



SEP

SNEST

DGEST

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

**ELABORACIÓN DEL LIBRO DE TEXTO DE
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES I**

**PROGRAMA DE AÑO SABÁTICO
REPORTE FINAL**

AUTOR:

M. en Ing. Martha Beatriz Martínez Pérez

REVISOR:

M. en Ing. Marco Antonio Gómez Vélez

Metepec, Estado de México, Enero de 2013

CONTENIDO

UNIDAD 1: INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES	1
1.1. Definición, desarrollo y tipos de modelos de la investigación de operaciones	2
1.2. Fases de estudio de la investigación de operaciones	5
1.3. Principales aplicaciones de la investigación de operaciones	6
1.4. Metodología para modelación	8
1.5. Formulación de problemas lineales más comunes	12
1.6. Conceptos del método gráfico y su aplicación	28
1.7. Aspectos éticos y de sustentabilidad	36
1.8. Rúbrica propuesta para la unidad 1	36
1.9. Terminología de la unidad 1	38
UNIDAD 2: EL MÉTODO SIMPLEX	40
2.1. Teoría del método simplex	41
2.2. Forma tabular del método simplex	46
2.3. El método de las dos fases	55
2.4. Casos especiales	64
2.5. Uso de software	65
2.6. Aspectos éticos y de sustentabilidad	74
2.7. Rúbrica propuesta para la unidad 2	75

2.8. Terminología de la unidad 2	77
UNIDAD 3: DUALIDAD Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD	79
3.1. Teoría primal-dual	80
3.2. Formulación del problema dual	81
3.3. Relación primal-dual	85
3.4. Dual simplex	87
3.5. Análisis de sensibilidad	91
3.6. Interpretación del análisis de sensibilidad	114
3.7. Uso de software	117
3.8. Aspectos éticos y de sustentabilidad	118
3.9. Rúbrica propuesta para la unidad 3	119
3.10. Terminología de la unidad 3	121
UNIDAD 4: PROGRAMACIÓN ENTERA	122
4.1. Introducción y casos de aplicación	123
4.2. Definición y modelos de programación entera y binaria	124
4.3. Método de Gomory o de Planos Cortantes	126
4.4. Método de bifurcación y acotación	131
4.5. Uso de software	138
4.6. Aspectos éticos y de sustentabilidad	142
4.7. Rúbrica propuesta para la unidad 4	143
4.8. Terminología de la unidad 4	145

UNIDAD 5: TRANSPORTE Y ASIGNACIÓN	146
5.1. Definición del problema de transporte	147
5.2. Método de la esquina noroeste	153
5.3. El método de aproximación de Vogel	155
5.4. Procedimientos de optimización	160
5.5. Definición del problema de asignación	169
5.6. El método húngaro	172
5.7. Uso de software	175
5.8. Aspectos éticos y de sustentabilidad	180
5.9. Rúbrica propuesta para la unidad 5	181
5.10. Terminología de la unidad 5	183

INTRODUCCIÓN

Recientemente la DGEST, Dirección General de Institutos Tecnológicos, implantó el enfoque de competencias para las diferentes materias dentro de las diversas carreras que ofrece, por lo que se requiere contar con material didáctico apropiado para incentivar el desarrollo o fortalecimiento de las competencias correspondientes.

En el presente trabajo se elabora un libro de texto de la asignatura Investigación de Operaciones I para la carrera de Ingeniería Industrial, el cual contiene las cinco unidades del programa oficial para la materia.

Asimismo, cada una de las unidades o temas están integradas por diversos subtemas, para los que se incluyen sugerencias de actividades para el lector, mediante las que se propiciará el desarrollo o reforzamiento de las competencias genéricas y específicas.

Adicionalmente, en cada tema se proponen dinámicas, discusiones, problemas, uso de paquetes computacionales, así como la reflexión de aspectos éticos y de sustentabilidad, con lo que los alumnos obtendrán un amplio panorama de la generación de alternativas de mejora, con criterios éticos y sustentables.

Finalmente, para cada unidad se sugieren rúbricas, que facilitarán al docente la evaluación de las competencias adquiridas, incluyendo las actitudes mostradas por el alumno. Esto permitirá también al estudiante conocer los parámetros que integran el proceso evaluativo, obteniendo con esto una mayor transparencia en la etapa de evaluación.

UNIDAD 1. INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Después de estudiar este capítulo, el lector será capaz de:

- Conocer la historia y desarrollo de la Investigación de Operaciones
- Identificar los tipos de modelos de la Investigación de Operaciones
- Conocer la terminología básica de la Investigación de Operaciones
- Identificar las diferentes aplicaciones de la Investigación de Operaciones
- Conocer las entidades que conforman un problema de Programación Lineal
- Comprender el concepto de optimización
- Formular problemas de Programación Lineal
- Comprender que los aspectos éticos y de sustentabilidad deben regir la toma de decisiones
- Conocer y aplicar el método gráfico

En el proceso el lector desarrolla las competencias siguientes:

- Capacidad de realizar investigación bibliográfica
- Capacidad de resumir información
- Habilidad de redactar textos
- Habilidad para utilizar tecnologías de información y comunicación
- Capacidad para trabajar en equipo
- Capacidad de analizar textos, a fin de extraer datos relevantes
- Habilidad de expresar sus ideas de manera oral y escrita
- Habilidad para comprender como se aplican los aspectos éticos y de sustentabilidad
- Capacidad de análisis, síntesis y de abstracción

Contenido de la Unidad 1:

- 1.1 Definición, desarrollo y tipos de modelos de Investigación de Operaciones
- 1.2 Fases de estudio de la Investigación de Operaciones
- 1.3 Principales aplicaciones de la Investigación de Operaciones
- 1.4 Metodología para modelación
- 1.5 Formulación de problemas lineales más comunes
- 1.6. Conceptos del método gráfico y su aplicación

1.1 DEFINICIÓN, DESARROLLO Y TIPOS DE MODELOS DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

1.1.1 Definición de la Investigación de Operaciones

La Investigación de Operaciones es un *enfoque científico* en la toma de decisiones que busca el mejor diseño y operar un *sistema*, por lo regular en condiciones que requieren la asignación de recursos escasos¹. (Winston, 2005)

Debe notarse que el *enfoque científico* requiere el uso de modelos matemáticos, los cuales son representaciones matemáticas de situaciones reales. Asimismo, un *sistema* es un conjunto de elementos interdependientes que trabajan juntos para lograr un objetivo común.

Es conveniente mencionar que algunos autores utilizan el término Ciencia de la Administración (o Management Science, en Inglés) como sinónimo de Investigación de Operaciones.²

La Investigación de Operaciones es importante debido a que:

- Se aplica en problemas concernientes a cómo conducir y coordinar las operaciones o actividades dentro de una organización.
- Toma un punto de vista amplio que involucra a toda la organización y a su medio ambiente.
- Le concierne la óptima toma de decisiones y la modelación de sistemas deterministas que se originan en la vida real.
- Sus aplicaciones se caracterizan por la necesidad de asignar en la mejor forma los recursos limitados.
- Se emplea en muy diversos ámbitos, tales como: gobierno, milicia, negocios, ingeniería, economía, ciencias naturales y ciencias sociales.
- La contribución de la Investigación de Operaciones se fundamenta primordialmente en:
 - a. La estructuración de situaciones reales en un modelo matemático, abstrayendo los elementos esenciales de manera que proporcione una visión objetiva del problema y una solución acorde.
 - b. La exploración de la estructura de las soluciones y el desarrollo de procedimientos sistemáticos que permitan lograrlas.

¹ Winston, W.L., *Investigación de Operaciones Aplicaciones y Algoritmos 4ª.Ed.*, 2005, International Thomson Editores, S.A. de C.V. México.

² Hillier, F.S., Lieberman, G.J., *Introducción a la Investigación de Operaciones, 9ª Ed.*, 2010, Ed. McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V., México

- c. El desarrollo de una solución que incluya la teoría matemática que proporcione un valor óptimo o muy cercano a éste.

1.1.2. Desarrollo de la Investigación de Operaciones

Durante la Segunda Guerra Mundial empezaron a utilizarse enfoques intensivos para apoyar la toma de decisiones. A fin de maximizar el esfuerzo de la guerra, era necesario asignar recursos escasos de un modo efectivo a las diversas operaciones y actividades militares, siendo estos los orígenes de la investigación de operaciones como existe actualmente. Las administraciones militares estadounidense y británica convocaron a un grupo de científicos de diversas disciplinas para aplicar el enfoque científico a los problemas estratégicos y tácticos asociados a la situación bélica. Las actividades de este grupo, que se organizó como parte del personal operativo de la organización militar, se denominaron como Investigación de Operaciones, debido a que el equipo se dedicaba efectivamente a realizar investigación acerca de las operaciones militares.

Después de la guerra, las personas asociadas con la investigación de operaciones durante el conflicto bélico se dieron cuenta de que muchos de los métodos y técnicas que se utilizaron con los problemas militares podían aplicarse a problemas industriales. Estos conceptos comenzaron a aplicarse a la industria hasta la década de 1950, cuando se desarrollaron y estuvieron disponibles comercialmente las computadoras. En la actualidad es fácil encontrar numerosos casos en los que la Investigación de Operaciones ha sido aplicada en todo tipo de organizaciones industriales, de servicios, así como gubernamentales.

1.1.3. Tipos de Modelos de la Investigación de Operaciones

La mayor parte de los modelos que se utilizan en la Investigación de Operaciones, son *algoritmos de optimización*, los cuales pueden ser de *maximización* o *minimización*, y son procedimientos iterativos de solución para lograr una solución óptima, es decir, la mejor. Existen casos en los que se utilizan procedimientos heurísticos, los cuales son de diseño intuitivo, y no garantizan una solución óptima, pero proporcionan una buena solución sub-óptima

Los modelos bajo estudio pueden ser:³

Modelos Dinámicos y Estáticos. El *modelo dinámico* es aquel en el que las variables involucradas requieren sucesiones de decisiones para periodos múltiples, mientras que en el *modelo estático* no se presentan dichos periodos, por lo que no se requieren las decisiones sucesivas.

³ Winston, W.L., *Investigación de Operaciones Aplicaciones y Algoritmos 4ª.Ed.*, 2005, International Thomson Editores, S.A. de C.V. México.

Modelos Lineales y no Lineales. Los *modelos lineales* presentan variables cuyo exponente es siempre la unidad, aunque pueden estar multiplicadas por coeficientes constantes y relacionarse con otras variables del modelo únicamente en forma de suma. Los *modelos no lineales* pueden contener variables con cualquier exponente o función no-lineal, tales como log, ln, funciones trigonométricas, entre otras, y dichas variables pueden relacionarse con otras a través de productos, cocientes, y otras funciones. En general, los modelos no lineales son mucho más difíciles de resolver que los lineales.

Modelos Enteros y no Enteros. Un *modelo entero* es aquel que contiene una o más variables enteras. Cuando todas las variables del modelo pueden tomar valores fraccionarios, se trata del *modelo no entero*.

Modelos Deterministas y Probabilistas. En el *modelo determinista* se conoce con certeza el valor de las variables propias del modelo, en tanto que en el *modelo probabilista* el comportamiento de las variables puede ser representada por funciones de distribución o de densidad de probabilidad.

- **Actividades para el lector en la sección 1.1. Definición, desarrollo y tipos de modelos de Investigación de Operaciones (IO)**
- Realizar una investigación, utilizando al menos tres referencias bibliográficas, sobre la definición de la Investigación de Operaciones, su historia y desarrollo, así como la clasificación de los modelos y de los sistemas.
- Entregar de manera individual un reporte, elaborado manualmente y apoyado con:
 - Mapa mental ó cognitivo
- Con el equipo de trabajo en el que está participando, realizar frente al grupo, una dramatización en la que haga énfasis en la problemática de la segunda guerra mundial y como tuvieron que integrarse equipos multidisciplinarios para resolver los problemas complejos que se presentaron, dando origen a la IO.
- **Competencias a desarrollar o reforzar**
- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de realizar investigación bibliográfica
 - Comprensión e incremento de vocabulario
 - Capacidad de resumir información
 - Habilidad de redactar textos
 - Capacidad para trabajar en equipo
 - Habilidad de expresar sus ideas de manera oral y escrita
- **Competencias Específicas**
 - Conocer la historia y desarrollo de la IO
 - Identificar los tipos de modelos de la IO
 - Conocer la terminología básica de la IO
 - Identificar las diferentes aplicaciones de la IO

1.2 FASES DE ESTUDIO DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Las etapas o fases más importantes de un estudio típico de Investigación de Operaciones son las siguientes:⁴

1. *Definición del problema y recolección de datos relevantes.*

En este paso se debe estudiar el sistema relevante y el problema a resolver, la determinación de los objetivos apropiados, las limitaciones sobre lo que puede realizarse, las interrelaciones del área bajo estudio, los diferentes cursos de acción, los límites de tiempo, entre otros; posteriormente se recolectan los datos necesarios para organizarlos y considerarlos para el modelo. Existen otras consideraciones que incluyen responsabilidades sociales y de respeto al medio ambiente que deben ser consideradas en aspectos de sustentabilidad de la empresa bajo estudio.

2. *Formulación de un modelo matemático que represente el problema.*

Esta fase requiere del establecimiento del modelo con símbolos y expresiones matemáticas de los objetivos que debe alcanzar el modelo, las limitaciones que existen y los parámetros correspondientes. Debe considerarse que los modelos matemáticos describen un problema en forma simplificada y concisa, forman un puente para emplear técnicas matemáticas y computadoras de alto poder para analizar y resolver el problema. Es importante tomar en cuenta que se requieren aproximaciones y supuestos de simplificación si se desea que el modelo sea susceptible de ser resuelto.

3. *Desarrollo de un procedimiento basado en computadora para derivar una solución al problema a partir del modelo.*

En la fase 3 se aplica normalmente un *algoritmo* de investigación de operaciones generalmente utilizando una computadora, mediante el uso de alguno de los paquetes de software disponibles, para obtener una solución óptima; sin embargo, cuando se utilizan procedimientos heurísticos se encuentra una buena solución sub-óptima. Una vez que se encuentra la mejor solución, se procede a realizar el análisis de sensibilidad a fin de determinar qué parámetros del modelo son críticos o sensibles, teniendo éstos la característica que si cambian, la solución óptima también se modificará.

4. *Prueba del modelo y mejoramiento de acuerdo con las necesidades.*

En esta etapa se realizan pruebas exhaustivas para detectar y corregir fallas hasta que se produzcan resultados razonables, de tal modo que el modelo se considere confiable. Este proceso de prueba y mejora del modelo se denomina *validación del modelo*.

5. *Preparación para la aplicación del modelo prescrito por la administración.*

La fase 5 debe considerar si el modelo va a utilizarse varias veces, en cuyo

⁴ Hillier, F.S., Lieberman, G.J., *Introducción a la Investigación de Operaciones*, 9ª Ed., 2010, Ed. McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V., México

caso debe instalarse un sistema documentado, a fin de aplicarse según lo que ha establecido la administración. Este sistema debe incluir el modelo y el procedimiento de solución, así como los procedimientos operativos para su implantación.

6. *Implantación.*

La última etapa consiste en la puesta en marcha para asegurar que las soluciones del modelo se traduzcan en procedimientos operativos y corregir defectos en la solución que pudieran presentarse.

Actividades para el lector en la sección 1.2. Fases de estudio de la Investigación de Operaciones (IO)

- Investigar los pasos del método científico.
- Comparar éstos con las fases de estudio de la investigación de operaciones.
- Identificar las fases que deben hacer énfasis en los aspectos éticos y de sustentabilidad.
- Establecer las semejanzas y diferencias, en trabajo en equipo.
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente y apoyado con:
 - Mapa mental ó cognitivo
 - Tabla comparativa

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de realizar investigación bibliográfica
 - Comprensión e incremento de vocabulario
 - Capacidad de analizar textos, para obtener datos relevantes
 - Visualización de aspectos éticos y de sustentabilidad
 - Capacidad para la elaboración de mapas mentales o tablas
 - Integración en equipos de trabajo
- **Competencias Específicas**
 - Adquisición de terminología de la IO
 - Identificar las fases de estudio de la IO
 - Explicar cómo se aplican las fases de estudio de la IO en empresas de generación de bienes y las de servicios

1.3 PRINCIPALES APLICACIONES DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

En los modelos matemáticos de Investigación de Operaciones, las variables bajo estudio así como las funciones correspondientes, pueden ser enteras o continuas, deterministas o probabilistas, dinámicas o estáticas, lineales o no-lineales. Los problemas de optimización que surgen debido a estos modelos generaron una gran variedad de métodos de solución, considerando la

naturaleza de las propiedades matemáticas involucradas. La más exitosa y ampliamente utilizada de estas técnicas es la *Programación Lineal*, en la cual todas las variables y funciones son lineales, con la característica que todas las variables son continuas.

Algunas de las técnicas más utilizadas de la Investigación de Operaciones son:

- Programación Lineal
- Programación Entera
- Programación Dinámica
- Programación No-Lineal
- Programación de Metas u Objetivos
- Programación de Redes
- Sistemas de Inventarios
- Modelos de Pronósticos
- Teoría de Decisiones
- Sistemas de Línea de Espera
- Cadenas de Markov
- Simulación de Sistemas

Es importante mencionar que el curso Investigación de Operaciones 1, únicamente trata modelos de la Programación Lineal.

Actividades para el lector en la sección 1.3. Principales aplicaciones de la Investigación de Operaciones (IO)

- Identificar las aplicaciones de la IO en diversas áreas de las empresas de generación de bienes o servicios, así como las gubernamentales, tales como los inventarios, líneas de producción, la logística, entre otros.
- Identificar las características de la Programación Lineal.
- Discutir, en una dinámica de aprendizaje colaborativo, las principales aplicaciones de la IO, así como los aspectos éticos y de sustentabilidad que deben considerarse.
- Entregar un reporte, elaborado manualmente y apoyado con:
 - Mapa mental ó cognitivo
 - Algún tipo de diagrama en el cual se representen las diferentes clases de variables y funciones en los modelos

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de investigación
 - Visualización de aspectos éticos y de sustentabilidad
 - Capacidad para la elaboración de mapas mentales o tablas
 - Integración en equipos de aprendizaje colaborativo
- **Competencias Específicas**
 - Identificar las principales aplicaciones de la IO en diversas áreas de las empresas.
 - Identificar las aplicaciones de la Programación Lineal.

1.4 METODOLOGÍA PARA MODELACIÓN

La metodología de este punto se refiere solamente a modelos de Programación Lineal (PL). Técnicamente un programa lineal es aquél en el que todas sus variables y funciones son lineales. Las suposiciones de los modelos de PL se analizarán en la Unidad 2.

El tipo más común de aplicación de la programación lineal implica la asignación de recursos limitados a ciertos niveles de actividades que lograrán el mejor valor posible de la medida global de desempeño (función objetivo).

Los **términos clave** en los problemas de programación lineal son las *actividades* y los *recursos*, los cuales lograrán la mejor *medida global de desempeño (función objetivo)*. n denota el número de actividades que se consideran y m el número de recursos utilizados. Algunos ejemplos de recursos son: piezas de producto de determinado tipo a fabricar, dinero a invertir en determinados proyectos, cantidad de producto a enviar desde algunos orígenes hacia ciertos destinos, dinero a invertir en determinados proyectos. Los ejemplos de recursos incluyen horas a utilizar en equipos, número de horas-hombre por departamento, cantidad de las materias primas, número de personas o vehículos. Ejemplos de la medida global de desempeño pueden ser: dinero de utilidades, costos, tiempos.

Los **símbolos** utilizados en la programación lineal son:

Z = Valor de la medida global de desempeño o función objetivo

x_j = Nivel de la actividad j (para $j = 1, 2, \dots, n$) o variables de decisión

c_j = Incremento en Z que se obtiene al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j

b_i = Cantidad del recurso i disponible para asignarse a las actividades (para $i = 1, 2, \dots, m$)

a_{ij} = Cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j .

El modelo de programación lineal incluye tres **elementos básicos**:

1. Variables de Decisión (x_j , nivel de la actividad j)
2. Función Objetivo (medida global del desempeño Z)
3. Restricciones (desigualdades en las cuales se limitan las cantidades de los recursos totales disponibles b_i a utilizarse por cada unidad de la actividad j).

1. **Las Variables de Decisión** representan las variables involucradas en el modelo; se refieren a los niveles de las actividades j y se encuentran bajo el control del tomador de decisiones. Un ejemplo de la notación es $x_1, x_2, \dots, x_n$. Para problemas más complejos, pueden tener más de un subíndice, por ejemplo x_{245} , y_{5AM} , w_{2RT} . Notar que su exponente es siempre la unidad y solamente se relacionan con otras variables mediante adición o substracción; no tienen relaciones mediante productos, cocientes ni algún

otro tipo de funciones como logarítmicas, trigonométricas, entre otras. Sin embargo, estas variables pueden contener coeficientes enteros o fraccionarios en las funciones en las que participan.

Ejemplos:

x_1 = *Número* de autos tipo “1” a producir durante la semana

x_N = *Litros* por día a producir de la bebida sabor naranja

x_{43} = *Piezas* de pan tipo 4 a elaborarse durante el turno 3

y_{3A} = *Toneladas* de harina de trigo a transportar desde el molino “3” hacia el almacén “A”

x_{ijkl} = *Barriles por día* del producto “i” a enviarse desde la refinería “j” hacia la agencia de ventas “k”, utilizando el medio de transporte “l”

Nota:

En la definición de las variables de decisión es necesario incluir una *unidad de medida*: piezas, litros, toneladas/día, libras/mes, etc.

2. **La Función Objetivo** es la meta que se trata de optimizar; ésta representa un valor de la medida global de desempeño. Puede ser de maximización, (Max), o de minimización, (Min).

Ejemplos:

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{Max } Z = x_1 + 0.2x_2 - x_3$$

$$\text{Min } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{Min } W = x_1 - x_2 + 0.5x_3$$

Nota:

Cuando en los problemas de formulación se tengan datos de ganancias, utilidades o ingresos, el caso es de maximización (Max).

Si el caso trata con información de egresos, costos, o tiempos, se trata de una minimización (Min).

Pero si se tienen datos de ingresos y egresos, debe calcularse:

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{Egresos}$$

Entonces, se trata de un modelo de maximización.

3. **Las Restricciones** se refieren a las limitaciones existentes o requerimientos que deben cumplirse en todo sistema. Las limitaciones o requerimientos de recursos se denominan *restricciones funcionales*, mientras que las *restricciones de no negatividad* impiden que las variables de decisión tomen valores negativos. Las restricciones son de tres tipos:

Restricciones Tipo $\leq$ (menor o igual que)

Restricciones Tipo $\geq$ (mayor o igual que)

Restricciones Tipo $=$ (ecuación ó igualdad)

Además, es obligatorio especificar las restricciones de no negatividad, ≥ 0 .

Nota:

Restricciones Tipo $\leq$

Cuando las condiciones del problema en cuestión establezcan que se laborarán “*cuando mucho*”, “*no más de*”, “*a lo sumo*”, “*a lo más*”, “*un máximo de*”, por ejemplo, 40 horas por semana, entonces la restricción será tipo $\leq$. Entonces, se tendrá una ecuación similar a la siguiente:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 40$$

Restricciones Tipo $\geq$

Si las condiciones del problema bajo estudio establecen que se utilizarán “*cuando menos*”, “*al menos*”, “*un mínimo de*”, por ejemplo, 15 toneladas de la materia prima tipo A, entonces la restricción será tipo $\geq$. Las desigualdad generada será semejante a:

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 15$$

Restricciones Tipo $=$

En caso de que el problema defina que se usarán “*exactamente*”, “*igual a*”, por ejemplo, 3,600 libras ó de un ingrediente químico, la restricción es tipo “ $=$ ”. La igualdad correspondiente podrá ser como se indica a continuación:

$$8x_1 + 1.5x_2 = 3,600$$

Restricciones de No-Negatividad, ≥ 0

Estas se utilizan para evitar que las variables de decisión tomen valores negativos y se establecen como sigue:

Para un solo subíndice:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ó bien: $x_i \geq 0 \quad \forall i$

Para varios subíndices:

$$x_{1A}, x_{2A}, \dots, x_{4D} \geq 0$$

ó bien: $x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$

Conviene mencionar que para todo problema se recomienda establecer un **análisis dimensional**, debido a que a través de éste, se reducen los errores, ya que en múltiples ocasiones los problemas, por ejemplo, tratan con horas, minutos y segundos por lo que debe trabajarse con una unidad común.

Aun cuando en la Unidad 2 se estudia con más detalle, conviene mencionar que la **forma estándar** del modelo de programación lineal tiene la siguiente estructura:

Max $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ (Maximizar Z)	Función Objetivo
S A: (Sujeta a las restricciones:)	
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$	
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$	Restricciones Funcionales
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$	
$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$	Restricciones de no-negatividad

La restricción de no negatividad también puede representarse como sigue:

$$x_i \geq 0 \quad \forall_i$$

Nota: Observar que en el modelo de PL el lado derecho de las restricciones contiene solamente constantes, las cuales pueden ser cero ó, en algunos casos, negativas. Asimismo, para representar, por ejemplo, la siguiente situación de una variable: $4 \leq x_1 \leq 12$, esto deberá indicarse en *dos restricciones*: $x_1 \geq 4$ y, de manera independiente, $x_1 \leq 12$.

Otras formas del modelo de programación lineal son:

1. Minimizar en lugar de maximizar la función objetivo:
 $\text{Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
2. Algunas restricciones funcionales con desigualdad tipo $\geq$:
 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ para algunos valores de i
3. Algunas restricciones funcionales en forma de ecuación o de igualdad :
 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ para algunos valores de i
4. Algunas variables de decisión sin la restricción de no negatividad (irrestringidas):
 x_j irrestringida para algunos valores de j

Actividades para el lector en la sección 1.4. Metodología para la modelación

- Consultar en al menos dos fuentes bibliográficas, la metodología para la modelación
- Elaborar manualmente un resumen de la terminología
- Establecer las relaciones entre los conceptos
- Discutir los nuevos conceptos en una sesión de aprendizaje colaborativo
- Entregar un reporte, elaborado manualmente y apoyado con:
 - Algún tipo de Mapa Cognitivo (tipo sol, de comparaciones, de cajas, de algoritmo, etc.)
 - Algún tipo de Diagrama (de secuencias, radial, de árbol)

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**

- Habilidad para investigar y analizar nueva información
- Comprensión de nueva terminología
- Integración en diferentes equipos de aprendizaje colaborativo
- Flexibilidad para trabajar en diferentes equipos de trabajo

- **Competencias Específicas**

- Conocer la terminología de la Programación Lineal (PL)
- Conocer las entidades que conforman un problema de PL
- Comprender el concepto de optimización

1.5 FORMULACIÓN DE PROBLEMAS LINEALES MÁS COMUNES

El planteamiento o formulación de problemas de programación lineal (PL) es una de las etapas más interesantes y retadoras para los analistas y estudiantes de la investigación de operaciones.

En el estudio de las ciencias, es muy común aplicar modelos matemáticos preestablecidos para ser utilizados, por ejemplo, en la materia de Física para el tema de la caída libre de los cuerpos. Sin embargo, en la formulación de problemas de PL, a partir de la información contenida en los problemas de diversas instituciones, se extraen los parámetros, condiciones, limitaciones y requerimientos para plasmarlos en un modelo matemático formal, que puede ser procesado manualmente o a través de un paquete computacional, para obtener la solución óptima que apoye la toma de decisiones.

Es conveniente hacer énfasis en que en las *fases de estudio de la IO* descritas anteriormente, la fase 1, que consta de la definición del problema y la recolección de datos relevantes, genera la información base para la elaboración del modelo de PL. Para fines de estudio, se proponen diversos problemas enfocados a diferentes tipos de instituciones.

Entre los problemas de PL más comunes, se encuentran los de producción, dieta, mezclas, financieros, transporte, asignación, decisiones de comprar o rentar, entre otros.

1.5.1 PROBLEMAS PROPUESTOS DE FORMULACIÓN DE PROGRAMACIÓN LINEAL

A continuación se proponen 16 diferentes problemas, seleccionados de los libros referidos en la bibliografía.

Para cada problema, exceptuando los dos formulados en esta sección, hacer lo siguiente:

1. Identificar de qué clase de problema de PL se trata: de producción, dieta, mezclas, financiero, transporte, asignación, etc.
 2. Organizar la información en una tabla.
 3. Definir las variables de decisión.
 4. Plantear la función objetivo, especificando a lo que se refiere, por ejemplo: utilidades, costos, tiempos.
 5. Plantear las restricciones funcionales y las de no negatividad, especificando los recursos de los que se trata por ejemplo: horas de la maquinaria, toneladas de la materia prima, cantidad de dinero.
 6. Realizar un análisis dimensional para la función objetivo y las restricciones bajo estudio.
 7. Visualizar los aspectos éticos y de sustentabilidad que pueden afectar la toma de decisiones involucradas.
-
1. La empresa Helados Gaby vende helados de tres sabores: fresa, vainilla y chocolate. Debido a problemas de planeación, la empresa se encontró con faltantes de algunos de los ingredientes: leche, azúcar y crema, por lo que Gaby no podía cumplir todos los pedidos de sus clientes, y que decidió producir las cantidades óptimas de cada uno de los sabores según las limitaciones impuestas por la disponibilidad de los ingredientes básicos. La empresa pretende limitar las ventas a las tiendas al menudeo. Para eso, consiguió la siguiente información sobre las utilidades provenientes de los distintos sabores de helado, la disponibilidad de los ingredientes y las cantidades requeridas por cada uno de los productos de los distintos sabores. Las utilidades, en pesos por litro de los sabores fresa, vainilla y chocolate, respectivamente, son de 4.00, 3.00 y 3.50. La cantidad de litros de leche a utilizar por cada litro de los sabores mencionados es 0.45, 0.50 y 0.40, teniendo un máximo disponible de 250 litros de leche. En cuanto al azúcar, se cuenta con 100 kilogramos del ingrediente y el consumo de ésta en kilos por cada litro de helado de los referidos sabores es 0.15, 0.10 y 0.12. Para la crema, se tiene un uso en litros por cada litro del producto, de 0.100, 0.125 y 0.120, contándose con un máximo de 80 litros de esta de la materia prima. Se requiere determinar la cantidad óptima que la empresa debe elaborar de cada producto.
 2. Un joyero hace anillos, aretes, prendedores y collares. No quiere trabajar más de 45 horas a la semana. Necesita 2.5 horas para hacer un anillo, 1.5 horas

para elaborar un par de aretes, 1 hora para terminar un prendedor y 3 horas para hacer un collar. Estima que no podrá vender más de 12 anillos, 10 pares de aretes, 11 prendedores y 3 collares en una semana. El joyero cobra \$250 por anillo, \$200 por un par de aretes, \$150 por un prendedor y \$ 500 por un collar. ¿Cuántos anillos, aretes, prendedores y collares debe hacer para tener los máximos ingresos?

3. La Empresa de Alimentos Dado produce pizzas. El joven Mario Dado, dueño de la empresa, supervisa personalmente la producción de los dos tipos de pizza que maneja la empresa: Dado normal y Dado de lujo. Mario obtiene utilidades de \$ 10.00 por cada pizza normal que produzca y \$ 15.00 por cada pizza de lujo. Cuenta normalmente con 100 kilos de masa y 850 onzas de material de recubrimiento. Cada pizza normal requiere 0.500 kg de masa y 4 onzas de recubrimiento, mientras que la pizza de lujo necesita en su elaboración 0.500 kg de masa y 8 de recubrimiento. De acuerdo con la demanda anterior, Mario sabe que puede vender cuando mucho 80 pizzas de lujo y 140 pizzas normales. ¿Cuántas pizzas de cada tipo debe producir para maximizar sus utilidades?
4. Un inversionista tiene \$100,000 pesos que quisiera produjeran tanto dinero como sea posible. Quiere invertir parte de éste en acciones, otra cantidad en bonos y colocar el resto en una cuenta de ahorros. El inversionista cree poder ganar 9 % con el dinero que invierta en acciones y 7 % con el dinero que invierta en bonos. El banco paga el 3% de interés sobre las cuentas de ahorro. Como las acciones son una inversión con cierto riesgo, decide no invertir en acciones más de mitad de lo que invierte en bonos, y no invertir en acciones más de lo que ponga en el banco. El inversionista se quedará con al menos \$10,000 en el banco por si necesita dinero en efectivo de inmediato. ¿Cuánto dinero debe invertir en acciones y en bonos y cuánto debe depositar en el banco?
5. Una empresa manufacturera ha discontinuado la producción de cierta línea de productos que no es rentable, lo cual ha creado un exceso en la capacidad de producción. La administración ha considerado orientar el exceso de capacidad hacia uno o más de tres productos a los que denominaremos 1, 2 y 3. En la Tabla 1.1 se resume la capacidad disponible de las máquinas, lo cual puede limitar las salidas de producción:

Tabla 1.1. Capacidad disponible de las máquinas

Tipo de Máquina	Tiempo Disponible en <i>hr/sem</i>
Molino	600
Torno	400
Fresadora	250

En la Tabla 2.2 se incluye el número de horas de maquinado para cada producto:

Tabla 1.2. Horas de maquinado para cada producto

Coeficiente de productividad (<i>horas máquina/ unidad</i>)			
Tipo Máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Molino	8	5	6
Torno	6	4	0
Fresadora	4	0	3

El departamento de ventas indica que el potencial de ventas para los productos 1 y 2 excede la tasa máxima de producción, además que el potencial de venta del producto 3 es de 30 unidades por semana. La utilidad por unidad es de \$40, \$20 y \$25, respectivamente para los productos 1, 2 y 3. Formule el modelo de programación lineal para determinar cuánto de cada producto deberá producir la firma para maximizar la utilidad.

6. Un ganadero se encuentra criando cerdos para venta y desea determinar las cantidades de los diferentes tipos de alimento que se le deben dar a cada cerdo para lograr ciertos requisitos nutricionales con el mínimo costo. En la Tabla 1.3 se encuentra el valor nutricional por kilo de cada alimento:

Tabla 1.3. Valor nutricional por kilo de cada alimento

Valor Nutricional				
Ingrediente Nutricional	Kg de Maíz	Kg de Suplemento	Kg de Alfalfa	Requisito Mínimo Diario
Carbohidratos	10	3	3	22
Proteínas	4	8	6	20
Vitaminas	1	3	7	16
Costo en pesos	9	12	6	

Formule el modelo de programación lineal para éste problema, de manera que se minimicen los costos.

7. Cierta corporación tiene tres plantas con exceso de capacidad de producción. Todas las plantas tienen la capacidad para producir cierto producto, y la dirección ha decidido utilizar algo de la capacidad en exceso para producir el producto anterior.

El producto se puede fabricar en tres tamaños, grande, mediano y pequeño, lo cual rinde una utilidad de \$40, \$35 y \$20 pesos por pieza, respectivamente. Las plantas 1, 2 y 3 tienen la capacidad para producir 800, 950 y 500

unidades por día de producto, respectivamente, sin importar la combinación de tamaños.

Sin embargo, el espacio disponible para almacenar el inventario en proceso impone una limitación en las tasas de producción, el espacio disponible por día en metros cuadrados de cada planta de la 1 a la 3 respectivamente es: 15,000, 12,000 y 6,000; cada unidad grande, mediana y pequeña requiere 20, 15 y 12 metros cuadrados, respectivamente.

El pronóstico de ventas indica que se pueden vender por día 800 unidades del producto grande, 1250 del mediano y 950 del pequeño.

Para mantener uniformidad en las cargas de trabajo entre las plantas y conservar algo de flexibilidad, la dirección ha decidido que la producción asignada a cada planta deberá emplear el mismo porcentaje de la capacidad.

La dirección desea conocer cuánto de cada tamaño se debe producir por cada planta, con el objeto de maximizar las utilidades por ventas.

8. Una empresa petroquímica que produce materia prima para la elaboración de fibras sintéticas, tiene tres plantas en la República Mexicana y cuenta con cuatro almacenes para su distribución.

La capacidad de producción mensual para las plantas 1, 2 y 3 es de 29,000, 25,000 Y 22,000 toneladas, respectivamente. Asimismo, y dado que el producto se encuentra granulado, se empaqueta en bolsas de media tonelada.

El costo del empaque es de \$19, \$18 y \$20 para las plantas 1, 2 y 3. De acuerdo con datos del departamento de ventas, el pronóstico mensual por almacén es de 24,000, 19,000, 18,000 y 14,000 para los almacenes 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

El producto se transporta de las plantas a los almacenes vía terrestre, siendo los costos de transportación por tonelada como se indica en la Tabla 1.4:

Tabla 1.4. Costos de transportación por tonelada

	Costo de Transporte por tonelada			
Planta	Almacén 1	Almacén 2	Almacén 3	Almacén 4
1	13	14	14	16
2	14	12	15	15
3	15	14	12	17

- Definir las variables de decisión
- Plantear la función objetivo
- Plantear las restricciones

9. El restaurante campestre La Carreta opera siete días a la semana. A los meseros se les contrata para trabajar 8 horas diarias. El contrato del sindicato especifica que cada mesero debe trabajar cinco días consecutivos y después tener dos días consecutivos de descanso. Cada mesero recibe un salario semanal de \$600 pesos. En la Tabla 1.5 se presentan las necesidades de contratación:

Tabla 1.5. Necesidades de contratación

Día	Número mínimo de horas de meseros necesario	Día	Número mínimo de horas de meseros necesario
Lun	150	Vie	700
Mar	200	Sab	800
Mie	400	Dom	600
Jue	300		

Suponer que este ciclo de necesidades se repite en forma indefinida pero debe tomar en cuenta que el número de meseros contratados debe ser un número entero. El gerente desea encontrar un programa de empleo que satisfaga estas necesidades a un costo mínimo. Plantee un modelo de PL que le permita a La Carreta maximizar las utilidades. Definir las variables de decisión. Plantear la función objetivo. Formular las restricciones.

10. Un experimento interesante en la región del mediterráneo es el sistema de kibbutzim, o comunidades agrícolas en Israel. Es común que grupos de éstos se agrupen para compartir servicios técnicos comunes y para coordinar su producción. Por ejemplo la Confederación de Kibbutzim del Sur. La planeación global de dicha confederación se realiza en su oficina de coordinación técnica. Esta oficina normalmente planea la producción agrícola del siguiente año. La producción agrícola de cada kibbutzim está limitada por la cantidad de tierra irrigable disponible y por la cantidad de agua asignada para irrigación, por el comisionado del agua (un oficial del gobierno). Estos datos se presentan en la Tabla 1.6:

Tabla 1.6. Tierra usable y asignación de agua por Kibbutz

Kibbutz	Tierra Usable (acres)	Asignación de Agua (pies-acre)
1	500	700
2	600	900
3	400	475

Los cultivos apropiados para esta región incluyen: betabel, algodón y sorgo; y son los únicos que se consideran para la próxima temporada de siembra. Estos cultivos difieren principalmente en su ingreso neto esperado por acre y su consumo de agua. Además, el ministerio de agricultura ha fijado una

cuota máxima para el área total (en acres) que puede dedicarse a cada uno de estos cultivos, por la Confederación de Kibbutzim del Sur, como se muestra en la Tabla 1.7:

Tabla 1.7. Cultivos, cuota máxima, consumo de agua e ingreso neto

Cultivo	Cuota Máxima (Acres)	Consumo de Agua (pies-acre/acre)	Ingreso Neto (dólares/acre)
Betabel	800	3.2	450
Algodón	600	2.5	380
Sorgo	400	1.4	150

Los kibbutzim que pertenecen a la Confederación del Sur, han acordado que cada uno de ellos plantará la misma proporción de su tierra irrigable disponible. Sin embargo, cualquier combinación de cultivos puede sembrarse en cualquiera de ellos.

El trabajo que debe resolver la oficina de coordinación técnica es planear cuántos acres dedicar a cada cultivo en el kibbutz respectivo, satisfaciendo las restricciones anteriores. El objetivo es maximizar el ingreso neto total de la Confederación del Sur.

11. La compañía M & G se especializa en la fabricación de partes para la industria automotriz. En la actualidad, tiene un problema de capacidad y se ve obligada a comprar partes a una empresa competidora para poder satisfacer las demandas que tiene comprometidas. El problema que enfrenta M & G es: la empresa tiene cuatro productos, los cuales se fabrican en seis máquinas. En la Tabla 1.8 se muestran los tiempos de producción (en horas) necesarios para fabricar los productos.

Tabla 1.8. Tiempos de producción (hrs) para fabricar los productos

Producto	Maq. 1	Maq. 2	Maq. 3	Maq. 4	Maq. 5	Maq. 6
1	0.08	0.06	0.04	0	0.08	0.16
2	0	0.04	0.12	0.30	0.16	0.14
3	0.06	0.16	0	0.16	0.60	0.40
4	0.14	0.08	0.36	0	0	0.12

Existen 100 horas por semana de tiempo disponible en cada una de las máquinas. M & G ha comprometido un pedido de 600, 480, 260 Y 460 unidades por semana para cada producto, respectivamente. Los costos de manufactura para los cuatro productos son \$2.80, \$2.20, \$4.40 y \$2.60. Si la compañía compra las partes con el competidor externo, los precios de compra son \$3.60, \$2.90, \$4.90 y \$3.30, respectivamente.

Plantee un modelo de PL que pueda utilizarse para identificar las cantidades de los cuatro productos que M & G debe *fabricar* y las cantidades que debe

comprar con el objeto de minimizar los costos. Definir las variables de decisión. Plantear la función objetivo. Formular las restricciones.

12. Un industrial desea determinar el programa óptimo para tres mezclas distintas que hace con diferentes proporciones de pistaches, nueces y cacahuates. Las especificaciones de cada una de ellas son: la mezcla 1 debe contener 50 % de pistaches como mínimo, 25% de cacahuates como máximo y 30% máximo de nuez; el kilogramo de ésta mezcla se vende a 200 pesos. El segundo tipo debe contener el 20% de pistaches por lo menos, y un 50% de cacahuates cuando más, exactamente 15% de nuez y se vende a 150 pesos el kg. El tercer tipo tiene un mínimo de 80 y un máximo de 90% de cacahuete, un mínimo de 5% de pistaches y un máximo de 3% de nueces y se vende a 100 pesos el kg.

Sin embargo, están restringidas las cantidades de las materias primas que puede conseguir el industrial: las máximas por período son: 400 kilogramos de pistaches, 800 kilogramos de cacahuates y 380 kilogramos de nueces. Cada kilogramo de pistaches cuesta 90 pesos, el kilogramo de cacahuates 35 pesos y el kilogramo de nueces 98 pesos.

Se trata de determinar cuántos kilogramos se deben preparar de cada mezcla, de manera que se obtengan las máximas utilidades.

(Nota: Utilidad = Ingresos - Costos)

- Especificar las variables de decisión utilizando dos subíndices
- Plantear la función objetivo
- Plantear las restricciones

13. Una refinería produce tres grados (A, B, C) de gasolina a partir de tres diferentes fuentes de petróleo crudo (1, 2, 3). Cualquier crudo puede usarse para producir cualquiera de las gasolinas, siempre y cuando se cumplan las especificaciones indicadas en la Tabla 1.9:

Tabla 1.9. Especificaciones y precio de las gasolinas

Grado de gasolina	Especificaciones	Precio de venta (dólares/galón)
A	No más del 15% del crudo 1 No menos del 35% del crudo 2 Sin especificación para el crudo 3	3.20
B	No menos del 25% del crudo 1 No más del 45% del crudo 2 Exactamente 10% del crudo 3	3.80
C	Cuando menos 55% del crudo 1 No más del 40% del crudo 2 No contiene crudo 3	4.00

En la Tabla 1.10 se muestran la cantidad máxima de los petróleos crudos disponibles por periodo y sus costos.

Tabla 1.10. Cantidad máxima de los crudos disponibles y sus costos

Crudo	Disponibilidad (barriles)	Costo (dólares/galón)
1	24,000	2.90
2	16,000	2.50
3	12,000	2.20

La refinería requiere maximizar las utilidades. **Nota:** Se requiere convertir los barriles a galones y calcular las utilidades como sigue:

$$\text{Utilidades} = \text{Ingresos por Venta} - \text{Costos}$$

14. El gobierno de un estado requiere estudiar una importante autopista, para la cual se ha recolectado información. Cada hora, un promedio de 900 autos entra a la red de una carretera, la cual se representa en la figura 1.1, ingresando en el nodo 1 y viajando al nodo 6.

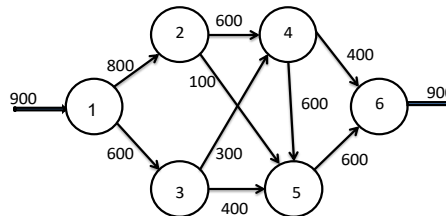


Diagrama de red de la Carretera

Figura 1.1. Diagrama de la autopista

El tiempo que tarda un auto en recorrer cada arco se muestra en la Tabla 1.11:

Tabla 1.11 Tiempos promedio de viaje entre los arcos

Tiempos de Viaje (minutos)					
Arco	Tiempo	Arco	Tiempo	Arco	Tiempo
(1,2)	10	(2,5)	70	(4,5)	30
(1,3)	50	(3,4)	10	(4,6)	60
(2,4)	30	(3,5)	60	(5,6)	30

Formular un modelo de red que minimice el tiempo total requerido para que los automóviles viajen del nodo 1 al nodo 6.

15. La Fábrica Nacional de Cerveza tiene plantas ubicadas en el Distrito Federal, Guadalajara, Monterrey, Tijuana y Mérida. La Fábrica Nacional de Latas, subsidiaria de la fábrica Nacional de Cerveza, tiene plantas ubicadas en Puebla, Torreón y Celaya. Las latas de cerveza abiertas, se retornan a la Fundidora Nacional de Aluminio, en donde se reconvierten en aluminio y se envían a la fábrica de latas.

La Tabla 1.12 presenta el pronóstico de la demanda mensual de latas de cerveza.

Tabla 1.12. Pronóstico de la demanda de latas de cerveza

Planta de Cerveza	Demanda Mensual de Latas
DF	6,000,000
Guadalajara	2,000,000
Monterrey	900,000
Tijuana	400,000
Mérida	400,000

La producción máxima mensual de latas se incluye en la Tabla 1.13:

Tabla 1.13. Producción máxima de latas

Planta de Latas	Capacidad Mensual de Producción de Latas
Puebla	3,000,000
Torreón	3,500,000
Celaya	2,500,000

Los fletes están en función de las distancias que existen entre las plantas productoras de cerveza y las plantas productoras de latas. En la Tabla 1.14 se muestra el costo de los fletes, expresado en pesos por transportar 1000 latas.

Tabla 1.14. Costo de los fletes, pesos por mil latas

Origen:	Destino:		
	Puebla	Torreón	Celaya
DF	6	21	16
Guadalajara	21	16	3
Monterrey	26	3	11
Tijuana	76	51	46
Mérida	46	75	61

Bajo éstas condiciones ¿qué programa de distribución mensual de latas se debiera establecer a fin de satisfacer la demanda mensual en las fábricas de cerveza, sin exceder la producción mensual y todo a costo mínimo? Las unidades del programa de distribución mensual se dan en miles de latas.

- Definir las variables de decisión.

- b. Plantear la función objetivo.
- c. Plantear las restricciones.

16. Un avión de carga tiene tres compartimientos para almacenar: delantero, central y trasero. Estos compartimientos tienen un límite de capacidad tanto en peso como en espacio. Los datos se resumen en la Tabla 1.15:

Tabla 1.15. Capacidad de peso y espacio por compartimiento

Compartimiento	Capacidad de Peso (toneladas)	Capacidad de Espacio (pies cúbicos)
Delantero	14	8,000
Central	18	9,000
Trasero	12	6,000

Más aún, para mantener el avión balanceado, el peso de la carga en los respectivos compartimientos debe ser proporcional a su capacidad. Se tienen ofertas para cuatro cargamentos en un vuelo próximo ya que se cuenta con espacio disponible.

Tabla 1.16. Peso, volumen y ganancia para las cargas

Carga	Peso (toneladas)	Volumen (pies ³ /ton)	Ganancia (\$/ton)
1	20	600	350
2	16	800	380
3	25	700	340
4	13	500	300

Se puede aceptar cualquier fracción de estas cargas. El objetivo es determinar qué cantidad de carga debe aceptarse (si se acepta) y como distribuirla en los compartimientos para maximizar la ganancia del vuelo.

Formule un modelo de programación lineal para éste problema.

A manera de ejemplo, se plantearán los problemas número 1, con variables de decisión de un solo subíndice, y el número 7, con variables de dos subíndices.

1.5.1.1. PLANTEAMIENTO O FORMULACIÓN DEL PROBLEMA 1

Siguiendo los siete pasos que deben seguirse en la formulación de problemas lineales, para este problema se tiene lo siguiente:

1. Se trata de un problema de *producción*, en el que deben determinarse las cantidades que deben elaborarse de cada producto.
2. En la Tabla 1.17 se resumen los datos del problema:

Tabla 1. 17. Datos del Problema 1

Sabor	Utilidad por lt (\$/l)	Uso por litro		
		Leche (lt leche/lt helado)	Azúcar (kg/lt helado)	Crema (lt crema/ lt helado)
Fresa	4.0	0.45	0.15	0.100
Vainilla	3.0	0.50	0.10	0.125
Chocolate	3.5	0.40	0.12	0.120
Máximo Disponible		250	100	80

3. Las variables de decisión son:

La cantidad de helado de cada sabor. No se especifica algún periodo de tiempo, por lo que la unidad de medida son litros (lt).

X_1 = Litros (lt) de helado sabor fresa

X_2 = Litros (lt) de helado sabor vainilla

X_3 = Litros (lt) de helado sabor chocolate

4. La función objetivo es:

Se trata de un problema de maximización (MAX), pues al analizar la información, se cuenta con datos de utilidades. Entonces:

$$\text{MAX } Z = 4 X_1 + 3 X_2 + 3.5 X_3 \quad (\text{Maximizar utilidades, \$})$$

$$\text{\$} = (\text{\$/lt}) (\text{lt})$$

5. Las restricciones son:

Se tienen los recursos: leche (lt), azúcar (kg), y crema (lt), las cuales tienen cantidades limitadas:

$$0.45 X_1 + 0.50 X_2 + 0.40 X_3 \leq 250 \quad (\text{Cantidad de leche, lt})$$

$$(\text{lt/lt}) (\text{lt})$$

$$0.15 X_1 + 0.10 X_2 + 0.12 X_3 \leq 100 \quad (\text{Cantidad de azúcar, kg})$$

$$(\text{kg/lt}) (\text{lt})$$

$$0.10 X_1 + 0.125 X_2 + 0.12 X_3 \leq 80 \quad (\text{Cantidad de crema, lt})$$

$$(\text{lt/lt}) (\text{lt})$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \quad (\text{No negatividad})$$

6. El análisis dimensional se incluyó previamente en la función objetivo y restricciones.

7. Los aspectos éticos y de sustentabilidad pueden ser, entre otros:

Aspectos Éticos: La empresa enfrenta una demanda muy alta de productos, pero tiene faltante de materias primas; para evitar racionar las ventas, existe la opción de comprar productos sustitutos, los cuales son de fácil acceso y más baratos, pero eso está en contra de los valores que debe tener la empresa de helados, como son ofrecer la mejor calidad del producto, así como la seriedad y compromiso. Ante todo, debe tenerse presente que nunca deben comprometerse los valores y el prestigio de una institución.

Aspectos de Sustentabilidad. La empresa debe luchar por su propia existencia y también tener respeto por el medio ambiente, por lo cual es necesario que revise sus políticas de pronósticos, a fin de que se consideren las variaciones climáticas que la afectan directamente.

Resumiendo, el modelo para el problema 1 es:

$$\text{MAX } Z = 4 X_1 + 3 X_2 + 3.5 X_3 \quad (\text{Maximizar utilidades, \$})$$

SA:

$$0.45 X_1 + 0.50 X_2 + 0.40 X_3 \leq 250 \quad (\text{Cantidad de leche, lt})$$

$$0.15 X_1 + 0.10 X_2 + 0.12 X_3 \leq 100 \quad (\text{Cantidad de azúcar, kg})$$

$$0.10 X_1 + 0.125 X_2 + 0.12 X_3 \leq 80 \quad (\text{Cantidad de crema, lt})$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \quad (\text{No negatividad})$$

1.5.1.2. PLANTEAMIENTO O FORMULACIÓN DEL PROBLEMA 7

De acuerdo con los siete pasos que deben seguirse en la formulación de problemas lineales, para este problema se tiene lo siguiente:

1. Se trata de un problema de *producción*, en el que se desea conocer cuánto de cada tamaño se debe producir por cada planta.
2. Para organizar la información debe dedicarse un tiempo al análisis de las variables de decisión, pues dan una pauta a seguir. El último párrafo del problema menciona "...la dirección desea conocer cuánto de cada tamaño se debe producir por cada planta...", esto sugiere que las variables de decisión tendrán dos subíndices: uno para el tamaño y otro para la planta.

Los datos deben colocarse en una matriz como se indica en la Tabla 1.18. Notar que deben relacionarse las tres plantas con los tres tamaños del producto. Asimismo, conviene especificar las unidades para cada rubro:

Tabla 1.18. Datos del Problema 7

Planta	Producto				
	Grande A <i>unidad/día</i>	Mediano B <i>unidad/día</i>	Pequeño C <i>unidad/día</i>	Capacidad <i>unidad/día</i>	Espacio de almacenamiento <i>m²/día</i>
1	X_{A1}	X_{B1}	X_{C1}	800	15,000
2	X_{A2}	X_{B2}	X_{C2}	950	12,000
3	X_{A3}	X_{B3}	X_{C3}	500	6,000
Ganancia <i>\$/unidad</i>	40	35	20		
Espacio de Almacenamiento Unitario <i>m²/unidad</i>	20	15	12		
Pronóstico de Ventas <i>unidad/día</i>	850	1250	950		

3. Las variables de decisión son:

X_{A1} = unidades/día de producto A elaborado en la planta 1

.....

X_{C3} = unidades/día de producto C elaborado en la planta 3

Como se tienen nueve variables de decisión, es más recomendable agruparlas como sigue:

X_{ij} = unidades/día de producto i ($i = A, B, C$) elaborado en la planta j ($j = 1, 2, 3$)

4. La función objetivo es:

Se trata de un problema en el cual se requieren maximizar (MAX) las ganancias:

$$\text{MAX } Z = 40(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) + 35(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}) + 20(X_{C1} + X_{C2} + X_{C3})$$

(Maximizar ganancias, \$)

$$\text{\$} = (\text{\$/unidad}) (\text{unidad/día})$$

5. Las restricciones son:

Se tienen los recursos de capacidad por cada planta, el pronóstico de ventas para cada tamaño del producto, así como el espacio de almacenamiento en cada planta.

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} \leq 800 \quad (\text{Capacidad de la planta 1})$$

(unidad/día) (unidad/día)

$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} \leq 950 \quad (\text{Capacidad de la planta 2})$$

$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} \leq 500 \quad (\text{Capacidad de la planta 3})$$

Nota: En este caso, el problema trata de un *pronóstico* de ventas de los productos, por lo que se considera una restricción tipo $\leq$; sin embargo, si se establece el término *demanda*, éste normalmente se considera que debe cumplirse exactamente, entonces se trata de una restricción tipo $=$.

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \leq 850 \quad (\text{Pronóstico de ventas del producto A})$$

(unidad/día) (unidad/día)

$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \leq 1250 \quad (\text{Pronóstico de ventas del producto B})$$

$$X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} \leq 950 \quad (\text{Pronóstico de ventas del producto C})$$

$$20X_{A1} + 15X_{B1} + 12X_{C1} \leq 15,000 \quad (\text{Espacio Almacenamiento en planta 1})$$

(m²/unidad) (unidad/día) (m²/día)

$$20X_{A2} + 15X_{B2} + 12X_{C2} \leq 12,000 \quad (\text{Espacio Almacenamiento en planta 2})$$

$$20X_{A3} + 15X_{B3} + 12X_{C3} \leq 6,000 \quad (\text{Espacio Almacenamiento en planta 3})$$

Adicionalmente, este problema establece que *la producción asignada a cada planta deberá emplear el mismo porcentaje de la capacidad*, y se refiere a que, si por ejemplo, la planta 1 está al 85% de su capacidad, lo

mismo deberá hacerse para las plantas 2 y 3. Entonces, esta situación se puede representar como sigue:

$$(X_{A1} + X_{B1} + X_{C1}) / 800 = (X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}) / 950 = (X_{A3} + X_{B3} + X_{C3}) / 500$$

Anteriormente se comentó que la formulación de problemas de programación lineal solamente puede manejarse en el modelo una igualdad o desigualdad, por lo que si, por ejemplo, se tiene que $x_1 = x_2 = x_3$, entonces deben especificarse dos igualdades: $x_1 = x_2$ y, de manera independiente, $x_2 = x_3$, consecuentemente $x_1 = x_3$ por lo que esta última igualdad no debe indicarse, ya que es redundante.

Entonces, se igualarán los porcentajes de capacidad de las plantas 1 y 2 y posteriormente, los de la 2 con la 3 (también puede ser la 1 con la 3)

$$(X_{A1} + X_{B1} + X_{C1}) / 800 = (X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}) / 950$$

$$(unidad/día) / (unidad/día) \quad (unidad/día) / (unidad/día)$$

$$(X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}) / 950 = (X_{A3} + X_{B3} + X_{C3}) / 500$$

Finalmente, se establece la restricción de no negatividad:

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall_{i,j} \text{ (para todo valor de } i \text{ y } j) \text{ (No negatividad)}$$

Nota: Observar que los porcentajes son adimensionales (no cuentan con unidad de medida)

Realizando álgebra, se obtienen las ecuaciones que representan el balance de la capacidad en el formato requerido por el modelo de PL:

$$950(X_{A1} + X_{B1} + X_{C1}) - 800(X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}) = 0 \quad (\text{Balance de capacidad d plantas 1 y 2})$$

$$500(X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}) - 950(X_{A3} + X_{B3} + X_{C3}) = 0 \quad (\text{Balance de capacidad d plantas 2 y 3})$$

6. El análisis dimensional se incluyó previamente en la función objetivo y las restricciones.
7. Los aspectos éticos y de sustentabilidad pueden ser, entre otros:

Aspectos Éticos. La empresa debe comprometerse a cumplir con el nivel de calidad ofrecido a sus clientes así como a las legislaciones y normatividades vigentes de tipo laboral, fiscal, social, de salud y ambiental, entre otras.

Aspectos de Sustentabilidad. El hecho de que la empresa procure mantener uniformidad entre las cargas de trabajo muestra que se preocupa por el balance que debe existir en la asignación de los recursos. El problema no especifica de qué tipo de productos se trata, pero en cualquier caso, debe respetar aspectos del medio ambiente, con medidas como dar tratamiento a gases de proceso, de combustión y aguas residuales, reforestar las zonas aledañas a las instalaciones industriales, habilitar contenedores para clasificar los diferentes tipos de desechos, capacitar a su personal para que clasifique los tipos de basura generada, entre otras iniciativas recomendadas.

Resumiendo, el modelo para el problema 9 es:

$$\text{MAX } Z = 40(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) + 35(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}) + 20(X_{C1} + X_{C2} + X_{C3})$$

(Maximizar ganancias, \$)

SA:

$$\begin{aligned} X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} &\leq 800 && \text{(Capacidad de la planta 1)} \\ X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} &\leq 950 && \text{(Capacidad de la planta 2)} \\ X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} &\leq 500 && \text{(Capacidad de la planta 3)} \\ X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} &\leq 850 && \text{(Pronóstico de ventas del producto A)} \\ X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} &\leq 1250 && \text{(Pronóstico de ventas del producto B)} \\ X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} &\leq 950 && \text{(Pronóstico de ventas del producto C)} \\ 20X_{A1} + 15X_{B1} + 12X_{C1} &\leq 15,000 && \text{(Espacio Almacenamiento en planta 1)} \\ 20X_{A2} + 15X_{B2} + 12X_{C2} &\leq 12,000 && \text{(Espacio Almacenamiento en planta 2)} \\ 20X_{A3} + 15X_{B3} + 12X_{C3} &\leq 6,000 && \text{(Espacio Almacenamiento en planta 3)} \\ 950(X_{A1} + X_{B1} + X_{C1}) - 800(X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}) &= 0 && \text{(Balance de capacidad d plantas 1 y 2)} \\ 500(X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}) - 950(X_{A3} + X_{B3} + X_{C3}) &= 0 && \text{(Balance de capacidad d plantas 2 y 3)} \\ X_{ij} &\geq 0 \quad \forall_{i,j} && \text{(No negatividad)} \end{aligned}$$

Nota: Este problema cuenta con 12 restricciones, de las cuales 11 son funcionales. A medida que se incrementa el número de subíndices de las variables de decisión, éstas se incrementan, pudiendo ser cientos o miles de dichas variables en un modelo.

Actividades para el Lector en la sección 1.5. Formulación de problemas lineales más comunes

Para cada problema, exceptuando los dos formulados en esta sección, hacer lo siguiente:

1. Identificar de qué clase de problema de PL se trata: de producción, dieta, mezclas, financiero, transporte, asignación, etc.
2. Organizar la información en una tabla
3. Definir las variables de decisión
4. Plantear la función objetivo, especificando a lo que se refiere (p. ej: utilidades, costos, tiempos)
5. Plantear las restricciones funcionales y las de no negatividad, especificando los recursos de los que se trata (p. ej: horas en la maquinaria, toneladas de la materia prima, cantidad de dinero)
6. Realizar un análisis dimensional para la función objetivo y las restricciones bajo estudio
7. Visualizar los aspectos éticos y de sustentabilidad que pueden afectar la toma de decisiones involucradas

Competencias a desarrollar o reforzar:

• Competencias Genéricas

- Capacidad de análisis, síntesis y de abstracción
- Capacidad para formular modelos matemáticos

- Aplicación de nuevos conceptos
- Trabajo en equipo con diferentes compañeros
- Habilidad para comprender como se aplican los principios éticos y de sustentabilidad
- **Competencias Específicas**
 - Formular problemas de programación lineal (PL)
 - Aplicar conceptos de la Programación Lineal como optimización, función objetivo, variables de decisión, recursos, restricciones, coeficientes tecnológicos, condición de no negatividad.
 - Comprender que los principios éticos y de sustentabilidad deben regir la toma de decisiones
 - Aplicar el análisis dimensional en modelos de programación lineal

1.6 CONCEPTOS DEL MÉTODO GRÁFICO Y SU APLICACIÓN

Un modelo se puede resolver en forma gráfica cuando contenga solamente dos variables; una desventaja es que para aproximadamente más de doce restricciones, es impráctico. El método gráfico servirá como base para el desarrollo del método de solución general de problemas de programación lineal.

La solución gráfica de un problema de dos variables ofrece una base para la técnica general de solución, denominada método Simplex, que se estudiará en la Unidad 2. Es importante estudiar el método gráfico, ya que mediante éste pueden identificarse fácilmente conceptos importantes como la región factible, los puntos extremos y la solución óptima, así como los tipos de solución.

1.6.1. Descripción del Método Gráfico

El procedimiento gráfico consta de dos pasos básicos:

1. La determinación del espacio de solución que define las soluciones factibles que satisfacen todas las restricciones del modelo.
2. Establecer la solución óptima entre todos los puntos en el espacio de solución factible.

1.6.2. Solución de un Modelo de Maximización de forma Gráfica

Ejemplo. La compañía Reddy Mikks (Taha, 1998, p.11) posee una pequeña fábrica de pinturas que produce colorantes para interiores y exteriores de casas para su distribución al mayoreo. Se utilizan dos materiales básicos, A Y B para

producir las pinturas. La disponibilidad máxima de A es de 6 toneladas diarias y la de B es de 8 toneladas por día. Los requisitos diarios de materias primas por tonelada de pinturas para interiores y exteriores se resumen en la Tabla 1.19:

Tabla 1.19. Datos de la Fábrica de Pinturas

	Toneladas de materia prima por tonelada de pintura		Disponibilidad máxima (toneladas)
	Exterior	Interior	
Materia Prima A	1	2	6
Materia Prima B	2	1	8

Un estudio del mercado ha establecido que la demanda diaria de pinturas para interiores no puede ser mayor que la pintura para exteriores en más de una tonelada. El estudio señala asimismo, que la demanda máxima de pinturas para interiores está limitada a dos toneladas diarias. El precio al mayoreo por la tonelada es de \$3,000 para la pintura de exteriores y \$ 2,000 para la pintura de interiores. ¿Cuánta pintura para exteriores e interiores debe producir la compañía todos los días para maximizar el ingreso bruto?

Realizando la construcción del *modelo matemático de programación lineal* para el problema mostrado anteriormente, se tiene lo siguiente:

Variables de Decisión:

X_1 = toneladas de pintura para exteriores producidas diariamente

X_2 = toneladas de pintura para interiores producidas diariamente

Función Objetivo:

Max $Z = 3 X_1 + 2 X_2$ (Maximizar utilidades, miles de dólares)

SA:

$X_1 + 2 X_2 \leq 6$ (Uso de materia prima 1)

$2 X_1 + X_2 \leq 8$ (Uso de materia prima 2)

$- X_1 + X_2 \leq 1$ (Exceso de producción diaria de pinturas para interiores y exteriores no debe exceder 1 ton)

$X_2 \leq 2$ (Demanda diaria de la pintura para interiores)

$X_E \geq 0, \quad X_2 \geq 0$

1.6.2.1. Pasos para la Solución Gráfica del Modelo de Programación Lineal

El primer paso del método gráfico consiste en representar las soluciones factibles o el espacio de solución, que satisfaga todas las restricciones en forma simultánea. Las restricciones de no negatividad $X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$ confinan todos

los valores factibles al primer cuadrante, éste debe estar definido por el espacio de arriba de 0 sobre el eje X_1 y a la derecha de 0 sobre el eje X_2 .

El espacio encerrado por las restricciones restantes se determina sustituyendo el primer término ($\leq$) por ($=$) para cada restricción, con lo cual se produce la ecuación de una línea recta. Después se traza cada línea recta en el plano (X_1, X_2) y la región en la cual se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad lo indica la dirección de la flecha situada sobre la línea recta asociada.

El espacio de soluciones resultante se muestra en la figura 1.1, por medio del área ABCDEF. Se deberá comprobar que las flechas de cada restricción representen en realidad la desigualdad asociada. Este espacio de soluciones se denomina la **región factible**.

La **región factible** es el conjunto de todos los puntos que satisfacen completamente las restricciones del modelo. Cualquier punto que no pertenece a la región factible es un **punto no factible o infactible**.

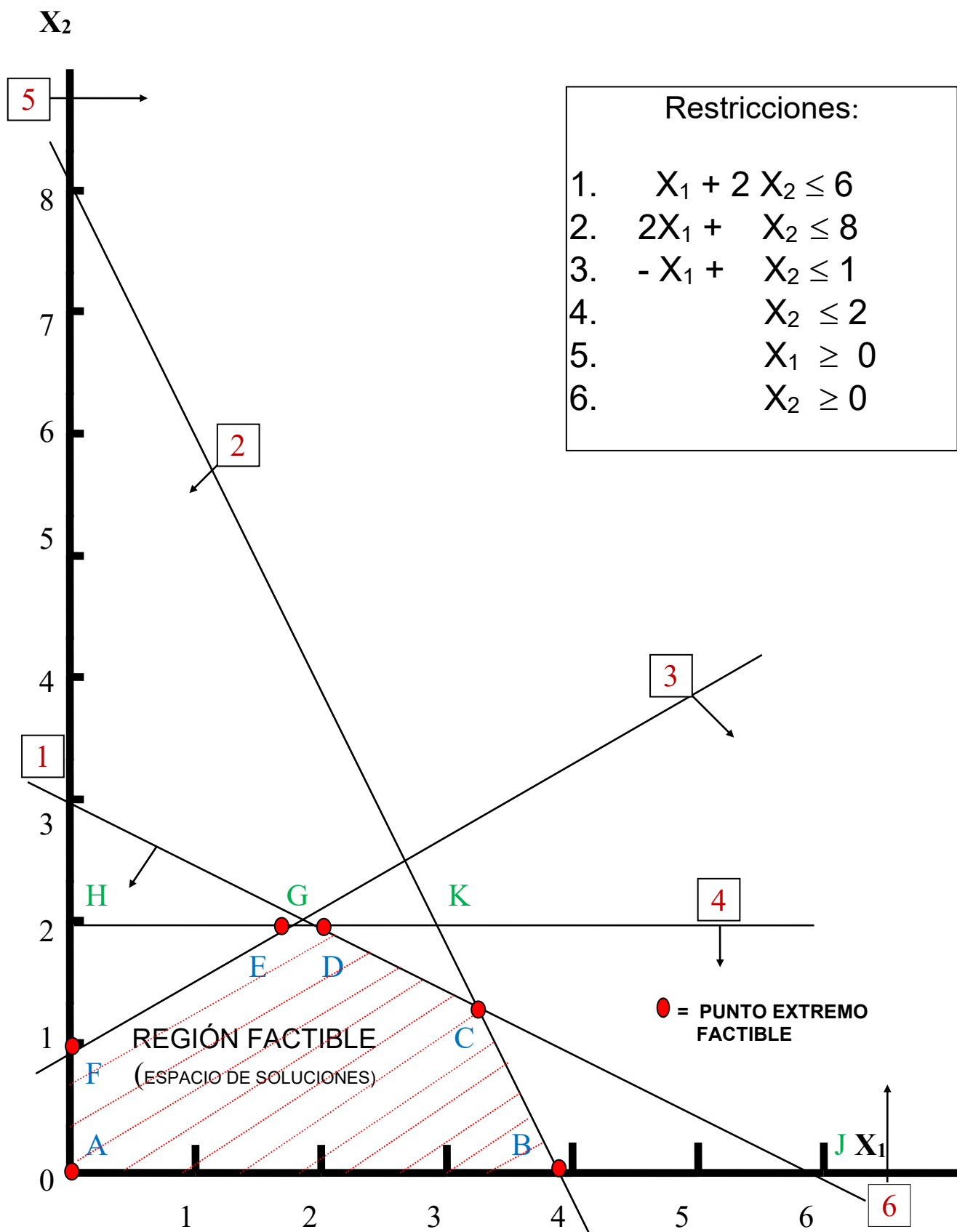
Cada punto contenido o situado en la frontera del espacio de soluciones ABCDEF satisface todas las restricciones y por consiguiente, representa un **punto extremo factible o vértice**; aunque hay un número infinito de puntos factibles en el espacio de soluciones, la solución óptima puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo, como se ilustra en la Figura 1.2.

Las líneas paralelas que representan la función objetivo se trazan mediante la asignación de valores crecientes (arbitrarios) a la función $Z = 3X_1 + 2X_2$, a fin de determinar la pendiente y la dirección en la cual crece el ingreso total. En la figura 1.2 se utilizó $Z = 6$ y $Z = 9$. Estas líneas paralelas se denominan **rectas de isoutilidades**, debido a que cada una de ellas tiene una utilidad constante.

Para un problema de maximización, una **solución óptima** para un problema de programación lineal es un punto con el valor más grande de la función objetivo en la región factible. De igual manera, para un problema de minimización, una solución óptima es un punto con el valor de la función objetivo más pequeño en la región factible.

A fin de obtener la solución óptima se desplaza la recta de la función objetivo en la dirección en la cual aumenta su valor, hasta el punto donde cualquier incremento adicional en el ingreso produciría una solución infactible. La figura 1.3 ilustra que la solución óptima ocurre en el punto C.

La **solución óptima** siempre está asociada con un **punto extremo factible o vértice**; aun cuando se cambie la pendiente de la función objetivo Z , el óptimo será otro de esos puntos esquina. Esta característica es la idea clave para el desarrollo del *Algoritmo Simplex*, que se estudia en la Unidad 2.



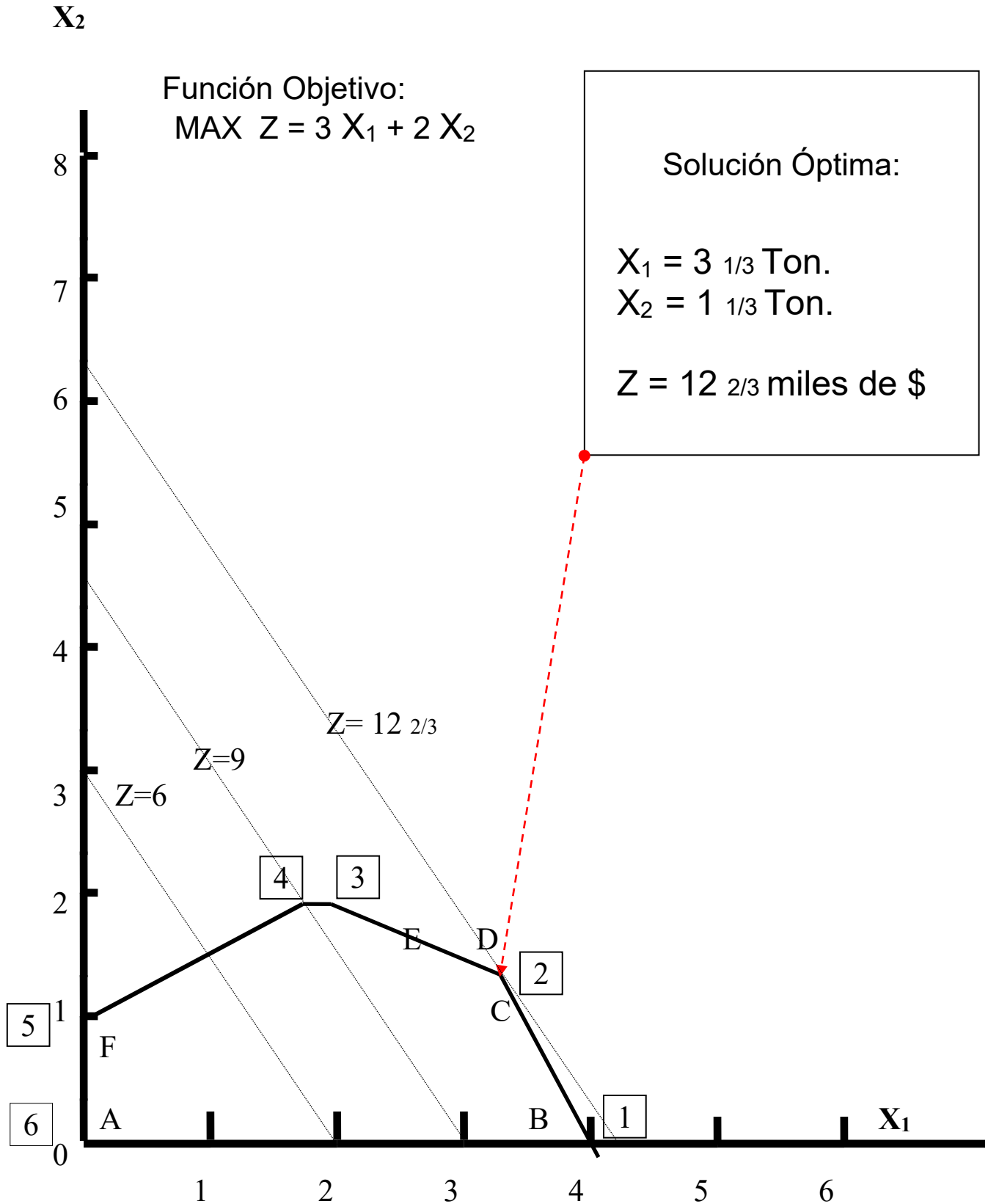


FIGURA 1.3. DETERMINACIÓN DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

Para el punto esquina óptimo se determina que: $X_1 = 3 \frac{1}{3}$ y $X_2 = 1 \frac{1}{3}$

Utilizando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones, la solución indica que la producción diaria debe ser de $3 \frac{1}{3}$ toneladas de pintura para exteriores y de $1 \frac{1}{3}$ toneladas de pintura para interiores. El ingreso respectivo es:

$$Z = 3 \left(3 \frac{1}{3}\right) + 2 \left(1 \frac{1}{3}\right) = 12 \frac{2}{3} \text{ (miles de \$)}$$

Por lo que se terminó el proceso de solución, ya que finalmente se obtuvo la solución óptima que maximiza la función objetivo.

Aspectos Éticos. Es necesario que la compañía cumpla cabalmente las legislaciones y normatividades vigentes de tipo laboral, fiscal, social, de salud y ambiental, entre otras. Asimismo, debe ofrecer el nivel de calidad de las pinturas para interiores y exteriores en cuanto a color, textura, poder cubriente y durabilidad ofrecido a sus clientes.

Aspectos de Sustentabilidad. La compañía de pinturas debe respetar aspectos del medio ambiente, con medidas como dar tratamiento a sus aguas residuales, desechar debidamente los residuos de pigmentos, resinas o los solventes involucrados en el proceso. Asimismo, participar en la reforestación de las zonas aledañas a sus instalaciones, habilitar contenedores para clasificar los diferentes tipos de desechos, capacitar a su personal para que clasifique los tipos de basura generada, entre otras iniciativas recomendadas.

Es importante mencionar que existen apoyos para realizar el método gráfico, se recomienda al lector utilizar el paquete de software **TORA** (Taha), el cual se describe posteriormente a detalle en la sección 2.5.

Es conveniente tomar en cuenta las siguientes consideraciones para el método gráfico:

- Los vértices o puntos extremos son las esquinas de una región factible.
- La función objetivo se va a optimizar sólo dentro del conjunto de decisiones factibles.
- Cuando existe una solución óptima, ésta se encuentra en un vértice.
- Las restricciones redundantes son aquellas que al ser retiradas no alteran la región factible.
- Al añadir más restricciones, se reduce la región factible o queda igual.
- Una restricción es activa cuando pasa por la solución óptima e inactiva cuando no lo hace.
- La solución óptima depende por completo de las restricciones activas.

1.6.3. Problemas Propuestos del Método Gráfico

Resolver con el método gráfico los problemas siguientes, utilizando el paquete computacional TORA® descrito en la sección 2.5 y hacer lo siguiente:

- A. Identificar la región factible, los puntos extremos factibles, la función objetivo y la solución óptima.
 - B. Explicar en palabras accesibles para el tomador de decisiones, qué significa la solución obtenida.
 - C. Indicar en qué casos existiría más de una solución y explicar porqué puede ocurrir esta situación.
1. Para el siguiente problema de la empresa *Protrac* (Eppen, et al., 2000) cuyo modelo es:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = 5000 E + 4000 F & \text{(maximizar utilidades, dlls)} \\ \text{SA:} & \\ 10 E + 15 F \leq 150 & \text{(Horas depto. A)} \\ 20 E + 10 F \leq 160 & \text{(Horas depto. B)} \\ 30 E + 10 F \geq 135 & \text{(Horas depto de Verificación)} \\ E - 3 F \leq 0 & \text{(Mezcla de Producción, unidades)} \\ E + F \geq 5 & \text{(Total de Unidades)} \\ E \geq 0, F \geq 0 & \text{(No negatividad)} \end{array}$$

Donde: E = Número de tractores tipo E
F = Número de tractores tipo F

2. Para un negocio que fabrica pizzas y desea maximizar sus utilidades, teniendo el siguiente modelo:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = 0.80 X_1 + 1.20 X_2 & \text{(maximizar utilidades, dlls)} \\ \text{SA:} & \\ X_1 + X_2 \leq 160 & \text{(Libras de masa)} \\ 4 X_1 + 8 X_2 \leq 800 & \text{(Onzas de recubrimiento)} \\ X_1 \leq 125 & \text{(Pronóstico de ventas de pizzas normales)} \\ X_2 \leq 75 & \text{(Pronóstico de ventas de pizzas de lujo)} \\ X_1, X_2 \geq 0 & \end{array}$$

Donde : X_1 = Número de pizzas normales
 X_2 = Número de pizzas de lujo

3. Resolver: $\text{Min } Z = 2X_1 + 5X_2.$

$$\begin{aligned} \text{S.A.} \quad & 4X_1 + 4X_2 \geq 24 \\ & 6X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ & 4X_1 + 5X_2 \leq 40 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4. En el problema anterior cambiar la función objetivo a: $\text{Max } Z = 5X_1 + 4X_2$, y encontrar la solución óptima.

Actividades para el Lector en la sección 1.6. Conceptos del método gráfico y su aplicación

- Resumir la terminología del método gráfico.
- Resolver con el método gráfico los problemas propuestos, utilizando el paquete computacional Tora® (*Taha, 1998, p.871*) y hacer lo siguiente:
 1. Identificar la región factible, los puntos extremos factibles, la función objetivo y la solución óptima.
 2. Explicar en palabras accesibles para el tomador de decisiones, qué significa la solución obtenida.
 3. Indicar en qué casos existiría más de una solución y explicar por qué puede ocurrir esta situación.
- Entregar un reporte elaborado manualmente, conteniendo los puntos solicitados anteriormente

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de análisis y síntesis
 - Capacidad para resolver modelos matemáticos
 - Aplicación de nuevos conceptos
 - Habilidad para usar tecnologías de información y comunicaciones, así como software
 - Manejo del Inglés
 - Trabajo en equipo con diferentes compañeros
 - Obtener compromiso con los principios éticos
- **Competencias Específicas**
 - Conocer las ventajas y limitaciones del método gráfico
 - Aplicar el método gráfico para resolver problemas de programación lineal
 - Utilizar software para resolver el método gráfico
 - Establecer las conclusiones del problema
 - Utilizar un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
 - Considerar principios éticos y de sustentabilidad para apoyar la toma de decisiones

1.7. ASPECTOS ÉTICOS Y DE SUSTENTABILIDAD

En las secciones 1.5.1.1 y 1.5.1.2 del planteamiento de los problemas 1 y 7, así como en la 1.6.2, de la solución del modelo de maximización de forma gráfica, se analizan los aspectos éticos y de sustentabilidad para los modelos bajo estudio. Se sugiere al lector revisar de manera similar los problemas propuestos en las secciones 1.5.1 y 1.6.3, a fin de visualizar aspectos importantes en la toma de decisiones, que en ocasiones no se representan por modelos matemáticos, pero que inciden fuertemente en la respuesta a la problemática presentada.

1.8. RÚBRICA PROPUESTA PARA LA UNIDAD 1

Tabla 1. 20. Rúbrica para la Unidad 1

Aspecto a Evaluar	Excelente 100 puntos	Muy Bien 85 puntos	Suficiente 70 puntos	A Mejorar 55 puntos	% de la calificación
Consultar tres fuentes bibliográficas y elaborar un resumen de los conceptos en las Secciones 1.1. Definición, desarrollo y tipos de modelos en la IO 1.2. Fases de estudio de la IO, 1.3.Principales aplicaciones de la IO, 1.4. Metodología para modelación, 1.6.Conceptos del método gráfico y su aplicación 1.9. Terminología de la unidad 1	Cubre la totalidad de actividades. Consultó el número de fuentes bibliográficas recomendadas Los conceptos son precisos. Los diagramas se elaboraron con esmero. El trabajo es limpio. Se entregó con oportunidad	Puede presentar fallas aisladas en cuanto a: actividades, bibliografía, conceptos, diagramas, limpieza, puntualidad.	Presenta varias fallas en cuanto a: actividades, bibliografía, conceptos, diagramas, limpieza, puntualidad	No cumple con las actividades sugeridas.	6% cada una. Total 24%

Formulación de problemas en la Sección 1.5	Formuló correctamente los problemas de PL. Realizó los seis puntos sugeridos para su formulación. El trabajo es limpio. Se entregó a tiempo	No formuló ciertos problemas de PL o faltó a alguno de los seis puntos sugeridos para su formulación. Puede tener alguna falla en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	No completó la formulación de problemas de PL o faltó a varios de los seis puntos sugeridos para su formulación. Presentó alguna falla en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta muchos errores en la formulación de problemas de PL y omitió varios de los puntos sugeridos para su formulación. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	Total 20%
Solución de problemas de la sección 1.6. Método Gráfico	Resolvió correctamente los problemas propuestos. Estableció apropiadamente las conclusiones. El trabajo está limpio. Se entregó a tiempo.	No resolvió todos los problemas solicitados o presenta errores aislados; no respondió alguno de los tres puntos requeridos para el método gráfico. Puede tener fallas en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta varias fallas u omisiones en la solución de los problemas. Presentó alguna falla en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta muchos errores en la solución gráfica de los problemas u omitió algunos de los tres puntos requeridos. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	Total 6%
Participación en clase y trabajo en Equipo	Siempre participa en clase y en las sesiones de trabajo en equipo.	Frecuentemente tiene una actitud positiva en clase y en el trabajo en	Solo en ocasiones presenta una actitud positiva en clase y el	Frecuentemente su actitud es de apatía o negativa en clase y	Total 5%

		equipo.	trabajo en equipo.	el trabajo en equipo.	
Examen escrito	La formulación de modelos de programación lineal (PL) es correcta. Obtiene la puntuación más alta.	Existen solamente errores aislados en la formulación de modelos de PL.	Se presentaron varios errores en la formulación de modelos de PL.	Existe gran cantidad de errores severos en la formulación de modelos de PL.	Total 45 %

1.9. TERMINOLOGÍA DE LA UNIDAD 1

A continuación se incluye la terminología de la Unidad 1, con la finalidad de que el lector investigue y estudie cada uno de los términos.

1. Investigación de Operaciones
2. Enfoque científico
3. Ciencia administrativa
4. Importancia de la Investigación de Operaciones
5. Contribución de la Investigación de Operaciones
6. Historia de la Investigación de Operaciones
7. Tipos de modelos de la Investigación de Operaciones
8. Fases de estudio de la Investigación de Operaciones
9. Principales aplicaciones de la Investigación de Operaciones
10. Programación lineal
11. Optimización
12. Maximización
13. Minimización
14. Formulación, modelación o planteamiento de modelos de programación lineal
15. Función Objetivo
16. Variables de Decisión
17. Restricciones
18. Restricciones tipo $\leq$, $=$, $\geq$
19. Restricciones funcionales
20. Restricciones de no negatividad
21. Parámetros
22. Coeficientes de las variables
23. Constantes del lado derecho
24. Sistema lineal de ecuaciones
25. Forma estándar del modelo de programación lineal
26. Otras formas del modelo de programación lineal

- 27. Variables no restringidas
- 28. Símbolos utilizados en la programación lineal y su significado
- 29. Análisis dimensional
- 30. Aspectos éticos
- 31. Aspectos de sustentabilidad
- 32. Método gráfico
- 33. Región factible
- 34. Puntos extremos factibles o vértices
- 35. Soluciones factibles
- 36. Solución óptima
- 37. Solución única
- 38. Múltiples soluciones
- 39. Soluciones factibles en vértice (FEV)
- 40. Soluciones factibles en vértice adyacentes
- 41. Arista de la región factible
- 42. Rectas de isoutilidades
- 43. Restricción activa
- 44. Restricción inactiva
- 45. Restricción redundante

UNIDAD 2. EL MÉTODO SIMPLEX

Después de estudiar este capítulo, el lector será capaz de:

- Conocer los fundamentos del método Simplex
- Identificar a quien se debe el desarrollo del método Simplex
- Conocer la terminología básica del método Simplex
- Aplicar el método Simplex en su forma tabular
- Identificar en qué casos se debe utilizar el método de las dos fases
- Aplicar el método de las dos fases
- Identificar los casos especiales del Simplex
- Utilizar software para resolver problemas de programación lineal
- Establecer las conclusiones de los problemas resueltos empleando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
- Considerar en las conclusiones los aspectos éticos y de sustentabilidad para orientar correctamente la toma de decisiones

En el proceso el lector desarrolla las competencias siguientes:

- Capacidad de realizar investigación bibliográfica
- Capacidad de resumir información
- Habilidad de redactar textos
- Habilidad para utilizar tecnologías de información y comunicación
- Capacidad para trabajar en equipo
- Habilidad para identificar qué algoritmo debe aplicarse para un problema particular
- Capacidad de utilizar algoritmos de manera manual
- Capacidad de utilizar software para resolver problemas
- Habilidad de establecer conclusiones de los problemas resueltos
- Habilidad para comprender como se aplican los aspectos éticos y de sustentabilidad
- Capacidad de análisis, síntesis y de abstracción

Contenido de la Unidad 2:

- 2.1. Teoría del método Simplex.
- 2.2. Forma tabular del método Simplex.
- 2.3. El método de las Dos Fases.
- 2.4. Casos especiales
- 2.5. Uso de software

2.1. TEORÍA DEL MÉTODO SIMPLEX

El método Simplex fue desarrollado en 1947 por el matemático norteamericano George B. Dantzig, a quien se le conoce como el *padre de la programación lineal*.

En 1976, el presidente de los Estados Unidos Gerald Ford le otorgó a Dantzig la Medalla Nacional de Ciencias, que es la presea más alta que concede el citado país en aplicaciones de la ciencia.⁵

Como se mencionó en la sección 1.4, la programación lineal consiste en asignar recursos limitados entre actividades en competencia de la mejor manera posible (óptima). El método gráfico descrito en la sección 1.6, hace uso de los conceptos geométricos fundamentales en los cuales se basa el algoritmo Simplex, pero éste utiliza un lenguaje algebraico el cual, a su vez, se maneja mejor en una forma tabular del método.

2.1.1. Suposiciones de los Modelos de Programación Lineal

El método Simplex fue desarrollado para resolver problemas de programación lineal, el cual supone que se cumplan las propiedades de *proporcionalidad*, *aditividad*, *divisibilidad* y *certidumbre*.

La *proporcionalidad* requiere que la contribución de cada actividad (variable de decisión) en el valor de la función objetivo Z sea proporcional al nivel de la actividad x_j , como lo representa el término $c_j x_j$ en la función objetivo. De manera similar, la contribución de cada actividad al lado izquierdo de cada restricción funcional es proporcional al nivel de la actividad x_j , como lo representa en la restricción el término $a_{ij} x_j$.

La *aditividad* establece que la función objetivo y el lado izquierdo de cada restricción funcional es la suma de las contribuciones individuales de las actividades respectivas.

La *divisibilidad* supone que las variables de decisión pueden tomar cualquier valor, incluso valores fraccionales que satisfagan las restricciones funcionales y de no negatividad.

La suposición de certidumbre establece que los valores asignados a cada parámetro del modelo de programación lineal (c_j, b_i, a_{ij}) son constantes conocidas.

⁵ Grossman, S.I. *Aplicaciones de Álgebra Lineal*, 1988, Grupo Editorial Iberoamérica, México

2.1.2. Forma Estándar del Modelo de Programación Lineal:

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Función Objetivo

S A:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \quad \text{Restricciones Funcionales}$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

Restricciones de no-negatividad

Donde:

Z = Valor de la medida global de desempeño (función objetivo)

x_j = Nivel de la actividad j (para $j = 1, 2, \dots, n$)

c_j = Incremento en Z que se obtiene al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j

b_i = Cantidad del recurso i disponible para asignarse a las actividades (para $i = 1, 2, \dots, m$)

a_{ij} = Cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j .

En la Tabla 2.1, se representan los datos necesarios para elaborar un modelo de programación lineal, para manejar la asignación de los recursos a las diversas actividades. Notar la correspondencia de la tabla con la forma estándar del modelo.

Tabla 2.1. Datos necesarios para el modelo de programación lineal

Contribución a Z por unidad de actividad	C1	C2	. . .	Cn	
Recurso	Consumo de recursos por unidad de actividad				Cantidad de recursos disponibles
	Actividad				
	1	2	. . .	n	
1	a11	a12	. . .	a1n	b1
2	a21	a22	. . .	a2n	b2
.					.
.	. . .	. . .	. . .	. . .	.
.					.
m	am1	am2	. . .	amn	bm

2.1.3. El Algoritmo Simplex

El algoritmo Simplex está diseñado para localizar la solución óptima de un problema de programación lineal, concentrándose en un número reducido de las soluciones básicas factibles del problema. (Taha, 1997, p.74).

El método Simplex cambia las desigualdades de las restricciones funcionales y las convierte en igualdades mediante el uso de variables de holgura. El algoritmo inicia siempre en una solución básica factible y después trata de encontrar otra solución básica factible que mejore el valor de la función objetivo. En todo momento, la solución incluye exactamente m variables básicas; notar que m es el número de restricciones funcionales del modelo. En cada paso del Simplex, la variable cero seleccionada es la variable de entrada y la variable básica eliminada se denomina variable de salida.

El cálculo de la nueva solución básica se basa en las operaciones de renglones del método **Gauss-Jordan**, lo cual se denomina frecuentemente *eliminación gaussiana*.

Algunas consideraciones importantes para el método Simplex son:

Las restricciones activas son precisamente aquellas para las cuales los valores óptimos de las variables de holgura son nulos.

Las restricciones inactivas son aquellas para las cuales los valores óptimos de las variables de holgura son positivos.

Si no se obtiene una solución óptima, el problema puede tener una solución ilimitada o no factible, denominada también infactible.

Cuando la solución óptima de un problema de Programación Lineal con m restricciones tiene menos de m variables positivas, se denomina solución degenerada.

Al modificar los coeficientes de la función objetivo se puede afectar la solución óptima.

2.1.4. Conceptos Clave de Método Simplex

Los conceptos clave para la solución por el método Simplex, son (Hillier, 2010, p. 84):

Concepto de solución 1: El método Simplex analiza solamente las soluciones factibles en los vértices o puntos extremos.

Concepto de solución 2: El Simplex es un *algoritmo iterativo*, esto es, un procedimiento de solución sistemático que repite una serie fija de pasos, llamada *iteración*, hasta que obtiene el resultado deseado, con la estructura indicada en el Diagrama 2.1.

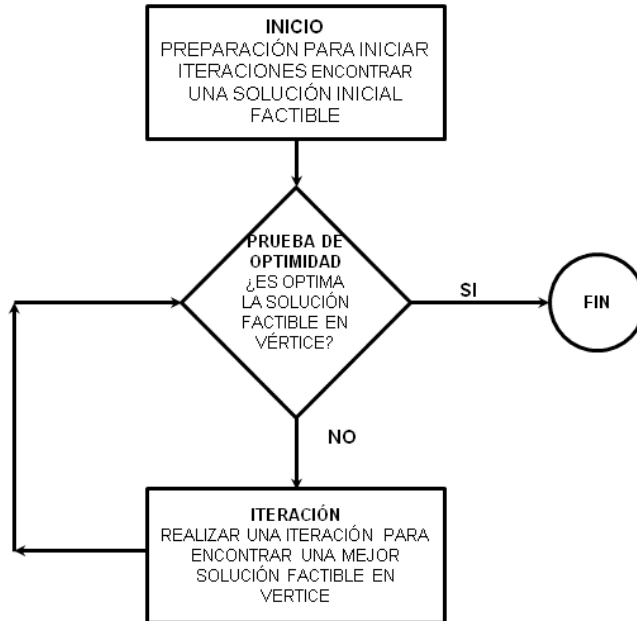


Diagrama 2.1. Iteraciones en el Método Simplex

Concepto de solución 3: Siempre que sea posible, en el paso inicial del método Simplex se elige el *origen*, o sea que todas las variables de decisión son iguales a cero, como la solución factible en el vértice inicial.

Concepto de solución 4: Dada una solución factible en un vértice, en términos de cómputo, es más rápido reunir información sobre sus soluciones factibles en los vértices *adyacentes* que sobre otras de éstas soluciones.

Nota: En cualquier problema de programación lineal con n variables de decisión, dos soluciones factibles en los vértices (FEV) son **adyacentes** entre sí cuando comparten $n - 1$ fronteras de restricción. Dos soluciones FEV adyacentes están conectadas por un segmento de recta que se encuentra en estas mismas fronteras

de restricción compartidas. Dicho segmento de recta recibe el nombre de **arista** de la región factible.

Concepto de solución 5: Después de identificar la solución factible en el vértice actual, el método Simplex examina cada una de las aristas de la región factible que salen de esta solución, las cuales conducen a una solución FEV *adyacente* en el otro punto extremo, pero el Simplex sólo identifica la *tasa de mejoramiento de Z* que se obtendría al moverse por esa arista. Entre las aristas con una tasa positiva de mejoramiento de Z, selecciona moverse por la que cuenta con una tasa más grande de mejoramiento de Z. La iteración termina cuando se obtiene primero la solución FEV al final de esta arista y después se reetiqueta esta solución FEV adyacente como la solución FEV *actual* para pasar la prueba de optimalidad y, si es necesario, a la siguiente iteración.

Concepto de solución 6: Dado que una tasa *positiva* de mejoramiento de Z implica que la solución FEV adyacente es *mejor* que la actual, mientras que si dicha tasa es *negativa* indica que la solución FEV adyacente es *peor*, entonces la prueba de optimalidad consiste sólo en verificar si alguna de las aristas conduce a una tasa *positiva* de mejoramiento de Z. Si *ninguna* lo hace, la solución FEV actual es óptima.

Actividades para el lector en la sección 2.1. Teoría del método Simplex:

- Consultar al menos dos fuentes bibliográficas los puntos siguientes
- Investigar a quien se debe la aportación del método Simplex
- Investigar las suposiciones de los modelos de programación lineal (PL)
- Identificar la forma estándar de los modelos de PL
- Conocer los pasos del algoritmo Simplex
- Discutir los pasos del método Simplex, sus alcances y limitaciones
- Investigar los conceptos clave del método Simplex
- Elaborar un reporte individual, elaborado manualmente, conteniendo los seis puntos anteriores, así como la terminología de la unidad 2, la cual se encuentra en la sección 2.8
- Participar en una discusión grupal de los nuevos conceptos

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de realizar investigación bibliográfica
 - Comprensión de nueva terminología
 - Participación en actividades grupales que propician el intercambio y argumentación de ideas
 - Capacidad de resumir información
 - Participación en discusiones grupales
 - Habilidad de redactar textos
 - Capacidad para trabajar en equipo

- **Competencias Específicas**

- Conocer los fundamentos del método Simplex
- Identificar el nombre del autor del método Simplex
- Conocer los conceptos clave y la terminología del método Simplex
- Incorporar terminología de optimización a su vocabulario

2.2. FORMA TABULAR DEL MÉTODO SIMPLEX

La forma tabular del método Simplex utiliza una **tabla simplex** para desplegar de manera compacta el sistema de ecuaciones que conduce a la solución básica factible actual. De acuerdo con esta solución, cada variable de la columna de la izquierda es igual al número correspondiente en la columna de la derecha y las variables que no aparecen son iguales a cero.

Una ventaja de la forma tabular del método Simplex es que registra solamente la información esencial de un problema de programación lineal, la cual consiste en:

- La variable básica que corresponde a cada ecuación
- Los coeficientes de las variables
- Las constantes del lado derecho de las ecuaciones

Esta forma evita tener que escribir los símbolos de las variables en cada ecuación, pero lo más importante es que se tiene un mejor control de los coeficientes a usar en los cálculos aritméticos y registrarlos de modo compacto.

Es conveniente aclarar que el método Simplex en este momento, solo manejará la forma estándar o canónica del modelo, o sea, la función objetivo de maximización y todas las restricciones funcionales tipo menor o igual.

2.2.1. Resumen de la Forma Tabular del Método Simplex

A continuación se describen los pasos para realizar el método Simplex:

Paso Inicial. Se genera la **forma aumentada** del modelo, la cual consiste en introducir las **variables de holgura** para cambiar las restricciones funcionales de desigualdades en igualdades, teniendo los valores del lado derecho positivos ó cero. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} X_1 \leq 4 & \text{(horas de producción disponible en la planta 1)} \\ X_1 + S_1 = 4 & S_1 = \text{variable de holgura} \end{array}$$

Notar que si en la solución final la variable de holgura tiene un valor nulo, ello implica que el recurso en cuestión llegó al valor máximo especificado y se trata de un recurso escaso debido a que se agotó por completo en el proceso de

optimización del modelo; si dicha variable es, por ejemplo, igual a 2, esto indica que todavía están disponibles 2 de las 4 horas de producción, entonces hay una holgura (S_1) de 2 horas y el recurso es abundante.

En la forma tabular del Simplex, se seleccionan las variables de holgura como las variables básicas iniciales y las variables de decisión como las variables no básicas iniciales; es decir, estas últimas son iguales a cero.

A. Prueba de Optimalidad.- La variable entrante en un problema de maximización es la variable no básica con el coeficiente más negativo en la ecuación de la función objetivo Z . Los empates se resuelven arbitrariamente. El óptimo se alcanza cuando todos los coeficientes no – básicos en la ecuación Z son no-negativos. Cuando esto se cumple, el proceso se detiene; de otra manera, debe realizarse una iteración para obtener la siguiente solución básica factible.

B. Iteración.- El proceso iterativo incluye: (paso 1) determinar la variable de entrada a la base, (paso2) establecer la variable de salida de la base y después (paso3) calcular la nueva solución mediante la reducción de renglones ó eliminación gaussiana.

Para problemas de maximización y minimización, la variable saliente es la variable básica actual que tiene el mínimo cociente con denominador *estrictamente positivo* en relación a la variable entrante. Los empates se resuelven arbitrariamente.

Pasos Iterativos del Simplex.

Paso 1. Determinar la variable de entrada: de las variables no-básicas actuales, la que tenga el coeficiente “más negativo”; los empates se resuelven arbitrariamente. A esta columna se le denomina columna pivote.

Paso 2. Seleccionar la *variable de salida*, a partir de las variables básicas actuales, usando la prueba del cociente mínimo.

Prueba del cociente mínimo

1. Elegir los coeficientes mayores de cero de la columna pivote.
2. Dividir el elemento del lado derecho del mismo renglón entre dicho coeficiente. Nota: El lado derecho (numerador) sí puede tener un valor igual a cero, pero el coeficiente de la columna pivote (denominador) debe ser estrictamente positivo.
3. Identificar el renglón que tiene el menor de los cocientes. A este renglón se le denomina renglón pivote. Identificar la intersección entre la columna pivote y el renglón pivote y ese valor es el número pivote o pivote, el cual debe marcarse con un círculo o recuadro.

4. La variable básica de ese renglón es la variable de salida; sustituirla con la variable de entrada en la siguiente tabla.

Paso 3. Determinar la nueva solución básica factible mediante operaciones elementales con renglones y elaborar una nueva tabla simplex en la forma apropiada de eliminación gaussiana.

Ir a: A. Prueba de Optimalidad.

A continuación se resolverá a detalle un problema de programación lineal utilizando el método Simplex, con la finalidad de que la secuencia del algoritmo sea más explícita.

2.2.2. Ejemplo de Aplicación de la Forma Tabular del Método Simplex

La Wyndor Glass Co. produce básicamente dos productos: el número 1: puertas de vidrio con marco de aluminio y el número 2: ventanas con marco de madera. Cuenta con tres plantas, los marcos y molduras de aluminio se elaboran en la planta 1, los de madera en la planta 2, en la 3 se produce el vidrio y se ensamblan los productos. La empresa debe determinar la cantidad de cada producto que debe elaborar, a fin de tener mayor rentabilidad. (Hillier, Lieberman, 2010, p.22,86)

El modelo es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{MAX } Z = 3X_1 + 5X_2 & \text{(Maximizar la ganancia semanal total, miles de dls)} \\ \text{S.A.} & \\ X_1 & \leq 4 \quad \text{(hr/sem de producción disponible en planta 1)} \\ 2X_2 & \leq 12 \quad \text{(hr/sem de producción disponible en planta 2)} \\ 3X_1 + 2X_2 & \leq 18 \quad \text{(hr/sem de producción disponible en planta 3)} \\ X_1, X_2 & \geq 0 \quad \text{(No-negatividad)} \end{array}$$

Donde:

X_1 = Número de lotes del producto 1 fabricados por semana

X_2 = Número de lotes del producto 2 fabricados por semana

Paso Inicial: Añadir variables de holgura para satisfacer igualdades, con esto se genera la forma aumentada. Notar que se generan igualdades, incluyendo la función objetivo, en la cual las variables de holgura tienen coeficiente cero.

$$\begin{array}{ll} Z - 3X_1 - 5X_2 - S_1 - S_2 - S_3 = 0 & \text{(Renglón 0 - R0)} \\ \text{S.A.} & \\ X_1 & + S_1 = 4 \quad \text{(Renglón 1 - R1)} \\ 2X_2 & + S_2 = 12 \quad \text{(Renglón 2 - R2)} \\ 3X_1 + 2X_2 & + S_3 = 18 \quad \text{(Renglón 3 - R3)} \\ X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 & \geq 0 \end{array}$$

Las variables de holgura se denominan como S_1 , S_2 , S_3 y su nomenclatura tiene origen en el inglés, puesto que holgura es “Slack”. El subíndice corresponde al recurso que trata la restricción funcional.

Se forma la tabla inicial del Simplex, transcribiendo los coeficientes de la función objetivo y las restricciones funcionales:

Tabla 2.2. Tabla inicial simplex ejemplo Wyndor Glass Co.

	VB Variable Básica	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución Lado Derecho
R0	Z	-3	-5	0	0	0	0
R1	S_1	1	0	1	0	0	4
R2	S_2	0	2	0	1	0	12
R3	S_3	3	2	0	0	1	18

Matriz Identidad

- A. Prueba de Optimalidad.**- La solución básica factible es óptima solamente si los coeficientes de las variables en el renglón 0 son positivos o cero. Notar que la solución de Z o valor del lado derecho, *no* se considera para este criterio.

Al realizar esta prueba se encuentra que la tabla no es óptima, entonces se debe iterar.

Para este problema se tiene la siguiente solución inicial factible:

$$\begin{aligned}
 Z &= 0 \\
 X_1 &= 0 \quad (\text{no se encuentra en la base}) \\
 X_2 &= 0 \quad (\text{no se encuentra en la base}) \\
 S_1 &= 4 \\
 S_2 &= 12 \\
 S_3 &= 18
 \end{aligned}$$

B. Iteración 1

B.1) Determinar la variable de entrada. Se selecciona la variable no básica con el coeficiente más negativo en el renglón cero. Para este caso, es X_2 . Entonces, la columna pivote es la que corresponde a X_2 .

B.2) Determinar la variable de salida. Se aplica la prueba del cociente mínimo.

$$\text{MIN} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} \quad \text{Con } a_{ij} > 0 \quad \begin{aligned} 4/0 &\Rightarrow \text{No aplica, es indeterminación} \\ 12/2 &= 6 \leftarrow \text{Mínimo} \\ 18/2 &= 9 \end{aligned}$$

Como el mínimo cociente corresponde la variable S_2 , ésta es la variable de salida, el renglón 2 es el renglón pivote, la intersección de la columna pivote,

que corresponde a la variable de entrada X_2 , y el renglón pivote dan el pivote, cuyo coeficiente es 2.

Debe convertirse el valor del pivote en la unidad y mediante operaciones de renglón, **todos** los coeficientes en esa columna deberán ser cero.

Tabla 2.3. Tabla simplex con primer pivote ejemplo *Wyndor Glass Co.*

	VB	X_1	X_2 VAR. ENTRADA	S_1	S_2	S_3	Solución
R0	Z	-3	-5	0	0	0	0
R1	S_1	1	0	1	0	0	4
R2	S_2 VAR. SALIDA	0	2 PIVOTE	0	1	0	12
R3	S_3	3	2	0	0	1	18

Entonces, se determinan las operaciones de reducción de renglones necesarias:

- 1) Multiplicar el renglón 2 (R_2) por $\frac{1}{2}$: $R_2(1/2) = R'_2$
- 2) Multiplicar (R'_2) por 5 y sumarlo al (R_0): $R'_2(5) + R_0 = R'_0$
- 3) El renglón 1 no se altera pues ya tiene cero en la columna 2.
- 4) Multiplicar (R'_2) por (-2) y sumarlo al (R_3): $R'_2(-2) + R_3 = R'_3$

Realizando las operaciones descritas anteriormente, se obtiene la siguiente tabla, en la cual se indica el pivote seleccionado para la segunda iteración:

Tabla 2.4. Tabla simplex con segundo pivote ejemplo *Wyndor Glass Co.*

	VB	X_1 VE	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución
R0	Z	-3	0	0	5/2	0	30
R1	S_1	1	0	1	0	0	4
R2	X_2	0	1	0	1/2	0	6
R3	S_3 VS	3 PIVOTE	0	0	-1	1	6

Con la solución básica factible:

$$\begin{aligned}
 Z &= 30 \\
 S_1 &= 4 \\
 S_2 &= 0 \\
 S_3 &= 6 \\
 X_1 &= 0 \\
 X_2 &= 6
 \end{aligned}$$

A) Prueba de Optimalidad.- La tabla no es óptima pues hay un coeficiente negativo en el renglón cero, entonces se debe iterar.

B) Iteración 2

B.1) Establecer la variable de entrada: X_1 pues es la que tiene el coeficiente más negativo en el renglón cero.

B.2) Determinación de la variable de salida con la prueba del cociente mínimo

$$\text{MIN } \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} \quad \text{Con } a_{ij} > 0 \quad \begin{array}{l} 4/1 = 4 \\ 6/0 \Rightarrow \text{No aplica} \\ 6/3 = 2 \leftarrow \text{Mínimo} \end{array}$$

Operaciones:

- 1) $R_3 (1/3) = R'_3$
- 2) $R'_3 (3) + R_0 = R'_0$
- 3) $R'_3 (-1) + R_1 = R'_1$
- 4) No deben hacerse operaciones en renglón 2 pues ya tiene 0 en la columna 1.

Tabla 2.5. Tabla Final del Simplex para el Ejemplo *Wyndor Glass Co.*

	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUCIÓN
R0	Z	0	0	0	3/2	1	36
R1	S_1	1	0	1	1/3	-1/3	2
R2	X_2	0	1	0	1/2	0	6
R3	X_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

Solución Básica Factible y Óptima:

$$\begin{array}{l} Z = 36 \\ X_1 = 2 \\ X_2 = 6 \\ S_1 = 2 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 0 \end{array}$$

A) Prueba de Optimalidad.- Ya se llegó a la solución óptima del modelo. los coeficientes de las variables en el renglón cero son todos positivos o cero.

Comprobando los valores anteriores en el modelo aumentado:

Función Objetivo: $Z = 3(2) + 5(6) = 36$ (Es el valor máximo de la función objetivo, cumpliendo con todas las restricciones)

Restricción 1: $2 + (2) = 4$ (Restricción inactiva)
Restricción 2: $(6) + (0) = 12$ (Restricción activa)
Restricción 3: $3(2) + 2(6) + (0) = 18$ (Restricción activa)

Conclusiones del problema:

La empresa Wyndor Glass Co. podrá tener ganancias máximas de 36 mil dólares por semana, produciendo:

2 lotes por semana de las puertas de vidrio (producto 1)

6 lotes por semana de las ventanas con marco de madera (producto 2)

En cuanto a los recursos, el tiempo de producción disponible por semana, en horas es:

Planta 1: De las 4 horas disponibles se utilizan solo 2, y se tiene una holgura de 2 horas; se trata de un recurso abundante pues hay disponibilidad de éste.

Planta 2: Se utilizan las 12 horas disponibles, no se tiene holgura, por lo que es un recurso escaso, ya que se agota.

Planta 3: Se utilizan las 18 horas disponibles, no se tiene holgura, por lo que es un recurso escaso, ya que se agota.

Aspectos éticos. En ocasiones, como en el caso de la madera, existen proveedores que ofrecen productos más baratos pero cuya procedencia puede ser ilícita, como en el caso de los denominados “tala montes” que por hacer negocio, hacen tala clandestina de bosques. A corto plazo, puede ser atractivo económicamente para la empresa, pero en el largo plazo, se establecería una complicidad con prácticas que dañan definitivamente el medio ambiente. En este caso, una falta a la ética, compromete también la sustentabilidad de la empresa. Y en caso que existan multas por infringir la normatividad, la imagen y prestigio de la empresa serían dañados severamente.

Aspectos de sustentabilidad. La empresa debe considerar el reciclaje de productos de desecho como el vidrio, aluminio y la madera. Asimismo, se requiere que solicite a sus proveedores de madera la certificación por parte de la Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales (Semarnat), a fin de que conste que no existe daño a los bosques de los cuales se extrajo la madera.

En cuanto a los selladores de silicón, barnices y algunos solventes que pudieran ser utilizados, debe seguirse la Norma Oficial Mexicana NOM, que corresponda para el desecho de dichas sustancias.

2.2.3. Problemas Propuestos para el Método Simplex

Resolver los siguientes problemas aplicando el Método Simplex.

Problema 1

$$\text{Max } Z = 2X_1 - X_2 + X_3 .$$

S.A.

$$3X_1 + X_2 + X_3 \leq 100$$

$$X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 20$$

$$X_1 + X_2 - X_3 \leq 40$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Problema 2

$$\text{Min } Z = 4X_1 - X_2.$$

S.A.

$$2X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_2 \leq 7$$

$$X_1 - X_2 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Problema 3

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 50X_2 + 70X_3 .$$

S.A.

$$10X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 1000$$

$$2X_1 + 2X_2 \leq 460$$

$$X_1 + 2X_3 \leq 660$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Problema 4

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 80X_2.$$

S.A.

$$2X_1 + 2X_2 \leq 1200$$

$$3X_1 \leq 760$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 780$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Problema 5

$$\text{Max } Z = 8X_1 + X_2 + 4X_3 .$$

S.A.

$$2X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 9$$

$$X_1 + X_2 + 4X_3 \leq 9$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Actividades para el lector en la sección 2.2. Forma tabular del método Simplex:

- Aplicar la forma tabular del método Simplex para resolver manualmente los problemas propuestos de minimización o maximización
- Identificar las variables de entrada y salida
- Aplicar la reducción de renglones Gauss-Jordan
- Resolver algunos problemas del método Simplex en sesiones de aprendizaje colaborativo
- Resolver como tarea los problemas propuestos del método Simplex
- Considerar los posibles aspectos éticos y de sustentabilidad para cada problema
- Establecer las conclusiones para cada uno de los problemas utilizando un lenguaje sencillo para el tomador de decisiones
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los problemas resueltos, incluyendo las conclusiones correspondientes

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de análisis, síntesis y abstracción
 - Solución de problemas
 - Capacidad de utilizar algoritmos de manera manual
 - Participación en actividades grupales que propician la reflexión y el intercambio de ideas
 - Aplicación de conocimientos
 - Capacidad para trabajar en equipo
 - Habilidad para establecer conclusiones de los problemas resueltos
 - Habilidad para comprender como se aplican los aspectos éticos y de sustentabilidad
 - Habilidad para identificar el algoritmo que debe aplicarse a un problema particular
- **Competencias Específicas**
 - Aplicar la forma tabular del método Simplex a diversos problemas
 - Establecer las conclusiones de problemas de maximización o minimización, utilizando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
 - Considerar en las conclusiones los aspectos éticos y de sustentabilidad para orientar correctamente la toma de decisiones

2.3. EL MÉTODO DE LAS DOS FASES

Para la aplicación del método Simplex descrito en la sección anterior, se utilizan únicamente restricciones del tipo “ $\leq$ ” con los lados derechos no negativos, las cuales requieren de las variables de holgura para establecer las igualdades correspondientes. Asimismo, dichas holguras ofrecen una solución básica factible inicial.

El Método de las Dos Fases se aplica cuando se presenta al menos una restricción del tipo “ $\geq$ ” ó bien de igualdad “ $=$ ”, para las cuales se usan las **variables artificiales (A_i)**, las cuales no tienen significado físico, solamente toman el papel de holguras en la primera iteración, pero que requieren eliminarse en iteraciones posteriores. Los métodos más utilizados para resolver esta situación son el Método de la M, que no se incluye en este texto, y el de las Dos Fases.

Las **restricciones del tipo “ $\geq$ ”**, normalmente se utilizan para establecer requerimientos mínimos de especificaciones, para lo cual se emplean las **variables de exceso (E_i)**, que deben ser sustraídas al formar la igualdad, y que representan la cantidad en la que se excede el recurso, sobre la especificación mínima. Para manejar el método de Dos Fases se requiere también sumar una variable artificial.

Por ejemplo, si en un problema se tiene un requisito mínimo como sigue:

$$X_1 + X_2 \geq 100 \quad (\text{El requisito mínimo debe ser de 100 calorías})$$

Sustrayendo la variable de exceso:

$$X_1 + X_2 - E_6 = 100 \quad (\text{El subíndice 6 indica el número de restricción})$$

Notar que es necesario que $E_1 \geq 0$. Un valor positivo de E_1 significa que se rebasarán en ese valor las 100 calorías especificadas como mínimo.

Como se mencionó anteriormente, para manejar el método de Dos Fases se requiere también sumar una variable artificial, por lo cual la última expresión se convierte en:

$$X_1 + X_2 - E_6 + A_6 = 100 \quad (\text{El subíndice 6 indica el número de restricción})$$

Las restricciones tipo =, son muy rigurosas, ya que no presentan ningún tipo de tolerancia y deben cumplirse sin ningún tipo de holgura o exceso. Ellas requieren solamente que se sume una variable artificial.

Por ejemplo, si en algún problema se presenta una restricción de igualdad:

$X_1 + X_2 + X_3 = 2000$ (tamaño del lote en kilogramos)
 Debe convertirse en:

$$X_1 + X_2 + X_3 + A_8 = 2000 \quad (\text{El subíndice 8 indica el número de restricción})$$

A continuación se describen los pasos para realizar el método de las Dos Fases.

2.3.1. Descripción del Método de las Dos Fases

Fase 1

- A. Aumentar las variables de holgura, exceso y artificiales que sean necesarias para asegurar una solución básica inicial.
- B. Formar una **nueva función objetivo** que busque la **minimización** de la **suma de las variables artificiales**, sujeta a las restricciones del problema original, modificado por las variables artificiales. Aplicar el método simplex.
- C. Si el valor mínimo de la nueva función objetivo es cero, lo que implica necesariamente que todas las variables artificiales son cero, el problema tiene solución factible, pasar a la Fase 2.
- D. Si el valor mínimo de la nueva función objetivo es positivo, el problema no tiene solución factible y se termina el proceso.

Fase 2

Usar la solución básica óptima de la Fase 1 como una solución inicial, retomando la función objetivo original y eliminando las columnas que corresponden a las variables artificiales. Entonces aplicar el método Simplex hasta que se resuelva el problema original.

2.3.2. Ejemplo de Aplicación del Método de Dos Fases

Se resolverá el *problema propuesto* (Taha, 1998, p.87)

$$\text{MIN } Z = 4X_1 + X_2$$

S.A.

$$\begin{aligned} 3X_1 + X_2 &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 &\geq 6 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Fase 1.

- A. **Forma Aumentada:** Se adicionan las variables de holgura, exceso y artificiales que son necesarias:

$$\begin{aligned} 3X_1 + X_2 + A_1 &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - E_2 + A_2 &= 6 \\ X_1 + 2X_2 + S_3 &= 4 \\ X_1, X_2, E_2, A_1, A_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- B. **Nueva Función Objetivo:** Se establece una nueva función objetivo que minimice la suma de las variables artificiales. Se aplicará el método Simplex en forma tabular, para lo cual se elaborará la tabla inicial.

$$\text{MIN } r = A_1 + A_2$$

Igualando "r" con cero y aumentando las variables de holgura y exceso:

$$\text{MIN } r - A_1 - A_2 - 0 X_1 - 0 X_2 - 0 E_2 - 0 S_3 = 0$$

SA:

Las restricciones establecidas en la sección "A" de la Fase 1

La tabla 2.6 representa las condiciones iniciales.

Tabla 2.6. Tabla Inicial Fase 1 del Ejemplo 2.3.2.

	VB	X_1	X_2	E_2	A_1	A_2	S_3	SOLUCIÓN
R0	r	0	0	0	-1	-1	0	0
R1	A_1	3	1	0	1	0	0	3
R2	A_2	4	3	-1	0	1	0	6
R3	S_3	1	2	0	0	0	1	4

Analizando esta tabla, puede observarse que las variables A_1 y A_2 deben tener coeficiente cero en el renglón cero, condición que deben cumplir ya que se encuentran en la base (son variables básicas), por lo que deben realizarse operaciones de renglón. Notar que estas operaciones no constituyen una iteración del método Simplex sino que únicamente generan una condición exigida por el algoritmo, en el sentido que las variables básicas deben tener coeficiente cero en el renglón cero. Asimismo, notar que en la tabla 2.6 la variable "r" tiene como solución un cero, pero ya que ésta es la suma de $A_1(=3)$ y $A_2(=6)$, debe tener un valor de 9.

Las operaciones de renglón a efectuar son:

$$R1 + R0 = R'0$$

$$R2 + R'0 = R''0$$

Realizando estas operaciones, se obtiene la Tabla 2.7:

Tabla 2.7. Tabla con Nuevo Renglón Cero Fase 1 del Ejemplo 2.3.2

	VB	X_1	X_2	E_2	A_1	A_2	S_3	SOLUCIÓN
R0	r	7	4	-1	0	0	0	9
R1	A_1	3	1	0	1	0	0	3
R2	A_2	4	3	-1	0	1	0	6
R3	S_3	1	2	0	0	0	1	4

La solución inicial para la tabla 2.7 es:

$$r = 9; A_1 = 3; A_2 = 6; S_3 = 4, E_2 = 0$$

Iteración 1

En la tabla 2.7, se indican la variable de entrada: X_1 , la cual tiene el coeficiente más positivo, por tratarse de una minimización. La variable de salida es A_1 , y fue determinada por el mínimo de los tres cocientes: $\{3/3 = 1; 6/4 = 3/2; 4/1 = 4\}$. El pivote es 3.

Las operaciones de renglón son:

$$R1 (1/3) = R'1$$

$$R'1 (-4) + R2 = R'2$$

$$R'1 (-1) + R3 = R'3$$

La tabla 2.8 se genera efectuando estas operaciones de renglón.

Tabla 2. 8. Tabla de la Primera Iteración para el Ejemplo 2.3.2

	VB	X_1	X_2	E_2	A_1	A_2	S_3	SOLUCIÓN
R0	r	0	5/3	-1	-7/3	0	0	2
R1	X_1	1	1/3	0	1/3	0	0	1
R2	A_2	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2
R3	S_3	0	5/3	0	-1/3	0	1	3

La solución para la tabla 2.8 es:

$$r = 2; A_1 = 0; A_2 = 2; X_1 = 1; S_3 = 3, E_2 = 0$$

Iteración 2

En la tabla 2.8, se indican la variable de entrada: X_2 , la cual tiene el coeficiente más positivo, por tratarse de una minimización. La variable de salida es A_2 , y fue determinada por el mínimo de los tres cocientes: $\{1/1/3 = 3; 2/5/3 = 6/5; 3/5/3 = 9/5\}$.

El pivote es 5/3.

Las operaciones de renglón son:

$$R2 (3/5) = R'2$$

$$R'2 (-1/3) + R1 = R'1$$

$$R'2 (-5/3) + R3 = R'3$$

La tabla 2.9 se obtiene aplicando las operaciones de renglón:

Tabla 2. 9. Tabla Óptima de la Fase 1 para el Ejemplo 2.3.2

	VB	X_1	X_2	E_2	A_1	A_2	S_3	SOLUCIÓN
R0	r	0	0	0	-1	-1	0	0
R1	X_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
R2	X_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
R3	S_3	0	0	1	1	-1	1	1

Nota: Si al terminar la **Fase 1**, **r** no es igual a **cero**, entonces **no** hay solución factible y no se debe proceder a la siguiente fase. En este caso, como $r = 0$, sí existe solución factible y se continua con la Fase 2.

La solución en la tabla óptima de la Fase 1 es:

$$r = 0; A_1 = 0; A_2 = 0; X_1 = 3/5; X_2 = 6/5; S_3 = 1, E_2 = 0$$

FASE 2. Se toma de nuevo Z , la función objetivo original, se utiliza la solución inicial factible generada en la Fase 1, utilizando la tabla final, eliminando las columnas de las variables artificiales, aplicando la reducción de renglones y posteriormente el método Simplex.

Entonces, retomando la función objetivo original Z , se obtiene la tabla 2.10:

$$\text{MIN } Z = 4X_1 + X_2 \quad (\text{Función Objetivo Original})$$

$$Z - 4X_1 - X_2 - 0E_2 - 0S_3 = 0 \quad (\text{Función Objetivo Aumentada})$$

Tabla 2. 10. Tabla Inicial de la Fase 2 para el Ejemplo 2.3.2

	VB	X_1	X_2	E_2	S_3	SOLUCIÓN
R0	Z	-4	-1	0	0	0
R1	X_1	1	0	1/5	0	3/5
R2	X_2	0	1	-3/5	0	6/5
R3	S_3	0	0	1	1	1

Analizando la Tabla 2.10, puede observarse que las variables X_1 y X_2 deben tener coeficiente cero en el renglón cero, condición que deben cumplir ya que son variables básicas, por lo que deben realizarse operaciones de renglón. Notar que estas operaciones no constituyen una iteración del método Simplex sino que

únicamente generan una condición exigida por el algoritmo, en el sentido que los coeficientes de las variables básicas deben tener coeficiente cero en el renglón cero. Asimismo, notar que en la tabla 2.10 la variable “Z” presenta valor cero, pero ya que ésta es la suma de $4X_1 (=12/5)$ y $X_2 (=6/5)$, debe tener un valor de $18/5$.

Las operaciones de renglón a efectuar son:

$$R1 (4) + R0 = R'0$$

$$R2 + R'0 = R''0$$

Realizando estas operaciones, se obtiene la Tabla 2.11:

Tabla 2. 11. Tabla con Nuevo Renglón Cero Fase 2 del Ejemplo 2.3.2

	VB	X_1	X_2	E_2	S_3	SOLUCIÓN
R 0.	Z	0	0	$1/5$	0	$18/5$
R 1.	X_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
R 2.	X_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
R 3.	S_3	0	0	1	1	1

La solución inicial para la tabla 2.11 es:

$$Z = 18/5; X_1 = 3/5; X_2 = 6/5; S_3 = 1; E_2 = 0$$

Iteración 1 Fase 2

En la tabla 2.11, se indican la variable de entrada: E_2 , la cual tiene el coeficiente más positivo, por tratarse de una minimización. La variable de salida es S_3 , y fue determinada por el mínimo de los tres cocientes: $\{3/5 / 1/5 = 3; 6/5 / -3/5 = \text{no procede, pivote negativo}; 1/1 = 1\}$. Entonces, el pivote es 1.

Las operaciones de renglón son:

$$R3 (-1/5) + R0 = R'0$$

$$R3 (-1/5) + R1 = R'1$$

$$R3 (3/5) + R2 = R'2$$

Tabla 2. 12. Tabla Óptima Fase 2 del Ejemplo 2.3.2

	VB	X_1	X_2	E_2	S_3	SOLUCIÓN
R 0.	Z	0	0	0	$-1/5$	$17/5$
R 1.	X_1	1	0	0	$-1/5$	$2/5$
R 2.	X_2	0	1	0	$3/5$	$9/5$
R 3.	E_2	0	0	1	1	1

Analizando ésta tabla, se observa que ya es óptima; como el problema es de minimización, los coeficientes de las variables en el renglón cero son todos negativos o cero.

Solución óptima:

$$Z^* = 17/5$$

$$X^*_1 = 2/5$$

$$X^*_2 = 9/5$$

$$E_2 = 1$$

$$S_3 = 0$$

Comprobando los valores anteriores en el modelo aumentado:

Función Objetivo:

$Z = 4(2/5) + (9/5) = 17/5$ (Es el valor mínimo de la función objetivo, cumpliendo con todas las restricciones)

Restricción 1:

$$3(2/5) + (9/5) = 15/5 = 3 \quad (\text{Restricción activa, es de igualdad})$$

Restricción 2:

$$4(2/5) + 3(9/5) - 1 = 7 - 1 = 6 \quad (\text{Restricción inactiva, } E_2 = 1)$$

Restricción 3:

$$2/5 + 2(9/5) + 0 = 20/5 = 4 \quad (\text{Restricción activa, } S_3 = 0)$$

Conclusiones del problema:

El problema no especifica a lo que se refieren físicamente la función objetivo y las restricciones implicadas, entonces se concluirá de manera general.

La función objetivo se minimiza con un valor de $17/5$, cumpliendo con:

Recurso 1: Este recurso se agota por completo, por lo que es escaso.

Recurso 2: En este caso, para el requerimiento mínimo, que es de 6 unidades del recurso, existe un exceso de 1, por lo que el valor utilizado es de 7, se trata de un recurso abundante.

Recurso 3: Para este recurso, existe una holgura de cero, lo cual indica que es un recurso escaso, ya que se consume completamente.

2.3.3. Problemas Propuestos para el método de las Dos Fases:

Resolver los siguientes problemas aplicando el método de las Dos Fases:

Problema 1

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 5X_2 + X_3 .$$

S.A.

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 4$$

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 6$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 6$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Problema 2

$$\text{Min } Z = 7X_1 + 8X_2$$

S.A.

$$2X_1 + X_2 \geq 6$$

$$X_1 - X_2 \geq -1$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Problema 3

$$\text{Max } Z = 4X_1 + X_2$$

S.A.

$$X_1 + X_2 \geq 5$$

$$2X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_1 + X_2 = 5$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Problema 4

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 2X_2$$

S.A.

$$2X_1 + X_2 \geq 8$$

$$3X_1 + 2X_2 = 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Actividades para el lector en la sección 2.3. Método de las Dos Fases

- Investigar el uso de las variables artificiales
- Identificar cuando debe aplicarse el método de las Dos Fases
- Aplicar el método de las Dos Fases para resolver manualmente los problemas propuestos de minimización o maximización
- Aplicar la Fase 1 para determinar si existe una solución factible
- Aplicar la Fase 2 para obtener la solución óptima
- Resolver algunos problemas del método de las Dos Fases en sesiones de aprendizaje colaborativo durante las sesiones en aula
- Resolver como tarea problemas propuestos del método de las Dos Fases
- Considerar los posibles aspectos éticos y de sustentabilidad para cada problema
- Establecer las conclusiones para cada uno de los problemas
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los problemas resueltos, incluyendo las conclusiones correspondientes

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de análisis, síntesis y abstracción
 - Solución de problemas
 - Capacidad de utilizar algoritmos de manera manual
 - Participación en actividades grupales que propician la reflexión y el intercambio de ideas
 - Aplicación de conocimientos
 - Capacidad para trabajar en equipo
 - Habilidad para establecer conclusiones de los problemas resueltos
 - Habilidad para comprender como se aplican los aspectos éticos y de sustentabilidad
 - Habilidad para identificar el algoritmo que debe aplicarse a un problema particular
- **Competencias Específicas**
 - Identificar en qué casos se debe aplicar el método de las dos fases
 - Aplicar el método de las dos fases a diversos problemas
 - Establecer las conclusiones de problemas de maximización o minimización, utilizando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
 - Considerar en las conclusiones los aspectos éticos y de sustentabilidad para orientar correctamente la toma de decisiones

2.4 CASOS ESPECIALES DEL SIMPLEX

En esta sección se consideran cuatro casos especiales que se pueden presentar en la aplicación del método Simplex.

1. Degeneración
2. Problemas Ilimitados (no acotados)
3. Problemas No factibles
4. Soluciones Óptimas Múltiples

2.4.1. Degeneración

La degeneración se presenta cuando una o más variables básicas toman valor igual a cero. Esta circunstancia no es un error, sino que puede ocurrir que el modelo tenga al menos una restricción redundante.

2.4.2. Problemas Ilimitados (no acotados)

En este caso, la variable básica entrante puede crecer de manera indefinida. En la forma tabular, todos los coeficientes de la columna pivote, excluyendo el renglón cero, son negativos o cero.

Esto se debe a un error en el planteamiento del modelo, por lo que se requiere que se revise detalladamente: quizá se omitió alguna restricción relevante o se estableció de modo incorrecto.

2.4.3. Problema No Factible

Cuando las restricciones del modelo no se satisfacen de manera simultánea, el problema no tiene una solución factible. En el método de las Dos Fases, esta situación ocurre cuando las variables artificiales no pueden eliminarse en la Fase 1.

Cuando se presenta esta situación, es posible que el modelo tenga errores en la formulación, por lo que debe revisarse su planteamiento.

2.4.4. Soluciones Óptimas Múltiples

Ocurre cuando la función objetivo toma el mismo valor óptimo en más de un punto de la solución. Las soluciones óptimas múltiples son un gran apoyo en la toma de decisiones ya que permiten elegir entre varias soluciones sin demeritar el valor de la función objetivo.

Actividades para el lector en la sección 2.4. Casos Especiales del Simplex

- Identificar los casos especiales del Simplex
- Resolver ejercicios en sesiones de trabajo en equipo en clase
- Resolver problemas de tarea
- Establecer en diversos ejercicios, las diferencias en las tablas del Simplex cuando ocurren los casos de degeneración, problemas ilimitados, problemas no factibles y problemas con soluciones múltiples
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los problemas resueltos, incluyendo las conclusiones correspondientes

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de análisis y síntesis
 - Identificar anomalías en problemas
 - Participación en actividades grupales que propician la reflexión y el intercambio de ideas
 - Trabajo en equipo
 - Expresar los resultados, conclusiones y recomendaciones en lenguaje simple, a partir del lenguaje técnico
 - Elaboración de reportes
- **Competencias Específicas**
 - Identificar los casos especiales del método Simplex
 - Establecer los cursos de acción cuando se presenten los casos especiales del método Simplex

2.5. USO DE SOFTWARE

Los paquetes de software son de gran ayuda en virtud de que es frecuente que los modelos reales de programación lineal contengan cientos o miles de restricciones, por lo que diversas compañías han desarrollado aplicaciones para modelos sumamente grandes.

Existen aplicaciones o versiones estudiantiles del software recomendadas por los diversos autores, entre los que se encuentran:

- LINGO/LINDO (Hillier, 2010, p.127)
- Excel Solver (Eppen, 2000 p.80; Hillier, 2010, p.544)
- TORA (Taha, 1997, p.871)

El detalle de la utilización, así como ejemplos de aplicación en cada uno de los paquetes de software puede consultarse en cada uno de los libros de los referidos autores. A continuación se describe el detalle de uso del software TORA, por considerarlo muy amigable.

2.5.1. Software de Programación Lineal TORA

El software de programación lineal TORA®, está conformado por ocho módulos que son:

1. Ecuaciones Lineales (Linear Equations)
2. Programación Lineal (Linear Programming)
3. Modelos de Transporte (Transportation Model)
4. Programación Entera (Integer Programming)
5. Modelos de Redes (Network Models)
6. Planeación de Proyectos (Project Planning)
7. Análisis de Líneas de Espera (Queuing Analysis)
8. Juegos Suma Cero (Zero-Sum Game)

El programa puede ser ejecutado en modo automático o interactivo. Para el caso del modo automático, se presenta la solución final, sin entrar en detalles sobre el procedimiento para su obtención. En la modalidad interactiva, el usuario propone variables en cada una de las fases del algoritmo.

Uso de TORA® 1.0

Al inicio del programa, en el Menú Principal, se muestran los módulos en la Figura 2.1:

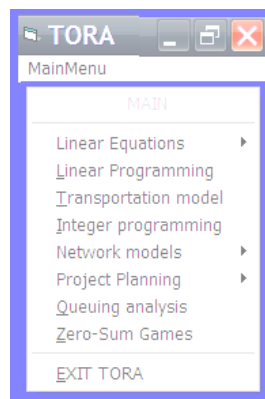


Figura 2.1 Módulos del programa TORA

Una breve descripción de los módulos se proporciona a continuación:

1. **Linear Equations:** En el sub menú encontramos dos opciones que son Matrix Inversion y Linear Equations Solution. Para el caso de Matrix Inversion, se tiene la opción de resolver la inversa de una matriz, el modo

Linear Equations Solution, presenta la opción para resolver las ecuaciones lineales simultáneas.

2. **Linear Programming:** En este módulo se puede dar solución a problemas de programación lineal usando el método Simplex o el método gráfico. Admite los métodos simplex, M's, dos fases y dual simplex.
3. **Transportation Model:** Se aplica en problemas de transporte y asignación.
4. **Integer Programming:** Para resolver problemas de programación entera.
5. **Network Models:** Este módulo cuenta con otros tres sub módulos que son: Minimal Spanning Tree, el cual resuelve problemas de árboles de expansión mínima. Shortest Route que permite determinar la ruta más corta. Maximal Flow que se usa para resolver problemas de flujo máximo.
6. **Project Planning:** Este módulo está conformado por dos sub módulos, que son: CPM -Critical Path Method, que se utiliza para establecer la ruta crítica de un proyecto, el otro es: PERT -Program Evaluation & Review Technique, en el cual se establece la ruta crítica para actividades tienen duraciones probabilistas.
7. **Queuing analysis:** Se aplica para resolver problemas de análisis de líneas de espera.
8. **Zero-Sum Game:** Este módulo resuelve problemas relacionados con la teoría de juegos.

Para la Unidad 2 del curso de Investigación de Operaciones 1, se utilizará el **módulo 2: Linear Programming**

1. Selección del Modelo.

En el menú se selecciona la opción “Linear Programming”, a continuación se despliega la ventana de la Figura 2.2:

Figura 2.2. Datos para ingresar problemas de Programación Lineal

En el modo “Select input mode” se encuentra marcada la casilla “Enter a New Problem”, esta opción permite ingresar un nuevo problema, en caso de que se

requiera trabajar con un problema ya existente, se selecciona la casilla “Select Existing File”.

En esta misma ventana se encuentra la opción del formato en que se introducirán los datos, en la cual se presentan dos opciones: “Decimal Notation”, donde los datos tendrán un tratamiento de números decimales y “Scientific Notation”, para los datos que se manejan con notación científica.

Después de seleccionar alguna de estas dos opciones, debe indicarse el número de decimales a utilizar durante la solución del problema, o la cantidad de números naturales a considerar en caso de que se use la notación científica. Finalmente se da enter o click sobre la opción “Go to input screen”, todo esto en la ventana de la Figura 2.2.

2. Datos del problema y número de variables y restricciones.



Fig. 2.3. Ventana para indicar el título y datos generales del problema

En este menú se da la posibilidad de que el usuario ponga el título de su problema, asimismo, se introducen el número de variables de decisión así como el número de restricciones. Una vez que se han proporcionado los espacios requeridos, se da click en el botón “**SOLVE Menu**”. Es importante mencionar que si cambia el número de variables de decisión o de restricciones, el software permite ir insertando más variables o restricciones al modelo.

3. Datos del Modelo

En la Figura 2.4 se introducen los parámetros del problema, y se puede dar nombre a cada una de las variables de decisión. En caso de necesitar más variables (columnas) ó requerir insertar más restricciones (renglones) hay que posicionarse en la última columna o renglón y se seleccionan.

TORA
File EditGrid

Problem Title: PROGRAMACION LINEAL
Nbr. of Variables: 2
No. of Constraints: 4

INPUT GRID - LINEAR PROGRAMMING

	x1	x2	Enter <, >, or =	R.H.S.
Var. Name				
Maximize	0.00	0.00		
Constr 1	0.00	0.00	<=	0.00
Constr 2	0.00	0.00	<=	0.00
Constr 3	0.00	0.00	<=	0.00
Constr 4	0.00	0.00	<=	0.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

Figura 2.4. Ventana para insertar los parámetros del problema

Una vez que se han capturado los datos, como se muestra en la Figura 2.5 y tomando en consideración los límites inferiores y superiores que pueden tener las variables, así como las desigualdades adecuadas, se da click en la opción “SOLVE Menu”.

Problem Title: DADO'S PIZZA
Nbr. of Variables: 2
No. of Constraints: 4

INPUT GRID - LINEAR PROGRAMMING

	x1	x2	Enter <, >, or =	R.H.S.
Var. Name	AS NORMAL	AS DE LUJO		
Maximize	5.00	7.50		
Constr 1	0.50	0.50	<=	100.00
Constr 2	4.00	8.00	<=	850.00
Constr 3	1.00	0.00	<=	140.00
Constr 4	0.00	1.00	<=	80.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

Figura 2.5. Parámetros del problema registrados

Una vez seleccionada, la columna o el renglón según sea el caso, se pone color rojo, posteriormente ir al menú de opciones, seleccionar EditGrid, tal como se muestra en la figura 2.6.

Se selecciona la última opción “Insert Column or Row” y a continuación aparecerá la nueva columna (variable) o renglón (restricción). Un proceso similar se hace para borrar, copiar o pegar una columna o renglón, seleccionando la opción adecuada.

	x1	x2	Enter <, >, or =	R.H.S.
Var. Name				
Maximize	0.00	0.00		
Constr 1	0.00	0.00	<=	0.00
Constr 2	0.00	0.00	<=	0.00
Constr 3	0.00	0.00	<=	0.00
Constr 4	0.00	0.00	<=	0.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

	x1	x2	Enter <, >, or =	R.H.S.
Var. Name				
Maximize	0.00	0.00		
Constr 1	0.00	0.00	<=	0.00
Constr 2	0.00	0.00	<=	0.00
Constr 3	0.00	0.00	<=	0.00
Constr 4	0.00	0.00	<=	0.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

Para insertar columnas

Para insertar renglones

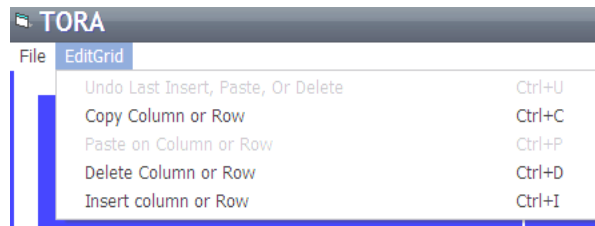


Figura 2.6. Pasos para la Modificación de Columnas o Renglones

A continuación el programa pregunta si se desea guardar el problema.

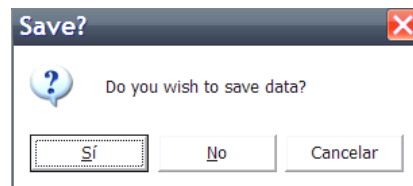


Figura 2.7. Opción de guardar datos

4. Solución del Problema

Enseguida se despliega el siguiente menú y se selecciona la opción "Solve Problem", existiendo dos opciones para hacerlo, una mediante el método grafico y otra mediante el método analítico (método Simplex).

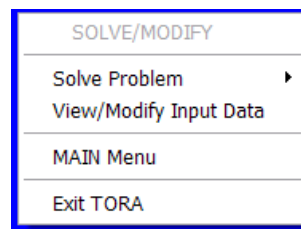


Figura 2.8. Menú para Resolver el Problema

4.1 Método Gráfico: Si se desea usar este método aparecerá la siguiente pantalla

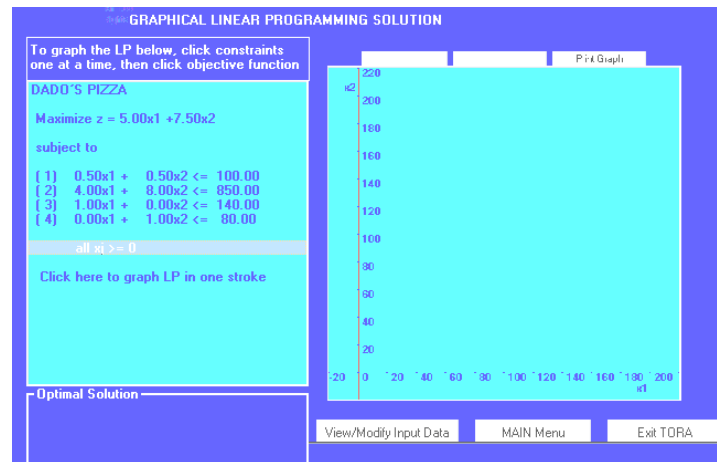


Figura 2.9. Pantalla del Método Gráfico

Para encontrar la solución con este método, basta con hacer click sobre cada una de las restricciones, para que automáticamente se genere la línea recta correspondiente, además se va iluminando la región factible.

[Click here to graph LP in one stroke](#)

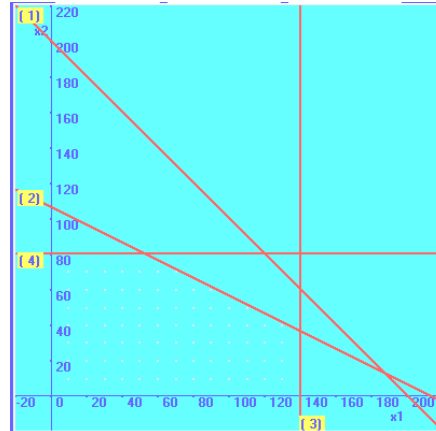


Figura 2.10. Representación de Restricciones en el Método Gráfico

Una vez que se tienen todas las líneas rectas, se da click en la ecuación de la función objetivo para que se genere la animación y encontrar la solución óptima, como puede observarse en la Figura 2.11.

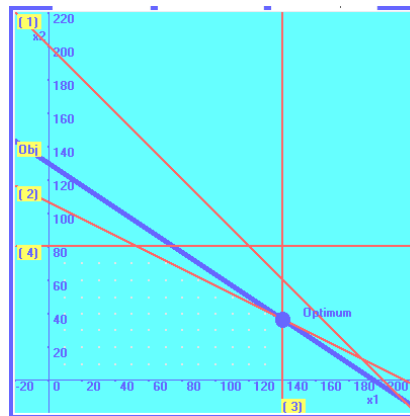


Figura 2.11. Solución Óptima Obtenida con el Método Gráfico

Finalmente se puede ver la ventana de la Figura 2.12, con la solución óptima para este problema, obtenida con el método gráfico.

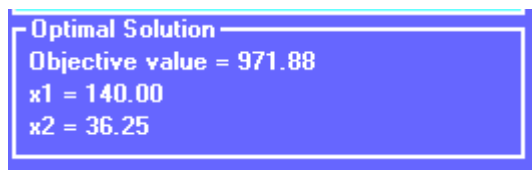


Figura 2.12. Solución Óptima Numérica obtenida con el Método Gráfico

4.2 Modo Algebraico: Aparecen las opciones “Final Solution” e “Iterations”; para el segundo caso se muestra en la Figura 2.13 las ventanas con las opciones.

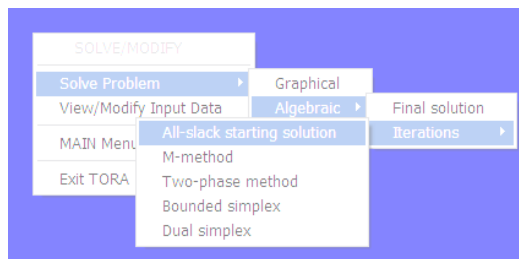


Figura 2.13. Pantallas para Solución con el Modo Algebraico

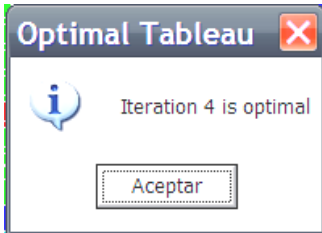
De acuerdo al método seleccionado se encontrarán pantallas diferentes, como puede verse en las Figuras 2.14 y 2.15, incluidas a continuación.

Iteration 1	NTIDAD DE	NTIDAD DE					
Basic	x1	x2	sx3	sx4	sx5	sx6	Solution
z (max)	-5.00	-7.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
sx3	0.50	0.50	1.00	0.00	0.00	0.00	100.00
sx4	4.00	8.00	0.00	1.00	0.00	0.00	850.00
sx5	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	140.00
sx6	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	80.00
Lower Bound	0.00	0.00					
Upper Bound	infinity	infinity					
Unrestr'd (y/n)?	n	n					

Figura 2.14. Tabla Inicial del Simplex con el Modo Algebraico

La figura anterior corresponde a la selección “All Slack Starting Solutions” donde se utiliza el método simplex.

A continuación el software indica que logró el óptimo en la iteración 4 y proporciona la información correspondiente.



LINEAR PROGRAMMING OUTPUT SUMMARY			
Title: DADO'S PIZZA			
Final Iteration No.: 4			
Objective Value (Max) =971.88			
			Write to Printer
Variable	Value	Obj Coeff	Obj Val Contrib
x1: CANTIDAD DE	140.00	5.00	700.00
x2: CANTIDAD DE	36.25	7.50	271.88
Constraint	RHS	Slack-Surplus	
1 (≤)	100.00	11.88-	
2 (≤)	850.00	0.00	
3 (≤)	140.00	0.00	
4 (≤)	80.00	43.75-	

Figura 2.15. Solución Óptima obtenida con el Simplex en Modo Algebraico

Así se concluye la utilización del paquete computacional TORA, el cual, de acuerdo con lo anteriormente expuesto, es fácil y amigable, en comparación con la realización manual de los algoritmos Simplex y Dos Fases.

Actividades para el lector en la sección 2.5. Uso de Software

- Identificar los diferentes paquetes de software disponibles
- Resolver ejercicios utilizando software en sesiones de trabajo en equipo durante las clases
- Resolver los problemas de tarea
- Identificar la solución de los problemas utilizando software
- Establecer las conclusiones para cada problema en lenguaje accesible
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los problemas resueltos, incluyendo las conclusiones correspondientes

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**

- Habilidad para utilizar tecnologías de información y comunicaciones
- Manejo del Inglés
- Capacidad para usar software para resolver problemas
- Participación en actividades grupales que propician el entendimiento del uso de herramientas computacionales
- Trabajo en equipo
- Desarrollo de las habilidades interpersonales como el respeto a las ideas de los demás y la tolerancia
- Flexibilidad para trabajar con diferentes personas
- Expresión en lenguaje común a partir del lenguaje técnico
- Elaboración de reportes

- **Competencias Específicas**

- Utilizar software para resolver problemas de programación lineal
- Identificar los parámetros de solución en el paquete de software
- Establecer las conclusiones de problemas resueltos a través de software, utilizando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones

2.6. ASPECTOS ÉTICOS Y DE SUSTENTABILIDAD

Al analizar los aspectos éticos y de sustentabilidad hay que considerar como premisa la afirmación siguiente: *Como que la escuela y la universidad enseñan pero no educan. El egresado sabe, pero no es capaz de pensar por sí mismo; acepta pero no cuestiona. El contraste entre ser conocedor y ser educado es de crucial importancia (Rugarcía, 1996, p.97)* y un poco más adelante, el mismo texto exhorta la labor de los catedráticos comprometidos: *Es en la mente y el corazón de los profesores donde está la posibilidad eficaz del cambio educativo (Rugarcía, 1996, p.97).*

Es conveniente que en este punto, los profesores seleccionen casos reales, publicados en periódicos, revistas o en medios electrónicos confiables, que hayan ocurrido dentro o fuera del país, para el análisis de situaciones donde se hayan infringido leyes o normas, y la consecuencia negativa que dichos actos tuvieron sobre el país, las empresas y la sociedad.

2.7. RÚBRICA PROPUESTA PARA LA UNIDAD 2

Tabla 2. 13. Rúbrica para la Unidad 2

Aspecto a Evaluar	Excelente 100 puntos	Muy Bien 85 puntos	Suficiente 70 puntos	A Mejorar 55 puntos	% de la calificación
Consultar dos fuentes bibliográficas y elaborar un resumen de los conceptos en las secciones 2.1. Teoría del Método Simplex y 2.8 Terminología de la Unidad 2	Cubre la totalidad de actividades. Consultó el número de fuentes bibliográficas recomendadas Los conceptos son precisos. El trabajo es limpio. Se entregó con oportunidad.	Puede presentar fallas aisladas en cuanto a: actividades, bibliografía, conceptos, diagramas, limpieza, puntualidad.	Presenta varias fallas en cuanto a: actividades, bibliografía, conceptos, diagramas, limpieza, puntualidad	No cumple con las actividades sugeridas.	10% cada sección. Total 20%
Solución de problemas en las secciones 2.2 Forma Tabular del método Simplex y 2.3 Método de las dos fases	Resolvió correctamente los problemas. Consideró los aspectos éticos y de sustentabilidad. Estableció adecuadamente las conclusiones correspondientes. El trabajo es limpio. Se entregó a tiempo	Presenta fallas en ciertos problemas o tuvo errores al considerar aspectos éticos y de sustentabilidad o en las conclusiones. Puede tener alguna falla en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	No resolvió todos los problemas o presenta errores en los aspectos éticos y de sustentabilidad o en las conclusiones. Presentó alguna falla en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta muchos errores en los problemas y en los aspectos éticos y de sustentabilidad o las conclusiones. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	10% todos los problemas de cada sección. Total 20%

Solución de problemas en las secciones 2.4 Casos especiales del simplex y 2.5 Uso de software	Resolvió correctamente los problemas propuestos. Estableció adecuadamente las conclusiones. El trabajo está limpio. Se entregó a tiempo.	No resolvió todos los problemas solicitados o presenta errores aislados. No respondió alguno de los puntos requeridos. Puede tener fallas en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta varias fallas u omisiones en la solución de los problemas. Presentó alguna falla en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta muchos errores en la solución de los problemas u omitió algunos de los puntos requeridos. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	2.5% todos los problemas de cada sección. Total 5%
Participación en clase y trabajo en Equipo	Siempre participa en clase y en las sesiones de trabajo en equipo.	Frecuentemente tiene una actitud positiva en clase y en el trabajo en equipo.	Solo en ocasiones presenta una actitud positiva en clase y en el trabajo en equipo.	Frecuentemente su actitud es de apatía o negativa en clase y en el trabajo en equipo.	5%
Examen escrito	Las soluciones a los problemas y las consideraciones éticas y de sustentabilidad, así como las conclusiones son correctas. Obtiene la puntuación más alta.	Existen errores menores en cuanto a la solución o los aspectos éticos y de sustentabilidad o las conclusiones.	Se presentaron varios errores en la solución, algunos son mayores. No se consideraron los aspectos éticos o de sustentabilidad o las conclusiones son erróneas.	Existe gran cantidad de errores severos.	50 %

2.8. TERMINOLOGÍA DE LA UNIDAD 2

A continuación se incluye la terminología de la Unidad 2, con la finalidad de que el lector investigue y estudie cada uno de los términos.

1. Algoritmo
2. Método Simplex
3. Padre de la programación lineal
4. Programación Lineal
5. Proporcionalidad
6. Aditividad
7. Divisibilidad
8. Certidumbre
9. Forma estándar o canónica del Simplex
10. Conceptos clave del método Simplex
11. Solución factible en vértice (FEV) o punto extremo
12. Algoritmo iterativo
13. Solución factible en vértice adyacente
14. Arista de la región factible
15. Tasa de mejoramiento en Z
16. Pasos del método Simplex
17. Forma aumentada del método Simplex
18. Variable de holgura
19. Variable básica
20. Variable no básica
21. Variable de exceso
22. Variable artificial
23. Forma tabular del método Simplex
24. Tabla Simplex
25. Iteración
26. Renglón pivote
27. Columna pivote
28. Pivote
29. Pivoteo
30. Reducción de renglones o eliminación gaussiana
31. Degeneración
32. Solución óptima
33. Solución degenerada
34. Solución ilimitada (no acotada)
35. Recurso Escaso
36. Recurso Abundante
37. Matriz Identidad
38. Matriz de Coeficientes
39. Matriz Aumentada
40. Vector de Términos Independientes
41. Diagonal Principal

- 42. Método de las Dos Fases
- 43. Software de Programación Lineal

UNIDAD 3. DUALIDAD Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Después de estudiar este capítulo, el lector será capaz de:

- Conocer la propiedad de dualidad
- Identificar las diferentes formas de relación primal-dual
- Convertir un problema primo a su dual y viceversa
- Establecer la interpretación económica de los precios duales o precios sombra
- Relacionar los precios duales con los costos marginales
- Identificar en qué casos se debe utilizar el método Dual Simplex
- Conocer y aplicar el método Dual Simplex
- Establecer la relación entre el análisis post-óptimo y el análisis de sensibilidad
- Interpretar el beneficio del análisis de sensibilidad en la toma de decisiones
- Utilizar software para llevar a cabo el análisis post-óptimo y análisis de sensibilidad
- Establecer las conclusiones del análisis post-óptimo o de sensibilidad empleando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
- Considerar en las conclusiones los aspectos éticos y de sustentabilidad para orientar correctamente la toma de decisiones

En el proceso el lector desarrolla las competencias siguientes:

- Capacidad de realizar investigación bibliográfica
- Capacidad de resumir información
- Habilidad de redactar textos
- Habilidad para utilizar tecnologías de información y comunicación
- Capacidad para trabajar en equipo
- Capacidad de análisis, síntesis y abstracción
- Habilidad para establecer relaciones entre las variables de un problema
- Capacidad de resolver problemas
- Habilidad para interpretar los resultados de los problemas
- Capacidad de utilizar software
- Manejo del Inglés
- Habilidad para la comunicación oral y escrita
- Habilidad de establecer conclusiones los problemas bajo estudio
- Habilidad para comprender como se aplican los aspectos éticos y de sustentabilidad como apoyo para la toma de decisiones

Contenido de la Unidad 3:

- 3.1. Teoría primal-dual
- 3.2. Formulación del problema dual
- 3.3. Relación primal-dual
- 3.4. Dual-simplex
- 3.5. Análisis de sensibilidad: Cambio en el vector de recursos (b_j) y sus límites, cambio en el vector (C_i) y sus límites, adición de una variable (X_i), cambio en coeficientes tecnológicos (a_{ij}), adición de una nueva restricción.
- 3.6. Interpretación del análisis de sensibilidad
- 3.7. Uso de software

3.1. TEORÍA PRIMAL-DUAL

La propiedad de **Dualidad** y sus implicaciones es uno de los conceptos más importantes de la programación lineal. Esta propiedad consiste en que cada problema de programación lineal, denominado **primo o primal**, tiene asociado otro problema que se le deriva matemáticamente y recibe el nombre de **dual**. La dualidad tiene aplicaciones muy útiles como son los **precios sombra o precios duales**, así como la realización e interpretación del **análisis de sensibilidad**.

Los problemas primo y dual están íntimamente relacionados, al grado que la solución óptima del simplex, automáticamente genera la solución óptima del dual, de acuerdo con el siguiente teorema.

El **teorema fundamental de la programación lineal**, establece que:

Sea Z la función objetivo de un problema de maximización de programación lineal, y sea W la función objetivo del correspondiente problema dual de mínimos. Entonces el problema de máximos para Z tiene una solución si y solo si el problema de mínimos para W tiene solución. Además, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ son soluciones óptimas de ambos problemas si y solo si Z evaluada en $(x_1, x_2, \dots, x_n) = W$ evaluada en $(y_1, y_2, \dots, y_m)$. (Grossman, 1988, p.57) .

Actividades para el lector en la sección 3.1. Teoría Primal-Dual

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas las formas de la relación primal-dual y discutir las en equipos de trabajo
- Analizar el teorema fundamental de la programación lineal
- Discutir la propiedad de dualidad
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los tres puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**

- Capacidad de realizar investigación bibliográfica
- Participación en actividades grupales que propician el entendimiento de nuevos conceptos
- Capacidad de resumir información
- Habilidad de redactar textos
- Trabajo en equipo
- Flexibilidad para trabajar con diferentes personas

- **Competencias Específicas**

- Conocer la propiedad de dualidad
- Identificar las diferentes formas de relación primal-dual
- Interpretar el teorema fundamental de la programación lineal

3.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DUAL

En la sección 2.1.2 se estableció la forma estándar del modelo de programación lineal, la cual denominaremos el problema primo o primal:

Problema primo o primal:

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

S A:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

... ..

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

Donde:

Z = Valor de la medida global de desempeño (función objetivo)

x_j = Nivel de la actividad j (para $j = 1, 2, \dots, n$)

c_j = Incremento en Z que se obtiene al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j

b_i = Cantidad del recurso i disponible para asignarse a las actividades (para $i = 1, 2, \dots, m$)

a_{ij} = Cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j , también denominado coeficiente tecnológico, ya que está determinado por la tecnología que se usa.

Entonces, el problema dual es:

Problema dual:

$$\text{Min } W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

S A:

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_m \geq c_2$$

...

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_m \geq 0$$

Donde:

W = Función objetivo de minimización, la cual se expresa en las mismas dimensiones que la original.

y_i = Variables duales, cuyas dimensiones normalmente se expresan como \$/unidad del recurso, representando los precios unitarios del recurso en cuestión.

El resto de las variables y parámetros tienen el mismo significado que fue establecido para el problema primo ó primal.

Notar que en la forma estándar, el problema primo es de maximización con todas sus restricciones tipo $\leq$, y el dual correspondiente es de minimización con todas sus restricciones tipo $\geq$.

Utilizando la notación matricial para ambos problemas, en la cual $\mathbf{c}$ y $\mathbf{y}$ son vectores renglón, y $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$, y $\mathbf{0}$ son vectores columna y la matriz $\mathbf{A}$ contiene los coeficientes de las variables de decisión en las restricciones, siendo $\mathbf{A}^T$ la transpuesta de la matriz $\mathbf{A}$, se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces:

Problema Primo ó Primal
$\text{Max } Z = cx$ SA: $Ax \leq b$ $x \geq 0$

Problema Dual
$\text{Min } W = yb$ SA: $yA^T \geq c$ $y \geq 0$

3.2.1. Ejemplos de formulación primo-dual

3.2.1.1. En este caso, se requiere encontrar el problema dual de mínimos para el problema siguiente:

Primo o Primal:

2 Variables

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.A:

3 Restricciones:

$$X_1 + 2X_2 \leq 5$$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 8$$

$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Asociar
Variables Duales:

$$(y_1)$$

$$(y_2)$$

$$(y_3)$$

Dual:

3 Variables:

$$\text{Min } W = 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$$

S.A:

2 Restricciones:

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

3.2.1.2. Para el problema de la Wyndor Glass Co. presentado en la sección 2.2.2, se tiene que el problema primo cumple con la forma estándar:

Primo ó Primal:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$$

S.A:

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Variables Duales
Asociadas

$$(y_1)$$

$$(y_2)$$

$$(y_3)$$

Entonces, el problema dual es:

Dual:

$$\text{Min } W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3.$$

S.A:

$$y_1 + y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Cuando se resolvió el problema primo, se obtuvo la siguiente tabla final del Simplex, en la cual también se presenta la solución del problema dual:

Tabla 3.1. Tabla simplex óptima del problema de la Wyndor Glass Co.

VB			y1	y2	y3	SOLUCIÓN
	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	
Z	0	0	0	3/2	1	36 ←W
S ₁	1	0	1	1/3	-1/3	2
X ₂	0	1	0	1/2	0	6
X ₁	1	0	0	-1/3	1/3	2

Solución Óptima del Primo
Z = 36
X ₁ = 2
X ₂ = 6

Solución Óptima del Dual
W = 36
y ₁ = 0
y ₂ = 3/2
y ₃ = 1

Nota: Tomar en cuenta que en toda tabla final del Simplex, se cuenta con la solución del problema primo y también la del dual.

Actividades para el lector en la sección 3.2. Formulación del Problema Dual

- Realizar los ejercicios solicitados de la conversión primo-dual
- Identificar en las tablas óptimas del Simplex, la solución del problema primo y la del problema dual
- Comprobar los resultados óptimos en el sistema de ecuaciones lineales para los problemas primo y dual
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los tres puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Incorporación de nuevos conceptos

- Capacidad de análisis, síntesis y abstracción
- Habilidad para establecer las relaciones entre las variables
- Capacidad para el trabajo en equipo
- Elaboración de reportes
- **Competencias Específicas**
 - Formular el problema dual a partir de problema primo o primal y viceversa
 - Identificar en la tabla óptima del Simplex la solución del problema primo y la del problema dual
 - Comprobar los resultados óptimos de los problemas primo y dual

3.3. RELACIÓN PRIMAL-DUAL

En las relaciones primo - dual es importante considerar los puntos siguientes, los cuales utilizan la notación aplicada en la sección anterior.

- a. Si el problema de máximos involucra m desigualdades con n variables, entonces su problema dual de mínimos contiene n desigualdades con m variables.
- b. La matriz de los coeficientes de las desigualdades en el modelo dual es la transpuesta de la matriz de coeficientes de las desigualdades en el modelo primo.
- c. Los valores de los recursos b_i en el modelo primo son los coeficientes de las variables duales y_i en la función objetivo del problema dual.
- d. Los coeficientes c_i de las variables de decisión x_i en el problema primo son los valores del lado derecho de las restricciones en el problema dual.

3.3.1. Resumen de las Relaciones Primal-Dual.

A continuación se presenta un *resumen de las relaciones primal-dual* (Hillier, 2010, p.184):

Propiedad de dualidad débil: si $\mathbf{x}$ es una solución factible para el problema primal y $\mathbf{y}$ es una solución factible para el problema dual, entonces

$$\mathbf{cx} \leq \mathbf{yb}$$

Propiedad de dualidad fuerte: Si $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima para el problema primal y $\mathbf{y}^*$ es una solución óptima para el problema dual, entonces

$$\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$$

Propiedad de soluciones complementarias: En cada iteración, el método simplex identifica de manera simultánea una solución factible en un vértice, $\mathbf{x}$, para

el problema primal y una solución complementaria y , para el problema dual, la cual se encuentra en el renglón cero como los coeficientes de las variables de holgura, donde:

$$cx = yb$$

Si x no es óptima para el problema primal, entonces y no es factible para el problema dual.

Propiedad de soluciones complementarias óptimas: Al final de cada iteración, el método simplex identifica de manera simultánea una solución óptima x^* para el problema primal y una solución óptima complementaria y^* para el problema dual, la cual se encuentra en el renglón cero como los coeficientes de las variables de holgura donde:

$$cx^* = y^*b$$

Los valores de y_i^* son los precios sombra para el problema primal.

Propiedad de simetría: En el caso de cualquier problema primal y su problema dual, las relaciones entre ellos deben ser simétricas debido a que el dual de este problema dual es este problema primal.

Las propiedades anteriores describen las relaciones primal-dual cuando se logra una solución óptima; pero cuando el problema no tiene soluciones factibles o bien, que tenga soluciones factibles pero no una solución óptima, debido a que la función objetivo no esté acotada, se aplica el siguiente teorema:

Teorema de la dualidad: (Hillier, 2010, p.186)

1. Si un problema tiene soluciones factibles y una función objetivo acotada y, consecuentemente, una solución óptima, entonces ocurre lo mismo con el otro problema, de manera que se aplican tanto la propiedad de dualidad débil como la fuerte.
2. Si uno de los problemas tiene soluciones factibles y una función objetivo no acotada, es decir, no tiene solución óptima, entonces el otro problema no tiene soluciones factibles.
3. Si un problema no tiene soluciones factibles, entonces el otro problema no tiene soluciones factibles o bien, la función objetivo es no acotada.

Actividades para el lector en la sección 3.3. Relación Primal-Dual

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas la relación primal-dual
- Analizar en una sesión de aprendizaje colaborativo en el aula, el significado de las siguientes propiedades: de dualidad débil, de dualidad fuerte, de soluciones complementarias, de soluciones complementarias óptimas, de simetría y el teorema de dualidad
- Discutir el significado de las propiedades del punto anterior
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los tres puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de análisis, síntesis y abstracción
 - Incorporación de nuevos conceptos
 - Capacidad para trabajar en equipo
 - Elaboración de reportes
- **Competencias Específicas**
 - Analizar la relación primal-dual
 - Convertir un problema primo a su dual y viceversa
 - Identificar las propiedades y el teorema de la dualidad

3.4 DUAL SIMPLEX

El método Dual Simplex es un procedimiento para resolver problemas con restricciones del tipo $\geq$, sin tener que utilizar variables artificiales. Si el modelo cuenta con restricciones de este tipo, deben multiplicarse por (-1) . Este algoritmo es esencial para realizar los análisis post-óptimo y el de sensibilidad.

En este algoritmo, la solución empieza siendo no factible y óptima -comparado con el simplex, para el cual la solución inicia siendo factible pero no óptima- pero a través de las iteraciones, la solución se mueve hacia el espacio factible, sin perder nunca la condición de optimalidad.

En la iteración en la cual la solución se vuelve factible por primera vez, se encuentra el óptimo y termina el proceso.

El método dual simplex se aplica tanto a problemas de minimización como de maximización, con la característica de que la tabla simplex inicial indica que ya se tiene una solución óptima, pero al menos existe una variable básica negativa, por lo cual es no factible. Para mantener la optimalidad y avanzar hacia la factibilidad en cada iteración, se aplican las siguientes condiciones:

1. **Condición de Factibilidad.** La variable de salida es la variable básica que tiene el valor más negativo, los empates se resuelven arbitrariamente. Si todas las variables básicas son positivas ó cero, el problema termina.
2. **Condición de Optimalidad.** La variable de entrada es la variable no-básica asociada con el cociente de:

Los coeficientes del lado izquierdo en la ecuación de Z se dividen entre los coeficientes estrictamente negativos correspondientes en la ecuación de la variable de salida. Aquí debe aplicarse el criterio siguiente:

Tomar el cociente mínimo absoluto de $\{ c_j/a_{ij} \}$, con $a_{ij} < 0$

Los empates se resuelven arbitrariamente. Si todos los denominadores son cero o positivos, el problema no tiene solución factible.

3.4.1. Ejemplo de Aplicación del Método Dual – Simplex

Se resolverá paso a paso un ejemplo, con objeto de aclarar la secuencia del método:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.A:

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

En este caso, se cuenta con dos restricciones tipo $\geq$, las cuales deben multiplicarse por (-1) para obtener las del tipo $\leq$, entonces se obtiene el modelo siguiente:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.A:

$$-3X_1 - X_2 \leq -3$$

$$-4X_1 - 3X_2 \leq -6$$

$$X_1 + X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Notar que la forma aumentada del modelo contiene solamente variables de holgura:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.A:

$$-3X_1 - X_2 + S_1 = -3$$

$$-4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6$$

$$X_1 + X_2 + S_3 = 3$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

La tabla correspondiente se incluye a continuación:

Tabla 3.2. Tabla Inicial del Ejemplo de Aplicación Método Dual Simplex

VB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUCIÓN
Z	-3	-2	0	0	0	0
S ₁	-2	-1	1	0	0	-3
S ₂	-4	-3	0	1	0	-6
S ₃	1	1	0	0	1	3

R0	Z	-3	-2	0	0	0
R2	S ₂	-4	-3	0	1	0
Rel c_j/a_{ij}		3/4	<u>2/3</u>	-	-	-

Tabla 3.3. Tabla de Primera Iteración del Ejemplo Dual Simplex

VB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUCIÓN
Z	-1/3	0	0	-2/3	0	4
S ₁	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
X ₂	4/3	1	0	-1/3	0	2
S ₃	-1/3	0	0	1/3	1	1

Relación	-1/3/-5/3	-	-	-2/3/-1/3	-
	<u>1/5</u>	-	-	2	-

Tabla 3.4. Tabla Final de Aplicación del Método Dual Simplex

VB	S ₁	S ₂	y ₁	y ₂	y ₃	W
VB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	SOLUCIÓN
Z	0	0	-1/5	-3/5	0	<u>21/5</u>
X ₁	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
X ₂	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
S ₃	0	0	-1/5	2/5	1	6/5

Solución Factible y Óptima:

$$Z^* = 21/5$$

$$X_1 = 3/5$$

$$X_2 = 6/5$$

$$(S_3 = 6/5)$$

El valor óptimo, que en este caso es el mínimo, de la función objetivo es 21/5, con la variable de decisión X_1 con valor de 3/5, la variable de decisión X_2 igual a 6/5 y la variable de holgura S_3 toma el valor de 6/5.

3.4.2. Problemas Propuestos

Resolver los siguientes problemas aplicando el Método Dual Simplex:

Problema 1.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2X_1 + 3X_2 . \\ \text{S.A.} \quad & 2X_1 + 2X_2 \leq 30 \\ & X_1 + 2X_2 \geq 10 \\ & X_1, X_2, \geq 0 \end{aligned}$$

Problema 2.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 5X_1 + 6X_2 . \\ \text{S.A.} \quad & X_1 + X_2 \geq 2 \\ & 4X_1 + X_2 \geq 4 \\ & X_1, X_2, \geq 0 \end{aligned}$$

Problema 3.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 5X_1 + 2X_2 + 4X_3 . \\ \text{S.A.} \quad & 3X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 4 \\ & 6X_1 + 3X_2 + 5X_3 \geq 10 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Problema 4.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -2X_1 - X_3 . \\ \text{S.A.} \quad & X_1 + X_2 - X_3 \geq 5 \\ & X_1 - 2X_2 + 4X_3 \geq 8 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Actividades para el lector en la sección 3.4. Dual-Simplex

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas los principios y la metodología del algoritmo Dual-Simplex
- Comparar el método Dual-Simplex con los criterios de optimización estudiados en la Unidad 2
- Identificar las variables de entrada y salida en un problema práctico de aplicación del método Dual-Simplex
- Aplicar el algoritmo Dual-Simplex para resolver problemas en una sesión de aprendizaje colaborativo en el aula
- Resolver como tarea, los problemas propuestos del método Dual-Simplex
- Considerar los aspectos éticos y de sustentabilidad en los problemas
- Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones de los problemas bajo estudio usando un lenguaje accesible
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los siete puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**

- Habilidad para investigar nuevos algoritmos
- Adquisición de nuevos enfoques para la solución de problemas
- Habilidad para resolver problemas
- Trabajo en equipo
- Comunicación oral y escrita
- Habilidad para visualizar aspectos éticos y de sustentabilidad

- **Competencias Específicas**

- Conocer los principios del método Dual-Simplex
- Identificar en qué casos se debe aplicar el algoritmo Dual-Simplex
- Aplicar el método Dual-Simplex a diversos problemas
- Considerar los aspectos éticos y de sustentabilidad
- Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones para los problemas bajo estudio

3.5. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El **Análisis de Sensibilidad**, en ocasiones llamado también **Análisis Post óptimo**, investiga el efecto que tienen sobre la solución óptima los cambios en los parámetros del modelo. Su propósito principal es identificar los *parámetros sensibles*, los cuales son aquellos que no pueden cambiar sin modificar la solución óptima.

El análisis de sensibilidad se realiza después de obtener la solución óptima de un modelo y determina si los cambios en sus coeficientes a_{ij} , b_i y c_j mantienen la solución actual sin alteración y, en caso contrario, cómo obtener una nueva solución óptima; en muchos casos, este nuevo óptimo se puede obtener sin demasiado esfuerzo computacional.

Debe tomarse en cuenta que *normalmente se presta más atención al análisis de sensibilidad sobre los parámetros b_i y c_j que sobre los a_{ij} , dado que en los problemas reales que contienen cientos o miles de restricciones, el efecto del cambio en un parámetro b_i ó c_j puede tener consecuencias notables, mientras que el cambio de valor de un coeficiente tecnológico a_{ij} puede ser despreciable.* (Hillier, 2010, p. 122)

3.5.1. Cambios en el Modelo

En general, los cambios en el modelo resultan en uno de cuatro casos:

1. La solución básica actual permanece sin cambios.
2. La solución actual se convierte en no factible.

3. La solución actual se vuelve no óptima.
4. La solución actual se vuelve no óptima y no factible.

1. **La Solución básica actual permanece sin cambios.** Esto ocurre cuando existen modificaciones al vector **c**, que contiene los coeficientes de la función objetivo, o al vector **b**, denominado vector de recursos o del lado derecho, pero estos cambios solamente afectan los valores de Z o de las variables básicas, sin que ninguna de dichas variables deba salir de la base.

2. **La solución actual se convierte en no factible.** En este caso se utiliza el método dual simplex para restaurar la factibilidad. Esto puede ocurrir cuando:

- a. Existen cambios en el vector **b** de recursos.
- b. Se adiciona una nueva restricción al modelo.

3. **La solución actual se vuelve no óptima.** En esta situación se aplica únicamente el método simplex para obtener el nuevo óptimo. Es posible que esto ocurra en caso de que:

- a. Se realicen cambios en el vector **c** que contiene los coeficientes de la función objetivo.
- b. Se presenten modificaciones en los coeficientes tecnológicos a_{ij} , para una actividad que no sea básica.
- c. Se agrega una nueva variable de decisión al modelo.

4. **La solución actual se vuelve no óptima y no factible.** Para este caso, se debe restaurar primeramente la optimalidad, ignorando que la solución es no factible, utilizando el algoritmo simplex; posteriormente usar el método dual simplex para obtener el nuevo óptimo. Esta situación puede presentarse cuando ocurren cambios simultáneos al modelo, como por ejemplo, que deban modificarse los coeficientes de la función objetivo, vector **c** y el vector de términos independientes **b**.

3.5.2. Representación Matricial del Método Simplex

La forma estándar del modelo general de programación lineal, establecido en la sección 2.1.2, se representará en forma matricial; para distinguir entre matrices, vectores y escalares, las matrices se indican con letras mayúsculas en negritas, los vectores con letras minúsculas en negritas y los escalares con letras cursivas normales. Al aplicar estas convenciones, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{MAX } Z = & \mathbf{c} \mathbf{x} \\ \text{S.A.} & \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

donde **c** es el vector renglón:

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

siendo $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{0}$ vectores columna, representados aquí como vectores renglón transpuestos:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T \quad \mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]$$

y $\mathbf{A}$ es la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

La forma aumentada del problema se obtiene introduciendo el vector columna $\mathbf{s}$ de las variables de holgura:

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$$

entonces, las restricciones se convierten en:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \geq 0$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de orden $m \times m$ y el vector nulo contiene $n + m$ elementos.

En la Tabla 3.5 se muestran los valores después de cualquier iteración del simplex.

Tabla 3.5. Valores en la tabla simplex después de las iteraciones

V B	$\mathbf{x}$	$\mathbf{s}$	Solución
Z	$\mathbf{z}^* = \mathbf{y}^* \mathbf{A} - \mathbf{c}$	$\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{Z}^* = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ $= \mathbf{y}^* \mathbf{b} = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B$
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{A}^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$	$\mathbf{S}^* = \mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{b}^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

Cuando $\mathbf{B}$ es la matriz base de la solución óptima obtenida mediante el método simplex, se obtienen las identidades expresadas en la Tabla 3.6, en las cuales el asterisco indica el valor óptimo:

Tabla 3.6. Identidades en la tabla óptima del simplex

Identidad	Significado
$\mathbf{S}^* = \mathbf{B}^{-1}$	Coeficientes de las variables de holgura de los renglones 1 a m
$\mathbf{A}^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$	Coeficientes de las variables de decisión de los renglones 1 a m
$\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$	Coeficientes de las variables de holgura en el renglón cero
$\mathbf{z}^* = \mathbf{y}^* \mathbf{A} - \mathbf{c}$	Coeficientes de las variables de decisión en el renglón cero
$\mathbf{Z}^* = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ $= \mathbf{y}^* \mathbf{b} = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B$	Valor óptimo de la función objetivo
$\mathbf{b}^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$	Valor óptimo del lado derecho de los renglones 1 a m

Una vez que $\mathbf{B}$, $\mathbf{c}_B$ y $\mathbf{x}_B$ se conocen, toda la tabla puede calcularse usando $\mathbf{B}^{-1}$ y los datos originales del problema.

Notar que la matriz base inversa $\mathbf{B}^{-1}$ guarda todos los cambios que se han realizado a la tabla del simplex a través de las iteraciones realizadas, por lo cual es fundamental en los cálculos, utilizándose en el método denominado simplex revisado, así como en el análisis de sensibilidad o post-óptimo.

En el análisis post-óptimo debe probarse si un cambio en el vector de $\mathbf{c}_B$ a “ $\mathbf{d}_B$ ” y/o una modificación del vector $\mathbf{b}$ a “ $\mathbf{d}$ ” mantendrá la base actual $\mathbf{B}$ tanto óptima como factible.

Por tanto, basándose en el hecho que $\mathbf{B}$ no cambia, todo lo que debe hacerse es reemplazar el vector $\mathbf{c}_B$ con el nuevo “ $\mathbf{d}_B$ ” y el vector $\mathbf{b}$ con el “ $\mathbf{d}$ ” y recalcular el renglón cero usando las identidades mostradas en la tabla 3.6.

Si ninguno de los coeficientes del renglón cero viola la optimalidad y ninguno de los coeficientes de la solución ubicados en el lado derecho de la tabla se vuelve negativo, entonces la matriz base $\mathbf{B}$ permanece óptima y factible en los nuevos valores $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{d}$. Si se violaron la optimalidad y/o la factibilidad, se necesitan cálculos adicionales para obtener la nueva solución.

3.5.3. Ejemplo del Análisis de Sensibilidad

En virtud de la complejidad del análisis de sensibilidad, a través de un ejemplo se analizarán detalladamente los cinco diferentes cambios sugeridos en el programa de estudios: cambio en el vector de recursos $\mathbf{b}$ y sus límites; modificación en el vector $\mathbf{c}$ y sus límites; adición de una variable x_i ; cambio en los coeficientes tecnológicos a_{ij} ; adición de una nueva restricción.

Se tomará el problema de una fábrica de cosméticos “Chandy”, que elabora dos productos denominados X_1 y X_2 , utilizando dos materias primas, A y B, estableciendo el límite de demanda entre los dos productos en el que el producto 2 puede ser menor, igual o hasta 1 tonelada superior al producto 1 y

adicionalmente, se define un límite de demanda de 2 toneladas para el producto tipo 2. El modelo se incluye a continuación:

Modelo de Cosméticos *Chandy*

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 \text{ (Utilidades, miles de pesos)}$$

SA:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 6 && \text{(Disponibilidad de materia prima A)} \\ 2X_1 + X_2 &\leq 8 && \text{(Disponibilidad de materia prima B)} \\ -X_1 + X_2 &\leq 1 && \text{(Límite de demanda entre los dos productos)} \\ X_2 &\leq 2 && \text{(Límite de demanda del producto tipo 2)} \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cuyos valores óptimos, obtenidos por el método Simplex, se encuentran en la siguiente tabla:

Tabla 3.7. Tabla óptima del ejemplo de *Chandy*

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	SOLUCIÓN
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

Para el problema original, se tienen los siguientes vectores y matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = (6, 8, 1, 2)^T \quad \mathbf{c} = (3, 2)$$

En la tabla final, se encuentran los siguientes vectores y matrices que se utilizarán posteriormente para realizar cálculos:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^* = (1/3, 4/3, 0, 0) \quad \mathbf{z}^* = (0, 0)$$

Variables básicas:

$$\mathbf{x}_B = (X_2, X_1, S_3, S_4)^T$$

Valores de las variables básicas o vector solución $\mathbf{b}^*$ del lado derecho:

$$\mathbf{b}^* = (4/3, 10/3, 3, 2/3)$$

Coefficientes de las variables básicas correspondientes en la función objetivo:

$$\mathbf{c}_B = (2, 3, 0, 0)$$

Los escalares (solución) del problema son:

$$Z = 38/3 = 12.667$$

$$X_2 = 4/3 = 1.333; X_1 = 10/3 = 3.333; S_3 = 3; S_4 = 2/3 = 0.667$$

Lo cual significa que las utilidades (Z) de la empresa *Chandy* serán de 12.667 miles de pesos, debiendo elaborar 1.333 toneladas del cosmético tipo 2 (X_2) y 3.333 ton del cosmético tipo 1 (X_1) teniendo una holgura de 3 en el límite de demanda entre los dos productos (S_3) y una holgura de 0.667 del límite de demanda para el producto 2 (S_4).

3.5.4. Cambios en el Vector de Recursos $\mathbf{b}$ y sus Límites

Como se comentó al inicio de esta sección, los cambios de los recursos, representados por el vector $\mathbf{b}$, pueden o no afectar la factibilidad del problema, por lo que se ejemplificarán ambas situaciones.

3.5.4.1. Cambios en $\mathbf{b}$ sin Afectar la Factibilidad del Problema

A manera de ejemplo, se supone que la administración informa que debido a compromisos establecidos previamente con el proveedor, la disponibilidad de la materia prima A se cambia de 6 a 7 toneladas. Entonces, el vector $\mathbf{b}$ es:

$$\mathbf{b} = (7, 8, 1, 2)^T$$

Como la solución de $\mathbf{x}_B$ es $\mathbf{b}^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$, se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, todos los valores del vector $\mathbf{b}^*$ son no-negativos, por lo cual las variables que se encuentran en la base no cambian, y entonces la base B no se modifica, siendo los nuevos valores de las variables básicas los siguientes:

$$X_2 = 2 \quad X_1 = 3 \quad S_3 = 2 \quad S_4 = 0$$

Por lo tanto el nuevo valor de la función objetivo Z, calculado como $Z^* = \mathbf{y}^* \mathbf{b}$ es:

$$Z = (1/3, 4/3, 0, 0) (7, 8, 1, 2)^T = 1/3 (7) + 4/3 (8) \\ Z = 13$$

Si se representan en el lado derecho de la tabla simplex estos cambios, se tiene lo siguiente:

Tabla 3.8. Solución del ejemplo *Chandy* con cambios en $\mathbf{b}$ sin afectar factibilidad

Solución
13
2
3
2
0

El resto de los valores en la tabla permanece igual.

Estos cambios significan que con la mayor disponibilidad de la materia prima A, las ganancias máximas son ahora de 13 mil pesos (Z), lo cual se logra produciendo 3 toneladas del producto 1 (X_1) y 2 toneladas del producto 2 (X_2), existiendo una holgura de 2 toneladas (S_3) en el límite de la demanda entre los dos productos.

Se debe tomar en cuenta que si el vector solución del lado derecho $\mathbf{b}^*$ contiene algún elemento negativo, debe aplicarse el método dual simplex, con lo cual puede obtenerse la solución óptima, o también puede ocurrir que el cambio propuesto no pueda tener factibilidad.

3.5.4.2. Cambios en $\mathbf{b}$ Afectando la Factibilidad del Problema

Para este modelo, se informa que, debido a problemas en el suministro de la materia prima A, se surtirán únicamente **3** toneladas de la materia prima A, en lugar de las 6 requeridas originalmente. Entonces, el vector $\mathbf{b}$ cambia a:

$$\mathbf{b} = (3, 8, 1, 2)^T$$

Como la solución de $\mathbf{x}_B$ es $\mathbf{b}^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$, aplicando esta operación se tiene que:

$$\mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 13/3 \\ 6 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

Bajo esta situación, la variable X_2 presenta un valor negativo, por lo que dicha solución es no factible y las variables básicas cambiarán, entonces deberá aplicarse el método dual simplex. Los nuevos valores de las variables básicas son los siguientes:

$$X_2 = -2/3 \quad X_1 = 13/3 \quad S_3 = 6 \quad S_4 = 8/3$$

El nuevo valor de la función objetivo Z , calculado como $Z^* = \mathbf{y}^* \mathbf{b}$ es:

$$Z = (1/3, 4/3, 0, 0) (3, 8, 1, 2)^T = 1/3 (3) + 4/3 (8) \\ Z = 35/3$$

En la Tabla 3.9, se insertan estos nuevos valores, representados en negritas:

Tabla 3.9. Tabla simplex del ejemplo *Chandy* con cambios en $\mathbf{b}$ afectando factibilidad

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	SOLUCIÓN
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	35/3
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	-2/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	13/3
S_3	0	0	-1	1	1	0	6
S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	8/3

Aplicando el algoritmo dual simplex, se tiene que la variable de **salida** de la base es X_2 y la variable de **entrada** a la base es S_2 , siendo el pivote **-1/3**. Realizando las operaciones de renglón se obtiene la Tabla 3.10, la cual proporciona una solución factible:

Tabla 3.10. Tabla simplex óptima del ejemplo *Chandy* con cambios en **b** afectando factibilidad

VB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	SOLUCIÓN
Z	0	4	3	0	0	0	9
S ₂	0	-3	-2	1	0	0	2
X ₁	1	2	2	0	0	0	3
S ₃	0	3	1	0	1	0	4
S ₄	0	1	0	0	0	1	2

La solución obtenida proporciona los valores siguientes:

$$Z = 9$$

$$X_1 = 3 \quad X_2 = 0$$

$$S_1 = 0 \quad S_2 = 2 \quad S_3 = 4 \quad S_4 = 2$$

Lo cual indica que, con la limitación impuesta a la materia prima A, las ganancias máximas (Z) son de 9 mil pesos, produciendo 3 toneladas del producto 1 (X₁) y sin elaborar el producto 2 (X₂), presentando una holgura (S₂) de 2 en la materia prima B, dado que solo se utilizan 6 de las 8 toneladas disponibles. Existe una holgura (S₃) de 4 en el límite de demanda entre los dos productos, y una holgura (S₄) de 2 en el límite de demanda del producto 2, ya que éste no se elabora.

3.5.4.3. Límites de cambio en el vector **b**

Los límites de cambio del vector **b**, obtenidos con el paquete computacional Tora® en el análisis de sensibilidad, establecen los límites superior e inferior de variación de los parámetros b_i , con la condición que solamente uno de ellos se modifique, ya que los cambios establecidos en la tabla no pueden ser simultáneos; de lo contrario, se perdería la factibilidad del modelo. Para el ejemplo de la empresa Chandy, en la Tabla 3.11 se tiene la representación correspondiente.

Tabla 3.11. Análisis de Sensibilidad para el vector **b**

Restricción (Tipo)	Lado Derecho (RHS) Actual (Vector b)	Lado Derecho (RHS) Mínimo	Lado Derecho (RHS) Máximo	Precio Dual
1(<)	6	4.00	7.00	0.33
2(<)	8	6.00	12.00	1.33
3(<)	1	-2.00	∞	0.00
4(<)	2	1.33	∞	0.00

Lo cual indica que los recursos, representados por el vector **b** o lado derecho (RHS), pueden tener cambios de disminución o de incremento sin afectar la factibilidad del modelo. Es decir, en la restricción 1 (disponibilidad de materia prima A), del valor original del parámetro, que es 6, éste se puede reducir a un mínimo de 4, o bien, aumentar a un máximo de 7 sin afectar la factibilidad del problema, pero bajo la condición de que los demás coeficientes permanezcan sin modificación.

De igual manera, el recurso 2 (disponibilidad de materia prima B), el cual tiene un valor original de 8, puede reducirse a un mínimo de 6, o bien incrementar a un máximo de 12 sin que se afecte la factibilidad del problema, con la condición que el resto de los parámetros permanezca inalterado.

Para el caso de la restricción 3, sin que se modifique algún otro parámetro, el valor original que es 1 puede reducirse a un valor de -2, o aumentar a un valor muy grande, representado en el paquete Tora por " ∞ ", sin afectar la factibilidad del modelo.

En la restricción 4, el valor del recurso puede disminuirse del valor original 2, hasta un límite de 1.33, o bien, incrementarse hasta un valor muy alto, identificado en el Tora como " ∞ ", sin que se afecte la factibilidad del modelo y respetando el que no se altere el resto de los parámetros.

La interpretación del precio dual se incluye en la sección 3.6.

3.5.5. Cambios en el Vector **c y sus Límites**

Como se mencionó al inicio de la sección 3.5, los cambios que se realizan en los coeficientes de las variables en la función objetivo, denominados vector **c**, pueden afectar la optimalidad del modelo bajo estudio.

3.5.5.1. Cambios en el Vector **c sin afectar la optimalidad**

Para ejemplificar este caso, se supone que la administración informa que las utilidades de los productos cambian, para el producto tipo 1 de un valor original de 3 a un nuevo valor de 5 y para el tipo 2, de un valor anterior de 2, a un valor de 4; entonces, la nueva función objetivo es:

$$\text{MAX } Z = 5 X_1 + 4 X_2$$

Por lo que el nuevo vector **c** es:

$$\mathbf{c} = (5, 4)$$

Dado que las variables básicas, incluidas en el vector $\mathbf{x}_B$ son:

$$\mathbf{x}_B = (X_2, X_1, S_3, S_4)^T$$

Entonces el nuevo valor del vector $\mathbf{c}_B$ es:

$$\mathbf{c}_B = (4, 5, 0, 0)$$

Por lo que el vector $\mathbf{y}^*$, el cual contiene los coeficientes de las variables de holgura en el renglón cero, se debe modificar como se indica a continuación:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = (4, 5, 0, 0) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resultando en el vector siguiente:

$$\mathbf{y}^* = (1, 2, 0, 0)$$

Puede observarse que este vector contiene solo valores positivos, por lo que los cambios considerados no están afectando la optimalidad de la tabla. Los coeficientes de las variables de decisión en el renglón cero continúan teniendo ceros, ya que en este caso, ambas variables de decisión son básicas.

El nuevo valor de Z se puede calcular como: $Z = \mathbf{y}^* \mathbf{b}$

$$Z = (1, 2, 0, 0) (6, 8, 1, 2)^T = 22$$

Entonces, el nuevo renglón cero es:

Tabla 3.12. Renglón cero para cambios del ejemplo *Chandy* con cambios en $\mathbf{c}$ sin afectar factibilidad

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	SOLUCIÓN
Z	0	0	1	2	0	0	22

El resto de los valores en la tabla permanece igual. Puede observarse que los cambios en las utilidades de ambos productos, los cuales son respectivamente de 5 y 4 miles de pesos por tonelada para los productos 1 y 2, no afectaron la optimalidad del modelo, solamente aumentó el valor de las utilidades (Z) a 22 mil pesos.

3.5.5.2. Cambios en el Vector $\mathbf{c}$ afectando la optimalidad

A manera de ejemplo, se supone que la administración informa que debido a condiciones climáticas y de suministros, las utilidades de los productos cambian, para el producto tipo 1 de un valor original de 3 a un nuevo valor de **2** y para el tipo 2, de un valor anterior de 2 a un valor de **6**; entonces, la nueva función objetivo es:

$$\text{MAX } Z = \mathbf{2} X_1 + \mathbf{6} X_2$$

Por lo que el nuevo vector $\mathbf{c}$ es:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{2}, \mathbf{6})$$

Dado que las variables básicas, incluidas en el vector $\mathbf{x}_B$ son:

$$\mathbf{x}_B = (X_2, X_1, S_3, S_4)^T$$

Entonces el nuevo valor del vector $\mathbf{c}_B$ es:

$$\mathbf{c}_B = (\mathbf{6}, \mathbf{2}, 0, 0)$$

Por lo que el vector $\mathbf{y}^*$, el cual contiene los coeficientes de las variables de holgura en el renglón cero, se debe modificar como se indica a continuación:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = (6, 2, 0, 0) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resultando en el vector siguiente:

$$\mathbf{y}^* = (10/3, -2/3, 0, 0)$$

Debe notarse que este vector contiene un elemento negativo, lo cual genera una tabla simplex que no es óptima, por lo que deberán realizarse iteraciones a fin de restaurar la condición de optimalidad.

Normalmente se debe calcular el nuevo vector $\mathbf{z}^*$, que contiene los coeficientes de las variables de decisión en el renglón cero, pero en este caso, éstos continúan con valor cero, ya que ambas variables de decisión son básicas.

El nuevo valor de Z se puede calcular como: $Z = \mathbf{y}^* \mathbf{b}$

$$Z = (10/3, -2/3, 0, 0) (6, 8, 1, 2)^T = 44/3$$

Entonces, se obtiene la Tabla 3.13:

Tabla 3.13. Tabla inicial con cambios del ejemplo *Chandy* con cambios en **c** afectando factibilidad

VB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	SOLUCIÓN
Z	0	0	10/3	- 2/3	0	0	44/3
X ₂	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
X ₁	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
S ₃	0	0	-1	1	1	0	3
S ₄	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

Debe notarse que esta tabla no es óptima, ya que el coeficiente de S₂ en el renglón cero es negativo, por lo que dicha variable debe entrar en la base, y la variable de salida es S₄, ya que es la que tiene el coeficiente mínimo de $\{b_i / a_{ij}\}$, siendo el pivote 1/3.

Realizando estas operaciones, se obtiene la Tabla 3.14:

Tabla 3.14. Tabla óptima del ejemplo *Chandy* con cambios en **c** afectando factibilidad

VB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	SOLUCIÓN
Z	0	0	2	0	0	0	16
X ₂	0	1	0	0	0	0	2
X ₁	1	0	1	0	0	0	2
S ₃	0	0	1	0	1	0	1
S ₂	0	0	-2	1	0	3	2

Puede observarse que esta tabla es óptima y la solución es:

$$Z = 16$$

$$X_2 = 2$$

$$S_3 = 1$$

$$X_1 = 2$$

$$S_2 = 2$$

$$S_1 = 0$$

$$S_4 = 0$$

Para este caso en el que las utilidades de los productos 1 y 2 cambian a valores de 2 y 6 miles de pesos por tonelada respectivamente, las utilidades Z son de 16 mil pesos, debiendo producir 2 toneladas del producto 1, X_1 y 2 toneladas del producto 2, X_2 . Existe una holgura de 2 toneladas en la restricción 2, ya que solo se consumen 6 de las 8 toneladas disponibles de la materia prima B. Asimismo, en la restricción 3 se presenta una holgura de 1 tonelada en el límite de demanda entre los dos productos.

3.5.5.3. Límites de cambio en el vector $\mathbf{c}$

Los límites de cambio del vector $\mathbf{c}$, obtenidos con el paquete computacional Tora® en el análisis de sensibilidad para este modelo, establecen los límites inferior y superior de variación de los parámetros c_j , con la condición que solamente uno de ellos se modifique, ya que los cambios especificados en la tabla no pueden ser simultáneos; de lo contrario, se perdería la optimalidad del modelo. Para el ejemplo de la empresa Chandy, se tiene lo siguiente:

Tabla 3.15. Análisis de Sensibilidad para el vector $\mathbf{c}$

Variable	Coeficiente Actual de la Función Objetivo	Coeficiente Mínimo	Coeficiente Máximo
X_1	3	1.00	4.00
X_2	2	1.50	6.00

Lo cual indica que los coeficientes c_j , representados por el vector $\mathbf{c}$, pueden tener límites de cambio de aumento o disminución, sin afectar la optimalidad del problema. Para este caso, el coeficiente c_1 , que corresponde a la variable de decisión X_1 , y cuyo valor original es 3, puede tomar un valor mínimo de 1.00 y un máximo de 4.00, sin afectar la optimalidad del modelo, bajo la condición que el otro coeficiente (c_2) no se modifique.

Para el coeficiente c_2 , con un valor original de 2, el valor mínimo que puede tomar es de 1.50 y el máximo es de 6.00, sin afectar la optimalidad del modelo y considerando que el otro coeficiente (c_1) permanezca inalterado.

3.5.6. Adición de una Nueva Variable X_i

Una nueva variable se introduce cuando se detecta que la formulación del problema de programación lineal no tomó en cuenta todas las actividades que pueden ser significativas para el modelo.

Suponer que la empresa *Chandy* requiere producir una marca más barata de cosmético, X_3 , el cual usa $3/4$ de tonelada de cada uno de los materiales A y B por tonelada de la nueva pintura, afectando el límite de demanda entre los productos (restricción 3), con un coeficiente de -1, siendo la ganancia por tonelada de la nueva pintura de $3/2$ miles de pesos.

El nuevo modelo es:

$$\text{Max } Z = 3 X_1 + 2X_2 + 3/2 X_3$$

SA :

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3/4 X_3 &\leq 6 \\ 2 X_1 + X_2 + 3/4 X_3 &\leq 8 \\ - X_1 + X_2 - X_3 &\leq 1 \\ X_2 &\leq 2 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

La nueva variable X_3 es no básica en tabla original, entonces los valores de los coeficientes de las variables duales no cambian, por lo que no se requiere calcular de nuevo el vector $\mathbf{y}^*$, el cual permanece con los valores de la tabla óptima, esto es:

$$\mathbf{y}^* = (1/3, 4/3, 0, 0)$$

El coeficiente de X_3 en la tabla óptima, calculado a partir de $\mathbf{z}^* = \mathbf{y}^* \mathbf{A} - \mathbf{c}$ es el siguiente:

$$\mathbf{z}^* = (1/3, 4/3, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/4 \\ 2 & 1 & 3/4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - (3, 2, 3/2) = (0, 0, -1/4)$$

El coeficiente negativo de X_3 en el renglón cero indica que la solución mejorará si esta variable entra a la base. Para calcular el valor de la matriz $\mathbf{A}^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$, de acuerdo con la tabla 3.5, en la matriz $\mathbf{A}$ solo se adiciona la columna correspondiente a la nueva variable X_3 :

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/4 \\ 2 & 1 & 3/4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Se genera entonces la nueva Tabla 3.16, que se obtiene introduciendo los valores calculados anteriormente:

Tabla 3.16. Tabla inicial simplex del ejemplo *Chandy* con adición de una nueva variable X_3

VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	SOLUCIÓN
Z	0	0	-1/4	1/3	4/3	0	0	38/3
X_2	0	1	1/4	2/3	-1/3	0	0	4/3
X_1	1	0	1/4	-1/3	2/3	0	0	10/3
S_3	0	0	-1	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	-1/4	-2/3	1/3	0	1	2/3

Puede observarse que la variable X_3 tiene un coeficiente negativo en el renglón cero, por lo que deberá entrar en la base. La variable que saldrá de la base es X_2 . Realizando las iteraciones del simplex, se obtiene la Tabla 3.17, que resulta óptima:

Tabla 3.17. Tabla óptima simplex del ejemplo *Chandy* con adición de una nueva variable X_3

VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	SOLUCIÓN
Z	0	1	0	1	1	0	0	14
X_3	0	4	1	8/3	-4/3	0	0	16/3
X_1	1	-1	0	-1	1	0	0	2
S_3	0	4	0	5/3	-1/3	1	0	25/3
S_4	0	1	0	0	0	0	1	2

La solución óptima es:

$$Z = 14$$

$$X_3 = 16/3$$

$$S_3 = 25/3$$

$$X_1 = 2$$

$$S_4 = 2$$

$$X_2 = 0$$

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

Lo cual indica que, al introducir en el modelo de *Chandy* un nuevo cosmético, denominado actividad X_3 , las utilidades serán de 14 mil pesos, elaborando 16/3 (5.333) ton del producto 3, 2 ton del producto 1 y sin producir el producto 2. Las restricciones de las materias primas A y B no presentan holguras (son iguales a cero), lo que significa que dichas materias primas se están utilizando en su totalidad. La restricción 3 tiene una holgura de 25/3 (8.333) ton, para el límite de demanda entre los tres productos. La restricción 4, presenta una holgura de 2, en virtud que el producto 2 no se elabora.

3.5.7. Cambios en los Coeficientes Tecnológicos a_{ij}

Esta modificación solamente se realiza para actividades que no sean básicas. Para actividades básicas, afectará la matriz inversa $\mathbf{B}^{-1}$ y puede producir complicaciones, por lo que en este caso, se recomienda resolver de nuevo el problema.

Para ejemplificar de mejor manera este cambio, se realizará primeramente una modificación a los coeficientes de la función objetivo y de esta manera, lograr que únicamente la variable X_1 esté en la base.

Considerando el modelo de la empresa *Chandy* para el que se modifica solamente la función objetivo como se indica:

$$Z = 4 X_1 + 1 X_2$$

Y cuya tabla óptima es:

Tabla 3.18. Tabla simplex del ejemplo *Chandy* con cambios en los coeficientes de la función objetivo

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	SOLUCIÓN
Z	0	1	0	2	0	0	16
S_1	0	$3/2$	1	$-1/2$	0	0	2
X_1	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4
S_3	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
S_4	0	1	0	0	0	1	2

Puede observarse que X_2 no es variable básica, entonces se pueden considerar cambios en sus coeficientes tecnológicos a_{ij} .

En este caso, se supone que el uso de la actividad 2 para las materias primas A y B son 4 y 3 toneladas en lugar de 2 y 1 toneladas, que eran los valores originales. El nuevo modelo es:

$$\text{MAX } Z = 4 X_1 + 1 X_2$$

S.A.

$$X_1 + 4X_2 \leq 6$$

$$2 X_1 + 3X_2 \leq 8$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

La variable X_2 es no básica en tabla óptima, y no se requiere calcular de nuevo el vector $\mathbf{y}^*$, el cual permanece con los valores de la tabla óptima, esto es:

$$\mathbf{y}^* = (0, 2, 0, 0)$$

El coeficiente de X_2 en la tabla óptima, calculado a partir de $\mathbf{z}^* = \mathbf{y}^* \mathbf{A} - \mathbf{c}$ es el siguiente:

$$\mathbf{z}^* = (0, 2, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (4, 1) = (0, 5)$$

El coeficiente de X_2 en el renglón cero es 5; como este valor es mayor que cero, el cambio propuesto no afecta la solución óptima. Si se hubiese obtenido un coeficiente negativo, modificaría la optimalidad del modelo, por lo que debería aplicarse el algoritmo simplex, a fin de determinar el nuevo óptimo.

3.5.8. Adición de una Nueva Restricción

En el caso de que deba añadirse al modelo una nueva restricción pueden presentarse dos situaciones:

- 1.- La restricción se satisface por la solución actual, por lo tanto es **redundante** y su adición no cambia la solución.
- 2.- La restricción no se satisface por la solución actual y afecta la factibilidad del modelo, por lo que debe aplicarse el método dual simplex a fin de obtener la nueva solución.

3.5.8.1. Nueva Restricción Redundante.

Suponer que en el caso de *Chandy*, el departamento de ventas indica que por razones de demanda, la cantidad a elaborar del producto 1 no debe exceder de 4 toneladas.

Entonces, la nueva restricción es: $X_1 \leq 4$

La solución obtenida en el modelo original genera un valor para el producto 1 de $X_1 = 10/3$ (3.333), y efectivamente se satisface la nueva restricción, por lo que ésta es redundante.

3.5.8.2. Nueva Restricción que Cambia la Solución.

Suponer que el departamento de ventas de *Chandy* informa que por razones de demanda, la elaboración del producto 1 no debe exceder de 3 toneladas.

La nueva restricción es:

$$X_1 \leq 3$$

La solución del modelo original no satisface la nueva restricción, por lo que ésta debe adicionarse al modelo.

Entonces en la tabla óptima debe añadirse esta restricción en su forma aumentada; esto es, añadiéndole la variable de holgura correspondiente:

$$X_1 + S_5 = 3$$

Por lo tanto, la nueva tabla es la 3.19:

Tabla 3.19. Tabla inicial sin matriz identidad del ejemplo *Chandy* con una nueva restricción que cambia la solución

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	SOLUCIÓN
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	0	38/3
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	0	4/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	0	10/3
S_3	0	0	-1	1	1	0	0	3
S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	0	2/3
S_5	1	0	0	0	0	0	1	3

En esta tabla debe notarse que **no existe la matriz identidad**, puesto que la variable X_1 se encuentra en la base y dada esta situación, es obligatorio que la columna correspondiente a dicha variable, contenga solamente un uno en la intersección con la columna X_1 y ceros en el resto de las posiciones.

El hecho de introducir la nueva restricción alteró la matriz identidad y lo que procede en este caso, es hacer operaciones de renglón únicamente entre el renglón dos, que es en donde se encuentra la variable básica X_1 y el renglón cinco, que corresponde a la nueva restricción. Las operaciones de renglón necesarias conducen a la siguiente tabla:

Tabla 3.20. Tabla simplex inicial Con matriz identidad del ejemplo *Chandy* con una nueva restricción que cambia la solución

VB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	SOLUCIÓN
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	0	38/3
X ₂	0	1	2/3	-1/3	0	0	0	4/3
X ₁	1	0	-1/3	2/3	0	0	0	10/3
S ₃	0	0	-1	1	1	0	0	3
S ₄	0	0	-2/3	1/3	0	1	0	2/3
S ₅	1	0	1/3	-2/3	0	0	1	-1/3

Aplicando el método dual simplex, se observa que S₅ es la variable de salida y S₂ la variable de entrada a la base, obteniendo la Tabla 3.21, la cual es óptima:

Tabla 3.21. Tabla simplex óptima del ejemplo *Chandy* con una nueva restricción que cambia la solución

VB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	SOLUCIÓN
Z	0	0	1	0	0	0	2	12
X ₂	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	3/2
X ₁	1	0	0	0	0	0	1	3
S ₃	0	0	-1/2	0	1	0	3/2	5/2
S ₄	0	0	-1/2	0	0	1	1/2	1/2
S ₂	0	0	-1/2	1	0	0	-3/2	1/2

La solución óptima obtenida en la Tabla 3.20 es la siguiente:

$$Z = 12$$

$$X_2 = 3/2$$

$$S_3 = 5/2$$

$$X_1 = 3$$

$$S_4 = 1/2$$

$$S_2 = 1/2$$

$$S_1 = 0$$

Lo cual indica que con la restricción que establece que el producto 1 no exceda de 3 ton, las utilidades Z serán de 12 mil pesos, fabricando para el producto 2 (X₂) 3/2 de ton, para el producto 1 (X₁) 3 ton. No existiendo holgura (S₁) en la disponibilidad de la materia prima A, existiendo las siguientes holguras: 1/2 ton en la materia prima B (S₂); 5/2 ton del límite de demanda entre los dos productos (S₃) y 1/2 ton para el límite de demanda del producto 2 (S₄).

Para el caso de que se especificara una nueva restricción de que ambos productos deben sumar cuando mucho cuatro toneladas, expresada con la desigualdad indicada a continuación:

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

Con la forma aumentada siguiente:

$$X_1 + X_2 + S_5 = 4$$

Esta ecuación es la que debe introducirse en el nuevo renglón de la tabla simplex, después proceder a restaurar la matriz identidad y posteriormente, aplicar el método dual simplex.

3.5.9. Cambios Simultáneos.

En la sección 3.5 se mencionó que cuando se presentan cambios **simultáneos** al modelo, puede ocurrir que se afecten tanto la optimalidad como la factibilidad, por lo que deben aplicarse primeramente el método simplex, ignorando la condición de no factibilidad, y posteriormente el dual simplex.

Como ejemplo se tiene que la gerencia de *Chandy* informa que las nuevas utilidades de los productos 1 y 2 son correspondientemente, 1 y 4 miles de pesos por tonelada. Asimismo, la disponibilidad de las materias primas A y B cambian a 7 y 4 toneladas respectivamente.

En el modelo, los cambios son:

1. Función Objetivo: $\text{Max } Z = X_1 + 4 X_2$ Nuevo vector **c** = (1,4)
2. Disponibilidad de recursos: Nuevo Vector **b**: (7, 4, 1, 2)^T

En la Tabla 3.22 se incluyen los dos cambios simultáneos.

Tabla 3.22. Tabla simplex inicial del ejemplo *Chandy* con dos cambios simultáneos

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	SOLUCIÓN
Z	0	0	7/3	-2/3	0	0	41/3
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	10/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	1/3
S_3	0	0	-1	1	1	0	-2
S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	-4/3

Esta tabla es no óptima, dado que tiene un valor negativo en el renglón cero y también es no factible, ya que en el lado derecho se presentan dos valores negativos. Primero se restaurará la optimalidad sin considerar la no factibilidad.

De acuerdo con el criterio simplex, S_2 entra a la solución y se escoge X_1 como variable de salida. Realizando la primera iteración se obtiene la tabla 3.23:

Tabla 3.23. Tabla simplex primera iteración del ejemplo *Chandy* con dos cambios simultáneos

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	SOLUCIÓN
Z	1	0	2	0	0	0	14
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$
S_2	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$
S_3	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{5}{2}$
S_4	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$

Esta tabla es óptima pero no factible; aplicando el algoritmo dual simplex se determina que la variable S_3 sale de la base y X_1 entra como variable básica. Efectuando esta iteración se obtiene la Tabla 3.24:

Tabla 3.24. Tabla simplex segunda iteración del ejemplo *Chandy* con dos cambios simultáneos

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	SOLUCIÓN
Z	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{37}{3}$
X_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$
S_2	0	0	-1	1	1	0	-2
X_1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
S_4	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$

Esta tabla todavía es no factible, por lo que utilizando el método dual simplex, se determinan la variable de salida S_2 , y la de entrada S_1 . Al realizar esta iteración se genera la Tabla 3.25, la cual es óptima:

Tabla 3.25. Tabla simplex óptima del ejemplo *Chandy* con dos cambios simultáneos

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	SOLUCIÓN
Z	0	0	0	$5/3$	$7/3$	0	9
X_2	0	1	0	$1/3$	$2/3$	0	2
S_1	0	0	1	-1	-1	0	2
X_1	1	0	0	$1/3$	$-1/3$	0	1
S_4	0	0	0	$-1/3$	$-2/3$	1	0

La solución óptima obtenida en esta tabla es la siguiente:

$$Z = 9$$

$$X_2 = 2$$

$$S_1 = 2$$

$$X_1 = 1$$

$$S_4 = 0$$

$$S_2 = 0$$

$$S_3 = 0$$

Lo cual indica que con los cambios de las utilidades de los productos 1 y 2, a los nuevos valores de 1 y 4, respectivamente, simultáneos con la nueva disponibilidad de las materias primas A y B que se modifican a 7 y 4 toneladas respectivamente, las utilidades Z serán de 9 mil pesos, elaborando 2 ton para el producto 2 (X_2), 1 ton para el producto 1 (X_1). Existiendo una holgura (S_1) de 2 ton en la disponibilidad de la materia prima A, no presentando tolerancia (S_2) en la materia prima B, ni en el límite de demanda entre los dos productos (S_3), tampoco para el límite de demanda del producto 2 (S_4).

Actividades para el lector en la sección 3.5. Análisis de Sensibilidad

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas el análisis de sensibilidad y el análisis post-óptimo
- Analizar el impacto sobre el modelo bajo estudio de los cambios en los parámetros
- Identificar cómo afectan a la solución los posibles cambios en el modelo
- Aplicar la representación matricial del método Simplex
- Estudiar paso a paso, en sesiones de aprendizaje colaborativo en el aula, el ejemplo del análisis de sensibilidad: los cambios en el vector recursos $\mathbf{b}$, en el vector $\mathbf{c}$, la adición de una nueva variable X_i , los cambios en los coeficientes tecnológicos a_{ij} , la adición de una nueva restricción, y los cambios simultáneos
- Resolver como tarea, los problemas propuestos del análisis de sensibilidad
- Considerar los aspectos éticos y de sustentabilidad para cada problema

- Establecer los resultados de los problemas bajo estudio usando un lenguaje accesible
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los ocho puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Adquisición de nuevos conceptos, modelos y metodologías
 - Integración de contenidos de la asignatura
 - Trabajo en equipo
 - Comunicación oral y escrita
 - Elaboración de reportes
- **Competencias Específicas**
 - Establecer la relación entre el análisis post-óptimo y el análisis de sensibilidad
 - Interpretar el beneficio del análisis de sensibilidad en la toma de decisiones
 - Aplicar el análisis de sensibilidad para la toma de decisiones
 - Considerar los aspectos éticos y de sustentabilidad
 - Establecer las conclusiones de los diferentes cambios en los parámetros del modelo empleando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones

3.6. INTERPRETACIÓN DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad, obtenido con el paquete computacional Tora®, establece los límites inferior y superior de variación de los parámetros c_j y b_i , con la condición que solamente uno de ellos se modifique, ya que los cambios no pueden ser simultáneos; de lo contrario, se perderían las condiciones de optimalidad y/o factibilidad del modelo.

Para el ejemplo original de *Chandy*, los resultados se incluyen en la tabla 3.26.

La interpretación de los valores de los parámetros b_i , así como los c_j , se realizó en las secciones 3.5.4 y 3.5.5, respectivamente. Se procederá a establecer la definición de los **costos reducidos**, así como de los **precios duales** o **precios sombra**, también denominados **multiplicadores simplex**, los cuales son muy poderosos para realizar la **interpretación económica de las variables duales**.

Tabla 3.26. Análisis de Sensibilidad para el modelo original *Chandy*

Variable	Coeficiente Actual de la Función Objetivo	Coeficiente Mínimo	Coeficiente Máximo	Costo Reducido
X_1	3	1.00	4.00	0.00
X_2	2	1.50	6.00	0.00
Restricción (Tipo)	Lado Derecho (RHS) Actual (Vector b)	Lado Derecho (RHS) Mínimo	Lado Derecho (RHS) Máximo	Precio Dual o Precio Sombra
1(<)	6	4.00	7.00	0.33
2(<)	8	6.00	12.00	1.33
3(<)	1	-2.00	∞	0.00
4(<)	2	1.33	∞	0.00

El **costo reducido** de cualquier variable de decisión no básica x_j , es el valor x_j^* , el coeficiente de dicha variable que se encuentra en el renglón cero, y representa la cantidad mínima en la que tendría que reducirse el costo unitario de la actividad j para que valga la pena realizarla. Cuando se interpreta c_j como la ganancia unitaria de la actividad j , el valor de x_j^* es entonces el incremento máximo permitido de c_j para que la solución básica factible actual permanezca óptima.

Los **precios duales o precios sombra** del recurso i (denotados por y_i^*) miden el valor marginal de éste, es decir, la tasa a la que Z puede aumentar si se incrementa la cantidad que se proporciona de este recurso (b_i). El método simplex identifica este precio sombra como y_i^* = coeficiente de la i -ésima variable de holgura en el renglón cero de la tabla simplex final.

Cuando los precios sombra son positivos, los economistas se refieren a este tipo de bienes como **recursos escasos**, mientras que los precios sombra iguales a cero representan los **recursos abundantes**.

Es conveniente notar que existe una relación entre los precios sombra, las holguras y los recursos, la cual se muestra en la tabla 3.27:

Tabla 3.27. Relación entre Precios Sombra, Holguras y Recursos

Precio Sombra Del Recurso	Variable de Holgura Correspondiente	Tipo de Recurso
Positivo	Cero	Escaso
Cero	Positiva	Abundante

Para el modelo *Chandy*, de acuerdo con la tabla 3.26, se tiene lo siguiente:

Los costos reducidos para X_1 y X_2 son cero, ya que ambas variables son básicas.

Los precios duales o precios sombra para los cuatro recursos son respectivamente, 0.33, 1.33, 0.00, 0.00, lo cual significa que:

Los recursos 1 y 2, que son las materias primas A y B, son recursos escasos, ya que su precio dual es positivo; debe notarse que su holgura tiene un valor cero, lo que significa efectivamente, que cada recurso se agotó.

Para el recurso 1, el valor del precio sombra de 0.33 tiene el significado siguiente: Por cada tonelada de materia prima A, (cuyo valor original en el modelo es de 6), que se incremente/disminuya, las utilidades (Z) aumentarán/disminuirán 0.33 miles de pesos, siempre y cuando las toneladas de dicho recurso estén en un rango de 4 a 7; de lo contrario, se puede perder la factibilidad del modelo.

Para el recurso 2, el valor del precio sombra de 1.33 significa lo siguiente: Por cada tonelada de materia prima B, (cuyo valor original en el modelo es de 8), que se incremente/disminuya, las utilidades (Z) aumentarán/disminuirán 1.33 miles de pesos, siempre y cuando las toneladas de dicho recurso estén en un rango de 6 a 12; de lo contrario, se puede perder la factibilidad del modelo.

Los recursos 3 y 4, que son el límite de demanda entre los dos productos y el límite de demanda del producto 2, tienen precios duales iguales a cero, por lo que se trata de recursos abundantes, lo cual se puede constatar con sus holguras, las que son de $S_3 = 3$ y $S_4 = 2/3$.

Los precios duales son muy importantes para apoyar la toma de decisiones, en cuanto a determinar cuáles son los recursos en los que debe invertirse, a fin de propiciar mayores utilidades.

Actividades para el lector en la sección 3.6. Interpretación del Análisis de Sensibilidad

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas la interpretación económica del modelo a partir del análisis de sensibilidad
- Analizar los conceptos de costo reducido, precios duales o precios sombra o multiplicadores simplex

- Como tarea, realizar la interpretación económica de los precios duales para cada uno de los problemas propuestos
- Analizar las implicaciones éticas, de sustentabilidad y responsabilidad social que deben considerarse para los sistemas bajo estudio
- Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones de los problemas analizados, usando un lenguaje accesible
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los cinco puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de análisis y síntesis
 - Integración de contenidos de la asignatura
 - Capacidad del trabajo en equipo
 - Comunicación oral y escrita
 - Elaboración de reportes
- **Competencias Específicas**
 - Realizar la interpretación económica del análisis de sensibilidad para apoyar la toma de decisiones
 - Establecer la interpretación económica de los precios duales o precios sombra
 - Relacionar los precios duales con los costos marginales

3.7. USO DE SOFTWARE

Se utilizará el software Tora®, cuyo uso fue descrito a detalle en la sección 2.5.1. En la ventana “Solve Problem” seleccionar “Algebraic” y después escoger “Final Solution” lo cual proporcionará la solución final y el denominado “Sensitivity Analysis” o Análisis de Sensibilidad, el cual proporciona la tabla 3.25, incluida en la sección 3.6.

Actividades para el lector en la sección 3.7. Uso de Software

- Utilizar software para realizar el análisis de sensibilidad en los problemas propuestos
- Realizar la interpretación económica de los precios duales en sesión de aprendizaje colaborativo en el aula
- Como tarea, realizar la interpretación económica de los precios duales para cada uno de los problemas propuestos
- Analizar las implicaciones éticas, de sustentabilidad y responsabilidad social que deben considerarse para los sistemas bajo estudio
- Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones de los problemas bajo estudio usando un lenguaje accesible
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los cinco puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad para la utilización de software
 - Manejo del Inglés
 - Capacidad para usar tecnologías de información y comunicaciones
 - Capacidad para el trabajo en equipo
 - Capacidad de análisis, síntesis y abstracción
 - Habilidad para la elaboración de reportes técnicos
- **Competencias Específicas**
 - Utilizar software para llevar a cabo el análisis de sensibilidad a fin de apoyar la toma de decisiones
 - Usar software como apoyo para realizar la interpretación económica de las variables duales
 - Considerar aspectos éticos y de sustentabilidad
 - Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones para el análisis de sensibilidad de los modelos

3.8. ASPECTOS ÉTICOS Y DE SUSTENTABILIDAD

Los análisis realizados mediante los conceptos de dualidad son de gran utilidad para conocer contribuciones al margen económico cuando por razones de utilidades o costos, sustentadas en aspectos éticos, es necesario modificar ciertas restricciones ó características de materia prima y/o productos.

Asimismo, es una herramienta de gran utilidad cuando es necesario introducir nuevas restricciones a un sistema por motivos de contaminación ambiental ó por seguridad de las instalaciones y equipos de la empresa o de la comunidad en la que se encuentra, ayudando así al ingeniero a dimensionar los costos de oportunidad que dichos cambios aportan a los nuevos óptimos obtenidos.

Por otro lado, y desde el punto de vista de la sustentabilidad técnica y económica de la empresa, siempre le será de mucho valor conocer hacia donde debe orientar los recursos técnico-económicos de que dispone para modificar los parámetros de su sistema (coeficientes, parámetros, restricciones) en forma tal de incrementar el valor de sus operaciones, campo en el que los análisis del primo-dual encuentran valiosas oportunidades.

3.9. RÚBRICA PROPUESTA PARA LA UNIDAD 3

Tabla 3.27. Rúbrica para la Unidad 3

Aspecto a Evaluar	Excelente 100 puntos	Muy Bien 85 puntos	Suficiente 70 puntos	A Mejorar 55 puntos	% de la calificación
Consultar dos fuentes bibliográficas y elaborar un resumen de los conceptos en las secciones 3.1. Teoría Primal-Dual, 3.3. Relación primal-Dual y 3.10 Terminología de la Unidad 3. Realizar los ejercicios propuestos para la sección 3.2. Formulación del problema dual.	Cubre la totalidad de actividades. Consultó el número de fuentes bibliográficas recomendadas. Los conceptos son precisos. Los ejercicios propuestos están correctos. El trabajo es limpio. Se entregó con oportunidad.	Puede presentar fallas aisladas en cuanto a: actividades, bibliografía, conceptos, problemas, limpieza, puntualidad.	Presenta varias fallas en cuanto a: actividades, bibliografía, conceptos, problemas, limpieza, puntualidad	No cumple con las actividades sugeridas. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	3% cada sección. Total 12%
Solución de problemas en la sección 3.4 Dual Simplex	Resolvió correctamente los problemas propuestos. Consideró adecuadamente los siete puntos solicitados para cada problema. El trabajo es limpio. Se entregó a tiempo	Presenta fallas en ciertos problemas o tuvo errores menores en alguno de los siete puntos solicitados para cada problema. Puede tener alguna falla	No resolvió todos los problemas o presenta errores en varios de los siete puntos solicitados para cada problema. Presentó varias fallas en cuanto a limpieza o entrega	Presenta muchos errores en los problemas y en los siete puntos solicitados para cada uno. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	Total 10%

		en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	oportuna.		
Solución de problemas en las secciones 3.5. Análisis de sensibilidad, 3.6. Interpretación del análisis de sensibilidad y 3.7. Uso de software	Resolvió correctamente los problemas propuestos. Estableció adecuadamente las conclusiones. El trabajo está limpio. Se entregó a tiempo.	No resolvió todos los problemas solicitados o presenta errores aislados. No respondió alguno de los puntos requeridos. Puede tener fallas en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta varias fallas u omisiones en la solución de los problemas. Presenta alguna falla en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta muchos errores en la solución de los problemas u omitió algunos de los puntos requeridos. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	Sección 3.5, 8%. Sección 3.6, 8%. Sección 3.7, 7%. Total 23%
Participación en clase y trabajo en Equipo	Siempre participa en clase y en las sesiones de trabajo en equipo.	Frecuentemente tiene una actitud positiva en clase y en el trabajo en equipo.	En algunas ocasiones presenta una actitud positiva en clase y en el trabajo en equipo.	Frecuentemente su actitud es de apatía o negativa en clase y en el trabajo en equipo.	5%
Examen escrito	Las soluciones a los problemas y las consideraciones éticas y de sustentabilidad, así como las conclusiones son correctas. Obtiene la puntuación más alta.	Existen errores menores en cuanto a la solución o los aspectos éticos y de sustentabilidad o las conclusiones.	Se presentaron varios errores en la solución, algunos son mayores. No se consideraron los aspectos éticos o de sustentabilidad o las conclusiones son erróneas.	Existe gran cantidad de errores severos.	50 %

3.10. TERMINOLOGÍA DE LA UNIDAD 3

A continuación se incluye la terminología de la Unidad 3, con la finalidad de que el lector investigue y estudie cada uno de los términos.

1. Dualidad
2. Problema primo o primal
3. Problema dual
4. Teorema fundamental de la programación lineal
5. Representación matricial del simplex
6. Vector c
7. Vector b
8. Matriz A
9. Relación primal-dual
10. Propiedad de dualidad débil
11. Propiedad de dualidad fuerte
12. Propiedad de soluciones complementarias óptimas
13. Propiedad de simetría
14. Teorema de la dualidad
15. Método dual simplex
16. Condición de factibilidad en dual simplex
17. Condición de optimalidad en dual simplex
18. Análisis de sensibilidad
19. Análisis post-óptimo
20. Parámetros sensibles
21. Casos que se presentan por los cambios en el modelo
22. Matriz identidad
23. Vector transpuesto
24. Matriz inversa
25. Matriz inversa B^{-1}
26. Vector y^*
27. Vector z^*
28. Vector b^*
29. Vector x_B
30. Vector c_B
31. Escalar Z
32. Escalares x_i
33. Escalares s_i
34. Restricción redundante
35. Costo reducido
36. Precios duales
37. Precios sombra
38. Valor marginal del recurso
39. Interpretación económica de las variables duales
40. Relación entre precios sombra, holguras y recursos

UNIDAD 4. PROGRAMACIÓN ENTERA

Después de estudiar este capítulo, el lector será capaz de:

- Conocer en qué casos se aplica la programación entera
- Identificar la terminología básica de la programación entera
- Conocer los modelos de programación entera y binaria
- Aplicar el método de Gomory o de Planos Cortantes
- Aplicar el método de Bifurcación y Acotación o Ramificación y Acotamiento
- Identificar las diferencias entre el método de Gomory y el de Bifurcación y Acotación
- Utilizar software para resolver problemas de programación entera
- Establecer las conclusiones de los problemas resueltos empleando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
- Considerar en las conclusiones los aspectos éticos y de sustentabilidad para orientar correctamente la toma de decisiones

En el proceso el lector desarrolla las competencias siguientes:

- Capacidad de realizar investigación bibliográfica
- Capacidad de resumir información
- Habilidad de redactar textos
- Habilidad para utilizar tecnologías de información y comunicación
- Capacidad para trabajar en equipo
- Capacidad de utilizar algoritmos de manera manual
- Capacidad de utilizar software para resolver problemas
- Habilidad de establecer conclusiones de los problemas resueltos
- Habilidad para comprender como se aplican los aspectos éticos y de sustentabilidad
- Capacidad de análisis, síntesis y de abstracción

Contenido de la Unidad 4:

- 4.1. Introducción y casos de aplicación
- 4.2. Definición y modelos de programación entera y binaria
- 4.3. Método de Gomory
- 4.4. Método de Bifurcación y Acotación
- 4.5. Uso de software

4.1. INTRODUCCIÓN Y CASOS DE APLICACIÓN

En muchos problemas prácticos las variables de decisión solo tienen significado real si su valor es entero; tal es el caso cuando ellas representan por ejemplo, personas, máquinas, piezas o vehículos.

El hecho de restringir los resultados de las variables de decisión a valores enteros cambia el tipo del problema original de programación lineal a uno de programación lineal entera, denominado simplemente **programación entera**, para el cual se elimina la suposición de divisibilidad de las variables de decisión, tal como se estableció en la Unidad 2.

En la sección 2.2.2 de la referida unidad, se analizó el problema de la Wyndor Glass Co., en el cual si las variables de decisión, en lugar de representar el número de lotes de cada producto hubieran significado el número de artículos tipo 1 (puertas) y el número de artículos tipo 2 (ventanas), entonces el modelo de programación entera sería:

$$\begin{array}{ll} \text{MAX } Z = 3X_1 + 5X_2 \\ \text{S.A.} & \\ & X_1 \leq 4 \\ & 2X_2 \leq 12 \\ & 3X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{array}$$

Puede observarse que una diferencia del modelo de programación entera en relación al modelo de programación lineal es la especificación para este caso particular, que ambas variables son enteras. Además, todos los coeficientes de las variables de decisión deben ser enteros. Por ejemplo si se tiene la restricción:

$$X_1 + 0.5 X_2 \leq 2.5$$

esta debe convertirse a:

$$10X_1 + 5 X_2 \leq 25$$

Entre una amplia variedad, a continuación se mencionan algunos casos de aplicación de la programación entera:

- Análisis de inversión
- Presupuesto de capital
- Elección del sitio
- Diseño de una red de producción y distribución
- Programación de actividades interrelacionadas
- Despacho de envíos
- Programación de restricciones en ciencias de la computación

Conviene hacer énfasis en que en general es mucho más sencillo resolver los problemas de programación lineal que los de programación entera, ya que éstos requieren mayor número de iteraciones.

Actividades para el lector en la sección 4.1. Introducción y Casos de Aplicación

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas los tipos de programación entera (PE), los casos en los que se aplica y discutirlos en equipos de trabajo
- Analizar los tipos de programación entera
- Discutir porqué se requiere un mayor número de iteraciones en los algoritmos de programación entera
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los tres puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de realizar investigación bibliográfica
 - Capacidad de resumir información
 - Participación en actividades grupales que propician la asimilación de nuevos conceptos
 - Capacidad para realizar trabajo en equipo
 - Respeto y tolerancia al trabajar con diferentes personas
 - Habilidad para redactar reportes técnicos
- **Competencias Específicas**
 - Conocer en qué casos se aplica la programación entera (PE)
 - Identificar la terminología básica de la PE

4.2. DEFINICIÓN Y MODELOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA Y BINARIA

Existen tres tipos de programación entera (PE) que son: pura, mixta y binaria, los cuales se aplican dependiendo de las variables de decisión presentes en el modelo bajo estudio.

La **programación entera pura** se presenta cuando en los modelos se requiere que todas las variables de decisión cumplan con la condición de ser enteras.

En el caso de que algunas variables de decisión del modelo bajo estudio sean enteras y otras puedan tomar valores fraccionarios, se trata de la **programación entera mixta** (PEM).

Otra área de aplicación es la que presentan los problemas que incluyen variables de decisión tipo “sí o no”, como por ejemplo ¿debe invertirse en un proyecto específico? ó ¿debe localizarse una instalación en un sitio en particular? Estas decisiones se pueden representar mediante variables de decisión restringidas a valores cero o uno, denominadas también **variables binarias**, las cuales dan lugar a la **programación entera binaria** (PEB).

En los problemas de programación entera existe el concepto de **relajación o relajamiento**, el cual es un punto clave en su solución.

La relajación o relajamiento del problema de programación entera es una versión con menos restricciones o más *relajada*; ello se debe a que cualquier problema de PE se puede considerar como la relajación del problema al cual se le agregan restricciones adicionales. *Esto significa que la región factible para cualquier problema de PE debe estar contenida en la zona de factibilidad para la relajación correspondiente.*

Para cualquier problema de PE de maximización se tiene lo siguiente:

Valor óptimo de Z para la relajación del problema $\geq$ Valor óptimo de Z para PE

Este concepto también es clave cuando se estudian los algoritmos de solución de los problemas de PE.

Aun cuando la región factible para un problema de PE es un subconjunto de la zona de factibilidad para la relajación del problema, el problema de PE es mucho más difícil y laborioso de resolver que la relajación correspondiente.

Hay que tomar en cuenta que cuando se efectúa la relajación del problema, no se deben redondear los valores de las variables a los enteros próximos, ya que puede incurrirse en la no factibilidad de la solución, por lo que deben aplicarse los algoritmos correspondientes de programación entera.

Los algoritmos comúnmente utilizados para resolver problemas de programación entera son:

- Método de Gomory o de Planos Cortantes
- Método de Ramificación y Acotamiento

los cuales se basan en una estrategia básica de dos pasos:

Paso 1. Efectuar el *relajamiento del problema*, esto es, resolverlo ignorando la restricción de que las variables deben ser enteras, lo que genera una solución óptima continua. Si en esta etapa ya se obtiene una solución óptima entera, lo cual es un acontecimiento fortuito, no se requiere ir al paso siguiente.

Paso 2. Empezando desde el punto óptimo continuo, adicionar restricciones que modifiquen iterativamente el espacio de solución del problema, en una forma que a la larga llevará al punto extremo óptimo que satisfaga los requerimientos enteros.

Actividades para el lector en la sección 4.2. Definición y Modelos de Programación Entera (PE) y Binaria (PEB)

- Investigar en qué consiste la programación entera pura (PE), mixta (PEM) y binaria (PEB)
- Analizar la relación que tienen los algoritmos de PE y los criterios de optimización vistos en unidades anteriores
- Hacer equipos de trabajo para analizar y construir modelos que representen problemas típicos de PE en la ingeniería industrial
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los tres puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Habilidad para buscar y analizar información proveniente de diversas fuentes
 - Trabajo en equipo
 - Habilidad para utilizar tecnologías de información y comunicación
 - Comunicación oral y escrita
- **Competencias Específicas**
 - Conocer los modelos de programación entera y binaria
 - Identificar en qué consiste la estrategia básica de dos pasos para los problemas de PE

4.3. MÉTODO DE GOMORY O DE PLANOS CORTANTES

Un plano cortante de un problema de programación entera es una nueva restricción funcional que reduce la región factible del relajamiento del problema de programación lineal sin eliminar las soluciones factibles del problema de programación entera original. El algoritmo se denomina indistintamente de Gomory, plano de corte, planos cortantes o algoritmo fraccional.

4.3.1. Resumen del Algoritmo de Planos Cortantes o de Gomory. *Los pasos del algoritmo del plano de corte son los siguientes: (Winston, 2005, p.548).*

Paso 1. Encontrar la tabla simplex óptima para la relajación del problema de programación lineal. Si todas las variables de dicha solución toman valores enteros, se ha encontrado la solución óptima para el problema de programación entera; en caso contrario, ir al paso 2.

Paso 2. Elegir una restricción en la tabla óptima de la relajación del problema de PL cuyo lado derecho tenga la parte fraccionaria más cercana a $\frac{1}{2}$. Esta restricción se usa para generar un corte.

Paso 2a. En el caso de la restricción identificada en el paso 2, escribir cada coeficiente de las variables en la forma $[x] + f$, donde $0 \leq f \leq 1$, así como su lado derecho, en la forma antes especificada.

Paso 2b. Escribir de nuevo la restricción usada para generar el corte como:
todos los términos con coeficiente entero = todos los términos con coeficiente fraccionario

Entonces **el corte es:**

todos los términos con coeficiente fraccionario ≤ 0

Paso 3. Encontrar la solución óptima para la relajación del problema de PL, sumándole el corte como una restricción adicional, aplicando el algoritmo dual simplex. Si todas las variables asumen valores enteros en la solución óptima, se ha encontrado una solución óptima para el problema de PE.

En caso contrario, escoger la restricción cuyo lado derecho teng la fracción mayor cercana a $\frac{1}{2}$ y utilizarla para generar otro corte, el cual se añade a la nueva tabla óptima.

Se debe continuar con este proceso hasta que se obtenga una solución en la cual todas las variables sean enteras. Esta solución será la óptima para el problema de PE.

4.3.1.1. Ejemplo de Aplicación del Algoritmo de Planos Cortantes o de Gomory. A través del *ejemplo de Telfa Corporation (Winston, 2005, p.545)*, se aplicarán los pasos de este método, para su mejor comprensión.

La empresa de muebles *Telfa Corporation* fabrica mesas y sillas. Una mesa requiere una hora de mano de obra y 9 pies de tablón de madera, y para una silla se necesita una hora de mano de obra y 5 pies de tablón de madera. Actualmente se dispone de 6 horas de mano de obra y 45 pies de tablón de madera. Cada mesa contribuye con 8 dólares y cada silla con 5 dólares a las utilidades. Tomar en cuenta que el número de mesas y sillas debe ser entero.

El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 8X_1 + 5X_2 \\ \text{S.A.} \\ X_1 + X_2 &\leq 6 \\ 9X_1 + 5X_2 &\leq 45 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

Donde:

X_1 = Número de mesas fabricadas

X_2 = Número de sillas fabricadas

En la Figura 4.1 puede apreciarse la representación gráfica del problema, incluyendo los puntos que contienen las soluciones factibles para el problema de programación entera.

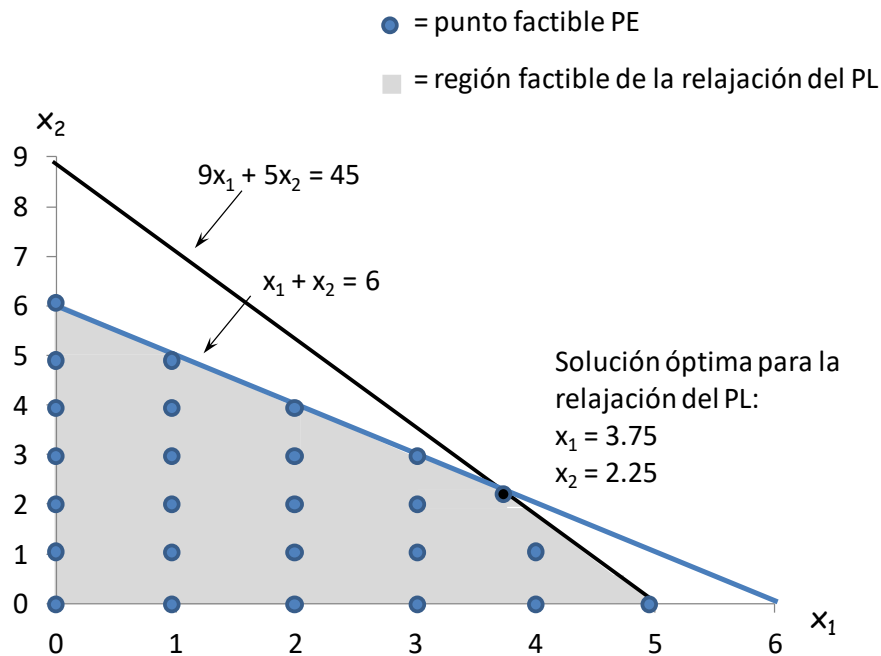


FIGURA 4.1. Ejemplo del método de planos cortantes

Aplicando el algoritmo de planos cortantes se tiene lo siguiente:

Paso 1. Después de aplicar la relajación del problema, con el método simplex se obtiene la tabla 4.1, la cual es óptima pero no es entera, por lo que se debe continuar con el paso 2.

Tabla 4.1. Tabla Óptima para la relajación ejemplo 4.3.1.1

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	SOL
Z	0	0	1.25	0.75	41.25
X_2	0	1	2.25	-0.25	2.25
X_1	1	0	-1.25	0.25	3.75

Paso 2. En esta etapa, se elige una restricción en la tabla óptima de la relajación del PL que contenga una variable básica no entera con la parte fraccionaria más cercana a $\frac{1}{2}$. Para este ejemplo, es indistinto escoger X_1 ó X_2 , ya que son equidistantes del valor de $\frac{1}{2}$, por lo que arbitrariamente se seleccionará la segunda restricción que es la siguiente:

$$X_1 - 1.25S_1 + 0.25S_2 = 3.75$$

Paso 2a. Se escribe de nuevo la restricción, separando enteros de fracciones:

$$1X_1 - 2S_1 + 0.75S_1 + 0S_2 + 0.25S_2 = 3 + 0.75$$

Paso 2b. Se escribe de nuevo la ecuación, separando enteros y fracciones:

$$1X_1 - 2S_1 + 0S_2 - 3 = 0.75 - 0.75S_1 - 0.25S_2$$

Entonces el plano de corte es:

$$0.75 - 0.75S_1 - 0.25S_2 \leq 0$$

Pasando el término independiente al lado derecho de la desigualdad se tiene:

$$-0.75S_1 - 0.25S_2 \leq -0.75$$

Paso 3. Este corte es una restricción adicional, que se inserta al final de la tabla 4.1, cuya variable de holgura o plano de corte es **S₃**, generando la Tabla 4.2:

Tabla 4.2. Tabla con primer plano de corte del ejemplo 4.3.1.1

VB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S₃	SOL
Z	0	0	1.25	0.75	0	41.25
X ₂	0	1	2.25	-0.25	0	2.25
X ₁	1	0	-1.25	0.25	0	3.75
S₃	0	0	-0.75	-0.25	1	-0.75

Resolviendo con el dual simplex, resulta que S₁ entra a la base en lugar de **S₃**, y la Tabla 4.3 es la resultante:

Tabla 4.3. Tabla óptima del plano de corte ejemplo 4.3.1.1

VB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S₃	SOL
Z	0	0	0	0.33	1.67	40
X ₂	0	1	0	-1	3	0
X ₁	1	0	0	0.67	-1.67	5
S ₁	0	0	1	-0.33	-1.33	1

En esta tabla ya se generó la solución óptima, la cual es:

$$Z = 40$$

$$X_1 = 5$$

$$X_2 = 0$$

$$S_1 = 1$$

Esto significa que *Telfa* logrará utilidades de 40 dólares, si elabora únicamente mesas, con lo cual tendrá una holgura de una hora de mano de obra, pero utilizando completamente la madera en el proceso.

En este caso, con el primer plano de corte se obtuvo la solución óptima, pero si esto no se logra, deben sumarse los planos de corte que sean necesarios, repitiendo los pasos del algoritmo 2, 2a, 2b y 3, hasta obtener la solución entera.

Actividades para el lector en la sección 4.3. Método de Gomory o de Planos Cortantes

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas los principios y la metodología del método de Gomory o de Planos Cortantes
- Comparar el método de Planos Cortantes con los criterios de optimización estudiados en la Unidad 2
- Discutir en equipo las características del algoritmo de Planos Cortantes
- Identificar las restricciones que deben añadirse en un problema práctico de aplicación del método de Planos Cortantes
- Aplicar el algoritmo de Gomory para resolver problemas en una sesión de aprendizaje colaborativo en el aula
- Resolver como tarea, los problemas propuestos del método de Planos Cortantes
- Aplicar los aspectos de sustentabilidad y respeto al ser humano que deben considerarse para el sistema bajo estudio
- Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones de los problemas bajo estudio usando un lenguaje accesible
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los ocho puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de utilizar algoritmos de manera manual
 - Capacidad de análisis, síntesis y abstracción
 - Adquisición de nuevos enfoques para la solución de problemas
 - Habilidad para resolver problemas
 - Habilidad para establecer conclusiones
 - Trabajo en equipo
 - Habilidad para comprender como se aplican los aspectos éticos y de sustentabilidad
 - Elaboración de reportes
- **Competencias Específicas**
 - Conocer los principios del método de Planos Cortantes
 - Aplicar el método de Gomory o de Planos Cortantes
 - Considerar en las conclusiones aspectos éticos y de sustentabilidad para orientar correctamente la toma de decisiones
 - Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones para los problemas bajo estudio empleando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
 -

4.4. MÉTODO DE BIFURCACIÓN Y ACOTACIÓN O RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO

El método de ramificación y acotamiento (RA), también denominado **B&B** (Branch and Bound) ha tenido gran cantidad de desarrollos, aplicándose con éxito en diversas áreas como presupuestos, decisión de inversiones, redes, áreas de computación, entre otras.

El método de ramificación y acotamiento ha demostrado ser mucho más exitoso que el método de Gomory o de planos cortantes (Taha, 1998, p.385).

La mayor parte de los problemas de programación entera se resuelven en la práctica mediante la técnica de ramificación y acotamiento (Winston, 2005, p. 512).

4.4.1. Resumen del Algoritmo de Ramificación y Acotamiento (RA). A continuación se resume el algoritmo de ramificación y acotamiento, para el cual se supone un problema de maximización, determinando una cota o límite inferior inicial $Z = -\infty$ en el valor objetivo óptimo del problema de PE. Establecer $i = 0$

Paso 1. Acotamiento. Seleccionar PL_i , el siguiente subproblema a examinar.

Resolver PL_i y tratar de acotarlo, utilizando una de tres condiciones:

- A. El valor óptimo Z de PL_i no puede producir un mejor valor objetivo que el límite inferior actual.
- B. PL_i produce una solución entera factible mejor que el límite inferior actual.
- C. PL_i no tiene solución factible.

Se presentan dos casos:

- a. Si se acota PL_i , actualizar el límite inferior si se encuentra una mejor solución del problema de PE. Si se han acotado todos los subproblemas, detenerse; el PLE óptimo está asociado con el límite inferior actual, si lo hay. De otra manera, hacer $i = i + 1$, y repetir el paso 1.
- b. Si no se acota PL_i , ir al paso 2 para efectuar la ramificación.

Paso 2. Ramificación. Seleccionar una de las variables enteras x_j , cuyo valor óptimo x_j^* en la solución de PL_i no es un entero.

Eliminar la región $[x_j^*] < x_j < [x_j^*] + 1$, donde $[v]$ define el entero más grande $\leq v$, creando dos subproblemas de PL que corresponden a

$$x_j \leq [x_j^*] \quad \text{y} \quad x_j \geq [x_j^*] + 1$$

Actualizar el **diagrama de RA**, para lograr una mejor visualización del desarrollo del problema. En esta representación gráfica, denominada **árbol**, se representan todos los subproblemas que se originan en la búsqueda de la solución óptima entera. Cada problema derivado recibe el nombre de **nodo** del árbol y cada línea que une dos nodos se denomina **arco**.

Establecer $i = i + 1$, e ir al paso 1.

Los pasos descritos anteriormente se aplican a problemas de maximización. En el caso de minimización, se reemplaza la cota o límite inferior por una cota o límite superior cuyo valor inicial es $Z = +\infty$.

El algoritmo de RA se puede aplicar también a los problemas de programación entera mixta; si una variable es continua, nunca se selecciona como variable de ramificación. El criterio de mejora en la función objetivo es el mismo que el mencionado anteriormente.

4.4.1.1. Ejemplo de Aplicación del Algoritmo RA. Para una mejor visualización del algoritmo de RA, se resolverá un problema de programación entera.

El taller de forja *Gab* fabrica percheros y figuras ornamentales. Un perchero requiere una hora de mano de obra y 10 pies de varilla, y para una figura se necesita una hora de mano de obra y 6 pies de varilla. Actualmente se dispone de 5 horas de mano de obra y 45 pies de varilla. Cada perchero contribuye con 5 dólares y cada figura con 4 dólares a las utilidades. Tomar en cuenta que el número de percheros y figuras debe ser entero.

El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5X_1 + 4X_2 \\ \text{S.A.} \\ X_1 + X_2 &\leq 5 \\ 10X_1 + 6X_2 &\leq 45 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \text{ y enteros} \end{aligned}$$

Donde:

X_1 = Número de percheros fabricados

X_2 = Número de figuras ornamentales fabricadas

A fin de hacer énfasis en la metodología del algoritmo RA, se omitirán detalles de los algoritmos simplex y dual simplex, los cuales fueron vistos a detalle en las unidades 2 y 3.

Al efectuar la relajación del modelo, el problema asociado de programación lineal, denominado PL0, se define eliminando las restricciones enteras, generando la solución óptima, la cual se muestra en la figura 4.2, en la que se indican con puntos las soluciones enteras.

$$\begin{aligned} Z &= 23.75 \\ X_1 &= 3.75 \\ X_2 &= 1.25 \end{aligned}$$

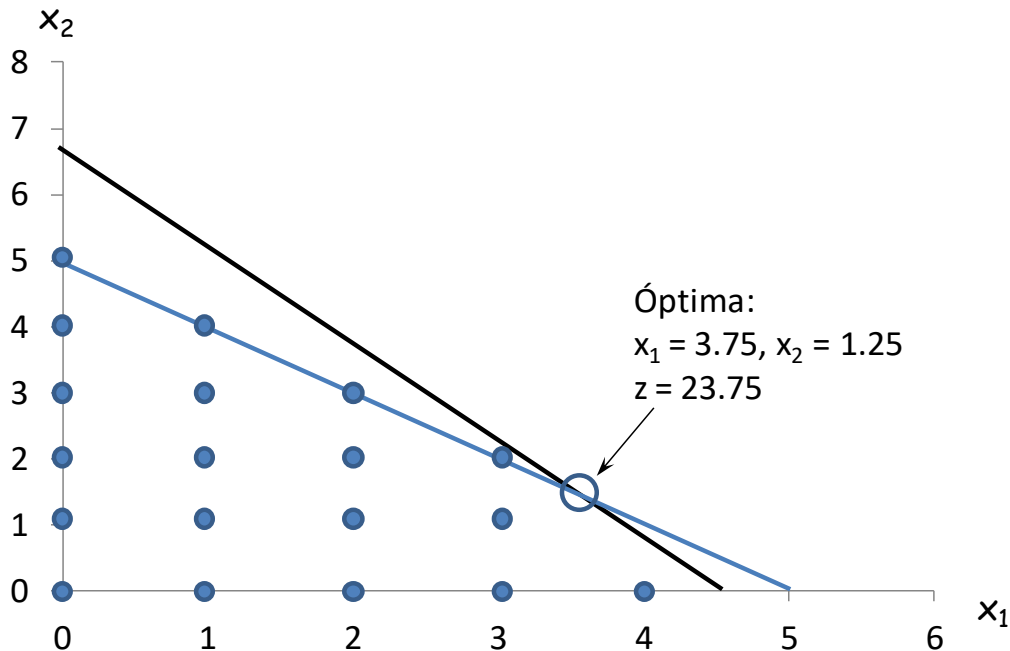


Figura 4.2. Relajación del problema *Gab*

Puede observarse que con la relajación no se obtuvo una solución entera, por lo que debe seleccionarse una variable del modelo que originalmente haya sido declarada como entera, que no cumpla con dicha condición en PL0.

En este momento pueden seleccionarse indistintamente las variables x_1 ó x_2 . Se selecciona arbitrariamente x_1 , que es igual a 3.75. Dado que el valor de esta variable debe ser entero, entonces será menor o igual a 3 o mayor o igual a 4; esto es equivalente a reemplazar la PL0 original con dos nuevas PL1 y PL2, definidas como:

$$\begin{aligned}\text{Espacio PL1} &= \text{espacio PL0} + (x_1 \leq 3) \\ \text{Espacio PL2} &= \text{espacio PL0} + (x_1 \geq 4)\end{aligned}$$

Si las regiones que no incluyen soluciones enteras se siguen eliminando, a la larga se producirán problemas de programación lineal cuyos puntos extremos óptimos satisfagan las restricciones enteras.

Las nuevas restricciones $x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$, son mutuamente excluyentes, de manera que los problemas PL1 y PL2 se deben tratar como separados, como lo muestra la figura 4.3. Esta situación da origen al concepto de **ramificación** en el algoritmo de RA; en este caso, x_1 es la **variable de ramificación**.

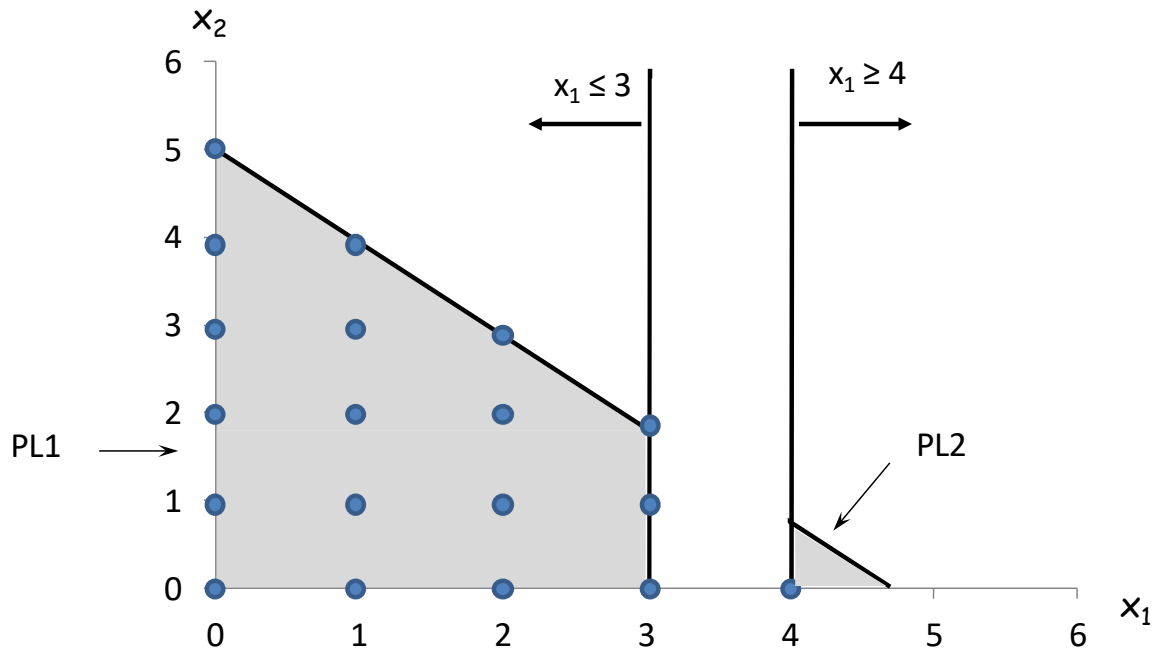


Figura 4.3. Espacios de PL1 y PL2 del problema *Gab*

La solución óptima puede estar en PL1 o en PL2, por lo que se deben examinar ambos problemas. Si arbitrariamente primero se examina PL1, asociada con $X_1 \leq 3$, el modelo es:

$$\begin{aligned}
 &\text{Max } Z = 5X_1 + 4X_2 \\
 &\text{S.A.} \\
 &\quad X_1 + X_2 \leq 5 \\
 &\quad 10X_1 + 6X_2 \leq 45 \\
 &\quad X_1 \leq 3 \\
 &\quad X_1, X_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

El diagrama RA inicial para este problema se muestra en la Figura 4.4:

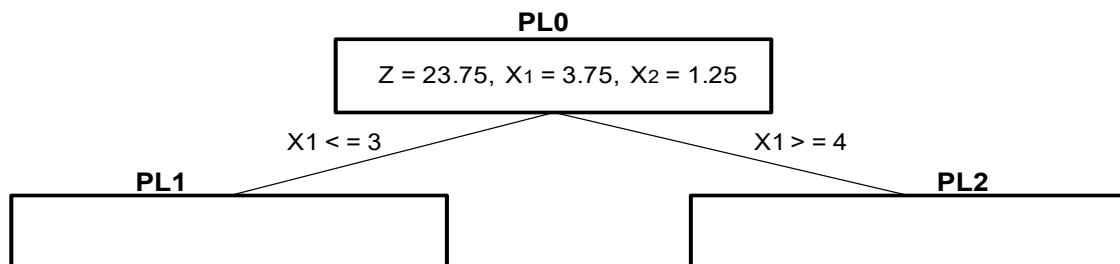


Figura 4.4 Diagrama RA inicial para problema *Gab*

Aplicando el análisis post óptimo y después el método Simplex, se obtiene la solución de PL1, cuyos valores óptimos son:

$$\begin{aligned} Z &= 23 \\ X_1 &= 3 \\ X_2 &= 2 \end{aligned}$$

Esta solución satisface los requerimientos enteros para X_1 y X_2 , entonces en el diagrama de RA, el nodo PL1 se debe marcar como **acotado**, lo cual significa que no es necesario investigarlo más, pues ya generó una solución entera. Además, el valor $Z = 23$ es una **cota o límite inferior**, sobre el valor objetivo máximo del problema original. Esto significa que cualquier subproblema no examinado que no pueda producir un valor objetivo mejor se debe descartar como no prometedor. Si un subproblema no examinado puede producir una solución entera mejor, entonces la cota o límite inferior se debe actualizar posteriormente.

Dado el límite o cota inferior obtenido en PL1 de $Z = 23$, y que el valor en la relajación PL0 fue de $Z = 23.75$, la mejor solución entera que podría ofrecer PL2, sería cuando mucho el valor previamente obtenido de 23, por lo que puede descartarse la inspección de PL2 y concluir que el problema se ha terminado, ya que se generó la solución óptima entera en el nodo PL1, como puede verse en la figura 4.5.

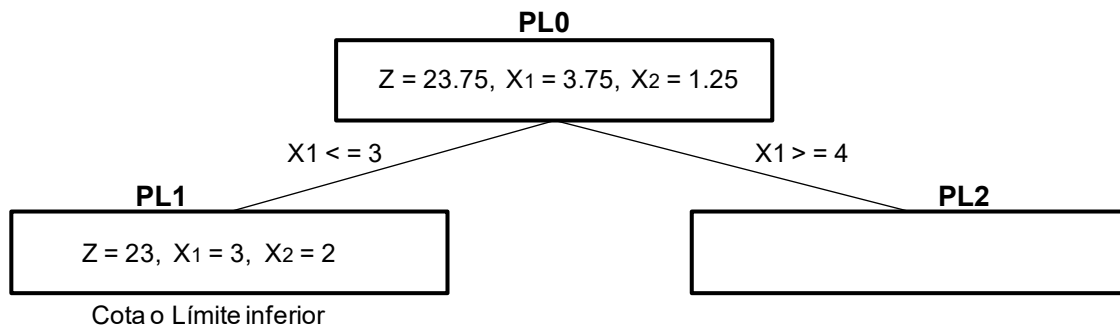


Figura 4.5. Diagrama RA con primera iteración para problema *Gab*

Aun cuando lo citado en el párrafo anterior es analíticamente recomendable, en ciertos casos para la toma de decisiones, se requieren más opciones en las soluciones enteras, a fin de cumplir cabalmente con compromisos con proveedores, sindicatos, de sustentabilidad, entre otros, por lo que se recomienda que el problema se analice hasta que se hayan agotado todas las posibilidades.

Si en el problema bajo estudio se deben buscar todas las soluciones enteras, se tiene que la solución a PL2, asociada con $X_1 \geq 4$, cuyo modelo es:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= 5X_1 + 4X_2 \\
 \text{S.A.} \\
 X_1 + X_2 &\leq 5 \\
 10X_1 + 6X_2 &\leq 45 \\
 X_1 &\geq 4 \\
 X_1, X_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Aplicando el análisis post óptimo y después el método dual simplex, se obtiene la siguiente solución para PL2:

$$\begin{aligned}
 Z &= 23.33 \\
 X_1 &= 4 \\
 X_2 &= 0.83
 \end{aligned}$$

Debido a que X_2 no es entera, se continúa investigando PL2, creando los subproblemas PL3 y PL4 que se definen como:

$$\begin{aligned}
 \text{Espacio PL3} &= \text{espacio PL2} + (X_2 \leq 0) \\
 \text{Espacio PL3} &= \text{espacio PL0} + (X_1 \geq 4) + (X_2 \leq 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Espacio PL4} &= \text{espacio PL2} + (X_2 \geq 1) \\
 \text{Espacio PL4} &= \text{espacio PL0} + (X_1 \geq 4) + (X_2 \geq 1)
 \end{aligned}$$

Si arbitrariamente se examina primero PL4, se encuentra que no tiene solución factible, por lo que no proceden ramificaciones posteriores de dicho nodo.

Si se examina PL3, su solución es:

$$\begin{aligned}
 Z &= 22.5 \\
 X_1 &= 4.5 \\
 X_2 &= 0
 \end{aligned}$$

El valor no entero de X_1 produce dos ramificaciones, y la creación de los subproblemas PL5 y PL6, a partir de PL3 que se definen a continuación:

$$\begin{aligned}
 \text{Espacio PL5} &= \text{espacio PL0} + (X_1 \geq 4) + (X_2 \leq 0) + (X_1 \leq 4) \\
 \text{Espacio PL6} &= \text{espacio PL0} + (X_1 \leq 4) + (X_2 \leq 0) + (X_1 \geq 5)
 \end{aligned}$$

Al examinar PL5 la solución es:

$$\begin{aligned}
 Z &= 20 \\
 X_1 &= 4 \\
 X_2 &= 0
 \end{aligned}$$

La cual es una solución entera, por lo que produce una cota o límite inferior, pero dado que en PL1 se obtuvo un límite inferior igual a 23 y tratándose de una

maximización, el valor obtenido en PL1 es el óptimo. En la figura 4.3 se muestra el diagrama RA completo para el ejemplo bajo estudio.

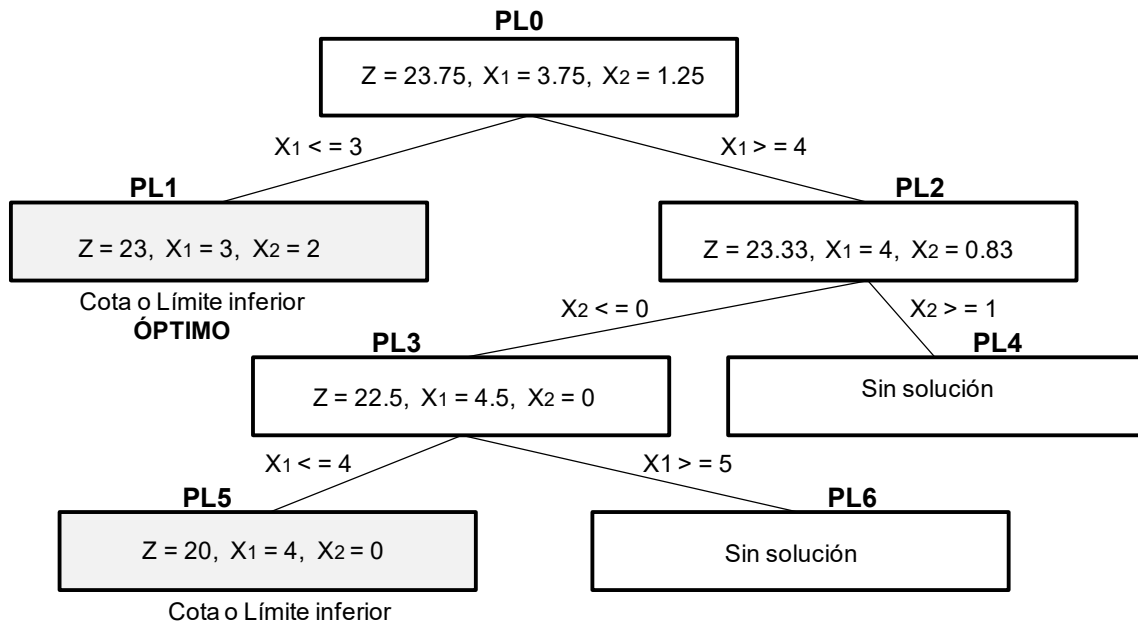


Figura 4.6. Diagrama RA con solución óptima para problema *Gab*

Como puede apreciarse, el diagrama RA es de gran utilidad para visualizar las soluciones de los problemas de programación entera.

Con base en el resultado óptimo, la recomendación al taller *Gab* de forja artesanal es que produzca 3 percheros y 2 figuras ornamentales, con lo cual obtendrá ganancias de 23 dólares.

Actividades para el lector en la sección 4.4. Método de Bifurcación y Acotación o de Ramificación y Acotamiento

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas los principios y la metodología del método de Ramificación y Acotamiento o B&B
- Comparar el método de Ramificación y Acotamiento con los criterios de optimización estudiados en la Unidad 2
- Discutir en equipo las características del algoritmo de Ramificación y Acotamiento
- Identificar las restricciones que deben añadirse en un problema práctico de aplicación del método de Ramificación y Acotamiento
- Aplicar el algoritmo de Ramificación y Acotamiento para resolver problemas en una sesión de aprendizaje colaborativo en el aula
- Resolver como tarea, los problemas propuestos del método de Ramificación y Acotamiento
- Aplicar los aspectos de sustentabilidad y respeto al ser humano que deben considerarse para el sistema bajo estudio

- Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones de los problemas bajo estudio usando un lenguaje accesible
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los ocho puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de análisis, síntesis y de abstracción
 - Adquisición de nuevos enfoques para la solución de problemas
 - Habilidad para resolver problemas
 - Habilidad para establecer conclusiones
 - Trabajo en equipo
 - Habilidad para comprender como se aplican los aspectos éticos y de sustentabilidad
 - Elaboración de reportes
- **Competencias Específicas**
 - Conocer los principios del método de Ramificación y Acotamiento
 - Identificar las diferencias entre el método de Gomory y el de Ramificación y Acotamiento
 - Aplicar el método de Ramificación y Acotamiento a diversos problemas
 - Considerar en las conclusiones y recomendaciones los aspectos éticos y de sustentabilidad para orientar correctamente la toma de decisiones

4.5. USO DE SOFTWARE

El módulo de programación entera contiene una función para activar el algoritmo de ramificación y acotamiento en forma interactiva. A continuación se presentan los pasos para ejecutar el árbol de ramificación en el paquete Tora.

Paso 1: En el menú principal del Tora seleccionar la opción **Integer programming**, (Programación entera), de acuerdo con la figura 4.4

Paso 2: Introducir el nombre del ejercicio o problema, así como el número de variables y restricciones que contiene.

Paso 3: Proporcionar el nombre de las variables, la función objetivo y las restricciones.

Paso 4: Elegir la opción **Solve Menu**, enseguida aparecerá un menú, en el cual se elegirá la opción de **Solve problem**.

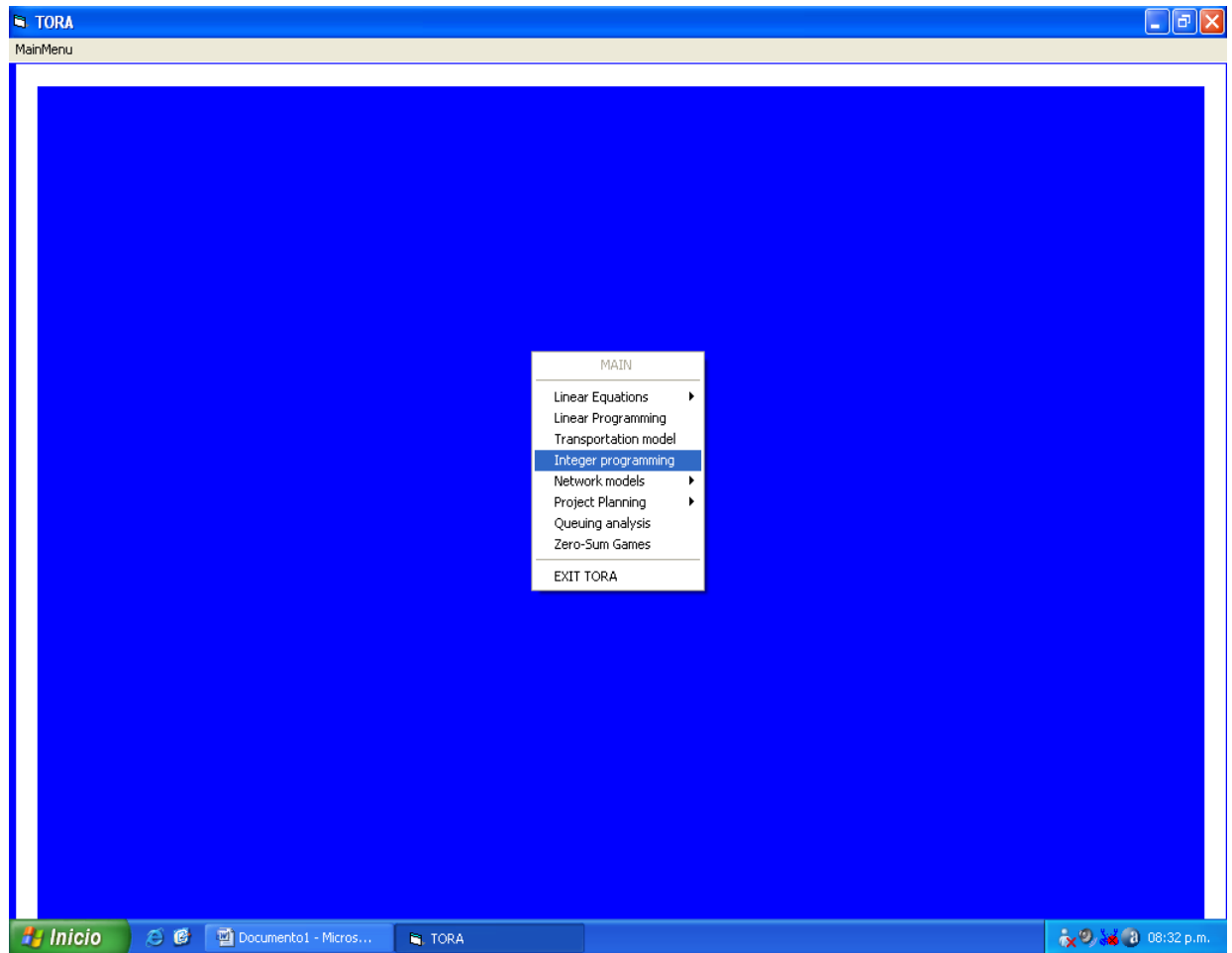


Figura 4.4. Menú principal de Tora

Paso 5: Aparecerá una pantalla como la mostrada en la Figura 4.5. Entonces elegir la opción **User-guided B&B**, la cual es el modo interactivo para el algoritmo de ramificación y acotamiento, RA, el cual es el único método de programación entera manejado en el paquete Tora. En esta pantalla se muestra la información necesaria para crear el árbol.

En el recuadro que aparece en la parte superior izquierda se muestran los colores, los cuales indican: **verde**: nodo no investigado, **rojo**: nodo ya investigado y no factible o agotado, **gris**: nodo bajo investigación, **magenta o lila**: mejor solución actual, que puede ser la solución óptima.

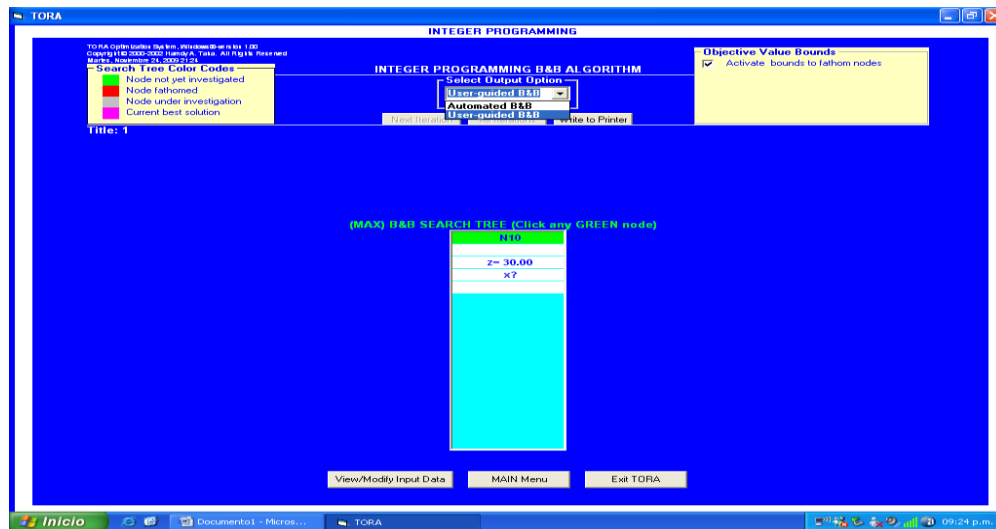


Figura 4.5. Pantalla con la opción interactiva del algoritmo RA (B&B)

Paso 6: Dar un click posicionando el cursor sobre el rectángulo en el cual se despliega la función objetivo. Después de hacer esto aparecerá un nuevo recuadro en el cual se muestra la solución de la relajación del problema, tal como se muestra en la figura 4.6.

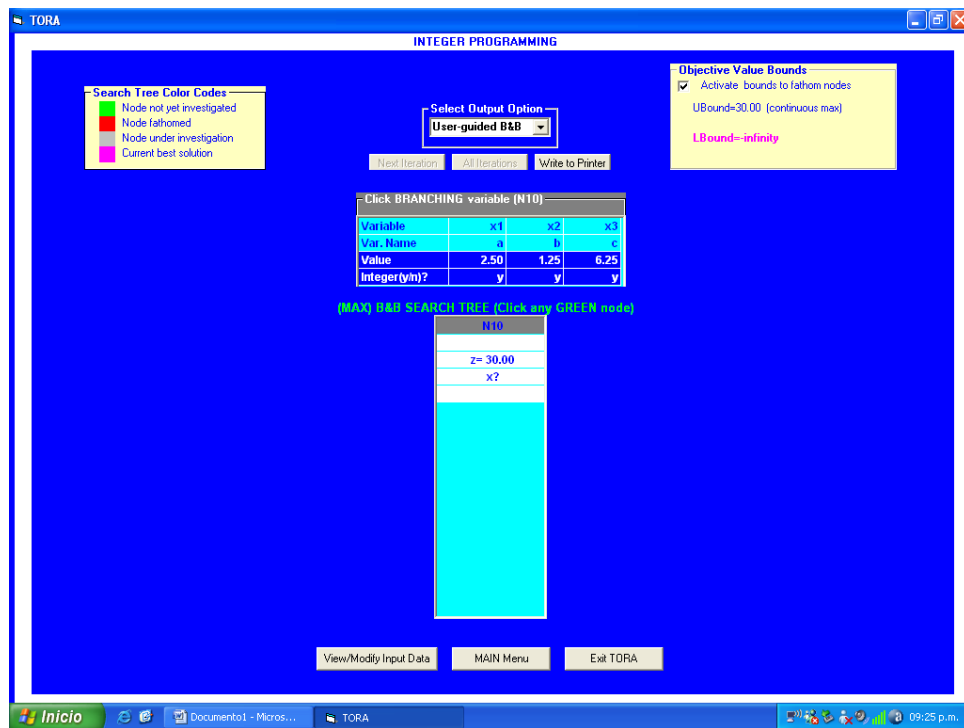


Figura 4.6. Pantalla con primera iteración PE

Paso 7: En el recuadro donde aparece el valor de las variables a elegir, seleccionar arbitrariamente una de ellas; al hacer esto el software Tora identificará las soluciones, verificando cual es factible, cual no y seguirá indicando qué nodo se puede seguir ramificando. Esto puede observarse en la figura 4.7. Cuando se

obtiene la solución óptima, ésta se marca en color magenta o lila, como puede apreciarse en la figura 4.8.

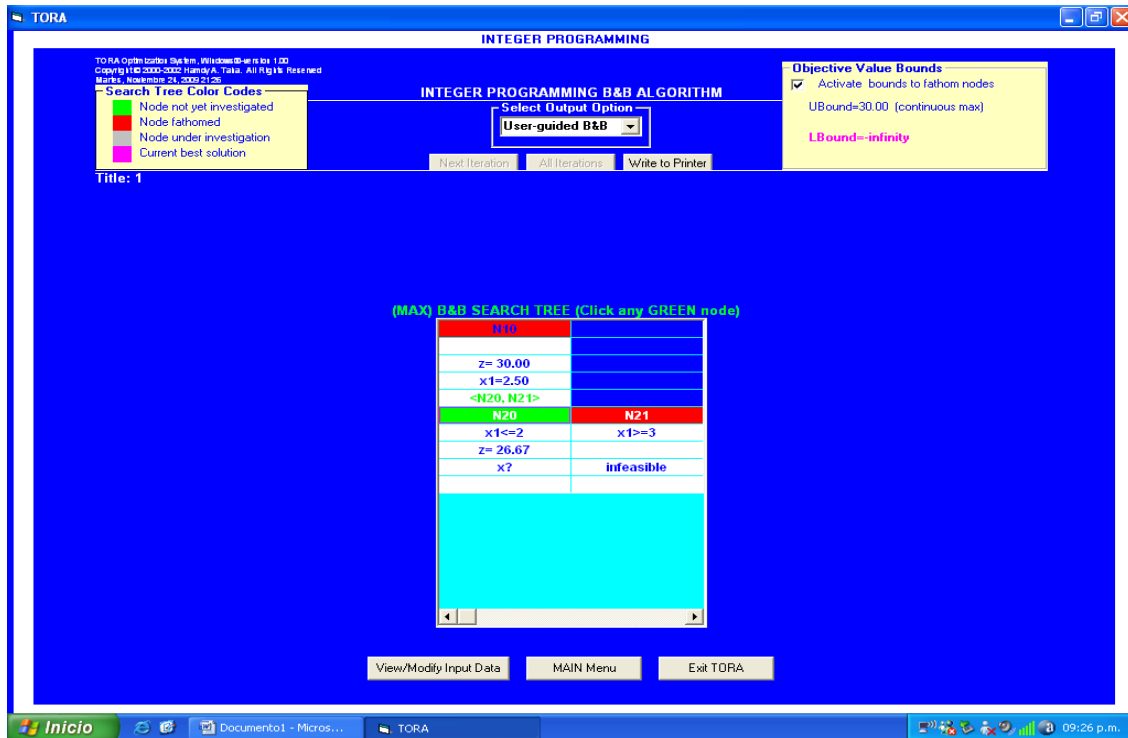


Figura 4.7. Soluciones en los nodos PE

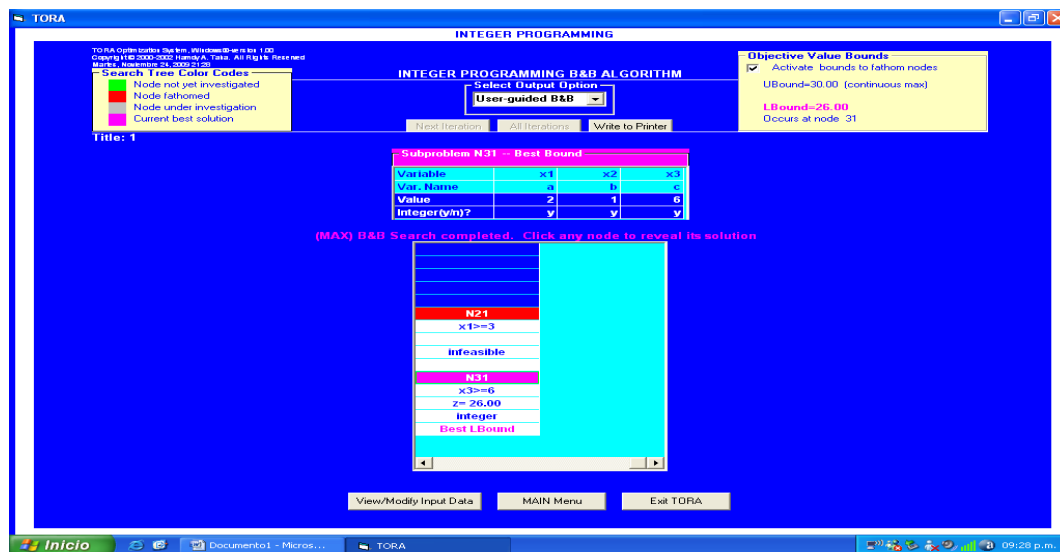


Figura 4.8. Solución óptima problema PE

Existe la posibilidad de elegir la opción **Automated B&B** (algoritmo RA automático) para obtener directamente la solución óptima sin tener todos los detalles del método.

Como puede apreciarse, el software es una herramienta muy útil en la solución de problemas de programación entera, ya que debido a la adición de restricciones, suelen ser muy laboriosos cuando se resuelven sin la ayuda de una computadora.

Actividades para el lector en la sección 4.5. Uso de Software

- Utilizar software para resolver los problemas propuestos de programación entera (PE)
- Realizar la interpretación de los resultados de los problemas resueltos en una sesión de aprendizaje colaborativo en el aula
- Como tarea, realizar la interpretación de los resultados obtenidos para cada uno de los problemas propuestos
- Aplicar los aspectos de sustentabilidad y respeto al ser humano que deben considerarse para el sistema bajo estudio
- Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones de los problemas bajo estudio usando un lenguaje accesible
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los cinco puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de utilización de software para resolver problemas
 - Manejo del Inglés
 - Capacidad para usar tecnologías de información y comunicación
 - Participación en actividades grupales que propician el entendimiento del uso de herramientas computacionales
 - Capacidad para el trabajo en equipo
 - Capacidad de análisis, síntesis y abstracción
 - Habilidad para la elaboración de reportes técnicos
- **Competencias Específicas**
 - Utilizar software para resolver problemas de programación entera
 - Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones para los modelos de PE resueltos mediante software
 - Considerar los aspectos éticos y de sustentabilidad para orientar correctamente la toma de decisiones

4.6. ASPECTOS ÉTICOS Y DE SUSTENTABILIDAD

Como se ha mencionado anteriormente, las herramientas de la investigación de operaciones son un apoyo para la toma de decisiones, pero éstas deben estar sustentadas en un estricto apego a las leyes y reglamentos que rigen la actividad de las empresas, considerando asimismo aspectos éticos y de sustentabilidad.

Dada la naturaleza compleja de transmitir como educadores los aspectos éticos y de sustentabilidad, hay que tomar en cuenta lo siguiente: *Dos elementos metodológicos son básicos para trabajar los valores y desarrollar actitudes: el ejemplo comunitario y el diálogo crítico. Para dialogar críticamente se requiere ser capaz de pensar críticamente y de respetar las reglas del juego del diálogo entre personas. (Rugarcía, 1999, p.161).* Asimismo, la afirmación: *La formación de valores en la educación es, sin lugar a dudas, un asunto medular para el hombre. Su importancia es tanta o más que asignar recursos a la paz o la justicia social. (Rugarcía, 1999, p.161).*

El profesor debe propiciar el respeto por parte de y entre sus educandos, y a través del análisis de casos, propiciar el diálogo crítico a fin de que los valores puedan ser aprehendidos por los estudiantes.

4.7. RÚBRICA PROPUESTA PARA LA UNIDAD 4

Tabla 4.4. Rúbrica para la Unidad 4

Aspecto a Evaluar	Excelente 100 puntos	Muy Bien 85 puntos	Suficiente 70 puntos	A Mejorar 55 puntos	% de la calificación
Consultar dos fuentes bibliográficas y elaborar un resumen de los conceptos en las secciones 4.1. Introducción y casos de aplicación, 4.2. Definición y modelos de programación entera, binaria y 4.8. Terminología de la Unidad 4.	Cubre la totalidad de actividades solicitadas. Consultó el número de fuentes bibliográficas recomendadas. Los conceptos son precisos. El trabajo es limpio. Se entregó con oportunidad.	Puede presentar fallas aisladas en cuanto a: actividades, bibliografía, conceptos, limpieza, puntualidad.	Presenta varias fallas en cuanto a: actividades, bibliografía, conceptos, limpieza, puntualidad	No cumple con las actividades sugeridas. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	4% cada sección. Total 12%

Solución de problemas en las secciones 4.3 Método de Gomory o de Planos Cortantes 4.4 Método de Ramificación y Acotamiento 4.5 Uso de software.	Resolvió correctamente los problemas propuestos. Consideró apropiadamente todos los puntos solicitados para cada problema. El trabajo es limpio. Se entregó a tiempo	Presenta fallas en ciertos problemas o tuvo errores menores en alguno de los puntos solicitados para cada problema. Puede tener alguna falla en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	No resolvió todos los problemas o presenta errores en varios de los puntos solicitados para cada problema. Presentó varias fallas en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta muchos errores en los problemas y en los siete puntos solicitados para cada uno. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	11% cada sección. Total 33%
Participación en clase y trabajo en Equipo	Siempre participa en clase y en las sesiones de trabajo en equipo.	Frecuentemente tiene una actitud positiva en clase y en el trabajo en equipo.	En algunas ocasiones presenta una actitud positiva en clase y en el trabajo en equipo.	Frecuentemente su actitud es de apatía o negativa en clase y en el trabajo en equipo.	5%
Examen escrito	Las soluciones a los problemas de programación entera (PE) y las consideraciones éticas y de sustentabilidad, así como las conclusiones son correctas. Obtiene la puntuación más alta.	Existen errores menores en cuanto a la solución de los problemas de PE o los aspectos éticos y de sustentabilidad o las conclusiones.	Se presentaron varios errores en la solución de los problemas de PE, algunos son mayores. No se consideraron los aspectos éticos o de sustentabilidad o las conclusiones son erróneas.	Existe gran cantidad de errores severos en los problemas de PE.	50 %

4.8. TERMINOLOGÍA DE LA UNIDAD 4

Se sugiere al lector investigar los términos listados a continuación.

1. Programación entera (PE)
2. Programación entera pura
3. Programación entera mixta
4. Variables binarias
5. Programación entera binaria
6. Relajación o relajamiento del problema de PE
7. Región factible del problema de PE
8. Método Gomory o de planos cortantes
9. Plano de corte
10. Método de bifurcación y acotación o de ramificación y acotamiento
11. Algoritmo B&B (Branch and Bound)
12. Diagrama de ramificación y acotamiento

UNIDAD 5. TRANSPORTE Y ASIGNACIÓN

Después de estudiar este capítulo, el lector será capaz de:

- Identificar cuando se aplican los modelos de transporte
- Analizar los métodos de transporte para obtener una solución básica inicial
- Aplicar los modelos de transporte para obtener una solución básica inicial
- Analizar los algoritmos de transporte para obtener una solución óptima
- Aplicar los métodos de transporte para obtener una solución óptima
- Interpretar la solución óptima obtenida con el método de transporte
- Establecer las conclusiones del problema de transporte empleando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
- Identificar cuando se aplica el problema de asignación
- Relacionar el problema de asignación con el del transporte
- Conocer y aplicar el método húngaro
- Interpretar la solución óptima obtenida con el método húngaro
- Establecer las conclusiones del problema de asignación empleando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
- Utilizar software para resolver problemas de transporte y asignación
- Considerar en las conclusiones los aspectos éticos y de sustentabilidad para orientar correctamente la toma de decisiones

En el proceso el lector desarrolla las competencias siguientes:

- Capacidad de realizar investigación bibliográfica
- Capacidad de resumir información
- Habilidad de redactar textos
- Habilidad para utilizar tecnologías de información y comunicación
- Capacidad para trabajar en equipo
- Habilidad para elaborar presentaciones
- Habilidad para realizar las presentaciones ante el grupo de compañeros
- Capacidad para distinguir entre un problema de transporte y uno de asignación
- Habilidad para interpretar las soluciones de los problemas
- Capacidad de utilizar software
- Habilidad para establecer conclusiones en los problemas
- Habilidad para comprender como se aplican los aspectos éticos y de sustentabilidad como apoyo en la toma de decisiones en problemas
- Capacidad de análisis, síntesis y abstracción

Contenido de la Unidad 5:

- 5.1. Definición del problema de transporte
- 5.2. Método de la esquina noroeste
- 5.3. Método de aproximación de Vogel
- 5.4. Procedimientos de optimización
- 5.5. Definición del problema de asignación
- 5.6. El método húngaro
- 5.7. Uso de software

5.1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

*El objetivo del problema de transporte es el determinar el envío de bienes a partir de **m puntos de origen** (por ejemplo, fábricas) hacia **n destinos** (por ejemplo, almacenes), con la condición que minimicen el costo total del envío y que satisfagan los requerimientos, tanto de la **oferta** como de la **demanda**. El modelo supone que el costo de envío en una ruta determinada es directamente proporcional al número de unidades enviadas en esa ruta. (Taha, 1998, p.165)*

*El problema general está representado por la red en la figura 5.1. Existen **m** puntos de origen y **n** puntos de destino, cada uno representado por un **nodo**. Los **arcos**, representados en esta figura por flechas, que unen los puntos de origen con los de destino representan las rutas entre los puntos de origen y de destino. El arco (i,j) que une el punto de origen i con el punto de destino j , incluye dos fragmentos de información: el costo de transporte por unidad c_{ij} , así como la cantidad enviada x_{ij} . La cantidad de la oferta en el punto de origen i es a_i y la cantidad de la demanda en el punto de destino j es b_j . (Taha, 1998, p.165, 166)*

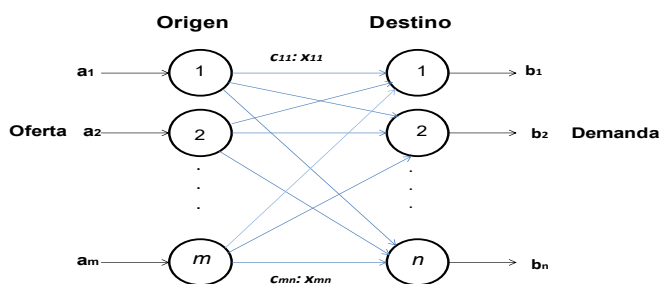


Figura 5.1. Problema general de transporte

El objetivo del modelo es determinar las x_{ij} desconocidas que minimizarán el costo total de transporte, mientras satisfacen todas las restricciones de la oferta y la demanda.

El primer paso en la solución del problema de transporte, es encontrar una solución inicial factible que satisfaga todas las demandas; posteriormente,

encontrar la solución óptima, la cual es una solución factible de costo mínimo. Los algoritmos de transporte producen normalmente $m + n - 1$ celdas asignadas; si tienen menos de este valor, se considera que tienen solución degenerada. Posteriormente, se explicará con detalle el tratamiento que se dará en los algoritmos en caso de que se presente esta situación.

En este texto, se analizarán dos métodos para obtener una solución inicial factible:

- Método o regla de la esquina noroeste
- Método de aproximación de Vogel

Debe tomarse en cuenta que estos dos métodos solo por casualidad producirán una solución óptima, ya que no garantizan optimalidad en la solución que producen.

Para lograr la optimización, esto es, para pasar de una solución inicial factible a la solución óptima, se analizarán dos algoritmos:

- Método del eslabón o pasos secuenciales (MPS)
- Método de distribución modificado (DIMO o MODI), también llamado método de multiplicadores

Posteriormente, se describirán a detalle cada uno de los algoritmos mencionados.

Para la solución manual de los algoritmos de transporte, se requiere organizar una matriz en la siguiente forma:

Tabla 5.1. Matriz de transporte

Destino	Origen					Oferta a_i
	1	2	3	...	n	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}	a_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	a_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3n}	a_3
...	...	...	...	...	...	...
m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	...	x_{mn}	a_m
Demanda b_j	b_1	b_2	b_3	...	b_n	

5.1.1. Otras Consideraciones acerca del Modelo de Transporte.

Es importante tomar en cuenta algunas situaciones que pueden presentarse en los modelos de transporte, las cuales se enuncian a continuación.

1.- Problema de Maximización: Se piensa en los valores marginales como beneficios en lugar de costos, por lo que se asignarán unidades a la celda que tenga el **mayor** valor marginal y el procedimiento concluirá cuando todas las rutas no usadas tengan valores marginales cero o positivos.

2.- La Oferta Supera a la Demanda o Viceversa: En el método simplex utilizando algún paquete computacional no existe problema, ya que el resultado aparecerá como una variable de holgura, sin embargo cuando se emplea el método de transporte, se debe agregar un destino ficticio al cuadro de transporte. Se requiere insertar una nueva columna con costos igual a cero, por lo tanto la cantidad enviada al destino ficticio permanecerá en el origen.

En caso de que la demanda exceda a la oferta, se agregará un origen ficticio con costo cero. Se insertará un nuevo renglón con costos igual a cero, por lo que cualquier oferta asignada desde el origen ficticio será considerada como una demanda no tomada en cuenta.

3.- Eliminación de Rutas Inaceptables: Estas pueden ser restricciones administrativas u organizacionales, tales como limitaciones regionales, meteorológicas o de otro tipo, lo que ocasiona que ciertos orígenes no puedan atender a ciertos destinos. En este caso se asigna un costo muy alto a la celda, por lo cual no será asignada.

4.- Problemas Degenerados: Ocurren cuando se asigna un valor inferior a $(m + n - 1)$ de celdas usadas y pueden surgir desde la solución factible inicial o en alguna etapa posterior. Bajo esta situación, no es posible resolver el sistema de ecuaciones, por lo tanto se escoge una “celda artificial usada” la cual es una celda no asignada que se considera como “usada”, incluyendo un valor “0”. Se elige una celda que permita encontrar los valores de los multiplicadores U_i y V_j .

5.- Propiedades Especiales: Si todos los datos de ofertas y demandas tienen valores enteros, los valores óptimos de las variables de decisión serán también enteros.

5.1.2. Ejemplo de un problema de distribución

Para la aplicación de los métodos de transporte a fin de obtener una solución inicial factible y posteriormente lograr la optimización, se incluirá un *ejemplo de la empresa Protrac*, (Eppen, et al., 2000, p.226), la cual fabrica tractores. Tiene cuatro plantas de montaje en Europa, las cuales se encuentran en (1) Leipzig, Alemania; (2) Nancy, Francia; (3) Lieja, Bélgica; y (4) Tilburgo, Holanda. Los motores empleados por estas fábricas, denominados motores E4, se fabrican en Estados Unidos, se embarcan a los puertos de (A) Amsterdam, Holanda; (B) Amberes, Bélgica y (C) El Havre, Francia y de allí se transportan a las plantas para su

ensamble. En la figura 5.2 se incluye el diagrama para este modelo, en el cual las líneas indican las posibles rutas de entrega.

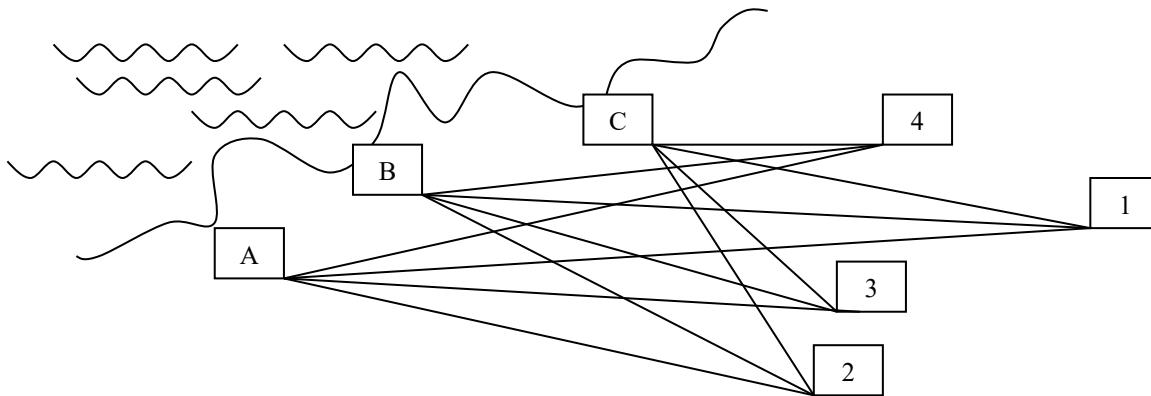


Figura 5.2. Problema de transporte de *Protrac*

La demanda del siguiente trimestre para los destinos de los motores diesel se encuentra en la tabla 5.2 Las cantidades de motores E4 disponibles en los puertos, se incluyen en la tabla 5.3 Puede observarse que este es un modelo balanceado, ya que la oferta total de motores disponibles es igual a la cantidad total requerida.

Protrac debe decidir cuántos motores debe enviar desde cada puerto hasta cada planta. En la tabla 5.4 se encuentran los costos de transporte de los orígenes hacia los destinos. Para simplificar la presentación, se hará referencia a los puertos por medio de letras y a las plantas por medio de números.

Tabla 5.2. Demanda de motores diesel E4

	Planta	Cantidad de motores requeridos
1	Leipzig	400
2	Nancy	900
3	Lieja	200
4	Tilburgo	500
	Total	2000

Tabla 5.3. Oferta de Motores Diesel E4

	Puerto	Cantidad de motores disponibles
A	Amsterdam	500
B	Amberes.	700
C	El Havre	800
	Total	2000

Tabla 5.4. Costo de transporte en dólares/motor desde un origen hasta un destino

Origen	Destino			
	1	2	3	4
A	12	13	4	6
B	6	4	10	11
C	10	9	12	4

El modelo de programación lineal para el problema de *Protrac* es el siguiente:

Variables de Decisión:

X_{ij} = Número de motores enviados desde el puerto i ($i = A, B, C$) hacia la planta j ($j = 1, 2, 3, 4$)

$$\text{Min } Z = 12X_{A1} + 13X_{A2} + 4X_{A3} + 6X_{A4} + 6X_{B1} + 4X_{B2} + 10X_{B3} + 11X_{B4} + 10X_{C1} + 9X_{C2} + 12X_{C3} + 4X_{C4}$$

S.A:

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} \leq 500$$

$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} \leq 700$$

$$X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4} \leq 800$$

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} = 400$$

$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} = 900$$

$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} = 200$$

$$X_{A4} + X_{B4} + X_{C4} = 500$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall ij.$$

Como puede observarse, todos los coeficientes de las variables de decisión en las restricciones tienen un valor de uno; en otras palabras, la matriz de coeficientes **A** está constituida solamente por números igual a uno, por lo cual, los modelos de transporte, a pesar de ser complejos en virtud de contar por lo general con un gran número de variables de decisión y restricciones, sus procedimientos de solución, para obtener una solución inicial factible y posteriormente, la óptima, son simples, comparados por ejemplo, con la aplicación de algoritmos más elaborados como el

método de las dos fases, el cual sería necesario aplicar, dado que se presentan restricciones de igualdad.

El problema de transporte puede resolverse mediante algoritmos que sólo usan adición y sustracción, en comparación con el algoritmo simplex, que utiliza operaciones más complejas.

Para la solución de un modelo utilizando los algoritmos de transporte, se organiza la matriz en la forma de la Tabla 5.5.

Tabla 5.5. Matriz de transporte ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta
	1	2	3	4	
A	12	13	4	6	500
B	6	4	10	11	700
C	10	9	12	4	800
Demanda	400	900	200	500	

Esta forma es un estándar en los modelos de transporte.

Actividades para el lector en la sección 5.1. Definición del Problema de Transporte

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas el problema de transporte
- Analizar las características del problema de transporte que lo sitúan como un caso especial en los modelos de programación lineal
- Hacer equipos de trabajo para analizar y construir modelos de transporte en empresas de manufactura, servicios y gubernamentales
- Consultar en internet en páginas validadas, algunos modelos de transporte
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los cuatro puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar

- **Competencias Genéricas**
 - Habilidad para consultar y analizar información proveniente de diversas fuentes
 - Habilidad para usar tecnologías de información y comunicación
 - Incorporación de nueva terminología ingenieril
 - Trabajo en equipo
 - Capacidad de resumir información
 - Comunicación oral y escrita

- **Competencias Específicas**

- Conocer los modelos de transporte
- Identificar cuando se aplican los modelos de transporte
- Identificar los orígenes, destinos, ofertas, demandas, costos de transporte y empaque, así como la minimización de los costos involucrados en los modelos de transporte
- Investigar el extenso campo de aplicación de los modelos de transporte en empresas de manufactura, servicios y gubernamentales

5.2. MÉTODO DE LA ESQUINA NOROESTE

Este método inicia en la esquina superior izquierda (noroeste), ubicando tantas unidades como sea posible en esa ruta. Una vez que se satisfacen la oferta y/o la demanda, se pasa a la siguiente celda que resulte ser la nueva esquina noroeste, continuando este procedimiento hasta que hayan sido satisfechas la oferta y la demanda. El resultado es una solución inicial factible. Al final se calculan los costos para conocer el valor de la función objetivo.

El método de la esquina noroeste es muy fácil de usar y produce con rapidez una solución factible inicial con un mínimo de trabajo, sin embargo en los procedimientos de optimización genera en promedio más iteraciones que el método de aproximación de Vogel.

5.2.1. Ejemplo de aplicación del método de la esquina noroeste (EN)

A continuación se ejemplifica la aplicación de la regla de la esquina noroeste para el modelo de *Protrac*:

Tabla 5.6. Aplicación Método Esquina Noroeste ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta	
	1	2	3	4		
A	¹² 400	¹³ 100	⁴	⁶	500	100
B	⁶	⁴ 700	¹⁰	¹¹	700	
C	¹⁰	⁹ 100	¹² 200	⁴ 500	800	700 500
Demanda	400	900	200	500		
		800 100				

Aplicación de la Regla de la Esquina Noroeste

1. La celda A1 es la esquina noroeste (EN), y se escoge el valor mínimo entre la demanda, que es 400 y la oferta, que es 500.
2. La nueva EN es A2, a la que solo se le pueden asignar 100, que es la oferta remanente en A.
3. La celda B2 es la nueva EN, a la que solo se le asignarán 700, que es el mínimo entre la oferta en B que son 700 y la demanda en el destino 2 que es de 800.
4. La celda C2 es la nueva EN, a la que se asignarán 100, que es el mínimo entre la oferta en C que es 800 y la demanda remanente en 2, con un valor de 100.
5. La nueva EN es la celda C3, a la que se le asignarán 200
6. La última celda es la C4, a la que le serán asignadas 500 piezas del motor E4.
7. Tomar en cuenta que para este modelo, el número de celdas asignadas es de 6, lo que corresponde al valor de $(m + n - 1)$, que es $(3 + 4 - 1) = 6$.

Cálculo del costo de la solución de la Esquina Noroeste:

Para obtener el costo total de esta solución inicial factible, deben multiplicarse la cantidad asignada en cada celda por los costos unitarios de transporte:

$$\begin{aligned}\text{Costo Total por EN} &= 400 (12) + 100 (13) + 700(4) + 100(9) + 200(12) + 500(4) = \\ &= 14,200 \text{ dólares}\end{aligned}$$

Posteriormente, es necesario tomar el resultado obtenido por la EN y procesarlo a través de uno de los métodos de optimización para lograr el costo mínimo del modelo de transporte.

Actividades para el lector en la sección 5.2. El método de la esquina noroeste (EN)

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas los principios y la metodología del método de la esquina noroeste (EN)
- Establecer las limitaciones del método de la EN
- Aplicar el algoritmo de la EN para resolver problemas de transporte en una sesión de aprendizaje colaborativo en el aula
- Resolver como tarea, los problemas propuestos del método de la EN
- Identificar la solución inicial factible y su costo correspondiente para los problemas de transporte bajo estudio
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los cinco puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**

- Habilidad para investigar nuevos algoritmos
- Habilidad de aplicar nuevos enfoques para la solución de problemas
- Capacidad para resolver problemas
- Capacidad para trabajar en equipo
- Habilidad para realizar comunicación oral y escrita

- **Competencias Específicas**

- Analizar los métodos de transporte para obtener una solución básica (SB) inicial
- Aplicar el método de EN a diversos problemas de transporte para obtener una SB inicial
- Identificar la solución inicial factible y su costo correspondiente, para los problemas bajo estudio

5.3. MÉTODO DE APROXIMACIÓN DE VOGEL

Para este método debe emplearse la información de costos mediante el concepto de costo de oportunidad o penalización, a fin de determinar la solución factible, evitando penalizaciones. El primer paso consiste en localizar, entre los renglones y columnas, la mayor de todas las penalizaciones y hacer después una asignación que evite que éstas sean grandes.

Es importante tomar en cuenta que el costo de oportunidad o penalización representa el costo en el que se incurre por no elegir la mejor ruta para un origen o para un destino, por lo que debe calcularse a nivel renglón y también a nivel columna en la matriz de transporte, considerando el costo menor y el que le sigue en magnitud. Por ejemplo, si el costo menor en una columna es 3 y el que le sigue es 7, entonces el costo de oportunidad es $7 - 3 = 4$, lo que indica que se gastarán 4 pesos adicionales por cada unidad del producto a transportar; si se tuvieran que mover 1,000 unidades, el costo adicional de transporte sería 4,000 pesos.

Pasos para la aplicación del Método de Aproximación de Vogel (MAV):

Paso 1.- Calcular la penalización por renglón, identificando el menor costo de transporte y el costo que le sigue en magnitud. Efectuar la diferencia entre ambos costos. Realizar lo mismo a nivel columna. Posteriormente, identificar el renglón y

la columna con la máxima penalización. Los empates se resuelven arbitrariamente.

Paso 2.- Colocar la máxima asignación posible a la ruta no usada que tenga menor costo en el renglón o columna seleccionado en el paso 1.

Paso 3.- Se reajustan la oferta y la demanda.

Paso 4.- Se elimina la columna o el renglón en donde se presente la demanda u oferta con valor cero.

Paso 5.- Calcular los nuevos costos de penalización. Terminar cuando se agoten la oferta y la demanda.

5.3.1. Ejemplo de aplicación del método de aproximación de Vogel (MAV)

A continuación se aplicará el MAV para el ejemplo Protrac.

Tabla 5.7. Aplicación MAV tabla inicial ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta	Penalización Por Columna
	1	2	3	4		
A	12	13	4 200	6	500 300	(6 - 4 =) 2
B	6	4	10	11	700	2
C	10	9	12	4	800	5
Demanda	400	900	200	500		
Penalización Por Renglón	4	5	6	2		

La máxima penalización entre renglones y columnas es 6 y ocurre para el destino 3, por lo que se asignará tanto producto como sea posible; en este caso, son 200 unidades, por lo que se cancela este destino, que ya está satisfecho y se realiza el ajuste al origen A, pasando de 500 a 300 unidades disponibles.

Posteriormente se calculan de nuevo las penalizaciones de los renglones restantes, ya que las que corresponden a las columnas no se alteran y se continúa con el procedimiento, de acuerdo con la Tabla 5.8.

Tabla 5.8. Aplicación MAV primera iteración ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta	Penalización Por Columna
	1	2	3	4		
A	12	13	⁴ 200	⁶ 300	500 300	² 6
B	6	4	10	11	700	2
C	10	9	12	4	800	5
Demanda	400	900	200	500 200		
Penalización Por Renglón	⁴	5	6	² 7		

La máxima penalización entre renglones y columnas es 6 y ocurre para el origen A, por lo que se asignará tanto producto como sea posible; en este caso, son 300 unidades, por lo que se cancela este origen, que ya está satisfecho y se realiza el ajuste al destino 4, pasando de 500 a 200 unidades disponibles.

Posteriormente se calculan de nuevo las penalizaciones de las columnas restantes, ya que las penalizaciones por renglón no se alteran y de acuerdo con la tabla 5.9, se avanza el procedimiento:

Tabla 5.9. Aplicación MAV segunda iteración ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta	Penalización Por Columna
	1	2	3	4		
A	12	13	⁴ 200	⁶ 300	500 300	² 6
B	6	4	10	11	700	2
C	10	9	12	⁴ 200	800 600	5
Demanda	400	900	200	500 200		
Penalización Por Renglón	⁴	5	6	² 7		

Continuando con el criterio antes expuesto, se obtiene posteriormente la tabla 5.10:

Tabla 5.10. Aplicación MAV tercera iteración ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta	Penalización Por Columna
	1	2	3	4		
A	¹²	¹³	⁴ 200	⁶ 300	500 300	² 6
B	⁶	⁴ 700	¹⁰	¹¹	700	2
C	¹⁰	⁹	¹²	⁴ 200	800 600	⁵ 1
Demanda	400	900 200	200	500 200		
Penalización Por Renglón	⁴	⁵	⁶	² 7		

Continuando con el criterio del MAV, se obtiene la tabla 5.11, para la cual solamente deben asignarse las demandas de los destinos 1 y 2:

Tabla 5.11. Aplicación MAV tabla óptima ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta	Penalización Por Columna
	1	2	3	4		
A	¹²	¹³	⁴ 200	⁶ 300	500 300	² 6
B	⁶	⁴ 700	¹⁰	¹¹	700	2
C	¹⁰ 400	⁹ 200	¹²	⁴ 200	800 600 200	⁵ 1
Demanda	400	900 200	200	500 200		
Penalización Por Renglón	⁴	⁵	⁶	² 7		

Como puede observarse, en la Tabla 5.11 ya se tienen satisfechas todas las demandas y se asignaron todas las ofertas, por lo que se logró obtener una solución básica factible de acuerdo al método de aproximación de Vogel.

El número de celdas asignadas en esta solución es de seis, lo cual está de acuerdo al valor de $(m + n - 1)$, que es $(3 + 4 - 1) = 6$.

El costo de la solución por MAV:

$$\begin{aligned}\text{Costo Total por MAV} &= 400(10) + 700(4) + 200(9) + 200(4) + 300(6) + 200(4) = \\ &= 12,000 \text{ dólares}\end{aligned}$$

Generalmente la solución obtenida por el método de aproximación de Vogel proporciona una mejor solución que la generada por el método de la Esquina Noroeste; esto es debido a que el MAV establece la consideración de las penalizaciones o costos de oportunidad.

Como se mencionó anteriormente, los métodos EN y MAV expuestos, proporcionan una solución inicial factible para el problema de transporte, pero no garantizan una solución óptima, por lo que las soluciones generadas por éstos deben procesarse a través de algún método de optimización.

Actividades para el lector en la sección 5.3. El método de Aproximación de Vogel (MAV)

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas los principios y la metodología del método de aproximación de Vogel (MAV)
- Establecer las limitaciones del método MAV
- Aplicar el algoritmo de MAV para resolver problemas de transporte en una sesión de aprendizaje colaborativo en el aula
- Resolver como tarea, los problemas propuestos del MAV
- Identificar la solución inicial factible y su costo correspondiente para los problemas de transporte bajo estudio
- Elaborar una tabla comparativa de los métodos para lograr una solución básica inicial de transporte (EN y MAV), analizando las ventajas y desventajas de los dos métodos y discutirlos en equipo
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los seis puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Habilidad para investigar nuevos algoritmos
 - Contrastar los enfoques para la solución de problemas
 - Habilidad para resolver problemas
 - Trabajo en equipo
 - Comunicación oral y escrita
- **Competencias Específicas**
 - Investigar los principios del método MAV
 - Construir la tabla inicial a partir de la información de un problema de transporte

- Comparar los alcances y limitaciones de los métodos EN y MAV, para lograr una solución inicial factible en los problemas de transporte
- Aplicar el método MAV a diversos problemas de transporte
- Identificar la solución inicial factible y su costo correspondiente, para los problemas bajo estudio

5.4. PROCEDIMIENTOS DE OPTIMIZACIÓN

En esta sección se mostrarán dos algoritmos de optimización que son:

- Método del Eslabón o de Pasos Secuenciales (MPS)
- Método de Distribución Modificada (DIMO o MODI) o Método de Multiplicadores

5.4.1. Método del Eslabón o de Pasos Secuenciales (MPS)

El método de pasos secuenciales es un procedimiento que empieza con una solución inicial factible del problema de transporte, para encontrar la solución óptima.

En cada etapa se valida el intento de enviar productos por una ruta que no se haya usado en la solución factible en curso, mientras se elimina una de las rutas utilizada actualmente.

El cambio de rutas se realiza de tal manera que se cumplan dos condiciones:

1. Que la solución se conserve factible
2. Que la función objetivo mejore; en este caso, disminuya

El proceso termina cuando no existen rutas que mejoren el valor de la función objetivo, entonces dicha solución es la óptima.

Los pasos para el método del Eslabón o MPS son:

Paso 1.- Usar la solución factible actual, proporcionada por el método de EN o por el MAV, para evaluar el costo marginal de enviar material a lo largo de cada una de las rutas no usadas (celdas vacías). El procedimiento es el siguiente:

- a) Poner un signo + en la celda desocupada de interés.
- b) Anotar un signo – en una celda usada del mismo renglón.
- c) Poner un signo + en una celda usada de la columna determinada por el paso b). Se continúa el proceso alternando los signos + y –, tanto en renglones como en columnas, hasta que se obtenga una sucesión de

celdas que satisfaga dos condiciones:

- 1.- Hay un signo + en la celda desocupada original de interés.
- 2.- Cualquier renglón o columna que tenga un signo + debe tener también un signo –, y viceversa. La sucesión de pasos se llama ruta eslabón. Se calcula el costo marginal o costo de oportunidad de introducir una nueva ruta.

Paso 2.- Si todos los costos marginales son iguales o mayores que cero, se ha encontrado la solución óptima. De otra manera, debe elegirse la celda que tenga un costo marginal más negativo.

Paso 3.- Determine el máximo número de artículos que pueden ser asignados a la ruta elegida en el paso 2 y reajuste las asignaciones en forma adecuada.

Paso 4.- Se regresa al paso 1, se vuelve a evaluar el costo marginal de introducir cada una de las rutas no usadas en el momento

5.4.1.1. Ejemplo de aplicación del método del Eslabón.

A continuación se aplicará este método utilizando la solución proporcionada por el método de la esquina noroeste, obtenido en la tabla 5.6.

Tabla 5.12. Aplicación método eslabón tabla inicial ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta
	1	2	3	4	
A	-12 400	+ -13 100	+ 4	+ 6	500
B	+ 6	-4 700	+ 10	+ 11	700
C	+ 10	-+ 9 100	- 12 200	- 4 500	800
Demanda	400	900	200	500	

Eslabón celda A3: +A3, -C3, +C2, -A2

Cálculo del costo de oportunidad para celda A3: $+4 -12 +9 -13 = -12$

Este valor significa que por cada motor no enviado por la ruta A3, se tiene un costo de oportunidad de -12; en otras palabras, si se utiliza esta ruta, por cada motor que se envíe por ella, la función objetivo se reducirá en 12, lo cual es muy favorable, ya que se trata de un problema de minimización. A continuación se calcularán todos los costos de oportunidad para las celdas vacías.

Eslabón celda A4: +A4, -C4, +C2, -A2

Cálculo del costo de oportunidad para celda A4: $+6 -4 +9 -13 = -2$

Eslabón celda B1: +B1, -A1, +A2, -B2

Cálculo del costo de oportunidad para celda B1: $+6 -12 +13 -4 = +3$

Eslabón celda B3: +B3, -C3, +C2, -B2

Cálculo del costo de oportunidad para celda B3: $+10 -12 +9 -4 = +3$

Eslabón celda B4: +B4, -C4, +C2, -B2

Cálculo del costo de oportunidad para celda B4: $+11 -4 +9 -4 = +12$

Eslabón celda C1: +C1, -A1, -A2, -C2

Cálculo del costo de oportunidad para celda C1: $+10 -12 +13 -9 = +2$

Los valores de los costos de oportunidad en las celdas vacías se anotan en la tabla, marcándose con un color diferente para distinguirlos de las asignaciones obteniéndose lo siguiente:

Tabla 5.13. Aplicación método eslabón primera iteración ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta
	1	2	3	4	
A	¹² 400	⁻¹³ 100	⁺⁴ -12	⁶ -2	500
B	⁶ +3	⁴ 700	¹⁰ +3	¹¹ +12	700
C	¹⁰ +2	⁺⁹ 100	⁻¹² 200	⁴ 500	800
Demanda	400	900	200	500	

En la tabla 5.13 puede observarse que el mejor costo de oportunidad, esto es, el que favorece más a la función objetivo, es el que corresponde al eslabón de la ruta A3, con un valor de -12, por lo que debe asignarse tanta cantidad como sea posible a dicha ruta.

Analizando las celdas involucradas para el eslabón de la ruta A3 se tiene que existen dos celdas decrecientes, esto es, con signo negativo: C3 con una asignación de 200 y A2 con un valor asignado de 100. Como el valor menor de ellas tiene 100, entonces esta cantidad de la celda A2 deberá sumarse en las

celdas con signo positivo y restarse a las celdas con signo negativo, únicamente para el eslabón en cuestión.

Realizando las operaciones descritas previamente, se obtiene la tabla 5.14, para la cual debe realizarse la prueba de optimalidad, siguiendo los pasos del método del eslabón, debiendo terminar el procedimiento cuando todos los costos marginales sean positivos o cero, lo que indica que ya se ha logrado una solución óptima, en virtud de que los costos positivos o cero indican que la función objetivo, al ser de minimización, ya no puede favorecerse. Es necesario que en cada tabla se verifique que se cumplan las ofertas y las demandas.

Tabla 5.14. Aplicación método eslabón segunda iteración ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta
	1	2	3	4	
A	⁻¹² 400	¹³ +12	⁺⁴ 100	⁶ +10	500
B	⁶ -9	⁴ 700	¹⁰ +3	¹¹ +12	700
C	⁺¹⁰ -10	⁹ 200	⁻¹² 100	⁴ 500	800
Demanda	400	900	200	500	

Esta solución tiene un costo menor que el de la solución básica factible inicial, que es de 14,200 dls. Su costo mejorado es:

$$\begin{aligned}\text{Costo mejorado} &= 400(12) + 700(4) + 200(9) + 100(4) + 100(12) + 500(4) \\ &= 13,000 \text{ dls}\end{aligned}$$

Para verificar si la solución anterior es óptima, se procede nuevamente con el paso 1 del método del eslabón, por lo que se establecen las rutas para las celdas vacías y se calculan los costos marginales correspondientes. Aplicando el paso 1 se obtienen los costos de oportunidad anotados en la tabla 5.14.

Los costos mencionados se generan de igual manera que en la tabla anterior, solo cabe mencionar que para el caso de la celda B1, se requirieron seis celdas para formar el eslabón, como se indica a continuación:

$$\text{Eslabón celda B1: } +B1 -A1 +A3 -C3 +C2 -B2$$

$$\text{Cálculo del costo de oportunidad para celda B1: } +6 -12 +4 -12 +9 -4 = -9$$

La celda que presenta el costo de oportunidad más favorable es la C1, con un valor de -10. El eslabón de la celda C1 está formado por: $+C1 -A1 +A3 -C3$, y las dos celdas con signo negativo o decrecientes tienen valores de A1: 400, A3:100,

por lo que se escoge la menor de ellas, que es la A3 con 100 unidades; este valor debe sumarse a las celdas de la ruta con signo positivo y restarse a las celdas de esa misma ruta con signo negativo. En la tabla 5.14 se indican los signos involucrados en esta ruta.

Llevando a cabo el movimiento de celdas sugerido, se obtiene la tabla 5.15, para la que se aplica la prueba de optimalidad. Puede observarse que todos los costos marginales son positivos o cero, por lo que la solución obtenida es óptima.

Tabla 5.15. Aplicación método eslabón tabla óptima ejemplo *Protrac*

Origen	Destino				Oferta
	1	2	3	4	
A	¹² 300	¹³ +2	⁴ 200	⁶ 0	500
B	⁶ +1	⁴ 700	¹⁰ +13	¹¹ +12	700
C	¹⁰ 100	⁹ 200	¹² +10	⁴ 500	800
Demanda	400	900	200	500	

El costo de la solución óptima obtenida por el método de eslabón o MPS es:

$$\begin{aligned}\text{Costo Total por Eslabón} &= 300(12) + 200(4) + 700(4) + 100(10) + 200(9) + 500(4) \\ &= 12,000 \text{ dólares}\end{aligned}$$

Este costo total puede compararse con los resultados obtenidos por el método de la Esquina Noroeste, con un valor de \$14,200, el cual se redujo a \$12,000, por lo que se logró una mejora significativa; sin embargo, en el método de aproximación de Vogel, efectivamente se llegó al óptimo, pero cabe aclarar que fue una casualidad, ya que dicho método no asegura optimalidad, a diferencia de los métodos del eslabón y el DIMO, que sí la garantizan.

5.4.2. Método de Distribución Modificado DIMO o MODI (Modified Distribution Method) o de Multiplicadores.

Es un procedimiento para calcular costos marginales, que utiliza índices para cada renglón y columna. Después establece un sistema de ecuaciones para las celdas usadas y posteriormente calcula los costos marginales para las celdas vacías. Los pasos para el método MODI son los siguientes:

Inicio. Se determina un índice para cada renglón: U_i para el renglón i , y uno para cada columna: V_j para la columna j .

Paso 1.- Para cada celda usada se determina para todos los renglones y columnas:

$$C_{ij} = U_i + V_j \quad (5.1)$$

donde C_{ij} es el costo de enviar una unidad del origen i al destino j . Se inicia el procedimiento con una solución factible producida mediante los métodos de EN o el MAV y se tienen que satisfacer las restricciones asignadas. Se sugiere iniciar con un valor arbitrario en $U_i = 0$, o cualquier otra variable que se presente en al menos dos ecuaciones.

Paso 2.- Se calculan los costos marginales de las celdas no usadas:

$$e_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j) \quad (5.2)$$

Paso 3.- Se procede de igual forma que en el método del eslabón, para asignar unidades de producto a celdas más favorables.

5.4.2.1. Ejemplo de aplicación del método DIMO o de Multiplicadores.

A continuación se aplicará este método utilizando la solución proporcionada por el método de la esquina noroeste, obtenido en la tabla 5.6. Como paso inicial, se incluyen los índices U_i y V_j .

Tabla 5.16. Aplicación Método DIMO tabla inicial ejemplo *Protrac*

	Origen	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	Oferta
		Destino				
		1	2	3	4	
U _A	A	¹² 400	¹³ 100	⁴ -12	⁶ -2	500
U _B	B	⁶ +3	⁴ 700	¹⁰ +3	¹¹ +12	700
U _C	C	¹⁰ +2	⁹ 100	¹² 200	⁴ 500	800
	Demanda	400	900	200	500	

En el **paso1**, se plantean, para todas las celdas usadas, las ecuaciones siguientes:

Ruta en uso	Ecuación
A1	$U_A + V_1 = 12$
A2	$U_A + V_2 = 13$

B2	$U_B + V_2 = 4$
C2	$U_C + V_2 = 9$
C3	$U_C + V_3 = 12$
C4	$U_C + V_4 = 4$

Puede observarse que existen siete variables y seis ecuaciones. Para resolver el sistema de ecuaciones, se escoge una variable para igualarla con cero, con la condición que dicha variable aparezca al menos en dos ecuaciones.

Si $U_A = 0$, entonces la solución al sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{lll} V_1 = 12, & V_2 = 13 & U_B = -9 \\ U_C = -4 & V_3 = 16 & V_4 = 8 \end{array}$$

En el **paso 2**, se calculan los costos marginales para las celdas vacías:

$$e_{A3} = C_{A3} - (U_A + V_3)$$

$$e_{A3} = 4 - (0 + 16) = -12$$

Procediendo en la misma forma, se obtienen los siguientes valores, los cuales se anotan en la tabla 5.16:

$$e_{A4} = -2$$

$$e_{B1} = +3$$

$$e_{B3} = +3$$

$$e_{B4} = +12$$

$$e_{C1} = +2$$

Puede observarse que los costos marginales son iguales a los de la tabla 5.13, los cuales se obtuvieron con el método del eslabón.

El **paso 3** indica que debe procederse de igual manera que en el método del eslabón, por lo que deben asignarse las unidades de producto a celdas más favorables.

En la tabla 5.16 se observa que el mejor costo de oportunidad es el que corresponde al eslabón de la ruta A3, con un valor de -12, por lo que debe asignarse tanta cantidad como sea posible a dicha ruta.

Procediendo de igual manera que en el método del eslabón, se tiene que la celda negativa menor es la A2 con un valor de 100, por lo que esta cantidad deberá sumarse en las celdas con signo positivo y restarse a las celdas con signo negativo solamente para el eslabón de la celda vacía A3.

Llevando a cabo las operaciones anteriores, se obtiene la tabla 5.17, para la cual se calculan de nuevo los costos marginales para las celdas vacías, de la misma forma que como se realizó con anterioridad.

Paso 1. Para las celdas ocupadas:

Ruta en uso	Ecuación
A1	$U_A + V_1 = 12$
A3	$U_A + V_3 = 4$
B2	$U_B + V_2 = 4$
C2	$U_C + V_2 = 9$
C3	$U_C + V_3 = 12$
C4	$U_C + V_4 = 4$

Si $U_A = 0$, entonces la solución al sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{lll} V_1 = 12, & V_2 = 1 & U_B = 3 \\ U_C = 8 & V_3 = 4 & V_4 = -4 \end{array}$$

Paso 2. Para las celdas vacías los costos marginales son:

$$e_{A2} = 13 - (0 + 1) = +12$$

$$e_{A4} = +10$$

$$e_{B1} = -9$$

$$e_{B3} = +3$$

$$e_{B4} = +12$$

$$e_{C1} = -10$$

Paso 3. En la tabla 5.17 se anotan los costos marginales, observando que existen todavía valores negativos, y el más favorable es el de la celda C1, con un valor de 10, negativo.

Tabla 5.17. Aplicación Método DIMO primera iteración ejemplo *Protrac*

	Origen	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	Oferta
		Destino				
		1	2	3	4	
U _A	A	¹² 400	¹³ +12	⁴ 100	⁶ +10	500
U _B	B	⁶ -9	⁴ 700	¹⁰ +3	¹¹ +12	700
U _C	C	¹⁰ -10	⁹ 200	¹² 100	⁴ 500	800
	Demanda	400	900	200	500	

Realizando la reasignación correspondiente de 100 piezas de los motores entre las celdas del eslabón C1: +C1, -A1 +A3 -C3, se obtiene la tabla 5.18.

Tabla 5.18. Aplicación Método DIMO tabla óptima ejemplo *Protrac*

	Origen	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	Oferta
		Destino				
		1	2	3	4	
U _A	A	¹² 300	¹³ +2	⁴ 200	⁶ 0	500
U _B	B	⁶ +1	⁴ 700	¹⁰ +13	¹¹ +12	700
U _C	C	¹⁰ 100	⁹ 200	¹² +10	⁴ 500	800
	Demanda	400	900	200	500	

Esta tabla es óptima, ya que todos los costos marginales son cero o positivos. Puede observarse que ésta es igual a la tabla 5.15, obtenida con el método del eslabón. Su costo total es:

El costo de la solución óptima obtenida por el método DIMO es:

$$\begin{aligned}\text{Costo Total por DIMO} &= 300(12) + 200(4) + 700(4) + 100(10) + 200(9) + 500(4) \\ &= 12,000 \text{ dólares}\end{aligned}$$

Este valor concuerda con el obtenido por el método del eslabón, ya que al ser algoritmos de optimización, el valor mínimo de la función objetivo tiene el *mismo valor*.

Actividades para el lector en la sección 5.4. Procedimientos de Optimización

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas los principios y la metodología de los dos algoritmos de optimización: Método del Eslabón o de Pasos Secuenciales (MPS) y el Método de Distribución Modificada (DIMO o MODI) o de Multiplicadores
- Investigar cuando existen otras consideraciones que deben aplicarse al modelo de transporte
- Elaborar una tabla comparativa de los métodos para lograr la solución óptima del problema de transporte (MPS y DIMO), analizando las diferencias, ventajas y desventajas de los dos métodos y discutirlos en equipo
- Analizar si a los problemas de transporte bajo estudio deben aplicársele otras consideraciones
- Aplicar el algoritmo de MPS y posteriormente el método DIMO para resolver problemas de transporte en sesiones de aprendizaje colaborativo en el aula
- Resolver como tarea, los problemas propuestos para optimización de transporte

- Identificar la solución óptima y su costo correspondiente para los problemas de transporte bajo estudio
- Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones para los problemas usando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los ocho puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Habilidad para aplicar nuevos algoritmos
 - Capacidad de contrastar los enfoques para la solución de problemas
 - Habilidad para resolver problemas
 - Capacidad de trabajo en equipo
 - Capacidad de análisis, síntesis y abstracción
 - Comunicación oral y escrita
- **Competencias Específicas**
 - Analizar los principios de los algoritmos de transporte para obtener una solución óptima: MPS y DIMO
 - Aplicar los algoritmos de optimización del transporte para lograr la solución de costo mínimo
 - Comparar las diferencias de los métodos MPS y DIMO, para lograr la solución óptima en los problemas de transporte
 - Interpretar la solución óptima y su costo correspondiente, para los problemas bajo estudio
 - Considerar en las conclusiones los aspectos éticos y de sustentabilidad para orientar correctamente la toma de decisiones
 - Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones para los problemas usando un lenguaje accesible

5.5. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

El modelo de asignación consiste en determinar la asignación óptima de n recursos indivisibles a n tareas. Los recursos son indivisibles en el sentido que ninguno puede dividirse entre varias tareas, por lo que existe la restricción que solamente uno puede asignarse a una sola tarea. (Eppen, 2000, p.232)

Este modelo permite determinar la asignación de operadores a máquinas, máquinas a plantas industriales, vehículos a instalaciones, empleados a trabajos, periodos a tareas, agentes de venta a distritos, programas de trabajo a diversas máquinas o editores para los manuscritos, entre otros.

El objetivo del modelo es determinar la solución óptima, que es la de menor costo, de la asignación de los recursos a las tareas. En la tabla 5.19 se presenta el *modelo general de asignación con n recursos y n tareas*. (Taha, 1998, p.194)

Tabla 5.19. Modelo general de asignación con n recursos y n tareas

Recursos	Tareas					
	1	2	3	...	n	
1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	...	c_{1n}	1
2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	...	c_{2n}	1
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	...	c_{3n}	1
...	...	...	...	...	...	...
n	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	...	c_{nn}	1
	1	1	1	...	1	

El elemento c_{ij} representa el costo de asignar el recurso i a la tarea j . En caso que la matriz no sea cuadrada, se pueden asignar recursos ficticios o bien, tareas ficticias.

El modelo de asignación es un caso especial del modelo de transporte, en el cual los recursos representan los orígenes y las tareas representan los destinos, con la característica de que la oferta en cada punto de origen y la demanda en cada punto de destino son iguales a la unidad.

El modelo de asignación se puede resolver como un modelo de transporte, pero como la oferta y la demanda son iguales a uno, se desarrolló un algoritmo simple para su solución, denominado el **método húngaro**.

La solución por *enumeración exhaustiva* consiste en calcular cada costo de asignación factible y seleccionar el menor; sin embargo, este enfoque es engorroso ya que deben analizarse n factorial ($n!$) opciones. A medida que n aumenta, el valor de las alternativas a analizar se vuelve muy grande. Por ejemplo, $4! = 24$ pero $6! = 720$. El *método húngaro* es recomendable para resolver problemas de asignación, ya que es un algoritmo muy simple.

5.5.1. Otras consideraciones en el problema de Asignación.

Existen situaciones en las que no se cumplen todas las condiciones del problema típico de asignación. Los casos más comunes se describen a continuación.

1. **Diferente número de recursos que tareas.** En este caso, deben asignarse tantos renglones o columnas como sean necesarios para formar una matriz cuadrada. Si el número de recursos es mayor, se agrega una tarea ficticia con costos iguales a cero, lo que ocasiona que un recurso no se asigne a alguna tarea. Por el contrario, si el número de recursos es menor, se adiciona un recurso ficticio con costos iguales a cero; lo que sucede entonces es que existirá una tarea a la cual no es posible asignarle un recurso.
2. **Problema de maximización.** Por definición, el problema de asignación es de *minimización*, para el cual ha sido diseñado el método húngaro (*Eppen et al., 1992, p. 308*); sin embargo, cuando se presenten utilidades en lugar de costos, se recomienda que en el método húngaro en los pasos 1 y 2 se reste el valor máximo, con lo cual se representarían los *costos de oportunidad*.
3. **Designaciones inaceptables.** Esto puede deberse, por ejemplo, a conflictos interpersonales o de salud, por lo que se penalizará con un costo muy alto a la posición i,j a fin de evitar la asignación del recurso a una tarea específica.

Actividades para el lector en la sección 5.5. Definición del Problema de Asignación

- Investigar en qué consiste el problema de asignación
- Analizar las características del problema de asignación que lo ubican como un caso especial en los modelos de transporte
- Discutir en dinámicas de aprendizaje colaborativo, como se debe actuar cuando se presenten otras consideraciones en los problemas de asignación
- Hacer equipos de trabajo para analizar y construir modelos de asignación en empresas de manufactura, servicios y gubernamentales
- Entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los tres puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar

- **Competencias Genéricas**
 - Habilidad para consultar y analizar información proveniente de diversas fuentes
 - Incorporación de nueva terminología ingenieril
 - Visualización de modelos matemáticos
 - Trabajo en equipo
 - Comunicación oral y escrita
- **Competencias Específicas**
 - Identificar cuando aplicar los modelos de asignación
 - Citar casos de aplicación de los modelos de asignación en diferentes instituciones
 - Relacionar el problema de asignación con el transporte
 - Analizar cuando un problema de asignación presente otras consideraciones para el modelo

5.6. EL MÉTODO HÚNGARO

El método húngaro recibe este nombre porque fue desarrollado en Hungría. El algoritmo trabaja en forma directa sobre la tabla original de costos del problema, convirtiéndola en una serie de tablas de costos equivalentes hasta llegar a la solución óptima.

Los pasos del método húngaro son (Eppen et al., 1992, p. 303):

Paso 1. Reducción en renglones. Para la matriz de costo original, identificar el mínimo de cada renglón y restarlo de todos los valores para ese renglón. Elaborar una nueva matriz con los resultados.

Paso 2. Reducción en columnas. Para la matriz resultante del paso 1, identificar el mínimo de cada columna y restarlo de todos los valores para esa columna.

Paso 3. Determinación de la matriz reducida. Trazar líneas rectas horizontales y verticales que cubran todos los ceros, empezando en la columna o renglón que tenga el mayor número de ceros. Si el número de rectas iguala el número de renglones o columnas, ya se ha encontrado la matriz reducida, en este caso, ir al paso 5; de lo contrario, ir al paso 4.

Paso 4. Reducciones posteriores.

- a. Restar el menor valor encontrado en las celdas no cubiertas de todas las demás que no están cubiertas, transcribiendo el resultado a otra matriz.
- b. Sumar el mismo valor a las celdas que se encuentran en las intersecciones, transcribiendo el resultado a la nueva matriz.
- c. Transcribir el resto de los valores.
- d. Ir al paso 3.

Paso 5. Identificación de la solución óptima. Se deben escoger celdas con costo cero, iniciando en los renglones que cuentan con un solo cero. Tomar en cuenta que debe seleccionarse solamente una celda de cada columna y cada renglón.

Paso 6. Cálculo del costo óptimo. El valor de la función objetivo se encuentra sumando los costos de las asignaciones en la matriz original.

5.6.1. Ejemplo de aplicación del método Húngaro.

Problema de auditoría de Protrac-Europa (Eppen et al., 1992, p.299) El director general de la compañía *Protrac Europa*, cuya gerencia general se encuentra en Bruselas, decidió que cada uno de los cuatro vicepresidentes: 1. Finanzas. 2. Mercadotecnia, 3. Operaciones y 4. Administración, visite e inspeccione una de las plantas de ensamblaje durante el siguiente mes. Las plantas de ensamblaje están

ubicadas en Leipzig, Alemania, Nancy, Francia, Lieja, Bélgica y Tilburgo, Holanda. Los costos de asignación en cientos de euros se incluyen en la tabla 5.20.

Tabla 5.20. Matriz de costos de asignación para el ejemplo *Protrac Europa*

VP	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4
1	24	10	21	11
2	14	22	10	15
3	15	17	20	19
4	11	19	14	13

Paso 1. En la tabla original se identifica el valor menor de cada renglón y se realiza la reducción en renglones, obteniendo la tabla siguiente:

Tabla 5.21. Matriz con reducción en renglones ejemplo *Protrac Europa*

VP	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4
1	14	0	11	1
2	4	12	0	5
3	0	2	5	4
4	0	8	3	2

Paso 2. En la tabla 5.21 se identifica, a nivel columna, el costo mínimo y se efectúa la reducción en columnas, generando la tabla 5.22:

Tabla 5.22. Matriz con reducción en columnas ejemplo *Protrac Europa*

VP	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4
1	14	0	11	0
2	4	12	0	4
3	0	2	5	3
4	0	8	3	1

Paso 3. Se determina si la matriz es reducida; en este caso, no es así pues con solo tres rectas se cubren los ceros, por lo que la matriz no es reducida y se procede al paso 4.

Paso 4. Se encuentra la menor celda no cubierta con las rectas, encontrándose un valor de uno en la tabla 5.22. Se resta este valor a todas las celdas no cubiertas,

y se suma a los valores contenidos en las intersecciones de las rectas, obteniéndose la tabla 5.23.

Tabla 5.23. Matriz con reducciones posteriores ejemplo *Protrac Europa*

VP	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4
1	15	0	12	0
2	4	11	0	3
3	0	1	5	2
4	0	7	3	0

Paso 3. De nuevo se trazan rectas que cubran todos los ceros, utilizándose cuatro, por lo que ya se obtuvo la matriz reducida, de acuerdo con la tabla siguiente:

Tabla 5.24. Asignación óptima ejemplo *Protrac Europa*

VP	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4
1	15	0	12	0
2	4	11	0	3
3	0	1	5	2
4	0	7	3	0

Paso 5. Se localiza la solución óptima, escogiendo solamente una celda de cada columna y cada renglón, cuyo costo sea cero. Es conveniente iniciar por los renglones con una sola posibilidad; en este caso, primeramente el renglón 2 con la columna 3, posteriormente el renglón 3 con la columna 1, lo que deja solamente una posibilidad del renglón 4 con la planta 4, y este a su vez, solo permite el renglón 1 con la planta 2.

Paso 6. Se calcula el costo total para la asignación óptima:

<u>Vicepresidente</u>	<u>Planta</u>	<u>Costo</u>
1 Finanzas	2	10
2 Mercadotecnia	3	10
3 Operaciones	1	15
4 Administración	4	13
Costo Total		48

Entonces *Protrac Europa* debe enviar al vicepresidente de finanzas a la planta de Nancy, Francia (2), al de mercadotecnia a la planta de Lieja, Bélgica, (3), al de operaciones a la planta de Leipzig, Alemania (1) y al de administración a la planta

de Tilburgo, Holanda (4), lo que tendrá un costo total de 4,800 euros, siendo éste el costo mínimo de asignar los vicepresidentes para visitar e inspeccionar una de las plantas de ensamblaje durante el siguiente mes.

En ocasiones, existen modelos para los cuales se presenta más de una solución, pero el valor del costo mínimo de la asignación permanece igual.

Actividades para el lector en la sección 5.6. El Método Húngaro

- Investigar en al menos dos referencias bibliográficas los principios y la metodología del método húngaro
- Aplicar el método húngaro para resolver problemas de asignación en una sesión de aprendizaje colaborativo en el aula
- Resolver como tarea, los problemas propuestos del método húngaro
- Identificar la solución óptima y su costo correspondiente para los problemas de asignación bajo estudio
- Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones correspondientes
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los cinco puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Capacidad de abstracción
 - Habilidad para investigar nuevos algoritmos
 - Habilidad para resolver problemas
 - Capacidad para el trabajo en equipo
 - Habilidad para la comunicación oral y escrita
- **Competencias Específicas**
 - Conocer el método húngaro
 - Aplicar el método húngaro a diversos problemas de asignación
 - Interpretar la solución óptima del método húngaro
 - Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones para los problemas analizados utilizando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
 - Considerar en las conclusiones los aspectos éticos y de sustentabilidad

5.7. USO DE SOFTWARE

A continuación se describirá el uso del paquete TORA® para resolver modelos de transporte y asignación.

Se debe abrir el software Tora, dando un “click” en el modelo de transporte (Transportation model) en el menú principal del paquete.

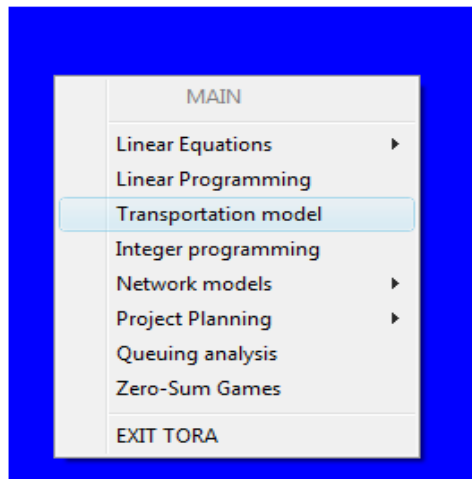


Figura 5.3. Menú principal de Tora

Posteriormente, se despliega un menú en el cual se especifica el nombre del problema, el número de orígenes (sources) y el número de destinos (dest'ns). En este caso se trabajará con un problema que consta de 4 orígenes y 3 destinos.

TRANSPORTATION MODEL					
Problem Title:	Problema 1		Editing Grid: >>To DELETE, INSERT, COPY, or PASTE a column(row), click h cell of target column(row), then invoke pull-down EditGrid r >>For INSERT mode, a single(double) click of target row/colum place new row/column after(before) target row/column.		
No. of Sources	4				
No. of Dest'ns	3				
INPUT GRID - TRANSPORTATION					
		D1	D2	D3	Supply
	S/D Name				
S1		0.00	0.00	0.00	
S2		0.00	0.00	0.00	
S3		0.00	0.00	0.00	
S4		0.00	0.00	0.00	
Demand					

Figura 5. 4. Matriz Inicial de Transporte en TORA

Después se procede a hacer el llenado de la matriz correspondiente como se muestra en la figura 5.5.

Los costos de transporte se anotan en cada una de las celdas; las demandas (demand) y las ofertas (supply) se llenan de acuerdo con las restricciones

establecidas durante el planteamiento del modelo. En cuanto se complete la tabla del modelo de transporte se pasa al menú ubicado en la parte inferior del Tora y se selecciona la opción de solución (Solve Menu), en la parte inferior del menú de Tora, tal como se presenta en la figura 5.6.

INPUT GRID - TRANSPORTATION					
		D1	D2	D3	Supply
	S/D Name	1	2	3	
S1	A	14.00	12.00	8.00	75
S2	B	13.00	9.00	11.00	75
S3	C	7.00	10.00	13.00	65
S4	D	9.00	11.00	10.00	45
Demand		120	60	80	

Figura 5.5. Matriz de Transporte con datos en TORA



Figura 5.6. Menú inferior de Tora

Posteriormente se elige la opción por la cual se desea que se inicie la obtención de la solución factible, ya sea que se seleccione el método de la esquina noroeste (EN) o el método de aproximación de Vogel (MAV), además de una tercera opción denominada el método de costo mínimo (least-cost). Para el primer ejemplo se elige el método de la esquina noroeste.

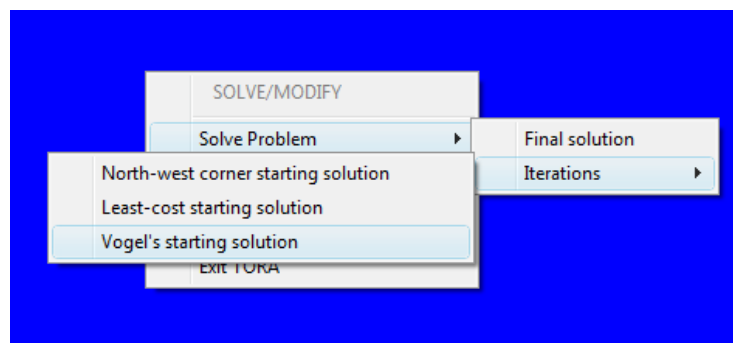


Figura 5.7. Menú de Solución de Transporte en Tora

Después se despliega una tabla principal, incluida en la figura 5.8, en la cual se puede establecer la primera iteración y la solución inicial del método de la esquina noroeste, donde las cuatro casillas marcadas son aquellas donde se efectuará el eslabón que generará un cambio entre ellas, el cual es estipulado por el método del eslabón.

Initialize u or v
 u1=0

Next Iteration All Iterations Write to Printer

			v1=14.00	v2=10.00	v3=13.00	
S1	A	u1=0.00	14.00	12.00	8.00	
			75			75
S2	B	u2=-1.00	0.00	-2.00	5.00	
			13.00	9.00	11.00	
S3	C	u3=0.00	45	30		75
			0.00	0.00	1.00	
S4	D	u4=-3.00	7.00	10.00	13.00	
			7.00	0.00	0.00	
Demand			9.00	11.00	10.00	
			2.00	-4.00	0.00	
Iter 2	ObjVal =	2900.00	120	60	80	
			D1	D2	D3	Supply

View/Modify Input Data MAIN Menu Exit TORA

Figura 5.8. Optimización de Transporte en TORA

Se tiene la opción de obtener una a una todas las iteraciones y observar los movimientos, así como los precios marginales.

Es conveniente hacer énfasis que Tora considera el precio marginal que se utiliza para hacer el cambio y crear el eslabón, como el valor *más positivo*, que es al contrario de la manera como se maneja en los algoritmos de optimización descritos en la sección 5.4, por lo que la solución óptima en el paquete Tora será la que contenga todos los precios marginales negativos o iguales a cero.

Cuando se obtenga la tabla óptima, entonces se desplegará el costo mínimo necesario para transportar los productos del modelo bajo estudio.

En la figura 5.9 se muestra la tabla óptima correspondiente.

			Next Iteration	All Iterations	Write to Printer		
	Name		1	2	3		
			$v_1=10.00$	$v_2=6.00$	$v_3=8.00$		
S1	A	$u_1=0.00$	14.00	12.00	8.00		
					75	75	
			-4.00	-6.00	0.00		
S2	B	$u_2=3.00$	13.00	9.00	11.00		
			10	60	5	75	
			0.00	0.00	0.00		
S3	C	$u_3=-3.00$	7.00	10.00	13.00		
			65			65	
			0.00	-7.00	-8.00		
S4	D	$u_4=-1.00$	9.00	11.00	10.00		
			45			45	
			0.00	-6.00	-3.00		
	Demand		120	60	80		

Figura 5.9. Tabla óptima del problema de transporte en Tora

Se puede obtener un resultado final más rápido, si en lugar de indicarle en el menú de solución la opción por medio de iteraciones, se le solicita la opción de solución final, la cual desplegará la figura 5.10, en la cual se muestra el costo mínimo así como las cantidades a transportar desde cada uno de los orígenes hacia los destinos.

TRANSPORTATION MODEL OUTPUT SUMMARY					
Title: Problema 1					
Final Iteration No.: 1					
Objective Value (minimum cost) =2185.00					
			Next Iteration	All Iterations	Write to Printer
From	To	Amt Shipped	Obj Coeff	Obj Contrib	
S1: A	D3: 3	75	8.00	600.00	
S2: B	D1: 1	10	13.00	130.00	
S2: B	D2: 2	60	9.00	540.00	
S2: B	D3: 3	5	11.00	55.00	
S3: C	D1: 1	65	7.00	455.00	
S4: D	D1: 1	45	9.00	405.00	

Figura 5.10. Valores óptimos del problema de transporte en Tora

Para los problemas de asignación se procede de la misma forma que como se ha descrito para el caso de transporte, con la única diferencia que las ofertas y demandas se establecen iguales a la unidad.

Actividades para el lector en la sección 5.7. Uso de Software

- Utilizar software para resolver los problemas propuestos de transporte y asignación
- Realizar la interpretación de los resultados de los problemas resueltos utilizando software en una sesión de aprendizaje colaborativo en el aula
- Como tarea, realizar la interpretación de los resultados obtenidos utilizando software, para cada uno de los problemas de transporte y asignación propuestos
- Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones de los problemas de transporte y asignación bajo estudio, usando un lenguaje accesible para el tomador de decisiones
- Elaborar y entregar un reporte individual, elaborado manualmente, de los cuatro puntos anteriores

Competencias a desarrollar o reforzar:

- **Competencias Genéricas**
 - Utilización de software
 - Manejo del Inglés
 - Capacidad para usar tecnologías de información y comunicaciones
 - Participación en actividades grupales que propician el entendimiento del uso y la interpretación de resultados con herramientas computacionales
 - Trabajo en equipo
 - Capacidad de análisis y síntesis
 - Elaboración de reportes
- **Competencias Específicas**
 - Utilizar software para resolver problemas de transporte y asignación
 - Considerar aspectos éticos y de sustentabilidad
 - Establecer los resultados, conclusiones y recomendaciones para los modelos de transporte y asignación resueltos mediante software

5.8. ASPECTOS ÉTICOS Y DE SUSTENTABILIDAD

Las tareas de transporte y asignación son fundamentales en el marco teórico-práctico de la Investigación de Operaciones y los modelos que para ello se desarrollan en gran número de empresas incrementan sensiblemente el valor de sus operaciones al integrarse a los esquemas de sus procesos de logística.

Dados los altos costos que para una empresa representan el transporte tanto de productos como de materia prima, y los recursos económicos que se manejan en estas áreas, es fundamental mantener un estricto ambiente ético y profesional en las relaciones comerciales entre el personal de la empresa y los proveedores de servicios.

El establecer ambientes éticos de comportamiento beneficia tanto a la empresa como a los proveedores, pues se crean sinergias ganar-ganar, que permiten las relaciones comerciales de largo plazo con beneficios para la sustentabilidad de ambas partes.

Otro aspecto asociado a las operaciones de transporte, y que impacta en la sustentabilidad de la empresa, es el concerniente a la seguridad con que dichas operaciones se conducen, y que pueden impactar tanto a la imagen de la empresa como a la sociedad y medio ambiente en su conjunto; tal es el caso de accidentes que, además de pérdidas económicas, cobran vidas y/o contaminan el medio ambiente.

5.9. RÚBRICA PROPUESTA PARA LA UNIDAD 5

Tabla 5.25. Rúbrica para la Unidad 5

Aspecto a Evaluar	Excelente 100 puntos	Muy Bien 85 puntos	Suficiente 70 puntos	A Mejorar 55 puntos	% de la calificación
Consultar dos fuentes bibliográficas y elaborar un resumen de los conceptos en las secciones 5.1. Definición del problema de transporte. 5.5. Definición del problema de asignación y 5.10 Terminología de la Unidad 5.	Cubre la totalidad de actividades para la definición del problema de transporte y la terminología de la unidad 5. Consultó el número de fuentes bibliográficas recomendadas. Los conceptos son precisos. El trabajo es limpio. Se entregó con oportunidad.	Puede presentar fallas aisladas en cuanto a: actividades, bibliografía, conceptos, limpieza, puntualidad.	Presenta varias fallas en cuanto a: actividades, bibliografía, conceptos, limpieza, puntualidad	No cumple con las actividades sugeridas. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	3.33% cada sección. Total 10%

Aplicación de los métodos para la obtención de una solución inicial factible en el problema de transporte, secciones 5.2. Método de la esquina noroeste 5.3. Método de aproximación de Vogel	Resolvió correctamente los problemas propuestos. Consideró los cinco puntos solicitados para cada problema. El trabajo es limpio. Se entregó a tiempo	Presenta fallas en ciertos problemas o tuvo errores menores en alguno de los cinco puntos solicitados para cada problema. Puede tener alguna falla en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	No resolvió todos los problemas o presenta errores en varios de los cinco puntos solicitados para cada problema. Presentó varias fallas en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta muchos errores en los problemas y en los cinco puntos solicitados para cada uno. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	5% cada sección. Total 10%
Aplicación de métodos de optimización de transporte en la sección 5.4: 5.4.1. Método del eslabón o pasos secuenciales, 5.4.2. Método DIMO o de multiplicadores. Aplicación del método húngaro para problemas de asignación, sección 5.6. Uso de software sección 5.7	Resolvió correctamente los problemas propuestos. Estableció adecuadamente las conclusiones. El trabajo está limpio. Se entregó a tiempo.	No resolvió todos los problemas solicitados o presenta errores aislados. No respondió alguno de los puntos requeridos. Puede tener fallas en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta varias fallas u omisiones en la solución de los problemas. Presenta alguna falla en cuanto a limpieza o entrega oportuna.	Presenta muchos errores en la solución de los problemas u omitió algunos de los puntos requeridos. Falló en cuanto a limpieza y entrega oportuna.	10% cada sección Total 30%

Participación en clase y trabajo en Equipo	Siempre participa en clase y en las sesiones de trabajo en equipo.	Frecuentemente tiene una actitud positiva en clase y en el trabajo en equipo.	En algunas ocasiones presenta una actitud positiva en clase y en el trabajo en equipo.	Frecuentemente su actitud es de apatía o negativa en clase y en el trabajo en equipo.	5%
Examen escrito	Las soluciones a los problemas de transporte y asignación, las consideraciones éticas y de sustentabilidad, así como las conclusiones son correctas. Obtiene la puntuación más alta.	Existen errores menores en cuanto a la solución o los aspectos éticos y de sustentabilidad o las conclusiones.	Se presentaron varios errores en la solución, algunos son mayores. No se consideraron los aspectos éticos o de sustentabilidad o las conclusiones son erróneas.	Existe gran cantidad de errores severos.	45 %

5.10. TERMINOLOGÍA DE LA UNIDAD 5

A continuación se incluye la terminología de la Unidad 5, con la finalidad de que el lector investigue y estudie cada uno de los términos.

1. Problema de transporte
2. Oferta
3. Demanda
4. Ruta
5. Nodo
6. Arco
7. Costo de transporte
8. Cantidad enviada
9. Algoritmos de transporte
10. Matriz de transporte
11. Solución básica factible
12. Solución degenerada
13. Método de la esquina noroeste
14. Método de aproximación de Vogel

- 15. Costo de oportunidad
- 16. Costo de penalización
- 17. Costo total
- 18. Solución óptima
- 19. Método del eslabón o de pasos secuenciales
- 20. Método DIMO o de multiplicadores
- 21. Origen ficticio
- 22. Destino ficticio
- 23. Rutas inaceptables
- 24. Problemas degenerados
- 25. Propiedades especiales del problema de transporte
- 26. Problema de asignación
- 27. Enumeración exhaustiva
- 28. Método húngaro
- 29. Designaciones inaceptables

BIBLIOGRAFÍA

1. Anderson, D.R., Sweeney, D.J., Williams, T.A., 2004, *Métodos Cuantitativos para los Negocios*, Novena Edición, Editorial Thomson, México DF, México
2. Davis, K.R., McKeown, P.G., 1986, *Modelos Cuantitativos para Administración*, Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V., México DF, México
3. Eppen, G.D., Gould, F.J., Schmidt, C.P., 1992, *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*, Tercera Edición, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, México DF, México
4. Eppen, G.D., Gould, F.J., Schmidt, C.P., Moore, J.H., Weatherford, L.R., 2000, *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*, Quinta Edición, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, Naucalpan, México
5. Eppen, G.D., Gould, F.J., Schmidt, C.P., 1992, *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*, Tercera Edición, Editorial Prentice-Hall Hispanoamérica, México DF, México
6. Grossman, S.I., 1988, *Aplicaciones de Álgebra Lineal*, Grupo Editorial Iberoamérica, México DF, México
7. Hillier, F.S., Lieberman, G.J., 2010, *Introducción a la Investigación de Operaciones* Novena Edición, Editorial Mc Graw Hill, México DF, México
8. Lara Muñoz, E.M., 2011, *Fundamentos de Investigación Un enfoque por competencias*, Alfaomega Grupo Editor S.A. de C.V. México DF, México
9. Pimienta, J., 2007, *Metodología Constructivista*, Segunda Edición, Editorial Pearson, México DF, México
10. Rugarcía Torres, A., 1996, *Educación en Valores*. Universidad Iberoamericana Plantel Golfo Centro, Puebla, México
11. Rugarcía Torres, A., 1999, *Hacia el Mejoramiento de la Educación Universitaria*, Editorial Trillas, México, DF, México
12. Taha, H.A., 1998, *Investigación de Operaciones una Introducción* Sexta Edición, Editorial Pearson, Naucalpan, México
13. Winston, W.L., 2005, *Investigación De Operaciones Aplicaciones y Algoritmos* Cuarta Edición, Editorial Thomson, México DF, México