol |  |
|---------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|--|
| 0       | z     | 1 | 0     | 0     | 1/2   | 1     | 0     | 350 |  |
| 1       | $x_2$ | 0 | 0     | 1     | 1/10  | -1/5  | 0     | 10  |  |
| 2       | $x_1$ | 0 | 1     | 0     | -1/10 | 2/5   | 0     | 20  |  |
| 3       | $h_3$ | 0 | 0     | 0     | 1/5   | -6/5  | 1     | 10  |  |

Donde la solución óptima indica que  $x_1^*=20$ ,  $x_2^*=10$ ,  $h_3=10$ ,  $z^*=350$ .

El problema dual correspondiente es:

$$\text{Min } 400 y_1 + 150 y_2 + 110 y_3$$

Sujeto a:

$$10 y_1 + 5 y_2 + 4 y_3 \geq 10$$

$$20 y_1 + 5 y_2 + 2 y_3 \geq 15$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Para encontrar la solución al problema dual se aplica el teorema de holgura complementaria y el teorema fundamental de la dualidad.

Paso 1. Analizar las restricciones del problema primal evaluadas con la solución óptima.

Al sustituir en la primera restricción tenemos que  $10(x_1=20) + 20(x_2=10) = 400$ , por lo que la restricción es activa ya que se cumple como estricta igualdad, entonces  $y_1 \neq 0$ .

Al sustituir en la segunda restricción tenemos que  $5(x_1=20) + 5(x_2=10) = 150$ , por lo que la restricción es activa ya que se cumple como estricta igualdad, entonces  $y_2 \neq 0$ .

Al sustituir en la tercera restricción tenemos que  $4(x_1=20) + 2(x_2=10) < 110$ , por lo que la restricción es pasiva ya que se cumple como desigualdad, entonces  $y_3=0$ .

Si  $y_3=0$  y considerando que el valor de la función objetivo es igual en el problema primal y en el problema dual, entonces el problema dual se reduce a:

$$\text{Min } 400 y_1 + 150 y_2 + 110 (y_3=0) = 350$$

Sujeto a:

$$10 y_1 + 5 y_2 + (y_3=0) \geq 10$$

$$20 y_1 + 5 y_2 + (y_3=0) \geq 15$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Para determinar los valores óptimos del problema dual  $y_1, y_2$  se resuelve el sistema de ecuaciones a partir de las restricciones del problema dual:

$$10 y_1 + 5 y_2 = 10$$

$$20 y_1 + 5 y_2 = 15$$

Al restar la primera de la segunda tenemos que  $y_1 = \frac{1}{2}$ , al sustituir este valor en la primera tenemos que  $y_2 = 1$ . Con estos valores se evalúa la función objetivo del problema dual  $\text{Min } 400 (y_1=1/2) + 150 (y_2=1) + 110 (y_3=0) = 350$ . Por lo que la solución óptima del problema dual es  $y_1^* = \frac{1}{2}, y_2^* = 1, y_3^* = 0, z=350$ .

Interpretación económica de las variables duales.

Para el problema de la mezcla productiva tenemos dos tipos de productos  $x_1, x_2$  cuyo valor de venta es de \$10 y \$15 respectivamente. El proceso de producción considera 3 departamentos, el departamento de corte, departamento de pintura y departamento de ensamble. La primera restricción establece la capacidad de 400 horas a la semana de producción del departamento de corte y cada producto consume 10 y 20 horas respectivamente.

La segunda restricción establece la capacidad de 150 horas a la semana de producción del departamento de pintura y cada producto consume 5 y 5 horas respectivamente, finalmente la tercera restricción establece la capacidad de 110 horas a la semana de producción del departamento de ensamble y cada producto consume 4 y 10 horas respectivamente, el modelo es el siguiente:

$$\text{Max } 10x_1 + 15x_2$$

Sujeto a:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 400$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 150$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 110$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Las variables duales para este problema son  $y_1, y_2$  y  $y_3$  que es la utilidad o renta ganada por cada departamento por lo que la renta total para el producto 1 es:

$$10 y_1 + 5 y_2 + 4 y_3 \geq 10$$

Y debe ser al menos el valor de venta que es de \$10. Para el producto 2 es:

$$20 y_1 + 5 y_2 + 2 y_3 \geq 15$$

Al obtener los valores óptimos de las variables duales tenemos que:

$$y_1^* = \frac{1}{2}, y_2^* = 1, y_3^* = 0,$$

- La renta mínima que se debe cobrar por los recursos es igual a la utilidad máxima que con ellos se ganaría.
- Las variables duales representan la contribución marginal de cada recurso a la función objetivo. Es decir, para  $y_1^* = \frac{1}{2}$ , significa que cada hora adicional al departamento de corte se incrementa la utilidad marginal en  $\frac{1}{2}$ . Para el departamento de ensamble no hay incremento ya que  $y_3^* = 0$ .
- Suponiendo que lo que se produce se vende, ¿en qué departamento se debe ampliar la capacidad?. De acuerdo con el ejemplo el recurso más valioso es el departamento de pintura ya que su variable dual es  $y_2^* = 1$ , note que  $y_2 > y_1 > y_3$  este recurso tiene mayor contribución marginal.

#### 5.4 Método dual simplex

Considere la relación  $A^T y_1 \geq c^T$  que establece la restricción dual. Para el problema primal y el método simplex llegamos a la solución óptima en el paso 2 del método simplex, cuando  $\Phi_j = c_j - w a_j \leq 0$  por lo que las restricciones duales pueden plantearse como  $c_j - w a_j \leq 0$  o bien  $\Phi_j \leq 0$ . De acuerdo con lo anterior tenemos que:

El problema primal es inmejorable si y solo si el problema dual correspondiente es factible y viceversa.

El método simplex es un algoritmo iterativo que genera soluciones factibles cada vez mejores hasta encontrar el óptimo, es decir mantiene la factibilidad y busca cada vez mejorar la solución hasta llegar a la solución óptima, es decir la solución inmejorable.

“El método simplex mantiene la factibilidad y busca la inmejorabilidad”

En una visión primal-dual ¿existe un método iterativo que mantenga la inmejorabilidad y busque la factibilidad?. La respuesta es sí y se le denomina método Dual-Simplex.

“El método dual simplex mantiene la inmejorabilidad y busca la factibilidad”

#### Método dual simplex (Arreola, 2003)

##### Paso 1. Encontrar una solución básica factible inicial

- a. Elija a las variables de holgura como las variables básicas en la tabla inicial
- b. Realice operaciones de renglón para establecer la matriz identidad en las variables básicas.

##### Paso 2. Criterio de factibilidad

- a. Si todas las variables básicas son mayores o iguales a cero, la solución actual es óptima.
- b. En otro caso elija como variable de salida  $X_k$  aquella con el valor más negativo.

### Paso 3. Criterio de inmejorabilidad

- Si en el renglón de la tabla que corresponde a la variable de salida  $X_k$  todos los coeficientes de reemplazo son no negativos, la solución es ilimitada.
- De lo contrario elija a la variable de entrada  $X_r$  aquella variable cuyo cociente  $\gamma$  sea el mínimo para todo  $j$ .

$$\gamma = \min_j \left\{ \frac{-\Phi_j}{\alpha_{kj}}, \quad \alpha_{kj} < 0 \right\}$$

- El elemento pivote es  $\alpha_{rk}$
- Realice las operaciones de pivoteo es decir por columna, hacer el elemento pivote 1 y los demás elementos de la columna hacerlos ceros
- Regrese al paso 2

Ejemplo.

Aplicar el método dual simplex al modelo siguiente:

$$\text{Min } 400 y_1 + 150 y_2 + 110 y_3$$

Sujeto a:

$$10 y_1 + 5 y_2 + 4 y_3 \geq 10$$

$$20 y_1 + 5 y_2 + 2 y_3 \geq 15$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Primero se plantea el modelo en formato estándar al agregar variables de holgura a las restricciones. Se usará el arreglo tabular como en el método simplex tabular de la sección 4.2.

$$\text{Min } 400 y_1 + 150 y_2 + 110 y_3 + 0h_1 + 0h_2$$

Sujeto a:

$$10 y_1 + 5 y_2 + 4 y_3 - h_1 = 10$$

$$20 y_1 + 5 y_2 + 2 y_3 - h_2 = 15$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Paso 1. Solución básica factible inicial

Tabla inicial

| Renglón | Base           | z | y <sub>1</sub> | y <sub>2</sub> | y <sub>3</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | Solución |  |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|--|
| 0       | z              | 1 | -400           | -150           | -110           | 0              | 0              | 0        |  |
| 1       | h <sub>1</sub> | 0 | 10             | 5              | 4              | -1             | 0              | 10       |  |
| 2       | h <sub>2</sub> | 0 | 20             | 5              | 2              | 0              | -1             | 15       |  |

Se multiplican las renglones 1 y 2 por -1 y se tiene que:

| Renglón | Base           | z | y <sub>1</sub> | y <sub>2</sub> | y <sub>3</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | Solución |  |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|--|
| 0       | z              | 1 | -400           | -150           | -110           | 0              | 0              | 0        |  |
| 1       | h <sub>1</sub> | 0 | -10            | -5             | -4             | 1              | 0              | -10      |  |
| 2       | h <sub>2</sub> | 0 | -20            | -5             | -2             | 0              | 1              | -15      |  |

## Paso 2. Criterio de factibilidad

Ya que  $h_1 = -10$  y  $h_2 = -15$  la solución actual se puede mejorar, se elige a  $h_2 = -15$  como variable de salida. Por lo que  $X_k$  es  $h_2$ . El renglón por analizar es el renglón 2.

## Paso 3 Criterio de inmejorabilidad

Del renglón 2 de la tabla actual se elige la variable de entrada  $X_r$  con el cociente más negativo  $\gamma$  para cada columna, o sea para cada variable de la tabla.

$$\gamma = \min j \left\{ \frac{-400}{-20}, \frac{-150}{-5}, \frac{-110}{-2} \mid \alpha_{kj} < 0 \right\} = \min j \{20, 30, 55 \mid \alpha_{kj} < 0\} = 20; j=1$$

El valor mínimo de  $\gamma$  es 20 y corresponde a la variable  $y_1$ . Por lo que el elemento pivote  $\alpha_{rk}$  es  $\alpha_{21} = -20$ , el valor del renglón 2 columna  $y_1$ .

| Renglón | Base           | z | y <sub>1</sub> | y <sub>2</sub> | y <sub>3</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | Solución |  |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|--|
| 0       | z              | 1 | -400           | -150           | -110           | 0              | 0              | 0        |  |
| 1       | h <sub>1</sub> | 0 | -10            | -5             | -4             | 1              | 0              | -10      |  |
| 2       | h <sub>2</sub> | 0 | -20            | -5             | -2             | 0              | 1              | -15      |  |

Se calcula la nueva tabla al calcular la nueva base al realizar operaciones de pivoteo

Se multiplica el renglón 2 por -1/20

| Renglón | Base           | z | y <sub>1</sub> | y <sub>2</sub> | y <sub>3</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | Solución |         |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|---------|
| 0       | z              | 1 | -400           | -150           | -110           | 0              | 0              | 0        |         |
| 1       | h <sub>1</sub> | 0 | -10            | -5             | -4             | 1              | 0              | -10      |         |
| 2       | y <sub>1</sub> | 0 | 1              | 1/4            | 1/10           | 0              | -1/20          | 3/4      | -1/20R2 |

| Renglón | Base           | z | y <sub>1</sub> | y <sub>2</sub> | y <sub>3</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | Solución |          |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|----------|
| 0       | z              | 1 | 0              | -50            | -70            | 0              | -20            | 300      | 400R2+R0 |
| 1       | h <sub>1</sub> | 0 | 0              | -5/2           | -3             | 1              | -1/2           | -5/2     | 10R2 +R1 |
| 2       | y <sub>1</sub> | 0 | 1              | 1/4            | 1/10           | 0              | -1/20          | 3/4      |          |

De regreso al paso 2

La variable que sale es h<sub>1</sub> ya que es la única negativa. El renglón por analizar es el renglón 1.

Paso 3 Criterio de inmejorabilidad

Del renglón 1 de la tabla actual las dos variables candidatas a entrar son y<sub>2</sub>, y<sub>3</sub> y h<sub>2</sub> ya  $\alpha_{kj} < 0$  entonces en ese mismo orden:

$$\gamma = \min j \left\{ \frac{-50}{-5/2}, \frac{-70}{-3}, \frac{-20}{-1/2} \mid \alpha_{kj} < 0 \right\} = \min j \{20, 33, 40 \mid \alpha_{kj} < 0\} = 20; j=1$$

El valor mínimo de  $\gamma$  es 20 y corresponde a la variable y<sub>2</sub>. Por lo que el elemento pivote  $\alpha_{rk}$  es  $\alpha_{12} = -5/2$ , el valor del renglón 1 columna y<sub>2</sub>.

| Renglón | Base           | z | y <sub>1</sub> | y <sub>2</sub> | y <sub>3</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | Solución |  |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|--|
| 0       | z              | 1 | 0              | -50            | -70            | 0              | -20            | 300      |  |
| 1       | h <sub>1</sub> | 0 | 0              | -5/2           | -3             | 1              | -1/2           | -5/2     |  |
| 2       | y <sub>1</sub> | 0 | 1              | 1/4            | 1/10           | 0              | -1/20          | 3/4      |  |

Se realizan las operaciones de pivoteo

| Renglón | Base           | z | y <sub>1</sub> | y <sub>2</sub> | y <sub>3</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | Solución |             |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|-------------|
| 0       | z              | 1 | 0              | 0              | -10            | -20            | -10            | 350      | 50R1 + r0   |
| 1       | y <sub>2</sub> | 0 | 0              | 1              | 6/5            | -2/5           | 1/5            | 1        | -2/5 R1     |
| 2       | y <sub>1</sub> | 0 | 1              | 0              | -1/5           | 1/10           | -1/10          | 1/2      | -1/4R1 + R2 |

En esta tabla ya no existen valores negativos en la columna solución por lo que no hay variable de salida, por lo que las variables básicas son mayores o iguales a cero. La solución actual es óptima  $y_1^* = 1/2$ ,  $y_2^* = 1$ ,  $y_3^* = 0$ ,  $z^* = 350$ .

## 5.5 Método primal-dual

El método primal dual (Bazaraa, 1999) incorpora conceptos del método simplex primal y del método dual simplex para encontrar una solución óptima o reportar que el problema no tiene solución.

Comienza con una solución dual factible  $w$  la cual se va actualizando al plantear el problema primal restringido y su problema dual correspondiente.

### Paso Inicial

Construya el problema dual a partir del problema primal en formato estándar, determine una solución dual factible  $w$  tal que  $wa_j - c_j \leq 0$  para todo  $j$ .

### Paso 1

Con el vector  $w$  calcule el conjunto de columnas  $j$  del problema primal  $Q$  las cuales deben cumplir  $wa_j - c_j = 0$ ,  $Q = \{j : wa_j - c_j = 0\}$ . Construya y resuelva el siguiente problema primal restringido. Recuerde que  $a_j$  es la columna  $j$ -ésima de la matriz  $A$  y que pertenece a  $Q$ .

$$\text{Min } x_0 = \sum_{j \in Q} 0x_j + 1x_a$$

Sujeto a

$$\sum_{j \in Q} a_j x_j + x_a = b$$

$$x_j, x_a \geq 0$$

Donde  $w$  es el vector de variables duales del problema primal a resolver,  $x_j$  son las variables de decisión del problema primal,  $x_a$  son variables artificiales usadas con frecuencia en la fase I del método de las dos fases.

Sea  $x_0$  el valor de la función objetivo. Si al resolver  $x_0 = 0$ , entonces se tiene una solución óptima al problema primal original. En caso contrario construya el problema dual del problema primal restringido. Sea  $v^*$  la solución óptima del problema dual restringido anterior. Vaya al paso 2.

### Paso 2

Si  $v^*a_j \leq 0$  para todo  $j$ , entonces el problema dual es no acotado y el problema primal es infactible. En caso contrario calcule

$$\emptyset = \min_j \left\{ \frac{-(wa_j - c_j)}{v^* a_j} : v^* a_j > 0 \right\} > 0$$

La solución dual actual  $w$  se actualiza por  $w + \emptyset v^*$ . Regrese al paso 1.

Ejemplo:

Considere el problema siguiente:

$$\text{Min } x_1 + 2x_2 + 9x_3 + x_4 + 5x_5 + 3x_6$$

Sujeto a:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 8x_5 + x_6 \geq 7$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Paso inicial

En formato estándar incorporamos las variables de holgura  $x_7$  y  $x_8$ :

$$\text{Min } x_1 + 2x_2 + 9x_3 + x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

Sujeto a:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 8x_5 + x_6 - x_7 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 - x_8 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

El problema dual es el siguiente:

$$\text{Max } 7y_1 + 4y_2$$

Sujeto a:

$$3y_1 + 2y_2 \leq 1$$

$$2y_1 + y_2 \leq 2$$

$$-y_1 + 6y_2 \leq 9$$

$$-5y_1 + y_2 \leq 1$$

$$8y_1 + 3y_2 \leq 5$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 3$$

$$-y_1 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

$y_1, y_2$  irrestrictas

Note que una solución factible para el problema dual es  $w = [y_1 \ y_2] = [0 \ 0]$  lo que nos genera las dos últimas restricciones como activas ya que se cumplen como estricta igualdad. Por lo que la prima solución dual es  $w = [0 \ 0]$  la cual se va a modificar al calcular  $\emptyset$ .

Paso 1

Con la solución dual inicial  $w = [0 \ 0]$  se construye el problema primal restringido que se forma al identificar los subíndices  $j$  que cumplan con  $wa_j - c_j = 0$ . Por lo que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 8 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & +6 & +1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$c = [1 \ 2 \ 9 \ 1 \ 5 \ 3 \ 0 \ 0]$$

$$wa_j - c_j = [0 \ 0] \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 8 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & +6 & +1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - [1 \ 2 \ 9 \ 1 \ 5 \ 3 \ 0 \ 0] =$$

$$= [-1 \ -2 \ -9 \ -1 \ -5 \ -3 \ 0 \ 0]$$

Note las columnas resultantes 0, son la 7 y 8 por lo que  $Q = \{7, 8\}$ , se forma el problema primal restringido asociados a las variables de decisión  $x_7$  y  $x_8$ .

$$\text{Min } 0x_7 + 0x_8 + x_9 + x_{10}$$

Sujeto a

$$-x_7 + x_9 = 7$$

$$-x_8 + x_{10} = 4$$

$$x_7, x_8, x_9, x_{10} \geq 0$$

Donde  $x_9, x_{10}$  son variables artificiales para el problema restringido. La solución óptima es  $x^* = [x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10}] = [0 \ 0 \ 7 \ 4]$  con valor óptimo  $x_0^* = 11$ . Ya que  $x_0^* \neq 0$  continuamos con el paso 2.

El problema dual del problema restringido es:

$$\text{Max } 7y_1 + 4y_2$$

Sujeto a:

$$-y_1 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

$$y_1 \leq 1$$

$$y_2 \leq 1$$

$y_1, y_2$  irrestrictas

Para resolver este problema dual note que  $x_9$  y  $x_{10}$  son variables básicas y por el teorema de holgura complementaria las dos restricciones asociadas en el dual no tienen holgura, es decir se cumplen como estricta igualdad por lo que la solución óptima al problema dual del problema primal restringido es  $v^* = [y_1 \ y_2] = [1 \ 1]$ .

Paso 2.

Con el valor de  $v^* = [y_1 \ y_2] = [1 \ 1]$ , se calcula  $v^*a_j$  para todo  $j$

$$v^*a_j = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 8 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [5 \ 3 \ 5 \ -4 \ 11 \ 3 \ -1 \ -1]$$

Note que los valores  $v^*a_j > 0$  corresponden a las columnas  $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ . El cálculo de  $\emptyset$  es como sigue.

Los valores  $w^*a_j - c_j$  se calculan con

$$w^*a_j - c_j = [0 \ 0] \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 8 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - [1 \ 2 \ 9 \ 1 \ 5 \ 3 \ 0 \ 0]$$

$$w^*a_j - c_j = [-1 \ -2 \ -9 \ -1 \ -5 \ -3 \ 0 \ 0]$$

$$\emptyset = \min_j \left\{ \frac{1}{5}J = 1, \frac{2}{3}J = 2, \frac{9}{5}J = 3, \frac{5}{11}J = 5, \frac{3}{3}J = 6 \right\} > 0$$

$$\emptyset = \min_j \left\{ \frac{1}{5}J = 1 \right\} = \frac{1}{5}$$

$$\text{La nueva solución dual es } w + \emptyset v^* = [0 \ 0] + \frac{1}{5} [1 \ 1] = \left[ \frac{1}{5} \ \frac{1}{5} \right]$$

Continuamos con el paso 1.

Paso 1

La solución dual actual es  $w = \left[ \frac{1}{5} \ \frac{1}{5} \right]$  y se calcula  $wa_j - c_j$ , se identifican los valores tales que  $wa_j - c_j = 0$  para formar el conjunto  $Q$ .

$$w a_j - c_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 8 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - [1 \ 2 \ 9 \ 1 \ 5 \ 3 \ 0 \ 0] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -7 & -8 & -9 & -14 & -12 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Por lo que  $Q = \{1\}$  asociado a la variable de decisión primal  $x_1$ . Se forma el problema primal restringido con las variables de decisión indicadas por el conjunto  $Q$  y las variables artificiales  $x_9, x_{10}$ .

$$\text{Min } 0x_1 + x_9 + x_{10}$$

Sujeto a

$$3x_1 + x_9 = 7$$

$$2x_1 + x_{10} = 4$$

$$x_1, x_9, x_{10} \geq 0$$

La solución óptima al problema restringido es  $x^* = [x_1 \ x_9 \ x_{10}] = [2 \ 1 \ 0]$  con valor en la función objetivo  $x_0^* = 1$ . El problema dual restringido es:

$$\text{Max } 7y_1 + 4y_2$$

Sujeto a:

$$3y_1 + 2y_2 \leq 0$$

$$y_1 \leq 1$$

$$y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2 \text{ irrestrictas}$$

La solución óptima al problema dual restringido es  $v^* = [y_1 \ y_2] = [1 \ -3/2]$ . Con valor en la función objetivo  $y_0^* = 1$ . Pasamos al paso 2.

Paso 2.

Con el valor de  $v^* = [y_1 \ y_2] = [1 \ -3/2]$ , se calcula  $v^* a_j$  para todo  $j$

$$v^* a_j = [1 \ -3/2] \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 8 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [0 \ 1/2 \ -10 \ 13/2 \ 7/2 \ -2 \ -1 \ 3/2]$$

Note que los valores  $v^* a_j > 0$  corresponden a las columnas  $\{2, 4, 5, 8\}$ . El cálculo de  $\emptyset$  es como sigue.

Los valores  $w^* a_j - c_j$  se calculan con

$$w^*a_j - c_j = [1/5 \quad 1/5] \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 8 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - [1 \quad 2 \quad 9 \quad 1 \quad 5 \quad 3 \quad 0 \quad 0]$$

$$w^*a_j - c_j = [0 \quad -7/5 \quad -8 \quad -9/5 \quad -14/5 \quad -12/5 \quad -1/50 \quad -1/5]$$

$$\emptyset = \min_j \left\{ \frac{7/5}{1/2} J = 2, \frac{9/5}{13/2} J = 4, \frac{14/5}{7/2} J = 5, \frac{1/5}{3/2} J = 8 \right\} = 2/15$$

$$\emptyset = \min_j \left\{ \frac{1/5}{3/2} J = 8 \right\} = 2/15$$

La nueva solución dual es  $w + \emptyset v^* = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} + \frac{2}{15} [1 \quad -3/2] = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \end{bmatrix}$

Se continua con el paso 1

Paso 1

La solución dual actual es  $w = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \end{bmatrix}$  y se calcula  $wa_j - c_j$ , se identifican los valores tales que  $wa_j - c_j = 0$  para formar el conjunto Q.

$$wa_j - c_j = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 8 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - [1 \quad 2 \quad 9 \quad 1 \quad 5 \quad 3 \quad 0 \quad 0] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4/5 & -28/3 & -8/3 & -7/3 & -8/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que  $Q = \{ 1, 8 \}$  asociado a las variables de decisión primal  $x_1$  y  $x_8$ . Se forma el problema primal restringido con las variables de decisión indicadas por el conjunto Q y las variables artificiales  $x_9, x_{10}$ .

$$\text{Min } 0x_1 \quad 0x_8 + x_9 + x_{10}$$

Sujeto a

$$3x_1 + x_9 = 7$$

$$2x_1 - x_8 + x_{10} = 4$$

$$x_1, x_9, x_{10} \geq 0$$

La solución óptima al problema restringido es  $x^* = [x_1 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10}] = [7/3 \quad 2/3 \quad 0 \quad 0]$  con valor en la función objetivo  $x_0^* = 0$ . Por lo que tenemos una solución óptima al problema restringido y al problema primal original.

## 5.6 Introducción al análisis de sensibilidad

Un modelo de optimización lineal se considera estático, en el sentido de que los coeficientes de la función objetivo no cambian, así como los coeficientes de las restricciones también se asumen no cambiantes. De igual manera el conjunto de variables de decisión se define en el proceso de modelación y una vez construido el modelo no cambia. Naturalmente los valores de las variables de decisión si son cambiantes durante la aplicación de algún método de solución. Significa entonces que una vez obtenida la solución óptima ¿si alguno de los coeficientes de la función objetivo o del conjunto de restricciones cambia, se debe resolver nuevamente todo el problema? La respuesta se desarrolla en las secciones siguientes, el enfoque es considerar un solo cambio a la vez ya que si se desea analizar cambios múltiples de manera simultánea el análisis se complica demasiado.

## 5.7 Cambios en los coeficientes de la función objetivo

En esta sección se desarrolla el análisis a realizar si alguno de los coeficientes de la función objetivo cambia. En un problema de maximización se debe a un incremento o disminución por ejemplo del precio de venta. Si es de minimización se debe a un incremento o disminución del precio de compra de alguna materia prima.

A partir de una solución óptima reportada por el método simplex y sea  $c'_j$  el coeficiente que ha cambiado entonces debemos calcular el efecto neto mediante  $\phi_j = c_j - c_B B^{-1} a_j$  lo cual puede reescribirse como  $\phi_j = c_j - z_j$  donde  $z_j = c_B B^{-1} a_j$ .

Caso I. Si el cambio en  $c_j$  corresponde a una variable no básica.

En el caso de maximización recuerde que en la solución óptima  $\phi_j = c_j - z_j \leq 0$  lo que implica que  $c_j \leq z_j$ . si  $c_j$  cambia a  $c'_j$  conlleva a que la solución óptima actual no cambia si  $c'_j < z_j$  o de otra manera  $c'_j < c_j$ .

Si  $c'_j > c_j$  y el incremento es pequeño puede ser que la solución óptima actual se conserve por lo que es conveniente calcular un límite para  $c_j$  en el cual la solución no cambie. Recuerde que los efectos netos están dados por  $\phi_j = c_j - z_j \leq 0$ , por lo que  $z_j = c_j - \phi_j$  la solución óptima se puede mejorar si  $\phi'_j = c'_j - z_j > 0$  lo cual ocurre cuando  $c'_j > z_j$  lo que nos lleva a que  $c'_j > c_j - \phi_j$ .

De acuerdo a lo anterior la solución óptima actual se mantiene si  $c'_j \leq c_j - \phi_j$  lo cual puede reescribirse como  $c'_j \leq c_j + |\phi_j|$

En el caso de minimización tenemos que si el nuevo valor de  $c_j$  satisface  $c'_j \geq c_j + |\phi_j|$  la actual solución permanece óptima.

Caso II. Si el cambio en  $c_j$  corresponde a una variable básica.

Los efectos netos al igual que en la sección anterior se calculan mediante:  $\phi_j = c_j - c_B B^{-1} a_j$  tanto para las variables básicas como para las variables no básicas. Sea  $c_{Bi}$  los coeficientes correspondientes a las variables básicas y algún coeficiente cambia

de  $c_{Bk}$  a  $c'_{Bk}$  entonces los nuevos efectos netos se pueden reescribir como:  $\phi'_j = c_j - [c_{Bi}a_{ij} + c'_{Bk}a_{ik}]$  a la expresión anterior le restamos el término correspondiente al coeficiente original  $c_{Bk}a_{ik}$ , nos lleva a  $\phi'_j = c_j - [c_{Bi}a_{ij} + c'_{Bk}a_{ik} - c_{Bk}a_{ik}]$  al reordenar términos tenemos que  $\phi'_j = \phi_j - a_{kj} [c'_{Bk} - c_{Bk}]$ .

Si el problema es de maximización la solución óptima actual se modifica si el término  $a_{kj} [c'_{Bk} - c_{Bk}]$  es suficientemente atractivo, es decir lo suficientemente negativo. El análisis del término anterior nos lleva a tres casos:

- Si  $a_{kj} = 0$  genera que el término  $a_{kj} [c'_{Bk} - c_{Bk}]$  también es cero por lo que la mejorabilidad no es atractiva, entonces la solución actual sigue siendo óptima sin importar el valor de  $c'_{Bk}$ .
- Si  $a_{kj} \neq 0$  el término  $a_{kj} [c'_{Bk} - c_{Bk}]$  será negativo en el caso cuando  $c'_{Bk} < c_{Bk}$  y  $a_{kj} > 0$ , otro caso ocurre cuando  $c'_{Bk} > c_{Bk}$  y  $a_{kj} < 0$ . Con lo anterior es posible calcular los límites de variación en el coeficiente de una variable básica para que la solución óptima actual se mantenga.

Los límites para el caso de un problema de maximización son:

| Límite inferior                                                                 | Límite superior                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $C'_{Bk} = C_{Bk} + \max_j \left\{ \frac{\phi_j}{a_{kj}} : a_{kj} > 0 \right\}$ | $C'_{Bk} = C_{Bk} + \min_j \left\{ \frac{\phi_j}{a_{kj}} : a_{kj} < 0 \right\}$ |

Para el caso de un problema de minimización los límites para que la solución óptima actual se mantenga son:

| Límite inferior                                                                 | Límite superior                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $C'_{Bk} = C_{Bk} + \min_j \left\{ \frac{\phi_j}{a_{kj}} : a_{kj} > 0 \right\}$ | $C'_{Bk} = C_{Bk} + \max_j \left\{ \frac{\phi_j}{a_{kj}} : a_{kj} < 0 \right\}$ |

Si el nuevo coeficiente de la función objetivo cae fuera de los límites anteriores entonces la solución actual ya no es óptima y es necesario generar una nueva solución óptima.

Ejemplo

$$\text{Max } 10x_1 + 15x_2$$

Sujeto a:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 400$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 150$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 110$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La tabla con solución óptima es:

| Renglón | Base           | z | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | h <sub>3</sub> | Sol |  |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|--|
| 0       | z              | 1 | 0              | 0              | 1/2            | 1              | 0              | 350 |  |
| 1       | x <sub>2</sub> | 0 | 0              | 1              | 1/10           | -1/5           | 0              | 10  |  |
| 2       | x <sub>1</sub> | 0 | 1              | 0              | -1/10          | 2/5            | 0              | 20  |  |
| 3       | h <sub>3</sub> | 0 | 0              | 0              | 1/5            | -6/5           | 1              | 10  |  |

Note que  $h = [h_1 \ h_2 \ h_3]$  son variables de holgura. La solución óptima es  $x^* = [x_1 \ x_2] = [20 \ 10]$  con  $z^* = 350$ . Las variables básicas son  $X_B = [x_1 \ x_2 \ h_3] = [20 \ 10 \ 10]$  y las variables no básicas son  $X_{NB} = [h_1 \ h_2] = 0$ .

Para las variables no básicas  $X_{NB} = [h_1 \ h_2]$  la optimalidad se mantendrá si  $c'_j \leq c_j + |\emptyset_j|$  ya que es un problema de maximización.

En el caso de  $h_1$ :  $c'_j \leq c_j + |\emptyset_j|$ ,

$$c'_{h1} < 0 + 1/2$$

$$c'_{h1} < 1/2$$

En el caso de  $h_2$ :  $c'_j \leq c_j + |\emptyset_j|$ ,

$$c'_{h2} < 0 + 1$$

$$c'_{h2} < 1$$

Respecto a las variables básicas  $X_B = [x_1 \ x_2 \ h_3]$

Para  $x_1$

| Límite inferior                                                                                                                                                               | Límite superior                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $C'_{BK} = C_{BK} + \max_j \left\{ \frac{\emptyset_j}{a_{kj}} : a_{kj} > 0 \right\}$ $C'_{x1} = 10 + \max_j \left\{ \frac{-1}{\frac{2}{5}} \right\}$ $C'_{x1} = \frac{15}{2}$ | $C'_{BK} = C_{BK} + \min_j \left\{ \frac{\emptyset_j}{a_{kj}} : a_{kj} < 0 \right\}$ $C'_{x1} = 10 + \min_j \left\{ \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-1}{10}} \right\}$ $C'_{x1} = 15$ |

Para obtener los valores de la tabla recuerde que debe observarse el renglón que corresponde a la variable básica  $x_1$ . Los valores  $a_{kj}$  aparecen sombreados el subíndice k se refieren al renglón de  $x_1$  y el subíndice j a las columnas.

| Renglón | Base  | z | $x_1$ | $x_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | Sol |  |
|---------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|--|
| 0       | z     | 1 | 0     | 0     | 1/2   | 1     | 0     | 350 |  |
| 1       | $x_2$ | 0 | 0     | 1     | 1/10  | -1/5  | 0     | 10  |  |
| 2       | $x_1$ | 0 | 1     | 0     | -1/10 | 2/5   | 0     | 20  |  |
| 3       | $h_3$ | 0 | 0     | 0     | 1/5   | -6/5  | 1     | 10  |  |

La solución se mantiene óptima si  $\frac{15}{2} \leq c'_{x1} \leq 15$ .

### 5.8 Cambios en el vector de recursos

Los cambios en el vector de recursos son de interés en los casos siguientes:

- De las restricciones activas se desea conocer el efecto de incrementar o disminuir el recurso asociado
- Respecto a las restricciones pasivas, ¿Cuál es el rango de variación del recurso asociado?

La solución óptima actual está dada por  $x_B = B^{-1}b$ , si  $b$  cambia a  $b'$  la relación anterior cambia a  $x'_B = B^{-1}b'$  y sólo depende del producto  $B^{-1}b'$  por lo que no importa si el problema es de maximización o minimización por la ausencia del vector  $c$ . Recuerde que  $B^{-1}b \geq 0$  ya que es una solución óptima factible al cambiar a  $B^{-1}b$  puede volverse una solución infactible por lo que es conveniente calcular límites inferior y superior para un valor del vector  $b$  en la cual la factibilidad se mantenga.

Sea  $b_k$  el valor del vector  $b$  para el cual se desea calcular el cambio,  $x_{Bi}$  la variable básica asociada y  $a_{ik}$  el valor del renglón  $i$  y columna  $j$  de  $B^{-1}$ .

El nuevo valor de la variable básica  $x'_{Bi}$  puede calcularse como  $x'_{Bi} = x_{Bi} + (a_{ik}b'_k - a_{ik}b_k)$  en donde el término  $(a_{ik}b'_k - a_{ik}b_k)$  indica la diferencia entre el valor original y el cambio en  $b_k$ .

La relación  $x'_{Bi} = x_{Bi} + (a_{ik}b'_k - a_{ik}b_k)$  puede reescribirse como  $x'_{Bi} = x_{Bi} + a_{ik}(b'_k - b_k)$ .

El término  $a_{ik}(b'_k - b_k)$  debe ser positivo para mantener la factibilidad por lo que  $x_{Bi} + a_{ik}(b'_k - b_k) \geq 0$  lo que implica que  $a_{ik}(b'_k - b_k) \geq -x_{Bi}$ , y entonces  $(b'_k - b_k) \geq \frac{-x_{Bi}}{a_{ik}}$ , el término que nos interesa es  $b'_k$  por lo que  $b'_k \geq b_k - \frac{x_{Bi}}{a_{ik}}$  ya que los valores de  $a_{ik}$  pueden ser positivos o negativos tenemos que los límites se calculan con:

| Límite inferior                                                           | Límite superior                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $b'_k = b_k - \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{a_{ik}} : a_{ik} > 0 \right\}$ | $b'_k = b_k - \max_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{a_{ik}} : a_{ik} < 0 \right\}$ |

Ejemplo:

$$\text{Max } 10x_1 + 15x_2$$

Sujeto a:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 400$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 150$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 110$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima es  $X_B = [x_1 \ x_2 \ h_3] = [20 \ 10 \ 10]$ ,  $b = \begin{bmatrix} 400 \\ 150 \\ 110 \end{bmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{-1}{5} & 0 \\ \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-6}{5} & 1 \end{bmatrix}$

El intervalo que mantiene la factibilidad para  $b_1$  se calcula mediante:

| Límite inferior                                                                                                                                                               | Límite superior                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $b'_k = b_k - \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{a_{ik}} : a_{ik} > 0 \right\}$ $b'_1 = 400 - \min_i \left\{ \frac{20}{\frac{1}{10}}, \frac{10}{\frac{1}{5}} \right\}$ $b'_1 = 350$ | $b'_k = b_k - \max_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{a_{ik}} : a_{ik} < 0 \right\}$ $b'_1 = 400 - \max_i \left\{ \frac{10}{\frac{-1}{10}} \right\}$ $b'_1 = 500$ |

## 5.9 Cambios en las restricciones

Los cambios en las restricciones corresponden a cambios en la matriz de coeficientes tecnológicos, la matriz  $A$ . Se originan cuando se tienen cambios en los procesos, maquinaria o una mejor tecnología que aumenta o reduce el uso de recursos para cada variable de decisión. Recuerde que la matriz  $A$  está formada por los coeficientes  $a_{ik}$

Caso I. Cambios en  $a_{ik}$  para una variable no básica

Si cambia un coeficiente  $a_{ik}$  para una variable básica  $k$  debemos calcular el efecto neto  $\phi'_k = c_k - w a'_{ik}$ . Donde  $w = c_B B^{-1}$ ,  $a'_{ik}$  denota la nueva columna de la matriz  $A$  que contiene el nuevo valor  $a'_{ik}$ . Si el nuevo efecto neto indica mejorabilidad entonces la solución óptima actual cambia y la variable no básica asociada entra a la base. Recordando el método simplex, los efectos netos indican optimalidad si

| Maximizar       | Minimizar       |
|-----------------|-----------------|
| $\phi_j \leq 0$ | $\phi_j \geq 0$ |

Caso II. Cambios en  $a_{ik}$  para una variable básica

En este caso por tratarse de una variable básica  $x_k$  es necesario revisar si la nueva columna  $a'_k$  de la matriz  $A$  es linealmente independiente y puede formar una nueva

base. Una forma de hacerlo es calcular el vector columna  $\alpha'_k = B^{-1}a'_k$ . Del vector  $\alpha'_k$  se identifica el elemento "pivote"  $\alpha'_{kk}$  que corresponde a la columna básica  $x_k$ . Si  $\alpha'_{kk} = 0$  el nuevo vector  $a'_k$  es linealmente dependiente y no puede formar una base  $\alpha'_{kk} \neq 0$  la operación de pivoteo se realiza, la base se reestablece y se continua con el método primal simplex o el método dual simplex si la nueva solución es infactible.

Ejemplo.

Para el problema

$$\text{Max } 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

Sujeto a:

$$10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 + h_1 = 4000$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 + h_2 = 1500$$

$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + h_3 = 800$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, h_1, h_2, h_3 \geq 0$$

La solución óptima es  $X_B = [x_2 \ h_2 \ x_1] = [400/3 \ 500/3 \ 400/3]$ ,  $b = \begin{bmatrix} 4000 \\ 1500 \\ 800 \end{bmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 1 & \frac{-5}{6} \\ \frac{-1}{30} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la variable no básica  $x_3$  tenemos que  $a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$  cambia a  $a'_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$  el nuevo efecto neto se calcula mediante  $\phi'_k = c_k - c_B B^{-1} a'_k$  por lo que

$$\phi'_3 = c_3 - c_B B^{-1} a'_3$$

$$\phi'_3 = 4 - [15 \ 0 \ 10] \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 1 & \frac{-5}{6} \\ \frac{-1}{30} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 - 16/3$$

$$\phi'_3 = -\frac{2}{3}$$

Ya que el efecto neto es negativo en este ejemplo de maximización la solución óptima se mantiene.

Para la variable básica  $x_2$  note que  $a_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$  cambia a  $a'_2 = \begin{bmatrix} 30 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$  entonces se calcula el nuevo vector  $\alpha'_2 = B^{-1}a'_2$

$$\alpha'_2 = B^{-1}a'_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 1 & \frac{-5}{6} \\ \frac{-1}{30} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Note el elemento de  $\alpha'_k = \alpha'_2$ ,  $\alpha'_{11} = 0$  igual a 0, por lo que no puede “pivotarse” y no puede formarse una base. Debe formarse una nueva base al usar una variable artificial y proceder al método de las 2 fases. Cabe aclarar que  $k=1$  ya que se está analizando un cambio en  $a_2$  asociado a la variable de decisión  $x_2$  que en el diccionario de variables básicas  $X_B = [x_2 \ h_2 \ x_1]$   $x_2$  ocupa la posición  $k=1$ .

Considere ahora que  $a_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$  cambia a  $a'_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  entonces se calcula el nuevo vector  $\alpha'_2 = B^{-1}a'_2$

$$\alpha'_2 = B^{-1}a'_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 1 & \frac{-5}{6} \\ \frac{-1}{30} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Aquí nuevamente  $k=1$  por lo que el elemento  $\alpha'_{11} = \frac{1}{3}$  el nuevo vector si forma una base por lo que se calcula el nuevo efecto neto

$$\phi'_2 = c_2 - c_B B^{-1}a'_2$$

$$\phi'_2 = 15 - [15 \ 0 \ 10] \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 1 & \frac{-5}{6} \\ \frac{-1}{30} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 20/3$$

Por lo que se actualiza la nueva tabla al hacer operaciones de “pivoteo” para obtener la nueva solución.

## 5.10 Adición y eliminación de variables de decisión

La adición de una nueva variable de decisión modifica a la matriz de coeficientes  $A$  ya que se incorpora una nueva columna, adicionalmente la nueva variable de decisión viene acompañada con su coeficiente en la función objetivo. Este cambio se analiza como un cambio en la matriz de coeficientes para una variable no básica y debe analizarse primero su efecto neto y si debe entrar la nueva variable a la base se actualiza la nueva solución siguiendo los pasos de método simplex.

La eliminación de una variable de decisión genera dos casos, si la variable de decisión es no básica entonces nada debe hacerse ya que la solución óptima actual no cambia. Si se elimina una variable básica entonces debe replantearse la base por medio de una variable artificial y calcular la nueva solución siguiendo los pasos del método simplex.

La adición de una nueva restricción al problema original debe analizarse para identificar si con la solución óptima actual la restricción se satisface, si es así nada debe realizarse ya que la solución óptima actual se mantiene y la nueva restricción se satisface. En caso contrario en que la nueva restricción sea violada tenemos ahora una solución infactible, para buscar la factibilidad la nueva restricción modificará la base actual y se requiere de una nueva variable de holgura y para buscar la factibilidad se aplica el método dual simplex.

### Ejercicios propuestos

1. Construya el modelo dual del problema de la dieta de la sección 3.2
2. Construya el modelo dual del problema de asignación de capital de la sección 3.2
3. Construya el modelo dual del problema de selección de un portafolio de inversión de la sección 3.2
4. Resuelva el problema siguiente mediante el método dual simplex

$$\text{Minimizar } 4y_1 + 14y_2$$

Sujeto a:

$$4y_1 + 5y_2 \geq 20$$

$$3y_1 + y_2 \geq 8$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

5. Resuelva el problema anterior mediante el método primal-simplex
6. Para el problema

$$\text{Max } 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6$$

Sujeto a:

$$7x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 6x_6 \leq 350$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 \leq 650$$

$$9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 800$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

- a) Construya el modelo dual
- b) Determine los rangos de variación en los coeficientes de la función objetivo de tal forma que la solución óptima no se altere
- c) Calcule los límites de variación para el vector de recursos  $b$  de tal forma que la solución óptima no se altere

#### Fuentes de consulta

Arreola R. J., Arreola R. A., (2003). Programación Lineal. Una introducción a la toma de decisiones cuantitativa. Thomson. México, D. F.

Bertsimas D., (1997). Introduction to linear optimization. Athena Scientific Series in optimization

Chvatal V., (2016). Linear Programming. Bedford Books.

Cohen M., (2021). Linear algebra: theory, intuition, code. sincXpress

Denardo E. (2017). Linear programming and generalizations. Springer.

Friedberg S., Insel A., (2018). Linear Algebra. Pearson.

Grossman S. (1992). Álgebra Lineal con aplicaciones. Mc Graw Hill Interamericana. México, D. F.

Hu T. C., Kahng A. B., (2018). Linear and Integer Programming being easy. Springer.

Kumar S. (2019). Linear Programming. CBS Publishers.

Pan P., (2014). Linear programming computation. Springer.

Ploskas N., Samaras N., (2018). Linear Programming using Matlab. Springer.

Strang G., (1986). Algebra Lineal y sus aplicaciones. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware, EEUU.

Solow D. (2014). Linear Programming. Dover Publications.

Vanderbei R., (2021). Linear Programming. Springer.

## Capítulo VI. Optimización lineal a gran escala

Objetivo: Comprender los métodos y estrategias de solución para problemas de optimización lineal con cientos de variables y cientos de restricciones.

### 6.1 Introducción a la optimización lineal a gran escala

El esfuerzo numérico o trabajo computacional puede ser muy alto si el modelo construido tiene cientos e incluso miles de variables y restricciones. Basados en las propiedades matemáticas y estructura del modelo es posible implementar estrategias como generación de columnas, planos cortantes, descomposición Dantzig-Wolfe, descomposición de Benders que permiten resolver el modelo planteado de forma computacionalmente más eficiente.

En la actualidad la construcción de modelos de optimización lineal para aplicaciones reales con cientos o miles de variables o restricciones se realiza con software especializado basado en lenguajes de modelación algebraica. Software como GAMS, CPLEX, Lindo, entre otros, permiten la modelación algebraica así como la implementación de rutinas mencionadas anteriormente y librerías con algoritmos eficientes para resolver el problema, es decir declarar una solución óptima o bien que la solución no existe.

Métodos para actualización de la matriz identidad. Forma producto de la inversa.

El método simplex de forma resumida consta de los pasos siguientes:

Paso 1. Encontrar una solución básica factible, es decir resolver el sistema de ecuaciones  $x_B = B^{-1}b$  para determinar el valor de las variables básicas.

Paso 2. Calcular los efectos netos de las variables no básicas,  $w = c_B B^{-1}$ ,  $\Phi_j = c_j - w a_j$ . Si la solución se puede mejorar vaya al paso 3. En este paso se evalúan las variables no básicas.

Paso 3. Calcular una nueva solución factible. Resuelva para una variable no básica  $\alpha_k = B^{-1}a_k$ . Este paso proporciona información de cómo cambian las variables básicas al incorporar una variable de entrada. Si el coeficiente de intercambio  $(\alpha_k)_i < 0$  tenemos una solución ilimitada, de lo contrario intercambie las columnas de la matriz base actual  $B$  por las columnas de la variable de entrada  $k$  y variable de salida  $r$  al aplicar la regla del mínimo cociente que evita soluciones infactibles. Calcule la nueva base al resolver  $x_B = B^{-1}b$ . Regrese al paso 1.

De acuerdo a lo anterior resolver las ecuaciones  $x_B = B^{-1}b$  y  $\alpha_k = B^{-1}a_k$  requieren de  $B^{-1}$  y el mayor trabajo computacional al aplicar el método simplex.

Note que debemos calcular  $B^{-1}$  lo cual implica un esfuerzo computacional alto. Se han desarrollado técnicas para que a partir de  $B^{-1}$  en el paso 1 no sea necesario “reinvertir”

completamente la matriz base, en el paso 3. Durante el proceso se hace uso de matrices elementales. Una matriz elemental es una matriz cuadrada que difiere de la matriz identidad sólo en un renglón o columna. El proceso de actualización se le denomina “forma producto de la inversa” el cual fue publicado por Dantzig en 1954.

Al inicio de la aplicación del método simplex  $B_{\text{inicial}} = I$ , por lo que  $B_{\text{inicial}}^{-1} = I$ , ya que la matriz inversa de una matriz identidad es también la matriz identidad. En el paso 3 la matriz base  $B_{\text{inicial}}$  se actualiza al reemplazar una columna de la variable saliente  $r$  por la columna nueva de la variable entrante  $k$ .

En general (Bazaraa, 1999) una base  $B$  está compuesta por las columnas  $a_{B1}, a_{B2}, \dots, a_{Bm}$  sea  $B^{-1}$  la matriz inversa de  $B$ . Ya que la columna no básica  $a_k$  reemplaza a  $a_{Br}$  origina la nueva base  $B_{\text{nueva}}$  por lo que el procedimiento debe encontrar ahora  $B_{\text{nueva}}^{-1}$  a partir de  $B^{-1}$ . Observe que  $\alpha_k = B^{-1}a_k$  y  $a_{Bi} = B_{ei}$  donde  $e_i$  es un vector de ceros excepto por un valor de 1 en la  $i$ -ésima posición. Tenemos que:

$$B_{\text{nueva}} = (a_{B1}, a_{B2}, \dots, a_{Br-1}, a_k, a_{Br+1}, \dots, a_{Bm})$$

$$B_{\text{nueva}} = (B_{e1}, B_{e2}, \dots, B_{er-1}, B_{\alpha_k}, B_{er+1}, \dots, B_{em})$$

$$B_{\text{nueva}} = BT$$

Donde  $T$  es la matriz identidad con la  $r$ -ésima columna reemplazada por  $\alpha_k$ . La matriz inversa de  $T$  la cual es  $T^{-1}$ , está dada como se muestra a continuación:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \frac{-\alpha_{1k}}{\alpha_{rk}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \frac{-\alpha_{2k}}{\alpha_{rk}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \frac{1}{\alpha_{rk}} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{-\alpha_{mk}}{\alpha_{rk}} & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La columna no unitaria de la matriz  $T^{-1}$  anterior se le denomina *vector eta*. Por consiguiente  $B_{\text{nueva}}^{-1}$  se calcula mediante  $T^{-1}B^{-1}$  lo que significa que la nueva base inversa puede obtenerse premultiplicando la base inversa de la iteración anterior por una matriz elemental  $T^{-1}$ .

El proceso anterior establece que conforme se avanza en la aplicación de los pasos del método simplex la base  $B_1$  en la primera iteración es la matriz identidad  $I$ . Entonces la base inversa de la iteración 2,  $B_2^{-1}$  es  $B_2^{-1} = T_1^{-1}B_1^{-1} = T_1^{-1}I = T_1^{-1}$ . De manera semejante  $B_3^{-1} = T_2^{-1}B_2^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1}$  y en general para la  $g$ -ésima iteración:

$$B_g^{-1} = T_{g-1}^{-1} T_{g-2}^{-1} \dots T_2^{-1} T_1^{-1}$$

A la última ecuación que especifica la base inversa como un producto de matrices elementales se le denomina forma producto de la inversa. Observe que el número requerido de matrices elementales para representar la base inversa aumenta en cada iteración.

Analicemos el proceso de postmultiplicación en la forma de producto de la inversa. Considere una matriz elemental  $E$  con columna no unitaria  $g$  en la  $r$ -ésima posición. Sea

$\mathbf{c}$  un vector renglón de dimensiones adecuadas a  $\mathbf{E}$ . Entonces al realizar el producto  $\mathbf{cE}$  está dado por

$$\mathbf{cE} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_m] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & g_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & g_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_m & \dots & 1 \end{bmatrix} = [c_1 \quad c_2 \quad c_{r-1} \quad \sum c_i g_i \quad c_{r+1} \quad \dots \quad c_m]$$

$$\mathbf{cE} = [c_1 \quad c_2 \quad c_{r-1} \quad \mathbf{cg} \quad c_{r+1} \quad \dots \quad c_m]$$

En otras palabras note que  $\mathbf{cE}$  es igual a  $\mathbf{c}$ , excepto que la  $r$ -ésima componente de  $\mathbf{c}$  se reemplaza por  $\mathbf{cg}$ .

En el caso de la premultiplicación en la forma de producto de la inversa tenemos que si  $\mathbf{a}$  es un vector de tamaño  $m$  el producto  $\mathbf{Ea}$  se define como:

$$\mathbf{Ea} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & g_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & g_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_m & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + a_r \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}$$

En otras palabras note que  $\mathbf{Ea}$  es igual a  $\mathbf{a}$ , excepto que la  $r$ -ésima componente de  $\mathbf{a}$ , se reemplaza por cero.

Los elementos anteriores permiten aplicar el método simplex sin efectuar las operaciones de pivoteo.

Ejemplo.

Realice la primera iteración del método simplex al aplicar la forma producto de la inversa.

$$\text{Min } -x_1 - 2x_2 + x_3$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Iteración 1

Las variables de holgura son  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  y la base inicial  $B_1 = I$

$$X_B = B^{-1}b = Ib = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$X_{NB} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w = c_B B^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0],$$

$$\Phi_j = c_j - w a_j = [-1 \quad -2 \quad 1], \text{ por lo que } x_2 \text{ entra a la base, } k=2, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \alpha_k = B^{-1}a_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La variable que sale se calcula con  $\text{Min}\left\{\frac{b_1}{\alpha_{12}}, \frac{b_2}{\alpha_{22}}, \frac{b_3}{\alpha_{32}}\right\} = \left\{\frac{4}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{1}\right\} = 3$ . Por lo que sale  $h_2$ ,  $r=2$ . La columna no unitaria de T, es decir el *vector eta* está dado por:

$$\begin{bmatrix} -\alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ 1 \\ \alpha_{22} \\ -\alpha_{32} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Iteración 2

Al aplicar la premultiplicación podemos calcular  $X_B$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B = Ea = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X_B = \begin{bmatrix} h_1 \\ x_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X_{NB} = \begin{bmatrix} x_1 \\ h_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w = c_B E = [0 \quad -2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad -1 \quad 0]$$

Por lo que  $k=1$  y  $x_1$  entra a la base.

## Descomposición LU

La forma de producto de la inversa descrita anteriormente no es la única forma de calcular las ecuaciones  $BX_B=b$ ,  $B\alpha_k = a_k$  correspondientes a los pasos 1 y 3 del método simplex. Observe que las ecuaciones anteriores evitan  $B^{-1}$ . Si la base inicial está formada por las variables de holgura entonces tenemos una matriz identidad y recuerde que la inversa de una matriz identidad es la misma matriz identidad por lo que actualizar la base por medio de vectores es la forma más adecuada de implementar el método simplex. Para una base arbitraria la estrategia utilizada en la mayoría de los paquetes de software modernos es aplicar el método de factorización LU para la matriz B de tal forma que  $B = LU$  donde L es una matriz triangular superior y U es una matriz triangular inferior.

Si B es una matriz triangular el proceso de solución de las ecuaciones  $BX_B=b$ ,  $B\alpha_k = a_k$  será relativamente fácil ya que se puede resolver el sistema al sustituir hacia atrás.

Para resolver el sistema  $BX_B=b$ , debe transformarse la matriz B en una matriz triangular superior al calcular una matriz R no singular por operaciones de renglones tal que  $RB=U$ . Al efectuar lo anterior premultiplicamos ambos miembros de  $BX_B=b$  por R a fin de obtener  $RBX_B = Rb$ , lo que nos lleva a  $UX_B = Rb$ . Los vectores y matrices U, R y b son conocidos y para obtener  $X_B$  se hace una sustitución hacia atrás.

Para el sistema de ecuaciones  $B\alpha_k = a_k$  el proceso es el mismo. Calculamos la matriz R para la matriz B por operaciones de renglones tal que  $RB=U$ . Al efectuar lo anterior premultiplicamos ambos miembros de  $B\alpha_k = a_k$  por R a fin de obtener  $RB\alpha_k = Ra_k$ , lo que nos lleva a  $U\alpha_k = R a_k$ . Los vectores y matrices U, R y  $a_k$  son conocidos y para obtener  $\alpha_k$  se hace una sustitución hacia atrás.

Para resolver  $wB = c_B$  del paso 2 se requiere hacer la transformación afín  $w = vR$  lo que nos lleva a  $vRB = c_B$  o sea  $vU = c_B$  ya que  $RB=U$ , note que para obtener v se hace una sustitución hacia adelante ya que el vector  $c_B$  y la matriz U son conocidas. Ya con los valores de v se calcula  $w = vR$ . La matriz R también es conocida.

### El cálculo de la matriz R

Para calcular la matriz R además de las operaciones de renglón usadas en la eliminación Gaussiana también será necesario efectuar permutaciones de renglones durante la factorización sin olvidar el objetivo de garantizar la estabilidad numérica y explotar la ventaja de una matriz dispersa. La estabilidad numérica se pierde al realizar divisiones por números muy pequeños comparados con los valores restantes de la matriz, recuerde que entre más ceros contenga una matriz más dispersa es la matriz y entre más dispersa sea menores operaciones de renglón se pueden realizar.

De acuerdo con lo anterior generalmente el primer renglón de B no se modifica a menos que el elemento correspondiente a la diagonal sea cero para lo cual deberá hacerse una permutación de renglón. La obtención de la matriz R requerirá de matrices elementales de permutación P y matrices de eliminación Gaussiana G para triangulizar la primera columna de B. Para las columnas posteriores de B se procede de manera similar haciendo uso de matrices de permutación P y de eliminación G. Por lo que si se realizan n operaciones entonces R está definida por

$$R = G_r P_r \dots G_2 P_2 G_1 P_1$$

La matriz de permutación  $P$  es una matriz identidad en donde se intercambian los renglones que se desean intercambiar. El mismo principio aplica si se desea intercambiar columnas.

La matriz de pivoteo Gaussiana se construye usando los elementos de la diagonal principal y tiene la forma siguiente:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_{k+1,k}}{b_{kk}} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b_{mk}}{b_{kk}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El elemento  $b_{kk}$  corresponde al elemento de la matriz  $B$  de la columna  $k$  a triangular, es decir el elemento de la diagonal principal, es el elemento pivote no necesariamente con valor de 1.

Considerando lo anterior se aplica un proceso denominado FTRAN al calcular  $U\alpha_k = R a_k$  para resolver el sistema  $B\alpha_k = a_k$  mediante el empleo de los operadores  $G_i P_i$  en el orden 1, 2, ...,  $n$  sobre  $a_k$ . El proceso inverso llamado BTRAN usado para calcular  $w = vR$  para resolver  $wB = c_B$  al usar posteriormente los operadores  $G_i P_i$  sobre  $v$  en el orden inverso  $n, n-1, \dots, 1$ .

Ejemplo.

Resuelva el sistema  $BX_B = b$  y  $wB = c_B$  al factorizar la matriz  $B$ , en donde (Bazaraa, 1999)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, c = [1 \quad 1 \quad 2]$$

La factorización comienza con la columna 1 de  $B$ , y se realiza un intercambio de los renglones 1 y 2 para hacer que el elemento  $B_{11}$  sea mayor, se usa la matriz de permutación  $P_1$  la cual es una matriz identidad con los renglones 1 y 2 intercambiados así obtenemos  $B_1$ .

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = P_1 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para triangular la columna 1 de  $B_1$  se realiza mediante la matriz pivote gaussiana  $G_1$  que es:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_1 B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Al observar la segunda columna de  $B_2$  hay que convertir al elemento  $B_{32} = \frac{1}{2}$  en cero lo cual se hace con la matriz  $G_1$  que es:

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_2 B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

Por lo tanto  $R = G_2 P_2 G_1 P_1$ . Para resolver  $BX_B = b$  se calcula  $Rb$  usando un proceso FTRAN

$$R = G_2 G_1 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{15}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lo que sigue es calcular  $RbX_B = Rb$  es decir  $UX_B = Rb$  y finalmente  $X_B$  se calcula por sustitución hacia atrás

$$UX_B = Rb$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{15}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ por lo que } X_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Para resolver  $wB = c_B$  primero se resuelve  $vU = c_B$

$$vU = c_B = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 2]$$

$$\text{por lo que } v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

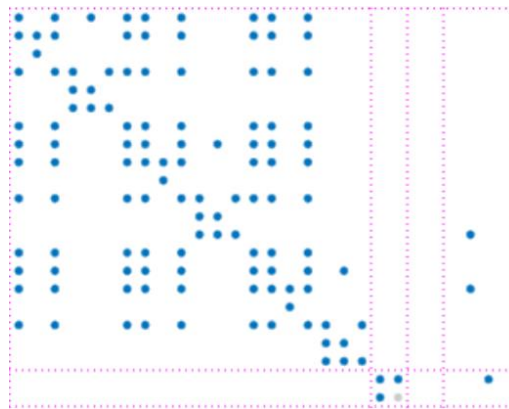
Ahora al aplicar un proceso BTRAN se obtiene:

$$w = vR = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad -1 \quad 1]$$

## Matrices por bloques, diagonales, renglones y columnas

La construcción de modelos de optimización lineal para aplicaciones reales genera con frecuencia cientos e incluso miles de variables y restricciones, por lo que la matriz A puede ser muy grande y se convierte en un reto encontrar una base inicial y aplicar el método simplex.

Asociado a cada variable de decisión está asociada una columna de la matriz A, respecto a los renglones corresponde a restricciones o conjunto de restricciones del problema real a resolver, por lo que la matriz A puede caracterizarse por secciones de ceros y valores no cero. Estas secciones de valores no cero forman bloques y diagonales que el software especializado como Cplex analiza previamente para aplicar la mejor estrategia de solución al aplicar el método simplex. Con frecuencia una matriz A puede visualizarse como:



Donde los puntos azules corresponden a valores no cero de la matriz A y los espacios en blanco a valores en cero. A este tipo de matrices se les denomina matrices dispersas. Los métodos que se presentan a continuación con métodos de partición, descomposición y relajación a aplicarse cuando tenemos cientos o miles de variables.

### 6.2 Método de generación de columnas

La idea del método de generación de columnas es generar una columna de la matriz A que sea atractiva a ingresar a la base actual. De esta forma no es necesario generar y almacenar toda la matriz A, la estrategia de solución comienza con una base factible inicial y generar columnas conforme avanza la aplicación del algoritmo.

El problema de corte de material. *Cutting stock problem*. (Bertsimas, 1997)

Considere resolver el problema siguiente de optimización lineal en forma estándar.

$$\text{Min } c^T x$$

Sujeto a

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

donde  $x \in R^n$  y  $b \in R^m$ , A es linealmente independiente y el número de columnas de A es muy grande por lo que, para fines prácticos, no es posible generar y almacenar la matriz A completa. Experiencia computacional ha demostrado que un alto porcentaje de las columnas de A nunca forman la base solución durante la solución por medio del método simplex.

Si la matriz A no se va a generar ni almacenar completa entonces la dificultad principal es generar un método para descubrir variables  $x_i$ , columnas de la matriz A, con costos reducidos atractivos  $\Phi_i$  para que esta variable forme parte de a base en la siguiente iteración del algoritmo de solución. Lo anterior puede obtenerse al resolver el problema:

$$\text{Min } \Phi_i$$

Donde la minimización va sobre toda i. Si el valor encontrado es mayor o igual a cero todos los costos reducidos son no negativos y se ha obtenido una solución óptima. En caso contrario si el valor mínimo es negativo, la variable correspondiente  $x_i$  tiene un costo reducido negativo y su columna correspondiente  $A_i$  entra a la base mejorando la solución actual.

El esquema anterior se implementa muy bien al aplicar el método simplex revisado y con frecuencia se implementa como una secuencia de iteraciones “maestras” y un problema “restringido”. Al inicio de cada iteración “maestra” se tiene una solución básica factible para el problema original y una matriz básica asociada.

Se busca una variable con costo reducido negativo al minimizar  $\Phi_i$  para toda i si no se existe el algoritmo termina. Suponga que para alguna i tenemos un costo reducido negativo entonces se forma una colección de columnas  $A_i$  y posiblemente columnas adicionales con las que se construye el problema restringido:

$$\text{Min } c_i x_i$$

Sujeto a

$$A_i x_i = b$$

$$x \geq 0$$

Recuerde que las variables básicas de la solución básica factible actual al problema original son entre las columnas que se han guardado en el problema restringido por lo que se tiene una solución factible para el problema restringido el cual puede usarse como una solución de inicio para esta solución.

Se realizan las iteraciones necesarias del método simplex para llevarlo a la solución óptima. En este punto se inicia con la nueva iteración del problema maestro.

## El problema de corte de material

Considere una compañía fabricante de papel que tiene un inventario de rollos grandes de papel con un ancho  $W$ . La demanda que satisface para sus clientes es para cortes más pequeños que se obtienen a partir de los rollos grandes en particular la demanda es de  $b_i$  rollos con un ancho  $w_i$ . Naturalmente  $w_i < W$ .

Para satisfacer la demanda un rollo de ancho  $W$  se corta de cierta forma para obtener los valores distintos de ancho pedidos  $w_i$  por lo que tiene un patrón determinado. Por ejemplo si  $W=70$  se puede cortar en tres porciones de  $w_1 = 17$  y un corte de  $w_2=15$  con un desperdicio de 4.

En general cualquier  $j$ -ésimo patrón está representado por una columna  $a_j$  de la matriz  $A$  donde cada valor de la columna  $a_j$  indica cuantos cortes del ancho  $w_i$  se producen en

el patrón. De tal forma que el patrón anterior es  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  siendo el primer renglón el

correspondiente a  $w_1 = 17$  y el segundo renglón el correspondiente a  $w_2 = 15$ , los ceros restantes corresponden a cero cortes del ancho  $w_3$  y cero cortes del ancho  $w_4$ . Si se demandan más anchos distintos  $w_i$  entonces la columna  $a_j$  tendrá más renglones.

Note que para una columna o patrón en general debe satisfacer:

$$\sum_i^m a_{ij}w_i \leq W$$

Por lo que si tenemos  $n$  patrones factibles la matriz  $A$  estará formada por las  $n$  columnas correspondientes  $a_j$ . El número de patrones factibles puede ser muy grande sobre todo si  $W$  es un número entero grande y los  $w_i$  son valores relativamente pequeños.

El objetivo de la compañía es minimizar la cantidad total de rollos de ancho  $W$  usados para satisfacer la demanda de los clientes. Sea  $x_j$  la cantidad de rollos a cortarse siguiendo el patrón  $j$ . El problema que llamaremos problema maestro a resolver es:

$$\text{Min } \sum_{j=1}^n x_j$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

$$x_j \geq 0$$

Optimizar el problema lineal anterior requiere un esfuerzo computacional muy alto aún considerando valores para  $x_j$  enteros, inclusive si el número de medidas  $w_i$  es pequeño ya que la cantidad de patrones diferentes  $n$  puede ser muy grande por lo que generar y almacenar la matriz  $A$  completa es inadecuado.

El problema anterior puede resolverse de manera muy eficaz siguiendo la estrategia siguiente. Considere un conjunto de  $m$  patrones donde cada patrón consiste solo de un corte de ancho  $w_i$  y ninguna otra medida  $w$ . La matriz  $A$  con las primeras  $m$  columnas (patrones) forma una solución factible ya que es una matriz identidad.

Con esta solución realice una iteración del método simplex, note que el coeficiente  $c_j$  de cada variable  $x_j$  es igual a 1, entonces  $v = c_B B^{-1}$  en lugar de calcular los costos reducidos para cada patrón  $j$  se construye el problema siguiente  $\min (1 - vA_j)$  para todo  $j$  que es lo mismo que minimizar  $vA_j$ .

Si el valor mínimo es menor o igual a 1 todos los costos reducidos son no negativos y tenemos una solución óptima. Si el valor obtenido es mayor de 1 la columna  $A_j$  que corresponde a  $k$  tiene un costo reducido negativo y esta columna entra a la base.

Ahora se describe como encontrar un patrón  $j$  que maximice  $vA_j$  por lo que tenemos que resolver:

$$\text{Max } \sum_{i=1}^m v_i a_i$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^m w_i a_i \leq W$$

$$a_i \geq 0, \text{ entero}$$

A este último problema se le conoce como el problema entero de la mochila. Con la solución del problema de la mochila tenemos un nuevo patrón que entra a la base e incorporamos al problema maestro con lo cual completamos una iteración. Repita hasta obtener una solución óptima.

### Ejemplo

Se requieren 78 piezas de  $w_1 = 25.5$ , 40 piezas de  $w_2 = 22.5$ , 30 piezas de  $w_3 = 20$  y 30 piezas de  $w_4 = 15$  (Chvatal, 2002). Las piezas anteriores se cortan del rollo grande con  $W = 91$  por lo que el problema maestro a resolver es:

$$\text{Min } x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Sujeto a :

$$3x_1 = 78$$

$$4x_2 = 40$$

$$4x_3 = 30$$

$$6x_4 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$x_j$  representa el número de veces que se cortará el patrón  $j$ .  $b = \begin{bmatrix} 78 \\ 40 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}$ ,  $c = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$

Para iniciar tenemos:

El patrón 1 asociado a  $x_1$  solamente corta piezas de 25 y caben 3 en 91, entonces  $a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

El patrón 2 asociado a  $x_2$  solamente corta piezas de 22 y caben 4 en 91, entonces  $a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

El patrón 3 asociado a  $x_3$  solamente corta piezas de 20 y caben 4 en 91, entonces  $a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

El patrón 4 asociado a  $x_4$  solamente corta piezas de 15 y caben 6 en 91, entonces  $a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Iteración 1.

Aplicamos el método simplex revisado por lo que:

$$A = B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} 26 \\ 10 \\ 7.5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad z = 48.5$$

Paso 1 resolver  $vB = c_B$  por lo que  $v = [\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6}]$

Paso 2 construir una nueva columna al resolver el problema restringido

$$\text{Max } 1/3y_1 + 1/4y_2 + 1/4y_3 + 1/6y_4$$

Sujeto a:

$$25.5y_1 + 22.5y_2 + 20y_3 + 15y_4 \leq 91$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0, \text{ entero}$$

La solución óptima al problema restringido es  $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  lo que proporciona un nuevo

patrón de corte, 2 piezas de 25.5 y 2 piezas de 20 asociado a  $x_5$  por lo que  $a_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ , columna que entra.

Paso 3. Calculamos  $\alpha_k = B^{-1}a_k$  es decir

$$\alpha_5 = B^{-1}a_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Calcule el mínimo cociente  $\theta = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\alpha_k)_i}, (\alpha_k)_i > 0 \right\}$  por lo que

$\theta = \min_i \left\{ \frac{26}{2/3}, \frac{7.5}{1/2} \right\} = 15$ , que corresponde a la segunda columna de B, columna que sale.

Paso 5. Nueva base

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix}, z = 46$$

Iteración 2

Paso 1 resolver  $vB = c_B$  por lo que  $v = \left[ \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \right]$

Paso 2 construir una nueva columna al resolver el problema restringido

$$\text{Max } 1/3y_1 + 1/4y_2 + 1/6y_3 + 1/6y_4$$

Sujeto a:

$$25.5y_1 + 22.5y_2 + 20y_3 + 15y_4 \leq 91$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0, \text{ entero}$$

La solución óptima al problema restringido es  $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  lo que proporciona un nuevo

patrón de corte, 2 piezas de 25.5, 1 piezas de 22.5 y 1 pieza de 15, asociado a  $x_6$  por lo que

$a_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , columna que entra.

Paso 3. Calculamos  $\alpha_k = B^{-1}a_k$  es decir

$$\alpha_6 = B^{-1}a_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Paso 4. Calcule el mínimo cociente  $\theta = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\alpha_k)_i}, (\alpha_k)_i > 0 \right\}$  por lo que

$\theta = \min_i \left\{ \frac{16}{2/3}, \frac{10}{1/4}, \frac{5}{1/6} \right\} = 24$ , que corresponde a la primera columna de B, columna que sale.

Paso 5. Nueva base

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 24 \\ 4 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix}, z = 44$$

Iteración 3

Paso 1 resolver  $vB = c_B$  por lo que  $v = \left[ \frac{7}{24} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{5}{24} \quad \frac{1}{6} \right]$

Paso 2 construir una nueva columna al resolver el problema restringido

$$\text{Max } 7/24y_1 + 1/4y_2 + 5/24y_3 + 1/6y_4$$

Sujeto a:

$$25.5y_1 + 22.5y_2 + 20y_3 + 15y_4 \leq 91$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0, \text{ entero}$$

La solución óptima al problema restringido es  $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  lo que proporciona un nuevo

patrón de corte, 1 piezas de 22.5 asociado a  $x_7$  por lo que  $a_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , columna que entra.

Note que la columna generada corresponde a  $a_2$  y que el valor de la función objetivo es 1 igual a  $c_B$  por lo que la solución encontrada es óptima.

### 6.3 Método de planos cortantes

El método de generación de columnas desde el punto de vista dual nos lleva al método de planos cortantes ya que en vez de generar una columna ahora se va a generar un renglón, es decir una restricción por lo que se denomina generación de restricciones o planos cortantes.

Para comenzar considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{Max } yb \\ &\text{Sujeto a} \\ &yA_i \leq c_i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

que es el problema dual del problema primal en su forma estándar siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Min } cx \\ &\text{Sujeto a} \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Nuevamente el número de columnas de A es muy grande por lo que es imposible almacenarlas y generalas en su totalidad. En lugar de generar todas las n restricciones duales, solo se considera un subconjunto H de todo el conjunto de tamaño n ellas y se construye el problema dual relajado:

$$\begin{aligned} &\text{Max } yb \\ &\text{Sujeto a} \\ &yA_i \leq c_i \quad i \in H \end{aligned}$$

El cual se resuelve hasta llegar a la solución óptima. Sea  $y^*$  una solución básica factible óptima al problema dual relajado entonces tenemos dos posibilidades

- 1) Suponga que  $y^*$  es una solución factible al problema original. Cualquier solución factible y al problema original es también una solución factible al problema relajado ya que éste último tiene menos restricciones. Por lo tanto debido a que la solución  $y^*$  es óptima para el problema dual relajado tenemos que  $yb \leq y^*b$  por lo que  $y^*$  es una solución óptima para el problema original y el algoritmo termina.
- 2) Si  $y^*$  es infactible para el problema original, entonces hemos encontrado una restricción que no se cumple la cual se adiciona a las restricciones del problema dual relajado y se continua con la estrategia de solución.

Para implementar este algoritmo se necesita primero de un método para identificar si el vector  $y^*$  es una solución factible al problema dual original. Si  $y^*$  es dual infactible se requiere de un método para identificar una restricción que no se cumple, una posibilidad es construir y resolver el siguiente problema  $\text{Min } c_i - y^*A_i$  para todo valor de  $i$ . Si el valor óptimo encontrado es no negativo entonces hemos encontrado una solución factible para el problema dual original.

En el caso de que el valor óptimo sea negativo entonces se satisface que  $c_i < y^*A_i$  y se ha identificado una restricción violada.

#### 6.4 Método de descomposición de Dantzig-Wolfe

Considere un problema de optimización lineal que tiene la forma:

$$\text{Min } c_1x_1 + c_2x_2$$

Sujeto a

$$D_1x_1 + D_2x_2 = b_0$$

$$F_1x_1 = b_1$$

$$F_2x_2 = b_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Donde  $x_1$  y  $x_2$  son vectores de dimensiones  $n_1$  y  $n_2$  respectivamente y que  $b_0, b_1$  y  $b_2$  tienen dimensiones  $m_0, m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Así considerando las restricciones de no negatividad  $x_1$  satisface  $m_1$  restricciones,  $x_2$  satisface  $m_2$  restricciones, y  $x_1$  y  $x_2$  satisfacen  $m_0$  restricciones de acoplamiento.  $D_1, D_2, F_1, F_2$  son matrices de dimensiones apropiadas.

Este tipo de problemas surgen en la realidad de manera muy frecuente, considere un modelo que busca reducir los costos de una empresa corporativa por lo que las variables  $x_1$  corresponden a una planta y  $x_2$  a otra planta. La restricción de acoplamiento donde participan  $x_1$  y  $x_2$  corresponde a un presupuesto global.

Las restricciones de acoplamiento pueden ser pocas con relación a todo el modelo. Esta estructura permite plantear una estrategia de solución basada en descomponer o fraccionar el problema original.

Para comenzar se construye una reformulación del problema original usando un menor número de restricciones, pero con más variables. Para los conjuntos de restricciones  $F_1$  y  $F_2$  definimos el poliedro  $P_i = \{ x_i \geq 0 \mid F_i x_i = b_i \}$   $i = 1, 2$ ; es decir el conjunto de puntos solución  $x_i$  factibles que satisfacen las restricciones  $F_i$ .

También se supone que los poliedros  $P_1$  y  $P_2$  son no vacíos. Definidos los poliedros entonces el problema original se puede replantear como:

$$\text{Min } c_1 x_1 + c_2 x_2$$

Sujeto a

$$D_1 x_1 + D_2 x_2 = b_0$$

$$x_1 \in P_1$$

$$x_2 \in P_2$$

Donde la restricción  $D_1 x_1 + D_2 x_2 = b_0$  es la restricción de acoplamiento.

Debido a que los poliedros  $P_1$  y  $P_2$  son no vacíos entonces están formados por puntos extremos  $x_i^j$  y rayos extremos  $w_i^k$ . El teorema de resolución permite que cualquier elemento  $x_i$  de  $P_i$  puede representarse mediante sus puntos y rayos extremos:

$$x_i = \sum_j \lambda_i^j x_i^j + \sum_k \theta_i^k w_i^k$$

Adicionalmente los coeficientes  $\lambda_i^j, \theta_i^k$  son no negativos y satisfacen  $\sum_j \lambda_i^j = 1, \sum_k \theta_i^k = 1$ .

El problema original puede entonces ser reformulado usando por puntos y rayos extremos de  $F_1$  y  $F_2$ .

El problema replanteado al que llamaremos problema maestro tiene la forma:

$$\text{Min } \sum_j \lambda_1^j c_1 x_1^j + \sum_k \theta_1^k c_1 w_1^k + \sum_j \lambda_2^j c_2 x_2^j + \sum_k \theta_2^k c_2 w_2^k$$

Sujeto a

$$\sum_j \lambda_1^j D_1 x_1^j + \sum_k \theta_1^k D_1 w_1^k + \sum_j \lambda_2^j D_2 x_2^j + \sum_k \theta_2^k D_2 w_2^k = b_0$$

$$\sum_j \lambda_1^j = 1$$

$$\sum_j \lambda_2^j = 1$$

$$\lambda_i^j, \theta_i^k \geq 0, \text{ para toda } i, j, k.$$

El problema original tiene  $m_0 + m_1 + m_2$  restricciones de igualdad mientras que el problema maestro tiene solo  $m_0 + 2$  restricciones de igualdad. Respecto al número de variables en el problema maestro su cantidad puede ser muy grande ya que está construido en base a los rayos y puntos extremos de cada poliedro  $P_i$ .

El número de puntos y rayos extremos crece de forma exponencial en base al número de restricciones.

## El método de descomposición Dantzig-Wolf

Paso 1. En cada iteración se inicia con un total de  $m_0 + 2$  puntos y rayos extremos de los poliedros  $P_1$  y  $P_2$  los cuales forman una solución básica factible al problema maestro así como la matriz inversa  $B^{-1}$  y el vector dual  $y = (q, r_1, r_2) = c_B B^{-1}$ ,  $q$  son las variables duales asociadas a la restricción de acoplamiento,  $r_1$  y  $r_2$  son las variables duales asociadas a las restricciones de convexidad  $\sum_j \lambda_1^j = 1, \sum_j \lambda_2^j = 1$  respectivamente.

Paso 2. Construya y resuelva los dos subproblemas.

El subproblema 1

$$\text{Min } (c_1 - qD_1) x_1$$

Sujeto a

$$x_1 \in P_1$$

y el subproblema 2

$$\text{Min } (c_2 - qD_2) x_2$$

Sujeto a

$$x_2 \in P_2$$

Si el valor óptimo del primer subproblema no es menor que  $r_1$  y el valor óptimo del segundo subproblema no es menor que  $r_2$ , entonces todos los costos reducidos del problema maestro son no negativos y se ha encontrado una solución óptima y el algoritmo termina. En caso contrario vaya al paso 3.

Paso 3. Si el valor óptimo en cualquier subproblema es  $-\infty$  se ha encontrado un rayo extremo  $w_i^k$  asociado con la variable  $\theta_i^k$  cuyo costo reducido es negativo por lo que esta variable entra al problema maestro. Vaya al paso 4.

Paso 4. Si el valor óptimo en cualquier subproblema es finito y menor a  $r_i$ , se ha encontrado un punto extremo  $x_i^j$  asociado a la variable  $\lambda_i^j$  con costo reducido negativo por lo que esta variable puede entrar a la base del problema maestro. Continúe al paso 5.

Paso 5. Una vez identificada la variable que entra a la base, genere la columna asociada, aplique el método simplex revisado y actualice  $B^{-1}$  calcule las variables duales  $y$ . Continúe con el paso 1.

Ejemplo.

Resuelva el problema

$$\text{Minimizar } -4x_1 - x_2 - 6x_3$$

Sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17$$

$$1 \leq x_1 \leq 2$$

$$1 \leq x_2 \leq 2$$

$$1 \leq x_3 \leq 2$$

Para iniciar las restricciones se dividen en dos grupos, el primer grupo consiste en las restricciones de acoplamiento que tiene la forma  $Dx = b_0$ ,  $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $b_0 = 17$ .

El segundo grupo son las restricciones del tipo  $x \in P$  por lo que  $P$  está definido como el polihedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x_i \leq 2, i = 1, 2, 3\}$ . Ya que  $P$  es un "cubo" en  $\mathbb{R}^3$  tiene ocho puntos extremos es acotado y no tiene rayos extremos.

Los puntos extremos son  $[1, 1, 1]$ ,  $[1, 2, 1]$ ,  $[2, 1, 1]$ ,  $[2, 2, 1]$ ,  $[1, 1, 2]$ ,  $[1, 2, 2]$ ,  $[2, 1, 2]$  y  $[2, 2, 2]$ .

Paso 1. Para iniciar tomemos dos puntos extremos, sean  $x^1 = [2, 2, 2]$  adicionalmente  $x^2 = [1, 1, 2]$  con variables  $\lambda^1$ ,  $\lambda^2$  como variables iniciales por lo que el problema maestro tiene dos restricciones de igualdad que son:

$$\sum_j \lambda^j D x^j = 17$$

$$\lambda^1 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 17$$

$$18\lambda^1 + 13\lambda^2 = 17$$

$$\sum_j \lambda^j = 1$$

$$\lambda^1 + \lambda^2 = 1$$

La función objetivo del problema maestro tiene la forma:

$$\text{Min } \sum_j \lambda^j c_1 x_1^j = \lambda^1 \begin{bmatrix} -4 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} -4 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -22\lambda^1 - 17\lambda^2$$

El problema maestro inicial es entonces:

$$\text{Min } -22\lambda^1 - 17\lambda^2$$

Sujeto a:

$$18\lambda^1 + 13\lambda^2 = 17$$

$$\lambda^1 + \lambda^2 = 1$$

$$\lambda^1, \lambda^2 \geq 0$$

Por lo que  $B = \begin{bmatrix} 18 & 13 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & -2.6 \\ -0.2 & 3.6 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = bB^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ ,  $c_B = [-22 \quad -17]$

Las variables duales del problema maestro son:  $y = (q, r_1, r_2) = c_BB^{-1} = [-1 \quad -4]$

Paso 2. Resolver el subproblema formado con los valores del problema original y ya que solo tenemos un  $P_i$ :

|                        |                                                                                                           |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Min $(c_1 - qD_1) x_1$ | Min $([-4 \quad -1 \quad -6] - (-1) [3 \quad 2 \quad 4]) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ |
| Sujeto a:              |                                                                                                           |
| $x_1 \in P_1$          | $= \text{Min } [-1 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$                     |
|                        | $= \text{Min } -x_1 + x_2 + 2x_3$                                                                         |
|                        | Sujeto a :                                                                                                |
|                        | $1 \leq x_1 \leq 2$                                                                                       |
|                        | $1 \leq x_2 \leq 2$                                                                                       |
|                        | $1 \leq x_3 \leq 2$                                                                                       |

Paso 3 y paso 4. La solución óptima al subproblema anterior es  $x = [2, 1, 2]$  que es un punto extremo de  $P$  y valor óptimo -5 menor que el valor de  $r$  que es -4.

Paso 5. El punto extremo que entra a la base es  $x^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  asociado a la variable  $\lambda^3$  la columna a entra a la base se calcula mediante  $Dx^3 = [3 \quad 2 \quad 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 16$  por lo que la columna que entra a la base es  $g = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \end{bmatrix}$ , el valor de 16 para la primera restricción y 1 para la segunda restricción del problema maestro.

Para calcular la columna que sale se calcula el mínimo cociente al calcular  $u = B^{-1}g = [0.6 \quad 0.4]$  por lo que los cocientes  $\frac{\lambda^1}{u_1} = \frac{0.8}{0.6}$ ,  $\frac{\lambda^2}{u_2} = \frac{0.2}{0.4}$  el segundo es menor por lo que la columna saliente asociada a  $\lambda^2$  sale de la base. La nueva base es  $B = \begin{bmatrix} 18 & 16 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Paso 1. La nueva base es  $B = \begin{bmatrix} 18 & 16 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -8 \\ -0.5 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = bB^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ ,  $c_B = [-22 \quad -21]$

Las variables duales del problema maestro son:  $y = (q, r_1, r_2) = c_BB^{-1} = [-0.5 \quad 13]$

Paso 2 Resolvemos el subproblema

$$\text{Min}([-4 \quad -1 \quad -6] - (-0.5) [3 \quad 2 \quad 4]) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \text{Min} [-2.5 \quad 0 \quad -4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \text{Min} -2.5x_1 + 0x_2 - 4x_3$$

Sujeto a :

$$1 \leq x_1 \leq 2$$

$$1 \leq x_2 \leq 2$$

$$1 \leq x_3 \leq 2$$

Paso 3 y paso 4. La solución óptima al subproblema anterior es  $x = [2, 2, 2]$  que es un punto extremo de P y valor óptimo -13 que es el valor de r que es -13 por lo que tenemos una solución óptima al problema maestro.

## 6.5 Método de descomposición de Benders

Considere un problema de optimización lineal P (Bazaraa, 1999) que tiene la forma:

$$P: \text{Min } cx$$

Sujeto a

$$Ax=b$$

$$x \in X, X = \{x : Dx \geq d, x \geq 0\}$$

El poliedro X es no vacío y acotado, por lo que no existen rayos extremos pero si puntos extremos. Del problema P anterior construimos el problema dual correspondiente.

$$D: \text{Maximizar } wb + vd$$

Sujeto a:

$$wA + vD \leq c$$

$$w \text{ irrestricta}, v \geq 0$$

Al problema D anterior cuando las variables w están fijas, es decir tenemos una solución parcial el problema D queda definido por las variables v, note que el problema lineal D

puede tener una estructura especial que permite su fácil solución por lo tanto se particiona el problema D considerando a las variables  $w$  como las variables “complicadas” por lo que el problema queda reformulado como:

$$D: \text{Maximizar } wb + \text{máximo } vd$$

Sujeto a

$$vD \leq c - wA$$

$$w \text{ irrestricta, } v \geq 0$$

Nuevamente reestructurando tenemos:

$$D : \text{Máximo } wb + \text{Mínimo } x \in X (c - wA)x$$

Ya que el poliedro  $X$  no es vacío entonces tenemos la solución óptima en un punto extremo. Si  $x^1, x^2, \dots, x^t$  son los puntos extremos de  $X$  tenemos que el problema D es equivalente al problema de maximizar  $\{ wb + \text{mínimo}_j (c - wA)x^j \}$  sobre valores no restringidos de  $w$ . Lo anterior puede re-escribirse como el problema maestro:

$$PM: \text{Maximizar } z = \{ wb + \text{mínimo}_j (c - wA)x^j \}$$

Sujeto a:

$$z \leq wb + (c - wA)x^j \text{ para } j = 1, \dots, t$$

$$z, w \text{ irrestrictas.}$$

Este problema maestro contiene un gran número de restricciones por lo que es inconveniente resolverlo. Sin embargo puede resolverse al incluir solo algunas restricciones, esta estrategia de solución está basada en la relajación del problema maestro.

Al construir y resolver una relajación del problema maestro obtenemos valores óptimos a la relajación  $(z_r^*, w_r^*)$  entonces  $z_r^*$  es una cota superior del valor óptimo del problema original, adicionalmente los valores obtenidos del problema relajado  $(z_r^*, w_r^*)$  son valores óptimos para el problema original si cumplen con todas las restricciones del problema maestro.

Para verificar si se viola alguna restricción del problema maestro se debe verificar si  $z_r^* \leq w_r^*b + (c - w_r^*A)x^j$  para  $j=1, \dots, t$ . lo que es equivalente al siguiente subproblema de programación lineal:

$$w_r^* + \text{Mínimo } x \in X (c - w_r^*A)x.$$

Si  $z_r^*$  es menor o igual que el valor óptimo de  $w_r^* + \text{Mínimo } x \in X (c - w_r^*A)x$  entonces el procedimiento de solución termina. En caso contrario si  $x^k$  resuelve el problema  $w_r^*b + \text{Mínimo } x \in X (c - w_r^*A)x$  entonces tenemos que  $z_r^* > w_r^*b + (c - w_r^*A)x^k$  y es posible

generar una restricción de la forma  $z \leq wb + (c - wA)x^k$  e incluirla al problema maestro relajado y volver a optimizar.

El proceso anterior se repite hasta que la solución  $(z_r^*, w_r^*)$  de algún problema maestro relajado se obtenga  $z$  igual al óptimo de  $w_r^*b + \text{Mínimo } x \in X (c - w_r^*A)x$ . ya que  $X$  tiene un número finito de puntos extremos el procedimiento anterior tiene un número finito de iteraciones.

Ejemplo:

Se desea resolver el problema:

$$\text{Maximizar } 2w_1 + 3w_2 + 2v_1 + 5v_2 + 2v_3 + 6v_4$$

Sujeto a:

$$w_1 + w_2 + v_1 + v_2 \leq -2$$

$$w_2 + 2v_2 \leq -1$$

$$w_1 - v_3 + 2v_4 \leq -1$$

$$2w_2 + v_3 + v_4 \leq 1$$

$$w \leq 0, v \leq 0$$

Las variables  $w$  son las variables “complicadas” por lo que el problema maestro de Benders es el siguiente:

Maximizar  $z$

Sujeto a

$$z \leq 2w_1 + 3w_2 + x_1^j(-2 - w_1 - w_2) + x_2^j(-1 - w_2) + x_3^j(-1 - w_1) + x_4^j(1 - 2w_2), \text{ para } j = 1, \dots, t$$

$$z \text{ irrestricta, } w \leq 0$$

En donde  $x^j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j, x_4^j)$ ,  $j=1, \dots, t$  son los vértices o puntos extremos de  $X$ . El subproblema de Benders tiene la forma:

$$\text{Maximizar } \{ \theta(w) : w \leq 0 \}$$

Para valores  $w = (w_1, w_2)$  tenemos que:

$$\theta(w) = 2w_1 + 3w_2 + \text{Mínimo } x \in X \{ (-2 - w_1 - w_2)x^1 + (-1 - w_2)x^2 + (-1 - w_1)x^3 + (1 - 2w_2)x^4 \}$$

Para comenzar se elige el vértice  $x^1 = (0, 0, 0)$  de  $X$ . Por lo que el problema maestro relajado de Benders es:

Maximizar  $z$

Sujeto a

$$z \leq 2w_1 + 3w_2$$

$z$  irrestricta,  $w \leq 0$

La solución óptima es  $z_r^*=0$  con  $w_r^*=(0, 0)$  por lo que usando  $z \leq 2w_1 + 3w_2$  como restricción o corte de Benders para  $\theta(w)$  se obtiene  $w_r^*=(0, 0)$  como solución maximizadora.

Al calcular  $\theta(w)$  con  $w_r^*=(0, 0)$  tenemos que  $\theta(w_r^*)= \frac{-17}{2}$  en  $x^2 = (2, \frac{3}{2}, 3, 0)$ . Como  $\theta(w) < z_r^*$  se genera una restricción o corte de Benders usando  $x^2$ .

Maximizar  $z$

Sujeto a

$$\begin{aligned} z &\leq 2w_1 + 3w_2 + 2(-2 - w_1 - w_2) + \frac{3}{2}(-1 - w_2) + 3(-1 - w_1) + 0(1 - 2w_2) \\ &= \frac{-17}{2} - 3w_1 - \frac{1}{2}w_2 \end{aligned}$$

Por lo que el problema maestro relajado de Benders es:

Maximizar  $z$

Sujeto a :

$$z \leq 2w_1 + 3w_2$$

$$z \leq \frac{-17}{2} - 3w_1 - \frac{1}{2}w_2$$

$$w \leq 0$$

La solución óptima es  $z_r^*= \frac{-17}{2}$ , y  $w_r^* = (\frac{-17}{10}, 0)$ .

Al resolver el subproblema de Benders se calcula  $\theta(w)= \frac{-59}{10}$ , en  $x^3 = (0, \frac{5}{2}, 0, 0)$ . Ya que  $z_r^* > \theta(w_r^*)$  se genera una tercera restricción:

$$z \leq 2w_1 + 3w_2 + 0(-2 - w_1 - w_2) + \frac{5}{2}(-1 - w_2) + 0(-1 - w_1) + 0(1 - 2w_2)$$

$$z \leq -\frac{5}{2} + 2w_1 + \frac{1}{2}w_2$$

Que se adiciona al problema maestro relajado de Benders que queda como:

Maximizar  $z$

Sujeto a :

$$z \leq 2w_1 + 3w_2$$

$$z \leq \frac{-17}{2} - 3w_1 - \frac{1}{2}w_2$$

$$z \leq -\frac{5}{2} + 2w_1 + \frac{1}{2}w_2$$

$$w \leq 0$$

El procedimiento continúa hasta que  $z_r^* \leq \theta(w_r^*)$ .

### Ejercicios propuestos

1. Considere el siguiente problema de optimización lineal

Maximizar  $x_1$

Sujeta a:

$$x_1 + 3x_2 \leq \frac{9}{4}$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 0$$

$$x \in X = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \}$$

- Resuelva gráficamente el problema
- Resuelva el problema aplicando el método de descomposición de Dantzig-Wolfe (DW)
- Identifique los puntos extremos de  $X$  en condiciones de optimalidad

2. Resuelva el siguiente problema por medio del método de descomposición DW

$$\text{Max } x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4$$

Sujeto a:

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 7$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + x_2 \leq 5$$

$$3x_3 + 4x_4 \geq 12$$

$$x_3 \leq 4$$

$$x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Resuelva el siguiente problema aplicando el método simplex revisado usando la forma de producto de la inversa

$$\text{Max } 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

Sujeto a:

$$8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 7$$

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 3$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

4. Resuelva el siguiente problema. Se requieren 68 piezas de  $w_1 = 24$ , 43 piezas de  $w_2 = 20$ , 30 piezas de  $w_3 = 18$  y 18 piezas de  $w_4 = 12$ . Las piezas anteriores se cortan del rollo grande con  $W = 87$ .

- a) Determine los patrones iniciales que incluyen un solo tamaño de corte por rollo grande
- b) Construya el modelo matemático
- c) Resuelva al aplicar el método de generación de columnas.

#### Fuentes de consulta

Arreola R. J., Arreola R. A., (2003). Programación Lineal. Una introducción a la toma de decisiones cuantitativa. Thomson. México, D. F.

Bertsimas D., (1997). Introduction to linear optimization. Athena Scientific Series in optimization

Chvatal V., (2016). Linear Programming. Bedford Books.

Cohen M., (2021). Linear algebra: theory, intuition, code. sincXpress

Denardo E. (2017). Linear programming and generalizations. Springer.

Friedberg S., Insel A., (2018). Linear Algebra. Pearson.

Grossman S. (1992). Álgebra Lineal con aplicaciones. Mc Graw Hill Interamericana. México, D. F.

Hu T. C., Kahng A. B., (2018). Linear and Integer Programming being easy. Springer.

Kumar S. (2019). Linear Programming. CBS Publishers.

Pan P., (2014). Linear programming computation. Springer.

Ploskas N., Samaras N., (2018). Linear Programming using Matlab. Springer.

Strang G., (1986). Algebra Lineal y sus aplicaciones. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware, EEUU.

Solow D. (2014). Linear Programming. Dover Publications.

Vanderbei R., (2021). Linear Programming. Springer.