



**GOBIERNO DE
MÉXICO**

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



**DEPARTAMENTO ADSCRIPCIÓN
DEPARTAMENTO DE INGENIERIAS.**

Programa y Modalidad

***B₂*. Elaboración de libro: Vibraciones Mecánicas**

**Nombre del Docente:
Leonardo Ceciliano Hernández**

**No dictamen:
AS. 2 – 044/2023**

**Nombre Persona Revisora
Gilberto Piña Piña
Eliseo Rivera Silva.
Margarito Luna Mejía**

Fecha: agosto 31 de 2024.

Contribución académica

Las vibraciones mecánicas son fenómenos omnipresentes en numerosos sistemas ingenieriles y naturales, que van desde estructuras de edificios hasta componentes de maquinaria y sistemas biológicos. La comprensión y el control de estas vibraciones son cruciales para garantizar el funcionamiento óptimo y seguro de diversos dispositivos y estructuras. A lo largo de la historia, el estudio de las vibraciones mecánicas ha sido un campo de investigación fundamental en la ingeniería mecánica y civil, así como en disciplinas interrelacionadas como la acústica, la dinámica de estructuras y la biomecánica.

En este contexto, las contribuciones académicas juegan un papel esencial al avanzar en nuestro conocimiento y capacidades para analizar, predecir y mitigar las vibraciones no deseadas. Estas contribuciones van desde desarrollos teóricos hasta aplicaciones prácticas, y pueden abordar una amplia gama de aspectos, como la modelización matemática, los métodos computacionales, las técnicas experimentales y las estrategias de control.

En este trabajo, nos centraremos en explorar una contribución específica al estudio de las vibraciones mecánicas que ha tenido un impacto significativo en la comunidad académica y en la práctica ingenieril, por tal razón consideramos que en la enseñanza y estudio de las vibraciones mecánicas se requiere hacer hincapié en la parte metodológica y didáctica para que los estudiantes en formación de ingeniería puedan asimilar con mayor facilidad tanto los conceptos como los modelos matemáticos que se requieren para el entendimiento del análisis y aplicaciones de la ecuaciones de movimiento que explican el comportamiento de los sistemas dinámicos vibratorios

En muchos libros se presentan estudios más formales y análisis más complejos sobre el fenómeno de vibración el cual es primordial en los análisis de ingeniería, dado que dicho fenómeno es el que causa la inestabilidad en un sistema físico.

En el presente trabajo nos involucramos con la parte didáctica en la enseñanza de las vibraciones mecánicas abordando los temas de tal manera que se genere un material didáctico que ayude tanto a los profesores que imparten la materia como a los alumnos que estudian los fenómenos vibratorios y las leyes a las cuales dichos fenómenos se rigen.

En cada capítulo del presente libro se realiza un desarrollo teórico de los temas a tratar se plantea una serie de ejemplos donde se la plantea al alumno la necesidad de realizar análisis teóricos y análisis gráficos par el estudio de las vibraciones, consideramos que esto le permite al alumno desarrollar ciertas competencias.

Cuando un alumno realiza análisis teóricos y los complementa con análisis gráficos en el estudio de las vibraciones, desarrolla una serie de competencias importantes que son relevantes tanto en el ámbito académico como en el profesional. Algunas de estas competencias incluyen:

Claridad conceptual: Las vibraciones mecánicas son un tema complejo que involucra conceptos abstractos de matemáticas, física y ingeniería. Una buena didáctica puede desglosar estos conceptos en unidades más comprensibles, facilitando así la asimilación de la información por parte de los estudiantes.

Aplicación de teorías a situaciones reales: La didáctica efectiva en la enseñanza de las vibraciones mecánicas permite a los estudiantes conectar la teoría con aplicaciones prácticas. Esto les ayuda a comprender cómo las vibraciones afectan a diferentes sistemas y estructuras en la vida real, lo que fomenta una comprensión más profunda y una mejor retención del conocimiento.

Estimulación del pensamiento crítico: Al abordar problemas y ejercicios prácticos relacionados con las vibraciones mecánicas, la didáctica puede fomentar el pensamiento crítico y la resolución de problemas. Los estudiantes aprenden a aplicar los principios teóricos para

analizar y resolver situaciones complejas, lo que desarrolla habilidades valiosas para su futuro profesional.

Dedicatoria

Quiero dedicar este trabajo de una forma muy especial a las mujeres de mi familia Paula, Leticia, Beatriz, Elena, Masha, Erika y Marina por el amor, cariño, pero sobre todo por el apoyo, paciencia y comprensión que me han brindado en todo este tiempo el cual ha hecho hacer posible llegar hacer de mi la persona y el profesionalista que soy.

Agradecimientos

Quiero manifestar mi más sincero agradecimiento a mis compañeros y amigos los ingenieros Héctor García de la Rosa, Omar García de la Rosa por el apoyo en la asesoría académica, tecnológica y sus valiosos comentarios para la mejora en el desarrollo del presente trabajo. También agradezco a todos mis alumnos que durante los años que he impartido la materia contribuyeron en las discusiones y soluciones de los ejercicios que sirvieron como ejemplos en el presente trabajo y en especial agradezco a los alumnos de la carrera ingeniería mecatrónica Erika Marina Elisa Arredondo Hernández, Francisco Pimentel Romero, Julio Campos Villanueva, Natanael Gonzales Bautista, Emmanuel Villegas Miguel, Ileana López Cárdenas y Axel Pérez Figueroa todos ellos actualmente egresados de la institución ya que son un ejemplo de superación y de los cuales tuve el gusto de ser parte de su formación y a la licenciada Erika Eugenia Hernández Urrutia por la revisión y corrección de los textos .

Agradezco al Doctor Gilberto Piña Piña, al Ingeniero Margarito Luna Mejía y al Físico Eliseo Rivera Silva por la revisión realizada al presente y sobre todo por los comentarios, sugerencias y aportaciones para la mejora de este trabajo.

Agradezco al Tecnológico Nacional de México y al Instituto Tecnológico de Toluca por el apoyo brindado para la realización de este trabajo a través del proyecto de año sabático.

Contenido

Introducción.....	4
Capítulo I. Cinemática de la vibración de una partícula	13
1.1 Concepto de vibración y tipos de vibración.....	13
1.2 Movimiento vibratorio armónico de una partícula y su visualización	15
1.3 Superposición de movimientos armónicos.....	42
1.4 Movimiento vibratorio no armónico de una partícula y su visualización	47
1.5 Ejercicios.....	53
Capítulo II. Dinámica del cuerpo rígido en el plano	57
2.1. Concepto del cuerpo rígido	57
2.2. Centro de masa	58
2.3. Momento de inercia	76
2.4. Momento de una fuerza	91
2.5. Introducción a la dinámica del cuerpo rígido en el plano	97
2.6. Ejercicios.....	108
Capítulo III. Modelado de sistemas mecánicos vibratorios de un grado de libertad	117
3.1. Elementos de rigidez y disipación en sistemas vibratorios de un grado de libertad.	117
3.2. Péndulo simple, péndulo físico y sistema de masa resorte armónico.	119
3.3. Análisis de sistemas vibratorios de un grado de libertad sin amortiguamiento utilizando el método de fuerzas.	120
3.4 Análisis de sistemas vibratorios de un grado de libertad sin amortiguamiento utilizando el método de energía.	156
3.5. Análisis de sistemas vibratorios con amortiguamiento viscoso.	164
3.5.1 Movimiento vibratorio críticamente amortiguado	167
3.5.2 Movimiento vibratorio sobreamortiguado	171
3.5.3 Movimiento vibratorio subamortiguado	175
3.6 Ejercicios.....	180
Capítulo IV. Modelado de sistemas mecánicos vibratorios forzados	186
4.1. Análisis de sistemas mecánicos vibratorios armónicos con un grado de libertad interactuando con una fuerza externa armónica.	187
4.1.1 Fenómeno de batido.....	193
4.1.2 Resonancia.....	198

4.2 Análisis de sistemas mecánicos vibratorios amortiguados con un grado de libertad interactuando con una fuerza armónica externa.	206
4.3 Respuesta transitoria y estado estacionario de los sistemas vibratorios.	218
4.4 Aplicaciones	225
4.5. Ejercicios.....	230
Capítulo V. Sistemas vibratorios mecánicos de dos grados de libertad	234
5.1 Ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos vibratorios de dos grados de libertad.	235
5.2 Frecuencias naturales y modos normales de vibración para sistemas de dos grados de libertad.	261
5.3 Análisis modal.	272
5.4 Respuesta natural de los sistemas vibratorios mecánicos de dos grados de libertad	280
5.5 Respuesta forzada utilizando el análisis modal.	286
5.6 Ejercicios.....	293
Capítulo VI. Análisis de Fourier	299
6.1. Fundamentos del análisis de Fourier.	300
6.2 Transformada de Fourier y espectro de frecuencias	306
6.3 Análisis de vibraciones mecánicas mediante Fourier.....	312
6.4 Análisis de armónicos y resonancias	320
6.5 Aplicaciones y práctica del análisis de Fourier en vibraciones mecánicas.....	322
6.6 Ejercicios.....	325
Apéndice A. Propiedades de las Áreas y líneas	328
A.1 Áreas	328
A.2 Líneas.....	331
Apéndice B. Identidades trigonométricas	332
Apéndice C. Transformadas de Fourier.....	333
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	334

Introducción

El estudio de las vibraciones mecánicas es fundamental en ingeniería y física aplicada, ya que permite comprender y predecir el comportamiento dinámico de sistemas mecánicos. Algunas áreas de aplicación incluyen el diseño de estructuras resistentes a terremotos, la optimización de la eficiencia en maquinaria rotativa, el análisis de fatiga en componentes mecánicos y el desarrollo de sistemas de suspensión y amortiguación para vehículos. Para analizar y comprender las vibraciones mecánicas, es importante familiarizarse con conceptos fundamentales como la frecuencia, la amplitud, el período y la respuesta dinámica. Además, se utilizan herramientas matemáticas como la teoría de sistemas dinámicos, el cálculo diferencial e integral, y métodos numéricos para modelar y resolver ecuaciones de movimiento.

El control y la mitigación de las vibraciones mecánicas también son áreas importantes de investigación. Se utilizan técnicas como la sintonización de amortiguadores, el diseño de sistemas de aislamiento vibratorio y el uso de materiales compuestos para reducir la transmisión de vibraciones no deseadas.

El estudio de las vibraciones mecánicas es esencial para comprender y mejorar aspectos como el rendimiento, la seguridad y la durabilidad de una amplia variedad de sistemas mecánicos en ingeniería y ciencia aplicada. La importancia del estudio de las vibraciones mecánicas en la ingeniería radica en su aplicación fundamental para comprender, prevenir y controlar el comportamiento dinámico de sistemas físicos que se encuentran los procesos que se realizan en las diferentes ramas de la ingeniería. Las vibraciones mecánicas están presentes en una amplia variedad de dispositivos, máquinas y estructuras, desde pequeños componentes electrónicos hasta grandes edificaciones y vehículos de transporte. Comprender las características y el impacto de las vibraciones es crucial para garantizar la seguridad, la eficiencia y la durabilidad de estos sistemas en funcionamiento. Además, el análisis de las vibraciones es esencial en campos como el diseño de estructuras, la ingeniería automotriz, la industria

aeroespacial, la manufactura de maquinaria y muchos otros sectores donde se busca minimizar el desgaste, mejorar el rendimiento y evitar fallas catastróficas. El estudio de las vibraciones mecánicas es un componente fundamental de la ingeniería moderna que permite optimizar el diseño y la operación de sistemas mecánicos en una amplia gama de aplicaciones industriales y tecnológicas.

El presente libro está dividido en seis capítulos y fue elaborado con la finalidad de apoyar tanto a profesores y alumnos de ingeniería que imparten y cursan un curso introductorio sobre el tema de vibraciones mecánicas, donde en muchas ocasiones el alumno es la primera vez que tiene la necesidad de estudiar esta área de la ingeniería ya que el dominio del conocimiento sobre vibraciones mecánica es fundamental en cursos de especialidad posteriores su formación de ingeniería. Como son diseño mecánico de elementos de maquinaria, dinámica de sistemas, robótica, control entre otros. Los capítulos en que está dividido el presente libro son:

Capítulo I. Cinemática de la vibración de una partícula.

El estudio de la cinemática de la partícula es fundamental en física y en disciplinas como la ingeniería mecánica, la robótica y otras. La cinemática se centra en describir el movimiento de objetos sin preocuparse por las causas que lo generan. Al comprender la cinemática de una partícula, podemos analizar su trayectoria, velocidad y aceleración en diferentes situaciones. Esto es esencial para diseñar y optimizar sistemas mecánicos, como vehículos, maquinaria industrial y robots, asegurando un funcionamiento eficiente y seguro. Además, en campos como la animación por ordenador, la comprensión de la cinemática es crucial para crear movimientos realistas y convincentes. El estudio de la cinemática de la vibración de la partícula es esencial para comprender y predecir el movimiento de objetos en el espacio, lo que permite el diseño y la optimización de una amplia variedad de sistemas y aplicaciones tecnológicas.

Capítulo II. Dinámica del cuerpo rígido en el plano.

El estudio de la dinámica del cuerpo rígido en el plano es esencial en la física y la ingeniería para comprender el movimiento de objetos sólidos que conservan su forma y dimensiones bajo la acción de fuerzas externas. Un cuerpo rígido es aquel que mantiene sus dimensiones constantes mientras se mueve. Al considerar un cuerpo rígido en el plano, se analizan sus movimientos de rotación alrededor de un eje fijo.

El concepto de centro de masa es crucial, ya que representa el punto en el que se concentra toda la masa del cuerpo. Este punto simplifica los cálculos y permite tratar al cuerpo como una partícula puntual cuando se estudian sus movimientos de traslación.

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de rotación. Cuanto mayor es el momento de inercia, más difícil es cambiar la velocidad angular del cuerpo. Este concepto es fundamental en el análisis de la rotación de cuerpos rígidos en el plano.

El momento de fuerza, también conocido como momento o torque, es la medida de la tendencia de una fuerza para hacer rotar un objeto alrededor de un eje. Es igual al producto del brazo de palanca y la fuerza aplicada. La aplicación de momentos de fuerza a un cuerpo rígido puede causar cambios en su velocidad angular.

Finalmente, la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional establece que el momento de fuerza total aplicado a un cuerpo rígido es igual a la tasa de cambio del momento angular del cuerpo. Esta ley proporciona un marco para entender cómo las fuerzas causan cambios en el movimiento rotacional de un cuerpo rígido en el plano.

El estudio de la dinámica del cuerpo rígido en el plano, considerando conceptos como el cuerpo rígido, el centro de masa, el momento de inercia, el momento de fuerza y la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional, es esencial para comprender y predecir el

comportamiento de objetos sólidos en rotación, lo que tiene importantes aplicaciones en la ingeniería, la física y otras disciplinas relacionadas.

Capítulo III. Modelado de sistemas mecánicos vibratorios de un grado de libertad.

El estudio de sistemas mecánicos vibratorios de un grado de libertad es esencial en ingeniería debido a su aplicación en una amplia gama de dispositivos y estructuras, desde componentes microelectrónicos hasta grandes máquinas industriales. Estos sistemas pueden experimentar diferentes tipos de vibraciones, como vibraciones libres, forzadas o amortiguadas, cada una con características distintas que afectan su comportamiento dinámico.

El análisis de sistemas vibratorios implica el uso de métodos de fuerza y energía para resolver las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del sistema en el tiempo. Estos métodos incluyen la aplicación de la segunda ley de Newton para obtener ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del sistema bajo diferentes condiciones de excitación.

Los métodos de fuerza, como el análisis de fuerzas equilibradas y no equilibradas, son útiles para determinar la respuesta dinámica del sistema a fuerzas externas aplicadas. Por otro lado, los métodos de energía, como el principio de conservación de la energía mecánica, permiten analizar el intercambio de energía entre las diferentes formas presentes en el sistema, como energía cinética y energía potencial.

Al comprender y aplicar estos métodos, los ingenieros pueden diseñar y optimizar sistemas mecánicos para garantizar un funcionamiento eficiente y seguro, minimizando el riesgo de vibraciones no deseadas que puedan causar daños o fallas. Por lo tanto, el estudio de sistemas mecánicos vibratorios de un grado de libertad y los métodos de fuerza y energía para analizar sus ecuaciones de movimiento son fundamentales para el desarrollo exitoso de numerosas aplicaciones en ingeniería, desde la microelectrónica hasta la industria pesada.

Capítulo IV. Modelado de sistemas mecánicos forzados

El estudio de las vibraciones forzadas es fundamental en la ingeniería, ya que permite entender y predecir el comportamiento dinámico de estructuras y sistemas sometidos a fuerzas externas periódicas o continuas. Dos fenómenos clave en este ámbito son el batido y la resonancia.

Cuando un sistema mecánico se somete a una fuerza externa que varía en el tiempo, experimenta lo que se conoce como vibraciones forzadas. Estas vibraciones pueden tener efectos significativos en la integridad y el rendimiento del sistema, por lo que es esencial analizarlas para evitar fallos catastróficos y optimizar el diseño.

El fenómeno de batido se produce cuando dos frecuencias similares, pero no idénticas interactúan, creando una modulación en la amplitud de la vibración resultante. Esto es relevante en sistemas donde se pueden presentar frecuencias cercanas, ya que puede causar variaciones en la vibración que, aunque no sean destructivas, pueden afectar el rendimiento o la estabilidad de un sistema mecánico.

La resonancia ocurre cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural del sistema. En este punto, la amplitud de las vibraciones puede aumentar drásticamente, lo que puede llevar a la falla estructural si no se controla adecuadamente. La resonancia es particularmente crítica en estructuras como puentes, edificios, y componentes de maquinaria, donde un pequeño impulso repetido puede generar grandes oscilaciones.

El estudio de las vibraciones forzadas, y en particular de la resonancia y el batido, es crucial en el diseño y análisis de estructuras y sistemas mecánicos. Los ingenieros deben asegurarse de que las frecuencias operativas de un sistema no coincidan con sus frecuencias naturales para evitar la resonancia, y deben tener en cuenta el fenómeno de batido para predecir y mitigar posibles problemas de vibración.

Comprender estos fenómenos permite a los ingenieros diseñar sistemas más seguros y eficientes, prevenir fallos y mejorar la durabilidad y fiabilidad de las estructuras y maquinarias.

Capítulo V. Sistemas vibratorios dos grados de libertad.

El estudio de vibraciones en sistemas de dos grados de libertad es crucial en ingeniería, especialmente en el diseño y análisis de estructuras y maquinarias más complejas.

En un sistema de dos grados de libertad, existen dos frecuencias naturales que corresponden a las frecuencias en las que el sistema puede vibrar libremente sin la aplicación de fuerzas externas. Conocer estas frecuencias es esencial para evitar situaciones de resonancia, donde la energía de una fuerza externa puede amplificarse en el sistema, causando daños o fallos.

Los modos normales de vibración describen las formas específicas en las que un sistema de dos grados de libertad puede vibrar cuando lo hace a una de sus frecuencias naturales. Cada modo de vibración corresponde a un patrón de movimiento donde las masas del sistema se desplazan en relación específica entre sí. El análisis de estos modos es fundamental para comprender cómo un sistema se comportará bajo condiciones dinámicas y cómo distribuir y controlar las vibraciones.

El análisis modal es una técnica utilizada para descomponer las vibraciones complejas de un sistema en sus modos normales y frecuencias naturales. Este análisis permite a los ingenieros predecir cómo responderá una estructura o maquinaria a diferentes excitaciones. Es una herramienta crucial en el diseño para garantizar que los sistemas sean estables y operen dentro de un rango seguro de frecuencias. El análisis modal se aplica también para estudiar la respuesta de un sistema de dos grados de libertad cuando está sometido a una fuerza externa. Utilizando este análisis, se pueden predecir las amplitudes y fases de las vibraciones en cada

modo normal cuando el sistema es excitado a diferentes frecuencias. Esto es vital para diseñar sistemas que puedan soportar vibraciones forzadas sin sufrir daños.

El estudio de sistemas de dos grados de libertad y la aplicación del análisis modal son esenciales para diseñar y garantizar la integridad estructural y funcionalidad de muchas aplicaciones ingenieriles, desde puentes y edificios hasta vehículos y maquinaria industrial. El conocimiento de frecuencias naturales, modos normales y el uso del análisis modal permite a los ingenieros anticipar problemas, optimizar el diseño y asegurar que los sistemas funcionen de manera segura y eficiente, incluso bajo condiciones dinámicas.

El análisis modal y el estudio de las vibraciones en sistemas de dos grados de libertad son herramientas fundamentales en la ingeniería para garantizar la estabilidad, seguridad y rendimiento óptimo de las estructuras y maquinarias.

Capítulo VI. Análisis de Fourier.

El análisis de Fourier es una herramienta matemática esencial en la ingeniería, especialmente en el estudio de las vibraciones mecánicas. Permite descomponer señales complejas en componentes más simples, facilitando su análisis y comprensión. La teoría de Fourier es un aparato matemático muy robusto y extenso, en este capítulo solo tomamos una introducción de la teoría de Fourier como son las series de Fourier y la transformada de Fourier para sus aplicaciones al análisis de sistemas vibratorios.

Las series de Fourier permiten expresar cualquier función periódica como la suma de funciones sinusoidales (senos y cosenos) de diferentes frecuencias, amplitudes y fases. En el contexto de las vibraciones mecánicas, esta descomposición es crucial porque las vibraciones complejas pueden ser analizadas como la suma de múltiples vibraciones simples. Esto facilita la identificación de frecuencias importantes y la evaluación de la respuesta del sistema bajo distintas condiciones.

La transformada de Fourier extiende el concepto de las series de Fourier a funciones no periódicas, permitiendo analizar señales temporales en el dominio de la frecuencia. Para sistemas de vibración mecánica, la transformada de Fourier es fundamental para convertir una señal de tiempo en su espectro de frecuencias. Esto proporciona una visión clara de las frecuencias presentes en la señal, lo que es crucial para identificar componentes críticos como armónicos y resonancias.

El espectro de frecuencias es el resultado de aplicar la transformada de Fourier a una señal de vibración. Este espectro muestra las diferentes frecuencias que componen la señal y sus respectivas amplitudes. En ingeniería, el espectro de frecuencias es utilizado para detectar frecuencias dominantes, identificar problemas como la resonancia, y evaluar la salud y comportamiento de estructuras y maquinarias.

El análisis de armónicos se refiere a la identificación de frecuencias múltiplos de una frecuencia fundamental en una señal. Los armónicos pueden indicar problemas en sistemas de vibración, como desalineación o fallos en componentes. La resonancia ocurre cuando una de estas frecuencias coincide con una frecuencia natural del sistema, resultando en una amplificación significativa de la vibración. El análisis de Fourier permite detectar y mitigar estos riesgos mediante el ajuste de frecuencias operativas o el diseño de amortiguadores.

El análisis de Fourier es vital para entender y controlar las vibraciones mecánicas en ingeniería. Permite descomponer y analizar señales complejas, identificar problemas de resonancia, y optimizar el diseño de sistemas para evitar fallos catastróficos. Al utilizar las series de Fourier, la transformada de Fourier, y el espectro de frecuencias, los ingenieros pueden predecir y mitigar problemas de vibración, mejorando la seguridad, eficiencia y durabilidad de estructuras y maquinarias.

El análisis de Fourier es una herramienta indispensable en la ingeniería para el estudio de las vibraciones mecánicas, ya que proporciona una forma precisa y detallada de analizar la respuesta de sistemas a diversas excitaciones, permitiendo un diseño más robusto y seguro.

En la realización de el presente trabajo se utilizó el siguiente software: GeoGebra Clásico para la realización de los gráficos, el Microsoft PowerPoint en la elaboración de las figuras y el Editor de Ecuaciones de Word para la edición de las ecuaciones.

Capítulo I. Cinemática de la vibración de una partícula

El objetivo de este capítulo es utilizar los conceptos de vibración, grados de libertad, movimiento armónico simple, para analizar la cinemática del movimiento armónico y no armónico de una partícula con un grado de libertad.

1.1 Concepto de vibración y tipos de vibración

La vibración mecánica se refiere al movimiento oscilatorio de un cuerpo alrededor de un punto de equilibrio. Este movimiento puede ser causado por una fuerza externa o una perturbación, y resulta en la variación periódica de la posición del cuerpo en torno a su posición de reposo. Las vibraciones mecánicas son comunes en una amplia gama de sistemas, desde maquinaria industrial hasta estructuras de edificios, y son fundamentales en el estudio de la dinámica de sistemas físicos.

Las vibraciones mecánicas se pueden clasificar de varias maneras según diferentes criterios. Aquí te proporciono una clasificación común basada en distintos aspectos:

1. Según la Trayectoria:
 - Vibraciones Lineales: Los movimientos ocurren a lo largo de una línea recta.
 - Vibraciones Angulares o Rotacionales: Los movimientos ocurren alrededor de un punto o eje.
2. Según el Tipo de Movimiento:
 - Vibraciones Libres: Ocurren cuando un sistema oscila sin ninguna influencia externa después de haber sido perturbado inicialmente. No hay fuerzas externas que mantengan la vibración.
 - Vibraciones Forzadas: Se producen cuando un sistema oscila debido a una fuerza externa aplicada de manera continua o periódica.

3. Según la Dirección de la Fuerza Excitadora:
 - Vibraciones Axiales: La fuerza aplicada es paralela al eje de vibración.
 - Vibraciones Radiales: La fuerza aplicada es perpendicular al eje de vibración.
 - Vibraciones Torsionales: La fuerza aplicada causa un giro alrededor de un eje.
4. Según el Número de Grados de Libertad:
 - Vibraciones Unidimensionales: Se producen en una sola dirección.
 - Vibraciones Bidimensionales: Se producen en dos direcciones perpendiculares entre sí.
 - Vibraciones Tridimensionales: Se producen en tres direcciones perpendiculares entre sí.
5. Según la Naturaleza del Sistema:
 - Vibraciones Simples: Se refieren a sistemas con un solo grado de libertad, como un oscilador armónico simple.
 - Vibraciones Múltiples: Se refieren a sistemas con más de un grado de libertad, como sistemas de múltiples resortes y masas.
6. Según el Régimen de Vibración:
 - Régimen Estacionario: La amplitud de la vibración es constante en el tiempo.
 - Régimen Transitorio: La amplitud cambia durante el inicio o cese de la vibración.
7. Según la Fuente de Excitación:
 - Forzadas Sin Amortiguamiento: Sin pérdida de energía debido a fricción o resistencia.

- Forzadas con Amortiguamiento: Con pérdida de energía debido a fricción u otras resistencias.

Estas son algunas de las formas comunes de clasificar las vibraciones mecánicas. Cada clasificación proporciona una perspectiva diferente sobre el comportamiento vibratorio de un sistema y es útil en diferentes contextos de ingeniería y física.

Los grados de libertad es el mínimo de coordenadas independientes requerido para determinar por completo el movimiento de todas las partes de un sistema en cualquier instante de tiempo.

Aquellos sistemas en vibración libre que solo requieren de una coordenada generalizada se conocen como sistemas de un grado de libertad en vibración libre.

También podemos definir los grados de libertad como el número de ecuaciones de movimiento que se requieren para el análisis del movimiento vibratorio de la partícula.

1.2 Movimiento vibratorio armónico de una partícula y su visualización

Movimiento Armónico simple. Definición: entenderemos como vibración armónica al movimiento de una partícula o sistema cuya función del cambio de posición respecto al tiempo está dado por la función (1.1):

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0) \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

Donde.

$$A - \text{amplitud } [A] = m$$

$$\omega - \text{frecuencia angular } [\omega] = \frac{rad}{s}$$

$$\alpha_0 - \text{ángulo de fase } [\alpha_0] = rad$$

$\omega t + \alpha_0$ – argumento de la función medido en radianes

Como el movimiento es periódico entonces:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ y } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad T - \text{periodo}$$

Donde T es el periodo y es el tiempo que tarda en repetirse el movimiento exactamente igual.

También está el concepto de frecuencia lineal, esta se define como en número de ciclos por unidad de tiempo, la expresión matemática y las unidades en el sistema internacional son:

$$f = \frac{n}{t}, \quad [f] = \frac{1}{s} = 1 \text{ H}$$

En el caso particular. Si $n = 1$ y t es el tiempo en que alcanza una revolución entonces, $t = T$, donde T es el periodo del movimiento.

$$f = \frac{1}{T}$$

La frecuencia lineal f es inversamente proporcional al periodo.

Las características de un movimiento armónico simple (M. A. S.) es que es periódico y que su amplitud es constante.

Los parámetros que definen un M. A. S. son:

- Periodo (T). Es el tiempo que se tarda la partícula en dar un ciclo
- Frecuencia lineal (f). Es el numero de ciclos por unidad de tiempo.
- Amplitud (A). Es la máxima distancia recorrida desde la posición de equilibrio por la partícula.

- Ángulo de fase (α_0). Es la fase inicial, que determina la posición inicial de la partícula en su ciclo de vibración
- Frecuencia angular (ω). Es la que determina la rapidez con que la partícula se mueve de un extremo a otro del ciclo de la vibración.

Cinemática de la vibración:

La cinemática de la vibración es el estudio del movimiento sin importar las causas que produce dicho movimiento.

Si la posición de la partícula está dada por:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0) \dots \dots (1.2)$$

Entonces la velocidad de la partícula está dada por:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha_0) \dots \dots (1.3)$$

Y la aceleración está dada por:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha_0) \dots \dots (1.4)$$

De esta forma se obtienen la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

Podemos obtener la aceleración y velocidad en función de la posición.

Con ayuda de las ecuaciones (1.2) y (1.3) las transformamos de la forma siguiente:

$$\frac{x(t)}{A} = \sin(\omega t + \alpha_0) \dots \dots (1.5)$$

$$\frac{v(t)}{A\omega} = \cos(\omega t + \alpha_0) \dots \dots (1.6)$$

Elevamos al cuadrado y sumamos miembro a miembro las ecuaciones (1.5) y (1.6)

obtenemos:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = \sin^2(\omega t + \alpha_0) + \cos^2(\omega t + \alpha_0)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1 \dots \dots (1.7)$$

Despejando v tenemos:

$$\frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1 - \frac{x^2}{A^2}$$

$$v^2 = A^2 \omega^2 \left(\frac{A^2 - x^2}{A^2} \right) = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \dots \dots \dots (1.8)$$

La gráfica de la velocidad en función del desplazamiento $v = v(x)$ se muestra en la figura 1.1:

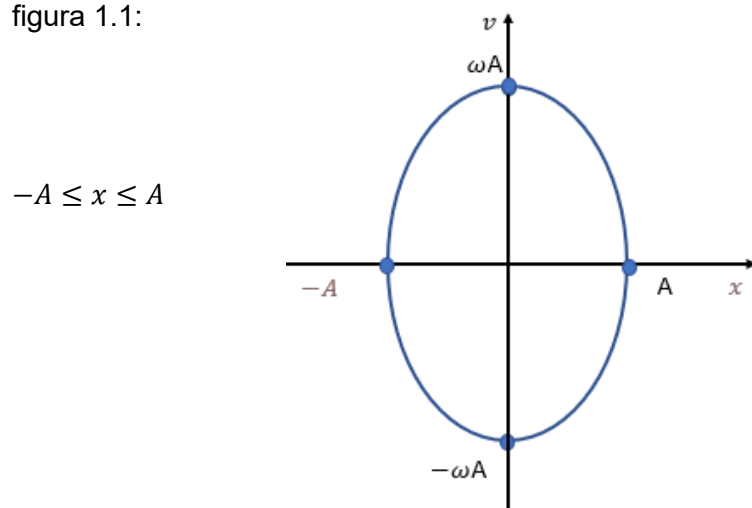


Figura 1.1. Gráfica de la velocidad en función de la posición

Para aceleración en función de la posición tomamos la ecuación 1.4 y la transcribimos en la siguiente forma:

$$\alpha(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$\alpha(t) = -\omega^2[A \sin(\omega t + \alpha_0)]$$

Como $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0)$ entonces:

$$\alpha(x) = -\omega^2 x \dots (1.9)$$

Para la gráfica de la función $\alpha = \alpha(x)$ tenemos las siguientes consideraciones:

$$-A \leq x \leq A \quad \text{y} \quad -\omega^2 A \leq \alpha \leq \omega^2 A$$

Con las consideraciones anteriores procedemos a obtener la gráfica, como se muestra en la figura 1.2.

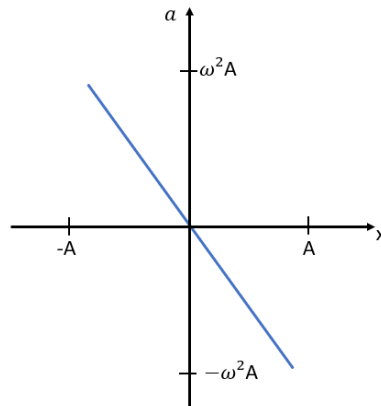


Figura1. 2. Grafica de la aceleración en función de la posición

La segunda forma de realizar el análisis cinemático de la vibración es la siguiente:

Partimos de la ecuación (1.9)

$$\alpha(x) = -\omega^2 x$$

Como sabemos que $\alpha = \frac{d^2x}{dt^2}$ entonces:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{y} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

A la ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ se le conoce como la ecuación de movimiento del sistema con las condiciones para $t = 0, x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \dots \dots (1.10)$$

Resolviendo la ecuación (1.10) por el método de la ecuación característica tenemos:

$$m^2 + \omega^2 = 0$$

$$m^2 = -\omega^2$$

$$m = \omega i.$$

Por lo tanto, la solución es de la forma $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. Donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de x_0 y v_0

Para obtener C_1 y C_2 procedemos de la siguiente forma:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \dots \dots (1.11)$$

$$v(t) = x'(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t \dots \dots (1.12)$$

Evaluamos (1.11) y (1.12) en $t = 0$ donde sabemos que $x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$

$$x(0) = C_1 \quad y \quad v(0) = C_2 \omega$$

$$C_1 = x(0) = x_0 \quad y \quad C_2 = \frac{v(0)}{\omega} = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \dots \dots (1.13)$$

Se obtiene la función posición en función del tiempo como la suma de funciones senoidales.

Podemos llevar la expresión (1.11) a su forma reducida realizando los siguientes cambios de variable.

$$C_1 = A \operatorname{sen} \alpha_0 \dots \dots (1.14)$$

$$C_2 = A \cos \alpha_0 \dots \dots (1.15)$$

Sustituimos las expresiones (1.14) y (1.15) en la ecuación (1.11) y tenemos:

$$x(t) = A \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \omega t + A \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \omega t = A(\operatorname{sen} \alpha_0 \cos \omega t + \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \omega t)$$

$$x(t) = A \operatorname{sen} (\omega t + \alpha_0) \dots \dots (1.16)$$

Trabajando con las expresiones (1.14) y (1.15) obtenemos las siguientes expresiones:

$$C_1 = A \operatorname{sen} \alpha_0 \quad C_2 = A \cos \alpha_0$$

$$C_1^2 + C_2^2 = A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 + A^2 \cos^2 \alpha_0 = A^2(\operatorname{sen}^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0)$$

$$A^2 = C_1^2 + C_2^2$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$\text{Como } C_1^2 = x_0^2 \quad \text{y} \quad C_2^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \dots \dots \dots (1.17)$$

Ahora si consideramos $C_1 = A \operatorname{sen} \alpha_0$ y $C_2 = A \cos \alpha_0$ entonces:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{A \operatorname{sen} \alpha_0}{A \cos \alpha_0} = \tan \alpha_0$$

$$\tan(\alpha_0) = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0 \omega}{v_0}$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega}{v_0} \right)$$

De aquí concluimos que como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2}$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega}{v_0} \right) \dots\dots (1.18)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi f$$

El movimiento vibratorio armónico depende de la frecuencia angular con que este se esté realizando y las condiciones de frontera, es decir, con los que se inicia el movimiento (x_0 y v_0) la posición y velocidad inicial.

Para el análisis del movimiento vibratorio veremos casos que son los siguientes:

a) Dado algunas características o parámetros que definen la vibración

(A, T, ω, f y α_0) determinar todos los parámetros y se procede a escribir la función de posición $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0)$ con ayuda de la cual se realiza el análisis de movimiento.

b) Cuando se conoce la función de posición en su forma reducida de la forma

$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0)$ ó $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha_0)$ con ayuda de las cuales se procede a realizar el análisis del movimiento.

c) Cuando se conoce la función de posición como una combinación lineal senoidal de la forma $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ con ayuda de la cual se realiza el análisis del movimiento.

- d) Cuando se conoce la ecuación de movimiento del sistema en la forma $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ se procede a resolverla conociendo las condiciones iniciales para el tiempo igual a cero $x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$ que son las condiciones iniciales y entonces se obtiene $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ con ayuda de la cual se realiza el análisis del movimiento.
- e) Cuando se conoce la función de posición como un producto de funciones armónicas $x(t) = \cos \omega t \sin \omega t$ o cualquier otra forma que por medio de identidades trigonométricas se pueda llevar a la forma de la función $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0)$.
- f) Cuando se conoce la función $x(t) = C_1 \cos(\omega t + \beta_0) + C_2 \sin(\omega t + \beta_0)$, se lleva a la forma reducida $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0)$ y se procede a realizar el análisis del movimiento.

A continuación, mediante la gráfica de la figura 1.3, de la función posición de la partícula $x(t)$, estudiaremos el comportamiento del movimiento de la partícula mediante el análisis de la de la función posición $x(t) = \sin(t + \alpha_0)$. Como se muestra a continuación.

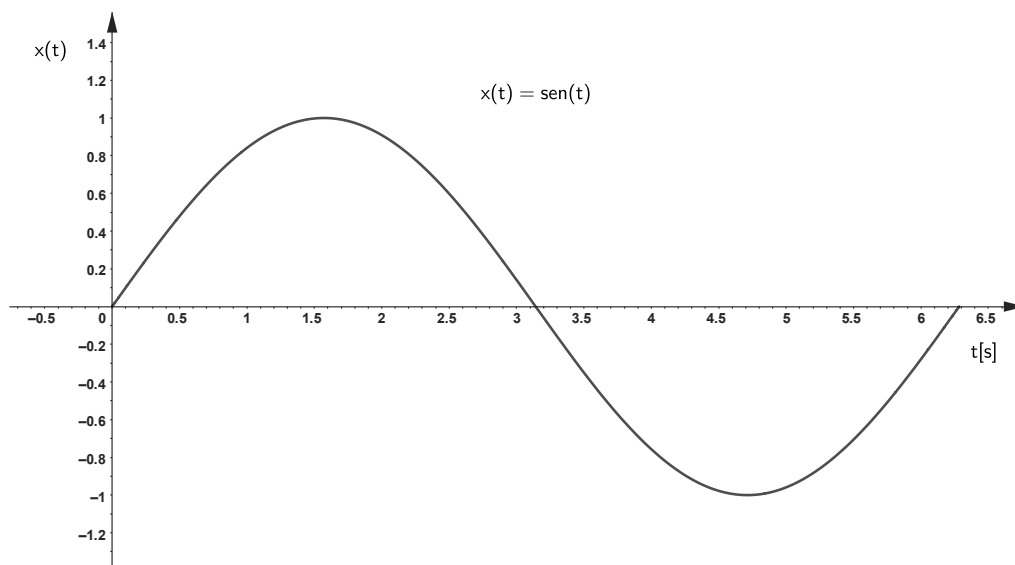


Figura 1.3. Gráfica de posición $x(t)$ de la partícula

- a) El periodo es el tiempo que la partícula recorre un ciclo, es decir es el tiempo en que la partícula regresa a la posición donde empezó recorriendo una trayectoria cerrada.
- b) Si ángulo de fase $\alpha_0 = 0$ la partícula comienza a moverse desde la posición de equilibrio, si $\alpha_0 < 0$ la partícula comienza el movimiento estando a la izquierda de la posición de equilibrio y su posición inicial es negativa, si $\alpha_0 > 0$ la partícula comienza el movimiento estando a la derecha de la posición de equilibrio y su posición inicial es positiva.
- c) En los intervalos de tiempo donde la función $x(t)$ crece, la partícula se desplaza hacia la derecha y su velocidad es positiva, en los intervalos de tiempo donde la función $x(t)$ decrece, la partícula se desplaza hacia la izquierda y su velocidad es negativa.
- d) En los valores de tiempo donde la gráfica de la función $x(t)$ intercepta al eje horizontal la partícula pasa por la posición de equilibrio
- e) El punto máximo de la gráfica $x(t)$ indica el tiempo en que la partícula alcanza el desplazamiento máximo (amplitud) medido desde la posición de equilibrio hacia la derecha, el punto mínimo de la gráfica $x(t)$ indica el tiempo en que la partícula alcanza el desplazamiento máximo (amplitud) medido desde la posición de equilibrio hacia la izquierda.
- f) En los intervalos de tiempo donde la gráfica de la función $x(t)$ es positiva la posición de la partícula es positiva y la partícula se localiza a la derecha de la posición de equilibrio y en los intervalos de tiempo donde la gráfica de la función $x(t)$ es negativa la posición de la partícula es negativa y la partícula se encuentra a la izquierda de la posición de equilibrio.

- g) La distancia se mide sobre el eje vertical y es el valor absoluto del valor de la posición $|x(t)|$.

A continuación, se muestran algunos ejemplos particulares de los casos anteriores:

Ejemplo 1. Una partícula se mueve describiendo un movimiento cuya posición de la partida está dada por $x(t) = 2\text{sen}\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) m$

Determine:

- a) Las características del movimiento
- b) Trace las gráficas de $x(t)$, $v(t)$, $v = v(x)$ y $a = a(x)$
- c) El tiempo en que pasa por primera vez por la posición de equilibrio viajando hacia la derecha
- d) La distancia recorrida en 2 segundos

Solución:

Como sabemos que la posición de la partícula esta dado por la función

a) $x(t) = 2\text{sen}\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) m$ entonces las características del movimiento son:

$$A = 2m \quad \omega = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad f = \frac{1}{T} \quad 3t = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{3} = 2.09 \text{ s} \quad f = \frac{1}{\frac{2\pi}{3}} \text{ Hz} = \frac{3}{2\pi} \text{ Hz} = 0.47 \text{ Hz}$$

- b) Para trazar la gráfica de $x(t)$, obtenemos los valores de t en donde se dividen los cuadrantes y trazamos $x(t)$ para un periodo positivo comenzando en $t = 0$ que es el tiempo cuando el observador comienza a realizar su observación del fenómeno que va a analizar.

Para $t = 0$ $x(0) = 2\text{sen}\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ m} = 1\text{m}$

$$3t + \frac{\pi}{6} = 0 \quad ; \quad t_1 = \frac{-\pi}{3} = -\frac{\pi}{18} \text{ s} = -0.17\text{s}$$

$$3t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad t_2 = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}{3} = \frac{2\pi}{18} \text{ s} = 0.34 \text{ s}$$

$$3t + \frac{\pi}{6} = \pi \quad ; \quad t_3 = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{3} = \frac{5\pi}{18} \text{ s} = 0.87 \text{ s}$$

$$3t + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi \quad ; \quad t_4 = \frac{\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6}}{3} = \frac{8\pi}{18} \text{ s} = 1.39 \text{ s}$$

$$3t + \frac{\pi}{6} = 2\pi \quad ; \quad t_5 = \frac{2\pi - \frac{\pi}{6}}{3} = \frac{11\pi}{18} \text{ s} = 1.92 \text{ s}$$

Como $t = \frac{11\pi}{18} = 1.92 \text{ s}$, entonces falta para completar un periodo $t = 2.09 \text{ s}$, entonces seguimos igualando hasta alcanzar o rebasar el valor del periodo.

$$3t + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{2}\pi \quad ; \quad t_6 = \frac{\frac{5}{2}\pi - \frac{\pi}{6}}{3} = \frac{14\pi}{18} \text{ s} = 2.44 \text{ s}$$

Como $t = \frac{14\pi}{18} = 2.44 \text{ s}$, entonces procedemos a trazar la gráfica de $x(t)$, como se muestra en la figura 1.4.

A(0,1)

B(2.09,1)

C(0.87,0)

D(1.92,0)

E(2.048)

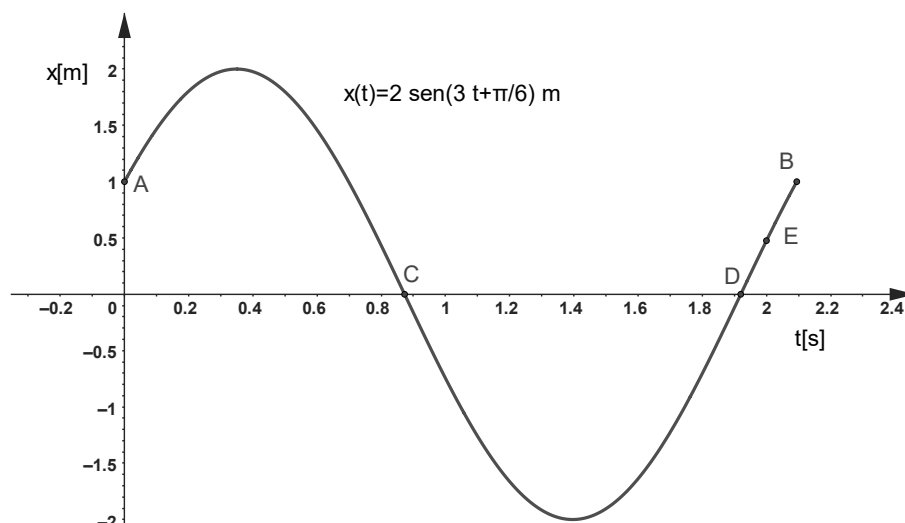


Figura 1.4. Gráfica de posición vs tiempo

Calculamos la posición para $t=0$ y tenemos lo siguiente:

$$x(t) = 2\text{sen}\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ m} \qquad x(0) = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1\text{m}$$

Ahora, procedemos a obtener la gráfica de la velocidad en función del tiempo:

Para trazar la gráfica de $v(t)$ tenemos

$$x(t) = 2\text{sen}\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ m}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 6 \cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v(0) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para $t = 0$ $v(0) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ la gráfica de $v(t)$ se muestra en la figura 1.5.

$A(0,5.2)$

$B(2.09,5.2)$

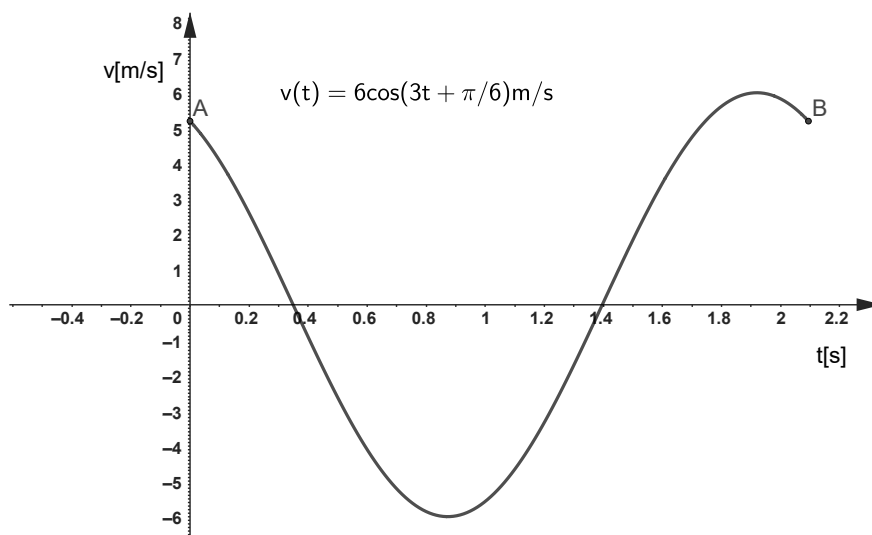


Figura 1.5. Gráfico de la velocidad vs tiempo

Para los gráficos de $v = v(x)$ y $a = a(x)$ tenemos:

$$a = -\omega^2 x \quad \text{donde} \quad -2 \leq x \leq 2 \quad \text{y} \quad -18 \leq a \leq 18$$

$$a = -9x \quad \text{para} \quad x = -2 \quad a = -9(-2) = 18 \frac{m}{s^2}$$

$$x = 2 \quad a = -9(2) = -18 \frac{m}{s^2}$$

En la figura 1.6 se muestra la gráfica de $a = a(x)$

$A(-2, 18)$

$B(2, -18)$

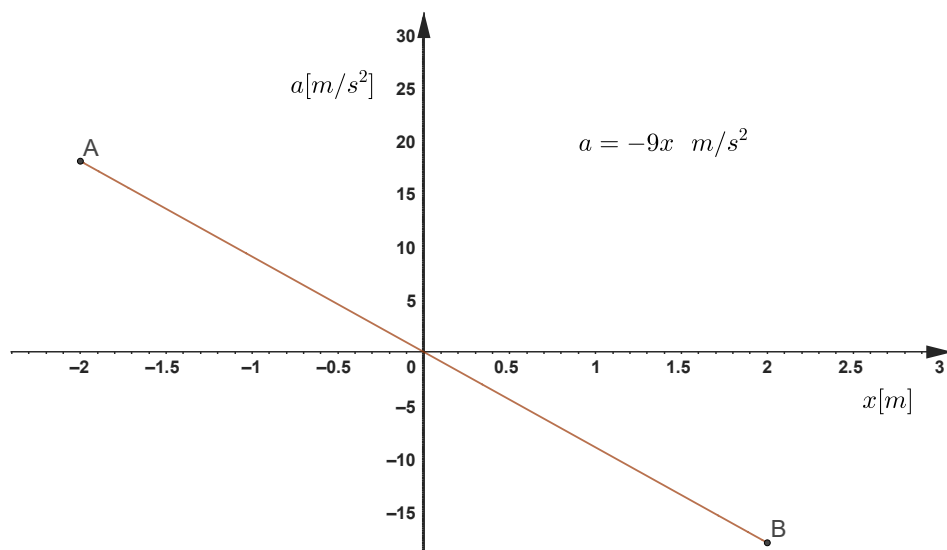


Figura 1.6. Gráfica de aceleración vs posición

Para la gráfica de $v = v(x)$ tenemos:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{(2)^2} + \frac{v^2}{(6)^2} = 1$$

Donde: $-2 \leq x \leq 2$ y $-6 \leq v \leq 6$

Considerando las condiciones para la posición y la velocidad anteriores en la figura 1.7, se muestra la gráfica de $v = v(x)$.

$$A(0,6)$$

$$B(0,-6)$$

$$C(-2,0)$$

$$D(2,0)$$

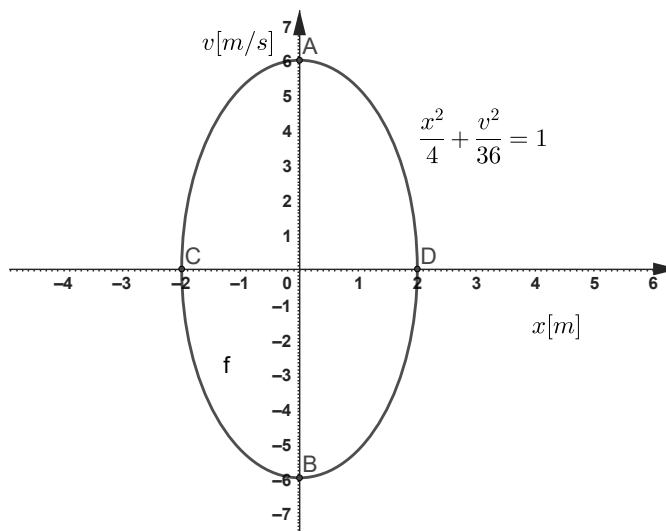


Figura 1.7. Gráfica de velocidad vs posición

c) Según la gráfica de la figura 1.4, el tiempo en que pasa por la posición de equilibrio

$$\text{viajando a la derecha por primera vez es } t_0 = \frac{11\pi}{8} s = 1.91s$$

d) Con ayuda de la gráfica, se puede obtener la distancia total recorrida a los dos segundos de la forma siguiente:

$$x(2) = 2 \operatorname{sen} \left(6 + \frac{\pi}{6} \right) = 0.48m$$

$$d_T = d_1 + d_2 + d_3 = (A - x(0)) + 3(A) + x(2) = 1m + 6 m + 0.48 m = 7.48m$$

Ejemplo 2. Una partícula describe un M.A.S. cuya función de posición está dada por

$$x(t) = 4 \cos 3t - 3 \operatorname{sen} 3t \text{ cm.}$$

a) Determinar las características del movimiento.

b) La distancia recorrida en 1s y el número de revoluciones en ese tiempo

c) Los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva y creciente

d) El tiempo donde alcanza una posición $x = -1$ cm, la velocidad y aceleración que llevaba en esa posición.

Solución

Llevamos $x(t) = 4 \cos 3t - 3 \sin 3t$ a la forma $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0)$, donde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5 \text{ cm}$$

$$\alpha'_0 = \tan^{-1}\left(\frac{4}{-3}\right) = -0.927 \text{ rad}$$

Entonces:

$$x(t) = 5 \sin(3t - 0.927) \text{ cm}$$

Comprobamos para $t = 0$

$$x(0) = 4 \cos 0 - 3 \sin 0 = 4 \text{ cm}$$

$$x(0) = 5 \sin(-0.927) \text{ cm} = -4 \text{ cm}$$

Como son diferentes $x(0) = 4$ y $x(0) = -4$ entonces

$$\alpha_0 = \pi - 0.927 = 2.214 \text{ rad}$$

$$x(t) = 5 \sin(3t + 2.214) \text{ cm}$$

a) Considerando la función $x(t)$ las características del movimiento son.

$$A = 5 \text{ cm}$$

$$\omega = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \frac{2}{3}\pi = 2.09 \text{ s}$$

$$\alpha_0 = 2.214 \text{ rad}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi}{3} \text{ s}} = \frac{3}{2\pi} \text{ Hz} = 0.47 \text{ Hz}$$

Trazamos la gráfica de $x(t)$, Igualamos el argumento de la función de posición

$(3t + 2.214)$ a los siguientes valores $0, \frac{\pi}{2}$ y π tenemos:

$$3t + 2.214 = 0 \quad t_1 = -\frac{2.214}{3} = -0.74 \text{ s}$$

$$3t + 2.214 = \frac{\pi}{2} \quad 3t = \frac{\pi}{2} - 2.214; \quad t_2 = -\frac{0.643}{3} = -0.214 \text{ s}$$

$$3t + 2.214 = \pi \quad 3t = \pi - 2.214; \quad t_3 = \frac{0.927}{3} = 0.309 \text{ s}$$

Como $\frac{T}{4} = 0.524$ es el valor de tiempo correspondiente a cada cuadrante; entonces:

$$t_4 = t_3 + 0.524 = 0.309 + 0.524 = 0.833 \text{ s}$$

$$t_5 = t_4 + 0.524 = 0.833 + 0.524 = 1.357 \text{ s}$$

$$t_6 = t_5 + 0.524 = 1.357 + 0.524 = 1.881 \text{ s}$$

$$t_7 = t_6 + 0.524 = 1.881 + 0.524 = 2.405 \text{ s}$$

Como $T = 2.094 \text{ s}$ y $t_7 > T$ es suficiente la tabulación y valuando la función en $t = 0$, tenemos: $x(0) = 5 \sin(2.214) = 4 \text{ cm}$, considerando los valores anteriores procedemos a trazar la gráfica de $x(t)$ la cual se muestra en la figura 1.8:

$$A(0,4)$$

$$B(0.309,0)$$

$$C(.833,-5)$$

$$D(1.357,0)$$

$$E(1.881,5)$$

$$F(2.094,4)$$

$$G(1, -4.383)$$

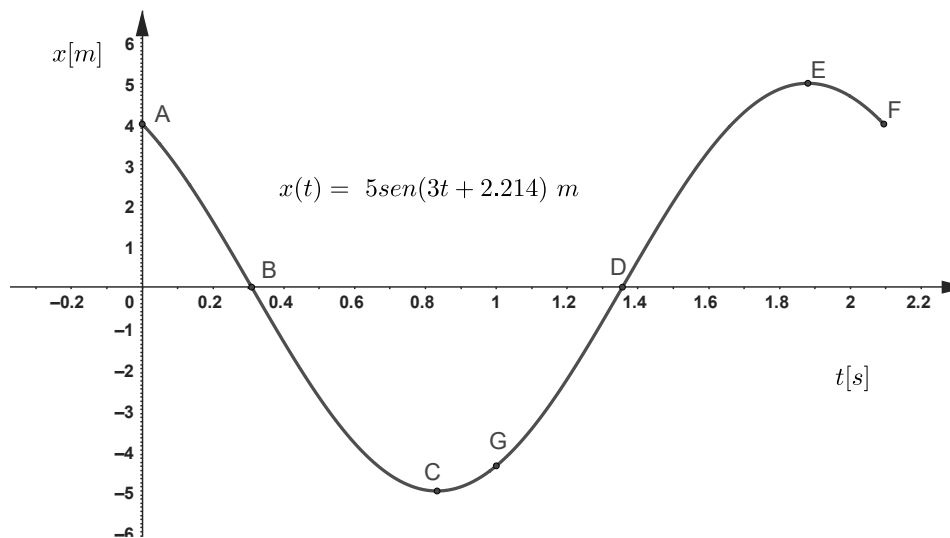


Figura 1.8. Gráfica de la posición vs tiempo

b) Calculamos la distancia recorrida y el número de revoluciones.

De acuerdo con la gráfica de la figura 1.8 tenemos.

$$x(1) = 5 \text{ sen}(3t + 2.22) = -4.41 \text{ cm}$$

$$d_T = d_1 + d_2 + d_3 = x(0) + A + (A - |x(1)|) = [3.98 + 5 + (5 - 4.41)] \text{ cm} = 9.57 \text{ cm}$$

Para el cálculo del número de revoluciones

$$f = \frac{n}{t} \quad n = f * t = (.47 \text{ Hz})(1\text{s}) = 0.47 \text{ rev}$$

c) La gráfica de la velocidad $v(t) = 15 \cos(3t + 2.22) \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ se muestra en la figura 1.9.

$$v(0) = 15 \cos(2.214) = -9 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$A(0, -9)$$

$$B(0.31, -15)$$

$$C(0.83, 0)$$

$$D(1.36, 15)$$

$$E(1.88, 0)$$

$$F(2.09, -9)$$

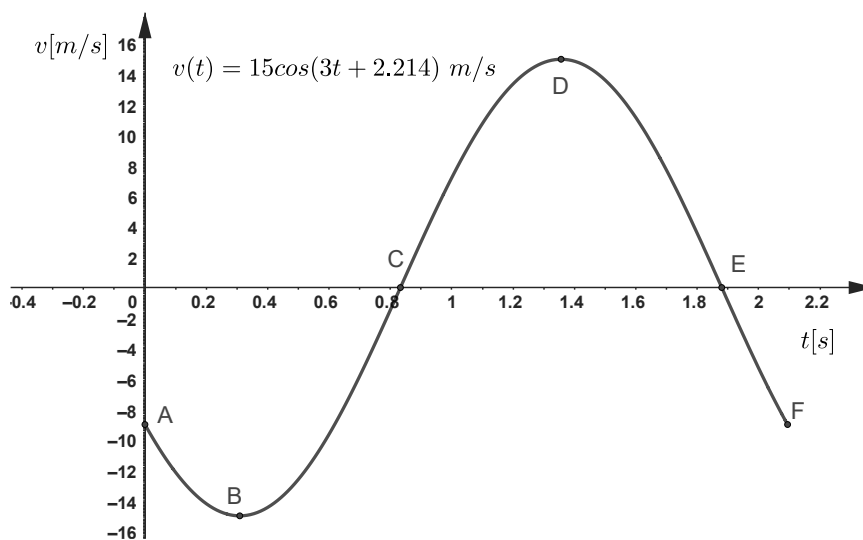


Figura 1.9. Gráfica de velocidad vs tiempo

$v > 0$ y v es creciente en $t \in (0.83, 1.36)s$

d) Considerando la ecuación $a = -\omega^2 x$, tenemos para nuestro caso particular:

$$a = -9x \quad a = -9(-1) = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Para el cálculo de la velocidad tenemos:

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \pm 3 \sqrt{(5)^2 - (-1)^2}$$

$$= \pm 3 \sqrt{25 - 1} = \pm 3 \sqrt{24} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Considerando la gráfica de $x(t)$ que se muestra en la figura 1.10.

$$A(0,4)$$

$$B(0.309,0)$$

$$C(.833,-5)$$

$$D(1.357,0)$$

$$E(1.881,5)$$

$$F(2.094,4)$$

$$G(1,-4.383)$$

$$H(-.805,-1)$$

$$I(-.74,0)$$

$$J(0.37,-1)$$

$$K(1.29,-1)$$

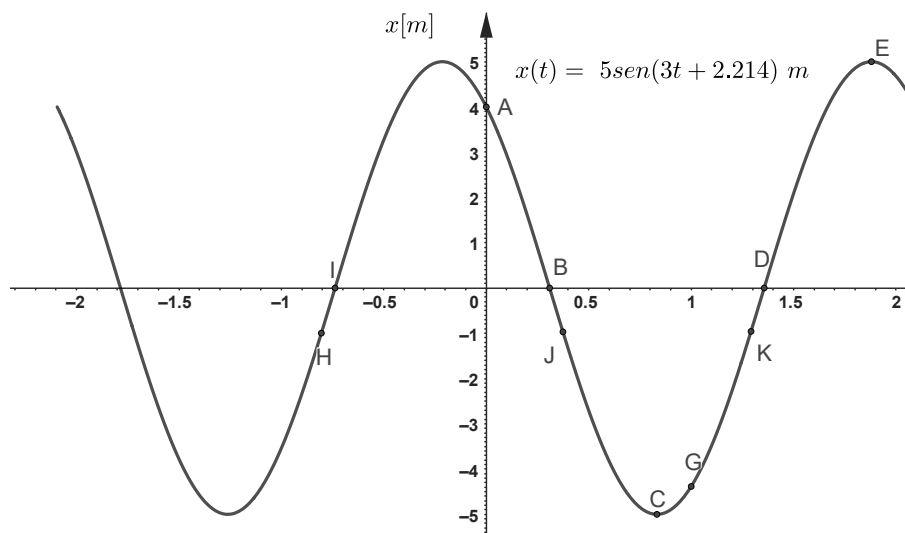


Figura 1.10. Gráfico de posición vs tiempo

Calculamos el tiempo donde la partícula alcanza una posición de $x = -1 \text{ cm}$.

$$x(t) = 5 \text{sen}(3t + 2.214) \text{ cm}$$

$$5 \text{sen}(3t + 2.214) = -1$$

$$3t + 2.214 = \text{sen}^{-1}(-0.2) = -0.201$$

$$3t = -0.201 - 2.214 = -2.415$$

$$t = -\frac{2.415}{3} = -0.805 \text{ s}$$

Como $t = -0.805 \text{ s}$ es negativo entonces considerando las coordenadas de los puntos H e I de la gráfica de $x(t)$ para obtener el intervalo de tiempo Δt y con ayuda del cual obtendremos los tiempos positivos que se requiere, considerando la simetría de la gráfica de la figura 1.10.

$$\Delta t = |-0.805| - |0.74| = 0.805 - 0.74 = 0.065 \text{ s}$$

Entonces de la gráfica de la figura 1.9 tenemos:

$$t_1 = 0.309 + 0.065 = 0.374 \text{ s}$$

$$t_2 = 1.357 - 0.065 = 1.292 \text{ s}$$

Nota: A continuación, consideraremos los criterios de los coeficientes de las funciones de posición según su signo para la identificación del valor del ángulo α_0 según el cuadrante donde se encuentre, de la forma siguiente:

$$\text{Si } x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Casos:

a) Primer cuadrante $A > 0$ y $B > 0$

$$x(t) = 2 \cos 3t + 3 \sin 3t$$

El ángulo α_0 es el que sale del calculo

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{c_1}{c_2} \right); \quad \alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) = 0.58 \text{ rad}$$

b) Segundo cuadrante $A > 0$ y $B < 0$

$$x(t) = 2 \cos 3t - 3 \sin 3t$$

Entonces $\alpha'_0 = \tan^{-1} \left(\frac{c_1}{c_2} \right); \quad \alpha'_0 = \tan^{-1} \left(\frac{2}{-3} \right) = -0.58 \text{ rad para obtener}$

$$\alpha_0 = \pi - \alpha'_0$$

$$\alpha_0 = (\pi - 0.58) \text{ rad} = 2.56 \text{ rad}$$

c) Tercer cuadrante $A < 0$ y $B < 0$

$$x(t) = -2 \cos 3t - 3 \sin 3t$$

$$\alpha'_0 = \tan^{-1} \left(\frac{c_1}{c_2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-2}{-3} \right) = 0.58 \text{ rad}$$

$$\alpha_0 = \pi + \alpha'_0 = (3.1416 + 0.58) \text{ rad} = 3.72 \text{ rad}$$

d) Cuarto cuadrante $A < 0$ y $B > 0$

$$x(t) = -2 \cos 3t + 3 \sin 3t$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{-2}{3} \right) = -0.58 \text{ rad}$$

Y el valor de α_0 es el que da del cálculo.

Ejemplo 3. Una partícula se mueve tal que su aceleración está dada por la ecuación

$a = -4x \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$ y en un tiempo de un segundo adquiere una posición $x(1) = 2 \text{ ft}$ y lleva una

velocidad $v(1) = -1 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$. Obtener $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ en su forma reducida.

Solución.

Como su aceleración esta dado por $a = -4x \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$ se obtiene la ecuación de movimiento de la partícula de la forma siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de la ecuación característica, sabiendo que $x(1) = 2$ y $v(1) = -1$ tenemos.

El polinomio característico asociado a la ecuación de movimiento es de la forma.

$$m^2 + 4 = 0$$

Las raíces del polinomio característico son $m = 2i$ y $m = -2i$.

Por lo tanto $x(t)$ y $v(t)$ son de las formas siguientes:

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \quad y \quad v(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t$$

Para obtener las constantes C_1 y C_2 utilizamos las condiciones iniciales de posición y de velocidad $x(1) = 2$ y $v(1) = -1$.

$$\cos 2 C_1 + \sin 2 C_2 = 2$$

$$-2\sin 2 C_1 + 2 \cos 2 C_2 = -1$$

$$-0.4161 C_1 + 0.9092 C_2 = 2$$

$$1.8185 C_1 - 0.8322 C_2 = -1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los valores siguientes de las constantes, $C_1 = 0.5776$ y $C_2 = 2.4641$

$$\text{Por lo tanto } x(t) = 0.5776 \cos 2t + 2.4641 \sin 2t \quad ft$$

Para obtener la forma reducida calculamos primero el valor de la amplitud A y después el valor del ángulo de fase α_0 :

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(0.5776)^2 + (2.4641)^2} = 2.5308 \text{ ft}$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1}\left(\frac{c_1}{C_2}\right); \quad \alpha_0 = \tan^{-1}\left(\frac{0.5776}{2.4641}\right) = 0.2302 \text{ rad}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$x(t) = 2.5308 \sin(2t + 0.2302) \text{ ft}$$

$$v(t) = 5.0616 \cos(2t + 0.2302) \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

$$a(t) = -10.1232 \sin(2t + 0.2302) \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 4. Una partícula se mueve describiendo un M.A.S. cuya función posición este dado por $x(t) = 5 \sin(3t) \cos(3t)$ m determine:

- a) Las características del movimiento
- b) Las gráficas de $x(t)$ y $v = v(x)$
- c) El tiempo que alcanza la tercera parte de su velocidad máxima
- d) La distancia recorrida que realiza después de viajar 1 segundo una vez que paso por segunda vez por la posición de equilibrio

Solución:

Como $x(t) = 5 \sin(3t) \cos(3t)$ m la llevamos a la forma $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0)$ utilizando identidades trigonométricas del apéndice B, sabemos $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$

Por lo tanto, transformamos la función de posición $x(t)$ en la forma siguiente:

$$x(t) = 5 \sin 3t \cos 3t \quad , \quad \frac{x}{5} = \sin 3t \cos 3t \quad , \quad \frac{2x}{5} = 2 \sin(3t) \cos 3t \quad \text{y} \quad x(t) = \frac{5}{2} \sin 6t \text{ m}$$

Como $x(t) = \frac{5}{2} \sin 6t$ m, entonces $v(t) = 15 \cos 6t \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Para obtener las gráficas de $x(t)$ y $v = v(x)$ y considerando que el movimiento comienza desde la posición de equilibrio procedemos a igualar el argumento de la función al periodo de la función original 2π de la forma siguiente.

$$6t = 2\pi$$

$$t = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ s}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3} \text{ s}} = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad A = \frac{5}{2} \text{ m} \quad \alpha_0 = 0 \text{ rad} \quad T = \frac{\pi}{3} \text{ s} = 1.05 \text{ s}$$

$$f = \frac{3}{\pi} \text{ Hz} = 0.95 \text{ Hz}$$

- a) Por lo tanto, las características del movimiento de la partícula son.

$$A = \frac{5}{2} \text{ m} \quad T = \frac{\pi}{3} \text{ s} = 1.04 \text{ s} \quad \omega = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \alpha_0 = 0 \text{ rad} \quad f = \frac{3}{\pi} \text{ Hz} = 0.95 \text{ Hz}$$

b) En la figura 1.11 se muestra la gráfica de la función posición $x(t)$.

$$A(0.52, 0)$$

$$B(0, 0)$$

$$C(1.05, 0)$$

$$D(0.47, 0.79)$$

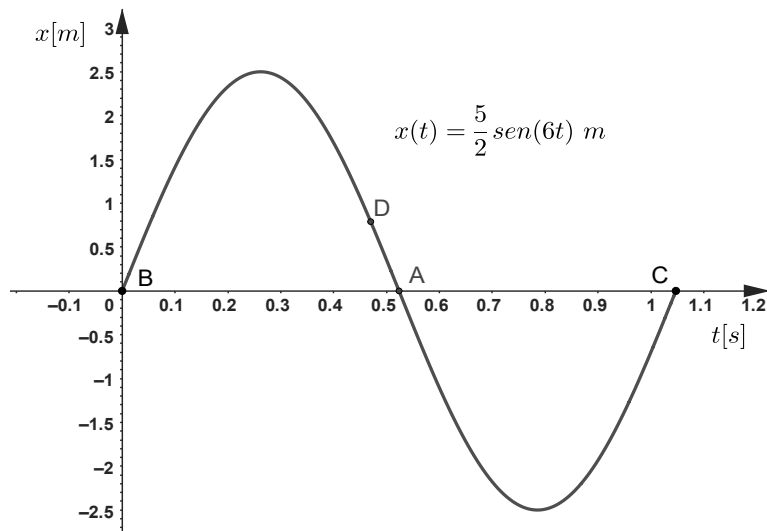


Figura 1.11. Gráfica de posición vs tiempo

Para la gráfica de la función $v = v(x)$. Obtenemos la siguiente ecuación de

movimiento, considerando los intervalos de posición y velocidad $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ y $-15 \leq v \leq 15$.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{5}{2}(6)\right)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{(15)^2} = 1$$

La gráfica de la función $v = v(x)$ se muestra en la figura 1.12.

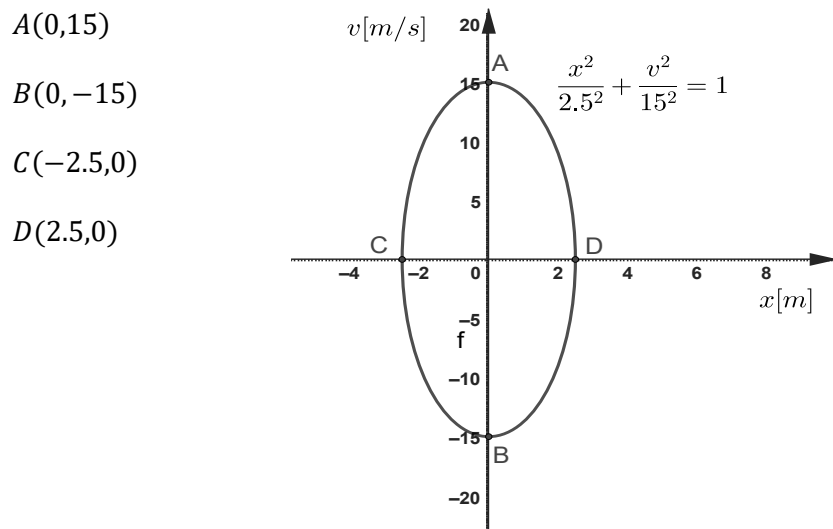


Figura 1.12. Gráfica de velocidad vs posición

- c) Para obtener el tiempo que alcanza la tercera parte de su velocidad máxima procedemos de la forma siguiente.

Como $v_{max} = \pm 15 \frac{m}{s}$

$$\frac{v_{max}}{3} = \frac{15 \frac{m}{s}}{3} = \pm 5 \frac{m}{s}$$

Como $v(t) = 15 \cos 6t \frac{m}{s}$

$$5 = 15 \cos 6t$$

$$\frac{1}{3} = \cos 6t \quad y \quad 6t = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$6t = 1.23 \quad y \quad t = 0.21 \text{ s}$$

Considerando los puntos A, B, C y D de la gráfica 1.13 calculamos los tiempos

t_1, t_2, t_3 y t_4 mostrados a continuación tenemos.

$$t = \frac{\pi}{12} = 0.26 \text{ s}$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{12} - 0.21 = 0.06 \text{ s}$$

$$t_1 = 0.21 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{\pi}{12} + \Delta t = 0.32 \text{ s}$$

$$t_3 = \frac{3\pi}{12} + \Delta t = 0.84 \text{ s}$$

$$t_4 = \frac{3\pi}{12} - \Delta t = 0.73 \text{ s}$$

$$A(0.21, 5)$$

$$B(0.73, -5)$$

$$C(0.32, -5)$$

$$D(0.84, 5)$$

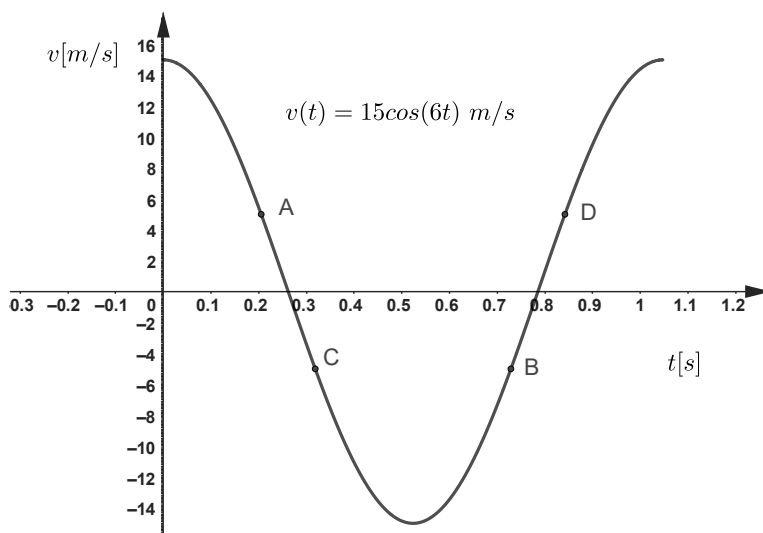


Figura 1.13. Grafica de velocidad vs tiempo

Por lo tanto, los tiempos donde la partícula alcanza la tercera parte de su velocidad máxima son, $t_1 = 0.2 \text{ s}$ $t_2 = 0.32 \text{ s}$ $t_3 = 0.84 \text{ s}$ $t_4 = 0.72 \text{ s}$

d) De la gráfica $x(t)$ de la figura 1.11, la partícula paso por segunda vez por la posición de equilibrio en $t = 0.52 \text{ s}$, entonces 1 segundo después que paso por $x = 0$ es $t = 1.52 \text{ s}$ obtenemos la posición en ese tiempo.

$$x(1.52) = \frac{5}{2} \sin(6(1.52)) \text{ m} = 0.79 \text{ m}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida desde que empezó el movimiento hasta que alcanza la posición $x(1.52) = 0.75 \text{ m}$, según la gráfica de la figura 1.11 y teniendo en cuenta que el tiempo de 1.52 s la partícula se movía en el segundo ciclo del movimiento, entonces considerando el punto D de la gráfica la distancia total recorrida está dada por.

$$d_T = d_1 + d_2 = 3A + x(1.52) = 3\left(\frac{5}{2}\text{m}\right) + 0.79 \text{ m} = 8.29 \text{ m}$$

1.3 Superposición de movimientos armónicos

La superposición de señales vibratorias armónicas es un concepto fundamental en el estudio de las ondas y fenómenos vibratorios. Se refiere al proceso mediante el cual dos o más señales vibratorias se combinan para la obtención una nueva señal. Esta nueva señal es el resultado de la suma de las amplitudes individuales de las señales originales en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo. La superposición de señales vibratorias es de gran importancia en una amplia gama de campos, incluyendo la física, la ingeniería y la comunicación. La superposición permite comprender cómo se combinan diferentes ondas, lo que es crucial para el diseño y análisis de sistemas y dispositivos que involucran fenómenos vibratorios, como la transmisión de varios tipos de información, la formación de imágenes médicas y la ingeniería. En este sentido la comprensión de la superposición de señales vibratorias es esencial para el desarrollo de diferentes tecnologías más avanzadas y eficientes en diversos ámbitos de la ciencia y la tecnología.

La superposición de señales periódicas es un concepto que describe cómo dos o más señales periódicas pueden combinarse para formar una nueva señal periódica. En este contexto, una señal periódica es aquella que se repite regularmente en el tiempo, es decir, que exhibe un patrón repetitivo a lo largo del eje temporal. Cuando se superponen dos o más señales periódicas, la nueva señal resultante se obtiene sumando las amplitudes de las señales originales en cada punto del tiempo. La superposición puede causar fenómenos como

la interferencia constructiva, donde las amplitudes se suman para crear una señal más grande, o la interferencia destructiva, donde las amplitudes se cancelan mutuamente. Este concepto es fundamental en el análisis de sistemas físicos y en la ingeniería de comunicaciones, donde se trabaja con múltiples señales que interactúan entre sí. La comprensión de la superposición de señales periódicas es esencial para el diseño y la optimización de sistemas y dispositivos que emplean fenómenos vibratorios o señales de naturaleza periódica.

Definición.

Sea las señales $f(t)$ y $g(t)$ dos señales periódicas, entonces la superposición de las señales

$h(t)$ se define como la suma algebraica de dichas funciones, es decir.

$$h(t) = f(t) + g(t) \dots \dots \dots (1.19)$$

Para que la superposición de dos señales periódicas también sea periódica, es necesario que cumplan con una condición fundamental la cual consiste en que los periodos de las señales deben relacionarse entre sí y deben tener una relación de periodicidad, es decir si tenemos dos señales periódicas $f(t)$ y $g(t)$ con periodos T_1 y T_2 respectivamente, entonces la relación entre los periodos de las funciones debe de ser un numero racional.

Matemáticamente lo anterior se puede expresar $T_1 = n T_2$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Esta condición puede generalizar que al superponer dos señales periódicas entonces la superposición de dichas funciones también es periódica.

La superposición de dos señales periódicas no será periódica si en cociente de sus periodos no es un numero racional.

Ejemplo 5. Dadas las señales $x_1(t) = 4 \sin 3t$ y $x_2(t) = 3 \cos 3t$ obtenga la superposición de las señales en forma reducida y dibuje su gráfica.

Solución. La superposición de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ es $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 4 \operatorname{sen} 3t + 3 \cos 3t$.

Obtenemos $x(t)$ en su forma reducida, considerando que los argumentos simples de las funciones son iguales, en la forma $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0)$ donde $A = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. El ángulo de fase α_0 se obtiene como $\alpha_0 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 0.64$. Por tanto, la superposición de las señales es de la forma

$$x(t) = 5 \operatorname{sen}(3t + 0.64).$$

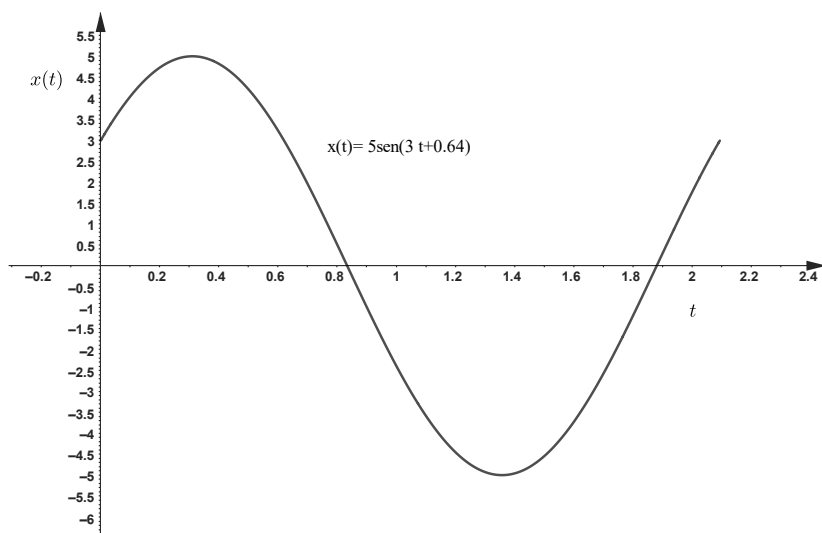


Figura 1.14 Gráfica de la función.

Ejemplo 6. Dadas las señales cuyas funciones armónicas que están dadas por

$x_1(t) = 4 \operatorname{sen}(2t + \pi/4)$ y $x_2(t) = 3 \cos(2t + \pi/6)$. Determine con el principio de superposición la señal resultante y trace su gráfico.

Solución. Dadas las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ Procedemos a llevarlas a señales de argumento simple, utilizando las ecuaciones del apéndice B, en la forma siguiente

$$x_1(t) = 4 \operatorname{sen}(2t + \pi/4)$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \left[\text{sen}(2t) \cos \frac{\pi}{4} + \cos(2t) \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] \\
&= 2\sqrt{2} \text{sen}(2t) + 2\sqrt{2} \cos(2t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= 3 \cos \left(2t + \frac{\pi}{6} \right) \\
&= 3 \left[\cos(2t) \cos \frac{\pi}{6} - \text{sen}(2t) \text{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right] \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos(2t) - \frac{3}{2} \text{sen}(2t)
\end{aligned}$$

Procedemos a obtener la superposición de las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$

$$x_1(t) + x_2(t) = 2\sqrt{2} \text{sen}(2t) + 2\sqrt{2} \cos(2t) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos(2t) - \frac{3}{2} \text{sen}(2t),$$

reduciendo la expresión tenemos

$$x(t) = 1.32 \text{sen}(2t) + 5.42 \cos 2t$$

Llevamos la expresión $x(t)$ a la forma reducida $x(t) = A \text{sen}(\omega t + \alpha_0)$, donde

$$A = \sqrt{(1.32)^2 + (5.42)^2} = 5.57$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{5.42}{1.32} \right) = 1.33$$

Por lo tanto, la superposición es de la forma reducida siguiente

$$x(t) = 5.57 \text{sen}(2t + 1.33)$$

La gráfica de $x(t)$ es de la forma de la figura 1.15.

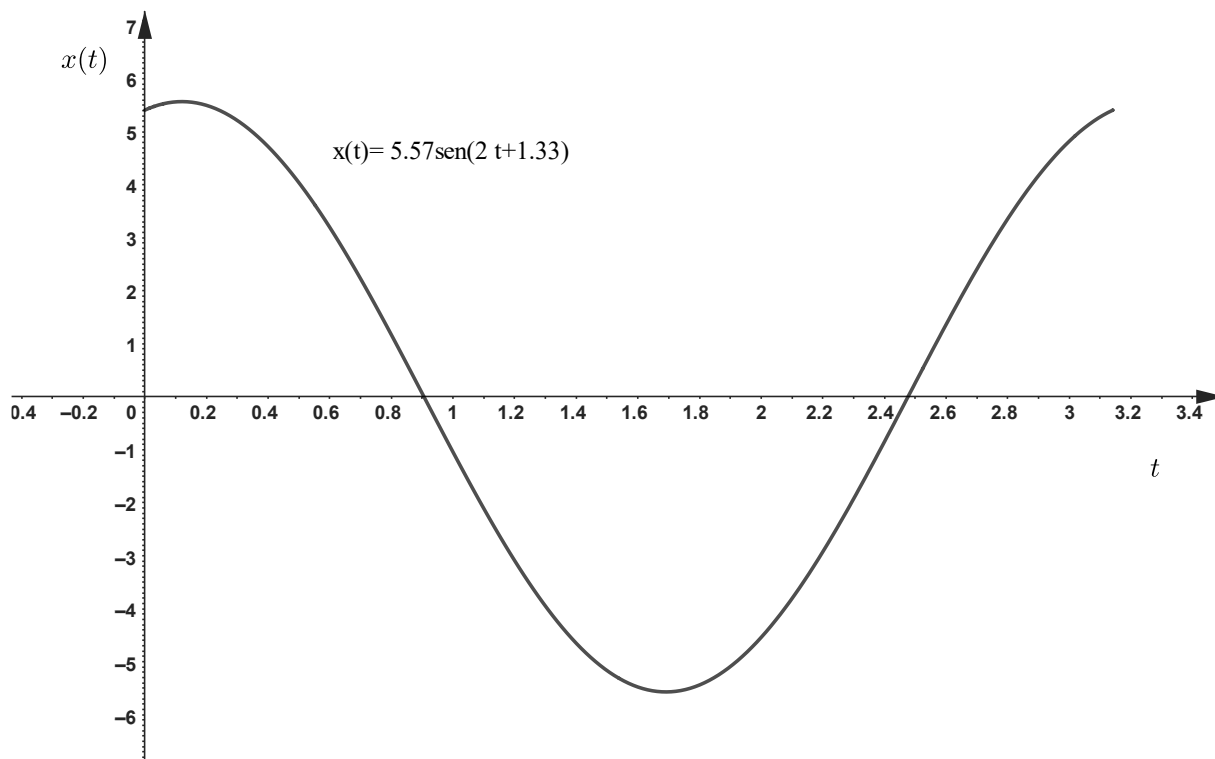


Figura 1.15. Gráfica de $x(t)$ en forma reducida.

Ejemplo 6. Dadas las señales $x_1(t) = 3 \sin(5t)$ y $x_2(t) = 4 \cos(3t)$ Obtener la superposición de las señales y obtener su gráfico y con ayuda de la gráfica obtener su periodo.

Solución.

Como los argumentos simples de las señales son diferentes, entonces la superposición de las señales es

$$x_1(t) + x_2(t) = 3\sin(5t) + 4\cos(3t)$$

La gráfica de $x(t)$ es de la forma que se muestra en la figura 1.16.

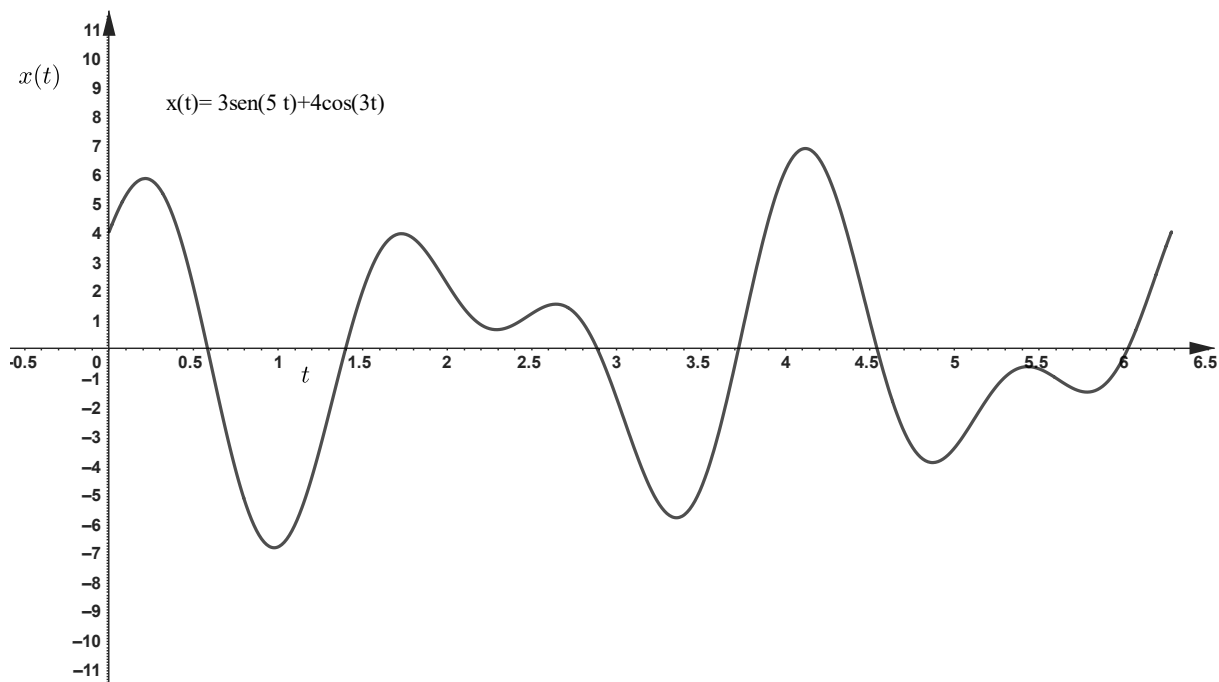


Figura 1.16. Grafica de $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

1.4 Movimiento vibratorio no armónico de una partícula y su visualización

Las vibraciones no armónicas se caracterizan por tener una frecuencia que no es un múltiplo entero de una frecuencia fundamental. Algunas de sus características son:

1. **Frecuencia no constante:** A diferencia de las vibraciones armónicas, donde la frecuencia es constante, en las vibraciones no armónicas la frecuencia puede cambiar con el tiempo.
2. **Amortiguamiento variable:** El amortiguamiento en las vibraciones no armónicas puede ser variable, lo que puede llevar a una disminución irregular de la amplitud con el tiempo.
3. **Respuesta no lineal:** En muchos casos, las vibraciones no armónicas pueden producir respuestas no lineales en los sistemas mecánicos, eléctricos o acústicos, lo que significa que la amplitud de la vibración no es directamente proporcional a la fuerza que la causa.
4. **Generación de armónicos:** Las vibraciones no armónicas pueden generar armónicos,

es decir, frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental pero que no están presentes en la señal de entrada original y `por lo tanto este tipo de vibraciones pueden ser periódicas o no periódicas.

- 5. Mayor complejidad en el análisis:** Debido a su naturaleza variable y compleja, el análisis de las vibraciones no armónicas puede requerir técnicas más avanzadas y herramientas específicas para su caracterización y comprensión.

En el presente capítulo solo haremos análisis de este tipo de vibraciones no armónicas pero periódicas a través del análisis gráfico de la función posición en función del tiempo, como se muestra a continuación.

Ejemplo 7. Una partícula se mueve de tal manera que el cambio de posición está dado por la función $x(t) = 2 \cos(2t) + 4 \sin(5t)$ m. Determine por el método gráfico.

- a) El periodo del movimiento
- b) Los tiempos en que la partícula viaja a la derecha.
- c) El tiempo en que pasa por segunda vez por la posición de equilibrio viajando a la derecha.
- d) La distancia recorrida en 5 s.
- e) Los tiempos donde la partícula alcanza sus velocidades máximas positiva y negativa, cuáles son sus valores e indique hacia donde viajaba la partícula en esos momentos
- f) El tiempo donde la aceleración de la partícula es cero por tercera vez desde que comenzó el movimiento y hacia donde viajaba la partícula en ese momento.
- g) En que tiempo alcanzo la partícula su aceleración máxima negativa y cuál es su valor.

Solución.

Dada la gráfica de la posición $x(t) = 2 \cos(2t) + 4 \sin(5t)$ m como se muestra en la figura 1.17.

- a) Considerando las coordenadas del punto L de la gráfica de $x(t)$, el periodo del movimiento es $T = 6.28$ s.
- b) Considerando que la partícula viaja a la derecha cuando la función $x(t)$ es creciente, entonces considerando los puntos K, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J y L tenemos que la partícula viaja a la derecha en un periodo en los intervalos de tiempo siguientes.

$$t \in (0, 0.29) \cup (0.98, 1.57) \cup (2.16, 2.85) \cup (3.48, 4.04) \cup (4.71, 5.38) \cup (5.94, 6.28) \text{ s}$$

- c) Considerando que la partícula viaja a la derecha cuando la función $x(t)$ es creciente y que cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio $x(t) = 0$ en entonces tomando el punto N de la gráfica de la figura 1.14 tenemos que el tiempo es $t = 2.5$ s.
- d) Considerando los puntos K, A, B, C, D, E, F, G, H y J de la gráfica de $x(t)$ y que las distancias se miden sobre el eje vertical y son $|x(t)|$ entonces la distancia total recorrida en 5 s está dada por.

$$d_T = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 3.64 + 6.69 + 10.33 + 5.87 + 3.79 = 30.35 \text{ m}$$

$A(0.29, 5.64)$	$M(5, -2.21)$
$B(0.98, -4.69)$	$N(2.5, 0)$
$C(1.57, 2)$	
$D(2.16, -4.69)$	
$E(2.85, 5.64)$	
$F(3.48, -2.41)$	
$G(4.04, 3.46)$	
$H(4.71, -6)$	
$I(5.38, 3.46)$	
$J(5.94, -2.41)$	
$K(0, 2)$	
$L(6.28, 2)$	

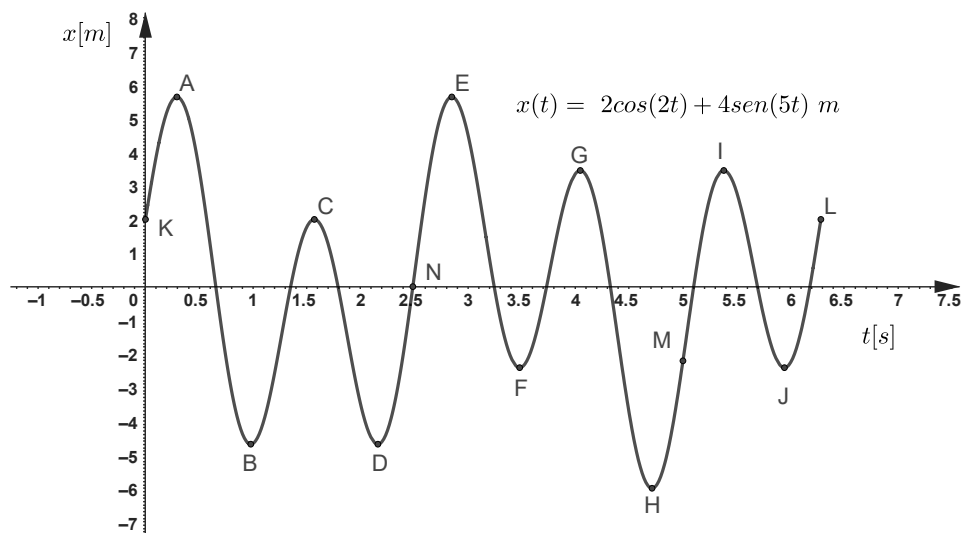


Figura 1.17. Grafica de posición vs tiempo

La función de velocidad está dada por $v(t) = \frac{dx}{dt} = -4 \sin(2t) + 20 \cos(5t) \frac{m}{s}$ y la gráfica de la función se muestra en la figura 1.15

- e) Considerando los puntos A y D de la gráfica de $v(t)$, tenemos que el tiempo donde la partícula alcanza su velocidad máxima positiva es $t = 2.51$ s y la velocidad que alcanza es $v = 23.81 \frac{m}{s}$ y para la velocidad máxima negativa $t = 0.63$ s y la velocidad es $v = -23.81 \frac{m}{s}$. Tomando en cuenta la gráfica de la posición de la figura 1. 18 en el tiempo $t = 0.63$ s la partícula viajaba hacia la izquierda y en el tiempo $t = 2.51$ s la partícula viajaba hacia la derecha.

$A(0.63, -23.81)$

$B(1.27, 17.69)$

$C(1.87, -17.69)$

$D(2.51, 23.81)$

$E(3.16, -20)$

$F(3.76, 16.2)$

$G(4.39, -22.39)$

$H(5.04, 22.39)$

$I(5.66, -16.2)$

$J(6.28, 20)$

$K(0, 20)$

$L(0.98, 0)$

$M(2.16, 0)$

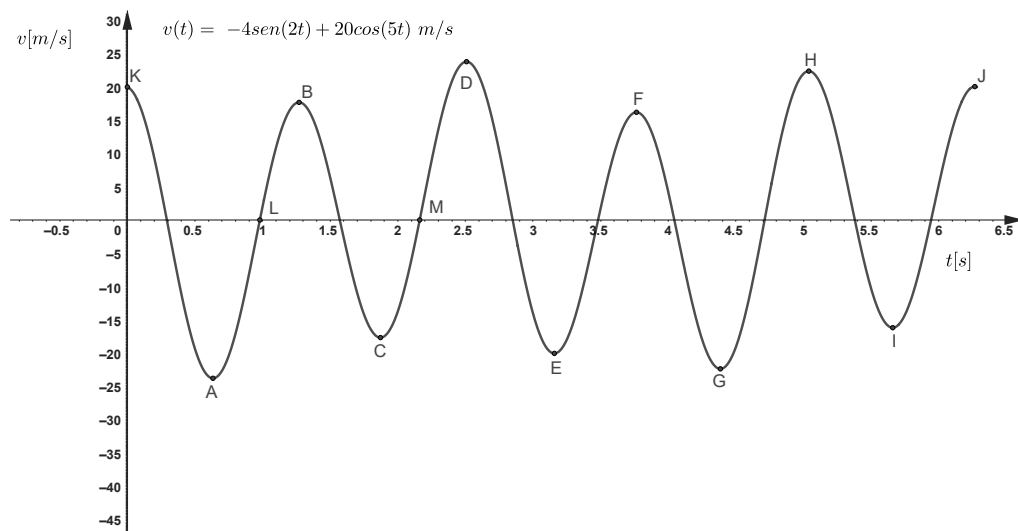


Figura 1.18. Velocidad vs tiempo

La función de aceleración está dada por $a(t) = -8\cos(2t) - 100\sin(5t)$ $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la gráfica de la función se muestra en la figura 1.19.

$A(0.31, -106.49)$

$B(0.95, 102.52)$

$C(1.57, -92)$

$D(2.19, 102.52)$

$E(2.83, -106.49)$

$F(3.46, 93.55)$

$G(4.08, -97.57)$

$H(4.71, 108)$

$I(5.35, -97.57)$

$J(5.97, 93.55)$

$K(0, -8)$

$L(6.28, -8)$

$M(1.87, 0)$

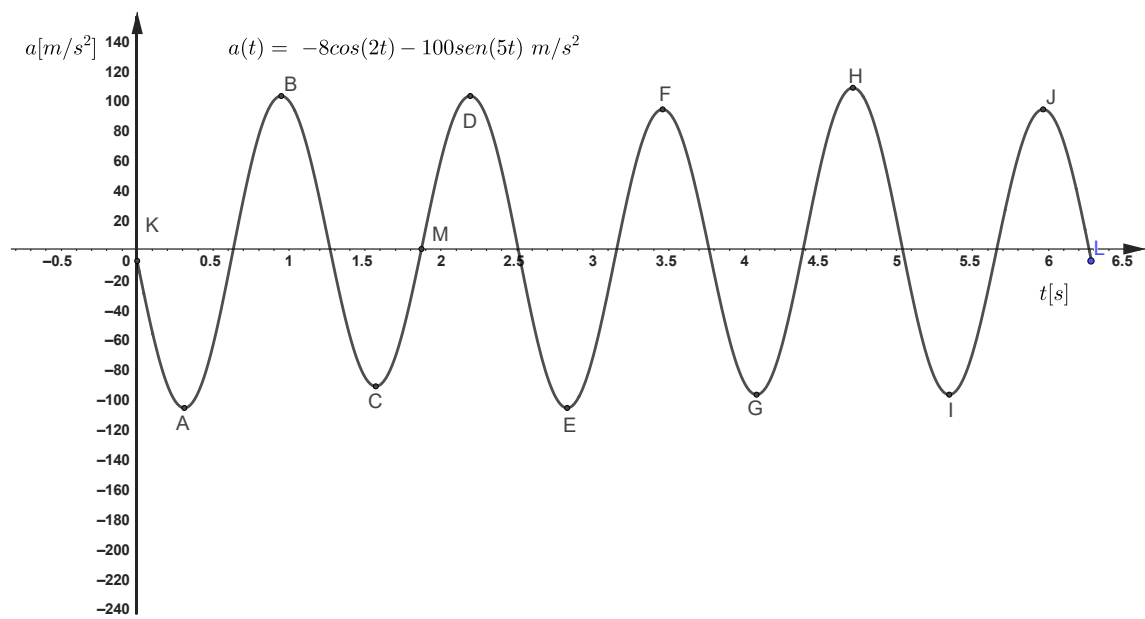


Figura 1.19. Aceleración vs tiempo

- f) De acuerdo al punto M de la gráfica en $a(t)$, en la figura 1.16 en $t = 1.87 \text{ s}$ la aceleración de la partícula es cero y de acuerdo con la gráfica de $x(t)$ la partícula viajaba hacia la izquierda.
- g) Considerando los puntos A y E de la gráfica de la figura 1.16 la aceleración máxima negativa de la partícula es $a(t) = -106.49 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la adquiere en dos tiempos diferentes que son $t_1 = 0.31 \text{ s}$ y $t_1 = 2.83 \text{ s}$.

1.5 Ejercicios

1. Una partícula se mueve describiendo un movimiento armónico simple dado por la función posición $x(t) = 7 \operatorname{sen} \left(2t + \frac{\pi}{3} \right)$ ft. Determine
 - a) las gráficas de $x(t)$, $v(t)$, $v(x)$ y $a(x)$.
 - b) la posición y distancia recorrida en un minuto
 - c) la velocidad y el tiempo que la adquiere cuando está en una posición de 1 in.
 - d) La distancia recorrida 1 segundo después que pasa por primera vez por la posición de equilibrio viajando a la izquierda

2. Una partícula se mueve describiendo un movimiento armónico simple dado por la función posición $x(t) = 2 \operatorname{sen} 2t + 4 \cos 3t$ in. Determine
 - a) las gráficas de $x(t)$, $v(t)$, $v(x)$ y $a(x)$.
 - b) las características del movimiento
 - c) la posición y distancia recorrida en 3 min
 - d) la velocidad y el tiempo que la adquiere cuando está en una posición de 1 in.

3. Una partícula se mueve de tal manera que la función que indica el cambio de posición está dada por $x(t) = 6 \operatorname{sen} 4t \cos 4t$ m . Calcula
 - a) las características del movimiento
 - b) la velocidad y aceleración cuando estaba en una posición de - 1m.

- c) El número de ciclos y la distancia recorrida en 2 segundos
 - d) trazar la gráfica de $v(t)$ y $a(t)$
 - e) los intervalos de tiempo en que la velocidad es negativa decreciente
4. Una partícula se mueve describiendo un MAS de tal manera que su función posición está dada por $x(t) = -2 \operatorname{sen} 4t + 6 \cos 4t$ cm. Determine
- a) las características del movimiento
 - b) el tiempo en que alcanza su primera velocidad máxima negativa
 - c) ¿Cuáles son su posición y velocidad inicial?
 - d) los tiempos en que su aceleración se hace cero.
5. Una partícula se mueve describiendo un MAS dado por la función de posición $x(t) = 3\cos(2t)$ m. Determine:
- a) Las gráficas de $x(t)$ y $v(t)$
 - b) el tiempo que la partícula pasa por tercera vez por la posición de equilibrio y la distancia recorrida en este tiempo.
6. Una partícula se mueve describiendo un MAS de amplitud de 4 cm y frecuencia de 100 Hz: calcular la velocidad, aceleración extremas, la velocidad y la aceleración en un tiempo de 2 s. Suponga que la partícula parte de la posición de equilibrio.
7. La aceleración de una partícula está dada por $a = -144x$ y esta medida en y la posición x en metros. Determine las características del movimiento si se sabe que para $t = 0$ la posición era de 20 cm y su velocidad era de $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- a) Trace las gráficas de $x(t)$ y $V(t)$
- b) Determine los intervalos de tiempo donde la velocidad es negativa y decrece.
- c) Los tiempos donde su velocidad es de $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Utilizando un graficador realice los siguientes ejercicios.

8. una partícula se mueve de tal manera que su cambio de posición está dado por la función $x(t) = [-8 \text{ sen } 5t + 6 \cos 3t]$ cm.

- a) Trace las gráficas de $x(t)$ y $v(t)$
- b) ¿Qué distancia recorrió en 4 segundos?
- c) ¿En qué tiempos alcanza su velocidad y posición máxima positiva?
- d) ¿Cuáles son los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva? y
¿En qué tiempos la aceleración cambia de signo?

9. Una partícula se mueve de tal manera que su cambio de posición este dado por la función $x(t) = 4 \text{ sen } 2t - 5 \cos \left(t + \frac{\pi}{6}\right)$ m

- a) Obtenga las gráficas de $x(t)$, $V(t)$ y $a(t)$
- b) ¿Qué distancia recorrió en 2 segundos?
- c) ¿En qué tiempos alcanza su desplazamiento positivo y negativo máximo?
- d) Determine los intervalos de tiempo en donde la velocidad es positiva y es creciente
- e) Los tiempos donde la aceleración es cero

10. Una partícula se desplaza de tal manera que su función posición está dada por

$$x(t) = 4 \operatorname{sen} \left(2t + \frac{\pi}{3} \right) - 5 \cos \left(t + \frac{\pi}{6} \right) \text{ in. Determine}$$

- a. La distancia total recorrida a los 2 s.
- b. La posición adquirida y el desplazamiento realizado a los 3 s.
- c. La velocidad que adquiere a los 0.5 s.
- d. La velocidad y aceleración cuando recorre una distancia de 5 in desde que empezó el movimiento

11. Dadas las señales cuyas funciones armónicas que están dadas por $x_1(t) =$

$2 \operatorname{sen}(5t)$ y $x_2(t) = 4 \cos(5t)$. Determine con el principio de superposición la señal resultante en su forma reducida y trace su gráfico.

12. Dadas las señales $x_1(t) = -3 \operatorname{sen} \left(5t + \frac{\pi}{3} \right)$ y $x_2(t) = 4 \cos(3t - 2\pi)$ Obtener la superposición de las señales en la forma $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) + B \cos(\omega t)$ y obtener su gráfico con ayuda de la gráfica obtener su periodo.

Capítulo II. Dinámica del cuerpo rígido en el plano

Objetivo del capítulo. Realizar un estudio introductorio a la estática y dinámica del cuerpo rígido en el plano presentando los conceptos fundamentales necesarios para abordar el análisis de sistemas oscilatorios rotacionales armónicos.

2.1. Concepto del cuerpo rígido

La dinámica de rotación de un cuerpo sólido es un área fundamental en la física que estudia el movimiento de objetos que giran alrededor de un eje fijo. Para entender esta rama en el estudio de la mecánica, es esencial comenzar con la definición de un cuerpo sólido.

Definición de Cuerpo Rígido:

Un cuerpo sólido se define como un objeto que mantiene su forma y volumen bajo la influencia de fuerzas externas. A diferencia de los cuerpos deformables, los sólidos mantienen una estructura rígida, lo que significa que las distancias entre sus partículas constituyentes permanecen prácticamente constantes, incluso cuando se someten a fuerzas externas.

Los cuerpos rígidos se clasifican según su forma y dimensiones, pudiendo ser desde simples geometrías como esferas, cilindros o cubos, hasta estructuras más complejas como automóviles, aviones o sistemas planetarios.

Dinámica de Rotación:

La dinámica de rotación de un cuerpo rígido se centra en el estudio de los movimientos de rotación alrededor de un eje específico. En este contexto, se analizan conceptos como la aceleración angular, el torque (o momento de fuerza), entre otros.

La aplicación de las leyes de la dinámica rotacional permite comprender cómo las fuerzas externas influyen en la velocidad angular y la posición de un cuerpo sólido en rotación.

Además, este análisis es fundamental en diversas áreas de la física y la ingeniería, como la mecánica de vehículos, la dinámica planetaria y la fabricación de maquinaria.

La dinámica de rotación de un cuerpo rígido es una disciplina esencial para el estudio y análisis del movimiento de objetos que giran en torno a un eje fijo, proporcionando una base teórica crucial para diversas aplicaciones prácticas en la ciencia y la tecnología.

2.2. Centro de masa

El peso de un cuerpo o sistema no actúa en un solo punto del cuerpo, normalmente está distribuido en todo el volumen, el área o sobre una línea según sea el caso. El peso del cuerpo o sistema se puede representar con una sola fuerza resultante actuando en un punto específico del cuerpo llamado centro de masa.

En este capítulo también estudiaremos el concepto de Centroides que considera el centro geométrico del cuerpo y para cada caso particular cuando los cuerpos son homogéneos y con densidad de masa constante entonces coincide por el Centro de masa del cuerpo.

Centroide de un área.

Consideremos el área A y la dividimos en pequeños elementos de área dA , como se muestra en la figura 2.1.

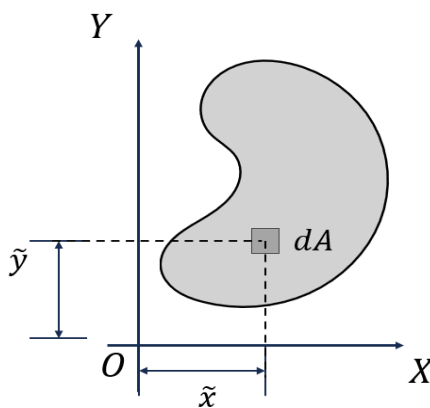


Figura 2.1. diferencial de área de una superficie.

Entonces las coordenadas del centroide del cuerpo, como se muestra en la figura 2.2 está dada por

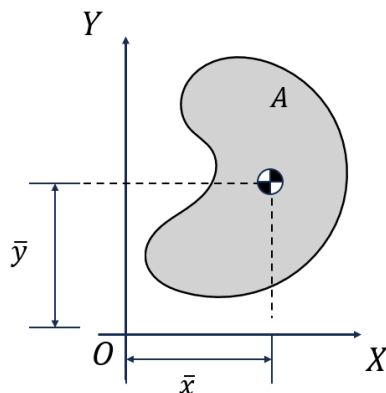


Figura 2.2. Centroide del área A.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{\int dA} \dots\dots\dots (2.1)$$

Donde $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ son las coordenadas del elemento diferencial de área dA correspondientes y $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas del centroide del área A.

Centroide de un volumen.

Consideramos un cuerpo de volumen V y lo dividimos en pequeños elementos de volumen dV como se muestra en la figura 2.3.

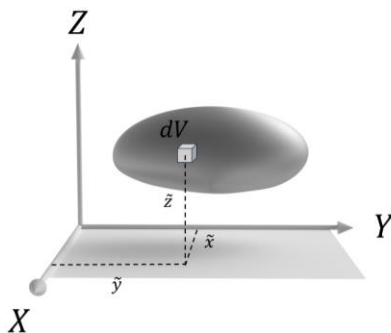


Figura 2.3. Cuerpo de volumen V , dividido en diferenciales de volumen dV .

Donde $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ y $\tilde{z}$ son las coordenadas del diferencial de volumen correspondiente. El centroide del volumen con coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ como se muestra en la figura 2.4, está dado por

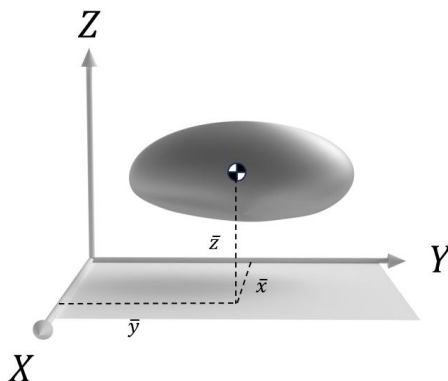


Figura 2.4. Centroide de un volumen

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dV}{\int dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dV}{\int dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dV}{\int dV} \dots \dots \dots (2.2)$$

Centroide de una línea.

Consideremos un cuerpo en forma de línea con longitud L y se divide en pequeños diferenciales de línea dL , como se muestra en la figura 2.5

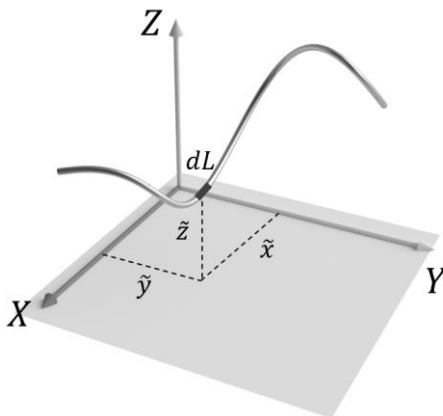


Figura 2.5. Línea de longitud L dividida en diferenciales de línea dL

El centroide de la línea con coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ como se muestra en la figura 2.6, está dado por

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dL}{\int dL}, \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dL}{\int dL}, \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dL}{\int dL} \dots \dots \dots (2.3)$$

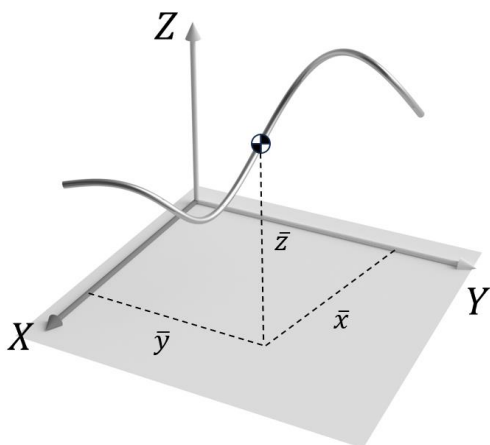


Figura 2.6. Centroide una línea.

Centro de Masa de un sólido.

El centro de masa es un punto muy bien definido del cuerpo donde se considera que se encuentra concentrada la masa total del cuerpo o sistema. Es el promedio de la posición de todas las partes del sistema, ponderada de acuerdo con sus masas. Para el caso que se tienen cuerpos rígidos homogéneos de masa constante, el centro de masa del sistema coincide con el centroide del sistema.

Lo útil de conocer la posición del centro de masa de un cuerpo, es que es el punto donde cualquier fuerza uniforme sobre el objeto y esto es útil porque permite resolver problemas de mecánica en donde se tiene que estudiar el movimiento de cuerpos en formas raras y de sistemas complicados.

Para propósitos de cálculos se puede considerar cuerpos de forma irregular o regular como si toda la masa del cuerpo estuviera concentrada en un cuerpo pequeño ubicado en el centro de masa, y a este cuerpo pequeño imaginario lo llamamos una masa puntual.

Si un cuerpo rígido es empujado bajo la acción de una fuerza que actúa sobre su centro de masa, entonces el cuerpo siempre se moverá como si fuera una masa puntual y no va a rotar alrededor de ningún eje sin importar la forma que tenga el cuerpo. En el caso de que la fuerza sea aplicada en cualquier otro punto del cuerpo que no sea el centro de masa entonces el cuerpo comenzará a rotar alrededor de un eje que pase por su centro de masa.

Cálculo del centro de masa de un cuerpo.

Con la finalidad de estudiar el movimiento acelerado de un cuerpo, resulta importante localizar el centroide de masa del cuerpo o sistema.

Consideramos un cuerpo de masa total M y volumen V y lo dividimos en pequeños diferenciales de masa dm . Como se muestra en la figura 2.7.

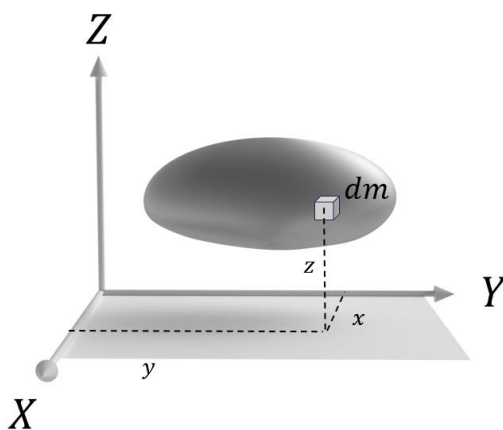


Figura 2.7. Cuerpo de masa M y diferencial de masa dm .

Donde x, y y z son las coordenadas del diferencial de masa dm . Donde las coordenadas del centro de masa $\bar{x}, \bar{y}$ y $\bar{z}$ están dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm}, \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm} \dots\dots (2.4)$$

La integración con respecto a la diferencial de masa dm , se puede transformar en una integración con respecto al volumen, considerando diferenciales de volumen y el concepto de densidad de masa.

Densidad de masa.

La densidad de masa se define como la relación que existe entre la masa total del cuerpo y su volumen total, matemáticamente se expresa como:

$$\rho = \frac{M}{V} \dots\dots (2.5)$$

Si consideramos un pequeño diferencial de masa dm y su correspondiente diferencial de volumen, como se muestra en la figura 2.8, entonces tenemos:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \dots\dots (2.6)$$

Sustituyendo $dm = \rho dV$ en las integrales de las coordenadas del centro de masa tenemos

$$\bar{x} = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV}, \bar{y} = \frac{\int y \rho dV}{\int \rho dV}, \bar{z} = \frac{\int z \rho dV}{\int \rho dV} \dots\dots\dots (2.7)$$

Para el caso particular de cuerpos homogéneos, donde la densidad de masa es constante ($\rho = \text{constante}$). Entonces para este caso las coordenadas del centro de masa del cuerpo están dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{\int dV}, \bar{y} = \frac{\int y dV}{\int dV}, \bar{z} = \frac{\int z dV}{\int dV} \dots\dots\dots (2.8)$$

Por lo tanto, se puede observar que coinciden con las coordenadas del centroide del cuerpo. Para el caso de cuerpos planos de área total A y varillas de longitud L y considerando la densidad de masa superficial de masa y la densidad lineal de masa definidas como:

$$\sigma = \frac{M}{A} \text{ y } \lambda = \frac{M}{L} \dots \dots (2.9)$$

Donde

σ - densidad superficial de masa

λ - densidad lineal de masa

M - masa total del cuerpo

Si tomamos diferenciales de masa dm , diferenciales de área dA y diferenciales de línea dL y como lo hicimos en el caso de las diferenciales de volumen dV , tenemos que las coordenadas del centro de masa para una placa y una varilla de o líneas homogéneas donde $\sigma = \text{constante}$ y $\lambda = \text{constante}$, están dadas por:

Área:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \dots \dots \dots (2.10)$$

Línea:

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{\int dL}, \bar{y} = \frac{\int y dL}{\int dL}, \bar{z} = \frac{\int z dL}{\int dL} \dots \dots (2.11)$$

Elementos compuestos.

Un cuerpo sólido compuesto, es un cuerpo que está formado por varias partes y cada una de ellas es un cuerpo sólido, se puede calcular el centro de masa del cuerpo compuesto si

se conoce la posición del centro de masa y el área de cada una de las partes, es decir, un área, un volumen o una línea compuesta es una combinación de partes simples.

Para mostrar cómo se obtiene el centro de masa de un cuerpo compuesto, tomaremos el caso de un cuerpo de área A compuesto por varios cuerpos de áreas $A_1, A_2, \dots, A_n$, como se explica a continuación. Se muestra un cuerpo homogéneo compuesto que consta de tres partes, como se muestra en la figura 2.8, la cual consta de dos áreas triangulares, un área rectangular.

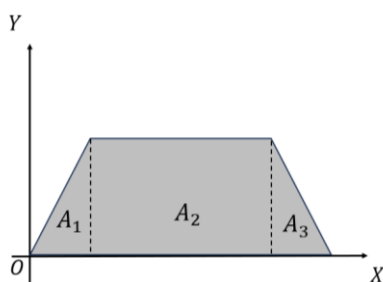


Figura 2.8. Cuerpo compuesto por tres áreas simples.

La coordenada $\bar{x}$ del centro de masa del cuerpo compuesto está dado por

$$\bar{x} = \frac{\int x dA_1 + \int x dA_2 + \int x dA_3}{\int dA_1 + \int dA_2 + \int dA_3} \dots \dots \dots (2.12)$$

Si se conocen las coordenadas de los centroides de cada una de las partes simples, como se muestra en la figura 2.9.

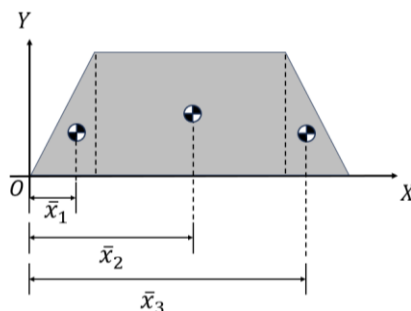


Figura 2.9. Centros de masa de cuerpo compuesto.

Entonces la ecuación para la coordenada x del centroide del área A_1 , tenemos

$$\bar{x}_1 = \frac{\int x dA_1}{\int dA_1} \dots \dots \dots (2.13)$$

De donde

$$\int x dA_1 = \bar{x}_1 A_1 \dots \dots (2.14)$$

Para las otras partes análogamente se tiene

$$\int x dA_2 = \bar{x}_2 A_2 \text{ y } \int x dA_3 = \bar{x}_3 A_3 \dots \dots (2.15)$$

Por lo tanto, tenemos que la coordenada $\bar{x}$ del centro de masa del cuerpo compuesto está dada

por

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \dots \dots \dots (2.16)$$

De esta manera se puede generalizar para un cuerpo compuesto por $A_1, A_2, \dots, A_n$ áreas, entonces las coordenadas del centro de masa de un cuerpo compuesto por n áreas están dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \dots \dots \dots (2.17)$$

En este caso los cuerpos compuestos homogéneos cuya densidad de masa es constante, el centro de masa coincide con el centroide del cuerpo.

Cuando un área se puede dividir en partes cuyos centroides son conocidos, podemos utilizar esa información para obtener el centroide del cuerpo compuesto. Consultar apéndice ().

Cuando se tiene el caso de que existe alguna perforación en alguna de las áreas, como se muestra en la figura 2.10.

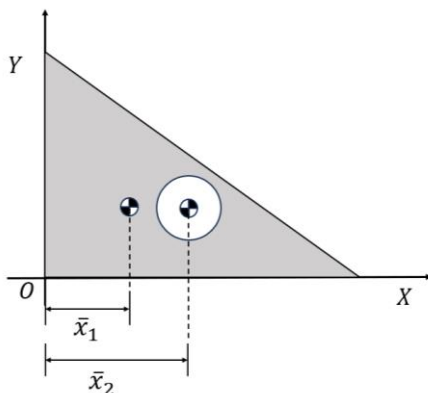


Figura 2.10. Área con perforación.

Para obtener la coordenada x del centroide y centro de masa está dada por:

$$\bar{x}_1 = \frac{\int x dA_1 - \int x dA_2}{\int dA_1 - \int dA_2} = \frac{\bar{x}_1 A_1 - \bar{x}_2 A_2}{A_1 - A_2} \dots \dots \dots (2.18)$$

En este caso el signo negativo en la ecuación significa que el área es de una perforación o agujero.

Ejemplo 1. Dada la placa como se muestra en la figura 2.11, determine el centroide considerando las dimensiones en metros.

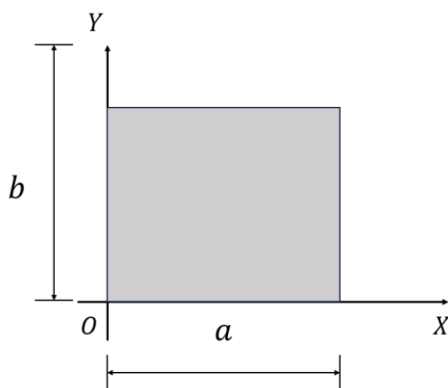


Figura 2.11. Placa rectangular.

Solución. Procedemos al cálculo del centroide con respecto al origen del sistema de coordenadas.

El centroide está dado por:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{A}, \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{A}$$

Donde

$$A = \int dA = \int_0^a \int_0^b dx dy = ab \text{ m}^2$$

y

$$\int \tilde{x} dA = \int_0^a \int_0^b x dx dy = \frac{a^2 b}{2} \text{ m}^3$$

$$\int \tilde{y} dA = \int_0^a \int_0^b y dx dy = \frac{ab^2}{2} \text{ m}^3 \text{ Por lo tanto}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{a^2 b}{2} \text{ m}^3}{ab \text{ m}^2} = \frac{a}{2} \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{ab^2}{2} \text{ m}^3}{ab \text{ m}^2} = \frac{b}{2} \text{ m}$$

Las coordenadas del centroide están dadas son

$$C = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{ m}.$$

Ejemplo 2. Determinar el centroide de la placa semicircular como se muestra en la figura 2.12. Donde R es el radio en metros.

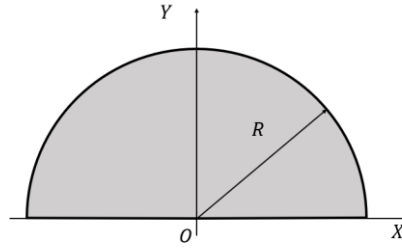


Figura 2.12. Placa semicircular.

Solución. Procedemos al cálculo del centroide con respecto del origen de coordenadas.

El centroide está dado por:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{A}$$

Realizando el cálculo del área en coordenadas polares tenemos.

$$A = \int dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^R r dr d\theta = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\int \tilde{x} dA = \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \cos \theta dr d\theta = 0 \text{ m}^3$$

$$\int \tilde{y} dA = \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{2R^3}{3}$$

Por lo tanto

$$\bar{x} = \frac{0 \text{ m}^3}{\frac{\pi R^2}{2} \text{ m}^2} = 0 \text{ m}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{2R^3}{3} \text{ m}^3}{\frac{\pi R^2}{2} \text{ m}^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

.Las coordenadas del centroide son $C = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right) \text{ m}$.

Ejemplo 3. Determine las coordenadas del centroide de la placa triangular cuyos vértices son los puntos $O = (0,0)$ m, $A=(4,6)$ m y $B = (8,0)$ m, como se muestra en la figura 2.13.

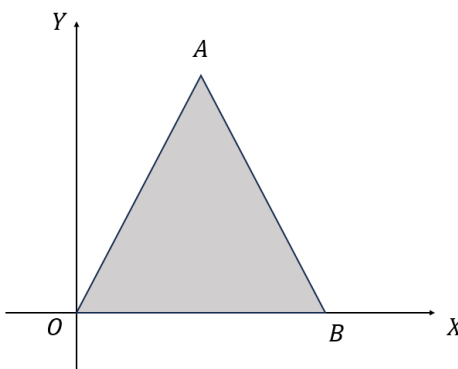


Figura2.13. Placa triangular.

Solución. El centroide está dado por.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{A}, \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{A}$$

Para el cálculo del área calculamos las ecuaciones de las rectas l_1 , l_2 . Para la recta l_1 , que pasa por los puntos $O = (0,0)$ m y $A=(4,6)$ m tenemos:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{2}$$

.Para la recta l_2 , que pasa por los puntos $A=(4,6)$ m y $B = (8,0)$ m tenemos:

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 6}{8 - 4} = -\frac{3}{2}$$

Calculando las ecuaciones de la forma $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$. Para la recta l_1 tomando el punto $O(x_1, y_1) = (0,0)$

$$y = \frac{3}{2} x$$

Para la recta l_2 , tomando el punto $B(x_1, y_1) = (8,0)$ por lo tanto, tenemos

$$y = -\frac{3}{2}x + 12$$

El área está dada por

$$A = \int dA = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{2}x} dy dx + \int_4^8 \int_0^{-\frac{3}{2}x+12} dy dx = 24 \text{ m}^2$$

Calculando las integrales

$$\int \tilde{x} dA = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{2}x} x dy dx + \int_4^8 \int_0^{-\frac{3}{2}x+12} x dy dx = 96 \text{ m}^3$$

$$\int \tilde{y} dA = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{2}x} y dy dx + \int_4^8 \int_0^{-\frac{3}{2}x+12} y dy dx = 48 \text{ m}^3$$

Por lo tanto

$$\bar{x} = \frac{96 \text{ m}^3}{24 \text{ m}^2} = 4 \text{ m}, \bar{y} = \frac{48 \text{ m}^3}{24 \text{ m}^2} = 2 \text{ m}.$$

Las coordenadas del centroide son $C = (\bar{x}, \bar{y}) = (4, 2) \text{ m}$

Ejemplo 4. Determine el centroide del prisma rectangular, como se muestra en la figura 2.14.

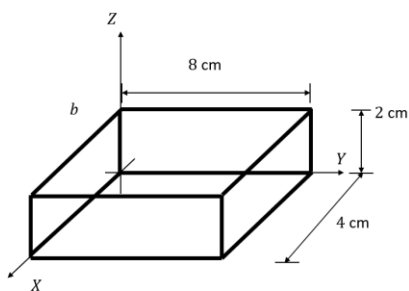


Figura 2.14. Prisma rectangular

Solución. Procedemos al cálculo de las coordenadas del centroide con respecto al origen de coordenadas.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dV}{V}$$

Para el cálculo del volumen tenemos:

$$V = \int dV = \int_0^4 \int_0^8 \int_0^2 dx dy dz = 64 \text{ cm}^3$$

.Ahora calculamos las integrales siguientes:

$$\int \tilde{x} dV = \int_0^4 \int_0^8 \int_0^2 x dz dy dx = 128 \text{ cm}^4$$

$$\int \tilde{y} dV = \int_0^4 \int_0^8 \int_0^2 y dz dy dx = 256 \text{ cm}^4$$

$$\int \tilde{z} dV = \int_0^4 \int_0^8 \int_0^2 z dz dy dx = 64 \text{ cm}^4$$

Por lo tanto, las coordenadas del centroide están dadas por:

$$\bar{x} = \frac{128 \text{ cm}^4}{64 \text{ cm}^3} = 2 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{256 \text{ cm}^4}{64 \text{ cm}^3} = 4 \text{ cm}$$

$$\bar{z} = \frac{64 \text{ cm}^4}{64 \text{ cm}^3} = 1 \text{ cm}$$

Las coordenadas del centroide del prisma son $C = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (2, 4, 1) \text{ cm}$.

Ejemplo 5. Determine el centroide de la línea semicircular de la figura 2.15, si el radio es de 2 ft.

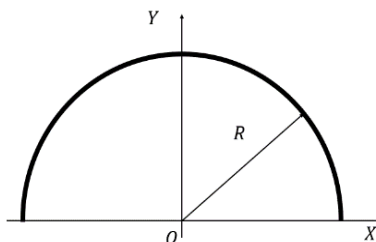


Figura 2.15. Línea semicircular.

Solución.

Dado que la línea es simétrica con respecto al eje y , el centroide se encuentra en el eje y . Para determinar $\bar{y}$ usaremos coordenadas polares con la finalidad de realizar la integración. Calculando el centroide con respecto al origen del sistema de coordenadas consideramos θ como se muestra en la figura 2.16 y dándole a θ un incremento $d\theta$ obtenemos un elemento diferencial de línea $dL = R d\theta$, tenemos que las coordenadas cartesianas están dadas por $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$

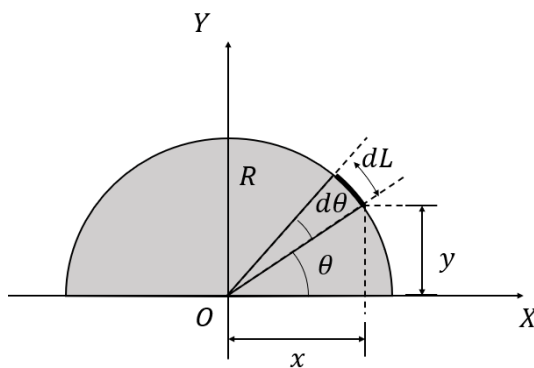


Figura 2.16. Elemento diferencial de línea $dL = R d\theta$.

El centroide está dado por

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dL}{\int dL}$$

Calculamos la longitud de la línea

$$L = \int dL = \int_0^{\pi} R d\theta = R\pi \text{ pies} = 2\pi \text{ ft}$$

Procedemos a calcular la integral

$$\int \tilde{y} dL = \int_0^{\pi} R^2 \sin \theta d\theta = 2R^2 ft^2 = 8 ft^2$$

Por lo tanto, las coordenadas del centroide están dadas por $\bar{y} = \frac{8 ft^2}{2\pi ft} = \frac{4}{\pi} \text{ ft}$ y $\bar{x} = 0$.

$$C = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{4}{\pi}\right) \text{ ft.}$$

Ejemplo 6. Calcular el centroide la placa de la figura 2.16.

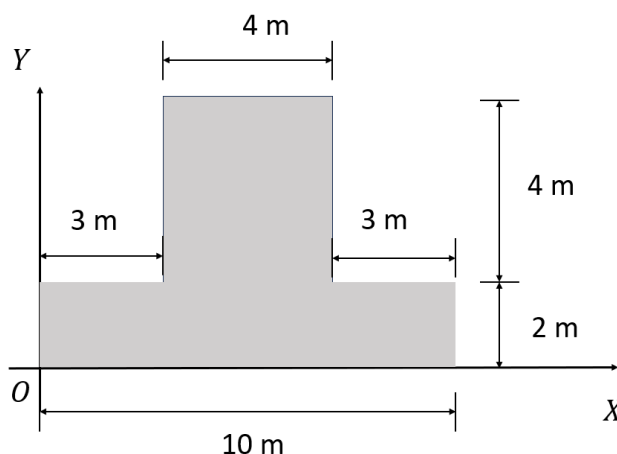


Figura 2.16. Placa compuesta

Solución. Consideramos la placa como una placa compuesta por dos partes, una que es un rectángulo de lado de 10 m y de ancho 2 m y la otra que es un cuadrado de lado 4 m. Por lo que el área total está dada por

$$A_T = A_1 + A_2 = (10 \text{ m} \times 2 \text{ m}) + (4 \text{ m})^2 = 36 \text{ m}^2$$

Donde A_1 es el área del rectángulo y A_2 es el área del cuadrado.

Considerando la tabla del apéndice A, tenemos que el centroide del rectángulo con respecto al origen está dado por

$$C_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (5, 1) \text{ m.}$$

El centroide del cuadrado con respecto al origen de coordenadas está dado por.

$$C_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (5, 4) \text{ m.}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centroide de la placa están dadas por.

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(5 \text{ m})(20 \text{ m}^2) + (5 \text{ m})(16 \text{ m}^2)}{36 \text{ m}^2} = \frac{180 \text{ m}^2}{36 \text{ m}^2} = 5 \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(1 \text{ m})(20 \text{ m}^2) + (4 \text{ m})(16 \text{ m}^2)}{36 \text{ m}^2} = \frac{180 \text{ m}^2}{36 \text{ m}^2} = \frac{7}{3} \text{ m.}$$

Entonces el centroide de la placa está dado por:

$$C = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(5, \frac{7}{3}\right) \text{ m.}$$

2.3. Momento de inercia

Para calcular los momentos de inercia de un área, se utilizan integrales de forma similar a las que se utilizaron para determinar el centroide de un área. Sea el área A y el diferencial de área correspondiente dA , como se muestra en la figura 2.17 en el plano XY .

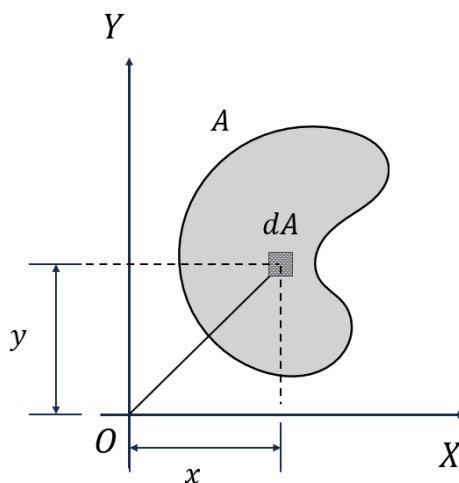


Figura 2.17. Placa de área A en el plano XY .

Definimos cuatro momentos de inercia del área A de la forma siguiente:

Momento de inercia de área con respecto al eje X

$$I_x = \int y^2 dA \dots \dots \dots (2.19)$$

Donde y es la ordenada del elemento diferencial de área dA

Momento de inercia de área con respecto al eje Y .

$$I_y = \int x^2 dA \dots \dots \dots (2.20)$$

Donde x es la coordenada x del elemento diferencial de área dA

Producto de inercia

$$I_{xy} = \int xy dA \dots \dots (2.21)$$

Momento polar de inercia

$$I_o = \int r^2 dA \dots \dots (2.22)$$

Donde r es la distancia radial del origen de coordenadas al elemento diferencial de área dA .

Ejemplo 1. Determine los momentos de inercia de área I_x e I_y de la placa de la figura 2.18.

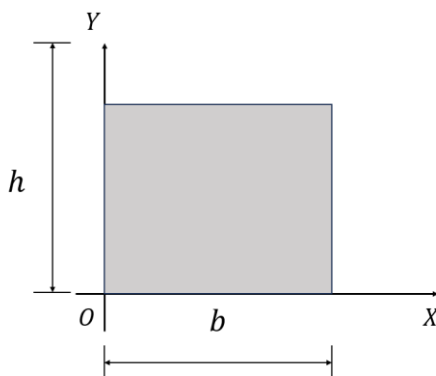


Figura 2.18. Placa rectangular.

Solución. Sabemos que los momentos de inercia de área con respecto a los ejes coordenados están dados por

$$I_x = \int y^2 dA, I_y = \int x^2 dA$$

Desarrollando y calculando las integrales tenemos:

$$I_x = \int_0^b \int_0^h y^2 dy dx = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \int_0^b \int_0^h x^2 dy dx = \frac{hb^3}{3}$$

Ejemplo 2. Determine los momentos de inercia de área I_x , I_y , I_{xy} y el momento polar de inercia de la placa de la figura 2.19.

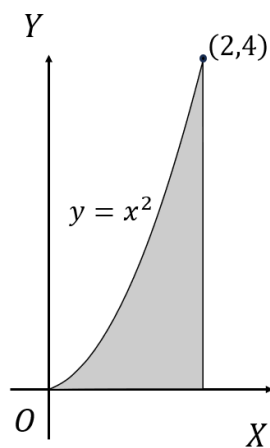


Figura 2.19. Placa irregular

Solución. Sabemos que los momentos de inercia de área y el momento polar de inercia están dados por $I_x = \int y^2 dA$, $I_y = \int x^2 dA$, $I_{xy} = \int xy dA$ y $I_o = \int r^2 dA$.

Desarrollando y calculando las integrales tenemos:

$$I_x = \int_0^2 \int_0^{x^2} y^2 dy dx = \frac{128}{21}$$

$$I_y = \int_0^2 \int_0^{x^2} x^2 dy dx = \frac{32}{5}$$

$$I_{xy} = \int xy dA = \int_0^2 \int_0^{x^2} xy dy dx = \frac{32}{3}$$

$$\begin{aligned}
 I_O &= \int r^2 dA = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy dx \\
 &= \int_0^2 \int_0^{x^2} x^2 dy dx + \int_0^2 \int_0^{x^2} y^2 dy dx \\
 &= I_x + I_y = \frac{1312}{105}
 \end{aligned}$$

Teorema de los ejes paralelos.

El teorema de los ejes paralelos nos permite determinar el momento de inercia de masa de un cuerpo respecto a cualquier eje si se tiene el momento de inercia de masa respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de masa del cuerpo como se muestra en la figura 2.20. Considerando que conocemos el momento de inercia de masa I_{cm} respecto a un eje A que pasa por el centro de masa de un cuerpo y se desea determinar su momento de inercia de masa I_O Respecto a un eje paralelo A_O como se muestra en la figura 2.21.

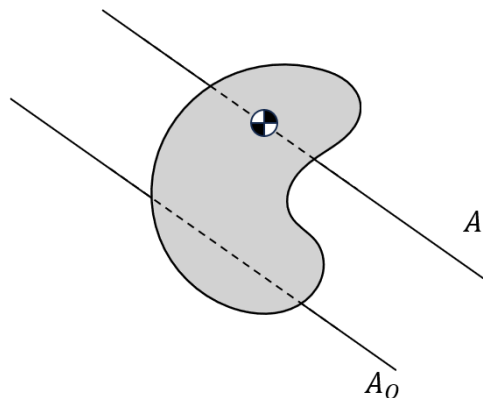


Figura 2.20. Eje A que pasa por el centro de masa de un cuerpo y eje paralelo A_O .

Considerando los sistemas de coordenadas X, Y, Z y X', Y', Z' paralelos como se muestra en la figura 2.21.

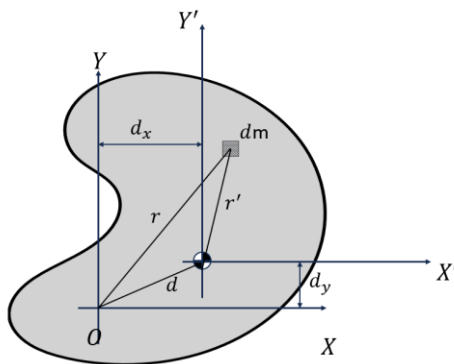


Figura 2.21. Sistemas de coordenadas paralelos

Para determinar I_O respecto a un eje paralelo A_O consideramos sistemas de coordenadas paralelos XYZ y $X'Y'Z'$, con el eje Z a lo largo de A_O y el eje Z' a lo largo de A , como se muestra en la figura b), en este caso los ejes A y A_O son perpendiculares a los planos XY y $X'Y'$ respectivamente. Los términos d_x y d_y son las coordenadas del centro de masa con respecto al sistema de coordenadas XYZ .

Partiendo de la definición de momento de inercia de masa, tenemos que el momento de inercia de masa con respecto al eje A_O está dado por

$$I_O = \int r^2 dm = \iint (x^2 + y^2) dm \dots \dots (2.23)$$

Donde r es la magnitud del vector que va del origen de coordenadas XYZ al diferencial dm en el plano XY y es perpendicular a A_O . Las coordenadas (x, y) del diferencial de masa dm están relacionadas con las coordenadas (x', y') por las expresiones siguientes:

$$x = x' + d_x \quad , \quad y = y' + d_y \dots \dots \dots (2.24)$$

sustituyendo estas expresiones 2.24 en 2.23 tenemos.

$$I_O = \int ((x')^2 + (y')^2) dm + 2d_x \int x' dm + 2d_y \int y' dm + (d_x^2 + d_y^2) dm \dots (2.25)$$

Como $(x')^2 + (y')^2 = (r')^2$, donde r' es la magnitud del vector que va del centro de masa de la placa al diferencial de masa dm en el sistema de coordenadas $X'Y'$ y es perpendicular al eje de giro A , la primera integral de la derecha es el momento de inercia I del cuerpo respecto al eje de giro A y considerando que las coordenadas x' y y' del centro de masa relativas al sistema de coordenadas $X'Y'Z'$ está definido por

$$\bar{x}' = \frac{\int x' dm}{\int dm}, \quad \bar{y}' = \frac{\int y' dm}{\int dm} \dots \dots \dots (2.26)$$

como las coordenadas del centro de masa con respecto al sistema de coordenadas $X'Y'Z'$ son $\bar{x}' = 0$ y $\bar{y}' = 0$. Por lo tanto, el segundo y tercer sumando de la ecuación 2.25 valen cero. De la figura 2.21 se ve que $d_x^2 + d_y^2 = d^2$ donde d es la distancia perpendicular entre los ejes A y A_0 , entonces se obtiene que:

$$I_0 = I + d^2 M \dots \dots (2.27)$$

donde M es la masa total del cuerpo. La ecuación 2.27 se le conoce como el teorema de los ejes paralelos el cual se interpreta de la forma siguiente: si se conoce el momento de inercia de masa cuando un cuerpo gira alrededor de un eje que pasa por el centro de masa del cuerpo y es perpendicular al plano de la placa, se puede encontrar el momento de inercia de masa del cuerpo, cuando el cuerpo gira alrededor de otro eje A_0 que es paralelo al eje que pasa por el centro de masa del cuerpo, donde d es la distancia perpendicular entre los ejes de giro.

Ejemplo 3. Determine el momento de inercia de masa de la placa de forma cuadrangular de masa M y de lado a , como se muestra en la figura 2.22 cuando la placa gira alrededor de un eje que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la placa.

b) cuando el eje de giro pasa por el centro de masa de la placa y es perpendicular a la placa.

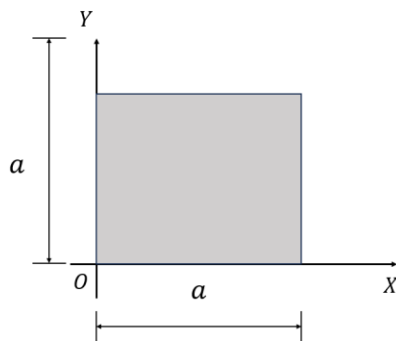


Figura 2.22. Placa cuadrangular.

Solución. considerando las unidades de magnitudes en el sistema internacional y considerando el apéndice A, tenemos que el área y el centro de masa está dado por:

$$A = a^2 \text{ m}^2 \quad y \quad C_m = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \text{ m}.$$

Sabemos que el momento de inercia de masa, cuando el eje de giro pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la placa está dado por:

Por lo tanto, desarrollando la integral tenemos:

$$\begin{aligned} I_O &= \frac{M}{A} \iint (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \frac{M}{a^2} \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_0^a dx = \frac{2}{3} M a^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Para calcular el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a la placa, utilizamos el teorema de los ejes paralelos, de la forma siguiente:

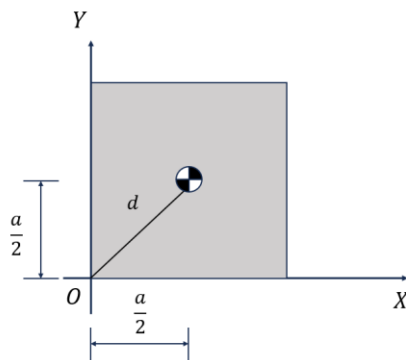


Figura 2.23. Centro de masa de la placa cuadrangular

De la figura tenemos que $C_m = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ m y d es la distancia entre el punto O y el centro de masa C_m .

Por el teorema de los ejes paralelos y el teorema de Pitágoras tenemos:

$$I_o = I_{C_m} + Md^2$$

Donde:

$$d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \text{ m}^2$$

Aplicando una vez más el teorema de ejes paralelos calculamos el momento de inercia de masa cuando la placa gira alrededor del eje que pasa por el centro de masa.

$$I_{C_m} = I_o - Md^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{1}{2}Ma^2\right) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = \frac{1}{6}Ma^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ejemplo 4. Se tiene una placa rectangular de base 4 m y altura de 10 m con una masa de 2 kg, como se muestra en la figura 2.24. Determine el momento de inercia de masa cuando la placa gira alrededor de un eje que es perpendicular a la placa y pasa:

a) Por el origen de coordenadas.

b) Por un punto A que está en el punto medio del lado superior de la placa.

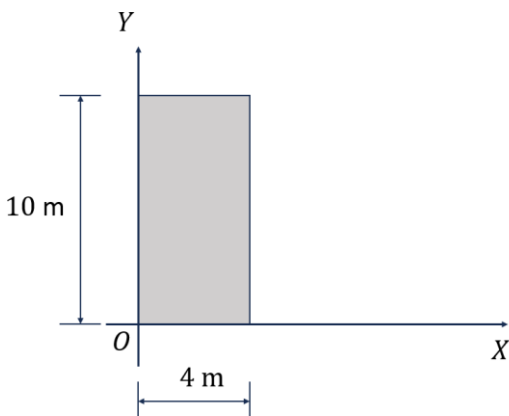


Figura 2.24. Placa rectangular.

Considerando el apéndice A tenemos que el área y el centro de masa de la placa están dados por:

$$A = b \times h = (4 \text{ m})(10 \text{ m}) = 40 \text{ m}^2.$$

$$C_m = \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) = (2, 5) \text{ m}.$$

Sabemos que el momento de inercia de masa, cuando el eje de giro pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la placa, está dado por:

$$I_o = \frac{M}{A} \iint (x^2 + y^2) dydx$$

Por lo tanto, desarrollando la integral tenemos:

$$I_o = \frac{M}{A} \int_0^4 \int_0^{10} (x^2 + y^2) dydx$$

$$I_o = \frac{2 \text{ kg}}{40 \text{ m}^2} \int_0^4 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_0^{10} dx$$

$$I_O = \frac{1}{20} \int_0^4 \left(10x^2 + \frac{1000}{3} \right) dx \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_O = \frac{232}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Para calcular el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el punto A y es perpendicular a la placa utilizamos el teorema de los ejes paralelos de la forma siguiente:

De la figura 2.25, tenemos que $C_m = (2,5) \text{ m}$ y d es la distancia del punto O al centro de masa, así como d_1 , es la distancia del centro de masa al punto A.

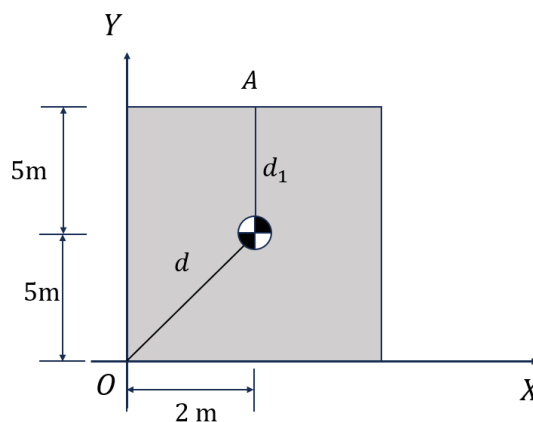


Figura 2.25. Centro de masa de la placa rectangular

Por el teorema de los ejes paralelos y el teorema de Pitágoras tenemos:

$$I_O = I_{C_m} + md^2$$

Donde: $d^2 = (2 \text{ m})^2 + (5 \text{ m})^2 = 29 \text{ m}^2$

$$I_{C_m} = I_O - md^2 = \frac{232}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - (2 \text{ kg})(29 \text{ m}^2) = \frac{58}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Para calcular el momento de inercia de masa cuando la placa gira alrededor del eje que pasa por el punto A volvemos a utilizar el teorema de los ejes paralelos de la forma siguiente:

$$I_A = I_{C_m} + md_1^2 = \left(\frac{58}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2\right) + (2 \text{ kg})(5 \text{ m})^2 = \frac{208}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ejemplo 5. Tiene una placa semicircular de radio de 1 m, con una masa de 4 kg como se muestra en la figura 2.26. Determine el momento de inercia de masa cuando la placa gira alrededor de un eje que es perpendicular a la placa y pasa por el perno A y por el centro de masa.

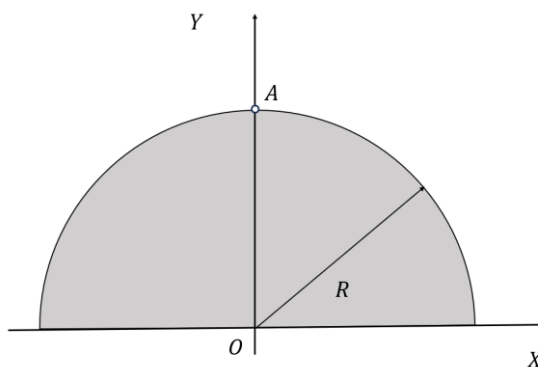


Figura 2.26. Placa semicircular.

Solución. Considerando el apéndice A tenemos que el área y el centro de masa de la placa está dado por

$$A = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{2}(1 \text{ m})^2 = \frac{\pi}{2} \text{ m}^2.$$

$$C_m = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right) = \left(0, \frac{4}{3\pi}\right) \text{ m} = (0, 0.4244)\text{m}.$$

El momento de inercia de masa cuando el eje de giro pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la placa, está dado por:

$$I_o = \frac{M}{A} \iint (x^2 + y^2) dydx$$

Desarrollando la integral tenemos.

$$I_O = \frac{M}{A} \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (x^2 + y^2) dy dx$$

Planteando la integral en coordenadas polares tenemos

$$I_O = \frac{4 \text{ kg}}{\frac{\pi}{2} \text{ m}^2} \int_0^\pi \int_0^1 ((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2) r dr d\theta$$

$$I_O = \frac{8 \text{ kg}}{\pi \text{ m}^2} \int_0^\pi \int_0^1 r^3 dr d\theta = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Para el cálculo del momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a la placa utilizamos el teorema de los ejes paralelos de la forma siguiente:

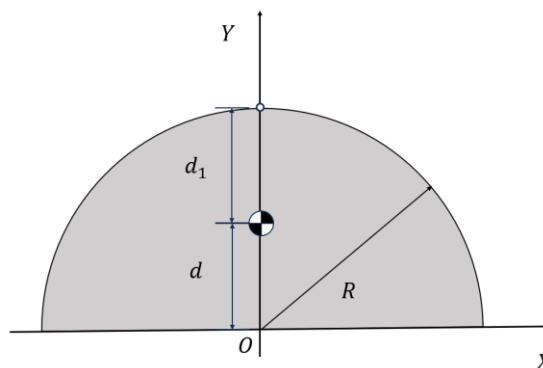


Figura 2.27. Centro de masa de placa semicircular.

De la figura 2.27, tenemos que $C_m = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right) = \left(0, \frac{4}{3\pi}\right) \text{ m} = (0, 0.4244) \text{ m}$. y d es la distancia del centro de masa al punto O y d_1 es la distancia del centro de masa y el punto A.

Por el teorema de los ejes paralelos tenemos

$$I_O = I_{C_m} + md^2$$

De donde $I_{C_m} = I_O - md^2 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - (4 \text{ kg})(0.4244 \text{ m})^2 = 1.28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Para el cálculo del momento de inercia de masa cuando la placa gira alrededor de un eje que pasa por el punto A, volvemos a utilizar el teorema de los ejes paralelos de la forma siguiente:

$$d_1 = R - d = 1 \text{ m} - (0.4244 \text{ m}) = 0.5756 \text{ m}$$

$$I_A = I_{C_m} + md_1^2 = 1.28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + (4 \text{ kg})(0.5756 \text{ m})^2 = 3.58 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ejemplo 6. Una placa de forma circular de radio de 3 ft y de peso 16 lb gira alrededor de un eje que pasa por el punto A y es perpendicular a la placa, como se muestra en la figura 2.28. Determine el momento de inercia de masa de la placa

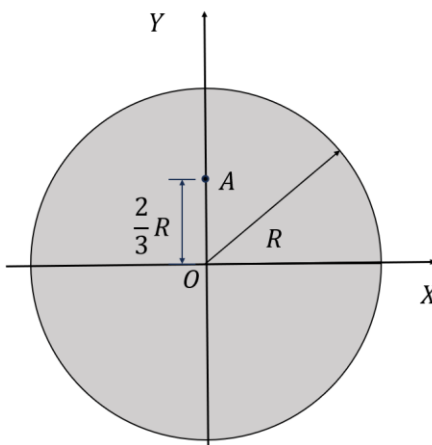


Figura 2.28. Placa circular de radio R.

Solución.

Considerando el apéndice A tenemos que el área y el centro de masa de la placa están dados por

$$A = \pi R^2 = \pi(3 \text{ ft})^2 = 9\pi \text{ ft}^2 \quad , \quad C_m = (0,0) \text{ ft.}$$

Considerando que el momento de inercia de masa cuando el eje de giro pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la placa, está dado por:

$$I_O = \frac{M}{A} \iint (x^2 + y^2) dydx$$

Desarrollando la integral tenemos

$$I_O = \frac{M}{A} \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (x^2 + y^2) dydx$$

Planteando la integral en coordenadas polares y calculando la masa del bloque tenemos:

$$\begin{aligned} I_O &= \frac{W}{gA} \int_0^\pi \int_0^3 ((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2) r dr d\theta \quad I_O = \frac{16 \text{ lb}}{32 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} 9 \text{ ft}^2} \int_0^\pi \int_0^3 r^3 dr d\theta \\ &= \frac{1}{18 \pi} \frac{\text{slug}}{\text{ft}^2} \int_0^\pi \int_0^3 r^3 dr d\theta = \frac{9}{8} \text{ slug} \cdot \text{ft}^2. \end{aligned}$$

Como el centro de masa de la placa es el origen de coordenadas, entonces para calcular el momento de inercia de masa con respecto al eje que pasa por el punto A y es perpendicular a la placa, utilizaremos el teorema de los ejes paralelos de la forma siguiente:

$$I_A = I_{c_m} + md^2 = \frac{9}{8} \text{ slug} \cdot \text{ft}^2 + \left(\frac{1}{2} \text{ slug}\right) (2 \text{ ft})^2 = \frac{25}{8} \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

Ejemplo 7. Dada la varilla de longitud L y de masa M , como se muestra en la figura (). Determina el momento de inercia de masa cuando la varilla gira alrededor de un eje que pasa por el centro de masa de la varilla y es perpendicular al plano XY .

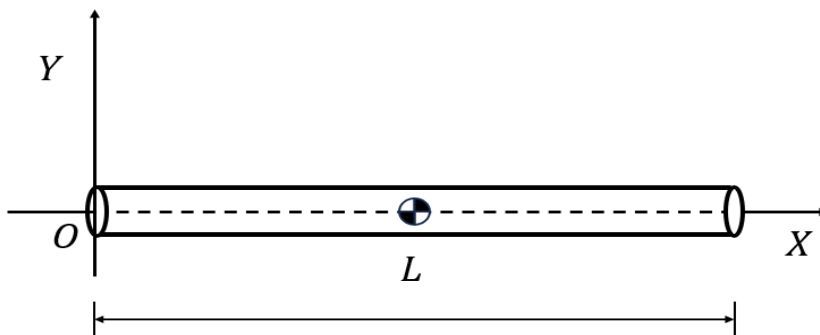


Figura 2.29. Centro de masa de una varilla de longitud L .

Solución. Considerando el apéndice A tenemos que las coordenadas del centro de masa de la varilla están dadas por

$$c_m = \left(\frac{L}{2}, 0\right)$$

Considerando que el momento de inercia de masa cuando el eje de giro pasa por el origen y es perpendicular al plano XY está dado por:

$$I_o = \frac{M}{L} \int x^2 dx = \frac{ML^2}{3}$$

Para calcular el momento de inercia de masa con respecto al eje de giro que pasa por el centro de masa utilizamos el teorema de los ejes paralelos de la forma siguiente:

$$I_{c_m} = I_o - md^2$$

Donde:

$$I_{c_m} = \frac{ML^2}{3} - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12}.$$

2.4. Momento de una fuerza

El momento de fuerza, también conocido como torque, se define vectorialmente como el producto cruz entre el vector de posición $\vec{r}$ y el vector fuerza $\vec{F}$, como se ilustra en la figura 2.30.

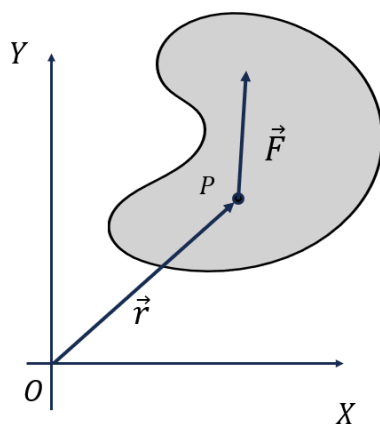


Figura 2.30. Placa sobre la cual actúa un momento de fuerza.

Matemáticamente el momento de fuerza este dado por la ecuación 2.28.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \tau_x \hat{i} + \tau_y \hat{j} + \tau_z \hat{k} \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

Donde:

$\vec{\tau}$: es el vector momento de fuerza (torque)

$\vec{r}$: es el vector de posición que va desde el punto donde pasa el eje de rotación al punto de aplicación de la fuerza.

$\vec{F}$: es el vector de fuerza aplicada

El momento de fuerza, tiene varias propiedades importantes, algunas de ellas son las siguientes.

Carácter vectorial: El momento de una fuerza es un vector que tiene magnitud, dirección y sentido. La magnitud del vector está dada por

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2} \dots\dots\dots (2.29)$$

La dirección del vector $\vec{\tau}$ está dada por los cosenos directores como se muestra en la figura 2.31

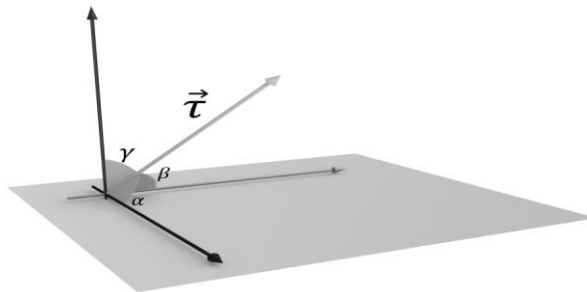


Figura 2.31. Dirección del momento de fuerza.

Donde:

$$\alpha = \frac{\tau_x}{\tau}, \beta = \frac{\tau_y}{\tau}, \gamma = \frac{\tau_z}{\tau} \dots\dots\dots (2.30)$$

El momento de fuerza es un vector que es perpendicular al plano en que se encuentra los vectores de posición $\vec{r}$ y el vector fuerza $\vec{F}$, como se muestra en la figura 2.32.

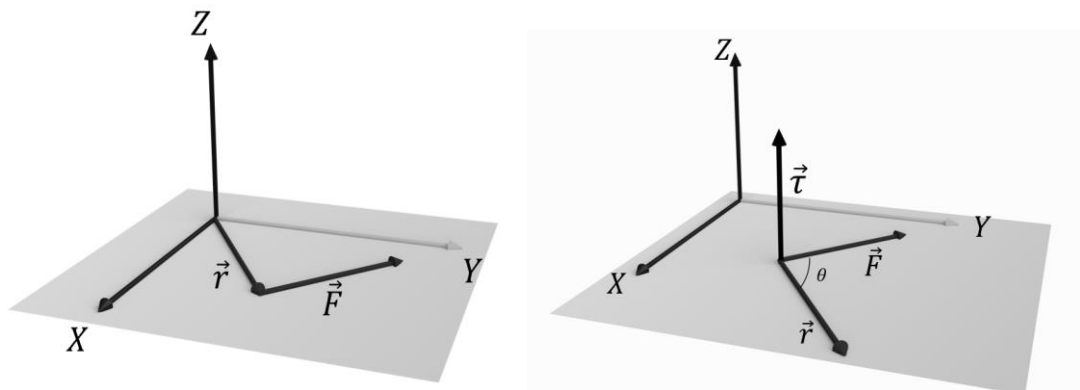


Figura 2.32. Vector momento de fuerza $\vec{\tau}$.

Donde θ es el ángulo entre los vectores de posición $\vec{r}$ y el vector $\vec{F}$.

Si $\theta = 90^\circ$ el momento es máximo.

Si $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$ el momento vale cero.

Si $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ el sentido del vector es positivo.

Si $\theta > 180^\circ$ el sentido del vector es negativo.

2. Efecto de palanca. El momento de fuerza tiende a causar rotación alrededor de un punto o eje. Cuando mayor sea la magnitud del momento, mayor será el efecto de palanca para producir rotación.

3.- Dependencia del punto de aplicación: El momento de fuerza depende del punto de aplicación de la fuerza y del punto de rotación. Cambiar el punto de aplicación de la fuerza puede afectar el momento resultante.

4.- Signo y sentido: El momento de fuerza puede tener un signo positivo o negativo dependiendo de la orientación. Un momento positivo tiende a causar rotación en sentido horario, mientras que un momento negativo tiende a causar rotación en sentido antihorario.

5.- Unidades de medida: Las unidades de medidas del momento de fuerza en el sistema internacional son Nm y en el sistema ingles son $lb\ ft$.

Principio de Superposición de Momentos

El principio de superposición de momentos de fuerza establece que el momento total o resultante causado por varias fuerzas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio es la suma vectorial de los momentos individuales generado por cada fuerza por separado.

El principio es válido siempre que las fuerzas y momentos se combinen de acuerdo con las reglas del álgebra vectorial.

Las unidades de medida del momento de fuerza en el sistema internacional son $N \cdot m$ y en el sistema inglés son $lb \cdot ft$.

Matemáticamente, se tienen varias fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ que actúan sobre n puntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ del mismo cuerpo ubicados por los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ respectivamente como se muestra en la figura 2.33.

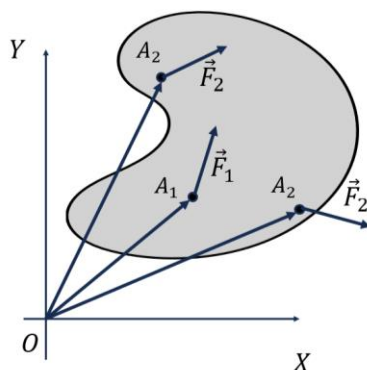


Figura 2.33. Momentos de fuerza $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \dots, \vec{\tau}_n$

Si $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \dots, \vec{\tau}_n$ son los momentos de fuerza individuales generados por cada una de las fuerzas en el punto correspondiente, entonces el momento total $\vec{\tau}_{total}$ es la suma vectorial de los momentos de cada fuerza.

$$\vec{\tau}_{total} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots + \vec{\tau}_n \dots (2.31)$$

Este principio es particularmente útil en el análisis de sistemas mecánicos donde varias fuerzas actúan simultáneamente. Permite simplificar el análisis al considerar cada fuerza y su momento de fuerza por separado antes de combinar los resultados para determinar el estado de equilibrio o la respuesta del sistema en términos de rotación.

Ejemplo 1. Dada la llave como se muestra en la figura 2.34a. Determine el momento de fuerza cuando la llave gira alrededor de un eje que pasa por el punto O .

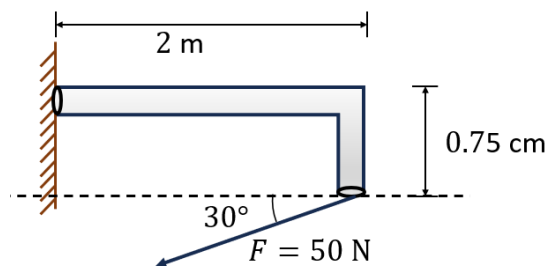


Figura 2.34a. Tubería sobre la cual actúa la fuerza F .

Solución.

Sabemos que:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \tau_x \hat{i} + \tau_y \hat{j} + \tau_z \hat{k}$$

Obtenemos $\vec{r}$ y $\vec{F}$ en componentes rectangulares, considerando la figura 2.35 tenemos:

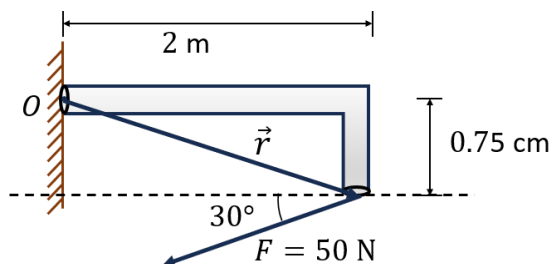


Figura 2.35 b. Tubería sobre la cual actúa la fuerza F .

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = (2, -0.75, 0) \text{ m} \text{ y } \vec{F} = (-50 \cos 30^\circ, -50 \sin 30^\circ, 0) \text{ N} = (-43.3, -25, 0) \text{ N}$$

El momento de fuerza está dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -0.75 & 0 \\ -43.3 & -25 & 0 \end{vmatrix} = -82.48 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Ejemplo 2. Determine el momento de fuerza resultante de las fuerzas $F_1=6\text{N}$ y $F_2=30\text{N}$ que actúan sobre la estructura que se muestra en la figura 2.36a cuando esta gira alrededor del eje que pasa por el punto A.

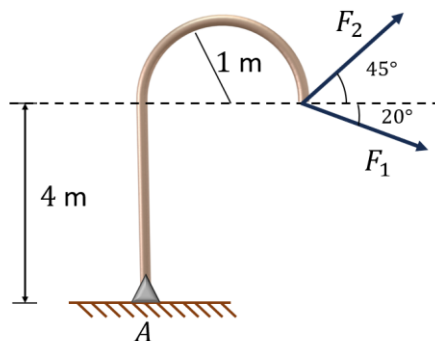


Figura 2.36a. Estructura con parte superior semicircular.

Solución.

Sabemos que:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau}_{total} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2.$$

Obtenemos los vectores $\vec{r}$, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ en sus componentes rectangulares; considerando la figura 2.36b.

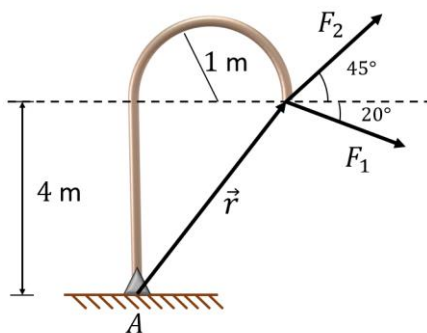


Figura 2.36b. Estructura con parte superior semicircular.

Con respecto del punto A tenemos:

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = (2, 4, 0)\text{m} ; \vec{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}) = (6 \cos 20^\circ, -6 \sin 20^\circ, 0) = (5.63, -2.05, 0) \text{ N}$$

$$\text{y } \vec{F}_2 = (F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}) = (30 \cos 45^\circ, 30 \sin 45^\circ, 0) = (21.21, 21.21, 0) \text{ N}$$

Los momentos de fuerza de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ respectivamente son:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 5.63 & -2.05 & 0 \end{vmatrix} = 26.62\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 21.21 & 21.21 & 0 \end{vmatrix} = -42.42\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

El momento total es:

$$\vec{\tau}_{total} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = (26.62 - 42.42)\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m} = -15.8 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

2.5. Introducción a la dinámica del cuerpo rígido en el plano

Un cuerpo rígido puede tener dos tipos de movimiento, ya sea por separado o de forma simultánea: el movimiento de traslación y el movimiento de rotación. El cambio de posición con respecto a un sistema de referencia se le conoce como movimiento. y el cambio de orientación con respecto a un sistema de referencia se le conoce como movimiento de rotación y consiste en el efecto de rotar con respecto a un eje fijo.

Rotación en torno a un eje fijo

Tenemos un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo que en este caso coincide con el eje Z. Podemos observar que mientras dura el movimiento rotacional cada punto del cuerpo permanece a una distancia dado del eje X y se mueve describiendo una trayectoria circular con

centro en el origen de coordenadas y por el cual pasa el eje fijo Z como se muestra en la figura 2.37a.

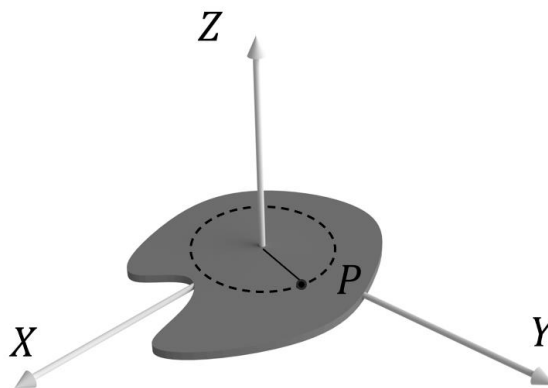


Figura 2.37 a. Placa colocada en el plano XY y que gira alrededor del eje Z .

Para el análisis del movimiento tomamos una vista frontal en el plano XY , considerando un punto P del cuerpo como si tomáramos una partícula del cuerpo. Como se muestra en la figura 2.37 b.

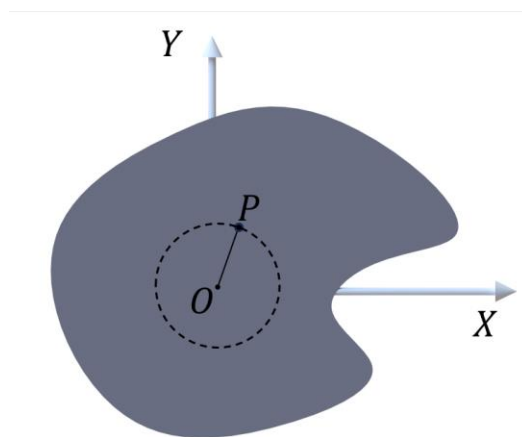


Figura 2.37 b. Placa colocada en el plano XY y que gira alrededor del eje Z .

Como podemos ver en la figura se muestra el cuerpo rígido de rotación. Visto desde el eje de rotación. El sistema de coordenadas de tal manera que el eje de rotación está coincidiendo con el eje Z , mientras el movimiento del punto P elegido se realiza en el plano XY , describiendo una trayectoria circular. Mediante el movimiento y el desplazamiento angular, denotado por el ángulo θ que forma el radio vector $\vec{r}$ y el eje X . Generalmente el ángulo θ es medido en radianes en lugar de grados. Definimos al ángulo medido en radianes como la relación que existe entre el arco de curva con el radio r de la trayectoria, esto es

$$\theta = \frac{s}{R} \dots \dots (2.32)$$

Velocidad angular

La velocidad angular promedio se define como el cambio del ángulo θ entre el cambio de tiempo

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \dots \dots \dots (2.33)$$

La velocidad angular instantánea se define como la relación que existe entre el cambio de ángulo y el cambio de tiempo cuando este tiende a cero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \dots \dots (2.34)$$

Si el cuerpo puede girar manteniendo su velocidad angular constante entonces podemos también medir su velocidad angular a través de una magnitud llamada frecuencia angular lineal f o número de revoluciones por segundo donde

$$f = \frac{n}{t} \dots \dots (2.35)$$

n - número de revoluciones y t - tiempo

La frecuencia lineal se mide en Hertz, donde $1 \text{ Hz} = \frac{1}{s}$

La relación que existe entre la frecuencia lineal y frecuencia angular es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \dots \dots \dots (2.36)$$

El tiempo que el cuerpo tarda en realizar una revolución se le llama período, por lo tanto.

$$f = \frac{1}{T} \dots \dots \dots (2.37)$$

Aceleración angular promedio.

La aceleración angular promedio se define como la razón de cambio entre la velocidad angular y el tiempo.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \dots \dots \dots (2.38)$$

La aceleración angular instantánea se define como la razón de cambio entre la velocidad angular y el tiempo cuando este tiende a cero, es decir:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \dots \dots \dots (2.39)$$

Las relaciones entre las magnitudes lineales del movimiento y las angulares se obtienen de la figura 2.38.

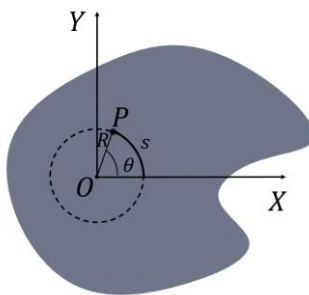


Figura 2.38. Cuerpo rotando alrededor del eje Z

De la figura se muestra que el punto P se desplaza un ángulo θ con respecto al eje X , describe sobre la trayectoria un arco s de circunferencia y la relación que existe entre ellos, cuando θ es medido en radianes es

$$\theta = \frac{s}{R}, \quad s = R\theta \dots \dots \dots (2.40)$$

En el caso cuando el punto P recorre un perímetro de la trayectoria circular entonces $s = 2\pi R$ de donde

$$\theta = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad} \dots \dots \dots (2.41)$$

Entonces podemos decir que la equivalencia entre el ángulo θ medido en radianes y en grados es:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \text{y} \quad 1 \text{ rad} = 57.3^\circ$$

Partiendo de la expresión $s = \theta R$ tenemos que:

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}, \quad v_t = R\omega \dots \dots \dots (2.42)$$

Donde v_t es la velocidad lineal o tangencial de cada punto de la trayectoria, R es el radio de la trayectoria y ω es la velocidad angular de la rotación.

Partiendo de la expresión $v_t = R\omega$ y derivando ambos lados tenemos

$$\frac{dv_t}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}, \quad a_t = R\alpha \dots \dots \dots (2.43)$$

Donde a_t es la aceleración lineal tangencial en cada punto de la trayectoria, R el radio de la trayectoria y α la aceleración angular de la rotación. Además de la aceleración tangencial dirigida a lo largo de la trayectoria circular también tiene una aceleración centrípeta dirigida

hacia el centro del círculo como se muestra en la figura 2.39 y está dada por $a_N = \frac{v_t^2}{R}$, que es equivalente a $a_N = \omega^2 R$.

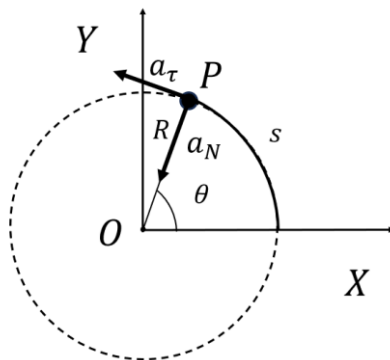


Figura 2.39. Vectores aceleración tangencia y radial.

Por lo tanto, la aceleración del movimiento en cada punto de la trayectoria está dada por

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_N^2} \dots (2.44)$$

Movimiento con aceleración angular constante.

Si un cuerpo rígido gira de tal manera que su aceleración angular es constante entonces la velocidad angular cambia en forma proporcional al transcurrir el tiempo y la velocidad angular tendrá el valor

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha_\tau t \dots \dots \dots (2.45)$$

donde ω_0 es el valor de la velocidad angular inicial y ω es el valor de la velocidad angular final en el intervalo de tiempo t considerado en el análisis.

Para obtener el desplazamiento angular final lo podemos hacer mediante la expresión

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \dots \dots \dots (2.46)$$

También existe otra relación entre la aceleración angular, las velocidades y los desplazamientos angulares que es la siguiente

$$\alpha(\theta - \theta_0) = \frac{1}{2}(\omega_f^2 - \omega_0^2) \dots \dots \dots (2.47)$$

De las ecuaciones anteriores podemos observar que existe una analogía entre las ecuaciones del movimiento lineal y el movimiento rotacional de un cuerpo rígido. En la tabla 2.1, se muestran dichas analogías.

Movimiento de traslación	Movimiento de rotación
$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
$v_f = v_0 + at$	$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$
$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta_f = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$a(x_f - x_0) = \frac{1}{2}(v_f^2 - v_0^2)$	$\alpha(\theta_f - \theta_0) = \frac{1}{2}(\omega_f^2 - \omega_0^2)$

Tabla 2.1 tabla de analogías entre cantidades lineales y angulares

Segunda ley de Newton para el movimiento rotacional.

Partiendo de la Segunda ley de Newton para el movimiento lineal la cual dice, que cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo de masa m , provocándole una aceleración lineal a , la magnitud es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza e inversamente proporcional a la masa del cuerpo. La expresión matemática de la segunda ley de Newton es

$$F = ma \quad \dots \dots (2.48)$$

Considerando lo anterior podemos obtener la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional de un cuerpo rígido.

Si consideramos un cuerpo rígido en rotación como un conjunto de pequeñas masas particulares de masa m_i y el cuerpo esta sometido a fuerzas externas F_i en cada partícula de masa m_i , tomada al azar en cada punto P del cuerpo, como se muestra en la figura 2.40.

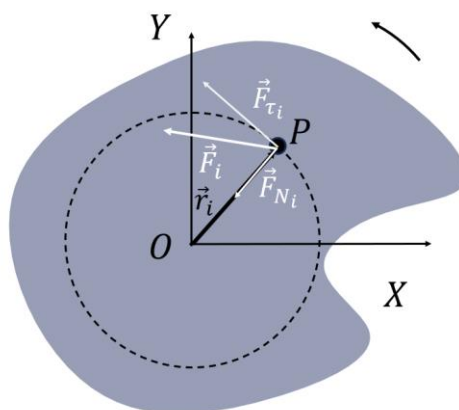


Figura 2.40. Cuerpo rígido rotando alrededor del eje Z .

En la figura 2.40 se puede observar que cuando una fuerza $\vec{F}_i$ que actúa en un punto P donde hay una parte de la masa del cuerpo considerándose como una partícula de posición $\vec{r}$ con respecto al eje por donde pasa el eje de giro. Toda fuerza $\vec{F}_i$ se puede descomponer en su componente $\vec{F}_{\tau_i}$ tangencial y su componente normal $\vec{F}_{N_i}$.

Se puede observar que la componente $\vec{F}_{N_i}$ no contribuye al movimiento de rotación ya que su línea de acción pasa por el punto de origen de coordenadas, es decir pasa por el eje de giro Z y por lo tanto el momento de fuerza vale cero, y solamente la componente tangencial $\vec{F}_{\tau_i}$ produce el giro ya que $\vec{F}_{\tau_i}$ y el vector posición $\vec{r}$ son perpendiculares, el momento de fuerza que produce el giro esta dado por $\tau_i = r_i F_{\tau_i}$.

También si consideramos que para cualquier masa m_i sobre la cual actúa la fuerza tangencial F_{τ_i} , esta le produce una aceleración lineal o tangencial y la relación entre ellas esta dada por la segunda ley de Newton para el movimiento lineal dado por.

$$F_{\tau_i} = m_i a_{\tau_i} \dots \dots (2.49)$$

multiplicando por r_i ambos miembros de la ecuación anterior tenemos:

$$r_i F_{\tau_i} = r_i m_i a_{\tau_i} \dots \dots \dots (2.50)$$

Por lo tanto, considerando la definición de momento de fuerza τ y aplicándolo en este caso la ecuación anterior queda de la forma.

$$\tau_i = r_i m_i a_{\tau_i} \dots \dots \dots (2.51)$$

Considerando la relación entre la aceleración lineal a_{τ_i} y la aceleración angular α_i donde $a_{\tau_i} = r_i \alpha_i$, entonces tenemos:

$$\tau_i = r_i^2 m_i \alpha_i \dots \dots \dots (2.52)$$

Sumamos todos los momentos de fuerza que actúan sobre cada masa m_i hasta cubrir todo el cuerpo sólido tenemos

$$\sum_{i=1}^n \tau_i = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i \alpha_i \dots \dots (2.53)$$

donde $\sum_{i=1}^n \tau_i$ representa el momento de fuerzas neto o total externo y $\sum_{i=1}^n r_i^2 m_i \alpha_i$ representa al momento de inercia neto del cuerpo sólido, multiplicada por la aceleración angular neta que experimenta el cuerpo al rotar, por lo tanto, la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional es de la forma

$$\tau_{neto} = I \alpha \dots \dots \dots (2.54)$$

De la ecuación anterior tenemos que el momento de fuerza o torsión neto que actúa sobre un cuerpo rígido es proporcional a su aceleración angular, donde la proporción está dada por el momento de inercia.

Ejemplo 1. En un automóvil una de sus llantas tarda desde que el automóvil arranca 20 segundos en alcanzar una velocidad de $500 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$. ¿Cuál es la aceleración angular del automóvil? ¿Cuál es la aceleración tangencial de automóvil? Si el radio de la llanta es de 20 cm.

Datos	Conversión
$\omega_f = 500 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$	$\omega_f = 500 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}$
$\omega_0 = 0 \text{ rad/s}$	$\omega_f = 52.36 \text{ rad/s}$
$t = 5 \text{ s}$	$R = 0.2 \text{ m}$
$R = 20 \text{ cm}$	

Solución.

De la relación

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha_\tau t$$

se tiene

$$\alpha = \frac{\omega_f}{t} = \frac{52.36 \text{ rad/s}}{5 \text{ s}} = 10.47 \text{ rad/s}^2$$

Para la aceleración tangencial

$$\begin{aligned} a_\tau &= R\alpha = (0.2 \text{ m}) \left(10.47 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) \\ &= 2.09 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Un disco de masa de 300 gr y radio de 20 cm que gira en un tornamesa, partiendo del reposo con una aceleración angular constante de 5 rad/s^2 . Determine:

- a) La velocidad lineal del disco a los 10 segundos.
- b) La distancia recorrida sobre la trayectoria circular a los 10 segundos.
- c) El torque generado por el tornamesa.

Solución.

Datos

$$m = 300 \text{ gr} = 0.3 \text{ kg}$$

$$R = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m.}$$

$$\theta_0 = 0 \text{ rad}$$

$$\omega_0 = 0 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 5 \text{ rad/s}^2$$

- a) Calculamos la velocidad angular a los 10 s:

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega_f = \alpha t$$

$$\omega_f = \left(5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(10 \text{ s}) = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Calculamos la velocidad lineal

$$v_f = R\omega_f = (0.2 \text{ m})(50 \text{ rad/s}) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- b) Calculamos el ángulo θ_f a los 10 s

$$\theta_f = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\theta_f = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \left(50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) (10 \text{ s})^2 = 250 \text{ rad.}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida a los 10 s es

$$s = R\theta = (0.2 \text{ m})(250 \text{ rad}) = 50 \text{ m}.$$

c) Calculamos el torque generado por el tornamesa

$$\tau = I\alpha$$

Calculando primero el momento de inercia de masa.

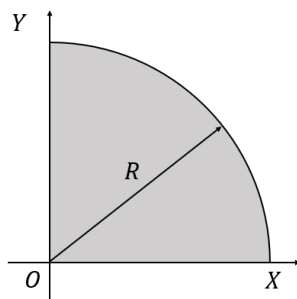
$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(0.3 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2 = 0.006 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto, el torque es:

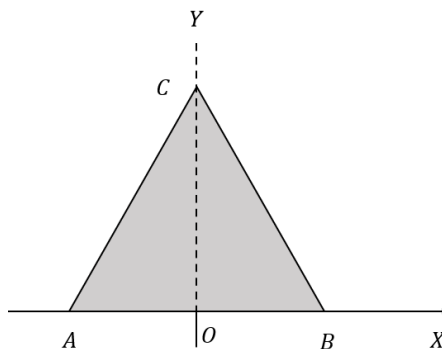
$$\tau = (0.006 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \left(5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) = 0.03 \text{ Nm}$$

2.6. Ejercicios

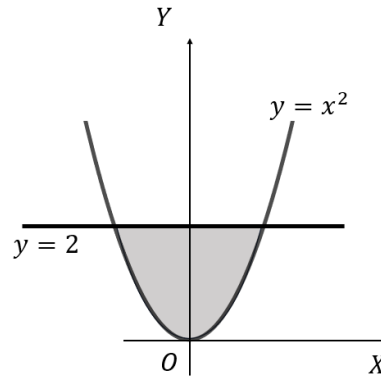
1. Determine el centroide de la placa de la figura, donde $R = 30 \text{ cm}$.



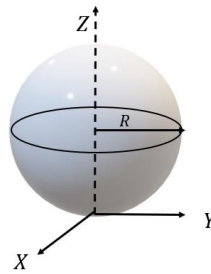
2. Determine el centroide de la placa triangular cuyos vértices son los puntos $A = (-4, 0) \text{ m}$, $B = (4, 0) \text{ m}$, $C = (0, 8) \text{ m}$.



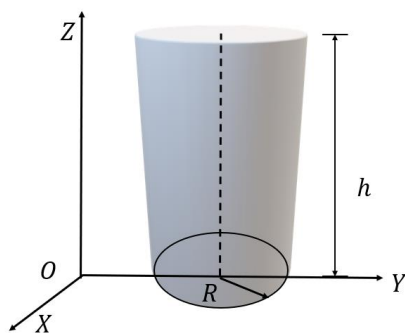
3. Determine el centroide de la placa que se forma entre la línea y la curva de la figura.



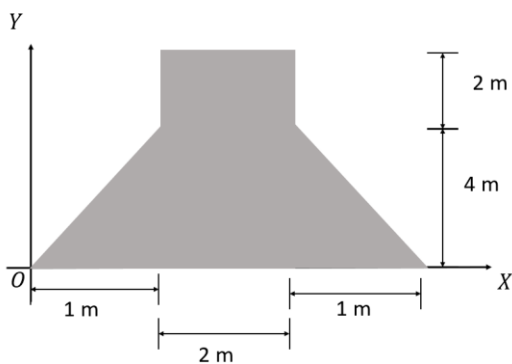
4. Calcule el centro de masa de la esfera sólida homogénea de masa total 20 kg y de radio de 4 m, como se muestra en la figura.



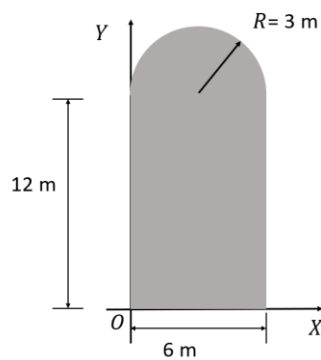
5. Determine el centroide del cilindro de radio 3 pies y de altura h de 10 pies como se muestra en la figura.



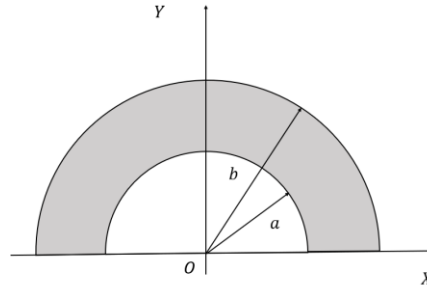
6. Determine el centroide de la placa compuesta de la figura.



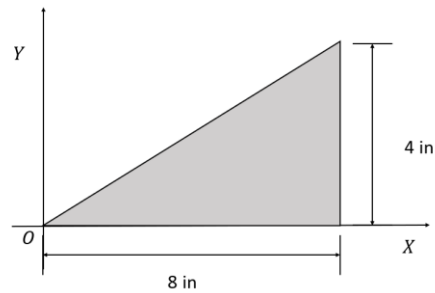
7. Determine el centroide de la placa compuesta de la figura



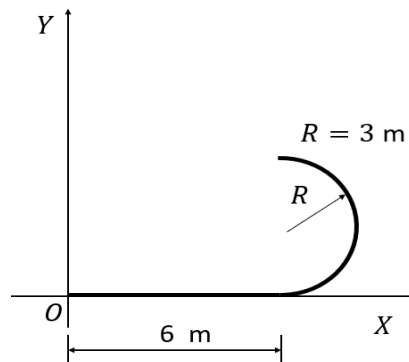
8. Determine el centroide de la placa de la figura, donde $a = 8$ in, $b = 12$ in.



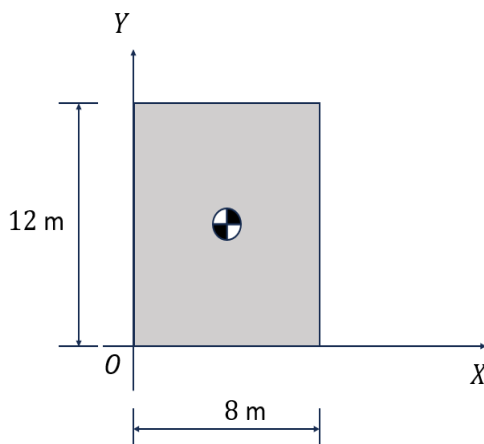
9. Determine el centroide de la línea como se muestra en la figura.



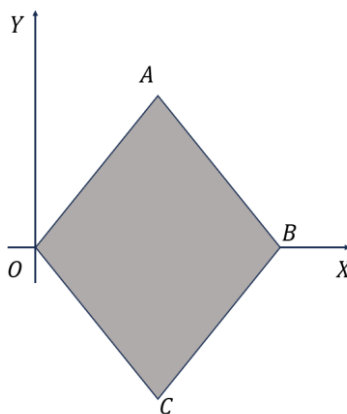
10. Determine el centroide de las líneas de la figura.



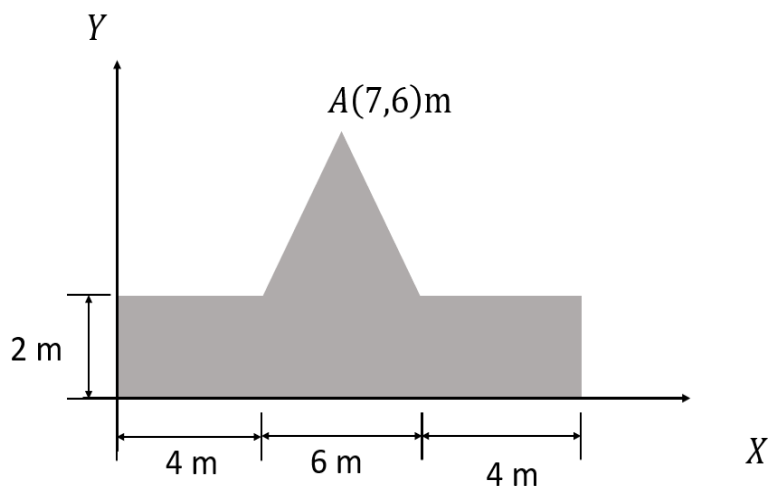
11. Una placa de forma rectangular como se muestra en la figura. Determine el momento de inercia de masa de la placa si su base es de 8 m y su altura de 12 m, la masa de la placa es de 1 kg, para cuando la placa gira alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular a la placa.



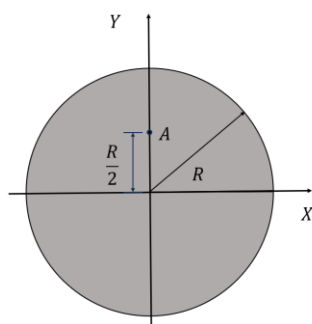
12. Una placa de forma de rombo cuyos vértices son los puntos $O = (0,0)$ cm, $A = (4,6)$ cm, $B = (8,0)$ cm, $C = (4,-6)$ cm, como se muestra en la figura. Determine el momento de inercia de masa, cuando la placa gira alrededor de un eje que es perpendicular a la placa y pasa por el punto A, la masa de la placa es de 0.5 kg.



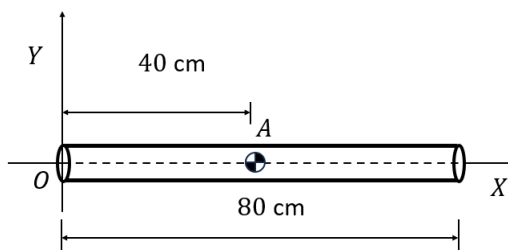
13. Una placa compuesta de masa 500 g como se muestra en la figura, gira alrededor de un eje que pasa por el punto A y es perpendicular a la placa. Determine el momento de inercia de masa.



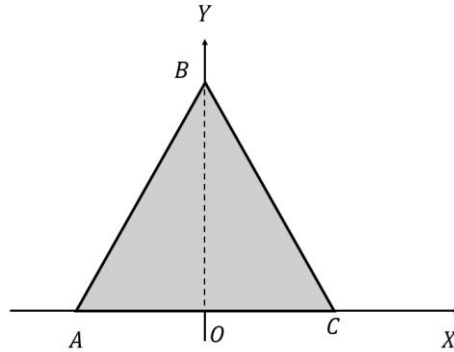
14. Una placa de forma circular de radio 2 ft y de peso de 5 lb gira alrededor de un eje que pasa por el punto A, como se muestra en la figura. Determine el momento de inercia de masa cuando el eje es perpendicular a la placa.



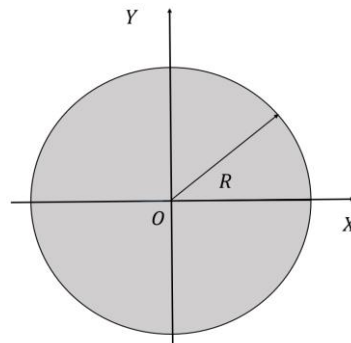
15. Una varilla de densidad lineal de masa $\lambda = 400 \frac{\text{g}}{\text{cm}}$ y de longitud de 80 cm gira alrededor de un eje que pasa por el punto A y es perpendicular al plano XY como se muestra en la figura. Determine el momento de inercia de masa.



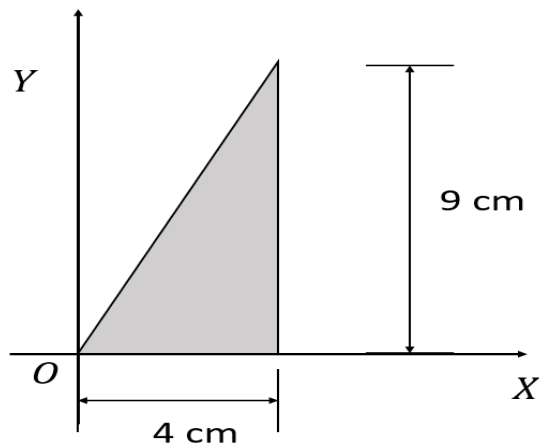
16. Determine el momento de inercia de área I_y del área de la figura. Si los vértices del triángulo son $A = (-4,0)\text{m}$, $B = (0,8)\text{m}$, $C = (4,0)\text{m}$.



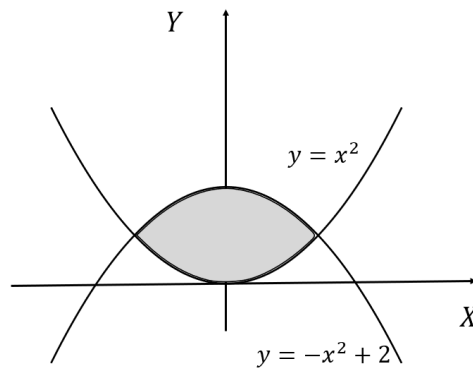
17. Determine los momentos de inercia de área I_x y I_y del área de la figura, si el radio de la circunferencia es de $R = 4\text{ ft}$.



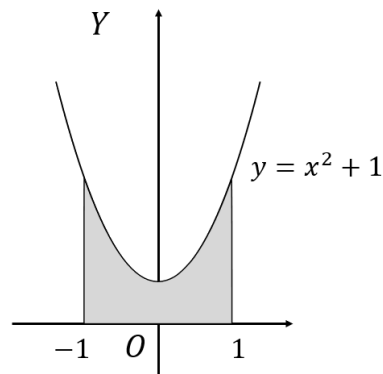
18. Determine el momento polar de inercia del área de la figura .



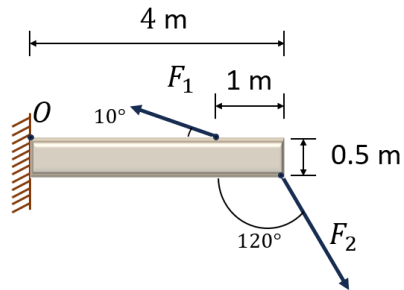
19. Determine el producto de inercia del área de la figura.



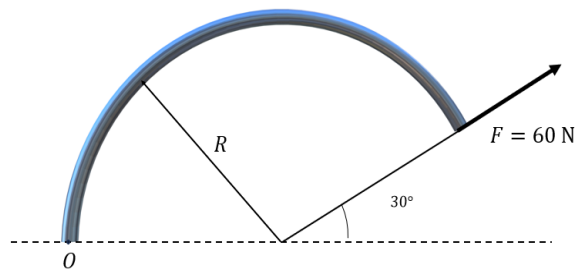
20. Determine los momentos de inercia de área I_x y I_y y el momento polar de inercia del área de la figura.



21. Determine el momento resultante de las fuerzas $F_1 = 10 \text{ N}$ y $F_2 = 5 \text{ N}$ que actúan sobre la viga de la figura, con respecto al punto O.



22. Determine el momento de una fuerza con respecto al punto O, $R = 4$ m del arco de la figura.



23. Se apaga el motor que hace girar un esmeril de un afilador de herramientas de corte, si el esmeril gira a 120 rev/min y se detiene desacelerando a 3 rad/s^2 .

Determine:

- El tiempo que tarda en detenerse
- La distancia que recorre hasta detenerse

Capítulo III. Modelado de sistemas mecánicos vibratorios de un grado de libertad

Objetivo del capítulo. Aplicar los métodos de la segunda ley de Newton, conservación de la energía para determinar las ecuaciones de movimiento que determinan el comportamiento y las características de un sistema vibratorio armónico y un sistema vibratorio amortiguado sujetos a vibración libre.

3.1. Elementos de rigidez y disipación en sistemas vibratorios de un grado de libertad.

Los sistemas vibratorios de un grado de libertad se utilizan para modelar y estudiar el comportamiento de estructuras simples que vibran en una sola dirección. Estos sistemas están compuestos por elementos de rigidez y disipación que influyen en su respuesta dinámica.

Los elementos de rigidez son aquellos que resisten la deformación de la estructura y mantienen su forma original. En un sistema vibratorio de un grado de libertad, la rigidez se representa típicamente mediante un resorte, que es un componente elástico que almacena energía cuando se deforma y devuelve esta energía cuando se libera. Cuanto mayor sea la constante de rigidez del resorte, mayor será la fuerza requerida para deformarlo y mayor será la frecuencia natural del sistema.

Por otro lado, los elementos de disipación están diseñados para disipar la energía del sistema y reducir las amplitudes de vibración. Un ejemplo común de elemento de disipación es el amortiguador, que absorbe la energía vibracional y la convierte en calor u otras formas de energía no deseada. La presencia de amortiguamiento en un sistema vibratorio puede afectar la respuesta dinámica al amortiguar las vibraciones excesivas y mejorar la estabilidad del sistema. En resumen, los elementos de rigidez, como los resortes, proporcionan la resistencia a la deformación y determinan la frecuencia natural del sistema, mientras que los elementos de disipación, como los amortiguadores, absorben la energía vibracional y ayudan a controlar las amplitudes de vibración. Juntos, estos elementos juegan un papel crucial en el análisis y diseño

de sistemas vibratorios de un grado de libertad.

A continuación, se mencionan algunos ejemplos de elementos de rigidez y disipación en sistemas vibratorios de un grado de libertad.

1. Elementos de Rigidez:

Resorte lineal: Un resorte helicoidal, como un muelle metálico, que ofrece una resistencia proporcional a la fuerza aplicada y se estira o comprime según la fuerza ejercida sobre él. Cuanto mayor sea la constante de rigidez del resorte, mayor será la fuerza requerida para deformarlo y mayor será la rigidez del sistema vibratorio.

Barra elástica: Una barra de material elástico que puede flexionarse bajo la acción de una fuerza aplicada. La rigidez de la barra se determina por su módulo de elasticidad y su sección transversal.

2. Elementos de Disipación:

Amortiguador viscoso: Un dispositivo que absorbe energía disipando el movimiento relativo entre dos superficies. El amortiguador viscoso proporciona una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad relativa entre las dos superficies y disipa la energía vibracional en forma de calor.

Amortiguador de fricción: Un elemento que disipa energía a través de la fricción entre dos superficies en movimiento relativo. El amortiguador de fricción convierte la energía cinética en calor debido a la resistencia al deslizamiento entre las superficies en contacto.

Estos son solo algunos ejemplos de elementos de rigidez y disipación en sistemas vibratorios de un grado de libertad. Ambos tipos de elementos son fundamentales para comprender y controlar el comportamiento dinámico de tales sistemas.

3.2. Péndulo simple, péndulo físico y sistema de masa resorte armónico.

Péndulo simple: Un péndulo simple es un sistema físico idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de un punto fijo por medio de una cuerda inextensible y sin masa. La descripción matemática de un péndulo simple sin amortiguamiento se basa en la segunda ley de Newton y en las leyes de la trigonometría.

La masa puntual del péndulo está sujeta a la gravedad, lo que genera una fuerza de atracción hacia abajo. La magnitud de esta fuerza es proporcional al producto de la masa del péndulo (m) y la aceleración debido a la gravedad (g). Cuando se desplaza la masa a un ángulo θ respecto a la vertical, la componente tangencial de la fuerza gravitatoria, que es igual a $mg \sin(\theta)$, produce una aceleración angular que tiende a restaurar el péndulo hacia su posición de equilibrio. Esta es la fuerza restauradora que define el movimiento oscilatorio del péndulo.

Masa-resorte armónico. Un sistema masa-resorte armónico es un modelo físico simple que describe el comportamiento vibratorio de un objeto (la masa) unido a un resorte, donde la fuerza restauradora que actúa sobre la masa es proporcional a su desplazamiento desde la posición de equilibrio. Este sistema es un ejemplo clásico de movimiento oscilatorio armónico simple. A continuación, damos una descripción del sistema:

1. **Masa (m):** Representa la masa del objeto que está siendo estudiado. Esta masa experimenta una fuerza resultante que depende de su aceleración y de las fuerzas aplicadas, como la gravedad u otras fuerzas externas.
2. **Resorte (de constante elástica k):** El resorte está asociado con una constante de elasticidad (k), que indica su rigidez. Cuanto mayor sea la constante elástica, más difícil será comprimir o estirar el resorte. El resorte ejerce una fuerza restauradora sobre la masa cuando esta se desplaza desde la posición de equilibrio.

Posición de equilibrio ($x = 0$): Esta es la posición donde el resorte no está comprimido ni extendido, y la fuerza neta sobre la masa es cero.

Desplazamiento (x): Representa la distancia desde la posición de equilibrio hasta la posición actual de la masa. Si la masa está desplazada hacia la derecha, el desplazamiento es positivo; si está desplazada hacia la izquierda, el desplazamiento es negativo.

3.3. Análisis de sistemas vibratorios de un grado de libertad sin amortiguamiento utilizando el método de fuerzas.

METODO DE FUERZAS.

El método de la suma de fuerzas o ley de Newton es el que se basa en que la suma de las fuerzas que actúan sobre el sistema en una dirección son igual a la masa por la aceleración en esa dirección

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum f_{x_i} , \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum f_{y_i} \dots\dots\dots (3.1)$$

Donde f_{x_i} y f_{y_i} son las componentes de la i-ésima fuerza actuando en la dirección de

x e y respectivamente y m es la masa del sistema y $\frac{d^2x}{dt^2}$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$ son las aceleraciones del

sistema en dirección de x e y . Para el caso de rotaciones se tiene que:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum \tau_{\theta_i} \dots\dots (3.2)$$

Donde τ_{θ_i} son los momentos de fuerza actuando sobre el sistema y I es el momento de

inercia del sistema en torno al eje de rotación y θ es el ángulo de rotación.

A continuación, se obtiene la ecuación de movimiento de un péndulo simple armónico aplicando el método de fuerzas.

Se tiene un sistema mecánico el cual consta de una masa m , la cual está unida a una cuerda de longitud L inextensible y de masa despreciable y el otro extremo de la cuerda está sujeta un perno A, como se muestra en la figura 3.2. Se procede a determinar por el método de fuerzas la ecuación de movimiento que describe el comportamiento del sistema, cuando se aplica una fuerza instantánea hasta que el péndulo alcanza un ángulo θ_0 hacia la derecha, con respecto a la vertical y luego se suelta, si el sistema está en la tierra y el sistema no interactúa con el medio y resolver la ecuación de movimiento obtenida para las condiciones iniciales cuando $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$ y $\omega(0) = \omega_0$



Figura 3.1. Péndulo simple

Las partes que integran el sistema son:

La masa de la esfera m , cuerda de longitud L , la tierra que produce un campo gravitacional el cual genera una aceleración g (aceleración de la gravedad) y el perno A (adimensional).

Las entradas al sistema son, la fuerza instantánea externa F_i y las condiciones iniciales del movimiento están dadas por θ_0 y ω_0 . Las variables a considerar para el análisis son el desplazamiento y la velocidad angular $\theta(t)$ y $\omega(t)$

Como para $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$ y $\omega(0) = \omega_0$

Analizaremos para cuando $\theta(0) = \theta_0$ y parte del reposo $\omega(0) = \omega_0 = 0$

Trazamos sobre el dibujo de la figura 3.2 la interacción entre los elementos del sistema (fuerzas).

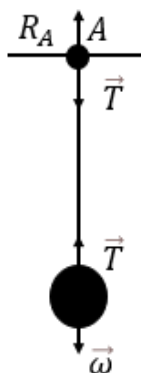


Figura 3.2 Interacciones entre los elementos del sistema

Donde, $\vec{T}$ es la fuerza de tensión de la cuerda, $\vec{w}$ es el peso de la esfera $\vec{R}_A$ es la fuerza de reacción del perno A.

En el diagrama de la figura 3.3 del lado derecho se muestra cuando actúa la fuerza instantánea $\vec{F}_i$ hasta alcanzar un ángulo θ_0 a la derecha, con respecto a la derecha de la vertical y luego se suelta partiendo del reposo con $\omega_0 = 0$.

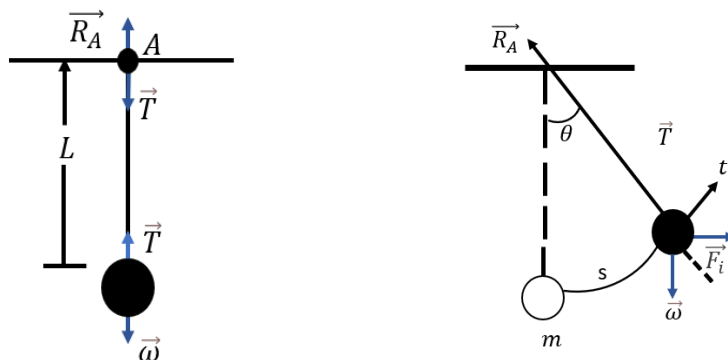
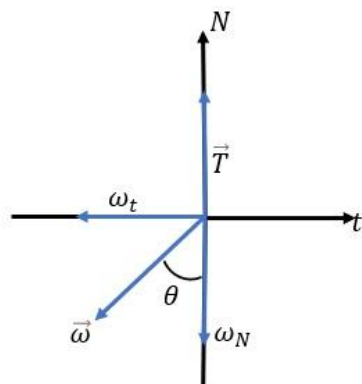


Figura 3.3. Diagrama de fuerza que actúan sobre el sistema

Procedemos a trazar el diagrama de cuerpo libre como se muestra en la figura 3.4.



Como $\vec{F}_l$ es instantánea no se considera para el análisis

$$\vec{F}_l(t \rightarrow 0)$$

Figura 3.4 diagrama de cuerpo libre.

Aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento de translación tenemos:

$$\Sigma F_t = ma_t, \quad -\omega_t = m \frac{d^2 s}{dt^2} \dots \dots \dots (3.3)$$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + mg \sin \theta = 0 \dots \dots \dots (3.4)$$

La ecuación 3.3 contiene dos variables θ y s . Donde s es la longitud de arco de la circunferencia entonces procedemos a dejarla en términos de una sola variable θ . Sabemos que la relación entre θ y s que se muestran en la figura 3.5. es.

$$\theta(\text{rad}) = \frac{s}{L}, \quad s = L\theta \dots \dots \dots (3.5)$$

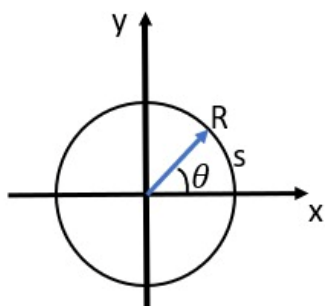


Figura 3.5. Relación entre medida angular θ y líneaal s .

$$\frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \frac{d^2s}{dt^2} = L \frac{d^2\theta}{dt^2} \dots \dots (3.6)$$

Sustituimos 3.6 en 3.4, obtenemos.

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0 \dots \dots (3.5)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \dots \dots \dots (3.6)$$

Para el caso que se consideran ángulos pequeños medidos en radianes $0 \leq \theta \leq 0.17$ entonces se cumple que $\sin \theta \approx \theta$.

La ecuación de movimiento del péndulo simple es de la forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \dots \dots \dots (3.7)$$

La solución de la ecuación anterior considerando las condiciones iniciales quedaría de la siguiente manera:

Dada la ecuación de movimiento del péndulo simple.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 ; \quad t = 0 \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \omega(0) = \omega_0 \text{ -----} (3.8)$$

Resolviendo por el método de la ecuación característica

$$m^2 + \frac{g}{L} = 0 \dots \dots \dots (3.9)$$

$$m^2 = -\frac{g}{L} \dots \dots \dots (3.10)$$

$$m = \sqrt{-\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \dots \dots \dots (3.11)$$

Donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ es la frecuencia angular del péndulo y $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ es el periodo de oscilación del péndulo.

La solución $\theta(t)$ es de la forma.

$$\theta(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t \dots \dots \dots (3.12)$$

$$\omega(t) = -\sqrt{\frac{g}{L}} C_1 \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t + \sqrt{\frac{g}{L}} C_2 \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t \dots \dots \dots (3.13)$$

Donde para calcular C_1 y C_2 se utilizaron las condiciones iniciales siguientes.

$t = 0$ $\theta(0) = \theta_0$ y $\omega(0) = \omega_0$ sustituyendo las condiciones iniciales en las ecuaciones 3.12 y 3.13, se obtiene.

$$C_1 = \theta_0 \text{ y } C_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{L}{g}} \dots \dots (3.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.14 en la ecuación 3.12. tenemos la posición angular en función del tiempo de la forma siguiente.

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t + \omega_0 \sqrt{\frac{L}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t \dots \dots (3.15)$$

Para llevar la ecuación 3.15 a la forma reducida consideramos que.

$$\theta_{max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{C_1}{C_2} \right) \dots \dots \dots (3.16)$$

La forma reducida de $\theta(t)$ es de forma:

$$\theta(t) = \theta_{max} \sin(\omega t + \alpha_0) \dots \dots \dots (3.17)$$

Donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ es la frecuencial angular del péndulo y $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ es el periodo de oscilación del péndulo.

Derivando la ecuación 3.17 se obtiene la velocidad angular.

$$\omega(t) = \omega \theta_{max} \cos(\omega t + \alpha_0) \dots \dots \dots (3.18)$$

Derivando la ecuación 3.18 se obtiene la aceleración angular del péndulo

$$\alpha(t) = -\omega^2 \theta_{max} \sin(\omega t + \alpha_0) \dots \dots \dots (3.19)$$

También se cumple que:

$$\alpha = -\omega^2 \theta \dots \dots \dots (3.20)$$

$$\frac{\theta^2}{(\theta_{max})^2} + \frac{\omega^2}{(\theta_{max} \omega)^2} = 1 \dots \dots \dots (3.21)$$

$$\theta(\text{rad}) = \frac{S}{L}, v_t = L \omega, \alpha_t = L \alpha \quad S = L \theta \dots \dots \dots (3.22)$$

A continuación, se muestran algunos ejemplos numéricos partiendo de la ecuación de movimiento del péndulo simple por el método de fuerzas.

Ejemplo 1. Se tiene un péndulo simple es desviado en ángulo de 5° hacia la izquierda de la vertical y después se suelta con una velocidad de $3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ hacia la vertical. Determine las características del movimiento si $m = 2 \text{ kg}$ y $L = 2 \text{ m}$

Las gráficas de $\theta(t)$ y $\omega(t)$ y las características del movimiento.

La distancia recorrida en 2 segundos

Los tiempos donde alcanza la mitad de su amplitud positiva

Solución

$$\theta_0 = -5^\circ$$

$$v_0 = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0.03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$L = 2 \text{ m}$$

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$\frac{g}{L} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ m}} = 5 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2$$

$$v = L\omega$$

$$\omega = \frac{v}{L} = \frac{0.03 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ m}} = 0.015 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 5\theta = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de la ecuación característica se tiene.

$$m^2 + 5 = 0$$

$$m^2 = -5$$

$$m = \sqrt{-5}$$

$$m = \sqrt{5}i$$

La solución es de la forma.

$$\theta(t) = (C_1 \cos \sqrt{5}t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{5}t)$$

$$\omega(t) = -\sqrt{5}C_1 \operatorname{sen} \sqrt{5}t + \sqrt{5}C_2 \cos \sqrt{5}t$$

Para $t = 0$, $\theta(0) = -0.08 \text{ rad}$, $\omega(0) = 0.015 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$\theta(0) = C_1 \quad C_1 = -0.08$$

$$\omega(0) = \sqrt{5} C_2, \quad C_2 = \frac{\omega(0)}{\sqrt{5}} = \frac{0.015}{\sqrt{5}} = 0.006$$

$$\theta(t) = -0.08 \cos \sqrt{5}t + 0.006 \operatorname{sen} \sqrt{5}t$$

Para obtener la forma reducida de la función $\theta(t)$ procedemos de la forma siguiente.

$$\theta_{\max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(-0.08)^2 + (0.006)^2} = 0.08 \text{ rad.}$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{C_1}{C_2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-0.08}{0.006} \right) = -1.5 \text{ rad.}$$

$$\theta(t) = 0.08 \operatorname{sen}(\sqrt{5}t - 1.5) \text{ rad}$$

$$\omega(t) = 0.178 \cos(\sqrt{5}t - 1.5) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Las características del movimiento son.

$$\theta_{\max} = 0.08 \text{ rad} \quad \omega = \sqrt{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.8 \text{ s}$$

$$\alpha_0 = -1.5 \text{ rad} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.8} = 0.35 \text{ Hz}$$

Las gráficas de las funciones $\theta(t)$ y $\omega(t)$ se muestran a continuación.

Para trazar la gráfica de $\theta(t)$ se procede a obtener los valores de tiempo de los cuadrantes de la forma siguiente.

$$\sqrt{5}t - 1.5 = 0$$

$$t_1 = \frac{1.5}{\sqrt{5}} = 0.67 \text{ s} \quad \frac{T}{4} = \frac{2.8\text{s}}{4} = 0.7 \text{ s}$$

$$t_2 = t_1 + 0.7 = 1.37 \text{ s}$$

$$t_3 = t_2 + 0.7 = 2.08 \text{ s}$$

$$t_4 = t_3 + 0.7 = 2.78 \text{ s}$$

$$t_5 = t_4 + 0.7 = 3.47 \text{ s}$$

Como el tiempo $t_5 = 3.47 \text{ s}$ pasa al periodo entonces procedemos a trazar la gráfica en un periodo.

$$A(0, -0.08)$$

$$B(0.67, 0)$$

$$C(1.37, 0.08)$$

$$D(2, 0.01)$$

$$E(2.08, 0)$$

$$F(2.8, -0.08)$$

$$G(0.9, 0.04)$$

$$H(1.84, 0.04)$$

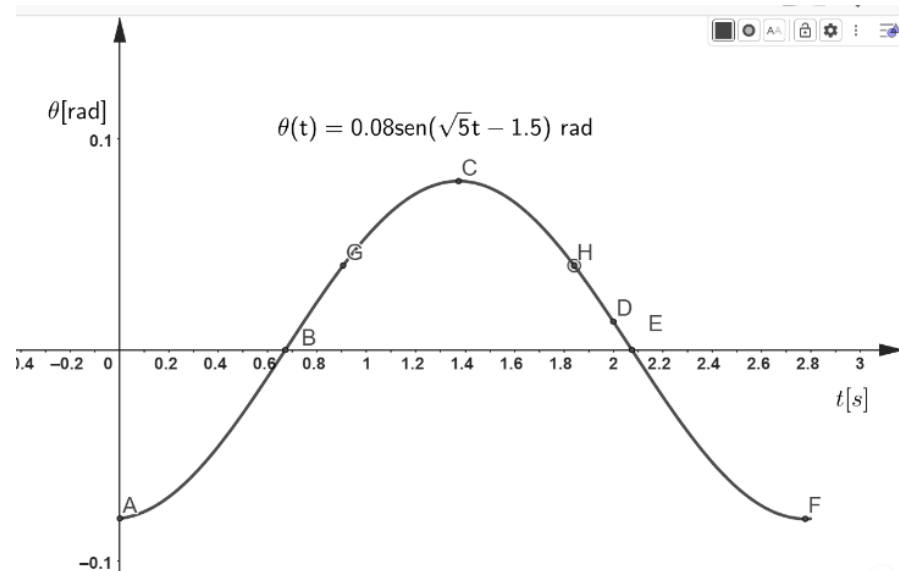


Figura 3.6. Gráfica de desplazamiento angular vs tiempo.

$$A(0, 0.01)$$

$$B(0.67, 0.18)$$

$$C(1.37, 0.0)$$

$$D(2.08, -0.18)$$

$$E(2.78, 0)$$

$$F(2.8, 0.01)$$

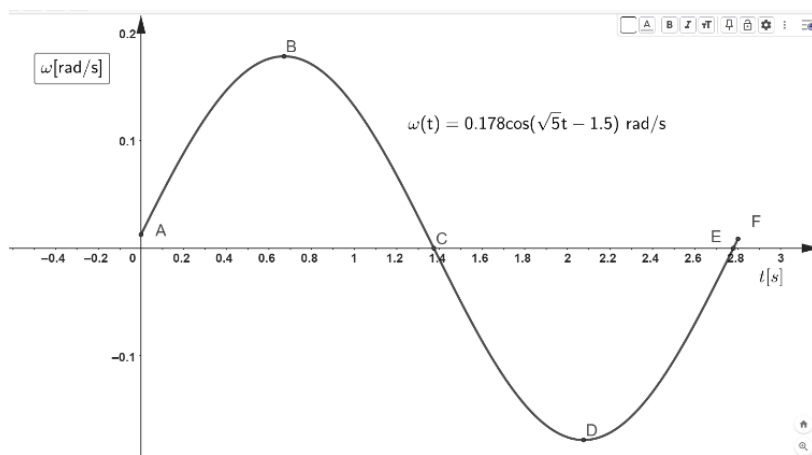


Figura 3.7. Gráfica de velocidad angular vs tiempo.

Para calcular la distancia recorrida en 2 segundos procedemos a realizar los siguientes cálculos.

$$\theta(2) = 0.08 \operatorname{sen}(\sqrt{5}(2) - 1.5) = 0.013 \text{ rad}$$

$$\theta_T(2) = n(4\theta_{\max}) = 0.7(4(0.08 \text{ rad})) = 0.22 \text{ rad}$$

$$n = f * t = (0.35 \text{ Hz})(2s) = 0.7 \text{ rev}$$

$$\theta = \frac{S}{L}$$

$$d_T = SL = \theta_T * L = (2.24 \text{ rad})(2m) = 0.48 \text{ m}$$

Para el cálculo de los tiempos donde alcanza la mitad de su amplitud positiva procedemos a realizar los procedimientos siguientes.

$$\theta(t) = \frac{\theta_{\max}}{2}$$

$$\frac{\theta_{\max}}{2} = \theta_{\max} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0)$$

$$\operatorname{sen}(\sqrt{5}t - 1.5) = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{5}t - 1.5 = \sin^{-1}(0.5) = \frac{\pi}{6}$$

$$t = \frac{\frac{\pi}{6} + 1.5}{\sqrt{5}} = 0.9 \text{ s}$$

Tenemos que en $t = 0.9 \text{ s}$ alcanza por primera vez la mitad de su amplitud positiva. Para calcular el segundo tiempo donde vuelve alcanzar la mitad de su amplitud positiva utilizamos la simetría de la gráfica de $\theta(t)$, considerando los puntos G y B de la gráfica calculamos Δt , donde tenemos.

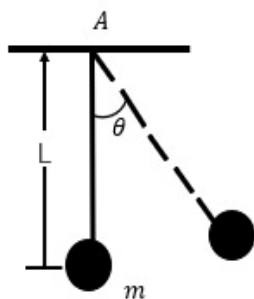
$$\Delta t = 0.9 - 0.67 = 0.23 \text{ s}$$

$$t_2 = 2.07 - 0.23 = 1.84 \text{ s}$$

Por lo tanto, los tiempos donde el péndulo alcanza la posición de la mitad de su amplitud son.

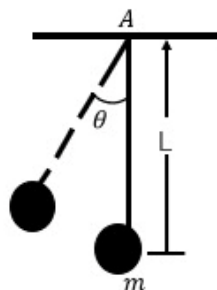
$$t_1 = 0.9 \text{ y } t_2 = 1.84 \text{ s}$$

A continuación, se muestra cómo utilizar los criterios para el uso de signos en las condiciones iniciales en el movimiento inicial del péndulo con respecto al sistema de referencia, donde el ángulo θ es medido con respecto a la vertical.



Si θ es a la derecha entonces $\theta_0 > 0$ (*positivo*) y si ω_0 va a la izquierda $\omega_0 < 0$ (*negativo*).

Si ambos θ_0 y ω_0 llevan el mismo sentido ambos a la derecha $\theta_0 > 0$ y $\omega_0 > 0$



Si θ es a la izquierda entonces $\theta_0 < 0$ (*negativo*) y si ω_0 va a la derecha $\omega_0 > 0$ (*positivo*).

Si ambos θ_0 y ω_0 llevan el mismo sentido ambos a la izquierda, entonces $\theta_0 < 0$ y $\omega_0 < 0$

Figura 3.8. Movimiento del péndulo en ambos sentidos respectivamente.

Ejemplo 2. Un péndulo de masa de 1kg de longitud 0.5 m el cual se encuentra en un lugar donde la aceleración de la gravedad es $g = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ es desviado un ángulo de 15° con respecto a la vertical hacia la derecha y luego se suelta con una velocidad angular $5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ hacia la vertical.

Calcular:

- Las características del movimiento
- Los tiempos cuando pasó por la posición de equilibrio viajando hacia la izquierda
- La distancia recorrida cuándo pasó por la posición de equilibrio por primera vez y pasaron 0.5 segundos.
- Trace de las gráficas de $\omega(\theta)$ y $\alpha(\theta)$

Solución:

Datos.

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$g = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\theta_0 = 15^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0.26 \text{ rad}$$

$$\omega_0 = -5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\frac{g}{L} = \frac{18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0.5 \text{ m}} = 36 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2$$

La ecuación de movimiento del péndulo está dada por.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 36\theta = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de la ecuación característica se tiene.

$$m^2 + 36 = 0$$

$$m^2 = -36$$

$$m = \sqrt{-36}$$

$$m = 6i$$

La solución es de la forma.

$$\theta(t) = C_1 \cos 6t + C_2 \text{ sen } 6t$$

$$\omega(t) = -6 C_1 \text{ sen } 6t + 6 C_2 \cos 6t$$

$$\text{Para } t = 0 \quad \theta_0 = 0.26 \text{ rad} \quad \omega_0 = -5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\theta(0) = C_1 \quad C_1 = 0.26$$

$$\omega(0) = 6 C_2 \quad C_2 = \frac{\omega(0)}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\theta(t) = \left(0.26 \cos 6t - \frac{5}{6} \sin 6t \right) \text{rad}$$

Para obtener la forma reducida de la función $\theta(t)$ procedemos de la forma siguiente.

$$\theta_{max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(0.26)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} = 0.872 \text{ rad}$$

$$\alpha'_0 = \tan^{-1} \left(\frac{0.26}{-\frac{5}{6}} \right) = \tan^{-1}(-0.31) = -0.3$$

Como $C_1 > 0$ y $C_2 < 0$ esta en el segundo cuadrante entonces

$$\alpha_0 = \pi - 0.3 = 2.84 \text{ rad}$$

$$\theta(t) = 0.872 \text{ sen}(6t + 2.84) \text{rad}$$

a) Las características del movimiento son.

$$\theta_{max} = 0.872 \text{ rad} \quad \omega = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ s} = 1.047 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{3}{\pi} \text{ Hz} = 0.95 \text{ Hz} \quad \alpha_0 = 2.84 \text{ rad}$$

b) Para trazar la gráfica de $\theta(t)$ se procede a obtener los valores de tiempo de los cuadrantes igualamos el argumento de la función $\theta(t)$ a los valores de $0, \frac{\pi}{2}$ y π hasta obtener el primer tiempo positivo, posteriormente obtenemos el tiempo de un

cuadrante y con este tiempo obtenemos los tiempos de los restantes cuadrantes hasta alcanzar el tiempo de un periodo del movimiento.

$$6t + 2.84 = 0 ; \quad t_1 = -\frac{2.84}{6} = -0.5 \text{ s} \quad \frac{T}{4} = \frac{1.047}{4} = 0.26 \text{ s}$$

$$6t + 2.84 = \frac{\pi}{2} ; \quad t_2 = \frac{\frac{\pi}{2} - 2.84}{6} = -0.21 \text{ s} \quad t_4 = t_3 + 0.26 = 0.31 \text{ s} \quad t_5 = t_4 + 0.26 = 0.57 \text{ s}$$

$$6t + 2.84 = \pi ; \quad t_3 = \frac{\pi - 2.84}{6} = 0.05 \text{ s} \quad t_6 = t_5 + 0.26 = 0.84 \text{ s}$$

$$t_7 = t_6 + 0.26 = 1.1 \text{ s}$$

A(0, 0.26)

B(0.05, 0.0)

C(0.31, -0.87)

D(0.57, 0)

E(0.84, 0.87)

F(1.047, 0.026)

G(0.55, -0.12)

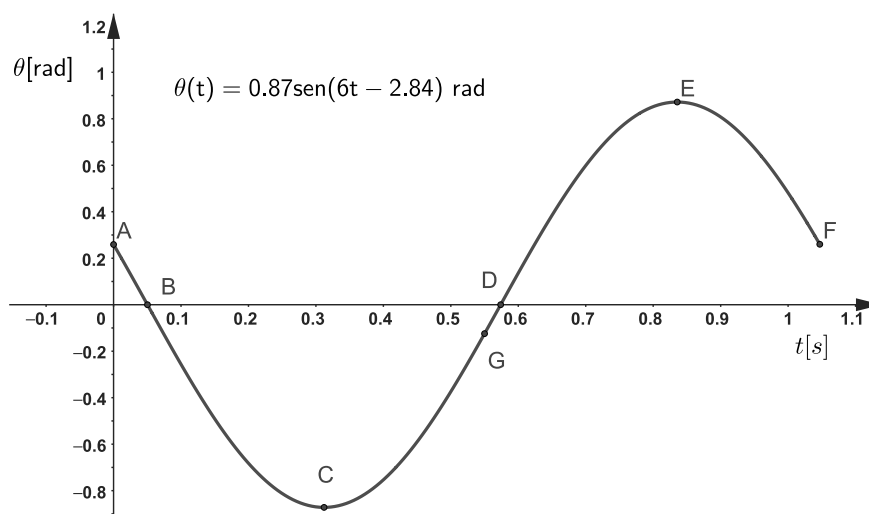


Figura 3.9. Grafica de posición angular vs tiempo

Para calcular los tiempos cuando pasó por la posición de equilibrio viajando hacia la izquierda lo realizamos por análisis gráfico, tomando el punto B de la gráfica de $\theta(t)$ observamos que para $t = 0.05 \text{ s}$ pasa por las posiciones de equilibrio viajando hacia la izquierda

- c) Para calcular la distancia recorrida cuándo pasó por la posición de equilibrio por primera vez y pasaron de 0.5 segundos.

Tomando el punto B de la gráfica de $\theta(t)$ se observa que en $t = 0.05 \text{ s}$ el péndulo pasa por la posición de equilibrio y 0.5 segundos después nos da un tiempo de 0.55 s y calculamos la posición adquirida en ese tiempo y se tiene que el péndulo adquiere una posición de

$$\theta(0.55) = 0.872 \sin(6(0.55) + 2.84) = -0.12 \text{ rad.}$$

Por lo tanto, la posición total recorrida desde que paso por primera vez por la posición de equilibrio hasta que alcanzo una posición de $\theta(0.55) = -0.12 \text{ rad}$ tomando en cuenta los puntos B, C y G de la grafica de $\theta(t)$ esta dada por.

$$\theta_T = \theta_1 + \theta_2 = \theta_{max} + (\theta_{max} - |\theta(0.55)|)$$

$$= 0.87 \text{ rad} + |0.87 - 0.12| \text{ rad}$$

$$= 1.62 \text{ rad}$$

Por lo tanto, la distancia total recorrida está dada por.

$$d_T = S_T = \theta_T * L = (1.62 \text{ rad})(0.5 \text{ m}) = 0.81 \text{ m}$$

- d) Los gráficos de $\omega(\theta)$ y $\alpha(\theta)$ se obtienen de la forma siguiente.

$$\alpha = -\omega^2 \theta$$

$$\alpha = -36\theta$$

$$\frac{\theta^2}{(\theta_{max})^2} + \frac{\omega^2}{(\theta_{max}\omega)^2} = 1$$

$$\frac{\theta^2}{(0.87)^2} + \frac{\omega^2}{(5.22)^2} = 1$$

$$-0.87 \leq \theta \leq 0.87 \quad , \quad -5.22 \leq \omega \leq 5.22 \quad , \quad -31.32 \leq \alpha \leq 31.32$$

Las gráficas de $\omega(\theta)$ y $\alpha(\theta)$ se muestran en las figuras 3.10 y 3.11.

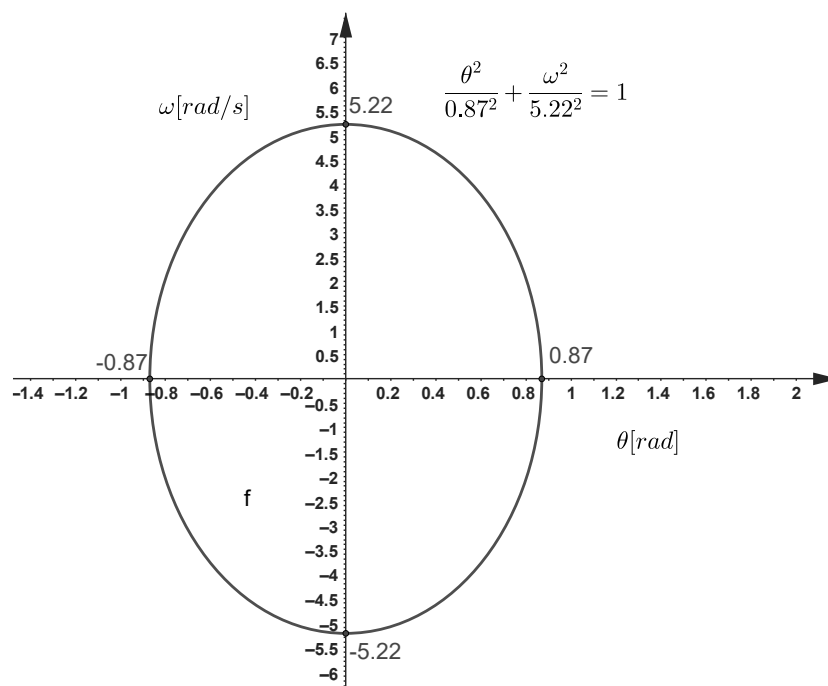


Figura 3.10 Grafica de velocidad angular vs posición angular

$A(-0.87, 31.32)$

$B(0.87, -31.32)$

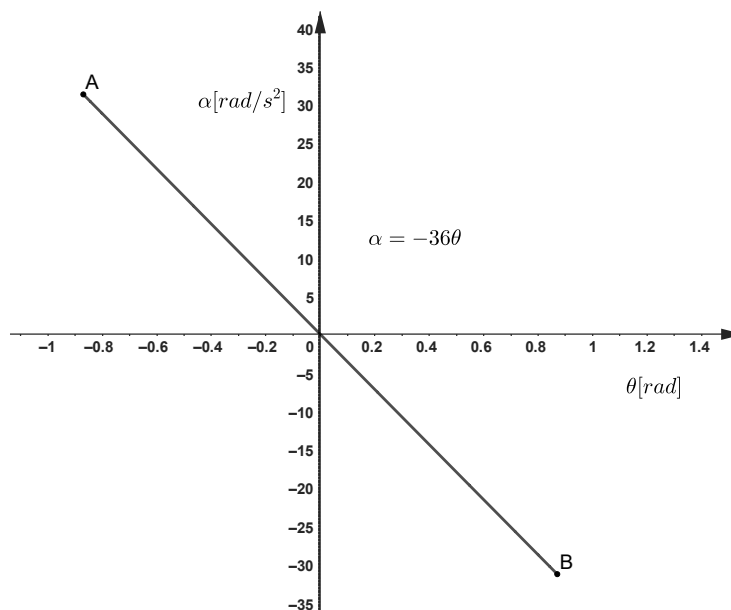


Figura 3.11. Grafica de aceleración angular vs posición angular.

Ejemplo 3. Un péndulo se encuentra en un lugar donde $g = 20 \frac{m}{s^2}$ Determine:

La longitud del péndulo, si el péndulo da 120 revoluciones en 30 segundos.

Datos:

$$g = 20 \frac{m}{s^2}$$

$$n = 120 \text{ rev}$$

$$t = 30 \text{ s}$$

$$L = ?$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$f = \frac{n}{t} = \frac{120 \text{ rev}}{30 \text{ s}} = 4 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{4 \text{ Hz}} = 0.25 \text{ s}$$

$$L = 20 \frac{m}{s^2} \left(\frac{0.25 \text{ s}}{2\pi} \right)^2 = 0.19 \text{ m}$$

Sistema masa-resorte armónico.

A continuación, se obtiene la ecuación de movimiento de un sistema masa-resorte armónico aplicando el método de fuerzas.

Se tiene un sistema al cual consta de una masa (m) la cual está unido a un resorte de constante de elasticidad (k) por uno de sus extremos y por el otro extremo el resorte está fija un soporte fijo como se muestra en la figura 3.12. El sistema se encuentra en la tierra y no existe interacción entre el medio y el sistema (no se considera la fricción) sobre el cuerpo de masa m actúa una fuerza instantánea y luego se suelta. Aplicando el método de fuerzas se obtiene la ecuación de movimiento del sistema como se muestra a continuación.

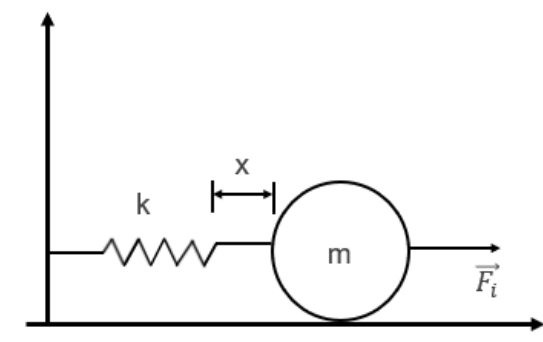


Figura 3.12. Sistema masa-resorte armónico

Solución.

Si se sabe que sobre el sistema actúa una fuerza instantánea F_i causando una deformación x_0 y el sistema parte del reposo, es decir para $t = 0$; $x(0) = x_0$ y $v(0) = 0$ y que se encuentre en la tierra.

Los elementos que forman al sistema son el bloque, el resorte y el lugar donde se localiza el sistema (tierra) y los parámetros que definen dichos elementos son, la masa del cuerpo (m), la constante del resorte (k) y la aceleración de la gravedad (g) y las entradas o fuerzas externa y condiciones iniciales son la fuerza instantánea y la posición velocidad inicial $\vec{F}_i, x_0$ y v_0 y la variable es la posición en cualquier instante de tiempo

En la figura 3.13 se muestran las interacciones entre los elementos del sistema

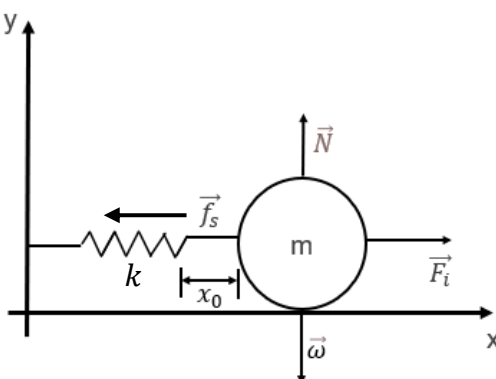


Figura 3.13. Interacciones entre los elementos del sistema masa-resorte

Donde, $\vec{f}_s$ es la fuerza de restitución del resorte, $\vec{F}_i$ es la fuerza instantánea externa, $\vec{N}$ es la fuerza normal, $\vec{w}$ es el peso del cuerpo, x_0 y v_0 son la posición y la velocidad lineal iniciales y $x(t)$ es la variable en el análisis.

Para la deducción de la ecuación de movimiento del sistema se aplican la segunda ley de Newton forma escalar y la ley de Hooke las cuales rigen el comportamiento de las interacciones entre los elementos del sistema.

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3.14.

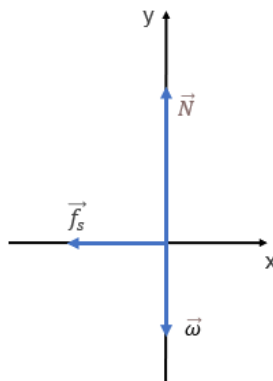


Figura 3.14. Diagrama de cuerpo libre

Desarrollando para el eje y tenemos.

$$\Sigma F_y = 0 \quad N - w = 0 \quad N = w = mg \quad y \quad N = mg \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

Desarrollando para el eje x tenemos.

Ley de Hooke.

$$f_s = -kx \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

Segunda ley de Newton.

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

$$-f_s = ma_x \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

$$-kx = ma_x \quad \dots\dots\dots (3.27)$$

$$ma_x = -kx \quad \dots\dots\dots (3.28)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \dots \dots \dots (3.29)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \dots \dots \dots (3.30)$$

La ecuación 3.30 es la ecuación de movimiento del sistema masa-resorte.

A continuación, se muestran ejemplos numéricos aplicando la ecuación de movimiento del sistema masa-resorte.

Ejemplo 4. Un contrapeso de masa de 2 slugs está unido al extremo de un resorte y lo estira 3.84 in, si parte de una posición de 12 in por arriba de la posición de equilibrio con una velocidad de $5 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ hacia abajo. Determine

Las características del movimiento

El número de revoluciones en 4 segundos y la distancia recorrida en ese tiempo.

La gráfica de $x(t)$ y los tiempos donde la masa viaja hacia arriba.

Datos

$$m = 2 \text{ slugs}$$

$$x = 3.84 \text{ in} = 0.32 \text{ ft}$$

$$x_0 = -12 \text{ in} \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}} \right) = -1 \text{ ft}$$

$$v_0 = 5 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

Se obtiene el valor de la constante k del resorte utilizando la ley de Hooke.

$$F_s = kx \quad k = \frac{F_s}{x}$$

$$k = \frac{F_s}{x} = \frac{\omega}{x} = \frac{64 \text{ lb}}{0.32 \text{ ft}} = 200 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

$$\frac{k}{m} = \frac{200 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}}{2 \text{ slugs}} = 100 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2$$

Con los valores obtenidos se escribe la ecuación de movimiento para este sistema en particular.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0$$

Resolviendo la ecuación de movimiento por el método de la ecuación característica.

$$m^2 + 100 = 0$$

$$m^2 = -100$$

$$m = \sqrt{-100}$$

$$m = 10i$$

La solución $x(t)$ es de la forma.

$$x(t) = C_1 \cos 10t + C_2 \text{ sen } 10t$$

$$v(t) = -10 C_1 \text{ sen } 10t + 10 C_2 \cos 10t$$

$$\text{Para } t = 0 \quad x_0 = -1 \text{ ft} \quad v_0 = 5 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

$$x(0) = C_1 \quad C_1 = -1$$

$$v(0) = 10 C_2 \quad C_2 = \frac{v(0)}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = -\cos 10t + \frac{1}{2} \sin 10t \text{ ft}$$

Para la obtención de la forma reducida de la función $x(t)$ realizamos el siguiente procedimiento.

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ft} = 1.11 \text{ ft}$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1}\left(\frac{C_1}{C_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(-2) = -1.1 \text{ rad}$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin(10t - 1.1) \text{ ft}$$

Las características del movimiento son.

$$A = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ft} = 1.11 \text{ ft}$$

$$\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0.628 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{10}{2\pi} \text{ Hz} = 1.59 \text{ Hz}$$

$$\alpha_0 = -1.1 \text{ rad.}$$

El número de revoluciones en 4 segundos y la distancia recorrida en ese tiempo está dada por.

$$f = \frac{n}{t} \quad n = f * t = (1.59 \text{ Hz})(4 \text{ s}) = 6.36 \text{ rev}$$

$$d_T = n(4A) = 6.36 \text{ rev}[4(1.11(t))] = 28.23 \text{ ft}$$

Para obtener la gráfica de $x(t)$ y los tiempos donde la masa viaja hacia arriba se procede a realizar las siguientes operaciones.

Para obtener la gráfica se iguala el argumento de la función a cero y se obtiene el tiempo de un cuarto de ciclo y este se utiliza para obtener los demás valores de tiempo hasta alcanzar el tiempo del periodo del movimiento del cuerpo.

$$10t - 1.1 = 0 \quad t_1 = \frac{1.1}{10} = 0.11 \text{ s}$$

$$\frac{T}{4} = \frac{0.628 \text{ s}}{4} = 0.15 \text{ s}$$

$$t_2 = t_1 + 0.15 = 0.27 \text{ s}$$

$$t_3 = t_2 + 0.15 = 0.42 \text{ s}$$

$$t_4 = t_3 + 0.15 = 0.58 \text{ s}$$

$$t_5 = t_4 + 0.15 = 0.738 \text{ s}$$

$A(0, -1)$

$B(0.11, 0)$

$C(0.27, 1.12)$

$D(0.42, 0)$

$E(0.58, -1.12)$

$F(0.63, -1)$

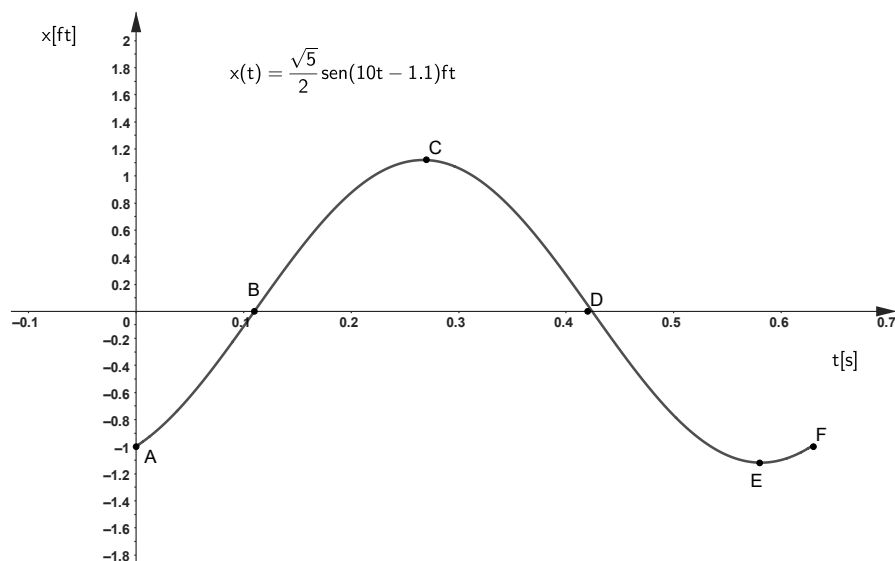


Figura 3.15. Gráfica de la posición vs tiempo

La masa viaja hacia arriba

$t \in (0, 0.26) \cup (0.58, 0.62) \text{ s}$

En la figura se muestran los criterios para tomar los signos de las condiciones iniciales

x_0 y v_0 , según sea el caso si se estira o comprime el resorte.

	Si el resorte se deforma hacia la derecha o se estira entonces $x_0 > 0$ y si la velocidad va en sentido contrario $v_0 < 0$
	Si el resorte se deforma hacia la izquierda (comprime) o hacia arriba $x_0 < 0$ y la velocidad va en sentido contrario $v_0 > 0$
	Para ambos casos si x_0 y v_0 llevan el mismo sentido entonces tienen el mismo signo $x_0 > 0$ y $v_0 > 0$ ó $x_0 < 0$ y $v_0 < 0$

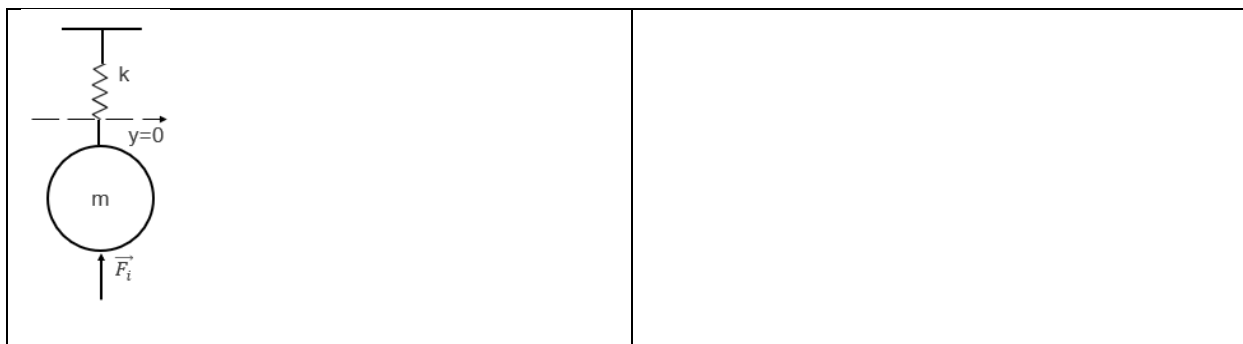


Figura 3.16. Elongación y compresión de un resorte.

Ejemplo 5: Una fuerza de 400 N estira un resorte 2 m . Después el extremo de este resorte se fija a una masa de 50 kg y parte de la posición de equilibrio a una velocidad de $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ hacia abajo, obtener:

- Las características de movimiento
- La velocidad cuando paso por segunda vez por la posición de equilibrio
- La distancia recorrida 1 segundo después que paso por segunda vez por la posición de equilibrio viajando hacia abajo
- Los tiempos donde la posición es de 2 m

Solución:

$$F = 400\text{ N}$$

$$g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$m = 50\text{ kg}$$

$$x_0 = 0$$

$$v_0 = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x = 2\text{ m}$$

$$fs = -kx$$

$$fs = kx$$

$$k = \frac{fs}{x}$$

$$k = \frac{f}{x} = \frac{400\text{ N}}{2\text{ m}} = 200\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\frac{k}{m} = \frac{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{50 \text{ kg}} = 4 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

$$m^2 + 4 = 0$$

$$m^2 = -4$$

$$m = \sqrt{-4}$$

$$m = 4i$$

$$x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$$

$$v(t) = -4C_1 \sin 4t + C_2 \cos 4t$$

$$t = 0 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 10$$

$$C_1 = x(0) = 0$$

$$4C_2 = 10 \quad C_2 = \frac{5}{2}$$

$$x(t) = \frac{5}{2} \sin 4t \text{ m}$$

$$A = \frac{5}{2} \text{ m}$$

$$\omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\alpha_0 = 0 \text{ rad}$$

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$v = \pm 4 \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 0} = \pm 4 \left(\frac{5}{2}\right) = \pm 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x(t) = \frac{5}{2} \sin 4t \text{ m}$$

$$\frac{5}{2} \sin 4t = 0$$

$$\sin 4t = 0$$

$$4t = \sin^{-1}(0)$$

$$4t = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \frac{\pi}{2} \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{2}{\pi} \text{ Hz} = 0.63 \text{ Hz}$$

$$t = 0$$

Pasa por la posición de equilibrio en:

$$t_1 = 0 \text{ s} \quad t_2 = \pi \text{ s} \quad t_3 = 2\pi \text{ s}$$

En: $t = \pi \text{ s}$ pasa por segunda vez por la posición de equilibrio entonces

$$v(t) = 10 \cos 4t \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v(t) = 10 \cos \frac{4\pi \text{ m}}{4 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= 10 \cos \pi \frac{\text{m}}{\text{s}} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

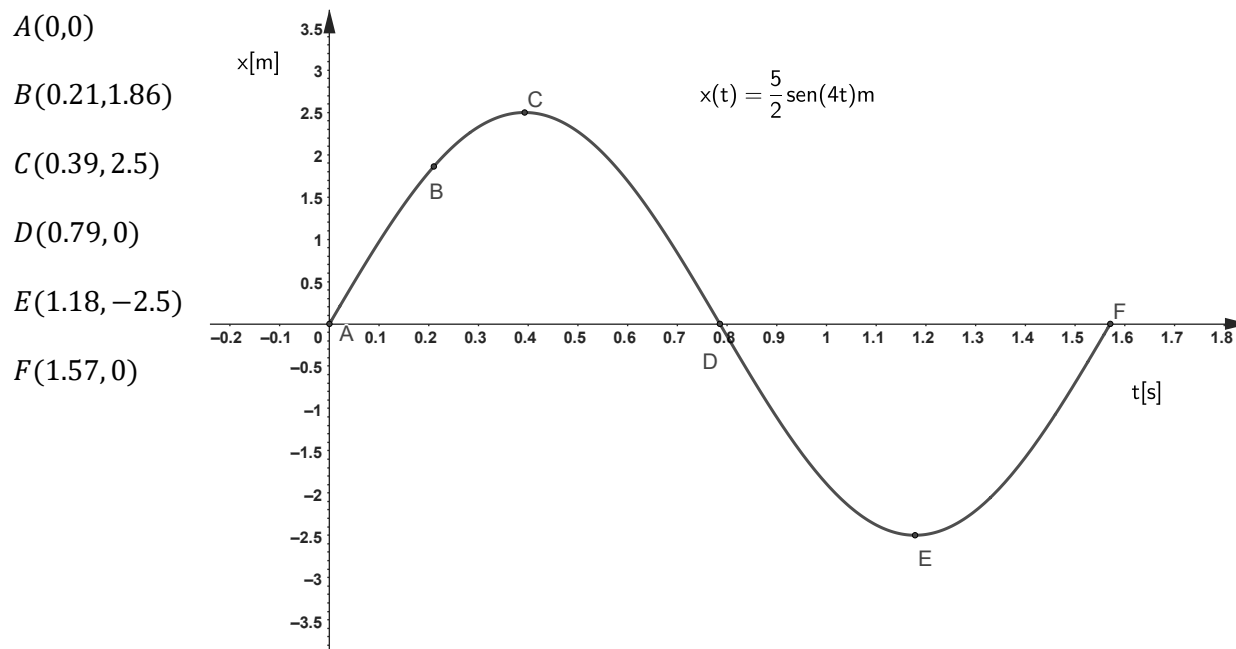


Figura 3.17. Gráfica posición vs tiempo

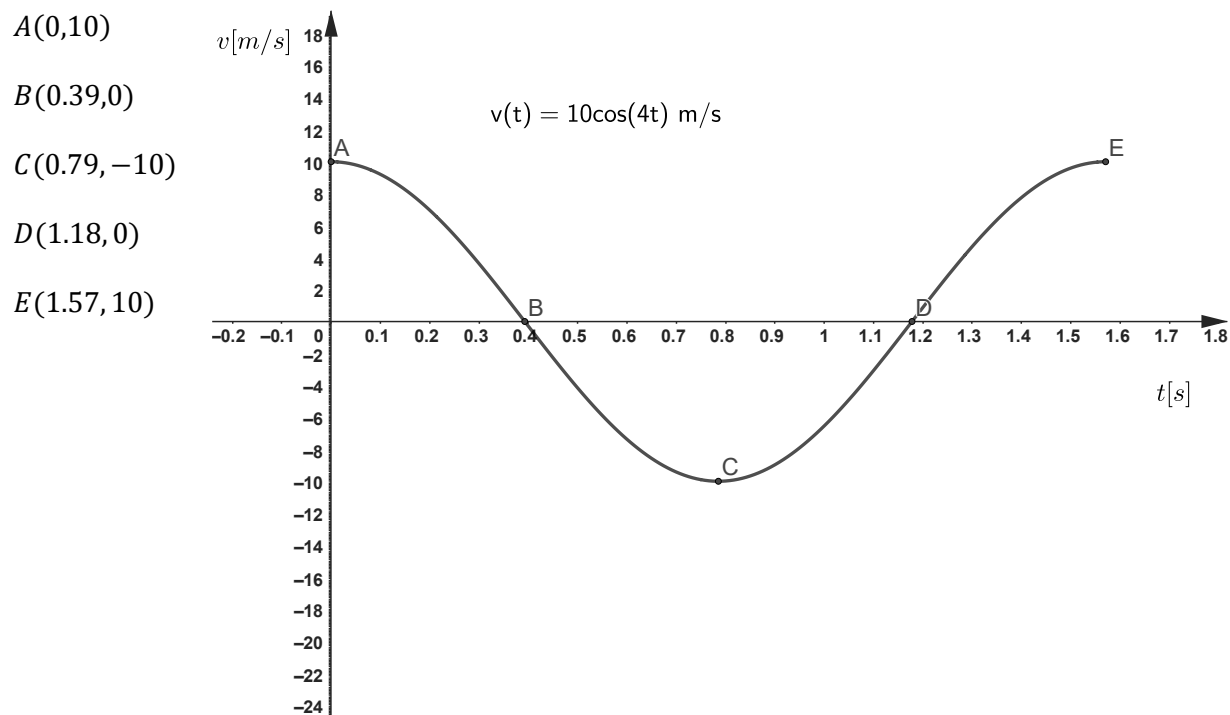


Figura 3.18 Gráfica velocidad vs tiempo

c) Como $\frac{\pi}{4} = 0.78 \text{ s}$

$$t = 0.78 \text{ s} + 1 \text{ s} = 1.78 \text{ s}$$

$$x(1.78) = \frac{5}{2} \text{sen}[4(1.78)] = 1.86 \text{ m}$$

$$d_T = d_1 + d_2 + d_3 = A + A + x(1.78) = 2\left(\frac{5}{2}\right) + 1.85 \text{ m}$$

d) Donde $x = -2$

$$x(t) = \frac{5}{2} \text{sen } 4t$$

$$\frac{5}{2} \text{sen } 4t = -2$$

$$\text{sen } 4t = -\frac{4}{5}$$

$$4t = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$4t = -0.92$$

$$t = -\frac{0.92}{4}$$

$$t = -0.23 \text{ s}$$

$$\Delta t = 0.23 - 0 = 0.23$$

$$t_1 = \frac{\pi}{4} + \Delta t = 0.78 + 0.23 = 1.01$$

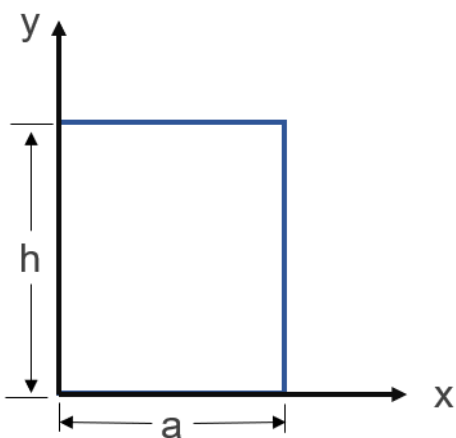
$$t_2 = \frac{\pi}{2} - \Delta t = 1.57 - 0.23 = 1.34$$

$$t_1 = 1.01 \text{ s} \quad y \quad t_2 = 1.34 \text{ s}$$

Ejemplo 6. Se tiene una placa de forma rectangular de base a y altura h . El sistema se encuentra en la tierra y la masa de la placa es M determine la ecuación de movimiento que describe el comportamiento del sistema, si bajo la acción de una fuerza instantánea la placa es desviada un ángulo de 15° con respecto a la vertical hacia la derecha y luego se suelta el sistema no interactúa con el medio, el sistema gira alrededor de un eje que pasa por el perno A y es perpendicular a la placa.

Solución.

Leyes Físicas



$$\tau = I_A \propto$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{W} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

$$I = \int r^2 dm, \quad \bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{\int dA}$$

Figura 3.19. Placa rectangular

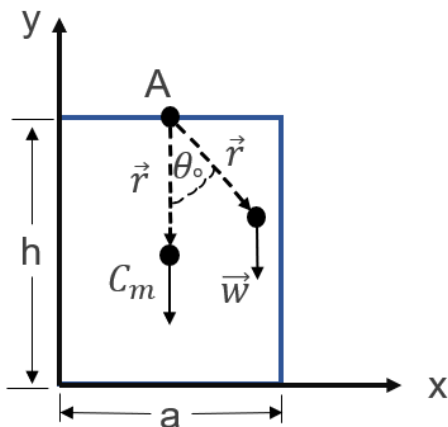


Figura 3.20. Interacciones entre los elementos del sistema.

Si tomamos las unidades de las magnitudes en el sistema internacional tenemos.

Elementos	Parámetros	Entradas
Placa	M-Masa a y h- base y altura	$\vec{F}_t$ -Fuerza instantánea θ_0 - ángulo inicial
Tierra	g- aceleración de la gravedad	w_0 -Velocidad angular inicial
Perno	Dimensiones y masa despreciable.	θ - variable

Para el cálculo del área.

$$A = \int dA = \int_0^a \int_0^h dy dx = \int_0^a h dx = h x \Big|_0^a = a h \text{ m}^2$$

Para el cálculo del centro de masa del sistema con respecto al origen del sistema.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} ; \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{\int dA}$$

$$\int \tilde{x} dA = \int_0^a \int_0^h x dy dx = \int_0^a xy \Big|_0^h dx = h \int_0^a x dx = \frac{hx^2}{2} \Big|_0^a = \frac{a^2 h}{2}$$

Por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{\frac{a^2 h}{2}}{(a)(h)} = \frac{a}{2}$$

$$\int \tilde{y} \, dA = \int_0^a \int_0^h y \, dy \, dx = \int_0^a \frac{y^2}{2} \Big|_0^h dx = \frac{h^2}{2} x \Big|_0^a = \frac{ah^2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\left(\frac{ah^2}{2}\right)}{a(h)} = \frac{h}{2}$$

El centro de masa del sistema está dado en la forma siguiente.

$$C_m = \left(\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right).$$

Cálculo del momento de inercia.

$$\begin{aligned} I_o &= \int r^2 dw = \frac{M_T}{A_T} \int_0^a \int_0^h (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \frac{M}{ah} \int_0^a \int_0^h (x^2 + y^2) \, dy \, dx \\ &= \frac{M}{ah} \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h dx = \frac{M}{ah} \int_0^a \left(hx^2 + \frac{h^3}{3} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{M}{ah} \left[h \frac{x^3}{3} + \frac{h^3}{3} x \right] \Big|_0^a = \frac{M}{ah} \left[\frac{a^3 h}{3} + \frac{ah^3}{3} \right] = \frac{M(a^2 + h^2)}{3}$$

Lo anterior en unidades de kg m^2 . Para el cálculo del momento de inercia I_{cm} , cuando el cuerpo gira con respecto a un eje que pasa por el centro de masa utilizamos el teorema de ejes paralelos.

$$I_o = I_{cm} + md^2$$

Donde d es la distancia entre el punto O y el centro de masa del sistema.

$$d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + h^2}{4}$$

$$I_{cm} = I_0 - md^2 = \frac{M(a^2 + b^2)}{3} - M\left(\frac{(a^2 + h^2)}{4}\right) kg m^2 = \frac{M(a^2 + h^2)}{12}$$

Para el cálculo del momento de inercia I_A , cuando el cuerpo gira con respecto a un eje que pasa por el perno A, utilizamos el teorema de ejes paralelos.

$$I_a = I_{cm} + md_1^2$$

Donde d_1 es la distancia entre el punto A y el centro de masa.

$$d_1 = \frac{h}{2}$$

$$I_a = \frac{M(a^2 + h^2)}{12} + M\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Ma^2}{12} + \frac{Mh^2}{12} + \frac{Mh^2}{4} = \frac{Ma^2}{12} + \frac{4Mh^2}{12} = \frac{M(a^2 + 4h^2)}{12}$$

Con los resultados obtenidos se procede a obtener la ecuación de movimiento del sistema por el método de fuerzas. Tomamos un sistema de referencia cuyo origen está en el perno A como se muestra en la figura 3.21.

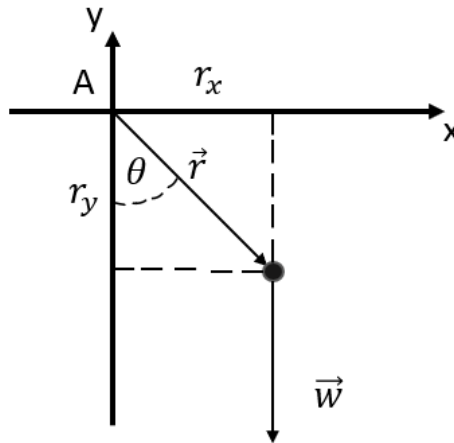


Figura 3.21. Sistema de referencia con origen en el perno A

De la figura 3.21 tenemos que las coordenadas del vector posición $\vec{r}$ y del vector peso $\vec{w}$ son.

$$\vec{r} = \left(\frac{h}{2} \operatorname{sen} \theta, -\frac{h}{2} \cos \theta, 0 \right)$$

$$\vec{w} = (0, -mg, 0)$$

Al calcular el momento de fuerza obtenemos.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{h}{2} \operatorname{sen} \theta & -\frac{h}{2} \cos \theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{bmatrix} = -\frac{h}{2} mg \operatorname{sen}(\theta) \hat{k}$$

Para la obtención de la ecuación de movimiento aplicamos la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional $\tau = I_a \alpha$ de la forma siguiente.

$$-\frac{h}{2} Mg \operatorname{sen}(\theta) = \frac{M(a^2 + 4h^2)}{12} \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} \left(\frac{M(a^2 + 4h^2)}{12} \right) + \frac{h}{2} Mg \operatorname{sen} \theta = 0$$

Para $0 \leq \theta \leq 15^\circ$ $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\left(\frac{h}{2} Mg \theta \right)}{\frac{M(a^2 + 4h^2)}{12}} = 0.$$

La ecuación de movimiento del sistema es la siguiente.

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{6hg}{a^2 + 4h^2} \theta = 0$$

3.4 Análisis de sistemas vibratorios de un grado de libertad sin amortiguamiento utilizando el método de energía.

El método de energía para obtener la ecuación de movimiento de un sistema vibratorio se basa en la ley de conservación de la energía mecánica del sistema la cual consiste en lo siguiente. Si las fuerzas o torques son difíciles de determinar, un método basado en la energía puede ser más efectivo. En estos métodos las ecuaciones de movimiento se derivan al analizarlos principios de conservación de la energía. El principio básico en este caso, la energía mecánica del sistema se mantiene constante.

$$E_m = K + U = \text{Constante} \dots (3.31)$$

Donde K y U denotan a la energía cinética y potencial del sistema, las cuales toman una forma determinada de acuerdo con las características de cada sistema y E_m es la energía mecánica del sistema. Si la energía mecánica del sistema se conserva la ecuación 3.31 se puede expresar también de la siguiente forma.

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \dots \dots (3.32)$$

A continuación, a través de ejemplos aplicaremos el método de energía para la obtención de la ecuación de movimientos de algunos sistemas vibratorios.

Ejemplo 7. Se tiene un sistema mecánico el cual consta de una masa m , la cual está unida a una cuerda de longitud L inextensible y de masa despreciable y el otro extremo de la cuerda está sujeta un perno A, como se muestra en la figura 3.22. Determine por el método de energía la ecuación de movimiento que describe el comportamiento del sistema, cuando se aplica una fuerza instantánea hasta que el péndulo alcanza un ángulo θ_0 hacia la derecha, con respecto a la vertical y luego se suelta, si el sistema está en la tierra y el sistema no interactúa con el medio.

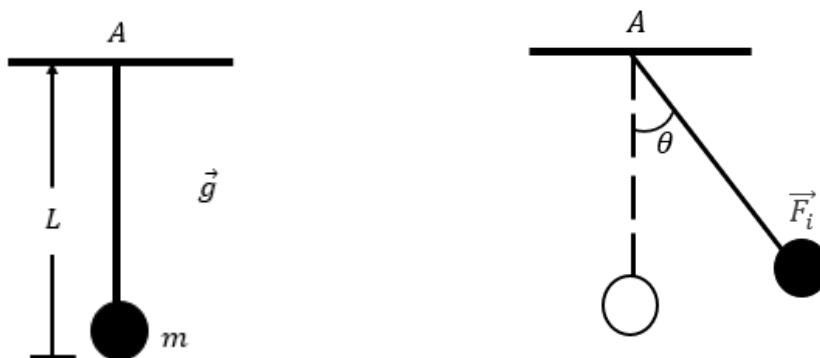


Figura 3.22 Péndulo simple

Solución.

Procedemos a elegir un sistema de referencia cuyo origen de coordenadas esta en el centro de masa de la esfera y considerando que cuando el péndulo es desviado un ángulo $\theta(t)$ con respecto a la vertical hacia la derecha, entonces la esfera se eleva una altura h con respecto a la horizontal como se muestra en la figura 3.23 por lo tanto el sistema tiene energía potencial y cuando la esfera se suelta y empieza a caer la esfera adquiere velocidad y entonces adquiere energía cinética y el sistema tiene energía mecánica en cada punto de su trayectoria y como el sistema es conservativo la energía mecánica del sistema se conserva.

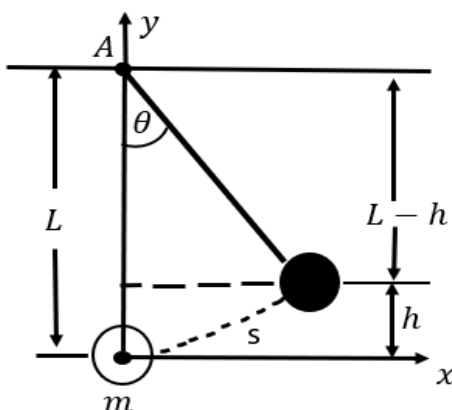


Figura 3.23. Sistema de referencia con origen en el centro de masa de la esfera.

Como el ángulo $\theta(t)$ y la altura $h(t)$ están relacionadas entre se procede a encontrar la relación entre ellas. De la figura 3.23 tenemos que se cumplen las siguientes relaciones.

$$\cos \theta = \frac{L-h}{L} \dots \dots \dots (3.33)$$

$$L - h = L \cos \theta \quad h = L - L \cos \theta$$

$$h = L(1 - \cos \theta) \dots \dots \dots (3.34)$$

La energía mecánica del sistema está dada por

$$E_m = k + U$$

donde

$$k = \frac{1}{2}mv^2 \text{ y } U = mgh \dots \dots \dots (3.35)$$

Donde K es la energía cinética y U es la energía potencial del sistema.

Escribamos la energía mecánica en términos de los parámetros que describe a los elementos del sistema y la variable que en este caso tomaremos al ángulo θ , (m, g, L y θ)

Para la energía potencial consideramos la ecuación 3.34 y tenemos.

$$U = mgh = mgL(1 - \cos \theta) \dots \dots \dots (3.36)$$

Para la energía cinética tenemos:

$$k = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{como } v = \frac{ds}{dt} \quad \text{y } s = L\theta, \quad \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} \text{ por lo tanto}$$

$$k = \frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \dots \dots \dots (3.37)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.36 y 3.37 en la ecuación 3.31 tenemos.

$$E_m = \frac{1}{2}mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgL(1 - \cos \theta) \dots \dots \dots (3.38)$$

En la ecuación 3.38 se representa la energía mecánica del sistema expresada a través de los parámetros que definen a los elementos que integran al sistema y de la variable a considerar el ángulo θ , (m, g, L y θ).

Aplicando la ley de conservación de la energía mecánica tenemos

$$\frac{dE_m}{dt} = 0.$$

Derivando la ecuación 3.38 con respecto al tiempo e igualando a cero tenemos.

$$\frac{dE_m}{dt} = mL^2 \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + mgL \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \dots\dots\dots (3.39)$$

$$\frac{d\theta}{dt} \left[\left(mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + (mgL \operatorname{sen} \theta) \right] = 0$$

Como $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \operatorname{sen} \theta = 0 \dots\dots\dots (3.40)$$

Para ángulos medidos en radianes pequeños $0 < \theta \leq 0.17$ se cumple que $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$ y por lo tanto la ecuación 3.40 queda de la forma.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \dots\dots\dots (3.41)$$

La ecuación 3.41 es la ecuación de movimiento de un péndulo simple obtenida por el método de energía y cómo podemos observar coincide con la ecuación 3.7 obtenida por el método de fuerzas.

Ejemplo 8. Se tiene un sistema al cual consta de una masa (m) la cual está unido a un resorte de constante de elasticidad k por uno de sus extremos por el otro extremo el resorte está fija un soporte como se muestra en la figura 3.24. El sistema se encuentra en la tierra y no existe interacción entre el medio y el sistema (no considere la fricción). Determine la ecuación de movimiento del sistema por el método de energía.

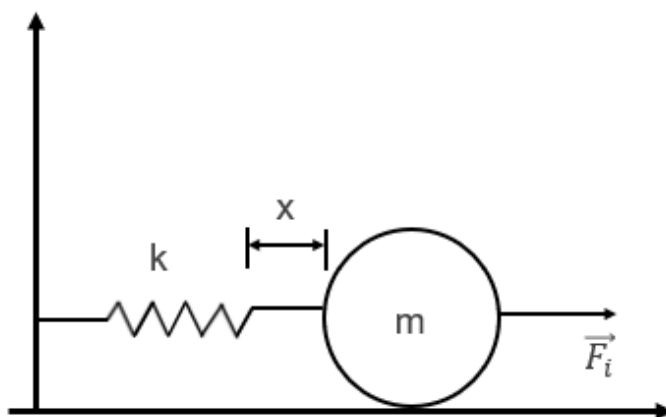


Figura 3.24. Sistema masa-resorte armónico

Donde, k es la constante del resorte, m es la masa del cuerpo, g es la alteración gravitacional.

Solución.

La energía mecánica del sistema está dada por.

$$E_m = k + U$$

Donde, k es la energía cinética y U es la energía potencial del sistema.

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \dots\dots\dots (3.42)$$

Escribimos la energía mecánica en función de los parámetros que definen los elementos del sistema (m, k, g) y la variable x tenemos.

Para obtener la energía cinética K en función de los parámetros que definen los elementos del sistema (m, k, g) y la variable x .

$$k = \frac{1}{2}mv^2 \text{ como } v = \frac{dx}{dt}$$

$$k = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \dots\dots\dots (3.43)$$

Para obtener la energía potencial U en función de los parámetros que definen los elementos del sistema y la variable x utilizaremos el trabajo realizado por la fuerza de restitución del resorte f_s .

Sabemos:

$$\omega = -\Delta u = -(u_f - u_0)$$

$$= \int F * dx$$

$$= - \int (-kx dx)$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 \Big|_{x_0}^x$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 \text{ si } x_0 = 0$$

$$\omega = u = \frac{1}{2}kx^2 \dots\dots\dots (3.44)$$

Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones 3.43 y 3.44 en 3.42 se obtiene.

$$E_m = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \dots\dots\dots (3.45)$$

Aplicando ley de conservación y derivamos la ecuación 3.45 en función del tiempo se tiene.:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = 0$$

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + kx * \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} \left[m \frac{d^2x}{dt^2} + kx^2 \right] = 0$$

Como $\frac{dx}{dt} \neq 0$,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \dots \dots \dots (3.46)$$

La ecuación 3.46 es la ecuación de movimiento de un sistema masa resorte armónico obtenida por el método de energía y cómo podemos observar coincide con la ecuación 3.31 obtenida por el método de fuerzas.

Ejemplo 9. Se tiene una placa de forma rectangular de base a y altura h . El sistema se encuentra en la tierra y la masa de la placa es M determine la ecuación de movimiento que describe el comportamiento del sistema por el método de energía, si bajo la acción de una fuerza instantánea la placa es desviada un ángulo de 15° con respecto a la vertical hacia la derecha y luego se suelta el sistema no interactúa con el medio, el sistema gira alrededor de un eje que pasa por el perno A y es perpendicular a la placa.

Solución.

Procedemos a elegir un sistema de referencia cuyo origen de coordenadas está en el centro de masa de la placa y considerando que cuando la placa es desviada un ángulo $\theta(t)$ con respecto a la vertical hacia la derecha y que toda la masa de la placa esta concentrada en el centro de masa de la placa, entonces el centro de masa de la placa se eleva una altura h con respecto a la horizontal como se muestra en la figura 3.18 por lo tanto el sistema tiene energía potencial y cuando la placa se suelta y empieza a caer el sistema adquiere velocidad y entonces adquiere energía cinética y el sistema tiene energía mecánica en cada punto de su trayectoria y como el sistema es conservativo la energía mecánica del sistema se conserva.

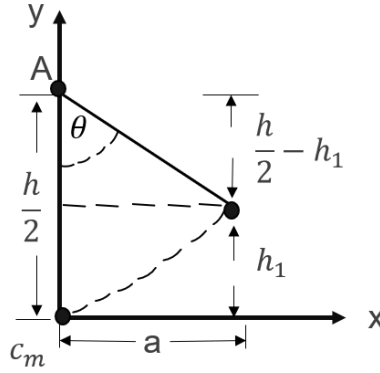


Figura 3.25. Sistema de referencia con origen en el centro de masa del sistema

De la figura 3.25 se obtiene la relación que existe entre el ángulo θ y la altura h_1 .

$$\cos\theta = \frac{\frac{h}{2} - h_1}{\frac{h}{2}} \quad , \quad \frac{h}{2} \cos\theta = \frac{h}{2} - h_1$$

$$h_1 = \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \cos\theta \quad , \quad h_1 = \frac{h}{2} (1 - \cos\theta)$$

El método de energía consiste en expresar la energía mecánica del sistema en función de los parámetros que definen a los elementos que integran al sistema (m , g , a y h) y la variable θ .

$$E_m = k + u = \frac{1}{2} I_A \omega^2 + Mgh$$

$$K = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2} I_A \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{M(a^2 + 4h^2)}{12} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \text{ J}$$

$$U = Mgh_1 = \frac{Mgh}{2} (1 - \cos\theta) \text{ J}$$

$$E_m = K + U = \frac{1}{2} I_A \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + Mg \frac{h}{2} (1 - \cos\theta) \text{ J}$$

Considerando la ley de conservación de la energía mecánica obtenemos.

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad E_m = \text{Const}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = I_A \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + Mg \frac{h}{2} \operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} \left[I_A \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mg \frac{h}{2} \operatorname{sen}\theta \right] = 0 \quad \frac{d\theta}{dt} \neq 0, \text{ es decir}$$

$$I_A \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mg \frac{h}{2} \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Para ángulos medidos en radianes pequeños $0 < \theta \leq 0.17$ se cumple que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ y por lo tanto la ecuación queda de la forma.

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{M(a^2 + 4h^2)}{12} \\ \frac{M(a^2 + 4h^2)}{12} \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mg \frac{h}{2} \theta &= 0 \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g \frac{h}{2} M}{\frac{M(a^2 + 4h^2)}{12}} \theta &= 0 \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{6gh}{a^2 + 4h^2} \theta &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación 3.46 es la ecuación de movimiento de un sistema masa resorte armónico obtenida por el método de energía y cómo podemos observar coincide con la ecuación 3.31 obtenida por el método de fuerzas.

3.5. Análisis de sistemas vibratorios con amortiguamiento viscoso.

Las vibraciones amortiguadas se refieren al fenómeno en el que un sistema vibratorio, como un resorte o un péndulo, experimenta una disminución gradual en su amplitud de oscilación debido a la presencia de fuerzas disipativas, como la fricción o un medio de amortiguamiento, se puede ver que a medida que el sistema vibra, la energía se disipa con el tiempo, lo que resulta en una disminución de la amplitud de las vibraciones hasta que el sistema eventualmente alcanza un estado de equilibrio o reposo. Este proceso se puede describir matemáticamente utilizando ecuaciones diferenciales que modelan la interacción entre las fuerzas restauradoras del sistema y las fuerzas disipativas.

Las vibraciones amortiguadas se dividen en vibraciones críticamente amortiguadas, vibraciones subamortiguadas y vibraciones sobreamortiguadas.

Se tiene un sistema al cual consta de una masa (m) la cual está unido a un resorte de constante de elasticidad k por uno de sus extremos por el otro extremo el resorte está fija un soporte como se muestra en la figura 3.26. El sistema se encuentra en la tierra y el sistema se encuentra en un medio de amortiguamiento cuya constante de amortiguamiento es (β). Se procede a determinar la ecuación de movimiento del sistema por el método de fuerzas.

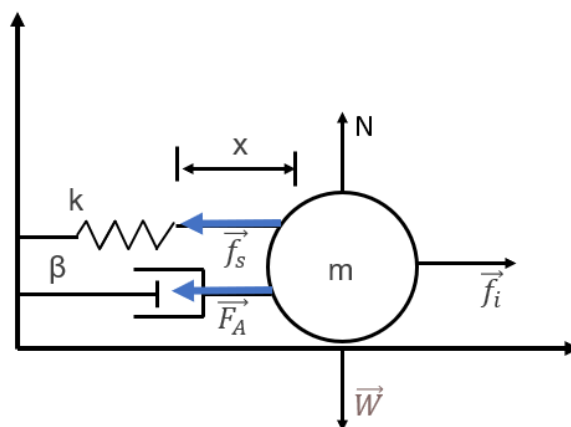


Figura 3.26. Sistema masa-resorte amortiguado

En la figura 3.26 se muestran los elementos que conforman al sistema masa-resorte amortiguado y los parámetros con los cuales se identifican dichos elementos y son los siguientes. Resorte de constante de rigidez (k), medio de amortiguamiento de constante de amortiguamiento (β), masa del bloque (m), la tierra la cual genera un campo gravitacional que genera una fuerza de gravitación y produce la aceleración de la gravedad ($\vec{g}$)

En la figura 3.27 se muestra las interacciones que existen entre los elementos del sistema

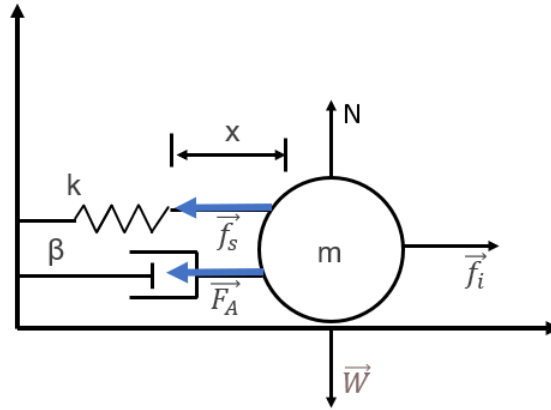


Figura 3.27. Fuerzas de interacción entre los elementos del sistema.

Donde f_i es la fuerza externa instantánea, f_k es la fuerza de restitución del resorte, f_A es la fuerza de amortiguamiento que produce el medio, N es la fuerza normal y ω es el peso del bloque.

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3.28.

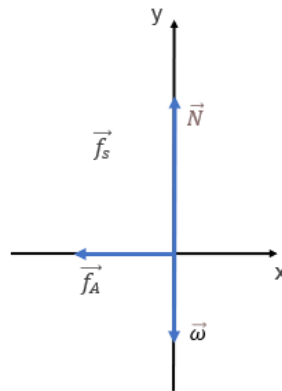


Figura 3.28. Diagrama de cuerpo libre.

Aplicando la segunda ley de Newton $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_R$, la ley de Hooke $F_s = -kx$ y la ley de Stokes $F_A = \beta \frac{dv}{dt}$ se obtiene para las componentes de las fuerzas en el eje X y para las componentes de las fuerzas en el eje Y.

$$\Sigma F_y = 0, N - \omega = 0, N = \omega \dots\dots\dots (3.47)$$

$$\Sigma F_x = ma_x \dots\dots\dots (3.48)$$

$$-f_s - f_A = ma_x \dots\dots\dots (3.49)$$

$$ma_x + f_s + f_A = 0 \dots\dots\dots (3.50)$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento 3.51 que explica el comportamiento del sistema es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0 \dots\dots (3.51)$$

3.5.1 *Movimiento vibratorio críticamente amortiguado*

El movimiento vibratorio críticamente amortiguado es un tipo de oscilación en la que un sistema regresa a su posición de equilibrio sin sobre vibrar ni vibrar indefinidamente. A continuación, se enuncian algunas de sus características principales:

Amortiguamiento crítico: En este tipo de movimiento, el nivel de amortiguamiento es tal que el sistema retorna a su posición de equilibrio lo más rápido posible sin oscilar de manera excesiva. El amortiguamiento crítico se encuentra justo en el punto en el que el sistema alcanza la menor cantidad de tiempo para volver al equilibrio

Rapidez de retorno al equilibrio: A diferencia de otros tipos de amortiguamiento, donde el sistema puede tardar más en volver a su posición de equilibrio o puede vibrar antes de estabilizarse, en el movimiento críticamente amortiguado, el retorno al equilibrio es rápido y sin sobre vibrar.

Respuesta exponencial: La respuesta del sistema a las vibraciones sigue una función exponencial amortiguada. Esto significa que la amplitud de la oscilación disminuye exponencialmente con el tiempo hasta que el sistema alcanza su posición de equilibrio.

Sin oscilaciones persistentes: A diferencia del movimiento subamortiguado, donde el sistema oscila varias veces antes de estabilizarse, y del movimiento sobreamortiguado, donde el sistema tarda mucho en volver al equilibrio, en el movimiento críticamente amortiguado, no hay vibraciones persistentes después de la perturbación inicial.

Frecuencia natural y constante de amortiguamiento: La frecuencia natural del sistema y la constante de amortiguamiento crítico está relacionada de manera específica y determinan cómo el sistema responde a las perturbaciones. Esta relación es importante para comprender y predecir el comportamiento del sistema.

El movimiento vibratorio críticamente amortiguado se caracteriza por un retorno rápido y suave al equilibrio sin oscilaciones persistentes, con una respuesta exponencial

Para el análisis de los diferentes casos de movimiento amortiguado que existen se procede a resolver la ecuación de movimiento 3.51 en la forma de la ecuación 3.52.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \dots \dots \dots (3.52)$$

Resolviendo la ecuación 3.52 por el método de la ecuación característica y haciendo los siguientes cambios de variables $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ y $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ tenemos.

El polinomio característico esta dado de la forma siguiente.

$$m^2 + 2\lambda m + \omega_n^2 = 0 \dots \dots \dots (3.53)$$

Resolviendo la ecuación 3.53 tenemos.

$$m = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\frac{4\lambda^2 - 4\omega_n^2}{4}} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2}$$

De los valores de las raíces del polinomio característico. Es decir, del valor de la discriminante $\sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2}$ depende el tipo de movimiento amortiguado que se obtiene.

El caso del movimiento críticamente amortiguado se tiene cuando $\lambda^2 - \omega_n^2 = 0$, entonces el valor de las raíces es de la forma.

$$m = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2} = -\lambda, \quad m_1 = m_2 = -\lambda \quad y \quad m_{1,2} \in \mathbb{R}$$

El movimiento es críticamente amortiguado y la solución es de la forma.

$$x(t) = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t) \dots \dots \dots (3.54)$$

Los valores de las constantes C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales del movimiento

$$x(0) = x_0 \quad y \quad v(0) = v_0$$

Ejemplo 10. Una pesa de 4 lb se une a un resorte cuya constante es de $2 \frac{lb}{ft}$ el medio presenta una resistencia al movimiento numericamente igual a la velocidad instantánea. Si la pesa se suelta en un punto a 1 ft arriba de la posición de equilibrio con una velocidad de $8 \frac{ft}{s}$ hacia abajo. Calcule el tiempo que pasa por la posición de equilibrio. Determine el tiempo en que la pesa llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio y determine cuál es su posición en ese instante.

$$\omega = 4 \text{ lb}$$

$$k = 2 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

$$F_A = \frac{dx}{dt}$$

$$x_0 = -1 \text{ ft}$$

$$v_0 = 8 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

$$g = 32 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$$

$$\omega = mg$$

$$m = \frac{\omega}{g} = \frac{4\text{lb}}{32 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}} = \frac{1}{8} \text{ slugs}$$

La ecuación de movimiento para este sistema en particular es la siguiente.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{1}{8} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de la ecuación característica tenemos

$$m^2 + 8m + 16 = 0$$

La solución de la ecuación anterior es de la forma.

$$m = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(6)}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -4$$

$$m_1 = -4 \quad m_2 = -4$$

La solución de la ecuación diferencial es de la forma.

$$x(t) = e^{-4t}(C_1 + C_2 t)$$

$$v(x) = e^{-4t}C_2 - 4e^{-4t}(C_1 + C_2 t)$$

$$= e^{-4t}(C_2 - 4C_1 - 4C_2 t)$$

Para encontrar los valores de las constantes C_1 y C_2 se utilizan las condiciones iniciales siguientes $t = 0$ $x(0) = -1$ $v(0) = 8$.

$$C_1 = -1 \quad 8 = C_2 - 4C_1$$

$$8 = C_2 + 4$$

$$C_2 = 8 - 4 = 4$$

Entonces las funciones de posición $x(t)$ y $v(t)$ de velocidad son.

$$x(t) = e^{-4t}(-1 + 4t)ft$$

$$v(t) = e^{-4t}(8 - 16t)ft$$

El bloque pasa por la posición de equilibrio si se cumple que $x(t) = 0$, entonces.

$$e^{-4t}(-1 + 4t) = 0 \quad ; \quad e^{-t} \neq 0; \quad -1 + 4t = 0$$

$$4t = 1$$

$$t = \frac{1}{4} \text{ s}$$

El bloque pasa por la posición de equilibrio en un tiempo.

$$t = \frac{1}{4} \text{ s} = 0.25 \text{ s.}$$

Para el cálculo del desplazamiento extremo es un problema de máximos y mínimos, que ocupa el criterio de la primera derivada.

Derivando la función de posición $x(t) = e^{-4t}(-1 + 4t)$, obtenemos la función de velocidad $v(t) = x'(t) = e^{-4t}(8 - 16t)$. Se iguala la función de velocidad a cero y se obtiene $e^{-4t}(8 - 16t) = 0$ resolviendo la ecuación se obtiene $e^{-4t} \neq 0$ $8 - 16t = 0$ por lo tanto el tiempo que alcanza el desplazamiento extremo es $t = \frac{8}{16} = 0.5 \text{ s}$ y la posición extrema está dada por $x(0.5) = e^{-4\left(\frac{1}{2}\right)}\left(-1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0.13 \text{ ft.}$

3.5.2 Movimiento vibratorio sobreamortiguado

El movimiento sobreamortiguado en una vibración se refiere a un tipo de oscilación donde el sistema, después de ser perturbado, regresa a su posición de equilibrio sin oscilaciones significativas, y lo hace de manera más lenta que en un sistema críticamente amortiguado, pero más rápido que en un sistema subamortiguado. Aquí tienes un resumen de sus características principales:

Amortiguamiento excesivo: En el movimiento sobreamortiguado, el sistema está sometido a un nivel de amortiguamiento mayor que el necesario para regresar a la posición de equilibrio en el menor tiempo posible. Este exceso de amortiguamiento impide cualquier oscilación significativa.

Retorno lento al equilibrio: Aunque el sistema regresa a su posición de equilibrio sin oscilaciones, lo hace de manera más lenta en comparación con el amortiguamiento crítico. Esto se debe al exceso de resistencia ofrecida por el amortiguamiento adicional.

Sin oscilaciones visibles: A diferencia de otros tipos de vibraciones, en el movimiento sobreamortiguado no hay oscilaciones visibles después de la perturbación inicial. El sistema simplemente regresa suavemente a la posición de equilibrio sin ningún tipo de ida y vuelta.

Respuesta exponencial amortiguada: Al igual que en otros tipos de amortiguamiento, la respuesta del sistema sigue una función exponencial amortiguada, pero con una tasa de disminución más rápida debido al amortiguamiento excesivo.

Estabilidad rápida: A pesar de que el retorno al equilibrio es más lento que en el caso críticamente amortiguado, el sistema alcanza la estabilidad de manera más rápida que en el caso subamortiguado. Esto se debe al efecto del alto nivel de amortiguamiento.

El movimiento vibratorio sobreamortiguado se caracteriza por un retorno lento pero rápido a la posición de equilibrio, sin oscilaciones visibles y con una respuesta exponencial amortiguada marcada por un nivel de amortiguamiento excesivo.

Para el análisis de los diferentes casos de movimiento amortiguado que existen se procede a resolver la ecuación de movimiento 3.51 en la forma de la ecuación 3.52.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Resolviendo la ecuación 3.52 por el método de la ecuación característica y haciendo los siguientes cambios de variables $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ y $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ tenemos.

El polinomio característico está dado de la forma siguiente.

$$m^2 + 2\lambda m + \omega_n^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior tenemos.

$$m = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\frac{4\lambda^2 - 4\omega_n^2}{4}} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2}.$$

De los valores de las raíces del polinomio característico. Es decir, del valor de la discriminante $\sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2}$ depende el tipo de movimiento amortiguado que se obtiene.

El caso del movimiento sobreamortiguado se tiene cuando $\lambda^2 - \omega_n^2 > 0$, entonces el polinomio característico tiene dos raíces reales diferentes de la forma siguiente.

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2}, m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2} \dots\dots\dots (3.55)$$

La solución $x(t)$ de la ecuación de movimiento es de la forma.

$$x(t) = -C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

$$x(t) = -C_1 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2})t} + C_2 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2})t}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(C_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2} t} \right) \dots\dots\dots (3.56)$$

Ejemplo 11. Un bloque de masa de 2 kg, está unido a un resorte cuya constante de rigidez es de $1 \frac{N}{m}$ el sistema está sumergido en un medio donde la fuerza de amortiguamiento es numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea. El movimiento comienza cuando el bloque está en una posición de 2m hacia la derecha y está en reposo. Determinar la posición y la velocidad en función del tiempo.

Solución.

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$k = 1 \frac{N}{m}$$

$$F_A = 8 \frac{dx}{dt}$$

$$x_0 = 2 \text{ m}$$

$$v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La ecuación de movimiento para este sistema en particular es la siguiente.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de la ecuación característica tenemos

$$2m^2 + 8m + 1 = 0 .$$

La solución de la ecuación anterior es de la forma.

$$m = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 8}}{4} = \frac{-8 \pm \sqrt{56}}{4}$$

$$m_1 = -2 + \frac{\sqrt{56}}{4} = -0.129 \quad m_2 = -2 - \frac{\sqrt{56}}{4} = -3.87$$

Entonces la solución de la ecuación de movimiento es de la forma

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

Para calcular los valores de C_1 y C_2 se utilizan las condiciones iniciales dadas por

$$x(0) = 2 \text{ y } v(0) = 0.$$

$$x(t) = C_1 e^{(-0.129)t} + C_2 e^{(-3.87)t}$$

$$v(t) = -0.129 C_1 e^{-0.129t} - 3.87 C_2 e^{-3.87t}$$

Para $t = 0$, $x(0) = 2$, $v(0) = 0$

$$C_1 + C_2 = 2$$

$$-0.129C_1 - 3.87C_2 = 0$$

$$C_1 = 2 - C_2$$

$$-0.129(2 - C_2) - 3.87C_2 = 0$$

$$2(-0.129) + 0.129C_2 - 3.87C_2 = 0$$

$$-3.41C_2 = 0.258$$

$$C_2 = \frac{0.258}{-3.41}$$

$$C_2 = -0.07$$

$$C_1 = 2 - (-0.07) = 2.07$$

Por lo tanto, la posición y la velocidad son.

$$x(t) = 2.07e^{(-0.129)t} - 0.07e^{(-3.87)t} \text{ m y } v(t) = -0.26e^{(-0.129)t} + 0.27e^{(-3.87)t} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3.5.3 Movimiento vibratorio subamortiguado

Un movimiento vibratorio subamortiguado es un tipo de oscilación en el que un sistema que está sujeto a una fuerza restauradora (que tiende a devolverlo a su posición de equilibrio) también experimenta un nivel de amortiguamiento, pero este amortiguamiento no es lo suficientemente fuerte como para evitar oscilaciones continuas después de una perturbación inicial.

A continuación, se enuncian sus características principales:

Amortiguamiento insuficiente: En el movimiento subamortiguado, el nivel de amortiguamiento es menor que el necesario para que el sistema regrese rápidamente a su posición de equilibrio sin oscilaciones.

Oscilaciones visibles: Después de una perturbación inicial, el sistema experimenta oscilaciones visibles antes de estabilizarse en su posición de equilibrio. Estas oscilaciones pueden disminuir gradualmente en amplitud con el tiempo debido al amortiguamiento presente.

Respuesta exponencial amortiguada: La respuesta del sistema a las perturbaciones sigue una función exponencial amortiguada. Esto significa que la amplitud de las oscilaciones disminuye gradualmente con el tiempo, pero aún persisten oscilaciones visibles durante algún tiempo.

Tiempo de estabilización prolongado: Comparado con el movimiento críticamente amortiguado, el sistema tarda más en volver a su posición de equilibrio debido a las oscilaciones continuas.

Frecuencia natural y constante de amortiguamiento: La frecuencia natural del sistema y la constante de amortiguamiento determinan cómo el sistema responde a las perturbaciones. En el caso subamortiguado, la frecuencia natural y el amortiguamiento no son críticos para evitar las oscilaciones continuas.

El movimiento vibratorio subamortiguado se caracteriza por oscilaciones visibles después de una perturbación inicial debido a un nivel insuficiente de amortiguamiento, con una respuesta exponencial amortiguada y un tiempo de estabilización prolongado en comparación con el amortiguamiento crítico.

Para el análisis de los diferentes casos de movimiento amortiguado que existen se procede a resolver la ecuación de movimiento 3.51 en la forma de la ecuación 3.52.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de la ecuación característica y haciendo los

siguientes cambios de variables $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ y $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ tenemos.

El polinomio característico esta dado de la forma siguiente.

$$m^2 + 2\lambda m + \omega_n^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior tenemos.

$$m = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\frac{4\lambda^2 - 4\omega_n^2}{4}} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2}$$

De los valores de las raíces del polinomio característico. Es decir, del valor de la discriminante $\sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2}$ depende el tipo de movimiento amortiguado que se obtiene.

El caso del movimiento subamortiguado se tiene cuando $\lambda^2 - \omega_n^2 < 0$, entonces el polinomio característico tiene raíces complejas de la forma $a + bi$ y la solución de 3.53 es de la forma

$$m = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2} = -\lambda \pm \sqrt{(\omega_n^2 - \lambda^2)} = -\lambda + \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2} i$$

$$m = -\lambda \pm \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2} i = -\lambda \pm \omega_d i \quad \dots\dots\dots (3.57)$$

Donde $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2}$ y ω_d es la frecuencia del movimiento amortiguado.

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad T \text{ es el periodo}$$

Para este caso la solución de la ecuación de movimiento es de la forma.

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sen \omega_d t)$$

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(C_1 \cos \sqrt{-(\lambda^2 - \omega_n^2)} t + C_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2} t \right) \dots\dots\dots (3.58)$$

Para encontrar las constantes C_1 y C_2 se utilizan las condiciones iniciales del movimiento $x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$.

Ejemplo 12. Un resorte de longitud de 200 cm se le cuelga un resorte de masa de $1000g_r$ y el resorte alcanza una longitud de 220 cm, posteriormente se le aplica una fuerza instantánea que estira al resorte 3cm. Encontrar $x(t)$ y $v(t)$. Si después de estirar el resorte a la masa, se le aplica una velocidad inicial de $60 \frac{cm}{s}$ hacia abajo y el sistema se encuentra en un medio donde la fuerza de amortiguamiento es numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea. Determine la posición y velocidad en cualquier instante de tiempo.

Solución.

$$m = 1000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$$

$$L = 200 \text{ cm} = 2 \text{ m}$$

$$L_f = 220 \text{ cm} = 2.2 \text{ m}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x_0 = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$$

$$v_0 = 60 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$f_A = 2 \frac{dx}{dt}$$

$$f_s = kx$$

$$k = \frac{f_s}{x} = \frac{\omega}{x} = \frac{10 \text{ N}}{0.2 \text{ m}} = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$x = L_f - L = 2.2 \text{ m} - 2.0 \text{ m} = 0.2 \text{ m}$$

$$\omega = mg = (1 \text{ kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 10 \text{ N}$$

La ecuación de movimiento para este sistema en particular es la siguiente.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 50x = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de la ecuación característica tenemos

$$m^2 + 2m + 50 = 0$$

La solución de la ecuación anterior es de la forma.

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(50)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4 - 200}}{2} = -1 \pm 7i.$$

La solución de la ecuación diferencial es de la forma.

$$x(t) = e^{-t}(C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t) \text{ m}$$

$$v(t) = e^{-t}(-7C_1 \sin 7t + 7C_2 \cos 7t) - e^{-t}(C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t).$$

Para encontrar los valores de las constantes C_1 y C_2 se utilizan las condiciones iniciales siguientes

$$t = 0, \quad x(0) = 0.03, \quad v(0) = 0.6$$

$$C_1 = 0.03$$

$$0.6 = 7C_2 - C_1$$

$$7C_2 = 0.6 + C_1$$

$$7C_2 = 0.6 + 0.3$$

$$7C_2 = 0.63$$

$$C_2 = \frac{0.63}{7}$$

$$C_2 = 0.09$$

Entonces las funciones de posición $x(t)$ y $v(t)$ de velocidad son.

$$x(t) = e^{-t}(0.03\cos 7t + 0.09\sin 7t) \text{ m}$$

$$v(t) = e^{-t}(-0.3\sin 7t + 0.6\cos 7t) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.6 Ejercicios

1. Un péndulo de longitud de 3 metros y de masa de 20 gramos se separa un ángulo de 2° hacia la derecha con respecto a la vertical y luego se suelta desde el reposo haciendo que comience a oscilar. Calcular las características del movimiento b) el número de oscilaciones y la distancia recorrida a los dos segundos c) la velocidad angular y lineal que alcanza a los tres segundos

2. Un péndulo de longitud de 2 metros y de masa de 100 gramos se separa un ángulo de 5° hacia la izquierda con respecto a la vertical y luego se suelta con una velocidad de 3 cm/s hacia la vertical, haciendo que comience a oscilar. Calcular las características del movimiento b) el número de oscilaciones y la distancia recorrida a los cuatro segundos c) la velocidad angular y lineal que alcanza a los tres segundos

3. Un péndulo de longitud de 48 in de peso de 5 lb que está en la tierra se separa un ángulo de 15° hacia la izquierda de la vertical y luego se suelta haciendo que comience a oscilar. Determine la distancia que recorre desde que comienza a oscilar hasta 0.5 segundos después de que pasa por segunda vez por la posición de equilibrio viajando hacia la izquierda b) los tiempos donde alcanza la mitad de la máxima velocidad angular negativa c) los tiempos donde su aceleración angular es positiva

4. Un péndulo de masa de 2 kg de longitud de 3 m da 30 oscilaciones en 20 segundos en un planeta desconocido ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en el planeta desconocido?

5. Se fija una masa de 20 kg a un resorte. Si la frecuencia del movimiento armónico simple es 10 oscilaciones por segundo, ¿Cuál es la constante k del resorte? ¿Cuál es la frecuencia del movimiento armónico simple si la masa original se reemplaza con una de 40 kg?

6. Un bloque de 20 lb estira 6 in a un resorte. En ese sistema, el bloque se suelta, partiendo del reposo, a 2 in debajo de la posición de equilibrio.

a) Calcule la posición, la velocidad y la aceleración del bloque cuando en $t = 4$ s.

b) ¿Cuál es la velocidad del bloque en $t = 1$ s ? ¿Hacia dónde se dirige el bloque en ese instante?

c) ¿En qué instantes de tiempo el bloque pasa por la posición de equilibrio?

7. Una fuerza de 400 N estira 2 m un resorte. Después, al extremo de ese resorte se fija una masa de 50 kg y parte de la posición de equilibrio a una velocidad de 10 m/s hacia abajo. Determine la velocidad y la aceleración del bloque a los 10 segundos, el número de revoluciones que dio en ese tiempo y la distancia total recorrida por el bloque en 5 s viajando hacia arriba.

8. Un bloque de 32 lb estira 24 in a un resorte. Determine la amplitud y el periodo de movimiento si el bloque parte de 12 in arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad inicial de 24 in/s hacia arriba. ¿Cuáles son las características del movimiento? ¿Cuántas vibraciones completas habrá hecho el bloque hasta los 12 s ? ¿ Que tiempo total viaja el bloque desde que empezó el movimiento hasta completar 5 segundos y el bloque adquirió solamente posiciones negativas?

9. Un cuerpo de 8 lb, fijo a un resorte, tiene movimiento armónico simple. Deduzca la ecuación del movimiento si la constante del resorte es 1 lb/pie y el cuerpo parte de 6 in hacia abajo del punto de equilibrio, con una velocidad de $\frac{3}{2}$ ft/s hacia abajo. Calcular la $x(t)$ y la

distancia que recorre en 1 segundo después que paso por una posición igual a la mitad de la amplitud positiva por primera vez. ¿Cuál es su desplazamiento total en 20 s?

10. Una masa pesa 10 lb, y estira $\frac{1}{4}$ ft un resorte. Se quita esa masa y se reemplaza con una de 21.6 slugs que parte de $\frac{1}{3}$ ft sobre la posición de equilibrio con una velocidad de $\frac{5}{4}$ ft/s hacia abajo. ¿En qué momento llega la masa a un desplazamiento numéricamente igual a $\frac{1}{2}$ de la amplitud debajo de la posición de equilibrio?

11. Un bloque de 40 lb se une a un resorte cuya constante es 2 lb/ft. El medio presenta una resistencia al movimiento numéricamente igual a 3 veces la velocidad instantánea. Si el bloque se suelta de un punto a 2 ft arriba de la posición de equilibrio con una velocidad de 8 ft/s hacia abajo, calcule el tiempo en que pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el momento en que el contrapeso llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio y determine si en algún momento el bloque pasa por la posición de equilibrio.

12. Un resorte de 4 pies alcanza 8 pies al colgarle un bloque de masa 8 slugs. El medio a través del cual se mueve ofrece una resistencia numéricamente igual a $\sqrt{2}$ veces su velocidad instantánea. Deduzca la ecuación del movimiento si el bloque se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad de 5 ft/s hacia abajo. Calcule el tiempo en que llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio. ¿Cuál es su posición en ese instante?

13. Una masa de 1 kg está unida a un resorte cuya constante es $16 \frac{N}{m}$ y todo el sistema se sumerge en un líquido que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 10 veces la velocidad instantánea. Determine $x(t)$ y $v(t)$ si:

(a) El contrapeso se suelta, partiendo del reposo a 1 m debajo de la posición de equilibrio

(b) El contrapeso se suelta 1 m abajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 15 m/s hacia arriba.

14. Una fuerza de 2 lb estira 1 ft un resorte. A ese resorte se le une un contrapeso de 3.2 lb y el sistema se sumerge en un medio que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 0.4 la velocidad instantánea.

a) Obtenga $x(t)$, si el contrapeso parte del reposo 1 pie arriba de la posición de equilibrio

b) Calcule el primer momento en que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio dirigiéndose hacia arriba.

15. Después de unir un contrapeso de 10 lb a un resorte de 5 pies, éste mide 7 pies. Se quita el contrapeso y se reemplaza con otro de 8 lb, y el sistema se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea.

(a) Obtenga $x(t)$, si se suelta el contrapeso a $\frac{1}{2}$ pie debajo de la posición de equilibrio a una velocidad de 1 pie/s hacia abajo

(c) Calcule los tiempos en que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio al dirigirse hacia abajo.

16. Al unir un bloque de 100 lb a un resorte, éste se estira 5 pies. El contrapeso también está unido a un amortiguador, que ofrece una resistencia numéricamente igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Calcule los valores de la constante de amortiguamiento β para que el movimiento que se produce sea (a) sobre amortiguado; (b) críticamente amortiguado, y (c) sub amortiguado.

17. Se tiene un péndulo el cual consta de una masa de 1 kg, la cual está unida a una cuerda inextensible de longitud 2 m y de masa despreciable y el otro extremo de la cuerda está

sujeta un perno A. Determine por los métodos de energía y de fuerza la ecuación de movimiento que describe el comportamiento del sistema, cuando se aplica una fuerza instantánea hasta que el péndulo alcanza un ángulo $\theta_0 = 10^\circ$ hacia la derecha, con respecto a la vertical y luego se suelta, si el sistema está en la tierra y el sistema no interactúa con el medio.

18. Se tiene una placa de forma rectangular de base de 4 m y altura 10 m. El sistema se encuentra en la tierra y la masa de la placa es de 2 kg determine la ecuación de movimiento que describe el comportamiento del sistema por los métodos de energía y de fuerzas, si bajo la acción de una fuerza instantánea la placa es desviada un ángulo de 15° con respecto a la vertical hacia la derecha y luego se suelta el sistema no interactúa con el medio, el sistema gira alrededor de un eje que pasa por el perno A que se encuentra en el punto medio del lado superior de la placa y es perpendicular a la placa.

Capítulo IV. Modelado de sistemas mecánicos vibratorios forzados

Objetivo del capítulo. Determinar ecuación de movimiento las características de un sistema vibratorio amortiguado forzado por una fuente de excitación armónica externa y determinar las condiciones en las que se obtienen los fenómenos de batido y de resonancia para sistemas vibratorios mecánicos armónicos forzados por una fuente de excitación armónica externa.

Las vibraciones mecánicas forzadas, son aquellas que se producen en un sistema mecánico divide a la interacción del sistema h con una fuerza excitación externa periódica. Estas fuerzas pueden ser de origen mecánico, eléctrico, entre otras.

En cuanto a su clasificación coma las vibraciones mecánicas forzadas, las vibraciones mecánicas forzadas se dividen en dos categorías principales: vibraciones armónicas y vibraciones mecánicas no armónicas. Las vibraciones armónicas son aquellas en el que el sistema interactúa con una fuerza externa armónica, es decir en forma sinusoidal. Las vibraciones forzadas no armónicas son aquellos cuando el sistema mecánico interactúa con una fuerza externa no armónica o sinusoidal.

A continuación, daremos unos ejemplos de cada una de ellas.

Vibraciones forzadas armónicas: Un ejemplo de una vibración forzada armónica es el movimiento de un péndulo simple bajo la influencia de una fuerza externa periódica. Cuando se aplica una fuerza oscilante a un péndulo, este responderá con un movimiento armónico simple, donde la amplitud y la frecuencia están determinadas por las características de la fuerza externa.

Vibraciones forzadas no armónicas: cuál un ejemplo de una vibración forzada no armónica es el movimiento de un puente colgante cuando un camión pesado pasa sobre él. En este caso, la fuerza ejercida por el camión no sigue un patrón sinusoidal, lo cual puede generar

vibraciones en el puente con una respuesta no armónica, pudiendo generar efectos no lineales en la estructura.

En el presente capítulo sólo estudiaremos las vibraciones mecánicas forzadas armónicas.

4.1. Análisis de sistemas mecánicos vibratorios armónicos con un grado de libertad interactuando con una fuerza externa armónica.

Un sistema mecánico armónico sin amortiguamiento expuesto a una fuerza externa periódica es un oscilador armónico simple (como un resorte-masa) en el cual no hay fuerzas de amortiguamiento (resistencia), pero se aplica una fuerza externa que varía de manera periódica con el tiempo.

La ecuación de movimiento de un sistema armónico masa resorte armónico de acuerdo a la ecuación de (3,29) del capítulo III, es de la forma:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \dots \dots \dots (4.1)$$

Considerando que aparte de la fuerza de restitución del resorte, la fuerza normal y el peso del cuerpo ahora actúa una fuerza de excitación externa permanente de forma periódica como se muestra en la figura 4.1.

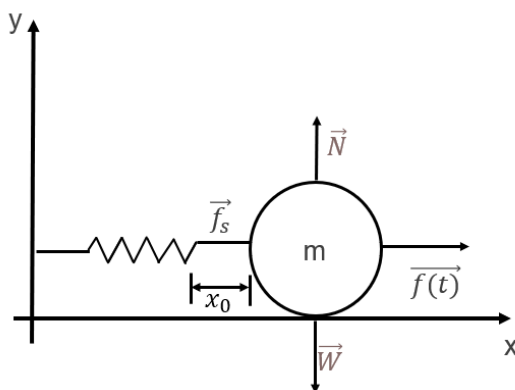


Figura 4.1. Sistema masa resorte sin amortiguamiento forzado

La ecuación de movimiento de un sistema vibratorio armónico forzado es de la forma:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \sin(\omega t) \dots \dots \dots (4.2)$$

Donde:

m– masa del cuerpo

k - la constante del resorte

F_0 – la amplitud de la fuerza externa

ω - la frecuencia angular de la fuerza externa

La ecuación 4.2 es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea, por lo tanto, su solución consta de dos partes una que es la solución complementaria y una solución particular $x_p(t)$

La solución complementaria $x_c(t)$ es la solución de la ecuación homogénea de la ecuación 4.2 es de la forma:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \dots \dots (4.3)$$

Donde $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia natural del sistema masa resorte armónico. Como el movimiento es periódico, la solución particular de la ecuación 4.2 puede ser determinada suponiendo una solución armónica de la forma

$$x_p(t) = C \sin(\omega t) \dots \dots \dots (4.4)$$

Donde C es una constante y se determina de la siguiente manera, obteniendo la segunda derivada de la ecuación 4.4 con respecto al tiempo y la sustituimos en la ecuación 4.2 obtenemos:

$$-C\omega^2 \text{sen } \omega t + \frac{k}{m}(C \text{sen } \omega t) = \frac{F_0}{m} \text{sen } \omega t \dots\dots\dots (4.5)$$

Simplificando 4.5 y despejando C obtenemos:

$$C = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \dots\dots\dots (4.6)$$

Sustituyendo la ecuación 4.6 en la ecuación 4.4 obtenemos:

$$x_p(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \text{sen } (\omega t) \dots\dots\dots (4.7)$$

La solución general de la ecuación 4.2 es de la forma:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \text{sen } \omega_n t + \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \text{sen } (\omega t) \dots\dots\dots (4.8)$$

Donde los valores de las constantes C_1 y C_2 se obtienen utilizando las condiciones iniciales $t = 0, x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$.

Ejemplo 1. Una masa de 1 kg se cuelga de un resorte cuya constante de elasticidad es de $4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Sobre el sistema ante una fuerza externa $f(t) = 2 \text{sen } \frac{3}{2} t$ N. El movimiento del sistema comienza cuando la masa se encuentra a 1m por debajo de la posición de equilibrio y lleva una velocidad de $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hacia arriba. Determine la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ de la masa y trace la gráfica de la velocidad $v(t)$ en cualquier instante de tiempo.

Datos: $m = 1 \text{ kg}, k = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}}, f(t) = 2 \text{sen } \frac{3}{2} t \text{ N}, g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$

$$x_0 = 1 \text{ m y } v_0 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La ecuación de movimiento es de la forma.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t)$$

Para nuestro caso particular es de la forma.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)$$

La solución de la ecuación anterior es de la forma:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

Donde $x_c(t)$ es la solución de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de la ecuación característica tenemos.

$$m^2 + 4 = 0$$

Resolviendo el polinomio característico las raíces son.

$$m_1 = -2i \text{ y } m_2 = +2i$$

Por lo tanto, la solución es de la forma.

$$x_c(t) = (c_1 \cos \frac{3}{2}t + c_2 \operatorname{sen} \frac{3}{2}t)$$

Encontramos la solución particular $x_p(t)$ de la forma.

$$x_p(t) = A \cos \frac{3}{2}t + B \operatorname{sen} \frac{3}{2}t$$

Calculamos la primera y segunda derivada obteniendo.

$$x'_p = -\frac{3}{2} \operatorname{sen} \frac{3}{2}t + \frac{3}{2}B \cos \frac{3}{2}t \text{ y } x''_p = -\frac{9}{4}A \cos \frac{3}{2}t - \frac{9}{4}B \operatorname{sen} \frac{3}{2}t$$

Sustituyendo las ecuaciones x_p, x_p' y x_p'' en la ecuación de movimiento tenemos.

$$-\frac{9}{4}A \cos \frac{3}{2}t - \frac{9}{4}B \sin \frac{3}{2}t + 4A \cos \frac{3}{2}t + 4B \sin \frac{3}{2}t = 2 \sin \frac{3}{2}t$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos.

$$\frac{7}{4}A \cos \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}B \sin \frac{3}{2}t = 2 \sin \frac{3}{2}t$$

Igualando coeficientes de las funciones de ambos lados de la ecuación obtenemos el sistema de ecuaciones simultaneas siguiente.

$$\frac{7}{4}A = 0 \text{ y } \frac{7}{4}B = 2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos.

$$A = 0 \text{ y } B = \frac{8}{7}$$

Por lo tanto, la solución particular $x_p(t)$ es de la forma.

$$x_p(t) = \frac{8}{7} \sin \frac{3}{2}t$$

La solución general es de la forma.

$$x(t) = (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + \frac{8}{7} \sin \frac{3}{2}t$$

Derivando la ecuación anterior obtenemos.

$$v(t) = 2c_1 \cos 2t + 2c_2 \sin 2t + \frac{12}{7} \cos \frac{3}{2}t$$

Para calcular las constantes c_1 y c_2 utilizamos las condiciones iniciales de la forma

$$x(0) = 1 \text{ y } v(0) = -1 \text{ obtenemos.}$$

$$c_1 = 1 \text{ y } 2c_2 + \frac{12}{17} = -1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos.

$$c_1 = 1 \text{ y } c_2 = \frac{-19}{14}$$

Considerando los valores de las constantes tenemos que la posición $x(t)$ es de la forma.

$$x(t) = \cos 2t - \frac{19}{14} \sin 2t + \frac{8}{7} \sin \frac{3}{2}t \text{ m}$$

La velocidad es de la forma.

$$v(t) = 2 \sin 2t + \frac{19}{7} \cos 2t + \frac{12}{7} \cos \frac{3}{2}t \frac{m}{s}$$

La gráfica de la función posición $v(t)$ se muestra en la figura 4.2

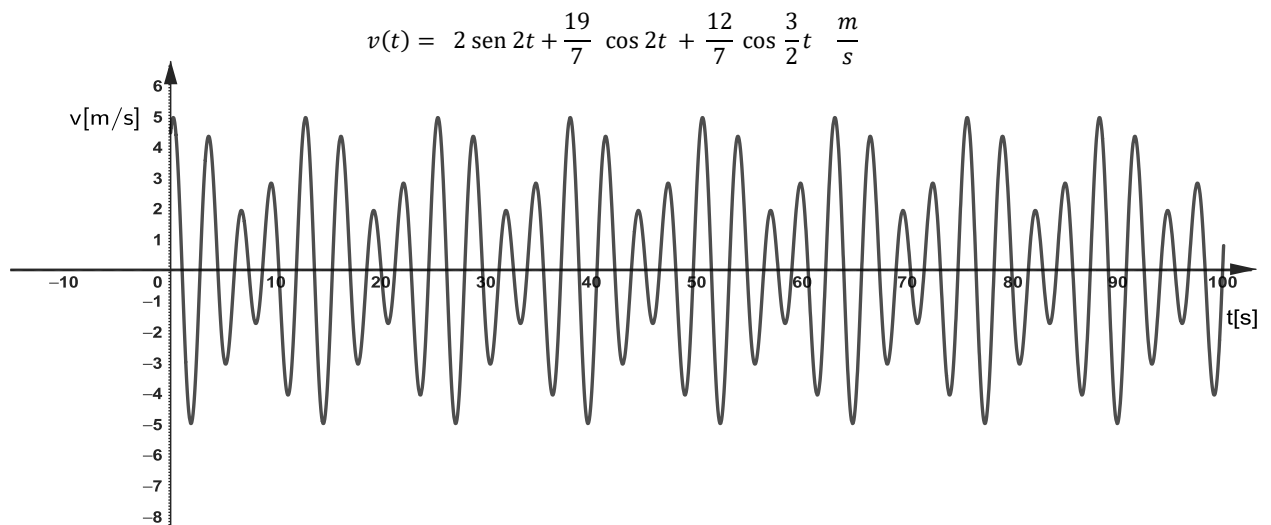


Figura 4.2. Gráfica de la velocidad v_s tiempo.

4.1.1 Fenómeno de batido.

El batido es un fenómeno en vibraciones mecánicas que ocurre cuando dos ondas de frecuencias ligeramente diferentes se superponen. Esta superposición resulta en una variación periódica en la amplitud de la onda resultante. En términos simples, el batido se percibe como una fluctuación en la intensidad de la vibración.

Características del fenómeno de batido:

Superposición de Frecuencias:

El batido ocurre cuando dos señales vibratorias con frecuencias cercanas, pero no iguales, se combinan. Por ejemplo, si las frecuencias son ω_n y ω la frecuencia de batido será la diferencia $[\omega_n - \omega]$

Amplitud Modulada: La amplitud de la señal resultante varía a una frecuencia igual a la diferencia entre las frecuencias originales. Esto crea un patrón de amplitud que sube y baja, conocido como la envolvente de la señal de batido.

Frecuencia de Batido: La frecuencia con la que se produce la variación en la amplitud es la diferencia entre las frecuencias de las señales originales, $\omega_b = [\omega_n - \omega]$.

Periodo de Batido: El periodo de la variación en la amplitud es el inverso de la frecuencia de batido, $T_b = \frac{2\pi}{\omega_b}$.

Interferencia Constructiva y Destructiva: En ciertos momentos, las señales se suman constructivamente, produciendo un pico en la amplitud, y en otros, se restan destructivamente, resultando en una disminución en la amplitud.

Visualización del Batido: Cuando se grafican las señales originales y la resultante, se observa una señal que parece pulsar o latir, debido a la variación en la amplitud, como se muestra en la figura. 4.3

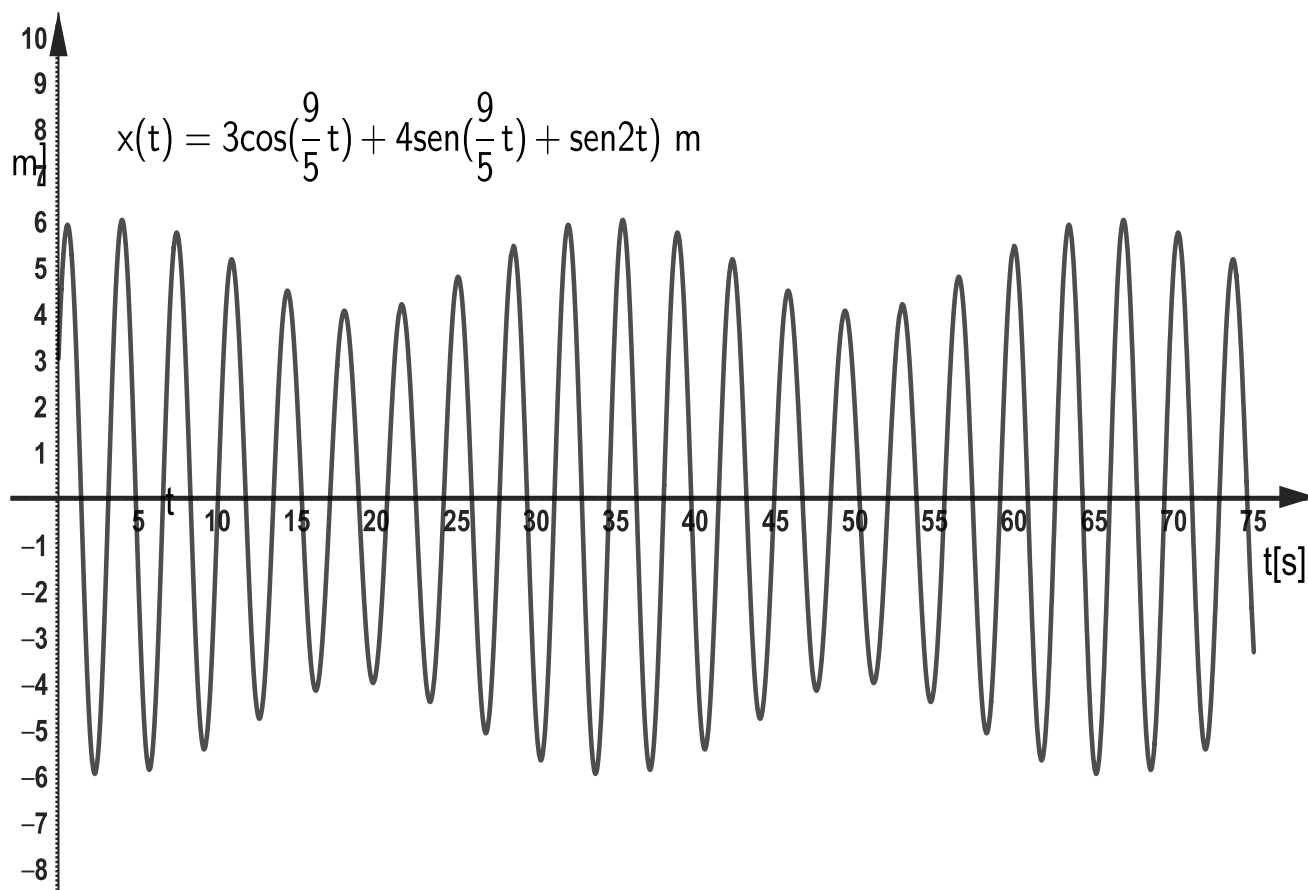


Figura 4.3 Gráfica del fenómeno de batido en una vibración

Ejemplo 2. Una masa de 1 kg se cuelga de un resorte cuya constante de elasticidad es de $4 \frac{N}{m}$. Sobre el sistema ante una fuerza externa $f(t) = 2 \sin \frac{9}{5} t \text{ N}$. El movimiento del sistema comienza cuando la masa se encuentra a $1m$ por debajo de la posición de equilibrio y lleva una velocidad de $1 \frac{m}{s}$ hacia arriba. Determine la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ de la masa y trace la gráfica de la posición $x(t)$ en cualquier instante de tiempo.

Datos.

$$m = 1 \text{ kg}, \quad K = 4 \frac{N}{m}, \quad f(t) = 2 \sin \frac{9}{5} t \text{ N}, \quad g = 10 \frac{m}{s^2},$$

$$x_0 = 1 \text{ m} \text{ y } v_0 = -1 \frac{m}{s}$$

La ecuación de movimiento es de la forma.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t)$$

Para nuestro caso particular la ecuación anterior es de la forma.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{9}{5}t\right)$$

La solución general de la ecuación anterior es de la forma:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

Donde $x_c(t)$ es la solución de la ecuación de movimiento homogénea.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

Resolviendo la ecuación por el método de la ecuación característica tenemos.

$$m^2 + 4 = 0$$

Resolviendo el polinomio característico las raíces son.

$$m_1 = -2i \text{ y } m_2 = +2i$$

Por lo tanto, la solución complementaria es de la forma.

$$x_c(t) = (c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$$

Encontramos la solución particular $x_p(t)$ de la forma.

$$x_p(t) = A \cos \frac{9}{5}t + B \operatorname{sen} \frac{9}{5}t$$

Calculamos la primera y segunda derivada obteniendo.

$$x_p = -\frac{9}{5} \sin \frac{9}{5}t + \frac{9}{5}B \cos \frac{9}{5}t \text{ y } x_p'' = -\frac{81}{25}A \cos \frac{9}{5}t - \frac{81}{25}B \sin \frac{9}{5}t$$

Sustituyendo las ecuaciones la segunda derivada y la función en la ecuación de movimiento tenemos.

$$-\frac{81}{25}A \cos \frac{9}{5}t - \frac{81}{25}B \sin \frac{9}{5}t + 4A \cos \frac{9}{5}t + 4B \sin \frac{9}{5}t = 2 \sin \frac{9}{5}t$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos.

$$\frac{19}{25} \cos \frac{9}{5}t + \frac{19}{25} \sin \frac{9}{5}t = 2 \sin \frac{9}{5}t$$

Igualando coeficientes de las funciones de ambos lados de la ecuación obtenemos el sistema de ecuaciones simultaneas siguiente.

$$\frac{19}{25}A = 0 \text{ y } \frac{19}{25}B = 2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos.

$$A = 0 \text{ y } B = \frac{50}{19}$$

Por lo tanto, la solución particular $x_p(t)$ es de la forma.

$$x_p(t) = \frac{50}{19} \sin \frac{9}{5}t$$

La solución general es de la forma.

$$x(t) = (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + \frac{50}{19} \sin \frac{9}{5}t$$

Derivando la ecuación de $x(t)$ obtenemos la velocidad.

$$v(t) = 2c_1 \cos 2t + 2c_2 \sin 2t + \frac{450}{95} \cos \frac{9}{5}t$$

Para calcular las constantes c_1 y c_2 utilizamos las condiciones iniciales de la forma

$x(0) = 1$ y $v(0) = -1$ obtenemos.

$$c_1 = 1 \text{ y } 2c_2 + \frac{450}{95} = -1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos.

$$c_1 = 1 \text{ y } c_2 = \frac{-109}{38}$$

Considerando los valores de las constantes tenemos que la posición $x(t)$ es de la forma.

$$x(t) = \cos 2t - \frac{109}{38} \sin 2t + \frac{50}{19} \sin \frac{9}{5}t \text{ m}$$

La velocidad es de la forma.

$$v(t) = -2 \sin 2t + \frac{109}{19} \cos 2t + \frac{90}{19} \cos \frac{9}{5}t \frac{m}{s}$$

La gráfica de la función posición $x(t)$ se muestra en la figura 4.4

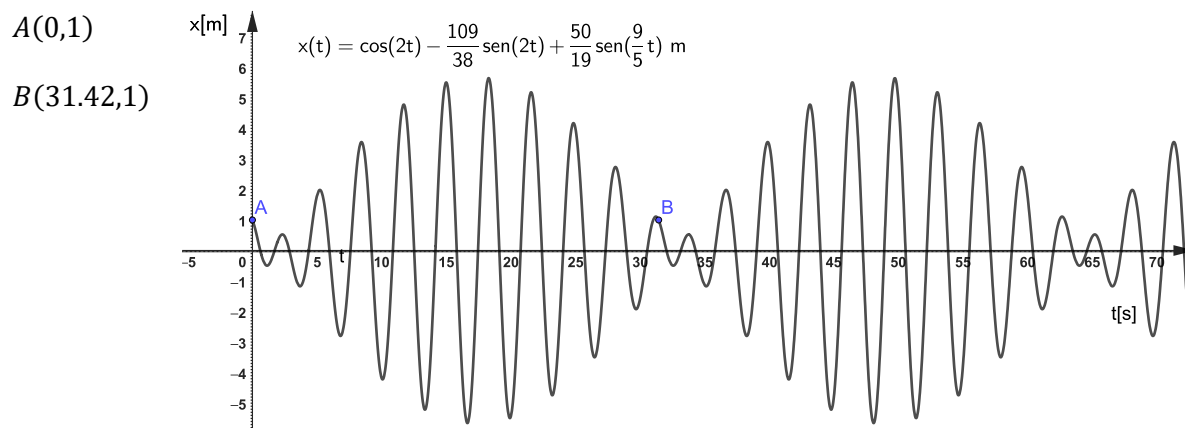


Figura 4.4. Gráfica del fenómeno de batido cuando $\omega_n \cong \omega$.

4.1.2 Resonancia

El fenómeno de resonancia en vibraciones mecánicas se refiere a la condición en la que un sistema vibratorio experimenta una amplitud máxima de oscilación. Esto ocurre cuando la frecuencia de la excitación externa coincide con la frecuencia natural del sistema.

A continuación, se presentan la definición y las características principales de este fenómeno:

Resonancia es el fenómeno en el que un sistema experimenta una respuesta vibratoria con una amplitud significativamente mayor cuando la frecuencia de una fuerza externa aplicada coincide con la frecuencia natural del sistema.

Características:

Frecuencia Natural:

Cada sistema mecánico tiene una o más frecuencias naturales, que son las frecuencias a las que el sistema tiende a oscilar en ausencia de fuerzas externas.

La resonancia ocurre cuando la frecuencia de la excitación externa se alinea con una de estas frecuencias naturales.

Amplitud Máxima:

Durante la resonancia, la amplitud de las vibraciones puede aumentar considerablemente.

Este aumento de la amplitud se debe a la acumulación de energía en el sistema, ya que la fuerza externa está en sincronía con la oscilación natural del sistema.

Desplazamiento, Velocidad y Aceleración:

La resonancia afecta no solo la amplitud del desplazamiento, sino también la velocidad y la aceleración del sistema.

Estos parámetros alcanzan sus valores máximos en resonancia.

Amortiguamiento:

La presencia de amortiguamiento en el sistema reduce la amplitud máxima alcanzada durante la resonancia.

Un sistema con alto amortiguamiento tendrá una respuesta de resonancia menos pronunciada, mientras que uno con bajo amortiguamiento experimentará una amplitud mayor.

Curva de Respuesta en Frecuencia:

Al graficar la amplitud de las vibraciones contra la frecuencia de la excitación, se observa un pico pronunciado en la frecuencia de resonancia.

Este pico indica el punto donde el sistema resuena.

Peligros y Beneficios:

La resonancia puede ser perjudicial si las amplitudes resultantes son lo suficientemente grandes como para causar daño o fallo estructural.

Sin embargo, en algunas aplicaciones, la resonancia se puede utilizar de manera beneficiosa, como en los instrumentos musicales o en ciertos tipos de maquinaria.

A continuación, mencionaremos algunos ejemplos de sistemas mecánicos donde interviene el fenómeno de la resonancia.

Puentes y Edificios: La resonancia puede causar daños severos, como el colapso de puentes cuando la frecuencia del viento coincide con la frecuencia natural del puente.

Componentes de Maquinaria: Partes rotativas pueden sufrir desgaste prematuro o fallar si operan a velocidades que inducen resonancia.

Instrumentos Musicales: Los instrumentos de cuerda, como las guitarras y violines, utilizan la resonancia para amplificar el sonido.

La resonancia en vibraciones mecánicas es un fenómeno crítico que se manifiesta cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema, resultando en una amplitud máxima de oscilación que puede ser controlada por el amortiguamiento del sistema.

Partiendo de la ecuación de movimiento 4.2 de un sistema mecánico armónico bajo la interacción de una fuerza externa periódica.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \sin(\omega t) \dots \dots \dots (4.9)$$

Considerando que la solución de la ecuación anterior es de la forma.

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin(\omega t) \dots \dots \dots (4.10)$$

Podemos observar que la solución consta de una solución complementaria $x_c(t)$ la cual corresponde al estado transitorio del sistema y una solución particular $x_p(t)$, la cual corresponde al estado permanente o estacionario del sistema. Sin embargo, podemos observar que si se cumple la condición que la frecuencia natural del sistema es igual a la frecuencia de oscilación de la fuente externa ($\omega_n = \omega$) entonces las amplitudes de la solución particular periódica aumentarían de forma indeterminada y es por tal razón que se produce el efecto de la resonancia.

En un sistema masa-resorte armónico forzado sin amortiguamiento, el "factor de multiplicación" o la "función de magnificación" aún describe la relación entre la amplitud de la

respuesta del sistema y la amplitud de la fuerza externa aplicada. Sin el amortiguamiento, la ecuación de movimiento simplificada es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F_0 \sin(\omega t) \dots \dots \dots (4.11)$$

Amplitud de la Respuesta

Para un sistema sin amortiguamiento, la amplitud C de la respuesta en estado estacionario se puede determinar de la siguiente manera:

$$C = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{F_0}{|k - m \omega^2|} \dots (4.12)$$

El factor de multiplicación de la vibración $M(\omega)$ se define como el cociente de la amplitud C de la respuesta particular y la deflexión estática $\frac{F_0}{k}$ que es producida por la amplitud de la fuerza externa F_0 , entonces se tiene.

$$M(\omega) = \frac{\frac{F_0}{|k - m \omega^2|}}{\frac{F_0}{k}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \dots (4.13)$$

La gráfica de $M(\omega)$ en función de la relación $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ se muestra en la figura 4.5.

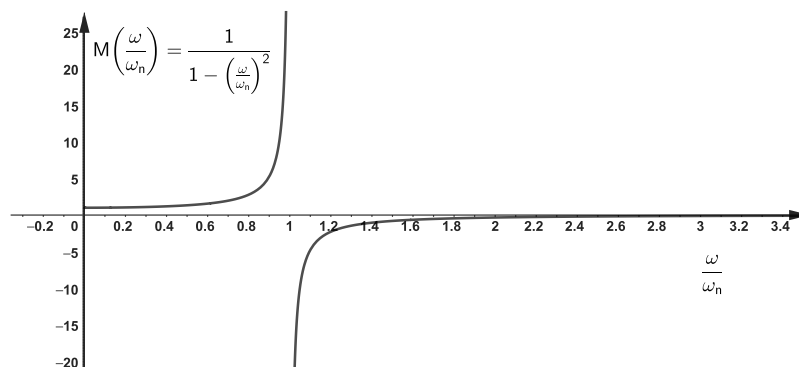


Figura 4.5. Gráfica de $M(\omega)$ en función de la relación $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

En la gráfica se puede apreciar que cuando la frecuencia ω de la fuerza externa se aproxima a cero ($\omega \approx 0$) entonces $M(\omega) \approx 1$, en tal caso como $\omega \ll \omega_n$ la magnitud de la fuerza $F(t)$ cambia lentamente y entonces la vibración del bloque está en fase con la fuerza $F(t)$ aplicada. Para el caso en que la fuerza externa sea aplicada con una frecuencia ω cercana a la frecuencia natural del sistema ω_n , entonces $\frac{\omega}{\omega_n} \approx 1$ entonces la amplitud de la vibración del bloque resulta extremadamente grande y en el caso cuando las frecuencias de la fuente externa y la natural del sistema ω y ω_n se igualan ($\omega = \omega_n$) entonces se produce el efecto de resonancia.

Cuando la fuerza externa $F_0 \sin(\omega t)$ es aplicada a altas frecuencias ($\omega > \omega_n$) entonces el factor de amplificación $M(\omega)$ es negativo ($M(\omega) < 0$), lo cual significa que el movimiento del bloque está fuera de fase con la fuerza $F(t)$ esto significa que cuando la fuerza actúa hacia la derecha el bloque se desplaza hacia la izquierda y viceversa. Para el caso cuando las frecuencias son muy altas ($\omega > \omega_n$) el bloque permanece casi estacionario y en consecuencia el factor de amortiguamiento es aproximadamente igual a cero ($M(\omega) \cong 0$).

En un sistema masa-resorte armónico forzado sin amortiguamiento, el factor de amplificación $M(\omega)$ cuantifica la relación entre la amplitud de la respuesta del sistema y la amplitud de la fuerza externa aplicada. Este factor se maximiza en la frecuencia de resonancia del sistema, donde teóricamente se vuelve infinito en ausencia de amortiguamiento (Hibbeler, 2004).

Ejemplo 3. Un bloque de peso de 10 N cuelga de un resorte cuya constante es de $4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, el sistema se encuentra en un medio sin amortiguamiento. El movimiento comienza cuando el bloque se encuentra en una posición de un metro por arriba de la posición de equilibrio y

llevaba una velocidad de $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hacia abajo y sobre el sistema actúa una fuerza externa dada por $f(t) = 3 \cos(2t) - 5 \sin(2t) \text{ N}$. Determine la posición en cualquier instante de tiempo e indique si el sistema se encuentra en resonancia.

Solución.

Datos:

$$\omega = 10 \text{ N}, \quad K = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad f(t) = (3 \cos 2t - 5 \sin 2t) \text{ N}, \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x_0 = -1 \text{ m y } v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Calculamos la masa del bloque.

$$m = \frac{\omega}{g} = \frac{10 \text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1 \text{ Kg}$$

La ecuación de movimiento es de la forma.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Para nuestro caso particular es de la forma.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 3 \cos 2t - 5 \sin 2t$$

La solución de la ecuación general de la ecuación es de la forma.

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

Donde $x_c(t)$ es la solución de la ecuación homogénea siguiente.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de la ecuación característica tenemos.

$$m^2 + 4 = 0$$

Resolviendo el polinomio característico las raíces son.

$$m_1 = +2i \text{ y } m_2 = -2i$$

Por lo tanto, la solución complementaria es de la forma.

$$x_c(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

Encontramos la solución particular $x_p(t)$ de la forma.

$$x_p(t) = t(A \cos 2t + B \sin 2t)$$

Calculamos la primera y segunda derivada obteniendo.

$$x_p'(t) = t(-2A \sin 2t + 2B \cos 2t) + A \cos 2t + B \sin 2t$$

$$x_p''(t) = t(-4B \sin 2t - 4A \cos 2t) + 2B \cos 2t - 2A \sin 2t - 2A \sin 2t + 2B \cos 2t$$

sustituyendo $x_p(t)$, $x_p''(t)$ en la ecuación de movimiento del sistema y simplificando obtenemos.

$$-4A \sin 2t + 4B \cos 2t = 3 \cos 2t - 5 \sin 2t$$

Por lo tanto, tenemos que.

$$A = \frac{5}{4} \text{ y } B = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$x_p(t) = \frac{5}{4}t \cos 2t + \frac{3}{4}t \sin 2t$$

Por lo tanto, la posición $x(t)$ es.

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{5}{4}t \cos 2t + \frac{3}{4}t \sin 2t$$

Derivando la ecuación de $x(t)$ obtenemos.

$$x''(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{5}{4} \cos 2t + \frac{3}{4} \sin 2t - \frac{5}{2}t \sin 2t + \frac{3}{2}t \cos 2t$$

Para calcular las constantes c_1 y c_2 utilizamos las condiciones iniciales de la forma $x(0) = -1$ y $v(0) = 1$ obtenemos.

$$c_1 = -1 \text{ y } 2c_2 + \frac{5}{4} = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior por el método de sustitución tenemos.

$$c_1 = -1 \text{ y } c_2 = \frac{-1}{8}$$

Considerando los valores de las constantes c_1 y c_2 tenemos que la posición $x(t)$ es de la forma.

$$x(t) = -1 \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t + \frac{5}{4}t \cos 2t + \frac{3}{4}t \sin 2t \text{ m}$$

En este caso como $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $\omega_n = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ como ambas son iguales entonces el sistema está en resonancia.

La gráfica de la función se muestra en la figura 4.6

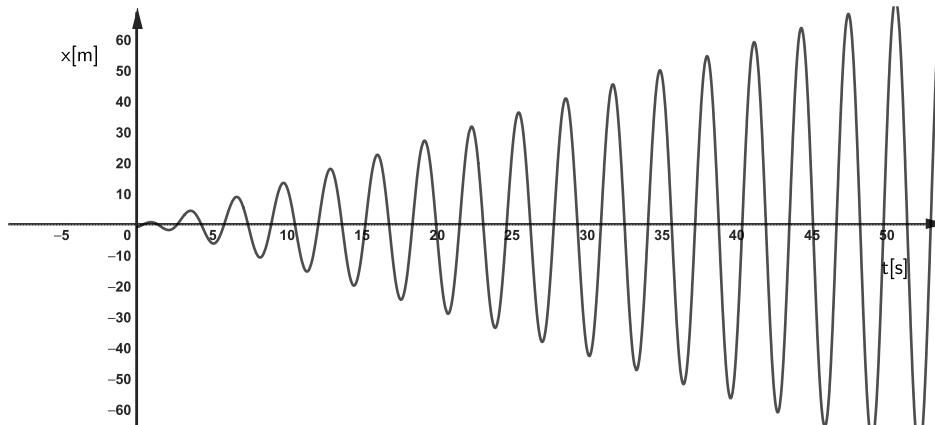


Figura 4.6. Gráfica de la posición $x(t)$ cuando un sistema está en resonancia.

4.2 Análisis de sistemas mecánicos vibratorios amortiguados con un grado de libertad interactuando con una fuerza armónica externa.

Un sistema vibratorio mecánico amortiguado forzado con masa y resorte es un modelo físico utilizado para describir el comportamiento dinámico de una masa conectada a un resorte y sometida a fuerzas externas, incluyendo una fuerza de amortiguamiento. Este sistema es comúnmente representado en la ingeniería y la física para entender y predecir cómo los sistemas mecánicos responden a las vibraciones y fuerzas externas.

El sistema vibratorio masa-resorte-amortiguador forzado consta de los siguientes componentes principales:

Masa (m): Representa el objeto que oscila.

Resorte (k): Proporciona una fuerza restauradora que es proporcional al desplazamiento de la masa según la Ley de Hooke ($F = -kx$).

Amortiguador (β): Proporciona una fuerza de amortiguamiento que es proporcional a la velocidad de la masa ($f_A = -\beta \frac{dx}{dt}$).

Fuerza externa ($f(t)$): Una fuerza que varía con el tiempo y que actúa sobre el sistema, provocando la vibración forzada.

En la figura 4.7 se muestra un sistema masa-resorte amortiguado interactuando con una fuerza externa armónica

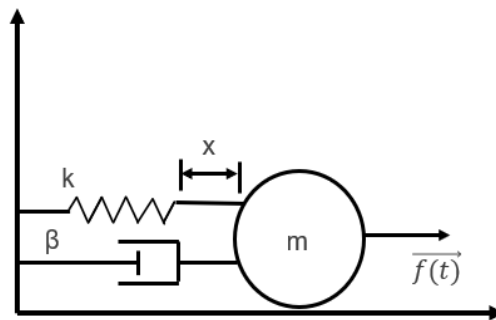


Figura 4.7. Sistema vibratorio masa-resorte amortiguado forzado.

En la figura 4.8 se muestran las interacciones que existen entre los elementos que integran al sistema y la interacción que existe entre el sistema y la fuerza externa que para nuestro estudio consideraremos una fuerza periódica.

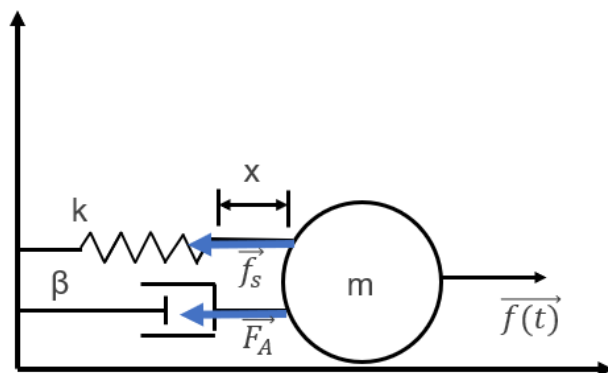


Figura 4.8. Interacciones entre los elementos de un sistema masa-resorte amortiguado forzado y con el medio.

Aplicando el método de fuerzas y siguiendo el procedimiento realizado en el subtema 3,5 del capítulo III y en este caso considerando que el sistema actúa con una fuerza externa $f(t)$, la ecuación de movimiento que describe el comportamiento del sistema es de la forma.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \dots \dots (4.14)$$

Las características del movimiento en este sistema incluyen:

Movimiento Libre vs. Forzado:

Movimiento Libre: Cuando $F(t)=0$, el sistema se llama "libre" y su comportamiento depende solo de la masa, el resorte y el amortiguador.

Movimiento Forzado: Cuando $F(t) \neq 0$, el sistema responde a una fuerza externa aplicada que en este caso en particular es periódica.

Amortiguamiento:

Subamortiguado ($\lambda^2 - \omega_n^2 < 0$): El sistema oscila con una frecuencia menor que la natural y la amplitud de las oscilaciones disminuye exponencialmente con el tiempo.

Amortiguamiento crítico ($\lambda^2 - \omega_n^2 = 0$): El sistema retorna a la posición de equilibrio tan rápido como sea posible sin oscilar.

Sobreamortiguado ($\lambda^2 - \omega_n^2 > 0$): El sistema retorna a la posición de equilibrio sin oscilar, pero más lentamente que en el caso críticamente amortiguado.

Para todos los casos se cumple que $\lambda^2 = \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2$ y $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$.

Frecuencia Natural y Frecuencia de Forzamiento:

Frecuencia Natural: Esta depende de los parámetros que definen a los elementos que conforman al sistema $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$.

Frecuencia de forzamiento. Es la frecuencia con que oscila la fuerza externa con la cual interactúa el sistema ω .

Para la solución de la ecuación 4.14 consideramos que el sistema interactúa con una fuerza externa $f(t)$ periódica entonces la ecuación toma la forma 4.15.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t \dots \dots (4.15)$$

Por lo tanto, se obtiene que la ecuación 4.15 es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea, entonces la solución $x(t)$ esta formada por dos partes una solución complementaria $x_c(t)$ la cual es la solución de la ecuación homogénea cuando la ecuación 4.15 se iguala a cero lo cual significa que el sistema no interactúa con el medio externo y cuya solución depende del tipo de amortiguamiento que actúa sobre el sistema como se estudió en el subtema 3.5 del capítulo III los cuales pueden ser una vibración sobreamortiguada, críticamente amortiguada y subamortiguada y para cada uno de los casos la solución complementaria sería de las siguientes formas

Caso críticamente amortiguado:

$$x_c(t) = e^{-\lambda t} (C_1 + C_2 t) \dots (4.16)$$

Caso sobreamortiguado:

$$x_c(t) = e^{-\lambda t} \left(C_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2} t} \right) \dots (4.17)$$

Caso subamortiguado:

$$x_c(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \omega_d + C_2 \sin \omega_d t) \dots \dots (4.18)$$

Como todos los sistemas interactúan con un medio de amortiguamiento esta solución desaparecerá con el tiempo es por tal razón que esta solución describe el estado transitorio del sistema, una solución particular $x_p(t)$ la cual es de forma periódica cuya frecuencia angular es igual a la frecuencia de la fuerza externa y esto hace que esta solución pertenece al estado estable o permanente del sistema y la solución general de la ecuación 4.14 es de la forma.

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \dots\dots(4.19)$$

Como la fuerza externa que se aplica al sistema es armónica, el movimiento del sistema estando en el estado estable será también armónico y en consecuencia la solución particular se propone como una función periódica de la forma

$$x_p(t) = A \cos \omega t + B \sen \omega t \dots\dots(4.20)$$

Las constantes A y B se encuentran sacando las derivadas de primero y segundo orden con respecto al tiempo y sustituyéndolas en la ecuación 4.15 se obtiene 4.21.

$$(-mA\omega^2 \cos \omega t - mB\omega^2 \sen \omega t) + (-\beta A\omega \sen \omega t + \beta B\omega \cos \omega t) + (kA \cos \omega t + kB \sen \omega t) = F_0 \sen \omega t \dots\dots\dots(4.21)$$

Igualando los coeficientes de las funciones de ambos lados de la ecuación 4.21 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones simultaneas 4.22.

$$-mA\omega^2 + \beta B\omega + kA = 0 \dots\dots\dots(4.22)$$

$$-mB\omega^2 - \beta A\omega + kB = F_0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultaneas por el método de sustitución se obtiene las ecuaciones 4.23.

$$A = \frac{-F_0 \left(\frac{\beta\omega}{m^2}\right)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\beta\omega}{m}\right)^2} \quad y \quad B = \frac{\frac{F_0}{m} (\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\beta\omega}{m}\right)^2} \dots\dots(4.23)$$

Por lo tanto, la forma de la solución particular $x_p(t)$ es de la forma de la ecuación 4.24.

$$x_p(t) = \frac{-F_0 \left(\frac{\beta\omega}{m^2}\right)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\beta\omega}{m}\right)^2} \cos \omega t + \frac{\frac{F_0}{m} (\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\beta\omega}{m}\right)^2} \sin \omega t \dots (4.24)$$

La ecuación 4.24 se puede llevar a la forma reducida 4.25.

$$x_p(t) = C \sin(\omega t + \alpha_0) \dots (4.25)$$

Donde los valores de la amplitud C y el ángulo de fase α_0 están dados por las ecuaciones 4.26.

$$C = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\beta\omega}{m\omega_n^2}\right)^2}} \quad y \quad \alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\beta\omega}{m\omega_n^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \dots (4.26)$$

El ángulo de fase α_0 representa la diferencia de fase que existe entre la fuerza externa periódica aplicada al sistema y la vibración resultante del estado estable del sistema.

El factor de amplificación en una vibración amortiguada forzada, también conocido como factor de resonancia o magnificación, es una medida de cómo la amplitud de la respuesta de un sistema oscilante cambia en función de la frecuencia de la fuerza excitadora en relación con la frecuencia natural del sistema. Este factor se denota comúnmente por $M(\omega)$ y se define como la relación entre la amplitud de la respuesta en régimen permanente y la deflexión estática de la manera de la ecuación 4.27.

$$M(\omega) = \frac{C}{\frac{F_0}{k}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\left(\frac{\beta}{\beta_c}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \dots (4.27)$$

Donde β_c es el coeficiente de amortiguamiento critico que le corresponde a la vibración para el caso de críticamente amortiguado y $\beta_c = 2 m \omega_n$

Características del factor de amplificación en una vibración amortiguada forzada:

Dependencia de la Frecuencia de Excitación:

El factor de amplificación varía con la frecuencia de la fuerza externa aplicada al sistema.

A bajas frecuencias de excitación, el factor de amplificación tiende a ser cercano a 1.

Al acercarse a la frecuencia natural del sistema, el factor de amplificación puede incrementarse significativamente, alcanzando un máximo conocido como resonancia.

Resonancia:

La resonancia ocurre cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural del sistema.

En la resonancia, el factor de amplificación es máximo, lo que puede resultar en grandes amplitudes de vibración.

Efecto del Amortiguamiento:

El amortiguamiento reduce el factor de amplificación a la resonancia.

Con mayor amortiguamiento, el pico de amplificación en la resonancia es menor y más ancho.

Sin amortiguamiento, el factor de amplificación en la resonancia teóricamente puede ser infinito, pero en la práctica siempre hay algún grado de amortiguamiento.

Curva de Respuesta en Frecuencia:

La gráfica del factor de amplificación contra la frecuencia de excitación se conoce como la curva de respuesta en frecuencia.

La gráfica de la figura 4.9 muestra la relación que existe entre el factor de amortiguamiento $M(\omega)$ en función de la relación de las frecuencias $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ para varios valores del factor de amortiguamiento $\left(\frac{\beta}{\beta_c}\right)$ el esta grafica se puede ver que la amplificación de la amplitud aumenta conforme el factor de amortiguamiento disminuye: El fenómeno de resonancia ocurre naturalmente solo cuando el factor de amortiguamiento es cero y la razón de las frecuencias es uno.

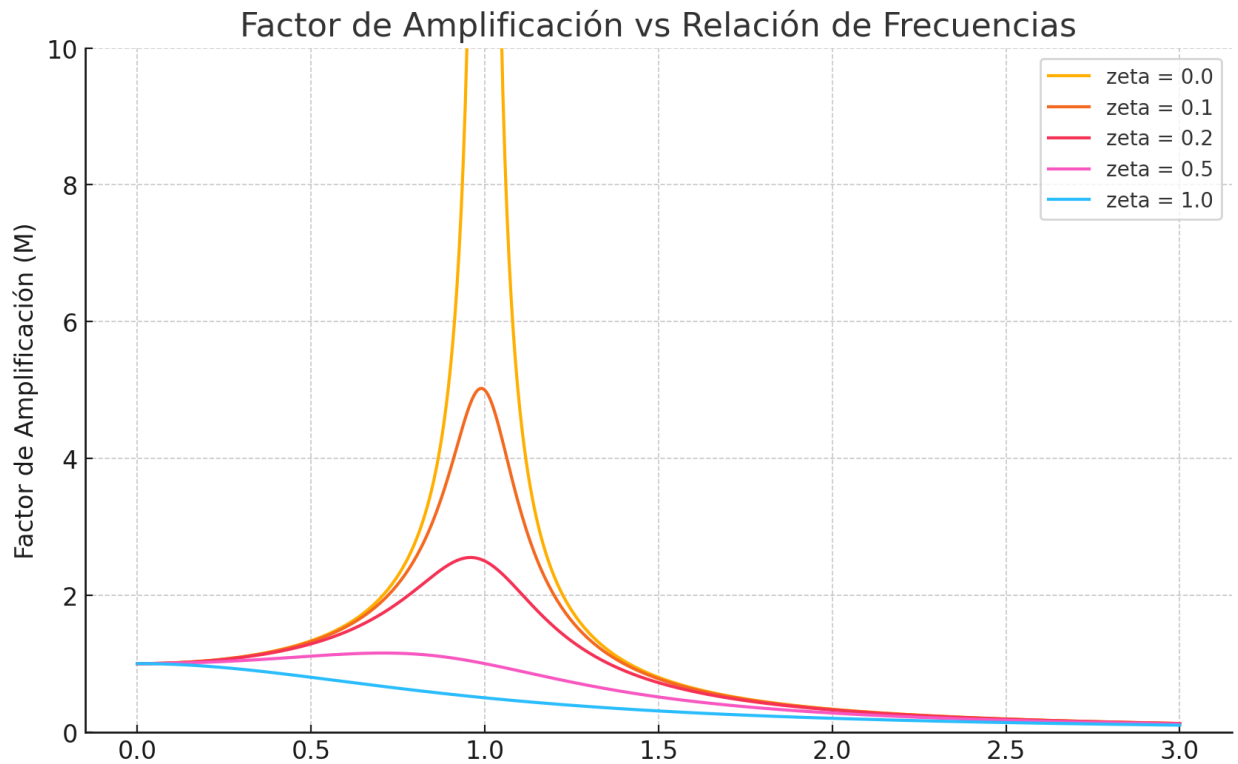


Figura 4.9. Gráfica del factor de amplificación Vs relación de las frecuencias $\frac{\omega}{\omega_n}$

Ejemplo 4. Una masa de 1 kg estira un resorte 5 m llevándolo a la posición de equilibrio. El sistema se encuentra en un medio de amortiguamiento el cual ejerce una fuerza de amortiguamiento cuya magnitud es de 3 veces el valor de su velocidad instantánea, sobre el sistema actúa una fuerza externa $f(t) = 2\cos(t) + \sin(2t)$ N y el sistema se comienza a mover cuando la masa se encuentra en una posición de 20 cm por arriba de la posición de equilibrio y lleva una velocidad de 50 cm/s hacia abajo.

Determine $x(t)$ y $v(t)$ del sistema.

Trace las gráficas de $x(t)$ y $v(t)$ y obtenga el tiempo en el cual el sistema se estabiliza.

Solución.

Datos:

$$m = 1 \text{ kg}, \quad x = 5 \text{ m}, \quad f(t) = 2 \cos 2t + \sin 2t \text{ N}, \quad f_A = 3 \frac{dx}{dt} \text{ N}, \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x_0 = -20 \text{ cm} = -0.2 \text{ m} \quad y \quad v_0 = 30 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Calculamos el peso y la constante del resorte.

$$W = mg = (1 \text{ kg})(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 10 \text{ N} \quad f_s = kx, \quad k = \frac{f_s}{x} = \frac{W}{x} = \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ m}} = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

La ecuación de movimiento es de la forma.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Para nuestro caso particular es de la forma.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 2 \cos 2t + \sin 2t$$

La solución de la ecuación anterior es de la forma:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

Donde $x_c(t)$ es la solución de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por el método de la ecuación característica tenemos.

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

Resolviendo el polinomio característico las raíces son.

$$m_1 = -1 \text{ y } m_2 = -2$$

Por lo tanto, la solución complementaria es de la forma.

$$x_c(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

Encontramos la solución particular $x_p(t)$ de la forma.

$$x_p(t) = A \cos 2t + B \sin 2t$$

Calculamos la primera y segunda derivada obteniendo.

$$x_p' = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t \text{ y } x_p'' = -4A \cos 2t - 4B \sin 2t$$

Sustituyendo la función $x_p(t)$ y las derivadas $x_p'(t)$ y $x_p''(t)$ en la ecuación de movimiento del sistema tenemos.

$$\begin{aligned} & -4A \cos 2t - 4B \sin 2t - 6A \sin 2t + 6B \cos 2t + 2A \cos 2t + 2B \sin 2t \\ & = 2 \cos 2t + \sin 2t \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos.

$$(-2A + 6B) \cos 2t + (-6A - 2B) \sin 2t = 2 \cos 2t + \sin 2t$$

Igualando coeficientes de las funciones de ambos lados de la ecuación obtenemos el sistema de ecuaciones simultaneas siguiente.

$$-2A + 6B = 2 \quad y \quad -6A - 2B = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de suma y resta obtenemos.

$$A = \frac{-1}{4} \quad y \quad B = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la solución particular $x_p(t)$ es de la forma.

$$x_p(t) = \frac{-1}{4} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t$$

La solución general es de la forma.

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t$$

Derivando la ecuación de $x(t)$ obtenemos.

$$v(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \cos 2t$$

Para calcular las constantes c_1 y c_2 utilizamos las condiciones iniciales de la forma $x(0) = -0.2$ y $v(0) = 0.3$ obtenemos.

$$c_1 + c_2 = 0.25 \quad y \quad -c_1 - 2c_2 = -0.5$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior por el método de sustitución tenemos.

$$c_1 = -0.1 \quad y \quad c_2 = 0.15$$

Considerando los valores de las constantes tenemos que la posición $x(t)$ es de la forma.

$$x(t) = -0.1 e^{-t} + 0.15 e^{-2t} - \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \text{ m}$$

La velocidad es de la forma.

$$v(t) = 0.1 e^{-t} - 0.3 e^{-2t} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2} \cos 2t \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La gráfica de la función posición $x(t)$ se muestra en la figura 4.10.

$A(0, -0.2)$

$B(4.32, 0.35)$

$C(2.75, -0.36)$

$D(3.54, 0)$

$E(4.32, 0.35)$

$F(5.1, 0)$

$G(5.89, -0.35)$

$H(7.46, 0.35)$

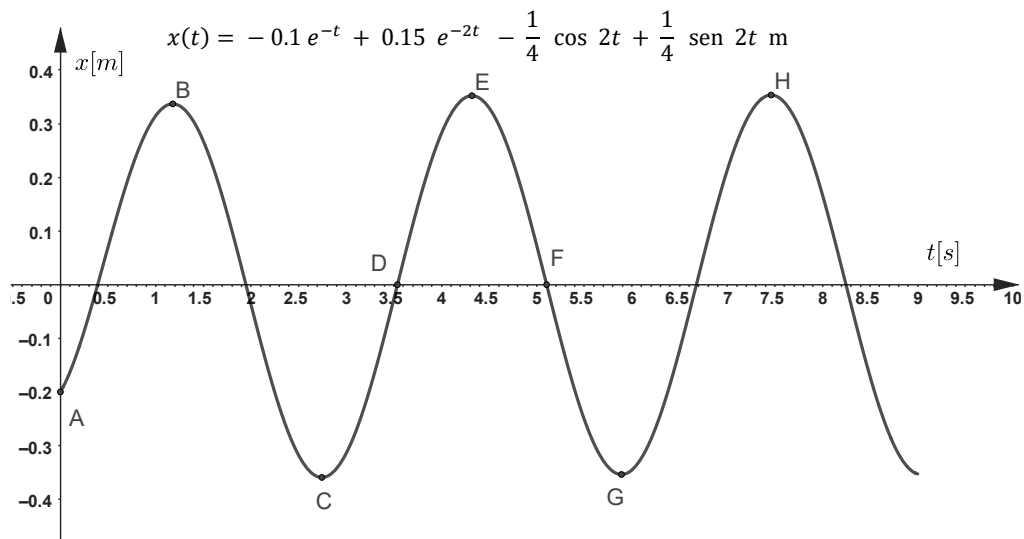


Figura 4.10 Gráfica de la posición v_s tiempo.

La gráfica de la función velocidad $v(t)$ se muestra en la figura 4.11.

$A(0,0.3)$

$B(0.46,0.64)$

$C(1.18,0)$

$D(1.96,-0.7)$

$E(3.53,0.71)$

$F(5.11,-.71)$

$G(6.68,0.71)$

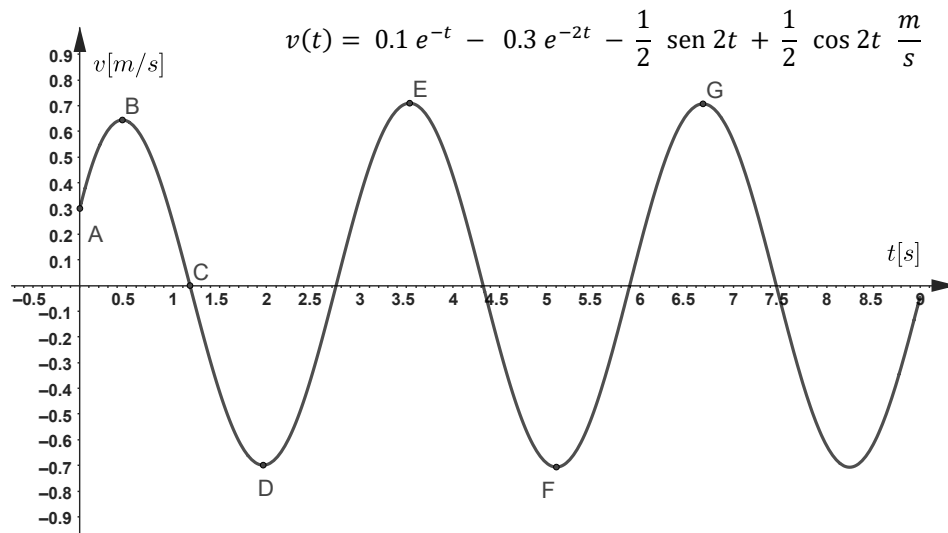


Figura 4.11. Gráfica de la velocidad v_s tiempo.

4.3 Respuesta transitoria y estado estacionario de los sistemas vibratorios.

La respuesta del estado transitorio de un sistema mecánico vibratorio amortiguado forzado tiene varias características clave. Estas características describen cómo el sistema responde inicialmente a una fuerza externa antes de llegar a una respuesta estable en el régimen permanente. A continuación, se presentan las principales características de la respuesta transitoria:

Dependencia de las Condiciones Iniciales:

La respuesta transitoria depende fuertemente de las condiciones iniciales del sistema, es decir, del desplazamiento y la velocidad inicial de la masa.

Estas condiciones iniciales determinan la magnitud y la fase de las oscilaciones transitorias.

Decaimiento Exponencial:

La energía de las oscilaciones transitorias se disipa con el tiempo debido a la amortiguación, lo que resulta en un decaimiento exponencial de la amplitud de estas oscilaciones.

Este decaimiento es más rápido con una mayor amortiguación.

Comportamiento Oscilatorio:

En la mayoría de los casos, la respuesta transitoria es oscilatoria y puede describirse como una combinación de oscilaciones senoidales amortiguadas.

La frecuencia de estas oscilaciones es la frecuencia natural amortiguada del sistema, que es menor que la frecuencia natural no amortiguada debido a la presencia del amortiguador.

Frecuencia Natural Amortiguada:

La frecuencia natural amortiguada (o frecuencia de amortiguación) del sistema está dada por $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2}$ donde la frecuencia natural ω_n depende de los parámetros que definen a los elementos que conforman al sistema y λ depende del coeficiente de amortiguamiento del medio. Para el caso del sistema masa resorte $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ y $\lambda^2 = \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2$.

La respuesta estable de un sistema mecánico vibratorio amortiguado forzado se refiere a la respuesta del sistema cuando ha alcanzado el régimen permanente, donde las transitorias se han disipado y la respuesta es dictada únicamente por la fuerza de excitación externa. Las principales características de esta respuesta estable son:

Características de la Respuesta Estable.

Dependencia de la Fuerza Externa:

La respuesta estable es directamente influenciada por la naturaleza de la fuerza de excitación externa, típicamente una fuerza sinusoidal de la forma $f(t) = F_0 \sin \omega t$

Respuesta Sinusoidal:

En régimen permanente, la respuesta del sistema es una vibración sinusoidal con la misma frecuencia que la fuerza externa ω y es de la forma de la ecuación 4.28.

$$x_p(t) = C \sin(\omega t + \alpha_0) \dots (4.28)$$

Donde los valores de la amplitud C y el ángulo de fase α_0 están dados por las ecuaciones 4.29.

$$C = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\beta\omega}{m\omega_n^2}\right)^2}} \quad y \quad \alpha_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\beta\omega}{m\omega_n^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \dots (4.29)$$

Ejemplo 5. Se tiene una masa de $1Kg$ la cual cuelga de un resorte y lo estira 50 cm y llega al reposo en su posición de equilibrio. A partir de $t = 0$, se aplica una fuerza externa $f(t) = 8 \sin 4t\text{ N}$ si el sistema se encuentra en un medio donde la fuerza de amortiguamiento es numéricamente igual a 4 veces la velocidad instantánea.

Determine:

- La posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$.
- La gráfica de $x(t)$.
- Trace las gráficas del estado transitorio $x_c(t)$ y del estado estable $x_p(t)$ del sistema.
- El tiempo en que el sistema se estabiliza y la amplitud, periodo y frecuencia del sistema una vez que se estabilizo.

Solución.

Datos:

$$m = 1 \text{ kg}, \quad x = 50 \text{ cm} = \frac{1}{2} \text{ m}, \quad f(t) = 8 \sin 4t \text{ N}, \quad f_A = 4 \frac{dx}{dt} \text{ N}, \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x_0 = 0 \text{ y } v_0 = 0$$

Calculamos el peso y la constante del resorte.

$$W = mg = (1 \text{ kg})(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 10 \text{ N} \quad f_s = kx, \quad k = \frac{f_s}{x} = \frac{W}{x} = \frac{10 \text{ N}}{0.5 \text{ m}} = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

La ecuación de movimiento es de la forma.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Para nuestro caso particular es de la forma.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 20x = 8 \sin(4t)$$

La solución general de la ecuación anterior es de la forma:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

Donde la solución complementaria $x_c(t)$ es la solución de la ecuación homogénea.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 20x = 0$$

Resolviendo la ecuación homogénea por el método de la ecuación característica tenemos.

$$m^2 + 4m + 20 = 0$$

Resolviendo el polinomio características las raíces son.

$$m_1 = -2 + 4i \text{ y } m_2 = -2 - 4i$$

Por lo tanto, la solución complementaria es de la forma.

$$x_c(t) = e^{-2t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sen 4t)$$

Encontramos la solución particular $x_p(t)$ de la forma.

$$x_p(t) = A \cos 4t + B \sen 4t$$

Obtenemos la primera y segunda derivada obteniendo.

$$x_p(t) = -4A \sen 4t + 4B \cos 4t \text{ y } x_p''(t) = -16A \cos 4t - 16B \sen 4t$$

Sustituyendo la función $x_p(t)$ y las derivadas $x_p'(t)$ y $x_p''(t)$ en la ecuación de movimiento tenemos.

$$-16A \cos 4t - 16B \sen 4t - 16A \sen 4t + 16B \cos 4t + 20A \cos 4t + 20B \sen 4t = 8 \sen 4t$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos.

$$(4A + 16B) \cos 4t + (-16A + 4B) \sen 4t = 8 \sen 4t$$

Igualando coeficientes de las funciones de ambos lados de la ecuación obtenemos el sistema de ecuaciones simultaneas siguiente.

$$4A + 16B = 0 \text{ y } -16A + 4B = 8$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de suma y resta obtenemos.

$$A = \frac{-8}{17} \text{ y } B = \frac{2}{17}$$

Por lo tanto, la solución particular $x_p(t)$ es de la forma.

$$x_p(t) = \frac{-8}{17} \cos 4t + \frac{2}{17} \sen 4t$$

La solución general es de la forma.

$$x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t) + \frac{-8}{17} \cos 4t + \frac{2}{17} \operatorname{sen} 4t$$

Derivando la ecuación $x(t)$ obtenemos.

$$v(t) = e^{-2t}((4c_2 - 2c_1) \cos 4t - (4c_1 + 2c_2) \operatorname{sen} 4t) + \frac{32}{17} \cos 4t + \frac{8}{17} \operatorname{sen} 4t$$

Para calcular las constantes c_1 y c_2 utilizamos las condiciones iniciales de la forma $x(0) = 0$ y $v(0) = 0$ obtenemos.

$$c_1 - \frac{8}{17} = 0 \text{ y } 4c_2 - 2c_1 + \frac{8}{17} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior por el método de sustitución tenemos.

$$c_1 = \frac{8}{17} \text{ y } c_2 = \frac{2}{17}$$

Considerando los valores de las constantes tenemos que la posición $x(t)$ es de la forma.

$$x(t) = e^{-2t}\left(\frac{8}{17} \cos 4t + \frac{2}{17} \operatorname{sen} 4t\right) + \frac{-8}{17} \cos 4t + \frac{2}{17} \operatorname{sen} 4t \text{ m}$$

La velocidad es de la forma.

$$v(t) = e^{-2t}\left(\frac{-8}{17} \cos 4t - \frac{36}{17} \operatorname{sen} 4t\right) + \frac{8}{17} \cos 4t + \frac{32}{17} \operatorname{sen} 4t \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La gráfica de la función posición $x(t)$ se muestra en la figura 4.12.

$$x(t) = e^{-2t} \left(\frac{8}{17} \cos 4t + \frac{2}{17} \sin 4t \right) + \frac{-8}{17} \cos 4t + \frac{2}{17} \sin 4t \text{ m}$$

A(2.29, 0.48)

B(3.08, -0.48)

C(3.87, 0.48)

D(7.79, -0.49)

E(5.44, 0.49)

F(4.26, 0)

G(7.79, -0.49)

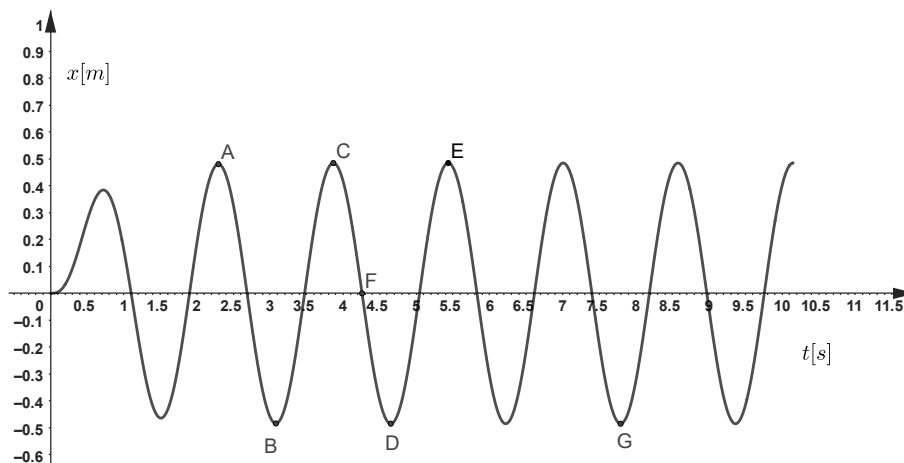


Figura 4.12. Gráfica de posición v_s tiempo

El estado transitorio del sistema está dado por la función $x_c(t)$ y su gráfica se muestra en la figura 4.13.

$$x_c(t) = e^{-2t} \left(\frac{8}{17} \cos 4t + \frac{2}{17} \sin 4t \right) \text{ m}$$

A(0, 0.47)

B(0.73, -0.1)

C(1.52, 0.02)

D(4.26, 0)

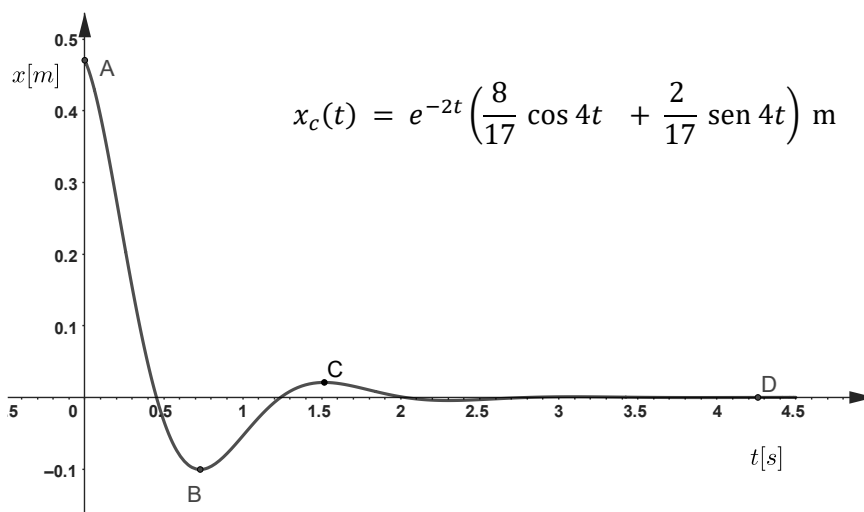


Figura 4.13. Gráfica de la respuesta del estado transitorio del sistema $x_c(t)$.

El estado estable del sistema está dado por la función $x_p(t)$ y su grafico se muestra en la figura 4.14.

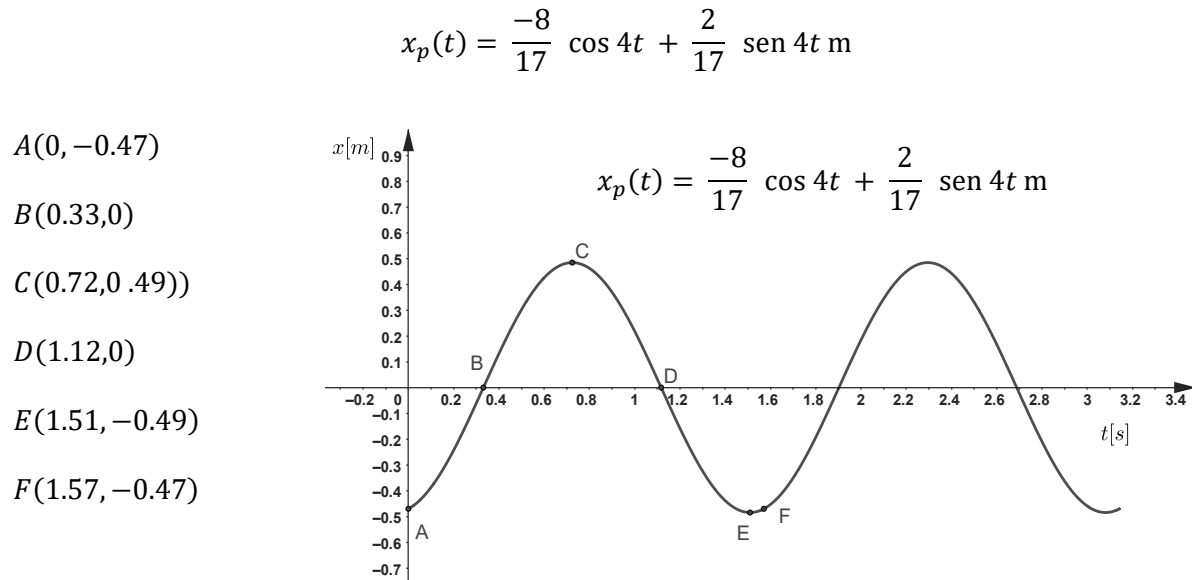


Figura 4.14. Gráfica de la respuesta del estado estacionario del sistema $x_p(t)$.

De acuerdo con la gráfica 4.8 de $x(t)$ y considerando el punto F de la gráfica tenemos que para el tiempo $t = 4.26 \text{ s}$ es el tiempo en el que el sistema se estabiliza.

De acuerdo con los puntos C y E de la gráfica 4.10 la amplitud del movimiento cuando el sistema se estabiliza es de $A = 0.49 \text{ m}$ y considerando el punto F de la gráfica el periodo es de $T = 1.57 \text{ s}$.

4.4 Aplicaciones

Las vibraciones mecánicas amortiguadas forzadas son un fenómeno que aparece en diversos sistemas mecánicos, donde una fuerza externa periódica actúa sobre el sistema y la energía de vibración se disipa con el tiempo debido a la amortiguación. A continuación, se presenta un resumen de algunas aplicaciones concretas de estos conceptos en sistemas mecánicos:

Amortiguadores de Automóviles:

Aplicación: Los amortiguadores en los sistemas de suspensión de los automóviles.

Función: Controlan las oscilaciones de la carrocería y las ruedas causadas por las irregularidades de la carretera.

Principio: Utilizan el concepto de vibraciones amortiguadas para disipar la energía de las vibraciones inducidas por los baches y otros impactos, proporcionando una conducción más suave y segura.

Edificios y Estructuras Civiles:

Aplicación: Edificios altos y puentes.

Función: Reducir las oscilaciones inducidas por el viento, los terremotos y otras fuerzas dinámicas.

Principio: Sistemas de amortiguación, como los amortiguadores de masa sintonizada, que son dispositivos que consisten en una masa móvil dentro de la estructura conectada mediante resortes y amortiguadores. Estas masas oscilan en oposición a la vibración de la estructura, disipando la energía vibratoria.

Maquinaria Industrial:

Aplicación: Máquinas rotativas y herramientas de corte.

Función: Minimizar las vibraciones que pueden causar desgaste prematuro y fallos en los componentes.

Principio: Utilización de amortiguadores y aisladores para reducir la transmisión de vibraciones al entorno y proteger tanto la máquina como el personal.

Electrodomésticos:

Aplicación: Lavadoras y secadoras.

Función: Controlar las vibraciones durante el ciclo de centrifugado y otros procesos.

Principio: Incorporan sistemas de amortiguación para evitar que las vibraciones dañen los componentes internos y para reducir el ruido.

Aeronaves:

Aplicación: Sistemas de aterrizaje y componentes estructurales.

Función: Absorber las fuerzas de impacto durante el aterrizaje y reducir las vibraciones durante el vuelo.

Principio: Uso de amortiguadores hidráulicos y otros dispositivos de amortiguación para mejorar la durabilidad y seguridad.

Electrónica y Sistemas de Instrumentación:

Aplicación: Dispositivos sensibles a las vibraciones, como discos duros y equipos de laboratorio.

Función: Proteger los componentes internos delicados de las vibraciones externas.

Principio: Montajes de amortiguación que aíslan los componentes de las vibraciones, mejorando la precisión y el funcionamiento.

Sistemas de Transporte Ferroviario:

Aplicación: Vagones y trenes de alta velocidad.

Función: Mejorar la comodidad de los pasajeros y la estabilidad del tren.

Principio: Sistemas de suspensión con amortiguadores que reducen las vibraciones causadas por las irregularidades en las vías.

En todas estas aplicaciones, el diseño y la implementación de sistemas de amortiguación forzada son esenciales para mejorar el rendimiento, la durabilidad y la seguridad de los sistemas mecánicos.

Las vibraciones mecánicas armónicas forzadas ocurren cuando un sistema es sometido a una fuerza externa periódica, que puede ser sinusoidal o de otra naturaleza armónica. Este tipo de vibraciones tiene aplicaciones en diversos sistemas mecánicos donde es crucial controlar o utilizar las oscilaciones inducidas. A continuación, se presenta un resumen de algunas aplicaciones concretas de estos conceptos:

Resonadores en Instrumentos Musicales:

Aplicación: Guitarras, violines, pianos y otros instrumentos de cuerda.

Función: Generar sonido mediante la vibración de las cuerdas.

Principio: Las cuerdas vibran de manera armónica cuando se tocan, produciendo sonidos con frecuencias específicas. La caja de resonancia amplifica estas vibraciones, mejorando la calidad del sonido.

Motores de Combustión Interna:

Aplicación: Automóviles y motocicletas.

Función: Mejorar el rendimiento y reducir las vibraciones del motor.

Principio: Los contrapesos y los amortiguadores de vibraciones armónicas, como los volantes de inercia, se utilizan para equilibrar las fuerzas internas y reducir las vibraciones que se producen durante el funcionamiento del motor.

Sistemas de Climatización (HVAC):

Aplicación: Compresores y ventiladores.

Función: Reducir el ruido y las vibraciones transmitidas a las estructuras del edificio.

Principio: El uso de montajes con amortiguadores y aisladores que absorben las vibraciones armónicas generadas por los equipos en funcionamiento.

Puentes y Estructuras Civiles:

Aplicación: Puentes peatonales y vehiculares.

Función: Mitigar las vibraciones inducidas por el tráfico y el viento.

Principio: Implementación de amortiguadores y resonadores que contrarrestan las vibraciones armónicas para mejorar la estabilidad y durabilidad de la estructura.

Sistemas de Transmisión en Maquinaria Industrial:

Aplicación: Cajas de engranajes y correas de transmisión.

Función: Minimizar las vibraciones que pueden causar desgaste y fallos en los componentes.

Principio: Diseño de componentes que resuenen a frecuencias específicas para contrarrestar las vibraciones no deseadas y mejorar la eficiencia operativa.

Aeronaves:

Aplicación: Hélices y motores.

Función: Reducir las vibraciones para mejorar la comodidad y la seguridad.

Principio: Uso de equilibradores dinámicos y amortiguadores que gestionan las vibraciones armónicas generadas por las hélices y los motores durante el vuelo.

Equipos Electrónicos y Electrodomésticos:

Aplicación: Ventiladores, discos duros y electrodomésticos como lavadoras.

Función: Reducir el ruido y mejorar la vida útil de los componentes.

Principio: Empleo de montajes y estructuras que amortiguan las vibraciones armónicas producidas durante el funcionamiento, previniendo el daño y el desgaste prematuro.

Sistemas de Transporte Ferroviario:

Aplicación: Trenes de alta velocidad.

Función: Mejorar la comodidad y la estabilidad del tren.

Principio: Sistemas de suspensión y amortiguación diseñados para absorber y neutralizar las vibraciones armónicas generadas por el movimiento del tren sobre las vías.

Estas aplicaciones muestran cómo los conceptos de vibraciones mecánicas armónicas forzadas son cruciales en el diseño y funcionamiento de una amplia variedad de sistemas mecánicos, mejorando su rendimiento, durabilidad y seguridad.

4.5. Ejercicios.

1.- Un bloque de peso de 70 N está suspendido de un resorte que tiene una rigidez de $600 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, si al bloque se le imprime una velocidad de $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hacia abajo, cuando el bloque está en una posición de 1 m arriba de la posición de equilibrio, el sistema se encuentra en un medio cuya constante de amortiguamiento es de $50 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ y sobre el sistema actúa una fuerza externa $f(t) = 2 \cos 6t \text{ N}$. Determine: a) $x(t)$ y $v(t)$

b) el tiempo en que alcanza su máximo desplazamiento. Y el primer tiempo que pasa por la posición de equilibrio cuando el bloque viajaba hacia abajo.

2.- Una masa de 0.5 slugs se coloca sobre un resorte vertical y lo estira 32 in. El movimiento comienza cuando la masa se encuentra 24 in por arriba de la posición de equilibrio y que se encuentra en reposo, el sistema se encuentra en un medio que ofrece una fuerza de

amortiguamiento numéricamente igual a la tercera parte de la velocidad instantánea. Si sobre el sistema actúa una fuerza externa $f(t) = 10 \cos 3t$ lb. Determine la posición y la velocidad en cualquier instante de tiempo y trace las gráficas.

3.- Un bloque de peso de 32 lb se une a un resorte cuya constante de elasticidad es de $5 \frac{N}{m}$. cuando el bloque se encuentra a 12 in por debajo de la posición de equilibrio y este lleva una velocidad de $60 \frac{cm}{s}$ hacia abajo y el sistema se encuentra en un medio donde la fuerza de amortiguamiento es numéricamente igual a dos veces el valor de la velocidad instantánea y el sistema interactúa con una fuerza externa $f(t) = 3\cos 2t - 12\sin 2t$ lb.

Determine: a) la posición $x(t)$ del bloque y trace la gráfica.

b) con ayuda de la gráfica determine el tiempo que el sistema alcanza a estabilizarse

c) trace las gráficas de la solución transitoria e indique que tipo de movimiento es y trace las gráficas de las soluciones de los estados transitorio y estable o permanente

d) calcule el periodo, la frecuencia lineal, la amplitud y el ángulo de fase de la solución del estado permanente del movimiento.

4.- Un bloque de 20 N de peso, cuelga de un resorte estirándolo $\frac{5}{8}$ m llevándolo a la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$ al sistema se le aplica una fuerza externa $f(t) = 4 \cos 5t$ N. el sistema está en un medio que ejerce una fuerza de amortiguamiento $F_A = 3 \frac{dx}{dt}$ N.

Determine: a) la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ y trace sus gráficas.

Determine con ayuda de $x(t)$ que tipo de movimiento tiene el sistema en su estado transitorio y el tiempo en que el sistema se estabiliza.

5.- Un bloque de 20 N de peso, cuelga de un resorte estirándolo $\frac{5}{8}\text{ m}$ llevándolo a la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$ al sistema se le aplica una fuerza externa $f(t) = 4 \cos 5t\text{ N}$. el sistema está en un medio que no ejerce una fuerza de amortiguamiento

determine: a) la posición $x(t)$ y trace sus gráficas y determine el periodo y la frecuencia del movimiento

6.- Una masa de 3 kg cuelga de un resorte cuya constante de elasticidad es de $27\frac{\text{N}}{\text{m}}$, sobre el sistema actúa una fuerza externa $f(t) = 3 \cos 3t + 9 \sin 3t\text{ N}$. El movimiento parte del reposo desde la posición de equilibrio. Determine a) La posición $x(t)$ y trace su gráfico

b) determine si el sistema entra en resonancia en términos de las frecuencias y de las amplitudes de $x(t)$.

7. Un bloque de peso de 10 N cuelga de un resorte cuya constante de elasticidad es de $4\frac{\text{N}}{\text{m}}$, sobre el sistema actúa una fuerza externa $f(t) = 5 \sin 2t\text{ N}$. El movimiento parte del reposo y cuando el bloque se encuentra en una posición de 2 m debajo de la posición de equilibrio Determine a) La posición $x(t)$ y trace su gráfico

b) determine si el sistema entra en resonancia en términos de las frecuencias

8.- Un bloque de peso de 10 N cuelga de un resorte cuya constante de elasticidad es de $16\frac{\text{N}}{\text{m}}$, sobre el sistema actúa una fuerza externa $f(t) = 4 \cos 5t\text{ N}$. El movimiento parte del reposo y cuando el bloque se encuentra en una posición de 2 m debajo de la posición de equilibrio Determine a) La posición $x(t)$ y trace su gráfico.

b) Determine si el sistema entra en resonancia en términos de las frecuencias en caso de que el sistema no entre en resonancia explique qué tipo de vibración se obtiene.

3.- Un bloque de peso de 30N se une a un resorte cuya constante de elasticidad es de $81 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. cuando el bloque se encuentra a 12 cm por debajo de la posición de equilibrio y este lleva una velocidad de $40 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ hacia abajo y el sistema se encuentra en un medio donde la fuerza de amortiguamiento es numéricamente igual a nueve veces el valor de la velocidad instantánea. Y el sistema interactúa con una fuerza externa $f(t) = 3\cos 2t - 12\sin 2t \text{ N}$.

Determine: a) la posición $x(t)$ del bloque y trace la gráfica.

b) Con ayuda de la gráfica determine el tiempo que el sistema alcanza a estabilizarse

c) trace las gráficas de la solución transitoria e indique que tipo de movimiento es y trace las gráficas de las soluciones de los estados transitorio y estable o permanente

d) calcule el periodo, la frecuencia lineal, la amplitud y el ángulo de fase de la solución del estado estacionario del movimiento.

10.- Realice una investigación y de cinco casos prácticos de diseño mecánico de ingeniería donde se utiliza el fenómeno de resonancias y explique cómo se aplica dicho concepto.

Capítulo V. Sistemas vibratorios mecánicos de dos grados de libertad

Objetivo. Analizar y caracterizar sistemas vibratorios de dos grados de libertad para generar los modelos correspondientes con la finalidad de comprender su comportamiento.

Estudiar los sistemas mecánicos de dos grados de libertad es importante por varias razones de las cuales enunciamos algunas de ellas:

Comprensión Fundamental: Proporciona una base sólida para entender sistemas más complejos. Muchos sistemas reales pueden ser descompuestos o aproximados como sistemas de dos grados de libertad, lo que facilita su análisis y diseño.

Aplicaciones Prácticas: Se encuentran en una variedad de aplicaciones prácticas, como la ingeniería automotriz, la aeroespacial, la robótica, y la biomecánica. Por ejemplo, el análisis de vibraciones en un automóvil puede modelarse inicialmente como un sistema de dos grados de libertad.

Análisis de Vibraciones: Permite el estudio detallado de las vibraciones. Este análisis es crucial para identificar y mitigar problemas de resonancia, que pueden causar daños o fallos en estructuras y máquinas.

Diseño y Control: Ayuda en el diseño y control de sistemas mecánicos. Conociendo cómo responde un sistema a diferentes fuerzas, se pueden diseñar estrategias de control más efectivas y eficientes.

Simulación y Modelado: Facilita la simulación y modelado de sistemas. Los modelos de dos grados de libertad son lo suficientemente complejos para ser realistas, pero lo suficientemente simples para ser manejables en simulaciones y cálculos.

Educación y Formación: Es un paso intermedio esencial en la formación de ingenieros y científicos. Estudiar sistemas con un grado de libertad es un punto de partida, y los sistemas de dos grados de libertad son el siguiente paso lógico antes de abordar sistemas más complejos.

El estudio de sistemas mecánicos de dos grados de libertad es crucial para una comprensión completa y práctica de la dinámica y el control de sistemas mecánicos en ingeniería y ciencias aplicadas.

5.1 Ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos vibratorios de dos grados de libertad.

En la ingeniería y la física, un sistema vibratorio de dos grados de libertad es aquel en el cual dos coordenadas independientes son necesarias para describir completamente su movimiento. Este tipo de sistemas es fundamental en el análisis de vibraciones porque representa una extensión natural de los sistemas de un solo grado de libertad, proporcionando un entendimiento más profundo y detallado de las interacciones dinámicas en estructuras y mecanismos complejos.

Los sistemas de dos grados de libertad son comunes en diversas aplicaciones prácticas, tales como:

Edificios y estructuras: La respuesta sísmica de un edificio de dos pisos puede modelarse como un sistema de dos grados de libertad.

Maquinaria y equipo: La vibración de máquinas herramienta, como una prensa taladradora, a menudo puede analizarse mediante este modelo.

Vehículos: El análisis de la suspensión de automóviles o aeronaves puede beneficiarse del estudio de sistemas con dos grados de libertad.

Al pasar de sistemas de un grado de libertad a dos grados de libertad, emergen dos fenómenos físicos importantes:

Frecuencias Naturales Múltiples: Un sistema con dos grados de libertad tiene dos frecuencias naturales. Estas frecuencias corresponden a los modos de vibración en los cuales el sistema puede oscilar de forma libre y sin amortiguamiento.

Formas Modales: Además de las frecuencias naturales, los sistemas de dos grados de libertad poseen formas modales, que describen el patrón de movimiento relativo entre las masas del sistema en cada una de sus frecuencias naturales.

A continuación, se da una introducción de sistemas de dos grados de libertad y como resolver la respuesta de cada grado de libertad, para el estudio de este tipo de sistemas se presentan diferentes estudios como son la utilización del método de fuerzas o leyes de Newton, las leyes de la conservación de la energía o ecuaciones de Lagrange y la aplicación de la teoría de matrices y vectores para resolver problemas de análisis de vibraciones para resolver problemas más complejos. Se utiliza la teoría de matrices y vectores en códigos computacionales.

Al pasar de sistemas con un grado de libertad a sistemas de dos grados de libertad, resultan dos fenómenos importantes, los sistemas vibratorios de dos grados de libertad tienen dos frecuencias naturales. En el estudio de sistemas de dos grados de libertad aparece un fenómeno de las formas modales en una vibración que no está presente en sistemas de un grado de libertad. Una forma modal es un vector que describe el movimiento relativo entre las dos masas. Estos conceptos importantes de múltiples frecuencias naturales y formas modales que están íntimamente ligados a los conceptos matemáticos de valores propios de la teoría matricial lo cual plantea el problema de análisis de vibraciones en términos de vectores y matrices.

A continuación, se muestran ejemplos de sistemas vibratorios de dos grados de libertad. Consideramos el movimiento de dos masas como se muestra en la figura 5.1 a, el cual muestra un modelo simple de dos grados de libertad el cual consta de dos masas m_1 y m_2 conectadas en serie por resortes, en la figura 5.1 b se muestra un sistema de dos grados de libertad que consta de una sola masa m y se mueve sobre el eje vertical y horizontal en direcciones x_1 y x_2 respectivamente y la figura 5.1 c se muestra un sistema de dos grados de libertad que consta de una masa m cuyo movimiento se describe con un grado de libertad x por su movimiento de translación y otro grado de libertad θ por su movimiento de rotación.

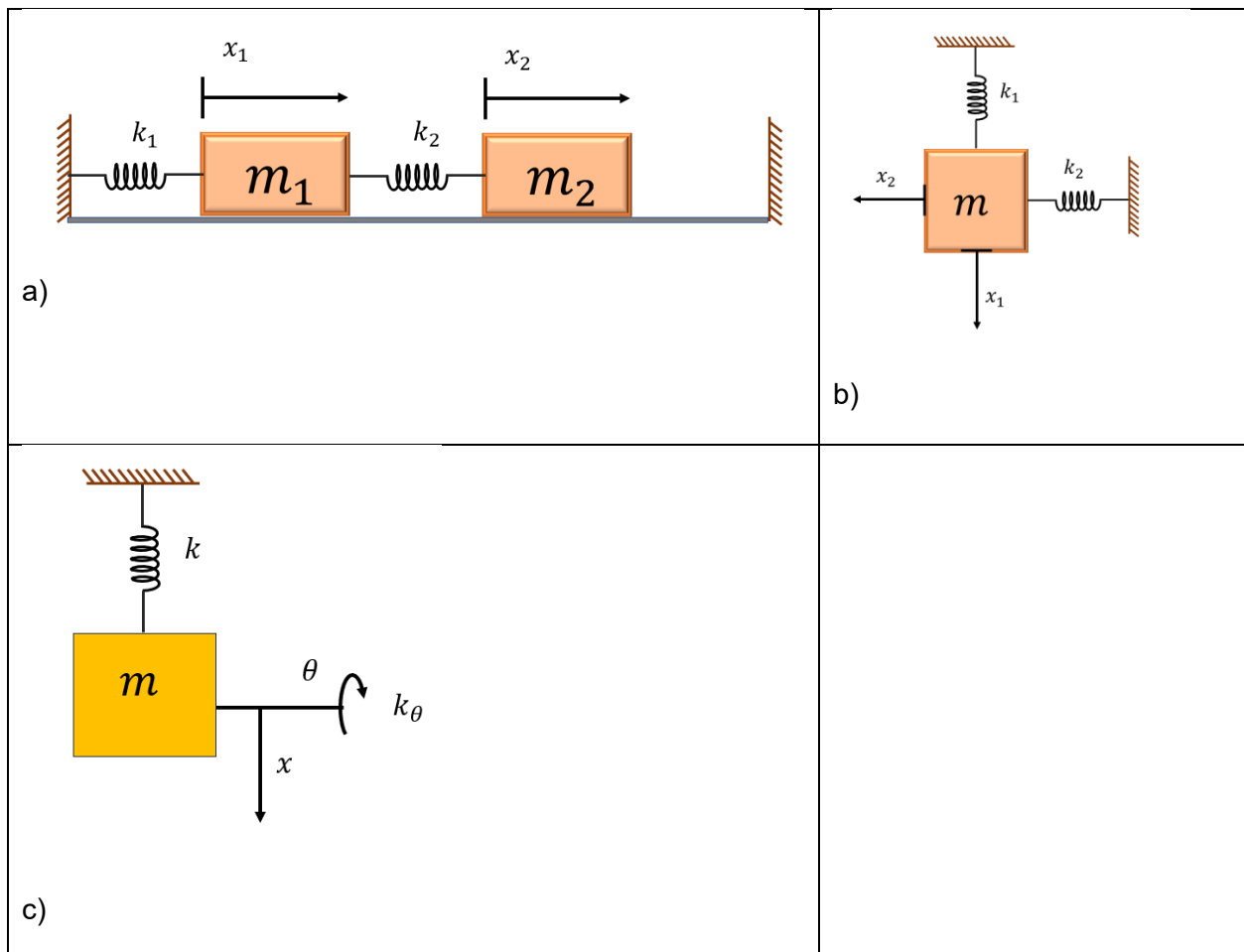


Figura 5.1. Sistemas de dos grados de libertad.

Para la obtención de las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio de dos grados de libertad consideramos el sistema de dos masas m_1 y m_2 conectados en serie a través de dos resortes de constantes k_1 y k_2 y sin amortiguamiento sobre el cual actúa una fuerza instantánea, como se muestra en la figura 5.2.

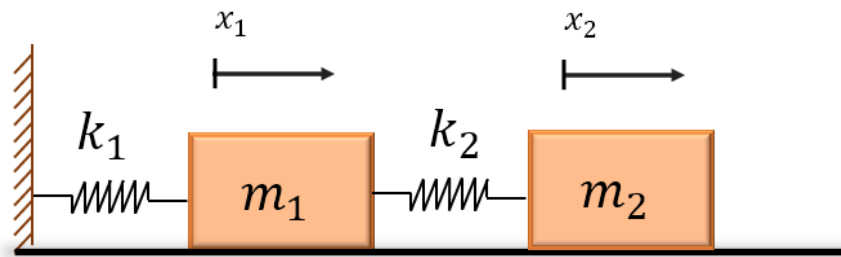


Figura 5.2. Sistema masa-resorte de dos grados de libertad.

Procedemos a utilizar el método de fuerzas o de Newton de la forma siguiente:

El diagrama de cuerpo libre para las fuerzas de restitución de los resortes que actúan sobre las masas m_1 y m_2 se muestra en la figura 5.3. En el diagrama omitiremos las fuerzas que actúan sobre la vertical las normales y los pesos ya que en esa dirección están en equilibrio.

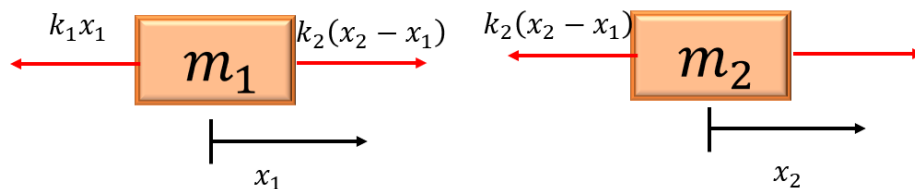


Figura 5.3. Diagrama de cuerpo libre de sistema de dos grados de libertad.

Sumando las fuerzas que actúan en cada masa sobre la horizontal tenemos el sistema de ecuaciones 5.1.

$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = -k_1 x_1(t) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)) \dots \dots \dots (5.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = -k_2 (x_2(t) - x_1(t))$$

Del sistema de ecuaciones 5.1 se obtienen las ecuaciones de movimientos del sistema de dos grados de libertad de la forma 5.2.

$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \dots \dots \dots (5.2)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) = 0$$

Las ecuaciones 5.2 son dos ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes los cuales dependen de las masas y los coeficientes de los resortes, cada una de las cuales requiere de dos condiciones iniciales para resolverse. Por lo tanto, estas dos ecuaciones están sujetas a las cuatro condiciones iniciales para poder resolverlas como se muestra en las ecuaciones 5.3.

$$x_1(0) = x_{10}, \quad \frac{dx_1(0)}{dt} = \frac{dx_{10}}{dt}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad \frac{dx_2(0)}{dt} = \frac{dx_{20}}{dt} \dots \dots (5.3)$$

Las condiciones 5.3 representan las posiciones y las velocidades iniciales de las masas m_1 y m_2 respectivamente y las cuales se conocen. Físicamente las ecuaciones de movimientos del sistema indican que el movimiento de la masa m_1 y el cambio de posición x_1 afecta al movimiento de la masa m_2 y a su cambio de posición x_2 y viceversa.

Método matricial.

El método de matrices para el análisis de vibraciones es una técnica utilizada en ingeniería para estudiar y predecir el comportamiento vibratorio de sistemas mecánicos y estructurales. Este método se basa en el uso de álgebra matricial para obtener y resolver las

ecuaciones diferenciales que describen el movimiento vibratorio. Para aplicar el método en la obtención de las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico vibratorio de dos grados de libertad procedemos de la forma siguiente.

Definimos al vector $\vec{x}$ como el vector columna cuyas componentes son dos respuestas de interés de la forma 5.4.

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.4)$$

Al vector 5.4 se le llama vector desplazamiento o respuesta y es una matriz de funciones de 2X1. Si consideramos que la derivada de un vector es la derivada de cada una de sus componentes tenemos las ecuaciones 5.5.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad y \quad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.5)$$

En las ecuaciones 5.5 se muestran los vectores de la velocidad y aceleración respectivamente, ahora si partimos de la definición de una matriz cuadrada la cual es una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas, entonces podemos tomar dos vectores columna de 2x1 para formar una matriz de 2x2, entonces como caso particular podemos generar una matriz de 2x2 tomando los valores de las masas m_1 y m_2 de la forma 5.6.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.6)$$

Sabemos que los vectores columna y las matrices se pueden multiplicar de diferentes maneras. Para el análisis de sistemas vibratorios el método más conveniente para definir el producto de una matriz y un vector es definir el resultado como un vector cuyas componentes como el producto punto del vector por cada fila de la matriz, es decir tomando cada fila de la

matriz como un vector, decir si tomamos al vector $\vec{x}$ como un vector columna de 2x1 de la forma 5.7.

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \dots\dots (5.7)$$

Entonces el vector columna transpuesto es de la forma 5.8.

$$\vec{x}^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)] \dots\dots (5.8)$$

Por lo tanto, si obtenemos el producto escalar o punto del vector transpuesto por el vector tenemos la expresión 5.9.

$$\vec{x}^T(t)\vec{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 \dots\dots\dots (5.9) .$$

Podemos observar de la ecuación 5.9 que el producto escalar da como resultado un escalar, recordando del algebra de matrices que le producto de un escalar a por un vector $\vec{x}$ es definido por la expresión 5.10.

$$a \vec{x} = a [x_1(t) \quad x_2(t)] = [a x_1(t) \quad a x_2(t)] \dots\dots\dots (5.10)$$

A continuación, utilizaremos los conceptos anteriores para obtener por el método de matrices las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico de dos grados de libertad que se muestra en la figura 5.2.

Partiendo de la consideración de los parámetros que definen al sistema que son las masas m_1 y m_2 y las constantes de los resortes k_1 y k_2 respectivamente y considerando las aceleraciones de las masas a_1 y a_2 respectivamente, generamos la matriz M cuadrada de 2x2 y el vector columna de 2x1 de aceleración los cuales se muestran en las ecuaciones 5.11.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad y \quad \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.11)$$

A continuación, obtenemos el producto punto entre ellos, el cual toma la forma de la ecuación 5.12.

$$M \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.12)$$

Podemos observar que el producto de una matriz por un vector columna da como resultado un vector que en este caso las componentes de este vector son las aceleraciones respectivas de cada una de las masas m_1 y m_2 .

A continuación, definiremos la matriz cuadrada K de 2×2 con ayuda de las constantes de los resortes k_1 y k_2 y formamos el vector columna $\vec{x}$ con ayuda de las posiciones de las masas respectivas, obtenemos la expresión 5.13.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.13)$$

Calculando el producto de la matriz K y el vector $\vec{x}$ y obtenemos la expresión 5.14.

$$K \vec{x} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)x_1(t) & -k_2 x_2(t) \\ -k_2 x_1(t) & k_2 x_2(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.14)$$

Consideremos la ecuación vectorial de la forma 5.15.

$$M \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + K \vec{x} = \vec{0} \dots\dots\dots (5.15)$$

Donde $\vec{0}$ es el vector columna cero y es de la forma $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sustituyendo los valores de las expresiones 5.12 y 5.14 en la expresión 5.15 se obtiene la ecuación 5.16.

$$\begin{bmatrix} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)x_1(t) & -k_2 x_2(t) \\ -k_2 x_1(t) & k_2 x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.16)$$

Realizando la suma en la expresión 5.16, se obtiene la expresión 5.17.

$$\begin{bmatrix} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.17)$$

Considerando que dos vectores son iguales si y solo si son iguales componente a componente, por lo tanto, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden 5.18.

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) &= 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (5.18)$$

El sistema 5.18 es el sistema de las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del sistema mecánico de dos grados de libertad.

Como se puede observar el sistema de ecuaciones 5.18 es idéntico al sistema 5.2 obtenido por el método de fuerzas.

A las matrices $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ y $K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$ se les conoce como la matriz de masa y la matriz de rigidez respectivamente.

De la deducción de la ecuación de movimiento de un sistema mecánico vibratorio de dos grados de libertad por el método matricial y el método de fuerzas o leyes de Newton, podemos observar que existe una conexión importante entre el análisis matricial y el análisis de vibraciones. Esta conexión da las bases para el análisis de sistemas vibratorios de varios grados de libertad lo cual permite resolver problemas más complejos con ayuda de la teoría de matrices y del cálculo computacional.

Teoría de Lagrange.

Ecuación de Lagrange para un sistema no amortiguado.

El Lagrangiano es una función matemática utilizada en la mecánica clásica y en la teoría de campos para describir la dinámica de un sistema físico. En términos generales, el Lagrangiano L de un sistema se define como la diferencia entre la energía cinética K y la energía potencial U del sistema como se muestra en la ecuación 5.19.

$$L = K - U \dots\dots\dots(5.19)$$

Esta función se usa en el formalismo de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema físico, conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones se derivan aplicando el principio de acción mínima, que establece que el camino seguido por un sistema entre dos estados es aquel que minimiza la acción S , definida como la integral del Lagrangiano a lo largo del tiempo como se muestra en la ecuación 5.20.

$$S = \int L dt \dots\dots\dots(5.20)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para una coordenada generalizada q_i y su derivada temporal $\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$ se expresan de la forma de la ecuación 5.21.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \dots\dots\dots(5.21)$$

Este formalismo es muy poderoso porque permite tratar sistemas complejos de manera sistemática y es la base de muchos desarrollos en física y en caso particular en el análisis de sistemas mecánicos vibratorios de varios grados de libertad y en caso particular para el caso particular de dos grados de libertad que son los sistemas que analizamos en este capítulo.

A continuación, presentamos un resumen de cómo aplicar el Lagrangiano para la deducción de las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico vibratorio.

Para utilizar el Lagrangiano en la deducción de las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio de varios grados de libertad se siguen los siguientes pasos.

1.- Definir las coordenadas generalizadas, es decir hay que identificar las coordenadas generalizadas q_i que describen las configuraciones del sistema, para un sistema vibratorio mecánico estas pueden ser lineales o angulares.

2.- Obtener las expresiones para la energía cinética y la energía potencial en términos de los parámetros a los elementos que generan al sistema y de las coordenadas generalizadas q_i y sus derivadas temporales $\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$.

3.- Formar el Lagrangiano como se muestra en las ecuaciones 5.22.

$$L = K - U \dots \dots \dots (5.22) .$$

4.- Aplicar las ecuaciones de Lagrange. Las ecuaciones de movimiento se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange que son de la forma 5.23.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \dots \dots \dots (5.23)$$

Estas ecuaciones se deben aplicar a cada una de las coordenadas generalizadas q_i que describen el comportamiento del sistema.

A continuación, aplicaremos la teoría de Lagrange para la deducción de las ecuaciones de movimiento del sistema de la figura 5.2, el cual consta de dos masas m_1 y m_2 conectadas en serie por dos resortes cuyas constantes de rigidez son k_1 y k_2 y que no interactúan con un medio de amortiguamiento.

Aplicando el procedimiento anterior tenemos.

1.- Las coordenadas generalizadas para este caso son los desplazamientos de las masas $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

2.- Las energías cinética y potencial están dadas por la ecuación 5.24.

$$K = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dx_1(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_2(t)}{dt} \right)^2 \quad y \quad U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + k_2 (x_2(t) - x_1(t))^2 \dots\dots (5.24)$$

3.- El Lagrangiano para este caso es de la forma de la ecuación 5.25.

$$L = K - U = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dx_1(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_2(t)}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} k_1 (x_1(t))^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2(t) - x_1(t))^2 \dots\dots\dots (5.25)$$

4.- Aplicamos las ecuaciones de Lagrange para cada coordenada $x_1(t)$ y $x_2(t)$

obtenemos.

Para la coordenada $x_1(t)$ la ecuación de Lagrange queda de la forma 5.26.

$$\frac{d}{dt} \left(m_1 \frac{dx_1(t)}{dt} \right) - (-k_1 x_1(t) - k_2 (x_2(t) - x_1(t))) = 0 \dots\dots\dots (5.26)$$

Para la coordenada $x_2(t)$ la ecuación de Lagrange queda de la forma 5.27.

$$\frac{d}{dt} \left(m_2 \frac{dx_2(t)}{dt} \right) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)) = 0 \dots\dots\dots (5.27)$$

Reduciendo a la forma final las ecuaciones 5.26 y 5.27 se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden 5.28.

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) &= 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (5.28)$$

Como podemos observar el sistema de ecuaciones 5.28 obtenidos por el método de Lagrange coincide con los sistemas de ecuaciones 5.2 y 5.17 obtenidos anteriormente por los métodos de fuerzas y matricial respectivamente.

Ejemplo1. Se tiene un sistema generado por dos bloques de masas m_1 y m_2 que están unidos por tres resortes conectados a los bloques en serie y cuyas constantes son k_1 , k_2 y k_3 respectivamente como se muestra en la figura 5.4. Determine las ecuaciones de movimiento por el método de Lagrange.

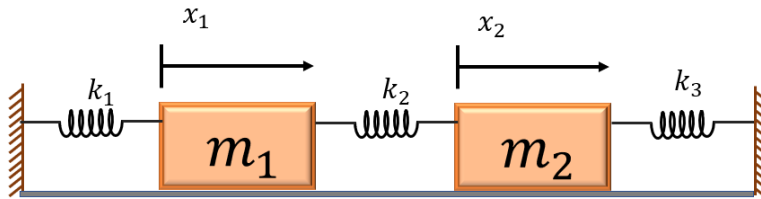


Figura 5.4. Sistema masa-resorte de dos grados de libertad con tres resortes en serie

Solución.

Determinamos el sistema de ecuaciones de movimiento del sistema.

Para la solución introduciremos la notación $\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$ y $\frac{d^2q_i}{dt^2} = \ddot{q}_i$.

Para la obtención de las ecuaciones de movimiento utilizaremos el Lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange.

$$L = K - U \quad y \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Las coordenadas generalizadas son $x_1(t)$ y $x_2(t)$

Las energías cinemática y potencial del sistema esta dadas por.

$$K = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2)^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

Calculamos para $x_1(t)$.

El Lagrangiano es de la siguiente forma.

$$L = K - U = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2)^2 - \left(\frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2 \right)$$

Aplicamos la ecuación de Lagrange de la forma siguiente.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \quad y \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación de Lagrange queda de la siguiente manera.

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0$$

Calculamos para $x_2(t)$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \quad y \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación de Lagrange queda de la siguiente manera.

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 x_2 = 0$$

Entonces el sistema de ecuaciones de movimientos del sistema es de la forma.

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0$$

Ecuación de Lagrange para un sistema no amortiguado forzado.

Para obtener las ecuaciones de movimiento utilizando la teoría de Lagrange cuando actúan fuerzas externas sobre las masas, se sigue un procedimiento que incluye definir la energía cinética, la energía potencial, y el trabajo de las fuerzas externas. Aquí se detallan los pasos:

1.- Definir las coordenadas generalizadas, es decir hay que identificar las coordenadas generalizadas q_i que describen las configuraciones del sistema, para un sistema vibratorio mecánico estas pueden ser lineales o angulares.

2.- Obtener las expresiones para la energía cinética y la energía potencial en términos de los parámetros a los elementos que generan al sistema y de las coordenadas generalizadas q_i y sus derivadas temporales $\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$.

3.- Formar el Lagrangiano dado por la ecuación 5.29.

$$L = K - U \dots \dots \dots (5.29) .$$

4.- Aplicar las ecuaciones de Lagrange. Las ecuaciones de movimiento se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange que son de la forma 5.30.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \dots \dots \dots (5.30)$$

Donde Q_i son las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

A continuación, aplicaremos la teoría de Lagrange para la deducción de las ecuaciones de movimiento del sistema de la figura 5.5, el cual consta de dos masas m_1 y m_2 conectadas en serie por dos resortes cuyas constantes de rigidez son k_1 y k_2 y que no interactúan con un medio de amortiguamiento, pero sobre la masa m_2 actúa una fuerza externa $F(t)$.

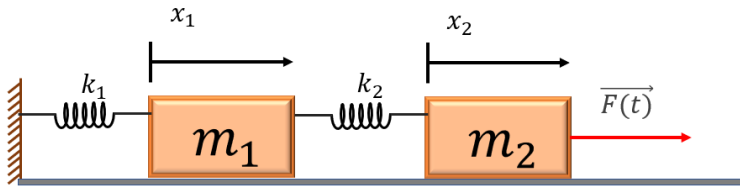


Figura 5.5. Sistema masa-resorte no amortiguado forzado de dos grados de libertad

Aplicando el procedimiento anterior tenemos.

1.- Las coordenadas generalizadas para este caso son los desplazamientos de las masas $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

2.- Las energías cinética y potencial están dadas por la ecuación 5.31.

$$K = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dx_1(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_2(t)}{dt} \right)^2 \quad y \quad U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2(t) - x_1(t))^2 \dots\dots (5.31)$$

3.- El Lagrangiano para este caso es de la forma de la ecuación 5.32.

$$L = K - U = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dx_1(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_2(t)}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} k_1 (x_1(t))^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2(t) - x_1(t))^2 \dots\dots\dots (5.32)$$

4.- Aplicamos las ecuaciones de Lagrange para cada coordenada $x_1(t)$ y $x_2(t)$

obtenemos.

Para la coordenada $x_1(t)$ la ecuación de Lagrange queda de la forma 5.33.

$$\frac{d}{dt} \left(m_1 \frac{dx_1(t)}{dt} \right) - (-k_1 x_1(t) - k_2 (x_2(t) - x_1(t))) = 0 \dots\dots\dots (5.33)$$

Para la coordenada $x_2(t)$ la ecuación de Lagrange queda de la forma 5.34.

$$\frac{d}{dt} \left(m_2 \frac{dx_2(t)}{dt} \right) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)) = F(t) \dots\dots\dots (5.34)$$

Reduciendo a la forma final las ecuaciones 5.33 y 5.34 se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden 5.35.

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) &= F(t) \end{aligned} \dots\dots\dots (5.35)$$

En mecánica, cuando se analiza un sistema con amortiguamiento, se introduce el término de Rayleigh R para representar la disipación de energía debido al amortiguamiento. Este término permite que el análisis de Lagrange, que se usa normalmente para sistemas conservativos (sin pérdida de energía), pueda extenderse a sistemas donde hay pérdida de energía por fricción o resistencia.

Ecuación de Lagrange para Sistemas Amortiguados.

El Lagrangiano L de un sistema mecánico se define como la diferencia entre la energía cinética K y la energía potencial U :

$$L = K - U$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento, se utilizan las ecuaciones de Lagrange 5.36:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \dots \dots \dots (5.36)$$

Donde q_i representa las coordenadas generalizadas y $\dot{q}_i$ sus derivadas.

Para considerar el amortiguamiento se le hace una modificación a la ecuación de Lagrange para sistemas conservativos introduciendo el termino de Rayleigh para de esta manera poder incluir los efectos del amortiguamiento lo cual dan como resultado la disipación de energía del sistema. El termino Rayleigh no se incluye en el Lagrangiano, si no que este se incorpora en las ecuaciones de Lagrange para considerar la energía disipada.

El termino Rayleigh R define en función de las velocidades generalizadas y tiene la forma de la ecuación 5.37.

$$R = \frac{1}{2} \beta_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \beta_2 \dot{q}_2^2 + \dots \dots \dots (5.37)$$

Donde β_i son los coeficientes de amortiguamiento asociados a cada coordenada generalizada q_i .

De esta manera las ecuaciones de Lagrange considerando el termino Rayleigh R quedan de la forma de la ecuación 5.38.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \dots \dots \dots (5.38)$$

Las ecuaciones de Lagrange se modifican para así poder incluir los efectos del amortiguamiento, donde en este caso el termino $-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$ representa la fuerza disipativa debido al amortiguamiento.

Ejemplo 2. Se tiene un sistema de dos grados de libertad que consta de dos masas m_1 y m_2 conectadas entre si por dos resortes de constantes k_1 y k_2 respectivamente y entre las

masas hay dos medios de amortiguamiento cuyas constantes de amortiguamiento β_1 y β_2 , como se muestra en la figura 5.6. Determine el sistema de ecuaciones de movimiento del sistema.

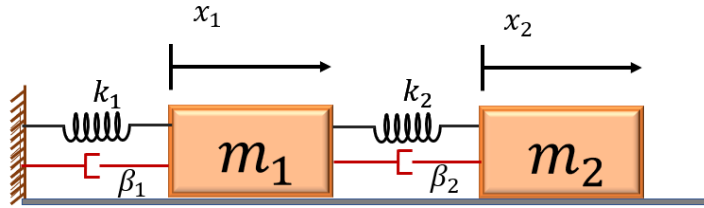


Figura 5.6. Sistema de dos grados de libertad masa-resorte amortiguado.

Solución.

Calculamos las energías del sistema, termino de Rayleigh y el Lagrangiano.

Energía cinética K.

$$K = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dx_1(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_2(t)}{dt} \right)^2$$

Energía potencial U.

$$U = \frac{1}{2} k_1 (x_1(t))^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2(t) - x_1(t))^2$$

El termino de Rayleigh.

$$R = \frac{1}{2} \beta_1 \left(\frac{dx_1(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta_2 \left(\frac{dx_2(t)}{dt} \right)^2$$

Lagrangiano del sistema.

$$L = K - U = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dx_1(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_2(t)}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} k_1 (x_1(t))^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2(t) - x_1(t))^2$$

Las ecuaciones de Lagrange, considerando el termino de Rayleigh y las coordenadas generalizadas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ quedan de la siguiente manera.

Para la coordenada $x_1(t)$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1}$$

Realizando las derivadas para cada termino tenemos.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2}, \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1(t) + k_2(x_2(t) - x_1(t))$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = \beta_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + \beta_2 \frac{dx_1(t)}{dt} - \beta_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = (\beta_1 + \beta_2) \frac{dx_1(t)}{dt} - \beta_2 \frac{dx_2(t)}{dt}$$

Sustituimos los valores calculados anteriormente en la ecuación de Lagrange para un sistema amortiguado tenemos.

$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + k_1 x_1(t) - k_2(x_2(t) - x_1(t)) = - (\beta_1 + \beta_2) \frac{dx_1(t)}{dt} + \beta_2 \frac{dx_2(t)}{dt}$$

Para la coordenada $x_2(t)$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2}$$

Realizando las derivadas para cada termino tenemos.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \frac{dx_2(t)}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2(x_2(t) - x_1(t)) = -k_2 x_2(t) + k_2 x_1(t)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = \beta_2 \left(\frac{dx_2(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} \right) = \beta_2 \frac{dx_2(t)}{dt} - \beta_2 \frac{dx_1(t)}{dt}$$

Sustituimos los valores calculados anteriormente en la ecuación de Lagrange para un sistema amortiguado tenemos.

$$m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + k_2 x_2(t) - k_2 x_1(t) = -\beta_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + \beta_2 \frac{dx_1(t)}{dt}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento del sistema quedan de la siguiente forma.

$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (\beta_1 + \beta_2) \frac{dx_1(t)}{dt} - \beta_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + k_1 x_1(t) - k_2 (x_2(t) - x_1(t)) = 0$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \beta_2 \frac{dx_2(t)}{dt} - \beta_2 \frac{dx_1(t)}{dt} + k_2 x_2(t) - k_2 x_1(t) = 0$$

Método de variables de estado en la solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

El método de variables de estado para la solución de ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden es una técnica que transforma una ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Este método es especialmente útil en análisis de sistemas dinámicos y control, donde se facilita la representación y solución de ecuaciones diferenciales.

Proceso para aplicar el método:

Transformar la ecuación diferencial de segundo orden: Supongamos que tenemos una ecuación diferencial homogénea de segundo orden de la forma 5.39:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \dots \dots \dots (5.39)$$

El objetivo es convertir esta ecuación en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para lo cual se realiza el siguiente procedimiento.

Definir las variables de estado: Se definen dos nuevas variables, que llamaremos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ donde quedan definidas de la forma 5.40:

$$x_1(t) = y(t) \quad y \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} \dots \dots \dots (5.40)$$

Ahora, expresamos las derivadas en términos de las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ quedando de la forma 5.41.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} = x_2(t) \quad y \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \dots \dots \dots (5.41)$$

Reescribir la ecuación original: Sustituyendo en la ecuación original y utilizando las definiciones de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, obtenemos la ecuación 5.42.

$$a_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + a_1 x_2(t) + a_0 x_1(t) = 0 \dots \dots \dots (5.42)$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma 5.43:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad y \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{a_1}{a_2} x_2(t) - \frac{a_0}{a_2} x_1(t) \dots \dots \dots (5.43)$$

Representación matricial: Este sistema se puede escribir en forma matricial de la forma 5.44:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (5.44)$$

Solución del sistema: Una vez que tienes el sistema de ecuaciones de primer orden, se puede resolver usando técnicas estándar para sistemas lineales, como el uso de exponentes matriciales o la diagonalización de la matriz de coeficientes u otros según convenga.

El procedimiento anterior se debe de realizar tantas veces como coordenadas generalizadas se tenga es decir para un sistema de un grado de libertad se requieren dos

variables de estado, para un sistema de dos grados de libertad se requieren cuatro variables de estado.

Este método es poderoso porque permite abordar ecuaciones diferenciales complejas de una manera sistemática y estructurada, especialmente cuando se manejan sistemas dinámicos o se aplica control sobre el sistema descrito por las ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 2. Se tiene un sistema vibratorio de dos grados de libertad consideramos el sistema de dos masas m_1 y m_2 conectadas en serie a través de dos resortes de constantes k_1 y k_2 y sin amortiguamiento sobre el cual actúa una fuerza instantánea, como se muestra en la figura 5.7. Determine por el método de variables de estado los desplazamientos de las masas y trace sus graficas.

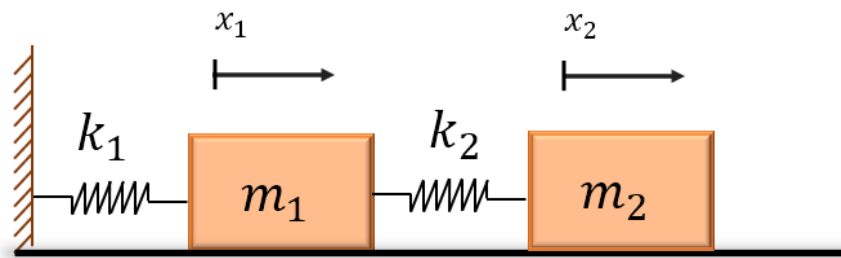


Figura 5.7. Sistema vibratorio de dos grados de libertad no amortiguado

Solución

Partiendo del sistema de ecuaciones de movimiento del sistema son las siguientes.

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones se pueden escribir en la forma matricial.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

despejando $\begin{bmatrix} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix}$ se tiene la siguiente ecuación.

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Para nuestro ejemplo $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_1 = 10$ N/m, $k_2 = 100$ N/m, lo anterior se reduce a

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -110 & 100 \\ 50 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -110x_1 + 100x_2 \\ 50x_1 - 50x_2 \end{bmatrix}$$

Que es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, mismo que se puede convertir a un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden agregando las variables de estado de la forma siguiente

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix},$$

Derivando respecto del tiempo se tiene

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo las expresiones de las aceleraciones de las masas en lo anterior se tiene.

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -110x_1 + 100x_2 \\ 50x_1 - 50x_2 \end{pmatrix}$$

Que se puede escribir como

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -110 & 100 & 0 & 0 \\ 50 & -50 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Es decir $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -110 & 100 & 0 & 0 \\ 50 & -50 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resultando en un sistema de 4

ecuaciones diferenciales de primer orden.

Aplicando transformada de Laplace a $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t)$ se tiene

$$s\vec{x}(s) - \vec{x}(0) = A\vec{x}(s)$$

$$s\vec{x}(s) - A\vec{x}(s) = \vec{x}(0)$$

La cual se puede escribir de la forma $sI_{4 \times 4}\vec{x}(s) - A\vec{x}(s) = \vec{x}(0)$, donde $I_{4 \times 4}$ es la matriz identidad de 4×4 , despejando $\vec{x}(s)$ se tiene la siguiente ecuación.

$$(sI_{4 \times 4} - A)\vec{x}(s) = \vec{x}(0),$$

$$\vec{x}(s) = (sI_{4 \times 4} - A)^{-1} \vec{x}(0)$$

Que resulta en

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s^3+50s}{s^4+160s^2+500} & \frac{100s}{s^4+160s^2+500} & \frac{s^2+50}{s^4+160s^2+500} & \frac{100}{s^4+160s^2+500} \\ \frac{50s}{s^4+160s^2+500} & \frac{s^3+110s}{s^4+160s^2+500} & \frac{50}{s^4+160s^2+500} & \frac{s^2+110}{s^4+160s^2+500} \\ \frac{10(11s^2+50)}{s^4+160s^2+500} & \frac{100s^2}{s^4+160s^2+500} & \frac{s^3+50s}{s^4+160s^2+500} & \frac{100s}{s^4+160s^2+500} \\ \frac{50s^2}{s^4+160s^2+500} & \frac{50(s^2+10)}{s^4+160s^2+500} & \frac{50s}{s^4+160s^2+500} & \frac{s^3+110s}{s^4+160s^2+500} \end{pmatrix} \vec{x}(0),$$

Para nuestro caso particular las condiciones iniciales $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, realizando la

multiplicación resulta

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s^2+250}{s^4+160s^2+500} \\ \frac{2(s^2+135)}{s^4+160s^2+500} \\ \frac{s^3+250s}{s^4+160s^2+500} \\ \frac{2(s^3+135s)}{s^4+160s^2+500} \end{pmatrix}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace a las dos primeras filas se tiene finalmente la solución para el desplazamiento de las masas con respecto al origen y sus respectivas graficas se muestran en la figura 5.8

$$x_1(t) = -0.048 \sin(12.522t) + 0.899 \sin(1.785t) \text{ m}$$

$$x_2(t) = 0.022 \sin(12.522t) + 0.961 \sin(1.785t) \text{ m}$$

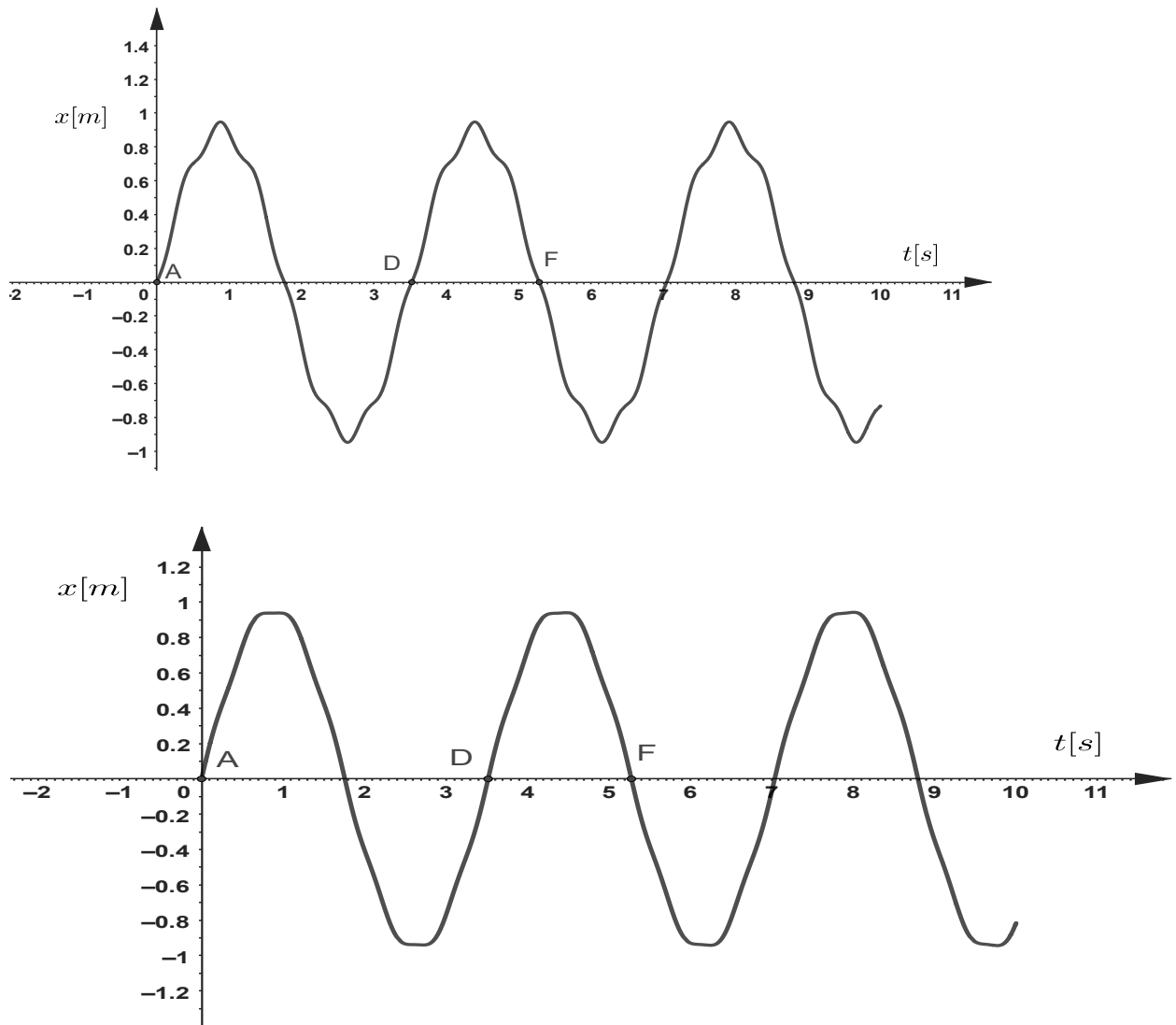


Figura 5.8. Gráficos de los desplazamientos de las masas en función del tiempo.

5.2 Frecuencias naturales y modos normales de vibración para sistemas de dos grados de libertad.

Frecuencias naturales de un sistema vibratorio de dos grados de libertad.

Las frecuencias naturales de un sistema de dos grados de libertad son las frecuencias en las cuales el sistema oscila libremente sin la influencia de fuerzas externas ni amortiguamiento, únicamente bajo la acción de las fuerzas de restauración internas (como resortes o rigideces estructurales). Estas frecuencias son propiedades intrínsecas del sistema,

determinadas por sus características físicas, como las masas y las rigideces en el caso de sistemas masa-resorte.

Para determinar las frecuencias naturales de un sistema mecánico de dos grados de libertad se sigue el procedimiento que a continuación se muestra.

1.- Escribir las ecuaciones de movimiento del sistema considerando las fuerzas de restauración (resortes) y las masas involucradas.

Para un sistema masa-resorte de la figura 5.1 a sin amortiguamiento el sistema de ecuaciones esta dado por 5.45:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (5.45)$$

2.- Asumir Soluciones Armónicas:

Suponemos soluciones armónicas para los desplazamientos de la forma 5.46:

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t} \text{ y } x_2(t) = X_2 e^{i\omega t} \dots \dots \dots (5.46)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.46 en las ecuaciones de movimiento tenemos. Las ecuaciones 5.47.

$$m_1 (-\omega^2 X_1 e^{i\omega t}) + (k_1 + k_2)X_1 e^{i\omega t} - k_2 X_2 e^{i\omega t} = 0 \dots \dots \dots (5.47)$$

$$m_2 (-\omega^2 X_2 e^{i\omega t}) + k_2 X_2 e^{i\omega t} - k_2 X_1 e^{i\omega t} = 0$$

Del sistema de ecuaciones 5.47 eliminamos las exponenciales, reduciendo y agrupando términos obtenemos el sistema de ecuaciones 5.48, con respecto a las variables X_1 y X_2 que son las amplitudes de las posiciones de las masas.

$$(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)X_1 - k_2 X_2 = 0$$

$$-k_2 X_1 + (-\omega^2 m_2 + k_2) X_2 = 0 \dots \dots \dots (5.48)$$

Llevamos la ecuación 5.48 a la forma matricial y tenemos el sistema de ecuaciones 5.49.

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-\omega^2 m_2 + k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (5.49)$$

Para que el sistema de ecuaciones 5.49 tenga soluciones no triviales se debe de cumplir que el determinante de la matriz de los coeficientes sea diferente de cero como se muestra en la ecuación 5.50.

$$\det \begin{bmatrix} (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-\omega^2 m_2 + k_2) \end{bmatrix} = 0 \dots \dots \dots (5.50)$$

Calculando el determinante y reduciendo los términos algebraicos nos queda la ecuación 5.51.

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_1 k_1 + m_2 k_2) \omega^2 + k_1 k_2 = 0 \dots \dots \dots (5.51)$$

Hacemos el cambio de variable $D = \omega^2$ y $D^2 = \omega^4$.

Entonces la ecuación 5.51 queda de la forma 5.52.

$$m_1 m_2 D^2 - (m_1 k_2 + m_1 k_1 + m_2 k_2) D + k_1 k_2 = 0 \dots \dots \dots (5.52)$$

El resultado de la solución de la ecuación 5.52 es de la forma 5.53.

$$D_{1,2} = \frac{(m_1 k_2 + m_1 k_1 + m_2 k_2) \pm \sqrt{(m_1 k_2 + m_1 k_1 + m_2 k_2)^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2} \dots \dots \dots (5.53)$$

Por lo tanto, las frecuencias naturales del sistema esta dadas por la ecuación 5.54.

$$\omega_{1,2} = \sqrt{D_{1,2}} \dots \dots \dots (5.54)$$

Ejemplo 3. Se tiene un sistema mecánico como se muestra en la figura 5.9 donde la masa m_1 es de 1 kg y la masa m_2 es de 2 kg y las constantes k_1 y k_2 de los resortes son

$3 \frac{N}{m}$ y $4 \frac{N}{m}$ respectivamente, el sistema no se encuentra en algún medio de amortiguamiento y tampoco interactúa con fuerzas externas. Encuentre las frecuencias naturales del sistema.

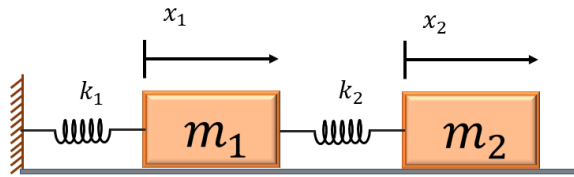


Figura 5.9. Sistema masa-resorte no amortiguado de dos grados de libertad.

Solución.

Datos.

$$m_1 = 1 \text{ kg}, m_2 = 2 \text{ kg}, k_1 = 3 \frac{N}{m} \text{ y } k_2 = 4 \frac{N}{m}$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema son de la forma.

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Para nuestro sistema particular quedan de la forma siguiente.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + 7x_1(t) - 4x_2(t) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - 4x_1(t) + 4x_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Suponiendo soluciones de la forma

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t} \text{ y } x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}$$

Sustituyendo las soluciones propuestas en el sistema particular obtenemos el

sistema de ecuaciones.

$$(-\omega^2 + 7)X_1 - 4X_2 = 0$$

$$-4X_1 + (-2\omega^2 + 4)X_2 = 0$$

La forma matricial del sistema es de la forma siguiente.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + 7 & -4 \\ -4 & -2\omega^2 + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando el determinante asociado a la matriz se tiene.

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + 7 & -4 \\ -4 & -2\omega^2 + 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^4 - 9\omega^2 + 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática introduciendo los cambios de variables siguientes

$D = \omega^2$ y $D^2 = \omega^4$ obtenemos.

$$D^2 - 9D + 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado por la formula general se obtiene.

$$D_1 = 8.27, D_2 = 0.72$$

Por lo tanto, las frecuencias naturales del sistema están dados por.

$$\omega_1 = \sqrt{8.27} = 2.87 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ y } \omega_2 = \sqrt{0.72} = 0.85 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Modos normales de vibración de un sistema vibratorio de dos grados de libertad.

Un modo normal de vibración se refiere a un patrón o frecuencia específica en la que un sistema físico oscila. Dependiendo del contexto, puede tener diferentes aplicaciones y significados.

Física y mecánica: Un modo normal de vibración es una forma específica en que un objeto o estructura puede vibrar. Por ejemplo, una cuerda de guitarra tiene modos de vibración que corresponden a diferentes notas musicales. Cada modo de vibración tiene una frecuencia natural específica.

Electrónica y telecomunicaciones: En dispositivos electrónicos como teléfonos móviles, el modo normal de vibración se refiere a un ajuste en el que el dispositivo utiliza un motor vibratorio para alertar al usuario de llamadas, mensajes u otras notificaciones sin emitir sonido.

Acústica: En acústica, los modos normales de vibración se relacionan con cómo las ondas sonoras se comportan dentro de un espacio cerrado, como una sala de conciertos o una caja de resonancia. Diferentes modos pueden afectar la calidad del sonido en estos espacios.

Un modo normal es un patrón específico de oscilación en el que todas las partes de un sistema vibran a la misma frecuencia y en una relación de fase fija. En el contexto de un sistema de múltiples grados de libertad, como una estructura mecánica con varias masas y resortes, los modos normales describen las formas de vibración fundamentales que el sistema puede adoptar.

Características Clave de los Modos Normales

Frecuencia Natural.

Cada modo normal tiene una frecuencia natural asociada. Esta es la frecuencia a la que el sistema oscila si se perturba y luego se deja vibrar libremente sin amortiguamiento ni fuerzas externas.

Forma del Modo (Vector Propio).

La forma del modo, también conocida como vector propio, describe la distribución espacial de las amplitudes de oscilación de las diferentes partes del sistema.

En cada modo normal, todas las partes del sistema oscilan con la misma frecuencia y en una relación de fase específica, que está determinada por el vector propio.

Linealidad e Independencia.

Los modos normales son linealmente independientes, lo que significa que cualquier movimiento del sistema puede describirse como una combinación lineal de sus modos normales.

Esta propiedad permite simplificar el análisis de sistemas complejos, ya que se puede estudiar cada modo normal por separado y luego combinar los resultados.

Para obtener los modos normales de vibración de un sistema mecánico de dos grados de libertad no amortiguado y que no interactúa con fuerzas externas se siguen los siguientes pasos.

1.- se obtiene las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del sistema.

2.- se asumen soluciones periódicas de las ecuaciones de la forma $x_1(t) = X_1 e^{i\omega t}$ y

$$x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}.$$

3.- sustituyendo las soluciones propuestas en las ecuaciones de movimiento obtenemos.

$$AX_1 + C X_2 = 0$$

$$BX_1 + D X_2 = 0 \dots \dots \dots (5.55)$$

Donde los coeficientes numéricos A, B, C y D dependen de los parámetros que definen los elementos que integran al sistema y de la frecuencia ω , X_1 y X_2 son las amplitudes de los desplazamientos correspondientes.

4.- Se lleva el sistema 5.55 a la forma matricial 5.56.

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (5.56)$$

5.- Se obtiene el determinante de la matriz de 2×2 y se iguala a cero para garantizar que el sistema tiene soluciones no triviales 5.57 como se muestra en la ecuación.

$$\det \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = 0 \dots \dots (5.57)$$

6.- Al resolver el determinante se obtiene una ecuación algebraica en términos de los parámetros que definen a los elementos que conforman al sistema y cuya variable es la frecuencia ω , conocida como polinomio característico de la forma 5.58.

$$E \omega^4 + F \omega^2 + G \omega + H = 0 \dots \dots (5.58)$$

5. Se resuelve el polinomio característico anterior por un método algebraico

6.- Se encuentran las frecuencias naturales del sistema ω_1 y ω_2 que son las raíces del polinomio característico.

7.- Los modos de vibración son los vectores propios asociados con las frecuencias naturales ω_1 y ω_2 .

8.- Se sustituyen los valores de ω_1 y ω_2 . En la ecuación 5.56 y se obtiene el sistema para X_1 y X_2 en la forma 5.59.

$$A X_1 + C X_2 = 0$$

$$B X_1 + D X_2 = 0 \dots \dots \dots (5.59)$$

9.- Para encontrar los modos de vibración se resuelve el sistema de ecuaciones y se encuentran los eigenvectores $\vec{X}_i = [X_1, X_2]^T$.

A continuación, aplicamos el procedimiento anterior para un sistema particular.

Ejemplo 4. Se tiene un sistema mecánico como se muestra en la figura 5.10 donde la masa m_1 es de 1 kg y la masa m_2 es de 2 kg y las constantes k_1, k_2 y k_3 de los resortes son $3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ respectivamente, el sistema no se encuentra en algún medio de amortiguamiento y tampoco interactúa con fuerzas externa. Encuentre las frecuencias naturales del sistema y los modos normales de vibración

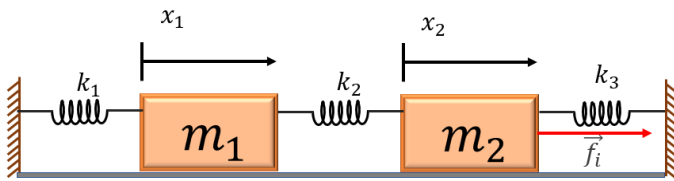


Figura 5.10. Sistema masa- resorte de dos grados de libertad

Solución.

Datos.

$$m_1 = 1 \text{ kg}, m_2 = 2 \text{ kg}, k_1 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{ y } k_2 = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{ y } k_3 = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema son de la forma.

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0$$

Para nuestro sistema particular quedan de la forma siguiente.

$$\ddot{x}_1 + 5 x_1 - 2 x_2 = 0$$

$$2\ddot{x}_2 - 2x_1 + 3x_2 = 0$$

Suponiendo soluciones de la forma

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t} \text{ y } x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}$$

Sustituyendo las soluciones propuestas en el sistema particular obtenemos.

sistema de ecuaciones siguientes.

$$(-\omega^2 + 5)X_1 - 2X_2 = 0$$

$$-2X_1 + (-2\omega^2 + 3)X_2 = 0$$

La forma matricial del sistema es de la forma siguiente.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + 5 & -2 \\ -2 & -2\omega^2 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando el determinante asociado a la matriz se tiene.

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + 5 & -2 \\ -2 & -2\omega^2 + 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$2\omega^4 - 13\omega^2 + 11 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática introduciendo los cambios de variables siguientes

$$D = \omega^2 \text{ y } D^2 = \omega^4 \text{ obtenemos.}$$

$$2D^2 - 13D + 11 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado por la formula general se obtiene.

$$D_1 = 5.5 \text{ y } D_2 = 1$$

Por lo tanto, las frecuencias naturales del sistema están dados por.

$$\omega_1 = \sqrt{5.5} = 2.34 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ y } \omega_2 = \sqrt{1} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Para encontrar los modos normales partimos de la ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + 5 & -2 \\ -2 & -2\omega^2 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores de la frecuencia natural ω_1 obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} -0.5 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el producto de matrices se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$0.5X_1 - 2X_2 = 0$$

$$-2X_1 - 8X_2 = 0$$

De donde

$$0.5X_1 - 2X_2 = 0, 0.5X_1 = 2X_2 \text{ y } X_1 = 4X_2$$

Sustituyendo los valores de la frecuencia natural ω_2 obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el producto de matrices se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$4X_1 - 2X_2 = 0$$

$$-2X_1 - X_2 = 0$$

De donde

$$4X_1 - 2X_2 = 0, 4X_1 = 2X_2 \text{ y } X_1 = \frac{1}{2} X_2$$

Por lo tanto, los modos normales del sistema son los vectores.

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 4 & X_2 \\ X_2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 & X_2 \\ 2 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.3 Análisis modal.

Un análisis modal es una técnica utilizada en ingeniería y matemáticas para estudiar la respuesta dinámica de sistemas estructurales o mecánicos. Su propósito principal es identificar las frecuencias naturales y los modos de vibración de un sistema. Aquí te detallo algunos aspectos clave:

Frecuencias Naturales: Identifica las frecuencias a las cuales un sistema tiende a vibrar con mayor amplitud cuando es excitado. Estas frecuencias son cruciales para entender cómo se comportará el sistema bajo diferentes condiciones de carga dinámica.

Modos de Vibración: Analiza las formas en las que un sistema puede vibrar en sus frecuencias naturales. Cada modo de vibración tiene una forma característica de deformación.

Predicción de Comportamiento Dinámico: Ayuda a predecir cómo se comportará una estructura o componente bajo cargas dinámicas, como sismos, vientos o vibraciones.

Diseño y Optimización: Permite optimizar el diseño de estructuras y componentes para evitar resonancias que podrían causar fallos o ineficiencias.

Diagnóstico de Fallos: Puede ser utilizado para identificar problemas en estructuras existentes, como resonancias inesperadas que podrían indicar daños o debilidades.

El análisis modal es fundamental para asegurar la integridad y el rendimiento adecuado de estructuras y sistemas mecánicos sometidos a cargas dinámicas.

Ejemplo de Aplicación del análisis modal en el diseño de un sistema de suspensión de un automóvil.

Un sistema de suspensión de un automóvil es un buen ejemplo de un sistema mecánico que puede modelarse utilizando masas y resortes.

Sistema de Suspensión.

Los parámetros que determinan los elementos que integran al sistema son.

Masa del Chasis (m_1): Representa la masa del chasis del automóvil.

Masa de la Rueda (m_2): Representa la masa de la rueda y la suspensión inferior.

Resorte del Chasis (k_1) : Representa la rigidez del resorte de la suspensión que conecta el chasis a la suspensión inferior.

Para realizar el análisis modal de un ejemplo mecánico definimos los elementos del sistema y los parámetros que lo representan si como las coordenadas generalizadas con ayuda de los cuales se de los cuales se obtiene las ecuaciones de movimiento del sistema.

Para el ejemplo del sistema de suspensión del automóvil tenemos.

Masa del chasis $m_1 = 300 \text{ kg}$

Masa de la rueda $m_2 = 40 \text{ kg}$

Rigidez del resorte del chasis $k_1 = 20000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Rigidez del neumático $k_2 = 150000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Definir las Matrices de Masa y Rigidez

- Matriz de Masa M: Representa la masa de la rueda y la suspensión inferior.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez K : Representa la rigidez del resorte de la suspensión que conecta el chasis a la suspensión inferior y la rigidez del neumático.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170000 & -150000 \\ -150000 & 150000 \end{bmatrix}$$

Se forma la ecuación matricial de la forma siguiente.

$$M\ddot{\vec{X}} + k\vec{X} = 0$$

Donde $\vec{X} = [X_1 \ X_2]^T$ es el vector de las amplitudes de las vibraciones de las masas.

Para realizar el análisis modal se resuelve la ecuación con la ecuación para encontrar las frecuencias naturales del sistema y los modos de vibración.

$$(k - \omega^2 M)\vec{X} = 0$$

Para determinar las frecuencias naturales del sistema calculamos el determinante de la matriz.

$$\det(k - \omega^2 M) = 0$$

Donde la matriz $(k - \omega^2 M)$ esta dada por.

$$k - \omega^2 M = \begin{bmatrix} 170000 - 300\omega^2 & -150000 \\ -150000 & 150000 - 40\omega^2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el determinante de la matriz $(k - \omega^2 M)$ después igualamos a cero y realizando el cambio de variable $\omega^2 = D$ se obtiene la ecuación cuadrática.

$$12000D^2 - 1130000D + 3000000000 = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtienen las raíces siguientes.

$$D_1 = 187.57 \text{ y } D_2 = -93.58$$

Por lo tanto, la raíz negativa no tiene sentido físico por lo tanto la frecuencia natural a considerar es.

$$\omega_1 = \sqrt{187.57} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 13.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Se calculan los modos de vibración resolviendo la ecuación.

$$(k - \omega^2 M)\vec{X} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 170000\omega^2 & -150000 \\ -150000 & 150000 - 40\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Don los modos de vibración son los vectores.

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.32 X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.32 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicación del análisis modal en el diseño de la suspensión:

Frecuencia Natural.

La frecuencia natural obtenida $\omega_1 = 13.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ nos dice cómo vibrará el sistema de suspensión. Esto es importante para ajustar la suspensión para que no coincida con frecuencias típicas de la carretera que pueden causar resonancia.

Modos de Vibración.

El vector propio asociado $\vec{X}$ el cual muestra los modos de vibración muestra cómo se mueven la masa del chasis y la masa de la rueda en respuesta a una excitación en la frecuencia natural. Esto ayuda a entender el comportamiento dinámico del automóvil y a diseñar componentes que minimicen vibraciones indeseadas.

Ajuste del Diseño.

Ajustar Rigidez y Masa. Si la frecuencia natural está dentro de un rango que puede causar problemas de resonancia con la carretera (por ejemplo, baches o irregularidades), los ingenieros pueden ajustar la rigidez de los resortes (k_1 y k_2) o la masa del chasis (m_1 y m_2) para cambiar la frecuencia natural.

Mejorar Amortiguación. Añadir amortiguadores para disipar la energía de vibración y reducir la amplitud de las oscilaciones.

El análisis modal del sistema de suspensión del automóvil permite a los ingenieros diseñar un sistema que minimice las vibraciones indeseadas, mejorando la comodidad del conductor y la durabilidad del vehículo. Mediante el ajuste de los parámetros del sistema en función de los resultados del análisis modal, se puede optimizar el comportamiento dinámico del automóvil para una mejor experiencia en la conducción.

Ejemplo de Aplicación: Edificio con Aislador Sísmico

Imaginemos un edificio de dos pisos con un sistema de aislamiento sísmico en su base.

Sistema de Aislamiento Sísmico

Los elementos que generan al sistema y los parámetros asociados a dichos elementos son.

Masa del Primer Piso m_1 . Representa la masa del primer piso del edificio.

Masa del Segundo Piso m_2 . Representa la masa del segundo piso del edificio.

Resorte del aislador sísmico k_1 . Representa la rigidez del aislador sísmico.

Resorte entre Pisos k_2 . Representa la rigidez del sistema estructural entre el primer y segundo piso.

Para el análisis de un caso particular tenemos.

Masa del primer piso $m_1 = 2000 \text{ kg}$

Masa del segundo piso $m_2 = 1500 \text{ kg}$

Rigidez del aislador sísmico $k_1 = 50000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Rigidez del sistema estructural $k_2 = 100000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Definir las Matrices de Masa y Rigidez

- Matriz de Masa M : Representa la masa de la rueda y la suspensión inferior.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 1500 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez K : Representa la rigidez del resorte de la suspensión que conecta el chasis a la suspensión inferior y la rigidez del neumático.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150000 & -100000 \\ -100000 & 100000 \end{bmatrix}$$

Se forma la ecuación matricial de la forma siguiente.

$$M\ddot{\vec{X}} + k\vec{X} = 0$$

Donde $\vec{X} = [X_1 \quad X_2]^T$ es el vector de las amplitudes de las vibraciones de las masas.

Para realizar el análisis modal se resuelve la ecuación con la ecuación para encontrar las frecuencias naturales del sistema y los modos de vibración.

$$(k - \omega^2 M)\vec{X} = 0$$

Para determinar las frecuencias naturales del sistema calculamos el determinante de la matriz.

$$\det(k - \omega^2 M) = 0$$

Donde la matriz $(k - \omega^2 M)$ esta dada por.

$$k - \omega^2 M = \begin{bmatrix} 150000 - 2000\omega^2 & -100000 \\ -100000 & 100000 - 1500\omega^2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el determinante de la matriz $(k - \omega^2 M)$ e igualando a cero y realizando el cambio de variable $\omega^2 = D$ se obtiene la ecuación cuadrática.

$$3000000D^2 - 425000000D + 5000000000 = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtienen las raíces siguientes.

$$D_1 = 128.72 \text{ y } D_2 = 12.13$$

Por lo tanto, las frecuencias naturales del sistema son.

$$\omega_1 = \sqrt{128.72} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 11.34 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ y } \omega_2 = \sqrt{12.13} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3.48 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Se calculan los modos de vibración resolviendo la ecuación.

$$(k - \omega^2 M)\vec{X} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 150000 - 2000\omega^2 & -100000 \\ -100000 & 100000 - 1500\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la primera frecuencia natural $\omega_1 = 11.34 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ tenemos.

$$\begin{bmatrix} -107440 & -100000 \\ -100000 & 93680 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde los modos de vibración son los vectores.

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.93 X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.93 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para la segunda frecuencia natural $\omega_2 = 3.48 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ tenemos.

$$\begin{bmatrix} 125740 & -100000 \\ -100000 & 81805 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde los modos de vibración son los vectores.

$$\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uso de los Resultados en el Diseño

Aplicación en el Diseño del Edificio con Aislador Sísmico.

Frecuencias Naturales.

Las frecuencias naturales del sistema obtenidas con los valores siguientes

$$\omega_1 = 11.34 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \omega_2 = 3.48 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

nos dicen cómo vibrará el edificio. Es importante que estas frecuencias no coincidan con las frecuencias predominantes de los terremotos en la zona que normalmente son conocidas.

Modos de Vibración.

Los vectores propios asociados a los modos de vibración encontrados en la forma

$$\text{siguiente } \vec{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.93 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

muestran cómo se mueven las masas del primer y segundo piso en respuesta a una excitación en las frecuencias naturales. Esto ayuda a entender el comportamiento dinámico del edificio y a diseñar componentes que minimicen vibraciones indeseadas.

Ajuste del Diseño.

Ajustar Rigidez y Masa: Si las frecuencias naturales están dentro de un rango que puede causar problemas de resonancia con la actividad sísmica, los ingenieros pueden ajustar la rigidez de los aisladores k_1 y k_2 o las masas m_1 y m_2 para cambiar las frecuencias naturales.

Mejorar Amortiguación. Añadir amortiguadores para disipar la energía de vibración y reducir la amplitud de las oscilaciones.

Optimizar Distribución de Masa. Redistribuir la masa en el edificio para lograr una mejor respuesta dinámica.

El análisis modal del sistema de aislamiento sísmico del edificio permite a los ingenieros diseñar un sistema que minimice las vibraciones indeseadas y mejore la seguridad del edificio durante un terremoto. Mediante el ajuste de los parámetros del sistema en función de los resultados del análisis modal, se puede optimizar el comportamiento dinámico del edificio para resistir mejor los eventos sísmicos.

5.4 Respuesta natural de los sistemas vibratorios mecánicos de dos grados de libertad

En este tema se aborda como encontrar la respuesta natural de los sistemas mecánicos de dos grados de libertad. Se muestra como los modos modales de la vibración influyen en la obtención de la respuesta y como se utilizan las condiciones iniciales para la obtención de los coeficientes de las respuestas.

Los modos de vibración de un sistema mecánico de dos grados de libertad son esenciales para encontrar la respuesta natural del sistema. A continuación, se describe el proceso general para utilizar estos modos en el análisis de la respuesta natural del sistema:

Se establece el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento del sistema mecánico de dos grados de libertad. Este sistema se puede expresar en forma matricial como se muestra en la ecuación 5.60.

$$M\ddot{\vec{x}} + C\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = 0 \dots \dots \dots (5.60)$$

donde:

M es la matriz de masa, C es la matriz de amortiguamiento (que se puede omitir para el caso no amortiguado).

K es la matriz de rigidez.

$\vec{x}$ es el vector de desplazamientos.

$\ddot{\vec{x}}$ y $\dot{\vec{x}}$ son las aceleraciones y velocidades, respectivamente.

Para encontrar los modos de vibración y las frecuencias naturales, se considera el sistema no amortiguado que se representa por la ecuación 5.61.

$$M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{0} \dots \dots (5.61)$$

Se asume una solución de la forma $\vec{x} = \vec{X} e^{i\omega t}$ donde, $\vec{X}$ es el vector de modos y ω es la frecuencia natural. Al sustituir esta solución en la ecuación de movimiento 5.62, se obtiene la ecuación 5.61.

$$[K - \omega^2 M]\vec{X} = \vec{0} \dots \dots (5.62)$$

Lo cual se convierte en resolver un problema de valores propios para encontrar las frecuencias naturales del sistema de la forma de la ecuación 5.63.

$$\det [K - \omega^2 M] = 0 \dots \dots (5.63)$$

Resolviendo la ecuación 5.62 se obtienen las frecuencias naturales del sistema ω_1 y ω_2 , con ayuda de las cuales se obtienen los modos de vibración $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$.

La respuesta general del sistema es una combinación lineal de los modos de vibración, dado que el sistema tiene dos modos, la solución general puede escribirse como la ecuación 5.64.

$$\vec{x}(t) = A_1 \vec{X}_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 \vec{X}_2 e^{i\omega_2 t} \dots \dots \dots (5.64)$$

Donde A_1 y A_2 son constantes que se determinan con las condiciones iniciales del sistema.

Las constantes A_1 y A_2 se determinan utilizando las condiciones iniciales del sistema, es decir, los desplazamientos y velocidades iniciales $\vec{x}(0)$ y $\dot{\vec{x}}(0)$.

Estas condiciones iniciales se aplican a la solución general para obtener un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver para A_1 y A_2 .

Finalmente, con A_1 y A_2 determinados, se puede expresar la respuesta natural completa del sistema de la forma 5.65.

$$\vec{x}(t) = A_1 \vec{X}_1 e^{i\omega t} + A_2 \vec{X}_2 e^{i\omega t} \dots \dots \dots (5.65)$$

Esta expresión describe cómo el sistema vibrará en sus modos naturales sin la influencia de fuerzas externas.

Ejemplo 5. Se tiene un sistema que consta de dos masas $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 1 \text{ kg}$ conectados por dos resortes en serie de constantes $k_1 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_2 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ como se muestra en la figura 5.11. El sistema no se encuentra en un medio de amortiguamiento y no interactúa con el medio externo sabemos que para el tiempo $t = 0$ $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}$ y $\dot{\vec{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Determine los desplazamientos de las masas con ayuda de los modos de vibración del sistema.

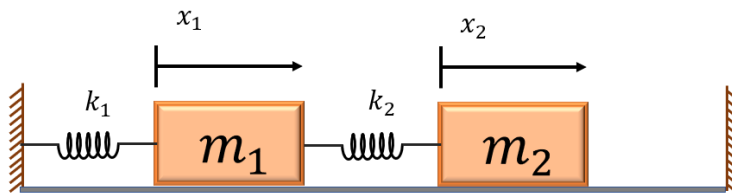


Figura 5.11. Sistema masa -resorte de dos grados de libertad con dos masas

Solución.

Datos.

$$m_1 = 2 \text{ kg}, m_2 = 1 \text{ kg}, k_1 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_2 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}, t = 0 \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m} \quad \text{y} \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para encontrar los modos de vibración y las frecuencias naturales, se considera el sistema no amortiguado que se representa por la ecuación.

$$M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{0}$$

Donde para este caso en particular tenemos que los valores de las matrices M y K son.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para realizar el análisis modal se resuelve la ecuación con la ecuación para encontrar las frecuencias naturales del sistema y los modos de vibración.

$$(k - \omega^2 M)\vec{X} = \vec{0}$$

Para determinar las frecuencias naturales del sistema calculamos el determinante de la matriz.

$$\det(k - \omega^2 M) = 0$$

Donde la matriz $(k - \omega^2 M)$ esta dada por.

$$k - \omega^2 M = \begin{bmatrix} 2 - 2\omega^2 & -2 \\ -2 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el determinante de la matriz $(k - \omega^2 M)$ e igualando a cero y realizando el cambio de variable $\omega^2 = D$ se obtiene la ecuación cuadrática.

$$2D^2 - 6D = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtienen las raíces siguientes.

$$D_1 = 0 \text{ y } D_2 = 3$$

Por lo tanto, las frecuencias naturales del sistema son.

$$\omega_1 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 11.34 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ y } \omega_2 = \sqrt{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 1.73 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Se calculan los modos de vibración resolviendo la ecuación.

$$(k - \omega^2 M)\vec{X} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 - 2\omega^2 & -2 \\ -2 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la primera frecuencia natural $\omega_1 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ tenemos.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde los modos de vibración son los vectores.

son los vectores.

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para la segunda frecuencia natural $\omega_2 = 1.73 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ tenemos.

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde los modos de vibración

$$\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ -2X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

La solución general del sistema es de la forma.

$$\vec{x}(t) = A_1 \vec{X}_1 \cos \omega_1 t + A_2 \vec{X}_2 \cos \omega_2 t + C_1 \vec{X}_1 \sin \omega_1 t + C_2 \vec{X}_2 \sin \omega_2 t$$

Dado que $\omega_1 = 0$ la solución se simplifica de la forma siguiente.

$$\vec{x}(t) = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cos \sqrt{3} t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \sin \sqrt{3} t$$

Para determinar el valor de las constantes aplicamos las condiciones iniciales las cuales son $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\vec{\dot{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ entonces se obtiene.

$$\vec{x}(0) = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$A_1 + A_2 = 1$$

$$A_1 - A_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos.

$$A_1 = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{1}{3}$$

Derivando $\vec{x}(t)$ se obtiene la siguiente expresión.

$$\vec{\dot{x}}(t) = -\sqrt{3} A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \sin \sqrt{3} t + \sqrt{3} C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cos \sqrt{3} t$$

Como la velocidad inicial es $\vec{\dot{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tenemos.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\sqrt{3} C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

De la ecuación anterior tenemos que la constante $C_2 = 0$

Para los valores $A_1 = \frac{2}{3}$, $A_2 = \frac{1}{3}$ y $C_2 = 0$, la solución completa para los desplazamientos en función del tiempo es.

$$\vec{x}(t) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cos \sqrt{3} t \quad \text{m}$$

Por lo tanto, los desplazamientos de las masas son:

$$x_1(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \sqrt{3} t \quad \text{m}$$

$$x_2(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cos \sqrt{3} t \quad \text{m}$$

5.5 Respuesta forzada utilizando el análisis modal.

En el presente capítulo se explora como se puede aplicar el análisis modal para estudiar la respuesta de un sistema vibratorio forzado de dos grados de libertad, es decir expuesto a interacción con una fuerza externa. Se describen los pasos para determinar la respuesta en términos de modos normales y frecuencias naturales.

Para el análisis de la respuesta de un sistema vibratorio forzado de dos grados de libertad a través del análisis modal tomaremos como base un sistema como se describe a continuación.

Para la realización del análisis modal se realizan los siguientes pasos.

1.- Se describen los elementos que forman el sistema y las interacciones con el medio

Se tiene un sistema mecánico que consta de dos masas m_1 y m_2 unidas entre sí por dos resortes de constantes k_1 y k_2 el sistema no interactúa con algún medio de amortiguamiento y sobre la masa m_1 actúa una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

2.- Se obtiene las ecuaciones de movimiento del sistema.

Para la obtención de las ecuaciones de movimiento se pueden utilizar cualquiera de los métodos utilizados anteriormente como son el método de fuerzas o el método de Lagrange. Para el caso del sistema de dos grados de libertad masa-resorte se tiene el siguiente sistema de ecuaciones 5.66.

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \cos \omega t \dots \dots \dots (5.66)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

3.- Se escribe el sistema de ecuaciones 5.65 en la forma matricial de la forma 5.67.

$$M\ddot{\vec{X}} + k\vec{X} = \vec{F}(t) \dots \dots \dots (5.67)$$

Donde.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{F}(t) = \begin{bmatrix} F_0 \cos \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.- Se procede a resolver el sistema considerando el sistema no forzado. Es decir, la ecuación homogénea ($\vec{F}(t) = \vec{0}$), con la finalidad de encontrar las frecuencias naturales del sistema y los modos de vibración del sistema.

La ecuación característica asociada al sistema 5.66 es la ecuación 5.68.

$$\det(k - \omega^2 M) = 0 \dots \dots \dots (5.68)$$

Sustituyendo los valores de las matrices M y k en la ecuación 5.67 obtenemos la ecuación 5.69.

$$\det \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \dots \dots \dots (5.69)$$

Resolviendo la ecuación 5.68 se obtiene el polinomio característico 5.70 en función de ω .

$$(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2 = 0 \dots \dots \dots (5.70)$$

Resolviendo el polinomio característico se obtienen las frecuencias naturales del sistema ω_1 y ω_2 .

5.- Se encuentran los modos de vibración asociados a las frecuencias naturales del sistema, resolviendo la ecuación 5.71.

$$(k - \omega_i^2 M) \vec{X}_i = 0 \dots \dots (5.71)$$

La cual toma la forma 5.72.

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \dots (5.72)$$

Donde $\vec{X}_i$ son los modos de vibración del sistema o los eigenvectores dados por las expresiones $\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{bmatrix}$ y $\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{bmatrix}$

6.- Se busca una solución particular de la forma 5.73.

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \end{pmatrix} \dots \dots (5.73)$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento y resolviendo para A_1, A_2, B_1 y B_2 obtenemos la solución particular.

7.- se encuentra la solución general de la forma 5.74.

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^2 (C_i \vec{X}_i \cos \omega_i t + D_i \vec{X}_i \sin \omega_i t) + \vec{x}_p \dots \dots (5.74)$$

La solución de las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico de dos grados de libertad con una fuerza externa periódica involucra:

Encontrar las frecuencias naturales y modos de vibración resolviendo el problema de valores propios.

Determinar la solución particular debido a la fuerza externa.

Combinar la solución homogénea y la solución particular para obtener la solución completa.

Ejemplo 6. Se tiene un sistema que consta de dos masas $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 1 \text{ kg}$ conectados por dos resortes en serie de constantes $k_1 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_2 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ como se muestra en la figura (). El sistema no se encuentra en un medio de amortiguamiento y no interactúa con el medio externo sabemos que para el tiempo $t = 0$ $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}$ y $\dot{\vec{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Determine los desplazamientos de las masas con ayuda de los modos de vibración del sistema.

Solución.

Datos.

$$m_1 = 2 \text{ kg}, m_2 = 1 \text{ kg}, k_1 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_2 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}, t = 0 \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m} \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para encontrar los modos de vibración y las frecuencias naturales, se considera el sistema no amortiguado que se representa por la ecuación.

$$M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{0}$$

Donde para este caso en particular tenemos que los valores de la matrices M y K son.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para realizar el análisis modal se resuelve la ecuación con la ecuación para encontrar las frecuencias naturales del sistema y los modos de vibración.

$$(k - \omega^2 M)\vec{X}_i = \vec{0}$$

Para determinar las frecuencias naturales del sistema calculamos el determinante de la matriz.

$$\det(k - \omega^2 M) = 0$$

Donde la matriz $(k - \omega^2 M)$ esta dada por.

$$k - \omega^2 M = \begin{bmatrix} 2 - 2\omega^2 & -2 \\ -2 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el determinante de la matriz $(k - \omega^2 M)$ e igualando a cero y realizando el cambio de variable $\omega^2 = D$ se obtiene la ecuación cuadrática.

$$2D^2 - 6D = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtienen las raíces siguientes.

$$D_1 = 0 \text{ y } D_2 = 3$$

Por lo tanto, las frecuencias naturales del sistema son.

$$\omega_1 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 11.34 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ y } \omega_2 = \sqrt{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 1.73 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Se calculan los modos de vibración resolviendo la ecuación.

$$(k - \omega^2 M)\vec{X} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 - 2\omega^2 & -2 \\ -2 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la primera frecuencia natural $\omega_1 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ tenemos.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde los modos de vibración son los vectores.

son los vectores.

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para la segunda frecuencia natural $\omega_2 = 1.73 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ tenemos.

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde los modos de vibración

$$\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{12} \\ -2X_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Se obtiene una solución particular del sistema de la forma.

$$\vec{x}_p(t) = \begin{bmatrix} A_p \cos 10t \\ B_p \cos 10t \end{bmatrix}$$

Obteniendo la primera y segunda derivada de la solución particular y sustituyendo en las ecuaciones de estado del sistema se obtiene.

$$2 \begin{bmatrix} -100A_p \cos 10t \\ -100B_p \cos 10t \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} A_p \cos 10t \\ B_p \cos 10t \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} A_p \cos 10t \\ B_p \cos 10t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cos 10t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Simplificando nos da el siguiente sistema de ecuaciones.

$$-198A_p = 10 \text{ y } -198B_p = 0$$

De donde se tiene que los valores de las constantes son.

$$A_p = \frac{10}{-198} = \frac{-5}{99} \text{ y } B_p = 0$$

Por lo tanto, la solución particular es de la forma.

$$\vec{x}_p(t) = \begin{bmatrix} \frac{-5}{99} \cos 10t \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución general es de la forma.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 \cos \sqrt{3} t + D_2 \sin \sqrt{3} t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-5}{99} \cos 10t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrar las constantes C_1, C_2 y D_2 se consideran las condiciones iniciales de posición y velocidad, para $t=0$ $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\dot{\vec{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y procedemos de la manera siguiente.

$$x_1(0) = C_1 + C_2 - \frac{5}{99} = 1$$

$$x_2(0) = -2C_1 + C_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los valores siguientes de las constantes.

$$C_1 = \frac{104}{297} \quad y \quad C_2 = \frac{208}{297}$$

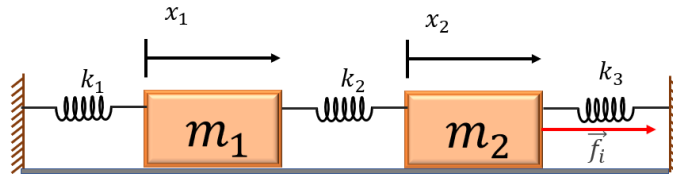
Por lo tanto, los desplazamientos de las masas cuando la masa m_1 está sujeta a la fuerza externa $F(t) = 10 \cos 10 t$ N están dados por.

$$x_1(t) = \frac{104}{297} + \frac{208}{297} \cos \sqrt{3} t - \frac{5}{99} \cos 10t \quad \text{m}$$

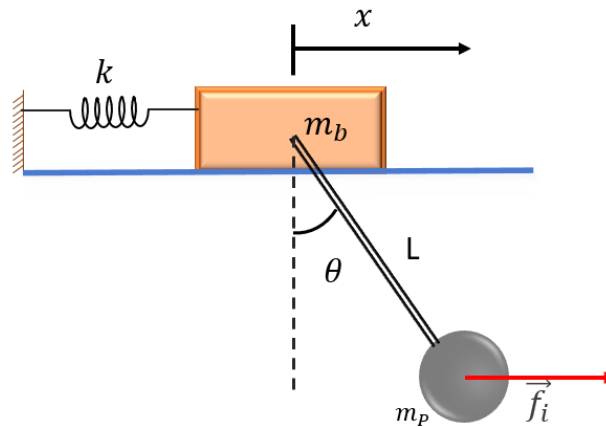
$$x_2(t) = -\frac{208}{297} + \frac{208}{297} \cos \sqrt{3} t \quad \text{m}$$

5.6 Ejercicios.

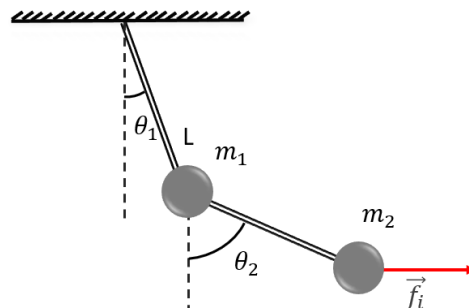
1.- Dado un sistema mecánico de dos grados de libertad como se muestra en la figura, el cual consta de dos masas $m_1 = 1 \text{ kg}$ y $m_2 = 3 \text{ kg}$ conectados entre si por tres resortes conectados en serie de constantes $k_1 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_2 = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_3 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, el sistema no interactúa con alguna fuerza externa y no se encuentra en un medio de amortiguamiento. Determine utilizando el Lagrangiano del sistema las ecuaciones de movimiento y escribálas en su forma matricial si para comenzar el movimiento sobre la masa m_2 actúa una fuerza instantánea.



2.- Se tiene un sistema mecánico de dos grados de libertad como se muestra en la figura. La longitud del péndulo es L , la masa del péndulo es m_p , la masa del bloque es m_b y la constante del resorte es k , el sistema no se encuentra en algún medio de amortiguamiento y no interactúa con alguna fuerza externa. Determine las ecuaciones de movimiento del sistema si bajo la acción de una fuerza instantánea sobre la masa del péndulo es desviada hacia la derecha un ángulo θ con respecto a la vertical y luego se suelta y el sistema comienza su movimiento.

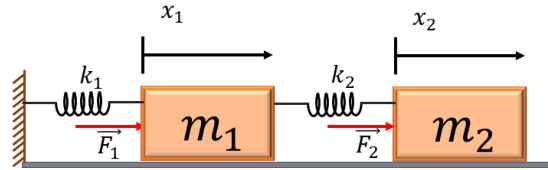


3.- Dado el sistema mecánico como se muestra en la figura, si las masas de los péndulos son m_1 y m_2 respectivamente y las longitudes de los péndulos son L_1 y L_2 respectivamente el sistema no se encuentra en un medio de amortiguamiento y el sistema comienza el movimiento cuando sobre la masa m_2 actúa una fuerza instantánea desviando al péndulo un ángulo θ_2 hacia la derecha y como consecuencia el péndulo superior es desviado un ángulo θ_1 hacia la derecha de la vertical. Determine las ecuaciones de movimiento del sistema considerando que ambos péndulos son péndulos simples.

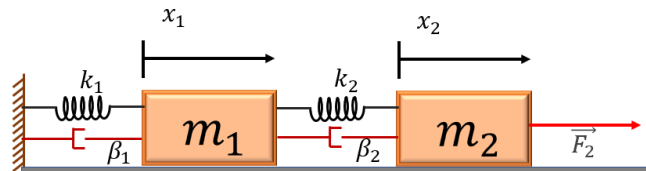


4.- Dado un sistema mecánico de dos grados de libertad como se muestra en la figura, el cual consta de dos masas $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 4 \text{ kg}$ conectados entre sí por tres resortes conectados en serie de constantes $k_1 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_2 = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, el sistema no interactúa con alguna fuerza externa y no se encuentra en un medio de amortiguamiento. Determine utilizando el

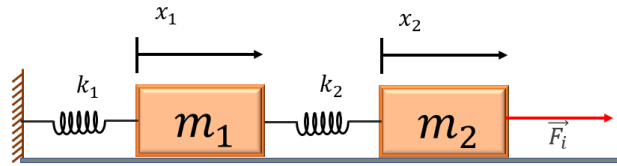
lagrangiano del sistema, las ecuaciones de movimiento y escríbalas en su forma matricial si para comenzar el movimiento sobre la masa m_2 actúa una fuerza externa $F_2(t) = 5 \sin 3t$ N y sobre la masa m_1 actúa una fuerza externa $F_1(t) = 3 \cos 5t$ N.



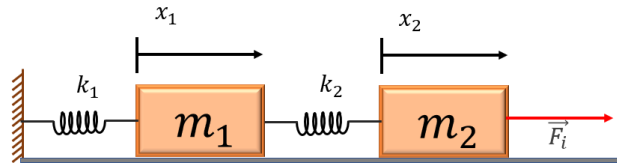
5.- Resuelve el problema anterior si ahora solo actúa la fuerza externa sobre la masa m_2 y el sistema es esta en un medio de amortiguamiento entre las masas de coeficientes de $\beta_1 = 10 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$ y $\beta_2 = 5 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$ como se muestra en la figura y escribe las ecuaciones en la forma matricial.



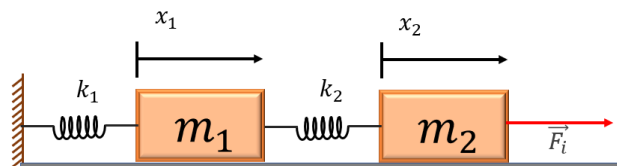
6. Dado un sistema mecánico de dos grados de libertad como se muestra en la figura, el cual consta de dos masas $m_1 = 1$ slugs y $m_2 = 3$ slugs conectados entre si por tres resortes conectados en serie de constantes $k_1 = 3 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$ y $k_2 = 1 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$, el sistema no interactúa con alguna fuerza externa y no se encuentra en un medio de amortiguamiento. Determine utilizando el lagrangiano del sistema las ecuaciones de movimiento y los desplazamientos de cada una de las masas si para comenzar el movimiento sobre la masa m_2 actúa una de fuerza instantánea, por el método de variables de estado.



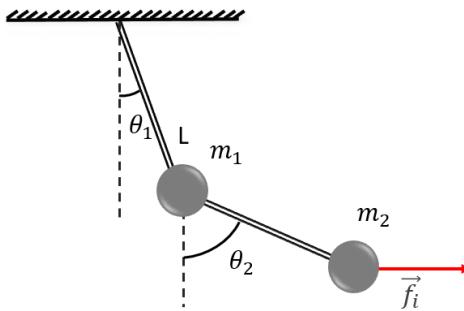
7.- Dado un sistema mecánico de dos grados de libertad como se muestra en la figura, el cual consta de dos masas $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 4 \text{ kg}$ conectados entre sí por dos resortes conectados en serie de constantes $k_1 = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_2 = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, el sistema no interactúa con alguna fuerza externa y no se encuentra en un medio de amortiguamiento. Determine las frecuencias naturales del sistema y los modos de vibración.



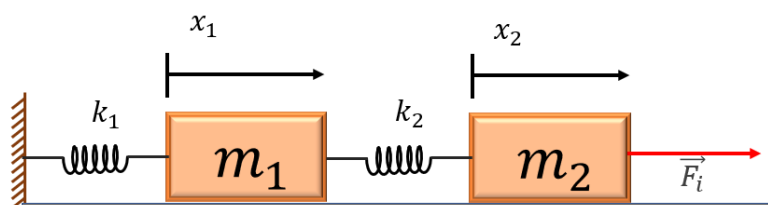
8.- Dado un sistema mecánico de dos grados de libertad como se muestra en la figura, el cual consta de dos masas $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 4 \text{ kg}$ conectados entre sí por tres resortes conectados en serie de constantes $k_1 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_2 = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, el sistema no interactúa con alguna fuerza externa y no se encuentra en un medio de amortiguamiento. Determine los modos de vibración del sistema.



9.- Dado el sistema mecánico como se muestra en la figura si las masas de los péndulos son $m_1 = 0.3 \text{ kg}$ y $m_2 = 0.5 \text{ kg}$ respectivamente y las longitudes de los péndulos son $L_1 = 50 \text{ cm}$ y $L_2 = 80 \text{ cm}$ respectivamente el sistema no se encuentra en un medio de amortiguamiento y el sistema comienza el movimiento cuando sobre la masa m_2 actúa una fuerza instantánea desviando al péndulo un ángulo θ_2 hacia la derecha y como consecuencia el péndulo superior es desviado un ángulo θ_1 hacia la derecha de la vertical. Determine las posiciones de los péndulos en función del tiempo por el utilizando los modos de vibración del sistema, considerando que ambos péndulos son péndulos simples y ambos péndulos parten del reposo cuando bajo la acción de la fuerza instantánea están en unas posiciones iniciales de $\theta_{1_0} = 0.1 \text{ rad}$ y $\theta_{2_0} = 0.17 \text{ rad}$.



10.- Dado un sistema mecánico de dos grados de libertad como se muestra en la figura, el cual consta de dos masas $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 4 \text{ kg}$ conectados entre si por tres resortes conectados en serie de constantes $k_1 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_2 = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, el sistema no interactúa con alguna fuerza externa y no se encuentra en un medio de amortiguamiento. Determine las posiciones de las masas en función del tiempo utilizando los modos de vibración del sistema, si cuando comienza el movimiento las masas parten del reposo y $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}$.



Capítulo VI. Análisis de Fourier

Objetivo del capítulo. Aplicar el análisis de Fourier para descomponer las señales de vibración mecánicas en componentes sinusoidales con la finalidad de identificar las frecuencias y amplitudes presentes en el sistema y comprender mejor su comportamiento dinámico.

Las series de Fourier son una herramienta matemática fundamental en el análisis de señales y sistemas. Desarrolladas por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier en el siglo XIX, estas series permiten descomponer funciones periódicas en una suma infinita de senos y cosenos, que son funciones trigonométricas básicas. Esta descomposición es esencial en muchos campos de la ciencia y la ingeniería, ya que proporciona un método para analizar y sintetizar señales complejas en términos de sus componentes armónicos simples.

Importancia de las series de Fourier

Análisis de señales: Las series de Fourier son esenciales para entender y analizar señales en el dominio del tiempo y la frecuencia. En telecomunicaciones, procesamiento de señales y acústica, permiten descomponer una señal compleja en sus frecuencias fundamentales, lo que facilita su estudio y manipulación.

Resolución de ecuaciones diferenciales: Muchas ecuaciones diferenciales parciales que aparecen en física y en ingeniería pueden resolverse usando series de Fourier. Esto es particularmente útil en problemas de calor, vibraciones y ondas.

Compresión de datos: Las series de Fourier también juegan un papel importante en la compresión de datos, como en el formato de compresión de audio MP3 o en la compresión de imágenes JPEG, donde la transformada de Fourier discreta (una extensión de las series de Fourier) se utiliza para reducir el tamaño de los datos sin perder mucha calidad.

Teoría de la señal: En la teoría de la señal, las series de Fourier ayudan a entender cómo las señales se comportan en distintos entornos y cómo se pueden optimizar para una mejor transmisión y recepción.

Transformadas de Fourier: Las series de Fourier son la base para la transformada de Fourier, que extiende el concepto a funciones no periódicas. Esta herramienta es ampliamente utilizada en análisis de frecuencias, tanto en la ingeniería eléctrica como en la física cuántica.

El estudio de las series de Fourier es crucial para cualquier disciplina que involucre el análisis y procesamiento de señales. Su capacidad para simplificar y analizar funciones complejas las convierte en una herramienta imprescindible en matemáticas aplicadas, física, ingeniería y ciencias de la computación.

6.1. Fundamentos del análisis de Fourier.

Matemáticamente, una serie de Fourier se define como la representación de una función periódica $f(t)$ mediante una suma infinita de funciones trigonométricas (senos y cosenos) o, en algunos casos, exponenciales complejas. Si $f(t)$ es una función periódica con periodo T , la serie de Fourier de $f(t)$ se expresa como:

Serie de Fourier en términos de senos y cosenos

La serie de Fourier de una función periódica $f(t)$ con periodo T se puede escribir como se muestra en la expresión 5.1:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots \quad (5.1)$$

La expresión 5.1 también se puede expresar de la forma 5.2.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \dots \dots \dots (5.2)$$

Donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia natural y a_0 , a_n y b_n son los coeficientes de Fourier.

Para obtener los coeficientes de Fourier se procede a la utilización de las expresiones 5.3, 5.4 y 5.5.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \dots \dots \dots (5.3)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, n = 0, 1, 2, \dots \dots \dots (5.4)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, n = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (5.5)$$

En general para la obtención de los coeficientes de Fourier, no es necesario que el intervalo de integración sea simétrico alrededor del origen. El único requisito es que la integral se calcule sobre un periodo (Hsu, 1987).

La interpretación de los términos de la serie de Fourier es la siguiente.

El término $\frac{a_0}{2}$ representa la componente constante (o promedio) de la función.

Los términos $a_n \cos(n\omega_0 t)$ y $b_n \sin(n\omega_0 t)$ representan las distintas frecuencias (o armónicos) que componen la función $f(t)$.

La serie converge a $f(t)$ en todos los puntos donde $f(t)$ es continua, y al valor promedio en los puntos de discontinuidad.

Las series de Fourier permiten así descomponer cualquier función periódica en sus componentes armónicas, lo cual es crucial en el análisis y la manipulación de señales periódicas en diversas aplicaciones científicas y de ingeniería.

Para aplicar la serie de Fourier a una función, hay ciertas condiciones y características que deben considerarse. Estas condiciones aseguran que la función se pueda representar adecuadamente mediante una serie de Fourier y que la serie converja correctamente.

1. Periodicidad

La función $f(t)$ debe ser periódica con un periodo T . Esto significa $f(t + T) = f(t)$ para todos los t . Las series de Fourier están diseñadas para descomponer funciones periódicas en sus componentes armónicas.

2. Condiciones de Dirichlet

Para que una función $f(t)$ se pueda representar mediante una serie de Fourier y para garantizar la convergencia de la serie, la función generalmente debe cumplir las Condiciones de Dirichlet:

Periodos finitos: La función debe ser periódica con un periodo T .

Número finito de discontinuidades: La función puede tener discontinuidades, pero debe tener un número finito de ellas en un intervalo de un periodo T .

Número finito de máximos y mínimos: La función debe tener un número finito de máximos y mínimos en un intervalo de un periodo T .

Integrabilidad en el sentido de Lebesgue: La función debe ser integrable sobre un periodo. Específicamente, $f(t)$ debe cumplir que:

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty$$

Estas condiciones garantizan que la serie de Fourier converge en los puntos donde la función es continua y converge al valor medio en los puntos de discontinuidad.

5. Funciones con discontinuidades

Las series de Fourier pueden manejar funciones con un número finito de discontinuidades. Sin embargo, en los puntos de discontinuidad, la serie de Fourier no converge al valor de la función en ese punto, sino al valor promedio de los límites laterales (este es el fenómeno de Gibbs).

6. Funciones impar o par

Las funciones pares (simétricas respecto al eje y) tienen solo términos de coseno en su serie de Fourier, mientras que las funciones impares (antisimétricas respecto al eje y) tienen solo términos de seno.

Ejemplo 1. Dada la función $f(t) = -2t + 4$ definida para $-3\pi \leq t \leq 3\pi$. Obtener la serie de Fourier y desarrollarla para $n=6$.

Solución.

$$T = 6\pi \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{3}$$

Calculamos el coeficiente a_0

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{3\pi} \int_{-3\pi}^{3\pi} (-2t + 4) dt$$

$$= \frac{1}{3\pi} (-t^2 + 4t) \Big|_{-3\pi}^{3\pi} = \frac{1}{3\pi} (-9\pi^2 + 12\pi + 9\pi^2 + 12\pi) = \frac{24\pi}{3\pi} = 8$$

$$(-9\pi^2 + 12\pi + 9\pi^2 + 12\pi) = \frac{24\pi}{3\pi} = 8$$

Calculamos el coeficiente b_n .

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{1}{3\pi} \int_{-3\pi}^{3\pi} (-2t + 4) \operatorname{sen}\left(\frac{n}{3}t\right) dt \\
 &= \frac{1}{3\pi} \left[\int_{-3\pi}^{3\pi} -2t \operatorname{sen}\left(\frac{n}{3}t\right) dt + 4 \int_{-3\pi}^{3\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{3}t\right) dt \right] \\
 &= \frac{12}{n} (-1)^n
 \end{aligned}$$

Realizando las integrales por separado.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3\pi} \int_{-3\pi}^{3\pi} -2t \operatorname{sen}\left(\frac{n}{3}t\right) dt &= \frac{1}{3\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} (-2) \left(\frac{3}{n}z\right) \operatorname{sen} z \left(\frac{3}{n}\right) dz \\
 &= \frac{-6}{n^2\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} z \operatorname{sen} z \, dz \\
 &= \frac{-6}{n^2\pi} \left[-z \cos z \Big|_{-n\pi}^{n\pi} + \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos z \, dz \right] \\
 &= \frac{-6}{n^2\pi} [- (n\pi) \cos(n\pi) + (-n\pi) \cos(-n\pi) + (\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen}(-n\pi))] \\
 &= \frac{-6}{n^2\pi} [-2n\pi \cos n\pi] = \frac{12}{n} (-1)^n
 \end{aligned}$$

$$z = \frac{n}{3}t, \quad t = \frac{3}{n}z, \quad \frac{3}{n} dz = dt$$

Por partes:

$$u = z$$

$$du = dz$$

$$dv = \operatorname{sen} z \, dz$$

$$v = \int \operatorname{sen} z \, dz = -\cos z$$

$$\frac{4}{3\pi} \int_{-3\pi}^{3\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{3}t\right) dt = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{3}{n}\right)^2 \int_{-n\pi}^{n\pi} \operatorname{sen} u \, du$$

$$= \frac{12}{\pi n} [\cos u]_{-n\pi}^{n\pi} = 0$$

$$bn = \frac{12}{\pi n} (-1)^n$$

Calculamos el coeficiente a_n .

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{n}{3}t\right) dt$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-3\pi}^{3\pi} (-2t + 4) \cos\left(\frac{n}{3}t\right) dt$$

$$= \frac{1}{3} \left[\int_{-3\pi}^{3\pi} -2t \cos\left(\frac{n}{3}t\right) dt + 4 \int_{-3\pi}^{3\pi} \cos\left(\frac{n}{3}t\right) dt \right] = 0$$

Realizando las integrales por separado

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3\pi} \int_{-3\pi}^{3\pi} t \cos\left(\frac{n}{3}t\right) dt &= \frac{-6}{\pi n^2} \int_{-n\pi}^{n\pi} z \cos z \, dz \\
&= \frac{-6}{\pi n^2} \left[z \sin z \Big|_{-n\pi}^{n\pi} - \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin z \, dz \right] \\
&= \frac{-6}{\pi n^2} [(n\pi) \sin n\pi - (-n\pi) \sin(-n\pi)] - [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto la serie de Fourier para la función $f(t) = -2t + 4$ en $-3\pi \leq t \leq 3\pi$, esta dada por la expresión.

$$f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \sin\left(\frac{n}{3}t\right)$$

Desarrollando para $n=6$.

$$f(t) = 4 - 12 \sin\left(\frac{t}{3}\right) + 6 \sin\left(\frac{2}{3}t\right) - 4 \sin t + 3 \sin\left(\frac{4}{3}t\right) - \frac{12}{5} \sin\left(\frac{5}{3}t\right) + 2 \sin 2t$$

6.2 Transformada de Fourier y espectro de frecuencias

La **Transformada de Fourier** es una herramienta matemática fundamental en el análisis de señales y sistemas. Su importancia radica en su capacidad para descomponer señales complejas en una suma de senoidales, permitiendo así estudiar sus componentes de frecuencia.

Matemáticamente se define como esta expresada en la ecuación 5.6.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots (5.6)$$

Donde:

$F(\omega)$ es la transformada de Fourier.

$f(t)$ es la función original en el dominio del tiempo.

ω es la frecuencia angular en radianes por segundo.

i es la unidad imaginaria $i^2 = -1$

La ecuación 5.6 en notación compacta, definiendo el operador $\mathcal{F}$ que al aplicarlo a la función $f(t)$ resulta en la transformada de Fourier de $f(t)$, se expresa como la ecuación 5.7.

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \dots \dots (5.7)$$

La transformada de Fourier convierte una función o señal en el dominio del tiempo en una representación en el dominio de la frecuencia.

Uno de los resultados más elementales (requeridos para encontrar transformadas de Fourier de funciones más complejas) es la transformada de la función delta de Dirac $\delta(t)$.

Ejemplo 1. Calcule la transformada de Fourier de la función $A\delta(t)$.

Solución.

Aplicando la definición 5.6 se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[A\delta(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= Ae^{-i\omega t} \Big|_{t=0} \\ &= A \end{aligned}$$

El resultado de la integral se sigue de las propiedades de la delta de Dirac. Por tanto, se tiene:

$$\mathcal{F}[A\delta(t)] = A$$

Antes de presentar algunos ejemplos, enunciamos una de las propiedades más importantes y fundamentales de la transformada de Fourier, que se conoce como la propiedad de dualidad o propiedad de simetría y se enuncia como:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) \leftrightarrow \mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi \cdot f(-\omega)$$

La demostración de dicha propiedad se puede encontrar en (Papoulis, 1962). Con esta propiedad se pueden encontrar fácilmente la transformada de Fourier de algunas funciones, como lo ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2. Calcula la transformada de Fourier de la constante A .

Solución. De la transformada de Fourier del impulso unitario se tiene de la forma $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = A$, con $f(t) = A\delta(t)$, de donde $F(\omega) = A$. Intercambiando ω por t en $F(\omega)$ resulta trivialmente $F(t) = A$.

De la propiedad de dualidad se tiene

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) \leftrightarrow \mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi \cdot f(-\omega)$$

Sustituyendo $F(t) = A$ y $f(-\omega) = A\delta(-\omega)$ se obtiene $\mathcal{F}\{A\} = 2\pi \cdot A\delta(-\omega)$ y de la simetría de la delta de Dirac $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$ se tiene

$$\mathcal{F}\{A\} = A2\pi \cdot \delta(\omega).$$

En términos simples, si tienes una señal en el tiempo, la transformada de Fourier te dice qué frecuencias están presentes en esa señal y en qué magnitudes. Esta capacidad de pasar del dominio del tiempo al de la frecuencia es invaluable para el análisis de señales, procesamiento de imágenes, telecomunicaciones, y muchas otras aplicaciones.

Para el resultado $\mathcal{F}\{A\} = A2\pi \cdot \delta(\omega)$ el término $\delta(\omega)$ que únicamente tiene un valor distinto de cero para $\omega = 0$ y para $\omega \neq 0$ $\mathcal{F}\{A\} = 0$, esto nos indica que una señal constante de amplitud A **no tiene armónicos cuyas frecuencias ω sean diferentes de cero.**

Ejemplo 3. Calcula transformada de Fourier para el pulso

$$f(t) = \begin{cases} A, & \text{si } |t| < T/2 \\ 0, & \text{si } |t| > T/2 \end{cases}$$

Solución. Aplicamos la definición y se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt &= \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-i\omega t} dt \\ &= A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= A \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{-i\omega} \left(e^{-\frac{i\omega T}{2}} - e^{+\frac{i\omega T}{2}} \right) \\ &= \frac{A}{-i\omega} \left(-2i \operatorname{sen} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Es decir

$$F(\omega) = \frac{2A}{\omega} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega T}{2} \right).$$

Como caso particular considere $T = 3$ s y $A = 5$ m

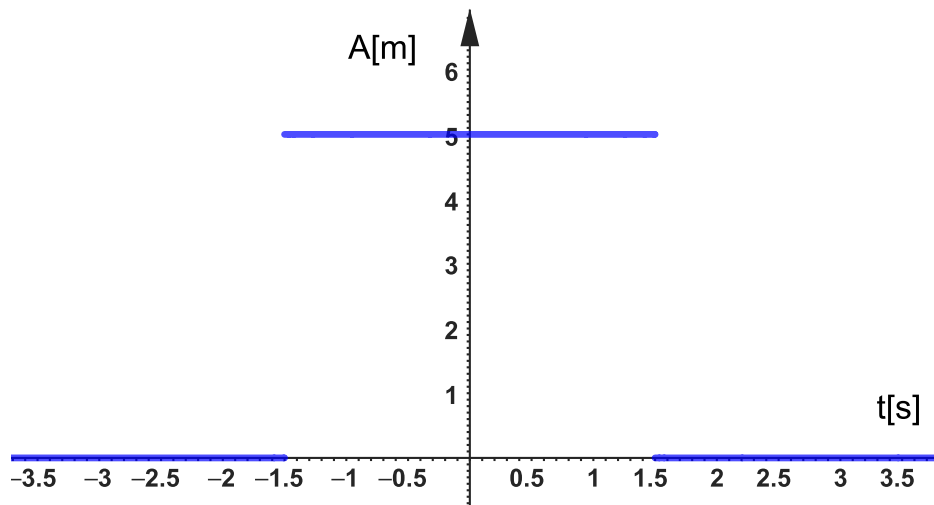


Figura 5.1 Gráfica pulso no periódico Amplitud vs tiempo

Cuya transformada de Fourier resulta

$$F(\omega) = \frac{10}{\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{3\omega}{2}\right) \text{ m} \cdot \text{s},$$

Cuya gráfica del espectro de frecuencias que componen a la señal $f(t)$ se muestra a continuación

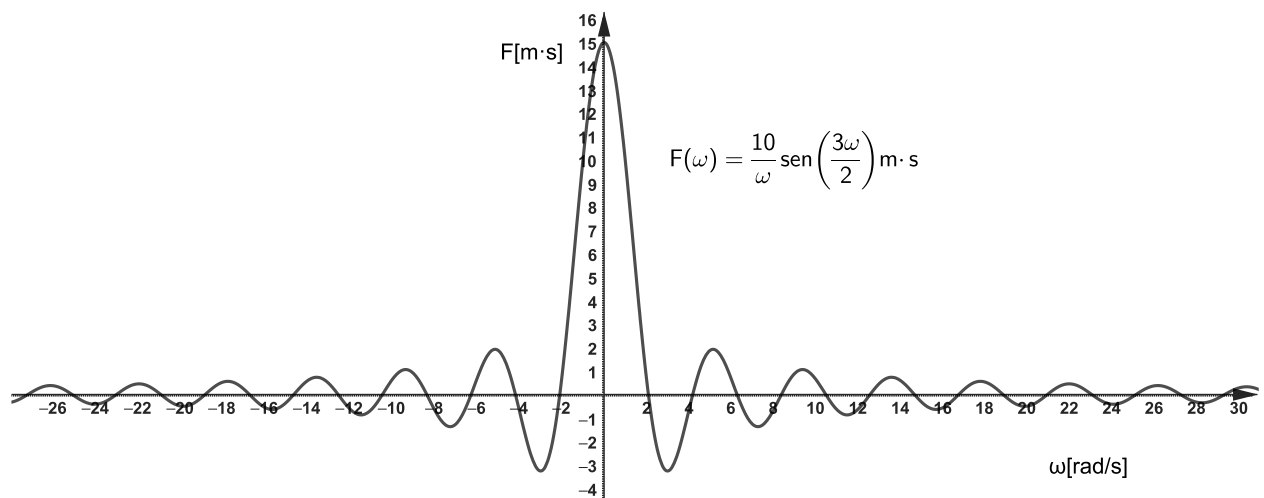


Figura 5.2 Gráfica transformada de Fourier de pulso no periódico: espectro de frecuencias continuo.

Ejemplo 3. Consideremos un sistema vibratorio simple compuesto por una masa m conectada a un resorte con constante elástica k y un amortiguador con coeficiente de amortiguamiento β . La masa es sometida a una fuerza externa $f(t)$ que varía con el tiempo. Determine la posición en función de la frecuencia ω .

Solución.

La ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema es:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \beta \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

donde:

$x(t)$ – es el desplazamiento de la masa en función del tiempo.

m – es la masa.

β – es el coeficiente de amortiguamiento.

k – es la constante del resorte.

$f(t)$ – es la fuerza externa aplicada.

Se aplica la transformada de Fourier a la ecuación diferencial:

Se toma la Transformada de Fourier de la ecuación del movimiento para convertirla del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

La Transformada de Fourier de $x(t)$ denotada como $X(\omega)$, representa la amplitud y fase de la respuesta del sistema a diferentes frecuencias ω .

Ecuación en el dominio de la frecuencia:

Al aplicar la Transformada de Fourier a cada término, la ecuación de movimiento se convierte en una ecuación algebraica en términos de ω de la siguiente forma:

$$-m\omega^2 X(\omega) + i\omega\beta X(\omega) + kX(\omega) = F(\omega)$$

Aquí, $F(\omega)$ es la Transformada de Fourier de la fuerza externa $f(t)$.

La solución para $X(\omega)$ es:

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{-m\omega^2 + i\omega\beta + k}$$

La expresión anterior nos da la respuesta del sistema para cualquier frecuencia ω .

Análisis de frecuencias:

La función $X(\omega)$ revela cómo responde el sistema a diferentes componentes de frecuencia de la fuerza externa.

Podemos determinar la frecuencia natural del sistema (donde la amplitud de $X(\omega)$ es máxima), así como entender cómo el amortiguamiento β afecta la respuesta en distintas frecuencias.

Finalmente, se puede aplicar la Transformada Inversa de Fourier para volver al dominio del tiempo y obtener el comportamiento temporal $x(t)$ del sistema.

6.3 Análisis de vibraciones mecánicas mediante Fourier

En los capítulos terceros cuarto y quinto encontró que los sistemas estudiados son lineales e invariantes en el tiempo y en general la ecuación de movimiento tienen la forma de la ecuación 5.8.

$$c_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + c_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_0 x(t) = F(t) \dots \dots \dots (5.8)$$

Si se denota $\frac{d}{dt}$ por el operador p , tal que $px(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, entonces $p^n x(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$

Entonces, la ecuación 5.8 se puede expresar como la ecuación 5.9:

$$\sum_{i=0}^n c_i p^i x(t) = F(t) \dots (5.9)$$

La ecuación 5.9 en forma reducida queda de la forma de la ecuación 5.10.

$$C(p)x(t) = F(t) \dots \dots (5.10)$$

Donde $C(p)$ es de la forma de la ecuación 5.11.

$$C(p) = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + a_0 \dots \dots (5.11)$$

La ecuación 5.10 despejando $x(t)$ que da la forma de la ecuación 5.12.

$$x(t) = \frac{1}{C(p)} F(t) = H(p) F(t) \dots \dots (5.12)$$

Donde $H(p) = \frac{1}{C(p)}$. Se entiende que la ecuación 5.12 es una expresión operacional de la ecuación diferencial 5.8. El operador $H(p)$ que opera sobre la función de entrada para producir la función de salida se denomina función operacional del sistema. Utilizando el símbolo L para $H(p)$, la ecuación 5.12 se puede expresar como la ecuación 5.13:

$$LF(t) = x(t) \dots \dots (5.13)$$

El símbolo u operador lineal L en la ecuación 5.13 indica la ley que determina la función de salida, $x(t)$, dada la función de entrada, $F(t)$.

La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a una función excitadora de la forma $F = F_0 e^{i\omega t}$ es también una función exponencial y proporcional a la entrada (HWEI P. HSU pag 123), esto es de la forma de la ecuación 5.14.

$$L(e^{i\omega t}) = ke^{i\omega t} \dots \dots (5.14)$$

Además, según la teoría de las ecuaciones diferenciales la respuesta $x(t)$ tendrá la forma exponencial, es decir si $x(t) = Ae^{i\omega t}$ entonces y del hecho de que $C(p)e^{i\omega t} = C(i\omega)e^{i\omega t}$

$$\text{Y } H(p)e^{i\omega t} = H(i\omega)e^{i\omega t}.$$

Entonces se tiene finalmente la ecuación 5.15.

$$C(p)x(t) = F_0e^{i\omega t}$$

$$C(p)Ae^{i\omega t} = F_0e^{i\omega t}$$

$$A \cdot C(p)e^{i\omega t} = F_0e^{i\omega t}$$

$$A \cdot C(i\omega)e^{i\omega t} = F_0e^{i\omega t}$$

$$C(i\omega)Ae^{i\omega t} = F_0e^{i\omega t}$$

$$C(i\omega)x(t) = F_0e^{i\omega t}$$

$$x(t) = \frac{1}{C(i\omega)}F_0e^{i\omega t} \dots \dots (5.15)$$

Entonces se tiene que la respuesta del sistema a la fuerza excitadora es de la forma de la ecuación 5.16.

$$x(t) = H(i\omega)F_0e^{i\omega t} \dots (5.16)$$

Donde $H(i\omega) = \frac{1}{C(i\omega)}$

Otros teoremas requeridos (HWEI P. HSU pag 125) son $H(i\omega) \cos \omega t = \text{Re}[H(i\omega)e^{i\omega t}]$ y

$H(i\omega) \sin \omega t = \text{Im}[H(i\omega)e^{i\omega t}]$. En el caso de que $H(i\omega)$ resulte en un número real entonces

$H(i\omega) \cos \omega t \equiv H(i\omega)\text{Re}[e^{i\omega t}] \equiv H(i\omega) \cos \omega t$ y $H(i\omega) \sin \omega t \equiv H(i\omega)\text{Im}[e^{i\omega t}] \equiv H(i\omega) \sin \omega t$

Donde Re significa la parte real y Im la parte imaginaria. Finalmente, otro resultado que se requiere es el siguiente de la ecuación:

$$H(i\omega)K = KH(0) \dots (5.17)$$

En el capítulo cuatro se estudiaron los sistemas mecánicos con fuerza externa entre ellos el de un sistema masa resorte sin amortiguamiento expuesto a una fuerza de excitación externa periódica cuya ecuación de movimiento está dada por la ecuación de movimiento 5.18.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \sin(\omega t) \dots (5.18)$$

Para el caso particular se consideró el siguiente sistema.

Ejemplo 1. Una masa de 1 kg se cuelga de un resorte cuya constante de elasticidad es de $4 \frac{N}{m}$. Sobre el sistema ante una fuerza externa $f(t) = 2 \sin \frac{3}{2} t \text{ N}$. El movimiento del sistema comienza cuando la masa se encuentra a $1m$ por debajo de la posición de equilibrio y lleva una velocidad de $1 \frac{m}{s}$ hacia arriba puesto seguido. Determine la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ de la masa y trace la gráfica de la posición $x(t)$ en cualquier instante de tiempo.

Datos.

$$m = 1 \text{ kg}, \quad K = 4 \frac{N}{m}, \quad f(t) = 2 \sin \frac{3}{2} t \text{ N}, \quad g = 10 \frac{m}{s^2},$$

$$x_0 = 1 \text{ m} \text{ y } v_0 = -1 \frac{m}{s}$$

Para nuestro caso particular es de la forma.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)$$

aplicando la teoría de operadores transformamos, la solución ecuación anterior en términos del operador p y nos queda de la forma siguiente:

$$(p^2 + 4)x(t) = 2\text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)$$

$$x_p(t) = \frac{1}{p^2+4} 2\text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right),$$

Dado que $H(p) = \frac{1}{p^2+4}$ es un operador lineal lo anterior se puede expresar como

$$x_p(t) = 2H(i\omega)\text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)$$

$$\text{con } \omega = \frac{3}{2} \text{ y}$$

$$H\left(i\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{-9/4+4} = \frac{4}{7}$$

Por tanto, la solución en estado estacionario es de la forma

$$x_p(t) = \frac{8}{7}\text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)$$

Realizando el análisis para la solución de la ecuación homogénea como se vio en el capítulo 4 sección 4.1 del ejemplo 1, se tiene que la solución general o la salida del sistema está formada por la solución del estado transitorio $x_c(t)$ y la solución del estado estacionario $x_p(t)$ lo que resulta en:

$$x(t) = \cos 2t - \frac{19}{14} \text{sen } 2t + \frac{8}{7} \text{sen } \frac{3}{2}t \text{ m}$$

Ejemplo 2. Un bloque de peso de 10 N cuelga de un resorte cuya constante es de $4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, el sistema se encuentra en un medio sin amortiguamiento. El movimiento comienza cuando el bloque se encuentra en una posición de un metro por arriba de la posición de equilibrio y llevaba una velocidad de $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hacia abajo y sobre el sistema actúa una fuerza externa dada por $f(t) = 3 \cos(3t) - 5 \text{sen}(3t)$ N. Determine la posición en cualquier instante de tiempo y e indique si el sistema entro en resonancia.

Solución.

Datos:

$$W = 10 \text{ N} , \quad k = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}} , \quad f(t) = (3 \cos 3t - 5 \sin 3t) \text{ N} , \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x_0 = -1 \text{ m y } v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Calculamos la masa del bloque.

$$m = \frac{W}{g} = \frac{10 \text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1 \text{ kg}$$

La ecuación de movimiento es de la forma.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Para nuestro caso particular es de la forma.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 3 \cos 3t - 5 \sin 3t$$

Expresando en términos de operador p se tiene

$$(p^2 + 4)x(t) = 3 \cos 3t - 5 \sin 3t$$

$$x(t) = \frac{1}{p^2 + 4} 3 \cos 3t - \frac{1}{p^2 + 4} 5 \sin 3t$$

Utilizando operadores queda de la forma.

$$x(t) = H(p)3 \cos 3t - H(p)5 \sin 3t$$

Con $H(p) = \frac{1}{p^2 + 4}$, se propone las soluciones

$$x_1(t) = H(i3)3e^{i3t} \text{ y } x_2(t) = H(i3)5e^{i3t}$$

Evalutando $H(i3) = \frac{1}{-9+4} = \frac{1}{-5}$, substituyendo se tiene la salida en estado estacionario

$$x(t) = -\frac{3}{5} \cos 3t + \sin 3t.$$

Para el caso en que la fuerza excitadora es periódica con periodo T y satisface las condiciones de Dirichlet como se vio en la sección 6.1 entonces esta función se puede representar mediante series de Fourier, esto es

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_F t + b_n \sin n\omega_F t), \omega_F = \frac{2\pi}{T}$$

Y dado que el sistema es lineal entonces se tiene de la ecuación de movimiento, que la solución en estado estacionario es.

$$x_p(t) = H(p) \left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_F t + b_n \sin n\omega_F t) \right)$$

y de las propiedades de $H(p)$ se tiene

$$x_p(t) = H(p) \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n H(p) \cos n\omega_F t + b_n H(p) \sin n\omega_F t)$$

$$x_p(t) = H(0) \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Re}[H(in\omega_F)e^{in\omega_F t}] + b_n \operatorname{Im}[H(in\omega_F)e^{in\omega_F t}])$$

Ejemplo 3. Hallar la respuesta en estado estacionario de un sistema masa resorte con $m = 1 \text{ kg}$ y $k = 4 \frac{N}{m}$ que es excitado por una fuerza externa que tiene la forma

$$f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \sin \left(\frac{n}{3} t \right)$$

Con $T = 6\pi$ y $\omega_F = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{3}$

Solución. La ecuación de movimiento del sistema es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \operatorname{sen} \left(\frac{n}{3} t \right)$$

$$(p^2 + 4)x(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \operatorname{sen} \left(\frac{n}{3} t \right)$$

$$x_p(t) = \frac{1}{(p^2 + 4)} \left(4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \operatorname{sen} \left(\frac{n}{3} t \right) \right)$$

Utilizando operadores que de la forma siguiente.

$$x_p(t) = H(p) \left(4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \operatorname{sen} \left(\frac{n}{3} t \right) \right)$$

Con $H(p) = \frac{1}{p^2+4}$, $H(0) = \frac{1}{4}$, $H\left(\frac{in}{3}\right) = \frac{1}{-\frac{n^2}{9}+4}$ aplicando el operador resulta

$$x_p(t) = H(p)4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n H(p) \operatorname{sen} \left(\frac{n}{3} t \right)$$

$$x_p(t) = 4H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \operatorname{Im} \left[H\left(\frac{in}{3}\right) e^{i\frac{nt}{3}} \right]$$

$$x_p(t) = 4H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \operatorname{Im} \left[\frac{1}{-\frac{n^2}{9} + 4} e^{i\frac{nt}{3}} \right]$$

$$x_p(t) = 4H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \frac{1}{-\frac{n^2}{9} + 4} \operatorname{Im} \left[e^{i\frac{nt}{3}} \right]$$

$$x_p(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \frac{1}{-\frac{n^2}{9} + 4} \operatorname{sen} \left(\frac{n}{3} t \right)$$

$$x_p(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \frac{9}{36 - n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n}{3} t \right)$$

Por tanto, la respuesta en estado estacionario queda de la forma anterior.

6.4 Análisis de armónicos y resonancias

En general el operador $H(p)$ para un sistema mecánico masa resorte se encontró que tiene la forma $H(p) = \frac{1}{p^2 + \omega_0^2}$ y cuando actúa sobre un armónico ésta dado por la ecuación 5.19.

$$H(p)e^{i\omega t} = H(i\omega)e^{i\omega t} \dots (5.19)$$

Es decir, este operador al aplicarse a un armónico es igual a evaluar dicho operador en $i\omega$, de lo que resulta $H(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2 + \omega_0^2}$, es decir $H(i\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2}$.

Lo anterior nos muestra que cuando la frecuencia natural coincide con la frecuencia del armónico $H(i\omega)$ queda indefinido o tiende a infinito y así se puede identificar la condición de resonancia. Este análisis se puede extender para el caso en que la función excitadora sea una suma de armónicos de la forma de la ecuación (5.20).

$$F(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_F t + b_n \operatorname{sen} n\omega_F t), \quad \omega_F = \frac{2\pi}{T} \dots \dots (5.20)$$

Se encontró que la solución en estado estacionario o del sistema está dada por la ecuación 5.21.

$$x_p(t) = H(0) \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Re}[H(in\omega_F)e^{in\omega_F t}] + b_n \operatorname{Im}[H(in\omega_F)e^{in\omega_F t}]) \dots \dots (5.21)$$

Por lo tanto, en este caso el operador aplicado a cada término de la serie resulta en las formas de las ecuaciones 5.21 y 5.22.

$$H(p) \cos n\omega_F t = H(in\omega_F) \cos n\omega_F t \dots \dots (5.21)$$

$$H(p) \sin n\omega_F t = H(in\omega_F) \sin n\omega_F t \dots \dots (5.22)$$

Y en el caso de un sistema masa resorte lo anterior resulta en la forma de la ecuación 5.23.

$$H(in\omega_F) = \frac{1}{\omega_0^2 - (n\omega_F)^2} \dots \dots (5.23)$$

Se concluye que el sistema entrará en resonancia cuando $\omega_0 = n\omega_F$, es cuando algún múltiplo de la frecuencia fundamental de la fuerza excitadora es igual a la frecuencia natural del sistema.

Ejemplo 4. ¿En qué condiciones el sistema masa resorte con $m = 1$ kg y $k = 4 \frac{N}{m}$ entra en resonancia si se le aplica una fuerza externa dada por $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n} (-1)^n \sin\left(\frac{n}{3}t\right)$?

Solución.

La frecuencia natural del sistema es $\omega_0 = 2 \frac{\text{rad}}{s}$ por tanto se tiene que la condición de resonancia es $2 = n\omega_F$ con $\omega_F = \frac{1}{3} \frac{\text{rad}}{s}$, de donde se concluye que para $n = 6$. Es decir, la componente de la fuerza excitadora $\sin\left(\frac{6}{3}t\right)$ produce resonancia en el sistema.

6.5 Aplicaciones y práctica del análisis de Fourier en vibraciones mecánicas

Este tema se centra en aplicaciones prácticas del análisis de Fourier en el campo de las vibraciones mecánicas. Se presentan ejemplos de cómo se puede utilizar para diagnosticar problemas en máquinas, evaluar el rendimiento de sistemas y analizar la respuesta vibratoria de estructuras.

Ejemplo 5: Sistema de Suspensión de un Vehículo

Descripción del Sistema:

Un vehículo puede ser modelado como un sistema masa-resorte para analizar las vibraciones inducidas por las irregularidades del camino. Supongamos un sistema masa-resorte simple sin amortiguamiento, donde:

- La masa del vehículo m es de 1000 kg.

La constante del resorte k es de $20000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Frecuencia Natural:

La frecuencia natural del sistema es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20000}{1000}} = \sqrt{20} \approx 4.47 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Fuerza de Excitación:

Supongamos que la fuerza de excitación externa $F(t)$ es una combinación de armónicos debida a las irregularidades del camino:

$$F(t) = 500 \sin(4t) + 200 \cos(8t)$$

Análisis de Fourier:

La fuerza de excitación se descompone en sus componentes armónicas:

$$500 \sin(4t), \text{ con } \omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$200 \cos(8t), \text{ con } \omega = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Función de Transferencia:

La función de transferencia del sistema es:

$$H(i\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 4.47^2}$$

Evaluamos $H(i\omega)$ en las frecuencias de la fuerza de excitación:

$$\text{Para } \omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$H(i4) = \frac{1}{-4^2 + 4.47^2} = \frac{1}{-16 + 20} = 0.25$$

La respuesta a este componente es:

$$x_1(t) = (500)(0.25) \sin(4t) = 125 \sin(4t)$$

$$\text{Para } \omega = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$H(i8) = \frac{1}{-8^2 + 4.47^2} = \frac{1}{-64 + 20} \approx -0.0227$$

La respuesta a este componente es:

$$x_2(t) = (200)(-0.0227) \cos(8t) \approx -4.54 \cos(8t)$$

La respuesta total del sistema es la suma de las respuestas a cada componente:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 125 \sin(4t) - 4.54 \cos(8t) \text{ m}$$

Ejemplo 6: Vibraciones en un Edificio

Descripción del Sistema:

Consideremos un piso de un edificio modelado como un sistema masa-resorte sin amortiguamiento para analizar las vibraciones inducidas por un equipo mecánico que genera fuerzas periódicas. Supongamos:

La masa efectiva m del piso es de 5000 kg.

- La constante del resorte k es de $100000 \frac{N}{m}$.

Frecuencia Natural:

La frecuencia natural del sistema es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100000}{5000}} = 4.47 \frac{rad}{s}$$

Fuerza de Excitación:

Supongamos que el equipo mecánico genera una fuerza:

$$F(t) = 1000 \sin(4.5t) \text{ N}$$

Análisis de Fourier:

La fuerza de excitación se descompone en sus componentes de Fourier:

- $1000 \sin(4.5t)$ con $\omega = 4.5 \frac{rad}{s}$.

Función de Transferencia:

La función de transferencia del sistema es:

$$H(i\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 4.47^2}$$

Evaluamos $H(i\omega)$ en la frecuencia de la fuerza de excitación:

Para $\omega = 4.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$H(i4.5) = \frac{1}{-4.5^2 + 4.47^2} = \frac{1}{-20.25 + 20} = \frac{1}{-0.25} = -4$$

La respuesta a este componente es:

$$x(t) = (1000)(-4)\text{sen}(4.5t) = -4000 \text{ sen}(4.5t)\text{m}$$

6.6 Ejercicios

1.- Dada la función $f(t) = 3t - 4$ definida en $-\pi \leq t \leq \pi$. Encuentre la serie de Fourier y desarróllela para $n = 8$.

2.- Dada la función $f(t) = 5t$ definida en $-3\pi \leq t \leq 3\pi$. Encuentre la serie de Fourier y desarróllela para $n = 10$.

3.- Dada la función $f(t) = t^2 + 2$ definida en $-\pi \leq t \leq \pi$. Encuentre la serie de Fourier y desarróllela para $n = 10$.

4.- Dada la función $f(t) = e^t$ definida en $-1 \leq t \leq 1$. Encuentre la serie de Fourier y desarróllela para $n = 6$.

5.- Una masa de 2 kg se cuelga de un resorte cuya constante de elasticidad es de $10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Sobre el sistema ante una fuerza externa $f(t) = 3 \text{ Sen } t \text{ N}$. El movimiento del sistema comienza cuando la masa se encuentra a 1m por debajo de la posición de equilibrio y lleva una velocidad de $-1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hacia arriba puente seguido. Determine

a) La posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ de la masa y trace la gráfica de la posición $x(t)$ en cualquier instante de tiempo.

b) utilizando el análisis de Fourier determine la solución particular del estado estable del sistema.

6.- Una masa de 20 N se cuelga de un resorte cuya constante de elasticidad es de $4 \frac{N}{m}$. Sobre el sistema ante una fuerza externa $f(t) = 3 \cos 2t$ N. El movimiento del sistema comienza cuando la masa se encuentra a $1m$ por arriba de la posición de equilibrio y lleva una velocidad de $2 \frac{m}{s}$ hacia arriba puesto seguido. Determine mediante el análisis de Fourier la respuesta particular del estado estable del sistema.

7.- Hallar la respuesta en estado estacionario de un sistema masa resorte con $m = 2$ kg y $k = 6 \frac{N}{m}$ que es excitado por una fuerza externa que tiene la forma

$$f(t) = 6 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{12}{n} (-1)^n \sin(nt)$$

8.- Hallar la respuesta en estado estacionario de un sistema masa resorte con $m = 3$ kg y $k = 10 \frac{N}{m}$ que es excitado por una fuerza externa que tiene la forma

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n} \sin\left(\frac{n}{2}t\right)$$

9.- Un péndulo simple consiste en una masa m suspendida de una cuerda inextensible de longitud L . La masa oscila bajo la influencia de la gravedad g . Si las oscilaciones son pequeñas, el ángulo $\theta(t)$ que forma la cuerda con la vertical puede describirse por la siguiente ecuación diferencial lineal:

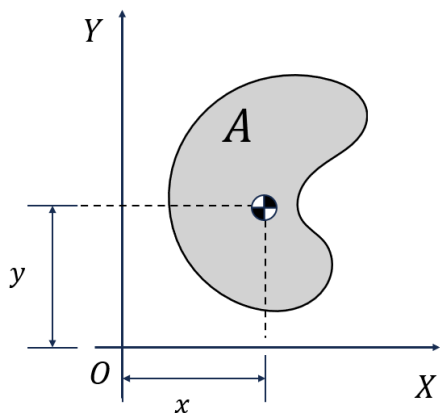
$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = \frac{1}{mL^2}F(t)$$

Determine $\theta(\omega)$.

10.- Un bloque de peso de 100 N cuelga de un resorte cuya constante es de $16 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, el sistema se encuentra en un medio sin amortiguamiento. El movimiento comienza cuando el bloque se encuentra en una posición de un metro por arriba de la posición de equilibrio y llevaba una velocidad de $-2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hacia abajo y sobre el sistema actúa una fuerza externa dada por $f(t) = 4 \cos(3t) - 3 \sin(3t)$ N. Determine la posición en cualquier instante de tiempo y e indique si el sistema entro en resonancia.

Apéndice A. Propiedades de las Áreas y líneas

A.1 Áreas



Las coordenadas del centroide del área A son:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

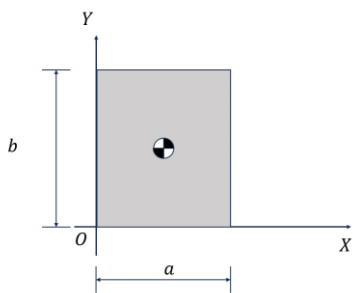
El momento de inercia de área con respecto al eje X, I_x , y el momento de inercia de área con respecto al eje Y, I_y ; y el momento de inercia I_{xy} son:

$$I_x = \int y^2 dA, I_y = \int x^2 dA, I_{xy} = \int xy dA$$

El momento polar de inercia respecto a O es:

$$I_O = \int r^2 dA = \iint (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

Placa polar



Coordenadas del centroide

$$C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

Área $A = a \cdot b$

Momentos de inercia

$$I_x = \frac{1}{3}ab^3, I_y = \frac{1}{3}a^3b, I_{xy} = \frac{1}{4}a^2b^2.$$

Para placa cuadrangular

$$a = b$$

Área: $A = a^2$

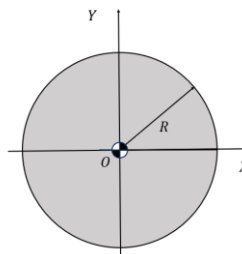
Coordenadas del centroide

$$C = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

Momentos de inercia

$$I_x = \frac{1}{3}a^4, I_y = \frac{1}{3}a^4, I_{xy} = \frac{1}{4}a^4.$$

Placa circular



Área:

$$A = \pi R^2$$

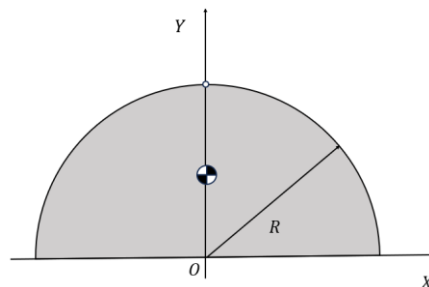
Coordenadas del centroide

$$C = (0,0)$$

Momentos de inercia

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi R^4, I_{xy} = 0.$$

Placa semicircular



Área:

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

Coordenadas del centroide

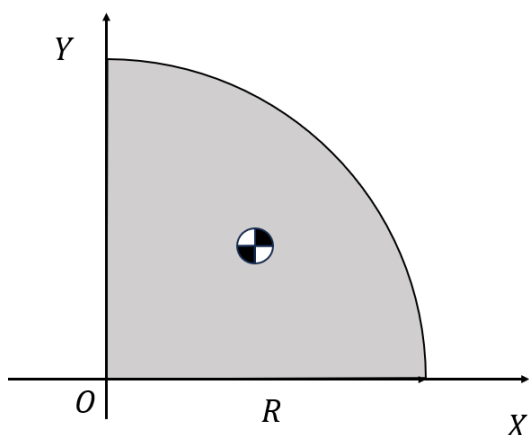
$$C = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$$

Momentos de inercia

$$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi R^4, I_{xy} = 0.$$

Placa semicircular

Placa de un cuarto de círculo



Coordenadas del centroide

$$C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

Área

$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

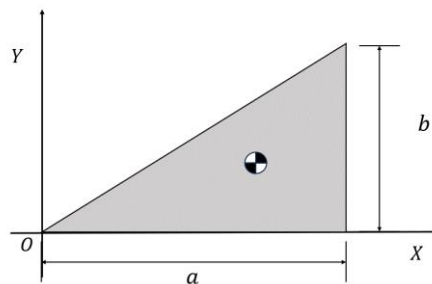
Coordenadas del centroide

$$C = \left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi} \right)$$

Momentos de inercia

$$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi R^4, I_{xy} = \frac{1}{8} R^4.$$

Placa triangular



Área:

$$A = \frac{ab}{2}$$

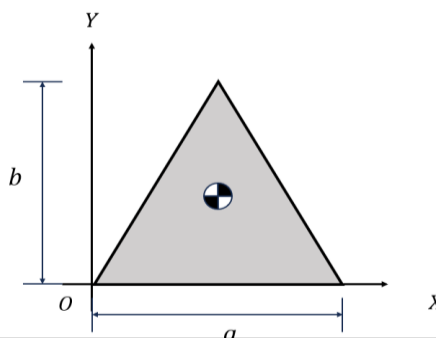
Coordenadas del centroide

$$C = \left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}b \right)$$

Momentos de inercia

$$I_x = \frac{1}{12} ab^3, I_y = \frac{1}{4} a^3 b, I_{xy} = \frac{1}{8} a^2 b^2.$$

Placa triangular



Área:

$$A = \frac{1}{2} ab$$

Coordenadas del centroide

$$C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{3} \right)$$

Momentos de inercia

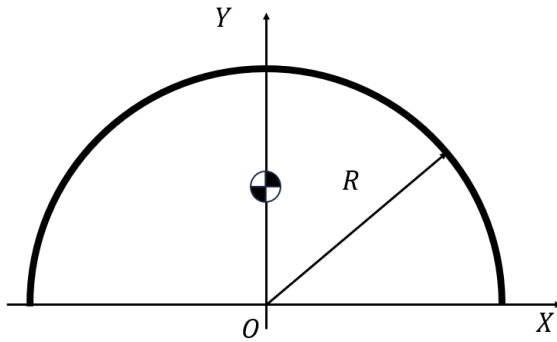
$$I_x = \frac{1}{12} ab^3$$

A.2 Líneas.

Las coordenadas del centroide de la línea L son:

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{\int dL}; \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{\int dL}; \quad \bar{z} = \frac{\int z dL}{\int dL}.$$

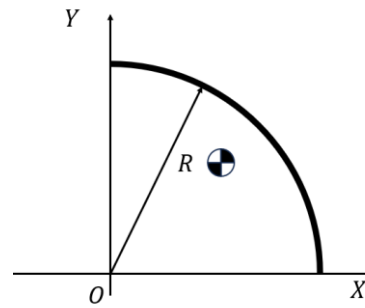
Arco semicircular



Coordenadas del centroide

$$C = \left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$$

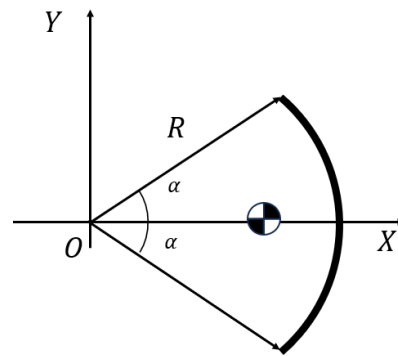
Arco de un cuarto de circunferencia



Coordenadas del centroide

$$C = \left(\frac{2R}{\pi}, \frac{2R}{\pi}\right)$$

Arco circular



Coordenadas del centroide

$$C = \left(\frac{R \sin \alpha}{\alpha}, 0\right)$$

Apéndice B. Identidades trigonométricas

Básicas	Ángulo	Suma-producto
$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\csc \theta}$ $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$ $\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$ $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$	$\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$ $\cos(2\theta) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta$ $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$ $\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$ $\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ $\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$ $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$	$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ $\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$ $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha$ $\operatorname{sen}(\pi \pm \alpha) = \mp \operatorname{sen} \alpha$ $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$ $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{sen} \alpha$

Apéndice C. Transformadas de Fourier

$f(t)$	$F(\omega)$
A	$A2\pi \cdot \delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{i\omega + a}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(i\omega + a)^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$\text{sen}(\omega_0 t)$	$i\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$ donde $\text{Re}(a) > 0$	$\frac{a + i\omega}{(i\omega + a)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \text{sen}(\omega_0 t) u(t)$ donde $\text{Re}(a) > 0$	$\frac{\omega_0}{(i\omega + a)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{df(t)}{dt}$	$j\omega F(\omega)$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bedford, A., & Fowler, W. (Año). *Mecánica para Ingeniería Estática*. Addison-Wesley Iberoamericana.
2. Hibbeler, R. C. (2010). *Ingeniería mecánica: Estática* (12a ed.). Pearson Hall.
3. Hibbeler, R. C. (2004). *Ingeniería mecánica: Dinámica* (10a ed.). Pearson Hall.
4. Hsu, H. P. (1987). *Análisis de Fourier* (Versión en español de *Fourier Analysis*, 1970). Addison-Wesley Iberoamericana.
5. Ohanian, H. C., & Markert, J. T. (2009). *Física para Ingeniería y Ciencias* (3ra ed., Vol. 1). McGraw Hill.
6. Papoulis, A. (1962). *The Fourier integral and its applications*. McGraw-Hill.
7. Rao, S. S. (2012) *Vibraciones mecánicas* (5ª ed.). Pearson
8. Serway, R. A., & Jewett, J. W., Jr. (2004). *Física I* (3ra ed.). Thomson.
9. Zill, D. G. (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (6ª ed.). Thomson.